



HAL
open science

Réduction de modèle et simplification de l'intégration de loi de comportement pour la prévision de la durée de vie

Vivien Courtier

► To cite this version:

Vivien Courtier. Réduction de modèle et simplification de l'intégration de loi de comportement pour la prévision de la durée de vie. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2013. Français. NNT: . pastel-00854149

HAL Id: pastel-00854149

<https://pastel.hal.science/pastel-00854149v1>

Submitted on 26 Aug 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale 447 : Département Sciences pour l'ingénieur



Doctorat ParisTech
Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Ecole
Polytechnique
Spécialité Mécanique

Réduction de modèle et simplification de l'intégration de loi de comportement pour la prévision de la durée de vie

présentée et soutenue publiquement par

Vivien COURTIER

le 27 février 2013

Directeur de thèse : **Andrei CONSTANTINESCU**
Co-directeur de thèse : **David RYCKELYNCK**

Jury

Pierre VILLON
Aziz HAMDOUNI
Jean-Claude MICHEL
Félix FRITZEN
Daniel RIXEN
Andrei CONSTANTINESCU
David RYCKELYNCK
François COMTE

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur
Co-directeur
Invité

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Aziz Hamdouni et Jean-Claude Michel pour avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse. Merci pour vos rapports complets et enrichissants et pour vos questions pertinentes qui m'ont permis de prendre encore plus de recul sur mes travaux. Merci à Pierre Villon, Félix Fritzen et Daniel Rixen d'avoir accepté d'examiner mon travail et apporté des remarques intéressantes. Merci en particulier à Félix pour avoir plusieurs fois durant ma thèse apporté tes remarques sur mes travaux.

Je remercie évidemment Andrei Constantinescu et David Ryckelynck pour m'avoir dirigé pendant ces trois années avec gentillesse et pédagogie. David, merci pour m'avoir fait découvrir les méthodes de réduction. Tu es resté très disponible pour mes nombreuses questions. Andrei, merci pour avoir partagé tes connaissances sur la fatigue. Ton naturel et ta bonne humeur ont été une source de motivation ! Tu m'as poussé à prendre du recul sur mon travail et à le considérer sous un autre angle pour le placer dans un contexte différent. Vraiment merci.

J'ai sincèrement apprécié de travailler avec vous deux.

Je remercie également chaleureusement François Comte qui m'a encadré chez Snecma. Tu m'as fait confiance à la suite à mon stage pour me proposer un sujet de thèse aussi intéressant, complexe mais tellement captivant. Un énorme merci également pour mon embauche à Snecma pour laquelle j'en suis sûr tu n'es pas étranger !

Je tiens aussi à remercier l'équipe du LMS et du CdM, notamment Habibou Maitournam et Kostas Danas. Et merci aux doctorants pour votre accueil et votre aide précieuse. Un immense merci à mes collègues de bureau Stéfano Bosia et Gauthier Folzan. Merci pour nos longues et nombreuses discussions.

Merci à toute l'équipe administrative du LMS et du CdM. Je pense notamment à Alexandra Joly et Catherine Rouil pour leur gentillesse.

Je tiens à remercier chaleureusement Djamel Missoum-Benziane Stéphane et Quilici pour avoir à plusieurs reprises réglé mes soucis informatiques et débogué ZeBuLoN pour me permettre d'avancer. Merci pour votre efficacité et votre générosité.

Merci également à Anaëlle, Louise, Etienne, Alex, Camille et bien sûr Marine et Julien. Je ne peux pas conclure sans remercier chaleureusement mes parents, mon frère et ma soeur sans qui je ne serais jamais arrivée jusqu'ici. Vous m'avez toujours soutenu, et parfois remotivé. Merci de tout coeur ! Enfin je dois terminer par un grand merci à Faustine pour m'avoir accompagné dans cette étape et pour m'avoir soutenu pendant ces longs mois de rédaction. Jusqu'au jour de ma soutenance, tu as été présente pour moi (même pour esquisser un schéma de turboréacteur) ! Je n'y serais jamais parvenu sans toi !

Résumé

Le domaine de la simulation numérique s'est largement imposée dans le développement industriel des systèmes complexes. De la conception au suivi en service, les simulations numériques sont nombreuses et variées.

Afin de proposer des méthodes alternatives aux méthodes de calcul intensif, la réduction de modèle permet de réduire considérablement le coût de la résolution numérique des problèmes non linéaires en projetant les équations aux dérivées partielles sur une base réduite. De plus, la description des phénomènes physiques requiert une loi de comportement élaborée dont une simplification est considérée en exploitant une partie restreinte du domaine spatial.

Les études effectuées ont pour but d'apporter certains développements à la méthode incrémentale et adaptative *A Priori Hyper Reduction* dans le cas des matériaux hétérogènes. Ces développements sont intégrés dans le code d'éléments finis *Z-set* et utilisés pour traiter une série d'exemples académiques sur des structures composites.

The field of the numerical computations is widely spread in the industrial process for complex systems. From the preliminary design to the manufacturing and the maintenance and overhaul, numerical simulations are many.

Instead of intensiv computations, reduced order modeling offers efficient alternativ methods which aims at reducing the numerical cost of nonlinear problems by projecting the partial differential equations on a reduced basis. Moreover, as the exact description of underlying phenomena leads to complex constitutiv laws, a simplification is considered by exploiting a truncated spatial domain over which the problem is considered.

The studies carried out aims at providing some developments to the incremental and adaptativ *A Priori Hyper Reduction* method in the field of heterogeneous materials for parametrized analysis. Those theoretical developements were implemented in the finite element code *Z-set* and used for a set of numerical examples on composite structures.

Table des matières

Introduction	i
1 Problème de référence	1
1.1 Description du problème	1
1.2 Matériaux Standard Généralisés (GSM)	2
1.3 Formulation du problème	3
2 Méthodes de réduction	5
2.1 Méthode des éléments finis	7
2.1.1 Méthode des Eléments Finis (FEM)	7
2.1.2 Formulation FEM-Galerkin	8
2.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres	8
2.2.1 Méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)	10
2.2.2 Formulation POD-Galerkin	13
2.2.3 Algorithme POD	14
2.3 Méthode <i>A Priori Reduction</i> (APR)	14
2.3.1 Description de la représentation multi-niveaux	15
2.3.2 Pévision réduite POD	15
2.3.3 Procédé de correction-enrichissement	17
2.3.4 Algorithme incrémental	18
2.4 Décomposition Généralisée aux valeurs Propres	18
2.4.1 Méthode de Décomposition Généralisée aux valeurs Propres (PGD)	20
2.4.2 Formulation PGD-Galerkin	20
2.4.3 Formulation PGD-Galerkin progressive	21
3 Méthodes de réduction exploitant des données partielles	25
3.1 Méthode POD pour données partielles	26
3.1.1 Recouvrement des données manquantes (Gappy-POD)	26
3.1.2 Détermination des fonctions de formes à partir de données partielles	27
3.2 Méthodes empiriques d'interpolation	28
3.2.1 Procédure d'interpolation empirique	29
3.2.2 Construction de la base et sélection des points d'interpolation	30
3.3 Méthode <i>A Priori Hyper-Reduction</i> (APHR)	32
3.3.1 Description de la représentation multi-niveaux	33
3.3.2 Prévision hyper-réduite HPOD	34
3.3.3 Extrapolation des variables internes	37

3.3.4	Procédé de correction-enrichissement	38
3.3.5	Construction du TID	40
3.3.6	Algorithme incrémental	42
4	Désynchronisation de la méthode APHR	43
4.1	Étude analytique préliminaire d'une barre hétérogène en traction-compression	44
4.1.1	Formulation du problème	44
4.1.2	Solution du problème mécanique dans le cas d'un matériau homogène	45
4.1.3	Décomposition des déformations élastiques dans le cas d'un matériau homogène	47
4.1.4	Solution du problème mécanique dans le cas d'un matériau hétérogène	47
4.1.5	Décomposition des déformations élastiques dans le cas d'un matériau hétérogène	49
4.1.6	Décomposition par phase des déformations élastiques dans le cas d'un matériau hétérogène	49
4.2	Méthode APHR désynchronisée	51
4.2.1	Description de la représentation multi-niveaux désynchronisée	51
4.2.2	Prévision hyper-réduite HPOD désynchronisée	52
4.2.3	Extrapolation désynchronisée des variables internes	55
4.2.4	Procédé de correction-enrichissement désynchronisé	57
4.2.5	Construction désynchronisée du TID	61
4.2.6	Algorithme incremental désynchronisé	63
4.3	Cas de calcul : plaque munie d'inclusions	63
4.3.1	Configuration géométrique	63
4.3.2	Conditions aux limites et chargement cyclique	65
4.3.3	Description de la stratégie de calcul	65
4.3.4	Discussion des résultats	66
4.3.5	Conclusion	72
5	Analyse en champ de transformation	77
5.1	Problème préliminaire	78
5.1.1	Champs propres	78
5.1.2	Principe de superposition	79
5.2	<i>Transformation Field Analysis</i> (TFA)	79
5.2.1	Champs de transformation uniformes	79
5.2.2	Lois de comportement	80
5.3	<i>Nonuniform Transformation Field Analysis</i> (NTFA)	80
5.3.1	Champs de transformation non uniformes	80
5.3.2	Relations de comportement	81
5.4	Cas de calcul : cellule élémentaire en homogénéisation périodique	82
5.4.1	Configuration géométrique et données matériaux	83
5.4.2	Chargement et conditions aux limites	84
5.4.3	Description de la stratégie de calcul	84
5.4.4	Discussion des résultats	85
5.4.5	Conclusion	94

6	Interpolation et construction d'une surface de réponse	95
6.1	Méthodologie de surface de réponse	95
6.1.1	Création d'un méta-modèle	95
6.1.2	Interpolation en surface de réponse	96
6.2	Interpolation et construction de base réduite	97
6.2.1	Approche multidimensionnelle	98
6.2.2	Interpolation en surface de réponse	101
6.2.3	Enrichissement de la surface de réponse	103
6.3	Cas de calcul : interpolation en température	103
6.3.1	Configuration géométrique et données matériaux	103
6.3.2	Chargement et conditions aux limites	105
6.3.3	Description des stratégies de calcul	105
6.3.4	Discussion des résultats	106
6.3.5	Conclusion	112
7	Conclusion et perspectives	113
A	Décompositions aux valeurs singulières	117
A.0.6	Méthode de Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)	117
A.0.7	Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres	118
B	Méthode <i>L</i>Arge <i>T</i>ime <i>I</i>Ncrement (<i>L</i>A<i>T</i>I<i>N</i>)	121
B.0.8	Conditions d'admissibilité	121
B.0.9	Description des échelles microscopique et macroscopique	122
B.0.10	Directions de recherche	123
B.0.11	Résolution multi-échelles	125

Introduction

Aujourd’hui, la simulation numérique s’est largement imposée dans le développement industriel des systèmes complexes. Au cours de la conception, du dimensionnement, de la validation, de la fabrication et du suivi en service, les simulations numériques sont nombreuses et variées. Par exemple, le dimensionnement d’un système complexe n’exige pas une précision fine mais doit s’avérer rapide. À l’opposé, la validation d’un système complexe s’appuie sur des résultats de calcul très précis mais les temps de calcul associés sont importants. Ainsi des stratégies numériques différentes peuvent être envisagées tout au long de la chaîne de développement industriel. Dans ce but, la réduction de modèle (*Reduced Order Modeling*) (ROM) peut être intégrée dans cette chaîne de développement industriel afin de proposer des méthodes de réduction alternatives ou complémentaires aux méthodes de calcul intensif. Les méthodes de réduction apparaissent alors comme un premier enjeu majeur dans le développement industriel de systèmes complexes.

Cette thèse intitulée “Réduction de modèle et simplification de l’intégration de la loi de comportement pour la prévision de la durée de vie” est soutenue par le motoriste aéronautique Snecma. Elle s’inscrit dans le cadre du projet de recherche concerté *DDV Structures Chaudes* (Durée de vie des structures chaudes) soutenu par la Direction Générale de l’Aviation Civile (DGAC). Ce projet regroupe de nombreux partenaires parmi lesquels des acteurs industriels comme Snecma et Turboméca ainsi que des laboratoires de recherche comme l’ONERA, le Centre des Matériaux (École des Mines de Paris), le LMS (École Polytechnique), le LMT (École Normale Supérieure de Cachan), le CEAT (Toulouse), l’Institut P’ (Poitiers).

Ce projet a pour finalité le développement d’outils et de méthodologies efficaces pour la conception et le dimensionnement de structures thermo-mécaniques soumises à des températures élevées. En effet, à de telles températures, les structures thermo-mécaniques sont décrites à l’aide d’une loi de comportement élasto-viscoplastique car les effets de la viscosité ne peuvent pas être négligés. La simplification du comportement mécanique apparaît alors comme un second enjeu dans le développement industriel de structures complexes.

Par conséquent, l’objectif de cette thèse est d’intégrer la réduction de modèle et la simplification de l’intégration de la loi de comportement dans le développement industriel d’une structure thermo-mécanique en fournissant :

- (i) une méthode de réduction qui permet de choisir graduellement entre des simulations à qualité contrôlée et des simulations à temps maîtrisé,
- (ii) une méthode d’interpolation et d’enrichissement de surface de réponse.

Ces deux points sont étudiés dans ce mémoire.

Les structures industrielles soumises à des sollicitations thermo-mécaniques nécessitent bien souvent une description assez fine des phénomènes physiques sous-jacents ce conduit naturellement à la construction de modèles paramétrés complexes. Les nombreux paramètres intervenant dans la description du modèle paramétré peuvent être liés à une optimisation géométrique, à une optimisation des matériaux, au chargement thermo-mécanique ou aux conditions aux limites, ... Les méthodes standards donnent des modèles détaillés généralement inadaptés pour la résolution numérique des problèmes paramétrés non linéaires. Dans le cas de la Méthode des Éléments finis (FEM), la solution est en effet recherchée dans l'espace généré par une base détaillée FEM dont la dimension est égale au nombre de degré de liberté.

Les méthodes de réduction sont des stratégies numériques alternatives utilisées afin de réduire considérablement le coût de la résolution numérique des problèmes paramétrés non linéaires en projetant les équations aux dérivées partielles sur une base réduite dont la dimension est égale à l'ordre du modèle d'ordre réduit généralement bien plus faible que celle du modèle détaillé FEM. À ce titre, les équations d'équilibre sont résolues de façon approchée. Les méthodes de réduction sont basées sur des méthodes d'approximation à variables séparées dont l'objectif est d'approcher les champs inconnus dépendant de l'espace, du temps et de paramètres par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions d'une variable.

Les méthodes de réduction abordées dans ce mémoire sont la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition*) (POD), la méthode A Priori Réduction (*A Priori Reduction*) (APR) ainsi que la Décomposition Propre Généralisée (*Proper Generalized Decomposition*) (PGD). La POD est une méthode de réduction dont le point central est l'extraction des caractères dominants d'un ensemble d'observations ou d'échantillons appelés *snapshots* permettant d'accéder ainsi à une réduction du modèle. Les structures dominantes les plus significatives sont appelées modes empiriques et forment une base réduite de l'espace des champs cinématiquement admissibles. Par conséquent, la POD est une méthode généralement *a posteriori* car elle exploite des *snapshots* mais elle peut également être *a priori*. La méthode APR et la PGD peuvent être vues comme des extensions de la POD. Ce sont des méthodes *a priori* car elles ne nécessitent aucune donnée préliminaires.

Dans le cas des stratégies *a posteriori* comme dans le cas des stratégies *a priori*, les méthodes de réduction accumulent une connaissance sur les calculs déjà menés afin d'accélérer la résolution des problèmes paramétrés non linéaires. Une attention doit être portée au stockage de ces connaissances car la mémoire physique nécessaire est plus grande que dans les modèles détaillés et les temps de lecture et d'écriture des données sont parfois importantes.

Dans le cas des méthodes de réduction évoquées précédemment, la complexité numérique dépend encore de la dimension du modèle détaillé FEM en raison de la discrétisation FEM sous-jacente. Afin de limiter cette dépendance, des méthodes de réduction exploitent une partie restreinte du domaine spatial en incluant une sélection d'équations. La résolution numérique des problèmes paramétrés non linéaires est alors menée sur le domaine spatial restreint ce qui permet de simplifier l'intégration de la loi de comportement. Cette notion de domaine spatial restreint se retrouve sous la dénomination d'échantillon de maillage (*sample mesh*) dans la méthode *Empirical Interpolation Method* (EIM) ou bien domaine tronqué d'intégration (*Truncated Integration Domain*) (TID) dans la méthode *A Priori*

Hyper Reduction (APHR). Ces méthodes sont basées sur la Gappy-POD, une extension de la méthode POD développée pour le recouvrement de données lorsque des données sont manquantes. La méthode *A Priori Hyper Reduction* (APHR) est une méthode *a priori* car elle ne nécessite aucunes données préliminaires alors que l'EIM est une méthode *a posteriori* car elle exploite des *snapshots*.

La méthode de réduction utilisée dans ce mémoire est la méthode APHR. C'est une méthode de réduction incrémentale et adaptative basée sur la POD capable de fournir une analyse paramétrée d'un système complexe. Un modèle d'ordre réduit évolutif fournit des prévisions dans une base réduite POD et ces prévisions sont éventuellement corrigées par des calculs partiels FEM. Si à la fin d'un incrément, la précision de la prévision donnée est insuffisante, l'état mécanique corrigé est utilisé pour enrichir les bases réduites POD associées au modèle d'ordre réduit d'un mode empirique. Les bases réduites associées au modèle d'ordre réduit contiennent des données relatives à tous les calculs paramétrés effectués.

L'hyper-réduction consiste en l'étude du problème sur un domaine spatial restreint qui concentre l'information. Le domaine spatial est en effet divisé en un ensemble de variables internes dites explicatives dont le support est le domaine tronqué d'intégration (*Truncated Integration Domain*) (TID) et un ensemble de variables internes dites expliquées. Les lois de comportement sont intégrées sur ce TID construit par la méthode APHR de façon automatique.

Les méthodes de réduction permettent d'accélérer la résolution et diminuer le temps de calcul en accumulant une connaissance sur les calculs déjà menés. Ainsi, les méthodes de réduction exploitent généralement une partition des calculs *offline/online*. Les calculs *offline* sont des calculs préliminaires (calcul des matrices de rigidité réduite, calcul des *snapshots*) qui facilitent des calculs ultérieurs appelés calculs *online*. Or, le caractère fortement non linéaire de la plasticité rend difficile une telle approche. L'hyper-réduction développée dans la méthode APHR permet de contourner cette difficulté sans exploiter de calculs *offline* des matrices de rigidité réduite.

Les études effectuées dans le cadre de cette thèse ont pour but d'apporter certains développements dans le cas des matériaux hétérogènes. Les apports de cette thèse se résument en trois points.

Le premier point est une extension de la méthode APHR. Une décomposition du domaine spatial est introduite en considérant une partition de sous-domaines. Cette décomposition est motivée par d'éventuelles fortes différences dans le comportement de chaque phase dans le cas des matériaux hétérogènes. Une représentation désynchronisée du champ de variables internes est alors introduite. La désynchronisation consiste à attacher une base réduite relative au champ de variables internes sur chaque sous-domaine afin de décorréler les transformations significatives relatives aux variables internes d'un sous-domaine à l'autre. Cette représentation désynchronisée permet également de réduire la complexité apparemment superflue de certaines phases en considérant un nombre de modes empiriques indépendant sur chacune.

Le deuxième point est une comparaison de la méthode APHR avec la *Nonuniform Transformation Field Analysis* (NTFA). Développée dans le cadre de l'homogénéisation pour les matériaux hétérogènes, la NTFA est une méthode d'homogénéisation périodique semi-

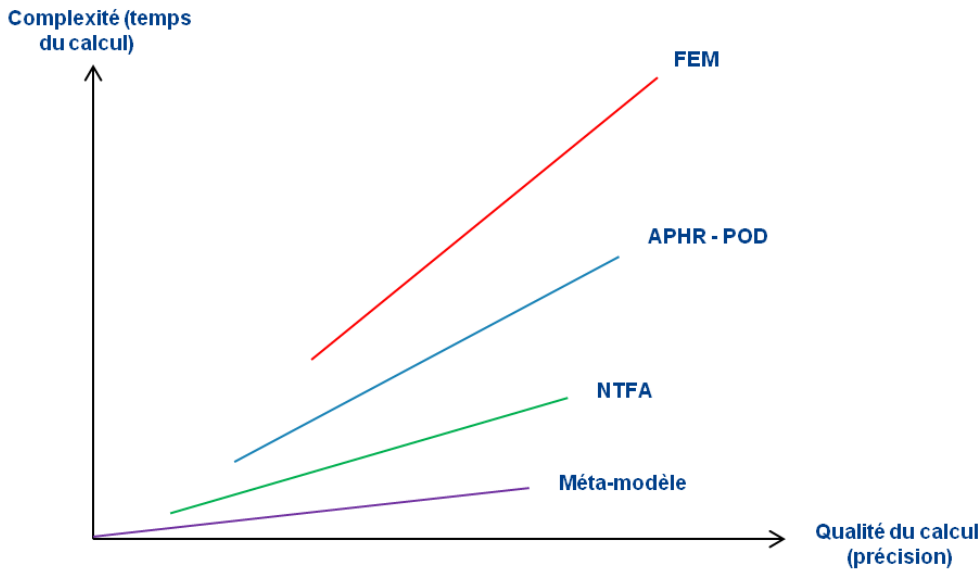


FIG. 1: Performance de plusieurs méthodes numériques

analytiques basée sur une décomposition du champ des déformations anélastiques sur une base réduite. Cette base réduite est construite par la POD selon une démarche *a posteriori* à l'aide de *snapshots*. À condition que cette base réduite soit convenable, la NTFA garantit des gains en temps de calcul impressionnants en considérant une énorme réduction du nombre de variables internes. La comparaison entre la méthode APHR et la NTFA permet de mettre en évidence le nombre de variables internes dans les deux approches *a posteriori* ainsi que mettre en avant la possibilité de la méthode APHR à construire *a priori* une base réduite adéquate pour la NTFA.

Le troisième point est une extension de la méthode APHR. Dans le cadre de l'interpolation paramétrique, un procédé de construction d'une base réduite multidimensionnelle est développé en collectant un ensemble de bases réduites provenant d'un méta-modèle construit à l'aide de calculs séquentiels. En considérant une méthodologie de surface de réponse, cette base réduite multidimensionnelle est utilisée afin de construire une base réduite interpolée pour une nouvelle valeur de paramètre. Cette base réduite interpolée est considérée comme base réduite initiale pour enrichir le méta-modèle.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

- le chapitre 1 décrit le problème de référence. Les principales équations sont présentées et la formulation du problème mécanique associé est donnée.
- Le chapitre 2 présente d'abord la FEM. Ce chapitre présente également la POD, la méthode APR et la PGD. Ce sont les méthodes de réduction qui n'incluent pas de sélection d'équations parmi les équations du problème discrétisé à l'aide de la FEM. La formulation du problème mécanique associé est donnée.
- Le chapitre 3 présente la Gappy-POD, l'EIM et la méthode APHR. Ce sont les méthodes de réduction qui incluent une sélection d'équations parmi les équations du problème discrétisé à l'aide de la FEM en considérant une partie restreinte du domaine spatial. La formulation du problème mécanique associé est donnée.

- Le chapitre 4 présente les développements apportés à la méthode APHR visant à désynchroniser par sous-domaine la représentation des variables internes.
- Le chapitre 5 décrit la TFA et la NTFA ainsi qu’une comparaison avec la méthode APHR. La TFA et la NTFA sont des méthodes d’homogénéisation périodique semi-analytiques basées sur une décomposition du champ des déformations anélastiques.
- Le chapitre 6 présente les développements apportés à la méthode APHR visant à construire une base réduite interpolée à partir d’un ensemble de bases réduites en considérant une approche multidimensionnelle.
- L’annexe A présente la SVD. C’est une méthode d’approximation équivalente à la POD en dimension finie.
- l’annexe B décrit la méthode LATIN. C’est une méthode de réduction basée sur la PGD.

Une conclusion présentée dans le chapitre 7 synthétise les points présentés de ce mémoire et fournit d’éventuelles perspectives.

Une annexe confidentielle non présentée dans ce mémoire mais disponible à Snecma porte sur l’étude d’une aube de turbine industrielle et fournit des résultats intéressants sur le couplage thermo-mécanique.

Chapitre 1

Problème de référence

Le comportement et l'évolution d'une structure mécanique est décrit par un ensemble d'équations parmi lesquelles les équations d'équilibre et les équations de comportement. Ce chapitre décrit ces principales équations et donne le contexte de la formulation du problème mécanique en se limitant au cadre des transformations infinitésimales.

1.1 Description du problème

Le système étudié est continu et décrit par le champ de déplacement \mathbf{u} . Adoptant une démarche lagrangienne, ce champ de déplacement est une fonction de sa position initiale. Il est décrit par le point matériel \mathbf{x} dans le domaine Ω , analysé à l'instant t sur l'intervalle de temps $\mathcal{I} =]0, T]$ pour une valeur de paramètre \mathbf{p} dans l'espace \mathcal{P} .

Le champ de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ est donné par l'opérateur $\mathbf{D}(\cdot)$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}(\mathbf{u}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}. \quad (1.1)$$

Cet opérateur est donné par $\mathbf{D}(\cdot) = \frac{1}{2} (\nabla(\cdot) + \nabla^T(\cdot))$ dans l'hypothèse des transformations infinitésimales.

Les équations d'équilibre font intervenir le champ de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}, \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.2)$$

où \mathbf{f} est un chargement volumique.

La frontière $\partial\Omega$ de Ω se divise en deux parties complémentaires $\partial_U\Omega$ et $\partial_F\Omega$ où des conditions aux limites de type Dirichlet (1.3a) et Neumann (1.3b) sont imposées respectivement. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d, \text{ sur } \partial_U\Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.3a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}, \text{ sur } \partial_F\Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.3b)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure et \mathbf{F} est un chargement surfacique.

En adoptant l'approche de l'état local, des variables internes supplémentaires \mathbf{z} associées aux forces thermodynamiques \mathbf{Z} décrivent les phénomènes irréversibles. Le champ de contrainte est alors considéré comme une fonction du champ de déplacement \mathbf{u} et du champ de variable interne \mathbf{z} .

Le champ de variable interne \mathbf{z} et le champ de force thermodynamique associé \mathbf{Z} sont donnés par les lois de comportement.

La loi d'état donne le champ de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et les forces thermodynamiques \mathbf{Z} . Elle est donnée par l'opérateur $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$:

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Z}) = \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.4)$$

La loi d'évolution est donnée par l'opérateur $\mathbf{B}(\cdot)$:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}(\mathbf{Z}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}. \quad (1.5)$$

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0^+, \mathbf{p}) = 0, \text{ sur } \Omega \times \mathcal{P}, \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, 0^+, \mathbf{p}) = \mathbf{z}_0, \text{ sur } \Omega \times \mathcal{P}. \quad (1.6b)$$

1.2 Matériaux Standard Généralisés (GSM)

La loi de comportement est décrite en utilisant le formalisme de la théorie des Matériaux Standards Généralisés (*Generalized Standard Material*) (GSM) au sens de Halphen and Nguyen [66].

En disposant de l'énergie libre $w(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z})$, la loi d'état est déduite selon :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{Z} = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{z}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}. \quad (1.7b)$$

En disposant des potentiels thermodynamiques ψ et φ , la loi d'évolution est définie par :

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{z}}}(\dot{\mathbf{z}}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.8a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Z}}(\mathbf{Z}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.8b)$$

avec :

$$\psi(\mathbf{Z}) = \sup_{\dot{\mathbf{z}}} (\dot{\mathbf{z}} \mathbf{Z} - \varphi(\dot{\mathbf{z}})), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}. \quad (1.9)$$

Dans le cadre de l'élasto-viscoplasticité, les variables internes \mathbf{z} sont constituées des déformations anélastiques $\boldsymbol{\epsilon}_{an}$ et de variables internes supplémentaires $\boldsymbol{\beta}$. L'énergie libre est divisée en trois termes : le premier terme est purement élastique et non affecté par les variables internes $\boldsymbol{\beta}$ en absence d'endommagement, le deuxième terme comprend l'énergie stockée par l'écroissage cinématique et le troisième terme comprend l'énergie stockée par d'autres mécanismes et décrits par les variables internes $\boldsymbol{\beta}$.

L'énergie libre $w(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z})$ est telle que :

$$w(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{an}) : \mathbf{L} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{an}) + w^{an}(\boldsymbol{\epsilon}^{an}) + w^\beta(\boldsymbol{\beta}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.10)$$

où le module élastique L est un tenseur d'ordre 4.

Les forces thermodynamiques associées sont :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}) = \mathbf{L} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{an}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{Z}^{an} = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{an}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}) = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}, \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.11b)$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial w^{an}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{an}}(\boldsymbol{\epsilon}^{an}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}, \quad (1.11c)$$

$$\mathbf{Z}^\beta = -\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}) = -\frac{\partial w^\beta}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}), \text{ sur } \Omega \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}. \quad (1.11d)$$

1.3 Formulation du problème

Les méthodes classiques de discrétisation des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles issues de la modélisation des processus physiques permettent d'obtenir une solution numérique approchée. En général, des méthodes à résidus pondérés sont utilisées pour rechercher une solution numérique approchée. Ces méthodes se basent sur la recherche du champ inconnu \mathbf{u} qui réduit au minimum le résidu pondéré par un champ test \mathbf{v} de manière intégrale sur le domaine Ω .

On introduit les espaces fonctionnels \mathcal{U} et \mathcal{V} tel que :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v}|_{\partial_U \Omega} = 0\}, \quad (1.12a)$$

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\partial_U \Omega} = \mathbf{u}_d\}. \quad (1.12b)$$

La méthode de Galerkin est un cas particulier des méthodes à résidus pondérés pour lequel les champs tests sont choisis dans l'espace vectoriel \mathcal{V} relatif à l'espace affine \mathcal{U} dans lequel est cherché le champ inconnu.

Suivant une stratégie incrémentale, l'abscisse curviligne $\boldsymbol{\gamma} = (t, \mathbf{p})$ assimilée à un temps virtuel décrit le chemin unidimensionnel $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{I} \times \mathcal{P}$. Le problème est formulé de la façon suivante :

Problème 1 Trouver $\mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathcal{U}$ pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.13)$$

où $b(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire dans le cas d'un comportement élastique linéaire et $l(\cdot)$ est une forme linéaire. Dans le cas d'un comportement non-linéaire, la forme $b(\mathbf{u}, \cdot)$ reste linéaire.

On introduit les espaces fonctionnels $\mathcal{T}, \mathcal{K}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}$ et $\mathcal{V} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}$ tel que :

$$\mathcal{T} = \mathcal{L}^2(\mathcal{I}), \quad (1.14a)$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}^2(\mathcal{P}), \quad (1.14b)$$

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{T} = \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{V}), \quad (1.14c)$$

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{T} = \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}), \quad (1.14d)$$

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P} = \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mathcal{V} \otimes \mathcal{T}), \quad (1.14e)$$

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P} = \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mathcal{U} \otimes \mathcal{T}). \quad (1.14f)$$

Suivant une stratégie non incrémentale, (\mathbf{x}, \mathbf{p}) assimilé à un point matériel virtuel décrit l'espace multidimensionnel $\Omega \times \mathcal{P}$. Le problème est reformulé de la façon suivante :

Problème 2 Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}$ tel que :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}, \quad (1.15)$$

où $B(\cdot, \cdot)$ et $L(\cdot)$ sont donnés par :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{P}} \int_0^T b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, dt + \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0^+) \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0^+) \, d\Omega \, d\mathbf{p}, \quad (1.16a)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{P}} \int_0^T l(\mathbf{v}) \, dt \, d\mathbf{p}. \quad (1.16b)$$

Les normes et produits scalaires sur $\mathcal{V} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}$ sont donnés par :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\Omega} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega}}, \quad (1.17a)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} = \int_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dt, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}}. \quad (1.17b)$$

La notation compacte $\bar{f} = \langle f \rangle$ est utilisée pour calculer la moyenne de f sur le domaine Ω selon :

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\Omega. \quad (1.18)$$

La notation compacte $\langle\langle g \rangle\rangle$ est utilisée pour la partie positive de g selon :

$$\langle\langle g \rangle\rangle = \begin{cases} g & \text{si } g \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.19a)$$

$$(1.19b)$$

Chapitre 2

Méthodes de réduction

Les méthodes de réduction (*Reduced Order Modeling*) sont des stratégies numériques alternatives utilisées dans pour la résolution d'équations aux dérivées partielles afin de réduire considérablement le coût de la résolution numérique des problèmes paramétrés non linéaires en considérant un modèle d'ordre réduit (ROM) basé sur une méthode d'approximation à variables séparées. Ce ROM est construit en projetant les équations aux dérivées partielles sur une base réduite dont la taille est nettement inférieure à celle d'un modèle détaillé.

Les méthodes d'approximation à variables séparées consistent à approcher les champs inconnus dépendant de l'espace, du temps et de paramètres par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions d'une seule variable. Cette approximation tend à être exacte lorsque le nombre de termes de la sommation appelé ordre du modèle devient infini.

Dans le cadre de l'interpolation paramétrique, l'utilisation des méthodes de réduction conduit souvent à la construction d'une surface de réponses. Une surface de réponse est définie par la variété $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ des réponses paramétrées selon :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{\mathbf{u}(\cdot, \cdot, \mathbf{p}), \mathbf{p} \in \mathcal{P}\}. \quad (2.1)$$

La méthodologie de surface de réponses est présentée plus en détail Chapitre 6. Pourtant elle est introduite dès à présent car l'utilisation des méthodes de réduction dans le cadre de l'interpolation paramétrique consiste à décrire cette surface selon différentes approches.

Une façon de procéder pour la séparation de variables consiste à séparer en espace et en temps-paramètre. Cette séparation de variables est considérée dans le cadre d'une étude paramétrique menée à l'aide de calculs séquentiels. Dans ce cas, le temps virtuel $\boldsymbol{\gamma} = (t, \mathbf{p})$ décrit le chemin unidimensionnel $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ (Figure 2.1). On introduit à l'ordre N des fonctions d'espace $(\mathbf{f}_k)_{k=1}^N$ et des fonctions du temps et des paramètres $(g_k)_{k=1}^N$ telles qu'un champ \mathbf{u} à approcher s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) \approx \mathbf{u}_{AVS}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u}_{AVS}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) g_k(\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (2.2b)$$

Dans ce cas, parcourir $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ permet de sillonner la surface de réponse.

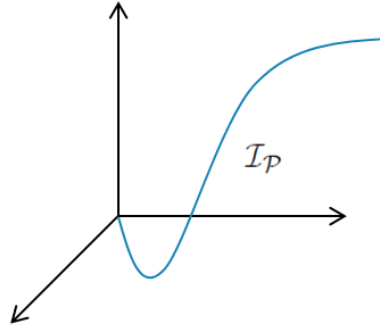


FIG. 2.1: Approximation à variables séparées pour une suite de problèmes séquentiels

Une autre façon de procéder pour la séparation de variables consiste à séparer en espace-paramètre et en temps. Cette séparation de variables est considérée dans le cadre d'une étude paramétrique menée à l'aide d'un calcul simultané. Dans ce cas, (\mathbf{x}, \mathbf{p}) décrit l'espace multidimensionnel $\Omega \times \mathcal{P}$ (Figure 2.2). On introduit à l'ordre N des fonctions de l'espace et des paramètres $(\mathbf{f}_k)_{k=1}^N$ et des fonctions du temps $(g_k)_{k=1}^N$ telles qu'un champ \mathbf{u} à approcher s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) \approx \mathbf{u}_{AVS}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{u}_{AVS}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}) g_k(t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}. \quad (2.3b)$$

Dans ce cas, parcourir $\Omega \times \mathcal{P}$ permet de décrire la surface de réponse.

La séparation de variables n'est certainement pas unique. En effet, une autre façon de procéder consiste à séparer en espace, en temps et en paramètre. Des détails seront apportés ultérieurement sur cette possibilité dans ce chapitre.

Si les fonctions d'espace (respectivement de l'espace et des paramètres) sont indépendantes, elles forment une base réduite sur le domaine spatial (respectivement de l'espace et des paramètres) et les fonctions du temps et des paramètres (respectivement du temps) peuvent être déterminées à partir de ces fonctions. Une manière de procéder est de considérer les fonctions d'espace connues *a priori* comme les polynômes de Chebychev ou de Legendre, ou encore des fonctions trigonométriques. Une autre manière est de les considérer comme des fonctions intrinsèques de la fonction à approcher.

Comme la décomposition n'est pas unique, le but des méthodes d'approximation à variables séparées est de donner une représentation optimale pour une valeur donnée de l'ordre du modèle.

Les façons de procéder pour construire ces modèles d'approximation à variables séparées sont très variées. Certaines méthodes sont dites *a priori* car elles ne nécessitent aucune simulation préliminaire. D'autres au contraire sont *a posteriori* car des simulations préliminaires sont requises afin de disposer d'échantillons ou *snapshots* du champ \mathbf{u} à

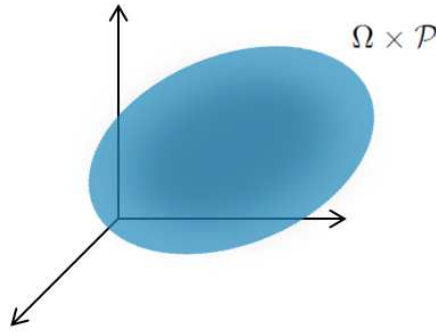


FIG. 2.2: Approximation à variables séparées pour un problème simultané

approcher avant d'en effectuer la décomposition.

Ce chapitre présente d'abord la Méthode des Éléments Finis (*Finite Element Method*) (FEM) qui est la méthode détaillée standard. Ensuite, les principales méthodes de réduction avec la formulation du problème mécanique associé sont données dans le contexte d'une étude paramétrique. Cela compte la méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition*) (POD), la méthode de réduction *a priori* *A Priori Reduction* (APR) et la méthode de Décomposition Généralisée aux valeurs Propres (*Proper Generalized Decomposition*) (PGD).

2.1 Méthode des éléments finis

La Méthode des Éléments Finis (*Finite Element Method*) (FEM) est la méthode détaillée standard pour la conception et le dimensionnement de structures. Elle a fait l'objet de très nombreux travaux dont ceux de Zienkiewicz and al. [140]. La FEM est une méthode incrémentale *a priori* basée sur une interpolation du champ de déplacement \mathbf{u} en considérant une discrétisation spatiale. L'utilisation de la méthode des éléments finis, d'un schéma d'intégration temporelle et d'un algorithme de Newton-Raphson permet de construire un modèle numérique détaillé du problème.

2.1.1 Méthode des Eléments Finis (FEM)

Dans le cadre d'une étude paramétrique menée à l'aide de calculs séquentiels, la FEM est décrite en considérant une séparation en espace et en temps-paramètre.

La FEM peut naturellement être vue comme une méthode d'approximation à variables séparées qui exploite un maillage introduisant une discrétisation spatiale en N_x localisations distinctes. Ce maillage exploite donc N_u degrés de liberté. Les composantes $(q_k)_{k=1}^{N_u}$ représentent les déplacements nodaux évalués aux points matériels $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{N_u}$ reliés au champ de déplacement \mathbf{u} par les fonctions d'interpolation $(\mathbf{N}_k)_{k=1}^{N_u}$. Le champ de

déplacement \mathbf{u} s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{N_u} \mathbf{N}_k(\mathbf{x}) q_k(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (2.4b)$$

Les fonctions d'interpolation sont des fonctions d'espace et les déplacements nodaux sont des fonctions du temps et des paramètres.

2.1.2 Formulation FEM-Galerkin

On introduit les espaces fonctionnels \mathcal{V}_{FEM} et \mathcal{U}_{FEM} relatifs à la base complète FEM définis par :

$$\mathcal{V}_{FEM} = \text{span}\{\mathbf{N}_k\}_{k=1}^{N_u}, \quad (2.5a)$$

$$\mathcal{U}_{FEM} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \in \mathcal{V}_{FEM}\}. \quad (2.5b)$$

Suivant une stratégie incrémentale, le problème est formulé avec l'approximation FEM-Galerkin de la façon suivante :

Problème 3 Trouver $\mathbf{u}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{FEM}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{FEM}, \quad (2.6)$$

Ce problème est résolu de façon itérative à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson. En notation matricielle avec l'approximation FEM-Galerkin, une itération permet de déterminer les incréments des degrés de liberté $\delta \mathbf{q}$ qui équilibrent le résidu \mathbf{R}_{FEM} dans le système $\mathbf{J}_{FEM} \delta \mathbf{q} = -\mathbf{R}_{FEM}$, où \mathbf{J}_{FEM} désigne la matrice jacobienne FEM selon :

$$R_{FEM_i}(\gamma) = l(\mathbf{N}_i) - b(\mathbf{u}(\cdot, \gamma), \mathbf{N}_i), \quad (2.7a)$$

$$J_{FEM_{ij}}(\gamma) = \left. \frac{\partial b}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} (\mathbf{u}(\cdot, \gamma) + \alpha \mathbf{N}_j, \mathbf{N}_i). \quad (2.7b)$$

2.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres

La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition*) (POD) est également connue sous le nom de décomposition de Karhunen-Loève [71, 93] ou analyse d'Hotelling [68]. De plus, elle possède des liens très étroits avec la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD) présentée en annexe A.

La POD a été introduite en turbulence par Lumley [94] non pas comme un solveur mais comme une méthode objective permettant d'identifier et d'extraire les structures cohérentes d'un écoulement. De la même façon qu'il existe deux approches pour la SVD (Annexe A), la POD classique est introduite par Lumley [94] alors que la *snapshot* POD est introduite par Sirovich [123]. Au delà du domaine historique d'application lié à la turbulence [123, 124, 125, 11, 19], la POD couvre maintenant un vaste domaine d'utilisations regroupant toutes sortes de disciplines. On la retrouve par exemple en mécanique des fluides [17, 34, 15], dans des applications au traitement d'images pour la caractérisation de visages humains [126] ou dans le domaine médical [127, 103]. Niroomandi et al. [103]

proposent une étude paramétrique en temps réel de la cornée humaine considérée comme hyper-élastique. On retrouve également la POD en mécanique des matériaux [99, 56, 55]. Ganapathysubramanian et al. [56] décrivent la texture cristalline de matériaux polycristallins à l'échelle microscopique en utilisant des fonctions de distribution des orientations cristallines afin de développer des techniques de contrôle des propriétés mécaniques macroscopiques. Monteiro and al. [99] utilisent la méthode R3M (*Reduced Model Multiscale Method*), une méthode multi-échelle dont la résolution du problème à l'échelle microscopique fait appel à la POD pour l'étude de la conduction thermique et électrique fortement non-linéaire dans les matériaux hétérogènes périodiques. Enfin, la POD est présente en thermique [13], et plus récemment en contrôle optimal [60, 61, 111, 16]. Bergmann et al. [16] proposent de minimiser le coefficient de traînée moyen d'un cylindre circulaire en régime laminaire en utilisant une procédure d'optimisation sollicitant un modèle réduit construit à l'aide de la POD.

Le point central de toutes ces applications est l'extraction des caractères dominants d'un ensemble d'observations, permettant d'accéder ainsi à une réduction du modèle dynamique. Les observations sont des données expérimentales ou numériques correspondant à des champs de données supposés connus et décrits par des échantillons au champ \mathbf{u} à approcher ou *snapshots*. Par ailleurs, rien n'oblige *a priori* que les caractéristiques physiques du système ou les paramètres de contrôle soient les mêmes pour toutes les réalisations connues.

L'ensemble des *snapshots* est donné pour N_s échantillons correspondant à des instants virtuels distincts $(\gamma_i)_{i=1}^{N_s}$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}_p} = \{\mathbf{u}_i(\cdot)\}_{i=1}^{N_s} = \{\mathbf{u}(\cdot, \gamma_i)\}_{i=1}^{N_s}. \quad (2.8)$$

La POD a longtemps été considérée comme une méthode de réduction *a posteriori* qui permet d'extraire des informations d'un ensemble de données observées. Cependant, elle permet également de mener une analyse *a priori* en réalisant de façon préliminaire des calculs détaillés partiels ou des calculs approchés lors d'une phase d'apprentissage ou *learning phase*. Le problème est alors reformulé en considérant l'approximation POD. La phase d'apprentissage durant laquelle les *snapshots* sont calculés s'effectue de deux façons distinctes :

- un calcul préliminaire partiel est mené à l'aide d'un modèle détaillé sur un intervalle de temps limité,
- un calcul préliminaire approché est mené à l'aide d'un modèle détaillé sur l'intervalle de temps complet avec une discrétisation grossière.

Cependant, la phase d'apprentissage ne garantit pas une bonne approximation POD : l'approximation POD est d'autant plus précise que les modifications du modèle restent dans la limite de validité des *snapshots* calculés durant la phase d'apprentissage.

Les applications de la POD peuvent suivre une stratégie *offline/online*. Dans ce cas, l'étude *offline* consiste à déterminer de façon préliminaire l'ensemble des *snapshots*. L'étude *online* consiste alors à une résolution du problème en utilisant les *snapshots* calculés dans l'étude *offline*.

2.2.1 Méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

Dans le cadre d'une étude paramétrique menée à l'aide de calculs séquentiels, la POD est décrite en considérant une séparation en espace et en temps-paramètre.

La POD introduit à l'ordre M_u des fonctions de forme $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ reliées au champ de déplacement \mathbf{u} par les déplacements réduits $(a_k)_{k=1}^{M_u}$. Le champ de déplacement \mathbf{u} s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) \approx \mathbf{u}_{POD}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{u}_{POD}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^{M_u} \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) a_k(\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (2.9b)$$

Les modes empiriques $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ peuvent être décrits en utilisant les fonctions de formes FEM $(\mathbf{N}_i)_{i=1}^{N_u}$ et la matrice de réduction \mathbf{A} selon :

$$\boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) A_{ik}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.10)$$

Les fonctions de forme sont des fonctions d'espace et les déplacements réduits sont des fonctions du temps et des paramètres.

L'objet de la POD est d'extraire des observations considérés comme aléatoires des structures cohérentes, c'est à dire les fonctions déterministes $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ qui minimisent l'écart au sens des moindres carrés entre la fonction \mathbf{u} et sa représentation approchée à l'ordre M_u . Ces fonctions d'espace sont les structures cohérentes ou fonctions dominantes des transformations décrites dans l'ensembles des *snapshots*. Selon les domaines, elles sont désignées sous les termes de fonctions de forme dans le cadre des méthodes d'approximation, modes empiriques dans le cadre de la réduction de modèle ou bien champs de transformation dans le cadre de l'homogénéisation périodique.

L'optimalité de la POD d'un point de vue énergétique a été étudiée par Holmes et al. [67]. Par conséquent, quelque soit l'ordre du modèle M_u , la projection du champ \mathbf{u} sur le sous espace $\mathcal{V}_{POD}^{M_u}$ engendré par les M_u premiers modes empiriques d'une POD contient en moyenne la plus grande quantité d'énergie cinétique possible. Comme la base réduite POD est optimale au sens de l'énergie, seul un petit nombre de modes est nécessaire pour décrire le champ \mathbf{u} avec une bonne précision.

Méthode POD classique L'objet de la POD est d'extraire comme structures cohérentes les fonctions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ les mieux corrélées en moyenne aux réalisations, c'est à dire qui possède au sens des moindres carrés la plus grande projection sur les observations (2.3).

Comme on cherche à tester le parallélisme des fonctions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ avec les observations, la dépendance de l'amplitude des fonctions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ doit être supprimée. Une manière de le faire est de normer l'amplitude des fonctions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$.

Le problème est donc de trouver les fonctions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ qui maximisent la quantité $\lambda(\boldsymbol{\psi}_k)$

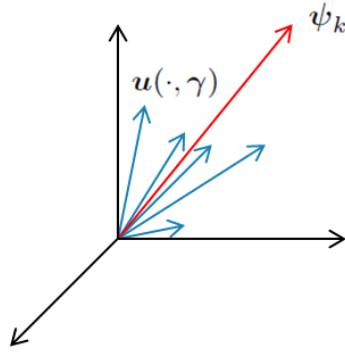


FIG. 2.3: Construction des modes empiriques les mieux corrélées en moyenne aux réalisations

définie par :

$$\lambda(\psi_k) = \frac{\int_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} (\mathbf{u}(\cdot, \gamma), \psi_k)_{\Omega}^2 d\gamma}{(\psi_k, \psi_k)_{\Omega}}. \quad (2.11)$$

Il s'agit donc de résoudre le problème de maximisation :

$$\max_{\phi \in \mathcal{L}^2(\Omega)} \lambda(\phi) = \lambda(\psi_k). \quad (2.12)$$

Ce problème d'optimisation est équivalent à un problème aux valeurs propres dont les solutions sont les fonctions $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$.

On introduit l'opérateur \mathcal{R} défini sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$ par :

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.13)$$

où \mathbf{R} donne le tenseur des corrélations spatiales entre deux points :

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} \int_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}', \gamma) d\gamma, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{x}' \in \Omega. \quad (2.14)$$

Dans ce cas, on obtient :

$$(\mathcal{R}\phi, \phi)_{\Omega} \geq 0, \quad \phi \in \mathcal{L}^2(\Omega), \quad (2.15a)$$

$$(\mathcal{R}\phi, \xi)_{\Omega} = (\mathcal{R}\xi, \phi)_{\Omega}, \quad (\phi, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega)^2. \quad (2.15b)$$

On en déduit alors que \mathcal{R} est un opérateur linéaire, auto-adjoint et positif sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, la théorie spectrale s'applique et garantit que le problème d'optimisation est équivalent au problème aux valeurs propres :

$$\mathcal{R}\phi = \lambda\phi. \quad (2.16)$$

Ce problème admet une infinité dénombrable de solutions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^\infty$ associées aux valeurs propres $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$:

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}' = \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.17)$$

Comme les valeurs propres sont rangées selon :

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots \geq 0, \quad (2.18)$$

elles sont tronquées à l'ordre M_u à l'aide du paramètre de troncature ε_{POD} selon :

$$\lambda_k \geq \varepsilon_{POD} \lambda_1, \quad k \in \{1, \dots, M_u\}. \quad (2.19)$$

À l'ordre M_u , les fonctions de forme $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ sont les M_u premiers vecteurs propres du tenseur des corrélations spatiales \mathbf{R} .

Une forme discrétisée du problème aux valeurs propres peut être obtenu. En discrétisant le problème à l'aide de la FEM, \mathbf{R} devient la matrice des corrélations spatiales. Dans ce cas, la dimension du problème aux valeurs propres est égale au nombre de degré de liberté N_u . Le problème aux valeurs propres discrétisé s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N_u} R_{ij} \psi_{jk} = \lambda_k \psi_{ik}, \quad (2.20a)$$

$$R_{ij} = \mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} \sum_{l=1}^{N_s} \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\gamma}_l) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\gamma}_l), \quad (2.20b)$$

$$\psi_{ik} = \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}_i). \quad (2.20c)$$

Méthode *snapshot* POD La méthode des *snapshots* consiste à écrire les fonctions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_s} b_k(\boldsymbol{\gamma}_i) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.21)$$

Dans ce cas, le problème d'optimisation est équivalent à un problème aux valeurs propres. Ce problème admet N_s solutions $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{N_s}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_k)_{k=1}^{N_s}$:

$$\int_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} \mathbf{C}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}') b_k(\boldsymbol{\gamma}') \, d\boldsymbol{\gamma}' = \lambda_k b_k(\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}') = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}') \, d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad \boldsymbol{\gamma}' \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.22b)$$

où \mathbf{C} donne le tenseur des corrélations temporelles entre deux instants.

