



**HAL**  
open science

## Sur la commande d'une classe de réacteurs chimiques instables

Marc Cibrario

► **To cite this version:**

Marc Cibrario. Sur la commande d'une classe de réacteurs chimiques instables. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992. Français. NNT : 1992ENMP0325 . pastel-00838248

**HAL Id: pastel-00838248**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00838248>**

Submitted on 25 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

**Marc CIBRARIO**

en vue de l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS**

Spécialité :

**MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE**

Sujet de la thèse :

**SUR LA COMMANDE D'UNE CLASSE DE  
RÉACTEURS CHIMIQUES INSTABLES**

soutenue le 16 juin 1992 devant le jury composé de :

**MM. Michel FLIESS**

Président

**Georges BASTIN  
Christian VIDAL**

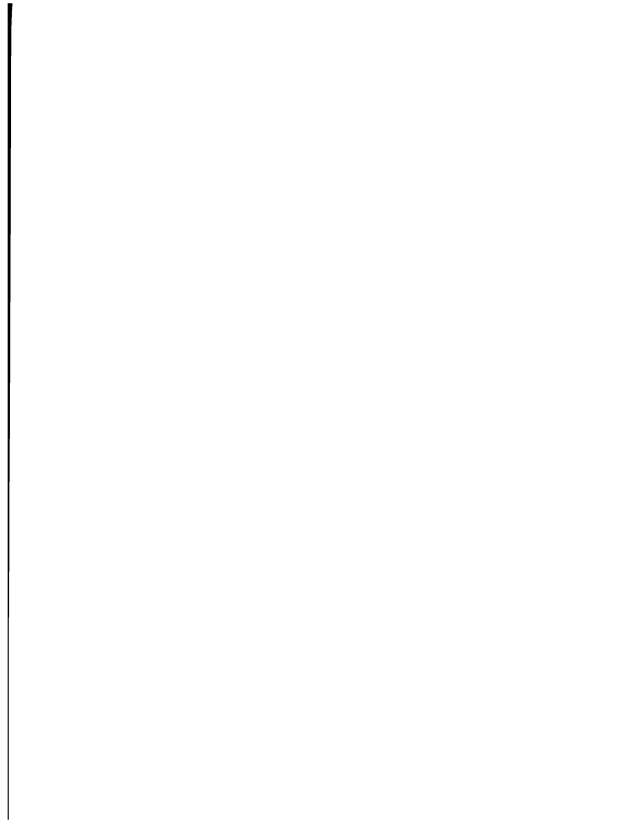
Rapporteur  
Rapporteur

**Daniel CLAUDE  
Jean-Paul GAUTHIER  
Jean LÉVINE**

Examineur  
Examineur  
Examineur

**Bronisław JAKUBCZYK  
Krzysztof TCHON**

Invité  
Invité



---

## Résumé

On se pose le problème de commander un CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor, ou réacteur continu mélangé) siège d'une ou plusieurs réactions exothermiques donnant lieu à des phénomènes d'emballlement ou d'extinction. Pour cela, on met tout d'abord en évidence une propriété de régularité de la cinétique isotherme qui permet de construire un diagramme thermique stationnaire au vu duquel l'emballlement apparaît comme lié à une situation mathématique générale, à savoir celle d'une bifurcation col-nœud par rapport à un paramètre de commande. On utilise à cette occasion un théorème global des fonctions implicites développé pour les besoins de la cause. Ceci étant, on démontre que sans hypothèse supplémentaire, il est possible de supprimer le phénomène indésirable et de stabiliser le réacteur à n'importe quelle température de fonctionnement à l'aide d'un retour de température, de type proportionnel ou proportionnel-intégral à grand gain proportionnel. En particulier, on calcule une borne inférieure de gains proportionnels stabilisants permettant de réduire les contraintes sur le gain intégral à une simple condition de signe. Par ailleurs, la stabilisation en question est de type locale asymptotique, mais on prouve aussi un résultat global dans le cas particulier:  $A \rightarrow B$ . Enfin, l'approche est généralisée localement au cas d'un système non linéaire quelconque à une entrée et une sortie présentant une bifurcation col-nœud par rapport à la commande.

## Mots-clef

CSTR, diagramme thermique stationnaire, emballlement thermique, bifurcation col-nœud, cinétique régulière, système SISO, stabilisation locale, minimum de phase, retour de sortie, commande PID.

## Remerciements

Je tiens à remercier l'ANRT, SHELL RECHERCHE et l'ECOLE POLYTECHNIQUE pour leur soutien financier, le jury pour l'intérêt qu'il m'a témoigné, ainsi que les personnes dont le nom suit:

Brigitte d'ANDREA-NOVEL, Bénédicte AUBRUN, Georges BASTIN, Pierre CARPENTIER, Benoît CHARLET, Fabienne CIBRARIO, Guy COHEN, Jean-Michel CORON, Jean-Christophe CULLOLI, Ludovic DE LAMAZIERE et sa famille, Geneviève et Paul DELPECH, Sette DIOP, Annick LE GALLIC, Michel FLISS, Jean-Paul GAUTHIER, Jean LEVINE, Philippe MARTIN, Laurent PRALY, Pierre ROUCHON, Christine SNEED-COLLARD, Egbert et Marjolaine VAN HOORN, qui m'ont apporté - pardon d'avance à ceux que j'ai pu oublier - l'aide scientifique ou pratique, la motivation ou simplement la gentillesse dont un thésard a besoin pour mener à bien son entreprise de longue haleine.

## Abstract

We address the issue of controlling a CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor) with potential thermal runaway induced by exothermic reactions. First we emphasize a regularity property of isothermal kinetics that leads to the construction of the reactor's heat production / heat removal diagram, the analysis of which shows the link between runaways and the general mathematical frame of saddle-node bifurcations with respect to a control parameter. Here, we use a global version of the implicit function theorem that was especially developed for this purpose. Then, we show that without additional assumptions, runaways can be suppressed and the reactor stabilized at any temperature level by means of an output feedback, of proportionnal or proportionnal-integral type with high proportional gain. To be more precise, we compute a low bound of proportional gains that allows the choice of any integral gain of given sign. Moreover, we obtain local asymptotic stabilization results, but we prove a global stabilization result in the  $A \rightarrow B$  case. Finally, we propose a local generalization to nonlinear SISO systems with a saddle-node bifurcation with respect to the control variable.

## Keywords

CSTR, heat production / heat removal diagram, thermal runaway, saddle-node bifurcation, regular kinetics, SISO control system, local stabilization, minimum phase, output feedback, PID control.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Choix d'un modèle de travail</b>	<b>5</b>
I.0 Introduction.	5
I.1 Réflexions préliminaires.	5
I.1.1 Les problèmes de modélisation en génie chimique.	5
I.1.2 Différentes approches du réacteur chimique.	6
I.1.3 Sur le choix d'un modèle de commande.	8
I.2 Généralités sur l'emballlement des réacteurs.	9
I.2.1 Un problème industriel concret.	9
I.2.2 Analyse physique du phénomène.	9
I.3 Le réacteur continu uniforme et ses dérivés.	10
I.3.1 Un peu de vocabulaire.	10
I.3.2 Un réacteur élémentaire: le CSTR à une réaction.	14
I.3.3 Quelques généralisations.	16
I.4 Résumé.	18
<b>II Un cas d'école: extinction du CSTR à une réaction</b>	<b>19</b>
II.0 Introduction.	19
II.1 Etude du réacteur en boucle ouverte.	20
II.1.1 Diagramme thermique.	20
II.1.2 Stabilité.	22
II.2 Stabilisation uniforme par retour proportionnel de température.	23
II.2.1 Régularisation globale.	23
II.2.2 Stabilisation locale.	24
II.2.3 Stabilisation globale.	27
II.3 Stabilisation uniforme par retour proportionnel intégral de température.	31
II.3.1 Effet d'un bouclage proportionnel intégral.	31
II.3.2 Stabilisation locale.	32
II.3.3 Stabilisation globale.	34
II.4 Résumé.	35
<b>III Diagramme thermique, emballlement et bifurcation col-nœud</b>	<b>37</b>
III.0 Introduction.	37
III.1 Préliminaires: bifurcations et commande.	38
III.1.1 Rappels élémentaires sur les bifurcations col-nœud d'états stationnaires.	38

III.1.2 Effet d'un bouclage	39
III.2 Diagramme thermique.	41
III.2.1 Notion de cinétique isotherme régulière.	41
III.2.2 Diagramme thermique stationnaire.	44
III.2.3 Diagramme thermique et diagramme de bifurcation.	46
III.2.4 Rôle des pentes.	48
III.3 Régularisation par retour de température.	51
III.3.1 Retour proportionnel (P).	51
III.3.2 Retour proportionnel intégral (PI).	52
III.4 Résumé.	53
<b>IV Stabilisation d'un CSTR à cinétique régulière par retour de température</b>	<b>55</b>
IV.0 Introduction	55
IV.1 Stabilisation par retour affine.	56
IV.1.1 Préliminaires.	56
IV.1.2 Approche asymptotique: commande à grand gain.	57
IV.1.3 Approche exacte.	58
IV.2 Stabilisation par retour proportionnel intégral.	58
IV.2.1 Préliminaires.	58
IV.2.2 Retour PI à gain intégral quelconque.	59
IV.2.3 Retour PI à grand gain intégral.	60
IV.3 Résumé.	61
<b>V Généralisation locale à un système SISO présentant une bifurcation col-nœud par rapport à la commande</b>	<b>63</b>
V.0 Introduction	63
V.1 Diagramme de bifurcation expérimental.	65
V.1.1 Choix de la fonction de sortie.	65
V.1.2 Traduction des hypothèses de travail.	67
V.1.3 Réduction au cas $y = h(X) = x_i$ .	68
V.1.4 Etude du diagramme de bifurcation expérimental.	70
V.2 Régularisation locale par bouclage de sortie.	71
V.2.1 Retour affine.	71
V.2.2 Retour proportionnel intégral.	73
V.3 Résumé.	75
<b>Conclusion</b>	<b>77</b>
<b>A Equations implicites, aspect global.</b>	<b>79</b>
A.0 Introduction	79
A.1 Cas d'un espace de paramètres ouvert.	79
A.2 Rappels sur les applications propres.	84
A.2.1 Situation topologique.	84
A.2.2 Cas des espaces métriques	84
A.2.3 Cas des espaces vectoriels de dimension finie.	85
A.2.4 Cas des variétés différentielles.	86

A.2.5 Applications propres et revêtements.	87
A.3 Conceptualisation et généralisation.	88
<b>B Polynômes, racines et stabilité. Application aux systèmes linéaires SISO</b>	<b>91</b>
B.0 Introduction	91
B.0.1 Motivation.	91
B.0.2 Rappels d'analyse complexe.	94
B.1 Etude asymptotique des racines de $D(s) + kN(s)$ . Application au retour de sortie à grand gain.	96
B.1.1 Zéros finis, zéros à l'infini.	96
B.1.2 Application à la stabilisation par retour de sortie.	98
B.1.3 Développements asymptotiques.	99
B.2 Etude asymptotique du signe de $\operatorname{Re} \left( \frac{N(s)}{D(s) + kN(s)} \right)$ Application au retour Proportionnel Intégral.	100
B.2.1 Réflexions préliminaires sur le calcul des gains P et I.	100
B.2.2 Fractions rationnelles positives réelles et retour intégral.	101
B.2.3 Application au retour PI.	102
B.3 Critères de stabilité des polynômes.	104
B.3.1 Résultats classiques.	104
B.3.2 Comparaison avec l'approche asymptotique.	105
B.4 Conclusion.	107
<b>C Méthode de Projection.</b>	<b>109</b>
C.0 Introduction	109
C.1 Rappels d'algèbre linéaire.	109
C.1.1 Notions de vecteur adjoint.	109
C.1.2 Cas d'une valeur propre simple.	110
C.2 Méthode de Projection et bifurcation col-nœud.	111





# Introduction

Ce travail a pour objectif de donner un cadre mathématique simple permettant d'appréhender le problème l'emballement de certains réacteurs chimiques - les réacteurs continus idéalement mélangés (Continuous Stirred Tank Reactors, ou CSTRs) siège de réactions exothermiques et d'en déduire des recommandations en termes de commande. Plutôt qu'une étude spécifique portant sur un procédé précis, on a cherché, sur la base d'un modèle général, à synthétiser des connaissances provenant essentiellement de trois disciplines: le Génie Chimique, les Mathématiques et l'Automatique.

## Sur le contenu.

Depuis quelques décennies, de nombreux travaux sur le CSTR ont vu le jour, tant du point de vue mathématique - bifurcations des systèmes dynamiques - que dans une optique de commande - linéaire multivariable, non linéaire géométrique, adaptative -, mais rares sont les auteurs ayant concilié les deux approches. Par rapport à ces travaux, l'originalité et l'aspect non-linéaire de notre étude reposent essentiellement sur la prise en compte de la possibilité de *changer le point de fonctionnement* du réacteur. Très souvent en effet, on discute de la stabilité ou de la stabilisation d'un équilibre précis, mais le cas concret d'un opérateur, désirant par exemple modifier la température d'équilibre en ajustant la commande à une valeur de consigne, est rarement envisagé. La pratique industrielle courante, en cas d'instabilité, consiste à respecter des seuils de sécurité pour se maintenir à l'écart de la zone dangereuse, mais une telle stratégie présente le double inconvénient de ne pas éliminer le problème - stress de l'opérateur - en générant des contraintes supplémentaires limitant de façon notable la flexibilité de l'exploitation.

Dans cette optique, une partie de notre travail consiste à montrer que l'emballement des réacteurs peut s'apparenter à un problème général de paramétrisation des équilibres par la commande, problème lié à la multiplicité des états stationnaires dont le cadre mathématique naturel est celui des bifurcations (stationnaires). Cette approche nous conduit à introduire la notion de *cinétique isotherme régulière*, qui traduit l'existence pour toute température d'un unique jeu de concentrations d'équilibre associé. De cette façon, on se concentre sur les effets énergétiques issus du couplage des équations cinétiques isothermes avec un bilan thermique. Cette hypothèse permet de construire le traditionnel diagramme thermique stationnaire bien connu des ingénieurs chimistes dont l'analyse graphique met en évidence la multiplicité des états stationnaires et le phénomène d'emballement potentiel associé.

Ceci étant, la question se pose alors de trouver une commande permettant de restaurer

l'unicité des équilibres tout en assurant la stabilité en boucle fermée. A ce sujet, nous nous limitons à l'étude d'une commande thermique par retour de sortie, et en l'occurrence par retour proportionnel (P) ou proportionnel-intégral (PI) de température. Ce choix est cohérent avec l'hypothèse de cinétique régulière et avec l'expérience des chimistes. En effet, il est couramment admis (cf [42]) que les équilibres multiples sont engendrés par des recyclages, au sens large du terme. Lorsque la cinétique isotherme est régulière, le recyclage en question provient d'effets thermiques<sup>1</sup> et il est donc naturel de tenter de le modifier par un bouclage thermique. Effectivement, nous montrons que l'on peut à la fois supprimer le phénomène d'emballlement et assurer la stabilité locale asymptotique d'un CSTR général à cinétique régulière. L'important ici n'est pas la stabilisation en tant que telle, laquelle relève de méthodes très classiques, mais plutôt l'existence d'un lien avec l'analyse stationnaire. En particulier, l'hypothèse de cinétique régulière fait du réacteur un système dit à *minimum de phase* en Automatique, ce qui rend possible la stabilisation par retour de sortie.

Par ailleurs, nous avons tenté de faire le point sur l'impact du terme intégral d'un retour PI. A ce sujet, nous proposons essentiellement deux résultats: d'une part la présence d'un terme intégral de gain quelconque résoud systématiquement le problème de l'emballlement toujours dans le cadre des cinétiques régulières<sup>2</sup>, et d'autre part il est possible de calculer explicitement une borne de gain proportionnel stabilisant, telle que l'ajout d'un terme intégral dont seul le *signe du gain* est imposé ne puisse plus déstabiliser le réacteur. Ce résultat d'Automatique linéaire est lié à la notion de passivité; bien que probablement connu ou intuitif par de nombreux ingénieurs, celui-ci n'avait jamais fait l'objet, à notre connaissance, d'un énoncé précis en ces termes.

### Sur les origines.

Nous effectuerons par la suite un bref parcours de l'abondante littérature portant sur le CSTR, mais il nous semble important de citer d'ores et déjà les deux références auxquelles rétrospectivement notre étude semble faire suite de la façon la plus naturelle.

Nous avons mentionné ci-dessus le fait que les études mathématiques portant sur le CSTR se prolongeaient rarement par des recommandations en termes de commande. Pourtant, dès 1958 sont parus trois articles d'Aris et Amundson [7] portant sur la commande PID en fait P, I ou D d'un CSTR élémentaire refroidi. Il en ressort que l'utilisation d'un retour P, en température plutôt qu'en concentration, permet d'assurer la stabilité asymptotique locale d'un équilibre quelconque. Cependant, pour certaines valeurs du gain, des cycles limites peuvent apparaître ou disparaître autour du point d'équilibre (bifurcations de Hopf ou col-nœud sur les orbites fermées, limitant la taille du bassin d'attraction), ce qui montre l'insuffisance pratique de la stabilisation locale. Les auteurs constatent toutefois par simulation que l'utilisation d'un grand gain permet de remédier à ce problème. Notre étude relaie ces réflexions dans deux directions. Dans le domaine de la stabilisation locale d'une part, en traitant le cas d'un CSTR général à cinétique régulière, et dans le domaine de la stabilisation globale d'autre part, en démontrant de façon rigoureuse la stabilisabilité globale du CSTR élémentaire par retour P et

<sup>1</sup>les réactions exothermiques dégagent de la chaleur, laquelle modifie la température du réacteur et donc la vitesse de ces réactions.

PI. Malheureusement, les méthodes topologiques valables en dimension 2 ne se généralisent pas en dimension supérieure, et nous avons prudemment laissé de côté le problème de la stabilisation globale du CSTR général, qui semble devoir faire l'objet d'une réflexion approfondie.

Par ailleurs, d'un point de vue plus conceptuel, Mehra [44], en 1977 et à notre connaissance le premier, suggère de façon générale l'utilisation d'un bouclage pour modifier une surface d'équilibre dégénérée en l'occurrence une *catastrophe* élémentaire lorsque celle-ci est paramétrée par une commande. Conceptuellement, c'est exactement ce que nous opérons sur la dégénérescence la plus simple - le *pli* - lorsque nous utilisons un bouclage affine pour rendre (quasistatiquement) accessibles tout un segment de températures de fonctionnement qui ne pouvaient pas être atteintes en donnant des valeurs constantes à la commande. En revanche, nous ne considérons pas de problème de bifurcation par rapport à d'autres paramètres que la commande. A ce sujet, on pourra se référer aux travaux de Fu et Abed ([1] et [2]) pour la codimension 1.

### Sur le plan.

L'enchaînement des idées est le suivant. Au chapitre I, on discute le choix d'un modèle de travail, ce qui est l'occasion de préciser quelques repères bibliographiques. On y trouve une description empirique du phénomène d'emballlement, ainsi que quelques brefs rappels de Génie Chimique destinés à justifier les modèles retenus pour la suite. Le premier modèle, celui du CSTR élémentaire, est étudié dans le chapitre II qui permet d'introduire les idées et les méthodes, et constitue l'exemple de base auquel il sera fait référence par la suite. Le cas général, celui du CSTR à masse ou volume constant, est traité en deux parties. Le chapitre III d'abord, qui concerne l'étude stationnaire et la problématique de l'emballlement, dans lequel on introduit la notion de cinétique régulière via un théorème des fonctions implicites développé pour les besoins de la cause et à défaut de référence précise dans l'annexe A - qui permet de construire le diagramme thermique et d'étudier l'effet d'un bouclage sur les équilibres du réacteur. Le chapitre IV ensuite dans lequel on réalise effectivement la stabilisation à une température de fonctionnement quelconque en utilisant les résultats généraux de commande par retour de sortie des systèmes linéaires mono-entrée/mono-sortie (SISO en anglais) rappelés dans l'annexe B, avec une mention particulière pour le retour PI à gain intégral quelconque au sujet duquel nous ne connaissons pas non plus de référence. Enfin, le chapitre V constitue une généralisation locale du chapitre III au cas d'un système non-linéaire SISO quelconque destinée à conceptualiser la situation du CSTR. On y présente notamment l'utilisation de la Méthode de Projection détaillée dans l'annexe C pour la construction d'un diagramme de bifurcation dit *expérimental* dans le plan entrée-sortie, ainsi que l'effet génériquement régularisant d'un retour de sortie quelconque.

Du plan suivi, il ressort que nous avons donc essayé de panacher démarche inductive et démarche déductive, de façon à conserver, au prix de quelques redites, le sens physique des phénomènes tout en essayant de rester précis. Par ailleurs, les chapitres forment un tout et peuvent presque être lus dans un ordre quelconque, associés toutefois le cas échéant à leurs annexes respectives qui ont aussi été conçues comme des points de cours indépendants. Enfin, les calculs et les simulations ont été effectués à l'aide du logiciel *Mathematica* dont nous

recommandons tout particulièrement l'utilisation pour des problèmes de petite taille (cf [62] et [43])<sup>2</sup> Les graphiques ont ensuite été groupés et commentés via le logiciel de dessin Adobe Illustrator - qui gère le langage Postscript - et "collés" dans la thèse rédigée sous TeX, que l'on ne présente plus . .

**Remarque:** dans tout ce travail, nous employons presque toujours le terme *équilibre* dans le sens que lui donne la théorie des systèmes dynamiques, à savoir celui d'*état stationnaire*. Toutefois, on sera aussi amené à considérer des couples de réactions chimiques inverses l'une de l'autre, ce qu'en Génie Chimique on désigne aussi par le terme *équilibre*. Dans ce cas, le contexte sera suffisamment explicite pour lever l'ambiguïté.  $\triangle$

---

<sup>2</sup>nous avons d'ailleurs fini par développer dans ce langage un certain nombre de fonctionnalités orientées Automatique: les listings n'ont pas été reproduits pour limiter l'encombrement physique de la thèse, mais nous les tenons à la disposition du lecteur intéressé.

# Chapitre I

## Choix d'un modèle de travail

### I.0 Introduction.

Le but de ce chapitre est de préciser le contexte dans lequel se place notre étude, qui se situe globalement à l'interface de trois disciplines scientifiques: le Génie Chimique, les Mathématiques et l'Automatique. Il semble donc important d'explicitier notre démarche par rapport aux approches spécifiques à chacun de ces domaines, et par rapport aux divers travaux bidisciplinaires qui ont vu le jour au cours des deux dernières décennies. Ceci étant, nous présentons ensuite la problématique de l'emballage des réacteurs qui est à l'origine de cette étude. Nous terminons par quelques brefs rappels de Génie Chimique, justifiant la construction d'une famille de modèles de CSTR commandés par température d'entrée et/ou refroidissement. Ces modèles permettent en particulier de prendre en compte le cas des réacteurs fermés (débit nul), mais pas celui des réacteurs semi-ouverts. Ceci résulte d'un choix a priori motivé par le fait que notre étude va reposer en partie sur la considération des équilibres et de leur stabilité, tandis que les régimes transitoires jouent un rôle crucial pour les réacteurs semi-ouverts qui par définition ne se trouvent jamais à l'équilibre.

### I.1 Réflexions préliminaires.

#### I.1.1 Les problèmes de modélisation en génie chimique.

De façon générale, comme souvent en physique, les modèles dynamiques de réacteurs chimiques s'obtiennent en effectuant des *bilans* de diverses quantités extensives, principalement matière et énergie. Typiquement, on écrit des équations de la forme:

$$\text{ACCUMULATION} = \text{ALIMENTATION} - \text{REJET} + \text{CONVERSION} \quad (1.1)$$

Toute la question est de spécifier les variables considérées et la forme des différents termes ci-dessus.

A cet égard, l'apport de la thermodynamique est insuffisant. En effet, la thermochimie permet seulement de prévoir le sens des réactions et de calculer les différentes grandeurs à l'équilibre pour un réacteur fermé. Ainsi par exemple, la Loi d'Action de Masse est directement issue du Second Principe. Pour préciser le terme de conversion instantanée, on utilise

les résultats d'une branche plus ou moins heuristique de la chimie que l'on appelle la *cinétique*, et qui va de pair avec l'étude des mécanismes réactionnels.

Quelques points sont bien établis, comme par exemple la loi d'Arrhenius qui fixe la dépendance en température des constantes de vitesse; outre son efficacité empirique, celle-ci trouve de plus une justification théorique dans la loi de Boltzmann de distribution d'énergie en physique statistique, d'où un certain consensus à son égard. En revanche, proposer un mécanisme réactionnel pour une réaction donnée constitue souvent un sujet de recherche en soi. Les termes de flux (alimentation et rejet) posent des problèmes analogues dès qu'ils font intervenir la vitesse d'un phénomène physique, comme par exemple le transfert de chaleur avec l'extérieur ou le transfert de matière entre une phase liquide et une phase vapeur.

Face à ces difficultés, le choix d'un modèle de travail est plus que jamais *dépendant de l'utilisation que l'on désire en faire*. Commençons donc par préciser les différents points de vue avec lesquels on peut aborder l'étude des réacteurs chimiques.

### I.1.2 Différentes approches du réacteur chimique.

#### Approche de type Génie Chimique.

Jusqu'à une époque récente, les modèles de réacteurs servaient uniquement à fournir des prévisions en régime permanent pour aider à la conception et optimiser le fonctionnement des unités. Globalement, la démarche consiste à développer des modèles statiques prenant en compte des phénomènes chimiques (mécanisme réactionnel, cinétique) et physiques (transferts de matière et de chaleur, équilibres multiphasés, hydrodynamique), impliquant souvent l'utilisation de lois empiriques. Dans ce contexte, le chimiste recherche avant tout des prévisions *quantitatives* numériquement cohérentes avec les résultats expérimentaux. Parmi les innombrables traités de Génie Chimique, on pourra par exemple consulter [59] ou [60] pour une présentation générale et synthétique de la discipline.

Cependant, des problèmes de stabilité rencontrés en pratique ainsi que la volonté d'optimiser les coûts ont conduit les chimistes à créer des modèles dynamiques pour simuler le comportement de certains réacteurs en régime transitoire. Souvent, il s'agit d'équations aux dérivées partielles destinées par exemple à simuler la réponse dans le temps du réacteur à un changement de consigne. Les modèles comportent le cas échéant une ou plusieurs dizaines de telles équations, dépendant de centaines de paramètres, auquel cas l'optique reste clairement la simulation *quantitative*. La multiplicité éventuelle des équilibres ou des profils stationnaires est évitée au sens où l'on se place dans des conditions éloignées des phénomènes de transition.

Indépendamment des phénomènes physico-chimiques à prendre en compte se pose le problème de caractériser de la matière dont la composition très variée peut être mal définie, comme par exemple les charges intervenant en pétrochimie. A cet égard, des chimistes soucieux d'apporter des résultats exploitables par des non spécialistes ont publié des articles généraux sur certains procédés assortis de recommandations pratiques très utiles pour construire des modèles simples. On citera par exemple [50] pour l'hydrodésulfuration et [48] pour les

réacteurs dits "trickle-bed"<sup>1</sup> Par ailleurs, signalons des efforts récents pour mettre au point un formalisme de modélisation continue pour les mélanges comportant de très nombreuses espèces chimiques (voir [6] pour les réactions et [45] pour les équilibres liquide-vapeur).

Cependant, les modèles de réacteurs restent essentiellement orientés vers la simulation quantitative, et ne se prêtent pas facilement à une étude de commande.

### Approche de type Mathématicien.

L'approche du mathématicien appliqué ou du chimiste s'intéressant aux mathématiques est plus qualitative. Les modèles considérés peuvent être à paramètres distribués, mais sont toujours de taille plus modeste. L'accent est mis dans ce cas sur certaines propriétés comme le nombre d'équilibres ou de profils d'équilibre, leur stabilité, et de manière générale l'agencement des régimes permanents et le catalogue des dynamiques associées lorsque l'on fait varier certains paramètres.

Il se trouve que l'analyse qualitative des systèmes dynamiques paramétrés constitue au jourd'hui une branche très active des mathématiques. Depuis les bifurcations jusqu'au chaos (cf [12]) en passant par la théorie des singularités (cf [28]), les problèmes de cinétique réactionnelle figurent désormais parmi les exemples classiques. La dynamique chimique, qui étudie les cinétiques isothermes, se nourrit ainsi de phénomènes expérimentaux, comme la célèbre réaction oscillante de Belousov-Zhabotinsky (cf [58]), véritable laboratoire pour les mathématiciens. On trouve aussi de nombreux résultats sur le thème théorie des catastrophes et multiplicité des états stationnaires (cf [15], [16], [17], [10]).

Par ailleurs, à la suite des pionniers Uppal, Ray et Poore ([54] et [55], 1974), d'autres ont entrepris de classer les comportements dynamiques des réacteurs non isothermes suivant les valeurs des paramètres temps de séjour, nombre de Damköhler, chaleur de réaction, etc., ainsi que les types de bifurcations régissant le passage d'un régime qualitatif à l'autre. Par exemple, [41] et [36] traitent d'autocatalyse et stabilité dans les CSTRs, tandis que les réacteurs tubulaires sont étudiés dans [57] directement sur les EDPs, ou dans [33] à partir d'équations discrétisées par la méthode dite de "collocation orthogonale"

Même si certains articles sont maintenant basés sur des modèles expérimentaux (cf [53] pour la polymérisation), les auteurs ne cherchent pas en général à déduire de l'analyse mathématique des recommandations en termes de design ou de contrôle. Signalons toutefois la synthèse [42] qui fait le point sur le problème de la multiplicité des états stationnaires en fonction des différents types de réacteurs que l'on rencontre dans l'industrie, et qui montre que la multiplicité des états stationnaires provient presque toujours d'un mécanisme de bouclage interne ou externe.

<sup>1</sup> colonnes chargées de catalyseur solide et traversées par un mélange liquide-gaz, dont la modélisation dynamique est particulièrement ardue.



### Approche de type Automatique.

En Automatique, les réacteurs chimiques font l'objet d'un intérêt tout particulier depuis que l'on a remarqué au milieu des années 1980 qu'un CSTR est effectivement linéarisable par les méthodes non linéaires dites géométriques (cf [30]). Un certain nombre d'articles ont alors été publiés dans les revues de Génie Chimique, portant sur le découplage et le rejet de perturbations appliqués à des CSTRs mono ou multivariables ([4], [19], [37] et [5], le dernier concernant un réacteur de polymérisation), ainsi que sur les problèmes d'observateurs (cf [35]).

Cependant, le réacteur chimique semble là encore n'avoir servi pour l'instant que d'exemple formel pour une théorie générale<sup>2</sup>. Les succès pratiques semblent plutôt provenir des techniques adaptatives dans le domaine des bioréacteurs (cf [11]) dont les paramètres, en particulier les constantes cinétiques, sont très mal connus. D'autre part, aucun auteur n'a à notre connaissance considéré le problème général du changement de point de fonctionnement, les gains des contrôleurs étant systématiquement calés sur un équilibre supposé fixé à l'avance.

### I.1.3 Sur le choix d'un modèle de commande.

De ce qui précède, il ressort qu'il y a parfois loin entre la recherche dans chaque discipline et une application. Néanmoins, la perspective de commander un réacteur nécessite de concilier les trois points de vue ci-dessus. De fait, l'ambition consiste justement à limiter ses ambitions théoriques - souvent d'ordre esthétique - pour tenter une synthèse d'éléments divers dont la modestie est un gage d'efficacité. En Automatique, il n'est pas obligatoire d'obtenir d'un modèle de commande des simulations d'une grande fidélité numérique, mais on a besoin d'un minimum de connaissances sur le procédé pour reproduire un comportement qualitativement juste en vue de réaliser un objectif donné. De plus, la complexité doit demeurer "raisonnable" de façon à pouvoir effectivement réaliser le cas échéant l'implémentation du contrôleur.

Puisque la modélisation en Génie Chimique s'effectue en partie "à la carte", seule une perception globale du système alliée à la spécification d'un objectif de commande précis vont permettre d'orienter les choix. Si l'on envisage par exemple un problème de la stabilité thermique, seules seront importantes les réactions dont la contribution au bilan thermique est significative. A l'inverse, une commande précise en concentration va nécessiter la connaissance au moins approximative du mécanisme réactionnel. Par ailleurs, pour ce qui est des régimes transitoires, les indications qualitatives éventuellement fournies par les outils mathématiques mentionnés précédemment se révèlent suffisantes en pratique, et il serait vain de chercher à obtenir des prévisions quantitatives précises reposant sur des modèles ne disposant pas de réel fondement théorique. En contrepartie, il conviendra de s'assurer, au moins par simulation, que les propriétés qualitatives du système commandé sont invariantes sous l'action de petites perturbations du système de départ. Nous dirons de façon vague que la commande doit être *robuste*.

<sup>2</sup>certains auteurs envisagent froidement de dériver plusieurs fois des perturbations lorsque celles-ci arrivent "trop tôt" dans les sorties (indices de structure inférieurs à ceux des commandes)!

Pour conclure, le choix du modèle de réacteur dépend des objectifs de commande que l'on s'est fixé. Il doit répondre au cahier des charges suivant:

- prise en compte des phénomènes physico-chimiques pertinents par rapport au problème posé,
- respect quantitatif (au moins de manière approximative) des régimes stationnaires,
- respect de la dynamique qualitative du procédé,
- robustesse de la commande calculée.

Avant de présenter le modèle de travail retenu, il importe donc de préciser le type de problème auquel on désire remédier.

## I.2 Généralités sur l'emballlement des réacteurs.

On entend par *emballlement* une brusque variation des grandeurs physico-chimiques décrivant l'état d'un réacteur - concentrations, température, densité ... - disproportionnée par rapport à ses causes éventuelles ou sans origine apparente précise.

### I.2.1 Un problème industriel concret.

Voici deux exemples réels d'un tel phénomène. Le premier concerne les réacteurs d'hydrotraitement utilisés dans les raffineries, et le second certaines réactions de polymérisation.

Les réacteurs d'hydrotraitement mettent en jeu des réactions exothermiques catalytiques. Dans certains cas, on est amené à compenser l'usure du catalyseur par une augmentation de la température de fonctionnement de façon à maintenir un rendement constant en termes de taux de produits transformés à la sortie. Ce faisant, il peut arriver que l'on active d'autres réactions annexes très exothermiques du cracking dont l'effet est au mieux d'accélérer l'usure du catalyseur, et au pire d'exiger l'arrêt total du réacteur. La dynamique de l'emballlement est telle que les dispositifs de refroidissement (quenches) disposés tout au long de la colonne peuvent le cas échéant s'avérer inefficaces à contenir le phénomène. On est donc amené à adopter pour ces unités des marges de sécurité très importantes.

Pour ce qui est de la polymérisation, il arrive que la réaction s'autocatalyse, et en particulier s'accélère au fur et à mesure de la formation de chaînes de polymère de plus en plus longues. Le phénomène est connu sous le nom d'effet de gel: la densité du polymère croît de façon brusque, au point que le contenu du réacteur se fige. Outre l'élévation de température due à l'accélération de la réaction, le défaut de fluidité des produits freine le débit au sein du réacteur et la chaleur n'est plus évacuée que par convection, ce qui a pour effet d'amplifier le phénomène.

## 1.2.2 Analyse physique du phénomène.

Deux types de causes sont susceptibles d'être à l'origine d'un emballement. Tout d'abord, dans le cas de réactions catalytiques en continu mettant en jeu un catalyseur solide, il arrive que la charge adopte des chemins dits "préférentiels" au sein du réacteur, créant ainsi des zones mal irriguées se comportant comme autant de petits réacteurs fermés dont la chaleur est peu ou pas évacuée. Lorsque la chaleur n'est pas évacuée - pas de quench à proximité - ces points chauds peuvent par contact s'étendre à tout le réacteur et provoquer un emballement global.

Un tel processus est néanmoins souvent consécutif à une panne et tend à disparaître dans les réacteurs modernes fonctionnant dans des conditions normales d'utilisation. Les remèdes semblent donc en partie d'ordre technologique. Par exemple, on évite d'utiliser du catalyseur trop usé, et on tente d'optimiser son chargement pour faire en sorte d'obtenir une répartition de la charge la plus homogène possible. Par ailleurs, il est clair que la modélisation de défauts d'homogénéité est loin d'être immédiate. De fait, nous nous concentrerons par la suite sur la seconde cause d'emballement qui revêt un caractère très général.

En effet, les chimistes ont depuis longtemps observé, en simulation et dans la réalité, que des réacteurs pouvaient sous certaines conditions *surréagir* à de petites variations d'un ou plusieurs paramètres de fonctionnement. Considéré sous cet angle, l'emballement tel que nous l'avons décrit apparaît comme un phénomène de sensibilité paramétrique typiquement non linéaire. L'observation de sauts brusques qui suppose de multiples points de fonctionnement nous conduit sur la piste des bifurcations désormais jalonnée de nombreux résultats sur les réacteurs comme mentionné précédemment.

A défaut d'un procédé précis, nous avons fait le choix d'adopter un modèle de travail simple et standard, le CSTR, non pour reproduire les très nombreuses études le concernant, mais comme support d'étude pour le problème de l'emballement des réactions exothermiques et la commande susceptible d'y remédier. De ce point de vue, la connaissance exacte de la cinétique et même des réactions sera de peu d'importance, pourvu que l'on ait bien pris en compte les réactions les plus exothermiques.

## 1.3 Le réacteur continu uniforme et ses dérivés.

Plutôt que de proposer plusieurs modèles de connaissances de portée plus ou moins générale, nous adoptons ici le parti d'explicitier un modèle élémentaire de réacteur et sa réduction sous forme adimensionnelle. Ayant détaillé la démarche, nous proposons ensuite divers axes de généralisation directement à partir de la forme réduite, de façon à éviter de respecifier à chaque fois les données physico-chimiques et la phase de réduction.

### 1.3.1 Un peu de vocabulaire.

Nous introduisons ci-dessous quelques notions élémentaires de génie chimique de base dont le détail se trouve dans tout manuel général traitant du domaine, comme par exemple [59].

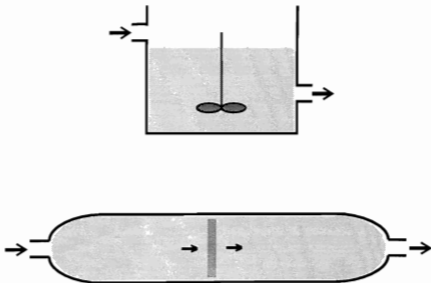
**Les réacteurs: CSTR et PFR.**

Figure I.1: Les deux grands types de réacteurs: CSTR (en haut) et PFR (en bas).

Il existe en génie chimique deux types de réacteurs idéalisés servant de référence pour la modélisation des cas réels: le réacteur continu (Continuous Stirred Tank Reactor ou CSTR), et ses variantes semi-ouvert et fermé (semi-batch et batch) d'une part, et le réacteur piston (Plug-Flow Reactor ou PFR) d'autre part.

La différence essentielle réside dans la façon dont réactifs et produits sont supposés se mélanger. Dans le premier cas, le mélange est a priori idéal d'où l'adjectif uniforme et l'homogénéité permet de n'utiliser qu'une variable par grandeur physique. A l'inverse, le deuxième cas décrit la progression du mélange dans un piston, c'est-à-dire une enceinte cylindrique dont le diamètre est petit par rapport à la longueur, et les grandeurs physiques sont toutes indexées par l'abscisse dans le réacteur.

Mathématiquement, les modèles de réacteurs uniformes sont constitués d'équations différentielles ordinaires, tandis que le type piston fait intervenir des équations aux dérivées partielles<sup>3</sup> La discrétisation en espace du modèle piston (à une dimension) permet comme on peut s'y attendre de retrouver une cascade de modèles uniformes, et cette approximation est

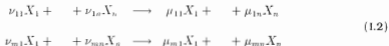
<sup>3</sup>d'ordre 1 dans le cas de transport pur, et d'ordre 2 si l'on fait intervenir de la diffusion matérielle ou thermique.

très souvent utilisé par les chimistes. A cet égard, signalons que la méthode déjà mentionnée de collocation orthogonale permet de plus de placer les points de discrétisation en fonction du profil plutôt que de les répartir uniformément.

Pour les réacteurs continus, on définit de façon générale le *temps de séjour*  $\tau$  comme étant le quotient du volume total par le débit. Pour le PFR, cette quantité s'identifie au temps de passage du mélange au sein du réacteur; dans le cas du CSTR, il s'agit seulement d'une moyenne. Par ailleurs, les pertes thermiques éventuelles sont souvent modélisées par un terme proportionnel à la différence de température entre les deux milieux, intérieur et extérieur du réacteur par exemple. Le coefficient de proportionnalité s'exprime alors en watts par kelvin et par unité de surface.

### Les réactions, aspect stœchiométrique.

Un *schéma réactionnel* est un ensemble de  $m$  réactions impliquant  $n$  constituants  $X_1, \dots, X_n$  de la forme:



Dans un tel formalisme, les équilibres sont représentés par deux réactions inverses l'une de l'autre.

A la réaction  $i$  est attachée une *vitesse*  $r_i$  (voir ci-dessus) fonction des concentrations en réactifs, c'est-à-dire des  $X_j$  munis de coefficients  $\mu_{ij}$  non nuls dans les  $m$  membres de gauche du schéma réactionnel. Les vitesses de réaction permettent d'exprimer pour chaque constituant  $X_j$  un *taux de disparition*<sup>4</sup>  $R_j$  qui est la somme des contributions algébriques de toutes les réactions:

$$R_j = \sum_{i=1}^m (\nu_{ij} - \mu_{ij})r_i$$

Pour systématiser ce calcul, on introduit la matrice stœchiométrique  $\mathbf{S}$  donnée par:

$$\mathbf{S}^t = ((\nu_{ij} - \mu_{ij}))_{i=1..m, j=1..n}$$

ainsi que le vecteur des vitesses de réaction:  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$  et celui des taux de disparition:  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ , moyennant quoi on a la relation linéaire suivante:  $\mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{r}$ .

