HAL
open science

Modèle micromécanique pour l'étude de l'anisotropie de la réaction alcali-silice

Laurent Charpin

To cite this version:

Laurent Charpin. Modèle micromécanique pour l'étude de l'anisotropie de la réaction alcali-silice. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1103 . pastel-00873539

HAL Id: pastel-00873539

https://pastel.hal.science/pastel-00873539

Submitted on 15 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité : Sciences des Matériaux

par

Laurent Charpin

École Doctorale : Sciences, Ingénierie et Environnement

Modèle micromécanique pour l'étude de l'anisotropie de la réaction alcali-silice

Thèse soutenue le 5 juillet 2013 devant le jury composé de :

Ziad Moumni	*Président*
Djimédo Kondo	*Rapporteur*
Benoît Bary	*Rapporteur*
Stéphane Multon	*Examinateur*
Charles Toulemonde	*Examinateur*
Éric Lemarchand	*Examinateur*
Jean-Michel Torrenti	*Examinateur*
Alain Ehrlacher	*Directeur de thèse*
Cyrille Dunant	*Invité*

Remerciements

Lorsqu'on veut démarrer une thèse, le choix du sujet n'est pas simple. En ce qui me concerne, je crois que j'ai avant tout choisi mon directeur, Alain Ehrlacher. Ces trois années à travailler sous sa direction n'ont fait que renforcer mon respect tant pour ses qualités scientifiques reconnues de tous que pour ses qualités humaines. J'ai beaucoup appris de son exemple, et je reste impressionné par son enthousiasme lorsqu'un sujet d'investigation nouveau se présente, et par ses capacités de travail. Je pense qu'Alain m'a permis d'acquérir beaucoup d'autonomie et de rigueur, et m'a aussi appris à avoir confiance dans mon propre travail.

Je tiens à remercier le président de mon jury Ziad Moumni d'avoir accepté cette tâche, mais aussi et surtout de m'avoir accompagné dans ma découverte de la mécanique depuis le projet de l'X il y a six ans jusqu'aux TD de mécanique à l'ENSTA pour lesquels il m'a fait confiance. Je remercie également mes rapporteurs Benoît Bary et Djimédo Kondo. Leur lecture détaillée de mon manuscrit m'a apporté d'utiles éclaircissements. J'exprime également ma gratitude envers mes examinateurs. Tout d'abord Jean-Michel Torrenti, dont les conseils en début de thèse nous ont aidés à dessiner le sujet. Ensuite, Charles Toulemonde, pour ses remarques lors de nos visites à EDF et le temps passé depuis la soutenance pour l'intégration de mon code dans la plateforme de simulation de son équipe. Enfin, Éric Lemarchand pour les discussions riches sur l'alcali-réaction et la micromécanique que nous avons eues au cours de ces trois années. Je remercie enfin Cyrille Dunant de sa présence pour ma soutenance.

J'ai effectué ma thèse à l'École Nationale des Ponts et Chaussées , au sein de l'équipe Matériaux et Structures Architecturés du Laboratoire Navier, , dirigés respectivement par Jean-François Caron et Karam Sab, que je remercie pour leurs conseils bienveillants. J'y ai bénéficié d'un cadre de travail très agréable qui doit beaucoup à la réactivité de Géraldine Vue et de Marie-Françoise Kaspi. J'y ai également profité d'une très bonne ambiance, entouré par les doctorants et les permanents, collègues et amis. Je vous adresse à tous mes sincères remerciements pour le temps passé durant ces trois années à discuter de science ou d'autres sujets passionnants, au détour d'un café, d'une séance de sport ou d'une pause déjeuner.

Ma thèse a été financée par la Chaire Durabilité des Matériaux et des Structures pour l'Énergie à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Ce financement m'a permis de travailler très librement, et de participer en tant qu'encadrant à de nombreuses visites de centrales nucléaires qui furent très enrichissantes. Je remercie l'ensemble des acteurs de cette Chaire.

Je souhaite remercier mes parents, qui m'ont donné le goût de l'activité intellectuelle et cette culture du travail qui est si utile lorsque la tâche à accomplir semble insurmontable. Je suis également reconnaissant envers mes amis, qui trouvent probablement toujours un peu étrange que je travaille sur le béton. Je remercie enfin ma femme Cécile qui a tenu bon lorsque je travaillais beaucoup, supportant mes absences autant que les difficultés de l'organisation de notre mariage avec beaucoup de courage.

Modèle micromécanique pour l'étude de l'anisotropie de la réaction alcali-silice

Résumé : La réaction alcali-silice est une réaction endogène du béton qui peut contribuer à diminuer la durée de vie d'ouvrages coûteux. La modélisation est nécessaire pour pouvoir évaluer la durée de vie restante des ouvrages atteints. L'alcali-réaction provoque un gonflement du béton dû à une fissuration microscopique sous pression de produits de réaction qui sont des gels gonflant par absorption d'eau. Si le béton est chargé, la fissuration microscopique se développe en fonction du chargement local du béton, ce qui induit une anisotropie de comportement et de déformation du béton.
L'objectif de notre travail est de simuler, à partir d'hypothèses simples sur les mécanismes réactionnels en jeu, pour une classe de granulats à réactivité rapide, le déroulement de la fissuration du béton au niveau microscopique, de façon à estimer les déformations et les propriétés mécaniques du béton attaqué. Nous utilisons pour cela une description micromécanique du béton qui nous permet de calculer les propriétés mécaniques et les déformations en fonction de l'état de fissuration, et un critère énergétique de fissuration de façon à faire évoluer l'état de fissuration.
Le fonctionnement du modèle est testé sur de nombreux cas qui font apparaître que l'utilisation d'un critère de rupture énergétique en micromécanique est bien adaptée à l'alcali-réaction. L'identification des paramètres du modèle sur des essais en laboratoire donne de bons résultats pour des chargements en dessous de 10 MPa, mais conduit à des estimations très élevées des énergies mécaniques. Le modèle a en effet une tendance à surestimer l'anisotropie du gonflement qui est compensée par l'augmentation de l'énergie surfacique de fissuration.

Mots clés : Réaction alcali-silice, fissuration, critère énergétique, gel, micromécanique.

Micromechanical model for alkali-silica reaction anisotropy

Abstract : The alkali-silica reaction is an endogenous chemical reaction affecting concrete. Therefore, it is important to model the effects of the reaction so as to estimate the life span of the attacked structures. The reaction leads to a microscopic cracking, due to the pressure of the reaction products which swell by absorption of water, inducing swelling of the concrete. If the concrete is mechanically loaded, the orientation of the microscopic cracking is affected by the local stress state, which induces anisotropy of the mechanical properties and deformations of the concrete.

Our work aims at simulating, starting from simple assumptions about the reaction mechanisms, and for a class of fast-reacting aggregates, the development of cracking at the microscopic scale, so as to estimate the deformations and mechanical properties of the attacked concrete. In this purpose, we use a micromechanical description of the concrete, thanks to which we can compute the mechanical properties and deformations from the state of cracking of the concrete. In addition to that, we use an energy fracture criterion to determine the evolution of cracking as the attack progresses.

We tested our model on numerous cases. These tests show that this description is well adapted to studying alkali-silica reaction. The identification of the parameters using laboratory experiments yielded good results as far as compression stresses are below 10 MPa. However, the fracture energies identified are greater than accepted values for concretes. We think that our model overestimates the anisotropy of the reaction, which is balanced by higher fracture energies in the identification.

Keywords : Alkali-silica reaction, fracture, energy criterion, gel, micromechanics.

Cadre de la thèse

Cette thèse a été préparée au Laboratoire Navier, unité mixte de recherche commune à l'École des Ponts ParisTech, à l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR) et au CNRS (UMR 8205).

Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech
6/8 avenue Blaise Pascal
77420 Champs-sur-Marne

Le financement de cette thèse provient de la chaire Durabilité des Matériaux et des Structures pour l'Énergie.

Table des matières

Introduction générale **13**

I La réaction alcali-silice **17**

Introduction **19**

1 Bibliographie sur la RAG **21**
1.1 Introduction 22
1.2 Généralités sur la réaction alcali-silice 22
1.3 Mécanismes réactionnels et de gonflement 23
1.4 Notre vision des mécanismes réactionnels en jeu 27
1.5 Caractéristiques mécaniques de la RAG 28
1.6 Conclusion 30

2 Généralités de modélisation de la RAG **33**
2.1 Introduction 34
2.2 Modélisation chimie-transport de la RAG 34
2.3 Modélisation micromécanique de la RAG 37
2.4 Modélisation mécanique à l'échelle macroscopique 46
2.5 Conclusion 48

Conclusion **51**

Bibliographie **52**

II Théorie **59**

Introduction **61**

3 Bibliographie sur l'homogénéisation **65**
3.1 Introduction 66
3.2 Le volume élémentaire représentatif 66
3.3 Les tenseurs de localisation 68
3.4 La démarche de microporomécanique 69
3.5 Résultats théoriques 73
3.6 Estimateurs de micromécanique 81
3.7 Conclusion 95

4 Comparaison d'estimateurs à des calculs par EF **97**
4.1 Introduction . . . 98
4.2 Formulation variationnelle en déformations planes . . . 98
4.3 Détermination des propriétés moyennes . . . 101
4.4 Microstructures considérées . . . 107
4.5 Taille de VER par l'approche de Kanit . . . 109
4.6 Rappel des estimateurs . . . 110
4.7 Comparaisons simulations-estimateurs . . . 115
4.8 Conclusion . . . 133

5 Critère énergétique de fissuration **135**
5.1 Introduction . . . 136
5.2 Critères de rupture fragile . . . 136
5.3 Critère de Francfort-Marigo en gonflement libre . . . 141
5.4 Conclusion . . . 154

6 Énergie d'un milieu poreux **155**
6.1 Introduction . . . 156
6.2 Milieu élastique troué . . . 156
6.3 Matériau poreux homogène équivalent . . . 164
6.4 Milieu continu poreux hétérogène . . . 166
6.5 Conclusion . . . 171

7 Granulométrie et symétrie **173**
7.1 Introduction . . . 174
7.2 Détail des différents problèmes nécessaires à l'application du critère de rupture . 174
7.3 Critère de Francfort-Marigo en microporomécanique . . . 175
7.4 Exemples de fissuration . . . 181
7.5 Conclusion . . . 191

Conclusion **193**

Bibliographie **195**

III Application à la réaction alcali-silice **199**

Introduction **201**

8 Idées retenues pour le modèle **203**
8.1 Introduction . . . 204
8.2 Description du béton avant la fissuration . . . 204
8.3 Description de la fissuration . . . 206
8.4 Définition des familles de grains . . . 206
8.5 Conclusion . . . 207

9 Homogénéisation d'un béton atteint de la RAG **209**
9.1 Introduction . . . 210
9.2 Application à notre problème de RAG . . . 210
9.3 Calcul concret des propriétés homogénéisées . . . 216
9.4 Critères d'interpénétration des surfaces fissurées . . . 224

9.5 Conclusion 227

10 Énergie d'un béton atteint de la RAG **229**
10.1 Introduction 230
10.2 Rappel des expressions de l'énergie potentielle 230
10.3 Calcul des pressions et énergie 232
10.4 Élasticité non drainée, précontrainte chimique 235
10.5 Calcul des contraintes et des déformations macroscopiques pour les différents cas de chargement 235
10.6 Conclusion 238

11 Application du modèle de fissuration pour la RAG **239**
11.1 Introduction 240
11.2 Explication de l'algorithme 240
11.3 Déformation imposée 241
11.4 Contrainte imposée 260
11.5 Étude de l'essai de Multon 270
11.6 Identification des paramètres sur les essais de Multon 273
11.7 Discussion sur le fonctionnement de notre modèle 279
11.8 Conclusion 281

Conclusion **283**

Bibliographie **285**

Conclusion générale et perspectives **287**

Liste des notations **291**

Introduction générale

Le béton est un des matériaux les plus utilisés pour la construction. Un nombre considérable d'ouvrages est construit chaque année, et la rentabilité économique des installations repose en grande partie sur leur durée de vie. Un certain nombre de phénomènes peuvent être à l'origine d'une dégradation prématurée du béton. Les agressions externes occupent une place importante dans la dégradation des bétons soumis à un environnement particulier, comme les cycles de gel-dégel ou l'agression par de l'eau contenant des produits chimiques, comme du sel. Les réactions endogènes du béton sont également à l'origine de désordres importants, qui n'interviennent que par interaction des composantes initiales du béton. La réaction alcali-silice, réaction dont nous étudions dans ce mémoire les effets mécaniques, a été découverte aux États-Unis dans les années 1940, et est depuis cette date l'objet de beaucoup d'attention de la part des personnes intéressées par la durée de vie des ouvrages en béton. Elle est visible extérieurement par des fissures d'orientation aléatoire sur certains ouvrages peu contraints, ou alignées, lorsque les contraintes dues au poids de la structure ou aux armatures de renfort sont importantes. Elle provoque également des déformations irréversibles pouvant empêcher la bonne utilisation des ouvrages ainsi que des diminutions des propriétés mécaniques qui forcent à se demander si la sûreté est préservée.

Les ouvrages atteints sont très divers, mais trois conditions sont essentielles au développement de la réaction. Elle nécessite la présence de granulats dits réactifs, dans le sens où ils contiennent de la silice mal cristallisée qui est susceptible d'être dissoute par les produits chimiques présents dans la solution interstitielle du béton. Une présente importante d'alcalins est également indispensable. Ces alcalins sont habituellement apportés par le ciment, ou plus rarement par des inclusions dans les granulats. Enfin, un fort taux d'humidité relative dans le béton est nécessaire. L'eau favorise le transport des espèces chimiques réactives et produites, et favorise le gonflement des produits de réaction dont la montée en pression est à l'origine des dégradations.

On ne connaît pas de méthode qui permette d'interrompre l'alcali-réaction dans les ouvrages atteints. Lorsque ces ouvrages n'ont pas de rôle qui nécessite une bonne tenue mécanique et une stabilité dimensionnelle, on n'intervient pas. En revanche, dans des ouvrages comme des barrages ou des piles de ponts, divers types d'interventions ont été réalisées. Ces interventions, qui permettent soit de relâcher les contraintes en retirant de la matière avant d'isoler l'ouvrage de l'intrusion de l'eau, soit de limiter mécaniquement son gonflement en ajoutant une précontrainte passive extérieure supplémentaire, sont très coûteuses. L'attitude principale adoptée face à l'alcali-réaction est donc de s'assurer de ne plus construire d'ouvrages qui risquent de développer cette pathologie, et d'estimer la durée de vie restante des ouvrages atteints, éventuellement en réfléchissant à l'amélioration qui pourrait être apportée par une intervention.

L'étude en laboratoire et sur les ouvrages existants du comportement d'un très grand nombre de granulats a permis, depuis 1994 en France, de classifier les granulats selon les risques qu'ils développent l'alcali-réaction en fonction de l'environnement du béton. Il n'est plus à craindre que l'alcali-réaction affecte de nouveaux ouvrages en grand nombre. Néanmoins, l'interdiction d'un certain nombre de granulats provoque des surcoûts pour certains projets de construction à cause des frais de transport. On peut se demander si une compréhension plus fine, provenant de

la modélisation, ne permettrait pas de réintroduire certains de ces granulats dans des conditions où ils sont inoffensifs. Pour ce qui est des ouvrages atteints, l'estimation de la durée de vie des ouvrages s'inscrit dans le cadre de l'estimation de la durabilité des bétons en général. Il est donc important que les outils d'estimation de la durée de vie des ouvrages puissent prendre en compte l'alcali-réaction, ce qui nécessite également un effort de modélisation important tant les facteurs qui influent sur le développement de la réaction sont divers. Ces considérations nous ont amenés à contribuer à l'effort de modélisation de l'alcali-réaction.

La modélisation de l'alcali-réaction peut être, pour schématiser, divisée en trois grandes branches, selon le socle de connaissances scientifiques utilisées. On trouve d'abord des modèles qui étudient à l'échelle du granulat ou de la structure le transport des produits chimiques et de l'eau, de façon à prédire les quantités de gel produites au niveau des sites réactifs, c'est-à-dire aux abords des granulats. Ces modèles utilisent directement la compréhension des mécanismes réactionnels en jeu, en faisant beaucoup d'hypothèses simplificatrices indispensables de par la complexité de la réaction, la diversité des granulats réactifs et des produits de réaction. Les modèles mécaniques à l'échelle de la structure sont en général implémentés dans des codes d'étude globale de la durabilité des bétons qui prennent en compte une grande variété de phénomènes tels que le transport d'espèces chimiques, le retrait, le fluage du béton et son endommagement à l'échelle macroscopique. Les modèles mécaniques à l'échelle microscopique enfin, qu'ils soient de nature numérique ou analytique, essaient par une description fine ou schématisée de la microstructure attaquée, de déterminer les conséquences mécaniques de l'apparition d'un gel gonflant dans la porosité avoisinant les sites réactifs.

Ces modèles ont le double objectif d'aider à l'étude directe d'ouvrages affectés, et de faire progresser la compréhension de l'alcali-réaction, avec en général un accent plus ou moins marqué sur l'un des deux points. Il nous semble que la modélisation micromécanique analytique peut combiner ces deux aspects. Par leur simplicité, ce type de modèles peut amener une compréhension des phénomènes de dégradation. La nature analytique des résultats rend plus directe l'étude de l'influence de certains paramètres. De plus, on peut envisager qu'ils soient utilisés comme raffinement du comportement microscopique dans des modèles à l'échelle de la structure. Pour ces raisons, nous avons décidé de nous tourner vers l'élaboration d'un modèle de ce type.

Les connaissances nécessaires à l'élaboration d'un tel modèle sont issues de branches classiques de la mécanique des solides. On s'intéresse par exemple à la théorie de l'homogénéisation, qui permet de déterminer les propriétés à l'échelle macroscopique de matériaux dont on connaît certains détails à l'échelle microscopique. Une branche de l'homogénéisation que l'on appellera la micromécanique, introduit des approximations très pratiques pour déterminer des expressions approchées des propriétés macroscopiques d'un béton à la microstructure connue, que l'on recherche. La mécanique des milieux poreux, ou poromécanique, permet la prise en compte de la présence de fluides sous pression dans les pores du béton. Ce fluide joue sur les déformations du béton, et sa montée en pression entraîne le stockage, à l'échelle microscopique, d'énergie élastique qui est dissipée par fissuration. La mécanique de la rupture est donc le troisième domaine auquel on s'intéresse pour construire notre modèle de fissuration à l'échelle microscopique lors de l'alcali-réaction.

Pour répondre à nos attentes, le modèle micromécanique pour l'alcali-réaction que l'on se propose de construire doit posséder quelques caractéristiques. Il faut tout d'abord que l'on réussisse à en identifier les paramètres, en nombre aussi restreint que possible, sur des essais de laboratoire. Comme on souhaite démarrer d'hypothèses simplificatrices concernant l'apparition des gels d'alcali-réaction, il est à craindre qu'un certain nombre de paramètres ne seront pas mesurables directement, tels que les propriétés des gels par exemple, mais il faut que l'on puisse les identifier

grâce à des essais de gonflements sur des éprouvettes semblables au béton de l'ouvrage que l'on étudie.

Un certain nombre de caractéristiques du gonflement lors de l'alcali-réaction peut permettre de voir si le modèle se comporte de manière satisfaisante, par exemple la dépendance du gonflement en la taille des granulats, ou l'effet de la fraction volumique de granulats.

Il est également primordial que le modèle soit assez simple et peu coûteux en temps de calcul si on envisage de l'intégrer de manière pas trop dégradée dans un code de simulation à l'échelle de la structure pour déterminer le comportement local du béton attaqué.

Ces considérations nous permettront de juger de la pertinence du modèle que l'on va proposer. Le critère principal est bien sûr la reproduction des propriétés que l'on peut mesurer sur les éprouvettes en laboratoire : courbes de gonflement, modification des propriétés mécaniques, contraintes développées lors d'essais où le gonflement est gêné.

Notre mémoire est composé de trois parties, qui comportent chacune plusieurs chapitres ainsi qu'une bibliographie qui regroupe les références de la partie. **La première partie** contient une bibliographie sur la réaction alcali-silice, qui traite séparément la question des mécanismes réactionnels dans un premier chapitre, et celle des modèles dans un second chapitre. Ces deux chapitres nous permettent d'identifier le mécanisme réactionnel sur lequel on fonde notre modélisation, ainsi que les besoins en termes de modélisation. **La seconde partie** de ce mémoire est consacrée aux outils de mécanique utilisés dans notre modèle. Nous donnons dans le chapitre 3 une bibliographie sur l'homogénéisation des matériaux poreux, avec une orientation vers les modèles analytiques qui permettent d'approcher les propriétés poroélastiques homogénéisées de tels milieux. Nous comparons dans le chapitre 4 un certain nombre d'estimateurs de micromécanique à des résultats de simulations par éléments finis, ce qui nous permet de choisir un estimateur pour la suite de notre étude. Dans le chapitre 5, nous donnons le critère de rupture énergétique que nous souhaitons utiliser et un exemple simple d'application de ce critère issu de l'étude de l'alcali-réaction. Dans le chapitre 6, on détaille l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux qui est un élément indispensable pour l'utilisation du critère de rupture énergétique que l'on a choisi. Le dernier chapitre de cette partie nous permet de combiner le critère énergétique et la microporomécanique dans un cas simple pour comprendre comment il faut discrétiser les tailles de trous et si l'on peut imposer la symétrie de la solution à priori. Ces cinq chapitres constituent le bagage théorique dont nous avons besoin pour construire notre modèle. On aborde donc la modélisation de l'alcali-réaction dans **la troisième partie**. On explique dans un bref chapitre les hypothèses retenues pour la représentation de l'attaque chimique et la dégradation du béton à l'échelle microscopique. On adapte ensuite à l'étude de l'alcali-réaction les expressions théoriques obtenues dans la partie précédente pour les propriétés poroélastiques homogénéisées, puis on fait le même travail pour l'écriture de l'énergie élastique, en mettant l'accent sur le calcul des déformations et des contraintes, puis des pressions, en fonction des chargements extérieurs et de l'avancement de l'attaque. On présente enfin dans le dernier chapitre du mémoire une étude du fonctionnement du modèle sous divers chargements extérieurs, ainsi qu'une identification des paramètres du modèle sur des essais de la littérature, et enfin une discussion du modèle.

Première partie

La réaction alcali-silice

Introduction

L'objectif de cette première partie est de faire le point sur la compréhension de la réaction alcali-silice. Cette réaction chimique indésirable qui se produit dans le béton a été très étudiée depuis plus de 70 ans. Il existe à l'heure actuelle une littérature très abondante décrivant des observations faites sur des ouvrages atteints ainsi que des essais de laboratoire qui ont pour objectif d'étudier les facteurs qui influencent le développement de la réaction, et également proposant des modèles pour simuler l'évolution de la réaction. Les campagnes d'essais pour étudier la réaction alcali-silice sont particulièrement lourdes. Dans des conditions naturelles, certains bétons ne montrent pas de signes de dégradation avant une dizaine d'années. L'accélération de la réaction par une hausse de température ou une augmentation des concentrations de produits chimiques risque de modifier le déroulement de la réaction. S'il existe un certain nombre d'essais accélérés qui sont utilisés pour se faire une idée de la dangerosité de tel ou tel granulat en un temps compatible avec celui des projets de construction, les campagnes expérimentales les plus sérieuses, qui ont pour objectif la compréhension du phénomène, se font donc dans des conditions peu accélérées de façon à préserver au maximum les mécanismes réactionnels qui se produisent en conditions naturelles. Ces essais peuvent durer des années, et on en a maintenant une grande variété de disponible. Nous avons donc pris le parti d'essayer de comprendre le développement de cette réaction par l'intermédiaire de la littérature, et de concentrer ensuite nos efforts sur la modélisation de la réaction et des dégradations qui y sont liées.

On présente donc dans le chapitre 1 les mécanismes réactionnels qui ont été proposés par le passé, et celui que l'on choisit de conserver pour notre travail de modélisation. La compréhension de la réaction s'est affinée au fil des années, mais il reste des zones d'ombre qui sont dues à la très grande variabilité des granulats et des produits de réaction. Il semble cependant que la plupart des auteurs sont d'accord pour distinguer deux types de réactions alcali-silice, selon la vitesse de réactivité des granulats. Nous présentons donc cette distinction qui est essentielle car elle conduit à des choix de modélisation différents. On décrit également les propriétés des gels d'alcali-réaction, bien qu'ils soient très mal connus, ainsi que les conséquences mécaniques de l'alcali-réaction, en particulier en ce qui concerne l'évolution des propriétés mécaniques et l'anisotropie.

Dans le chapitre 2, on donne un aperçu des modèles existants pour l'alcali-réaction, à la fois pour ce qui est de la chimie et de la mécanique à différentes échelles. Les modèles de chimie et de transport nous semblent assez bien développés, surtout le modèle de Poyet, et contiennent l'ensemble des informations qui font consensus. En ce qui concerne les modèles mécaniques à l'échelle microscopique, il en existe un certain nombre qui prennent en compte l'endommagement ou la fissuration de la pâte de ciment ou des granulats. Nous présentons enfin les modèles de calcul à l'échelle de la structure.

Chapitre 1

Bibliographie sur la RAG

Sommaire

1.1 Introduction **22**
1.2 Généralités sur la réaction alcali-silice **22**
1.3 Mécanismes réactionnels et de gonflement **23**
1.3.1 Le modèle de Powers et Steinour 23
1.3.2 Mécanisme topo-chimique de Dent-Glasser et Kataoka 23
1.3.3 Mécanisme trans-solution de Dron et Brivot 25
1.3.4 Modèle des Mines de Douai 25
1.3.5 Effets de taille 26
1.4 Notre vision des mécanismes réactionnels en jeu **27**
1.5 Caractéristiques mécaniques de la RAG **28**
1.5.1 Propriétés des gels 28
1.5.2 Effet de l'alcali-réaction sur les propriétés mécaniques des bétons . . . 30
1.5.3 Anisotropie de l'alcali-réaction 30
1.6 Conclusion **30**

1.1 Introduction

La réaction alcali-silice a été découverte dans les années 40 aux États-Unis par Stanton [78]. Elle est également présente dans de nombreux pays, dont la France depuis la fin des années 70. Les recommandations françaises pour limiter l'occurrence de la réaction alcali-silice dans les nouveaux ouvrages ont été établies par le LCPC entre 1991 et 1994 [49]. Cette réaction endogène du béton touche une part modeste des ouvrages en béton, mais peut avoir des conséquences importantes pour des ouvrages dont les propriétés mécaniques et les dimensions doivent impérativement être stables dans le temps (barrages, ponts). Les premiers modèles ont été proposés dans les années 50, et la compréhension des mécanismes réactionnels et d'endommagement a progressé avec la qualité des moyens expérimentaux d'observation des bétons affectés. La réaction alcali-silice est aussi appelée alcali réaction. C'est la principale réaction d'un groupe de réactions appelées réactions alcali-granulats ou RAG, qui contient également la réaction alcali-carbonate et la réaction alcali-silicates [35, 90]. On n'étudie ici que l'alcali-réaction, que l'on appellera parfois RAG par extension, et qui est en général appelée alkali-silica reaction (ASR) en anglais.

Ce chapitre de bibliographie est avant tout inspiré d'introductions et bibliographies de thèses [57, 48, 60, 53, 70], d'ouvrages généraux sur les bétons qui sans être détaillés sur la réaction alcali-silice, donnent de nombreuses références [87, 83] et du cours de Alain Sellier et Geneviève Thévenin Foray du DEA Géomatériaux [76].

Les recherches sur la réaction alcali-silice ont permis d'accumuler une quantité considérable d'observations expérimentales, qui sont interprétées pour comprendre les mécanismes réactionnels en jeu et proposer des modèles. Cependant, certains points ne font pas consensus. De nombreux aspects de ce phénomène compliquent sa compréhension et sa modélisation, tels que la nature hétérogène du béton, l'immense variété de granulats utilisés et de leur minéralogie, et la multiplicité des réactions chimiques possibles dans un environnement complexe. Dans la première partie, nous présentons ce qui semble être admis par la plupart des chercheurs travaillant sur l'alcali-réaction. Nous ferons ensuite un tour d'horizon des mécanismes proposés historiquement pour l'alcali-réaction, et expliquerons le mécanisme que nous retenons comme fondement de notre réflexion. Nous exposerons ensuite les caractéristiques importantes de cette réaction du point de vue de la modélisation mécanique, comme les propriétés des gels d'alcali-réaction, l'effet de la réaction sur les propriétés mécaniques des bétons attaqués, et enfin les caractéristiques anisotropes des dégradations dues à cette réaction.

1.2 Généralités sur la réaction alcali-silice

Trois conditions sont nécessaires pour que la réaction alcali-silice se produise :
- le béton contient des granulats réactifs ;
- le taux d'humidité relative du béton est important, à partir 80-85 %, dû à la présence d'eau de gâchage ou à un apport d'eau externe pendant la durée de vie de l'ouvrage ;
- le béton contient une quantité importante d'ions alcalins, dont l'origine est le ciment utilisé en général, parfois les granulats ou l'eau.

La réaction alcali-silice est visible extérieurement à cause d'un schéma de fissuration assez caractéristique en surface des éléments attaqués, pouvant s'accompagner de produits de réactions coulant hors des fissures. On observe également des gonflements macroscopiques sur les structures attaquées. Pour ce qui est des propriétés mécaniques, la résistance à la traction est diminuée, tandis que la résistance à la compression est peu affectée. Les modules d'élasticité diminuent.

À l'échelle microscopique, un réseau de microfissures apparaît autour et dans les granulats réactifs. Des gels amorphes, fabriqués dans les granulats réactifs et dans leur voisinage, gonflent et sont responsables de l'apparition des fissures à l'échelle microscopique. On observe parfois

une accumulation de certains produits à la surface des granulats réactifs couramment appelée « reaction rim » et la décohésion des granulats de la pâte de ciment qui les entoure.

1.3 Mécanismes réactionnels et de gonflement

On commence par un tour d'horizon des modèles qui ont posé les fondements de la compréhension des mécanismes réactionnels. Ensuite, on détaillera un modèle qui se situe dans la lignée des précédents et semble bien décrire les observations expérimentales, et on expliquera brièvement le phénomène d'effet de taille de granulat.

1.3.1 Le modèle de Powers et Steinour

Dès 1955, Powers et Steinour proposent un mécanisme réactionnel assez élaboré, prenant en compte le rôle supposé des ions calcium, et résument l'état de la recherche sur la réaction alcali-silice [67, 68]. Ils font la remarque que : « The various papers pertaining to the cement-aggregate, or alkali-aggregate, reaction that have now been published represent an impressive body of research. In spite of this, the chemistry and physics of the phenomena have by no means been fully worked out ». On peut dire qu'après presque soixante années de recherches sur le sujet, la situation semble assez similaire en ce qui concerne certains points de compréhension de la réaction qui ne sont pas tranchés.

Leur explication de la RAG est que les granulats réactifs sont attaqués par les ions hydroxydes alcalins (sodium et potassium) qui, tirant parti des défauts dans la structure du réseau de silice et d'oxygène qui forme les roches siliceuses, arrivent à pénétrer cette structure, ce qui conduit à son affaiblissement et à la dissolution d'une partie de la silice. Le précipité qui devrait se former, à l'équilibre, en présence de silice, d'ions alcalins et d'ions calcium, devrait être un précipité calco-silico-alcalin non gonflant. Cependant, les temps de transport des ions silice et la faible solubilité des ions calcium à pH élevé, entraînent la formation de complexes composés de silice et alcalins seulement, ce qui provoque un gonflement.

Le gonflement du gel est selon eux dû à l'absorption d'eau après la fabrication du gel, non au fait que le produit est de volume dépassant celui des réactifs consommés.

Wang et Gillott, qui ont proposé un mécanisme réactionnel prenant en compte le rôle du calcium [89], se situent dans la continuité des idées de Powers et Steinour [67, 68].

1.3.2 Mécanisme topo-chimique de Dent-Glasser et Kataoka

1.3.2.1 Attaque chimique des granulats

Le mécanisme réactionnel de Dent-Glasser et Kataoka [16] est très souvent cité dans la littérature mais n'apporte pas d'avancées considérables par rapport à celui de Powers et Steinour.

Il introduit tout de même l'idée que les ions hydroxydes attaquent les granulats avant les ions alcalins. Les ions hydroxydes brisent les ponts siloxanes, qui sont formés d'un atome d'oxygène faisant le lien entre deux atomes de silice, et sont très importants pour la structure de la roche. Les atomes d'hydrogène forment également des liaisons avec les atomes d'oxygène du réseau ne reliant pas deux atomes de silice, et sont donc en quelque sorte des faiblesses du réseau. La présence des atomes d'hydrogène dans le réseau crée une accumulation de charges négatives qui attire les ions alcalins, chargés positivement. Ce modèle a cependant le défaut de ne pas mentionner les ions calcium, dont l'influence sur l'expansion est attestée expérimentalement.

Dent-Glasser et Kataoka ont ensuite proposé un mécanisme réactionnel plus complet [17] où les ions calcium provenant de la portlandite de la pâte de ciment sont considérés. Ils remarquent

que des gels de silice plongés dans diverses solutions contenant des alcalins et de la portlandite sont parfois recouverts d'une couche d'un précipité ressemblant à des C-S-H. En l'absence d'agitation, il se forme parfois des excroissances de gel à travers la couche de C-S-H.

Ce modèle a ensuite été repris par Poole [66], qui y ajoute des explications sur le rôle du calcium. Les ions calcium sons supposés pénétrer dans le granulat attaqué après les ions alcalins et les remplacer dans la place qu'ils ont prise dans le réseau attaqué, où ils équilibrent localement la charge. La portlandite de la pâte de ciment est la source d'ions calcium, mais également d'ions hydroxydes.

1.3.2.2 Mécanisme de gonflement

Dans les modèles que l'on vient de présenter, le gonflement du gel est dû à l'absorption d'eau provenant de la solution interstitielle du béton par le gel. Les différences de concentration de certains ions entre l'intérieur du gel et la solution interstitielle engendrent une pression d'imbibition responsable de la migration d'eau vers l'intérieur du gel. Le fait que l'eau se déplace pour équilibrer la présence d'ions dans le gel qui se situe dans les granulats plutôt que l'inverse est expliqué par la formation d'une membrane semi-perméable à la surface du granulat qui freinerait la diffusion des ions, et par les propriétés rhéologiques du gel et son insolubilité dans l'eau, qui l'empêchent de sortir du granulat.

La membrane-semi perméable est détruite en cas de fissuration du granulat sous pression du gel qui gonfle à l'intérieur, et permet alors l'écoulement du gel vers l'extérieur du granulat où se trouvent des zones de porosité plus importantes (auréole de transition, ou Interface Transition Zone décrite par exemple par Ollivier [63]) et de l'espace créé par l'avancée de fissures.

1.3.2.3 Point de vue de Chatterji sur le rôle du calcium

Chatterji a développé une argumentation qui lui permet de ne pas supposer que les complexes silico-alcalins sont expansifs tandis que les complexes calco-silico-alcalins ne le sont pas. Dans deux articles [11, 12] il expose un mécanisme réactionnel prenant en compte le rôle de la portlandite dans le gonflement. D'après lui, la silice est dissoute et migre dans la solution interstitielle (comme sera proposé plus tard par Dron dans son mécanisme trans-solution). Lorsque la silice dissoute et le calcium entrent en contact au voisinage de la surface du grain, un précipité est produit (du type des C-S-H), qui a également la propriété du ralentir la diffusion des ions contenant la silice. La dissolution de silice au niveau des granulats n'est par contre pas arrêtée car la diffusion des ions responsables de la dissolution n'est pas autant gênée par la barrière de précipité ressemblant à des C-S-H. Le gonflement serait pour lui dû à l'accumulation de silice dans le granulat.

Chatterji met l'accent sur deux rôles opposés des ions hydroxydes. D'un côté, ils favorisent la dissolution de la silice des granulats. De l'autre, leur présence en quantité diminue notablement la solubilité de la portlandite puisqu'ils sont un des produits de cette dissolution. Ainsi, augmenter la quantité d'ions hydroxydes en solution diminue celle des ions calcium. Si la quantité des ions calcium est trop faible, il n'y a pas formation de barrière de C-S-H, donc les ions silice peuvent sortir des granulats beaucoup plus librement et le granulat de gonfle pas par leur accumulation.

1.3.2.4 Complexité de la question du gonflement

Struble, sous la direction de Diamond, a mené des expériences sur des gels de silice, pour tenter de comprendre leur comportement sous pression [80], dans l'idée que le gonflement de l'alcali-réaction est dû au gonflement de gels silico-alcalins.

Les gels de silice sont plongés dans des solutions semblables à la solution interstitielle du béton, et soumis à des efforts qui restreignent leur gonflement. Les déformations sont mesurées. Le comportement des gels est difficile à interpréter, puisque les pressions nécessaires pour maintenir une expansion nulle ne varient pas de manière monotone avec les gonflements observés à pression nulle. Il semble que sous pression, la structure moléculaire du gel évolue, par des réarrangements des chaines polymères qui constituent le gel.

1.3.3 Mécanisme trans-solution de Dron et Brivot

Ce modèle, développé dans les articles de Dron et Brivot [21, 22], se base sur le même mécanisme chimique que celui de Dent-Glasser et Kataoka pour ce qui est du passage en solution de la silice. En revanche, il suppose que la silice diffuse en s'éloignant des granulats réactifs, dans la solution interstitielle. L'équilibre électrique est assuré par les ions alcalins qui se trouvent en solution.

Les différents ions (silice, alcalins, calcium), se combinent donc dans la solution interstitielle de manière relativement homogène spatialement, et forment un précipité de type C-S-H qui contient des alcalins.

Ces précipités, que l'on peut alors noter (C-K-S-H, C-N-S-H), sont d'après les auteurs d'une densité inférieure à l'ensemble des réactifs consommés. Cette explication du gonflement est donc fondamentalement différente de celles présentées précédemment puisque les autres modèles expliquaient le gonflement par l'absorption d'eau, non par un changement de volume lors de la réaction chimique elle-même.

1.3.4 Modèle des Mines de Douai

Il nous semble que la plupart des auteurs sont d'accord sur la présentation du mécanisme réactionnel que nous faisons dans cette section.

1.3.4.1 Réaction chimique

Nous présentons ici le mécanisme réactionnel décrit par Bulteel et ses collègues [7, 8, 33]. Il nous semble qu'il synthétise les modèles antérieurs et que la plupart des chercheurs proposent actuellement des modèles dans cet esprit. Pour décrire l'environnement d'un atome de silice, ces auteurs utilisent la notation Q_n où n représente le nombre d'atomes d'oxygène liés à l'atome de silice considéré qui forment un pont siloxane, c'est-à-dire sont reliés à deux atomes de silice.

- Étape 1 : Formation de tétraèdres Q_3 à partir des Q_4 présents au départ dans la structure du réseau de silice et d'oxygène, par l'attaque de ponts siloxanes. Le granulat est initialement composé en majorité de Q_4. La présence de Q_3 avant le début de l'attaque est un signe de faiblesse du réseau de silice, puisque ces défauts facilitent la pénétration des ions provenant de la solution interstitielle dans le granulat. Cette étape de la réaction augmente leur proportion.
- Étape 2 : Les sites Q_3, également appelés silanol, sont attaqués par les ions hydroxydes. Pour qu'un atome de silice soit complètement libéré du réseau, il faut briser les trois ponts siloxanes restants. Néanmoins, les configurations Q_2 et Q_1 sont assez peu observées, ce qui laisse penser qu'une fois qu'il ne reste plus que deux liens avec le reste du réseau, on descend vite à zéro. On peut résumer en disant que l'étape 2 produit des Q_0 à partir de Q_3. La forme sous laquelle on retrouve les Q_0 en solution dépend du pH de cette solution, plusieurs formes plus ou moins ionisées existant.

Lors de ce processus de dissolution, les charges négatives portées par les atomes de silice sont en général équilibrées par des ions alcalins ou calcium. Une fois les deux étapes de dissolution

effectuées, les ions silicates précipitent par combinaisons avec les cations présents dans la solution interstitielle pour former des complexes du type C-S-H, C-K-S-H et C-N-S-H.

1.3.4.2 Mécanisme de gonflement

Les explications sur leurs mécanismes de gonflement se trouvent dans l'article de Garcia-Diaz [33]. Dans cet article les auteurs présentent une méthode expérimentale de mesure des variations de volume d'un mortier, de la porosité du mortier et des granulats de silex, et de l'avancement de la réaction.

Leur protocole expérimental leur permet de mesurer les quantités de tétraèdres Q_4 et Q_3 restants dans le granulat, et les tétraèdres Q_0 formés. Ils ont aussi la possibilité de mesurer indépendamment le changement du volume poreux des granulats et trouvent une relation linéaire entre ce volume poreux et la variation de volume macroscopique du mortier.

Les courbes d'expansion, en cohérence avec le mécanisme réactionnel proposé, peuvent être divisées en quatre étapes :

- I. Dissolution-précipitation. Les tétraèdres Q_0 sont produits à partir de Q_4 et Q_3, puis forment des complexes C-S-H et C-(K,N)-S-H. C'est une phase chimique durant laquelle on n'observe pas de gonflement, puisque ces dissolutions et précipitations se produisent à volume constant. La fraction de tétraèdres Q_3 est à peu près constante.
- II. La précipitation des tétraèdres Q_0 ralentit tandis que le passage $Q_4 \rightarrow Q_3$ continue de se faire. Cette transformation est expansive et provoque un gonflement du granulat. Le granulat et la pâte de ciment environnante sont alors susceptibles de se fissurer à cause de ces gonflements. Une relation linéaire est observée entre le gonflement des grains et celui des éléments de mortier.
- III. La précipitation de Q_0 redémarre, entraînant un remplissage des fissures créées à l'étape précédente.
- IV. Le gonflement cesse, et le volume poreux diminue par remplissage des fissures par des produits de précipitation.

Dans ce mécanisme réactionnel, la transition de la phase I à la phase II, c'est-à-dire le ralentissement de la précipitation de Q_0 est dû au fait que les produits contenant les Q_0 (C-(K,N)-S-H) jouent un rôle de barrière de diffusion. Les auteurs supposent que cette barrière de diffusion correspond à l'anneau de réaction (reaction rim) parfois observé autour des granulats réactifs en cours d'attaque. Cette barrière limite la diffusion des ions silicates, tandis que les anions parviennent à passer dans l'autre sens. L'existence d'une anneau de réaction est mentionnée dès l'article de Powers et Steinour [67] et fait l'objet d'études spécifiques [73, 43]. Il semble que son rôle dans le gonflement soit important [33], et qu'il est composé de complexes C-(K,N)-S-H ou C-S-H, partiellement ordonnés, contrairement aux gels silico-alcalins qui ne contiennent pas de calcium et sont complètement amorphes.

1.3.5 Effets de taille

Il a été observé que les gonflements diffèrent lorsque l'on change la taille des granulats du béton. Cette dépendance n'est pas forcément monotone, il y a des situations où une taille de grain particulière entraîne un gonflement plus important que les autres tailles. C'est ce qui est appelé l'effet pessimum en taille de granulat. Cet effet était déjà mentionné par Stanton dans son article de 1940 [78]. Diamond a étudié cet effet sur des granulats d'opale qui réagissent très rapidement en 1974 [18]. Dans le cas de l'opale, même les fractions les plus petites entraînent un gonflement important. Avec des granulats calcaires siliceux, Multon montre que l'effet de taille est lié à la concentration en alcalins [58] et qu'il dépend aussi de la durée de l'expérience.

Cet effet, si l'on écarte la possibilité que les granulats de tailles différentes soient en fait de minéralogies différentes, peut être attribué à plusieurs raisons. Tout d'abord, les petits granulats ont une surface spécifique, c'est-à-dire rapporté à leur volume, plus grande. Cela rend accessible une proportion plus importante du granulat aux espèces chimiques de la solution interstitielle qui diffusent dans le granulat, en un temps donné, et donc potentiellement accélère la dissolution des granulats. Un effet de surface spécifique contradictoire avec le précédent est dû à la présence de l'auréole de transition autour de chaque granulat (interface transition zone ou *ITZ* en anglais), qui est d'épaisseur à peu près constante, et de porosité supérieure au reste de la pâte de ciment. Cette zone sert de vase d'expansion aux gels produits près de la surface des grains, et est de volume supérieur, relativement à celui du granulat, si le granulat est petit. Enfin, il existe un troisième effet plus subtil lié à la fissuration de la pâte de ciment qui favorise la rupture autour des grands grains en raison de la nature volumique du stockage d'énergie élastique, en comparaison de la nature surfacique des énergies dissipées lors de la fissuration.

1.4 Notre vision des mécanismes réactionnels en jeu

Dans l'optique de notre travail, il est nécessaire de synthétiser l'ensemble des informations sur les mécanismes réactionnels afin de pouvoir alimenter nos modèles mécaniques futurs. De l'ensemble des observations et des mécanismes mentionnés, on retient qu'il peut y avoir deux sources principales de gonflement, qui entraînent des gonflements plus ou moins rapides, comme expliqué dès 1992 par Grattan-Bellew [35] et par exemple par Ponce [65].

Dans son article, Ponce étudie un certain nombre de granulats dans lesquelles la silice se trouve sous des formes différentes, et dont la stabilité varie. Il distingue un premier groupe d'espèces très amorphes, comme le verre et l'opale, qui réagissent donc vite, de telle sorte que les effets de la réaction peuvent être visibles au bout d'un an si les conditions s'y prêtent. Le second groupe regroupe des roches plus cristallines, comme les quartz. L'attaque de ce type de roches est beaucoup plus lente, on n'en voit pas les effets avant une dizaine d'années.

Les conclusions de son étude sont que les granulats rapides subissent une dissolution graduelle depuis la surface, qui fragilise l'interface avec la pâte de ciment en augmentant sa porosité. Une microfissuration est visible dans les grains et s'étend progressivement à l'interface ou à la pâte de ciment. Les granulats lents eux, subissent une dissolution plus localisée. Le gel a tendance à rester coincé dans les poches réactives des granulats, entraînant la fissuration des grains, qui semble prendre une importance plus grande.

Giaccio a également étudié des granulats des deux types [34]. Ses granulats rapides, orthoquartzite siliceux réactif et sable contenant du verre volcanique, semblent être principalement attaqués à la surface. Il observe des décohésions à l'interface et des fissures dans la pâte de ciment. Pour ce qui est de ses granulats à réactivité lente, granite contenant du quartz, l'endommagement est plus difficile à observer et l'endommagement semble plutôt confiné aux granulats. Les échelles de temps plus longues, durant lesquelles la pâte de ciment peut fluer, peuvent expliquer l'absence de larges fissures. Le module d'Young de ces bétons diminue significativement mais il n'est pas simple de le relier au gonflement.

Jensen propose d'ailleurs une nouvelle classification de l'ensemble des RAG en fonction de la vitesse d'endommagement en trois catégories : alcali-réaction très rapide, alcali-réaction rapide, alcali-réaction lente [88]. La première catégorie, RAG très rapide, correspond à un endommagement en quelques jours en laboratoire, et englobe des roches contenant des inclusions microscopiques d'opale, quartz, calcédoine ou encore verre de silice volcanique. Le second groupe, RAG rapide, regroupe des minéraux comme l'opale, calcédoine, dans divers types de roches. Le mécanisme de gonflement principal est alors l'absorption d'eau par des gels. Les troisième groupe, RAG lente (endommagement observé à partir d'au moins 10 ans), qui contient des minéraux

tels que des quartz micro-cristallins, quartz recristallisés dans diverses roches. Le mécanisme de gonflement n'est pas le même, il semble que le gonflement provienne de l'intérieur des granulats où se produisent des cristallisations, et non du gonflement d'un gel. Il rappelle que ces granulats à réactivité lente ne produisent pas les effets de taille observés et étudiés sur les granulats rapides.

En cohérence avec ces schémas d'endommagement, les modèles pour granulats à réactivité lente se concentrent plutôt sur la fissuration des grains [72, 71, 24], tandis que les modèles pour granulats à réactivité rapide étudient plutôt la fissuration de l'interface et la pâte de ciment [3, 58, 10], comme nous le verrons dans la partie dédiée à la description des modèles mécaniques pour la réaction alcali-silice (§ 2.3). Nous allons maintenant nous intéresser plus spécifiquement à quelques points importants pour la modélisation mécanique de l'alcali-réaction

1.5 Caractéristiques mécaniques de la réaction alcali-silice

La réaction alcali-silice peut être tout à fait inoffensive pour les ouvrages attaqués si elle n'est pas accompagnée de conséquences mécaniques. Nous allons dans cette partie décrire les propriétés des gels d'alcali-réaction, puis rappeler les modifications des propriétés mécaniques des bétons qui peuvent se produite, en nous intéressant à leur aspect anisotrope.

1.5.1 Propriétés des gels

Les gels sont assez mal connus, mais il est nécessaire d'avoir une idée de leurs propriétés pour savoir s'ils sont susceptibles de monter en pression ou s'ils sont libres de migrer dans le béton. Nous décrivons d'abord leur structure, puis leurs propriétés mécaniques.

1.5.1.1 Structure des gels

Un certain nombre d'articles tirent parti de méthodes expérimentales avancées pour caractériser les gels d'alcali-réaction [47, 86, 41, 40]. Kurtis [47] montre qu'en présence de calcium et d'alcalins, les produits formés sont structurés et ne gonflent pas. En absence de calcium, en revanche, les polymères formés sont moins denses et moins structurés.

Hou [41] effectue une comparaison entre différents granulats. Il nomme A-S-H les complexes silico-alcalins ne contenant pas de calcium, qui semblent avoir une structure par couches. Il observe un anneau de C-S-H à la surface du granulat, et des C-S-H dans les fissures du granulat. La production initiale de C-S-H est selon lui ralentie par la diminution de la concentration de calcium dans la solution interstitielle, mais les C-S-H continuent d'incorporer des atomes de silice, augmentant leur degré de polymérisation. Lorsque la quantité de silice dans le complexe a atteint un niveau donné qui correspond à un rapport $\frac{Q_1}{Q_2}$ maximal, la production de A-S-H démarre. La barrière ionique autour du granulat est nécessaire pour avoir une concentration suffisante pour entraîner la précipitation de A-S-H, et cette barrière est considérée comme étant formée des C-S-H. Cette explication est d'une certaine façon contradictoire avec l'idée, tirée des articles des Mines de Douai, que le passage des tétraèdres Q_3 à Q_0 se fait rapidement, de sorte que l'on observe peu de tétraèdres Q_2 et Q_1, comme nous l'avons dit au § 1.3.4.1 [7, 8, 33]. Néanmoins, la variété des granulats et des gels peut expliquer cette différence.

Hou compare dans un autre article [40] des gels d'alcali-réaction synthétiques et naturels grâce à de la diffraction aux rayons X et de l'IRM. Il remarque une composition et une structure proches. Dans ses mesures, en revanche, des quantités de tétraèdres Q_1 et Q_2 significatives sont détectées. Le degré de polymérisation des gels de RAG varie de manière systématique avec le rapport ions alcalins/silicates. Les tétraèdres Q_3 sont majoritaires dans ces gels, qui sont placés dans des conditions proches de celles observées sur les bétons des ouvrages atteints.

Verstraete [86] souligne que si la solution ne contient que des alcalins, les granulats réactifs sont rapidement dissouts, mais qu'aucun produit n'est formé à l'intérieur des grains, tandis qu'en présence de calcium, la quantité de produits amorphes dans le grain augmente. Dans d'autres régions, la matière a une structure plus organisée.

1.5.1.2 Propriétés mécaniques

Il est assez difficile de trouver dans la littérature des informations concernant les propriétés mécaniques des gels. Cette difficulté provient de la grande diversité de produits qui peuvent se former dans des solutions contenant de la silice, du calcium et des alcalins en proportions variées. Une étude assez systématique des produits de réaction dans ce type de mélange a été effectuée par Michaud dans sa thèse de doctorat [56]. La complexité des produits est décrite, mais malgré quelques expériences mécaniques très astucieuses pour produire de la fissuration par réaction chimique entre du gel de silice, du calcium et des alcalins, il n'est pas possible de trancher sur l'origine exacte des pressions qui provoquent les fissures. La thèse de Gaboriaud [29, 30] se place dans la continuité de celle de Michaud, étudiant des solutions silico-alcalines et des solutions calco-silico-alcalines. Il remarque que la concentration en calcium a un impact considérable sur les propriétés du gel obtenu, ce qui est vérifié par des essais rhéologiques qui renseignent principalement sur les constantes de temps de gélification mais donnent peu d'informations sur les propriétés élastiques d'un gel mature. Il est de plus connu depuis Wang et Gillot [89] que les gels ont tendance à incorporer du calcium au fur et à mesure qu'ils vieillissent, ce qui diminue leur mobilité.

Ben Haha considère que la viscosité des gels évolue de la manière suivante : à leur création, ils contiennent peu d'eau, et sont alors très visqueux. Au fur et à mesure qu'ils absorbent de l'eau, ils gonflent et deviennent plus fluides, jusqu'à ce que l'augmentation de la teneur en calcium fasse à nouveau augmenter leur viscosité [4].

En 2005, Phair publie des résultats originaux de modules d'incompressibilité de gels d'alcali-réaction [64], de l'ordre de 10 GPa. Néanmoins, son dispositif expérimental, dans lequel la mesure de module se fonde sur la vitesse d'ondes, semble mesurer le module non drainé du gel (si on le considère comme un matériau poreux), alors que les échelles de temps relativement lentes dans l'alcali-réaction autorisent probablement des échanges continus d'eau entre le gel et la solution interstitielle. D'après Durand, la teneur en eau des gels peut varier de 200 % à 400 % de la masse des gels [26]. Cette information est tout de même intéressante car si les phases de fissuration sont rapides devant le temps de migration de l'eau dans le gel, le module mobilisé est le module non drainé.

Katayama décrit la composition de gels observés dans les trois types de RAG [45], explique que les gels formés aux alentours de 90 % d'humidité relative ont un potentiel d'expansion par absorption d'eau maximal et peuvent développer des pressions allant jusqu'à 10 MPa. Il donne des ordres de grandeurs des viscosités nécessaires au développement de pression, mais pas d'informations sur la rigidité.

Leeman a mesuré, pour divers mélanges scellés de micro-silice, de portlandite et d'alcalins, les pressions développées par la formation des gels (alors que l'apport d'eau externe est bloqué par les conditions scellées de l'expérience), à volume constant [50]. Les pressions atteintes sont inférieurs au MPa, ce qui renforce l'idée que les fortes pressions sont atteintes par absorption d'eau, et dépendent fortement des proportions des différents produits, qui jouent non seulement sur l'amplitude des pressions mais aussi sur leur signe.

Globalement les propriétés des gels sont donc très mal connues. Il semble donc que dans le cadre d'un modèle qui utilise certaines de leurs propriétés comme paramètres d'entrée, il faut les déterminer par optimisation. Les gels se situent au départ d'un processus de dégradation qui

passe par la microfissuration des grains, des interfaces et de la pâte de ciment. Nous étudions maintenant les conséquences macroscopiques de cette microfissuration.

1.5.2 Effet de l'alcali-réaction sur les propriétés mécaniques des bétons

Les propriétés mécaniques des mortiers ou des bétons soumis à l'alcali-réaction sont affectées en raison de la dégradation de granulats et de la micro-fissuration des granulats et de la pâte de ciment. La résistance à la compression n'est pas diminuée de manière systématique et significative, ce qui en fait un mauvais indicateur de l'état d'endommagement d'un élément de béton attaqué, comme remarqué par Swami [82]. La résistance à la traction diminue en revanche systématiquement : la résistance en flexion peut être réduite de 75 %. De même les modules d'Young en traction diminuent, parfois avant qu'une expansion significative soit observée [82], ce que fait également remarquer Hobbs [39]. Le type de granulat joue sur le mécanisme d'endommagement, donc les pertes de propriétés mécaniques ne peuvent pas être reliées au gonflement avec une règle qui convienne pour tous les granulats. Lorsque la réaction intervient sur un béton chargé, ces manifestations diffèrent selon les directions observées, ce que l'on appelle l'anisotropie de l'alcali-réaction.

1.5.3 Anisotropie de l'alcali-réaction

La question de l'anisotropie a été soulevée par l'orientation visible de la fissuration sur des structures soumises à des chargements mécaniques (tels que leur poids propre ou l'effet des armatures), par exemple dans l'ouvrage de Hobbs [39] et les thèses de Larive et Multon [48, 60]. Ces fissures sont en général alignées avec les directions de compressions principales du béton. Elles renseignent de manière indirecte sur l'orientation de la fissuration microscopique. Il semble que le mécanisme soit le suivant : le chargement oriente la microfissuration, ce qui entraîne un gonflement anisotrope au cœur du béton qui est humide et subit l'alcali-réaction. En surface où le béton est sec, la réaction se produit moins et les gonflements sont moins importants, ce qui est à l'origine d'une fissuration macroscopique à la surface des ouvrages, alignées selon les directions principales de compression de la structure.

Cette anisotropie a été largement étudiée en laboratoire par Larive [48]. Les directions de coulage du béton semblent importer beaucoup puisqu'en influençant l'orientation des granulats ainsi que la distribution de l'eau autour de ces granulats, elles influencent également la fissuration susceptible d'apparaître en cas d'alcali-réaction, même en l'absence de chargement extérieur.

Comme souligné par Hobbs [39], l'application de contraintes influe sur l'expansion, de même que le fait d'empêcher les déformations, comme on peut le voir dans les travaux de Kawamura, Berra et Binal [46, 5, 6], dans lesquels ils utilisent un dispositif expérimental développé par Ferraris [27]. L'effet d'un chargement extérieur était à l'origine compris comme une redistribution des gonflements dans les directions les moins comprimées, ce que l'on retrouve dans les modèles de Larive et Multon [48, 60]. On remarque cependant également une diminution des gonflements volumiques aux très fortes compressions qui contredit cette explication [25].

On considère en tout cas que ce comportement anisotrope est une caractéristique essentielle de la dégradation lors de l'alcali-réaction. La bonne reproduction de ce point par les modèles mécaniques est donc indispensable.

1.6 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre une étude bibliographique de la réaction alcali-silice. Nous avons tenté de balayer rapidement les mécanismes proposés historiquement pour décrire cette

réaction chimique, pour aboutir à celui que nous avons retenu, qui est le mécanisme des Mines de Douai. Nous avons souligné la différence entre les mécanismes de dégradation pour les granulats à réactivité lente ou rapide, ce qui est important puisque notre modélisation mécanique, dans la suite de ce mémoire, comporte des choix importants qui orientent clairement l'utilisation de notre modèle vers les granulats à réactivité rapide. Nous avons enfin donné quelques éléments sur les propriétés mécaniques des gels, l'évolution des propriétés mécaniques des bétons attaqués, ainsi que l'anisotropie de l'alcali-réaction.

Chapitre 2

Généralités de modélisation de la RAG

Sommaire

2.1 Introduction **34**
2.2 Modélisation chimie-transport de la RAG **34**
2.2.1 Modèle de Furusawa, Ohga et Uomoto 34
2.2.2 Modèle de Bažant 35
2.2.3 Modèle de Poyet 36
2.2.4 Conclusion sur les modèles de chimie et de transport 36
2.3 Modélisation micromécanique de la RAG **37**
2.3.1 Modélisations purement élastiques 37
2.3.2 Modèles à endommagement 40
2.3.3 Modèles à fissuration à l'échelle microscopique 43
2.3.4 Conclusion sur les modèles mécaniques à l'échelle microscopique 46
2.4 Modélisation mécanique à l'échelle macroscopique **46**
2.5 Conclusion **48**

2.1 Introduction

La première réponse face à l'alcali-réaction est d'éviter qu'elle se produise dans les ouvrages nouveaux. C'est l'objet des recommandations établies en 1994 par le LCPC en France [49]. Il s'agit principalement de ne plus utiliser les granulats très réactifs et de limiter la teneur en alcalins des ciments. On note cependant qu'il est en général beaucoup plus économique d'utiliser pour la construction des granulats locaux. Cette considération se heurte parfois à l'interdiction de l'utilisation de certains granulats locaux à cause d'un environnement propice à l'alcali-réaction. Toute compréhension des phénomènes microscopiques se produisant lors de l'alcali-réaction permettant d'utiliser des granulats qui sont interdits peut donc permettre des économies sur certains chantiers. On pense notamment à la possibilité pour un granulat réactif d'être beaucoup moins nocif s'il est broyé à une taille donnée.

Concernant les ouvrages existants, un certain nombre de techniques ont été tentées pour ralentir la réaction ou diminuer ses symptômes. L'addition de béton armé supplémentaire pour limiter le gonflement a par exemple été réalisée sur le stade de Lille. Sur d'autres ouvrages, comme des barrages ou des ponts, le béton a été mis hors eau de façon à diminuer l'apport d'eau pour le gonflement du gel. L'injection de résine dans les fissures à la surface a également été effectuée. Un des exemples de travaux très importants a été réalisé sur le barrage du Chambon, en France, qui a été scié de façon à relâcher les contraintes de compression importantes accumulées à cause du gonflement du béton lors de l'alcali-réaction. Ces dépenses importantes engagées pour garantir une durée de vie satisfaisante aux ouvrages atteints ne sont pas toujours couronnées de succès. Il est donc important de disposer d'outils de simulation pour pouvoir évaluer la durée de vie restante des structures attaquées, et éventuellement l'amélioration qui serait permise par une intervention sur l'ouvrage.

Ces considérations soulignent la nécessité de bien comprendre les mécanismes microscopiques de l'alcali-réaction, et de les intégrer dans des codes de calcul à l'échelle de structures qui permettent d'évaluer la durée de vie des ouvrages atteints. Nous allons dans cette partie présenter une étude bibliographique sur les modèles pour l'alcali-réaction, en les classant en trois grandes catégories : modèles de chimie et de transport, modèles mécaniques à l'échelle microscopique, modèles mécaniques à l'échelle de la structure.

2.2 Modélisation de la chimie et du transport lors de la réaction alcali-silice

Intéressons-nous tout d'abord aux modèles de chimie et de transport lors de l'alcali-réaction. Ces modèles ont pour objectif principal de prédire la quantité de gel produite au niveau d'un site réactif donné, en fonction de la disponibilité des espèces chimiques réactives dans les granulats (silice), dans le béton (ions alcalins, hydroxydes, calcium, eau), et apportées depuis l'extérieur (alcalins et eau).

2.2.1 Modèle de Furusawa, Ohga et Uomoto

Ce modèle [28], également appelé U.F.O., du nom des trois auteurs décompose l'alcali-réaction en un certain nombre d'étapes. Tout d'abord les ions hydroxydes et alcalins diffusent dans le granulat. Ces ions réagissent ensuite avec la silice des granulats. Comme les ions alcalins et hydroxyde interviennent dans la même réaction de dissolution, et que leur diffusion se fait ensemble, seule la diffusion des ions hydroxydes est considérée en réalité. L'étape limitante pour la dissolution est la diffusion qui permet la disponibilité des espèces, non la réaction chimique en tant que telle. La diffusion des ions hydroxydes suit une loi de Fick avec terme de puits pour représenter

leur consommation par les réactions chimiques, et se fait depuis la surface vers l'intérieur de granulats sphériques. La concentration à la surface du grain, qui sert de condition aux limites à l'équation de diffusion, varie en fonction de la quantité totale d'ions alcalins disponible. Les produits de réaction sont ensuite considérés à la surface du granulat, et peuvent pénétrer dans une zone poreuse à la surface des granulats, la pression n'augmentant qu'une fois que cette zone est pleine. Le modèle est testé sur l'essai accéléré de 24h américain (ASTM C-289), lors duquel les granulats broyés sont plongés dans une solution alcaline. Les auteurs remarquent que comme la phase limitante est la diffusion, on peut simplifier l'équation de diffusion et obtenir une équation différentielle sur la profondeur d'attaque, et ainsi trouver que cette profondeur d'attaque évolue en racine carrée en fonction du temps (avec les hypothèses que la couche attaquée est fine par rapport à la taille du grain, et que tout le grain est attaqué). Leurs observations sont cohérentes avec cette évolution en racine carrée, la vitesse ne varie pas avec la taille des grains mais dépend de la concentration initiale en alcalins. La dépendance de la vitesse de réaction en la température est prise en compte par une loi d'Arrhenius. Le modèle est ensuite appliqué sur l'attaque d'une barre de mortier (ASTM C-227), les granulats considérés étant des verres. Une relation affine est trouvée expérimentalement entre la quantité de produits de réaction et le gonflement, le retard de démarrage du gonflement étant dû au remplissage des auréoles de transition. Un effet pessimum en fraction volumique et en taille de granulats est observé.

2.2.2 Modèle de Bažant

Le modèle se concentre sur la chimie et le transport lors de l'alcali-réaction [2]. Il se base sur le mécanisme réactionnel habituel, supposant en ce qui concerne les gels produits qu'une concentration élevée en calcium en fait des produits solides proches des C-S-H, tandis qu'à faible contenu en calcium, ce sont des produits visqueux susceptibles d'absorber de l'eau et de gonfler. La concentration en calcium est supposée suffisamment faible pour que ce dernier type de gel soit produit. Des granulats denses et sphériques, d'une unique taille, sont considérés (leur modèle vise la modélisation des bétons à granulats de verre recyclé). La dissolution de la silice se produit depuis la surface. La diffusion des espèces chimiques réactives à travers cette couche de gel est l'étape limitante de la dissolution des granulats. Les auteurs supposent un arrangement périodique des grains, de façon à pouvoir simuler des fractions volumiques plus importantes qu'avec les schémas de micromécanique classique, type auto-cohérent. La diffusion à travers la couche de gel suit une loi de Fick. Une seule espèce est considérée, en l'occurrence l'eau, qui représente l'ensemble des réactifs provenant de la solution interstitielle. Les gels produits migrent partiellement dans l'auréole de transition, d'épaisseur indépendante de la taille de grain. Le gel gonfle par absorption d'eau, et est élastique linéaire. La quantité d'eau absorbée est liée par des lois simples à la pression et à l'humidité relative dans les pores. La diffusion de l'eau nécessaire au gonflement du gel est considérée indépendamment de celle de l'eau qui représente l'ensemble des réactifs de la réaction de dissolution du granulat, et modélisée par une loi de Darcy. La perméabilité est adaptée en fonction de l'humidité.

Les auteurs étudient le comportement du modèle en faisant varier différents paramètres. Ils observent une taille de particule qui conduit à une pression maximale. La formation du gel accélère lorsqu'on diminue la taille des particules, à cause d'un effet de surface spécifique. Pour la même raison, l'humidité baisse plus pour les petites particules, ce qui laisse moins d'eau disponible pour faire gonfler le gel. Un effet pessimum sur la quantité de silice réactive est observé. La taille de grain pessimum augmente lorsque la perméabilité du gel augmente.

2.2.3 Modèle de Poyet

Le modèle de Poyet [70, 69] se place dans le sillage de celui de Sellier [75]. Le couplage entre les tailles de granulats par l'équilibre d'une quantité totale de réactif est inspiré de Furusawa, Ohga et Uomoto (voir [28] et § 2.2.1), ceci pour prendre en compte l'effet de la distribution de tailles de granulat sur le développement de l'alcali-réaction. Les granulats sont supposés sphériques. Il appelle Volume Élémentaire Représentatif (VER), un granulat entouré d'une portion de pâte de ciment. Un problème de diffusion d'espèces chimiques réactives sur ce VER est traité de façon à calculer la quantité de réactifs en fonction du rayon, qui est couplée à l'avancement de la réaction de dissolution du granulat par un terme de puits dans l'équation de diffusion. Les espèces considérées sont : les alcalins, les ions calcium en solution, la portlandite, la silice réactive et les produits de réaction. Le déroulement de la réaction est le suivant : diffusion des réactifs dans les granulats, attaque du réseau siliceux par les ions hydroxydes, formation de produits silico-alcalins ou silico-calciques, les premiers étant des gels, les seconds proches des C-S-H. Une fois la porosité connectée au grain remplie, la montée en pression du gel débute, limitée par le niveau d'endommagement du VER. En parallèle, diffusion des réactifs dans la matrice vers les granulats, dissolution de portlandite et diffusion des ions calcium. La diffusion des ions est l'étape limitante. Ce formalisme permet une estimation du volume de gel créé, à partir d'une estimation de Lombardi du volume molaire des gels [54]. L'énergie développée par la précipitation (due à l'augmentation de volume) sert intégralement à endommager le matériau, ce qui donne une expression de l'endommagement, sous forme d'équation différentielle, en fonction du volume de gel. La déformation du mortier est enfin estimée par une relation empirique en fonction de l'endommagement, inspirée de Sellier [75].

Le modèle est ensuite enrichi de la prise en compte de la teneur en eau au niveau local, directement sur l'avancement de la réaction. La teneur en eau est calculée par résolution d'une équation de diffusion non linéaire, la diffusivité dépendant de la teneur en eau.

Le modèle se prolonge à l'échelle supérieure par un modèle de calcul de structures qui aurait sa place dans notre partie dédiée (§ 2.4), mais que nous décrivons ici. La déformation de la structure est composée de plusieurs contributions : déformation élastique, déformation due à l'alcali-réaction, fluage, déformation de séchage, déformation thermique. La déformation de séchage est liée au degré de saturation en eau par une équation empirique. Les déformations liées à la réaction alcali-silice sont calculées à partir de l'endommagement dans chaque direction. La cinétique de la réaction est liée au degré de saturation en eau. Enfin l'endommagement anisotrope est obtenu à partir de l'état de contrainte local.

2.2.4 Conclusion sur les modèles de chimie et de transport

La modélisation dans ce domaine semble avoir atteint sa maturité, c'est-à-dire qu'elle incorpore l'ensemble de ce que l'on connaît sur les mécanismes réactionnels mis en jeu lors de la réaction alcali-silice. Il nous semble que le modèle le plus élaboré, en particulier sur la question très importante de l'influence de la teneur en eau du béton, est celui de Poyet [70]. Ce modèle est de plus prolongé par un modèle de structure. Il ne lui manque qu'un lien solide avec les phénomènes mécaniques à l'échelle microscopique. Nous allons passer dans la section suivante les modèles microscopiques disponibles en revue.

2.3 Modélisation mécanique de la réaction alcali-silice à l'échelle microscopique

La modélisation mécanique à l'échelle microscopique a pour objectif principal, si l'on se donne le volume de gel créé aux abords d'un site réactif (ou qu'on l'a déterminé grâce à l'un des modèles présenté dans la section précédente), de déterminer les déformations et la variation des propriétés mécaniques de l'élément de béton auquel on s'intéresse. Certaines approches restent purement élastiques, tandis que d'autres considèrent une évolution de la microstructure par de l'endommagement ou de la fissuration microscopique.

2.3.1 Modélisations purement élastiques

Nous commençons avec les modèles élastiques. Certains de ces modèles considèrent la présence de fissure dans l'élément de béton attaqué, mais celles-ci ne se propagent pas. La microstructure du squelette solide ne varie donc pas. Commençons par les modèles poromécaniques.

2.3.1.1 Poromécanique appliquée à l'alcali-réaction

Nous présentons ici un point de vue développé par Dormieux et Lemarchand dans [52, 51, 20]. Le formalisme de la poromécanique est décrit dans le livre de Coussy [15], tandis que le livre de Dormieux fait référence pour la microporomécanique [19]. Nous commentons largement ce formalisme microporomécanique dans notre mémoire au § 3.4.

Lemarchand [52] L'alcali-réaction est en général décrite comme une réaction qui se fait en deux temps : tout d'abord, l'attaque de la silice mal cristallisée des granulats par les ions hydroxydes. Ce mécanisme est topochimique par nature, puisqu'une partie des réactifs n'est pas mobile, en l'occurrence la silice des granulats. Dans un second temps, la silice provenant des granulats, dissoute lors de la première phase, se combine avec les alcalins et le calcium provenant de la pâte de ciment pour donner un gel capable d'absorber de l'eau, donc de gonfler. L'objectif de cet article de Lemarchand est principalement de discuter la possibilité que la seconde phase soit une réaction topochimique ou trans-solution, à la lumière des conséquences mécaniques des deux types de réactions et de la forme connue des courbes de gonflement.

Ce débat concerne d'ailleurs plutôt les granulats rapides, pour lesquels on s'est longtemps demandé si les gels étaient créés à l'interface des granulats ou de manière plus homogène dans la pâte de ciment. Lemarchand teste les deux possibilités dans un modèle microporomécanique et compare les courbes de gonflement obtenues à celles mesurées.

- Trans-solution. Le gel est introduit de manière homogène dans la porosité du béton (pâte de ciment et granulats ne sont pas distingués), avec une cinétique imposée (vitesse d'injection constante pendant un temps fini). Les auteurs lient le gonflement macroscopique à l'injection de gel (la microstructure du béton est caractérisée par un coefficient de Biot et une porosité, et n'évolue pas).
- Topochimique. L'interface entre les granulats et la pâte de ciment est tout d'abord représentée comme une famille de fissures dans laquelle le gel est injecté (Fig. 2.1). Ces fissures étant ellipsoïdales, les auteurs utilisent une schéma de micromécanique utilisant le tenseur d'Eshelby pour déterminer les déformations macroscopiques. Les gonflements macroscopiques dépendent de la densité de fissures.
- Transition entre les deux mécanismes. Les auteurs supposent que le véritable mécanisme est probablement une combinaison des mécanismes trans-solution et topochimique, et testent la possibilité d'injecter le gel à la fois dans des fissures autour des grains et dans la porosité du béton.

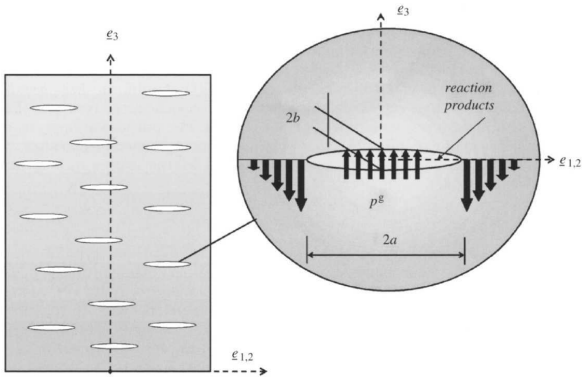

FIGURE 2.1 – Une famille de fissures de l'option topochimique du modèle micromécanique de Lemarchand [52]

Ils obtiennent les résultats suivants :
- La compressibilité du gel est un paramètre qui influence les gonflements ;
- La courbe d'expansion libre caractéristique en S est reproduite par les deux modèles testés, mais les temps caractéristiques de gonflement varient selon le mécanisme testé.

Dormieux [20] Dans cet article, les auteurs supposent l'existence d'un jeu de fissures représentant l'auréole de transition (ITZ), qui est une zone de porosité importante, à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment. L'objectif est de tester l'option topochimique. La distribution des fissures est isotrope, ce sont des fissures en disque (penny-shaped), réparties en plusieurs familles caractérisées par leur rayon et rapport d'aspect (Fig. 2.2).

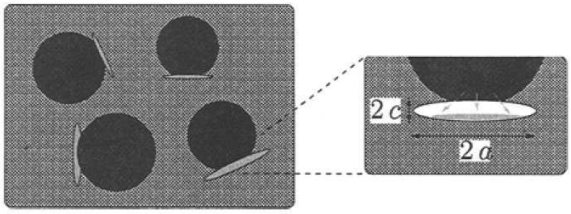

FIGURE 2.2 – Fissures représentant l'auréole de transition dans le modèle de Dormieux [20]

La vitesse de création du gel est, dans chaque famille, proportionnelle à la surface des fissures de la famille. Le temps nécessaire pour remplir une fissure est donc proportionnel à son rapport d'aspect. La pression augmente dans une famille lorsqu'elle est pleine, et la déformation est alors calculée par un modèle de micromécanique. L'effet d'une contrainte macroscopique est étudié. Les contraintes macroscopiques modifient le volume initial des fissures, donc le temps nécessaire à les remplir, et finalement l'instant de la montée en pression.

Lemarchand, prolongation des travaux précédents [51] Dans cet article, l'objectif est, en reprenant les idées de l'article précédent, d'expliquer l'anisotropie de la réaction alcali-silice sous chargement. Chaque grain est supposé entouré par six fissures occupant les six faces d'un cube englobant le granulat (Fig. 2.3). Ces fissures sont interconnectées et échanges donc du gel. La création du gel est stoppée dans une fissure si les chargements ont entraîné sa fermeture.

Ce modèle permet une reproduction qualitative des essais de Larive [48] qui montrent le report des déformations des directions les plus compressées vers les autres lors de l'alcali-réaction

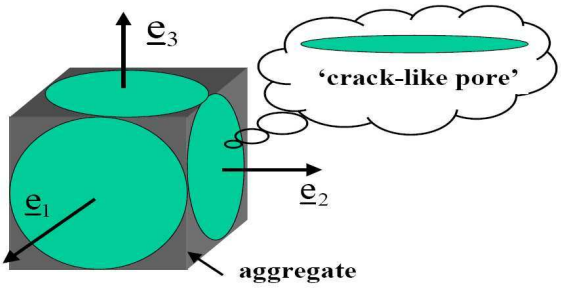

FIGURE 2.3 – Fissures du modèle de gonflement orthotrope de Lemarchand [51]

sous chargement, et la diminution globale des gonflements à fort chargement.

2.3.1.2 Suwito, Jin et Xi

Le modèle de Suwito, Jin et Xi [81, 44] étudie l'attaque d'un granulat homogène et dense par les ions hydroxydes alcalins. L'application de ce modèle est le recyclage de verre comme granulats. L'objectif est de reproduire l'effet pessimum en taille dans le test américain standardisé de 14 jours sur éprouvettes de mortier placées dans une solution alcaline (ASTM C-1260). Le modèle

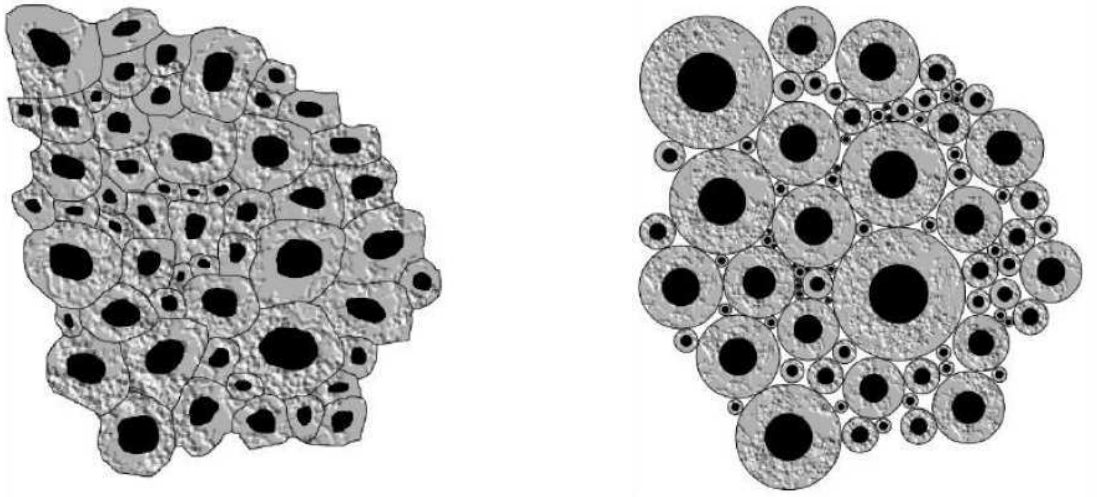

FIGURE 2.4 – Découpage du béton en un assemblage de sphères [81]

est en deux parties : d'un côté l'utilisation de la micromécanique pour calculer les gonflements et les pressions générées par l'alcali-réaction au sein de granulats de différentes tailles, de l'autre un calcul de diffusion. Dans la partie micromécanique, le béton est considéré comme un assemblage de sphères à deux phases (Fig. 2.4). La première phase, dans chaque VER, est la sphère intérieure qui représente le granulat et le gel, la seconde phase est la pâte de ciment. Le rapport entre les rayons des deux sphères permet de respecter la fraction volumique réelle des granulats. Le gonflement est supposé uniforme dans le granulat. Le gonflement libre macroscopique est calculé comme moyenne des gonflements de chaque VER. Le modèle de diffusion distingue deux phases pour ce qui est des réactifs : la diffusion des ions depuis la surface de l'éprouvette vers le granulat réactif, puis la diffusion depuis la surface du granulat vers son centre. La diffusion des gels d'alcali-réaction est ensuite considérée : le gel en excédent par rapport à la porosité du granulat et de l'auréole de transition diffuse dans la porosité de la pâte de ciment. Le béton est considéré

saturé en eau. La diffusion suit une loi de Fick, les auteurs donnent une solution analytique pour la diffusion dans le granulat. La diffusion dans la pâte est considérée beaucoup plus rapide donc l'extérieur de chaque granulat est à la même concentration en réactifs. La migration du gel suit une loi de Darcy, le volume qui doit se déplacer étant égal au volume de gel diminué du volume de l'auréole de transition qui pour chaque grain, est proportionnel à sa surface. Le volume de gel par unité de volume de matrice cimentaire est considéré proportionnel à la pression de gel, ce qui est présenté comme une approximation. Le problème est finalement résolu analytiquement. L'effet pessimum en taille est reproduit.

2.3.1.3 Modèle de Shin

La procédure de Shin [77] pour reconstruire les expansions lors d'alcali-réaction provoquée dans le cadre de l'essai accéléré sur barre de mortier américain (ASTM C-1260) est assez originale. L'auteur découpe, puis observe des échantillons de mortier attaqué au microscope électronique à balayage, de façon à repérer les éléments suivants : fissures isolées et sans gel, fissures partiellement ou complètement remplies de gel, fissures sans gel connectées avec des fissures remplies de gel, granulat, pâte de ciment, pore. Les fissures du premier type sont considérées préexistantes à l'alcali-réaction et sont observées dans les granulats, à l'interface, et dans la pâte de ciment. Les deux autres types de fissures sont dus à l'alcali-réaction. Pour le type de granulat utilisé, il n'y a pas de gel dans les fissures de la pâte de ciment. Les fissures connectées à des fissures remplies de gel se trouvent à l'interface ou dans la pâte de ciment, et ont progressé à cause des contraintes induites par le gonflement du gel dans les fissures des granulats. Les images sont ensuite converties en modèle éléments finis (ce sont des zones assez petites en comparaison de la taille des hétérogénéités, en deux dimensions), et une pression est appliquée dans les zones de fissures remplies de gel, de façon à retrouver la déformation du mortier avant le séchage du gel qui intervient lors de la préparation de l'échantillon pour le passage au microscope.

Les auteurs suggèrent que pour améliorer leur travail, il serait nécessaire de passer à trois dimensions, de considérer des processus non linéaires comme la fissuration, et de mieux connaître les propriétés mécaniques du gel.

2.3.2 Modèles à endommagement

On considère qu'il s'agit d'endommagement même lorsque les auteurs parlent de fissures mais que leur propagation n'est pas calculée par les équations de la mécanique linéaire de la rupture.

2.3.2.1 Modèle de Nielsen

Le modèle proposé par Nielsen [62] se fonde sur le mécanisme réactionnel de Chatterji [11]. De l'eau et des ions entrent dans le granulat réactif, ce qui provoque son gonflement, et le met donc en compression, ce qui conduit à une fissuration de la pâte de ciment environnante. La réaction est ralentie lorsque le taux d'humidité baisse à la fin de l'hydratation, mais peut recommencer s'il y a un apport d'eau externe. Dans ce cas, le gel d'alcali-réaction devient plus fluide et s'écoule dans les fissures et les pores, ce qui stoppe la progression des fissures. Le modèle traite la phase où le gel est encore trop solide pour s'écouler, donc entraîne l'apparition de fissures.

Le modèle mécanique considère une cellule sphérique composée d'un granulat sphérique entouré d'une matrice de mortier ou de béton. La particule attaquée est représentée mécaniquement par une pression appliquée sur la surface de la matrice. Les fissures sont radiales, dans la partie attaquée de la matrice. Leur progression est définie par le fait qu'à l'interface entre la zone saine et la zone endommagée de la matrice, la contrainte orthoradiale est égale à la résistance en traction de la matrice. L'effet d'un chargement extérieur uniaxial est pris en compte. La présence

de fissure est traduite en termes d'endommagement, puisqu'une surface effective de matériau est introduite. La diffusion de l'humidité dans la cellule est également prise en compte, avec pour condition aux limites l'humidité observée annuellement au Danemark. Une loi empirique lie l'expansion du grain à l'humidité. Les auteurs considèrent que les grandes déformations observées parfois lors de l'alcali-réaction sont dues à une fissuration entre plusieurs particules, qui donc ne peut être reproduite par leur modèle. Les temps caractéristiques de développement des contraintes sont de l'ordre du carré de la taille de l'élément, comme on l'attend lorsque le temps intervient principalement dans un processus de diffusion. Les auteurs montrent que la fraction volumique de particules réactives influe sur la pression entraînant la ruine de l'élément.

2.3.2.2 Modèle de Multon

Multon a proposé un modèle dont l'objectif est d'expliquer le rôle de la taille des granulats et de la quantité d'alcalins observé dans plusieurs séries d'expériences [60, 58, 59] et dans le travail de Poyet [70]. Le volume de gel produit par chaque taille de grain est calculé à partir de sa fraction volumique et de la quantité d'alcalins disponibles. Ce volume est corrigé pour prendre en compte le volume qui se déplace vers l'auréole de transition et limite ainsi pendant un temps la montée en pression du gel. Enfin, la déformation moyenne est reliée linéairement à la variation de volume des granulats par un paramètre à identifier, mais les phénomènes de rupture ne sont pas traités. L'effet pessimum en taille est cependant bien reproduit. Dans un modèle antérieur mais plus élaboré [59], l'endommagement de la pâte de ciment entourant le granulat est calculé, de façon à reproduire la microfissuration induite par la montée en pression du gel et à estimer ainsi les déformations macroscopiques par un vrai calcul mécanique et non simplement en supposant une relation linéaire entre pression du gel et déformation macroscopique. Ce modèle est également utilisé dans la thèse de Gao [31] et l'article [32] où sont discutés l'effet pessimum en taille et l'effet de taille d'éprouvette sur les gonflements. Les auteurs y soulignent l'effet trop peu étudié de la taille des éprouvettes lors d'essais en laboratoire.

2.3.2.3 Comby-Peyrot et Naar

Le modèle de Comby-Peyrot [13] se base sur le mécanisme réactionnel des Mines de Douai [7], et sur leur méthode de quantification de l'avancement de la réaction qui permet de relier le gonflement d'un mortier au gonflement des granulats. L'objectif de ce modèle est donc d'utiliser le gonflement des grains comme une entrée du modèle, de prendre en compte dans un code de calcul par éléments finis (FEMCAM) la distribution des granulats dans l'espace, et de calculer l'endommagement de la pâte de ciment environnante ainsi que les gonflements macroscopiques (par modèle d'endommagement de Mazars [55]). Les granulats sont considérés élastiques, sans endommagement, et leur variation de volume est l'entrée du modèle.

Les gonflements aux temps courts sont bien reproduits, mais après un certain temps de réaction, ils sont surestimés par rapport aux expériences. Cela peut venir, d'après les auteurs, de l'absence de prise en compte de l'endommagement des granulats, ou de l'absence de véritable fissuration dans la pâte de ciment. Les schémas d'endommagement semblent bien reproduire le type de fissuration habituellement observé en surface d'éléments de bétons attaqués. La diminution des modules élastiques du béton est également bien reproduite (diminution de l'ordre de 30 % pour un gonflement des grains de 10 %). Il y a une dépendance marquée de la vitesse de gonflement macroscopique en fonction de la concentration de granulats réactifs et de la taille de ces granulats.

Le modèle est enrichi de la possibilité d'avoir des fissures, mais la comparaison avec les expériences n'est pas effectuée pour ce qui est de la réaction alcali-silice. Les auteurs pensent

qu'un autre enrichissement important est de prendre en compte le fluage du béton, ce qui pourrait permettre de moins surestimer les déformations après un long temps d'attaque.

Le travail de Naar prolonge celui de Comby-Peyrot [61]. Le modèle est enrichi d'une description beaucoup plus fine de la chimie de l'alcali-réaction et du transport. La diffusion de la silice et des alcalins est prise en compte. La réaction chimique de dissolution de la silice n'est pas instantanée, mais modérée par un paramètre cinétique. Un couplage de la mécanique sur le transport est également implémenté, avec la variation des coefficients de diffusion en fonction de l'état d'endommagement calculé par modèle non local de Mazars [55]. L'auteur juge cependant que la dégradation de l'élément en béton est surestimée avec ce modèle d'endommagement.

2.3.2.4 Modèle numérique de Dunant

Ce modèle reprend les conclusions de Ben Haha [4] pour construire un modèle dans lequel l'avancée de la réaction est liée à la fraction de vides et fissures, qui elle-même est reliée au gonflement macroscopique. Le modèle, décrit dans [23, 24], se base sur des éléments finis, dans lequel les granulats, sphériques, sont maillés explicitement. Les zones réactives sont placées aléatoirement dans les grains et gonflent. Les auteurs s'intéressent en effet à des granulats à réactivité lente pour lesquels les zones qui gonflent forment des poches à l'intérieur des grains. Le modèle permet de calculer l'endommagement des granulats et de la pâte de ciment sous l'effet du gonflement des zones réactives, en utilisant un critère de Mohr-Coulomb (Fig. 2.5). Les propriétés mécaniques sont distribuées aléatoirement. Le gel est élastique, presque incompressible. Les résultats sont en

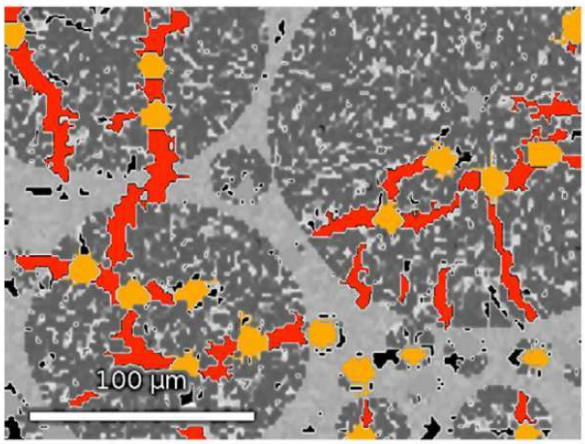

FIGURE 2.5 – Schéma d'endommagement typique obtenu par le modèle de Dunant [24]

bon accord avec les résultats expérimentaux pour ce qui est des courbes de gonflement libre. Le gonflement est cependant surestimé car le fluage n'est pas pris en compte. Les auteurs constatent que l'endommagement démarre bien dans les granulats, ce à quoi on s'attend pour ce type de granulats à réactivité lente où le gel est présent sous forme de poches dans les grains. Une comparaison est faite des schémas d'endommagement selon que le gel est présent en poches dans les grains, de manière uniforme dans le grain ou à la surface du grain. Les auteurs trouvent que seule la première option permet de reproduire correctement les courbes de gonflement expérimentales et les schémas d'endommagement observés.

Dunant consacre un article plus récent à l'étude de l'anisotropie de l'alcali-réaction sous chargement [25]. Il présente des résultats expérimentaux de gonflement sous chargement uniaxial. Il utilise ensuite son modèle d'endommagement par éléments finis de bétons attaqués par l'alcali-réaction sur ces cas de chargement. Les schémas d'endommagement, dans les granulats (où se

trouvent les poches de gel) et dans la pâte de ciment, sont orientés par le chargement macroscopique. Le modèle est en revanche limité à cause de sa nature bidimensionnelle, puisque cela favorise la coalescence des fissures. L'échantillon est donc fissuré de part en part artificiellement aux fortes charges (au dessus de 5 MPa). Ce modèle nous semble être le plus évolué pour ce qui est de l'étude de l'alcali-réaction sous chargement.

2.3.3 Modèles à fissuration à l'échelle microscopique

2.3.3.1 Articles d'Ichikawa

L'idée originale du modèle d'Ichikawa [43, 42] est de mettre l'accent sur la nature différente des précipités contenant du calcium de ceux qui n'en contiennent pas. Le gel silico-alcalin est supposé visqueux, tandis que le gel calco-silico-alcalin est supposé rigide, et confiné à l'anneau de réaction (reaction rim) à l'interface du granulat avec la pâte de ciment. L'anneau de réaction empêche l'écoulement des gels visqueux vers l'extérieur du granulat mais n'entrave pas la diffusion des ions hydroxydes d'alcalin vers l'intérieur du grain. L'attaque du granulat se poursuit donc, tandis que les produits de réaction visqueux s'accumulent dans le grain. La matrice est divisée en deux zones à symétrie sphérique : une partie fissurée et une partie saine. Ce modèle est pensé pour des granulats siliceux denses, pour lesquels l'attaque se produit depuis la surface vers le centre. Le gonflement est lié à la fissuration de l'anneau de réaction, non à celle de la pâte de ciment.

Dans ce modèle, les auteurs prennent en compte les différentes tailles de granulats, considérés sphériques. La diversité réelle des formes est prise en compte en affectant une résistance aléatoire aux anneaux de réaction. La probabilité qu'un anneau d'épaisseur donnée ne casse pas à une quantité de gel donnée suit une loi normale. Après fissuration de l'anneau, le gel dans le grain n'absorbe pas beaucoup de calcium car la formation de l'anneau de réaction consomme la majorité du calcium disponible. La pression maximale atteinte est de l'ordre de 400 GPa. Un facteur de gonflement est affecté au gel à sa création, les modules d'incompressibilité du gel et du granulat sont finis. Dans un premier temps, le gel est considéré immature. Il s'hydrate ensuite, puis réagit avec le calcium, ce qui le rend fragmentaire. La réaction du gel non hydraté avec le calcium forme l'anneau de réaction. Le gonflement macroscopique est ensuite relié au volume des grains dont l'anneau de réaction s'est fissuré sous pression du gel.

Ce modèle permet aux auteurs de reproduite l'effet pessimum lié à la fraction volumique des granulats. En revanche, pour reproduire l'effet de pessimum en taille, il est nécessaire de prendre en compte la cinétique de la réaction, ce qui est également fait dans l'article.

2.3.3.2 Modèles de Capra et Sellier

Nous avons regroupé sous le même titre ces deux modèles [9, 75] qui ont quelques points communs. La description microscopique dans le modèle de Sellier est cependant plus élaborée, ce qui justifie qu'on les ai placés avec les modèles à l'échelle microscopique décrivant la fissuration.

Capra Le modèle présenté dans cet article est très phénoménologique. Il permet cependant de prendre en compte l'effet de l'humidité relative, de la température et de l'anisotropie de gonflement. La cinétique chimique et la mécanique sont découplées. L'humidité relative est prise en compte grâce à une courbe empirique donnant le gonflement à un degré d'humidité relative donné en proportion de celui observé à 100 %. La cinétique de la réaction chimique est supposée du premier ordre. La fissuration se produit en mode I, et les facteurs d'intensité de contrainte sont calculés en prenant en compte l'angle de la fissure considérée par rapport au chargement macroscopique. Les tailles de fissures sont distribuées selon une loi normale.

Sellier Le modèle de Sellier contient d'abord une partie traitant du transport et de la chimie. La diffusion des ions alcalins et hydroxydes est modélisée par une loi de Fick à terme de puits pour les produits consommés par la réaction. Elle se fait dans un volume sphérique entourant le granulat, vers celui-ci. Les granulats sont sphériques également, et attaqués uniformément à leur surface. La vitesse d'attaque est imposée, et dépend de la température par une loi d'Arrhenius. La quantité de gel et la concentration en alcalins peuvent alors être calculées. Lorsque les alcalins sont en grande quantité aux abords du grain, en début de réaction, c'est la vitesse de la réaction chimique qui limite la production de gel, tandis qu'une fois que leur concentration a baissé, c'est leur diffusion depuis la pâte de ciment qui est l'étape limitante pour la création de gel.

Le modèle probabiliste est construit sur les hypothèses suivantes : les granulats sont distribués aléatoirement dans le béton, la réaction chimique est à l'origine de gradients d'alcalins dans le béton, le gel créé pénètre dans la porosité, monte en pression, et entraîne l'apparition de fissures, la migration du gel dans la porosité est pilotée par les tensions de surface. Les principales variables aléatoires sont la position des sites réactifs, leur taille, et la distribution de taille de pores dans la pâte de ciment. Du point de vue de la chimie et du transport, le modèle considère l'attaque des granulats par les ions alcalins (possible seulement si silice, alcalins et ions hydroxydes sont présents), prenant en compte la température par une loi d'Arrhenius, et la diffusion des ions selon une loi de Fick. Pour ce qui est de la mécanique, la loi de Laplace est utilisée pour le processus capillaire de migration du gel. La distribution de taille de pores est aléatoire mais calée sur des expériences de porosimétrie des bétons. La longueur de porosité connectée, accessible au gel autour de chaque granulat, définit la taille du vase d'expansion que constitue l'auréole de transition. La fissuration se fait en mode I, les fissures ne sont pas pleines à cause de phénomènes capillaires. Une distribution initiale de tailles de défauts (fissures) est choisie. Le volume de fissure étant calculé sous l'hypothèse que les fissures sont penny-shaped, que la pression est uniforme (sauf à la pointe de fissure où elle est nulle), et que le chargement extérieur est isotrope. Le gonflement macroscopique est enfin estimé à partir du volume de fissures.

Des simulations de Monte-Carlo sont enfin réalisées en variant la taille des sites réactifs. L'évolution de la pression dans le gel et des tailles de fissures est calculée, on arrive à une pression maximale de 70 GPa (Fig. 2.6). Les courbes de gonflement obtenues après identification de la longueur de porosité connectée sont réalistes pour diverses concentrations initiales en alcalins (Fig. 2.7). Le modèle donne une bonne estimation de la fraction volumique de granulats qui entraîne le gonflement maximal.

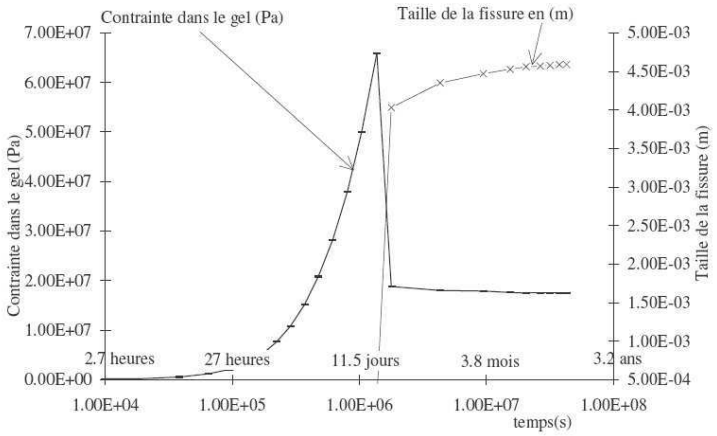

FIGURE 2.6 – Évolution de la pression et de la taille de fissure [75]

La partie macroscopique du modèle est assez proche du modèle de Capra [9]. Elle permet

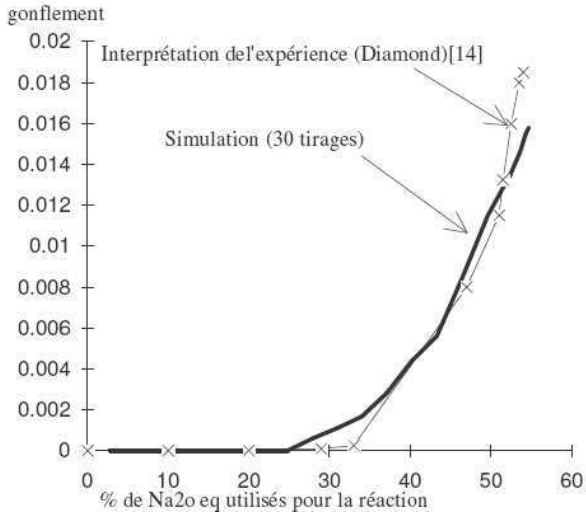

FIGURE 2.7 – Gonflement en fonction de l'avancement de la réaction [75]

de reproduire l'anisotropie du gonflement sous chargement extérieur anisotrope, et l'effet de l'hétérogénéité du matériau initial sur l'anisotropie.

2.3.3.3 Modèle mécanique de Bažant

Ce modèle est strictement mécanique [3], et vise lui aussi à reproduire l'effet pessimum observé lorsqu'on utilise du verre broyé comme granulat dans du béton, afin de le recycler. Comme le modèle de Suwito [81], il se met dans le cadre du test standardisé (ASTM C-1260). Le volume de grain soumis à l'attaque dépend de la taille de granulat considéré et de la fraction volumique totale de grains. L'effet de la pression sur la cinétique de réaction est négligé. La profondeur d'attaque est identique pour toutes les tailles de grains. Au bout de 14 jours, certains granulats sont donc totalement attaqués. Lé béton est considéré comme constitué de cellules périodiques contenant chacune un grain de verre sphérique (Fig. 2.8). La particule est entourée d'une couche

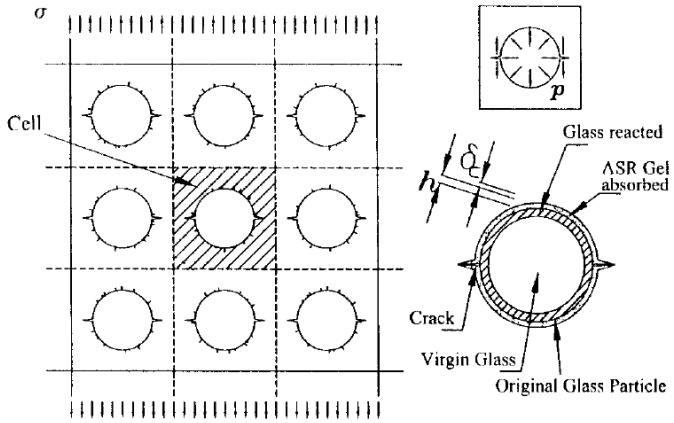

FIGURE 2.8 – Cellules périodiques du modèle de Bažant [3]

de gel qui gonfle. Les fissures sont initiées dans la pâte de ciment à partir de défauts préexistants. Les lèvres des fissures sont soumises à la pression qui règne dans la cavité. La croissance des fissures est calculée avec un critère de Griffith, le facteur d'intensité de contrainte étant connu

par interpolation entre deux solutions analytiques (Fig. 2.9). Au niveau macroscopique, la défor-

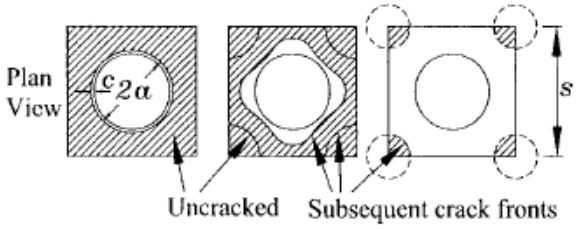

FIGURE 2.9 – Géométrie de la fissure considérée par Bažant [3]

mation est exprimée en fonction des efforts imposés et de la souplesse du matériau endommagé, elle-même calculée par intégration d'une expression faisant intervenir le facteur d'intensité de contrainte exprimé comme on l'a expliqué, par interpolation entre des solutions analytiques.

Le volume de gel dans les fissures est égal au volume total diminué du volume qui pénètre dans la porosité du béton sur une longueur de porosité connectée donnée. La taille des défauts initiaux est calculée en disant que ce sont ces défauts qui contrôlent la résistance en traction du béton non attaqué. Les défauts sont supposés penny-shaped. Le gel est supposé gonfler par absorption d'eau, sa compressibilité est choisie de l'ordre de celle de l'eau.

Ce modèle permet de reproduire l'effet de pessimum en taille de manière assez satisfaisante. Les résistances à la traction après alcali-réaction calculée présentent le même effet pessimum en taille que les mesures de résistance à la compression que les auteurs présentent, du moins qualitativement.

2.3.4 Conclusion sur les modèles mécaniques à l'échelle microscopique

Il y a une grande diversité dans ces modèles, puisqu'on trouve des modèles analytiques comme des modèles par éléments finis très évolués. Il nous semble que la lacune principale de ces tentatives de modélisation est l'absence d'un lien suffisamment clair entre le chargement extérieur et l'anisotropie de gonflement. Le modèle le plus évolué de ce point de vue là est celui de Dunant, mais il souffre de sa nature bidimensionnelle. Les approches numériques comme celle de Dunant [23] ou Comby-Peyrot [13] sont les seules capables de prendre d'une certaine façon en compte l'interaction entre les différents granulats et ses conséquences sur les schémas de fissuration. De même, les modèles numériques ont plus de chance, à terme, d'incorporer le fluage de manière satisfaisante que leurs concurrents analytiques. Nous pensons cependant que pour comprendre au maximum l'effet d'anisotrope de l'alcali-réaction, les modèles mécaniques analytiques à l'échelle microscopique ont encore beaucoup à apporter.

Pour terminer notre panorama des modèles d'alcali-réaction, citons quelques modèles à l'échelle de la structure.

2.4 Modélisation mécanique à l'échelle macroscopique

Les modèles à l'échelle macroscopique sont les plus proches des applications pratiques sur les structures. L'enjeu principal de ces modèles est l'évaluation de la durée de vie d'ouvrages dont on a constaté qu'ils étaient atteints de la réaction alcali-silice. Ces ouvrages peuvent la plupart du temps rester en service pendant des décennies, il est donc important de quantifier le temps pendant lequel l'ouvrage se comporte de façon satisfaisante et sûre, de façon à ne pas démolir inutilement des constructions coûteuses.