Comme les valeurs propres sont rangées, elles sont tronquées à l'ordre M_u à l'aide du paramètre de troncature ε_{POD} tout comme dans la méthode POD classique. À l'ordre M_u , les fonctions de forme $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^{M_u}$ sont les M_u premiers vecteurs propres du tenseur des corrélations spatiales \mathbf{C} .

En discrétisant le problème à l'aide de la FEM, \mathbf{C} devient la matrice des corrélations temporelles. Dans ce cas, la dimension du problème aux valeurs propres est égale au

nombre N_s d'échantillons. Généralement, ce nombre est bien plus petit que le nombre de degré de liberté N_u ce qui explique pourquoi la *snapshot* POD est moins complexe numériquement à mettre en oeuvre que la POD. Le problème aux valeurs propres discrétisé s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N_s} C_{ij} b_{jk} = \lambda_k b_{ik}, \quad (2.23a)$$

$$C_{ij} = \mathbf{C}(\gamma_i, \gamma_j) = \frac{1}{\Omega} \sum_{l=1}^{N_u} \mathbf{u}(\mathbf{x}_l, \gamma_i) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_l, \gamma_j), \quad (2.23b)$$

$$b_{ik} = b_k(\gamma_i). \quad (2.23c)$$

Une remarque très importante est mise en avant dès maintenant quant à la représentation synchrone sur Ω du champ \mathbf{u} . Considérant que le domaine Ω est composé de deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 , ce point est illustré de façon simple à l'aide d'un champ \mathbf{u} dont sa restriction $\mathbf{u}|_{\Omega_2}$ sur le sous-domaine Ω_2 est parfaitement retardé par rapport à sa restriction $\mathbf{u}|_{\Omega_1}$ sur le sous-domaine Ω_1 . En effet, si le champ $\mathbf{u}|_{\Omega_1}$ est décrit à l'aide de N_s échantillons, alors il faut $2N_s$ échantillons pour décrire le champ \mathbf{u} sur le domaine complet Ω dès que le retard est tel que les restrictions $\mathbf{u}|_{\Omega_1}$ et $\mathbf{u}|_{\Omega_2}$ sont décorréllées en temps dans le sens où $\int_{\mathcal{I}} \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t) dt = 0$, $\forall \mathbf{x}_1 \in \Omega_1$, $\forall \mathbf{x}_2 \in \Omega_2$. Il parait alors évident qu'une représentation synchrone sur Ω du champ \mathbf{u} peut être maladroite lorsque les transformations significatives sont désynchronisées sur les sous-domaines

2.2.2 Formulation POD-Galerkin

On introduit les espaces fonctionnels $\mathcal{V}_{POD}^{M_u}$ et $\mathcal{U}_{POD}^{M_u}$ relatifs à la base réduite POD définis par :

$$\mathcal{V}_{POD}^{M_u} = \text{span}\{\psi_k\}_{k=1}^{M_u}, \quad (2.24a)$$

$$\mathcal{U}_{POD}^{M_u} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \in \mathcal{V}_{POD}^{M_u}\}. \quad (2.24b)$$

Suivant une stratégie incrémentale, le problème est formulé avec l'approximation POD-Galerkin de la façon suivante :

Problème 4 Trouver $\mathbf{u}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{POD}^{M_u}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{POD}^{M_u}. \quad (2.25)$$

Ce problème est résolu de façon itérative à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson. En notation matricielle avec l'approximation POD-Galerkin, une itération permet de déterminer les incréments de déplacements réduits $\delta \mathbf{a}$ qui équilibrent le résidu \mathbf{R}_{POD} dans le système $\mathbf{J}_{POD} \delta \mathbf{a} = -\mathbf{R}_{POD}$, où \mathbf{J}_{POD} désigne la matrice jacobienne POD déduite de la matrice jacobienne FEM selon :

$$\mathbf{R}_{POD} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{R}_{FEM}, \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{J}_{POD} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}_{FEM} \cdot \mathbf{A}. \quad (2.26b)$$

L'utilisation de la formulation POD-Galerkin pour l'assemblage de la matrice de rigidité tangente et du résidu en base réduite conduit respectivement à une complexité numérique de l'ordre de $2M_u^2N_u + 2\omega M_uN_u$ (terme de gauche) et $2M_uN_u$ (terme de droite), où ω est la largeur de bande de la matrice jacobienne FEM.

Par conséquent, il subsiste pour la complexité numérique évaluée dans le cas de la formulation POD-Galerkin une dépendance à la dimension N_u de l'espace des fonctions d'interpolation liées à la discrétisation FEM.

2.2.3 Algorithme POD

L'algorithme POD selon la formulation POD-Galerkin est donné par l'algorithme 1.

Algorithme 1 Algorithme POD non adaptatif

Calculer les échantillons ou *snapshots*

Appliquer la POD sur la matrice des *snapshots* afin de trouver la base réduite $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$

pour $i = 1 \rightarrow N_t$ **faire**

$$\text{Calculer } \mathbf{u}_{POD}(\cdot, \gamma_i) = \sum_{k=1}^{M_u} \psi_k(\cdot) a_k(\gamma_i) \text{ (Problème 4)}$$

fin pour

Dans cet algorithme, la base réduite déduite des *snapshots* est figée. Le choix des *snapshots* est donc un point essentiel lors d'utilisations ultérieures car la base réduite n'est pas capable de représenter des évolutions dont l'information n'est pas présente parmi les *snapshots*.

Un moyen de vérifier la validité des *snapshots* choisis consiste à considérer l'indicateur d'erreur $\eta_{u_{POD}}$. Il permet d'évaluer la précision de la méthode POD en vérifiant la qualité de l'équilibre sur Ω selon :

$$\eta_{u_{POD}}(\gamma) = \|\mathbf{R}_{FEM}(\gamma)\|_{\Omega}, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (2.27)$$

Si $\eta_{u_{POD}}(\gamma) > \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{FEM}|_{\mathbf{u}_{POD}=0}(\gamma)\|_{\Omega}$ alors la prévision POD n'est pas satisfaisante à l'incrément $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$.

De nombreuses méthodes de POD adaptatives ont fait l'objet de travaux afin de corriger l'estimation POD selon un estimateur d'erreur *a priori* [115, 117, 131]. Ryckelynck [115] propose d'enrichir la base réduite à l'aide de sous-espace de Krylov tandis que Verdon et al. [131] utilisent la méthode APR décrite dans la section suivante. L'algorithme POD adaptatif selon la formulation POD-Galerkin est donné par l'algorithme 2.

2.3 Méthode *A Priori Reduction* (APR)

La méthode *A Priori Reduction* (APR) est une méthode de réduction extraite de la méthode APHR [116, 131]. La méthode APR est une POD incrémentale *a priori* car elle ne nécessite aucune donnée initiale pour mener une simulation.

En suivant une démarche *a priori*, la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} à approcher est estimée en cours de simulation. En effet, un avantage de la méthode APR est sa capacité à corriger et adapter le ROM en fonction de la qualité de la prévision

Algorithme 2 Algorithme POD adaptatif

Calculer les échantillons ou *snapshots*

Appliquer la POD sur la matrice des *snapshots* afin de trouver la base réduite $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$
pour $i = 1 \rightarrow N_t$ **faire**

Calculer $\mathbf{u}_{POD}(\cdot, \gamma_i) = \sum_{k=1}^{M_u} \psi_k(\cdot) a_k(\gamma_i)$ (Problème 4)

Vérifier la convergence de $\mathbf{u}_{POD}(\cdot, \gamma_i)$ en calculant un indicateur d'erreur

si $\eta_u POD(\gamma) > \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{FEM}|_{\mathbf{u}_{POD=0}}(\gamma_i)\|_{\Omega}$ **alors**

Améliorer la prévision POD

Enrichir la base réduite et incrémenter l'ordre du modèle

fin si
fin pour

POD qu'il fournit. Toutefois la méthode APR peut également exploiter des *snapshots* ou une base réduite issues de simulations précédentes en suivant une démarche *a posteriori*. Dans le cas d'une stratégie adaptative, le ROM est évolutif : la méthode APR fournit une estimation réduite POD du champ de déplacement \mathbf{u} éventuellement corrigée par un calcul FEM. Plus précisément, si à la fin d'un incrément, la précision de la prévision POD est insuffisante, l'état mécanique corrigé par la FEM est utilisé pour enrichir la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} d'un mode empirique.

2.3.1 Description de la représentation multi-niveaux

La méthode APR adaptative fournit une estimation en sommant si besoin une correction FEM à la prévision du ROM. Les déplacements réduits issus de la POD étant globaux et les déplacements nodaux FEM étant locaux, l'approximation proposée est multi-niveaux selon :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{APR}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{u}_{APR}(\mathbf{x}, \gamma) = \mathbf{u}_{POD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) + \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (2.28b)$$

Un point important de la méthode APR est le caractère évolutif des modes empiriques. Par conséquent, ces modes empiriques caractéristiques de la transformation sont modifiés durant le traitement incrémental du problème mécanique et l'exposant $\square^{(n)}$ est introduit pour donner la version du ROM.

2.3.2 Pévision réduite POD

La méthode APR introduit à l'ordre $M_u^{(n)}$ des fonctions de forme $(\psi_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ reliées au champ de déplacement \mathbf{u} par les déplacements réduits $(a_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$. Le champ de

déplacement \mathbf{u} s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{APR}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{u}_{APR}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\mathbf{x}) a_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (2.29b)$$

Les modes empiriques $(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ peuvent être décrits en utilisant les fonctions de formes FEM $(\mathbf{N}_i)_{i=1}^{N_u}$ et la matrice de réduction $\mathbf{A}^{(n)}$ selon :

$$\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) A_{ik}^{(n)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.30)$$

La prévision réduite POD est déterminée à l'aide de la formulation POD-Galerkin. On introduit les espaces fonctionnels $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ et $\mathcal{U}_{POD}^{(n)}$ relatifs à la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} définis par :

$$\mathcal{V}_{POD}^{(n)} = \text{span} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{M_u^{(n)}}, \quad (2.31a)$$

$$\mathcal{U}_{POD}^{(n)} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)} \}. \quad (2.31b)$$

Suivant une stratégie incrémentale, le problème est formulé avec l'approximation POD-Galerkin à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante :

Problème 5 Trouver $\mathbf{u}_{POD}^{(n)}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{POD}^{(n)}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}_{POD}^{(n)}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}. \quad (2.32)$$

Ce problème est résolu de façon itérative à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson. En notation matricielle avec l'approximation POD-Galerkin, une itération permet de déterminer les incréments de déplacements réduits $\boldsymbol{\delta a}^{(n)}$ qui équilibrent le résidu $\mathbf{R}_{APR}^{(n)}$ dans le système $\mathbf{J}_{APR}^{(n)} \boldsymbol{\delta a}^{(n)} = -\mathbf{R}_{APR}^{(n)}$, où $\mathbf{J}_{APR}^{(n)}$ désigne la matrice jacobienne APR déduite de la matrice jacobienne FEM selon :

$$\mathbf{R}_{APR}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)T} \cdot \mathbf{R}_{FEM}, \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{J}_{APR}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)T} \cdot \mathbf{J}_{FEM} \cdot \mathbf{A}^{(n)}. \quad (2.33b)$$

L'utilisation de la formulation POD-Galerkin pour l'assemblage de la matrice de rigidité tangente et du résidu en base réduite conduit respectivement à une complexité numérique de l'ordre de $2M_u^{(n)2} N_u + 2\omega M_u^{(n)} N_u$ (terme de gauche) et $2M_u^{(n)} N_u$ (terme de droite), où ω est la largeur de bande de la matrice jacobienne FEM.

Par conséquent, comme dans le cas de la méthode POD, il subsiste pour la complexité numérique évaluée dans le cas de la formulation POD-Galerkin une dépendance à la dimension de l'espace des fonctions d'interpolation liées à la discrétisation FEM.

2.3.3 Procédé de correction-enrichissement

Correction FEM Après une prévision POD, l'indicateur d'erreur $\eta_{u APR}$ est calculé. Il permet de vérifier la qualité de l'équilibre réduit sur Ω en évaluant la norme du résidu \mathbf{R}_{APR} à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ selon :

$$\eta_{u APR}(\gamma) = \|\mathbf{R}_{FEM}(\gamma)\|_{\Omega}. \quad (2.34)$$

Si $\eta_{u APR}(\gamma) \leq \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{FEM}|_{\mathbf{u}_{POD=0}^{(n)}}(\gamma)\|_{\Omega}$, alors la prévision du ROM est satisfaisante à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$. Sinon, une correction FEM $\delta \mathbf{u}_{FEM}$ est calculée. Le paramètre ε_u donne la tolérance d'erreur lors de la résolution de l'équilibre réduit.

Si une correction FEM est exigée, suivant une stratégie incrémentale, le problème est formulé avec l'approximation FEM-Galerkin à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante :

Problème 6 Trouver $\mathbf{u}_{APR}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{FEM}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}_{APR}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{FEM}. \quad (2.35)$$

Enrichissement Lorsqu'une correction FEM est calculée à un incrément, l'état mécanique du système peut être pris en compte pour enrichir l'espace généré par les bases réduites du ROM en utilisant la correction FEM $\delta \mathbf{u}_{FEM}$.

La première étape est de calculer le résidu $\delta \mathbf{u}_{FEM}^{\perp}$ de la projection orthogonale de $\delta \mathbf{u}_{FEM}$ sur $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$ défini à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ par :

$$\delta \mathbf{u}_{FEM}^{\perp}(\mathbf{x}, \gamma) = \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \delta \hat{\mathbf{u}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.36a)$$

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.36b)$$

$$\delta \mathbf{a}^{(n)}(\gamma) = \operatorname{argmin}_{\delta \mathbf{a}^*} \left\| \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^* \right\|_{\Omega}^2. \quad (2.36c)$$

La seconde étape est d'enrichir l'espace généré par les bases réduites en considérant un mode empirique supplémentaire et des déplacements réduits additionnels.

La base réduite $\left(\psi_k^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ et les déplacements réduits $\left(a_k^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ associés sont définies par :

$$\psi_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(n)}\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.37a)$$

$$\psi_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \frac{\delta \mathbf{u}_{FEM}^{\perp}(\mathbf{x})}{\|\delta \mathbf{u}_{FEM}^{\perp}(\mathbf{x})\|_{\Omega}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.37b)$$

$$a_k^{(n+\frac{1}{2})}(\tau) = a_k^{(n)}(\tau), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(n)}\}, \quad \tau \in]0, \gamma], \quad (2.38a)$$

$$a_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\tau) = 0, \quad \tau \in]0, \gamma[, \quad (2.38b)$$

$$a_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\gamma) = \|\delta \mathbf{u}_{FEM}^{\perp}(\mathbf{x})\|_{\Omega}, \quad (2.38c)$$

où $\mathcal{I}_\gamma =]0, \gamma]$ est l'abscisse curviligne parcourue jusqu'à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_\mathcal{P}$.

La troisième et dernière étape est de contrôler la taille des bases réduites grâce à la *snapshot* POD en écrivant la matrice des corrélations temporelles.

La matrice des corrélations temporelles $\mathbf{C}^{(n+\frac{1}{2})}$ associée au champ de déplacement est symétrique, positive, de taille $M_u^{(n)} + 1$ et s'écrit :

$$C_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = C_{ij}^0 + \left(a_i^{(n+\frac{1}{2})}, a_j^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{\mathcal{I}_\gamma}, \quad (2.39a)$$

$$\sum_{i=1}^{M_u^{(n)}+1} C_{ij} v_j^{(k)} = \lambda_k v_i^{(k)}. \quad (2.39b)$$

où la matrice \mathbf{C}^0 est une matrice de corrélation provenant d'un calcul précédent, et où $(\mathbf{v}^{(k)})_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ et $(\lambda_k)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ sont les vecteurs propres et les valeurs propres associées de la matrice $\mathbf{C}^{(n+\frac{1}{2})}$.

La base réduite $(\boldsymbol{\psi}_j^{(n+1)})_{j=1}^{M_u^{(n+1)}}$ et les déplacements réduits $(a_j^{(n+1)})_{j=1}^{M_u^{(n+1)}}$ sont mises à jour selon :

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}+1} \boldsymbol{\psi}_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) v_k^{(j)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.40a)$$

$$a_j^{(n+1)}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}+1} a_k^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) v_k^{(j)}, \quad \boldsymbol{\tau} \in]0, \gamma]. \quad (2.40b)$$

2.3.4 Algorithme incrémental

Selon une approche incrémentale, l'algorithme APR est donné par l'algorithme 3. Cet algorithme est implémenté dans le code de calcul Z-set.

2.4 Décomposition Généralisée aux valeurs Propres

La Décomposition Généralisée aux valeurs Propres (*Proper Generalized Decomposition*) (PGD) est une méthode de réduction de modèle non incrémentale basée sur une séparation des variables et une approche de résolution spectrale sous une hypothèse de séparabilité des champs impliqués [30, 104, 3, 85]. L'efficacité de la PGD nécessite la séparabilité de toutes les équations impliquées dans le modèle ce qui n'est pas toujours garanti dans le cas des problèmes fortement non-linéaires. L'approximation PGD ne nécessite aucune connaissance de la solution et n'exploite aucune propriété d'orthogonalité. C'est une méthode de réduction *a priori* non incrémentale qui suit une stratégie itérative au cours de laquelle sont résolus des pseudo-problèmes aux valeurs propres. Falco et al. [48] applique la PGD à des problèmes elliptiques alors que Bonithon et al. [23] l'utilise pour des problèmes paraboliques. Elle peut également être couplée à la FEM comme le montrent Ammar et al. [4].

Développée initialement dans la méthode *LArge Time INcrement* (LATIN) présentée

Algorithme 3 Algorithme APR adaptatif

Charger l'éventuelle base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

pour $i = 1 \rightarrow N_t$ **faire**

Calculer la prévision réduite POD afin de déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}_{POD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur Ω selon la formulation POD-Galerkin avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

Calculer l'indicateur d'erreur $\eta_{u APR}(\boldsymbol{\gamma}_i)$ afin de vérifier la qualité de l'équilibre réduit sur Ω

si $\eta_{u APR}(\boldsymbol{\gamma}_i) \leq \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{FEM}|_{\mathbf{u}_{POD}=0}(\boldsymbol{\gamma})\|_{\Omega}$ **alors**

Ecrire $\mathbf{u}_{APR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{POD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

sinon

Calculer la correction FEM afin de déterminer la correction $\boldsymbol{\delta u}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ à apporter au champ de déplacement sur Ω selon la formulation FEM-Galerkin avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

Ecrire $\mathbf{u}_{APR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{POD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) + \boldsymbol{\delta u}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Enrichir $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ et mettre à jour la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n+1)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n+1)}}$

fin si

fin pour

en annexe B et alors dénommée approximation en chargement radial (*Radial Loading Decomposition*) (RLD) [78] ou bien approximation radiale en temps et espace (*radial time-space approximation*), la PGD [30] peut être vue comme une extension de la POD. La RLD a été le point clé de la méthode LATIN dans la résolution de problèmes non-linéaires dépendant du temps en mécanique des structures [78, 79, 81]. Elle a également été étendue pour la résolution de problèmes stochastiques par Nouy et al. sous le nom de Décomposition Spectrale Généralisée (*Generalized Spectral Decomposition*) [105].

Dans le cadre d'une étude paramétrique menée à l'aide d'un calcul simultané, la séparation de variables peut faire intervenir de nombreux paramètres. La PGD est alors décrite suivant une approche multidimensionnelle en considérant une séparation en espace et en temps et en paramètre. Dans ce cas, la complexité du modèle PGD croît linéairement avec sa dimension plutôt qu'exponentiellement pour un modèle standard ce qui permet d'éviter la fameuse malédiction de la dimensionnalité (*curse of dimensionality*). Ce point fait de la PGD une méthode particulièrement adaptée pour la résolution de problèmes de dimension élevée (problèmes multidimensionnels [5, 110, 31], problèmes multiphysiques, homogénéisation [87, 30, 100], problèmes inverses,...). Prulière et al. [110] adopte une approche multidimensionnelle pour la résolution paramétrique de l'équation de la chaleur. Chinesta et al. [31] utilise la même approche pour la résolution de l'équation de Fokker-Planck et l'équation de Schrödinger. La PGD est également une méthode séduisante pour l'analyse de problèmes multiphysiques car la résolution non incrémentale permet de considérer des phénomènes dont les temps caractéristiques sont très différents comme le montrent Beringhier et al. [18]. Plus récemment, la PGD est couplée avec la Méthode Asymptotique Numérique (*Asymptotic Numerical Method*) (ANM) par Leygue

et al. [88].

Les exemples d'application de la PGD à la résolution de problème de dimension élevée exploite souvent une stratégie *offline/online*. Dans ce cas, l'étude *offline* consiste à résoudre le problème à l'aide de la PGD en espace, en temps et en paramètre, c'est à dire que les paramètres du problème sont inclus parmi les variables lors de la résolution. L'étude *online* consiste alors à une simple paramétrisation qui permet généralement un calcul en temps réel.

Bien que la PGD soit une méthode efficace dans de nombreux cas où la dimension du problème est très élevée, peu de travaux fournissent un estimateur d'erreur robuste pour évaluer *a priori* la qualité d'une solution approchée [80].

La PGD couvre un vaste domaine d'application regroupant de nombreuses disciplines. On la retrouve en mécanique des fluide [36, 37, 32], en mécanique des matériaux [58, 20], et dans de nombreux autres domaines.

2.4.1 Méthode de Décomposition Généralisée aux valeurs Propres (PGD)

La Décomposition Généralisée aux valeurs Propres introduit à l'ordre M_u des fonctions d'espace $(\psi_m)_{m=1}^{M_u}$, des fonctions du temps $(\lambda_m)_{m=1}^{M_u}$ et des fonctions des paramètres $(\kappa_m)_{m=1}^{M_u}$. Le champ de déplacement \mathbf{u} s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) \approx \mathbf{u}_{PGD}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (2.41a)$$

$$\mathbf{u}_{PGD}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_u} \psi_m(\mathbf{x}) \lambda_m(t) \kappa_m(\mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}. \quad (2.41b)$$

La représentation à variables séparées considérée n'est pas la seule envisageable. Lorsque le domaine Ω présente des symétries, il peut s'avérer judicieux de décomposer les fonctions d'espace en produits de fonctions à une dimension.

2.4.2 Formulation PGD-Galerkin

On introduit les espaces fonctionnels $\mathcal{V}_{PGD}^{M_u}$, $\mathcal{U}_{PGD}^{M_u}$, $\mathcal{T}_{PGD}^{M_u}$ et $\mathcal{K}_{PGD}^{M_u}$ relatifs à la base réduite PGD définis par :

$$\mathcal{V}_{PGD}^{M_u} = \text{span}\{\psi_m\}_{m=1}^{M_u}, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{U}_{PGD}^{M_u} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \in \mathcal{V}_{PGD}^{M_u}\}, \quad (2.42b)$$

$$\mathcal{T}_{PGD}^{M_u} = \text{span}\{\lambda_m\}_{m=1}^{M_u}, \quad (2.42c)$$

$$\mathcal{K}_{PGD}^{M_u} = \text{span}\{\kappa_m\}_{m=1}^{M_u}, \quad (2.42d)$$

$$\mathcal{V}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u} = \mathcal{L}^2(\mathcal{L}^2(\mathcal{K}_{PGD}^{M_u}, \mathcal{V}_{PGD}^{M_u}), \mathcal{I}), \quad (2.42e)$$

$$\mathcal{U}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u} = \mathcal{L}^2(\mathcal{L}^2(\mathcal{K}_{PGD}^{M_u}, \mathcal{U}_{PGD}^{M_u}), \mathcal{I}), \quad (2.42f)$$

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u} = \mathcal{L}^2(\mathcal{L}^2(\mathcal{K}_{PGD}^{M_u}, \mathcal{T}_{PGD}^{M_u}), \mathcal{V}), \quad (2.42g)$$

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u} = \mathcal{L}^2(\mathcal{L}^2(\mathcal{K}_{PGD}^{M_u}, \mathcal{T}_{PGD}^{M_u}), \mathcal{U}), \quad (2.42h)$$

$$\mathcal{V}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K} = \mathcal{L}^2(\mathcal{K}, \mathcal{L}^2(\mathcal{T}_{PGD}^{M_u}, \mathcal{V}_{PGD}^{M_u})), \quad (2.42i)$$

$$\mathcal{U}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K} = \mathcal{L}^2(\mathcal{K}, \mathcal{L}^2(\mathcal{T}_{PGD}^{M_u}, \mathcal{U}_{PGD}^{M_u})), \quad (2.42j)$$

Avec l'approximation PGD-Galerkin en espace et en paramètre et suivant une stratégie non incrémentale, le problème est formulé de la façon suivante :

Sous-problème 1 *Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u}$ tel que :*

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u}. \quad (2.43)$$

Ce problème aboutit à la construction des fonctions $(\lambda_m)_{m=1}^{M_u} = T\left((\psi_m)_{m=1}^{M_u}, (\kappa_m)_{m=1}^{M_u}\right)$ en résolvant un système d'équations différentielles en temps.

Avec l'approximation PGD-Galerkin en temps et en paramètre et suivant une stratégie non incrémentale, le problème est formulé de la façon suivante :

Sous-problème 2 *Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u}$ tel que :*

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K}_{PGD}^{M_u}. \quad (2.44)$$

Ce problème aboutit à la construction des fonctions $(\psi_m)_{m=1}^{M_u} = S\left((\lambda_m)_{m=1}^{M_u}, (\kappa_m)_{m=1}^{M_u}\right)$ en résolvant un système d'équations différentielles en espace.

Avec l'approximation PGD-Galerkin en espace et en temps et suivant une stratégie non incrémentale, le problème est formulé de la façon suivante :

Sous-problème 3 *Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K}$ tel que :*

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{T}_{PGD}^{M_u} \otimes \mathcal{K}. \quad (2.45)$$

Ce problème aboutit à la construction des fonctions $(\kappa_m)_{m=1}^{M_u} = P\left((\psi_m)_{m=1}^{M_u}, (\lambda_m)_{m=1}^{M_u}\right)$ en résolvant un système d'équations différentielles en paramètre.

L'algorithme PGD selon la formulation PGD-Galerkin est donné par l'algorithme 4

En pratique, cette approche n'est pas utilisée pour des applications à de grandes échelles en raison du coût numérique associé à la résolution des systèmes d'équations différentielles en espace et en paramètre. Toutefois, la décomposition obtenue est une décomposition optimale car le résidu est orthogonal aux sous espaces $\mathcal{V}_{PGD}^{M_u}$, $\mathcal{T}_{PGD}^{M_u}$ et $\mathcal{K}_{PGD}^{M_u}$.

2.4.3 Formulation PGD-Galerkin progressive

En supposant qu'une représentation à variables séparées est connue à l'ordre $m-1$, un nouveau triplet $(\psi, \lambda, \kappa) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T} \times \mathcal{K}$ doit vérifier la condition d'admissibilité suivante :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}_{PGD\ m-1} + \psi\lambda\kappa, \psi\lambda^*\kappa + \psi^*\lambda\kappa + \psi\lambda\kappa^*) = \\ L(\psi\lambda^*\kappa + \psi^*\lambda\kappa + \psi\lambda\kappa^*), \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T}, \quad \forall \psi^* \in \mathcal{V}, \quad \forall \kappa^* \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

On définit alors les applications suivantes :

Algorithme 4 Algorithme PGD

pour $m = 1 \rightarrow M_u$ **faire**

Définir et normaliser $(\psi_i^{(0)})_{i=1}^m$

Définir $(\lambda_i^{(0)})_{i=1}^m$

pour $k = 1 \rightarrow k_{max}$ **faire**

Calculer $(\kappa_i^{(k)})_{i=1}^m = P\left(\left(\psi_i^{(k-1)}\right)_{i=1}^m, \left(\lambda_i^{(k-1)}\right)_{i=1}^m\right)$ (Sous-problème 3)

Normaliser $(\kappa_i^{(k)})_{i=1}^m$

Calculer $(\psi_i^{(k)})_{i=1}^m = S\left(\left(\lambda_i^{(k-1)}\right)_{i=1}^m, \left(\kappa_i^{(k)}\right)_{i=1}^m\right)$ (Sous-problème 2)

Normaliser $(\psi_i^{(k)})_{i=1}^m$

Calculer $(\lambda_i^{(k)})_{i=1}^m = T\left(\left(\psi_i^{(k)}\right)_{i=1}^m, \left(\kappa_i^{(k)}\right)_{i=1}^m\right)$ (Sous-problème 1)

Vérifier la convergence de $(\kappa_i^{(k)})_{i=1}^m$, $(\psi_i^{(k)})_{i=1}^m$ et $(\lambda_i^{(k)})_{i=1}^m$

fin pour

Ecrire $(\kappa_i)_{i=1}^m = (\kappa_i^{(k)})_{i=1}^m$

Ecrire $(\psi_i)_{i=1}^m = (\psi_i^{(k)})_{i=1}^m$

Ecrire $(\lambda_i)_{i=1}^m = (\lambda_i^{(k)})_{i=1}^m$

Ecrire $\mathbf{u}_{PGD m} = \sum_{i=1}^m \psi_i \lambda_i \kappa_i$

Vérifier la convergence de $\mathbf{u}_{PGD m}$

fin pour

- $S_m : \mathcal{K} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$ est l'application qui permet la recherche d'une fonction d'espace en figeant les fonctions du temps et des paramètres :

$$B(\mathbf{u}_{PGD\ m-1} + \boldsymbol{\psi}\lambda\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\psi}^*\lambda\boldsymbol{\kappa}) = L(\boldsymbol{\psi}^*\lambda\boldsymbol{\kappa}), \quad \forall \boldsymbol{\psi}^* \in \mathcal{V}. \quad (2.47)$$

C'est un problème indépendant du temps et des paramètres.

- $T_m : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$ est l'application qui permet la recherche d'une fonction du temps en figeant les fonctions d'espace et des paramètres :

$$B(\mathbf{u}_{PGD\ m-1} + \boldsymbol{\psi}\lambda\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\psi}\lambda^*\boldsymbol{\kappa}) = L(\boldsymbol{\psi}\lambda^*\boldsymbol{\kappa}), \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T}. \quad (2.48)$$

C'est un problème scalaire du temps.

- $P_m : \mathcal{T} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{K}$ est l'application qui permet la recherche d'une fonction des paramètres en figeant les fonctions du temps et d'espace :

$$B(\mathbf{u}_{PGD\ m-1} + \boldsymbol{\psi}\lambda\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\psi}\lambda\boldsymbol{\kappa}^*) = L(\boldsymbol{\psi}\lambda\boldsymbol{\kappa}^*), \quad \forall \boldsymbol{\kappa}^* \in \mathcal{K}. \quad (2.49)$$

C'est un problème indépendant de l'espace et du temps.

Le triplet $(\boldsymbol{\psi}, \lambda, \boldsymbol{\kappa})$ vérifie la condition d'admissibilité si $\boldsymbol{\psi} = S_m(\lambda, \boldsymbol{\kappa})$, $\lambda = T_m(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\kappa})$ et $\boldsymbol{\kappa} = P_m(\boldsymbol{\psi}, \lambda)$.

La formulation PGD-Galerkin progressive peut être interprétée en termes de pseudo-problèmes aux valeurs propres car les fonctions $\boldsymbol{\psi}$, λ et $\boldsymbol{\kappa}$ sont respectivement les fonctions propres dominantes des applications $F_m = S_m \circ P_m \circ T_m$, $G_m = T_m \circ S_m \circ P_m$ et $H_m = P_m \circ T_m \circ S_m$ [104]. Les algorithmes dédiés aux problèmes aux valeurs propres peuvent alors être utilisés pour construire la représentation à variables séparées comme le *power iteration algorithm*.

L'algorithme PGD itératif selon la formulation PGD-Galerkin progressive est donné par l'algorithme 5.

Les fonctions d'espace $(\boldsymbol{\psi}_m)_{m=1}^{M_u}$ peuvent être orthogonalisées en utilisant le procédé de Gram-Schmidt par exemple. Ce traitement améliore généralement les résultats et diminue la pollution numérique en cas de mauvais conditionnement notamment. Ensuite, il convient de noter que la formulation PGD-Galerkin progressive ne mène généralement pas à une décomposition optimale de \mathbf{u}_m obtenue à l'aide de la formulation PGD-Galerkin.

Algorithme 5 Algorithme PGD progressif

pour $m = 1 \rightarrow M_u$ **faire**

Définir et normaliser $\boldsymbol{\psi}^{(0)}$

Définir $\lambda^{(0)}$

pour $k = 1 \rightarrow k_{max}$ **faire**

Calculer $\boldsymbol{\kappa}^{(k)} = P_m \left(\boldsymbol{\psi}^{(k-1)}, \lambda^{(k-1)} \right)$

Normaliser $\boldsymbol{\kappa}^{(k)}$

Calculer $\boldsymbol{\psi}^{(k)} = S_m \left(\lambda^{(k-1)}, \boldsymbol{\kappa}^{(k)} \right)$

Normaliser $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$

Calculer $\lambda^{(k)} = T_m \left(\boldsymbol{\psi}^{(k)}, \boldsymbol{\kappa}^{(k)} \right)$

Vérifier la convergence de $\boldsymbol{\psi}^{(k)} \lambda^{(k)} \boldsymbol{\kappa}^{(k)}$

fin pour

Ecrire $\boldsymbol{\kappa}_m = \boldsymbol{\kappa}^{(k)}$

Ecrire $\boldsymbol{\psi}_m = \boldsymbol{\psi}^{(k)}$

Ecrire $\lambda_m = \lambda^{(k)}$

Ecrire $\mathbf{u}_{PGD\ m} = \mathbf{u}_{PGD\ m-1} + \boldsymbol{\psi}_m \lambda_m \boldsymbol{\kappa}_m$

Vérifier la convergence de $\mathbf{u}_{PGD\ m}$

fin pour

Chapitre 3

Méthodes de réduction exploitant des données partielles

Basées sur des approximations à variables séparées, les méthodes de réduction permettent de réduire considérablement le coût de la résolution numérique des problèmes paramétrés non-linéaires en projetant les équations aux dérivées partielles sur une base réduite dont la taille est nettement inférieure à celle du modèle détaillé FEM. Toutefois, la complexité numérique dépend encore de la dimension du modèle détaillé en raison de la discrétisation FEM sous-jacente. Afin de limiter cette dépendance, des méthodes de réduction exploitant une partie restreinte du domaine spatial ont été développées.

Cette notion de domaine spatial restreint est déclinée sous plusieurs dénominations telles que échantillon de maillage ou *sample mesh* dans la méthode *Empirical Interpolation Method* (EIM) ou bien domaine tronqué d'intégration ou *Truncated Integration Domain* (TID) dans la méthode *A Priori Hyper Reduction* (APHR). Ces méthodes performantes sont basées sur la Gappy-POD, une extension de la méthode POD développée pour le recouvrement de données lorsque des données sont manquantes. On parle alors de réparation ou de reconstruction car il s'agit d'étendre des champs partiels définis sur un domaine spatial restreint à des champs définis sur le domaine spatial complet.

En considérant un ensemble de snapshots $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_p}$ donné pour N_s échantillons correspondant à des instants virtuels distincts $(\gamma_i)_{i=1}^{N_s}$, une attention toute particulière est portée sur la procédure de recouvrement également appelée extrapolation des données. Cette extrapolation est expliquée en détaillant la construction de la base réduite valable sur l'espace des snapshots et la construction du domaine restreint. L'EIM poursuit une résolution sur le domaine spatial complet en effectuant une interpolation des données à partir d'estimations sur l'échantillon de maillage tandis que la méthode APHR effectue une résolution sur le domaine tronqué d'intégration puis extrapole les prévisions sur le domaine spatial complet.

Après avoir exposé les principales idées de la méthode Gappy-POD, ce chapitre présente la méthode EIM puis la méthode APHR non seulement comme une méthode de recouvrement mais comme une méthode de réduction pour la résolution de problèmes aux dérivées partielles non linéaires en associant une représentation en base réduite des champs à approcher associée à l'introduction d'un domaine spatial restreint permettant de simplifier la résolution en base réduite.

3.1 Méthode POD pour données partielles

La décomposition orthogonale aux valeurs propres pour données partielles (Gappy-POD) est une extension de la méthode POD développée pour mener une analyse sur des données partielles. La Gappy-POD est une méthode de recouvrement de données qui vise à palier les données manquantes (*gappy data*) ou plus généralement les données incertaines car trop bruitées en exploitant *a posteriori* un ensemble de *snapshots* partiels. Elle a été développée par Everson et al. pour le traitement d'image [47] afin de reconstruire des visages humains dont une partie est masquée en utilisant un ensemble de fonctions de forme déduites de *snapshots* de visages humains. Elle est également sollicitée dans de nombreux domaines comme la mécanique des fluides [135, 54, 25] ou la mécanique des structures [116]. Willcox [135] utilise la Gappy-POD pour reconstruire les champs d'un écoulement turbulent étant donné un ensemble de mesures fournies par des capteurs en utilisant un ensemble de fonctions de forme déduites de *snapshots* de l'écoulement turbulent. Willcox s'intéresse plus précisément au placement des capteurs sur les profils étudiés à savoir un cylindre et un profil NACA 0012 dans le but de réduire le bruit des mesures. Carlsberg et al. [25] intègrent la Gappy-POD dans la résolution d'un problème en utilisant une procédure de compression de données qui hiérarchise trois modèles. Le troisième modèle en particulier est un modèle d'ordre réduit construit à l'aide de la POD associé à un ensemble restreint de degrés de liberté afin d'utiliser la Gappy-POD. Selon une approche *offline*, la POD est appliquée à un ensemble de *snapshots* pour construire des bases réduites relatives au champ à approcher et également à la matrice jacobienne et au résidu. Toujours dans cette phase *offline* est calculée une liste de degrés de liberté. A chaque itération du schéma de Newton-Raphson, le problème est alors résolu *online* sur le domaine complet à partir des prévisions sur l'ensemble restreint de degrés de liberté réparées à l'aide de la Gappy-POD.

D'une part, étant donné un ensemble de fonctions de forme connues sur tout le domaine spatial, la Gappy-POD permet de déterminer les coefficients relatifs à un champ partiellement masqué et fournit par conséquent un estimateur non biaisé des données manquantes. D'autre part, étant donné un ensemble de *snapshots* partiellement masqués, la Gappy-POD permet d'extraire un ensemble de fonctions de forme suivant une procédure itérative sur les données manquantes.

3.1.1 Recouvrement des données manquantes (Gappy-POD)

Dans le cadre de la Gappy-POD, le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ est partiel. En effet, le champ $\tilde{\mathbf{u}}$ est connu sur le domaine Ω_{Π} :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \gamma) = m(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.1)$$

où le masque m est la fonction caractéristique associée au domaine restreint Ω_{Π} défini de la façon suivante :

$$m(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}. \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$(3.2b)$$

La Gappy-POD introduit à l'ordre M_u des fonctions de forme $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$ reliées au champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ par les déplacements réduits $(\tilde{a}_k)_{k=1}^{M_u}$. Le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$

s'écrit donc de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \tilde{\mathbf{u}}_{GPOD}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{GPOD}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u} \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \tilde{a}_k(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.3b)$$

Les coefficients $(\tilde{a}_k)_{k=1}^{M_u}$ sont définis de façon à minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre le champ $\tilde{\mathbf{u}}$ et sa représentation approchée :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\gamma) = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{a}}^*} \int_{\Omega_{\Pi}} \left(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_u} \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \tilde{a}_k^* \right)^2 d\Omega. \quad (3.4)$$

Les coefficients $(\tilde{a}_k)_{k=1}^{M_u}$ sont déterminés en résolvant le système :

$$C_{kj} = (\boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_j)_{\Omega_{\Pi}}, \quad (3.5a)$$

$$f_k = (\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}_k)_{\Omega_{\Pi}}, \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{f}. \quad (3.5c)$$

Le champ \mathbf{u} est réparé et les données manquantes sont estimées sans biais sur le domaine $\bar{\Omega}_{\Pi}$ selon l'extrapolation définie par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \sum_{k=1}^{M_u} \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \tilde{a}_k(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.6)$$

3.1.2 Détermination des fonctions de formes à partir de données partielles

La Gappy-POD permet également d'extraire un ensemble de fonctions de forme à partir d'un ensemble de *snapshots* partiellement masqués. L'ensemble des *snapshots* tronqués est donné pour N_s échantillons partiels correspondant à des instants virtuels distincts $(\gamma_i)_{i=1}^{N_s}$:

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}} = \{\tilde{\mathbf{u}}_i(\cdot)\}_{i=1}^{N_s} = \{\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, \gamma_i)\}_{i=1}^{N_s}. \quad (3.7)$$

Les *snapshots* partiellement masqués $(\tilde{\mathbf{u}}_i)_{i=1}^{N_s}$ sont définis par :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma_i), \quad (3.8)$$

où les masques $(m_i)_{i=1}^{N_s}$ sont définis de la façon suivante :

$$m_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi_i}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$(3.9b)$$

Puisque les masques $(m_i)_{i=1}^{N_s}$ sont aléatoirement répartis sur le domaine Ω , l'égalité $\bigcup_{i=1}^{N_s} \Omega_{\Pi_i} = \Omega$ est vérifiée.

Le calcul de la valeur moyenne des *snapshots* $(\tilde{\mathbf{u}}_i)_{i=1}^{N_s}$ est défini par :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{N_s} m_i(\mathbf{x})}. \quad (3.10)$$

Les *snapshots* réparés $\left(\tilde{\mathbf{u}}_i^{(0)}\right)_{i=1}^{N_s}$ permettent d'estimer les données manquantes sur le domaine Ω :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i^{(0)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) & \text{si } m_i(\mathbf{x}) = 1, \\ \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \text{si } m_i(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (3.11a)$$

$$(3.11b)$$

En supposant que les *snapshots* réparés $\left(\tilde{\mathbf{u}}_i^{(j)}\right)_{i=1}^{N_s}$ à l'itération j sont connus, une base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_i^{(j)}\right)_{i=1}^{M_u}$ est extraite selon la *snapshots* POD. Ensuite, les champs $\left(\hat{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}\right)_{i=1}^{N_s}$ sont définis par :

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_u} \boldsymbol{\psi}_k^{(j)}(\mathbf{x}) \tilde{a}_{ik}^{(j+1)}, \quad (3.12a)$$

$$\tilde{a}_i^{(j+1)} = \operatorname{argmin}_{\tilde{\mathbf{a}}^*} \int_{\Omega_{\Pi_i}} \left(\tilde{\mathbf{u}}_i^{(j)}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{M_u} \boldsymbol{\psi}_k^{(j)}(\mathbf{x}) \tilde{a}_k^* \right)^2 d\Omega. \quad (3.12b)$$

Les *snapshots* réparés $\left(\tilde{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}\right)_{i=1}^{N_s}$ à l'itération j permettent d'estimer les données manquantes sur le domaine Ω :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) & \text{si } m_i(\mathbf{x}) = 1, \\ \hat{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}(\mathbf{x}) & \text{si } m_i(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (3.13a)$$

$$(3.13b)$$

L'algorithme Gappy-POD permettant la construction d'une base de fonctions de forme à partir d'un ensemble de *snapshots* partiellement masqués est donné par l'algorithme 6 [47].

Algorithme 6 Algorithme de construction d'une base réduite par Gappy-POD

Calculer $\bar{\mathbf{u}}$

Initialiser $\left(\tilde{\mathbf{u}}_i^{(0)}\right)_{i=1}^{N_s}$

pour $j = 1 \rightarrow j_{max}$ **faire**

 Appliquer la POD sur la matrice des *snapshots* afin de trouver la base réduite

$\left(\boldsymbol{\psi}_i^{(j)}\right)_{i=1}^{M_u}$

 Calculer $\left(\hat{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}\right)_{i=1}^{N_s}$ selon l'extrapolation Gappy-POD

 Mettre à jour $\left(\tilde{\mathbf{u}}_i^{(j+1)}\right)_{i=1}^{N_s}$

fin pour

3.2 Méthodes empiriques d'interpolation

Les méthodes empiriques d'interpolation sont une catégorie de méthodes d'interpolation utilisée dans l'analyse des systèmes paramétrés. Développée par Barrault et al. [14] sous le nom de Méthode Empirique d'Interpolation (*Empirical Interpolation Method*)

(EIM), l'EIM a été étendu par Grepl pour les problèmes non-linéaires et utilisée dans la résolution de problèmes elliptiques et paraboliques [63, 64, 75].

Dans le contexte de la réduction de modèle, l'EIM-POD [54, 28] diffère de l'EIM dans le fait de considérer une base réduite construite à l'aide de la POD. Galbally et al. [54] montrent les similarités entre la Gappy-POD et l'EIM-POD dans un problème de combustion fortement non-linéaire faisant intervenir réaction chimique, convection et diffusion. Drohmann et al. [35] utilise l'EIM-POD dans un problème incrémental non-linéaire paramétré en utilisant la FEM et la méthode des volumes finis. De nombreux travaux ont été réalisés sur des estimateurs d'erreur *a posteriori* [132, 46, 62, 65, 70, 137].

Les méthodes empiriques d'interpolation sont des méthodes *a posteriori* qui exploitent un ensemble de *snapshots* éventuellement partiels. Elles permettent de mener une analyse paramétrée en restreignant le modèle sur un échantillon de maillage ou *sample mesh* afin de réduire considérablement le coût numérique de la résolution paramétrée.

Les applications des méthodes empiriques d'interpolation suivent la plupart du temps une stratégie *offline/online*. Dans ce cas, l'étude *offline* consiste à déterminer de façon préliminaire l'ensemble des *snapshots* ainsi que les points d'interpolation qui forment l'échantillon de maillage. L'étude *online* consiste alors à une résolution menée sur cet échantillon de maillage.

3.2.1 Procédure d'interpolation empirique

Considérant l'ensemble de *snapshots* paramétrés $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_s}$, une base réduite de fonctions de forme $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n=1}^{M_u}$ est construite préalablement.

En considérant l'ensemble des points d'interpolation $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$, l'interpolation empirique suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{EIM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{u}_{EIM}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{n=1}^{M_u} \beta_n(\gamma) \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.14b)$$

où les coefficients $(\beta_n)_{n=1}^{M_u}$ qui dépendent du paramètre γ sont les solutions du système suivant :

$$\sum_{n=1}^{M_u} \beta_n(\gamma) \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_m, \gamma), \quad m \in \{1, \dots, M_u\}. \quad (3.15)$$

La projection du champ \mathbf{u} dans la base réduite $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n=1}^{M_u}$ utilise donc uniquement les points d'interpolation $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$ alors qu'une projection par la méthode des moindres carrés utilise le domaine complet Ω . Les méthodes empiriques d'interpolation sont comparables à la Gappy-POD lorsqu'elles sont appliquées à des champs discrétisés. Dans ce cas, le domaine restreint Ω_{Π} introduit dans la Gappy-POD contient un ensemble de points d'interpolation. Pourtant, il faut ajouter que l'étape de projection pour la Gappy-POD est définie par un problème de minimisation alors qu'il s'agit d'un problème linéaire de rang M_u pour les méthodes empiriques d'interpolation.

Il convient de noter que les méthodes empiriques d'interpolation nécessitent une estimation du champ \mathbf{u} aux points d'interpolation $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$. Cette réponse peut éventuellement

être approchée selon une méthodologie de surface de réponse basée sur une technique d'interpolation :

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\gamma}) \approx \mathbf{u}_{RS}(\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{u}_{RS}(\boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^{N_s} \zeta_i(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_m), \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.16b)$$

Les méthodes empiriques d'interpolation ne nécessitent donc pas une connaissance complète de \mathbf{u} mais une connaissance restreinte à l'échantillon de maillage qui rassemble les points d'interpolation.

3.2.2 Construction de la base et sélection des points d'interpolation

Méthode Empirique d'Interpolation (EIM) L'EIM [14] consiste en la construction ou la reconstruction d'une base réduite à l'aide d'un algorithme glouton suivie de la sélection d'un ensemble de points d'interpolation qui forme l'échantillon de maillage ou *sample mesh*.

La base réduite $(\mathbf{v}_n)_{n=1}^{M_u}$ est construite selon un algorithme glouton qui maximise l'indépendance des fonctions de forme en considérant l'espace des *snapshots* paramétrés $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}$. L'initialisation de la base réduite est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_1(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_{j_1}), \quad (3.17a)$$

$$j_1 = \operatorname{argmax}_{i \in \{1, \dots, N_s\}} \|\mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)\|_{\Omega}, \quad (3.17b)$$

$$W_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1(\cdot)\}. \quad (3.17c)$$

La construction de la base réduite à l'étape $L \in \{2, \dots, M_u\}$ est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_L(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_{j_L}), \quad (3.18a)$$

$$j_L = \operatorname{argmax}_{i \in \{1, \dots, N_s\} \setminus \epsilon_{L-1}} \epsilon_{L-1}(\boldsymbol{\gamma}_i), \quad (3.18b)$$

$$\epsilon_{L-1}(\boldsymbol{\gamma}_i) = \|\mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) - \mathbf{u}_{L-1}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)\|_{\Omega}, \quad (3.18c)$$

$$\mathbf{u}_{L-1}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \operatorname{argmin}_{w \in W_{L-1}} \|\mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) - w\|_{\Omega}, \quad (3.18d)$$

$$W_{L-1} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_l(\cdot)\}_{l=1}^{L-1}. \quad (3.18e)$$

Ensuite la base réduite $(\boldsymbol{\psi}_n)_{n=1}^{M_u}$ est déduite de la base réduite $(\mathbf{v}_n)_{n=1}^{M_u}$ lors de la sélection des points d'interpolation $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$.

L'initialisation de la sélection des points d'interpolation est définie de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \operatorname{argmax} |\mathbf{v}_1(\cdot)|, \quad (3.19a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1(\cdot) = \frac{\mathbf{v}_1(\cdot)}{\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\xi}_1)}. \quad (3.19b)$$

La sélection des points d'interpolation à l'étape $L \in \{2, \dots, M_u\}$ est définie de la façon suivante :

$$\sum_{l=1}^{L-1} \sigma_l^{L-1} \psi_l(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathbf{v}_L(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m \in \{1, \dots, L-1\}, \quad (3.20a)$$

$$\boldsymbol{\rho}_L(\cdot) = \mathbf{v}_L(\cdot) - \sum_{l=1}^{L-1} \sigma_l^{L-1} \psi_l(\cdot), \quad (3.20b)$$

$$\boldsymbol{\xi}_L = \operatorname{argmax} |\boldsymbol{\rho}_L(\cdot)|, \quad (3.20c)$$

$$\psi_L(\cdot) = \frac{\boldsymbol{\rho}_L(\cdot)}{\boldsymbol{\rho}_L(\boldsymbol{\xi}_L)}. \quad (3.20d)$$

La base réduite et l'ensemble des points d'interpolation est très peu couteux à construire et cette interpolation est très efficace pour les systèmes paramétrés.