Le prototype de loi cinétique est issu de la *Loi d'Action de Masse* en thermochimie, qui conduit à une dépendance polynomiale des vitesses de réaction en fonction des concentrations en réactifs:

$$r_i = k x_1^{\nu_{i1}} \dots x_n^{\nu_{in}}$$

où la constante  $k$  ne dépend que de la température et de la pression. En pratique, notamment pour les procédés industriels, les exposants - appelés *ordres partiels* - ne sont pas toujours les coefficients stœchiométriques - ils peuvent même ne pas être entiers -, et la vitesse n'est pas non plus obligatoirement polynomiale. Par exemple, la catalyse hétérogène met classiquement

<sup>4</sup>on définit aussi le *taux de production* égal à l'opposé.

en jeu des lois rationnelles (Langmuir-Hinshelwood). Nous éviterons donc par la suite d'avoir à spécifier explicitement les vitesses de réaction.

**Remarque 1.1 (constituants et variables d'état)** Si l'une des réactions peut se déduire des autres, il convient de l'exclure du schéma sauf si l'on considère qu'elle fait partie intégrante du mécanisme réactionnel. Par ailleurs, lorsque toutes les réactions sont indépendantes, on a:  $\text{rang} S = m$ . Si de plus  $m < n$ ,  $m$  colonnes sont libres et permettent d'exprimer par combinaison linéaire les  $n - m$  colonnes restantes. Comme à chaque colonne de  $S$  est associé un constituant, on qualifie les constituants associés respectivement de *principaux* et *secondaires*. Si par exemple ces derniers se trouvent être  $X_{m+1}, \dots, X_n$ , leur taux de disparition s'exprime en fonction des  $R_1, \dots, R_m$ . Notons cependant que la problématique classique de la stoechiométrie des bilans chimiques - critères de Brinkley et Jouguet, cf [58] - n'est pas adaptée la prise en compte du facteur temps. En effet, dans un modèle dynamique de commande, chaque constituant  $X_i$  va être associé à une variable de concentration. Bien que l'on cherche limiter le nombre de variables, certains constituants secondaires au sens précédent doivent être pris en compte. C'est le cas pour un CSTR chaque fois que le constituant en question:

- fait partie des réactifs entrant dans le réacteur,
- intervient dans l'une des vitesses de réaction,
- intervient dans l'une des mesures disponibles,
- intervient dans l'expression d'un des objectifs de commande.

Pour donner un exemple trivial, le modèle de CSTR à une réaction d'ordre 1:  $A \rightarrow B$  que nous allons maintenant décrire ne comporte qu'une variable de concentration  $A$ , mais il faudrait rajouter  $B$  si la vitesse était aussi fonction de la concentration  $B$  - autocatalyse ou inhibition ou si l'on désirait commander le réacteur en qualité.  $\triangle$

### Les réactions, aspect thermocinétique.

Lorsque la cinétique d'une réaction peut s'écrire sous la forme:  $r(X, T) = k(T)\sigma(X)$ , la constante de vitesse  $k(T)$  suit la loi d'Arrhenius:

$$k(T) = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits en thermodynamique<sup>5</sup>,  $E_a$  l'énergie d'activation de la réaction, et  $k_0$  une constante exprimant la vitesse extrapolée à  $T = +\infty$ .

Par ailleurs, la quantité de chaleur dégagée par la réaction dépend d'un coefficient thermodynamique, l'enthalpie de réaction, traditionnellement noté:  $-\Delta h$ , de signe positif dans le cas d'une réaction exothermique et qui s'exprime en joule par unité de volume ou de masse. Le quotient de l'enthalpie de réaction par la capacité calorifique du réacteur s'appelle le  $\Delta T$  adiabatique, correspondant à l'accroissement (algébrique) de température du réacteur fonctionnant dans des conditions adiabatiques. De façon générale, nous noterons  $B$  la contribution de toutes les réactions réaction à la vitesse de variation de température du réacteur:

$$B = \sum_{i=1}^{n_r} b_i r_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{r} \rangle$$

<sup>5</sup> $R = 8.32 \text{ J/mol K}$

où  $b_i$  désigne le  $\Delta T$  adiabatique de la réaction  $i$ . Celui-ci dépend en général de la température, mais il arrive souvent que l'on prenne  $\mathbf{b}$  constant, en première approximation.

Compte tenu de ce qui précède, on aboutit aux expressions suivantes pour le vecteur  $\mathbf{R}$  des taux de disparition et la fonction  $B$  de chaleur de réaction:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{x}, T) = \mathbf{S} \mathbf{r}(\mathbf{x}, T) \\ B(\mathbf{x}, T) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{r}(\mathbf{x}, T) \rangle \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{x}$  représente le vecteur des concentration ou des titres massiques suivant que l'on raisonne en masse ou en volume.

### I.3.2 Un réacteur élémentaire: le CSTR à une réaction.

#### Description du modèle de connaissances.

On considère ici une réaction exothermique  $A \rightarrow B$  d'ordre 1 consistant en la transformation d'un réactif liquide en présence d'un catalyseur solide situé dans le réacteur. Le modèle se compose d'une équation de bilan matière en réactif  $A$  couplée à un bilan thermique pour l'ensemble mélange+catalyseur. Nous supposons le volume de liquide (holdup) constant et la température uniforme (pas de transfert de chaleur entre mélange et catalyseur).

En référence au bilan général (I.1), nous présentons les équations sous forme d'un tableau dont les lignes sont des bilans instantanés, en nombre de moles de réactif  $A$  pour la première et en énergie pour la seconde <sup>6</sup>.

ACCUMULATION	ALIMENTATION	REJET	+ CONVERSION
$\nu V \frac{dA}{dt}$	$QA_m$	$-QA$	$-k_0 e^{-\frac{E}{RT}} \nu V A$
$V \rho c_p^{\text{tot}} \frac{dT}{dt}$	$Q \rho c_p^{\text{reac}} T_m + UAT_w$	$-Q \rho c_p^{\text{tot}} T - UAT$	$-\Delta h k_0 e^{-\frac{E}{RT}} \nu V A$

avec, par ordre d'apparition:

<sup>6</sup>on a scindé les termes de transfert de chaleur pour conserver l'analogie avec l'alimentation et le rejet de matière: en toute rigueur, les enthalpies ne sont définies qu'à une constante près, mais celle-ci s'élimine par soustraction.

$\nu$	holdup = vol mélange / vol total,	sans unité
$V$	volume total du réacteur,	en $m^3$
$A$	concentration en réactif A,	en $\text{mol}/m^3$
$t$	temps physique,	en s
$Q$	débit volumique,	en $m^3/s$
$A_{in}$	concentration à l'entrée,	en $\text{mol}/m^3$
$k_0$	facteur d'amplitude,	en $s^{-1}$
$E_a$	énergie d'activation,	en J
$R$	constante des gaz parfaits,	en K
$T$	température,	en K
$\rho c_p^{\text{tot}}$	capacité calorifique du contenu,	en $J/m^3K$
$\rho c_p^{\text{react}}$	capacité calorifique des réactifs,	en $J/m^3K$
$T_{in}$	température d'entrée,	en K
$UA$	coef de transfert thermique,	en $W/K$
$T_w$	température extérieure,	en K
$-\Delta h$	chaleur de réaction rapportée au volume total,	en $J/m^3$

Avec ces notations, le nombre de moles de A contenues dans l'enceinte est  $\nu V A$ , tandis que l'enthalpie du contenu du réacteur (ou la chaleur emmagasinée) s'écrit:  $V \rho c_p^{\text{tot}} T$  à une constante près. On définit pour la suite le *temps de séjour*:

$$\tau = \frac{\nu V}{Q}$$

### Réduction sous forme adimensionnelle.

Manipuler un modèle adimensionnel présente plusieurs avantages: le nombre de paramètres est souvent inférieur à celui du modèle physique dont il est issu, la correspondance entre paramètres physiques et adimensionnels met en évidence l'influence des facteurs d'échelle, et en termes de dynamique qualitative, il est clair que seuls sont pertinents les paramètres réduits puisque, le cas échéant, plusieurs jeux de paramètres physiques peuvent conduire à des dynamiques équivalentes, voir rigoureusement identiques.

A l'aide de trois quantités arbitraires fixes: ( $\tau_{\text{ref}}$ ,  $A_{\text{ref}}$ ,  $T_{\text{ref}}$ ) homogènes respectivement à un temps, une concentration et une température, nous introduisons les variables réduites:

$$s = \frac{t}{\tau_{\text{ref}}} \quad x = \frac{A}{A_{\text{ref}}} \quad y = \frac{E_a}{RT_{\text{ref}}} \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} - 1 \right)$$

Contrairement à un usage répandu, nous n'avons pas utilisé la concentration en entrée  $A_0$  ni posé:  $x = 1 - \frac{A}{A_0}$ , de façon à conserver l'influence de ce paramètre sur le modèle final. Nous



adoptons alors les notations suivantes:

$$\begin{array}{ll}
 q &= \frac{\tau_{\text{ret}}}{\tau} & \text{coef de débit,} \\
 \frac{1}{\beta} &= \frac{E_a}{RT_{\text{ret}}} & \text{énergie d'activation réduite,} \\
 Da &= k_0 \tau_{\text{ret}} e^{-\frac{1}{\beta}} & \text{nombre de Damköhler,} \\
 B &= \frac{1 - \Delta h \nu A_{\text{ret}}}{g \rho c_p^{\text{tot}} T_{\text{ret}}} & \text{chaleur de réaction réduite,} \\
 H &= \frac{\nu \rho c_p^{\text{reac}}}{\rho c_p^{\text{tot}}} & \text{"holdup thermique"} \\
 L &= \frac{U A \tau_{\text{ret}}}{\rho c_p^{\text{tot}} V} & \text{coef de pertes thermiques réduit}
 \end{array}$$

On choisira pour  $(\tau_{\text{ret}}, A_{\text{ret}}, T_{\text{ret}})$  les valeurs nominales des variables associées. Noter que  $y = 0$  correspond à  $T = T_{\text{ret}}$ , tandis que le 0 absolu est associé à  $y = -\frac{1}{\beta}$  que nous noterons systématiquement  $y_0$  par la suite.

Moyennant ces notations, on obtient un premier modèle adimensionnel, où le point sur montant les variables représente la dérivation par rapport au temps réduit  $s$ :

$$\begin{cases}
 \dot{x} = -Da x e^{\frac{\beta}{1+\beta y}} + q(x_m - x) \\
 \dot{y} = B Da x e^{\frac{\beta}{1+\beta y}} + qH(y_m - y) + L(y_w - y)
 \end{cases} \quad (1.4)$$

Comme on envisage de commander en température d'entrée  $y_m$  ou en température de refroidissement  $y_w$ , on regroupe les deux derniers termes de la seconde équation:

$$qH(y_m - y) + L(y_w - y) = (qH + L) \left( \frac{qHy_m + Ly_w}{qH + L} - y \right)$$

expression que nous réécrivons sous la forme:  $q'(u - y)$  en introduisant la *commande auxiliaire*  $u$  et le paramètre  $q'$  donnés par:

$$u = \frac{qHy_m + Ly_w}{qH + L} \quad q' = qH + L \quad (1.5)$$

Le modèle de commande final est le suivant:

$$\begin{cases}
 \dot{x} = -Da x \gamma(y) + q(x_m - x) \\
 \dot{y} = B Da x \gamma(y) + q'(u - y)
 \end{cases} \quad (1.6)$$

avec:  $\gamma(y) = e^{\frac{\beta}{1+\beta y}}$

**Remarque 1.2** Dans la suite, nous utiliserons systématiquement la forme:  $q'(u - y)$  pour le terme de pertes thermiques globales. Les résultats s'appliqueront donc aussi bien à un réacteur refroidi qu'à un réacteur commandé en température d'entrée.  $\triangle$

### 1.3.3 Quelques généralisations.

Le système (1.6) peut être considéré comme le squelette d'un CSTR doté d'une cinétique plus complexe, ou comme la brique de base d'un PFR modélisé par une cascade de compartiments identiques. En outre, rien n'empêche de combiner plusieurs axes de généralisation. Dans tous les cas, la cellule qu'il représente est supposée présenter une masse ou un volume constant.

#### Cas d'un schéma réactionnel complexe.

La plupart du temps, un réacteur est le siège de plusieurs réactions faisant l'objet d'un mécanisme plus ou moins élucidé. Un modèle très général de CSTR consiste à se limiter à une spécification fonctionnelle de la cinétique et de la chaleur de réaction associée telle (1.3) qui conduit aux équations:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R(x, y) + q(x_m - x) \\ \dot{y} = B(x, y) + q'(u - y) \end{cases} \quad (1.7)$$

Le modèle ci-dessus s'applique à la fois à un CSTR ( $q \neq 0$ ) et à un réacteur fermé ( $q = 0$ ), mais pas à un réacteur mélangé semi-ouvert (dont le volume n'est pas constant). D'autre part, le coefficient de pertes  $q'$  n'est jamais nul, sauf dans le cas du réacteur fermé adiabatique pour lequel ne subsiste par définition aucune des deux commandes  $y_m$  et  $y_w$  regroupées dans  $u$ . Ce modèle servira de base à l'étude générale de stabilisation qui va suivre.

**Exemple 1.3 (Réactions consécutives:  $X_1 \xrightarrow{r_1} X_2 \xrightarrow{r_2} X_3$ )** On suppose que  $r_1$  et  $r_2$  sont fonction respectivement de  $(x_1, y)$  et  $(x_2, y)$  ce qui exclut les phénomènes d'autocatalyse et d'inhibition -, et vérifient de plus:  $r_1 \geq 0$ ,  $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \geq 0$ , la nullité impliquant  $x_1 = 0$ . Si seul le réactif  $X_1$  est introduit dans le réacteur, on obtient le modèle suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -r_1(x_1, y) & + q(x_{1,m} - x_1) \\ \dot{x}_2 = r_1(x_1, y) - r_2(x_2, y) & - qx_2 \\ \dot{y} = b_1 r_1(x_1, y) + b_2 r_2(x_2, y) & + q'(u - y) \end{cases} \quad (1.8)$$

et la généralisation à un nombre quelconque de réactions consécutives est immédiate.  $\diamond$

**Exemple 1.4 (Équilibre:  $X_1 \rightleftharpoons X_2$ )** On note  $r_1$  et  $r_2$  les vitesses de réaction directe et inverse, avec des hypothèses analogue à celles de l'exemple précédent. La petite particularité est que les chaleurs de réaction sont opposées l'une de l'autre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -r_1(x_1, y) + r_2(x_2, y) & + q(x_{1,m} - x_1) \\ \dot{x}_2 = r_1(x_1, y) - r_2(x_2, y) & - qx_2 \\ \dot{y} = b(r_1(x_1, y) - r_2(x_2, y)) & + q'(u - y) \end{cases} \quad (1.9)$$

en posant:  $b = b_1 = -b_2$ .  $\diamond$

**Remarque 1.5 (sur la température réduite)** Dans le cas où différentes énergies d'activation  $E_i$  interviennent, on peut poser par exemple:  $y = \frac{T}{T_{ref}} - 1$  et  $\frac{1}{s_1} = \frac{E_i}{RT_{ref}}$ , ce qui donne:  $\gamma_i(y) = e^{\frac{1}{s_1(1+y)}}$ , le zéro absolu réduit valant alors:  $y_0 = -1$ .  $\triangle$

### Cas d'une colonne.

Pour obtenir l'approximation d'un PFR, il suffit d'indicer les variables d'état du CSTR de base par le numéro du réacteur dans la colonne, les variables à l'entrée du compartiment  $i$  étant les variables de sortie - c'est-à-dire d'état - du compartiment  $i - 1$

Si l'on envisage de plus l'arrivée de gaz de refroidissement (quenches), l'équation en température doit évidemment être modifiée. Deux possibilités entre autres sont envisageables:

- soit rajouter un terme de pertes thermiques de la forme  $L'(y_q - y)$  quitte à identifier le coefficient  $L'$
- soit considérer que l'action du refroidissement est instantanée <sup>7</sup> en décidant que la température d'entrée du réacteur  $i$  correspond à une moyenne pondérée (par les capacités calorifiques) de la température du réacteur  $i - 1$  et de celle du quench à l'étage  $i$ .

Dans les deux cas, le terme de transport de l'équation de température prend la forme:  $q'(u^{(i)} + ay^{(i-1)} - y^{(i)})$  où  $u^{(i)}$ , combinaison linéaire de  $y_w$  et de la température du quench au niveau  $i$ :  $y_q^{(i)}$ , apparaît comme une nouvelle commande auxiliaire. Finalement, avec ou sans quench, les équations réduites sont les suivantes pour  $n$  réacteurs en cascade:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(i)} = -R(x^{(i)}, y^{(i)}) + q(x^{(i-1)} - x^{(i)}) \\ \dot{y}^{(i)} = B(x^{(i)}, y^{(i)}) + q'(u^{(i)} + ay^{(i-1)} - y^{(i)}) \end{cases} \quad i = 1 \dots n \quad (1.10)$$

avec  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_{in}, y_m)$ , concentration et température à l'entrée de la colonne.

### Introduction d'une diffusion axiale.

Il est possible d'approximer l'effet d'une diffusion axiale dans une colonne tout en restant dans le cadre des équations différentielles ordinaires en faisant l'hypothèse d'un reflux dans le sens inverse de la progression globale. Afin de conserver un débit algébrique  $q$ , on considère que le débit réel de haut en bas est  $q(1 + \epsilon)$  tandis que le mélange remonte de bas en haut avec un débit  $q\epsilon$ .

En partant par exemple du modèle général (1.7) mais dans le cas adiabatique, les équations

<sup>7</sup>ou plutôt très rapide comparée aux dynamiques modélisées

sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}) + q(\mathbf{x}_m - (1 + \epsilon)\mathbf{x}^{(1)} + \epsilon\mathbf{x}^{(2)}) \\ \dot{y}^{(1)} = B(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}) + qH(y_m - (1 + \epsilon)y^{(1)} + \epsilon y^{(2)}) \\ \cdot \\ \dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) + q((1 + \epsilon)\mathbf{x}^{(i-1)} - (1 + 2\epsilon)\mathbf{x}^{(i)} + \epsilon\mathbf{x}^{(i+1)}) \\ \dot{y}^{(i)} = B(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) + qH((1 + \epsilon)y^{(i-1)} - (1 + 2\epsilon)y^{(i)} + \epsilon y^{(i+1)}) \\ \cdot \\ \dot{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(n)}, y^{(n)}) + q(1 + \epsilon)(\mathbf{x}^{(n-1)} - \mathbf{x}^{(n)}) \\ \dot{y}^{(n)} = B(\mathbf{x}^{(n)}, y^{(n)}) + qH(1 + \epsilon)(y^{(n-1)} - y^{(n)}) \end{array} \right. \quad i = 2 \dots n-1 \quad (1.11)$$

D'autres variations sont évidemment possibles dans le même cadre, tant au niveau des phénomènes physiques pris en compte (équilibres multiphasés, hydrodynamique . . . - qu'à celui de la configuration matérielle (recyclages, dynamique de préchauffement des réactifs à l'entrée . . .) mais notre intention n'est clairement pas d'être exhaustif en termes de génie chimique, mais plutôt de motiver l'étude des modèles élémentaires pour la compréhension et le contrôle de l'emballement thermique de réacteurs plus complexes et plus proches des unités réelles.

## I.4 Résumé.

La commande des réacteurs chimiques se situe au carrefour de plusieurs disciplines qui ont chacune leur langage et leur problématique. Compte tenu de l'impossibilité de se fixer un modèle de travail dans l'absolu, il est nécessaire de spécifier au préalable le problème que l'on cherche à résoudre, en l'occurrence l'emballement thermique des réacteurs. Deux modèles généraux mais opératoires seront retenus: le CSTR élémentaire à une réaction exothermique (I.6) qui fera l'objet d'une étude directe, généralisée ensuite au CSTR (I.7) supposé à masse ou volume constant et pouvant servir à construire d'autres modèles plus proches des unités réelles.



## Chapitre II

# Un cas d'école: extinction du CSTR à une réaction

### II.0 Introduction.

On considère un CSTR siège d'une réaction exothermique d'ordre 1.  $A \rightarrow B$ , opérant à fort taux de conversion. Depuis [7], cet exemple a été très largement étudié à la fois d'un point de vue mathématique et sous l'angle de la commande, mais presque toujours en un seul point d'équilibre et pas à notre connaissance dans l'optique d'expliquer le phénomène d'emballement thermique, ce qui suppose justement de faire varier le point d'équilibre.

Notre but dans ce chapitre est donc d'illustrer la problématique de l'emballement au sens large sur un système volontairement simplifié à l'extrême. Nous faisons l'hypothèse que l'opérateur, pour satisfaire par exemple des contraintes d'ordre économique, désire réduire la production de  $B$  et dispose pour cela d'une commande agissant sur la température du réacteur. Il se peut alors qu'en deçà d'un certain seuil, dit critique, la température de fonctionnement passe brusquement à une valeur très basse associée à un taux de conversion très faible: c'est le phénomène d'emballement à l'envers, encore appelé *extinction* (voir la figure II.1).

En pratique, l'opérateur respecte une limite inférieure à ne pas dépasser avec une marge de sécurité confortable, de façon à rester suffisamment loin du seuil critique. Du point de vue énergétique, ceci impose un chauffage conséquent pour un gain en rendement le cas échéant assez faible et pas toujours désiré. Dans ce qui suit, nous allons montrer, dans le cadre d'un modèle élémentaire de CSTR, qu'il est possible de supprimer le phénomène d'extinction, et de stabiliser le réacteur à des températures quelconques par un retour de température proportionnel ou proportionnel-intégral.

Tout ce qui concerne la stabilisation locale est maintenant bien connu, et une bonne partie de ce chapitre est simplement destinée à servir d'introduction aux idées générales développées par la suite. Ce n'est pas le cas cependant du problème de la stabilisation *globale* que nous abordons ici grâce à la simplicité de l'exemple - dimension 2 -, et que nous traitons en montrant que les résultats locaux peuvent s'étendre en utilisant des retours de température à grand gain. Ceci complète les résultats d'Aris et Amundson (cf [7], II) qui avaient montré sur un ex-

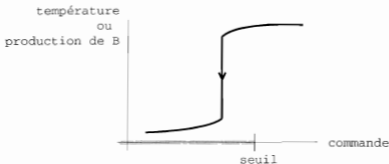


Figure II.1: Extinction et seuil de sécurité.

emple la possibilité d'existence de 2 cycles limites concentriques entourant le point d'équilibre pour certaines plages de valeurs du gain proportionnel, et constaté sur cet exemple la disparition simultanée de ces cycles limites à partir d'un certain seuil de gain, conformément au résultat général que nous proposons. En termes d'automatique (un peu savante...), l'originalité de cet exemple consiste dans le fait que l'on utilise un retour de sortie, car il est connu (cf [13], [14]) que l'on peut stabiliser globalement par retour d'état un système non linéaire de degré relatif 1 dont la dynamique des zéros est globalement stable, ce qui est le cas de notre CSTR!

Nous travaillons sur le modèle adimensionnel (I.6):

$$\begin{cases} \dot{x} = -D\alpha x\gamma(y) + q(x_m - x) \\ \dot{y} = BD\alpha x\gamma(y) + q'(u - y) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où  $\gamma(y) = \frac{y}{\epsilon^1 + gy}$  représente le facteur d'Arrhénius. Les valeurs des paramètres utilisées pour les simulations:

$$(g, D\alpha, B, x_m, q, q') = (0.0254, 0.000391, 19.1, 1, 1, 1)$$

sont dérivées comme exposé au chapitre précédent à partir d'un exemple physique ([60] p.291).

## II.1 Etude du réacteur en boucle ouverte.

### II.1.1 Diagramme thermique.

Les équations d'équilibre peuvent être transformées de façon à faire apparaître une équation stationnaire dite entrée-sortie, c'est-à-dire dans laquelle la concentration  $x$  n'intervient pas. Pour ce faire, il suffit de calculer  $x$  en fonction de  $y$  grâce au bilan matière, puis de reporter

l'expression obtenue dans le bilan thermique. On obtient:

$$\begin{cases} r = \frac{qx_m}{q + D\alpha\gamma(y)} \equiv x_{so}(y) \\ 0 = Bx_m \frac{qD\alpha\gamma(y)}{q + D\alpha\gamma(y)} - q'(y - u) \end{cases} \quad (II.2)$$

On note respectivement  $HC$  et  $HR$  - pour Heat Creation et Heat Removal - les deux termes, homogènes à une puissance réduite, apparaissant dans la seconde équation, dite équation stationnaire entrée-sortie:

$$\begin{cases} HC(y) = Bx_m \frac{qD\alpha\gamma(y)}{q + D\alpha\gamma(y)} \\ HR(y, u) = q'(y - u) \end{cases} \quad (II.3)$$

moynnant quoi cette équation s'écrit sous forme condensée:

$$HC(y) = HR(y, u)$$

Les courbes associées en fonction de  $y$  sont tracées sur la figure II.2 appelée diagramme thermique stationnaire. La ou les températures de fonctionnement  $y$  à commande  $u$  fixée sont par construction les abscisses des points d'intersection des courbes  $HR$  et  $HC$ , tandis que la valeur de la commande se lit à l'intersection de la droite  $HR$  et de l'axe des températures.

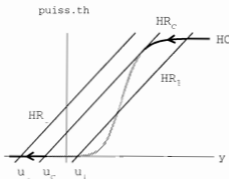


Figure II.2: Diagramme thermique stationnaire en boucle ouverte.

Il est clair que si l'on diminue  $u$  en deçà du seuil critique  $u_c$ , l'équilibre supérieur (ou chaud) disparaît, et on observe en simulation que le système va alors s'accrocher à l'unique point de fonctionnement qui subsiste, lequel se trouve associé à une température très nettement inférieure (point froid). Dans ce cas, toute une partie des équilibres de la courbe  $HC$  (en gris sur la figure II.2) ne sont pas atteints, équilibres dont la projection sur l'axe des  $y$  constitue un segment de températures qualifiées alors de *quasistatiquement inaccessibles*.



### II.1.2 Stabilité.

En fait, quand bien même le système se trouverait dans les conditions de fonctionnement d'un point intermédiaire, il n'y resterait pas car il est facile de montrer que lorsqu'il existe trois points d'équilibre caractérisés par trois températures  $y_1 < y_2 < y_3$  distinctes, l'équilibre numéro 2 est nécessairement instable (cf ci-après). On rappelle que de façon générale, l'analyse de stabilité locale repose sur l'examen du signe des parties réelles des valeurs propres du système linéarisé (voir l'annexe B). En tout point stationnaire  $(x_{so}(y), y)$ , la matrice jacobienne du système (II.1), c'est-à-dire la matrice des dérivées partielles des seconds membres des équations dynamiques, s'écrit comme suit:

$$L(y) = \begin{pmatrix} -(q + Dv\gamma(y)) & -Dv x\gamma'(y) \\ BDv\gamma(y) & BDv x\gamma'(y) - q' \end{pmatrix} \Big|_{x=x_{so}(y)}$$

et ne dépend pas de  $u$ . La figure II.3 présente les courbes des parties réelles et imaginaires des deux valeurs propres du système linéarisé en  $(x_{so}(y), y)$  en fonction de la température. On constate que les valeurs propres sont toujours réelles l'une d'elle étant même constante égale à  $-q = -1$  mais pas toujours stables, et le segment de valeurs de  $y$  pour lesquelles l'une est positive correspond justement aux températures quasistatiquement inaccessibles (cf figure II.2 et commentaires). Par ailleurs, les deux valeurs propres sont dans un rapport grand devant 1 pour les températures élevées; on retrouve ici le fait bien connu que les modèles de réacteurs constituent des systèmes différentiels *raides*.

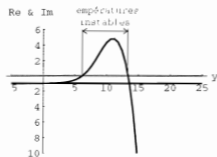


Figure II.3: Partie réelle (en noir) et imaginaire (en gris) des valeurs propres en boucle ouverte.

**Remarque II.1 (stabilité des équilibres extrêmes)** Il se trouve qu'avec le jeu de paramètres numériques adoptés, les équilibres extrêmes, caractérisés par la condition:  $q' > \frac{\partial HC}{\partial y}$ , sont tous stables. Contrairement à une idée tenace en Génie Chimique "traditionnel", cette dernière condition, que l'on peut interpréter physiquement<sup>1</sup> est *seulement nécessaire*, mais pas suffisante pas suffisante pour assurer la stabilité locale. En particulier, des cycles limites stables

<sup>1</sup>en disant que tout écart de température par rapport à la valeur d'équilibre se voit compensé par un rappel opposé du signe de  $HC - HR$ .

peuvent apparaître en même temps que le point d'équilibre devient instable (bifurcations de Hopf). Ce point sera au cours de l'analyse de stabilité locale qui va suivre.  $\triangle$

Sur la figure II.4, on a simulé un changement de consigne  $u$  constant par morceaux, de façon à laisser le temps au réacteur de se stabiliser à différents paliers de concentration et température. Comme on a choisi des valeurs de  $u$  encadrant la valeur critique  $u_c$ , l'extinction a lieu, ce qui se traduit par une brusque diminution de température et un brusque accroissement de la concentration en réactif. Après l'extinction, le réacteur fonctionne au point froid: le rendement  $\frac{x_{in}-x}{x_{in}}$  est presque nul.

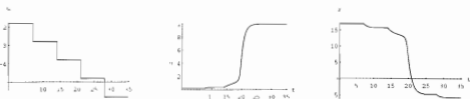


Figure II.4: Extinction en boucle ouverte.

## II.2 Stabilisation uniforme par retour proportionnel de température.

Cette question comporte deux aspects: d'une part la suppression du phénomène d'extinction, ou *régularisation*, visant à restaurer l'unicité de l'équilibre à température fixée, et d'autre part la *stabilisation* proprement dite, assortie du qualificatif *uniforme* pour signifier qu'un même bouclage convient à toute une gamme de points de fonctionnement.

### II.2.1 Régularisation globale.

Plutôt que d'appliquer a priori un bouclage de la forme:  $u = -k_p y + v$ , il est équivalent de se donner une nouvelle droite  $HR'_b(y, v) = q'_b(y - v)$  et de calculer le bouclage  $u(y, v)$  tel que  $HR(y, u(y, v)) = HR'_b(y, v)$ , soit:

$$u(y, v) = \left(1 - \frac{q'_b}{q'}\right)y + \frac{q'_b}{q'}v \quad (II.4)$$

De cette façon, le gain du bouclage est directement paramétré par la pente  $q'_b$ :

*l'effet d'un bouclage affine en température consiste à modifier la puissance thermique d'évacuation de chaleur.*

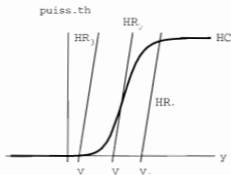


Figure 11.5: Diagramme thermique stationnaire en boucle fermée.

La suppression du phénomène d'extinction s'obtient alors en choisissant  $q'_b$  supérieur à la pente maximale de la courbe  $HC$ , de sorte que les droites (parallèles)  $HR_b(y, v)_{v \in \mathbb{R}}$  aient chacune une et une seule intersection avec la courbe  $HC$  (voir la figure 11.5). Il est clair qu'hormis la question de la stabilité, toutes les températures de fonctionnement sont a priori accessibles par variation "lente et continue" - quasistatique - de la nouvelle consigne auxiliaire  $v$ , ce qui n'était pas le cas avec  $v$  en boucle ouverte. Or, d'après (11.2), il existe une et une seule concentration d'équilibre pour toute valeur de température. De fait:

*il est possible de paramétrer globalement par  $v$  les équilibres du réacteur commandé en choisissant:*

$$q'_b > \max_y \frac{\partial HC}{\partial y} \quad (11.5)$$

**Remarque 11.2** La pente maximale est atteinte au point d'inflexion de la courbe  $HC$  aussi appelée "courbe en S" pour des raisons graphiques évidentes.

## 11.2.2 Stabilisation locale.

### Choix du gain.

Ayant restauré l'unicité des équilibres, il reste à assurer leur stabilité, au moins localement. En tout point stationnaire  $(x_{\text{mo}}(y), y)$ , la matrice jacobienne du système (11.1) bouclé par (11.4) s'écrit:

$$L^P(y, q'_b) = \begin{pmatrix} -(q + Dv\gamma(y)) & -Dv x\gamma'(y) \\ BDv\gamma(y) & BDv x\gamma'(y) - q'_b \end{pmatrix} \Big|_{x=x_{\text{mo}}(y)}$$

et ne dépend pas de  $v^2$ . Les valeurs propres de  $L^P$  sont les racines de son polynôme caractéristique:

$$\chi^P(s, y, q'_b) = \det(-I - L^P(y, q'_b)) = s^2 + \chi_1^P(y, q'_b)s + \chi_2^P(y, q'_b)$$

<sup>2</sup>plus exactement n'en dépend qu'à travers la température d'équilibre  $y$ .

lesquelles racines sont à partie réelle strictement négative si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées (critère de Routh, voir l'annexe B):

$$\begin{cases} \chi_1^p(y, q_b') = (q + D\alpha\gamma(y)) + q_b' - BD\alpha x_{iso}(y)\gamma'(y) > 0 \\ \chi_2^p(y, q_b') = (q + D\alpha\gamma(y))q_b' - qBD\alpha x_{iso}(y)\gamma'(y) > 0 \end{cases} \quad (II.6)$$

Tous calculs faits, on obtient:

$$\begin{cases} q_b' > BD\alpha x_{iso}(y)\gamma'(y) - (q + D\alpha\gamma(y)) \\ q_b' > BD\alpha x_{iso}(y)\gamma'(y) \frac{q}{q + D\alpha\gamma(y)} \end{cases} \quad (II.7)$$

La stabilité locale asymptotique de tous les équilibres du réacteur commandé est donc assurée en choisissant  $q_b'$  strictement supérieur au maximum en  $y$  des membres de droite, et les trois inégalités données par (II.5) et (II.7) permettent de choisir une pente  $q_b'$  telle que le bouclage associé rende quasistatiquement accessibles et localement stables tous les équilibres du réacteur de départ.

En fait, ces trois inégalités constituent seulement deux contraintes sur le gain  $q_b'$ . Calculons en effet la pente de la courbe HC:

$$\frac{\partial HC}{\partial y} = Bx_m \left( \frac{qD\alpha\gamma'(y)}{q + D\alpha\gamma(y)} - \frac{qD\alpha^2\gamma(y)\gamma'(y)}{(q + D\alpha\gamma(y))^2} \right) = BD\alpha x_{iso}(y)\gamma'(y) \frac{q}{q + D\alpha\gamma(y)}$$

On remarque ainsi que la seconde inégalité de (II.7) peut aussi s'écrire:  $q_b' > \frac{\partial HC}{\partial y}$ , ce qui n'est rien d'autre que la version ponctuelle de (II.5). Finalement:

*on rend tous les équilibres du réacteur (II.1) quasistatiquement accessibles par la consigne  $v$  et localement asymptotiquement stables, en choisissant un retour affine en température (II.4) tel que  $q_b'$  satisfasse aux deux inégalités (II.7) uniformément en  $y$ .*

**Remarque II.3 (suite de la remarque II.1)** Il est maintenant clair que les équilibres intermédiaires du réacteur non commandé, caractérisés par  $q' < \frac{\partial HC}{\partial y}$ , sont nécessairement instables. A l'inverse, les équilibres extrêmes, ainsi que les équilibres du réacteur régularisé, c'est-à-dire commandé avec:  $q_b' > \frac{\partial HC}{\partial y}$ , ne sont pas nécessairement stables, car la première inégalité de (II.7) peut être violée même lorsque la seconde est satisfaite, et ce phénomène ne peut se détecter directement sur le diagramme thermique.  $\triangle$

Sur la figure II.6, on représenté les courbes des membres de droite des inégalités (II.7) en fonction de  $y$  avec un choix possible de  $q_b'$ . la courbe non bornée est associée à la première inégalité -, ainsi que les deux valeurs propres de la matrice  $L^p$  dont on peut constater que les parties réelles restent strictement négatives pour toute valeur de la température. D'autre part, les valeurs propres sont imaginaires conjuguées pour un segment de valeurs de  $y$  approximativement [8, 15], et l'on peut donc s'attendre à des oscillations lorsque l'on stabilise le réacteurs autour de ces températures. Enfin le bouclage n'a malheureusement pas amélioré la raideur du système.

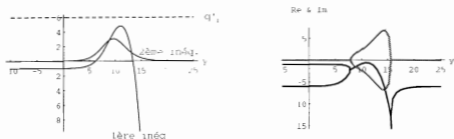


Figure II.6: Choix d'un gain  $q'_0$  et valeurs propres en boucle fermée.

**Remarque II.4 (sur le choix du gain)** Les conditions (II.7) relatives au choix de  $q'_0$  se traduisent par des inégalités sur le gain proportionnel:  $k_P = \frac{v'_0}{v} - 1$ , inégalité imposant de choisir  $k_P$  positif suffisamment grand. Le choix de la valeur effective de  $k_P$  fait alors l'objet d'un compromis entre divers impératifs contradictoires: saturation physique de la commande, marge de stabilité, ... En ce sens, l'analyse ci-dessus ne conduit pas nécessairement à utiliser une commande dite à *grand gain*, mais vise seulement à caractériser, pour le système (II.1), les retours proportionnels de sortie efficaces en termes de suppression du phénomène indésirable que constitue l'extinction du réacteur.

### Simulations.

Pour comparer avec le cas du réacteur non commandé, on a simulé une baisse de température par paliers dans les mêmes conditions que celles de la figure II.4, à savoir départ au niveau  $y = 17$  et changement de consigne toutes les 7 unités de temps réduit, à ceci près que la consigne en question n'est plus  $u$  mais  $v$ . La figure II.7 présente les résultats, avec en grisé les courbes du réacteur non commandé. Il est clair que le phénomène d'extinction ne se produit pas, et que le système se stabilise à des niveaux intermédiaires arbitraires -  $x$  voisin de 0.1,  $y$  de 14.

Cependant, la courbe de bouclage présente sur la figure (figure II.8) des pics inquiétants à chaque changement de consigne, parfois accompagnés d'oscillations d'amplitude non négligeable. En fait, l'équation de bouclage (II.4) montre clairement que toute discontinuité de la consigne  $v$  se traduit par une discontinuité de la commande  $u$  amplifiée du facteur  $\frac{v'_0}{v}$  qui est strictement supérieur à 1 puisque le bouclage augmente la pente de la droite  $HR$ . Quant aux oscillations, que l'on retrouve sur les courbes de  $x$  et  $y$ , elles sont la conséquence du fait déjà mentionné que dans la plage de valeurs de  $y$  concernée, les valeurs propres sont imaginaires conjuguées (cf figure II.6). Le bouclage ne fait donc que reproduire le comportement de la température.

On peut remédier simplement à ces problèmes en choisissant une loi de variation continue

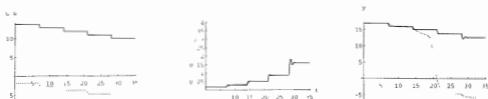


Figure II.7: Stabilisation uniforme par retour affine de température, consigne discontinue.

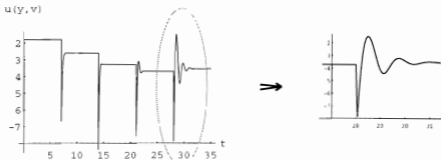


Figure II.8: Bouclage pathologique, consigne discontinue.

pour la consigne  $v$ . D'une part on supprime ainsi les pics de bouclage, d'autre part le fait de se trouver à tout instant dans des conditions très proches de l'équilibre - variation quasistatique permet de minimiser l'amplitude des oscillations. La figure II.9 montre ce que l'on obtient en prenant pour  $v(t)$  une fonction continue affine par morceaux. Les courbes du cas  $v$  discontinu sont reproduites en grisé.

### II.2.3 Stabilisation globale.

Nous ne considérons ici que des bouclages dont le gain  $q'_b$  satisfait l'inégalité de régularisation (II.5), de sorte qu'à toute valeur de la consigne auxiliaire  $v$  est associé un et un seul équilibre. Nous allons montrer qu'en prenant  $q'_b$  assez grand, il est possible d'assurer la stabilité *globale* de cet équilibre.

Une petite difficulté survient par le fait que celui-ci dépend non seulement de  $v$  mais aussi de  $q'_b$  (sur la figure II.5, l'intersection de  $HC$  et  $HR$  dépend de la pente de  $HR$ ). En fait, il

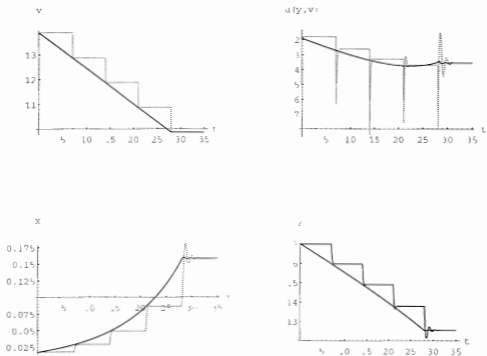


Figure II.9: Stabilisation uniforme par retour affine de température, consigne continue.

est facile de voir que l'on peut ajuster la valeur de  $v$  en fonction de  $q'_0$  de façon à fixer une température d'équilibre  $HC(y) = HR_0(y, v, q'_0)$  se résoud explicitement en  $v$ . Ceci permet de se fixer un équilibre indépendamment de la valeur de  $q'_0$ . Soit donc  $\bar{y}$  une température d'équilibre, et  $\bar{x} = x_{\text{eq}}(\bar{y})$  la concentration associée. Nous réécrivons le système bouclé en posant  $X = x - \bar{x}$  et  $Y' = y - \bar{y}$ , de sorte qu'en particulier la consigne  $v(q'_0)$  disparaît:

$$\begin{cases} \dot{X} &= -(q + D\alpha \gamma(Y' + \bar{y}))X - D\alpha \bar{x} \Gamma(Y', \bar{y}) Y' \\ \dot{Y}' &= BD\alpha \gamma(Y' + \bar{y})X - (q'_0 - BD\alpha \bar{x} \Gamma(Y', \bar{y})) Y' \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

en notant:

$$\Gamma(Y', \bar{y}) = \frac{\gamma(Y' + \bar{y}) - \gamma(\bar{y})}{Y'}$$

le taux d'accroissement de la fonction  $\gamma$ , défini<sup>3</sup> pour tout accroissement algébrique de température  $Y'$   $y$  compris en  $Y' = 0$  où  $\Gamma(0, \bar{y}) = \gamma'(\bar{y})$ , régulier, borné et positif car

<sup>3</sup>il est sous-entendu que les valeurs admissibles de  $Y'$  sont celles pour lesquelles  $y = Y' + \bar{y}$  est supérieure à la température réduite  $y_0 = -\frac{1}{\beta}$  correspondant au zéro absolu.