Ces modèles macroscopiques ne décrivent pas les mécanismes microscopiques, c'est-à-dire qu'ils ne représentent pas explicitement les granulats, et la nature topochimique de la réaction

chimique, ni la fissuration qui se développe autour des sites de réaction. En revanche, ils décrivent des mécanismes à l'échelle de la structure et prennent en compte des phénomènes de plasticité et viscosité du béton à l'échelle macroscopique, de façon à synthétiser la complexité des mécanismes microscopiques.

Le modèle d'Ulm [84] propose une description de l'alcali-réaction faisant intervenir un couplage entre la diffusion de la chaleur et la cinétique de la réaction. Les gonflements sont obtenus à partir de l'avancement de la réaction par une loi empirique inspirée de celle de Larive [48] à trois paramètres : un gonflement asymptotique, un temps de latence lié à la dissolution de la silice, et un temps caractéristique de gonflement lié à la formation des gels. La diffusion de la chaleur suit une loi de Fourier. Les auteurs considèrent ce phénomène de couplage entre la température et la réaction alcali-silice important pour les structures épaisses mais soulignent que l'influence de l'eau doit également être prise en compte, surtout pour des structures moins massives. Ils suggèrent également de prendre en compte l'anisotropie des gonflements générés par l'alcali-réaction.

Steffens [79] a pour objectif de prendre en compte l'influence de l'eau sur la réaction dans un modèle mécanique à l'échelle de la structure. Les auteurs s'intéressent aussi au phénomène de vieillissement des gels, partant de l'observation que les gels ne réagissent pas de la même façon aux augmentations d'humidité selon leur âge, les gels jeunes semblant avoir des capacités importantes d'absorption d'eau qui diminuent progressivement. Le mécanisme réactionnel est constitué de deux étapes : tout d'abord la formation d'un gel amorphe selon une cinétique dépendant de l'humidité, puis gonflement de ce gel par absorption d'eau, plus ou moins important selon l'âge du gel. La réaction de création du gel et l'absorption d'eau sont du premier ordre (leur vitesse décroît linéairement avec leur avancement). Un temps de latence provient du temps qu'il faut pour remplir la porosité. Les propriétés poromécaniques liant la variation de volume poreux aux contraintes macroscopiques n'évoluent pas, mais le comportement macroscopique est plastique. Le modèle permet sur un calcul de structure de mettre en évidence l'apparition d'une zone de délamination à cause des différences de gonflement entre zones plus ou moins exposées à l'humidité.

Le modèle de Li [53] est un modèle de structure pour l'alcali réaction. Le gel, supposé sec à sa création, a la propriété de s'imbiber d'eau si suffisamment d'eau est disponible. Les cinétiques de création du gel et d'absorption d'eau sont imposées, ce sont des cinétiques du premier ordre. Ce modèle thermo-chemo-élastoplastique a été implémenté dans CESAR-LCPC. Ce modèle peut reproduire des gonflements assez complexes, y compris des reprises de gonflement dues à la variation d'humidité ambiante, mais le nombre de paramètres le rend difficile à utiliser en pratique.

Bangert [1] propose un modèle poromécanique prenant en compte un squelette, une phase liquide, une phase gazeuse. La cinétique de dissolution de la silice est du premier ordre. La diffusion des phases liquides et gazeuses suit une loi de Darcy à perméabilité modifiée par l'équation de Van Genuchten [85]. Le matériau est endommageable. Les auteurs montrent que l'hétérogénéité de l'humidité est responsable d'une augmentation de l'endommagement des structures attaquées, en raison du gradient de gonflement qui apparaît.

Le modèle macroscopique de Grimal [36, 37, 38], sur lequel s'appuie la loi de comportement pour bétons attaqués par la RAG dans le code ASTER, a pour objectif principal de coupler, à l'échelle macroscopique, divers mécanismes dont les interactions sont habituellement négligées : fluage, retrait, endommagement et RAG. La pression de gel est calculée à partir du volume de gel grâce à une loi linéaire élastique, considérant qu'une partie du gel envahit la porosité entourant les sites réactifs, et une partie envahit les fissures nouvellement créées. La vitesse de création du gel, du premier ordre, dépend du degré de saturation en eau, et de la température. Les auteurs soulignent que les déformations atteintes à cause de la RAG devraient entraîner la ruine des éléments en béton attaqués si elles étaient obtenues par traction. Ils supposent donc que des

mécanismes de viscosité limitent les concentrations de contraintes à l'échelle microscopique. Un module viscoplastique prend en compte la dépendance empirique entre l'endommagement et le gonflement. Un module visco-élasto-plastique rend compte de l'élasticité, du retrait et du fluage. L'endommagement est anisotrope, et deux critères, l'un en traction (Rankine), l'autre pour la compression (Drücker-Prager), sont utilisés, ce qui permet le report de gonflement depuis les directions les plus compressées vers les autres. Le transport de l'eau est modélisé. Le modèle permet de reproduire de manière satisfaisante les essais triaxiaux de Multon [60] et a été utilisé pour l'évaluation de la durée de vie d'un barrage.

Le modèle de Comi [14] est un modèle d'endommagement des bétons à l'échelle de la structure. Deux phases sont considérées : squelette et gel. La formation et le gonflement du gel sont décrits par une unique variable d'avancement, proportionnelle au volume de gel, par une cinétique du premier ordre. L'avancement de la réaction est indépendant de l'état de contraintes. La température est prise en compte par une loi d'Arrhenius. La température est découplée de la mécanique. L'humidité n'est pas prise en compte car le modèle est construit pour des structures massives dans lesquelles les gradients d'humidité sont plus limités. La microfissuration est traduite par un endommagement isotrope, décrit par deux variables pour rendre compte de l'endommagement en traction et l'endommagement en compression. Les paramètres du modèle sont calibrés sur les essais triaxiaux de Multon [60] (les gonflements asymptotiques sont différents dans les différentes directions pour rendre compte de l'anisotropie des échantillons due à la direction de coulage), puis le modèle est utilisé pour estimer la durée de vie de deux barrages attaqués.

Le modèle de Schrefler [74] est un modèle de transport en milieu poreux partiellement saturé. Le transport de chaleur est également considéré. La cinétique de la RAG est du premier ordre. Les déformations libres dues à l'alcali-réaction sont données en fonction de l'avancement de la réaction par une loi empirique. Le modèle reproduit des essais de Larive et Poyet en gonflement libre, sous différentes conditions d'humidité [48, 70].

L'ensemble de ces modèles est très complet en ce qui concerne le transport de l'eau, parfois la chaleur, prennent en compte un certain nombre de phénomènes de long terme comme le fluage ou le retrait du béton. Ils ont néanmoins besoin d'informations provenant des modèles microscopiques, à la fois du côté de la chimie et du côté de la mécanique, pour combler plusieurs lacunes. Par exemple, dans ces modèles, s'ils sont basés sur une description poromécanique, l'évolution du coefficient de Biot, qui permet de calculer la contrainte, à déformation nulle, en fonction de la pression dans les pores, devrait idéalement être ajusté au fur et à mesure que le matériau subit une microfissuration, mais aucun modèle ne fait cela grâce à l'utilisation d'information extraite d'une modélisation précise des phénomènes à l'échelle microscopique.

2.5 Conclusion

Nous avons, dans cette partie, présenté une bibliographie sur les modèles pour la réaction alcali-silice. Ce travail préparatoire à notre propre travail de modélisation nous a permis de tirer plusieurs conclusions. Il nous a tout d'abord semblé que la modélisation des mécanismes réactionnels et du transport à l'échelle microscopique est aussi développée que possible, notamment grâce au travail de Poyet [70]. Il est bien sûr possible de complexifier de tels modèles à l'infini, par exemple en considérant le transport d'un plus grand nombre d'espèces chimiques (ce qui nécessite d'ailleurs de prendre en compte l'effet du déséquilibre des charges sur la diffusion), ou en diversifiant les produits de réaction en fonction de l'environnement chimique de leur création. Il nous semble cependant que l'ensemble des connaissances sur la chimie et le transport dans l'alcali-réaction qui font consensus est présent chez Poyet. Pour ce qui est de la modélisation à l'échelle de la structure, nous avons de même considéré qu'elle a atteint un bon niveau de représentation des mécanismes en jeu. Elle s'appuie d'ailleurs sur les outils habituels pour

décrire la durabilité des bétons. Cependant, l'incorporation d'informations spécifiques à l'alcali-réaction, comme l'anisotropie du gonflement d'un élément chargé, nous semble insuffisante. Ces informations doivent être extraites de modèles microscopiques, qui semblent demander encore un peu d'effort de modélisation pour expliquer ces mécanismes d'anisotropie et être suffisamment simples pour qu'on puisse identifier leurs paramètres sur des essais de laboratoire, et extraire les informations nécessaires pour les modèles à l'échelle de la structure.

La suite de ce mémoire sera donc consacrée à l'établissement d'un modèle mécanique à l'échelle microscopique pour l'alcali-réaction, avec pour objectif de combler certaines des lacunes que nous avons mentionnées.

Conclusion

La réaction alcali-silice est par nature une réaction très difficile à étudier, comme en témoigne la littérature sur ce sujet, à la fois par son abondance et la variété des conclusions qui sont tirées par les différents auteurs. L'étude de la littérature sur l'alcali-réaction montre qu'il n'est pas envisageable de pouvoir prédire complètement les gonflements et l'évolution des propriétés mécaniques en fonction de la composition du béton et des conditions environnementales.

La première barrière est l'immense variété des granulats pouvant entraîner l'alcali-réaction. La classification des roches et des minéraux réactifs ne nous semble pas encore assez poussée pour pouvoir, lorsque l'on a un nouveau granulat entre les mains et que l'on souhaite savoir s'il risque d'être réactif lorsqu'utilisé conjointement avec tel ou tel ciment, déterminer précisément les quantités de chaque type de minéraux réactifs, puis de savoir quel type de gel est fabriqué par chacun de ces minéraux et en quelle quantité.

Le deuxième problème auquel on se heurte lors de l'étude de la chimie de l'alcali-réaction est la grande variété de gels qui sont créés dans les bétons. La composition, la structure, le potentiel de gonflement de ces gels ne sont pas bien compris. On n'est pas capable, si l'on connaît exactement les produits chimiques présents dans une solution, de déterminer le volume, la rigidité, la viscosité des gels qui vont être produits. On ne sait pas relier facilement les variations de volume du gel aux variations d'humidité ou aux variations de concentrations de produits dans l'eau. De nombreuses études existent, bien sûr, qui renseignent sur des parties de cette question, mais on n'a pas de réponse qui couvre tous les cas de figure rencontrés.

Il n'est donc pas certain que l'objectif de simulation complète de l'alcali réaction avec comme point de départ les propriétés des constituants du béton soit atteignable. Nous pensons que la bonne façon de procéder est plutôt d'étudier les mécanismes d'endommagement des bétons attaqués, éventuellement en distinguant des cas de figure différents selon le type de granulat auquel on s'intéresse, comme on l'a fait en définissant les granulats à réactivité rapide et les granulats à réactivité lente. Une fois ces mécanismes connus, un travail de modélisation de l'endommagement est nécessaire pour être capables, dans un cadre simplifié et si possible ne dépendant que d'un nombre assez limité de paramètres, de déterminer l'endommagement d'un élément de béton attaqué. Si l'on dispose de ce type de modèle d'endommagement, on peut essayer d'identifier les paramètres d'un tel modèle sur des essais de laboratoire effectués dans des conditions bien définies et correspondant aux conditions subies par le béton en service. On peut alors imaginer qu'un tel modèle puisse être utilisé pour représenter le comportement local du béton dans un code à l'échelle de la structure, où le transport et la mécanique seraient traités de manière classique, tandis que le comportement local serait issu d'un modèle microscopique pour l'endommagement lors de l'alcali-réaction calibré sur des essais de laboratoire.

C'est vers cet objectif que nous souhaitons tendre, en travaillant sur un modèle d'endommagement microscopique qui puisse, une fois son efficacité démontrée et une méthode d'identification de ses paramètres bien établie, être utilisé pour déterminer l'évolution du comportement mécanique local dans des simulations d'alcali-réaction à l'échelle de structures.

Bibliographie

[1] F. Bangert, D. Kuhl, and G. Meschke. Chemo-hygro-mechanical modelling and numerical simulation of concrete deterioration caused by alkali-silice reaction. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 28 :689 – 714, 2004. *p. 47*

[2] Zdenek P. Bažant and Alexander Steffens. Mathematical model for kinetics of alkali-silica reaction in concrete. *Cement and Concrete Research*, 30 :419 – 428, 2000. *p. 35*

[3] Zdenek P. Bažant, Goangseup Zi, and Christian Meyer. Fracture mechanics of ASR in concretes with waste glass particles of different sizes. *Journal of Engineering Mechanics*, 126-3 :226–232, 2000. *p. 28, 45, 46, 141 et 154*

[4] Mohsen Ben Haha. *Mechanical effects of alkali silica reaction in concrete studied by* SEM-*image analysis*. PhD thesis, EPFL, Suisse, 2006. *p. 29, 42 et 141*

[5] M. Berra, G. Faggiani, T. Mangialardi, and A.E. Paolini. Influence of stress restraint on the expansive behaviour of concrete affected by alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 40(9) :1403 – 1409, 2010. *p. 30*

[6] Adil Binal. Investigation of mixing ratio and restraint condition effects on alkali-silica gel pressure in mortar by using a uniaxial alkali-silica gel pressure measuring device (ASGPM-D). *Construction and Building Materials*, 21(6) :1218 – 1228, 2007. *p. 30*

[7] D. Bulteel, E. Garcia-Diaz, C. Vernet, and H. Zanni. Alkali-silica reaction. A method to quantify the reaction degree. *Cement and Concrete Research*, 32 :1199 – 1206, 2002. *p. 25, 28 et 41*

[8] D. Bulteel, N. Rafaï, P. Degrugilliers, and E. Garcia-Diaz. Petrography study on altered flint aggregate by alkali-silica reaction. *Materials characterization*, 53 :141 – 154, 2004. *p. 25 et 28*

[9] B. Capra and J.-P. Bournazel. Modeling of induced mechanical effects of alkali-aggregate reaction. *Cement and Concrete Research*, 28 :251–260, 1998. *p. 43 et 44*

[10] Laurent Charpin and Alain Ehrlacher. A computational linear elastic fracture mechanics-based model for alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 42(4) :613 – 625, 2012. *p. 28, 62, 77, 81, 141, 193, 245, 260, 276 et 281*

[11] S. Chatterji, A.D. Jensen, N. Thaulow, and P. Christensen. Study of alkali-silica reaction Part 3. Mechanism by which NaCl and $Ca(OH)_2$ affect the reaction. *Cement and Concrete Research*, 16 :246 – 254, 1986. *p. 24 et 40*

[12] S. Chatterji, N. Thaulow, and A.D. Jensen. Study of alkali-silica reaction Part 4. Effect of different alkali salt solutions on expansion. *Cement and Concrete Research*, 17 :777 – 783, 1987. *p. 24*

[13] Isabelle Comby-Peyrot. *Development and validation of a 3D computational tool to describe damage and fracture due to alkali-silica reaction in concrete structures.* PhD thesis, École des Mines de Paris, France, 2006. *p. 41 et 46*

[14] C. Comi, R. Fedele, and U. Perego. A chemo-thermo-damage model for the analysis of concrete dams affected by alkali-silica reaction. *Mechanics of Materials*, 41 :210 – 230, 2009. *p. 48, 274 et 279*

[15] Olivier Coussy. *Poromechanics*. Wiley, 2004. *p. 37 et 205*

[16] L.S. Dent-Glasser and N. Kataoka. The chemistry of 'alkali-aggregate' reaction. *Cement and Concrete Research*, 11 :1 – 9, 1980. *p. 23*

[17] L.S. Dent-Glasser and N. Kataoka. On the role of calcium in the alkali-aggregate reaction. *Cement and Concrete Research*, 12 :321 – 331, 1982. *p. 23*

[18] S. Diamond and N. Thaulow. A study of expansion due to alkali-silica reaction as conditioned by the grain size of the reactive aggregate. *Cement and Concrete Research*, 4 :591 – 607, 1974. *p. 26*

[19] Luc Dormieux, Djimédo Kondo, and Franz-Josef Ulm. *Microporomechanics*. Wiley, 2006. *p. 37, 69, 73, 74, 102, 156 et 175*

[20] Luc Dormieux, Eric Lemarchand, Djimedo Kondo, and Eduardo Fairbairn. Elements of poro-micromechanics applied to concrete. *Materials and Structures*, 37 :31 – 42, 2004. *p. 37 et 38*

[21] R. Dron and F. Brivot. Thermodynamic and kinetic approach to the alkali-silica reaction. Part 1 : Concepts. *Cement and Concrete Research*, 22 :941 – 948, 1992. *p. 25*

[22] R. Dron and F. Brivot. Thermodynamic and kinetic approach to the alkali-silica reaction. Part 2 : Experiment. *Cement and Concrete Research*, 23 :93 – 103, 1993. *p. 25*

[23] Cyrille Dunant. *Experimental and Modelling Study of the alkali-silica reaction in concretes*. PhD thesis, EPFL, Suisse, 2009. *p. 42, 46 et 141*

[24] Cyrille F. Dunant and Karen L. Scrivener. Micro-mechanical modelling of alkali-silica-reaction-induced degradation using the AMIE framework. *Cement and Concrete Research*, 40 :517 – 525, 2010. *p. 28, 42 et 141*

[25] Cyrille F. Dunant and Karen L. Scrivener. Effects of uniaxial stress on alkali-silica reaction induced expansion of concrete. *Cement and Concrete Research*, 42(3) :567 – 576, 2012. *p. 30 et 42*

[26] B. Durand, R. Roux, J. Houde, and A. Blanchette. Free expansion and stresses in concrete related to AAR. *Proceedings of the 9th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction (ICAAR). London, UK*, 1992. *p. 29*

[27] C.F. Ferraris, J.R. Clifton, E.J. Garboczi, and F.L. Davis. Stress due to alkali-silica reactions in mortars. *Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems*, pages 75–82, 1997. *p. 30*

[28] Y. Furusawa, H. Ohga, and T. Uomoto. An analytical study concerning prediction of concrete expansion due to alkali-silica reaction. *Durability of concrete, Proceedings of the third international conference*, SP-145 :757–780, 1994. *p. 34, 36 et 276*

[29] Fabien Gaboriaud. *Étude du rôle de l'ion alcalin au cours de la gélification des solutions silico-alcalines déstabilisées par addiction d'ions calcium*. PhD thesis, Université de Bourgogne, France, 1999. *p. 29*

[30] Fabien Gaboriaud, André Nonat, Denis Chaumont, and Aldo Craievich. Structural model of gelation processes of a sodium silicate sol destabilized by calcium ions : combination of SAXS and rheological measurements. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 351 :351–354, 2005. *p. 29*

[31] Xiao Xiao Gao. *Contribution to the requalification of Alkali Silica Reaction (*ASR*) damaged structures : Assessment of the* ASR *advancement in aggregates*. PhD thesis, Université de Toulouse, France, 2010. *p. 41*

[32] Xiao Xiao Gao, Stéphane Multon, Martin Cyr, and Alain Sellier. Alkali-silica reaction (ASR) expansion : Pessimum effect versus scale effect. *Cement and Concrete Research*, 44 :25 –33, 2013. *p. 41*

[33] E. Garcia-Diaz, J. Riche, D. Bulteel, and C. Vernet. Mechanism of damage of the alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 36 :395 – 400, 2006. *p. 25, 26 et 28*

[34] G. Giaccio, R. Zerbino, J.M. Ponce, and O.R. Batic. Mechanical behavior of concretes damaged by alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 38 :993 – 1004, 2008. *p. 27*

[35] P.E. Grattan-Bellew. *Alkali-silica reaction - Canadian experience, in : the alkali aggregate reaction in concrete*. Ed. R.N Swamy, Blackie, London, UK, 1992. *p. 22 et 27*

[36] Étienne Grimal. *Caractérisation des effets du gonflement provoqué par la réaction alcali-silice sur le comportement mécanique d'une structure en béton*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, France, 2007. *p. 47*

[37] Étienne Grimal, Alain Sellier, Yann Le Pape, and Éric Bourdarot. Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism - Part I : Constitutive model. *ACI Materials Journal*, 105-3 :227 – 231, 2008. *p. 47 et 273*

[38] Étienne Grimal, Alain Sellier, Yann Le Pape, and Éric Bourdarot. Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism - Part II : Indentification of model parameters and application. *ACI Materials Journal*, 105-3 :236 – 242, 2008. *p. 47, 273 et 274*

[39] D.W. Hobbs. *Alkali-silica reaction in concrete*. Thomas Telford, London, 1988. *p. 30*

[40] Xiaoqiang Hou, R. James Kirkpatrick, Leslie J. Struble, and Paulo J.M. Monteiro. Structural investigation of alkali silica gels. *Journal of the American Ceramic Society*, 88-4 :943 – 949, 2005. *p. 28*

[41] Xiaoqiang Hou, Leslie J. Struble, and R. James Kirkpatrick. Formation of ASR gel and the roles of C-S-H and portlandite. *Cement and Concrete Research*, 34 :1683 – 1696, 2004. *p. 28*

[42] Tsuneki Ichikawa. Alkali-silica reaction, pessimum effects and pozzolanic effects. *Cement and Concrete Research*, 39 :716 – 726, 2009. *p. 43*

[43] Tsuneki Ichikawa and Masazumi Miura. Modified model of alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 37 :1291 – 1297, 2007. *p. 26 et 43*

[44] Weihua Jin. *Alkali-silica reaction in concrete with glass aggregate - A chemo-physico-mechanical approach*. PhD thesis, Columbia University, USA, 1998. *p. 39*

[45] Tetsuya Katayama. ASR gels and their crystalline phases in concrete - universal products in alkali-silica, alkali-silicate and alcali-carbonate reactions. *Proceedings of the fourteenth ICAAR. Austin, Texas*, 2012. *p. 29*

[46] Mitsunori Kawamura and Kazuma Iwahori. ASR gel composition and expansive pressure in mortars under restraint. *Cement and Concrete Composites*, 26(1) :47 – 56, 2004. *p. 30*

[47] K.E. Kurtis, P.J.M. Monteiro, J.T. Brown, and W. Meyer-Ilse. Imaging of ASR gel by soft X-ray microscopy. *Cement and Concrete Research*, 28 :411 – 421, 1998. *p. 28*

[48] Catherine Larive. *Apports combinés de l'expérimentation et de la modélisation à la compréhension de l'alcali-réaction et de ses effets mécaniques*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, France, 1997. *p. 22, 30, 38, 47 et 48*

[49] LCPC. *Recommandations pour la prévention des désordres dus à l'alcali-réaction*. LCPC, 1994. *p. 22 et 34*

[50] Andreas Leeman. Alkali-silica reaction autogeneous deformations and pressure development in a model system. *Proceedings of the 14th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction (ICAAR). Austin, Texas*, 2012. *p. 29*

[51] Eric Lemarchand, Luc Dormieux, Eduardo Fairbairn, and Fernando Ribiero. A micromechanical approach to ASR-induced damage in concrete. *Third Biot Conference, Norman, Oklahoma, USA*, 2005. *p. 37, 38 et 39*

[52] Eric Lemarchand, Luc Dormieux, and Franz-Josef Ulm. Micromechanics investigation of expansive reactions in chemoelastic concrete. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 363 :2581 – 2602, 2005. *p. 37 et 38*

[53] Kefei Li. *Modélisation chimico-mécanique du comportement des bétons affectés par la réaction d'alcali-silice et expertise numérique des ouvrages d'art dégradés.* PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2002. *p. 22 et 47*

[54] J. Lombardi, A. Perruchot, and P. Massard. Experimental evaluation of composition and volume variability of ca-si gels, first products of alkali silica reaction (ASR). *Proceedings of the 11th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction (ICAAR). Quebec, Canada*, 2000. *p. 36*

[55] J. Mazars. *Application de la Mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure.* PhD thesis, Université Paris VI, France, 1984. *p. 41 et 42*

[56] Valérie Michaud. *Simulation expérimentale de l'alcali-réaction des bétons. Étude de l'influence des ions sulfate.* PhD thesis, Université de Bourgogne, France, 1995. *p. 29*

[57] Yann Monnin. *Méthodologie pour décrire le gonflement multi-échelle de calcaires siliceux soumis à la réaction alcali-silice dans le matériau béton.* PhD thesis, Université d'Artois, France, 2005. *p. 22*

[58] S. Multon, M. Cyr, A. Sellier, P. Diederich, and L. Petit. Effects of aggregate size and alkali content on ASR expansion. *Cement and Concrete Research*, 40 :508 – 516, 2010. *p. 26, 28, 41 et 276*

[59] S. Multon, A. Sellier, and M. Cyr. Chemo-mechanical modeling for prediction of alkali silica reaction (ASR) expansion. *Cement and Concrete Research*, 39 :490 – 500, 2009. *p. 41, 154 et 274*

[60] Stéphane Multon. *Évaluation expérimentale et théorique des effets mécaniques de l'alcali-réaction sur des structures modèles.* Laboratoire Central des Ponts et Chaussés, 2004. *p. 22, 30, 41, 48, 237, 270, 273 et 274*

[61] R. Naar. *Modélisation du comportement du béton par approche multi-physique (couplage chimie-mécanique) : application à la réaction alcali-silice.* PhD thesis, École des Mines de Paris, France, 2009. *p. 42*

[62] A. Nielsen, F. Gottfredsen, and F. Thøgersen. Development of stresses in concrete structures with alkali-silica reactions. *Materials and structures*, 26 :152–158, 1993. *p. 40 et 205*

[63] J.P. Ollivier, J.C. Maso, and B. Bourdette. Interfacial transition zone in concrete. *Advances Cement Based Materials*, 2 :30 – 38, 1995. *p. 24*

[64] John W. Phair, Sergey N. Tkachev, Murli H. Manghani, and Richard A. Livingston. Elastic and structural properties of alkaline-calcium silica hydrogels. *Journal of Materials Research*, 20 - 2 :344 – 349, 2005. *p. 29*

[65] J.M. Ponce and O.R. Batic. Different manifestations of the alkali-silica reaction in concrete according to the reaction kinetics of the reactive aggregates. *Cement and Concrete Research*, 36 :1148 – 1156, 2006. *p. 27*

[66] A.B. Poole. Alkali silica reactivity mechanisms of gel formation and expansion. *Proceedings of the 9th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction (ICAAR). London, UK*, pages 782 – 789, 1992. *p. 24*

[67] T.C. Powers and H.H. Steinour. An interpretation of some published researches on the alkali-aggregate reaction Part 1. Chemical reaction and mechanism of expansion. *Journal of the American Concrete Institute*, 26-6 :497 – 516, 1955. *p. 23 et 26*

[68] T.C. Powers and H.H. Steinour. An interpretation of some published researches on the alkali-aggregate reaction Part 2. Hypothesis concerning safe and unsafe reactions with reactive silica in concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, 26-8 :497 – 516, 1955. *p. 23*

[69] S. Poyet, A. Sellier, B. Capra, G. Foray, J.-M. Torrenti, H. Cognon, and E. Bourdarot. Chemical modelling of alkali-silica reaction : influence of the reactive aggregate size distribution. *Materials and Structures*, 40 :229 – 239, 2007. *p. 36*

[70] Stéphane Poyet. *Étude de la dégradation des ouvrages en béton atteints par la réaction alcali-silice : Approche expérimentale et modélisation numérique multi-échelles des dégradations dans un environnement hydro-chemo-mécanique variable.* PhD thesis, Université de Marne-La Vallée, France, 2003. *p. 22, 36, 41 et 48*

[71] Hans W. Reinhardt and Oliver Mielich. Mechanical properties of concretes with slowly reacting alkali sentitive aggregates. *Proceedings of the 14th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction (ICAAR). Austin, Texas*, 2012. *p. 28*

[72] H.W. Reinhardt and O. Mielich. A fracture mechanics approach to the crack formation in alkali-sensitive grains. *Cement and Concrete Research*, 41 :255 – 262, 2011. *p. 28 et 141*

[73] Patrice Rivard, Jean-Pierre Ollivier, and Gérard Ballivy. Characterization of the ASR rim - Application to the Potsdam sandstone. *Cement and Concrete Research*, 32 :1259 – 1267, 2002. *p. 26*

[74] Bernhard A. Schrefler, Francesco Pesavento, Luciano Simoni, Dariusz Gawin, and Mateusz Wyrzykowski. Modelling alkali-silica reaction under non-isothermal conditions in partially saturated cementitious materials. *Proceedings of the Mechanics and Physics of Porous Solids conference, Champs-sur-Marne, France*, 2011. *p. 48*

[75] Alain Sellier. *Modélisations probabilistes du comportement de matériaux et de structures en génie civil.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France, 1995. *p. 36, 43, 44, 45 et 281*

[76] Alain Sellier and Geneviève Thevenin Foray. *Modélisation multi-échelles des réactions-alcali-granulats.* DEA Géomatériaux, Université Paris-Est. *p. 22*

[77] Jun-Ho Shin. *Modeling alkali-silica reaction using image analysis and finite-element method.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 2009. *p. 40, 152 et 278*

[78] T.E. Stanton. Expansion of concrete through reaction between cement and aggregate. *Proceedings of the American Society of Civil Engineering*, 66-10 :1781 – 1811, 1940. *p. 22 et 26*

[79] Alexander Steffens, Kefei Li, and Olivier Coussy. Aging approach to water effect on alkali-silica reaction degradation of structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 129 :50 – 59, 2003. *p. 47*

[80] L. Struble and S. Diamond. Unstable swelling behaviour of alkali silica gels. *Cement and Concrete Research*, 11 :611 – 617, 1981. *p. 24, 152 et 278*

[81] A. Suwito, Weihua Jin, Y. Xi, and C. Meyer. A mathematical model for the pessimum size effect of ASR in concrete. *Concrete Science and Engineering*, 4-13 :23 – 34, 2002. *p. 39 et 45*

[82] R.N. Swami and M.M. Al-Asali. Engineering properties of concrete affected by alkali-silica reaction. *ACI materials journal*, pages 367 – 374, 1988. *p. 30*

[83] H.F.W. Taylor. *Cement Chemistry, second edition.* Telford, 1997. *p. 22*

[84] Franz-Josef Ulm, Olivier Coussy, Kefei Li, and Catherine Larive. Thermo-chemo-mechanics of ASR expansion in concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 126 :233 – 242, 2000. *p. 47*

[85] M.T. van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America*, 44 :892 – 898, 1980. *p. 47*

[86] J. Verstraete, L. Khouchaf, and M.H. Tuilier. Contribution of the environmental scanning electron microscope and X-ray diffraction in investigating the structural evolution of a SiO_2 aggregate attacked by alkali-silica reaction. *Journal of Materials Science*, 39 :6221 – 6226, 2004. *p. 28 et 29*

[87] Angélique Vichot, Jean-Pierre Ollivier, and Collectif Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC). *La durabilité des bétons - Bases scientifiques pour la formulation de bétons durables dans leur environnement, second edition.* Presses de l'École nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), 2008. *p. 22*

[88] Jensen Viggo. Reclassification of alkali aggregate reaction. *Proceedings of the 14th International Conference on Alkali-Aggregate Reaction (ICAAR). Austin, Texas*, 2012. *p. 27*

[89] H. Wang and J.E. Gillott. Mechanism of alkali-silica reaction and the significance of calcium hydroxide. *Cement and Concrete Research*, 21 :647 – 654, 1991. *p. 23 et 29*

[90] Graham West. *Alkali-aggregate reaction in concrete roads and bridges.* Ed. Thomas Telford, London, UK, 1996. *p. 22*

Deuxième partie

Théorie

Introduction

On a présenté dans la partie précédente une bibliographie des recherches sur l'alcali-réaction, ainsi que sur les modèles qui ont été proposés dans le but principal de pouvoir prédire la durée de vie résiduelle des structures attaquées et guider les efforts éventuels de réparation. On a choisi de travailler sur l'amélioration des modèles mécaniques à l'échelle microscopique.

Nous avons donc besoin d'un certain nombre d'outils de mécanique des solides pour mener à bien ce travail de modélisation. Avant de discuter de la représentation mathématique des phénomènes physiques dans la troisième partie de ce travail, nous allons donc présenter les outils théoriques que nous utilisons dans notre modèle. Ce sont pour la plupart des outils de mécanique assez classiques que nous avons adaptés à notre problème, comme les équations de la mécanique des matériaux poreux, les estimateurs de micromécanique, et un critère de rupture fragile.

Dans le chapitre 3, nous présentons les bases de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes. Le béton est un matériau composite à plusieurs échelles. Les granulats et la pâte de ciment forment deux phases bien visibles à l'échelle mésoscopique de l'échantillon de laboratoire. À une échelle plus fine, ces deux phases sont hétérogènes. Elles comportent en particulier une porosité qui joue un rôle important pour l'alcali-réaction puisqu'elle évolue à cause de l'attaque chimique, et que le gel s'y déplace et y monte en pression. On présente de manière générale l'homogénéisation des matériaux hétérogènes, dont l'objectif est d'obtenir les propriétés mécaniques macroscopiques à partir des propriétés des phases et de leur distribution. La théorie de la microporomécanique prolonge ensuite naturellement l'homogénéisation classique en permettant la prise en compte de la présence de fluide sous pression dans les pores. On donne ensuite un certain nombre de résultats théoriques dont le plus célèbre est le résultat d'Eshelby, sur lequel se fondent tous les estimateurs de micromécanique. Nous présentons aussi un résultat de Tanaka et Mori qui nous semble très utile pour comprendre l'établissement de la plupart des estimateurs de micromécanique, et dont nous donnons une démonstration originale, fondée sur le théorème de réciprocité de Betti. Nous donnons enfin un certain nombre d'exemples de ces estimateurs qui permettent d'obtenir une écriture approchée mais opérationnelle des propriétés mécaniques homogénéisées des matériaux hétérogènes, et présentons en particulier l'estimateur *IDD* de Zheng et Du [39], que nous avons choisi pour notre étude puisqu'il nous a semblé très pratique.

Le chapitre 4 est ensuite consacré à la comparaison de résultats obtenus avec différents estimateurs à des résultats obtenus par éléments finis. Nous présentons donc la formulation variationnelle que nous utilisons pour nos simulations en deux dimensions et déformations planes, ainsi que les cas de chargements utilisés pour déterminer les différentes propriétés poromécaniques homogénéisées recherchées. Nous présentons les deux types de simulations que nous réalisons : les premières sur des solides poreux générés aléatoirement par un algorithme d'addition séquentielle sans recouvrement, les secondes sur des cellules périodiques. Dans le cas des microstructures aléatoires, la taille du domaine de calcul en comparaison de celle des hétérogénéités influe sur la qualité des estimations, ce que nous détaillons pour les trois types de conditions aux limites utilisées : déplacements linéaires, contrainte homogène, et déplacements périodiques. Nous comparons enfin les résultats obtenus par éléments finis aux estimations données par les schémas

de micromécanique, pour des microstructures comprenant des pores de forme circulaire ou aplatie, et enfin pour une forme de cavité plus complexe qui nous est inspirée par l'application à l'alcali-réaction que l'on souhaite réaliser. Les résultats avec l'estimateur *IDD*, que l'on a choisi, sont jugés satisfaisants. On considère donc au terme de ces deux premiers chapitres que l'on dispose d'une méthode fiable pour calculer les propriétés mécaniques homogénéisées d'un solide hétérogène contenant des pores et des fissures sous pression.

Notre objectif étant de faire évoluer cette microstructure par fissuration, nous présentons dans le chapitre 5 le critère de rupture fragile de Francfort-Marigo. Ce critère de rupture utilise l'idée classique en mécanique que le choix entre différentes configurations se fait par la minimisation de l'énergie du système. Cette minimisation permet d'ailleurs à l'évolution des variables qui caractérisent l'état de fissuration d'être discontinue, lorsqu'à chargement donné, plusieurs minima locaux de l'énergie sont en compétition. Nous expliquons donc ce phénomène de saut de taille de fissures et rappelons que dans le cas simple où l'énergie est convexe, ce critère devient le critère classique de Griffith. Nous présentons une illustration de l'utilisation de ce critère de rupture pour l'alcali-réaction, qui provient d'un article que nous avons publié dans *Cement and Concrete Research* en 2012 [9]. Dans le cas simple du gonflement libre d'un béton attaqué, où la mécanique est simplifiée à l'extrême, nous montrons que le critère de rupture énergétique entraîne des effets de taille. Ce modèle contient déjà les éléments essentiels de notre modèle complet pour l'alcali-réaction, en dehors des outils de micromécanique présentés dans les deux premiers chapitres de cette partie.

Il nous faut donc faire le lien entre le critère de rupture énergétique et la description micromécanique du solide poreux, qui passe par l'écriture de l'énergie totale. Nous présentons donc dans le chapitre 6, en reprenant de manière rigoureuse le calcul de l'énergie élastique et de l'énergie potentielle d'un milieu poreux chargé et sous pression par intégration de l'énergie locale sur l'ensemble du squelette du solide. Cette démarche détaille en fait un certain nombre de résultats de microporomécanique mentionnés dans le premier chapitre de cette partie. Le fait de reprendre les équations locales et de les intégrer pour obtenir l'énergie macroscopique en fonction de nos paramètres de chargement permet de faire apparaître très naturellement les expressions des propriétés poroélastiques homogénéisées dont nous avons besoin pour appliquer cette théorie de microporomécanique à notre problème, c'est pourquoi nous avons souhaité détailler cette partie. Nous pensions également qu'il était important d'expliquer une démarche de double changement d'échelle que nous utilisons dans notre modèle pour l'alcali-réaction. Notre béton en cours d'attaque possède en effet différents types de cavités à des échelles différentes : d'un côté les pores microscopiques des granulats et de la pâte de ciment, de l'autre de grandes cavités sous pression une fois que le granulat s'est décollé de la pâte de ciment. Il est donc utile de pouvoir homogénéiser les zones contenant des pores microscopiques dans une première étape, de façon à homogénéiser dans une seconde étape un assemblage de matériaux poreux avec des grands pores. Nous présentons donc les écritures des énergies pour ces différentes situations, et viennent naturellement les expressions des coefficients poroélastiques homogénéisés.

Pour terminer cet exposé des outils de mécanique dont nous avons besoin pour modéliser l'endommagement lors de l'alcali-réaction, nous traitons un problème de fissuration de milieux poreux. Nous rassemblons donc les éléments des chapitres précédents dans le chapitre 7 où nous montrons des simulations d'évolution d'un milieu poreux dans lequel on injecte un fluide. L'utilité de ce chapitre est de rassembler toute la complexité de la description microporomécanique et du critère énergétique dans un exemple où le chargement est plus simple qu'une attaque chimique. Il est nécessaire, pour la description poromécanique, de discrétiser nos tailles de trous, et de fixer la symétrie de la fissuration. Ces choix conditionnent le nombre de variables sur lesquelles on doit minimiser l'énergie totale, dans le cadre du critère de Francfort-Marigo, pour déterminer le trajet de fissuration. On teste donc différentes options pour la discrétisation et la symétrie

de la solution qui nous permettent de diminuer le nombre de variables pour la minimisation de l'énergie, ce qui facilite la résolution.

L'ensemble des éléments donnés dans cette partie nous semblent constituer une très bonne base pour étudier l'endommagement et les déformations de milieux soumis à une pression de fluide dans leur porosité. Ce type de description semi-analytique n'est en quelque sorte pas en concurrence avec les outils numériques élaborés qui sont développés pour l'étude de l'endommagement des matériaux poreux sous pression. On pense au contraire qu'il peut y avoir une certaine complémentarité entre les outils de micromécanique tels qu'on les présente et les outils numériques avancés. Il n'est en effet jamais possible de discrétiser l'ensemble d'une structure en maillant assez fin à l'échelle microscopique pour capter les phénomènes qui s'y déroulent. Des changements d'échelle partiels sont donc indispensables même lorsque l'outil principal est un outil numérique, ce qui nous encourage à travailler sur ces modèles approchés à une époque où les modèles numériques sont très développés.

Chapitre 3

Bibliographie sur l'homogénéisation

Sommaire

3.1 Introduction **66**
3.2 Le volume élémentaire représentatif **66**
3.2.1 Présentation théorique, rôle des conditions aux limites 66
3.3 Les tenseurs de localisation **68**
3.4 La démarche de microporomécanique **69**
3.5 Résultats théoriques **73**
3.5.1 Résultat d'Eshelby 73
3.5.2 Idée de la démonstration 73
3.5.3 Addition d'un chargement à l'infini 74
3.5.4 Exemples de tenseurs d'Eshelby 74
3.5.5 Inclusion équivalente 76
3.5.6 Théorème de Tanaka-Mori, généralisation de Nemat-Nasser 77
3.5.7 Démonstration 77
3.5.8 Une variante du théorème de Tanaka-Mori 78
3.6 Estimateurs de micromécanique **81**
3.6.1 Modèle à trois phases 81
3.6.2 Schéma dilué 85
3.6.3 Schéma différentiel 86
3.6.4 Schéma à deux phases 86
3.6.5 Schéma de Mori-Tanaka 87
3.6.6 Schéma autocohérent 88
3.6.7 Schéma de Ponte-Castañeda-Willis 88
3.6.8 Schéma Interaction Direct Derivative (*IDD*) de Zheng et Du 91
3.6.9 Conclusion sur les estimateurs 95
3.7 Conclusion **95**

3.1 Introduction

Dans ce premier chapitre décrivant des outils théoriques pour la modélisation de l'alcali-réaction, nous avons rassemblé des éléments de bibliographie sur l'homogénéisation. Il s'agit d'une branche de la mécanique des solides (qui peut bien sûr être appliquée à d'autres domaines comme la diffusion) qui vise à déterminer les propriétés moyennes de matériaux hétérogènes. On part de l'idée que tout matériau est hétérogène à une certaine échelle, mais que si on en manipule un morceau suffisamment gros par rapport à la taille des hétérogénéités, on peut lui trouver des propriétés mécaniques moyennes. La première étape de ce chapitre sera ainsi de définir le concept de volume élémentaire représentatif, qui correspond à la taille du morceau de matériau à considérer pour évaluer correctement ses propriétés moyennes. Pour déterminer les propriétés moyennes d'un matériau hétérogène par le calcul, on procède comme en laboratoire : on en prend un morceau, et on le charge par exemple en appliquant un effort donné dans une certaine direction, puis on mesure ses déformations, ce qui nous donne un module d'élasticité reliant les deux grandeurs. Nous allons donc imposer des conditions aux limites sur notre morceau de matériau. Notre objectif est de calculer la grandeur duale de la grandeur imposée, puisqu'on a la chance de connaître (plus ou moins précisément) la distribution géométrique des phases et leurs propriétés mécaniques, ce qui n'est pas le cas en laboratoire. On introduira donc la notion de tenseur de localisation dans la deuxième partie, notion qui permet de décrire la déformation en un point donné du matériau en fonction de ce qui est appliqué au niveau macroscopique. Le matériau hétérogène que l'on souhaite étudier est du béton, qui est un matériau qui contient des hétérogénéités de deux sortes : des hétérogénéités rigides, telles que les granulats, et des pores, remplis d'un fluide. Pour pouvoir prendre en compte la pression dans ce fluide, nous exposerons le formalisme de microporomécanique dans la partie suivante. On donnera ensuite quelques résultats théoriques importants en micromécanique pour le calcul concret des tenseurs de localisation, en mentionnant un résultat pour lequel nous avons donné une démonstration originale. On présente enfin un certain nombre de schémas de micromécanique qui permettent d'avoir des estimations de ces tenseurs de localisation, et donc des propriétés mécaniques du milieu hétérogène considéré.

3.2 Le volume élémentaire représentatif

Le volume élémentaire représentatif, ou VER, est une partie du matériau considéré défini par rapport à l'échelle des hétérogénéités, et celle de la taille de la structure.

3.2.1 Présentation théorique, rôle des conditions aux limites

L'estimation et l'encadrement des propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes ont suscité une littérature abondante. Du point de vue pratique, l'approche phénoménologique pour déterminer les propriétés d'un matériau n'est pas toujours possible, en particulier lorsqu'il s'agit de matériaux qui ne sont pas facilement disponibles puisqu'on souhaite les créer, ou qu'ils sont issus de la dégradation de matériaux connus (c'est le cas dans l'étude de la réaction alcali-silice qui nous intéresse).

Si les caractéristiques géométriques du matériau sont connues très précisément, par exemple grâce à des moyens d'imagerie et la connaissance des propriétés des différentes phases, il peut être envisageable d'effectuer des calculs par éléments finis. Ces calculs étant très coûteux s'il est nécessaire de discrétiser finement le système, il est indispensable de réduire le domaine de calcul au maximum. Jusqu'où peut-on aller ? On répond à cette question par l'introduction du VER.

Le VER devra être suffisamment grand devant les tailles caractéristiques des hétérogénéités pour être statistiquement représentatif de l'ensemble du milieu. Il devra être suffisamment petit

devant l'ensemble de la structure pour être traité à l'échelle macroscopique comme un point, c'est-à-dire pour qu'on puisse assimiler un certain nombre de moyennes de quantités comme les contraintes ou les déformations sur le VER à des quantités locales du point de vue de la structure.

Prenons l'exemple du tenseur d'ordre quatre des modules d'élasticité, $\mathbb{C}$. Supposant ce tenseur connu en tout point du VER, on souhaite calculer le tenseur des modules d'élasticité macroscopiques. Pour ce faire, il est nécessaire d'appliquer des conditions aux limites sur le bord ∂V du VER, de calculer les contraintes moyennes ($< \underline{\underline{\sigma}} >_V$) et les déformations moyennes ($< \underline{\underline{\varepsilon}} >_V$) sur le VER, où pour tout champ f défini sur le VER, la moyenne spatiale est définie par l'intégrale volumique :

$$< f >_V = \frac{1}{V} \int_V f(x) dx \tag{3.1}$$

Le tenseur macroscopique des modules élastiques est alors défini (son existence est assurée par la linéarité du problème) par :

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_V = \mathbb{C}^{hom} : < \underline{\underline{\varepsilon}} >_V \tag{3.2}$$

La question du choix des conditions aux limites (CL) est cruciale, puisque si le domaine V n'est pas assez grand pour être un VER au sens expliqué plus haut, le module homogénéisé, déterminé par cette méthode, varie selon le type de condition aux limites appliquées. D'un point de vue pratique, on est tenté par les conditions aux limites uniformes :

- contraintes uniformes : $\underline{\underline{\sigma}}(x).\underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n}$ sur ∂V où $\underline{n}$ est la normale sortante de V et $\underline{\underline{\Sigma}}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique constant représentant les contraintes macroscopiques ;
- déplacements linéaires : $\underline{u}(x) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$ sur ∂V, où $\underline{u}$ représente le champ déplacement et $\underline{\underline{E}}$ est également un tenseur d'ordre deux symétrique constant, représentant la déformation macroscopique. On appelle parfois cette condition aux limites "déformation homogène imposée", ou "déformation moyenne imposée".

Ces deux choix simples sont appuyés par un argument théorique. Si l'on écrit la différence entre l'intégrale de l'énergie élastique à l'échelle microscopique et l'énergie élastique à l'échelle macroscopique et qu'on la transforme par intégration par parties, on obtient :

$$< \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} >_V - < \underline{\underline{\sigma}} >_V : < \underline{\underline{\varepsilon}} >_V = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \left(\underline{\underline{\sigma}}(x).\underline{n} - < \underline{\underline{\sigma}} >_V .\underline{n} \right) . \left(\underline{u} - < \underline{\underline{\varepsilon}} >_V .\underline{x} \right) dS \tag{3.3}$$

Le second membre étant nul pour les conditions aux limites de type contraintes uniformes ou déplacements linéaires. Ce résultat est souvent appelé lemme de Hill (on démontre ce résultat au § 6.2.6.2 qui est consacré à une écriture détaillée de l'énergie d'un milieu poreux). Cette propriété ainsi que la convexité de l'énergie potentielle en fonction des déformations (et celle de l'énergie complémentaire en fonction des contraintes) à l'échelle macroscopique, permet de démontrer que les modules homogénéisés utilisant ces conditions aux limites sont des bornes, au sens des tenseurs d'ordre 4, pour les modules obtenus avec n'importe quelles autres CL, comme montré par Nemat-Nasser ([28], p. 50) :

$$\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom}_{\Sigma} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom}_{general} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom}_{E} : \underline{\underline{E}} \tag{3.4}$$

Où $\mathbb{C}^{hom}_{\Sigma}$ est déterminé grâce à un problème aux limites à contraintes uniformes imposées, $\mathbb{C}^{hom}_{E}$ grâce à un problème à déplacements linéaires imposés et $\mathbb{C}^{hom}_{general}$ avec n'importe quelles autres CL.

D'après ce résultat si ces modules coïncident, ils sont égaux au véritable module homogénéisé pour le volume V (tel qu'il est représenté, c'est-à-dire indépendamment d'éventuelles erreurs dues à l'imagerie). Si ces modules ne coïncident pas, on en déduit qu'on n'a pas discrétisé un volume assez grand, ou qu'il n'existe pas de volume assez grand, pour ce matériau, pour déterminer

les propriétés homogénéisées. Cependant, on peut tout de même utiliser le module homogénéisé comme estimation du module macroscopique, en essayant de choisir des conditions aux limites qui rattrapent, en quelque sorte, le fait que le volume discrétisé est trop petit. Une façon de produire ces conditions aux limites sur ∂V est de plonger V dans un milieu infini et d'appliquer les conditions aux limites en contraintes ou déformation (c'est alors équivalent) à l'infini. Les propriétés élastiques du milieu infini influencent alors la condition aux limites appliquée sur ∂V, donc les propriétés élastiques homogénéisées obtenues pour V par la relation 3.2. On peut également utiliser les conditions aux limites périodiques, qui d'après le résultat de Nemat-Nasser ([28], p. 50) donnent des estimations comprises entre les estimations à contrainte moyenne imposée et les estimations à déformation moyenne imposée, comme toutes les conditions aux limites mixtes. Leur utilisation est facile car implémentée dans de nombreux codes de calcul, et des démonstrations numériques (Kanit [20]) montrent une convergence rapide vers le module macroscopique en fonction de la taille du domaine de calcul. Nous commenterons ce point dans le chapitre 4. Les conditions périodiques vérifient de plus, comme les deux conditions aux limites homogènes, l'égalité de l'énergie élastique microscopique et de l'énergie élastique macroscopique, c'est-à-dire la nullité de l'équation 3.3.

Si l'on considère que l'on ne dispose pas de moyens numériques suffisants pour faire des calculs par éléments finis sur un VER, on peut utiliser l'approche micromécanique, qui a pour but de fournir des estimations ou des bornes pour les propriétés moyennes d'un matériau hétérogène en s'appuyant sur une vision très simplifiée du matériau qui peut se résumer en quelques propriétés morphologiques et la connaissance des propriétés élastiques des phases.

Nous allons donc introduire les tenseurs de localisation qui permettent, en utilisant la linéarité de nos problèmes d'élasticité, de relier les grandeurs locales (par exemple la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$) aux grandeurs imposées (par exemple la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$).

3.3 Les tenseurs de localisation

Supposons que l'on ait déterminé le VER V adéquat pour notre matériau, que l'on considèrera du type matrice/inclusions. La matrice occupe un domaine connexe, c'est-à-dire qu'on peut toujours aller d'un point à l'autre de la matrice sans en sortir, contrairement aux inclusions. On dispose également d'informations statistiques sur les inclusions : leurs fractions volumiques et leurs tailles. On utilise ici une approche à déplacement imposé $\underline{u}^d = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$ sur le bord du VER, ce qui est équivalent à tout autre type de condition aux limites si le VER est suffisamment grand comparé à la taille des hétérogénéités. La démarche consiste, comme on l'a expliqué précédemment, à déterminer la moyenne des contraintes sur le VER. Le tenseur des modules homogénéisés $\mathbb{C}^{hom}$ sera alors défini par :

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_V = \mathbb{C}^{hom} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_V = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \tag{3.5}$$

La moyenne des déformations peut alors se décomposer sur les différentes phases. Si les inclusions sont repérées par des indices $i \in 1..N$ et la matrice par un indice 0, cela s'écrit :

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_V = (1-f) < \underline{\underline{\sigma}} >_0 + \sum_{i=1}^{N} f^i < \underline{\underline{\sigma}} >_i \tag{3.6}$$

Où on a noté f^i la fraction volumique de la phase i et f la fraction volumique totale des inclusions $f = \sum_{i=1}^{N} f^i$.

L'approche micromécanique consiste en l'introduction de problèmes mécaniques auxiliaires (si possible faciles à résoudre) dans lesquels on calcule ces moyennes, pour les utiliser comme

approximation de leur valeur dans le problème de départ. Supposant que chaque phase est homogène, de module $\mathbb{C}^0$ pour la matrice et $\mathbb{C}^i$ pour la phase i,

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_V = (1-f)\mathbb{C}^0 :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_0 + \sum_{i=1}^{N} f^i \mathbb{C}^i < \underline{\underline{\varepsilon}} >_i \tag{3.7}$$

On introduit ensuite le tenseur de localisation $\mathbb{A}$. C'est un tenseur d'ordre 4, comportant la symétrie mineure mais pas nécessairement la symétrie majeure, qui relie par linéarité du problème la déformation imposée à la déformation locale :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \tag{3.8}$$

On a vu dans les équations 3.6 et 3.7 que l'on a besoin des moyennes des contraintes et des déformations sur les différentes phases. On introduit donc les tenseurs de localisation moyens par phase $\mathbb{A}^0, \ldots, \mathbb{A}^i, \ldots$ d'ordre 4, comportant la symétrie mineure mais pas nécessairement la symétrie majeure, tels que pour chaque phase :

$$< \mathbb{A}(\underline{x}) >_i = \mathbb{A}^i \tag{3.9}$$

On aboutit ainsi à l'écriture suivante du tenseur des modules homogénéisés :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1-f)\mathbb{C}^0 : \mathbb{A}^0 + \sum_{i=1}^{N} f^i \mathbb{C}^i : \mathbb{A}^i \tag{3.10}$$

Comme la moyenne sur l'ensemble des phases de la déformation est égale à celle que l'on impose à la frontière du VER, on a en prenant la moyenne de l'équation 3.8 sur tout le volume :

$$(1-f)\mathbb{A}^0 = \mathbb{I} - \sum_{i=1}^{N} f^i \mathbb{A}^i \tag{3.11}$$

et donc :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^{N} f^i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}^i \tag{3.12}$$

Reste à construire des problèmes auxiliaires permettant de trouver des valeurs approximatives à ces tenseurs, ce que nous aborderons dans les parties § 3.5, avec l'introduction des résultats d'Eshelby, et § 3.6 avec les estimateurs proprement dits. Avant de passer à cette phase d'approximation des tenseurs de localisation, nous allons compléter les outils d'homogénéisation dont nous avons besoin de façon à pouvoir décrire de manière adéquate le changement d'échelle dans les milieux poreux.

3.4 La démarche de microporomécanique

On décrit ici l'approche microporomécanique en nous inspirant très fortement de l'approche de Dormieux, Kondo et Ulm [11]. Cette approche vise à permettre le calcul des coefficients poroélastiques du matériau homogénéisé. Le résultat très pratique de cette partie, qui peut être montré en utilisant le théorème de Levin [23], permet d'utiliser le tenseur de localisation en déformation présenté dans le paragraphe précédent pour déterminer les coefficients poroélastiques homogénéisés qui donnent l'influence de la pression sur les déformations et contraintes macroscopiques et des phases poreuses.

On s'intéresse ici à un matériau hétérogène qui contient des vides et des hétérogénéités. Le tenseur des modules d'élasticité est donc variable dans le matériau. On veut pouvoir prendre en compte la pression d'un fluide contenu dans l'espace poreux, c'est-à-dire les vides. Les vides et les hétérogénéités sont répartis en un certain nombre de familles, définies par la forme et l'orientation pour ce qui concerne les vides, la forme, l'orientation et le tenseur des modules d'élasticité pour les hétérogénéités.

L'objectif de ce paragraphe est d'établir à partir des données sur la microstructure, les équations homogénéisées du matériau poroélastique. Ces équations sont au nombre de $N_v + 1$ où N_v est le nombre de familles de vides. Parmi ces équations, la première sert à calculer la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ en fonction de la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ et des pressions à l'intérieur des vides. La pression commune à tous les vides de la famille i est notée p^i. Les N_v équations suivantes caractérisent la variation de volume des différentes familles de vides en fonction de la déformation macroscopique et des pressions à l'intérieur des vides. On appelle ϕ_i la fraction volumique en configuration déformée de la phase poreuse i, et toujours f^i la fraction volumique en configuration relâchée de la phase i.

On appelle Ω_i le domaine occupé par les vides de la famille i, et Ω l'ensemble du domaine (solide et vides), qu'on appelle le VER. En tout point $\underline{x}$ du VER Ω, la loi de comportement microscopique, s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x}) \tag{3.13}$$

Où le tenseur des modules élastiques est tel que :

$$\mathbb{C}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{x} \in \cup\Omega_i \\ \mathbb{C}^s(\underline{x}) & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.14}$$

Et le champ d'autocontrainte tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x}) = \begin{cases} -p^i\underline{\underline{\mathbb{1}}} & \text{si } \underline{x} \in \Omega_i \text{ pour } i \in \{1, N_v\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.15}$$

Le champ de déformation n'étant pas défini de manière unique dans les inclusions. Il importe seulement qu'il soit compatible avec les déplacements de la frontière des vides. Nous nous plaçons encore une fois dans un cadre où des déplacements linéaires de la forme $\underline{\underline{E}}.\underline{x}$ sont imposés sur la frontière $\partial\Omega$ du VER. On néglige l'effet éventuel de l'intersection d'un pore avec $\partial\Omega$. Le problème à résoudre que l'on appelle (P) est alors :

$$(P) : \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u} = \underline{\underline{E}}.\underline{x} & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.16}$$

Toujours suivant la démarche de Dormieux, on décompose ce problème en N_v+1 problèmes dont on superposera les solutions. Tout d'abord on définit le problème (P') semblable au problème (P) mais dans lequel les pressions sont considérées comme nulles :

$$\left(P'\right) : \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}') = 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u}' = \underline{\underline{E}}.\underline{x} & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

Puis on définit N_v problèmes dans lesquels les pressions sont considérées non nulles alternativement dans chacune des familles de pores, et la déformation à l'infini est nulle. Lorsque toutes les pressions sont nulles sauf dans la famille i, on obtient le problème :

$$\left(P^i\right) : \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^i) = 0 & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^i(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^i(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}^i_p(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u}^i = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

où

$$\underline{\underline{\sigma}}_p^i(\underline{x}) = \begin{cases} -p^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} & \text{si } \underline{x} \in \Omega^i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.19}$$

On définit ensuite sur le problème auxiliaire (P') le tenseur de localisation $\mathbb{A}$ qui existe par linéarité du problème :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \tag{3.20}$$

Le tenseur des modules homogénéisés du milieu est défini par la relation entre contraintes et déformations macroscopiques dans le problème (P') :

$$\underline{\underline{\Sigma}}' =< \underline{\underline{\sigma}}' >= \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \tag{3.21}$$

Le tenseur des modules homogénéisés est alors lié au tenseur de localisation et au tenseur des modules microscopiques par la relation :

$$\mathbb{C}^{hom} =< \mathbb{C} : \mathbb{A} >_\Omega \tag{3.22}$$

Concernant les problèmes $\left(P^i\right)$, il s'agit d'appliquer le lemme de Hill à un couple bien choisi de champs cinématiquement et statiquement admissibles. Cette démarche provient de la remarque que l'équation 3.3 est vérifiée pour un large choix de champs de tenseurs de déformations et de contraintes, dès lors qu'ils sont solution d'un problème de mécanique (pas forcément le même pour les deux champs) à contraintes ou déformations homogènes imposées. On choisit $\underline{\underline{\sigma}}^i$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}'$:

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i : \underline{\underline{E}} =< \underline{\underline{\sigma}}^i >_\Omega :< \underline{\underline{\varepsilon}}' >_\Omega =< \underline{\underline{\sigma}}^i : \underline{\underline{\varepsilon}}' >_\Omega \tag{3.23}$$

On décompose alors le terme correspondant au problème $\left(P^i\right)$ pour pouvoir appliquer le lemme de Hill une seconde fois et faire apparaître le déformation moyenne dans ce problème, qui est nulle :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i : \underline{\underline{E}} =< \left(\mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^i + \underline{\underline{\sigma}}_p^i\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}' >_\Omega =< \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^i : \underline{\underline{\varepsilon}}' >_\Omega + < \underline{\underline{\sigma}}_p^i : \underline{\underline{\varepsilon}}' >_\Omega =< \underline{\underline{\sigma}}_p^i : \mathbb{A} >_\Omega : \underline{\underline{E}} \tag{3.24}$$

La déformation $\underline{\underline{E}}$ étant quelconque, on obtient un résultat lié au théorème de Levin [23] :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i =< \underline{\underline{\sigma}}_p^i : \mathbb{A} >_\Omega \tag{3.25}$$

Ce résultat est très intéressant. Il nous dit que la manière dont la pression dans une famille de pore influe sur la contrainte macroscopique est liée très simplement à la manière dont une déformation extérieure joue sur la déformation de cette même famille de pores.

Si l'on explicite la forme du champ d'autocontrainte dans la famille i et qu'on somme les $N_v + 1$ problèmes évoqués ci-dessus, on obtient l'équation macroscopique suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{i=1}^{N_v} p^i \underline{\underline{B}}^i \tag{3.26}$$

Où les coefficients de Biot $\underline{\underline{B}}^i$ s'écrivent de la manière suivante en fonction de la moyenne du tenseur de localisation sur la famille considérée :

$$\underline{\underline{B}}^i = f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A} >_i \tag{3.27}$$

On s'intéresse maintenant aux N_v autres équations du comportement poroélastique macroscopique, qui décrivent l'évolution du volume des familles de pores sous déformation imposée à l'infini et la pression dans les pores. Si l'on note ϕ^j la fraction volumique de la famille de pores j

en configuration déformée et comme jusqu'à présent, f^j cette même grandeur dans la configuration initiale, la variation de fraction volumique d'une famille donnée est liée à la déformation moyenne sur le domaine qu'elle occupe, dans les différents problèmes introduits, par la relation :

$$\phi^j - f^j = f^j \operatorname{tr} < \underline{\underline{\varepsilon}} >_j = f^j \left(\operatorname{tr} < \underline{\underline{\varepsilon}}' >_j + \sum_{i=1}^{N_v} \operatorname{tr} < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j \right) \tag{3.28}$$

Où tr désigne la trace d'un tenseur d'ordre 2. La déformation dans le problème (P') sur la phase j s'écrit simplement :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}}' >_j = < \mathbb{A} >_j : \underline{\underline{E}} \tag{3.29}$$

Pour le problème i, supposons que le solide est homogène de module $\mathbb{C}^0$ (et de souplesse qu'on note $\mathbb{S}^0$). On peut alors écrire la moyenne de la déformation sur le VER qui est nulle par définition des problèmes auxiliaires en fonction des moyennes sur les phases :

$$\begin{aligned} < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_\Omega = 0 &= (1-f) < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_s + \sum_{j=1}^{N_v} f^j < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j \\ &= (1-f)\mathbb{S}^0 : < \underline{\underline{\sigma}}^i >_s + \sum_{j=1}^{N_v} f^j < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j \end{aligned} \tag{3.30}$$

On peut de même décomposer la contrainte sur le VER dans le problème i en tenant compte du fait que dans le problème i seul le champ d'autocontrainte relatif à la famille i est non nul :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}^i = < \underline{\underline{\sigma}}^i >_\Omega &= (1-f) < \underline{\underline{\sigma}}^i >_s + \sum_{j=1}^{N_v} f^j < \underline{\underline{\sigma}}^i >_j \\ &= (1-f) < \underline{\underline{\sigma}}^i >_s + f^i < \underline{\underline{\sigma}}^i >_i \\ &= (1-f) < \underline{\underline{\sigma}}^i >_s - f^i p^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

On applique ensuite le résultat obtenu par le théorème de Levin :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^i = -p^i \underline{\underline{B}}^i \tag{3.32}$$

On a donc :

$$\sum_{j=1}^{N_v} f^j < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j = p^i \mathbb{S}^0 : (\underline{\underline{B}}^i - f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}}) \tag{3.33}$$

Le problème est que l'on souhaite calculer la quantité $\sum_{j=1}^{N_v} < \underline{\underline{\varepsilon}}^j >_i$, et non $\sum_{j=1}^{N_v} f^j < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j$. On s'en sort avec l'hypothèse suivante : on suppose que dans le problème j, c'est-à-dire le problème sans chargement extérieur où seule la famille j est mise sous pression, la déformation moyenne de la famille j est très grande devant cette des autres familles. On peut alors écrire :

$$\sum_{j=1}^{N_v} < \underline{\underline{\varepsilon}}^j >_i \simeq \frac{1}{f^i} \sum_{j=1}^{N_v} f^j < \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j \tag{3.34}$$

Et exprimer la variation de fraction volumique de la famille i :

$$\phi^i - f^i = f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} : < \mathbb{A} >_i : \underline{\underline{E}} + p^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{S}^0 : \left(\underline{\underline{B}}^i - f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) \tag{3.35}$$

On peut donc écrire le comportement poromécanique homogénéisé de manière compacte :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{i=1}^{N_v} p^i \underline{\underline{B}}^i \\ \phi^j - f^j = \underline{\underline{B}}^j : \underline{\underline{E}} + p^j M^j \quad \text{pour } j \in \{1, N_v\} \end{cases} \tag{3.36}$$

Avec :

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}}^i = f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A} >_i \\ M^i = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{S}^0 : \left(\underline{\underline{B}}^i - f^i \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) \end{cases} \tag{3.37}$$

Les équations 3.37 permettent donc de calculer les propriétés poromécaniques homogénéisées qu'on appelle coefficient de Biot $\underline{\underline{B}}^i$ et module de Biot M^i. Nous avons pour ce dernier utilisé une définition différente de celle adoptée par Dormieux [11], par simplicité d'écriture. Ces équations complètent la relation 3.12, nous pouvons ainsi calculer toutes les propriétés homogénéisées de notre matériau à partir d'un seul champ de tenseur de localisation, d'ordre 4, ou plutôt de ses moyennes sur chaque phase.

Pour aller plus loin, il nous faut donner des expressions concrètes de ce tenseur de localisation. Un outil essentiel est le résultat d'Eshelby, que nous exposons dans la prochaine partie, ainsi qu'un résultat qui étend celui d'Eshelby et que nous avons démontré par une méthode originale.

3.5 Résultats théoriques

Cette partie présente quelques résultats classiques de la micromécanique, en commençant par le célèbre résultat d'Eshelby [15], qui est le fondement théorique de tous les estimateurs micromécaniques.

3.5.1 Résultat d'Eshelby

Le résultat d'Eshelby est le suivant : si l'on considère un milieu élastique homogène infini caractérisé par son tenseur des modules élastiques $\mathbb{C}^0$, qu'on applique dans un volume V de forme ellipsoïdale de ce milieu un champ homogène de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ et que le milieu est laissé libre à l'infini, le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans V est homogène, et sa valeur est caractérisée par un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur d'Eshelby noté $\mathbb{S}^0_V$ dépendant uniquement des rapports d'aspects de l'ellipsoïde et des modules élastiques du milieu infini :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{S}^0_V : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \ , \ \forall \underline{x} \in V \tag{3.38}$$

Rappelons qu'un champ de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ est une déformation qui rentre dans la loi de comportement, la rendant affine plutôt que linéaire, la modifiant de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}^0 : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*\right) \tag{3.39}$$

L'appellation champ de déformation libre venant du fait que si, localement, la contrainte est nulle, la déformation est alors égale à la déformation libre.

3.5.2 Idée de la démonstration

Le champ de déformation dans l'inclusion s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \int_V \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dy : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \tag{3.40}$$

où Γ^∞ est le tenseur symétrisé des dérivées secondes de l'opérateur de Green pour l'élasticité en milieu infini $\mathbb{G}^\infty$:

$$\Gamma^\infty_{klmn} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{G}^\infty_{km,ln} + \mathbb{G}^\infty_{kn,lm}\right) \tag{3.41}$$

La propriété d'Eshelby découle de la démonstration que l'intégrale $\int_V \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x})dy$ est une constante lorsque $\underline{x} \in V$ et que V est de forme ellipsoïdale.

3.5.3 Addition d'un chargement à l'infini

Supposons qu'en plus des hypothèses précédentes le matériau soit soumis à l'infini à la déformation homogène $\underline{\underline{E}}$. Par théorème de superposition, le champ de déformation dans l'inclusion s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} + \mathbb{S}^0_V : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \ , \ \forall \underline{x} \in V \tag{3.42}$$

3.5.4 Exemples de tenseurs d'Eshelby

Mura, dans son livre de 1984 [27], détaille les composantes des tenseurs d'Eshelby pour plusieurs situations classiques. En général on obtient une expression très simple lorsque l'ellipsoïde considéré a une symétrie de révolution et que le matériau qui l'entoure est isotrope. Considérons ici un matériau isotrope caractérisé par son coefficient de Poisson ν.

3.5.4.1 Ellipsoïde de révolution

Une écriture très pratique est donnée par Dormieux dans [11], p. 196. Elle concerne le cas d'un ellipsoïde de révolution aplati. Le petit axe c et le double grand axe a permettent de définir le rapport d'aspect $X = \frac{c}{a} < 1$. Définissant tout d'abord le facteur :

$$b(X, \nu) = (\nu - 1)(1 - X^2)^2\sqrt{1 - X^2} \tag{3.43}$$

On obtient les diverses composantes indépendantes et non nulles du tenseur d'Eshelby par les formules :

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{x}{16}\Big[(19 - 8\nu^c)x\sqrt{1 - x^2} + (8\nu^c - 13)\arccos(x) \\
&\quad + (4 - 8\nu^c)\arccos(x)x^2 + (8\nu^c - 10)x^3\sqrt{(1 - x^2)}\Big] \\
\mathbb{S}_{1122} &= -\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{x}{16}\Big[-(1 + 8\nu^c)x\sqrt{1 - x^2} + (8\nu^c - 1)\arccos(x) \\
&\quad + (4 - 8\nu^c)\arccos(x)x^2 + (8\nu^c - 2)x^3\sqrt{1 - x^2}\Big] \\
\mathbb{S}_{3333} &= -\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{1}{2}\Big[(2 - 2\nu^c)\sqrt{1 - x^2} + (2\nu^c - 1)x\arccos(x) \\
&\quad +(2\nu^c - 5)x^2\sqrt{1 - x^2} + (4 - 2\nu^c)x^3\arccos(x)\Big] \\
\mathbb{S}_{1133} &= -\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{x}{4}\Big[-2(1 + \nu^c)\arccos(x)x^2 + (2\nu^c - 1)\arccos(x) \\
&\quad +(3 - 2\nu^c)x\sqrt{1 - x^2} + 2\nu^c x^3\sqrt{1 - x^2}\Big] \\
\mathbb{S}_{3311} &= \frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{1}{4}\Big[2(1 - 2\nu^c)\arccos(x)x^3 + (1 + 4\nu^c)x\arccos(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(3-4\nu^c)x^2\sqrt{1-x^2}-4\nu^c\sqrt{1-x^2}\Big] \\
\mathbb{S}_{3131} = &\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{1}{4}\Big[(2-\nu^c)x\arccos(x)+(2\nu^c-2)\sqrt{1-x^2} \\
&+(1+\nu^c)x^3\arccos(x)-3\nu^c x^2\sqrt{1-x^2}+(\nu^c-1)x^4\sqrt{1-x^2}\Big]
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Les directions 1 et 2 sont alors équivalentes, ce qui permet d'obtenir les autres composantes non nulles par les permutations appropriées sur les indices $\{1,2\}$.

3.5.4.2 Sphère

Les composantes non nulles sont données par :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_{1111} &= \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)} \\
\mathbb{S}_{1122} &= \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)} \\
\mathbb{S}_{1212} &= \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

et par permutation circulaire sur les indices $\{1,2,3\}$. Les composantes ne dépendent bien sûr pas de la taille de la sphère car la sphère étant plongée dans un milieu infini, il n'y a pas d'autre longueur à laquelle comparer le rayon de la sphère.

3.5.4.3 Cylindre elliptique

Considérant un cylindre infini dans la direction 3, à base elliptique caractérisée par un grand axe et un petit axe a_1 et a_2, plongé dans un milieu homogène isotrope infini de coefficient de Poisson ν, voici les composantes données par Mura :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_2^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}+(1-2\nu)\frac{a_2}{a_1+a_2}\right\} \\
\mathbb{S}_{2222} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_1^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}+(1-2\nu)\frac{a_1}{a_1+a_2}\right\} \\
\mathbb{S}_{3333} &= 0 \\
\mathbb{S}_{1122} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_2^2}{(a_1+a_2)^2}-(1-2\nu)\frac{a_2}{a_1+a_2}\right\} \\
\mathbb{S}_{2233} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{2\nu a_1}{a_1+a_2} \\
\mathbb{S}_{3311} &= 0 \\
\mathbb{S}_{1133} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{2\nu a_2}{a_1+a_2} \\
\mathbb{S}_{2211} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_1^2}{(a_1+a_2)^2}-(1-2\nu)\frac{a_1}{a_1+a_2}\right\} \\
\mathbb{S}_{3322} &= 0 \\
\mathbb{S}_{1212} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_1^2+a_2^2}{2(a_1+a_2)^2}-\frac{1-2\nu}{2}\right\} \\
\mathbb{S}_{2323} &= \frac{a_1}{2(a_1+a_2)}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{S}_{3131} = \frac{a_2}{2(a_1 + a_2)} \tag{3.46}$$

Évidemment, chacune de ses composantes ne dépend que du rapport $\frac{a_1}{a_2}$ et non de leur valeur indépendamment.

3.5.4.4 Disque, en 2D

Utilisant la solution du cylindre infini, si $a_1 = a_2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{5}{4} - \nu\right\} \\ \mathbb{S}_{1122} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\nu - \frac{1}{4}\right\} \\ \mathbb{S}_{1212} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\nu - \frac{1}{4}\right\} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Le résultat d'Eshelby nous permet donc, à partir de la connaissance d'un champ de déformation libre imposé dans un domaine ellipsoïdal d'un milieu homogène infini, de calculer la déformation, qui est homogène, à l'intérieur de cet ellipsoïde. Le paragraphe suivant aborde la question du milieu contenant une hétérogénéité, c'est-à-dire un matériau de modules différents du milieu infini, par la méthode de l'inclusion équivalente, également proposée par Eshelby.

3.5.5 Inclusion équivalente

Un autre problème est également résolu par Eshelby en utilisant le résultat précédent. Supposons cette fois que le volume V, toujours de forme ellipsoïdale, entouré d'un milieu élastique $\mathbb{C}^0$ soumis à la déformation homogène $\underline{\underline{E}}$ à l'infini, contient un matériau de module élastique $\mathbb{C}^i$. C'est alors une hétérogénéité. La loi de comportement dans V s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^i = \mathbb{C}^i : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.48}$$

On introduit un problème auxiliaire appelé problème de l'inclusion équivalente dans lequel le matériau à l'intérieur de V est remplacé par le matériau $\mathbb{C}^0$, mais où l'intérieur de V est soumis au champ de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$, pour l'instant inconnu, mais qu'il faut identifier pour résoudre. Formellement cela revient à faire les transformations suivantes sur la loi de comportement 3.48 :

- D'abord on la réécrit en faisant apparaître le module du matériau extérieur V :

$$\underline{\underline{\sigma}}^i = \mathbb{C}^0 : \left[\underline{\underline{\varepsilon}} + (\mathbb{C}^0)^{(-1)} : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}\right] \tag{3.49}$$

- Supposons le terme $(\mathbb{C}^0)^{(-1)}\left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}$ constant. On l'appelle $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ et on applique le résultat d'Eshelby avec chargement à l'infini évoqué dans la partie précédente 3.42, qui nous donne la déformation dans l'ellipsoïde V :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{E}} + \mathbb{S}_V^0 : (\mathbb{C}^0)^{(-1)} : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}\ , \forall x \in V \tag{3.50}$$

  où apparaît le tenseur $\mathbb{P}_V^0 = \mathbb{S}_V^0 : (\mathbb{C}^0)^{(-1)}$, appelé tenseur de Hill, qui possède les symétries mineures comme le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}_V^0$, mais possède en plus la symétrie majeure.

Nous voyons que cette équation est cohérente avec l'hypothèse d'un champ de déformation constant dans l'inclusion. Ayant supposé le champ de déformation dans l'inclusion constant, la seule expression possible est :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_V^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \tag{3.51}$$

Nous trouvons ainsi le champ de déformation dans une hétérogénéité en fonction de la déformation imposée à l'infini, des tenseurs des modules des deux milieux, et du tenseur de Hill de l'ellipsoïde.

Nous présentons maintenant une généralisation du résultat d'Eshelby qui nous a été utile pour notre premier modèle pour l'alcali-réaction [9], mais que nous n'avons pas utilisé pour notre modèle final, y préférant le formalisme très pratique de microporomécanique. Nous mentionnons néanmoins ce résultat théorique car nous avons trouvé une nouvelle démonstration fondée sur le principe de réciprocité, qui nous semble plus élégante que la démonstration traditionnelle, et parce qu'il permet de mieux comprendre certains estimateurs de micromécanique que nous présentons ensuite. Commençons par exposer ce résultat dans sa version la plus ancienne, à notre connaissance.

3.5.6 Théorème de Tanaka-Mori, généralisation de Nemat-Nasser

3.5.6.1 Présentation du résultat

Dans l'article de Tanaka et Mori de 1972 [35], le résultat suivant est démontré : Soit Ω un domaine de forme arbitraire dans un milieu élastique infini, et $\mathcal{E}^1$ et $\mathcal{E}^2$ deux ellipsoïdes tels que $\Omega \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2$. Si $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ est un champ de déformation libre uniforme imposé dans Ω et que le milieu est libre de contraintes à l'infini, alors l'intégrale de la déformation entre les deux ellipsoïdes s'écrit :

$$\int_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \Omega \left[\mathbb{S}_{\mathcal{E}^2} - \mathbb{S}_{\mathcal{E}^1}\right] \underline{\underline{\varepsilon}}^* \tag{3.52}$$

où $\mathbb{S}_{\mathcal{E}}$ est le tenseur d'Eshelby relatif au matériau extérieur et à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, et où on note Ω le volume du domaine du même nom.

3.5.6.2 Généralisation de Nemat-Nasser

Ce résultat peut-être généralisé [28] au cas où le champ de déformation libre n'est pas uniforme sur l'inclusion ($\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ est alors simplement remplacé par la moyenne du champ de déformation libre sur l'inclusion). Nous récapitulons la démonstration puis écrivons le résultat 3.56.

3.5.7 Démonstration

Nous nous plaçons dans le cas où le champ de déformation libre $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ n'est pas uniforme sur l'inclusion Ω. Le champ de déformation dans l'inclusion s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \int_{\Omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \tag{3.53}$$

où Γ^{∞} est le tenseur symétrisé des dérivées secondes de l'opérateur de Green pour l'élasticité en milieu infini $\mathbb{G}^{\infty}$:

$$\Gamma^{\infty}_{klmn} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{G}^{\infty}_{km,ln} + \mathbb{G}^{\infty}_{kn,lm}\right) \tag{3.54}$$

Si l'on souhaite calculer la déformation moyenne entre les deux ellipsoïdes entourant l'inclusion, il est nécessaire de calculer l'intégrale :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} = \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \int\limits_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \left\{ \int\limits_{\Omega} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \right\} dx \tag{3.55}$$

Comme expliqué dans Nemat-Nasser [28], l'ordre d'intégration peut être changé, la non-intersection des deux domaines sur lesquels l'intégration porte étant une condition suffisante (l'intégrand n'étant singulier que lorsque son argument approche de l'origine) :

$$\begin{aligned} < \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} &= \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \int\limits_{\Omega} \left\{ \int\limits_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dx \right\} dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \int\limits_{\Omega} \left\{ \int\limits_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} \Gamma^{\infty}(\underline{y} - \underline{x}) dx \right\} : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \end{aligned} \tag{3.56}$$

Nous reconnaissons entre les accolades la différence des tenseurs d'Eshelby des deux ellipsoïdes, qui sont indépendants des coordonnées spatiales lorsque $\underline{y}$ est dans l'ellipsoïde, ce qui est le cas présent puisque $\Omega \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2$. Le résultat est :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}^2 \setminus \mathcal{E}^1} = \frac{\Omega}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^1} \left[\mathbb{S}_{\mathcal{E}^2} - \mathbb{S}_{\mathcal{E}^1} \right] < \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_{\Omega} \tag{3.57}$$

On peut donc, pour tout champ de déformation libre imposé dans un domaine de forme quelconque, exprimer la moyenne de la déformation entre deux ellipsoïdes contenant ce domaine, simplement à partir des tenseurs d'Eshelby de ces deux ellipsoïdes.

3.5.8 Une variante du théorème de Tanaka-Mori

Ce résultat, légèrement plus général, permet d'écrire non plus la moyenne de la déformation entre deux ellipsoïdes, mais la moyenne de la déformation sur un ellipsoïde, tout simplement. Ce résultat est démontré par Rodin [31] et Bornert [8] par manipulation de l'ordre d'intégration, comme chez Nemat-Nasser, dans un cadre plus général. Nous donnons d'abord le résultat, puis expliquerons notre démonstration.

3.5.8.1 Résultat

Théorème Soit un domaine arbitraire Ω. Ce volume peut contenir n'importe quoi (matériau hétérogène, vides ...). Soit un ellipsoïde quelconque $\mathcal{E}$ englobant Ω. Le matériau élastique contenu dans $\mathcal{E} \setminus \Omega$ est de module $\mathbb{C}^m$. Le reste de l'espace tridimensionnel est occupé par un milieu élastique infini de module $\mathbb{C}$. Un jeu de déplacements et vecteurs contraintes est imposé sur le bord de Ω. La déformation est imposée égale à $\underline{\underline{E}}^{\infty}$ à l'infini. Le tenseur des déformations moyennes sur $\mathcal{E}$ est relié aux moyennes des contraintes et déformations sur Ω par la relation :

$$\boxed{\left[\mathbb{C}^m + \mathbb{C}^*_{\mathcal{E}}\right] :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}^{-1}_{\mathcal{E}} : \underline{\underline{E}}^{\infty} + \rho \left[\mathbb{C}^m :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\Omega} - < \underline{\underline{\sigma}} >_{\Omega}\right]} \tag{3.58}$$

Avec $\rho = \frac{\Omega}{\mathcal{E}}$ la fraction volumique de Ω dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. $\mathbb{P}^{-1}_{\mathcal{E}}$ est le tenseur de Hill relatif à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et au milieu extérieur $\mathbb{C}$. Le tenseur $\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}^{-1}_{\mathcal{E}} - \mathbb{C}$ est appelé tenseur d'influence. Nous détaillons ses propriétés pendant la démonstration.

Afin de se rendre compte de la portée de ce résultat, comparons-le aux versions antérieures les plus connues, avant de passer à la démonstration.

3.5.8.2 Comparaison de ce résultat avec celui de Tanaka and Mori généralisé par Nemat-Nasser

La différence principale est que pour une hétérogénéité quelconque, notre résultat informe sur la moyenne des déformations sur n'importe quelle ellipsoïde l'englobant, et non entre deux ellipsoïdes incluses l'une dans l'autre l'englobant. La démonstration utilise le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, que nous rappelons rapidement.

3.5.8.3 Théorème de Maxwell-Betti

Soit $\mathcal{W}^V(\underline{f}, \underline{u})$ le travail des efforts extérieurs notés $\underline{f}$ dans le champ de déplacement $\underline{u}$. Le théorème de Maxwell-Betti affirme que si $\underline{u}^\alpha$ est la solution du problème associé aux efforts extérieurs $\underline{f}^\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ sur le domaine V,

$$\mathcal{W}^V(\underline{f}^1, \underline{u}^2) = \mathcal{W}^V(\underline{f}^2, \underline{u}^1) \tag{3.59}$$

Notre démonstration s'appuie sur l'utilisation de ce théorème dans un problème mécanique que l'on appelle problème extérieur puisqu'il est posé sur le milieu infini extérieur à l'ellipsoïde.

3.5.8.4 Problème extérieur $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}$

Nous travaillons sur le complémentaire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ dans l'espace infini matérialisé par une boîte carrée (Fig. 3.1). Soit sur ce domaine les champs de contraintes et déplacements $(\underline{\underline{\sigma}}^{ext}, \underline{u}^{ext})$

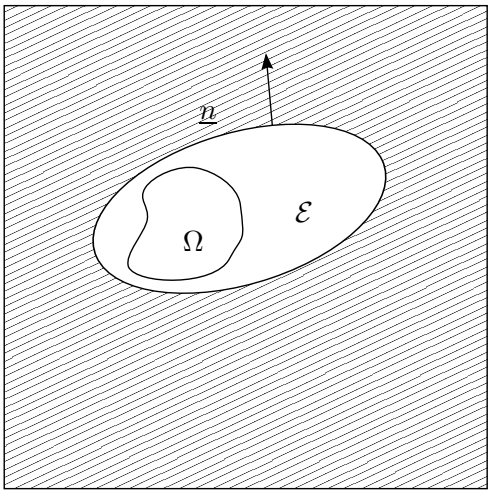

FIGURE 3.1 – Problème extérieur utilisé pour la démonstration de la généralisation du théorème de Tanaka-Mori

solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} \underline{u}^{ext} & = & \underline{\underline{\tilde{E}}}.\underline{x} & , & \partial\mathcal{E} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{ext} & \to & 0 & , & , |\underline{x}| \to \infty \end{array} \right. \tag{3.60}$$

Nous ne savons pas écrire la solution de ce problème en général, c'est-à-dire pour un ellipsoïde $\mathcal{E}$ et un tenseur des modules $\mathbb{C}$ quelconques, mais voici deux propriétés importantes de la solution :

1. Le vecteur contrainte sur $\partial\mathcal{E}$ est connu et s'écrit :

$$\underline{f}^{ext} = \underline{\underline{\sigma}}^{ext}.(-\underline{n}) = \left[\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} : \underline{\underline{\tilde{E}}}\right].\underline{n} \tag{3.61}$$

   Deux conditions nécessaires (à notre connaissance) étant que $\underline{\underline{\tilde{E}}}$ soit homogène et $\mathcal{E}$ soit un ellipsoïde. Le tenseur du quatrième ordre $\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}}$ est appelé tenseur d'influence associé à $\mathcal{E}$

dans le matériau $\mathbb{C}$. Il possède les symétries majeures et mineures, et est défini positif. Il dépend, comme le tenseur de Hill, des rapports de forme de l'ellipsoïde et des coefficients élastiques du matériau extérieur à l'ellipsoïde. Il est lié au tenseur de Hill par la relation : $\mathbb{C} + \mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}^{-1}$.

2. Nous savons que la déformation tend vers zéro à l'infini mais il est utile de savoir comment. Les propriétés de l'opérateur de Green pour l'élasticité permettent de montrer que (voir par exemple [8]) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{ext} \sim \frac{1}{|x|^3} \quad , |\underline{x}| \to \infty \tag{3.62}$$

Propriété qui n'est pas spécifique au cas de l'ellipsoïde.

Nous appliquons le théorème de Maxwell-Betti sur le domaine $\lambda\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}$, puis $\lambda > 1$ tend vers l'infini de façon à ce que $\lambda\mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$.
On peut écrire (3.60) :

$$\mathcal{W}^{\lambda\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}, \underline{u}^{ext}) = \int_{\partial\mathcal{E}} \left[\underline{\underline{\sigma}}.(-\underline{n})\right] . \left[\underline{\underline{\tilde{E}}}.\underline{x}\right] dS + \int_{\partial(\lambda\mathcal{E})} \left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}\right] .\underline{u}^{ext} dS \tag{3.63}$$

Puis la remarque (3.62) entraîne $\underline{u}^{ext} \sim \frac{1}{|x|^2}$ à l' ∞, et ayant de plus $\underline{\underline{\sigma}} \to 0$ à l' ∞, on montre que le second terme tend vers zéro lorsque $\lambda \to \infty$. En conséquence, après quelques manipulations sur le premier terme, on obtient :

$$\mathcal{W}^{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}, \underline{u}^{ext}) = -\int_{\partial\mathcal{E}} \left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}\right] \otimes \underline{x} dS : \underline{\underline{\tilde{E}}} \tag{3.64}$$

Où $\otimes$ est le produit tensoriel. Le deuxième travail que l'on doit calculer s'écrit :

$$\mathcal{W}^{\lambda\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}^{ext}, \underline{u}) = \int_{\partial\mathcal{E}} \left[\left(\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} : \underline{\underline{\tilde{E}}}\right) .\underline{n}\right] .\underline{u} dS + \int_{\partial(\lambda\mathcal{E})} \left[\underline{\underline{\sigma}}^{ext}.\underline{n}\right] .\underline{u} dS \tag{3.65}$$

Comme $\underline{\underline{\sigma}}^{ext} \sim \frac{1}{|x|^3}$ à l' ∞ et $\frac{\underline{u}^{ext}}{|x|} \to 0$ à l' ∞, le second terme tend ici encore vers zéro lorsque $\lambda \to \infty$, et on obtient :

$$\mathcal{W}^{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}}(\underline{f}^{ext}, \underline{u}) = \mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} : \int_{\partial\mathcal{E}} \underline{u} \otimes \underline{n} dS : \underline{\underline{\tilde{E}}} \tag{3.66}$$

Enfin, comme ces deux travaux sont égaux et que la déformation $\underline{\underline{\tilde{E}}}$ est quelconque, on obtient la formule suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{E}} \left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}\right] \otimes \underline{x} dS = -\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} : \int_{\partial\mathcal{E}} \underline{u} \otimes \underline{n} dS \tag{3.67}$$

qu'on réécrit de manière compacte :

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_{\mathcal{E}} = -\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}} \tag{3.68}$$

Remarque : Cette équation généralise ce que l'on a pris comme définition du tenseur d'influence $\mathbb{C}^*_{\mathcal{E}}$ au cas où les champs de contraintes et déformation sont hétérogènes dans l'inclusion. En général, le tenseur d'influence $\mathbb{C}^*$ peut être défini pour n'importe quelle inclusion, comme expliqué dans Walpole [36]. Cependant si l'inclusion n'est pas ellipsoïdale, le tenseur dépend également des modules d'élasticité dans l'inclusion.

Remarque : On peut bien sûr étendre ce résultat au cas où une déformation est imposée à l'infini $\underline{\underline{E}}^{\infty}$. On obtient alors par superposition la formule :

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}^{-1} : \underline{\underline{E}}^{\infty} - \mathbb{C}^{*}_{\mathcal{E}} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}} \tag{3.69}$$

Nous cherchons maintenant une seconde relation, de façon à pouvoir exprimer les moyennes de la contrainte ou de la déformation sur l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ en fonction de ces quantités sur le domaine Ω.

3.5.8.5 Deuxième relation

Il s'agit d'une réécriture du comportement dans $\mathcal{E} \setminus \Omega$ où le module élastique est $\mathbb{C}^{m}$. On moyenne simplement la loi de comportement sur ce domaine pour obtenir :

$$\mathbb{C}^{m} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E} \setminus \Omega} = < \underline{\underline{\sigma}} >_{\mathcal{E} \setminus \Omega} \tag{3.70}$$

3.5.8.6 Conclusion de la démonstration

On combine les équations (3.70) et (3.69) pour écrire :

$$[\mathbb{C}^{m} + \mathbb{C}^{*}(\mathcal{E})] :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\mathcal{E}} = \mathbb{P}^{-1}(\mathcal{E}) : \underline{\underline{E}}^{\infty} + \rho \left[\mathbb{C}^{m} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\Omega} - < \underline{\underline{\sigma}} >_{\Omega}\right] \tag{3.71}$$

Ce résultat, que nous avons discuté lorsque nous l'avons présenté, est ici, à notre connaissance, écrit dans sa version la plus générale. La moyenne de la déformation sur tout ellipsoïde entourant une hétérogénéité, peut être écrite analytiquement en fonction des moyennes des contraintes et déformations sur l'hétérogénéité, ceci quels que soient le contenu de l'hétérogénéité, le matériau à l'extérieur de l'ellipsoïde, et le matériau entre les deux. Nous avons utilisé cette formule dans notre article [9], mais pas dans le modèle qui est présenté dans ce mémoire en partie 3.

La section suivante est dédiée aux estimateurs de micromécanique. Nous essayons d'expliquer leur établissement à la lumière de la démonstration de notre formule 3.71. Il nous semble que pour quelques schémas, comme celui de Mori-Tanaka, cela apporte une meilleure compréhension des hypothèses.

3.6 Estimateurs de micromécanique

Nous allons dans cette partie présenter une série d'approximations qui servent à obtenir des valeurs approchées pour les tenseurs de localisation sur les inclusions. Nous commençons par un modèle qui n'est pas opérationnel, mais nous semble important pour la compréhension de la démarche, le modèle à trois phases. Nous passerons ensuite à des modèles plus simples et parfois d'une grande facilité d'utilisation, en essayant de souligner leurs défauts.

3.6.1 Modèle à trois phases

Ce modèle est présenté par Hori et Nemat-Nasser dans l'article [19].

3.6.1.1 Présentation du problème

Présentons le cas général qui résume l'idée de départ de la plupart des estimateurs. Pour simplifier au maximum le calcul du tenseur de localisation d'une inclusion, on la plonge dans un milieu infini. On place ensuite des conditions aux limites à l'infini en déformation homogène. Dans le cas le plus simple, le milieu entourant l'inclusion sera le milieu matrice. Cependant une

façon de tenir compte de la présence d'autres inclusions est de ne laisser de milieu matrice que ce qu'il faut pour respecter les fractions volumiques respectives de la matrice et des inclusions, puis de mettre un autre milieu entre l'ensemble matrice-inclusion et l'infini. On note $\mathbb{C}^i$, $\mathbb{C}^0$ et $\mathbb{C}^{ext}$ les tenseurs des module d'élasticité de l'inclusion, de la matrice et du milieu extérieur. Le milieu extérieur, qui fait le lien entre la condition aux limites en déformation imposée et l'ellipsoïde qui contient le domaine de matrice et d'inclusion, influe sur l'estimation du tenseur de localisation sur l'inclusion. Le choix de ce matériau fait partie de l'établissement des modèles de micromécanique. On obtient alors le problème auxiliaire suivant schématisé sur la Fig. 3.2.

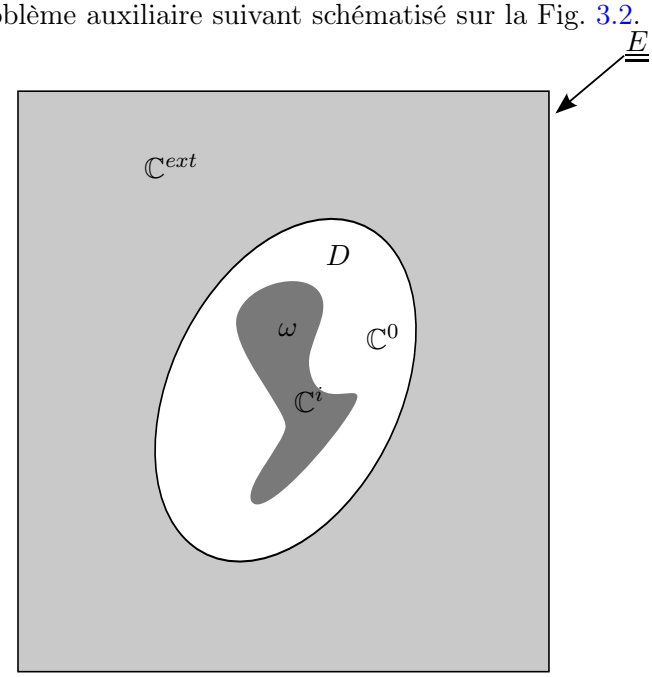

FIGURE 3.2 – Modèle à trois phases

Évidemment, on ne s'attend pas à ce qu'une telle description soit parfaite. L'objectif recherché est le suivant : on veut que la moyenne des déformations sur l'inclusion que l'on va calculer grâce au problème auxiliaire soit proche de la moyenne des déformations sur l'ensemble des inclusions de la classe considérée dans le matériau réel. On ne peut pas espérer mieux, puisqu'en réalité toutes les inclusions de la même classe ne peuvent être exactement dans le même état mécanique, certaines pouvant être plus proches ou plus éloignées des autres. Si l'on est également intéressé par des valeurs locales des champs, le risque est encore plus grand de se tromper en utilisant un tel modèle. La valeur locale des champs est influencée par la présence des inclusions voisines dans le problème réel.

Mettant ces remarques de côté, nous allons exposer le calcul de quelques tenseurs de localisation dans le cas simplifié où l'inclusion est de forme ellipsoïdale et la distribution spatiale des inclusions l'est également (Fig. 3.3). L'ellipsoïde ω est de la forme des inclusions qu'on a supposées ellipsoïdales. L'ellipsoïde extérieur D, a pour vocation de représenter la distribution spatiale des inclusions dans le milieu réelle. Si cette distribution est anisotrope, c'est-à-dire que la probabilité de rencontrer un centre de particule à une distance donnée d'un autre centre varie selon les directions d'investigation, et que les isovaleurs de cette probabilité est de forme ellipsoïdale, on choisit D comme étant homothétique à cet ellipsoïde. Sa taille est choisie de sorte que le rapport des volumes de l'inclusion et de l'atmosphère soit égal à la fraction volumique d'inclusions dans le composite réel. On appelle souvent D l'atmosphère. Cette hypothèse de forme et distribution ellipsoïdale des inclusions nous permettra d'utiliser le résultat d'Eshelby, sur lequel se fondent tous les schémas de ce type.

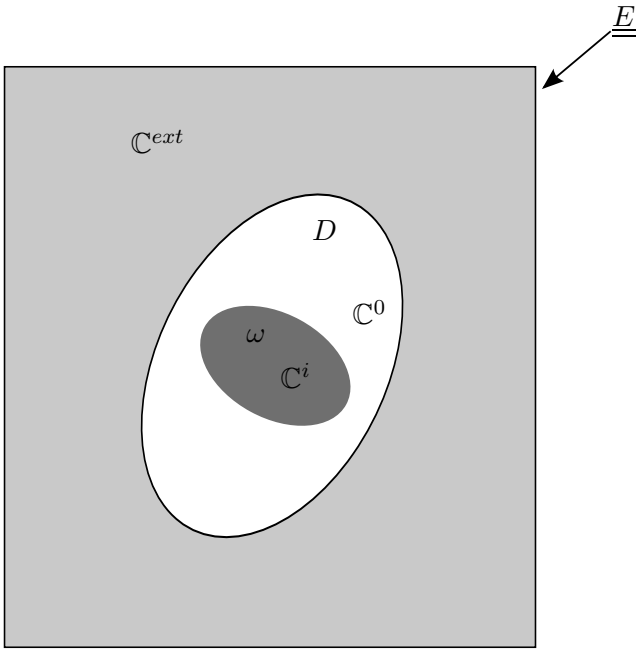

FIGURE 3.3 – Modèle à trois phases, inclusions et distribution des inclusions ellipsoïdales

Le cas le plus général du modèle à trois phases n'admet à notre connaissance pas de solution analytique exacte, c'est-à-dire qu'on n'est pas capable d'écrire la moyenne des déformations sur l'inclusion ω de manière analytique en fonction des tenseurs des modules des trois matériaux $\mathbb{C}^i$, $\mathbb{C}^0$ et $\mathbb{C}^{ext}$, des formes des ellipsoïdes caractérisées par leur tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}^0_\omega$ et $\mathbb{S}^{ext}_D$ où l'indice désigne l'ellipsoïde considéré et l'exposant le milieu dans lequel il est plongé, la fraction volumique d'inclusions dans le problème réel f, lié à la fraction volumique d'inclusion dans le matériau matrice de façon à ce que $f = \frac{\omega}{D}$.

3.6.1.2 Double inclusion équivalente

Il est tentant d'appliquer la même idée que celle d'Eshelby. Cela revient à remplacer les matériaux contenus dans les deux ellipsoïdes par le matériau du milieu infini, et à introduire un champ de déformation libre. Le résultat d'Eshelby ne pouvant être appliqué à cette situation, on ne peut montrer que les champs de déformation dans le problème réel donc de déformation libre dans le problème à l'inclusion équivalente sont homogènes. Reprenons cependant la démarche pour voir où se situe le blocage. On travaille sur le problème équivalent schématisé sur la figure 3.4.

On est amené à calculer les moyennes de la déformation dans le problème équivalent en fonction du champ de déformation libre pour l'instant inconnu. On tombe alors sur l'intégrale :

$$\begin{aligned} <\underline{\underline{\varepsilon}}>_\omega &= \frac{1}{\omega}\int_\omega\int_D \left\{\Gamma^\infty(\underline{y}-\underline{x}) : \mathbb{C}^{ext} : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y})dy\right\} dx \\ &= \frac{1}{\omega}\int_D\int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y}-\underline{x})dx : \mathbb{C}^{ext} : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y})dy \end{aligned} \tag{3.72}$$

Dans cette intégrale, $\underline{x} \in \omega$ et $\underline{y} \in D$. Cependant, pour identifier $\int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y}-\underline{x})dx : \mathbb{C}^{ext}$ au tenseur d'Eshelby de l'ellipsoïde ω il faut que $\underline{y} \in \omega$. Or ici, $\omega \subset D$, et non le contraire. On ne peut donc pas expliciter la moyenne des déformations sur ω en fonction de la moyenne du champ de déformation libre sur ω et D. On ne peut pas non plus, par l'application des conditions de

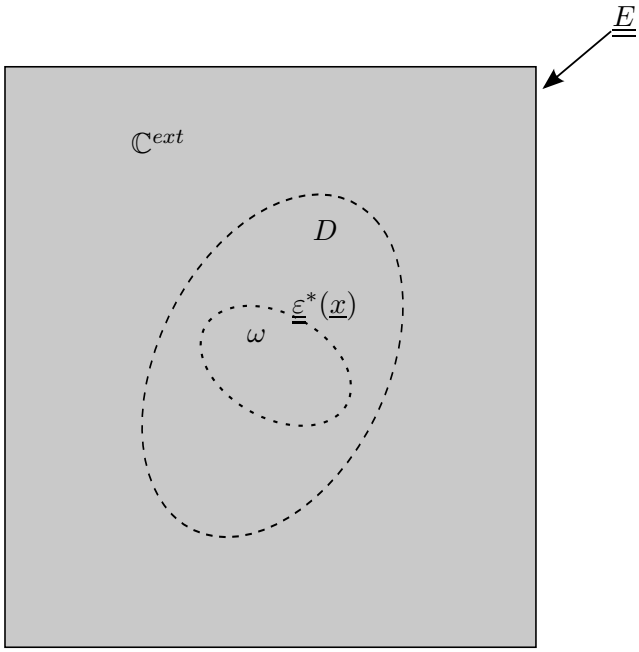

FIGURE 3.4 – Modèle à double inclusion équivalente

cohérence, trouver les moyennes de champ de déformation libre qui assurent l'équivalence entre les deux problèmes et par conséquent on n'arrive pas à exprimer analytiquement le tenseur de localisation sur l'inclusion dans ce problème.

On peut en revanche démontrer en quelques lignes notre théorème 3.5.8 ce qui revient à appliquer la démonstration de Nemat-Nasser en s'autorisant l'interversion d'ordre d'intégration sur deux domaines qui ont une intersection. Il est possible de démontrer la validité de cette interversion par des propriétés de l'opérateur de Green [8].

3.6.1.3 Approximation de Hori et Nemat-Nasser [19]

Hori et Nemat-Nasser ont introduit une approximation de l'intégrale mentionnée ci-dessus (équation 3.72) qui permet d'arriver à un tenseur de localisation. Voici les étapes de leur calcul. Ils commencent par isoler une partie de l'intégrale qui se calcule facilement par le résultat d'Eshelby :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_\omega = \mathbb{S}_\omega^{ext} :< \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_\omega + \frac{1}{\omega} \int_{D\setminus\omega} \int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) dy \tag{3.73}$$

En ce qui concerne le second terme, on fait apparaître la moyenne du champ de déformation libre sur l'espace compris entre les deux ellipsoïdes :

$$\begin{aligned} < \underline{\underline{\varepsilon}} >_\omega &= \mathbb{S}_\omega^{ext} :< \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_\omega \\ &+ \frac{1}{\omega} \int_{D\setminus\omega} \int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 :< \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_{D\setminus\omega} dy \\ &+ \frac{1}{\omega} \int_{D\setminus\omega} \int_\omega \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) - < \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_{D\setminus\omega}\right) dy \end{aligned} \tag{3.74}$$

Le terme central se calcule facilement puisqu'on peut ré-inverser l'ordre d'intégration, n'étant plus gêné par la dépendance du champ de déformation libre en les coordonnées d'espace :

$$
\begin{aligned}
< \underline{\underline{\varepsilon}} >_\omega = \mathbb{S}_\omega^{ext} :< \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_\omega + \left[\mathbb{S}_D^{ext} - \mathbb{S}_\omega^{ext}\right] :< \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_{D\backslash\omega} \\
+ \frac{1}{\omega} \int\limits_{D\backslash\omega} \int\limits_{\omega} \Gamma^\infty(\underline{y} - \underline{x}) dx : \mathbb{C}^0 : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{y}) - < \underline{\underline{\varepsilon}}^* >_{D\backslash\omega}\right) dy
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Leur approximation réside dans l'hypothèse que le dernier terme de l'équation 3.75 peut être considéré comme négligeable. Une fois cette approximation faite, l'application des conditions de cohérence permet de trouver le tenseur de localisation qui dépend de la fraction volumique d'hétérogénéités, des formes des ellipsoïdes et du matériau choisi pour le milieu infini par les tenseurs d'Eshelby des ellipsoïdes, et des trois matériaux de l'hétérogénéité, de la matrice et du milieu infini.