Méthodes empiriques hiérarchiques d'interpolation Les méthodes d'interpolation hiérarchiques sont des méthodes basées sur l'EIM et développées par Nguyen et al. [102]. Le principe de ces méthodes diffère de l'EIM dans la manière de déterminer l'ensemble des points d'interpolation $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$.

Optimal Interpolation Method (OIM) L'*Optimal Interpolation Method* (OIM) [102] introduit l'interpolation empirique aux paramètres échantillonnés $(\boldsymbol{\gamma}_i)_{i=1}^{N_s}$ selon :

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}_i) \approx \mathbf{u}_{EIM}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{i \ EIM}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{u}_{i \ EIM}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)} \psi_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.21b)$$

où les coefficients $(\beta_n^{(i)})_{n=1}^{M_u}$ sont les solutions du système suivant :

$$\sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)} \psi_n(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m \in \{1, \dots, M_u\}. \quad (3.22)$$

L'OIM consiste à fournir l'ensemble des points d'interpolation optimaux $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$ qui minimise l'écart au sens des moindres carrés entre les *snapshots* $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_s}$ et leur représentation approchée empirique aux points d'interpolation :

$$\min_{(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u} \in \Omega^{M_u}} \sum_{i=1}^{N_s} \left\| \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)} ((\boldsymbol{\xi}_m)_{m=1}^{M_u}) \psi_n(\mathbf{x}) \right\|_{\Omega}^2, \quad (3.23a)$$

$$\sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)} \psi_n(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m \in \{1, \dots, M_u\}, \quad i \in \{1, \dots, N_s\}. \quad (3.23b)$$

Toutefois, la solution de ce problème de minimisation est bien souvent relativement difficile à obtenir car le problème est non-linéaire et non nécessairement convexe ce qui peut entraîner d'éventuels multiples minima locaux.

Best Point Interpolation Method (BPIM) La *Best Point Interpolation Method* (BIPM) [102] conserve l'interpolation empirique aux paramètres échantillonnés $(\gamma_i)_{i=1}^{N_s}$ et introduit la meilleure représentation approchée des *snapshots* $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_s}$ obtenus à l'aide de la POD aux paramètres échantillonnés $(\gamma_i)_{i=1}^{N_s}$ selon :

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma_i) \approx \mathbf{u}_{POD}(\mathbf{x}, \gamma_i) = \mathbf{u}_i \text{ }_{POD}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{u}_i \text{ }_{POD}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{M_u} a_n^{(i)} \psi_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.24b)$$

où les coefficients $\left(a_n^{(i)}\right)_{n=1}^{M_u}$ sont les solutions du système suivant :

$$a_n^{(i)} = (\mathbf{u}_i, \psi_n)_\Omega. \quad (3.25)$$

La BIPM consiste à fournir l'ensemble des meilleurs points d'interpolation $(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u}$ qui minimise l'écart au sens des moindres carrés entre la meilleure représentation approchée des *snapshots* $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_s}$ et leur représentation approchée empirique aux points d'interpolation :

$$\min_{(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u} \in \Omega^{M_u}} \sum_{i=1}^{N_s} \left\| \mathbf{u}_i \text{ }_{POD}(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)}((\boldsymbol{\xi}_m)_{m=1}^{M_u}) \psi_n(\mathbf{x}) \right\|_\Omega^2, \quad (3.26a)$$

$$\sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)} \psi_n(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m \in \{1, \dots, M_u\}, \quad i \in \{1, \dots, N_s\}. \quad (3.26b)$$

En considérant l'orthonormalité des fonctions de forme $(\psi_n)_{n=1}^{M_u}$, le problème de minimisation devient :

$$\min_{(\boldsymbol{\xi}_n)_{n=1}^{M_u} \in \Omega^{M_u}} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{M_u} \left(a_n^{(i)} - \beta_n^{(i)}((\boldsymbol{\xi}_m)_{m=1}^{M_u}) \right)^2, \quad (3.27a)$$

$$\sum_{n=1}^{M_u} \beta_n^{(i)} \psi_n(\boldsymbol{\xi}_m) = \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_m), \quad m \in \{1, \dots, M_u\}, \quad i \in \{1, \dots, N_s\}. \quad (3.27b)$$

L'unicité de l'ensemble des meilleurs points d'interpolation n'est pas garantie mais ce problème de minimisation est plus simple à calculer. L'algorithme de Lavenberg-Marquardt [102] est une méthode de recherche particulièrement adaptée pour déterminer l'ensemble des meilleurs points d'interpolation.

3.3 Méthode *A Priori Hyper-Reduction* (APHR)

La méthode *A Priori Hyper-Reduction* (APHR) est une méthode de réduction développée par Ryckelynck dont a été tirée la méthode APR [117, 98, 116, 118]. La méthode APHR inclue une méthode d'hyper-réduction consistant à étendre la notion de symétrie dans les problèmes non symétriques dans le but de réduire l'étendue du domaine sur lequel les équations d'équilibre doivent être considérées. L'introduction d'un Domaine Tronqué

d'Intégration (*Truncated Integration Domain*) (TID) permet de résoudre le problème restreint. Lorsque ce domaine restreint couvre tout le domaine spatial, l'hyper-réduction est absente et on retrouve la méthode APR.

La méthode APHR possède des liens étroits avec la méthode *Missing Point Estimator* (MPE) qui réalise également une résolution du problème sur un domaine spatial restreint [10, 9]. Astrid et al. appliquent la méthode MPE en dynamique des fluides pour l'étude d'un écoulement non-linéaire en réalisant le calcul sur un quart du maillage complet.

La méthode APHR a été étendue pour le calcul multidimensionnel par Ryckelynck et al. [120]. Elle s'applique sur des modèles d'endommagement [122, 119]. Elle est également utilisée en mécanique de la rupture par Kerfriedien et al. [74, 73].

Elle a fait l'objet de plusieurs thèses dont celle de Cartel et celle de Vincent. Cartel [26] a développé une notion d'oubli dans une suite de calculs séquentiels dans le cadre d'une étude paramétrique. Vincent [133] utilise la méthode APHR multidimensionnelle pour l'étude paramétrique une liaison simple en élastomère chargé.

La méthode APHR est une méthode *a priori* car elle ne nécessite aucune donnée initiale pour mener une simulation. En suivant une démarche *a priori*, la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} à approcher et la base réduite associée au champ de variables internes \mathbf{z} sont estimées en cours de simulation. Toutefois, la méthode APHR peut également exploiter des *snapshots* ou des bases réduites issues de simulations précédentes en adoptant une démarche *a posteriori*. Ainsi, de nombreux choix de calculs sont possibles en choisissant de privilégier graduellement la précision ou le temps de calcul selon l'étendue du TID.

Dans le cas d'une stratégie adaptative, le ROM est évolutif. La méthode APHR fournit d'abord une estimation hyper-réduite HPOD du champ de déplacement \mathbf{u} à approcher. Puis, le champ de variables internes partiel $\tilde{\mathbf{z}}$ est étendu à l'extérieur du TID. Cette estimation hyper-réduite HPOD est éventuellement corrigée par un calcul FEM. Plus précisément, si à la fin d'un incrément, la précision de la prévision HPOD est insuffisante, l'état mécanique corrigé par la FEM est utilisé pour enrichir la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} et la base réduite associée au champ de variables internes \mathbf{z} d'un mode empirique.

La méthode APHR est définie sous la discrétisation induite par la FEM. Le maillage FEM introduit N_u degrés de liberté situés aux noeuds et N_z variables internes situées aux points de Gauss des N_e éléments. La discrétisation FEM n'est pas nécessaire pour décrire les concepts de la méthode APHR mais ce cadre permet de simplifier la notion d'hyper-réduction.

3.3.1 Description de la représentation multi-niveaux

La méthode APHR adaptative fournit des estimations en sommant si besoin une correction FEM à la prévision du ROM. Les variables d'état réduites issues de la POD étant globales et les variables d'état FEM étant locales, les approximations proposées

sont multi-niveaux selon :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{z}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.28b)$$

$$\mathbf{u}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) + \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.28c)$$

$$\mathbf{z}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma) = \mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) + \delta \mathbf{z}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.28d)$$

Un point important de la méthode APHR est le caractère évolutif des modes empiriques. Par conséquent, ces modes empiriques caractéristiques de la transformation sont modifiés durant le traitement incrémental du problème mécanique et l'exposant $\square^{(n)}$ est introduit pour donner la version du ROM.

3.3.2 Prévision hyper-réduite HPOD

Deux notions fondamentales forment les ingrédients principaux de la méthode : une représentation approchée à l'aide de bases réduites POD et une formulation tronquée des conditions d'équilibre qui découle de l'hyper-réduction.

Représentation approchée du champ de déplacement La méthode APHR introduit à l'ordre $M_u^{(n)}$ des fonctions de forme $(\psi_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ reliées au champ de déplacement \mathbf{u} par les déplacements réduits $(a_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$. Le champ de déplacement \mathbf{u} s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) a_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.29b)$$

Les modes empiriques $(\psi_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ sont décrits en utilisant les fonctions de formes FEM $(\mathbf{N}_i)_{i=1}^{N_u}$ et la matrice de réduction $\mathbf{A}^{(n)}$ selon :

$$\psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) A_{ik}^{(n)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.30)$$

La base $(\psi_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ est dite réduite car $M_u^{(n)} \ll N_u$ et contient $M_u^{(n)}$ modes empiriques relatifs au champ de déplacement sur Ω (Figure 3.1). Les variables d'état réduites relatives au champ de déplacement sont les déplacements réduits $(a_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$. Il faut noter que l'approximation POD a un premier rôle en amont de la résolution de l'équilibre. Appliquée au champ de déplacement, elle permet d'introduire la matrice de réduction $\mathbf{A}^{(n)}$ dans la résolution de l'équilibre ce qui permet de calculer $M_u^{(n)}$ déplacements réduits pour le ROM au lieu de N_u degrés de liberté pour la FEM.

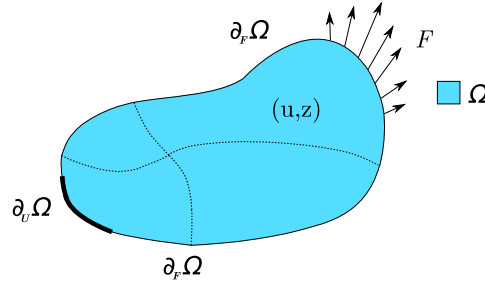


FIG. 3.1: Méthode APHR. Représentation du champ de déplacement synchronisé sur le domaine Ω et du champ de variables internes synchronisé sur le domaine Ω

Résolution restreinte au domaine tronqué Comme le ROM possède $M_u^{(n)}$ déplacements réduits au lieu de N_u degrés de liberté pour la FEM, l'hyper-réduction consiste à introduire un Domaine Tronqué d'Intégration (*Truncated Integration Domain*) (TID) $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ contenant l'ensemble des variables internes sur lesquelles sont écrites $N_{u\Pi}^{(n)}$ équations sélectionnées pour la résolution du problème en base réduite (Figure 3.2). L'idée est de recenser les conditions d'équilibre que l'on peut écrire sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$, c'est à dire les conditions relatives au champ de vitesse virtuel dont le support est sans intersection avec l'extérieur de $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ noté $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$.

Le problème est alors restreint au TID en utilisant une matrice diagonale $\Lambda_{\Pi}^{(n)}$ déduite d'une matrice de troncature $Z_{\Pi}^{(n)}$ de dimension $N_{u\Pi}^{(n)} \times N_u$ définie par :

$$\text{si } \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} \|\mathbf{N}_i(\mathbf{x})\|_{\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} = 0, \text{ alors } \exists j \in \{1, \dots, N_{u\Pi}^{(n)}\} \mid Z_{\Pi ji}^{(n)} = 1, \quad (3.31a)$$

$$\text{si } \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} \|\mathbf{N}_i(\mathbf{x})\|_{\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} > 0, \text{ alors } Z_{\Pi ji}^{(n)} = 0 \forall j \in \{1, \dots, N_{u\Pi}^{(n)}\}, \quad (3.31b)$$

$$\Lambda_{\Pi}^{(n)} = Z_{\Pi}^{(n)T} \cdot Z_{\Pi}^{(n)}. \quad (3.31c)$$

Les $N_{u\Pi}^{(n)}$ équations sélectionnées sont telles que $M_u^{(n)} \leq N_{u\Pi}^{(n)} \leq N_u$ afin de réduire la

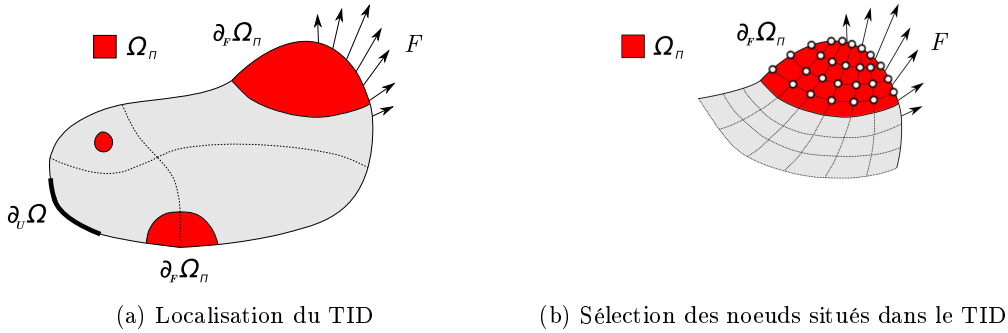


FIG. 3.2: Méthode APHR. TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$

complexité de la résolution du problème. Toutefois, $N_{u\Pi}^{(n)}$ doit rester tel que le problème reste bien posé ce qui impose que $M_u^{(n)} \leq N_{u\Pi}^{(n)}$.

Formulation POD-Petrov-Galerkin La prévision hyper-réduite HPOD est déterminée à l'aide de la formulation POD-Petrov-Galerkin. On introduit l'espace fonctionnel $\mathcal{V}_{\Pi POD}^{(n)}$ relatif à la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} et tronqué sur Ω_{Π} défini par :

$$\mathcal{V}_{\Pi POD}^{(n)} = \text{span} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{M_u^{(n)}}, \quad (3.32)$$

où les modes empiriques tronqués $\left(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ sont tels que leur support est réduit au TID selon :

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \Lambda_{\Pi ii}^{(n)} A_{ik}^{(n)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.33)$$

Suivant une stratégie incrémentale, étant donné que seul l'intérieur du TID contribue à la formulation du problème et en écrivant $\partial_F \Omega_{\Pi}^{(n)} = \partial_F \Omega \cap \Omega_{\Pi}^{(n)}$, le problème est formulé avec l'approximation POD-Petrov-Galerkin à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante :

Problème 7 Trouver $\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{POD}^{(n)}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\Pi POD}^{(n)}, \quad (3.34)$$

avec :

$$b(\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_{\Pi}^{(n)}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}, \tilde{\mathbf{z}}) \, d\Omega, \quad (3.35a)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_{\Pi}^{(n)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_{\Pi}^{(n)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \, d\Gamma. \quad (3.35b)$$

Ce problème est résolu de façon itérative à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson. En notation matricielle avec l'approximation POD-Petrov-Galerkin, une itération permet de déterminer les incréments de déplacements réduits $\boldsymbol{\delta a}^{(n)}$ qui équilibrent le résidu $\mathbf{R}_{APHR}^{(n)}$ dans le système $\mathbf{J}_{APHR}^{(n)} \boldsymbol{\delta a}^{(n)} = -\mathbf{R}_{APHR}^{(n)}$, où $\mathbf{J}_{APHR}^{(n)}$ désigne la matrice jacobienne APHR déduite de la matrice jacobienne FEM selon :

$$\mathbf{R}_{APHR}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)T} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} \cdot \mathbf{R}_{FEM}, \quad (3.36a)$$

$$\mathbf{J}_{APHR}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)T} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} \cdot \mathbf{J}_{FEM} \cdot \mathbf{A}^{(n)}. \quad (3.36b)$$

L'utilisation de la formulation POD-Petrov-Galerkin pour l'assemblage de la matrice de rigidité tangente et du résidu en base réduite conduit respectivement à une complexité numérique de l'ordre de $2M_u^{(n)2} N_{u\Pi}^{(n)} + 2M_u^{(n)} \omega N_{u\Pi}^{(n)}$ pour le terme de gauche et $2M_u^{(n)} N_{u\Pi}^{(n)}$ pour le terme de droite, où ω est la largeur de bande de la matrice jacobienne FEM. L'utilisation de la formulation POD-Petrov-Galerkin entraîne que numérique de l'assemblage ne dépend pas de la dimension N_u de l'espace des fonctions d'interpolation liées à la discrétisation FEM.

La formulation tronquée des conditions d'équilibre représente par conséquent un gain proportionnel à $\frac{N_u}{N_{u\Pi}^{(n)}}$.

Comme les modes empiriques relatifs au champ de déplacement sont définis sur le domaine Ω , la connaissance des déplacements réduits permet de définir le champ de déplacement \mathbf{u} sur le domaine Ω même si les déplacements réduits sont calculés en utilisant les modes empiriques tronqués définis sur le TID. Par contre, le champ de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ est partiel et connu uniquement sur le TID.

3.3.3 Extrapolation des variables internes

La prévision hyper-réduite HPOD permet de déterminer le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$. Le but est d'étendre ce champ sur le domaine $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$.

Représentation approchée du champ de variables internes La représentation du champ de variables internes \mathbf{z} est une représentation approchée induite par la troncature de la POD. Elle est donnée par :

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_z^{(n)}} \boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) b_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (3.37b)$$

La base $\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_z^{(n)}}$ est dite réduite car $M_z^{(n)} \ll N_z$ et contient $M_z^{(n)}$ modes empiriques relatifs au champ de variables internes sur Ω (Figure 3.1). Les variables d'état réduites relatives au champ de variables internes sont les variables internes réduites $\left(b_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_z^{(n)}}$. On introduit l'espace fonctionnel $\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$ relatif à la base réduite associée au champ de variables internes \mathbf{z} définis par :

$$\mathcal{Z}_{POD}^{(n)} = \text{span} \left\{ \boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{M_z^{(n)}}. \quad (3.38)$$

Il faut noter que l'approximation POD a un second rôle en aval de la résolution de l'équilibre. Appliquée au champ des variables internes, elle permet d'utiliser la Gappy-POD afin de réparer le champ de variables internes.

Gappy-POD du champ de variables internes Le champ de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ est un champ partiel calculé lors de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$. Il est étendu sur $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$ selon la Gappy-POD en calculant les variables internes réduites $\left(b_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_z^{(n)}}$ qui minimisent la distance au sens des moindres carrés entre le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ sur le domaine $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et sa représentation approchée $\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}$ à l'incrément

courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ (Figure 3.3) :

$$\mathbf{b}^{(n)}(\gamma) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{b}^*} \left\| \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_z^{(n)}} \boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) b_k^* \right\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}^2, \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_z^{(n)}} \boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) b_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}. \quad (3.39b)$$

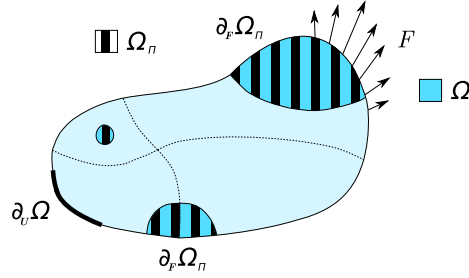


FIG. 3.3: Méthode APHR. Extrapolation des variables internes synchronisées sur le domaine Ω à l'extérieur du TID

3.3.4 Procédé de correction-enrichissement

Correction FEM Après une prévision HPOD, deux indicateurs d'erreur sont calculés. Le premier indicateur permet de vérifier la qualité de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ en utilisant le résidu FEM tronqué sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et défini par :

$$\mathbf{R}_{\Pi FEM}(\gamma) = \boldsymbol{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} \cdot \mathbf{R}_{FEM}(\gamma). \quad (3.40)$$

La qualité de l'équilibre est évaluée en utilisant la norme du résidu FEM $\mathbf{R}_{\Pi FEM}$ tronqué sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ selon :

$$\eta_u APHR(\gamma) = \|\mathbf{R}_{\Pi FEM}(\gamma)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}. \quad (3.41)$$

Le second indicateur la qualité du champ de variables internes sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$. La qualité du champ de variables internes est évaluée en calculant la distance au sens des moindres carrés entre le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ sur le domaine $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et sa représentation approchée $\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}$ à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ selon :

$$\eta_z(\gamma) = \left\| \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_z^{(n)}} \boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) b_k^{(n)}(\gamma) \right\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}. \quad (3.42)$$

Si $\eta_u APHR(\gamma) \leq \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{\Pi FEM}|_{\mathbf{u}_{HPOD}=0}^{(n)}(\gamma)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$ et $\eta_z(\gamma) \leq \varepsilon_z \|\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \gamma)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$, alors la prévision du ROM est satisfaisante à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$. Sinon, une correction

FEM $\delta \mathbf{u}_{FEM}$ et $\delta \mathbf{z}_{FEM}$ est calculée.

Les paramètres ε_u et ε_z sont des tolérances. Le premier donne la tolérance d'erreur lors de la résolution de l'équilibre hyper-réduit et l'autre donne la tolérance d'erreur sur le champ de variables internes.

Si une correction FEM est exigée, suivant une stratégie incrémentale, le problème est formulé avec l'approximation FEM-Galerkin à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante :

Problème 8 Trouver $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{FEM}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}_{APHR}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{FEM}. \quad (3.43)$$

Enrichissement L'enrichissement procédé dans la méthode APHR reste identique à celui procédé dans la méthode APR. Toutefois, alors que la méthode APR procède uniquement à l'enrichissement de l'espace $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$, la méthode APHR procède à l'enrichissement de $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ et $\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$.

Lorsqu'une correction FEM est calculée à un incrément, l'état mécanique approximé du système peut être pris en compte pour enrichir l'espace généré par les bases réduites du ROM en utilisant la correction FEM $\delta \mathbf{u}_{FEM}$.

La première étape est de calculer le résidu $\delta \mathbf{u}_{FEM}^\perp$ de la projection orthogonale de $\delta \mathbf{u}_{FEM}$ sur $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ défini à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ par :

$$\delta \mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x}, \gamma) = \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \delta \hat{\mathbf{u}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.44a)$$

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.44b)$$

$$\delta \mathbf{a}^{(n)}(\gamma) = \operatorname{argmin}_{\delta \mathbf{a}^*} \left\| \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^* \right\|_{\Omega}^2. \quad (3.44c)$$

La seconde étape est d'enrichir $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ en considérant un mode empirique supplémentaire et des déplacements réduits additionnels.

La base réduite $\left(\psi_k^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ et les déplacements réduits $\left(a_k^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ associés sont définis par :

$$\psi_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(n)}\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.45a)$$

$$\psi_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \frac{\delta \mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x})}{\left\| \delta \mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x}) \right\|_{\Omega}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.45b)$$

$$a_k^{(n+\frac{1}{2})}(\tau) = a_k^{(n)}(\tau), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(n)}\}, \quad \tau \in]0, \gamma], \quad (3.46a)$$

$$a_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\tau) = 0, \quad \tau \in]0, \gamma[, \quad (3.46b)$$

$$a_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\gamma) = \left\| \delta \mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x}) \right\|_{\Omega}, \quad (3.46c)$$

où $\mathcal{I}_\gamma =]0, \gamma]$ est l'abscisse curviligne parcourue jusqu'à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_\mathcal{P}$.

La troisième et dernière étape est de contrôler la taille de $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ grâce à la *snapshot* POD en écrivant la matrice des corrélations temporelles.

La matrice des corrélations temporelles $\mathbf{C}^{(n+\frac{1}{2})}$ associée au champ de déplacement est symétrique, positive, de taille $M_u^{(n)} + 1$ et s'écrit :

$$\mathbf{C}_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = \mathbf{C}_{ij}^0 + \left(a_i^{(n+\frac{1}{2})}, a_j^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{\mathcal{I}_\gamma}, \quad (3.47a)$$

$$\sum_{i=1}^{M_u^{(n)}+1} \mathbf{C}_{ij} v_j^{(k)} = \lambda_k v_i^{(k)}. \quad (3.47b)$$

où la matrice \mathbf{C}^0 est une matrice de corrélation provenant d'un calcul précédent, et où $(\mathbf{v}^{(k)})_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ et $(\lambda_k)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ sont les vecteurs propres et les valeurs propres associées de la matrice $\mathbf{C}^{(n+\frac{1}{2})}$.

La base réduite $(\boldsymbol{\psi}_j^{(n+1)})_{j=1}^{M_u^{(n+1)}}$ et les déplacements réduits $(a_j^{(n+1)})_{j=1}^{M_u^{(n+1)}}$ sont mis à jour selon :

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}+1} \boldsymbol{\psi}_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) v_k^{(j)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.48a)$$

$$a_j^{(n+1)}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}+1} a_k^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) v_k^{(j)}, \quad \boldsymbol{\tau} \in]0, \gamma]. \quad (3.48b)$$

Le même traitement est appliqué à la base réduite relative au champ de variables internes $(\boldsymbol{\mu}_k^{(n)})_{k=1}^{M_z^{(n)}}$ et les variables internes réduites associées $(b_k^{(n)})_{k=1}^{M_z^{(n)}}$ afin de déterminer la base réduite mise à jour $(\boldsymbol{\mu}_k^{(n+1)})_{k=1}^{M_z^{(n+1)}}$ et les variables internes réduites associées $(b_k^{(n+1)})_{k=1}^{M_z^{(n+1)}}$.

3.3.5 Construction du TID

Le domaine Ω est divisé en deux ensembles complémentaires $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$ où $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ tel que :

$$\Omega_{\Pi}^{(n)} = \Omega_{\Pi_z}^{(n)} \cup \Omega_{\Pi_u}^{(n)} \cup \Omega_F \cup \Omega_I. \quad (3.49)$$

Le domaine Ω_I est une région d'intérêt et contient un ensemble d'éléments fixé par l'utilisateur. Le domaine Ω_F contient des éléments tels que les chargements volumique \mathbf{f} et surfacique \mathbf{F} restent visibles.

Les domaines $\Omega_{\Pi_z}^{(n)}$ et $\Omega_{\Pi_u}^{(n)}$ contiennent un ensemble d'éléments et sont construits par la méthode APHR selon un procédé automatique en deux étapes.

Le domaine $W_{\Pi_z}^{(n)}$ contient $N_{\mathcal{E}} \times M_z^{(n)}$ éléments pour lesquels les modes empiriques relatifs

au champ de variables internes sont maximum selon :

$$W_{\Pi_z}^1 = \bigcup_{k=1}^{M_z^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega} \left| \boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right|, \quad (3.50a)$$

$$W_{\Pi_z}^L = \bigcup_{k=1}^{M_z^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega \setminus \cup_{l=1}^{L-1} W_{\Pi_z}^l} \left| \boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right|, \quad L > 1, \quad (3.50b)$$

$$W_{\Pi_z}^{(n)} = \bigcup_{l=1}^{N_{\mathcal{E}}} W_{\Pi_z}^l. \quad (3.50c)$$

Le domaine $\Omega_{\Pi_z}^{(n)}$ est centré sur le domaine $W_{\Pi_z}^{(n)}$ et contient $N_{\mathcal{B}}$ couches d'éléments voisins. Couche après couche, les éléments $(e_i)_{i=1}^{N_e}$ sont testés et ajoutés s'il sont connectés à la couche précédente selon :

$$\Omega_{\Pi_z}^0 = W_{\Pi_z}^{(n)}, \quad (3.51a)$$

$$\text{si } d(e_i, \Omega_{\Pi_z}^{L-1}) = 0, \text{ alors } e_i \in \Omega_{\Pi_z}^L, \quad (3.51b)$$

$$\Omega_{\Pi_z}^{(n)} = \Omega_{\Pi_z}^{N_{\mathcal{B}}}, \quad (3.51c)$$

où la fonction d mesure la distance entre un élément et un groupe d'éléments. Cette distance est évidemment nulle lorsque l'élément considéré est limitrophe du groupe d'éléments.

Le domaine $W_{\Pi_u}^{(n)}$ contient $N_{\mathcal{E}} \times M_u^{(n)}$ éléments pour lesquels les gradients des modes empiriques relatifs au champ de déplacement sont maximum selon :

$$W_{\Pi_u}^1 = \bigcup_{k=1}^{M_u^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega} \left(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}) \right), \quad (3.52a)$$

$$W_{\Pi_u}^L = \bigcup_{k=1}^{M_u^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega \setminus \cup_{l=1}^{L-1} W_{\Pi_u}^l} \left(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}) \right), \quad L > 1, \quad (3.52b)$$

$$W_{\Pi_u}^{(n)} = \bigcup_{l=1}^{N_{\mathcal{E}}} W_{\Pi_u}^l. \quad (3.52c)$$

Le domaine $\Omega_{\Pi_u}^{(n)}$ est centré sur le domaine $W_{\Pi_u}^{(n)}$ et contient $(N_{\mathcal{B}} + 1)$ couches d'éléments voisins. Couche après couche, les éléments $(e_i)_{i=1}^{N_e}$ sont testés et ajoutés s'il sont connectés à la couche précédente selon :

$$\Omega_{\Pi_u}^0 = W_{\Pi_u}^{(n)}, \quad (3.53a)$$

$$\text{si } d(e_i, \Omega_{\Pi_u}^{L-1}) = 0, \text{ alors } e_i \in \Omega_{\Pi_u}^L, \quad (3.53b)$$

$$\Omega_{\Pi_u}^{(n)} = \Omega_{\Pi_u}^{N_{\mathcal{B}}+1}. \quad (3.53c)$$

Les paramètres d'hyper-réduction sont $N_{\mathcal{E}}$ et $N_{\mathcal{B}}$. Le premier donne le nombre d'éléments sélectionnés par mode et l'autre donne le nombre de couches d'éléments ajoutées.

3.3.6 Algorithme incrémental

Selon une approche incrémentale, l'algorithme APHR est donné par l'algorithme 7.

Algorithme 7 Algorithme APHR adaptatif

Charger l'éventuelle base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$, l'éventuelle base réduite $\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_z^{(n)}}$ et l'éventuel TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$

pour $i = 1 \rightarrow N_t$ **faire**

Calculer la prévision hyper-réduite HPOD afin de déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur Ω et le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ selon la formulation POD-Petrov-Galerkin avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

Calculer la projection $\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et étendre le champ de variables internes à $\bar{\Omega}_{\Pi}$ selon la méthodologie Gappy-POD avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_z^{(n)}}$

Calculer les indicateurs d'erreur $\eta_u(\boldsymbol{\gamma}_i)$ et $\eta_z(\boldsymbol{\gamma}_i)$ afin de vérifier la qualité de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ ainsi que la qualité du champ de variables internes sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$

si $\eta_u APHR(\boldsymbol{\gamma}_i) \leq \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{\Pi FEM}|_{\mathbf{u}_{HPOD=0}^{(n)}}(\boldsymbol{\gamma}_i)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$ et $\eta_z(\boldsymbol{\gamma}_i) \leq \varepsilon_z \|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$ **alors**

Ecrire $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Ecrire $\mathbf{z}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

sinon

Calculer la correction FEM afin de déterminer la correction $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ à apporter au champ de déplacement sur Ω et la correction $\boldsymbol{\delta}\mathbf{z}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ à apporter au champ de variables internes sur Ω selon la formulation FEM-Galerkin avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

Ecrire $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) + \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Ecrire $\mathbf{z}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) + \boldsymbol{\delta}\mathbf{z}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Enrichir $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ et $\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$ et mettre à jour les bases réduites $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n+1)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n+1)}}$ et

$\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(n+1)}\right)_{k=1}^{M_z^{(n+1)}}$

Actualiser le TID $\Omega_{\Pi}^{(n+1)}$

fin si

fin pour

Cet algorithme était implémenté dans le code de calcul Z-set pour les thèses de Cartel et Vincent. Il a été modifié pour tenir compte des développements présentés dans ce mémoire.

Chapitre 4

Désynchronisation de la méthode APHR

Dans le cas des matériaux hétérogènes, le comportement peut varier de façon importante selon la phase considérée. Par conséquent, les transformations significatives ne sont pas nécessairement corrélées dans les phases. D'une part, les transformations significatives dans chaque phases peuvent être différentes. D'autre part, ces transformations significatives peuvent éventuellement être décalées dans le temps.

Or considérée de façon isolée, certaines phases ont une évolution d'état moins complexe que l'évolution de l'ensemble. Ainsi une mauvaise prise en compte des hétérogénéités peut induire une complexité apparente superflue dans des phases. Afin de prendre en compte ce phénomène dans l'analyse mécanique du système, et puisque les comportements élastoplastiques ont une complexité suffisante pour justifier que l'on cherche à éviter de complexifier la représentation des variables internes, une décomposition des variables internes par sous-domaine appelée décomposition désynchronisée est proposée dans le cas des matériaux hétérogènes.

La méthode APHR désynchronisée propose une formulation multi-niveaux désynchronisée sur l'ensemble des sous-domaine désynchronisé $(\Omega_r)_{r=1}^R$ qui coïncident par défaut avec les phases du matériau. Toutefois, chaque phase peut éventuellement être resubdivisée en sous-domaines. La méthode APHR désynchronisée repose sur une hyper-réduction désynchronisée. Par opposition, la méthode APHR présenté au chapitre 3 est maintenant désignée sous le nom de méthode APHR synchronisée.

Ce genre de traitement des données est inspiré du *clustering* [134, 113, 121, 59, 139, 69] et des méthodes de champ de transformation développées en homogénéisation pour la mécanique des matériaux [96, 97] qui proposent un traitement des variables internes par phases.

Ce chapitre présente tout d'abord un exemple analytique simple sur une barre hétérogène afin de montrer l'intérêt de la décomposition par phase. Deux apports se dégagent des développements apportés à la méthode APHR désynchronisée : l'extrapolation et l'enrichissement des variables internes par sous-domaine et la construction du TID par concaténation de sous-TID construits sur les sous-domaines désynchronisés. Les résultats de la méthode APHR désynchronisée par sous-domaine sont illustrés à l'aide d'un exemple simple sur une plaque multi-perforée et montrent une nette amélioration des résultats de calcul.

4.1 Étude analytique préliminaire d'une barre hétérogène en traction-compression

4.1.1 Formulation du problème

Le système étudié est une barre hétérogène sollicitée en traction pure par un déplacement imposé u_d au point M_1 (Figure 4.1).

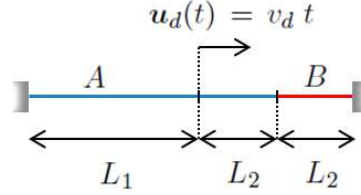


FIG. 4.1: Système hétérogène sollicité en traction-compression

La barre est constituée de deux phases élastoplastiques. La plasticité est décrite par un écrouissage isotrope linéaire. La première phase est notée phase A et l'autre phase B . La phase A occupe le domaine compris entre M_0 et M_2 . La phase B est une inclusion qui occupe le domaine compris entre M_2 et M_3 .

L'objet de cette étude analytique est l'évolution du champ de déplacement $u(x, t)$ et du champ de déformation élastique pour un chargement monotone croissant tel que $\mathbf{u}_d(t) = v_d t$. On suppose que $L_1 = 2 L_2$ et la longueur totale L_T est telle que $L_T = L_1 + 2 L_2$. La durée de chargement est choisie arbitrairement égale à deux fois la durée de la transformation purement élastique soit $T = 2 t_e$.

Dans la phase i ($i = A, B$), la limite d'élasticité est σ_i^0 . Le module d'élasticité est uniforme et noté E et le module d'écrouissage isotrope linéaire est uniforme et noté H . L'aire de la section droite est uniforme et notée S . On note ϵ_{ei} , ϵ_{pi} et σ_i le champ de déformation élastique, le champ de déformation plastique et le champ de contrainte respectivement. Le champ de déformation dans la phase B est uniforme. Le champ de déformation dans la phase A n'étant pas uniforme : sa valeur à gauche de M_1 est notée ϵ_{Aa} et sa valeur à droite est notée ϵ_{Ab} . De façon similaire sont introduits ϵ_{eAa} , ϵ_{pAa} , σ_{Aa} , ϵ_{eAb} , ϵ_{pAb} et σ_{Ab} .

Le comportement élastique et plastique à écrouissage isotrope linéaire des différentes phases est décrit par les équations ci-dessous ($i = Aa, Ab, B$) :

$$\epsilon_i(\cdot, t) = \epsilon_{ei}(\cdot, t) + \epsilon_{pi}(\cdot, t), \quad t \in]0, T], \quad (4.1a)$$

$$\sigma_i(\cdot, t) = E \epsilon_{ei}(\cdot, t), \quad t \in]0, T], \quad (4.1b)$$

$$|\sigma_i(\cdot, t)| - \sigma_i^0 - H p_i(\cdot, t) \leq 0, \quad t \in]0, T], \quad (4.1c)$$

$$\dot{\epsilon}_{pi}(\cdot, t) \sigma_{,i}(t) \geq 0, \quad t \in]0, T], \quad (4.1d)$$

$$\dot{\epsilon}_{pi}(\cdot, t) (|\sigma_i(\cdot, t)| - \sigma_i^0 - H p_i(\cdot, t)) = 0, \quad t \in]0, T], \quad (4.1e)$$

$$\dot{p}_i(\cdot, t) = |\dot{\epsilon}_{pi}(\cdot, t)|, \quad t \in]0, T], \quad (4.1f)$$

$$\epsilon_{pi}(\cdot, 0^+) = 0, \quad (4.1g)$$

$$p_i(\cdot, 0^+) = 0. \quad (4.1h)$$

L'équilibre de la structure est donné par :

$$\sigma_{Ab}(\cdot, t) - \sigma_B(\cdot, t) = 0, \quad t \in]0, T]. \quad (4.2)$$

La condition de compatibilité des déformations afin que le champ de déformation corresponde à un champ de déplacement est donnée par :

$$L_1 \epsilon_{Aa}(\cdot, t) + L_2 \epsilon_{Ab}(\cdot, t) + L_2 \epsilon_B(\cdot, t) = 0, \quad t \in]0, T], \quad (4.3a)$$

$$L_1 \epsilon_{Aa}(\cdot, t) = u_d(t), \quad t \in]0, T]. \quad (4.3b)$$

Le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, \cdot) = \begin{cases} \epsilon_{Aa}(x, \cdot) x & \text{si } 0 \leq x \leq L_1, \\ \epsilon_{Aa}(x, \cdot) L_1 + \epsilon_{Ab}(x, \cdot) (x - L_1) & \text{si } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2, \\ \epsilon_B(x, \cdot) (x - L_1 - 2L_2) & \text{si } L_1 + L_2 \leq x \leq L_T. \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\epsilon_{Aa}(x, \cdot) L_1 + \epsilon_{Ab}(x, \cdot) (x - L_1) \quad \text{si } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2, \quad (4.4b)$$

$$\epsilon_B(x, \cdot) (x - L_1 - 2L_2) \quad \text{si } L_1 + L_2 \leq x \leq L_T. \quad (4.4c)$$

Dans la suite, on s'intéresse à la décomposition du champ ϵ_e par la *snapshot* POD. Le champ de déformation élastique est définie par morceaux :

$$\epsilon_e(x, \cdot) = \begin{cases} \epsilon_{eAa}(\cdot, t) & \text{si } 0 \leq x \leq L_1, \\ \epsilon_{eAb}(\cdot, t) & \text{si } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2, \\ \epsilon_{eB}(\cdot, t) & \text{si } L_1 + L_2 \leq x \leq L_T. \end{cases} \quad (4.5a)$$

$$\epsilon_{eAb}(\cdot, t) \quad \text{si } L_1 \leq x \leq L_1 + L_2, \quad (4.5b)$$

$$\epsilon_{eB}(\cdot, t) \quad \text{si } L_1 + L_2 \leq x \leq L_T. \quad (4.5c)$$

4.1.2 Solution du problème mécanique dans le cas d'un matériau homogène

Les équations du cas homogènes sont déduites des équations ci-dessus en considérant l'hypothèse $\sigma_A^0 = \sigma_B^0$. La solution est décrite en deux pas de temps séparés par l'instant t_e : la structure est complètement élastique jusqu'à t_e .

Pour $t \leq t_e$, la solution est la suivante :

$$\sigma_{Aa}(\cdot, t) = E \frac{u_d(t)}{L_1}, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6a)$$

$$\sigma_{Ab}(\cdot, t) = -E \frac{u_d(t)}{2L_2}, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6b)$$

$$\sigma_B(\cdot, t) = -E \frac{u_d(t)}{2L_2}, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6c)$$

$$\epsilon_{Aa}(\cdot, t) = \frac{u_d(t)}{L_1}, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6d)$$

$$\epsilon_{Ab}(\cdot, t) = -\frac{u_d(t)}{2L_2}, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6e)$$

$$\epsilon_B(\cdot, t) = -\frac{u_d(t)}{2L_2}, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6f)$$

$$\epsilon_{Aap}(\cdot, t) = 0, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6g)$$

$$\epsilon_{Abp}(\cdot, t) = 0, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6h)$$

$$\epsilon_{Bp}(\cdot, t) = 0, \quad t \in]0, t_e], \quad (4.6i)$$

$$t_e = \frac{\sigma_A^0 L_1}{E v_d}. \quad (4.6j)$$

L'égalité $L_1 = 2L_2$ est choisie pour que la limite d'élasticité soit atteinte en même temps à gauche et à droite du point M_1 dans le cas d'un matériau homogène.

Pour $t \geq t_e$, la solution est la suivante :

$$\sigma_{Aa}(\cdot, t) = \sigma_A^0 + \frac{H E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7a)$$

$$\sigma_{Ab}(\cdot, t) = -\sigma_A^0 - \frac{H E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7b)$$

$$\sigma_B(\cdot, t) = -\sigma_B^0 - \frac{H E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7c)$$

$$\epsilon_{Aa}(\cdot, t) = \frac{u_d(t)}{L_1}, \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7d)$$

$$\epsilon_{Ab}(\cdot, t) = -\frac{u_d(t)}{2L_2}, \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7e)$$

$$\epsilon_B(\cdot, t) = -\frac{u_d(t)}{2L_2}, \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7f)$$

$$\epsilon_{Aap}(\cdot, t) = \frac{E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7g)$$

$$\epsilon_{Abp}(\cdot, t) = -\frac{E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7h)$$

$$\epsilon_{Bp}(\cdot, t) = -\frac{E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.7i)$$

Pour $t = 2t_e$, la solution est la suivante :

$$\sigma_{Aa}(\cdot, 2t_e) = \left(1 + \frac{H}{H + E} \right) \sigma_A^0, \quad (4.8a)$$

$$\sigma_{Ab}(\cdot, 2t_e) = -\left(1 + \frac{H}{H + E} \right) \sigma_A^0, \quad (4.8b)$$

$$\sigma_B(\cdot, 2t_e) = -\left(1 + \frac{H}{H + E} \right) \sigma_A^0, \quad (4.8c)$$

$$\epsilon_{Aa}(\cdot, 2t_e) = \frac{2\sigma_A^0}{E}, \quad (4.8d)$$

$$\epsilon_{Ab}(\cdot, 2t_e) = -\frac{2\sigma_A^0}{E}, \quad (4.8e)$$

$$\epsilon_B(\cdot, 2t_e) = -\frac{2\sigma_A^0}{E}, \quad (4.8f)$$

$$\epsilon_{Aap}(\cdot, 2t_e) = \frac{E}{H + E} \frac{\sigma_A^0}{E}, \quad (4.8g)$$

$$\epsilon_{Abp}(\cdot, 2t_e) = -\frac{E}{H + E} \frac{\sigma_A^0}{E}, \quad (4.8h)$$

$$\epsilon_{Bp}(\cdot, 2t_e) = -\frac{E}{H + E} \frac{\sigma_A^0}{E}. \quad (4.8i)$$

4.1.3 Décomposition des déformations élastiques dans le cas d'un matériau homogène

La *snapshot* POD est menée en considérant deux échantillons du champ de déformation élastique : le premier en $t = t_e$ et l'autre en $t = 2t_e$. Les modes empiriques $(\mu_k)_{k=1}^2$ sont cherchés sous la forme d'une combinaison de ces deux échantillons selon :

$$\mu_k(x) = \epsilon_e(x, t_e) b_{1k} + \epsilon_e(x, 2t_e) b_{2k}, \quad 0 \leq x \leq L_T. \quad (4.9)$$

La matrice de covariance \mathbf{C} s'écrit donc :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, t_e) \epsilon_e(x, t_e) dx & \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, t_e) \epsilon_e(x, 2t_e) dx \\ \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, t_e) \epsilon_e(x, 2t_e) dx & \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, 2t_e) \epsilon_e(x, 2t_e) dx \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Le calcul des termes de \mathbf{C} donne :

$$C_{11} = L_T \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2, \quad (4.11a)$$

$$C_{12} = L_T \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(1 + \frac{H}{H+E} \right), \quad (4.11b)$$

$$C_{22} = L_T \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(1 + \frac{H}{H+E} \right)^2. \quad (4.11c)$$

Dans ce cas il n'y a qu'un unique mode empirique relatif à la seule valeur propre non nulle λ_1 associée au vecteur propre \mathbf{b}_1 :

$$\mathbf{b}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \frac{H}{E+H} \end{bmatrix}, \quad (4.12a)$$

$$\lambda_1 = L_T \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(1 + \left(1 + \frac{H}{E+H} \right)^2 \right). \quad (4.12b)$$

Le mode empirique μ_1 s'écrit :

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \left(1 + \left(1 + \frac{H}{E+H} \right)^2 \right) \frac{\sigma_A^0}{E} & \text{si } 0 \leq x \leq L_1, \end{cases} \quad (4.13a)$$

$$\begin{cases} - \left(1 + \left(1 + \frac{H}{E+H} \right)^2 \right) \frac{\sigma_A^0}{E} & \text{si } L_1 \leq x \leq L_T. \end{cases} \quad (4.13b)$$

Il faut noter qu'un unique échantillon est nécessaire car l'étape purement élastique ($t \leq t_e$) est linéaire et l'étape plastique également ($t \geq t_e$).

4.1.4 Solution du problème mécanique dans le cas d'un matériau hétérogène

L'inclusion B est supposée plus dure que la matrice A en considérant $\sigma_B^0 > \sigma_A^0$. La phase élastique demeure identique et la définition de t_e reste inchangées. C'est donc

la phase A qui atteint la première la limite d'élasticité σ_A^0 alors que σ_B^0 est supposée suffisamment grand pour qu'il n'y ait pas de plasticité en $t = T$ dans la phase B .

Pour $t \geq t_e$, la solution est la suivante :

$$\sigma_{Aa}(\cdot, t) = \sigma_A^0 + \frac{H E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14a)$$

$$\sigma_{Ab}(\cdot, t) = -\frac{E H}{2 H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_2} + \frac{\sigma_A^0}{H} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14b)$$

$$\sigma_B(\cdot, t) = -\frac{E H}{2 H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_2} + \frac{\sigma_A^0}{H} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14c)$$

$$\epsilon_{Aa}(\cdot, t) = \frac{u_d(t)}{L_1}, \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14d)$$

$$\epsilon_{Ab}(\cdot, t) = -\frac{u_d(t)}{L_2} + \frac{H}{2 H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_2} + \frac{\sigma_A^0}{H} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14e)$$

$$\epsilon_B(\cdot, t) = -\frac{H}{2 H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_2} + \frac{\sigma_A^0}{H} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14f)$$

$$\epsilon_{Aap}(\cdot, t) = \frac{E}{H + E} \left(\frac{u_d(t)}{L_1} - \frac{\sigma_A^0}{E} \right), \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14g)$$

$$\epsilon_{Abp}(\cdot, t) = -\frac{E}{2 H + E} \frac{u_d(t)}{L_2} + \frac{2}{2 H + E} \sigma_A^0, \quad t \in [t_e, T], \quad (4.14h)$$

$$\epsilon_{Bp}(\cdot, t) = 0, \quad t \in [t_e, T]. \quad (4.14i)$$

Pour $t = 2 t_e$, la solution est la suivante :

$$\sigma_{Aa}(\cdot, 2 t_e) = \frac{2 H + E}{H + E} \sigma_A^0, \quad (4.15a)$$

$$\sigma_{Ab}(\cdot, 2 t_e) = -\frac{4 H + E}{2 H + E} \sigma_A^0, \quad (4.15b)$$

$$\sigma_B(\cdot, 2 t_e) = -\frac{4 H + E}{2 H + E} \sigma_A^0, \quad (4.15c)$$

$$\epsilon_{Aa}(\cdot, 2 t_e) = \frac{2 \sigma_A^0}{E}, \quad (4.15d)$$

$$\epsilon_{Ab}(\cdot, 2 t_e) = -\frac{4 \sigma_A^0}{E} + \frac{H}{2 H + E} \left(\frac{4 \sigma_A^0}{E} + \frac{\sigma_A^0}{H} \right), \quad (4.15e)$$

$$\epsilon_B(\cdot, 2 t_e) = -\frac{H}{2 H + E} \left(\frac{4 \sigma_A^0}{E} + \frac{\sigma_A^0}{H} \right), \quad (4.15f)$$

$$\epsilon_{Aap}(\cdot, 2 t_e) = \frac{\sigma_A^0}{H + E}, \quad (4.15g)$$

$$\epsilon_{Abp}(\cdot, 2 t_e) = -\frac{2}{2 H + E} \sigma_A^0, \quad (4.15h)$$

$$\epsilon_{Bp}(\cdot, 2 t_e) = 0. \quad (4.15i)$$

4.1.5 Décomposition des déformations élastiques dans le cas d'un matériau hétérogène

La *snapshot* POD est menée en considérant deux échantillons du champ de déformation élastique : le premier en $t = t_e$ et l'autre en $t = 2 t_e$. Les modes empiriques $(\mu_k)_{k=1}^2$ sont cherchés sous la forme d'une combinaison de ces deux échantillons selon :

$$\mu_k(x) = \epsilon_e(x, t_e) b_{1k} + \epsilon_e(x, 2 t_e) b_{2k}, \quad 0 \leq x \leq L_T. \quad (4.16)$$

La matrice de covariance \mathbf{C} s'écrit donc :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, t_e) \epsilon_e(x, t_e) dx & \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, t_e) \epsilon_e(x, 2 t_e) dx \\ \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, t_e) \epsilon_e(x, 2 t_e) dx & \int_0^{L_T} \epsilon_e(x, 2 t_e) \epsilon_e(x, 2 t_e) dx \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Le calcul des termes de \mathbf{C} donne :

$$C_{11} = L_T \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2, \quad (4.18a)$$

$$C_{12} = \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(L_1 \frac{2H + E}{H + E} + 2 L_2 \frac{4H + E}{2H + E} \right) \quad (4.18b)$$

$$C_{22} = \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(L_1 \left(\frac{2H + E}{H + E} \right)^2 + 2 L_2 \left(\frac{4H + E}{2H + E} \right)^2 \right) \quad (4.18c)$$

L'hétérogénéité fait apparaître deux modes empiriques relatifs à deux valeurs propres non nulles. Les déformations élastique ne sont plus synchrones dans les deux phases.

Or, seul un mode de déformation uniforme suffit dans la phase B considérée seule. Par conséquent la phase B considérée seule voit des déformations élastiques synchrones. Cela permet d'illustrer qu'une mauvaise prise en compte des hétérogénéités peut induire une complexité apparente superflue dans la phase B et que ce phénomène est très sensible aux variations de limite d'élasticité si l'écroutissage est de l'ordre de $\frac{E}{10}$. Il faut également noter que la forme du premier mode est modifiée dès que l'inclusion est plus dure car le vecteur $\left[1 \quad 1 + \frac{H}{E + H} \right]^T$ n'est plus un vecteur propre de la matrice \mathbf{C} .