$\gamma(y)$  est bornée et croissante. On pose aussi:

$$V(X, Y) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2B}Y^2$$

Nous allons montrer qu'il est possible de choisir  $q'_b$  de sorte que la fonction  $V$  soit une fonction de Liapunov (cf [63]) pour le système (II.8), c'est-à-dire que les trajectoires  $(X(t), Y(t))$  soient rentrantes dans les ellipses  $V = \text{cste}$ . En effet, calculons la dérivée de  $V$  suivant une trajectoire:

$$\dot{V} = -(q + D\alpha \gamma(Y + \bar{y}))X^2 + D\alpha(\gamma(Y' + \bar{y}) - \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y}))XY - \frac{1}{B}(q'_b - BD\alpha \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y}))Y^2 \quad (\text{II.9})$$

Cette expression n'est bien sûr pas une forme quadratique en  $(X, Y)$  car les coefficients de  $X^2, XY, Y^2$  dépendent de  $Y'$ . Cependant, il est possible de rendre cette expression strictement négative pour tout  $(X, Y) \neq (0, 0)$  grâce au fait que ces coefficients sont bornés.

De façon générale,  $aX^2 - bXY + cY^2$  est définie positive ssi  $a > 0$  et  $4ac - b^2 > 0$  (cf [26]). Si maintenant  $a, b, c$  dépendent de  $(X, Y)$ :

$$\begin{cases} a(X, Y) > 0 \\ 4a(X, Y)c(X, Y) - b(X, Y)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a(X, Y)X^2 - b(X, Y)XY + c(X, Y)Y^2 > 0$$

pour tout couple  $(X, Y) \neq (0, 0)$ . En appliquant ce résultat élémentaire à  $-\dot{V}$ , et en tenant compte de:  $q + D\alpha \gamma(Y' + \bar{y}) > 0$ , on obtient une condition suffisante de stricte négativité de  $\dot{V}$  pour  $(X, Y) \neq (0, 0)$ :

$$4(q + D\alpha \gamma(Y' + \bar{y}))\left(\frac{q'_b}{B} - D\alpha \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y})\right) - D\alpha^2(\gamma(Y' + \bar{y}) - \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y}))^2 > 0$$

ce qui s'écrit encore:

$$q'_b > \frac{BD\alpha}{4} \frac{D\alpha(\gamma(Y' + \bar{y}) + \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y}))^2 + 4q\bar{x}\Gamma(Y, \bar{y})}{q + D\alpha \gamma(Y' + \bar{y})} \quad (\text{II.10})$$

On a toujours:  $0 < \bar{x} = x_{\text{iso}}(\bar{y}) < x_m$ . Par ailleurs,  $\Gamma(Y, \bar{y}) = \gamma'(\bar{y})$  par le théorème des accroissements finis, d'où:

$$\max_Y \Gamma(Y, \bar{y}) < \gamma'_{\text{max}} = \max_y \gamma'(y)$$

Si enfin l'on note:  $\gamma_{\text{max}} = \max_y \gamma(y)$ , on peut déduire de (II.10) une nouvelle condition suffisante assurant  $\dot{V} < 0$  pour  $(X, Y) \neq (0, 0)$ :

$$q'_b > BD\alpha x_m \gamma'_{\text{max}} + \frac{B}{4q} D\alpha^2 (\gamma_{\text{max}} + x_m \gamma'_{\text{max}})^2 \quad (\text{II.11})$$

Remarquons enfin que la condition d'unicité de l'équilibre (II.5) est alors automatiquement vérifiée car on a vu que celle-ci pouvait s'écrire (seconde inégalité de (II.7)):

$$q'_b > \max_y BD\alpha x_{\text{iso}}(y) \gamma'(y) \frac{q}{q + D\alpha \gamma(y)}$$



inégalité réalisée a fortiori lorsque:

$$q'_0 > BD_{\text{D}} x_m(y) \gamma'_{\text{max}}$$

où l'on reconnaît le premier terme de (II.11).

Comme la condition (II.11) ne fait plus intervenir l'équilibre  $(\bar{x}, \bar{y})$ , nous avons finalement démontré le résultat suivant:

*on rend tous les équilibres du réacteur (II.1) quasiment accessibles par la consigne  $v$  et globalement asymptotiquement stables, en choisissant un retour affine en température (II.4) tel que  $q'_0$  satisfasse à l'inégalité (II.11).*

**Remarque II.5 (expression explicite de la borne de gain)** Le maximum de  $\gamma(y)$  est atteint en  $+\infty$ , à savoir:  $\gamma_{\text{max}} = \epsilon^{\frac{1}{2}}$ , tandis que sa dérivée  $\gamma'(y)$  est maximale au point d'inflexion  $y_c$  caractérisé par:  $1 + y y_c = \frac{1}{2y}$ , d'où:  $\gamma'_{\text{max}} = 4y^2 \epsilon^{\frac{1}{2}-2}$  ce qui permet d'obtenir explicitement la borne de gain. Cette remarque est toute aussi valable dans le cadre local.  $\triangle$

**Remarque II.6 (critère de Bendixson)** Il est possible de démontrer la stabilité globale sans utiliser de fonction de Liapunov, à l'aide de résultats généraux spécifiques à la dimension 2. D'après le théorème de Poincaré-Bendixson (cf [61]), lorsque le portrait de phase d'un système dynamique en dimension 2 exhibe un et un seul équilibre localement stable, la stabilité globale de celui-ci est équivalente à l'absence de cycles limites l'entourant, lesquels se trouvent nécessairement emboîtés les uns dans les autres. Le critère de Bendixson affirme alors qu'une condition suffisante d'absence de cycles limites est que la trace du linéarisé du champ soit partout  $< 0$ . Dans notre cas, cette condition s'écrit (sur le système d'origine):

$$q'_0 > \max_{x>0} BD_{\text{D}} x \gamma'(y) - (q + D\sigma\gamma(y)) \quad (\text{II.12})$$

Il est clair que cette inégalité ne saurait être vérifiée pour tout  $x > 0$ . Cependant,  $\dot{x} < -q\epsilon < 0$  pour  $x > x_m + \epsilon$  et  $\epsilon > 0$  quelconque, donc toute trajectoire  $(x(t), y(t))$  se trouve piégée dans n'importe quelle bande  $0 \leq x \leq x_m + \epsilon$  en un temps fini (dépendant de  $\epsilon$ ). Pour assurer la stabilité globale, il suffit donc de vérifier (II.12) dans une telle bande, d'où une nouvelle condition suffisante après majoration:

$$q'_0 > BD_{\text{D}} (x_m + \epsilon) \gamma'_{\text{max}}$$

valable pour  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit. Nous conserverons donc finalement:

$$q'_0 > BD_{\text{D}} x_m \gamma'_{\text{max}} \quad (\text{II.13})$$

et la condition d'unicité de l'équilibre (II.5) est encore automatiquement vérifiée (cf ci-dessus). Pour conclure, (II.13) fournit une meilleure borne de gain que (II.11), mais l'approche topologique ne s'appliquant plus dès la dimension 3, nous serons amené à réutiliser la fonction de Liapunov  $V$  dans le cadre du retour PI.  $\triangle$

## II.3 Stabilisation uniforme par retour proportionnel intégral de température.

### II.3.1 Effet d'un bouclage proportionnel intégral.

Pour compenser les biais éventuels dus aux perturbations ou aux incertitudes sur les paramètres, il est possible de rajouter un terme intégral de façon à régler directement la température désirée  $y_c$  plutôt que la consigne auxiliaire  $v$ <sup>4</sup>. On considère donc maintenant un bouclage de la forme:

$$u(y, y_c, t) = (1 - k_P)y - k_I \int_0^t (y - y_c) dt \quad (\text{II.14})$$

Remarquons au passage que la partie linéaire est en  $y$  et non en  $y - y_c$ , contrairement à une habitude courante en automatique industrielle, qui a pour effet négatif de rajouter un zéro au transfert  $y_c \mapsto y$  et par là-même de dégrader les transitoires en ajoutant une dérivée à la réponse indicielle. Cependant, la contrepartie est que l'on ne peut plus se passer du terme intégral sous peine d'annuler le transfert de la consigne à la sortie.

Pour obtenir les équations du système bouclé sous forme différentielle, il faut introduire une nouvelle variable d'état:

$$z = \int_0^t (y - y_c) dt$$

et réécrire le système (II.1) bouclé par (II.14) sous la forme suivante dite étendue:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -Dx + \gamma(y) + q(x_m - x) \\ \dot{y} &= BDx + \gamma(y) - q'k_P y - q'k_I z \\ \dot{z} &= y - y_c \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

en considérant  $y_c$  comme une nouvelle consigne auxiliaire (à la place de  $v$ ).

Par construction, les équilibres  $(x, y, z)$  de ce nouveau système sont paramétrés par  $y_c$  et vérifient:  $x = x_{\text{mo}}(y_c)$ ,  $y = y_c$ . Contrairement au cas du retour proportionnel, il n'est plus possible de construire un diagramme thermique en boucle fermée. Plus précisément, le problème de l'extinction *ne se pose plus* car les équilibres sont naturellement paramétrés de façon régulière par la consigne  $y_c$ , dès que  $k_I \neq 0$ . Cependant, la question de la stabilité demeure intacte.

**Remarque II.7 (sur le retour purement intégral)** Compte tenu des réflexions précédentes, il est légitime d'envisager la stabilisation par un retour uniquement intégral. Cependant, nous allons voir que le gain proportionnel  $k_P$  intervient seul dans l'une des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité, en l'occurrence  $\chi_1^P = \chi_1^I > 0$ , tandis que la boucle ouverte correspond au cas  $k_P = 1$ . Ainsi, il est clair que si cette condition est violée pour  $k_P = 1$ , le réacteur ne sera pas stable quelle que soit la valeur du gain intégral  $k_I$ . Ainsi, l'utilisation d'un retour purement intégral règle certes directement la question de la multiplicité des états d'équilibre, mais peut conduire à une impasse quant au problème de la stabilisation.  $\triangle$

<sup>4</sup>un terme en dérivée pour compléter PI en PID n'est d'aucune utilité puisque  $\dot{y}$  ne fait pas partie de l'état.

### II.3.2 Stabilisation locale.

#### Choix des gains.

Le linéarisé du système (II.15) ne dépend pas de  $z$ . Il s'écrit:

$$L^{PI}(y, k_P, k_I) = \begin{pmatrix} -(q + D\sigma\gamma(y)) & -D\sigma x\gamma'(y) & 0 \\ BD\sigma\gamma(y) & BD\sigma x\gamma'(y) - q'k_P & -q'k_I \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{x=x_{iso}(y)}$$

Pour le choix des gains  $k_P$  et  $k_I$ , nous allons appliquer le critère de stabilité de Routh, ou plutôt une version équivalente due à Liénard et Chipart (théorème B.37). Tout d'abord, on calcule le polynôme caractéristique de  $L^{PI}$

$$\chi^{PI}(s, y, k_P, k_I) = s^3 + \lambda_1^{PI}(y, k_P, k_I)s^2 + \lambda_2^{PI}(y, k_P, k_I)s + \lambda_3^{PI}(y, k_P, k_I)$$

avec, en reprenant les notations (II.6) du retour proportionnel:

$$\begin{cases} \lambda_1^{PI}(y, k_P, k_I) = \lambda_1^P(y, q'k_P) = q'k_P + (q + D\sigma\gamma(y)) - BD\sigma x_{iso}(y)\gamma'(y) \\ \lambda_2^{PI}(y, k_P, k_I) = \lambda_2^P(y, q'k_P) + q'k_I = (q + D\sigma\gamma(y))q'k_P - qBD\sigma x_{iso}(y)\gamma'(y) + q'k_I \\ \lambda_3^{PI}(y, k_P, k_I) = (q + D\sigma\gamma(y))q'k_I \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

L'application directe du critère de Liénard et Chipart, condition 2) avec  $n = 3$ , fournit des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité:

$$\begin{cases} \lambda_1^{PI} > 0 \\ \lambda_3^{PI} > 0 \\ \lambda_1^{PI} \lambda_2^{PI} - \lambda_3^{PI} > 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Compte tenu de:

$$\lambda_1^{PI} \lambda_2^{PI} - \lambda_3^{PI} = (q'k_P - BD\sigma x_{iso}(y)\gamma'(y))q'k_I + \lambda_1^P \lambda_2^P$$

on est amené à choisir le coefficient de  $q'k_I$  strictement positif:

$$q'k_P - BD\sigma x_{iso}(y)\gamma'(y) > 0$$

et dans ce cas, la condition  $\lambda_1^{PI} = \lambda_1^P > 0$  est vérifiée. De même:

$$\lambda_2^P = (q + D\sigma\gamma(y))(q'k_P - BD\sigma x_{iso}(y)\gamma'(y)) \frac{q}{q + D\sigma\gamma(y)}$$

est  $> 0$ , car  $0 < \frac{q}{q + D\sigma\gamma(y)} < 1$ . De fait, la condition  $\lambda_1^{PI} \lambda_2^{PI} - \lambda_3^{PI} > 0$  est automatiquement vérifiée, pourvu que le gain intégral  $k_I$  soit choisi  $> 0$ . En conclusion, nous venons d'obtenir deux conditions suffisantes de stabilité:

$$\begin{cases} q'k_P > BD\sigma x_{iso}(y)\gamma'(y) \\ k_I > 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

et un résultat de stabilisation uniforme:

on rend tous les équilibres du réacteur (II.1) quasiment accessibles par la consigne  $y_c$  et **localement** asymptotiquement stables avec rejet des biais, en appliquant un retour proportionnel intégral (II.14) dont les gains  $k_P$  et  $k_I$  satisfont aux deux inégalités (II.18) uniformément en  $y$ .

Pratiquement, la première inégalité de (II.18) fixe le choix du gain proportionnel  $k_P$ , moyennant quoi le gain intégral  $k_I$  peut être pris strictement positif arbitraire. A cet égard, il est à noter que la première inégalité de (II.18) est plus forte que ses homologues (II.7). Effectivement, l'ajout d'un terme intégral peut déstabiliser le réacteur commandé par un retour affine dont le gain aurait été calculé selon les inégalités (II.7).

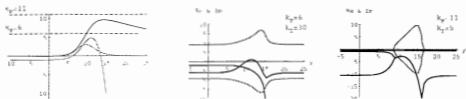


Figure 11.10: Choix des gains  $k_P$  et  $k_I$ , et incidence sur les valeurs propres.

Ceci se trouve illustré par la figure 11.10. Le diagramme de gauche représente en effet le membre de droite de la première inégalité de (II.18) et rappelle (en gris) les courbes associées au cas proportionnel, de façon à mettre en évidence deux gains  $k_P$  dont l'un  $k_P = 11$  est stabilisant tandis que l'autre  $k_P = 6$  vérifie seulement les conditions (II.7). Ceci se retrouve sur les deux autres graphiques qui représentent les trois valeurs propres du système commandé (II.15). Le choix  $k_P = 6$  associé à  $k_I = 30$  génère un segment de températures instables, borné par deux températures critiques en lesquelles le réacteur présente une bifurcation de Hopf<sup>5</sup>. Par ailleurs, la comparaison du cas stabilisant avec la figure (II.6) montre que le terme intégral a introduit un pôle réel dont le graphe est très proche de l'axe des  $y$ , c'est-à-dire faiblement stable.

### Simulations.

On présente tout d'abord le bon contrôleur. Sur la figure 11.11, la consigne  $y_c$  affine par morceaux varie de 17 à 12, et la température  $y$  suit le mouvement avec un léger retard. Noter que la courbe de bouclage passe par un minimum: ceci n'est pas spécifique au cas PI voir la figure II.9 -, mais traduit simplement le fait que passé le seuil critique  $u_c$ , il faut *augmenter* la température d'entrée (ou diminuer le refroidissement) pour continuer à faire baisser

<sup>5</sup>apparition ou disparition d'un cycle limite consécutif au changement de signe de la partie réelle d'un couple de valeurs propres imaginaires conjuguées, voir par exemple [54] et [55].

la température de fonctionnement du réacteur (voir la figure II.2).

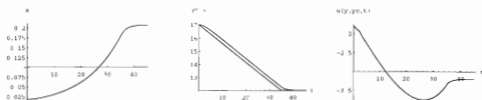


Figure II.11: Stabilisation uniforme par retour proportionnel intégral de température.

A titre d'illustration de ce qu'il ne faut pas faire, on a représenté sur la figure II.12 les résultats de l'application d'un mauvais contrôleur PI, dont le gain  $k_P$  a été choisi selon les inégalités (II.7), c'est-à-dire tel que le contrôleur P associé soit stabilisant. La consigne est variée de façon à traverser la valeur critique supérieure de bifurcation, proche de 12.5 d'après la figure II.10, qui correspond au fait que la partie réelle de deux valeurs propres imaginaires conjuguées devient strictement positive. L'apparition concomitante d'un cycle limite stable se manifeste par des oscillations non amorties d'amplitude constante en régime permanent, oscillations que le bouclage ne fait que reproduire. Dans le même ordre d'idée, [46] montre qu'il est possible de trouver un retour PI dont l'application engendre un comportement chaotique du réacteur commandé. Comme on sait que de tels phénomènes ne peuvent se produire qu'à partir de la dimension 3 (voir [12]), on comprend que le CSTR puisse servir de "laboratoire" à certains mathématiciens.

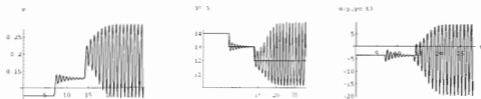


Figure II.12: Bifurcation de Hopf consécutive à un mauvais choix de gains.

### II.3.3 Stabilisation globale.

Pour ce qui est de la stabilisation globale, nous allons voir que contrairement au cas local, le choix du gain proportionnel suivant (II.11) correspondant au retour P n'est pas remis en cause

par l'ajout d'un terme intégral. On procède comme pour le retour P en écrivant le système bouclé (II.15) dans les coordonnées centrées à l'équilibre:

$$\begin{cases} \dot{X} &= -(q + D\alpha \gamma(Y + \bar{y}))X - D\alpha \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y})Y \\ \dot{Y} &= B D\alpha \gamma(Y + \bar{y})X - (q'k_P - B D\alpha \bar{x}\Gamma(Y, \bar{y}))Y - q'k_I Z \\ \dot{Z} &= Y \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Cette fois, on suppose  $k_I > 0$  et on prend pour fonction de Liapunov:

$$W(X, Y, Z) = V(X, Y) + \frac{q'k_I}{2} Z^2 = \frac{1}{2} X^2 + \frac{q'k_P}{2} Y^2 + \frac{q'k_I}{2} Z^2$$

ce qui permet d'obtenir:

$$\dot{W} = \dot{V}_P - q'k_I XY + q'k_I XY = \dot{V}_P$$

où  $\dot{V}_P$  désigne l'expression (II.9) de  $\dot{V}$  calculée dans le cas du retour P. D'après les résultats sur le retour P, le choix de  $q'k_P$  (alors noté  $q'_I$ ) satisfaisant l'inégalité (II.11) assure:

$$\forall (X, Y, Z), (X, Y) \neq (0, 0) \Rightarrow \dot{W} < 0$$

mais ceci entraîne seulement que les trajectoires convergent vers la droite  $X = Y = 0$ . Pour conclure que l'équilibre  $X = Y = Z = 0$  est bien globalement asymptotiquement stable, on utilise le théorème d'invariance de Lasalle (cf [38]) qui stipule dans notre cas que les trajectoires convergent vers le plus grand sous-ensemble invariant de la droite  $X = Y = 0$ . Pour déterminer ce sous-ensemble, on remplace  $X$  et  $Y$  par 0 dans le système (II.19):

$$\begin{cases} \dot{X} &= 0 \\ \dot{Y} &= -q'k_I Z \\ \dot{Z} &= 0 \end{cases}$$

d'où il ressort que le plus grand invariant est effectivement réduit au point d'équilibre (0, 0, 0). Finalement, les inégalités sur les gains s'écrivent:

$$\begin{cases} q'k_P > B D\alpha x_m \gamma'_{\max} + \frac{B}{4q} D\alpha^2 (\gamma_{\max} + x_m \gamma'_{\max})^2 \\ k_I > 0 \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

et l'on a le résultat suivant:

*on rend tous les équilibres du réacteur (II.1) quasistaticquement accessibles par la consigne  $y_c$  et globalement asymptotiquement stables avec rejet des biais, en choisissant un retour PI en température (II.14) dont les gains satisfont les conditions (II.20).*

## II.4 Résumé.

Un CSTR élémentaire possédant 3 équilibres est susceptible de présenter des phénomènes d'extinction lorsqu'on le commande par température d'entrée ou température de refroidissement constante. Ces phénomènes sont caractérisés par une baisse rapide de la température

de fonctionnement consécutive à la disparition simultanée de deux équilibres, entraînant l'accrochage spontané au troisième.

On peut y remédier en utilisant un retour de température de type affine, ou proportionnel intégral. Dans les deux cas, le choix d'un gain proportionnel assez grand permet de stabiliser localement ou globalement le réacteur à une température quelconque atteinte en faisant varier la consigne auxiliaire. De plus, si le gain proportionnel est suffisant, le gain intégral du retour PI doit seulement vérifier une contrainte de signe.

## Chapitre III

# Diagramme thermique, emballement et bifurcation col-nœud

### III.0 Introduction.

Le phénomène d'extinction mis en évidence au chapitre précédent est un exemple de ce que l'on appelle un *emballement*, c'est-à-dire une variation importante de l'état du réacteur dont l'amplitude semble disproportionnée par rapport aux causes qui l'ont engendrée, comme un faible changement du point de consigne ou une petite perturbation. Énoncé sous cette forme, le problème rappelle une situation mathématique classique: lorsqu'un objet mathématique paramétré - fonction, champ de vecteur - voit sa nature changer de façon qualitative pour une valeur particulière - *critique* - du paramètre, on dit qu'il se produit une *bifurcation*. Ce chapitre est destiné à montrer que les bifurcations de type *col-nœud*, les plus simples, constituent un bon cadre de modélisation pour les phénomènes d'emballement des réacteurs chimiques.

Outre le CSTR élémentaire du chapitre précédent, on peut songer à la situation suivante à peine plus complexe: deux réactions exothermiques en chaîne, la principale  $A \rightarrow B$  fonctionnant au point chaud étant accompagnée d'une réaction secondaire indésirable  $B \rightarrow C$  fonctionnant elle au point froid, c'est-à-dire avec un taux de conversion très faible. Si pour une raison quelconque on est amené à augmenter la température de fonctionnement du réacteur, il se peut que l'on active cette dernière réaction, provoquant le cas échéant une brusque et incontrôlable augmentation de la température nécessitant éventuellement l'arrêt du réacteur (cf chapitre de modélisation).

Dans ce qui suit, nous étudions les équilibres du modèle général de CSTR (I.7):

$$\begin{cases} \dot{x} = -R(x, y) + q(x_{in} - x) \\ \dot{y} = B(x, y) + q'(u - y) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Nous procédons en plusieurs étapes. Tout d'abord nous donnons des conditions portant sur la cinétique isotherme  $R$  de façon à pouvoir dériver un diagramme thermique - bien connu des chimistes - analogue de la courbe en  $S$  du CSTR élémentaire. Cette étape fait intervenir un



résultat mathématique - version globale du théorème des fonctions implicites - qui fait l'objet de l'annexe A. Ensuite, ayant mis en évidence le diagramme de bifurcation sous-jacent, nous étudions l'effet d'un retour de température de type proportionnel, puis de type proportionnel intégral. Tout ceci après quelques rappels sur les bifurcations stationnaires, précédés d'une définition.

**Définition III.1 (CSTR isotherme)** Nous appellerons CSTR isotherme associé à (III.1) le sous-modèle constitué des équations de concentration, la température  $y$  étant alors considérée comme un paramètre constant.

### III.1 Préliminaires: bifurcations et commande.

#### III.1.1 Rappels élémentaires sur les bifurcations col-nœud d'états stationnaires.

Nous nous contentons ici de rappeler quelques trivialisés et un peu de vocabulaire. La théorie des bifurcations constitue la matière de nombreux ouvrages de tous niveaux, dont par exemple [31] et [29]. La commande  $u$  est ici supposée constante: c'est le paramètre de bifurcation.

On considère une application régulière  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et on s'intéresse aux équilibres du système:  $\dot{y} = F(y, u)$ , c'est-à-dire aux solutions en  $y$  de l'équation implicite:  $F(y, u) = 0$ , au voisinage d'un équilibre donné, que l'on peut supposer sans perte de généralité être  $(0, 0)$ . Si le jacobien de  $F$  par rapport à  $y$  au point  $(0, 0)$  est inversible, en l'occurrence si  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0$ , le théorème des fonctions implicites permet de conclure que les équilibres forment au voisinage de  $(0, 0)$  une courbe  $y = y(u)$  localement unique et paramétrée par  $u$ . La réciproque n'est évidemment pas vraie comme le montre l'exemple suivant:  $F(y, u) = y^3 - u$ .

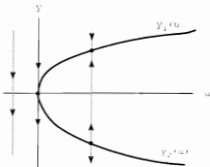


Figure III.1: Bifurcation col-nœud : diagramme de bifurcation et portrait de phase.

Lorsque  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$  mais avec  $\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) \neq 0$ , les équilibres constituent encore une sous-variété en  $(0, 0)$  pour les mêmes raisons, mais cette fois il n'est plus possible de les paramétrer par  $u$ . Au contraire, la courbe est alors donnée par un graphe  $u = u(y)$ . A ce stade, la situation est totalement symétrique de la précédente, mais le problème pratique vient du fait que les variables  $y$  et  $u$  n'ont pas un rôle symétrique dans les applications. Dans le plan  $(Ou, Oy)$ , les équilibres sont constitués, sous l'hypothèse supplémentaire  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0$ , de deux courbes  $y_1(u)$  et  $y_2(u)$  définies pour  $u \geq 0$  ou  $u \leq 0$  suivant les cas. De fait, lorsque le paramètre  $u$  change de signe, par exemple sous l'effet d'une perturbation, 2 équilibres apparaissent ou disparaissent en même temps (voir figure III.1).

La situation critique  $u = 0$  pour laquelle les deux équilibres potentiels se trouvent confondus en un seul est structurellement instable, au sens où une petite variation de  $u$  la détruit: on parle alors de *bifurcation*, d'états stationnaires puisque le nombre d'équilibres change et de type *col-nœud* à cause du jeu d'hypothèse sur les dérivées de  $F$ . Le graphe des équilibres dans les coordonnées  $(u, y)$  dans cet ordre s'appelle le *diagramme de bifurcation*, et le point critique  $(0, 0)$  dans le cas col-nœud est souvent appelé *point tournant* pour des raisons graphiques évidentes.

Il est facile de vérifier à partir des hypothèses sur  $F$  que les deux branches  $y_1(u)$  et  $y_2(u)$  sont nécessairement de stabilité différente on dit qu'il y a *échange de stabilité* au point critique -, ce qui permet de tracer les portraits de phases local du système de départ en fonction de  $u$  (figure III.1). Lorsque  $u$  est une commande, il est à noter qu'il n'est pas possible, partant d'un équilibre situé sur l'une des branches, d'atteindre un équilibre situé sur l'autre en passant de façon quasistatique par tous les points intermédiaires. En effet, à supposer que l'on arrive à demeurer en  $(0, 0)$ , il n'est pas possible de prévoir a priori si l'on va continuer sur l'autre branche ou si l'on va revenir en arrière.

### III.1.2 Effet d'un bouclage.

Nous décrivons ici l'effet d'un bouclage sur le diagramme de bifurcation lorsque celle-ci a justement lieu par rapport à la commande.

Lorsque l'on applique le bouclage statique  $u = u(y, v)$  au système  $\dot{y} = F(y, u)$ ,  $v$  étant une consigne auxiliaire permettant de changer de point de fonctionnement, les nouveaux équilibres sont donnés par le diagramme de bifurcation du système bouclé:  $F_b(y, v) = F(y, u(y, v)) = 0$ . Cependant, on les retrouve sur l'ancien diagramme de bifurcation, à l'intersection de la courbe  $F(y, u) = 0$  et de la *courbe de bouclage*  $u = u(y, v)$  pour  $v$  fixé. Ceci est illustré par la figure III.2.

En cas de multiplicité des états stationnaires pour le système de départ, la stratégie générale pour supprimer les bifurcations éventuelles consiste donc à trouver une famille de courbes  $\{u = u(y, v), v \in V\}$  telle que le nombre de points d'intersection avec la courbe  $F(y, u) = 0$  soit indépendant de  $v$ . Il est important de remarquer que ce faisant, on ne s'assure absolument pas de la stabilité des équilibres du système commandé. Simplement, ceux-ci peuvent désormais être régulièrement paramétrés par la nouvelle consigne auxiliaire  $v$ , tandis que leurs homologues du système de départ ne pouvaient l'être par  $u$ .

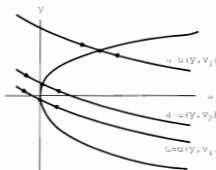


Figure III.2: Effet d'un bouclage statique  $u = u(y, v)$  sur le diagramme de bifurcation d'origine.

**Définition III.2 (accessibilité quasistatique)** Lorsque les équilibres du système  $\dot{X} = F(X, u)$  forment une courbe pour  $u$  dans un intervalle, nous les qualifierons de quasistatiquement accessibles par  $u$  si cette courbe peut être régulièrement paramétrée par  $u$ .

Cette définition est donnée pour un système dans  $\mathbb{R}^n$  mais toujours avec une seule commande. D'après le théorème des fonctions implicites, une condition suffisante, et génériquement nécessaire, d'accessibilité quasistatique est que le jacobien de  $F$  par rapport à  $X$  soit inversible en tout point d'équilibre, de sorte que localement:

$$F(X, v) = 0 \Leftrightarrow X = X(u)$$

En dimension un, il est donc facile, en cas de bifurcation col-nœud, de restaurer, au moins localement, l'accessibilité quasistatique par bouclage. En dimension quelconque, une stratégie consiste à dériver de  $F(X, u) = 0$  une équation d'équilibre  $F(y, u) = 0$  impliquant la sortie scalaire  $y$ , puis à appliquer la méthode monodimensionnelle. C'est ce que nous allons faire pour le CSTR.

**Remarque III.3 (dimension quelconque)** Pour ne pas alourdir l'exposé, nous n'avons pas donné les conditions de bifurcation col-nœud en dimension supérieure à un. Ceci sera fait plus loin, lors d'une étude systématique généralisant localement la situation du CSTR au cas d'un système non linéaire SISO quelconque.  $\triangle$

**Remarque III.4 (bouclage dynamique)** Si l'on considère maintenant le bouclage dynamique:  $\dot{u} = G(y, u, v)$ , la dimension du système commandé passe à 2, et ses équilibres sont solution de:

$$\begin{cases} F(y, u) = 0 \\ G(y, u, v) = 0 \end{cases}$$

Lorsque  $\frac{\partial G}{\partial v} \neq 0$ , la seconde équation s'inverse en:  $u = u(y, v)$ , et en terme de diagramme de bifurcation, on se retrouve dans la situation du bouclage statique. Sinon, le bouclage

dynamique introduit une relation entre  $y$  et  $v$ , ce qui revient sur la figure III.2 à considérer des courbes de bouclage horizontales. Si le niveau de  $y$  change avec  $v$ , on aura aussi restauré l'accessibilité quasistatique. Nous examinerons cette situation plus en détails dans le cadre du retour proportionnel intégral.  $\triangle$

## III.2 Diagramme thermique.

### III.2.1 Notion de cinétique isotherme régulière.

Le diagramme thermique du CSTR élémentaire (figure II.2) a été obtenu en inversant l'équation stationnaire de concentration sous la forme:  $x = x(y)$ , et en reportant cette expression dans l'équation stationnaire de température, laquelle fut scindée en deux termes pour prendre la forme d'un équilibre:

$$\text{CHALEUR CRÉE} = \text{CHALEUR ÉVACUÉE}$$

à la température  $y$  et pendant une unité de temps (les termes sont homogènes à des puissances plutôt qu'à des énergies).

La généralisation est immédiate: le problème consiste à inverser les équations stationnaires de concentration, c'est-à-dire exprimer les équilibres du CSTR isotherme associé en fonction de la température  $y$ . Symboliquement, on cherche un résultat de la forme:

$$-\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) + q(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_{iso}(y)$$

mais avec des indications sur le domaine de définition de la fonction  $\mathbf{x}_{iso}(y)$ . C'est pourquoi nous allons utiliser une version globale du théorème des fonctions implicites - voir l'annexe A - et décidons d'appeler *cinétiques régulières* les fonctions  $\mathbf{R}$  qui satisfont les conditions de ce théorème.

On note pour cela  $X = ]0, +\infty[^n$  l'ouvert des concentrations  $\mathbf{x}$ ,  $Y = [y^{\min}, y^{\max}]$  les températures de fonctionnement,  $Q = [q^{\min}, q^{\max}]$  les débits,  $X_m = X_{m,1} \times \dots \times X_{m,n} = [x_{m,1}^{\min}, x_{m,1}^{\max}] \times \dots \times [x_{m,n}^{\min}, x_{m,n}^{\max}]$  les concentrations à l'entrée du réacteur et  $P = Y \times Q \times X_m$  le domaine des paramètres résultant pour le réacteur isotherme. On rappelle qu'une matrice carrée est dite *stable* lorsque toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

**Définition III.5 (Cinétique régulière)** *Le CSTR (III.1) est dit à cinétique (isotherme) régulière sur  $P$  lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

$$(CR1) \quad \forall \mathbf{x} \in X \quad \forall (y, q) \in Y \times Q, \quad -D_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) - qI \text{ est stable.}$$

$$(CR2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1 \dots n, \\ |x_i| \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ \inf_{\{(y,q,\mathbf{x}_m) \in Y \times Q \times X_m \text{ et } x_j \in ]0, +\infty[ \text{ pour } j \neq i\}} \|\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) + q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)\| \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

$$(CR3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1 \dots n\}, \exists j \in \{1 \dots n\}, \\ \forall (\mathbf{x}; y, q, \mathbf{x}_m) \in X \times P \quad -R_j(\mathbf{x}, y) + q(x_{m,j} - x_j)|_{x_i=0} \neq 0. \end{array} \right.$$

La condition la plus contraignante est **(CR1)**, qui entraîne l'inversibilité locale des équations stationnaires de concentration ainsi que la stabilité locale des équilibres du réacteur isotherme. Cette deuxième propriété, qui ne s'impose pas pour la construction du diagramme thermique, sera utilisée ultérieurement pour la stabilisation du réacteur non isotherme (voir le chapitre suivant). En pratique, il suffit de vérifier la stabilité pour  $q = q^{\min}$  puisque les valeurs propres pour  $q > q^{\min}$  se déduisent de celles associées à  $q = q^{\min}$  en retranchant à chacune de ces dernières la différence  $q - q^{\min}$ .

En revanche, les deux autres conditions, destinées à assurer l'inversibilité globale, sont plus couramment vérifiées par les CSTR. À l'infini d'une part, le terme de transport - avec  $x_{in}$  borné - ou la forme des cinétiques courantes rendent infinie la norme de la vitesse  $\dot{x}$  (condition **(CR2)**, prendre par exemple pour norme la somme des valeurs absolues des composantes). Lorsque l'un des  $x_i$  est nul, le constituant associé ne peut être un produit par définition, et si c'est un réactif il ne peut être à l'équilibre parce qu'il est constamment introduit dans le réacteur (condition **(CR3)**). Ceci serait faux dans le cas d'un réacteur fermé, lequel possède nécessairement pour équilibre la solution triviale  $\mathbf{x} = 0$ ; nous nous limiterons donc désormais aux CSTRs stricts ( $q > 0$ ).

**Remarque III.6 (concentrations bornées)** En pratique, il est souvent possible de montrer par des majorations des composantes de  $\dot{\mathbf{x}}$  que les trajectoires dont les concentrations initiales se situent dans un pavé borné  $X_b = [0, X_1^{\max}] \times [0, X_n^{\max}]$  restent "piégées" dans ce pavé dont on dit alors qu'il est positivement invariant sous l'action du champ moyennant quoi en prenant  $X = ]0, X_1^{\max}] \times ]0, X_n^{\max}]$  au lieu de  $X = ]0, +\infty[$  on satisfait automatiquement la condition **(CR2)** puisqu'il n'est alors plus possible de faire tendre  $\mathbf{x}$  vers  $+\infty$  dans  $X$ . Par exemple, les concentrations en réactifs au sein du réacteur sont en général inférieures à celles des réactifs introduits dans ce réacteur, et les concentrations en produits sont à leur tour limitées par celles des réactifs dont ils sont issus. Cette démarche a d'ailleurs été appliquée pour le CSTR élémentaire dans le cadre de la remarque II.6 sur l'utilisation du critère de Bendixson.  $\triangle$

Avant de poursuivre, donnons quelques exemples de cinétique régulière (pour l'aspect modélisation, se reporter au premier chapitre). En pratique, la démarche consiste à fixer le domaine  $P$  de façon à satisfaire les conditions **(CR1, 2, 3)**.

**Exemple III.7 (réactions consécutives:  $X_1 \xrightarrow{k_1} X_2 \xrightarrow{k_2} X_3$ )** Nous reprenons ici le modèle (I.8) du chapitre de modélisation et les hypothèses associées sur les cinétiques  $r_1(x_1, y)$ ,  $r_2(x_2, y)$ . Le jacobien du réacteur isotherme s'écrit:

$$-D_x \mathbf{R}(\mathbf{x}, y) - qI = \begin{pmatrix} -\frac{\partial r_1}{\partial x_1}(x_1, y) & q & 0 \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_1}(x_1, y) & -\frac{\partial r_2}{\partial x_2}(x_2, y) - q & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres - sur la diagonale - sont réelles et strictement négatives puisque inférieures à  $-q$  (condition **(CR1)**).

Lorsque  $x_1 \rightarrow +\infty$ ,  $\|\dot{\mathbf{x}}\| \geq |x_1| \geq r_1(x_1, y) + q(x_1 - x_{1,in}) \geq q^{\min}(x_1 - x_{1,in}^{\max})$  qui tend vers  $+\infty$  pour  $q^{\min} > 0$  et  $x_{1,in}^{\max} < +\infty$ . Si  $x_2 \rightarrow +\infty$ ,  $\|\dot{\mathbf{x}}\| \geq |x_1| + |x_2| \geq r_2(x_2, y) + q(x_2 - x_{1,in} - x_{2,in})$  dont l'inf en  $q$  tend vers  $+\infty$  sous la condition supplémentaire:  $x_{2,in}^{\max} < +\infty$ . Ainsi, **(ii)** est vérifiée dès que l'on choisit  $q^{\min} > 0$  et  $x_{1,in}^{\max}$ ,  $x_{2,in}^{\max}$  finis.

En  $x_1 = 0$ , le champ s'écrit :  $\begin{pmatrix} q x_{1, \text{in}} \\ -r_2(x_2, y) + q(x_{2, \text{in}} - x_2) \end{pmatrix}$  et la première composante ne s'annule pas si l'on prend  $q^{\text{min}} > 0$  et  $x_{1, \text{in}}^{\text{min}} > 0$ , ce qui signifie que l'on doit effectivement introduire une quantité non nulle de réactif  $X_1$  dans le réacteur. Pour  $x_2 = 0$ , le champ s'écrit :  $\begin{pmatrix} -r_1(x_1, y) + q(x_{1, \text{in}} - a) \\ r_1(x_1, y) + q x_{2, \text{in}} \end{pmatrix}$ . Si  $x_1 = 0$ , on est ramené au cas précédent, et si  $x_1 \neq 0$ ,  $r_1(x_1, y) + q x_{2, \text{in}} \geq r_1(x_1, y) > 0$  pour toute valeur de  $(x_1, y)$  dans  $]0, +\infty[ \times ]y_0, +\infty[$ . La condition (iii) est donc vérifiée sous les hypothèses  $q^{\text{min}} > 0$  et  $x_{1, \text{in}}^{\text{min}} > 0$ .

En résumé, le CSTR isotherme associé au modèle (I.8) vérifie les conditions de cinétique régulière dans le domaine de fonctionnement suivant :

température quelconque,

$q^{\text{min}} > 0$  : débit quelconque mais non nul (ceci exclut le cas du réacteur fermé),

$x_{1, \text{in}}^{\text{min}} > 0$  : concentration en réactif  $X_1$  non nulle à l'entrée du réacteur

Ceci correspond au domaine  $P = ]y_0, +\infty[ \times ]q^{\text{min}}, +\infty[ \times ]x_{1, \text{in}}^{\text{min}}, x_{1, \text{in}}^{\text{max}}[ \times ]0, x_{2, \text{in}}^{\text{max}}[$  avec  $q^{\text{min}}$  et  $x_{1, \text{in}}^{\text{min}}$  strictement positifs d'une part, et  $x_{1, \text{in}}^{\text{max}}, x_{2, \text{in}}^{\text{max}}$  finis d'autre part, ce qui en pratique ne constitue pas une véritable restriction.

