HAL
open science

Indiscrétions aux interfaces

Adrien Benusiglio

To cite this version:

Adrien Benusiglio. Indiscrétions aux interfaces. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2013. Français. NNT : . pastel-00860739

HAL Id: pastel-00860739

https://pastel.hal.science/pastel-00860739

Submitted on 11 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT

Spécialité Mécanique

Présentée par

Adrien BENUSIGLIO

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Indiscrétions aux interfaces

Soutenance prévue le 21 juin 2013 devant le jury composé de :

M.	Christophe Clanet	Directeur de thèse
M.	Yann Doutreleau	
M.	Detlef Lohse	
M	Patrice Meunier	Rapporteur
M.	Frédéric Moisy	Rapporteur
M.	David Quéré	Directeur de thèse

Table des matières

I Explosions à la surface de l'eau **5**

1 Introduction **7**
1.1 Contexte . . . 7
1.2 Rappel sur les cavités . . . 8
1.2.1 Cavité d'impact dans un liquide . . . 8
1.2.2 Cavité d'impact sur un solide . . . 9

2 Explosions non confinées **11**
2.1 Montage expérimental . . . 11
2.2 Résultats . . . 12
2.2.1 Résultats qualitatifs . . . 12
2.2.2 Résultats quantitatifs . . . 13
2.3 Modèle de conservation de l'énergie . . . 14
2.4 Modèle potentiel. . . . 16
2.5 Ecoulement réel . . . 19
2.6 Impacts et explosions . . . 20
2.7 Conclusion . . . 23

3 Explosions confinées **25**
3.1 Introduction . . . 25
3.2 Montage . . . 25
3.3 Résultats . . . 26
3.4 Modélisation . . . 27
3.5 Les tubes ou la vidange impossible, les jets. . . . 31
3.6 Article . . . 33

II Interaction d'un anneau tourbillonnaire avec une surface **51**

4 Tourbillons et vorticité **53**
4.1 Introduction . . . 53
4.1.1 Contexte . . . 53
4.1.2 Formation des tourbillons . . . 53
4.2 Tourbillons et vorticité . . . 54
4.2.1 Vitesse dans le tourbillon . . . 54
4.2.2 Vorticité . . . 55
4.3 Zone externe du tourbillon . . . 55
4.3.1 Circulation . . . 55

4.3.2 Lois de conservation . . . 56
4.3.3 Analogie électromagnétique . . . 57
4.3.4 Filament de vorticité ($r >> a$) . . . 58
4.3.5 Interaction entre tourbillons . . . 58
4.3.6 Stabilité des tourbillons . . . 59
4.4 Coeur du tourbillon et formation de la vorticité . . . 62
4.4.1 Equation de la vorticité et théorème de Kelvin . . . 62
4.4.2 Structure des tourbillons . . . 62
4.4.3 Origine des tourbillons . . . 64
4.5 Anneaux tourbillonnaires . . . 67
4.5.1 Introduction . . . 67
4.5.2 Formation et études d'anneaux tourbillonnaires . . . 67
4.5.3 Observations . . . 68
4.5.4 Commande du piston et caractéristiques de l'anneau . . . 68
4.5.5 PIV . . . 70
4.5.6 Structure des anneaux tourbillonnaires . . . 71

5 Impact d'un anneau tourbillonnaire sur une surface 77
5.1 Introduction . . . 77
5.1.1 Contexte . . . 77
5.1.2 Interaction vortex-surface . . . 78
5.1.3 Diagramme de phase . . . 79
5.2 Montage expérimental . . . 81
5.3 Resultats expérimentaux . . . 84
5.3.1 Impacts doux dans l'éthanol . . . 84
5.3.2 Impacts doux dans l'eau . . . 87
5.3.3 Impacts forts . . . 91
5.4 Modèles et discussions . . . 92
5.4.1 Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire à l'approche de la surface . 92
5.4.2 Trajectoires après formation d'anneaux secondaires . . . 98
5.4.3 Pincement de la surface . . . 101
5.5 Stabilité des tourbillons . . . 104
5.5.1 Observations . . . 104
5.5.2 Instabilité elliptique . . . 107
5.5.3 Instabilité de Crow . . . 108
5.6 Conclusion . . . 109

6 Bulles toroïdales 111
6.1 Introduction . . . 111
6.2 Montage expérimental . . . 112
6.3 Resultats . . . 113
6.3.1 Formation de la bulle toroïdale . . . 113
6.3.2 Trajectoires . . . 115
6.3.3 Relation volume - circulation . . . 116
6.3.4 Evolution du diamètre . . . 116
6.3.5 Evolution de la vitesse . . . 118
6.4 Entrainement à la surface . . . 119
6.4.1 Impacts . . . 119

6.4.2 Bulles filles, étapes de formation . . . 119
6.4.3 Déformations 3-D . . . 120
6.4.4 Interpretation . . . 121
6.4.5 Critère de formation des bulles filles . . . 122
6.5 Conclusion . . . 123

III Trainée de vague et sillage de surface 125

7 Ondes 127
7.1 Introduction . . . 127
7.2 Ondes capillaro-gravitaires . . . 128
7.2.1 Dérivation de la relation de dispersion . . . 128
7.2.2 Analyse de la relation de dispersion . . . 129
7.3 Sillage de Kelvin . . . 131
7.4 Sillage d'un navire à haute vitesse . . . 133
7.5 Sillage instationnaire . . . 136
7.5.1 Expérience . . . 136
7.5.2 Simulation numérique . . . 137
7.6 Conclusion . . . 138

8 Trainée de vague 139
8.1 Introduction . . . 139
8.2 Montage expérimental de mesure de la trainée de vague . . . 141
8.3 Trainée de vague . . . 144
8.3.1 Dépendance de la trainée avec la profondeur . . . 144
8.4 Modèle et discussion . . . 145
8.4.1 Maximum de trainée . . . 145
8.4.2 Estimation via la méthode de l'image . . . 146
8.4.3 Comparaison avec les mesures . . . 146
8.5 Mesure de l'amplitude du sillage . . . 147
8.5.1 Dispersion de l'énergie par les vagues . . . 147
8.5.2 Dispositif optique . . . 148
8.5.3 Sonde à vague capacitive . . . 149
8.5.4 Profilométrie de surface . . . 149
8.6 Résultats expérimentaux . . . 150
8.6.1 Longueur d'onde . . . 150
8.6.2 Amplitude . . . 150
8.7 Modèle . . . 152
8.7.1 Modèle simple de l'amplitude . . . 152
8.7.2 Amplitude maximale . . . 153
8.7.3 Méthode de l'image . . . 154
8.7.4 Composante asymétrique du sillage . . . 154
8.8 Déviation à la théorie . . . 155
8.9 Conclusion . . . 156

A Entrainement d'air par un périscope. 161
A.1 Introduction . . . 161
A.2 Dispositif expérimental . . . 162
A.2.1 Les bassins . . . 162
A.2.2 Les périscopes . . . 163
A.2.3 Profilometrie de surface . . . 165
A.3 Observations expérimentales . . . 165
A.3.1 Description qualitative . . . 165
A.3.2 Influence de la forme du périscope . . . 168
A.3.3 Vitesse critique d'entrainement . . . 168
A.3.4 Mesures au bassin d'essais des carènes . . . 169
A.3.5 Effet de la superhydrophobie . . . 170
A.4 Modèle théorique . . . 171
A.4.1 $D < D^*$: instabilité de Rayleigh-Taylor ? . . . 171
A.4.2 $D > D^*$ Entrainement par un vortex unique ? . . . 174
A.5 Conclusion . . . 175
A.6 Etude d'un vortex unique . . . 176
A.6.1 Le montage . . . 176
A.6.2 Résultats . . . 177

B Ondes de Gavroche 179
B.1 Introduction . . . 179
B.2 Expérience . . . 180
B.3 Modèle . . . 181
B.3.1 Profil de l'écoulement . . . 181
B.3.2 Ondes stationnaires . . . 182
B.3.3 Ondes courbes . . . 183
B.4 Conclusion . . . 184

C Estimation du taux de croissance de l'instabilité de Crow entre deux tourbillons corotatifs asymétriques. 185
C.1 Position du problème . . . 185
C.2 Ecriture du problème . . . 186
C.3 Taux de croissance . . . 186
C.4 Solution . . . 187

D Champs de déformation de la surface par la méthode des images. 189
D.1 Introduction . . . 189
D.2 Estimation . . . 189

E Lissage de la surface par une anneau tourbillonnaire 193
E.1 Lissage de la surface . . . 193
E.1.1 Condition de suppression des vagues . . . 193
E.1.2 Expérience et résultats . . . 195

Remerciements

Pour faire une thèse il faut quelques ingrédients : un (ou deux) laboratoires, un (ou deux) chefs, une équipe, un (ou deux) clowns, un (ou deux) ateliers, et beaucoup de conseils. Il me faut maintenant écrire un (ou deux) remerciements.

Je commence par Christophe, qui m'a montré qu'il y a toujours un moyen d'avancer sur un problème si on y met de l'énergie, qu'on peut parler anglais sans l'accent, qu'écrire un article ça prend du temps, et qu'il nous fait confiance. Je continue avec David qui m'a montré qu'il y a toujours quelque chose de bien à tirer d'une mesure, qu'on peut réussir une présentation si on y met de l'énergie, qu'écrire un article ça peut être rapide, et qu'il nous fait confiance. Je les remercie tous les deux pour leur bonne humeur, leur disponibilité à des horaires incongrues, leurs invitations de dernière minute.

Un grand merci aux deux clowns (Caro et Bapt) qui ont animé ces trois ans, avec une inaltérable bonne humeur et une soif de matchs jamais épanchée.

Un grand merci aux anciens qui m'ont accueilli, même les grincheux (Jacopo), ceux qui ont la classe (Keyvan), celle qui est toujours disponible, même en pleine écriture (Marie), et celui qui est resté un peut plus longtemps que prévu pour notre plus grand bonheur (Alex).

Je remercie le reste de l'équipe (Guillaume, Pascal, PBB, Dan, Raphaëlle, Anaïs, Philippe), pour leur bonne humeur, leurs astuces, leur aide en usinage, la dispense de leur savoir et leur disponibilité. Je remercie les étudiants que j'ai côtoyés au cours de stages ou d'enseignements (Éline, Timothée, Louis, Simon, Benoit). Vive la coinche !

Je remercie l'équipe technique du Ladhyx (Caroline, Antoine et Dany) pour leur aide, toujours demandée à la dernière minute bien entendu.

Je remercie l'équipe technique du PMMH (Guillaume, Olivier et ceux que j'oublie) pour leur aide et ma formation accélérée à l'usinage.

Je remercie les équipes administratives du Ladhyx et du PMMH pour avoir toujours trouvé des solutions à mes demandes urgentes.

Je remercie bien entendu l'ensemble des laboratoires Ladhyx et PMMH pour leur accueil.

Je dois spécialement remercier William Gilbert à Polytechnique et Ludovic Olanier à l'ESPCI, sans qui aucun montage n'aurait vu le jour.

Je remercie aussi la DGA Val de Reuil de m'avoir accueilli.

Je remercie Thomas Leweke, et Patrice Meunier pour leurs conseils, sur la théorie et sur les méthodes expérimentales. Je remercie Frédéric Moisy pour ses conseils et le prêt de ses codes.

Je remercie Élie Raphaël et Frédéric Chevy pour les longues discussions que nous avons eu.

Un grand merci à mon Jury de thèse et en particulier à mes rapporteurs.

Je remercie ma chère et tendre pour son aide tout au long de la thèse et de la rédaction.

Je remercie aussi toute ma famille.

Introduction

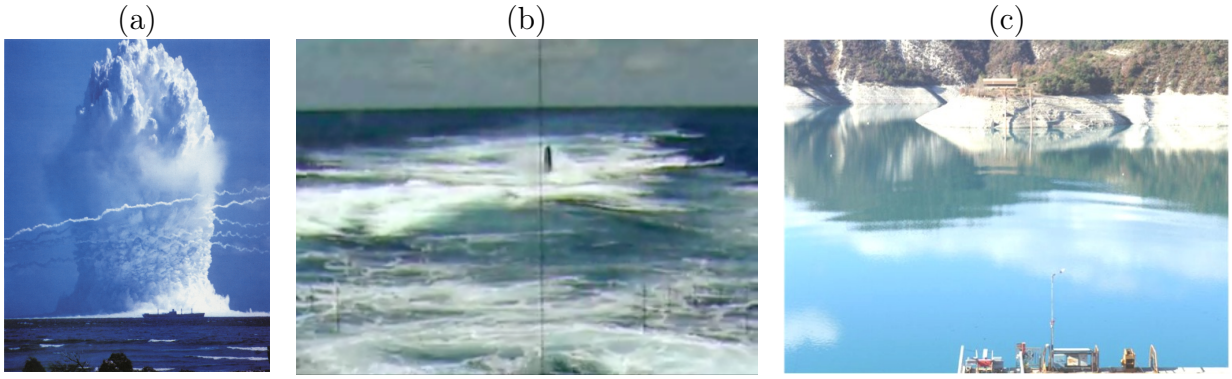


FIGURE 1 – (a) Explosion d'une bombe atomique sous-marine. (b) Surface de la mer lors de la plongée d'un sous-marin, vue par le périscope. (c) Sillage de surface formé lors de la traction d'une maquette de sous-marin.

Ce travail de thèse traite de trois types d'empreintes visibles à la surface de la mer, qui ont à la fois un intérêt défense et fondamental. Le premier est formé par une explosion de surface [figure 1 (a)]. On observe alors la formation d'un grand panache et d'une cavité. Les études ont jusqu'ici porté sur les explosions sous-marines, en milieu non confiné [1], près de parois solides [2], ou sur les dégâts qu'elles engendrent sur les navires à proximité [3]. Nous nous intéressons ici aux cavités formées par une explosion de surface. Nous étudions dans un premier temps les cavités formées lorsque l'explosion n'est pas confinée, et montrons dans le chapitre 2 que ces cavités ont une forme et une dynamique spécifiques. L'influence du confinement sur les explosions est traité au chapitre 3.

Le second thème concerne la furtivité des navires. Ceux-ci sont repérables au sillage qu'ils forment à la surface [4], composé d'un sillage turbulent, d'un sillage de vagues, et d'un sillage de bulles [5, 6, 7]. Ce dernier a une importance considérable pour les navires militaires dans la mesure où les bulles entrainent une modification de la vitesse du son [8], repérable par les SONAR qui équipent les torpilles. La formation et la durée de vie de ce sillage ont été étudiées en détail par François Caillé [9]. Les sillages de surface que nous étudions dans cette thèse ne sont pas formés par des navires de surface, mais par des objets sous-marins. Lorsqu'un sous-marin plonge, il forme une zone de remous visible bien après sa disparition [figure 1 (b)]. Afin de réduire la complexité du système nous étudions l'interaction d'un remous unique avec la surface. Un rappel sur les tourbillons et les anneaux tourbillonnaires est fait au chapitre 4. Nous présentons au chapitre 5 l'interaction d'anneaux tourbillonnaires avec différents types de surfaces, avec une attention particulière à leur stabilité. Les trajectoires et impacts à la surface sont comparés à ceux qui sont observés avec des bulles toroïdales au chapitre 6.

Lorsque le sous-marin remonte à la surface, il forme un sillage de vague ou sillage de Kelvin [10, 11], avant même de traverser la surface [figure 1 (c)]. Ce problème fait l'objet de la troisième partie de la thèse. Le sillage est important parce qu'il rend visible l'objet sous-marin, mais aussi parce qu'il induit une force de trainée de vague [12]. Nous rappelons au chapitre 7 la construction du sillage de surface, en détaillant quelques cas particuliers. Nous mesurons au chapitre 8 la traînée de vague et le sillage de sphères immergées et montrons que les théories existantes doivent être complétées.

Même si chacune des parties "creuse" un domaine de l'hydrodynamique (cavités, dynamique des tourbillons, ondes de surface) elles appartiennent toutes trois au domaine des haut-Reynolds incompressibles. Les équations d'Euler sous-tendent ainsi l'ensemble des analyses présentées dans ce travail.

Première partie

Explosions à la surface de l'eau

Chapitre 1

Introduction

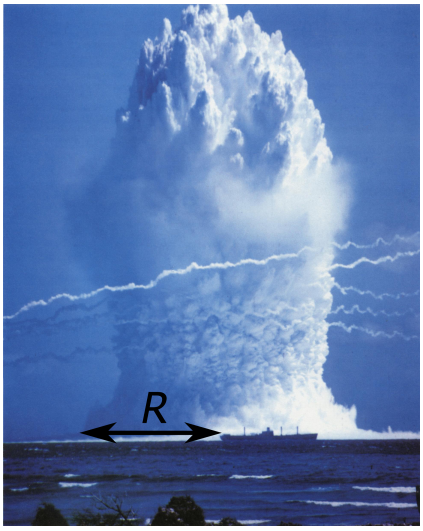


FIGURE 1.1 – Explosion sous-marine d'une bombe atomique de 8 kilotonnes. Essai Hardtack Umbrella 1958, extrait de [13].

1.1 Contexte

Nous nous intéressons ici aux explosions à la surface de l'eau. La figure 1.1 présente ainsi l'explosion d'une bombe atomique placée sous la surface de l'eau lors d'un essai datant de 1958. L'explosion crée une cavité de largeur $2R$ surmontée par un panache d'une hauteur considérable. Un bateau placé au premier plan permet d'estimer un ordre de grandeur de $R \approx 100$ m. Une question naturelle qui se pose est la dépendance de la taille maximale de la cavité R_{max} et du temps d'ouverture de la cavité τ en fonction de l'énergie de l'explosion. Lors d'un impact à la surface de l'eau la situtation est assez similaire. Le projectile transmet de l'énergie cinétique au fluide, ce qui crée une cavité dont la forme évolue. Dans la suite du chapitre un rappel sur les différents types de cavités est présenté, puis les résultats obtenus pour des explosions en milieu non confinées. Dans la dernière partie le rôle du confinement est abordé.

1.2 Rappel sur les cavités

1.2.1 Cavité d'impact dans un liquide

Les premières études sur les cavités ont été réalisées par A.M. Worthington en 1900 [14, 15], afin d'élucider le fait qu'une sphère rugueuse lâchée d'une faible hauteur puisse former une éclaboussure en entrant dans l'eau, quand une sphère lisse tombée de la même hauteur n'en forme pas. Les cavités étudiées dans la plus grande partie des travaux qui ont suivi sont formées par l'impact d'un solide (taille caractéristique R, vitesse U_0, densité ρ_s) dans un liquide (viscosité η, densité ρ, tension de surface γ), la densité du liquide étant plus élevée que celle de l'air ($\rho/\rho_{air} >> 1$). La vitesse minimale à partir de laquelle on observe une cavité dépend de la mouillabilité du solide et de sa taille [16]. Les applications concernent les cavités formées par les impacts de balles [17] ou de torpilles [18], mais aussi la propulsion du lézard Basilic [19] ou l'entrainement d'air par les araignées d'eau [20]. Les différents types de cavités d'impact peuvent être classifiés à l'aide du diagramme de phase présenté sur la figure 1.2. Dans ce diagramme, la vitesse est adimensionalisée par $\eta/\rho R$ sur l'axe horizontal, et la taille par la longueur capillaire $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ sur l'axe vertical.

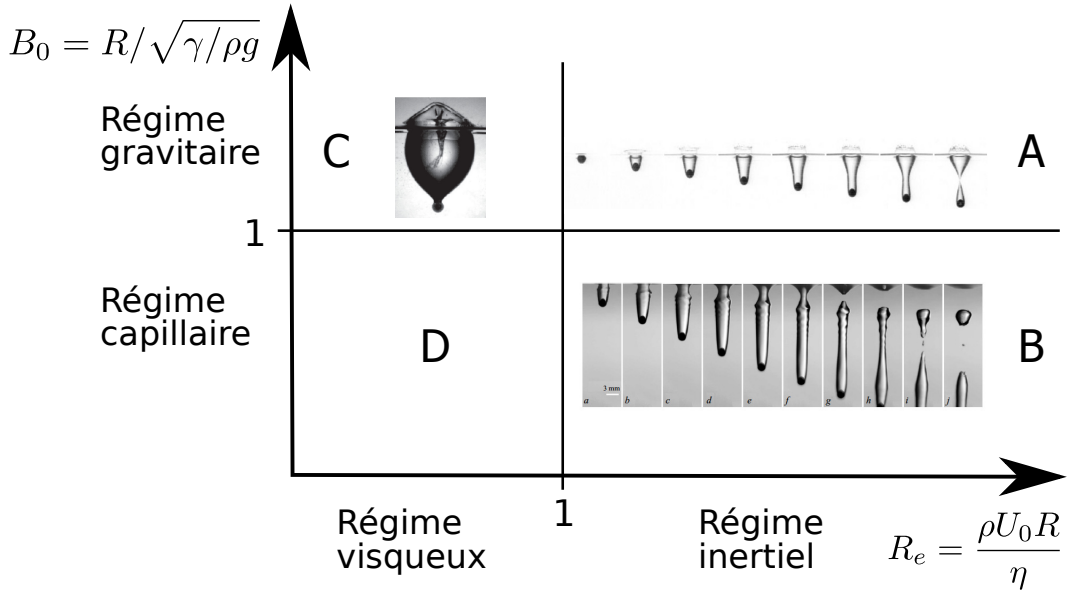


FIGURE 1.2 – Diagramme de phase des cavités d'impact. Les images présentées dans les zones A, B et C, ont été respectivement extraites de [21], [22], [23].

Lors de l'impact l'objet transfère une énergie de l'ordre de $\rho\pi R^3 U_0^2/2$ au fluide. L'axe horizontal compare l'inertie du fluide à la dissipation visqueuse, distinguant les cas pour lesquels l'énergie est dissipée par viscosité ($Re < 1$) ou bien conservée ($Re > 1$). Les forces qui entrainent la fermeture de la cavité sont soit gravitaires pour des cavités grandes devant la longueur capillaire, soit de tension de surface pour des cavités plus petites.

Ce diagramme de phase définit donc quatre types de cavités. Les cavités formées par de grands objets (par exemple des torpilles) se trouvent dans la zone A, pour laquelle le nombre de Reynolds $\rho R U_0/\eta$ et le nombre de Bond R/a sont grands. Ces cavités s'allongent dans la direction de pénétration puis se ferment en se pinçant à approximativement la moitié de leur hauteur. Le temps écoulé entre l'entrée de l'objet et le pincement évolue comme $\tau = \sqrt{R/g}$, indépendamment de la vitesse de l'objet [21, 16]. Le pincement provoque deux

jets verticaux, dont la formation a été décrite en détail [24, 25, 26]. Pour ces cavités formées à vitesse élevée, la pression dynamique dans l'air $\rho_{air}U_0^2$ peut être comparée à la pression hydrostatique $\rho g U_0 \tau$ par le rapport $\frac{\rho_{air}}{\rho}\sqrt{Fr}$, où $Fr = U_0^2/gR$ représente le nombre de Froude. Quand le nombre de Froude est grand par compré au rapport de densité eau/air, l'écoulement de l'air a une influence sur la dynamique et la fermeture de la cavité [27]. Pour des impacts formés à l'aide de plus petits objets à haut Reynolds (zone B), la tension de surface joue un rôle prepondérant pendant la fermeture de la cavité, ce qui forme des cavités ridées [28, 22]. Si le fluide est visqueux (zone C), on atteint un régime pour lequel l'objet impactant décélère avant la fermeture de la cavité [23]. Les cavités sont habituellement formées par l'impact de sphères ou de cylindres, mais d'autres géométries ont aussi été étudiées, tels les disques [29], ainsi que les impacts d'objets présentant une longueur d'onde contrôlée, qui donnent des cavités striées [30, 31].

1.2.2 Cavité d'impact sur un solide

Les cavités engendrées par l'impact de sphères sur des milieux granulaires peu denses ont des formes comparables, et se pincent en émettant un jet vertical, comme c'est le cas dans les fluides [32], [33].

Dans le reste du chapitre, nous considérerons des cavités formées non pas par un impact mais par une explosion.

Chapitre 2

Explosions non confinées

Sommaire

2.1 Montage expérimental **11**
2.2 Résultats **12**
2.3 Modèle de conservation de l'énergie **14**
2.4 Modèle potentiel. **16**
2.5 Ecoulement réel **19**
2.6 Impacts et explosions **20**
2.7 Conclusion **23**

Nous discutons ici les cavités qui se forment quand on provoque l'explosion de pétards à la surface d'un bain d'eau. Nous nous demandons quelles sont la taille, la forme et la dynamique de la cavité en fonction de l'énergie de l'explosion.

2.1 Montage expérimental

Le montage expérimental est présenté sur la figure 2.1 (a). Les explosions ont lieu à la surface de l'eau dans une cuve transparente en Plexiglas de grande dimension (1 m de coté et 50 cm de profondeur). Le pétard est suspendu par un fil de nylon de manière à ce que son centre se trouve au niveau de la surface. Un autre montage permet de tenir la partie inerte du pétard avec une pince en bois, mais l'utilisation d'un fil réduit fortement les risques de projections de la pince dans la pièce. L'explosion est filmée de côté à la caméra rapide (Photron Fastcam SA3). On utilise des pétards du commerce de la marque Demon, qui se distinguent par leur forme plus ou moins allongée, et par la quantité de poudre qu'ils contiennent. Un pétard est constitué d'un rouleau de papier qui renferme en son centre une charge de poudre (a priori de la poudre noire, mélange de salpêtre, soufre et noir de carbone), maintenue entre deux bouchons de terre. La mèche traverse le bouchon supérieur et brûle sans apport d'oxygène, si bien qu'il est possible de faire exploser le pétard sous l'eau, en le plongeant après que la mèche a commencé à bruler dans le bouchon. On utilise les quatre types de pétards de la figure 2.1 (b), qui renferment une masse de 1, 1.3, 2 et 5 g de poudre.

L'explosion crée une brève surpression qui met l'eau en mouvement. On enregistre le son pendant l'explosion d'un pétard, en prenant soin de réduire l'écho. La figure 2.2 montre

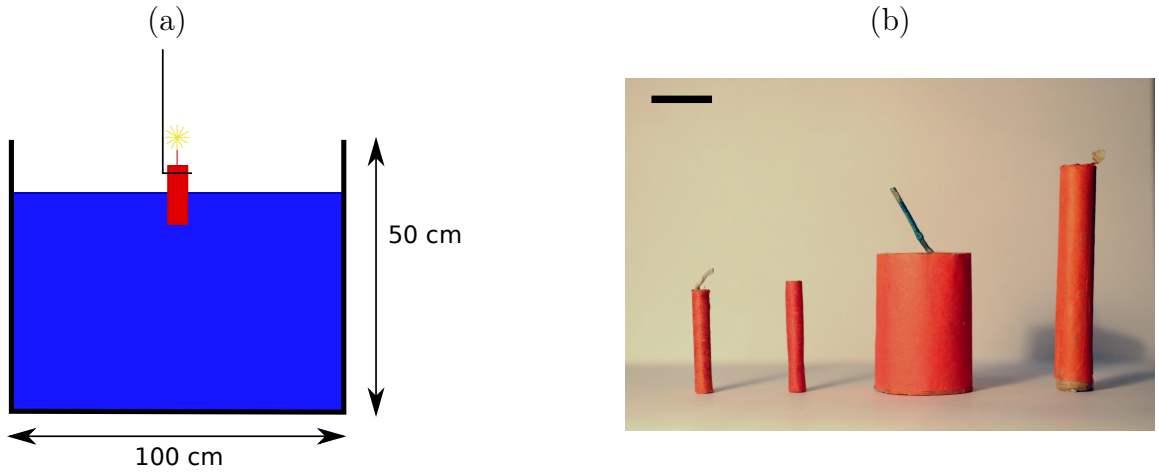


FIGURE 2.1 – (a) Montage expérimental. (b) Les différents pétards utilisés, qui renferment, de gauche à droite, 1, 1.3, 2 et 5 g de poudre. Le trait noir représente 2 cm.

ainsi que la surpression dure moins de 1 ms.

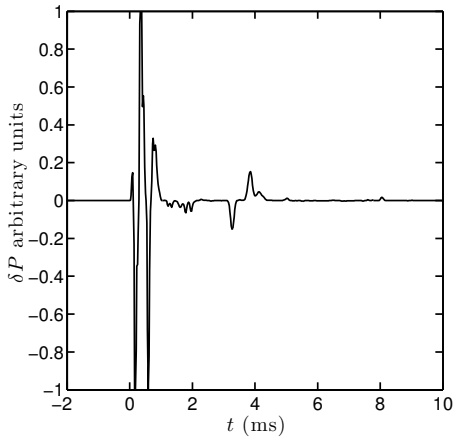


FIGURE 2.2 – Enregistrement sonore de l'explosion d'un pétard de 1.3 g. La pression est présentée en unités arbitraires.

2.2 Résultats

2.2.1 Résultats qualitatifs

Les cavités obtenues sont hémisphériques, comme celle que montre la figure 2.3.

L'évolution de la cavité frésultant de l'explosion d'un pétard de 1 g est présentée sur la figure 2.4. Pendant les 5 ms qui suivent la détonation, la caméra est aveuglée par le flash de l'explosion (image 1 à 2), mais on observe ensuite une cavité hémisphérique qui croit de manière isotrope (image 2 à 7). L'expansion du fond de la cavité ralentit pendant que celle des bords se poursuit (image 8 et 9). Au temps T_{max}, la cavité atteint sa profondeur maximale H_{max} ; puis elle se referme, le fond accélérant vers le haut. La cavité prend alors une forme aplatie, puis on observe l'apparition d'un jet vertical sur l'axe de symétrie. La cavité prend

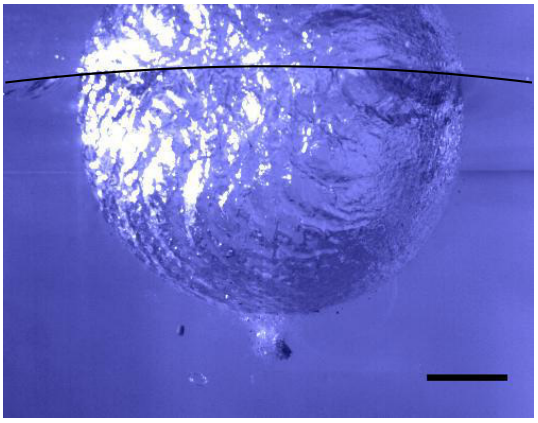


FIGURE 2.3 – Cavité formée par l'explosion d'un pétard contenant 2 g de poudre. La ligne noire indique la position de la surface, la barre noir fait 5 cm.

alors une forme générique en "w". Le jet devient bien visible lorsqu'il émerge de la surface libre de l'eau. On limite notre description à cette séquence ouverture/fermeture de la cavité.

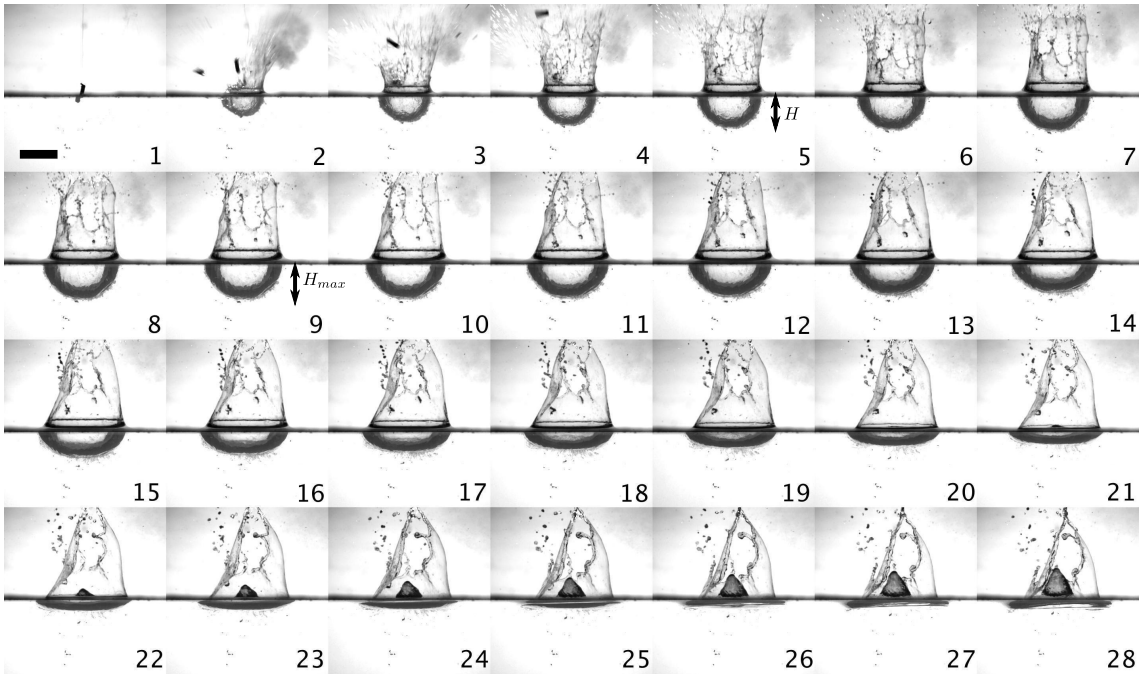


FIGURE 2.4 – Chronophotographie de la cavité produite par l'explosion d'un pétard de 1 g. Les images sont espacées de 6 ms. La ligne noire représente 5 cm.

2.2.2 Résultats quantitatifs

La figure 2.5 (a) représente la profondeur de la cavité H au cours du temps, pour des cavités formées par les différents types de pétards. On observe que les courbes sont toutes similaires, avec une vitesse d'enfoncement qui décroit puis s'annule avant que la cavité ne se referme, avec une vitesse de fermeture croissante. Les essais se distinguent par un temps

T_{max} plus ou moins long, qui s'accroit avec la profondeur maximale de la cavité H_{max}. On observe que les courbes sont symétriques droite/gauche par rapport à T_{max}. Sur une courbe tracée en axes logarithmiques [figure 2.5 (b)], on observe que la cavité croit suivant une loi de puissance à temps court, avec un exposant 0.41±0.03.

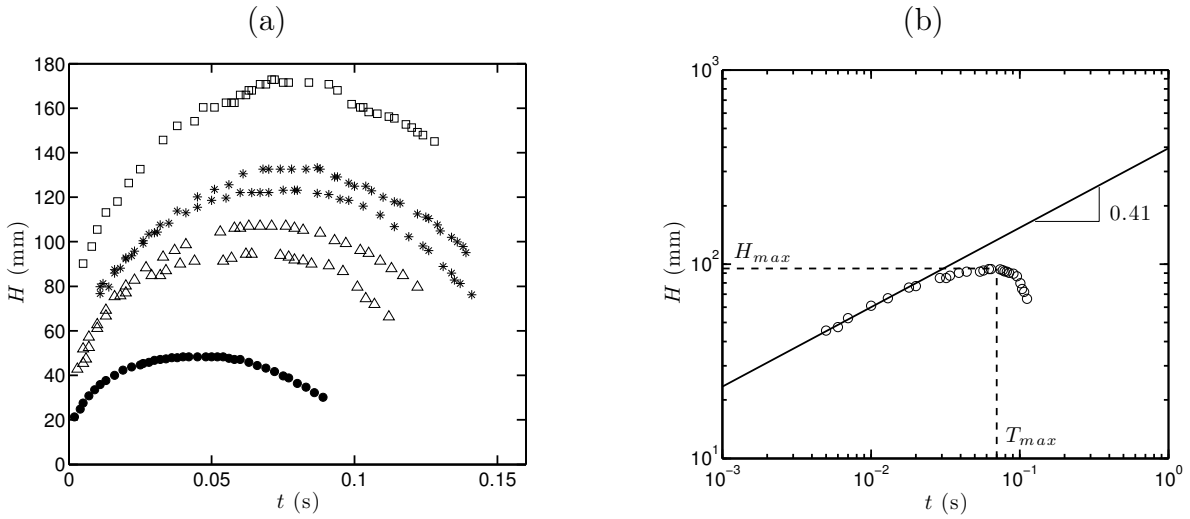


FIGURE 2.5 – (a) Profondeur de la cavité H en fonction du temps, les symboles représentent les différents pétards utilisés : 1 g "•", 1.3 g "△", 2 g "∗" et 5 g "□". (b) Profondeur de la cavité formée par l'explosion d'un pétard de 1.3g en fonction du temps en échelle logarithmique.

2.3 Modèle de conservation de l'énergie

On propose ici un modèle de conservation de l'énergie afin de décrire la dynamique des cavités. On a montré que l'explosion crée une surpression qui met le fluide en mouvement sur un temps court devant le temps d'expansion de la cavité, puis que la pression revient à P_0. On fait hypothèse que la vitesse du fluide est purement radiale à partir du centre de l'explosion, pendant toute a phase d'expansion, donc que la cavité reste hémisphérique de rayon $R(t)$. On évalue le nombre de Reynolds du problème à partir de nos observations : le temps d'expansion typique τ des cavités vaut 100 ms pour une profondeur de $R = 10$ cm ; le nombre de Reynolds correspondant $Re = \rho R^2/\tau\eta$ est donc de 10^5. Dans cette limite de haut nombre de Reynolds, on néglige la dissipation visqueuse.

Au moment de l'explosion une énergie E_0 est transférée au bain sous forme d'énergie cinétique. On suppose qu'au cours du temps cette énergie est ensuite conservée, et se répartit entre un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentielle.

Pour estimer l'énergie cinétique du bain il nous faut estimer la vitesse en tout point du fluide. La surface de la cavité se déplace à la vitesse $\dot{R}$, donc par conservation de la masse la vitesse du fluide à une distance r du centre de l'explosion s'écrit $u(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \dot{R}$. L'énergie cinétique du fluide s'écrit donc, en utilisant les propriétés de symétrie de l'écoulement :

$$E_c = 4\pi\rho \int_R^\infty r^2 \frac{R^4}{r^4} \dot{R}^2 dr = 4\pi\rho R^3 \dot{R}^2 \tag{2.1}$$

L'énergie potentielle est égale à l'opposé de l'énergie potentielle du fluide déplacé :

$$E_p = 2\pi\rho g \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2\theta r dr d\theta = \frac{\pi^2}{8}\rho g R^4 \tag{2.2}$$

On vérifie que l'on peut négliger la tension de surface en comparant l'énergie potentielle de la cavité $E_p = \frac{\pi^2}{8}\rho g R^4$ à son énergie de surface $E_\gamma = 2\pi R^2 \gamma$. Ces énergies sont du même ordre lorsque $R = \sqrt{16\gamma/\pi\rho g} \approx 6$ mm. Les cavités ayant toujours un rayon plus grand lors de nos mesures, on néglige le terme de tension de surface.

En égalisant l'energie initiale E_0 avec la somme $E_c + E_p$, on obtient une équation de la dynamique de la cavité :

$$4\pi\rho R^3 \dot{R}^2 + \frac{\pi^2}{8}\rho g R^4 = E_0 \tag{2.3}$$

Aux temps courts, quand le rayon de la cavité est petit, l'énergie cinétique domine l'énergie potentielle et l'équation (2.3) se réduit à :

$$4\pi\rho R^3 \dot{R}^2 = E_0 \tag{2.4}$$

L'évolution du rayon de la cavité s'écrit alors :

$$R = \left(\frac{E_0}{4\pi\rho}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{2.5}$$

On vérifie sur la figure 2.5 (b) qu'aux temps courts le rayon dépend du temps à travers une loi de puissance d'exposant 0.42 proche de 2/5. Ce modèle nous permet d'estimer l'énergie E_0, en ajustant le rayon de la cavité par une loi de puissance d'exposant 2/5 afin d'estimer le préfacteur. Cette loi d'évolution en $t^2/5$ est similaire à celle proposée par Taylor pour l'évolution de la poche de gaz chauds ("luminous globe") formée lors de l'explosion d'une bombe atomique [34].

Aux temps longs, l'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle, l'expansion de la cavité ralentit et s'arrête. On déduit le rayon maximum de la cavité à partir de l'équation d'équilibre ($\dot{R} = 0$ dans l'équation 2.3) :

$$R_{max} = \left(\frac{8E_0}{\pi^2\rho g}\right)^{1/4} \tag{2.6}$$

Cette équation prédit que le rayon de la cavité dépend de l'énergie à la puissance 1/4. Sur la figure 2.6 (a), on trace le rayon maximum de la cavité en fonction de l'énergie à la puissance 1/4, l'énergie étant déduite en ajustant le rayon par l'équation (2.5) aux temps courts. Le rayon maximal varie bien selon la dépendance proposée, avec un préfacteur de l'ordre de 0.5.

On déduit des équations (2.5) et (2.6) que T_{max} dépend du rayon maximal de la cavité suivant la relation suivante :

$$T_{max} \approx \sqrt{\frac{R_{max}}{g}} \tag{2.7}$$

On peut ainsi adimensionner le temps par T_{max}, et le rayon par R_{max}. On trace sur la figure 2.6 (b) le rayon adimensionné de plusieurs cavités en fonction du temps adimensionné, et on observe bien que toutes les courbes se regroupent sur une courbe maitresse.
Ce simple modèle "énergétique" prédit donc bien les dépendances du rayon maximum de la cavité et de son temps d'expansion en fonction de son énergie initiale. Mais ce modèle ne prédit pas la forme de la cavité en "w" pendant sa fermeture, ni l'apparition d'un jet, ce que nous cherchons à présent à corriger.

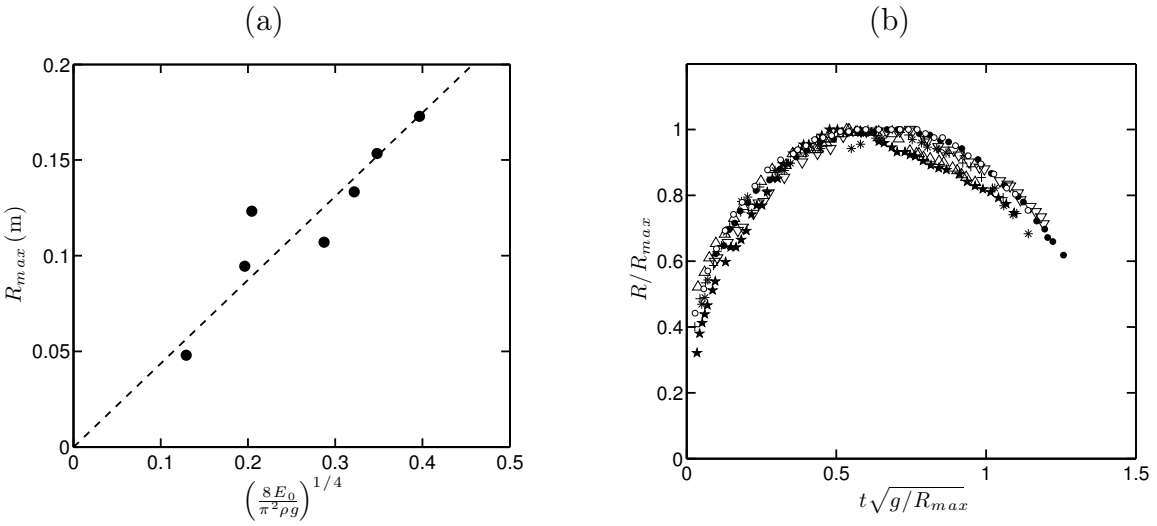


FIGURE 2.6 – (a) Profondeur maximale de la cavité en fonction de l'énergie initiale. (b) Profondeur adimensionnée de la cavité en fonction du temps adimensionné. "$\circ$" pétard de 1 g, "$+,*$" pétard de 1.3 g, "$\triangle$,∇,$\star$" pétards de 2 g, "$\bullet$" pétard de 5 g.

2.4 Modèle potentiel.

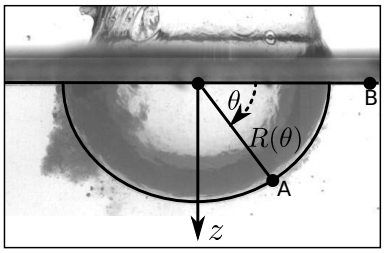


FIGURE 2.7 – Schéma du problème et notations utilisées.

On présente un modèle d'écoulement potentiel afin de décrire la dynamique de la cavité ainsi que sa forme, en s'inspirant du modèle proposé dans [21]. Comme estimé précédemment, l'écoulement se produit à haut nombre de Reynolds, et le liquide est initialement au repos. C'est pourquoi on suppose l'écoulement irrotationnel, donc décrit par un potentiel de vitesse ϕ. Afin d'estimer la vitesse d'expansion de la cavité, on écrit l'équation de Bernoulli généralisée :

$$\left[\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\rho u^2}{2}+p-\rho g z\right]_A^B=0 \tag{2.8}$$

où $\underline{u} = \underline{grad}\ \phi$ est la vitesse dans le fluide, g l'accélération de la gravité, p la pression et A et B deux points dans le fluide. Le problème est schématiquement représenté sur la figure 2.7 : le point A est choisi à la surface de la cavité $[R_A = R(\theta)]$ et le point B sur la surface libre loin de la cavité, là où la vitesse est négligeable. $R(\theta,t)$ représente la position de l'interface air/eau au cours du temps dans la direction θ. L'explosion crée une brève surpression, comme discuté précédemment, puis la pression dans l'air revient à P_0 pendant toute la durée d'expansion et de fermeture de la cavité (2.2). On néglige la tension de surface, si bien que la pression dans le liquide au niveau de l'interface est égale à P_0. Avec les conventions présentées l'équation (2.8) devient :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_A + \rho \frac{u_A^2}{2} - \rho g z_A = 0 \tag{2.9}$$

On suppose que le mouvement est purement radial à partir du centre de l'explosion. Par conservation de la masse, on écrit, comme dans le modèle précédent : $u(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \dot{R}$. L'équation de la dynamique de la cavité s'écrit alors, à partir de l'équation (2.9) :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -gRsin\theta \tag{2.10}$$

Une intégrale première de cette équation s'écrit :

$$\rho R^3 \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\rho g R^4 sin\theta = E_0 \tag{2.11}$$

où la constante E_0 a pour ordre de grandeur l'énergie injectée par l'explosion. L'équation (2.11) décrit donc la conversion de l'energie de l'explosion en énergie cinétique ($\rho R^3 \dot{R}^2$) et potentielle ($\frac{1}{2}\rho g R^4 sin\theta$).

Á temps court, R est petit ($R(t{=}0){=}0$) et l'équation (2.11) se réduit à $R^3\dot{R}^2 = E_0/\rho$, qui ne dépend pas de θ. Comme dans le modèle présenté dans la section précédente, l'expansion est isotrope et le rayon de la cavité s'écrit $R(t) = \left(\frac{5}{2}\sqrt{E_0/\rho}\right)^{2/5} t^{2/5}$.

La vitesse d'expansion $\dot{R}(\theta)$ décroit jusqu'à ce que le premier terme de l'équation (2.11) soit grand devant le second. Ce terme dépend de θ, ce qui introduit l'anisotropie de la cavité. Ce terme est maximal au fond de la cavité ($\theta = \pi/2$) , et tend vers zéro sur les bords de la cavité ($\theta = 0$ et $\theta = \pi$). On en déduit que l'expansion du fond de la cavité s'arrête avant celle des bords, et qu'ensuite l'accélération de l'interface pendant la fermeture est plus importante au fond que sur les bords. Ces remarques sont en accord avec les observations faites sur la figure 2.4.

Forme de la cavité

On résout l'équation (2.11) pour différents angles, et compare la forme de la cavité obtenue au cours du temps à un exemple typique sur la figure 2.8. La résolution numérique donne bien les caractéristiques de la cavité, avec une ouverture isotrope suivie par un aplatissement et par la focalisation de l'écoulement sur l'axe de symmétrie. Notre modèle en revanche ne décrit pas l'éruption du jet lorsque l'écoulement n'est plus radial.

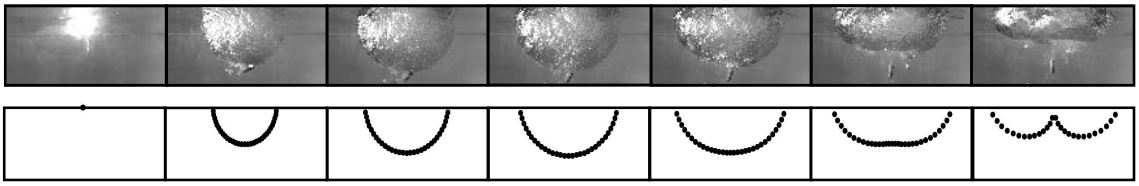


FIGURE 2.8 – Comparaison entre la forme de la cavité et la prédiction obtenue par résolution de l'équation (2.11). La chronophotographie présentée correspond à l'explosion d'un pétard de 1.3 g, les images sont espacées de 22 ms. la profondeur maximale de la cavité est de 10 cm.

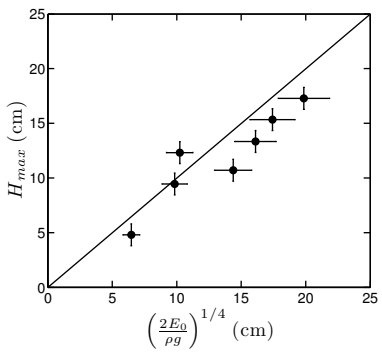


FIGURE 2.9 – Profondeur maximale de la cavité en fonction de E_0. La ligne noire représente la relation attendue par l'équation (2.12).

Ecrivant $\dot{R}(H_{max}) = 0$ dans l'équation (2.11), on obtient la relation entre E_0 et la profondeur maximale de la cavité $H_{max} = R_{max}(\pi/2)$:

$$H_{max} = \left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4} \tag{2.12}$$

avec E_0 déduit de l'équation d'expansion aux temps courts :

$$R(t) = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/5} (E_0/\rho)^{1/5}\, t^{2/5} \tag{2.13}$$

On trace sur la figure 2.9 la profondeur maximale de la cavité en fonction de $\left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4}$ et vérifie que l'on obtient une relation linéaire (avec un facteur de proportionnalité proche de l'unité), conformément à l'équation (2.12).

On déduit de l'équation (2.11) le rayon maximal de la cavité en fonction de θ :

$$R_{max} = \left(\frac{2E_0}{\rho g sin\theta}\right)^{1/4} \tag{2.14}$$

Cette expression diverge lentement lorsque θ tend vers zéro, ce qui n'est pas observé expérimentalement. L'origine de la divergence vient de l'équation du mouvement pour $\theta = 0$. Pour cet angle les particules d'eau n'acquièrent pas d'énergie potentielle ce qui induit que leur mouvement n'est jamais freiné. Dans l'écoulement réel les contraintes visqueuses entre couches de fluide font que les couches inférieures freinent puis entrainent les couches de fluide à la surface.

Adimensionalisation

On déduit de notre modèle que les dimensions naturelles du problème pour H et t sont respectivement, $H_{max} = \left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4}$ et $\tau = \sqrt{\frac{H_{max}}{g}}$. Ecrivant $H^* = H/H_{max}$ et $t^* = t/\tau$. On vérifie que les données se superposent bien sur une courbe maitresse en traçant H^* en fonction de t^* [figure 2.10 (a)]. On vérifie aussi que T_{max} varie linéairement avec τ, avec un coefficient proche de l'unité [figure 2.10 (c)].

Afin de vérifier que la prédiction du modèle est valable quelque soit θ (sauf pour $\theta \to 0$), on trace le rayon de la cavité au cours du temps à l'angle $\theta = \pi/4$ sur la figure 2.10

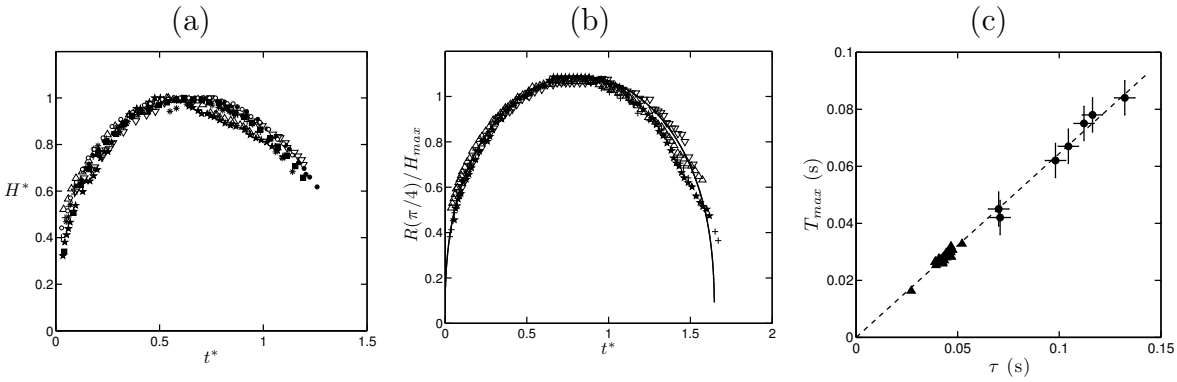


FIGURE 2.10 – (a) Profondeur adimensionnée pour différentes explosions en fonction du temps. Les symboles représentent : "∘" pétard de 1 g, "+,∗" pétard de 1.3 g, "△ ,∇,⋆" pétard de 2 g, " •" pétard de 5 g, "■" cavité formée par l'impact d'une goutte d'eau de 54 mg à 16 m/s (Engel-1966 [35]. (b) Rayon adimensionné de la cavité pour la position $\theta = \pi/4$. (c) T_{max} en fonction de $\tau = \sqrt{H_{max}/g}$. Les points représentent les mesures pour les explosions, les triangles les données obtenues par Engel lors de l'impact de gouttes [35]. Le meilleur ajustement $T_{max} = 0.65\tau$ est tracé en pointillé.

(b), les variables étant adimensionnalisées par les mêmes quantités. On vérifie que les courbes se regroupent sur une courbe maitresse, pour laquelle le maximum est atteint à un temps adimensionnalisé plus grand que pour le fond de la cavité, conformément au modèle proposé.

L'équation d'évolution de la cavité s'écrit en variables adimensionnalisées :

$$\dot{R}^* = \left(\frac{1 - R^{*4} \sin\theta}{2R^{*3}} \right)^{1/2} \tag{2.15}$$

La résolution de l'équation (2.15) est discutée dans l'annexe de l'article placé en fin du chapitre.

2.5 Ecoulement réel

Dans la section précédente, on a proposé un modèle pour la dynamique de la cavité ainsi que sa forme. Cependant il ne permettait pas de prédire quantitativement le temps d'ouverture de la cavité. Un modèle modifié présenté dans l'annexe de l'article en fin du chapitre permet une description quantitative de la dynamique de la cavité. Il se fonde sur une équation de conservation de la masse modifiée, supposant que lorsque la surface de la cavité se déplace, une fraction α de l'eau est poussée dans le bain, tandis qu'une fraction $(1 - \alpha)$ sort du bain, soit dans le panache éjecté, soit dans une vague qui se forme en bordure de cavité. Ces hypothèses sont basées sur des observations expérimentales : il se forme un panache, et un bourrelet se forme sur le bord le la cavité, d'amplitude petite devant la profondeur de la cavité. D'autre part, en ensemençant le bain de particules illuminées avec une nappe laser, on peut estimer la vitesse de l'eau dans le bain. Sur la figure 2.11 on présente des superpositions d'images de la partie gauche de la cavité, pendant son expansion (images 1-3) puis sa fermeture (images 4 et 5). Ces superpositions d'images permettent de visualiser le chemin des particules, et donc de se représenter les lignes de courant. On observe que près de la surface, l'écoulement se produit en partie vers la surface libre pendant l'ouverture, puis en sens inverse pendant la fermeture.

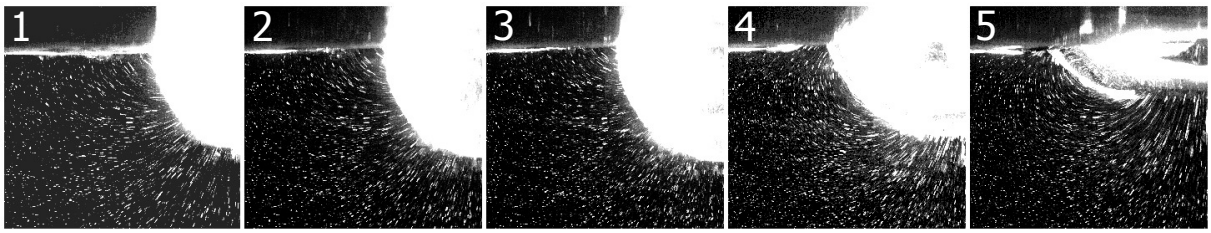


FIGURE 2.11 – Superpositions d'images pendant l'ouverture puis la fermeture de la cavité. L'eau est ensemencée en particules et éclairée par une nappe laser verticale.

Ces observations nous montrent que contrairement à ce qui est supposé dans le modèle que nous avons développé, le champ de vitesse n'est pas purement radial. Afin de prendre en compte ce fait, plusieurs solutions ont été proposées, dans le cadre de l'étude de cavités formées par l'impact de gouttes : Engel utilise le potentiel de vitesse d'un doublet dont la magnitude dépend de la vitesse d'expansion et du rayon de la cavité : $\psi = R^2(dR/dt)\cos\theta/r$ ([36]). Ce potentiel permet de décrire la dynamique de la cavité, cependant il ne permet pas de prédire la forme de la cavité au cours du temps. Une autre solution est proposée par Bisighini : la position du centre de la cavité est considérée variable, notée z par rapport à la surface libre. Le potentiel utilisé est la somme d'un terme source correspondant à l'expansion de la cavité de rayon a, et de l'écoulement autour d'une sphère de rayon a se déplaçant à la vitesse $\dot{z}$: $\psi = -\dot{a}\frac{a^2}{r} - \dot{z}\left(1 - \frac{a^3}{2r^3}\right)$ [37]. Ce modèle permet de prédire la dynamique et la forme de la cavité, avec un paramètre d'ajustement bien choisi. Il existe donc d'autres modèles que celui que nous avons proposé qui permettent une description satisfaisante du problème. Cependant le modèle que nous avons proposé reste "physique" et permet d'expliquer pourquoi il y a moins d'énergie cinétique dans le bain que ce que l'on suppose.

2.6 Impacts et explosions

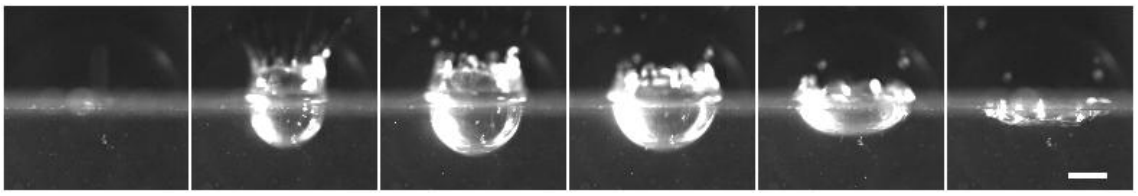


FIGURE 2.12 – Cavité formée par l'impact d'une goutte d'eau de 4.7 mm de diamètre sur de l'eau d'une hauteur d'environ 50 cm. Les images sont espacées de 12 ms, le trait blanc fait 1 cm.

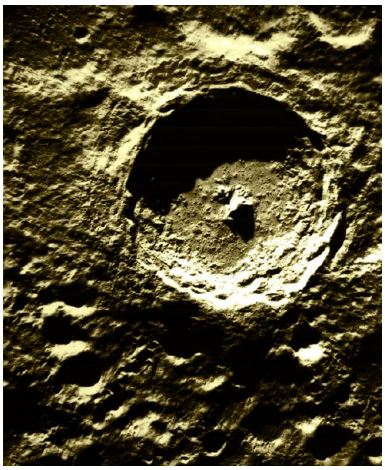
On a vu dans l'introduction que les cavités formées par l'impact d'une sphère dense dans l'eau sont différentes de celles observées après une explosion. En revanche la cavité formée par l'impact d'une goutte d'eau à la surface de l'eau est similaire aux cavités résultant d'une explosion, comme représenté sur la figure 2.12. La forme et la dynamique de ces cavités sont décrites par les mêmes équations que celles proposées ici (voir figure 2.10). Cette similitude vient du fait qu'une goutte frappant une surface liquide, transfère une partie de son énergie cinétique à l'eau, la mettant en mouvement de manière isotrope. Si la goutte apporte suffisamment d'énergie pour que la cavité soit assez grande pour négliger

la tension de surface, la cavité se comporte comme une cavité d'explosion. Engel observe que la moitié de l'énergie cinétique de la goutte est transférée au bain [35].

Il existe un autre cas pour lequel impact et explosion ont des effets similaires, qui concerne les milieux granulaires denses. Il a en effet été observé que l'impact d'une sphère sur un granulaire produit le même cratère que celui formé par une explosion souterraine proche de la surface, les énergies de l'explosif et du projectile étant choisies égales [38]. Walsh étudie des cratères formés par l'impact de sphères et observe que la profondeur et la taille du cratère dépendent de l'énergie à la puissance 1/4, une prédiction semblable à celle obtenue pour les cavités d'explosion, qui découle d'une hypothèse de conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle [39].

Á plus grande échelle, les cratères formés par l'impact de météorites sont comparables à ceux formés en laboratoire par explosion ou impact sur un granulaire dense. Certains cratères présentent un pic central semblable au pic que l'on observe pendant la fermeture de la cavité hémisphérique. Une explication à la forme de ces cratères est que lors de l'impact, la météorite transfère son énergie cinétique au substrat, et le fragilise. Il se forme alors un cratère hémisphérique par écoulement du substrat. Sous l'influence de la gravité le cratère hémisphérique se déforme, le sol se comportant comme un fluide, et un pic central peut apparaitre comme illustré sur la figure 2.14. Il est même possible de former plusieurs anneaux, suivant le nombre d'oscillations avant que le cratère ne se stabilise [40].

On observe la présence de cratères à pics centraux sur de nombreuses planètes, dont la Lune [figure 2.13 (a)] et la Terre [figure 2.13 (b)]. Cette dernière image montre le lac Manicouagan au Québec, qui occupe la corolle d'un cratère, le centre formant un pic central ayant été érodé. Il a été vérifié que la présence de cratères de ce type dépend de l'accélération de la gravité sur la planète, leur apparition n'étant possible qu'au-delà d'un certain seuil suffisant pour faire s'écouler le sol.

(a) 

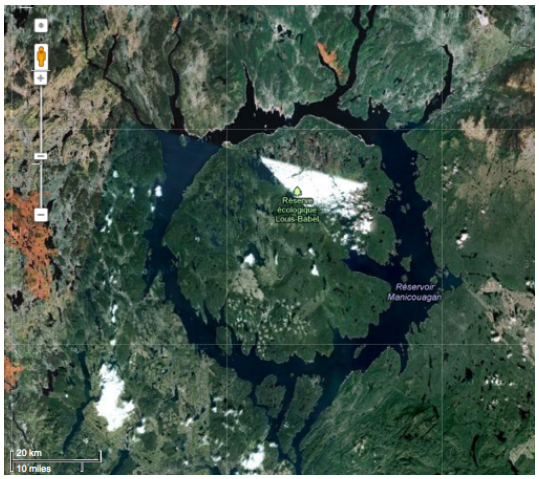
(b) 

FIGURE 2.13 – (a) Cratère Tycho sur la lune. Son diamètre est de 86 km et sa profondeur de 5 km. (b) Lac Annulaire Manicouagan, Québec. La barre représente 20 km.

L'explication communément proposée à l'équivalence impact-explosion est que l'impact se produit sur un temps très court pendant lequel l'énergie est transférée du projectile au substrat, un transfert d'énergie rapide comparable au transfert d'énergie induit par une

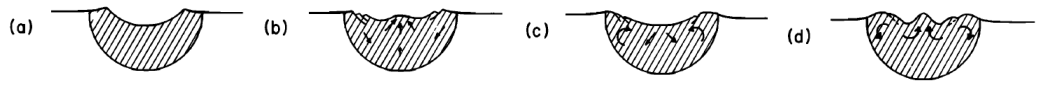


FIGURE 2.14 – Etapes de formation d'un cratère à pic central, on représente ici deux oscillations. Extrait de [40].

explosion. Il est intéressant de noter que si l'énergie du projectile est transférée au substrat sur un temps plus long (par exemple lors de l'impact d'une bille métallique dans de l'eau, ou dans un granulaire peu dense), l'équivalence ne tient plus. L'impact d'une bille dans un granulaire peu dense produit des cavités et des jets comparables à ceux que l'on voit dans l'eau [32], [33]. Le régime intermédiaire entre cavités tubulaires et hémisphériques est observé pour des sphères de densité intermédiaire, qui ralentissent avant que la cavité ne se pince [41].

La distinction entre cavités hémisphériques et cylindriques dépend donc du temps de décélération de l'objet impactant. Ce temps dépend a priori de nombreux facteurs : densité de l'impactant et du substrat, vitesse de l'impactant, élasticité, viscosité, facteur de résistance... Je récapitule sur le tableau 2.1 la forme de cavité obtenue au moment de l'expansion maximale pour des impacts de sphère, suivant le matériau composant la sphère, et la nature du substrat. Le symbole "||" représente une cavité cylindrique, "∪" une cavité hémisphérique. Les données pour les impacts par des sphères d'Acier, Téflon, Nylon Polypropylène sur l'eau sont interprétées à partir de l'étude de Aristoff et Bush [41]. Dans une autre étude, les deux types de cavité sont observés en faisant rebondir des balles viscoélastiques à la surface de l'eau. On observe que suivant la coefficient de restitution de la balle, la cavité obtenue est soit allongée soit hémisphérique, ces dernières étant obtenues avec des balles de coefficient de restitution 0.2 [42].

Impactant	densité (kg/dm^3)	Eau	Granulaire peu dense	Granulaire dense	Planète	Acier
Météorite	≈ 5	||	||	∪	∪	?
Acier	7.9	||	||	∪	∪	∪?
Teflon	7.3	||	||	∪	∪	
Nylon	1.1	||	||	∪	∪	
Polypropylène	0.86	||	||	∪	∪	
Polypropylène creux	0.2	∪	?	∪	∪	
Eau	1	∪	?	?	?	

TABLE 2.1 – Forme de la cavité produite par l'impact d'une bille d'une sphère d'un matériau sur un autre. Le symbole "cusp' indique une cavité de type explosion, de forme hémisphérique, le symbole "||" une cavité de type impact, de forme allongée.

Un impact peut donc créer deux types de cavités suivant les caractéristiques de l'impactant et de l'objet impacté. Si le projectile transfère rapidement son énergie on obtient un impact de type explosif, tandis qu'un transfère lent produit un impact pénétrant.

2.7 Conclusion

Les explosions à la surface en milieu non confiné forment des cavités qui croissent en gardant une forme hémisphérique avant de se refermer de façon non isotrope, un jet apparaissant au fond de la cavité. La conversion de l'énergie de l'explosion E_0 en énergie potentielle $\rho g H_{max}^4$ produit des cavités dont la taille typique est 10 cm, pour des énergies de l'ordre du Joule. La cavité se referme sous l'effet de la gravité sur un temps $\sqrt{H_{max}/g} \approx$ 100 ms.

L'explosion présentée en introduction dégage 8 kilotonnes équivalent TNT, c'est-à-dire approximativement 33 10^{12} J dont on déduit d'après l'équation 2.12 une taille typique de 240 m comparable à la taille observée sur la figure 1.1. Le temps d'ouverture d'une telle cavité est de l'ordre de 10 s. Les cavités d'explosions sont similaires aux cavités observées, à plus petite échelle, lors de l'impact de gouttes, pour lesquels la densité du projectile est égale à celle du bain. Il semble que selon la densité et les propriétés viscoélastiques du projectile et du substrat, il existe toute une gamme de cavités, de formes plus ou moins allongées.

Chapitre 3

Explosions confinées

Sommaire

3.1 Introduction 25
3.2 Montage 25
3.3 Résultats 26
3.4 Modélisation 27
3.5 Les tubes ou la vidange impossible, les jets. 31
3.6 Article 33

3.1 Introduction

Les cavités non confinées s'ouvrent de manière isotrope à temps court. Afin de forcer une ouverture anisotrope, on réalise les explosions dans des tubes verticaux. La géométrie du problème est à une dimension, les cavités se développant vers l'extrémité du tube.

3.2 Montage

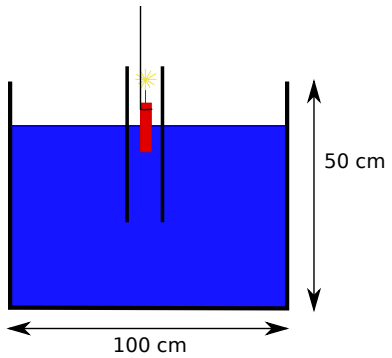


FIGURE 3.1 – Montage expérimental pour les explosions confinées.

Le montage expérimental est présenté sur la figure 3.1. Les explosions sont confinées dans des tubes verticaux ouverts aux deux bouts, l'expérience étant réalisée dans la même cuve que pour les explosions non confinées, avec les mêmes pétards. Le tube est maintenu avec une pince Manfroto placée au dessus de la surface, et le pétard positionné de manière

à se trouver à la surface de l'eau lorsque le fil est tendu. Pour réaliser l'expérience on allume le pétard hors du tube puis on le laisse tomber à la bonne position. Les tubes utilisés sont en Plexiglas ou en verre, avec un diamètre de 2, 4 et 5 cm et une longueur immergée L variant entre 10 et 35 cm. Les tubes sont rigides et ne se déforment jamais sauf lors de l'utilisation de gros pétards où il est arrivé que des tubes explosent ; on a alors utilisé un tube en Plexiglas de 1 cm d'épaisseur.

3.3 Résultats

A l'inverse de nos observations en géométrie ouverte ($R(t) \sim t^{2/5}$), l'explosion forme une cavité qui commence par grandir à vitesse constante $\dot{Z}_0$ (images 1 à 4 sur la figue 3.2). Cette vitesse dépend à la fois de l'énergie de l'explosion et de la masse d'eau à mettre en mouvement.

On distingue dans cette partie les différents essais suivant la vitesse initiale d'expansion $\dot{Z}_0$: modérée (figure 3.2), ou grande (figure 3.3), pour des cavités obtenues dans un tube de diamètre $D = 5$ cm. Dans le premier cas, la position Z de l'interface air/eau augmente jusqu'à un maximum Z_{max} (images 1 à 12). L'interface accélère ensuite vers le haut et la cavité se ferme (images 13 à 24). Finalement la surface oscille autour de la position $Z = 0$ avec une amplitude décroissante comme décrit par Lorenceau *et al* [43]. Dans le deuxième cas (grande vitesse initiale), la cavité grandit rapidement et atteint l'extrémité du tube $Z = L$ (images 1 à 5 sur la figure 3.3). La cavité se ferme ensuite, sans jamais sortir du tube. La position de l'interface $Z(t)$ pour ces deux cavités est tracée sur la figure 3.4 (a). La position de l'interface n'est pas symétrique par rapport au temps T_{max} d'expansion maximale : on observe que la fermeture est plus lente que l'ouverture.

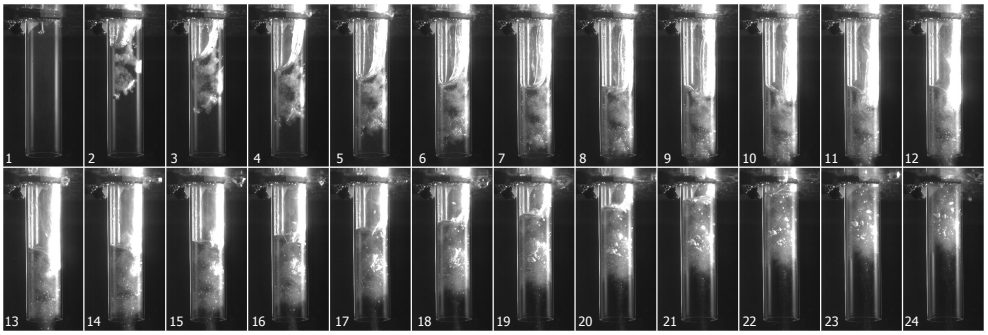


FIGURE 3.2 – Chronophotographie de la cavité formée dans un tube de 5 cm de diamètre et 18.5 cm de long. La vitesse initiale d'expansion est de 1.3 m/s. Les images sont espacées de 15 ms.

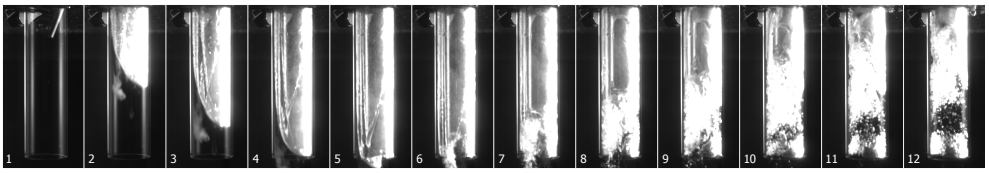


FIGURE 3.3 – Chronophotographie de la cavité formée dans un tube de 5 cm de diamètre et 17.3 cm de long. La vitesse initiale d'expansion est de 3.3 m/s. L'expansion s'arrête lorsque la cavité atteint le bout du tube. Les images sont espacées de 15 ms.

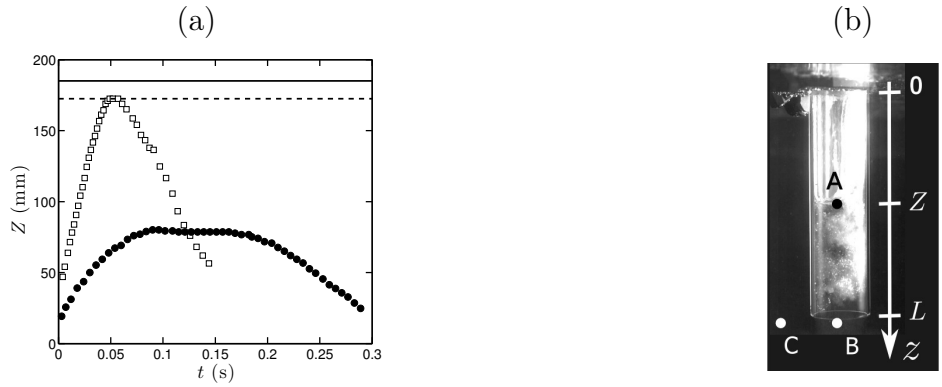


FIGURE 3.4 – (a) Position de l'interface pour les cas présentés des figures 3.2 et 3.3. Les carrés représentent la cavité qui atteint le bout du tube ($L = 173$ mm, ligne pointillée) sans en sortir ($Z \leq L$). Les points représentent la cavité dont l'expansion cesse loin du bout du tube ($L = 185$ mm, ligne continue). (b) Schéma de l'expérience d'explosion confinée et notations utilisées pour le modèle.