Les auteurs démontrent que leur modèle est équivalent au modèle de Mori-Tanaka (voir § 3.6.5) lorsqu'on choisit un ellipsoïde D de même forme et orientation que l'ellipsoïde ω, et que le matériau extérieur est la matrice. Ils démontrent également qu'on retrouve le schéma autocohérent (voir § 3.6.6) lorsqu'on choisit le matériau extérieur égal au matériau homogénéisé que l'on recherche, et encore une fois que les deux ellipsoïdes sont de même forme et orientation. En dehors de ces deux cas où des simplifications particulières apparaissent, l'équation obtenue est implicite et très compliquée, puisque le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé que l'on recherche apparaît des deux côtés.

Comme on est dans l'impossibilité de résoudre cette version idéale de problème auxiliaire, reprenons les modèles simplifiés qui donnent effectivement naissance à des estimations des modules élastiques.

3.6.2 Schéma dilué

Le schéma dilué est le schéma le plus simple, valide lorsque la concentration en inclusions tend vers zéro et correspondant physiquement à une situation où les hétérogénéités sont tellement espacées les unes des autres dans la matrice que chaque inclusion ne voit pas du tout l'influence mécanique des autres. Cela correspond exactement à la solution du problème de l'inclusion équivalente d'Eshelby. La déformation dans chaque hétérogénéité est alors donnée par l'équation 3.51 :

$$
\underline{\underline{\varepsilon}} = \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_V^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \tag{3.76}
$$

Considérant donc un ensemble de N familles d'hétérogénéités ellipsoïdales plongées dans une matrice de module $\mathbb{C}^0$, caractérisées par leur module $\mathbb{C}^i$, leur tenseur de Hill $\mathbb{P}_i^0$ et leur fraction volumique dans la matrice f^i, le tenseur de localisation moyen sur l'inclusion i qu'on appelle $\mathbb{A}_i^{dil}$ s'écrit :

$$
\mathbb{A}_i^{dil} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right]^{-1} \tag{3.77}
$$

Ce tenseur de localisation est, comme traduction élémentaire du résultat d'Eshelby, utilisé à un moment où à un autre dans l'établissement de tous les schémas d'homogénéisation. On utilise ensuite la formule 3.12 pour écrire le module élastique homogénéisé estimé par le schéma dilué :

$$
\mathbb{C}^{dil} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^{N} f^i(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_i^{dil} \tag{3.78}
$$

3.6.3 Schéma différentiel

Le schéma différentiel est une extension du schéma dilué exposé dans le paragraphe précédent 3.6.2. L'idée de ce schéma est de construire le matériau que l'on veut homogénéiser par petits incréments, en démarrant du matériau matrice et en ajoutant des quantités infinitésimales de phase inclusionnaire à chaque étape, jusqu'à parvenir à la fraction volumique totale.

À chaque étape élémentaire, on calcule un tenseur des modules d'élasticité intermédiaire en utilisant le schéma dilué, et on affecte au matériau matrice de l'étape suivante les propriétés élastiques calculées. Un passage à la limite analytique est possible dans les situations les plus simples.

3.6.4 Schéma à deux phases

En général, le schéma qui vient immédiatement après le schéma dilué est le schéma de Mori-Tanaka. Cependant il me semble qu'on comprend mieux les idées qui sont derrière ce schéma en présentant d'abord un schéma qu'on appellera schéma à deux phases, et qui est clairement expliqué par exemple dans Shige [32] (et aussi par Benveniste [6] et Nemat-Nasser [28]). L'idée de départ est qu'ayant plongé une hétérogénéité ω de module $\mathbb{C}^i$ dans une matrice infinie de module $\mathbb{C}^0$ et appliqué un chargement de déformation homogène à l'infini $\underline{\underline{E}}$, on estime la déformation de l'hétérogénéité non pas directement, mais en prenant en compte la déformation de la matrice qui se trouve autour de l'hétérogénéité. On considère en fait que dans le VER réel, l'état mécanique de la matrice est comparable à l'état mécanique de la matrice qui se trouve immédiatement autour de l'hétérogénéité dans le problème auxiliaire.

On entoure donc l'hétérogénéité par un ellipsoïde fictif D qui ne nous sert que de surface de mesure des déformations moyennes. La forme et la taille de cet ellipsoïde répondent à certaines conditions. Son volume D est déterminé de façon à ce que la fraction volumique de l'hétérogénéité ω dans D soit égale à la fraction volumique des hétérogénéités f dans le problème réel : $f = \frac{\omega}{D}$. Sa forme rend compte de la distribution spatiale des hétérogénéités dans le problème réel.

On va donc calculer le tenseur de localisation sur ω en prenant comme déformation de référence non pas la déformation imposée à l'infini, mais la moyenne des déformations sur D. Il est donc dans un premier temps nécessaire de calculer en fonction de la déformation à l'infini $\underline{\underline{E}}$ les déformations moyennes sur ω et D. Pour l'hétérogénéité, le tenseur de localisation dilué nous fournit le résultat immédiatement :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_\omega = \mathbb{A}_\omega^{dil} : \underline{\underline{E}} \tag{3.79}$$

Pour ce qui est de l'ellipsoïde de mesure D, nous pouvons obtenir la moyenne des déformations en utilisant le résultat de Tanaka-Mori (c'est ainsi que procède Shige), ou directement notre formule donnée à l'équation 3.71 (ce qui revient exactement au même). Partant de notre formule brute à laquelle on a incorporé le comportement du matériau de ω, le fait que le matériau à l'extérieur de D est également le matériau matrice, et la moyenne de la déformation sur l'hétérogénéité, on obtient :

$$\left[\mathbb{C}^0 + \mathbb{C}_D^{0*}\right] :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_D = (\mathbb{P}_D^0)^{-1} : \underline{\underline{E}} + f\left(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^i\right) : \mathbb{A}_\omega^{dil} : \underline{\underline{E}} \tag{3.80}$$

On peut donc à partir de cette équation exprimer la déformation imposée à l'infini en fonction de la moyenne des déformations sur D :

$$\underline{\underline{E}} = \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}_D^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}_\omega^{dil}\right]^{-1} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_D \tag{3.81}$$

On insère ceci dans l'equation 3.79 pour obtenir :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_\omega = \mathbb{A}_\omega^{dil} : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}_D^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}_\omega^{dil}\right]^{-1} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_D \tag{3.82}$$

Ce qui nous définit un nouveau tenseur de localisation propre à ce schéma à deux phases :

$$\mathbb{A}_\omega^{2ph} = \mathbb{A}_\omega^{dil} : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}_D^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}_\omega^{dil}\right]^{-1} \tag{3.83}$$

Et un nouveau module homogénéisé (à partir de 3.12) :

$$\mathbb{C}^{2ph} = \mathbb{C}^0 + f(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_\omega^{dil} : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}_D^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}_\omega^{dil}\right]^{-1} \tag{3.84}$$

Remarque : Cette façon de calculer le tenseur de localisation sur l'inclusion en prenant comme déformation de référence non pas celle qu'on a imposée à l'infini mais la déformation moyenne sur l'ellipsoïde D revient exactement à calculer la moyenne des déformations et des contraintes sur D et à définir le module homogénéisé comme le tenseur d'ordre 4 les reliant.

3.6.5 Schéma de Mori-Tanaka

3.6.5.1 Construction du schéma comme un cas particulier du schéma à deux phases

On construit ensuite le schéma hyper classique de Mori-Tanaka [25] à partir du schéma à deux phases présenté précédemment. Il nous semble que c'est la manière la plus claire de le faire. La seule modification à faire est d'ajouter l'hypothèse que l'ellipsoïde sur lequel on mesure les déformations est de même forme que celui qui délimite l'hétérogénéité et qui intervient dans l'expression du tenseur de localisation de l'inclusion. Les deux ellipsoïdes ont donc le même tenseur de Hill. Le tenseur des modules homogénéisé s'écrit ainsi :

$$\mathbb{C}^{MT} = \left[(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : \left(\mathbb{I} + \mathbb{P}_\omega^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right)^{-1}\right] : \left[(1-f)\mathbb{I} + f\left(\mathbb{I} + \mathbb{P}_\omega^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right)^{-1}\right]^{-1} \tag{3.85}$$

3.6.5.2 Explications de Benveniste

Benveniste [6] est celui qui a le premier traduit l'idée de Mori-Tanaka d'une manière très claire et qui explicite les hypothèses qui aboutissent à l'écriture du schéma de Mori-Tanaka. Son hypothèse est la suivante : on considère une inclusion ω qui lorsqu'elle est plongée dans une matrice sur laquelle la moyenne des déformations est $< \underline{\underline{\varepsilon}} >_m$, a la moyenne des déformations suivante :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_\omega = \mathbb{T} :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_m \tag{3.86}$$

Où $\mathbb{T}$ est le tenseur de localisation du problème dilué associé, c'est-à-dire de la configuration où on plonge cette même inclusion dans un milieu élastique de matériau matrice chargé à l'infini en déformations homogènes. La déformation de l'hétérogénéité est donc calculée par une sorte de problème dilué par rapport à la déformation moyenne de la matrice au lieu de la déformation à l'infini à laquelle on ne s'intéresse pas explicitement même si elle est à l'origine de la moyenne des déformations dans la matrice qu'on prend comme référence.

Si l'on calcule pour terminer les moyennes des déformations et des contraintes sur notre VER, en prenant encore la moyenne des déformations sur la matrice comme référence, on obtient :

$$< \underline{\underline{\varepsilon}} >_{VER} = [(1-f)\mathbb{I} + f\mathbb{T}] :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_m \tag{3.87}$$

Et pour les contraintes :

$$< \underline{\underline{\sigma}} >_{VER} = \left[(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : \mathbb{T}\right] :< \underline{\underline{\varepsilon}} >_m \tag{3.88}$$

Ce qui permet, en éliminant la moyenne des déformations sur la matrice entre ces deux équations et définissant le tenseur homogénéisé du schéma de Mori-Tanaka comme le tenseur reliant la contrainte moyenne à la déformation moyenne, d'écrire :

$$\mathbb{C}^{MT} = \left[(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : \mathbb{T}\right] : \left[(1-f)\mathbb{I} + f\mathbb{T}\right]^{-1} \tag{3.89}$$

Tenseur qui est bien égal au tenseur écrit précédemment (équation 3.85) lorsqu'on a une inclusion ellipsoïdale et que le tenseur $\mathbb{T}$ n'est autre que le tenseur de localisation dilué $\left(\mathbb{I} + \mathbb{P}^0_\omega : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right)^{-1}$.

3.6.5.3 Critiques théoriques

Weng [37] souligne que lorsqu'on compare les résultats du schéma de Mori-Tanaka dans le cas d'inclusions non sphériques aux bornes rigoureuses de Hashin-Strickman-Walpole, il est possible que les modules homogénéisés MT se situent hors des bornes, ce qui montre un gros défaut. Ponte Castañeda et Willis [29] font le même genre de remarques sur le fait que lorsqu'on considère plusieurs formes différentes d'inclusions on perd la symétrie majeure du module homogénéisé.

3.6.6 Schéma autocohérent

L'idée de départ du schéma autocohérent est qu'il est important pour déterminer la façon dont la déformation se localise dans une inclusion, de prendre en compte le fait que cette inclusion est entourée d'un matériau qui n'est pas la matrice seule, mais un matériau dont le comportement dépend de celui de toutes les inclusions. On construit donc ce schéma de la même manière que le schéma dilué, en supposant qu'en dehors de l'hétérogénéité le matériau est celui que l'on cherche, et non celui de la matrice :

$$\mathbb{C}^{AC} = \mathbb{C}^0 + f(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_i^{AC} \tag{3.90}$$

avec :

$$\mathbb{A}_i^{AC} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{AC} : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{AC}\right)\right]^{-1} \tag{3.91}$$

Ceci fournit une écriture implicite du module autocohérent homogénéisé. Dans les cas les plus simples, par exemple lorsque les matériaux sont isotropes et la distribution des phases telle que le matériau homogénéisé le soit aussi, on peut résoudre cette équation. Dans les cas plus compliqués, il faut procéder de manière itérative. Il est en effet démontré que le schéma autocohérent est la limite d'une suite de schémas dilués où le matériau à l'extérieur de l'hétérogénéité à chaque itération est pris comme étant le matériau homogénéisé trouvé à l'étape précédente.

Une autre complication peut être celle de l'écriture concrète du tenseur de Hill pour un ellipsoïde plongé dans un matériau qui n'est pas isotrope.

3.6.7 Schéma de Ponte-Castañeda-Willis

Ce schéma [29] est construit dans le but explicite de pouvoir prendre en compte la distribution spatiale des inclusions en plus de leur forme. En effet les auteurs soulignent que le schéma de Mori-Tanaka ne peut pas intégrer les informations relatives à la distribution des hétérogénéités dans l'espace. Ils rappellent également que dans le cas de Mori-Tanaka, le module homogénéisé n'est pas celui d'une structure réelle, puisque dans le cas où plusieurs inclusions de formes différentes coexistent dans le matériau, le module homogénéisé prédit n'a plus la symétrie majeure. De plus dans certains cas, comme lorsqu'un matériau contient des fissures, il est difficile de dire à quelle statistique de distribution de fissures le schéma de Mori-Tanaka fait appel. Nous présentons ce schéma car il est construit de manière rigoureuse, et se prêterait également à l'établissement de bornes. Nous pensons que c'est également intéressant de pouvoir comparer l'estimateur qui en découle à celui que nous choisirons, l'estimateur *IDD*, notamment du point de vue de la facilité

d'utilisation. Enfin, il nous semble que c'est dans l'établissement de ce schéma que la notion de distribution des inclusions est manipulée de la manière la plus rigoureuse. Leur démonstration fait appel a la formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman (HS).

3.6.7.1 Formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman, présentation de Willis

Le milieu élastique considéré est hétérogène. Chaque phase i a un module élastique $\mathbb{C}_i$, et une fonction caractéristique $\chi_i(\underline{x})$ si bien que le module s'écrit $\mathbb{C}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i(\underline{x})\mathbb{C}_i$. La densité d'énergie élastique de déformation s'écrit :

$$W(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.92}$$

D'après le principe de minimum de l'énergie potentielle, la densité d'énergie élastique en déformation macroscopique sur le VER Ω s'écrit :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) = \min_{\underline{\underline{\varepsilon}} \in K} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} W(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) dx \tag{3.93}$$

K étant l'ensemble des déplacements cinématiquement admissible avec la déformation macroscopique $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ considérée comme imposée sur le VER. Cette nouvelle énergie permet de définir le tenseur des modules macroscopiques :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} : \tilde{\mathbb{C}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} \tag{3.94}$$

Comme on ne sait pas résoudre le problème 3.93 facilement (cela voudrait dire qu'on est capable de calculer exactement le champ de déformation sur le VER chargé en déformations homogènes), on cherche à encadrer l'énergie macroscopique. Les auteurs introduisent un milieu de référence, homogène, d'élasticité $\mathbb{C}^0$ et l'énergie élastique en déformation associée W^0. Par transformée de Legendre de l'énergie élastique du milieu réel par rapport à celle du milieu de référence, ils définissent l'énergie :

$$(W - W^0)^*(\underline{x}, \underline{\underline{\tau}}) = \max_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \left\{ \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - (W - W^0)(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \right\} \tag{3.95}$$

On a donc une minoration de la densité d'énergie élastique microscopique qui dépend de $\underline{\underline{\tau}}$, et qu'on transforme en une minoration pour l'énergie élastique macroscopique en appliquant le résultat 3.93. On obtient :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) \geq \min_{\underline{\underline{\varepsilon}} \in K} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left[W^0(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] dx - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (W - W^0)^*(\underline{x}, \underline{\underline{\tau}}) dx \tag{3.96}$$

Si l'on s'intéresse au premier terme du minorant, on remarque qu'il définit la solution au problème sur le VER Ω où les déplacements sont imposés sur la frontière égaux à $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}.\underline{x}$, le matériau est homogène de raideur $\mathbb{C}^0$, et un champ de polarisation $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x})$ est imposé en chaque point. Cette solution peut s'écrire à l'aide de l'opérateur de Green modifié pour le volume Ω et le matériau $\mathbb{C}^0$, que l'on note Γ^0 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} - \int_{\Omega} \Gamma^0(\underline{x}, \underline{y}) \left[\underline{\underline{\tau}}(\underline{y}) - \underline{\underline{\tilde{\tau}}} \right] dy \tag{3.97}$$

L'idée de Hashin-Shtrikman est alors de considérer le champ de polarisation constant sur chaque phase (comme les modules élastiques) : $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i(\underline{x})\underline{\underline{\tau}}_i$. L'hypothèse suivante consiste

à remplacer l'opérateur de green modifié par celui du milieu infini de même module élastique (qu'on marque par un exposant ∞). On obtient alors :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) \geq W^0(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) + \underline{\underline{\tilde{\tau}}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\underline{\underline{\tau}}_i - \underline{\underline{\tau}}_1) : \mathbb{A}^{i,j} : (\underline{\underline{\tau}}_j - \underline{\underline{\tau}}_1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} f^i \underline{\underline{\tau}}_i : \left[\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right]^{-1} : \underline{\underline{\tau}}_i \quad (3.98)$$

Où on a souligné dans le troisième terme qu'à cet endroit, $(\underline{\underline{\tau}}_i - \underline{\underline{\tau}})$ n'intervient qu'à une constante près. C'est aussi dans ce terme qu'on trouve la seule quantité difficile à calculer, et où les hypothèses sur la microstructure seront utiles :

$$\mathbb{A}^{i,j} = \int_\Omega \int_\Omega \chi_i(\underline{x}) \left[\chi_j(\underline{y}) - f_j\right] \Gamma^{0,\infty}(\underline{x} - \underline{y}) dx dy \quad (3.99)$$

Enfin, le membre de droite est maximisé sur les valeurs par phase du tenseur de localisation $\underline{\underline{\tau}}_i$. C'est élémentaire puisque ce membre n'est composé que de termes constants, linéaires et quadratiques en les $\underline{\underline{\tau}}_i$ ce qui mène à un système d'équations que ces tenseurs constants doivent vérifier pour optimiser la minoration de l'énergie macroscopique.

3.6.7.2 Application aux milieux à particules

On considère que le milieu est constitué de $N-1$ types de particules plongées dans la matrice. Chaque phase i a n_i représentants. La fonction caractéristique de chaque phase est la somme de fonctions caractéristiques correspondant à une particule, translatées pour chaque particule.

Il s'agit tout d'abord de réécrire la fonction caractéristique de chaque phase. Soit χ'_i la fonction caractéristique du "modèle" des particules de la phase i, centré en 0. On note $\underline{x}_i^k$ le centre du représentant k de la phase i. Les auteurs introduisent une fonction ϕ_i qui est un champ de variables aléatoires de probabilité, défini à partir des variables aléatoires $\underline{x}_i^k$ que sont les coordonnées des centres des représentants des phases :

$$\phi_i(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_i} \delta(\underline{z} - \underline{x}_i^k) \quad (3.100)$$

Et la fonction caractéristique peut alors être écrite (on rappelle aussi son écriture naturelle) :

$$\chi_i(\underline{x}) = \int_\Omega \left[\chi'_i(\underline{x} - \underline{z})\phi_i(\underline{z})\right] dz = \sum_{k=1}^{n_i} \chi'_i(\underline{x} - \underline{x}_i^k) \quad (3.101)$$

On introduit ensuite cette expression des fonctions caractéristique dans les termes $\mathbb{A}^{i,j}$, puis on calcule leur espérance notée $< \mathbb{A}^{i,j} >$. On voit alors apparaître les moyennes suivantes :

$$< \phi_i(\underline{z}) >= p^i(\underline{z}) \quad (3.102)$$

et

$$< \phi_i(\underline{z})\phi_j(\underline{z}') >= \delta_{ij} p^i(\underline{z})\delta(\underline{z} - \underline{z}') + p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}') \quad (3.103)$$

où apparaissent les probabilités $p^i(\underline{z})$ qu'une inclusion de la classe i ait son centre en $\underline{z}$ et $p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}')$ qu'on trouve simultanément une inclusion de la classe i en $\underline{z}$ et une inclusion de la classe j en $\underline{z}'$. On suppose ensuite que le milieu est statistiquement homogène : $p^i(\underline{z}) = \frac{n_i}{\Omega}$ et $p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}') = p_{ij}(\underline{z} - \underline{z}')$.

Une série de transformations est appliquée à $< \mathbb{A}^{i,j} >$, puis l'hypothèse de symétrie ellipsoïdale de la distribution des inclusions est ajoutée aux précédentes. La probabilité conditionnelle

de trouver une inclusion de la classe j en $\underline{z}$ sachant qu'une inclusion de la classe j se trouve en $\underline{z}'$ ne dépend que de la norme du produit d'un tenseur symétrique d'ordre deux par $\underline{z} - \underline{z}'$. Il est également supposé que deux inclusions ne peuvent s'interpénétrer.

Une simplification supplémentaire amène à une expression où l'on reconnaît le tenseur de Hill correspondant à la distribution ellipsoïdale des inclusions par couples et au matériau de référence $\mathbb{P}_{\bullet\bullet}$, constant, par application du résultat d'Eshelby. Supposant enfin que les inclusions elles-mêmes sont ellipsoïdales, on voit apparaître leur tenseur d'Eshelby $\mathbb{P}_{\bullet}$. On aboutit au résultat :

$$< \mathbb{A}^{i,j} >= f^i \left(\delta_{ij}\mathbb{P}_i - f_j\mathbb{P}_{ij}\right) \tag{3.104}$$

Finalement si l'on choisit le matériau matrice comme matériau de référence, et que de plus on suppose que tous les tenseurs de Hill rendant compte de la distribution des phases par couples sont identiques (égaux à $\mathbb{P}_d$), il est possible de résoudre les équations d'optimalité de la borne inférieure donc de trouver les champs de polarisation optimaux. Si la matrice est le matériau le plus souple le résultat est une borne inférieure, sinon une estimation du comportement du composite homogénéisé, qu'on appelle PCW :

$$\mathbb{C}^{PCW} = \mathbb{C}^0 + \left[\mathbb{I} - \sum_i f^i \mathbb{T}_i : \mathbb{P}_d\right]^{-1} : \left[\sum_i f^i \mathbb{T}_i\right] \tag{3.105}$$

où

$$\mathbb{T}_i = \left[\left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)^{-1} + \mathbb{P}_i\right]^{-1} \tag{3.106}$$

Lorsqu'il n'y a qu'un type d'inclusions et que leur distribution spatiale est caractérisée par le même ellipsoïde que celui qui définit leur forme, cet estimateur est identique à celui de Mori-Tanaka. La comparaison de la généralisation de Weng [37] du schéma de Mori-Tanaka à la situation où il y a plusieurs types d'inclusions de formes différentes permet de comprendre pourquoi les schémas de type Mori-Tanaka peuvent amener à un tenseur des modules homogénéisés n'ayant pas la symétrie majeure. Dans l'approche PCW, la probabilité p_{ij} doit être symétrique, au sens que : $p_{ij}(\underline{z}, \underline{z}') = p_{ji}(\underline{z}', \underline{z})$. Si les tenseurs d'Eshelby sont différents selon les types d'inclusions et qu'on suppose que la distribution des autres inclusions autour d'une inclusion donnée est caractérisée par le même ellipsoïde que celui qui caractérise sa forme, on ne peut plus vérifier cette symétrie. D'où l'apparition du résultat non physique d'un tenseur des modules élastiques non symétrique.

3.6.8 Schéma Interaction Direct Derivative (*IDD*) de Zheng et Du

Nous allons maintenant présenter le schéma de Zheng et Du [39, 12], qui bien que n'étant pas très connu, probablement en partie parce qu'il est assez récent, nous a semblé bien adapté à notre problème. L'idée d'utiliser ce schéma nous vient de l'article de Bary [2].

Les auteurs qui ont établi ce schéma commencent par exposer les défauts des schémas classiques : pour ce qui est des schémas dilué, autocohérent, différentiel et Mori-Tanaka, ils ne prennent en compte ni la distribution des inclusions ni l'interaction des particules avec la matrice proche. Les deux schémas qui s'attaquent à ce problème sont le modèle à trois phases (ou à double inclusion) de Hori et Nemat-Nasser, et l'estimateur variationnel de Ponte Castañeda-Willis.

Les auteurs identifient les objectifs suivants pour un schéma d'homogénéisation. Il doit :

- Avoir une structure simple. Chaque terme doit avoir une explication physique claire.
- Être valide pour des milieux avec des inclusions et des symétries matérielles variées.
- Prendre en compte l'influence des différentes inclusions, l'interaction entre les inclusions et l'interaction entre chaque inclusion et la matrice environnante

Ils considèrent que pour le moment sur l'estimateur *PCW* et le leur (*IDD*) satisfont ces critères. L'estimateur *PCW* a cependant une expression compliquée lorsque les fonctions de corrélation des couples d'inclusions différentes ne sont pas toutes identiques.

La construction de leur schéma se fonde sur le schéma à trois phases de Nemat-Nasser. La première étape est l'écriture d'un schéma qu'ils appellent le schéma autocohérent effectif.

3.6.8.1 Schéma autocohérent effectif *ESCS*

Le volume ω_i représente la forme de l'inclusion de la phase i. Son atmosphère est délimitée par la frontière du volume D_i. Le volume ω_i est occupé par le matériau inclusion $\mathbb{C}^i$, et le volume $D_i \backslash \omega_i$ par le matériau matrice $\mathbb{C}^0$. Le milieu infini entourant l'hétérogénéité est occupé par le milieu homogénéisé que l'on recherche $\mathbb{C}$. Le rôle de l'atmosphère est de rendre compte de la distribution des inclusions de la phase i en mettant autour de l'inclusion, dans le problème auxiliaire à trois phases, une couche de matrice d'une forme qui y est reliée. Le rapport de volume de l'inclusion dans son atmosphère est égal ou du même ordre de grandeur que la fraction volumique totale en inclusions : $\frac{\omega_i}{D_i} = f$.

Récapitulons les étapes de la construction du schéma *ESCS*. On suppose que les atmosphères D_i sont de forme ellipsoïdales.

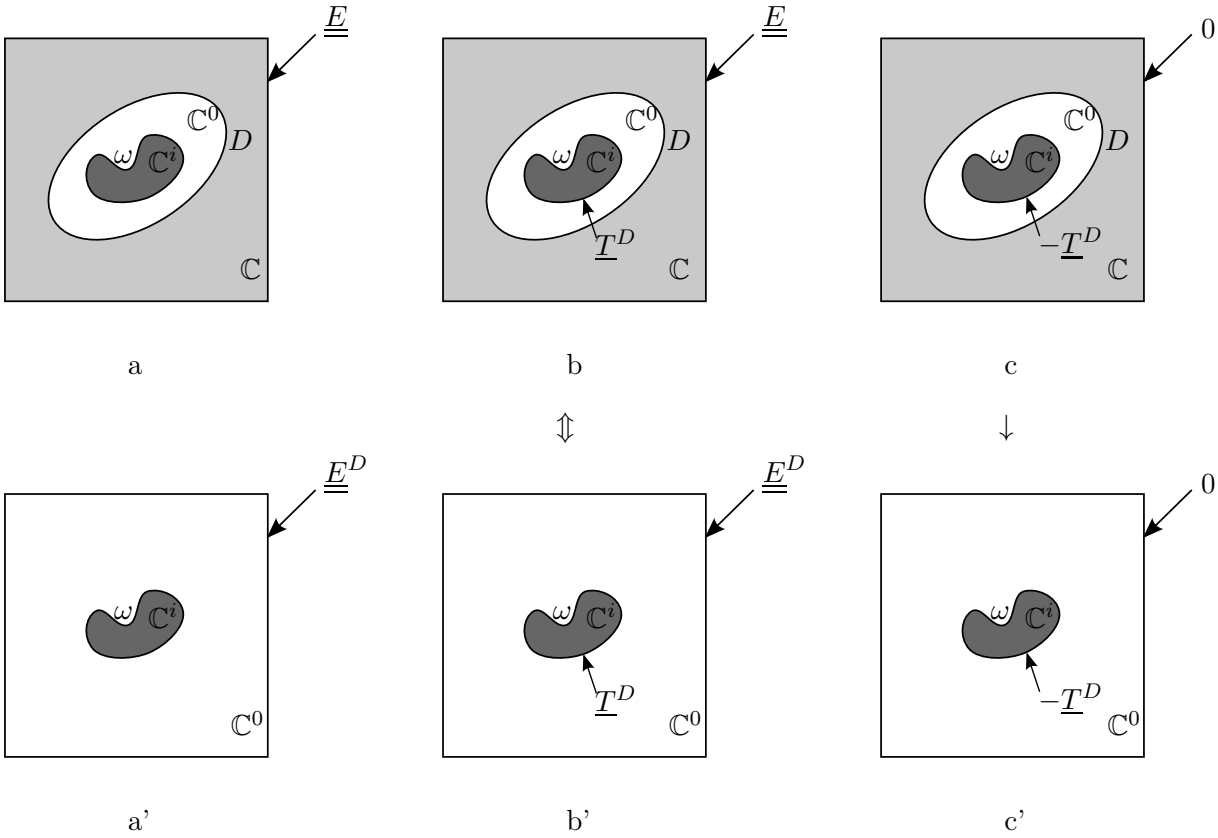

FIGURE 3.5 – Étapes de construction du schéma *ESCS*

– Considérons pour l'instant une seule hétérogénéité et son atmosphère plongées dans le milieu que l'on recherche (Fig. 3.5, a). Supposons qu'on retire l'hétérogénéité pour ne laisser que l'atmosphère. Il est alors facile d'écrire la déformation homogène induite dans l'atmosphère par une déformation $\underline{\underline{E}}$ à l'infini, que l'on note $\underline{\underline{E}}^D$ pour souligner qu'elle est homogène, et parce qu'on va l'utiliser comme condition aux limites à l'infini un peu plus

loin dans la construction :

$$\underline{\underline{E}}^D = \mathbb{A}^{dil}_{D,\mathbb{C}^0,\mathbb{C}} : \underline{\underline{E}} \tag{3.107}$$

Où le tenseur de localisation que l'on considère est celui de l'atmosphère D de matériau $\mathbb{C}^0$ plongée dans le matériau $\mathbb{C}$ que l'on cherche, ce que l'on note en indice du tenseur.

- Si l'on retire le morceau d'atmosphère qui se trouve dans ω au point précédent où l'on a effacé l'hétérogénéité, et qu'on essaie d'y faire rentrer l'hétérogénéité, celle-ci doit être à son tour contrainte de façon à avoir la même déformation homogène $\underline{\underline{E}}^D = \mathbb{A}^{dil}_{D,\mathbb{C}^0,\mathbb{C}} : \underline{\underline{E}}$. On applique donc sur $\partial\omega$ un vecteur contrainte pour obtenir cette déformation (Fig. 3.5, b). L'hétérogénéité est module $\mathbb{C}^i$, et la matrice est de module $\mathbb{C}^0$. Ces deux matériaux étant soumis à la même déformation $\underline{\underline{E}}^D$, l'effort à appliquer pour assurer la continuité du vecteur contrainte $\underline{T}^D$ est :

$$\underline{T}^D = \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^D \tag{3.108}$$

- Bien sûr, puisqu'on a rajouté un chargement au problème à trois phases de départ, il est nécessaire de superposer la solution du point précédent (b) à la solution d'un deuxième problème sur la géométrie du problème à trois phases, sans déformation à l'infini, et appliquant le vecteur contrainte opposé $\underline{T}^D$ sur $\partial\omega$ (Fig. 3.5, c).
- L'étape suivante consiste à remplacer le problème (c) par le problème (c'). L'idée physique est que dans l'objectif de calculer les champs de contrainte et déformation dans l'inclusion, il est peu différent de garder le matériau que l'on cherche en dehors de D, ou de le remplacer par le matériau matrice. L'influence de ce changement est moindre que si on faisait la même chose au niveau du problème (a) puisque dans le problème (c) le chargement mécanique se situe immédiatement sur la frontière $\partial\omega$ de l'hétérogénéité et non à l'infini. Cette approximation est justifiée par les auteurs par une démonstration mathématique dont le résultat est que le champ de contrainte moyen sur l'inclusion est modifié d'une quantité de l'ordre de la fraction volumique d'hétérogénéité au carré.
- Concernant l'équivalence entre le problème (b) et le problème (b') du point de vue des valeurs des champs dans l'hétérogénéité, elle vient du fait que ces deux situations induisent le même champ de déformation constant dans $D\backslash\omega$. Du point de vue de l'hétérogénéité, c'est donc identique. On s'affranchit donc de la présence du matériau que l'on cherche en remplaçant la déformation imposée à l'infini $\underline{\underline{E}}$ de départ par une autre déformation $\underline{\underline{E}}^D$ qui dépend cependant du matériau que l'on cherche.
- Enfin, on superpose (b') et (c') pour faire disparaître le chargement introduit sur $\partial\omega$ et arriver au problème (a') qui est simple en dehors du fait que la déformation imposée à l'infini dépend du tenseur des modules que l'on cherche. La solution du problème (a'), dans le cas où ω est de forme ellipsoïdale, ce qui n'était pas nécessaire jusque là, est obtenue en utilisant le tenseur de localisation dilué :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{ESCS} &= \mathbb{A}^{dil}_{\omega,\mathbb{C}^i,\mathbb{C}^0} : \underline{\underline{E}}^D \\ &= \mathbb{A}^{dil}_{\omega,\mathbb{C}^i,\mathbb{C}^0} : \mathbb{A}^{dil}_{D,\mathbb{C}^0,\mathbb{C}} : \underline{\underline{E}} \end{aligned} \tag{3.109}$$

Cela définit un tenseur de localisation propre au schéma *ESCS* :

$$\mathbb{A}^{ESCS} = \mathbb{A}^{dil}_{\omega,\mathbb{C}^i,\mathbb{C}^0} : \mathbb{A}^{dil}_{D,\mathbb{C}^0,\mathbb{C}} \tag{3.110}$$

Il s'agit donc de deux schémas dilués successifs, mais l'avantage de leur méthode est qu'elle leur permet de connaître l'approximation qui est faite.

On construit ensuite le tenseur des modules homogénéisés par la formule découlant du calcul

de la moyenne des déformations sur le VER habituelle 3.12 :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{ESCS} - \mathbb{C}^0 &= \sum_i f^i \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}^{ESCS} \\ &= \sum_i f^i \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}^0)\right]^{-1} : \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_{Di}^{ESCS}(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})\right]^{-1}\end{aligned} \tag{3.111}$$

L'expression est implicite, ce qui amène les auteurs à quelques autres approximations, qui vont donner naissance à leur schéma *IDD*.

3.6.8.2 Schéma Interaction Direct Derivative (*IDD*)

Pour passer au schéma *IDD*, on simplifie le schéma *ESCS* de la façon suivante. Tout d'abord on fait un développement limité du terme le plus à droite de l'équation 3.110, puis on remplace le tenseur de Hill relatif au matériau homogénéisé et la géométrie de l'atmosphère i par le même tenseur mais cette fois relatif au matériau matrice :

$$\left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_{Di}^{ESCS}(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})\right]^{-1} \simeq \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^{ESCS}(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})\right] \simeq \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^0(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^{ESCS})\right] \tag{3.112}$$

Ces hypothèses sont commentées et ne diminuent pas l'ordre de l'approximation en la fraction volumique f des inclusions. On a alors le résultat suivant :

$$\mathbb{L}^{IDD} = \left[\mathbb{I} - \sum_i \mathbb{L}_i^d \mathbb{P}_{Di}^0\right]^{-1} \mathbb{L}^d \tag{3.113}$$

avec :

$$\mathbb{L}^{IDD} = \mathbb{C}^{IDD} - \mathbb{C}^0 \tag{3.114}$$

$$\mathbb{L}^i = \mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0 \tag{3.115}$$

$$\mathbb{L}_i^d = f^i \left(\mathbb{L}_i^{-1} + \mathbb{P}_i^0\right)^{-1} \tag{3.116}$$

$$\mathbb{L}^d = \sum_k \mathbb{L}_k^d \tag{3.117}$$

$$\mathbb{P}_i^0 = \mathbb{S}_i^0 \mathbb{C}_0^{-1} \tag{3.118}$$

La dernière étape est de repartir du résultat du tenseur des modules homogénéisés pour écrire un nouveau tenseur de localisation. On remarque que le tenseur de localisation :

$$\mathbb{A}_i^{IDD} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 \mathbb{L}_i\right]^{-1} : \left[\mathbb{I} - \sum_k \mathbb{P}_{Dk}^0 \mathbb{L}_k^d\right]^{-1} \tag{3.119}$$

Permet d'obtenir le même tenseur homogénéise (équation 3.113) sans dépendre du tenseur des modules recherché. Or, le premier terme est le tenseur de localisation dilué. Posant la déformation :

$$\underline{\underline{E}}^E = \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^0 \mathbb{L}_i^d\right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \tag{3.120}$$

On traite en fait un problème de type dilué, en remplaçant la déformation à l'infini de départ par une autre, mais qui cette fois-ci ne dépend d'aucune quantité qu'on recherche (Fig. 3.6).

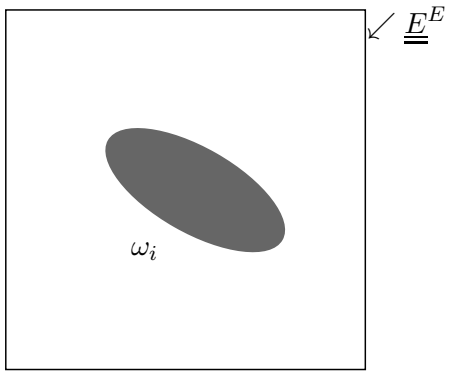

FIGURE 3.6 – Problème dilué final dans le schéma *IDD*

3.6.8.3 Liens avec les estimateurs présentés plus tôt

L'estimateur variationnel de Ponte-Castañeda et Willis (PCW), dans le cas où les fonctions caractérisant la distribution relative des différentes phases sont toutes identiques, est rigoureusement égal à l'estimateur *IDD* dans la situation analogue où toutes les atmosphères sont prises de même forme. Quant à l'estimateur de Mori-Tanaka, il coïncide d'un point de vue énergétique avec l'estimateur *IDD* lorsque chaque atmosphère a la même forme que l'hétérogénéité à laquelle elle est attachée. Il n'y a pas de lien direct avec les estimateurs autocohérent et différentiel en revanche.

3.6.9 Conclusion sur les estimateurs

Nous avons donc présenté une série d'estimateurs de micromécanique, qui permettent d'avoir une approximation des tenseurs de localisation, et ainsi, comme on l'a montré dans les deux premières parties de ce chapitre, des propriétés poroélastiques de notre milieu homogénéisé. Nous avons d'abord présenté le schéma à trois phases de Nemat-Nasser qui nous semble important conceptuellement, puis avons détaillé les schémas dilué, à deux phases, Mori-Tanaka, Ponte Castañeda-Willis et *IDD*, et mentionné les schémas différentiel et autocohérent. Notre choix pour la suite s'est porté sur l'estimateur *IDD*, qui nous semble le plus facile d'utilisation, tout en permettant d'estimer les propriétés d'un milieu hétérogène avec plusieurs types d'inclusions.

3.7 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter un certain nombre d'outils mécaniques dont nous avons besoin pour la modélisation de l'alcali-réaction. Nous nous sommes focalisés sur les résultats permettant de modéliser la nature hétérogène du béton attaqué, et plus particulièrement les méthodes analytiques. Les estimateurs de propriétés mécaniques que nous avons détaillés sont tous liés à la solution d'Eshelby. Grâce à divers problèmes auxiliaires on construit des estimateurs plus ou moins évolués. Nous avons choisi l'estimateur *IDD*, de Zheng et Du, qui nous a semblé le plus adapté. Ce choix est cependant fondé sur des critères de facilité d'utilisation, et non sur la comparaison des résultats donnés par les différents estimateurs à des simulations. Nous allons donc consacrer la partie suivante à ce type de calculs, de façon à conforter notre choix par comparaison avec des solutions numériques.

Chapitre 4

Comparaison d'estimateurs à des calculs par éléments finis

Sommaire

4.1 Introduction **98**
4.2 Formulation variationnelle en déformations planes **98**
4.2.1 Conditions aux limites en déformation 99
4.2.2 Conditions aux limites en contraintes 100
4.2.3 Conditions aux limites périodiques 100
4.3 Détermination des propriétés moyennes **101**
4.3.1 Calcul des moyennes des contraintes et des déformations 101
4.3.2 Lien avec les propriétés macroscopiques du matériau 101
4.4 Microstructures considérées **107**
4.4.1 Microstructures aléatoires, addition aléatoire séquentielle sans recouvrement 107
4.4.2 Microstructures périodiques 108
4.5 Taille de VER par l'approche de Kanit **109**
4.5.1 Description des deux erreurs commises sur l'estimation des propriétés élastiques 109
4.5.2 Exemple : inclusions circulaires 110
4.6 Rappel des estimateurs **110**
4.6.1 Expression des estimateurs utilisés 111
4.6.2 Un cas de schéma numérique : autocohérent généralisé 113
4.6.3 Expression des tenseurs d'Eshelby nécessaires 114
4.7 Comparaisons simulations-estimateurs **115**
4.7.1 Pores sphériques 115
4.7.2 Pores aplatis et alignés 116
4.7.3 Fissures alignées 119
4.7.4 Pores aplatis d'orientations distribuées de manière isotrope, pores aplatis distribués à 0 et $\pi/2$ 121
4.7.5 Comparaison de l'évolution des propriétés mécaniques en fonction de la forme des pores 123
4.7.6 Exemple d'application des estimateurs : une cavité non ellipsoïdale en *2d* 124
4.7.7 Conclusion sur les comparaisons 133
4.8 Conclusion **133**

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'utilisation d'estimateurs présentés dans le chapitre précédent, de façon à juger de leur efficacité à reproduire des résultats numériques. Nous avons mentionné au chapitre précédent que notre choix de schéma s'était porté sur le schéma *IDD*. On veut donc vérifier ici l'efficacité de ce schéma avant de passer à son utilisation dans le cadre de la réaction alcali-silice.

Nous commençons par exposer la formulation variationnelle que nous avons utilisée pour nos simulations en deux dimensions et déformations planes, ainsi que les conditions aux limites utilisées. Nous expliquons ensuite comment nous déduisons les modules homogénéisés à partir de différents chargements. On décrit brièvement l'algorithme de génération de nos modèles éléments finis, puis on montre un exemple de détermination empirique de la taille de VER, d'après l'approche de Kanit. On résume enfin les informations principales dont nous avons besoin pour pouvoir utiliser les estimateurs, puis on passe aux comparaisons entre estimateurs et simulations par éléments finis, traitant différents cas : pores sphériques, pores aplatis avec différentes orientations. Enfin, nous testons un motif spécifique à l'alcali-réaction, en préparation du travail à venir.

4.2 Formulation variationnelle en déformations planes

Les calculs ont été effectués dans le logiciel `FreeFem++`. Nous avons choisi ce programme à cause de sa flexibilité concernant la possibilité d'effectuer un grand nombre de calculs par éléments finis à la suite. L'utilisateur doit définir l'espace d'éléments finis dans lequel on recherche la solution, le maillage correspondant, et écrire la formulation variationnelle du problème auquel il s'intéresse. Le logiciel se charge ensuite de résoudre le système linéaire obtenu. La première étape est donc l'écriture de la formulation variationnelle. Nous avons décidé de travailler en déformation plane. L'objectif étant de comparer des solutions numériques à des estimateurs, il nous a semblé qu'il n'était pas utile que les simulations soient très compliquées (par exemple en introduisant de vrais calculs *3d*) pour exhiber les faiblesses ou les atouts de tel ou tel schéma d'homogénéisation. Dans cette partie on écrit donc la formulation variationnelle que l'on a adoptée et on détaille les différents types de conditions aux limites utilisées en vue de déterminer les propriétés poroélastiques moyennes de différents milieux hétérogènes contenants des pores ou des fissures sous pression.

La formulation variationnelle de notre problème est écrite à partir du Principe des Travaux Virtuels, fondement de la mécanique des milieux continus, dans le cas statique, c'est-à-dire négligeant les travaux d'accélération, dans l'esprit de la présentation fait par Bonnet [7]. On adopte une formulation en déplacement comme c'est le cas traditionnellement pour les éléments finis. Soit le milieu continu Ω de tenseur des modules élastiques éventuellement hétérogène $\mathbb{C}(\underline{x})$, de frontière $\partial\Omega$. Cette frontière se divise en une frontière intérieure $\partial\Omega_{int}$, qui délimite le milieu Ω des pores ou des fissures qui se trouvent dans le milieu, et une frontière extérieure $\partial\Omega_{ext}$. La frontière intérieure est supposée soumise à des conditions aux limites de type pression, alors que la frontière extérieure peut être soumise à des efforts ou des déplacements imposés. On peut aussi prendre en compte des efforts volumiques $\underline{f}$. On note de manière générique $\underline{T}^D$ les efforts extérieurs imposés sur $\partial\Omega^T_{ext}$ ou $\partial\Omega_{int}$, et on note $\underline{u}^D$ les déplacements imposés sur $\partial\Omega^u_{ext}$. On pourrait bien sûr avoir en un même point un mélange de ces deux types de conditions mais on ne prend pas cela en compte ici. On a donc $\partial\Omega_{ext} = \partial\Omega^u_{ext} \cup \partial\Omega^T_{ext}$ et $\partial\Omega^u_{ext} \cap \partial\Omega^T_{ext} = \varnothing$.

On définit enfin deux espaces de champs de déplacement :

- $\mathcal{C}(\underline{u}^D) = \left\{\underline{v} \text{ continu et régulier sur } \Omega \text{ et } \underline{v} = \underline{u}^D \text{ sur } \partial\Omega^u_{ext}\right\}$ le champ des déplacements cinématiquement admissibles à la condition aux limites en déplacement.

– $\mathcal{C}(\underline{0}) = \{\underline{v}$ continu et régulier sur Ω et $\underline{v} = \underline{0}$ sur $\partial\Omega^u_{ext}\}$ le champ des déplacements cinématiquement admissibles à zéro.

La formulation variationnelle prend alors la forme :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ tel que} \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}),\\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_\Omega \rho \underline{f}.\underline{w} dV + \int_{\partial\Omega_{int}} \underline{T}^D.\underline{w} dS + \int_{\partial\Omega^T_{ext}} \underline{T}^D.\underline{w} dS\end{aligned} \tag{4.1}$$

Où la déformation liée à un champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + \nabla^t \underline{u}\right) \tag{4.2}$$

On définit donc dans `FreeFem++` des espaces de fonctions éléments finis qui approchent les deux espaces des fonctions cinématiquement admissibles. Tenant compte du fait que le chargement sur $\partial\Omega_{int}$ est une pression, on écrit ceci :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ tel que} \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}),\\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_\Omega \rho \underline{f}.\underline{w} dV + \int_{\partial\Omega_{int}} -p\underline{n}.\underline{w} dS + \int_{\partial\Omega^T_{ext}} \underline{T}^D.\underline{w} dS\end{aligned} \tag{4.3}$$

Où $\underline{n}$ est la normale sortante à Ω.

Comme on est en déformations planes, les composantes selon la direction 3 du déplacement son nulles. Les trois composantes de la déformation qui y sont liées sont également nulles :

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \tag{4.4}$$

Présentons rapidement les trois types de conditions aux limites qu'on utilise.

4.2.1 Conditions aux limites en déformation

Les conditions aux limites appelées *déformations homogènes* liées à un tenseur d'ordre deux symétrique $\underline{\underline{E}}$ sont telles que :

$$\underline{u}^D(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}, \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{ext} \tag{4.5}$$

Il n'y a donc pas de contraintes imposées, puisque $\partial\Omega^T_{ext} = \varnothing$. Considérant qu'il n'y a pas de forces volumiques, la formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ tel que } \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}),\\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + \int_{\partial\Omega_{int}} p\underline{n}.\underline{w} dS = 0\end{aligned} \tag{4.6}$$

En déformation plane, le tenseur $\underline{\underline{E}}$ est caractérisé par trois composantes :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

4.2.2 Conditions aux limites en contraintes

Les conditions aux limites en *contraintes homogènes* liées à un tenseur d'ordre deux symétrique $\underline{\underline{\Sigma}}$ par la relation suivante :

$$\underline{T}^D(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n},\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{ext} \tag{4.8}$$

Où $\underline{n}$ est la normale sortante au milieu Ω.

Ici on n'applique pas de véritables conditions aux limites en contrainte puisque dans la direction 3 le déplacement reste imposé nul, non le vecteur contrainte. Les conditions aux limites que nous appelons conditions aux limites en *contraintes homogènes* sont donc ici :

$$T_1^D(\underline{x}) = \Sigma_{11}n_1 + \Sigma_{12}n_2,\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{ext} \tag{4.9}$$

$$T_2^D(\underline{x}) = \Sigma_{12}n_1 + \Sigma_{22}n_2,\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{ext} \tag{4.10}$$

Sachant qu'on a $u_3 = 0$, $\forall \underline{x} \in \Omega$.

Posant $\mathcal{C} = \{\underline{v}$ continu et régulier sur Ω et $v_3 = 0$ sur $\Omega\}$, la formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{C} \text{ tel que } \forall \underline{w} \in \mathcal{C},\\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]dV + \int_{\partial\Omega_{int}} p\underline{n}.\underline{w}dS - \int_{\partial\Omega_{ext}^T} (\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n}).\underline{w}dS = 0\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2.3 Conditions aux limites périodiques

Les conditions aux limites *périodiques* utilisées ici sont également liées à un tenseur d'ordre deux symétrique :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Il s'agit d'un type de condition aux limites hybride puisqu'on n'impose pas en chaque point un déplacement ou un vecteur contrainte, mais on écrit :

$$\underline{u} = \underline{\underline{E}}.\underline{x} + \underline{u}',\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{ext} \tag{4.13}$$

Et on ajoute la condition $\underline{u}'$ périodique sur Ω. Pour que cela s'exprime facilement, il est plus simple qu'Ω soit de forme rectangulaire.

On écrit alors que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}'] \tag{4.14}$$

et on insère ceci dans la formulation variationnelle de départ, puis on sépare les termes bilinéaires en $(\underline{u}, \underline{w})$ des termes linéaires en $\underline{w}$, ce qui est nécessaire à l'écriture des FV dans `FreeFem++`. Les champs de déplacement sont pris dans un espace d'éléments finis qui garantit leur périodicité.

Posant $\mathcal{C}^{per} = \{\underline{v}$ continu et régulier sur Ω , $\underline{v}$ périodique sur Ω et $v_3 = 0$ sur $\Omega\}$, la formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \underline{u}' \in \mathcal{C}^{per} \text{ tel que } \forall \underline{w} \in \mathcal{C}^{per},\\ &\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}'] : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]dV + \int_\Omega \underline{\underline{E}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]dV + \int_{\partial\Omega_{int}} p\underline{n}.\underline{w}dS = 0\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ceci nous donne donc la possibilité d'effectuer des calculs en déformation plane avec trois types de conditions aux limites. Voyons maintenant comment on interprète les résultats de ces calculs pour en déduire des modules homogénéisés.

4.3 Détermination des propriétés moyennes

La détermination de modules s'appuie sur des calculs de moyennes de contraintes et de déformations, comme nous l'avons dit au début du premier chapitre de cette partie (équation 3.2).

4.3.1 Calcul des moyennes des contraintes et des déformations

On a besoin de ces grandeurs calculées sur les pores et sur la structure entière. La fraction volumique des inclusions intervient, on l'appelle f dans le cas que l'on présente ici où il n'y a qu'une famille de pores qui sont tous soumis à la même pression p.

4.3.1.1 Déformation des pores

On s'intéresse à la variation de volume des pores qu'on note $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^p$, qui s'écrit facilement lorsque la déformation moyenne sur Ω est imposée ($<\underline{\underline{\varepsilon}}>_\Omega = \underline{\underline{E}}$) :

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{1}{f}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{E}} - \frac{1}{f\Omega}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega^p} \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}dV \tag{4.16}$$

Lorsqu'on n'a pas imposé la déformation mais les contraintes, on doit d'abord calculer la déformation moyenne par la formule présentée dans la partie suivante.

4.3.1.2 Déformation moyenne

On utilise une intégrale sur le bord extérieur du milieu $\partial\Omega_{ext}$ ce qui évite le problème de spécifier la valeur qu'on donne, par continuité, à la déformation dans les pores :

$$<\underline{\underline{\varepsilon}}>_\Omega = \frac{1}{\Omega}\int\limits_{\partial\Omega_{ext}} \underline{u}\otimes^s \underline{n}dS \tag{4.17}$$

Où $\otimes^s$ est le produit tensoriel symétrisé.

4.3.1.3 Contrainte moyenne

On pourrait utiliser une intégrale de bord du même genre que la précédente mais afin de préserver la bonne qualité du calcul de moyenne (les bizarreries de maillage était essentiellement présentes au bord du milieu discrétisé), on garde l'intégrale sur toute la surface :

$$<\underline{\underline{\sigma}}>_\Omega = -fp\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega^p} \underline{\underline{\sigma}}dV \tag{4.18}$$

4.3.2 Lien avec les propriétés macroscopiques du matériau

Disposant des moyennes énoncées au paragraphe précédent, on peut, selon le chargement imposé, déterminer une à une toutes les propriétés homogénéisées recherchées. Nous nous intéressons à des matériaux poreux. On cherche donc un tenseur des modules d'élasticité homogénéisé, mais aussi les propriétés poromécaniques, qui décrivent le comportement du matériau, à l'échelle macroscopique, lorsqu'un fluide sous pression occupe une partie de son espace poreux, propriétés qui sont décrites dans la partie de notre mémoire consacrée à la microporomécanique (§ 3.4).

4.3.2.1 Comportement homogène recherché

On peut écrire le comportement poromécanique homogénéisé de manière compacte, dans l'esprit de la présentation de Dormieux [11]. Si le matériau possède N_v familles de vides, la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ et la variation de volume de la famille j par unité de volume $(\phi^j - f^j)$ sont reliées à la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ et aux pressions p^j par les $N_v + 1$ équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{i=1}^{N_v} p^i \underline{\underline{B}}^i \\ \phi^j - f^j = \underline{\underline{B}}^j : \underline{\underline{E}} + \sum_{i=1}^{N_v} p^i M^{ij} \quad \text{pour } j \in \{1, N_v\} \end{array} \right. \tag{4.19}$$

Lors de notre travail numérique nous déterminerons par éléments finis les coefficients voulus en nous appuyant directement sur les équations (4.19). En revanche, lors de la comparaison des résultats numériques avec les approches analytiques par estimateurs, nous serons aidés par les relations (4.20), qui relient les coefficients décrivant le comportement du solide vis-à-vis de la pression de fluide ($\underline{\underline{B}}^i$ coefficient de Biot de la phase i, M^{ij} module de Biot de la phase j dans le problème i) à la moyenne du tenseur de localisation classique sur les inclusions, déterminé sous chargement extérieur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}}^i = f^i \mathbb{1} :< \mathbb{A} >_i \\ \sum_{j=1}^{N_v} M^{ij} = \mathbb{1} : \mathbb{S}^0 : \left(\underline{\underline{B}}^i - f^i \mathbb{1}\right) \end{array} \right. \tag{4.20}$$

Nous voyons donc que l'homogénéisation du comportement poromécanique d'un solide nécessite encore une fois de connaître le tenseur de localisation sur les hétérogénéités, mais que dans le cas où il y a plusieurs familles d'inclusions, cette information n'est pas suffisante. Il est alors nécessaire, comme dans l'approche numérique, de tester les interactions entre inclusions en mesurant la déformation d'une famille d'inclusion lorsqu'une autre est sous pression. Nous avons fait quelques calculs dans ce sens mais ne les reproduisons pas ici.

S'il n'y a qu'une famille d'inclusions, ces équations deviennent simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - p\underline{\underline{B}} \\ \phi - f = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + pM \end{array} \right. \tag{4.21}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{B}} = f \mathbb{1} :< \mathbb{A} >_p \\ M = \mathbb{1} : \mathbb{S}^0 : \left(\underline{\underline{B}} - f \mathbb{1}\right) \end{array} \right. \tag{4.22}$$

La connaissance du tenseur de localisation déterminé sous chargement extérieur permet alors de déterminer le module et le coefficient de Biot sans avoir à faire de véritable calcul à pression imposée dans les pores.

Nous présentons ici les expressions utilisées pour déterminer les propriétés élastiques lors de l'analyse des calculs par éléments finis.

4.3.2.2 Cas général : milieu orthotrope

Nous simulons un milieu invariant dans la direction 3, ce qui est pris en compte par les déformations planes dans nos calculs. Les symétries supplémentaires sont dues au fait que dans la pratique on utilise un matériau matrice isotrope, caractérisé par un couple de modules de cisaillement et d'incompressibilité (k, μ) ou un couple de module d'Young et de coefficient de Poisson (E, ν). Si la microstructure possède en plus de cette invariance dans la direction 3 deux plans de symétrie orthogonaux (contenant $\underline{e}_3$), le matériau est dit orthotrope et les tenseurs de souplesse et de rigidité s'en trouvent nettement simplifiés.

On utilise la notation de Voigt pour les tenseurs d'ordre deux et quatre, ce qui facilite les calculs sans rien changer formellement à l'allure des expressions tensorielles. Pour tout tenseur d'ordre 4 ayant la symétrie mineure $\mathbb{D}$, on note sa représentation en notation de Voigt $\mathbb{D}^v$, et on la définit de la façon suivante :

$$\mathbb{D}^v = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & \sqrt{2}D_{1123} & \sqrt{2}D_{1113} & \sqrt{2}D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & \sqrt{2}D_{2223} & \sqrt{2}D_{2213} & \sqrt{2}D_{2212} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & \sqrt{2}D_{3323} & \sqrt{2}D_{3313} & \sqrt{2}D_{3312} \\ \sqrt{2}D_{2311} & \sqrt{2}D_{2322} & \sqrt{2}D_{2333} & 2D_{2323} & 2D_{2313} & 2D_{2312} \\ \sqrt{2}D_{1311} & \sqrt{2}D_{1322} & \sqrt{2}D_{1333} & 2D_{1323} & 2D_{1313} & 2D_{1312} \\ \sqrt{2}D_{1211} & \sqrt{2}D_{1222} & \sqrt{2}D_{1233} & 2D_{1223} & 2D_{1213} & 2D_{1212} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Pour un tenseur d'ordre deux symétrique $\underline{\underline{A}}$, on note sa représentation en notation de Voigt A^v, et on la définit comme suit :

$$A^v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & \sqrt{2}A_{32} & \sqrt{2}A_{31} & \sqrt{2}A_{21} \end{pmatrix}^t \tag{4.24}$$

Le tenseur des modules d'élasticité, compte tenu de la symétrie du matériau par rapport aux plans $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ et $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$, et son invariance selon $\underline{e}_3$, s'écrit en notation de Voigt (ce qui est rappelé par l'exposant ^{v}) :

$$\mathbb{C}^v = \begin{pmatrix} C^v_{11} & C^v_{12} & C^v_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C^v_{12} & C^v_{22} & C^v_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C^v_{13} & C^v_{23} & C^v_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^v_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^v_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^v_{66} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Le tenseur des souplesses, s'écrit de même :

$$\mathbb{S}^v = \begin{pmatrix} S^v_{11} & S^v_{12} & S^v_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S^v_{12} & S^v_{22} & S^v_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S^v_{13} & S^v_{23} & S^v_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S^v_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S^v_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S^v_{66} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Ce tenseur est facilement relié aux modules de l'ingénieur :

$$\mathbb{S}^v = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{12}} \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Avec les relations de symétrie :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \tag{4.28}$$

$$\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \tag{4.29}$$

$$\frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \tag{4.30}$$

Avec ces conventions, les déformations et les contraintes s'écrivent de la façon suivante :

$$\varepsilon^v = \begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \sqrt{2}\varepsilon_{23} & \sqrt{2}\varepsilon_{13} & \sqrt{2}\varepsilon_{12}\end{pmatrix}^t \tag{4.31}$$

$$\sigma^v = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sqrt{2}\sigma_{23} & \sqrt{2}\sigma_{13} & \sqrt{2}\sigma_{12}\end{pmatrix}^t \tag{4.32}$$

Le coefficient de Biot, qui est un tenseur d'ordre deux diagonal, s'écrit alors :

$$B^v = \begin{pmatrix}B_{11} & B_{22} & B_{33} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \tag{4.33}$$

Modules dans la direction 3 Il peut être nécessaire de connaître l'évolution du module d'Young (E_3) et des coefficients de Poisson (ν_{32} et ν_{31}) dans la direction qui n'est pas modélisée pour déterminer les autres coefficients des tenseurs des modules. Heureusement, ces trois coefficients se déterminent très simplement par la remarque suivante, qui est également adoptée par Nemat-Nasser ([28], p.85).

Le milieu étant invariant dans la direction 3, si on dispose d'un cylindre à base quelconque dans cette direction et qu'on lui soumet un déplacement imposé uniforme sur la face supérieure, qu'on bloque la face inférieure, et qu'on laisse les faces latérales libres, les champs de déformation et de contrainte qui s'y établissent sont uniformes. Le module d'Young apparent de l'ensemble dans la direction trois est alors égal au module d'Young initial E multiplié par la fraction volumique de matériau (c'est-à-dire diminué en fonction de la quantité de trous). La dilatation latérale de l'ensemble par effet poisson est, elle, inchangée. Ceci s'écrit :

$$E_3 = (1-f)E \tag{4.34}$$

$$\nu_{32} = \nu_{31} = \nu \tag{4.35}$$

De la même façon, le coefficient de Biot dans la direction 3 B_{33} nous sera utile. Si l'on se souvient de la formule 4.22, on peut l'écrire en fonction du tenseur de localisation en notation de Voigt :

$$B_{33} = f(A^v_{13} + A^v_{23} + A^v_{33}) \tag{4.36}$$

Il nous suffit donc de déterminer ces trois composantes du tenseur de localisation.

On procède cette fois en deux phases, matérialisées par les exposants I et II. Tout d'abord on applique un chargement vertical de déformation imposée unitaire, laissant les bords libres. Il en résulte, d'après la remarque précédente sur les coefficient de Poisson ν_{32} et ν_{31}, une déformation moyenne sur l'ensemble :

$$E^{I,v} = \begin{pmatrix}-\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \tag{4.37}$$

Et une déformation sur la phase poreuse identique $\varepsilon^I_p = E^I$. On applique alors une deuxième déformation imposée, égale à :

$$E^{II,v} = \begin{pmatrix}\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \tag{4.38}$$

On a alors une déformation sur la phase poreuse (par définition) :

$$\varepsilon^{II,v}_p = \begin{pmatrix}\nu(A^v_{11} + A^v_{12}) & \nu(A^v_{21} + A^v_{22}) & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \tag{4.39}$$

Il en résulte une déformation totale :

$$E^v = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^t \tag{4.40}$$

Et une déformation sur la phase poreuse totale :

$$\varepsilon_p^v = \begin{pmatrix} \nu(A_{11}^v + A_{12}^v - 1) & \nu(A_{21}^v + A_{22}^v - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \tag{4.41}$$

qui est aussi égale, par définition, à :

$$\varepsilon_p^v = \begin{pmatrix} A_{13}^v & A_{23}^v & A_{33}^v & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \tag{4.42}$$

Si l'on égalise les traces de ces deux expressions de la déformation de la phase poreuse, on obtient une deuxième écriture pour $A_{13}^v + A_{23}^v + A_{33}^v$, et :

$$B_{33} = f\left[1 + \nu(A_{11}^v + A_{12}^v + A_{21}^v + A_{22}^v)\right] \tag{4.43}$$

Enfin, si l'on utilise les deux relations :

$$B_{11} = f(A_{11}^v + A_{12}^v + A_{13}^v) \tag{4.44}$$

et

$$B_{22} = f(A_{12}^v + A_{22}^v + A_{32}^v) \tag{4.45}$$

On obtient :

$$B_{33} = f(1 - 2\nu) + \nu(B_{11} + B_{22}) \tag{4.46}$$

La connaissance de cette composante B_{33} du coefficient de Biot nous permettra de déterminer M, le module de Biot, à partir de B, ce qui est parfois utile quand on ne le détermine pas directement.

Cas des déformations imposées On cherche à déterminer les coefficients E_1, E_2, ν_{12} et μ_{12}. Les coefficients E_3, ν_{32} et ν_{31} sont connus, ν_{21} est accessible par la condition de symétrie 4.28, et μ_{23} et μ_{13} sont inaccessibles par un calcul en déformations planes.

La méthode est alors la suivante. On fait deux calculs par éléments finis. Pour le premier, on impose :

$$\underline{\underline{E}}^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

On mesure alors les composantes accessibles en déformations planes de contraintes moyennes sur Ω, que l'on appelle Σ_{11}^I, Σ_{22}^I et Σ_{12}^I.

On procède de même pour un second chargement :

$$\underline{\underline{E}}^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

Disposant des contraintes liées à ce second chargement, Σ_{11}^{II}, Σ_{22}^{II} et Σ_{12}^{II}, on pose les deux systèmes :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^I = \mathbb{S} : \underline{\underline{E}}^I \tag{4.49}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{II} = \mathbb{S} : \underline{\underline{E}}^{II} \tag{4.50}$$

D'où l'on extrait 4 équations indépendantes qui nous permettent d'écrire :

$$E_1 = \frac{\left(\frac{\Sigma_{11}^I}{\Sigma_{22}^I}\right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11}^{II}}{\Sigma_{22}^{II}}\right)^2}{\frac{1}{(\Sigma_{22}^I)^2}\left[\Sigma_{11}^I + \frac{\nu^2}{E_3}\left(\left(\Sigma_{11}^I\right)^2 - \left(\Sigma_{22}^I\right)^2\right)\right] + \frac{1}{(\Sigma_{22}^{II})^2}\left[\Sigma_{22}^{II} + \frac{\nu^2}{E_3}\left(\left(\Sigma_{22}^{II}\right)^2 - \left(\Sigma_{11}^{II}\right)^2\right)\right]} \tag{4.51}$$

$$E_2 = \frac{\left(\frac{\Sigma_{22}^{II}}{\Sigma_{11}^{II}}\right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{22}^{I}}{\Sigma_{11}^{I}}\right)^2}{\frac{1}{(\Sigma_{11}^{I})^2}\left[\Sigma_{11}^{I} + \frac{\nu^2}{E_3}\left(\left(\Sigma_{11}^{I}\right)^2 - \left(\Sigma_{22}^{I}\right)^2\right)\right] + \frac{1}{(\Sigma_{11}^{II})^2}\left[\Sigma_{22}^{II} + \frac{\nu^2}{E_3}\left(\left(\Sigma_{22}^{II}\right)^2 - \left(\Sigma_{11}^{II}\right)^2\right)\right]} \tag{4.52}$$

$$\nu_{12} = \frac{E_1}{\Sigma_{22}^{II}}\left[\frac{\Sigma_{11}^{II}}{E_1} - \frac{\nu^2}{E_3}\left(\Sigma_{11}^{II} + \Sigma_{22}^{II}\right)\right] \tag{4.53}$$

$$\mu_{12} = \frac{\Sigma_{12}^{II}}{2} \tag{4.54}$$

Dans le cas présent des déformations imposées, il est simple de déterminer les deux termes du comportement poroélastique $\underline{\underline{B}}^i$ et M^i, en imposant un déplacement nul aux frontières et une pression unitaire dans chaque famille de pore alternativement, et en utilisant les équations (4.19). On voit alors que lorsqu'une pression unitaire est imposée dans la famille de pores i, le coefficient de Biot est donné par l'opposé de la moyenne des contraintes sur l'ensemble :

$$\begin{aligned} B_{11}^i &= - < \sigma_{11} >_i \\ B_{22}^i &= - < \sigma_{22} >_i \end{aligned} \tag{4.55}$$

Les modules de Biot étant eux, obtenus en calculant la moyenne de la déformation sur chaque phase poreuse j dans le problème i :

$$M^{ij} = \phi^j - f^j = f^j < \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^i >_j \tag{4.56}$$

Cas des contraintes imposées Le principe est le même qu'au paragraphe précédent. C'est légèrement plus simple. On impose cette fois dans un premier calcul :

$$\Sigma_{11}^{I} = 1 \tag{4.57}$$
$$\Sigma_{22}^{I} = 0 \tag{4.58}$$
$$\Sigma_{12}^{I} = 0 \tag{4.59}$$

Et dans un second calcul :

$$\Sigma_{11}^{II} = 0 \tag{4.60}$$
$$\Sigma_{22}^{II} = 1 \tag{4.61}$$
$$\Sigma_{12}^{II} = 1 \tag{4.62}$$

Puis on procède comme précédemment en écrivant les équations 4.49, ce qui mène à :

$$E_1 = \frac{1}{E_{11}^{I} + \frac{\nu^2}{E_3}} \tag{4.63}$$
$$E_2 = \frac{1}{E_{22}^{II} + \frac{\nu^2}{E_3}} \tag{4.64}$$
$$\nu_{12} = -\frac{E_{22}^{I} + \frac{\nu^2}{E_3}}{E_{11}^{I} + \frac{\nu^2}{E_3}} \tag{4.65}$$
$$\mu_{12} = \frac{1}{2E_{12}^{II}} \tag{4.66}$$

4.3.2.3 Matériau isotrope transverse

Dans le cas d'un matériau isotrope transverse, c'est-à-dire ayant plus de deux plans de symétrie contenant le vecteur $\underline{e}_3$, les directions 1 et 2 sont équivalentes. On a les relations suivantes sur les coefficients du tenseur des modules élastiques :

$$\mathbb{C}^v_{11} = \mathbb{C}^v_{22} \tag{4.67}$$
$$\mathbb{C}^v_{13} = \mathbb{C}^v_{23} \tag{4.68}$$
$$\mathbb{C}^v_{44} = \mathbb{C}^v_{55} \tag{4.69}$$
$$\mathbb{C}^v_{66} = \mathbb{C}^v_{11} - \mathbb{C}^v_{12} \tag{4.70}$$

Et sur le tenseur des souplesses :

$$\mathbb{S}^v_{11} = \mathbb{S}^v_{22} \tag{4.71}$$
$$\mathbb{S}^v_{13} = \mathbb{S}^v_{23} \tag{4.72}$$
$$\mathbb{S}^v_{44} = \mathbb{S}^v_{55} \tag{4.73}$$
$$\mathbb{S}^v_{66} = \mathbb{S}^v_{11} - \mathbb{S}^v_{12} \tag{4.74}$$

Ce qui s'écrit avec les modules de l'ingénieur :

$$E_1 = E_2 \tag{4.75}$$
$$\nu_{31} = \nu_{32} \tag{4.76}$$
$$\mu_{13} = \mu_{23} \tag{4.77}$$
$$\mu_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \tag{4.78}$$

Dans ce cas un peu plus simple on peut déterminer les quantités qui nous intéressent en un seul calcul, que ce soit en déformations ou en contraintes imposées.

Il peut être pratique d'introduire un module d'incompressibilité en déformations planes, que l'on note k^{2ddp} :

$$k^{2ddp} = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{E_{11} + E_{22}} \tag{4.79}$$

4.4 Microstructures considérées

Décrivons maintenant le type de microstructures sur lesquelles nous allons effectuer nos calculs éléments finis, et dont nous allons déterminer les propriétés homogénéisées. Nous décrivons d'abord , pour les microstructures aléatoires, l'algorithme utilisé pour les générer. Nous présentons ensuite nos cellules de calcul pour des microstructures périodiques.

4.4.1 Microstructures aléatoires, addition aléatoire séquentielle sans recouvrement

Ce procédé permet la fabrication de solides contenant des inclusions. Il s'agit de projeter successivement les inclusions dans un domaine de taille donnée jusqu'à obtenir la fraction volumique désirée et en rejetant les cas où il y a superposition. Sur la Fig. 4.1 on trouve un exemple de structure contenant des pores circulaires de distribution sphérique.

Voici la procédure en détail :

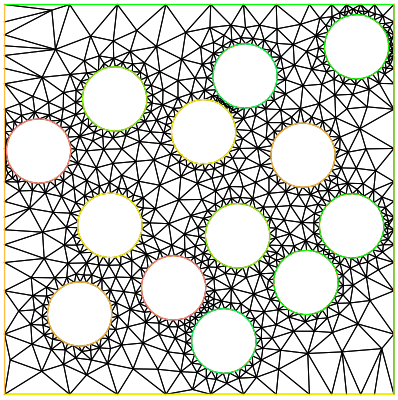

FIGURE 4.1 – Une réalisation de microstructure à pores circulaires distribués de manière isotrope

- On choisit une taille de boîte, et une distribution d'inclusions. Par exemple, notre boîte est un carré de côté 1, et nos inclusions sont des disques de rayon R=0,01, représentant une fraction volumique f=0,4.
- On tire aléatoirement dans $[0, 1]$ les coordonnées des centres de l'inclusion à ajouter. S'il n'y a ni intersection avec une inclusion précédente ni avec le bord, on la conserve.
- On répète l'opération jusqu'à atteindre la fraction volumique f (ce qui est d'autant plus précis que R est petit).

Les difficultés sont les suivantes :

- Pour les formes autres que disques et ellipsoïdes alignés, l'intersection est difficile à tester, et peut nécessiter la discrétisation du bord des inclusions.
- En *2d*, la compacité optimale est d'environ 0,9, mais avec ce type d'algorithme des espaces sont créés qui sont trop petits pour accueillir une inclusion s'il n'y en a qu'une taille. Pour les disques monodisperses, on est en pratique limité à environ 0,5.
- Pour des raisons de maillage, on est obligé d'interdire aux particules d'êtres trop proches les unes des autres. Cela diminue encore un peu la compacité maximale atteignable.

4.4.2 Microstructures périodiques

Les simulations sur cellules périodiques sont plus simples à réaliser, étant déterministes. Nous avons choisi, dans l'esprit des simulations montrées par Zheng et Du [39], de placer les inclusions aux sommets de triangles équilatéraux. C'est de cette façon qu'on peut atteindre, en *2d*, les compacités optimales. Dans le cas d'inclusions circulaires ayant une distribution isotrope, les cercles sont placés au sommets de la grille, et on fait augmenter la fraction volumique en augmentant le rayon des cercles sans agrandir la grille. Pour ce qui est des simulations mettant en jeu des pores ellipsoïdaux alignés, il a deux distributions intéressantes : soit l'on veut représenter des pores ellipsoïdaux de distribution isotrope, dans ce cas dans le modèle périodique les inclusions sont placées aux sommets d'une grille équilatérale, mais la fraction volumique atteignable est d'autant plus faible que les pores sont aplatis, soit l'on veut représenter un agencement assez compact de ces pores, auquel cas on les place aux sommets d'une grille équilatérale aplatie du même rapport que les pores, comme montré sur la Fig. 4.2. Cela est plus proche d'une distribution de pores ayant la même forme que les pores, et on atteint la même fraction volumique qu'avec les cercles sur une grille isotrope.

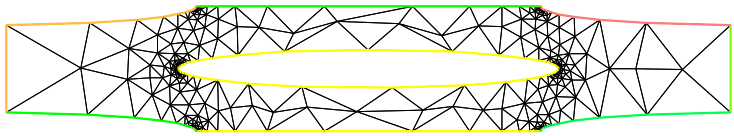

FIGURE 4.2 – Cellule périodique, distribution et forme des pores de même rapport de forme égal à 0,1.

4.5 Détermination de la taille de VER sur un cas simple, approche de Kanit

La définition des tenseurs des modules homogénéisés impose de réaliser des microstructures les plus représentatives possible des propriétés statistiques dont on dispose. Nous allons illustrer ceci avec l'exemple le plus simple : notre milieu hétérogène est constitué d'une matrice élastique isotrope et d'une famille de pores sous pression occupant une fraction volumique f. On veut savoir quel type de conditions aux limites il convient d'utiliser pour déterminer les propriétés homogénéisées, et la taille de boîte que l'on doit simuler pour avoir un résultat fiable.

Tout d'abord, rappelons que les tenseurs des modules homogénéisés obtenus par les conditions aux limites de type contraintes homogènes et déformations homogènes constituent des bornes pour le véritable tenseur homogénéisé, comme montré par Nemat-Nasser ([28], p. 50) et évoqué dans le § 3.2.1 :

$$\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{\Sigma}^{hom} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{general}^{hom} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{E}^{hom} : \underline{\underline{E}} \tag{4.80}$$

Où $\mathbb{C}_{\Sigma}^{hom}$ est déterminé grâce à un problème aux limites à contraintes uniformes imposées, $\mathbb{C}_{E}^{hom}$ grâce à un problème à déplacements linéaires imposés et $\mathbb{C}_{general}^{hom}$ avec n'importe quelles autres CL.

Si l'on a créé une réalisation de notre microstructure, l'écart entre les tenseurs obtenus en contraintes homogènes et déformations homogènes nous renseigne donc sur l'erreur commise.

4.5.1 Description des deux erreurs commises sur l'estimation des propriétés élastiques

Pour tel type de conditions aux limites et telle taille de boîte (c'est-à-dire de rapport $\frac{R}{L}$, R étant la taille caractéristique de l'inclusion, L celle de la boîte), on obtient lors de réalisations successives de la microstructures des propriétés élastiques homogénéisées différentes. En effet, la boîte étant de taille finie, elle ne peut contenir toute l'information. Il est donc nécessaire d'effectuer des réalisations successives pour connaître avec précision la valeur des propriétés homogénéisées déterminées en utilisant telles conditions aux limites sur telle taille de boîte. On doit donc distinguer l'erreur qui vient de la taille de boîte choisie, de l'erreur qui vient du nombre insuffisant de réalisations effectuées à taille de boîte donnée, pour chaque type de conditions aux limites. Ces considérations concernant l'erreur commise dans ce type de simulations sont évoquées dans [1] et [20].

Pour chaque fraction volumique f et pour chaque taille de boîte (rapport $\frac{R}{L}$), nous réalisons :

- un nombre N de réalisations de microstructures correspondant à f
- Pour chaque réalisation i, nous calculons les propriétés recherchées. Nommons A_i l'une de ces quantités, calculée à l'étape i

– Nous calculons la moyenne empirique $\mu_N(A)$ et la variance $\sigma_N(A)$ de A_i :

$$\mu_N(A) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i \tag{4.81}$$

$$\sigma_N(A) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (A_i - \mu_N(A))^2 \tag{4.82}$$

On trace ensuite pour chaque fraction volumique les courbes donnant la moyenne empirique avec intervalle de confiance à 95 % $\left(\mu_N(A) \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\sigma_N(A)}{N}}\right)$ en fonction de la taille de boîte $\frac{R}{L}$.

4.5.2 Exemple : inclusions circulaires

Dans ce cas nous testons les trois types de conditions aux limites sur des domaines de tailles L contenant des inclusions circulaires en fraction volumique fixes f, mais dont la taille R varie. On suppose l'isotropie *2d* macroscopique (c'est-à-dire que le véritable matériau *3d* que l'on représente est isotrope transverse). On s'intéresse donc seulement aux deux coefficients poroélastiques : module et coefficient de Biot (M et b), ainsi qu'aux modules d'élasticité dans le plan. Pour l'élasticité, on choisit le module de cisaillement classique dans le plan μ_{12} et un module de compressibilité *2d* en déformation plane qu'on appelle k_{2ddp}, qui fait le lien entre la trace des déformations et des contraintes dans le plan :

$$k^{2ddp} = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{E_{11} + E_{22}} \tag{4.83}$$

Cette façon de représenter les résultats (voir Fig. 4.3) permet de tirer les conclusions suivantes :

– Les barres d'erreur (qui représentent l'incertitude avec laquelle on connaît la moyenne empirique d'une quantité à taille de boîte donnée) rétrécissent avec l'augmentation de la taille de boîte.
– Le biais de la condition aux limites diminue également.
– Les conditions aux limites périodiques permettent d'avoir une bonne estimation des coefficients recherchés à taille de boîte assez limitée.

Il nous faut maintenant rappeler les estimateurs micromécaniques dont nous allons tester l'efficacité face à ces simulations par éléments finis.

4.6 Rappel des estimateurs

On souhaite comparer les résultats des simulations aux estimateurs classiques de la micromécanique afin de se rendre compte des avantages et des inconvénients de ces formules analytiques plus ou moins simples. Pour chaque estimateur on donne le tenseur de localisation sur la phase inclusionnaire et le tenseur des modules d'élasticité homogénéisés. On utilise systématiquement la formule suivante pour relier le tenseur des modules d'élasticité homogénéisés aux propriétés des phases inclusionnaires et de la matrice, et des tenseurs de localisation sur les inclusions (rappel de l'équation 3.12) :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^{N} f^i(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}^i \tag{4.84}$$

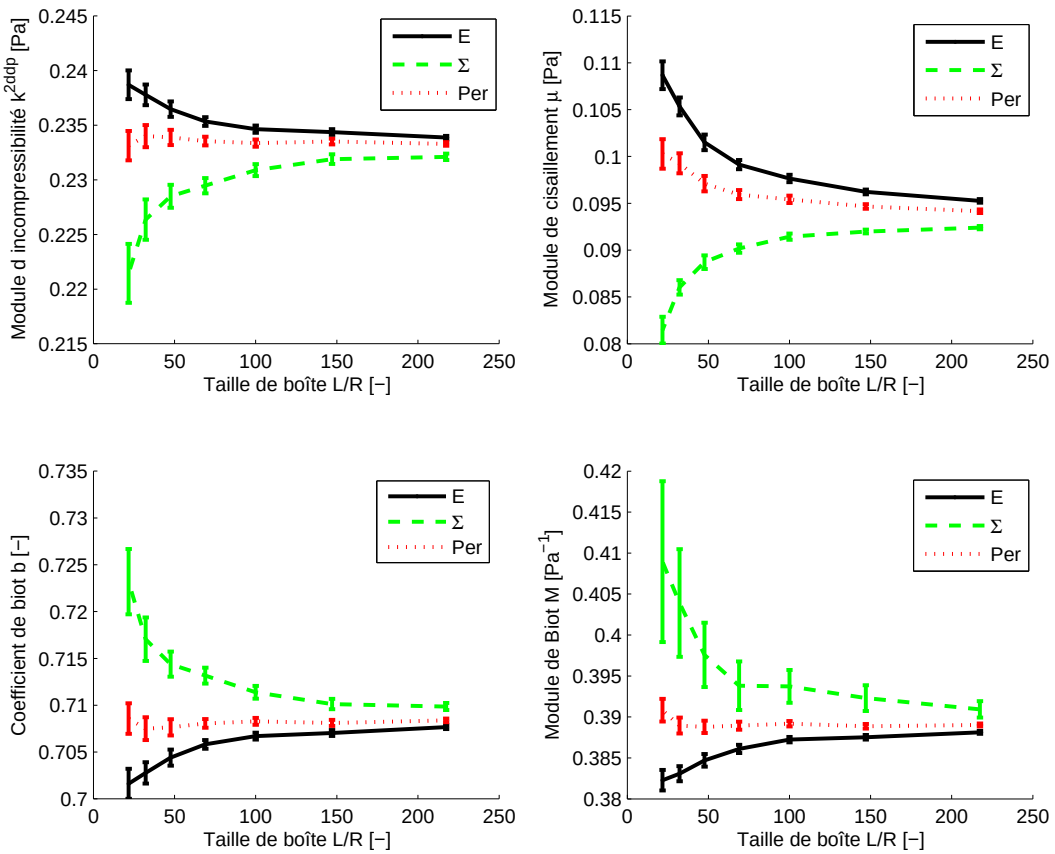

FIGURE 4.3 – Évolution des propriétés poromécaniques pour différentes tailles de boîte pour f=0,4, $E = 1$ Pa et $\nu = 0{,}25$, pour $N = 50$ réalisations par taille de boîte, et intervalles de confiance à 95 %

4.6.1 Expression des estimateurs utilisés

Schéma dilué Le schéma dilué ne sera pas représenté sur les figures suivantes, mais il est évoqué car nécessaire à la compréhension d'autres estimateurs. Comme nous l'avons déjà dit au chapitre 3, considérant donc un ensemble de N familles d'hétérogénéités ellipsoïdales plongées dans une matrice de module $\mathbb{C}^0$, caractérisées par leur module $\mathbb{C}^i$, leur tenseur de Hill $\mathbb{P}_i^0$ et leur fraction volumique dans la matrice f^i,le tenseur de localisation moyen sur l'inclusion i qu'on appelle $\mathbb{A}_i^{dil}$ s'écrit :

$$\mathbb{A}_i^{dil} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right]^{-1} \tag{4.85}$$

Ce tenseur de localisation est, comme traduction élémentaire du résultat d'Eshelby, utilisé à un moment où à un autre dans l'établissement de tous les schémas d'homogénéisation. On utilise ensuite la formule suivante 4.84 pour écrire le module élastique homogénéisé estimé par le schéma dilué :

$$\mathbb{C}^{dil} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^{N} f^i(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}_i^{dil} \tag{4.86}$$

Schéma à deux phases Ainsi que nous l'avons vu, pour construire le schéma à deux phases, on entoure l'hétérogénéité par un ellipsoïde fictif D qui ne nous sert que de surface de mesure des déformations moyennes. On appelle D l'atmosphère de l'inclusion. La forme et la taille de cet ellipsoïde répondent à certaines conditions. Il est caractérisé par son tenseur de Hill pris dans le matériau matrice $\mathbb{P}^0_D$. Son volume D est déterminé de façon à ce que la fraction volumique de l'hétérogénéité ω dans D soit égale à la fraction volumique des hétérogénéités f dans le problème réel : $f = \frac{\omega}{D}$. Sa forme rend compte de la distribution spatiale des hétérogénéités dans le problème réel. Ceci nous définit un nouveau tenseur de localisation propre à ce schéma à deux phases :

$$\mathbb{A}^{2ph}_\omega = \mathbb{A}^{dil}_\omega : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}^0_D : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}^{dil}_\omega\right]^{-1} \tag{4.87}$$

Et un nouveau module homogénéisé (à partir de 4.84) :

$$\mathbb{C}^{2ph} = \mathbb{C}^0 + f(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}^{dil}_\omega : \left[\mathbb{I} - f\mathbb{P}^0_D : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right) : \mathbb{A}^{dil}_\omega\right]^{-1} \tag{4.88}$$

Schéma de Mori-Tanaka On construit ensuite le schéma hyper classique de Mori-Tanaka à partir du schéma à deux phases présenté précédemment. Ainsi que nous l'avons déjà dit, il nous semble que c'est la manière la plus claire de procéder. La seule modification à faire est d'ajouter l'hypothèse que l'ellipsoïde sur lequel on mesure les déformations est de même forme que celui qui délimite l'hétérogénéité et qui intervient dans l'expression du tenseur de localisation de l'inclusion. Les deux ellipsoïdes ont donc le même tenseur de Hill. Le tenseur des modules homogénéisé s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{MT} = &\left[(1-f)\mathbb{C}^0 + f\mathbb{C}^i : \left(\mathbb{I} + \mathbb{P}^0_\omega : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right)^{-1}\right] \\ &: \left[(1-f)\mathbb{I} + f\left(\mathbb{I} + \mathbb{P}^0_\omega : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0\right)\right)^{-1}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{4.89}$$

Schéma autocohérent Rappelons que l'idée de départ du schéma autocohérent est qu'il est important pour déterminer la façon dont la déformation se localise dans une inclusion, de prendre en compte le fait que cette inclusion est entourée d'un matériau qui n'est pas la matrice seule, mais un matériau dont le comportement dépend de celui de toutes les inclusions. On construit donc ce schéma de la même manière que le schéma dilué, en supposant qu'en dehors de l'hétérogénéité le matériau est celui que l'on cherche, et non celui de la matrice :

$$\mathbb{C}^{AC} = \mathbb{C}^0 + f(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) : \mathbb{A}^{AC}_i \tag{4.90}$$

avec :

$$\mathbb{A}^{AC}_i = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}^{AC}_i : \left(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{AC}\right)\right]^{-1} \tag{4.91}$$

Ceci fournit une écriture implicite du module autocohérent homogénéisé. On n'utilise ici qu'un cas particulier de schéma autocohérent, où il existe une solution analytique à l'équation implicite 4.90, ce qui rend l'utilisation du schéma AC facile. Il s'agit du cas où le matériau est homogène, isotrope (caractérisé par le couple (k, μ) et comporte des pores sphériques répartis de manière isotrope dans le matériau. D'après Nemat-Nasser ([28], p. 103), les propriétés élastiques homogénéisées, que l'on écrit ici en terme de module de cisaillement dans le plan μ_{12} et de module d'incompressibilité *2d* en déformation plane k^{2ddp}, s'expriment alors simplement :

$$\begin{aligned}\frac{\mu^{AC}_{12}}{\mu_0} &= \frac{1-3f}{1+f(1-4\nu_0)} \\ \frac{k^{AC}_{2ddp}}{k^{2ddp}_0} &= 2\frac{(3-4\nu_0)(1-\nu_0)(1-3f)}{3-4\nu_0 1-f(1-4\nu_0)}\end{aligned} \tag{4.92}$$

Schéma *IDD* Comme nous l'avons présenté au chapitre 3, le schéma *IDD* est construit à partir du schéma autocohérent généralisé (évoqué au paragraphe 4.6.2). Il permet de trouver une expression analytique agréable des tenseurs d'élasticité et de localisation. On note ici l'expression de cet estimateur dans le cas où il y a plusieurs phases inclusionnaires.

$$\mathbb{L}^{IDD} = \left[\mathbb{I} - \sum_i \mathbb{L}_i^d \mathbb{P}_{Di}^0\right]^{-1} \mathbb{L}^d \tag{4.93}$$

avec

$$\mathbb{L}^{IDD} = \mathbb{C}^{IDD} - \mathbb{C}^0 \tag{4.94}$$

$$\mathbb{L}^i = \mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0 \tag{4.95}$$

$$\mathbb{L}_i^d = f^i \left(\mathbb{L}_i^{-1} + \mathbb{P}_i^0\right)^{-1} \tag{4.96}$$

$$\mathbb{L}^d = \sum_k \mathbb{L}_k^d \tag{4.97}$$

$$\mathbb{P}_i^0 = \mathbb{S}_i^0 \mathbb{C}_0^{-1} \tag{4.98}$$

Dernière étape, écrire un nouveau tenseur de localisation :

$$\mathbb{A}_i^{IDD} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^0 \mathbb{L}^i\right]^{-1} : \left[\mathbb{I} - \sum_k \mathbb{P}_{Dk}^0 \mathbb{L}_k^d\right]^{-1} \tag{4.99}$$

Permet d'obtenir le même tenseur homogénéise sans dépendre du tenseur des modules recherché. Or, le premier terme est le tenseur de localisation dilué. Posant

$$\underline{\underline{E}}^E = \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_{Di}^0 \mathbb{L}_i^d\right]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \tag{4.100}$$

On traite en fait un problème de type dilué, en remplaçant la déformation à l'infini de départ par une autre, mais qui cette fois-ci ne dépend d'aucune quantité qu'on recherche.

Cet estimateur est identique au schéma à deux phases *2ph* (voir paragraphe 4.6.1) lorsqu'il n'y a qu'une seule sorte d'inclusion, et identique au schéma de Mori-Tanaka (voir § 4.6.1) si en plus l'atmosphère est prise de forme identique à l'inclusion.

4.6.2 Un cas de schéma numérique : autocohérent généralisé

Le schéma autocohérent généralisé dans son idée originale, qui correspond au schéma à trois phases de Nemat-Nasser [28] dans lequel le milieu extérieur est le milieu recherché, consiste à calculer le tenseur de localisation sur la phase inclusionnaire de la façon suivante :

- on place une inclusion dans une atmosphère de matériau matrice, représentant par sa forme la distribution des inclusions dans l'espace ;
- l'ensemble inclusion-atmosphère est lui-même placé dans le milieu homogénéisé que l'on cherche ;
- on charge à l'infini ;
- on calcule la moyenne des déformations sur l'ensemble inclusion-atmosphère, et sur l'inclusion seule ;
- le tenseur de localisation moyen sur l'inclusion est alors le tenseur d'ordre 4 par lequel il faut multiplier la moyenne de la déformation sur l'ensemble inclusion-matrice pour obtenir la moyenne de la déformation sur l'inclusion.

L'ennui avec ce schéma est qu'on ne dispose pas de solution analytique pour les déformations moyennes évoquées ci-dessous, donc pas non plus pour le tenseur de localisation dont on a besoin pour calculer les propriétés poroélastiques. Il est donc nécessaire de recourir à une démarche numérique itérative.

On procède comme expliqué précédemment, en construisant un modèle par élément finis de l'inclusion entourée par son atmosphère qu'on plonge dans un milieu assez grand pour paraître infini par rapport à la taille de l'ensemble inclusion-atmosphère. Comme on ne connaît pas le matériau homogénéisé que l'on cherche, on met comme matériau extérieur le matériau matrice, et on applique la procédure expliquée précédemment de calcul du tenseur de localisation sur l'inclusion, à partir duquel on calcule le tenseur d'élasticité homogénéisé correspondant. On répète l'opération en mettant à chaque étape le nouveau tenseur des modules d'élasticité comme milieu extérieur. Cette procédure converge vers un tenseur des modules d'élasticité, qui correspond au schéma autocohérent généralisé.

4.6.3 Expression des tenseurs d'Eshelby nécessaires

Toutes les simulations que nous présentons concernent des inclusions de forme ellipsoïdale. On a donc besoin du tenseur d'Eshelby de ce type d'inclusion dans un milieu infini. Ce tenseur s'exprime simplement lorsque le milieu extérieur à l'ellipsoïde est isotrope, mais cela se complique énormément si ce n'est pas le cas. Nous rappelons donc les expressions que nous utilisons dans ce chapitre.

Cylindre elliptique Considérant un cylindre infini dans la direction 3, à base elliptique caractérisée par un grand axe et un petit axe a_1 et a_2, plongé dans un milieu homogène isotrope infini de coefficient de poisson ν, voici les composantes données par Mura :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_2^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}+(1-2\nu)\frac{a_2}{a_1+a_2}\right\}\\
\mathbb{S}_{2222} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_1^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}+(1-2\nu)\frac{a_1}{a_1+a_2}\right\}\\
\mathbb{S}_{3333} &= 0\\
\mathbb{S}_{1122} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_2^2}{(a_1+a_2)^2}-(1-2\nu)\frac{a_2}{a_1+a_2}\right\}\\
\mathbb{S}_{2233} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{2\nu a_1}{a_1+a_2}\\
\mathbb{S}_{3311} &= 0\\
\mathbb{S}_{1133} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{2\nu a_2}{a_1+a_2}\\
\mathbb{S}_{2211} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_1^2}{(a_1+a_2)^2}-(1-2\nu)\frac{a_1}{a_1+a_2}\right\}\\
\mathbb{S}_{3322} &= 0\\
\mathbb{S}_{1212} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a_1^2+a_2^2}{2(a_1+a_2)^2}-\frac{1-2\nu}{2}\right\}\\
\mathbb{S}_{2323} &= \frac{a_1}{2(a_1+a_2)}\\
\mathbb{S}_{3131} &= \frac{a_2}{2(a_1+a_2)}
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, chacune de ses composantes ne dépend que du rapport $\frac{a_1}{a_2}$.

Disque, en *2d* Utilisant la solution du cylindre infini, si $a_1 = a_2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{5}{4} - \nu\right\} \\
\mathbb{S}_{1122} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\nu - \frac{1}{4}\right\} \\
\mathbb{S}_{1212} &= \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\nu - \frac{1}{4}\right\}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

4.7 Comparaisons simulations-estimateurs

On dispose désormais des éléments nécessaires pour tester la validité des estimateurs, en commençant par la situation simple des pores sphériques, puis différents cas de figures de pores aplatis, et enfin une cavité plus complexe qui nous est inspirée par l'étude de l'alcali-réaction que nous ferons dans la troisième partie de ce mémoire.

4.7.1 Pores sphériques

C'est la situation la plus simple, pour laquelle le matériau homogénéisé est isotrope, et la distribution des particules est semblable à leur forme, voir Fig. 4.1.

Nous traçons ensemble quatre types de résultats (voir Fig. 4.4) :

- des résultats de simulations sur matériau hétérogène aléatoire généré par la méthode d'addition séquentielle aléatoire (ASA), que nous appelons *alea* ;
- des résultats de simulations sur cellule périodique ;
- deux estimateurs classiques : Auto-cohérent (AC) et Mori-Tanaka (MT). L'estimateur MT est dans le cas actuel égal aux estimateurs *2ph*, PCW et IDD puisqu'il n'y a qu'une seule sorte d'inclusions dont la distribution est la même que la forme ;
- l'estimateur autocohérent généralisé (ACG), déterminé numériquement, même si dans le cas présent il existe une solution analytique [10].

On remarque que le schéma AC donne de mauvais résultats. Il surestime beaucoup trop la diminution des propriétés élastiques. Ce type de schéma n'est pas fait pour les situations où les inclusions restent toujours englobées d'une couche (même fine) de matrice, et c'est précisément dans ce cas qu'on se trouve lorsqu'on génère la microstructure par ASA sans recouvrement. Il est donc tout à fait logique que le schéma AC ne soit pas adapté à la situation présente. Les schémas IDD, ACG donnent d'assez bons résultats, qu'on remarque bien plus proches de la simulation sur cellule périodique que de la simulation sur le matériau généré par ASA.

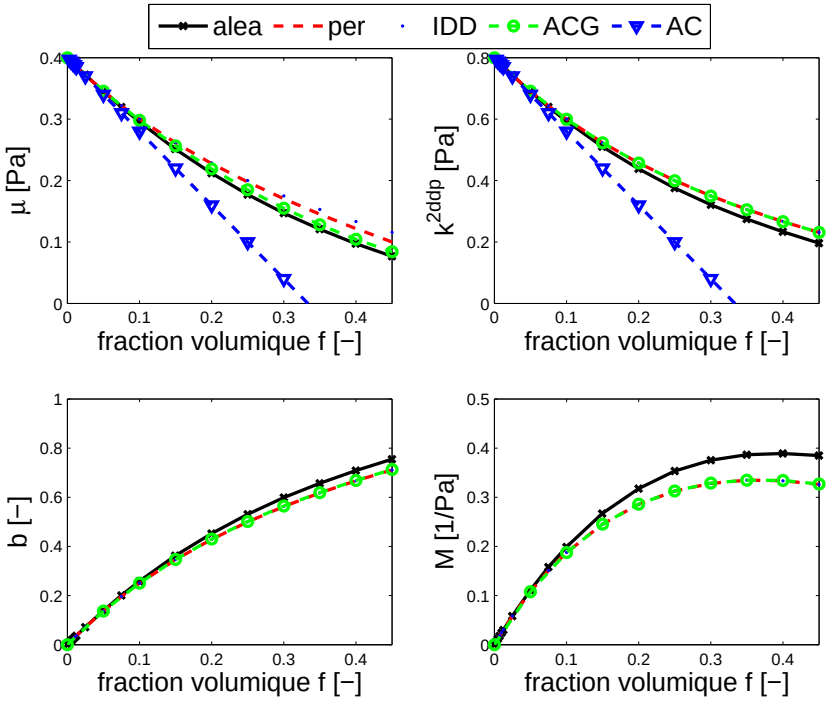

FIGURE 4.4 – Évolution des propriétés poromécaniques en fonction de la fraction volumique avec $E = 1$ Pa et $\nu = 0.25$, pour $N = 50$ réalisations par point pour la simulation *alea*. Comparaison avec divers estimateurs classiques (AC et IDD), des simulations sur cellules périodiques *per*, et un estimateur autocohérent généralisé ACG numérique.

4.7.2 Pores aplatis et alignés

Cette situation est un peu plus compliquée puisque le matériau n'a plus la symétrie isotrope transverse, mais est orthotrope. Il faut donc quatre coefficients pour décrire son comportement élastique dans le plan (nous choisissons les modules d'Young E_1 et E_2, le module de cisaillement μ_{12} et le coefficient de Poisson ν_{12}), et trois coefficients poroélastiques (b_{11}, b_{22}, M). On ne présentera pas les coefficients de Poisson dans les résultats, car leur estimation est de mauvaise qualité pour les tailles de boîte utilisées. Leur estimation dépend en effet beaucoup de la mesure de la déformation dans des directions où la rigidité est presque nulle à grande fraction volumique.

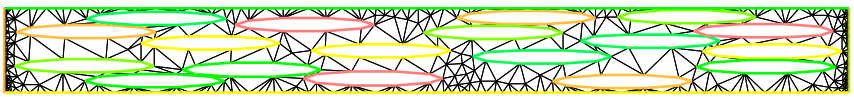

FIGURE 4.5 – Microstructure à pores aplatis de rapport de forme 1/10. Le domaine de calcul a le même rapport de forme, de façon à avoir une erreur semblable sur les propriétés mécaniques dans les deux directions du plan.

Cette fois on trace trois types de courbes :

- La simulation sur un volume créé par ASA, où les pores ellipsoïdaux remplissent progressivement une boîte carrée ou rectangulaire (voir Fig. 4.5).
- Deux simulations sur cellule périodique. Elles diffèrent en ce que pour la simulation *perEC* les inclusions ellipsoïdales sont placées au sommet d'un triangle équilatéral (leur distribu-

tion est donc isotrope) alors que dans la simulation *perEE*, le triangle équilatéral a été aplati d'un facteur égal au rapport de forme de l'inclusion (voir Fig. 4.2). Cela correspond à une distribution ellipsoïdale des inclusions.

– Deux schémas classiques : le schéma à deux phases *2ph*, dans lequel la distribution des inclusions est prise isotrope (on utilise le tenseur Eshelby d'un cylindre à base circulaire), qui est dans ce cas identique au schéma *IDD* (étant donné qu'il n'y a qu'une famille d'inclusions), et le schéma de Mori-Tanaka.

Les propriétés poromécaniques caractérisant un milieu orthotrope sont tracées sur les figures 4.6 et 4.7. On a omis le coefficient de Poisson, pour lequel nos simulations donnent des résultats peu satisfaisants. Nous n'avons pu réduire suffisamment la taille des inclusions par rapport à celle du modèle pour faire converger ses valeurs.

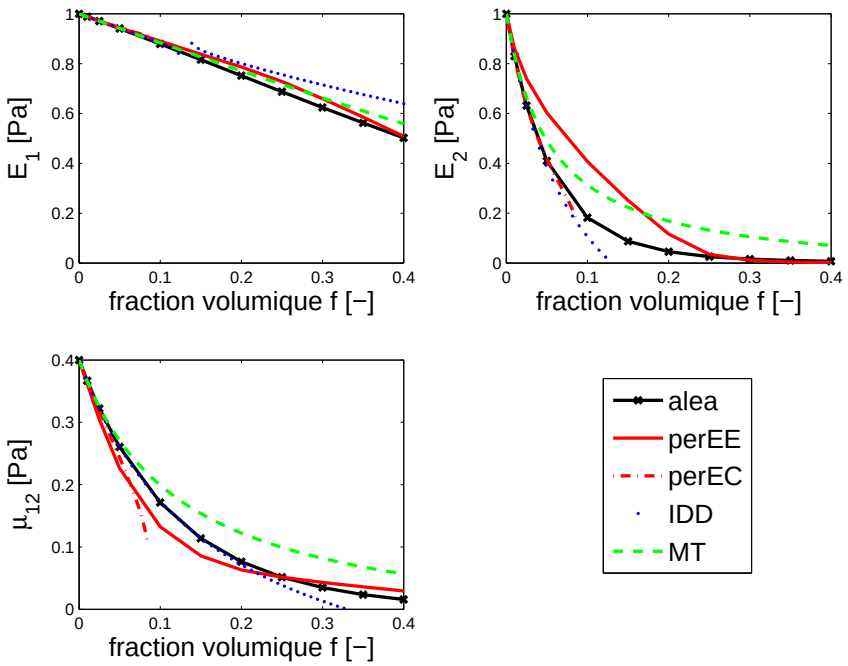

FIGURE 4.6 – Évolution des propriétés élastiques en fonction de la fraction volumique avec $E = 1$ Pa et $\nu = 0,25$, pour $N = 50$ réalisations par point pour la simulation *alea*, et un rapport de forme des ellipsoïdes de 1/10. Comparaison avec divers estimateurs classiques, des simulations sur cellules périodiques à distribution ellipsoïdale *perEE*, et grille à distribution isotrope *perEC*.

La première constatation est que le schéma à deux phases (identique ici à *IDD*) ne fonctionne pas du tout. À partir d'une fraction volumique de 0,13 environ, E_2 s'annule et b_2 dépasse 1, ce qui n'est pas possible. Cet échec est lié au fait que l'inclusion doit pouvoir être contenue dans l'ellipsoïde qui représente sa distribution. Or ce n'est plus possible à partir de $f = \frac{b}{a} = 1/10$ ici. Pour résoudre ce problème il est nécessaire d'avoir une réflexion plus approfondie sur la forme que l'on doit choisir pour l'ellipsoïde qui représente la distribution des inclusions. Le schéma *MT* donne des résultats raisonnables.