4.1.6 Décomposition par phase des déformations élastiques dans le cas d'un matériau hétérogène

Les comportements élastoplastiques ont une complexité suffisante pour justifier que l'on cherche à éviter de complexifier la représentation des variables internes de ces modèles. L'objet de cette étude est de montrer l'intérêt de réaliser une décomposition par phase des variables internes. Les transformations significatives ne sont plus cherchées de façon synchrone dans l'ensemble des deux phases. C'est ce que l'on appelle une approche désynchronisée de la décomposition.

La *snapshot* POD est menée en considérant deux échantillons par phase du champ de

déformation élastique : le premier en $t = t_e$ et l'autre en $t = 2 t_e$. Pour chaque phase ($i = A, B$), les modes empiriques $(^{(i)}\mu_k)_{k=1}^2$ sont cherchés sous la forme d'une combinaison de ces deux échantillons selon :

$$^{(i)}\mu_k(x) = ^{(i)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(i)}b_{1k} + ^{(i)}\epsilon_e(x, 2 t_e) ^{(i)}b_{2k}, \quad 0 \leq x \leq L_T. \quad (4.19)$$

La matrice de covariance $^{(A)}\mathbf{C}$ s'écrit donc :

$$^{(A)}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \int_0^{L_1+L_2} ^{(A)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(A)}\epsilon_e(x, t_e) dx & \int_0^{L_1+L_2} ^{(A)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(A)}\epsilon_e(x, 2 t_e) dx \\ \int_0^{L_1+L_2} ^{(A)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(A)}\epsilon_e(x, 2 t_e) dx & \int_0^{L_1+L_2} ^{(A)}\epsilon_e(x, 2 t_e) ^{(A)}\epsilon_e(x, 2 t_e) dx \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Le calcul des termes de $^{(A)}\mathbf{C}$ donne :

$$^{(A)}C_{11} = (L_1 + L_2) \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2, \quad (4.21a)$$

$$^{(A)}C_{12} = \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(L_1 \frac{2H + E}{H + E} + L_2 \frac{4H + E}{2H + E} \right), \quad (4.21b)$$

$$^{(A)}C_{22} = \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(L_1 \left(\frac{2H + E}{H + E} \right)^2 + L_2 \left(\frac{4H + E}{2H + E} \right)^2 \right). \quad (4.21c)$$

Il reste deux modes empiriques significatifs dans la phase A .

La matrice de covariance $^{(B)}\mathbf{C}$ s'écrit donc :

$$^{(B)}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \int_{L_1+L_2}^{L_T} ^{(B)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(B)}\epsilon_e(x, t_e) dx & \int_{L_1+L_2}^{L_T} ^{(B)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(B)}\epsilon_e(x, 2 t_e) dx \\ \int_{L_1+L_2}^{L_T} ^{(B)}\epsilon_e(x, t_e) ^{(B)}\epsilon_e(x, 2 t_e) dx & \int_{L_1+L_2}^{L_T} ^{(B)}\epsilon_e(x, 2 t_e) ^{(B)}\epsilon_e(x, 2 t_e) dx \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Le calcul des termes de $^{(B)}\mathbf{C}$ donne :

$$^{(B)}C_{11} = L_2 \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2, \quad (4.23a)$$

$$^{(B)}C_{12} = L_2 \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \frac{4H + E}{2H + E}, \quad (4.23b)$$

$$^{(B)}C_{22} = L_2 \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(\frac{4H + E}{2H + E} \right)^2. \quad (4.23c)$$

Dans ce cas il n'y a qu'un unique mode empirique relatif à la seule valeur propre non nulle $^{(B)}\lambda_1$ associée au vecteur propre $^{(B)}\mathbf{b}_1$:

$$^{(B)}\mathbf{b}_1^T = \left[1 \quad \frac{4H + E}{2H + E} \right], \quad (4.24a)$$

$$^{(B)}\lambda_1 = L_2 \left(\frac{\sigma_A^0}{E} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{4H + E}{2H + E} \right)^2 \right). \quad (4.24b)$$

4.2 Méthode APHR désynchronisée

La méthode APHR désynchronisée apporte quelques développements afin de prendre en compte le fait que les transformations significatives ne sont pas nécessairement corrélées dans les phases et que certaines phases considérées de façon isolées ont une évolution d'état moins complexe que l'évolution de l'ensemble.

La méthode APHR désynchronisée présente deux apports :

- (i) une construction par sous-domaine du TID,
- ((ii) un traitement par sous-domaine du champ de variables internes.

La méthode APHR désynchronisée reste une méthode *a priori* car elle ne nécessite aucune donnée initiale pour mener une simulation. Toutefois, tout comme dans le cas synchronisé, la méthode APHR désynchronisée peut également exploiter des *snapshots* ou des bases réduites issues de simulations précédentes en adoptant une démarche *a posteriori*. Dans ce dernier cas, la méthode APHR désynchronisée non adaptative nécessite une base réduite relative au champ de déplacement \mathbf{u} et R bases réduites relatives au champ de variables internes \mathbf{z} définies sur les R sous-domaines désynchronisés $(\Omega_r)_{r=1}^R$.

Dans le cas d'une stratégie adaptative, le ROM est évolutif. La méthode APHR désynchronisée fournit d'abord une estimation hyper-réduite HPOD du champ de déplacement \mathbf{u} à approcher. Cette estimation hyper-réduite diffère dans la méthode désynchronisée uniquement par la façon de construire le TID : c'est le premier apport de la méthode. Puis, le champ de variables internes partiel $\tilde{\mathbf{z}}$ est étendu à l'extérieur du TID de façon désynchronisée : c'est le second apport de la méthode. Cette estimation hyper-réduite HPOD est éventuellement corrigée par un calcul FEM. Plus précisément, si à la fin d'un incrément, la précision de la prévision HPOD est insuffisante, l'état mécanique corrigé par la FEM est utilisé pour enrichir la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} et les bases réduites associées au champ de variables internes \mathbf{z} d'un mode empirique de façon désynchronisée : c'est encore le second apport de la méthode.

La méthode APHR désynchronisée est définie sous la discrétisation induite par la FEM. Le maillage FEM introduit N_u degrés de liberté situés aux noeuds et N_z variables internes situées aux points de Gauss des N_e éléments. La discrétisation FEM n'est pas nécessaire pour décrire les concepts de la méthode APHR désynchronisée mais ce cadre permet de simplifier la notion d'hyper-réduction désynchronisée.

4.2.1 Description de la représentation multi-niveaux désynchronisée

La méthode APHR désynchronisée adaptative fournit des estimations en sommant si besoin une correction FEM à la prévision du ROM. Les variables d'état réduites issues de la POD étant globales et les variables d'état FEM étant locales, les approximations

proposées sont multi-niveaux selon :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{u}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) + \delta \mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (4.25b)$$

$$\mathbf{z} = \left({}^{(r)}\mathbf{z} \right)_{r=1}^R, \quad (4.25c)$$

$$\mathbf{z}_{APHR} = \left({}^{(r)}\mathbf{z}_{APHR} \right)_{r=1}^R, \quad (4.25d)$$

$${}^{(r)}\mathbf{z}(\mathbf{x}, \gamma) \approx {}^{(r)}\mathbf{z}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (4.25e)$$

$$\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)} = \left({}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)} \right)_{r=1}^R, \quad (4.25f)$$

$$\delta \mathbf{z}_{FEM} = \left({}^{(r)}\delta \mathbf{z}_{FEM} \right)_{r=1}^R, \quad (4.25g)$$

$${}^{(r)}\mathbf{z}_{APHR}(\mathbf{x}, \gamma) = {}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) + \delta \mathbf{z}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (4.25h)$$

La méthode APHR désynchronisée introduit la décomposition par phase du champ de variables internes sur l'ensemble des sous-domaines désynchronisés $(\Omega_r)_{r=1}^R$ et l'exposant ${}^{(r)}\square$ est introduit pour donner la nature du sous-domaine.

La méthode APHR désynchronisée préserve le caractère évolutif des modes empiriques. Par conséquent, ces modes empiriques caractéristiques de la transformation sont modifiés durant le traitement incrémental du problème mécanique et l'exposant $\square^{(n)}$ est introduit pour donner la version du ROM.

4.2.2 Prévision hyper-réduite HPOD désynchronisée

La méthode APHR désynchronisée exploite une représentation approchée à l'aide de bases réduites POD et une formulation tronquée des conditions d'équilibre qui découle de l'hyper-réduction désynchronisée. Ce point diffère de la méthode APHR synchronisée de par la construction du TID par sous-domaine.

Représentation approchée du champ de déplacement La méthode APHR désynchronisée introduit à l'ordre $M_u^{(n)}$ des fonctions de forme $\left(\psi_k^{(n)} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ reliées au champ de déplacement \mathbf{u} par les déplacements réduits $\left(a_k^{(n)} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$. Le champ de déplacement \mathbf{u} s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \gamma) \approx \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) a_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (4.26b)$$

Les modes empiriques $\left(\psi_k^{(n)} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ sont décrits en utilisant les fonctions de formes FEM $(\mathbf{N}_i)_{i=1}^{N_u}$ et la matrice de réduction $\mathbf{A}^{(n)}$ selon :

$$\psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) A_{ik}^{(n)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.27)$$

La base $(\psi_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ est dite réduite car $M_u^{(n)} \ll N_u$ et contient $M_u^{(n)}$ modes empiriques relatifs au champ de déplacement sur Ω (Figure 3.1). La représentation du champ de déplacement est dite synchronisée sur Ω car une unique base réduite est considérée afin de décrire le champ de déplacement sur le domaine Ω . Les variables d'état réduites relatives

au champ de déplacement sont les déplacements réduits $(a_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$.

Il faut noter que l'approximation POD a un premier rôle en amont de la résolution de l'équilibre. Appliquée au champ de déplacement, elle permet d'introduire la matrice de réduction $\mathbf{A}^{(n)}$ dans la résolution de l'équilibre ce qui permet de calculer $M_u^{(n)}$ déplacements réduits pour le ROM au lieu de N_u degrés de liberté pour la FEM.

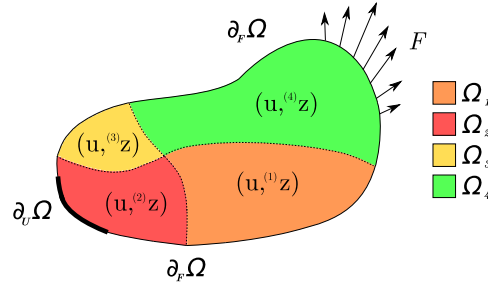


FIG. 4.2: Méthode APHR désynchronisée. Représentation du champ de déplacement synchronisé sur le domaine Ω et du champ de variables internes désynchronisé sur le domaine Ω

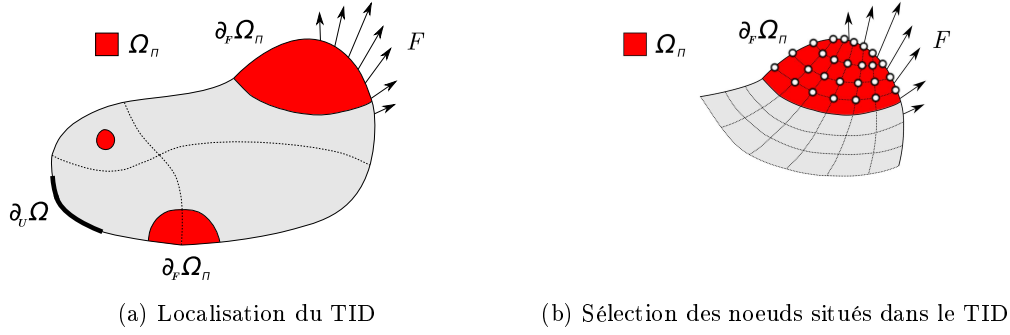
Résolution restreinte au domaine tronqué Comme le ROM possède $M_u^{(n)}$ déplacements réduits au lieu de N_u degrés de liberté pour la FEM, l'hyper-réduction consiste à introduire un domaine tronqué d'intégration (*Truncated Integration Domain*) (TID) $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ contenant l'ensemble des variables internes explicatives sur lesquelles sont écrites $N_{u_{\Pi}}^{(n)}$ équations sélectionnées pour la résolution du problème en base réduite (Figure 4.3). Ce point diffère de la méthode APHR synchronisée uniquement par la construction du TID par sous-domaine détaillée ultérieurement. L'idée est toujours de recenser les conditions d'équilibre que l'on peut écrire sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$, c'est à dire les conditions relatives au champ de vitesse virtuel dont le support est sans intersection avec l'extérieur de $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ noté $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$.

Le problème est alors restreint au TID en utilisant une matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}_{\Pi}^{(n)}$ déduite d'une matrice de troncature $\mathbf{Z}_{\Pi}^{(n)}$ de dimension $N_{u_{\Pi}}^{(n)} \times N_u$ définie par :

$$\text{si } \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} \|\mathbf{N}_i(\mathbf{x})\|_{\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} = 0, \text{ alors } \exists j \in \{1, \dots, N_{u_{\Pi}}^{(n)}\} \mid Z_{\Pi,ji}^{(n)} = 1, \quad (4.28a)$$

$$\text{si } \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} \|\mathbf{N}_i(\mathbf{x})\|_{\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}} > 0, \text{ alors } Z_{\Pi,ji}^{(n)} = 0 \forall j \in \{1, \dots, N_{u_{\Pi}}^{(n)}\}, \quad (4.28b)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} = \mathbf{Z}_{\Pi}^{(n)T} \cdot \mathbf{Z}_{\Pi}^{(n)}. \quad (4.28c)$$

FIG. 4.3: Méthode APHR désynchronisée. TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$

Les $N_{u_{\Pi}}^{(n)}$ équations sélectionnées sont telles que $M_u^{(n)} \leq N_{u_{\Pi}}^{(n)} \leq N_u$ afin de réduire la complexité de la résolution du problème. Toutefois, $N_{u_{\Pi}}^{(n)}$ doit rester tel que le problème reste bien posé ce qui impose que $M_u^{(n)} \leq N_{u_{\Pi}}^{(n)}$.

Formulation POD-Petrov-Galerkin La prévision hyper-réduite HPOD est déterminée à l'aide de la formulation POD-Petrov-Galerkin. On introduit l'espace fonctionnel $\mathcal{V}_{\Pi}^{(n)}$ relatif à la base réduite associée au champ de déplacement \mathbf{u} et tronqué sur Ω_{Π} défini par :

$$\mathcal{V}_{\Pi}^{(n)} = \text{span} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{M_u^{(n)}}, \quad (4.29)$$

où les modes empiriques tronqués $\left(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)} \right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ sont tels que leur support est réduit au TID selon :

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \Lambda_{\Pi ii}^{(n)} A_{ik}^{(n)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.30)$$

Suivant une stratégie incrémentale, étant donné que seul l'intérieur du TID contribue à la formulation du problème et en écrivant $\partial_F \Omega_{\Pi}^{(n)} = \partial_F \Omega \cap \Omega_{\Pi}^{(n)}$, le problème est formulé avec l'approximation POD-Petrov-Galerkin à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante :

Problème 9 Trouver $\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{POD}^{(n)}$ tel que :

$$b\left(\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}, \mathbf{v}\right) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\Pi}^{(n)}, \quad (4.31)$$

avec :

$$b\left(\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}, \mathbf{v}\right) = \int_{\Omega_{\Pi}^{(n)}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}, \tilde{\mathbf{z}}\right) d\Omega, \quad (4.32a)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_{\Pi}^{(n)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_{\Pi}^{(n)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} d\Gamma. \quad (4.32b)$$

Ce problème est résolu de façon itérative à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson. En notation matricielle avec l'approximation POD-Petrov-Galerkin, une itération permet de

déterminer les incréments de déplacements réduits $\delta \mathbf{a}^{(n)}$ qui équilibrent le résidu $\mathbf{R}_{APHR}^{(n)}$ dans le système $\mathbf{J}_{APHR}^{(n)} \delta \mathbf{a}^{(n)} = -\mathbf{R}_{APHR}^{(n)}$, où $\mathbf{J}_{APHR}^{(n)}$ désigne la matrice jacobienne APHR déduite de la matrice jacobienne FEM selon :

$$\mathbf{R}_{APHR}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)T} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} \cdot \mathbf{R}_{FEM}, \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{J}_{APHR}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)T} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} \cdot \mathbf{J}_{FEM} \cdot \mathbf{A}^{(n)}. \quad (4.33b)$$

L'utilisation de la formulation POD-Petrov-Galerkin pour l'assemblage de la matrice de rigidité tangente et du résidu en base réduite conduit respectivement à une complexité numérique de l'ordre de $2M_u^{(n)2} N_{u\Pi}^{(n)} + 2M_u^{(n)} \omega N_{u\Pi}^{(n)}$ pour le terme de gauche et $2M_u^{(n)} N_{u\Pi}^{(n)}$ pour le terme de droite, où ω est la largeur de bande de la matrice jacobienne FEM. L'utilisation de la formulation POD-Petrov-Galerkin entraîne que numérique de l'assemblage ne dépend pas de la dimension N_u de l'espace des fonctions d'interpolation liées à la discrétisation FEM.

La formulation tronquée des conditions d'équilibre représente par conséquent un gain proportionnel à $\frac{N_u}{N_{u\Pi}^{(n)}}$.

Comme les modes empiriques relatifs au champ de déplacement sont définis sur le domaine Ω , la connaissance des déplacements réduits permet de définir le champ de déplacement \mathbf{u} sur le domaine Ω même si les déplacements réduits sont calculés en utilisant les modes empiriques tronqués définis sur le TID. Par contre, le champ de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ est partiel et connu uniquement sur le TID.

4.2.3 Extrapolation désynchronisée des variables internes

La prévision hyper-réduite permet de déterminer le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$. Le but est d'étendre ce champ sur le domaine $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$. La représentation désynchronisée du champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}} = \left({}^{(r)}\tilde{\mathbf{z}} \right)_{r=1}^R$ est introduite afin de permettre une extrapolation de variables internes sur chaque sous-domaine désynchronisé tronqué $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r$.

Représentation approchée du champ de variables internes La représentation désynchronisée du champ de variables internes $\mathbf{z} = \left({}^{(r)}\mathbf{z} \right)_{r=1}^R$ est une représentation approchée induite par la troncature de la POD. Elle est donnée par :

$${}^{(r)}\mathbf{z}(\mathbf{x}, \gamma) \approx {}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}, \quad (4.34a)$$

$${}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^{(r)}b_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad \gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}. \quad (4.34b)$$

La base réduite $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$ est dite réduite car $(r)M_z^{(n)} \ll N_z^{(r)}$ et contient $(r)M_z^{(n)}$ modes empiriques relatifs au champ de variables internes sur Ω_r (Figure 4.2). La représentation du champ de variables internes est dite désynchronisée sur Ω car une base réduite est considérée afin de décrire chaque composante scalaire du champ de variables

internes sur chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r . Toutefois, la notation ne distingue pas chacune des composantes scalaires du champ ${}^{(r)}\mathbf{z}$ afin de ne pas surcharger ce mémoire. Les variables d'état réduites relatives au champ de variables internes sont les

variables internes réduites $\left({}^{(r)}b_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$ sur chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r .

Dans un matériau hétérogène, les phénomènes temporels peuvent être complètement décorrélés d'une phase à l'autre. La représentation désynchronisée du champ de variables internes assure que les transformations significatives sont décrites d'une façon indépendante sur chaque sous-domaine. Par conséquent, un nombre de modes empiriques est considéré sur chaque sous-domaine désynchronisé.

On introduit les espaces fonctionnels $\left({}^{(r)}\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}\right)_{r=1}^R$ relatifs aux bases réduites associées au champ de variables internes \mathbf{z} définis par :

$${}^{(r)}\mathcal{Z}_{POD}^{(n)} = \text{span} \left\{ {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}. \quad (4.35)$$

Il faut noter que l'approximation POD a un second rôle en aval de la résolution de l'équilibre. Appliquée au champ des variables internes, elle permet d'utiliser la Gappy-POD afin de réparer par sous-domaine le champ de variables internes.

Gappy-POD du champ de variables internes Le champ de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ est un champ partiel calculé lors de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$. Il est étendu sur $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$ selon la Gappy-POD en calculant par sous domaine désynchronisé les variables internes réduites $\left({}^{(r)}b_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$ qui minimisent la distance au sens des moindres carrés entre le champ partiel de variables internes ${}^{(r)}\tilde{\mathbf{z}}$ sur le domaine $\Omega_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r$ et sa représentation approchée ${}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}$ à l'incrément courant $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ (Figure 4.4). La mise en oeuvre de la Gappy-POD est restreinte à chaque sous-domaine $(\Omega_r)_{r=1}^R$ selon :

$${}^{(r)}\mathbf{b}^{(n)}(\boldsymbol{\gamma}) = \underset{{}^{(r)}\mathbf{b}^*}{\text{argmin}} \left\| \left. {}^{(r)}\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) - \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^{(r)}b_k^* \right\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r}^2, \quad (4.36a)$$

$${}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^{(r)}b_k^{(n)}(\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r. \quad (4.36b)$$

Chaque domaine Ω_r doit rester visible sous le masque du TID afin de permettre l'extrapolation des variables internes (Figure 4.4). Ce point est automatiquement assuré de par la construction du TID par sous-domaine désynchronisé.

Comme une base réduite $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$ est dédiée à chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r , l'extrapolation des variables internes sur le domaine sur le domaine $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r$ est attendue de meilleure qualité.

Etant donné le nombre de variables internes ${}^{(r)}N_{z\Pi}^{(n)}$ dans le sous-domaine $\Omega_r \cap \Omega_{\Pi}^{(n)}$, le

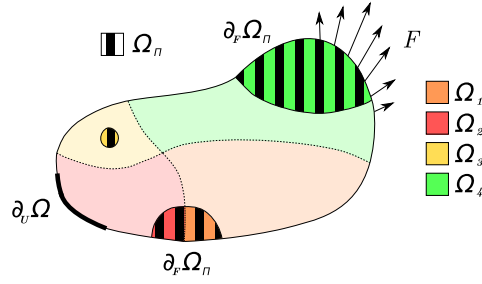


FIG. 4.4: Méthode APHR désynchronisée. Extrapolation des variables internes désynchronisées à l'extérieur du TID

coût numérique de la résolution des systèmes linéaires liés à l'extrapolation par Gappy-POD sur le domaine Ω est de l'ordre de $\sum_{r=1}^R \binom{r}{r} N_{z\Pi}^{(n)2}$ dans le cas d'une représentation désynchronisée. En comparaison, le coût numérique de cette résolution est de l'ordre de $\left(\sum_{r=1}^R \binom{r}{r} N_{z\Pi}^{(n)}\right)^2$ dans le cas d'une représentation synchronisée.

Le coût numérique de l'extrapolation des variables internes est plus faible en désynchronisant la représentation des variables internes. La désynchronisation de la représentation

des variables internes représente par conséquent un gain proportionnel à $\frac{\left(\sum_{r=1}^R \binom{r}{r} N_{z\Pi}^{(n)}\right)^2}{\sum_{r=1}^R \binom{r}{r} N_{z\Pi}^{(n)2}}$.

4.2.4 Procédé de correction-enrichissement désynchronisé

Correction FEM désynchronisée Après une prévision HPOD, deux indicateurs d'erreur sont calculés.

Le premier indicateur permet de vérifier la qualité de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ en utilisant le résidu FEM tronqué sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et défini par :

$$\mathbf{R}_{\Pi FEM}(\gamma) = \mathbf{\Lambda}_{\Pi}^{(n)} \cdot \mathbf{R}_{FEM}(\gamma). \quad (4.37)$$

De la même façon que dans le cas synchronisé, la qualité de l'équilibre est évaluée en utilisant la norme du résidu FEM $\mathbf{R}_{\Pi FEM}$ tronqué sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ selon :

$$\eta_u APHR(\gamma) = \|\mathbf{R}_{\Pi FEM}(\gamma)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}. \quad (4.38)$$

Le second indicateur la qualité du champ de variables internes sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$. La qualité du champ de variables internes est évaluée en calculant la distance au sens des moindres carrés entre le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}$ sur le domaine $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et sa représentation approchée $\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}$. En raison du traitement désynchronisé du champ de variables internes, cette distance est évaluée par sous-domaine en calculant les distances au sens des

moindres carrés entre le champ partiel de variables internes ${}^{(r)}\tilde{\mathbf{z}}$ sur le domaine $\Omega_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r$ et sa représentation approchée ${}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}$ à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ selon :

$${}^{(r)}\eta_z(\gamma) = \left\| \left\| {}^{(r)}\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_z^{(n)}} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^{(r)}b_k^{(n)}(\gamma) \right\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r} \right\|, \quad (4.39a)$$

$$\eta_z(\gamma) = \sqrt{\sum_{r=1}^R {}^{(r)}\eta_z^2(\gamma)}. \quad (4.39b)$$

Si $\eta_u{}_{APHR}(\gamma) \leq \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{\Pi FEM}|_{\mathbf{u}_{HPOD=0}^{(n)}}(\gamma)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$ et $\eta_z(\gamma) \leq \varepsilon_z \|\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \gamma)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$, alors la prévision du ROM est satisfaisante à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$. Sinon, une correction FEM $\delta\mathbf{u}_{FEM}$ et $\delta\mathbf{z}_{FEM}$ est calculée.

Les paramètres ε_u et ε_z sont les mêmes tolérances que dans le cas synchronisé. Le premier donne la tolérance d'erreur lors de la résolution de l'équilibre hyper-réduit et l'autre donne la tolérance d'erreur sur le champ de variables internes.

Si une correction FEM est exigée, suivant une stratégie incrémentale, le problème est formulé avec l'approximation FEM-Galerkin à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de la façon suivante :

Problème 10 Trouver $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \gamma) \in \mathcal{U}_{FEM}$ tel que :

$$b(\mathbf{u}_{APHR}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{FEM}. \quad (4.40)$$

Enrichissement désynchronisé L'enrichissement est mené de la même façon que dans le cas synchronisé pour le champ de déplacement. Par contre pour le champ de variables internes, l'enrichissement est effectué par sous-domaine en considérant les correction $({}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM})_{r=1}^R$.

Lorsqu'une correction FEM est calculée à un incrément, l'état mécanique du système peut être pris en compte pour enrichir l'espace généré par les bases réduites du ROM en utilisant les corrections FEM $\delta\mathbf{u}_{FEM}$ et ${}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}$.

La première étape est de calculer le résidu $\delta\mathbf{u}_{FEM}^{\perp}$ de la projection orthogonale de $\delta\mathbf{u}_{FEM}$ sur $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ défini à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ par :

$$\delta\mathbf{u}_{FEM}^{\perp}(\mathbf{x}, \gamma) = \delta\mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \delta\hat{\mathbf{u}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.41a)$$

$$\delta\hat{\mathbf{u}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.41b)$$

$$\delta\mathbf{a}^{(n)}(\gamma) = \operatorname{argmin}_{\delta\mathbf{a}^*} \left\| \delta\mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}} \boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\mathbf{x}) \delta a_k^* \right\|_{\Omega}^2. \quad (4.41c)$$

De la même façon, le résidu ${}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}^\perp$ de la projection orthogonale de ${}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}$ sur ${}^{(r)}\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$ est défini à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_P$ par :

$${}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}^\perp(\mathbf{x}, \gamma) = {}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - {}^{(r)}\delta\hat{\mathbf{z}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.42a)$$

$${}^{(r)}\delta\hat{\mathbf{z}}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) = \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^{(r)}\delta b_k^{(n)}(\gamma), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.42b)$$

$${}^{(r)}\delta\mathbf{b}^{(n)}(\gamma) = \operatorname{argmin}_{(r)\delta\mathbf{b}^*} \left\| {}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}(\mathbf{x}, \gamma) - \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}) {}^{(r)}\delta b_k^* \right\|_{\Omega_r}^2. \quad (4.42c)$$

La seconde étape est d'enrichir $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ en considérant un mode empirique supplémentaire et des déplacements réduits additionnels.

La base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n+\frac{1}{2})}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ et les déplacements réduits associés $\left(a_k^{(n+\frac{1}{2})}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ sont définis par :

$$\boldsymbol{\psi}_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}_k^{(n)}(\mathbf{x}), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(n)}\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.43a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x})\|_\Omega}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.43b)$$

$$a_k^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) = a_k^{(n)}(\boldsymbol{\tau}), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(n)}\}, \quad \boldsymbol{\tau} \in]0, \gamma], \quad (4.44a)$$

$$a_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \in]0, \gamma[, \quad (4.44b)$$

$$a_{M_u^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\gamma) = \|\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}^\perp(\mathbf{x})\|_\Omega, \quad (4.44c)$$

où $\mathcal{I}_\gamma =]0, \gamma]$ est l'abscisse curviligne parcourue jusqu'à l'incrément courant $\gamma \in \mathcal{I}_P$.

De la même façon, l'espace ${}^{(r)}\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$ est enrichi en considérant un mode empirique supplémentaire et des variables internes réduites additionnelles.

Ainsi, la base réduite $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n+\frac{1}{2})}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}+1}$ et les variables internes réduites associées

$\left({}^{(r)}b_k^{(n+\frac{1}{2})}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}+1}$ sont définies par :

$${}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}(\mathbf{x}), \quad k \in \{1, \dots, (r)M_z^{(n)}\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad (4.45a)$$

$${}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_{(r)M_z^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) = \frac{{}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}^\perp(\mathbf{x})}{\|{}^{(r)}\delta\mathbf{z}_{FEM}^\perp(\mathbf{x})\|_{\Omega_r}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_r. \quad (4.45b)$$

$${}^{(r)}b_k^{(n+\frac{1}{2})}(\tau) = {}^{(r)}b_k^{(n)}(\boldsymbol{\tau}), \quad k \in \{1, \dots, {}^{(r)}M_z^{(n)}\}, \quad \tau \in]0, \gamma], \quad (4.46a)$$

$${}^{(r)}b_{{}^{(r)}M_z^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) = 0, \quad \tau \in]0, \gamma], \quad (4.46b)$$

$${}^{(r)}b_{{}^{(r)}M_z^{(n)}+1}^{(n+\frac{1}{2})}(\gamma) = \left\| {}^{(r)}\boldsymbol{\delta}z_{FEM}^\perp(\mathbf{x}) \right\|_{\Omega_r}. \quad (4.46c)$$

La troisième et dernière étape est de contrôler la taille de $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ grâce à la *snapshot* POD en écrivant la matrice des corrélations temporelles.

La matrice des corrélations temporelles $\mathbf{C}^{(n+\frac{1}{2})}$ associée au champ de déplacement est symétrique, positive, de taille $M_u^{(n)} + 1$ et s'écrit :

$$C_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = C_{ij}^0 + \left(a_i^{(n+\frac{1}{2})}, a_j^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{\mathcal{I}_\gamma}, \quad (4.47a)$$

$$\sum_{i=1}^{M_u^{(n)}+1} C_{ij} v_j^{(k)} = \lambda_k v_i^{(k)}. \quad (4.47b)$$

où la matrice \mathbf{C}^0 est une matrice de corrélation provenant d'un calcul précédent, et où $(\mathbf{v}^{(k)})_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ et $(\lambda_k)_{k=1}^{M_u^{(n)}+1}$ sont les vecteurs propres et les valeurs propres associées de la matrice $\mathbf{C}^{(n+\frac{1}{2})}$.

La base réduite $(\boldsymbol{\psi}_j^{(n+1)})_{j=1}^{M_u^{(n+1)}}$ et les déplacements réduits $(a_j^{(n+1)})_{j=1}^{M_u^{(n+1)}}$ sont mis à jour selon :

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}+1} \boldsymbol{\psi}_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) v_k^{(j)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.48a)$$

$$a_j^{(n+1)}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{M_u^{(n)}+1} a_k^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) v_k^{(j)}, \quad \tau \in]0, \gamma]. \quad (4.48b)$$

De la même façon, la taille de ${}^{(r)}\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$ est contrôlée grâce à la *snapshot* POD en écrivant la matrice des corrélations temporelles.

La matrice des corrélations temporelles ${}^{(r)}\mathbf{G}^{(n+\frac{1}{2})}$ associée au champ de variables internes est symétrique, positive, de taille ${}^{(r)}M_z^{(n)} + 1$ et s'écrit :

$${}^{(r)}G_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = {}^{(r)}G_{ij}^0 + \left({}^{(r)}b_i^{(n+\frac{1}{2})}, {}^{(r)}b_j^{(n+\frac{1}{2})} \right)_{\mathcal{I}_\gamma}, \quad (4.49a)$$

$$\sum_{i=1}{{}^{(r)}M_z^{(n)}+1} {}^{(r)}G_{ij} {}^{(r)}v_j^{(k)} = {}^{(r)}\lambda_k {}^{(r)}v_i^{(k)}. \quad (4.49b)$$

où la matrice ${}^{(r)}\mathbf{G}^0$ est une matrice de corrélation provenant d'un calcul précédent, et où $({}^{(r)}\mathbf{v}^{(k)})_{k=1}{{}^{(r)}M_z^{(n)}+1}$ et $({}^{(r)}\lambda_k)_{k=1}{{}^{(r)}M_z^{(n)}+1}$ sont les vecteurs propres et les valeurs propres

associées de la matrice ${}^{(r)}\mathbf{G}^{(n+\frac{1}{2})}$.

La base réduite $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{(r)M_z^{(n+1)}}$ et les variables internes réduites $\left({}^{(r)}b_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{(r)M_z^{(n+1)}}$ sont mises à jour selon :

$${}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_j^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}+1} {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n+\frac{1}{2})}(\mathbf{x}) {}^{(r)}v_k^{(j)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \quad (4.50a)$$

$${}^{(r)}b_j^{(n+1)}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}+1} {}^{(r)}b_k^{(n+\frac{1}{2})}(\boldsymbol{\tau}) {}^{(r)}v_k^{(j)}, \quad \boldsymbol{\tau} \in]0, \gamma]. \quad (4.50b)$$

4.2.5 Construction désynchronisée du TID

De la même façon que dans la méthode APHR synchronisée, le domaine Ω est divisé en deux ensembles complémentaires $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ et $\bar{\Omega}_{\Pi}^{(n)}$ où $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ tel que :

$$\Omega_{\Pi}^{(n)} = \Omega_{\Pi_z}^{(n)} \cup \Omega_{\Pi_u}^{(n)} \cup \Omega_F \cup \Omega_I. \quad (4.51)$$

Le domaine Ω_I est une région d'intérêt et contient un ensemble d'éléments fixé par l'utilisateur. Le domaine Ω_F contient des éléments tels que les chargements volumique \mathbf{f} et surfacique \mathbf{F} restent visibles.

Les domaines $\Omega_{\Pi_z}^{(n)}$ et $\Omega_{\Pi_u}^{(n)}$ contiennent un ensemble d'éléments et sont construits par la méthode APHR désynchronisée comme une concaténation de sous-domaines construits sur chaque sous-domaines selon un procédé automatique en deux étapes : c'est le premier apport de la méthode.

Les approches *Partial Least Square* (PLS) (analyse en composantes principales, analyse canonique, corrélation PLS régression PLS) [138, 57, 33, 130] proposent d'analyser les relations entre deux ensembles de données. En particulier, la régression PLS permet d'expliquer certaines variables appelées variables expliquées déduites d'autres variables appelées variables explicatives. Ainsi la regression PLS proposée par Krishnan et al. [95, 76] introduit des variables liées à l'activité cérébrale nommées *predictors* permettant d'expliquer des variables physiologiques nommées *predicted variables*. Les corrélations PLS peuvent aider à trouver le meilleur ensemble de variables explicatives mais des moyens de construction heuristiques sont présentés dans cette étude.

Le domaine ${}^{(r)}W_{\Pi_z}^{(n)}$ contient $N_{\mathcal{E}} \times {}^{(r)}M_z^{(n)}$ éléments pour lesquels les modes empiriques relatifs au champ de variables internes sont maximum selon :

$${}^{(r)}W_{\Pi_z}^1 = \bigcup_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega} \left| {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right|, \quad (4.52a)$$

$${}^{(r)}W_{\Pi_z}^L = \bigcup_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^{L-1} {}^{(r)}W_{\Pi_z}^l} \left| {}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)} \right|, \quad L > 1, \quad (4.52b)$$

$${}^{(r)}W_{\Pi_z}^{(n)} = \bigcup_{l=1}^{N_{\mathcal{E}}} {}^{(r)}W_{\Pi_z}^l. \quad (4.52c)$$

Le domaine ${}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^{(n)}$ est centré sur le domaine ${}^{(r)}W_{\Pi_z}^{(n)}$ et contient $N_{\mathcal{B}}$ couches d'éléments voisins. Couche après couche, les éléments $(e_i)_{i=1}^{N_e}$ sont testés et ajoutés s'il sont connectés à la couche précédente selon :

$${}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^0 = {}^{(r)}W_{\Pi_z}^{(n)}, \quad (4.53a)$$

$$\text{si } d\left(e_i, {}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^{L-1}\right) = 0, \text{ alors } e_i \in {}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^L, \quad (4.53b)$$

$${}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^{(n)} = {}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^{N_{\mathcal{B}}}, \quad (4.53c)$$

$$\Omega_{\Pi_z}^{(n)} = \bigcup_{r=1}^R {}^{(r)}\Omega_{\Pi_z}^{(n)}, \quad (4.53d)$$

où la fonction d mesure la distance entre un élément et un groupe d'éléments. Cette distance est évidemment nulle lorsque l'éléments considéré est limitrophe du groupe d'éléments.

Le domaine $W_{\Pi_u}^{(n)}$ contient $N_{\mathcal{E}} \times M_u^{(n)}$ éléments pour lesquels les gradients des modes empiriques relatifs au champ de déplacement sont maximum selon :

$$W_{\Pi_u}^1 = \bigcup_{k=1}^{M_u^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega} \left(\epsilon \left(\psi_k^{(n)} \right) : \epsilon \left(\psi_k^{(n)} \right) \right), \quad (4.54a)$$

$$W_{\Pi_u}^L = \bigcup_{k=1}^{M_u^{(n)}} \operatorname{argmax}_{\Omega \setminus \cup_{l=1}^{L-1} W_{\Pi_u}^l} \left(\epsilon \left(\psi_k^{(n)} \right) : \epsilon \left(\psi_k^{(n)} \right) \right), \quad L > 1, \quad (4.54b)$$

$$W_{\Pi_u}^{(n)} = \bigcup_{l=1}^{N_{\mathcal{E}}} W_{\Pi_u}^l. \quad (4.54c)$$

Le domaine $\Omega_{\Pi_u}^{(n)}$ est centré sur le domaine $W_{\Pi_u}^{(n)}$ et contient $(N_{\mathcal{B}} + 1)$ couches d'éléments voisins. Couche après couche, les éléments $(e_i)_{i=1}^{N_e}$ sont testés et ajoutés s'il sont connectés à la couche précédente selon :

$$\Omega_{\Pi_u}^0 = W_{\Pi_u}^{(n)}, \quad (4.55a)$$

$$\text{si } d\left(e_i, \Omega_{\Pi_u}^{L-1}\right) = 0, \text{ alors } e_i \in \Omega_{\Pi_u}^L, \quad (4.55b)$$

$$\Omega_{\Pi_u}^{(n)} = \Omega_{\Pi_u}^{N_{\mathcal{B}}+1}. \quad (4.55c)$$

Les paramètres d'hyper-réduction restent $N_{\mathcal{E}}$ et $N_{\mathcal{B}}$. Le premier donne le nombre d'éléments sélectionnés par mode et par sous-domaine et l'autre donne le nombre de couches d'éléments ajoutées.

Ainsi le TID est construit de façon désynchronisée de sorte que chaque sous-domaine Ω_r apporte sa contribution. Ce procédé a pour objectif immédiat de garder les sous-domaines désynchronisés visibles sous le masque du TID mais c'est également le moyen de construire un TID qui s'étale sur l'ensemble du domaine Ω . De la sorte, il s'avère plus facile de capter la non uniformité des déformations anélastiques ce qui permet d'obtenir des prévisions hyper-réduites de meilleure qualité.

4.2.6 Algorithme incremental désynchronisé

Selon une approche incrémentale, l'algorithme APHR désynchronisé non adaptatif est donné par l'algorithme 8 et l'algorithme APHR désynchronisé adaptatif est donné par l'algorithme 9.

Algorithme 8 Algorithme APHR désynchronisé non adaptatif

Charger la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$, les bases réduites $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$ et le TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$
pour $i = 1 \rightarrow N_t$ **faire**
 Calculer la prévision hyper-réduite HPOD afin de déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur Ω et le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ selon la formulation POD-Petrov-Galerkin avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$
 Pour chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r , calculer la projection ${}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r$ et étendre le champ de variables internes à $\bar{\Omega}_{\Pi} \cap \Omega_r$ selon la méthodologie Gappy-POD avec la base réduite $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$
 Calculer les indicateurs d'erreur $\eta_u(\boldsymbol{\gamma}_i)$ et $\eta_z(\boldsymbol{\gamma}_i)$ afin de vérifier la qualité de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ ainsi que la qualité du champ de variables internes sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$
 Ecrire $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$
 Pour chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r , écrire ${}^{(r)}\mathbf{z}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = {}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$
fin pour

Ces algorithmes sont implémentés dans le code de calcul Z-set.

4.3 Cas de calcul : plaque munie d'inclusions

4.3.1 Configuration géométrique

Le système à l'étude est une plaque carré Ω de côté 100 mm qui contient trois inclusions Ω_i dans une matrice Ω_m . Cette structure est décrite dans \mathbb{R}^2 sous l'hypothèse de contrainte plane. Les rayons des inclusions sont donnés par $r_1 = 5,5$ mm, $r_2 = 5,5$ mm et $r_3 = 8,8$ mm (Figure 4.5). Le maillage fait intervenir 6113 éléments quadrilatéraux quadratiques, 92101 degrés de liberté et 264753 variables internes dont 244017 sont dans la matrice et 20736 dans les inclusions.

Une loi de comportement de plasticité isotrope linéaire est utilisée pour cette analyse. Les données matériau sont les suivantes :

Matrice avec écrouissage isotrope linéaire : Seuil de plasticité $\sigma_{eq} \leq \sigma_0 + hp$, $E_m = 76000$ MPa, $\nu_m = 0,33$, $\sigma_0 = 80$ MPa, $h_m = 760$ MPa.

Inclusions élastiques linéaires : $E_i = 1610000$ MPa et $\nu_i = 0,33$.

Il faut noter que le nombre de variables internes n'est pas le même pour les deux lois de comportement. Les variables internes dans la matrice sont les déformations élastiques ϵ_{e11} , ϵ_{e22} , ϵ_{e12} , ϵ_{e33} et la déformation plastique cumulée p alors que les variables internes dans les inclusions sont les déformations élastiques ϵ_{e11} , ϵ_{e22} , ϵ_{e12} , ϵ_{e33} .

Algorithme 9 Algorithme APHR désynchronisé adaptatif

Charger l'éventuelle base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$, les éventuelles bases réduites

$\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$ et l'éventuel TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$

pour $i = 1 \rightarrow N_t$ **faire**

Calculer la prévision hyper-réduite HPOD afin de déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur Ω et le champ partiel de variables internes $\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ selon la formulation POD-Petrov-Galerkin avec la base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

Pour chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r , calculer la projection ${}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ sur $\Omega_{\Pi}^{(n)} \cap \Omega_r$ et étendre le champ de variables internes à $\bar{\Omega}_{\Pi} \cap \Omega_r$ selon la méthodologie

Gappy-POD avec la base réduite $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n)}}$

Calculer les indicateurs d'erreur $\eta_u(\boldsymbol{\gamma}_i)$ et $\eta_z(\boldsymbol{\gamma}_i)$ afin de vérifier la qualité de l'équilibre hyper-réduit sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$ ainsi que la qualité du champ de variables internes sur $\Omega_{\Pi}^{(n)}$

si $\eta_u(\boldsymbol{\gamma}_i) \leq \varepsilon_u \|\mathbf{R}_{\Pi FEM}|_{\mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}=0}(\boldsymbol{\gamma}_i)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$ et $\eta_z(\boldsymbol{\gamma}_i) \leq \varepsilon_z \|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)\|_{\Omega_{\Pi}^{(n)}}$ **alors**

Ecrire $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Pour chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r , écrire ${}^{(r)}\mathbf{z}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = {}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

sinon

Calculer la correction FEM afin de déterminer la correction $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ à apporter au champ de déplacement sur Ω et la correction $\boldsymbol{\delta}\mathbf{z}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$ à apporter au champ de variables internes sur Ω selon la formulation FEM-Galerkin avec la base

réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n)}}$

Ecrire $\mathbf{u}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = \mathbf{u}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) + \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Pour chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r , écrire ${}^{(r)}\mathbf{z}_{APHR}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) = {}^{(r)}\mathbf{z}_{HPOD}^{(n)}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i) + {}^{(r)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{z}_{FEM}(\cdot, \boldsymbol{\gamma}_i)$

Enrichir $\mathcal{V}_{POD}^{(n)}$ et ${}^{(r)}\mathcal{Z}_{POD}^{(n)}$ pour chaque sous-domaine désynchronisé Ω_r et

mettre à jour les bases réduites $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(n+1)}\right)_{k=1}^{M_u^{(n+1)}}$ et $\left({}^{(r)}\boldsymbol{\mu}_k^{(n+1)}\right)_{k=1}^{(r)M_z^{(n+1)}}$

Actualiser le TID $\Omega_{\Pi}^{(n+1)}$

fin si

fin pour

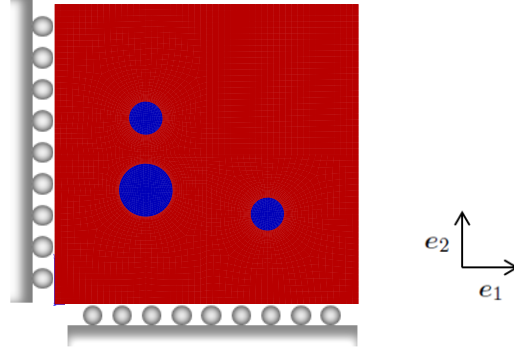


FIG. 4.5: Plaque munie d'inclusions. Plaque carrée

Les propriétés du matériau sont assez similaires à celles d'un alliage d'aluminium contenant des inclusions quasi-rigides. Les trois inclusions ont été regroupées dans un seul sous-domaine qui correspond à la phase rigide de la plaque.

4.3.2 Conditions aux limites et chargement cyclique

Les déplacements verticaux sont imposés à zéro sur l'arête inférieure de la plaque et les déplacements horizontaux sont imposés à zéro sur l'arête gauche. L'arête supérieure est soumise à une pression cyclique avec une montée en contrainte jusque $\sigma_l = 80$ MPa puis deux cycles d'amplitude $\sigma_l = 80$ MPa et de contrainte moyenne $\sigma_m = 0$ MPa dans la direction $\Sigma^{(1)} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$.

4.3.3 Description de la stratégie de calcul

Ce chapitre vise à évaluer les performances de la désynchronisation de la représentation des variables internes dans la méthode APHR en considérant plusieurs stratégies de calcul. Étant donné ces stratégies, chaque simulation est menée soit en synchronisant soit en désynchronisant la représentation des variables internes sur Ω_i et Ω_m . Les stratégies de calcul sont définies en modifiant la tolérance d'erreur sur les variables internes ε_z et le paramètre d'hyper-réduction $N_{\mathcal{E}}$, en gardant la tolérance d'erreur sur l'équilibre hyper-réduit relevé à $4,2 \cdot 10^{+2}$ et le second paramètre d'hyper-réduction $N_{\mathcal{B}} = 4$:

$S^{(1)}$: la stratégie $S^{(1)}$ est menée à l'aide de la méthode APHR. Elle fournit un calcul hyper-réduit *a priori* sans base initiale avec $\varepsilon_z = 1,8 \cdot 10^{-3}$, $N_{\mathcal{E}} = 1$. $S_D^{(1)}$ désigne la stratégie désynchronisée et $S_S^{(1)}$ désigne la stratégie synchronisée.

$S^{(2)}$: la stratégie $S^{(2)}$ est menée à l'aide de la méthode APHR. Elle fournit un calcul hyper-réduit *a priori* sans base initiale avec $\varepsilon_z = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $N_{\mathcal{E}} = 1$. $S_D^{(2)}$ désigne la stratégie désynchronisée et $S_S^{(2)}$ désigne la stratégie synchronisée.

$S^{(3)}$: la stratégie $S^{(3)}$ est menée à l'aide de la méthode APHR. Elle fournit un calcul hyper-réduit *a priori* sans base initiale avec $\varepsilon_z = 2,0 \cdot 10^{-3}$, $N_{\mathcal{E}} = 2$. $S_D^{(3)}$ désigne la stratégie désynchronisée et $S_S^{(3)}$ désigne la stratégie synchronisée.

$S^{(4)}$: la stratégie $S^{(4)}$ est menée à l'aide de la méthode APHR. Elle fournit un calcul

hyper-réduit *a priori* sans base initiale avec $\varepsilon_z = 1,4 \cdot 10^{-3}$, $N_{\mathcal{E}} = 2$. $S_D^{(4)}$ désigne la stratégie désynchronisée et $S_S^{(4)}$ désigne la stratégie synchronisée.

$S^{(5)}$: la stratégie $S^{(5)}$ est menée à l'aide de la méthode APHR. Elle fournit un calcul APHR dans lequel seules les étapes de correction et d'enrichissement sont menées à chaque incrément. Toutefois, le ROM contenant les bases réduites POD et le TID sont construits avec $N_{\mathcal{E}} = 1$ mais non utilisés. Par conséquent, les résultats sont identiques à ceux fournis par un calcul FEM. $S_D^{(5)}$ désigne la stratégie désynchronisée et $S_S^{(5)}$ désigne la stratégie synchronisée.

$S^{(6)}$: la stratégie $S^{(6)}$ est menée à l'aide de la FEM.

L'objet de ce cas d'étude est de présenter les effets de la désynchronisation de la représentation des variables internes sur le ROM, sur le TID et sur un indicateur de gain en temps de calcul défini comme le rapport du temps de calcul FEM standard et du temps de calcul hyper-réduit :

$$\eta = \frac{t_{FEM}}{t_{APHR}}. \quad (4.56)$$

4.3.4 Discussion des résultats

Prévisions de la méthode APHR Les prévisions de la méthode APHR selon le trajet de chargement $\Sigma^{(1)}$ sont montrées Figure 4.6.

Les petites oscillations observées sont dues au procédé de correction-enrichissement.

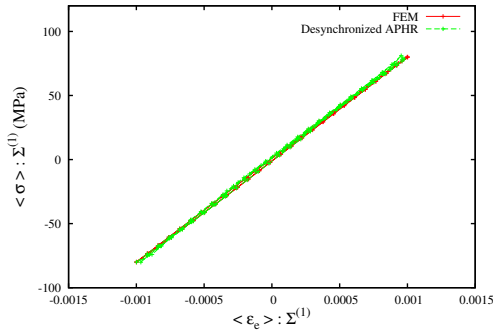
En observant les contraintes et les déformations élastiques dans la direction $\Sigma^{(1)}$, toutes les stratégies sont en accord avec les résultats FEM fournis par la stratégie $S^{(6)}$ pour toute la gamme de déformation considérée.