3.4 Modélisation

Les notations sont indiquées sur la figure 3.4 (b). Le nombre de Reynolds de l'écoulement peut être déduit de la figure 3.2 : la cavité s'accroît de 75 mm en un temps $T_{max} = 500$ ms à l'intérieur d'un tube de 5 cm de diamètre, ce qui donne : $R_e = \rho D Z_{max}/T_{max}\eta = 7500$. On utilise une théorie d'écoulement potentiel. L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\left[\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\rho u^2}{2} + p - \rho g z\right]_A^B = 0 \tag{3.1}$$

Pendant l'expansion, l'eau contenue dans le tube se déplace en bloc. On en déduit que dans le tube la vitesse de l'eau est égale à la vitesse de l'interface air/eau :

$$V_z = \dot{Z} \tag{3.2}$$

Afin de satisfaire cette équation, on introduit le potentiel de vitesse $\phi = \dot{Z}z$ dont dérive V_z. On écrit l'équation (3.1) entre un point A à l'interface air/eau et un point B à la sortie du tube, de manière à ce que les deux points soient dans le domaine dans lequel on a défini ϕ. Afin d'estimer la pression au point B, on remarque que l'écoulement sort du tube sous la forme d'un jet pendant l'expansion de la cavité ($\dot{Z} > 0$). Il n'y a pas de variation de pression transverse dans un jet, donc on estime la pression au point B comme étant proche de celle mesurée au point C : $P_C = P_0 + \rho g L$. L'équation (3.1) se ramène alors à :

$$(L - Z)\ddot{Z} = -gZ \tag{3.3}$$

Pendant la fermeture de la cavité, l'écoulement dans le bain peut être décrit par l'écoulement induit par un terme puits positionné à l'extrémité du tube, tant que le diamètre du tube D est petit devant sa longueur : $D/L << 1$. On écrit le potentiel de vitesse dans le bain $\phi_p = \frac{-Q}{4\pi r}$ où r désigne la distance à l'extrémité du tube. Le flux entrant dans le terme puits est égal au flux dans le tube : $Q = \dot{Z}\pi(D/2)^2$, ce qui donne :

$$\phi_p = \frac{\dot{Z}R^2}{4r} \tag{3.4}$$

Afin d'estimer la pression à la sortie du tube on écrit l'équation de Bernoulli entre la sortie du tube et un point à la surface pour lequel la vitesse est négligeable (les valeurs à la sortie du tube sont estimées à la distance $r = D/2$ de la sortie, parce que la vitesse théorique diverge en $r = 0$). On trouve, en négligeant les termes d'ordre D :

$$p_B = p_0 + \rho g L - \rho \frac{\dot{Z}^2}{32} \tag{3.5}$$

ceci conduit à l'équation de fermeture de la cavité, à partir de l'équation (3.1) :

$$(L - Z)\ddot{Z} = -gZ + \frac{\dot{Z}^2}{32} \tag{3.6}$$

L'équation (3.5) prédit que la vitesse de fermeture est plus faible que la vitesse d'ouverture, parce que la pression qui met le liquide en mouvement pendant la fermeture, P_B, est plus petite pendant la fermeture que pendant l'ouverture, d'un facteur $\rho\frac{\dot{Z}^2}{32}$, en accord qualitatif avec les observations faites sur la figure 3.4 (a). Le régime de fermeture est traitée par Lorenceau *et al* [43], on ne s'intéressera dans cette section qu'à l'expansion de la cavité.

Dans la limite des petites expansions $Z_{max} << L$, l'équation (3.3) se réduit à l'équation d'un oscillateur :

$$\ddot{Z} + \frac{g}{L}Z = 0 \tag{3.7}$$

dont la solution s'écrit :

$$Z = Z_{max}\sin(\omega t) \tag{3.8}$$

où $\omega = \sqrt{g/L}$ est la fréquence propre de la colonne de liquide. On déduit Z_{max} de la vitesse initiale d'ouverture $\dot{Z}_0$ de la cavité, $\dot{Z}_0 = Z_{max}\ \omega$, ce qui donne $Z_{max} = \dot{Z}_0\sqrt{L/g}$. Ecrivant cette équation en variables adimensionnées, on obtient :

$$Z^*_{max} = \frac{Z_{max}}{L} = \frac{\dot{Z}_0}{\sqrt{gL}} = \sqrt{Fr} \tag{3.9}$$

où Fr est le nombre de Froude. Cette équation prédit que pour des petites vitesses initiales la profondeur maximale augmente linéairement avec la vitesse. On trace sur la figure 3.5 la profondeur maximale adimensionnée de la cavité Z_{max}/L en fonction du Froude $\dot{Z}_0/\sqrt{gL}$. Les mesures correspondent à des expériences réalisées dans des tubes de longueur comprise entre 10 et 35 cm. La vitesse d'ouverture initiale $\dot{Z}_0$ est estimée en réalisant le meilleur ajustement linéaire de la position de l'interface $Z(t)$ pendant les premiers instants de l'expansion, ce qui introduit une marge d'erreur. La relation linéaire attendue à faible vitesse initiale est tracée en pointillé. Seuls les points obtenus pour les plus petits nombres de Froude suivent une relation linéaire, la plupart des expériences étant réalisées dans un régime de vitesse élevées, pour lesquelles on observe que la profondeur maximale sature à la longueur du tube, même pour des nombres de Froude allant jusqu'à Fr=25. On discute maintenant ce régime.

L'équation (3.3) adimensionnée par la longueur L et le temps $\tau = \sqrt{L/g}$ se réécrit :

$$(1 - Z^*)\ddot{Z}^* = -Z^* \tag{3.10}$$

Cette équation peut être mise sous la forme :

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{Z^*}^2}{dZ^*} = \frac{-Z^*}{1-Z^*} \tag{3.11}$$

Une intégrale première s'écrit :

$$\frac{\dot{Z^*}^2}{2} = \frac{Fr}{2} + Z^* + ln(1-Z^*) \tag{3.12}$$

où le nombre de Froude est la constante d'intégration (pour $Z^* = 0$, on a $\dot{Z}^* = \sqrt{Fr}$).

L'équation (3.12) prédit la profondeur maximale de la cavité Z_{max}. Quelleque soit la valeur de $\dot{Z}_0$ (quelque soit Fr), l'équation $\dot{Z} = 0$ dont on déduit Z_{max} a toujours une solution dans le tube. Z_{max} est donné par la relation suivante :

$$\frac{Fr}{2} = -Z^*_{max} - ln(1-Z^*_{max}) \tag{3.13}$$

On trace cette relation en ligne pleine sur la figure 3.5 sur laquelle on observe qu'elle est en accord avec les mesures. Un regard plus attentif montre que la profondeur maximale est souvent plus faible qu'attendu, ce qu'on explique par le fait que la plupart des cavités ne sont pas parfaitement 1-D, mais se développent en formant une langue à l'intérieur du tube. On aurait pu imaginer que les explosions intenses ($\dot{Z}_0$ élevé), produisent des cavités capables de sortir des tubes. Ce n'est pas le cas, parce que pour $Z \to L$, l'équation (3.3) montre que l'accélération de l'interface diverge négativement : la cavité s'arrête nécessairement avant d'atteindre la profondeur L. La profondeur maximale Z_{max} peut être déduite de l'équation (3.13) dans la limite $Fr >> 1$ ($\dot{Z}_0 >> \sqrt{gL}$) : on trouve $Z_{max} \sim [1 - \exp(-Fr)]$ qui tend asymptotiquement vers 1, sans jamais l'atteindre (conformément à ce qui est observé sur la figure 3.4) : la cavité reste confinée dans le tube (régime de saturation observé sur la figure 3.5). Un interprétation physique à cette observation est que lors de l'explosion, l'eau contenue dans le tube est mise en mouvement, puis l'écoulement se poursuit de manière inertielle. L'écoulement est ralenti par la pression hydrostatique à la sortie du tube. Pendant l'écoulement la pression à la sortie du tube ne varie pas alors que la masse d'eau en mouvement dans le tube décroit. Quand l'interface atteint le bout du tube, la masse tend vers zéro, l'air contenu dans le tube posséd une inertie négligeable si bien que l'expansion est stoppée par la pression hydrostatique.

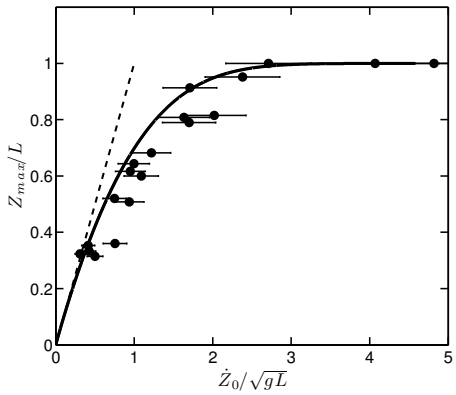


FIGURE 3.5 – Profondeur maximale adimensionnée en fonction de la vitesse initiale adimensionnée. L'équation (3.13) est tracée en ligne pleine, et sa limite linéaire (équation 3.9) est tracée en pointillé.

3.5 Les tubes ou la vidange impossible, les jets.

Dans la partie précédente, on a réalisé des explosions à l'intérieur de tubes. Physiquement cela revient à donner de l'énergie cinétique au fluide contenu dans le tube ; puis, sous l'influence de la gravité et des pertes en sortie du tube, l'expansion de la cavité ralentit sans jamais pouvoir sortir du tube. Il est intéressant de remarquer qu'on peut réaliser une expérience similaire sans avoir besoin d'explosion pour mettre le fluide en mouvement, comme schématisé sur la figure 3.6. On remplit un tube d'eau que l'on bouche à son extrémité supérieure (a), on place cette extrémité au dessus du niveau de la surface libre et on ouvre (b). L'eau contenue dans le tube accélère sous l'effet de la gravité (c), le tube se vide, et quelque soit la longueur du tube sous le niveau de la surface libre, la vidange s'arrête brutalement lorsque l'interface air/eau atteint la sortie du tube. Dans cette expérience comme dans le cas des explosions, la surface air/eau ne sort pas du tube (ou très peu).

Dans un deuxième temps, la surface air/eau accélère vers le haut, si le tube est maintenu bien droit on observe un jet vertical qui se forme à ce moment précis (d). Finalement le tube se remplit puis la surface position de l'interface oscille avant de se stabiliser au niveau de la surface libre.

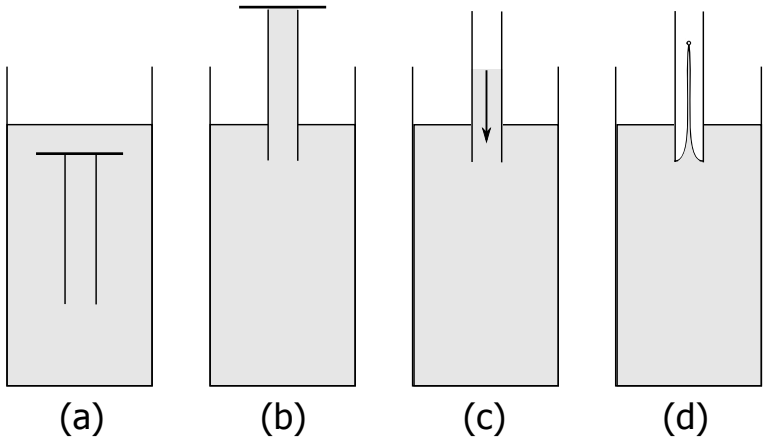


FIGURE 3.6 – Expérience de vidange de tube.

La formation d'un jet vertical est illustrée sur la figure 3.7. Dans cet exemple, le tube fait 45 cm de long, avec 37 cm hors de l'eau. Le jet obtenu monte à une trentaine de centimètres.

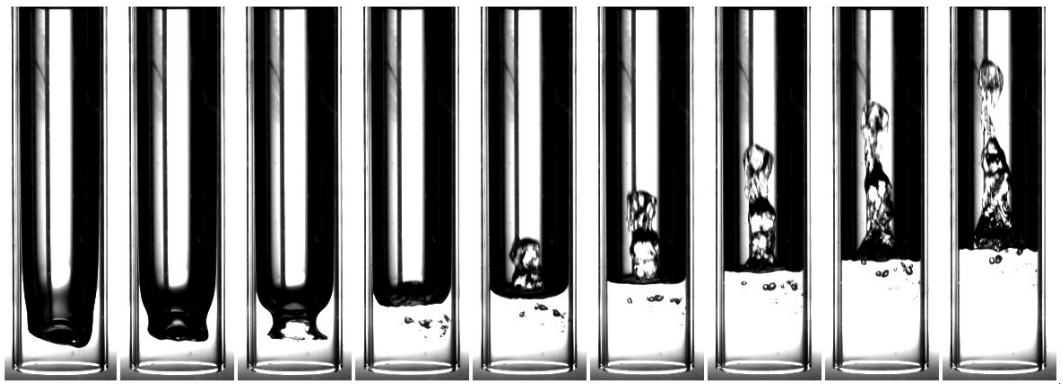


FIGURE 3.7 – Formation d'un jet pendant la vidange d'un tube. Le tube fait 2 cm de diamètre, les images sont espacées de 7 ms.

FIGURE 3.8 – Formation d'un jet lors de l'accélération d'une surface courbée, tiré de [44].

Le même type de jet est obtenu dans des expériences lors desquels on accélère une surface courbée. Ainsi Antkowiak *et al* [44] présentent l'expérience suivante : si on laisse tomber à la verticale sur un support un tube en verre rempli d'un liquide non mouillant (angle de contact de 90°), lorsque la tube frappe le support il ne se passe rien, la surface de liquide reste plane. Par contre si le liquide est mouillant, l'interface est initialement courbée, et un jet apparait lors de l'impact (figure 3.8). Si l'on forme une bulle sur une surface préalablement plane, la courbure de la surface sous la goutte entraine aussi la formation d'un jet. Le même type de jet est observé lors de l'interaction de grosses bulles dans un fluide visqueux [45]. Lors de l'accélération d'une surface courbée dans un capillaire par formation d'une bulle de cavitation, on observe même des jets supersoniques [46], [47].

Le fait qu'il y ait formation d'un jet fin et haut dans tous ces cas, alors que le jet formé lors de la fermeture des cavités d'explosion est plus large et moins rapide peut à première vue sembler surprenant. Les différences de comportement peuvent s'expliquer par deux observations : lors de la fermeture des cavités hémisphériques l'accélération est faible par rapport aux accélérations imposées dans les autres expériences. Dans les expériences de jets intenses, l'ensemble du liquide est brutalement accéléré. Si la surface est courbe cela entraine une focalisation de l'écoulement qui donne formation à un jet intense. Dans le cas des cavités d'explosion, lors du début de la fermeture le fond est accéléré vers le haut alors que les côtés de la cavité sont encore en train de s'agrandir, l'intensité du flux qui se focalise au fond de la cavité provient donc d'une zone moins étendue. si la focalisation est moins intense, le jet formé est moins éruptif. Enfin il faut mentionner que lors de nos expériences d'explosions dans les tubes, nous n'avons pas observé de jets, peut-être parce que les restes du pétard se déplacent avec l'interface et brisent la symétrie lors de la fermeture de la cavité.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté deux types de cavités formées par des explosions à la surface de l'eau. Ces cavités sont de type inertiel, de grande taille, et se prêtent bien à une description en terme d'écoulement potentiel. Lorsque la cavité n'est pas confinée elle présente la caractéristique surprenante d'être hémisphérique aux temps courts, contrai-

rement aux cavités formées par l'impact de solides dans des liquides. Plus généralement impact et explosion peuvent produire des effets comparables, suivant les caractéristiques de l'objet impactant et du substrat impacté.

Lorsque l'on confine les cavités dans des tubes on est surpris d'observer que les cavités ne s'échappent jamais du tube. Une partie de l'explication, vient du fait que l'inertie de l'air est négligeable devant celle de l'eau. En utilisant deux fluides de densités plus proches, on pourrait arriver à des résultats différents. Lors de l'explosion d'une bombe, une poche de gaz chauds, donc peu dense, s'étend dans un gaz froid plus dense. On peut imaginer que des structures de forme tubulaire seraient capables de confiner une partie de l'énergie d'une telle explosion.

3.6 Article

Explosions at the surface of water

Adrien Benusiglio[1], David Quéré[2] and Christophe Clanet[1] †

[1]Ladhyx, Unité Mixte de Recherche 7646, Centre National de la Recherche Scientifique-École Polytechnique, 91120 Palaiseau, France

[2]Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, Unité Mixte de Recherche 7636, Centre National de la Recherche Scientifique-Paris 6-Paris 7-École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles, 75005 Paris, France

(Received ?; revised ?; accepted ?. - To be entered by editorial office)

We study the shape and dynamics of cavities created by the explosion of firecrackers at the water surface in a large pool. Without confinement, the explosion generates an hemispherical air cavity which grows, reaches a maximum size and then collapses in a generic "w" shape to form a final central jet. When a rigid open tube confines the firecracker, the explosion produces a cylindrical cavity that expands without ever escaping the free end of the tube. We discuss a potential flow model, which captures most of these different features.

1. Introduction

The first studies on entry cavities probably go back to the early work of A.M. Worthington (Worthington & Cole 1900; Worthington 1908). The cavities are classically produced by the impact of a solid (characteristic size R, velocity U_0, density ρ_s) on a liquid (viscosity, η, density ρ, surface tension γ), with a large density ratio $\rho_s/\rho >> 1$. The critical velocity above which a cavity appears depends on both the shape and wetting properties of the solid (Duez *et al.* 2007). The underlying applications include the impact of bullets (May 1952), torpedoes (May 1975), but also water walking lizard (Glasheen & McMahon 1996) and underwater spiders that rely on air bells to survive (Seymour & Hetz 2011). The different types of cavities can be classified as in the phase diagram presented in figure 1, where the velocity is rescaled by $\eta/\rho R$ on the horizontal axis and the size by the capillary length $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ on the vertical one.

This phase diagram defines four different types of cavities. The one formed by large spheres or torpedos plunging at high speed into water are in region A, where both Reynolds $\rho R U_0/\eta$ and Bond R/a numbers are large. These cavities are elongated in the direction of motion, and they pinch at half the distance from the interface after a characteristic time $\tau = \sqrt{R/g}$ independent of the velocity (Duclaux *et al.* 2007; Duez *et al.* 2007). The singularity at pinchoff was recently described in detail (Gekle *et al.* 2009; Gekle & Gordillo 2010; Gordillo & Gekle 2010). For these high-speed cavities, the pressure drop into the air flow $\rho_{air} U_0^2$, and the hydrodynamic pressure $\rho g U_0 \tau$ can be compared via the ratio $\frac{\rho_{air}}{\rho}\sqrt{Fr}$ where $Fr = U_0^2/gR$ is the Froude number. When the Froude number is large compared to the water/air density ratio, the pressure in air impacts the pinchoff and surface seal of the cavities (Aristoff 2009). For smaller plunging spheres at high Reynolds (region B), surface tension has a major role on the closure and produces wavy cavities (Aristoff *et al.* 2008; Aristoff & Bush 2009). If viscosity is increased (region C), we reach a regime where the sphere decelerates prior to closure

† Email address for correspondence: clanet@ladhyx.polytechnique.fr

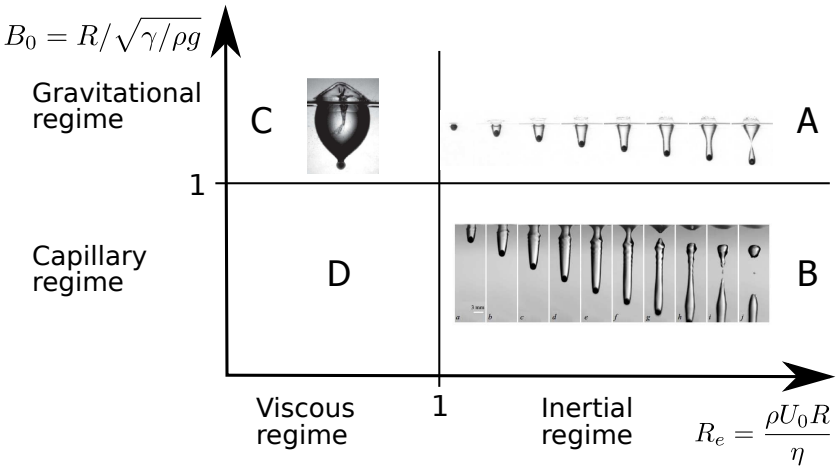


FIGURE 1. Phase diagram for entry cavities. In region A, B and C, the pictures are respectively taken from Duclaux *et al.* (2007), Aristoff & Bush (2009), Le Goff *et al.* (2013).

(Le Goff *et al.* 2013). Low Reynolds and small Bond numbers remain to be investigated, even if we only marginally expect cavities in this regime. Apart from spheres, the impact of cylinders and discs have also been studied (Bergmann *et al.* 2010), as well as non axisymmetric objects (Enriquez *et al.* 2010, 2012).

Experiments were also conducted for drops impacting a pool, for a density ratio $\rho_s/\rho = 1$. These impacts also creates cavities, that expand radially to form hemispheres (Engel 1966). The experiments were made using drops of water in free fall at a reduced pressure to obtain high velocity of impact. The largest cavity obtained by this method had a depth equal to 27 mm, after impact of a drop of radius 5.5 mm at a velocity of 19 m/s.

In the present study we inject energy in the fluid not by the mean of an impact, but with an explosion at the free surface, which generates both a large Bond number and a large Reynolds number cavity. In this case, the way energy is injected in the system is isotropic, so that we expect cavities quite different (for the shape and dynamics) of what is observed after an impact. The results are presented in section (2), and confined explosions are studied in section (3).

2. Unconfined explosion cavities

2.1. *Setup*

The set-up is sketched in figure 2 (a): explosions are produced in a tank of polycarbonate (100*100*50 cm) filled with water ($\eta = 10^{-3}$ Pa.s, $\gamma = 72\ 10^{-3}$ N/m, $\rho = 10^3$ kg/m^3). We use four types of firecrackers [figure 2 (b)] that contains 1, 1.3, 2 or 5 g of powder. The firecrackers are held vertically by a small wire with their center approximately at the level of the free surface. Their characteristics are not altered as long as they do not stay more than 30 seconds in water. The explosion is recorded from the side with a high speed video camera (Photron Fastcam SA3) at 1000 frames/sec. An acoustic measurement of the overpressure created by an explosion is shown in figure 2 (c) where we observe that the explosion itself lasts less than 1 ms.

2.2. *Results*

Side views of the cavity created by the explosion of a 1 g-firecracker are displayed in figure 3 as a function of time. For the first 4 to 5 ms (image 1 to image 2), the light pro-

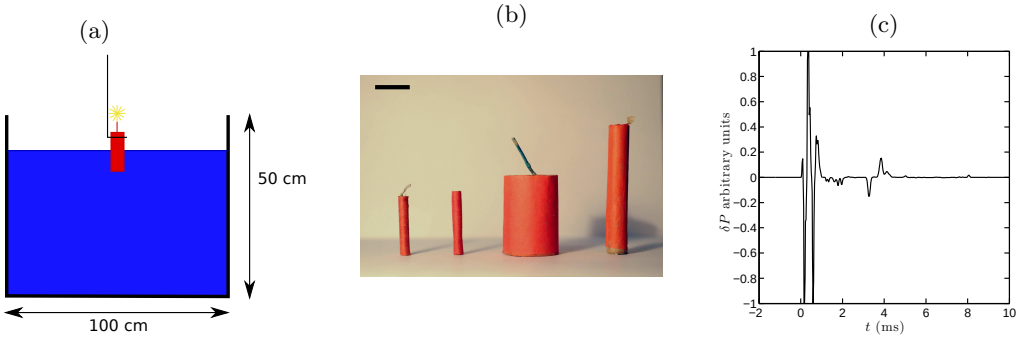


FIGURE 2. (a) Sketch of the experiment. (b) Four types of firecrackers containing 1, 1.2, 2 and 5 g of powder. The bar shows 2 cm. (c) Acoustic measurement of the overpressure produced by a 1 g-firecracker explosion.

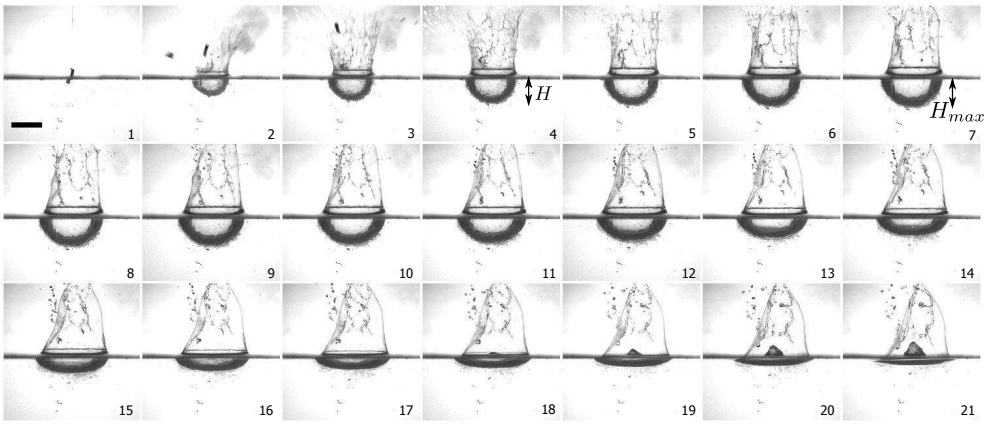


FIGURE 3. Chronophotography of the cavity created by the explosion of a 1 g firecracker. The video is taken from the side of the tank and we observe the evolution of the water/air interface. The time step between images is 7 ms. The bar in image 1 shows 5 cm. H is the depth of the cavity, and it reaches its maximum H_{max} at $t = T_{max}$ in image 7.

duced by the explosion blinds the camera and we do not have access to this phase. After this delay, we observe that the explosion has created a hemispherical air cavity which expands radially up to 30 ms (images 1 to 5). Beyond this isotropic phase, the bottom of the cavity stops while the sides continue to expand. The cavity takes an elliptical shape (image 7). At this time (T_{max} = 40 ms) the bottom has reached its maximum depth H_{max} = 50 mm. In the collapsing phase, the bottom of the cavity accelerates backwards to the surface (images 8 to 18) and a jet appears at the center, making a generic w-shaped cavity. The eruption becomes visible at the end of the collapse, when it passes above the bath surface (images 19 to 21). The cavities are similar to what is observed for impacting drops (figure 4), but at a larger scale.

Quantitatively, we measure the time evolution of the cavity depth H (defined in figure 3), and plot it in figure 5 (a) for several explosions. The curves all have the same general shape: the velocity of expansion slows down until the cavity reaches a maximum depth H_{max} at a time T_{max} that both seem to increase with the initial speed of expansion. The time T_{max} increases from 50 to 90 ms while the maximum depth varies from 40 to 170 mm. In a second phase ($t > T_{max}$), H decreases with an increasing velocity. The

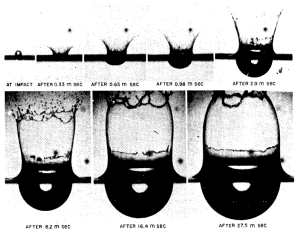


FIGURE 4. Impact of a drop of water of diameter 4.5 mm on a pool of water at approximately 10 m/s, Engel (1966).

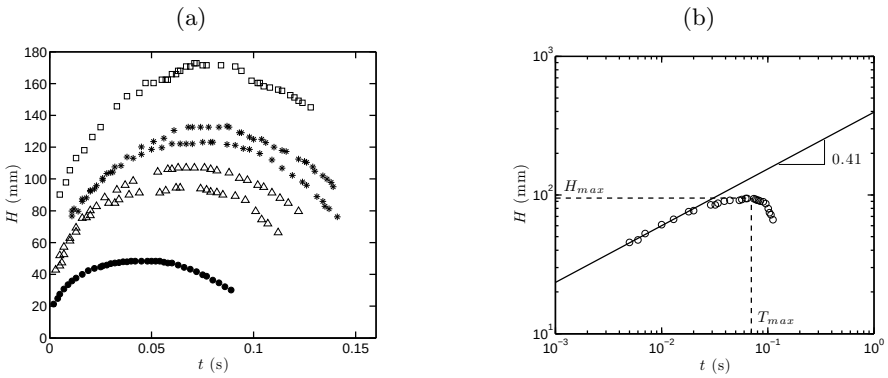


FIGURE 5. (a) Depth of the cavity $H(t)$ during its expansion for explosions of firecracker with mass of powder 1 g "•", 1.3 g "△", 2 g "∗" and 5 g "□". (b) Depth of the cavity created by the explosion of a 1.3 g firecracker as a function of time in a logarithmic plot.

time evolution of H during these two phases present a left-right symmetry with respect to T_{max}. In figure 5 (b), we plot H as a function of time in a log-log scale for a cavity created by the explosion of a 1.3 g firecracker. We observe that the function $H(t)$ at short time tends toward a power law, $H = Kt^{\alpha}$, with $\alpha \approx 0.41 \pm 0.03$.

2.3. *Modelisation*

2.3.1. *Potential flow model*

For the study of drop cavities, Engel (1966) and later Macklin & Metaxas (1976) wrote an energy balance between the initial energy of the drop and the energy of the cavity at maximum depth to estimate this depth, showing that for high Weber number only half the energy of the drop is transferred to the cavity. Engel also proposed a model for the dynamics of the cavity (Engel 1967), using a dipolar flow potential. The later study of Leng discussed an equation of the dynamics assuming energy balance and radial velocity (Leng 2001). More recently, Bisighini *et al.* (2010) wrote an elaborated potential flow model to account for the shape of the cavity over time.

To model the dynamics and shape of the cavities, we propose here an analytical model similar to the one developed for plunging cavities (Duclaux *et al.* 2007). We can first evaluate the typical Reynolds numbers from the experiments: cavities expand in $T_{max} \approx$ 100 ms to a maximum depth $H_{max} \approx 10$ cm, which leads to $Re \approx \rho H_{max}^2/T_{max}\eta \approx 10^5$. In this high Reynolds number regime, we can safely neglect viscous dissipation. Since the liquid is initially at rest, we use a potential flow approach to describe the cavity formation, through the generalized Bernoulli equation:

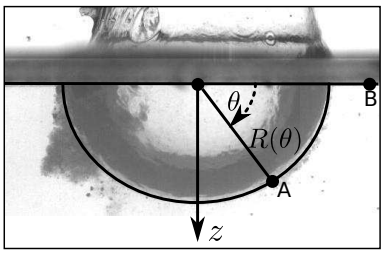


FIGURE 6. Sketch of the problem and notations used for the model.

$$\left[\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\rho u^2}{2}+p-\rho g z\right]_A^B=0 \tag{2.1}$$

where ϕ is the velocity potential, $\underline{u} = \underline{grad}\ \phi$ the velocity of the fluid, g the gravity acceleration, p the pressure, and A and B two points in the fluid. The problem is sketched in figure 6: point A is chosen at the surface $[R_A = R(\theta)]$ and point B at the free surface, in a region "far" from the cavity where there is no motion. The radius $R(\theta, t)$ stands for the interface location at time t in the direction θ. We first assume that the explosion creates a brief overpressure, which isotropically puts the fluid into motion. The pressure then relaxes to ambient on a millisecond time-scale, shorter than the expansion time of the cavity which takes place over one hundred milliseconds [figure 5 (b)]. This assumption is supported by the fact that the light flash (figure 3) lasts less than 5 ms, and overpressure (figure 2 [b]) lasts less than 1 ms. We thus assume that the external pressure remains constant to ambient during the cavity expansion and collapse. For such large cavities (larger than the capillary length), surface tension can be neglected and the pressure at the surface is equal to the external pressure P_0. Equation 2.1 thus becomes:

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_A+\rho\frac{u_A^2}{2}-\rho g z_A=0 \tag{2.2}$$

We then assume that the motion is purely radial. Via mass conservation, this leads to an expression for the velocity in the fluid: $u(r,\theta) = \left(\frac{R(\theta)}{r}\right)^2 \dot{R}(\theta)$, from which we get the velocity potential $\phi(r,\theta,t) = -R(\theta,t)^2\dot{R}(\theta,t)/r$. The differential equation for the cavity dynamics follows from equation (2.2):

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=-gRsin\theta \tag{2.3}$$

This equation can be integrated. We find:

$$\rho R^3\dot{R}^2+\frac{1}{2}\rho g R^4 sin\theta = E_0 \tag{2.4}$$

where the constant of integration E_0 is the typical energy injected in the bath by the explosion. Equation (2.4) expresses the conversion of this energy into kinetic ($\rho R^3\dot{R}^2$) and potential energy ($\frac{1}{2}\rho g R^4 sin\theta$).

At short times, R is small ($R(t{=}0){=}0$) and equation (2.4) reduces to $R^3\dot{R}^2 = E_0/\rho$, which does not depend on θ. The expansion is isotropic, the cavity has an hemispherical shape and it expands following the law $R(t) = \left(\frac{5}{2}\sqrt{E_0/\rho}\right)^{2/5} t^{2/5}$. A similar power law was derived by Taylor for the luminous globe created by the explosion of an atomic bomb

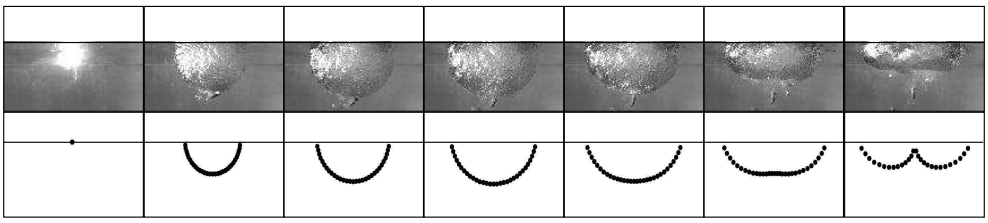


FIGURE 7. Comparison of the experimental shape of the cavity and the numerical resolution of equation (2.4). The chronophotography corresponds to an explosion of a 1.3 g-firecracker, with a time step of 22 ms. The maximum depth of the cavity is 10 cm.

(Taylor 1950).

As time proceeds, $\dot{R}(\theta)$ decreases down to the point where the second term in equation (2.4) dominates the first one. This term depends of θ, which introduces anisotropy in the cavity shape. It is maximum at the bottom ($\theta = \pi/2$) and vanishes on the sides ($\theta = 0$ and $\theta = \pi$). This implies that the bottom expansion slows down faster than the sides and that the acceleration during collapse is faster at the bottom than on the side. These features are consistent with the observations made in figure 3.

One also notices in equation (2.4) that $\dot{R}$ only depends on R and θ. This means that for a given angle θ, during opening and collapse of the cavity, the absolute value of velocity $|\dot{R}|$ will be equal when the radius will reach a given value R. Hence we can understand why the curves $R(t)$ are symmetrical with respect to $t = T_{max}$, as observed in figure 5 (b).

2.3.2. *Shape of the cavity*

We numerically solve equation (2.4) for several angles, and compare the resulting profiles to a typical experiment in figure 7. The numerical solution correctly captures the time evolution of the cavity, with an isotropic expansion followed by a "flattening" of the bottom and finally a focalisation of the flow at this place. When focalisation occurs, the flow is not radial anymore and a vertical jet appears. The jet formation is not obtained in our model.

Expressing $\dot{R}(H_{max}) = 0$ in equation (2.4), we obtain the relationship between E_0 and the maximum depth of the cavity $H_{max} = R_{max}(\pi/2)$:

$$H_{max} = \left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4} \tag{2.5}$$

where the explosion energy E_0 can be deduced from the power law describing the cavity dynamics at short time:

$$R(t) = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/5} (E_0/\rho)^{1/5}\, t^{2/5} \tag{2.6}$$

We can then check equation (2.5) by plotting the measured maximum depth as a function of the distance $\left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4}$. For each experiment, E_0 is deduced from the short time dynamics, using equation (2.6), and error bars on E_0 arise from this fit. The typical values for E_0 lie between 0.2 and 15 J, and E_0 increases with the mass of powder in the firecracker. We observe in figure 8 that the measured maximum cavity depth H_{max} lin-

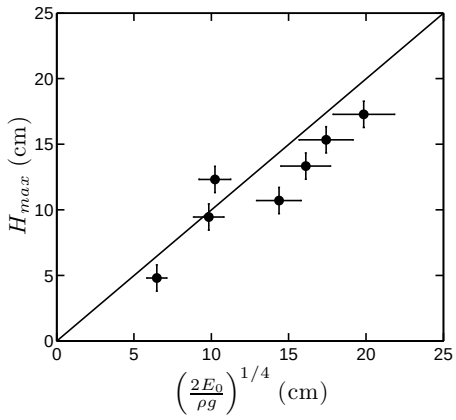


FIGURE 8. Maximum depth of the cavity as a function of the initial energy injected by the explosion. The solid line represents the linear relation expected from equation (2.5).

early varies with $\left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4}$ (with a proportionality constant close to unity), in agreement with equation (2.5).

From equation (2.4), we also deduce the maximum radius of expansion at any angle θ:

$$R_{max} = \left(\frac{2E_0}{\rho g sin\theta}\right)^{1/4} \tag{2.7}$$

This expression slowly diverges as θ approaches 0, which is not observed experimentally. The origin of the divergence lies in the horizontal motion at $\theta = 0$. The corresponding water particles do not acquire any potential energy and their motion is never stopped in our inviscid model. The actual flow is not inviscid, and the top layer is slowed down by lower layers during closure.

2.3.3. *Non-dimensionalisation*

It follows from the model that natural scales for H and t are, respectively, $H_{max} = \left(\frac{2E_0}{\rho g}\right)^{1/4}$ and $\tau = \sqrt{\frac{H_{max}}{g}}$. Denoting $H^* = H/H_{max}$ and $t^* = t/\tau$ the corresponding dimensionless variables, we can check that the series of data collapse on a master curve when plotting H^* as a function of t^* [figure 9 (a)]. We also verify that T_{max} linearly scales with τ, with a coefficient of order unity [figure 9 (b)]. The evolution equation of the cavity can be written in this scaled variables:

$$\dot{R}^* = \left(\frac{1 - R^{*4} sin\theta}{2R^{*3}}\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

The resolution of equation (2.8) is discussed in appendix A.

2.4. *Side effects*

We qualitatively discuss in this section side effects, namely the formation of a jet during closure, and the presence of ripples on the cavity surface. A close view of a jet formed during cavity closure is shown in figure 10 (a). These jets reach a maximal height H_{Jet} proportional to the maximum depth of the cavity H_{max} [figure 10 (b)]. The jet width is comparable to its height. This eruption largely differs from Worthington jets observed after impact and cavity pinchoff [figure 10 (c)], or after acceleration of a curved surface

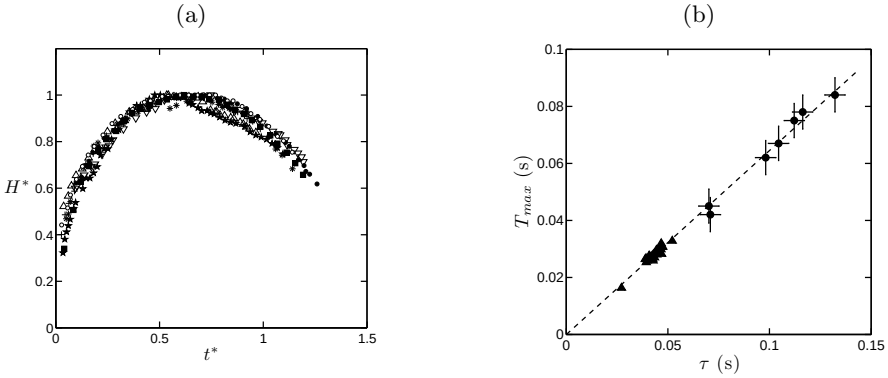


FIGURE 9. (a) Dimensionless depth of the cavity for several explosions as a function of the dimensionless time. The symbols represents: "○" 1 g firecracker, "+,∗" 1.3 g firecracker, "△ ,∇,⋆" 2 g firecracker, " •" 5 g firecracker, "■" cavity of a 54 mg drop of water impacting a pool of water at 16 m/s (Engel 1966). (b) T_{max} as a function of $\tau = \sqrt{H_{max}/g}$. The dots represent the present data and the triangles stands for cavities formed by impacting drops from Engel (Engel 1966). The best linear fit $T_{max} = 0.65\tau$ is plotted with a dashed line.

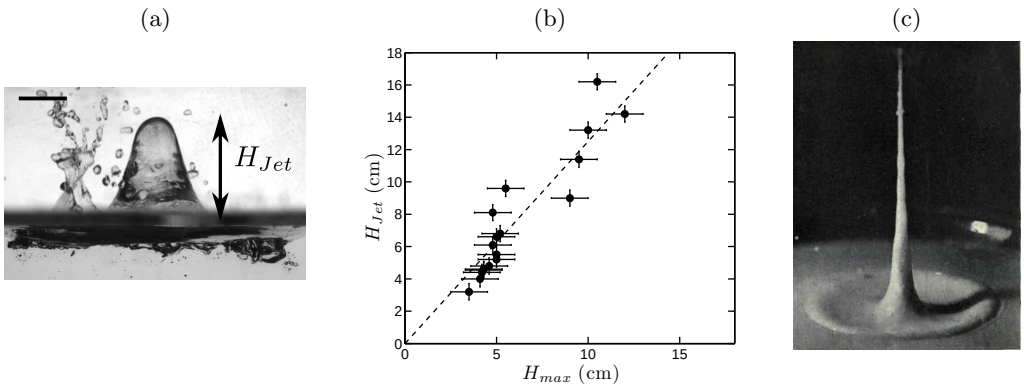


FIGURE 10. (a) Snapshot of the jet created by the cavity of a 5 g-firecracker explosion. The bar shows 3 cm. (b) Height of the jet as a function of the cavity depth. The linear best fit is in dashed line. (c) Jet formed after the entry of a 1.5 cm rough sphere in a bath of colored water, A. M. Worthington (Worthington 1908).

(Antkowiak *et al.* 2007), large bubble rupture in viscous fluid (Séon & Antkowiak 2012) or cavitation (Peters *et al.* 2012) for which jets are much thinner and faster, even possibly supersonic (Tagawa *et al.* 2011). In our problem, the cavity dimension is much larger and the collapse is gravity-driven, which induces a much weaker focalisation of the flow.

Zooming on the cavity surface during expansion reveals millimetric ripples that become centimetric as the cavity grows (figure 11). We interpret these structures as arising from an initial Rayleigh-Taylor instability. During the explosion (1 ms long), the interface is accelerated towards the dense fluid (water), which triggers the instability. The characteristic initial speed of the cavity after explosion is 1 m/s, so that the an acceleration G during explosion is on the order of 250 m/s^2. The typical unstable wavelength for this acceleration is $\lambda \approx 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho G}} \approx 3$ mm, comparable to the wavelength observed in figure 11. After the explosion, the expansion velocity decreases and the interface accelerates towards the light fluid (air), a stable situation with respect to Rayleigh-Taylor instability.

(a) (b)

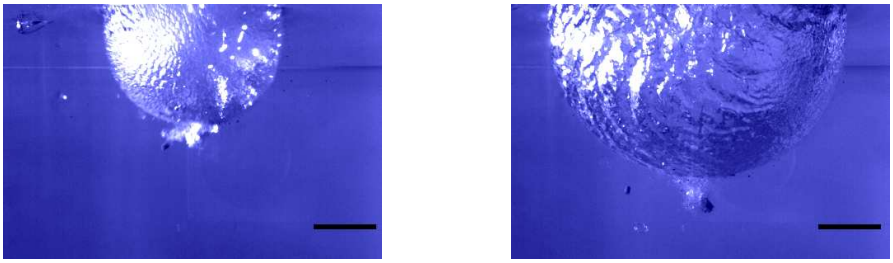


FIGURE 11. Surface of the water/air interface of the cavity during expansion (a) and at maximum expansion (b) after the explosion of a 2 g firecracker. The black segment scales 5 cm.

This explains why the ripples do not grow in amplitude during expansion, but get just geometrically dilated.

3. Confined Explosion Cavities

3.1. *Setup and results*

We conducted experiments where the explosion occurs inside a confining vertical tube opened at both ends which forces the cavity to expand in an anisotropic way. We use the same firecrackers as previously and we make them explode with their center at the free surface. The confinement tubes are made of glass or polycarbonate, with diameters of 2, 4 or 5 cm and an immersed length L varying from 10 to 35 cm. The tubes are rigid and we never visualize any deformation at their surface.

Contrasting with unconfined geometries ($R(t) \sim t^{2/5}$), the explosion of the firecracker first empties the tube at a constant velocity $\dot{Z}_0$ (image 1 to 4 in figure 12). This velocity depends on the mass and position of the firecracker, and on the mass of water to be put into motion.

We distinguish here the different experiments by the corresponding value of $\dot{Z}_0$: moderate $\dot{Z}_0$ (figure 12), or high $\dot{Z}_0$ (figure 13), for air cavities expanding in a glass tube of diameter $D = 5$ cm. In the first case, the position Z of the air/water interface increases up to a maximum Z_{max} (images 1 to 12). The cavity then accelerates backward and it closes (images 13 to 24). Later, the surface oscillates around the equilibrium height $Z = 0$ with a decreasing amplitude (Lorenceau *et al.* 2002). In the second case (high initial velocity), the cavity quickly grows and reaches the bottom end of the tube $Z = L$ (images 1 to 5 in figure 13). It then retracts without coming out of the tube. The dynamics $Z(t)$ for those two cavities are plotted in figure 14 (a). The time evolution of Z is not symmetrical with respect to the moment T_{max} of maximal expansion. We rather observe that the velocity during closure is smaller than during expansion.

3.2. *Modelisation*

We model the problem as sketched in figure 14 (b). The Reynolds number of the flow can be estimated from figure 12: the cavity expands to 75 mm in $T_{max} = 500$ ms in a 5 cm diameter tube, which yields: $R_e = \rho D Z_{max}/T_{max}\eta = 7500$. We can again use a potential flow approach. Bernoulli equation is written:

$$\left[\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\rho u^2}{2} + p - \rho g z\right]_A^B = 0 \tag{3.1}$$

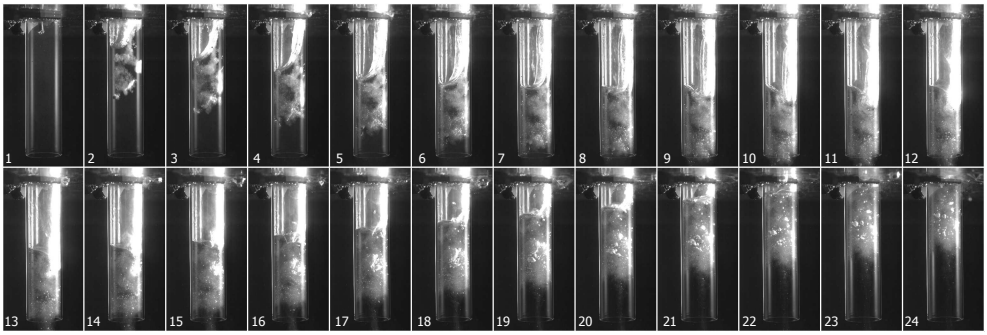


FIGURE 12. Chronophotography of a cavity confined in a tube of 5 cm diameter and 18.5 cm length. The initial velocity of expansion of the cavity is 1.3 m/s. The time step between images is 15 ms.

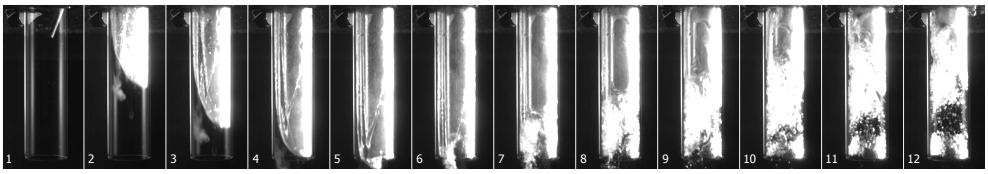


FIGURE 13. Chronophotography of a confined cavity in a tube of 5 cm diameter and 17.3 cm length. The initial velocity of expansion of the cavity is 3.3 m/s. The expansion stops at the end of the tube. The time step between images is 15 ms.

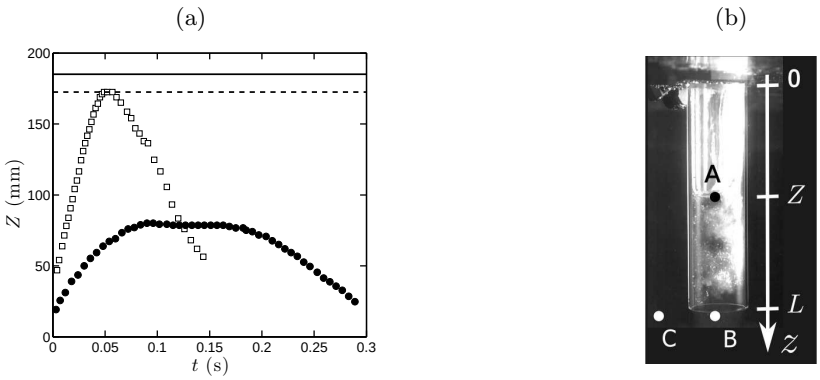


FIGURE 14. (a) Size of the cavity as a function of time for the two cases presented in figures 12 and 13. In open squares, the cavity reaches the bottom end of the tube ($L = 173$ mm, dashed line) but does not exit ($Z \leqslant L$). In dots, the cavity stops far away from the end of the tube ($L = 185$ mm, black line). (b) Sketch of the confined problem and presentation of the conventions used for the model.

During expansion, the water in the tube moves towards the bottom of the tube as a block. We can deduce that anywhere in the tube the speed of water is equal to the speed of the water/air surface:

$$V_z = \dot{Z} \tag{3.2}$$

In order to satisfy the previous equation, we take $\phi = \dot{Z}z$, so that we have $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \ddot{Z}z$. We apply equation (3.1) between point A at the surface of the cavity and point B at the exit of the tube, where these two points are in the domain where we defined ϕ. To estimate the pressure at point B, we note that the flow comes out of the tube as a vertical jet during the expansion of the cavity ($\dot{Z} > 0$). There is no transverse variation of pressure

in the jet, so the pressure at point B is thus close to $P_0 + \rho g L$. Equation 3.1 then reduces to:

$$(L - Z)\ddot{Z} = -gZ \tag{3.3}$$

The equation for closure of the cavity is discussed in appendix B, it leads to:

$$(L - Z)\ddot{Z} = -gZ + \dot{Z}^2/32 \tag{3.4}$$

We note that the equations for expansion (3.3) and closure (3.4) differ, in agreement with the observation made on figure 14 (a). The closure is treated by Lorenceau *et al.* (2002). In the following we focus on the expansion phase only.

In the low velocity limit $Z_{max} << L$, equation (3.3) is the equation of an oscillator:

$$\ddot{Z} + \frac{g}{L}Z = 0 \tag{3.5}$$

Its solution is:

$$Z = Z_{max} sin(\omega t) \tag{3.6}$$

with $\omega = \sqrt{g/L}$ the pulsation of this spring. One can deduce Z_{max} from the initial velocity of opening of the cavity, $\dot{Z}_0 = Z_{max}\ \omega$, which leads to: $Z_{max} = \dot{Z}_0\sqrt{L/g}$. If we rewrite this equation in a dimensionless fashion, we obtain:

$$Z^*_{max} = \frac{Z_{max}}{L} = \frac{\dot{Z}_0}{\sqrt{gL}} = \sqrt{Fr} \tag{3.7}$$

where Fr is the Froude number. Hence, for cavities with "small" initial velocity, the maximum depth linearly depends on the initial speed of expansion. In figure 15, we plot the dimensionless maximum depth Z_{max}/L as a function of $\dot{Z}_0/\sqrt{gL}$. The experiments correspond to cavities obtained in tubes of length L varying between 10 and 35 cm. The initial speed of opening $\dot{Z}_0$ is estimated from the best linear fit of $Z(t)$ during the first steps of expansion. The linear relation for small initial velocities is plotted with a dashed line. Only the data at small Fr follow the linear relationship, but most of the experiments are outside this regime, and the cavity length is rather found to saturate at the tube length, even at large Fr (up to 25 in these experiments). We now discuss this regime.

Using L and $\tau = \sqrt{L/g}$ to rescale length and time, equation (3.3) takes the dimensionless form:

$$(1 - Z^*)\ddot{Z}^* = -Z^* \tag{3.8}$$

That equation can be rewritten:

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{Z^*}^2}{dZ^*} = \frac{-Z^*}{1 - Z^*} \tag{3.9}$$

A primary integral of this equation is:

$$\frac{\dot{Z^*}^2}{2} = \frac{Fr}{2} + Z^* + ln(1 - Z^*) \tag{3.10}$$

where the Froude number is the constant of integration (for $Z^* = 0$, we have $\dot{Z}^* = \sqrt{Fr}$).

Equation (3.10) provides the maximum expansion Z_{max} of the cavity. Whatever the

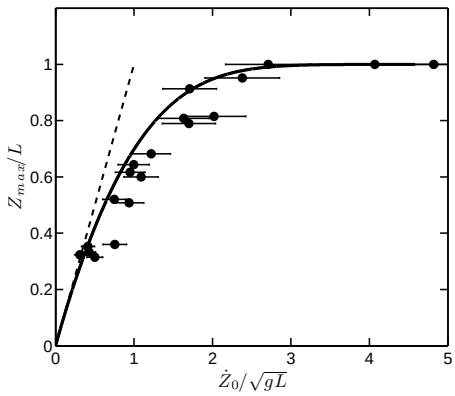


FIGURE 15. Dimensionless maximum cavity size as a function of the dimensionless initial velocity of the liquid in the tube after the explosion (dots). Equation (3.11) is drawn with a solid line, and its linear expansion (equation 3.7) is in dashed line.

value of $\dot{Z}_0$ (that is, whatever Fr), the equation $\dot{Z} = 0$ that yields Z_{max} always has a solution within the tube. Z_{max} is given by the implicit equation:

$$\frac{Fr}{2} = -Z^*_{max} - ln(1 - Z^*_{max}) \tag{3.11}$$

We draw this relation with a solid line in figure 15 where it is found to fit well the data. Looking closely, one observe that the maximum depth is often smaller than expected from our model, what we explain by the fact that most cavities are not really one-dimensional, but rather develop with a tongue shape. It is interesting to focus on the case of energetic explosions (large $\dot{Z}_0$), for which we could have imagined cavities shooting out of the tube. For $Z \to L$, we expect from equation (3.3) that the cavity acceleration negatively diverges: the cavity stops before L. Its position Z_{max} can be extracted from equation (3.11) in the limit $Fr >> 1$ ($\dot{Z}_0 >> \sqrt{gL}$): we find $Z_{max} \sim [1 - exp(-Fr)]$ which asymptotically approaches 1, without reaching it (in agreement with figure 14): the cavity remains confined in the tube (saturation regime in figure 15). A physical explanation of this result is that during the explosion the fluid in the tube is put into motion and then moves toward the bottom because of its own inertia. The fluid is slowed down by the hydrodynamic pressure at the end of the tube. During motion this pressure does not vary although the quantity of water present in the tube decreases. When the cavity reaches the end of the tube the mass of water tends to zero, and air has a negligible inertia, so that the cavity is stopped by hydrodynamic pressure.

4. Conclusion

We studied the shape and dynamics of cavities created by the explosion of firecrackers at the water surface in a large pool. Without confinement, the cavity is hemispherical as it expands, but it retracts in an anisotropic way after the maximum depth H_{max} is reached. The conversion of the energy injected by the explosion E_0 in gravitational energy $\rho g H^4_{max}$ implies $H_{max} \sim 10$ cm for energies at a Joule scale. The cavity closes in a time scaling as $\sqrt{R_{max}/g} \sim 100$ ms, and the collapse produces the eruption of a thick small jet at the center of the perturbed interface. The cavities are really similar to what is observed for drops, for which the impacting object has the same density than the bath. An intermediate case between elongated cavities and hemispherical cavities is observed

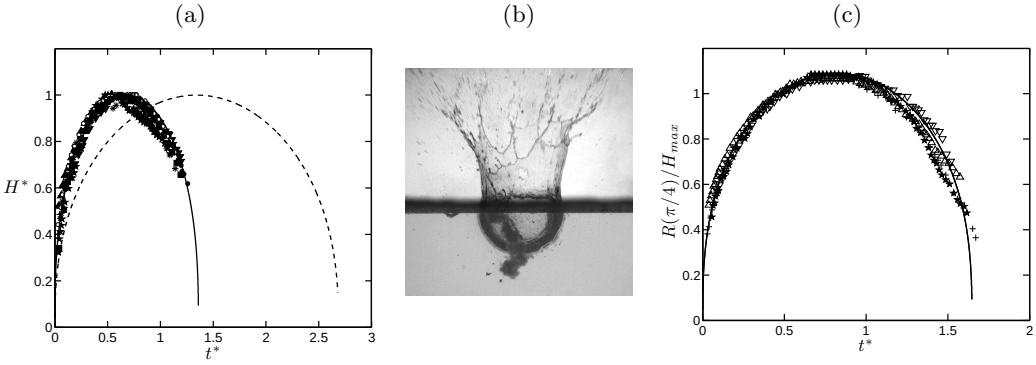


FIGURE 16. (a) Dimentionless depth of the unconfined cavity as a function of time. The numerical resolution of equation (2.8) is plotted in dashed line. The numerical solution of a modified equation (A 3) described in this appendix is plotted with a solid line. The symbols are the same as in figure 9. (b) Cavity and ejecta sheet after the explosion of a 1 g firecracker. (c) Dimensionless position of the surface at the angle $\pi/4$ as a function of the dimensionless time. The black curve is the numerical solution of equation (A 3).

for plunging impacts using spheres lighter than the bath (Aristoff *et al.* 2010).

If the explosion is confined in a tube of length L, the cavity expands one-dimensionnally, but it never comes out from the tube, whatever its initial expansion velocity $\dot{Z}_0$. At small $\dot{Z}_0$, the energy of the explosion $\frac{1}{8}\rho\pi D^2 L\dot{Z}_0{}^2$ is fully converted in gravitational energy, which yields $Z_{max} = \dot{Z}_0\sqrt{L/g}$; but this energy is partially swept by end effects at the tube exit, for large $\dot{Z}_0$, so that Z_{max} then saturates at L: the cavity is always trapped in the confinement space. This confinement of the explosion is probably the more stimulating perspective of this study at least as far as the applications are concerned.

Appendix A. Modified dynamics of unconfined cavities

We compare in figure 16 (a) the dimensionless depth H^* of the cavity function of the dimensionless time t^*, with the numerical resolution of equation (2.8) drawn in dashed line. We observe that the numerical solution does not fit with the data, the time of expansion of the numerical solution being longer that the one of the experiments.

Taking into account the sheet of water ejected from the cavity during expansion, we propose in this appendix a modified equation for the dynamics of the cavity. The solution of this equation is plotted with a solid line in figure 16 (a) and is found to be in good agreement with the experiments.

During the cavity expansion a sheet of water is ejected upwards and a corolla of water rises on the edges of the cavity [figure 16 (b)]. The radial displacement of the cavity results in the superposition of two flows, the flow of ejection and the flow in the bath that is assumed to be radial. We introduce the factor α of repartition between the two flows. If all the displacement of the surface is the ejection of water in the sheet and in the corolla, α is equal to zero; if there is no flow ejected in the corolla, we have $\alpha = 1$. The equation of conservation at the surface of the cavity is then written:

$$r^2 U_r = \alpha R^2 \dot{R} \tag{A 1}$$

The potential of the flow in the bath thus becomes $\phi(r,\theta,t) = -\alpha R(\theta,t)^2\dot{R}(\theta,t)/r$.

The equation of motion of the cavity is:

$$\alpha R\ddot{R} + \alpha(2-\alpha^2/2)\dot{R}^2 = -gRsin\theta \tag{A 2}$$

Which primary integral is:

$$R^{4-\alpha}\dot{R}^2 + \frac{2gsin\theta}{\alpha(5-\alpha)}R^{5-\alpha} = E_0/\rho \tag{A 3}$$

The numerical solution of this equation is in agreement with our data, choosing $\alpha = 0.53$, as presented in dimensionless variables in figure 16 (a). The numerical resolution for the angle $\theta = \pi/4$ also agrees with our data for $R_{\pi/4}$, for the same value of $\alpha = 0.53$, as shown in figure 16 (c).

Introducing the factor $\alpha = 0.53$ seems to be a large modification of the model, but it does not abruptly change the conclusions of the model previously proposed in this paper. At short time the radius evolves as a power law of power of exponent 0.37 close to the exponent 0.4 previously proposed. The prediction of the maximal radius is also close to the previous one, with an estimation $H_{max} = \left(\frac{E_0}{0.84\rho g}\right)^{1/4.47}$. In conclusion taking into account the fact that water is ejected in an ejecta sheet and in a corolla allows us to propose an equation accounting precisely for the dynamics of the cavity, without strongly modifying the main trends of the problem and its physical description.

Appendix B. Closure of the confined cavity

During closure of the confined cavity, the flow in the bath can be approximated by the flow induced by a sink at the bottom end of the tube, as long as the tube diameter D is small compared to its length: $D/L << 1$. We write the flow potential in the bath $\phi_s = \frac{-Q}{4\pi r}$ with r the distance from the end of the tube. The flux of the sink is equal to the flux in the tube: $Q = \dot{Z}\pi(D/2)^2$, that leads to:

$$\phi_s = \frac{\dot{Z}R^2}{4r} \tag{B 1}$$

We apply the generalized Bernoulli equation between the exit of the tube and a point at the surface far away from the tube where the velocity is negligible (the values at the exit of the tubes are estimated at a distance $r = D/2$ of the exit, because the velocity diverges for $r = 0$). We find, neglecting the terms in D:

$$p_B = p_0 + \rho gL - \rho\frac{\dot{Z}^2}{32} \tag{B 2}$$

what leads to the equation of motion of the cavity as it bounces back, from equation (3.1):

$$(L-Z)\ddot{Z} = -gZ + \frac{\dot{Z}^2}{32} \tag{B 3}$$

Equation (B 2) predicts that the velocity of closing is smaller then the velocity of opening, because the pressure that puts the liquid in motion during closure, P_B, is smaller during closure than during opening, by the term $\frac{\dot{Z}^2}{32}$.

REFERENCES

Antkowiak, A., Bremond, N., Le Dizès, S., Villermaux, E. *et al.* 2007 Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* **577**, 241.

Aristoff, J. 2009 The influence of aerodynamic pressure on the water-entry cavities formed by high-speed projectiles. *Proceedings of the 7th International Symposium on Cavitation* .

Aristoff, J.M. & Bush, J.W.M. 2009 Water entry of small hydrophobic spheres. *Journal of Fluid Mechanics* **619** (1), 45–78.

Aristoff, J.M., Truscott, T.T., Techet, A.H. & Bush, J.W.M. 2008 The water-entry cavity formed by low bond number impacts. *Physics of Fluids* **20**, 091111.

Aristoff, J.M., Truscott, T.T., Techet, A.H. & Bush, J.W.M. 2010 The water entry of decelerating spheres. *Physics of Fluids* **22**, 032102.

Bergmann, R., Van Der Meer, D., Gekle, S., Van Der Bos, A. & Lohse, D. 2010 Controlled impact of a disk on a water surface: cavity dynamics. *Journal of Fluid Mechanics* **633**, 381.

Bisighini, A., Cossali, G.E., Tropea, C. & Roisman, I.V. 2010 Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target. *Physical Review E* **82** (3), 036319.

Duclaux, V., Caillé, F., Duez, C., Ybert, C., Bocquet, L. & Clanet, C. 2007 Dynamics of transient cavities. *Journal of Fluid Mechanics* **591** (1), 1–19.

Duez, C., Ybert, C., Clanet, C. & Bocquet, L. 2007 Making a splash with water repellency. *Nature physics* **3** (3), 180–183.

Engel, O.G. 1966 Crater depth in fluid impacts. *Journal of Applied Physics* **37** (4), 1798–1808.

Engel, O.G. 1967 Initial pressure, initial flow velocity, and the time dependence of crater depth in fluid impacts. *Journal of Applied Physics* **38** (10), 3935–3940.

Enriquez, O.R., Peters, I.R., Gekle, S., Schmidt, L.E., Lohse, D. & van der Meer, D. 2012 Collapse and pinch-off of a non-axisymmetric impact-created air cavity in water. *Journal of Fluid Mechanics* **701**, 40–58.

Enriquez, O.R., Peters, I.R., Gekle, S., Schmidt, L.E., Versluis, M., Van Der Meer, D. & Lohse, D. 2010 Collapse of nonaxisymmetric cavities. *Physics of Fluids* **22**, 091104.

Gekle, S. & Gordillo, JM 2010 Generation and breakup of worthington jets after cavity collapse. part 1. jet formation. *Journal of Fluid Mechanics* **663**, 293–330.

Gekle, S., Gordillo, J.M., Van Der Meer, D. & Lohse, D. 2009 High-speed jet formation after solid object impact. *Physical review letters* **102** (3), 34502.

Glasheen, JW & McMahon, TA 1996 A hydrodynamic model of locomotion in the basilisk lizard. *Nature* **380** (6572), 340–342.

Gordillo, JM & Gekle, S. 2010 Generation and breakup of worthington jets after cavity collapse. part 2. tip breakup of stretched jets. *Journal of Fluid Mechanics* **663**, 331–346.

Le Goff, A., Quéré, D. & Clanet, C. 2013 Viscous cavities. *Phys. Fluids (submitted)* .

Leng, L.J. 2001 Splash formation by spherical drops. *Journal of Fluid Mechanics* **427** (1), 73–105.

Lorenceau, É., Quéré, D., Ollitrault, J.Y. & Clanet, C. 2002 Gravitational oscillations of a liquid column in a pipe. *Physics of Fluids* **14**, 1985.

Macklin, WC & Metaxas, GJ 1976 Splashing of drops on liquid layers. *Journal of applied physics* **47** (9), 3963–3970.

May, A. 1952 Vertical entry of missiles into water. *Journal of Applied Physics* **23** (12), 1362–1372.

May, A. 1975 Water entry and the cavity-running behavior of missiles. *Tech. Rep.*. DTIC Document.

Peters, I.R., Tagawa, Y., Oudalov, N., Sun, C., Prosperetti, A., Lohse, D. & van der Meer, D. 2012 Highly focused supersonic microjets: numerical simulations. *Arxiv preprint arXiv:1203.5029* .

Séon, Thomas & Antkowiak, Arnaud 2012 Large bubble rupture sparks fast liquid jet. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 014501.

Seymour, Roger S & Hetz, Stefan K 2011 The diving bell and the spider: the physical gill of argyroneta aquatica. *The Journal of Experimental Biology* **214** (13), 2175–2181.

Tagawa, Y., Oudalov, N., Visser, C.W., Peters, I.R., van der Meer, D., Sun, C., Prosperetti, A. & Lohse, D. 2011 Highly focused supersonic microjets. *Arxiv preprint arXiv:1112.2517* .

Taylor, G. 1950 The formation of a blast wave by a very intense explosion. ii. the atomic explosion of 1945. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **201** (1065), 175–186.

Worthington, A.M. 1908 *A study of splashes*. Longmans, Green, and Co.

Worthington, AM & Cole, RS 1900 Impact with a liquid surface studied by the aid of instantaneous photography. paper ii. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **194**, 175–199.

Deuxième partie

Interaction d'un anneau tourbillonnaire avec une surface

Chapitre 4

Tourbillons et vorticité

> « Ils regardaient des grosses méduses tourner très vite sur elles-mêmes en produisant des vortex où venaient se prendre des poissons imprudents, méthode inventée par les méduses australiennes, et qui faisaient fureur à ce moment sur la côte. »
>
> Boris VIAN, *L'Automne à Pékin*

Sommaire

4.1 Introduction **53**
4.2 Tourbillons et vorticité **54**
4.3 Zone externe du tourbillon **55**
4.4 Coeur du tourbillon et formation de la vorticité **62**
4.5 Anneaux tourbillonnaires **67**

Après les cavités nous nous demandons ici comment une surface est perturbée par la présence d'un tourbillon et comment ce dernier, à l'inverse sera affecté par la présence d'une interface.

4.1 Introduction

4.1.1 Contexte

Les tourbillons existent aussi bien à petite échelle (par exemple derrière un cylindre centimétrique, figure 4.1 (a)) qu'à très grande échelle (par exemple dans les structures anticycloniques de l'atmosphère de Jupiter, figure 4.1 (b)), et à grand comme à petit Reynolds (figure 4.1 (c)). Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les tourbillons à haut Reynolds et rappelons dans un premier temps quelques-unes de leurs propriétés. Dans une deuxième partie (section 4.5) nous étudions la dynamique d'anneaux tourbillonnaires en vue de leur impact sur des surfaces (chapitre 5).

4.1.2 Formation des tourbillons

Observons les étapes de formation d'un tourbillon comme celles qui se produisent derrière un cylindre sur la figure 4.2. Les étapes de formation des tourbillons sont présentées

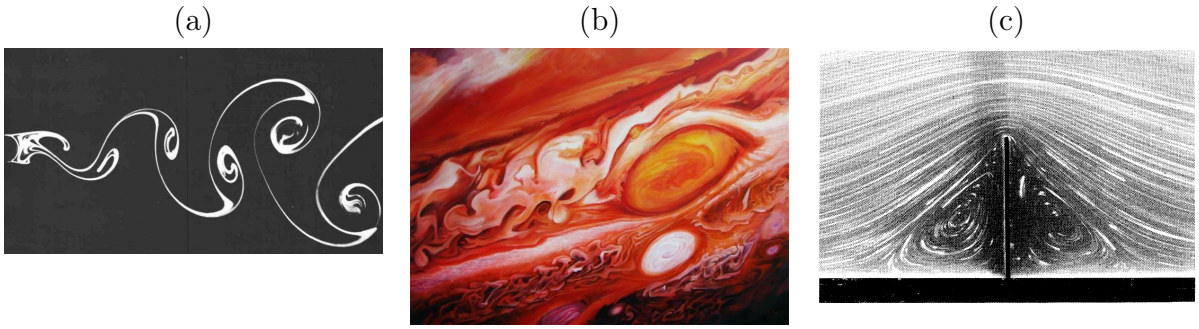


FIGURE 4.1 – (a) Tourbillons derrière un cylindre formant une allée de Von Karman, nombre de Reynolds de 140 estimé à partir du diamètre du cylindre de 1 cm, extrait de [48]. (b) La grande tache rouge de Jupiter, tourbillon anticyclonique d'environ 10 000 km de diamètre, Reynolds d'environ 2 10^{12}. (c) Tourbillons de Moffat autour d'une barrière de 1 cm de haut, Reynolds estimé à partir de la hauteur de la barrière de 1.4 10^{-2}, extrait de [49].

sur la séquence d'images figure 4.3. L'écoulement se produit de gauche à droite, un tourbillon se forme par enroulement d'une couche de liquide issue de la zone proche de la paroi, le détachement se produisant à une position précise sur la face arrière du cylindre. Le tourbillon obtenu est invariant le long de son axe de symétrie cylindrique, parallèle à l'axe $\underline{e}_z$ du cylindre.

FIGURE 4.2 – Zoom sur la zone de formation des tourbillons de la figure 4.1.

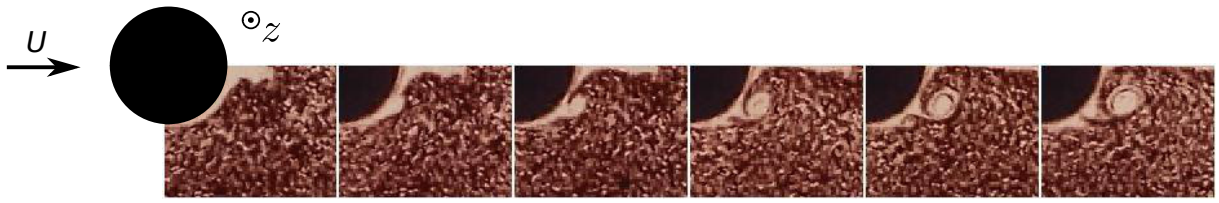


FIGURE 4.3 – Formation d'un tourbillon dans le sillage d'un cylindre.

4.2 Tourbillons et vorticité

4.2.1 Vitesse dans le tourbillon

Un tourbillon, comme son nom l'indique, est une région dans un écoulement qui tourne sur elle-même autour de son axe de rotation. Pour un tourbillon invariant le long de son axe

de rotation $\underline{e}_z$ comme celui présenté précédemment, dans le repère à symétrie cylindrique centré sur le tourbillon, la vitesse radiale U_r dans le tourbillon est nulle, et la vitesse orthoradiale U_θ élevée. Dans la limite incompressible, la divergence de la vitesse est nulle, ce qui implique :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{4.1}$$

On en déduit que la vitesse, dans le tourbillon et à proximité, ne dépend que de r la distance à l'axe du tourbillon, et du temps t : $\underline{U} = U_\theta(r,t)\underline{e_\theta}$.

4.2.2 Vorticité

Peut-on avoir un tourbillon sans vorticité ? La vorticité s'écrit, avec la forme de vitesse définie plus haut :

$$\underline{\omega} = \underline{\text{rot}}\ \underline{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial r U_\theta}{\partial r}\underline{e}_z \tag{4.2}$$

Dans un écoulement à vorticité nulle, la vitesse orthoradiale U_θ sera telle que $\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} = 0$, ce qui se réécrit $rU_\theta = K(t)$ avec $K(t)$ qui dépend du temps, donc la vitesse sera forcement de la forme $U_\theta(t) = \frac{K(t)}{r}$. Le champ de vitesse orthoradiale dans un écoulement irrotationnel décroit donc en $1/r$. Cette décroissance implique une divergence de la vitesse en zéro.

Observons sur la figure 4.4 (a) le champ de vitesse orthoradiale $U_\theta(r)$ autour du coeur d'un tourbillon rectiligne de bout de plaque [voir figure 4.4 (a) et (b)], mesuré dans un plan perpendiculaire à l'axe du tourbillon par PIV. On trace en trait noir un ajustement décroissant en $1/r$ et l'on observe qu'il décrit bien le champ de vitesse loin du centre du tourbillon. Au centre du tourbillon, la vitesse est nulle, puis elle augmente en passant par un maximum avant de se raccorder à la décroissance en $1/r$ autour de $r = 10$ mm.

Il existe donc une zone d'étendue a appelée coeur du tourbillon au centre de celui-ci, où la vitesse ne varie pas en $1/r$ et donc où la vorticité n'est pas nulle. En revanche, la région au-delà du coeur est bien décrite par un écoulement irrotationnnel.

On discutera dans la prochaine section des caractéristiques du tourbillon lorsque l'on se situe dans la zone externe, puis dans la section 4.4 on discutera de la zone interne et de son évolution.