Concernant les simulations sur cellule périodique, elles donnent des résultats très différents, mais on peut remarquer que globalement aux faibles fractions volumiques *alea* se comporte à peu près comme *perEC*, alors qu'au fur et à mesure qu'elle augmente, *alea* se rapproche de *perEE*. Ceci est lié au processus de fabrication du matériau hétérogène. En effet, même si on projette les

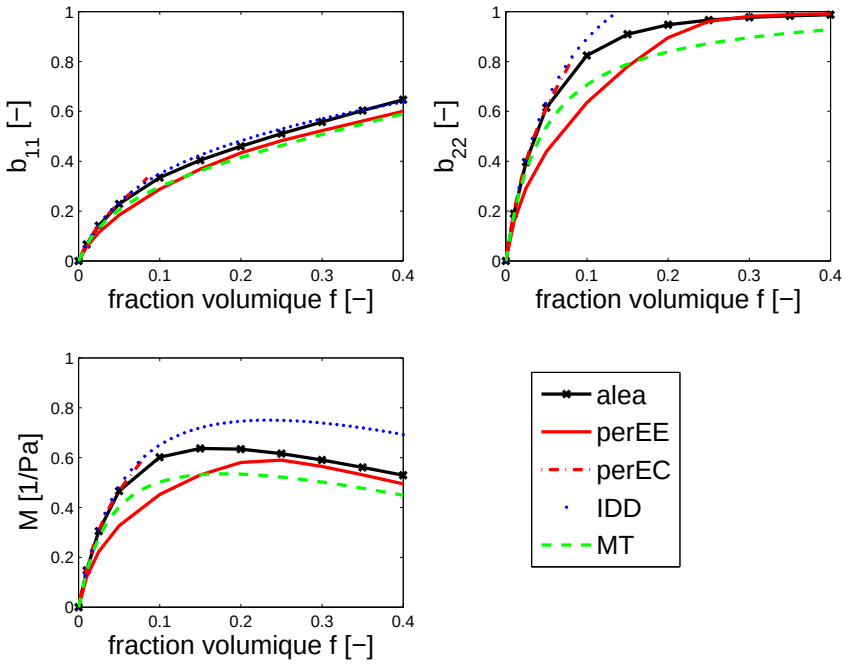

FIGURE 4.7 – Évolution des propriétés poroélastiques en fonction de la fraction volumique avec $E = 1$ Pa et $\nu = 0,25$, pour $N = 50$ réalisations par point pour la simulation *alea*, et un rapport de forme des ellipsoïdes de 1/10. Comparaison avec divers estimateurs classiques, des simulations sur cellules périodiques à distribution ellipsoïdale *perEE*, et grille à distribution isotrope *perEC*.

inclusions de manière isotrope, leur anisotropie de forme fait que par l'intermédiaire du rejet lors d'une superposition, une anisotropie de distribution se crée, qui devient ellipsoïdale et d'axe et de rapport de forme identiques à ceux de l'inclusion lorsqu'on approche la compacité maximale.

On voit ainsi que la fraction volumique augmentant, l'hypothèse de distribution isotrope des inclusions qui est faite dans le schéma à deux phases tel qu'utilisé ici devient moins réaliste que celle de distribution des inclusions semblable à leur forme, qui est implicite dans le schéma de Mori-Tanaka. On peut imaginer une transition d'un régime à l'autre en s'inspirant du cas où les inclusions sont disposées sur une grille périodique (voir [29] et [2]) il s'agit, supposant que l'inclusion représente dans son atmosphère une proportion égale à la fraction volumique totale, de détecter le moment où (l'inclusion étant aplatie mais l'atmosphère circulaire) il n'y a plus assez de place pour faire grandir l'inclusion dans l'atmosphère. Cela se produit à la fraction volumique $f = \frac{b}{a}$. Si l'on suppose que l'atmosphère s'aplatit de façon à faire la place, cela donne la loi suivante pour le rapport d'aspect de l'atmosphère :

$$\begin{aligned} &\text{Si } f < \frac{b}{a} \ , \ X^d = 1 \\ &\text{Si } f \geq \frac{b}{a} \ , \ X^d = \frac{b}{a}\frac{1}{f} \end{aligned} \tag{4.103}$$

Cela donne un estimateur intermédiaire entre Mori-Tanaka et deux phases.

On peut également optimiser l'évolution du rapport d'aspect de l'atmosphère de façon à coller le mieux possible aux propriétés homogénéisées déterminées numériquement. On représente les deux possibilités évoquées pour l'évolution du rapport de forme de l'atmosphère et les propriétés mécaniques obtenues (hormis le coefficient de Poisson, pour lequel la convergence dans nos

simulations aléatoires par élément finis n'est pas satisfaisante) sur les figures 4.8 et 4.9.

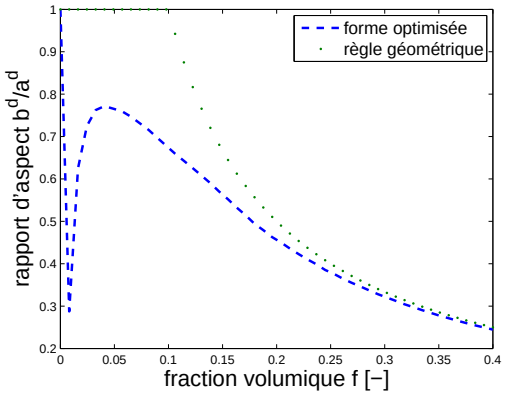

FIGURE 4.8 – Forme simple proposée et forme optimisée de l'évolution du rapport de forme de l'atmosphère pour le schéma à deux phases.

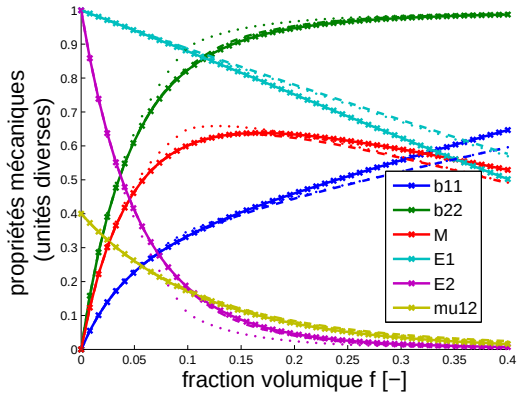

FIGURE 4.9 – Résultats obtenus sur six propriétés mécaniques, (•) forme géométrique simple, (−−) : forme optimisée (tirets), (×) : simulations.

On voit que la règle géométrique, donnée à l'équation 4.103 donne des résultats très satisfaisants et présente l'avantage de la simplicité, par rapport à l'évolution optimisée du rapport de forme (Fig. 4.9). On appelle Full Range IDD (*FRIDD*) le schéma *IDD* avec atmosphère modifiée par la règle géométrique, nom donné par les auteurs qui ont proposé cette adaptation dès leur article [39] pour des fissures orientées aléatoirement, s'inspirant d'une adaptation similaire proposée pour le schéma *PCW* dans le cas de fissures alignées [29]. Testons cette règle géométrique pour le schéma *IDD* sur un cas d'ellipses encore plus aplaties.

4.7.3 Fissures alignées

On peut effectuer une analyse similaire en considérant des ellipsoïdes encore plus aplatis, ressemblant donc plus à des fissures. On utilise ici un rapport d'aspect de 1/100. On représente ici le schéma *IDD* (ou *2ph*, ce qui est identique dans ce cas) simple, considérant une atmosphère circulaire, le schéma de *MT* , et le schéma *FRIDD* adapté avec la règle simple évoquée au paragraphe précédent (équation 4.103). Comme on le voit sur les figures 4.10 et 4.11 les résultats ne sont pas parfaits avec le schéma *FRIDD*, c'est néanmoins de qualité satisfaisante. On peut également, comme montré au paragraphe 4.7.2, améliorer la courbe donnant l'évolution de la forme de l'atmosphère en fonction de la fraction volumique, de façon à obtenir des résultats plus proches des simulations. Nous considérons néanmoins que la simplicité de la formulation géométrique la rend préférable.

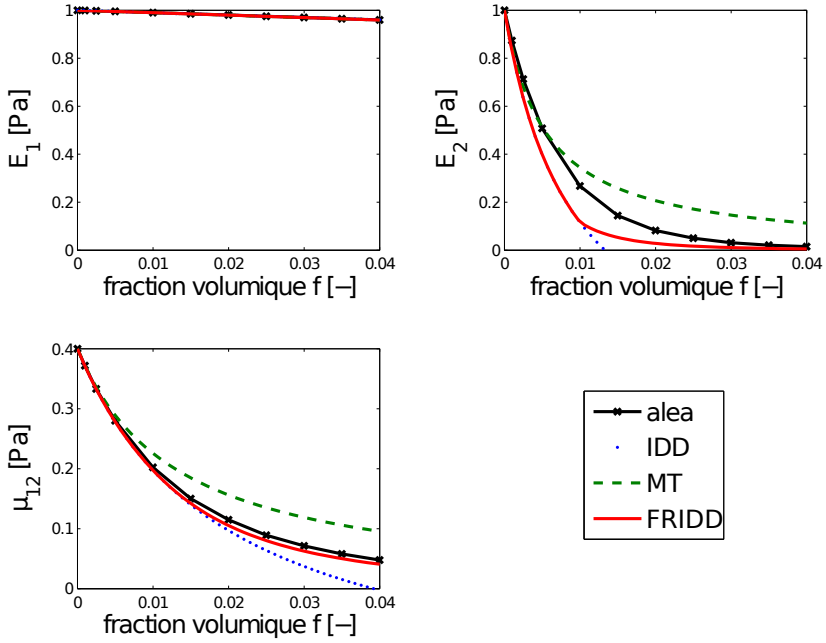

FIGURE 4.10 – Fissures de rapport d'aspect 1/100. Simulations, schéma *IDD* avec atmosphère circulaire, schéma de Mori-Tanaka, schéma *FRIDD* avec atmosphère évoluant selon notre règle géométrique. Propriétés élastiques.

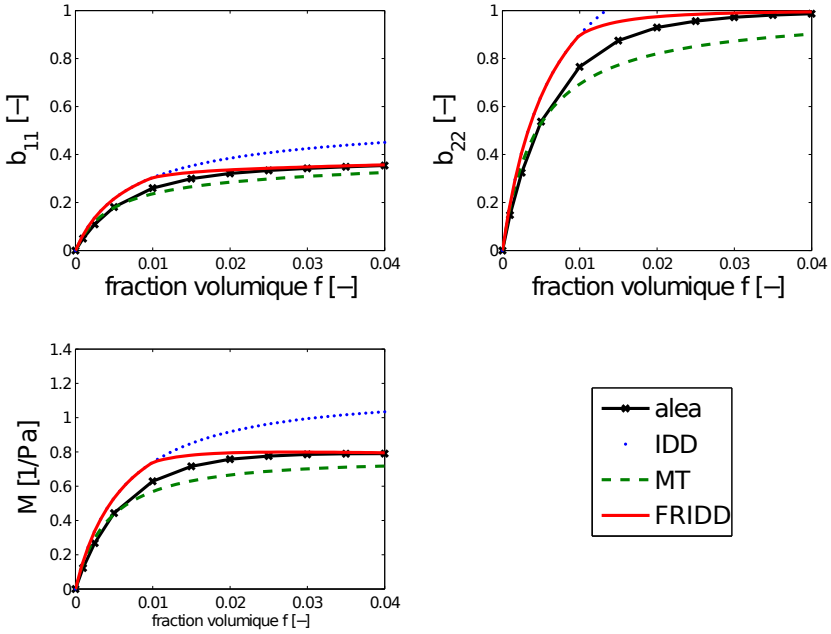

FIGURE 4.11 – Fissures de rapport d'aspect 1/100. Simulations, schéma *IDD* avec atmosphère circulaire, schéma de Mori-Tanaka, schéma *FRIDD* avec atmosphère évoluant selon notre règle géométrique. Propriétés poroélastiques.

4.7.4 Pores aplatis d'orientations distribuées de manière isotrope, pores aplatis distribués à 0 et $\pi/2$

4.7.4.1 Présentation de la comparaison avec les estimateurs

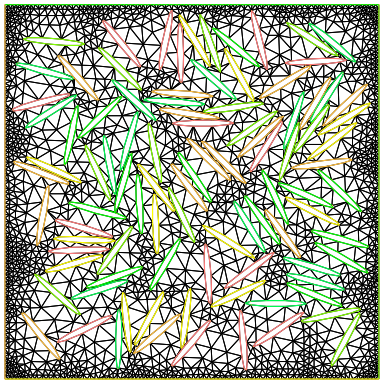

FIGURE 4.12 – Microstructure de pores à orientation isotrope

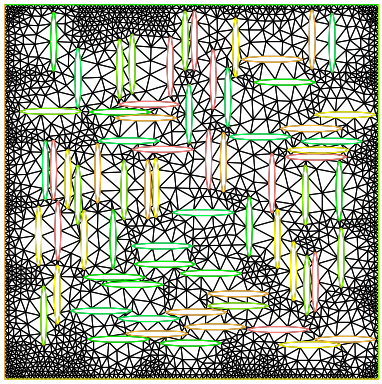

FIGURE 4.13 – Microstructure de pores, orientations 0 et $\pi/2$

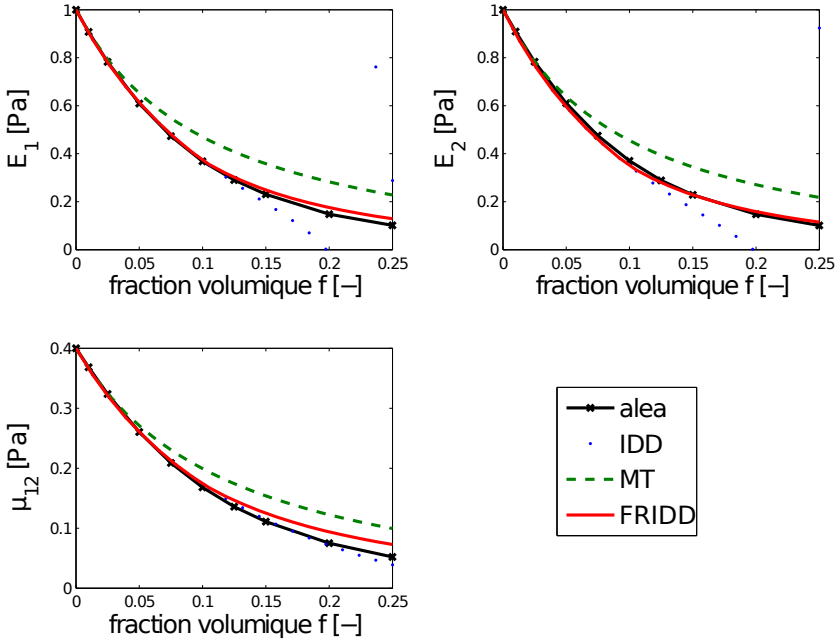

FIGURE 4.14 – Fissures de rapport d'aspect 1/10, d'orientation isotrope, ou en deux familles à 0 et $\pi/2$. Simulations, schéma *IDD* avec atmosphère circulaire, schéma de Mori-Tanaka, schéma *FRIDD* avec atmosphère évoluant selon notre règle géométrique. Propriétés élastiques.

Lorsqu'on distribue les orientations des pores aplatis de manière isotrope, on obtient un matériau macroscopiquement isotrope transverse. Les fractions volumiques accessibles lorsqu'on fabrique un volume avec l'algorithme d'Addition Séquentielle Aléatoire sont moindres que dans le cas où les ellipsoïdes sont alignés, en raison de l'apparition de volume trop petits pour contenir

une inclusion, quelle que soit son orientation (voir Fig. 4.12). Les propriétés homogénéisées de réalisation d'un tel matériau créé par l'algorithme d'addition séquentielle aléatoire sont comparées aux estimateurs *IDD* , *MT*, et *FRIDD*, c'est-à-dire modifié selon notre règle usuelle géométrique. Une deuxième distribution donne des résultats identiques à la fois au niveau des estimateurs et des simulations numériques, c'est la situation où les pores sont répartis en deux familles, la moitié à un angle de 0, l'autre à $\pi/2$, comme représenté sur la Fig. 4.13. Dans cette situation,

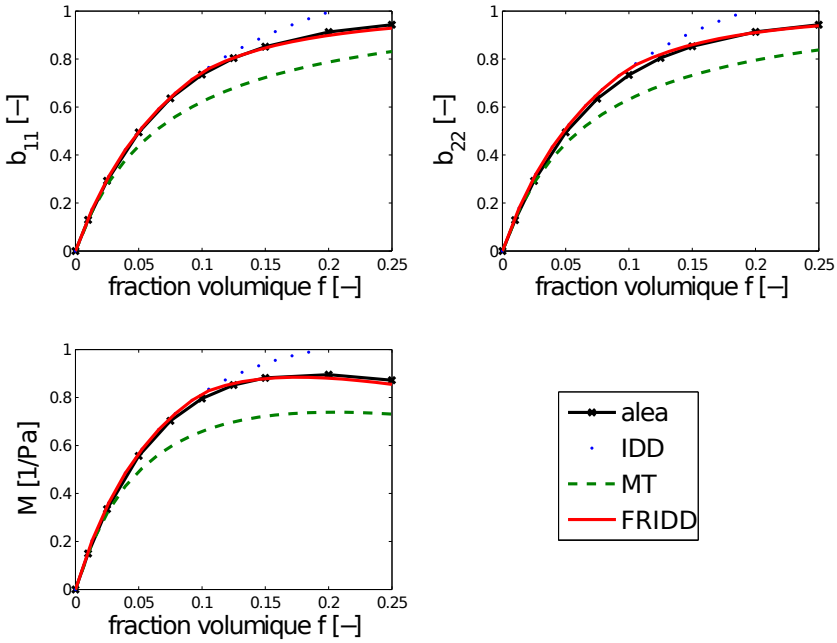

FIGURE 4.15 – Fissures de rapport d'aspect 1/10, d'orientation isotrope, ou en deux familles à 0 et $\pi/2$. Simulations, schéma *IDD* avec atmosphère circulaire, schéma de Mori-Tanaka, schéma *FRIDD* avec atmosphère évoluant selon notre règle géométrique. Propriétés poroélastiques.

les résultats donnés par l'estimateur *FRIDD* sont très satisfaisants pour toutes les propriétés poromécaniques comme on le voit sur les figures 4.14 et 4.15.

4.7.4.2 Comparaison plus précise de l'orientation isotrope avec les deux familles orthogonales

On a dit au paragraphe précédent que le cas où deux familles de fissures de même taille, en même nombre et orthogonales, si l'on considère que le matériau est au niveau macroscopique isotrope transverse, donne des résultats très proches du cas où les fissures sont orientées aléatoirement avec une distribution isotrope des orientations.

Tout d'abord, demandons nous si le matériau représenté sur la Fig. 4.13 est loin d'être isotrope transverse. Pour cela nous comparons le module de cisaillement μ_{12} obtenu grâce à un véritable chargement de cisaillement, à la quantité $\mu_{ortho} = \frac{E}{2(1+\nu_{12})}$. Si le matériau est isotrope transverse, ces deux quantités sont égales. Sinon, μ_{ortho} n'a pas de signification physique. On n'a pas précisé quel module d'Young on prend dans cette formule car les directions 1 et 2 sont équivalentes donc on a $E_1 = E_2$.

Comme on le voit sur la Fig. 4.16, la différence n'est pas énorme. On en déduit que le matériau n'est pas très anisotrope dans le plan lorsqu'il est fissuré par deux réseaux de fissures parallèles

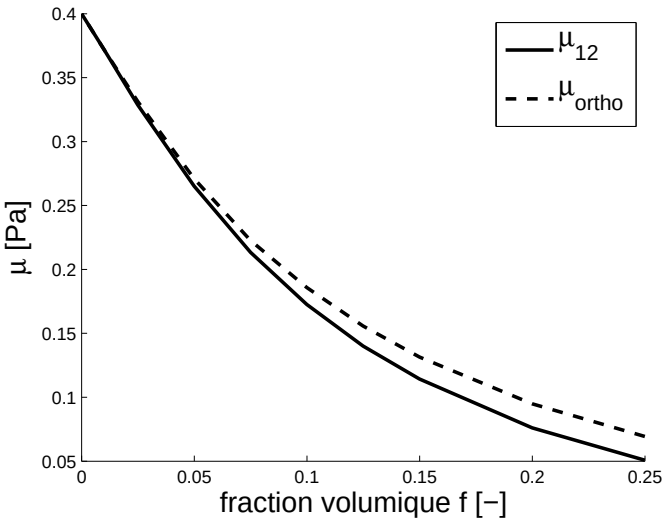

FIGURE 4.16 – Fissures de rapport d'aspect 1/10, en deux familles à 0 et $\pi/2$. Comparaison du vrai module de cisaillement μ_{12} avec μ_{ortho}

identiques et orthogonaux.

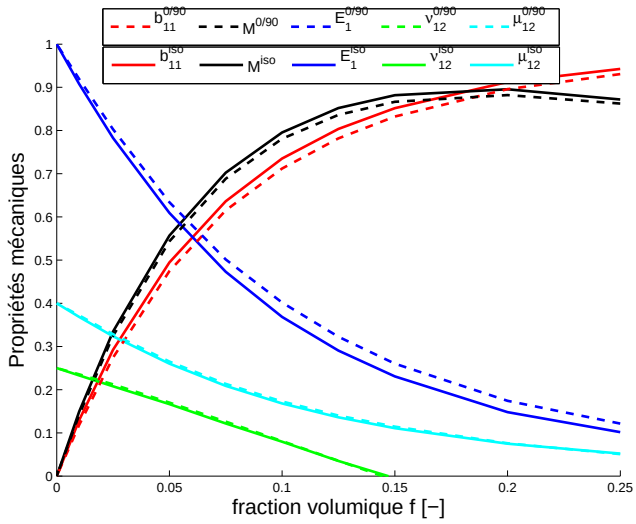

FIGURE 4.17 – Fissures de rapport d'aspect 1/10, en distribution isotrope "iso" ou en deux familles à 0 et $\pi/2$ "0/90". Comparaison des propriétés mécaniques.

On vérifie sur toutes les propriétés mécaniques que les résultats obtenus par les deux modèles sont très proches (Fig. 4.17).

4.7.5 Comparaison de l'évolution des propriétés mécaniques en fonction de la forme des pores

On a tracé dans les paragraphes précédents l'évolution des propriétés selon que nos pores étaient des sphères ou des pores aplatis de rapport de forme 1/10 orientés soit aléatoirement soit en deux familles orthogonales. Nous traçons ici les modules de cisaillement μ_{12} dans ces trois situations en fonction des modules d'incompressibilité *2d* k^{2ddp} qui ne sont pas définis strictement

pour le cas 0/90 puisque l'on n'a pas l'isotropie transverse, mais qu'on calcule quand même par la formule :

$$k^{2ddp} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1-\nu_{12}}{E} - 2\frac{\nu^2}{E_3}} \tag{4.104}$$

Nous traçons ces courbes ci-dessous. Elles donnent une idée de la variation des paramètres en fonction de la forme des pores, en s'affranchissant de leur fraction volumique qui n'apparaît plus (Fig. 4.18). Ce résultat nous semble intéressant, il montre les variations possibles des propriétés

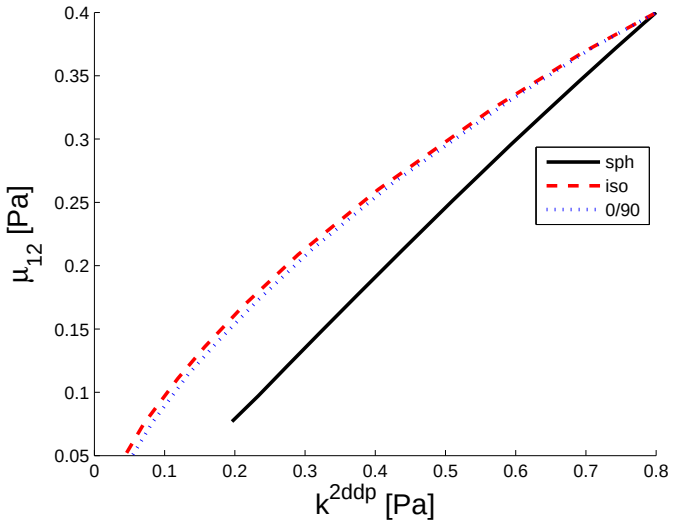

FIGURE 4.18 – Pores sphériques "sph", fissures de rapport d'aspect 1/10, en distribution isotrope "iso" ou en deux familles à 0 et $\pi/2$ "0/90". Évolution comparée du module de cisaillement μ_{12} et du module d'incompressibilité *2d* en déformation plane k^{2ddp}.

mécaniques d'un matériau isotrope dans le plan, en fonction des détails microstructuraux. On remarque encore une fois le très peu d'écart entre le cas de la distribution isotrope des orientations de fissures et le cas de deux familles orthogonales.

Nous terminons cette série de comparaisons entre des estimateurs de micromécanique et des simulations par éléments finis en étudiant une cavité non ellipsoïdale dont la forme est inspirée par l'étude de l'alcali-réaction.

4.7.6 Exemple d'application des estimateurs : une cavité non ellipsoïdale en *2d*

Dans le cadre de l'étude de la réaction alcali-silice dans le béton, nous sommes amenés à nous intéresser à la décohésion de granulats, ainsi qu'à la fissuration de la pâte de ciment autour de ces granulats décollés, sous pression d'un gel apparaissant et gonflant dans la porosité des granulats et de la surface des granulats. Dans notre étude de la réaction alcali-silice, la morphologie considérée est *3d* mais dans le cadre de la comparaison présente de résultats numériques et d'estimateurs de micromécanique, nous allons nous borner à une étude *2d*.

On considère donc un ensemble de cavités qui sont formées de l'union d'un disque (de rayon R) et de deux fissures au niveau de l'équateur de ce disque. Ce type de cavité est caractérisé par la taille du disque, la taille des fissures (R et AR) et leur orientation. Nous n'étudions qu'une distribution monodisperse de taille de disques, mais faisons varier la fraction volumique f de ceux-ci et la taille relative de fissure A. Nous étudions le cas de fissures alignées, ou distribuées sur différentes orientations.

4.7.6.1 Fissures alignées

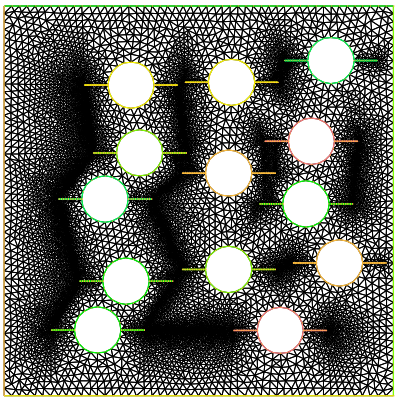

FIGURE 4.19 – Cavités alignées de rayon 0,08, taille de fissure 0,08, fraction volumique 0,15

Comme montré sur la Fig. 4.19, on disperse aléatoirement nos motifs, et on calcule les propriétés homogénéisées résultant de la présence de ces défauts. Les motifs sont encore une fois placés par un algorithme d'addition séquentielle interdisant le recouvrement (le test de recouvrement étant ici basé non strictement sur la forme de l'inclusion mais sur une ellipse circonscrite, ce qui ne permet pas d'atteindre des grandes fractions volumiques mais est plus simple à mettre en œuvre).

On les compare ensuite à un estimateur issu du schéma *IDD*, que l'on construit de la façon suivante : on suppose que d'un point de vue de la diminution des propriétés élastiques, la cavité complète peut être remplacée par une cavité sphérique, une fissure de taille le rayon de la fissure de départ, à laquelle on retire une portion de l'intersection de ces deux motifs, soit une fissure de taille le rayon du disque comme montré sur la figure 4.20. On utilise cette décomposition en trois

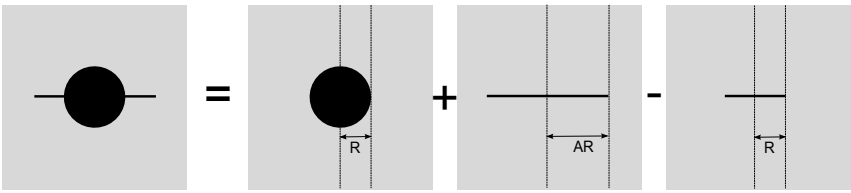

FIGURE 4.20 – Décomposition de la cavité en trois contributions

motifs pour calculer grâce au schéma *IDD* le tenseur de localisation sur chacun de ces motifs, puis on suppose que le tenseur de localisation de la cavité de départ est égal à la somme des tenseurs de localisation de la sphère et de la grande fissure, moins celui de la petite fissure. Dans le schéma *IDD* ici implémenté, on suppose que tous les motifs ont la même atmosphère sphérique (on n'atteint pas des fractions volumiques assez élevées pour qu'il y ait une différence entre *IDD* et *FRIDD*). Donnons ici le détail du calcul que l'on fait pour les modules homogénéisés. Le milieu élastique troué est caractérisé par la fraction volumique de trous f^t, la taille tes trous R et la taille de la fissure qui part de ce trou $x = A^f R$. Le nombre de sites est à la fois le nombre de trous N^t et de fissures N^f. Pour représenter grâce à un schéma de micromécanique la fissure, on définit la fissure ellipsoïdale de même taille x et de rapport de forme X^f (donc de demi grand axe x et de demi petit axe $b = A^f X^f$). On définit également la fissure de taille R, de rapport de forme X^c. Les fractions volumiques de fissures sont exprimées en séparant les fissures d'orientation

différente. Le nombre d'orientations considérées est N^o. On choisit les propriétés suivantes pour nos deux fissures :

- la valeur du rapport de forme de la grande fissure importe peu tant qu'elle est très faible (et que la fraction volumique associée en tient compte), on fixe :

$$X^f = 10^{-7} \tag{4.105}$$

- on pose pour nos petites fissures que leur rapport de forme est le même que celui de la grande fissure :

$$X^c = X^f \tag{4.106}$$

- la fraction volumique des grandes fissures (d'orientation donnée) est fixée par l'égalité de leur nombre avec le nombre de cavités sphériques :

$$f^c = \frac{f^t}{N^o} X^f (A^f)^2 \tag{4.107}$$

- tandis que la fraction volumique des petites fissures (d'orientation donnée) est choisi égal à :

$$f^c = \frac{f^t}{N^o} X^c A^f \tag{4.108}$$

Si bien qu'il y a avec cette représentation plusieurs petites fissures par site. Le nombre de sites et de grandes fissures sont identiques :

$$N^t = \frac{f^t}{\pi R^2} = N^f = \frac{f^f}{\pi X^f (A^f R)^2} \tag{4.109}$$

Le nombre de petites fissures $N^c = \frac{f^c}{\pi X^c R^2}$, est donc plus grand que le nombre de sites, il vaut $N^c = A^f N^s$. Cette représentation a été choisie pour la qualité des résultats qu'elle donne, au profit d'autres possibilités qui considèreraient qu'il faut absolument avoir le même nombre de petites fissures que de grandes fissures. Cette représentation est en quelque sorte totalement empirique, et n'est justifiée que par l'assez bonne qualité des résultats, comme nous allons le voir tout de suite.

On peut ensuite définir l'ensemble des tenseurs d'Eshelby nécessaires pour effectuer la superposition, qui sont des tenseurs d'Eshelby de cylindres à base ellipsoïdale (voir formules 4.101), que l'on écrit successivement avec un rapport de forme de 1 pour les trous et toutes les atmosphères : $\mathbb{S}_c^{sph}$, de X^f pour les grandes fissures $\mathbb{S}_c^f$ puis de X^c pour les petites fissures $\mathbb{S}_c^c = \mathbb{S}_c^f$, où l'on rappelle par l'indice c que le matériau considéré pour le calcul des tenseurs d'Eshelby est celui de la pâte de ciment. Les différents modules sont ensuite calculés avec les formules du schéma *IDD* en comptant positivement le trou et la grande fissure, mais négativement la petite fissure. Dans le cas où on n'a qu'une seule orientation de fissure, cela donne :

$$\mathbb{C}^{IDD} = \mathbb{C}^c + \mathbb{C}^c : \left[\left(f^t \left[\mathbb{S}_c^{sph} - \mathbb{I} \right]^{-1} + f^f \left[\mathbb{S}_c^f - \mathbb{I} \right]^{-1} - f^c \left[\mathbb{S}_c^c - \mathbb{I} \right]^{-1} \right)^{-1} - \mathbb{S}_c^{sph} \right]^{-1} \tag{4.110}$$

Pour ce qui est du module et du coefficient de Biot, exprimons d'abord le tenseur de localisation associé à chacun de nos éléments : $\mathbb{A}^t$ pour le trou, $\mathbb{A}^f$ pour la grande fissure, $\mathbb{A}^c$ pour la petite. Si on appelle le terme suivant :

$$\mathbb{W} = \mathbb{S}_c^{sph} : \left(f^t \left[\mathbb{S}_c^{sph} - \mathbb{I} \right]^{-1} + f^f \left[\mathbb{S}_c^f - \mathbb{I} \right]^{-1} - f^c \left[\mathbb{S}_c^c - \mathbb{I} \right]^{-1} \right) \tag{4.111}$$

On a simplement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^t &= \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{sph}\right]^{-1} : [\mathbb{I} - \mathbb{W}]^{-1} \\
\mathbb{A}^f &= \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{f}\right]^{-1} : [\mathbb{I} - \mathbb{W}]^{-1} \\
\mathbb{A}^c &= [\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{c}]^{-1} : [\mathbb{I} - \mathbb{W}]^{-1}
\end{aligned} \tag{4.112}$$

On a alors pour le coefficient de Biot de l'ensemble (trou et fissures) :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \left[f^t \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{sph}\right]^{-1} + f^f \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{f}\right]^{-1} - f^c \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{c}\right]^{-1} \right] : [\mathbb{I} - \mathbb{W}]^{-1} \tag{4.113}$$

Et pour le module de Biot de l'ensemble, en fonction du coefficient de Biot écrit précédemment :

$$M = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} : \left[\underline{\underline{B}} - \left(f^t + f^f - f^c\right) \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right] \tag{4.114}$$

On effectue donc ces simulations pour diverses fractions volumiques de sphères et tailles de fissures. La fissure considérée ici est de normale 2. On montre ici la bonne adéquation des résultats obtenus par simulation et par estimateur *IDD* en fonction de la fraction volumique f (Fig. 4.22) d'inclusion et du rapport entre la taille de la fissure et le rayon du disque A (Fig. 4.21). Un écart

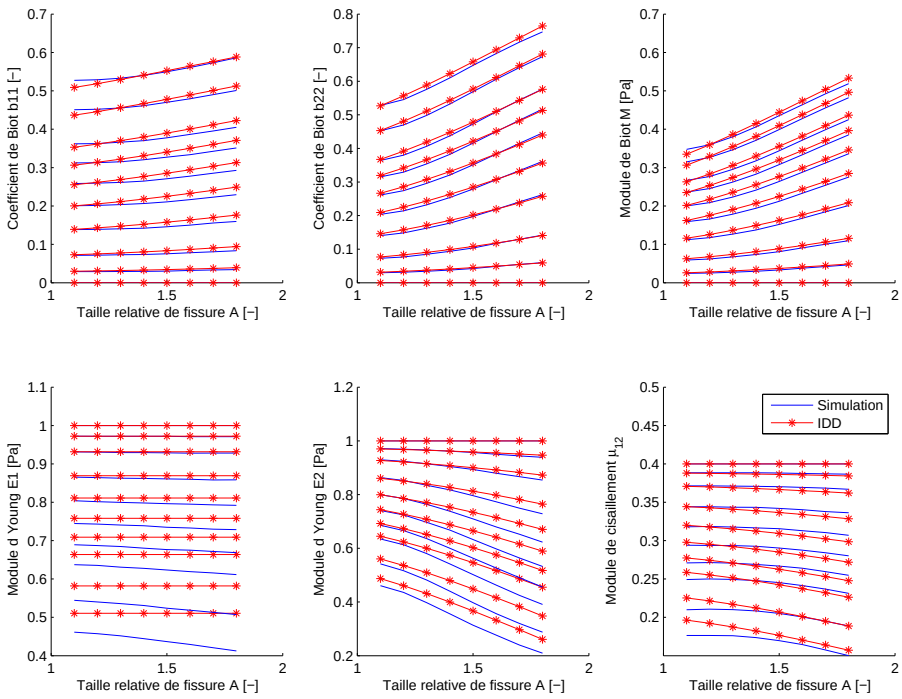

FIGURE 4.21 – Propriétés mécaniques en fonction des tailles relatives de fissures A (R=0,01), pour différentes fractions volumiques f, motifs alignés

pas négligeable est tout de même observé concernant le module d'Young dans la direction 1. Il diminue beaucoup moins pour notre estimateur *IDD* que dans la simulation par EF. Comme on le voit sur la Fig. 4.22, l'estimateur *IDD* de ce module ne varie pratiquement pas avec la taille de fissure ce qui n'est pas en accord avec la simulation. Nous pensons néanmoins que c'est un défaut mineur et que les résultats sont globalement satisfaisants.

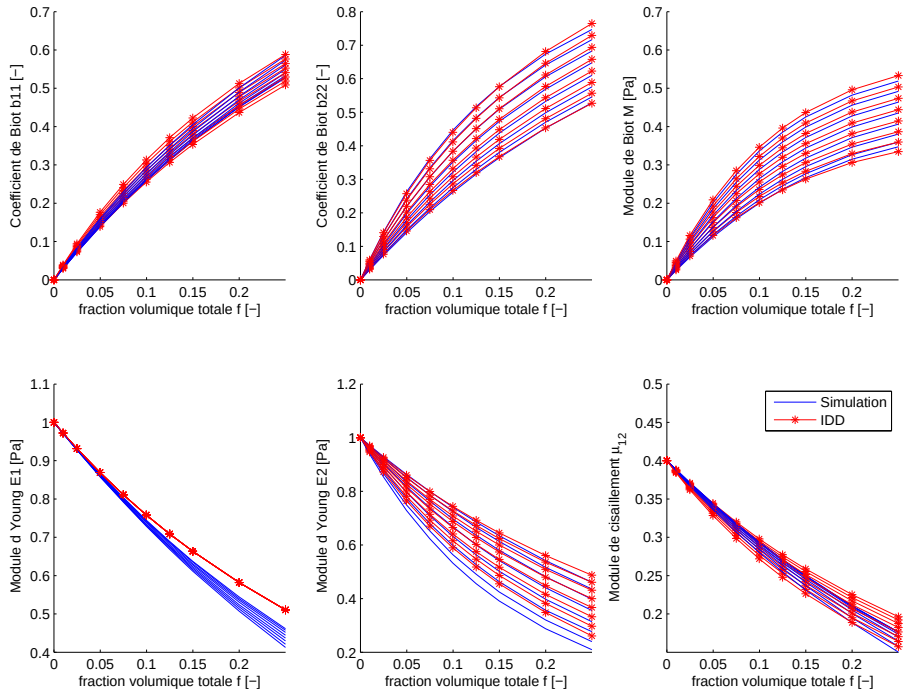

FIGURE 4.22 – Propriétés mécaniques en fonction des fractions volumiques f (R=0,01), pour différentes tailles relatives de fissures A, motifs alignés

4.7.6.2 Fissures orientées

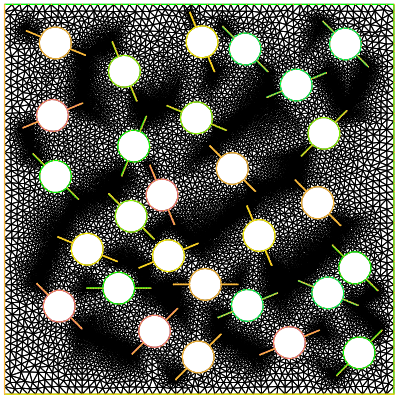

FIGURE 4.23 – Cavités distribuées selon 8 orientations de rayon 0,05, taille de fissure 0,05, fraction volumique 0,15

Ici on procède à la même comparaison, prenant en compte différentes orientations de fissures, en l'occurrence les 8 directions $[0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}]$ (Fig. 4.23). Le maillage est encore une fois créé par addition séquentielle aléatoire, sans recouvrement possible, le recouvrement étant encore testé sur une ellipse circonscrite, non la forme elle-même. On observe encore une fois une bonne adéquation entre les simulations et l'estimation *IDD*. L'estimateur *IDD* est écrit de

façon très similaire à ce qu'on a détaillé dans la section précédente. Il faut simplement distinguer les fissures d'orientation différente, et calculer les tenseurs correspondants en tenant compte de l'orientation, ce qui ne pose pas de problème particulier. Encore une fois les résultats nous semblent assez satisfaisants au regard de la simplification introduite en dissociant notre motif initial en une combinaison d'ellipsoïdes plus faciles à traiter par l'estimateur *IDD*. On trace encore les résultats obtenus par simulation et par estimateur *IDD* en fonction de la fraction volumique f (Fig. 4.25) d'inclusion et du rapport entre la taille de la fissure et le rayon du disque A (Fig. 4.24) :

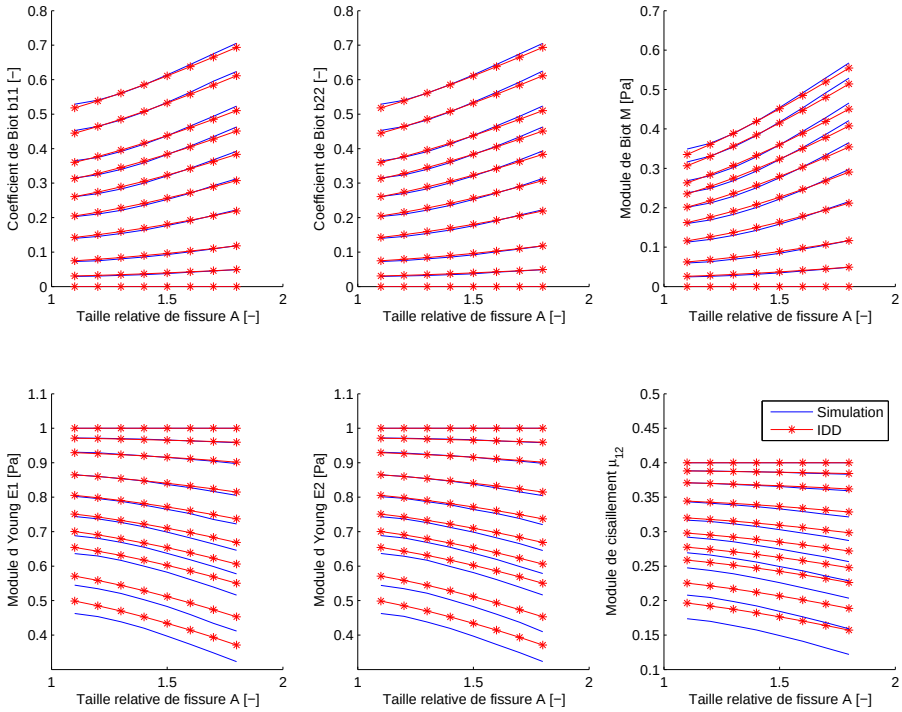

FIGURE 4.24 – Propriétés mécaniques en fonction des tailles de fissures A (R=0,01), pour différentes fractions volumiques f, motifs répartis selon 8 orientations différentes

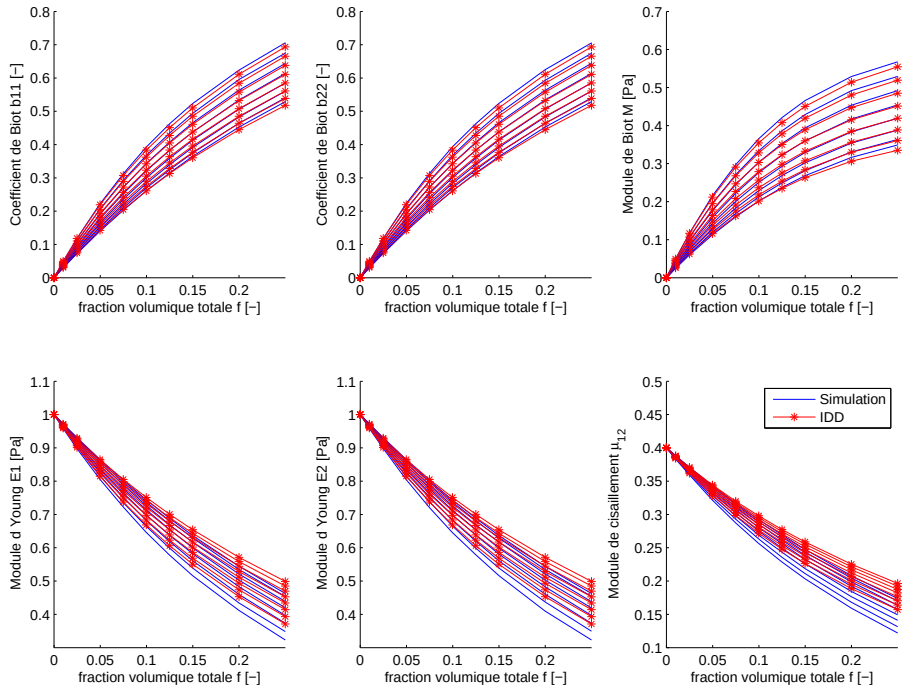

FIGURE 4.25 – Propriétés mécaniques en fonction des fractions volumiques f (R=0,01), pour différentes tailles relatives de fissures A, motifs répartis selon 8 orientations différentes

4.7.6.3 Deux fissures alignées par trou

On continue dans la même veine avec un motif cette fois un peu plus compliqué. On a placé autour du trou deux fissures orthogonales. L'une des fissures reste de longueur constante (on a choisi de fixer la taille de la fissure de normale $\underline{e}_2$ à $A_2 = 1{,}7$) tandis qu'on fait varier la taille de l'autre fissure (Fig. 4.26) et la fraction volumique (Fig. 4.27). L'accord est encore une fois assez satisfaisant, hormis quelques écarts sur les modules d'Young et les modules de cisaillement.

4.7.6.4 Deux fissures orientées aléatoirement par trou

Comme pour la fissure unique, on effectue le même test, mais en répartissant cette fois les motifs à deux fissures orthogonales sur 8 orientations différentes $[0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}]$. Comme précédemment, une des fissures garde la taille $A_2 = 1{,}7$, tandis qu'on fait varier la taille de l'autre fissure (Fig. 4.28) et la fraction volumique (Fig. 4.29). L'accord est meilleur que dans le cas où toutes les fissures sont de même orientation. Il nous semble en tout cas assez satisfaisant.

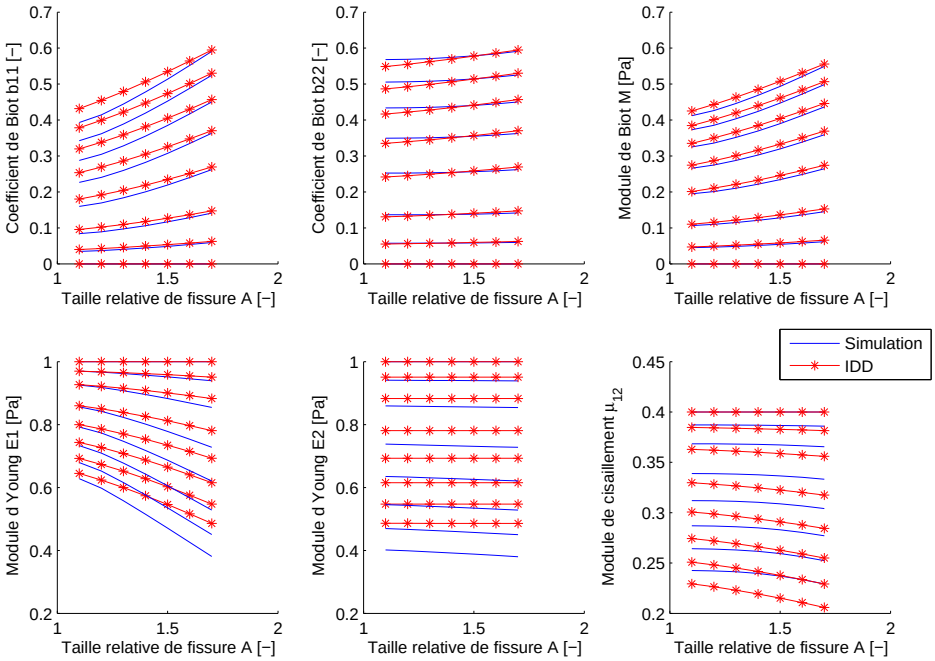

FIGURE 4.26 – Propriétés mécaniques en fonction des tailles de fissures A (R=0,01), pour différentes fractions volumiques f, deux fissures alignées par trou

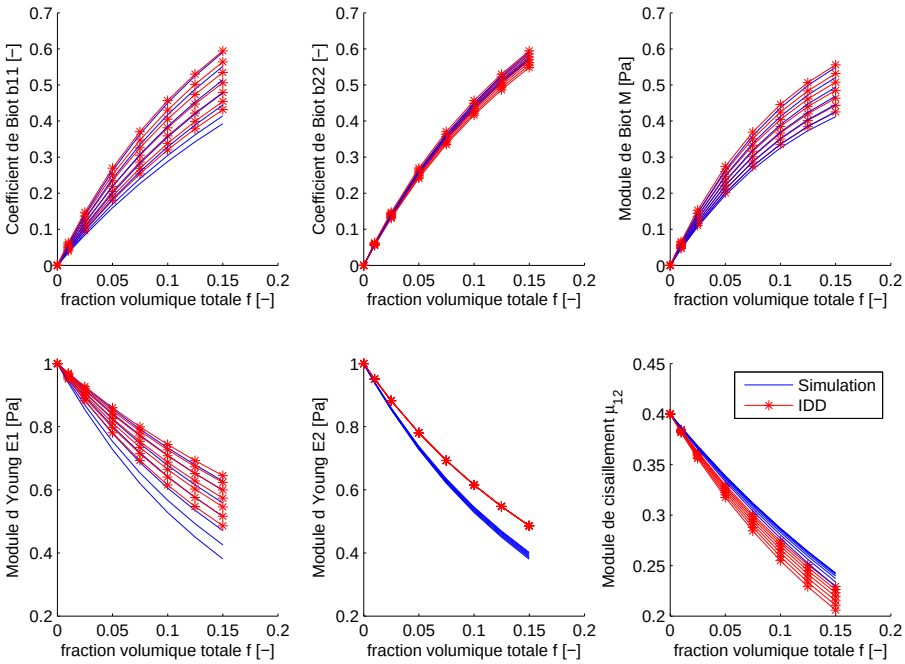

FIGURE 4.27 – Propriétés mécaniques en fonction des fractions volumiques f (R=0,01), pour différentes tailles relatives de fissure A, deux fissures alignées par trou

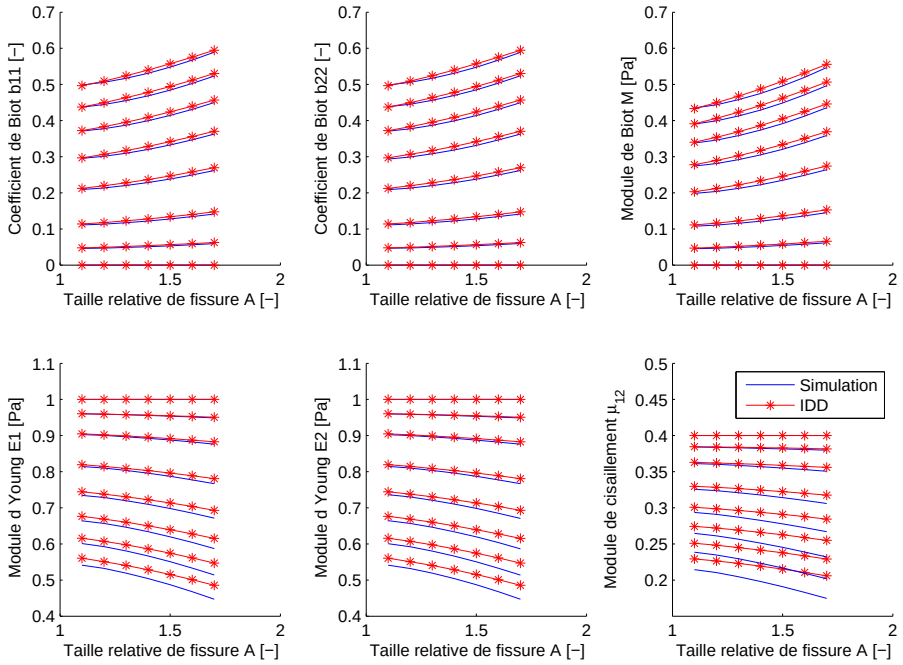

FIGURE 4.28 – Propriétés mécaniques en fonction des tailles de fissures A (R=0,01), pour différentes fractions volumiques f, deux fissures par trou réparties selon 8 orientations

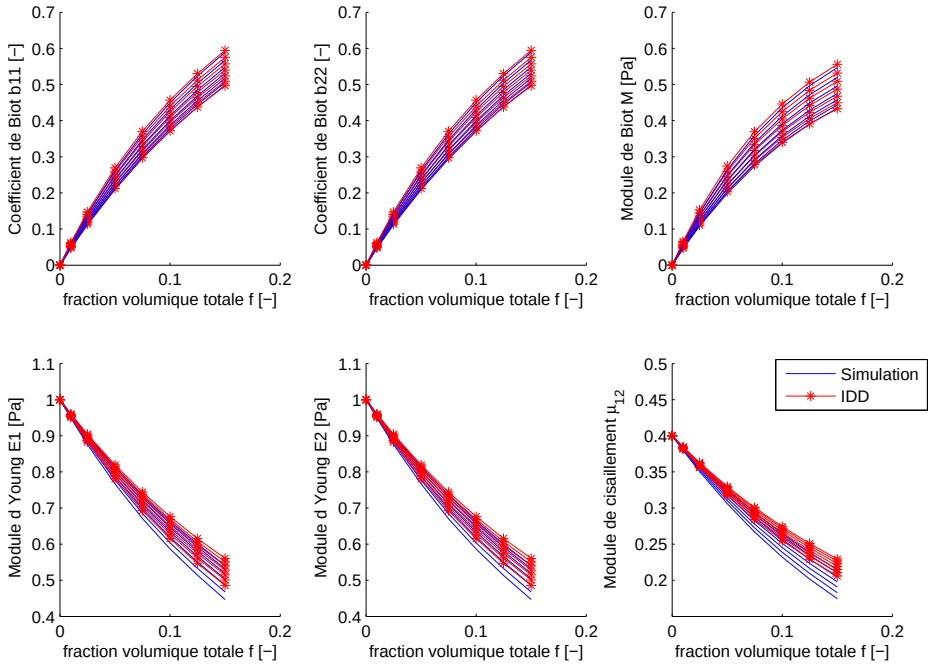

FIGURE 4.29 – Propriétés mécaniques en fonction des fractions volumiques f (R=0,01), pour différentes tailles relatives de fissure A, deux fissures par trou réparties selon 8 orientations

4.7.7 Conclusion sur les comparaisons

Il nous semble qu'on peut tirer trois conclusions de ces comparaisons. Tout d'abord, l'estimateur *FRIDD* est bien adapté pour représenter l'évolution des modules de microstructures assez spécifiques, puisque générées par l'algorithme d'addition séquentielle aléatoire (*ASA*). Il fonctionne bien à la fois pour des cavités sphériques, et des fissures, d'orientations variées. En second lieu, on a remarqué que les modules homogénéisés obtenus sur des milieux fissurés dont la distribution de fissures est isotrope sont très proches de ceux de milieux fissurés contenant deux familles de fissures orthogonales. Troisièmement, on a réussi à représenter de manière assez satisfaisante les modules d'un milieu contenant des cavités non ellipsoïdales par une combinaisons de cavités ellipsoïdales, dans le cadre du schéma *IDD*. Ces trois conclusions nous serviront dans la troisième partie de ce mémoire, lorsqu'il s'agira de faire des choix de modélisation pour l'alcali-réaction.

4.8 Conclusion

On a donc construit un modèle par éléments finis permettant de réaliser des microstructures variées et de calculer leurs propriétés poromécaniques homogénéisées afin de les comparer à des estimateurs micromécaniques. On s'est particulièrement intéressés aux estimateurs de Mori-Tanaka et à l'estimateur *IDD* de Zheng et Du, et on a mentionné les estimateurs autocohérent et autocohérent généralisé. Il nous a semblé au terme de cette étude que l'estimateur le mieux adapté au calcul des propriétés homogénéisées d'un milieu contenant des pores et des fissures sous pression est une version légèrement modifiée de l'estimateur *IDD*, que nous avons appelé *FRIDD* dans ce chapitre, et qui donne de très bons résultats pour une large gamme de fractions volumiques. Nous avons également montré qu'on peut, dans l'objectif d'estimer les propriétés mécaniques d'un milieu microfissuré, remplacer une distribution isotrope de fissures par deux familles orthogonales. Enfin, nous avons étudié une cavité particulière, représentant un pore fissuré, et avons réussi à reproduire de manière satisfaisante les propriétés mécaniques d'un milieu poreux contenant ce type de cavité par une superposition de motifs plus simple, grâce au schéma *IDD*.

Nous sommes arrivés au terme de notre travail de description du milieu poreux et de choix de méthodes de calcul des propriétés homogénéisées. Le prochain ingrédient dont nous avons besoin pour construire un modèle pour l'alcali-réaction est la possibilité de faire évoluer les microstructures par fissuration. Nous allons donc consacrer le prochain chapitre à l'exposé de quelques critères de rupture fragile et motiver notre choix pour le critère de Francfort-Marigo. Nous donnerons également un exemple simple d'application de ce critère dans le cadre de l'étude de l'alcali-réaction.

Chapitre 5

Critère énergétique de fissuration

Sommaire

5.1 Introduction **136**
5.2 Critères de rupture fragile **136**
5.2.1 Définition de la rupture fragile 136
5.2.2 Critère de rupture de Griffith 137
5.2.3 Écriture de l'énergie totale 137
5.2.4 Critère de Francfort et Marigo 138
5.2.5 Critère de Leguillon 140
5.2.6 Conclusion sur les critères de rupture fragile 140
5.3 Critère de Francfort-Marigo en gonflement libre **141**
5.3.1 Restrictions de ce modèle 141
5.3.2 Description d'un volume élémentaire représentatif 141
5.3.3 Étude thermodynamique de l'initiation et la propagation de la fissure. Critère énergétique 146
5.3.4 Résultats numériques : effet de la taille de grain sur l'initiation de fissuration 149
5.3.5 Conclusion sur le modèle de gonflement libre 154
5.4 Conclusion **154**

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons exposer notre choix d'un critère de rupture qui nous permettra de faire évoluer la microstructure du béton lors de l'attaque chimique. Nous avons présenté dans les deux chapitres précédents les bases poromécaniques de la description du milieu hétérogène, il s'agit maintenant de pouvoir déterminer les configurations les plus favorables du matériau sous chargement. Nous allons pour cela présenter une bibliographie succincte sur les critères de rupture fragile, et expliquer notre choix du critère de Francfort-Marigo. Nous donnerons ensuite une illustration de la propagation de fissure grâce à ce critère dans un cas simple, mais tiré de l'étude de l'alcali-réaction.

5.2 Critères de rupture fragile

Le critère de Francfort et Marigo appartient à la famille des critères de rupture fragile. Nous allons présenter dans cette partie quelques généralités sur les critères de rupture fragile, puis nous expliquerons les fondements du plus classique, le critère de Griffith, avant de détailler le critère de Francfort-Marigo que nous utilisons dans cette étude, et une extension possible de ce critère énergétique avec le critère mixte de Leguillon.

5.2.1 Définition de la rupture fragile

Dans ce type de critère on considère que la zone dans laquelle des comportements anélastiques sont observés outre la fissure que l'on étudie, qu'on appelle zone d'élaboration, est de faible extension. Dans tous les matériaux, lors de la propagation d'une fissure, on voit en amont de la fissure des effets tels que plasticité ou micro-fissuration dans une zone dont la taille dépend du type de matériau. Si cette zone est d'extension assez grande par rapport à la taille des échantillons étudiés, cela entraîne d'importants effets d'échelle. Ici, en supposant que la zone d'élaboration est petite on néglige donc ces effets d'échelle. Ainsi pour calculer l'énergie dissipée lors de l'avancée de la fissure on a seulement besoin de connaître l'énergie dissipée par unité de surface de fissure créée. Dans la théorie de Griffith, l'énergie nécessaire à la fissuration est fournie par la relaxation d'énergie dans l'ensemble du solide. Il est donc nécessaire de calculer l'énergie élastique stockée dans le milieu pour différentes configurations fissurées. L'hypothèse que la zone d'élaboration est de faible extension permet d'approximer l'énergie élastique par un calcul purement élastique, en ne prenant en compte aucun phénomène anélastique en dehors de l'apparition d'une nouvelle surface de discontinuité des déplacements.

La possibilité d'appliquer un tel critère de rupture à un matériau dépend de l'échelle de fissuration que l'on considère. Nous nous intéressons au béton, matériau dans lequel on trouve des hétérogénéités à des échelles très diverses, allant du *cm* pour les gros granulats à de très petites tailles de pores. Les fissures macroscopiques sont précédées dans le béton d'une grande zone d'élaboration dans laquelle des fissures plus petites apparaissent autour des granulats qui servent de site d'initiation de ces petites fissures. On ne peut alors parler de matériau fragile puisque la seule connaissance de la surface de la grande fissure que l'on voit ne peut pas représenter tous les phénomènes de dissipation qui se produisent en amont de son avancée. Nous nous plaçons cependant, dans ce travail, à une échelle beaucoup plus fine, où les fissures ont une taille du même ordre de grandeur que les hétérogénéités qui leur servent de site d'initiation. On suppose donc que dans notre cas il est possible d'utiliser un modèle de rupture fragile.

5.2.2 Critère de rupture de Griffith

Le critère de Griffith [18] est fondé sur l'idée que comme beaucoup de matériaux contiennent des défauts, pour prédire la rupture d'un matériau il faut avant tout faire l'inventaire de ses défauts et voir si certains d'entre eux sont susceptibles de grandir. On ne s'intéresse donc pas ici à l'apparition d'une fissure à un endroit où il n'y en avait aucune, mais à la croissance de fissures préexistantes. Une fois cet inventaire fait, le critère de rupture de Griffith met en équilibre, lors de l'avancée d'une fissure, l'énergie relâchée par l'assouplissement de la structure dû à l'allongement de la fissure, et l'énergie dissipée par l'avancée de celle-ci, dans un petit incrément de taille de fissure. On définit pour ce faire le taux de relaxation d'énergie dans l'avancée de la fissure. Pour cela il est nécessaire de paramétrer notre fissure. Supposons qu'on n'ait qu'une seule fissure de taille $x(t)$ au temps t, et que le tracé de la fissure soit fixé à l'avance. Ce paramètre x caractérise donc à lui seul notre fissure.

L'énergie relâchée $E^{rel}(x, \Delta x)$ pour un incrément de taille de fissure Δx à partir d'une taille de fissure x est égal à la diminution d'énergie potentielle dans la structure, en gardant tous les chargements, qu'on note U d'une manière générique sans en préciser le type :

$$E^{rel}(U, x, \Delta x) = E^{pot}(U, x) - E^{pot}(U, x + \Delta x) \tag{5.1}$$

On appelle taux de relaxation d'énergie sa limite lorsqu'on divise par l'incrément de taille de fissure puis qu'on le fait tendre vers 0 :

$$G(U, x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{E^{rel}(U, x, \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\partial E^{pot}(U, x)}{\partial x} \tag{5.2}$$

L'énergie dissipée par unité de surface est dans ce cadre considérée comme une constante caractéristique du matériau. On la note G_c, c'est une énergie surfacique, qu'on nomme aussi taux de relaxation d'énergie critique puisque c'est en comparant G à cette grandeur qu'on construit le critère d'avancée de la fissure. Le critère de Griffith s'écrit alors de la façon suivante [24] :

- Irréversibilité : x est une fonction croissante du temps t ;
- Critère en taux de relaxation d'énergie : $G(U(t), x(t)) \leq G_c$;
- Bilan énergétique : $x(t)$ n'est strictement croissante que si $G(U(t), x(t)) = G_c$.

Ce critère de rupture fragile n'est cependant pas du tout construit pour prévoir l'initiation de fissures. Le critère de Francfort et Marigo comble cette lacune d'une façon que nous allons expliquer en présentant d'abord l'écriture de l'énergie totale.

5.2.3 Écriture de l'énergie totale

On voit donc qu'un point indispensable pour pouvoir utiliser ce genre de critères est la connaissance de l'énergie totale à un instant t, en fonction de l'état de fissuration. Le prochain chapitre (chapitre 6) sera une étude détaillée à ce sujet pour le milieu poreux. On ne résume ici que les différents termes qui la composent, sans rentrer dans le détail de leur écriture. Si l'on note Ω le solide initial, non fissuré, $\partial\Omega$ la surface extérieure de ce domaine, $\Gamma(t)$ la surface de fissure à un instant t, et qu'on suppose que notre solide est chargé par un chargement qui dépend du temps t, qu'on note $U(t)$, pouvant être un déplacement ou un effort imposé, alors l'énergie élastique totale dépend de la géométrie et du chargement au temps t, on la note $E^{tot}(U(t), \Gamma(t))$. Cette énergie totale est composée de l'énergie potentielle pour le solide, et de l'énergie dissipée. On note l'énergie potentielle $E^{pot}(U(t), \Gamma(t))$, et l'énergie dissipée, qui ne dépend pas du chargement mais uniquement de l'état de fissuration dans nos hypothèses de rupture fragile $E^{diss}(\Gamma(t))$ avec :

$$E^{tot}(U(t), \Gamma(t)) = E^{pot}(U(t), \Gamma(t)) + E^{diss}(\Gamma(t)) \tag{5.3}$$

5.2.4 Critère de Francfort et Marigo

Le critère de fissuration de Francfort et Marigo est fondé sur cette seule fonction [17, 24] d'énergie totale (équation 5.3). L'idée est de généraliser le critère de Griffith de façon à englober en un seul formalisme l'initiation et la propagation de fissure, idée qui a été employée par d'autres chercheurs auparavant, par exemple Fedelich [16]. Pour cela il faut autoriser les sauts de taille de fissure, car le taux de relaxation d'énergie tend généralement vers 0 pour une taille de fissure nulle (une illustration concrète de ceci sera donnée dans la partie 5.3.3.1 de ce chapitre).

Dans leur article de 1998 [17], le critère est écrit de la façon suivante. Le tracé de fissuration solution $\Gamma(t)$ doit satisfaire les conditions :

- (a) Irréversibilité : $\Gamma(s) \subset \Gamma(t)$;
- (b) Critère d'énergie minimale : $E^{tot}\left(U(t), \Gamma(t)\right) \leq E^{tot}\left(U(t), \Gamma'\right), \forall \Gamma'$ tq $\Gamma(t) \subset \Gamma'$;
- (c) Bilan énergétique : $E^{tot}\left(U(t), \Gamma(t)\right) \leq E^{tot}\left(U(t), \Gamma(s)\right), \forall s < t$.

D'après sa construction, ce critère doit redonner le critère de Griffith lorsque l'évolution de la fissuration est continue en fonction du temps. Supposons que nous n'avons qu'une seule fissure de longueur $x(t)$. Le critère devient :

- (a) Irréversibilité : $x(s) \leq x(t)$;
- (b) Critère d'énergie minimale : $E^{tot}\left(U(t), x(t)\right) \leq E^{tot}\left(U(t), x'\right), \forall x'$ tq $x(t) \leq x'$;
- (c) Bilan énergétique : $E^{tot}\left(U(t), x(t)\right) \leq E^{tot}\left(U(t), x(s)\right), \forall s < t$.

Nous allons expliquer comment ce critère se réduit à celui de Griffith en cas de continuité de x, et ce qu'il donne s'il y a un saut de taille de fissure, en essayant d'illustrer graphiquement les contraintes apportées par les trois conditions (a), (b), (c). Mais d'abord, remarquons que ce critère est clairement un critère de minimisation de l'énergie totale sous contrainte de croissance de la taille de fissure, à chaque instant. La condition (b) assure en effet que l'énergie de la solution est plus faible que celle des fissures plus grandes, (c) assure que l'énergie de la solution est plus faible que celle des solutions antérieures, pour le chargement actuel $U(t)$. Relions ceci au critère classique de Griffith.

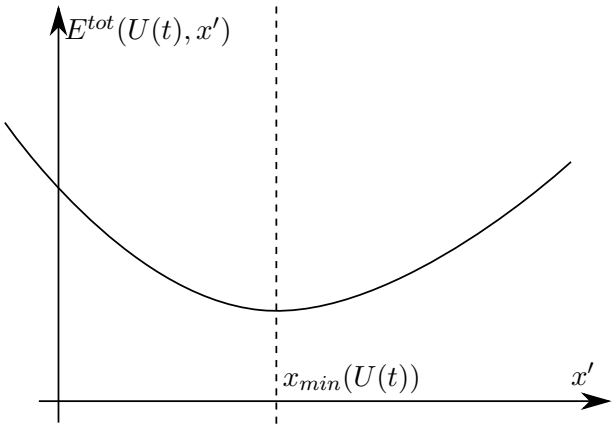

FIGURE 5.1 – Allure de l'énergie totale autour du minimum global

Cas x continu On s'intéresse tout d'abord à ce cas simple qui doit nous permettre de retrouver le critère de Griffith, celui ou l'énergie totale est convexe (vers les x croissants), comme représenté sur la Fig. 5.1. Traçons l'énergie en fonction d'un état de fissuration x', pour le chargement au temps t. Supposons que x_{min} soit le minimum local de l'énergie totale à proximité de la taille de fissure à un instant s juste avant t. x_{min} est alors caractérisé par :

$$\frac{\partial E^{tot}}{\partial x}(U(t), x_{min}) = 0 \tag{5.4}$$

La condition (b) nous dit que pour la solution $x(t)$ est l'énergie totale inférieure à toutes les tailles de fissures $x' \geq x(t)$. Cette condition est vérifiée (au moins localement) par tous les x' de la branche croissante de E^{tot}, c'est-à-dire tels que $x' > x_{min}$ (et éventuellement cesse d'être valable à partir d'un certain x_{max} mais on ne s'intéresse pas à cette question ici). La condition (a), impose que $x(t) \geq x(s \leq t)$. Si bien que (a) et (b) ensemble imposent :

$$x(t) \geq \max\{x(s \leq t), x_{min}(U(t))\} \tag{5.5}$$

La condition (c) va donc nous permettre de choisir parmi toutes ces possibilités. Elle nous dit en effet que pour le chargement $U(t)$, $x(t)$ est d'énergie totale plus faible que les états de fissuration antérieurs, qui sont donc de longueur de fissure inférieure ou égale. Ceci n'est pas vérifié sur la branche croissante de l'énergie, c'est-à-dire pour $x' > x_{min}(U(t))$, à moins que l'état de fissuration actuel ne soit égal aux précédents. Ainsi, $x(t)$ doit d'après (c) prendre la valeur la plus faible autorisée par (a) et (b), c'est-à-dire :

$$x(t) = \max\{x(s \leq t), x_{min}(U(t))\} \tag{5.6}$$

Quelle est alors la valeur du taux de relaxation de l'énergie et l'évolution de x, selon le cas ? Si $x(t) = x_{min}(U(t))$ on a :

$$\frac{\partial E^{tot}}{\partial x}(U(t), x(t)) = 0 \tag{5.7}$$

et $x(t) > x(s < t)$, donc $\dot{x} > 0$. Si en revanche $x(t) = \max\{x(s < t)\}$, alors x n'a pas varié ($\dot{x} = 0$), et la dérivée partielle de l'énergie totale par rapport à la taille de fissure est positive puisqu'on est à $x(t) > x_{min}(U(t))$:

$$\frac{\partial E^{tot}}{\partial x}(U(t), x(t)) \geq 0 \tag{5.8}$$

Si bien qu'on a dans tous les cas :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E^{tot}}{\partial x}(U(t), x(t)) \geq 0 \\ \dot{x}(t)\dfrac{\partial E^{tot}}{\partial x}(U(t), x(t)) = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Ces deux équations étant, vu la définition de l'énergie totale, équivalentes aux deuxième et troisième condition du critère de Griffith.

Évolution discontinue de x On se place maintenant à un instant de discontinuité de x (Fig. 5.2). Cette fois l'énergie totale n'est pas convexe vers les x croissants à partir de la solution actuelle. Il y a donc deux minima locaux. Comme nous l'avons vu, le critère est un critère de minimum global sous contrainte de croissance de la fissuration. Il doit donc y avoir un saut de x au moment t^s où les deux minima locaux sont de même énergie totale. L'égalité de l'énergie totale pour ces deux minima locaux s'écrit :

$$E^{tot}(U(t), x(t^s_-)) = E^{tot}(U(t), x(t^s_+)) \tag{5.10}$$

Tandis que la solution à t^s_+ vérifie, en tant que minimum local de l'énergie totale :

$$\frac{\partial E^{tot}}{\partial x}(U(t), x(t^s_+)) = 0 \tag{5.11}$$

On voit qu'en cas de discontinuité de taille de fissure, le minimum global de l'énergie totale entraîne une double condition d'égalité des énergies totales au moment du saut et de tangente

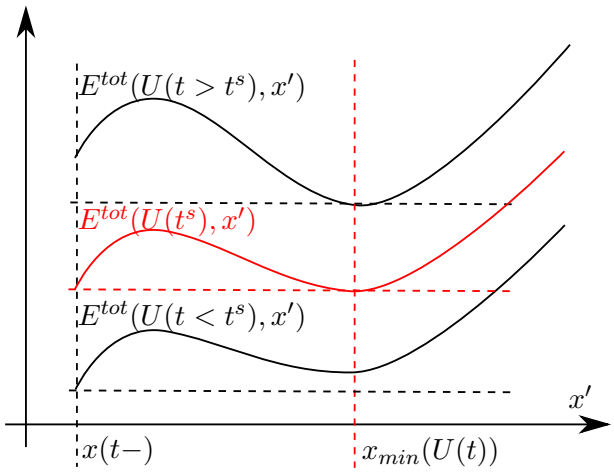

FIGURE 5.2 – Allure de l'énergie totale lorsqu'on a deux minima locaux en compétition

horizontale pour la solution après le saut (ce qui est également illustré dans la partie 5.3.3.1 de ce chapitre).

Ce critère est donc satisfaisant pour nous car il permet d'initier les fissures sans supposer de défauts initiaux. Nous présentons rapidement une extension possible de ce critère en un critère mixte prenant également en compte la contrainte le long du trajet de fissuration.

5.2.5 Critère de Leguillon

Ce critère est un critère mixte en contrainte et en énergie. Il s'agit, lors de l'initiation d'une fissure, de retarder éventuellement celle-ci par rapport à ce que l'on fait avec le critère énergétique de Francfort-Marigo, si la contrainte sur le trajet de fissuration est inférieure à un seuil [22, 21].

Ce critère est pensé pour représenter certains effets de taille. Leguillon argumente en fait qu'il n'est pas physique de considérer seulement un critère de rupture énergétique. Dans [22], il donne l'exemple suivant de la rupture d'une barre. Imaginons une barre chargée par déplacement imposé. Il est facile de calculer l'énergie potentielle qui est alors égale à l'énergie élastique stockée. L'énergie relâchée dans l'éventuelle rupture complète de la barre est égale à l'énergie potentielle elle aussi. Du coup, si l'on connaît l'énergie à dissiper par la fissuration, on arrive au résultat qu'il suffit d'allonger la barre suffisamment pour atteindre l'énergie potentielle qui égalise cette énergie dissipée. La barre casserait alors pour des contraintes d'autant plus faibles que la barre est longue. Il semble donc nécessaire dans ce cas de ne pas se fier à un critère énergétique mais à un critère en contrainte. Nous pensons cependant que ce raffinement supplémentaire du critère nécessaire de rupture n'est pas nécessaire dans notre cas puisque le béton, très hétérogène à toutes les échelles, contient de nombreux défauts qui induisent des concentrations de contraintes.

5.2.6 Conclusion sur les critères de rupture fragile

Nous décidons d'utiliser dans notre étude le critère de Francfort-Marigo, qui possède par rapport au critère de Griffith l'avantage d'autoriser les discontinuités de l'état de fissuration de manière tout à fait naturelle. On travaille en effet sur la minimisation de l'énergie totale plutôt que sur l'égalité de taux, ce qui supprime le problème de l'existence des dérivées de l'énergie par rapport à l'état de fissuration. On n'utilisera en revanche pas le critère de Leguillon puisqu'on pense que dans notre matériau béton, très hétérogène à toutes les échelles, il se trouve toujours un défaut microscopique qui crée la concentration de contrainte qui n'apparaît pas dans le champ de contrainte macroscopique.

Nous allons maintenant donner, sur un exemple simple tiré de la modélisation de l'alcali-réaction, une illustration de l'utilisation du critère de rupture que l'on a choisi.

5.3 Illustration de l'utilisation du critère de rupture énergétique en gonflement libre [9]

Cette section reprend librement un article publié dans *Cement and Concrete Research* en 2012 : Laurent Charpin and Alain Ehrlacher. A computational linear elastic fracture mechanics-based model for alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 42(4) :613 – 625, 2012. Il s'agit d'une étude du gonflement libre lors de la réaction alcali-silice. Les hypothèses concernant la modélisation de l'attaque sont tout à fait semblables à celles que nous faisons dans notre modèle complet, qui sera présenté dans la troisième partie de ce mémoire, mais la mécanique est grandement simplifiée.

5.3.1 Restrictions de ce modèle

Ce modèle constitue notre première tentative pour comprendre le comportement d'un granulat et de son voisinage lors de l'alcali-réaction. L'objectif est de comprendre le rôle de la fissuration de la pâte de ciment dans le gonflement des bétons attaqués. On se restreint donc aux éléments les plus simples qui permettent de faire apparaître une fissure dans la pâte de ciment sous pression de gel. Notre modèle s'inspire de quelques idées de Bažant [3]. Soulignons cependant les principales différences. Tout d'abord, nous ne supposons pas la périodicité du milieu, mais supposons que chaque grain se comporte comme s'il était plongé dans une matrice infinie de pâte de ciment. Ensuite, les facteurs d'intensité de contrainte sont obtenus par élément finis, plutôt que par interpolation entre des solutions analytiques classiques. La variation de volume de la cavité sous pression est liée analytiquement à l'énergie élastique, tandis que chez Bažant elle est obtenue par intégration du facteur d'intensité de contrainte par rapport à la taille de fissure. Enfin, nous ne faisons pas d'hypothèses concernant la compressibilité du gel.

Nous cherchons en fait à construire une méthode fiable pour l'initiation et la propagation de fissure, dans la perspective de l'utiliser dans des cas plus compliqués, notamment sous chargement. Commençons cependant par décrire les hypothèses que nous faisons de façon à placer cette illustration du fonctionnement du critère de Francfort-Marigo (§ 5.2.4) dans le cadre de l'étude de l'alcali-réaction.

5.3.2 Description d'un volume élémentaire représentatif

Nous étudions dans cette partie le comportement d'un granulat entouré d'une matrice infinie de pâte de ciment, libre de contraintes à l'infini (Fig. 5.3). Les hypothèses principales sont les suivantes :

- les granulats sont sphériques ;
- l'attaque se produit de manière homogène depuis la surface des granulats, une fraction volumique ρ du grain est dissoute, correspondant au contenu en silice réactive. C'est une hypothèse importante, comme nous l'avons souligné dans notre chapitre de bibliographie sur l'alcali-réaction (§ 1.4), liée au choix de modéliser l'attaque sur des granulats à réactivité rapide. Pour ce type de granulats, la réaction se passe essentiellement en surface, ce qui entraîne une montée en pression au niveau de l'interface et une fissuration de la pâte de ciment. Le cas des granulats à réactivité lente n'est pas abordé dans cet exemple, ni dans ce mémoire. On en trouve des modélisations cher Ben Haha, Dunant ou Reinhardt [4, 5, 13, 14, 30].

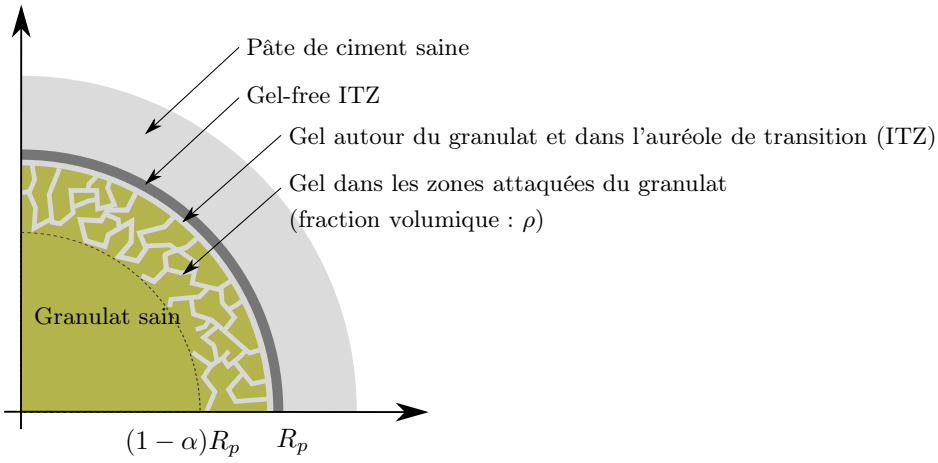

FIGURE 5.3 – Site réactif pour notre modèle de fissuration lors de l'alcali-réaction en gonflement libre

- la première couche de pâte de ciment autour du grain est l'auréole de transition (ITZ), d'épaisseur l_c d'ordre de grandeur 1μm, zone plus poreuse que le reste de la pâte de ciment. Le gel peut pénétrer dans cette zone mais pas au delà dans la pâte de ciment. On la suppose de porosité 1. Le remplissage de cette zone se fait à mesure que la pression augmente. La présence de cette zone poreuse et peu résistante s'ajoute au fait que la dissolution se fait en surface du granulat et appuie l'hypothèse que dès que l'attaque démarre, le grain n'est plus solidaire de la pâte de ciment (c'est une hypothèse que nous abandonnons dans notre modèle plus complexe, dans la troisième partie).
- les granulats sont isolés mécaniquement : chacun d'entre eux ne voit que la pâte de ciment infinie. C'est une hypothèse très restrictive car dans les bétons la proportion de granulats est très importante. L'amélioration de la description micromécanique sera présentée dans la troisième partie également.

On appelle R_p le rayon de la cavité dans la pâte de ciment, et également le rayon du granulat avant l'attaque. Le granulat est attaqué chimiquement de sorte qu'une fraction ρ de son volume est remplacée par un gel, progressivement, à partir de sa surface. Le degré d'attaque est décrit par le paramètre $\alpha \in [0;1]$. Le rayon de la partie saine du granulat en configuration relâchée est $(1-\alpha)R_p$. Le volume total de granulat non dissout en configuration relâchée s'écrit :

$$V_{a0}(\alpha) = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \left[(1-\alpha)^3 + (1-\rho)\left[1-(1-\alpha)^3\right]\right] \tag{5.12}$$

Le granulat et la pâte de ciment ont un comportement élastique, linéaire et isotrope, caractérisé par leur module d'Young et coefficient de Poisson (E_a, ν_a) et (E_c, ν_c). Le module d'incompressibilité du gel est noté K_g.

On suppose que la réaction chimique et l'absorption d'eau par les produits de réaction ont pour conséquence que le gel produit occupe, en configuration relâchée, un volume δ fois supérieur au volume de granulat dissout. Le volume relâché de gel au degré d'attaque α s'écrit donc :

$$V_0(\alpha) = \frac{4\pi}{3}\delta\rho R_p^3 \left[1-(1-\alpha)^3\right] \tag{5.13}$$

Soulignons que δ est un paramètre effectif qui résume plusieurs phénomènes physiques non décrits explicitement ici (voir nos remarques sur les propriétés des gels au § 1.5.1.2). Nous choisissons par simplicité de le considérer comme une constante. On suppose également que le gel est

suffisamment peu visqueux pour que sa migration se produise rapidement par rapport à sa création, de sorte qu'il est à pression homogène à chaque instant. Nous allons étudier la fissuration de la pâte de ciment provoquée par l'augmentation de la pression due à l'accumulation de gel. Les quantités relatives au gel, au granulat et à la pâte de ciment sont repérées respectivement par les indices g, a et c.

5.3.2.1 Étude de la situation juste après l'apparition d'une fissure axisymétrique

Nous supposons que la fissure brise la symétrie sphérique du système mais conserve une symétrie cylindrique. La pâte de ciment est fissurée par une fissure en forme d'anneau, ou penny-shaped, dans le plan $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$. La fissure est concentrique avec le granulat (Fig. 5.4).

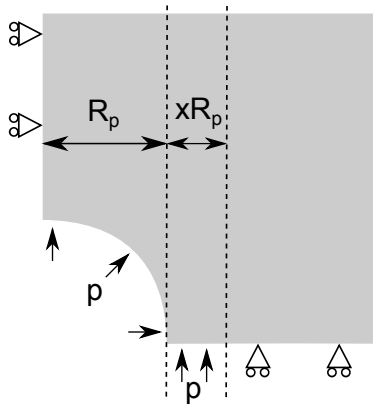

FIGURE 5.4 – Schéma de la fissure axisymétrique considérée, et conditions aux limites utilisées pour les simulations pas éléments finis

On suppose que lorsque la pression atteint, en configuration non fissurée, une pression critique, une fissure de taille finie est créée instantanément. Le rayon intérieur de cette fissure est celui de la cavité R_p, son rayon extérieur est $(1+x)R_p$. x est ainsi un paramètre sans dimension décrivant la taille relative de la fissure. La surface d'une telle fissure s'écrit :

$$S(x) = \pi R_p^2 \left[(1+x)^2 - 1\right] \tag{5.14}$$

5.3.2.2 Pression du gel

Cette fissuration instantanée provoque conjointement l'augmentation du volume accessible au gel et la diminution de sa pression. On note la pression du gel $P(\alpha, x)$, de façon à rendre explicite sa dépendance en le degré d'attaque et la taille de fissure. Les autres dépendances ne sont pas notées explicitement. Faisons un bilan de volume de gel.

Point de vue du gel

La pression P et le volume déformé du gel V_g sont reliés par la loi de comportement du gel :

$$V_g(\alpha, x) = V_0(\alpha)\left[1 - \frac{P(\alpha, x)}{K_g}\right] \tag{5.15}$$

Point de vue du solide

En configuration fissurée, nous utilisons tout d'abord l'analyse dimensionnelle pour réduire le nombre de cas à simuler par éléments finis pour notre estimation du volume accessible au gel.

Considérons le problème représenté sur la Fig. 5.4 dans lequel la pâte de ciment fissurée est soumise à une pression P au niveau de la surface de la cavité et sur les lèvres de la fissure.

On cherche la variation de volume de la cavité sous pression. Cette grandeur est susceptible de dépendre de la pression P, du rayon de la cavité R_p, de la taille relative de fissure x, du module d'Young et du coefficient de Poisson de la pâte de ciment (E_c, ν_c).

Tout d'abord, de par la linéarité de ce problème d'élasticité, la variation de volume est proportionnelle à la pression P. Ensuite, l'analyse dimensionnelle permet d'écrire la variation de volume sous la forme $\Delta V_c = R_p^3 f(\frac{P}{E_c}) g(x, \nu_c)$, où les fonctions f et g sont sans dimension. On rappelle que la variation de volume est proportionnelle à la pression, donc s'écrit nécessairement $\Delta V_c = R_p^3 \frac{P}{E_c} g(x, \nu_c)$.

On choisit de l'écrire en fonction des deux variables, α et x, qui décrivent l'état du système de la manière suivante :

$$\Delta V_c(\alpha, x) = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \frac{P(\alpha, x)}{E_c} \Delta v(x) \tag{5.16}$$

Où $\frac{4}{3}\pi\Delta v(x)$ est la variation de volume lorsqu'un pore de rayon unitaire entouré d'une fissure de taille x dans un matériau de module d'Young unitaire et de coefficient de Poisson ν_c est soumis à une pression unitaire. Δv dépend bien sûr de ν_c mais on ne rappelle pas systématiquement cette dépendance. Cette fonction est calculée par éléments finis à partir de l'énergie élastique stockée dans le matériau, comme on l'explique dans le § 5.3.2.2. Si le matériau n'est pas fissuré, on a une expression analytique de cette variation de volume :

$$\Delta v(0) = \frac{3}{2}(1 + \nu_c) \tag{5.17}$$

Le volume accessible au gel s'écrit donc comme la somme de quatre termes :

- le volume libéré par la dissolution du grain :

$$\frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho \left[1 - (1 - \alpha)^3\right] \tag{5.18}$$

- le volume libéré par la compression hydrostatique de la partie restante du grain, en proportion $(1 - \rho)$ dans la zone attaquée (équation 5.12), qui s'exprime facilement grâce au module d'incompressibilité du grain $K_a = \frac{E_a}{3(1-2\nu_a)}$:

$$\frac{P(\alpha, x)}{K_a} V_{a0}(\alpha) \tag{5.19}$$

- la contribution de la pâte de ciment $\Delta V_c(\alpha, x)$ (voir équation 5.16) :
- le volume de gel qui pénètre dans l'auréole de transition, que nous avons choisi proportionnel à la pression jusqu'au remplissage complet de ce volume, qui se produit à la pression P_0, et à la surface de granulat :

$$V^{ITZ} = 4\pi R_p^2 l_c \min(1, \frac{P}{P_0}) \tag{5.20}$$

Le volume disponible est obtenu par addition de ces contributions (équations 5.18, 5.19, 5.16, 5.20) :

$$V_g(\alpha, x) = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \left\{ \rho \left[1 - (1 - \alpha)^3\right] + \frac{P(\alpha, x)}{K_a} \left[(1 - \alpha)^3 + (1 - \rho)\left[1 - (1 - \alpha)^3\right]\right] \right.$$
$$\left. + \frac{P(\alpha, x)}{E_c} \Delta v(x) + \frac{3}{R_p} l_c \min(1, \frac{P}{P_0}) \right\} \tag{5.21}$$

La pression est ensuite déterminée par résolution d'une équation affine par morceaux en la pression $P(\alpha, x)$, obtenue par égalisation de nos deux expressions du volume déformé de gel V_g (équations 5.15 et 5.21) :

$$\text{Si } P > P_0,\ P(\alpha, x) = \frac{(\delta - 1)\rho\left[1 - (1-\alpha)^3\right] - \frac{3l_c}{R_p}}{\frac{\delta\rho[1-(1-\alpha)^3]}{K_g} + \frac{\Delta v(x)}{E_c} + \frac{(1-\alpha)^3 + (1-\rho)\left[1-(1-\alpha)^3\right]}{K_a}} \tag{5.22}$$

$$\text{Si } P < P_0,\ P(\alpha, x) = \frac{(\delta - 1)\rho\left[1 - (1-\alpha)^3\right]}{\frac{\delta\rho[1-(1-\alpha)^3]}{K_g} + \frac{\Delta v(x)}{E_c} + \frac{(1-\alpha)^3 + (1-\rho)\left[1-(1-\alpha)^3\right]}{K_a} + \frac{3l_c}{P_0 R_p}} \tag{5.23}$$

Ces deux expressions sont identiques pour $P = P_0$. En conséquence, le passage de l'équation 5.23 à l'équation 5.22 n'entraîne pas de discontinuité de la pression. La dépendance de la pression en R_p passe par l'intermédiaire de la taille de fissure relative x, qui dépend de R_p, et est explicite dans le terme lié à l'auréole de transition.

Énergie élastique stockée . L'énergie élastique emmagasinée dans le grain et le gel s'écrivent analytiquement :

Énergie élastique emmagasinée dans le gel

$$E_g^{el}(\alpha, x) = \frac{1}{2}\frac{P^2(\alpha, x)}{K_g}V_0(\alpha) = \frac{2\pi}{3}\frac{\rho\delta R_p^3}{K_g}\left[1 - (1-\alpha)^3\right]P^2(\alpha, x) \tag{5.24}$$

Énergie élastique emmagasinée dans le granulat

$$E_a^{el}(\alpha, x) = 2\pi R_p^3\left[(1-\alpha)^3 + (1-\rho)\left[1 - (1-\alpha)^3\right]\right]\frac{1 - 2\nu_a}{E_a}P^2(\alpha, x) \tag{5.25}$$

Énergie élastique emmagasinée dans la pâte de ciment

On ne dispose pas d'expression analytique pour la pâte de ciment, mais on utilise la même approche que pour l'estimation de la variation de volume de la cavité due à la déformation de la pâte de ciment. On s'intéresse à l'énergie élastique emmagasinée dans la pâte de ciment sous pression P. Celle-ci dépend de P, R_p, x et du couple (E_c, ν_c). L'analyse dimensionnelle permet d'écrire l'énergie élastique de la façon suivante : $E_c^{el} = R_p^3 \frac{P^a}{E_c^{a-1}} g(x, \nu_c)$ où $a \in \mathbb{R}$ et g est sans dimension. La linéarité du problème permet de dire que l'énergie est proportionnelle à P^2, ce qui impose $a = 2$. On écrit enfin l'énergie comme suit :

$$E_c^{el}(\alpha, x) = 2\pi R_p^3 \frac{P^2(\alpha, x)}{E_c} e(x) \tag{5.26}$$

Où $2\pi e(x)$ est l'énergie élastique emmagasinée sous pression unitaire autour d'une cavité de rayon unitaire, pour une fissure de taille x, avec un matériau de module d'Young unitaire et coefficient de Poisson ν_c qui n'est pas mentionné explicitement dans ces expressions. S'il n'y a pas de fissure, on a l'expression analytique suivante pour l'énergie adimensionnelle emmagasinée :

$$e(0) = \frac{1 + \nu_c}{2} \tag{5.27}$$

Les valeurs numériques de cette fonction pour $x > 0$ sont calculées par éléments finis (Fig. 5.5). Cela nous donne également les valeurs de la variation de volume adimensionnelle $\Delta v(x)$, puisque ces deux quantités sont reliées par l'égalité de l'énergie élastique emmagasinée et du travail de la pression :

$$E_c^{el}(\alpha, x) = \frac{1}{2} P(\alpha, x) \Delta V_c(\alpha, x) \tag{5.28}$$

D'où :

$$\Delta v(x) = 3e(x) \tag{5.29}$$

Cette courbe (Fig. 5.5) admet une tangente horizontale en $x = 0$: $\frac{\partial e(x)}{\partial x}(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$

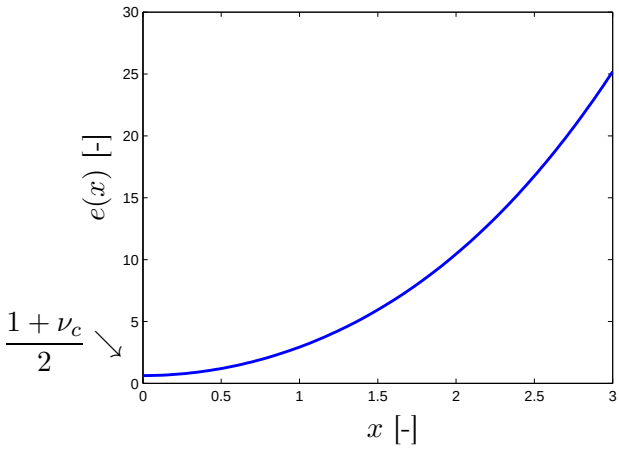

FIGURE 5.5 – Estimation par éléments finis de l'énergie élastique emmagasinée

Énergie élastique totale en configuration fissurée on récapitule enfin les différentes contributions pour écrite l'énergie élastique totale en configuration fissurée :

$$E_{total}^{el}(x, \alpha) = 2\pi R_p^3 \left[\frac{\delta\rho(1-(1-\alpha)^3)}{3K_g} + \frac{e(x)}{E_c} \right.$$
$$\left. + \left[(1-\alpha)^3 + (1-\rho)(1-(1-\alpha)^3)\right] \frac{1-2\nu_a}{E_a} \right] P^2(\alpha, x) \tag{5.30}$$

5.3.3 Étude thermodynamique de l'initiation et la propagation de la fissure. Critère énergétique

Nous mettons ici en œuvre concrètement le critère de rupture de Francfort-Marigo présenté au § 5.2.4. Nous commençons par rassembler les énergies calculées dans les paragraphes précédents afin de construire la fonction que nous allons minimiser.

5.3.3.1 Bilan énergétique

La création de fissure dissipe de l'énergie provenant de la relaxation d'énergie élastique. L'énergie relâchée s'écrit :

$$E^{rel}(\alpha, x) = E_{total}^{el}(\alpha, 0) - E_{total}^{el}(\alpha, x) \tag{5.31}$$

D'après l'équation 5.30, on remarque que l'énergie relâchée $E^{rel}(\alpha, x)$ est proportionnelle à R_p^3, c'est-à-dire qu'on peut écrire $E^{rel}(\alpha, x) = \pi R_p^3 e^{rel}(\alpha, x)$ où $e^{rel}(\alpha, x)$ est indépendant de R_p.

$$\begin{aligned} e^{rel}(\alpha, x) = 2 \Bigg[\left(P^2(\alpha, 0) - P^2(\alpha, x)\right) \Bigg(& \frac{\delta\rho(1-(1-\alpha)^3)}{3K_g} \\ & + \frac{\left[(1-\alpha)^3 + (1-\rho)(1-(1-\alpha)^3)\right](1-2\nu_a)}{E_a} \Bigg) \\ & + \frac{\frac{1+\nu_c}{2} P^2(\alpha, 0) - e(x) P^2(\alpha, x)}{E_c} \Bigg] \end{aligned} \tag{5.32}$$

Si l'on fait l'hypothèse que l'énergie nécessaire pour créer une fissure $E^{diss}(x)$ est proportionnelle à sa surface, elle est donc proportionnelle à R_p^2, et peut être écrite sous la forme $E^{diss}(x) = \pi R_p^2 e^{diss}(x)$ où $e^{diss}(x)$ est indépendant de R_p et s'écrit :

$$e^{diss}(x) = G_c \left[(1+x)^2 - 1\right] \tag{5.33}$$

La création de fissure au degré d'attaque α n'est possible que si :

$$\exists x \in \left]0, +\infty\right[, \ E^{rel}(\alpha, x) \geq E^{diss}(x) \tag{5.34}$$

C'est une condition nécessaire de fissuration que l'on considère comme suffisante. On utilise donc l'égalité des énergies dissipée et relâchée comme critère d'initiation de fissure. Nous sommes désormais capables de calculer toutes les énergies dont nous avons besoin, et pouvons donc commenter l'allure des courbes de l'énergie en fonction de tailles de fissure pour mieux comprendre le déroulement de la fissuration (Fig. 5.6 et 5.7). L'expression analytique de E^{diss} est connue (équation 5.33). $E^{rel}(x)$ a les limites suivantes à α constant :

- $E^{rel}(\alpha, x) \xrightarrow{x \to 0} 0$ car il n'y a pas de relaxation d'énergie sans apparition de fissure à α constant ;
- $\frac{\partial E^{rel}}{\partial x}(\alpha, x) \xrightarrow{x \to 0} 0$ car cette grandeur est proportionnelle à $\frac{\partial e(x)}{\partial x}(x)$ (voir équations 5.32, 5.29, 5.22, et 5.23) qui a une asymptote horizontale en $x = 0$ (voir Fig. 5.5) ;
- $E^{rel}(\alpha, x) \xrightarrow{x \to +\infty} E^{el}_{total}(\alpha, 0)$ et $\frac{\partial E^{rel}}{\partial x}(\alpha, x) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$ puisque l'énergie élastique emmagasinée dans une structure contenant une fissure de taille infinie est nulle.

Lorsque x est constant, E^{rel} est croissant avec α. Nous représentons donc l'allure de $E^{rel}(x)$ pour différentes valeurs de α (Fig. 5.6).

Expliquons la création de fissure :

- Au départ $\alpha = 0$, donc $E^{rel} = 0$.
- L'attaque démarre, c'est-à-dire que α augmente. On a donc $E^{el}_{total}(\alpha, 0) > 0$ et $E^{rel}(\alpha, x) > 0$. Cependant, on a $\frac{dE^{diss}}{dx}(x = 0) > 0$ alors que $\frac{\partial E^{rel}}{\partial x}(\alpha, x = 0) = 0$, au début de l'attaque on a donc $\forall\ x\ ,\ E^{rel}(\alpha, x) < E^{diss}(x)$, c'est-à-dire qu'aucune taille de fissure ne permet de relâcher assez d'énergie pour égaliser l'énergie dissipée correspondante.
- Comme on a choisi d'utiliser un critère énergétique, une fissure de taille critique x_c sera créée dès qu'on atteindra le degré de réaction α tel que :

$$\exists x \mid E^{rel}(\alpha, x) = E^{diss}(x) \tag{5.35}$$

  Étant donné que $\alpha \leq 1$, il est possible que cela ne se produise pas. Dans ce cas, même au degré d'attaque maximal, aucune fissure n'est créée. Ce cas de figure est commenté au § 5.3.3.2. De plus, l'augmentation continue du chargement fait que le degré d'attaque le plus petit pouvant entraîner la création d'une fissure de taille x_c est également caractérisé par

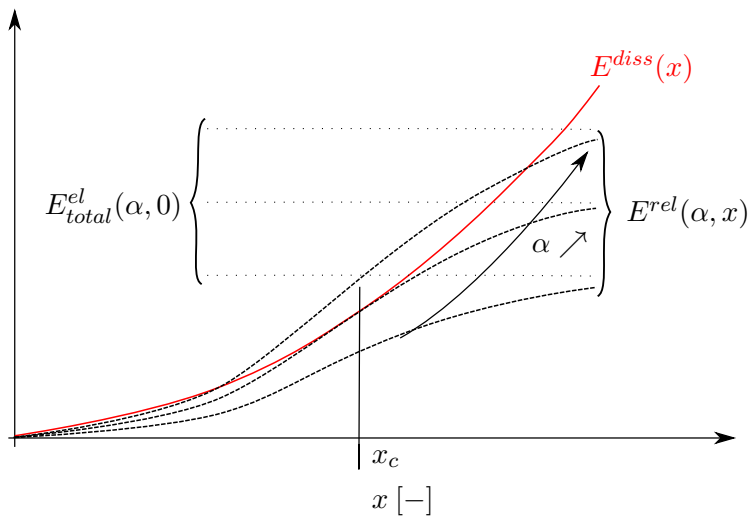

FIGURE 5.6 – Énergies dissipée et relâchée par la création d'une fissure de taille x

le fait que l'énergie relâchée E^{rel} et l'énergie dissipée E^{diss} sont tangentes (leurs dérivées par rapport à la taille de fissure sont égales) en ce point (Fig. 5.6). Pour un granulat de taille R_p, la solution $(\alpha_c(R_p), x_c(R_p))$ est complètement caractérisée par :

$$\begin{cases} E^{rel}\left(\alpha_c(R_p), x_c(R_p)\right) = E^{diss}\left(x_c(R_p)\right) \\ \frac{\partial E^{rel}}{\partial x}\left(\alpha_c(R_p), x_c(R_p)\right) = \frac{dE^{diss}}{dx}\left(x_c(R_p)\right) \end{cases} \tag{5.36}$$

Ces deux conditions se traduisent en terme de dérivées des énergies par l'égalité des deux surfaces grises sur la Fig. 5.7.

– Après l'initiation de la fissure, on étudie sa propagation. On suppose que l'existence de la fissure ne modifie pas l'attaque du grain qui reste sphérique et caractérisée par α. Notre système est dans l'état d'attaque et de fissuration (α_c, x_c), et on cherche à déterminer son évolution lors de l'augmentation de α. Cette évolution est décrite par l'équation en taux $\frac{\partial E^{rel}}{\partial x}(\alpha, x) = \frac{dE^{diss}}{dx}(x)$. Comme $\frac{\partial^2 E^{rel}}{\partial x^2}(\alpha, x) < 0$ et $\frac{d^2 E^{diss}}{dx^2}(x_c) > 0$ autour du point actuel (α, x) (Fig. 5.7), et $\frac{\partial E^{rel}}{\partial x}(\alpha, x)$ est continu en α, x évolue désormais continument avec α lors de son augmentation. La propagation est donc stable.