**Exemple III.8 (équilibre) :**  $X_1 - X_2$  Nous adoptons la même démarche pour le modèle (I.9). Cette fois, le jacobien du réacteur isotherme n'est plus triangulaire :

$$-D_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) - q\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial r_1}{\partial x_1}(x_1, y) - q & \frac{\partial r_2}{\partial x_2}(x_2, y) \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_1}(x_1, y) & -\frac{\partial r_2}{\partial x_2}(x_2, y) - q \end{pmatrix}$$

mais les valeurs propres,  $-q$  et  $-q - \frac{\partial r_1}{\partial x_1} - \frac{\partial r_2}{\partial x_2}$  sont encore réelles et strictement négatives.

Comme :  $\|\mathbf{x}\| \geq |x_1 + x_2| = q|x_1 + x_2 - x_{1, \text{in}}|$ , on fait bien tendre  $\|\mathbf{x}\|$  vers  $+\infty$  par  $x_1$  ou  $x_2 \rightarrow +\infty$  à condition de s'être fixé des bornes  $x_{1, \text{in}}^{\text{min}}, x_{1, \text{in}}^{\text{max}}$ , d'où (CR2). Enfin (CR3) s'obtient de façon tout-à-fait analogue au cas des réactions consécutives, avec  $x_{1, \text{in}}^{\text{min}} > 0$ . La propriété de cinétique régulière est donc vérifiée sur le domaine :  $P = ]y_0, +\infty[ \times ]q^{\text{min}}, +\infty[ \times ]x_{1, \text{in}}^{\text{min}}, x_{1, \text{in}}^{\text{max}}[$ .

**Exemple III.9 (autocatalyse) :**  $X_1 + X_2 - 2X_1$  Si on prend pour cinétique :  $r(x_1, x_2, y) = k(y)x_1x_2$  (Loi d'Action de Masse), un tel système n'est pas à cinétique régulière car l'autocatalyse engendre la possibilité de changement du nombre (et de la stabilité) des équilibres. Pour le voir, il suffit d'écrire le jacobien du CSTR :

$$-D_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) - q\mathbf{I} = \begin{pmatrix} k(y)x_2 - q & k(y)x_1 \\ -k(y)x_2 & -k(y)x_1 - q \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres,  $-q$  et  $-q + k(x_1 - x_2)$  sont toujours réelles mais pas strictement négatives, ce qui viole la condition (CR1). Sur le thème autocatalyse et multiplicité des états stationnaires, on pourra consulter [58] dans lequel entre autres sont traités quelques exemples classiques.

**Remarque III.10** Le contre-exemple précédent montre que les systèmes dont la cinétique est donnée par la Loi d'Action de Masse ne sont pas toujours à cinétique régulière, loin s'en faut. En fait, la propriété (CR1) nous semble intuitivement bien plus liée à au réseau stœchiométrique qu'à la forme des lois cinétiques. A cet égard, les réacteurs isothermes stables sont ceux dont le réseau des réactions possède une certaine orientation globale, orientation qui ne peut conduire asymptotiquement qu'à un équilibre. Qualitativement, la présence

de cycles met à mal cette possibilité d'orientation, et l'on retrouve l'idée (très) générale que les bouclages naturels sont un facteur d'instabilité, mais il ne nous est toutefois pas possible de donner aujourd'hui un contenu précis à une telle notion d'orientation. Le lecteur intéressé pourra consulter à ce sujet les travaux de Feinberg [23] [24] [25].  $\triangle$

### III.2.2 Diagramme thermique stationnaire.

Tout l'intérêt de la notion de cinétique régulière provient comme annoncé de la possibilité d'inverser globalement les équations d'équilibre isothermes.

**Lemme III.11** *Si le CSTR (III.1) est à cinétique régulière sur  $P$ , l'équation stationnaire isotherme:  $-\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) + q(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}) = 0$  vérifie les conditions (I) (II) (III) (IV) du théorème A.1*

**Preuve :** Tout d'abord, le pavé  $P$  est bien connexe par arcs et simplement connexe, donc la condition (IV) est vérifiée sans restriction sur les bornes des différents intervalles qui le composent. Ensuite:

(CR1)  $\Leftrightarrow$  (I): en effet, si les valeurs propres de  $D_{\mathbf{x}}f = -D_{\mathbf{x}}\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) - qI$  sont à partie réelle strictement négatives, elles sont a fortiori non nulles.

(CR2)  $\Leftrightarrow$  (II): en effet, la condition (II) s'écrit sous forme développée de la façon suivante:

$$\forall i = 1 \dots n, |x_i| \rightarrow +\infty \Rightarrow \inf_{p \in P \text{ et } j, \text{ pour } j \neq i} \|f(\mathbf{x}, p)\| \rightarrow +\infty.$$

(CR3)  $\Leftrightarrow$  (III): en effet, le bord de  $X$  est constitué par la réunion des hyperplans d'équation  $x_i = 0$ . De fait, la condition (CR3) signifie qu'il n'existe pas d'équilibre  $\mathbf{x} \in \partial X$ , ce qui est exactement (III).  $\square$

**Remarque III.12** Le domaine  $P$  n'est pas nécessairement ouvert, aussi nous n'utiliserons pas le théorème A.1, mais sa généralisation A.28.  $\triangle$

Nous pouvons maintenant inverser les équations stationnaires de concentration et construire le ou les diagrammes thermiques d'un CSTR à cinétique régulière.

**Proposition III.13 (Equilibres d'un CSTR à cinétique régulière)** *Si le CSTR (III.1) est à cinétique régulière sur  $P$  il existe un entier  $\nu$  et  $\nu$  applications régulières  $\mathbf{x}_{\text{iso}}^{(k)} : P \rightarrow X, k = 1 \dots \nu$ , dont les graphes disjoints deux-à-deux constituent les équilibres dans  $X \times P$  du CSTR isotherme associé.*

*Les températures d'équilibre du CSTR (III.1) sont alors solution d'une équation implicite scalaire obtenue en injectant les concentrations  $\mathbf{x}_{\text{iso}}^{(k)}$  dans l'équation stationnaire de température, soit, pour  $(\mathbf{x}; y, q, \mathbf{x}_m) \in X \times P$ :*

$$\begin{cases} -\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) + q(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}) = 0 \\ B(\mathbf{x}, y) - q'(y - y_0) = 0 \end{cases} \iff \exists k \in \{1 \dots \nu\}, \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{iso}}^{(k)}(y, q, \mathbf{x}_m) \\ B(\mathbf{x}_{\text{iso}}^{(k)}(y, q, \mathbf{x}_m), y) = q'(y - y_0) \end{cases}$$

**Preuve :** on applique directement le lemme III.11 et le théorème A.28.  $\square$

En particulier, il suffit qu'il existe un unique équilibre isotherme  $\hat{\mathbf{x}}$  associé à un jeu de paramètres  $(\hat{y}, \hat{q}, \hat{\mathbf{x}}_m)$  pour assurer l'existence et l'unicité globale des équilibres isothermes pour tout  $(y, q, \mathbf{x}_m) \in P$ . C'est le cas par exemple lorsque la température réduite  $y_0$  correspondant au zéro absolu  $T = 0K$  appartient au domaine  $P$  car dans ces conditions,

les fonctions cinétiques s'annulent à cause des facteurs d'Arrhenius, et il existe un et un seul jeu de concentrations à l'équilibre:  $\mathbf{x}(y_0) = \mathbf{x}_{in}$ . La multiplicité éventuelle des états stationnaires pour le CSTR non isotherme provient alors uniquement du couplage avec le bilan thermique. En d'autres termes, en indexant les équilibres  $(\mathbf{x}, y)$  par la température  $y$  (et les autres paramètres), on s'est ramené à l'étude d'une équation scalaire en  $y$ , traditionnellement scindée en deux termes.

**Définition III.14 (Diagramme thermique stationnaire)** Dans les conditions de la proposition III.13, on appelle respectivement fonction de création et d'évacuation de chaleur les applications obtenues en injectant une solution stationnaire isotherme  $\mathbf{x}_{iso}(y, q, \mathbf{x}_{in})$  dans les termes correspondants de l'équation stationnaire de température:

$$HC(y, q, \mathbf{x}_{in}) = B(\mathbf{x}_{iso}(y, q, \mathbf{x}_{in}), y) \quad \text{et} \quad HR(y, q', u) = q'(y - u)$$

Les courbes partielles  $HC(y)$  et  $HR(y)$ <sup>1</sup> définies pour  $y \in Y$  à  $(q, \mathbf{x}_{in}, p, u)$  fixés constituent le diagramme thermique stationnaire du réacteur associé à la branche  $\mathbf{x}_{iso}(y, q, \mathbf{x}_{in})$  pour les températures de fonctionnement  $Y$ .

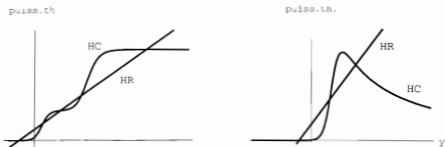


Figure III.3: Diagrammes thermiques:  $A \rightarrow B \rightarrow C$  à gauche, et  $A \rightarrow B$  à droite.

Dans la suite, nous parlerons du diagramme thermique d'un CSTR à cinétique régulière en supposant s'être fixé une branche d'équilibres  $\mathbf{x}_{iso}$  pour le CSTR isotherme associé. Pour le CSTR élémentaire du chapitre précédent, la courbe  $HC$  est la sigmoïde, dite "courbe en S" bien connue des ingénieurs chimistes (voir figure II.2). Dans le cas général, sa forme est plus complexe (voir figure III.3) mais nous nous intéressons seulement au nombre de points d'intersection avec la droite  $HR$ . De fait, plus que les courbes elles-mêmes, c'est leur position relative qui importe, d'où l'importance de leurs pentes respectives. Avant de développer ce point de vue, montrons que derrière le diagramme thermique se cache un diagramme de bifurcation classique au sens des rappels généraux ci-dessus.

<sup>1</sup>respectivement pour Heat Creation et Heat Removal.



### III.2.3 Diagramme thermique et diagramme de bifurcation.

Considérons l'équation des températures d'équilibre écrite sous la forme:

$$F(y, u) \equiv HC(y) - HR(y, u) = 0$$

Par définition, cette équation définit, lorsque  $\frac{\partial F}{\partial y}$  s'annule, un diagramme de bifurcation dans les coordonnées  $(u, y)$ . Pour chaque  $u$ , les températures d'équilibre  $y$  se lisent sur le diagramme thermique comme les abscisses des points d'intersection des deux courbes  $HC(u)$  et  $HR(y, u)$ . Le diagramme thermique permet donc de construire un diagramme de bifurcation (mais la réciproque n'est pas vraie). Par ailleurs, faire varier  $u$  dans le plan  $(u, y)$  revient à balayer les courbes de bifurcation par des verticales. Sur le diagramme thermique, cela revient à déplacer la droite  $HR$  parallèlement à elle-même, comme le montre la figure III.4. La situation critique correspond évidemment au cas où les deux courbes sont tangentes, ce qui correspond aux points à tangente verticale (points tournants) du diagramme de bifurcation.

La situation critique correspond évidemment au cas où les deux courbes sont tangentes. Lorsque l'on désire changer de point de fonctionnement, on fait varier  $u$  de sa valeur initiale  $u_1$  à une nouvelle valeur  $u_2$ . Si pour une valeur intermédiaire  $u$ , l'équilibre considéré coïncide avec un autre, les deux disparaissent et le réacteur adopte un nouveau régime stationnaire qui peut être l'un des équilibres restants. Outre le cas élémentaire traité au chapitre précédent, la figure III.4 présente deux nouveaux exemples de cette situation où l'on passe du point chaud de la réaction principale  $A \rightarrow B$  au point froid de cette même réaction (extinction,  $A \leftrightarrow B$ ) ou au point chaud d'une réaction d'énergie d'activation plus élevée (emballement,  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ).

**Remarque III.15** Par rapport à une bifurcation col-nœud théorique locale (figure III.1), la connaissance *globale* du diagramme bifurcation informe sur ce qui peut se passer lorsque la valeur critique  $u_c$  a été franchie: dans une perspective d'application, l'étude locale est insuffisante. Ceci justifie qu'on ne puisse se contenter d'inverser localement les équations stationnaires de concentration, d'où l'introduction des conditions (CR2) et (CR3) dans la définition III.5.  $\triangle$

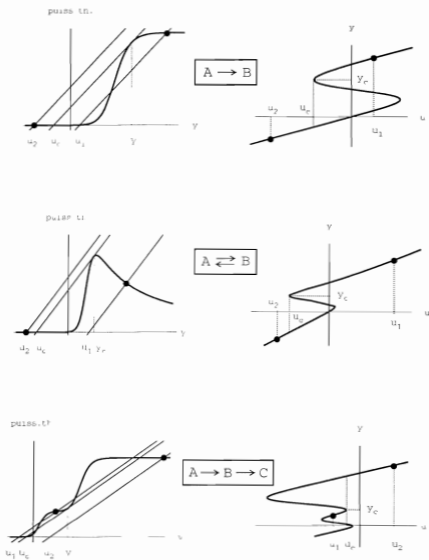


Figure III.4: Diagrammes thermiques (à gauche) et diagrammes de bifurcation (à droite).

### III.2.4 Rôle des pentes.

Dans cette section, nous étudions les positions relatives des courbes  $HC(y)$  et  $HR(y, u)$  à  $q, q'$  et  $x_m$  fixés en fonction de la valeur de la commande  $u$  considérée ici comme un paramètre.

L'examen de la figure III.5 montre qu'à l'évidence, le nombre de températures d'équilibre reste constant égal à 1 pour toute valeur de  $u$  dès que la pente  $q'$  de la droite  $HR$  est partout supérieure à la pente de la courbe  $HC$ . Ce cas correspond à l'absence de points tournants dans le diagramme de bifurcation, c'est-à-dire à l'absence de bifurcation tout court!

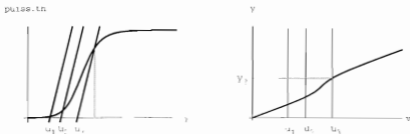


Figure III.5: Absence de bifurcation pour  $q'$  assez grand.

Pour formaliser le rôle des pentes, nous introduisons la matrice du système linéarisé en un point d'équilibre  $(x_{iso}(y, q, x_m), y)$ :

$$L(y, q, x_m) = \begin{pmatrix} -D_x R - qI & -\frac{\partial R}{\partial y} \\ D_x B & \frac{\partial B}{\partial y} - q' \end{pmatrix} \Big|_{x=x_{iso}(y, q, x_m)}$$

ainsi que la matrice jacobienne du réacteur isotherme associé:

$$L^{iso}(y, q, x_m) = -(D_x R + qI) \Big|_{x=x_{iso}(y, q, x_m)}$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite le calcul d'un déterminant par blocs.

**Lemme III.16** Soit  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  une matrice quelconque dont les blocs  $A$  et  $D$  sont carrés. On a les formules de calcul suivantes:

$$\text{si } D \text{ est inversible, } \det \mathcal{M} = \det D \det(A - BD^{-1}C)$$

si  $A$  est inversible,  $\det \mathcal{M} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$

**Preuve :** Lorsque  $D$  est inversible, on commence par décomposer  $\mathcal{M}$  sous la forme:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}$$

Puis, par combinaisons linéaires de lignes:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C)$$

ce qui donne la première formule. La seconde s'obtient en se ramenant au cas précédent par un nombre pair de permutations de lignes et de colonnes.  $\square$

Pentes et jacobiens sont reliés par le lemme suivant.

**Lemme III.17 (pentes et jacobiens)** Pour un CSTR à cinétique régulière, la pente de la courbe HC est donnée en tout  $(y, q, \mathbf{x}_m)$  par:

$$\frac{\partial HC}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial y} - D_{\mathbf{x}}B(D_{\mathbf{x}}R + qI)^{-1} \frac{\partial R}{\partial y}$$

et la relation suivante est vérifiée:

$$\det(L) = \det(L^{iso}) \left( \frac{\partial HC}{\partial y} - \frac{\partial HR}{\partial y} \right)$$

**Preuve :** Par définition de HC:

$$\frac{\partial HC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} B(\mathbf{x}_{iso}(y, q, \mathbf{x}_m), y) = D_{\mathbf{x}}B \frac{\partial \mathbf{x}_{iso}}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

et la dérivée  $\frac{\partial \mathbf{x}_{iso}}{\partial y}$  s'obtient à partir de la relation de définition de  $\mathbf{x}_{iso}$ :

$$-\mathbf{R}(\mathbf{x}_{iso}(y, q, \mathbf{x}_m), y) + q(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{iso}(y, q, \mathbf{x}_m)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{x}_{iso}}{\partial y} = -(D_{\mathbf{x}}\mathbf{R} + qI)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}$$

ce qui donne bien l'expression annoncée.

Pour le calcul de  $\det(L)$ , on utilise le lemme III.16:

$$\det(L) = \det(-D_{\mathbf{x}}\mathbf{R} - qI) \left( \frac{\partial B}{\partial y} - q' \right) + D_{\mathbf{x}}B(-D_{\mathbf{x}}\mathbf{R} - qI)^{-1} \frac{\partial B}{\partial y}$$

et le résultat cherché s'obtient en utilisant l'expression précédente de  $\frac{\partial HC}{\partial y}$  et  $\frac{\partial HR}{\partial y} = q'$ . Noter que l'inversibilité de la matrice  $(D_{\mathbf{x}}\mathbf{R} + qI)$  provient de l'hypothèse de cinétique régulière.  $\square$

Il est maintenant possible de caractériser de façon précise l'éventualité d'un emballlement thermique.

**Proposition III.18 (Emballlements d'un CSTR à cinétique régulière)** *Un CSTR à cinétique régulière ne peut pas présenter de bifurcation d'états stationnaires pour des températures  $y \in Y$  si la pente  $q'$  de la droite  $HR$  est supérieure à la pente maximale  $q^*$  de la courbe  $HC$  pour  $y \in Y$ . Dans ce cas, les équilibres sont quasistatiquement accessibles par la commande  $u$ .*

**Preuve :** En effet, on a alors  $\frac{\partial HC}{\partial y} - \frac{\partial HR}{\partial y} \leq q^* - q' < 0$  et puisque  $J_{\text{sto}}$  ne s'annule pas,  $J$  non plus.  $\square$

**Remarque III.19 (Réciproque)** On peut se demander si  $q' > q^*$  est une condition nécessaire pour ne pas présenter de bifurcation. Intuitivement - à cause de la loi d'Arrhenius -, la pente de la courbe  $HC$ , lorsque celle-ci est bien définie pour toutes les températures, tend vers 0 pour les valeurs extrêmes de  $y$ . Si  $q' < q^*$  on peut donc s'attendre (théorème des valeurs intermédiaires) à ce qu'il y ait des commandes  $u$  et des températures  $y$  telles que  $HC = HR$ ,  $\frac{\partial HC}{\partial y} = \frac{\partial HR}{\partial y} = q'$  et  $\frac{\partial^2 HC}{\partial y^2} \neq 0$ , ce qui correspond à une bifurcation col-nœud. Dans le cas limite  $q' = q^*$  le jacobien  $J$  s'annule sans que le nombre d'équilibres ne change; on a alors affaire à un point d'inflexion de  $HC$ :  $\frac{\partial^2 HC}{\partial y^2} = 0$ , situation non générique dont le prototype local  $F(y, u) = u - y^3 = 0$  a déjà été mentionné.  $\triangle$

La relation entre pentes et jacobiens permet aussi de retrouver un résultat bien connu des chimistes.

**Proposition III.20 (Instabilité des équilibres intermédiaires)** *Si un CSTR à cinétique régulière possède un équilibre dont la température vérifie:*

$$\frac{\partial HC}{\partial y} > q' = \frac{\partial HR}{\partial y}$$

*cet équilibre est nécessairement instable. Réciproquement, l'inégalité contraire:*

$$\frac{\partial HC}{\partial y} < q'$$

*exprime une condition nécessaire de stabilité (locale asymptotique) a priori non suffisante.*

**Preuve :** en effet, d'une part la relation  $\det(L) = \det(L^\infty) \left( \frac{\partial HC}{\partial y} - q' \right)$  et l'hypothèse de cinétique régulière entraînent:

$$\operatorname{sgn} \det(L) = (-1)^n \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial HC}{\partial y} - q' \right)$$

d'autre part une condition nécessaire de stabilité est que les coefficients du polynôme caractéristique de  $L$  soient tous  $> 0$  (Hurwitz, théorème B.34), et en particulier le terme constant:

$$(-1)^{n+1} \det(L) > 0$$

qui équivaut donc ici à:

$$\frac{\partial HC}{\partial y} - q' < 0$$

d'où l'énoncé de la proposition.  $\square$

**Remarque III.21 (accessibilité quasistatique et stabilité)** La suppression des bifurcations col-nœud par bouclage d'une part, et la stabilisation des équilibres en boucle fermée d'autre part constituent a priori deux problèmes distincts le second faisant d'ailleurs l'objet du chapitre suivant -, mais pas nécessairement indépendants, comme le montre la proposition précédente. Cependant, celle-ci utilise la connaissance du signe de  $\det(L^{iso})$  en l'occurrence  $(-1)^n$  - et pas uniquement la condition  $\det(L^{iso}) \neq 0$ . On a donc pour la première fois utilisé pleinement l'hypothèse **(CR1)**, à savoir la stabilité locale de la matrice  $-D_x R - qI$  linéarisé du réacteur isotherme au lieu de l'inversibilité qui suffisait pour construire le diagramme thermique.  $\triangle$

### III.3 Régularisation par retour de température.

#### III.3.1 Retour proportionnel (P).

La proposition III.18 suggère de modifier la pente  $q'$  de la droite  $HR$ . Sous l'action du bouclage proportionnel:

$$u = -k_P y + v \quad (III.2)$$

le modèle du réacteur s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -R(x, y) + q(x_{in} - x) \\ \dot{y} &= B(x, y) + q'(v - (1 + k_P)y) \end{cases} \quad (III.3)$$

d'où une nouvelle droite d'évacuation de chaleur:

$$HR_b(y, v) = q'(1 + k_P)y - q'v$$

dont la pente  $q'(1 + k_P)$  est supérieure à  $q'$  dès que  $k_P > 0$ . Il est intéressant de remarquer que les équations du réacteur commandé sont alors celles d'un réacteur fictif non commandé avec la correspondance  $q' \rightarrow q'(1 + k_P)$  et  $u \rightarrow \frac{v}{1 + k_P}$ . En fait, le bouclage permet de passer d'une situation potentiellement singulière (figure III.3) à une situation uniformément régulière (figure III.5). La nouvelle figure III.6 résume graphiquement la situation. On a choisi une valeur de consigne  $v = v_b$  qui permet de travailler à la température  $y = y_b$  pour une valeur nominale de commande  $u_b = -k_P y_b + v_b$ .

Sur le graphique de gauche, on a superposé les deux diagrammes thermiques (avant et après bouclage) où l'on voit clairement que la commande modifie la pente de la droite  $HR$ . Sur le graphique de droite, on a représenté le diagramme de bifurcation (par rapport à  $v$ ) du système commandé, où l'on peut justement constater l'absence de bifurcation! Enfin, sur le graphique du milieu, on met en évidence l'effet du bouclage sur l'ancien diagramme de bifurcation: les courbes de bouclage données par l'équation (III.2) à sont des droites parallèles dont la direction est fixée par  $k_P$  et la position exacte par le choix de la consigne  $v_b$ .

**Proposition III.22 (Suppression de l'emballement par retour P de température)** *Si le CSTR (III.1) est à cinétique régulière, et si  $q'^*$  désigne la pente maximale de la courbe  $HC$  pour  $y \in Y$  les équilibres du réacteur commandé (III.3) tels que  $y \in Y$  sont quasistatiquement accessibles par la consigne auxiliaire  $v$  dès que:*

$$k_P > k_P^* = \frac{q'^*}{q'} - 1 ..$$

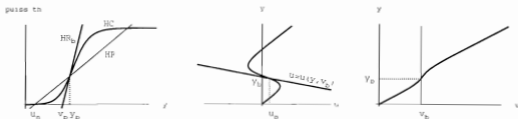


Figure III.6: Effet d'un bouclage affine. De gauche à droite: diagramme thermique, ancien et nouveaux diagrammes de bifurcation.

condition vérifiée par tout bouclage uniformément stabilisant sur  $\mathcal{Y}$

**Preuve :** la condition:  $k_P > k_P^*$  équivaut à:  $q'(1 + k_P) > q'^*$  ou encore:  $\frac{\partial HR}{\partial y} > \frac{\partial HC}{\partial y}$ , ce qui permet d'appliquer les propositions III.18 et III.20.  $\square$

### III.3.2 Retour proportionnel intégral (PI).

On considère maintenant un bouclage de la forme:

$$u = -k_P y - k_I \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau \quad (III.4)$$

qui donne lieu, en posant  $z = \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau$ , au réacteur étendu:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R(x, y) + q(x_{in} - x) \\ \dot{y} = B(x, y) - (q'(1 + k_P)y + q'k_I z) \\ \dot{z} = y - y_c \end{cases} \quad (III.5)$$

dont les équilibres s'écrivent:

$$\begin{cases} x = x_{iso}(y_c) \\ y = y_c \\ z = \frac{1}{k_I} \left( \frac{B(x_{iso}(y_c), y_c)}{q'} - (1 + k_P)y_c \right) \end{cases}$$

dès que le gain intégral  $k_I$  est  $\neq 0$ . Ainsi, la notion de diagramme thermique n'est plus pertinente, et l'accessibilité quasistatique par la consigne  $y_c$  est directement acquise quel que soit le gain proportionnel  $k_P$ .

**Proposition III.23 (Suppression de l'emballement par retour PI de température)** Si le CSTR (III.1) est à cinétique régulière, les équilibres du réacteur commandé par (III.4) sont quasistatiquement accessibles par la consigne auxiliaire  $y_c$  dès que:

$$k_I \neq 0$$

ce qui est par exemple le cas d'un retour proportionnel intégral ( $k_P = 0$ ).

**Remarque III.24** Lorsque  $k_I \neq 0$ , on se trouve exactement dans la situation générale de la remarque III.4, à savoir celle d'un bouclage dynamique  $\dot{v} = G(y, u, v)$  dans lequel  $G$  ne dépend pas de  $u$  à l'équilibre, correspondant à des courbes de bouclage  $y = y_c$  horizontales dans le diagramme de bifurcation en boucle ouverte.  $\triangle$

### III.4 Résumé.

Lorsque le CSTR (III.1) est à cinétique régulière sur  $P = Y \times Q \times X_{in}$ , les équilibres dans  $X \times P$  du CSTR isotherme associé sont constitués par la réunion d'un nombre fini de graphes d'applications régulières de la forme  $x_{iso}(y, q, x_{in})$ , réduits à un seul lorsque le zéro absolu appartient au domaine de température  $Y$ . En particulier, les concentrations à l'équilibre sont régulièrement paramétrées par la température.

De chaque branche  $x_{iso}$  se déduisent deux applications  $HC$  et  $HR$  dont les courbes partielles en fonction de la température  $y \in Y$  forment le diagramme thermique stationnaire associé à  $x_{iso}$ . L'intersection des courbes  $HC$  et  $HR$  détermine alors les équilibres du CSTR (III.1). Ce diagramme est en correspondance avec un diagramme de bifurcation dans les coordonnées  $(u, y)$ , lequel est trivial - absence de bifurcation - lorsque la condition:

$$q' = \frac{\partial HR}{\partial y}(y) > \frac{\partial HC}{\partial y}(y)$$

est vérifiée uniformément sur  $Y$  auquel cas les équilibres sont quasistatiquement accessibles par la commande  $u$ .

Sinon, il se produit des bifurcations col-nœud en boucle ouverte donnant lieu à des embarras thermiques. Cependant, il est possible de restaurer la situation favorable par un retour proportionnel de température de gain suffisant, ce qui permet de satisfaire au passage une condition nécessaire de stabilité. L'utilisation d'un retour proportionnel intégral permet aussi de retrouver l'accessibilité quasistatique sans condition sur les gains  $k_P$  et  $k_I$  autre que  $k_I \neq 0$ , mais ce résultat s'obtient directement sans passer par l'analyse du diagramme thermique qui n'existe plus en boucle fermée. En définitive, *le problème est automatiquement réglé lorsque l'on a stabilisé le réacteur.*





## Chapitre IV

# Stabilisation d'un CSTR à cinétique régulière par retour de température

### IV.0 Introduction.

Nous avons montré au chapitre précédent que la suppression des possibilités d'emballement thermique d'un CSTR à cinétique régulière pouvait être obtenue par retour de température, soit de type affine avec une contrainte sur le gain proportionnel, soit de type proportionnel intégral sans contrainte particulière, et en particulier lorsque de tels bouclages sont stabilisants. Cela signifie que la consigne auxiliaire permet de paramétrer régulièrement les équilibres auxquels on désire faire travailler le réacteur. Nous nous attachons maintenant à réaliser la stabilisation de ces équilibres à l'aide d'un seul contrôleur.

A cet égard, l'annexe B fait le point sur la stabilisation des systèmes linéaires mono-variable par retour de sortie proportionnel et/ou intégral. La rédaction de cette annexe a été motivée par le souci de mettre en évidence la simplicité et la généralité des résultats de stabilisation que le contexte des réacteurs chimiques pourrait occulter. Il y sera donc fait constamment référence. De façon générale, le placement de pôles exact n'est pas possible s'il y a plus de pôles à placer que de gains à régler. L'outil de base pour le retour de sortie n'est donc pas le critère de Kalman à aucun moment nous ne faisons d'hypothèse de commandabilité ou d'observabilité mais bien le critère de Routh-Hurwitz qui fournit le cas échéant des conditions sur les gains de type  $k \in [k_1, k_2]$  ou  $k > k^*$ . Si l'on n'a pas de problème de saturation de la commande, le second choix est d'ailleurs préférable puisque ne dépendant que d'une seule borne calculée.

Rappelons une fois encore les équations du modèle de CSTR (I.7):

$$\begin{cases} \dot{x} &= -R(x, y) + q(x_{in} - x) \\ \dot{y} &= B(x, y) + q'(u - y) \end{cases} \quad (IV.1)$$

On notera  $\chi(s, y)$  le polynôme caractéristique du réacteur linéarisé en  $(x, y) = (x^{iso}(y), y)$ , et  $\chi^{iso}(s, y) = \det((s + q)I + D_x R(x^{iso}(y), y))$  celui du réacteur isotherme associé linéarisé en

$x = x^{\text{iso}}(y)$ , moyennant quoi la fonction de transfert  $u \rightarrow y$  du réacteur (IV.1) linéarisé s'écrit:

$$H(s, y) = \frac{\chi^{\text{iso}}(s, y)}{\lambda(s, y)}$$

On met ainsi en évidence les deux propriétés fondamentales qui permettent la stabilisation par retour de sortie: *minimum de phase* et *degré relatif* 1 (voir l'annexe B). La propriété de minimum de phase, en l'occurrence stabilité du polynôme  $\chi^{\text{iso}}$ , provient directement de l'hypothèse de cinétique régulière<sup>1</sup> (définition III.5), tandis que la différence de 1 entre le degré de  $\chi$  et celui de  $\chi^{\text{iso}}$  est dû au fait que la commande  $u$  influence directement la dérivée de la sortie  $y$ .

Nanti de ces indications, nous traiterons successivement le cas du retour proportionnel en fait affine -, puis celui du retour proportionnel intégral.

## IV.1 Stabilisation par retour affine.

### IV.1.1 Préliminaires.

Nous avons vu au chapitre précédent que pour un réacteur à cinétique régulière, il est possible de trouver un bouclage proportionnel qui permette d'assigner de façon quasi-statique n'importe quelle température de fonctionnement. Il suffit pour cela de choisir un gain *assez grand*. Or, dans le cas du CSTR élémentaire (II.1), la condition supplémentaire à réaliser pour assurer la stabilité (asymptotique locale) prend encore la forme d'une borne inférieure sur le gain (voir le chapitre traitant cet exemple). En termes de génie chimique, cela revient à augmenter la puissance d'évacuation de chaleur du réacteur en boucle fermée. En termes mathématiques, augmenter  $q'$  rend le terme  $q'(u - y) = q'_0(v - y)$  prépondérant dans l'équation de température pour forcer le comportement:  $\dot{y} = -q'_0(v - y)$ . Intuitivement, ce mécanisme ne devrait pas dépendre de la complexité du schéma réactionnel, pourvu que la cinétique isotherme soit stable, d'où l'importance de l'hypothèse de cinétique régulière.

Pour simplifier les expressions à venir, on prend a priori un bouclage de la forme:

$$u = \left(1 - \frac{k_P}{q'}\right)y + \frac{1}{q'}v \quad (\text{IV.2})$$

d'où les équations du réacteur ainsi commandé:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R(x, y) + q(x_{in} - x) \\ \dot{y} = B(x, y) - k_P y + v \end{cases}$$

Remarquons que  $k_P$  que par abus de langage nous appellerons tout de même gain proportionnel - n'est rien d'autre que la pente de la droite  $HR_0$  notée  $q'_0$  dans le chapitre précédent.

<sup>1</sup> ceci justifie de ne pas s'être contenté de l'inversibilité de la matrice jacobienne isotherme  $-D_x R(x, y) - qI$  qui aurait suffi pour les développements du chapitre précédent.

En tout point stationnaire  $(x_{iso}(y), y)$ , la matrice du système linéarisé s'écrit :

$$L^P(y, k_P) = \left( \begin{array}{c|c} -qI - D_x R(x, y) & -\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) \\ \hline D_x B(x, y) & \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) - k_P \end{array} \right) \Big|_{x=x_{iso}(y)}$$

matrice dont les valeurs propres sont les racines de son polynôme caractéristique :

$$\chi^P(s, y, k_P) = \det(sI_{n+1} - L^P(y, k_P)) = k_P \chi^{iso}(s, y) + \chi^0(s, y) \quad (IV.3)$$

en notant  $\chi^{iso}$  le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne  $-qI - D_x R$  du linéarisé du réacteur isotherme associé, et  $\chi^0$  celui du réacteur (IV.1) commandé par (IV.2) avec  $k_P = 0$  (attention, ce n'est pas le réacteur en boucle ouverte!).

### IV.1.2 Approche asymptotique: commande à grand gain.

Une première étape consiste à se demander où se trouvent les racines de  $\chi^P(s, y, k_P)$ , c'est-à-dire les pôles du système en boucle fermée, lorsque le gain  $k_P$  est pris très grand. A cet égard, les observations suivantes jouent un rôle important :

- le polynôme  $\chi^P(s, y, k_P)$  est affine en  $k_P$ .
- les racines de  $\chi^{iso}(s, y) = \det((s+q)I + D_x R)$  sont à partie réelle strictement négative à cause de l'hypothèse de cinétique régulière.
- $\chi^{iso}(s, y)$  et  $\chi^0(s, y)$  ont pour coefficient dominant 1 et pour degrés respectifs  $n$  et  $n+1$ .

Nous nous trouvons donc dans le cadre d'application de la proposition B.18, avec  $N = \chi^{iso}$  et  $D = \chi^0(s, y)$ : pour toute température de fonctionnement  $y$ , le système linéarisé en  $(x_{iso}(y), y)$  est à minimum de phase et de degré relatif 1, donc stabilisable par retour de sortie à grand gain. On sait de plus (voir l'annexe B) que lorsque  $k_P \rightarrow +\infty$  :

- les  $n$  zéros finis sont de la forme:  $s_0(y) + O(\frac{1}{k_P})$ , où  $s_0(y)$  est racine de  $\chi^{iso}(s, y)$ ,
- le zéro à l'infini s'écrit  $^2 -k_P + O(1)$ .

Ceci étant, il ne ressort de ces considérations aucune indication quant au choix effectif du gain  $k_P$ . Or, dans la réalité, les commandes sont bornées, et un compromis doit être effectué entre une stabilité suffisante d'une part, et la saturation des commandes d'autre part. Ainsi, la stabilisabilité à grand gain conduit à affirmer l'existence d'une borne  $k_P^*$  telle que le système bouclé soit stable pour tout  $k_P > k_P^*$ . Il convient maintenant de déterminer une valeur, ou une estimation de  $k_P^*$ .

<sup>2</sup> $O(1)$  désigne une fonction de  $k_P$  bornée lorsque  $k_P \rightarrow +\infty$ .

### IV.1.3 Approche exacte.

Comme dans le cas du CSTR élémentaire, nous allons appliquer directement le critère de Routh-Hurwitz, ou plus exactement la proposition B.38. Pour tout  $i = 1 \dots n + 1$ , soit  $\Delta_i^P(k_P, y)$  le  $i$ ème mineur principal de la matrice de Hurwitz associée à  $\chi^P(s, y)$ ,  $k_i^*(y)$  un majorant quelconque des racines de  $\Delta_i^P(k_P, y) = 0$  on sait que  $\Delta_i^P$  est un polynôme de degré  $i$  en  $k_P$ , et  $k_i^*(y) = \max\{k_1^*(y), \dots, k_{n+1}^*(y)\}$

**Proposition IV.1 (stabilisation d'un CSTR par retour affine de température)** Lorsque le CSTR (IV.1) est à cinétique régulière, le retour affine (IV.2) avec un choix de consigne  $v$  adéquat stabilise le réacteur à la température  $y$  dès que:

$$k_P > k_i^*(y)$$

En particulier, si cette inégalité est vérifiée pour tout  $y$  dans un intervalle  $Y$  tous les équilibres associés  $\{(\mathbf{x}_{\text{eq}}(y), y), y \in Y\}$  sont (localement asymptotiquement) stables et quasistatique-ment accessibles par variation de la consigne auxiliaire  $v$ .

**Preuve :** nous avons vu que l'hypothèse de cinétique régulière se traduisait par la stabilité du polynôme  $\chi^{\text{iso}}(s, y)$ , et que le degré de celui-ci est inférieur d'une unité au degré de  $\chi^P(s, y)$ . La proposition B.38 s'applique donc directement. Par ailleurs, on a montré au chapitre précédent (propositions III.18 et III.20) que dans ces conditions, les équilibres sont régulièrement paramétrés par la consigne auxiliaire  $v$ .  $\square$

**Remarque IV.2** D'après le critère de Liénard et Chipart, on peut remplacer un  $\Delta_i^P(k_P, y)$  sur deux par le coefficient de même rang du polynôme  $\chi^P(s, y)$ , suivant l'une des quatre possibilités données par (B.37).

## IV.2 Stabilisation par retour proportionnel intégral.

### IV.2.1 Préliminaires.

On prend cette fois un bouclage de la forme:

$$u = \left(1 - \frac{k_P}{q'}\right)y - \frac{k_I}{q'} \int_0^t (y - y_r) dt \quad (IV.4)$$

d'où les équations du système étendu en posant  $z = \int_0^t (y - y_r) dt$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{R}(\mathbf{x}, y) + q(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}) \\ \dot{y} &= B(\mathbf{x}, y) - (k_P y + k_I z) \\ \dot{z} &= y - y_r. \end{cases} \quad (IV.5)$$

en considérant  $y$ , comme une nouvelle consigne auxiliaire (à la place de  $v$ ). En tout point stationnaire  $(x_{\text{mo}}(y), y, z(y))$ , la matrice du système linéarisé s'écrit:

$$L^{PI}(y, k_P, k_I) = \left( \begin{array}{c|c|c} -qI - D_x R(x, y) & -\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) & 0 \\ \hline D_x B(x, y) & \frac{\partial B}{\partial y}(x, y) - k_P & -k_I \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Big|_{x=x_{\text{mo}}(y)},$$

matrice dont les valeurs propres sont les racines de:

$$\chi^{PI}(s, y, k_P, k_I) = \det(sI - L^{PI}(y, k_P, k_I)) = k_I \chi^{\text{mo}}(s, y) + s \chi^P(s, y, k_P)$$

soit encore:

$$\chi^{PI}(s, y, k_P, k_I) = (s k_P + k_I) \chi^{\text{mo}}(s, y) + s \chi^0(s, y) \quad (\text{IV.6})$$

d'où:  $D = \chi^0$  et  $N = \chi^{\text{mo}}$  pour l'application de la proposition B.32.

## IV.2.2 Retour PI à gain intégral quelconque.

Nous avons vu sur l'exemple du CSTR élémentaire que l'ajout d'un terme intégral dans la commande pour compenser les biais éventuels pouvait le cas échéant déstabiliser le réacteur. En revanche, il a été possible de calculer une borne inférieure de gains proportionnels  $k_P^*$  convenant pour tout choix de gain intégral (de signe fixé). Ceci se généralise au cas d'une cinétique régulière quelconque, à l'aide de la proposition B.32.

**Proposition IV.3 (stabilisation d'un CSTR par retour de température PI)** Si le CSTR (IV.1) est à cinétique régulière, la fonction réelle:

$$f(\omega, y) = \text{Re} \frac{\chi^0(i\omega, y)}{\chi^{\text{mo}}(i\omega, y)}$$

est bornée inférieurement en  $\omega$  pour toute valeur de la température  $y$ :

$$k_P^*(y) = - \inf_{\omega \in \mathbb{R}} f(\omega, y) < +\infty$$

Alors, le retour PI (IV.4) stabilise le réacteur à la température  $y$  pour  $k_P > k_P^*(y)$  et  $k_I > 0$  quelconque.