4.3 Zone externe du tourbillon

4.3.1 Circulation

Le tourbillon discuté dans la section précédente, infini d'axe $\underline{e}_z$, contient une vorticité a priori inconnue $\omega(r)$ en son coeur [figure 4.4 (b)]. On cherche à estimer la vitesse orthogonale U_θ induite par le tourbillon en un point situé à l'extérieur du coeur. Par symétrie U_θ ne dépend que de r la distance au centre du tourbillon. On note Γ la circulation du vecteur vitesse sur un cercle de rayon r de contour $C(r)$ centrée sur le tourbillon. Γ s'écrit [voir figure 4.4 (c)] :

$$\int_C U_\theta(r)dl = 2\pi r U_\theta(r) = \Gamma(r) \tag{4.3}$$

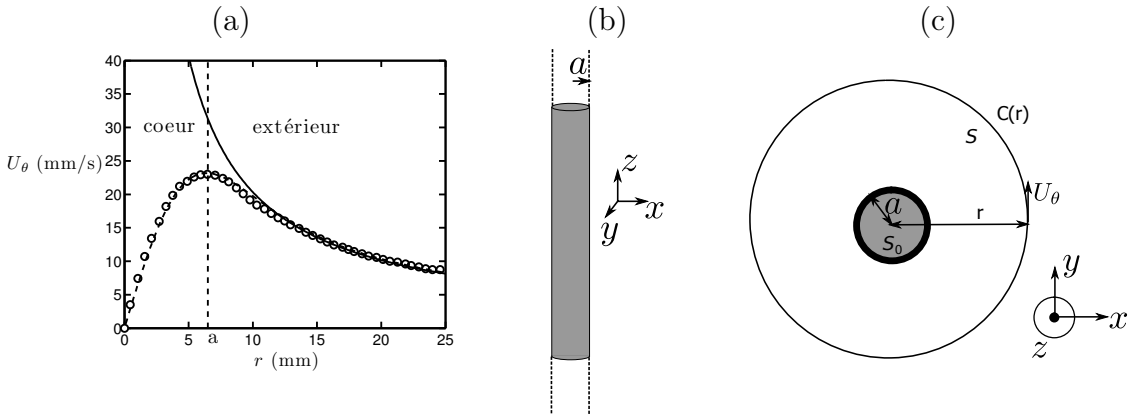


FIGURE 4.4 – (a) Champ de vitesse orthoradial autour du coeur d'un tourbillon de bout de palle, mesuré dans un plan perpendiculaire à l'axe du tourbillon. La ligne pleine représente le meilleur ajustement en $1/r$. Dans le coeur du tourbillon de rayon a, la vitesse ne suit pas cette loi. La ligne pointillée représente un ajustement par un modèle de Lamb-Oseen, voir section 4.4.2.(b) Représentation du tourbillon infini. (c) Contour permettant d'estimer la circulation du tourbillon.

La circulation est égale au flux de vorticité à travers la surface fermée S définie par le cercle d'après le théorème de Kelvin, qui se réduit au flux de vorticité à travers la surface du coeur, la vorticité étant nulle ailleurs :

$$\Gamma(r) = \iint_S \omega ds = \iint_{S_0} \omega ds = \Gamma \tag{4.4}$$

donc la cicrulation est constante dans la zone externe. On en déduit que la vitesse induite par le tourbillon dans la zone externe s'écrit :

$$U_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{4.5}$$

Cette vitesse est bien décroissante en $1/r$, comme attendu dans un écoulement irrotationnel. Sa norme ne dépend pas de la répartition de vorticité dans le tourbillon mais seulement de sa circulation Γ, dès que l'on se trouve à l'extérieur du coeur. Par conséquent il n'est pas nécessaire de décrire complètement le tube de vorticité pour calculer la vitesse qu'il induit loin de son centre, et on utilise la description de filament de vorticité (voir section 4.3.4). Lorsque le tourbillon n'est pas parfaitement rectiligne, on doit pour estimer la vitesse induite loin du tourbillon connaitre la vitesse induite par chaque portion du tourbillon. Pour cela on peut utiliser la loi de Biot et Savart présentée dans la section 4.3.3, mais nous aurons besoin de lois de conservation présentées dans la section suivante.

4.3.2 Lois de conservation

Un tourbillon est représenté sur la figure 4.5. On suppose que le tourbillon est contenu dans un tube de vorticité, telle que le vecteur vorticité soit tangent au tube. La divergence de la vorticité étant nulle, le tube ne peut avoir de bout dans l'écoulement. Expérimentalement on observe que les extrémités des tourbillons se trouvent aux limites de l'écoulement, sur les parois rigides ou liquides, ou que les tourbillons se re-connectent pour former des anneaux.

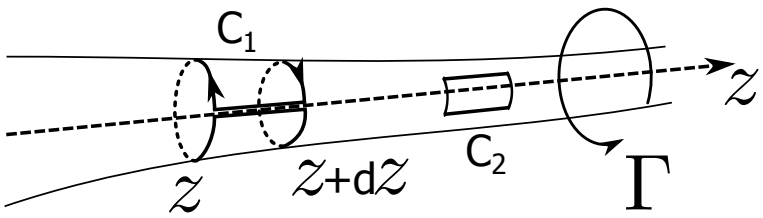


FIGURE 4.5 – Contours à la surface d'un tube de vorticité.

Les contours tracés sur la figure permettent d'obtenir deux lois de conservation qui seront utilisées plus loin (ce schéma est librement inspiré du livre [50]). (1) Le flux de vorticité à travers le contour C_2 est nul car la vorticité est tangente à la surface, donc il n'y a pas de transport de vorticité à travers les parois du tube. On en déduit que le volume d'un tube de vorticité se conserve. (2) Le contour C_1 est constitué de deux cercle quasi-fermés en z et $z + dz$ entourant le tube de vorticité, reliés par deux segments le long de sa paroi. Le flux de vorticité à travers la surface définie par le contour est nul donc la circulation le long du contour est nulle elle aussi. La circulation calculée sur le premier cercle suivant le sens indiqué sur le schéma est égale à $\Gamma(z)$, la circulation calculée sur le deuxième cercle est égale à $-\Gamma(z + dz)$, la circulation le long des segments est nulle donc finalement $\Gamma(z) = \Gamma(z + dz) = \Gamma$. On en déduit que la circulation est constante le long du tourbillon.

4.3.3 Analogie électromagnétique

L'origine de la loi de Biot et Savart en hydrodynamique provient d'une analogie entre l'électromagnétisme et l'hydrodynamique. Le champ de vitesse, tout comme le champ magnétique, sont à divergence nulle :

$$\text{div } \underline{B} = 0 \text{ et div } \underline{U} = 0 \tag{4.6}$$

La circulation du vecteur vitesse est reliée au flux de vorticité par le théorème de Stokes :

$$\int_C \underline{U}.\underline{dl} = \iint_S \underline{\text{rot } U}.\underline{dS} = \iint_S \underline{\omega}.\underline{dS} = \Gamma \ . \tag{4.7}$$

De façon similaire, la circulation du champ magnétique est reliée à l'intensité par la relation :

$$\int_C \underline{B}.\underline{dl} = \iint_S \underline{\text{rot } B}.\underline{dS} = \iint_S \mu_0 \underline{j}.\underline{dS} = \mu_0 I \ . \tag{4.8}$$

Par analogie entre électromagnétisme et hydrodynamique, la loi de Biot et Savart, qui donne le champ magnétique induit par une répartition quelconque d'intensité [50, 51] :

$$\underline{B} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{j}(\underline{r}) \wedge \underline{r}}{|\underline{r}|^3} dV \tag{4.9}$$

s'écrit ici, pour déterminer la vitesse induite par une répartition quelconque de vorticité :

$$\underline{U} = \int_V \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\omega}(\underline{r}) \wedge \underline{r}}{|\underline{r}|^3} dV \tag{4.10}$$

4.3.4 Filament de vorticité ($r >> a$)

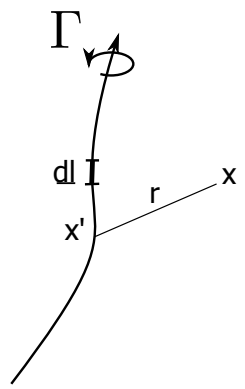


FIGURE 4.6 – Filament de vorticité.

On suppose le rayon de coeur du tourbillon est petit devant la taille du problème. On représente alors le tourbillon par un filament de vorticité, de circulation $\Gamma \approx \pi\omega a$, comme représenté sur la figure 4.6.

Afin de calculer la vitesse induite par le filament de vorticité on écrit la loi de Biot et Savart :

$$\underline{U}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\wedge\underline{\omega}(\underline{x}')d\Omega(\underline{x}') \tag{4.11}$$

Lorsque le point $\underline{x}$ se trouve hors du coeur du tourbillon, celui-ci est considéré ponctuel et la vitesse $\underline{dU}$ induite par une portion $\underline{dl}$ du filament s'écrit :

$$\underline{dU}(\underline{x}) = \frac{(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\wedge\underline{\omega}(\underline{x}')d\Omega(\underline{x}') = \frac{(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}\wedge\Gamma\underline{dl}(\underline{x}') \tag{4.12}$$

donc finalement la vitesse induite par le filament s'écrit :

$$\underline{U}(\underline{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{L}\frac{(\underline{x}-\underline{x}')\wedge\underline{dl}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \tag{4.13}$$

Pour un filament rectiligne infini, la vitesse s'écrit, comme précédemment :

$$\underline{U}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\underline{e_\theta} \tag{4.14}$$

4.3.5 Interaction entre tourbillons

On décrit maintenant les interactions entre tourbillons et différentes instabilités qu'ils présentent.

Tourbillon unique

Un tourbillon rectiligne unique placé loin de toute paroi induit une vitesse orthoradiale dans l'écoulement. Son coeur est en rotation et la vitesse en son centre est nulle. Par conséquent la position du tourbillon est fixe.

Paires de tourbillons

Les interactions les plus simples que l'on peut décrire sont entre une paire de tourbillons contrarotatifs ou corotatifs à une distance b l'un de l'autre [figures 4.7 (a) et (b)]. Dans le premier cas, les tourbillons ont des circulations opposées Γ et $-\Gamma$. Le tourbillon de droite induit une vitesse nulle sur lui-même, la vitesse induite par le tourbillon de gauche sur celui de droite est égale à $U = \frac{\gamma}{2\pi b}\underline{e}_z$. Le tourbillon de droite induit la même vitesse sur celui de gauche si bien que la paire se déplace suivant la direction $\underline{e}_z$ à la vitesse U, la distance de séparation reste constante.

Dans le deuxième cas (b), les vitesses induites par chaque tourbillon sur l'autre sont de même direction et de sens opposé. Les deux tourbillons tournent donc le long d'un cercle passant par leurs centres, en pointillé sur la figure. Leur période de rotation τ est proportionnelle à leur distance au carré, $\tau = \frac{2\pi^2 b^2}{\Gamma}$. Si les tourbillons ont des circulations différentes Γ_1 et Γ_2, ils tournent sur des cercles concentriques, à la période $\tau = \frac{4\pi^2 b^2}{\Gamma_1+\Gamma_2}$. Pour des interactions à plus de deux tourbillons, quelque soit le nombre de tourbillons on déduit la vitesse de chacun de la même façon : la vitesse de l'un est égale à la somme des vitesses induites par les autres tourbillons à sa position.

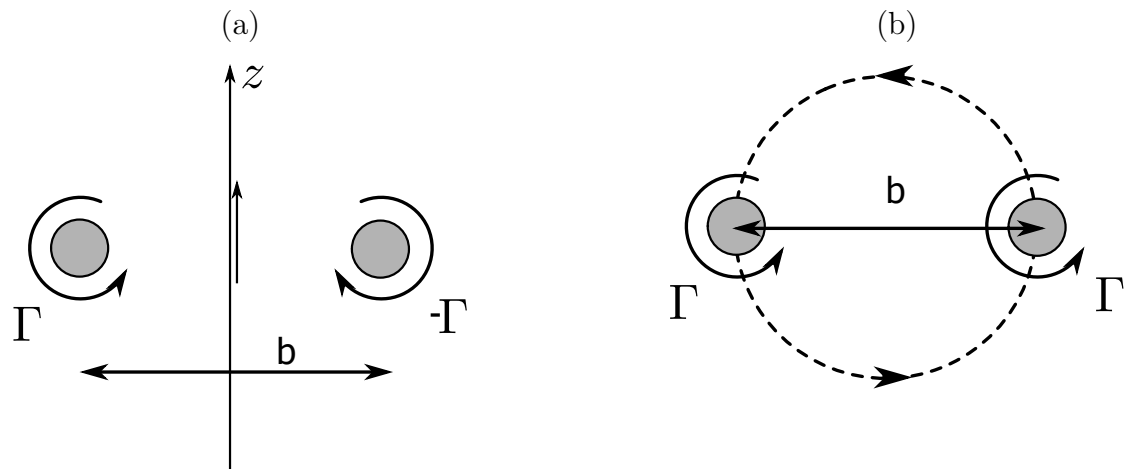


FIGURE 4.7 – (a) Paire de tourbillons contrarotatifs à une distance b l'un de l'autre. (b) Paire de tourbillons corotatifs à une distance b l'un de l'autre. La flèche indique le sens du mouvement.

4.3.6 Stabilité des tourbillons

La paire de tourbillons contrarotatifs représentée sur la figure 4.8 (II), a été réalisée par Leweke et Wiliamson [52], par formation de tourbillons de bout de pale [figure 4.8 (I)]. Les tourbillons, initialement rectilignes d'axe $\underline{e}_z$, sont ensuite naturellement déformés par deux longueurs d'onde distinctes, consécutives à l'apparition de l'instabilité de Crow ("Long Wavelength Instability") et de l'instabilité elliptique ("Short Wavelenght Instability").

Dans cette section on présente rapidement différentes instabilités observées sur les tourbillons ainsi que leur origine, s'appuyant sur l'exemple de tourbillons rectilignes contrarotatifs, ce cas permettant de bien distinguer les différents effets en jeu.

Le premier effet est l'auto-induction d'un tourbillon sur lui même et est illustré sur la figure 4.9. Soit un tourbillon rectiligne de rayon de coeur a qui présente une déformation

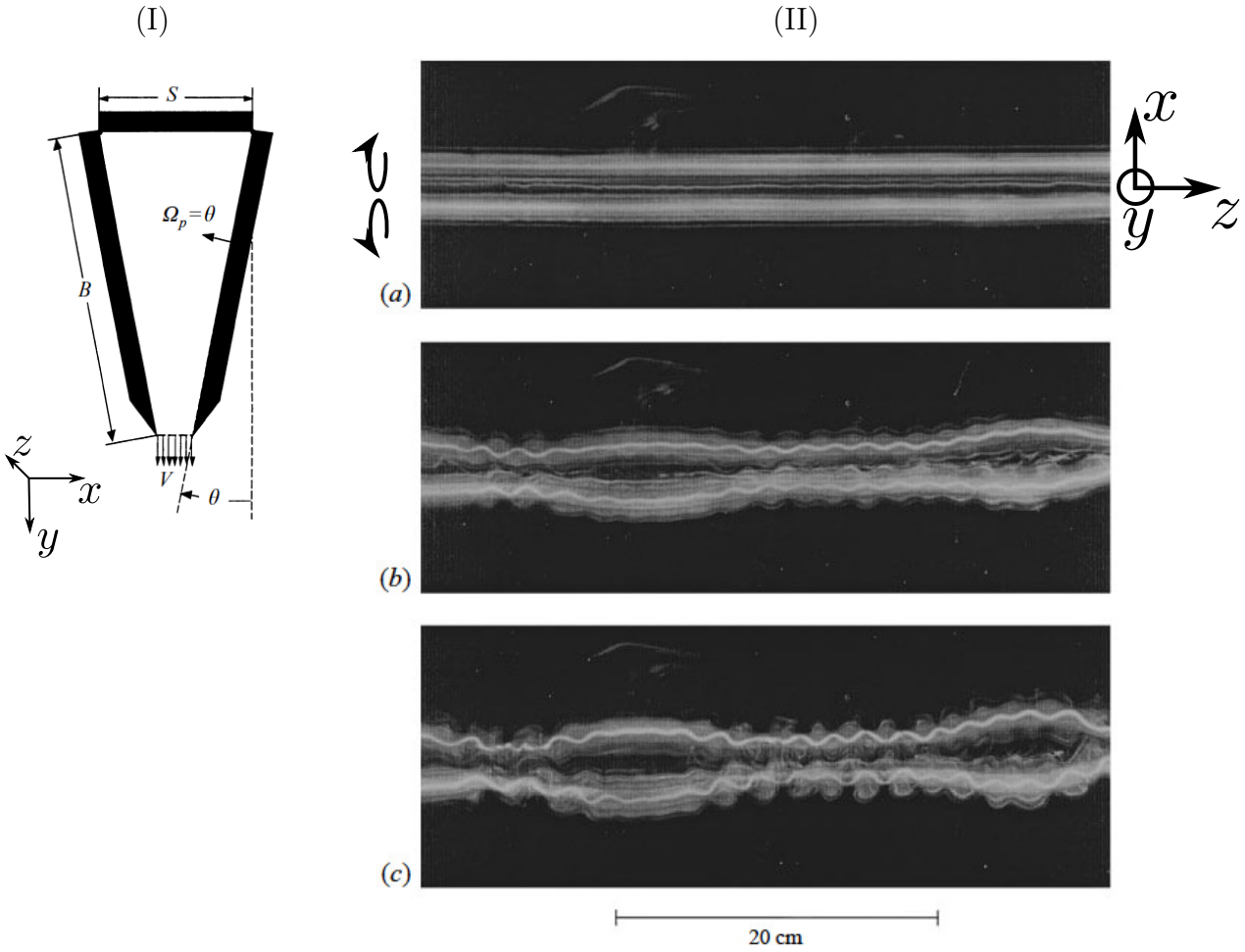


FIGURE 4.8 – (I) Paire de flaps permettant de former une paire de tourbillons contrarotatifs d'axe $\underline{e}_z$. (II) Apparition de l'instabilité de Crow (grande longueur d'onde) et de l'instabilité elliptique (petite longueur d'onde) sur une paire de tourbillons contrarotatifs au cours du temps. Figures extraites de [52].

de longueur d'onde L dans un plan contenant l'axe du tourbillon. En estimant la vitesse auto-induite par le tourbillon sur lui-même avec à partir de la loi de Biot et Savart, on peut estimer la vitesse U_y auto-induite, normale au plan, par :

$$U_y = \frac{\Gamma}{4\pi R_0} \ln \frac{L}{a} \tag{4.15}$$

Le tourbillon tourne donc autour de son axe principal sous l'effet de l'auto-induction. Cet effet n'est pas une instabilité puisque il n'entraine pas la croissance de la déformation, mais seulement sa rotation.

Le deuxième effet provient du gradient de vitesse imposé par un tourbillon sur l'autre. Etudions une paire de tourbillons rectilignes contrarotatifs de circulation Γ à une distance b l'un de l'autre (figure 4.10). Chaque tourbillon induit sur l'autre une vitesse $\underline{U}_0 = \frac{\Gamma}{2\pi b}\underline{e}_y$ perpendiculaire au plan contenant les tourbillons et la paire de tourbillons se déplace sans déformation. La vitesse induite U_1 par un tourbillon sur l'autre en retranchant U_0 s'écrit comme la somme d'une compression et d'un étirement représentés schématiquement sur le figure 4.10. Si le tourbillon présente une instabilité dans un plan contenant l'axe du tourbillon, d'angle θ avec l'horizontale, on observe que suivant cet angle θ, la déformation

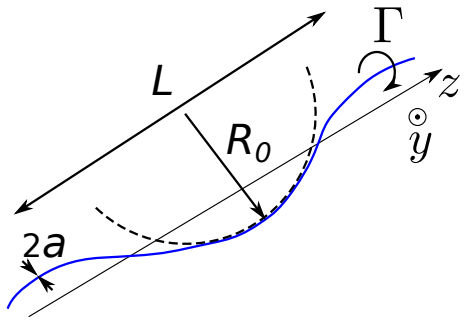


FIGURE 4.9 – Rotation auto-induite d'un tourbillon déformé.

subira soit un étirement ($\theta = -45°$), soit une compression, soit une rotation (ou une combinaison des deux), la première possibilité étant une cause d'instabilité. Le troisième

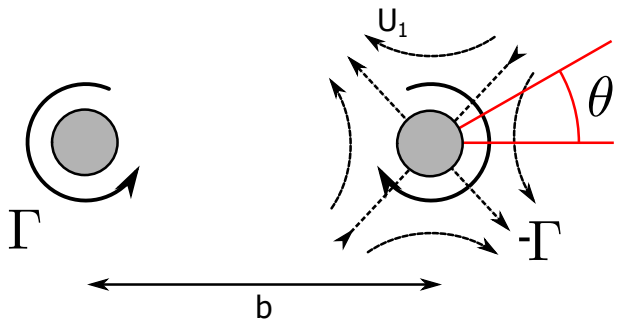


FIGURE 4.10 – Champs de vitesse induit par le tourbillon de gauche sur le tourbillon de droite, au premier ordre.

effet est la vitesse induite par un tourbillon déformé sur l'autre tourbillon, qui induit lui aussi compression, étirement et rotation suivant l'angle de la déformation.

Instabilité de Crow

L'instabilité de Crow intervient par exemple entre une paire de tourbillons contrarotatifsotatifs, on peut l'observer dans les sillages d'avion. Elle apparait lorsque la superposition des trois effets décrits précédemment induit une rotation nulle du tourbillon déformé et un étirement positif de la déformation. Elle conduit à une déformation du tourbillon en bloc (la structure interne n'est pas déformée), qui se déforme sinusoïdalement dans un plan contenant l'axe du tourbillon, à 45 degrés du plan de symétrie passant par le centre des tourbillons ($\theta = 45°$ figure 4.10). Sur la figure 4.8 elle correspond à l'instabilité de grande longueur d'onde observée.

Instabilité elliptique

L'instabilité elliptique trouve sa source dans l'étirement induit par un tourbillon voisin et l'étirement auto-induit. Elle provoque une déformation de la structure du tourbillon, de longueur d'onde beaucoup plus courte que l'instabilité de Crow dans la cas d'une paire de tourbillons rectilignes contrarotatifs, comme illustré sur la figure 4.8. L'intérieur et l'extérieur du tourbillon sont déformés en opposition de phase (l'opposition de phase est bien visible sur la figure 4.8, entre le filament blanc à l'intérieur du tourbillon et l'enveloppe

extérieure, ou est représentée sur la figure 4.11), avec un tube qui reste non déformé entre les deux régions.

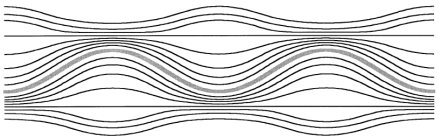


FIGURE 4.11 – Déformation du coeur du tourbillon sous l'effet de l'instabilité elliptique.

4.4 Coeur du tourbillon et formation de la vorticité

4.4.1 Equation de la vorticité et théorème de Kelvin

On a décrit comment on pouvait représenter un tourbillon lorsque l'on s'intéresse à l'écoulement à l'extérieur de son coeur. On s'intéresse maintenant à sa structure interne section 4.4.2, puis à sa formation section 4.4.3. Pour cela on a besoin de l'équation de la vorticité. Celle-ci s'écrit, en considérant le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans un fluide :

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underline{\underline{\mathrm{grad}U}}.\underline{\omega} - \underline{\omega}\nabla\underline{U} + \mathrm{rot}\underline{F} + \frac{1}{\rho^2}\underline{\mathrm{grad}\rho} \wedge \underline{\mathrm{grad}p} + \underline{\mathrm{rot}}(\frac{1}{\rho}\nabla\underline{\underline{\tau}}) \tag{4.16}$$

Pour un fluide homogène, barotrope, incompressible, newtonien, cette équation se réduit à :

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underline{\underline{\mathrm{grad}U}}.\underline{\omega} + \eta\Delta\underline{\omega} \tag{4.17}$$

le premier terme indique comment la vorticité présente dans le fluide est étirée et le deuxième comment elle est diffusée.

Cette équation nous indique que si l'écoulement est initialement irrotationnel, il le restera. Il en découle le théorème de Kelvin qui établit que la circulation sur un contour fermé qui se déplace avec les particules de fluide se conserve.

4.4.2 Structure des tourbillons

Vortex de Lamb-Oseen

La répartition de vorticité observée pour un tourbillon de bout de pale présentée figure 4.4 (a) est bien décrite par la représentation de Lamb-Oseen, pour laquelle la vorticité est répartie de manière gaussienne autour du centre. Cette répartition est solution de l'équation bilan de vorticité (même si les tourbillons ayant cette structure ne se sont pas forcement formés par diffusion d'un filament, mais plutôt par détachement comme on le discutera section 4.4.3) :

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}.\underline{\omega} + \nu\nabla^2\underline{\omega} \tag{4.18}$$

Supposant qu'un filament de vorticité est formé au temps zéro, avec une circulation Γ_0. Le terme $\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}.\underline{\omega}$ est nul, si bien que l'équation se réduit à :

$$\frac{d\underline{\omega}}{dt} = \nu\nabla^2\underline{\omega} \tag{4.19}$$

dont la solution exacte s'écrit :

$$\underline{\omega} = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \tag{4.20}$$

Dans la description de Lamb-Oseen, le rayon de coeur du tourbillon est égal à $a = \sqrt{4\nu t}$. La vitesse induite par ce tourbillon s'écrit :

$$\underline{U}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right)\underline{e_\theta} \tag{4.21}$$

Sur la figure 4.4 (b) page 56, on représente la vitesse orthoradiale mesurée à partir du centre d'un tourbillon de bout de pale, auquel on superpose le meilleur ajustement par l'équation (4.21), en trait pointillé. On observe une bonne adéquation théorie/expérience, les paramètres d'ajustement étant le rayon de coeur du tourbillon ($a = 5.7$ mm) et sa circulation ($\Gamma = 13$ cm^2/s).

Lorsque le temps de diffusion est grand devant le temps de l'expérience on pourra considérer les tourbillons comme ponctuels. Par exemple sur la figure 4.12 on représente un ensemble de tourbillons de rayons de coeurs a séparés de la distance L. Le temps de diffusion est alors de l'ordre de $\tau \sim \frac{L^2}{\eta}$.

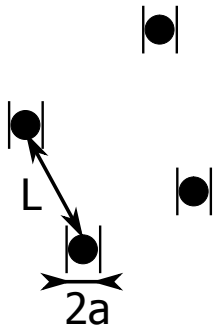


FIGURE 4.12 – Ensemble de tourbillons de rayon de coeur a et de distance moyenne L.

Vortex de Rankine ($r < a$)

Une description approchée des tourbillons réels est celle du vortex de Rankine, elle permet de simplifier certains calculs analytiques, comme par exemple la vitesse auto-induite d'un anneau tourbillonnaire : la vorticité est uniforme et concentrée dans un coeur de rayon a, et nulle ailleurs (ce qui est équivalent à ce que le tourbillon tourne en rotation solide autour de son axe). La vitesse induite par un vortex de Rankine rectiligne infini s'écrit dans le repère à symétrie cylindrique centré sur l'axe du tourbillon :

$$\underline{U}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\underline{e_\theta} \text{ si } r > a \text{ et } \underline{U}(\underline{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi a^2} r\underline{e_\theta} \text{ si } r < a \tag{4.22}$$

Il existe d'autres modèles de tourbillons, qui peuvent mieux décrire certaines structures, par exemple pour les tourbillons qui résultent de fusions, qui ne seront pas considérés ici.

4.4.3 Origine des tourbillons

Origine de la vorticité

Dans un écoulement à haut Reynolds initialement irrotationnel, l'équation de la vorticité (4.18) montre qu'il n'y aura pas de création de vorticité (théorème de Kelvin). Un écoulement de ce type peut donc être décrit comme dérivant d'un potentiel de vitesse ϕ ($\underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$). Le potentiel de vitesse est choisi afin que la vitesse normale de l'écoulement aux parois soit nulle. Expérimentalement, un zoom sur les parois montre que localement la paroi impose une contrainte tangentielle nulle, ce qui n'est pas décrit par la représentation potentielle. Une manière de décrire complètement l'écoulement est de le considérer comme dérivant d'un potentiel partout, sauf près des parois où il est décrit par les équations de couche limite (figure 4.13).

Soit une couche limite telle que la vitesse extérieure U_{inf} se raccorde à la vitesse nulle à la paroi sur une épaisseur δ, l'écoulement étant parallèle à la paroi. La vorticité dans la couche limite peut alors être estimée par $\omega_z = \partial U_x/\partial y \sim U_x/\delta$, et la circulation calculée sur un contour dans la couche limite, est également non nulle. Le fait qu'il n'y ait pas de vitesse transverse dans la couche limite implique que la pression dans la couche limite est égale à la pression extérieure.

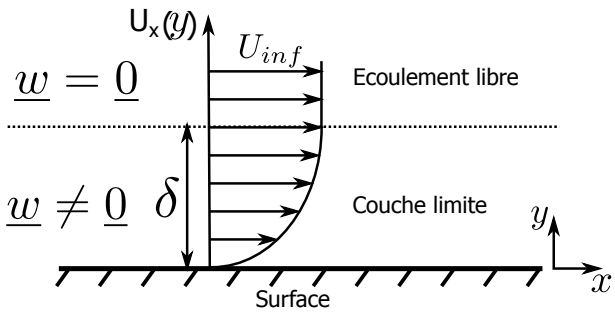


FIGURE 4.13 – Représentation de la couche limite près d'une parois.

L'écoulement dans la couche limite est soumis à deux forces volumiques imposées par l'écoulement extérieur : un gradient de pression selon x, imposé par l'écoulement extérieur, et une force visqueuse, exprimant la diffusion de quantité de mouvement de l'écoulement extérieur vers la couche limite.

Dans les hypothèses de lubrification ($U_x >> U_y$), donc le gradient de pression dans la direction tangentielle est nulle, et les variations de vitesse dans la direction normale sont beaucoup plus grandes que dans le direction tangentielle ($\partial U_x/\partial y >> \partial U_x/\partial x$). L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = 0 \tag{4.23}$$

dont on déduit une solution, avec les conditions aux limites $U(y = 0) = 0$ et $U(\delta) = U_{inf}$:

$$U_x(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - \delta y\right) + \frac{U_{inf}}{\delta} y \tag{4.24}$$

Cela nous permet de calculer la vitesse moyenne sur l'épaisseur de la couche limite $\overline{U}$:

$$\overline{U} = \frac{U_{inf}}{2} - \frac{\delta^2}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.25}$$

Dans la géométrie ouverte représentée sur la figure 4.13, il n'y a pas de raison d'observer un gradient de pression extérieur, et l'écoulement moyen dans la couche limite suit la direction de la vitesse extérieure.

Décollement

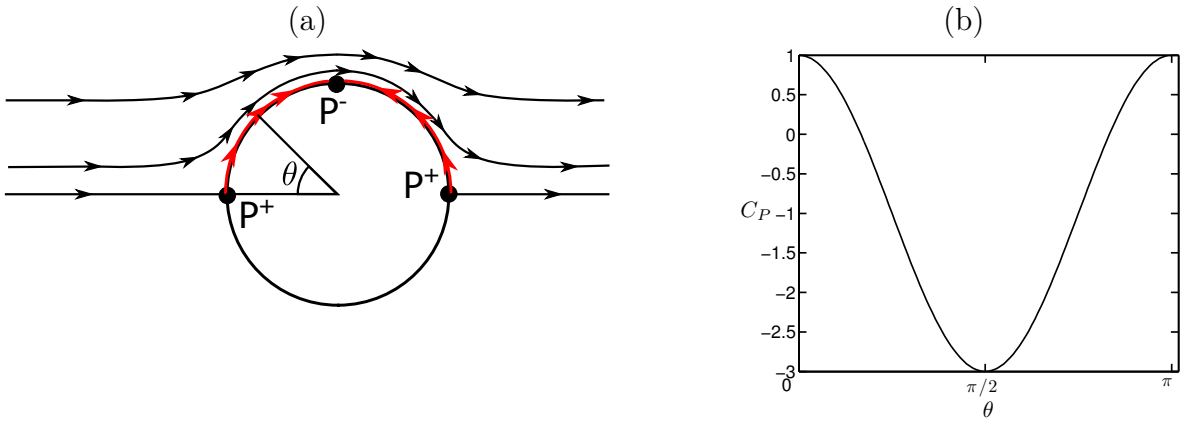


FIGURE 4.14 – (a) Ecoulement autour d'un cylindre. Loin de la surface, l'écoulement est décrit par un écoulement potentiel (en noir) ; près de la surface, l'écoulement est décrit par les équations de couche limite (en rouge). (b) Coefficient de pression à la surface C_P en fonction de θ.

Considérons maintenant l'écoulement autour d'un objet non profilé, c'est à dire tel que les variations de pression le long de la paroi soient grandes devant U^2/ρ, par exemple un cylindre comme présenté sur la figure 4.14 (a). Une description par un écoulement potentiel permet de décrire l'écoulement moyen, mais pas la formation de tourbillons observée à l'aval du cylindre (figure 4.1). A l'infini, l'écoulement est parallèle, de vitesse U_{inf}. Autour de la sphère, le mouvement est accéléré dans certaines zones, et ralenti dans d'autres. La vitesse aux pôles Est et Ouest du cylindre est nulle, ces pôles étant des points d'arrêt. La vitesse aux pôles Sud et Nord du cylindre est plus grande que la vitesse à l'infini, les lignes de courant se resserrant à ce niveau. En appliquant le théorème de Bernoulli entre ces points et l'infini, on déduit la pression dynamique : $P_{\text{inf}} + \rho U_{\text{inf}}^2/2 = P + \rho U^2/2$ ce qui conduit à :

$$P = P_{inf} - \rho U^2/2 + \rho U_{inf}^2/2 \tag{4.26}$$

Le terme de coefficient de pression est défini par $C_P = \frac{P - P_{inf}}{1/2 \rho U_{inf}^2}$. Le coefficient de pression le long de la parois calculé pour un écoulement potentiel est tracée sur la figure 4.14 (b). Lorsque C_P est supérieur à zéro on se trouve en surpression par rapport à la pression à l'infini, lorsque C_P est inférieur à zéro on se trouve en dépression.

La pression aux pôles Est et Ouest est supérieure à la pression à l'infini, alors que la pression aux pôles Nord et Sud est inférieure. Considérons maintenant l'écoulement dans la couche limite. Dans la partie gauche de l'écoulement, la vitesse imposée par l'écoulement extérieur et par le gradient de pression sont de même sens. Dans la partie droite de l'écoulement, gradient de pression et vitesse extérieure sont antagonistes. Si le gradient de pression est suffisamment élevé, la vitesse moyenne dans la couche limite est de même sens que le gradient de pression, d'après l'équation (4.25).

L'équation (4.26) montre que la pression, ainsi que son gradient, sont des fonctions du carré de la vitesse. Qualitativement, il existe donc une vitesse au-delà de laquelle l'effet

du gradient de pression deviendra plus important que l'entrainement par l'écoulement extérieur. Lorsque cette vitesse est atteinte, il existe une zone de décollement à l'endroit où l'écoulement moyen dans la couche limite converge, comme représenté sur la figure 4.15. Dans la partie gauche, l'écoulement extérieur, (en noir), et l'écoulement moyen dans la couche limite, (en vert), sont de même sens, alors que dans la partie droite ils sont antagonistes. Le détachement entraine la formation de tourbillons, de sens défini par la direction de l'écoulement dans la couche limite et dans l'écoulement extérieur.

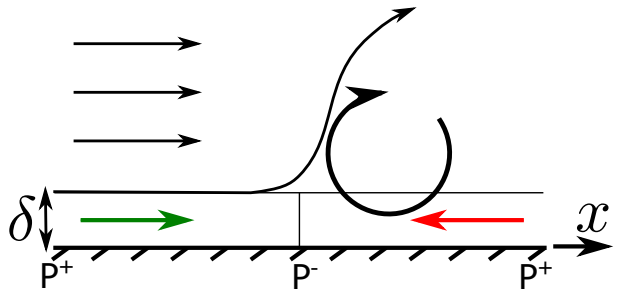


FIGURE 4.15 – Formation de tourbillon par détachement de la couche limite.

4.5 Anneaux tourbillonnaires

4.5.1 Introduction

Les anneaux tourbillonnaires sont facilement formés dans l'air, que ce soit par un fumeur [figure 4.16 (a)] ou à l'aide d'une boite percée emplie de fumée [figure 4.16 (b)]. Ils ont été étudiés en détail par Kelvin et Helmoltz. Ces anneaux se déplacent à vitesse constante dans une direction parallèle à leur axe de symétrie. On présente leurs caractéristiques dans cette section en notant que l'étude des anneaux tourbillonnaires fait intervenir les propriétés évoquées précédemment (taille de coeur, auto-induction), et que leur interaction avec des surfaces sera étudiée au chapitre 5.

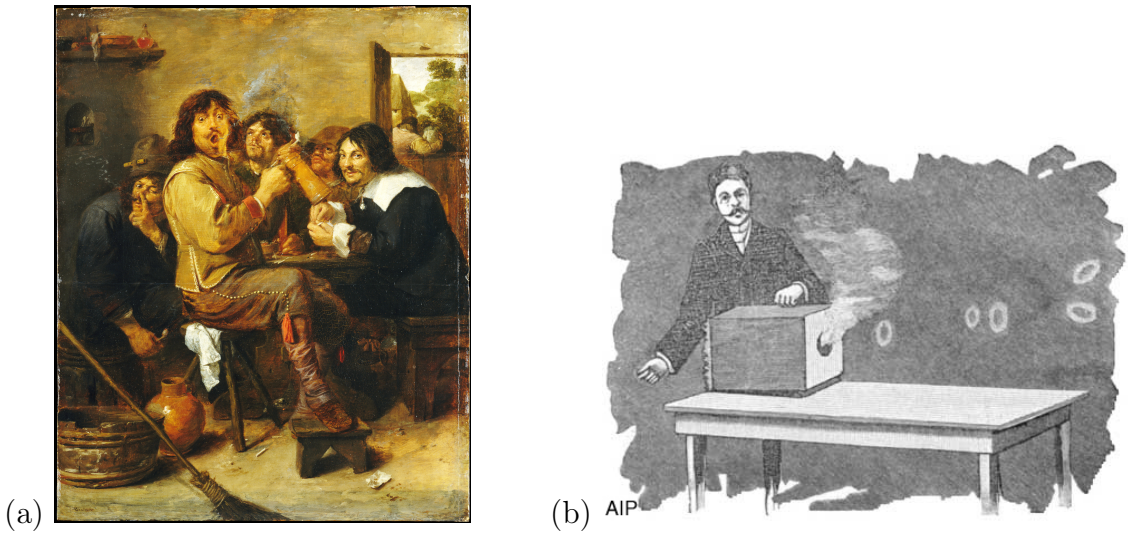


FIGURE 4.16 – (a) Les fumeurs, Adriaen Brouwer, 1636. (b) Formation d'anneaux tourbillonnaires à l'aide d'une boite percée, extrait de Dolbear, 1897 [53].

4.5.2 Formation et études d'anneaux tourbillonnaires

Le montage expérimental représenté figure 4.17 (a) permet de former des anneaux tourbillonnaires de diamètre et circulation contrôlés, qui montent verticalement. Les anneaux sont créés au fond d'une cuve de grande dimension (1m de large et 50 cm de profondeur) en Plexiglas transparent. Au fond de cette cuve est fixé un système d'injection d'anneaux tourbillonnaires qui se compose d'un vérin électrique qui actionne un piston en aluminium de 56 mm de diamètre et 15 cm de longueur utile, usiné spécialement pour le montage. Le vérin électrique (IAI SRS2-SRA7) possède les caractéristiques suivantes : vitesse maximale de 800 mm/s et accélération de 0.4 g. Il pousse le piston dont on peut soit laisser l'extrémité ouverte en sortie libre, de diamètre D, soit réduire le diamètre de sortie avec des convergents usinés en nylon de diamètre de sortie $d = 40$, 30, 20 ou 10 mm, que l'on appellera par la suite injecteurs. On commande le vérin en lui faisant réaliser un déplacement de longueur L_p à une vitesse maximale Up_{max}, une accélération G et une décélération égale à l'accélération. Un déplacement typique du piston est représenté figure 4.17 (c).

Lorsque l'on a besoin de former de plus grands anneaux on utilise un super piston en PVC fabriqué pour l'occasion et représenté figure 4.17 (b). On le pose sur le piston décrit

précédemment qui l'actionne. Il a un diamètre 19.5 cm et est fermé par des plaques percées d'un trou de 10 ou 15 cm de diamètre.

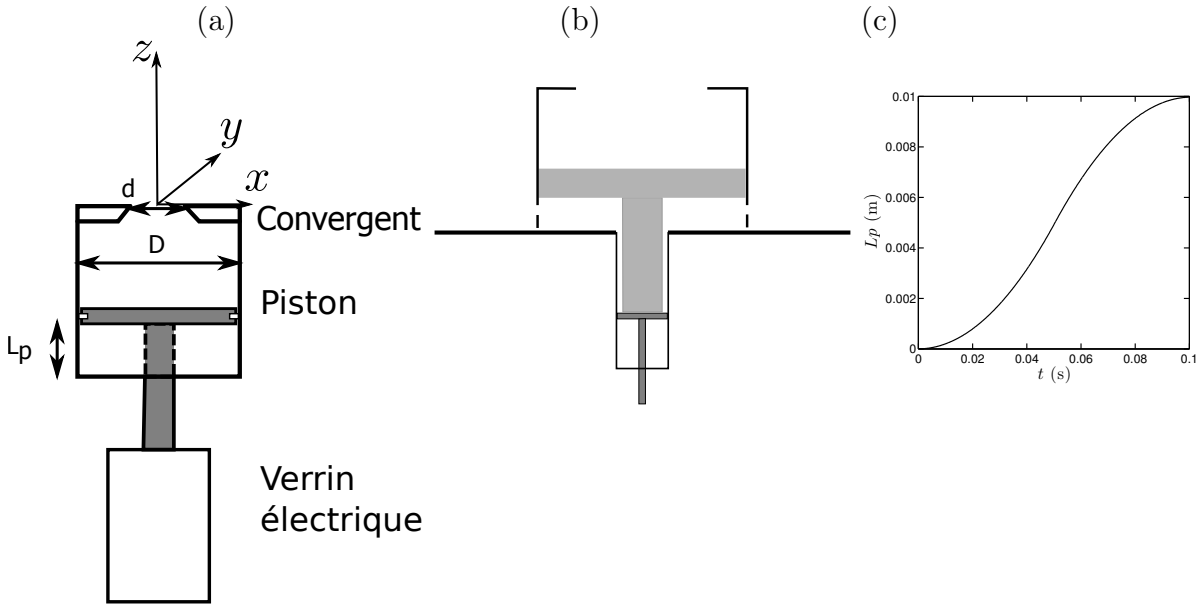


FIGURE 4.17 – (a) Montage de formation des anneaux tourbillonnaires. (b) "Super piston" de 19.5 cm de diamètre actionné par le piston décrit en (a). (c) Mouvement typique du piston.

4.5.3 Observations

La figure 4.18 représente un anneau tourbillonnaire dont le coeur a été ensemencé en colorant. Les plans de coupe sont définis sur l'image (a). On observe l'anneau en coupe par dessus sur l'image (b). L'anneau est à peu près axisymétrique, et se déplace dans la direction perpendiculaire à son plan de symétrie suivant la direction $\underline{e_z}$. Sur l'image (c), on présente la trajectoire d'un anneau similaire, vue cette fois en coupe, de côté. On observe que l'anneau se déplace à vitesse constante, et que son rayon ne varie pas.

4.5.4 Commande du piston et caractéristiques de l'anneau

Vitesse et rayon

Avec le piston en sortie libre de diamètre D, sans convergent, on fait varier la course du piston L_p et on mesure la vitesse et le rayon de l'anneau obtenu, présentés sur la figure 4.19 (a) et (b). La figure (a) représente la vitesse de l'anneau en fonction de L_p. On observe que la vitesse semble varier linéairement avec le déplacement du piston dans une grande gamme de commande. La figure (b) montre le rayon de l'anneau en fonction de L_p. On observe que le rayon croit lentement, d'un rayon inférieur à celui du piston, à un rayon maximal de l'ordre de celui du piston. On en déduit deux caractéristiques de notre système : on peut faire varier la vitesse des anneaux dans une grande gamme, mais on ne contrôle pas leur rayon. Pour chaque paramètre de formation, il faudra donc mesurer les caractéristiques de l'anneau.

On estime le nombre de Reynolds des anneaux à partir de ces observations, avec $Re = \frac{2\rho UR}{\eta}$, où R est le rayon de l'anneau. Les anneaux formés se trouvent dans une gamme de nombre de Reynolds comprise entre 1000 et 10 000. Les anneaux de nombre de Reynolds

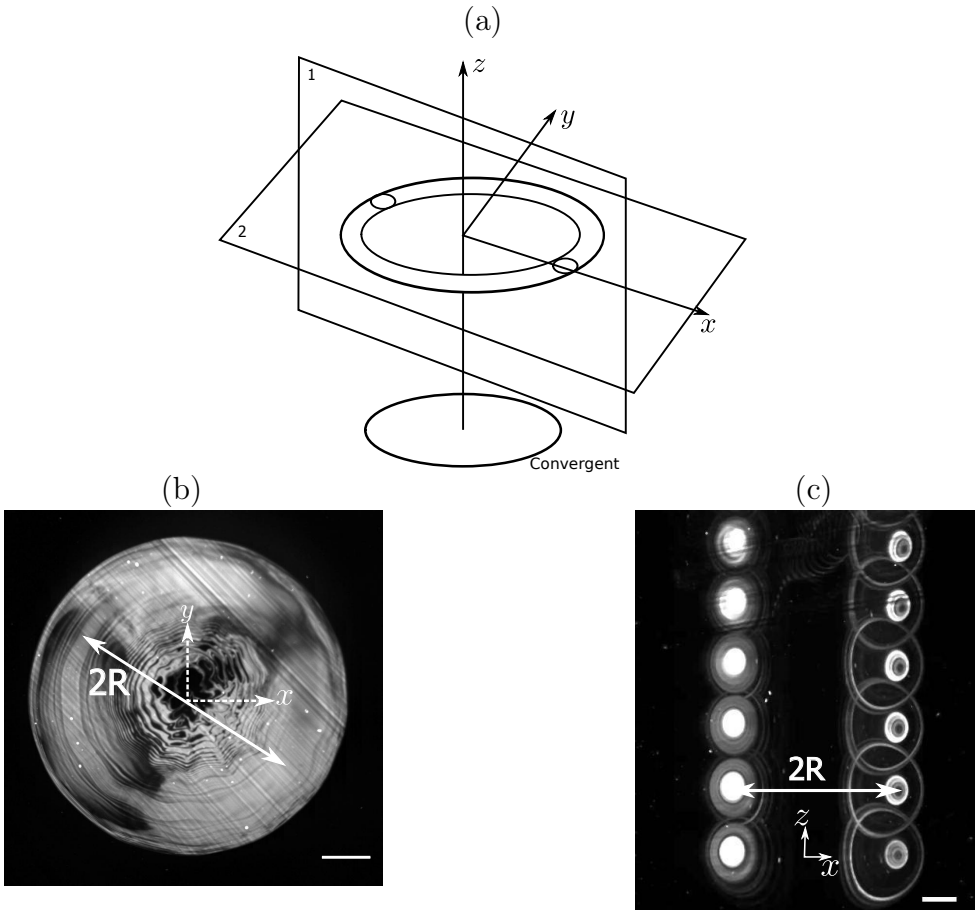


FIGURE 4.18 – (a) Définition des deux plans de coupe, contenant l'axe de symétrie cylindrique de l'anneau (1), et plan de symétrie de l'anneau (2). (b) Anneau tourbillonnaire vu dans le plan de coupe (2) ; l'anneau fait un diamètre d'environ 4 cm. (c) Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire se déplaçant dans la direction $\underline{e}_z$, obtenue par superposition d'images et vue en coupe, dans le plan (1). Les images sont espacée de 32 ms et la barre blanche fait 1 cm.

élevé sont faiblement turbulents. Pour réaliser des mesures quantitatives, on forme des anneaux qui n'apparaissent pas turbulents.

Estimation de la circulation

Allen explique comment calculer la circulation d'un anneau tourbillonnaire formé par le déplacement d'un piston [54]. Il fait référence au "slug model" qui prédit que la circulation d'un anneau tourbillonnaire formé par le mouvement d'un piston créant un écoulement de vitesse $U(t)$ à sa sortie pendant un temps T s'écrit :

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int_0^T U^2(t)dt \tag{4.27}$$

Dans notre montage expérimental, les paramètres de contrôle sont l'accélération G et la longueur de déplacement L_p du piston. Le déplacement typique du piston au cours du temps a la forme représentée sur la figure 4.17 (c). Connaissant la vitesse du piston, on déduit la vitesse du fluide à la sortie du convergent U_s par conservation de la masse :

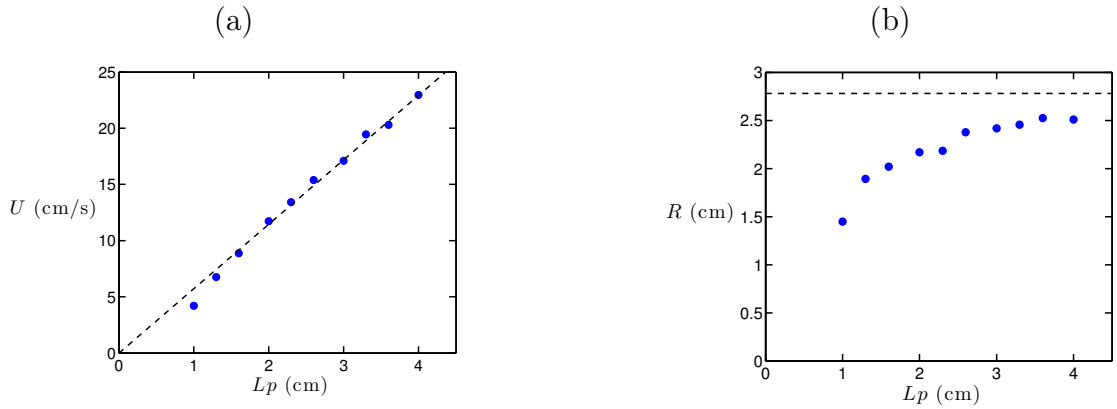


FIGURE 4.19 – (a) Vitesse de l'anneau en fonction du déplacement du piston. (b) Rayon de l'anneau en fonction du déplacement du piston. Les anneaux sont formés avec une accélération $G = 0.4g$, le piston en sortie libre $d = D$, la valeur de $D/2$ est indiquée par une ligne horizontale.

$U_s = U_p(\frac{D}{d})^2$ avec U_p la vitesse du piston, D son diamètre intérieur et d le diamètre du convergent. La circulation d'un anneau tourbillonnaire créé par le mouvement du piston L_p de diamètre D, à accélération G et un diamètre de sortie d s'écrit finalement :

$$\Gamma = \frac{G^{1/2} L_p^{3/2}}{3} \left(\frac{D}{d}\right)^4 \tag{4.28}$$

4.5.5 PIV

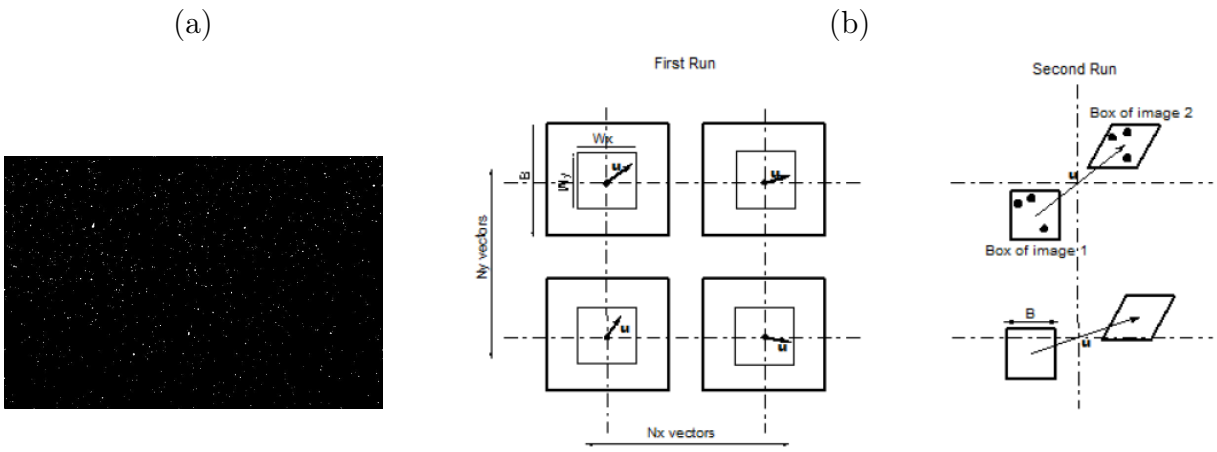


FIGURE 4.20 – (a) Visualisation des marqueurs utilisés lors de la PIV. (b) Schéma de principe de la PIV en deux tours, extrait du guide utilisateur DPIVSoft2010 [55].

Les méthodes de visualisation par colorant permettent de voir les anneaux tourbillonnaires, et de mesurer leur diamètre et leur vitesse verticale. Ces mesures supposent cependant que le colorant reste bien dans le coeur des anneaux. Afin de réaliser des mesures quantitatives, et de vérifier que le colorant permet de suivre les tourbillons, ainsi que de mesurer d'autres caractéristiques des tourbillons comme la circulation et le rayon de coeur, nous utilisons une méthode de PIV développée par Thomas Leweke et Patrice Meunier [56, 57]. Afin de réaliser ces mesures, on éclaire la cuve avec une tranche laser verticale qui

coupe l'axe de symétrie de l'injecteur (figure 4.18 (a), plan (1)), et on filme perpendiculairement à cette tranche. On visualise de cette manière les particules traçantes, comme présenté sur la figure 4.20 (a) (billes de verre creuses,"PQ Hollow spheres Sphericel 110P8", 11.7 μm de diamètre, densité 1.1). Les images sont ensuite exploitées avec le logiciel de PIV qui déduit d'une mesure de corrélation entre deux images successives le champ de vitesse dans le plan éclairé dans le laser. L'utilisation de cette méthode présuppose que le champ de vitesse soit à deux dimensions, dans ce plan. La corrélation se fait entre deux "boites", l'image étant divisée en boites typiquement de 32 ou 16 pixels de côté. La méthode a pour particularité de fonctionner en deux tours. Au premier tour, la mesure de corrélation entre boites positionnées aux mêmes coordonnées permet d'estimer la vitesse et son gradient. Au deuxième tour la mesure est effectuée en déformant et déplaçant les boites suivant respectivement le gradient et la vitesse obtenues au premier tour, ce qui permet d'améliorer la précision lorsque le gradient est important (voir figure 4.20 (b)). On obtient le champ de vitesse dont on extrait le champ de vorticité, comme présenté sur la figure 4.21 (a).

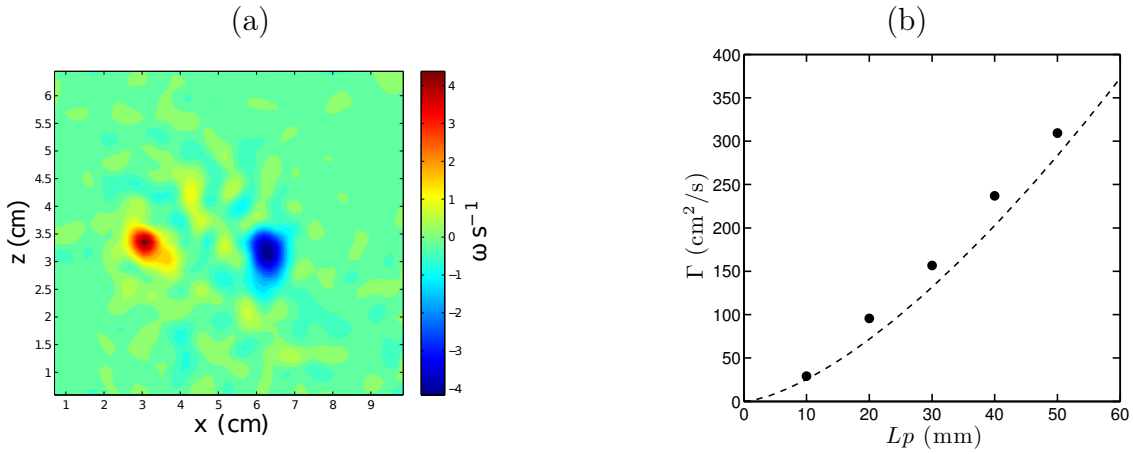


FIGURE 4.21 – (a) Champ de vorticité d'un anneau tourbillonnaire vue en coupe. (b) Circulation mesurée en fonction de L_p pour un injecteur de diamètre $d = 4$ cm. La ligne pointillée représente l'équation (4.28). L'accélération du piston est égale à $G = 0.4.g$. Les barres d'erreur sont plus petites que la taille des marqueurs.

La figure 4.21 (b) compare la circulation attendue d'après la formule (4.28) et la mesure par PIV. On observe que la circulation mesurée est légèrement supérieure à la circulation attendue, les deux courbes suivant la même tendance. Il est donc légitime d'approximer la circulation attendue par la circulation théorique.

4.5.6 Structure des anneaux tourbillonnaires

Champ proche

Afin de mesurer les caractéristiques du tourbillon, on mesure la vitesse orthoradiale moyenne induite par le tourbillon en fonction de la distance au centre du tourbillon. Pour chaque estimation, on fait la moyenne de la vitesse orthoradiale sur un cercle de rayon r : $Um_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\theta(\theta) r d\theta$ (voir figure 4.22 (a)). On obtient la vitesse orthoradiale moyenne présentée figure 4.22 (b). Cette méthode d'estimation est efficace pour deux raisons : (i) elle moyenne la vitesse, ce qui a pour effet de lisser la mesure ; (ii) lors de cette moyenne, elle supprime en grande partie la vitesse induite par les autres tourbillons, permettant de ne mesurer que le vitesse induite par le tourbillon considéré. On observe que la vitesse est nulle

au centre du tourbillon, augmente, passe par un maximum puis diminue en $1/r$. La forme de la vitesse étant comparable à celle que l'on a décrite pour un tourbillon de Lamb-Oseen, on ajuste la mesure dans cette approximation, en pointillés sur la figure. On observe un bon ajustement. Par la suite on considérera donc que les tourbillons sont bien décrits par une structure de Lamb-Oseen, complète si l'on connait la circulation du tourbillon Γ et son rayon de coeur a. Afin de mesurer le rayon de coeur des anneaux, on peut ajuster la vitesse mesurée sur un axe, comme discuté dans la section suivante. La méthode la plus précise consiste cependant à décrire la vitesse Um_θ à l'aide d'un ajustement gaussien. Lorsque l'ajustement n'est pas très bon, on mesure le rayon pour lequel la vitesse maximale est atteinte a_{max}, et on estime le rayon équivalent d'un tourbillon de Lamb-Oseen, sachant que $a_{max} = 1.12\ a$.

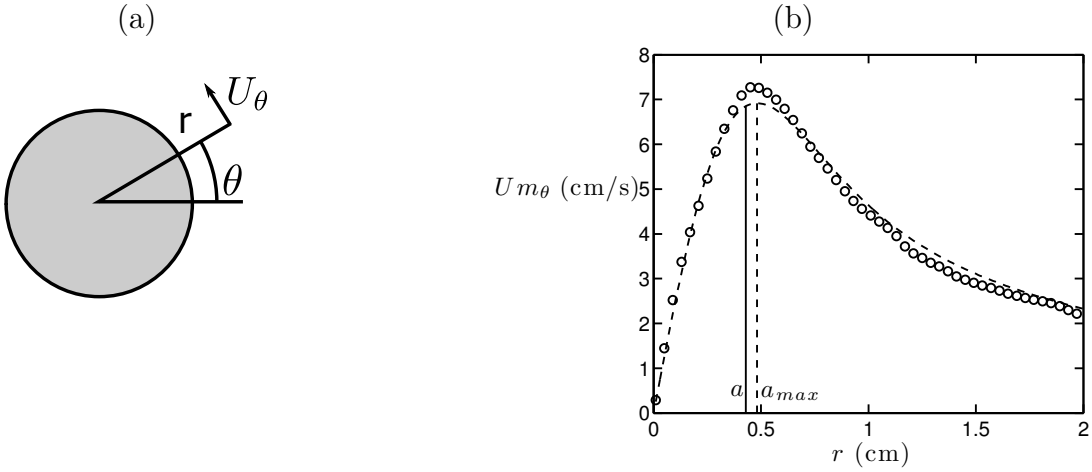


FIGURE 4.22 – (a) Estimation de la vitesse orthoradiale moyenne Um_θ sur des cercles de rayon r. (b) Vitesse moyenne orthoradiale à partir du centre du tourbillon formant un anneau. La ligne pointillée représente un ajustement pour un tourbillon de Lamb-Oseen. La position du rayon de coeur a est indiquée en ligne pleine, la position du rayon pour lequel la vitesse maximale est atteinte, a_{max} est indiquée en ligne pointillée.

Vitesse sur l'axe passant par les centres.

Les tourbillons formant les anneaux sont bien décrits par un modèle de Lamb-Oseen, avec un rayon de coeur a et une circulation Γ. On estime alors la distribution de vitesse U_z le long de l'axe $\underline{e}_x$ passant par le coeur d'un tourbillon (axe passant par les centres dans le plan (1) de la figure 4.18) :

$$U_z = \frac{\Gamma}{2\pi x}\left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\right) \tag{4.29}$$

Sur l'axe horizontal passant par le centre des deux coeurs de l'anneau tourbillonnaire, on peut donc écrire la vitesse U_z comme la superposition des champs de vitesse induits par le coeur gauche de centre x_g et le coeur droit de centre x_d :

$$U_z = \frac{\Gamma}{2\pi(x-x_g)}\left(1 - \exp\left(-\frac{(x-x_g)^2}{a^2}\right)\right) - \frac{\Gamma}{2\pi(x-x_d)}\left(1 - \exp\left(-\frac{(x-x_d)^2}{a^2}\right)\right) \tag{4.30}$$

Sur la figure 4.23 on trace la vitesse verticale U_z sur l'axe horizontal passant par les coeurs de l'anneau ainsi que l'ajustement de cette courbe par la formule précédente. Les paramètres d'ajustement que l'on laisse libres sont la position des centres des coeurs de l'anneau x_g, x_g ainsi que le rayon de coeur a, qui sont déduits par ajustement.

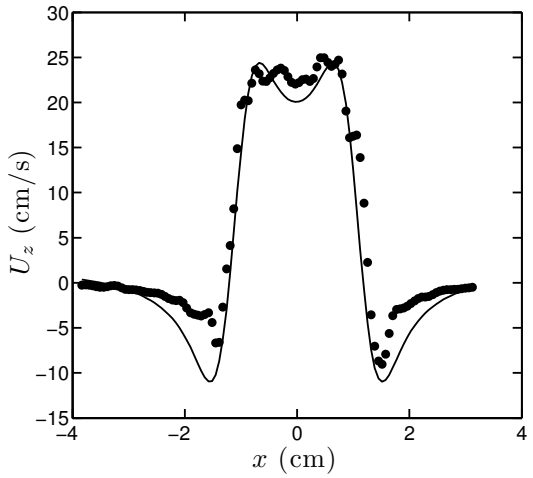


FIGURE 4.23 – Vitesse orthoradiale sur l'axe passant par les deux coeurs de l'anneau et fit par le modèle de Lamb-Oseen.

Vitesse de propagation de l'anneau

On cherche maintenant à estimer théoriquement la vitesse de l'anneau. La circulation de l'anneau est notée Γ, la distribution de vorticité dans son coeur est supposée de type Rankine pour faciliter les calculs, avec un rayon de coeur a. Considérons un tronçon de longueur dl de l'anneau. Le reste de l'anneau induit une vitesse sur ce tronçon. Le tronçon symétrique induit une vitesse proportionnelle à $\frac{\Gamma}{4\pi R}$, dans la direction $\underline{e_z}$. Par symétrie tous les points de l'anneau ressentent la même vitesse induite et l'anneau se déplace à la vitesse $\underline{U} \approx \frac{\Gamma}{4\pi R}\underline{e_z}$.

Afin de calculer précisément la vitesse auto-induite on écrit le théorème de Biot et Savart, en assimilant l'anneau à un filament de vorticité circulaire. $\underline{x}$ est le point de l'anneau considéré, $\underline{x}'$ un point sur le cercle.

$$U\underline{e_z} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{(\underline{x}-\underline{x}')\wedge \underline{dl}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \tag{4.31}$$

qui se réécrit pour ce problème, comme définit sur la figure 4.24 :

$$U\underline{e_z} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\underline{x}'(\theta)\wedge \underline{dl}(\theta)}{\underline{x}'(\theta)^3} \tag{4.32}$$

Le terme dans l'intégrale diverge lorsque θ tend vers zéro. On estime donc l'intégrale en coupant autour de zéro. La distance naturelle de coupure qui apparait est a, à quoi correspond un angle a/R. Tous calculs faits, Lamb trouve [58] :

$$\underline{U} = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - \frac{1}{2} + \int_0^a \left(\frac{\Gamma(r)}{\Gamma}\right)^2 \frac{dr}{r}\right]\underline{e_z} \tag{4.33}$$

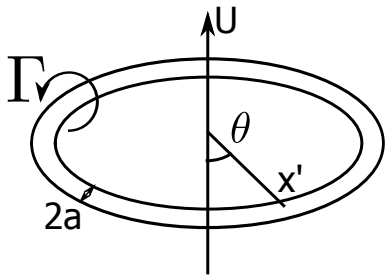


FIGURE 4.24 – Conventions utilisées pour le calcul de la vitesse auto-induite d'un anneau tourbillonnaire.

Avec la répartition de circulation d'un anneau tourbillonnaire de Rankine $\Gamma(r)/\Gamma = r^2/a^2$ on a finalement :

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - \frac{1}{4}\right] \tag{4.34}$$

Vitesse mesurée

Plus généralement, la vitesse d'un anneau tourbillonnaire selon son axe de symétrie est donnée par la formule suivante :

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\log\left(\frac{8R}{a}\right) - \alpha\right) \tag{4.35}$$

Avec Γ la circulation de l'anneau, R son rayon, a son rayon de coeur et α une constante qui peut changer suivant la structure du coeur de l'anneau. On cherche à vérifier cette formule et la valeur de α dans notre expérience.

Pour cela on mesure la vitesse, le rayon de coeur et le rayon d'anneaux en faisant varier les diamètres d'injecteur et le déplacement du piston. On calcule pour chacun la valeur de α telle que la vitesse théorique soit égale à la vitesse observée, et on trouve $\alpha = 0.20 \pm 0.05$.

Afin de vérifier la mesure de α et la formule théorique nous donnant la vitesse de l'anneau (equation 4.35), on trace la vitesse expérimentale de l'anneau U_{exp} en fonction de sa vitesse théorique $U_{th} = \frac{\Gamma}{4\pi R}[\ln(8R/a) - 0.2]$ sur la figure 4.25 et on observe un bon accord. En conclusion on a vérifié expérimentalement la validité de l'équation (4.35) dans une large gamme de circulation et mesuré une constante α égale en moyenne à 0.20.

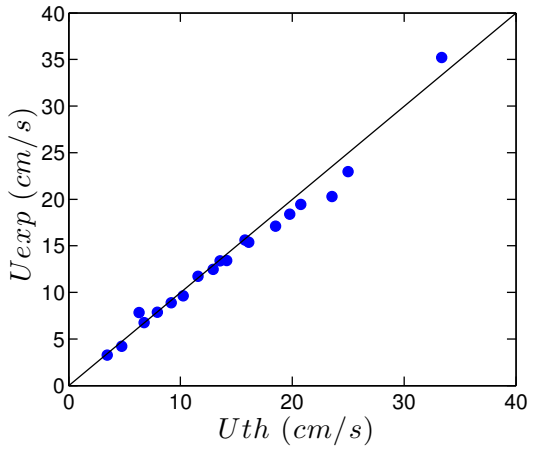


FIGURE 4.25 – Vitesse expérimentale de l'anneau en fonction de sa vitesse théorique calculée par la formule de l'équation 4.35. On en déduit $\alpha = 0.20 \pm 0.05$, valeur proche de celle attendue pour un tourbillon de Rankine ($\alpha = 0.25$).

Chapitre 5

Impact d'un anneau tourbillonnaire sur une surface

Sommaire

5.1 Introduction **77**
5.2 Montage expérimental **81**
5.3 Resultats expérimentaux **84**
5.4 Modèles et discussions **92**
5.5 Stabilité des tourbillons **104**
5.6 Conclusion **109**

(a) (b) (c)

FIGURE 5.1 – (a) Sillage à l'arrière d'un ferry. (b) Vague. (c) Empreinte de baleine.

5.1 Introduction

5.1.1 Contexte

La figure 5.1 (a) représente le sillage à l'arrière d'un ferry. L'écoulement turbulent émis par le propulseur du bateau lisse localement les vagues. Ce lissage affecte les petites longueurs d'onde alors que les grandes restent visibles. Ce phénomène est observé à chaque

fois qu'un écoulement turbulent interagit avec une surface libre, comme on le voit derrière les piles de ponts ou au-dessus des résurgences. On retrouve le phénomène dans les zones d'étirement important, comme le dos de vagues qui déferlent [5.1 (b)]. Des tourbillons se forment sous la surface, d'axes parallèles à la direction de propagation de la vague, et la surface est lissée entre les tourbillons. Dans les applications militaires, le lissage de la surface trahit le passage d'un navire. Un sous-marin qui plonge engendre un écoulement turbulent vers la surface, ce qui le rend repérable pendant un certain temps.

Comme l'a montré Levy [59], les empreintes de baleine [figure 5.1 (c)] sont semblablement formées par l'interaction d'un anneau tourbillonnaire avec la surface. Ces empreintes sont des taches circulaires mesurant de l'ordre du mètre dans lesquels les ondes initialement présentes à la surface de la mer sont aplanies pendant quelques minutes. Levy a étudié le mécanisme de formation des empreintes à partir d'une queue de baleine artificielle. Comme présenté sur la figure 5.2 (a), lorsque la baleine nage à l'aide de sa queue, elle émet un anneau tourbillonnaire à chaque battement. Suivant sa configuration, l'anneau arrive plus ou moins verticalement à la surface. Si il arrive verticalement, il crée une zone d'interaction circulaire, comme le montre Levy sur la figure 5.2 (b) avec une vue de dessus d'un anneau coloré engendré par une queue artificielle interagissant avec la surface.

Cess trois exemples présentent des interactions tourbillons-surface liés à un écoulement tourbillonnaire (a), un ensemble de tourbillons parallèles (b) ou un tourbillon unique (c). Dans ce chapitre on s'intéressera à ce dernier cas, afin de simplifier le problème. Nous nous demanderons en particulier quelles sont la taille de la zone lissée et sa durée de vie.

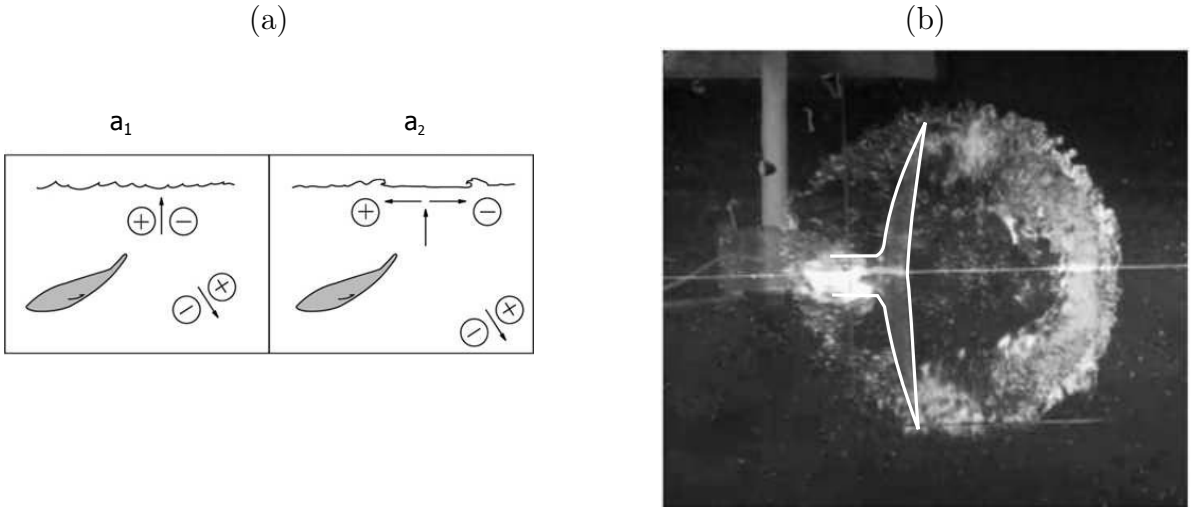


FIGURE 5.2 – (a) Principe de formation des empreintes de baleine, (a_1) approche normale de l'anneau tourbillonnaire, (a_2) formation de l'empreinte sous l'effet du tourbillon. (b) Interaction d'un tourbillon marqué par du colorant avec la surface ; vue de dessus l'interaction forme une tache circulaire. Le tourbillon est créé par une queue artificielle dont la forme est surlignée en blanc. Illustrations reproduites de [59].

5.1.2 Interaction vortex-surface

Plus généralement, l'interaction vortex-surface est un problème aussi bien fondamental que pratique. Un autre exemple d'interaction vortex-surface est fourni par les tourbillons contrarotatifs se formant en bout d'aile d'avion. Par induction, la paire de tourbillons descend vers la piste de décollage et a tendance à y rester, limitant ainsi l'intensité du

trafic autorisé. Fondamentalement, l'interaction vortex-surface est aussi importante pour comprendre la transition vers la turbulence, la présence de tourbillons près de surfaces entrainant la formation de nouveaux tourbillons [60]. La trajectoire d'une paire de tourbillons contrarotatifs se dirigeant vers une surface, dans des hypothèses d'écoulement potentiel déduites des études de Helmholtz [61] et Lamb [58], prédit que les tourbillons s'approchent de la surface à une distance égale à la moitié de leur séparation initiale, puis se déplacent parallèlement à la surface. La trajectoire théorique d'un anneau tourbillonnaire impactant la surface est présentée figure 5.3 (a) : elle prédit une distance à la surface qui tend vers zéro et un rayon qui tend vers l'infini. Ces trajectoires ne sont pas celles observées, comme l'avait montré Bouasse en 1931 dans son traité sur les tourbillons [62]. Il suggère en effet de prendre en compte les effets visqueux près des surfaces solides ce qui entraine la formation de tourbillons contrarotatifs à la surface, que l'on nommera par la suite tourbillons secondaires (voir figure 5.3 (b)).

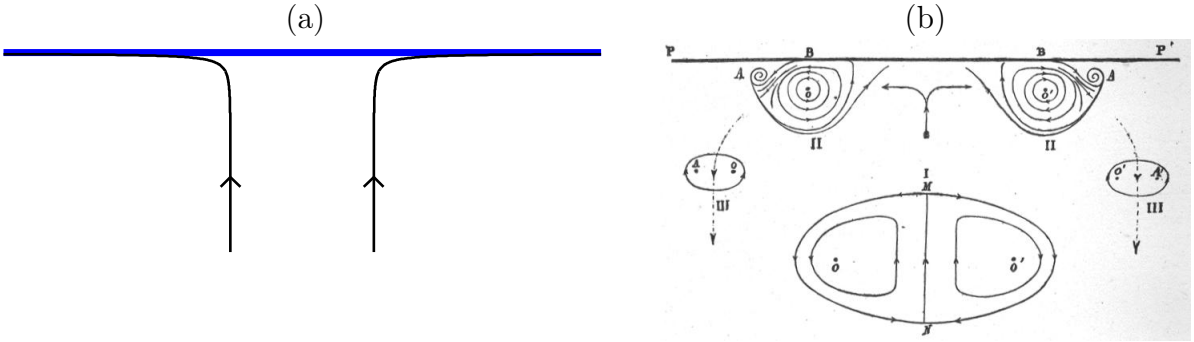


FIGURE 5.3 – Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire impactant une surface rigide. (a) Cas idéal. (b) Cas réel. L'anneau monte vers la surface lors de l'étape notée I sur le schéma, puis des anneaux secondaires se forment au point A (II), et enfin l'anneau rebondit (III). Extrait de [62], page 254.