5.3.3.2 Taille minimale de grain entraînant la fissuration de la pâte de ciment

Si l'on fixe tous les paramètres de notre modèle (K_g, δ, l_c, P_0, ρ, (E_c, ν_c), (E_a, ν_a)), comme $E^{diss}(x) = \pi R_p^2 e^{diss}(x)$ et $E^{rel}(\alpha, x) = \pi R_p^3 e^{rel}(\alpha, x)$ (où e^{diss} et e^{rel} sont indépendantes de R_p), à degré d'attaque donné α, les tailles de grains pour lesquelles la fissuration est possible vérifient $\exists x \mid E^{diss}(x) \leq E^{rel}(\alpha, x)$, ou de manière équivalente $\exists x \mid \frac{e^{diss}(x)}{e^{rel}(\alpha,x)} \leq R_p$. On peut ainsi écrire à α donné la plus petite taille de grain pouvant entraîner la fissuration :

$$R_{p,inf}(\alpha) = \inf_x \frac{e^{diss}(x)}{e^{rel}(\alpha, x)} = \inf_x Q(\alpha, x) \tag{5.37}$$

Il existe donc une taille de grain minimale R_{inf} en dessous de laquelle la fissuration est impossible, ce qui signifie que la pression générée par l'attaque complète du grain n'est pas suffisante pour fissurer la pâte de ciment. Sous ce rayon R_{inf},

$$\forall x,\ E^{rel}(1, x) \leq E^{diss}(x) \tag{5.38}$$

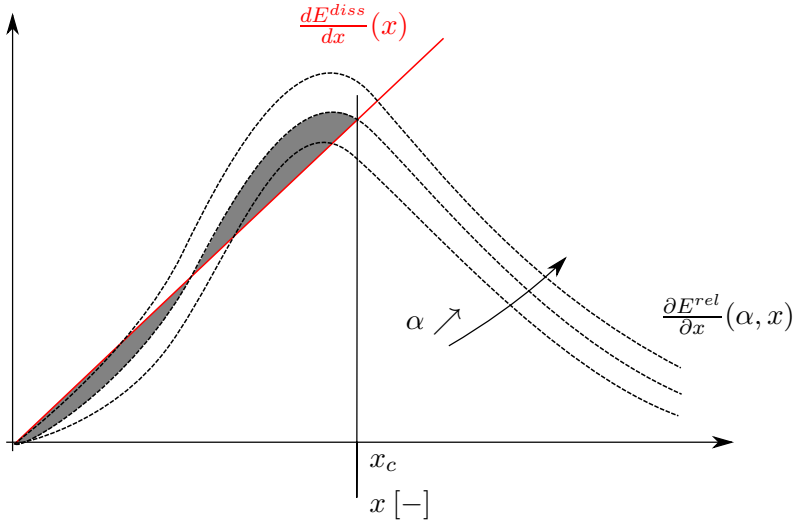

FIGURE 5.7 – Taux de relaxation et de dissipation d'énergie pour une fissure de longueur x

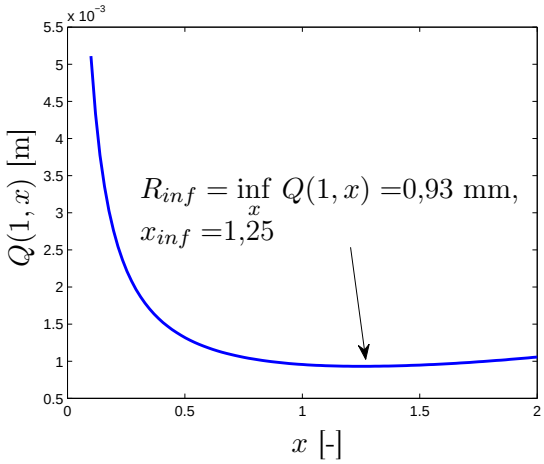

FIGURE 5.8 – Rapport minimisé pour déterminer la plus petite taille de grain qui permet la fissuration et la taille de fissure correspondante (R_{inf}, x_{inf}) : $Q(1,x) = \frac{e^{diss}(x)}{e^{rel}(1,x)}$

Ce rayon minimal pouvant entraîner la fissuration dépend de $\frac{G_c}{E_c}$, $\frac{E_c}{K_g}$, ν_c, δ, l_c, P_0, ρ, $\frac{E_c}{E_a}$ et ν_a.

On peut alors tracer le rapport $Q(1,x) = \frac{e^{diss}(x)}{e^{rel}(1,x)}$ que l'on utilise pour déterminer R_{inf} (Fig. 5.8), dans le cas simplifié où $\rho = 1$, $l_c = 0$ (P_0 n'a alors plus d'influence). On obtient également les tailles de fissures correspondantes x_{inf} (ce n'est pas la plus petite taille de fissure, mais celle qui correspond à R_{inf}). Prenons $E_c = 20$ GPa, $E_g = 60$ GPa, $\nu_c = \nu_g = 0.25$, $G_c = 40$ J.m^{-2}, $K_g = 1$ GPa et δ=1,03. Le coefficient de Poisson et le module d'Young sont classiques pour une pâte de ciment et un granulat, l'énergie de fissuration est tirée de Wittmann [38], et les deux derniers paramètres sont fixés arbitrairement. L'influence de leur valeur sera commentée dans le § 5.3.4.

5.3.4 Résultats numériques : effet de la taille de grain sur l'initiation de fissuration

On étudie dans cette partie le comportement du modèle de fissuration. Pour nous concentrer sur ce point, on fixe $l_c = 0$ et $\rho = 1$. Dès la création du gel, une montée en pression est observée.

Nous allons tout d'abord étudier l'influence de la taille de grain R_p, du coefficient de gonflement du gel δ et du module d'incompressibilité du gel K_g sur l'initiation de la fissuration et la taille de fissure lorsque l'attaque se termine. Les autres paramètres sont mieux connus et restent fixés aux valeurs suivantes : $E_c = 20$ GPa, $E_g = 60$ GPa, $\nu_c = \nu_g$=0,25 et $G_c = 40$ J.m^{-2}.

5.3.4.1 Étude des tailles de fissure initiales et finales

Plus petite taille de fissure entraînant la fissuration : R_{inf}. Nous étudions tout d'abord les variations de R_{inf} avec δ et K_g. Cette étude est justifiée par la mauvaise connaissance que l'on a des valeurs de ces paramètres, comme expliqué dans notre chapitre bibliographique sur l'alcali-réaction (§ 1.5.1.2). Ces valeurs peuvent varier en fonction du degré d'humidité et évoluer durant la durée de vie du gel. Il semble peu raisonnable de pouvoir utiliser directement des valeurs déterminées expérimentalement.

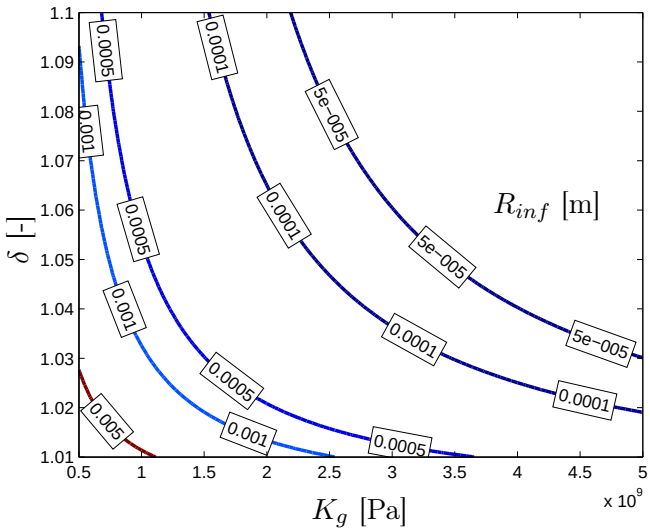

FIGURE 5.9 – Plus petite taille de grain entraînant la fissuration : $R_{inf}(\delta, K_g)$

On voit sur la Fig. 5.9 (construite à partir de l'équation 5.37 pour diverses valeurs de K_g et δ) que l'augmentation du coefficient de gonflement du gel δ ou du module d'incompressibilité K_g diminue la taille du plus petit granulat pouvant entraîner la fissuration. Lorsque $\delta \longrightarrow 1$, la fissuration devient impossible, tout comme lorsque le gel est trop souple ($K_g \longrightarrow 0$).

Tailles initiales et finales de fissure en fonction de R_p, K_g, et δ. Ces trois paramètres sont très importants pour déterminer l'initiation et la propagation de fissure, comme on le voit sur les figures 5.10, 5.11, 5.12 sur lesquelles sont représentées la taille initiale, ou critique de fissure (x_c, pour $\alpha = \alpha_c$) et la taille finale de fissure (x_{max} pour $\alpha = 1$). Les deux paramètres inchangés sur chaque figure prennent les valeurs $K_g = 1$ GPa, $\delta = 1{,}03$ et R_p= 1,5 mm .

On observe un comportement similaire en faisant varier chacun de ces trois paramètres (Fig. 5.10, 5.11, 5.12) : pour les valeurs faibles, la fissuration est impossible, même à attaque maximale ($\alpha = 1$). Lorsqu'on augmente la valeur du paramètre, l'attaque se produit. La taille de fissure initiale diminue alors (x_c défini par l'équation 5.36) tandis que la taille de fissure finale augmente (x_{max}).

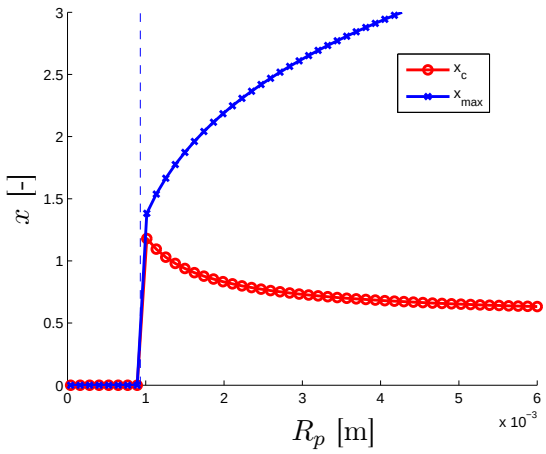

FIGURE 5.10 – Tailles de fissure relatives initiale (x_c) et finale (x_{max}) en fonction de la taille de grain R_p. $K_g = 1$ GPa et δ= 1,03

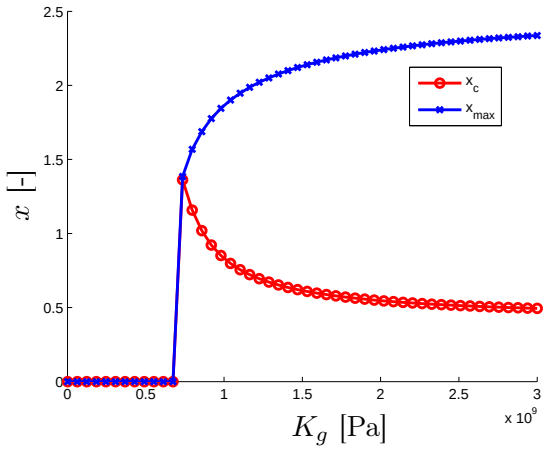

FIGURE 5.11 – Tailles de fissure relatives initiale (x_c) et finale (x_{max}) en fonction du module d'incompressibilité du gel K_g. $\delta = 1{,}03$ and $R_p = 1{,}5$ mm

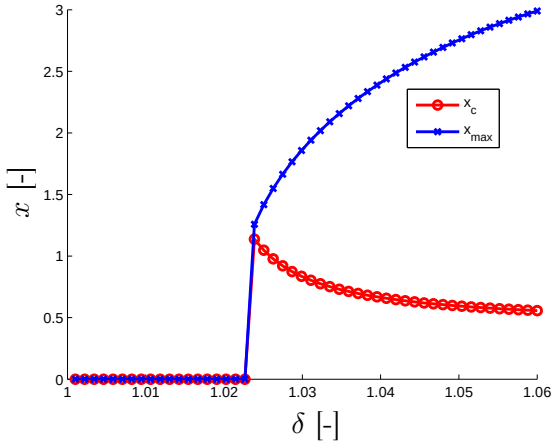

FIGURE 5.12 – Tailles de fissure relatives initiale (x_c) et finale (x_{max}) en fonction du coefficient de gonflement du gel δ. $K_g = 1$ GPa et $R_p = 1{,}5$ mm

Degré d'attaque correspondant à l'initiation en fonction de la taille de grain. On se base sur le critère énergétique expliqué au § 5.3.3 pour déterminer le degré d'attaque permettant l'initiation d'une fissure. On remarque tout d'abord que plus le grain est grand, plus un degré

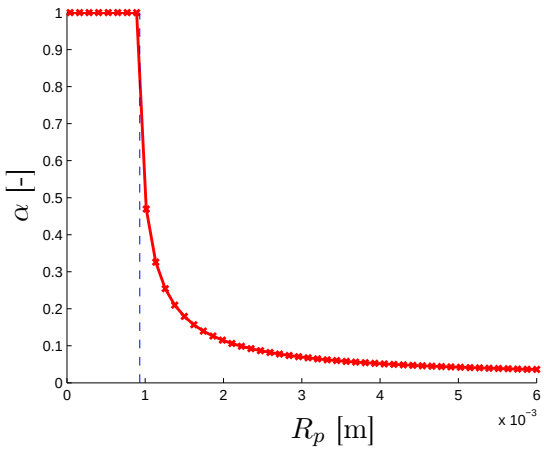

FIGURE 5.13 – Degré d'attaque à l'initiation de la fissuration en fonction de la taille de granulat. $K_g = 1$ GPa et $\delta = 1{,}03$

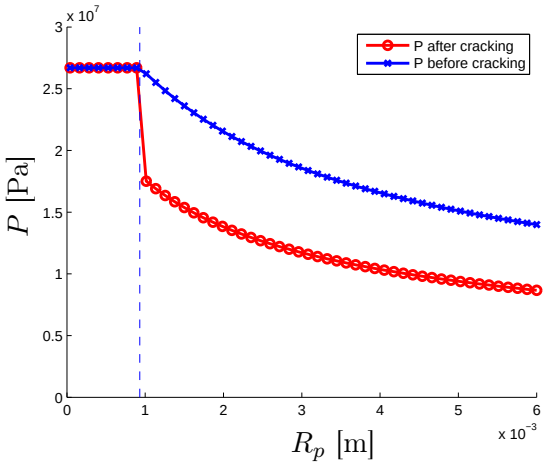

FIGURE 5.14 – Pression juste avant et juste après l'initiation. $K_g = 1$ GPa et $\delta = 1{,}03$

d'attaque faible est suffisant pour fissurer (Fig. 5.13), et que les pressions développées sont alors plus faibles, ainsi que le saut de pression (Fig. 5.14). L'ordre de grandeur des pressions est correct si l'on compare aux mesures de Struble [34] montrant des pressions de 10 MPa développées par des gels synthétiques, qui est également la pression utilisée par Shin dans ses simulations par éléments finis sur des images de bétons attaqués [33].

La profondeur absolue d'attaque αR_p à initiation n'évolue pas de manière monotone en fonction de la taille de grain (Fig. 5.15). Les tailles intermédiaires fissurent pour une profondeur moins importante.

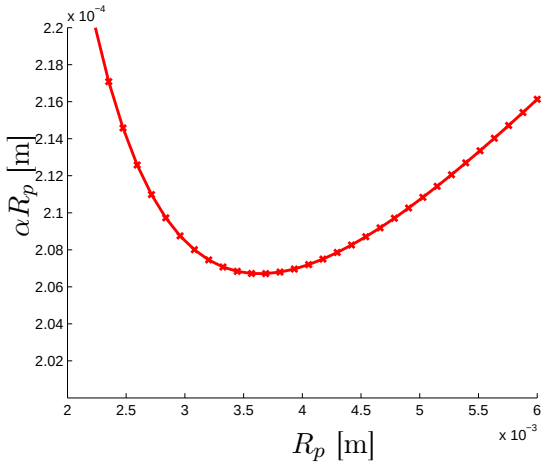

FIGURE 5.15 – Profondeur d'attaque à l'initiation de la fissure en fonction de la taille de granulat. $K_g = 1$ GPa and $\delta = 1{,}03$

5.3.4.2 Étude de l'évolution complète d'une fissure, influence d'un défaut initial

Une fois que la fissure est initiée, on suit sa propagation en fonction du degré d'attaque. Dans les applications présentées on a généralement supposé qu'il n'y avait pas de défaut initial, mais on souhaite ici tester les conséquences de cette hypothèse. On choisit la taille de grain R_p=1,5 mm, et on essaie différentes tailles de défauts, choisissant x entre 0 et 1 au démarrage de l'attaque. On représente l'évolution de la taille de fissure x et de la pression P en fonction du degré d'attaque α, pour 10 tailles de défauts allant de $x = 0$ (courbe pointillée bleue) à $x = 1$.

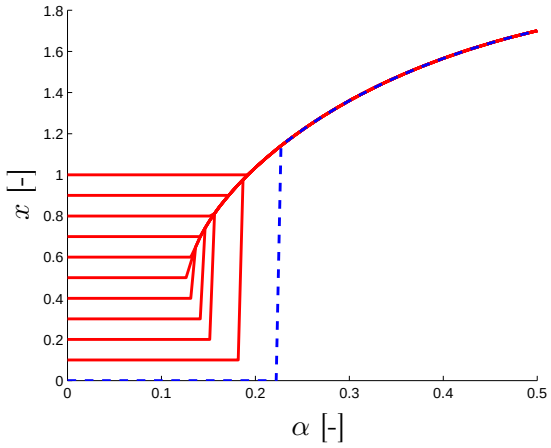

FIGURE 5.16 – Taille relative de fissure $x(\alpha)$ (défaut initial de $x = 0$ (pointillés) à $x = 1$). $K_g = 1$ GPa, $\delta = 1{,}03$ et R_p=1,5 mm

On remarque l'existence d'une taille de défaut critique au delà de laquelle il n'y a plus de saut de taille de fissure (Fig. 5.16), et qui vaut ici approximativement x=0,4. D'autres simulations ont montré que cette taille critique dépend de la taille du grain. Plus le défaut est petit, plus la pression nécessaire pour propager la fissure est élevée (Fig. 5.17). Une fois passé le saut de fissure, le comportement est identique qu'il y ait un défaut initial ou non.

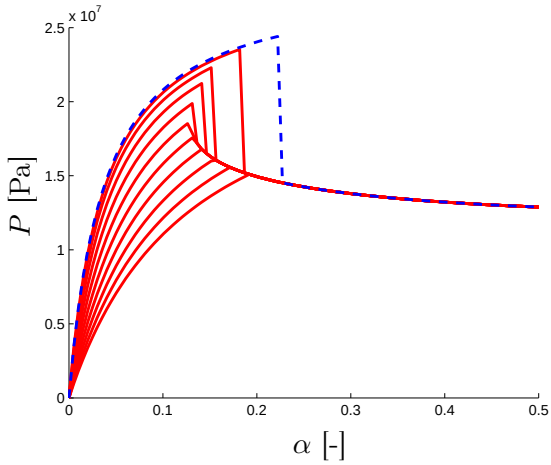

FIGURE 5.17 – Pression $P(\alpha)$ (défaut initial de $x = 0$ (pointillés) à $x = 1$). $K_g = 1$ GPa, δ= 1,03 et R_p=1,5 mm

5.3.5 Conclusion sur le modèle de gonflement libre

Nous avons présenté un modèle très simple d'alcali-réaction en gonflement libre. Ce modèle strictement mécanique inspiré en partie par les modèles de Bažant [3] et Multon [26] résume l'attaque par le remplacement d'une partie du granulat par du gel, depuis la surface extérieure du grain. Nous retiendrons cette idée lors de modélisations ultérieures.

Ce modèle simple de gonflement libre nous a permis d'illustrer le fonctionnement du critère de Francfort-Marigo. Ce critère de fissuration est fondé sur un bilan d'énergie, ce qui fait apparaître des effets de tailles intéressants. On a montré que les granulats les plus petits n'étaient pas capables de fissurer la pâte de ciment, même à des pressions élevées. On a également remarqué que les paramètres mécaniques du gel étaient importants pour prévoir la fissuration, mais qu'en revanche le choix d'une taille de défaut initial n'était pas capital. On est donc encouragés par le fonctionnement du critère de fissuration énergétique.

5.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de traiter la question de l'évolution de la microstructure durant l'attaque du béton. Nous avons à notre disposition, grâce au critère énergétique de Francfort-Marigo, un outil permettant, dès lors que l'énergie du matériau est connue, de déterminer l'état de fissuration optimal, selon un principe de minimum de l'énergie totale. La question cruciale pour l'utilisation de ce critère est donc la connaissance de l'énergie totale. En général on effectue des hypothèses simples pour la forme des fissures, ce qui rend l'énergie dissipée facile à calculer. Le calcul de l'énergie élastique peut en revanche être difficile. Dans l'exemple donné dans ce chapitre, nous avons calculé facilement l'énergie emmagasinée dans chaque composante grâce à une hypothèse de dilution des particules dans la matrice : l'expression de l'énergie élastique emmagasinée dans la pâte de ciment a été calculée par éléments finis grâce à un modèle ne contenant qu'une seule inclusion. On entrevoit cependant que dans le béton il y a trop d'inclusions pour que cette méthode soit précise, et on a de plus au chapitre 3 de cette partie donné des résultats permettant d'approcher les modules homogénéisés de milieux poreux plus complexes. On va donc maintenant s'intéresser à l'écriture de l'énergie élastique pour un milieu poreux, afin d'alimenter le critère de rupture.

Chapitre 6

Énergie d'un milieu poreux

Sommaire

6.1 Introduction **156**
6.2 Milieu élastique troué **156**
6.2.1 Milieu étudié 156
6.2.2 Chargement et tenseurs de localisation 157
6.2.3 Écriture abstraite de l'énergie avec les tenseurs de localisation 158
6.2.4 Calcul des termes de la fonction énergie élastique 158
6.2.5 Deux applications du théorème de réciprocité de Betti 161
6.2.6 Conclusion sur l'écriture de l'énergie élastique 161
6.2.7 Écriture du potentiel adapté à notre chargement et loi de comportement 162
6.3 Matériau poreux homogène équivalent **164**
6.4 Milieu continu poreux hétérogène **166**
6.4.1 Description du milieu continu poreux hétérogène 166
6.4.2 Chargement macroscopique et écriture des énergies élastiques et potentielles 167
6.4.3 Deux applications du théorème de réciprocité de Betti 169
6.4.4 Conclusion sur les énergies du milieu poreux hétérogène 170
6.5 Conclusion **171**

6.1 Introduction

Dans cette partie nous précisons un point de microporomécanique, en complément de la présentation qui a été faite au § 3.4. Nous faisons ici une description détaillée de l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux. Les matériaux étant tous considérés comme élastiques linéaires, l'énergie macroscopique est nécessairement quadratique en fonction des paramètres de chargement macroscopiques que sont les pressions dans les différentes familles de pores, et les déformations ou contraintes macroscopiques. Il s'agit dans cette partie d'établir clairement les écritures des énergies en fonction des propriétés poromécaniques à l'échelle macroscopique.

On fait tout d'abord ce travail pour un milieu élastique troué. Dans un second temps, on imagine que notre milieu poreux peut avoir plusieurs échelles imbriquées les unes dans les autres et qu'il peut donc être intéressant d'avoir deux étapes d'homogénéisation successives. On explique alors comment on introduit un milieu poreux équivalent pour l'échelle intermédiaire. On rassemble enfin ces informations pour écrire l'énergie d'un milieu poreux hétérogène.

6.2 Milieu élastique troué

On appelle milieu élastique troué un milieu formé d'une matrice solide de rigidité connue et variable, comportant un certain nombre de trous sous pression. On écrit dans cette partie les énergies d'un tel milieu, sans notion de changement d'échelle, puisque l'on n'essaie pas de représenter un matériau réel mais simplement d'étudier ce cas modèle du milieu élastique troué. La présentation que nous faisons a de nombreux points communs avec l'approche de Dormieux [11].

6.2.1 Milieu étudié

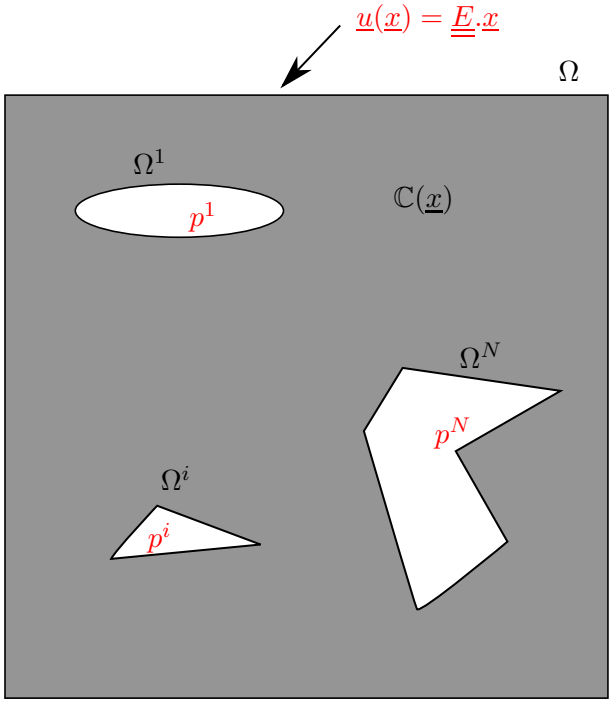

FIGURE 6.1 – Solide troué

Il s'agit d'un milieu élastique troué (Fig. 6.1). La frontière extérieure est appelée $\partial\Omega$. Chaque pore occupe un volume Ω^k, $k = 1..N$, avec N le nombre de pores. Le volume occupé par le

solide est appelé Ω^s. Ainsi, le domaine complet est $\Omega = \Omega^s \cup \left(\cup_{k=1}^{N} \Omega^k\right)$. Le milieu élastique est caractérisé par un tenseur de rigidité variable $\mathbb{C}(\underline{x})$ que l'on prend par convention nul dans la porosité $\Omega \setminus \Omega^s$.

6.2.2 Chargement et tenseurs de localisation

Notre milieu est chargé de deux façons :

- par une condition aux limites sur la frontière extérieure $\partial\Omega$ en déformation uniforme. Cela signifie que sur cette frontière le déplacement imposé vaut $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$.
- par des pressions dans les pores. Il y a autant de pressions que de pores, elles sont donc des paramètres de chargement indépendants pour notre problème. Le pore k, qui occupe le volume Ω^k, est donc soumis à une pression p^k, pour $k = 1..N$.

Utilisons maintenant le principe de superposition pour séparer cet unique problème à multiples chargements simultanés en $N+1$ problèmes à un seul paramètre de chargement. Notre problème de départ est la somme :

- d'un problème à déplacement imposé $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$ sur la frontière extérieure $\partial\Omega$ et pression nulle dans les pores. On note les tenseurs des contraintes, déformations et le vecteur déplacement solution de ce problème posé sur Ω^s en rappelant le chargement en exposant : $\left(\underline{\underline{\sigma}}^E(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}), \underline{u}^E(\underline{x})\right)$.
- de N problèmes à déplacement nul sur $\partial\Omega$, mais tels que pour chaque problème, une des pressions p^k (appliquée sur la fontière $\partial\Omega^k$ du solide) seulement est non nulle. On note les champs de contrainte, déformation et le vecteur déplacement solutions de ce problème sur Ω^s : $\left(\underline{\underline{\sigma}}^k(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}), \underline{u}^k(\underline{x})\right)$.

La linéarité de la solution par rapport à ces chargements nous amène à écrire les déformations solutions de ces problèmes de la manière suivante :

- pour le problème à déformation imposée, on définit un tenseur de localisation en déformation (d'ordre 4, ayant la symétrie mineure mais pas nécessairement symétrie majeure) $\mathbb{A}(\underline{x})$ qui permet d'écrire la déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \tag{6.1}$$

  Ce tenseur est avant tout défini pour $\underline{x} \in \Omega^s$. Il est étendu par continuité du champ de déplacement associé à la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^E$. Ce prolongement n'est pas unique, mais existe. On peut prendre la déformation de n'importe quel matériau qui remplirait l'espace poreux en considérant le déplacement de sa frontière comme imposé. Ainsi la continuité du champ de déplacement associé est assurée. Le champ de tenseur de localisation $\mathbb{A}(\underline{x})$ est ainsi prolongé de manière naturelle à l'espace poreux par son lien avec le tenseur de déformation (équation 6.1).
- de même pour chaque chargement en pression dans le pore k, on introduit un tenseur de localisation en pression $\underline{\underline{A}}^k(\underline{x})$ qui est lui d'ordre 2 et symétrique, tel que la déformation du problème où seule la pression p^k est non nulle s'écrive :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) p^k \tag{6.2}$$

  Ce tenseur est encore une fois défini pour $\underline{x} \in \Omega^s$. Il est étendu de la même façon que le tenseur de localisation en déformation.

Ainsi la déformation et la contrainte du problème de départ s'écrivent pour $\underline{x} \in \Omega^s$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{N} \underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} + \sum_{k=1}^{N} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) p^k \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^E(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{N} \underline{\underline{\sigma}}^k(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} + \mathbb{C}(\underline{x}) : \sum_{k=1}^{N} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) p^k \end{cases} \tag{6.3}$$

6.2.3 Écriture abstraite de l'énergie avec les tenseurs de localisation

On peut maintenant écrire l'énergie élastique volumique de notre solide poreux, qui est une fonction quadratique de nos paramètres de chargement $\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right)$, ce qui viendra naturellement par l'introduction de l'écriture de la déformation sous forme superposée en fonction des tenseurs de localisation en déformation et en pression (équation 6.3).

$$E^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right) = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV \tag{6.4}$$

Où l'on peut exprimer les déformations avec les tenseurs de localisation :

$$\begin{aligned} E^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right) = & \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \left\{ \int_{\Omega^s} \mathbb{A}^t(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} \\ & + \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^{N} p^k \left\{ \int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} \\ & + \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\lambda=1}^{N} p^k \left\{ \int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV \right\} p^\lambda \end{aligned} \tag{6.5}$$

Cette expression théorique fait intervenir l'ensemble des couplages possibles. Elle n'est cependant pas facile à manipuler. En particulier, il est plus habituel d'effectuer les intégrations par parties (IPP) sur les déformations et les contraintes, en repartant d'une expression en fonction de ces quantités comme donnée dans le terme central de l'Eq 6.4.

6.2.4 Calcul des termes de la fonction énergie élastique

Décomposons notre énergie élastique en deux termes principaux. On s'appuie sur les superpositions données en équation 6.3 pour les tenseurs des contraintes et des déformations. On appelle :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\sigma}}^E(\underline{x}) : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{N} \underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}) \right) dV \\ I_2 &= \sum_{q=1}^{N} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\sigma}}^q(\underline{x}) : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}) + \sum_{\lambda=1}^{N} \underline{\underline{\varepsilon}}^\lambda(\underline{x}) \right) dV \end{aligned} \tag{6.6}$$

On a alors :

$$E^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right) = \frac{1}{2\Omega} \left[I_1 + I_2 \right] \tag{6.7}$$

Dans tous nos calculs, les normales $\underline{n}$ sont prises sortantes par rapport au domaine Ω^s. Ce sont donc des normales entrantes pour les pores, ce qui entraîne des changements de signes

lors d'intégrations par parties où l'intégrale volumique est posée sur un pore. Commençons par l'intégrale I_1. On effectue une première IPP, qui remplace notre intégrale volumique sur Ω^s par $N+1$ intégrales surfaciques. On utilise ici la propriété que le champ de contrainte est statiquement admissible, donc à divergence nulle, ce qui s'écrit $\sigma_{ij,j} = 0$. On repère quelques termes qui sont nuls : le déplacement dû à un chargement en pression dans un pore est nul sur la frontière extérieure, le vecteur contrainte sur la surface d'un pore dans le chargement déplacement imposé sur la frontière extérieure est nul lui aussi.

$$\begin{aligned} I_1 = &\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) \sum_{q=1}^{N} \cancel{u_i^q(\underline{x})} n_j(\underline{x}) dS \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \left\{ \sum_{q=1}^{N} \int_{\partial\Omega^k} \cancel{\sigma_{ij}^E(\underline{x}) n_j(\underline{x})} u_i^E(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega^k} \cancel{\sigma_{ij}^E(\underline{x}) n_j(\underline{x})} \sum_{q=1}^{N} u_i^q(\underline{x}) dS \right\} \end{aligned} \tag{6.8}$$

Seule la première intégrale du terme I_1 reste donc à évaluer. On exprime d'abord le déplacement imposé sur la frontière extérieure, que l'on connaît :

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) E_{\alpha i} x_\alpha n_j(\underline{x}) dS \tag{6.9}$$

On sort de l'intégrale le tenseur des déformations qui nous sert à définir le déplacement imposé, qui est constant, puis on intègre de nouveau par parties. On retombe alors sur un terme nul puisqu'apparaît le vecteur contrainte sur la surface de pores dans le chargement déplacement extérieur imposé :

$$I_1 = E_{\alpha i} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) \delta_{\alpha j} dV - \sum_{q=1}^{N} \int_{\partial\Omega^q} \cancel{\sigma_{ij}^E(\underline{x}) n_j(\underline{x})} x_\alpha dS \right) \tag{6.10}$$

On effectue enfin les sommations possibles, puis on réexprime le résultat utilisant notre tenseur de localisation en déformation :

$$I_1 = E_{ij} \int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) dV = \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} \tag{6.11}$$

Le second terme I_2 est plus complexe à traiter. Comme pour le premier terme, on commence par ramener nos intégrales sur les bords du solide par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_2 = &\sum_{q=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS + \sum_{q=1}^{N} \sum_{\lambda=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) \cancel{u_i^\lambda(\underline{x})} n_j(\underline{x}) dS \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \left\{ \sum_{q=1}^{N} \int_{\partial\Omega^k} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS + \sum_{q=1}^{N} \sum_{\lambda=1}^{N} \int_{\partial\Omega^k} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) u_i^\lambda(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS \right\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

On remarque que le deuxième terme est nul, puisque le déplacement sur le bord extérieur est nul dans les problèmes à pression imposée. On exprime ensuite la valeur du déplacement imposé sur la frontière extérieure dans la première intégrale, puis la valeur du vecteur contrainte sur la surface des pores dans les deuxième et troisième intégrales. En particulier, le vecteur contrainte

est nul dans le pore k lorsque l'on impose la pression dans le pore q, si $q \neq k$, ce qui explique la disparition de la somme sur q :

$$\begin{aligned} I_2 = & \sum_{q=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) E_{is} x_s n_j(\underline{x}) dS \\ & + \sum_{k=1}^{N} \left\{ -p^k \int_{\partial\Omega^k} u_i^E(\underline{x}) n_i(\underline{x}) dS - p^k \sum_{\lambda=1}^{N} \int_{\partial\Omega^k} u_i^\lambda(\underline{x}) n_i(\underline{x}) dS \right\} \end{aligned} \tag{6.13}$$

On intègre de nouveau par parties chacun de ces termes. Pour le premier, on fait apparaître des intégrales sur le volume de solide, tandis que pour le second on fait volontairement apparaître des intégrales sur le volume poreux.

$$\begin{aligned} I_2 = & \sum_{q=1}^{N} E_{is} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) \delta_{js} dV - \sum_{\lambda=1}^{N} \int_{\partial\Omega^\lambda} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) n_j(\underline{x}) x_s dS \right) \\ & + \sum_{k=1}^{N} \left\{ p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \varepsilon^E(\underline{x}) dV + \sum_{\lambda=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \varepsilon^\lambda(\underline{x}) dV \right\} \end{aligned} \tag{6.14}$$

On simplifie la deuxième somme d'intégrales en exprimant le vecteur contrainte sur la surface des pores, comme deux étapes plus tôt, et pour les deux dernières intégrales on fait apparaître la moyenne des tenseurs de localisation en déformation et pression sur les pores :

$$\begin{aligned} I_2 = & \sum_{q=1}^{N} E_{is} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) \delta_{js} dV + p^q \int_{\partial\Omega^q} n_i(\underline{x}) x_s dS \right) \\ & + \sum_{k=1}^{N} \left\{ p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \right\} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Enfin on effectue les sommations dans le premier terme et on intègre par partie le second terme de façon à obtenir une intégrale qui fait apparaître les volumes des pores :

$$\begin{aligned} I_2 = & \sum_{q=1}^{N} \underline{\underline{E}} : \left(\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^q(\underline{x}) dV - \Omega^q \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right) p^q \\ & + \sum_{k=1}^{N} \left\{ p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \right\} \end{aligned} \tag{6.16}$$

On a ainsi, pour récapituler, l'expression suivante pour notre énergie élastique (exploitant la symétrie du tenseur de localisation en pression et la symétrie mineure du tenseur de localisation en déformation) :

$$\begin{aligned} E^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right) = & \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} \\ & + \frac{1}{2\Omega} \sum_{q=1}^{N} \underline{\underline{E}} : \left(\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^q(\underline{x}) dV - \Omega^q \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \int_{\Omega^q} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \right) p^q \\ & + \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\lambda=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \end{aligned} \tag{6.17}$$

6.2.5 Deux applications du théorème de réciprocité de Betti

6.2.5.1 Déformation extérieure et un pore sous pression

Nous calculons les travaux réciproques de deux chargements : déformation imposée $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$ sur la surface extérieure du solide $\partial\Omega$, et pression p^j dans le pore j. Les intégrales portent donc sur la surface extérieure et la surface du pore j. Les vecteurs contrainte sont notés $\underline{T}$:

$$\int_{\partial\Omega} \underline{T}^E(\underline{x}).\underline{u}^j(\underline{x})dS + \int_{\partial\Omega^j} \underline{T}^E(\underline{x}).\underline{u}^j(\underline{x})dS = \int_{\partial\Omega} \underline{T}^j(\underline{x}).\underline{u}^E(\underline{x})dS + \int_{\partial\Omega^j} \underline{T}^j(\underline{x}).\underline{u}^E(\underline{x})dS \tag{6.18}$$

Les deux termes du membre de gauche dans l'équation 6.18 sont nuls car le déplacement sur la surface extérieure dans le chargement pression imposée est nul. Traitons, pour tout j, le membre de droite par intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \sigma^j_{rs}(\underline{x})n_s(\underline{x})E_{rv}x_v dS - p^j \int_{\partial\Omega^j} n_i(\underline{x}).u^E_i(\underline{x})dS \\ &= E_{rv}\left(\int_{\Omega^s} \sigma^j_{rv}(\underline{x})dV + p^j \int_{\partial\Omega^j} n_r(\underline{x})x_v dS\right) + p^j \int_{\Omega^j} \varepsilon^E_{ii}(\underline{x})dS \end{aligned} \tag{6.19}$$

Ce qui, par introduction des tenseurs de localisation, une dernière IPP et simplifications par la déformation et la pression qui sont quelconques, nous donne :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x})dV - \Omega^j \underline{\underline{\mathbb{1}}} = -\int_{\Omega^j} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x})dV \tag{6.20}$$

Rappelons que le choix du prolongement des tenseurs de localisation dans les trous n'a pas d'importance lorsque l'on calcule ce type d'intégrales (équation 6.20), puisque par intégration par partie on peut passer à une intégrale sur le bord du trou qui ne dépend donc pas du prolongement choisi.

6.2.5.2 Deux pressions dans les pores

Supposons que l'on n'ait pas de déformation imposée sur la frontière extérieure, mais que deux pores, j et k soient sous pression. Le théorème de réciprocité nous donne (nous n'écrivons ici directement que les termes non nuls) :

$$\int_{\partial\Omega^j} \underline{T}^j.\underline{u}^k dS = \int_{\partial\Omega^k} \underline{T}^k.\underline{u}^j dS \tag{6.21}$$

Ce dont on déduit, par IPP et simplification par les pressions qui sont quelconques :

$$\int_{\Omega^j} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x})dS = \int_{\Omega^k} \underline{\underline{A}}^j(\underline{x})dS \tag{6.22}$$

6.2.6 Conclusion sur l'écriture de l'énergie élastique

6.2.6.1 Résumé des contributions

Les simplifications apportées par l'utilisation du résultat issu du théorème de réciprocité de Betti (équation 6.20) dans l'expression de l'énergie (équation 6.17) permettent d'écrire :

$$
\begin{aligned}
E^{el}\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) = & \frac{1}{2\Omega}\underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})dV : \underline{\underline{E}} \\
& + \frac{1}{2\Omega}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^{\lambda}(\underline{x})dV p^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

La deuxième utilisation du théorème de Betti (équation 6.22) nous assurant que le dernier terme de notre nouvelle écriture de l'énergie (équation 6.23) est bien symétrique. On voit donc disparaître de l'énergie élastique les termes de couplage entre les chargements en pression et la déformation extérieure.

6.2.6.2 Remarques et comparaison avec la forme quadratique de départ

On remarque dans l'équation 6.23 que les couplages entre la déformation extérieure et les pressions dans les pores ont disparu, ce qui n'était pas à priori attendu au regard de l'écriture de départ (équation 6.5). On peut en fait déduire de cette comparaison trois résultats :

- le premier résultat est une application du Lemme de Hill (mentionné au § 3.4), classique en micromécanique, que l'on peut aussi voir simplement comme une intégration par parties tirant avantage de la forme linéaire du déplacement imposé sur la frontière extérieure :

$$
\int_{\Omega^s} \mathbb{A}^t(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})dV = \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})dV \tag{6.24}
$$

- vient ensuite la nullité des termes de couplage, qui s'écrit pour tout k :

$$
\int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})dV = \underline{\underline{0}} \tag{6.25}
$$

- enfin un troisième résultat, concernant la localisation en pression pour tous j,k :

$$
\int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x})dV = \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x})dV \tag{6.26}
$$

Nous disposons donc de l'énergie élastique, que nous allons maintenant utiliser pour écrire l'énergie potentielle, puis la loi de comportement de notre solide troué.

6.2.7 Écriture du potentiel adapté à notre chargement et loi de comportement

Nous devons exprimer le potentiel à partir de l'énergie élastique. L'énergie élastique est le potentiel à variation de volume de pores et déformation imposées. Nous devons donc faire une transformée de Legendre sur les couples pression imposée/variation de volume de pore dans le même pore mais due à tous les chargements possibles. Nous appelons ψ^* l'énergie potentielle par unité de volume poreux Ω et ΔV_k la variation de volume poreux par unité de volume poreux Ω du pore k. Cette variation de volume est due à tous les types de chargements et est reliée à la déformation du pore k par la relation :

$$
\Delta V_k = \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}dV \tag{6.27}
$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned}\psi^*\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) &= E^{el}\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) - \sum_{k=1}^{N} p^k \Delta V_k \\ &= E^{el}\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) - \sum_{k=1}^{N} p^k \left(\Delta V_k^E + \sum_{\lambda=1}^{N} \Delta V_k^\lambda\right)\end{aligned} \tag{6.28}$$

On peut ensuite exprimer ces variations de volume poreux comme l'intégrale de la trace de la déformation dans chacun des problèmes sur l'espace poreux :

$$\psi^*\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) = E^{el}\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) - \frac{1}{\Omega}\sum_{k=1}^{N} p^k \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \int_{\Omega^k} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^E + \sum_{\lambda=1}^{N} \underline{\underline{\varepsilon}}^\lambda\right) dV \tag{6.29}$$

Si l'on exprime tout avec les tenseurs de localisation cela donne :

$$\begin{aligned}\psi^*\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N}\right) = &\frac{1}{2\Omega}\underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} \\ &- \frac{1}{2\Omega}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \\ &- \frac{1}{\Omega}\sum_{k=1}^{N} p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}}\end{aligned} \tag{6.30}$$

On peut de là déduire les équations traditionnelles de la microporomécanique, par dérivation. La contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, que l'on peut par définition exprimer comme une moyenne sur l'ensemble du milieu poreux (solide et pores) de la contrainte locale, s'exprime de manière équivalente par dérivation de l'énergie potentielle macroscopique par rapport à la déformation macroscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{E}}} = \left\{\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV\right\} : \underline{\underline{E}} - \sum_{k=1}^{N} p^k \left\{\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV\right\} \tag{6.31}$$

De même, la variation de volume poreux qui est définie par l'intégrale de la trace de la déformation sur l'espace poreux, s'exprime de manière équivalente par dérivation de l'énergie potentielle macroscopique par rapport à la pression dans le pore considéré. Nous l'écrivons pour le pore k :

$$\Delta V_k = -\frac{\partial \psi^*}{\partial p^k} = \left\{\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV\right\} : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^{N} \left\{\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV\right\} p^\lambda \tag{6.32}$$

On peut, par analogie avec ce qui est fait dans le cadre de modélisations microporomécaniques (§ 3.4), relier chacun de ces termes aux modules d'un milieu poroélastique. Remarquons qu'on a l'identification suivante qui se fait pour le tenseur des modules élastiques homogénéisés $\mathbb{C}^{hom}$, le coefficient de Biot de l'inclusion k $\underline{\underline{B}}^k$, le module croisé de Biot des inclusions k, λ $M^{k\lambda}$ (on rappelle les conséquence du théorème de Betti) :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^{hom} = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x})dV \\ \underline{\underline{B}}^k = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x})dV = \dfrac{\Omega^k}{\Omega}\underline{\underline{\mathbb{1}}} - \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x})dV \\ M^{k\lambda} = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x})dV = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_{\Omega^\lambda} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x})dV \end{cases} \tag{6.33}$$

On a alors la loi de comportement suivante à l'échelle macroscopique :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} p^k \underline{\underline{B}}^k \\ \Delta V_k = \underline{\underline{B}}^k : \underline{\underline{E}} + \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{N} M^{k\lambda} p^\lambda \end{cases} \tag{6.34}$$

On veut maintenant aller un peu plus loin. Plutôt que d'appliquer une pression dans chaque trou indépendamment, on va avoir des familles de trous à la même pression qui sont rassemblés dans une même zone géométrique, et représenter cela par un milieu poreux équivalent.

6.3 Introduction du matériau poreux homogène équivalent

Rappelons notre situation de départ : un solide troué occupe le domaine Ω, dont la partie Ω^s est occupée par un solide de tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}(\underline{x})$, tandis que les N pores occupent chacun un volume Ω^k, sous pression p^k, de telle façon que $\Omega = \Omega^s \cup \left(\cup_{k=1}^{N} \Omega^k\right)$.

Supposons maintenant que l'on simplifie un peu notre problème :

- Il existe N^z zones Ω_z^k où le tenseur des modules d'élasticité est constant sur la partie solide de la zone $\Omega_{z,s}^k$ et vaut $\mathbb{C}^k$, et où la pression appliquée dans les pores $\Omega_{z,p}^k$ est également constante (p^k).
- Ces zones sont toutes d'extension beaucoup plus grande que la taille des pores

On peut donc traiter chaque zone indépendamment de façon à trouver ses propriétés poromécaniques équivalentes.

On doit alors résoudre autant de problèmes *élémentaires* que de zones. Pour le problème élémentaire k, il est nécessaire d'extraire un VER de notre microstructure de départ (au sens expliqué au § 3.2), dans la zone Ω_z^k. Il s'agit d'un sous domaine d'Ω_z^k qui est statistiquement représentatif de son ensemble. C'est pour cela qu'on doit n'avoir que des pores très petits devant la taille du domaine. Appelons le Ω_e^k où le e signifie élémentaire. Le solide occupe le domaine $\Omega_e^{sk} \subset \Omega_e^k$.

On lui applique une démarche de micromécanique traditionnelle pour déterminer ses propriétés homogénéisées. Sa frontière extérieure $\partial\Omega_e^k$ est soumise à une déformation uniforme $\underline{\underline{E}}$, ses pores, qui occupent l'espace Ω_e^{pk} à la pression p.

On définit deux tenseurs de localisation (l'un en déformation $\mathbb{A}_e$, l'autre en pression $\underline{\underline{A}}_e^p$) liés à ces chargements, qui nous permettent d'exprimer en tout point la déformation (y compris dans les pores, par prolongement de la déformation de façon à ce que le déplacement associé soit continu) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}_e(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}_e^p(\underline{x})p \tag{6.35}$$

Il s'agit ensuite de construire une loi de comportement de milieu poreux pour ce matériau, en calculant un certain nombre de moyennes sur le domaine. Nos variables d'état macroscopiques pour ce milieu étant les deux quantités imposées (déformation moyenne sur l'ensemble et pression), et les quantités duales associées :

- contrainte moyenne sur l'ensemble $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})dV$
- variation de volume de l'espace poreux par unité de volume de matériau poreux : $\phi - F = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^{pk}} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})dV$

qu'il faut dont calculer.

Exprimons tout d'abord la déformation moyenne sur l'ensemble (la déformation moyenne associée au chargement pression étant nulle). On en profite pour introduire une notation pour les moyennes : pour toute quantité g définie sur un domaine Ω, on écrit sa moyenne de la façon suivante, en omettant la dépendance en $(\underline{x})$ lorsqu'on utilise la notation de moyenne :

$$< g >_\Omega = \frac{1}{\Omega} \int\limits_\Omega g(\underline{x})dV \tag{6.36}$$

On a alors pour la moyenne de la déformation :

$$\underline{\underline{E}} = < \underline{\underline{\varepsilon}} >_{\Omega_e^k} = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})dV = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^{sk}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})dV + \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^{pk}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})dV \tag{6.37}$$

Tandis que la contrainte macroscopique peut se décomposer de la manière suivante (en notant $f_e^p = \Omega_e^{pk}/\Omega_e^k$ la fraction volumique de pores dans le problème élémentaire) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= < \underline{\underline{\sigma}} >_{\Omega_e^k} = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})dV = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^{sk}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})dV + f_e^p p \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ &= \frac{1}{\Omega_e^k} \mathbb{C}^k \left(\int\limits_{\Omega_e^{sk}} \mathbb{A}_e(\underline{x})dV \underline{\underline{E}} + \int\limits_{\Omega_e^{sk}} \underline{\underline{A}}_e^p(\underline{x})dV p \right) + f_e^p p \underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{aligned} \tag{6.38}$$

Soit, en utilisant la relation 6.37 :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^k : \left(\mathbb{I} - f_e^p < \mathbb{A}_e >_{\Omega_e^{pk}} \right) : \underline{\underline{E}} - \left(f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} - (1 - f_e^p) < \mathbb{C} : \underline{\underline{A}}_e^p >_{\Omega_e^{sk}} \right) p \tag{6.39}$$

Ce qui nous fournit la première équation de notre loi de comportement macroscopique. Pour avoir la seconde, calculons la déformation volumique des pores rapportée au volume poreux total :

$$\phi - F = \frac{1}{\Omega_e^k} \int\limits_{\Omega_e^{pk}} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})dV = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A}_e >_{\Omega_e^{pk}} : \underline{\underline{E}} + f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \underline{\underline{A}}_e^p >_{\Omega_e^{pk}} p \tag{6.40}$$

Ce qui nous fournit notre deuxième équation de loi de comportement. Pour résumer, les propriétés poromécaniques homogénéisées associées à ce problème équivalent peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbb{C}_e^{hom} = \mathbb{C}^k : \left(\mathbb{I} - f_e^p < \mathbb{A}_e >_{\Omega_e^{pk}} \right) \\ \underline{\underline{B}}_e^k = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} - (1 - f_e^p) < \mathbb{C} : \underline{\underline{A}}_e^p >_{\Omega_e^{sk}} = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A}_e >_{\Omega_e^{pk}} \\ M_e^k = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \underline{\underline{A}}_e^p >_{\Omega_e^{pk}} \end{cases} \tag{6.41}$$

Ces équations nous permettent donc à partir d'un solide élastique troué, de définir (si certaines propriétés de séparation d'échelle sont vérifiées) un milieu poreux homogène équivalent. Nous souhaitons maintenant refaire le même travail que dans la première partie (§ 6.2), pour un milieu poreux hétérogène, puisque c'est sur ce milieu-là que nous allons travailler grâce à la transformation expliquée dans ce paragraphe.

6.4 Milieu continu poreux hétérogène

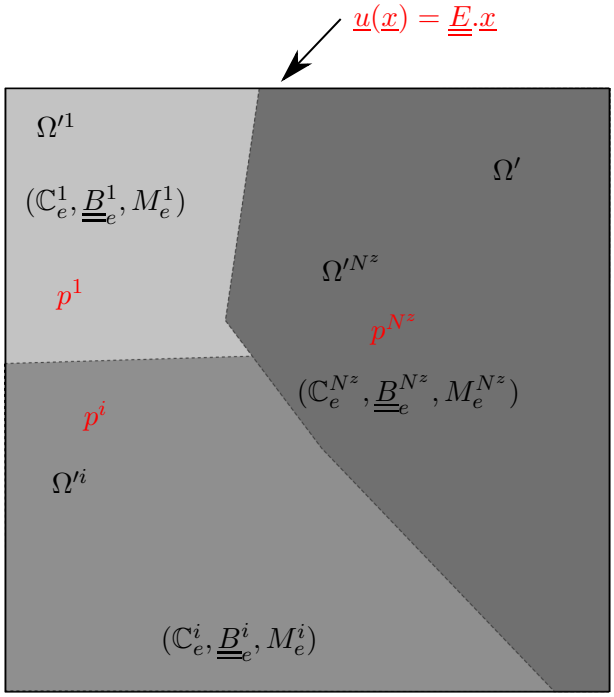

FIGURE 6.2 – Solide poreux hétérogène

Nous souhaitons maintenant nous appuyer sur la technique montrée dans la section précédente qui permet de définit un milieu poreux équivalent pour remplacer un solide élastique troué, et faire le même travail que dans la première section sur ce milieu poreux équivalent, tel que représenté sur la Fig. 6.2.

Pour passer du problème évoqué au § 6.2 au problème tel que représenté sur la Fig. 6.2, on applique la démarche expliquée au § 6.3 à chaque zone de notre solide élastique troué initial.

6.4.1 Description du milieu continu poreux hétérogène

Ce problème sur le milieu continu poreux hétérogène équivalent est posé sur un domaine Ω' semblable à notre domaine de départ Ω, dans lequel on a remplacé le solide élastique et ses trous par un milieu poreux équivalent. On utilise la notation $'$ pour différencier les quantités associées à ce problème plutôt qu'à celui de la partie précédente (§ 6.2). Notre milieu continu est divisé en N^z zones Ω'^i caractérisées par un tenseur des modules d'élasticité, un coefficient de Biot et un module de Biot $(\mathbb{C}_e^i, \underline{\underline{B}}_e^i, M_e^i)$ où le e rappelle que ces modules sont issus d'un calcul à une échelle plus fine du type de ce qui a été expliqué dans le paragraphe 6.3, qui suivent chacune la loi de comportement suivante :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{B}}_e^i p \\ \varphi - f = \underline{\underline{B}}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} + M_e^i p \end{cases} \tag{6.42}$$

Où l'on voit apparaître la contrainte locale $\underline{\underline{\sigma}}$, la déformation locale $\underline{\underline{\varepsilon}}$, la pression dans l'espace poreux au point considéré p, et la variation de volume de l'espace poreux au point considéré, par rapport au volume de la phase dans laquelle on se trouve $(\varphi - f)$. Les zones ainsi définies occupent tout l'espace : $\Omega' = \cup_i \Omega'^i$.

6.4.2 Chargement macroscopique et écriture des énergies élastiques et potentielles

En cohérence avec cette loi de comportement on peut écrire l'énergie potentielle locale, par unité de volume du matériau dans lequel on se trouve, repéré par l'indice i :

$$\phi(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{B}}_e^i p - \frac{1}{2} p M_e^i p \tag{6.43}$$

Et l'énergie élastique locale, calculée par transformée de Legendre à partir de l'énergie potentielle :

$$e(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) = \phi(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) + p(\varphi - f) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} p M_e^i p \tag{6.44}$$

Le chargement appliqué à ce milieu est le suivant :

- déformation moyenne imposée, c'est-à-dire déplacement de la forme $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$ imposé sur la frontière extérieure $\partial\Omega'$. On y associe un tenseur de localisation d'ordre 4 ayant la symétrie mineure $\mathbb{A}'(\underline{x})$;
- pression p^i dans chaque zone Ω'^i, et tenseur de localisation en pression associé $\underline{\underline{A}}'^i$ qui est un tenseur d'ordre deux symétrique.

Remarquons que la question du prolongement de ces tenseurs ne se pose plus puisque maintenant il y a du solide poreux partout.

À partir de ces énergies locales et en connaissance du chargement macroscopique on peut construire l'énergie potentielle globale par unité de volume du solide poreux Ω :

$$\begin{aligned}
\psi'\left(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}\right) &= \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \underline{\underline{B}}_e^i p^i - \frac{1}{2} p^i M_e^i p^i\right) dV \\
&= \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\left[\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \mathbb{C}_e^i - \underline{\underline{B}}_e^i p^i\right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \underline{\underline{B}}_e^i + p^i M_e^i\right) p^i\right] dV \\
&= \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\left[\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \frac{1}{2}(\varphi - f)(\underline{x}) p^i\right] dV
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Où la dernière ligne est obtenue en utilisant la loi de comportement locale. Cela nous servira plus tard, car il est utile de faire apparaître le tenseur des contraintes étant donné qu'il est à divergence nulle, ce qui est très pratique lors de la manipulation de ces expressions par intégration par parties. Définissons deux termes pour continuer ce calcul :

$$\begin{cases}
A_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV \\
A_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i} (\varphi - f)(\underline{x}) p^i dV
\end{cases} \tag{6.46}$$

De sorte que :

$$\psi'\left(\underline{\underline{E}},(p^i)_{i=1:N^z}\right)=\frac{1}{2\Omega}\left[A_1-A_2\right] \tag{6.47}$$

Nous travaillons tout d'abord sur A_1, en faisant une intégration par parties qui fait apparaître une intégrale sur le bord du domaine. On utilise le fait que la contrainte est à divergence nulle :

$$A_1=\int_{\partial\Omega'}\sigma_{ij}(\underline{x})u_i(\underline{x})n_j dS \tag{6.48}$$

On exprime ensuite le déplacement imposé sur le bord du domaine :

$$A_1=E_{ki}\int_{\partial\Omega'}\sigma_{ij}(\underline{x})x_k n_j(\underline{x})dS \tag{6.49}$$

Ce qui permet de faire apparaître la moyenne de la contrainte locale, encore par intégration par parties :

$$A_1=\underline{\underline{E}}:\int_{\Omega'}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})dV \tag{6.50}$$

On transforme ensuite ce terme en y introduisant la loi de comportement :

$$A_1=\sum_{i=1}^{N^z}\underline{\underline{E}}:\int_{\Omega'^i}\mathbb{C}_e^i:\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})dV-\sum_{i=1}^{N^z}\underline{\underline{E}}:\int_{\Omega'^i}\underline{\underline{B}}_e^i p^i dV \tag{6.51}$$

Puis les tenseurs de localisation :

$$A_1=\underline{\underline{E}}:\sum_{i=1}^{N^z}\left(\int_{\Omega'^i}\mathbb{C}_e^i:\mathbb{A}'(\underline{x})dV:\underline{\underline{E}}+\sum_{k=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\mathbb{C}_e^i:\underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dVp^k\right)-\underline{\underline{E}}:\sum_{i=1}^{N^z}\Omega'^i\underline{\underline{B}}_e^i p^i \tag{6.52}$$

Notre second terme, A_2, s'exprime plus directement grâce à la loi de comportement :

$$A_2=\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\left(\underline{\underline{B}}_e^i:\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})+M_e^i p^i\right)p^i dV \tag{6.53}$$

Pour finir on y introduit les tenseurs de localisation :

$$A_2=\sum_{i=1}^{N^z}p^i\underline{\underline{B}}_e^i:\int_{\Omega'^i}\mathbb{A}'(\underline{x})dV:\underline{\underline{E}}+\sum_{i=1}^{N^z}\sum_{k=1}^{N^z}p^i\underline{\underline{B}}_e^i:\int_{\Omega'^i}\underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dVp^k+\sum_{i=1}^{N^z}\Omega'^i M_e^i:(p^i)^2 \tag{6.54}$$

Si bien qu'en rassemblant des ceux termes on obtient :

$$\begin{aligned}\psi'\left(\underline{\underline{E}},(p^i)_{i=1:N^z}\right)=&\frac{1}{2\Omega}\underline{\underline{E}}:\left\{\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\mathbb{C}_e^i:\mathbb{A}'(\underline{x})dV\right\}:\underline{\underline{E}}\\&+\frac{1}{2\Omega}\underline{\underline{E}}:\left\{\sum_{k=1}^{N^z}\left(\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\mathbb{C}_e^i:\underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV-\Omega'^k\underline{\underline{B}}_e^k-\underline{\underline{B}}_e^k:\int_{\Omega'^k}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\right)\right\}p^k\\&-\frac{1}{2\Omega}\sum_{i=1}^{N^z}\sum_{k=1}^{N^z}p^i\left\{\underline{\underline{B}}_e^i:\int_{\Omega'^i}\underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV+\Omega'^i M_e^i\delta_{ik}\right\}p^k\end{aligned} \tag{6.55}$$

Nous suivons encore la même démarche que dans le § 6.2 en donnant deux résultats obtenus par le théorème de réciprocité de Betti.

6.4.3 Deux applications du théorème de réciprocité de Betti

6.4.3.1 Déformation macroscopique et pression dans la zone k non nulles

Nous appliquons encore en fois le théorème de réciprocité de Betti au cas suivant : le matériau poreux est soumis à un déplacement imposé de la forme $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$ sur sa frontière extérieure $\partial\Omega'$, et à la pression p^k dans la zone k uniquement. Il s'agit alors d'écrire l'égalité des travaux réciproques. On écrit directement les travaux de pression dans le pore k dans la déformation due à la déformation macroscopique (membre de gauche), égaux aux travaux des efforts dus à la déformation macroscopique dans le champ de déformation dû à la pression dans le pore k, omettant les intégrales sur les bords des autres pores (on note $\underline{T}$ le vecteur contrainte) :

$$\int_{\Omega'^k} p^k(\varphi - f)^E(\underline{x})dS + \int_{\partial\Omega'} T_i^k(\underline{x})u_i^E(\underline{x})dS = \int_{\Omega'^k} \cancel{p^E}(\varphi - f)^k(\underline{x})dS + \int_{\partial\Omega'} T_i^E(\underline{x})\cancel{u_i^k(\underline{x})}dS \quad (6.56)$$

Les deux termes du membre de droite sont nuls car le déplacement sur le bord extérieur est nul dans le problème à pression imposée et la pression est nulle dans la zone k dans le problème à déplacement imposé. Introduisant dans la première intégrale le tenseur de localisation en déformation, on a :

$$\int_{\Omega'^k} p^k \underline{\underline{B}}_e^k : \mathbb{A}'(\underline{x})dV : \underline{\underline{E}} + \int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x})n_j(\underline{x})u_i^E(\underline{x})dS = 0 \quad (6.57)$$

Avec $\underline{\underline{\sigma}}^k$ le champ de contrainte dû à la pression dans la zone k, dans tout le solide. Transformons le second terme en procédant à l'expression du déplacement sur la frontière extérieure et à une première intégration par parties :

$$\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x})n_j(\underline{x})u_i^E(\underline{x})dS = E_{ki}\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x})n_j(\underline{x})x_k dS = E_{ki}\int_{\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x})\delta_{kj}dV = \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^k(\underline{x})dV \quad (6.58)$$

On exprime ensuite notre contrainte en utilisant la loi de comportement. L'intégrale porte sur tout le domaine. Nous différencions dans un premier temps le cas où l'on se trouve dans la zone où la pression est non nulle du cas où on ne s'y trouve pas :

$$\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x})n_j(\underline{x})u_i^E(\underline{x})dS = \underline{\underline{E}} : \sum_{(i\neq k)=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x})dV + \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega'^i} \left(\mathbb{C}_e^k : \underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}) - \underline{\underline{B}}_e^k p^k\right) dV \quad (6.59)$$

On rassemble finalement ces deux expressions :

$$\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x})n_j(\underline{x})u_i^E(\underline{x})dS = \underline{\underline{E}} : \sum_{i=1}^{N^z} \mathbb{C}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV p^k - \underline{\underline{E}} : \Omega'^k \underline{\underline{B}}_e^k p^k \quad (6.60)$$

Puis on conclut pour trouver notre identité issue du théorème de Betti (après simplification par la pression et la déformation qui sont arbitraires). Pour tout k :

$$\int_{\Omega'^k} \underline{\underline{B}}_e^k : \mathbb{A}'(\underline{x})dV + \sum_{i=1}^{N^z} \mathbb{C}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV - \Omega'^k \underline{\underline{B}}_e^k = 0 \quad (6.61)$$

6.4.3.2 Pression dans deux zones différentes

Dans le même esprit que dans le paragraphe précédent, on écrit l'égalité des travaux d'une part de la pression dans la zone k dans la variation de volume de la phase poreuse de la zone k sous la pression dans la zone i, et d'autre part de quantité réciproque. On obtient en n'écrivant pas les termes nuls :

$$\int_{\Omega'^k} p^k(\varphi - f)^i(\underline{x})dV = \int_{\Omega'^i} p^i(\varphi - f)^k(\underline{x})dV \tag{6.62}$$

Par utilisation de la loi de comportement on a :

$$\int_{\Omega'^k} p^k \underline{\underline{B}}_e^k : \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x})p^i dV = \int_{\Omega'^i} p^i \underline{\underline{B}}_e^i : \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})p^k dV \tag{6.63}$$

Ce qui par simplification des pressions nous donne l'identité :

$$\underline{\underline{B}}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x})dV = \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV \tag{6.64}$$

6.4.4 Conclusion sur les énergies du milieu poreux hétérogène

On reprend maintenant l'expression 6.55 en y utilisant le résultat trouvé par le théorème de réciprocité 6.61. On obtient pour l'énergie potentielle par unité de volume poreux suivante :

$$\begin{aligned}\psi'\left(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}\right) = &\frac{1}{2\Omega'}\underline{\underline{E}} : \left\{\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x})dV\right\} : \underline{\underline{E}} \\ &- \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{E}} : \left\{\sum_{i=1}^{N^z} \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \mathbb{A}'(\underline{x})dV\right\} p^i \\ &- \frac{1}{2\Omega'}\sum_{i=1}^{N^z}\sum_{k=1}^{N^z} p^i \left\{\underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV + \Omega'^i M_e^i \delta_{ik}\right\} p^k\end{aligned} \tag{6.65}$$

Écrivons maintenant l'énergie élastique E'_{el}. Par intégration de l'énergie élastique locale (équation 6.44) on a que :

$$E'_{el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}\right) = \frac{1}{2\Omega'}\left[A_1 + A_2\right] \tag{6.66}$$

D'où l'on tire, en utilisant notre résultat du théorème de Betti de la même façon que pour l'énergie potentielle, l'expression de l'énergie élastique par unité de volume poreux :

$$\begin{aligned}E'_{el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}\right) = &\frac{1}{2\Omega'}\underline{\underline{E}} : \left\{\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x})dV\right\} : \underline{\underline{E}} \\ &+ \frac{1}{2\Omega'}\sum_{i=1}^{N^z}\sum_{k=1}^{N^z} p^i \left\{\underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x})dV + \Omega'^i M_e^i \delta_{ik}\right\} p^k\end{aligned} \tag{6.67}$$

L'expression 6.65 nous permet de définir les propriétés poroélastiques homogénéisées de ce solide poreux hétérogène :

$$\begin{cases} \mathbb{C}'^{hom} = \dfrac{1}{\Omega'} \displaystyle\sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \\ \underline{\underline{B}}'^i = \dfrac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i : \displaystyle\int_{\Omega'^i} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV = \dfrac{\Omega'^i}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i - \dfrac{1}{\Omega'} \displaystyle\sum_{k=1}^{N^z} \mathbb{C}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x}) dV \\ M'^{ki} = \dfrac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i : \displaystyle\int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \dfrac{\Omega'^i}{\Omega'} M_e^i = \dfrac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \dfrac{\Omega'^i}{\Omega'} M_e^i \end{cases} \tag{6.68}$$

Ces expressions sont donc les propriétés homogénéisées d'un matériau poreux hétérogène sous pression, avec une pression différente dans chaque phase. Nous avons également montré la forme de l'énergie potentielle, que l'on souhaite utiliser avec le critère de Francfort-Marigo pour faire évoluer la microstructure de notre béton attaqué.

6.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de détailler l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux. Nous avons redémontré les résultats de microporomécanique du § 3.4 et les avons étendus au cas où le matériau que l'on veut homogénéiser est composé de zones elles-mêmes poreuses, décrites par leurs propriétés poromécaniques, ces propriétés pouvant être calculées par une procédure d'homogénéisation à une échelle inférieure.

On est donc maintenant dans la capacité d'écrire l'énergie nécessaire à l'utilisation du critère de fissuration énergétique que l'on a choisi. Un dernier point reste à traiter avant de passer à l'étude de la réaction alcali-silice. C'est la question de la discrétisation des différentes tailles de grains ou trous que l'on trouve dans notre milieu poreux. On va donc y consacrer le prochain chapitre, en donnant quelques exemples qui nous permettront de discrétiser correctement les tailles de grains en différentes familles sans que cela soit trop difficile à gérer en temps de calcul.

Chapitre 7

Choix de discrétisation de la granulométrie pour un calcul de rupture de milieu poreux avec le critère énergétique de Francfort-Marigo

Sommaire

7.1 Introduction **174**
7.2 Détail des différents problèmes nécessaires à l'application du critère de rupture **174**
7.3 Critère de Francfort-Marigo en microporomécanique **175**
7.3.1 Description du solide poreux avant fissuration 176
7.3.2 Schéma de fissuration considéré 176
7.3.3 Énergies potentielles dans le problème auxiliaire $\mathcal{P}^{aux}$ 177
7.3.4 Énergie dissipée 178
7.3.5 Chargement par injection de fluide : problème $\mathcal{P}^*$ 179
7.3.6 Énergies totales pour ce problème 180
7.4 Exemples de fissuration **181**
7.4.1 Déformation moyenne nulle 181
7.4.2 Contrainte moyenne nulle 187
7.4.3 Compression uniaxiale 189
7.4.4 Un exemple avec de plus nombreuses tailles de grains 189
7.4.5 Conclusion sur l'utilisation du critère de Francfort-Marigo pour la fissuration d'un milieu contenant des cavités 190
7.5 Conclusion **191**

7.1 Introduction

L'objectif de cette partie est de combiner le critère de rupture fragile exposé dans le chapitre 5 avec la description poromécanique d'un matériau composite. Nous souhaitons, avant d'utiliser le critère de rupture pour l'alcali-réaction, l'utiliser sur un exemple un peu plus simple, mais dans lequel l'ensemble des difficultés mécaniques sont rassemblées. Nous avons travaillé dans le chapitre6 sur l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux, et avons donc tous les éléments pour utiliser le critère de rupture sur ce type de matériau. L'intérêt d'utiliser dès maintenant le critère sur un cas simplifié est de pouvoir étudier en détail l'impact du choix des variables d'optimisation. Notre matériau composite est ici constitué d'une matrice percée de trous de différentes tailles, dans lesquelles on injecte un fluide. Nous cherchons à déterminer la propagation des fissures autour de ces trous. On va faire l'hypothèse, motivée par nos résultats en *2d* du chapitre 4, qu'il n'y a que trois directions de fissuration orthogonales possibles autour de chaque cavité. Si l'on discrétise notre distribution de tailles de trous en N familles, on a $3N$ variables d'endommagement pour notre fonction énergie totale. Si la discrétisation est fine, cela peut être insoluble. Il est important de diminuer N en discrétisant aussi grossièrement que possible les tailles de trous, et si possible de faire passer le facteur 3 à 2 ou 1, en tirant parti de la symétrie du chargement sur un matériau initialement isotrope.

On commence dans ce chapitre par détailler les problèmes mécaniques que l'on considère pour trouver l'évolution de l'état de fissuration d'un matériau poreux chargé dans lequel on injecte un fluide. On détaille ensuite les énergies pour ces problèmes. Enfin, on montre l'influence du choix du nombre de familles de pores et de la symétrie de la solution sur les résultats.

7.2 Détail des différents problèmes nécessaires à l'application du critère de rupture

On détaille ici le principe de la mise en œuvre du critère de rupture de Francfort-Marigo sur un problème concret de poromécanique.

Le critère de Francfort-Marigo est fondé sur la minimisation de l'énergie totale sur les configurations possibles de fissures. Dans notre cas, le chargement du solide considéré est de deux sortes :

- chargement mécanique sur la frontière extérieure du domaine. Pour nous cela se résumera à l'imposition d'une déformation moyenne (par imposition d'un déplacement linéaire en fonction des coordonnées d'espace $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$), ou l'application d'une contrainte homogène (par imposition d'un vecteur contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}}.\underline{n}$).
- attaque chimique, représenté ici par l'injection d'une masse de fluide dans les N sites poreux $(m_g^\alpha(t))^{\alpha=1:N}$.

Notre problème de départ est appelé problème $\mathcal{P}$. C'est le problème consistant à trouver les évolutions des variables d'endommagement (un jeu de taille de fissures dans les trois directions autour des N sites poreux $\left((x_\beta^\alpha)_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)$, comme il sera détaillé au § 7.3.2) sous chargement mécanique extérieur (en déformation ou contrainte) et masse injectée de gel dans les pores. La résolution de ce problème nécessite de trouver conjointement l'état de fissuration solution, et les champs mécaniques solutions correspondants. Le critère de Francfort-Marigo nous dit que l'on trouve cet état de fissuration et la solution mécanique par minimisation de l'énergie totale. Cependant pour nous la partie solution d'un problème d'élasticité est grandement simplifiée car on utilise un estimateur de micromécanique, l'estimateur *IDD*, présenté au § 3.6.8. En conséquence, la minimisation n'est réalisée que sur les états d'endommagement, la solution mécanique pour chaque état d'endommagement étant connue sans que l'on ait besoin de passer explicitement par

une minimisation.

On introduit donc le problème virtuel $\mathcal{P}^*$, afin de calculer, pour des états d'endommagement virtuels qui sont un jeu de tailles de fissures dans les trois directions de l'espace autour de N sites d'injection $\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)$, et un chargement $\left(\underline{\underline{\Sigma}} \text{ ou } \underline{\underline{E}}, (m^\alpha_g(t))^{\alpha=1:N}\right)$, l'énergie totale $E^{*tot}\left(\underline{\underline{E}}, (m^\alpha_g(t))^{\alpha=1:N}, (x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)$. Ce problème n'est cependant pas simple à manier, puisque l'on n'a pas linéarité, à endommagement donné, entre la solution mécanique et nos paramètres de chargement $(m^\alpha_g(t))^{\alpha=1:N}$.

Il est alors pratique d'introduire un problème auxiliaire, que l'on appelle $\mathcal{P}^{aux}$, problème identique mais où le chargement est modifié dans les pores, remplaçant la masse de gel par des pressions potentiellement différentes dans chacun des N sites. Nos paramètres de chargement sont alors dans ce problème $\left(\underline{\underline{\Sigma}} \text{ ou } \underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right)$. Dans ce problème les champs mécaniques solutions sont proportionnels aux chargements imposés, l'énergie élastique est donc quadratique en fonction de ces chargements. L'écriture de l'énergie est donc d'une forme simple, que l'on calcule concrètement dans notre cas grâce à des solutions de micromécanique, grâce au travail que l'on a effectué sur l'énergie au chapitre 6.

Récapitulons la stratégie de résolution. Le problème $\mathcal{P}^{aux}$ nous donne l'énergie du squelette solide à chargement extérieur et à pression dans les pores données, pour un état de fissuration virtuel $\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)$ et un chargement du type $\left(\underline{\underline{\Sigma}} \text{ ou } \underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right)$. Le bilan de fluide dans le problème $\mathcal{P}^*$ pour le même chargement extérieur et le même état de fissuration virtuel nous permet de calculer l'énergie dans le problème $\mathcal{P}^*$ de la façon suivante : on calcule les pressions induites par les masses de fluide injectées et le chargement extérieur, pour l'état d'endommagement virtuel auquel on s'intéresse, puis on calcule l'énergie en fonction des pressions dans le cadre du problème $\mathcal{P}^{aux}$. On trouve enfin la solution de notre problème $\mathcal{P}$ par optimisation de l'énergie totale dans le problème $\mathcal{P}^*$ dans l'ensemble des états de fissuration possibles que l'on note $\mathcal{A}$:

$$\left[(x^\alpha_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right]\left(\underline{\underline{\Sigma}} \text{ ou } \underline{\underline{E}}, \alpha^i\right) = \underset{\left[(x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right]\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} \left\{E^{*tot}\left(\underline{\underline{E}}, (m^\alpha_g(t))^{\alpha=1:N}, (x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)\right\} \tag{7.1}$$

Nous détaillons dans la section suivante l'écriture des énergies pour ces problèmes.

7.3 Application du critère de Francfort-Marigo en microporomécanique

Le formalisme de microporomécanique permet dans le cas où on a un solide contenant des phases diverses mais aux propriétés connues, en ajoutant des hypothèses géométriques, d'estimer les propriétés homogénéisées du solide hétérogène. Nous utilisons le formalisme de microporomécanique exposé dans le livre de référence sur le sujet de L. Dormieux [11], rappelé rapidement au § 3.4, et détaillé pour ce qui est de l'écriture des énergies au chapitre 6. C'est un formalisme particulièrement bien adapté aux solides poreux, dont les pores sont de forme à peu près ellipsoïdale, puisque l'on peut alors utiliser l'arsenal des solutions basées sur le problème de l'inclusion d'Eshelby, dont on a donné une description au chapitre 3.

Nous souhaitons ici appliquer le critère de rupture de Francfort-Marigo présenté au chapitre 5 à un solide élastique poreux. On suppose que les pores sont des trous dans le solide élastique, de forme sphérique. Notre solide élastique est chargé sur sa frontière extérieure, mais la cause principale de la fissuration que l'on souhaite déterminer est l'apparition progressive dans les trous d'un fluide qui, au fur et à mesure que la masse injectée augmente, monte en pression. Nous voulons déterminer s'il est possible que la matrice se fissure autour des trous sous pression et comment cette fissuration dépend du chargement appliqué à la frontière extérieure du solide.

7.3.1 Description du solide poreux avant fissuration

Notre matériau poreux occupe un domaine Ω (solide et trous). La phase solide occupe un domaine Ω^s. Il y a N familles de trous sphériques, chaque famille étant définie par un rayon $R^i, i = 1..N$. La fraction volumique de la famille i est notée f^i, de sorte que le nombre de trous dans la famille i vaut $N^i = f^i / \left(\frac{4\pi}{3}(R^i)^3\right)$. Le domaine occupé par les pores de la famille i est noté Ω^i. Une représentation en *2d* du type de morphologie considérée est montrée sur la Fig. 7.1.

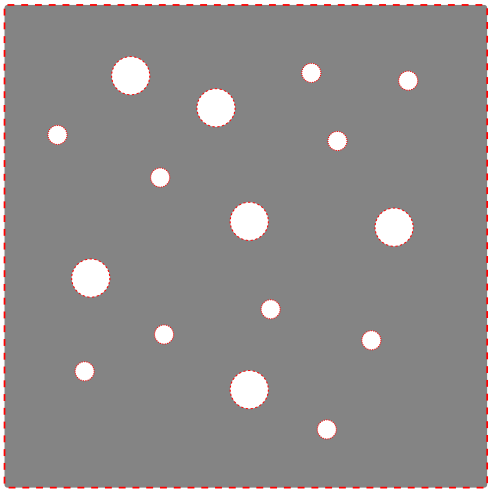

FIGURE 7.1 – Représentation en *2d* de la morphologie de notre poreux.

7.3.2 Schéma de fissuration considéré

Nous considérons que les pores ont un comportement de fissuration indépendant. Ceci est bien sûr limité à des fractions volumiques pas trop élevées, et à des tailles de fissures telles qu'il n'y a pas coalescence entre les fissures qui démarrent autour des différents pores. C'est très restrictif. En effet, lorsque les pores montent en pression la tendance qui semble la plus naturelle est une fissuration qui relie les pores, non une fissuration qui reste confinée autour de chaque pore. Néanmoins nous pensions qu'étudier l'apparition de microfissures autour des pores a son utilité et un domaine de validité. Nous considérons pour chaque pore trois fissures en anneau possibles, ayant pour normale chacun des trois axes du repère cartésien, caractérisées par leur trois rayons extérieurs x_1^i, x_2^i, x_2^i, comme montré sur la Fig. 7.2. Le choix de ne considérer que trois fissures par pore est inspiré par une remarque que nous avons faite au chapitre 4. Dans ce chapitre, nous avons montré en *2d*, que les propriétés homogénéisées d'un matériau contenant des fissures orientées aléatoirement pouvaient être calculées en utilisant un matériau contenant deux familles orthogonales de fissures. Cette approximation étant satisfaisante en *2d*, nous avons décidé de l'étendre de deux façons. Tout d'abord, nous avons transposé ce résultat au cas *3d*, ce qui semble tout à fait raisonnable. Nous l'avons aussi étendu d'une manière plus complexe. Le résultat de départ concerne une distribution isotrope de fissures représentée par deux familles orthogonales contenant chacune le même nombre de fissures. On va plus loin en supposant qu'une distribution non isotrope des orientations des fissures, par exemple une distribution ellipsoïdale, peut être représentée par deux familles de fissures orthogonales, mais ne contenant pas le même nombre de fissures de même taille, ou de manière équivalente contenant le même nombre de fissures de tailles adaptées à la distribution. C'est un résultat qui nous a semblé naturel mais que nous n'avons pas eu le temps de vérifier.

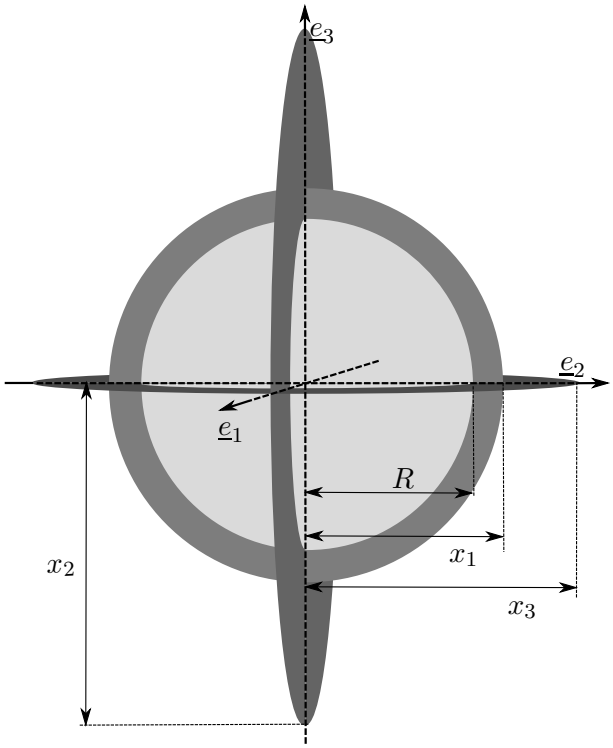

FIGURE 7.2 – Morphologie de la fissuration autour d'un pore.

7.3.3 Énergies potentielles dans le problème auxiliaire $\mathcal{P}^{aux}$

Comme expliqué dans la section 7.2, ce problème est à chargement $\left(\underline{\underline{\Sigma}} \text{ ou } \underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right)$. Dans le contexte de la micromécanique, le milieu poreux a pour loi de comportement macroscopique les équations suivantes (voir § 3.4) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right) : \underline{\underline{E}} - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} p^k \underline{\underline{B}}^k\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right) \\ (\phi^k - f^k) = \underline{\underline{B}}^k\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right) : \underline{\underline{E}} + \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{N} M^{k\lambda}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right) p^\lambda \end{cases} \tag{7.2}$$

Où $\underline{\underline{\Sigma}}$ est la contrainte macroscopique, $\underline{\underline{E}}$ est la déformation macroscopique, p^k est la pression dans les cavités de la famille k, f^k est la fraction volumique en configuration de référence de la famille k, ϕ^k est la fraction volumique en configuration déformée de la famille k. L'énergie élastique par unité de volume poreux de ce système, écrite avec comme variables de chargement les déformations et pressions $\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1..N}\right)$ s'écrit de la façon suivante pour notre milieu poreux (voir chapitre 6) :

$$\begin{aligned} E^{aux,el}\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}, \left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)\right) = & \frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right) : \underline{\underline{E}} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{N} p^k M^{k\lambda}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right) p^\lambda \end{aligned} \tag{7.3}$$

Et l'énergie potentielle, toujours à déformation et pressions imposées, s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{E,p}^{aux,pot}\left(\underline{\underline{E}},(p^k)_{k=1:N},\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right) &= \frac{1}{2}\underline{\underline{E}}:\mathbb{C}^{hom}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right):\underline{\underline{E}} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{N} p^k M^{k\lambda}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)p^\lambda \\ &- \sum_{k=1}^{N} p^k \underline{\underline{B}}^k\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right):\underline{\underline{E}} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Tandis que si c'est la contrainte macroscopique qui est imposée et non la déformation, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} &E_{\Sigma,p}^{aux,pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}},(p^k)_{k=1:N},\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right) \\ &= E_{E,p}^{aux,pot}\left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}},(p^k)_{k=1:N},\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right),(p^k)_{k=1:N},\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right) \\ &- \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}},(p^k)_{k=1:N},\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right):\underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

Ce qui peut être utilisé directement mais donne aussi par utilisation de la loi de comportement (équation 7.2) :

$$\begin{aligned} E_{\Sigma,p}^{aux,pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}},(p^k)_{k=1:N},\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right) &= -\frac{1}{2}\underline{\underline{\Sigma}}:\mathbb{S}^{hom}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right):\underline{\underline{\Sigma}} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{N} p^k M^{k\lambda}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)p^\lambda \\ &- \sum_{k=1}^{N} p^k \mathbb{S}^{hom}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right):\underline{\underline{B}}^k\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right):\underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Où les propriétés homogénéisées sont calculées par un modèle de micromécanique en fonction des tailles de fissures, et ont la signification suivante (que l'on voit bien sur la loi de comportement, équation 7.2) :

- Le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé $\mathbb{C}^{hom}$ et son inverse $\mathbb{S}^{hom}$ relient la contrainte et la déformation macroscopique lorsque les pressions internes sont nulles ;
- Les coefficients de Biot $\underline{\underline{B}}^k$ donnent la contrainte macroscopique, à déformation macroscopique nulle, obtenue si on met une pression unitaire dans la phase poreuse k ;
- Les modules de Biot, dont la définition diffère ici légèrement par rapport à la définition classique (on a pris l'inverse), $M^{k\lambda}$, donnent la variation de volume par rapport au volume du solide poreux de la phase poreuse k lorsque l'on applique une pression unitaire dans la phase poreuse λ, et réciproquement (ils sont symétriques).

7.3.4 Énergie dissipée

L'énergie dissipée dans l'avancée des fissures est proportionnelle à la surface de fissure, l'énergie surfacique est appelée G_c :

$$E^{diss}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) = G_c\sum_{k=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{3}\pi\left[\left(x_\beta^{*k}\right)^2-\left(R^i\right)^2\right] \tag{7.7}$$

Nous savons maintenant écrire toutes les énergies pour le problème auxiliaire $\mathcal{P}^{aux}$. Il nous faut transposer ces écritures au cas du problème virtuel $\mathcal{P}^*$ où le chargement est bien la masse de fluide injecté dans chaque famille de pores.

7.3.5 Chargement par injection de fluide : problème $\mathcal{P}^*$

Nos équations ont jusqu'ici été écrites sur le squelette solide, en considérant comme chargement la déformation macroscopique et les pressions $\left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}\right)$ ou la contrainte macroscopique et les pressions $\left(\underline{\underline{\Sigma}}, (p^k)_{k=1:N}\right)$. On change ici de point de vue en introduisant comme paramètre de chargement les masses de fluide injectées dans les pores, à la place des pressions. Appelons $m_g^i(t)$ l'histoire de la masse de fluide injectée dans la phase poreuse i par unité de volume poreux en fonction du temps.

7.3.5.1 Calcul de la pression dans les différentes familles de trous

La variation de volume de la famille i par unité de volume poreux, s'écrit d'après la loi de comportement (équation 7.2) :

$$(\phi - f)^k = \underline{\underline{B}}^k \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^{N} M^{k\lambda} \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) p^\lambda \tag{7.8}$$

Or, la famille de pores i est à un instant t occupée par une masse $m_g^i(t)$ de gel. Supposons que ce gel soit de masse volumique ρ^0 à pression nulle, et qu'il suive une loi d'élasticité linéaire caractérisée par un module d'incompressibilité K_g, le volume actuel de gel dans la phase poreuse i par unité de volume de solide poreux s'écrit :

$$v_g^i(t) = \frac{m_g^i(t)}{\rho^0}\left(1 - \frac{p^i}{K_g}\right) \tag{7.9}$$

Où la pression p^i n'est plus un paramètre de chargement contrôlé, mais un simple intermédiaire de calcul. Le volume disponible dans la cavité déformée doit ensuite être compatible avec le volume de gel déformé, ce qui s'écrit pour la phase poreuse i :

$$v_g^i(t) = \phi^i \tag{7.10}$$

Soit :

$$\frac{m_g^i(t)}{\rho^0}\left(1 - \frac{p^i}{K_g}\right) = \underline{\underline{B}}^i \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^{N} M^{i\lambda} \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) p^\lambda \tag{7.11}$$

Nous sommes ensuite confrontés au problème suivant : la théorie microporomécanique ne fournit que les terme diagonaux M^{ii}. Nous supposons donc qu'ils sont beaucoup plus grands que les termes extra diagonaux, et écrivons :

$$\frac{m_g^i(t)}{\rho^0}\left(1 - \frac{p^i}{K_g}\right) = \underline{\underline{B}}^i \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{E}} + M^{ii} \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) p^i \tag{7.12}$$

Ce qui nous permet de résoudre indépendamment pour chaque pression :

$$p^i = \frac{-\underline{\underline{B}}^i \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{E}} + \frac{m_g^i(t)}{\rho^0} - f^i}{M^{ii}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) + \frac{m_g^i(t)}{\rho^0 K_g}} \tag{7.13}$$

On peut ainsi calculer la pression dans chaque trou en fonction de nos véritables paramètres de chargement que sont la masse de gel injecté dans les différentes phases poreuses et la déformation macroscopique.

7.3.5.2 Écriture de l'énergie potentielle à déformation et masse de fluide imposées

Pour terminer nous souhaitons écrire l'énergie potentielle qui nous permettra dans ce problème de construire l'énergie totale à minimiser pour la fissuration avec le critère de Francfort-Marigo. Il nous reste à prendre en compte l'énergie élastique du gel, et à adapter l'énergie élastique du squelette au nouveau chargement.

Énergie élastique du gel À pression p^i telle que calculée dans le paragraphe précédent en fonction des quantités imposées (ici la déformation et les masses de gel), l'énergie élastique du gel s'écrit par unité de volume de milieu poreux :

$$E_{gel}^{el,i} = \frac{1}{2}\frac{m_g^i(t)}{\rho^0}\frac{\left\{p^i\left(\underline{\underline{E}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1..N}, (x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right\}^2}{K_g} \tag{7.14}$$

Énergie élastique du squelette Elle est calculée à partir de l'énergie élastique donnée dans la section 7.3.3, en utilisant la pression calculée dans la section 7.3.5.1.

7.3.6 Énergies totales pour ce problème

7.3.6.1 Chargement à déformation imposée et injection de fluide

Récapitulons les différentes contributions à l'énergie totale du système composé du squelette solide et du gel injecté à un instant t. On reste dans l'approximation où seuls les termes diagonaux du module de Biot sont considérés :

$$\begin{aligned}
&E_{E,m_g}^{*tot}\left(\underline{\underline{E}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1:N}, \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{E}} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[M^{kk}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) + \frac{m_g^i(t)}{\rho^0 K_g}\right]\left\{p^k\left(\underline{\underline{E}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1..N}, (x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right\}^2 \\
&+ G_c\sum_{k=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{3}\pi\left[\left(x_\beta^{*k}\right)^2 - \left(R^i\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{7.15}$$

7.3.6.2 Chargement à contrainte imposée et injection de fluide

Faisons le même travail pour le cas où la contrainte macroscopique est imposée, récapitulant les différentes contributions à l'énergie totale du système composé du squelette solide et du gel injecté à un instant t :

$$\begin{aligned}
&E_{\Sigma,m_g}^{*tot}\left(\underline{\underline{\Sigma}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1:N}, \left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right) = -\frac{1}{2}\underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^{hom}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{\Sigma}} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{N} p^k\left(\underline{\underline{\Sigma}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1..N}, (x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\underline{\underline{B}}^k\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) \\
&: \mathbb{S}^{hom}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) : \underline{\underline{B}}^\lambda\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) p^\lambda\left(\underline{\underline{\Sigma}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1..N}, (x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[M^{kk}\left((x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right) + \frac{m_g^i(t)}{\rho^0 K_g}\right]\left\{p^k\left(\underline{\underline{\Sigma}}, (m_g^\alpha(t))^{\alpha=1..N}, (x_\beta^{*\alpha})_{\beta=1,2,3}^{\alpha=1..N}\right)\right\}^2 \\
&+ G_c\sum_{k=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{3}\pi\left[\left(x_\beta^{*k}\right)^2 - \left(R^i\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Où pour calculer la pression à contrainte imposée, on combine les équations 7.2 et 7.13. En pratique, lorsque l'on a besoin de l'expression de l'énergie potentielle à contrainte et masse de gel fixée, on conserve une expression en fonction de la déformation (inconnue) :

$$\begin{aligned}
&E^{*tot}_{\Sigma,m_g}\left(\underline{\underline{\Sigma}},(m_g^\alpha(t))^{\alpha=1:N},\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)\right)=\frac{1}{2}\underline{\underline{E}}^\Sigma:\mathbb{C}^{hom}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right):\underline{\underline{E}}^\Sigma\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[M^{kk}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)+\frac{m_g^i(t)}{\rho^0K_g}\right]\left\{p^k\left(\underline{\underline{E}}^\Sigma,(m_g^\alpha(t))^{\alpha=1..N},(x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)\right\}^2\\
&+G_c\sum_{k=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{3}\pi\left[\left(x^{*k}_\beta\right)^2-\left(R^i\right)^2\right]-\underline{\underline{\Sigma}}:\underline{\underline{E}}^\Sigma
\end{aligned}\tag{7.17}$$

Dans laquelle on remplace $\underline{\underline{E}}^\Sigma$ par sa valeur en fonction des données du problèmes et de l'état de fissuration :

$$\begin{aligned}
&\underline{\underline{E}}^\Sigma\left(\underline{\underline{\Sigma}},(m_g^\alpha(t))^{\alpha=1:N},(x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)=\\
&\left[\mathbb{C}^{hom}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)+\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{\underline{\underline{B}}^\lambda\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)\otimes\underline{\underline{B}}^\lambda\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)}{M^{\lambda\lambda}\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)+\frac{m_g^\lambda(t)}{\rho^0K_g}}\right]^{-1}\\
&:\left[\underline{\underline{\Sigma}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(m_g^k(t)-f^k\right)\underline{\underline{B}}^k\left((x^{*\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)}{M^{kk}\left((x^{\alpha}_\beta)^{\alpha=1..N}_{\beta=1,2,3}\right)+\frac{m_g^k(t)}{\rho^0K_g}}\right]
\end{aligned}\tag{7.18}$$

7.4 Démonstration du fonctionnement du modèle sur des exemples

Pour illustrer le fonctionnement de l'algorithme, on choisit quelques cas de chargement simples et des situations en termes de nombre de granulats qui nous permettent de visualiser graphiquement ce qui se passe pendant l'optimisation. Les paramètres matériaux sont fixés aux valeurs suivantes (équation 7.19) :

E_c	20 GPa
ν_c	0.25
G_c^{fiss}	40 J.m^{-2}
K_{gel}	0.5 GPa
ρ_0	1 kg/m^3

(7.19)

L'objectif principal est de se faire une idée sur la meilleure façon de discrétiser une granulométrie donnée, et sur la possibilité d'imposer la symétrie de la solution ou non. La minimisation de l'énergie totale est en effet coûteuse, et est donc beaucoup plus facile si l'on parvient à réduire le nombre de variables au maximum. On a donc tout intérêt à réduire le nombre de familles de fissures, et à supposer la symétrie de la solution. On cherche ici à mesurer l'importance de ces choix, dans divers cas de chargement.

7.4.1 Déformation moyenne nulle

7.4.1.1 Une taille de grains, symétrie forcée

Ce premier exemple est très simple car l'optimisation est alors *1d*. On a choisi des grains de rayon $R^1 = 1$ mm, et de fraction volumique f^1=0,2. La masse injectée, étant donné que l'on a choisi comme masse volumique de gel $\rho_0 = 1$ kg/m^3, correspond au volume de gel à pression nulle

injecté dans l'espace poreux par unité de volume de solide poreux. On démarre à $m_g/\rho_0 = f$ et on force la symétrie dans le sens suivant : le milieu poreux est initialement isotrope, ne présente pas de direction de fissuration privilégiée. Le chargement imposé (déformation macroscopique nulle dans toutes les directions) l'est aussi. On suppose donc ici que la fissuration se fait de la même façon dans les trois directions, c'est-à-dire que les fissures de normales $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sont de même taille à tout instant, c'est-à-dire puisque l'on n'a ici qu'une taille de grain $x_1^1 = x_2^1 = x_3^1$. On représente sur la Fig. 7.3 les évolutions de la taille de fissure et de la pression.

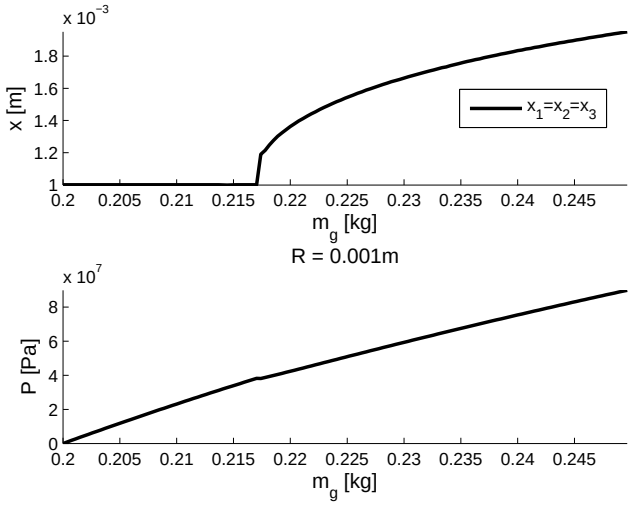

FIGURE 7.3 – Taille de fissure x, pression p. Déformation nulle, une famille de grains, symétrie forcée.

Il y a un saut de taille de fissure assez conséquent au démarrage, de l'ordre de grandeur du rayon de la cavité. Ce saut se produit lors de l'utilisation du critère énergétique de rupture de Francfort-Marigo pour les raisons évoquées au § 5.2.4 et illustrées sur la Fig. 5.2. L'augmentation de la pression ralentit lorsque les fissures commencent à progresser. Cette progression de la fissuration entraîne l'apparition d'une contrainte de compression isotrope par construction, puisque l'on impose la symétrie de la fissuration, comme on le voit sur la Fig. 7.4. On observe également une diminution des deux types de modules d'Young E (Fig 7.5), ainsi que sur les modules de cisaillement μ et d'incompressibilité K (Fig. 7.6), que l'on calcule bien que notre matériau ne soit pas isotrope, pour des raisons évoquées dans notre chapitre sur les calculs de propriétés homogénéisées par éléments finis (chapitre 4). Les modules notés *hom* correspondent aux modules du squelette solide s'il n'y avait pas de fluide dans les cavités, tandis que les modules tangentiels, ou non drainés, notés *nd* tiennent compte de la rigidité du fluide contenu dans les pores. On observe d'ailleurs, ce qui est naturel par construction de notre modèle de milieu poreux, que les modules de cisaillement du squelette et tangentiels sont égaux (la pression dans les pores n'apparaît pas dans la loi de comportement en cisaillement d'un milieu poreux).

Les propriétés poromécaniques évoluent également au cours de cette fissuration, permettant une augmentation plus forte de la porosité, liée à la diminution d'augmentation de la pression (Fig 7.7).

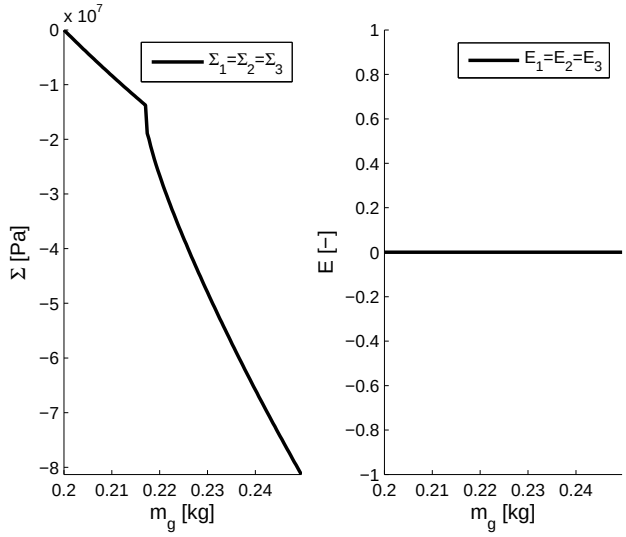

FIGURE 7.4 – Contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, déformation imposée $\underline{\underline{E}}$. Déformation nulle, une famille de grains, symétrie forcée.

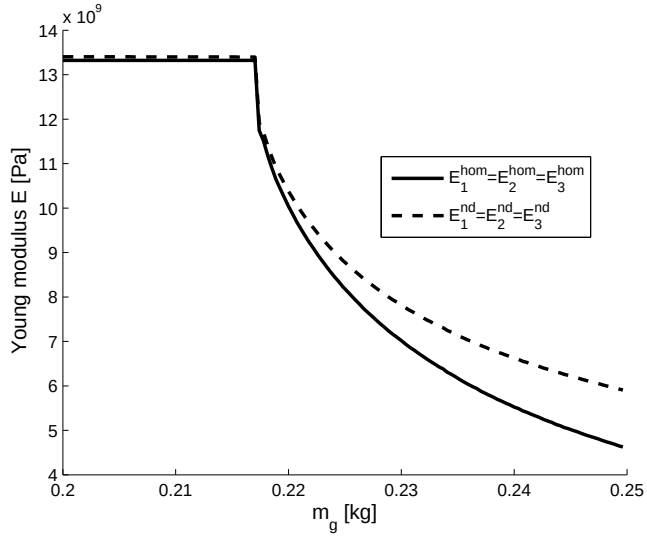

FIGURE 7.5 – Modules d'Young du squelette solide (hom) et non drainés (nd). Déformation nulle, une famille de grains, symétrie forcée.

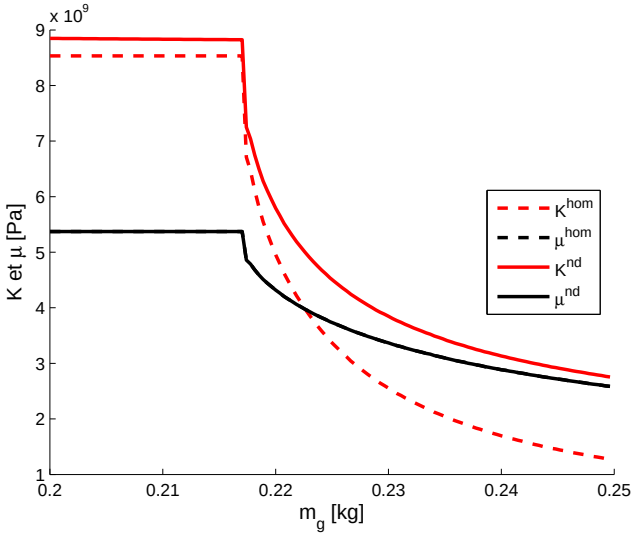

FIGURE 7.6 – Modules de cisaillement et d'incompressibilité du squelette et tangentiels. Déformation nulle, une famille de grains, symétrie forcée.

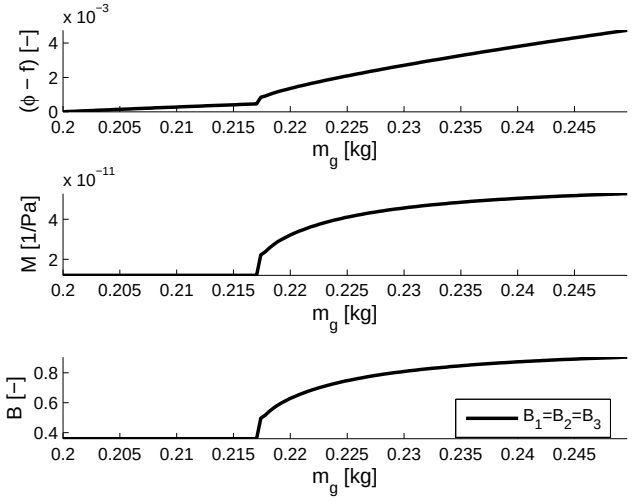

FIGURE 7.7 – Variation de porosité $(\phi - f)$, module de Biot M, coefficient de Biot B. Déformation nulle, une famille de grains, symétrie forcée.

7.4.1.2 Une taille de grains divisée en deux, symétrie forcée

Dans ce paragraphe on se pose la question de l'influence du choix de grouper toutes les cavités sphériques en une seule famille. On sépare donc les cavités en deux groupes, ayant ainsi $R^1 = R^2 =$1 mm et $f^1 = f^2 =$0,1. On démarre comme précédemment avec $m_g^i/\rho_0 = f^i, i \in \{1, 2\}$. Ainsi tout est semblable au cas précédent en dehors de la façon dont on traite la fissuration, puisque l'on autorise les tailles de fissures à être différentes dans les deux familles.

Si on laisse cette liberté supplémentaire, on constate que la minimisation de l'énergie totale à déformation imposée entraîne la fissuration séquentielle et non simultanée des deux familles. On voit ainsi les tailles de fissures sauter à deux instants bien distincts sur la Fig. 7.8. La fissuration de la deuxième famille interrompt pendant un moment celle de la première, puis les deux familles se fissurent simultanément, rejoignant la solution symétrique de la section précédente. Observons l'énergie totale en fonction de nos deux tailles de fissures à l'instant de la première fissuration (Fig. 7.9).

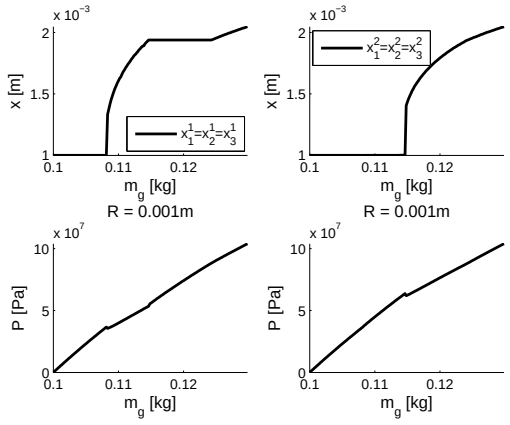

FIGURE 7.8 – Taille de fissure x, pression p. Déformation nulle, une taille de grain divisée en deux familles, symétrie forcée.

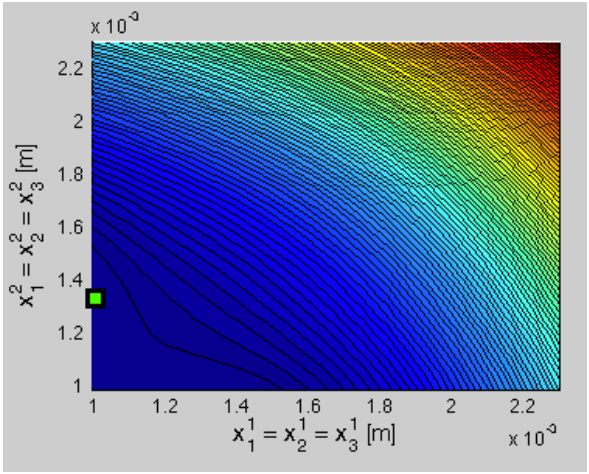

FIGURE 7.9 – Énergie dissipée moins énergie relâchée. Déformation nulle, une taille de grain divisée en deux familles, symétrie forcée.