Par contre, considérant la déformation plastique cumulée, les stratégies désynchronisées fournissent de meilleures estimations que les stratégies synchronisées.

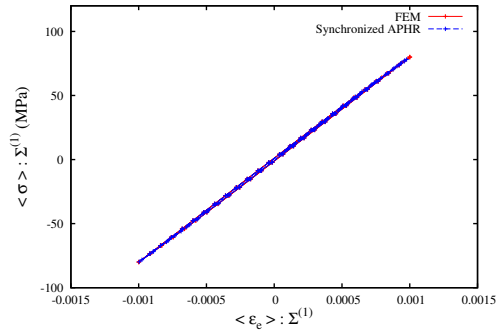
L'étude de l'indicateur d'erreur η_z permet de d'évaluer la précision des prévisions fournies par la méthode APHR (Figure 4.7). Pour les deux simulations $S_D^{(1)}$ et $S_S^{(1)}$, les pics d'erreurs sur les variables internes correspondent à une augmentation des déformations plastiques dans la plaque.

ROM et modes empiriques Les bases réduites considérées dans le ROM sont essentielles à la bonne précision des résultats fournis par la méthode APHR. Les modes empiriques sont modifiés et adaptés durant le traitement incrémental du problème afin de donner de bonnes estimations des champs de déplacement et de variables internes. Ainsi le ROM est mis à jour 36 fois dans la simulation $S_D^{(1)}$ et 34 fois dans la simulation $S_S^{(1)}$ (Figure 4.8). Dans les simulations $S_D^{(1)}$ et $S_S^{(1)}$, les nombres de modes empiriques relatifs au champ de déplacement sont très proches (Figure 4.8). Après un premier incrément élastique, le nombre de modes reste identique et égal à 1 durant toute la phase élastique initiale puis très proches au cours de la simulation. A la fin des simulations, la base réduite $\left(\psi_k^{(36)}\right)_{S_D^{(1)}}^7$ compte 7 modes empiriques et la base réduite $\left(\psi_k^{(34)}\right)_{S_S^{(1)}}^6$ en compte 6 après une POD finale.

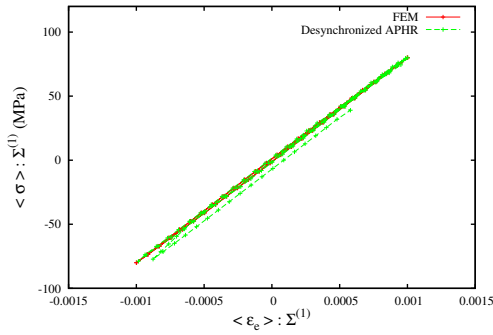
Au contraire, il y a une grande différence dans le nombre de modes empiriques relatifs au champ de variables internes (Figure 4.8). En effet, alors que les inclusions restent élastiques sous le chargement cyclique, des modes supplémentaires sont nécessaires afin



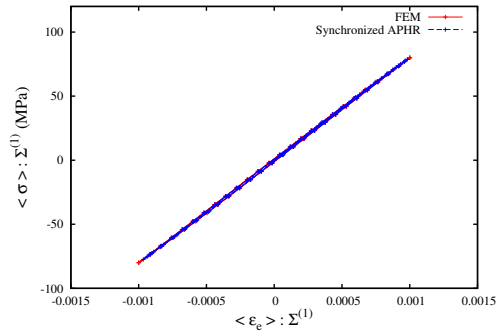
(a) Stratégies $S_D^{(1)}$ et $S^{(6)}$. Calcul désynchronisé hyper-réduit et comparaison avec la FEM. Contrainte σ_{22} et déformation élastique ϵ_{e22}



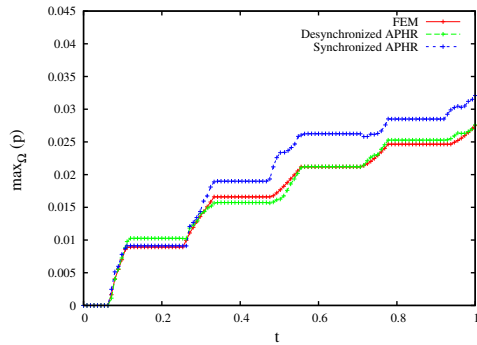
(b) Stratégies $S_S^{(1)}$ et $S^{(6)}$. Calcul synchronisé hyper-réduit et comparaison avec la FEM. Contrainte σ_{22} et déformation élastique ϵ_{e22}



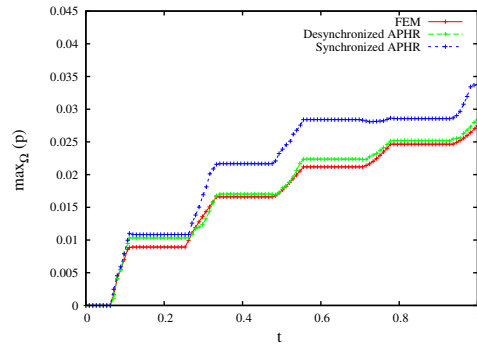
(c) Stratégies $S_D^{(2)}$ et $S^{(6)}$. Calcul désynchronisé hyper-réduit et comparaison avec la FEM. Contrainte σ_{22} et déformation élastique ϵ_{e22}



(d) Stratégies $S_S^{(2)}$ et $S^{(6)}$. Calcul synchronisé hyper-réduit et comparaison avec la FEM. Contrainte σ_{22} et déformation élastique ϵ_{e22}



(e) Stratégie $S^{(1)}$ et $S^{(6)}$. Calcul hyper-réduit et comparaison avec la FEM. Déformation plastique cumulée



(f) Stratégie $S^{(2)}$ et $S^{(6)}$. Calcul hyper-réduit et comparaison avec la FEM. Déformation plastique cumulée

FIG. 4.6: Plaque munie d'inclusions. Prévisions de la méthode APHR dans la direction $\Sigma^{(1)}$

de capter l'écoulement du champ de déformation plastique dans la matrice. C'est pourquoi le nombre de mode dans les inclusions est bien plus faible que dans la matrice dans la simulation $S_D^{(1)}$. Toutefois, ce nombre n'est pas égal à 1 car bien qu'élastiques,

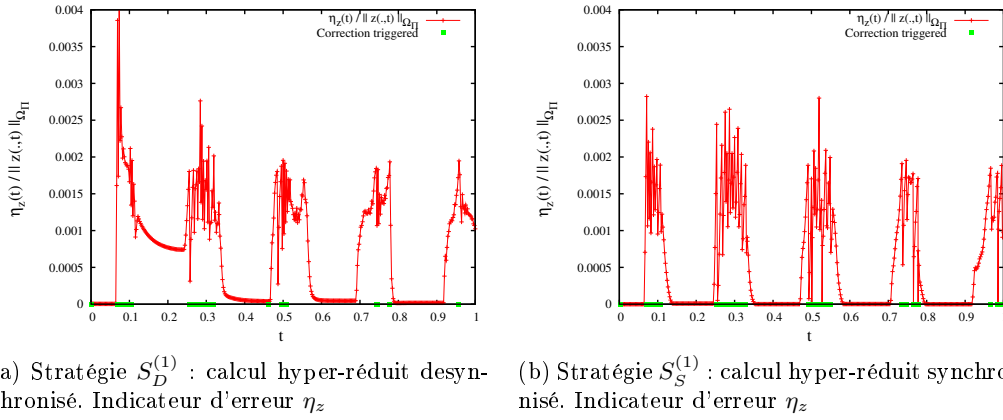


FIG. 4.7: Plaque munie d'inclusions. Indicateur d'erreur η_z de la méthode APHR selon $\Sigma^{(1)}$

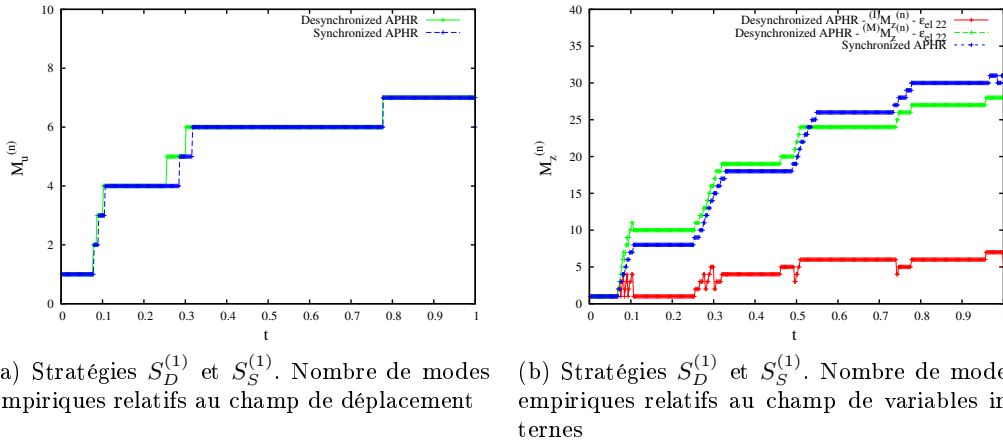


FIG. 4.8: Plaque munie d'inclusions. Évolution du nombre de modes

les déformations dans les inclusions subissent l'écoulement plastique qui se produit dans la matrice. Il faut d'ailleurs noter que pour toutes les bases réduites, une évolution du nombre de modes correspond à une augmentation de la plasticité. Dans la simulation $S_D^{(1)}$, la base réduite $\left({}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_k^{(36)} S_D^{(1)} \right)_{k=1}^{28}$ contient finalement 28 modes empiriques relatifs à la déformation élastique ϵ_{e22} dans la matrice Ω_m et la base réduite $\left({}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_k^{(36)} S_D^{(1)} \right)_{k=1}^5$ contient finalement 5 modes empiriques relatifs à la déformation élastique ϵ_{e22} dans les inclusions Ω_i (Figure 4.9). Dans la simulation $S_S^{(1)}$, la base réduite $\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(34)} S_S^{(1)} \right)_{k=1}^{31}$ contient finalement 31 modes empiriques relatifs à la déformation élastique ϵ_{e22} (Figure 4.9). La désynchronisation de la représentation des variables internes permet donc de réduire le nombre de modes empiriques considérés dans l'analyse.

Par une simple comparaison visuelle, les modes empiriques désynchronisés semblent moins bruités que ceux synchronisés. Toutefois, afin de comprendre les différences entre ces bases réduites, les modes empiriques dans la simulation $S^{(1)}$ sont comparés à ceux

dans la simulation $S^{(5)}$ à l'aide d'un outils qui évalue une matrice de corrélation. Cette approche est utilisée en vibration pour caractériser la matrice MAC (*Modal Assurance Criteria*) en comparant les modes expérimentaux et les modes calculés. Pour deux bases réduites dont les modes sont identiques et rangés dans le même ordre, la matrice de corrélation est diagonale. La matrice ${}^{(m)}\mathbf{G}^{(36,240)}$ évalue la corrélation entre les bases $\left({}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_k^{(36)}\right)_{S_D^{(1)}}^{28}$ et $\left({}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_k^{(240)}\right)_{S_D^{(5)}}^{37}$. De la même façon, la matrice ${}^{(i)}\mathbf{G}^{(36,240)}$ évalue la corrélation entre les bases $\left({}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_k^{(36)}\right)_{S_D^{(1)}}^5$ et $\left({}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_k^{(240)}\right)_{S_D^{(5)}}^2$ et la matrice $\mathbf{G}^{(34,183)}$ évalue la corrélation entre les bases $\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(36)}\right)_{S_S^{(1)}}^{31}$ et $\left(\boldsymbol{\mu}_k^{(183)}\right)_{S_S^{(5)}}^{23}$. Ces matrices sont définies par :

$${}^{(m)}G_{ij}^{(36,240)} = \frac{\int_{\Omega} {}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_i^{(36)}\big|_{S_D^{(1)}} \cdot {}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_j^{(240)}\big|_{S_D^{(5)}} d\Omega}{\left\| {}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_i^{(36)}\big|_{S_D^{(1)}} \right\|_{\Omega} \left\| {}^{(m)}\boldsymbol{\mu}_j^{(240)}\big|_{S_D^{(5)}} \right\|_{\Omega}}, \quad (4.57a)$$

$${}^{(i)}G_{ij}^{(36,240)} = \frac{\int_{\Omega} {}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_i^{(36)}\big|_{S_D^{(1)}} \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_j^{(240)}\big|_{S_D^{(5)}} d\Omega}{\left\| {}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_i^{(36)}\big|_{S_D^{(1)}} \right\|_{\Omega} \left\| {}^{(i)}\boldsymbol{\mu}_j^{(240)}\big|_{S_D^{(5)}} \right\|_{\Omega}}. \quad (4.57b)$$

$$G_{ij}^{(34,183)} = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}_i^{(34)}\big|_{S_S^{(1)}} \cdot \boldsymbol{\mu}_j^{(183)}\big|_{S_S^{(5)}} d\Omega}{\left\| \boldsymbol{\mu}_i^{(34)}\big|_{S_S^{(1)}} \right\|_{\Omega} \left\| \boldsymbol{\mu}_j^{(183)}\big|_{S_S^{(5)}} \right\|_{\Omega}}. \quad (4.58)$$

Les premières valeurs de ces matrices sont :

$${}^{(m)}\mathbf{G}^{(36,240)} = \begin{bmatrix} 0,999957434 & -0,539589187 & 0,218667083 & -0,211744125 & -0,325822279 & \dots \\ -0,55817966 & 0,991965428 & -0,279225692 & 0,243787512 & 0,427956299 & \dots \\ 0,193180891 & -0,252148378 & 0,908659836 & -0,115502543 & -0,160934728 & \dots \\ 0,265618498 & -0,356133981 & 0,433747578 & 0,100048685 & -0,489480076 & \dots \\ 0,307459796 & -0,496269697 & 0,46178988 & -0,722109292 & -0,45845673 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.59a)$$

$${}^{(i)}\mathbf{G}^{(36,240)} = \begin{bmatrix} 0,999942549 & -0,040332825 \\ 0,068564806 & -0,965578331 \\ -0,051629156 & -0,19448537 \\ -0,179879308 & 0,080012665 \\ -0,048790169 & 0,063651375 \end{bmatrix} \quad (4.59b)$$

$$\mathbf{G}^{(34,183)} = \begin{bmatrix} 0,856455965 & 0,363293729 & 0,476322254 & -0,523331052 & 0,308206934 & \dots \\ 0,729411144 & 0,999962173 & -0,602742944 & 0,552558584 & -0,27391363 & \dots \\ -0,051969927 & -0,712578254 & 0,979171952 & -0,969386093 & 0,565972866 & \dots \\ -0,134592817 & 0,568620645 & -0,986559739 & 0,991590215 & -0,63323142 & \dots \\ -0,133119368 & 0,496478769 & -0,857461863 & 0,868198587 & -0,742319521 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Dans la matrice Ω_m , les deux premiers modes dans la simulation $S_D^{(1)}$ sont très ressemblants à ceux dans la simulation $S_D^{(5)}$ car ${}^{(m)}G_{11}^{(36,240)}$ est supérieur à 0,9999 et ${}^{(m)}G_{22}^{(36,240)}$

est supérieur à 0,99. Pour les modes d'ordre plus élevé, cette ressemblance est plus faible. Il faut noter également une inversion : c'est le mode 5 de la simulation $S_D^{(1)}$ qui ressemble le plus au mode 4 de la simulation $S_D^{(5)}$. De même dans les inclusions Ω_i , les deux premiers modes dans la simulation $S_D^{(1)}$ sont très ressemblants à ceux dans la simulation $S_D^{(5)}$ car ${}^{(i)}G_{11}^{(36,240)}$ est supérieur à 0,9999 et ${}^{(i)}G_{22}^{(36,240)}$ est environ égal à 0,96. Pourtant trois autres modes sont nécessaires dans la simulation $S_D^{(1)}$ pour corriger la forme du deuxième mode.

En comparaison, $G_{11}^{(34,183)}$ est seulement égal à 0,85 ce qui montre une moins bonne ressemblance entre le premier mode la simulation $S_S^{(1)}$ et celui de la simulation $S_S^{(5)}$. Cette valeur est en effet bien plus faible que les coefficients de corrélation obtenus dans le cas désynchronisé pour la comparaison du premier mode. Par contre $G_{22}^{(34,183)}$ est supérieur à 0,9999. Il faut également noter une confusion dans les modes 3 et 4 car les valeurs de $G_{33}^{(34,183)}$, $G_{43}^{(34,183)}$, $G_{34}^{(34,183)}$ et $G_{44}^{(34,183)}$ sont toutes supérieures à 0,96.

Ainsi l'hyper-réduction introduit des erreurs dans la représentation modale car mais les modes obtenus par désynchronisation sont moins bruités par le processus d'adaptation de la méthode APHR (Figure 4.10). De plus, la complexité du champ de variables internes dans les inclusions est sur-évaluée avec l'hyper-réduction globale : alors que 5 modes empiriques suffisent avec la version désynchronisée, il y en a 31 dans la version globale.

TID et gains en temps de calcul Pour toutes les simulations, le TID est construit en utilisant uniquement le champ de déplacement de sorte que sa taille soit proche dans chaque simulation malgré les représentations desynchronisées ou non des variables internes. Les TID sont montrés Figure 4.11. La désynchronisation de la représentation des variables internes a une influence indirecte sur la position du TID car il est placé en fonction des modes empiriques contenus dans le ROM. Ainsi, la fonction caractéristique dans la simulation $S^{(1)}$ est comparée à celle dans la simulation $S^{(5)}$. Le coefficient $h_D^{(36,240)}$ évalue la corrélation entre la fonction caractéristique $\xi_{S_D^{(1)}}^{(36)}$ et la fonction caractéristique $\xi_{S_D^{(5)}}^{(240)}$. Le coefficient $h_S^{(34,183)}$ évalué la corrélation entre la fonction caractéristique $\xi_{S_S^{(1)}}^{(34)}$ et la fonction caractéristique $\xi_{S_S^{(5)}}^{(183)}$.

Ces fonctions caractéristiques sont définies par :

$$\xi_{S_D^{(1)}}^{(36)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}^{(36)} S_D^{(1)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.61a)$$

$$\xi_{S_D^{(5)}}^{(240)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}^{(240)} S_D^{(5)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.62a)$$

$$\xi_{S_D^{(1)}}^{(36)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}^{(34)} S_S^{(1)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.63a)$$

$$\xi_{S_D^{(5)}}^{(240)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\Pi}^{(183)} S_S^{(5)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.64a)$$

$$(4.64b)$$

Ces coefficients sont définis par :

$$h_D^{(36,240)} = \frac{\int_{\Omega} \xi_{S_D^{(1)}}^{(36)} \cdot \xi_{S_D^{(5)}}^{(240)} d\Omega}{\left\| \xi_{S_D^{(1)}}^{(36)} \right\|_{\Omega} \left\| \xi_{S_D^{(5)}}^{(240)} \right\|_{\Omega}}, \quad (4.65a)$$

$$h_S^{(34,183)} = \frac{\int_{\Omega} \xi_{S_S^{(1)}}^{(34)} \cdot \xi_{S_S^{(5)}}^{(183)} d\Omega}{\left\| \xi_{S_S^{(1)}}^{(34)} \right\|_{\Omega} \left\| \xi_{S_S^{(5)}}^{(183)} \right\|_{\Omega}}. \quad (4.65b)$$

Les valeurs de ces coefficients sont $h_D^{(36,240)} = 0,839829195$ et $h_S^{(34,183)} = 0,612712758$. Cette meilleure corrélation dans le cas de la simulation désynchronisée trahit les erreurs dans la représentation modale qui résultent de l'hyper-réduction. Plus précisément, les erreurs sur les bases réduites, y compris celle dédiée au champ de déplacement, dues à l'hyper-réduction sont plus faibles en désynchronisant la représentation des variables internes.

Les gains en temps de calcul sont présentés Table 4.1.

	$S^{(1)}$	$S^{(2)}$	$S^{(3)}$	$S^{(4)}$
Calcul désynchronisé S_D	4,52356159	5,519493052	2,713228548	4,792280518
Calcul synchronisé S_S	3,827400071	4,030962225	3,111191695	3,438160592

TAB. 4.1: Plaque munie d'inclusions. Gains en temps de calcul η

Le TID est plus étendu dans la simulation $S_D^{(1)}$ que dans la simulation $S_S^{(1)}$ alors qu'il est moins étendu dans la simulation $S_D^{(2)}$ que dans la simulation $S_S^{(2)}$. Mais pour les deux stratégies $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$, le calcul desynchronisé est plus efficace car plus rapide et plus précis.

Il faut noter qu'en augmentant la tolérance sur les variables internes ε_z en passant de $S^{(1)}$ à $S^{(2)}$, les gains en temps de calcul sont augmentés. A l'inverse, en augmentant le paramètre d'hyper-réduction $N_{\mathcal{E}}$, les gains en temps de calcul sont diminués.

Pour les simulations $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(4)}$, le calcul desynchronisé est plus rapide que le calcul synchronisé. Certes, pour la simulation $S^{(3)}$, le calcul synchronisé est plus rapide mais la précision est moins bonne. Pour classer ces simulations, un diagramme de performance est utilisé.

Performance de la représentation desynchronisée Pour étudier les effets de la représentation desynchronisée, les simulations $S^{(1)}$ à $S^{(4)}$ sont placées dans un diagramme erreur-gain $\left(\frac{t_{APHR}}{t_{FEM}}, \max_I |\max_{\Omega}(p_{APHR}) - \max_{\Omega}(p_{FEM})| \right)$, où p est la déformation plastique cumulée (Figure 4.12). Ainsi, la desynchronisation de la représentation des variables internes permet de réaliser des calculs plus rapides et plus précis.

4.3.5 Conclusion

La méthode APHR désynchronisée introduit une décomposition du domaine spatial qui permet d'introduire une décorrélation temporelle des transformations significatives du champ de variables internes. La méthode APHR désynchronisée construit une représentation synchronisée du champ de déplacement et une représentation désynchronisée du champ de variables internes.

La désynchronisation de la représentation des variables internes fournit de meilleurs résultats en terme de précision et de gains en temps de calcul. En effet, la meilleure estimation des variables internes est fondée sur deux points :

- (i) les variables internes sont évaluées avec une meilleure précision. En effet, les bases réduites désynchronisées relatives au champ de variables internes possèdent moins de modes et ces modes sont mieux décrits car moins bruités par le processus d'adaptation de la méthode APHR. De plus, l'extrapolation à l'extérieur du TID est opérée par sous-domaine désynchronisé ce qui induit une meilleure précision dans l'extrapolation.
- (i) la représentation désynchronisée des variables internes permet une construction du TID basée sur la partition des sous-domaines désynchronisés. Cela permet de prendre en compte chaque mode empirique pour chaque sous-domaine et par conséquent de tenir compte des transformations significatives.

La meilleure estimation des variables internes a un impact sur le temps de calcul. Comme les modes empiriques associée à la représentation désynchronisée sont de meilleure qualité, le procédé de correction-enrichissement est moins sollicité et les gains en temps de calcul sont plus importants. Dans un diagramme erreur-gain, la désynchronisation de la représentation des variables internes apporte une meilleure précision des calculs.

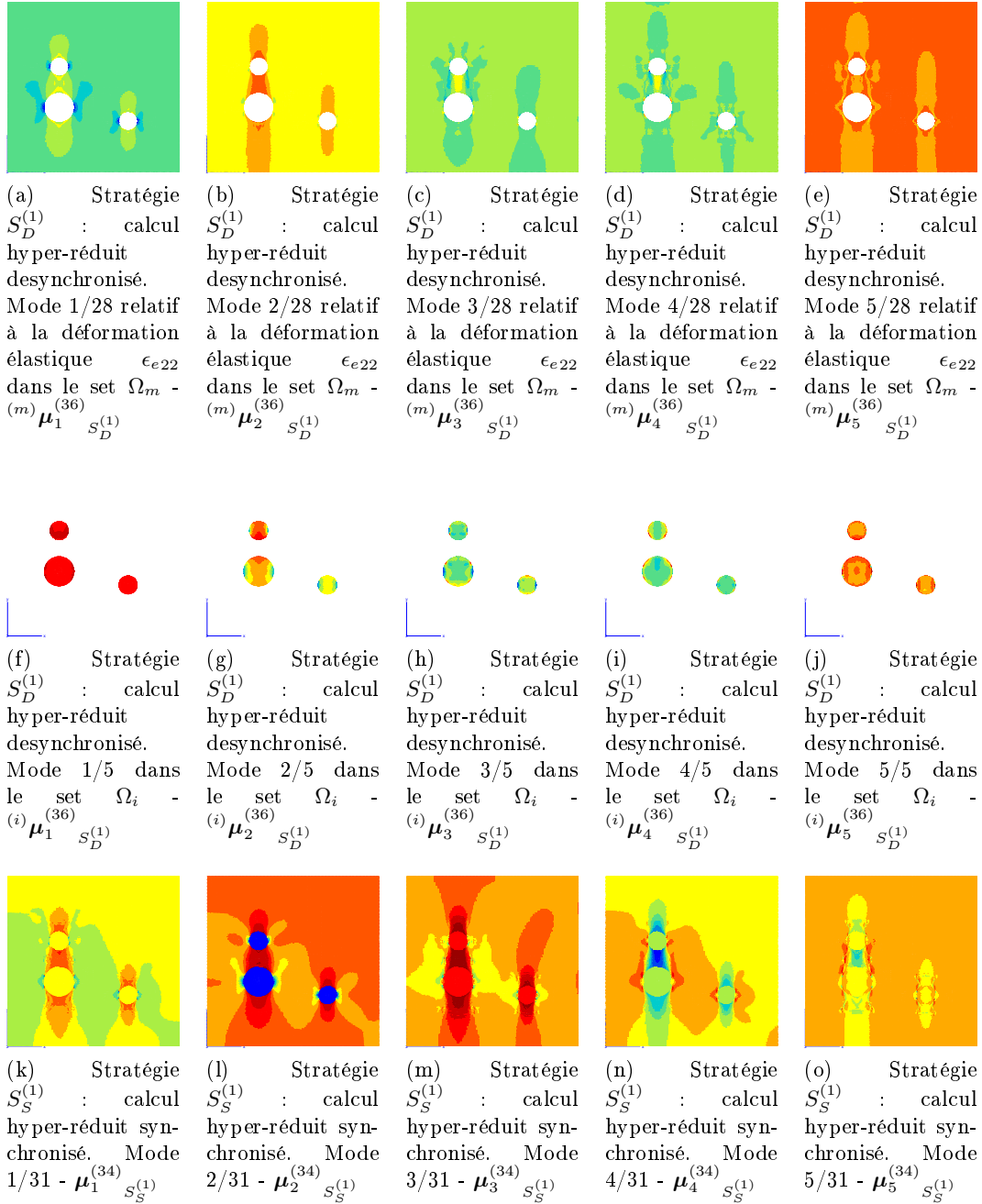


FIG. 4.9: Plaque munie d'inclusions. Modes empiriques relatifs à la déformation élastique ϵ_{e22} dans la direction $\Sigma^{(1)}$

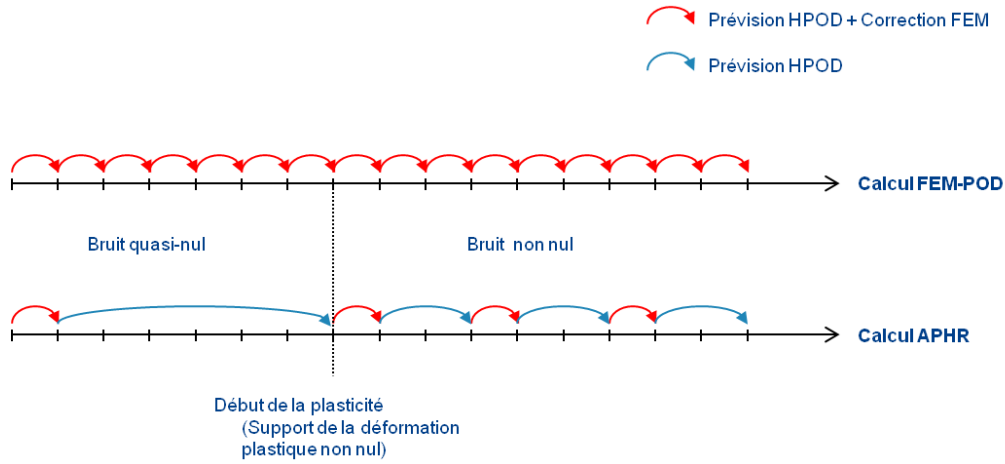


FIG. 4.10: Bruit introduit par l'hyper-réduction durant le processus d'adaptation de la méthode APHR

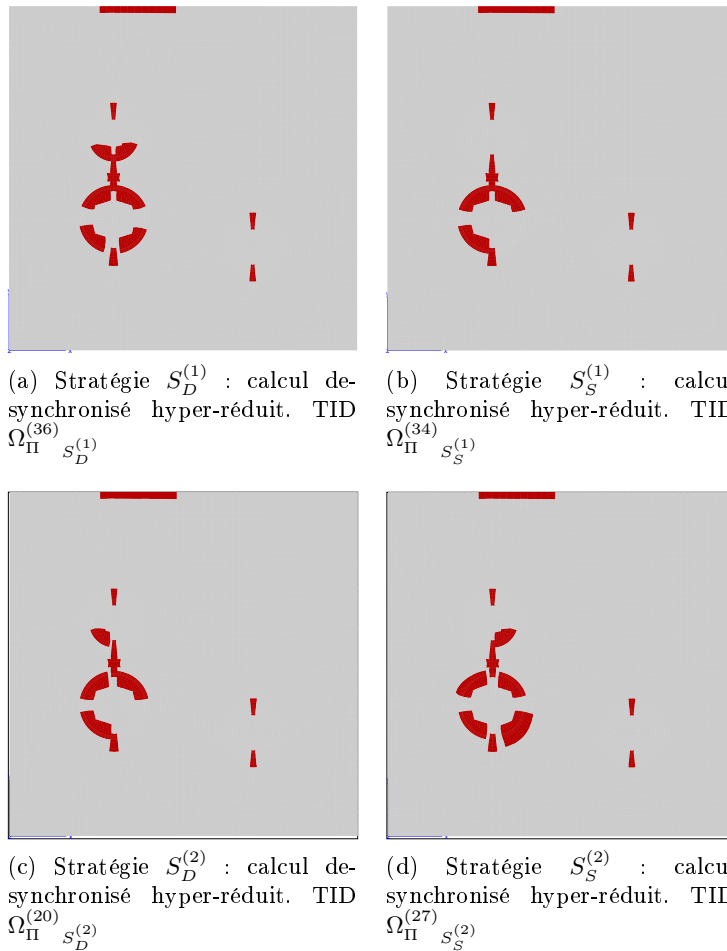


FIG. 4.11: Plaque munie d'inclusions. TID dans les simulations $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$

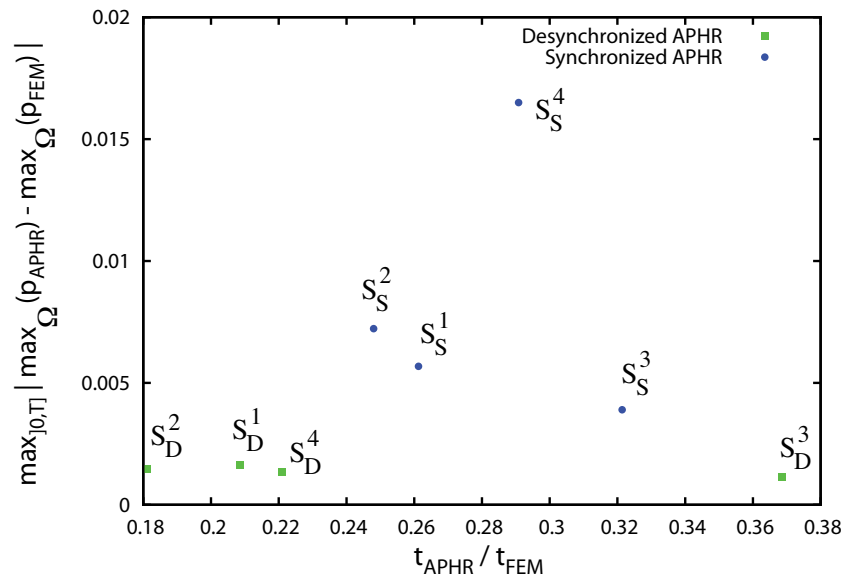


FIG. 4.12: Plaque munie d'inclusions. Performance des prévisions de la méthode APHR dans la direction $\Sigma^{(1)}$

Chapitre 5

Analyse en champ de transformation

Couramment utilisés en conception, les matériaux composites permettent de tirer profit des propriétés de chacun de leurs constituants. Les caractéristiques des matériaux composites (rigidité ou souplesse, résistance, conductivité thermique, permittivité électrique) peuvent être adaptées selon la nature de la structure pour même obtenir des caractéristiques atypiques.

La plupart des matériaux composites sont intrinsèquement multi-échelles, c'est à dire que l'échelle de chaque constituant est bien plus faible que l'échelle de la structure. L'échelle macroscopique est l'échelle de la structure alors que l'échelle microscopique est l'échelle des constituants (l'échelle mésoscopique est une échelle intermédiaire, par exemple celle de la cellule élémentaire en homogénéisation périodique).

La démarche d'homogénéisation permet de passer de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique et obtenir des propriétés homogénéisées équivalentes à partir des propriétés des constituants du matériau composite et leur arrangement géométrique. À l'inverse, la démarche de localisation ou recouvrement permet de passer de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique. Ces propriétés équivalentes sont souvent difficiles et relativement coûteuses à calculer ce qui a rendu nécessaire le développement de modèles analytiques et numériques permettant de dériver des propriétés homogénéisées directement des composants du matériau composite et leur arrangement géométrique. Ces développements ont été effectués par Talbot et al., Willis et al., Ponte Castañeda et al. [128, 136, 108] parmi de nombreux autres.

Dans le cas des matériaux composites linéaires, sous l'hypothèse de séparation d'échelle, l'analyse est constituée de deux problèmes indépendants :

- (i) un problème d'homogénéisation à l'échelle microscopique,
- (ii) un problème de structure à l'échelle macroscopique.

Le problème d'homogénéisation est un problème préliminaire qui permet de calculer les propriétés homogénéisées.

Dans le cas des matériaux composites non linéaires, l'analyse est bien plus complexe. Elle est constituée de deux problèmes fortement couplés :

- (i) un problème de structure à l'échelle macroscopique dans lequel la loi de comportement homogénéisée décrit la relation entre la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique solution du second problème,
- (ii) un problème d'homogénéisation à l'échelle microscopique dans lequel le chargement est décrit par la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique

solution du problème de structure.

Cette situation est rencontrée dans le cas de problèmes élasto-viscoplastiques ou élastoplastiques.

De nombreuses méthodes multi-échelles sont disponibles dans la littérature : les méthodes d'homogénéisation asymptotique, les approches en champ moyen, les méthodes semi-analytiques...

Parmi les méthodes semi-analytiques figurent la *Transformation Field Analysis* (TFA) développée par Dvorak et al. [44, 40] et la *Nonuniform Transformation Field Analysis* (NTFA) développée par Michel et Suquet [96, 97] décrites dans ce chapitre.

5.1 Problème préliminaire

Le problème préliminaire permet de comprendre le cadre d'étude de la TFA et de la NTFA. Le domaine Ω représente un Volume Élémentaire Représentatif (*Representative Element Volume*) (REV) d'un matériau composite constitué d'un ensemble de sous-domaines désynchronisés $(\Omega_r)_{r=1}^R$ qui coïncident par défaut avec les phases du matériau. La fonction caractéristique $\chi^{(r)}$ est définie par :

$$\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.1a)$$

$$(5.1b)$$

La fraction volumique c_r s'écrit :

$$c_r = \langle \chi^{(r)} \rangle. \quad (5.2)$$

Les conditions aux limites sont supposées périodiques de façon à ce que la condition de localisation micro-macro de Hill soit respectée. Ainsi pour un champ de déformation compatible et un champ de contrainte en équilibre qui vérifient les conditions aux limites sur la cellule élémentaire, l'égalité $\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$ est respectée.

5.1.1 Champs propres

Dans les méthodes de champs de transformation, les déformations anélastiques sont considérées comme des déformations propres indépendantes du chargement. Dans ce cas, les contraintes locales sont déterminées à partir des déformations propres en résolvant des problèmes linéaires élastiques et des déformations anélastiques calculées à l'aide de la loi d'écoulement.

Les lois d'états dans chaque sous-domaine Ω_r :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.3a)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = -\mathbf{L}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}^{an}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.3b)$$

Le champ $\boldsymbol{\epsilon}^{an}$ peint une distribution de déformations propres et $\boldsymbol{\tau}$ est le champ de contrainte propre correspondant. Le champ des déformations propres peut avoir plusieurs origines physiques. Il peut résulter d'une dilatation thermique, d'une contrainte viscoplastique ou bien d'une déformation caractéristique dans un problème de changement de phase.

5.1.2 Principe de superposition

Si $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ et $\boldsymbol{\epsilon}^{an}$ sont connus, la solution de ce problème peut être obtenue par une simple application du principe de superposition.

Si $\boldsymbol{\epsilon}^{an} = \mathbf{0}$, le problème est un problème standard d'élasticité et sa solution est exprimée en utilisant le tenseur élastique de localisation en déformation \mathbf{A} selon :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.4)$$

Si $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}$, le problème est résolu comme un problème d'élasticité avec le champ des déformations propres et le champ des contraintes propres selon :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{\tau} * \boldsymbol{\Gamma} \rangle(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.5)$$

Le champ des déformations propres $-\langle \boldsymbol{\tau} * \boldsymbol{\Gamma} \rangle$ est calculé à l'aide de l'opérateur élastique non-local de Green $\boldsymbol{\Gamma}$ pour un matériau élastique homogène :

$$-\langle \boldsymbol{\tau} * \boldsymbol{\Gamma} \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \boldsymbol{\epsilon}^{an}(\mathbf{x}') \, d\Omega', \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.6)$$

Il faut noter que $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \mathbf{L}(\mathbf{x}')$ donne la déformation au point \mathbf{x} créée par une déformation caractéristique $\boldsymbol{\epsilon}^{an}(\mathbf{x}')$ au point \mathbf{x}' .

Il en résulte du principe de superposition que la solution s'écrit :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \langle \boldsymbol{\tau} * \boldsymbol{\Gamma} \rangle(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.7)$$

5.2 Transformation Field Analysis (TFA)

La *Transformation Field Analysis* (TFA) proposée par Dvorak and Benveniste est un moyen élégant de réduire le nombre de variables interne à l'échelle macroscopique en supposant que les variables internes à l'échelle microscopique sont uniformes dans chaque phase. La TFA est basée sur l'idée d'une redistribution purement élastique de la contrainte et de la déformation macroscopique, ainsi que de la contrainte et de la déformation propre. Initialement développée pour l'étude des matériaux composites en élasto-plasticité [44, 40], sa formalisation [39, 43] a fourni le fondement théorique pour l'étude de comportements plus complexes [29, 42, 41, 109], en particulier l'endommagement [72, 45, 101, 12]. Elle a été appliquée aux poly-cristaux par Franciosi et al. [51]. La TFA a été étendue par Fish et al. [49, 50] aux matériaux composites périodiques en utilisant l'extension asymptotique.

5.2.1 Champs de transformation uniformes

Les variables internes \mathbf{z} (dont les déformations anélastiques) sont supposées uniformes dans chaque phase ou sous-domaine Ω_r :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{an}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\epsilon}_r^{an} \chi^{(r)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.8a)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\beta}_r \chi^{(r)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.8b)$$

5.2.2 Lois de comportement

Les variables $(\mathbf{z}_r)_{r=1}^R$ ou $(\boldsymbol{\epsilon}_r^{an}, \boldsymbol{\beta}_r)_{r=1}^R$ sont les nouvelles variables internes. Les variables d'état réduites macroscopiques sont par conséquent la déformation macroscopique $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ et les variables internes $(\mathbf{z}_r)_{r=1}^R$.

La déformation moyenne dans chaque sous-domaine est calculée en vérifiant les équations d'équilibre et la relation de comportement. Le problème à résoudre est celui d'un composite à R phases et la solution de ce problème est exprimée comme une combinaison linéaire faisant intervenir les variables internes $(\mathbf{z}_r)_{r=1}^R$ et la déformation macroscopique :

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r = \mathbf{A}_r : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \sum_{s=1}^R \mathbf{D}_{rs} : \boldsymbol{\epsilon}_s^{an}, \quad (5.9)$$

où \mathbf{A}_r et \mathbf{D}_{rs} sont des tenseurs dépendant des propriétés linéaires élastiques de chaque phase.

Les lois d'état donnent la contrainte moyenne dans chaque phase Ω_r :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_r = \mathbf{L}^{(r)} : \mathbf{A}_r : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{L}^{(r)} : \left(\sum_{s=1}^R \mathbf{D}_{rs} : \boldsymbol{\epsilon}_s^{an} - \boldsymbol{\epsilon}_r^{an} \right). \quad (5.10)$$

Les lois d'évolution pour les variables internes sont :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{an} = \frac{\partial \psi^{(r)}}{\partial \mathbf{Z}^{an}} \left(\mathbf{Z}_r^{an}, \mathbf{Z}_r^\beta \right), \quad (5.11a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_r = \frac{\partial \psi^{(r)}}{\partial \mathbf{Z}^\beta} \left(\mathbf{Z}_r^{an}, \mathbf{Z}_r^\beta \right). \quad (5.11b)$$

Cependant, une description satisfaisante du comportement d'un matériau composite à deux phases à l'aide de la TFA nécessite dans certains cas une subdivision de chaque phase en plusieurs sous-domaines [129, 27]. Ce besoin de considérer une division plus fine du domaine provient de l'intrinsèque non-uniformité du champ de déformation plastique. Cette subdivision entraîne un nombre de variables internes plus important.

5.3 Nonuniform Transformation Field Analysis (NTFA)

La NTFA développée par Michel et Suquet [96, 97] introduit des champs de transformation non uniformes afin de reproduire correctement le comportement du composite. Cette méthode a fait l'objet de nombreuses applications notamment en élasto-viscoplasticité [112] et de plusieurs développements par Fritzen et al. pour le calcul tridimensionnel [52] et les matériaux anisotropes [53]. Les champs de transformation permettent de capter la non uniformité des déformations viscoplastiques. Ce sont les structures cohérentes également appelées mode empirique de la transformation

5.3.1 Champs de transformation non uniformes

La déformation viscoplastique est décomposée sur un ensemble de modes viscoplastiques non uniformes qui peuvent présenter un large écart avec leur valeur moyenne :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{an}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \epsilon_k^{an} \boldsymbol{\mu}_{(k)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.12)$$

Les coefficients $(\epsilon_k^{an})_{k=1}^M$ sont les coefficients de la décomposition et les champs $(\boldsymbol{\mu}_{(k)})_{k=1}^M$ sont les champs de transformation non uniformes, définis indépendamment sur chaque phase Ω_r . Ces modes empiriques $(\boldsymbol{\mu}_{(k)})_{k=1}^M$ permettent de décrire avec précision l'écoulement du champs viscoplastique. Ils sont déterminés une fois (le plus souvent en résolvant une série de problèmes préliminaires) et normalisés avec $\langle \mathcal{J}_2(\boldsymbol{\mu}_{(k)}) \rangle = 1$ de sorte que les coefficients $(\epsilon_k^{an})_{k=1}^M$ soient homogènes à une déformation plastique.

Les modes viscoplastiques sont essentiels pour la précision de la méthode et doivent être choisis selon le chargement auquel la structure sera soumise en fonctionnement selon une démarche *a posteriori*. Cela implique que l'utilisateur a une idée de la triaxialité du champs de contrainte ainsi que de son intensité et de son histoire.

Les modes viscoplastiques sont extraits de *snapshots* calculés à des valeurs données de la déformation macroscopique et dépendant de l'intervalle de déformation auquel la structure sera sujet. Les *snapshots* du champ des déformations viscoplastiques sont déterminés sur la cellule élémentaire en parcourant plusieurs chemins de chargement dans l'espace des contraintes macroscopiques ou des déformations macroscopiques. La *snapshot* POD est alors utilisée pour construire un ensemble de modes $(\boldsymbol{\mu}_{(k)})_{k=1}^M$.

5.3.2 Relations de comportement

Les relations de comportement sont exprimées en terme de projections scalaires sur les modes empiriques $(\boldsymbol{\mu}_{(k)})_{k=1}^M$ tout comme cela est fait en plasticité cristalline :

$$\tau_k = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}_{(k)} \rangle, \quad (5.13a)$$

$$x_k = \langle \mathbf{X} : \boldsymbol{\mu}_{(k)} \rangle, \quad (5.13b)$$

$$e_k = \langle \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mu}_{(k)} \rangle, \quad (5.13c)$$

$$e_k^{an} = \langle \boldsymbol{\epsilon}^{an} : \boldsymbol{\mu}_{(k)} \rangle. \quad (5.13d)$$

La règle de localisation devient alors pour la NTFA :

$$e_k = \mathbf{a}_k : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \sum_{l=1}^M D_{kl} e_l^{an}, \quad (5.14)$$

où les tenseurs d'ordre deux $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^M$ et les facteurs d'influence $(D_{kl})_{k,l=1}^M$ sont définis par :

$$\mathbf{a}_k = \langle \mathbf{A}^T : \boldsymbol{\mu}_{(k)} \rangle, \quad (5.15a)$$

$$D_{kl} = \langle \boldsymbol{\mu}_{(k)} : \mathbf{D} * \boldsymbol{\mu}_{(l)} \rangle. \quad (5.15b)$$

En supposant que toutes les phases sont élastiques isotropes, caractérisées par le module d'élasticité isostatique $\kappa^{(k)}$ et le module de cisaillement $G^{(k)}$, et supposant que $\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^{an}) = 0$ la contrainte de cisaillement résolue est donnée par :

$$\tau_k = 2G^{(k)}(e_k - e_k^{an}). \quad (5.16)$$

Toutefois, il reste à choisir les variables d'état macroscopiques et à formuler la loi d'état et la loi d'évolution. Deux versions sont proposées :

- le modèle non couplé : les variables d'état réduites macroscopiques du modèle sont la déformation macroscopique $\bar{\epsilon}$, les variables internes $(\epsilon_k^{an})_{k=1}^M$ et $(\beta_k)_{k=1}^M$. Une variable tensorielle β_k est associée à chaque mode k et représente le champs de variables internes à l'échelle locale.

Les équations d'évolution pour les variables internes sont :

$$\dot{\epsilon}_k^{an} = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \mathbf{Z}^{an}} \left(\mathbf{Z}_k^{an}, \mathbf{Z}_k^\beta \right), \quad (5.17a)$$

$$\dot{\beta}_k = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \mathbf{Z}^\beta} \left(\mathbf{Z}_k^{an}, \mathbf{Z}_k^\beta \right). \quad (5.17b)$$

- le modèle couplé : les variables d'état réduites macroscopiques du modèle sont les déformations macroscopiques $\bar{\epsilon}$, les variables internes $(\epsilon_k^{an})_{k=1}^M$ et $(\beta_r)_{r=1}^R$. Une variable tensorielle β_r est attachée à chaque phase r et non à chaque mode k . Les différents modes dans une même phase sont couplés par l'intermédiaire d'une moyenne quadratique de la forme :

$$z_r^{an} = \left(\sum_{k=1}^{M^{(r)}} |Z_k^{an}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.18)$$

où z_r^{an} est une force thermodynamique couplée associée à β_r et $M^{(r)}$ est le nombre de modes dans la phase r .

Les équations d'évolution pour les variables internes sont :

$$\dot{\epsilon}_k^{an} = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \mathbf{Z}^{an}} \left(\mathbf{Z}_k^{an}, \mathbf{Z}_k^\beta \right), \quad (5.19a)$$

$$\dot{\beta}_r = \frac{\partial \psi^{(r)}}{\partial \mathbf{Z}^\beta} \left(z_r^{an}, \mathbf{Z}_r^\beta \right). \quad (5.19b)$$

5.4 Cas de calcul : cellule élémentaire en homogénéisation périodique

Dans le cadre de l'homogénéisation périodique, les méthodes semi-analytiques de champ de transformation sont basées sur une décomposition du champ des déformations anélastiques sur un ensemble de modes appelés champs de transformation, à l'instar de la méthode APHR dans le cadre de la réduction de modèle. Les champs de transformation sont uniformes par morceaux pour la TFA et non uniformes pour la NTFA. Cependant, alors que la NTFA réalise une décomposition du champs de déformation anélastique uniquement, la méthode APHR réalise une décomposition généralisée de tous les champs microscopiques dont celui des variables internes. La NTFA utilise un équilibre total sur Ω associé au lemme de localisation micro-macro de Hill. Concernant la méthode APHR, le déplacement et la contrainte microscopique sont déterminés par la résolution du problème variationnel ajouté aux conditions aux limites et à la loi de comportement. La méthode APHR utilise un équilibre tronqué sur le TID Ω_{Π} afin de sélectionner les

équations d'équilibre adéquates. Les approximations concernent également la loi de comportement car elle n'est respectée que sur le TID.

Les variables d'état macroscopiques dans le modèle couplé de la NTFA sont les déformations macroscopiques $\bar{\epsilon}$, les déformations anélastiques réduites $(\epsilon_k^{an})_{k=1}^M$ issues de la décomposition du champ de déformation anélastique où M est le nombre de champs de transformation, et les variables internes $(\beta_r)_{r=1}^R$ où R est le nombre de sous-domaines. Les variables d'état réduites dans la méthode APHR sont les déplacement réduits $(a_k^{(n)})_{k=1}^{M_u^{(n)}}$ issus de la décomposition du champ de déplacement où $M_u^{(n)}$ est le nombre de modes relatif au champ de déplacement, et les variables internes réduites $({}^{(r)}b_k^{(n)})_{k=1}^{({}^{(r)}M_z^{(n)})}$ issues de la décomposition du champ de variable interne où ${}^{(r)}M_z^{(n)}$ est le nombre de modes relatif au champ de variable interne sur le sous-domaine Ω_r .

La principale différence demeure dans la manière de calculer les modes. Dans le cas de la méthode NTFA, les modes anélastiques sont déterminés *a posteriori* en réalisant des calculs préliminaires sur la cellule élémentaire selon des trajets de chargement dans l'espace des contraintes macroscopiques ou des déformations macroscopiques. Cela implique que l'utilisateur a une idée de la triaxialité, de l'intensité et de l'histoire des champs macroscopiques. Au contraire, la méthode APHR permet de mener des calculs *a priori* et des modes sont ajoutés au besoin quelque soit le trajet de chargement ou l'intensité du chargement. Cela explique pourquoi la méthode APHR peut être vue comme une méthode complémentaire à la NTFA en cas d'indétermination de la triaxialité du chargement. La méthode APRH peut en effet se substituer à la POD dans la construction des modes empiriques pour la NTFA.

5.4.1 Configuration géométrique et données matériaux

La configuration étudiée est une cellule périodique Ω décrite dans [96] constituée d'un composite formé d'une fibre Ω_f dans une matrice Ω_m . Cette structure est décrite dans \mathbb{R}^2 sous l'hypothèse de déformation plane. Un arrangement hexagonal est considéré avec une fraction volumique de fibre $c_f = 0,25$ (Figure 5.1). Le maillage fait intervenir 4608 éléments quadrialéaux linéaires, 9365 degrés de liberté et 82944 variables internes dont 46080 sont dans la matrice et 36864 dans la fibre.