5.1.3 Diagramme de phase

Une manière de représenter les différents types d'interaction entre paires de tourbillons ou anneaux tourbillonnaires avec des surfaces liquides ou solides est de les regrouper dans un diagramme de phase, comme on l'a fait sur la figure 5.4. Dans ce diagramme, l'axe des abscisses est un paramètre sans dimension qui compare la pression dynamique imposée par l'anneau à la surface avec la pression minimale p_s nécessaire à la déformation de celle-ci. La pression imposée par un anneau de diamètre R, de rayon de coeur a et de circulation Γ peut être estimée par ρU^2 avec U la vitesse maximale induite par l'anneau, ce qui se réécrit $\rho(\Gamma/a)^2$. Le paramètre adimensionné s'écrit alors $\rho(\Gamma/a)^2/p_s$. Pour une surface solide p_s est de l'ordre du module de Young, alors que pour une surface liquide $p_s \sim \rho g a$ ou $p_s \sim \gamma/a$, selon que a est supérieur ou inférieur à la longueur capillaire. Pour des valeurs de $\rho(\Gamma/a)^2/p_s$ plus petites que 1, la déformation de la surface est négligeable ("impact doux"), alors que pour des valeurs supérieures à 1, le tourbillon crée une déformation notable de la surface ("impact fort").

L'axe des ordonnées sur la figure 5.4 est un paramètre sans dimension qui compare le gradient de pression imposé par l'anneau à la surface, au gradient de pression critique pour lequel un détachement de tourbillon secondaire peut survenir. On verra par la suite qu'une façon d'écrire ce paramètre est $\frac{\rho\Gamma}{\eta}\frac{\delta}{a}^2 = Re\left(\frac{\delta}{a}\right)^2$ où le nombre de Reynolds est défini par $Re = \frac{\rho\Gamma}{\eta}$ et où δ est l'épaisseur de la couche limite à la surface. Pour des valeurs de ce

paramètre inférieures à 1, la surface peut se traiter par une condition de glissement, alors que pour des valeurs supérieures à 1, l'interaction avec la surface conduit à la formation de tourbillons secondaires.

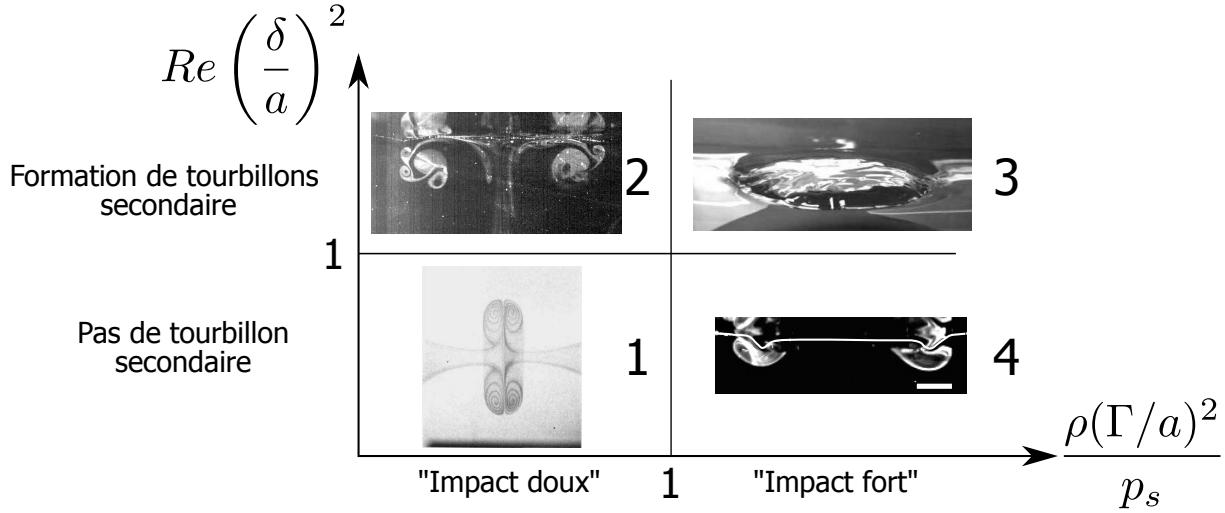


FIGURE 5.4 – Diagramme de phase pour l'impact normal d'un anneau tourbillonnaire avec une surface. L'axe des abscisse est un paramètre qui compare la pression dynamique imposée par le tourbillon à la pression nécessaire à déformer la surface. L'axe des ordonnées compare le gradient de pression imposé par le vortex au gradient nécessaire à la formation d'anneaux secondaires. Les illustrations montrent : (1) la collision de deux anneaux symétriques coaxiaux, extrait de [63] ; (2) la formation de tourbillons secondaire lors de l'interaction avec la surface libre de l'eau (le tourbillon principal fait environ 8 cm de diamètre) ; (3) une vue de dessus de la déformation de la surface libre de l'eau par un anneau (la zone déformée fait environ 8 cm de diamètre) ; (4) Une vue de côté de la déformation de la surface libre de l'éthanol sous l'action d'un anneau (la barre blanche fait 1 cm).

Le diagramme de phase définit 4 domaines. Le premier (1) correspond à l'interaction avec une surface idéale et rigide qui n'impose pas de condition sur la vitesse tangentielle à la paroi. Une manière de simuler l'interaction d'un anneau tourbillonnaire avec une telle surface a été proposée par Chu *et al.* [63], via l'étude de la collision de deux anneaux tourbillonnaires coaxiaux identiques, les deux configurations étant théoriquement équivalentes [voir figure 5.4 (1)]. Ces auteurs ont montré que la trajectoire d'un anneau correspond alors à la trajectoire obtenue par une théorie potentielle, avec une correction lorsque les tourbillons se trouvent à une distance de l'ordre de leur taille de coeur.

Le deuxième domaine (2), pour lequel il y a apparition de tourbillons secondaires sans déformation de la surface, est le plus couramment rencontré dans les cas pratiques, tel le problème des tourbillons de bout d'aile émis par les avions. Une des premières expériences sur ce sujet a été réalisée par Harvey et Perry [64]. Ils montrent que lorsque la paire de tourbillons arrive près du sol, le détachement de la couche limite qui s'y forme entraine la formation de tourbillons secondaires, qui par la suite modifient la trajectoire des tourbillons primaires. Le même phénomène a été étudié expérimentalement et théoriquement pour un anneau tourbillonnaire par Walker *et al* [65], et c'est aussi le sujet de nombreuses études numériques (Orlandi-1990 [66], Ohring-1991 [67], Kramer-2007 [68]). Si l'on travaille avec une surface déformable et des tourbillons suffisamment intenses, on se retrouve dans le troisième domaine (3). Un exemple donné par Bouasse [62] est celui de l'interaction

d'un anneau tourbillonnaire avec un film de savon. Un autre exemple est présenté sur la figure 5.4 (3) lors de la déformation de la surface de l'eau par un anneau tourbillonnaire. Il y a peu d'études concernant le quatrième domaine, dans lequel y a déformation de la surface sans formation de couche limite, on peut néanmoins citer une étude numérique [69].

L'interaction d'un vortex formé dans l'eau avec la surface de celle-ci aurait pu être un bon candidat afin d'étudier expérimentalement l'interaction avec une surface idéale. En effet, tant que la surface ne se déforme pas, on peut supposer que, la viscosité de l'air étant négligeable, la surface se comporta comme une surface idéale. Il a cependant été observé expérimentalement qu'il y a toujours formation de tourbillons secondaires à la surface (Bernal-1989 [70], Song, Bernal and Tryggvason-1992 [71]). Ces études ont montré que c'est la présence de surfactants à la surface de l'eau qui rigidifie celle-ci, et induit un gradient de vitesse, ce qui conduit à la formation d'une couche limite. Dans l'eau, il est difficile de supprimer totalement les surfactants et leur influence. L'apparition de tourbillons secondaires à la surface de l'eau obtenus lors de nos expériences est montrée sur la figure 5.4 (2).

Les études numériques les plus récentes portent sur les instabilités et effets en trois dimensions lors de l'interaction de tourbillons primaires avec des tourbillons secondaires, pour des paires de tourbillons [72, 73], ou des anneaux tourbillonnaires [74]. Une étude récente de Harris et Williamson décrit expérimentalement et théoriquement l'instabilité en trois dimensions entre une paire de tourbillons et des tourbillons secondaires lors de l'impact sur une paroi rigide [75, 76]. Une étude de Leweke *et al.* traite de l'interaction d'un anneau tourbillonnaire avec une surface lors de l'impact d'une sphère sur un mur [77], lors de laquelle une instabilité se développe entre le tourbillon primaire et une nappe de vorticité secondaire.

Dans ce chapitre, on présente le dispositif expérimental permettant de visualiser des anneaux tourbillonnaires impactant la surface. Les résultats obtenus pour des impacts "doux" et "forts", dans l'eau et dans l'éthanol, sont ensuite décrits. Dans une troisième partie, on modélise et discute les résultats obtenus. Dans la dernière partie on s'intéresse à la stabilité des tourbillons lors de l'interaction avec la surface libre.

5.2 Montage expérimental

Le montage permettant de former des anneaux tourbillonnaires de rayon et de circulation contrôlés a été décrit dans le chapitre précédent. Les anneaux sont formés au fond d'une cuve de grande dimension (largeur L=1m et profondeur H=50 cm) [figure 5.5 (a)]. Un batteur actionné par un pot vibrant permet de former des vagues à la surface. Les anneaux sont filmés par dessus ou par le côté avec une caméra rapide (Photron SA3). Ils sont rendus visibles par différentes méthodes de coloration à la fluorescéine, le système étant éclairé soit par une tranche laser d'une épaisseur millimètrique (Argon 533 nm, 6 W), soit par un spot de lumière blanche.

Une méthode consiste à ensemencer l'anneau tourbillonnaire en colorant, à l'aide de deux buses placées de part et d'autre d'un diamètre de l'injecteur. On éclaire avec une nappe laser qui vient couper verticalement l'axe de symétrie de l'anneau et les zones ensemencées en colorant [figure 5.5 (b), plan (1)], ce qui donne une vue en coupe de l'anneau [figure 5.6 (a)]. Cette méthode est intéressante parce qu'elle permet d'accéder à la fois la position

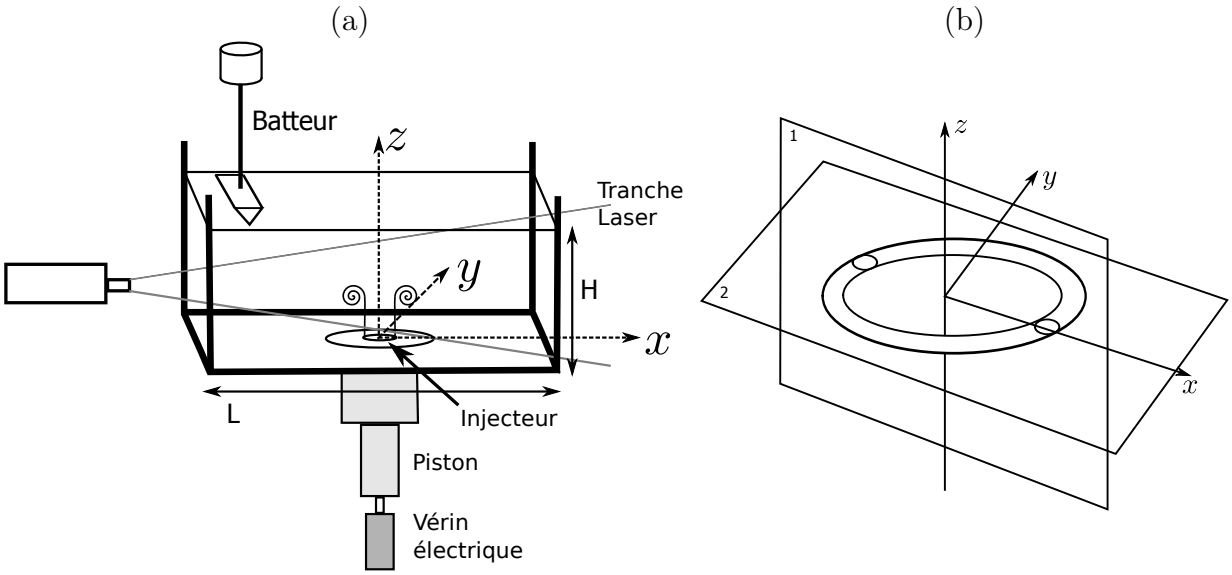


FIGURE 5.5 – (a) Schéma du dispositif expérimental. (b) Plans de coupe des anneaux.

de l'anneau et à sa structure interne, le colorant se concentrant sur des lignes de courant, dans le volume transporté lors du déplacement de l'anneau. En revanche, on ne peut ainsi visualiser les déformations en trois dimensions de l'anneau. On a recours pour cela à deux techniques. L'une consiste à injecter du colorant dans le corps du piston, et à éclairer la cuve par lumière UV ou par un spot de lumière blanche qui font fluorescer le colorant. On observe alors la structure extérieure de l'anneau et les déformations en trois dimensions qui peuvent apparaitre [figure 5.6 (c)]. L'autre, en utilisant la même méthode de coloration et en éclairant avec une nappe laser horizontale [figure 5.5 (b), plan (2)]. On obtient alors une vue en coupe de l'anneau à une position donnée par la hauteur de la nappe laser dans la cuve, ce qui nous donne une idée de la structure de l'anneau à l'instant où il passe à travers la nappe [figure 5.6 (b)]. Ces observations sont complétées par des mesures PIV obtenues suivant la méthode présentée dans le chapitre précédent.

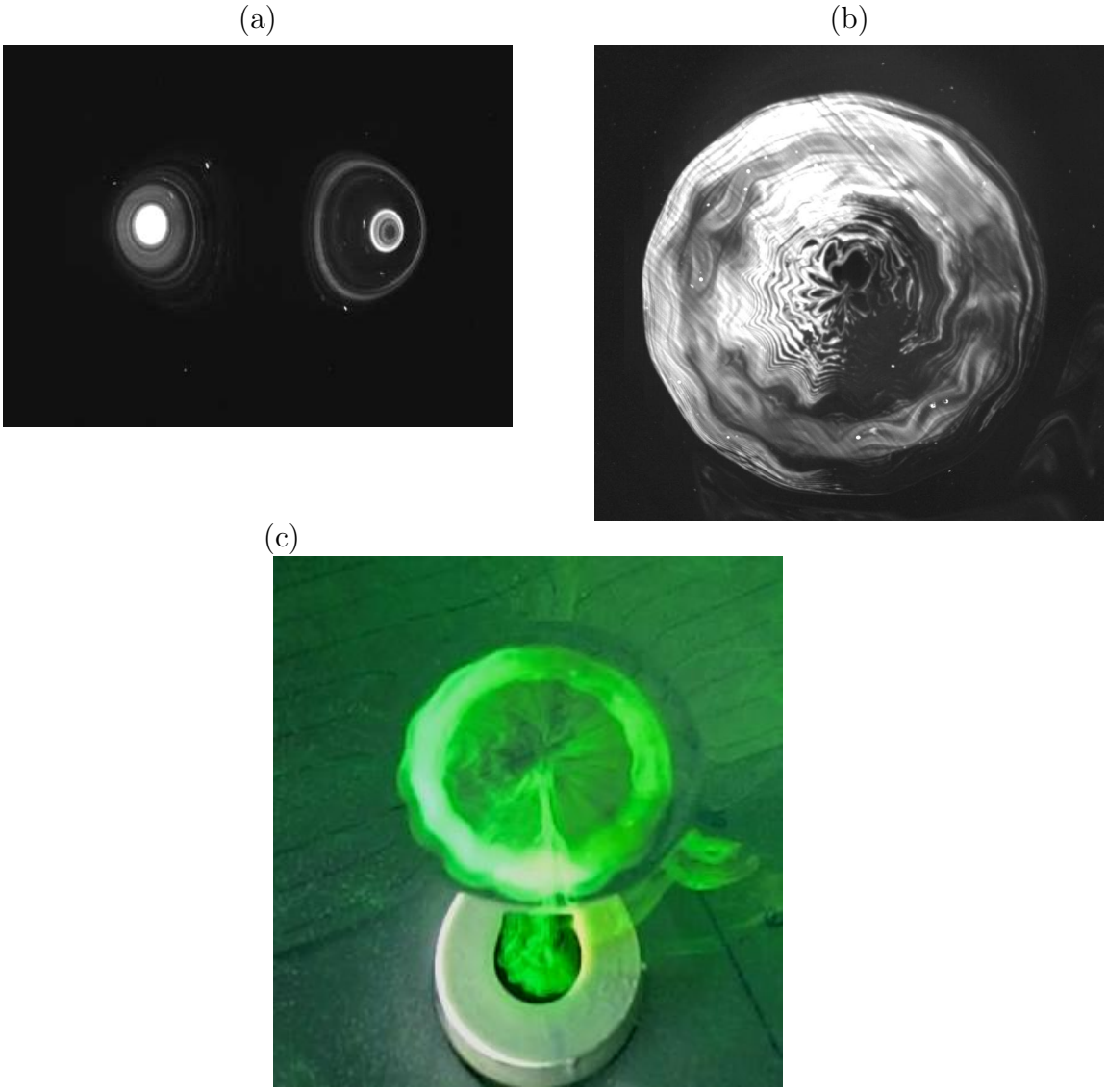


FIGURE 5.6 – Vue d'un anneau tourbillonnaire coloré d'environ 4 cm de diamètre : (a) en coupe de côté (plan (1) figure 5.5), (b) de dessus (plan (2)). (c) Vue de dessus d'un anneau coloré en masse ; l'injecteur fait 4 cm de diamètre.

5.3 Resultats expérimentaux

5.3.1 Impacts doux dans l'éthanol

Dans cette section, je présente les résultats obtenus pour des impacts "doux" dans l'éthanol, correspondant à une déformation de surface négligeable.

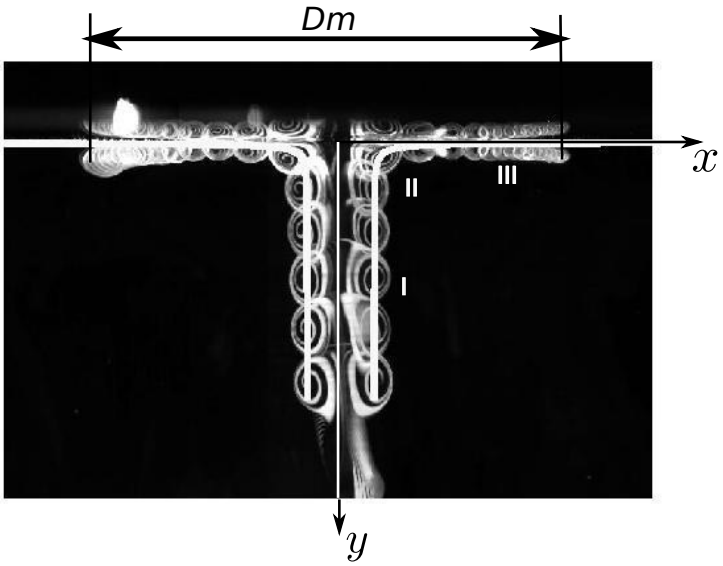


FIGURE 5.7 – Superposition d'images en coupe (plan (1)) lors de l'impact sur une surface libre d'éthanol d'un anneau tourbillonnaire de 2.5 cm de diamètre et de circulation égale à 100 cm^2/s. Les images sont espacées de 100 ms. La ligne banche représente la trajectoire théorique déduite du modèle présenté en section 5.4.1.

La figure 5.7 montre la trajectoire d'un anneau tourbillonnaire impactant la surface d'un bain d'éthanol, avec une superposition d'images espacées de 100 ms. La position du tourbillon au cours du temps est représentée sur les figures 5.9 (a) et (b). Le mouvement se décompose en trois phases, notées I à III sur les figures. Pendant la première phase, loin de la surface (à une distance supérieure à un rayon), l'anneau se déplace verticalement à sa vitesse auto-induite. Pendant la deuxième phase, lorsque le tourbillon commence à ressentir l'influence de la surface, sa vitesse verticale diminue et son rayon augmente, tandis que le rayon de coeur "apparent" a, rayon de la tache visible, diminue. A la fin de cette phase, la vitesse verticale tend vers zéro, la distance du tourbillon à la surface libre étant de l'ordre de a . Dans la dernière phase, le rayon continue à augmenter, avec une vitesse de croissance qui diminue, et la distance à la surface s'accroit lentement. A la fin du mouvement le tourbillon rebondit légèrement de la surface, d'une distance inférieure à a, avant de s'immobiliser.

La figure 5.8 est un zoom de l'anneau lorsqu'il atteint la surface. On observe qu'il s'aplatit alors et déposition d'un peu de colorant le long de l'interface.

PIV

Afin de vérifier que les observations réalisées avec du colorant permettent bien de suivre la position du coeur des tourbillons, on représente sur la figure 5.10 (a) le champ de vorticité au cours de l'interaction de l'anneau avec la surface. On vérifie tout d'abord que les observations au colorant et en PIV montrent des trajectoires et des formes du coeur du tourbillon comparables, ce qui permet de vérifier que le colorant marque bien le coeur. On

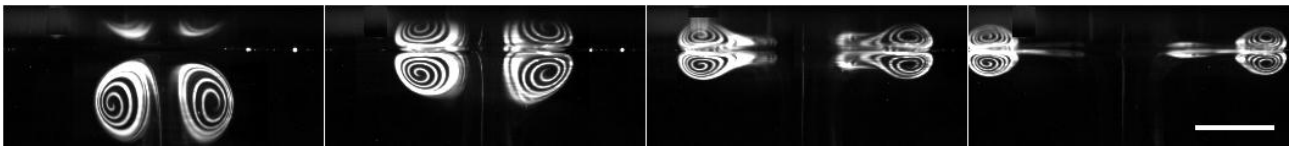


FIGURE 5.8 – Chronophotographie d'un anneau tourbillonnaire de circulation 60 cm^2/s et d'un diamètre initial de 2.5 cm arrivant sur une surface libre d'éthanol. La partie supérieure des images est la réflexion dans la surface, et permet de déduire la position de celle-ci. Les images sont séparées de 80 ms, la ligne blanche fait 2 cm de long.

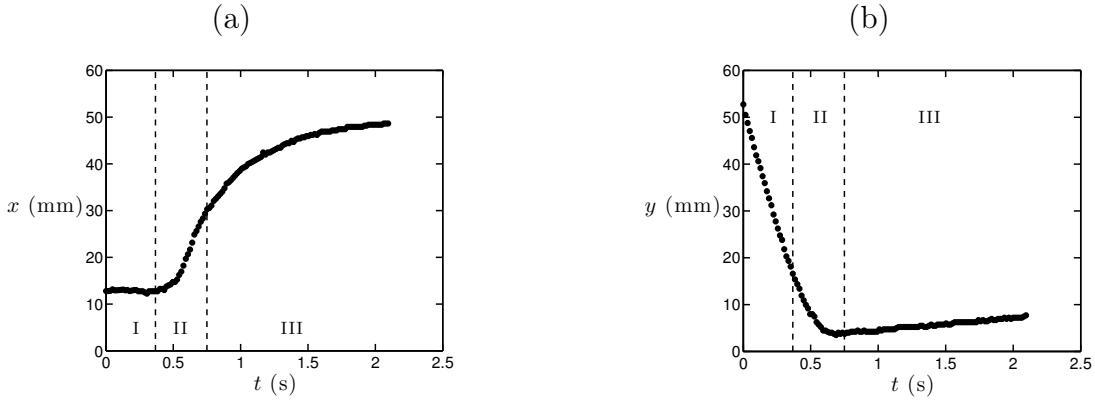


FIGURE 5.9 – (a,b) Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire dans l'éthanol, avec x la distance du coeur à l'axe de symétrie et y la distance à la surface. L'anneau a un diamètre initial de 2.55 cm et une circulation initiale de 100 cm^2/s.

observe aussi un (faible) dépôt de vorticité à la surface, comparable à ce qui est observé avec le colorant sur la figure 5.8. Les champs de vorticité obtenus par simulation numérique par Archer [figure 5.10 (b)] lors de l'impact d'un anneau tourbillonnaire sur une surface idéale sont très proches de ce que l'on observe [74]. On vérifie au passage qu'il n'y a pas de formation d'une couche limite à la surface.

Transition impact doux/impact fort

Afin de comparer les différents essais, on représente l'évolution du diamètre maximal D_m en fonction de la circulation initiale du tourbillon Γ sur la figure 5.11. On observe que pour les petites circulations initiales le diamètre maximal semble augmenter avec la circulation, avant d'atteindre un maximum. Puis il diminue fortement avec la circulation, lorsque la surface commence à se déformer et que l'on rentre dans le domaine des impacts forts. La transition entre les deux domaines est observée aux alentours de $\Gamma = 120$ cm^2/s.

L'utilisation de la PIV permet de mesurer le rayon de coeur des anneaux lors de la transition. Le rayon moyen a est de l'ordre de 0.72 cm. On compare la pression dynamique imposée par le tourbillon à la pression de surface p_s. Le coeur du tourbillon étant grand devant la longueur capillaire, la pression de surface est de l'ordre de $\rho g a$, si bien que le rapport des pressions s'écrit $\frac{\rho(\Gamma/a)^2}{\rho g a} \approx 39$. Ce rapport est grand devant 1 comme attendu lorsque la déformation de la surface devient notable.

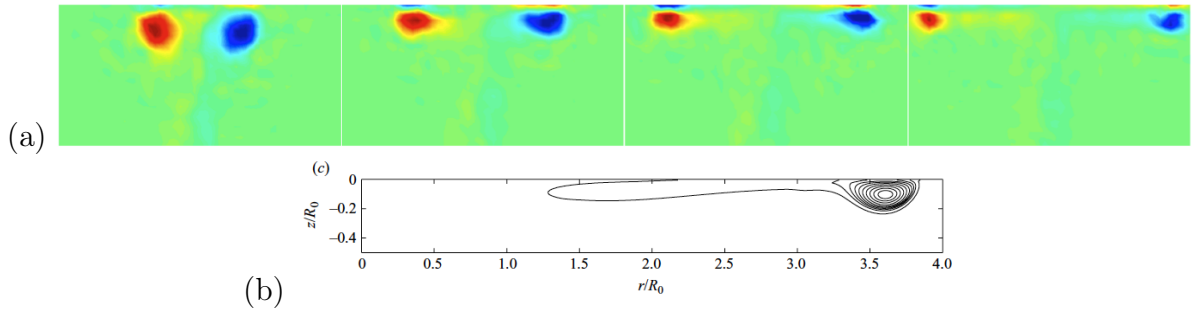


FIGURE 5.10 – (a) Champ de vorticité (sans dimension) lors de l'interaction d'un tourbillon avec la surface dans l'éthanol. L'anneau a un rayon initial de 2.56 cm et une circulation de 33 cm^2/s. Les images sont espacées de 100 ms. La surface correspond au haut de l'image. (b) Champs de vorticité autour du coeur droit d'un anneau tourbillonnaire impactant une surface idéale obtenu par simulation numérique, reproduit de Archer [74].

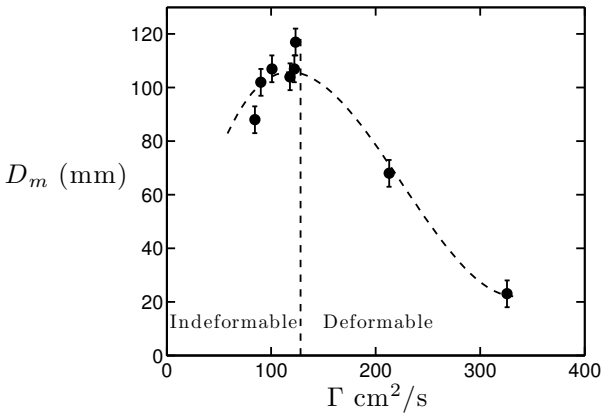


FIGURE 5.11 – Diamètre maximal atteint par l'anneau en fonction de sa circulation. Les anneaux tourbillonnaires ont tous un diamètre initial proche de 2.55 cm.

5.3.2 Impacts doux dans l'eau

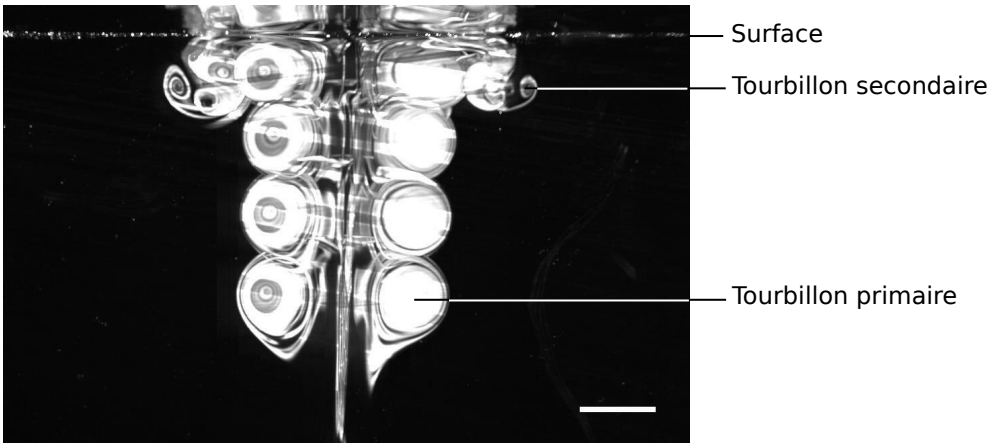


FIGURE 5.12 – Chronophotographie de l'impact d'un anneau tourbillonnaire à la surface libre de l'eau. L'anneau a un diamètre de 4.55 cm et une circulation $\Gamma = 95$ cm^2/s. Les images sont espacées de 200 ms. La ligne blanche représente 2 cm.

Changeons à présent le liquide : la figure 5.12 montre la trajectoire d'un anneau tourbillonnaire arrivant à la surface libre d'un bain d'eau. Loin de la surface, l'anneau se déplace à vitesse constante, puis ralentit lorsqu'il se trouve à une distance inférieure à trois diamètres, tandis que son rayon grandit. La trajectoire est tout à fait différente de celle observée dans l'éthanol figure 5.7, parce que l'expansion cesse rapidement. Le diamètre maximal d'expansion est de l'ordre de deux fois le diamètre initial. La différence observée entre les trajectoires dans l'éthanol et dans l'eau semble être liée à ce que dans le deuxième cas, on observe l'apparition de tourbillons secondaires contrarotatifs.

La figure 5.13 présente la formation de ces tourbillons secondaires, avec une chronophotographie de la même expérience. Leur formation se produit sur les images 3, 4 et 5, lorsqu'on voit du colorant transporté par l'anneau principal s'enrouler autour de tourbillons de circulation opposée, qui apparaissent à l'extérieur de l'anneau principal au niveau de la surface libre.

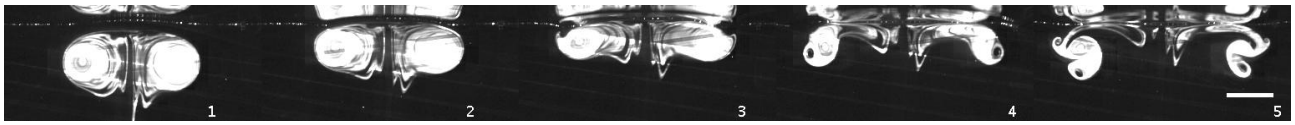


FIGURE 5.13 – Chronophotographie d'un anneau tourbillonnaire impactant la surface libre de l'eau. L'anneau a un diamètre de 4.26 cm et une circulation de 95 cm^2/s. Les images sont séparées de 80 ms. La ligne blanche représente 2 cm.

Les trajectoires de l'anneau principal et de deux anneaux secondaires font l'objet de la figure 5.14 (a), ainsi que la position de ces trois tourbillons au cours du temps (b) et (c). Le mouvement peut être décomposé en quatre phases (notées I à IV sur les figures). Pendant la première phase, l'anneau se déplace vers la surface à vitesse constante. Durant la deuxième phase, l'anneau ralentit brutalement et son rayon s'accroit. A la fin de cette phase, un tourbillon secondaire se détache de la surface. Lors de la troisième phase, le tourbillon secondaire ralentit l'expansion de l'anneau principal, et provoque son rebond de la surface. Un autre tourbillon secondaire apparait alors, induisant un deuxième rebond.

Lors de la quatrième phase, l'anneau principal se déstabilise, et on cesse de mesurer les positions.

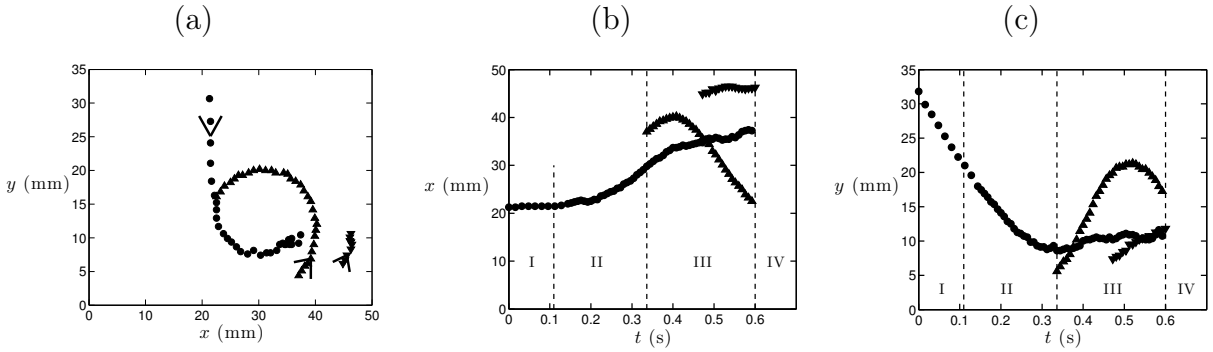


FIGURE 5.14 – (a) Trajectoire de l'anneau principal (points) et de deux anneaux secondaires (triangles), avec x la distance à l'axe de symétrie et y la distance à la surface. Les flèches indiquent le sens du mouvement. (b,c) Rayon et distance à la surface des trois tourbillons au cours du temps. Le diamètre initial du tourbillon est de 4.26 cm et sa circulation initiale est de 95 cm^2/s.

Interaction avec une surface rigide

Lorsqu'on couvre la surface avec une plaque rigide de Plexiglas, on observe des trajectoires d'impact similaires à celles obtenues avec la surface libre figure 5.13. La figure 5.15 montre ainsi la trajectoire d'un vortex de mêmes caractéristiques que celui utilisé pour la figure 5.13, impactant une plaque rigide. Comme précédemment, on observe la formation de tourbillons secondaires sur les images 3, 4 et 5. Leur formation est visible quasiment aux mêmes instants que lors de l'impact sur une surface libre.

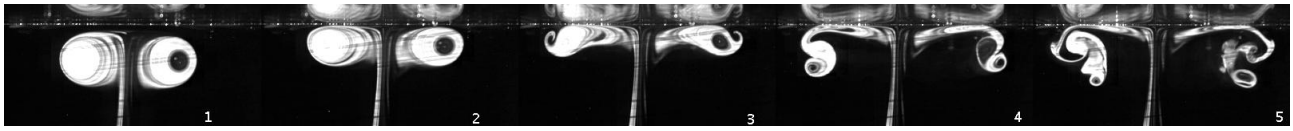


FIGURE 5.15 – Chronophotographie d'un anneau tourbillonnaire impactant une surface rigide. Le diamètre initial du tourbillon est de 4.26 cm et sa circulation initiale est de 95 cm^2/s. Les images sont espacées de 100 ms, et le liquide est de l'eau.

On trace sur la figure 5.16 les trajectoires de deux anneaux de caractéristiques identiques, le premier interagissant avec la surface libre de l'eau, le deuxième avec une plaque rigide. Les trajectoires sont quasiment indiscernables.

Ecoulement à la surface

Afin de caractériser l'écoulement qui se produit au niveau de la surface libre lors de l'interaction, on couvre celle-ci de particules et on filme par dessus, comme présenté sur la figure 5.17. La surface est observée juste avant que l'anneau principal ne se déstabilise, l'anneau se trouvant à environ une taille de coeur de la surface. Le champ de vitesse de la surface obtenu par PIV au même instant est aussi représenté. La zone centrale apparait noire à cause de sa courbure. On observe que le mouvement des particules est limité à une zone réduite au-dessus du corps de l'anneau, la vitesse estimée étant relativement faible (moins d'une dizaine de cm/s) par rapport à la vitesse induite théoriquement par l'anneau

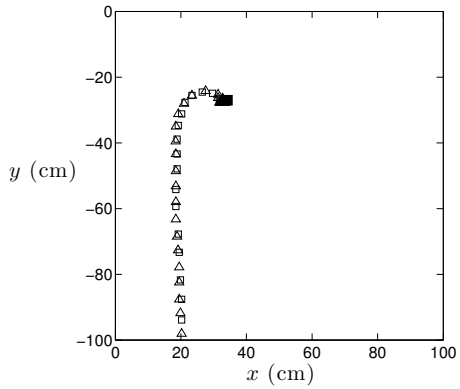


FIGURE 5.16 – Comparaison de la trajectoire de deux tourbillons de caractéristiques identiques (D=4.26 cm, Γ=95 cm^2/s) impactant la surface libre de l'eau (□) ou une surface rigide (△), avec x la distance à l'axe de symétrie et y la distance à la surface. Les symboles noirs représentent la position à laquelle les anneaux se déstabilisent.

(de l'ordre d'une centaine de centimètres par seconde). Cela montre que les écoulements sont freinés au niveau de la surface, celle-ci se comportant comme une surface quasi-rigide, ce qui conforte les précédentes observations. Sur la même figure, on observe deux autres effets liés à l'interaction : (i) il apparait une dépression circulaire au-dessus de l'anneau, discutée dans la section 5.4.3 ; (ii) durant les derniers instants, des corrugations apparaissent à la surface. L'apparition de ces corrugations découle de phénomènes non axisymétriques abordés dans la section 5.5.

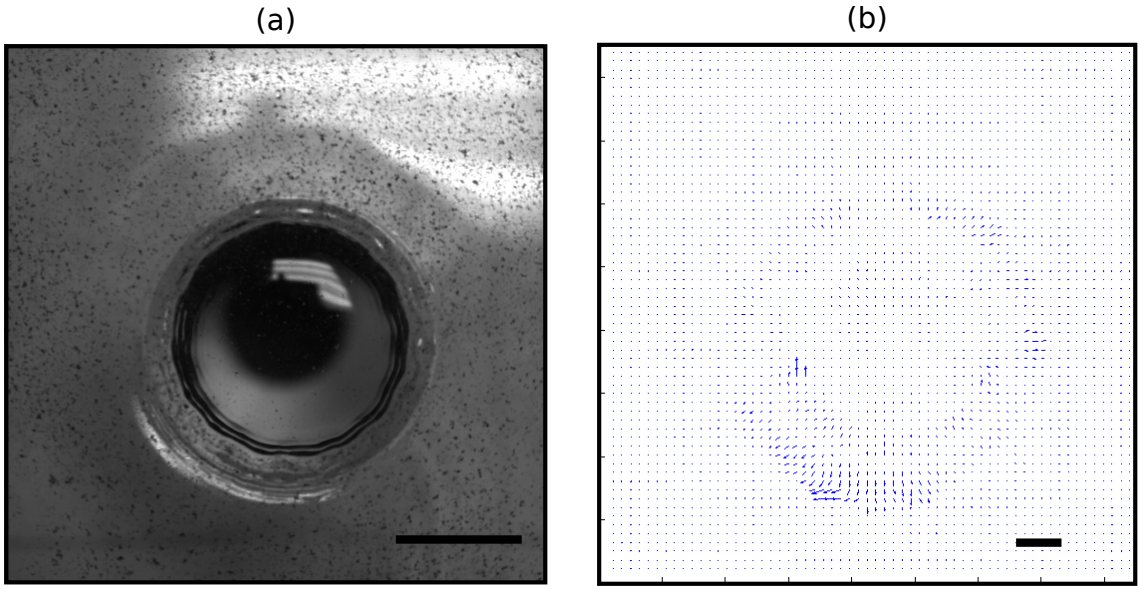


FIGURE 5.17 – (a) Vue de la surface de l'eau recouverte de particules lors de l'impact d'un anneau tourbillonnaire à la surface, au moment où l'anneau est au plus près de la surface. La barre noire fait environ 4 cm. (b) Champ de vitesse obtenu par PIV au même instant, la barre noire représentant une vitesse de 10 cm/s.

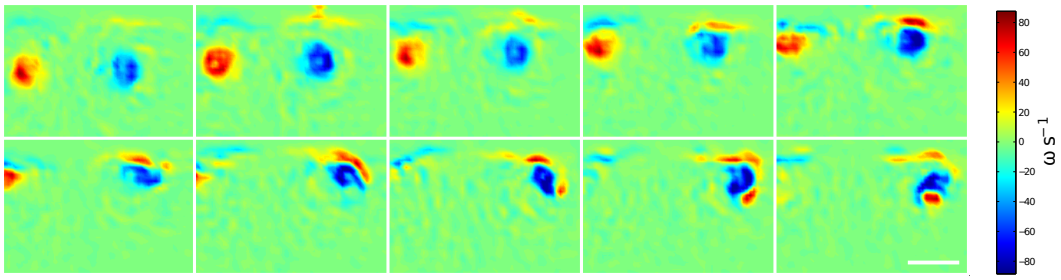


FIGURE 5.18 – Champ de vorticité lors de l'interaction d'un anneau tourbillonnaire avec la surface libre de l'eau. Les images sont espacées de 20 ms, et la ligne blanche fait 2 cm.

PIV

On a porté sur la figure 5.18 le champ de vorticité lors de l'interaction d'un anneau tourbillonnaire avec la surface libre de l'eau. On observe l'apparition d'une zone de vorticité opposée le long de la surface, correspondant à une couche limite. Dans les derniers instants, un tourbillon secondaire s'en détache. Nous vérifions ici qu'il y a formation d'une couche limite le long de la surface libre, et que les tourbillons secondaires se détachent de celle-ci.

Diamètre maximal

La figure 5.19 (a) indique comment la circulation initiale de l'anneau principal influe sur le diamètre maximal atteint au cours de l'interaction, pour deux diamètres d'injecteur. On observe que le diamètre maximal décroit faiblement avec la circulation. La dépendance étant faible, on estime un diamètre maximal moyen dans notre gamme de mesure, dont on représente la variation avec la taille de l'anneau D_0 sur la figure 5.19 (b). Il existe une relation de proportionnalité linéaire entre diamètre maximal et diamètre initial des anneaux, avec un coefficient proche de 1.58.

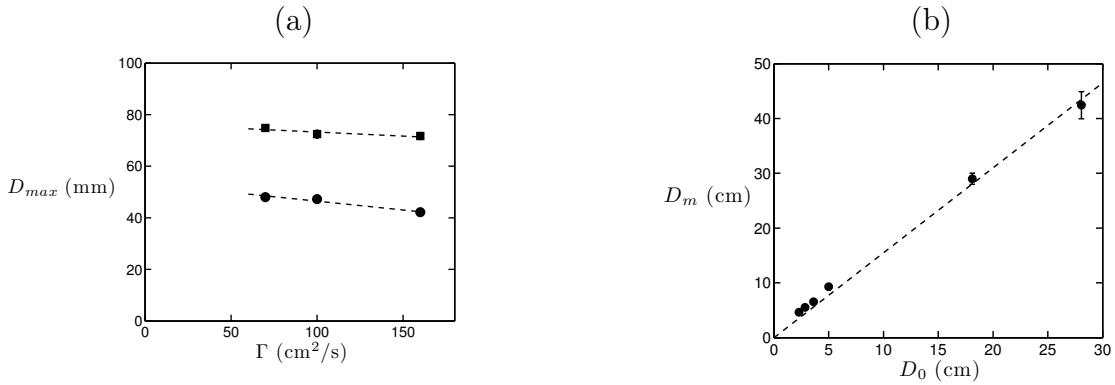


FIGURE 5.19 – (a) Diamètre maximal de l'anneau lors de l'interaction avec la surface libre de l'eau en fonction de sa circulation. Les symboles correspondent à injecteur de trois centimètres de diamètre (•), ou à piston en sortie libre de diamètre 56 mm (■). (b) Diamètre maximal moyen de l'anneau en fonction de son diamètre initial.

5.3.3 Impacts forts

Dans l'éthanol

Lorsqu'on augmente la circulation des tourbillons impactant la surface de l'éthanol, celle-ci commence à se déformer de manière visible : c'est le domaine des impacts "forts". Un exemple est présenté sur la figure 5.20 (b). Le tourbillon provoque à la surface une dépression circulaire, sur son bord extérieur. Si la dépression est trop marquée, le tourbillon principal est déstabilisé lorsqu'il passe sous celle-ci. On compare sur la figure 5.20 la déformation de la surface dans un cas doux (a) et un cas fort (b). Dans le premier cas, la surface ne se déforme pas. Dans le deuxième cas, sur la première image il y a formation de la dépression ; sur la deuxième image, le tourbillon passe sous celle-ci, ce qui entraine la formation d'un tourbillon de même sens que le tourbillon principal, indiqué par une flèche sur l'image 3. Les deux anneaux tournent alors l'un autour de l'autre, ce qui modifie la trajectoire de l'anneau principal. Après un temps court devant la durée de l'expérience les deux tourbillons se déstabilisent. Ces événements conduisent à un diamètre maximal de l'anneau beaucoup plus faible que celui obtenu pour des impacts "doux", comme on le voit sur la figure 5.11 page 86, où l'on observe que le diamètre maximal diminue pour des circulations importantes.

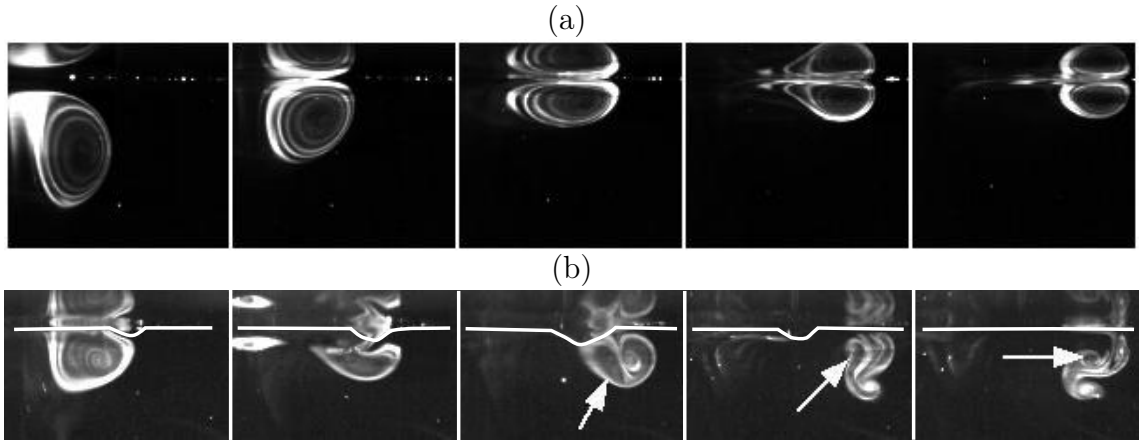


FIGURE 5.20 – Déformation du tourbillon lors de l'arrivée à la surface, sans déformation de la surface (a) et avec déformation importante de la surface (b). Les images montrent la zone proche du coeur droit du tourbillon. (a) L'anneau fait 2.25 cm de diamètre, la circulation est d'environ 80 cm^2/s. Les images sont espacées de 72 ms. (b) L'anneau fait 2.25 cm de diamètre, la circulation est d'environ 170 cm^2/s. Les images sont espacée de 32 ms. La flèche indique le point d'apparition du deuxième tourbillon et la ligne blanche la position de la surface.

Dans l'eau

Contrairement à ce qui se produit dans l'éthanol, la formation d'un anneau secondaire dans l'eau n'est pas forcément le signe d'une déformation de la surface. En effet, dans notre gamme d'étude, on observe toujours la formation de tourbillons secondaires dans l'eau, avec ou sans déformation notable de la surface. Les anneaux de grande circulation entrainent une déformation importante de la surface, comparable à celle observée dans l'éthanol. L'amplitude de la déformation s'accroit avec la circulation de l'anneau, les circulations les plus élevées induisant un pincement de la surface, et la formation d'un anneau de bulles, comme on le voit sur la figure 5.21. Ces bulles rendent le pincement aisément

décelable, que ce soit visuellement ou par le bruit qu'elles font lorsqu'elles éclatent.

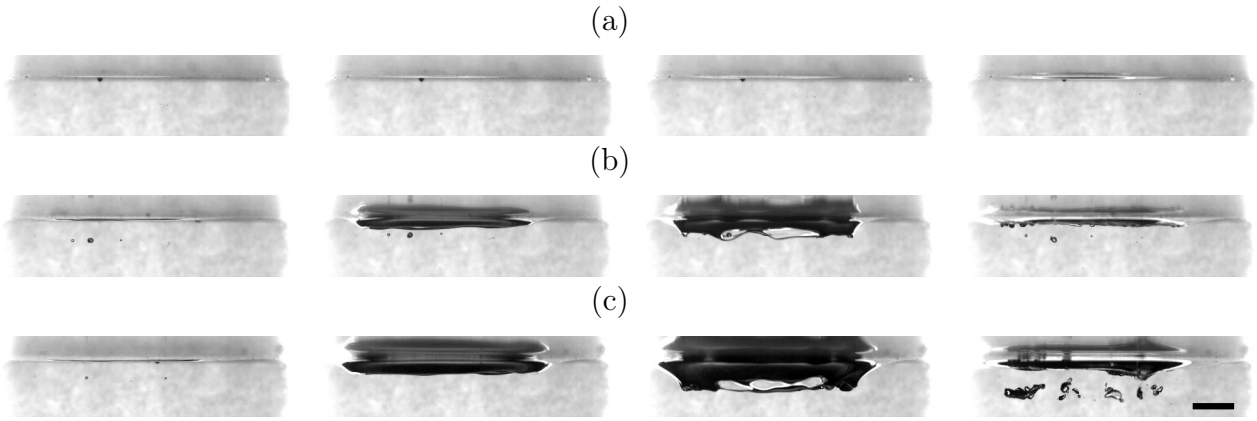


FIGURE 5.21 – Déformation de la surface lors de l'impact d'un anneau formé par un injecteur de diamètre $d = 4$ cm. La ligne noire représente 2 cm et les images sont séparées de 32 ms. Les anneaux ont des circulations croissantes : (a) 35 cm^2/s, (b) 92 cm^2/s, (c) 140 cm^2/s, dans ce dernier cas on observe un pincement de la surface et la formation de bulles.

En variant L_p, et donc la circulation, pour trois diamètres d'injecteur, on trouve la valeur minimale pour laquelle la surface se pince. Les caractéristiques des anneaux correspondants sont présentées sur la table 5.1.

Diamètre de l'injecteur (cm)	R_0 (cm)	Γ (cm^2/s)	V (cm/s)
2	2.96	90	36
3	3.78	106	32.6
4	5.24	130	25.4

TABLE 5.1 – Caractéristiques d'anneaux formés par différents diamètres d'injecteurs à la limite du pincement dans l'eau. La circulation est estimée par PIV et la vitesse V de montée des anneaux par traitement vidéo.

5.4 Modèles et discussions

5.4.1 Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire à l'approche de la surface

Principe de l'image

Dans le cadre de la représentation potentielle des écoulements, imaginons qu'une paire de tourbillons ou qu'un anneau tourbillonnaire se trouvent à proximité d'une paroi rigide plane. Si on décrit la vitesse dans l'écoulement comme celle étant induite par le tourbillon, la vitesse normale estimée à la paroi est non nulle. Or la présence d'une paroi rigide se traduit par une vitesse normale nulle à sa frontière. Afin que cette condition soit remplie, on introduit une paire de vortex image, symétrique de la paire principale et de circulation inverse (ou un anneau image), comme représenté sur la figure 5.22. La vitesse normale à la paroi déduite du potentiel de vitesse est alors nulle par symétrie. L'introduction du vortex

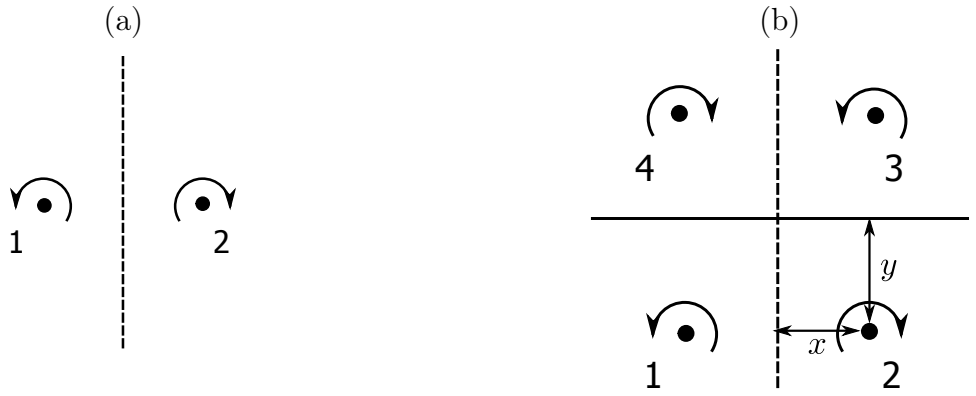


FIGURE 5.22 – (a) Paire de vortex loin de toute paroi. (b) Paire de vortex (1 et 2) et vortex images (3 et 4) et définition du rayon et de la distance à la surface rigide (en noir).

image modifie la vitesse de l'écoulement, et il induit une vitesse sur le vortex principal. Pour calculer la vitesse du vortex principal on utilise le principe de superposition : la vitesse du vortex principal est égale à la vitesse induite par tous les autres vortex au point où il se trouve. Afin de prédire la trajectoire d'un anneau tourbillonnaire qui approche une surface idéale, je cherche la trajectoire de l'anneau à l'approche d'une surface rigide. Dans cette section, je commence par calculer la trajectoire d'une paire de tourbillons impactant normalement une paroi, parce que la résolution est simple et donne une expression analytique. Dans un deuxième temps, on revient au problème des anneaux.

Trajectoire d'une paire de vortex approchant normalement une surface rigide plane

On cherche à comparer la trajectoire d'une paire de vortex approchant normalement une surface rigide plane [figure 5.22 (a) et (b)]. Le système est constituée du vortex n°1 de circulation $\Gamma_1 = -\Gamma$ et du vortex n°2 de circulation $\Gamma_2 = \Gamma$, à une distance $2x$ l'un de l'autre. On note $\underline{U}_{ij}$ la vitesse induite par le vortex i sur le vortex j. Supposons tout d'abord que l'on se trouve loin de la surface rigide. Le vortex n°2 induit une vitesse $\underline{U}_{21} = -\frac{\Gamma}{4\pi R}\underline{e_y}$ sur le vortex n°1, et vice versa. La paire de vortex se déplace donc à la vitesse $\underline{U} = -\frac{\Gamma}{4\pi R}\underline{e_y}$, la distance entre les vortex restant constante.

Introduisons maintenant la paroi rigide. Pour représenter l'effet de la paroi sur l'écoulement on introduit une paire de vortex image, symétrique de la paire principale et de circulation opposée. Par symétrie, il suffit de calculer la trajectoire d'un vortex pour déduire la trajectoire de tous les autres. On calcule la vitesse induite par chaque vortex sur la vortex numéro 1, et on en déduit sa vitesse verticale et horizontale. (Il est équivalent d'additionner les potentiels de vitesse des trois tourbillons puis de dériver le potentiel obtenu à la position du vortex numéro 1.)

$$\underline{U}_{21} = -\frac{\Gamma}{4\pi x}\underline{e_y} \tag{5.1}$$

$$\underline{U}_{31} = \frac{\Gamma}{4\pi(x^2+y^2)}(y\underline{e_x} - x\underline{e_y}) \tag{5.2}$$

$$\underline{U}_{41} = -\frac{\Gamma}{4\pi y}\underline{e_x} \tag{5.3}$$

On a donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi y}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \tag{5.4}$$

et

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi x}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi x}\left(-1+\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \tag{5.5}$$

On remarque que la vitesse d'ascension ralentit de 10 pour cent lorsque la paire de vortex se trouve à une distance $y = 3x$ de la surface.

On remarque en outre que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0 \tag{5.6}$$

ce qui donne l'équation de la trajectoire : $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = A$, où A est une constante. A est estimé loin de la surface : au début de la trajectoire, lorsque y est grand on a $A = x_0^2$. Lorsque le rayon de l'anneau est grand, vers la fin de la trajectoire, on a $A = y_{min}^2$. Donc la distance minimale à la surface y_{min} est égale à la demi-distance R entre les tourbillons. La trajectoire obtenue pour une paire de tourbillons bidimensionnels en ascension verticale vers la surface est représentée sur la figure 5.23 (a).

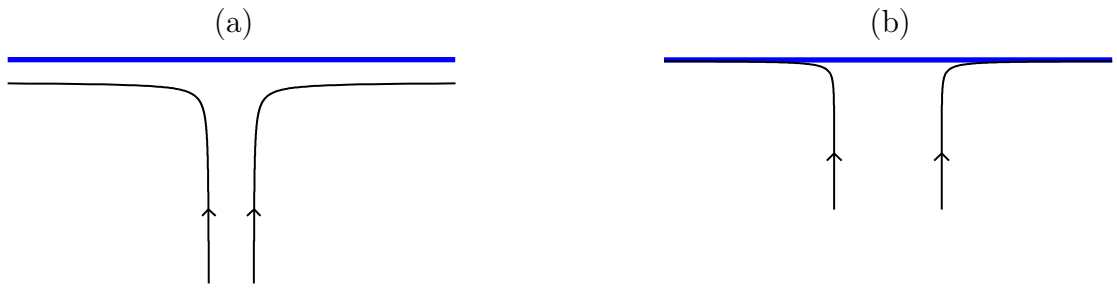


FIGURE 5.23 – (a) Trajectoire d'une paire de vortex bidimensionnels en ascension verticale vers une surface rigide indiquée en bleu. (b) Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire en ascension verticale vers une surface rigide.

Trajectoire d'un anneau tourbillonnaire à l'approche d'une surface rigide plane

On cherche maintenant à décrire la trajectoire d'un anneau tourbillonnaire impactant normalement une surface plane. Afin d'imposer la condition de vitesse normale nulle à la paroi, on introduit un anneau tourbillonnaire image construit par symétrie par rapport à la surface. On cherche tout d'abord le potentiel de l'écoulement afin de calculer les vitesses induites sur l'anneau. On trouve dans la littérature le potentiel de vitesse d'un anneau tourbillonnaire écrit à l'aide des intégrales elliptiques du premier et second ordre K et E. La forme du potentiel de vitesse a été trouvée par Helmholtz en 1867 [61], et on en utilise l'expression donnée par Walker [65] qui est plus commode.

Le potentiel de vitesse, somme du potentiel de l'anneau principal (premier terme de l'équation) et de l'anneau image (second terme de l'équation) est noté dans l'équation suivante, avec R le rayon de l'anneau et Y sa distance à la paroi :

$$\Psi(x,y) = \frac{(Rx)^{1/2}}{2\pi k}\{(2-k)K(k) - E(k)\} - \frac{(Rx)^{1/2}}{2\pi \bar{k}}\{(2-\bar{k})K(\bar{k}) - E(\bar{k})\} \tag{5.7}$$

avec x qui représente la distance à l'axe de symétrie et y la distance à la surface, R le rayon de l'anneau et Y sa distance à la surface, et $\bar{k}^2 = \frac{4Rx}{(y+Y)^2+(R-x)^2}$, $k^2 = \frac{4Rx}{(y-Y)^2+(R-x)^2}$, où K et E sont les intégrales elliptiques complètes de premier et second ordre définies par $K(k) = \int_0^{\pi/2}(1-k^2 sin^2 u)^{-1/2}du$ et $E(k) = \int_0^{\pi/2}(1-k^2 sin^2 u)^{1/2}du$.

On en déduit la vitesse induite par l'anneau image sur l'anneau principal, notée avec des indices i. :

$$Ux_i = \frac{\Gamma\bar{k}}{4\pi Y}\{(2-\bar{k})K(\bar{k}) - E(\bar{k})\},\ Uy_i = \frac{\Gamma\bar{k}}{4\pi R}\left(K(\bar{k}) - E(\bar{k})\right) \tag{5.8}$$

Afin de connaitre la trajectoire de l'anneau au cours du temps, on additionne maintenant la vitesse auto-induite de l'anneau (vitesse loin de la surface discutée dans le chapitre précédent) avec la vitesse induite par l'anneau image.

$$Ux = \frac{\Gamma\bar{k}}{4\pi Y}\{(2-\bar{k})K(\bar{k}) - E(\bar{k})\} + \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - 0.25\right),\ Uy = \frac{\Gamma\bar{k}}{4\pi R}\left(K(\bar{k}) - E(\bar{k})\right) \tag{5.9}$$

Comme $K(k)$ et $E(k)$ n'ont pas d'expression littérale, on intègre numériquement cette équation afin d'obtenir la trajectoire de l'anneau au cours du temps. Pendant le mouvement, et en supposant que le temps caractéristique de croissance du tourbillon par diffusion est petit, le volume initial de l'anneau est conservé, ce qui s'écrit : $2\pi^2 Ra^2 = 2\pi^2 R_0 a_0^2$ avec R_0 et a_0 les rayon et taille de coeur initiaux de l'anneau tourbillonnaire, ce qui nous permet d'estimer $a(R)$ au cours du temps. On remarque que la trajectoire théorique n'est pas fonction de Γ, mais seulement de R_0 et a_0, Γ influençant seulement la vitesse de parcours de la trajectoire.

On présente sur la figure 5.23 (b) une trajectoire typique obtenue, comparée à la trajectoire d'une paire de vortex bidimensionnels (a). On observe que dans le cas de l'anneau la distance à la surface tend vers zéro. Sur la figure 5.7 page 84 on compare la trajectoire théorique à la trajectoire réelle obtenue pour un anneau impactant la surface dans l'éthanol. On observe un bon accord au début des trajectoires, l'estimation prédisant bien à quelle distance l'anneau ressent la surface. On observe cependant que l'anneau ne se rapproche pas autant de la surface que prévu par le modèle, le coeur de l'anneau ne pouvant traverser la barrière qu'impose la surface, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle proposé.

Trajectoires réelles

On s'intéresse maintenant qualitativement à l'influence de la circulation sur les trajectoires réelles. La figure 5.24 (a) montre ainsi un ensemble de trajectoires obtenues dans l'éthanol. Les anneaux tourbillonnaires ont tous un diamètre initial proche de 2.5 cm et une vitesse comprise entre 15 et 33 cm/s. Les différents essais sont distingués par le nombre de Reynolds de l'anneau, le nombre de Reynolds étant estimé, dans cette section seulement, par : $Re = \rho\frac{2RV}{\eta}$, avec V la vitesse verticale de l'anneau, mesurée sur les vidéos. Comme on l'a décrit précédemment, lorsque l'anneau arrive à la surface il ralentit et s'agrandit, puis rebondit légèrement sur la paroi. Cette trajectoire varie avec le Reynolds et on observe que le rayon maximal atteint augmente avec Re dans la gamme Re = 2000-5000. Quand le Reynolds devient plus élevé, on entre dans la gamme des impacts "forts" (pour $Re > 5000$) pour lesquels l'anneau déforme fortement la surface, formant une dépression circulaire au-dessus du coeur de l'anneau. Cette dépression modifie la trajectoire de l'anneau en engendrant un tourbillon secondaire, ce qui entraine une forte diminution du diamètre

maximum atteint. Les différents types de trajectoires font l'objet de la figure 5.24 (a), sur laquelle on a représenté la trajectoire de 4 anneaux. Pour trois anneaux de Reynolds croissant, le rayon maximal augmente avec Re (Re = 2380, 3340, 3490) ; et pour l'anneau de Reynolds plus élevé (Re =5420) le trajectoire est modifiée par la déformation de la surface. Celle-ci entraine l'apparition d'un vortex secondaire qui interagit avec l'anneau principal, stoppant l'expansion de celui-ci. Pour des Reynolds encore plus importants la déformation de la surface est encore plus importante et les anneaux ne grandissent presque pas, comme le montre la figure 5.9 (c) page 85.

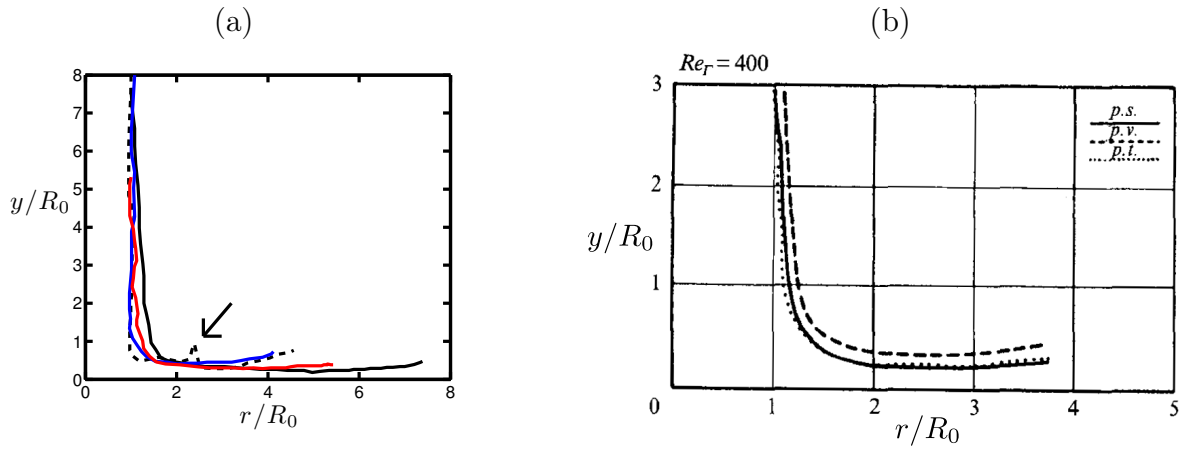


FIGURE 5.24 – (a) Trajectoire d'anneaux tourbillonnaires lors de l'interaction avec une surface libre d'éthanol, avec y la distance au plan de symétrie et r la distance à l'axe de symétrie. Les distances sont adimensionnalisées par la rayon initial de l'anneau. Les anneaux tourbillonnaires ont des nombres de Reynolds initiaux de 2380 (bleu), 3340 (rouge), 3480 (noir) and 5420 (pointillés noir). La flèche indique la position pour laquelle l'anneau à Reynolds le plus élevé interagit avec un anneau secondaire. (b) Impact de deux anneaux coaxiaux symétriques (voir figure 5.25). La figure représente la trajectoire d'un anneau avec y la distance au plan de symétrie et r la distance à l'axe de symétrie. Les distances sont normés par la rayon initial de l'anneau, reproduit de Chu *et al* [63]. Dans cet article, les lignes de courant (ligne noire continue), la position du maximum de vorticité (ligne pointillée) et du centre de la zone colorée (points) sont mesurées indépendamment.

Comparaison

Les trajectoires observées pour des Reynolds inférieurs à 5000 sont semblables à celles mesurées par Chu *et al.* [63] qui ont étudié la collision frontale de deux anneaux identiques. Une de ces expériences font l'objet de la figure 5.25. Sur figure 5.24 (b), on a reproduit la trajectoire mesurée lors de la collision frontale de deux anneaux tourbillonnaires à Reynolds $Re = 400$, les distances étant normées par le rayon initial de l'anneau, y représentant la distance au plan de symétrie droite/gauche et r la distance à l'axe de symétrie (axe de propagation des anneaux). On observe que durant l'interaction, les anneaux s'agrandissent puis rebondissent légèrement, et que le rayon maximal de l'anneau s'accroit avec le nombre Reynolds, dans la même gamme que dans notre étude. Les trajectoires obtenues par collision frontale sont donc similaires à celles que nous avons obtenues, ce qui semble prouver que la surface libre de l'éthanol se comporte bien comme une surface idéale, tant qu'elle n'est pas trop déformée.

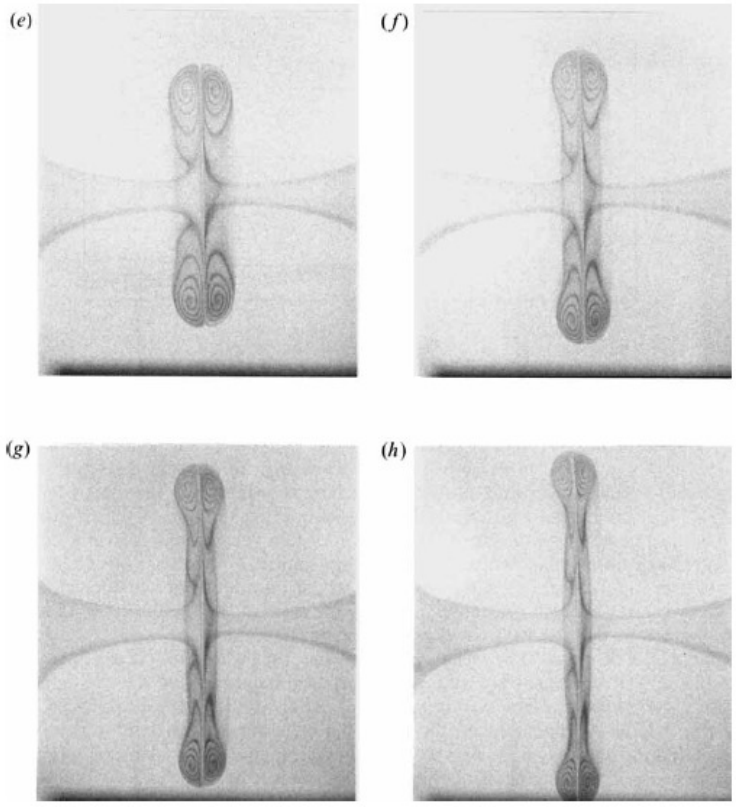


FIGURE 5.25 – Collision frontale de deux anneaux coaxiaux de caractéristiques identiques. Les anneaux ont un Reynolds de 1500 et sont formés par un injecteur de 32 mm de diamètre. Les images sont espacées d'approximativement 2 s. Extrait de [63].

5.4.2 Trajectoires après formation d'anneaux secondaires

On cherche ici à comprendre pourquoi la trajectoire des anneaux tourbillonnaires qui approchent la surface libre de l'eau est si différente de la trajectoire théorique obtenue dans la section 5.4.1, et des trajectoires observées dans l'éthanol.

Surface libre et surface rigide

On a observé que les anneaux avaient le même comportement qu'ils approchent la surface libre de l'eau ou une paroi solide. En théorie, ce qui distingue ces deux cas est la condition sur la vitesse à la surface. Dans le cas d'une surface libre la composante normale de la vitesse est prise égale à la vitesse de la surface, que l'on considérera nulle ("impacts doux"), et il n'y a pas de contrainte sur la vitesse tangentielle. Dans le cas d'une paroi solide, la vitesse est nulle à la paroi. Comme on l'a montré la surface de l'eau semble imposer une vitesse tangentielle quasi nulle (figure 5.17). Notre discussion porte sur la relation entre cette condition et les tourbillons secondaires.

Critère d'apparition d'un anneau secondaire

Lors de l'approche de l'anneau, une couche limite d'épaisseur δ se développe à la paroi, comme on l'a vu expérimentalement sur la figure 5.18. Elle résulte d'une condition de vitesse nulle à la paroi et de deux moteurs, la vitesse extérieure à la couche limite supposée connue par le modèle d'écoulement potentiel, et le gradient de pression le long de la paroi. Comme dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre discuté chapitre 4 et schématisé figure 5.26 (a), l'écoulement induit par l'anneau crée une zone dans laquelle le gradient de pression et l'écoulement extérieur sont antagonistes (b). On a représenté sur la figure un profil typique de vitesse tangentielle imposée par l'écoulement potentiel à la surface. Dans la zone où la vitesse tangentielle augmente, le gradient de pression est de même sens que l'écoulement extérieur (U_p, en noir). Dans la zone où la vitesse tangentielle diminue, le gradient de pression est de sens inverse.

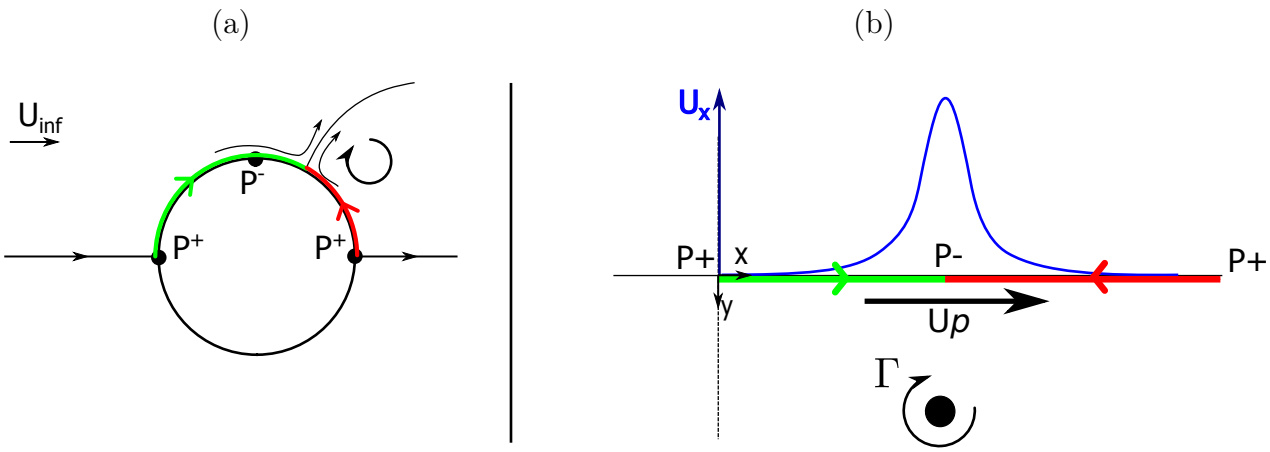


FIGURE 5.26 – (a) Décollement de la couche limite derrière un cylindre. (b) Couche limite résultant de la vitesse imposée par l'anneau de circulation Γ à la surface, représentée en vert et bleu. La vitesse imposée par le tourbillon est notée U_p. En bleu on représente la valeur théorique de U_p à la surface.

La figure 5.27 représente un profil de vitesse tangentielle typique induite le long de la

paroi par une anneau tourbillonnaire, la vitesse étant estimée pour un écoulement potentiel, comme décrit section 5.4.1.