Le minimum n'est pas réalisé pour une fissuration symétrique. L'évolution de l'ensemble des quantités se fait en cohérence avec ce que l'on observe sur les tailles de fissures, c'est-à-dire avec deux sauts et non un seul. On voit qu'à déformation imposée, la fissuration a plutôt tendance à s'étaler dans le temps entre les différentes familles. L'effet de perte de symétrie entre les différentes phases n'est cependant que temporaire.

7.4.1.3 Une taille de grains, symétrie axiale

Dans cette section on essaie une autre variante du problème à une taille de grain et déformation macroscopique imposée nulle. Cette fois on laisse la possibilité d'avoir une taille de fissure normale à $\underline{e}_3$ différente des autres, c'est-à-dire $x_3 \neq x_1 = x_2$. On teste donc s'il est plus favorable de ne fissurer qu'une direction, deux ou trois lorsque le problème est symétrique à la fois en termes géométrique et de chargement. On observe qu'il est préférable énergétiquement de ne fissurer qu'une seule direction (Fig. 7.10). Ceci ne dure qu'un temps puisqu'à des niveaux de chargement plus élevés, et à cause du confinement, la fissuration finit par se rééquilibrer, comme dans le cas du paragraphe précédent où la symétrie de la fissuration était forcée mais les grains séparés en deux familles.

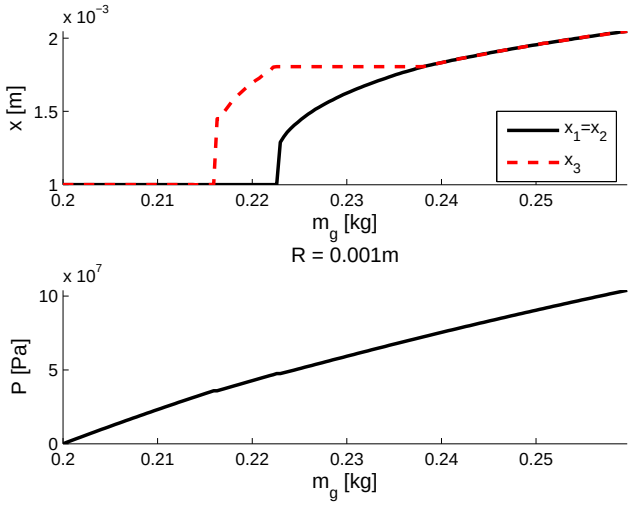

FIGURE 7.10 – Taille de fissure x, pression p. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie axiale.

7.4.1.4 Deux tailles de grains, symétrie axiale

Cette fois on teste deux tailles différentes, en fractions volumiques égales : R^1=0,8 mm, R^2 = 1 mm et $f^1 = f^2$ =0,1. On regarde le décalage entre les instants de fissuration pour les deux tailles (Fig. 7.11). La plus grande des deux tailles de cavité entraîne une fissuration plus précoce, à quantité de gel injecté dans la porosité identique. Lorsque le deuxième groupe de cavités fissure, le premier s'arrête, puisque la fissuration de la deuxième famille augmente en quelque sorte le confinement de la première. Le comportement est en fait très similaire à ce que

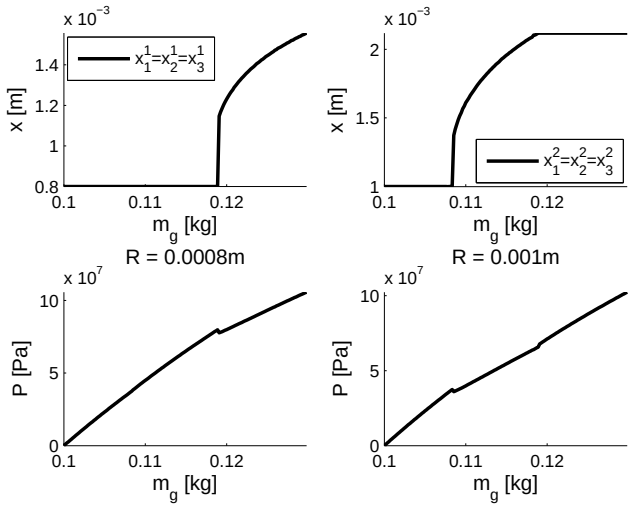

FIGURE 7.11 – Taille de fissure x, pression p. Déformation nulle, deux tailles de grain différentes, symétrie axiale.

l'on a observé dans la section 7.4.1.2 lorsqu'une seule taille de grains était artificiellement divisée en deux familles.

7.4.2 Contrainte moyenne nulle

7.4.2.1 Une taille de grains, symétrie forcée

Reprenons maintenant le premier cas, en remplaçant le confinement (déformation moyenne nulle) par une contrainte moyenne nulle. Le comportement lorsque l'on n'a qu'une seule famille est qualitativement similaire au cas déformation nulle. On observe cependant un saut de taille de fissure plus important (Fig 7.12). La taille de fissure après fissuration brutale est de l'ordre de deux fois le rayon du grain. La diminution des propriétés mécaniques pour de telles tailles de fissures est très importante (Fig 7.13).

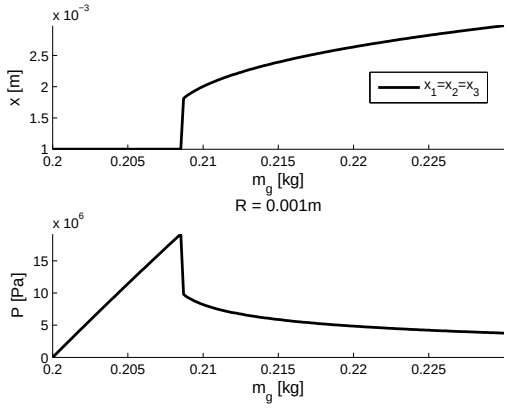

FIGURE 7.12 – Taille de fissure x, pression p. Contrainte nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

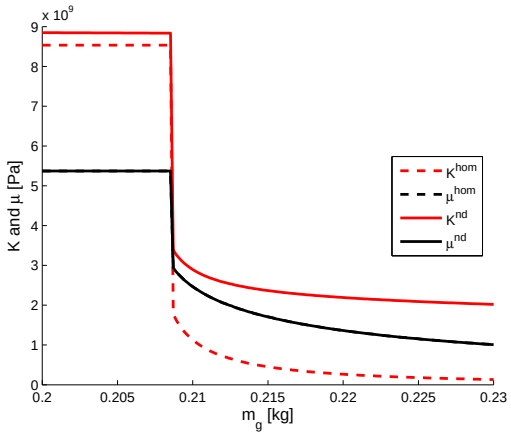

FIGURE 7.13 – Modules de cisaillement et d'incompressibilité du squelette et tangentiels. Contrainte nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

L'essentiel de la rigidité restante est due au gel confiné dans les pores. On atteint probablement les limites de notre modèle, puisqu'il est difficile de supposer qu'il n'y a pas coalescence des fissures lorsque leurs nombre et densité entraînent une perte presque totale des propriétés mécaniques. Dans une telle expérience à contrainte nulle, l'énergie totale est dominée, une fois que la fissuration a démarré, par l'énergie dissipée (Fig. 7.14).

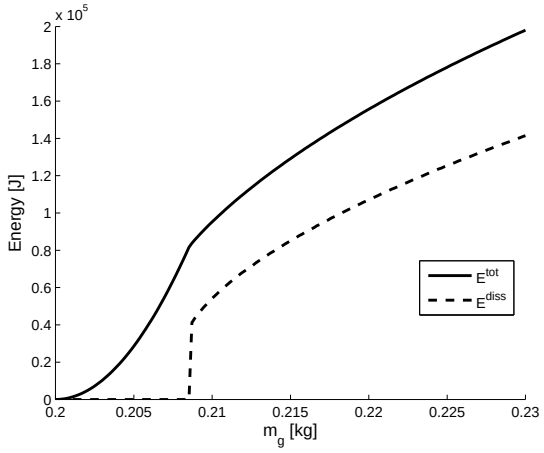

FIGURE 7.14 – Énergies totales et dissipée. Contrainte nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

7.4.2.2 Une taille de grains divisée en deux, symétrie forcée

Nous faisons encore une fois l'expérience de diviser l'ensemble de nos cavités en deux familles, comme pour le cas de la déformation nulle. Contrairement à ce que l'on a observé à déformation nulle, le fait de séparer nos cavités en deux groupes ne modifie pas la fissuration. Les deux groupes fissurent de manière identique, comme on l'observe sur la Fig. 7.15.

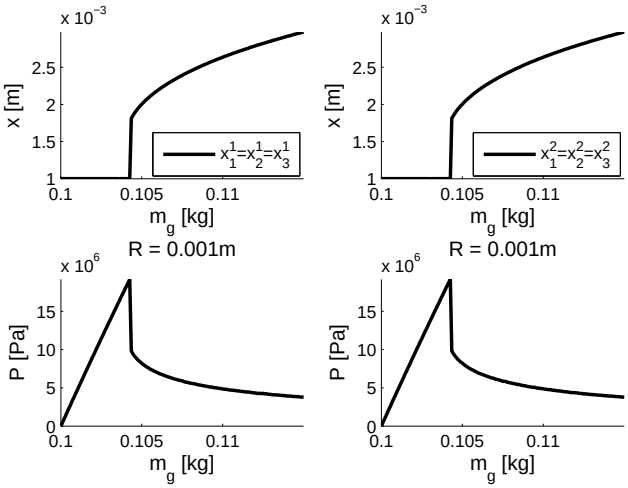

FIGURE 7.15 – Taille de fissure x, pression p. Contrainte nulle, une taille de grain divisée en deux familles, symétrie forcée.

7.4.2.3 Une taille de grains, symétrie axiale

Comme en déformation imposée on teste la possibilité de ne fissurer qu'une direction au lieu des trois. Cette fois c'est beaucoup plus catastrophique, puisqu'en l'absence de déformation imposée, la direction qui commence à fissurer n'est pas stoppée (Fig. 7.16). On atteint donc la ruine de l'échantillon, ce que notre modèle montre par l'annulation du module d'Young dans la direction de fissuration (Fig. 7.17).

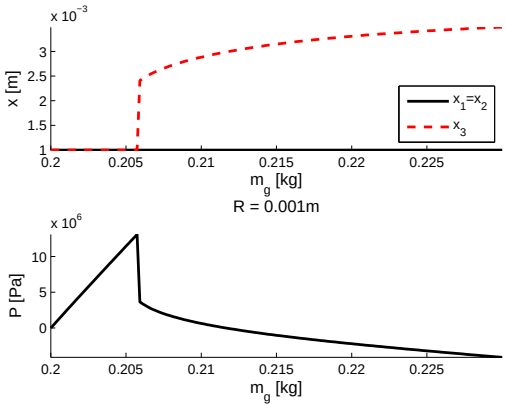

FIGURE 7.16 – Taille de fissure x, pression p. Contrainte nulle, une taille de grain, symétrie axiale.

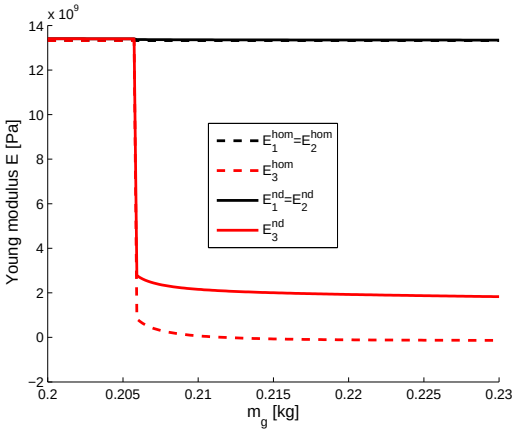

FIGURE 7.17 – Modules d'Young du squelette solide (hom) et tangentiels (nd). Contrainte nulle, une taille de grain, symétrie axiale.

7.4.2.4 Deux tailles de grains, symétrie axiale

On choisit encore une fois : R^1=0,8 mm, R^2 = 1 mm et $f^1 = f^2$ =0,1, mais en appliquant des contraintes nulles. La fissuration des deux familles est presque simultanée (Fig. 7.18), en cohérence avec ce que l'on observé en section 7.4.2.2 où l'on a vu que la condition de contrainte nulle privilégiait une fissuration simultanée des grains de même taille.

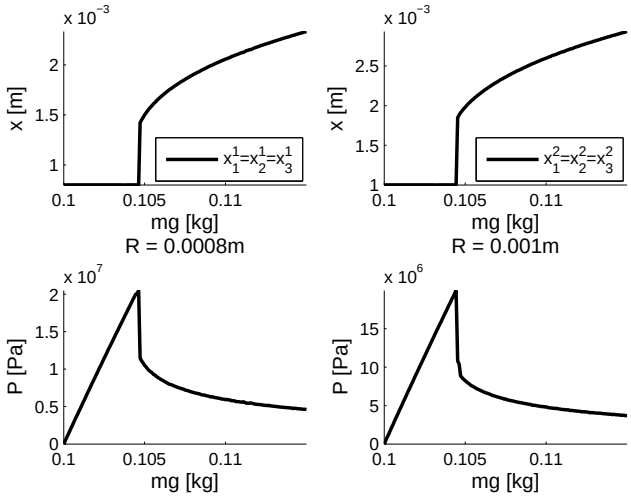

FIGURE 7.18 – Taille de fissure x, pression p. Contrainte nulle, deux tailles de grain différentes, symétrie axiale.

7.4.3 Compression uniaxiale

7.4.3.1 Déformation de compression uniaxiale imposée

On explique ici un cas plus proche de la réalité d'un béton chargé. La déformation dans les directions 1 et 2 est imposée nulle, mais une déformation de compression E_{33}= -0,001 est appliquée. La fissuration est choisie symétrique d'axe 3, c'est-à-dire que $x_1 = x_2$. On a donc apparition de préférence de fissures dans les directions moins compressées (Fig. 7.19), puis cette fissuration équilibre puisque les contraintes sont devenues plus faibles dans les directions initialement non confinées (1, 2) que dans la direction initialement confinée (Fig. 7.20).

7.4.3.2 Contrainte de compression uniaxiale

Cette fois-ci on applique une contrainte $\Sigma_{33} = -10$ MPa, et on laisse libres les autres directions. Le comportement de départ est le même que dans le cas à déformation imposée, mais on n'a pas de rééquilibrage de la fissuration (Fig. 7.21).

7.4.4 Un exemple avec de plus nombreuses tailles de grains

Pour compléter cette section sur les exemples concrets de fissuration, on montre un cas où le nombre de grains est plus important. On choisit 5 tailles de grains réparties linéairement entre R^1=0,5 mm et R^1 = 2 mm, en fractions volumiques égales, telles que la fraction volumique totale est de 0,4.

Nous montrons sur cet exemple, où la contrainte est imposée nulle dans les directions 1 et 2 et où $\Sigma_{33} = -5$ MPa, que le comportement lorsque l'on augmente le nombre de grains est une

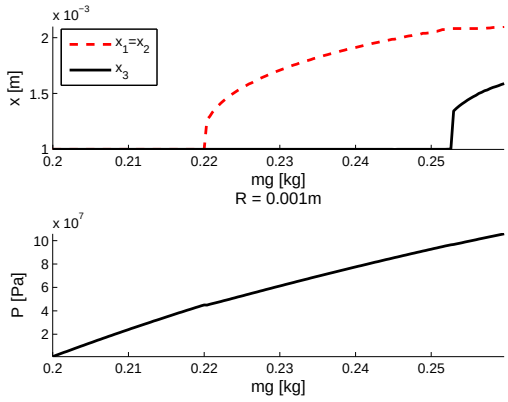

FIGURE 7.19 – Taille de fissure x, pression p. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

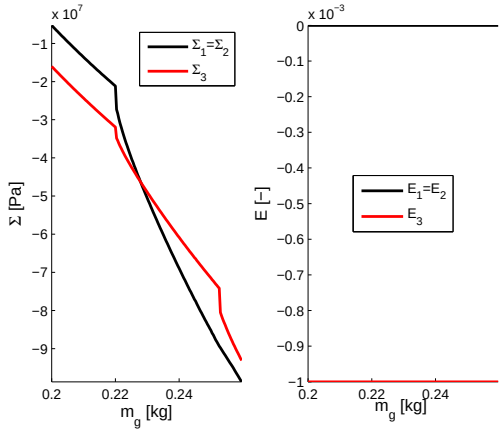

FIGURE 7.20 – Taille de fissure x, pression p. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

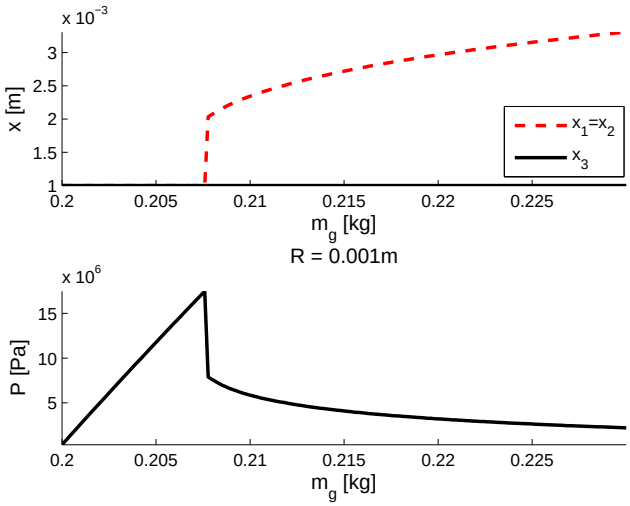

FIGURE 7.21 – Taille de fissure x, pression p. Contrainte de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

prolongation du cas à deux grains. La fissuration se fait progressivement à partir des grands grains vers les petits (Fig. 7.22). La difficulté réside simplement dans le fait de trouver le minimum de la fonction énergie potentielle, ce qui est difficile aux instants où il y a des sauts de taille de fissure.

7.4.5 Conclusion sur l'utilisation du critère de Francfort-Marigo pour la fissuration d'un milieu contenant des cavités

Résumons ici les informations que nous avons tirées de ces exemples simples de fissuration d'un milieu contenant des cavités par le critère énergétique de Francfort-Marigo. Lorsque l'on est à déformation imposée, la fissuration se fait de préférence de manière différée sur des familles de grains de même taille si on en laisse la possibilité. Si l'injection dure assez longtemps, l'état de fissuration s'équilibre. Il en est de même pour l'imposition de la symétrie. Il est plus favorable

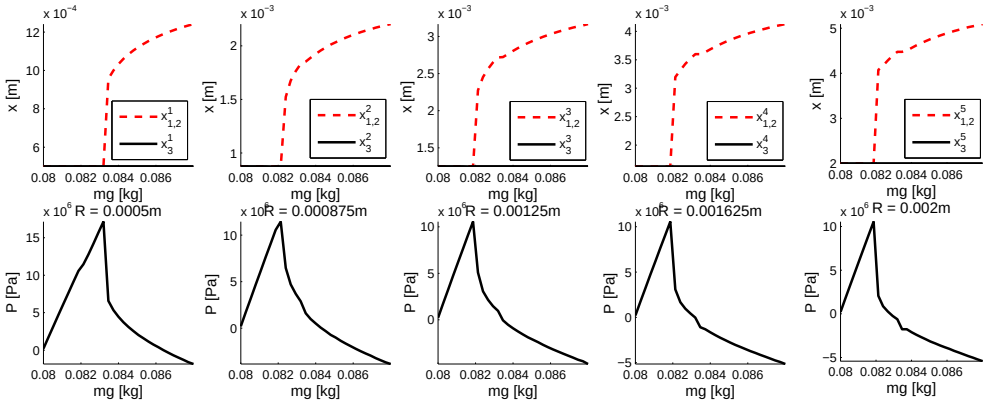

FIGURE 7.22 – Taille de fissure x, pression p. Déformation de compression uniaxiale, cinq tailles de grain différentes, symétrie axiale.

de ne fissurer d'abord qu'une direction, mais l'état de fissuration finit par devenir symétrique. Si l'on est à contrainte imposée, les grains de même taille dans des familles différentes fissurent simultanément. En revanche, la fissuration se produit de manière non symétrique, et la symétrie n'est pas récupérée lors de la progression de l'injection. Au contraire, on atteint la ruine de l'échantillon par fissuration dans une seule direction. Sous chargement, ces conclusions sont préservées.

7.5 Conclusion

Les exemples précédents ont montré que le critère de Francfort-Marigo permet d'initier des fissures autour de cavités. L'implémentation du critère pour cette situation poromécanique est assez facile, et tire au mieux parti du fait que nous ne résolvons pas les équations de la mécanique, puisque la simplification géométrique de notre problème nous permet l'utilisation de solutions approchées issues de la micromécanique.

Le véritable problème réside dans l'optimisation sur la fonction d'énergie totale, qui permet de trouver les tailles de fissures mais peut être très difficile si l'on est en grande dimension, c'est-à-dire ici si l'on a beaucoup de tailles de granulats. Heureusement on a vu que lorsque l'on travaille à contrainte imposée, la discrétisation des tailles de granulats en un nombre assez faible de groupes n'est pas un problème majeur. On a également noté que le fait de supposer la symétrie de la solution n'a d'effets indésirables que transitoires en déformation imposée, tandis qu'à contrainte imposée, les résultats sont affectés. Ces conclusions seront complétées lors de l'illustration du fonctionnement de notre modèle pour la réaction alcali-silice, dans la troisième partie de ce mémoire.

Conclusion

Cette partie, dans laquelle on a concentré le coeur théorique de notre travail, donne les éléments pour pouvoir modéliser l'alcali-réaction, ce qui était notre objectif, mais également d'autres réactions de gonflements et phénomènes de dégradation des milieux poreux. Nous allons dans la troisième partie nous concentrer sur la modélisation de l'alcali-réaction pour les granulats à réactivité rapide, pour lesquels on considère que les principaux phénomènes d'endommagement se situent à l'interface de la pâte avec les granulats, et dans la pâte de ciment elle-même. Néanmoins, le formalisme que nous avons présenté n'interdit en rien de choisir la modélisation de l'alcali-réaction pour les granulats à réactivité lente. On mettrait alors l'accent sur la dégradation des granulats plutôt que sur la fissuration dans la pâte de ciment. Les résultats de cette deuxième partie sont donc tout à fait généraux et peuvent servir à la modélisation de nombreux phénomènes.

Dans le premier chapitre (chapitre 3), des résultats classiques ont été rassemblés. Ce sont les résultats utiles pour l'obtention concrète d'estimations de modules poroélastiques homogénéisés. La théorie de la microporomécanique, le résultat d'Eshelby et les estimateurs que nous avons présentés sont très classiques, mais nous les avons rappelés car ils occupent une place très importante dans notre modèle. Ce chapitre contient également la généralisation d'un résultat de Tanaka et Mori de 1972 [35], donnée également par Bornert en 1996 [8]. L'originalité de notre démonstration réside dans l'utilisation du théorème de réciprocité de Betti plutôt que dans une manipulation astucieuse d'intégrales singulières. Nous avons utilisé ce résultat pour l'estimation des déformations dans notre premier article [9], mais avons ensuite préféré l'utilisation du cadre général de la microporomécanique pour l'estimation des déformations, notre résultat étant alors un éclairage très utile pour la démonstration de plusieurs estimateurs, à commencer par l'estimateur à deux phases tel que présenté par Shige [32].

Le chapitre 4 nous a, quant à lui, permis de comprendre concrètement les différences entre les estimateurs exposés au chapitre précédent. Lors des démonstrations qui conduisent à l'établissement des estimateurs, on avance des hypothèses sur la forme, la distribution des inclusions, et surtout on choisit des problèmes auxiliaires dans lesquels on calcule les déformations et les contraintes moyennes (ou de manière équivalente, les tenseurs de localisation) avant de dire que ces quantités approchent bien les mêmes quantités dans le problème réel. Il n'est pas toujours simple de savoir l'incidence sur les résultats des choix de problème auxiliaire que l'on fait. La comparaison des estimateurs à différents types de simulations numériques nous a donc beaucoup éclairé sur cette question. On peut néanmoins déplorer l'absence de simulations sur des microstructures aléatoires générées par addition séquentielle sans rejet, car on aurait alors pu déterminer si certains estimateurs peuvent capter le phénomène de coalescence de fissures. On s'est au contraire concentrés sur des simulations périodiques et aléatoires dans lesquelles la coalescence n'était pas possible. Les modèles de type deux-phases, Mori-Tanaka, ou *IDD* ont donc donné de meilleurs résultats que les modèles de type auto-cohérent, et c'est le schéma IDD que l'on a choisi pour poursuivre notre étude. Ce chapitre nous a également permis de montrer qu'en deux dimensions, les propriétés homogénéisées d'un milieu contenant des fissures orientées aléa-

toirement sont très proches de celles d'un milieu contenant les mêmes fissures, mais réparties en deux familles orthogonales. Cette constatation fait entrevoir la possibilité de réduire le nombre de fissures représentées explicitement lors de la fissuration autour de cavités dans un milieu poreux. Enfin, nous avons montré qu'un motif de fissuration assez complexe, constitué d'une cavité de laquelle partent une ou plusieurs fissures radiales peut être représenté, lors de l'utilisation des estimateurs, par une superposition de motifs pour lesquels on connaît des estimations des tenseurs de localisation, ce qui limite le recours aux éléments finis pour calculer ces tenseurs de localisation sous divers chargements.

Le chapitre 5 nous a permis de choisir un critère de rupture dont le but est de faire évoluer la microstructure de milieu poreux attaqué. Le critère de Francfort-Marigo que l'on a choisi généralise le critère de rupture fragile classique de Griffith en permettant la discontinuité des états de fissuration. Cette façon de procéder évite de trop mettre l'accent sur les tailles de défauts. On considère au contraire que le béton que l'on étudie contient toutes sortes et tailles de défauts, et qu'il vaut mieux privilégier un raisonnement purement énergétique pour déterminer les états de fissuration. Cette façon de procéder, comme on le démontre sur un exemple simple inspiré de l'alcali-réaction, fait apparaître des effets de tailles dus à la nature volumique du stockage de l'énergie élastique, en opposition à la nature surfacique de la dissipation d'énergie lors de la fissuration.

Pour utiliser notre critère de rupture dans le cadre de la microporomécanique présenté en début de partie, il est nécessaire d'écrire les énergies élastiques emmagasinées dans les divers composants du béton attaqué. On présente donc dans le chapitre 6 l'écriture de l'énergie élastique par intégration des énergies élastiques locales, dans des problèmes à déformation macroscopique et pression imposées. On fait ce travail dans deux cas : d'un côté pour un solide élastique comportant des trous sous pression, de l'autre pour un milieu continu hétérogène dont les diverses phases sont elles-mêmes des milieux poreux. Le lien entre ces deux représentations d'un milieu poreux est également expliqué. Dans ces deux cas, cela nous permet d'écrire les expressions concrètes des propriétés poroélastiques recherchées en fonction de tenseurs de localisation définis sur des problèmes élémentaires, dont on a appris à approcher les valeurs grâce aux estimateurs de micromécanique présentés dans le chapitre 3. On est donc à l'issue de ce chapitre en possession de tous les éléments pour former la fonction énergie totale qui doit être minimisée, d'après notre critère de rupture, pour déterminer l'évolution de l'état de fissuration du milieu.

Le dernier chapitre de cette partie, chapitre 7, nous permet de vérifier que la microporomécanique et le critère de rupture énergétique de Francfort-Marigo fonctionnent bien ensemble. Le choix du nombre de tailles de grains utilisé pour représenter une granulométrie est un choix important, puisque d'un côté le critère énergétique exhibe des effets de taille, comme montré au chapitre 5, et que de l'autre si l'on discrétise trop finement la granulométrie, la minimisation de la fonction énergie totale peut être extrêmement difficile à cause du nombre trop élevé de variables, l'énergie n'étant pas convexe en général. Il faut trouver un juste milieu. On s'attaque donc à la question de l'influence de la discrétisation de la granulométrie, ainsi qu'à celle de la possibilité d'imposer a priori la symétrie de la solution, en termes de tailles de fissures. On arrive à des conclusions rassurantes, puisque l'on montre que pour les diverses conditions aux limites qui nous intéressent, il n'est pas crucial de discrétiser finement la granulométrie et d'autoriser l'algorithme de fissuration à choisir la symétrie de la solution par optimisation de l'énergie. Ce sont deux conclusions importantes par rapport à la facilité d'utilisation du modèle et au temps de calcul pour déterminer les trajets de fissuration en fonction des chargements.

Nous sommes donc pleinement parés pour tenter une modélisation de la réaction alcali-silice à l'échelle microscopique. La rencontre des mécanismes réactionnels et d'endommagement lors de l'alcali-réaction, pour les grains à réactivité rapide, donne naissance à la troisième partie de ce mémoire.

Bibliographie

[1] Arnaud Anantharaman, Ronan Costaouec, Claude Le Bris, Frédéric Legoll, and Florian Thomines. Introduction to numerical stochastic homogenization and the related computational challenges : some recent developments. In Weizhu Bao and Qiang Du, editors, *Multiscale modeling and analysis for materials simulation*, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore ; vol. 22, pages 197 – 271. World Scientific, 2011. ISBN : 978-981-4360-89-0. *p. 109*

[2] Benoît Bary. Estimation of poromechanical and thermal conductivity properties of unsaturated isotropically microcracked cement pastes. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35(14) :1560–1586, 2011. *p. 91 et 118*

[3] Zdenek P. Bažant, Goangseup Zi, and Christian Meyer. Fracture mechanics of ASR in concretes with waste glass particles of different sizes. *Journal of Engineering Mechanics*, 126-3 :226–232, 2000. *p. 28, 45, 46, 141 et 154*

[4] M. Ben Haha, E. Gallucci, A. Guidoum, and K.L. Scrivener. Relation of expansion due to alkali silica reaction to the degree of reaction measured by SEM image analysis. *Cement and Concrete Research*, 37 :1206 – 1214, 2007. *p. 141*

[5] Mohsen Ben Haha. *Mechanical effects of alkali silica reaction in concrete studied by* SEM-*image analysis*. PhD thesis, EPFL, Suisse, 2006. *p. 29, 42 et 141*

[6] Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6 :147–157, 1987. *p. 86 et 87*

[7] Marc Bonnet and Attilio Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2006. *p. 98*

[8] Michel Bornert. *Morphologie microstructurale et comportement mécanique ; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, France, 1996. *p. 78, 80, 84 et 193*

[9] Laurent Charpin and Alain Ehrlacher. A computational linear elastic fracture mechanics-based model for alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 42(4) :613 – 625, 2012. *p. 28, 62, 77, 81, 141, 193, 245, 260, 276 et 281*

[10] R.M. Christensen and K.H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4) :315 – 330, 1979. *p. 115, 205 et 216*

[11] Luc Dormieux, Djimédo Kondo, and Franz-Josef Ulm. *Microporomechanics*. Wiley, 2006. *p. 37, 69, 73, 74, 102, 156 et 175*

[12] D.-X. Du and Q.-S. Zheng. A further exploration of the interaction direct derivative (IDD) estimate for the effective properties of multiphase composites taking into account inclusion distribution. *Acta Mechanica*, 157 :61 – 80, 2002. *p. 91 et 223*

[13] Cyrille Dunant. *Experimental and Modelling Study of the alkali-silica reaction in concretes*. PhD thesis, EPFL, Suisse, 2009. *p. 42, 46 et 141*

[14] Cyrille F. Dunant and Karen L. Scrivener. Micro-mechanical modelling of alkali-silica-reaction-induced degradation using the AMIE framework. *Cement and Concrete Research*, 40 :517 – 525, 2010. *p. 28, 42 et 141*

[15] J.D. Eshelby. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 252, no. 1271 :561 – 569, 1959. *p. 73*

[16] B. Fedelich and A. Ehrlacher. Sur un principe de minimum concernant des matériaux à comportement indépendant du temps physique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences II*, 302 :1311 – 1394, 1993. *p. 138*

[17] G.A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319 – 1342, 1998. *p. 138*

[18] A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A*, 221 :163 – 198, 1921. *p. 137*

[19] Muneo Hori and Sia Nemat-Nasser. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*, 14 :189 – 206, 1992. *p. 81 et 84*

[20] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3647 – 3679, 2003. *p. 68 et 109*

[21] D. Leguillon, D. Quesada, C. Putot, and E. Martin. Prediction of crack initiation at blunt notches and cavities – size effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(15) :2420 – 2436, 2007. *p. 140*

[22] Dominique Leguillon. Strength or toughness ? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(1) :61 – 72, 2002. *p. 140*

[23] V.M. Levin. Thermal expansion coefficients of heterogeneous materials. *Mechanics of Solids*, 2 (1) :58 – 61, 1967. *p. 69 et 71*

[24] Jean-Jacques Marigo. Initiation of cracks in Griffith's theory : An argument of continuity in favor of global minimization. *Journal of Nonlinear Science*, 20 :831–868, 2010. *p. 137 et 138*

[25] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 :571 – 574, 1973. *p. 87*

[26] S. Multon, A. Sellier, and M. Cyr. Chemo-mechanical modeling for prediction of alkali silica reaction (ASR) expansion. *Cement and Concrete Research*, 39 :490 – 500, 2009. *p. 41, 154 et 274*

[27] Toshio Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers, 1991. *p. 74*

[28] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. North Holland, 1993. *p. 67, 68, 77, 78, 86, 104, 109, 112 et 113*

[29] P. Ponte Castañeda and J.R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43 - 12 :1919–1951, 1995. *p. 88, 118, 119 et 267*

[30] H.W. Reinhardt and O. Mielich. A fracture mechanics approach to the crack formation in alkali-sensitive grains. *Cement and Concrete Research*, 41 :255 – 262, 2011. *p. 28 et 141*

[31] Gregory J. Rodin and Yuh-Long Hwang. On the problem of linear elasticity for an infinite region containing a finite number of non-intersecting spherical inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures*, 27 - 2 :145 – 159, 1991. *p. 78*

[32] Zhan Shige and Wang Tzuchiang. Effective elastic moduli of inhomogeneous solids by embedded cell model. *The Chinese society of theoretical and applied mechanics*, vol. 15, no. 4 :334 – 343, 1999. *p. 86 et 193*

[33] Jun-Ho Shin. *Modeling alkali-silica reaction using image analysis and finite-element method.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 2009. *p. 40, 152 et 278*

[34] L. Struble and S. Diamond. Unstable swelling behaviour of alkali silica gels. *Cement and Concrete Research*, 11 :611 – 617, 1981. *p. 24, 152 et 278*

[35] K. Tanaka and T. Mori. Note on volume integrals of the elastic field around an ellipsoidal inclusion. *Journal of Elasticity*, vol. 2, no. 3 :199 – 200, 1972. *p. 77 et 193*

[36] L.J. Walpole. Elastic behavior of composites materials : Theoretical foundations. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 21 :169 – 242, 1981. *p. 80*

[37] G.J. Weng. The theoretical connections between Mori-Tanaka's theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds. *Int. J. Engng Sci.*, vol. 228, no. 11 :1111–1120, 1990. *p. 88 et 91*

[38] F.H. Wittmann. Crack formation and fracture energy of normal and high strength concrete. *Sādhanā*, 27 - 4 :413 – 423, 2002. *p. 149 et 277*

[39] Q.-S. Zheng and D.-X. DU. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of Mechanics and Physica of Solids*, 49 :2765 – 2788, 2001. *p. 61, 91, 108, 119 et 223*

Troisième partie

Application à la réaction alcali-silice

Introduction

La troisième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'application des notions présentées dans la deuxième partie au cas de l'alcali-réaction. Nous avons fait le choix d'utiliser la microporomécanique pour prendre en compte les détails microstructuraux de notre béton attaqué, et d'utiliser un critère de rupture énergétique pour faire évoluer la microstructure. Cela nous a conduit dans la partie précédente à présenter et tester des estimateurs de micromécanique, qui nous ont permis d'avoir des formes approchées mais explicites pour l'énergie d'un matériau poreux, et pour les coefficients poroélastiques homogénéisés. Dans cette partie, nous allons donc faire le point sur les choix de modélisation pour l'alcali-réaction en ce qui concerne la représentation des mécanismes réactionnels, puis adapter les expressions des propriétés poroélastiques et de l'énergie en fonction de ces hypothèses.

Nous récapitulons dans le chapitre 8 les choix de modélisation de l'alcali-réaction sur lesquels est fondé notre modèle. Nous nous intéressons aux granulats à réactivité rapide, et représentons l'attaque par la dissolution graduelle d'une proportion du granulat correspondant à la silice réactive, à partir de sa surface. La montée en pression des produits de réaction dont le volume est supérieur au volume de granulat dissout entraîne la décohésion du granulat, puis la fissuration de la pâte de ciment environnante. On décrit cette fissuration et la classification de type de sites réactifs qui en résulte, selon leur état d'endommagement.

Cette description du mécanisme d'endommagement est utilisée dans le chapitre 9 dans lequel on écrit très précisément les expressions des propriétés poroélastiques homogénéisées de notre béton attaqué, en fonction de son état d'endommagement. On décrit le béton attaqué comme un milieu composite comprenant des phases élastiques, des phases poroélastiques, et des gros pores correspondant aux cavités des granulats ayant subi la décohésion. Il s'agit donc d'adapter les expressions obtenues au chapitre 6 à la microstructure correspondant au mécanisme d'endommagement présenté au chapitre 8. On présente ensuite l'adaptation concrète du schéma dilué, puis du schéma *IDD* à notre problème, en utilisant, comme au chapitre 7, une méthode de superposition pour représenter le motif complexe de cavité fissurée obtenu lorsque la pâte de ciment se fissure, que nous avons comparé à des simulations *2d* au chapitre 4. On détaille enfin précisément notre critère d'interpénétration des surfaces fissurées.

On poursuit ensuite au chapitre 10 l'adaptation des résultats théoriques obtenus dans la deuxième partie en écrivant les expressions concrètes des énergies élastiques, d'abord dans un problème auxiliaire où l'on considère que les pressions dans les pores sont nos paramètres de chargement, puis en introduisant les degrés d'attaque des différents sites réactifs comme paramètres de chargement en calculant les pressions en fonction des degrés de réaction, à microstructure et déformation macroscopique données. On définit ensuite les modules d'élasticité non drainée, qui sont en fait les modules sollicités lorsqu'on a une masse de fluide donnée qui est emprisonnée dans la porosité et qu'on charge le matériau extérieurement, ainsi que la précontrainte chimique, contrainte macroscopique induite par la pression des produits de réaction, à déformation macroscopique nulle. Ces deux définitions nous permettent d'expliquer pour tous les cas de chargement qui nous intéressent comment on parvient à calculer l'ensemble des contraintes, déformations et

pressions.

On applique enfin dans le chapitre 11 ces expressions à la construction d'un algorithme qui permet de déterminer, en fonction du chargement que l'on souhaite imposer à l'éprouvette, en terme de contraintes ou déformations imposées, et en terme d'attaque chimique, l'évolution de la microstructure, et ainsi celle des propriétés mécaniques et des gonflements macroscopiques. Le modèle est appliqué à un certain nombre de cas simples pour conforter nos choix de discrétisation de la granulométrie et concernant la symétrie de la solution, et pour améliorer notre compréhension du modèle. L'essai triaxial de Multon est enfin utilisé pour tester la capacité du modèle à reproduire les reports de gonflement lorsque les contraintes appliquées à l'éprouvette évoluent. On identifie enfin les paramètres du modèle, toujours en utilisant les résultats expérimentaux de Multon, puis on discute de la capacité du modèle à reproduire les gonflements et les contraintes mesurées sous divers chargements.

Chapitre 8

Idées retenues pour le modèle

Sommaire

8.1 Introduction **204**
8.2 Description du béton avant la fissuration **204**
8.2.1 Propriétés géométriques 204
8.2.2 Description de l'attaque du grain 204
8.2.3 Description de l'auréole de transition 205
8.3 Description de la fissuration **206**
8.4 Définition des familles de grains **206**
8.5 Conclusion **207**

8.1 Introduction

On décrit dans ce court chapitre les hypothèses sur lesquelles se fonde le modèle pour l'anisotropie du gonflement lors de la réaction alcali-silice, pour les granulats à réactivité rapide, que nous allons présenter dans cette troisième partie de notre mémoire. La description de l'attaque reste très schématique, comme dans le modèle que nous avons présenté en illustration du critère de rupture au § 5.3. La description de la mécanique est en revanche nettement raffinée par rapport à ce modèle. Elle utilise l'ensemble des résultats que nous avons donné dans la partie 2, et ressemble ainsi beaucoup du point de vue mécanique à l'exemple que nous avons utilisé dans le chapitre 7.

Nous décrivons tout d'abord les différentes composantes du béton lors de l'attaque mais avant la fissuration pour chaque grain du béton. Nous détaillons ensuite le déroulement de la fissuration, puis nous définissons les familles de grains comme des ensembles de grains aux évolutions semblables.

8.2 Description du béton avant la fissuration

Nous nous plaçons à une échelle mésoscopique pour notre description du béton. À cette échelle, nous le considérons comme un matériau à deux phases : une phase de granulats (au sens large : des grains de sable aux cailloux), une phase de matrice de pâte de ciment. Ces phases ne sont pas homogènes, mais des zones seront définies dans ces phases en fonction de propriétés à l'échelle microscopique. Détaillons les propriétés de ces phases.

8.2.1 Propriétés géométriques

Les granulats sont en nombre N_a dans le volume de béton que l'on appelle Ω (l'indice a correspond à granulat). Chaque grain i a les propriétés suivantes :

- forme sphérique ;
- centré en $\underline{G}^i$;
- rayon R^i ;
- il comporte une partie saine et une partie attaquée ;
- il est entouré d'une auréole de transition.

8.2.2 Description de l'attaque du grain

Le degré d'attaque est décrit par le paramètre sans dimension et dépendant du temps $\alpha^i(t)$. Ce paramètre, qu'on appelle le degré d'attaque, représente la proportion du rayon du granulat qui a subi l'attaque, que l'on suppose se produire à partir de la surface extérieure du granulat. Comme on l'a mentionné lors de notre application en gonflement libre du critère énergétique de rupture au § 5.3.1, où l'attaque était décrite exactement de la même façon, ce type d'attaque progressive à partir de la surface est choisi en cohérence avec la volonté d'étudier l'alcali-réaction spécifique aux granulats à réactivité rapide, au sens expliqué au § 1.4 de notre bibliographie sur l'alcali-réaction. La portion du granulat comprise entre les rayons $(1-\alpha^i(t))R^i$ et R^i est appelée la *zone attaquée*, tandis que la sphère intérieure est appelée *zone saine* du granulat, au temps t. La *zone saine* possède les propriétés mécaniques initiales du granulat. Elle est caractérisée par un tenseur des modules d'élasticité que l'on appelle $\mathbb{C}_a$. La *zone attaquée* est partiellement dissoute à cause de l'attaque des ions provenant de la pâte de ciment. Au niveau microscopique, elle a une porosité ρ^i, qui est une caractéristique du granulat considéré. Au niveau mésoscopique auquel on travail, cette zone est donc un milieu poreux caractérisé par un tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}_e^{p,i}$, un coefficient de Biot $b_e^{p,i}$ et un module de Biot $M_e^{p,i}$, qui sont définis selon les habitudes de

poromécanique telles que présentées par Coussy [6], hormis en ce qui concerne le coefficient de Biot pour lequel on a pris l'inverse de la définition usuelle. L'indice e rappelle que ces modules seront obtenus par homogénéisation à une échelle inférieure. La loi de comportement dans cette zone, pour le grain i, s'écrit donc :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_e^{p,i} : \underline{\underline{\varepsilon}} - b_e^{p,i} p \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ (\tilde{\varphi}^i - \rho^i) = b_e^{p,i} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + M_e^{p,i} p \end{cases} \tag{8.1}$$

Où $\tilde{\varphi}^i$ est la porosité locale dans la zone attaquée en configuration déformée. On suppose que l'attaque ne modifie pas l'isotropie des propriétés mécaniques du granulat, ce qui fait du coefficient de Biot un scalaire qu'on appelle b_p^i. Dans notre modèle la porosité ρ^i peut différer selon les granulats considérés, ce qui nous sert par exemple à représenter la présence de granulats non réactifs, mais elle est constante dans le temps. L'attaque progresse donc par augmentation du degré de réaction $\alpha^i(t))$ uniquement.

8.2.3 Description de l'auréole de transition

L'auréole de transition (ou interface transition zone, ITZ), doit être prise en compte dans notre problème d'alcali-réaction pour deux raisons. Tout d'abord, lorsqu'on essaie d'estimer les propriétés mécaniques de bétons, les résultats dépendent de la prise en compte de cette zone. Nielsen et Monteiro [21] ont montré que si l'on adopte une approche micromécanique, comme c'est notre cas dans ce mémoire, on surestime les propriétés mécanique du béton en considérant le béton comme un matériau à deux phases : matrice et granulat. Le même type de modèle de micromécanique prenant cette fois en compte une troisième phase, l'auréole de transition, comme une fine couche entourant les granulats, permet de reproduire nettement mieux les propriétés du béton en fonction des propriétés des constituants. Son existence est par ailleurs attestée expérimentalement, par exemple par les observations de Farran, [8], à propos de la modification de la distribution des grains de ciment proche de la surface des granulats lors des phases d'hydratation, qui entraînent une porosité et une composition différentes dans cette zone. On trouve des discussions concernant les propriétés de cette zone en fonction de la fraction volumique de granulat, par exemple chez Hashin [13] qui utilise le schéma auto-cohérent généralisé de Christensen et Lo [23, 4], mais également sur l'influence de la taille de grain [14], ou sur la possibilité de modéliser l'auréole de transition comme une zone aux propriétés homogènes, par exemple chez Nadeau, et Hervé et Caré [14, 2, 20].

La seconde raison pour laquelle on a besoin de prendre l'auréole de transition en compte est le rôle de zone tampon qu'elle joue pour les gels gonflants. Elle sert en quelque sorte de réservoir d'expansion pour les produits de réaction qui parviennent à la surface des granulats. Or, dans notre modèle, on considèrera que les produits de réactions sont libres de sortir des granulats. L'augmentation de pression est donc initialement limitée par la présence de l'auréole de transition. Pour éviter la lourdeur d'une description trop détaillée de cette zone, on la décrit simplement au niveau microscopique par une porosité ρ_{itz} et une épaisseur l_c qui ne dépendent ni de la taille de granulat, ni de la fraction volumique. À l'échelle mésoscopique à laquelle se situe notre modélisation, cette porosité se traduit par un comportement de milieu poreux, que l'on décrit comme celui de la *zone attaquée*, par un tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}_e^{t,i}$, un coefficient de Biot scalaire $b_e^{t,i}$, et un module de Biot $M_e^{t,i}$ indépendants du temps. La loi de comportement de l'ITZ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_e^{t,i} : \underline{\underline{\varepsilon}} - b_e^{t,i} p \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ (\tilde{\varphi}_{itz}^i - \rho_{itz}^i) = b_e^{t,i} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + M_e^{t,i} p \end{cases} . \tag{8.2}$$

Où $\tilde{\varphi}_{itz}$ est la porosité en configuration déformée de l'auréole de transition.

8.3 Description de la fissuration

Le béton décrit au paragraphe précédent en fonction du degré d'attaque auquel il est soumis, va se dégrader à cause de la pression développée par les produits de réaction dans les pores de la *zone attaquée* et de l'*ITZ*. Nous décrivons ici les changements de morphologie que l'on considère. Pour chaque granulat, on introduit quatre paramètres d'endommagement qui vont servir à représenter l'état de décohésion et de fissuration du granulat :

- un paramètre de décohésion $d^i(t)$ qui vaut 0 si la décohésion n'a pas eu lieu, et 1 si elle a eu lieu. La décohésion est la rupture intégrale de l'interface entre le granulat et la pâte de ciment, au niveau de l'auréole de transition qui constitue une faiblesse mécanique. Au début de l'attaque, pour tous les granulats, $d^i(t) = 0$.
- trois tailles de fissures $x_1^i(t)$, $x_2^i(t)$, $x_3^i(t)$, décrivant la taille des fissures en forme de disque de normales $\underline{e}_1$,$\underline{e}_2$,$\underline{e}_3$ qui apparaissent autour du grain. La fissure est de rayon interne celui du grain R^i, et de rayon externe $x_1^i(t)$, $x_2^i(t)$, $x_3^i(t)$ selon sa direction. Ces tailles de fissures augmentent avec le temps. Les fissures choisies représentent la fissuration de la pâte de ciment sous pression des gels, exactement de la même façon que dans notre exemple de la fin de la partie 2, chapitre 7.

On peut maintenant, en se basant sur cette description du béton attaqué et fissuré, décrire ce qu'on appelle une famille de sites réactifs.

8.4 Définition des familles de grains

Une famille de grains est composée des diverses composantes attachées aux granulats de même taille que l'on a choisi de grouper ensemble. On appelle leur nombre N_s. La position précise des grains $\underline{G}^k$ n'importe plus, on les considère comme un tout. Les grains qui la composent sont de taille R^i. La fraction volumique des grains qui la composent est appelée f^i, ce qui implique que la famille comprend un nombre $N_i = f_i / \left(\frac{4\pi}{3}(R^i)^3\right)$ de grains. Les grains faisant partie de la même famille suivent des évolutions identiques à la fois en terme d'attaque et de fissuration. Dans chaque famille, on trouve un certain nombre de type de pores, qu'on rappelle ici :

- les pores de la *zone attaquée* du granulat, représentant une fraction volumique ρ^i du volume compris entre les rayons $(1-\alpha)\,R^i$ et R^i du granulat. La fraction volumique totale de porosité dans la *zone attaquée* est donc de $\rho^i \frac{4\pi}{3}(R^i)^3 \left[1-(1-\alpha)^3\right]$. L'équation de comportement de cette zone est décrite par l'équation 8.1.
- les pores de l'auréole de transition qui occupent un volume $\rho^{itz} 4\pi l_c (R^i)^2$ autour d'un granulat de taille R^i, puisque l'épaisseur l_c de l'auréole de transition est faible devant la taille de grain, même pour les petits grains. La loi de comportement de cette zone est donnée par l'équation 8.2.
- si la décohésion s'est produite, le gel peut également occuper l'espace laissé libre par la déformation du grain et de la pâte de ciment sous pression de gel. De même, si la fissuration s'est produite, le gel peut envahir les fissures et ainsi contribuer à leur avancée en poussant directement sur leurs lèvres.

Une hypothèse essentielle de notre modèle est l'égalité de la pression dans une famille donnée, dans ces différents types de porosité. On définit donc une unique pression par famille qu'on appelle p^i dans la famille i. Cette hypothèse suppose que le gel est libre de se déplacer entre ces zones. C'est encore une fois une hypothèse liée au fait qu'on considère des granulats à réactivité rapide, pour lesquels le gel ne reste en général pas coincé dans les granulats sous formes de poches qui exercent une pression importante à l'intérieur même du granulat et fait de la rupture du granulat un événement essentiel du déroulement de l'endommagement. Pour ce qui est du déplacement du gel dans les fissures, nous supposons qu'il se fait rapidement par rapport aux échelles de temps

de création du gel. Nous supposons de plus que l'énergie dissipée par la viscosité du gel dans son déplacement est négligeable devant l'énergie de fissuration elle-même.

8.5 Conclusion

On a résumé dans cette partie l'ensemble des idées sur lesquelles sont fondés les calculs de propriétés mécaniques et d'énergie qui forment les deux chapitres suivants de ce mémoire, et qui ont permis de construire l'algorithme de fissuration qui sera détaillé et utilisé dans le dernier chapitre. Nos choix de modélisation sont clairement orientés vers les granulats à réactivité rapide, pour lesquels on considère que l'attaque se fait de manière relativement homogène dans le volume du granulat, en progressant à partir de la surface. On suppose que le gel occupe la porosité nouvellement créée dans le granulat ainsi que la porosité de l'auréole de transition, et que sa montée en pression est à l'origine de la décohésion du granulat et de fissuration dans la pâte de ciment.

Chapitre 9

Propriétés homogénéisées d'un béton atteint de la réaction alcali-silice

Sommaire

9.1 Introduction **210**
9.2 Application à notre problème de RAG **210**
9.2.1 Présentation du problème de départ 210
9.2.2 Présentation du problème auxiliaire 211
9.2.3 Écriture des propriétés homogénéisées 212
9.2.4 Réécriture des propriétés homogénéisées en utilisant les fractions volumiques 215
9.3 Calcul concret des propriétés homogénéisées **216**
9.3.1 Approche diluée 216
9.3.2 Un modèle micromécanique plus élaboré : estimateur *IDD* 223
9.4 Critères d'interpénétration des surfaces fissurées **224**
9.4.1 Lèvres d'une fissure 225
9.4.2 Grain et cavité 225
9.5 Conclusion **227**

9.1 Introduction

Ce chapitre nous permet de donner l'écriture concrète des propriétés homogénéisées de notre béton attaqué, en fonction de l'état de la microstructure. Nous avons, dans le chapitre 6 de la partie 2, proposé une écriture des énergies élastiques et potentielles pour deux types de milieux. Tout d'abord, pour un milieu élastique troué, dont les pores sont sous pression. Ensuite, pour un milieu hétérogène dont les phases sont elles-mêmes des milieux poreux. Ces écritures de l'énergie nous ont également permis d'écrire de manière théorique les propriétés homogénéisées en fonction de divers tenseurs de localisation, obtenus en chargeant notre milieu et en calculant des moyennes de déformations. Nous souhaitons maintenant utiliser ces expressions des propriétés poromécaniques homogénéisées sur les diverses microstructures, décrites au chapitre 8 de cette partie, qui peuvent représenter l'état de notre béton à divers degrés d'attaque.

On présente tout d'abord l'adaptation des coefficients poroélastiques au problème d'alcali-réaction que l'on souhaite traiter. Dans un deuxième temps, on calcule les différents tenseurs de localisation dont on a besoin. Enfin, on réfléchit au problème de l'interpénétration des surfaces de fissure.

9.2 Application à notre problème de RAG

On reprend dans cette partie les conclusions du chapitre 6, dans lequel nous avons calculé l'énergie du milieux poreux, et donné les expressions de ses propriétés homogénéisées en fonction de divers tenseurs de localisation. Nous allons donc introduire les problèmes mécaniques nécessaires à l'écriture de ces propriétés, en remarquant que nos familles de grains, telles que définies au § 8.4, doivent être décrites de manière assez différente selon que la décohésion a eu lieu ou non. La raison est que tant qu'il n'y a pas eu décohésion, le squelette solide (par opposition aux phases poreuses) comprend la pâte de ciment (y compris celle qui constitue l'ITZ) et le granulat. Une fois que la décohésion a eu lieu, le granulat est détaché de la pâte de ciment. Nous avons fait le choix de ne plus le considérer comme faisant partie du squelette, car l'étude de la cavité fissurée est ainsi identique à ce que nous avons fait dans le chapitre 7. On va donc séparer l'ensemble des familles en fonction de leur état de fissuration. On appelle *Type I* l'état de ces familles avant décohésion, et *Type II* leur état après la décohésion. Nous allons détailler les propriétés de ces sites.

9.2.1 Présentation du problème de départ

Notre problème de départ est schématisé sur la Fig. 9.1. Cette description du problème se place dans la lignée du § 6.2 dans lequel on a travaillé sur un solide élastique troué. Il s'agit de déterminer les modules poroélastiques homogénéisés d'un matériau à matrice occupant le domaine Ω^c, de tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}^c$, la pâte de ciment. Ce matériau comporte N^I sites de *Type I*, comme représenté à gauche sur la Fig. 9.1. Chaque site $\alpha \in 1 : N^I$ est constitué de trois domaines :

- au centre, un domaine sphérique représentant la *zone saine*. Il occupe un domaine Ω^a_α et est de tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}^a$
- autour du granulat sain, correspondant à la *zone attaquée*, le domaine Ω^p_α est également rempli de granulat sain, mais la calotte sphérique est partagée avec un domaine poreux Ω^{pv}_α qui représente les pores créés dans le granulat par l'attache chimique. La partie solide est de tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}^a$
- si l'on va un peu plus vers l'extérieur, on rencontre une seconde calotte partiellement poreuse, l'ITZ. Un matériau de tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}^c$ occupe le domaine

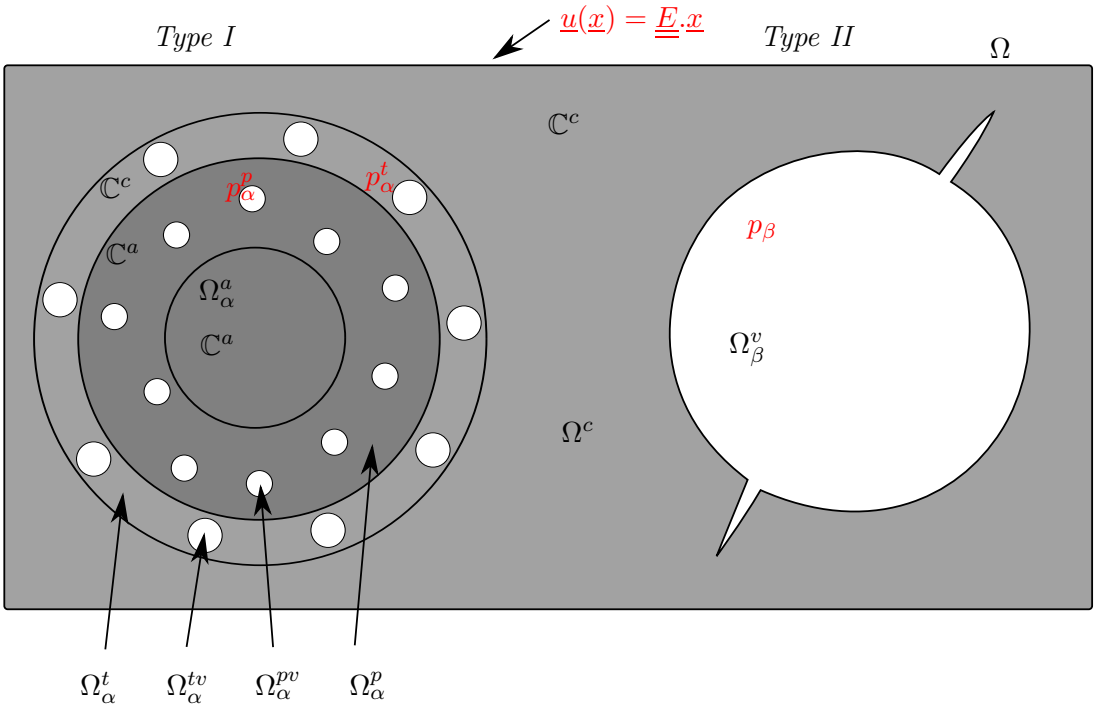

FIGURE 9.1 – Béton atteint de RAG : problème de départ, présentation sous forme de solide élastique troué.

Ω^t_α, tandis que le domaine Ω^{tv}_α est constitué de vides. Cette calotte représente l'auréole de transition, qu'on trouve dans les bétons ordinaires autour de chaque granulat.

Le matériau comporte également N^{II} sites de *Type II*, qui sont simplement des cavités dont on ne précise pas la forme pour le moment. Ils occupent les domaines Ω^v_β, pour $\beta \in 1 : N^{II}$.

Même si on a posé les bases dans la première section (section 6.2) pour homogénéiser ce genre de matériau, c'est une tâche difficile puisqu'on pressent que l'évaluation des tenseurs de localisation va être compliquée. Il faudrait réaliser des microstructures et effectuer des simulations par éléments finis. Nous préférons procéder en deux étapes, en homogénéisant d'abord séparément certaines zones, en l'occurrence la *zone attaquée* des granulats, et l'*ITZ*, en utilisant la méthode présentée au § 6.3.

9.2.2 Présentation du problème auxiliaire

On souhaite plutôt s'appuyer sur une transformation du problème comme on a fait au § 6.3, où les zones contenant du solide élastique et des trous sont remplacées par un milieu poreux équivalent. Comme on a déjà expliqué la façon dont les propriétés mécaniques de ces zones dans le problème auxiliaire sont calculées en fonction des propriétés de départ, on fait cette transformation, ce qui nous amène a considérer le problème auxiliaire schématisé sur la Fig. 9.2. On a remplacé les zones contenant des pores à l'échelle microscopique par des milieux poreux équivalents. Remarquons que ce n'est qu'une transformation partielle puisqu'on a voulu conserver les pores de *Type II*, occupant les domaines Ω^v_β, identiques à ceux du problème de départ. Ces pores sont de grande taille, et ne correspondent pas à l'idée de ce qu'on fait ici, c'est-à-dire une homogénéisation en deux temps.

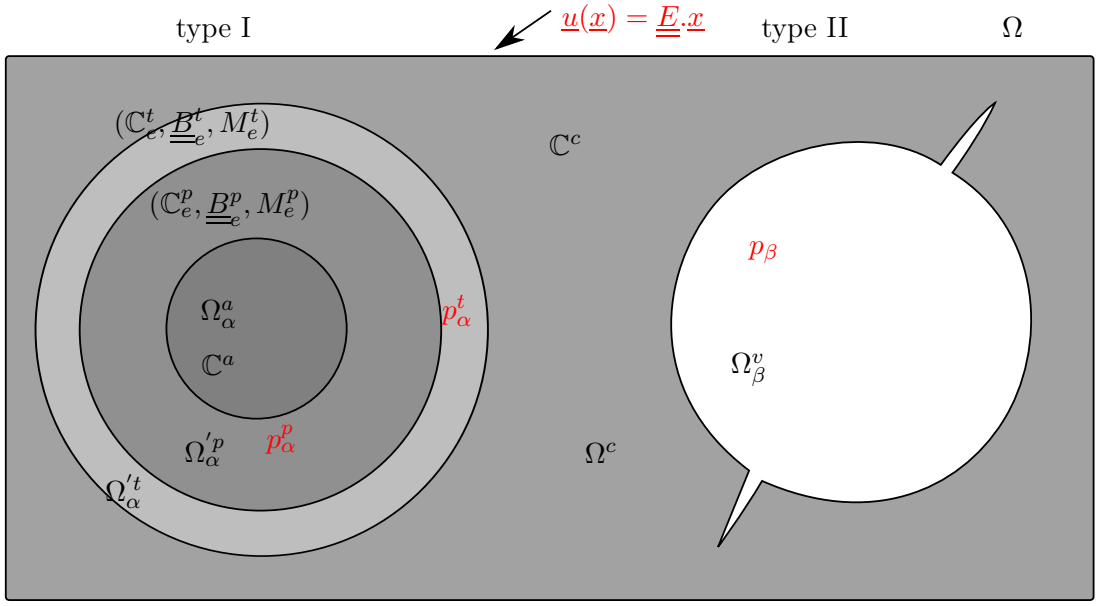

FIGURE 9.2 – Béton atteint de RAG : problème auxiliaire, présentation mixte solide troué/solide poreux hétérogène.

9.2.3 Écriture des propriétés homogénéisées

Il nous reste donc à adapter les expressions des propriétés homogénéisées que nous avons obtenues au chapitre 6, c'est-à-dire les équations 6.33 à nos familles de *Type II*, et les équations 6.68 à nos familles de *Type I*. Rappelons tout d'abord ces expressions. Dans la description du solide élastique troué :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^{hom} = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \\ \underline{\underline{B}}^k = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV = \dfrac{\Omega^k}{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \dfrac{1}{\Omega'} \displaystyle\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV \\ M^{k\lambda} = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV = \dfrac{1}{\Omega} \displaystyle\int_{\Omega^\lambda} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV \end{cases} \tag{9.1}$$

Tandis que dans la description milieu poreux hétérogène :

$$\begin{cases} \mathbb{C}'^{hom} = \dfrac{1}{\Omega'} \displaystyle\sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \\ \underline{\underline{B}}'^i = \dfrac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i : \displaystyle\int_{\Omega'^i} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV = \dfrac{\Omega'^i}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i - \dfrac{1}{\Omega'} \displaystyle\sum_{k=1}^{N^z} \mathbb{C}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x}) dV \\ M'^{ki} = \dfrac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i : \displaystyle\int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \dfrac{\Omega'^i}{\Omega'} M_e^i = \dfrac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \dfrac{\Omega'^i}{\Omega'} M_e^i \end{cases} \tag{9.2}$$

Où, en cohérence avec les notations adoptées au chapitre 6, les quantités relatives à l'homogénéisation du milieu poreux hétérogène sont marqués d'un prime (’). Détaillons concrètement

chacune des propriétés que l'on recherche.

9.2.3.1 Tenseur des modules d'élasticité homogénéisé

Il s'agit ici de spécifier les zones sur lesquelles les intégrales sont calculées :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}'^{hom} &= \frac{1}{\Omega'}\sum_{i=1}^{N^z}\int_{\Omega'^i}\mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x})dV \\ &= \frac{1}{\Omega'}\mathbb{C}^c : \int_{\Omega'^c}\mathbb{A}'(\underline{x})dV \\ &+ \frac{1}{\Omega'}\sum_{\alpha=1}^{N^I}\left[\mathbb{C}^a : \int_{\Omega_\alpha^a}\mathbb{A}'(\underline{x})dV + \mathbb{C}^p : \int_{\Omega_\alpha'^p}\mathbb{A}'(\underline{x})dV + \mathbb{C}^t : \int_{\Omega_\alpha'^t}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\right]\end{aligned} \tag{9.3}$$

On peut arranger cette expression en calculant la moyenne de la déformation sur l'ensemble :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega}\mathbb{A}'(\underline{x})dV = \mathbb{I} = \frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega'^c}\mathbb{A}'(\underline{x})dV + \frac{1}{\Omega'}\sum_{\alpha=1}^{N^I}\left[\int_{\Omega_\alpha^a}\mathbb{A}'(\underline{x})dV + \int_{\Omega_\alpha'^p}\mathbb{A}'(\underline{x})dV + \int_{\Omega_\alpha'^t}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\right] \\ + \frac{1}{\Omega'}\sum_{\beta=1}^{N^{II}}\int_{\Omega_\beta^v}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\end{aligned} \tag{9.4}$$

On combine ensuite ces deux expressions pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}'^{hom} = \mathbb{C}^c + \sum_{\alpha=1}^{N^I}\Bigg[&(\mathbb{C}^a - \mathbb{C}^c) : \frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega_\alpha^a}\mathbb{A}'(\underline{x})dV + (\mathbb{C}^p - \mathbb{C}^c) : \frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega_\alpha'^p}\mathbb{A}'(\underline{x})dV \\ &+ \left(\mathbb{C}^t - \mathbb{C}^c\right) : \frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega_\alpha'^t}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\Bigg] - \sum_{\beta=1}^{N^{II}}\mathbb{C}^c : \frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega_\beta^v}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\end{aligned} \tag{9.5}$$

9.2.3.2 Coefficient de Biot

Type I Pour le coefficient de Biot on a toujours deux expressions possibles, le passage de l'une à l'autre se faisant par théorème de réciprocité de Betti. On ne donne ici que celle qui est la plus opérationnelle, à partir des formules provenant du problème auxiliaire (équation 9.2).

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_\alpha'^p &= \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e'^p : \int_{\Omega_\alpha'^p}\mathbb{A}'(\underline{x})dV \\ \underline{\underline{B}}_\alpha'^t &= \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e'^t : \int_{\Omega_\alpha'^t}\mathbb{A}'(\underline{x})dV\end{aligned} \tag{9.6}$$

Type II Ici on procède à partir des formules du problème initial (équation 9.1)

$$\underline{\underline{B}}_\beta'^v = \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \int_{\Omega_\beta'^v}\mathbb{A}'(\underline{x})dV \tag{9.7}$$

9.2.3.3 Module de Biot

Nous traitons d'abord les modules de type M^{kk}, c'est-à-dire ceux qui renseignent sur la déformation d'une zone (ou pore) lorsqu'une pression est appliquée dans cette même zone (ou pore).

Type I Modules établis à partir du problème auxiliaire (équation 9.2).

$$\begin{aligned} M'\binom{p}{\alpha}\binom{p}{\alpha} &= \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e^p : \int_{\Omega'^p_\alpha} \underline{\underline{A}}'^p(\underline{x})dV + \frac{\Omega'^p_\alpha}{\Omega'}M_e^p \\ M'\binom{t}{\alpha}\binom{t}{\alpha} &= \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e^t : \int_{\Omega'^t_\alpha} \underline{\underline{A}}'^t(\underline{x})dV + \frac{\Omega'^t_\alpha}{\Omega'}M_e^t \end{aligned} \tag{9.8}$$

Type II Modules établis à partir du problème initial (équation 9.1).

$$M\binom{v}{\beta}\binom{v}{\beta} = \frac{1}{\Omega'}\int_{\Omega^v_\beta} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}'^v(\underline{x})dV \tag{9.9}$$

Modules croisés Il y a trois modules de Biot croisés. Le premier s'exprime directement depuis (équation 9.2) :

$$M'\binom{p}{\alpha}\binom{t}{\alpha} = \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e^p : \int_{\Omega'^p_\alpha} \underline{\underline{A}}'^t(\underline{x})dV = \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e^t : \int_{\Omega'^t_\alpha} \underline{\underline{A}}'^p(\underline{x})dV \tag{9.10}$$

Les deux derniers sont un mélange entre les deux problèmes puisqu'il s'agit de déterminer l'influence d'un pore sur une zone de milieu poreux et réciproquement. Comme ces modules vont être négligés on donne le résultat sans démonstration :

$$\begin{aligned} M'\binom{p}{\alpha}\binom{v}{\beta} &= \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e^p : \int_{\Omega'^p_\alpha} \underline{\underline{A}}'^v(\underline{x})dV = \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \int_{\Omega'^v_\beta} \underline{\underline{A}}'^p dV \\ M'\binom{t}{\alpha}\binom{v}{\beta} &= \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{B}}_e^t : \int_{\Omega'^t_\alpha} \underline{\underline{A}}'^v(\underline{x})dV = \frac{1}{\Omega'}\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \int_{\Omega'^v_\beta} \underline{\underline{A}}'^t(\underline{x})dV \end{aligned} \tag{9.11}$$

Réécriture du module de Biot en fonction du tenseur de localisation en déformation On souhaite faire une dernière transformation pour rendre le module de Biot relatif aux pores de type II. Rappelons tout d'abord notre résultat obtenu dans la première partie par théorème de réciprocité de Betti (équation 6.20) :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x})dV - \Omega^j\underline{\underline{\mathbb{1}}} = -\int_{\Omega^j} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{x})dV \tag{9.12}$$

On souhaite utiliser ceci pour ne pas avoir à calculer $< \underline{\underline{A}}'^v >_{\Omega^v_\beta}$, puisque les schémas d'homogénéisation traditionnels ne prennent pas en compte de concept de localisation en pression. On peut néanmoins simplifier l'expression par deux hypothèses :

– Le tenseur de localisation $\underline{\underline{A}}_\beta^{'v}$ ne prend des valeurs significatives que dans la pâte de ciment qui entoure le domaine Ω_β^v, non dans les autres parties du solide comme les autres granulats, de sorte que dans ce calcul de moyenne du tenseur de localisation on peut faire comme si tous les matériaux étaient de la pâte de ciment. Ceci s'écrit :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}_\beta^{'v}(\underline{x})dV = \mathbb{C}^c : \int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}_\beta^{'v}(\underline{x})dV \tag{9.13}$$

– Le tenseur de localisation $\underline{\underline{A}}_\beta^{'v}$ prend des valeurs négligeables dans les pores autres que Ω_β^v. Cela permet d'écrire, puisque la déformation totale associée au chargement pression dans un pore est nulle :

$$\int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}_\beta^{'v}(\underline{x})dV + \int_{\Omega_\beta^v} \underline{\underline{A}}_\beta^{'v}(\underline{x})dV = 0 \tag{9.14}$$

Si l'on rassemble ces hypothèses et le résultat obtenu par le théorème de réciprocité de Betti on obtient, en passant aux moyennes :

$$< \underline{\underline{A}}^{'v} >_{\Omega_\beta^v} = (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[\underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\beta^v} - \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right] \tag{9.15}$$

Soit pour le module de Biot :

$$M \binom{v}{\beta} \binom{v}{\beta} = f_\beta^v \underline{\underline{\mathbb{1}}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[\underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\beta^v} - \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right] = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[\underline{\underline{B}}_\beta^{'v} - f_\beta^v \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right] \tag{9.16}$$

9.2.4 Réécriture des propriétés homogénéisées en utilisant les fractions volumiques

Pour terminer, nous réécrivons les expressions trouvées à la fin de la section précédente en fonction des fractions volumiques de chaque zone. On introduit quatre fractions volumiques : $f_\alpha^a = \Omega_\alpha^a/\Omega$, $f_\alpha^{'p} = \Omega_\alpha^{'p}/\Omega$, $f_\alpha^{'t} = \Omega_\alpha^{'t}/\Omega$, $f_\beta^v = \Omega_\beta^v/\Omega$. Pour ce qui est du tenseur des modules d'élasticité, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}'^{hom} = \mathbb{C}^c + \sum_{\alpha=1}^{N^I} \Big[& f_\alpha^a \left(\mathbb{C}^a - \mathbb{C}^c\right) :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\alpha^a} dV + f_\alpha^{'p} \left(\mathbb{C}^p - \mathbb{C}^c\right) :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\alpha^{'p}} dV \\ & + \left(\mathbb{C}^t - \mathbb{C}^c\right) : f_\alpha^{'t} < \mathbb{A}' >_{\Omega_\alpha^{'t}} dV \Big] - \sum_{\beta=1}^{N^{II}} f_\beta^v \mathbb{C}^c :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\beta^v} dV \end{aligned} \tag{9.17}$$

Les coefficients de Biot sont réexprimés de la même façon :

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}}_\alpha^{'p} = f_\alpha^{'p} \underline{\underline{B}}_e^{'p} :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\alpha^{'p}} dV \\ \underline{\underline{B}}_\alpha^{'t} = f_\alpha^{'t} \underline{\underline{B}}_e^{'t} :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\alpha^{'t}} dV \\ \underline{\underline{B}}_\beta^{'v} = f_\beta^v \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \mathbb{A}' >_{\Omega_\beta^v} dV \end{cases} \tag{9.18}$$

Enfin on réécrit les modules de Biot, sauf les termes croisés entre les sites de type I et type II, puisqu'ils sont destinés à être négligés :

$$\begin{cases} M' \binom{p}{\alpha} \binom{p}{\alpha} = f_\alpha^{'p} \left[\underline{\underline{B}}_e^p :< \underline{\underline{A}}^{'p} >_{\Omega_\alpha^{'p}} + M_e^p \right] \\ M' \binom{t}{\alpha} \binom{t}{\alpha} = f_\alpha^{'t} \left[\underline{\underline{B}}_e^t :< \underline{\underline{A}}^{'t} >_{\Omega_\alpha^{'t}} + M_e^t \right] \\ M' \binom{p}{\alpha} \binom{t}{\alpha} = f_\alpha^{'p} \underline{\underline{B}}_e^p :< \underline{\underline{A}}^{'t} >_{\Omega_\alpha^{'p}} = f_\alpha^{'t} \underline{\underline{B}}_e^t :< \underline{\underline{A}}^{'p} >_{\Omega_\alpha^{'t}} \\ M \binom{v}{\beta} \binom{v}{\beta} = f_\beta^v \underline{\underline{\mathbb{1}}} :< \underline{\underline{A}}^{'v} >_{\Omega_\beta^v} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[\underline{\underline{B}}_\beta^{'v} - f_\beta^v \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right] \end{cases} \tag{9.19}$$

On dispose donc d'expressions explicites des propriétés homogénéisées du béton attaqué en fonction de tenseurs de localisation qu'il nous faut exprimer pour pouvoir continuer.

9.3 Calcul concret des propriétés homogénéisées par deux schémas

Dans la section précédente nous avons conclu en donnant les expressions des propriétés poroélastiques homogénéisées d'un béton sous attaque. Il faut maintenant spécifier les tenseurs de localisation, ce que nous avons décidé de faire en utilisant des schémas d'homogénéisation classiques. Nous utilisons pour cela le schéma dilué, présenté dans notre chapitre de bibliographie sur l'homogénéisation, au § 3.6.2. Tous les autres schémas utilisent à un moment ou à un autre le tenseur de localisation dilué. Une fois ce tenseur établi pour les différentes configurations qui nous intéressent, nous l'utilisons pour écrire le tenseur de localisation obtenu par le schéma *IDD*, présenté au § 3.6.8.

9.3.1 Approche diluée

Pour démarrer on fait une approximation très grossière, qui consiste à supposer que les hétérogénéités occupent une fraction volumique très faible et sont donc assez éloignées les unes des autres dans le béton pour qu'il n'y ait pas d'interaction mécanique entre les sites. Cela veut dire qu'on peut très bien représenter les champs de contrainte et de déformation autour et dans un site par les champs extraits d'un problème auxiliaire où le site est seul dans un matériau matrice d'extension infinie. Nous allons grâce à cette approximation donner de premières expressions de nos tenseurs de localisation moyennés sur les différentes zones. Dans ce contexte les différents sites sont traités à part.

9.3.1.1 Sites de *Type I*

Ces sites, qui représentent des granulats attaqués mais où aucune fissuration ne s'est produite, sont constitués, comme on l'a expliqué au chapitre 8, des éléments suivants :

- un cœur de granulat sain qui occupe la sphère de rayon $(1-\alpha)R$, de matériau élastique linéaire isotrope caractérisé par $\mathbb{C}^a$;
- une calotte sphérique de granulat attaqué qui occupe l'espace entre les sphères de rayon $(1-\alpha)\,R$ et R, de matériau poroélastique isotrope caractérisé par les paramètres $(\mathbb{C}_e^p, \underline{\underline{B}}_e^p, M_e^p)$;
- une auréole de transition qui occupe l'espace entre les deux sphères de rayon R et $R+l_c$, de matériau poroélastique isotrope caractérisé par les paramètres $(\mathbb{C}_e^t, \underline{\underline{B}}_e^t, M_e^t)$.
- un milieu élastique infini de matériau élastique isotrope caractérisé par $\mathbb{C}^c$.

On dispose alors pour calculer les tenseurs de localisation de la solution de Love [15], utilisée par Christensen et Lo pour l'établissement de leur schéma autocohérent généralisé [4], qui donne le champ de déplacement dans les calottes sphériques successives lors d'un chargement en cisaillement. Cette solution permet de traiter la partie déviatorique du problème.

Partie déviatorique : solution de Love Nous cherchons d'abord les tenseurs de localisation en déformation. On impose donc une déformation de cisaillement par l'intermédiaire du déplacement imposé :

$$\underline{u}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .\underline{x} \tag{9.20}$$

à notre milieu infini. D'après Love, la solution coordonnées sphériques peut être écrite :

$$\begin{cases} u_r = U_r(r)\sin^2\theta\cos 2\phi \\ u_\theta = U_\theta(r)\sin\theta\cos\theta\cos 2\phi \\ u_\phi = -U_\theta(r)\sin\theta\sin 2\phi \end{cases} \tag{9.21}$$

Où dans nos quatre couches les fonctions U_r et U_θ s'écrivent :

– dans la zone de granulat sain ($r \leq R(1-\alpha)$) :

$$\begin{cases} U_r(r) = A_1 r - 6\dfrac{\nu_a}{1-2\nu_a}A_2 r^3 \\ U_\theta(r) = A_1 r - \dfrac{7-4\nu_a}{1-2\nu_a}A_2 r^3 \end{cases} \tag{9.22}$$

– dans la zone de granulat attaqué ($R(1-\alpha) \leq r \leq R$) :

$$\begin{cases} U_r(r) = B_1 r - 6\dfrac{\nu_p}{1-2\nu_p}B_2 r^3 + 3B_3\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{5-4\nu_p}{1-2\nu_p}B_4\dfrac{1}{r^2} \\ U_\theta(r) = B_1 r - \dfrac{7-4\nu_p}{1-2\nu_p}B_2 r^3 - 2B_3\dfrac{1}{r^4} + 2B_4\dfrac{1}{r^2} \end{cases} \tag{9.23}$$

– dans l'auréole de transition ($R \leq r \leq R + l_c$) :

$$\begin{cases} U_r(r) = C_1 r - 6\dfrac{\nu_p}{1-2\nu_p}C_2 r^3 + 3C_3\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{5-4\nu_p}{1-2\nu_p}C_4\dfrac{1}{r^2} \\ U_\theta(r) = C_1 r - \dfrac{7-4\nu_p}{1-2\nu_p}C_2 r^3 - 2C_3\dfrac{1}{r^4} + 2C_4\dfrac{1}{r^2} \end{cases} \tag{9.24}$$

– dans la pâte de ciment infinie ($r \geq R$) :

$$\begin{cases} U_r(r) = r + 3D_3\dfrac{1}{r^4} + (5-4\nu_c)/(1-2\nu_c)D_4\dfrac{1}{r^2} \\ U_\theta(r) = r - 2D_3\dfrac{1}{r^4} + 2D_4\dfrac{1}{r^2} \end{cases} \tag{9.25}$$

Une propriété de cette solution est que la moyenne de la déformation sur chaque phase, comme la déformation imposée, est également déviatorique. Cela ne provient pas d'ailleurs de la forme précise que prennent U_r et U_θ, mais de l'écriture de la solution 9.21. Calculons la moyenne de la déformation $< \underline{\underline{\varepsilon}} >$ pour chaque zone. Elle s'exprime à l'aide de termes du type :

$$\int_S u_i n_j dS \tag{9.26}$$

Où S est l'interface entre deux zones, n_i une composante de la normale à l'interface. Remarquons une propriété intéressante de ces intégrales pour le chargement 9.20. On a en coordonnées sphériques l'expression 9.21 du déplacement, tandis que la normale s'écrit simplement $\underline{n} = \underline{e}_r$. On souhaite écrire la moyenne de la déformation dans la base cartésienne. En utilisant le passage entre ces deux bases :

$$\begin{cases} \underline{e}_r = \sin\theta\cos\phi & \underline{e}_x + \sin\theta\sin\phi & \underline{e}_y + \cos\theta\underline{e}_z \\ \underline{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi & \underline{e}_x + \cos\theta\sin\phi & \underline{e}_y - \sin\theta\underline{e}_z \\ \underline{e}_\phi = -\sin\phi & \underline{e}_x + \cos\phi & \underline{e}_y \end{cases} \tag{9.27}$$

On peut ainsi écrire les composantes du déplacement et de la normale dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} u_x = U_r(r)\sin^2\theta\sin\theta\cos 2\phi\cos\phi + U_\theta(r)\sin\theta\cos^2\theta\cos 2\phi\cos\phi + U_\theta(r)\sin\theta\sin\phi\sin 2\phi \\ u_y = U_r(r)\sin^2\theta\sin\theta\cos 2\phi\sin\phi + U_\theta(r)\sin\theta\cos^2\theta\cos 2\phi\sin\phi - U_\theta(r)\sin\theta\cos\phi\sin 2\phi \\ u_z = U_r(r)\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\phi - U_\theta(r)\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\phi \end{cases} \tag{9.28}$$

$$\begin{cases} n_x = \sin\theta\cos\phi \\ n_y = \sin\theta\sin\phi \\ n_z = \cos\theta \end{cases} \tag{9.29}$$

Et ainsi calculer toutes les composantes du tenseur $\int \underline{u} \otimes \underline{n} dS$. Écrivons ces composantes pour une sphère S de rayon R :

$$\begin{cases} \int\limits_S u_x n_x dS = R^2\left[\frac{8\pi}{15}U_r(R) + \frac{4\pi}{5}U_\theta(R)\right] \\ \int\limits_S u_y n_y dS = -R^2\left[\frac{8\pi}{15}U_r(R) + \frac{4\pi}{5}U_\theta(R)\right] \end{cases} \tag{9.30}$$

Tandis que toutes les autres composantes sont nulles. Cela veut dire que la déformation moyenne sur chaque phase est elle aussi déviatorique, comme la déformation imposée, et qu'elle est proportionnelle à cette déformation imposée.

Il reste néanmoins à calculer l'ensemble des constantes qui se trouvent dans les équations 9.22, 9.23, 9.24, 9.25, dans le même esprit que ce qui est fait dans l'article de Christensen, par application des conditions de continuité en déplacement et en vecteur contrainte aux interfaces. Une fois l'ensemble des conditions rassemblées en un système linéaire, on trouve les 12 coefficients par inversion de la matrice de ce système.

Partie sphérique L'application à cette même géométrie d'un chargement sphérique est plus facile à traiter. On impose à l'infini un déplacement :

$$\underline{u}^s = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .\underline{x} \tag{9.31}$$

Le champ de déplacement solution est radial, et a dans chaque zone la forme :

$$u^s(r) = \frac{C}{3} + \frac{D}{r^2} \tag{9.32}$$

Nous avons cette fois 6 inconnues à déterminer ce qui se fait de la même façon par inversion de la matrice du système obtenu par l'application de la continuité des déplacements et du vecteur contrainte. Cette forme de déplacement rend également facile à calculer la moyenne de la déformation. On a pour une sphère S de rayon R :

$$\int\limits_S u_x^s n_x dS = \int\limits_S u_y^s n_y dS = \int\limits_S u_z^s n_z dS = \frac{4\pi}{3}R^2 u_r^s(R) \tag{9.33}$$

Si bien que la moyenne de la déformation sur toute les zones est également sphérique. Ceci nous prouve que le tenseur de localisation que nous cherchons est isotrope.

Écriture du tenseur de localisation en déformation Définissant les deux vecteurs de base de l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 isotropes :

$$\mathbb{J}_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{9.34}$$

pour la partie sphérique, et pour la partie déviatorique :

$$\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \tag{9.35}$$

où est apparue l'identité de l'ensemble des tenseurs d'ordre quatre à symétrie mineure :

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}\right) \tag{9.36}$$

on peut écrire notre tenseur de localisation en déformation dilué de la façon suivante pour chaque zone (l'indice i prenant les valeurs a, p et t) :

$$< \mathbb{A}'_{dil} >_{\Omega'^i_\alpha} = r^i_\alpha \mathbb{J} + s^i_\alpha \mathbb{K} \tag{9.37}$$

Où r^i et s^i sont dans chaque zone identifiés en utilisant les solutions que l'on vient de détailler :

$$\begin{aligned}
r^a_\alpha &= 3\frac{u^s_r(R(1-\alpha))}{R(1-\alpha)} \\
s^a_\alpha &= \frac{\frac{2}{5}U_r(R(1-\alpha)) + \frac{3}{5}U_\theta(R(1-\alpha))}{R_p(1-\alpha)} \\
r^p_\alpha &= 3\frac{u^s_r(R) - (1-\alpha)^2 u^s_r(R(1-\alpha))}{R(1-(1-\alpha)^3)} \\
s^p_\alpha &= \frac{2}{5}\frac{U_r(R) - (1-\alpha)^2 U_r(R(1-\alpha))}{R(1-(1-\alpha)^3)} + \frac{3}{5}\frac{U_\theta(R) - (1-\alpha)^2 U_\theta(R(1-\alpha))}{R(1-(1-\alpha)^3)} \\
r^t_\alpha &= 3\frac{(R+l_c)^2 u^s_r(R+l_c) - R^2 u^s_r(R)}{(R+l_c)^3 - R^3} \\
s^t_\alpha &= \frac{2}{5}\frac{(R+l_c)^2 U_r(R/l_c) - R^2 U_r(R)}{(R+l_c)^3 - R^3} + \frac{3}{5}\frac{(R+l_c)^2 U_\theta(R+l_c) - R^2 U_\theta(R)}{(R+l_c)^3 - R^3}
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Chargement pression, calcul des tenseurs de localisation en pression Le chargement pression dans les zones Ω'^b_α ou Ω'^t_α induit également un déplacement radial. On résout de la même façon que dans le cas d'un chargement extérieur sphérique. La matrice à inverser pour déterminer les coefficients du déplacement dans chaque zone est la même, seul le second membre du système change. Les moyennes des déformations induites sont également sphériques, si bien qu'on obtient un tenseur de localisation d'ordre deux en pression sphérique. On appelle u_p la solution de ce problème où une pression identique règne dans les deux zones. Comme les deux zones sont à la même pression, on détermine en fait à chaque fois la somme de deux tenseurs :

$$\begin{aligned}
< \underline{\underline{A}}'^p_{dil} + \underline{\underline{A}}'^t_{dil} >_{\Omega'^b_\alpha} &= \frac{u_p(R) - (1-\alpha)^2 u_p(R(1-\alpha))}{R(1-(1-\alpha)^3)}\underline{\underline{\mathbb{1}}} \\
< \underline{\underline{A}}'^p_{dil} + \underline{\underline{A}}'^t_{dil} >_{\Omega'^t_\alpha} &= \frac{(R+l_c)^2 u_p(R+l_c) - R^2 u_p(R)}{(R+l_c)^3 - R^3}\underline{\underline{\mathbb{1}}}
\end{aligned} \tag{9.39}$$

Nous avons ainsi déterminé, dans ce cadre dilué, l'ensemble des tenseurs de localisation dont nous avons besoin pour les sites de *Type I*.

9.3.1.2 Sites de type II

Pour les sites de *Type II*, qui sont donc des pores de forme non encore spécifiée, nous souhaitons privilégier une approche s'inspirant directement de l'esprit « Eshelby ». Ces sites sont constitués :

- d'une cavité sphérique, représentant l'espace laissé vide (du point de vue d'une description du milieu poreux où le chargement interne est la pression) par la décohésion du granulat l'occupant initialement ;
- de fissures dans la pâte de ciment, apparues à cause de la pression trop élevée dans le pore lors de l'attaque chimique.

Avant de donner une expression concrète aux tenseurs de localisation pour différents types de fissures, nous faisons quelques hypothèses qui restreignent les possibilités, que l'on retrouve également dans le charpitre 7.

Forme des fissures Nous supposons que les fissures sont chacune de forme penny-shaped (PS), centrées sur le centre de la cavité sphérique. Chaque fissure est de cette façon caractérisée par un seul paramètre : son diamètre extérieur (x), ce qui facilite considérablement la gestion des données caractérisant l'état de fissuration du matériau.

Orientation des fissures Il est donc théoriquement possible autour d'un site donné d'avoir N fissures PS de tailles x_i, $i \in 1 : N$, d'orientation caractérisée par celle de leur normale, repérée par les deux angles θ_i, ϕ_i utilisés en coordonnées sphériques. Nous souhaitons néanmoins avoir un nombre pas trop important de fissures à gérer. Pour ceci, nous faisons l'approximation suivante, qui nous semble tout à fait justifiée par les calculs *2d* que nous avons présentés au chapitre 4 et transposés au cas *3d* au chapitre 7 : une distribution isotrope des orientations de fissures peut être approchée, du point de vue des propriétés homogénéisées obtenues, par deux orientations orthogonales en deux dimensions, et trois orientations en trois dimensions. Cela nous conduit à supposer que les fissures dans la pâte de ciment n'ont que trois orientations orthogonales possibles, comme représenté sur la Fig. 9.3.

Utilisation d'une superposition de problèmes plus simples La dernière simplification est une décomposition de notre motif. Plutôt que de considérer une cavité unique qui a une forme complexe, nous allons la décomposer en plusieurs cavités simples, comme fait au chapitre 7. La validation numérique avec des calculs éléments finis de ces hypothèses est détaillée dans le chapitre 4 qui présente ces simulations. Nous rappelons ici simplement les conclusions que nous en tirons. Chaque motif dont le domaine était jusqu'ici dénommé Ω^v_β est donc maintenant constitué :

- d'une cavité sphérique occupant le domaine occupé initialement par le grain sain, donc de rayon R. On associe à cette cavité le tenseur d'Eshelby calculé pour un matériau extérieur égal au matériau pâte de ciment et une inclusion sphérique : $\mathbb{S}_c^{sph}$, et la fraction volumique initiale de la famille de grains considérée : f_i
- de trois « grandes fissures » ayant chacune pour normale l'une des trois directions définissant notre repère cartésien. Ce sont des fissures penny-shaped représentées par des ellipsoïdes aplatis de demi-grands axes x_1, x_2, x_3, et de rapport de forme X^f. Le tenseur d'Eshelby associé est celui d'un ellipsoïde aplati. Il ne dépend que du rapport de forme de l'ellipsoïde, X_f, de l'orientation de l'ellipsoïde, et du matériau extérieur que l'on considère (par son coefficient de Poisson uniquement lorsqu'il est isotrope, ce qui est le cas ici), toujours la pâte de ciment. On appelle ces tenseurs d'Eshelby pour chacune des trois orientations $\mathbb{S}_c^{f_1}, \mathbb{S}_c^{f_2}, \mathbb{S}_c^{f_3}$.

  Un point plus crucial est le choix de la fraction volumique à affecter à cette fissure. Elle est liée au nombre de pores. Il faut qu'il y ait une fissure dans chaque direction par pore.

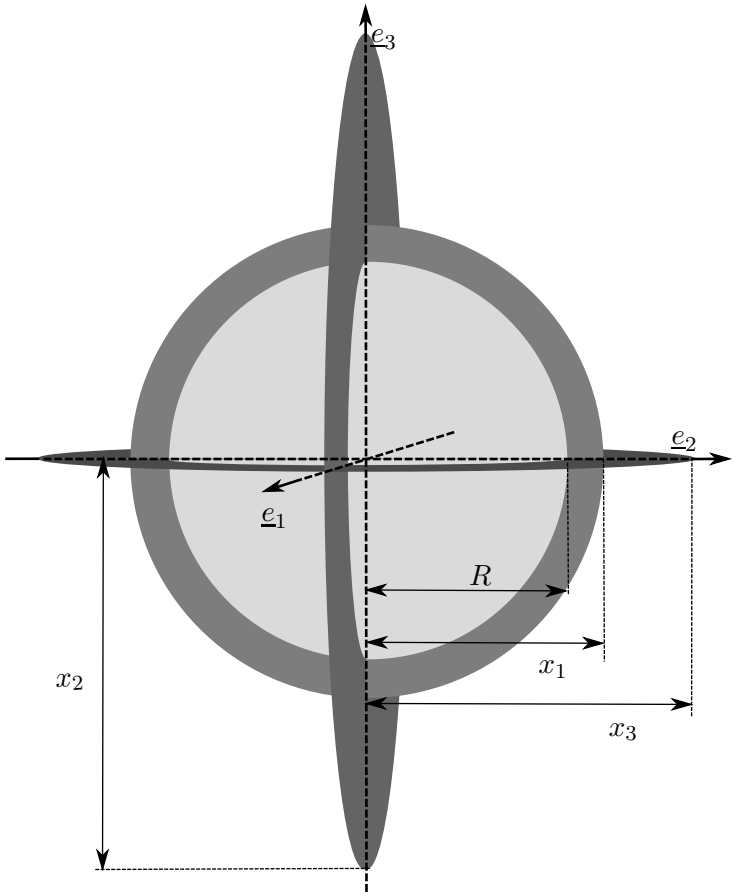

FIGURE 9.3 – Cavité entourée de trois fissures de forme penny-shaped, et orthogonales entre elles.

L'égalité du nombre de pores et de fissures dans chaque direction donne la fraction volumique de fissures dans chaque direction, pour la famille de pores i ($\tau = 1, 2, 3$ représentant les directions) :

$$\frac{f_i}{\frac{4}{3}\pi R_i^3} = \frac{f_{\tau,i}^f}{\frac{4}{3}\pi X^f x_{\tau,i}^3} \tag{9.40}$$

On obtient :

$$f_{\tau,i}^f = f_i \frac{X^f x_{\tau,i}^3}{R^3} \tag{9.41}$$

– de trois groupes de « petites fissures », qui représentent la déformation introduite artificiellement lorsqu'on déforme la grande fissure dans la partie où elle est en intersection avec le pore d'origine. Cette déformation étant en quelque sorte comptée deux fois, on doit trouver un moyen de la soustraire. On fait ceci au moyen d'une collection de petites fissures associées à chaque grande fissure. Pourquoi n'en n'utilise-t-on pas qu'une seule ? Les résultats en seraient moins bons comme on l'a observé sur des calculs *2d*. Nos petites fissures sont des ellipsoïdes aplatis de même orientation que la grande fissure associée. Leur rapport de forme est le même, X^f. Leurs deux demi-grands axes sont égaux à R. Le demi-petit axe est donc de taille $X^f R$. On a observé que les meilleurs résultats sont obtenus lorsqu'on choisit une fraction volumique de ces fissures non pas de telle façon qu'elle soient en nombre égal aux grandes fissures, mais en faisant en sorte que le produit de leur nombre par leur demi-petit axe soit égal au produit du nombre de grande fissures par le demi-petit axe des

grands fissures. Appelant la fraction volumique de petites fissures f^c, cela s'écrit :

$$\frac{f^c_{\tau,i}}{\frac{4}{3}\pi X^f R_i^3} X^f R_i = \frac{f^f_{\tau,i}}{\frac{4}{3}\pi X^f x_{\tau,i}^3} X^f x_{\tau,i} \tag{9.42}$$

Soit :

$$f^c_{\tau,i} = f^f_{\tau,i} \frac{R_i^2}{x_{\tau,i}^2} = f_i X^f \frac{x_{\tau,i}}{R_i} \tag{9.43}$$

Pour ce qui est des tenseurs d'Eshelby de ces fissures, ce sont les mêmes que ceux des grandes fissures, puisque le rapport de forme, l'orientation et le matériau extérieur sont identiques.

Ces choix de modélisation qui peuvent sembler surprenants sont ceux qui ont donné les meilleurs résultats dans une situation analogue en *2d*, nous les avons donc étendus au cas *3d* traité ici.

Écriture concrète des tenseurs d'Eshelby Nous allons détailler l'écriture de ces tenseurs isotrope transverses. Donnons tout d'abord l'écriture des six composantes indépendantes pour un ellipsoïde aplati dans la direction 3 de rapport d'aspect x (c'est-à-dire rapport entre le petit axe et les deux grands axes qui sont égaux). Définissant d'abord le terme :

$$b(x,\nu^c) = (\nu^c - 1)(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2} \tag{9.44}$$

On peut écrire ainsi les six composantes du tenseur d'Eshelby.

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{1111} &= \frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{x}{16}\Big[(19-8\nu^c)x\sqrt{1-x^2} + (8\nu^c-13)\arccos(x) \\
&\quad + (4-8\nu^c)\arccos(x)x^2 + (8\nu^c-10)x^3\sqrt{(1-x^2)}\Big] \\
\mathbb{S}_{1122} &= -\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{x}{16}\Big[-(1+8\nu^c)x\sqrt{1-x^2} + (8\nu^c-1)\arccos(x) \\
&\quad + (4-8\nu^c)\arccos(x)x^2 + (8\nu^c-2)x^3\sqrt{1-x^2}\Big] \\
\mathbb{S}_{3333} &= -\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{1}{2}\Big[(2-2\nu^c)\sqrt{1-x^2} + (2\nu^c-1)x\arccos(x) \\
&\quad +(2\nu^c-5)x^2\sqrt{1-x^2} + (4-2\nu^c)x^3\arccos(x)\Big] \\
\mathbb{S}_{1133} &= -\frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{x}{4}\Big[-2(1+\nu^c)\arccos(x)x^2 + (2\nu^c-1)\arccos(x) \\
&\quad +(3-2\nu^c)x\sqrt{1-x^2} + 2\nu^c x^3\sqrt{1-x^2}\Big] \\
\mathbb{S}_{3311} &= \frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{1}{4}\Big[2(1-2\nu^c)\arccos(x)x^3 + (1+4\nu^c)x\arccos(x) \\
&\quad -(3-4\nu^c)x^2\sqrt{1-x^2} - 4\nu^c\sqrt{1-x^2}\Big] \\
\mathbb{S}_{3131} &= \frac{1}{b(x,\nu^c)}\frac{1}{4}\Big[(2-\nu^c)x\arccos(x) + (2\nu^c-2)\sqrt{1-x^2} \\
&\quad +(1+\nu^c)x^3\arccos(x) - 3\nu^c x^2\sqrt{1-x^2} + (\nu^c-1)x^4\sqrt{1-x^2}\Big]
\end{aligned} \tag{9.45}$$

Les autres termes étant trouvés par symétrie, ce tenseur étant isotrope transverse d'axe 3.

Écriture des tenseurs de localisation dilués découlant de cette description On a ainsi simplement, par adaptation de l'équation 3.77 :

$$< \mathbb{A}^{dil} >_{\Omega_\beta^v} = \frac{1}{f_i} \left(f_i \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{sph} \right]^{-1} + \sum_{\tau=1}^{3} \left(f_{\tau,i}^f - f_{\tau,i}^c \right) \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_c^{f_\tau} \right]^{-1} \right) \tag{9.46}$$

On pourrait penser que comme les fractions volumiques sont beaucoup plus petites que celle de la cavité sphérique, la somme ne contribue que très peu, mais ce n'est pas le cas car certains termes du tenseur d'Eshelby sont singuliers lorsque le rapport d'aspect tend vers l'infini, tandis que la fraction volumique des fissures est proportionnelle à leur rapport d'aspect. C'est le produit de la fraction volumique par ces termes qui est fini, et donne la contribution dont nous avons besoin.

9.3.1.3 Conclusion sur l'approximation diluée des tenseurs de localisation

On a donc fourni une approximation pour les tenseurs de localisation mentionnés dans les équations 9.17, 9.18, 9.19, ce qui complète l'écriture de nos propriétés homogénéisées avec l'estimateur dilué.

9.3.2 Un modèle micromécanique plus élaboré : estimateur *IDD*

Dans la section précédente on a posé les bases d'une expression de nos tenseurs de localisation par un estimateur de micromécanique dilué. Nous souhaitons étendre cette idée à un estimateur plus évolué : l'estimateur *IDD*, que nous avons présenté au § 3.6.8 et qui a été proposé par Zheng et Du [28, 7]. Cet estimateur nous a semblé très pratique pour ce problème puisqu'il permet de prendre facilement en compte la diversité des types d'inclusions, des formes de pores, et leur distribution dans l'espace. Cet estimateur se réduit dans les cas simples à des estimateurs beaucoup plus classiques : l'estimateur à deux phases, lorsqu'on n'a qu'un seul type d'inclusion ellipsoïdale, l'estimateur de Mori-Tanaka lorsque les inclusions sont de forme sphérique. Nous avons de plus démontré son efficacité en *2d* par comparaison avec des calculs par éléments finis sur des volumes générés par addition séquentielle aléatoire. Ce type de volume est certes très particulier puisqu'en interdisant l'intersection des motifs, l'algorithme force une sorte de distance de sécurité entre les motifs. La notion de percolation des motifs en particulier est interdite. C'est probablement pour cela que les approches type *IDD* ont donné de bien meilleurs résultats que les approches de type autocohérent.

Construisons maintenant les expressions de l'estimateur *IDD* dont nous avons besoin comme une correction de l'estimateur dilué.

9.3.2.1 Terme correctif de l'estimateur *IDD*

Tenseur de localisation en déformation Pour obtenir les tenseurs de localisation en déformation dans l'approche *IDD*, il est nécessaire de modifier les tenseurs de localisation en déformation de l'approche diluée de la façon suivante pour un domaine quelconque i dans le cas où toutes les inclusions k sont des ellipsoïdes, auxquelles on associe un tenseur de Hill $\mathbb{P}_k^0$ (le tenseur de Hill $\mathbb{P}_{Dk}^0$ étant lié à la distribution spatiale des inclusions, non à leur forme) :

$$\mathbb{A}_i^{IDD} = \mathbb{A}_i^{dil} : \left[\mathbb{I} - \sum_k f_k \mathbb{P}_{Dk}^0 : \left(\left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right]^{-1} + \mathbb{P}_k^0 \right)^{-1} \right]^{-1} \tag{9.47}$$

Où le terme correctif est commun à toutes les inclusions. L'écriture *IDD* de nos tenseurs de localisation en déformation passe donc par l'écriture de ce terme correctif que l'on appelle $\mathbb{T}$ et

plus précisément la somme :

$$\mathbb{W} = \sum_k f_k \mathbb{P}^0_{Dk} : \left(\left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right]^{-1} + \mathbb{P}^0_k \right)^{-1} \tag{9.48}$$

Il est nécessaire d'adapter cette description puisque certains de nos domaines ne sont pas ellipsoïdaux, donc pas réductibles à un tenseur de Hill. C'est le cas en particulier pour nos *zones attaquées* dans le granulat, et de l'*ITZ*. Il faut pour cela remonter à l'esprit de la construction de ce terme correctif et réécrire ce terme correctif en fonction des tenseurs de localisation dilués :

$$\mathbb{A}^{dil}_i = \left(\mathbb{I} + \mathbb{P}^0_i : \left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right] \right)^{-1} = \left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right]^{-1} : \left(\left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right]^{-1} + \mathbb{P}^0_i \right)^{-1} \tag{9.49}$$

On a alors :

$$\mathbb{W} = \sum_k f_k \mathbb{P}^0_{Dk} : \left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right] : \mathbb{A}^{dil}_k \tag{9.50}$$

On entrevoit alors une possibilité de s'en sortir. Si les inclusions ne sont pas des ellipsoïdes mais qu'on connaît leur tenseur de localisation dilué, et qu'on connaît par ailleurs un tenseur de Hill qui peut approcher leur distribution dans l'espace, on peut écrire tous les termes de cette somme. Pour ce qui est de la distribution spatiale, dans l'étude présente on ne souhaite pas particulièrement introduire de raffinements, on va donc supposer qu'elle est sphérique pour toutes les composantes de notre béton, ce qui est susceptible d'être assez faux si par exemple les granulats sont très aplatis. La prise en compte de grains aplatis se ferait donc en partie par ce biais si on voulait enrichir le modèle de cette possibilité. On a donc :

$$\mathbb{W} = \mathbb{S}^0_{sph} : \sum_k f_k \left(\mathbb{C}^0 \right)^{-1} : \left[\mathbb{C}^k - \mathbb{C}^0 \right] : \mathbb{A}^{dil}_k \tag{9.51}$$

Il est donc, sous cette forme, très facile de calculer notre terme correctif à partir du travail fait dans la partie sur les tenseurs de localisation dilués.