Trois lois de comportement typiques sont considérée dans cette analyse avec les données matériaux suivantes [96] :

- Matrice avec écrouissage isotrope linéaire : Seuil de plasticité $\sigma_{eq} \leq \sigma^0 + hp$, $E_m = 99,5$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $\sigma^0 = 510$ MPa,
Fibre élastique linéaire : $E_f = 414$ GPa, $\nu_f = 0,19$.
- Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaire : Seuil de plasticité $\sigma_{eq} \leq \sigma^0 + hp^m$, $E_m = 75$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $\sigma^0 = 75$ MPa. $h = 416,5$ MPa, $m = 0,3895$,
Fibre élastique linéaire : $E_f = 400$ GPa, $\nu_f = 0,2$.
- Matrice avec écrouissage cinématique linéaire : Seuil de plasticité $(\sigma - X)_{eq} \leq \sigma^0$, $X = H\epsilon^{an}$, $E_m = 99,5$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $\sigma^0 = 510$ MPa, $H = 2400$ MPa.
Fibre élastique linéaire : $E_f = 414$ GPa, $\nu_f = 0,19$.

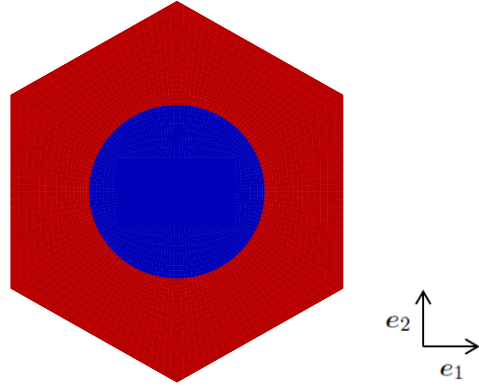


FIG. 5.1: Homogénéisation sur une cellule élémentaire. Cellule périodique avec arrangement hexagonal proposée dans [96]

5.4.2 Chargement et conditions aux limites

Les conditions aux limites sont périodiques telles que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (5.20)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \cdot)$ est un champs périodique sur Ω de moyenne nulle.

La contrainte macroscopique appliquée est imposée dans une direction fixe de l'espace des déformations :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \mathbf{E}^{(0)}, \quad t \in]0, T]. \quad (5.21)$$

Le chargement est piloté en augmentant de façon incrémentale le paramètre de contrôle $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$. En d'autres termes, la direction des déformations macroscopiques est imposée et l'amplitude de la déformation macroscopique dans cette direction est le paramètre de contrôle. La contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \mathbf{E}^{(0)}$ et les déformations macroscopiques dans les directions perpendiculaires à $\mathbf{E}^{(0)}$ sont des résultats de calcul. Dans l'analyse de la NTFA effectuée par Michel et al. [96], le même principe est appliqué dans l'espace des contraintes macroscopiques.

Les résultats obtenus quant à la relation macroscopique contrainte-déformation est tracée dans un diagramme $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) : \mathbf{E}^{(0)})$. Plusieurs directions de déformation macroscopique sont étudiées :

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad (5.22b)$$

$$\mathbf{E}^{(3)} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}. \quad (5.22c)$$

La direction $\mathbf{E}^{(1)}$ définit un chargement en traction, la direction $\mathbf{E}^{(2)}$ définit un chargement en cisaillement pur et la direction $\mathbf{E}^{(3)}$ définit un chargement multiaxial combiné en traction-cisaillement.

5.4.3 Description de la stratégie de calcul

Ce chapitre vise à évaluer les performance de la méthode APHR pour les problèmes d'homogénéisation en considérant trois stratégies de calcul :

$S^{(1)}$: la stratégie $S^{(1)}$ consiste à réaliser un calcul *a priori* et hyper-réduit. La simulation commence sans aucun mode empirique ; ils sont calculés à partir des éventuelles correction FEM si besoin.

La stratégie $S^{(1)}$ est menée avec les paramètres d'hyper-réduction $N_{\mathcal{E}} = 1$ et $N_{\mathcal{B}} = 2$.

$S^{(2)}$: la stratégie $S^{(2)}$ consiste à réaliser un calcul *a posteriori* et hyper-réduit. La simulation commence avec un ensemble initial de modes empiriques. Ils sont obtenus en réalisant une simulation FEM préliminaire au cours de laquelle le chargement maximal est atteint dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$.

La stratégie $S^{(2)}$ est menée avec les paramètres d'hyper-réduction $N_{\mathcal{E}} = 1$ et $N_{\mathcal{B}} = 0$.

$S^{(3)}$: la stratégie $S^{(3)}$ est une stratégie FEM.

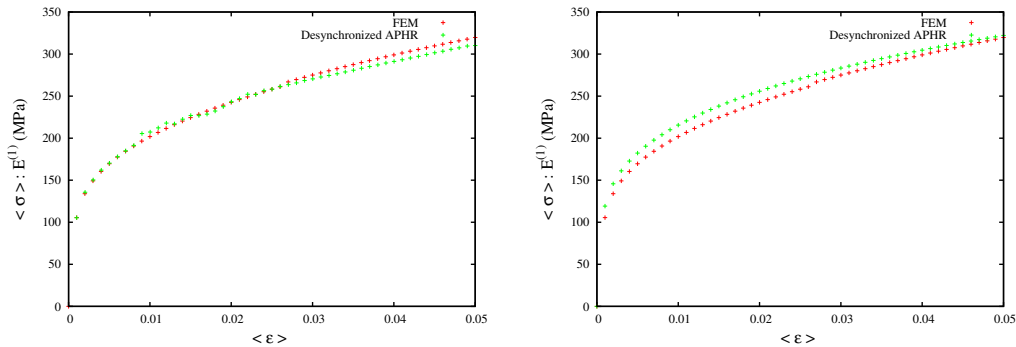
Une limitation de la NTFA est son besoin d'avoir un ensemble initial de modes empiriques déterminés numériquement en simulant la réponse du composite selon plusieurs trajets de chargement dans l'espace des contraintes ou des déformations macroscopiques. Au contraire, la méthode APHR permet de réaliser des calculs *a priori* : les modes empiriques sont calculés de façon automatique durant la transformation lorsqu'une correction FEM est nécessaire.

Le but de cette analyse est de présenter les effets de la formulation hyper-réduite (c'est à dire basée sur un équilibre tronqué) sur les prévisions APHR, sur le ROM, sur le TID et sur un indicateur de gain en temps de calcul défini comme le rapport entre un calcul FEM classique et un calcul hyper-réduit :

$$\eta = \frac{t_{FEM}}{t_{APHR}}. \quad (5.23)$$

5.4.4 Discussion des résultats

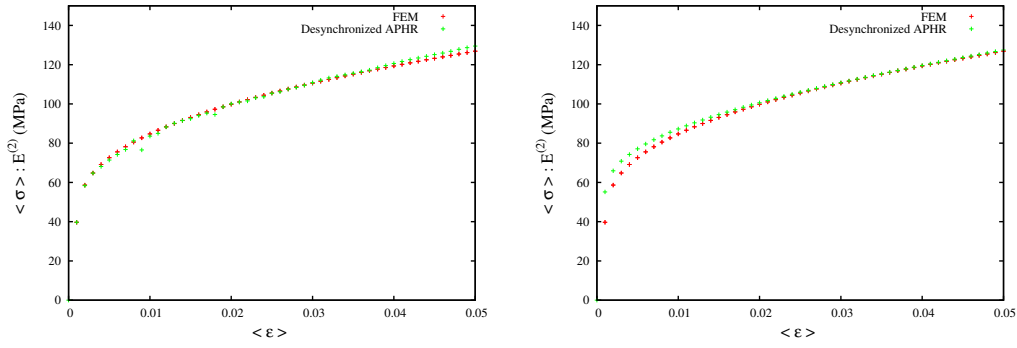
Prévisions de la méthode APHR Les prévisions de la méthodes APHR selon le trajet de chargement $\Sigma^{(1)}$ sont montrées Figure 5.2, Figure 5.3 et Figure 5.4.



(a) Strategies $S^{(1)}$ et $S^{(3)}$. Prédiction de la méthode APHR *a priori* en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(1)}$ et comparaison avec la FEM

(b) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prédiction de la méthode APHR *a posteriori* en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(1)}$ et comparaison avec la FEM

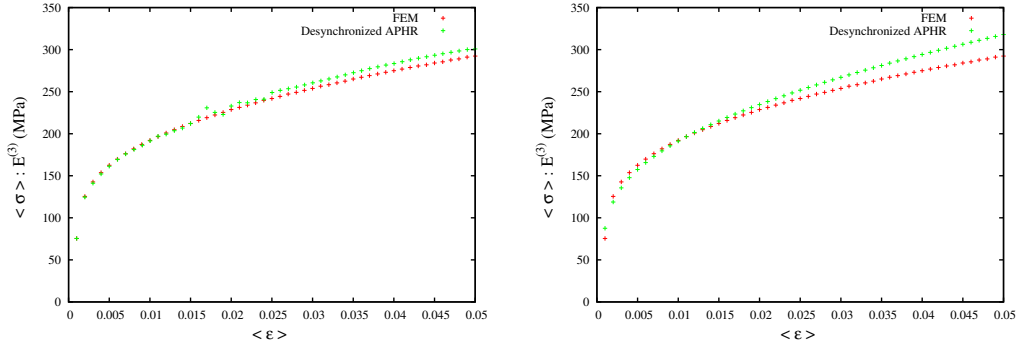
FIG. 5.2: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaire. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(1)}$



(a) Strategies $S^{(1)}$ et $S^{(3)}$. Prédiction de la méthode APHR *a priori* en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(2)}$ et comparaison avec la FEM

(b) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prédiction de la méthode APHR *a posteriori* en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(2)}$ et comparaison avec la FEM

FIG. 5.3: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en cisaillement. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaire. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(2)}$



(a) Strategies $S^{(1)}$ et $S^{(3)}$. Prédiction de la méthode APHR *a priori* en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$ et comparaison avec la FEM

(b) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prédiction de la méthode APHR *a posteriori* en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$ et comparaison avec la FEM

FIG. 5.4: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaire. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(3)}$

Les stratégies $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ sont en accord avec les résultats FEM fournis par la stratégie $S^{(3)}$ dans toute la gamme de déformation considérée. Les petites oscillations observées en stratégie $S^{(1)}$ sont dues au procédé de correction-enrichissement.

L'étude des indicateurs d'erreurs permet d'évaluer la précision des prévisions fournies par la méthode APHR, en particulier pour un calcul sans adaptation dans une démarche *a posteriori*. Ils sont présentés Figure 5.5 pour le cas de chargement multiaxial. Pour la stratégie $S^{(1)}$ dans le cas du chargement multiaxial, la tolérance d'erreur sur l'équilibre hyper-réduit est $\varepsilon_u = 4,0 \cdot 10^{-2}$ et la tolérance d'erreur sur les variables internes est $\varepsilon_z = 1,4 \cdot 10^{-3}$. La Figure 5.5a présente les incréments où l'adaptation est déclenché en raison d'erreurs sur l'équilibre hyper-réduit et la Figure 5.5b présente les incréments où l'adaptation est déclenché en raison d'erreurs sur les variables internes. L'adaptation est

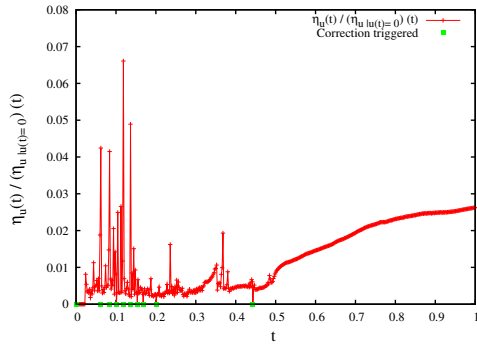
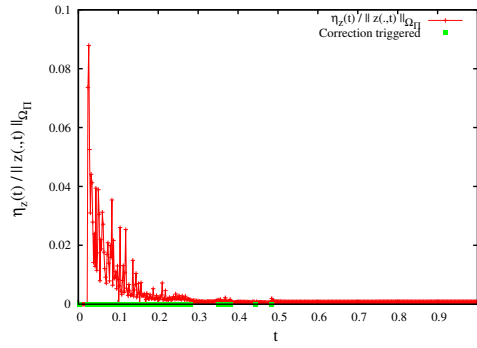
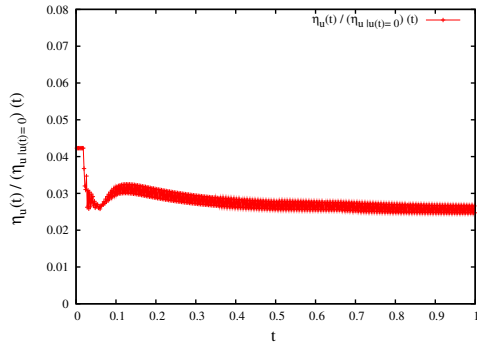
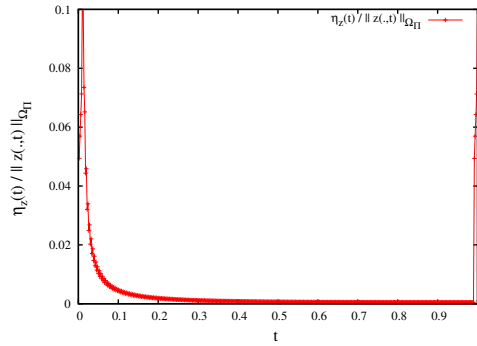
(a) Strategies $S^{(1)}$. Indicateur d'erreur η_u de la méthode APHR *a priori* dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$ (b) Strategies $S^{(1)}$. Indicateur d'erreur η_z de la méthode APHR *a priori* dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$ (c) Strategies $S^{(2)}$. Indicateur d'erreur η_u de la méthode APHR *a posteriori* dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$ (d) Strategies $S^{(2)}$. Indicateur d'erreur η_z de la méthode APHR *a posteriori* dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$

FIG. 5.5: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaire. Indicateurs d'erreur de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(3)}$

provoqué bien plus fréquemment en raison de la tolérance ε_z car elle est bien plus faible afin de bien capter l'écoulement de la plasticité.

Pour la stratégie $S^{(2)}$ dans le cas du chargement multiaxial, la tolérance d'erreur sur l'équilibre hyper-réduit est relevée à $\varepsilon_u = 4,0 \cdot 10^{+2}$ et la tolérance d'erreur sur les variables internes est relevée à $\varepsilon_z = 1,4 \cdot 10^{+3}$ afin d'empêcher le déclenchement de l'adaptation. Dans ce cas la mesure des indicateurs d'erreurs fournit une estimation des erreurs commise par la méthode APHR. En particulier, la Figure 5.5d montre des erreurs très importantes commises en début et en fin de simulation ce qui est en accord avec les résultats FEM fournis par la stratégie $S^{(3)}$.

ROM et modes empiriques Les modes empiriques considérés dans le ROM sont essentiels dans la précision des résultats et l'exactitude de la méthode APHR. Selon la méthodologie de correction-enrichissement décrite dans la méthode APHR, le ROM et en particulier les bases de modes empiriques sont mise à jour durant le traitement incrémental du problème. De nouveaux modes représentatifs sont éventuellement ajoutés et les modes significatifs sont conservés.

Concernant le cas du chargement en traction avec la stratégie $S^{(1)}$, le ROM est mis à jour 88 fois pour contenir à la fin de la simulation trois modes empiriques relatifs à la déformation plastique cumulée. Avec la stratégie $S^{(2)}$, le ROM est figé et contient seulement un unique mode empirique relatif à la déformation plastique cumulée, issu d'un calcul FEM antérieur (c'est pourquoi ce mode montré sur la Figure 5.6d ne possède pas d'exposant). Ces modes empiriques relatifs à la déformation plastique cumulée sont montrés Figure 5.6. A titre de comparaison, le calcul NTFA illustré dans [96] utilise deux modes empiriques relatifs aux déformation inélastiques.

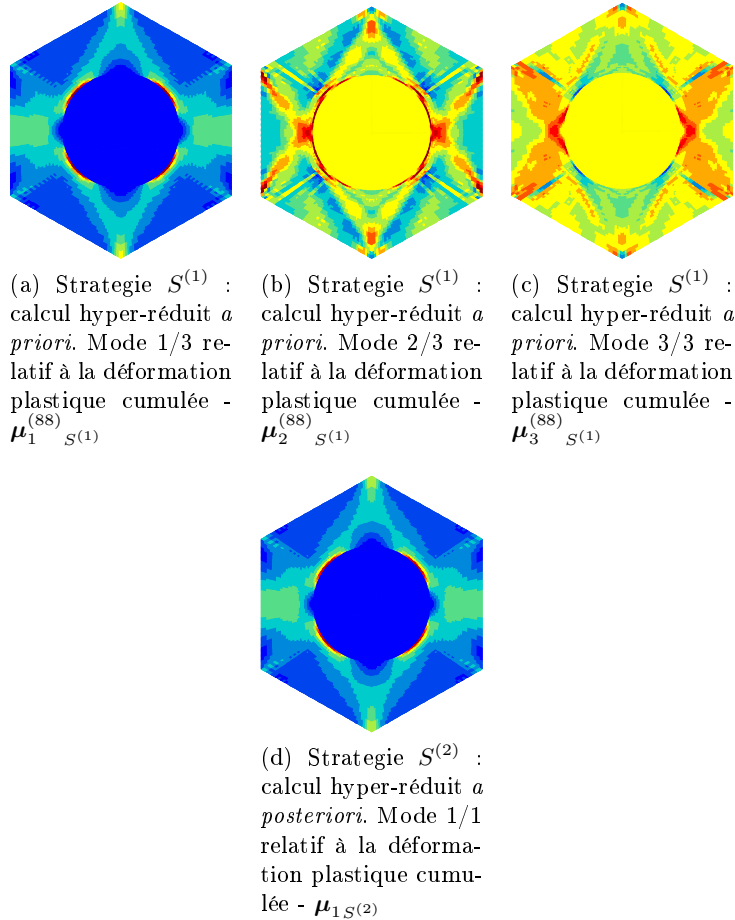
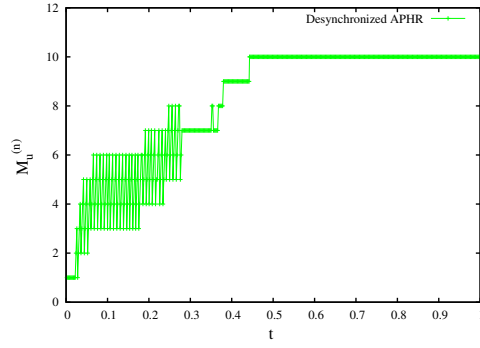
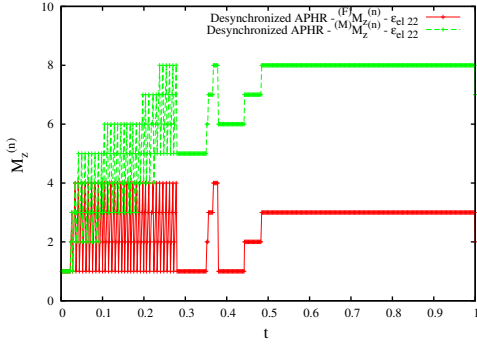
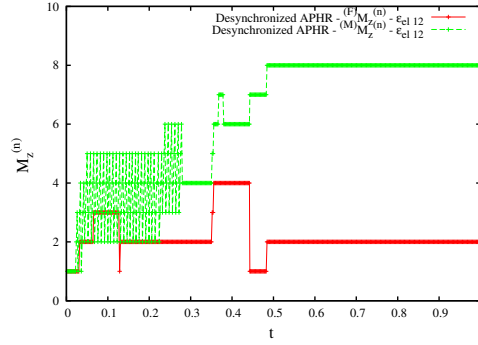
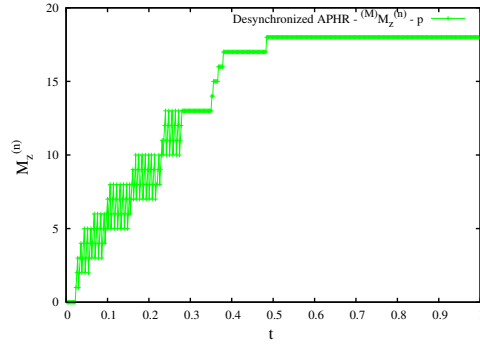


FIG. 5.6: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaires. Modes relatifs à la déformation plastique cumulée dans la direction $\mathbf{E}^{(1)}$

Concernant le cas du chargement multiaxial avec la stratégie $S^{(1)}$, le ROM est mis à jour 138 fois et l'évolution du nombre de modes empiriques est présenté Figure 5.7. L'évolution du nombre de modes empirique traduit le phénomène d'apprentissage au cours duquel les bases réduites sont construites mais le point intéressant est les très nombreuses oscillations observées sur toutes les courbes dans la première partie de la simulation. Ces oscillations marquent l'écoulement du champ plastique qui est très important ; il démarre d'ailleurs après une phase durant laquelle tous les modes sont constants

(a) Stratégies $S^{(1)}$. Nombre de modes empiriques relatifs au champ de déplacement(b) Stratégies $S^{(1)}$. Nombre de modes empiriques relatifs au champ de déformation élastique ϵ_{e22} (c) Stratégies $S^{(1)}$. Nombre de modes empiriques relatifs au champ de déformation élastique ϵ_{e12} (d) Stratégies $S^{(1)}$. Nombre de modes empiriques relatifs au champ de déformation plastique cumulée p FIG. 5.7: Homogénéisation sur une cellule élémentaire. Évolution du nombre de modes selon $\mathbf{E}^{(3)}$

qui reflète l'élasticité initiale. La prise en compte de la plasticité est donc l'élément majeur dans la construction des bases réduites. Le ROM contient à la fin de la simulation dix-huit modes empiriques relatifs à la déformation plastique cumulée. Avec la stratégie $S^{(2)}$, le ROM est figé et contient seulement trois modes empiriques relatifs à la défor-

mation plastique cumulée, issu d'un calcul FEM antérieur (c'est pourquoi ces modes montrés sur les Figures 5.8g, 5.8h et 5.8i ne possèdent pas d'exposant). Ces modes empiriques relatifs à la déformation plastique cumulée sont montrés Figure 5.8. Le procédé de correction-enrichissement est illustré à l'aide de plusieurs versions intermédiaires du ROM Figure 5.9.

La différence parfois importante observée dans le nombre de modes empiriques entre les simulations $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ est une conséquence de l'hyper-réduction. Il faut noter que la formulation tronquée et l'équilibre introduit des erreurs sur les variables internes qui sont corrigées en ajoutant des modes empiriques supplémentaires.

TID et gains en temps de calcul Les *TID* sont montrés Figure 5.10, Figure 5.11 et Figure 5.12.

L'indicateur de gain en temps de calcul pour la méthode APHR est lié à la taille du TID. Toutefois, la taille du TID est une conséquence directe du nombre de modes contenus dans le ROM. Cela explique la différence observée dans l'étendu du TID entre les stratégies $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.

Concernant le cas du chargement en traction, il y a 1204 points de Gauss dans le TID $\Omega_{\Pi}^{(88)} S^{(1)}$ avec la stratégie $S^{(1)}$, 44 dans le TID $\Omega_{\Pi} S^{(2)}$ avec la stratégie $S^{(2)}$ et 18432 pour un calcul FEM. A titre de comparaison, le calcul NTFA illustré dans [96] possède deux variables internes.

Les gains sont présentés Table 5.1.

Direction	$S^{(1)}$: <i>a priori</i> hyper-reduced computation	$S^{(2)}$: <i>a posteriori</i> hyper-reduced computation
$E^{(1)}$	4,539559445	77,228439425
$E^{(2)}$	4,636227905	49,088220296
$E^{(3)}$	4,46792682	80,698354662

TAB. 5.1: Homogénéisation sur une cellule élémentaire. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaire. Gains en temps de calcul η

De plus, la méthode APHR permet d'énormes gains en temps de calcul. Il est d'environ 4,5 pour un calcul *a priori* et supérieur à 50 pour un calcul *a posteriori*. En général, le gain à l'aide la méthode NTFA est supérieur à 1000 en raison du très petit nombre de variables internes.

Remarque : La symétrie fait l'objet d'une remarque très intéressante dans le cas du chargement en traction. Comme la géométrie et que le chargement sont symétriques, on s'attend à obtenir des prévisions et des champs de transformation symétriques. Pourtant, le TID n'est pas unique car tant que les prévisions sont symétriques, un élément peut être sélectionné dans le TID aussi bien que ses éventuels symétriques. Ainsi le TID peut être non symétrique. Ensuite, les champs de transformation sont calculé à partir des corrections FEM déduites des prévisions ROM. Pour être plus précis, la prévision ROM est déterminée par un calcul hyper-réduit sur le TID. Par conséquent, puisque le TID peut être non symétrique, les prévisions ROM et les champs de transformation ne sont pas nécessairement symétrique. Il y a deux possibilités afin de s'assurer que les prévisions ROM (et les champs de transformation) restent symétriques.

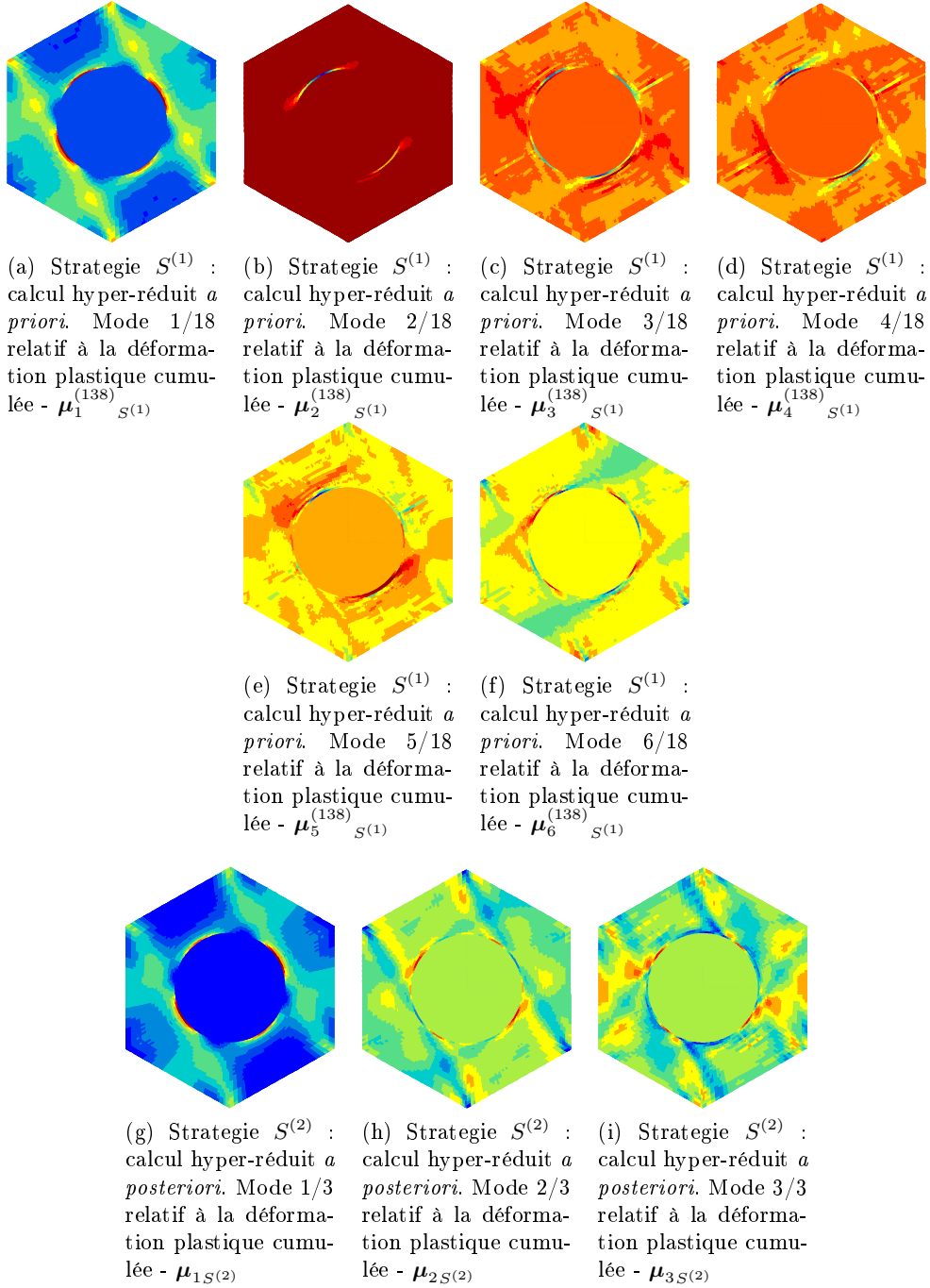


FIG. 5.8: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaires. Modes relatifs à la déformation plastique cumulée dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$

- (i) lors de la construction du TID, celui ci est mis à jour en ajoutant les éléments symétrique au TID calculé. Cependant, comme le TID est plus étendu, les gains numériques sont plus faibles,

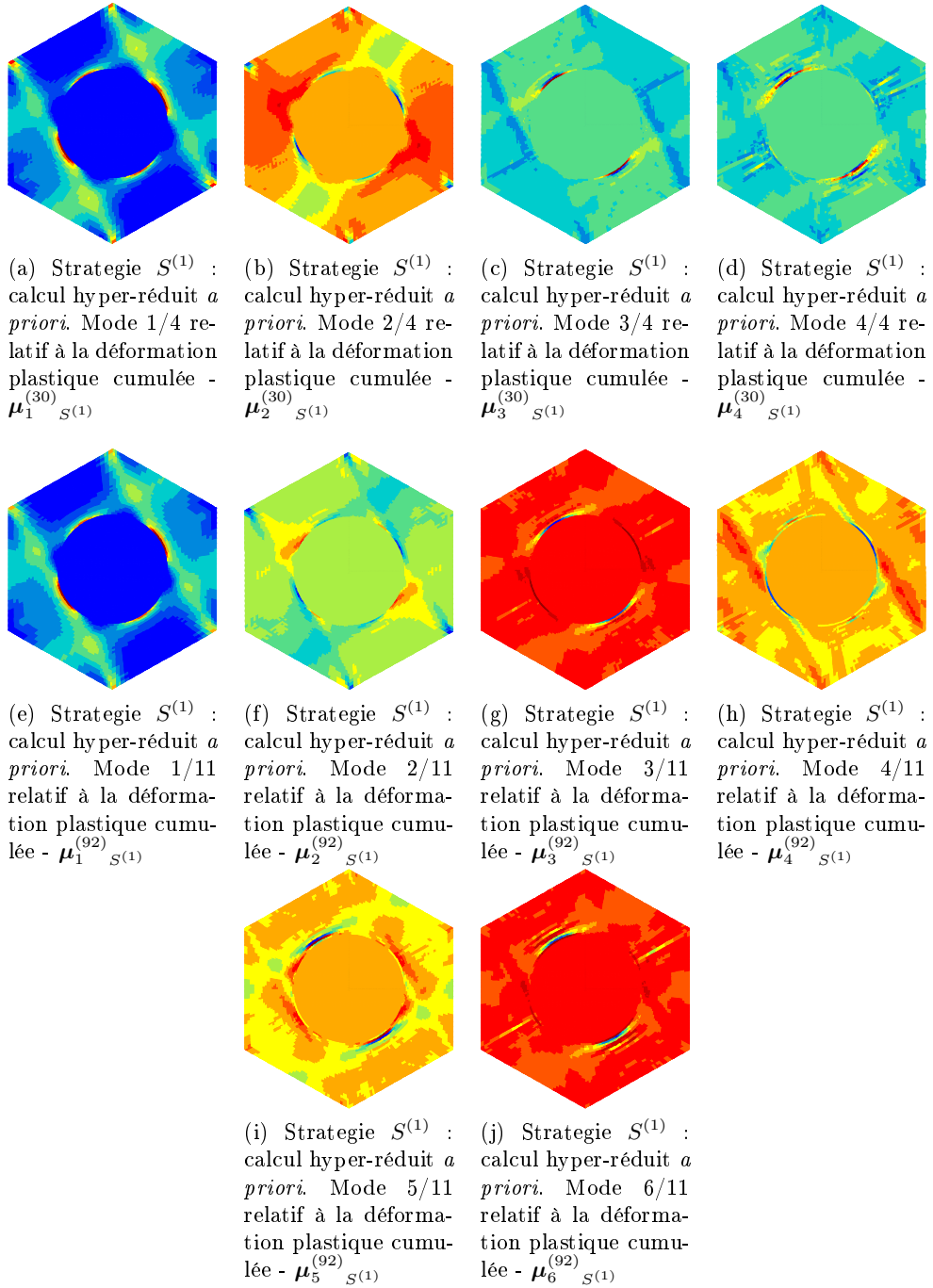


FIG. 5.9: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écrouissage isotrope non-linéaires. Modes intermédiaires relatifs à la déformation plastique cumulée dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$

- (ii) le champ de variable interne est recalculé même sur le TID et non seulement à l'extérieur. Cependant, ce procédé introduire une erreur d'approximation sur le TID.

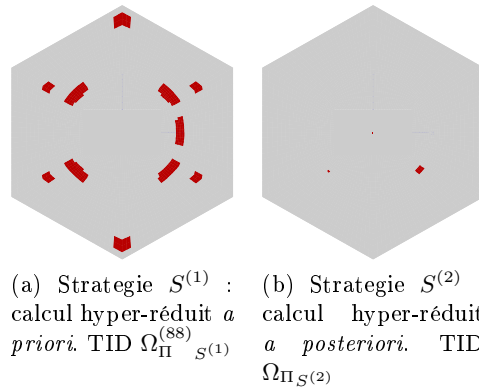


FIG. 5.10: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. TID dans la simulation dans la direction $\mathbf{E}^{(1)}$

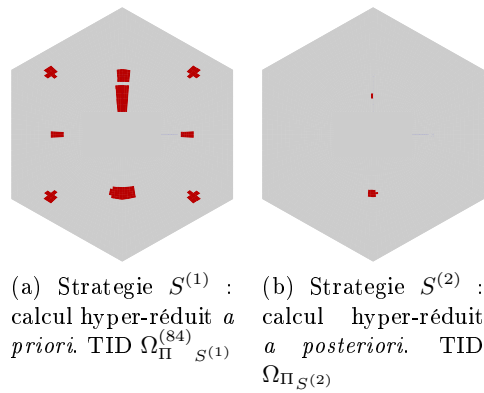


FIG. 5.11: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. TID dans la simulation dans la direction $\mathbf{E}^{(2)}$

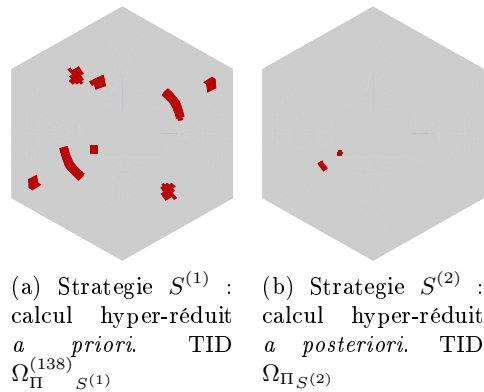


FIG. 5.12: Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. TID dans la simulation dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$

Le second choix a été considéré dans cette analyse.

5.4.5 Conclusion

La méthode APHR et la NTFA sont des méthodes performantes qui visent à réduire drastiquement le nombre de variables internes utilisées dans les modèles réduits. Dans ce but, la méthode APHR et la NTFA exploitent une décomposition des champs microscopiques sur un ensemble de modes empiriques non uniformes. Alors que la NTFA réalise une décomposition du champs de déformation anélastique uniquement, la méthode APHR réalise une décomposition généralisée de tous les champs microscopiques dont celui des variables internes.

Concernant la formulation de l'équilibre, la NTFA satisfait automatiquement les équations d'équilibre en utilisant le lemme de localisation micro-macro de Hill sur le domaine complet. Au contraire, la méthode APHR exploite une formulation tronquée des équations d'équilibre en utilisant le problème variationnel sur le TID

Ainsi, en utilisant une formulation tronquée des équations d'équilibre et une représentation approximée des variables d'état à l'aide de bases réduites, la méthode APHR permet de générer un modèle dans lequel à la fois les équations d'équilibre et les équations de comportement sont approximées.

La principale différence demeure dans la manière de calculer les modes empiriques. Dans le cas de la méthode NTFA, les modes anélastiques sont déterminés en réalisant des calculs FEM préliminaires sur la cellule élémentaire selon des trajets de chargement dans l'espace des contraintes macroscopiques ou des déformations macroscopiques. Cela implique que l'utilisateur a une idée de la triaxialité, de l'intensité et de l'histoire des champs macroscopiques. Au contraire, la méthode APHR permet de mener des calculs *a priori* et des modes sont ajoutés au besoin quelque soit le trajet de chargement ou l'intensité du chargement. Cela explique pourquoi la méthode APHR peut être vue comme une méthode complémentaire à la NTFA car elle peut être utilisée pour déterminer les modes empiriques à la place de la FEM et de la POD.

La méthode APHR donne des résultats comparables à la NTFA. Toutefois, les gains en temps de calcul générés par la méthode NTFA sont généralement bien plus grands. Néanmoins, la méthode APHR sans adaptation fournit des indicateurs d'erreur qui viennent compléter la NTFA. En effet, en cas de doute concernant la pertinence du modèle NTFA, il est possible d'utiliser une méthode APHR sans adaptation pour évaluer la précision des bases réduites utilisées.

Chapitre 6

Interpolation et construction d'une surface de réponse

La modélisation des systèmes paramétrés fait souvent appel à une méthodologie de surface de réponse (*Response Surface*) (RS). Basées sur des techniques d'interpolation, les méthodologies de surface de réponse permettent des gains très importants en approchant les réponses paramétrées décrites dans la variété (*manifold*) $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ défini par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{\mathbf{u}(\cdot, \cdot, \mathbf{p}) \in H^1(\Omega), \mathbf{p} \in \mathcal{P}\}. \quad (6.1)$$

Ce chapitre présente d'abord la méthodologie de surface de réponse, et en particulier la méthode *Subspace Angle Interpolation* proposée par Lieu et al. [89, 91, 90] ainsi qu'une méthode d'interpolation sur les variétés de Grassmann proposée par Amsallem et al. [7, 6]. Ce chapitre détaille ensuite le procédé de construction d'une base réduite interpolée utilisé en agrégeant des résultats de simulations APHR pour initialiser une simulation APHR relative à une nouvelle valeur de paramètre.

6.1 Méthodologie de surface de réponse

6.1.1 Création d'un méta-modèle

La méthodologie de surface de réponses vise à approcher le manifold $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ en sollicitant un méta-modèle. Ce méta-modèle est décrit par un ensemble de paramètres échantillonnés dans \mathcal{P} et choisis d'après un plan d'expérience ainsi que leurs réponses respectives [114, 8]. Les paramètres échantillonnés sont $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$ et les réponses échantillonnées sont $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_p}$. L'espace des réponses calculées aux paramètres échantillonnés définit l'espace $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ sur lequel s'appuie la surface de réponse (Figure 6.1). L'ensemble des *snapshots* $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ est donné pour N_p échantillons de paramètres :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \{\mathbf{u}_i(\cdot, \cdot)\}_{i=1}^{N_p} = \{\mathbf{u}(\cdot, \cdot, \mathbf{p}_i)\}_{i=1}^{N_p}. \quad (6.2)$$

À la valeur des paramètres échantillonnés, la réponse est supposée connue ; entre les paramètres échantillonnés, la réponse est interpolée (Figure 6.1). La construction du méta-modèle associé aux paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$ fait généralement appel à un modèle détaillé dont le coût numérique est élevé tel que la FEM. Basées sur des

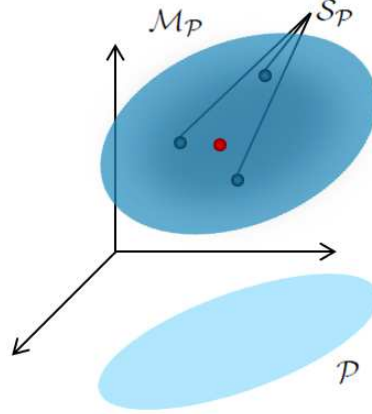


FIG. 6.1: Interpolation en surface de réponse. Surface de réponse associée à un méta-modèle

approximations à variables séparées, les méthodes de réduction permettent de remplacer ce modèle détaillé par un modèle d'ordre réduit. En conséquence, les modèles d'ordres réduits peuvent être utilisés pour générer et même enrichir le méta-modèle et la surface de réponses. En principe, toutes les méthodes de réduction permettent de construire un méta-modèle. Des régions de confiance peuvent également être introduites afin d'éviter l'utilisation abusive de modèles d'ordre réduit à la place de modèles détaillés [1, 17].

6.1.2 Interpolation en surface de réponse

L'évaluation de la réponse interpolée est basée sur une technique d'interpolation. En considérant les fonctions d'interpolation $(\zeta_i)_{i=1}^{N_p}$ pertinentes pour approcher la réponse paramétrée \mathbf{u} entre les paramètres échantillonnés, l'interpolation suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) \approx \mathbf{u}_{RS}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{u}_{RS}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_p} \zeta_i(\mathbf{p}) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}. \quad (6.3b)$$

Plusieurs techniques d'interpolation sont compatibles avec l'utilisation de modèles d'ordre réduit. [92, 89, 91, 90, 7, 6].

Lieu et al. [91] étudient l'écoulement transonique autour d'un avion F-16 pour différentes valeurs du nombre de Mach. Une base réduite est construite pour des échantillons du nombre de Mach. Pour obtenir une réponse entre les paramètres échantillonnés, la méthode *Subspace Angle Interpolation* est proposée par Lieu et al. afin de construire une base réduite au nombre de Mach M_∞ à partir des bases réduites évaluées aux nombres de Mach $M_{\infty 1}$ et $M_{\infty 2}$ tels que $M_{\infty 1} \leq M_\infty \leq M_{\infty 2}$. Cette méthode est définie en deux étapes :

- (i) l'interpolation de l'angle principal à partir de l'angle principal formé par le sous-espace engendré par les bases réduites évaluées aux nombres de Mach $M_{\infty 1}$ et

$M_{\infty 2}$,

- (i) l'utilisation de l'angle principale interpolé afin de construire la nouvelle base réduite au nombre de Mach M_{∞} .

Cette méthode a été appliquée avec succès pour des nombres de Mach compris entre 0,6 et 0,8. Toutefois pour avoir une estimation correcte de l'écoulement, la méthode reste limitée à des nombres de Mach proches des valeurs échantillonnées. Le calcul d'une réponse interpolée à des nombres de Mach trop loins des valeurs échantillonnées nécessitent la reconstruction d'un modèle d'ordre réduit. Lieu et al. parlent de près de 4 heures pour obtenir un modèle d'ordre réduit (69 degrés de liberté) à l'aide de la POD à partir de 99 *snapshots* échantillonnés sur un cluster à l'aide de la FEM (168799 degrés de liberté). À titre de comparaison, le calcul d'une réponse interpolée est de l'ordre de la minute sur le même cluster.

Comme la méthode *Subspace Angle Interpolation* ne permet pas l'adaptation du modèle d'ordre réduit pour de nouvelles valeurs de paramètres échantillonnés, Amsallem et al. [7] proposent une méthode d'interpolation sur les variétés de Grassmann. Cette méthode permet de construire une base réduite associée au sous-espace \mathcal{S}_{N_p+1} évaluée au paramètre \mathbf{p}_{N_p+1} à partir de la connaissance des bases réduites associées aux sous-espaces \mathcal{S}_i évaluées aux paramètres $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$. Cette méthode est définie en quatre étapes :

- (i) le choix d'un sous-espace \mathcal{S}_0 parmi les sous-espaces $(\mathcal{S}_i)_{i=1}^{N_p}$ de la variété de Grassmann. Ce sous-espace est le point d'origine pour l'interpolation.
- (ii) Le transfert sur l'espace tangent \mathcal{T}_0 . Chaque sous-espace \mathcal{S}_i suffisamment proche de \mathcal{S}_0 est projeté sur le point \mathcal{X}_i de \mathcal{T}_0 représenté par une matrice $\mathbf{\Gamma}_i$ au moyen de l'opérateur de projection logarithmique $\text{Log}_{\mathcal{S}_0}$,
- (iii) L'interpolation dans l'espace \mathcal{T}_0 au paramètre \mathbf{p}_{N_p+1} . La matrice $\mathbf{\Gamma}_{N_p+1}$ est interpolée au point \mathcal{X}_{N_p+1} à l'aide d'une méthode d'interpolation.
- (iv) Le transfert sur le sous-espace \mathcal{S}_{N_p+1} . Le point \mathcal{X}_{N_p+1} de \mathcal{T}_0 représenté par une matrice $\mathbf{\Gamma}_{N_p+1}$ est projeté dans le sous-espace \mathcal{S}_{N_p+1} au moyen de l'opérateur de projection exponentielle $\text{Exp}_{\mathcal{S}_0}$,

Cette méthode a été appliquée pour étudier l'écoulement transonique autour d'un avion F-16 pour différentes valeurs du nombre de Mach et éviter la reconstruction d'un modèle d'ordre réduit lorsque les nombres de Mach sont trop éloignés des valeurs échantillonnées. Toutefois, le terme d'adaptation est maladroit car aucun estimateur d'erreur permet d'évaluer la qualité de l'interpolation.

6.2 Interpolation et construction de base réduite

Le principe de la construction d'une base réduite paramétrée est d'agréger des résultats de simulations APHR effectuées dans le cadre d'une étude paramétrique afin d'initialiser une nouvelle simulation APHR relative à une nouvelle valeur de paramètre. Tout d'abord, une base réduite multidimensionnelle est construite sur l'espace paramétré $\Omega \times \mathcal{P}$ en utilisant les bases réduites déduites de l'évaluation des réponses paramétrées aux paramètres échantillonnés à l'aide de la méthode APHR. Cette construction de base réduite est couplé à une méthode d'interpolation initialement intégré dans la méthode APHR multidimensionnelle [120], ce qui offre une méthode alternative à la méthode d'interpolation sur les variétés de Grassmann [6]. La méthode d'interpolation considérée

fournit une réponse paramétrée interpolée à une valeur de paramètre entre les paramètres échantillonnés et une base réduite paramétrée potentiel pour l'évaluation de la réponse à l'aide de la méthode APHR pour cette valeur de paramètre.

Disposant des fonction d'interpolation $(\zeta_i)_{i=1}^{N_p}$ supposées connues et des *snapshots* paramétrés $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_p}$ évalués aux paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$ à l'aide de la méthode APHR sans base réduite initiale, le procédé de construction d'une base réduite multidimensionnelle et l'interpolation en surface de réponse consiste à interpoler la réponse $\mathbf{u}_{(N_p+1)}$ au paramètre $\mathbf{p}_{(N_p+1)}$ entre les paramètres échantillonnés selon deux étapes :

- (i) Construction d'une base réduite multidimensionnelle : l'ensemble des bases réduites est transformé en une base réduite multidimensionnelle. Une POD est alors menée sur cette base multidimensionnelle en considérant les variables réduites multidimensionnelles associées afin de la rendre optimale. Cette construction est l'apport essentiel de la méthode proposée.
- (ii) Interpolation de la réponse : les modes empiriques sont réduits aux paramètres échantillonnés puis interpolés au paramètre $\mathbf{p}_{(N_p+1)}$. Comme ces modes empiriques interpolés peuvent ne pas former une base réduite, une POD est menée sur ces modes empiriques afin d'en déduire la base réduite paramétrée.

L'enrichissement de cette surface de réponse consiste à calculer la réponse $\mathbf{u}_{(N_p+1)}$ relative au nouveau paramètre échantillonné $\mathbf{p}_{(N_p+1)}$ dans \mathcal{P} avec pour base initiale la base calculée lors du calcul d'interpolation.

6.2.1 Approche multidimensionnelle

Formulation multidimensionnelle La reformulation multidimensionnelle consiste à considérer le problème multidimensionnel virtuel paramétrique Q' qui résulte de la concaténation de la séquence des N_p problèmes $(Q^{(i)})_{i=1}^{N_p}$. Chaque problème $Q^{(i)}$ est défini sur Ω pour le même intervalle de temps \mathcal{I} . Le problème multidimensionnel paramétrique Q' est défini sur $\Omega' = \Omega \times \mathcal{P}$ sur l'intervalle de temps \mathcal{I} .

En considérant une représentation séquentielle des N_p prévisions paramétrées $(Q^{(i)})_{i=1}^{N_p}$ définies sur $\Omega \times \mathcal{I}$, le méta-modèle est défini par les paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$ et leurs réponses respectives $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_p}$ tel que :

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}_i) \approx \mathbf{u}_{ROM}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}_i) = \mathbf{u}_i \text{ ROM}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (6.4a)$$

$$\mathbf{u}_i \text{ ROM}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{M_u^{(i)}} \psi_k^{(i)}(\mathbf{x}) a_k^{(i)}(t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (6.4b)$$

où l'exposant $\square^{(i)}$ désigne l'indice du paramètre évalué.

En considérant une représentation simultanée de la prévision multidimensionnelle Q' définie sur $\Omega' \times \mathcal{I}$, le méta-modèle est défini par les paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$ et la réponse \mathbf{u}' telle que :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (6.5)$$

où δ est la distribution de Dirac.

Cette formulation multidimensionnelle est définie dans un sens strictement mathématique

en utilisant une distribution de Dirac dans l'espace des paramètres. En prenant en compte cette formulation, le méta-modèle est reformulé de la façon suivante :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) \approx \mathbf{u}'_{ROM}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (6.6a)$$

$$\mathbf{u}'_{ROM}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{l=1}^{M'_u} \psi'_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) a'_l(t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (6.6b)$$

où $M'_u = \sum_{i=1}^{N_p} M_u^{(i)}$.

La base réduite multidimensionnelle $(\psi'_l)_{l=1}^{M'_u}$ et les variables réduites multidimensionnelles associées $(a'_l)_{l=1}^{M'_u}$ sont obtenues par renumérotation d'indice tel que :

$$\psi'_{k+\sum_{m=1}^{i-1} M_u^{(m)}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \psi_k^{(i)}(\mathbf{x}), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(i)}\}, \quad i \in \{1, \dots, N_p\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (6.7a)$$

$$a'_{k+\sum_{m=1}^{i-1} M_u^{(m)}}(t) = a_k^{(i)}(t), \quad k \in \{1, \dots, M_u^{(i)}\}, \quad i \in \{1, \dots, N_p\}, \quad t \in \mathcal{I}. \quad (6.7b)$$

Sous une discrétisation FEM, la matrice formée par les modes empiriques $(\psi'_l)_{l=1}^{M'_u}$ est diagonale par block.