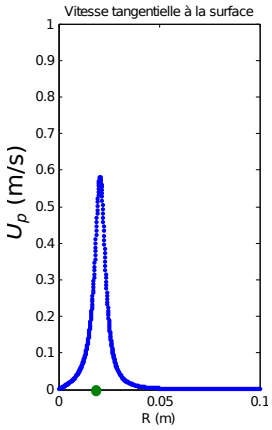


FIGURE 5.27 – Vitesse tangentielle $U_p(r)$ typique imposée par un anneau tourbillonnaire à la surface, R représente la distance à l'axe de symétrie. La vitesse est calculée connaissant l'écoulement potentiel (section 5.4.1). La position du coeur de l'anneau est indiqué par un point vert.

Comme dans le chapitre 4, on se place dans les hypothèses de lubrification dans la couche limite. La vitesse moyenne dans la couche limite $\overline{U}$ s'écrit alors :

$$\overline{U} = \frac{U_p}{2} - \frac{\delta^2}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.10}$$

Lorsque le gradient de pression est suffisamment grand, il impose le sens de l'écoulement dans la couche limite, comme représenté en couleur sur la figure 5.26 (b).

On estime ce gradient de pression en appliquant l'équation de Bernoulli le long de la surface (la pression dans la couche limite est égale à la pression dans l'écoulement extérieur), ce qui donne :

$$\underline{Grad}\left[\frac{U_p^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right] = \underline{0} \;\Rightarrow\; \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_p \frac{\partial U_p}{\partial x}\ . \tag{5.11}$$

Le décollement a lieu lorsque la vitesse moyenne s'annule localement dans la couche limite, à la rencontre des droites vertes en rouges sur la figure 5.26 (b). Un critère de décollement s'écrit alors :

$$\frac{\partial U_p}{\partial x} = -6\frac{\nu}{\delta^2}\ . \tag{5.12}$$

Afin d'écrire complètement le critère il faut estimer l'épaisseur δ de la couche limite. On fait l'hypothèse que δ varie comme l'épaisseur de la couche limite se développant sur une plaque plane semi-infinie : $\delta = \alpha\sqrt{\nu t}$ avec t le temps nécessaire à emmener une particule du début de la couche limite au point où on estime l'épaisseur. Dans notre problème on estime t comme étant le temps nécessaire à couvrir la distance de 0, axe de symétrie du problème et point de stagnation de la vitesse, au point d'abscisse r, avec $\overline{U_p(r)}$ la vitesse moyenne sur ce parcours donc $t(r) = r/\overline{U_p(r)}$. (On ne définit pas $t(r)$ comme $t(r) = \int_0^r \frac{dr}{U_p(r)}$ car U_p étant nulle en zéro cette expression ne converge pas).

Estimant l'épaisseur de la couche limite avec ces hypothèses et connaissant la vitesse tangentielle à la surface et son gradient on trace $\frac{\partial U_p}{\partial x}$ et $-6\frac{\nu}{\delta^2}$ au cours du temps. On adapte la valeur du préfacteur α de manière à ce que le critère théorique de décollement soit atteint

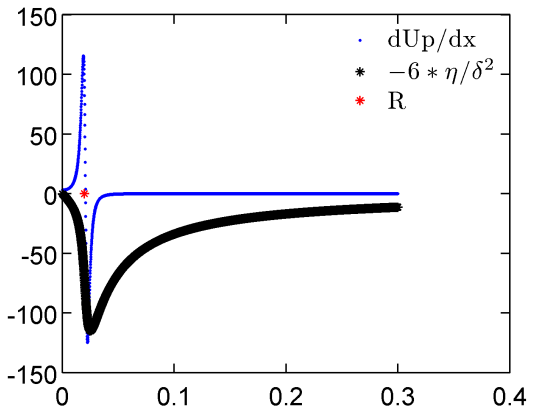


FIGURE 5.28 – Vérification du critère au moment de décollement de la couche limite supposé

(intersection des deux courbes) à l'instant pour lequel la trajectoire expérimentale et la trajectoire théorique divergent (figure 5.28).

On trouve un facteur d'ajustement de l'épaisseur de la couche limite $\alpha = 0.2 \pm 0.02$ sur un essai, que l'on utilisera ensuite quelque soit les caractéristiques de l'anneau.

Trajectoire des anneaux après décollement de la couche limite

Connaissant le moment de formation du premier anneau secondaire on tente d'estimer ses caractéristiques : circulation et position afin de l'introduire dans la résolution numérique de la trajectoire et de vérifier si son apparition permet de mieux décrire la trajectoire de l'anneau principal. On peut estimer la vorticité présente dans la couche limite en mesurant la circulation de la vitesse le long d'un contour fermé rectangulaire de taille $\delta \times L$ et le flux de vorticité à travers ce contour (figure5.29) :

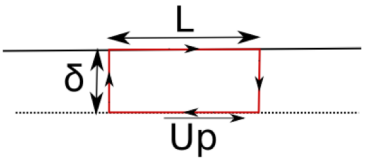


FIGURE 5.29 – Estimation de la vorticité de la couche limite dans un contour fermé

$$\oint \underline{U}.\underline{dl} = \int \underline{\omega}.\underline{ds} \tag{5.13}$$

$$\omega = \frac{U_p}{\delta} \tag{5.14}$$

La longueur de la couche limite qui donne naissance à un anneau secondaire L est estimée égale à une fraction de la largeur à mi-hauteur du pic de vitesse U_p (figure 5.27). Ayant estimé ces grandeurs on introduit dans notre résolution numérique une anneau tourbillonnaire secondaire de circulation $\Gamma_s = \omega\delta L = U_p L$.

La trajectoire obtenue pour les deux tourbillons est tracée sur la figure 5.30 et on vérifie que la trajectoire du vortex primaire est comparable aux trajectoires expérimentales lorsque l'on introduit un anneau secondaire bien choisi. (On a positionné l'anneau secondaire de manière à observer des trajectoires comparables aux expériences, à une distance plus grande

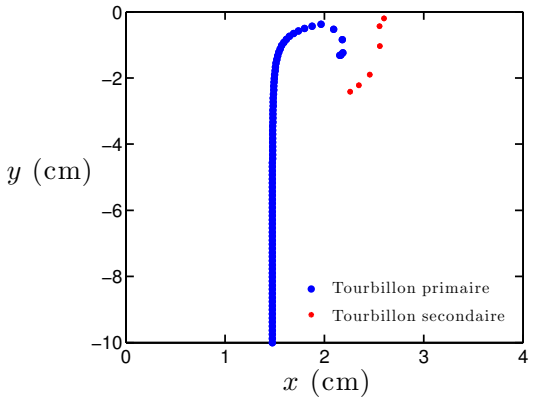


FIGURE 5.30 – Trajectoire de l'anneau primaire et de l'anneau secondaire.

de l'anneau primaire que ne le suggérait la position théorique du décollement, afin d'illustrer qualitativement l'influence de tourbillon secondaire.)

On a maintenant à disposition un critère qui permet d'évaluer le moment d'apparition d'un anneau secondaire quelles que soient les caractéristiques de l'anneau principal. Le rayon de l'anneau principal cesse de croitre juste après l'apparition du premier anneau secondaire, on en déduit le rayon final de l'anneau. On trace sur la figure 5.31 le rayon maximal atteint expérimentalement et le rayon maximal prédit, en fonction du rayon initial de l'anneau, pour des anneaux de circulation 70 cm^2/s et 100 cm^2/s, et de rayon initial entre 10 et 80 mm. Les mesures et la prédiction sont compatibles dans une grande gamme de rayon initiaux.

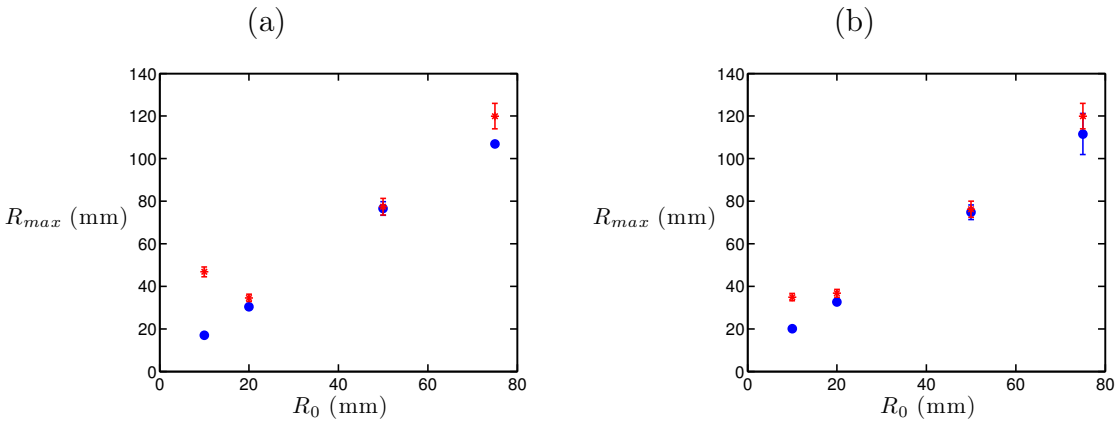


FIGURE 5.31 – Rayon maximal atteint en fonction du rayon initial de l'anneau. Les points bleus représentent les mesures et les points rouges le rayon attendu après décollement de la couche limite. Les anneaux tourbillonnaires ont une circulation initiale de (a) 70 cm^2/s et (b) 100 cm^2/s.

5.4.3 Pincement de la surface

Quand les anneaux impactent la surface, ils induisent un écoulement qui forme une dépression près du bord de l'anneau [figure 5.32 (a)]. Lorsque les anneaux ont une circulation importante la dépression se déstabilise sous forme de bulles qui sont entrainées dans le bain (figure 5.21 page 92). Le critère de déformation de la surface habituellement proposé compare le nombre de Froude des anneaux, $Fr = \frac{\Gamma}{(gD^3)^{1/2}}$ à l'unité, la surface se

défromant pour des valeurs supérieures à 1 [67]. Les caractéristiques d'anneaux obtenus avec des injecteurs de 2, 3 et 4 cm, pour la circulation minimale à partir de laquelle on observe un pincement de la surface sont présentées sur la table 5.2, ainsi que le Froude estimé. Le Froude décroit avec le diamètre des anneaux et n'est donc pas un bon critère du pincement de la surface dans nos expériences. On recherche un autre critère en étudiant l'évolution de la dépression en fonction de la circulation des anneaux.

A l'instant où la profondeur de la dépression est maximale, l'anneau se trouve à une distance de la surface de l'ordre de son rayon de coeur, la distance de l'anneau à la dépression est du même ordre a. La vitesse imposée par l'anneau à cet endroit U_m forme un dépression de profondeur h. Une estimation rapide de h est donnée en appliquant le théorème de Bernoulli entre le point où la dépression se forme et un point loin de l'anneau, au niveau de la surface libre, au niveau duquel la vitesse est nulle, ce qui donne :

$$h = \frac{U_m^2}{2g} \tag{5.15}$$

La figure 5.32 (b) représente h en fonction de $U_m^2/2g$ pour quatre anneaux de circulation croissante formés avec un injecteur de 4 cm de diamètre. (U_m est estimée après avoir mesuré Γ et a par PIV, par la relation $U_m = \Gamma/2\pi a$). L'estimation est proche de l'amplitude de la dépression mesurée, donc $h \approx U_m^2/2g$.

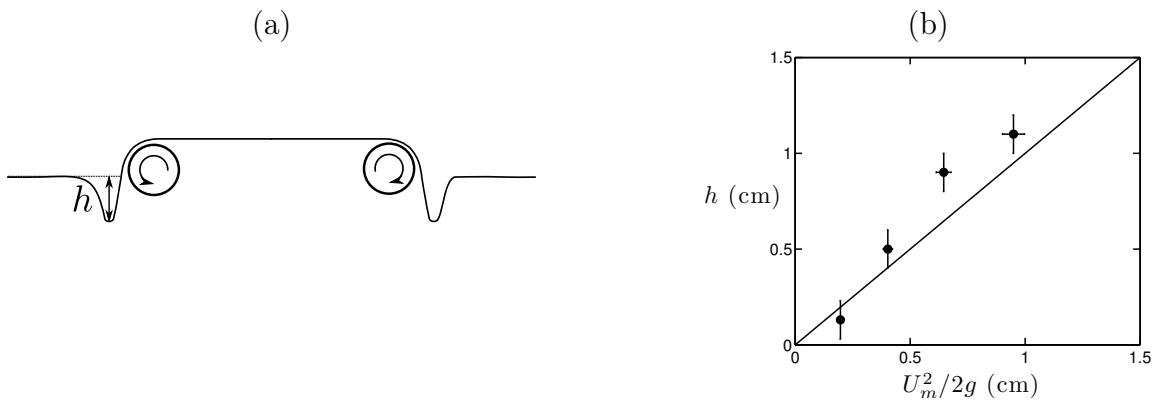


FIGURE 5.32 – (a) Représentation schématique de la surface lors d'un impact "fort" dans l'eau, la surface libre est déformée avec une amplitude h. (b) Profondeur de la déformation en fonction de la vitesse induite par l'anneau, la relation linéaire proposée par le modèle est tracée en noir (équation (5.15)).

La table 5.2 reporte la profondeur de la dépression estimée $h_{calc} = U_m^2/2g$ pour des anneaux obtenus avec des injecteurs de 2, 3 et 4 cm, pour la circulation minimale à partir de laquelle on observe un pincement de la surface. Dans les trois cas la dépression qui provoque le pincement de la surface a une profondeur h est de l'ordre de 3 mm. Le mécanisme de pincement de la surface ne sera pas plus discuté dans le chapitre, on remarque seulement qu'au delà d'une profondeur de dépression de 3 mm que l'on peut estimer à l'aide de a et Γ, la dépression se déstabilise. On utilisera le même critère lors de l'étude du pincement de la surface par des bulles toroïdales chapitre 6.

Diamètre de l'injecteur (cm)	D_0 (cm)	Γ (cm^2/s)	Fr	a (cm)	V (cm/s)	h_{calc} (mm)
2	2.96	90	0.56	0.57	36	3.2
3	3.78	106	0.46	0.64	32.6	3.5
4	5.24	130	0.34	0.87	25.4	2.9

TABLE 5.2 – Caractéristiques d'anneaux obtenus avec des injecteurs de 2, 3 et 4 cm, pour la circulation minimale à partir de laquelle on observe un pincement de la surface et la profondeur de la dépression résultante h_{calc} obtenue par l'équation (5.15).

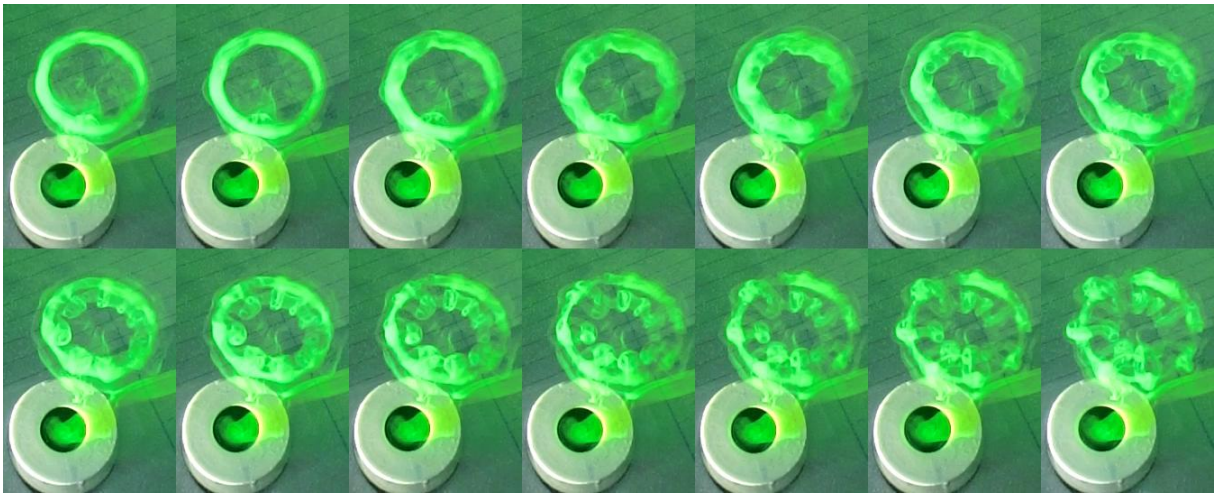


FIGURE 5.33 – Chronophotographie de l'interaction d'un tourbillon avec la surface, vue de dessus. Les images sont espacées de 83 ms. Le tourbillon a un diamètre initial de l'ordre de 4 cm et une circulation de 95 cm^2/s.

5.5 Stabilité des tourbillons

5.5.1 Observations

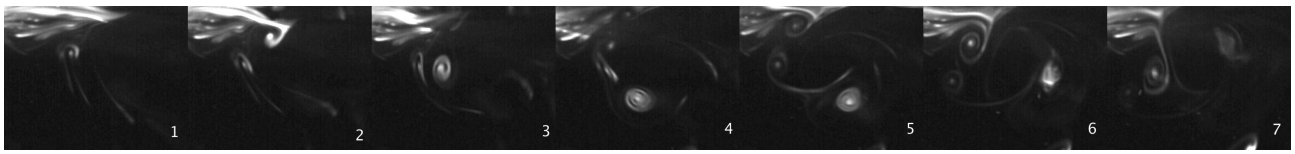
Dans tout ce qui précède, les phénomènes présentés sont axisymétriques. Cela nous a permis de prédire le diamètre maximal de l'anneau lors de l'interaction avec la surface libre, grâce à un critère impliquant le décollement de la couche limite. Nous n'avons pas décrit en détail les dernières étapes de l'interaction entre le tourbillon primaire et les tourbillons secondaires. On a vu que dans un premier temps les tourbillons interagissent, les tourbillons secondaires modifiant la trajectoire du tourbillon primaire, ce qui arrête son expansion. Dans un deuxième temps la structure entière se déstabilise et devient non-axisymétrique.

Un évènement de déstabilisation est présenté sur la figure 5.33 avec une vue de dessus en contre plongée, le tourbillon principal étant coloré en masse. On observe la formation d'une longueur d'onde de déformation bien définie, suivie de la déstabilisation de l'ensemble. La figure 5.34 présente les différentes étapes de détachement de tourbillons secondaires obtenus en déposant du colorant à la surface de manière à ce que seule la vorticité secondaire soit marquée. Sur l'image (a) on observe qu'il peut se produire plusieurs détachement les uns après les autres, sur l'image (b) que le détachement est symétrique droite/gauche, et sur l'image (c) que les tourbillons formés de chaque coté suivent une trajectoire symétrique. Toutes ces observations laissent à penser que les tourbillons secondaires sont initialement axisymétriques.

A l'aide d'une tranche laser horizontale placée près de la surface et en filmant par dessus on observe l'interaction entre le tourbillon primaire et des tourbillons secondaires, comme présenté sur la figure 5.35. Les tourbillons secondaires forment des boucle qui se re-connectent, puis l'ensemble de la structure se déstabilise.

Un zoom de l'interaction est présenté figure 5.36. L'éjection de la couche limite se fait bien sous la forme d'un anneau initialement axisymétrique, indiqué par une flèche blanche sur l'image. L'anneau secondaire tourne ensuite autour de l'anneau primaire (dans le plan de vue proposé il s'éloigne), puis passe sous celui-ci sur l'image 4. Les mesures PIV présentées précédemment montrent que les anneaux secondaires ont une circulation opposée et plus faible que les anneaux primaires.

(a)



(b)

(c)

FIGURE 5.34 – Apparition de tourbillons secondaires au niveau de la surface libre. Du colorant a été déposé à la surface de façon à ce que seule la vorticité secondaire soit marquée. (a) Chronophotographie du détachement au dessus du coeur gauche de l'anneau principal. Les images sont espacées de 40 ms. Deux détachements ont lieu sur les images 2 et 6. (b) Instantané lors du détachement d'un tourbillon secondaire, il se produit au même instant à droite et à gauche. (c) Superposition d'images lors du détachement, les prises de vue sont espacées de 24 ms.

L'anneau secondaire se déforme ensuite sous forme de boucles, comme schématisé sur la figure 5.37. Les boucles semblent ensuite se reconnecter, formant des anneaux tourbillonnaires à l'échelle de la longueur d'onde de déstabilisation, puis l'ensemble de la structure se déstabilise.

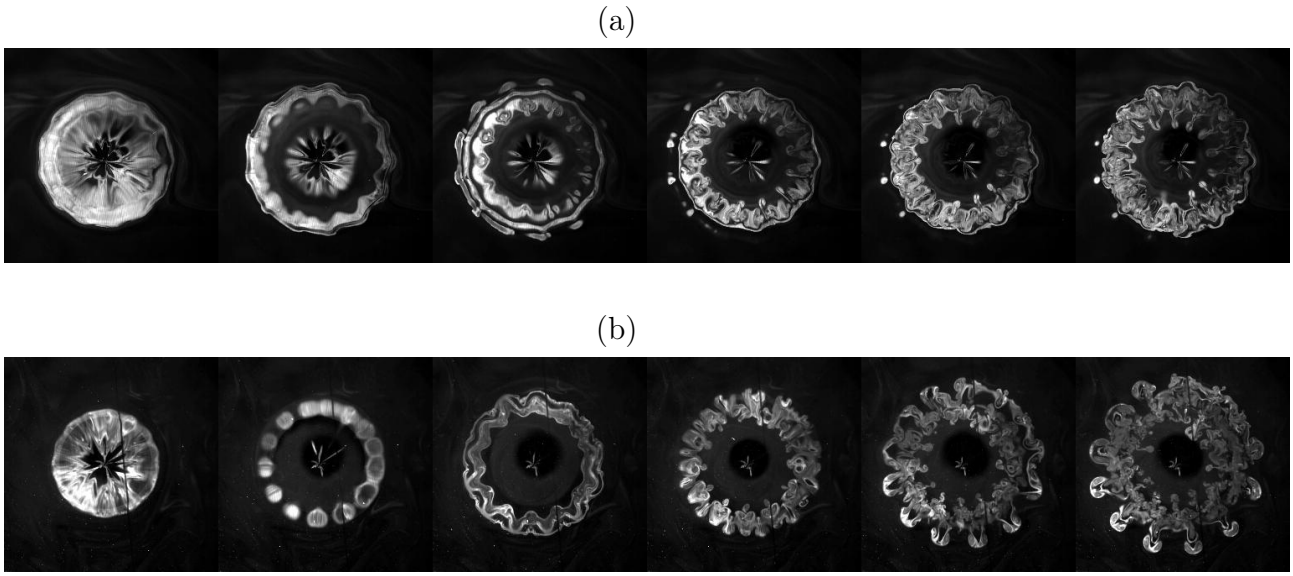


FIGURE 5.35 – Interaction entre un anneau primaire de circulation $\Gamma = 95$ cm/s^2 et des anneaux secondaires, vue de dessus dans un plan horizontal. (a) Plan horizontal à 7 mm de la surface. (b) Plan horizontal à 14 mm de la surface. Les anneaux ont un diamètre d'environ 6 cm sur les premières images, celles-ci sont espacées de 64 ms.

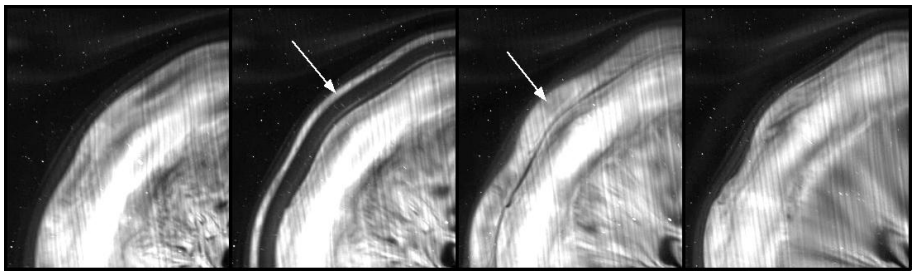


FIGURE 5.36 – Zoom sur la figure 5.35 (a) pendant la formation du premier tourbillon secondaire. Les images sont espacées de 12 ms.

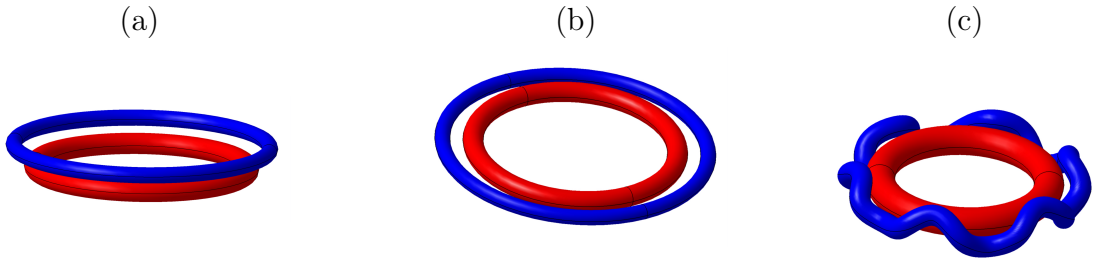


FIGURE 5.37 – Représentation schématique de l'interaction entre l'anneau primaire (rouge) et l'anneau secondaire (bleu). (a) Apparition de l'anneau secondaire issu de la couche limite. (b) L'anneau secondaire se déforme. (c) L'anneau secondaire s'enroule autour de l'anneau primaire, sans que sa structure de coeur ne soit déformée.

5.5.2 Instabilité elliptique

Les différentes observations décrites précédemment semblent indiquer que l'on visualise une instabilité de type Crow entre les tourbillons, les anneaux secondaires se déformant en boucles, sans que la structure de leur coeur ne soit déformée. Mais des observations de l'anneau primaire loin de la surface montre qu'il développe une instabilité elliptique, décrite en détail par Widnall et Saffman [78, 79].

L'instabilité elliptique est visualisée à l'aide d'une tranche laser horizontale placée loin de la surface (plus de trois rayons) en filmant par dessus, comme sur la figure 5.38. On observe sur l'image (a) des ondulations de la surface de l'anneau similaires à celles observées par Widnall *et al.* dans leur description de l'instabilité elliptique [78, 80, 81]. En variant la concentration de colorant dans l'anneau il est possible d'observer la structure interne de l'anneau ce qui nous montre que l'intérieur et l'extérieur de l'anneau subissent une déformation en opposition de phase, un tube intermédiaire restant non déformé [figure 5.38 (b)]. L'existence de ce tube invariant est prédite pour l'instabilité elliptique, la valeur théorique du diamètre du tube d_{inv} est donnée par Leweke et Williamson [52] sous la forme d'un ratio avec la longueur d'onde de l'instabilité λ : λ/d_{inv}=1.99. Dans le cas présenté on observe une ratio $\lambda/d_{inv} = 1.8 \pm 0.2$ compatible avec cette prédiction.

(a) (b)

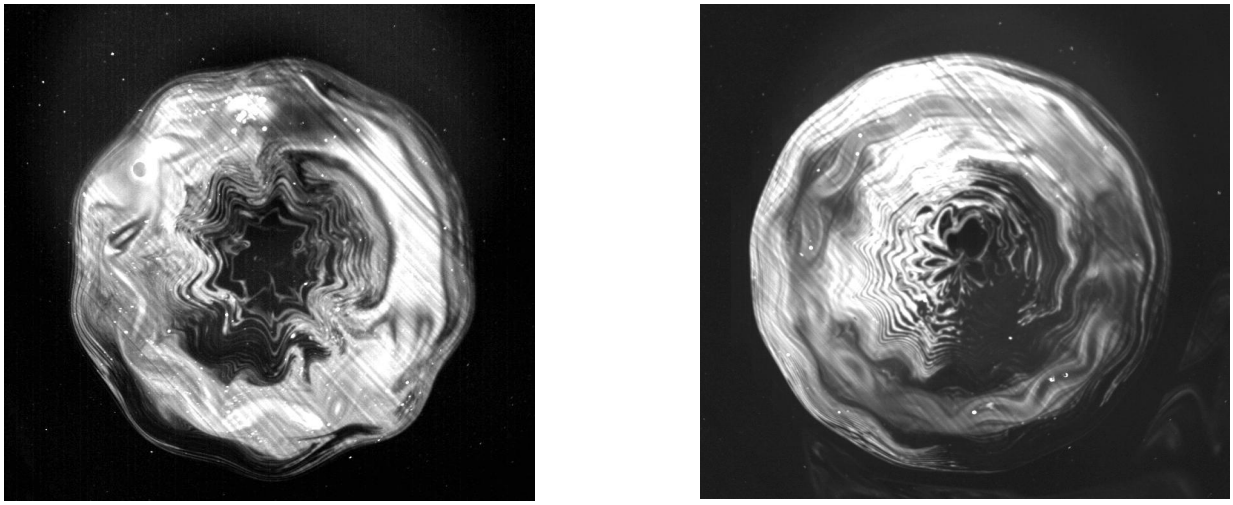


FIGURE 5.38 – Visualisation de l'instabilité elliptique sur un anneau de 4.13 cm de diamètre 95 cm^2/s de circulation loin de la surface, à 20 cm de l'injecteur.

Une autre manière de vérifier que l'on observe une instabilité elliptique est de mesurer ka avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ la longueur d'onde de l'instabilité et a le rayon de coeur (de Lamb-Ossen) de l'anneau. Dans la littérature ka est donné par Widnall [78, 80], Saffman [79], et Eloy et Le Dizés [82]. Widnall prédit $ka = 2.5$ pour un anneau de type Rankine, Eloy donne ka=2.23 pour une paire de tourbillons contrarotatifs de type Lamb-Oseen. Je présente dans le tableau 5.3 les caractéristiques des anneaux et les valeurs de ka observées pour quatre types d'anneaux.

Dans la plupart des expériences ka est proche de la valeur 2.23 ce qui semble indiquer que l'on observe bien une instabilité elliptique sur l'anneau primaire avant l'interaction avec la surface.

cas	Γ (cm^2/s)	D (cm)	a (cm)	N	ka
1	81±1.5	4.8±0.1	0.54±0.06	10.4	2.34
2	107±5	4.42±0.05	0.52±0.04	14	3.29
3	29±2	3.0±0.10	0.43±0.01	8	2.27
4	95.8±0.3	4.1±0.1	0.46±0.03	12	2.69

TABLE 5.3 – Caractéristiques des anneaux loin de la surface avec leur circulation, leur diamètre, leur rayon de coeur, le nombre de vagues observé à leur surface, et la valeur de ka qui en découle.

5.5.3 Instabilité de Crow

Le nombre de vagues (ou nombre d'onde azimutal) observé loin de la surface est toujours conservé lors de l'interaction avec la surface. Cela suggère que durant l'interaction avec la surface une instabilité de Crow se développe, dont la longueur d'onde est sélectionnée par l'instabilité elliptique préexistante. Pour les cas 3 et 4 présentés dans la section précédente (tableau 5.3), on mesure les caractéristiques de l'anneau primaire et du premier anneau secondaire qui se forme, leur distance b, et le diamètre de l'anneau primaire D au moment de l'interaction. Une fenêtre de mesure typique est présentée sur la figure 5.39, avec Cp et Cs les contours utilisés pour estimer les circulations de l'anneau primaire et de l'anneau secondaire. Le rayon de coeur de chaque tourbillon est estimé en calculant la vitesse ortho-radiale moyenne à partir du centre du tourbillon, cherchant le rayon pour lequel la vitesse maximale est atteinte r_m et déduisant $a = r_m/1.12$. Le nombre d'onde azimutal est mesuré sur des images comme celles présentées figure 5.35.

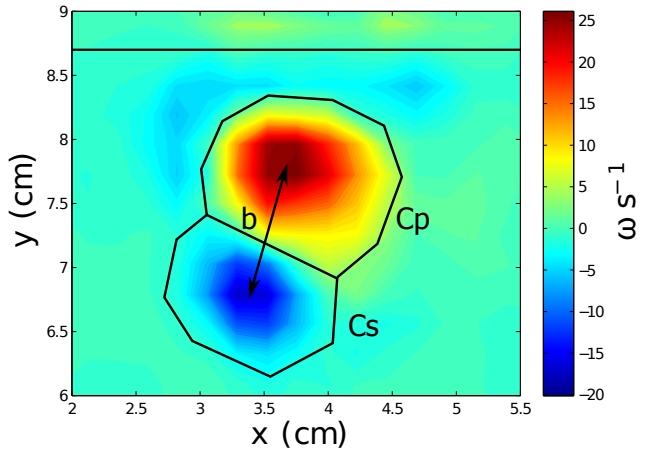


FIGURE 5.39 – Champs de vorticité lors de l'interaction entre un anneau primaire (rouge) et un anneau secondaire (bleue). La surface est indiquée par une ligne horizontale.

Supposant que l'instabilité de Crow qui se développe sur une paire de tourbillons rectilignes corotatifs est similaire à celle qui se développe sur une paire d'anneaux de même caractéristiques, on utilise une estimation théorique proposée par D. Fabre [83] afin de calculer le taux de croissance de l'instabilité σ en fonction de kb. L'estimation est réalisée pour une paire de tourbillons de Lamb-Oseen. Le taux de croissance est estimé pour les anneaux de caractéristiques présentées table 5.4, et présenté figure 5.40 (voir l'annexe C pour plus

cas	Γ_p (cm^2/s)	a_p (cm)	Γ_s (cm^2/s)	a_s (cm)	b (cm)	R (cm)	kb observé
4	53±0.3	0.39±0.04	-13±2	0.33±0.05	1.2±0.2	3.25±0.1	3.18
3	18±1	0.45±0.06	-6.2±0.3	0.25±0.03	0.93±0.09	5.65±0.1	2.63

TABLE 5.4 – Caractéristiques des anneaux primaires et secondaires (respectivement p et s), leur distance moyenne b, le rayon de l'anneau primaire au moment de l'instabilité R et la valeur estimée de kb.

de détails sur le calcul) ainsi que la valeur de kb déduite de nos observations, représentée par une ligne verticale. On vérifie que la valeur observée se trouve dans une gamme de longueur d'onde instable, montrant que l'instabilité elliptique semble bien sélectionner la longueur d'onde de l'instabilité de Crow qui suit. Le taux de croissance adimensionné par le temps caractéristique de rotation de la paire est d'ordre 1, ce qui nous indique que théoriquement l'instabilité se développe en moins d'un tour, comme visualisé.

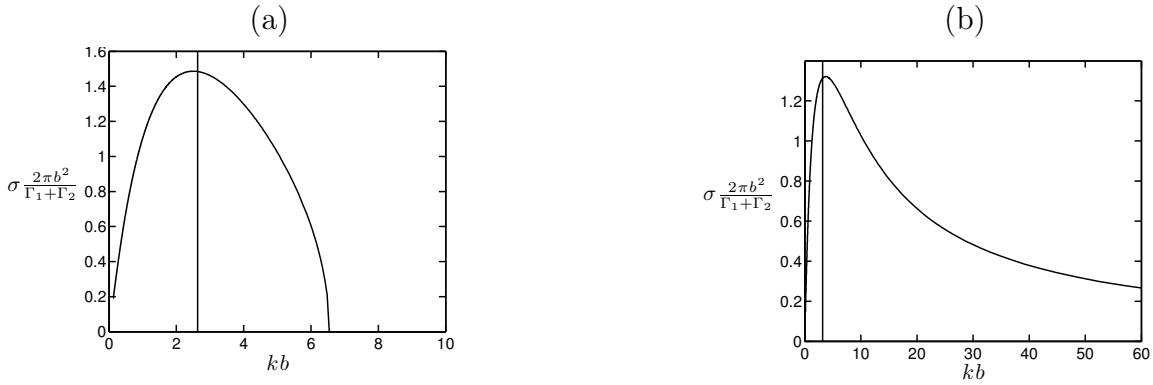


FIGURE 5.40 – Taux de croissance adimensionné de l'instabilité de type Crow kb pour une paire de vortex infinis de type Lamb-Oseen dont les caractéristiques sont détaillées dans le tableau 5.4. (a) cas 4, (b) cas 3. La ligne verticale représente la valeur de kb observée (valeurs théoriques du taux de croissance d'après David Fabre [83], voir annexe **??**)

5.6 Conclusion

Nous avons parcouru un vaste domaine de comportements lors de l'impact d'anneaux tourbillonnaires sur des surfaces. On a montré que suivant l'intensité de l'anneau et les caractéristiques de la surface on obtenait des comportements très différents, que l'on a tenté de modéliser. Les problèmes que l'on a abordés ont une importance à la fois pratique et fondamentale. Le lissage de la surface par les anneaux est abordé chapitre E.

Chapitre 6

Bulles toroïdales

Sommaire

6.1 Introduction **111**
6.2 Montage expérimental **112**
6.3 Resultats **113**
6.4 Entrainement à la surface **119**
6.5 Conclusion **123**

6.1 Introduction

La figure 6.1 présente différentes bulles toroïdales. Ce sont des bulles de forme toroïdale stabilisées par l'anneau tourbillonnaire dont elles occupent le coeur, se déplaçant dans la direction de leur axe de symétrie. Afin d'étudier l'interaction d'un vortex unique avec la surface, il nous a semblé pertinent d'étudier l'interaction de ces bulles-vortex avec la surface libre de l'eau, dans l'optique d'élucider la formation des empreintes de baleine. En effet, lorsqu'une bulle toroïdale impacte la surface de l'eau, elle lisse celle-ci, comme présenté sur la figure 6.1 (a), formant une zone dans laquelle les vagues sont atténuées, semblable à celle observée lors de la formation des empreintes. Le lissage présenté résulte de l'interaction d'une bulle toroïdale formée au laboratoire, qui arrive à la surface initialement couverte de vagues. Après un temps de lissage de l'ordre de 200 ms, la bulle se déstabilise et éclate à la surface, ce qui crée beaucoup de perturbations, réduisant à néant tout le lissage obtenu lors de l'étape précédente. Les bulles toroïdales ne permettent donc pas de reproduire des empreintes de baleine de manière satisfaisante. L'étude de ces bulles est cependant intéressante pour la théorie des tourbillons sur laquelle elle s'appuie, et on retrouve certains phénomènes aperçus lors de l'étude de l'interaction d'un anneau tourbillonnaire avec la surface, c'est pourquoi elle sera présentée dans cette partie.

Les bulles toroïdales sont des objets couramment formés par des animaux marins, comme présenté sur la figure 6.1. Elles peuvent être formées par les dauphins (b), baleines (c), ou par un plongeur au fond d'une piscine (d). Au laboratoire, la solution la plus couramment utilisée pour fabriquer des bulles toroïdales de manière contrôlée est d'injecter de l'air sous pression pendant un temps court avec une petite buse verticale au fond d'une cuve, comme on le décrira sections 6.2 et 6.3.

On trouve peu de bibliographie sur la bulle toroïdale. On peut citer Walters [84] qui a réalisé une étude expérimentale et théorique, T.J. Pedley [85] qui réalise un étude théorique

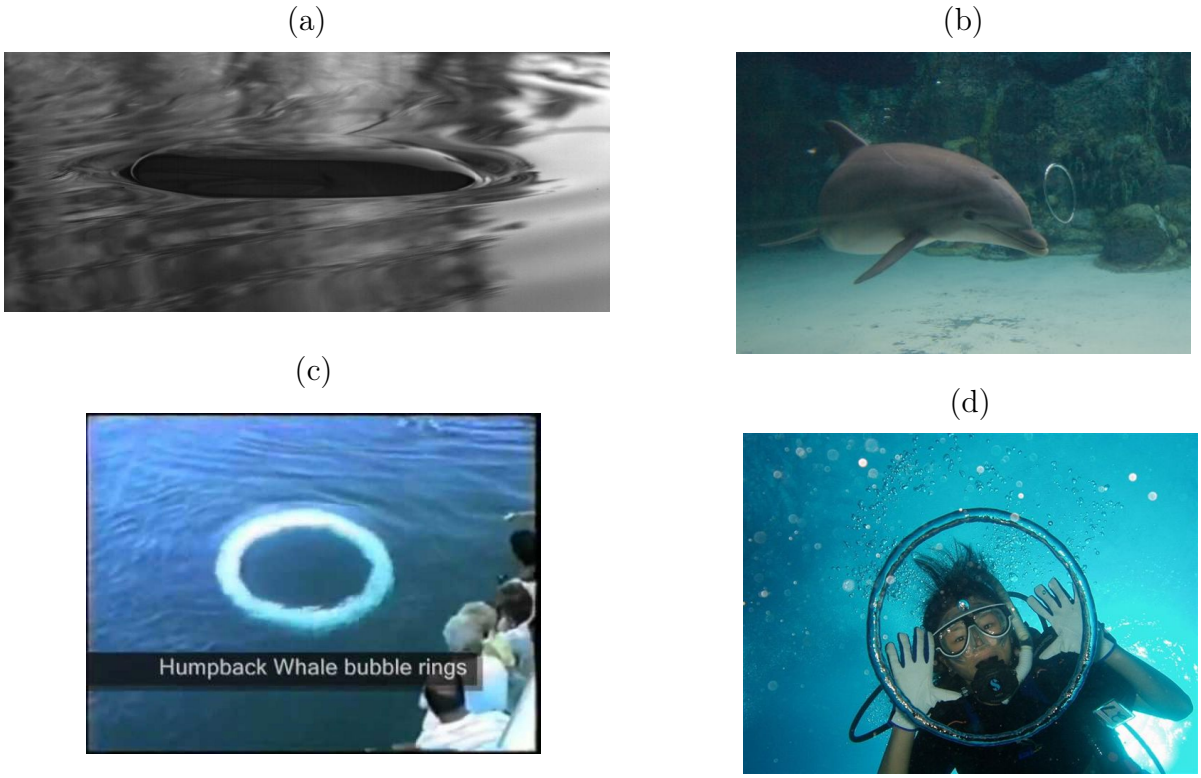


FIGURE 6.1 – (a) Lissage de la surface couverte de vagues par une bulle toroïdale ; Bulles toroïdales de : (b) dauphin, (c) baleine, (d) plongeur.

en utilisant quelques résultats expérimentaux de l'étude de Walters. Auparavant J.S. Turner [86] avait réalisé une étude d'anneaux tourbillonnaires dont la densité est différente du milieu environnant (en formant des anneaux tourbillonnaires d'un mélange eau-sel ou eau-alcool dans de l'eau). La théorie développée s'applique au cas des bulles, dans la limite pour laquelle la densité de l'anneau est nulle. Plus récemment Lundgreen et Mansour [87] ont réalisé une étude théorique et numérique afin d'appréhender certaines caractéristiques spécifiques des bulles toroïdales, comme l'oscillation de leur rayon à une fréquence élevée.

Dans ce chapitre on présente le montage expérimental (section 6.2), et les résultats obtenus (section 6.3). La section 6.4 présente l'entrainement d'air lors de l'impact des bulles à la surface, comparable à ce qui est observé pour les tourbillons (chapitre 5).

6.2 Montage expérimental

Le montage expérimental est présenté figure 6.2 : les bulles sont formées dans une cuve de 1 m de large et 50 cm de profondeur en Plexiglas. On injecte les bulles au fond de la cuve à travers un convergent en cuivre de 0.5 cm de diamètre de sortie. La source de pression est une bouteille d'air comprimé, sur laquelle un détendeur permet de régler la pression de sortie, entre 0.5 et 2.5 bars. On contrôle la quantité d'air injectée avec une vanne à pincement placée proche de l'injecteur. Un générateur d'impulsion actionne la vanne via un montage fabriqué au laboratoire, avec un temps d'ouverture de la vanne compris entre 1 ms et plusieurs secondes. En pratique on utilise une pression de l'ordre de 2 bars, et on obtient les plus petites bulles toroïdales pour un temps d'ouverture de 15 ms, les plus grosses pour 90 ms.

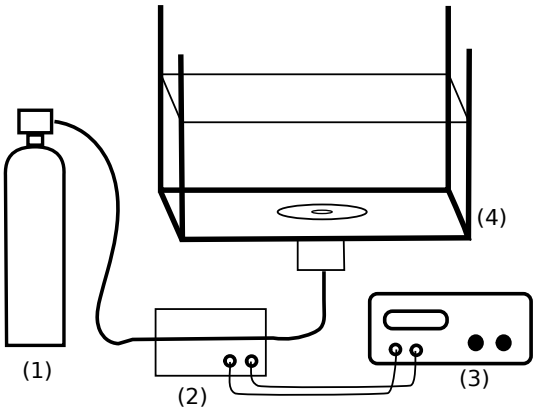


FIGURE 6.2 – Montage expérimental. (1) Bouteille d'air comprimé, pression de sortie jusqu'à 3 bars. (2) Vanne à pincement. (3) Générateur d'impulsions. (4) Cuve.

6.3 Resultats

6.3.1 Formation de la bulle toroïdale

Les étapes de formation de la bulle sont illustrées sur la figure 6.4 vue de coté, et 6.5 vue de dessus. Pour réaliser une bulle toroïdale au laboratoire, on injecte brièvement de l'air au fond de la cuve. La bulle prend d'abord une forme quasi-sphérique ou plus précisément ovoïde, puis se déforme et se pince, formant alors une bulle toroïdale. Il est difficile de distinguer ces étapes sur la chronophotographie, mais on observe nettement les formes initiales et finales, et on aperçoit de plus sur les vues de dessus des oscillations de la bulle, qui oscille avant de se stabiliser dans une forme circulaire. Les étapes de formation de la bulle sont représentées de façon schématique sur la la figure 6.3. Un langue de liquide se forme au pôle inférieur de la bulle (point A) et grandit vers le pôle supérieur de la bulle (point B) sous l'effet de la pression hydrostatique. Lorsque les points A et B se confondent la bulle s'ouvre en son centre, formant un tore. Ce tore est ensuite stabilisé par le fait qu'il se trouve au coeur d'un anneau tourbillonnaire. Contrairement à l'intuition que nous avions eu en fabricant l'injecteur, l'anneau tourbillonnaire qui entoure la bulle n'est pas formé par entrainement de la couche limite lors de l'injection de l'air, mais lors des stades de déformation de la bulle, de sa forme sphérique à sa forme toroïdale. Pedley a étudié en détail la stabilité des bulles toroïdales [85]. Les bulles sont déstabilisées par la tension de surface et stabilisées par la vitesse induite à la surface de la bulle par l'anneau tourbillonnaire. Dans la limite pour laquelle $a/R < 1$ (voir figure 6.7), le critère de stabilité impose que le nombre de Weber We soit grand devant 1, avec $We = \frac{\rho\Gamma^2}{a\gamma}$, avec Γ la circulation du tourbillon et a son rayon de coeur. Avec dans nos expériences des circulations minimales $\Gamma = 100$ cm^2/s et des petits rayons maximums de $a = 1$ cm, $We = 140 >> 1$, les bulles respectent bien toutes le critère.

La circulation de l'anneau tourbillonnaire entourant la bulle formée de cette manière peut être estimée à partir du volume de la bulle, comme décrit dans la section (6.3.3). Cette technique de formation de bulles toroïdales est aussi celle utilisée par le plongeur : il se place bouche vers le haut puis relâche de l'air en ouvrant la bouche, sans lui donner trop de vitesse afin de libérer une bulle sphérique.

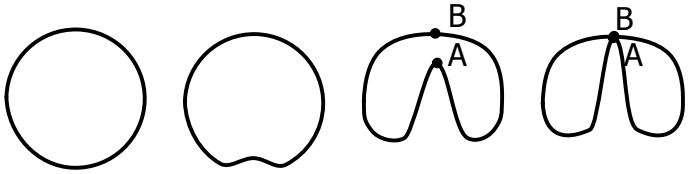


FIGURE 6.3 – Formation d'une bulle toroïdale à partir d'une bulle sphérique.

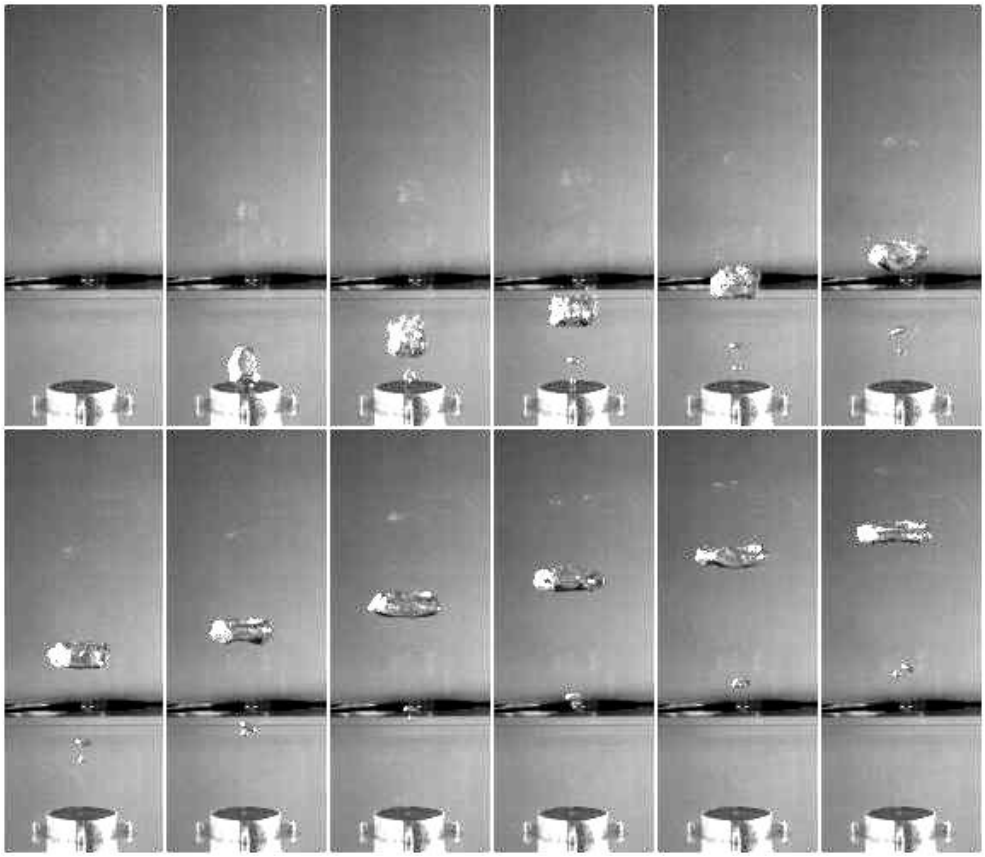


FIGURE 6.4 – Chronophotographie de la formation d'une bulle toroïdale vue de coté. L'injecteur fait environ 5 cm de diamètre. Les images sont espacées de 50 ms

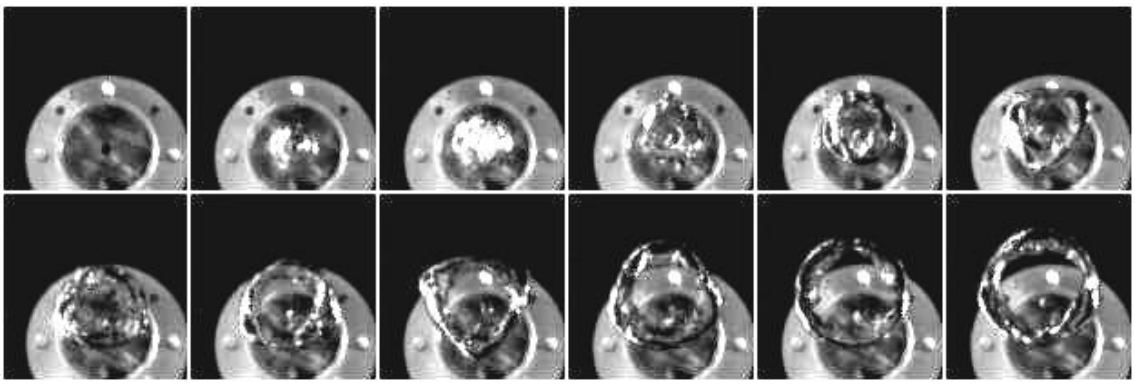


FIGURE 6.5 – Chronophotographie de la formation d'une bulle toroïdale vue de dessus. L'injecteur fait environ 5 cm de diamètre. Les images sont espacées de 50 ms

Le dauphin, lui, procède de manière tout à fait différente : il forme un tourbillon avec sa nageoire, puis remplit le coeur du tourbillon d'air en soufflant avec son évent (et non pas sa bouche), voir par exemple la video [88]. Le dauphin peut aussi entrainer une bulle toroïdale en formant un anneau tourbillonnaire près de la surface avec sa queue, voir par exemple la video [89]. On comprend alors comment le dauphin peut former des bulles qui se propagent à l'horizontal, propulsées par l'anneau tourbillonnaire qui les contiennent, alors que notre méthode ne permet que de former des bulles qui se propagent verticalement. La baleine doit former des bulles toroïdales comme le fait le plongeur, par son évent, mais je ne me suis pas approché pour vérifier.

Au cours de nos expériences, on forme des bulles de volume compris entre 2 et 20 ml. Il est impossible de former des bulles toroïdales de plus petit volume avec notre méthode parce qu'elles sont stabilisées par la tension de surface et ne se déforment pas sous l'influence de la pression hydrostatique (une bulle de 2 ml équivaut à une bulle sphérique de 0.8 cm de rayon, donc d'une taille comparable à la longueur capillaire). Il est difficile de former des bulles de plus grand volume parce qu'elles ont tendance à se briser pendant l'injection de l'air. Pour former des bulles toroïdales de grand volume, une technique consiste à remplir un ballon de baudruche immergé d'air puis à le percer [84]. L'enveloppe s'ouvre alors, laissant apparaitre une bulle sphérique couverte de rides, qui se transforme en bulle toroïdale sous l'effet de la pression hydrostatique comme représenté figure 6.6.

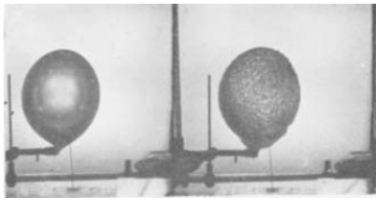


FIGURE 6.6 – Formation d'une bulle par éclatement controlé d'un ballon, extrait de [84].

6.3.2 Trajectoires

La bulle toroïdale a un grand rayon R et une petit rayon a (figure 6.7).

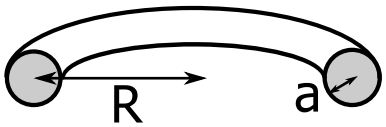


FIGURE 6.7 – Notations.

Sur la figure 6.8 (a) est représentée la trajectoire d'une bulle toroïdale, par superposition d'images au cours du temps. La trajectoire forme un cône d'une dizaine de degrés d'ouverture. L'ouverture du cône varie entre les expériences, entre 5 et 15 degrés environ. Le diamètre et la position des bulles en fonction du temps sont donnés sur la figure 6.8 (a) et (b), avec y la distance à la surface. On observe que le diamètre augmente avec le temps, alors que la vitesse de montée décroît légèrement au cours du temps (contrairement à l'intuition).

Lors de l'impact sur la surface on observe que le diamètre de la bulle ne varie presque pas, contrairement à ce qui était observé pour les anneaux tourbillonnaires.

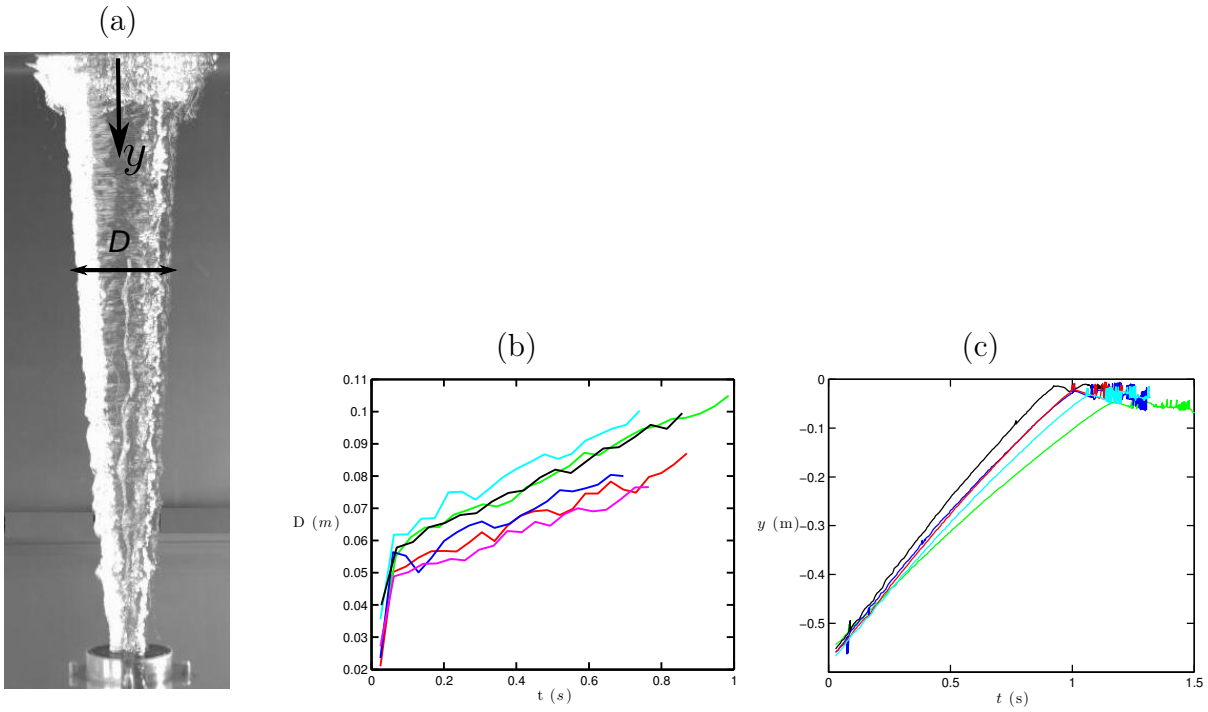


FIGURE 6.8 – (a) Trajectoire d'une bulle toroïdale obtenue par superposition d'images. (b) Diamètre de la bulle au cours du temps, (c) position verticale de la bulle au cours du temps, le volume d'air injecté varie entre les expériences, entre 5 et 15 ml.

6.3.3 Relation volume - circulation

Une estimation de la circulation de l'anneau tourbillonnaire qui englobe une bulle toroïdale est donnée par Walters [84]. L'astuce consiste à calculer la circulation sur un contour presque fermé au moment ou les pôles supérieurs et inférieurs fusionnent lors de la formation du tore (points A et B sur la figure 6.3). A cet instant les points A et B on des vitesses différentes, le point B ayant une vitesse quasi nulle alors que le point A a été accéléré lors de la déformation de la bulle. En supposant qu'il existe un potentiel de vitesse ϕ qui décrit l'écoulement autour de la bulle, la circulation est égale à la différence de la valeur du potentiel ϕ entre A et B :

$$\Gamma = \int_B^A \underline{U}\ \underline{dl} = \phi_A - \phi_B \tag{6.1}$$

En supposant que la bulle est quasi-sphérique (ce qui n'est pas vrai jusqu'à la formation du tore) Walters estime le potentiel aux points A et B et donne la circulation en fonction du volume de la bulle V :

$$\Gamma = 3g^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}} \tag{6.2}$$

6.3.4 Evolution du diamètre

Pour trouver la loi d'évolution du diamètre total de la bulle on cherche à appliquer le théorème fondamental de la dynamique au système bulle plus anneau tourbillonnaire. Pour cela on évalue la quantité de mouvement de l'ensemble. Lamb [90] donne la quantité de

mouvement P_1 d'un vortex de rayon R et de coeur de rayon a en rotation solide, avec Γ sa circulation.

$$P_1 = \pi\rho R^2\Gamma \tag{6.3}$$

On peut alors obtenir l'évolution du rayon de la bulle en fonction du temps en appliquant le premier principe de la dynamique. On néglige la trainé sur la bulle et on suppose que la seule force qui agit sur la bulle est la poussée d'Archimède, qui s'écrit $F_A = -g\Delta\rho V$ avec $\Delta\rho = \rho - \rho_t$, la densité du fluide moins la densité de la bulle [85].

$$\frac{d}{dt}\left(\pi\rho R^2\Gamma\right) = g\Delta\rho V \tag{6.4}$$

La bulle se meut loin de toute paroi, dans un fluide initialement au repos, il n'y a donc pas de création de vorticité, la circulation de la bulle peut être supposée constante. La seule quantité variable dans le terme de gauche de l'équation précédente est le rayon de la bulle R. En intégrant l'équation précédente on peut donc écrire :

$$R^2 = R_0^2 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{gV}{\pi\Gamma}t \tag{6.5}$$

On s'aperçoit ici que pour une différence de densité nulle le rayon de l'anneau ne varie pas, comme c'était le cas dans le chapitre 5, alors que pour une différence de densité négative, le rayon de l'anneau peut diminuer au cours du temps [86].

On vérifie sur la figure[6.9] que le diamètre au carré de différentes bulles varie bien linéairement avec le t aux temps longs, sur l'échelle de la seconde. On observe aussi que le rayon oscille aux temps courts sur l'échelle du dizième de secondes, avec une amplitude d'oscillation à peu près constante, comme étudié dans [87], ce qui n'est pas prédit par le modèle.

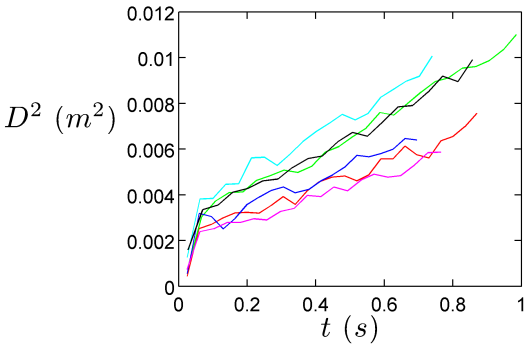


FIGURE 6.9 – Evolution du diamètre au carré de différentes bulles toroïdales entre leur formation et le contact avec la surface, le volume des bulles varie entre 5 et 15 cm^3.

La figure 6.10 compare la circulation des bulles en fonction de la racine de leur volume estimée par l'équation théorique (6.2). Le volume est mesuré juste après l'injection lorsque la bulle est quasi-sphérique, ou lorsque la bulle est sous forme torique, la précision de mesure est dans tous les cas assez mauvaise. La circulation de la bulle est ensuite mesurée en ajustant l'évolution de D^2 par l'équation (6.5). On a ici une précision bien meilleure, mais le volume intervenant dans l'estimation de Γ, on a aussi une mauvaise précision sur l'estimation finale de la circulation.

Nos mesures sont comparées à celles réalisées par Walters sur la même figure. Il faut noter le fait qu'il estime la circulation des bulles en mesurant leur vitesse et non l'évolution

de leur rayon, par la relation $\frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{2UR}{\ln(8R/a)}$. On observe que notre méthode de mesure estime des circulations proches de leurs valeurs théorique pour des bulles de petits volumes, puis s'écartent de la droite théorique pour des volumes importants. Il est intéressant de remarquer que l'écart à la théorie est opposé à celui trouvé par Walters.

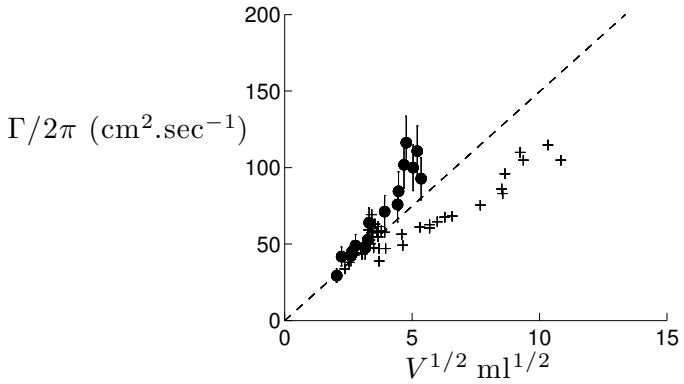


FIGURE 6.10 – Circulation de la bulle en fonction de la racine de son volume. Les points représentent les données expérimentales, les croix les données extraites de [84] ; la ligne en pointillé représente l'équation6.2

Remarque sur la mesure du volume de la bulle : On peut estimer le volume de la bulle lorsqu'elle est quasi sphérique, mais on fait alors une erreur d'estimation d'une part parce que la bulle n'est pas parfaitement sphérique, d'autre part parce qu'une langue d'eau se forme déjà dans la bulle à ce moment là. Si l'on estime le volume de la bulle alors qu'elle est toroïdale, celui-ci dépend de son petit rayon a au carré, celui-ci étant petit par rapport au champs visuel, son estimation induit une grosse erreur de mesure.

Une autre façon d'estimer le volume de la bulle est de la recueillir dans un récipient. De cette manière on pourrait calibrer le volume de la bulle en fonction du temps d'injection de l'air. Cependant, un phénomène ennuyant fait que le volume de bulles obtenues pour le même temps d'injection varie fortement (plus de 20 pour cent). Ces variations semblent provenir du fait que lors de l'injection de la bulle, celle-ci se détache de l'injecteur en laissant une langue d'air de taille variable, et aussi du fait que de l'eau envahit l'injecteur entre les essais, modifiant le volume d'air présent dans le corps de l'injecteur.

6.3.5 Evolution de la vitesse

On confondra la rayon de coeur a de l'anneau tourbillonnaire et le petit rayon de la bulle, ce qui est valable tant que le rayon de coeur du tourbillon ne grandit pas trop par diffusion. Sur le temps de l'expérience d'une seconde environ le rayon varie de $\Delta a = \sqrt{4\nu t} \approx 2$ mm (chapitre 4), alors que le rayon a des bulles est au minimum de l'ordre de 3 mm, donc l'hypothèse est à peu près vérifiée. La vitesse d'un anneau tourbillonnaire de rayon R et de rayon a est donnée par la relation suivante [90] :

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R}\left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - 0.25\right] \tag{6.6}$$

La position de la bulle au cours du temps s'écrit :

$$y = \int_0^t U(t)dt + y_0 \tag{6.7}$$

Ce qui devient en prenant en compte l'équation (6.5), et en supposant que le facteur dans le logarithme varie peu au cours du temps :

$$y = (\ln(8R/a) - 0.25)\frac{\pi\Gamma^2}{4\pi gV}\left(R_0^2 + \frac{gV}{\pi\Gamma}t\right)^{1/2} + y_0 \tag{6.8}$$

On vérifie sur la figure 6.11 que la position des bulles peut être approchée convenablement par cette expression.

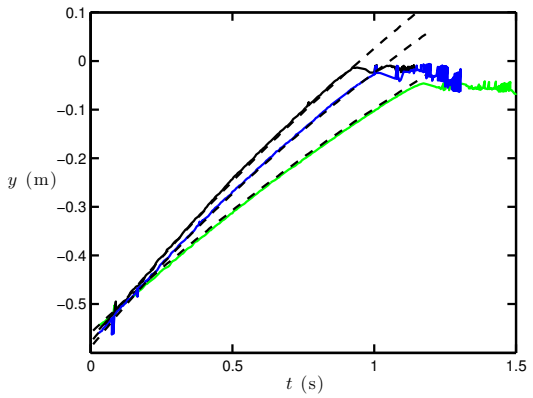


FIGURE 6.11 – Position de trois bulles toroïdales en fonction du temps. Les pointillées représentent des ajustements par l'équation (6.8).

6.4 Entrainement à la surface

6.4.1 Impacts

La figure 6.12 présente l'impact de deux bulles à la surface. Le rayon des bulles ne s'accroit que très légèrement lors de l'impact. La bulle (a) d'environ 5 ml ne forme pas de bulle fille contrairement à la bulle (b) d'environ 7 ml (voir section suivante). La bulle (a) de circulation plus faible que la bulle (b) voit son rayon s'accroitre un peu plus que celui de (b). Les trajectoires sont comparées à celle d'un anneau tourbillonnaire (c) de circulation $\Gamma = 95$ cm^2/s lorsqu'il impacte la surface dans le cas d'un impact "faible". Les trajectoires sont comparables, le rayon de l'anneau s'accroissant proportionnellement plus que celui des bulles. Les circulations des bulles étudiées sont importantes (plus de 100 cm^2/s) et l'on se trouve ici plutôt dans le cadre des impacts "forts".

6.4.2 Bulles filles, étapes de formation

Lorsqu'une bulle de circulation importante arrive à la surface (la limite est discutée section 6.4.5), elle peut entrainer une bulle d'air de forme toroïdale, comme sur la figure 6.13, que l'on appellera "bulle fille".

En réalisant une série d'expériences en faisant varier le volume de la bulle on se rend compte qu'il existe un volume critique au dessus duquel les bulles ont une forte probabilité d'entrainer la surface et en dessous duquel cette probabilité est faible. On peut observer plus précisément la formation d'une bulle fille sur la figure 6.14, pour un volume proche du volume limite de formation. On observe que la bulle toroïdale déforme fortement la surface,

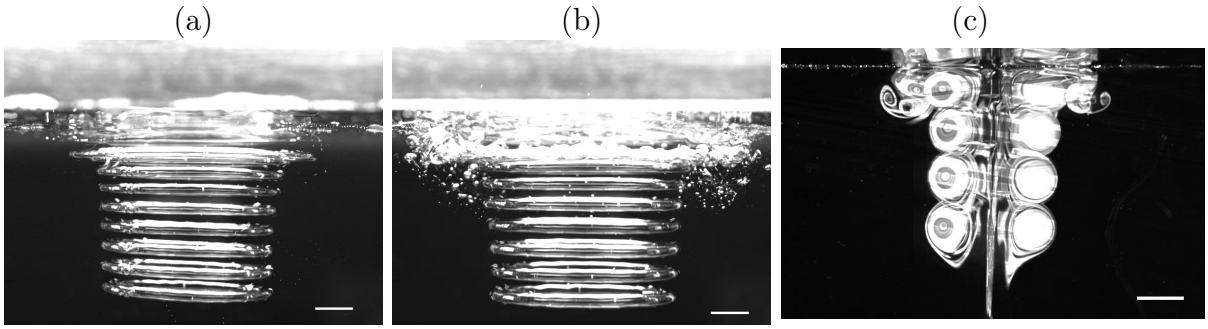


FIGURE 6.12 – (a), (b) Chronophotographies d'impacts de bulles à la surface. Les images sont espacées de 14 ms, la ligne blanche fait 2 cm, le bulles ont un volume de (a) 5 ml (b) 7 ml. (c) Impact d'un anneau tourbillonnaire à la surface, de circulation $\Gamma = 95$ cm^2/s, la barre blanche fait 2 cm.

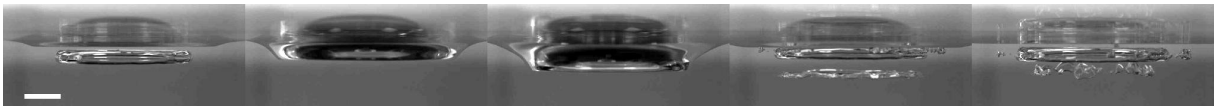


FIGURE 6.13 – Entrainement d'air à la surface par une bulle toroïdale de 8.45 ml. Les images sont espacées de 28 ms, la barre horizontale fait deux centimètres.

jusqu'à pincer celle-ci (images 1 à 5). Après le pincement la bulle fille est entrainée sous la bulle mère (image 5). Elle est ensuite déformée et toute la structure se déstabilise (images 6 à 12). On observe parfois la formation de deux bulles filles successives.

Lors de la collision à la surface d'une bulle toroïdale qui ne forme pas de bulle fille (figure

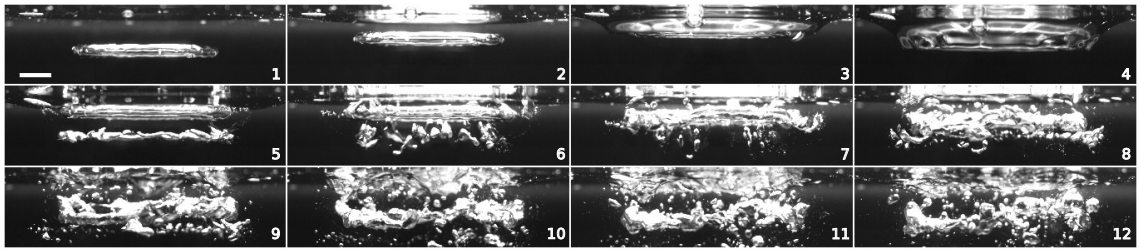


FIGURE 6.14 – Formation d'une bulle fille par une bulle de 5.9 ml. Les images sont espacées de 8 ms. La ligne blanche fait 2 cm.

6.15), on observe qu'elle déforme la surface, créant un bourrelet homogène (images 2, 3 et 4), puis le déformation diminue. La surface est à nouveau déformée (images 7 et 8), et la déformation diminue à nouveau. Finalement la surface est déformée à nouveau, mais cette fois-ci de manière inhomogène, avec apparition de vagues sur le bourrelet. Le bourrelet se déstabilise alors (image 12), et l'on observe un entraînement d'air par des excroissances régulièrement réparties qui se forment sur le bourrelet.

6.4.3 Déformations 3-D

En observant attentivement la bulle fille après sa formation (figure 6.16) on observe qu'elle se déforme en laissant apparaitre une longueur d'onde bien définie.

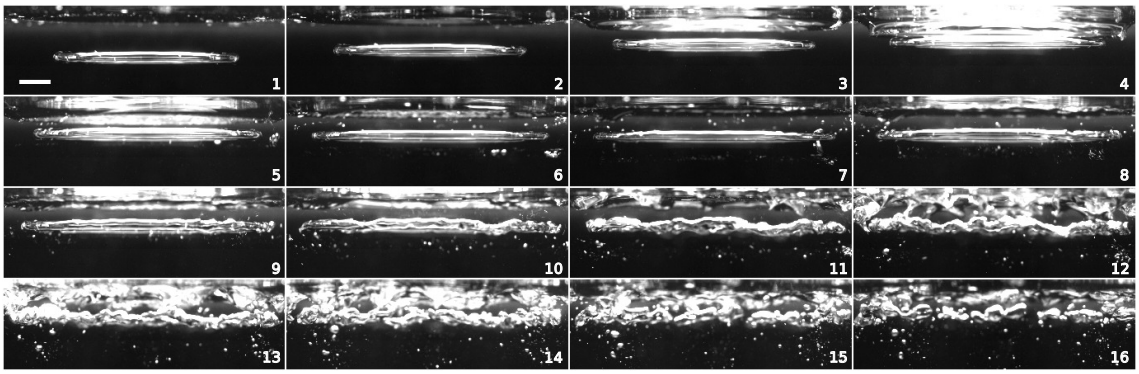


FIGURE 6.15 – Impact à la surface sans formation d'une bulle fille par une bulle de 5.8 ml. Les images sont espacées de 8 ms. La ligne blanche fait 2 cm.

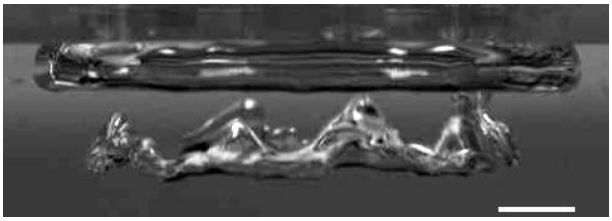


FIGURE 6.16 – Déformation 3D d'une bulle fille lors de l'interaction avec la surface. La bulle toroïdale se trouve en haut de l'image, la bulle fille sous celle-ci. La ligne blanche fait 1 cm.