Tenseurs de localisation en pression Nous n'avons pas fait de modification de nos tenseurs de localisation dilués en pression semblable à ce qu'on a fait pour les tenseurs de localisation en déformation, la démarche précédente ne nous semblant pas directement transposable.

On dispose donc de l'ensemble des outils pour calculer les propriétés homogénéisées de notre matériau. Nous expliquons maintenant comment nous procédons pour vérifier si, à chargement et état de fissuration donnés, il y a interpénétration des surfaces fissurées.

9.4 Critères d'interpénétration des surfaces fissurées

Notre critère de fissuration est énergétique, et en dehors de la fissuration, nous ne prenons en compte aucun autre phénomène non linéaire. En particulier, le contact entre les surfaces de fissures n'est pas pris en compte. Pour compenser ce défaut de modélisation, nous avons pris le parti de ne pas autoriser les configurations de fissuration impliquant une interpénétration des surfaces de fissures. Il est donc important d'être capable de savoir s'il y a interpénétration pour un état de fissuration donné, afin de pouvoir incorporer cette donnée comme contrainte lors du calcul de la fissuration. L'interpénétration est susceptible de se produire entre les lèvres d'une fissure, ou entre le granulat et sa cavité.

9.4.1 Lèvres d'une fissure

Il nous faut calculer la déformation des fissures. La variation de volume d'une fissure peut être exprimée d'après la forme classique de la loi de comportement poromécanique. La trace de la déformation d'une fissure caractérisée par son module de Biot M et son coefficient de Biot $\underline{\underline{B}}$ s'écrit :

$$\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varphi - f}{f} = \frac{\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + Mp}{f} \tag{9.52}$$

Or, si l'on appelle $\mathbb{A}^{IDD}$ le tenseur de localisation sur la fissure calculée par le schéma *IDD*, on a :

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}} = f\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}^{IDD} \\ M = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{S}^0 : \left(\underline{\underline{B}} - f\underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) = f\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{S}^0 : \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \left(\mathbb{A}^{IDD} - \mathbb{I}\right) \end{cases} \tag{9.53}$$

On obtient ainsi l'expression suivante pour la trace des déformations de la fissure :

$$\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \left[\mathbb{A}^{IDD} : \underline{\underline{E}} + \mathbb{S}^0 : \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \left(\mathbb{A}^{IDD} - \mathbb{I}\right) p\right] \tag{9.54}$$

On reconstruit l'expression de la déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{A}^{IDD} : \underline{\underline{E}} + \mathbb{S}^0 : \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \left(\mathbb{A}^{IDD} - \mathbb{I}\right) p \tag{9.55}$$

Ce qui n'est pas une généralisation approximative mais est rigoureux, comme on le voit si l'on reprend la démarche microporomécanique d'expression du module de Biot en fonction du tenseur de localisation.

Les valeurs des composantes de ce tenseur sont très grandes, car les dimensions non déformées des fissures sont très petites. Seul nous intéresse le signe de la composante du tenseur correspondant à la normale de la fissure ($\underline{n}.\underline{\underline{\varepsilon}}.\underline{n}$). S'il est négatif, il y a interpénétration des lèvres de la fissure sous le chargement considéré.

9.4.2 Grain et cavité

9.4.2.1 Cavité non fissurée

Commençons par le cas simple d'une cavité non fissurée (Fig. 9.4). Il s'agit alors simplement de comparer la déformation du granulat à celle de la cavité pour déterminer s'il y a incompatibilité. La déformation du granulat est isotrope, puisque le seul chargement qu'il voit est la pression :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^a = -\frac{p}{K_a}\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{9.56}$$

Les déformations de la cavité sphérique sont facilement calculées de la même façon que celles des fissures dans la section précédente. On a donc :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{sph} = \mathbb{A}^{idd,sph} : \underline{\underline{E}} + \mathbb{S}^0 : \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \left(\mathbb{A}^{idd,sph} - \mathbb{I}\right) p \tag{9.57}$$

On considère donc qu'il y a interpénétration si $\exists\ i,\ \varepsilon_i^a > \varepsilon_i^{sph}$. Cela ne peut pas se produire s'il n'y a pas de chargement extérieur, comme montré en b) sur la Fig. 9.4, mais peut arriver si le matériau est fortement compressé dans une direction, rendant la cavité ellipsoïdale, tandis que le granulat ne se déforme que de manière isotrope, comme on le voit sur le schéma c) de la Fig. 9.4.

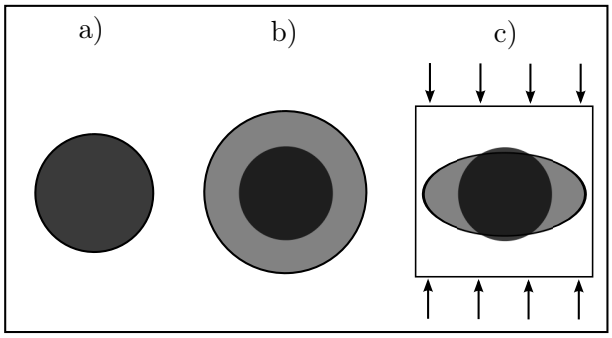

FIGURE 9.4 – Interpénétration d'un granulat et d'une cavité non fissurée. a) cavité et grain en configuration relâchée. b) cavité et grains sous pression sans chargement extérieur. c) cavité et grain sous pression, chargement extérieur de compression uniaxiale.

9.4.2.2 Cavité fissurée

Pour le cas où des fissures se trouvent dans la pâte de ciment autour de la cavité, il est nécessaire de prendre en compte leur déformation dans l'estimation de celle de la cavité. Rappelons la méthode superposition que nous avons proposée pour le calcul de la déformation de l'ensemble de la cavité (partie sphérique et fissures) à partir de trous ellipsoïdaux seulement. Nous avons considéré, comme on le voit sur la Fig. 9.5, que la cavité complexe peut être remplacée par un assemblage d'une sphère et d'une collection de fissures. Comme expliqué au § 9.3.1.2, pour chaque cavité d'un famille de grains de rayon R^i et fraction volumique R^i, avec des fissures de tailles $x_{\tau,i}$ dans la direction $\tau \in \{1,2,3\}$, la fraction volumique f^f de grandes fissures de rapport d'aspect X que nous avons choisie s'écrit :

$$f^f_{\tau,i} = f^i X \frac{x^3_{\tau,i}}{(R^i)^3} \tag{9.58}$$

Tandis que la fraction volumique de petites fissures qui servent, intuitivement, à corriger l'estimation de la déformation qui est en quelque sorte comptée deux fois autrement, s'écrit :

$$f^c_{\tau,i} = f^i X \frac{x_{\tau,i}}{R^i} \tag{9.59}$$

Ainsi, l'estimation de la déformation de la cavité en fonction des déformations sur chacun de ces éléments peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{cav}_i = \underline{\underline{\varepsilon}}^{sph}_i + \sum_{\tau=1..3} \frac{f^f_{\tau,i} - f^c_{\tau,i}}{f^i} \underline{\underline{\varepsilon}}^{fiss}_{\tau,i} \tag{9.60}$$

Où la déformation de la sphère est calculée par l'équation 9.57, et les déformations des fissures sont calculées par l'équation 9.55. Il est maintenant nécessaire d'adapter ceci au calcul de la partie centrale de la cavité, qui est susceptible de s'interpénétrer avec le granulat, sans prendre en compte la déformation due aux parties de la fissures qui ne sont pas en intersection avec la partie sphérique de la cavité. Pour cela, nous avons imaginé de corriger l'estimation précédente, en enlevant la portion de la déformation qui est due aux extrémités des grandes fissures. Un calcul simple permet de montrer que le volume de l'intersection d'une fissure ellipsoïdale de double demi-grand axe $x_{\tau,i}$ et de rapport d'aspect X avec un cylindre de rayon $R^i \leq x_{\tau,i}$ (dont les génératrices sont parallèles à la normale de la fissure) vaut :

$$\frac{4\pi X x_{\tau,i}}{3} \left(1 - \left[1 - \frac{R^i}{x_{\tau,i}}\right]^2\right)^{3/2} \tag{9.61}$$

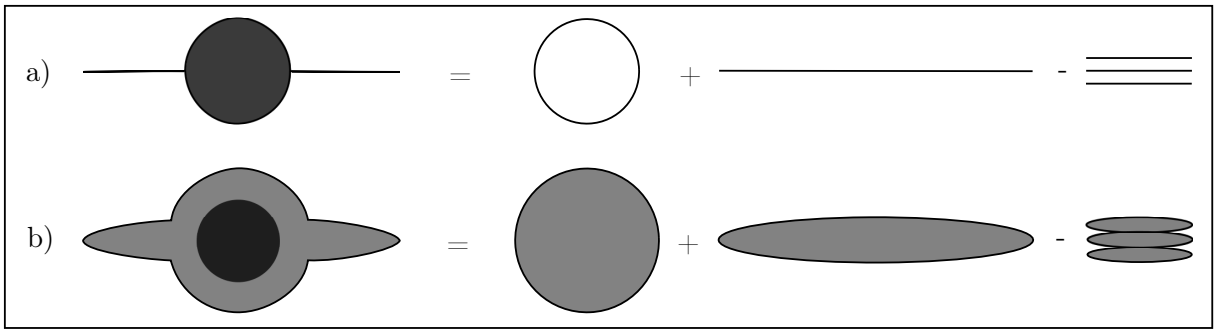

FIGURE 9.5 – Schéma de superposition utilisé pour représenter les cavités à partir d'ellipsoïdes. a) : superposition en configuration relâchée. b) superposition sous pression.

Le ratio du volume de l'intersection entre la fissure et le cylindre et du volume de la fissure, que l'on appelle $\eta_{\tau,i}$, s'écrit donc :

$$\eta_{\tau,i} = \left(1 - \left[1 - \frac{R^i}{x_{\tau,i}}\right]^2\right)^{3/2} \tag{9.62}$$

Ce qui nous permet d'écrire l'estimation de la déformation de la partie sphérique de la cavité $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{cav,sph}$ de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{cav,sph} = \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{sph} + \sum_{\tau=1..3} \frac{\eta_{\tau,i} f_{\tau,i}^f - f_{\tau,i}^c}{f^i} \underline{\underline{\varepsilon}}_{\tau,i}^{fiss} \tag{9.63}$$

Cette expression se simplifie pour donner :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{cav,sph} = \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{sph} + X \sum_{\tau=1..3} \left(\left[2\frac{x_{\tau,i}^3}{(R^i)^3} - 1 \right]^{3/2} - \frac{x_{\tau,i}}{R^i} \right) \underline{\underline{\varepsilon}}_{\tau,i}^{fiss} \tag{9.64}$$

On a représenté sur la Fig. 9.6 différentes situations avec interpénétration ou non. Sur le schéma a), on représente l'ensemble en configuration relâchée. Sur le schéma b), il n'y a pas de chargement extérieur, donc pas de risque d'interpénétration quel que soit l'état de fissuration. Sur le schéma c), on a une forte compression latérale qui entraîne l'interpénétration du grain et de la cavité sans interpénétration des lèvres de la fissure. Sur le schéma d) en revanche, ce sont les lèvres de la fissure qui sont en interpénétration, ce dont on a parlé au paragraphe 9.4.1.

9.5 Conclusion

Ce chapitre nous a donc permis de terminer l'écriture des propriétés homogénéisées. Cette écriture s'est faite en plusieurs étapes. Au chapitre 3, nous avons présenté un certain nombre d'estimateurs de micromécanique et avons choisi d'utiliser l'estimateur *IDD*. Au chapitre 4, ce choix a été validé par des calculs par éléments finis sur des matériaux élastiques troués *2d*. Au chapitre 6, nous avons déterminé grâce à l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux l'expression théorique des propriétés homogénéisées recherchées en fonction de tenseurs de localisation. Ce chapitre, enfin, nous a permis d'adapter ces expressions au cas de l'alcali-réaction, en prenant en compte les hypothèses de modélisation exposées au chapitre 8, et de calculer les tenseurs de localisation.

Nous allons maintenant terminer l'écriture de l'énergie potentielle en l'adaptant à notre cas et en donnant ses expressions selon le type de chargement extérieur utilisé.

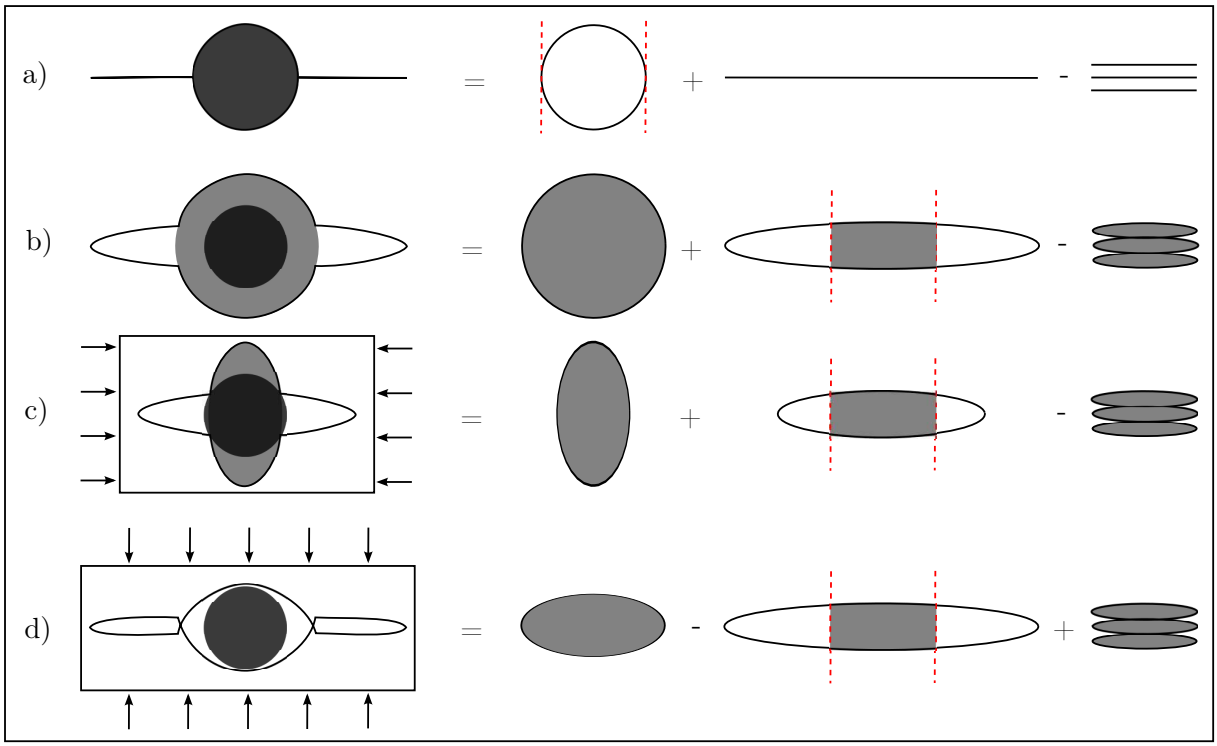

FIGURE 9.6 – Interpénétration d'un granulat et d'une cavité fissurée. a) : configuration relâchée. b) : configuration déformée sous pression de gel, sans chargement extérieur. c) : configuration déformée sons compression uniaxiale entraînant l'interpénétration du grain et de sa cavité. d) configuration déformée sous compression uniaxiale entraînant l'interpénétration des lèves de la fissure.

Chapitre 10

Énergie d'un béton atteint de la réaction alcali-silice

Sommaire

10.1 Introduction **230**
10.2 Rappel des expressions de l'énergie potentielle **230**
10.2.1 Rappel sur la morphologie considérée 230
10.2.2 Expressions des énergies 230
10.3 Calcul des pressions et énergie **232**
10.3.1 Site de *Type I* 233
10.3.2 Site de *Type II* 233
10.3.3 Utilisation du calcul des pressions 234
10.3.4 Énergie totale 234
10.4 Élasticité non drainée, précontrainte chimique **235**
10.5 Calcul des contraintes et des déformations macroscopiques pour les différents cas de chargement **235**
10.5.1 Déformation imposée 236
10.5.2 Contrainte imposée 236
10.5.3 Chargement mixte 236
10.5.4 Restriction du gonflement par des anneaux 237
10.5.5 Conclusion sur la détermination des contraintes et des déformations . . 238
10.6 Conclusion **238**

10.1 Introduction

Ce chapitre est le pendant du chapitre précédent, pour ce qui est des énergies. Nous allons reprendre les expressions générales écrites dans le chapitre 6, et les adapter au cas précis de milieu poreux que l'on considère ici. Nous souhaitons aussi, comme nous l'avons fait dans le chapitre 7, écrire les énergies en fonction de nos véritables paramètres de chargement que sont les degrés d'attaque, et non en fonction des pressions dans les pores qui ne sont que des intermédiaires de calcul très pratiques pour écrire l'énergie élastique du squelette. Nous détaillerons donc, en fonction du type de chargement extérieur, le calcul des pressions dans les pores, et le calcul des contraintes et des déformations.

10.2 Rappel des expressions de l'énergie potentielle

L'écriture de l'énergie potentielle dépend du chargement imposé. Nous rappelons dans cette partie un certain nombre d'écritures utiles.

10.2.1 Rappel sur la morphologie considérée

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 9 consacré au détail du calcul des propriétés homogénéisées du béton atteint de RAG, les familles de granulats et leur voisinage ont été classés en deux types. Les sites de *Type I* ont subi une attaque sans que celle-ci n'ait encore provoqué la décohésion entre les grains et la pâte de ciment, tandis que les sites de *Type II* ont subi cette décohésion et sont maintenant susceptibles d'apparition de fissure dans la pâte de ciment environnante. Les couplages entre les différents sites ont été limités, puisque l'on ne prend pas en compte la déformation induite dans la porosité d'un site lorsqu'une pression est présente dans un autre site. On écrit ici les énergies sans distinguer explicitement les deux types de sites, qui sont au nombre de N^s. Il est en conséquence assez facile d'écrire les énergies potentielles et élastiques de notre squelette.

10.2.2 Expressions des énergies

Les énergies potentielles sont propres à chaque mode de chargement. Nous donnons d'abord l'énergie élastique, qui elle est valable quel que soit le chargement, mais dont les écritures peuvent être diverses en fonction des variables que l'on choisit d'utiliser. On a omis les primes utilisés dans les chapitres 6 et 9 pour matérialiser la différence entre les coefficients déterminés depuis les expressions de l'énergie du solide élastique troué (sans prime) et les coefficients déterminés à partir de l'expression de l'énergie du solide poreux (avec prime).

10.2.2.1 Énergie élastique et loi de comportement

On donne d'abord l'énergie élastique, écrite en fonction des variables $\left(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^s}\right)$. Dans cette écriture les termes de couplage entre les déformations imposées et les pressions imposées dans les espaces poreux ne sont pas visibles :

$$E^{el}_{ske}\left(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^s}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{2}\sum_{i}^{N^s} \left(p^i\right)^2 M^i \tag{10.1}$$

Pour écrire cette énergie élastique en fonction d'autres variables (contrainte macroscopique, variation du volume poreux), on utilise simplement la loi de comportement macroscopique du milieu poreux, que l'on a établie dans la partie dédiée aux énergies (chapitre 6) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{i}^{N^s} p^i \underline{\underline{B}}^i \\ (\phi - f)^i = \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i \end{cases} \tag{10.2}$$

10.2.2.2 Énergie potentielle à déformation et pressions imposées

L'énergie potentielle à déformation macroscopique et pressions imposées s'obtient à partir de l'énergie élastique par la formule suivante, où le second terme est le travail des efforts de pression (on repère les variables imposées par un indice $_d$). La variation de volume dépend des variables imposées :

$$E_{ske}^{pot}\left(\underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) = E_{el}\left(\underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) - \sum_{i=1}^{N^s} p_d^i \left(\phi - f\right)^i \left(\underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \tag{10.3}$$

En utilisant la loi de comportement, cela nous donne :

$$E_{ske}^{pot}\left(\underline{\underline{E}}_d, (p^i)_{i=1:N^s}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{E}}_d : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}}_d - \underline{\underline{E}}_d : \sum_{i}^{N^s} p_d^i \underline{\underline{B}}^i - \frac{1}{2}\sum_{i}^{N^s} \left(p_d^i\right)^2 M^i \tag{10.4}$$

C'est cette énergie potentielle que nous utiliserons dans notre critère de rupture en cas de déformation et pression imposées. Cependant il est possible d'imposer aussi la contrainte, comme nous le voyons dans la section suivante.

10.2.2.3 Énergie potentielle à contrainte et pressions imposées

L'énergie potentielle à contrainte macroscopique et pressions imposées s'obtient à partir de l'énergie potentielle à déformation et pression imposées par soustraction des travaux des efforts imposés, ou d'un point de vue plus mathématique, par transformée de Legendre. On note $\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right)$ la déformation moyenne liée par la loi de comportement à une contrainte et des pressions imposées.

$$\begin{aligned} E_{ske}^{pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) &= E_{el,ske}\left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right), (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \\ &- \sum_{i=1}^{N^s} p_d^i \left(\psi - f\right)^i \left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right), (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \\ &- \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) : \underline{\underline{\Sigma}}_d \end{aligned} \tag{10.5}$$

10.2.2.4 Énergie potentielle à chargement extérieur mixte et pression imposée

Il est enfin possible de charger macroscopiquement le matériau poreux par des conditions aux limites mixtes, en imposant dans certaines directions des déformations, dans d'autres des contraintes. On note alors $\underline{\underline{\Sigma}}_d$ la contrainte imposée, $\underline{\underline{E}}_d$ la déformation imposée, et ce sont deux tenseurs orthogonaux (leur produit doublement contracté est nul). On peut cependant calculer la déformation dans toutes les directions en fonction des contraintes, des déformations et des pressions imposées, ce que l'on écrit comme précédemment $\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right)$. L'expression du paragraphe précédent est alors toujours valide :

$$\begin{aligned} E_{ske}^{pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) &= E_{ske}^{el}\left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right), (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \\ &- \sum_{i=1}^{N^s} p_d^i \left(\psi - f\right)^i \left(\underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right), (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) \\ &- \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (p_d^i)_{i=1:N^s}\right) : \underline{\underline{\Sigma}}_d \end{aligned} \tag{10.6}$$

La méthode de calcul du tenseur complet des déformations macroscopiques en fonction des contraintes et déformations imposées sera abordée au § 10.5.

Abordons la question du calcul de la pression dans le cas précis de l'alcali-réaction.

10.3 Calcul des pressions et énergie

Dans notre section précédente, nous donnons l'énergie élastique et les différentes énergies potentielles pour le squelette du béton attaqué par la RAG. Cela suppose que nous connaissons le chargement extérieur ainsi que les pressions dans les pores. Cependant, lors de la RAG, les pressions sont le résultat de l'accumulation de gel produit par l'attaque. Nous devons donc être capables de les calculer en fonction de l'état d'avancement de l'attaque. Nous avons déjà fait ce travail dans notre chapitre illustrant l'utilisation du critère de Francfort-Marigo en microporomécanique (chapitre 7), dans le cas un peu plus simple où une masse connue de fluide était progressivement injectée dans des cavités sphériques. Le principe est ici exactement le même. Il faut simplement différencier les deux types de sites en cohérence avec les choix que nous avons faits concernant les coefficients poroélastiques.

Rappelons tout d'abord quelques définitions. On a N^s sites au total. Chaque site i est formé des voisinages des grains sphériques de même taille R^i. Les grains du site i ont une fraction volumique f^i, et sont donc en nombre $N^i = F^i / \left(\frac{4\pi}{3}(R^i)^3\right)$ par unité de volume poreux. Chaque grain est entouré d'une auréole de transition ITZ d'épaisseur l_c et de porosité ρ_{itz}. À un instant donné le degré d'attaque des grains de la famille i est α^i, de telle sorte que la calotte sphérique comprise entre les rayons $R^i\left(1-\alpha^i\right)$ et R^i a une porosité ρ^i. Appelons pour chaque site F^i le volume par unité de volume poreux attaqué. Ce volume vaut :

$$F^i = f^i \rho^i \left[1 - \left(1 - \alpha^i\right)^3\right] \tag{10.7}$$

Le volume de porosité dans l'ITZ par unité de volume poreux V_{itz}^i est lui égal à :

$$V_{itz}^i = 3 f^i \frac{l_c \rho_{itz}}{R^i} \tag{10.8}$$

Le volume de gel est calculé à partir de la porosité créée par l'attaque, par multiplication par un coefficient rendant compte de son gonflement, δ, de façon à ce que le volume de gel à pression nulle dans un site est δ fois plus grand que la porosité créée par l'attaque. Ainsi le volume relâché de gel au site i par unité de volume poreux est :

$$V_0^i = \delta F^i \tag{10.9}$$

La déformation de ce gel à une pression p^i donnée est décrite par une loi linéaire élastique en fonction du module d'incompressibilité du gel K_a. On peut ainsi écrire le volume déformé de gel au site i par unité de volume poreux :

$$V^i = \delta F^i \left(1 - \frac{p^i}{K_g}\right) \tag{10.10}$$

Il est nécessaire de comparer ce volume de gel au volume disponible, qui prend en compte la déformation de la pâte de ciment environnant le site, ainsi que celle du granulat. Cette prise en compte se fait de manière légèrement différente en fonction de la décohésion ou non au site considéré. On présente donc distinctement le calcul de la pression dans les deux cas.

La différence entre les deux types est que pour le *Type I*, la porosité considérée dans les équations de comportement est celle du grain attaqué et de l'auréole de transition, tandis que pour le *Type II*, c'est toute la cavité, comme si elle était entièrement remplie de fluide. Il faudra donc pour ce second type de sites prendre explicitement en compte la présence d'un granulat attaqué dans le fluide qui remplit la cavité.

10.3.1 Site de *Type I*

Pour ces sites, le volume disponible pour le gel doit être égal au volume de gel V^i. Ce volume est, en configuration relâchée, composé du volume de porosité dans les grains F^i et du volume de l'auréole de transition V^i_{itz}. Rappelons la deuxième équation de la loi de comportement du milieu poreux :

$$\left(\phi^i - \tilde{f}^i\right) = \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i \tag{10.11}$$

Où $\tilde{f}^i$, le volume en configuration relâchée de l'espace poreux, est donc égal à $\tilde{f}^i = F^i + V^i_{itz}$. On peut donc exprimer la porosité en configuration déformée ϕ^i et l'égaliser avec le volume déformé de gel, ce qui donne :

$$\left(F^i + \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i\right) + V^i_{itz} = V^i \tag{10.12}$$

Et écrire la pression résultant de l'égalité des volumes de gel et disponible :

$$p^i\left(\underline{\underline{E}}, \alpha^i\right) = \frac{(\delta - 1)F^i - \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} \tag{10.13}$$

10.3.2 Site de *Type II*

Pour ces sites la démarche est la même, sauf que lorsque l'on écrit la loi de comportement

$$\left(\phi^i - \tilde{f}^i\right) = \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i \tag{10.14}$$

ϕ^i représente le volume de la cavité sphérique laissée par la décohésion du granulat en configuration déformée, et non le volume disponible pour le gel. Il faut simplement corriger ceci en tenant compte du fait que cet espace est occupé par le gel et ce qu'il reste de granulat. On écrit pour cela le volume actuel du granulat :

$$V^i_a = \left(f^i - F^i\right)\left(1 - \frac{p^i}{K_a}\right) \tag{10.15}$$

Et l'équilibre entre le volume de gel V^i et l'espace disponible, qui fait intervenir le volume de l'auréole de transition ainsi que le volume de granulat :

$$\left(f^i + \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} + M^i p^i\right) + V^i_{itz} - V^i_a = V^i \tag{10.16}$$

On obtient ainsi :

$$p^i\left(\underline{\underline{E}}, \alpha^i\right) = \frac{(\delta - 1)F^i - \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}} - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \tag{10.17}$$

10.3.3 Utilisation du calcul des pressions

On a donc montré dans cette section comment, à degré d'attaque donné (représenté par α^i pour chaque site), on est capable, dès lors que l'on connaît les modules poroélastiques homogénéisés du milieu poreux (qui dépendent de l'état d'endommagement et dont on a détaille l'écriture dans le chapitre 9), et la déformation macroscopique, de calculer la pression dans chacun des sites. Ceci nous permet d'écrire l'énergie potentielle totale de notre milieu poreux, et non plus seulement du squelette comme on l'a fait dans la partie précédente, puisque la connaissance de la pression dans le gel permet de calculer l'énergie élastique du gel et celle des granulats ayant subi la décohésion. À pression donnée, l'énergie élastique du gel par unité de volume de matériau poreux s'écrit :

$$E_g^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}\right) = \frac{1}{2}\frac{\delta F^i}{K_g}(p^i)^2\left(\underline{\underline{E}}, \alpha^i\right) \tag{10.18}$$

Tandis que si le granulat est séparé du squelette par décohésion et qu'il faut donc compter son énergie élastique séparément, celle-ci s'écrit par unité de volume de matériau poreux :

$$E_a^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}\right) = \frac{1}{2}\frac{f^i - F^i}{K_a}(p^i)^2\left(\underline{\underline{E}}, \alpha^i\right) \tag{10.19}$$

On peut ainsi écrire, comme on l'a fait dans le chapitre 7, l'énergie potentielle en fonction de nos véritables variables de chargement : chargement extérieur, et degré d'attaques au niveau de chaque site. On a alors dans le cas d'un chargement extérieur mixte (pour compacter l'expression on note simplement $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, \left(p^i\left(\underline{\underline{E}}, \alpha^i\right)\right)_{i=1:N^s}\right)$) :

$$\begin{aligned} E^{pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (\alpha^i)_{i=1:N^s}\right) = {} & E_{ske}^{pot}\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}\right) \\ & + E_g^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}\right) \\ & + E_a^{el}\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}\right) \end{aligned} \tag{10.20}$$

10.3.4 Énergie totale

Il faut enfin écrire l'énergie totale de notre matériau, comme nous l'avons fait au § 7.3.6.2, en ajoutant à l'énergie potentielle donnée précédemment l'énergie dissipée à un état de fissuration donnée. L'énergie dissipée est calculée par une somme pondérée par les énergies de fissuration de la surface de fissure pour un état d'endommagement virtuel $\left(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)$ donné :

$$E^{diss}\left(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right) = \sum_{i=1}^{N^s}\frac{f^i}{\frac{4\pi}{3}(R^i)^3}\left[d^{i*}4\pi(R^i)^2G^{dec} + \sum_{k=1}^{3}\pi\left((x_k^{i*})^2 - (R^i)^2\right)G^{fiss}\right] \tag{10.21}$$

où G^{dec} est l'énergie surfacique de fissuration pour la décohésion, tandis que G^{fiss} est l'énergie surfacique de fissuration pour la fissuration de la pâte de ciment. L'écriture de l'énergie dissipée est faite selon la description du schéma de fissuration donnée au § 9.3.1.2 du chapitre 9 où l'on détaille l'écriture des propriétés homogénéisées du matériau endommagé. L'état de fissuration apparaît ici explicitement par l'intermédiaire de variables d'endommagement virtuelles $\left(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)$ représentant l'état de décohésion et les trois tailles de fissures possibles pour chaque site i.

La dépendance en ces variables d'endommagement était jusqu'ici, pour l'énergie totale, cachée dans les coefficients poroélastiques homogénéisés. Pour conclure sur l'expression de l'énergie totale, nous donnons son expression en écrivant explicitement toutes les dépendances. On

note $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, \left(p^i\left(\underline{\underline{E}}, \alpha^i, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right), d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)_{i=1:N^s}\right)$ la déformation macroscopique. Dans la partie suivante on explique comment calculer la déformation concrètement. L'énergie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&E^{pot}\left(\underline{\underline{\Sigma}}_d, \underline{\underline{E}}_d, (\alpha^i)_{i=1:N^s} d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)\\
&= E^{pot}_{ske}\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)\\
&+ E^{el}_g\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)\\
&+ E^{el}_a\left(\underline{\underline{E}}, (\alpha^i)_{i=1:N^s}, d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)\\
&+ E^{diss}\left(d^{i*}, (x_k^{i*})_{k=1,2,3}\right)
\end{aligned} \tag{10.22}$$

Il ne nous manque plus qu'à savoir calculer la déformation dans toutes les situations de chargement pour en terminer avec l'écriture de l'énergie. On définit d'abord le tenseur des modules d'élasticité non drainée et le tenseur de précontrainte chimique qui vont nous aider dans cette démarche.

10.4 Élasticité non drainée, précontrainte chimique

Si l'on repart de la première partie de la loi de comportement

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_i^{N^s} p^i \underline{\underline{B}}^i \tag{10.23}$$

et que l'on y injecte l'expression de la pression obtenue par équilibre du gel dans la partie précédente, qui diffère légèrement selon le type du site, on obtient une loi d'élasticité affine :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom}_{nd} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^* \tag{10.24}$$

Où le tenseur des modules d'élasticité non drainée est :

$$\mathbb{C}^{hom}_{nd} = \mathbb{C}^{hom} + \sum_i^{N_I^s} \frac{\underline{\underline{B}}^i \otimes \underline{\underline{B}}^i}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} + \sum_i^{N_{II}^s} \frac{\underline{\underline{B}}^i \otimes \underline{\underline{B}}^i}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \tag{10.25}$$

Et la précontrainte d'origine chimique (que l'on appelle ainsi car c'est aussi la contrainte si la déformation est nulle) vaut :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = -\sum_i^{N_I^s} \frac{(\delta - 1)F^i - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}} \underline{\underline{B}}^i - \sum_i^{N_{II}^s} \frac{(\delta - 1)F^i - 3f^i \rho_{itz} \frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}} \underline{\underline{B}}^i \tag{10.26}$$

10.5 Calcul des contraintes et des déformations macroscopiques pour les différents cas de chargement

Nous détaillons ici la façon d'obtenir les contraintes et les déformations pour les différents cas de chargements qui nous intéressent, à degré d'attaque donné. Notre point de départ est donc la loi de comportement non drainé obtenue dans la partie précédente, qui s'écrit de manière condensée :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom}_{nd} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^* \tag{10.27}$$

10.5.1 Déformation imposée

Le premier cas, le plus simple, est celui de la déformation imposée. Rappelons d'abord l'expression de la précontrainte chimique :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = -\sum_i^{N_I^s} \frac{(\delta-1)F^i - 3f^i\rho_{itz}\frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g}}\underline{\underline{B}}^i - \sum_i^{N_{II}^s} \frac{(\delta-1)F^i - 3f^i\rho_{itz}\frac{l_c}{R^i}}{M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a}}\underline{\underline{B}}^i \tag{10.28}$$

Elle ne dépend que de l'état d'avancement de l'attaque et de l'état de fissuration. Si la déformation est imposée dans toutes les directions égale à $\underline{\underline{E}}_d$, on a alors simplement :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}_{nd}^{hom} : \underline{\underline{E}}_d + \underline{\underline{\Sigma}}^* \tag{10.29}$$

10.5.2 Contrainte imposée

Ici on suppose que la contrainte est imposée dans toutes les directions égale à $\underline{\underline{\Sigma}}_d$. On a, directement depuis la loi de comportement,

$$\underline{\underline{E}} = \left(\mathbb{C}_{nd}^{hom}\right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\Sigma}}_d - \underline{\underline{\Sigma}}^*\right) \tag{10.30}$$

10.5.3 Chargement mixte

Nous allons ici traiter deux cas, les autres s'en déduisant facilement par des rotations appropriées.

10.5.3.1 Une contrainte et deux déformations imposées

Supposons que l'on travaille dans le repère d'orthotropie de notre matériau, et que l'on impose uniquement les éléments diagonaux de la contrainte et la déformation, en l'occurrence ici Σ_1^d, E_2^d et E_3^d. On peut donc réduire la loi de comportement, en notation de Voigt (où l'on oublie les lignes 4, 5 et 6 qui ne nous intéressent pas), à un système très simple :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1^d \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2^d \\ E_3^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \\ \Sigma_3^* \end{pmatrix} \tag{10.31}$$

Où par souci de simplicité on a nommé a, b, c, d, e, f les six composantes $\mathbb{C}_{nd,1111}^{hom}, \mathbb{C}_{nd,2222}^{hom}$, $\mathbb{C}_{nd,3333}^{hom}$, $\mathbb{C}_{nd,2211}^{hom}$, $\mathbb{C}_{nd,3311}^{hom}$, $\mathbb{C}_{nd,3322}^{hom}$ du tenseur des modules d'élasticité non drainée.

On montre assez facilement que les composantes inconnues de la déformation et de la contrainte s'expriment en fonction des composantes connues et de la précontrainte chimique par les expressions :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -d/a & -e/a \\ d/a & b - d^2/a & f - de/a \\ e/a & f - de/a & c - e^2/a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \Sigma_1^d \\ E_2^d \\ E_3^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/a & 0 & 0 \\ -d/a & 1 & 0 \\ -e/a & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \\ \Sigma_3^* \end{pmatrix} \tag{10.32}$$

10.5.3.2 Deux contraintes et une déformation imposées

Ici on part de l'équation :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1^d \\ \Sigma_2^d \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \\ \Sigma_3^* \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

Comme les expressions sont un peu plus lourdes, on n'utilise pas l'écriture matricielle comme dans le paragraphe précédent. On donne successivement les quantités recherchées en fonction des quantité connues :

$$\begin{cases} E_2 = \dfrac{\left(\Sigma_2^d - \Sigma_2^*\right) - d/a\left(\Sigma_1^d - \Sigma_1^*\right) - \left(f - ed/a\right)E_3^d}{b - d^2/a} \\ E_1 = 1/a\left(\Sigma_1^d - \Sigma_1^*\right) - d/aE_2 - e/aE_3^d \\ \Sigma_3 = \Sigma_3^* + eE_1 + fE_2 + cE_3^d \end{cases} \tag{10.34}$$

10.5.4 Restriction du gonflement par des anneaux

Ce chargement est celui utilisé par Multon [18] pour plusieurs de ses essais de gonflement lors de l'alcali-réaction. Nous nous plaçons dans le cas suivant : une éprouvette cylindrique de génératrice parallèle à la direction 1 est soumise dans cette direction à une contrainte imposée Σ_1^d, tandis que les directions 2 et 3 voient leur gonflement restreint par des anneaux d'épaisseur variable. Les contraintes et déformations dans ces directions, que nous nommons ici Σ_r et E_r, sont donc reliées par l'élasticité de l'anneau. Il faut donc tout d'abord étudier la déformation de l'anneau.

10.5.4.1 Déformation de l'anneau

Cette analyse de la déformation des anneaux est calée sur celle de Multon, qui a introduit cette expérience et un modèle mécanique pour l'analyser dans sa thèse [18]. On suppose que le champ de déplacement dans les anneaux est radial. Les équations d'équilibre imposent la forme :

$$\underline{u} = \left(Cr + \frac{D}{r}\right)\underline{e}_r \tag{10.35}$$

La continuité de la contrainte normale et du déplacement entre l'éprouvette en béton (au rayon $r = R_i$) et la nullité du vecteur contrainte (au rayon $r = R_e$) permettent, en introduisant les coefficients de Lamé des anneaux (λ_s, μ_s), de déterminer les deux constantes C et D soit en fonction de la contrainte macroscopique radiale dans l'éprouvette :

$$\begin{cases} D = \dfrac{\Sigma_r}{2\mu_s(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2})} \\ C = \dfrac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s}\dfrac{1}{R_e^2}\dfrac{\Sigma_r}{2\mu_s(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2})} \end{cases} \tag{10.36}$$

On peut introduire la rigidité k_s de l'anneau, définie par la relation $\Sigma_r = -k_s E_r$, on a alors :

$$k_s = \frac{2\left(\lambda_s + \mu_s\right)\mu_s\left(R_e^2 - R_i^2\right)}{\left(\lambda_s + \mu_s\right)R_e^2 + \mu_s R_i^2} \tag{10.37}$$

Ce qui permet de réexprimer les constantes en fonction de la déformation :

$$\begin{cases} D = \dfrac{R_i^2 R_e^2\left(\lambda_s + \mu_s\right)E_r}{\left(\lambda_s + \mu_s\right)R_e^2 + \mu_s R_i^2} \\ C = \dfrac{\mu_s R_i^2 E_r}{\left(\lambda_s + \mu_s\right)R_e^2 + \mu_s R_i^2} \end{cases} \tag{10.38}$$

Le choix de l'utilisation de l'une ou l'autre de ces expressions des constantes d'intégration dépend de la rigidité des anneaux.

10.5.4.2 Calcul des contraintes et déformations

On suppose ici qu'il y a symétrie de révolution du matériau autour de la direction 1. Dans les directions 2 et 3, les anneaux imposent la relation suivante :

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_r = -k_s \left(E_2 = E_3 = E_r\right) \tag{10.39}$$

Tandis que dans la direction 1, la contrainte est imposée à Σ_1^d. On peut alors en utilisant la loi de comportement non drainée, exprimer les contraintes et déformations non connues. On a ainsi :

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 = k_s \frac{\left(\frac{d}{a}\left(k+c\right) - \frac{fe}{a}\right)\left(\Sigma_1^d - \Sigma_1^*\right) + \Sigma_2^*\left(k - \frac{e^2}{a} + c\right) + \Sigma_3^*\left(\frac{de}{a} - f\right)}{\left(k - \frac{e^2}{a} + c\right)\left(k - \frac{d^2}{a} + b\right) - \left(\frac{de}{a} - f\right)^2} \tag{10.40}$$

Et la déformation dans la direction où la contrainte est imposée est :

$$E_1 = \frac{1}{a}\left(\Sigma_1^d - \Sigma_1^* + \frac{d}{k}\Sigma_2 + \frac{e}{k}\Sigma_3\right) \tag{10.41}$$

10.5.4.3 Contribution énergétique de l'anneau

Notre énergie totale doit enfin être modifiée par l'ajout d'un terme d'énergie élastique supplémentaire. On l'exprime ici par énergie de volume de matériau poreux, supposant que les anneaux recouvrent toute la face latérale de l'éprouvette cylindrique mais que comme dans l'expérience, il n'emmagasinent pas d'énergie longitudinalement puisqu'il s'agit d'un ensemble d'anneaux fins glissés les uns à côté des autres autour de l'éprouvette.

$$E_{anneau}^{el} = \frac{2}{R_i^2}\left[2\left(\lambda_s + \mu_s\right)C^2\left(R_e^2 - R_i^2\right) - \mu_s D^2\left(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2}\right)\right] \tag{10.42}$$

10.5.5 Conclusion sur la détermination des contraintes et des déformations

On sait donc, pour les différents cas de chargement macroscopique qui nous intéressent, déterminer à degré d'attaque donné la contrainte et la déformation macroscopiques résultantes. Ce calcul est très simple lorsque la déformation ou la contrainte sont imposées dans toutes les directions, mais demande un peu plus d'effort lorsque le chargement macroscopique sur l'éprouvette est mixte ou dans le cas de l'expérience de Multon. La possibilité de calculer les déformations, nous permet par les équations 10.13 et 10.17 de calculer les pressions, et donc de calculer l'énergie totale pour tout chargement.

10.6 Conclusion

Ce chapitre nous a donc permis d'écrire l'énergie totale d'un béton soumis à la RAG, à degré d'attaque et chargement extérieur donnés, en fonction de la microstructure. Cette écriture termine le travail de construction du modèle, puisque nous pouvons désormais utiliser notre critère de rupture énergétique, et ainsi rechercher l'évolution de la microstructure en fonction du degré d'attaque et des chargements extérieurs, et finalement calculer les déformations et les propriétés mécaniques du béton attaqué. Nous allons donc utiliser le modèle dans un certain nombre de cas simples tout d'abord, afin de comprendre son fonctionnement, puis en comparaison à des essais de gonflement de Multon.

Chapitre 11

Application de notre modèle de fissuration pour l'alcali-réaction

Sommaire

11.1 Introduction **240**
11.2 Explication de l'algorithme **240**
11.3 Déformation imposée **241**
11.3.1 Gonflement gêné 242
11.3.2 Traction dans une direction 254
11.3.3 Compression dans une direction 257
11.3.4 Conclusion sur l'attaque à déformation imposée 260
11.4 Contrainte imposée **260**
11.4.1 Gonflement libre 260
11.4.2 Traction dans une direction 262
11.4.3 Compression dans une direction 267
11.4.4 Conclusion sur l'attaque à contrainte imposée 269
11.5 Étude de l'essai de Multon **270**
11.5.1 Une famille de grains 270
11.5.2 Nombreuses familles de grains de même taille 271
11.5.3 Répartition des tailles de grains 271
11.5.4 Conclusion sur l'essai de Multon 272
11.6 Identification des paramètres sur les essais de Multon **273**
11.6.1 Essais de Multon 273
11.6.2 Identification de paramètres du modèle 275
11.6.3 Utilisation de ce jeu de paramètres dans les autres cas de chargement . 278
11.6.4 Conclusion sur l'identification des paramètres 279
11.7 Discussion sur le fonctionnement de notre modèle **279**
11.8 Conclusion **281**

11.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons illustrer le fonctionnement de notre modèle par des exemples d'attaque sous différents types de chargement. Nous avons construit un modèle de fissuration en micromécanique pour l'alcali-réaction. L'objectif qui a motivé la construction de ce modèle était la nécessité de pouvoir simuler l'évolution à long terme des structures attaquées par l'alcali-réaction. Nous avions conclu notre bibliographie sur les modèles mécaniques pour l'alcali-réaction en déplorant la prise en compte insuffisante de détails microstructuraux à l'origine, entre autres, de l'anisotropie de l'alcali-réaction, dans les modèles mécaniques à l'échelle de la structure. Nous avons donc repris le travail de modélisation à l'échelle microscopique en espérant que ceci aboutirait à un modèle suffisamment simple et efficace pour qu'il puisse aider à calculer la diminution des propriétés élastiques et les gonflements locaux lors d'un calcul de structure. Nous allons donc dans cette partie essayer de comprendre comment fonctionne le modèle en testant divers cas de chargement, comme on l'a fait lors de l'injection de fluide dans un milieu poreux dans le chapitre 7, en poussant cette fois jusqu'à une comparaison avec des courbes de gonflement expérimentales.

Nous présentons tout d'abord un schéma explicatif de l'algorithme de calcul qui permet la détermination de l'état de fissuration selon notre critère énergétique, à degré d'attaque et chargement extérieur donné. Nous étudions ensuite le comportement du modèle à déformation imposée, à contrainte imposée, puis dans le cadre de l'essai de Multon. Nous présentons enfin une identification des paramètres du modèle effectuée sur les essais triaxiaux de Multon. Nous discutons enfin de la pertinence du modèle pour prédire la fissuration lors de l'alcali-réaction.

11.2 Explication de l'algorithme

Dans ce paragraphe on décrit le fonctionnement général de l'algorithme de fissuration, qui permet de calculer l'évolution des tailles de fissures, et donc des propriétés mécaniques et des déformations et contraintes du béton au cours de l'attaque. On définit d'abord les paramètres matériau et la granulométrie de notre béton, et éventuellement des anneaux en acier si l'on cherche à simuler l'expérience de Multon (étapes 1-2). On calcule ensuite par utilisation du schéma de Mori-Tanaka (§ 3.6.5) les propriétés des zones poreuses : auréole de transition et grain attaqué (3). On choisit le chargement extérieur que l'on souhaite appliquer à l'éprouvette, et on définit la symétrie que l'on impose à la fissuration (5). On peut alors démarrer l'attaque, sous forme d'une boucle sur les profondeurs d'attaque d. L'étape (8) est le calcul des solutions de Christensen et sphériques, exposées au § 9.3. Dans les étapes (9-16), on actualise l'état de décohésion des grains, en prenant en compte le problème de l'interpénétration du grain avec sa cavité. À l'étape (21),

on effectue le même travail pour la fissuration.

1: Définition des paramètres matériau relatifs au béton : paramètres élastiques E_c, E_a, ν_c, ν_a, propriétés de l'auréole de transition ρ_{itz}, l_c, propriétés du gel K_g, δ, énergies de fissuration G_c^{dec}, G_c^{fiss}, rapport d'aspect des fissures X, et définition des propriétés des anneaux E_s, ν_s, e.
2: Définition de la granulométrie : tailles R^i, fractions volumiques f^i, porosité ρ^i de chaque famille.
3: Calcul des propriétés poromécaniques du grain attaqué $b_p, M_p, \lambda_p, \mu_p$ et de l'auréole de transition $b_t, M_t, \lambda_t, \mu_t$ par schéma de Mori-Tanaka.
4: Initialisation de la profondeur d'attaque d.
5: Définition du chargement : $E^{imp}, \Sigma^{imp}, \Sigma^{Elas}, e$ et de la symétrie considérés.
6: **while** $d < d_{max}$ **do**
7: Calcul de α^i
8: Calcul des solutions de Christensen et sphérique pour les grains de *Type I*
9: **while** Il y a encore des décohésions possibles **do**
10: Pour chaque grain, calcul de $E^{rel} - E^{diss}$ pour la décohésion de ce grain seul
11: Trouver le grain k pour lequel cette quantité est maximale
12: Calcul des quantités indicatrices de l'interpénétration du grain avec la cavité dans l'éventualité de la décohésion
13: **if** Pas d'interpénétration **then**
14: On valide la décohésion du grain k
15: **end if**
16: **end while**
17: Fabrication du vecteur des tailles de fissures recherchées : 1 taille de fissure par direction de fissure indépendante de grain ayant subi la décohésion. Leur nombre est N
18: Écriture de $\tilde{x}_{init}$, le vecteur des tailles de fissures au pas précédent, et de $\tilde{R}$, le tableau des tailles de grains correspondantes.
19: Fabrication du tableau T, tel que T^i prend la valeur 0 si $\tilde{x}^i > \tilde{R}^i$, 1 sinon.
20: Initialisation : pour chaque taille de fissure $\tilde{x}_0^i = \tilde{x}_{init}^i + rand(0,1)\tilde{R}^i T^i$.
21: Minimisation de l'énergie totale E^{tot} sous contraintes $E^{diss} - E^{rel} \leq 0$ et de non interpénétration des lèvres des fissures créées. Solution : $\tilde{x}_{sol}$.
22: Vérification que la taille de fissure a augmenté $\tilde{x}_{sol} \geq \tilde{x}_{init}$
23: Vérification que la solution trouvée est plus favorable énergétiquement que $\tilde{x}_{init}$: $E^{tot}(\tilde{x}_{sol}) \leq E^{tot}(\tilde{x}_{init})$
24: Si oui, validation de $\tilde{x}_{sol}$ et incrémentation de la profondeur d'attaque d.
25: **end while**

Cet algorithme a été implémenté dans Matlab. On a utilisé les fonctions automatiques de minimisation sous contrainte proposées dans ce logiciel.

Nous passons maintenant à l'étude du comportement du modèle, en commençant par des déformations imposées.

11.3 Étude générale du comportement du modèle à déformation imposée

La première possibilité est d'imposer les déformations. Ce n'est pas un chargement très classique dans les campagnes d'essais sur l'alcali-réaction puisqu'en général les expérimentateurs commencent par de l'expansion libre. Néanmoins cela nous semble naturel de débuter par ce cas de fissure puisqu'il est très simple à mettre en œuvre. Nous choisissons ici le jeu de paramètres

matériaux donné en équation 11.1.

E_a	60 GPa	K_{gel}	0,3 GPa
E_c	20 GPa	ρ^1	0,1
$\nu_a = \nu_c$	0,25	δ	1,5
G_c^{decoh}	40 J.m^{-2}	l_c	10 μm
G_c^{fiss}	80 J.m^{-2}	ρ^{itz}	0,3

(11.1)

On donnera pour chaque cas de chargement les tailles de grains choisies (R^i) et les fractions volumiques associées (f^i).

11.3.1 Gonflement gêné

Dans cette partie on force la déformation macroscopique à être nulle :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

11.3.1.1 Une seule taille de grain

On se place pour l'instant dans le cas où il n'y a qu'une famille de grains.

Symétrie forcée, évolution de la microstructure On force également les tailles de fissures à être égales dans les trois directions, le matériau étant au départ symétrique, ainsi que le chargement. On étudiera ensuite ce qui se passe si on permet des tailles de fissures différentes. On a ainsi pour l'instant $x_1^1 = x_2^1 = x_3^1$. On fait varier le degré d'attaque α de 0 à 1, c'est-à-dire que l'on attaque tout le grain. On présente certaines courbes avec la profondeur d'attaque en abscisse d, qui est liée au degré d'attaque α et à la taille du grain R^i par la relation $d^i = \alpha R^i$, pour le grain i.

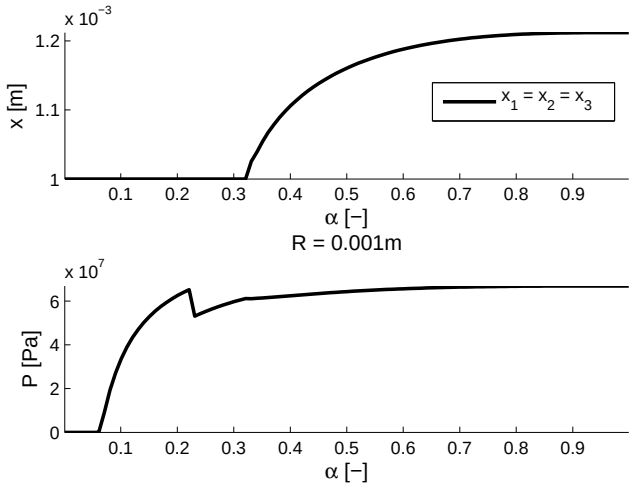

FIGURE 11.1 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

Observons tout d'abord la courbe de l'évolution de la pression (Fig. 11.1). La pression est d'abord nulle. Au départ la quantité de gel ne remplit pas l'ensemble de la porosité nouvellement

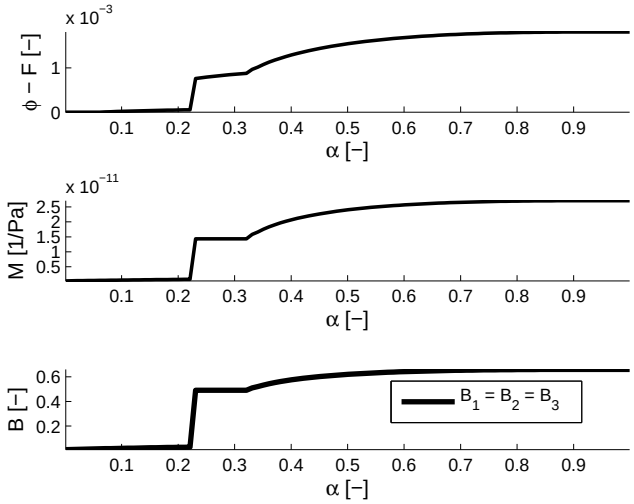

FIGURE 11.2 – Variation relative de volume ($\phi - F$), module de Biot M et coefficient de Biot B. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

créée dans le granulat et celle de l'auréole de transition, d'épaisseur l_c. Lorsque le volume de gel est suffisant, la pression commence à augmenter jusqu'à chuter brutalement vers α=0,2 .C'est la décohésion du granulat qui produit cette chute de pression. La taille de fissure est pour l'instant égale à la taille du grain, c'est-à-dire que la fissuration de la pâte de ciment n'a pas débuté.

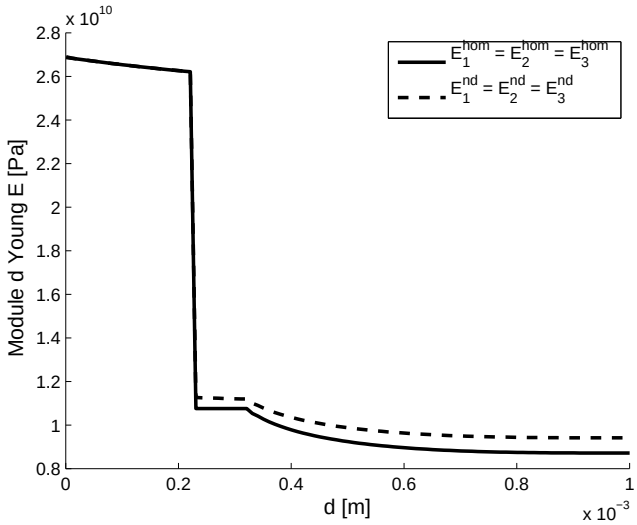

FIGURE 11.3 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

La décohésion est également visible par la forte augmentation des coefficients poromécaniques (Fig. 11.2), et une énorme diminution des modules d'Young dans les trois directions (Fig. 11.3), due à une fraction volumique initiale de granulats assez importante (f^1 =0,3) qui subissent une décohésion simultanée, ce qui est imposé par leur appartenance à une famille unique de granulats. On observe également l'apparition d'une importante contrainte de compression (Fig. 11.4), alors que la déformation reste égale à sa valeur imposée, c'est-à-dire nulle. L'énergie dissipée

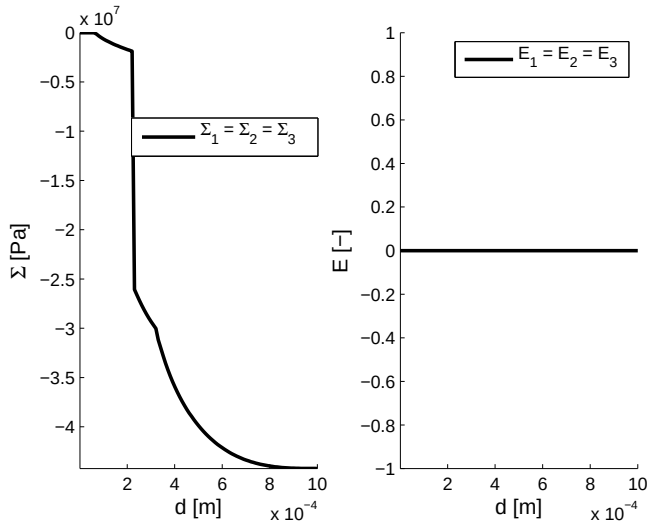

FIGURE 11.4 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

augmente également brutalement (Fig. 11.5), tandis que l'énergie totale est continue, ce qui est une conséquence de l'utilisation du critère de rupture de Francfort et Marigo (voir chapitre 5).

La poursuite de l'attaque fait de nouveau augmenter la pression, jusqu'à apparition de la fissuration dans la pâte de ciment. La taille de fissure augmente dans ce cas continûment, jusqu'à 1,2 R^1 environ, ce qui entraîne l'évolution, toujours dans le même sens, des propriétés poromécaniques (figures 11.2 et 11.3), une augmentation de la contrainte (Fig. 11.4), et de l'énergie dissipée (Fig. 11.5).

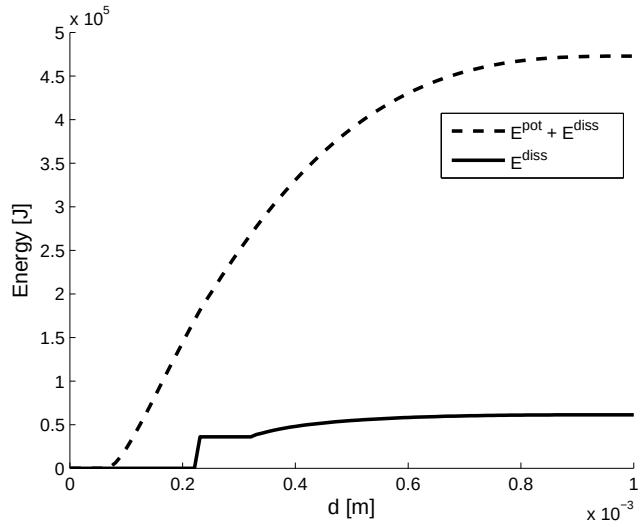

FIGURE 11.5 – Énergies totale $E^{pot} + E^{diss}$ et dissipée E^{diss}. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

Symétrie forcée, étude de sensibilité aux différents paramètres Nous avons, dans la section précédente, expliqué la progression de l'endommagement de l'échantillon de béton. Nous nous intéressions ici simplement à la contrainte et la pression asymptotiques, c'est-à-dire lorsque

$\alpha = 1$, que l'on obtient en faisant varier les différents paramètres de notre modèle. Nous gardons toujours comme jeu de paramètres de référence ceux donnés dans l'équation 11.1, tandis que l'on fait varier séparément chaque paramètre.

Nous faisons tout d'abord varier le module d'incompressibilité du gel. C'est une grandeur physique qui est très mal connue pour nos gels, comme on l'a commenté dans notre article [3] et dans la bibliographie sur l'alcali-réaction (§ 1.5.1.2). On fait varier cette incompressibilité autour de celle de l'eau, qui est de l'ordre de 2 GPa. On remarque (Fig. 11.6), que pour ce jeu de paramètre, la compressibilité de l'eau marque la limite entre deux comportements du modèle. Pour des fluides plus souples, la décohésion et la fissuration ne se produisent pas du tout, ce qui entraîne des contraintes très faibles, tandis qu'au dessus, les compressions sont importantes. Pour ce qui est de la pression, il y a deux régimes linéaires. Aux faibles valeurs du module, il n'y a pas décohésion, aux grandes valeurs il y a décohésion et fissuration. Entre les deux on a une zone de transition où on a décohésion seule. Un comportement tout à fait similaire est observé sur la Fig. 11.7. Le coefficient de dilatation du gel qui marque la séparation entre deux domaines se situe autour de 1,4. Il ne faut cependant pas attacher d'importance aux valeurs précises de ces paramètres puisqu'elles dépendent évidemment des autres paramètres choisis pour la simulation, qui ne sont pas connus. Lors de la variation de ces deux paramètres, on observe une discontinuité

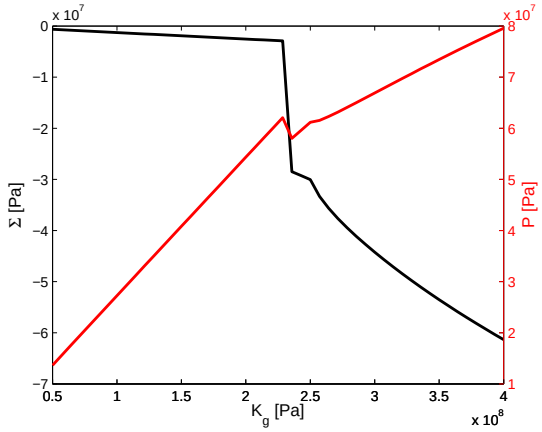

FIGURE 11.6 – Contrainte ultime en fonction de l'incompressibilité K_g. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

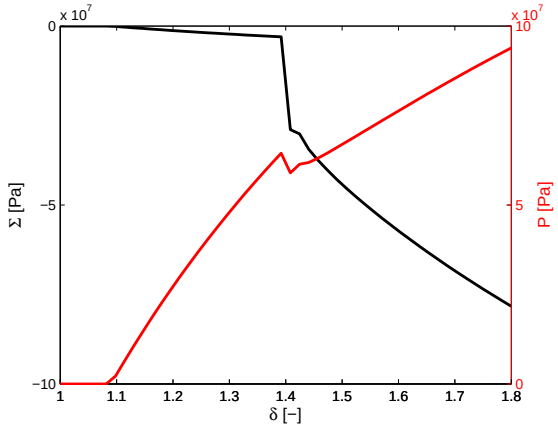

FIGURE 11.7 – Contrainte ultime en fonction du coefficient de dilatation du gel δ. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

de la contrainte, qui est due au fait que l'on atteint un seuil au dessus duquel la décohésion devient possible. On présente un exemple de ce qui se produit lorsque l'on fait varier K_g en montrant deux courbes d'évolution de la pression et la taille de fissure pour deux valeurs du module du gel juste au dessus et en dessous du seuil à partir duquel la décohésion se produit (Fig. 11.8).

On fait ensuite varier deux autres grandeurs importantes. Tout d'abord la taille de grain, R sur la Fig. 11.9. On note la présence de trois domaines. À faible taille de grain, il n'y a ni décohésion ni fissuration. On a ensuite une discontinuité lorsque l'on rentre dans le domaine où la décohésion se produit, puis une transition continue vers un troisième domaine où la fissuration se produit. En ce qui concerne la fraction volumique (Fig. 11.10), on observe simplement une contrainte plus importante aux grandes fractions volumiques. La complexité du modèle de micromécanique utilisé, fait que l'augmentation n'est cependant pas linéaire, comme on observerait si on utilisait un estimateur de micromécanique dilué. À titre de comparaison, si une boîte était remplie de notre gel seul, avec ce coefficient d'expansion $\delta = 1{,}5$ et ce module d'incompressibilité $K_g = 0{,}3$ GPa, la pression serait de 0,15 GPa. Le vase d'expansion que constitue l'auréole de transition et la

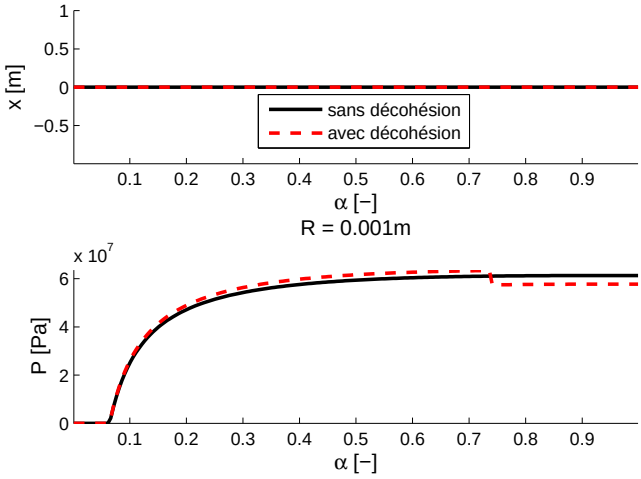

FIGURE 11.8 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée. Deux valeurs de K_g très proche du seuil de décohésion.

déformation de la pâte de ciment, facilitée par la progression de l'endommagement, limitent l'augmentation de la pression.

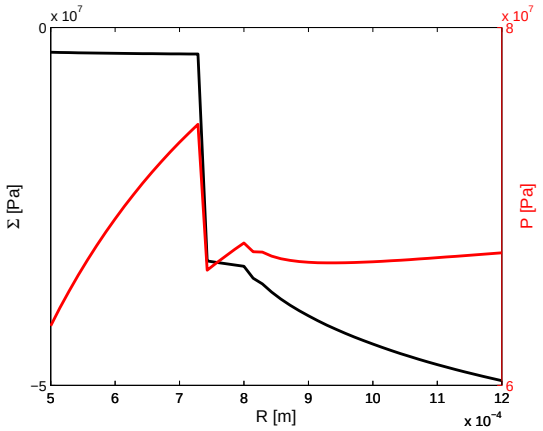

FIGURE 11.9 – Contrainte ultime en fonction de la taille des grains. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

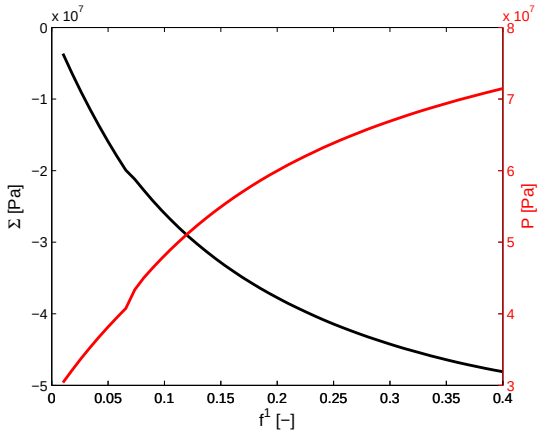

FIGURE 11.10 – Contrainte ultime en fonction de la fraction volumique. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

On s'intéresse ensuite à l'influence des propriétés de l'auréole de transition. L'épaisseur l_c est également divisée en deux zones avec une discontinuité de la contrainte finale autour de $l_c = 18$ μm, et une absence de fissuration lorsque l'on est au dessus (Fig. 11.11). La porosité est alors suffisante pour accueillir le gel produit par l'attaque des granulats. On n'a pas de discontinuité pour ρ^{itz} sur la Fig. 11.12, mais cela est dépendant de la valeur des autres paramètres évidemment. Cela signifie simplement que pour le jeu de paramètres choisi, il n'est pas suffisant d'augmenter la porosité de l'auréole de transition jusqu'à 0,5 comme on l'a fait ici pour annuler la fissuration.

Pour terminer on regarde deux paramètres liés précisément à la fissuration. L'énergie surfacique de décohésion G_c^{dec} varie. On impose une variation conjointe de l'énergie de fissuration de

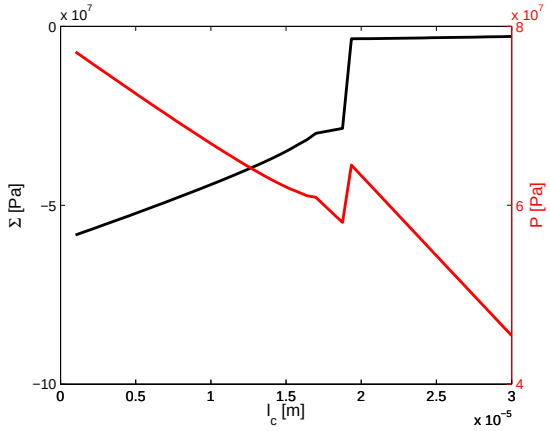

FIGURE 11.11 – Contrainte ultime en fonction de l'épaisseur de l'auréole de transition. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

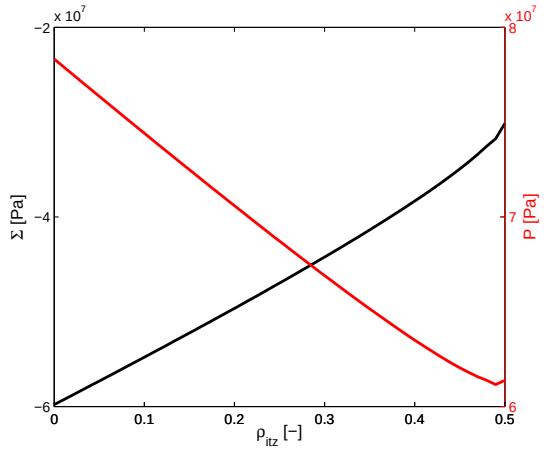

FIGURE 11.12 – Contrainte ultime en fonction de la porosité de l'auréole de transition. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

sorte que $G_c^{fiss} = 2G_c^{dec}$. On observe trois régimes différents (Fig. 11.13). Aux grandes énergies de fissuration, il n'y a pas de décohésion. Lorsque l'on diminue un peu, il y a décohésion mais pas de fissuration. Pour finir, aux faibles énergies, les deux phénomènes se produisent. On regarde aussi rapidement l'influence du rapport d'aspect des fissures (Fig. 11.14). Le rapport d'aspect, X, et le rapport entre le petit axe et le double grand axe de nos fissures ellipsoïdales. Elle est très faible en comparaison de ce que l'on observe en faisant varier les autres paramètres.

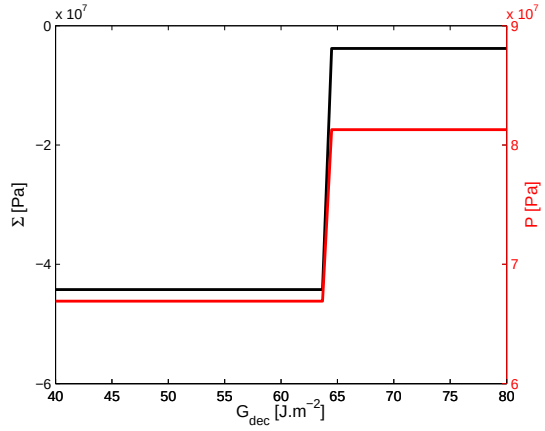

FIGURE 11.13 – Contrainte ultime en fonction de l'énergie surfacique de décohésion. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

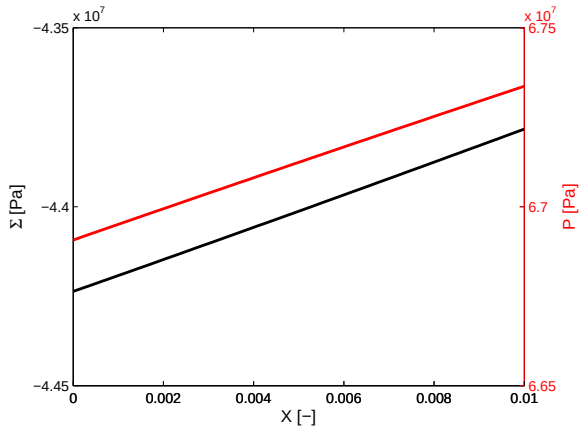

FIGURE 11.14 – Contrainte ultime en fonction du rapport d'aspect des fissures. Déformation nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

Symétrie non forcée On souhaite ici regarder le comportement du modèle lorsque l'on ne force pas la symétrie de la fissuration. On observe alors que la fissuration se fait dans une unique direction, plutôt que dans les trois directions simultanément. On représente conjointement des résultats obtenus avec symétrie forcée (en rouge sur nos courbes) et les résultats où l'on ne force pas cette symétrie (en noir). La fissuration est donc orientée si on laisse cette possibilité

(Fig. 11.15). La fissure démarre ici dans la direction 2, alors qu'a priori les trois directions sont équivalentes. Le choix de la direction 2 fait par notre algorithme est aléatoire. Il est dû au choix aléatoire d'un point de départ pour la recherche du minimum de l'énergie totale. Une fois que l'algorithme a choisi une direction de fissuration, la symétrie est brisée. Elle peut être rétablie plus tard si la croissance de la fissure qui a démarré en premier est gênée, mais cela ne se produit pas dans la simulation présente. L'évolution de la pression est très proche dans les deux cas (Fig. 11.15).

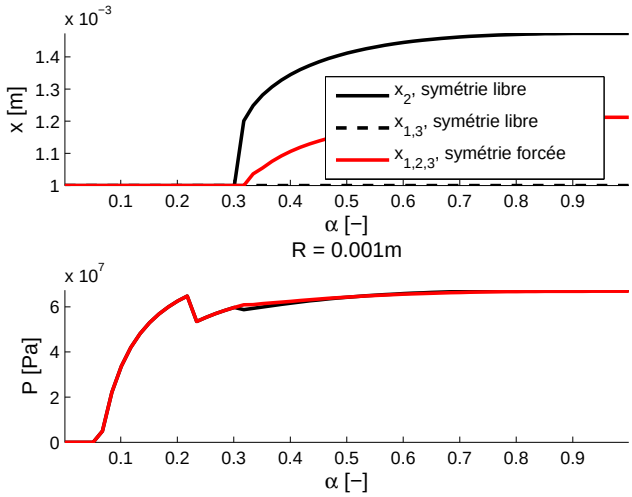

FIGURE 11.15 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, une taille de grain, comparaison des résultats à symétrie libre et forcée.

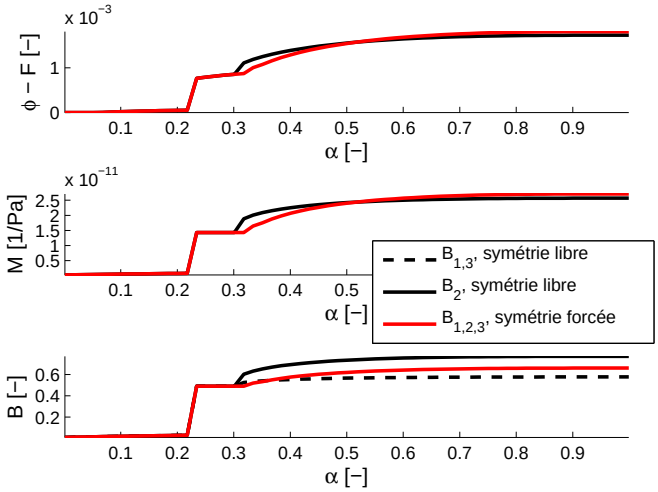

FIGURE 11.16 – Variation relative de volume ($\phi - F$), module de Biot M et coefficient de Biot B. Déformation nulle, une taille de grain, comparaison des résultats à symétrie libre et forcée.

En ce qui concerne les modules poroélastiques, la fissuration orientée produit des variations beaucoup plus importantes (figures 11.16, 11.17). La diminution du module d'Young drainé dans la direction 2 est très importante puisque si l'on cumule l'effet de la décohésion et de la fissuration

on a divisé le module par 5. Les modules non drainés ne sont, eux, pas autant impactés par la fissuration, mais leur diminution dans les directions fissurées est tout de même significative. Les contraintes diffèrent également selon que l'on force la symétrie ou non, ce qui est une conséquence directe de l'anisotropie des coefficients poroélastiques induite par la fissuration (Fig. 11.18).

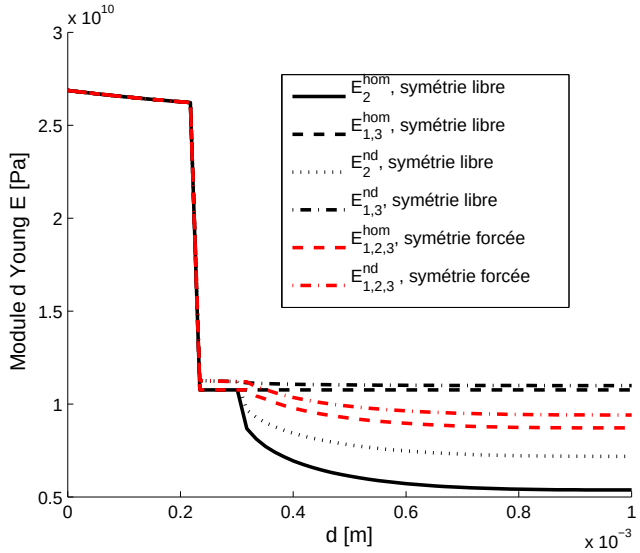

FIGURE 11.17 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Déformation nulle, une taille de grain, comparaison des résultats à symétrie libre et forcée.

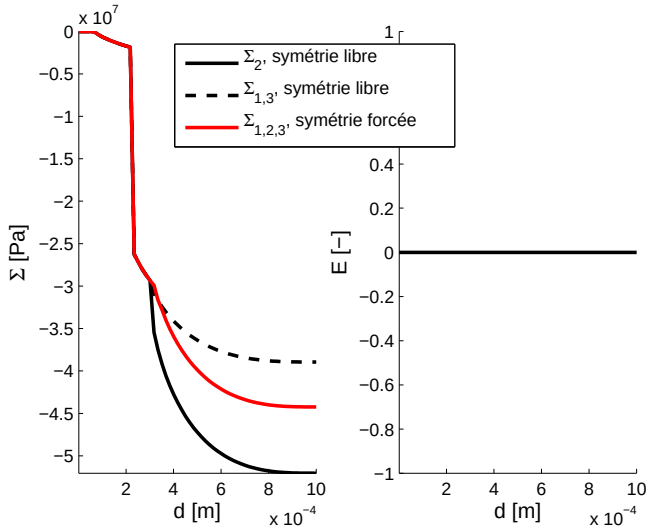

FIGURE 11.18 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Déformation nulle, une taille de grain, comparaison des résultats à symétrie libre et forcée.

Enfin la difficulté de choisir la meilleure de ces deux situations se voit bien sur la courbe de l'énergie totale (Fig. 11.19), puisque ces courbes sont presque indiscernables. D'un point de vue énergétique, le choix entre une fissuration respectant la symétrie du matériau initial et du chargement d'un côté et une fissuration qui puisse briser cette symétrie de l'autre, n'est pas évident, ce qui induit une possible multiplicité des résultats puisque notre algorithme de recherche du schéma de fissuration fonctionne par minimisation de l'énergie totale.

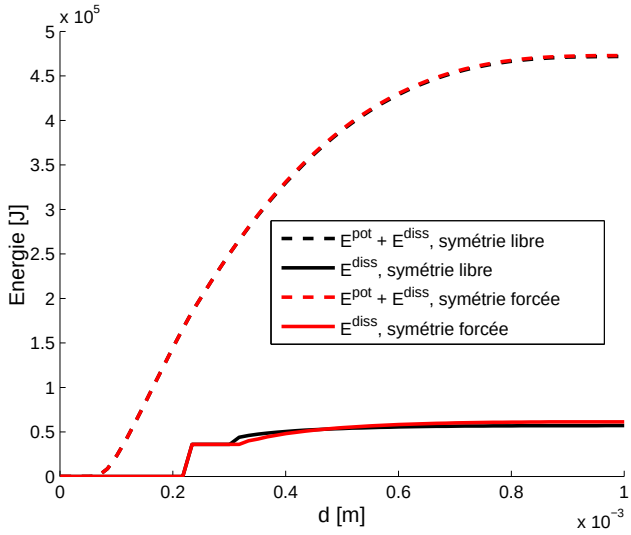

FIGURE 11.19 – Énergies totale $E^{pot} + E^{diss}$ et dissipée E^{diss}. Déformation nulle, une taille de grain, comparaison des résultats à symétrie libre et forcée.

On peut, pour y voir plus clair, tracer la différence entre les deux énergies totales, selon que la symétrie est forcée ou non (Fig. 11.20). On voit sur ce graphe que pour la solution à symétrie libre, l'énergie totale obtenue est plus faible. C'est un résultat attendu, puisque minimiser la fonction énergie totale avec moins de contraintes donne forcément, en vitesse, une solution à énergie plus faible. Néanmoins, une fois que les trajectoires (à symétrie libre ou forcée) ont divergé, il n'est plus possible de les comparer. La symétrie libre est donc systématiquement plus favorable mais il est en théorie possible que la trajectoire à symétrie forcée atteigne des énergies plus faibles que la trajectoire à symétrie libre.

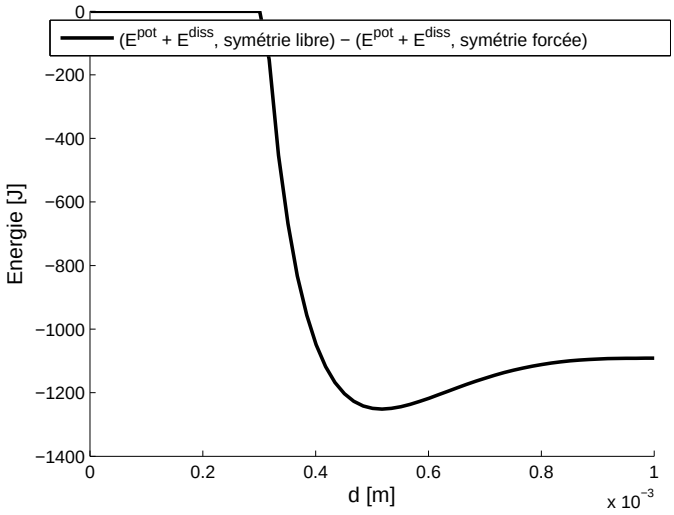

FIGURE 11.20 – Différence des énergies totales $E^{pot} + E^{diss}$. Déformation nulle, une taille de grain, comparaison des résultats à symétrie libre et forcée.

Moyenne de courbes obtenues à symétrie non forcée On souhaite ici regarder si la moyenne d'un grand nombre de réalisations à symétrie non forcée donne des résultats proches du cas où l'on force la symétrie. On va simplement regarder l'évolution de la contrainte. On a donc fait 100 réalisations à symétrie libre, et calculé la moyenne pour chaque direction de contrainte, puis on trace ces moyennes et on les compare à la contrainte obtenue en symétrie forcée (Fig. 11.21).

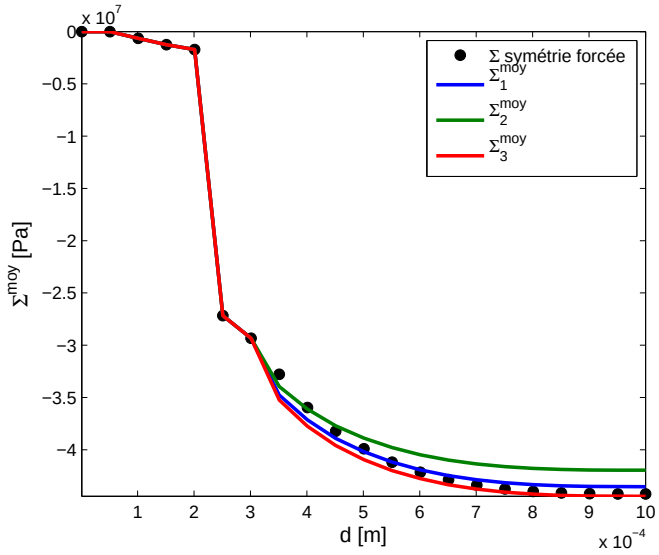

FIGURE 11.21 – Comparaisons de moyennes des contraintes sur 100 réalisations à symétrie libre à la contrainte en symétrie forcée. Déformation nulle, une taille de grain.

Les résultats obtenus par ces deux approches sont très voisins lorsque l'on considère les moyennes sur plusieurs réalisations dans le cas à symétrie libre. Il est donc raisonnable de rester dans le cas à symétrie forcée puisque cela réduit le nombre de variables de la fonction énergie totale à minimiser, et facilite ainsi la résolution de notre problème.

11.3.1.2 Plusieurs familles de grains identiques

Deux familles de grains identiques, symétrie forcée Voyons comment évoluent les résultats si l'on choisit de mettre deux familles de grains de même taille. On choisit les tailles suivantes : $R^1 = 1$ mm et $R^2 = 1$ mm, chacune de fraction volumique $f^1 = f^2$=0,15, afin de voir l'influence de la séparation des grains en familles.

Si l'on observe l'évolution de la pression, on voit que la minimisation de l'énergie conduit à la décohésion d'une seule des deux familles (Fig. 11.22). La pression atteint, dans l'autre famille, des valeurs importantes sans pourtant que la décohésion ne se produise.

Ceci se vérifie sur la courbe des énergies totales (Fig. 11.23), où l'on voit en noir l'énergie de l'option à deux familles dont une seule subit une décohésion puis de la fissuration, être inférieure à celle, en rouge, du cas où tous les granulats sont forcés d'avoir un état de décohésion et fissuration identique.

De la même manière que relaxer la contrainte de symétrie forcée permet de trouver un trajet de fissuration à énergie plus faible, la solution du problème à deux familles à une énergie totale inférieure à celle du problème à une famille.

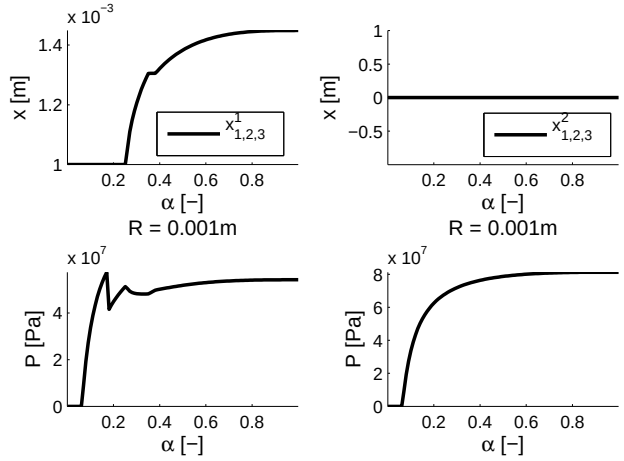

FIGURE 11.22 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, une taille de grain divisée en deux familles, symétrie forcée.

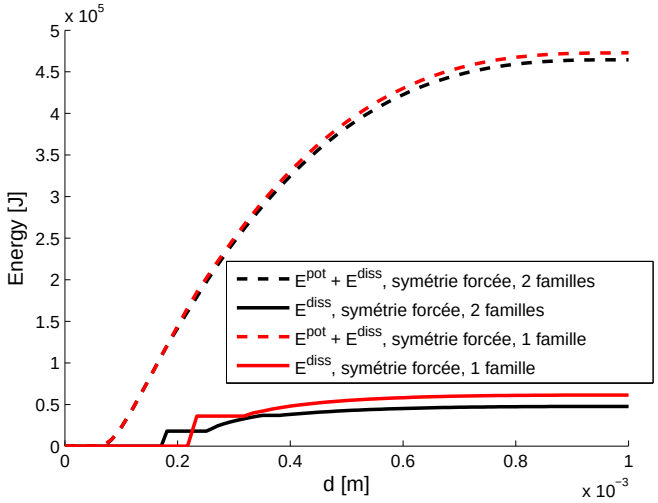

FIGURE 11.23 – Énergies totale $E^{pot} + E^{diss}$ et dissipée E^{diss}. Déformation nulle, une taille de grain divisée en deux familles, symétrie forcée.

Dix familles de grains identiques, symétrie forcée On peut pousser l'étude de ce phénomène en répartissant nos grains dans un plus grand nombre de familles. On en prend ici 10. Nous ne présentons pas les courbes, puisqu'elles sont parfaitement identiques à celles du cas à deux familles. En effet, il se forme deux groupes de 5 familles chacun qui suivent des évolutions identiques.

Deux familles de proportions variables, symétrie forcée Pour finir sur cette question, nous revenons au cas où il y a deux familles de grains de taille 1 mm. Nous faisons varier f^1 et f^2 en conservant $f^1 + f^2$ =0,3, pour chercher la répartition optimale entre les grains qui subissent la décohésion et les autres. Il se trouve que l'énergie est la plus faible exactement pour $f^1 = f^2$. Si la répartition est inégale, c'est toujours la famille de plus faible fraction volumique qui subit la décohésion.

Six familles de grains identiques, symétrie non forcée Pour finir avec cette étude de la division d'une unique taille de grains en différentes familles, on ne force plus la symétrie. Celle-ci est alors rétablie naturellement par fissuration de trois familles dans les trois directions, tandis que la moitié des familles de subit pas de décohésion (Fig. 11.24).

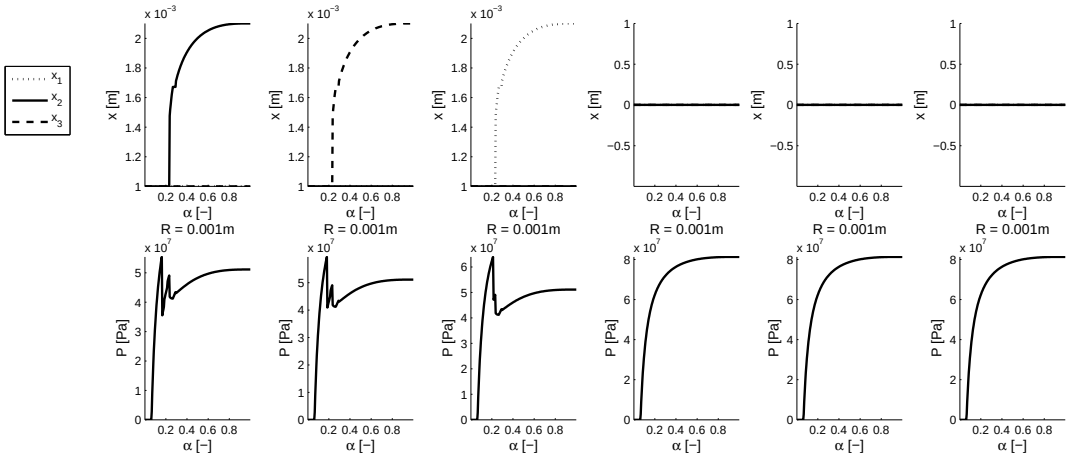

FIGURE 11.24 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, une taille de grain divisée en six familles, symétrie libre.

Les décohésions ne sont pas simultanées, et lissent donc la perte de propriétés mécaniques (Fig. 11.25). On voit sur ces courbes d'évolutions des modules d'Young que leur chute est fortement influencée par le choix du nombre de familles. S'il y a suffisamment de familles, une moitié seulement fissure, ce qui limite la perte de propriétés mécaniques. Il semble donc raisonnable de forcer la symétrie, mais pas de mettre tous les granulats dans une seule famille, même s'ils sont tous de la même taille.

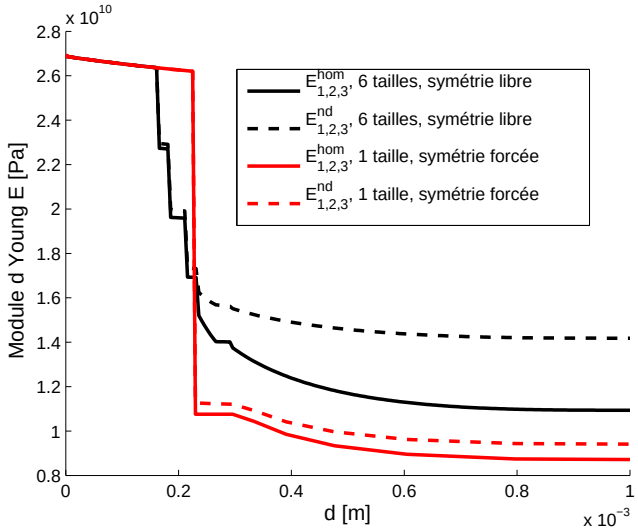

FIGURE 11.25 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, une taille de grain divisée en six familles, symétrie libre.

11.3.1.3 Plusieurs tailles de grains différentes, symétrie forcée

On échelonne nos cinq tailles de grains de R^1 =0,5 mm à R^2=1,5 mm, en fractions volumiques identiques pour une fraction volumique totale toujours égale à 0,3. Lorsque les tailles de grains sont différentes, on fait le choix de les attaquer toutes à la même vitesse en termes de profondeur d'attaque absolue, non relative. Sur les différentes tailles de grains, à un instant donné, on a toujours la même valeur de $\alpha^i R^i$. On observe alors une décohésion qui débute par les grandes tailles et touche toutes les tailles de grains, tandis que la fissuration, qui débute également par les grandes tailles, reste limitée aux deux plus grandes (Fig. 11.26). On a également effectué la

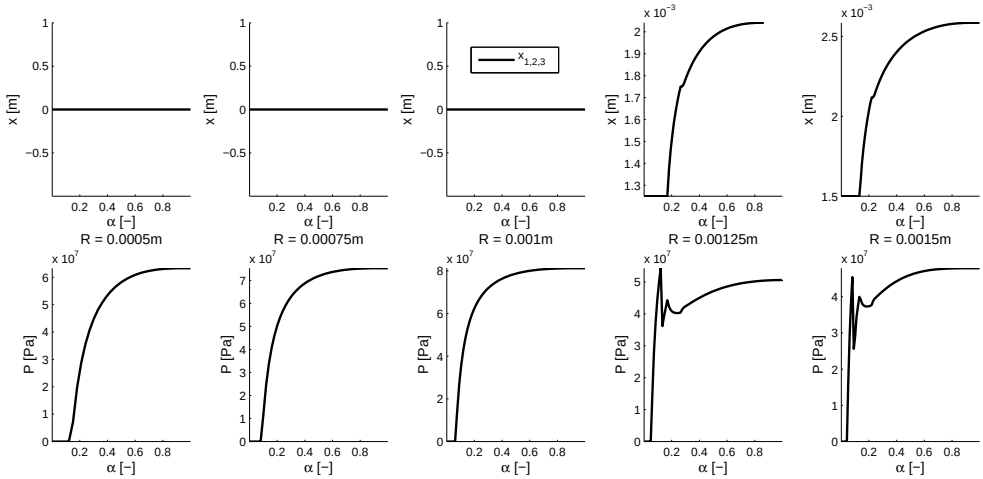

FIGURE 11.26 – Taille de fissure x et pression p. Déformation nulle, cinq tailles de grain différentes, symétrie forcée.

même simulation en doublant toutes les familles de grains. Les résultats sont assez proches. Il y a donc moins de risque à ne mettre qu'une seule famille de grains par taille de grains lorsque les tailles sont nombreuses que lorsque l'on n'a qu'une seule taille de grains.

11.3.2 Traction dans une direction

On teste ici des chargements du type :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0{,}0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

La traction dans une direction induit une direction préférentielle d'apparition des fissures. Comme dans la partie précédente, commençons par un exemple à une seule taille de grains.

11.3.2.1 Une famille de grains, symétrie axiale

On a donc $R^1 = 1$ mm et $f^1 = 0{,}1$. On force pour l'instant la fissuration à respecter la symétrie du chargement, c'est-à-dire que $x_2 = x_3$.

On a donc une contrainte de traction qui apparaît dans les trois directions à cause de l'effet Poisson, mais elle est plus importante dans la direction de traction. La fissuration débute donc préférentiellement dans la direction 1 (Fig. 11.27). Apparaît donc une anisotropie du matériau que l'on voit bien sur l'évolution des modules d'Young dans les trois directions (Fig. 11.28).

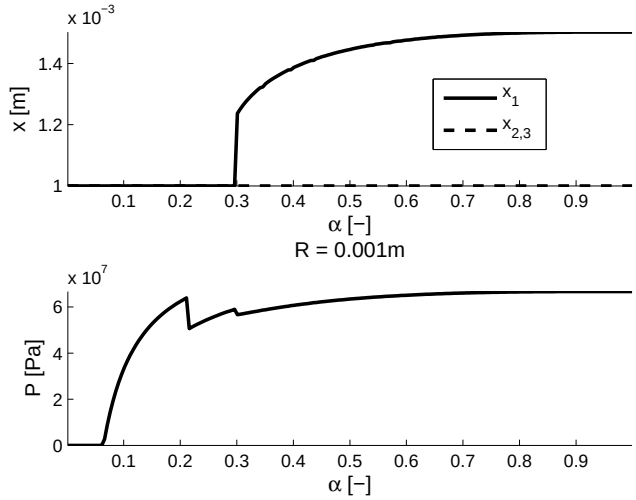

FIGURE 11.27 – Taille de fissure x et pression p. Déformation de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

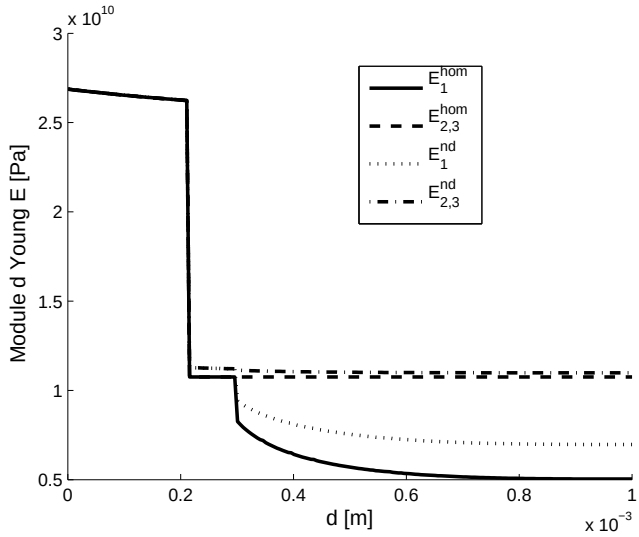

FIGURE 11.28 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Déformation de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

La direction 1 passe donc de direction de plus grande traction à direction de plus forte compression, à cause de l'apparition de ces fissures (Fig. 11.29).

11.3.2.2 Une famille de grains, symétrie libre

Dans le même esprit que l'étude que l'on a faite pour le cas du gonflement gêné, on reprend la simulation du paragraphe précédent en laissant cette fois la symétrie de la fissuration libre. La fissuration se déroule exactement de la même manière, on ne montre donc pas ces courbes.

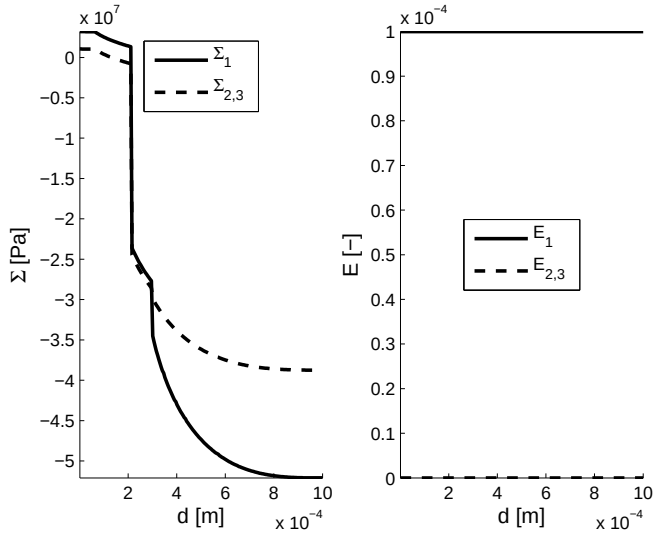

FIGURE 11.29 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Déformation de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

11.3.2.3 Plusieurs familles de grains identiques

Deux familles Comme dans le cas du gonflement gêné, la minimisation de la fonction énergie totale ne conduit à la décohésion que d'une seule des deux familles (Fig. 11.30).

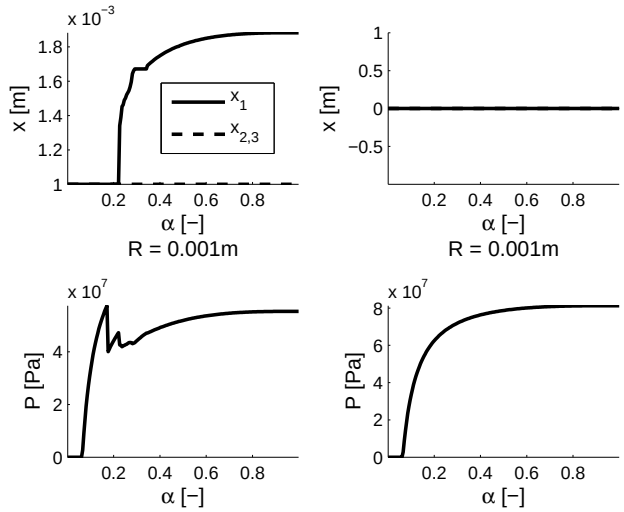

FIGURE 11.30 – Taille de fissure x et pression p. Déformation de traction uniaxiale, une taille de grain divisée en deux familles, symétrie axiale.

Dix familles De la même façon que pour le gonflement gêné, si l'on sépare l'unique taille de grains en 10 familles, cinq familles fissurent dans la direction 1, cinq autres ne subissent pas de décohésion. Les résultats sont donc identiques au cas à deux familles. Les commentaires que nous avons faits pour le cas du gonflement gêné s'appliquent également ici, en particulier en ce qui concerne la nécessité de dupliquer les familles de grains s'il y a peu de tailles de grains au total.

11.3.3 Compression dans une direction

On teste ici un chargement qui correspond en quelque sorte à l'essai oedométrique :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -0{,}0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

11.3.3.1 Une famille de grains, symétrie axiale

On a donc $R^1 = 1$ mm et $f^1 = 0{,}1$. On force pour l'instant la fissuration à respecter la symétrie du chargement, c'est-à-dire que $x_2 = x_3$.

La fissuration se fait préférentiellement dans les directions 2 et 3 (Fig. 11.31), qui sont les directions dans lesquelles la compression initiale est faible.

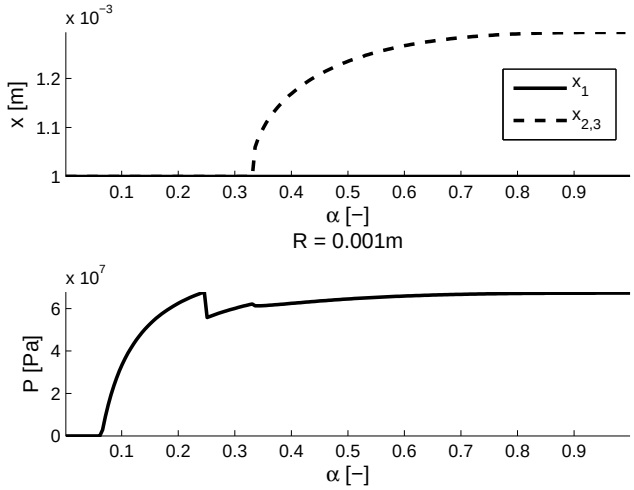

FIGURE 11.31 – Taille de fissure x et pression p. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

Cela conduit à réduire la compression dans la direction où elle était la plus forte (Fig. 11.32).

11.3.3.2 Une famille de grains, symétrie libre

La fissuration ne se fait alors plus que dans une seule direction, c'est-à-dire la direction 2 ou la direction 3. Le matériau, initialement isotrope, devient donc isotrope transverse d'axe 2 ou 3, alors que le matériau initial et le chargement sont de symétrie autour de l'axe 1.

11.3.3.3 Comparaison des cas symétrie libre et forcée sur un plus grand nombre de familles

Dans ces simulations, on a une famille de grains qui occupe 50 % du volume total de grains, tandis que les 50 % restants sont répartis dans quinze familles. Les résultats diffèrent légèrement. Dans le cas symétrie libre, douze familles de grains subissent la décohésion, soit une proportion des grains de 40 %. Dans le cas forcé, cela monte à 14 familles, soit 47 %. Il peut paraître anormal que le choix de symétrie influe sur la décohésion qui est isotrope. Il se trouve cependant que dans le cas à symétrie libre, une première fissure apparaît après la douzième décohésion et empêche

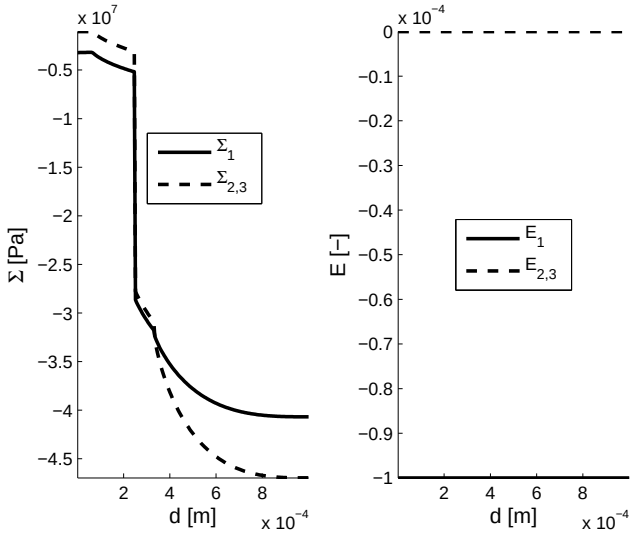

FIGURE 11.32 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

les décohésions suivantes, tandis que dans le cas forcé deux fissures sont obligées d'apparaître en même temps ce qui ne se produit qu'après la quatorzième décohésion.