Cette base réduite multidimensionnelle est une base orthogonale et normée car chaque base réduite relative au problème $Q^{(i)}$ l'est :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \psi'_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \cdot \psi'_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \, d\Omega' &= \int_{\Omega'} \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \psi_{k-\sum_{m=1}^{i-1} M_u^{(m)}}^{(i)}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{l-\sum_{m=1}^{j-1} M_u^{(m)}}^{(j)}(\mathbf{x}) \, d\Omega' \\ &= \int_{\mathcal{P}} \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \, d\mathbf{p} \int_{\Omega} \psi_{k-\sum_{m=1}^{i-1} M_u^{(m)}}^{(i)}(\mathbf{x}) \cdot \psi_{l-\sum_{m=1}^{j-1} M_u^{(m)}}^{(j)}(\mathbf{x}) \, d\Omega \\ &= \delta_i^j \delta_{k-\sum_{m=1}^{i-1} M_u^{(m)}}^{l-\sum_{m=1}^{j-1} M_u^{(m)}} \\ &= \delta_k^l. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Base POD multidimensionnelle Comme la base $(\psi'_l)_{l=1}^{M'_u}$ peut ne pas être optimale, une POD est menée sur le champ \mathbf{u}' . Le problème est de trouver la base $(\phi'_j)_{j=1}^{N'_u}$ qui maximise sa projection sur le champ \mathbf{u}' et les variables d'état réduites associées $(\alpha'_j)_{j=1}^{N'_u}$. Cette projection s'écrit :

$$\lambda(\phi'_j) = \frac{\int_0^T \left((\mathbf{u}'(\cdot, t, \cdot), \phi'_j)_{\Omega'} \right)^2 dt}{(\phi'_j, \phi'_j)_{\Omega'}}. \quad (6.9)$$

Sous l'hypothèse que $\phi'_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{l=1}^{M'_u} \psi'_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) V'_{lj}$ et en considérant l'orthonormalité de la base réduite $(\psi'_k)_{k=1}^{M'_u}$, cette projection s'écrit :

$$\lambda(\mathbf{V}'_j) = \frac{\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{M'_u} a'_k(t) V'_{kj} \right)^2 dt}{\sum_{k=1}^{M'_u} V'_{kj}{}^2}. \quad (6.10)$$

Il s'agit donc de résoudre le problème de maximisation :

$$\lambda'_j = \max_{\mathbf{V}' \in \mathbb{R}^{M'_u}} \lambda(\mathbf{V}'_j). \quad (6.11)$$

Ce problème d'optimisation est équivalent à un problème aux valeurs propres. Ce problème aux valeurs propres est défini par la matrice de corrélation \mathbf{C}'_u symétrique et définie positive de taille M'_u telle que :

$$\sum_{l=1}^{M'_u} C'_{ul} V'_{lj} = \lambda'_j V'_{kj}, \quad (6.12a)$$

$$C'_{ul} = \int_0^T a'_l(t) a'_k(t) dt, \quad (6.12b)$$

où les vecteurs propres $(\mathbf{V}'_j)_{j=1}^{M'_u}$ sont relatifs aux valeurs propres $(\lambda'_j)_{j=1}^{M'_u}$.

Ce problème admet exactement M'_u solutions dont on tronque les N'_u premières. La base réduite $(\phi'_j)_{j=1}^{N'_u}$ qui maximise sa projection sur le champ \mathbf{u}' et les variables d'état réduites associées $(\alpha'_j)_{j=1}^{N'_u}$ sont définies par :

$$\phi'_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{M'_u} \psi'_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}) V'_{kj}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (6.13a)$$

$$\alpha'_j(t) = \sum_{k=1}^{M'_u} a'_k(t) V'_{kj}, \quad t \in \mathcal{I}. \quad (6.13b)$$

De la matrice des vecteurs propres $(\mathbf{V}'_j)_{j=1}^{M'_u}$, on peut extraire des sous matrices $(\mathbf{V}'_j^{(i)})_{j=1}^{M'_u}$ de la façon suivante :

$$V'_{(k+\sum_{m=1}^{i-1} M'_u(m))j} = V'_{kj}^{(i)}, \quad k \in \{1, \dots, M'_u^{(i)}\}, \quad i \in \{1, \dots, N_p\}. \quad (6.14)$$

La base réduite $(\phi'_j)_{j=1}^{N'_u}$ pour les valeurs des paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$ peut s'exprimer très simplement en fonction des bases réduites $(\psi_k^{(i)})_{k=1}^{M'_u^{(i)}}$ des problèmes

$(Q^{(i)})_{i=1}^{N_p}$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} \phi'_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) d\mathbf{p} = \sum_{l=1}^{M'_u} \int_{\mathcal{P}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \psi'_l(\mathbf{x}, \mathbf{p}) V_{lj} d\mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
& = \sum_{s=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{M_u^{(s)}} \int_{\mathcal{P}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \psi'_{k+\sum_{m=1}^{s-1} M_u^{(m)}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) V_{(k+\sum_{m=1}^{s-1} M_u^{(m)})j} d\mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
& = \sum_{s=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{M_u^{(s)}} \int_{\mathcal{P}} \delta(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_i) \psi_k^{(s)}(\mathbf{x}) V_{kj}^{(s)} d\mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
& = \sum_{k=1}^{M_u^{(i)}} \psi_k^{(i)}(\mathbf{x}) V_{kj}^{(i)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Par conséquent, le calcul de la base réduite multidimensionnelle par agrégation ne nécessite pas de duplication de maillage ni de maillage multidimensionnelle, contrairement à ce qui est proposé dans [120].

6.2.2 Interpolation en surface de réponse

L'interpolation consiste à exploiter la méthodologie décrite pour la méthode APHR multidimensionnelle [120]. Comme la distribution de Dirac ne permet pas une interpolation entre les paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$, des fonctions d'interpolation sont considérées. Les fonctions $(\zeta_i)_{i=1}^{N_p}$ sont les fonctions d'interpolation relatives aux paramètres échantillonnés $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^{N_p}$.

Le but de l'interpolation est l'évaluation de la réponse \mathbf{u}_{RS} pour toute valeur de paramètre $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ entre les paramètres échantillonnés (Figure 6.2).

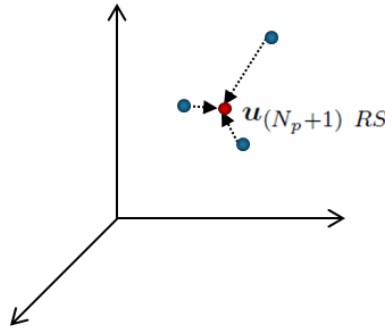


FIG. 6.2: Interpolation en surface de réponse. Interpolation de la réponse \mathbf{u}_{RS} entre les paramètres échantillonnés

En considérant la nouvelle valeur de paramètre $\mathbf{p}_{(N_p+1)}$, la réponse interpolée s'écrit :

$$\mathbf{u}_{(N_p+1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{(N_p+1)}, t) \approx \mathbf{u}_{RS}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{(N_p+1)}, t) = \mathbf{u}_{(N_p+1) RS}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathcal{I}. \quad (6.16)$$

D'après la méthodologie d'interpolation en surface de réponse, une première décomposition fait intervenir la base réduite multidimensionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(N_p+1) RS}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{N_p} \zeta_i(\mathbf{p}_{(N_p+1)}) \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N'_u} \zeta_i(\mathbf{p}_{(N_p+1)}) \phi'_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) \alpha'_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{N'_u} \left(\sum_{i=1}^{N_p} \zeta_i(\mathbf{p}_{(N_p+1)}) \phi'_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) \right) \alpha'_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{N'_u} \phi_j^{(N_p+1)}(\mathbf{x}) \alpha_j^{(N_p+1)}(t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

où les modes empiriques $(\phi_j^{(N_p+1)})_{j=1}^{N'_u}$ sont interpolés et les variables d'état réduites associées $(\alpha_j^{(N_p+1)})_{j=1}^{N'_u}$ sont inchangées tels que :

$$\phi_j^{(N_p+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} \zeta_i(\mathbf{p}_{(N_p+1)}) \phi'_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.18a)$$

$$\alpha_j^{(N_p+1)}(t) = \alpha'_j(t), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (6.18b)$$

Comme les *snapshots* interpolés $(\phi_j^{(N_p+1)})_{j=1}^{N'_u}$ peuvent ne pas former une base, une POD est menée en utilisant la matrice de corrélation \mathbf{G}_u symétrique et définie positive de taille N'_u telle que :

$$\sum_{l=1}^{N'_u} G_{u \ kl} \mathbf{V}_{lj} = \lambda_j \mathbf{V}_{kj}, \quad (6.19a)$$

$$G_{u \ kl} = \int_{\Omega} \phi_k^{(N_p+1)}(\mathbf{x}) \cdot \phi_l^{(N_p+1)}(\mathbf{x}) \, d\Omega, \quad (6.19b)$$

où les vecteurs propres $(\mathbf{V}_j)_{j=1}^{N'_u}$ sont relatifs aux valeurs propres $(\lambda_j)_{j=1}^{N'_u}$.

La base réduite paramétrée interpolée $(\psi_k^{(N_p+1)})_{k=1}^{M_u^{(N_p+1)}}$ et les variables réduites asso-

ciées $\left(a_k^{(N_{p+1})}\right)_{k=1}^{M_u^{(N_{p+1})}}$ définie par :

$$\boldsymbol{\psi}_k^{(N_{p+1})}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N'_u} \phi_j^{(N_{p+1})}(\boldsymbol{x}) V_{jk}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad (6.20a)$$

$$a_k^{(N_{p+1})}(t) = \sum_{j=1}^{N'_u} \alpha_j(t) V_{jk}, \quad t \in \mathcal{I}. \quad (6.20b)$$

La base réduite $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(N_{p+1})}\right)_{k=1}^{M_u^{(N_{p+1})}}$ n'est pas multidimensionnelle mais définie uniquement sur Ω .

La même procédure est appliquée à toutes les bases réduites produites par la méthode APHR, c'est à dire la base réduite relative au champ de déplacement décrites précédemment mais également les bases réduites relatives au champ de variables internes éventuellement désynchronisées. Dans cette étude, une unique base de fonctions d'interpolation est utilisée pour toutes les grandeurs mécaniques. C'est évidemment un choix à peu de contenu mécanique qu'il faudra reconsidérer par la suite dans des travaux ultérieurs.

Le résultat de l'interpolation est non seulement une réponse interpolée \boldsymbol{u}_{RS} relative à un paramètre entre les paramètres échantillonnés mais également une base réduite interpolée et les variables réduites associées.

6.2.3 Enrichissement de la surface de réponse

L'enrichissement d'un méta-modèle en ajoutant un nouveau paramètre échantillonné $\boldsymbol{p}_{(N_{p+1})}$ consiste à évaluer la réponse $\boldsymbol{u}_{(N_{p+1})}$ à l'aide de la méthode APHR. Dans ce cas, la base réduite interpolée $\left(\boldsymbol{\psi}_k^{(N_{p+1})}\right)_{k=1}^{M_u^{(N_{p+1})}}$ est une base réduite initiale potentielle pour évaluer cette réponse.

6.3 Cas de calcul : interpolation en température

Le propos de cette étude est de déterminer la réponse thermomécanique $(\boldsymbol{u}(\theta), \boldsymbol{z}(\theta))$ d'un alliage d'aluminium dans un vaste domaine de température θ en utilisant la méthode APHR couplée à la méthodologie de surface de réponses évoquée précédemment.

6.3.1 Configuration géométrique et données matériaux

La structure étudiée est une cellule composite périodique Ω formée d'une inclusion ferritique Ω_i dans une matrice d'aluminium Ω_m . La structure est décrite dans \mathbb{R}^2 sous l'hypothèse de déformations planes. Une configuration hexagonale est considéré dans l'analyse avec une fraction volumique $c_i = 0,25$ (Figure 6.3). Le maillage est constitué de 4608 éléments quadrilatéraux linéaires, de 9,365 degrés de liberté et de 82944 variables internes dont 46080 sont dans la matrice et 36864 sont dans l'inclusion. L'inclusion ferritique Ω_i est élastique linéaire et la matrice d'aluminium Ω_m est élasto-viscoplastique. Pour les deux matériaux, le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique

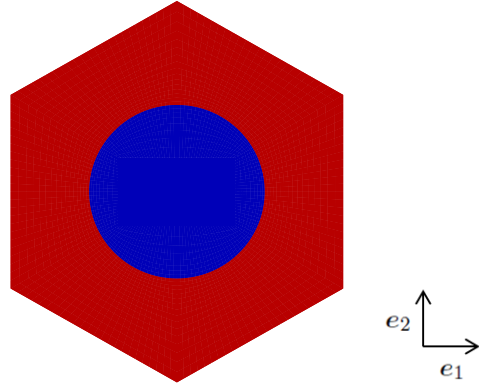


FIG. 6.3: Interpolation en surface de réponse. Cellule périodique avec arrangement hexagonal

dépendent de la température mais le coefficient de Poisson non.

Une loi de comportement élasto-viscoplastique de type Armstrong-Frederick est utilisée pour la matrice d'aluminium Ω_m . Elle est décrite dans les équations suivantes.

Le critère de plasticité est un critère de von Mises :

$$f = \mathcal{J}_2(\mathbf{s} - \mathbf{x}) - R_0(\theta), \quad (6.21)$$

où R_0 dépend de la température θ .

L'écoulement cinématique non-linéaire est défini par :

$$\mathbf{x} = \frac{2}{3}C(\theta)\boldsymbol{\alpha}, \quad (6.22a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \left(\frac{3}{2} \frac{\langle\langle \mathbf{s} - \mathbf{x} \rangle\rangle}{\mathcal{J}_2(\mathbf{s} - \mathbf{x})} - D(\theta)\boldsymbol{\alpha} \right), \quad (6.22b)$$

où C et D dépendent de la température θ .

Le taux de déformation viscoplastique est défini par :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{vp} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\langle\langle \mathbf{s} - \mathbf{x} \rangle\rangle}{\mathcal{J}_2(\mathbf{s} - \mathbf{x})}. \quad (6.23)$$

La loi d'écoulement viscoplastique est une loi de Norton saturée par un exponentiel. Cette loi approxime le fluage à un faible niveau de contraintes et la plasticité à un niveau de contraintes élevé :

$$\dot{\lambda} = \left\langle \left\langle \frac{f}{K(\theta)} \right\rangle \right\rangle^{n(\theta)} \exp \left(A(\theta) \left\langle \left\langle \frac{f}{K(\theta)} \right\rangle \right\rangle^{n(\theta)+1} \right), \quad (6.24)$$

où K , A et n dépendent de la température θ .

L'intervalle de température considéré dans cette analyse est $\theta \in [20 \text{ }^\circ\text{C}; 250 \text{ }^\circ\text{C}]$ et les données matériau sont présentées Table 6.1.

θ (°C)	20	150	200	250
E_m (MPa)	62000	61000	60000	60000
α_m (/°C)	$2,26 \cdot 10^{-5}$	$2,26 \cdot 10^{-5}$	$2,51 \cdot 10^{-5}$	$2,51 \cdot 10^{-5}$
ν_m	0,33	0,33	0,33	0,33
C_m (MPa)	11000	8000	5000	4000
D_m (MPa)	252	179	250	104
K_m (MPa)	42	50	60	60
n_m	10	8.5	7	6
A_m	$2,26 \cdot 10^{-5}$	$2,26 \cdot 10^{-5}$	$2,51 \cdot 10^{-5}$	$2,51 \cdot 10^{-5}$
R_{0m} (MPa)	50	40	37	30
E_i (MPa)	161000	161000	161000	161000
ν_i	0,3	0,3	0,3	0,3
α_i (/°C)	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$

TAB. 6.1: Interpolation en surface de réponse. Données matériau de la matrice d'aluminium

6.3.2 Chargement et conditions aux limites

Les conditions aux limites sont périodiques telles que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta, t) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\theta, t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in]0, T], \quad (6.25)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \cdot)$ est un champs périodique sur Ω de moyenne nulle.

La contrainte moyenne appliquée à la cellule est imposée dans une direction fixe dans l'espace des déformations :

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\theta, t) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\theta, t) \mathbf{E}^{(0)}. \quad (6.26)$$

Le chargement est appliqué en augmentant de façon incrémentale le paramètre de contrôle $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\theta, t)$. En d'autres termes, la direction de la déformation moyenne est imposée et l'amplitude de la déformation moyenne est définie par le paramètre de contrôle. L'amplitude de la contrainte moyenne $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\theta, t): \mathbf{E}^{(0)}$ et les composantes de la déformation moyenne dans les directions perpendiculaires à $\mathbf{E}^{(0)}$ sont des résultats de calcul.

Une direction de contrainte moyenne est étudiée :

$$\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (6.27)$$

6.3.3 Description des stratégies de calcul

Cette étude vise à évaluer la méthodologie de surface de réponses en étudiant deux points en particulier. D'abord, l'interpolation directe d'une réponse pour une nouvelle valeur de paramètre ; ensuite, la construction d'une base initiale pour cette nouvelle valeur de paramètre afin d'enrichir le méta-modèle en calculant la réponse avec la méthode APHR à l'aide de la base initiale interpolée.

Deux réponses préliminaires sont calculées à $\theta = 50$ °C et $\theta = 250$ °C à l'aide de la méthode APHR afin de poursuivre en utilisant la méthodologie de surface de réponses pour des températures $\theta \in [50; 250]$. Alors, plusieurs stratégies de calcul sont considérées.

$S^{(0)}$: la stratégie $S^{(0)}$ est une stratégie d'interpolation en surface de réponses. Aucun calcul mécanique n'est mené et la réponse est interpolée. Cette interpolation est très rapide et permet en général un traitement en temps réel.

La stratégie $S^{(0)}$ est menée avec le paramètre POD $\varepsilon_{POD} = 8 \cdot 10^{-4}$.

$S^{(1)}$: La stratégie $S^{(1)}$ consiste en un calcul hyper-réduit *a priori* avec base initiale.

La simulation démarre donc avec un ensemble de modes empiriques interpolés grâce à de précédentes simulations. D'autres sont ajoutés si nécessaires lorsqu'une correction FEM est calculée.

La stratégie $S^{(1)}$ est menée avec le paramètre POD $\varepsilon_{POD} = 8 \cdot 10^{-4}$, la tolérance d'erreur sur les variables internes $\varepsilon_z = 1,5 \cdot 10^{-4}$ et les paramètres d'hyper-réduction $N_{\mathcal{E}} = 2$ et $N_{\mathcal{B}} = 4$.

$S^{(2)}$: la stratégie $S^{(2)}$ consiste en un calcul hyper-réduit *a priori* sans base initiale.

La simulation démarre donc sans modes empiriques. Ils sont ajoutés si nécessaires lorsqu'une correction FEM est calculée.

La stratégie $S^{(2)}$ est menée avec le paramètre POD $\varepsilon_{POD} = 8 \cdot 10^{-4}$, la tolérance d'erreur sur les variables internes $\varepsilon_z = 1 \cdot 10^{-4}$ et les paramètres d'hyper-réduction $N_{\mathcal{E}} = 4$ et $N_{\mathcal{B}} = 4$.

$S^{(3)}$: la stratégie $S^{(3)}$ est une stratégie FEM.

L'interpolation en surface de réponses et les effets d'une base initiale interpolée sur les prévisions fournies par la méthode APHR sont étudiés à l'aide d'un indicateur de gain en temps de calcul défini par :

$$\eta = \frac{t_{FEM}}{t_{APHR}}. \quad (6.28)$$

6.3.4 Discussion des résultats

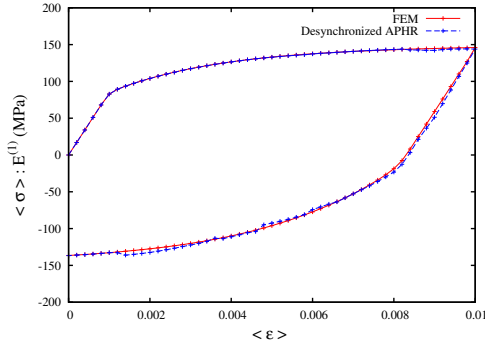
Calculs préliminaires Deux simulations préliminaires sont calculées à $\theta = 50$ °C et $\theta = 250$ °C selon la stratégie $S^{(2)}$ afin de mener l'étude sur la méthodologie de surface de réponses.

Les prévisions de la méthode APHR dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ sont montrées Figure 6.4 et Figure 6.5.

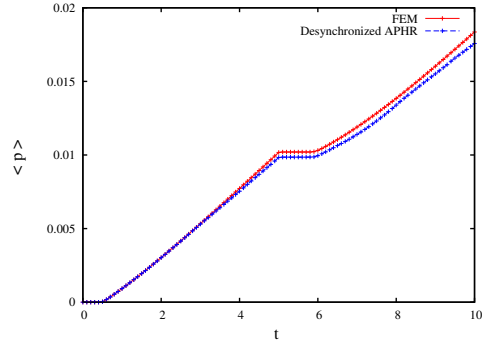
La stratégie $S^{(2)}$ montre des résultats concordant avec les résultats FEM fournis par la stratégie $S^{(3)}$. Le niveau de contrainte relevé avec la stratégie $S^{(2)}$ est très proche de celui observé dans les résultats FEM dans toute l'intervalle de déformations considéré et la déformation plastique cumulée coïncide avec les résultats FEM. Cela s'explique par la tolérance d'erreur sur les variables internes très faible afin de capturer l'écoulement viscoplastique avec une bonne précision.

Détermination des coefficients d'interpolation La détermination des coefficients d'interpolation est effectuée en interpolant la contrainte moyenne dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ à l'instant t_u où la contrainte moyenne maximale est atteinte. Ce procédé de détermination est un apport de ce mémoire mais la question reste ouverte.

$$\bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u) : \mathbf{E}^{(0)} = \sum_{i=1}^P \zeta_i(\theta) \bar{\sigma}(t_u, \theta_i) : \mathbf{E}^{(0)}, \quad (6.29)$$

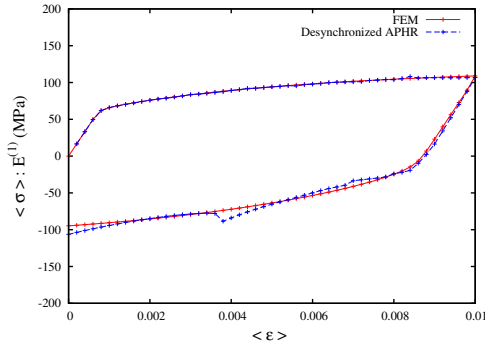


(a) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM

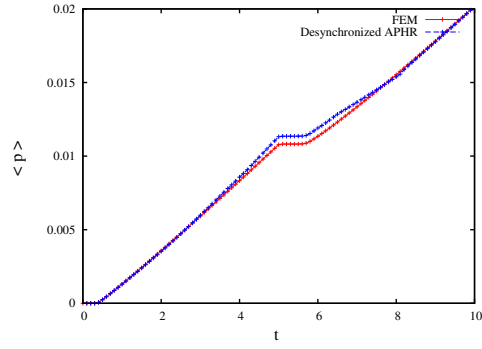


(b) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.4: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 50$ °C



(a) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM



(b) Strategies $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.5: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 250$ °C

Les coefficients d'interpolation respectent :

$$\sum_{i=1}^P \zeta_i(\theta) = 1. \quad (6.30)$$

Avec les deux reponses échantillonnées aux températures $\theta = 50$ °C et $\theta = 250$ °C, la détermination des coefficients d'interpolation est définie pour $\theta \in [50, 250]$ selon :

$$\zeta_{50}(\theta) = \frac{\bar{\sigma}^{(250)}(t_u) - \bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u)}{\bar{\sigma}^{(250)}(t_u) - \bar{\sigma}^{(50)}(t_u)}, \quad (6.31a)$$

$$\zeta_{250}(\theta) = \frac{\bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u) - \bar{\sigma}^{(50)}(t_u)}{\bar{\sigma}^{(250)}(t_u) - \bar{\sigma}^{(50)}(t_u)}, \quad (6.31b)$$

Si $\bar{\sigma}^{(50)}(t_u) \leq \bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u) \leq \bar{\sigma}^{(250)}(t_u)$, où $\bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u)$ est donné par un estimateur de la contrainte moyenne. Cette estimation peut être fournie par la stratégie $S^{(2)}$ ou $S^{(3)}$, en

particulier sur un maillage grossier. En pratique, puisque la détermination des coefficients d'interpolation ne remet pas en cause la méthodologie de surface de réponse, la stratégie $S^{(3)}$ est utilisée.

Si la contrainte moyenne estimée n'est pas encadrée par les contraintes moyennes échantillonnées, l'interpolation n'est pas possible. Dans ce cas, des coefficients d'interpolation sont définis. Si $\bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u) \leq \bar{\sigma}^{(50)}(t_u)$, alors $\zeta_{50}(\theta) = 1$ et $\zeta_{250}(\theta) = 0$. Si $\bar{\sigma}^{(\theta)}(t_u) \geq \bar{\sigma}^{(250)}(t_u)$, alors $\zeta_{50}(\theta) = 0$ et $\zeta_{250}(\theta) = 1$.

Calculs interpolés Des simulations sont menées selon les stratégies $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$ à des températures $\theta = 70$ °C, $\theta = 90$ °C, $\theta = 110$ °C, $\theta = 190$ °C, $\theta = 210$ °C, et $\theta = 230$ °C.

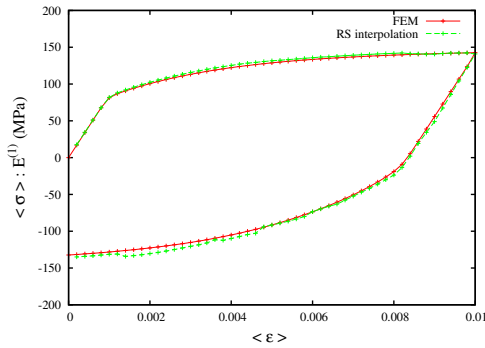
Température $\theta = 70$ °C.

Une simulation est menée à $\theta = 70$ °C. La méthodologie de surface de réponses dans les stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$ met en jeu les coefficients d'interpolation $\zeta_{(50)}(\theta) = 1$ et $\zeta_{(250)}(\theta) = 0$.

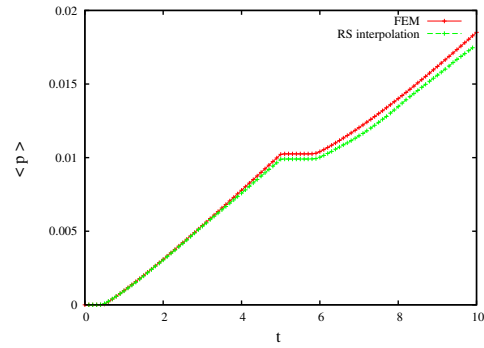
Température $\theta = 90$ °C.

Une simulation est menée à $\theta = 90$ °C. La méthodologie de surface de réponses dans les stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$ met en jeu les coefficients d'interpolation $\zeta_{(50)}(\theta) = 0,967214441$ et $\zeta_{(250)}(\theta) = 0,032785559$.

L'interpolation en surface de réponses et les prévisions de la méthode APHR dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ sont montrées Figure 6.6 et Figure 6.7. À la température $\theta = 90$ °C, la



(a) Stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(3)}$. RS interpolation en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM



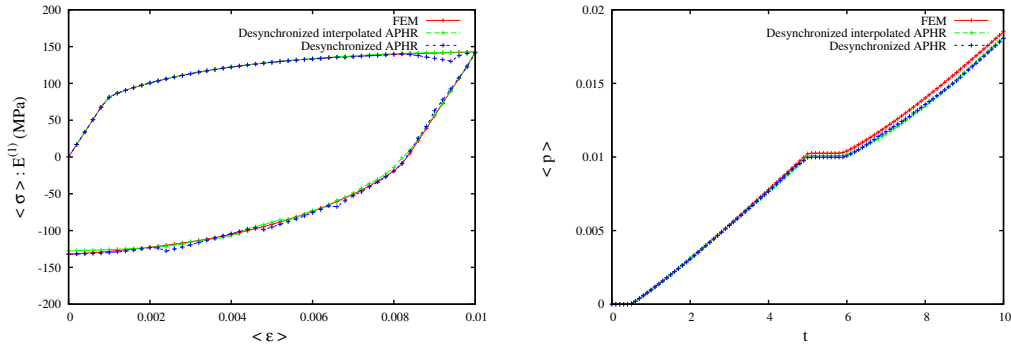
(b) Stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(3)}$. RS interpolation en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.6: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de l'interpolation selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 90$ °C

stratégie $S^{(1)}$ utilisant les modes interpolés par la méthodologie de surface de réponse offre une meilleure précision que la stratégie $S^{(1)}$.

Température $\theta = 110$ °C.

Une simulation est menée à $\theta = 110$ °C. La méthodologie de surface de réponses dans les stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$ met en jeu les coefficients d'interpolation $\zeta_{(50)}(\theta) = 0,924928074$



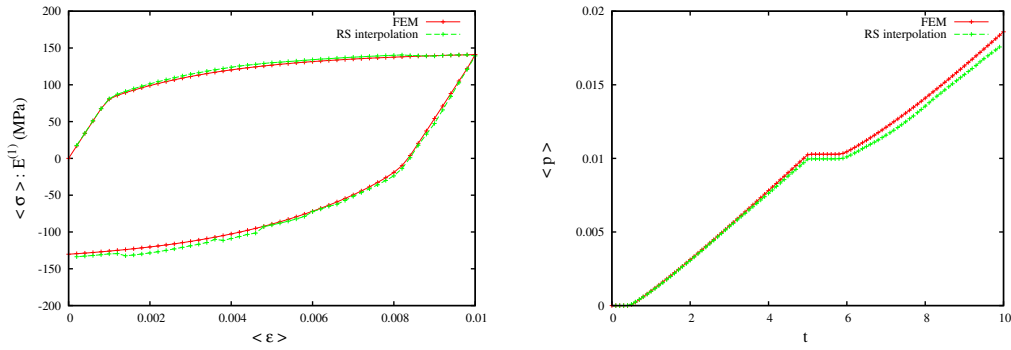
(a) Stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM

(b) Stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.7: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 90^\circ \text{C}$

et $\zeta_{(250)}(\theta) = 0,075071926$.

L'interpolation en surface de réponses et les prévisions de la méthode APHR dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ sont montrées Figure 6.8 et Figure 6.9. À la température $\theta = 110^\circ \text{C}$,



(a) Stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(3)}$. RS interpolation en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM

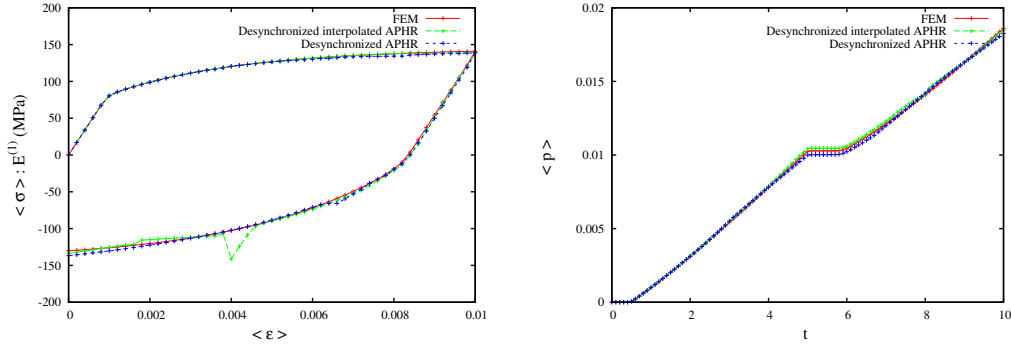
(b) Stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(3)}$. RS interpolation en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.8: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de l'interpolation selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 110^\circ \text{C}$

la stratégie $S^{(1)}$ qui utilisent les modes interpolés présente un défaut caractéristique de la méthode APHR. Cet écart à la courbe de référence traduit le fait que la tolérance d'erreur sur les variables internes ε_z pour la stratégie $S^{(1)}$ est plus grande que celle pour la stratégie $S^{(2)}$. Il convient de noter que la précision est excellente par ailleurs pour les deux stratégie $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$. De plus, il est tout à fait possible de corriger ce défaut en diminuant la tolérance d'erreur sur les variables internes ε_z .

Température $\theta = 190^\circ \text{C}$.

Une simulation est menée à $\theta = 190^\circ \text{C}$. La méthodologie de surface de réponses dans les



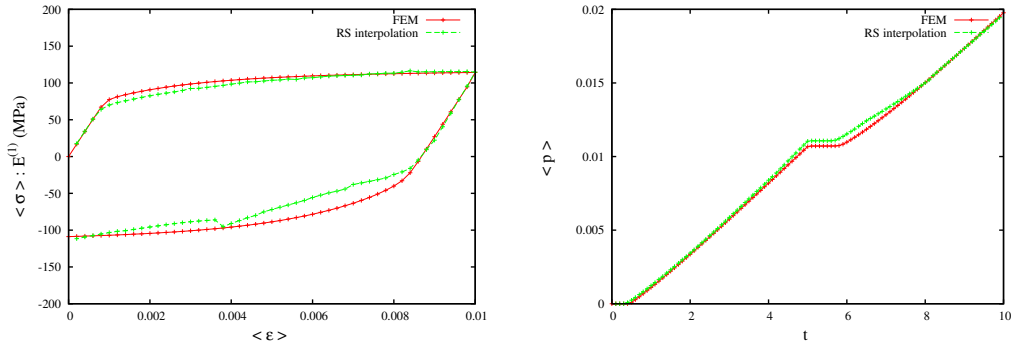
(a) Stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM

(b) Stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.9: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 110$ °C

stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$ met en jeu les coefficients d'interpolation $\zeta_{(50)}(\theta) = 0,203023238$ et $\zeta_{(250)}(\theta) = 0,796976762$.

L'interpolation en surface de réponses et les prévisions de la méthode APHR dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ sont montrées Figure 6.10 et Figure 6.11. À la température $\theta = 190$ °C, la



(a) Stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(3)}$. RS interpolation en contrainte-déformation dans la direction $\mathbf{E}^{(0)}$ et comparaison avec la FEM

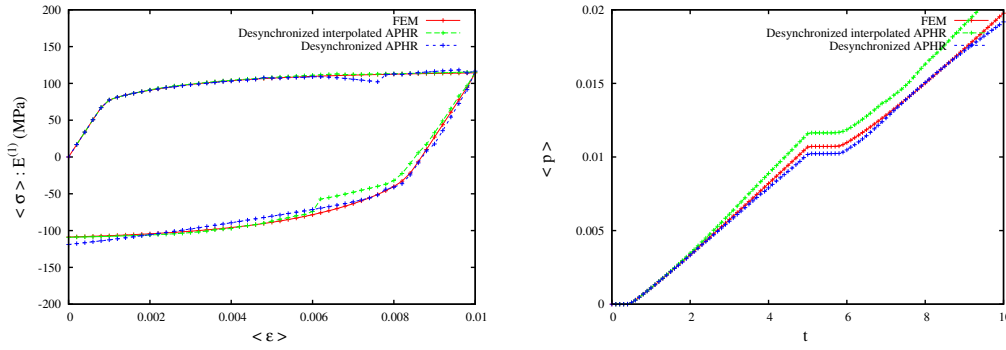
(b) Stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(3)}$. RS interpolation en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.10: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de l'interpolation selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 190$ °C

stratégie $S^{(1)}$ qui utilisent les modes interpolés présente un défaut caractéristique de la méthode de surface de réponse. La prévision hyper-réduite pour la stratégie $S^{(1)}$ présente un renflement dû à l'utilisation des modes interpolés. Ces modes interpolés ont hérités du même renflement présent pour la stratégie $S^{(0)}$ qui résulte d'erreurs la représentation modale à $\theta = 250$ °C.

Température $\theta = 210$ °C.

Une simulation est menée à $\theta = 210$ °C. La méthodologie de surface de réponses dans les



(a) Stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en contrainte-déformation dans la direction $E^{(0)}$ et comparaison avec la FEM

(b) Stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$. Prévisions de la méthode APHR en déformation plastique cumulée et comparaison avec la FEM

FIG. 6.11: Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $E^{(0)}$ à $\theta = 190$ °C

stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$ met en jeu les coefficients d'interpolation $\zeta_{(50)}(\theta) = 0,054853445$ et $\zeta_{(250)}(\theta) = 0,945146555$.

Température $\theta = 230$ °C.

Une simulation est menée à $\theta = 230$ °C. La méthodologie de surface de réponses dans les stratégies $S^{(0)}$ et $S^{(1)}$ met en jeu les coefficients d'interpolation $\zeta_{(50)}(\theta) = 0,043789329$ et $\zeta_{(250)}(\theta) = 0,956210671$.

Les stratégies $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$ montrent des résultats concordant avec les résultats FEM fournis par la stratégie $S^{(3)}$. La stratégie $S^{(0)}$ montre une précision correcte à un niveau de contrainte élevé mais peut présenter d'avantage d'erreur à un faible niveau de contrainte. Les stratégies $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ montrent des résultats très proches des résultats FEM. Encore une fois, cela s'explique par la tolérance d'erreur sur les variables internes très faible afin de capturer l'écoulement viscoplastique avec une bonne précision. Les gains en temps de calcul vont permettre de classer les stratégies présentées en termes de performances.

Gains en temps de calcul Les gains sont présentés Table 6.2.

θ (°C)	$S^{(0)}$: Interpolation en surface de réponses	$S^{(1)}$: Calcul hyper-réduit <i>a priori</i> avec base initiale interpolée	$S^{(2)}$: Calcul hyper-réduit <i>a priori</i>
70 °C	123,74148133	3,271814543	1,765625364
90 °C	111,933507171	3,137852895	1,916098877
110 °C	152,135270979	3,576343368	1,996046162
190 °C	157,728089395	4,982219977	3,128935232
210 °C	127,28212986	3,775559482	2,921273238
230 °C	113,433345993	3,795840297	1,617273589

TAB. 6.2: Interpolation en surface de réponse. Gains en temps de calcul η

La stratégie $S^{(0)}$ permet d'énormes gains en temps de calcul car aucun calcul mécanique n'est réalisé et les réponses sont interpolées. Il faut ajouter que les temps utilisés pour estimer ce gain excluent le temps de lecture des données.

La stratégie $S^{(1)}$ permet un meilleur gain en considérant comme base initiale les modes empiriques interpolés en suivant la méthodologie de surface de réponses. Avec un jeu de coefficients d'interpolation convenables, la stratégie $S^{(1)}$ qui propose un calcul hyper-réduit avec une base initiale interpolée fournit de bien meilleurs gains que la stratégie $S^{(2)}$ qui propose un calcul hyper-réduit sans base initiale, sous la condition de relever avec prudence les tolérances. À l'inverse, avec un jeu de coefficients d'interpolation non appropriés, la stratégie $S^{(1)}$ peut s'avérer comparable à la stratégie $S^{(2)}$.

Ainsi, les bases initiales résultant de la méthodologie de surface de réponses dépendent des coefficients d'interpolation et ces coefficients ont une influence cruciale sur le calcul APHR muni d'une base initiale interpolée. Pour limiter l'influence des coefficients d'interpolation, une stratégie d'oubli peut être ajoutée à la stratégie $S^{(1)}$ afin que les modes empiriques ajoutés pendant une simulation lorsqu'une correction FEM est effectuée soient plus significatifs que ceux provenant de l'interpolation.

6.3.5 Conclusion

La méthodologie de surface de réponses développée dans la méthode APHR permet d'évaluer une réponse entre les paramètres échantillonnés au moyen d'une technique d'interpolation. Cette méthodologie est également utilisée pour enrichir le méta-modèle et la surface de réponse en effectuant un calcul APHR ayant pour base initiale un ensemble de modes empiriques interpolés pour une valeur de paramètre supplémentaire. La méthodologie de surface de réponses développée dans la méthode APHR est décrite en deux points. D'abord, une approche multidimensionnelle conceptuelle permet de générer un ROM multidimensionnel qui contient une base réduite multidimensionnelle et les variables réduites multidimensionnelles associées. Ce ROM multidimensionnel est une concaténation de tous les ROM des simulations effectuées. Une POD est alors menée sur ce ROM multidimensionnel afin de sélectionner les champs de transformation qui décrivent l'évolution du système de façon optimale. Ensuite, l'interpolation est poursuivie sur les modes empiriques restreints aux paramètres échantillonnés. Comme ces champs de transformation peuvent ne pas former une base, une POD est menée pour déterminer la base réduite interpolée et les variables réduites associées.

Les coefficients d'interpolation considérés ont une influence cruciale sur la réponse interpolée et sur la réponse calculée par la méthode APHR munie d'une base initiale interpolée. C'est pourquoi un facteur d'oubli peut éventuellement être ajouté dans cette analyse afin de réduire l'influence de ces coefficients d'interpolation.

L'interpolation en surface de réponse permet des gains en temps de calcul considérables pour une précision correcte sous réserve de disposer des fonctions d'interpolation. Ensuite, un calcul APHR disposant pour base initiale des modes empiriques interpolés permet de meilleurs gains par rapport à un calcul APHR sans base initiale, pour une très bonne précision.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

La méthode APHR présentée dans ce mémoire est une méthode de réduction incrémentale adaptée pour le développement et la mise au point des systèmes paramétrés complexes. Les nombreuses stratégies offertes par la méthode APHR permettent de choisir une résolution pertinente du problème thermo-mécanique considéré au cours des nombreuses simulations réalisées pour une structure au cours de la conception, du dimensionnement, de la validation, de la fabrication, du suivi en service. Ainsi il est possible de privilégier la précision pour les calculs de validation ou bien les gains en temps de calcul pour les calculs d'exploration de solutions techniques.

La méthode APHR est une méthode adaptative basée sur la POD capable de fournir une analyse paramétrée d'un système complexe. Un ROM évolutif fournit des prévisions dans une base réduite POD et ces prévisions sont éventuellement corrigées par des calculs partiels FEM. Si à la fin d'un incrément, la précision de la prévision donnée est insuffisante, l'état mécanique corrigé est utilisé pour enrichir les bases réduites POD associées au ROM d'un mode empirique. Les bases réduites associées au modèle d'ordre réduit contiennent des données relatives à tous les calculs paramétrés effectués. L'hyper-réduction est vue comme une sélection du domaine véhiculant l'information. L'espace est divisé en un ensemble de variables internes dites explicatives dont le support est le TID et un ensemble de variables internes dites expliquées. Les lois de comportement sont intégrées sur ce TID construit par la méthode APHR de façon automatique.

Les nombreuses possibilités de simulations qu'offrent la méthode APHR en terme de qualité et de temps de calcul en font une méthode complexes dont les nombreux paramètres la rendent difficile à prendre en main pour un utilisateur non expérimenté. La valeur à donner aux paramètres dans le cas d'une première simulation ou bien la façon de les modifier dans des situations ultérieures requiert la mise en oeuvre d'un savoir faire afin de permettre à l'utilisateur de bien comprendre les tenants et les aboutissants de chaque paramètre.

Un caractère assez gênant de la méthode APHR car très difficile à appréhender est la non monotonie des résultats en modifiant les paramètres de la méthode. En effet, l'augmentation de la valeur des paramètres d'hyper-réduction entraîne un TID plus étendu et par conséquent, tend à fournir des résultats de meilleure qualité en allongeant le temps de calcul. De la même façon, la diminution de la valeur des paramètres d'erreur entraîne une tolérance plus faible ce qui tend à induire des résultats de meilleure qualité en allongeant le temps de calcul. Toutefois, le bruit introduit par l'hyper-réduction durant le processus

d'adaptation entraîne une dispersion très importante autour des valeurs attendue. Une question très intéressante est d'étudier la non monotonie du gain en temps de calcul et de la qualité des résultats afin de garantir une non-régression lors de la modification des paramètres de la méthode APHR (Figure 7.1).

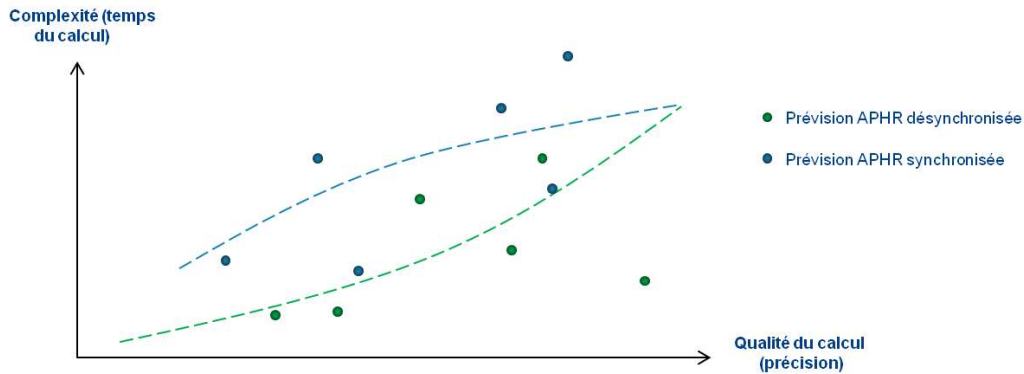


FIG. 7.1: Dispersion des résultats de la méthode APHR causée par le bruit d'adaptation

Une première idée serait par exemple de mettre en place une méthodologie qui vise à limiter le bruit d'adaptation en corrigeant automatiquement les prévision hyper-réduites à une certaine fréquence.

La désynchronisation de la représentation des variables internes s'inspire de certaines méthodes développées en homogénéisation pour la mécanique des matériaux qui proposent un traitement des variables internes par phases. Ce découpage spatial permet d'introduire une décorrélation temporelle des transformations significatives sur chaque sous-domaine désynchronisé en attachant une base réduite sur chaque sous-domaine pour chaque composante scalaire du champ des variables internes. Cette représentation désynchronisée permet également de réduire la complexité apparemment superflue de certaines phases en considérant un nombre de modes empiriques indépendant sur chacune. La méthode APHR désynchronisée propose une représentation synchronisée du champ de déplacement et une représentation désynchronisée du champ de variables internes. Ce développement fournit de meilleurs résultats en terme de précision et de gains en temps de calcul. En effet, la meilleure estimation des variables internes est fondée sur deux points :

- (i) les variables internes sont évaluées avec une meilleure précision. En effet, les bases réduites désynchronisées relatives au champ de variables internes possèdent moins de modes et ces modes sont mieux décrit car moins bruités par le processus d'adaptation. De plus, l'extrapolation à l'extérieur du TID est opérée par sous-domaines désynchronisés ce qui induit une meilleure précision dans l'extrapolation.
- (ii) la représentation désynchronisée des variables internes permet une construction du TID basée sur la partition des sous-domaines désynchronisés. Cela permet de prendre en compte chaque mode empirique pour chaque sous-domaine et par conséquent de tenir compte des transformations significatives.

La meilleure estimation des variables internes a un impact sur le temps de calcul. Comme les modes empiriques associée à la représentation désynchronisée sont de meilleure qua-

lité, le procédé de correction-enrichissement est moins sollicité et les gains en temps de calcul sont plus importants.

Une question sur l'optimalité de la position du TID se pose naturellement. Les premiers résultats sur la désynchronisation des variables internes introduite dans la méthode APHR montrent que la position du TID est déterminante sur la qualité des résultats, en particulier la mise en évidence de la plasticité. Ainsi, une étude sur l'optimalité de la position du TID devrait être menée en s'inspirant des méthodes EIM. Les méthodes empiriques d'interpolation proposent en effet dans une démarche *a posteriori* une sélection optimale des points constituant le *sample mesh* par un problème de minimisation. Une autre façon de procéder, et utilisée pour les résultats présentés dans ce mémoire consiste à ajouter des points pour réduire les gradients dans le premier mode empirique et ainsi obtenir un mode empirique fondamental le plus lisse possible. Cette approche pourrait être automatisée.

Ensuite, il faut rappeler que la désynchronisation introduit une base de modes empiriques pour chaque composante scalaire du champ de variables internes. Cependant, des résultats obtenus en homogénéisation périodique sur une cellule hétérogène 3D à base hexagonale contenant une inclusion sphérique a montré que la contrainte déviatorique $\langle \mathcal{J}_2(\boldsymbol{\sigma}) \rangle$ est très bien estimée alors que la contrainte hydrostatique $\langle \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle$ est donnée avec une erreur très importante. Une possibilité est que l'introduction de bases empiriques pour chaque composante scalaire du champ de variables internes entraine le non respect de certaines relations, en particulier une perte de l'incompressibilité du champ de déformation plastique causant une mauvaise estimation de la contrainte hydrostatique. Ces résultats poussent maintenant à privilégier une désynchronisation par sous domaine désynchronisé et par tenseur (et vecteurs) et non plus par composante scalaire.

La méthode APHR peut également être une méthode complémentaire à la NTFA. Ce sont des méthodes qui visent à réduire drastiquement le nombre de variables internes utilisées dans les modèles réduits. Dans ce but, la méthode APHR et la NTFA exploitent une décomposition des champs microscopiques sur un set de modes empiriques non uniformes. Alors que la NTFA réalise une décomposition du champs de déformation anélastique uniquement, la méthode APHR réalise une décomposition généralisée de tous les champs microscopiques dont celui des variables internes. Concernant la formulation de l'équilibre, la NTFA satisfait automatiquement les équations d'équilibre en utilisant le lemme de localisation micro-macro de Hill sur le domaine complet. Au contraire, la méthode APHR exploite une formulation tronquée des équations d'équilibre en utilisant le problème variationnel sur le TID. La principale différence demeure dans la manière de calculer les modes empiriques. Dans le cas de la méthode NTFA, les modes anélastiques sont déterminés en réalisant des calculs préliminaires sur la cellule élémentaire selon des trajets de chargement dans l'espace des contraintes macroscopiques ou des déformations macroscopiques. Cela implique que l'utilisateur a une idée de la triaxialité, de l'intensité et de l'histoire des champs macroscopiques. Au contraire, la méthode APHR permet de mener des calculs *a priori* et des modes sont ajoutés au besoin quelque soit le trajet de chargement ou l'intensité du chargement. Cela explique pourquoi la méthode APHR peut être vue comme une méthode complémentaire à la NTFA en cas d'indétermination de la triaxialité du chargement. De plus, la méthode APHR peut se substituer à la POD et à la FEM plus couteuse dans pour construire une base initiale de modes empiriques.

La méthodologie de surface de réponses développée dans la méthode APHR permet d'évaluer une réponse entre les paramètres échantillonnés au moyen d'une technique d'interpolation. Cette méthodologie est également utilisée pour enrichir le méta-modèle et la surface de réponse en effectuant un calcul APHR ayant pour base initiale un ensemble de modes empiriques interpolés pour une valeur de paramètre supplémentaire.

La méthodologie de surface de réponses développée dans la méthode APHR est décrite en deux points. D'abord, une approche multidimensionnelle conceptuelle permet de générer un ROM multidimensionnel qui contient une base réduite multidimensionnelle et les variables réduites multidimensionnelles associées. Ce ROM multidimensionnel est une concaténation de tous les ROM des simulations effectuées. Une POD est alors menée sur ce ROM multidimensionnel afin de sélectionner les modes empiriques qui décrivent l'évolution du système de façon optimale. Ensuite, l'interpolation est poursuivie sur les modes empiriques restreints aux paramètres échantillonnés. Comme ces modes empiriques peuvent ne pas former une base, une POD est menée pour déterminer la base réduite interpolée et les variables réduites associées.

Les coefficients d'interpolation considérés ont une influence cruciale sur la réponse interpolée et sur la réponse calculée par la méthode APHR munie d'une base initiale interpolée. C'est pourquoi un facteur d'oubli peut être ajouté dans cette analyse afin de réduire l'influence des coefficients d'interpolation. L'interpolation en surface de réponse permet des gains en temps de calcul considérables pour une précision correcte sous réserve de disposer des fonctions d'interpolation. Ensuite, un calcul APHR disposant pour base initiale de modes empiriques interpolés permet de meilleurs gains par rapport à un calcul APHR sans base initiale, pour une très bonne précision.