**Exemple IV.4 (retour sur le CSTR élémentaire)** En reprenant les notations du chapitre consacré au CSTR élémentaire,  $\chi^{\text{mo}} = s + \chi_1^{\text{mo}}$  et  $\chi^0 = s^2 + \chi_1^0 s + \chi_2^0$ , avec:

$$\begin{cases} \chi_1^{\text{mo}} = q + D r \gamma'(y) \\ \chi_1^0 = q + D r \gamma'(y) - B D u x \gamma'(y) \\ \chi_2^0 = -q B D u x \gamma'(y) \end{cases}$$

où  $x$  représente la concentration à l'équilibre à la température  $y$ :  $x = x_{iso}(y)$ . Après deux lignes de calcul élémentaire:

$$f(\omega) = \operatorname{Re} \frac{\chi^0(i\omega)}{\chi^{iso}(i\omega)} = \frac{(\lambda_1^0 - \lambda_1^{iso})\omega^2 + \lambda_2^0\lambda_1^{iso}}{\omega^2 + (\lambda_1^{iso})^2}$$

et

$$f'(\omega) = \frac{2\omega}{(\omega^2 + (\lambda_1^{iso})^2)^2} \lambda_1^{iso} ((\lambda_1^0 - \lambda_1^{iso})\lambda_1^{iso} - \lambda_2^0)$$

Compte tenu de:

$$\lambda_1^{iso} ((\lambda_1^0 - \lambda_1^{iso})\lambda_1^{iso} - \lambda_2^0) = -(q + D\alpha\gamma(y))B D\alpha^2 x\gamma(y)\gamma'(y) < 0$$

la fonction  $f$  est maximale en 0 et minimale en  $\pm\infty$ , d'où:

$$k_P^* = -(\lambda_1^0 - \lambda_1^{iso}) = B D\alpha x\gamma'(y)$$

ce qui correspond exactement à la première inégalité de (II.18) directement dérivée du critère de Routh.

### IV.2.3 Retour PI à grand gain intégral.

Si la stratégie précédente conduit à un gain  $k_P$  trop important, on peut songer à simplement stabiliser le réacteur par un retour proportionnel, mais dans ce cas, le gain intégral risque de devoir être très petit pour ne pas déstabiliser le système. Comme les modèles de réacteurs chimiques sont souvent quantitativement très approximatifs, il peut être intéressant d'utiliser un fort gain intégral, sachant que la commande n'en sera pas obligatoirement plus irrégulière puisque les écarts à la consigne sont justement "intégrés". Ceci est possible à condition d'adopter un gain proportionnel suffisamment grand, mais plus petit que la borne de passivisation par retour proportionnel. Comme:

$$\chi^{PI}(s, y, k_P, k_I) = k_I \chi^{iso}(s, y) + s \chi^P(s, y, k_P) = k_I \chi^{iso}(s, y) + s(\lambda^{iso}(s, y) + \chi^0(s, y))$$

la différence fondamentale avec le cas proportionnel consiste en l'apparition de deux pôles à l'infini imaginaires conjugués au lieu d'un seul réel  $-s \chi^P$  au lieu de  $\chi^0$ , pôles dont la stabilité lorsque  $k_I \rightarrow +\infty$  peut être obtenue par un choix judicieux de  $k_P$  (proposition B.32):

$$\frac{D_{d-1}}{D_d} - \frac{N_{n-1}}{N_n} = \lambda_1^P - \lambda_1^{iso} = k_P - \frac{\partial B}{\partial y}(\mathbf{x}_{iso}(y), y) > 0$$

L'application du critère de Routh fournit ensuite au cas par cas la borne inférieure de gains  $k_I^*$ .

**Proposition IV.5 (stabilisation d'un CSTR par retour PI à grand gain intégral)** Si le CSTR (IV.1) est à cinétique régulière, et si de plus:

$$k_P > \frac{\partial B}{\partial y}(\mathbf{x}_{iso}(y), y)$$

il existe  $k_I^*(y_c)$  tel que le retour PI (IV.4) stabilise le réacteur à la température  $y_c$  dès que:  $k_I > k_I^*(y_c)$ .

**Remarque IV.6 (retour intégral pur)** Si  $k_P = q'$  ne vérifie pas la condition ci-dessus, autrement dit si cette condition est violée en boucle ouverte, le CSTR ne peut être stabilisé par un retour intégral pur.

### IV.3 Résumé.

Un CSTR à cinétique régulière présente les deux propriétés minimum de phase et degré relatif 1 qui permettent de façon générale la stabilisation par retour de sortie proportionnel ou proportionnel intégral. Si la commande ne sature pas, il est possible d'utiliser un gain proportionnel stabilisant valable pour n'importe quel gain intégral  $> 0$ .





## Chapitre V

# Généralisation locale à un système SISO présentant une bifurcation col-nœud par rapport à la commande

### V.0 Introduction.

Dans cette partie, on étudie les équilibres d'un système non linéaire mono-entrée/mono-sortie (SISO) de la forme:

$$\begin{cases} \dot{X} &= F(X, u) \\ y &= h(X) \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

avec  $X \in \mathbb{R}^{n+1}$  au lieu de  $\mathbb{R}^n$  pour rappeler qu'une dimension dégénère,  $u \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,  $F$  est un champ de vecteurs paramétré par la commande  $u$  tel que  $F(0, 0) = 0$ , et  $h$  une fonction de sortie scalaire vérifiant  $h(0) = 0$ .  $F$  et  $h$  sont supposés aussi réguliers que nécessaire, c'est-à-dire au moins  $C^1$  et plus lorsque le contexte l'exige.

Nous reprenons dans le cas général la problématique de l'emballement explicitée précédemment sur le CSTR. Nous supposons donc qu'en faisant varier la consigne  $u$  en boucle ouverte, on provoque la disparition simultanée de deux équilibres dont l'un, stable, constituait le point de fonctionnement originel, et l'autre, instable, un équilibre jamais observé. En fait, lorsque les deux équilibres ont disparu, le système physique va adopter un nouveau régime stationnaire dont l'expérience montre qu'il s'agit souvent d'un autre équilibre. La figure V.1 montre deux types de diagrammes d'équilibre (ou de bifurcation) correspondant à cette situation. Les portions de courbe instables sont représentées en gris, ainsi que les valeurs de  $y$  associées. On reconnaît à droite l'allure des diagrammes du CSTR (figure III.3).

Une différence qualitative importante entre les deux diagrammes réside notamment dans la connectivité de la courbe de droite, ce qui donne lieu en pratique à des phénomènes d'hystérésis<sup>1</sup> par rapport à la commande, phénomènes que la courbe de gauche ne peut pas engendrer

<sup>1</sup>voir par exemple [59] pour les hystérésis des réacteurs chimiques.



Figure V.1: modèles de bifurcations impliquant la disparition de deux équilibres ( $\mu > 0$ ).

puisque le passage d'une composante connexe à l'autre ne peut se faire que dans un sens (en l'occurrence en diminuant  $u$ ). Cependant, la présence d'une discontinuité potentielle dans les deux cas est due à la présence d'au moins une bifurcation col-nœud (point tournant) dont le modèle local a déjà été présenté (figure III.1).

De fait, le problème pratique que nous nous posons consiste à trouver un bouclage de sortie  $u = u(y, v)$  restaurant localement l'accessibilité quasistatique par la nouvelle commande auxiliaire  $v$ . Outre la question de la stabilité, ceci n'était pas possible avec  $u$  puisqu'une fois parvenu en 0, rien ne permettait de choisir l'une ou l'autre des deux branches d'équilibres  $y_1(u)$  et  $y_2(u)$  sur la figure III.1). Il est temps maintenant de spécifier la question en termes mathématiques précis.

On trouvera par exemple dans [29] les conditions mathématiques dues à Sotomayor, cf [52] - qui caractérisent une bifurcation col-nœud en  $(X, u) = (0, 0)$  (dans lesquelles on utilise la notation de la formule de Taylor vectorielle:  $D_X^2 F, \epsilon^2 = D_X^2 F, e, e$ ):

**(CN1)** corang  $D_X F(0, 0) = 1$  avec  $\epsilon$  (resp.  $\epsilon^*$ ) vecteur propre (resp. vecteur propre adjoint, voir annexe C) associé à la valeur propre 0,

**(CN2)**  $\langle \epsilon^*, D_X^2 F(0, 0) \cdot \epsilon^2 \rangle \neq 0$ ,

**(CN3)**  $\langle \epsilon^*, \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) \rangle \neq 0$ .

Nous verrons ci-dessous - lemme V.6 - que mathématiquement, **(CN1)** et **(CN2)** traduisent le fait que le rang de  $D_X F$  est localement plein, sauf au point  $(0, 0)$  où il chute de 1. Graphiquement, l'ensemble des équilibres:

$$S = \{(X, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}; F(X, u) = 0\}$$

constitue une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+2}$  en l'occurrence une courbe située d'un seul côté de l'hyperplan  $u = 0$  et tangente à cet hyperplan avec un contact quadratique (voir figure V.2).

Ce résultat s'obtient par exemple par la Méthode dite de Projection développée dans l'annexe C.

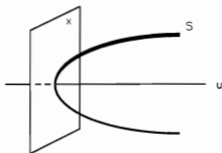


Figure V.2: la courbe d'équilibre  $\mathcal{S}$ .

En termes d'automatique, on cherche à placer l'ensemble des pôles dans  $\mathbb{C}^*$  par retour de sortie dans le cadre des hypothèses **(CN1)** **(CN2)** **(CN3)**. La question de la stabilité, c'est-à-dire le placement global dans le demi-plan complexe gauche ouvert, est traitée dans l'annexe B. Dans le cas monodimensionnel  $\dot{X} = F(X, u)$ ,  $y = X$ , la figure III.2 montre que n'importe quel bouclage régulier  $u = u(y, r)$  dont le graphe est transverse à  $\mathcal{S}$  en  $(0, 0)$  permet de rétablir l'unicité locale des équilibres du système commandé. Nous allons voir que ceci se généralise en dimension quelconque, sous réserve que le diagramme des équilibres réduit dans le plan  $(u, y)$  ne dégénère pas.

**Remarque V.1 (paramètre ou commande ?)** Nous considérons ici un problème de bifurcation *par rapport à la commande* considérée comme un paramètre, et non un problème de commande en présence de bifurcations par rapport à d'autres paramètres (pour ce dernier cas, voir par exemple [2]). De fait, le statut de  $u$  varie suivant le point de vue. Si l'on considère (V.1) comme un système dynamique paramétré,  $u$  est un paramètre, c'est-à-dire une constante dont la valeur conditionne l'allure du portrait de phase. Si par ailleurs on voit (V.1) comme un système commandé,  $u$  est une commande, c'est-à-dire représente le cas échéant une fonction de l'état et du temps (bouclage). Pour éviter toute confusion, nous considérerons toujours le système commandé comme un nouveau système dynamique, éventuellement paramétré par des gains et autres consignes auxiliaires.  $\triangle$

## V.1 Diagramme de bifurcation expérimental.

### V.1.1 Choix de la fonction de sortie.

Commençons par préciser ce que l'on entend par "diagramme des équilibres réduit dans le plan  $(u, y)$ "

**Définition V.2 (diagramme de bifurcation expérimental)** Nous appellerons diagramme de bifurcation expérimental le graphe  $\mathcal{S}_{\text{exp}}$  de la correspondance entrée-sortie:

$$u \mapsto \{h(X); X \in \mathbb{R}^{n+1} \quad F(X, u) = 0\},$$

c'est-à-dire l'image de l'ensemble des équilibres  $\mathcal{S}$  par l'application d'observation:  
 $(X, u) \mapsto (h(X), u)$ .

Une partie du diagramme de bifurcation expérimental peut s'obtenir par l'expérience, d'où l'appellation choisie. Il suffit en effet de relever pour chaque valeur de  $u$  la valeur de  $y$  observée et de reporter le tout sur un graphique. Ce faisant, on obtient les portions de courbe correspondant à des équilibres stables. Sur la figure V.1, celles-ci sont représentées en noir, les parties grisées n'étant pas observables. Par ailleurs, lorsque la grandeur observée se trouve être une variable d'état, soit  $x_{n+1}$  la température dans le cas du CSTR<sup>2</sup>,  $\mathcal{S}_{\text{exp}}$  est simplement la projection de  $\mathcal{S}$  sur le plan  $\{u, x_{n+1}\}$ .

Considérons maintenant l'exemple (académique) suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2) + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

La courbe des équilibres  $\mathcal{S}$  peut être paramétrée par  $x_1$ , et présente deux bifurcations col-nœud (voir la figure V.1, diagramme de droite). Cependant, la courbe observée  $\mathcal{S}_{\text{exp}}$  est la droite d'équation  $y = u$  dans le plan  $(u, y)$ , et ne présente donc pas de bifurcation par rapport à  $u$ . En conclusion, certaines sorties mal choisies peuvent masquer le phénomène de bifurcation. Ceci motive la proposition suivante.

**Proposition V.3** Dans le cadre des hypothèses (CN1, 2, 3), le diagramme de bifurcation expérimental  $\mathcal{S}_{\text{exp}}$  présente un point tournant (quadratique) en  $(0, 0)$  si, et seulement si la condition supplémentaire:

$$(\text{CN4}) \quad \langle D_X h(0), e \rangle \neq 0^2$$

est vérifiée.

**Preuve :** Soit  $(X(\epsilon), u(\epsilon))$  une paramétrisation locale de la courbe  $\mathcal{S}$ . Avec la Méthode de Projection, on peut montrer (voir l'annexe C) que  $X$  et  $u$  admettent les développements suivants dont les premiers termes respectifs sont non nuls:

$$\begin{cases} X(\epsilon) = \epsilon X_1 + O(\epsilon^2) \\ u(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} u_2 + O(\epsilon^3) \end{cases}$$

avec  $X_1$  colinéaire au vecteur propre  $e$ :  $X_1 = k e, k \neq 0$ . La sortie  $y = h(X)$  se développe alors en:  $y(\epsilon) = \epsilon k \langle D_X h(0), e \rangle + O(\epsilon^2)$ , et la courbe  $\mathcal{S}_{\text{exp}}$  ( $u(\epsilon), y(\epsilon)$ ) présente un point tournant quadratique ssi  $\langle D_X h(0), e \rangle \neq 0$ .  $\square$

<sup>2</sup>les crochets  $\langle, \rangle$  représentent tantôt le produit scalaire entre deux vecteurs, tantôt l'image d'un vecteur par une forme linéaire.

Ce qui précède répond en fait à deux questions, suivant le point de vue que l'on adopte. Dans une optique de modélisation, **(CN1,2,3,4)** permettent de déterminer le choix d'un modèle cohérent avec les observations. Si au contraire on dispose déjà d'un modèle, **(CN4)** écarte certaines éventualités de mesure. De plus, on peut tirer de la proposition ci-dessus deux enseignements (qualitatifs) d'ordre pratique.

**Corollaire V.4 (sur le choix de sortie)** *On se place dans le cadre des hypothèses **(CN1,2,3)**:*

1. les sorties génériques ne masquent pas le phénomène de bifurcation,
2. parmi deux sorties  $h_1$  et  $h_2$  vérifiant:  $0 < | < D_X h_1(0), e > | < | < D_X h_2(0), e > |$ ,  $h_2$  possède une meilleure sensibilité que  $h_1$  aux variations de  $u$ .

**Preuve :** Le point 1. signifie simplement que de par sa nature - non-nullité d'une certaine quantité -, la condition **(CN4)** ne peut être qu'"accidentellement" mise en défaut.

Quant au point 2., il provient du développement de  $S_{exp}$  par rapport à  $\epsilon$  en  $(0,0)$  (voir démo précédente): la valeur absolue de la courbure locale est inversement proportionnelle à  $| < D_X h(0), e > |$ .  $\square$

Si nous reprenons l'exemple (V.2), la sortie perturbée  $y = x_2 + \mu x_1$  vérifie bien la condition **(CN4)**, et le lecteur intéressé peut vérifier que le diagramme de bifurcation expérimental, qui dégénère pour  $\mu = 0$ , a tendance à "s'élargir" lorsque l'on fait croître  $\mu$ .

**Remarque V.5 (sur la généralité des hypothèses **(CN1,2,3,4)**)** Du point de vue mathématique, la principale contrainte est **(CN1)**: on considère, et c'est un parti pris que nous avons tenté de justifier par des arguments pratiques, un "accident" sur le linéarisé, et le rôle des conditions **(CN2,3,4)** est de se limiter au cas le plus simple de dégénérescence. L'intérêt d'une telle situation réside dans sa généralité<sup>3</sup> - si le système (V.1) est générique, l'ensemble des équilibres  $(X, u)$  où le jacobien dégénère est discret ( $n + 2$  équations à  $n + 2$  inconnues); en de tels points critiques, la bifurcation est de type col-nœud et la direction propre associée est transverse au noyau de la sortie. Pour résumer: la dégénérescence **(CN1)** est moralement inévitable d'un point de vue mathématique, et elle a toutes les chances de s'accompagner des conditions **(CN2,3,4)**.  $\triangle$

## V.1.2 Traduction des hypothèses de travail.

Il est intéressant de remarquer que contrairement à **(CN2)**, qui fait intervenir des dérivées secondes, les conditions **(CN1,3,4)** portent toutes sur le jacobien total  $D_{(X,u)}F(0,0)$ . En pratique, il sera plus commode de vérifier un jeu d'hypothèses équivalentes qui s'expriment en termes de rang de matrices.

**Lemme V.6** *Lorsque l'hypothèse **(CN1)** est vérifiée, les conditions **(CN3)** **(CN4)** sont respectivement équivalentes aux conditions suivantes au point  $(0,0)$ :*

$$\text{(CN3')} \quad \frac{\partial F}{\partial u} \notin \text{Im} D_{(X,u)} F, \text{ soit: } \text{rg} D_{(X,u)} F = n + 1$$

<sup>3</sup>le concept de *généricité* permet de donner à des expressions courantes telles que "en général" ou "typiquement" un contenu mathématique précis; voir à ce sujet [8] ou [61].

**(CN4')**  $D_X h \notin \text{Im}(D_{(X,u)} F)^*$  soit:  $\text{rg} D_X(F, h) = n + 1$

**Preuve :** en effet, on démontre dans l'annexe C que  $\text{Im} D_X F = (\mathbb{R}e^*)^\perp$  et de façon duale:  $\text{Im}(D_X F)^* = (\mathbb{R}e)^\perp$  (on omet de mentionner le point  $(0, 0)$ ). Ainsi, **(CN3)** (resp **(CN3')**) s'écrit aussi:  $\frac{\partial E}{\partial u} \notin \text{Im} D_X F$  (resp  $D_X h \notin \text{Im}(D_X F)^*$ ), ce qui n'est rien d'autre que **(CN3')** (resp **(CN4')**).  $\square$

En fait, les conditions **(CN3')** et **(CN4')** peuvent aussi se formuler d'une façon plus familière aux automaticiens.

**Proposition V.7** Sous l'hypothèse **(CN1)**, les conditions **(CN3,4)** peuvent s'exprimer par: la valeur propre 0 est commandable et observable.

**Preuve :** On applique le lemme précédent et le critère dit de Popov-Belevitch-Hautus (voir à ce sujet [34] ou [51]).  $\square$

**Remarque V.8** Il va sans dire que le linéarisé tangent n'est pas obligatoirement commandable, comme le montre l'exemple (toujours académique) suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1(1 - x_1^2) + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

qui vérifie les conditions **(CN1,2,3,4)** en chacun des deux points critiques:

$$(X, u) = ((\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), 0)$$

sans y être ni commandable, ni observable. A l'inverse, un système (V.1) quelconque dont le linéarisé tangent est commandable possède aussi des diagrammes de bifurcation  $\tilde{S}$  et  $\tilde{S}_{\text{exp}}$  qui sont des courbes - sous-variétés - en  $(0, 0)^4$  et de fait la seule bifurcation d'état stationnaire à considérer dans ce cas est encore de type col-nœud.  $\triangle$

Ainsi, **(CN3)** et **(CN4)** apparaissent comme nécessaires pour respectivement déplacer la valeur propre 0 par retour d'état, et n'utiliser à cet effet qu'un bouclage de sortie. Nous établirons ultérieurement la réciproque.

### V.1.3 Réduction au cas $y = h(X) = x_1$ .

Puisque l'on cherche à construire un diagramme d'équilibre dans les coordonnées  $(u, y)$ , il est naturel d'essayer de se ramener au cas où l'observation  $y$  est une des variables d'état  $x_i$ , de sorte que  $S_{\text{exp}}$  puisse s'obtenir par simple projection de  $S$ . D'après le théorème d'inversion locale, un tel changement de variables est possible dès que  $\frac{\partial h}{\partial x_i} \neq 0$ . Avant de l'effectuer, il convient de s'assurer du caractère intrinsèque de nos hypothèses.

<sup>4</sup>toujours à cause du lemme PBH, que l'on applique pour la valeur propre 0 en sachant cette fois que celle-ci est commandable.

**Lemme V.9** Soit  $\Theta : X \mapsto Y = \Theta(X)$  un difféomorphisme local tel que  $\Theta(0) = 0$ . Les conditions **(CN1,3',4')** sont équivalentes à leurs homologues portant sur le système transporté:

$$\begin{cases} Y' &= \Theta_* F(Y, u) = D_X \Theta(\Theta^{-1}(Y)) \cdot F(\Theta^{-1}(Y), u) \\ y &= \Theta_* h(Y) = h(\Theta^{-1}(Y)) \end{cases}$$

**Preuve :** en effet, puisque  $(0, 0)$  est équilibre:

$$D_Y \Theta_* F(0, 0) = D_Y \Theta(0) \cdot D_X F(0, 0) \cdot (D_X \Theta(0))^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \Theta_* F(0, 0) = D_X \Theta(0) \cdot \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0)$$

$$D_Y \Theta_* h(0) = D_X h(0) \cdot (D_X \Theta(0))^{-1}$$

d'où les égalités de rang cherchées.  $\square$

Dans une perspective pratique, il est alors intéressant d'exprimer précisément les conditions **(CN1,3,4)** dans les coordonnées du système.

**Lemme V.10 (utilisation des coordonnées du système)** Les conditions **(CN1,3,4)** sont équivalentes à l'existence de deux entiers  $i$  et  $j$ , compris entre 1 et  $n+1$ , tels que  $\frac{\partial h}{\partial x_j} \neq 0$  et tels qu'en  $(0, 0)$ :

$$\text{(CNP1)} \quad \text{rg} D_Y G = \text{rg} D_x g = n.$$

$$\text{(CNP3)} \quad \text{rg} D_{(x,u)} G = n + 1$$

avec les partitions  $X = (x, x_j)$ ,  $G = (g, y_i) = \Theta_* F$  et  $Y = \Theta(X) = (x, h(X))$ .

**Preuve :** supposons vérifiées les conditions **(CN1,3',4')**, qui d'après le lemme V.6 sont équivalentes à **(CN1,3,4)**. Par **(CN1)** et **(CN4')**,  $D_X h(0) \neq 0$ , donc il existe  $j$  tel que  $\frac{\partial h}{\partial x_j}(0) \neq 0$ . On peut alors définir le changement de coordonnées  $\Theta$  qui remplace  $x_j$  par  $y = h(X)$ , et poser  $G = \Theta_* F$ . D'après le lemme V.9, le champ  $G$  vérifie aussi les conditions **(CN1,3',4')**. En particulier,  $\text{rg} D_Y G = n$  et  $\text{rg} D_Y(G, y) = n + 1$ , donc il existe  $i$  tel que  $\text{rg} D_{y_i} (g, y) = n + 1$ . Or, le déterminant de  $D_Y(g, y)$  est égal, au signe près, au produit:  $\frac{\partial h}{\partial x_j} \det D_x g$ , d'où l'on tire **(CNP1)**. Il découle de **(CNP1)** l'égalité  $\text{rg} D_{(x,u)} G = \text{rg} D_{(Y,u)} G$ , et ce rang vaut  $n + 1$  d'après **(CN3')**, d'où **(CNP3)**. La réciproque est évidente.  $\square$

**Remarque V.11** La condition homologue de **(CN4)** serait: **(CNP4)**  $\text{rg} D_Y(g, y) = n + 1$ ; dans les coordonnées  $Y$  c'est une conséquence directe de **(CNP1)**, qu'il n'y a donc pas lieu d'ériger en hypothèse.  $\triangle$

Finalement, nous avons ramené l'étude du système général (V.1) muni des hypothèses **(CN1,2,3,4)** au cas d'un système dont la fonction de sortie est une projection et muni des hypothèses **(CNP1)** **(CN2)** **(CNP3)**. Ces préliminaires techniques vont maintenant nous permettre de construire  $S_{\text{exp}}$  et d'éclaircir le rôle de la condition **(CN2)**.



### V.1.4 Etude du diagramme de bifurcation expérimental.

On reprend ici la démarche adoptée pour le CSTR: inversion d'un sous-système régulier d'équations stationnaires, puis report dans la dernière équation. Il s'agit en fait de généraliser la situation monovariante décrite par la figure III.1 et les commentaires associés.

**Proposition V.12 (construction du diagramme de bifurcation expérimental)** On considère le système:

$$\begin{cases} \dot{X} &= F(X, u) \\ y &= r_j \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

et l'on adopte les partitions  $X = (\mathbf{x}, r_j)$ ,  $F = (\mathbf{f}, f_j)$ .

Sous l'hypothèse **(CNP1)**, les équations stationnaires du système (V.3) s'inversent localement de la façon suivante:

$$F(X, u) = 0 \text{ (S)} \iff \begin{cases} \mathbf{x} &= \mathbf{f}^{-1}(y, u) \\ \phi(y, u) &\stackrel{\text{def}}{=} f_j(\mathbf{f}^{-1}(y, u), y, u) = 0 \text{ (S}_{\text{exp}}) \end{cases}$$

et les dérivées de la fonction  $\phi$  sont données localement par:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(y, u) = (-1)^{r+j} \frac{\det D_X F}{\det D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(y, u), y, u) \text{ et}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(y, u) = (-1)^{r+j} \frac{\det D_{(\mathbf{x}, u)} F}{\det D_{\mathbf{x}} \mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(y, u), y, u)$$

Sous l'hypothèse supplémentaire **(CNP3)**,  $S$  et  $S_{\text{exp}}$  sont des courbes qui peuvent être paramétrées par  $y$ :

$$\phi(y, u) = 0 \iff u = \mathcal{J}(y)$$

et  $S_{\text{exp}}$  est tangent à l'axe des  $y$  en  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial u}(0, 0) \neq 0 \text{ et}$$

$$\beta'(y) = -\frac{\det D_X F}{\det D_{(\mathbf{x}, u)} F}(\mathbf{f}^{-1}(y, \mathcal{J}(y)), \mathcal{J}(y)) \text{ est nul en } y = 0$$

Si l'on ajoute l'hypothèse (non linéaire) suivante:

$$\text{(CNP2)} \quad \frac{d}{dy} \det D_X F(\mathbf{f}^{-1}(y, \mathcal{J}(y)), \mathcal{J}(y))|_{y=0} \neq 0$$

**(CN2)** est vérifiée, et  $S_{\text{exp}}$  a un contact quadratique avec l'axe des  $y$  en  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0 \text{ et } \mathcal{J}''(0) \neq 0$$

**Preuve :** L'inversion partielle des équations stationnaires sous l'hypothèse **(CNP1)** est la conséquence directe du théorème des fonctions implicites (local). Les dérivées de la fonction  $\phi$  s'obtiennent en calculant les déterminants  $\det D_X F$  et  $\det D_{(x,u)} F$  par blocs à l'aide du lemme III.16, en permutant le cas échéant lignes et colonnes et en tenant compte es signes.

Sous l'hypothèse supplémentaire **(CNP3)**,  $\frac{\partial \phi}{\partial u}(0,0) \neq 0$  et l'équation implicite  $\phi(y,u) = 0$  s'inverse en  $u = \beta(y)$ , avec  $\beta'(y) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial u}(y,\beta(y))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(y,\beta(y))}$ .

Enfin, il est facile de constater que  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y,\beta(y))$ ,  $\beta''(y)$  et  $\frac{d}{dy} \det D_X F(\Gamma^{-1}(y,\beta(y)), \beta(y))$  s'annulent en même temps dès que  $\det D_X F(\Gamma^{-1}(y,\beta(y)), \beta(y))$  s'annule, ce qui est le cas en  $y = 0$ . Le fait que **(CN2)** soit vérifiée provient des résultats généraux de l'annexe C.  $\square$

**Remarque V.13** Dans le contexte **(CNP1)** **(CNP3)**, les conditions **(CN2)** et **(CNP2)** sont en fait équivalentes. Elles expriment que la valeur propre réelle qui s'annule en  $(0,0)$  traverse l'axe imaginaire avec une "vitesse" non nulle lorsque l'on suit la courbe  $\mathcal{S}$  (voir l'annexe C).  $\triangle$

**Exemple V.14** ( $i \neq j$ ) L'élimination de  $x_i$  et  $x_j$  dans les équations d'équilibre du système:

$$\begin{cases} x_1 &= -x_1^2 + u \\ x_2 &= x_1 - x_2 \\ x_3 &= x_2 - x_3 \\ y &= x_3 \end{cases}$$

conduit à:  $\phi(y,u) = -y^2 + u = 0$ . Cependant, contrairement au cas du CSTR, le sous-système  $\mathbf{f}(x,u) = 0$  que l'on inverse contient l'équation  $y = x_3 = 0$ , et en l'occurrence, l'équation dans laquelle on injecte le résultat est  $x_i = 0$ , soit:  $i = 1$ . Ceci montre qu'on ne peut pas toujours prendre  $i = j$ , et la raison en est que lorsqu'une matrice est de rang  $k$ , on ne peut pas nécessairement inverser n'importe quel mineur d'ordre  $k$ . Le cas  $i = j$  est néanmoins générique, mais nous voulions justement éviter une telle hypothèse afin d'expliquer une démarche pratique valable dans tous les cas.

## V.2 Régularisation locale par bouclage de sortie.

### V.2.1 Retour affine.

Supposons donné un bouclage de sortie  $u = \phi(h(X), v)$ , et calculons le linéarisé du champ en boucle fermée  $G(X, v) = F(X, \phi(h(X), v))$ . En tout point  $(X, v)$ :

$$D_X G(X, v) = D_X F(X, \phi(h(X), v)) + \frac{\partial F}{\partial u}(X, \phi(h(X), v)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(h(X), v) D_X h(X)$$

Cette expression appelle plusieurs commentaires. D'une part on voit directement le rôle des hypothèses **(CN3)** et **(CN4)**: si  $\epsilon = \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) > 0$ , 0 reste valeur propre de  $D_X G(0,0)$  (attachée au vecteur  $\epsilon$ ), et de même si  $\epsilon < 0$ ,  $D_X h(0)$ ,  $\epsilon > 0$ , auquel cas  $\epsilon^*$  est vecteur propre de  $D_X G(0,0)$ . D'autre part, seule intervient la dérivée de  $\phi$  par rapport à  $y$ , c'est-à-dire le gain du bouclage. Du point de vue du placement de pôles en  $(0,0)$ , on ne perd donc pas de généralité en supposant le bouclage  $u$  affine, de la forme:

$$u = -k_p y + v \tag{V.4}$$

On a alors le résultat de régularisation suivant, qui n'est que la reformulation d'un lemme d'algèbre linéaire.

**Proposition V.15 (Régularisation locale par bouclage affine de sortie)** *Sous les hypothèses (CN1,3,4), le système (V.1) bouclé par (V.4) n'a plus de pôle nul en (0,0) si, et seulement si le gain  $k_P$  est différent de 0.*

**Preuve :** c'est de l'algèbre linéaire. On pose  $A = D_V F(0,0)$ ,  $b = \frac{\partial F}{\partial u}(0,0)$ ,  $c = \text{grad}h(0)$ , et on considère le système linéarisé:

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + bu \\ y &= \langle c, X \rangle \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

Les hypothèses (CN1,3,4) se traduisent par le fait que 0 est valeur propre de  $A$ , commandable et observable. Si  $Ae = 0$ , on sait (proposition C.5) que:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \text{Ker}A + \text{Im}A$$

avec  $\text{Ker}A = \mathbb{R}e$ . Si de plus  $e^*$  est adjoint à  $e$  (et annexe C) avec  $e^*, e \geq 1$ , et si l'on décompose  $b$  sous la forme:  $b = \beta e + \tilde{b}$ , alors  $\beta < e^* \tilde{b} > \neq 0$ . Par ailleurs, l'équation d'évolution en boucle fermée s'écrit:

$$\dot{X} = (A - k_P b c^T)X + b v$$

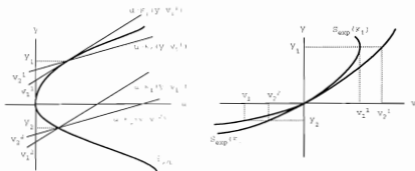
et il s'agit de montrer que la matrice  $A_b = A - k_P b c^T$  n'a pas de valeur propre nulle pour  $k \neq 0$ . Soit donc  $e_b = \alpha e + \tilde{e}$  tel que  $A_b e_b = 0$ :

$$A_b e_b = A e_b - k_P (\beta e + \tilde{b}) c^T e_b = (A \tilde{e}_b - k_P \tilde{b} \langle c, e_b \rangle) - k_P \beta e \langle c, e_b \rangle$$

dont le premier terme  $\in \text{Im}A$  et le second  $\in \text{Ker}A$ . A cause de la propriété de somme directe, chacun de ces deux termes doit être nul. En particulier, comme par hypothèse  $k_P \neq 0$  et  $\beta \neq 0$  (condition (CN3)), on doit avoir:  $\langle c, e_b \rangle = 0$ . En reportant dans le premier terme, on obtient:  $A \tilde{e}_b = A \tilde{e} = 0$ , et donc  $\tilde{e} = 0$  car la restriction de  $A$  à son image est bijective. De fait,  $e_b = \alpha e$ , et  $\langle c, e_b \rangle = \alpha \langle c, e \rangle = 0$  entraîne  $\alpha = 0$  à cause de la condition (CN4). Finalement,  $e_b = 0$  et  $A_b$  est inversible dès que  $k_P$  est non nul.  $\square$

**Remarque V.16 (démonstration rapide)** En utilisant le formalisme des fonctions de transfert (voir annexe B), il s'agit de vérifier que:  $k_P N(s) + D(s)$  ne s'annule pas en 0 lorsque  $k_P \neq 0$ , avec  $D(s) = \det(sI - A)$ , polynôme caractéristique de  $A$ , et  $N(s) = \langle c, (sI - A)^{-1} b \rangle$  dont les racines sont les zéros du système (V.5). A cause de (CN1), on a déjà:  $D(0) = 0$ , et il reste à vérifier que:  $N(0) \neq 0$ , ce qui sera fait dans la démonstration de la proposition V.18 portant sur le retour PI.  $\triangle$

Comme on pouvait s'y attendre, la condition (CN2), de nature non linéaire, n'intervient pas dans cet énoncé. En effet, on intersecte le diagramme de bifurcation expérimental, tangent à l'axe des  $y$  à cause des conditions (CN1,3,4), par une famille, indexée par la consigne auxiliaire  $v$ , de droites parallèles non verticales (les droites de bouclage). L'examen de la figure V.3 montre que localement, à chaque valeur de  $v$  correspond une unique valeur de  $y$ , et donc un unique point stationnaire puisque  $S$  est justement paramétrée par  $y$ . Le diagramme d'équilibre entrée-sortie en boucle fermée (diagramme de droite) ne présente donc plus de bifurcation autour de l'ancien point critique. Ceci fonctionne indépendamment de (CN2), comme par exemple dans le cas de la cubique  $y^3 = v$ .

Figure V.3: régularisation locale ( $k_1$ ) et globale ( $k_2$ ) par bouclage affine.

Cependant, il se peut que l'on ait seulement déplacé le problème ailleurs. En pratique cependant, le choix d'un gain de bouclage supérieur, en valeur absolue, au maximum de la valeur absolue de la pente  $\beta'(y)$  de  $S_{\text{exp}}$  permet d'étendre la régularisation à tout le domaine d'existence de  $S$  et  $S_{\text{exp}}$ . La figure V.3 illustre cette remarque en présentant deux familles de bouclages de gain différent dont l'une seulement restaure globalement l'unicité des équilibres.

**Remarque V.17 (retour sur le CSTR)** Grâce à l'hypothèse de cinétique régulière, on se trouve naturellement avec le CSTR dans la situation de la proposition V.12, en l'occurrence: inversibilité du sous-système des équations stationnaires de concentration, l'observation étant la variable restante (la température). Avec les notations de la proposition:  $i = j = n + 1$ . On retrouve aussi le lemme III.17 à travers l'expression de  $\frac{\partial \phi}{\partial q}$ , avec en l'occurrence:  $\phi = HC - HR$ . Cependant, la connaissance globale de  $\phi$  permet de régulariser globalement le champ linéarisé du CSTR, ce qui explique qu'une inégalité sur le gain  $q'$  remplacé dans la proposition III.18 la condition, moins restrictive, de gain non nul de la proposition générale V.15. De plus, un lien avec le problème de la stabilité a pu être facilement établi grâce à l'hypothèse supplémentaire de stabilité de la matrice jacobienne partielle  $J_{\text{iso}}$  - linéarisé du réacteur isotherme associé.  $\Delta$

## V.2.2 Retour proportionnel intégral.

On envisage cette fois un retour de sortie proportionnel intégral, de la forme:

$$u = -k_P y - k_I \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau \quad (\text{V.6})$$

Le résultat que l'on obtient est encore de nature linéaire.

**Proposition V.18 (Régularisation locale par bouclage proportionnel intégral de sortie)** Si les hypothèses (CN1,3,4) sont vérifiées, le système (V.1) bouclé par (V.6) n'a plus de pôle nul en  $(0, 0)$  dès lors que le gain  $k_I$  est différent de 0.

**Preuve :** le système linéaire tangent étendu en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X} &= (A - k_P b e^t) X - k_I b x \\ \dot{x} &= \langle e, X \rangle - y_c \\ y &= \langle e, X \rangle \end{cases}$$

où l'on a posé:  $x = \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau$ , d'où la matrice:

$$\left( \begin{array}{c|c} A - k_P b e^t & -k_I b \\ \hline e^t & 0 \end{array} \right)$$

dont le rang est le même - par combinaisons linéaires de lignes - que celui de :

$$\left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline e^t & 0 \end{array} \right) \quad (\text{V.7})$$

à condition toutefois que l'on ait:  $k_I \neq 0$ . Dans une base liée à la décomposition:  $\mathbb{R}^{n+1} = \text{Ker} A \oplus \text{Im} A$  (hypothèse **CN1**) et proposition C.5), cette dernière matrice prend la forme:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & * \\ & I & & & \\ & & & 0 & * \\ \hline 0 & & 0 & 0 & \beta \\ \hline & & & \alpha & \gamma & 0 \end{array} \right)$$

avec:  $\beta \gamma \neq 0$  à cause des hypothèses **CN3** **CN4** (et proposition V.6), et cette matrice est clairement de rang plein.  $\square$

**Remarque V.19 (démonstration rapide)** Toujours en utilisant le formalisme des fonctions de transfert (voir annexe B), il s'agit cette fois de vérifier que:  $s(k_P N(s) + D(s)) + k_I N(s)$  ne s'annule pas en 0 lorsque  $k_I \neq 0$ , ce qui se ramène encore à:  $N(0) \neq 0$ . C'est effectivement ce qui a été fait dans la deuxième partie de la démonstration précédente (à partir du changement de base. D'où le petit résultat suivant qui aurait pu servir dans le cas proportionnel (cf remarque analogue): *sous les hypothèses **CN1, 3, 4**,  $N(0) \neq 0$ : 0 n'est pas zéro (!) du système (V.5).*  $\triangle$

Graphiquement, l'interprétation est la même que pour le CSTR: on intersecte le diagramme de bifurcation expérimental  $S_{\text{exp}}$  par des droites horizontales de niveau:  $y = y_c$ , ce qui restaure l'accessibilité quasistatique locale dès lors que  $S_{\text{exp}}$  est tangent à l'axe des  $y$ , même si le point de contact n'est pas quadratique, c'est-à-dire indépendamment de la condition **CN2**.

## V.3 Résumé.

L'étude stationnaire du CSTR commandé en température se généralise localement à un système non-linéaire SISO quelconque présentant une bifurcation col-nœud par rapport à la commande, ce qui se manifeste par le fait que les équilibres ne peuvent pas être paramétrés par la commande (défaut d'accessibilité quasistatique).

Les hypothèses mathématiques associées à cette situation se résument à trois hypothèses linéaires - une valeur propre nulle commandable et observable - qui permettent de construire une courbe de bifurcation expérimentale représentant les équilibres dans le plan  $(u, y)$ , et une hypothèse non linéaire de moindre importance vis-à-vis de la commande.

En effet, sous lesdites hypothèses linéaires, un retour proportionnel de gain non nul, ou un retour proportionnel intégral de gain intégral non nul permettent tous deux de restaurer localement, en boucle fermée, l'accessibilité quasistatique par une consigne auxiliaire.



## Conclusion

### Résultats.

Résumons la situation: moyennant une hypothèse de régularité traduisant la possibilité de paramétrer les équilibres d'un CSTR par la température, il est possible de construire un diagramme thermique stationnaire sur lequel l'éventualité d'un emballement apparaît comme une bifurcation col-nœud potentielle, à savoir la disparition simultanée d'un couple de températures d'équilibre. L'utilisation d'un retour proportionnel ou proportionnel-intégral de température dont les gains satisfont des contraintes du type:  $k > k^*$  permet alors de stabiliser localement le réacteur à n'importe quelle température d'équilibre. Dans le cas d'un système non linéaire SISO quelconque, l'hypothèse de cinétique régulière est remplacée par la situation générale d'une bifurcation col-nœud par rapport à la commande alliée à la propriété de minimum de phase, et la stabilisation est possible lorsque de plus le degré relatif vaut 1.

En termes d'applications, ce travail présente plusieurs aspects. Etant donné un CSTR a peu près connu, on a mis en évidence une démarche pratique pour fixer le choix des gains d'un retour PI, et en particulier pour s'assurer que le terme intégral ne va pas déstabiliser le réacteur. A l'inverse, on peut légitimer a posteriori le cas échéant l'utilisation d'un contrôleur PI fixé. En particulier, nous avons montré le caractère régularisant d'un retour intégral qui permet d'ignorer totalement l'aspect emballement en boucle fermée lorsque cette éventualité existe sur le système de départ. Sous cet angle, notre étude renforce donc la légitimité du retour PI dans l'industrie comme *parade* systématique à certains phénomènes d'emballement, même si bien souvent les problèmes proviennent plus de la saturation pratique des commandes que de la loi de bouclage proprement dite. Par ailleurs, il arrive souvent en génie chimique que les paramètres cinétiques ou thermodynamiques soient mal connus. Dans une perspective d'identification, on peut alors envisager de tracer point par point la partie inaccessible du diagramme thermique d'un réacteur à cinétique régulière ou du diagramme de bifurcation expérimental pour un système quelconque de degré relatif 1 à minimum de phase en appliquant a priori un retour de sortie à gain proportionnel le plus grand possible compte tenu des saturations, car on sait que l'on améliore ainsi la stabilité.