6.4.4 Interpretation

En s'appuyant sur les observations que l'on a faites sur l'impact d'un anneau tourbillonnaire à la surface (chapitre 5), sachant que la bulle toroïdale est au coeur d'un anneau tourbillonnaire, on peut interpréter les observations précédentes. Lorsqu'un anneau tourbillonnaire arrive à la surface libre de l'eau, il forme des anneaux secondaires qui tournent autour de l'anneau principal avant de se déstabiliser. Lorsqu'une bulle de circulation suffisante pour former une bulle fille arrive à la surface, on observe qu'elle déforme la surface, et on sait que dans le même temps elle forme un anneau secondaire à la surface. On peut donc supposer que lorsque l'anneau secondaire quitte la surface il entraine la bulle fille en son coeur.

Lorsqu'une bulle qui ne forme pas de bulle fille arrive à la surface, elle forme aussi un anneau secondaire. La déformation de la surface est cependant trop faible pour entrainer une bulle fille. Un deuxième anneau secondaire se forme puis se détache, ce qui entraine la déformation observée. Finalement lors de la formation d'un énième anneau secondaire, l'anneau principal est très déformé par les interactions de type Crow, et il est en train de se déstabiliser comme on l'a décrit à la fin du chapitre 5. C'est pourquoi la surface est entrainée en des points répartis sur la circonférence, espacés de la longueur d'onde de déstabilisation de l'interaction de Crow. En fonction de la circulation de la bulle il existe donc deux situations : pour des circulations très importantes le premier anneau secondaire formé est suffisamment intense pour pincer la surface et former une bulle fille. Pour des circulations intermédiaires le premier anneau secondaire ne pince pas la surface, lors de la formation d'un anneau formé plus tard la surface est pincée en de multiples points, les anneaux secondaires étant très déformée. A priori il existe une troisième situation, pour des circulations faibles, dans laquelle la surface ne serait jamais pincée, comme ce qui est observés lors de l'impacts doux des anneaux tourbillonnaires, mais cette situation n'a pas

été observée pour les bulles toroïdales.

Les interactions de type Crow déforment plus fortement les anneaux secondaires que l'anneau principal, ce qui est très visible lors de la déformation d'une bulle fille, comme on l'observe sur la figure 6.16

6.4.5 Critère de formation des bulles filles

On peut ensuite faire varier les caractéristiques de la bulle afin de vérifier leur influence sur le critère d'entrainement. On a vu que le rayon de la bulle augmente avec la hauteur d'eau H. On réalise une série d'expériences en faisant varier H et le volume des bulles toroïdales V afin de définir un diagramme de phase suivant qu'il y ait la formation d'une bulle fille à la surface ou pas. On présente ce diagramme sur la figure 6.17 où l'on observe qu'il existe un seuil en fonction du volume des bulles, avec une large zone pour laquelle la probabilité des deux évènements semble proche. La profondeur d'eau ne semble pas être un paramètre important, le seuil ne dépendant pas de celle-ci. Au moment de réaliser cette étude nous avons été un peu déçu de la faible dépendance du rayon. Cependant l'étude d'entrainement à la surface par un anneau tourbillonnaire chapitre 5 montre que les paramètres importants lors du pincement de la surface semblent être le rayon de coeur de l'anneau tourbillonnaire ainsi que sa circulation. La circulation d'une bulle toroïdale ne change pas en fonction de sa distance de parcours, ce qui explique que l'on ne voit pas d'influence de H sur la limite de pincement. Dans le cas des bulles on a entrainement pour

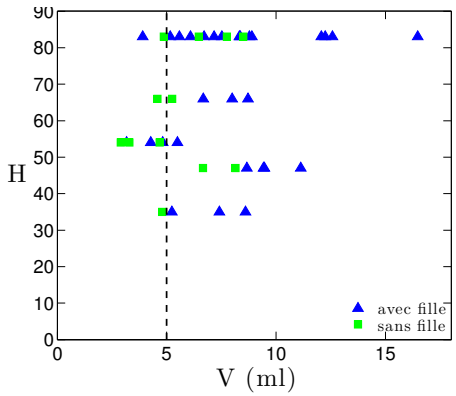


FIGURE 6.17 – Diagramme de phase pour la formation de bulle fille en fonction du volume de la bulle toroïdale V et de la hauteur d'eau H.

des bulles de 4 cm^3 donc théoriquement une circulation de 190 cm^2/s. Pour estimer la dépression correspondante il nous faut connaitre le rayon de coeur de l'anneau tourbillonnaire. On peut l'estimer soit en l'approximant au petit rayon de la bulle, on a alors une valeur proche de 3.6 mm, ou bien à l'aide de l'équation (6.6), ce qui donne une valeur proche de 4 mm. On a alors la profondeur de la dépression δ :

$$\delta = \frac{U^2}{2g} = \frac{(\Gamma/a)^2}{2g} \approx 2.9 \text{ cm} \tag{6.9}$$

La valeur limite de la dépression parait en adéquation avec l'observation, l'ordre de la profondeur observée lors de l'entrainement d'air.

6.5 Conclusion

Les bulles toroïdales, bulles de forme toriques au centre d'un anneau tourbillonnaire, ont un comportement qui s'interprète correctement à partir de la théorie des tourbillons. Au cours de leur interaction avec la surface on retrouve des caractéristiques de l'interaction des anneaux tourbillonnaires avec la surface, qui sont la déformation de la surface, et la possibilité de pincer la surface. Il est intéressant de noter que lorsque la bulle pince la surface dès le début de l'interaction, elle forme une bulle fille, ce qui n'est pas le cas des anneaux tourbillonnaires. Lors de la déstabilisation de la bulle fille, on visualise une longueur d'onde bien définie, qui laisse penser que la bulle fille, placée au centre d'un anneau secondaire se déforme à cause d'une instabilité de type Crow.

Troisième partie

Trainée de vague et sillage de surface

Chapitre 7

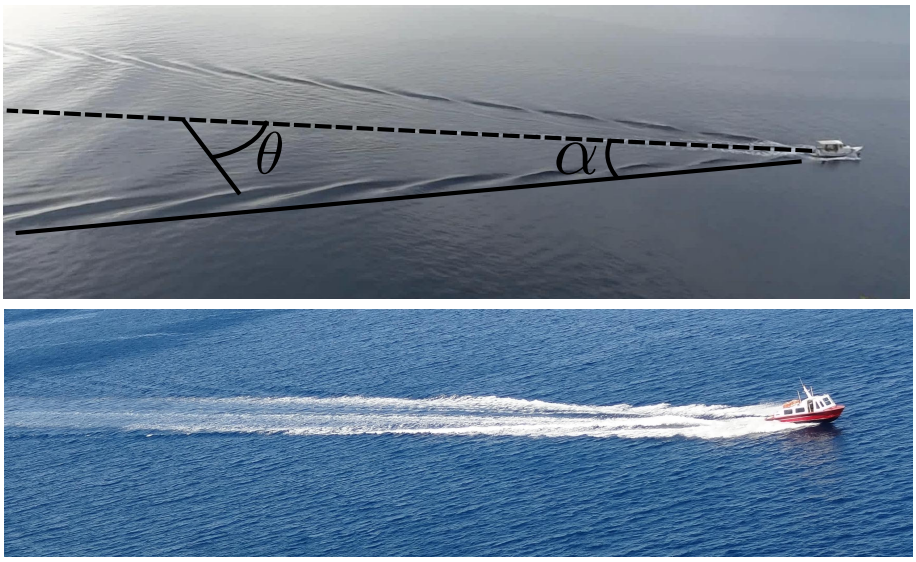
Ondes

Sommaire

7.1 Introduction **127**
7.2 Ondes capillaro-gravitaires **128**
7.3 Sillage de Kelvin **131**
7.4 Sillage d'un navire à haute vitesse **133**
7.5 Sillage instationnaire **136**
7.6 Conclusion **138**

Nous nous demandons maintenant comment la surface est perturbée par le mouvement d'une objet immergée. Nous décrivons dans ce chapitre le sillage formé par un objet se déplaçant à la surface. Au chapitre 8 nous nous intéressons au sillage de sphères immergées.

7.1 Introduction



(a)

(b)

FIGURE 7.1 – Sillages de navires (a) à vitesse modérée, (b) à vitesse élevée. θ est l'angle de propagation des vagues par rapport à la direction du navire et α le demi-angle d'ouverture du sillage.

La figure 7.1 représente le sillage de deux bateaux, l'un à vitesse modérée (a), l'autre à vitesse élevée (b). Dans le premier cas, on observe un réseau d'ondes à l'arrière du bateau composé de différentes longueurs d'ondes et formant un cône de demi-angle d'ouverture α de l'ordre de 20°. Sur l'image (b), pour un bateau rapide, l'angle d'ouverture du sillage α est beaucoup plus petit, de l'ordre de 5°.

Dans la suite de ce chapitre, après avoir rappelé la relation de dispersion des ondes à la surface de l'eau, on reconstruit les différents sillages observés, à faible vitesse (sillage de Kelvin), puis à vitesse élevée. Dans la dernière partie on aborde un cas particulier pour lequel la source des perturbations générant le sillage est instationnaire.

7.2 Ondes capillaro-gravitaires

7.2.1 Dérivation de la relation de dispersion

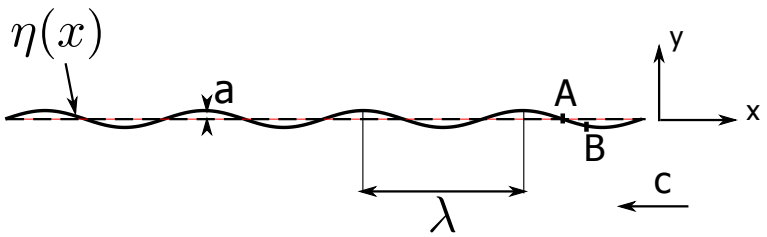


FIGURE 7.2 – Notations pour la dérivation de la relation de dispersion.

On considère une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ d'amplitude a se propageant à la vitesse c selon la direction x (figure 7.2). Dans la limite de "faible pente", l'amplitude est supposée petite devant la longueur d'onde ($ka << 1$). Dans le référentiel de l'onde, la surface de l'eau est à l'altitude η qui ne dépend pas du temps, mais seulement de sa coordonnée x. La vitesse moyenne du fluide est égale à l'opposé de la vitesse de déplacement des ondes $-c\underline{e}_x$.

Cette vitesse dérive d'un potentiel $\Phi_0(x) = -cx$. On écrit le potentiel total de l'écoulement comme la somme du potentiel moyen Φ_0 plus un terme de perturbation $\widetilde{\Phi}$ ($\widetilde{\Phi}(x,t) << \Phi_0$). Les inconnues du problème sont le terme de perturbation correspondant à des ondes périodiques, et la forme de la surface. Dans les hypothèses d'écoulement incompressible la vitesse satisfait la relation div $\underline{V} = 0$ donc :

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_0 + \Delta\widetilde{\Phi} = 0 \tag{7.1}$$

Le laplacien de Φ_0 étant nul, l'équation se réduit à :

$$\Delta\widetilde{\Phi} = 0 \tag{7.2}$$

De façon classique, on recherche une solution de la forme $\widetilde{\Phi} = f(x).g(y)$. L'équation 7.2 s'écrit alors :

$$g(y)\frac{d^2f}{dx^2} + f(x)\frac{d^2g}{dy^2} = 0 \text{ qui s'écrit aussi } \frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = B \tag{7.3}$$

Les conditions aux limites imposent un amortissement des ondes en $y \to -\infty$ et une oscillation périodique suivant x, d'où :

$$\widetilde{\Phi} = Ae^{ky}\cos(kx) \tag{7.4}$$

en posant $B = -k^2$.

On en déduit les composantes de la vitesse dans le fluide $\underline{U} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c - Ake^{ky} \sin kx \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Ake^{ky} \cos kx \tag{7.5}$$

La perturbation de vitesse $Ake^{ky} \sin kx$ est petite devant la vitesse moyenne c , donc $Ak << c$.

On recherche le profil de la surface tel que dans le référentiel de l'onde la surface soit une ligne de courant (traduction du fait que la vitesse normale est nulle à la surface) :

$$\underline{U} \wedge \underline{dl} = \underline{0} \tag{7.6}$$

ce qui donne :

$$udy = vdx, \text{ qui s'écrit aussi } \frac{dy}{dx} = -\frac{Ak \cos kx}{c + Ak \sin kx} \tag{7.7}$$

A la surface, c'est à dire en $y = 0$, l'équation se réécrit, au premier ordre en Ak :

$$\frac{dy}{dx} \approx -\frac{Ak \cos kx}{c} \text{ donc } \eta = -\frac{A}{c} \sin kx \tag{7.8}$$

La forme de la surface a été obtenue en imposant des conditions cinématiques. On impose maintenant une condition dynamique à la surface en écrivant l'équation de Bernoulli entre un point A où l'élévation de la surface est nulle $\eta_A = 0$ et un point B où $\eta_B = \eta$:

$$\left[\frac{1}{2}\rho U^2 + p + \rho g y\right]_A^B = 0 \tag{7.9}$$

La condition dynamique à la surface impose que la pression sous la surface soit égale à la pression au dessus de la surface, P_0, moins la pression capillaire $\gamma\eta_{xx}$, ce qui s'écrit : $p = P_0 - \gamma\eta_{xx}$. Connaissant u, v et $\eta(x)$, l'équation précédente s'écrit, en négligeant les termes d'ordre supérieur en ak :

$$\frac{1}{2}\rho c^2 + P_0 + 0 = \frac{1}{2}\rho c^2 - \rho k c^2 \eta + P_0 + \gamma k^2 \eta + \rho g \eta \tag{7.10}$$

Qui se réduit à la relation de dispersion qui donne la dépendance de la vitesse de phase c avec k :

$$c^2(k) = \frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k \tag{7.11}$$

7.2.2 Analyse de la relation de dispersion

La relation de dispersion en grande profondeur s'écrit en fonction de la longueur d'onde :

$$c = \left(\frac{\lambda g}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}\right)^{1/2} \tag{7.12}$$

Les ondes qui satisfont cette relation de dispersion se propagent sous l'influence de deux forces, la gravité, prise en compte par le premier terme sous la racine, et la force capillaire représentée par le second. Les deux effets sont du même ordre pour une longueur d'onde $\lambda/2\pi = (\gamma/\rho g)^{1/2} = \kappa^{-1}$, avec κ^{-1} la longueur capillaire.

La relation (7.12) est présentée sur la figure 7.3 (a). On observe que la vitesse de phase c présente un minimum $c_{min}(\frac{4\gamma g}{\rho})^{1/4}$ pour la longueur d'onde $\lambda = 2\pi\kappa^{-1}$. Dans l'eau $c_{min} = 23$ cm/s et $\kappa{-}1 = 2.7$ mm. On observe qu'au dessus de c_{min}, il existe deux longueurs d'onde qui se propagent à la même vitesse :

$$\lambda_1 = 2\pi a \left(\frac{c}{c_{min}}\right)^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c_{min}}{c}\right)^4}\right) \text{ et } \lambda_2 = 2\pi a \left(\frac{c}{c_{min}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{c_{min}}{c}\right)^4}\right) \tag{7.13}$$

Si $c < c_{min}$ il n'existe pas de longueur d'onde qui satisfasse l'équation (7.12). Donc sur une surface au repos il n'existe pas d'onde qui se déplace à une vitesse inférieure à c_{min}, par contre à une vitesse supérieure à c_{min} il existe deux longueurs d'onde, λ_1 inférieure à $2\pi a$ (onde capillaire) et λ_2 supérieure à $2\pi a$ (onde gravitaire).

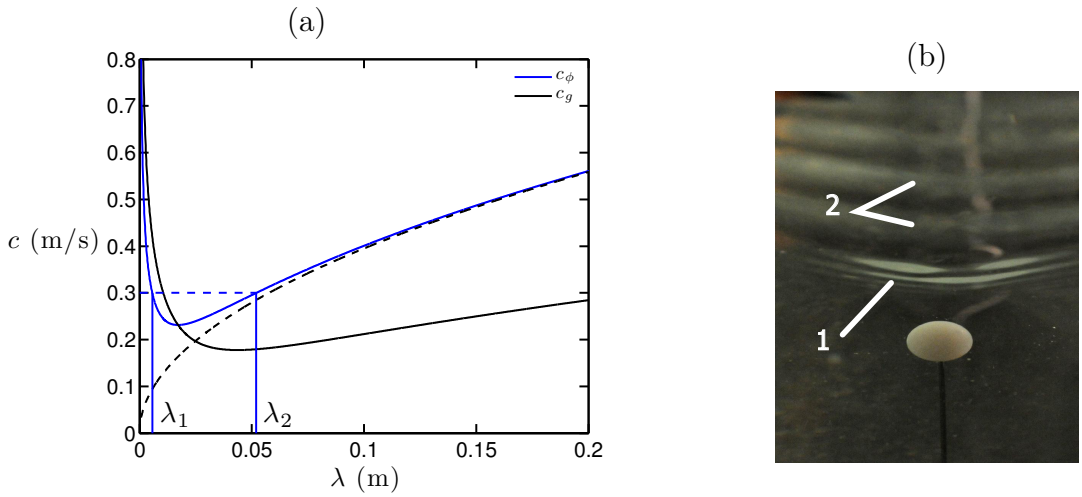


FIGURE 7.3 – (a) Evolution de la vitesse de phase en fonction de la longueur d'onde pour une onde capillaro-gravitaire. La vitesse de phase est tracée en bleu, la vitesse de groupe en noir. La vitesse de phase dans la limite gravitaire est tracée en pointillé. (b) Sillage formé par une sphère immergée se déplaçant vers le bas de la figure. L'énergie des ondes gravitaires se propagent vers l'arrière de la perturbation (région 2), tandis que l'énergie des ondes capillaires vers l'avant (région 1).

La vitesse de transport de l'énergie par les ondes est égale à la vitesse de groupe $c_g = d\omega/dk$, dérivée de la relation (7.12), sachant que $c = \omega/k$ [11, 91] :

$$c_g = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho}{2(gk + \gamma k^3/\rho)^{1/2}} \tag{7.14}$$

La vitesse de groupe est plus grande que la vitesse de phase si $\lambda/2\pi < a$, et inférieure à la vitesse de phase si $\lambda/2\pi > a$. Cela nous indique que si des ondes se déplacent à la vitesse de phase c égale à la vitesse d'une perturbation à la surface de l'eau, l'énergie donnée aux vagues par la perturbation se propagera à la vitesse de groupe c_g, donc les crêtes se trouveront devant la perturbation pour les petites longueurs d'onde, et derrière celle-ci pour les grandes longueurs d'onde (voir figure 7.3 (b)).

Relation de dispersion en eau peu profonde

En eau peu profonde ($\lambda = 2\pi/k > h$, avec h la profondeur moyenne), la perturbation due aux ondes doit s'annuler en $y = -h$. Le potentiel de vitesse $\widetilde{\Phi}$ s'écrit alors :

$$\widetilde{\Phi} = A\cos(kx)\mathrm{ch}(ky) \tag{7.15}$$

La relation de dispersion devient :

$$c^2(k) = \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}\right)\tanh(kh) \tag{7.16}$$

Dans la limite de longueur d'onde grande devant la longueur capillaire et devant la profondeur ($k < h$ et $k < \kappa^{-1}$), la relation de dispersion s'écrit :

$$c = \sqrt{gh} \tag{7.17}$$

La vitesse de phase ne dépend pas de k, les ondes ne sont donc pas dispersives en faible profondeur.

7.3 Sillage de Kelvin

On revient maintenant à la description du sillage formé par un bateau relativement lent, comme celui présenté figure 7.1 (a). Le bateau à une longueur L et une vitesse V. On observe qu'il émet un ensemble de longueurs d'onde, de l'ordre du mètre, donc grandes devant la longueur capillaire qui se propagent à l'arrière du navire. Lorsque la longueur d'onde est grande devant la longueur capillaire, l'équation (7.12) se réduit à

$$c = \left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)^{1/2} \tag{7.18}$$

et on parle d'onde purement gravitaire. La vitesse de groupe est alors égale à $c_g = \frac{1}{2}c$.

Sur la figure 7.3 (a) on trace c en fonction de λ pour les équations (7.12) et (7.18), ainsi que la vitesse de groupe c_g. On observe que pour des longueurs d'onde supérieures à 10 cm la relation de dispersion obtenue dans la limite gravitaire est une bonne approximation de la relation générale.

Les notations utilisées sont définies sur la figure 7.4, l'explication se basant sur le livre de Lighthill [11]. Le navire initialement en A se déplace en B en un temps t_e.

Dans le référentiel d'une onde, le navire à l'origine de l'onde se déplace à la vitesse de phase de l'onde, ce qui s'écrit :

$$V\cos\theta = c(k) \tag{7.19}$$

Dans la limite gravitaire, il existe un ensemble de vagues de longueur d'onde $k(\theta)$ et de vitesse de phase $c(\theta) = \left(\frac{k(\theta)}{g}\right)^{-1/2}$ qui satisfont la relation $c(\theta) = V\cos\theta$.

Les ondes formées au temps initial en A se trouvent sur le cercle de diamètre AB en $t = t_e$ du fait de la relation $V\cos\theta = c$ qui donne $AB\cos\theta = AC$. Les ondes gravitaires étant dispersives l'énergie des ondes ne s'est pas déplacée à la vitesse c, mais à la vitesse $c_g = \frac{1}{2}c$. Par conséquent, l'énergie et donc les crêtes des vagues formées en A au temps zéro se trouvent sur le cercle de diamètre AD au temps $t = t_e$. Le demi-angle d'ouverture

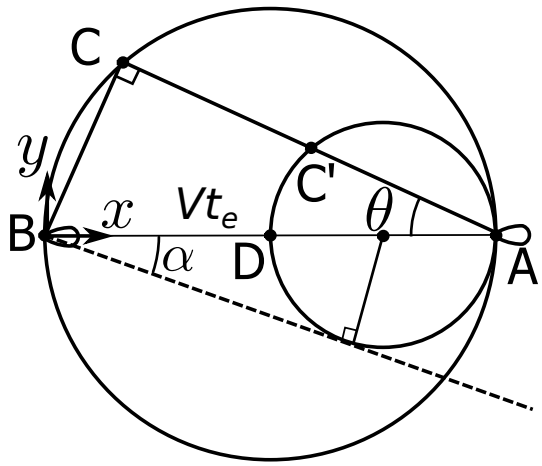


FIGURE 7.4 – Construction du sillage de Kelvin. Un navire initialement en A se déplace en B pendant le temps t_e.

du sillage α est égale à l'angle que forme une droite passant par B tangente au cercle de diamètre AD, $\alpha = \sin^{-1}(1/3) = 19.5°$.

Afin de déterminer la forme des crêtes, on se positionne maintenant dans le repère fixe par rapport au bateau, le bateau se déplaçant dans la direction des x négatifs. On cherche à construire le lieu des points des crêtes des vagues formées au temps t_e avant l'arrivée en B, en notant x la distance au bateau sur l'axe BA et y la distance au bateau sur l'axe perpendiculaire. On note X la distance AB, $X = Vt_e$. On a AC=$X\cos\theta$, donc AC'=$\frac{1}{2}X\cos\theta$. Finalement :

$$x = X - \frac{1}{2}X\cos\theta\cos\theta = X(1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta),\ y = \frac{1}{2}X\cos\theta\sin\theta \tag{7.20}$$

On cherche à tracer la ligne de crête qui relie les vagues de différentes longueurs d'ondes dans la sillage. On remarque sur la figure 7.4 que la crête au point C fait un angle $\pi/2 - \theta$ avec l'axe des x. On a donc $dy/dx = \tan^{-1}\theta$.

La construction de la ligne de crête provient d'ondes émises à différents temps pour différents angles. En substituant x et y dans l'équation 7.20 on obtient :

$$dX/d\theta = -X\tan\theta \tag{7.21}$$

dont une solution est :

$$X = X_1\cos\theta \tag{7.22}$$

avec $X_1 = Vt_e$.

L'équation de la position de la crête est donnée sous forme paramétrique sous la forme :

$$x = X_1\cos\theta(1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta),\ y = \frac{1}{2}X_1\cos^2\theta\sin\theta \tag{7.23}$$

On obtient pour différentes valeurs de X_1 la figure 7.5 (a) qui représente l'aspect théorique du sillage si le navire génère toutes les longueurs d'ondes possibles. Les ondes qui se propagent selon la direction du bateau ont la plus grande longueur d'onde $\lambda/2\pi = V^2/g$. Les ondes qui se trouvent en bordure du sillage se propagent avec un angle de 70.5°, avec une longueur d'onde $\lambda/2\pi = (0.33V)^2/g$. Ces observations sont compatibles avec la forme du sillage observée sur la figure 7.1 (a) page 127.

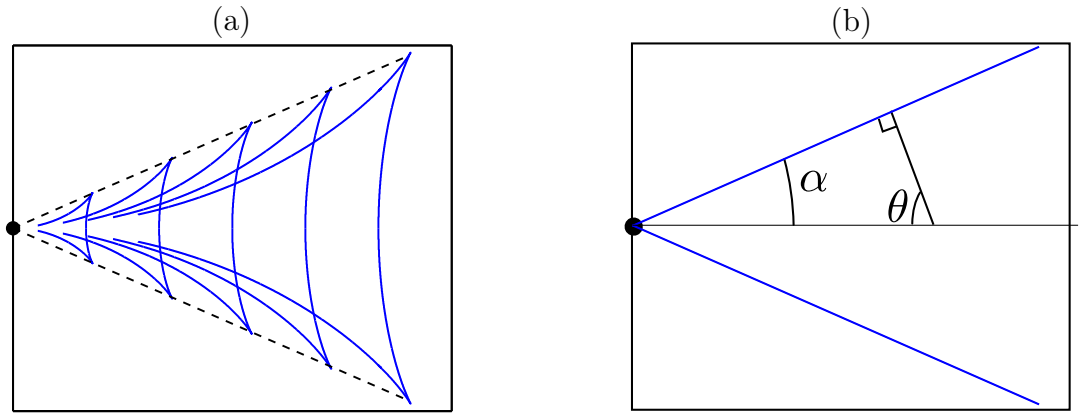


FIGURE 7.5 – a) Forme du sillage de Kelvin derrière un navire se déplaçant de droite à gauche. La position du navire est indiquée par un gros point, les pointillés représentent la limite du sillage de Kelvin, de demi angle d'ouverture 19.5°. (b) Sillage de Mach en eau peu profonde.

Si les ondes avaient été non dispersives, comme c'est le cas en eau peu profonde ($\lambda > h$ avec h la profondeur), il existerait une vitesse de propagation des ondes unique $c = \sqrt{gh}$ quelque soit λ, et un angle de propagation unique des ondes, tel que les ondes soient stationnaires définit par $\cos(\theta) = c/V$. L'angle du sillage serait donc $\alpha = \pi/2 - \theta$, appelé angle de Mach, comme représenté sur la figure 7.5 (b) [92]. (Voir l'annexe B).

7.4 Sillage d'un navire à haute vitesse

Pour un navire rapide, tel celui présenté sur la figure 7.1 (b) la forme du sillage change. Pour comprendre ce changement, il faut prendre en compte le fait qu'un navire de taille L ne peut pas exciter des vagues de longueurs d'onde plus grandes que sa taille, la longueur d'onde ne pouvant pas être plus grande que la perturbation qui la crée.

Les plus grandes longueurs d'onde qui forment le sillage de Kelvin sont celles qui se propagent avec une angle $\theta = 0$, et une longueur d'onde $\lambda_{max} = 2\pi\frac{V^2}{g}$. Le reste du sillage est composé d'ondes de plus petites longueurs d'onde, celle-ci décroissant avec l'angle θ. Lorsque la navire est lent, toutes les longueurs d'onde du sillage sont plus petites que L, comme représenté sur la figure 7.6 (a). En revanche lorsque le navire est rapide, une partie des longueurs d'onde qui devraient former le sillage sont plus grandes que L, comme représenté sur la figure 7.6 (b). Ces ondes ne pouvant être générées, elles n'apparaissent pas dans le sillage, qui est donc différent du sillage de Kelvin. La taille du bateau agit comme un filtre passe bas, ne laissant se former que les vagues de longueur d'onde inférieure.

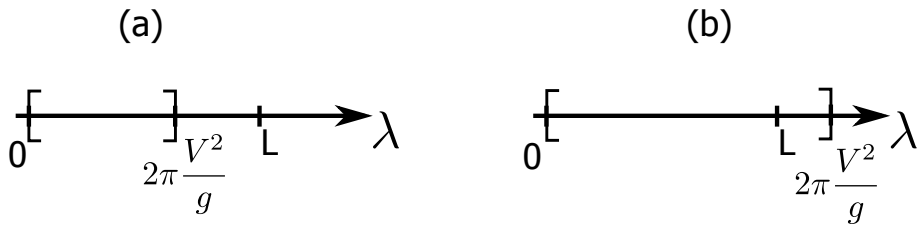


FIGURE 7.6 – Gamme de longueur d'onde dans le sillage. (a) navire lent, (b) navire rapide.

Afin de simplifier la discussion on supposera à partir de maintenant que le bateau ne génère que des longueurs d'onde de l'ordre de sa taille, et on cherche la forme du sillage qui

en découle. Une étude plus poussée et des comparaisons avec des sillages réels sont décrits par Moisy et Rabaud [93]. Les vagues de longueur d'onde $\lambda = L$ se propagent, d'après l'équation (7.19), suivant l'angle donné par l'équation :

$$cos(\theta) = c/V \tag{7.24}$$

On se place comme précédemment dans la limite gravitaire. La vitesse de phase des ondes gravitaires s'écrit, d'après l'équation (7.12) :

$$c = \left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)^{1/2} \tag{7.25}$$

On peut donc réécrire la relation (7.24) :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{Fr}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{7.26}$$

avec Fr le nombre de Froude définit par $Fr = V/\sqrt{gL}$.

La figure 7.7 présente la forme du sillage d'un navire se déplaçant de droite à gauche pour des nombres de Froude croissants, le sillage étant tracé selon l'équation paramétrique (7.20), seulement pour des angles de propagation proche de l'angle définit par la relation (7.26). On observe que plus le nombre de Froude est important plus l'angle du sillage est refermé. On compare ces résultats aux observations faites sur des sillages réels figure 7.8, pour un grand navire à faible vitesse (Fr petit) et pour un petit navire à grande vitesse (Fr grand) et on observe qu'ils sont proche de la prédiction.

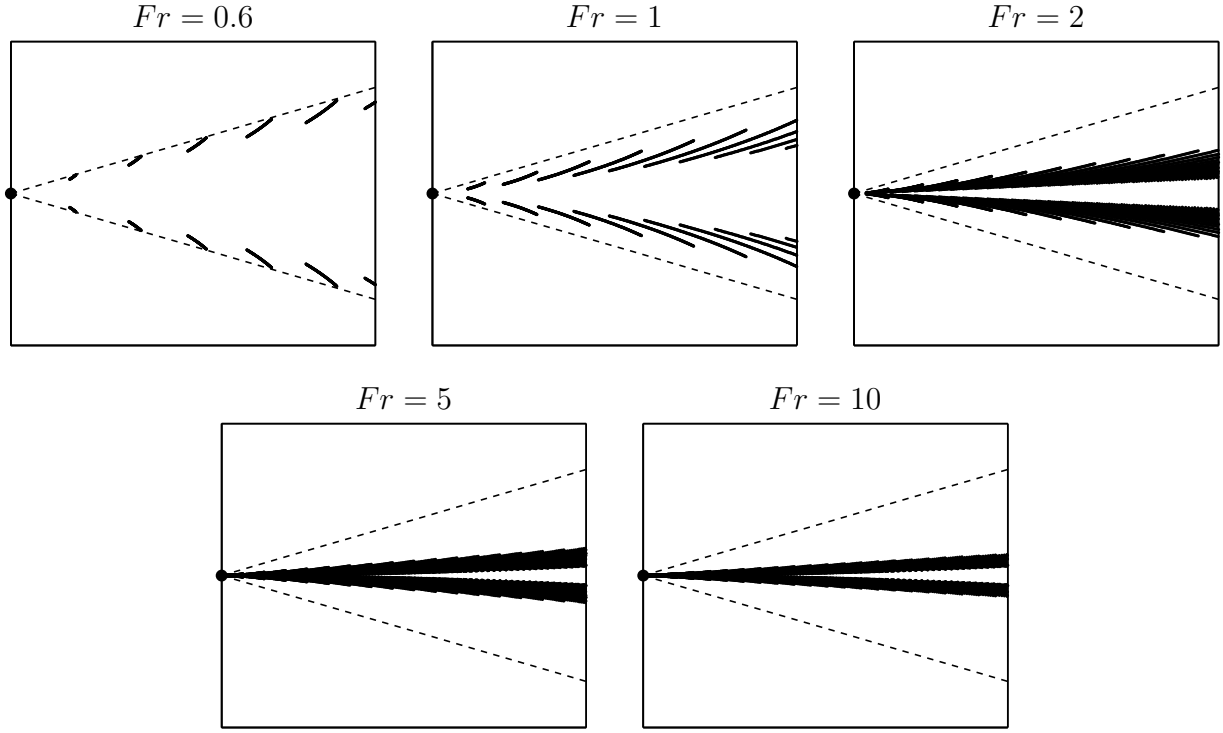


FIGURE 7.7 – Sillages typiques d'un navire formant des vagues de longueur d'onde proche de sa taille, pour des nombres de Froude croissants. La position du navire est indiquée par un gros point, les pointillés représentent la limite du sillage de Kelvin.

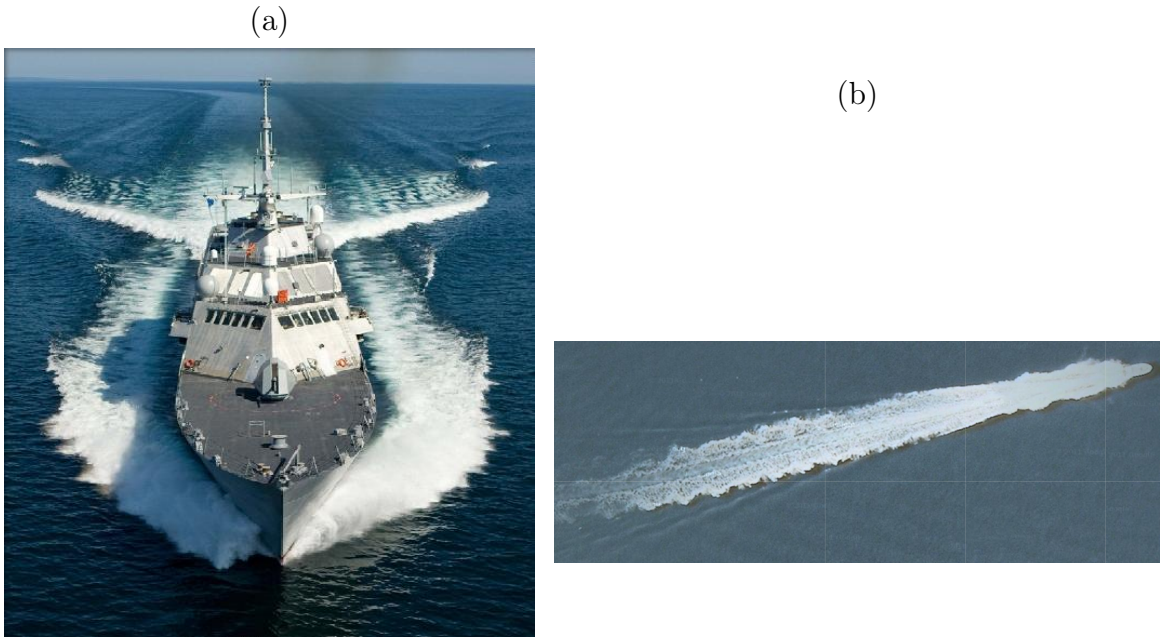


FIGURE 7.8 – Sillages réels à petit nombre de Froude (a) et à grand nombre de Froude (b). (Photo DGA et reproduction de google map).

7.5 Sillage instationnaire

7.5.1 Expérience

Dans tout ce qui précède, la source des perturbations qui génèrent le sillage est supposée continue. Nous revenons sur cette hypothèse et cherchons à trouver la forme du sillage observé en fonction de la fréquence de perturbation. L'expérience présentée figure 7.9 consiste à faire tomber des gouttes à la surface d'un courant, en faisant varier la fréquence des gouttes $f = 1/\tau$ et la vitesse du courant V. L'expérience est réalisée dans une cuve tournante, qui permet d'obtenir un écoulement dont la vitesse locale est comprise entre 0 et 1 m/s. Les gouttes sont formées à l'aide d'une grosse aiguille alimentée par un pousse seringue de débit contrôlé.

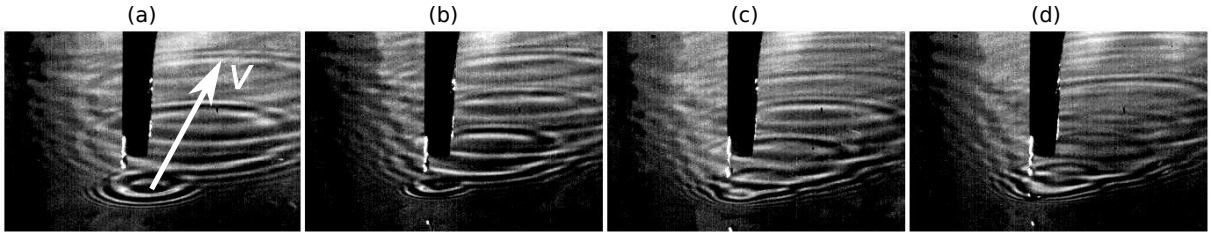


FIGURE 7.9 – Sillage obtenu par impact de gouttes à fréquence croissante sur un écoulement de vitesse $V = 50$ cm/s. La tige noire verticale supporte l'aiguille dont tombe les gouttes. La fréquence d'impact des gouttes est de : (a) 13 Hz, (b) 17 Hz, (c) 23 Hz, (d) 50 Hz.

Chaque impact de goutte forme une onde circulaire, qui interagit avec l'onde circulaire précédemment émise. Lorsque la vitesse de l'écoulement est inférieure à environ 20 cm/s on n'observe pas de sillage stationnaire. Au dessus de cette vitesse, on observe un sillage instationnaire, pour des faibles fréquences, qui se rapproche de la forme d'un sillage stationnaire lorsque la fréquence des gouttes augmente (voir figure 7.9). Au dessus d'un seuil de fréquence le sillage est proche d'un sillage stationnaire (surtout visible sur les bords du "V" que forme le sillage).

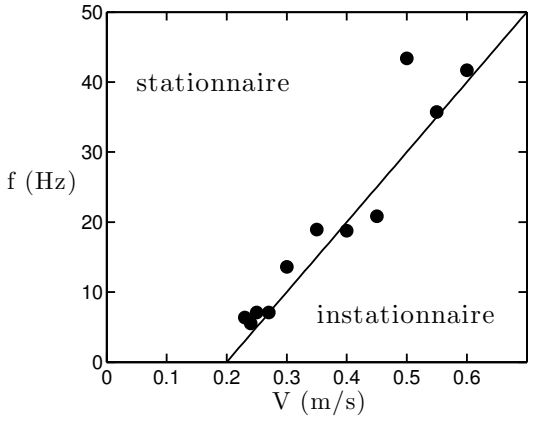


FIGURE 7.10 – Fréquence d'excitation minimale pour l'obtention d'un sillage stationnaire en fonction de la vitesse de l'écoulement.

On mesure la fréquence minimale nécessaire à obtenir un sillage stationnaire, en jugeant visuellement de l'installation de ce régime. La courbe obtenue est présentée figure 7.10. Il

existe une vitesse minimale en dessous de laquelle on n'observe pas de sillage stationnaire, puis la fréquence minimale augmente linéairement avec la vitesse.

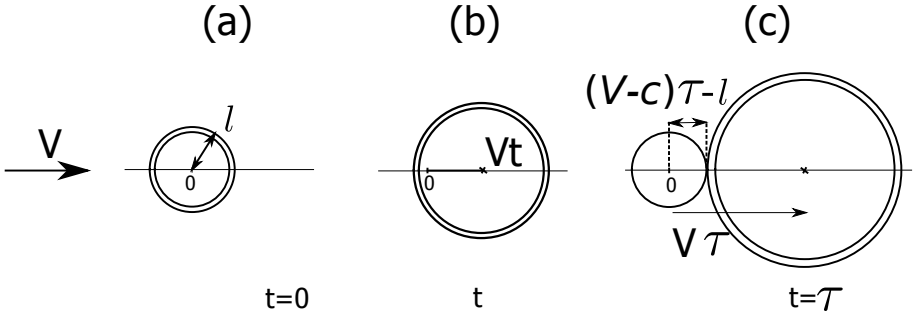


FIGURE 7.11 – (a) Au temps zéro un impact de goutte forme une perturbation de taille l. (b) La perturbation se déplace à la vitesse c perpendiculairement au front d'onde, le centre de la perturbation se déplace à la vitesse du courant V. (c) Au temps $t = \tau$ le front de la perturbation émis au temps zéro se trouve à la distance $(V - c)\tau - l$ du centre de la nouvelle perturbation.

Le problème est modélisé avec les notations présentées sur la figure 7.11. A un temps $t = 0$ un impact de goutte émet une onde circulaire, de taille initiale l. L'onde se propage à une vitesse c par rapport à l'écoulement. Dans le référentiel du laboratoire le front de l'onde qui se propage vers la droite se déplace à la vitesse $V - c$. Au temps τ un nouvel impact se produit, le front de l'onde se trouve alors à la distance $(V - c)\tau - l$ du point d'impact. On suppose que l'on obtient un sillage quasi-stationnaire si les perturbations créées entre deux impacts successifs se superposent au moins brièvement, ce qui s'écrit :

$$(V - c)\tau - l < l \tag{7.27}$$

et se réécrit :

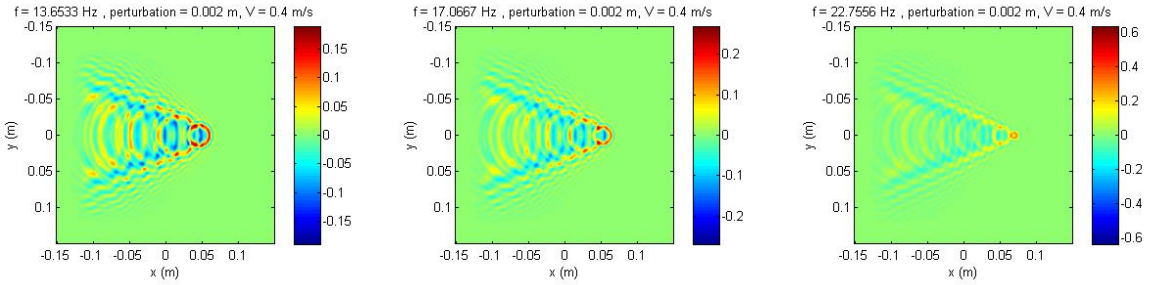
$$f > \frac{V - c}{2l} \tag{7.28}$$

On observe sur la figure 7.10 que cette équation est en accord avec les mesures, pour une valeur $c = 20$ cm/s proche de la vitesse minimale de propagation des ondes capillaro-gravitaires $c_{min} = 23$ cm/s, et pour une longueur $l = 5$ mm, de l'ordre de la taille de la perturbation obtenue lors des impacts.

7.5.2 Simulation numérique

Le problème présenté précédemment est simulé avec un code écrit par Moisy et Rabaud [93]. Il consiste à imposer une perturbation, de taille caractéristique l à la surface de l'eau sur un courant de vitesse V. A chaque pas de temps une transformée de Fourier bidimensionnelle détermine les longueurs d'onde λ présentes à la surface de l'eau et leur vitesse et direction de propagation, puis la perturbation est propagée selon sa vitesse $c_g(\lambda)$. Pour le problème étudié le code est modifié de façon à imposer la perturbation source à une fréquence f. Sur la figure 7.12 on présente le sillage obtenu, pour une vitesse de courant de 40 cm/s, une perturbation de 2 mm et une fréquence croissante. On observe une transition entre un sillage "instationnaire", et un sillage qui se rapproche d'un sillage de Kelvin. La fréquence de transition est qualitativement proche de celle observée expérimentalement, il serait nécessaire de développer un critère d'établissement du sillage de Kelvin pour effectuer une comparaison quantitative.

$f = 13.65$ Hz $f = 17$ Hz $f = 22$ Hz



$f = 34$ Hz $f = 68$ Hz

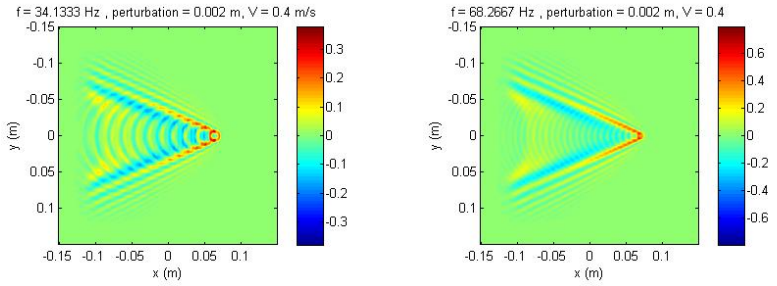


FIGURE 7.12 – Simulations de sillages instationnaires, code fournit par Moisy et Rabaud [93]. Les simulations sont effectuées pour un vitesse de la surface de droite à gauche $V = 40$ cm/s, l=2 mm, les différentes images représentent des fréquences croissantes de 13.6, 17, 22, 34 et 68 Hz. Le code couleur représente la hauteur de l'interface en mm.

7.6 Conclusion

Dans ce chapitre introductif sur les ondes, on a présenté la construction du sillage de Kelvin formé par un objet de grande taille (devant la longueur capillaire) et qui génère les vagues indifféremment de leur longueur d'onde, ce qui donne naissance à un sillage de demi-angle 19.5°. On a vu qu'en supposant que l'objet n'émet que des vagues de longueur d'onde égale à sa taille, la forme du sillage est modifiée. Enfin on a présenté une étude succincte de sillages "instationnaires".

Chapitre 8

Trainée de vague

Sommaire

8.1 Introduction **139**
8.2 Montage expérimental de mesure de la trainée de vague . . . **141**
8.3 Trainée de vague **144**
8.4 Modèle et discussion **145**
8.5 Mesure de l'amplitude du sillage **147**
8.6 Résultats expérimentaux **150**
8.7 Modèle **152**
8.8 Déviation à la théorie **155**
8.9 Conclusion **156**

8.1 Introduction

Les objets qui se déplacent à la surface de l'eau à une vitesse supérieure à c_{min} forment un sillage de vagues (chapitre 7). Celles-ci étant dispersives, elles transportent leur énergie loin de l'objet. Cette perte d'énergie correspond au travail de la trainée de vague. De façon équivalente, la trainée de vague peut être interprétée comme la résultante du champs de pression due au champ de vague sur l'objet. Les deux méthodes (évaluation de l'énergie transportée par la champs de vague, ou évaluation de la pression sur l'objet) sont utilisées pour estimer théoriquement la trainée de vague [94], [12].

Pour les navires, cette force peut dominer la trainée hydrodynamique [95]. Dans le cas des animaux marins, les biologistes ont introduit ce concept de trainée de vague afin d'interpréter les déplacements des poissons de rivières qui évitent de nager près de la surface [96], ou les performances de truites en fonction de leur profondeur [97]. La trainée de vague est aussi très importante dans l'étude de la nage, comme le montrent les mesures faites sur des mannequins immergés [98].

Dans le domaine militaire, la trainée de vague réduit les performances des vaisseaux, à la fois pour les navires de surfaces et pour les sous-marins, dont la vitesse maximale à la surface est inférieure à celle en immersion (voir table 8.1).

L'estimation de la résistance de vague est un problème classique, traité pour les bateaux par Kelvin en 1887 [10]. Les études les plus récentes s'intéressent à la trainée de petits objets qui forment à la fois des ondes gravitaires et des ondes capillaires [12]. Une question qui a soulevé un grand nombre de questions est la trainée autour de c_{min}, certaines théories

Type de bâtiment	vitesse max en plongée (km/h)	vitesse max en surface (km/h)
Daphné	16	13
Agosta	37	22
Classe Franklin	46	28
Classe Ohio	46	37
Typhoon	46	37
Oscar II	56	37

TABLE 8.1 – Caractéristiques de quelques sous-marins. Leur vitesse de surface est plus petite que leur vitesse en plongée. D'après B. Prézelin [99].

prédisant une discontinuité de la trainée [12]. Des études expérimentales [100] ou théoriques [101] ont montré que ce n'est pas le cas. L'importance de la viscosité du fluide sur la trainée a aussi été abordée, de manière théorique et expérimentale [102, 103]. Les objets immergés, quand ils se déplacent près de la surface, forment aussi des vagues et ressentent une force de résistance, comme discuté par Michel en 1898 [104], et Havelock en 1917 [94], pour des sphères puis par la suite pour des ellipsoïdes [105]. Les sous-marins ressentent cette trainée lorsqu'ils naviguent suffisamment près de la surface pour former un sillage, comme celui présenté sur la figure 8.1 (a) avec le sillage de surface formé par la maquette d'un sous marin, observée lors d'essais réalisées par la DGA.

(a)

(b)

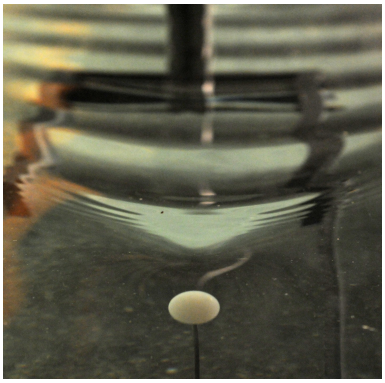


FIGURE 8.1 – (a) Sillage de surface lors de l'essai d'une maquette de sous-marin, photo DGA (b) Sillage de surface en prise de vue rasante d'une sphère de 2 cm à 2 cm de profondeur et une vitesse de 36 cm/s.

Dans ce chapitre on mesure la trainée de vague formée par des sphères immergés avec un dispositif permettant de ne pas prendre en compte la trainée hydrodynamique. On compare les mesures de trainée de vague aux prédictions de Havelock [94] et observons des mesures très inférieures aux prédictions. Dans un deuxième temps on mesure l'amplitude du sillage de surface, cherchant à savoir s'il est possible de repérer un objet sous-marin à son sillage de surface. On compare les mesures d'amplitudes aux prédictions obtenues par la méthode de l'image, et on montre en quoi la déviation par rapport à la théorie linéaire pour l'amplitude semble pouvoir expliquer les écarts à la théorie observés pour la trainée.

Lors de nos essais, nous tractons des sphères sous la surface de l'eau et nous visualisons

le même type de sillage que celui formé par le sous-marin. On travaille avec des sphères de tailles centimétriques dont le sillage est formé de vagues capillaires dont les crêtes se propagent devant la perturbation, et de vagues gravitaires qui se propagent derrière la perturbation [voir figure 8.1 (b)]. On note que dans les sillages observés, obtenus à faible vitesse, le sillage gravitaire ne ressemble pas à un sillage de Kelvin, seul des ondes se propageant avec un angle de propagation θ petit par rapport à la direction de translation sont générées (voir chapitre 7).

8.2 Montage expérimental de mesure de la trainée de vague

Le montage expérimental est présenté sur la figure 8.2. Il se compose de deux sphères lisses connectées par une tige en acier de 1 mm de diamètre, la tige étant reliée à un support par un fil de torsion de manière à ce qu'elle pivote autour d'un axe horizontal perpendiculaire au mouvement. Les sphères sont en polyamide (densité $\rho = 1.41$) ou polyacétal ($\rho = 1.14$). Elles ont des diamètres contrôlés au micron de 1, 2 et 3.756 cm. Le fil de torsion est du fil de pêche en nylon d'épaisseur comprise entre 0.3 et 1 mm selon la force à mesurer. Les expériences sont réalisées dans un bassin de 3 m de long, 50 cm de large et 60 cm de profondeur. Le montage est tracté à une vitesse comprise entre 0 et 90 cm/s connue au pour cent, la profondeur de la bille supérieure H mesurée du centre de la sphère à la surface libre varie entre zéro et plusieurs rayons. Quand les deux sphères sont loin de la surface [figure (8.2) (a)] elles sont toutes les deux soumises à la même trainée hydrodynamique F_h et aucun moment n'est appliqué sur le fil de torsion. Quand la sphère supérieure se trouve près de la surface [figure (8.2) (b)] elle est soumise à la fois à la trainée hydrodynamique et à la trainée de surface F_w et un couple $M_w = F_w.L$ est appliqué sur le fil.

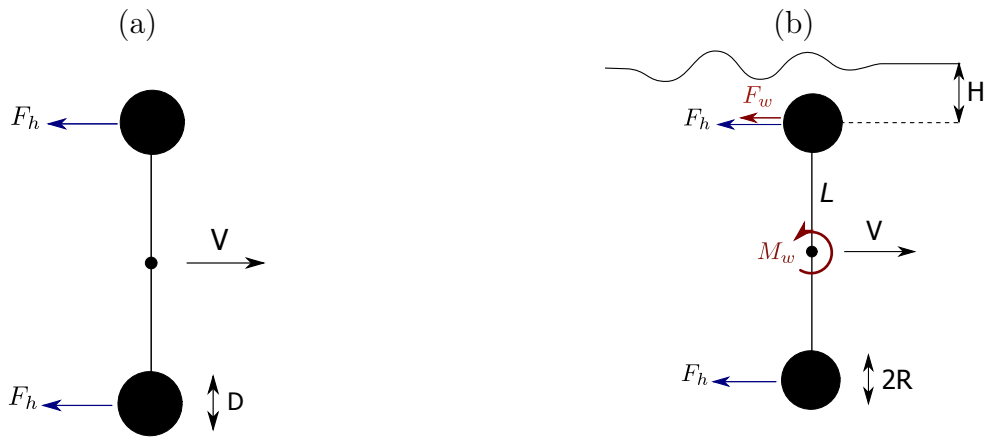


FIGURE 8.2 – Balance de mesure de la trainée de vague : (a) loin de la surface, (b) près de la surface.

Afin que la tige reliant les deux sphères passe bien par l'axe du fil de torsion on réalise le montage présenté figure 8.3 : le fil de torsion "actif", qui sert à réaliser la mesure, dessiné en noir, passe d'un coté de la tige puis vient s'enrouler autour du fil "inactif" en rouge. Le fil rouge passe de l'autre coté de la tige et vient s'enrouler sur le fil noir. Le fil inactif est fixé sur un pivot et mis en position sur le support. Le fil actif est alors fixé sur un pivot,

mis sous tension par une masse d'environ 1 kg. Le fil est mis sous tension de manière à ce que lors de la mesure, la tension due à l'écoulement sur le fil soit négligeable devant la tension préexistante. Afin de calibrer le montage on tourne le support de manière à ce que l'axe reliant les sphères soit horizontal. On place une masse de l'ordre du milligramme sur l'une des sphères et on fait tourner le pivot du fil actif, de façon à ce que le couple imposé par le fil compense le couple imposé par la masse et que l'axe revienne à l'horizontale. En réalisant l'opération avec des masses croissantes on calibre le montage, comme présenté sur la figure 8.4, on observe que le couple imposé par le fil augmente linéairement avec l'angle de torsion, la raideur augmentant avec le diamètre du fil.

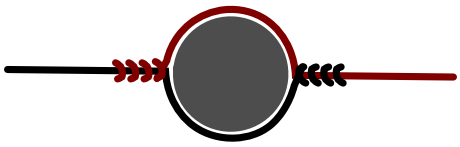


FIGURE 8.3 – Montage du fil de torsion autour de l'axe.

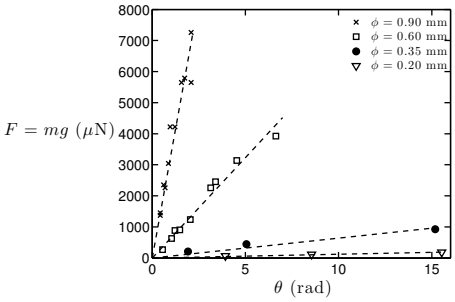


FIGURE 8.4 – Calibration des fils de torsion à l'aide de masses m : force $F = mg$ en fonction de l'angle de torsion θ, pour des fils de nylon de longueur semblable (environ 10 cm) et de différents diamètres. Les droites ont pour pentes respectives 3,3 10^3, 6,5 10^2, 64 et 12 μN/rad.

Deux méthodes de mesure ont été envisagées. La première en utilisant un fil de torsion de raideur importante, avec l'axe des sphères en position verticale à vitesse nulle, et en mesurant l'inclinaison de l'axe lorsque le montage se déplace à la vitesse désirée. Cette méthode suppose que l'axe soit bien vertical au moment initial, et que l'on puisse mesurer précisément l'inclinaison, les deux étant difficiles à obtenir. Par conséquent les mesures sont réalisées par une méthode par laquelle on approche graduellement la mesure. L'axe est maintenu vertical par une butée, et on applique un couple sur l'axe en imposant une torsion au fil. On met le dispositif en mouvement, si l'axe part en arrière sous l'action de la trainée de surface, la force appliquée par le fil est inférieure à la trainée. La torsion du fil est alors augmentée et on recommence, recherchant la torsion minimale pour que l'axe reste en position. On en déduit alors la trainée de vague par un encadrement, la précision dépendant du nombre d'étapes effectuées pour chaque mesure.

Afin de tester la méthode, on mesure la trainée hydrodynamique d'une sphère seule de 2 cm de diamètre, en retirant la sphère supérieure du montage. On compare la trainée mesurée à la trainée théorique $F_h = \frac{1}{2}\rho U^2 \pi R^2 Cd$ sur la figure 8.5 (a) et on déduit la valeur de Cd, qui est en accord avec des valeurs mesurées pour des sphères lisses [106] [figure 8.5 (b)].

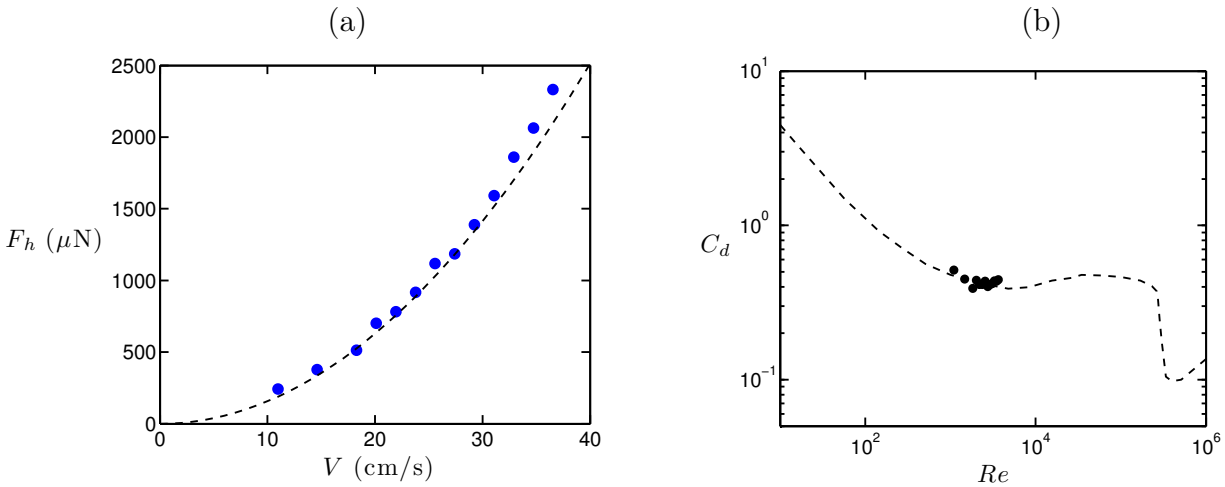


FIGURE 8.5 – (a)Trainée hydrodynamique d'une sphère de 2 cm. La ligne pointillée représente la valeur attendue pour un coefficient de trainée $Cd = 0.5$, avec $F_h = \frac{1}{2}\rho U^2 \pi R^2 Cd$. (b) Coefficient de trainée hydrodynamique en fonction du Reynolds pour une sphère lisse de 2 cm, estimé par la formule précédente.

8.3 Trainée de vague

8.3.1 Dépendance de la trainée avec la profondeur

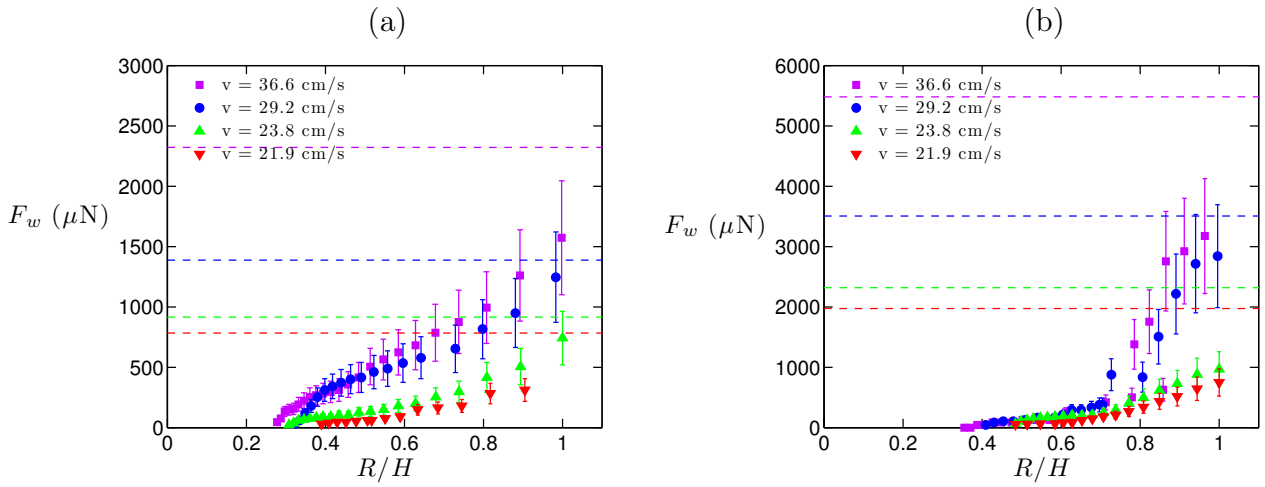


FIGURE 8.6 – Trainée de vague d'une sphère en fonction de R/H. (a) Sphère de 1 cm de diamètre, (b) sphère de 2 cm de diamètre. Les mesures sont effectuées pour 4 vitesses indiquées en légende. Les lignes horizontales de couleur identique représentent la valeur de la trainée hydrodynamique à la vitesse correspondante.

La figure 8.6 présente la trainée de vague de sphères de 1 et 2 cm de diamètre en fonction de leur profondeur pour plusieurs vitesses de déplacement. On observe que la trainée de vague augmente avec R/H et atteint son maximum lorsque $R/H = 1$ c'est à dire lorsque la sphère affleure la surface. La trainée de vague est négligeable lorsque R/H est inférieur à 0.3, c'est à dire lorsque le haut de la sphère se trouve à plus d'un diamètre de la surface. Dans la gamme de vitesse présentée sur cette figure la trainée de vague augmente avec la vitesse.

Les lignes horizontales sur la figure 8.6 représentent la trainée hydrodynamique aux vitesses considérées. Elle est calculée par la formule $F_h = \rho\frac{1}{2}\pi R^2 U^2 C_d$, avec le coefficient de trainée C_d déduit de tableaux de valeurs, en fonction du Reynolds, par exemple dans la gamme de vitesse considérée $C_d \approx 0.5$ pour la sphère de 2 cm de diamètre. On observe que la valeur de la trainée de vague est de l'ordre de la trainée hydrodynamique lorsque la sphère affleure la surface, pour les deux tailles de sphère et quelque soit la vitesse. La trainée de vague est de l'ordre de la moitié de la trainée hydrodynamique lorsque $R/H = 0.5$, c'est à dire lorsque le haut de la sphère se trouve à un rayon de la surface.

Influence de la vitesse

La figure 8.7 montre l'évolution de la trainée de vague avec la vitesse pour trois tailles de sphère. Les mesures sont présentées pour différentes profondeurs pour chaque sphère, reportées dans la table (8.2). On remarque que la trainée n'est pas une fonction monotone de la vitesse, mais augmente à partir d'une valeur nulle puis atteint un maximum et décroit. La vitesse à laquelle le maximum est atteint est fonction de la taille de la sphère et semble varier faiblement avec la profondeur de la sphère.

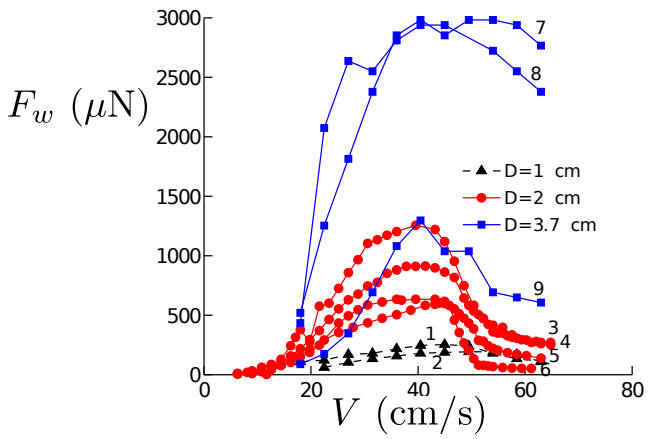


FIGURE 8.7 – Trainée de vague en fonction de la vitesse pour trois tailles de sphère à différentes profondeurs. Les numéros des courbes distinguent les différentes profondeurs de mesure rapportées dans la table (8.2). La force diminue avec la profondeur.

Diamètre de la sphère (cm)	courbe n°	H (cm)	R/H
1	1	7.3	0.68
	2	8.1	0.62
2	3	12.3	0.81
	4	13.8	0.72
	5	17.4	0.57
	6	21.6	0.48
3.76	7	22.8	0.82
	8	24.3	0.77
	9	32.8	0.57

TABLE 8.2 – Profondeur de mesure des données présentées figure 8.7

8.4 Modèle et discussion

8.4.1 Maximum de trainée

On cherche à déterminer la vitesse pour laquelle le maximum de trainée est atteint en fonction du diamètre des sphères immergées. Les navires de surface atteignent leur trainée de vague maximale lorsque $Fr = V/\sqrt{gL}$ est d'ordre 1, avec L la longueur typique du bateau. Une explication rapide consiste à dire que le bateau de taille L génère principalement les vagues de longueur d'onde $\lambda = L$. Pour un objet de grande taille, dans la limite gravitaire, la vitesse de phase des vagues s'écrit $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Le navire forme des ondes telles que $\lambda = L$ qui se déplacent avec la même vitesse que le navire lorsque $V = c$ ce qui se réécrit $V = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$ ou bien $Fr = V/\sqrt{gL} = 1/\sqrt{2\pi}$.

Dans le cas d'un petit objet, dont la taille est de l'ordre de la longueur capillaire, les ondes formées par l'objet suivent la relation de dispersion capillaro gravitaire $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\gamma 2\pi}{\lambda\rho}}$. Avec les hypothèses présentées plus haut la trainée de vague d'un petit objet sera maximale lorsque $V = c$.

La figure 8.8 représente l'évolution de la trainée de vague de trois sphères de taille

différentes en fonction de la vitesse divisée par $c(D)$, avec D la diamètre des sphères. La trainée est divisée par D^2 afin d'avoir des valeurs comparables pour toutes les tailles de sphère et ainsi de pouvoir comparer la forme des courbes. On observe que toutes les courbes ont la même allure, avec un maximum atteint pour la même valeur de V/c. Par conséquent la position du maximum de trainée V_{max} dépend de la taille de la sphère par la relation $V_{max} = c(D) = \sqrt{\frac{gD}{2\pi} + \frac{\gamma 2\pi}{D\rho}}$ Si l'on trace la force en fonction du Froude, les courbes pour

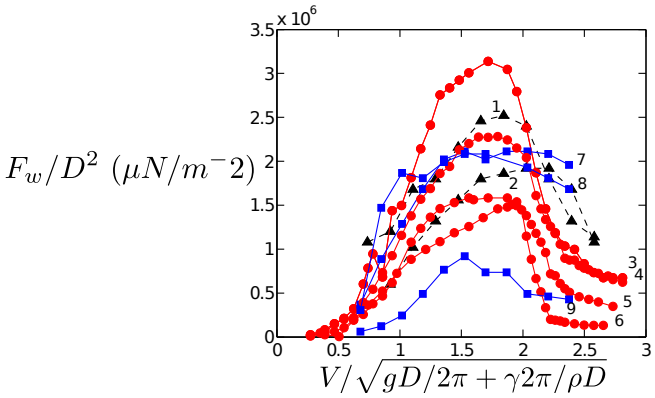


FIGURE 8.8 – Trainée de vague divisée par D^2 en fonction de V/c, avec c la vitesse de phase des ondes capillaro gravitaires de longueur d'onde D. Les profondeurs de mesure sont indiquées tableau 8.2.

les sphères de 2 et 3.76 ont leur maximum à la même valeur, la sphère de 1 cm à une valeur inférieure. Cela nous indique que pour la petite sphère il faut prendre en compte le fait qu'elle forme des ondes capillaires, alors que pour les plus grosses sphères les ondes capillaires sont négligeables. Par la suite, lorsque l'on comparera les mesures de trainée à des estimations théoriques pour lesquelles on se place dans la limite gravitaire, on ne tracera les données que pour les deux plus grandes tailles de sphère.

8.4.2 Estimation via la méthode de l'image

La trainée de vague théorique pour un sillage purement gravitaire est obtenue en utilisant le principe des images par Havelock [94] :

$$F_w = \sqrt{\frac{2\pi^3 g^7}{H}} \rho R^6 V^{-5} \exp\left(-\frac{2gH}{V^2}\right) \tag{8.1}$$

Cette formule est valable pour des grandes profondeurs ($R/H << 1$) et des faibles vitesses ($V^2 << gH$). On a observé précédemment que lorsqu'on obtient une résistance de vague importante les deux conditions ne sont pas remplies. On compare la trainée théorique aux mesures pour vérifier la prédiction hors de sa gamme théorique de validité.

8.4.3 Comparaison avec les mesures

Les figures 8.9 (a) et (b) comparent la trainée de vague mesurée pour deux tailles de sphère en fonction de la vitesse avec les prédictions du modèle théorique (8.1). Les comparaisons ne sont réalisées que pour les plus grosses sphères, la théorie étant développée pour des sillages purement gravitaires (D=2 et 3.76 cm). On observe une grande déviation

entre la théorie et les valeurs mesurées, les mesures étant inférieures d'un facteur de l'ordre de 5 pour les billes de 2 cm, et d'une facteur de l'ordre de 10 pour les billes de 3.76 cm, la déviation par rapport à la théorie diminuant avec la profondeur.

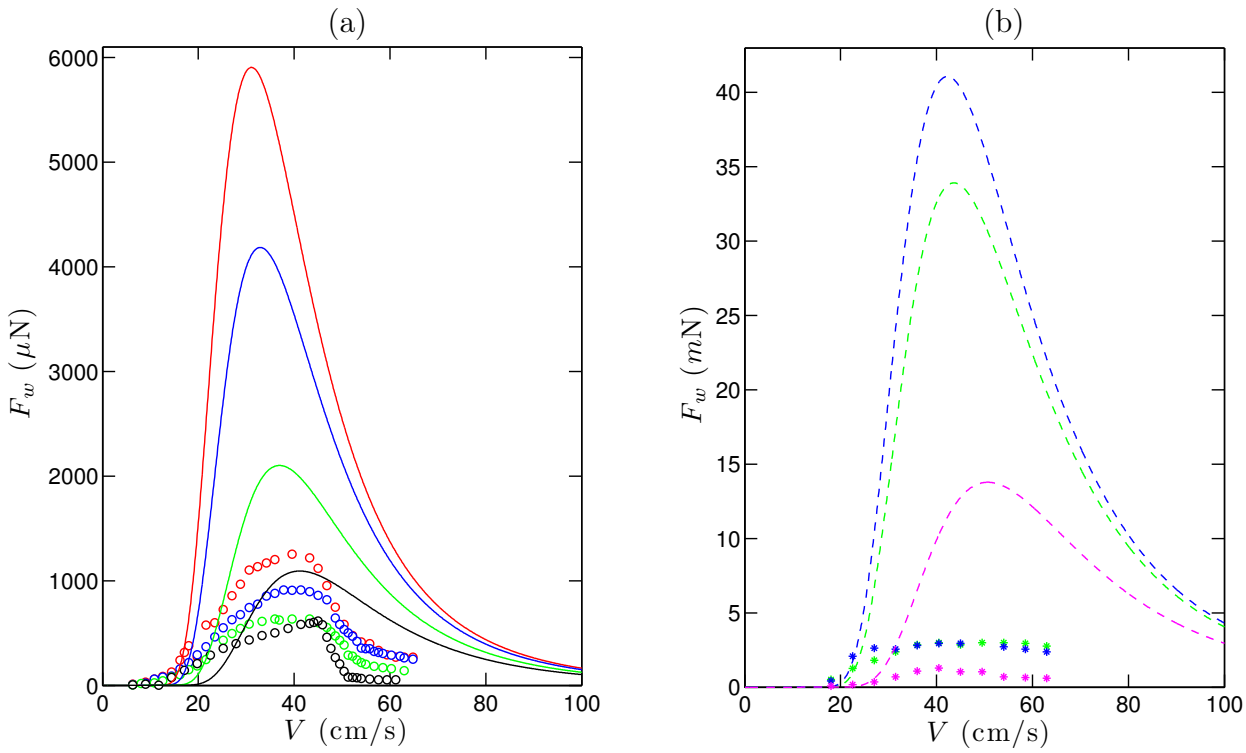


FIGURE 8.9 – Comparaison entre la trainée mesurée (symboles) et la valeur théorique attendue par l'équation (8.1) (lignes). (a) Sphère de 2 cm de diamètre, (b) sphère de 3.76 cm de diamètre. Les profondeurs sont indiquées table (8.2), la force diminuant avec la profondeur.

Les valeurs mesurées sont donc toujours très inférieures aux valeurs attendues. Dans la suite du chapitre on cherche à expliquer ce résultat, qui n'est pas forcement étonnant, les mesures de trainée étant effectuées à des profondeurs faibles pour lesquelles elle est importante par rapport à la trainée de vague, mais aussi pour lesquelles la théorie n'est plus forcement valable. Pour cela on mesure l'amplitude du sillage de surface responsable de la trainée de vague, et vérifions si les mesures sont en accord avec l'estimation théorique de l'amplitude proposée par Chevy (annexe D).

8.5 Mesure de l'amplitude du sillage

8.5.1 Dispersion de l'énergie par les vagues

La résistance de vague étant due à la présence d'un sillage, il est théoriquement possible de déduire la trainée de l'amplitude des différentes longueurs d'onde qui forment ce sillage.