Ensuite, à propos de la méthodologie d'interpolation, l'approche développée donne à l'ensembles des bases réduites une structure d'espace vectoriel alors qu'elles forment une variété non linéaire. Cependant, cette simplification très pragmatique fournit de premiers résultats acceptables même si plusieurs questions sont soulevées. Tout d'abord, les fonctions d'interpolation sont déterminées à l'aide d'un estimateur de la contrainte moyenne dans la direction de chargement. Cependant, ce type de méthodologie a montré des résultats bien moins bons pour les variables internes, en particulier la déformation plastique cumulée. Il faudrait donc utiliser un ensemble de fonctions d'interpolation pour chaque variable interne scalaire. Ensuite, lors de l'enrichissement du méta-modèle en utilisant une base initial issue de la méthodologie d'interpolation, les premiers résultats ont montré une très grande dépendance du gain au choix des fonctions d'interpolation ce qui traduit une mauvaise robustesse de la méthodologie. Une étude de la robustesse de la procédure d'enrichissement en fonction de la base initiale pourrait donc être menée pour évaluer l'impact des fonctions d'interpolation sur le gain.

Enfin, à propos de la problématique du couplage thermo-mécanique, les approches développées dans ce mémoire restent sous investies. Le couplage étudié dans la méthodologie d'interpolation est un couplage faible car le champ de température est permanent, c'est à dire fixe dans le temps. Dans le cas d'un couplage fort, une question naturelle consiste à étudier la variation de la forme des modes empiriques avec l'évolution dans le temps du champ thermique. Cet aspect s'est avéré être un point essentiel après l'étude de l'aube de turbine soumise à un chargement thermo-mécanique non permanent. La problématique de couplage thermo-mécanique pousse également à s'interroger sur la construction de bases réduites dans une plage de validité en température.

Annexe A

Décompositions aux valeurs singulières

La Décomposition aux Valeurs Singulières (*Singular Value Decomposition*) (SVD) est une méthode d'approximation qui a fait l'objet de nombreux travaux. Elle est présentée comme une approche préliminaire pour comprendre les différentes façons de considérer la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition*) (POD) en dimension finie.

En considérant N_x localisations distinctes, la matrice des *snapshots* \mathbf{S} à valeurs réelles et de dimension $N_x \times N_t$ s'écrit :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1) & \dots & \mathbf{u}_{N_t}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{N_x}) & \dots & \mathbf{u}_{N_t}(\mathbf{x}_{N_x}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

L'objet de la SVD est de minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre la fonction \mathbf{u} et sa représentation approchée \mathbf{u}_{SVD} à l'ordre M_u :

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_x} (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_j) - \mathbf{u}_{SVD}(\mathbf{x}_j, t_i)). \quad (\text{A.2})$$

A.0.6 Méthode de Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)

La SVD de la matrice rectangulaire \mathbf{S} à valeur réelles, de dimension $N_x \times N_t$ et de rang r est la factorisation :

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (\text{A.3})$$

où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices orthogonales, respectivement de dimension $N_x \times N_x$ et $N_t \times N_t$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale de dimension $N_x \times N_t$.

La matrice $\mathbf{\Sigma}$ contient les valeurs réelles $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ appelées valeurs singulières de \mathbf{S} avec $p = \min(N_x, N_t)$ telles que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0. \quad (\text{A.4})$$

Le rang r donne le nombre de valeurs singulières non nulles et les r premières colonnes de \mathbf{U} et de \mathbf{V} donnent les vecteurs singuliers gauche et droit respectivement.

Pour $N_x < N_t$, la factorisation s'écrit :

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{U}_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{U}_{N_x} \right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \sigma_{N_x} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{N_x}^T \\ \mathbf{V}_{N_x+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{N_t}^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Pour $N_t < N_x$, la factorisation s'écrit :

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{U}_1 \quad \dots \quad \mathbf{U}_{N_t} \quad \mathbf{U}_{N_t+1} \quad \dots \quad \mathbf{U}_{N_x} \right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_{N_t} & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{N_t}^T \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

La solution du problème de minimisation est donnée par la SVD tronquée à l'ordre M_u . La représentation approchée \mathbf{u}_{SVD} est obtenue en considérant les M_u premières valeurs singulières $(\sigma_k)_{k=1}^{M_u}$ et les vecteurs singuliers $(\mathbf{U}_k)_{k=1}^{M_u}$ et $(\mathbf{V}_k)_{k=1}^{M_u}$ associés. Toutefois, le calcul direct des valeurs singulières et des vecteurs singuliers gauches et droits associés est souvent fastidieux et il est préférable de les déterminer par la résolution de problèmes aux valeurs propres équivalents.

A.0.7 Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres

La SVD est vue comme un problème aux valeurs propres en considérant les matrices carrées $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ et $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ qui s'interprètent comme une représentation discrète du tenseur des corrélations spatio-temporelles.

La SVD vue comme un problème aux valeurs propres introduit à l'ordre M_u les fonctions de forme $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$ et des fonctions du temps $(a_k)_{k=1}^{M_u}$ telles qu'un champ \mathbf{u} à approximer s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_{SVD}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\mathbf{u}_{SVD}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{M_u} \psi_k(\mathbf{x}) a_k(t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathcal{I}. \quad (\text{A.7b})$$

Lorsque $N_t < N_x$, la résolution du problème aux valeurs propres lié à la matrice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ de dimension $N_t \times N_t$ est bien moins coûteux numériquement que la résolution du problème équivalent pour la matrice $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ de dimension $N_x \times N_x$.

Cette remarque met en lumière qu'il existe en pratique deux approches différentes pour la POD. La matrice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ est liée à la méthode des *snapshots* alors que la matrice $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$

est liée à la méthode classique.

La méthode classique est utilisée de préférence lorsque $N_t \gg N_x$ et que la méthode des *snapshots* est utilisée de préférence lorsque $N_x \gg N_t$.

Méthode *snapshot* SVD En multipliant les deux membres de la SVD par \mathbf{S}^T à gauche, on obtient une matrice de dimension $N_t \times N_t$ donnée par :

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{V}^T, \quad (\text{A.8})$$

car $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{N_x}$ puisque \mathbf{U} est orthogonale.

Or, comme $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ est une matrice symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Sa décomposition sur la base propre s'écrit :

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}^T, \quad (\text{A.9})$$

où \mathbf{W} est une matrices orthogonale de dimension $N_t \times N_t$ et où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale de dimension $N_t \times N_t$ contenant les valeurs propres réelles $(\lambda_i)_{i=1}^{N_t}$.

On en déduit que $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ et $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Sigma}^2$. Le couple $(\mathbf{V}, \mathbf{\Lambda})$ représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$.

À l'ordre M_u , les fonctions de forme $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$ sont les M_u premiers vecteurs singuliers $(\mathbf{V}_k)_{k=1}^{M_u}$.

Méthode SVD classique En multipliant les deux membres de la SVD par \mathbf{S}^T à droite, on obtient une matrice de dimension $N_x \times N_x$ donnée par :

$$\mathbf{S} \mathbf{S}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{U}^T, \quad (\text{A.10})$$

car $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{N_t}$ puisque \mathbf{V} est orthogonale.

Or, comme $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ est une matrice symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Sa décomposition sur la base propre s'écrit :

$$\mathbf{S} \mathbf{S}^T = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}^T, \quad (\text{A.11})$$

où \mathbf{W} est une matrices orthogonale de dimension $N_x \times N_x$ et où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale de dimension $N_x \times N_x$ contenant les valeurs propres réelles $(\lambda_i)_{i=1}^{N_x}$.

On en déduit que $\mathbf{W} = \mathbf{U}$ et $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Sigma}^2$. Le couple $(\mathbf{U}, \mathbf{\Lambda})$ représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$.

À l'ordre M_u , les fonctions de forme $(\psi_k)_{k=1}^{M_u}$ sont les M_u premiers vecteurs singuliers $(\mathbf{U}_k)_{k=1}^{M_u}$.

Annexe B

Méthode *L*Arge *T*ime *I*Ncrement (LATIN)

Aujourd'hui en mécanique des structures, un intérêt grandissant est porté sur les méthodes multi-échelles avec lesquelles il est possible de mener une analyse à des échelles d'ordre de grandeur très différent. Alors que les modèles détaillés standards tel que la FEM nécessitent un nombre important de degré de liberté ce qui induit une résolution numérique dont le coût est élevé, les stratégies multi-échelles permettent de tenir compte de l'interaction entre une échelle macroscopique et une échelle microscopique.

La méthode *L*Arge *T*ime *I*Ncrement (LATIN) est une méthode de réduction non incrémentale et adaptative basée sur la PGD [77, 86, 78, 85]. Elle se décline sous de nombreuses formes selon le contexte avec des algorithmes variés [22, 21, 79, 107, 81, 83, 2, 84, 38, 82, 24, 106]. La méthode LATIN présentée par la suite est la méthode LATIN multi-échelle. Le premier point de la méthode consiste à subdiviser le domaine spatial en un ensemble de sous-domaines séparés par des interfaces. Dans même, l'intervalle de temps est découpé en sous-intervalles. La séparation entre les échelles microscopique et macroscopique s'opère au niveau des interfaces. Chaque quantité est la somme d'une quantité microscopique et d'une quantité macroscopique définie comme une valeur moyenne en temps et en espace.

Le deuxième point est l'utilisation de la méthode LATIN. À chaque itération, un problème macroscopique est résolu sur tout le domaine pour chaque sous-intervalle. Ce problème macroscopique est résolu en résolvant de façon préliminaire un ensemble de problèmes microscopiques sur tout le domaine pour chaque sous-intervalle à l'aide de la PGD.

B.0.8 Conditions d'admissibilité

Le domaine Ω représente la structure constituée de R sous-domaines Ω_r assimilés à des sous-structures. L'interface entre une sous-structure Ω_r et une sous-structure $\Omega_{r'}$ est notée $\phi_{rr'}$.

L'état d'une sous-structure Ω_r est entièrement défini par la restriction du champ des taux de déformations anélastiques $\dot{\epsilon}_r^{an}$ et de la restriction du champ des contraintes σ_r sur Ω_r . Sa frontière $\partial\Omega_r$ est entièrement définie par la restriction du champ de déplacement \mathbf{W}_r et de la restriction du champ de la contrainte normale \mathbf{F}_r sur $\partial\Omega_r$.

L'état d'une interface $\phi_{rr'}$ est entièrement défini par la restriction du champ de déplacement $\mathbf{W}_{rr'}$ et de la restriction du champ de la contrainte normale $\mathbf{F}_{rr'}$ sur $\phi_{rr'}$. Le comportement d'une interface peut s'avérer très complexe alors qu'une interface parfaite est décrite par $\dot{\mathbf{W}}_{rr'} = \dot{\mathbf{W}}_{rr'}$ et $\mathbf{F}_{rr'} = \mathbf{F}_{rr'}$.

On introduit l'ensemble des champs permettant de décrire complètement une sous-structure et ses interfaces $\mathbf{s}_r = (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{an}, \mathbf{W}_r, \boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{F}_r)$.

L'espace des champs statiquement admissibles $\mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$ sur la sous-structure Ω_r sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i est défini par :

$$(\boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{F}_r) \in \mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i} \iff \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_r, \quad \int_{\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \boldsymbol{\sigma}_r : \boldsymbol{\epsilon}_r(\dot{\mathbf{u}}^*) \, d\Omega dt - \int_{\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \dot{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{f} \, d\Omega dt - \int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \dot{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{F}_r \, d\gamma dt = 0. \quad (\text{B.1})$$

L'espace des champs cinématiquement admissibles $\mathbf{E}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$ sur la sous-structure Ω_r sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i est défini par :

$$(\boldsymbol{\epsilon}_r, \mathbf{W}_r) \in \mathbf{E}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i} \iff \forall (\boldsymbol{\sigma}_r^*, \mathbf{F}_r^*) \in \mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i*}, \quad \int_{\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r : \boldsymbol{\sigma}_r^* \, d\Omega dt - \int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \mathbf{F}_r^* \cdot \dot{\mathbf{W}}_r \, d\gamma dt = 0. \quad (\text{B.2})$$

Les espaces $\mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i*}$ et $\mathbf{E}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i*}$ sont les espaces vectoriels associés à $\mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$ et $\mathbf{E}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$.

L'espace des champs r-admissible $\mathcal{S}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$ sur la sous-structure Ω_r sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i vérifie :

- les équations d'équilibre $(\boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{F}_r) \in \mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$,
- les équations de compatibilité $(\boldsymbol{\epsilon}_r, \mathbf{W}_r) \in \mathbf{E}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$,
- les équations d'état linéaires,
- les conditions initiales.

B.0.9 Description des échelles microscopique et macroscopique

La distinction entre les échelles microscopique et macroscopique s'opère au niveau des interfaces. D'un point de vu spatial, l'ordre de grandeur de l'échelle macroscopique coïncide avec la longueur d'une interface. D'un point de vu temporel, l'ordre de grandeur de l'échelle macroscopique coïncide avec la durée d'un sous-intervalle. L'exposant \square^M est introduit pour faire référence à une grandeur macroscopique et l'exposant \square^m est introduit pour faire référence à une grandeur microscopique.

Chaque quantité est la somme d'une quantité microscopique et d'une quantité macroscopique définie comme une valeur moyenne en temps et en espace. Plus précisément, les grandeurs macroscopiques fournissent la meilleure estimation du travail de la forme bilinéaire associée. La partie macroscopique des grandeurs sur l'interface est défini par :

$$\mathbf{W}_r^M \in \mathcal{W}_{rr'}^{\mathcal{I}_i, M} \iff \forall \mathbf{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{rr'}^{\mathcal{I}_i, M}, \quad \int_{\phi_{rr'} \times \mathcal{I}_i} (\dot{\mathbf{W}}_r^M - \dot{\mathbf{W}}_r) \cdot \mathbf{F}^{M*} \, d\gamma dt = 0, \quad (\text{B.3a})$$

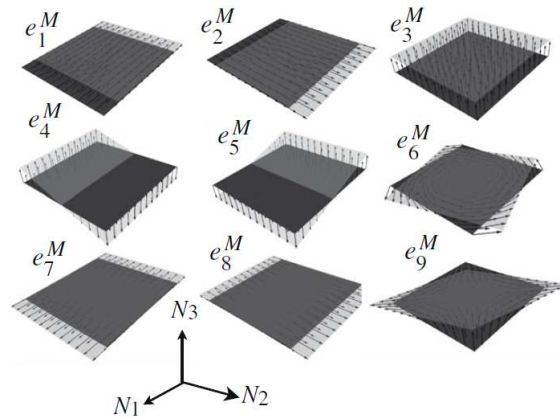
$$\mathbf{F}_r^M \in \mathcal{F}_{rr'}^{\mathcal{I}_i, M} \iff \forall \mathbf{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{rr'}^{\mathcal{I}_i, M}, \quad \int_{\phi_{rr'} \times \mathcal{I}_i} (\mathbf{F}_r^M - \mathbf{F}_r) \cdot \dot{\mathbf{W}}^{M*} \, d\gamma dt = 0, \quad (\text{B.3b})$$

avec :

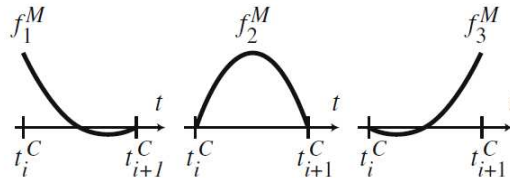
$$\mathbf{W}^m = \mathbf{W}^M - \mathbf{W}, \quad (\text{B.4a})$$

$$\mathbf{F}^m = \mathbf{F}^M - \mathbf{F}. \quad (\text{B.4b})$$

Les espaces $\mathcal{F}_{rr'}^{\mathcal{I}_i M}$ et $\mathcal{W}_{rr'}^{\mathcal{I}_i M}$ peuvent être choisis de façon arbitraire. En pratique, ils sont générés à partir de forces et de déplacements linéaires en espace et quadratiques en temps [85]. L'ensemble des forces macroscopiques $\mathbf{F}^M = (\mathbf{F}_r^M)_{r=1}^R$ est re-



(a) Méthode LATIN. Base macroscopique linéaire en espace pour une interface carrée dans le cas 3D [85]



(b) Méthode LATIN. Base macroscopique quadratique en temps sur un intervalle de temps [85]

FIG. B.1: Bases macroscopiques sur l'interface

quis *a priori* afin de vérifier systématiquement les conditions de transmission dont les conditions aux limites. L'espace des forces macroscopiques admissibles est défini par $\mathcal{F}_{ad}^{\mathcal{I}_i M} = \mathcal{F}^{\mathcal{I}_i M} = \bigotimes_{r=1}^R \mathcal{F}_{rr'}^{\mathcal{I}_i M}$. L'espace des déplacements macroscopiques admissibles est défini par $\mathcal{W}_{ad}^{\mathcal{I}_i M} = \mathcal{W}^{\mathcal{I}_i M} = \bigotimes_{r=1}^R \mathcal{W}_{rr'}^{\mathcal{I}_i M}$.

Le sous-espace de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}_i}$ dont la force macroscopique appartient à $\mathcal{F}_{ad}^{\mathcal{I}_i M}$ est défini par $\mathcal{F}_{ad}^{\mathcal{I}_i}$. Le sous-espace de $\mathcal{W}^{\mathcal{I}_i}$ dont le déplacement macroscopique appartient à $\mathcal{W}_{ad}^{\mathcal{I}_i M}$ est défini par $\mathcal{W}_{ad}^{\mathcal{I}_i}$.

B.0.10 Directions de recherche

Le premier principe de la méthode LATIN est la séparations des équations selon deux espaces.

L'espace \mathbf{A}_{ad} contient les équations linéaires globales. Il vérifie :

- la r-admissibilité sur les sous-structures $(\Omega_r)_{r=1}^R$ sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i $\mathbf{s}_r \in \mathcal{S}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$,
- l'admissibilité de la force macroscopique sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{ad}^{\mathcal{I}_i}$.

L'espace $\mathbf{\Gamma}$ contient les équations non-linéaires locales. Il vérifie :

- les équations d'évolution sur les sous-structures $(\Omega_r)_{r=1}^R$ sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i ,
- le comportement des interfaces sur les frontières $(\partial\Omega_r)_{r=1}^R$ sur le sous-intervalle \mathcal{I}_i en cas de comportement non parfait.

Le deuxième principe de la méthode LATIN est de résoudre alternativement un problème global linéaire sur l'espace \mathbf{A}_{ad} et un problème local non-linéaire sur l'espace $\mathbf{\Gamma}$. Cela introduit des directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- .

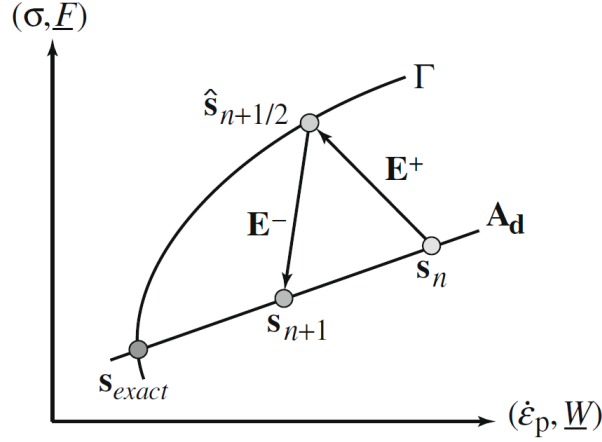


FIG. B.2: Méthode LATIN. Directions de recherche pour une itération

Étape locale non linéaire L'étape locale non-linéaire consiste à trouver la solution $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$ à partir de la solution $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_{ad}$. La direction de recherche \mathbf{E}^+ est définie par :

$$\left(\dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_r^{an} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{an} \right) + \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_r - \boldsymbol{\sigma}_r) = 0, \quad (\text{B.5a})$$

$$\left(\dot{\hat{\mathbf{W}}}_r - \dot{\mathbf{W}}_r \right) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{F}}_r - \mathbf{F}_r) = 0, \quad (\text{B.5b})$$

où \mathbf{H} et \mathbf{h} sont des opérateurs symétriques et définis positifs.

Étape globale linéaire L'étape globale linéaire consiste à trouver la solution $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_{ad}$ à partir de la solution $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$. La direction de recherche \mathbf{E}^- est définie par :

$$\left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{an} - \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_r^{an} \right) - \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_r - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_r) = 0, \quad (\text{B.6a})$$

$$\forall \mathbf{F}^* \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}_i}, \sum_{r=1}^R \left(\int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \left(\left(\dot{\mathbf{W}}_r - \dot{\hat{\mathbf{W}}}_r \right) + \mathbf{h}(\mathbf{F}_r - \hat{\mathbf{F}}_r) - \dot{\mathbf{W}}_r^M \right) \cdot \mathbf{F}_r^* \, d\gamma dt \right) = 0, \quad (\text{B.6b})$$

où la direction de recherche sur la frontière s'écrit de façon faible en introduisant le multiplicateur de Lagrange $\dot{\tilde{\mathbf{W}}}^M$ en raison de l'admissibilité de la force macroscopique. L'admissibilité de la force macroscopique s'exprime selon :

$$\forall \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^{M*} \in \mathcal{W}_{ad}^{\mathcal{I}_i M}, \sum_{r=1}^R \left(\int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^{M*} \cdot \mathbf{F}_r \, d\gamma dt - \int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^{M*} \cdot \mathbf{F} \, d\gamma dt \right) = 0. \quad (\text{B.7})$$

B.0.11 Résolution multi-échelles

Problème microscopique Le problème microscopique consiste à résoudre le problème dans la direction \mathbf{E}^- , c'est à dire trouver $(\boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{F}_r) \in \mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{\sigma}_r^*, \mathbf{F}_r^*) \in \mathbf{F}_{r,ad}^{\mathcal{I}_i*}, \int_{\Omega_r \times \mathcal{I}_i} (\mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r + \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_r) : \boldsymbol{\sigma}_r^* \, d\Omega dt + \int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \mathbf{F}_r^* \cdot \mathbf{h} \mathbf{F}_r \, d\gamma dt \\ - \int_{\Omega_r \times \mathcal{I}_i} (\mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_r - \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_r^{an}) : \boldsymbol{\sigma}_r^* \, d\Omega dt - \int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \mathbf{F}_r^* \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r + \mathbf{h} \hat{\mathbf{F}}_r + \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^M) \, d\gamma dt = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Comme le problème est linéaire, le problème est reformulé de la façon suivante :

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{s}_r \left(\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^M \right) + \tilde{\mathbf{s}}_r, \quad (\text{B.9})$$

où $\tilde{\mathbf{s}}_r$ est la solution du problème microscopique lorsque $\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r = 0$. Appliquée à la force macroscopique, cette relation s'écrit :

$$\mathbf{F}_r^M = \mathbf{L}_r \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^M + \tilde{\mathbf{F}}_r^M, \quad (\text{B.10})$$

où \mathbf{L}_r est un opérateur linéaire qui s'interprète comme un opérateur d'homogénéisation sur le domaine $\Omega_r \times \mathcal{I}_i$.

Problème macroscopique Le problème microscopique consiste à résoudre le problème homogénéisé et déterminer le multiplicateur de Lagrange tel que :

$$\forall \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^{M*} \in \mathcal{W}_{ad}^{\mathcal{I}_i M}, \sum_{r=1}^R \left(\int_{\partial\Omega_r \times \mathcal{I}_i} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^{M*} \cdot \mathbf{L}_r \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^M - \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_r^{M*} \cdot (\mathbf{F} - \tilde{\mathbf{F}}_r^M) \, d\gamma dt \right) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Table des figures

1	Performance de plusieurs méthodes numériques	iv
2.1	Approximation à variables séparées pour une suite de problèmes séquentiels	6
2.2	Approximation à variables séparées pour un problème simultané	7
2.3	Construction des modes empiriques les mieux corrélées en moyenne aux réalisations	11
3.1	Méthode APHR. Représentation du champ de déplacement synchronisé sur le domaine Ω et du champ de variables internes synchronisé sur le domaine Ω	35
3.2	Méthode APHR. TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$	35
3.3	Méthode APHR. Extrapolation des variables internes synchronisées sur le domaine Ω à l'extérieur du TID	38
4.1	Système hétérogène sollicité en traction-compression	44
4.2	Méthode APHR désynchronisée. Représentation du champ de déplacement synchronisé sur le domaine Ω et du champ de variables internes désynchronisé sur le domaine Ω	53
4.3	Méthode APHR désynchronisée. TID $\Omega_{\Pi}^{(n)}$	54
4.4	Méthode APHR désynchronisée. Extrapolation des variables internes désynchronisées à l'extérieur du TID	57
4.5	Plaque munie d'inclusions. Plaque carrée	65
4.6	Plaque munie d'inclusions. Prévisions de la méthode APHR dans la direction $\Sigma^{(1)}$	67
4.7	Plaque munie d'inclusions. Indicateur d'erreur η_z de la méthode APHR selon $\Sigma^{(1)}$	68
4.8	Plaque munie d'inclusions. Évolution du nombre de modes	68
4.9	Plaque munie d'inclusions. Modes empiriques relatifs à la déformation élastique ϵ_{e22} dans la direction $\Sigma^{(1)}$	73
4.10	Bruit introduit par l'hyper-réduction durant le processus d'adaptation de la méthode APHR	74
4.11	Plaque munie d'inclusions. TID dans les simulations $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$	74
4.12	Plaque munie d'inclusions. Performance des prévisions de la méthode APHR dans la direction $\Sigma^{(1)}$	75

5.1	Homogénéisation sur une cellule élémentaire. Cellule périodique avec arrangement hexagonal proposée dans [96]	84
5.2	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(1)}$	85
5.3	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(2)}$	86
5.4	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(3)}$	86
5.5	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. Indicateurs d'erreur de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(3)}$	87
5.6	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaires. Modes relatifs à la déformation plastique cumulée dans la direction $\mathbf{E}^{(1)}$	88
5.7	Homogénéisation sur une cellule élémentaire. Évolution du nombre de modes selon $\mathbf{E}^{(3)}$	89
5.8	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaires. Modes relatifs à la déformation plastique cumulée dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$	91
5.9	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaires. Modes intermédiaires relatifs à la déformation plastique cumulée dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$	92
5.10	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. TID dans la simulation dans la direction $\mathbf{E}^{(1)}$	93
5.11	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. TID dans la simulation dans la direction $\mathbf{E}^{(2)}$	93
5.12	Homogénéisation sur une cellule élémentaire en traction-cisaillement. Matrice avec écouissage isotrope non-linéaire. TID dans la simulation dans la direction $\mathbf{E}^{(3)}$	93
6.1	Interpolation en surface de réponse. Surface de réponse associée à un méta-modèle	96
6.2	Interpolation en surface de réponse. Interpolation de la réponse \mathbf{u}_{RS} entre les paramètres échantillonnés	101
6.3	Interpolation en surface de réponse. Cellule périodique avec arrangement hexagonal	104
6.4	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 50$ °C	107
6.5	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 250$ °C	107

6.6	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de l'interpolation selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 90$ °C	108
6.7	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 90$ °C	109
6.8	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de l'interpolation selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 110$ °C	109
6.9	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 110$ °C	110
6.10	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de l'interpolation selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 190$ °C	110
6.11	Interpolation en surface de réponse. Prévisions de la méthode APHR selon $\mathbf{E}^{(0)}$ à $\theta = 190$ °C	111
7.1	Dispersion des résultats de la méthode APHR causée par le bruit d'adaptation	114
B.1	Bases macroscopiques sur l'interface	123
B.2	Méthode LATIN. Directions de recherche pour une itération	124

Table des algorithmes

1	Algorithme POD non adaptatif	14
2	Algorithme POD adaptatif	15
3	Algorithme APR adaptatif	19
4	Algorithme PGD	22
5	Algorithme PGD progressif	24
6	Algorithme de construction d'une base réduite par Gappy-POD	28
7	Algorithme APHR adaptatif	42
8	Algorithme APHR désynchronisé non adaptatif	63
9	Algorithme APHR désynchronisé adaptatif	64

Bibliographie

- [1] N. M. Alexandrov, J. E. Dennis, R. M. Lewis, and V. Torczon. A trust-region framework for managing the use of approximation models in optimization. *Structural Optimization*, 15(1) :16–23, 1998.
- [2] O. Allix and P. Vidal. A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(25-26) :2727–2758, 2002.
- [3] P. Alotto, M. Guarnieri, F. Moro, and A. Stella. A proper generalized decomposition approach for fuel cell polymeric membrane modeling. *Ieee Transactions on Magnetism*, 47(5) :1462–1465, 2011.
- [4] A. Ammar, F. Chinesta, and E. Cueto. Coupling finite elements and proper generalized decompositions. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(1) :17–33, 2011.
- [5] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some, classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176, 2006.
- [6] D. Amsallem, J. Cortial, K. Carlberg, and C. Farhat. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(9) :1241–1258, 2009.
- [7] D. Amsallem and C. Farhat. Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *Aiaa Journal*, 46(7) :1803–1813, 2008.
- [8] H. A. Ardeh, M. Tupy, D. Negrut, and Asme. On the construction and use of surrogate models for the dynamic analysis of multibody systems. *Imece2009 : Proceedings of the Asme International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Vol 13*, pages 17–26, 2010. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition NOV 13-19, 2009 Lake Buena Vista, FL ASME 978-0-7918-4386-4.
- [9] P. Astrid, S. Weiland, K. Willcox, and T. Backx. Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. *Ieee Transactions on Automatic Control*, 53(10) :2237–2251, 2008.
- [10] P. Astrid, S. Weiland, K. Willcox, T. Backx, and ieee. *Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition*, pages 1767–1772. Ieee Conference on Decision and Control - Proceedings. 2004. CDC 43rd IEEE Conference on Decision and Control DEC 14-17, 2004 San Diego, CA IEEE ; Honeywell ; MathWorks ; Natl Instruments ; United Technol Res Ctr ; XEROX.

- [11] N. Aubry, P. Holmes, J. L. Lumley, and E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary-layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.
- [12] Y. A. Bahei-El-Din, R. Khire, and P. Hajela. Multiscale transformation field analysis of progressive damage in fibrous laminates. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 8(1) :69–80, 2010.
- [13] O. Balima, Y. Favennec, and D. Petit. Model reduction for heat conduction with radiative boundary conditions using the modal identification method. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 52(2) :107–130, 2007.
- [14] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A. T. Patera. An 'empirical interpolation' method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathematique*, 339(9) :667–672, 2004.
- [15] M. Bergmann, C. H. Bruneau, and A. Lollo. Enablers for robust pod models. *Journal of Computational Physics*, 228(2) :516–538, 2009.
- [16] M. Bergmann and L. Cordier. Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and pod reduced-order models. *Journal of Computational Physics*, 227(16) :7813–7840, 2008.
- [17] M. Bergmann, L. Cordier, J. P. Brancher, and Ieee. *Control of the cylinder wake in the laminar regime by Trust-Region methods and POD Reduced Order Models*, pages 524–529. Ieee Conference on Decision and Control - Proceedings. 2005. 44th IEEE Conference on Decision Control/European Control Conference (CCD-ECC) DEC 12-15, 2005 Seville, SPAIN IEEE Control Syst Soc ; European Union Control Assoc ; IFAC ; INFORMS ; SIAM ; SICE ; Honeywell ; MathWorks.
- [18] M. Beringhier, M. Gueguen, and J. C. Grandidier. Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representation - application to thermoviscoelasticity. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17, 2010.
- [19] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25 :539–575, 1993.
- [20] B. Bognet, A. Leygue, F. Chinesta, and A. Poitou. *PGD and separated space variables representation for linear elasticity in 3D representation of plate domains*, volume 1315 of *AIP Conference Proceedings*, pages 203–208. 2010. International Conference on Advances in Materials and Processing Technologies OCT 24-27, 2010 Ctr Arts & Metiers ParisTech, Paris, FRANCE Ctr Arts & Metiers ParisTech ; MINES ParisTech ; Centrale Nantes ; ENI St Etienne ; Univ Valenciennes ; Oxford ; Transvalor.
- [21] P. Boisse, P. Bussy, and P. Ladeveze. A new approach in nonlinear mechanics - the large time increment method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(3) :647–663, 1990.
- [22] P. Boisse, P. Ladeveze, and P. Rougee. A large time increment method for elastoplastic problems. *European Journal of Mechanics a-Solids*, 8(4) :257–275, 1989.
- [23] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta, and P. Villon. Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1) :2–17, 2011.

- [24] P. A. Boucard, S. Buytet, and P. A. Guidault. A multiscale strategy for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(1) :101–126, 2009.
- [25] K. Carlberg, C. Bou-Mosleh, and C. Farhat. Efficient non-linear model reduction via a least-squares petrov-galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2) :155–181, 2011.
- [26] S. Cartel. *Méthode Numériques de représentation à variables séparées pour la résolution des problèmes paramétriques en mécanique non-linéaire des structures*. PhD thesis, 2011.
- [27] J. L. Chaboche, S. Kruch, J. F. Maire, and T. Pottier. Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *International Journal of Plasticity*, 17(4) :411–439, 2001. 7th International Symposium on Plasticity and Its Current Applications JAN, 1999 CANCUN, MEXICO.
- [28] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *Siam Journal on Scientific Computing*, 32(5) :2737–2764, 2010.
- [29] T. Y. Chen and S. H. Liu. A transformation field analysis of thermomechanical stresses in particulate metal-matrix composites. *Composites Engineering*, 4(7) :763–774, 1994.
- [30] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Proper generalized decomposition of multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1114–1132, 2010. SI.
- [31] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :327–350, 2010.
- [32] F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, and R. Keunings. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11) :578–592, 2011. SI 16th International Workshop on Numerical Methods for Non-Newtonian Flows JUN 13-16, 2010 Northhampton, MA.
- [33] R. D. Cramer, J. D. Bunce, D. E. Patterson, and I. E. Frank. Cross-validation, bootstrapping, and partial least-squares compared with multiple-regression in conventional qsar studies. *Quantitative Structure-Activity Relationships*, 7(1) :18–25, 1988.
- [34] D. N. Daescu and I. M. Navon. Efficiency of a pod-based reduced second-order adjoint model in 4d-var data assimilation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(6) :985–1004, 2007.
- [35] M. Drohmann, B. Haasdonk, and M. Ohlberger. Reduced basis approximation for nonlinear parametrized evolution equations based on empirical operator interpolation. *Siam Journal on Scientific Computing*, 34(2) :A937–A969, 2012.
- [36] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper general decomposition (pgd) for the resolution of navier-stokes equations. *Electrochimica Acta*, 56(3) :1387–1407, 2011.

- [37] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper general decomposition (pgd) for the resolution of navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(4) :1387–1407, 2011.
- [38] D. Dureisseix, P. Ladeveze, and B. A. Schrefler. A latin computational strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10) :1489–1510, 2003.
- [39] G. J. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite-materials. *Proceedings of the Royal Society of London Series a-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 437(1900) :311–327, 1992.
- [40] G. J. Dvorak and Y. A. Baheieldin. A bimodal plasticity theory of fibrous composite-materials. *Acta Mechanica*, 69(1-4) :219–241, 1987.
- [41] G. J. Dvorak, Y. A. Baheieldin, and A. M. Wafa. Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite-materials. *Computational Mechanics*, 14(3) :201–228, 1994.
- [42] G. J. Dvorak, Y. A. Baheieldin, and A. M. Wafa. The modeling of inelastic composite-materials with the transformation field analysis. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2(3A) :571–586, 1994. IUTAM Symposium on Computational Mechanics of Materials JUN 15-18, 1993 BROWN UNIV, PROVIDENCE, RI INT UNION THEORET & APPL MECH.
- [43] G. J. Dvorak and Y. Benveniste. On transformation strains and uniform-fields in multiphase elastic media. *Proceedings of the Royal Society of London Series a-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 437(1900) :291–310, 1992.
- [44] G. J. Dvorak and M. S. M. Rao. Axisymmetric plasticity theory of fibrous composites. *International Journal of Engineering Science*, 14(4) :361–373, 1976.
- [45] G. J. Dvorak and H. Zhang. Transformation field analysis of damage evolution in composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11) :2517–2541, 2001.
- [46] J. L. Eftang, M. A. Grepl, and A. T. Patera. A posteriori error bounds for the empirical interpolation method. *Comptes Rendus Mathematique*, 348(9-10) :575–579, 2010.
- [47] R. Everson and L. Sirovich. Karhunen-loeve procedure for gappy data. *Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision*, 12(8) :1657–1664, 1995.
- [48] A. Falco and A. Nouy. A proper generalized decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional eckart-young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) :469–480, 2011.
- [49] J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi, and M. S. Shephard. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1-2) :53–73, 1997.
- [50] J. Fish and Q. Yu. Computational mechanics of fatigue and life predictions for composite materials and structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43) :4827–4849, 2002.

- [51] P. Franciosi and S. Berbenni. Heterogeneous crystal and poly-crystal plasticity modeling from a transformation field analysis within a regularized schmid law. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(11) :2265–2299, 2007.
- [52] F. Fritzen and T. Boehlke. Three-dimensional finite element implementation of the nonuniform transformation field analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(7) :803–829, 2010.
- [53] F. Fritzen and T. Boehlke. Nonuniform transformation field analysis of materials with morphological anisotropy. *Composites Science and Technology*, 71(4) :433–442, 2011.
- [54] D. Galbally, K. Fidkowski, K. Willcox, and O. Ghattas. Non-linear model reduction for uncertainty quantification in large-scale inverse problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(12) :1581–1608, 2010.
- [55] B. Ganapathysubramanian and N. Zabaras. A non-linear dimension reduction methodology for generating data-driven stochastic input models. *Journal of Computational Physics*, 227(13) :6612–6637, 2008.
- [56] S. Ganapathysubramanian and N. Zabaras. Design across length scales : a reduced-order model of polycrystal plasticity for the control of micro structure-sensitive material properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47) :5017–5034, 2004.
- [57] P. Geladi and B. R. Kowalski. Partial least-squares regression - a tutorial. *Analytica Chimica Acta*, 185 :1–17, 1986.
- [58] C. Ghnatios, F. Chinesta, E. Cueto, A. Leygue, and A. Poitou. *Optimizing Composites Forming Processes by Applying the Proper Generalized Decomposition*, volume 1315 of *AIP Conference Proceedings*, pages 197–202. 2010. International Conference on Advances in Materials and Processing Technologies OCT 24-27, 2010 Ctr Arts & Metiers ParisTech, Paris, FRANCE Ctr Arts & Metiers ParisTech ; MINES ParisTech ; Centrale Nantes ; ENI St Etienne ; Univ Valenciennes ; Oxford ; Transvalor.
- [59] F. Glover. Future paths for integer programming and links to artificial-intelligence. *Computers and Operations Research*, 13(5) :533–549, 1986.
- [60] W. R. Graham, J. Peraire, and K. Y. Tang. Optimal control of vortex shedding using low-order models. part i - open-loop model development. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(7) :945–972, 1999.
- [61] W. R. Graham, J. Peraire, and K. Y. Tang. Optimal control of vortex shedding using low-order models. part ii - model-based control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(7) :973–990, 1999.
- [62] M. A. Grepl and M. Kaercher. Reduced basis a posteriori error bounds for parametrized linear-quadratic elliptic optimal control problems. *Comptes Rendus Mathematique*, 349(15-16) :873–877, 2011.
- [63] M. A. Grepl, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A. T. Patera. Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *Esaim-Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modelisation Mathematique Et Analyse Numerique*, 41(3) :575–605, 2007.

- [64] B. Haasdonk and M. Ohlberger. Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations. *Esaim-Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modelisation Mathematique Et Analyse Numerique*, 42(2) :277–302, 2008.
- [65] B. Haasdonk and M. Ohlberger. Efficient reduced models and a posteriori error estimation for parametrized dynamical systems by offline/online decomposition. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(2) :145–161, 2011.
- [66] B. Halphen and Q. S. Nguyen. Generalized standard materials. *Journal De Mecanique*, 14(1) :39–63, 1975.
- [67] P. J. Holmes, J. L. Lumley, G. Berkooz, J. C. Mattingly, and R. W. Wittenberg. Low-dimensional models of coherent structures in turbulence. *Physics Reports-Review Section of Physics Letters*, 287(4) :338–384, 1997.
- [68] H. Hotelling. New light on the correlation coefficient and its transform. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B*, 15 :193–232, 1953.
- [69] A. K. Jain, M. N. Murty, and P. J. Flynn. Data clustering : A review. *Acm Computing Surveys*, 31(3) :264–323, 1999.
- [70] N. Jung, A. T. Patera, B. Haasdonk, and B. Lohmann. Model order reduction and error estimation with an application to the parameter-dependent eddy current equation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(6) :561–582, 2011.
- [71] K. Karhunen. Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 37 :3–79, 1947.
- [72] P. I. Kattan and G. Z. Voyiadjis. Overall damage and elastoplastic deformation in fibrous metal-matrix composites. *International Journal of Plasticity*, 9(8) :931–949, 1993.
- [73] P. Kerfriden, P. Gosselet, S. Adhikari, and S. Bordas. Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented newton-krylov algorithms : An adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8) :850–866, 2011.
- [74] P. Kerfriden, P. Gosselet, S. Adhikari, S. Bordas, and J. C. Passieux. *POD-based model order reduction for the simulation of strong nonlinear evolutions in structures : application to damage propagation*, volume 10 of *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*. 2010. 9th World Congress on Computational Mechanics/4th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics JUL 19-23, 2010 Sydney, AUSTRALIA.
- [75] D. Klindworth, M. A. Grepl, and G. Vossen. Certified reduced basis methods for parametrized parabolic partial differential equations with non-affine source terms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209 :144–155, 2012.
- [76] A. Krishnan, L. J. Williams, A. R. McIntosh, and H. Abdi. Partial least squares (pls) methods for neuroimaging : A tutorial and review. *Neuroimage*, 56(2) :455–475, 2011.
- [77] P. Ladeveze. On algorithm family in structural mechanics. *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie Ii*, 300(2) :41–44, 1985.

- [78] P. Ladeveze. The large time increment method for the analysis of structures with non-linear behavior described by internal variables. *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie Ii*, 309(11) :1095–1099, 1989.
- [79] P. Ladeveze, O. Allix, J. F. Deu, and D. Leveque. A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2) :105–122, 2000.
- [80] P. Ladeveze and L. Chamoin. On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23-24) :2032–2047, 2011.
- [81] P. Ladeveze, O. Loiseau, and D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2) :121–138, 2001. 5th US National Congress on Computational Mechanics AUG 04-06, 1999 UNIV COLORADO, BOULDER, COLORADO.
- [82] P. Ladeveze, D. Neron, and P. Gosselet. On a mixed and multiscale domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8) :1526–1540, 2007.
- [83] P. Ladeveze and A. Nouy. A multiscale computational method with time and space homogenization. *Comptes Rendus Mecanique*, 330(10) :683–689, 2002.
- [84] P. Ladeveze and A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) :3061–3087, 2003. Workshop on Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures SEP 18-20, 2002 CACHAN, FRANCE.
- [85] P. Ladeveze, J. C. Passieux, and D. Neron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22) :1287–1296, 2010.
- [86] P. Ladeveze and P. Rougee. Plasticity and viscoplasticity under periodic loading - properties and computation of the limit-cycle. *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie Ii*, 301(13) :891–894, 1985.
- [87] H. Lamari, A. Ammar, P. Cartraud, G. Legrain, F. Chinesta, and F. Jacquemin. Routes for efficient computational homogenization of nonlinear materials using the proper generalized decompositions. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :373–391, 2010.
- [88] A. Leygue, F. Chinesta, M. Beringhier, J. C. Grandidier, F. Pesavento, and B. Schrefler. Towards a framework for non-linear thermal models in shell domains. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, In Press.
- [89] T. Lieu and C. Farhat. Adaptation of pod-based aeroelastic roms for varying mach number and angle of attack : Application to a complete f-16 configuration. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2005-7666, 2005.
- [90] T. Lieu and C. Farhat. Adaptation of aeroelastic reduced-order models and application to an f-16 configuration. *Aiaa Journal*, 45(6) :1244–1257, 2007.

- [91] T. Lieu, C. Farhat, and A. Lesoinne. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41-43) :5730–5742, 2006.
- [92] T. Lieu and M. Lesoinne. Parameter adaptation of reduced order models for three-dimensional flutter analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2004-0888, 2004.
- [93] M. M. Loève. *Probability theory, The University Series in Higher Mathematics*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 3rd edition, 1963.
- [94] J. L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [95] A. R. McIntosh, F. L. Bookstein, J. V. Haxby, and C. L. Grady. Spatial pattern analysis of functional brain images using partial least squares. *Neuroimage*, 3(3) :143–157, 1996.
- [96] J. C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25) :6937–6955, 2003. 14th United States National Congress of Theoretical and Applied Mechanics JUN 23-28, 2002 Virginia Tech, BLACKSBURG, VA.
- [97] J. C. Michel and P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48-51) :5477–5502, 2004.
- [98] D. Missoum-Benziane, D. Ryckelynck, and F. Chinesta. A new fully coupled two-scales modelling for mechanical problems involving microstructure : The 95/5 technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(21-24) :2325–2337, 2007.
- [99] E. Monteiro, J. Yvonnet, and Q. C. He. Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction. *Computational Materials Science*, 42(4) :704–712, 2008.
- [100] D. Neron and P. Ladeveze. Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :351–372, 2010.
- [101] E. T. Y. Ng and A. Suleman. *Elastoplastic Modeling of Multi-phase Metal Matrix Composite with Void Growth Using the Transformation Field Analysis and Governing Parameter Method*, volume 10 of *Mechanical Response of Composites*. 2008. 1st ECCOMAS Thematic Conference on Mechanical Response of Composites SEP 12-14, 2007 Univ Porto, Oporto, PORTUGAL ECCOMAS.
- [102] N. C. Nguyen, A. T. Patera, and J. Peraire. A 'best points' interpolation method for efficient approximation of parametrized functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(4) :521–543, 2008.
- [103] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, and F. Chinesta. Real-time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 91(3) :223–231, 2008.
- [104] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24) :1603–1626, 2010.

- [105] A. Nouy. Proper generalized decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :403–434, 2010.
- [106] J. C. Passieux, P. Ladeveze, and D. Neron. A scalable time-space multiscale domain decomposition method : adaptive time scale separation. *Computational Mechanics*, 46(4) :621–633, 2010.
- [107] J. P. Pelle and D. Ryckelynck. An efficient adaptive strategy to master the global quality of viscoplastic analysis. *Computers & Structures*, 78(1-3) :169–183, 2000. 4th International Conference on Computational Structures Technology/1st International Conference on Engineering Computational Technology AUG 18-21, 1998 EDINBURGH, SCOTLAND.
- [108] P. Ponte Castaneda. The effective mechanical-properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :45–71, 1991.
- [109] P. Prochazka. Homogenization of nonlinear composites using transformation field analysis. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 22(6) :721–727, 1999.
- [110] E. Pruliere, F. Chinesta, and A. Ammar. On the deterministic solution of multi-dimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4) :791–810, 2010.
- [111] S. S. Ravindran. A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 34(5) :425–448, 2000.
- [112] S. Roussette, J. C. Michel, and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis of elastic-viscoplastic composites. *Composites Science and Technology*, 69(1) :22–27, 2009.
- [113] E. H. Ruspini. A new approach to clustering. *Information and Control*, 15(1) :22–, 1969.
- [114] A. C. Rutherford, D. J. Inman, G. Park, and F. M. Hemez. Use of response surface metamodells for identification of stiffness and damping coefficients in a simple dynamic system. *Shock and Vibration*, 12(5) :317–331, 2005.
- [115] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1), 2005.
- [116] D. Ryckelynck. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :75–89, 2009.
- [117] D. Ryckelynck, F. Chinesta, E. Cueto, and A. Ammar. On the a priori model reduction : Overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(1) :91–128, 2006.
- [118] D. Ryckelynck and D. Missoum-Benziane. Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17-20) :1134–1142, 2010.
- [119] D. Ryckelynck, D. Missoum-Benziane, S. Cartel, and J. Besson. A robust adaptive model reduction method for damage simulations. *Computational Materials Science*, 50(5) :1597–1605, 2011.

- [120] D. Ryckelynck, F. Vincent, and S. Cantournet. Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225 :28–43, 2012.
- [121] J. W. Sammon. A nonlinear mapping for data structure analysis. *Ieee Transactions on Computers*, C 18(5) :401–, 1969.
- [122] B. Sarbandi, S. Cartel, J. Besson, and D. Ryckelynck. Truncated integration for simultaneous simulation of sintering using a separated representation. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :455–463, 2010.
- [123] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures .1. coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :561–571, 1987.
- [124] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures .2. symmetries and transformations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :573–582, 1987.
- [125] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures .3. dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :583–590, 1987.
- [126] L. Sirovich and M. Kirby. Low-dimensional procedure for the characterization of human faces. *Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision*, 4(3) :519–524, 1987.
- [127] A. Sornborger, C. Sailstad, E. Kaplan, and L. Sirovich. Spatiotemporal analysis of optical imaging data. *Neuroimage*, 18(3) :610–621, 2003.
- [128] D. R. S. Talbot and J. R. Willis. Variational-principles for inhomogeneous nonlinear media. *Ima Journal of Applied Mathematics*, 35(1) :39–54, 1985.
- [129] J. L. Teply and G. J. Dvorak. Bounds on overall instantaneous properties of elastic plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36(1) :29–58, 1988.
- [130] C. J. F. Terbraak and S. Juggins. Weighted averaging partial least-squares regression (wa-pls) - an improved method for reconstructing environmental variables from species assemblages. *Hydrobiologia*, 269 :485–502, 1993. 12th international diatom symposium, AUG 30-SEP 05, 1992, RENESSE, NETHERLANDS.
- [131] N. Verdon, C. Allery, C. Beghein, A. Hamdouni, and D. Ryckelynck. Reduced-order modelling for solving linear and non-linear equations. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(1), 2011.
- [132] K. Veroy and A. T. Patera. Certified real-time solution of the parametrized steady incompressible navier-stokes equations : rigorous reduced-basis a posteriori error bounds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(8-9) :773–788, 2005. 8th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics 2004 Oxford Univ Comp Lab, Oxford, ENGLAND Inst Computat Fluid Dynam.
- [133] F. Vincent. *Du modèle matériau à mécanique des systèmes : étude dynamique d'une liaison souple en silicone chargée de silice*. PhD thesis, 2011.
- [134] J. H. Ward. Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, 58(301) :236–, 1963.
- [135] K. Willcox. Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition. *Computers & Fluids*, 35(2) :208–226, 2006.

- [136] J. R. Willis. On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :73–86, 1991.
- [137] D. Wirtz and B. Haasdonk. Efficient a-posteriori error estimation for nonlinear kernel-based reduced systems. *Systems & Control Letters*, 61(1) :203–211, 2012.
- [138] S. Wold, A. Ruhe, H. Wold, and W. J. Dunn. The collinearity problem in linear-regression - the partial least-squares (pls) approach to generalized inverses. *Siam Journal on Scientific and Statistical Computing*, 5(3) :735–743, 1984.
- [139] Z. Wu and R. Leahy. An optimal graph-theoretic approach to data clustering - theory and its application to image segmentation. *Ieee Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1101–1113, 1993.
- [140] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1-3. Butterworth-Heinmann, London, 2000.