### Perspectives.

Puisque tout repose sur l'hypothèse de cinétique régulière, et plus particulièrement sur la condition (CRI) de stabilité du réacteur isotherme, l'axe principal à explorer pour prolonger ce travail nous semble constitué par la question suivante: comment relier l'hypothèse de cinétique régulière au schéma réactionnel, autrement dit comment lire le nombre d'équilibres



isothermes et leur stabilité directement sur les réactions indépendamment des valeurs des constantes cinétiques? A cet égard, quelques réponses existent déjà: principe du bilan détaillé et théorie de la déficience (cf [23], [24] et [25]) principalement pour les cinétiques respectant la Loi d'Action de Masse, arguments de type matrices qualitatives (cf [58]), ou cas particuliers (cf [47]). Cependant, une théorie générale et efficace reste à faire.

Le problème de la stabilité globale constitue l'autre point d'ombre important, et les travaux d'Arts et Amundson ont montré l'importance de cet aspect du problème du point de vue de la commande. Supposons que le réacteur isotherme soit globalement stable: aucun théorème d'Automatique ne permet alors d'affirmer que le réacteur non isotherme soit globalement stabilisable par retour de température à grand gain, même si le cas du CSTR élémentaire et l'intuition nous conduisent à conjecturer un tel résultat. En fait, le problème n'est pas simple car à supposer que l'on dispose d'une fonction de Liapunov isotherme  $V_{iso}$  pour toute température, la fonction de Liapunov non isotherme à considérer est liée à la dépendance de  $V_{iso}$  en température, dépendance a priori inconnue. De fait, nous sommes ramenés au réacteur isotherme, et il y a là probablement matière à recherche.

Signalons pour conclure qu'au stade où nous en sommes, les résultats de notre étude s'appliquent principalement au cas des cinétiques dont la matrice jacobienne est triangulaire éventuellement triangulaire par blocs -, puisqu'alors les valeurs propres se lisent sur la diagonale. On sent intuitivement qu'il est serait possible de traduire formellement une telle propriété en termes d'orientation ou d'orientabilité du schéma réactionnel. Toutefois, les applications industrielles ne mettent pas systématiquement en jeu des dizaines de réactions, et l'expérience montre que l'hypothèse de cinétique régulière constitue la *règle* plutôt que l'exception. Compte tenu des nouvelles possibilités de réduction de modèle - utilisation de la théorie des perturbations singulières (cf [56]) -, on peut donc espérer être en mesure de vérifier celle-ci au cas par cas, ce qui confère à nos résultats de stabilisation une portée pratique plus vaste que ne le laisse entrevoir l'examen mathématique de leurs conditions d'application.

## Annexe A

# Equations implicites, aspect global.

### A.0 Introduction.

On considère une application  $f$  continue de  $X \times P$  dans  $\mathbb{R}^n$  où  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $P$  une partie a priori quelconque de  $\mathbb{R}^p$ , et on cherche à résoudre *globalement* en  $x$  l'équation implicite:  $f(x, p) = 0$ . Outre l'hypothèse d'inversibilité locale (existence, continuité et inversibilité de  $D_x f$  en tout point de  $X \times P$  voir [64], th 4.B p.150), on est amené à introduire des conditions supplémentaires de nature topologique de façon à recoller entre elles les solutions locales.

Nous donnons en premier lieu un énoncé pour le cas  $P$  ouvert, assorti d'une démonstration longue mais élémentaire. En pratique cependant, l'espace des paramètres  $P$  est un pavé de  $\mathbb{R}^p$  produit d'intervalles éventuellement fermés de la forme  $[0, a]$ , et il peut être important dans nos applications de conserver la valeur 0. Nous donnons donc par la suite une version améliorée du théorème A.1 s'appliquant en fait à toute partie  $P$  connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe.

Ce second énoncé est l'occasion de conceptualiser les conditions suffisantes données dans le premier, conditions qui peuvent paraître purement techniques et d'origine mystérieuse. A cet égard, la situation dans laquelle nous nous plaçons relève de deux notions (classiques): les revêtements et les applications propres, ces dernières faisant l'objet de rappels préalables. L'intérêt d'une telle conceptualisation est double: d'une part on réduit la démonstration du théorème A.28 à une simple juxtaposition de résultats classiques; d'autre part on opère de façon immédiate la généralisation au cas  $P$  non ouvert.

### A.1 Cas d'un espace de paramètres ouvert.

**Théorème A.1 (global des fonctions implicites, cas ouvert)** Soit  $f : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue,  $P$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^p$  et  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\partial X$ , tels que  $f|_{X \times P}$  soit de classe  $C^1$   $0 \leq r \leq +\infty$ . Supposons remplies les conditions suivantes:

(i)  $\forall (x_0, p_0) \in X \times P$   $D_x f(x_0, p_0)$  existe, est inversible, et  $D_x f$  est continue en  $(x_0, p_0)$ ,

(ii)  $\|x\| \rightarrow +\infty$  dans  $X \Rightarrow \inf_{p \in P} \|f(x, p)\| \rightarrow +\infty$ ,

(iii)  $0 \notin f(\partial X \times P)$ .

Alors le nombre  $\nu$  de solutions  $x \in X$  à l'équation  $f(x, p) = 0$  est fini et indépendant de  $p \in P$   
 Sous l'hypothèse supplémentaire:

(iv)  $P$  est simplement connexe,

il existe  $\nu$  fonctions:  $\Phi_i: P \rightarrow X, i = 1 \dots \nu$ , de classe  $C^r$  et dont les graphes deux-à-deux disjoints constituent la sous-variété d'équation  $f = 0$  dans  $X \times P$ :

$$\{(x, p) \in X \times P \mid f(x, p) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \{(\Phi_i(p), p), p \in P\}$$

La démarche est inspirée de diverses démonstrations d'énoncés se rapportant au problème de l'inversion globale d'une fonction continue entre espaces de Banach (voir [9] et [3] pour la version différentielle - théorème d'Hadamard-Levy - ou [64] et [18]<sup>1</sup> pour la version topologique - théorème de Caccioppoli). Nous commençons par démontrer un lemme technique qui traduit les hypothèses (ii) et (iii) sous forme d'une propriété que nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite.

**Lemme A.2 (technique)** On suppose remplies les hypothèses (ii) et (iii) du théorème A.1, et l'on se donne une suite  $p_m$  d'éléments de  $P$  convergent vers une limite  $p^* \in P$ . Alors, de toute suite  $x_m$  d'éléments de  $X$  vérifiant  $f(x_m, p_m) = 0$ , on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite  $x^*$  vérifie  $x^* \in X$  et  $f(x^*, p^*) = 0$ .

**Preuve :** la suite  $x_m$  est bornée car sinon, on pourrait en extraire une sous-suite  $x_l$  vérifiant  $\|x_l\| \rightarrow +\infty$  dans  $X$ , d'où  $f(x_l, p_l) \rightarrow +\infty$  d'après (ii), ce qui est incompatible avec l'hypothèse  $f(x_m, p_m) = 0$ . De fait, on peut extraire de  $x_m$  une sous-suite  $x_l$  convergente, dont la limite  $x$  satisfait  $x \in X$  et  $f(x, p) = 0$  grâce à la continuité globale de  $f$ . Mais (iii) entraîne alors  $x \notin \partial X$ , donc  $x \in X$ .  $\square$

L'idée principale de la preuve du théorème A.1 consiste à globaliser les solutions locales en les reliant par des chemins. Par analogie avec le problème de l'inversion globale, on introduit donc la notion de relèvement par l'équation  $f = 0$ :

**Définition A.3 (Relèvement)** Soit  $Z$  un espace topologique et  $\Gamma: Z \rightarrow P$  une application continue. On appelle relèvement de  $\Gamma$  dans  $X$  par l'équation  $f = 0$  toute application continue  $\Phi: Z \rightarrow X$  vérifiant:  $\forall z \in Z, f(\Phi(z), \Gamma(z)) = 0$ .

**Lemme A.4 (Unicité des relèvements)** Soit  $(x_0, p_0) \in X \times P$  tel que  $f(x_0, p_0) = 0$ ,  $Z$  un espace topologique connexe,  $z_0 \in Z$  et  $\Gamma: Z \rightarrow P$  continue telle que  $\Gamma(z_0) = p_0$ . Sous l'hypothèse (i) du théorème A.1, il existe au plus un relèvement  $\Phi: Z \rightarrow X$  vérifiant  $\Phi(z_0) = x_0$ .

<sup>1</sup>en ce qui concerne [18], se reporter à la remarque A.7.

**Preuve :** On rappelle que, par connexité, toute partie de  $Z$  non vide, ouverte et fermée dans  $Z$  est égale à  $Z$ . Soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  deux relèvements tels que  $\Phi_1(z_0) = \Phi_2(z_0) = x_0$ , et  $C = \{z \in Z : \Phi_1(z) = \Phi_2(z)\}$ .

a)  $C$  est non vide car  $z_0 \in C$

b)  $C$  est fermé en tant que contre-image de  $\{0\}$  par l'application continue  $\Phi_1 - \Phi_2 : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$

c)  $C$  est ouvert dans  $Z$ :

soit  $z \in C$ ,  $p = \gamma(z)$  et  $x = \Phi_1(z) = \Phi_2(z)$ . Par l'hypothèse (I) et le théorème des fonctions implicites (local), l'équation  $f(x', p') = 0$  possède pour  $p'$  dans un voisinage  $V$  de  $p$  une unique solution  $x' = \Phi_x^{loc}(p')$  dans un voisinage  $I'$  de  $x$ , et l'application  $\Phi_x^{loc} : V \rightarrow U$  est régulière. Comme  $\Gamma$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont continues,  $\Gamma^{-1}(I') \cap \Phi_1^{-1}(I') \cap \Phi_2^{-1}(I')$  est un voisinage de  $z$ , sur lequel par construction  $\Phi_1(z') = \Phi_2(z') = \Phi_x^{loc}(\Gamma(z'))$ .  $\square$

**Lemme A.5 (Homotopie)** Soit  $(x_0, p_0) \in X \times P$   $f(x_0, p_0) = 0$ , et  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow P$  une application continue telle que tous les chemins  $\Gamma(s, \cdot)$  aient pour origine  $p_0$ . Sous les hypothèses (I) (II) (III) du théorème A.1, il existe une unique relèvement  $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tel que tous les chemins  $\Phi(s, \cdot)$  aient pour origine  $x_0$ . Si de plus tous les  $\Gamma(s, \cdot)$  ont la même extrémité, il en est de même pour les  $\Phi(s, \cdot)$ .

**Preuve :** L'unicité provient du lemme A.4. Il reste à construire  $\Phi$  et à examiner le problème de l'extrémité commune.

1. Existence de  $\Phi$ :

soit  $C = \{\tau \in [0, 1] : \exists \Phi : [0, 1] \times [0, \tau] \rightarrow X \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, \tau], f(\Phi(s, t), \Gamma(s, t)) = 0 \text{ et } \Phi(s, 0) = x_0\}$ . Montrons que  $C = [0, 1]$ .

a)  $C$  est non vide car  $0 \in C$

b)  $C$  est ouvert dans  $[0, 1]$ :

si  $\tau \in C$  et  $s \in [0, 1]$ ;  $f(\Phi(s, \tau), \Gamma(s, \tau)) = 0$ . Pour  $s$  fixé, on se donne  $V_s$  voisinage de  $\Gamma(s, \tau)$ ,  $U_s$  voisinage de  $x(s) = \Phi(s, \tau)$  tels que  $f(x, p) = 0$  soit équivalent à  $x = \Phi_x^{loc}(p)$  dans  $U_s \times V_s$ , et  $Z_s$  voisinage ouvert convexe de  $(s, \tau)$  inclus dans  $\Gamma^{-1}(V_s)$ . Sur  $Z_s \cap [0, 1] \times [0, \tau]$  qui demeure convexe,  $\Phi$  coïncide d'après le lemme A.4 avec l'unique relèvement local  $\Phi_x^{loc} \circ \Gamma$  qui envoie  $(s, \tau)$  sur  $x(s)$ , lequel est défini sur tout  $Z_s$ . On peut donc de cette façon prolonger  $\Phi$  sur tout  $Z_s$ . Comme par construction le compact  $[0, 1] \times \{\tau\}$  est inclus dans la réunion des  $Z_s$  pour  $s \in [0, 1]$ , on peut ne conserver qu'un recouvrement fini  $Z_1 \cup \dots \cup Z_k$ . Si  $|s_i - \delta_i, s_i + \delta_i| \times \tau, \tau + \epsilon_i \subset Z_i$  pour tout  $i = 1 \dots k$ , on peut alors poser, en prenant  $\epsilon = \inf\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ :

$$\hat{\Phi}(s, t) = \begin{cases} \Phi(s, t) & \text{si } t \leq \tau \\ \Phi_x^{loc}(\Gamma(s, t)) & \text{si } (s, t) \in [s_i - \delta_i, s_i + \delta_i] \times \tau, \tau + \epsilon_i \end{cases}$$

ce qui permet d'étendre  $\Phi$  sur  $[0, 1] \times [0, \tau + \epsilon]$ .

c)  $C$  est fermé:

soit  $\tau = \sup C$ ,  $t_m$  strictement croissante tendant vers  $\tau$ , et  $\Phi$  l'unique relèvement de  $\Gamma$  défini sur  $[0, 1] \times [0, \tau]$  ( $\Phi$  existe à cause du lemme A.4). On se fixe  $s \in [0, 1]$  et on considère la suite  $x_m(s) = \Phi(s, t_m)$ . Par le lemme A.2, on en extrait une sous-suite convergente  $x_i(s)$  (qui dépend de  $s$ ) et on note  $x(s)$  sa limite. Choisissons comme au point b) ci-dessus des ouverts  $V_s, U_s$  et  $Z_s$ .  $\Phi$  coïncide alors, sur  $Z_s \cap [0, 1] \times [0, \tau]$ , avec  $\Phi_x^{loc} \circ \Gamma$  où  $\Phi_x^{loc} : V_s \rightarrow U_s$  envoie  $\Gamma(s, \tau)$  sur  $x(s)$ . En effet, il existe  $t_i < \tau$  tel que  $(s, t_i) \in Z_s \cap [0, 1] \times [0, \tau]$ ,  $\Phi(s, t_i) \in U_s$  et  $\Gamma(s, t_i) \in V_s$  à cause de la convergence de ces trois suites. Comme  $f(\Phi(s, t_i), \Gamma(s, t_i)) = 0$ ,  $\Phi(s, t_i) = \Phi_x^{loc}(\Gamma(s, t_i))$  par l'unicité locale des solutions en

$x$  de  $f(x, p) = 0$ , et  $\Phi = \Phi_{x(s)}^{loc} \circ \Gamma$  sur  $Z_s \cap [0, 1] \times [0, \tau]$  [qui est connexe] par le lemme A.4. Ceci permet de prolonger  $\Phi$  sur tout  $Z_s$ , donc en particulier sur un voisinage  $]s - \delta_s, s + \delta_s[ \times ]\tau - \epsilon_s, \tau]$ . On termine alors comme au point b).

2. Si  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $\Gamma(s, 1) = \Gamma(0, 1) = p_1$ , alors  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $\Phi(s, 1) = \Phi(0, 1) = x_1$ :

soit  $S = \{s \in [0, 1]; \forall s \in [0, \sigma], \Phi(s, 1) = x_1\}$

a)  $S$  est non vide car  $0 \in S$  par définition de  $x_1$ ,

b)  $S$  est ouvert dans  $[0, 1]$ :

si  $\Phi(\sigma, 1) = x_1$ ,  $\Phi(s, 1) = x_1$  pour  $s$  assez voisin de  $\sigma$  par l'unicité locale de la solution  $x_1$  de l'équation  $f(x, p_1) = 0$ .

c)  $S$  est fermé comme image réciproque de  $x_1$  par l'application partielle continue  $\Phi(\cdot, 1)$ .  $\square$

**Lemme A.6 (Existence d'un solution)** Soit  $(x_0, p_0) \in X \times P$  vérifiant  $f(x_0, p_0) = 0$ ,  $p_1 \in P$  quelconque et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$  un chemin joignant  $p_0$  à  $p_1$ . Alors, sous les hypothèses (i) (ii) (iii) du théorème A.1,  $\gamma$  possède un unique relèvement  $\phi_\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  d'origine  $x_0$ . En particulier, l'équation en  $x$ :  $f(x, p_1) = 0$  admet  $\phi_\gamma(1)$  comme solution dans  $X$ .

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire (iv),  $\phi_\gamma(1)$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$  parmi les chemins joignant  $p_0$  à  $p_1$  dans  $P$ .

**Preuve :**

1. Existence et unicité:

l'unicité provient du lemme A.4. Pour l'existence, il suffit de prendre  $\Gamma(s, t) = \gamma(t)$  et d'appliquer le lemme A.5. On obtient un relèvement  $\phi_\gamma(s, t)$ , qui ne dépend pas de  $s$  puisque localement  $\phi_\gamma(s, t) = \Phi^{loc}(\gamma(t))$ . ( $S_t = \{s \in [0, 1]; \forall s \in [0, \sigma], \phi_\gamma(s, t) = \phi_\gamma(0, t)\}$  est non vide, fermé et ouvert dans  $[0, 1]$ ).

2. Si  $P$  est simplement connexe,  $\phi_\gamma(1)$  est indépendant de  $\gamma$ : soient en effet  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  joignant tous deux  $p_0$  à  $p_1$ . Par l'hypothèse (iv) de simple connexité, les chemins  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont homotopes: il existe  $\Gamma$  continue de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $P$  telle que:

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2 \quad \Gamma(s, 0) = p_0, \quad \Gamma(s, 1) = p_1, \quad \Gamma(0, t) = \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad \Gamma(1, t) = \gamma_1(t)$$

D'après le lemme A.5, il existe un unique relèvement  $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $\Phi(s, 0) = x_0$ . L'unicité de  $\phi_{\gamma_0}$  et  $\phi_{\gamma_1}$  d'après le point 1. ci-dessus entraîne alors  $\phi_{\gamma_0} = \Phi(0, \cdot)$  et  $\phi_{\gamma_1} = \Phi(1, \cdot)$ . Mais comme les chemins  $\Gamma(s, \cdot)$  ont tous pour extrémité  $p_1$ , les chemins  $\Phi(s, \cdot)$  ont aussi même extrémité (lemme A.5). En particulier:  $\phi_{\gamma_0}(1) = \Phi(0, 1) = \Phi(1, 1) = \phi_{\gamma_1}(1)$ .  $\square$

**Remarque A.7** L'ordre de ces deux derniers lemmes n'est pas indifférent. Parmi les références citées précédemment, [18] inverse cet ordre, mais il semble qu'alors la démonstration du lemme d'homotopie ([18], lemme 3.8 du chapitre 2, p.29) présente un raccourci un peu rapide  $\triangle$ .

<sup>2</sup>avec les notations de ce lemme: on a construit un relèvement  $G$  de  $F$  par  $\Phi$ , et il rest à montrer la continuité de  $G$  sur  $[0, 1]^2$ . Or, puisque  $\Phi(G(s, t)) = F(s, t)$ , le théorème des fonctions implicites local dit qu'il existe des voisinages  $U'$  et  $V'$  de  $G(s, t)$  et  $F(s, t)$ , et une application continue  $\Phi_{loc}^{-1} : U' \rightarrow V'$  tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x) = y \\ (x, y) \in U' \times V' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \Phi_{loc}^{-1}(y) \\ (x, y) \in U' \times V' \end{array} \right.$$

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème principal.

**Preuve : (théorème A.1).** Pour tout  $p \in P$  nous notons  $\nu(p)$  le nombre de solutions distinctes de l'équation  $f(x, p) = 0$ .

1.  $\nu(p)$  est fini pour tout  $p \in P$ .

En effet, si pour  $p$  fixé,  $\nu(p) = +\infty$ , il existe une suite  $x_m$  vérifiant les conditions du lemme A.2 où l'on prend  $p_m$  constante égale à  $p$ . Il existe alors une infinité de solutions à l'équation  $f(x, p) = 0$  sur tout voisinage de la limite  $x^*$  ce qui est incompatible avec l'unicité locale déduite de la condition (I).

2.  $\nu(p)$  est localement constant: si  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_k = \{p \in P, \nu(p) = k\}$  est ouvert dans  $P$ .

En effet, supposons  $C_k$  non vide, et soit  $p \in C_k$  associé aux  $k$  solutions  $(x_1, \dots, x_k)$ . D'après l'hypothèse (I), il existe  $U_1, \dots, U_k$  voisinages ouverts (disjoints de  $x_1, \dots, x_k$  dans  $X$  et  $V$  voisinage ouvert de  $p$  dans  $P$  tels que pour tout  $i = 1, \dots, k$  et pour tout  $p \in U_i$  l'équation  $f(x, p) = 0$  possède une solution unique dans  $U_i$ . En fait, il existe un ouvert  $W \subset V$  contenant  $p$  et sur lequel  $\nu(p) = \nu(\bar{p})$ . Si tel n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite  $p_m$  dans  $W$  tendant vers  $p$  et telle que pour tout  $m$ :  $\nu(p_m) \neq k$ , c'est-à-dire  $\nu(p_m) \geq k+1$ . Les solutions associées  $(x_{m,1}, \dots, x_{m,k+1})$  vérifient les conditions du lemme A.2, et puisque  $\nu(p) = k$ , deux des limites des sous-suites convergentes doivent être égales. L'unicité locale des solutions sur les  $U_i$  implique alors que deux de ces sous-suites coïncident à partir d'un certain rang, ce qui contredit  $\nu(p_m) \geq k+1$  pour tout  $m$ .

3. L'un seulement des  $C_k$  est non vide, et il coïncide avec  $P$ .

En effet,  $P$  peut s'écrire d'après le point 1. comme la réunion des ensembles  $C_k$  qui sont ouverts d'après le point 3 et deux à deux disjoints par construction. Or, un ensemble connexe n'admet pas d'autre partition en ouverts que le vide et lui-même.

4. Lorsque  $P$  est simplement connexe, les solutions de  $f(x, p) = 0$  sont la réunion des graphes deux à deux disjoints de  $\nu$  fonctions  $\Phi$ , définies globalement et régulières sur  $P$ .

En effet, soit  $p \in P$  et  $(x_1, \dots, x_\nu)$  les solutions de  $f(x, p) = 0$ . On construit les solutions de  $f(x, p) = 0$  pour  $p \in P$  quelconque en prenant les extrémités des chemins  $\phi_{i,\gamma}$  d'origine  $x_i$  et associés à un chemin  $\gamma$  joignant  $p$  à  $p$ . D'après le lemme A.6, ces extrémités sont indépendantes du choix de  $\gamma$ , et l'on peut donc poser:

$$\begin{cases} \text{pour } p = p & \Phi_i(p) = x_i \\ \text{pour } p \neq p & \Phi_i(p) = \phi_{i,\gamma}(1) \end{cases}$$

On a ainsi par construction:  $\forall i = 1, \dots, \nu, \forall p \in P, f(\Phi_i(p), p) = 0$ . Il reste à montrer que les  $\Phi_i$  sont régulières. Soit  $p_0$  un point quelconque de  $P$ ,  $\gamma_0$  joignant  $p$  à  $p_0$ ,  $V$  un voisinage convexe de  $p_0$  et  $U_i$  un voisinage de  $\Phi_i(p_0)$  tels que  $f(x, p) = 0$  soit équivalent à  $x = \Phi_i^{loc}(p)$  dans  $U_i \times V$ . Nous allons montrer que  $\Phi_i = \Phi_i^{loc}$  sur  $V$ . Si  $p \in V$ ,  $\Phi_i(p) = \phi_{i,\gamma}(1)$  où  $\gamma$  est la concaténation de  $\gamma_0$  et du segment  $[p_0, p]$ . Il existe une date  $t_0$  telle que  $[p_0, p] = \{\gamma(t); t_0 \leq t \leq 1\}$ . Pour  $t \in [t_0, 1]$ ,  $\phi_{i,\gamma}(t) = \Phi_i^{loc}(\gamma(t))$  car le segment  $[p_0, p]$  est inclus dans  $V$ . En particulier,  $\Phi_i(p) = \phi_{i,\gamma}(1) = \Phi_i^{loc}(p)$ .  $\square$

Certes, on peut alors affirmer que  $G$  coïncide avec  $\Lambda = \Phi_{i,\gamma}^{-1} \circ F$  sur  $G^{-1}(U) \cap F^{-1}(V)$ , mais puisque l'on ne sait pas que  $G$  est continue,  $G^{-1}(t)$  n'est pas a priori un voisinage de  $(s, t)$  dans  $[0, 1]^2$ , et l'on ne peut donc pas affirmer directement que  $G$  coïncide avec  $\Lambda$  sur un voisinage de  $(s, t)$ . En d'autres termes, pour montrer la continuité de  $G$  uniquement à l'aide du théorème des fonctions implicites (local), on est amené à supposer implicitement que  $G$  est continue!

Il existe des résultats similaires dans le cadre de la théorie des revêtements (voir [27] ou [20]), et il est bien précisé que le problème principal est la continuité du relèvement, pour laquelle les auteurs utilisent la notion de nombre de Lebesgue d'un recouvrement d'un espace compact. Dans notre cas, les hypothèses supplémentaires (II) et (III) permettent par l'intermédiaire du lemme A.2 d'aboutir plus directement (point 1.c de la démonstration du lemme A.5).

**Remarque A.8** Les points 1. 2. 3. qui démontrent la première partie du théorème A.1 utilisent uniquement le lemme technique A.2. Les résultats intermédiaires sur les relèvements sont uniquement utilisés dans le point 4. qui montre la possibilité de globaliser les solutions (seconde partie du théorème A.1).  $\triangle$

## A.2 Rappels sur les applications propres.

### A.2.1 Situation topologique.

On considère deux espaces topologiques séparés  $X$  et  $Y$  et une application quelconque  $f$  de  $X$  dans  $Y$ .

**Définition A.9 (Partie compacte)** Une partie  $C$  de l'espace topologique  $X$  est dite compacte lorsque de tout recouvrement de  $C$  par des ouverts (pour la topologie induite), on peut extraire un recouvrement fini.

**Définition A.10 (Application propre)** L'application  $f$  est dite propre lorsque l'image réciproque par  $f$  d'une partie compacte de  $Y$  est une partie compacte de  $X$ .

Par exemple,  $f$  est propre si elle est bijective et si  $f^{-1}$  est continue (homéomorphisme). Lorsque  $f$  est continue, on sait que l'image d'un compact est un compact. Ce n'est pas toujours vrai pour l'image réciproque.

**Proposition A.11 (Cas d'une application continue, conditions suffisantes)** Si  $f$  est continue,  $f$  est propre dans les cas suivants:

1.  $X$  est compact,
2.  $f$  est injective et fermée.

**Preuve :** dans le premier cas, l'image réciproque d'une partie compacte (done fermée) est fermée par continuité, donc compacte.

Dans le second cas,  $f$  est bijective sur son image. Soit  $g = f^{-1} \circ f : f(X) \rightarrow X$ .  $g$  est continue, car si  $A$  est un fermé de  $X$ ,  $g^{-1}(A) = f(A)$  est fermé dans  $Y$  par hypothèse, donc aussi fermé dans  $f(X)$ . Soit alors  $C$  un compact de  $Y$ .  $f^{-1}(C) = g(C \cap f(X))$ . Or  $C \cap f(X)$  est fermé dans  $Y$  et inclus dans  $C$  compact, donc compact, ainsi que son image par  $g$  continue.  $\square$

### A.2.2 Cas des espaces métriques.

On suppose ici que  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques.

**Théorème A.12 (de Bolzano-Weierstraß)** Une partie  $C$  de l'espace métrique  $X$  est compacte si, et seulement si de toute suite d'éléments de  $C$  on peut extraire une sous-suite convergente.

Il est possible, grâce à ce théorème, de caractériser les applications propres

**Proposition A.13 (Caractérisation)**  *$f$  est propre si, et seulement si de toute suite  $x_n$  d'éléments de  $X$  telle que la suite des images  $f(x_n)$  converge (dans  $Y$ ), on peut extraire une sous-suite convergente (dans  $X$ ).*

**Preuve :** Supposons que  $f$  soit propre, et soit  $x_n$  une suite d'éléments de  $X$  telle que  $f(x_n)$  converge vers une limite  $l$ . L'adhérence  $S$  de l'ensemble  $\{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$  est compacte et s'écrit:  $S = \{f(x_n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ . Son image réciproque par  $f$  est donc compacte, et contient par définition tous les  $x_n$ . On peut alors appliquer le théorème A.12.

Réciproquement, soit  $C$  un compact de  $Y$ , et  $x_n$  une suite de  $f^{-1}(C)$ . Puisque tous les  $f(x_n)$  sont dans  $C$  qui est compact, une sous-suite des  $f(x_n)$  converge, soit  $f(x_p)$ . En appliquant l'hypothèse, on obtient qu'une sous-suite  $x_q$  de  $x_p$  converge. Comme  $x_q$  est évidemment extraite de  $x_n$ ,  $f^{-1}(C)$  est compact, et  $f$  est propre.  $\square$

La proposition suivante complète la condition suffisante donnée dans le cadre purement topologique.

**Proposition A.14 (Cas d'une application continue, condition nécessaire)** *Si  $f$  est continue et propre, alors  $f$  est fermée.*

**Preuve :** Soit  $A$  un fermé de  $X$ . Pour montrer que  $f(A)$  est fermé dans  $Y$ , on considère une suite convergente  $y_n$  d'éléments de  $f(A)$ , et on montre que sa limite  $y$  dans  $Y$  appartient à  $f(A)$ . Soit  $x_n$  une suite quelconque d'antécédents par  $f$  dans  $A$ :  $x_n \in A$  et  $f(x_n) = y_n$  pour tout  $n$ . D'après la proposition A.13, on peut extraire de  $x_n$  une sous-suite convergente, dont la limite  $x$  appartient nécessairement à l'adhérence de  $A$ , c'est-à-dire à  $A$ . Par la continuité de  $f$ :  $f(x) = y$ , et  $y \in f(A)$ .  $\square$

### A.2.3 Cas des espaces vectoriels de dimension finie.

On suppose ici que  $X$  et  $Y$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

**Théorème A.15** *Les compacts de  $X$  sont les parties fermées bornées.*

On a dans ce contexte une caractérisation des applications propres continues.

**Proposition A.16 (Cas d'une application continue, caractérisation)** *Pour une application  $f$  continue, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1.  $f$  est propre.
2. L'image réciproque d'une partie bornée est bornée.
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|f(x)\| = +\infty$ .

**Preuve :**

$1 \Leftrightarrow 2$ : si  $f$  est propre et  $B \subset Y$  borné,  $B$  est compact et  $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\hat{B})$  qui est aussi compact, donc borné. Réciproquement, si  $C \subset Y$  est compact,  $C$  est fermé borné. De fait,  $f^{-1}(C)$  est fermé par continuité et borné par hypothèse, donc compact.

$2 \Leftrightarrow 3$ : si  $\mathbf{3}$  est faux, il existe une partie non bornée  $D \subset X$  telle que  $f(D)$  soit borné. Mais alors  $D \subset f^{-1}(f(D))$  qui est borné par hypothèse, d'où contradiction. Réciproquement, si  $B \subset Y$  est borné et pas  $f^{-1}(B)$ ,  $\mathbf{3}$  entraîne que  $f(f^{-1}(B)) = B$  n'est pas non plus borné, d'où contradiction.  $\square$



**Théorème A.17 (Inversion globale)** Si  $f$  est un  $C^r$ -difféomorphisme local en tout point,  $0 \leq r \leq +\infty$ ,  $f$  est un  $C^r$ -difféomorphisme si, et seulement si  $f$  est propre.

**Preuve :** Ce résultat est dû à Hadamard et Levy pour le cas  $r \geq 1$ , et à Cacciopoli pour le cas  $r = 0$ . Voir par exemple [64].  $\square$

## A.2.4 Cas des variétés différentielles.

On suppose ici que  $X$  et  $Y$  sont deux variétés différentielles de dimension finie, et que  $f$  est de classe  $C^1$  de rang maximal en tout point, à savoir:  $\text{Min}(\dim(X), \dim(Y))$ . Des lemmes classiques de géométrie différentielle conduisent alors à des propriétés de nature locale. Lorsque l'on suppose que  $f$  est propre, on peut compléter ces résultats par des propriétés globales. Toutes les démonstrations se trouvent (par exemple) dans [39].

**Proposition A.18 (Sur les immersions,  $\dim(X) \leq \dim(Y)$ )** Si  $f$  est une immersion, on a les propriétés suivantes:

1.  $f$  est un plongement local: pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U$  voisinage de  $x$  tel que  $f(U)$  est une sous-variété de  $Y$  en  $f(x)$ , et  $f|_U$  un difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ ; de plus:  $T_{f(x)}f(U) = \text{Im } f'(x)$ ;
2.  $f$  est localement équivalente à une application linéaire injective; en particulier,  $f$  est localement injective;
3. si de plus  $f$  est injective et propre,  $f$  est un plongement.

**Proposition A.19 (Sur les submersions,  $\dim(X) \geq \dim(Y)$ )** Si  $f$  est une submersion, on a les propriétés suivantes:

1. pour tout  $y \in Y$   $f^{-1}(y)$  est une sous-variété de  $X$ .  
de plus, si  $f(x) = y$ :  $T_x f^{-1}(y) = \text{Ker } f'(x)$ ;
2.  $f$  est localement équivalente à une application linéaire surjective; en particulier,  $f$  est ouverte et "localement surjective" (si  $y$  possède un antécédent par  $f$ , ses voisins aussi);
3. si  $f$  est propre et  $Y$  connexe,  $f$  est surjective;
4. si  $f$  est surjective et propre,  $f$  est une fibration (théorème d'Ehresmann).

**Remarque A.20 (sur la surjectivité)** Le point 3 provient du fait qu'une submersion est ouverte, tandis qu'une application propre est fermée (proposition A.14). Ainsi,  $f(X)$  est non vide, ouvert et fermé, donc égal à  $Y$  lorsque  $Y$  est connexe.  $\triangle$

**Proposition A.21 (Sur les étalements,  $\dim(X) = \dim(Y)$ )** Si  $f$  est un étalement, on a les propriétés suivantes:

1.  $f$  est un difféomorphisme local en tout point;

2.  $f$  est localement équivalente à une application linéaire bijective;
3. si  $f$  est propre et  $Y$  connexe,  $f$  est surjective;
4. si  $f$  est surjective et propre,  $f$  est un revêtement propre.

**Remarque A.22** Le point 4 qui se présente a priori comme une conséquence du théorème d'Ehresmann, peut néanmoins se démontrer directement à l'aide d'arguments plus simples, et dans le cadre topologique (voir la proposition A.23 ci-dessous).  $\triangle$

### A.2.5 Applications propres et revêtements.

Il n'est évidemment pas question de refaire ici la théorie des revêtements d'un espace topologique.<sup>3</sup> Nous nous contentons ici de donner le résultat dont nous allons nous servir par la suite pour redémontrer (et généraliser) le théorème A.1. Il s'agit d'une simple reformulation de [39], proposition 1.4.4, dans le cadre des espaces métriques.

**Proposition A.23 (Applications propres et revêtements)** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques.  $X$  localement compact, et  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme local. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1.  $f$  est un revêtement propre.
2.  $f$  est surjectif et propre.
3.  $f$  est surjectif et les fibres  $f^{-1}(y)$  sont de cardinal fini et localement constant.

**Preuve :**

1  $\Rightarrow$  2: c'est évident.

2  $\Rightarrow$  3: soit  $y \in Y$ .  $f^{-1}(y)$  est non vide (surjectivité), discret (homéomorphie locale) et compact (propreté), donc fini de cardinal entier non nul  $\nu(y)$  et point 1. de la preuve élémentaire du théorème A.1. Montrons que  $\nu$  est constant au voisinage de  $y$ . Soit  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_\nu\}$ , il existe des voisinages ouverts  $U_1, \dots, U_\nu$  de  $x_1, \dots, x_\nu$  deux-à-deux disjoints tels que  $f$  soit un homéomorphisme de chacun des  $U_i$  sur  $V = \bigcap_{i=1}^{\nu} f(U_i)$ . Supposons que pour tout  $V' \subset V$  il existe  $y' \in V'$  tel que  $\nu(y') \neq \nu(y)$ , c'est-à-dire  $\nu(y') > \nu(y)$ . On peut alors construire une suite  $y'_m$  convergeant vers  $y$  et une suite  $x'_m$  d'antécédents par  $f$  n'appartenant à aucun des  $U_i$ . Comme  $f$  est propre, une sous-suite de  $x'_m$  converge (proposition A.13), vers une limite  $x'$  vérifiant  $f(x') = y$  et  $x' \notin \{x_1, \dots, x_\nu\}$ , d'où une contradiction.

3  $\Rightarrow$  1: si  $y \in Y$  et  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_\nu\}$ , on choisit des ouverts  $U_i$  comme ci-dessus de sorte que  $\nu$  soit constant sur  $V = \bigcap_{i=1}^{\nu} f(U_i)$ .  $f$  satisfait alors en  $y$  à la propriété de trivialité locale qui définit un revêtement:  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{\nu} U_i$  est réunion disjointe d'ouverts homéomorphes à  $V$ . Montrons que  $f$  est propre. Soit  $x_m$  une suite d'éléments de  $X$  telle que la suite des images  $f(x_m)$  converge vers  $y$ . On peut toujours supposer que  $f(x_m) \in V$  pour tout  $m$ . De fait, tous les  $x_m$  appartiennent à la réunion des  $U_i$ , et l'un de ceux-ci,  $U_1$  par exemple, contient nécessairement une infinité de termes. Grâce à l'hypothèse de compacité locale, on peut supposer avoir choisi  $U_1$  compact. On peut donc extraire de l'infinité de termes de la suite  $x_m$  appartenant à  $U_1$  une sous-suite convergente.  $\square$

<sup>3</sup>les variétés ne suffisent pas, un pavé quelconque n'étant même pas une variété à bord.

**Remarque A.24** Par construction, tout revêtement est un homéomorphisme local. La proposition ci-dessus montre que la réciproque, fautive dans le cas général, est vraie pour une application surjective et propre. La propriété apparaît donc bien comme une propriété *globalisante*, à l'instar du cas différentiel précédemment décrit. A cet égard, l'hypothèse de compacité locale est secondaire; celle-ci sert uniquement à assurer la propriété d'un revêtement à fibre finie, et l'on peut s'en passer pour démontrer  $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3$ .  $\triangle$

**Remarque A.25 (connexité de  $\mathcal{Y}$ )** Lorsque  $\mathcal{Y}$  est connexe,  $f$  propre est nécessairement surjectif pour les mêmes raisons que dans le cas des submersions (point 3. de la proposition A.19). De plus, le cardinal des fibres est *constant* car les  $C_k = \{y \in Y, \#f^{-1}(y) = k\}$  sont ouverts et constituent une partition de  $\mathcal{Y}$ . Cette remarque s'applique évidemment aussi à la proposition A.21.  $\triangle$

### A.3 Conceptualisation et généralisation.

La (longue) démonstration élémentaire du théorème A.1 présente l'inconvénient de refaire en partie la théorie de l'omotopie. Plus précisément, tous les lemmes intermédiaires sur les revêtements possèdent des analogues dans la théorie des revêtements (voir [20] ou [27]). Si l'on arrivait à se mettre dans le cadre de cette théorie, on pourrait utiliser ces résultats pour démontrer directement la seconde partie du théorème A.1. Pour ce faire, on considère d'emblée  $X$  ouvert et  $P$  quelconque, et on note:

$$S = \{(x, p) \in X \times P, f(x, p) = 0\}$$

la trace dans  $X \times P$  de l'ensemble (fermé) des solutions de l'équation  $f = 0$  muni de la topologie induite. Par ailleurs, on note  $\pi : S \rightarrow P$  la restriction à  $S$  de la projection canonique  $\text{can} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ .  $\pi$  est évidemment continue.

**Lemme A.26 (traduction des hypothèses)** Soit  $f : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue,  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $P$  une partie de  $\mathbb{R}^p$  non nécessairement ouverte. On a les implications suivantes:

1. (i)  $\Rightarrow \pi$  est un homéomorphisme local.
2. (ii) (iii)  $\Rightarrow \pi$  est propre.

**Preuve :**

1: en effet, si  $f(x_0, p_0) = 0$ , le théorème des fonctions implicites local implique l'existence de voisinages ouverts  $U$  et  $V$  dans  $X \times \mathbb{R}^p$  d'une part, et d'une application continue  $\phi^{loc} : V \rightarrow U$  d'autre part, tels que  $f(x, p) = 0$  possède pour  $p \in V$  l'unique solution  $\phi^{loc}(p)$  dans  $U$ . Ceci rest vrai a fortiori pour tout  $p \in V \cap P$ . De fait, l'application  $\pi$  réalise un homéomorphisme de  $S \cap (U \times V)$  sur  $V \cap P$ , l'application réciproque étant:  $p \mapsto (\phi^{loc}(p), p)$ .

2: c'est exactement ce que prouve le lemme technique A.2 si l'on utilise la caractérisation des applications propres donnée par la proposition A.13. Noter que la nature de  $P$  n'intervient pas, grâce à la continuité globale de  $f$  sur  $\mathbb{R}^{n+p}$ .  $\square$

**Remarque A.27** La notion de relèvement par l'équation  $f = 0$  définie précédemment n'est autre que celle, classique, de relèvement par l'application  $\pi$ . Le lemme d'homotopie A.5 et le lemme de relèvement des chemins A.6 ne sont en fait que la reformulation de résultats connus dans le cas de revêtements.