Les ondes capillaires transportent l'énergie à la vitesse c_g^{cap} plus grande que la vitesse de l'objet V, alors que les ondes gravitaires transportent l'énergie à la vitesse c_g^{grav} plus petite que V. La dissipation d'énergie par unité de temps P_w due à la propagation des vagues s'écrit donc, avec $E(k)$ l'énergie transportée par les vagues de vecteur d'onde k [12] :

$$P_w = \int \left[V - c_g^{grav}(k)\right] E(k)dk + \left[c_g^{cap}(k) - V\right] E(k)dk \tag{8.2}$$

Sachant que l'énergie transportée par les vagues $E(k)$ est proportionnelle au carré de l'amplitude des vagues, connaissant l'amplitude des vagues de différentes longueurs d'onde qui forment le sillage, il est donc théoriquement possible d'estimer la trainée de vague. Dans la section qui suit on décrit les différentes méthodes utilisées pour effectuer une mesure de l'amplitude du sillage.

8.5.2 Dispositif optique

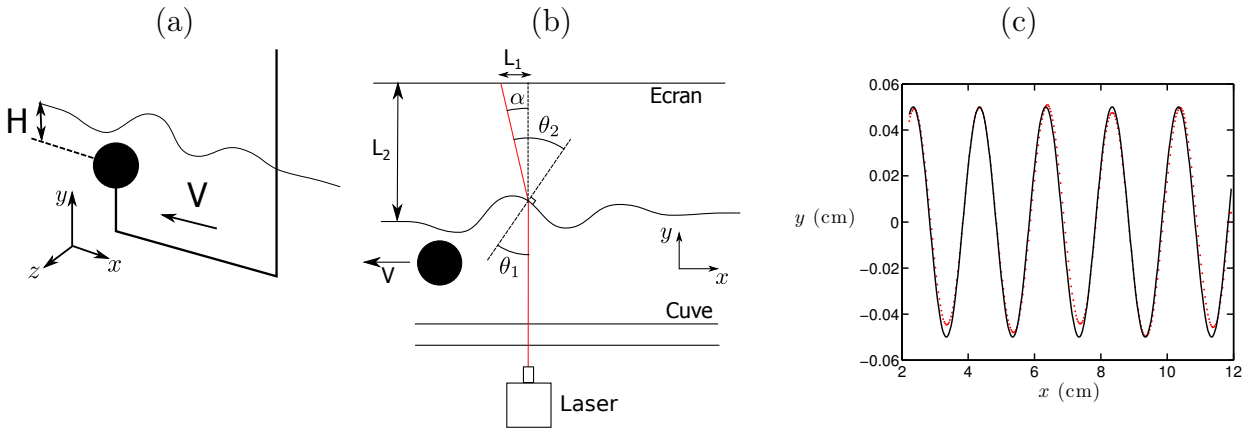


FIGURE 8.10 – Schéma du montage de mesure de l'amplitude optique, (a) vue générale, (b) vue latérale et notationss. (c) Mesure du profil d'un bloc de polyacétal. Les points représentent la mesure, la ligne pleine le profil exact, le zéro la hauteur moyenne.

Le principe de la mesure optique est présenté sur la figure 8.10 (a) et (b). Le profil du sillage formé par une bille immergée est mesuré sur son axe de symétrie ($z = 0$). Les billes sont fixées par en dessous sur une tige fine de 10 cm de long, et reliées au banc de translation par un support positionné sous la surface de l'eau de 40 cm de long fixé au bras de traction vertical, de manière à ce que la sillage du bras de traction et de la sphère n'interagissent pas. Les billes utilisées sont les mêmes que celles du système de mesure de la trainée de vagues de 1, 2 et 3.76 cm de diamètre, ainsi qu'une balle lisse de 9 cm de diamètre.

Un faisceau laser traverse le fond de la cuve, puis est réfracté en traversant la surface de l'eau et atteint un écran horizontal. La position du laser sur l'écran est enregistrée avec une caméra rapide (Phantom V9). La mesure de la distance du spot à sa position initiale L_1 donne l'angle que fait le faisceau avec la verticale par la relation :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \tag{8.3}$$

avec L_2 la distance de la surface non perturbée à l'écran. On note que si l'élévation de la surface δ est grande devant L_1 une erreur est induite dans la mesure de α, donc dans toutes les expériences on prend garde à ce que $L_1 \sim 1$ m $>> \delta$.

La relation entre l'angle α et l'angle du faisceau laser avec la surface de l'eau, dans l'eau θ_1 et dans l'air θ_2 s'écrit :

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1 \tag{8.4}$$

La relation de Descartes entre les angles θ_1 et θ_2, avec n_1 et n_2 respectivement les indices optiques de l'eau et de l'air s'écrit :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{8.5}$$

On en déduit la relation entre α et θ_1 :

$$\alpha = \sin^{-1}(n_1/n_2 \sin\theta_1) - \theta_1 \tag{8.6}$$

L'angle θ_1 est intégré au cours du temps afin d'obtenir le profil de la surface $y(x)$. On remarque que l'on ne mesure que la hauteur relative de la surface, le signal étant perdu lorsque la sphère coupe le faisceau laser, ce qui induit une dérive de la mesure.

On vérifie la méthode en mesurant sur la figure 8.10 (c) en comparant la mesure obtenue du profil de sa valeur connue d'un bloc de polyacétal usiné de manière à présenter un profil sinusoïdal de longueur d'onde de 2 cm d'amplitude crête à crête de 1 cm. On observe un bon accord, sans dérive sur la durée de la mesure.

8.5.3 Sonde à vague capacitive

Si les vagues formées par le mouvement de la sphère ont une pente importante (amplitude supérieure à 10 pour cent de la longueur d'onde), elles sont non-linéaires et ont tendance à déferler. Cela rend la surface "rugueuse" et exclue l'utilisation du montage optique précédemment décrit. Pour éviter ce problème, une sonde à vague capacitive est utilisée pour mesurer l'amplitude des vagues importantes (Akamina Technologies AWP-24 wave height gauge). On place la sonde de 30 cm de long, au dessus du trajet de la sphère. Elle fournit un signal entre -10 et +10 V en fonction de la position relative de la surface, avec un temps de réponse de moins de 5 ms. Une des limites du système est que la sphère ne doit pas être à moins de 2 cm de la surface, de manière à ce que le bout de la sonde reste toujours immergé.

8.5.4 Profilométrie de surface

Afin d'obtenir une mesure du sillage en trois dimensions et de vérifier les mesures obtenues par les autres méthodes, nous avons aussi utilisé une méthode de profilométrie de surface.

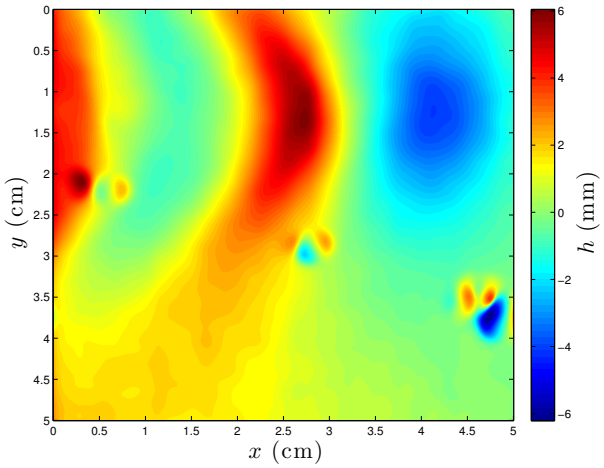


FIGURE 8.11 – Champs de hauteur de la surface lors du passage d'une sphère immergée de 37.7 mm de diamètre à 51 mm de profondeur tractée à $V = 45$ cm/s.

Le figure 8.11 représente le profil de la surface au dessus d'une sphère immergée, obtenu par la méthode de profilométrie de surface développée par Maurel, Cobelli, Pagneux et

Petitjeans au PMMH, ESPCI [107, 108]. La méthode consiste à projeter et filmer un motif de raies à la surface de l'eau, qui a préalablement été colorée. L'eau peut être colorée soit avec un colorant pour peinture blanc, soit avec de la poudre de dioxyde de titane, ce qui suppose d'utiliser de l'eau microfiltrée pour éviter la floculation de la poudre, le but est que l'eau soit fortement opaque afin que le motif projeté apparaisse nettement à la surface. On filme le motif lors du passage du sillage, puis on traite les images avec une programme fonctionnant sous Matlab. Le principe consiste à mesurer le décalage local des raies par rapport à leur position initiale (différence de phase), puis d'en déduire la hauteur locale. Ce principe fonctionne tant que le décalage des raies est inférieur à leur espacement. Dans le cas contraire le programme fait un déroulement de phases, le champs de hauteur variant continûment à partir d'un point de référence.

Les mesures présentées par la suite proviennent indistinctement des trois méthodes de mesure, qui donnent des résultats comparables.

8.6 Résultats expérimentaux

8.6.1 Longueur d'onde

A l'aide de la mesure optique et de la profilométrie de surface on mesure la longueur d'onde des vagues se déplaçant derrière la sphère dans la direction de traction. On trace la longueur d'onde λ en fonction de la vitesse c sur la figure 8.12. Les mesures sont comparées à la relation attendue par la relation de dispersion des ondes capillaro-gravitaires :

$$c = \left(\frac{c\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho} \right)^{1/2} \tag{8.7}$$

tracée en noir. On observe que les mesures suivent la courbe théorique, avec une petite dispersion.

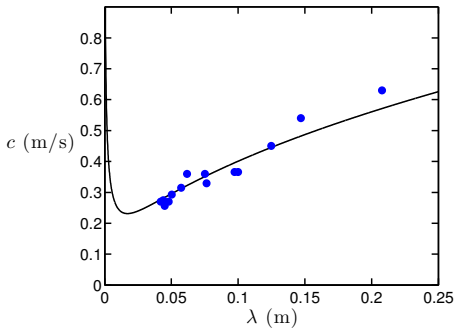


FIGURE 8.12 – Vitesse en fonction de la longueur d'onde des vagues suivant la sphère. La ligne noire représente l'équation (8.7).

8.6.2 Amplitude

La figure 8.13 représente un profil typique de sillages obtenus avec le système optique, en définissant l'amplitude du sillage a_1 comme étant la différence de hauteur entre le premier creux et la première crête observées, et a_2 la différence de hauteur entre la première crête et le deuxième creux. L'amplitude du sillage derrière la sphère décroit sur quelques longueurs d'onde.

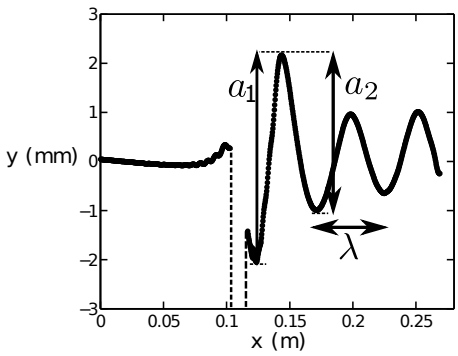


FIGURE 8.13 – Profil de la surface au dessus d'une sphère se déplaçant de droite à gauche, avec a_1 l'amplitude de la première vague et a_2 l'amplitude de la deuxième vague. Lorsque la bille coupe le faisceau laser le signal est perdu (ligne pointillées verticales).

Amplitude en fonction de la profondeur

La figure 8.14 représente l'évolution de l'amplitude a_1 du sillage en fonction de la profondeur de la sphère pour 3 tailles de sphères, à trois vitesses de traction. On observe que l'amplitude décroit avec la profondeur, la profondeur à partir de laquelle l'amplitude mesurée est négligeable augmente avec la taille de la sphère.

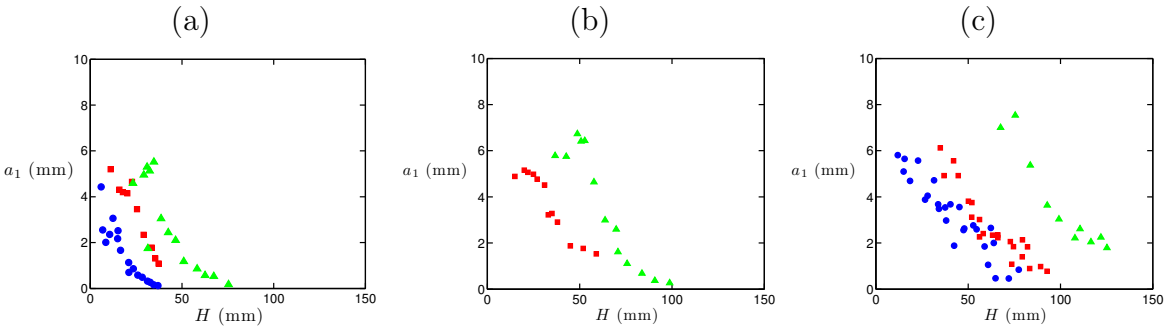


FIGURE 8.14 – Amplitude a_1 du sillage en fonction de H pour trois différentes tailles de sphère (a) V=29 cm/s, (b) V=45 cm/s, (c) V=60 cm/s.

Amplitude en fonction de R/H

Afin de comparer les mesures pour les différentes tailles de sphère, on présente maintenant l'évolution de a_1 en fonction de R/H sur la figure 8.15 en axes logarithmiques, pour une vitesse de déplacement de la sphère de 29.7 cm/s (a), 45 cm/s (b) et 60 cm/s (c). On observe que toutes les courbes ont une forme comparable, a_1 augmentant avec R/H avant de saturer autour d'une amplitude maximale. La valeur de R/H pour laquelle la saturation est atteinte augmente avec la taille de la sphère et diminue avec la vitesse, tandis que la valeur de saturation augmente avec la taille de la sphère ainsi qu'avec la vitesse.

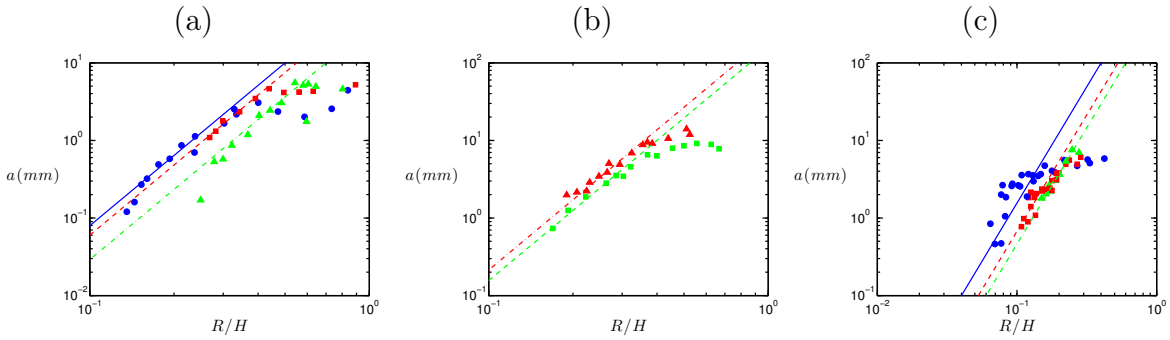


FIGURE 8.15 – Amplitude du sillage en fonction de R/H pour trois différentes tailles de sphère, en axes logarithmiques. Les couleurs représentent les différentes tailles de sphère, (bleu) 1cm, (rouge) 2cm, (vert) 3.76 cm. (a) V=29.7 cm/s, (b) V=45 cm/s, (c) V=60 cm/s. Les lignes sont les meilleurs ajustements par une loi de puissance $a \sim (R/H)^3$.

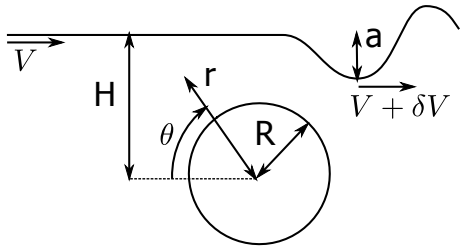


FIGURE 8.16 – Notations utilisées pour le modèle.

8.7 Modèle

8.7.1 Modèle simple de l'amplitude

On présente un modèle d'écoulement potentiel simple afin d'estimer la dépendance de l'amplitude du sillage a_1 avec la profondeur de déplacement des sphères (figure 8.16). Dans le référentiel de la sphère, l'écoulement peut être décrit comme la superposition d'un écoulement uniforme V et de l'écoulement autour de la sphère. Un potentiel de vitesse qui décrit bien cet écoulement est la somme du potentiel d'un écoulement uniforme et d'un potentiel dipolaire :

$$\Phi = -Vrcos(\theta) - \frac{Vrcos(\theta)}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \tag{8.8}$$

La perturbation de l'écoulement de base maximale à la surface due à la présence de la sphère s'écrit δV, et induit une déformation de la surface a. Une estimation de δV au niveau de la surface est obtenue en dérivant le deuxième terme du potentiel de vitesse :

$$\delta V \sim V\left(\frac{R}{H}\right)^3 \tag{8.9}$$

L'amplitude de la déformation a due à δV est estimée en appliquant l'équation de Bernoulli entre le point d'intérêt et un point à la surface loin de toute perturbation :

$$\frac{V^2}{2} = \frac{(V+\delta V)^2}{2} + ga \tag{8.10}$$

Au premier ordre en δV la perturbation à la surface s'écrit, tant que $a << H$:

$$a \sim \frac{V^2}{g}\left(\frac{R}{H}\right)^3 \tag{8.11}$$

La figure 8.15 représente a_1 en fonction de R/H en échelles logarithmiques. On vérifie que a_1 varie avec R/H à la puissance trois dans un large domaine de profondeur, puis sature à une amplitude a^* de l'ordre de la taille de la sphère, comme discuté dans la section suivante.

8.7.2 Amplitude maximale

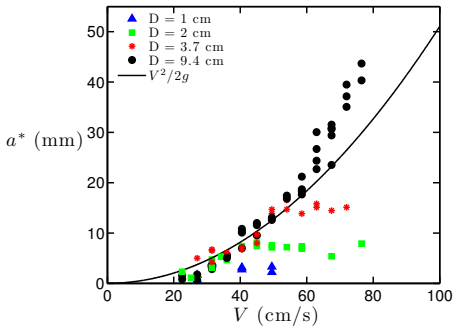


FIGURE 8.17 – Amplitude maximale a^* en fonction de la vitesse. La ligne pleine représente l'équation (8.12).

On a observé que pour des valeurs de R/H proches de 1 l'amplitude du sillage a_1 sature à la valeur a^*. On mesure cette valeur saturée a^* en fonction de la vitesse pour différentes tailles de sphère (figure 8.17). On observe que pour toutes les tailles de sphère les mesures croissent proportionnellement à V^2, puis saturent à vitesse élevée, à une valeur de l'ordre du diamètre des sphères R. On a estimé dans la section 8.7.1 la perturbation de vitesse due à la sphère δV. La perturbation de vitesse due à la sphère peut au maximum annuler localement la vitesse de l'écoulement ($\delta V = -V$). On en déduit à partir de l'équation (8.10) que l'amplitude maximale s'écrit :

$$a^* = \frac{V^2}{2g} \tag{8.12}$$

L'amplitude saturée a^* suit bien la loi proposée à faible vitesse, puis sature à l'amplitude notée a^*_{max}, à part pour la plus grosse sphère étudiée, pour laquelle l'amplitude a^* est plus grande qu'attendue. Les différentes valeurs de a^*_{max} sont tracées sur la figure 8.18 pour les trois tailles de sphères pour lesquels on a obtenu une mesure. On observe que a^*_{max} croit linéairement avec le diamètre des sphères.

L'évolution de l'amplitude a_1 avec la profondeur peut donc être décrite à partir d'un modèle potentiel qui prédit une évolution en $(R/H)^3$ puis une saturation de l'amplitude en V^2/g. On observe de plus que l'amplitude ne peut dépasser une fraction de la taille de la sphère. Si un objet se déplace suffisamment profond pour que l'amplitude du sillage qu'il forme ne soit pas saturée, sans connaitre sa taille on ne pourra pas déterminer sa profondeur. Mais il est légitime de penser que si l'on repère l'objet à son sillage, c'est que celui-ci est important, et que donc l'objet est proche de la surface. Dans ce cas, connaissant sa vitesse, on peut mesurer l'amplitude du sillage et avoir une estimation de la taille de l'objet.

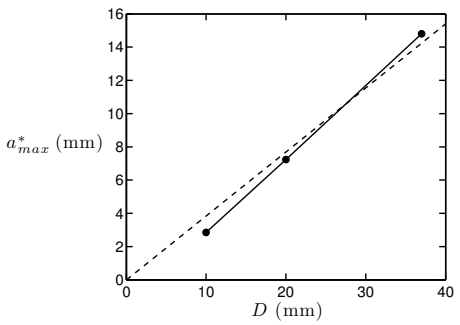


FIGURE 8.18 – Valeur maximale de a^* en fonction du diamètre des sphères. La ligne pointillée représente le meilleur ajustement linéaire.

8.7.3 Méthode de l'image

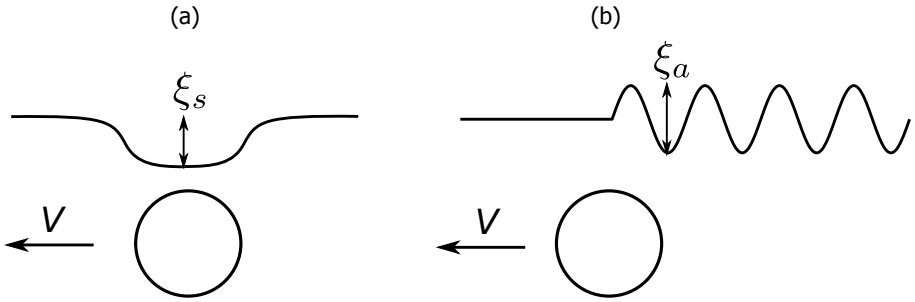


FIGURE 8.19 – (a) composante symétrique du sillage. (b) composante asymétrique du sillage.

Une estimation de la déformation de la surface due à la sphère, dérivée en appliquant le principe d'objet image afin de prendre en compte la présence de la surface, en négligeant la viscosité du fluide, prédit deux composantes à la déformation de la surface, comme décrit en détail en annexe D (figure 8.19). Une composante est symétrique droite/gauche par rapport à la sphère et a une amplitude ξ_s qui dépend de R/H à la puissance trois. L'autre composante, asymétrique, correspond à la partie propagative du sillage. Elle prédit un sillage sinusoïdale d'amplitude constante derrière la sphère. L'amplitude crête à crête de cette déformation sur l'axe de déplacement de la sphère s'écrit :

$$\xi_a = 4\frac{R^3}{V_0^3}\sqrt{\frac{\pi g^3}{H}}\exp\left(-\frac{gH}{V_0^2}\right) \tag{8.13}$$

On présente la valeurs théorique de ξ_a obtenue par l'équation (8.13) en fonction de R/H sur la figure 8.20 et on observe qu'elles sont très inférieures aux valeurs de a_1 mesurées.

La valeur de l'amplitude mesurée a_1 est donc bien supérieure à l'amplitude du sillage propagatif prédite par la méthode de l'image. Lors de la mesure de a_1 ils semble que nous mesurons une superposition des deux composantes théoriques du sillage ξ_a et ξ_s, sans être capable de déterminer l'influence de chacune.

8.7.4 Composante asymétrique du sillage

Pour tenter de mesurer la composante asymétrique du sillage seulement, on s'éloigne de la sphère et mesure a_2, l'amplitude entre la première crête et le deuxième creux, comme on l'a définit sur la figure 8.13. Si la viscosité était négligeable on devrait pouvoir mesurer

l'amplitude du sillage plus loin de la sphère, l'amplitude ne variant pas avec la distance. Expérimentalement on observe que ce n'est pas le cas, l'amplitude du sillage décroissant rapidement avec la distance, c'est pourquoi on choisit de mesurer l'amplitude des ondes prorogatives à cet endroit (figure 8.13). On trace les résultats obtenus pour a_1, a_2 et la valeur théorique ξ_a en fonction de R/H sur la figure 8.20 en axes logarithmiques. On observe qu'il y a un bon accord entre la valeur théorique et la valeur mesurée a_2 sur la plupart des mesures, sans paramètre ajustable.

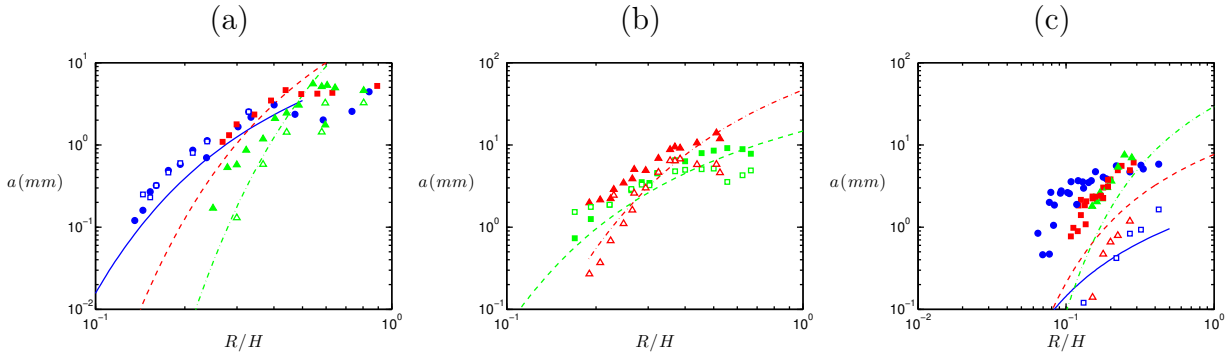


FIGURE 8.20 – Amplitude du sillage pour trois tailles de sphère en fonction de R/H. Les lignes représentent la relation (8.13) sans correction. Les symboles pleins représentent a_1, les symboles vides a_2. Les couleurs représentent les différentes tailles de sphères, (bleu) 1cm, (rouge) 2cm, (vert) 3.76 cm. (a) V=29.9 cm/s, (b) V=45 cm/s, (c) V=60 cm/s.

8.8 Déviation à la théorie

On a observé que le sillage formé par les sphères immergées est très monochromatique, dans le sens où les ondes ont des angles de propagation proches et des longueurs d'onde proches (figures 8.11 page 149 et 8.1 (b) page 140). Il semble donc que l'information mesurée pour une des longueurs d'onde qui forment le sillage, comme celle que l'on a obtenue sur l'axe de déplacement des sphères, puisse donner une bonne information sur l'ensemble du sillage. On a observé que dans la gamme de profondeur pour laquelle on a réalisé les mesures de trainée de vague, la trainée mesurée est inférieure à la prévision, ainsi que l'amplitude des ondes. Sachant que l'énergie transportée par les vagues est proportionnelle au carré de leur amplitude, une manière d'estimer l'effet de la saturation en amplitude sur la trainée est de multiplier la trainée théorique par $(a^*/\xi_a)^2$, l'amplitude mesurée sur l'amplitude théorique au carré (L'énergie transportée par les vagues est à moitié sous forme d'énergie potentielle de gravité, à moitié sous forme d'énergie cinétique. Le terme d'énergie potentiel dépend linéairement de l'amplitude au carré [11]). La valeur de l'amplitude saturée utilisée pour le calcul est celle de la deuxième vague a_2^*, mesurée à 45 cm/s, aux alentours du maximum de trainée. L'amplitude théorique ξ_a est estimée à la même vitesse. On observe sur la figure 8.21 que la trainée de vague théorique, multipliée par $(a_2^*/\xi_a)^2$, approche la valeur obtenue pour les mesures, avec un écart faible pour les mesures sur les sphères de 2 cm de diamètre, et un écart un peu plus important pour les plus grosses sphères. Il semble donc que l'on puisse estimer l'erreur faite sur l'estimation de la trainée en prenant en compte la saturation des ondes.

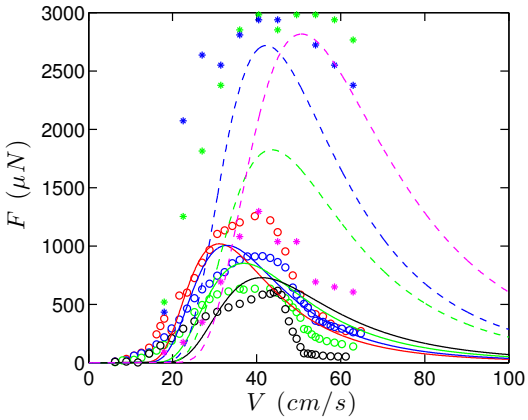


FIGURE 8.21 – Comparaison de la trainée de vague mesurée (symboles) et de la trainée de vagues théorique (lignes pointillés). Les symboles représentent (•) sphères de 2 cm, (*) sphères de 3.76 cm, les lignes pleines la valeur théorique pour les petites sphères, les lignes pointillées pour les grosses sphères. Les valeurs théoriques ont été multipliées par le facteur $(a_2^*/\xi_a)^2$ afin de prendre en compte la saturation des vagues en amplitude.

8.9 Conclusion

On a mesuré la trainée de vague et l'amplitude du sillage de sphères immergées. On mesure une trainée de vague importante lorsque les sphères se trouvent à une profondeur de l'ordre de leur rayon, mais moins importante que prédit par les théories linéaires, d'un facteur 2 à 10. En mesurant l'amplitude du sillage formé à cette profondeur on se rend compte qu'elle est inférieure aux prédictions, saturant à une valeur maximale. Il semble qu'en tenant compte de cette saturation de l'amplitude du sillage on puisse estimer la déviation à la théorie observée sur la trainée de vague.

Conclusion

Dans ce travail de thèse, j'ai étudié trois phénomènes qui créent des empreintes à la surface de l'eau.

Dans la première partie nous nous sommes intéressés aux cavités instationnaires formées par des explosions de surface. Ces cavités présentent une géométrie différente des cavités d'impact. Elles s'ouvrent de manière isotrope, avec une forme hémisphérique, et se referment de manière anisotrope, ce qui entraine la formation d'un jet vertical [1]. Si l'on confine les explosions dans des tubes, on observe que les cavités n'en sortent jamais, quelle que soit l'énergie apportée par l'explosion. Pour les cas confinés et non confinés, nous développons des modèles permettant de comprendre la dynamique et la forme des cavités observée et leur lien avec l'énergie apportée par l'explosion. Une des perspective pratique de cette étude est de pouvoir se protéger des effets d'une explosion avec un confinement.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié l'interaction d'anneaux tourbillonnaires avec des surfaces liquides et solides. La surface libre de l'eau est équivalente à une surface rigide pour l'anneau, tant qu'il ne la déforme pas trop. La formation d'une couche limite à la surface conduit à la formation de tourbillons secondaires, dont l'influence limite le rayon maximal de l'anneau. Lorsque les expériences ont lieu dans l'éthanol, il n'y a pas de formation de couche limite, et on reproduit des trajectoires de collision sur une surface idéale, qui, à notre connaissance, n'avaient jamais été visualisées dans cette configuration [2]. Lors de l'impact à la surface de l'eau, la déstabilisation de l'anneau tourbillonnaire survient à la fin de l'interaction, suite au développement d'instabilités en trois dimensions entre tourbillons primaires et secondaires, ce qui limite le temps de vie des empreintes formées par l'anneau. La perspective de ce travail est d'étendre ce que nous avons compris de l'interaction vortex unique/surface à un ensemble de vortex. Ceci permettra de rendre compte de la persistance des sillages turbulents ou encore des empreintes de baleines.

Dans la troisième partie nous avons mesuré la trainée de vague de sphères immergées. La difficulté principale était de mesurer uniquement la force de trainée de vague sans la trainée hydrodynamique. Nous avons montré que la trainée de vague devient importante par rapport à la trainée hydrodynamique lorsque la sphère se trouve près de la surface, dans une gamme de paramètre pour laquelle les prédictions théoriques n'existent pas. On montre qu'en prenant en compte la saturation des vagues lorsque l'objet est près de la surface, il possible de prédire l'amplitude de la trainée [3]. La perspective à ce travail est de

1. A. Benusiglio, D. Quéré, C. Clanet, Surface explosion cavities, soumis à *JFM*, 2013.
2. A. Benusiglio, T. Leweke, D. Quéré, C. Clanet, Interaction of a vortex ring with surfaces, en préparation
3. A. Benusiglio, F. Chevy, É. Raphaël, D. Quéré, C. Clanet, Wave drag on a submerged sphere, en préparation

l'adapter à des objets non sphériques, comme les sous-marins et les torpilles.

Annexes

Annexe A

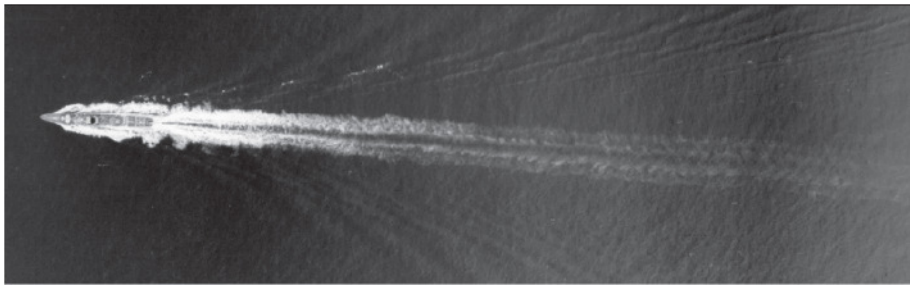
Entrainement d'air par un périscope.

Sommaire

A.1 Introduction 161
A.2 Dispositif expérimental 162
A.3 Observations expérimentales 165
A.4 Modèle théorique 171
A.5 Conclusion 175
A.6 Etude d'un vortex unique 176

A.1 Introduction

(a)



(b)

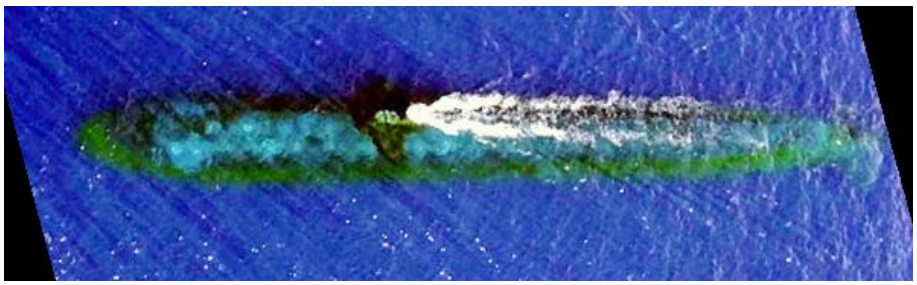


FIGURE A.1 – (a) Sillage de navire issu de la base de donnée CELADON (b) Sillage du Sous-marin USS Washington.

Il existe de nombreuses manières de détecter un navire de surface, en fonction de la méthode et de la distance d'observation. Depuis l'espace, un satellite suffisamment résolu

peut repérer directement un navire à sa signature visuelle, mais il aura encore plus de chance de repérer le sillage du navire [figure A.1 (a)]. Le sillage est composé de trois différents phénomènes physiques présentés en détail dans la thèse de François Caillé [9]. Le premier est le sillage de vague ou sillage de Kelvin, champ d'interférence des vagues émises par le bateau qui possède une forme caractéristique en V, d'angle d'ouverture 19°5, comme présenté dans le chapitre 7. L'angle apparent du sillage peut être un peu plus fermé suivant la vitesse du navire. La taille de ce sillage dépend de la distance nécessaire à dissiper l'énergie des vagues, les vagues de plus grande longueur d'onde s'amortissant sur une plus grande distance, pour un grand bateau il peut avoir une taille caractéristique de plusieurs kilomètres. Cependant il est visuellement singulier et donc facilement reconnaissable dans la zone où il forme un V marqué, c'est à dire près du bateau, et on peut alors considérer qu'il double ou triple la taille visible du bateau.

Le deuxième est le sillage turbulent. Il est présent sur la route du bateau, là où un écoulement turbulent, dû à la fois à l'écoulement autour de la coque et à l'écoulement induit par le propulseur, interagit avec la surface (voir chapitre 5). Il est composé d'un ensemble de zones lisses par rapport au reste de la surface de la mer. La présence de zones lisses modifie la rugosité de la mer et de ce fait la réflexion du soleil. Des techniques d'observation spécifiques à la quantité de lumière réfléchie, tel que le SAR (Synthetic Aperture Radar) permettent de visualiser ces zones très nettement, jusqu'à une dizaine de kilomètres à l'aval du navire. Ce sillage est donc plus facilement repérable que le sillage de Kelvin.

Le troisième est le sillage de bulles, principalement formées au niveau du propulseur. Il est visible sur une distance de plusieurs fois la longueur du navire est a été étudié en détails par François Caillé. Il a une importance primordiale car, en plus de sa signature visible, le sillage de bulles modifie la vitesse de propagation du son dans l'eau, ce qui le rend repérable par des systèmes SONAR positionnés dans l'eau [109]. Ainsi certaines torpilles sont capable de "flairer" et remonter le sillage de bulles jusqu'au bateau.

Lorsqu'un sous marin navigue en immersion périscopique, c'est à dire sous la surface avec le périscope qui traverse celle-ci, on peut raisonnablement estimer que son sillage de Kelvin et son sillage turbulent sont peu visibles, par contre on observe un sillage de bulles important [figure A.1 (b)]. Ce sillage de bulles n'est pas formé dans ce cas au niveau du propulseur, mais par entrainement d'air au niveau du périscope. C'est l'objet de ce chapitre, dont les expériences ont été réalisées avec Louis EVRARD.

On cherche à mesurer la vitesse limite au dessus de laquelle des bulles sont entrainées en fonction de la taille caractéristique du périscope, et l'influence de la mouillabilité et de la forme de celui-ci.

A.2 Dispositif expérimental

A.2.1 Les bassins

On a utilisé trois bassins pour réaliser les expériences : un bassin de traction, une cuve tournante, et lors d'une journée, le B600, bassin du centre DGA de Val de Reuil. Les observations ont été réalisées soit à l'aide d'une caméra rapide (images noir et blanc), soit à l'aide d'un appareil photo rapide (images couleur).

Le bassin de traction

Ce bassin long de deux mètres, de 50 cm de largeur et 60 cm de profondeur permet de tracter des objets à une vitesse V comprise entre 0 et 90 cm/s. Il permet de travailler dans une bassin complètement calme avec une vitesse connue au pour cent L'inconvénient principal de ce bassin est que la caméra ou l'appareil photo voit passer l'objet en mouvement.

La cuve tournante

Le deuxième dispositif utilisé est une cuve tournante de 90 cm de diamètre tournant à une vitesse maximale de 0.6 tours par seconde. Pour réaliser une expérience on met la cuve en rotation et on attend que l'eau soit entrainée par les parois de la cuve. Au bout d'une vingtaine de minutes on vérifie que l'eau dans la cuve est à peu près en rotation solide à la vitesse de la cuve. Il est alors possible de faire varier la vitesse de l'écoulement autour de l'objet, soit en faisant varier la vitesse de rotation de la cuve, soit la distance de l'objet au centre de rotation. L'attrait principal de ce dispositif est que l'on peut observer le sillage d'un objet fixe dans le référentiel du laboratoire, facilitant la visualisation. Il présente par contre un certain nombre d'inconvénients, tel que la courbure de la surface lorsque la cuve tourne vite, le fait que le bord du périscope tourné vers l'intérieur de la cuve est soumis à une vitesse inférieure à celle du bord tourné vers l'extérieur de la cuve. De plus la présence du tube modifie rapidement l'écoulement en le ralentissant et en formant des vagues. De ce fait on ne peut pas utiliser d'objets de trop grande section pour avoir une estimation raisonnable de la vitesse (pas plus de 6 cm). Pour ces raisons les mesures quantitatives effectuées dans la cuve tournante ont toujours été vérifiées à partir de mesures effectuées sur la banc de traction.

Le B600

Le B600 est le grand bassin de traction du centre DGA de Val de Reuil. Il a une longueur de 600 m comme son nom l'indique, une largeur de 15 m et une profondeur de 7 m. Posé sur des rails de part et d'autre du bassin un chariot permet de translater des objets dans la direction de la longueur du bassin jusqu'à des vitesses de 12 m/s. Le principal défaut de ce bassin est qu'il est plus difficile de positionner l'éclairage et la caméra qu'au laboratoire et que l'eau est légèrement trouble. Les gros avantages sont que l'on peut tracter de (très) gros objets jusqu'à de (très) grandes vitesses. Les visualisations ont été effectuées à l'aide d'une caméra immergée.

A.2.2 Les périscopes

Deux différentes formes de périscope ont été utilisées : des tubes de section circulaire en verre, PVC et cuivre (figure A.2), et un profil symétrique en résine afin d'étudier sommairement l'influence de la forme du périscope sur le sillage de bulles (figure A.3). Certains tubes ont été traités afin de faire varier l'angle de contact de l'eau sur le revêtement de surface, définit sur la figure A.4.

Afin de couvrir un large domaine d'angles de contact, des surfaces les plus hydrophiles possibles à des surfaces superhydrophobes, nous avons utilisé différentes techniques. Le méthode la plus efficace pour rendre le verre très hydrophile consiste à le rincer à l'éthanol et ensuite à le passer à la flamme. On obtient alors un angle de contact θ qui tend vers 0°.

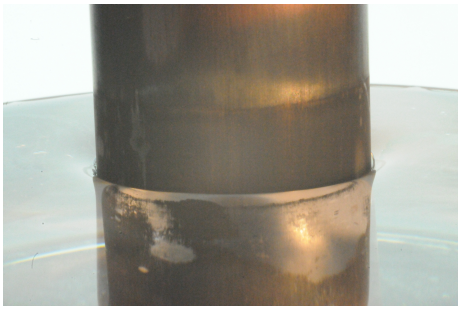


FIGURE A.2 – Tube de cuivre superhydrophobe. On observe le film d'air qui l'enveloppe : le cuivre apparait argenté.

Pour rendre le verre hydrophobe le traitement par un revêtement anti-pluie du commerce type Rain-X® donne $\theta \approx 105°$.

Afin d'obtenir une surface superhydrophobe, on utilise des cylindres de cuivre que l'on soumet à deux traitements successifs [110]. Le premier est une oxydation par du nitrate d'argent. Cette réaction chimique permet de déposer une couche d'argent fine et non uniforme sur le cuivre, rendant sa surface rugueuse. On la fait ensuite tremper dans une solution de thiol dans de l'éthanol afin de greffer des groupements thiol qui rendent la surface hydrophobe. La combinaison de la texturation de surface et du traitement hydrophobe permet d'obtenir des tubes superhydrophobes ($\theta \to 180°$), comme présenté sur la figure A.2.

L'autre type de forme utilisée est un profil en résine schématisé sur la figure A.3. Il est composé d'un bord d'attaque en arc de cercle prolongé par un coin d'angle faible, afin de limiter le décollement tourbillonnaire.

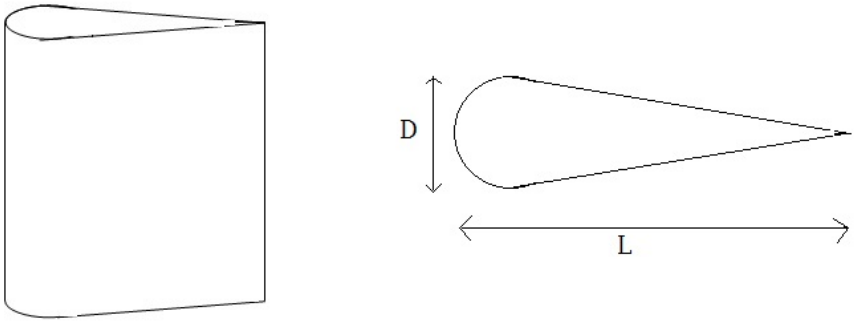


FIGURE A.3 – Schéma du profil utilisé. les dimensions sont $D = 2.1$ cm et $L = 9.5$ cm.

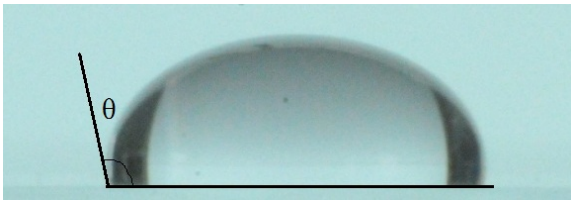


FIGURE A.4 – Définition de l'angle de contact.

A.2.3 Profilometrie de surface

Afin de visualiser la cavité en 3 dimensions plutôt qu'en coupe nous avons utilisé une méthode de profilométrie de surface déjà présentée chapitre 8.

A.3 Observations expérimentales

A.3.1 Description qualitative

La figure A.5 présente la forme de la surface déformée par un tube de 2 cm de diamètre à 54 cm/s en vue de coté.

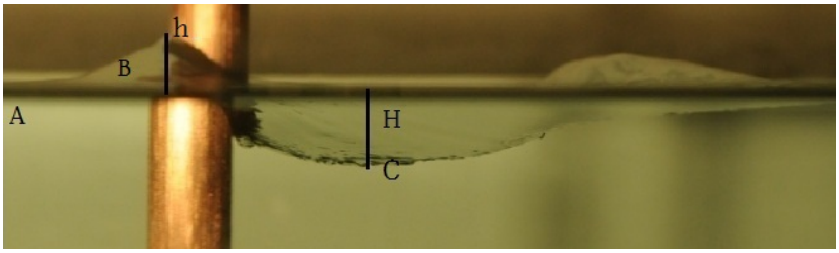


FIGURE A.5 – Sillage d'un cylindre de cuivre, $R = 1$ cm, $V = 54$cm/s

On observe en amont un bourrelet de hauteur h, de largeur de l'ordre du diamètre du tube, et en aval une cavité étendue sur plusieurs diamètres, de profondeur maximale H.

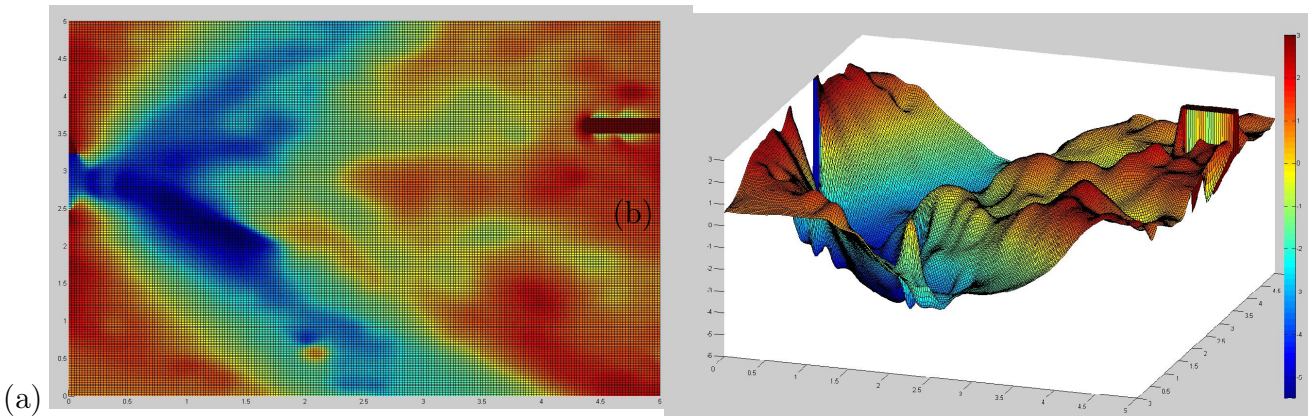


FIGURE A.6 – Visualisation de la surface, (a) vue du dessus, (b) vue en 3 dimensions, les axes sont en cm. Les couleurs vers le bleu indiquent des dépressions et vers le rouge des reliefs en cm. Le tube utilisé fait 3 cm de rayon, tracté à 63 cm/s. Le tube se situe à gauche au milieu, en bordure extérieure des figures. L'élévation importante observée à droite des figures est un artefact de mesure.

Un exemple de profil de la surface à l'aval du tube obtenu via profilometrie de surface est présenté sur la figure A.6, par un champ de hauteur (a), et dans une vue en trois dimension (b). Ces images permettent de visualiser la forme de la dépression à l'aval du périscope. On observe que la cavité à une forme de V, semblable à la forme du sillage de vague. On observe aussi des déformations localisées de la surface. Il sera montré par la suite qu'elles sont la signature des vortex verticaux émis par le cylindre, qui déforment la surface du fait de la vitesse qu'ils induisent localement.

Petits tubes

Observons maintenant l'entraînement d'air pour des tubes de petite section (D<6 cm). Sur la figure A.7 on présente la partie du sillage juste à l'aval d'un tube de 1 cm de diamètre pour des vitesse croissantes.

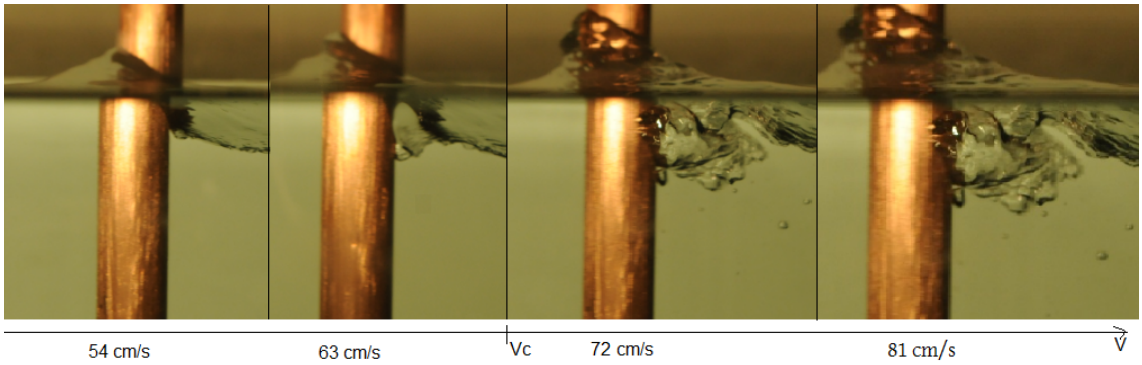


FIGURE A.7 – Cylindre de rayon 1 cm tracté à une vitesse croissante.

Á mesure que la vitesse augmente, une poche d'air se forme tout contre le tube. Cette cavité grandit avec la vitesse puis se met à osciller verticalement. Lorsque l'on dépasse une vitesse seuil V_c, le fond de la cavité se brise périodiquement, émettant des bulles.

Gros tubes

Dans le cas des gros tubes (D>6 cm) l'entrainement ne se produit pas au niveau de la cavité qui se développe juste derrière le tube mais à des distance plus grande du tube, allant jusqu'à plusieurs diamètres. Sur la figure A.8 on observe le sillage d'un tube en PVC de 5 cm de rayon tracté à une vitesse croissante.

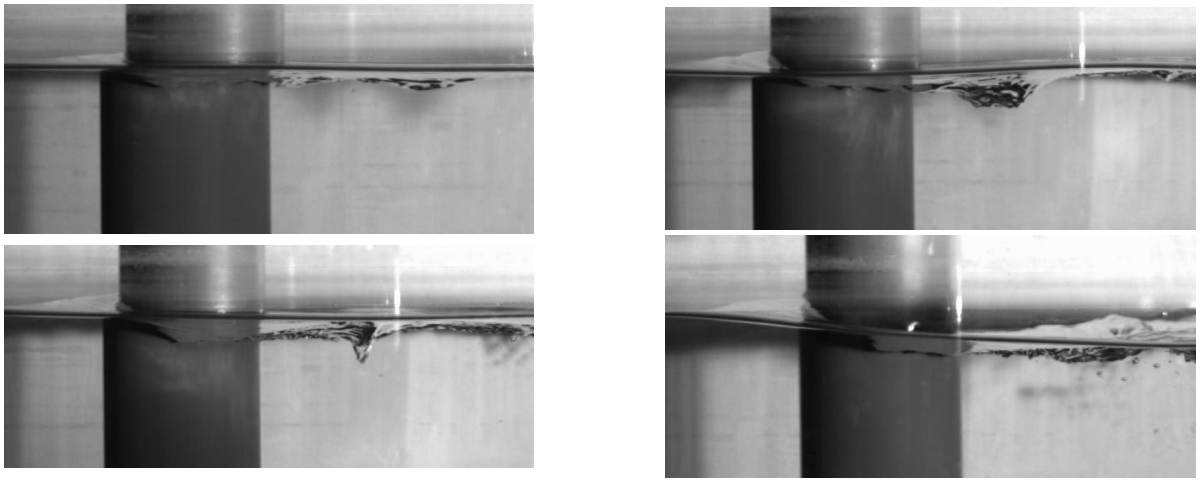


FIGURE A.8 – Sillage d'un tube de 5 cm de rayon aux vitesses croissantes de 40, 45, 50 et 63 cm/s

En dessous de 40 cm/s on n'observe pas de déformations importantes de la surface derrière le tube. A partir de 45 cm/s on observe des cavités coniques à la surface de l'eau, qui se forment à plus ou moins grande distance du tube, jusqu'à plusieurs diamètres. La profondeur des ces dépressions augmente avec la vitesse. Au dessus d'une vitesse critique V_c, lorsque ces dépressions ont une profondeur importante, de l'ordre du centimètre, elles se

brisent et des bulles sont entrainées. La figure A.9 présente un événement d'entrainement. Une cavité conique se forme et grandit jusqu'à la formation d'une bulle, le phénomène se produisant loin du tube. Pour tous les tubes de diamètrse supérieurs à trois centimètres, et ce jusqu'au diamètre maximum étudié de 100 cm (section A.3.4) la séquence est la même, avec des vitesses V_c qui diminuent avec le diamètre du tube.

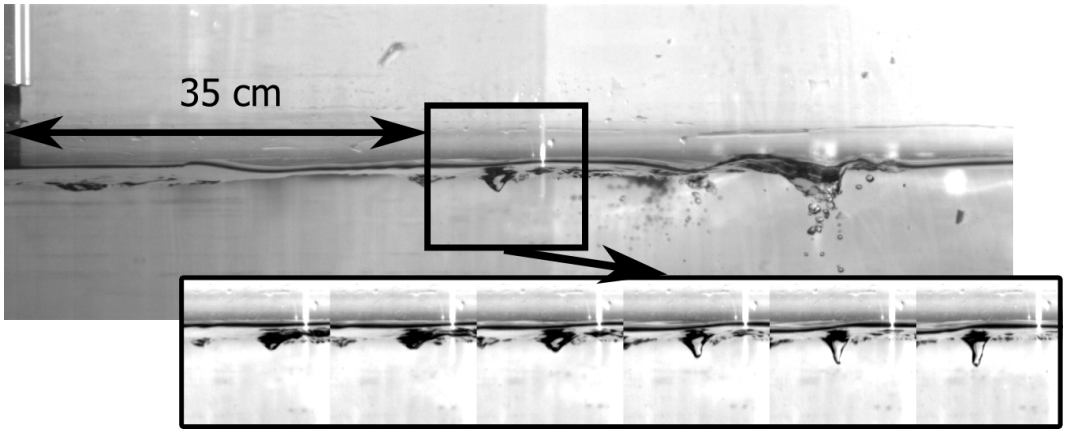


FIGURE A.9 – Entrainement d'air par un tube de 125 mm de diamètre. L'entrainement se produit loin en aval du tube. En encadré on présente une chronophotographie de l'apparition d'une cavité, les images sont espacées de 17 ms.

On observe donc deux modes d'entrainement d'air par un cylindre, aux vitesses auxquelles l'entrainement apparait, suivant la taille de celui-ci. Avant de donner des résultats quantitatifs on présente l'effet du mouillage sur l'émission de bulles.

La figure A.10 présente le sillage de deux tubes en verre de 1 cm de rayon tracté à 45 cm/s. Un des tubes est rendu hydrophile ($\theta \to 0°$) l'autre hydrophobe ($\theta \approx 105°$). On n'observe pas de différences significatives entre les sillages. L'ensemble des mesures montre que les variations de θ dans la gamme d'angles mouillants à hydrophobes n'a pas de rôle significatif, ni sur la forme de la cavité, ni sur le seuil d'émission des bulles.

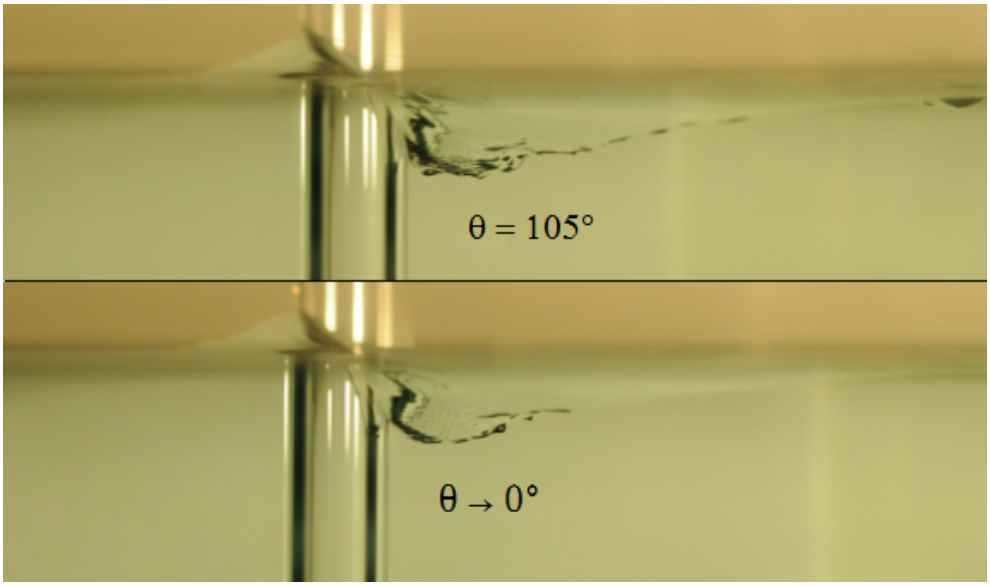


FIGURE A.10 – Sillages pour des tubes en verre traité. $R = 1$ cm, $V = 45$ cm/s.

Dans la section (A.3.5) on s'intéresse au cas de tubes en cuivre superhydrophobes.

A.3.2 Influence de la forme du périscope

La figure A.11 présente les sillages d'un cylindre de rayon 1 cm et du profil en résine, à une vitesse supérieure d'une trentaine de cm/s à V_c pour ce tube.

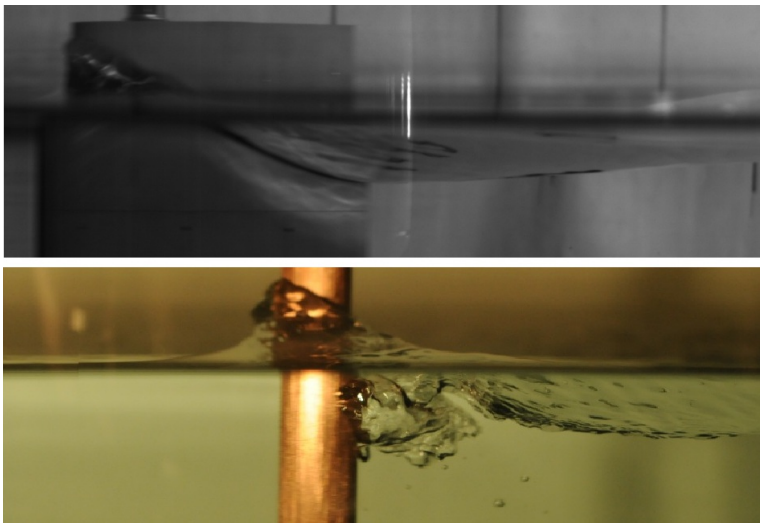


FIGURE A.11 – Sillages d'un objet profilé (en haut) et d'un tube de cuivre de 1 cm de rayon (en bas) tractés à 81 cm/s.

Le profil n'émet pas de bulles alors que le cylindre en entraine beaucoup à la même vitesse. On n'observe jamais de bulles pour le profil, dans la gamme de vitesse atteignable par notre dispositif (0-90 cm/s). La forme joue donc un rôle très important dans l'entrainement. En limitant le décollement tourbillonnaire on limite l'entraînement de bulles. Nous n'avons pas réalisé d'autres expériences sur la forme du périscope, mais on peut imaginer faire varier plus progressivement la forme du périscope entre une section circulaire et une section très profilée comme celle utilisée.

A.3.3 Vitesse critique d'entrainement

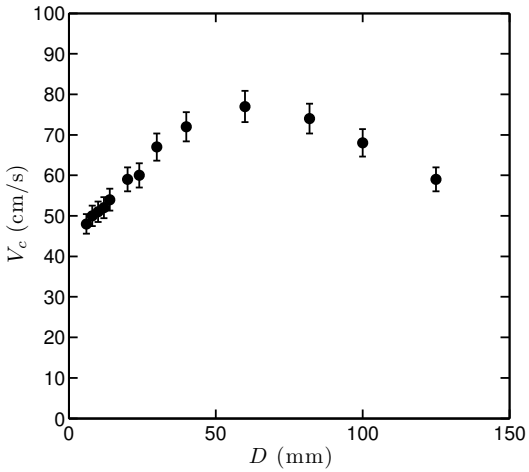


FIGURE A.12 – Vitesse critique d'entrainement d'air en fonction du diamètre des tubes pour les expériences réalisées au laboratoire Les tubes utilisés sont en verre ou PVC non traités.

Nous avons montré que lorsque l'on augmente la vitesse de l'écoulement autour d'un tube au dessus d'une vitesse seuil V_c on observe des bulles d'air entrainées dans le bain. Lorsque l'on augmente encore la vitesse, la quantité de bulles entrainées augmente et pourrait être mesurée, mais nous nous sommes restreints dans le cadre de cette étude à mesurer V_c en fonction du diamètre et des propriétés de mouillage du cylindre.

La première observation importante est que dans une grande gamme d'angle de contact (de $\theta = 0$ à $\theta = 105°$) la vitesse d'entrainement ne dépend pas, ou faiblement de l'angle de contact. La seule influence notable de l'angle de contact est observée lorsque l'on utilise des tubes de cuivre superhydrophobes, pour lesquels on observe une augmentation de V_c de l'ordre de vingt pour cent, les résultats de cet étude sont décrits séparément dans la section A.3.5.

On représente sur la figure A.12 la vitesse critique d'entrainement en fonction du diamètre du cylindre. On observe que V_c n'est pas une fonction monotone de D mais qu'il existe un diamètre critique $D^* \approx 6$ cm tel que pour des diamètres inférieurs V_c croit avec D, puis pour des diamètres supérieurs V_c décroit avec D.

A.3.4 Mesures au bassin d'essais des carènes

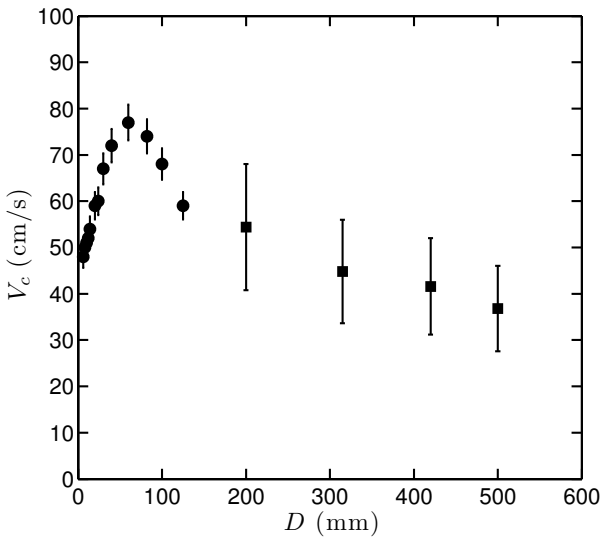


FIGURE A.13 – V_c en fonction du diamètre du tube. Les points représentent les données obtenues au laboratoire, les carrés les données obtenus au B600.

Afin de compléter les mesures effectuées au laboratoire, nous avons réaliser des mesures au B600 (section A.2.1). Nous avons utilisé des tubes de chantier de diamètre 500, 420, 315 et 200 mm en PVC. Les tubes étaient suffisamment longs pour que leur longueur immergée soit toujours supérieure à deux fois leur rayon. Les visualisations ont été réalisées à l'aide d'une caméra immergée qui permet de visualiser le sillage à l'arrière des tubes. L'eau étant légèrement trouble et l'éclairage difficile à mettre en place les mesures réalisées comportent une plus grande marge d'incertitude. On observe une entrainement d'air à partir de cavités coniques, comme décrit précédemment pour les gros tubes. L'entrainement peut se produire jusqu'à une distance d'une dizaine de diamètre du tube.

Les mesures de la vitesse limite d'entrainement en fonction du diamètre sont présentées sur le figure A.13 avec les données précédemment obtenues. On observe que la vitesse

limite décroit avec le diamètre, avec la même tendance que lors des expériences réalisées au laboratoire avec des tubes de diamètre supérieur à 6 cm.

A.3.5 Effet de la superhydrophobie

Comme mentionné précédemment l'angle de contact du tube a peu d'influence sur la vitesse limite d'entrainement, dans la gamme allant d'angle totalement mouillant à hydrophobe. Le seul cas pour lequel l'angle de contact a une influence particulière est l'utilisation d'un tube superhydrophobe, qui augmente significativement la vitesse limite d'entrainement. Qualitativement on observe que l'écoulement est modifié autour d'un tube superhydrophobe, l'écoulement contournant le tube, avec un décollement qui se produit plus tôt que dans le cas d'un tube mouillant. La cavité derrière le tube se forme alors au contact du tube, avec la moitié arrière du tube hors de l'eau sur la hauteur de la cavité (figure A.14 (I)). Une tentative de représentation schématique est proposée sur la figure A.14 (II).

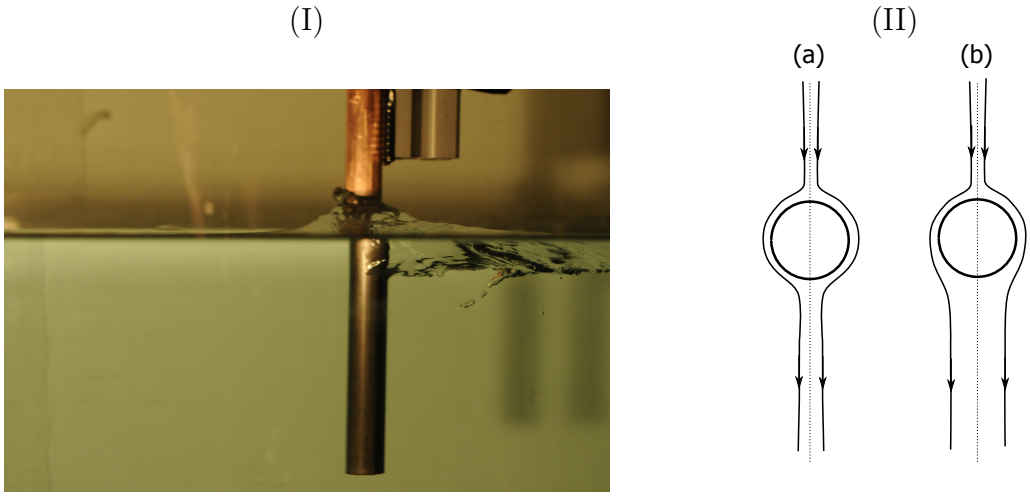


FIGURE A.14 – (I) Sillage d'un tube superhydrophobe de 2 cm de diamètre à une vitesse de 81 cm/s. (II) Représentation schématique de l'écoulement vu par dessus (a) autour d'un cylindre mouillant et (b) autour d'un cylindre superhydrophobe.

On observe de plus que le mode d'émission de bulles, dans la gamme des petits diamètres, est modifié. En effet les bulles ne sont pas émises par une petite poche près du tube mais semble provenir de la vibration de l'ensemble de la cavité aval, les bulles se formant plus loin que pour les tubes non traités.

Quantitativement on observe une augmentation de V_c de l'ordre de 20 pour cent dans la gamme des petits tubse, comme présenté sur la figure A.15. Nous n'avons réalisé d'expériences avec des tubes superhydrophobes que dans la gamme des petits tubes. Les traitements superhydrophobes connus à ce jour étant très fragiles et difficile à mettre en oeuvre nous n'avons pas été plus avant dans cette voie, même si la superhydrophobie semble avoir un rôle important dans l'entrainement de bulles et dans la forme du sillage, donc peut-être sur la trainée ressentie par le périscope.

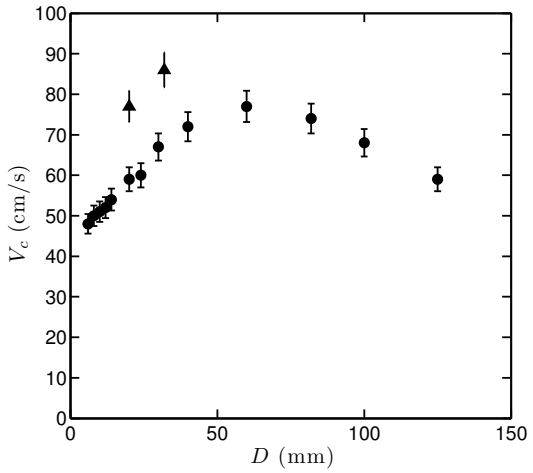


FIGURE A.15 – V_c en fonction du diamètre pour les mesures effectuées au laboratoire. Les mesures sur des tubes non traités sont représentées par des points, sur des tubes superhydrophobes par des triangles.

A.4 Modèle théorique

Nous avons mis en évidence deux modes d'entrainement de l'air dans le sillage d'un cylindre, en fonction du diamètre du cylindre. Dans cette partie on propose un raisonnement en ordre de grandeur afin de modéliser les résultats obtenus.

A.4.1 $D < D^*$: instabilité de Rayleigh-Taylor ?

Dans le premier régime des tubes diamètre inférieur à 6 cm nous avons observé que l'entrainement d'air se fait au niveau d'une petite poche d'air tout contre le périscope, à l'aval de celui-ci. Cette cavité d'air oscille avec une amplitude et une fréquence qui croit avec la vitesse, jusqu'à ce qu'elle se brise périodiquement au dessus de la vitesse critique V_c.

L'oscillation de la cavité provient d'un phénomène instationnaire, le seul phénomène de ce type qui semble présent dans le problème est l'émission tourbillonnaire de tourbillons à l'aval du tube. C'est un phénomène étudié en détails([111, 112, 113]). Dans la gamme de nombre de Reynolds atteints, (Re = 5000-40 000) la fréquence d'émission des tourbillons se fait à nombre de Strouhal St constant, qui s'écrit, avec f la fréquence d'émission de vortex :

$$St = \frac{fR}{V} \tag{A.1}$$

Dans un premier temps on cherche à mesurer l'accélération de la cavité sous l'influence de l'émission tourbillonnaire, afin de vérifier si elle peut induire une instabilité. Pour ce faire on filme un cylindre dans la cuve tournante et on mesure la profondeur de la cavité δ au cours du temps (figure A.16).

Une évolution temporelle de δ est représentée sur la figure A.17.

A partir de ce profil on peut mesurer la fréquence $1/t$ des oscillations de plus grandes amplitudes. On calcule ensuite l'accélération γ de la cavité en supposant que les oscillations sont sinusoïdales :

$$\gamma \sim \frac{\delta}{t^2} \tag{A.2}$$

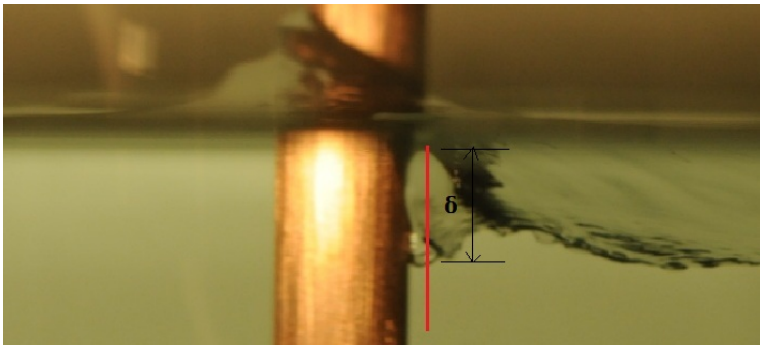


FIGURE A.16 – Position de mesure de la profondeur δ de la cavité au cours du temps.

FIGURE A.17 – L'axe des abscisses représente le temps et l'axe vertical la profondeur de la cavité.

Typiquement on mesure $\delta \approx$ 1-2 cm au moment où les premières bulles sont observées. Ces cavités oscillent à une fréquence comprise entre 4 et 12 Hz. Ce qui correspond à des accélérations de 0.3 à 4 m/s^2, comparables à la valeur de l'accélération de la gravité $g = 9.81$ m/s^2.

Il est difficile de mesurer proprement la fréquence des oscillations : la cuve n'étant pas parfaitement cylindrique des vagues se propagent en surface. A la déformation δ s'ajoute le mouvement de la surface.

Fort de ces observation ils est probable que la cavité se brise sous l'effet de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette instabilité peut être sommairement décrite ainsi : lorsque deux fluides de densité différentes sont accélérés dans le sens du fluide léger vers le fluide dense, avec une accélération plus grande que g, l'interface se déstabilise. Dans notre cas nous aurons des bulles d'air dans le sillage si l'accélération de la cavité dépasse g.

On fait donc l'hypothèse que le premier mode d'entrainement est dû à l'instabilité de Rayleigh-Taylor. A chaque passage d'un tourbillon la surface se déforme de δ, ce qui fait vibrer la surface. Si l'accélération de la cavité est plus grande que g elle se brise. On peut estimer l'accélération de la cavité par :

$$\gamma = \delta f^2 \tag{A.3}$$

On cherche maintenant à estimer δ et f sous l'influence de tourbillons de circulation Γ et de rayon de coeur a émis par le périscope. Pour estimer Γ on peut faire le raisonnement suivant : initialement le périscope est immobile : la circulation Γ est nulle. Ce n'est plus le cas lorsqu'on le met en mouvement. La circulation des tourbillons formés au niveau du cylindre peut être estimée à l'aide du théorème de Kelvin, qui prédit que la circulation totale calculées sur un contour qui englobe le périscope et les tourbillons se conserve. La circulation autour d'une demi-section du cylindre est alors égale à la circulation du vortex émis par cette demi-section :

$$\Gamma = RV \tag{A.4}$$

Le théorème de Bernoulli est écrit entre le point de vitesse maximum induite par le tourbillon, et un point ou la vitesse est égale à la vitesse de l'écoulement extérieur, ce qui se réduit à :

$$\rho g \delta \sim \rho \frac{U_m^2}{2} \tag{A.5}$$

La vitesse maximale induite par le vortex est estimée pour un vortex de Rankine : $U_m = \frac{\Gamma}{2\pi a}$ avec a le rayon de coeur du tourbillon. Finalement :

$$\delta \sim \frac{U_m^2}{g} \sim \frac{R^2 V^2}{g a^2} \tag{A.6}$$

Il nous reste à estimer a. Les vortex étant issu du détachement de la couche limite sur la paroi du cylindre on suppose que leur taille est fixée par l'épaisseur de la couche limite qui se développe sur le tube. On estime l'épaisseur de la couche qui se développe sur le tube comme étant égale à celle qui se développe sur une plaque semi-infinie $a = \alpha\sqrt{\nu t}$, avec α un coefficient proche de 1 et t le temps de parcours d'une particule du début de la couche limite au point de détachement. On suppose que les tourbillons se détachent à proximité de l'aval du tube, les particules parcourent alors R dans la couche limite et on obtient $t \approx R/V$. On a donc :

$$a^2 \sim \frac{\nu R}{V} \tag{A.7}$$

Finalement :

$$\delta \sim \frac{R V^3}{g \nu} \tag{A.8}$$

Le seuil d'apparition des bulles est atteint lorsque l'accélération des particules de fluide, γ, est comparable à g. Si on note f la fréquence d'émission des vortex, on peut estimer γ par :

$$\gamma \sim \delta f^2 \tag{A.9}$$

La fréquence d'émission des tourbillons pour un cylindre s'écrit :

$$Sr = \frac{fR}{V} = 0.2 \rightarrow f = 0.2\frac{V}{R} \tag{A.10}$$

Il y a donc formation de bulles lorsque :

$$\gamma \sim \frac{\delta V_c^2}{R^2} \sim g \tag{A.11}$$

Dans ce raisonnement en ordre de grandeur les constantes multiplicatives ont été ignorées. Finalement :

$$V_c \sim (g^2 \nu)^{1/5} R^{1/5} \tag{A.12}$$

Sur la figure A.18 on trace V_c en fonction du diamètre des tubes pour les mesure effectuées au laboratoire ainsi que l'ajustement proposé par la loi d'échelle. On observe que la loi est compatible avec l'évolution V_c observée aux petits diamètres. Le modèle semble donc prédire les tendances du système.