Avec la proposition A.23, il est maintenant facile de démontrer la généralisation du théorème A.1 au cas  $P$  non nécessairement ouvert.

**Théorème A.28 (global des fonctions implicites)** *On se place dans le cadre du théorème A.1, avec  $P$  partie connexe quelconque de  $\mathbb{R}^p$*

*Sous les hypothèses (i) (ii) (iii),  $\pi$  est un revêtement de  $P$  à  $\nu$  feuilletts, où  $\nu$  est un entier strictement positif. En particulier, l'équation  $f(x, p) = 0$  possède exactement  $\nu$  solutions  $x \in X$  pour tout  $p \in P$*

*Sous l'hypothèse supplémentaire:*

**(iv')**  *$P$  est simplement connexe et localement connexe par arcs,*

*le revêtement  $\pi$  est trivial: les solutions  $S$  sont constituées par la réunion des graphes deux-à-deux disjoints de  $\nu$  applications définies globalement sur  $X \times P$  et de même régularité que  $f$*

**Preuve :** le lemme A.26 associé à la proposition A.23 et à la remarque A.25 permettent d'affirmer que  $\pi$  est un revêtement à  $\nu$  feuilletts: une application ouverte et propre à but connexe est surjective, et un homéomorphisme local surjectif et propre est un revêtement, à un nombre fini de feuilletts lorsqu'il est à base connexe (points 1. 2. 3. de la démonstration élémentaire).

Lorsque  $P$  est simplement connexe et localement connexe par arcs, un résultat classique de topologie algébrique ([27], théorème IX.2.9 p.132) permet d'affirmer que le revêtement  $\pi$  est trivial. Les sections de  $\pi$  sont alors définies de façon globale: ce sont les solutions  $\Phi_i(p)$  cherchées (point 4. de la démonstration élémentaire).  $\square$

**Remarque A.29** Comme annoncé, la preuve est nettement plus concise que la démonstration du théorème A.28. En fait, la proposition A.23 établit le lien entre nos hypothèses et la théorie des revêtements. Ce lien étant établi, la possibilité de globaliser les solutions provient directement d'un résultat classique, dont la redémonstration hors de son cadre naturel est à l'origine de la longueur de la preuve élémentaire.  $\triangle$



## Annexe B

# Polynômes, racines et stabilité. Application aux systèmes linéaires SISO

### B.0 Introduction.

#### B.0.1 Motivation.

On rappelle qu'étant donné un système dynamique autonome régulier:  $\dot{x} = f(x)$  vérifiant  $f(x_0) = 0$ , l'équilibre  $x_0$  est (localement asymptotiquement) stable dès que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne  $D_x f(x_0)$  sont à partie réelle strictement négative (linéarisation, voir [40] pour le résultat original). Les valeurs propres d'une matrice étant les racines de son polynôme caractéristique, la question de la stabilité se ramène donc de façon générale à l'étude des racines d'un polynôme.

**Définition B.1 (polynôme stable)** *Un polynôme est dit stable lorsque ses racines sont à partie réelle strictement négatives.*

On considère dans ce qui suit un système linéaire SISO causal, donné par sa fonction de transfert (voir [34]):

$$y = \frac{N(s)}{D(s)} u \quad d = \deg(D) \geq n = \deg(N) \quad (\text{B.1})$$

Introduisons tout de suite le vocabulaire courant.

**Définitions B.2 (vocabulaire)** *On appelle pôles du système (B.1) les racines de  $D$ , zéros celles de  $N$ , et degré relatif la différence  $\nu = d - n$  entre le degré de  $D$  et celui de  $N$ . Le système est stable (resp à minimum de phase) lorsque ses pôles (resp ses zéros) sont stables, c'est-à-dire à partie réelle strictement négative. Lorsque  $N$  et  $D$  ont une racine commune, on dit qu'il y a annulation, c'est-à-dire simplification possible entre le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert <sup>1</sup>*

<sup>1</sup>ici, les polynômes  $N$  et  $D$  sont simplement déduits de la représentation d'état par transformation de Laplace (et exemple), et nous ne les supposons pas a priori premiers entre eux.

(B.1) représente une écriture condensée, particulièrement adaptée aux calculs que nous allons mener, du modèle physique qui lui est donné en représentation d'état. Dans l'exemple qui suit, nous décrivons brièvement le rapport entre les deux formalismes.

**Exemple B.3 (représentation d'état)** La fonction de transfert de:

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + bu \\ y &= \langle c, X \rangle \end{cases}$$

s'obtient par transformation de Laplace:

$$H(s) = \langle c, (sI - A)^{-1}b \rangle = \frac{\langle c, (sI - A)^c b \rangle}{\det(sI - A)}$$

d'où:  $D(s) = \det(sI - A)$ , polynôme caractéristique de  $A$  de degré  $d$ , et  $N(s) = \langle c, (sI - A)^c b \rangle$  où  $(sI - A)^c$  représente la transposée de la matrice des cofacteurs de  $A$ , de sorte que le degré de  $N$  est au plus  $d - 1$ . Les zéros se caractérisent par le fait que la matrice:

$$\begin{pmatrix} sI - A & b \\ c^t & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est justement  $-N(s)$ , chute de rang. Enfin, à partir du développement formel de  $(I - M)^{-1}$  on montre que (formellement):

$$\langle c, (sI - A)^{-1}b \rangle = \frac{\langle c, b \rangle}{s} + \frac{\langle c, Ab \rangle}{s^2} + \frac{\langle c, A^2b \rangle}{s^3} + \dots$$

et comme le degré relatif  $\nu = d - n \geq 1$  vérifie de façon générale:  $\frac{s^\nu N(s)}{D(s)} = \frac{N_n}{D_d} + O\left(\frac{1}{s}\right)$ , on obtient:

$$\nu = \min\{i + 1, i \in \mathbb{N} \text{ et } \langle c, A^i b \rangle \neq 0\} \text{ et } \frac{N_n}{D_d} = N_n = \langle c, A^{\nu-1}b \rangle$$

◇

**Remarque B.4 (stabilité interne/externe)** Le système est donné par sa fonction de transfert, et lorsque celle-ci est issue d'un modèle d'état, il se peut qu'à cause de cancellations le système sous-jacent soit instable. C'est pourquoi on ne supposera pas  $N$  et  $D$  premiers entre eux, ce qui revient à ne pas effectuer les simplifications éventuelles. De cette façon, les notions de stabilité interne et externe coïncident.  $\triangle$

On se pose le problème d'assurer la stabilité (déplacer les pôles à gauche) par retour de sortie, et on envisage pour ce faire deux types de bouclage, le premier dit proportionnel (ou P):

$$u = -k_P y + v \quad \rightarrow \quad y = \frac{k_P N(s)}{D(s) + k_P N(s)} v \quad (\text{B.2})$$

et le second dit intégral (ou I):

$$u = -k_I \frac{y - y_s}{s} \quad \rightarrow \quad y = k_I \frac{N(s)}{sD(s) + k_I N(s)} v_s \quad (\text{B.3})$$

dont les consignes auxiliaires respectives  $r$  et  $y_c$  sont destinées à permettre de changer de point de fonctionnement. Il se trouve que le retour proportionnel pur ne permet pas en pratique d'assigner exactement l'équilibre désiré - il demeure ce que l'on appelle des *biais* -, tandis que la stabilisation par retour intégral pur est structurellement compromise (voir plus loin). Le cas intéressant pour la commande consiste donc à combiner les avantages à l'aide d'un retour proportionnel intégral (ou PI):

$$u = -k_P y - k_I \frac{y - y_c}{s} \quad \rightarrow \quad y = \frac{k_I N(s)}{sD(s) + (sk_P + k_I)N(s)} y_c \quad (\text{B.4})$$

**Remarque B.5 (sur l'invariance des zéros)** Les trois fonctions de transfert associées respectivement à (B.2) (B.3) et (B.4) ayant  $N(s)$  pour numérateur, les bouclages proposés laissent invariants les zéros du système (B.1). En particulier, ils conservent la propriété de minimum de phase. À l'inverse, il arrive que l'on inclue la consigne dans le terme proportionnel d'un retour PI de la façon suivante:

$$u = -k_P(y - y_c) - k_I \frac{y - y_c}{s} \quad \rightarrow \quad y = \frac{(sk_P + k_I)N(s)}{sD(s) + (sk_P + k_I)N(s)} y_c$$

ce qui a pour conséquence de rajouter un zéro au système commandé. Lorsque  $k_P$  et  $k_I$  sont de signe contraire, ce zéro est instable, ce qui peut poser des problèmes de régimes transitoires (le système n'est plus à minimum de phase).  $\triangle$

**Exemple B.6 (représentation d'état, suite)** Le retour PI:  $u = -k_P y + r$  conduit au système commandé:

$$\begin{cases} \dot{X} &= (A - k_P b c^t)X + b r \\ y &= c^t X \end{cases}$$

de fonction de transfert:  $H_P(s, k_P) = \langle c, (sI - A + k_P b c^t)^{-1} b \rangle$ . Pour exprimer  $H_P$  sous forme d'une fraction, on calcule de deux façons différentes le déterminant:

$$\begin{vmatrix} sI - A + k_P b c^t & b \\ c^t & 0 \end{vmatrix} = -\det(sI - A + k_P b c^t) H_P(s, k_P) = \begin{vmatrix} sI - A & b \\ c^t & 0 \end{vmatrix} = -N(s)$$

où la première égalité résulte de la formule de déterminant par blocs, tandis que la seconde s'obtient par combinaison linéaire de lignes. Il en résulte:

$$H_P(s, k_P) = \frac{N(s)}{\det(sI - A + k_P b c^t)}$$

Remarquons ensuite que  $\det(sI - A + k_P b c^t)$  est affine en  $k_P$  car la matrice  $b c^t$  est toujours de rang 1, et le terme constant:  $\det(sI - A) = D(s)$  s'obtient en faisant  $k_P = 0$ . Enfin, le calcul montre que le coefficient de  $k_P$  est  $N(s) = \langle c, (sI - A)^{-1} b \rangle$  se placer dans le cas où toutes les composantes de  $c$  sauf une sont nulles - d'où:

$$\det(sI - A + k_P b c^t) = k_P N(s) + D(s)$$

et l'on retrouve la fonction de transfert (B.2).



Le retour PI:  $u = -k_P y - k_I \int_0^t (y(\tau) - y_c) d\tau$  conduit à une équation intégro-différentielle:

$$\dot{X} = AX - k_P b < c, X > - k_I b \int_0^t (< c, X(\tau) > - y_c) d\tau$$

On obtient de nouveau un système purement différentiel en ajoutant une variable au système de départ, en l'occurrence:  $x = \int_0^t (< c, X(\tau) > - y_c) d\tau$ , d'où le système dit étendu:

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX - (k_P < c, X > + k_I x) b \\ \dot{x} &= < c, X > - y_c \\ y &= < c, X > \end{cases}$$

dont les équilibres vérifient nécessairement  $y = y_c$  - rejet des biais - et dont la matrice:

$$\begin{pmatrix} A - k_P b c^t & -k_I b \\ e^t & 0 \end{pmatrix}$$

permet de retrouver la fonction de transfert (B.4). ◇

Puisque les pôles en boucle fermée sont paramétrés par le ou les gains, la question que l'on se pose est de savoir comment calculer ces derniers pour placer les pôles<sup>2</sup> dans le demi-plan complexe gauche. Dans un premier temps, on étudie le comportement des pôles des systèmes (B.2) et (B.3) lorsque  $k_P \rightarrow \pm\infty$ , ce que l'on appelle la *commande à grand gain*. On traite ensuite le cas complet (B.4), en introduisant à cette occasion la notion de fonction de transfert *positive réelle*. Pour finir, on énonce sans démonstration les résultats classiques de stabilité reliant de façon générale les coefficients d'un polynôme à la position de ses zéros dans le plan complexe, résultats que l'on particularise aux systèmes SISO en comparant avec l'approche grand gain.

## B.0.2 Rappels d'analyse complexe.

La démonstration des théorèmes de base suivants se trouve dans tout traité d'analyse complexe, comme par exemple [49].

**Théorème B.7 (fonctions implicites, cadre complexe)** Soit  $F(z, \epsilon)$  continue de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , analytique en  $z$ , et telle que:

$$\begin{cases} F(z_0, \epsilon_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(z_0, \epsilon_0) \neq 0 \end{cases}$$

Alors, il existe une fonction continue  $\phi$  telle qu'au voisinage de  $(z_0, \epsilon_0)$ :

$$f(z, \epsilon) = 0 \iff z = \phi(\epsilon)$$

<sup>2</sup>collectivement, l'assignation individuelle des pôles à l'aide d'un nombre inférieur de paramètres étant génériquement compromise.

**Remarque B.8** Le théorème classique des fonctions implicites entraîne que si de plus  $F$ , considérée de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  est de classe  $C^1$  il en est de même pour  $\phi$ . En dérivant l'équation  $F(\phi(\epsilon), \epsilon) = 0$ , on obtient:

$$\phi'(\epsilon) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \quad (\text{B.5})$$

$$\phi''(\epsilon) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon^2} + 2\phi'(\epsilon) \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \epsilon} + \phi'(\epsilon)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \quad (\text{B.6})$$

△

Donnons tout de suite la forme particulière sous laquelle nous utiliserons ce résultat.

**Lemme B.9 (technique)** Soit  $F(z, \eta) = G(z) + \eta H(z, \eta)$  continue de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , avec  $G$  et  $H$  analytiques en  $z$ ,  $H$  de classe  $C^\infty$  en  $(z, \eta)$ , et de plus:

$$\begin{cases} G(z_0) = 0 \\ G'(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

Alors, il existe une fonction de classe  $C^\infty$   $\phi$  telle qu'au voisinage de  $(z_0, 0)$ :

$$F(z, \eta) = 0 \iff z = z_0 + \eta \phi(\eta)$$

**Preuve :** on applique le théorème des fonctions implicites dans le cadre complexe:  $\frac{\partial F}{\partial z} = G'(z) + \eta H'(z)$ , et  $\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, 0) = G'(z_0) \neq 0$  par hypothèse, donc au voisinage de  $(z_0, 0)$ :  $F(z, \eta) = 0 \iff z = \psi(\eta)$  pour une fonction  $\psi$  de classe  $C^\infty$  valant  $z_0$  en 0, que l'on peut donc écrire sous la forme annoncée:  $\psi(\eta) = z_0 + \eta \phi(\eta)$ . □

Le théorème de Rouché donne des conditions pour qu'une perturbation d'une fonction holomorphe ne modifie pas le nombre de zéros dans un domaine fixé.

**Théorème B.10 (de Rouché)** Soit  $U^*$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  et  $f$  et  $g$  continues dans  $\bar{U}$ , holomorphes dans  $U^*$  et telles que:

$$\forall z \in \partial U^* \quad |f(z)| > |g(z)|$$

Alors,  $f$  et  $f + g$  ont le même nombre de zéros dans  $U^*$

Enfin le principe du maximum constitue une propriété fondamentale des fonctions holomorphes. Il s'étend de façon immédiate aux parties réelles et imaginaires, via la fonction exponentielle.

**Théorème B.11 (principe du maximum)** Soit  $U^*$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  et  $f$  continue dans  $\bar{U}$  holomorphe dans  $U^*$  Alors:

$$\max_{z \in \bar{U}^*} |f(z)| = \max_{z \in \partial U^*} |f(z)|$$

## B.1 Etude asymptotique des racines de $D(s) + kN(s)$ . Application au retour de sortie à grand gain.

### B.1.1 Zéros finis, zéros à l'infini.

Par souci d'intégrité mathématique, on conduit plutôt l'étude en  $\epsilon = \frac{1}{k}$  et l'on pose:

$$P(s, \epsilon) = N(s) + \epsilon D(s)$$

Les degrés respectifs des polynômes  $N$  et  $D$  sont ici quelconques, c'est-à-dire que l'on ne suppose pas a priori  $n \leq d$ . On conserve la notation:  $\nu = d - n$ . Une première étape consiste à classer les racines de  $P$  en deux groupes: bornées et non bornées lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème B.12** Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $n$  racines de  $P$  exactement restent bornées.

**Preuve :** c'est une conséquence directe du théorème de Rouché.

Cas  $n > d$ : soit  $C$  un cercle centré en 0 et de rayon suffisant pour que les racines de  $N$  se trouvent dans le disque ouvert associé. Pour  $\epsilon$  assez petit, on aura  $|N(s)| > \epsilon |D(s)|$  pour tout  $s \in C$ . Donc,  $N + \epsilon D$  et  $N$  ont le même nombre de racines à l'intérieur de  $C$ : c'est-à-dire  $n$ . Mais comme par hypothèse  $N + \epsilon D$  est de degré  $n$ , il n'y a pas d'autre racine à considérer.

Cas  $n \leq d$ : le raisonnement ci-dessus montre que  $N + \epsilon D$  possède au moins  $n$  racines bornées, mais il reste à montrer que les  $d - n$  autres ne le sont pas. Pour cela, on note  $\bar{N}$  et  $\bar{D}$  les polynômes obtenus en renversant l'ordre des coefficients de  $N$  et  $D$  respectivement, et l'on pose  $s = \frac{1}{z}$ . Alors:

$$N(s) + \epsilon D(s) = \frac{1}{z^d} (z^{d-n} \bar{N}(z) + \epsilon \bar{D}(z))$$

Par ailleurs,  $\bar{N}(0) \neq 0$  car le coefficient constant de  $\bar{N}$  n'est autre que le coefficient de plus haut degré de  $N$ . Il existe donc un cercle  $\bar{C}$  centré en 0 et de rayon  $\bar{R}$  suffisant petit pour ne contenir aucune racine de  $\bar{N}$ , et un réel associé  $\bar{\epsilon} = \epsilon(\bar{R})$  assez petit tels que:  $|z^{d-n} \bar{N}(z)| > \epsilon |\bar{D}(z)|$  pour tout  $z \in \bar{C}$  et pour tout  $\epsilon \in ]0, \bar{\epsilon}[$ . Donc,  $z^{d-n} \bar{N}(z) + \epsilon \bar{D}(z)$  et  $z^{d-n} \bar{N}(z)$  ont même nombre de racines à l'intérieur de  $\bar{C}$ , à savoir  $d - n$ . Comme on a aussi  $\bar{D}(0) \neq 0$ , les racines de  $z^{d-n} \bar{N}(z) + \epsilon \bar{D}(z)$  ne sont pas nulles pour  $\epsilon \neq 0$ , et leurs inverses, qui se trouvent à l'extérieur du cercle  $C$  de rayon  $\frac{1}{\bar{R}}$ , sont racines de  $N(s) + \epsilon D(s)$ . En conclusion, étant donné  $\bar{R}$  arbitrairement petit, il existe  $\bar{\epsilon}$  tel que  $d - n$  racines de  $N(s) + \epsilon D(s)$  soient de module supérieur à  $\frac{1}{\bar{R}}$  pour  $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ .  $\square$

Ce résultat correspond à l'intuition: lorsque  $\epsilon = 0$ ,  $N + \epsilon D$  se réduit à  $N$ , et donc semble posséder  $n$  racines bornées. On s'attend de plus à ce que celles-ci tendent vers les zéros de  $N$  ce que ne dit pas le théorème précédent et c'est effectivement le cas.

**Théorème B.13 (zéros finis)** Si  $s_0$  est racine de  $N$  d'ordre  $\mu$ , et si  $D(s_0) \neq 0$ , il existe  $\mu$  fonctions  $C^\infty$   $\phi_i(\epsilon)$ ,  $\phi_i(\epsilon)$  définies sur un voisinage de zéro à droite dans  $\mathbb{R}$  et telles que:

$$\{s_0 + \epsilon^{\frac{1}{\mu}} z_i + \epsilon^{\frac{\mu}{\mu}} \phi_i(\epsilon^{\frac{1}{\mu}}), i = 1 \dots \mu\} \quad (\text{B.7})$$

constituent  $\mu$  solutions de l'équation  $P(s, \epsilon) = 0$  pour  $\epsilon > 0$  voisin de 0, les  $z_i$  étant les racines  $\mu$ èmes de:  $-\frac{D(s_0)}{N^{(\mu)}(s_0)}$ .

Si  $D(s_0) = 0$ ,  $P(s_0, \epsilon) = 0$  pour tout  $\epsilon$  (cancellation), et le développement ci-dessus se réduit à  $s_0$ .

**Preuve :** on pose  $N(s) = (s - s_0)^\mu Q(s)$ ,  $Q(s_0) = N^{(\mu)}(s_0) \neq 0$ , et on effectue le changement de variable:  $s = s_0 + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} z$  destiné à "éclater" la singularité:

$$N(s) + \epsilon D(s) = \epsilon z^\mu Q(s_0 + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} z) + \epsilon D(s_0 + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} z) \equiv \epsilon F(z, \epsilon^{\frac{1}{\nu}})$$

Puisque  $s_0$  n'est pas racine de  $N + \epsilon D$ ,  $N(s) + \epsilon D(s) = 0$  équivaut à  $F(z, \epsilon^{\frac{1}{\nu}}) = 0$  (on peut diviser par  $\epsilon$ ). Or,  $F$  peut s'écrire de la façon suivante:

$$F(z, \eta) = z^\mu Q(s_0) + D(s_0) + \eta R(z, \eta)$$

où  $R$  est un polynôme. Soient  $z_1 \dots z_\mu$  les racines  $\mu$ èmes de  $-\frac{D(s_0)}{Q(s_0)}$ . Comme celles-ci sont simples, on peut appliquer le lemme B.9 à l'équation:  $F(z, \eta) = 0$  au voisinage de chaque  $(z_i, 0)$ , ce qui fournit  $\mu$  racines de la forme:  $z_i + \eta \phi_i(\eta)$ . En coordonnées  $(s, \epsilon)$ , on obtient finalement:  $s_0 + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} z_i + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \phi_i(\epsilon^{\frac{1}{\nu}})$ .  $\square$

**Remarque B.14 (sur le signe de  $\epsilon$ )** Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 par valeur négatives, le théorème s'applique en écrivant:  $N + \epsilon D = N + (-\epsilon)(-D)$ . De fait, les développements (B.7) ne diffèrent au premier ordre qu'à partir de  $\mu = 3$ .  $\triangle$

On a un résultat analogue pour les racines non bornées.

**Théorème B.15 (zéros à l'infini)** *Si  $\nu = d - n > 0$ , il existe  $\nu$  fonctions  $C^\infty$   $\phi_1(\epsilon), \dots, \phi_\nu(\epsilon)$  définies sur un voisinage de zéro à droite dans  $\mathbb{R}$  et telles que:*

$$\{\epsilon^{-\frac{1}{\nu}} z_i + \phi_i(\epsilon^{\frac{1}{\nu}}), i = 1 \dots \nu\} \quad (\text{B.8})$$

constituent  $\nu$  solutions de l'équation  $P(s, \epsilon) = 0$  pour  $\epsilon > 0$  voisin de 0, les  $z_i$  étant les racines  $\nu$ èmes de:  $-\frac{N_n}{D_d}$ .

**Preuve :** on fait le changement de variable  $s = \epsilon^{-\frac{1}{\nu}} z$ :

$$N(s) + \epsilon D(s) = (N_n + D_d z^\nu) z^n \epsilon^{-\frac{n}{\nu}} + (N_{n-1} + D_{d-1} z^\nu) z^{n-1} \epsilon^{-\frac{n-1}{\nu}} + \dots + N_0 + D_\nu z^\nu + D_{\nu-1} z^{\nu-1} \epsilon^{\frac{1}{\nu}} + \dots + D_0 \epsilon$$

Comme on exclut le cas  $s = 0$ , on met en facteur  $z^n \epsilon^{-\frac{n}{\nu}}$  dans le second membre, de sorte que  $N(s) + \epsilon D(s) = 0$  équivaut à:

$$N_n + D_d z^\nu + (N_{n-1} z^{-1} + D_{d-1} z^{\nu-1}) \epsilon^{\frac{1}{\nu}} + \dots + (N_0 z^{-n} + D_n z^{\nu-n}) \epsilon^{\frac{n}{\nu}} + D_{\nu-1} z^{\nu-n-1} \epsilon^{\frac{n+1}{\nu}} + \dots + D_0 z^{-n} \epsilon^{\frac{n+n}{\nu}}$$

ce que l'on réécrit sous la forme:

$$F(z, \epsilon^{\frac{1}{\nu}}) \equiv N_n + D_d z^\nu + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} R(z, \epsilon^{\frac{1}{\nu}}) = 0$$

On applique alors le lemme B.9 au voisinage des  $(z_i, 0)$  où les  $z_i$  sont les racines  $\nu$ èmes de  $-\frac{N_n}{D_d}$ . On termine comme pour les zéros finis.  $\square$

Pour terminer, résumons la situation en termes de gain  $k$ .

**Proposition B.16 (racines asymptotiques d'une droite de polynômes  $D(s) + kN(s)$ )** *Lorsque  $k \rightarrow \pm\infty$ , les racines de  $D(s) + kN(s)$  se décomposent en:*

- $n$  racines bornées de la forme:  $s_0 + O(|k|^{-\frac{1}{\nu}})$  indépendamment du signe de  $k$ , où  $s_0$  est racine de  $N$  d'ordre  $\mu$ , d'une part,
- le cas échéant  $\nu = d - n$  racines non bornées de la forme:  $|k|^{\frac{1}{\nu}} z_i + O(1)$  où les  $z_i$  sont les racines  $\nu$ èmes de  $-\frac{N_n}{D_d}$  pour  $k > 0$ , et de  $\frac{N_n}{D_d}$  pour  $k < 0$ , d'autre part.

### B.1.2 Application à la stabilisation par retour de sortie.

**Définition B.17 (stabilisabilité par retour de sortie à grand gain)** *Le système (B.1) est dit stabilisable par retour de sortie P (resp I) à grand gain s'il existe un gain  $k_p^* > 0$  (resp  $k_p^* > 0$ ) tel que le système (B.2) (resp (B.3)) soit stable pour tout  $k_p > k_p^*$  ou  $k_p < -k_p^*$  (resp  $k_I > k_I^*$  ou  $k_I < -k_I^*$ ).*

Il s'agit donc de faire en sorte que les racines de  $D(s) + kN(s)$  (resp  $sD(s) + kN(s)$ ) soient à partie réelle strictement négative. Pour ce qui est des zéros finis, la proposition précédente montre que dans les deux cas P ou I, une condition nécessaire et suffisante est que le polynôme  $N$  soit stable (minimum de phase). Pour les zéros à l'infini, plusieurs cas se présentent suivant la valeur du degré relatif  $\nu$  en boucle fermée. Considérons tout d'abord le cas P. Si  $\nu = d - n = 0$ , il n'y a pas de zéro à l'infini et la question est réglée. Pour  $\nu = 1$ , l'un des deux nombres  $\frac{\lambda_{D_i}}{D_i}$  et  $-\frac{\lambda_{D_i}}{D_i}$  est strictement négatif, et il suffit de choisir  $k$  assez grand en valeur absolue, avec le signe adéquat. Pour  $\nu = 2$ , les racines carrées  $z_1$  et  $z_2$  sont soit réelles positives, soit imaginaires pures, auquel cas on ne peut conclure sans calculer le terme constant contenu dans le  $O(1)$ . Enfin, pour  $\nu \geq 3$ , l'une des racines cubiques est nécessairement à partie réelle positive, et la stabilisation par retour P à grand gain est impossible. Le cas du retour I se déduit des considérations précédentes sachant qu'à la droite  $sD(s) + kN(s)$  est associé:  $\nu = d + 1 - n$  (le retour I augmente le degré relatif d'une unité). Finalement:

**Proposition B.18 (stabilisation par retour de sortie à grand gain)** *On considère le système linéaire SISO causal (B.1) de degré relatif  $\nu \geq 0$ , et on note  $N_n$  et  $D_d$  les coefficients dominants respectifs de  $N$  et  $D$ . Lorsque  $N$  est stable - minimum de phase -, on se trouve dans l'un des cas suivants:*

- si  $\nu = 0$ , le système est stabilisable par retour de sortie P à grand gain de signe quelconque, ou I à grand gain du signe de  $N_n D_d$ ,
- si  $\nu = 1$ , le système est stabilisable par retour de sortie P à grand gain du signe de  $N_n D_d$ , mais on ne peut conclure pour le retour I,
- si  $\nu = 2$ , on ne peut conclure pour le retour P, mais le système n'est pas stabilisable par retour I à grand gain,
- si  $\nu \geq 3$ , le système n'est pas stabilisable par retour de sortie P ou I à grand gain,

et, le cas échéant, la non stabilisabilité, provient exclusivement des pôles à l'infini.

Si  $N$  n'est pas stable - non minimum de phase - le système n'est jamais stabilisable par retour de sortie P ou I à grand gain, et ceci provient des pôles finis.

**Remarque B.19 (sur la déstabilisation par retour intégral)** De façon générale, l'utilisation d'un retour I introduit un pôle à l'infini supplémentaire et il se peut que le système commandé soit instable, même lorsque le système de départ est stable. L'exemple académique suivant:  $N = s + 3, D = (s + 1)^2$  sera traité ci-dessous.  $\Delta$

### B.1.3 Développements asymptotiques.

Dans certaines situations, on est amené à pousser les développements asymptotiques (B.7) et (B.8). L'indétermination des cas  $\nu = 1, 2$  dans la proposition précédente fournit un exemple d'une telle situation. La méthode est simple: il suffit de calculer les termes d'ordre supérieur intervenant dans le lemme technique général B.9, puis d'appliquer le résultat à l'équation  $F(z, \eta) = 0$  dérivée de  $P(s, \epsilon) = 0$  avec le changement de variable adéquat (cf démonstrations ci-dessus). A titre d'illustration, étudions le cas  $\nu = 2$  de la proposition B.18.

**Lemme B.20 (zéros à l'infini, cas  $\nu = 2$ )** Si  $\nu = d - n = 2$ , et si  $N_n D_d > 0$ , les deux zéros à l'infini de  $D(s) + kN(s)$  admettent le développement suivant lorsque  $k \rightarrow +\infty$ :

$$s_\infty = \pm i \sqrt{\frac{N_n}{D_d}} \sqrt{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{D_{d-1}}{D_d} - \frac{N_{n-1}}{N_n} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad (\text{B.9})$$

**Preuve :** à l'aide de (B.5), on complète aisément le développement du lemme B.9:

$$G(z) + \eta H(z, \eta) = 0 \Leftrightarrow z = z_0 - \eta \frac{H(z_0, 0)}{G'(z_0)} + \eta^2 \phi(\eta) \quad (\text{B.10})$$

Par ailleurs, l'équation des zéros à l'infini dans le cas  $\nu = 2$  s'écrit:

$$F(z, \eta) = N_n + D_d z^2 + \eta \left( \frac{N_{n-1}}{z} + D_{d-1} z \right) + \eta^2 R(z, \eta)$$

En prenant  $G(z) = N_n + D_d z^2$ , on obtient en  $z_0 = \pm i\omega$ ,  $\omega^2 = \frac{N_n}{D_d}$ :

$$-\frac{H(i\omega, 0)}{G'(i\omega)} = -\frac{H(-i\omega, 0)}{G'(-i\omega)} = -\frac{D_{d-1} - \frac{N_{n-1}}{2\omega}}{2D_d} = -\frac{1}{2} \left( \frac{D_{d-1}}{D_d} - \frac{N_{n-1}}{N_n} \right)$$

d'où le résultat en reportant dans (B.10).  $\square$

**Exemple B.21 (déstabilisation par retour intégral)** On prend  $N = s + 3$ ,  $D = (s + 1)^2$ , d'où:

$$kN(s) + sD(s) = k(s + 3) + (s^3 + 2s^2 + s + 1)$$

et:

$$\operatorname{Re}(s_\infty) = -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{1} - \frac{3}{1} \right) + O(\sqrt{\epsilon}) = \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

qui est bien  $> 0$  pour  $k > 0$  assez grand.  $\diamond$

Nous sommes maintenant à même de compléter la proposition B.18.

**Proposition B.22 (stabilisation par retour de sortie à grand gain, compléments)** Dans les conditions de la proposition B.18 et lorsque  $N_n D_d > 0$ , les trois propositions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\nu = 2$  et le système est stabilisable par retour de sortie  $P$  à grand gain.
- (ii)  $\nu = 1$  et le système est stabilisable par retour de sortie  $I$  à grand gain.
- (iii)  $\frac{D_{d-1}}{D_d} - \frac{N_{n-1}}{N_n} > 0$ .

**Preuve :** on applique (B.9) à  $D(s) + kN(s)$  pour le retour  $P$ , et à  $sD(s) + kN(s)$  pour le retour  $I$ .  $\square$

## B.2 Etude asymptotique du signe de $\operatorname{Re} \left( \frac{N(s)}{D(s)+kN(s)} \right)$ . Application au retour Proportionnel Intégral.

### B.2.1 Réflexions préliminaires sur le calcul des gains P et I.

L'idée la plus naturelle consiste à calculer le gain proportionnel de façon à obtenir un système intermédiaire (B.2) stable, afin d'appliquer à ce système un retour I. Cependant, nous avons vu ci-dessus que le gain intégral ne saurait être choisi quelconque, sous peine de déstabilisation. A cet égard, il est intéressant de remarquer que, conformément à l'intuition, ceci ne peut arriver pour de faibles gains intégraux.

**Proposition B.23 (non déstabilisation par retour intégral à faible gain)** Soit  $D$  stable de degré  $d$ ,  $N$  de degré  $n \leq d$  et  $P(s, k) = sD(s) + kN(s)$ . Il existe  $k^* > 0$  tel que  $P(s, k)$  soit stable pour tout  $0 < |k| < k^*$  avec  $k$  du signe de  $D(0)N(0)$  si  $D(0)N(0) \neq 0$ , et de signe quelconque sinon.

**Preuve :** on prend cette fois directement  $\epsilon = k$  et l'on applique les résultats de la section précédente: le degré relatif de  $sD(s) + \epsilon N(s)$  valant ici  $n - (d + 1) < 0$ , il n'y a pas de zéro à l'infini, et les zéros finis tendent vers ceux de  $sD(s)$ , à savoir ceux de  $D$  qui sont stables par hypothèse, et 0 dans le cas  $N(0)D(0) \neq 0$ , qui de fait est simple. Pour lever l'indétermination, on utilise le développement (B.7) qui pour  $\mu = 1$  est valable quel que soit le signe de  $\epsilon$ :

$$s = -\epsilon \frac{N(0)}{(sD(s))'(0)} + O(\epsilon^2) = -\epsilon \frac{N(0)}{D(0)} + O(\epsilon^2)$$

d'où le résultat cherché.  $\square$

Lorsque l'on commence par stabiliser le système de départ par un retour P, la proposition précédente appliquée au système intermédiaire se traduit par l'existence d'une borne supérieure de gains intégraux  $k_I^*(k_P)$  associée à chaque gain proportionnel  $k_P$ . Intuitivement, plus on prend  $k_P$  grand et plus on doit récupérer de marge pour le choix de  $k_I$ . On est alors en droit de se poser la question suivante: existe-t-il un gain proportionnel fini  $k_P^*$  qui convienne pour tous les  $k_I$  (de signe fixé), ou encore tel que:

$$k_I^*(k_P^*) = +\infty \quad ?$$

Une réponse très partielle peut être dérivée du développement (B.9).

**Proposition B.24 (stabilisation par retour PI à grand gain intégral)** Dans les conditions de la proposition B.18, lorsque de plus  $N$  est stable,  $\nu = 1$  et  $N_n D_d > 0$ , le système est stabilisable par retour PI à grand gain intégral si, et seulement si:

$$k_P > k_P^* = \frac{D_d}{N_n} \left( \frac{N_{n-1}}{N_n} - \frac{D_{d-1}}{D_d} \right)$$

**Preuve :** il suffit d'appliquer la proposition B.22 au système (B.4) dont l'équation des pôles est réécrite sous la forme:  $kN + s(D + k_P N) = 0$ , en considérant  $k_P$  comme fixé:

$$s_n = \pm i \sqrt{\frac{N_n}{D_d} \sqrt{k_I}} \quad \frac{1}{2} \left( k_P \frac{N_n}{D_d} \frac{D_{d-1}}{D_d} - \frac{N_{n-1}}{N_n} \right) + O \left( \frac{1}{\sqrt{k_I}} \right)$$

d'où la condition de stabilisabilité par grand gain intégral:  $k_p > k_p^*$ .  $\square$

Cette proposition constitue une alternative - à gain proportionnel plus faible - au résultat que nous allons établir: l'existence d'une borne  $k_p^*$  convenant pour tout choix de gain intégral. Dans ce cas, le système intermédiaire (B.2) doit vérifier une propriété plus forte que la stabilité.

## B.2.2 Fractions rationnelles positives réelles et retour intégral.

**Définition B.25 (fraction rationnelle positive réelle)** Soient  $N$  et  $D$  stables, de degrés  $n$  et  $d$  tels que:  $\nu = d - n \in \{-1, 0, 1\}$  et à coefficients dominants  $N_n$  et  $D_d$  de même signe.  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  est alors dite (strictement) positive réelle lorsque de plus:

$$\forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(H(s)) > 0 \quad (\text{B.11})$$

Cette définition appelle quelques commentaires. Tout d'abord, l'adjectif *strictement* sera toujours omis et sous-entendu dans la suite. Ensuite:

- l'hypothèse  $D$  stable se justifie par le fait que  $H$  doit être définie (et donc holomorphe) pour  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ ;
- l'hypothèse  $N$  stable se justifie principalement par la remarque suivante: si  $N(s_0) = 0$  avec  $\operatorname{Re}(s_0) > 0$ , (B.11) ne peut être vérifié, car la partie réelle d'une fonction holomorphe change de signe au voisinage d'un zéro. En supposant  $N$  stable, on impose de plus que  $N$  n'ait pas de racine sur l'axe imaginaire; ceci a l'avantage de permettre la propriété suivante:  $\frac{N}{D}$  est positive réelle si, et seulement si  $\frac{N}{N}$  l'est, qui s'obtient en remarquant que:  $\frac{N}{D} = \left| \frac{N}{D} \right|^2 \frac{D}{N}$ ;
- enfin la condition (B.11) impose  $|\nu| \leq 1$  et  $N_n D_d > 0$ . Prenons par exemple  $\nu \leq 0$ . En divisant  $N$  par  $D$ , on obtient:  $\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$  où  $Q$  est un polynôme de degré  $-\nu \geq 0$  et  $\frac{R}{D}$  une fraction rationnelle de degré relatif au moins égal à 1, holomorphe sur le demi-plan droit. De fait:

$$\operatorname{Re} \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_n}{D_d} \operatorname{Re}(s^{|\nu|}) + O(s^{|\nu|-1})$$

au voisinage de l'infini. En prenant  $s = \rho e^{i\theta}$ ,  $\operatorname{Re}(s^{|\nu|}) = \rho^{|\nu|} e^{i\nu\theta}$  qui garde un signe constant sur le demi-plan complexe droit si, et seulement si:  $|\nu| \leq 1$ , auquel cas ce signe est celui de  $N_n D_d$  qui doit donc être positif. Si  $\nu > 0$ , considérer  $\frac{D}{N}$ .

La caractérisation suivante permet en pratique de ramener le test de la propriété (B.11) à l'étude d'une fonction d'une variable réelle.

**Lemme B.26 (caractérisation)** Dans les conditions de la définition B.25, (B.11) équivaut à:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(i\omega) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(H(i\omega)) > 0$$

**Preuve:** il s'agit bien sûr de montrer le caractère suffisant. Prenons par exemple  $\nu \geq 0$ . Au voisinage de l'infini (voir commentaires ci-dessus):

$$\operatorname{Re} \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_n}{D_d} \operatorname{Re} \frac{1}{s^\nu} + O\left(\frac{1}{s^{\nu+1}}\right)$$



qui est, pour  $|s|$  assez grand et  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , du signe de  $\frac{N_s}{D_s}$ , c'est-à-dire strictement positif à cause de l'hypothèse de signe sur l'axe imaginaire. Supposons que  $\operatorname{Re}(H(s_0)) \leq 0$  pour un  $s_0$  à droite. Soit alors  $R > |s_0|$  assez grand pour que  $\operatorname{Re}(H(s)) > 0$  sur le demi-cercle  $\mathcal{C} = \{|z| = R \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ ,  $\mathcal{I} = \{i\omega, \omega \in [-R, R]\}$  et  $\Delta$  le demi-disque associé. Sur  $\partial\Delta = \mathcal{C} \cup \mathcal{I}$ ,  $\operatorname{Re}(H(s)) > 0$  et d'après le principe du maximum,  $\operatorname{Re}(H(s))$  possède un minimum sur  $\bar{\Delta}$  qui est atteint sur  $\partial\Delta$ , donc  $> 0$ , en contradiction avec  $\operatorname{Re}(H(s_0)) \leq 0$ .  $\square$

**Exemple B.27 (dimension  $d = 2$ , degré relatif  $\nu = 1$ )** On se donne  $N(s) = s + N_1$  et  $D(s) = s^2 + D_1s + D_2$  stables, c'est-à-dire  $N_1, D_1$  et  $D_2 > 0$ .  $\operatorname{Re}\frac{D}{N}$  est du signe de:  $\operatorname{Re}D\bar{N}$ . Calculons:

$$\operatorname{Re}D(i\omega)N(-i\omega) = (D_1 - N_1)\omega^2 + D_2N_1$$

est  $> 0$  pour tout  $\omega$  si, et seulement si  $D_1 - N_1 > 0$ .  $\diamond$

**Remarque B.28 (stabilité et passivité)** Les fractions rationnelles positives réelles sont exactement les fonctions de transfert des systèmes linéaires dits *passifs*. Pour plus de détails, voir par exemple [22], ch.3. L'exemple précédent montre ainsi que la passivité est une propriété plus forte que la stabilité  $\triangle$

L'intérêt des fractions rationnelles positives réelles réside dans le fait que la stabilité du système SISO associé est dans ce cas robuste à tout retour intégral, pourvu simplement que le gain possède le signe adéquat.

**Proposition B.29 (non déstabilisation des systèmes positifs réels par retour intégral)** Si  $P(s) = sD(s) + kN(s)$ , avec  $\frac{N(s)}{D(s)}$  positive réelle (resp négative réelle) et  $\nu = d - n = 0$  ou  $1$ , alors  $P$  est stable pour tout  $k > 0$  (resp  $k < 0$ ).

**Preuve :** Soit  $s_0$  une racine de  $P$  à partie réelle  $\geq 0$ . Comme  $D$  est stable,  $D(s_0) \neq 0$  et  $s_0 = -k\frac{N(s_0)}{D(s_0)}$ , d'où contradiction si  $\frac{N(s)}{D(s)}$  est positive réelle et  $k > 0$  (resp négative réelle et  $k < 0$ ).  $\square$

**Remarque B.30 (réciproque)** La réciproque est fautive, comme le montre le contre-exemple:  $N(s) = (s + 1)^2$ ,  $D(s) = (s + 10)^3$ . En effet, on a dans ce cas  $sD(s) + kN(s)$  stable pour tout  $k > 0$ , mais il existe des valeurs de  $\omega > 0$  qui rendent  $\operatorname{Re}\frac{D(i\omega)}{N(i\omega)} < 0$ . Ainsi, la passivité est une propriété strictement plus forte que la non déstabilisation par retour intégral.  $\triangle$

### B.2.3 Application au retour PI.

Le lemme précédent montre que la question de la stabilisation par retour PI de gain intégral quelconque se ramène à pouvoir rendre une fraction rationnelle positive réelle uniquement par retour P, et l'on sait que dans ce cas, le système bouclé est stable.

**Proposition B.31 (passivisation par retour proportionnel de sortie)** Soient  $N(s)$  et  $D(s)$  de degrés  $n$  et  $d$  tels que:  $|\nu| = |d - n| \leq 1$ , et soient  $N_i$  et  $D_i$  les coefficients dominants. Alors, si  $\bar{N}$  est stable:

- si  $N_n D_d > 0$ ,  $\operatorname{Re}\frac{D(s)}{N(s)}$  est borné inférieurement pour  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ , et  $\frac{N(s)}{D(s)+kN(s)}$  est positive réelle pour  $k > k^* = -\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}\frac{D(i\omega)}{N(i\omega)}$ .
- si  $N_n D_d < 0$ ,  $\operatorname{Re}\frac{D(s)}{N(s)}$  est borné supérieurement pour  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ , et  $-\frac{N(s)}{D(s)+kN(s)}$  est positive réelle pour  $k < k^* = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}\frac{D(i\omega)}{N(i\omega)}$ .

Dans les deux cas, les bornes  $k^*$  sont optimales, au sens où les demi-droites de gains associées sont maximales.

**Preuve :** en effet, comme  $|\nu| = |d - n| \leq 1$ ,  $\operatorname{Re}\frac{D(s)}{N(s)}$  est du signe de  $\frac{N_n}{D_d}$  pour  $|s|$  assez grand tel que  $\operatorname{Re}(s) > 0$  (voir démonstration du lemme B.26), donc borné inférieurement sur le demi-plan ouvert  $\operatorname{Re}(s) > 0$  et par continuité pour  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  lorsque  $N_n D_d > 0$ . Par ailleurs :

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \frac{N(s)}{D(s)+kN(s)} = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} \frac{D(s)+kN(s)}{N(s)} = \operatorname{sgn} \left( k + \operatorname{Re} \frac{D(s)}{N(s)} \right)$$

Supposons par exemple  $N_n D_d > 0$ . Alors :

$$\operatorname{Re} \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)+kN(i\omega)} > 0 \Leftrightarrow k > -\operatorname{Re} \frac{D(i\omega)}{N(i\omega)}$$

et  $\frac{N(s)}{D(s)+kN(s)}$  est positive réelle si, et seulement si :

$$k > \sup_{\omega \in \mathbb{R}} -\operatorname{Re} \frac{D(i\omega)}{N(i\omega)} = -\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{D(i\omega)}{N(i\omega)}$$

Si  $N_n D_d < 0$ , on applique ce qui précède au couple  $(D, -N)$ . □

Nous pouvons maintenant récapituler les résultats obtenus en termes de retour PI.

**Proposition B.32 (stabilisation par retour de sortie PI)** On considère le système linéaire causal SISO (B.1) de degré relatif  $\nu$  valant 0 ou 1, et on note  $N_n$  et  $D_d$  les coefficients dominants respectifs de  $N$  et  $D$ . Si  $N$  est stable - minimum de phase -, et si  $N_n D_d > 0$  :

- **(petit gain intégral)** il existe  $k_p^*$  fini tel que :

$$k_p > k_p^* \Rightarrow D(s) + k_p N(s) \text{ stable ,}$$

et pour chaque gain proportionnel  $k_p > k_p^*$ , il existe  $k_I^*(k_p)$  tel que :

$$0 < k_I < k_I^*(k_p) \Rightarrow sD(s) + (sk_p + k_I)N(s) \text{ stable ;}$$

- **(grand gain intégral)** pour tout gain  $k_p$  tel que :

$$k_p > \frac{D_d}{N_n} \left( \frac{N_{n-1}}{N_n} - \frac{D_{d-1}}{D_d} \right)$$

il existe  $k_I^*(k_p)$  tel que :

$$k_I > k_I^*(k_p) \Rightarrow sD(s) + (sk_p + k_I)N(s) \text{ stable ;}$$

- (gain intégral quelconque) il existe  $k_p^*$  fini tel que:

$$k_p > k_p^* \Rightarrow \frac{N(s)}{D(s) + k_p N(s)} \text{ positive réelle,}$$

le choix:  $k_p^* = -\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{D(i\omega)}{N(i\omega)}$  étant optimal, et:

$$k_I > 0 \Rightarrow sD(s) + (s k_p + k_I)N(s) \text{ stable}$$

Si  $N$  n'est pas stable,  $k_p^* = k_p^* = +\infty$ .

Enfin si  $N_n D_d < 0$ , ces résultats s'appliquent en changeant  $N$  en  $-N$  et chaque gain en son opposé.

**Preuve :** il suffit d'appliquer successivement les propositions B.18, B.23, B.24 et B.32. □

**Remarque B.33** On retrouve bien la condition de stabilisation par grand gain intégral de la proposition B.24. En effet, si  $\nu = 1$  et  $N_n D_d > 0$ :  $\frac{D}{N} = (\alpha s + \beta) + \frac{R}{N}$  avec  $R$  de degré  $< n$  et  $\beta = -k_p^*$ . D'où:  $\operatorname{Re} \frac{D(i\omega)}{N(i\omega)} = -k^* + O(\frac{1}{\omega})$ , ce qui implique en faisant tendre  $\omega$  vers l'infini:  $k_p^* \geq k_p^*$ .

## B.3 Critères de stabilité des polynômes.

### B.3.1 Résultats classiques.

Le lecteur est invité à consulter [26] pour un exposé complet de la question. Soit:

$$\chi(z) = z^n + \lambda_1 z^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} z + \lambda_n$$

un polynôme à coefficients réels. Rappelons tout d'abord une condition nécessaire de stabilité bien connue.

**Théorème B.34 (condition nécessaire de stabilité de Hurwitz)** *Pour que toutes les racines du polynôme  $\chi(z)$  aient des parties réelles strictement positives, il faut que les coefficients  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  soient tous strictement positifs. Cette condition est suffisante uniquement dans le cas  $n \leq 2$ .*

Pour énoncer le résultat principal, on introduit la matrice dite de Hurwitz  $\mathcal{H}$  qui est carrée de taille  $n$ :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Théorème B.35 (critère de Routh-Hurwitz)** *Toutes les racines du polynôme  $\chi(z)$  ont des parties réelles strictement négatives si et seulement si tous les mineurs principaux de la matrice  $\mathcal{H}$  sont strictement positifs:*

$$\Delta_1 = \lambda_1 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \quad \Delta_n = \det(\mathcal{H}) > 0 \quad (\text{B.12})$$

**Remarque B.36** Le critère de Routh est totalement équivalent à l'énoncé précédent, mais ce dernier a l'avantage de laisser plus de liberté à l'utilisateur pour le calcul de la "colonne de gauche du tableau de Routh" dont les coefficients sont justement les  $\Delta_i$ .  $\triangle$

Même lorsque les coefficients  $\lambda_i$  sont affines en les paramètres que l'on désire régler, les inégalités polynomiales que l'on obtient peuvent être complexes. Il se trouve que lorsque les  $\lambda_i$  sont strictement positifs (condition nécessaire de Hurwitz), ces inégalités ne sont pas indépendantes, et le critère suivant, peu connu, permet de n'en considérer qu'une sur deux, ce qui en pratique peut s'avérer très utile.

**Théorème B.37 (critère de Liénard et Chipart)** *Toutes les racines du polynôme  $\chi(z)$  ont des parties réelles strictement négatives si et seulement si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée:*

$$\begin{aligned} 1) & \lambda_n > 0, \lambda_{n-2} > 0, \quad \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \\ 2) & \lambda_n > 0, \lambda_{n-2} > 0, \quad \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \quad \dots \\ 3) & \lambda_n > 0, \lambda_{n-1} > 0, \lambda_{n-3} > 0, \quad \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \quad \dots \\ 4) & \lambda_n > 0, \lambda_{n-1} > 0, \lambda_{n-3} > 0, \quad \dots \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

### B.3.2 Comparaison avec l'approche asymptotique.

Bien que les résultats ci-dessus puissent conduire à des calculs complexes, ils ont le mérite d'être exacts. Si nous reprenons la problématique de la première section — stabilisation d'un système linéaire SISO par retour de sortie —, la proposition B.18 affirme par exemple la stabilisabilité par grand gain dans le cas déphasage minimal et degré relatif 1, mais ne donne aucune indication quant au choix de la borne inférieure de gain  $k^*$ . L'application du critère de Routh-Hurwitz permet en revanche de spécifier la borne optimale théorique, ce qui conduit en pratique à plusieurs bornes explicitement calculables en fonction des coefficients du polynôme de départ.

**Proposition B.38** *Soit  $P(s, k) = D(s) + kN(s)$ , avec  $D$  normalisé de degré  $d$  et  $N$  stable, de degré  $d - 1$  à coefficient dominant strictement positif. Pour tout  $i = 1 \dots d$ , on note  $\Delta_i(k)$  le mineur principal d'ordre  $i$  de la matrice de Hurwitz de  $P$  considéré comme polynôme en  $s$  à coefficients dépendant de  $k$ . Les  $\Delta_i(k)$  étant des polynômes en  $k$ , de degré  $i$ , on note aussi:*

$$k_i^* = \max\{k \in \mathbb{R}, \Delta_i(k) = 0\} \quad \text{et} \quad k^* = \max\{k_i^* \mid i = 1 \dots d\}$$

Alors,  $P(s, k)$  est stable pour tout  $k > k^*$  et la borne  $k^*$  ainsi calculée est optimale au sens où il n'existe pas de borne strictement inférieure possédant cette propriété.

**Preuve :** les  $\Delta_i(k)$  sont en effet des polynômes en  $k$  en tant que déterminant de matrices à coefficients affines en  $k$ . Comme par définition,  $k^*$  est racine réelle de l'un des  $\Delta_i$ , l'une des inégalités au moins du critère de Routh-Hurwitz n'est pas satisfaite; donc si  $k^*$  convient, il est optimal. Or, il est sûr par construction que chaque  $\Delta_i(k)$  garde un signe constant pour  $k > k^*$ , et ce signe est celui du coefficient du terme de plus haut degré en  $k$ . Pour obtenir le monôme dominant, il suffit en fait de ne conserver, dans chaque ligne ou colonne, que les termes de plus haut degré, en l'occurrence 1. Plus précisément, si l'on note  $D(s) = s^d + D_1 s^{d-1} + \dots + D_n$  et  $N(s) = N_1 s^{d-1} + \dots + N_n$ , on a pour tout  $i = 1 \dots d$ :

$$\Delta_i^N(k) = \begin{vmatrix} N_1 k + D_1 & N_1 k + D_1 & N_0 k + D_0 \\ 1 & N_2 k + D_2 & N_1 k + D_1 \\ 0 & N_1 k + D_1 & N_0 k + D_0 \\ 0 & 1 & N_2 k + D_2 \\ & & & N_0 k + D_0 \end{vmatrix} = \delta_i k^i + \pi_{i-1}(k)$$

où  $\pi_{i-1}(k)$  est un polynôme d'ordre au plus  $i - 1$  en  $k$ , et:

$$\delta_i = \begin{vmatrix} N_3 & N_3 & N_5 \\ 0 & N_2 & N_1 \\ 0 & N_1 & N_3 \\ 0 & 0 & N_2 \\ & & & N_1 \end{vmatrix} = N_1 \begin{vmatrix} N_2 & N_1 \\ N_1 & N_3 \\ 0 & N_2 \\ & & & N_1 \end{vmatrix} = N_1 \Delta_{i-1}^N$$

où  $\Delta_{i-1}^N$  est un mineur principal de la matrice de Hurwitz associée au polynôme  $N(s)$  (pour  $i = 1$ , on prend par convention:  $\Delta_0^N = 0$ ). Par hypothèse,  $N_1 > 0$  et  $N(s)$  est stable, ce qui d'après le critère de Routh-Hurwitz entraîne que  $\Delta_{i-1}^N > 0$  pour tout  $i$ . De fait, le coefficient  $\delta_i$  de  $k^i$  dans  $\Delta_i^N(k)$  est bien strictement positif, ainsi que les  $\Delta_i^N(k)$  eux-mêmes pour  $k > k^*$   $\square$

**Remarque B.39** Il peut évidemment exister des gains stabilisants  $k < k^*$  mais la proposition affirme que dans ce cas, il existe au moins un gain  $k'$  déstabilisant compris strictement entre  $k$  et  $k^*$ . Du point de vue de la robustesse, il est évidemment plus avantageux de disposer d'une demi-droite de gains plutôt que d'un intervalle dont les bornes réelles peuvent se trouver bien plus proches que le calcul ne l'avait laissé prévoir.  $\triangle$

D'un point de vue pratique, on ne connaît certes pas les  $k_n^*$ . Plutôt que de résoudre les équations polynomiales  $\Delta_i(k) = 0$ , dont les solutions peuvent être très sensibles à une petite variation d'un coefficient, il vaut mieux utiliser l'une des nombreuses majorations possibles des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Il est clair que plus l'estimation utilisée sera fine, et plus la borne effective calculée sera proche de la borne théorique  $k^*$ . Nous donnons pour terminer quelques estimations aisément calculables. Soit  $s_0$  une racine quelconque du polynôme  $\chi(\cdot) = s^n + \chi_1 s^{n-1} + \dots + \chi_n$ :

- $|s_0| \leq n \max\{1, |\chi_1|, \dots, |\chi_n|\}$ ,
- $|\operatorname{Re}(s_0)| \leq n \max\{\frac{1}{2}, |\chi_1|, \frac{|\chi_2|}{2}, \dots, \frac{|\chi_n|}{n}\}$ ,
- $|s_0| \leq \max\{l_1 |\chi_1|, l_2 |\chi_2|^{1/2}, \dots, l_n |\chi_n|^{1/n}\}$  pour tout n-uplet  $(l_1, \dots, l_n)$  de réels  $> 0$  et tels que:  $\frac{l_1}{1} + \frac{l_2}{2} + \dots + \frac{l_n}{n} = 1$ ,

- $|s_0| \leq \max(\lambda_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}})$  dans le cas de coefficients  $\lambda_i$  réels et  $> 0$ .

Les deux premières inégalités proviennent de majorations des valeurs propres d'une matrice appliquées au cas de la matrice compagnon associée au polynôme  $\chi$ , et les deux dernières se trouvent dans [21] (ch. II p.65).

## B.4 Conclusion.

Si l'on se pose le problème de régler les gains d'un retour de sortie PI de façon à stabiliser le système commandé (B.4), il ressort de ce qui précède que la méthode du critère de Routh fonctionne dans tous les cas, mais peut conduire à des calculs suffisamment inextricables pour la rendre en pratique totalement inopérante. Ce constat fait tout l'intérêt de l'approche dite à grand gain dont les indications asymptotiques peuvent permettre d'orienter la recherche des gains.

Un premier résultat est que la stabilisation par retour statique de sortie à grand gain ne peut fonctionner que si le système est à minimum de phase, et si le degré relatif ne dépasse pas 2<sup>3</sup>. Cette dernière condition est presque toujours vérifiée pour les modèles donnés en représentation d'état, dont le degré relatif générique vaut 1. Dans ce cas, on peut:

- soit chercher à rendre le système passif par un retour proportionnel, avec une condition du type  $k_P > k_P^*$  le calcul de  $k_P^*$  revenant à minimiser une fonction sur  $\mathbf{R}^+$ , de façon à pouvoir ensuite appliquer un retour intégral de gain quelconque,
- soit stabiliser le système par un retour proportionnel et appliquer un retour intégral de gain petit pour conserver la stabilité,
- soit utiliser un retour proportionnel intégral à grand gain intégral.

Lorsque l'on passivise, les calculs sont simples, mais peuvent mener à un gain proportionnel trop important provoquant en pratique la saturation permanente de la commande. Les deux autres solutions sont dépendantes du critère de Routh pour le calcul effectif des gains, le choix de l'une ou l'autre étant lié à l'importance des biais auxquels on peut s'attendre en pratique.

<sup>3</sup>pour  $\nu \geq 2$ , un système à minimum de phase est stabilisable par retour *dynamique* de sortie à grand gain: voir par exemple [32].



## Annexe C

# Méthode de Projection.

### C.0 Introduction.

La méthode dite de Projection consiste à étudier les bifurcations des systèmes dynamiques paramétrés par projection sur les directions non hyperboliques, à l'aide de développements limités par rapport à des coordonnées suivant ces directions. On se propose ici d'appliquer cette méthode au cas d'un système  $\dot{X} = F(X, u)$  présentant une bifurcation col-nœud. Au paravant, quelques rappels élémentaires d'algèbre linéaire précisent la notion de vecteur adjoint, propre ou non. Pour tout complément, se reporter à [31].

### C.1 Rappels d'algèbre linéaire.

#### C.1.1 Notions de vecteur adjoint.

La notion de base adjointe est utilisée en optique et en cristallographie (réseaux conjugués). Elle permet d'écrire les projections sur les axes de coordonnées comme des produits scalaires, et conduit directement à la notion, plus générale, de vecteur adjoint à un vecteur par rapport à un supplémentaire.

**Lemme C.1 (Base adjointe)** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une et une seule base  $(f_1, \dots, f_n)$ , dite adjointe, telle que :

$$\forall i = 1 \dots n, \forall j = 1 \dots n, \langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$$

Si  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est la base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $e_i^* = \langle f_i, \cdot \rangle$  pour tout  $i$ .

**Preuve :** Pour  $j$  fixé,  $f_j$  est solution d'un système linéaire dont le déterminant est  $\det(e_1, \dots, e_n)$ . Si  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $\langle f_j, x \rangle = x_1 \langle f_j, e_1 \rangle + \dots + x_n \langle f_j, e_n \rangle = x_j = \langle e_j^*, x \rangle$ .  $\square$

**Corollaire C.2 (Adjoint d'un vecteur par rapport à un supplémentaire)** Soit  $e \in \mathbb{R}^n$  et  $E$  de dimension  $n$  tels que :  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e \oplus E$ . Il existe un et un seul vecteur  $f \in E^\perp$  dit adjoint à  $e$  par rapport à  $E$ , tel que :  $\langle e, f \rangle = 1$ . Si  $\mu_i^E$  désigne la projection sur  $\mathbb{R}e$  parallèlement à  $E$ , on a alors :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \mu_i^E(x) = \langle f, x \rangle e$$



**Preuve :** Pour l'existence de  $f$ , on choisit une base de  $E$  et on applique le lemme précédent. Comme on peut écrire a priori:  $p_x^E(x) = \alpha e$ , le produit scalaire par  $f$  donne alors  $\alpha = \langle x, f \rangle$ .  $\square$

Par ailleurs, il semble naturel de définir une notion de vecteur propre adjoint comme étant vecteur propre de l'opérateur adjoint.

**Lemme C.3 (Vecteur propre adjoint)** Soit  $A$  un opérateur linéaire dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $A^*$  l'opérateur adjoint par rapport au produit scalaire standard. Si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ ,  $\bar{\lambda}$  est valeur propre de  $A^*$ . On appelle alors vecteur propre adjoint associé à  $\lambda$  tout vecteur propre de  $A^*$  associé à  $\bar{\lambda}$ .

**Remarque C.4** On dit aussi vecteur propre à gauche à cause du fait que dans une base orthonormée et pour un opérateur réel, la matrice de l'opérateur adjoint est la transposée:  $A^* \cdot e^* = {}^t e^* \cdot A$ .

### C.1.2 Cas d'une valeur propre simple.

Les deux notions ci-dessus sont liées, et de façon tout à-fait élémentaire dans le cas d'une valeur propre simple. Isolons tout d'abord un lemme d'intérêt général.

**Lemme C.5 (Sur les opérateurs de corang 1)** Soit  $A$  un opérateur linéaire dans  $\mathbb{R}^n$  de rang  $n - 1$ . Alors:

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } A \dot{+} \text{Im } A$$

**Preuve :** On a déjà:  $\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = 1 + (n - 1) = n$ . Soit  $e$  tel que:  $\text{Ker } A = \mathbb{R}e$ ,  $e^*$  vecteur propre adjoint tel que:  $\langle e^*, e \rangle = 1$ , et  $y = \alpha e = \dots, x \in \text{Ker } A \cap \text{Im } A$ . Alors:  $\langle e^*, y \rangle = \alpha = \langle A^* e^*, x \rangle = 0$ , et  $y = 0$ . Donc:  $\text{Ker } A \cap \text{Im } A = \{0\}$ .  $\square$

**Proposition C.6 (Sur les valeurs propres simples)** Soit  $A$  un opérateur linéaire dans  $\mathbb{R}^n$   $\lambda$  une valeur propre simple associée au vecteur propre  $e$ , et  $e^*$  un vecteur propre adjoint au sens du lemme C.3 vérifiant  $\langle e^*, e \rangle = 1$ . Alors:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e + \text{Im}(A - \lambda Id)$$

et  $e^*$  est adjoint à  $e$  par rapport à  $\text{Im}(A - \lambda Id)$  au sens du lemme C.3.

**Preuve :** d'après le lemme C.5, on a la décomposition  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A - \lambda Id) \oplus \text{Im}(A - \lambda Id)$ , avec  $\text{Ker}(A - \lambda Id) = \mathbb{R}e$ . Il suffit de vérifier que  $e \perp \text{Im}(A - \lambda Id)$ . Soit donc:  $y = Ax - \lambda x$ .  $\langle e^*, y \rangle = \langle A^* e^* - \lambda e^*, x \rangle = 0$  car  $e^*$  est vecteur propre adjoint associé à  $\lambda$ , d'où la conclusion.  $\square$

**Remarque C.7** Cette proposition ne fait que paraphraser la propriété suivante, valable pour tout opérateur linéaire  $M$  en dimension finie:  $\text{Ker } M = (\text{Im } M^*)^\perp$  avec dans le cas présent:  $M = A - \lambda Id$ .

Nous utiliserons ce résultat dans le cas  $\lambda = 0$ : si  $e$  est vecteur propre (à droite) associé à la valeur propre simple 0, il existe un unique vecteur  $e^*$  vérifiant:

$$\begin{cases} \langle e^*, e \rangle = 1 \\ e^* \perp \text{Im } A \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec en particulier pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ :  $\langle e^*, Ax \rangle = 0$ .

## C.2 Méthode de Projection et bifurcation col-nœud.

Rappelons tout d'abord les conditions de bifurcation col-nœud par rapport à  $u$  en  $u = 0$  pour les équilibres du système  $\dot{X} = F(X, u)$  tel que  $F(0, 0) = 0$ :

**(CN1)** corang  $D_X F(0, 0) = 1$  avec  $\epsilon$  (resp.  $\epsilon^*$ ) vecteur propre (resp. vecteur propre adjoint) associé à la valeur propre 0,

**(CN2)**  $\langle \epsilon^*, D_X^2 F(0, 0) \cdot \epsilon^2 \rangle \neq 0$ ,

**(CN3)**  $\langle \epsilon^*, \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) \rangle \neq 0$ .

La Méthode de Projection va permettre de retrouver le fait bien connu que sous ces hypothèses, deux équilibres apparaissent ou disparaissent simultanément lorsque  $u$  traverse la valeur 0. On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des équilibres:

$$\mathcal{S} = \{(X, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; F(X, u) = 0\}$$

Nous commençons par un lemme dont la démonstration ne relève pas à proprement parler de la Méthode de Projection.

**Lemme C.8** *Sous les conditions (CN1) (CN3),  $\mathcal{S}$  est une courbe, c'est-à-dire une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $(0, 0)$ .*

**Preuve :** d'après le théorème des fonctions implicites (local), il suffit de vérifier que le jacobien total:  $D_{(X,u)} F$  est de rang plein - égal à  $n$  - au point  $(0, 0)$  (que nous omettrons désormais de préciser). Nous allons montrer que  $D_{(X,u)} F$  n'admet pas de vecteur annulateur à gauche, ou plutôt, ce qui revient au même, que  $(D_{(X,u)} F)^*$  est injectif. D'après (CN1) et les rappels d'algèbre linéaire ci-dessus,  $\mathbb{R}^n$  est somme directe orthogonale de  $\mathbb{R}\epsilon^*$  et de  $\text{Im}(D_X F)^*$ . Soit donc  $x^* = \alpha \epsilon^* + y^*$  tel que:  $(D_{(X,u)} F)^* x^* = 0$ . En particulier,  $(D_X F)^* x^* = (D_X F)^* y^* = 0$ , ce qui entraîne  $y^* = 0$  car  $(D_X F)^*$  est injective sur tout supplémentaire de son noyau  $\mathbb{R}\epsilon^*$ . Il reste donc:  $(D_{(X,u)} F)^* x^* = \alpha (D_{(X,u)} F)^* \epsilon^* = 0$ , ce qui se résume à:  $\alpha \langle \epsilon^*, \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) \rangle = 0$ , d'où:  $\alpha = 0$  d'après (CN3), et finalement:  $x^* = 0$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant passer au résultat annoncé.

**Proposition C.9 (Méthode de Projection et Bifurcation Col-Nœud)** *Dans le cadre des hypothèses (CN1) (CN2) (CN3), et pour tout paramétrage local régulier  $(X(\epsilon), u(\epsilon))$  de la courbe  $\mathcal{S}$  vérifiant  $(X'(0), u'(0)) \neq (0, 0)$ , on a les développements:*

$$\begin{cases} X(\epsilon) = \epsilon X_1 + O(\epsilon^2) \\ u(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} u_2 + O(\epsilon^3) \end{cases}$$

avec  $X_1 \neq 0$  colinéaire à  $\epsilon$  et  $u_2 = u''(0) \neq 0$ . En particulier,  $\mathcal{S}$  est équivalente en  $(0, 0)$  à une parabole tangente à l'hyperplan  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$

De plus, le déterminant de la matrice jacobienne à l'équilibre:  $\det D_X F(X(\epsilon), u(\epsilon))$  change de signe lorsque  $\epsilon$  traverse la valeur 0, et la valeur propre  $\lambda(\epsilon)$  nulle en 0 traverse l'axe des

imaginaires purs en 0 avec une vitesse non nulle:  $\lambda'(0) \neq 0$ . Plus précisément, sous les hypothèses **(CN1)** **(CN3)**, **(CN2)** équivalent à la non-nullité de l'un quelconque des deux nombres suivants:

$$\lambda'(0) = \frac{d}{d\epsilon} \det D_X F(X(\epsilon), u(\epsilon))|_{\epsilon=0}$$

**Preuve :** On pose a priori:

$$\begin{cases} X(\epsilon) = \epsilon X_1 + \frac{\epsilon^2}{2} X_2 + \\ u(\epsilon) = \epsilon u_1 + \frac{\epsilon^2}{2} u_2 + \end{cases}$$

avec par hypothèse  $(X_1, u_1) \neq (0, 0)$ . Remarquons que de tels paramétrages existent, puisqu'ils peuvent s'obtenir en résolvant localement l'équation  $F(X, u) = 0$  par rapport à l'une des variables  $X_i$ . La régularité des solutions par rapport à  $\epsilon = X_i$  est alors directement héritée du champ  $F$

Ceci étant, dérivons une fois par rapport à  $\epsilon$  l'équation de définition:  $F(X(\epsilon), u(\epsilon)) = 0$ :

$$D_X F(X(\epsilon), u(\epsilon)) \cdot X'(\epsilon) + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u'(\epsilon) = 0 \quad (\text{C.2})$$

ce qui donne en  $(0, 0)$ :

$$D_X F \cdot X_1 + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u_1 = 0 \quad (\text{C.3})$$

On fait alors le produit scalaire avec  $e^*$  - projection affine sur la direction de  $e$ , d'où le nom de la méthode:

$$\langle e^*, D_X F \cdot X_1 \rangle + \langle e^*, \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u_1 \rangle = 0$$

d'où:  $u_1 = 0$  en utilisant d'une part l'hypothèse **(CN1)** à travers le fait que  $e^*$  est vecteur propre adjoint (voir les rappels), et d'autre part l'hypothèse **(CN3)**. En remplaçant dans (C.3), on obtient:  $D_X F \cdot X_1 = 0$ , d'où:

$$X_1 = \alpha e$$

avec  $\alpha \neq 0$  puisque par hypothèse  $(X_1, u_1) \neq (0, 0)$ .

Pour atteindre les termes d'ordre 2, on dérive une seconde fois l'équation d'équilibre, c'est-à-dire que l'on dérive une fois l'équation (C.2):

$$D_X F \cdot X''(\epsilon) + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u''(\epsilon) + 2D_{X_i} F \cdot X'(\epsilon) \cdot u'(\epsilon) + D_X^2 F \cdot X'^2(\epsilon) + D_u^2 F \cdot u'^2(\epsilon) = 0 \quad (\text{C.4})$$

d'où en  $(0, 0)$ , compte tenu de  $u_1 = 0$  et  $X_1 = \alpha e$ :

$$D_X F \cdot X_2 + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u_2 + \alpha^2 D_X^2 F \cdot e^2 = 0 \quad (\text{C.5})$$

$u_2$  s'obtient alors de nouveau par projection, en utilisant de plus la condition **(CN3)**:

$$u_2 = \alpha^2 \frac{\langle e^*, D_X^2 F \cdot e^2 \rangle}{\langle e^*, \frac{\partial F}{\partial u} \rangle}$$

d'où le résultat recherché grâce cette fois à **(CN2)**:  $u_2 \neq 0$ .

Comme 0 est valeur propre simple au point (0, 0), la valeur propre  $\lambda(\epsilon)$  qui s'annule en  $\epsilon = 0$  est simple et régulière en  $\epsilon$ . On peut donc lui associer un vecteur propre  $e(\epsilon)$  régulier qui coïncide avec  $e$  en  $\epsilon = 0$ . L'équation propre:  $D_X F(X(\epsilon), u(\epsilon))e(\epsilon) = \lambda(\epsilon)e(\epsilon)$  peut alors être dérivée par rapport à  $\epsilon$ . En tenant compte de  $u_1 = \lambda(0) = 0$ :

$$\alpha D_X^2 F, e^2 + D_X F, e' = \lambda' e$$

et par produit scalaire avec  $e^*$

$$\lambda'(0) = \alpha \langle e^*, D_X^2 F, e^2 \rangle$$

ce qui permet d'interpréter (CN2) en disant que la valeur propre qui s'annule traverse l'axe des imaginaires purs avec une vitesse non nulle.

Pour finir, écrivons le déterminant de la matrice jacobienne sous la forme suivante:

$$\det D_X F(X(\epsilon), u(\epsilon)) = \lambda(\epsilon)\Lambda(\epsilon)$$

où  $\Lambda(\epsilon)$  représente le produit de toutes les autres valeurs propres. D'après (CN1),  $\Lambda(0) \neq 0$ . De plus,  $\Lambda(\epsilon)$  est régulier en  $\epsilon$  comme tout polynôme symétrique des autres valeurs propres<sup>1</sup> et on obtient par dérivation:

$$\Lambda(0)\lambda'(0) = \frac{d}{d\epsilon} \det D_X F(X(\epsilon), u(\epsilon))|_{\epsilon=0}$$

ce qui montre bien que le déterminant de la matrice jacobienne change de signe en  $\epsilon = 0$ .  $\square$

**Remarque C.10** Dans [31], on choisit directement  $\epsilon = \langle e^*, X \rangle$ , ce qui est possible a posteriori puisque l'application de changement de paramètre:  $\phi: \epsilon \mapsto \langle e^*, X \rangle$  est inversible en 0  $\phi'(0) = \langle e^*, X'(0) \rangle = \alpha \neq 0$ . Géométriquement, cela revient à choisir comme paramètre la coordonnée suivant  $e$ , c'est-à-dire la direction propre non hyperbolique, en accord avec le fait que la courbe d'équilibre  $S$  lui est tangente en 0.

Si l'on fait maintenant le produit scalaire par  $e$  du développement de  $X$ , on obtient:

$$\langle e^*, X(\epsilon) \rangle = \alpha \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \langle e^*, X_2 \rangle +$$

Pour  $\epsilon = \langle e^*, X \rangle$ , on en déduit immédiatement  $X_1 = e$ , correspondant au choix:  $\alpha = 1$ . Il vient aussi:  $\langle e^*, X_1 \rangle = 0$ .  $i \geq 2$ , relations utiles lorsque l'on pousse les calculs pour calculer les termes d'ordre supérieur.

<sup>1</sup>de façon générale, si  $\lambda$  est racine du polynôme  $P(X)$ ,  $P(X)$  est divisible par  $X - \lambda$  et le quotient est un polynôme régulier en  $(P/\lambda)$ . Dans le cas présent,  $P$  est le polynôme caractéristique de  $D_X F$



---

## Références

- [1] Abed E. and Fu J.-H. Local stabilization and bifurcation control, 1. Hopf bifurcation. *Systems and Control Letters*, 7:11-17, 1986.
- [2] Abed E. and Fu J.-H. Local stabilization and bifurcation control, 2. stationary bifurcation. *Systems and Control Letters*, 8:467-473, 1987
- [3] Abraham R., Marsden J. and Ratiu T. *Manifolds, tensor analysis and applications*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1988.
- [4] Alvarez J. & al. Global nonlinear control of a continuous stirred tank reactor. *Chemical Engineering Science*, 44:1147-1160, 1989.
- [5] Alvarez J. Suarez R. and Sanchez A. Nonlinear decoupling control of free-radical polymerization continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science*, 45:3341-3357, 1990.
- [6] Aris R. Reactions in continuous mixtures. *AIChE Journal*, 35:539-548, 1989.
- [7] Aris R. and Amundson N. An analysis of chemical reactor stability and control, I-II-III. *Chemical Engineering Science*, 7:121-155, 1958.
- [8] Arnold V. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles*. Mir, 1980.
- [9] Avez A. *Calcul différentiel*. maîtrise de mathématiques pures. Masson, 1983.
- [10] Balakotaiah V. and Luss D. Structure of the steady-state solutions of lumped-parameter chemically reacting systems. *Chemical Engineering Science*, 37:1611-1623, 1982.
- [11] Bastin G. and Dochain D. *On-line estimation and adaptive control of bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [12] Bergé P., Pomeau Y. and Vidal C. *L'Ordre dans le Chaos*. Enseignement des Sciences. Hermann, 1984.
- [13] Byrnes C. and Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1122-1137, 1991
- [14] Byrnes C., Isidori A. and Willems J. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1228-1240, 1991

- [15] Calo J. M. and Chang H.-C. Catastrophe theory and chemical reactors: exact uniqueness criteria for the CSTR, catalyst particle, and packed bed reactors. *Chemical Engineering Science*, 35:264–272, 1980.
- [16] Chang H.-C. and Calo J. M. Exact criteria for uniqueness and multiplicity of an  $n$ th order chemical reaction via a catastrophe theory approach. *Chemical Engineering Science*, 34:285–299, 1979.
- [17] Chang H.-C. and Calo J. M. Exact universal uniqueness criteria for the adiabatic tubular packed bed reactor. *Chemical Engineering Science*, 35:1611–1624, 1980.
- [18] Chow N. and Hale J. *Methods of Bifurcation Theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1982.
- [19] Daoutidis P. and Kravaris C. Synthesis of feedforward/state feedback controllers for nonlinear processes. *AIChE Journal*, 35:1602–1616, 1989.
- [20] Dieudonné J. *Éléments d'analyse, III*. Gauthier-Villars, 1974.
- [21] Dieudonné J. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1980.
- [22] Faurre P. and Robin M. *Éléments d'automatique*. Dunod, Paris, 1984.
- [23] Feinberg M. Chemical reaction network structure and the stability of complex isothermal reactors I. The deficiency zero and deficiency one theorems. *Chemical Engineering Science*, 42:2229–2268, 1987.
- [24] Feinberg M. Chemical reaction network structure and the stability of complex isothermal reactors II. Multiple steady states for networks of deficiency one. *Chemical Engineering Science*, 43:1–25, 1988.
- [25] Feinberg M. Necessary and sufficient conditions for detailed balancing in mass action systems of arbitrary complexity. *Chemical Engineering Science*, 44:1819–1827, 1989.
- [26] Gantmacher F. *Théorie des Matrices, I et II*. Dunod, Paris, 1966.
- [27] Godbillon C. *Topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [28] Golubitsky M. and Schaeffer D. *Singularities and groups in bifurcation theory, I*. Springer-Verlag, 1988.
- [29] Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [30] Hoo K. A. and Kantor J. C. An exothermic continuous stirred tank reactor is feedback equivalent to a linear system. *Chemical Engineering Community*, 37:1–10, 1985.
- [31] Iooss G. and Joseph D. D. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 1990.

- 
- [32] Isidori A. *Nonlinear Control Systems, 2nd edition*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, 1989.
- [33] Jensen K. F. and Ray W. H. The bifurcation behaviour of tubular reactors. *Chemical Engineering Science*, 37:199-222, 1982.
- [34] Kailath T. *Linear systems*. Prentice Hall, Inc., 1980.
- [35] Kantor J. C. A finite dimensional nonlinear observer for an exothermic stirred tank reactor. *Chemical Engineering Science*, 44:1503-1510, 1989.
- [36] Kay S. R., Scott S. K. and Tomlin A. S. Quadratic autocatalysis in a non-isothermal CSTR. *Chemical Engineering Science*, 44:1129-1137, 1989.
- [37] Kravaris C. and Soroush M. Synthesis of Multivariable nonlinear controllers by input/output linearization. *AIChE Journal*, 36:249-263, 1990.
- [38] Lasalle J. An invariance principle in the theory of stability. In *Differential equations and dynamical systems*, pages 277-286. Academic Press, 1967
- [39] Leborgne D. *Calcul différentiel et géométrie*. Presses Universitaires de France, 1982.
- [40] Liapunov. *Problème général de la stabilité du mouvement*. *Annals of mathematical studies 17*. Princeton University Press, 1949.
- [41] Lin K. F. Multiplicity, stability and dynamics for isothermal autocatalytic reactions in CSTR. *Chemical Engineering Science*, 36:1447-1452, 1981.
- [42] Luss D. Steady-state multiplicity and stability. In *Nato Advanced Study Institutes Series, Series E: Applied Sciences 51*, pages 405-441, 1990.
- [43] Maeder R. *Programming in Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1990.
- [44] Mehra R. K. Catastrophe theory, nonlinear system identification and bifurcation control. In *Joint Automatic Control Conference*, pages 823-831, 1977
- [45] Moore P. and Anthony R. The continuous-lumping method for vapor liquid equilibrium calculations. *AIChE Journal*, 35:1115-1124, 1989.
- [46] Pellegrini L. and Bardi G. Chaotic behaviour of a controlled CSTR. *Computers and Chemical Engineering*, 14:1237-1247, 1990.
- [47] Rouchon P. Remarks on some applications of nonlinear control techniques to chemical processes. In *IFAC Symposium, NOLCOS'92, Bordeaux-France*, 1992.
- [48] Satterfield C. Trickle-bed reactors. *AIChE Journal*, 21:209-228, 1975.
- [49] Schiffmann G. *Analyse Complexe*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 1986.



- [50] Schuit G. and Gates B. Chemistry and engineering of catalytic hydrodesulfurization. *AIChE Journal*, 19:417–438, 1973.
- [51] Sontag E. *Mathematical control theory*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1990.
- [52] Sotomayor J. Generic bifurcations of dynamical systems. In *Dynamical systems*, pages 549–560. Academic Press, 1973.
- [53] Teymour F. and Ray W. H. The dynamic behaviour of continuous solution polymerization reactors 4. Dynamic stability and bifurcation analysis of an experimental reactor. *Chemical Engineering Science*, 44:1967–1982, 1989.
- [54] Uppal A., Ray W. H. and Poore A. B. On the dynamic behaviour of continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science*, 29:967–985, 1974.
- [55] Uppal A., Ray W. H. and Poore A. B. On the dynamic behaviour of continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science*, 31:205–214, 1976.
- [56] Van Breusegem V. and Bastin G. A singular perturbation approach to the reduced order dynamical modelling of reaction systems. In *technical report 92.14, CESAME-Université Catholique de Louvain*, 1992.
- [57] Varma A. and Amundson N. R. Some problems concerning the non-adiabatic tubular reactor. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 50:470–485, 1972.
- [58] Vidal C. and Lemarchand H. *La réaction créatrice*. Enseignement des Sciences. Hermann, 1988.
- [59] Villermaux J. *Génie de la réaction chimique*. Lavoisier, 1982.
- [60] Westerterp K., Van Swaij W. and Deenackers A. *Chemical reactor design and operation*. John Wiley & Sons, 1984.
- [61] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1990.
- [62] Wolfram S. *Mathematica, a system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1988.
- [63] Yoshizawa T. *Stability theory by Liapunov's second method*. The mathematical society of Japan, 1966.
- [64] Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications, I*. Springer-Verlag, 1990.