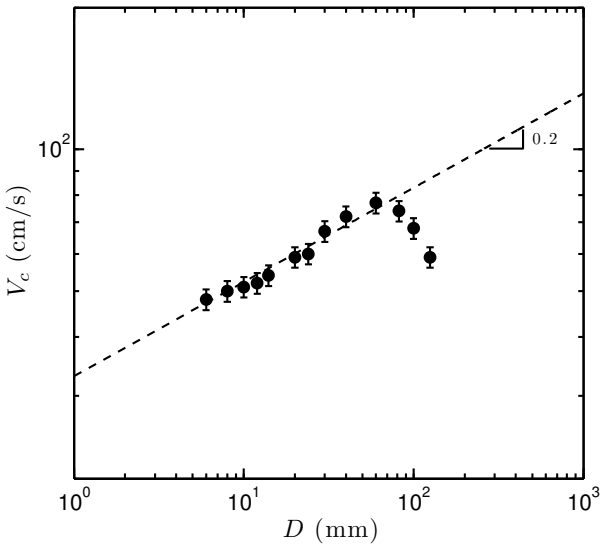


FIGURE A.18 – V_c en fonction du diamètre des tubes en axes logarithmiques. La courbe pointillée représente la loi de puissance proposée d'exposant 0.2.

A.4.2 $D > D^*$ Entrainement par un vortex unique ?

Pour les grands rayons l'entrainement d'air peut se produire plus ou moins loin du tube, lors de la formation de dépressions coniques au niveau de la surface. Une explication à la formation rapide de ces dépressions est l'apparition d'un tourbillon intense au niveau de la dépression. Dans le système étudié, à grand nombre de Reynolds, les tourbillons ne peuvent se former qu'au niveau des parois, c'est à dire au niveau du tube. Une explication à l'apparition de tourbillons intenses loin du tube est que ce tourbillon est issu de la fusion de deux tourbillons corotatifs, eux mêmes détachés du tube, qui finissent par fusionner plus ou moins loin de celui-ci.

La fusion de deux tourbillons corotatifs de même intensité est étudiée en détail dans la thèse de Patrice Meunier, nous utiliserons ses résultats expérimentaux [114].

Lorsque deux tourbillons d'intensité γ et de rayon de coeur a fusionnent, ils donnent naissance à un tourbillon d'intensité 2Γ et de rayon de coeur $\sqrt{2}a$. On cherche tout d'abord à estimer l'accélération verticale de la surface lors de la fusion de deux tourbillons.

La profondeur de la cavité formée par un tourbillon vertical est estimée par :

$$\delta \sim \frac{\Gamma^2}{ga^2} \tag{A.13}$$

Lors de la fusion on a donc une variation :

$$\Delta\delta \sim \delta \tag{A.14}$$

La fusion se produit sur un temps caractéristique de l'ordre de la période de rotation des deux vortex entre eux lorsqu'ils sont à distance de fusion D qui s'écrit $\tau_f \approx \frac{D^2}{\Gamma}$

L'accélération de la surface lors de la fusion s'écrit alors :

$$G = \frac{\delta}{\tau_f^2} \approx \frac{2\Gamma^4}{ga^2D^4} \tag{A.15}$$

La cavité se brise lors de la fusion de deux vortex si l'accélération résultant de la fusion crée une poussée plus importante que la force de tension de surface qui stabilise la cavité :

$$\rho G \Omega > \gamma a \tag{A.16}$$

Le volume de la cavité peut être estimé $\Omega \approx a^2 \delta$, on obtient alors :

$$\rho \frac{\Gamma^4}{g a^2 D^4} a^2 \frac{\Gamma^2}{g a^2} > \gamma a \tag{A.17}$$

Qui peut se réécrire :

$$\Gamma^6 > \gamma g^2 a^3 D^4 \rho \tag{A.18}$$

En introduisant une estimation de la distance de fusion D proportionnelle à a, une estimation de la circulation des vortex $\Gamma \sim RV$ et une estimation de la taille de coeur $a^2/sim\eta R/V$ on obtient le critère d'entrainement d'air suivant :

$$V_c \sim \left(\frac{\gamma g^2 \eta^{7/2}}{\rho} \right) \frac{1}{R^{5/19}} \tag{A.19}$$

Sur la figure A.19 on trace les données expérimentales en axes logarithmiques ainsi que la dépendance en $R^{-5/19}$ attendue pour le modèle. On observe que les mesures sont en agréments avec le modèle, le meilleur ajustement en loi de puissance donnant une loi de puissance d'exposant -0.3 proche de $-5/19 \approx -0.263$.

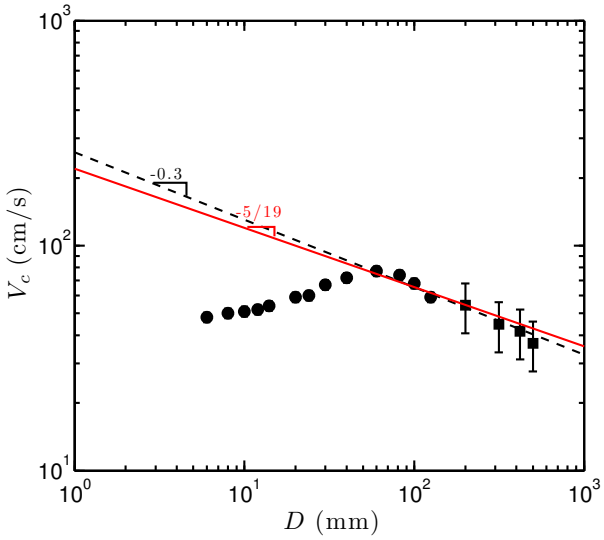


FIGURE A.19 – V_c en fonction du diamètre des tubes en axes logarithmiques. Les points représentent les mesures effectuées au laboratoire, les carrés les mesure effectuées au B600. La courbe rouge représente la loi en $R^{-5/19}$ attendue pour le modèle proposé, la courbe en pointillés représente le meilleur fit en loi de puissance, d'exposant -0.3.

A.5 Conclusion

Dans cette partie nous avons étudié l'entrainement de bulles d'air dans le sillage d'un périscope. Les vitesses à partir desquelles ces bulles apparaissent sont trop faibles pour

que la cavitation de l'eau en soit responsable (l'eau cavite à partir de 10 m/s). C'est en déformant l'interface entre l'eau et l'air que le périscope entraine des bulles dans son sillage.

Nous avons mis en évidence deux modes d'entrainement de l'air, et une dépendance de la vitesse critique d'entrainement non monotone en D, avec la vitesse critique qui augmente, atteint un maximum pour $D/approx$ 6 cm puis diminue lentement avec le diamètre.

Dans le premier mode, pour des cylindres de diamètre inférieur à 6 cm, les tourbillons émis excitent la cavité à l'aval du périscope. Lorsque l'accélération de cette cavité est plus grande que l'accélération de la pesanteur g, la cavité se brise entrainant de l'air. Une modélisation physique du phénomène prédit une loi de puissance en $R^{1/5}$ compatible avec les données expérimentales.

Dans le deuxième mode, pour des cylindres de diamètre supérieur à 6 cm, les tourbillons émis par le cylindre fusionnent loin du cylindre, cette fusion accélère brutalement la surface et entraine de l'air. Une modélisation physique du phénomène prédit une loi de puissance en $R^{-5/19}$ compatible avec les données expérimentales.

Dans la gamme de diamètres supérieurs à 6 cm le premier mode doit toujours exister, à des vitesses supérieurs à la vitesse d'apparition du deuxième mode. Mais l'écoulement devient tellement perturbé à ces vitesses qu'il n'a pas été possible de visualiser le premier mode pour des gros tubes.

Nous avons choisi dans cette étude de travailler à des vitesses faibles autour de la vitesse critique à partir de laquelle on observe les premières bulles entrainées. Il nous faut quand même mentionner le fait qu'à plus haute vitesse il semble exister d'autres modes d'entrainement d'air. Ils apparaissent à l'amont et à l'aval des tubes, à des vitesses différentes lorsque soit la vague formée au au bord du tube devant celui-ci, soit la première vague du sillage aval se mettent à déferler. Ce déferlement forme une quantité importante de bulle est il semble intéressant à étudier, par exemple en mesurant la quantité de bulles entrainées en fonction de la vitesse.

A.6 Etude d'un vortex unique

Afin de modéliser l'entrainement d'air par un périscope nous avons tenté de former des vortex uniques d'axe vertical au niveau de la surface de l'eau afin de mesurer leur effet sur la surface. Nous avons conçu un dispositif permettant de former un vortex par détachement de la couche limite sur une plaque en mouvement, en faisant varier la vitesse de la plaque afin de contrôler les caractéristiques du vortex formé.

A.6.1 Le montage

Le montage consiste en une plaque fixée sur un axe vertical en son milieu [figure A.20 (a)]. Un ressort permet d'entrainer la plaque. Pour cela on prétend le ressort, et fixe la plaque avec une goupille. Au moment d'effectuer la mesure on retire la goupille. La plaque accélère puis ralentit brutalement au contact d'une butée. Lors de l'accélération de la plaque une couche limite apparait à sa surface puis se détache violemment lors du brusque ralentissement. On obtient alors un vortex unique à chaque extrémité de la plaque, de circulation croissante avec la vitesse maximum de la plaque. Le vortex forme une dépression à la surface visible sur la figure A.20 (b).

On mesure ensuite la circulation du vortex à l'aide de la technique PIV déjà présentée et on mesure visuellement la profondeur de la dépression formée par le vortex. On présente

(a) (b)

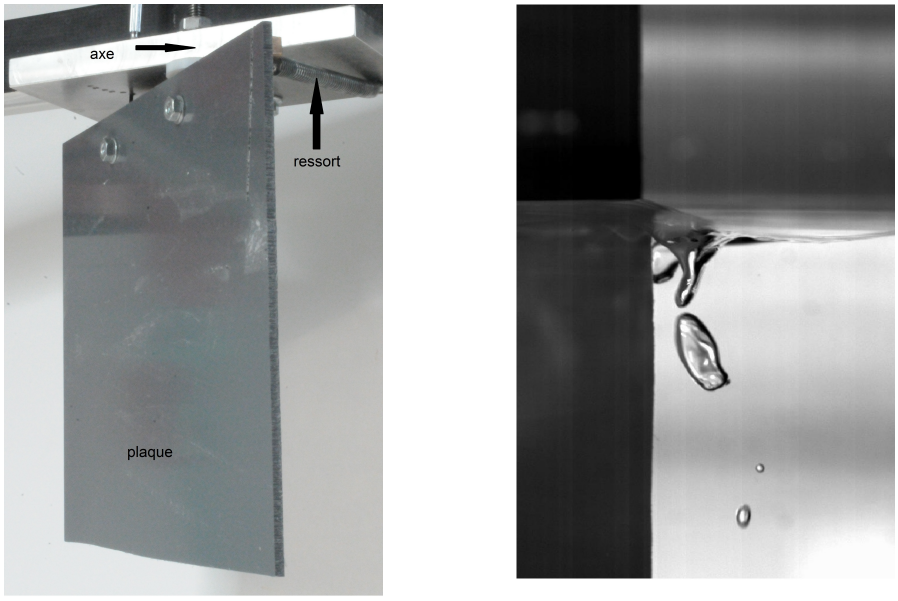


FIGURE A.20 – (a) Montage permettant la formation de vortex uniques (b) Visualisation de la déformation de la surface sous l'influence d'un vortex unique.

sur la figure A.21 la mesure du champ de vorticité et du champ de vitesse juste après le détachement d'un vortex. On observe le long de la plaque une couche limite de circulation inverse à celle du vortex, la plaque étant en train de décélérer.

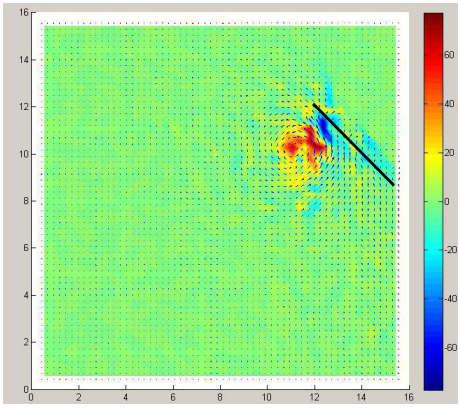


FIGURE A.21 – Exemple de mesure du champ de vitesse et de la circulation d'un vortex obtenue avec la PIV, les distance sont en centimètres. Les dégradés de couleurs indiquent la circulation (en cm^2/s) et les flèches le champ de vitesse. La ligne noire représente la position de la plaque.

A.6.2 Résultats

La circulation du vortex de bout de plaque n'est pas constante, elle croit pendant la rotation de la plaque, se stabilise lors du détachement du vortex puis décroit (figure A.22). La décroissance de la circulation semble provenir de la diffusion visqueuse du tourbillon.

La profondeur de la cavité formée par le tourbillon varie comme celui-ci. Elle augmente, passe par un maximum puis diminue. Lorsque ce maximum est supérieur à un seuil la ca-

vité se brise.

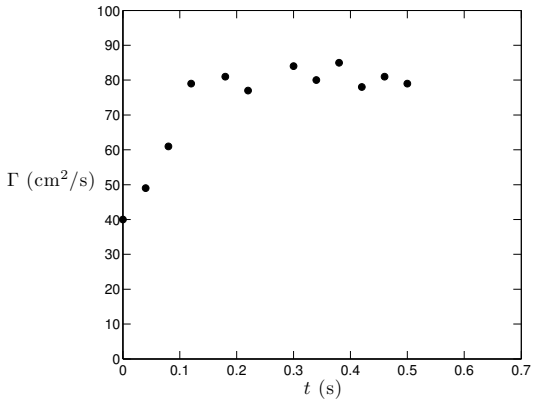


FIGURE A.22 – Circulation en fonction du temps lors de la formation d'un vortex de bout de plaque. L'origine du temps est arbitraire.

On présente la profondeur maximale de la cavité δ en fonction de la circulation maximale du vortex Γ sur la figure A.23. On constate que la profondeur du vortex varie linéairement avec la circulation.

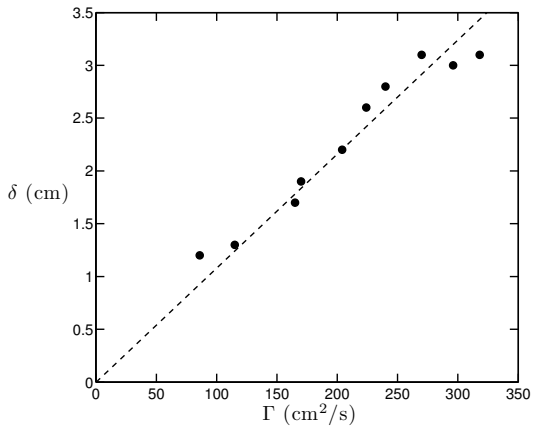


FIGURE A.23 – Profondeur maximal de la cavité formée par le vortex en fonction de sa circulation. Le meilleur ajustement linéaire est tracé en pointillés.

Ce résultat semble en contradiction avec le modèle que nous avons développé sur l'entrainement de bulle par un périscope dans lequel nous avions fait l'hypothèse que $\delta \sim \frac{\Gamma^2}{ga^2}$. Les vortex de plaques sont néanmoins différends des vortex de détachement autour d'un tube. Cette partie nous a permis de vérifier qu'un vortex unique entraine de l'air lorsque sa circulation dépasse un seuil.

Annexe B

Ondes de Gavroche

Sommaire

B.1 Introduction **179**
B.2 Expérience **180**
B.3 Modèle **181**
B.4 Conclusion **184**

(a) (b)

FIGURE B.1 – Exemples d'ondes de Gavroche.

B.1 Introduction

Dans le cadre d'un Enseignement d'Approfondissement de l'École Polytechnique j'ai encadré deux élèves, Antoine Buisson et Rémi Carmigniani, lors d'une étude des ondes

stationnaires que l'on observe dans les caniveaux, comme celles présentées sur la figure B.1. Sur les deux exemples proposés on observe des ondes stationnaires, dont les crêtes sont quasiment rectilignes, d'un angle $\pm\theta$ par rapport à la direction de propagation de l'écoulement et forment des chevrons. On a surnommé ces structures Ondes de Gavroche. Je présente cette étude dans ma thèse parce que ces ondes sont un bon exemple d'ondes en faible profondeurs dont la relation de dispersion est différente de celle des ondes en grande profondeur comme évoqué à la fin du chapitre 7. On retrouve ces structures en chevron dans d'autres écoulement pour lesquels la vitesse de l'eau est assez rapide et la hauteur d'eau faible, par exemple lors du retrait des vagues en bord de plage, lors du ruissellement de l'eau sur une route, sur le bec d'un pichet.

Dans ce chapitre on cherche à comprendre l'évolution de l'angle des chevrons en fonction du débit.

B.2 Expérience

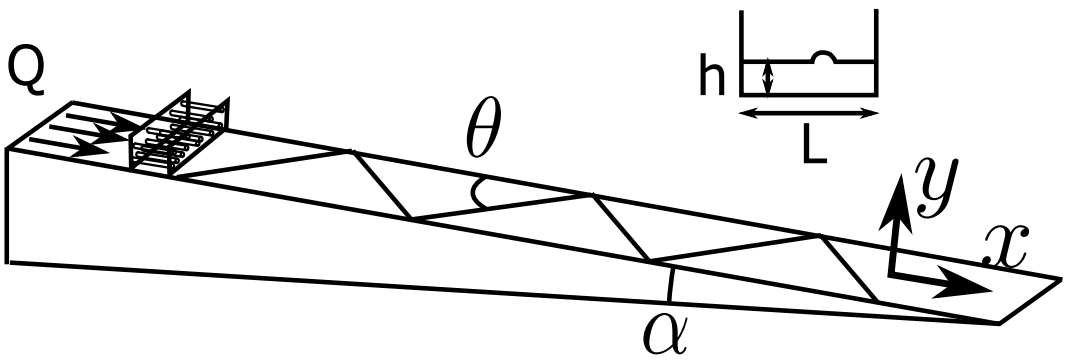


FIGURE B.2 – Montage et notations

Le phénomène est reproduit au laboratoire avec le montage expérimental et les notations présentés sur la figure B.2. Le canal en Plexiglass fait 6.8 cm de large et 2 m de long. Son inclinaison avec l'horizontale α peut varier de zéro à 30 degrés environ. Accessoirement on peut incliner le canal perpendiculairement à la direction de l'écoulement. On injecte un débit Q en amont d'un réseau de pailles qui laminarise l'écoulement. A la sortie de cette zone la hauteur d'eau décroit rapidement, puis se stabilise à une hauteur h constante sur le reste du canal. Dans la gamme de paramètres utilisés (Q, α), l'écoulement est permanent.

On observe à la surface de l'eau des ondes stationnaires dont les crêtes forment une angle θ avec la direction de l'écoulement, constant sur la longueur du canal. Afin de visualiser les ondes on place un rétroprojecteur sous le canal et on projette l'image obtenue sur un écran, les crêtes des ondes forment alors des zones sombres en chevrons (figure B.3). Si l'on perturbe l'écoulement avec un petit obstacle il se forme un onde à partir de l'obstacle de même pente que les ondes naturellement présentes, qui est réfléchie lorsqu'elle arrive à la paroi. Les ondes naturellement présentes sont formées à partir de défauts d'accroche de la ligne de contact sur les parois. Le débit utilisé Q varie entre 200 et 300 ml/s, la pente α entre 2 et 6 degrés. Les profondeurs obtenues h varient entre 3 et 9 mm. On mesure la vitesse de l'écoulement à la surface U en déposant des particules flottantes et en mesurant leur vitesse. La figure B.4 présente l'évolution l'angle que font les ondes avec la direction

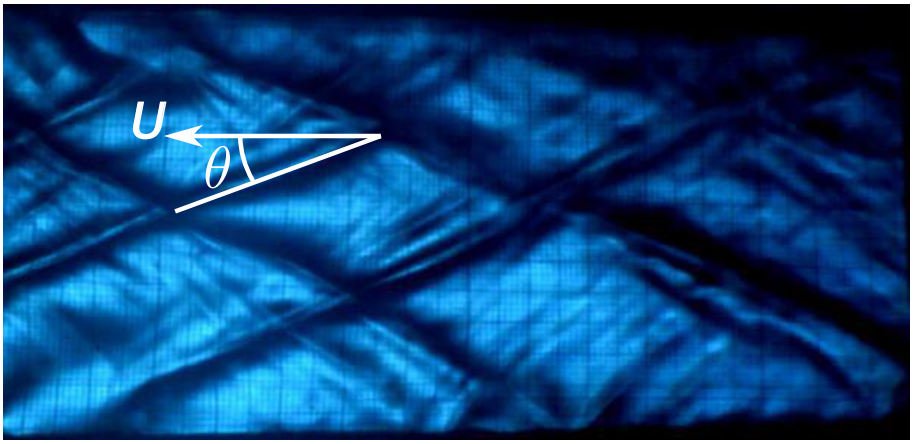


FIGURE B.3 – Visualisation des ondes à la surface du canal, l'eau coule de droite à gauche.

de propagation θ en fonction de la vitesse, pour des pentes comprises entre 3 et 6 degrés. On observe que l'angle décroit avec la vitesse.

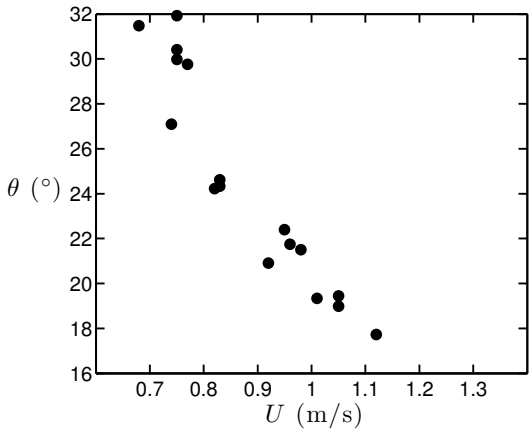


FIGURE B.4 – Angle des crêtes par rapport à la direction de l'écoulement en fonction de la vitesse de surface, pour des pentes comprises entre 3 et 6 degrés.

B.3 Modèle

B.3.1 Profil de l'écoulement

On cherche à décrire le profil de vitesse $U_x(y) = U(y)$, avec x la direction de l'écoulement et y la distance au fond du canal ($U_y << Ux$). Le Reynolds de l'écoulement typique $Re = \rho hV/\eta$ est de l'ordre de 10^4, l'écoulement se situe donc dans un régime de transition entre l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent. On suppose que l'on se trouve en régime turbulent, pour lequel on peut définir une viscosité turbulente η_t. L'équation de Navier-Stokes se réduit, dans notre cas pour lequel la vitesse est stationnaire et constante selon x, à :

$$0 = \frac{dp}{dx} + \eta_t \frac{d^2U(x)}{dy^2} + \rho g \sin\alpha \tag{B.1}$$

donc $\frac{d^2U(y)}{dy^2} = K$ avec $K = (-dp/\rho dx - \rho g \sin\alpha)/\eta_t$. Avec les conditions aux limites

$U(0) = 0$ et $U(h) = U$ on obtient :

$$U(x) = \frac{U}{h^2} y\,(2h - y) \tag{B.2}$$

On en déduit la valeur du débit théorique Q_{th} en fonction de la vitesse à la surface U :

$$Q_{th} = \frac{2LhU}{3} \tag{B.3}$$

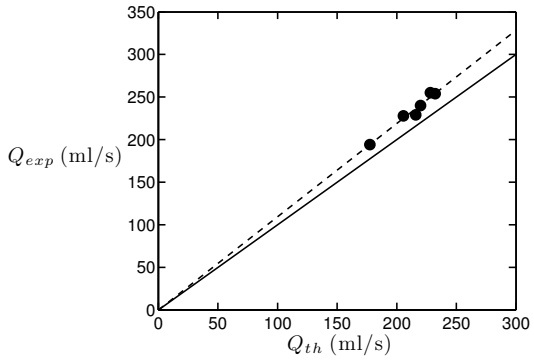


FIGURE B.5 – Débit mesuré en fonction du débit prédit par la formule (B.3).

La figure B.5 représente l'évolution du débit mesuré Q_{exp} en fonction du débit théorique calculé à partir de l'équation (B.3). On observe une relation de proportionnaloté linéaire, avec une pente de 1.09 proche de la pente 1 théorique. Un autre hypothèse possible sur l'écoulement est qu'il prend une forme d'écoulement bouchon, c'est à dire que la vitesse est constante partout sauf près des parois, $U(y) = U$. Dans ce cas là on aurait la relation $Q = LhU$ et on observerait sur la figure B.5 une pente de 3/2. L'écoulement a donc un profil qui se situe entre le profil parabolique et l'écoulement bouchon, mais est plus proche du premier. On déduit de plus de l'équation (B.1) :

$$\frac{U}{h^2} = \frac{\frac{dp}{dx} + \rho g \sin\alpha}{2\eta_t} \tag{B.4}$$

On trace sur la figure B.6 U/h^2 en fonction de l'angle d'inclinaison de la plaque, pour un débit observé. La relation de proportionnalité est linéaire, le gradient de pression est donc négligeable devant la pesanteur dans l'équation B.4, et la vitesse semble bien satisfaire l'équation proposée. La pente mesurée est de l'ordre de 710^5 donc la viscosité turbulente est de l'ordre de 710^{-3} soit 7 fois la viscosité de l'eau.

B.3.2 Ondes stationnaires

La condition de stationnarité des ondes dans le référentiel du laboratoire est que la projection de la vitesse de l'écoulement dans la direction de propagation des ondes soit égale à la vitesse de propagation des ondes c :

$$U\cos(\pi/2 - \theta) = U\sin(\theta) = c \tag{B.5}$$

Il en découle que $\sin(\theta)$ doit varier linéairement avec c/U, ce qui semble compatible avec le régime observé sur la figure B.4. On se trouve dans un régime de faible profondeur,

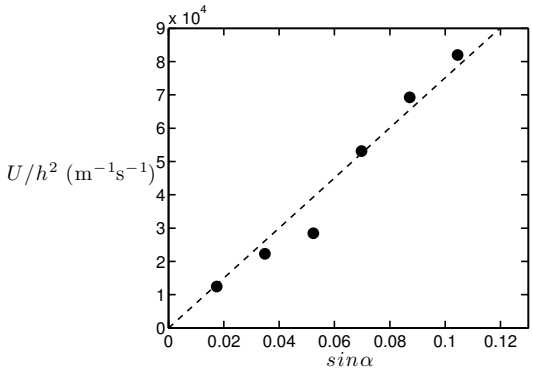


FIGURE B.6 – Vitesse en fonction de la pente du canal.

dans lequel les ondes ont deux caractéristiques différentes des ondes que l'on a évoqué dans les autres chapitres : les ondes ne sont pas dispersives, leur vitesse de phase ne dépend que de la profondeur : $c = \sqrt{gh}$, c'est pourquoi on observe un angle des crêtes définit de manière unique, de plus la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase, autrement dit l'énergie se propage à la même vitesse que l'onde, c'est pourquoi un obstacle va créer une seule ligne de crête, qui va ensuite se réfléchir aux parois. On observera des ondes à la condition que $c/U < 1$, ce qui explique pourquoi les ondes sont observées pour des écoulement suffisamment rapides. L'équation (B.5) se réécrit donc :

$$\sin(\theta) \sim \frac{\sqrt{h}}{U} \tag{B.6}$$

De plus on a montré que $h \sim Q/U$, donc finalement on écrit la loi de puissance suivante :

$$\sin(\theta) \sim \frac{Q^{1/2}}{U^{3/2}} \tag{B.7}$$

On trace $\sin(\theta)$ en fonction de $\frac{Q^{1/2}}{U^{3/2}}$ sur la figure B.7 et on vérifie que l'on obtient bien une relation linéaire.

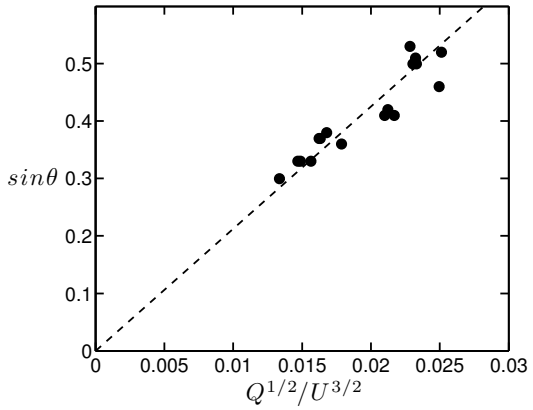


FIGURE B.7 – $\sin(\theta)$ en fonction de $\frac{Q^{1/2}}{U^{3/2}}$.

B.3.3 Ondes courbes

Il n'est pas rare que les crêtes des ondes observées, au lieu d'être parfaitement rectilignes soient légèrement courbes, l'angle des crêtes θ variant sur la largeur du caniveau, comme

présenté sur la figure B.8 (a). Cet effet semble provenir du fait que la profondeur du caniveau n'est pas constante, sur l'image elle diminue vers la droite jusqu'à tendre vers zéro, en même temps que θ diminue [figure B.8 (b)]. Supposant que la vitesse de surface est uniforme et constante, sachant que $\sin(\theta) \sim \sqrt{h}/U$, on vérifie que θ doit diminuer lorsque la profondeur diminue. Au laboratoire on reproduit difficilement le phénomène, le canal utilisé n'étant pas très large, comme représenté sur la figure B.8 (c).

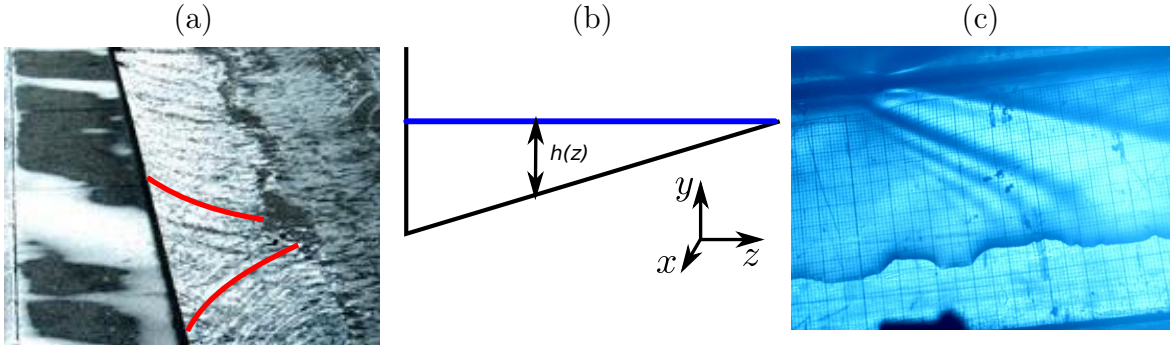


FIGURE B.8 – (a) Caniveau de profondeur variable, l'écoulement se produit de haut en bas. (b) Représentation d'un caniveau de profondeur variable. (c) Ondes "courbes" au laboratoire, l'écoulement se produit de gauche à droite.

B.4 Conclusion

Il est courant d'observer à la surface de l'eau coulant dans les caniveaux des ondes qui forment des croisillons d'angle constant. Cette structure découle de la relation de dispersion des ondes gravitaires dans la limite de faible profondeur. On a montré dans nos expériences que l'angle que forment les crêtes des ondes avec la direction de l'écoulement varie comme $\sin(\theta) \sim Q^{1/2}/U^{3/2}$ avec Q le débit et U la vitesse de surface de l'écoulement. Les ondes observées peuvent avoir une influence directe sur le transport de particules par l'écoulement. A la plage par exemple, lors du retrait des vagues, on observe les mêmes croisillons, qui laissent des marques sur la sable.

Annexe C

Estimation du taux de croissance de l'instabilité de Crow entre deux tourbillons corotatifs asymétriques.

C.1 Position du problème

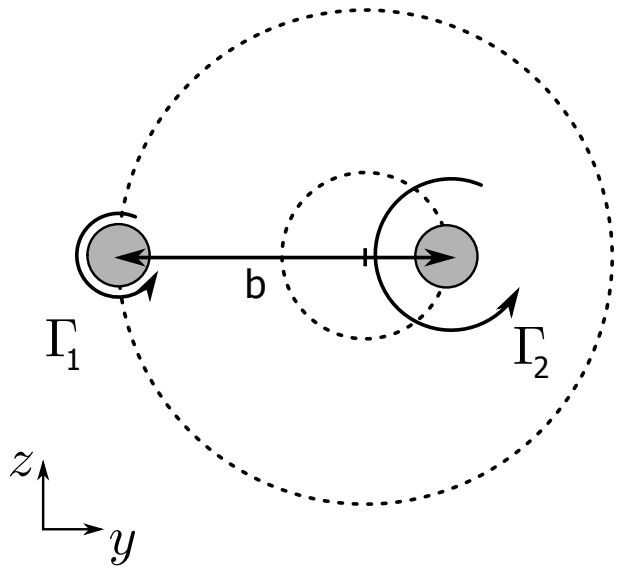


FIGURE C.1 – Paire de tourbillons corotatifs asymétriques de circulation $\Gamma_2 > \Gamma_1$, séparés de b.

On cherche le taux de croissance de l'instabilité de Crow (déplacement du coeur du tourbillon en bloc) de longueur d'onde k qui existe entre une paire de tourbillons corotatifs asymétriques. L'état de base est représenté sur la figure C.1. Les tourbillons sont de circulation Γ_1 et Γ_2, avec $\Gamma_1 < \Gamma_2$, de type Lamb-Oseen de taille de coeur a_{l1} et a_{l2}, de distance de séparation b.

La résolution du problème est réalisée par Fabre dans sa thèse [83]. On résume ici ses résultats et notations, sans présenter de nouveaux résultats.

On note les circulations adimensionnées $\gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}$ et $\gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}$. Les deux tourbillons tournent l'un autour de l'autre à la fréquence orbitale $\Omega = \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{4\pi^2 b^2}$.

C.2 Ecriture du problème

Dans le repère entrainé en rotation avec les tourbillons, la position des tourbillons est solution de l'équation matricielle :

$$\frac{d\underline{\widetilde{X}}(t)}{dt} = \frac{\Gamma 1 + \Gamma_2}{2\pi b^2} \underline{L}\ \underline{\widetilde{X}}(t) \tag{C.1}$$

avec

$$\underline{\widetilde{X}} = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 \\ \widetilde{z}_1 \\ \widetilde{y}_2 \\ \widetilde{z}_2 \end{pmatrix}$$

la position des deux tourbillons dans le repère tournant ($\underline{X} = \underline{\widetilde{X}} \exp(ikx)$), et

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\gamma_2+\gamma_1\varpi_1 & 0 & \gamma_2\psi \\ 1-\gamma_2-\gamma_1\varpi_1 & 0 & \gamma_2\chi & 0 \\ 0 & \gamma_1\psi & 0 & 1-\gamma_1+\gamma_2\varpi_2 \\ \gamma_1\chi & 0 & 1-\gamma_1-\gamma_2\varpi_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avec les fonctions d'induction mutuelles ϕ, χ et ψ et les fonctions d'auto-induction ϖ qui dépendent toutes de kb. Les fonctions d'induction mutuelles s'expriment à l'aide des intégrales de Bessel modifiées de second espèce K_1 et K_2 :

$$\psi(kb) = kb^2 K_0(|kb|) + |kb| K_1(|kb|) \tag{C.2}$$

$$\phi(kb) = \frac{kb^2}{2} K_2(|kb|) \tag{C.3}$$

$$\chi(kb) = \frac{kb^2}{2} K_1(|kb|) \tag{C.4}$$

Les fonctions d'auto induction $\varpi(kb)$ s'écrivent en adimentionalisant les dimensions par b :

$$\varpi_1(kb, a_1/b) = (a_1/b)^{-2} \varpi(ka_1) \tag{C.5}$$

où a_1 est le rayon de coeur "effectif" du tourbillon, $a_1 = 1.36\ a_{l1}$.

Les fonctions d'auto induction peuvent être approchées par la fonction :

$$\varpi(ka) = \frac{(ka)^2}{2 + C_1|k|a + C_2(ka)^2} \left[\log\left(\frac{2 + C_3|k|a}{|k|a} \right) + \frac{1}{4} - \gamma_e \right] \tag{C.6}$$

Avec $C_1 = 0.95508$, $C_2 = 0.438477$, $C_3 = 2.1514257$, $\gamma_e = 0.577$.

C.3 Taux de croissance

Le taux de croissance de l'instabilité est solution de l'équation aux valeurs propres :

$$\det\left(\underline{L} - \gamma \underline{I}\right) = 0 \tag{C.7}$$

En développant cette expression, σ^2 est solution de l'équation :

$$z^2 + Bz + C = 0 \tag{C.8}$$

avec

$$B = (1 + \gamma_1 \varpi_1)^2 + (1 + \gamma_2 \varpi_2)^2 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2\gamma_1\gamma_2\phi\chi \tag{C.9}$$

et

$$C = \gamma_1\gamma_2 \left[(1 + \varpi_1)(1 + \varpi_2) - \psi^2\right] \left[(2 + \gamma_1(\varpi_1 - 1))(2 + \gamma_2(\varpi_2 - 1)) - \gamma_1\gamma_2\chi^2\right] \tag{C.10}$$

C.4 Solution

Lorsque le déterminant $\Delta = B^2 - 4C$ est positif, on recherche la taux de croissance sous la forme de la solution positive la plus grande :

$$\sigma^2(kb) = -\frac{B}{2} + \sqrt{(B/2)^2 - C} \tag{C.11}$$

on obtient ainsi le taux de croissance de l'instabilité en fonction de sa longueur d'onde.

Annexe D

Champs de déformation de la surface par la méthode des images.

D.1 Introduction

Je reproduis ici les notes de Frédéric Chevy sur la déformation de la surface par une sphère immergée estimée par la méthode des images.

D.2 Estimation

On considère un fluide de masse volumique μ à la surface duquel on impose un champ de pression $p(r)$. D'après la formule (3) de la référence [101], la transformée de Fourier de la déformation de la surface peut s'écrire dans la limite des faibles viscosités :

$$\xi(\underline{k}) = \frac{-k\hat{p}(\underline{k})/\mu}{\omega_0^2(k) - (\underline{k}.\underline{V_0})^2 - i0^+ sg(\underline{k}.\underline{V_0})} \tag{D.1}$$

où $\omega_0(k)$ désigne la relation de dispersion des ondes de surface, et V_0 est la vitesse de translation du champ de pression p. En utilisant la relation $1/(x-i0^+) = PP(1/x)+i\pi\delta(x)$, où PP désigne la partie principale, on constate que dans l'espace réel, $\xi(\underline{\rho})$ prend la forme $\xi(\underline{\rho}) = \xi_S(\underline{\rho}) + \xi_A(\underline{\rho})$ avec $\underline{\rho} = (x,y)$ et

$$\xi_s(\underline{r}) = -\frac{1}{\mu}\int \frac{d^2\underline{k}}{(2\pi)^2} PP\left[\frac{k\hat{p}(\underline{k})}{\omega_0^2(\underline{k}) - (\underline{k}.\underline{V_0})^2}\right] e^{i\underline{k}.\underline{\rho}} \tag{D.2}$$

$$\xi_a(\underline{r}) = i\frac{\pi}{\mu}\int \frac{d^2\underline{k}}{(2\pi)^2} k\hat{p}(\underline{k}) sg(\underline{k}.\underline{V_0})\delta(\omega_0^2(\underline{k}) - (\underline{k}.\underline{V_0})^2) e^{i\underline{k}.\underline{\rho}} \tag{D.3}$$

Dans le cas qui nous intéresse actuellement, nous allons montrer que $\hat{p}$ est réel et pair. On montre alors sans difficulté que ξ_s est paire, alors que ξ_a est impaire. Les effets de résistance de vague sont dues à la partie impaire du potentiel. Une façon de s'en convaincre consiste à noter que pour $V_0 \leq c_{min}$, le Dirac apparaissant dans ξ_a est systématiquement nul, alors que ξ_a ne l'est pas et possède une valeur non nulle à $V_0 = 0$ correspondant à la déformation statique de la surface sous l'effet de p_0. Calculons donc $\hat{p}$ dans le cas d'un objet immergé. Pour cela on écrit le champ de vitesse dans le fluide comme $\underline{v} = \underline{V_0} + \underline{V_1}$ où $\underline{V_1}$ est en première approximation la somme des contributions du dipôle décrivant l'effet de la sphère et de son image. D'après le théorème de Bernoulli le champ de pression dans

le fluide est donc de la forme $P = P_0 + \mu V_0^2/2 - \mu(\underline{V_0} + \underline{V_1})^2$. Dans la limite où l'objet est profondément immergé on a $V_1 << V_0$ à la surface du fluide, ce qui permet d'écrire que $P = P_0 - \mu\underline{V_0}.\underline{V_1}$. En l'absence de déformation de la surface, tout se passe donc comme si l'on imposait un champ de pression $p(\underline{\rho}) = -\mu\underline{V_0}.\underline{V_1}(x, y, z = 0)$ à la surface du fluide. Par symétrie, les contribution du dipôle et de son image sont égales à la surface libre du fluide. On peut donc écrire $p(\underline{\rho}) = -2\mu\underline{V_0}.\nabla\phi_H$, où ϕ_H est le potentiel créé à une distance H du dipôle décrivant la sphère, plus précisément

$$\phi_H(\underline{\rho}) = \frac{R^3\underline{V_0}.\underline{\rho}}{2\sqrt{H^2 + \rho^2}^3} \tag{D.4}$$

La transformée de Fourier bidimensionnelle de ϕ_H peut être calculée explicitement et l'on trouve que

$$\hat{\phi}_H(\underline{k}) = -i\pi R^3\frac{\underline{k}.\underline{V_0}}{k}e^{-kH} \tag{D.5}$$

On trouve finalement que la transformée du champ de pression exercée à la surface du fluide s'écrit

$$\hat{p}(\underline{k}) = 2\pi\mu R^3\frac{\underline{k}.\underline{V_0}}{k}e^{-kH} \tag{D.6}$$

Comme annoncé, $\hat{p}$ est réel, ce qui traduit le fait que pour un écoulement potentiel autour d'un obstacle, il y a symétrie entre l'avant et l'arrière de l'écoulement.

Composante symétrique

Dans le cas d'onde gravitaires, la composante symétrique de la déformation a pour expression :

$$\xi_s(\underline{\rho}) = -R^3\int\frac{d^2\underline{k}}{2\pi}PP\left[\frac{(\underline{k}.\underline{V_0})^2e^{-kh}}{gk - (\underline{k}.\underline{V_0})^2}\right]e^{i\underline{k}.\underline{\rho}} \tag{D.7}$$

Le terme exponentiel coupe l'intégrale à $k \approx 1/H$ alors que le pôle de la partie principale est situé en $k \approx g/V_0^2$. Á grande profondeur d'immersion, si $1/H << g/V_0^2$, le pôle ne contribuera pas au calcul de l'intégrale, ce qui permet d'approcher celle-ci par :

$$\xi_s(\underline{\rho}) \approx -R^3\int\frac{d^2\underline{k}}{2\pi}\frac{(\underline{k}.\underline{V_0})^2e^{-kH}e^{i\underline{k}.\underline{\rho}}}{gk} \tag{D.8}$$

On reconnaît (au facteur μ près) la transformée de Fourier inverse de $\hat{p}$. On en déduit donc que

$$\xi_s(\underline{\rho}) \approx -\frac{p((\underline{\rho})}{\mu g} = \frac{2\underline{V_0}.\nabla\phi_H}{g} \tag{D.9}$$

Ce résultat se comprend aisément puisque le nombre sans dimension pilotant ξ_s est Hg/V_0^2. La limite H grand correspond aussi à V_0 petit, qui correspond au cas d'une perturbation statique. Dans ce cas, le profil de la surface libre est donnée par la condition $p + \mu g\xi = 0$, et donc $\xi = p/\mu g$.

Composante antisymétrique

Dans le cas d'onde gravitaires, la composante antisymétrique de la déformation a pour expression

$$\xi_a(\underline{\rho}) = iR^3 \int d^2\underline{k}(\underline{k}.\underline{V_0})^2 e^{-kH} sg(\underline{k}.\underline{V_0})\delta(gk - (\underline{k}.\underline{V_0})^2)e^{i\underline{k}.\underline{\rho}} \tag{D.10}$$

On calcule l'intégrale en cordonnées polaires (k, θ). En posant $c = \cos\theta$, on obtient alors sur l'axe x parallèle à $\underline{V_0}$:

$$\xi_a(\underline{\rho}) = iR^3 \int dkd\theta k^3 V_0^2 c^2 e^{-kH} sg(c)\delta(gk - k^2V_0^2c^2)e^{ikxc} \tag{D.11}$$

$$\xi_a(\underline{\rho}) = 2iR^3 \int \frac{dkdc}{\sqrt{1-c^2}} kc^2 e^{-kH} sg(c)\delta(\frac{g}{kV_0^2}k - c)e^{ikxc} \tag{D.12}$$

On calcule dans un premier temps l'intégrale sur c, ce qui nous donne

$$\xi_a(\underline{\rho}) = -2R^3 \int_{g/V_0^2}^{\infty} kdke^{-kH} \frac{sin\left(\sqrt{\frac{gk}{V_0^2}}x\right)}{kV_0^2/g - 1} \tag{D.13}$$

Dans la limite $H \to \infty$, on peut utiliser la méthode de Laplace pour estimer l'intégrale : dans cette limite, l'exponentielle décroît très rapidement ce qui permet de remplacer k par g/V_0^2 dans les termes non singulier de l'intégrale. Ceci nous donne donc

$$\xi_a(\underline{\rho}) \approx -\frac{2gR^3 sin(\frac{gx}{V_0^2})}{V_0^2} \int_{g/V_0^2}^{\infty} dk \frac{e^{-kH}}{kV_0^2/g - 1} \tag{D.14}$$

$$\xi_a(\underline{\rho}) \approx -\frac{2R^3}{V_0^3}\sqrt{\frac{\pi g^3}{H}} e^{-gH/V_0^2} \sin(\frac{gx}{V_0^2}) \tag{D.15}$$

On constate que la partie antisymétrique de la déformation ne suit pas la loi en $1/H^3$ de la composante paire, mais décroît exponentiellement. Cette décroissance n'est pas sans rappeler le comportement de la résistance de vague prédite par Havelock [94].

Annexe E

Lissage de la surface par une anneau tourbillonnaire

E.1 Lissage de la surface

Ce chapitre présente les résultats obtenus sur la lissage de la surface par les anneaux. Un train d'onde monochromatique est formé à la surface de l'eau à l'aide d'un plongeur de forme triangulaire de 2 cm de coté fixé à un pot vibrant, les ondes traversant la cuve d'un coté à l'autre (voir le montage expérimental présente chapitre 5). Le montage crée des vagues de fréquence comprise entre 5 et 12 Hz et d'amplitude de l'ordre du millimètre.

La figure E.1 présente le lissage de la surface de l'eau par un anneau tourbillonnaire, formant une tache circulaire de l'ordre de deux fois son diamètre initial comme on l'a montré précédemment. La durée typique de vie de ces taches est de l'ordre de la seconde. Les empreintes de baleine observées en mer semblent avoir un temps de vie plus long. Sur des enregistrements de nage de dauphins on mesure des temps de vie des empreintes de l'ordre de 5 s.

E.1.1 Condition de suppression des vagues

L'empreinte se forme suite à deux processus : tout d'abord lorsque l'anneau arrive à la surface il étire une zone circulaire. Si des vagues sont présente à la surface l'étirement de la surface se traduit par une diminution de leur amplitude. Le courant induit par l'anneau à la surface bloque ensuite l'envahissement par les vagues provenant de l'extérieur. Pour comprendre ce phénomène supposons que des vagues se propagent de gauche à droite en profondeur infinie, et qu'elles pénètrent une zone dans laquelle un courant impose une vitesse V_c opposée à la propagation des vagues, sur une profondeur grande devant la longueur d'onde des vagues, comme représenté sur la figure E.2.

Une étude du problème est proposé par Evans [115]. Dans la zone immobile les ondes se déplacent de gauche à droite à la vitesse V_1 avec une longueur d'onde λ_1 :

$$V_1 = \left(\frac{\lambda_1 g}{2\pi}\right)^{1/2} \tag{E.1}$$

Les vagues qui pénètrent la zone de courant ont une vitesse relative par rapport à l'eau en mouvement V_r avec une longueur d'onde λ_2 :

$$V_r = \left(\frac{\lambda_2 g}{2\pi}\right)^{1/2} \tag{E.2}$$

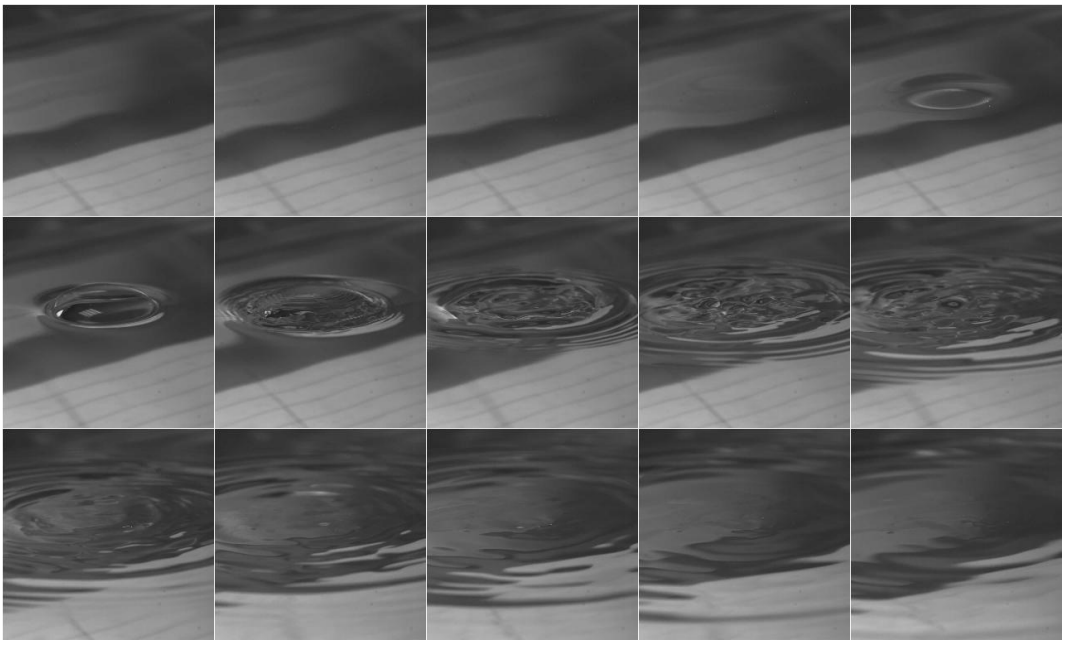


FIGURE E.1 – Lissage de la surface par un anneau tourbillonnaire de 3 cm de diamètre et une circulation de 90 cm^2/s. Les images sont espacées de 8 ms.

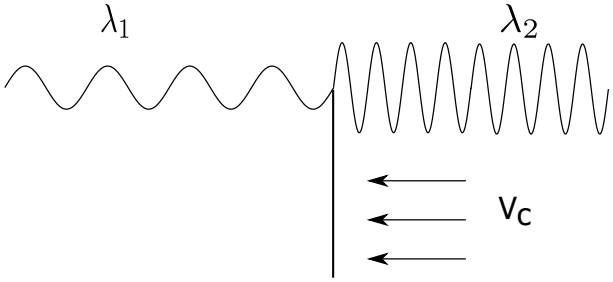


FIGURE E.2 – Vagues pénétrant un courant opposé à leur propagation.

La vitesse des ondes dans cette zone, par rapport à la terre, s'écrit $V_2 = V_r - V_c$.
De la terre, les vagues dans les deux zones ont la même période :

$$T = \frac{\lambda_1}{V_1} = \frac{\lambda_2}{V_2} = \frac{\lambda_1}{V_r - V_c} \tag{E.3}$$

(E.1) et (E.1) donne la relation entre les vitesses :

$$\frac{V_r^2}{V_1^2} = \frac{V_r - V_c}{V_1} \tag{E.4}$$

Les solutions du système peuvent s'écrire $\frac{V_r}{V_1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - \frac{V_c}{V_1}}$. On remarque que la vitesse relative des vagues diminue avec la vitesse du courant. Lorsque $V_c = V_1/4$ la vitesse relative est égale à la moitié de la vitesse du courant. Sachant que pour des ondes gravitaires en grande profondeur la vitesse de transport de l'énergie des vagues V_g est égale à la moitié de leur vitesse de phase, la vitesse relative de transport de l'énergie des vagues est alors égale à $V_{gr} = V_c$, dans le référentiel du courant l'énergie se déplace à la vitesse du courant, donc dans le référentiel terrestre les ondes sont immobiles et sont alors arrêtées par le courant.

La vitesse d'arrêt des vagues varie comme $\lambda_1^{1/2}$ pour des longueurs d'onde petites devant l'épaisseur du courant. Lorsque l'épaisseur finie du courant doit être prise en compte, la vitesse limite devient plus importante, comme décrit en détail par Taylor [116], ce qui explique pourquoi les empreintes ne lissent que les petites longueurs d'onde.

E.1.2 Expérience et résultats

Afin de mesurer le temps de vie des empreintes on filme un motif constitué de lignes parallèles à travers la surface, comme représenté sur la figure E.1. On effectue ensuite un reslice d'une ligne de pixels perpendiculaire au motif, ce qui donne une figure comme celle présentée figure E.3. Tant qu'il y a des vagues on observe un signal périodique, qui disparait pendant la durée de vie de l'empreinte. On mesure ce temps qui correspond on temps de vie de l'empreinte. On présente sur la figure E.4 le temps de vie d'empreinte formées par des tourbillons de circulation comprise entre 50 et 250 cm^2/s, de taille croissante. Le temps de vie semble augmenter avec la circulation du tourbillon, tandis qu'on observe pas d'influence claire de la taille du tourbillon.

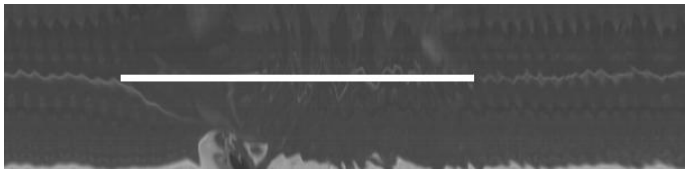


FIGURE E.3 – Reslice de la surface lors du lissage, la barre blanche indique la période lissée..

Un autre problème de temps de vie de structures tourbillonnaires est celui déjà abordé dans l'introduction du chapitre 5, il s'agit du temps de vie des paires de tourbillons de bout d'aile que les avions laissent sur las pistes de décollage. Ces paires de tourbillons arrivent au sol où elles forment des tourbillons secondaires. Les tourbillons primaires et secondaires interagissent ensuite, donnant lieu à une instabilité (décrite dans le cas de

paire impactant une surface dans l'eau [76]). L'introduction d'un avion plus lourd que les avions existant, l'A380, a entrainé des incidents et un allongement du temps imposé entre le décollage de deux avions parce que les tourbillons mettaient plus de temps à disparaitre. On peut estimer la circulation d'un avion plus lourd comme étant plus importante, et on en déduis que dans l'air, le temps de disparition d'une paire de tourbillons augmente avec sa circulation.

Concernant la durée de vie des tourbillons en fonction de leur taille, nos expériences ne permettent pas de dégager une tendance claire. Les observations de baleines et de dauphins tendent à montrer que le temps de vie de l'empreinte augmente avec sa taille. On peut émettre plusieurs hypothèses pour expliquer ces observations. Le temps de vie d'un empreinte peut être divisé en deux temps, le premier pendant lequel le tourbillon lisse la surface, sans former de tourbillons secondaire, puis un deuxième temps pendant le quel le tourbillon primaire se déstabilise lors de l'interaction avec les tourbillons secondaires (chapitre 5). Le premier temps peut être évalué par $\tau_1 = R/V$, or la vitesse dépend du rayon de l'anneau donc $\tau_1 \sim R^2/\Gamma$. Le deuxième terme est plus difficile à estimer. Plus l'énergie cinétique transportée est importante, plus le temps de dissipation de l'énergie sera long. L'énergie cinétique d'un anneau s'écrit $E_k \sim R\Gamma^2$. Les deux termes augmentent donc avec le rayon, ce que nous n'avons pas mesuré clairement. Le deuxième terme augmente avec la circulation, tendance que nous retrouvons. Dans nos expériences le premier terme est de l'ordre du second, mais dans le cas d'anneaux de grande dimension ce n'est plus forcement le cas.

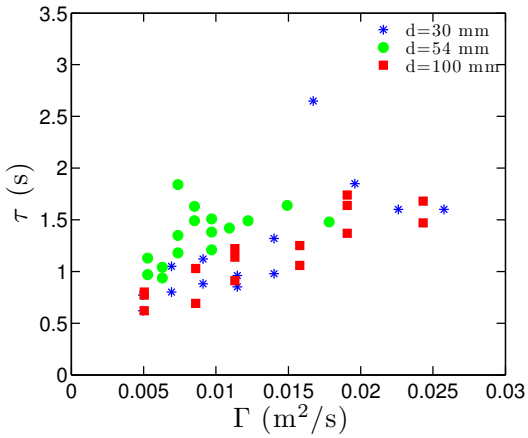


FIGURE E.4 – Temps de lissage de la surface en fonction de la circulation des tourbillons, pour différents diamètres d'injecteur.

Bibliographie

[1] HM Sternberg and WA Walker. Calculated flow and energy distribution following underwater detonation of a pentolite sphere. *Physics of Fluids*, 14 :1869, 1971.

[2] E. Klaseboer, K. C. Hung, C. Wang, C. W. Wang, B. C. Khoo, P. Boyce, S. Debono, and H. Charlier. Experimental and numerical investigation of the dynamics of an underwater explosion bubble near a resilient/rigid structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 537(6) :387–413, 2005.

[3] Z. Aman, Zhou Weixing, Wang S., and F. Linhan. Dynamic response of the non-contact underwater explosions on naval equipment. *Marine Structures*, 24(4) :396–411, 2011.

[4] A. M. Reed and J. H. Milgram. Ship wakes and their radar images. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1) :469–502, 2002.

[5] G Zilman and T Miloh. Radar backscatter of a v-like ship wake from a sea surface covered by surfactants. In *Proceedings of the Twenty-First Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 235–248, 1997.

[6] DL Bradley, RL Culver, X Di, and L Bjorno. Acoustic qualities of ship wakes. *Acta Acustica united with Acustica*, 88(5) :687–690, 2002.

[7] Svein Vagle and Holly Burch. Acoustic measurements of the sound-speed profile in the bubbly wake formed by a small motor boat. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117 :153, 2005.

[8] LD Landau and EM Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New York, 1959.

[9] François Caillé. *Sillages de bulles des navires de surfaces*. PhD thesis, Université de provence Aix-Marseille I.

[10] Lord Kelvin. On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 42 :80–83, 1887.

[11] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge university press, 1978.

[12] E Raphaël and P-G De Gennes. Capillary gravity waves caused by a moving disturbance : wave resistance. *Physical Review E*, 53(4) :3448, 1996.

[13] veezle.com.

[14] A. M. Worthington and R. S. Cole. Impact with a liquid surface studied by the aid of instantaneous photography. paper ii. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 194 :175–199, 1900.

[15] A. M. Worthington. *A study of splashes*. Longmans, Green, and Co., 1908.

[16] C. Duez, C. Ybert, C. Clanet, and L. Bocquet. Making a splash with water repellency. *Nature physics*, 3(3) :180–183, 2007.

[17] A. May. Vertical entry of missiles into water. *Journal of Applied Physics*, 23(12) :1362–1372, 1952.

[18] A. May. Water entry and the cavity-running behavior of missiles. Technical report, DTIC Document, 1975.

[19] J. W. Glasheen and T. A. McMahon. A hydrodynamic model of locomotion in the basilisk lizard. *Nature*, 380(6572) :340–342, 1996.

[20] R. S. Seymour and S. K. Hetz. The diving bell and the spider : the physical gill of argyroneta aquatica. *The Journal of Experimental Biology*, 214(13) :2175–2181, 2011.

[21] V. Duclaux, F. Caillé, C. Duez, C. Ybert, L. Bocquet, and C. Clanet. Dynamics of transient cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 591(1) :1–19, 2007.

[22] J. M. Aristoff and J. W. M. Bush. Water entry of small hydrophobic spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 619(1) :45–78, 2009.

[23] A. Le Goff, D. Quéré, and C. Clanet. Viscous cavities. *Phys. Fluids (submitted)*, 2013.

[24] S. Gekle, J. M. Gordillo, D. Van Der Meer, and D. Lohse. High-speed jet formation after solid object impact. *Physical review letters*, 102(3) :34502, 2009.

[25] S. Gekle and J. M. Gordillo. Generation and breakup of worthington jets after cavity collapse. part 1. jet formation. *Journal of Fluid Mechanics*, 663 :293–330, 2010.

[26] J. M. Gordillo and S. Gekle. Generation and breakup of worthington jets after cavity collapse. part 2. tip breakup of stretched jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 663 :331–346, 2010.

[27] J. Aristoff. The influence of aerodynamic pressure on the water-entry cavities formed by high-speed projectiles. *Proceedings of the 7th International Symposium on Cavitation*, 2009.

[28] J. M. Aristoff, T. T. Truscott, A. H. Techet, and J. W. M. Bush. The water-entry cavity formed by low bond number impacts. *Physics of Fluids*, 20 :091111, 2008.

[29] R. Bergmann, D. Van Der Meer, S. Gekle, A. Van Der Bos, and D. Lohse. Controlled impact of a disk on a water surface : cavity dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 633 :381, 2010.

[30] O. R. Enriquez, I. R. Peters, S. Gekle, L. E. Schmidt, M. Versluis, D. Van Der Meer, and D. Lohse. Collapse of nonaxisymmetric cavities. *Physics of Fluids*, 22 :091104, 2010.

[31] O. R. Enriquez, I. R. Peters, S. Gekle, L. E. Schmidt, D. Lohse, and D. van der Meer. Collapse and pinch-off of a non-axisymmetric impact-created air cavity in water. *Journal of Fluid Mechanics*, 701 :40–58, 2012.

[32] D. Lohse, R. Bergmann, R. Mikkelsen, C. Zeilstra, D. Van Der Meer, M. Versluis, K. Van Der Weele, M. Van Der Hoef, and H. Kuipers. Impact on soft sand : Void collapse and jet formation. *Physical review letters*, 93(19) :198003, 2004.

[33] S. T. Thoroddsen and A. Q. Shen. Granular jets. *Physics of Fluids*, 13 :4, 2001.

[34] G. Taylor. The formation of a blast wave by a very intense explosion. ii. the atomic explosion of 1945. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1065) :175–186, 1950.

[35] O. G. Engel. Crater depth in fluid impacts. *Journal of Applied Physics*, 37(4) :1798–1808, 1966.

[36] O. G. Engel. Initial pressure, initial flow velocity, and the time dependence of crater depth in fluid impacts. *Journal of Applied Physics*, 38(10) :3935–3940, 1967.

[37] A. Bisighini, G. E. Cossali, C. Tropea, and I. V. Roisman. Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target. *Physical Review E*, 82(3) :036319, 2010.

[38] V. R. Oberbeck. Application of high explosion cratering data to planetary problems. In *Impact and Explosion Cratering : Planetary and Terrestrial Implications*, volume 1, pages 45–65, 1977.

[39] A. M Walsh, K. E. Holloway, P. Habdas, and J. R. de Bruyn. Morphology and scaling of impact craters in granular media. *Physical review letters*, 91(10) :104301, 2003.

[40] H. J. Melosh. A schematic model of crater modification by gravity. *Journal of Geophysical Research*, 87(B1) :371–380, 1982.

[41] J. M. Aristoff, T. T. Truscott, A. H. Techet, and J. W. M. Bush. The water entry of decelerating spheres. *Physics of Fluids*, 22 :032102, 2010.

[42] M. Wright, K. Langley, J. Belden, and T. Truscott. Holy balls ! *arXiv*, 2011.

[43] É. Lorenceau, D. Quéré, J. Y. Ollitrault, and C. Clanet. Gravitational oscillations of a liquid column in a pipe. *Physics of Fluids*, 14 :1985, 2002.

[44] A. Antkowiak, N. Bremond, S. Le Dizès, E. Villermaux, et al. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics*, 577 :241, 2007.

[45] T. Séon and A. Antkowiak. Large bubble rupture sparks fast liquid jet. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :014501, Jul 2012.

[46] I.R. Peters, Y. Tagawa, N. Oudalov, C. Sun, A. Prosperetti, D. Lohse, and D. van der Meer. Highly focused supersonic microjets : numerical simulations. *Arxiv preprint arXiv :1203.5029*, 2012.

[47] Y. Tagawa, N. Oudalov, C. W. Visser, I. R. Peters, D. van der Meer, C. Sun, A. Prosperetti, and D. Lohse. Highly focused supersonic microjets. *Arxiv preprint arXiv :1112.2517*, 2011.

[48] Sadatoshi Taneda. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan*, 11(10) :1104–1108, 1956.

[49] Sadatoshi Taneda. Visualization of separating stokes flows. *J. Phys. Soc. Japan*, 46 :1935–1942, 1979.

[50] Étienne Guyon, Jean Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP SCIENCES, 2001.

[51] P. G. Saffman. *Vortex dynamics*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, 1992.

[52] T. Leweke and C. H. K. Williamson. Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics*, 360(1) :85–119, 1998.

[53] Amos Emerson Dolbear. *Modes of Motion : Or, Mechanical Conceptions of Physical Phenomena*. Lee and Shepard, 1897.

[54] J. J. Allen and B. Auvity. Interaction of a vortex ring with a piston vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 465 :353–378, 2002.

[55] Sampath, Meunier, Leweke, et al. *DPIV-Soft 2010 User Guide*, 2010.

[56] P. Meunier and T. Leweke. Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Experiments in fluids*, 35(5) :408–421, 2003.

[57] P. Meunier, T. Leweke, et al. Elliptic instability of a co-rotating vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics*, 533 :125–160, 2005.

[58] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, New York, 1932.

[59] R. Levy, D. Uminsky, A. Park, and J. Calambokidis. A theory for the hydrodynamic origin of whale flukeprints". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(4) :616 – 626, 2011. Special issue on non-linear mechanics of biological structures.

[60] R. L. Panton. Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence. *Progress in Aerospace Sciences*, 37(4) :341–383, 2001.

[61] H. Helmholtz. Lxiii. on integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(226) :485–512, 1867.

[62] H. Bouasse. Tourbillons, vol. 1. *Librairie Delagrave, Paris*, 1931.

[63] C. C. Chu, C. T. Wang, C. C. Chang, R. Y. Chang, and W. T. Chang. Head-on collision of two coaxial vortex rings : experiment and computation. *Journal of Fluid Mechanics*, 296 :39–72, 1995.

[64] J. K. Harvey and F. J. Perry. Flowfield produced by trailing vortices in the vicinity of the ground (flow field induced by aircraft trailing vortices near ground during takeoff and landing, noting experimental departure from theory). *AIAA JOURNAL*, 9 :1659, 1971.

[65] J. D. A. Walker, C. R Smith, A. W. Cerra, and T. L Doligalski. The impact of a vortex ring on a wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 181(1) :99–140, 1987.

[66] P. Orlandi. Vortex dipole rebound from a wall. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 2 :1429, 1990.

[67] S. Ohring and H. J. Lugt. Interaction of a viscous vortex pair with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 227(1) :47–70, 1991.

[68] W. Kramer, H. J. H. Clercx, and G. J. F. van Heijst. Vorticity dynamics of a dipole colliding with a no-slip wall. *Physics of Fluids*, 19 :126603, 2007.

[69] S. Alben. Interactions between vortices and flexible walls. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(4) :586–591, 2011.

[70] L. P. Bernal, A. Hirsa, J. T. Kwon, and W. W. Willmarth. On the interaction of vortex rings and pairs with a free surface for varying amounts of surface active agent. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 1(12), 1989.

[71] M. Song, L. P. Bernal, and G. Tryggvason. Head-on collision of a large vortex ring with a free surface. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4 :1457, 1992.

[72] J. A. Luton and S. A. Ragab. The three-dimensional interaction of a vortex pair with a wall. *Physics of Fluids*, 9 :2967, 1997.

[73] J. G. Fogg. *Vortex pair instabilities in ground effect.* Cornell University, May, 2001.

[74] P. J. Archer, T. G. Thomas, and G. N. Coleman. The instability of a vortex ring impinging on a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 642 :79, 2010.

[75] D. M. Harris and C. H. K. Williamson. A short wave instability caused by the approach of a vortex pair to a ground plane. *Bulletin of the American Physical Society*, 55, 2010.

[76] D. M. Harris and C. H. K. Williamson. Instability of secondary vortices generated by a vortex pair in ground effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 700 :148, 2012.

[77] T. Leweke, M. C. Thompson, and K. Hourigan. Instability of the flow around an impacting sphere. *Journal of fluids and structures*, 22(6) :961–971, 2006.

[78] S. E. Widnall and J. P Sullivan. On the stability of vortex rings. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 332(1590) :335–353, 1973.

[79] P. G. Saffman. The number of waves on unstable vortex rings. *Journal of Fluid Mechanics*, 84(04) :625–639, 1978.

[80] S. E. Widnall, D. B. Bliss, and C. Y. Tsai. The instability of short waves on a vortex ring. *Journal of Fluid Mechanics*, 66(1) :35–47, 1974.

[81] S. E. Widnall and C. Y. Tsai. The instability of the thin vortex ring of constant vorticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 287(1344) :273–305, 1977.

[82] C. Eloy and S. Le Dizès. Three-dimensional instability of burgers and lamb–oseen vortices in a strain field. *Journal of Fluid Mechanics*, 378(1) :145–166, 1999.

[83] David Fabre. *Instabilités et instationnarités dans les tourbillons : Application aux sillages d'avion.* PhD thesis, Université Paris VI, 2002.

[84] J. K. Walters and J. F. Davidson. The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 17(03) :321–336, 1963.

[85] T. J. Pedley. Toroidal Bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 32(Part 1) :97–&, 1968.

[86] J. S. Turner and J. S. Turner. Buoyant vortex rings. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 239(1216) :61–75, 1957.

[87] T. S. Lundgren and N. N. Mansour. Vortex ring bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 224(5) :177–196, 1991.

[88] $http://www.youtube.com/watch?v = wuvgxj55g6y$.

[89] $http://www.youtube.com/watch?v = dc9ilvzgy_k$.

[90] H. Lamb. Hydrodynamics. 1932. *Article*, 257 :440–442, 1945.

[91] D. J. Acheson. *Elementary fluid dynamics.* Oxford University Press on Demand, 1990.

[92] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* Wiley, 1974.

[93] M. Rabaud and F. Moisy. Ship wakes : Kelvin or mach angle ? *PRL*, 2013.

[94] T. H. Havelock. Some cases of wave motion due to a submerged obstacle. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 93(654) :520–532, 1917.

[95] R. B. Chapman. Hydrodynamic drag of semisubmerged ships. *Journal of Basic Engineering*, 94 :879, 1972.

[96] N. F. Hughes. The wave-drag hypothesis : an explanation for size-based lateral segregation during the upstream migration of salmonids. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 61(1) :103–109, 2004.

[97] P. W. Webb, D. Sims, and W. W. Schultz. The effects of an air/water surface on the fast-start performance of rainbow trout (oncorhynchus mykiss). *Journal of experimental biology*, 155(1) :219–226, 1991.

[98] R. Vennell, D. Pease, and B. Wilson. Wave drag on human swimmers. *Journal of biomechanics*, 39 :664–671, 2006.

[99] Bernard Prezelin. *The Naval Institute Guide to Combat Fleets of the World.* Naval Institute Press, 1995.

[100] T. Burghelea and V. Steinberg. Onset of wave drag due to generation of capillary-gravity waves by a moving object as a critical phenomenon. *Physical review letters*, 86(12) :2557–2560, 2001.

[101] F. Chevy and E. Raphaël. Capillary gravity waves : A "fixed-depth" analysis. *EPL (Europhysics Letters)*, 61(6) :796, 2003.

[102] D. Richard and É. Raphaël. Capillary-gravity waves : The effect of viscosity on the wave resistance. *EPL (Europhysics Letters)*, 48(1) :49, 1999.

[103] M. Le Merrer, C. Clanet, D. Quéré, É Raphaël, and F. Chevy. Wave drag on floating bodies. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(37) :15064–15068, 2011.

[104] J. Michell. The wave-resistance of a ship. *Philosophical Magazine*, 45, 1898.

[105] TH Havelock. The wave resistance of a spheroid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 131(817) :275–285, 1931.

[106] R. L. C. Flemmer and C. L. Banks. On the drag coefficient of a sphere. *Powder technology*, 48(3) :217–221, 1986.

[107] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, and P. Petitjeans. Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in fourier transform profilometry. *Applied optics*, 48(2) :380–392, 2009.

[108] P. J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, and P. Petitjeans. Global measurement of water waves by fourier transform profilometry. *Experiments in fluids*, 46(6) :1037–1047, 2009.

[109] G. K. Batchelor. Compression waves in a suspension of gas bubbles in liquid. *Fluid Dyn. Trans*, 4 :425–445, 1969.

[110] B. Qian and Z. Shen. Fabrication of superhydrophobic surfaces by dislocation-selective chemical etching on aluminum, copper, and zinc substrates. *Langmuir*, 21(20) :9007–9009, 2005.

[111] A. Sohankar, C. Norberg, and L. Davidson. Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26(1) :39–56, 1998.

[112] C. H. K. Williamson. Defining a universal and continuous strouhal–reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder. *Physics of Fluids*, 31(10) :2742–2744, 1988.

[113] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual review of fluid mechanics*, 28(1) :477–539, 1996.

[114] Patrice Meunier. *Etude Expérimentale de Deux Tourbillons Corotatifs*. PhD thesis, Université de provence Aix-Marseille I.

[115] J. T. Evans. Pneumatic and similar breakwaters. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 231(1187) :457–466, 1955.

[116] G. I. Taylor. The action of a surface current used as a breakwater. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 231(1187) :466–478, 1955.