La fissuration, sur les deux optimisations que nous avons faites (dont le résultat comporte une part d'aléa à cause de la procédure de choix des initialisations des tailles de fissures dans la recherche du minimum de l'énergie totale), donne des résultats différents mais difficiles à distinguer du point de vue énergétique (Fig. 11.33). La situation libre est tout de même d'énergie légèrement plus faible.

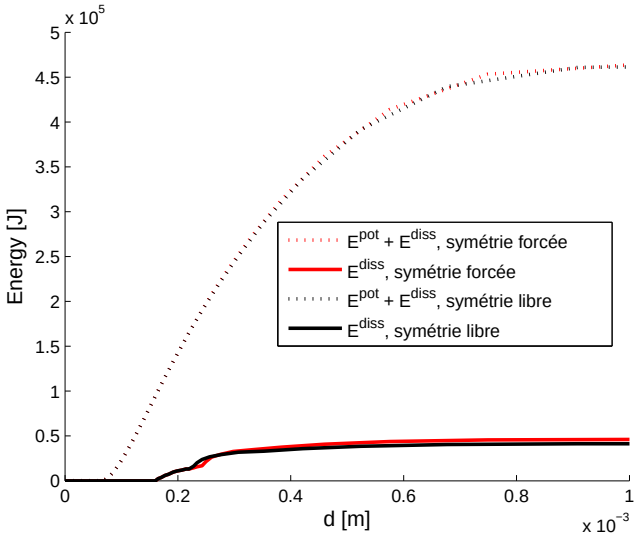

FIGURE 11.33 – Énergies totale $E^{pot} + E^{diss}$ et dissipée E^{diss}. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain divisée en 16 familles, symétrie axiale.

Dans le détail, la fissuration se fait comme suit :
- cas forcé : 5 familles fissurent dans la direction 1, 9 familles dans les directions 2-3 ;
- cas libre : 2 familles fissurent dans la direction 1, 6 dans la direction 2, 4 dans la direction 3.

Les contraintes obtenues dans les deux cas sont donc sensiblement différentes (Fig. 11.34). Il en est de même pour les propriétés mécaniques obtenues (Fig. 11.35).

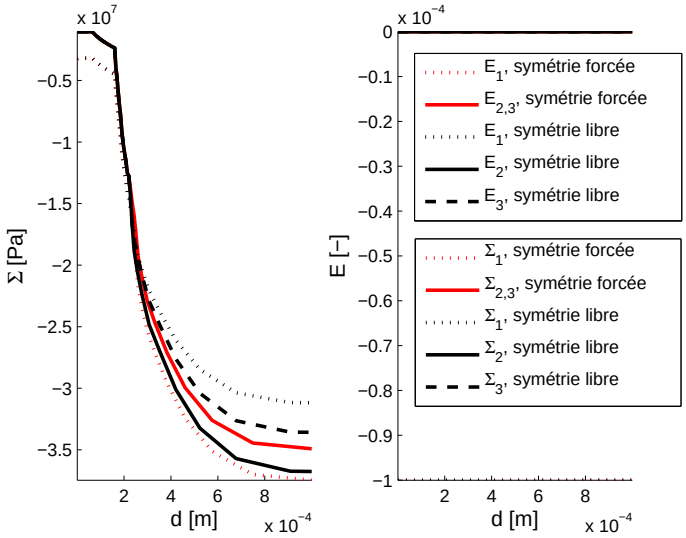

FIGURE 11.34 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain divisée en 16 familles, symétrie axiale.

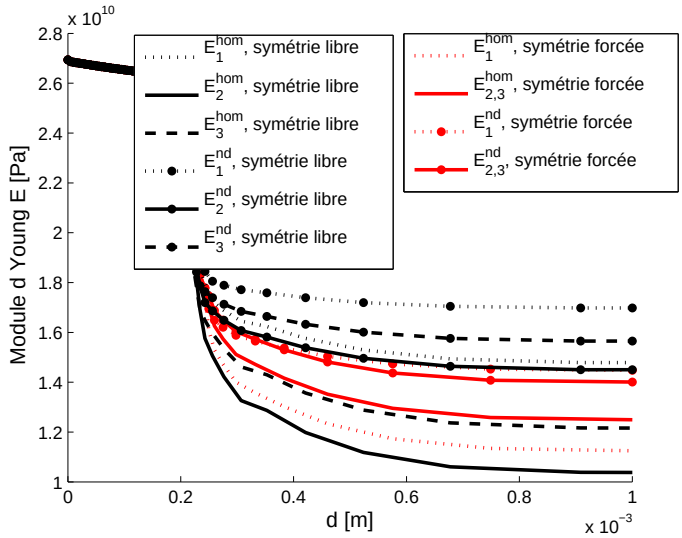

FIGURE 11.35 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Déformation de compression uniaxiale, une taille de grain divisée en 16 familles, symétrie axiale.

La première différence vient du nombre de familles ayant subi la décohésion en premier lieu, puis du fait que dans le cas forcé beaucoup plus de fissures choisissent la direction 1, qui se retrouve paradoxalement plus endommagée que les directions 2-3 (Fig. 11.35).

On a donc de l'ordre de 10-20 % d'écarts sur les estimations des propriétés mécaniques. Il nous semble qu'il reste préférable d'imposer la symétrie de façon à gagner en temps de calcul.

11.3.4 Conclusion sur l'attaque à déformation imposée

Nous avons étudié diverses situations d'attaque à déformation imposée. L'objectif était d'expliquer les mécanismes de décohésion et fissuration en fonction du chargement, et de déterminer l'influence des choix que l'on fait en termes de symétrie de la solution et du nombre de familles de grains. Nous avons montré que les solutions peuvent différer légèrement selon qu'on laisse la fissuration libre de choisir ses directions ou qu'on la contraint mais nous préférons imposer tout de même la symétrie de la solution, ce que nous avons argumenté en comparant les résultats à symétrie forcée et la moyenne de résultats à symétrie libre (§ 11.3.1.1), et en remarquant que même lorsqu'il y a des différences plus importantes, elles sont acceptables (§ 11.3.3.3). En ce qui concerne les tailles de grains, nous avons observé un comportement assez différent à faible nombre de tailles de grains, selon qu'on les découpe en sous-familles ou non, mais avons remarqué que lorsqu'il y a beaucoup de tailles de grains, il n'est plus nécessaire de les découper en sous-familles (§ 11.3.1.3). Ces conclusions sont cohérentes avec ce que l'on avait remarqué sur l'exemple plus simple du chapitre 7, qu'on avait résumé au § 7.4.5. Nous avions remarqué qu'à déformation imposée si les familles de grains de même taille avaient une histoire de fissuration différente, la fissuration finissait par s'équilibrer si l'injection était assez poussée. Il en était de même pour la symétrie. Nous n'avions pas observé le phénomène décrit au § 11.3.1.2 de comportement différent de la moitié des grains, sauf de manière transitoire. Cela conforte notre impression que la multiplication des familles de grains pour une même taille de grain n'est pas utile.

11.4 Étude générale du comportement du modèle à contrainte imposée

La plupart des essais en laboratoire sont faits sur des éprouvettes à contrainte imposée. La plupart du temps il s'agit de gonflement libre, mais il existe dans la littérature également des essais à contrainte de compression imposée sur des éprouvettes attaquées par l'alcali-réaction. Il est donc important de tester notre modèle dans ce cas là. On garde le même jeu de paramètres que dans la section précédente :

E_a	60 GPa	K_{gel}	0,3 GPa
E_c	20 GPa	ρ^1	0,1
$\nu_a = \nu_c$	0,25	δ	1,5
G_c^{decoh}	40 J.m^{-2}	l_c	10 μm
G_c^{fiss}	80 J.m^{-2}	ρ^{itz}	0,3

(11.5)

11.4.1 Gonflement libre

La contrainte macroscopique est imposée nulle. C'est le cas d'une bonne partie des essais d'alcali-réaction dans la littérature. C'est aussi ce cas de figure que l'on a étudié dans l'article [3] que nous avons déjà cité, avec un formalisme micromécanique beaucoup plus simple.

On a donc :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

11.4.1.1 Une famille de grains, symétrie forcée

Dans cette situation de symétrie forcée le comportement ressemble beaucoup à ce qu'on a eu à déformation nulle, en dehors du fait que les tailles de fissures atteintes en gonflement libre sont

plus importantes (Fig. 11.36).

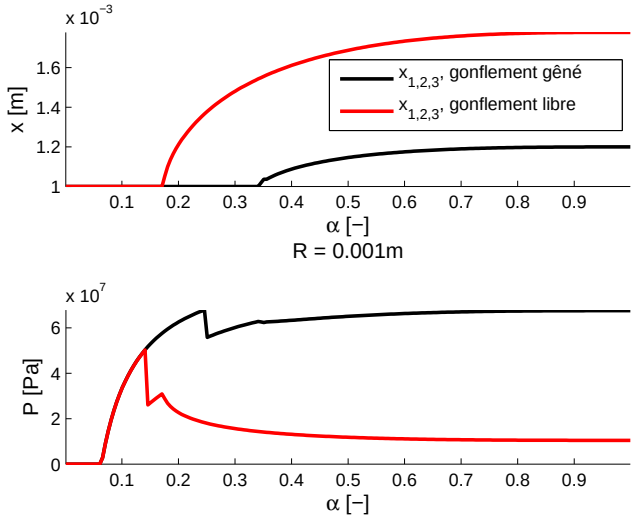

FIGURE 11.36 – Taille de fissure x et pression p. Rouge : gonflement libre. Comparaison des résultats à déformation nulle et à contrainte nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

L'endommagement du matériau, comme on le voit aux modules d'Young, est lui aussi plus important à attaque identique, dans le cas libre (Fig. 11.37).

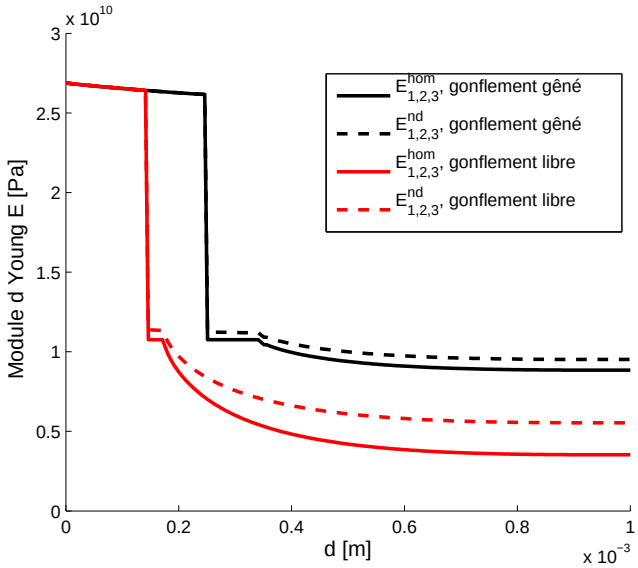

FIGURE 11.37 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Rouge : gonflement libre. Comparaison des résultats à déformation nulle et à contrainte nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

11.4.1.2 Une famille de grains, symétrie libre

Dans ce cas, comme dans le cas de gonflement gêné que l'on a montré, la fissuration se fait dans une seule direction. C'est d'autant plus compréhensible ici puisqu'il n'y a pas de limites au gonflement dans chaque direction autres que la ruine complète du matériau. Il n'y a donc pas de raison pour que le gonflement s'arrête dans la direction où il a démarré pour se répartir dans une autre direction.

11.4.1.3 Deux familles de grains de la même taille, symétrie forcée

Ici comme le gonflement est libre, il y a moins de freins à la fissuration que dans le cas de la déformation nulle. Les deux familles subissent donc décohésion puis fissuration simultanément (Fig. 11.38). Raffiner le nombre de familles de grains dans le cas des contraintes imposées semble donc moins utile que dans le cas à déformation imposée.

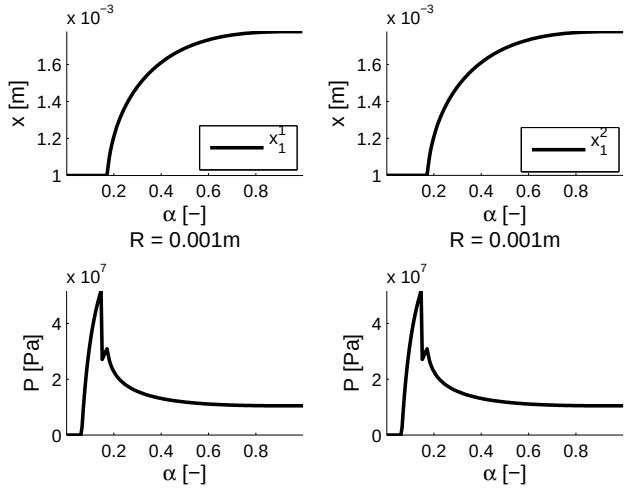

FIGURE 11.38 – Taille de fissure x et pression p. Contrainte nulle, une taille de grain, symétrie forcée.

11.4.2 Traction dans une direction

On prend une seule taille de grain ($R^1 = 1$ mm, f^1=0,3), mais on met cette fois notre échantillon en traction dans la direction 1 en imposant la contrainte macroscopique suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

Avec successivement Σ_1= 0,1 MPa et $\Sigma_1 = 5$ MPa. Ces états de traction sont très endommageants pour le matériau. La fissuration se développe dans la direction en traction uniquement (Fig. 11.39), et la taille de la fissure est importante. Elle entraîne une diminution considérable du module d'Young calculé à partir du tenseur des modules non drainée dans la direction 1 que l'on peut assimiler à la rupture de l'échantillon dans cette direction (Fig. 11.40). Notre modèle considère qu'il reste encore une certaine rigidité dans la direction 1 lorsque l'on regarde les modules non drainés. Le gel est en effet forcé de rester dans les fissures ce qui assure une cohésion un peu artificielle à l'échantillon. Les évolutions de fissures trouvées pour nos deux cas de chargement

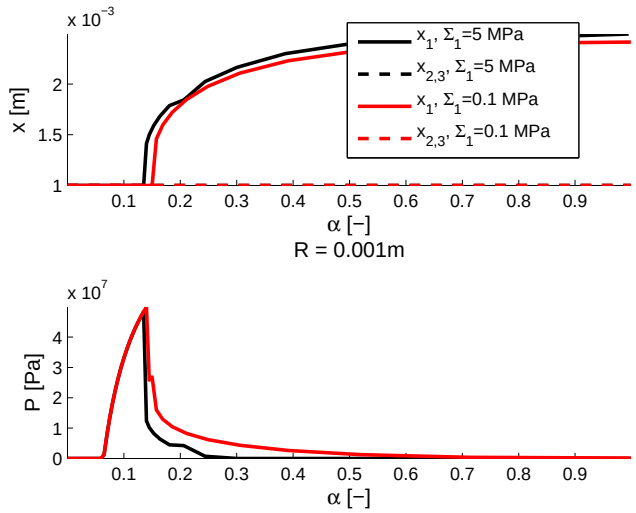

FIGURE 11.39 – Taille de fissure x et pression p. Contrainte de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

sont très proches. Le chargement de traction a donc pour principal rôle de fixer l'orientation des fissures mais ne joue pas véritablement sur leur taille (conclusion qui serait probablement fausse si on avait un gel beaucoup plus souple et que la rupture était donc essentiellement due au chargement extérieur, mais notre modèle n'est de toute façon pas fait pour représenter ce type de fissuration).

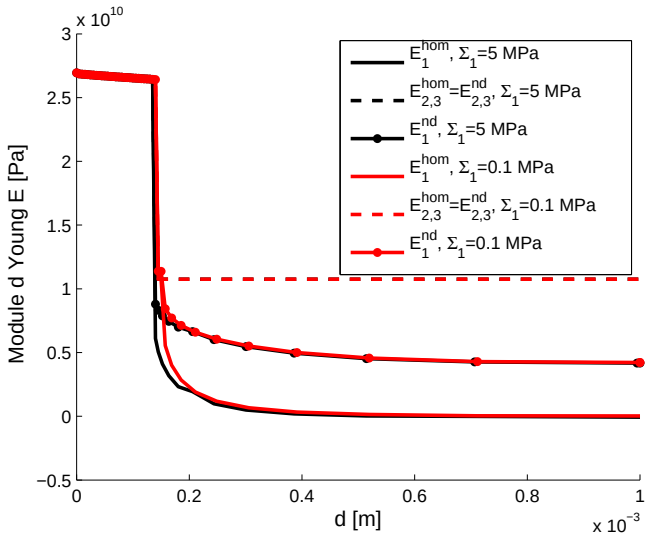

FIGURE 11.40 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Contrainte de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

Les gonflements obtenus sont très importants, dépassant le pour-cent (Fig. 11.41). L'énergie totale est plus petite que l'énergie dissipée dans le cas 5 MPa, c'est-à-dire que l'énergie potentielle est négative (Fig. 11.42). Ceci est dû à une très forte contribution du travail des efforts extérieur dans l'énergie potentielle, alors que la partie élastique diminue à cause de la perte de rigidité. On

atteint là les limites de notre modèle de micromécanique qui échoue à estimer correctement les énergies élastiques à de hauts niveaux d'endommagement tels qu'atteints ici.

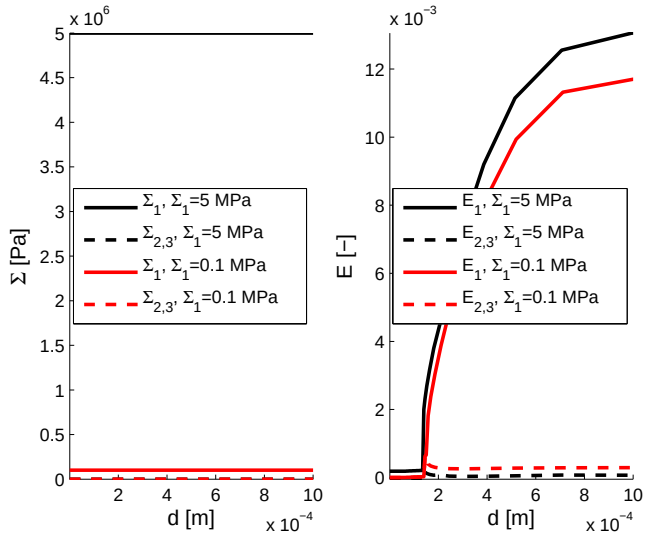

FIGURE 11.41 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Contrainte de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

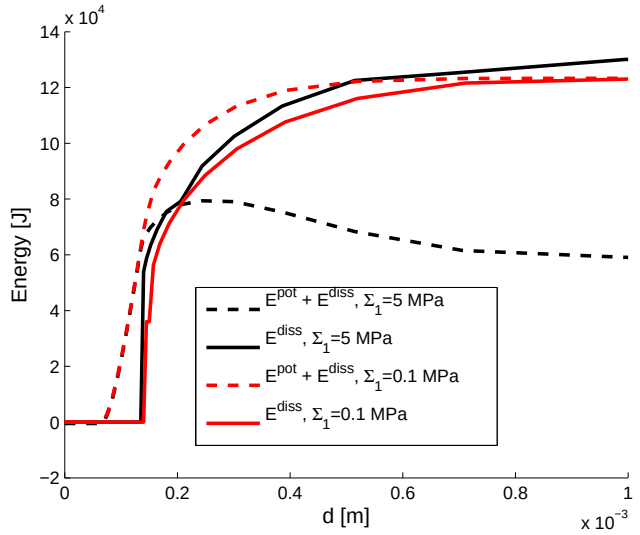

FIGURE 11.42 – Énergies totale $E^{pot} + E^{diss}$ et dissipée E^{diss}. Contrainte de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

On trace le détail des contributions à l'énergie totale pour essayer de mieux comprendre pourquoi elle devient si faible (Fig. 11.43).

On voit que la contribution qui tire la valeur de l'énergie potentielle vers le bas est le travail des efforts extérieurs $\underline{\underline{\Sigma}}^{imp} : \underline{\underline{E}}$ qui est soustrait à l'énergie élastique pour obtenir l'énergie potentielle. On peut réécrire l'expression théorique de l'énergie pour comprendre ceci. L'énergie élastique, de manière condensée (voir chapitre 10), s'écrit :

$$E^{el} = \frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{2}\sum_i b^i (p^i)^2 \tag{11.8}$$

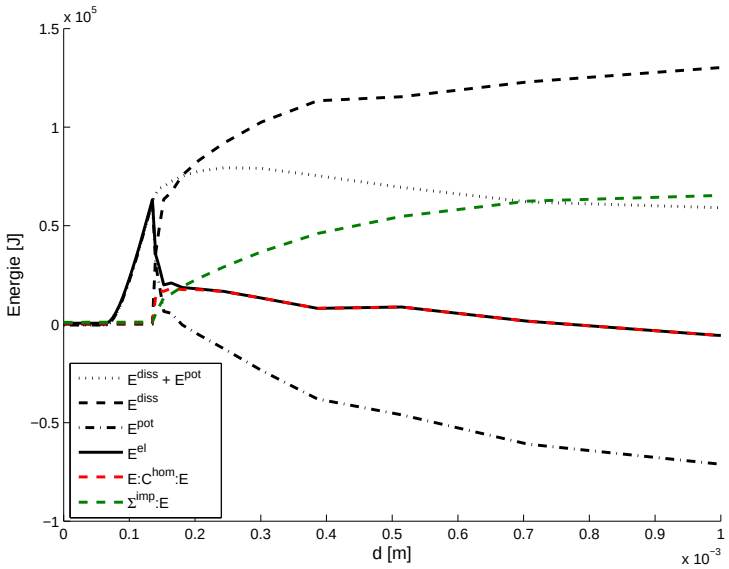

FIGURE 11.43 – Énergies dans le cas 5 MPa. Contrainte de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

Tandis que la pression, donnée aux équations 10.13 et 10.17, s'écrit :

$$p^i = \frac{a^i - \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{E}}}{b^i} \tag{11.9}$$

Où les coefficients a^i, b^i sont propres à chaque famille. On a dans notre cas, pour toutes les familles :

$$a^i = (\delta - 1)F^i - 3f^i \frac{\rho_{itz}}{R^i} \tag{11.10}$$

qui représente la différence entre le volume nécessaire et le volume disponible pour le gel à déformation extérieure nulle. $F^i = f^i \rho^i \left[1 - (1 - \alpha^i)^3\right]$ est le volume attaqué au site considéré. Puis pour les sites de *Type II*,

$$b^i = M^i + \frac{\delta F^i}{K_g} + \frac{f^i - F^i}{K_a} \tag{11.11}$$

le dernier terme n'étant pas présent pour les sites de *Type I*. Ce terme représente les variations de volumes des différentes composantes du béton (pâte de ciment, gel, granulat si considéré indépendamment de la pâte de ciment). Avec ces notations condensées, le tenseur des modules d'élasticité non drainée et la précontrainte chimique s'écrivent alors (voir § 10.4) :

$$\mathbb{C}^{hom}_{nd} = \mathbb{C}^{hom} + \sum_i \frac{\underline{\underline{B}}^i \otimes \underline{\underline{B}}^i}{b^i} \tag{11.12}$$

Et,

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = -\sum_i \frac{a^i}{b^i} \underline{\underline{B}}^i \tag{11.13}$$

Lorsqu'on remplace la pression par l'expression donnée ci-dessus dans l'expression de l'énergie élastique, on peut la réécrire :

$$E^{el} = \frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom}_{nd} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^* : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{2}\sum_i \frac{(a^i)^2}{b^i} \tag{11.14}$$

Il nous semble logique d'appeler le dernier terme énergie de précontrainte chimique e^*, puisque c'est l'énergie élastique emmagasinée dans le béton attaqué si la déformation est nulle. Rappelons l'équation qui lie contraintes et déformations et définit les modules non drainés et la précontrainte chimique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}_{nd}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^* \tag{11.15}$$

Dans notre situation actuelle, toutes les composantes de contraintes sont imposées, si bien que l'énergie élastique et l'énergie potentielle sont liées par la relation :

$$E^{pot} = E^{el} - \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \tag{11.16}$$

On en retire l'expression finale de l'énergie potentielle :

$$E^{pot} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{nd}^{hom} : \underline{\underline{E}} + e^* \tag{11.17}$$

Le premier terme de cette expression est négatif, le second est positif. Il peut être intéressant de réécrire cette expression :

$$E^{pot} = -\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\Sigma}}^{imp} - \underline{\underline{\Sigma}}^*\right) : \mathbb{S}_{nd}^{hom} : \left(\underline{\underline{\Sigma}}^{imp} - \underline{\underline{\Sigma}}^*\right) + e^* \tag{11.18}$$

Où apparaît la différence entre la contrainte imposée et la précontrainte chimique. Cette écriture de l'énergie potentielle fait apparaître plus clairement pourquoi elle devient négative, ce que l'on représente sur la Fig. 11.44. La contribution (E, E) à l'énergie élastique drainée $\left(\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}}\right)$

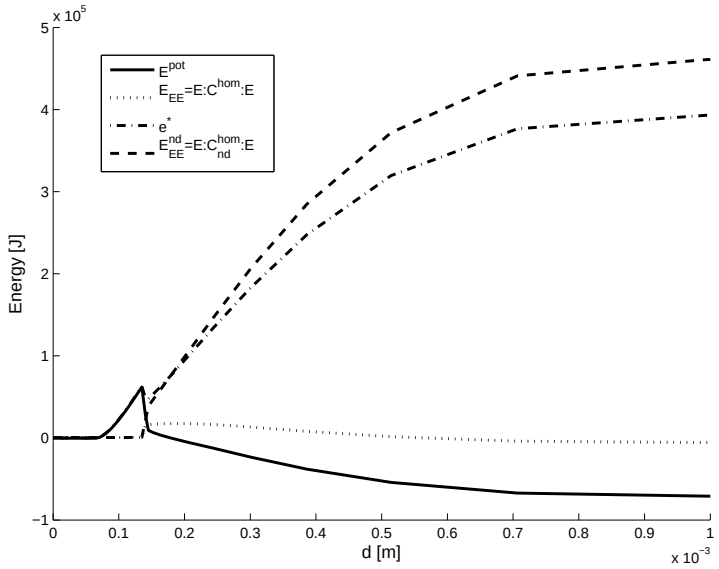

FIGURE 11.44 – Énergies dans le cas 5 MPa. Contrainte de traction uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

est très faible, voire négative, ce qui souligne une faiblesse du schéma *IDD* que l'on a déjà abordée dans le chapitre 4 et qui nous a conduit à utiliser la variante *FRIDD* du schéma *IDD* (ce qui n'a pas complètement résolu ce problème), qui se manifeste ici par un tenseur des modules d'élasticité drainée dont certaines composantes ne sont plus positives. Par exemple, à la fin du

calcul à 5 MPa, le tenseur des modules homogénéisés est :

$$\mathbb{C}^{hom} = \begin{pmatrix} -0,063 & -0,019 & -0,019 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & 11,3 & 2,6 & 0 & 0 & 0 \\ -0,36 & 2,6 & 11,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 \end{pmatrix} \text{ GPa} \tag{11.19}$$

Le tenseur de souplesse est lui également problématique, avec pour les mêmes raisons des termes négatifs :

$$\mathbb{S}^{hom} = \begin{pmatrix} -15 & -0,022 & -0,022 & 0 & 0 & 0 \\ -0,40 & 0,093 & -0,022 & 0 & 0 & 0 \\ -0,40 & -0,022 & 0,093 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix} \text{ GPa}^{-1} \tag{11.20}$$

On peut d'ailleurs en tirer la valeur finale du module d'Young E_1= -0,064 GPa, dont l'évolution est visible sur la Fig. 11.40. L'utilisation du schéma *FRIDD* permet d'éviter des effets très indésirables comme l'énergie tendant vers l'infini, mais n'est pas parfaite. La comparaison du schéma *IDD* au schéma *PCW* peut permettre de comprendre ses limites. Certaines conditions de symétrie des fonctions de distribution des particules ne sont pas vérifiées dans le cadre du schéma *IDD* alors que lors de l'établissement de leur schéma, Ponte-Castañeda et Willis montrent qu'elles sont nécessaires pour assurer la positivité du tenseur d'élasticité homogénéisé [22]. Comme on le voit sur la même figure (Fig. 11.44), l'énergie élastique (E, E) non drainée $\left(\underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{nd} : \underline{\underline{E}}\right)$, c'est-à-dire prenant en compte la contribution du contenu des cavités (gel, grains) à la rigidité de l'ensemble, ne s'approche pas de zéro. Le tenseur des modules non drainés se comporte de manière beaucoup plus régulière que le tenseur des modules d'élasticité drainée.

11.4.3 Compression dans une direction

11.4.3.1 Compression modérée

On met ici notre échantillon en compression dans la direction 1 en imposant la contrainte macroscopique suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} -5 \text{ MPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.21}$$

La fissuration se fait ici dans les directions 2 et 3, qui sont les moins comprimées. Elle est moins importante que dans le cas d'une traction (Fig. 11.45). On a cette fois deux directions fortement endommagées mais qui conservent une rigidité résiduelle beaucoup plus importante que dans le cas de la traction (Fig. 11.46).

La déformation est presque nulle dans la direction d'application de la charge, hormis une légère dilatation entre le moment de la décohésion du grain et le début de la fissuration (Fig. 11.47).

11.4.3.2 Compression importante

Cette fois-ci on choisit une contrainte très importante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} -20 \text{ MPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

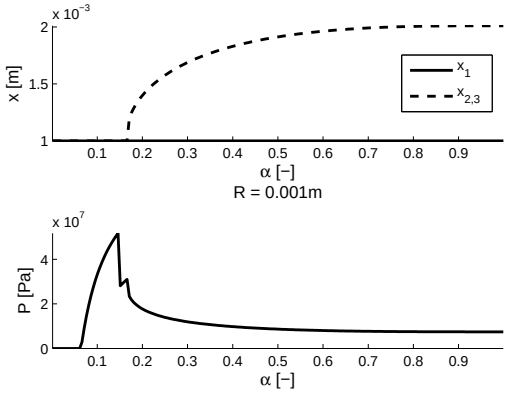

FIGURE 11.45 – Taille de fissure x et pression p. Contrainte de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

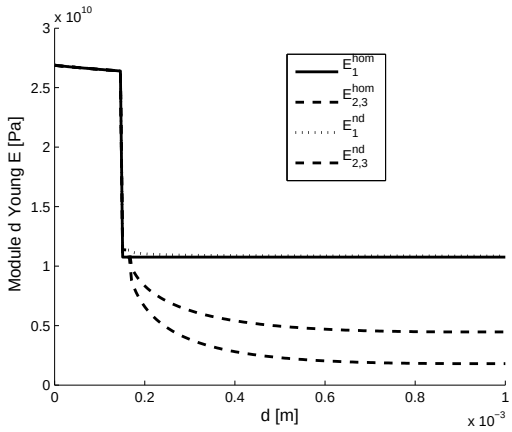

FIGURE 11.46 – Modules d'Young drainés E^{hom} et non drainés E^{nd}. Contrainte de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

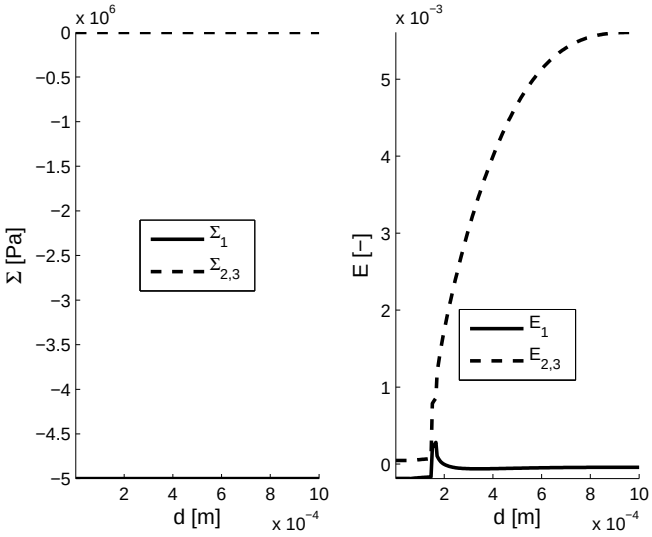

FIGURE 11.47 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Contrainte de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

Les compressions très élevées induisent le phénomène suivant : certaines configurations de fissuration, qui sont favorables énergétiquement, correspondent à une situation où il y a interpénétration soit entre le granulat et la pâte de ciment, soit entre les lèvres opposées d'une même fissure (§ 9.4). Comme nous l'avons expliqué en début de chapitre, notre algorithme de minimisation est construit de façon à ne pas engendrer d'état de fissuration où il y a interpénétration. Ceci a pour effet de retarder la décohésion et donc la fissuration (Fig. 11.48). Dès que la décohésion se produit on a un saut de taille de fissure qui permet de dissiper le trop plein d'énergie accumulé alors que la décohésion était énergétiquement possible mais bloquée par l'interdiction de l'interpénétration. Cela est un défaut de notre modèle qui, pour être atténué, nécessiterait de détailler la décohésion en différentes phases et de prendre en compte le contact entre les surfaces fissurées.

Cette contrainte très importante provoque également une sorte d'effondrement dans la direc-

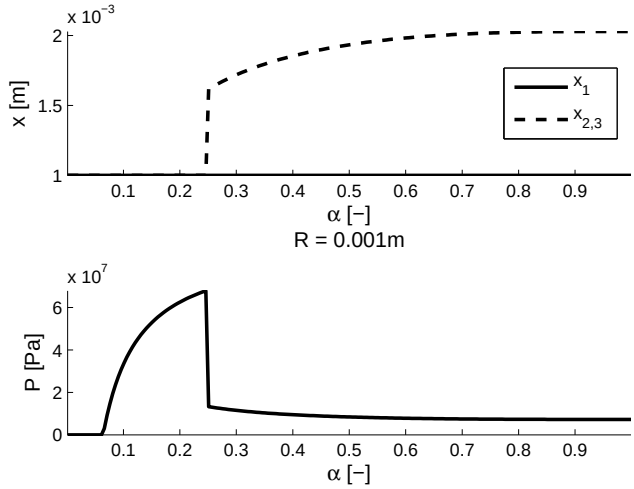

FIGURE 11.48 – Taille de fissure x et pression p. Contrainte de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

tion 1 au moment de la décohésion (Fig. 11.49).

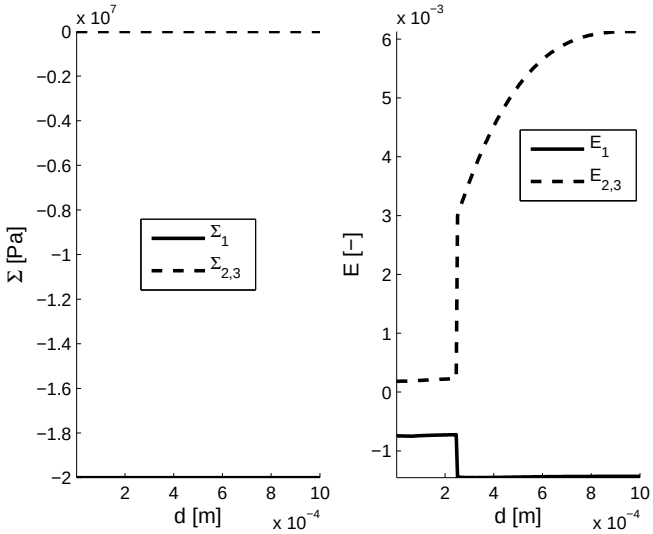

FIGURE 11.49 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Contrainte de compression uniaxiale, une taille de grain, symétrie axiale.

11.4.4 Conclusion sur l'attaque à contrainte imposée

Dans cette partie nous avons tout d'abord remarqué que de manière générale, les chargements imposés en contrainte provoquent plus d'endommagement que les chargements imposés en déformation. En particulier, les chargements de traction, quelle que soit leur intensité, conduisent pratiquement à la ruine de l'échantillon (§ 11.4.2). Nos simulations suivantes ont montré tout d'abord qu'il n'était pas nécessaire de raffiner les tailles de grains en sous-familles, car deux familles identiques suivent le même trajet de fissuration (contrairement à ce que l'on a observé

en déformation imposée, § 11.4.1.3). Par contre, la symétrie choisie influe sur le résultat, mais nous reprenons les conclusions de la comparaison faite à déformation imposée entre un essai à symétrie imposée et la moyenne d'essais à symétrie libre pour conclure qu'il est satisfaisant d'imposer la symétrie afin d'accélérer le calcul et de ne pas avoir besoin de multiplier les réalisations (§ 11.3.1.1). Ceci nous rassure sur le problème de l'irréversibilité de l'asymétrie de la fissuration à contrainte imposée que l'on a remarquée dans notre exemple simple au chapitre 7 (voir § 7.4.5). Enfin, les essais en compression montrent une des principales limites de notre modèle, qui est la prise en compte grossière de la décohésion à la fois en ce qui concerne la progression de la fissure de décohésion, que nous avons considérée comme instantanée et complète, et également en raison de l'absence de prise en compte du contact entre les faces d'une fissure de décohésion. Cela ne se manifeste cependant qu'à des niveaux de chargement de compression très élevés (20 MPa).

11.5 Étude de l'essai de Multon

L'essai de Multon [18] est un certain type d'essai d'alcali-réaction sous contrainte où une partie du chargement est réalisée par des anneaux qui confinent les éprouvettes dans leur direction radiale. Nous avons décrit l'analyse mécanique de cet essai au § 10.5.4, en particulier en ce qui concerne le calcul des contraintes et des déformations.

11.5.1 Une famille de grains

Ici on choisit encore la taille de grain $R^1 = 1$ mm, et l'on force une symétrie axiale de direction 1, considérant que l'échantillon que l'on est en train de tester et un cylindre de hauteur quelconque et de rayon 65 mm, comme dans les essais de Multon [18]. On impose ensuite $\Sigma_{11} = -10$ MPa, tandis que dans les directions 2 et 3, le gonflement est restreint par la présence d'anneaux de 3 mm d'épaisseur.

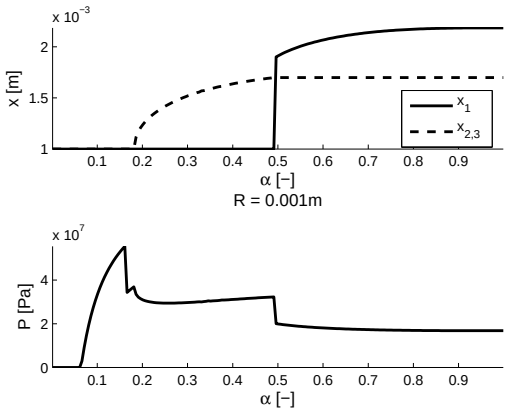

FIGURE 11.50 – Taille de fissure x et pression p. Essai de Multon, une taille de grain, $\Sigma_{11} = -10$ MPa, anneaux de 3 mm, symétrie axiale.

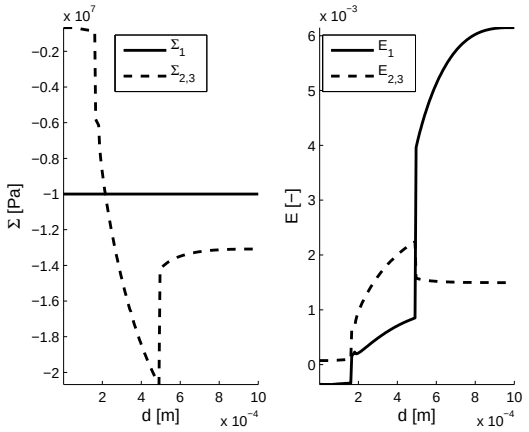

FIGURE 11.51 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Essai de Multon, une taille de grain, $\Sigma_{11} = -10$ MPa, anneaux de 3 mm, symétrie axiale.

Au démarrage de l'attaque, l'effet des anneaux ne se fait pas encore sentir. La fissuration démarre dans les directions restreintes, à cause de la contrainte de compression appliquée dans la direction longitudinale de l'éprouvette (Fig. 11.50). Cette fissuration fait apparaître une forte

contrainte de compression dans les directions 2 et 3, dont l'amplitude dépasse largement la contrainte imposée (Fig. 11.51). Cela réoriente la fissuration vers la direction la moins contrainte.

11.5.2 Nombreuses familles de grains de même taille

Avec deux ou dix familles de grains identiques, toujours en symétrie axiale, on obtient exactement le même comportement qu'avec une seule.

11.5.3 Répartition des tailles de grains

On utilise les mêmes conditions aux limites mais cette fois nos grains font de R^1=0,5 mm à R^5=1,5 mm et sont répartis en 5 classes de fractions volumiques égales, pour un total de 0,3.

La décohésion et une fissuration dans la direction d'action des anneaux se font de manière similaire dans les quatre tailles les plus grandes (Fig. 11.52). On a apparition d'une importante contrainte de compression dans ces directions qui ne se traduit pourtant pas par l'apparition d'une fissuration dans la direction d'application du chargement (Fig. 11.53).

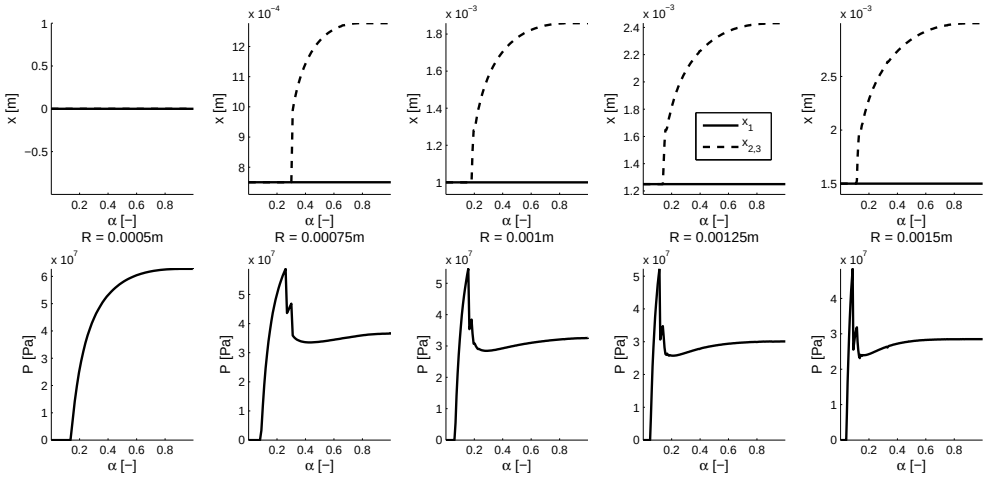

FIGURE 11.52 – Taille de fissure x et pression p. Essai de Multon, cinq tailles de grain différentes, $\Sigma_{11} = -10$ MPa, anneaux de 3 mm, symétrie axiale.

On répète la même expérience en choisissant cette fois des anneaux d'épaisseur 5 mm et un chargement de compression axiale de 20 MPa. Le comportement est tout à fait similaire, on ne montre donc pas les courbes.

Enfin on teste une troisième combinaison de chargement et d'épaisseurs d'anneaux : chargement de 10 MPa et anneaux de 5 mm. Cette fois après une première fissuration qui met l'éprouvette en compression transversale, les anneaux restreignent suffisamment l'expansion pour empêcher la fissuration de progresser dans cette direction, donc elle se réoriente dans la direction d'application du poids (Fig. 11.54). On remarque la fissuration de la plus petite taille de grains alors que l'attaque y est terminée, à cause de l'évolution des chargements mécaniques qu'elle subit.

Cela induit une réorientation des gonflements et une atténuation de la compression radiale (Fig. 11.55).

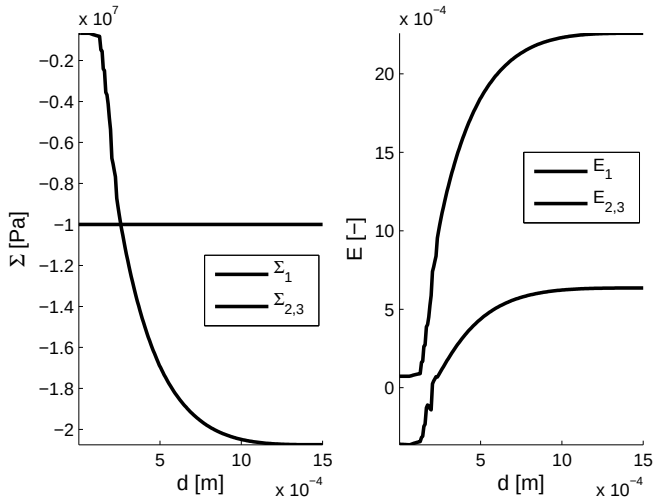

FIGURE 11.53 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Essai de Multon, cinq tailles de grain différentes, $\Sigma_{11} = -10$ MPa, anneaux de 3 mm, symétrie axiale.

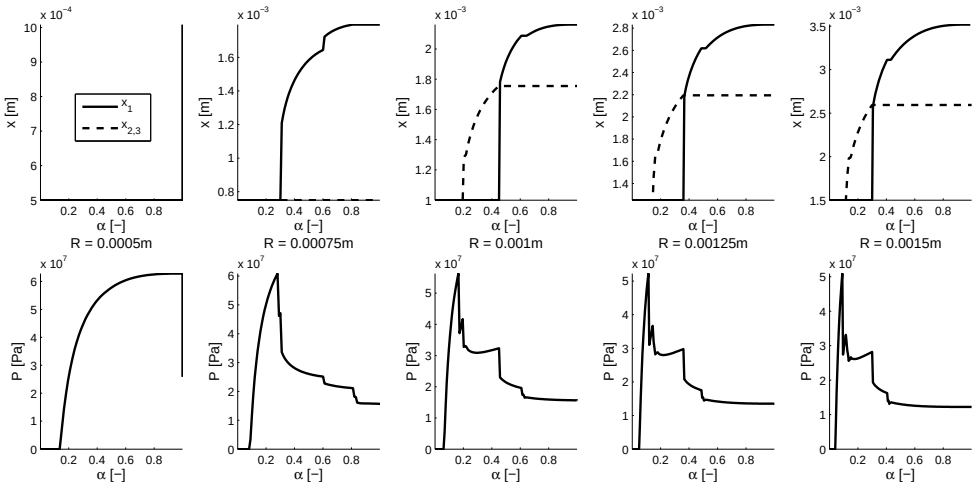

FIGURE 11.54 – Taille de fissure x et pression p. Essai de Multon, cinq tailles de grain différentes, $\Sigma_{11} = -10$ MPa, anneaux de 5 mm, symétrie axiale.

11.5.4 Conclusion sur l'essai de Multon

Notre modèle permet de simuler cet essai de manière satisfaisante, le phénomène de changement de direction de la fissuration se produit dans les simulations, et correspond de manière qualitative à ce qui est observé dans les essais. On observe bien une fissuration qui au départ se développe de manière influencée par la charge de compression, puis dans un second temps influencée par la présence des anneaux, à condition qu'il y ait un certain équilibre entre la valeur de la contrainte imposée par la charge, et celle due aux anneaux. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une étude plus détaillée de cet essai, avec pour objectif d'identifier les paramètres du modèle.

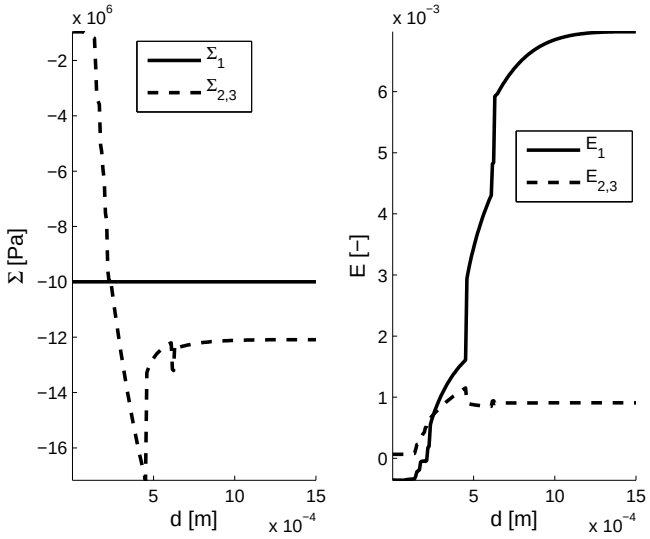

FIGURE 11.55 – Contraintes macroscopiques Σ et déformations macroscopiques E. Essai de Multon, cinq tailles de grain différentes, $\Sigma_{11} = -10$ MPa, anneaux de 5 mm, symétrie axiale.

11.6 Identification des paramètres de notre modèle sur les essais de Multon

Pour tester notre modèle, il est important de le confronter à des résultats expérimentaux. Nous avons choisi les résultats de Multon, présentés dans sa thèse [18] ainsi que dans l'article [19]. Il nous a en effet semblé que ces résultats étaient les plus complets pour discuter de l'évolution de l'anisotropie d'un béton chargé et subissant l'alcali-réaction. L'essai a été brièvement expliqué au § 10.5.4 lorsqu'il s'agissait de pouvoir calculer pour différents cas de chargement les contraintes et les déformations. Nous rappelons ici le principe de cet essai.

11.6.1 Essais de Multon

Les essais que nous avons choisis sont au nombre de 9 cas de chargements sur des éprouvettes réactives, et 3 cas de chargement sur des éprouvettes aux granulats non réactifs (toutes sans anneaux), de façon à corriger les résultats finaux du retrait et du fluage du béton. Les courbes de gonflement expérimentales que l'on montre sont donc ces courbes corrigées. Ce procédé de soustraction des déformations de retrait et de fluage aux déformations réelles pour tenter de ne garder que les déformations dues à l'alcali-réaction est bien sûr discutable, mais en l'absence de mieux nous récupérons sans modifications les courbes corrigées de Multon. Nous pensons néanmoins qu'il est intéressant d'essayer de simuler ces phénomènes conjointement à l'alcali-réaction plutôt que de devoir les retrancher des courbes expérimentales, ce qui est fait dans certains modèles à l'échelle de la structure comme celui de Grimal [11, 12]. Aucun modèle à l'échelle microscopique n'est capable à l'heure actuelle de prendre le fluage en compte, mais il y a des efforts numériques dans ce sens (Giorla, [10]).

Les éprouvettes cylindriques, de diamètre 6, 5 cm et de hauteur 24 cm recouvertes d'une feuille d'aluminium de façon à limiter les échanges d'eau et de produits chimiques avec l'extérieur. Elles sont soumises à deux niveaux de contraintes longitudinales de compression (10 MPa et 20 MPa) grâce à un bâti de fluage. Les anneaux qui restreignent le gonflement radial sont en acier, de 3 mm ou de 5 mm d'épaisseur. Les anneaux sont de 1 cm de hauteur et ne se touchent pas de façon à éviter les frottements entre anneaux et béton au maximum. Les éprouvettes sont conservées

à 38 °C. Comme Multon, on note SF les essais sans anneaux (sans frettage). Les neuf essais disponibles sont donc : SF-0, SF-10, SF-20, 3-0, 3-10, 3-20, 5-0, 5-10, 5-20. La fraction volumique de silice réactive dans les granulats, qui est dans notre modèle égale à la porosité de la *zone attaquée* du granulat, est toujours fixée pour tous les granulats réactifs à ρ=0,1, en accord avec les valeurs données par Multon dans l'article [17].

La granulométrie utilisée est la suivante :

- fraction volumique de 0,23 de granulats non réactifs (les détails de leur taille, etc. ne nous intéressent pas puisqu'ils ne seront pas amenés à se fissurer), auxquels on affecte arbitrairement une taille de 1 mm. Ces granulats non réactifs sont en fait le sable non réactif.
- pour les granulats réactifs, la courbe granulométrique est donnée sur les figures 11.56 et 11.57. Le granulat est un granulat de calcaire avec des veines de silice. Le granulat étant concassé, on pense que la silice dissoute et les gels créés ont la possibilité de migrer facilement vers l'auréole de transition. Nous considérons donc que notre modèle est bien adapté pour ce type de granulat, et qu'il est raisonnable de supposer que les phénomènes de rupture sont essentiellement localisés à l'interface entre granulat et pâte de ciment, et dans la pâte de ciment.

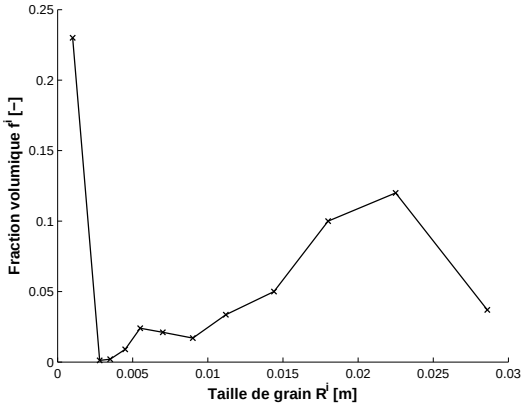

FIGURE 11.56 – Granulométrie du béton réactif de Multon

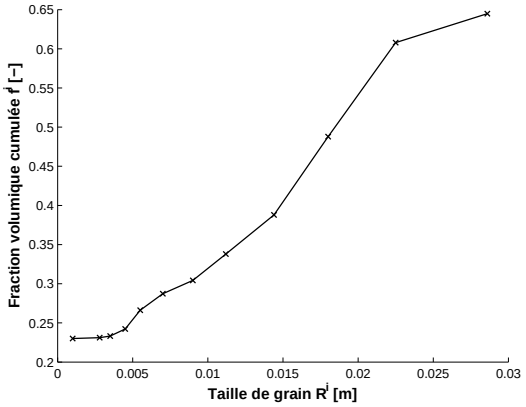

FIGURE 11.57 – Granulométrie cumulée du béton réactif de Multon

On remarque que les grains réactifs sont tous assez gros, et qu'il n'y a pas de sable réactif. Présentons tout d'abord les résultats de Multon sur ces neuf essais, que nous avons extraits de sa thèse [18]. On représente tout d'abord les déformations dans les deux directions (Fig. 11.58). Puis les contraintes, certaines étant imposées, d'autres résultant de la compression des anneaux (Fig. 11.59). Les résultats montrent certaines tendances générales. Tout d'abord, lorsque l'on s'intéresse aux déformations (Fig. 11.58). On voit sur la courbe sans charge axiale et sans anneaux (SF-0) l'anisotropie en gonflement libre de ce béton (mentionné par Comi et Grimal qui ont également travaillé sur ces résultats [12, 5]). Le gonflement longitudinal (E_{zz}) diminue lorsque l'on augmente la charge dans cette direction, avec deux exceptions notables qui sont le passage de 3-10 à 3-20, et celui de 5-10 à 5-20. Ensuite, lorsqu'on augmente l'épaisseur des anneaux, la déformation longitudinale a tendance à augmenter, mais encore une fois cela se voit peu lorsque l'on passe de 3-10 à 5-10, et de 3-20 à 5-20. Pour ce qui est des déformations radiales, elles augmentent légèrement avec la charge appliquée, mais ce n'est pas toujours très prononcé, et diminuent avec l'augmentation de l'épaisseur des anneaux, ce qui semble un peu plus net. Ces déformations n'ont donc pas toujours une évolution très facile à interpréter, ce qui peut avoir deux causes : des erreurs de mesures mentionnées par Multon concernant les mesure radiales sur

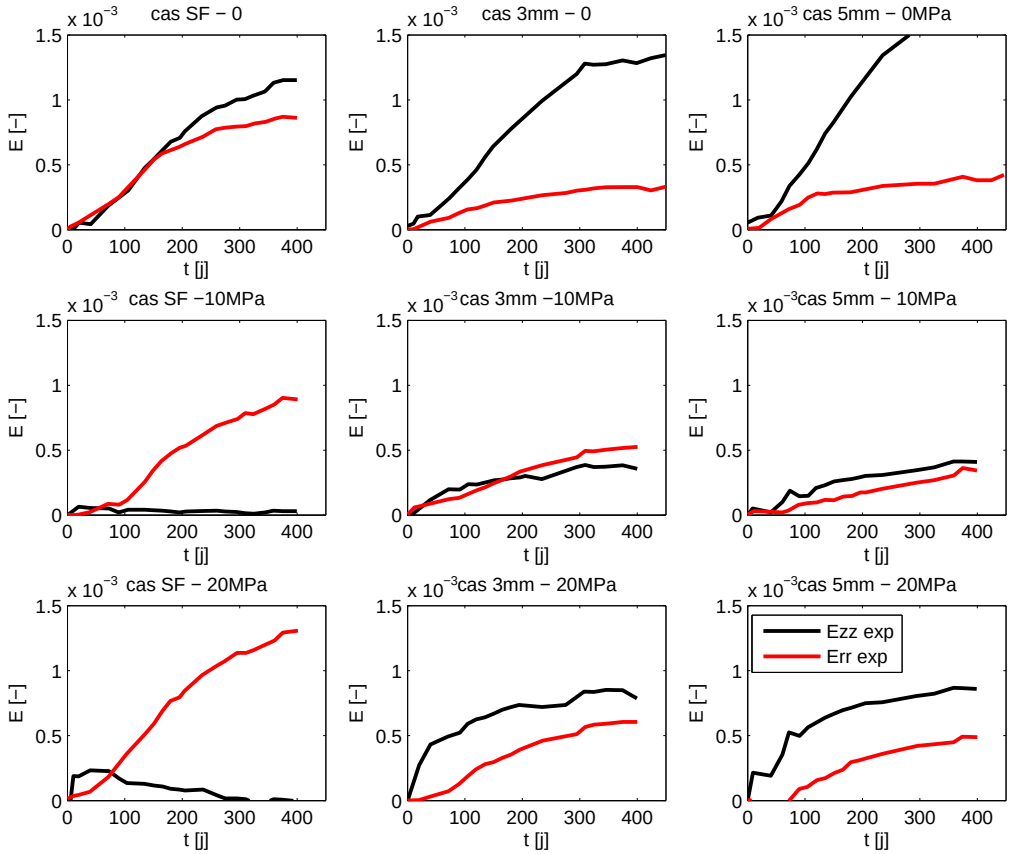

FIGURE 11.58 – Neuf essais de Multon sous chargement triaxial. Déformations.

éprouvettes avec anneaux de 5 mm, ou la procédure de soustraction aux déformations mesurées du retrait et du fluage mesuré sur des éprouvettes non réactives dans les mêmes conditions de chargement axial (mais pas radial).

La mesure des contraintes est en revanche plus brute (Fig. 11.59). Elle provient de la conversion directe de la déformation radiale en connaissance de la rigidité des anneaux. Il semble alors un peu plus net que la contrainte radiale augmente avec la charge appliquée, et avec l'épaisseur des anneaux.

L'objectif de cette section est donc d'identifier les paramètres de notre modèle sur certains de ces essais, puis d'utiliser ces paramètres pour essayer de reproduire les autres.

11.6.2 Identification de paramètres du modèle

Pour procéder à une identification on s'est restreint à 4 essais : SF-0, SF-10, 3-0, 3-10. On a cherché à approcher au mieux les résultats donnés par Multon pour ces quatre cas de figure en minimisant la somme des carrés des écarts absolus entre simulations et expériences, divisés par le temps, de façon à ne pas trop mettre l'accent sur les temps longs où les gonflements sont toujours plus importants. On ne considère que les déformations radiales et longitudinales. On a effectué plusieurs minimisations avec comme paramètres fixés :

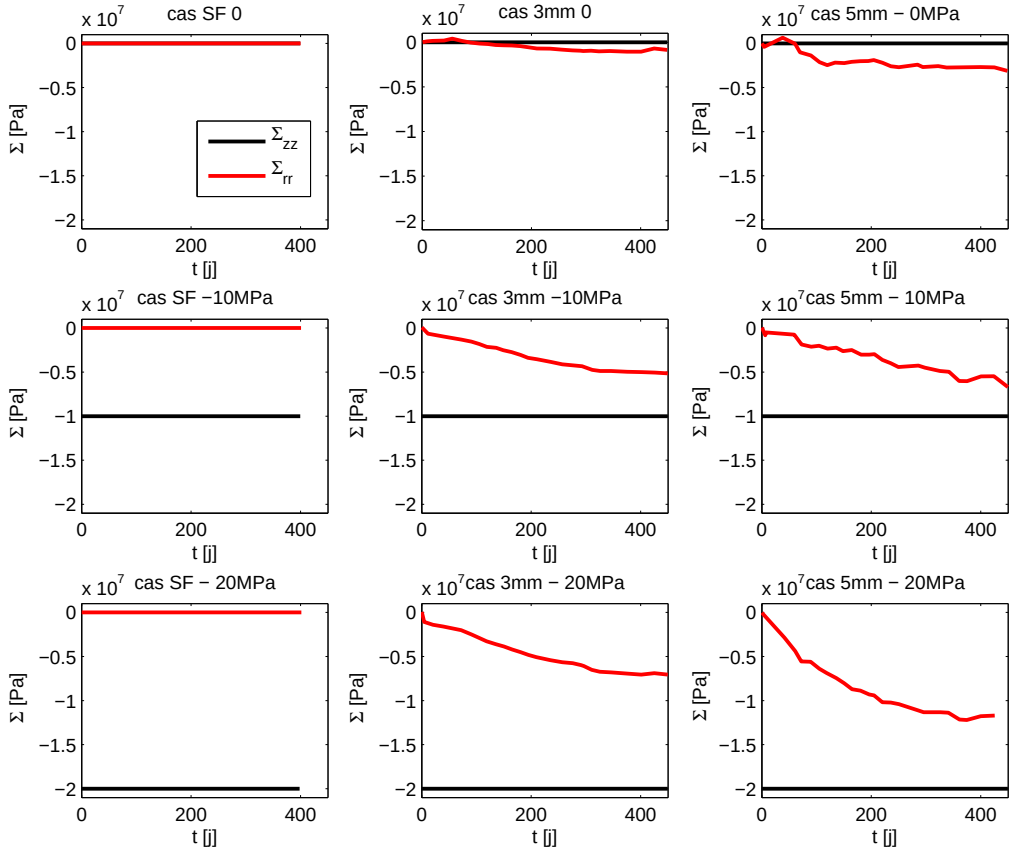

FIGURE 11.59 – Neuf essais de Multon sous chargement triaxial. Contraintes.

E_a	60 GPa	ρ^{itz}	0,3
E_c	20 GPa	ρ^i	0,1
$\nu_a = \nu_c$	0,25	X	10^{-10}

(11.23)

Les paramètres recherchés sont alors : $K_g, l_c, \delta, \eta, G^{dec}$, sachant que l'on garde $G^{fiss} = 2G^{dec}$, en s'inspirant de valeurs données dans [1]. Le paramètre η que nous n'avons pas encore mentionné, sert d'échelle de temps. Nous avons choisi de faire une attaque à profondeur d'attaque identique sur tous les granulats. La progression de l'attaque étant intimement liée à un processus de diffusion, nous choisissons de faire varier la profondeur d'attaque en racine carrée du temps, comme dans notre article [3], forme suggérée par Multon [16], ou Furusawa (§ 2.2.1, [9]). La profondeur d'attaque vaut donc à un temps donné et pour un grain de taille R^i :

$$d(t) = \eta\sqrt{t} \tag{11.24}$$

Le résultat est très dépendant du jeu initialement choisi pour la minimisation. Nous choisissons ici de représenter les résultats obtenus avec le jeu de paramètres suivant :

K_g	0,36 GPa	η	$2{,}4.10^{-5}$ m.s$^{-1/2}$
l_c	9,5 μm	G^{dec}	243 J.m^{-2}
δ	1,7	G^{fiss}	$2G^{dec}$

(11.25)

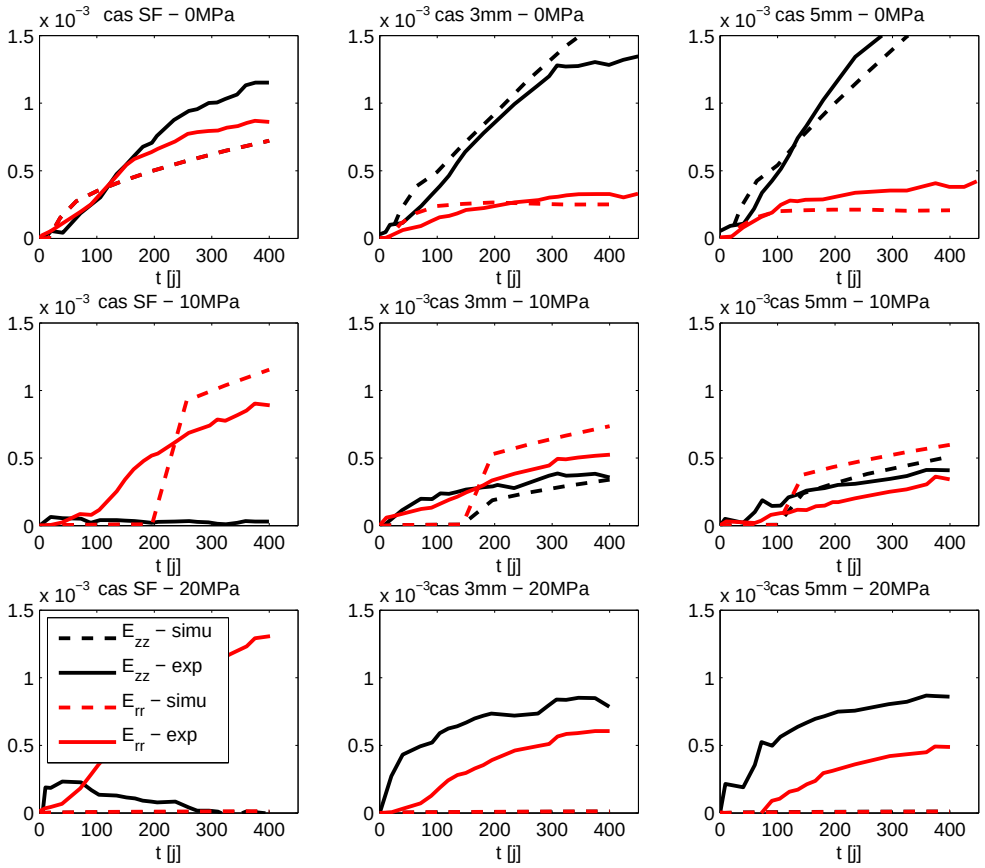

FIGURE 11.60 – Déformations pour les 9 cas de chargements de Multon. Identification effectuée sur les 4 cas de chargement SF-0, SF-10, 3-0, 3-10

L'accord est, pour la plupart des courbes de gonflement ayant servi à l'identification, plutôt satisfaisant (Fig. 11.60). La décohésion reste une événement trop brutal, ce qui est dû au relativement faible nombre de tailles de grains conservé pour la simulation d'une part, et au fait qu'elle peut être artificiellement retardée par l'interdiction de l'interpénétration du grain et de sa cavité après décohésion, interdiction qui ne se comporte pas de la même façon que l'optimisation énergétique de la décohésion, du point de vue des tailles de grains. Le cas 3-10 montre que l'on a du mal à exactement capter le phénomène de report de l'expansion vers la direction verticale une fois que les anneaux mettent l'éprouvette en compression radiale. On capte cependant assez bien les gonflements sur ces 4 cas ayant servi à l'identification. Mentionnons cependant dès maintenant un second défaut : les énergies de fissuration identifiées. Alors que la rigidité du gel $K_g = 0{,}36$ GPa et son coefficient de dilatation $\delta = 1{,}7$ ont des valeurs vraisemblables, de même que l'épaisseur de l'auréole de transition $l_c = 9{,}5$ μm, l'énergie de fissuration est trop importante. On a fixé dans l'identification $G^{fiss} = 2G^{dec}$. On a donc $G^{fiss} = 486$ J.m^{-2}. Il nous semble que les valeurs admises pour les pâtes de ciment sont en général inférieures à cette valeur d'un ordre de grandeur [1, 27]. Nous discuterons de ce défaut ultérieurement. L'ordre de grandeur des pressions est d'ailleurs également en dehors des valeurs communément admises, puisque les pressions sont de l'ordre de 100 MPa avant décohésion, et entre 10 et 30 MPa après décohésion, ce qui semble trop élevé, bien que ces pressions ne soient pas bien connues dans la littérature.

Shin utilise néanmoins une pression de l'ordre de 10 MPa dans son modèle par éléments finis [25], ce qui est également cohérent avec les mesures de Struble [26].

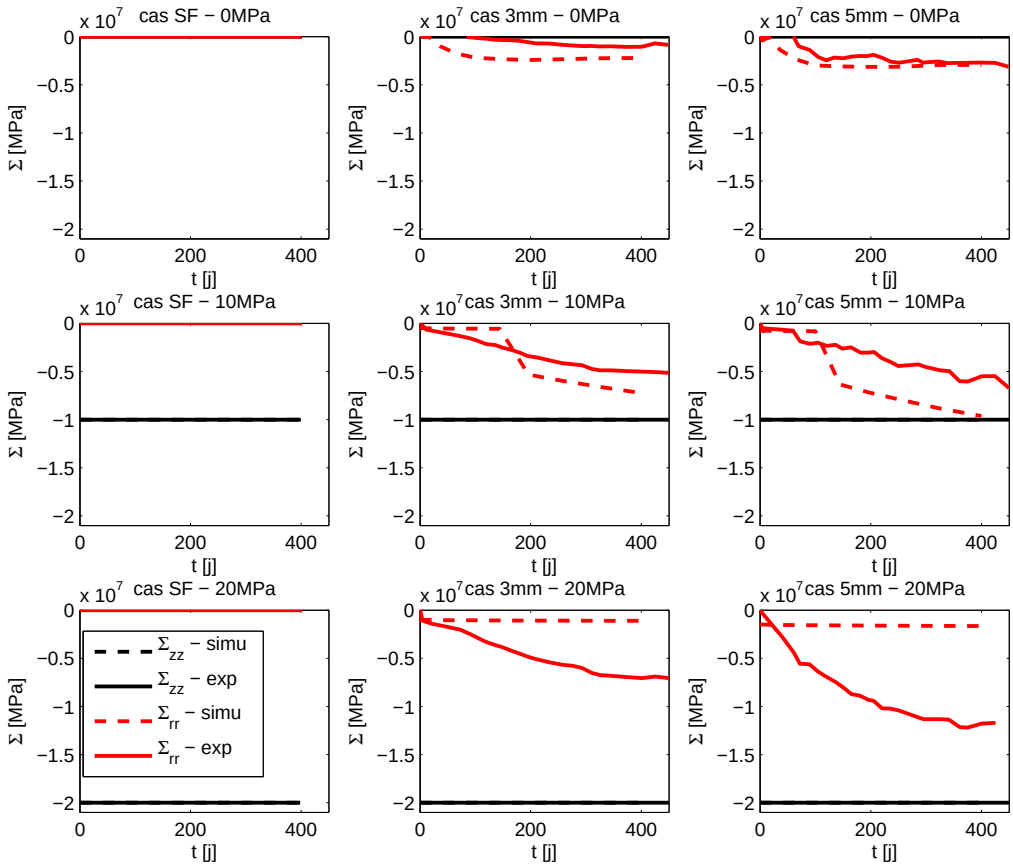

FIGURE 11.61 – Contraintes pour les 9 cas de chargements de Multon. Identification effectuée sur les 4 cas de chargement SF-0, SF-10, 3-0, 3-10

Nous pouvons également comparer les contraintes obtenues lors de ces simulations aux contraintes expérimentales (Fig. 11.61). Les contraintes sont légèrement surestimées pour les deux cas ayant servi à l'identification (3-0 et 3-10). On voit encore, sous chargement (cas 3-10) la brutalité de la décohésion qui provoque une discontinuité de contrainte artificielle.

11.6.3 Utilisation de ce jeu de paramètres dans les autres cas de chargement

Observons maintenant comment notre modèle se comporte sur les cinq autres cas de chargements, qui occupent la troisième colonne et la troisième ligne sur les figures 11.60 et 11.61). Concernant les déformations, les prévisions sont assez satisfaisantes lorsque l'on augmente l'épaisseur des anneaux à 5 mm. La solution souffre alors des mêmes défauts que lorsque les anneaux étaient de 3 mm, c'est-à-dire que la décohésion est brutale (cas 5-10), et que le report de l'expansion depuis la direction radiale, initialement non chargée, vers la direction longitudinale, n'est pas exactement reproduite, même si le phénomène est visible. On peut faire les mêmes commentaires concernant la prévision de contrainte radiale dans les cas (5-0 et 5-10). L'extension du modèle à ces cas souffre de défauts mais est néanmoins satisfaisante.

On est en revanche moins satisfait par l'utilisation du modèle avec ce jeu de paramètre pour les cas où la charge de compression est de 20 MPa. Le phénomène de retard de la décohésion prend alors encore plus d'importance et entraîne l'absence de décohésion sur tout l'intervalle de temps considéré. Les déformations (Fig. 11.60) ainsi que les contraintes (Fig. 11.61) sont en conséquence largement sous-estimées. Il semble que ce soit un défaut sérieux de notre modèle. Nous avons essayé d'autres jeux de paramètres, mais aucun ne diminuait significativement ce phénomène.

11.6.4 Conclusion sur l'identification des paramètres

Nous avons effectué notre identification de paramètres sur quatre essais de Multon. Comi, qui a travaillé sur les mêmes résultats expérimentaux, avait choisi de n'utiliser que les essais sans anneaux pour l'identification, puis d'utiliser les autres pour la validation [5]. Nous avons fait des tentatives de ce genre. L'identification donne des résultats aussi bons si l'on n'utilise par exemple que les essais SF-0 et 3-10, mais pas si l'on considère des essais sous 20 MPa. Si on inclut un de ces essais dans l'identification, les énergies de fissuration ont tendance à augmenter de manière encore plus démesurée, ce qui nous confirme que ces grandes énergies compensent d'autres défauts du modèle. Cela nous conforte dans l'idée que notre modèle ne peut pas reproduire ces essais sous très forte compression, ce dont nous discutons dans la partie suivante.

11.7 Discussion sur le fonctionnement de notre modèle

Nous pensons, tout d'abord, que le modèle est adapté aux chargements inférieurs à 10 MPa. Cela est démontré par l'identification de paramètres que nous avons effectuée. Les défauts mentionnés, tels que la brutalité de la décohésion et la trop grande valeur des énergies de fissuration donnent des pistes d'amélioration mais n'invalident pas le modèle. Aux plus forts chargements, les résultats expérimentaux ne sont plus reproduits du tout, puisque la décohésion est bloquée. Nous pensons que les défauts principaux de notre modèle sont :

- l'excessive orientation de la fissuration ;
- la simplicité de la description de la décohésion ;
- l'absence d'aléa sur la fissuration.

Pour ce qui est de l'orientation des fissures, nous pensons qu'elle s'aligne trop avec la direction principale de compression. La raison de cette impression est que les simulations effectuées avec des énergies de fissuration de l'ordre de grandeur de ce qui était attendu (40 J/m^2), montrent une orientation plus franche que les résultats présentés (Fig. 11.60) obtenus avec un jeu optimisé. L'augmentation des énergies de fissuration retarde la fissuration, et permet donc à la pression d'augmenter dans les cavités. La contribution de la pression dans l'énergie élastique est ainsi augmentée, ce qui rend la fissuration optimale moins dépendante du chargement, relativement. Pour appuyer cet argument, traçons ce que Multon appelle l'anisotropie du gonflement. On calcule d'abord la déformation chimique imposée, qui est chez Multon la déformation si l'on décharge. On a généralisé son écriture pour obtenir dans notre cas :

$$\underline{\underline{E}}^{ch} = \underline{\underline{E}} - (\mathbb{C}^{nd})^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}} = (\mathbb{C}^{nd})^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}}^{*} \tag{11.26}$$

On a fait apparaître le lien de cette déformation imposée avec la précontrainte chimique définie au § 10.4. Chez Multon, lorsque l'on trace la déformation chimique imposée longitudinale en fonction de la déformation chimique imposée transversale, ce qu'il appelle l'anisotropie, on obtient des droites de pentes qui augmentent avec l'épaisseur des anneaux et diminuent avec la charge de compression. Dans nos résultats, on n'obtient pas des droites lorsque l'on trace ces courbes, toujours pour le même jeu de paramètres (Fig. 11.62). Tant que la décohésion n'a pas eu lieu,

les valeurs des déformations chimiques sont très faibles, ce que l'on voit surtout sur les essais à 20 MPa, pour lesquels elle reste presque nulle. La décohésion provoque un saut de déformation durant lequel, comme c'est un événement isotrope, on a une anisotropie de 1. Dès que la fissuration démarre dans une direction, le gonflement cesse presque totalement dans les autres, ce que l'on voit bien sur les cas 5-0 et 3-0 où les anneaux empêchent totalement le gonflement radial, et sur les cas SF-10 et 3-10, où la charge empêche totalement le gonflement longitudinal. Seul le cas 5-10 est relativement équilibré, ce qui se comprend également si l'on retourne à la Fig. 11.61 sur laquelle on voit que c'est le seul cas où les contraintes radiales atteignent presque la charge longitudinale, et donc où une véritable compétition se joue entre les directions de fissurations.

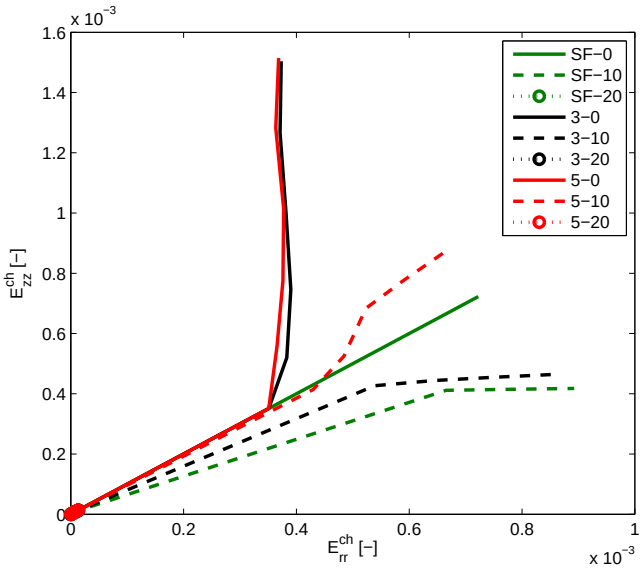

FIGURE 11.62 – Anisotropie pour les neuf cas de chargement de Multon simulés.

Pour ce qui est de la description de la décohésion, il est manifeste que le choix que nous avons fait de décrire la décohésion par une variable discrète, représentant l'état soit totalement collé, soit totalement décollé du granulat, est trop grossier. Il est évident, en effet, que sous de forts chargements de compression, la décohésion doit être partielle. Notre interdiction de l'interpénétration du grain avec la pâte de ciment n'est pas une erreur de modélisation, mais simplement une conséquence de la simplicité de la description de la décohésion. Le choix alternatif d'autoriser l'interpénétration ne donne pas de meilleurs résultats, mais représente un autre extrême. L'idéal, bien sûr, est de trouver le juste milieu entre les deux, qui consiste à considérer une décohésion progressive, ainsi que le contact entre les lèvres de fissures en compression. Nous donnons un exemple d'évolution de module d'Young durant l'attaque, pour le cas SF-0, toujours pour le même jeu de paramètres, sur la Fig. 11.63. La diminution des modules d'Young dans la direction 1 (la fissuration est ici isotrope) est très importante en comparaison des diminutions observées habituellement (voir § 1.5.2). On a pratiquement division par quatre des modules drainés et non drainés, et cette diminution est presque exclusivement due à la décohésion. Ceci renforce l'impression que la décohésion est trop simplifiée. On perd par nature du modèle poromécanique toute la rigidité en cisaillement des granulats. Remarquons que cette excessive perte de rigidité n'est pas sans conséquence pour notre identification des paramètres du modèle, puisqu'à contrainte donnée, les déformations sont alors plus importantes. Les déformations initiales sont soustraites aux courbes présentées, mais pas ces déformations dues à l'assouplissement du matériau sous contrainte constante, hormis lorsque l'on présente la déformation chimique imposée.

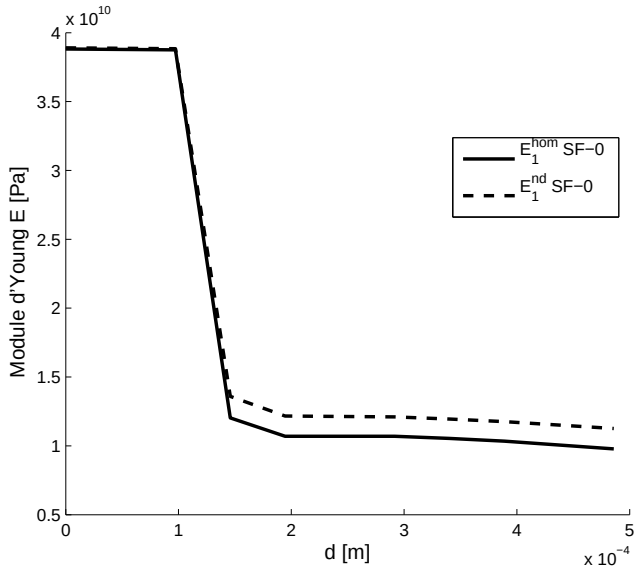

FIGURE 11.63 – Évolution des module d'Young drainés (*hom*) et non drainés (*nd*) pour le cas SF-0 de Multon.

On peut tout à fait imaginer qu'il soit possible de trouver une superposition d'ellipsoïdes qui décrive la décohésion de manière progressive, dans la continuité de ce que nous avons décrit au § 9.3.1.2. Si cela s'avère trop grossier, rien n'empêche de procéder par éléments finis, comme nous l'avons fait dans notre article [3] pour déterminer les énergies élastiques des diverses configurations fissurées. Dans la perspective de faire de la fissuration sous chargement, il est bien sûr nécessaire de simuler chaque chargement pour un certain nombre de configurations de fissuration, ce qui peut entraîner un grand nombre de simulations assez simples.

Pour ce qui est de l'absence d'aléa, elle se ressent de deux façons. Tout d'abord sur la simultanéité de la décohésion puis de la fissuration autour d'une fraction volumique non négligeable des granulats. Si l'on observe les courbes de la Fig. 11.62, on remarque que leur forme coudée serait lissée si les instants de décohésion et fissuration étaient moins proches. On ressent aussi cette absence d'aléa, en conjonction avec notre choix de ne modéliser que trois fissures orthogonales, sur l'excessive orientation de la fissuration. Sellier a bien montré dans sa thèse [24] que la prise en compte d'un aléa sur les énergies de fissuration dans les différentes directions atténue le phénomène d'orientation de la fissuration.

11.8 Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion de montrer un certain nombre de simulations effectuées avec notre modèle complet. Nous avons tout d'abord expliqué l'algorithme de fissuration utilisé pour faire évoluer la microstructure. Pour chaque pas de chargement, on effectue une recherche des directions dont la décohésion entraîne une énergie totale optimale, puis une optimisation des tailles de fissure, avec comme contraintes la croissance des paramètres d'endommagement et l'interdiction de l'interpénétration du granulat et de la cavité qui le contient d'une part, et des lèvres des fissures d'autre part.

Nous présentons tout d'abord des exemples élémentaires qui nous servent principalement à prolonger les réflexions du chapitre 7 sur la nécessité de discrétiser plus ou moins la granulométrie et le choix de la symétrie que l'on impose à la solution a priori. Les simulations à déformation

imposée montrent que si le nombre de tailles de granulat est très faible, il est utile de les subdiviser en familles pour optimiser l'énergie. Si en revanche il y a de nombreuses tailles de granulat, cela ne semble pas nécessaire. À contrainte imposée, il n'est pas utile de subdiviser les tailles de granulats en familles car deux familles de même taille de grain se comportent de manière identique. Dans les deux types de chargement, il est préférable d'imposer la symétrie du chargement afin de diminuer le nombre de variables lors de l'optimisation, les résultats à symétrie libre ou imposée étant très proches lorsque l'on moyenne sur plusieurs réalisations.

Les essais à forte contrainte imposée ont soulevé un gros défaut du modèle, qui prend racine dans l'excessive simplicité de la description de la décohésion des granulats. Cette constatation se prolonge lorsque l'on simule des essais de Multon. Aux charges inférieures à 10 MPa, le modèle se comporte de façon raisonnable, mais on remarque déjà que la décohésion est un phénomène un peu trop brutal. Lorsque l'on atteint la contrainte très importante de 20 MPa, l'interdiction de l'interpénétration des surfaces fissurées bloque complètement la décohésion.

L'identification des paramètres du modèle sur les essais triaxiaux de Multon donne de bons résultats aux chargements modérés, jusqu'à 10 MPa. Les courbes de gonflement triaxial sont bien reproduites, et les contraintes calculées sont assez proches des contraintes mesurées par Multon. On considère donc que dans cette gamme de chargement le modèle se comporte de manière satisfaisante. On note néanmoins que les énergies de fissuration identifiées sont largement supérieures à ce que l'on attendait, ce que l'on attribue à l'excessive orientation de la fissuration dans notre modèle, due en partie au choix de représenter des distributions variées d'orientation de fissure par au maximum trois familles de fissures orthogonales. Ce défaut peut être réglé dans le cadre de la modélisation présentée, et n'est donc pas un défaut majeur. La principale difficulté réside dans la mauvaise reproduction des résultats aux forts chargements qui est due à la simplicité de la description de la décohésion. Cette description peut être améliorée en restant dans le cadre poromécanique actuel, au besoin en mettant un motif plus compliqué et en déterminant les tenseurs de localisation nécessaires par éléments finis plutôt que par superposition de solutions analytiques.

Notre travail a donc montré que l'approche micromécanique pour l'estimation des modifications microstructurales et des déformations dues à l'alcali-réaction permet d'obtenir des résultats très intéressants. Comme nous l'avons dit au début de ce mémoire, l'objectif de telles simulations est de pouvoir les mettre au service de codes à l'échelle de la structure. Avant de pouvoir faire ce travail de connexion des différentes échelles avec notre modèle, nous avons souligné la nécessité d'améliorer quelques points de la description de l'alcali-réaction, particulièrement en ce qui concerne la décohésion des granulats. L'approche nous semble dans l'ensemble valide.

Conclusion

Nous avons dans cette troisième partie pris en compte la nécessité de développer la modélisation mécanique de la réaction alcali-silice à l'échelle microscopique identifiée dans la première partie. La méthode choisie, présentée dans la deuxième partie, repose sur deux piliers : la modélisation microporomécanique et un critère de rupture énergétique. Nous avons donc adapté ces connaissances à l'alcali-réaction, puis nous avons testé le fonctionnement du modèle et comparé les résultats à des essais expérimentaux.

On a tout d'abord détaillé dans le chapitre 8 les éléments retenus pour représenter simplement l'attaque chimique des granulats. On a distingué dans les granulats en cours d'attaque une zone sphérique non attaquée, représentée comme un solide élastique, et une zone extérieure attaquée, représentée comme un solide poreux. Les granulats sont entourés d'une auréole de transition, fine couche de solide poreux dont les pores sont connectés avec ceux de la zone attaquée des granulats. Un gel remplace le granulat dans les zones dissoutes, et comme son volume est plus important que le volume de granulat dissout, il monte en pression une fois qu'il occupe l'ensemble de la porosité du grain et de l'auréole de transition. Cette montée en pression induit tout d'abord la rupture de l'interface entre le grain et la pâte de ciment, puis l'apparition de fissure dans la pâte de ciment.

Ces hypothèses sur les mécanismes réactionnels et d'endommagement ont ensuite été utilisées pour spécifier la forme des propriétés poroélastiques homogénéisées et de l'énergie élastique. On a réussi, grâce à la superposition de plusieurs motifs simples, à déterminer une bonne approximation du tenseur de localisation en pression et en déformation sur une cavité fissurée, qui est le motif typique que l'on obtient lorsqu'une ou plusieurs fissures en anneau apparaissent autour d'une cavité sphérique. Cela permet de conserver des expressions analytiques et de ne pas recourir à une évaluation par éléments finis des tenseurs de localisation. On fait ce travail d'abord dans le cadre d'une approche diluée, puis on l'étend à l'utilisation de l'estimateur *IDD* que nous avons présenté dans la deuxième partie, et choisi pour la détermination des propriétés homogénéisées. On a également détaillé les possibilités d'interpénétration des surfaces fissurées. La méthode de calcul de la déformation en fonction de l'état de fissuration du matériau a été présentée en détail, ainsi que la méthode de calcul des pressions dans les différentes porosités. Ces expressions permettent finalement d'écrire l'énergie emmagasinée dans le milieu poreux lors de l'attaque en fonction de nos véritables paramètres de chargement que sont les degrés d'attaque sur les granulats et les chargements extérieurs.

Dans le chapitre 11, on a étudié le fonctionnement du modèle sur différents exemples. On a tout d'abord testé divers chargements extérieurs, dans la continuité du travail du chapitre 7, ce qui nous a amené à considérer qu'il n'est pas nécessaire de discrétiser très finement la granulométrie, et qu'on peut supposer a priori la symétrie de la solution lorsque le matériau et le chargement sont de même symétrie. Ceci est très pratique cas cela nous permet de limiter le nombre de variables sur lesquelles on minimise l'énergie totale pour déterminer le trajet de fissuration en fonction de l'avancement de l'attaque. On a également identifié les paramètres de notre modèle et constaté un bon fonctionnement aux charges de compression relativement modestes dans

l'essai de Multon, jusqu'à 10 MPa. On déplore cependant une trop importante orientation de la fissuration par rapport au chargement extérieur, et l'impossibilité de reproduire correctement les résultats d'essais sous fort chargement à cause de la simplicité de la description de la décohésion. On conclut néanmoins que l'approche micromécanique que l'on a adoptée est très encourageante, et que si les deux défauts mentionnés étaient résolus, on tiendrait probablement un modèle micromécanique efficace pour la modélisation de l'anisotropie de l'alcali-réaction.

Bibliographie

[1] M.G. Alexander. The effects of ageing on the interfacial transition zone in concrete. In J. C. Maso, editor, *Interfacial transition zone in concrete (RILEM report 11)*, pages 150 – 174. E & FN SPON, 1996. *p. 276 et 277*

[2] S. Caré and E. Hervé. Application of a n-phase model to the diffusion coefficient of chloride in mortar. *Transport in Porous Media*, 56 :119–135, 2004. *p. 205*

[3] Laurent Charpin and Alain Ehrlacher. A computational linear elastic fracture mechanics-based model for alkali-silica reaction. *Cement and Concrete Research*, 42(4) :613 – 625, 2012. *p. 28, 62, 77, 81, 141, 193, 245, 260, 276 et 281*

[4] R.M. Christensen and K.H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4) :315 – 330, 1979. *p. 115, 205 et 216*

[5] C. Comi, R. Fedele, and U. Perego. A chemo-thermo-damage model for the analysis of concrete dams affected by alkali-silica reaction. *Mechanics of Materials*, 41 :210 – 230, 2009. *p. 48, 274 et 279*

[6] Olivier Coussy. *Poromechanics*. Wiley, 2004. *p. 37 et 205*

[7] D.-X. Du and Q.-S. Zheng. A further exploration of the interaction direct derivative (IDD) estimate for the effective properties of multiphase composites taking into account inclusion distribution. *Acta Mechanica*, 157 :61 – 80, 2002. *p. 91 et 223*

[8] J. Farran. Contribution minéralogique à l'étude de l'adhérence entre les consituants hydratés des ciments et les matériaux enronés. *Revue des Matériaux de Construction*, 490-491-492, 1956. *p. 205*

[9] Y. Furusawa, H. Ohga, and T. Uomoto. An analytical study concerning prediction of concrete expansion due to alkali-silica reaction. *Durability of concrete, Proceedings of the third international conference*, SP-145 :757–780, 1994. *p. 34, 36 et 276*

[10] A. B. Giorla, K.L. Scrivener, and C.F. Dunant. Finite elements in space and time for the analysis of generalized visco-elastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering (submitted).* *p. 273*

[11] Étienne Grimal, Alain Sellier, Yann Le Pape, and Éric Bourdarot. Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism - Part I : Constitutive model. *ACI Materials Journal*, 105-3 :227 – 231, 2008. *p. 47 et 273*

[12] Étienne Grimal, Alain Sellier, Yann Le Pape, and Éric Bourdarot. Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism - Part II : Indentification of model parameters and application. *ACI Materials Journal*, 105-3 :236 – 242, 2008. *p. 47, 273 et 274*

[13] Z. Hashin and P.J.M. Monteiro. An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste. *Cement and Concrete Research*, 32(8) :1291 – 1300, 2002. *p. 205*

[14] E. Hervé, S. Caré, and J.P. Seguin. Influence of the porosity gradient in cement paste matrix on the mechanical behavior of mortar. *Cement and Concrete Research*, 40(7) :1060 – 1071, 2010. *p. 205*

[15] Augustus Edward Hough Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition.* Cambridge University Press Warehouse, 1927. *p. 216*

[16] S. Multon, M. Cyr, A. Sellier, P. Diederich, and L. Petit. Effects of aggregate size and alkali content on ASR expansion. *Cement and Concrete Research*, 40 :508 – 516, 2010. *p. 26, 28, 41 et 276*

[17] S. Multon, A. Sellier, and M. Cyr. Chemo-mechanical modeling for prediction of alkali silica reaction (ASR) expansion. *Cement and Concrete Research*, 39 :490 – 500, 2009. *p. 41, 154 et 274*

[18] Stéphane Multon. *Évaluation expérimentale et théorique des effets mécaniques de l'alcali-réaction sur des structures modèles.* Laboratoire Central des Ponts et Chaussés, 2004. *p. 22, 30, 41, 48, 237, 270, 273 et 274*

[19] Stéphane Multon and François Toutlemonde. Effect of applied stresses on alkali-silica reaction-induced expansions. *Cement and Concrete Research*, 36(5) :912 – 920, 2006. *p. 273*

[20] J.C. Nadeau. Water–cement ratio gradients in mortars and corresponding effective elastic properties. *Cement and Concrete Research*, 32(3) :481 – 490, 2002. *p. 205*

[21] A. Nielsen, F. Gottfredsen, and F. Thøgersen. Development of stresses in concrete structures with alkali-silica reactions. *Materials and structures*, 26 :152–158, 1993. *p. 40 et 205*

[22] P. Ponte Castañeda and J.R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43 - 12 :1919–1951, 1995. *p. 88, 118, 119 et 267*

[23] E.D. Ramesh, G.and Sotelino and W.F. Chen. Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials. *Cement and Concrete Research*, 26(4) :611 – 622, 1996. *p. 205*

[24] Alain Sellier. *Modélisations probabilistes du comportement de matériaux et de structures en génie civil.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France, 1995. *p. 36, 43, 44, 45 et 281*

[25] Jun-Ho Shin. *Modeling alkali-silica reaction using image analysis and finite-element method.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 2009. *p. 40, 152 et 278*

[26] L. Struble and S. Diamond. Unstable swelling behaviour of alkali silica gels. *Cement and Concrete Research*, 11 :611 – 617, 1981. *p. 24, 152 et 278*

[27] F.H. Wittmann. Crack formation and fracture energy of normal and high strength concrete. *Sādhanā*, 27 - 4 :413 – 423, 2002. *p. 149 et 277*

[28] Q.-S. Zheng and D.-X. Du. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :2765 – 2788, 2001. *p. 61, 91, 108, 119 et 223*

Conclusion générale et perspectives

Nous avons dans ce mémoire étudié la réaction alcali-silice, réaction endogène des bétons qui peut se manifester de manière accidentelle plusieurs années après la construction d'un ouvrage, et être à l'origine de déformations et de pertes de propriétés mécaniques. Cette réaction n'apparaît qu'en présence de granulats réactifs, d'alcalins et d'eau. Il se produit une dissolution d'une partie des granulats, puis une fabrication d'un gel, qui en gonflant par absorption d'eau, provoque une fissuration microscopique du béton. Cette fissuration modifie la microstructure du béton et provoque des gonflements et des diminutions de propriétés mécaniques, telles que la résistance à la traction et la rigidité, qui peuvent diminuer la durée de vie des ouvrages.

L'objectif de notre travail était de fabriquer un modèle de fissuration à l'échelle microscopique sous pression des gels d'alcali-réaction de façon à améliorer la compréhension des phénomènes d'endommagement microscopique d'une part, et de pouvoir injecter plus d'informations sur la dégradation locale lors de l'alcali-réaction dans les codes de durabilité des bétons qui s'intéressent à l'alcali-réaction à l'échelle de la structure.

Nous avons donc concentré nos efforts tout d'abord sur la réalisation d'une bibliographie sur l'alcali-réaction, centrée principalement sur les mécanismes réactionnels et les modèles, qui nous ont permis de dégager un besoin de modélisation de la fissuration à l'échelle microscopique. Ce type de modèle semble en effet pouvoir améliorer la prise en compte des mécanismes de dégradation et de gonflement locaux dans les modèles à l'échelle de la structure.

Les éléments de mécanique nécessaires à l'écriture d'un tel modèle ont ensuite été rassemblés. Nous avons ainsi présenté le cadre général de l'homogénéisation des matériaux poreux dans le formalisme de microporomécanique, donné un certain nombre de résultats théoriques permettant de construire des estimateurs de micromécanique qui permettent d'approcher les propriétés homogénéisées recherchées. Nous avons choisi un estimateur de micromécanique, l'estimateur *IDD*, qui nous a semblé bien adapté à notre problème. Nous avons également choisi un critère de fissuration énergétique, permettant de faire évoluer la microstructure du béton attaqué, et donné les expressions générales nécessaires à l'écriture théorique de l'énergie dont on a besoin pour utiliser ce type de critères de fissuration énergétique. Nous avons également donné des exemples simples pour l'utilisation du critère de rupture seul, puis en conjonction avec le formalisme de microporomécanique, qui nous ont permis d'une part d'illustrer le phénomène de saut de taille de fissure, et d'autre part de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de discrétiser très finement la granulométrie des cavités sous pressions pour obtenir de bons résultats lors de l'utilisation du critère de fissuration.

Une partie de notre travail a été de comprendre et de reformuler un certain nombre de résultats de mécanique, ce qui nous a amené a proposer une nouvelle démonstration pour une généralisation d'un théorème dû à Tanaka et Mori, qui apporte un éclairage qui nous a semblé utile à la démonstration d'un certain nombre des estimateurs de micromécanique que nous avons présentés.

Ces résultats ont ensuite été adaptés à notre vision des mécanismes réactionnels et d'endom-

magement lors de l'alcali-réaction dans des bétons contenant des granulats à réactivité rapide, pour lesquels le gel gonflant se trouve connecté avec la surface du grain, ce qui fait que la fissuration se fait principalement à l'interface entre la pâte de ciment et le granulat, ainsi que dans la pâte de ciment. Cela nous a permis d'écrire un modèle que nous avons ensuite testé sur des cas de chargements simples, et dont nous avons identifié les paramètres sur des essais triaxiaux menés en laboratoire par Multon qui mettent l'accent sur l'anisotropie du gonflement, phénomène que nous souhaitions particulièrement étudier.

Cette comparaison entre les résultats du modèle et les essais triaxiaux de Multon a donné des résultats satisfaisants aux chargements modérés, c'est-à-dire jusqu'à 10 MPa. Les courbes de gonflement et de contraintes sont alors assez bien reproduites, ce qui montre que l'approche mécanique peut être utilisée avec succès pour l'alcali-réaction. Les énergies de fissuration identifiées nous ont cependant semblé trop importantes par rapport aux valeurs communément admises pour les pâtes de ciment, ce qui nous semble être dû à la trop grande orientation des fissures par rapport au chargement dans notre modèle. Ce défaut trouve son origine dans la diminution du nombre de directions possibles de fissuration au maximum que nous avons effectuée, pour ne conserver que trois fissures orthogonales, nous pensons donc qu'il peut être réglé assez facilement en modifiant peu le modèle. Un défaut plus sérieux est l'incapacité du modèle à donner de bons résultats aux charges très élevées, de l'ordre de 20 MPa. Nous sommes convaincus que cette difficulté provient de la représentation trop sommaire de la décohésion du granulat avec la pâte de ciment, qui se fait dans notre modèle en une seule étape, et forcément intégralement. Il est compréhensible que sous de fortes charges de compression, la décohésion est partielle et non totale.

Par rapport aux objectifs que nous avions fixés pour notre modèle, il nous semble donc que l'identification des paramètres est réussie pour les chargements modérés, mais que le modèle doit être amélioré pour prendre en compte des chargements plus importants. La reproduction des courbes de gonflements est satisfaisante dans le domaine d'utilisation du modèle. L'étude des effets de taille et de concentration en granulat n'a pas été poussée assez loin sur la version complète du modèle pour pouvoir dire s'ils sont correctement reproduits. Enfin, le modèle reste relativement simple et semble être d'un format qui puisse servir à détailler le comportement local dans un code de structure.

Nous pensions en nous lançant dans cette voie de la description par des outils de micromécanique de l'alcali-réaction que le problème majeur serait l'impossibilité de représenter la coalescence de fissures qui naissent autour de différents sites dans les bétons réels, à cause du fait que dans notre modèle les différents sites réactifs se fissurent de manière relativement indépendante. Il semble cependant que ce ne soit pas le cas, puisque nous avons identifié la simplicité de la description de la décohésion comme défaut principal de ce modèle, et que la décohésion est par nature confinée au voisinage des sites réactifs.

Malgré des résultats encourageants, le modèle n'est pas suffisamment au point pour qu'on puisse tenter de l'intégrer tel quel à un code de calcul sur des structures.

Nous pensons donc que pour améliorer ce modèle, le principal effort de modélisation concerne la prise en compte d'une décohésion partielle. Ceci peut se faire, si les motifs obtenus sont trop complexes pour être approchés par une superposition de motifs ellipsoïdaux comme on l'a fait dans ce mémoire, par calcul par éléments finis des tenseurs de localisation nécessaires. L'ennui est qu'alors on devrait multiplier les calculs simples, notamment pour pouvoir prendre en compte différents rapports de rigidité entre le granulat et la pâte de ciment, ou encore pour prendre en compte toutes les configurations possibles de tailles de fissures et d'orientation du chargement. Un effort nécessaire mais moins conséquent est de conserver un plus grand nombre de possibilités

d'orientations de fissures pour la minimisation de l'énergie totale, ce qui devrait atténuer la tendance de notre modèle à trop orienter la fissuration en fonction du chargement.

Les connaissances accumulées peuvent enfin être appliquées au problème de l'alcali-réaction dans les bétons contenant des granulats à réactivité lente. Certains des défauts de notre modèle ne se manifesteraient probablement pas, puisque dans ces bétons l'essentiel de l'endommagement est localisé dans les granulats qui contiennent des poches de gel gonflant. Il y aurait cependant probablement d'autres difficultés spécifiques à ces granulats. D'une manière plus générale, d'autres phénomènes de dégradation des bétons peuvent probablement être modélisés en utilisant un formalisme similaire.

Liste des notations

Mécanique, poromécanique, micromécanique, rupture

$\underline{\underline{\mathbb{1}}}$	identité de l'ensemble des tenseurs du deuxième ordre
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes
$\underline{T}$	vecteur contrainte
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations
$\underline{n}$	vecteur normale extérieure au solide considéré
$\underline{u}$	vecteur déplacement
$\underline{x}$	coordonnée d'espace
Ω	domaine considéré
$\partial\Omega$	frontière du domaine considéré
$\underline{\underline{\Sigma}}$	tenseur des contraintes macroscopiques
$\underline{\underline{E}}$	tenseur des déformations macroscopiques
$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{I}}}}}$	identité des tenseurs du quatrième ordre ayant la symétrie mineure
$\mathbb{C}(\underline{x})$	tenseur des modules d'élasticité au point $\underline{x}$
$\mathbb{S}(\underline{x})$	tenseur des souplesses au point $\underline{x}$
$\mathbb{C}^i$	tenseur des modules d'élasticité de la phase i
$\mathbb{A}(\underline{x})$	tenseur de localisation en déformation au point $\underline{x}$
$\mathbb{A}^i$	moyenne du tenseur de localisation en déformation sur la phase i
f^i	fraction volumique de la phase i
ϕ^i	fraction volumique en configuration déformée de la phase i
p^i	pression dans la phase i
$\underline{\underline{B}}^i$	coefficient de Biot de la phase i
M^i	module de Biot de la phase i, pour lequel on a pris l'inverse de la définition usuelle
$\mathbb{S}^\alpha_{\mathcal{E}}$	tenseur d'Eshelby pour le matériau extérieur α et l'ellipsoïde $\mathcal{E}$
$\mathbb{P}^\alpha_{\mathcal{E}}$	tenseur de Hill pour le matériau extérieur α et l'ellipsoïde $\mathcal{E}$
$\mathbb{C}^{*,\alpha}_{\mathcal{E}}$	tenseur d'influence pour le matériau extérieur α et l'ellipsoïde $\mathcal{E}$
$\underline{\underline{\varepsilon}}^*$	tenseur des déformation libre
$\mathbb{A}^{sch}_i$	tenseur de localisation dans un schéma *sch* donné moyenné sur la phase i
X	rapport d'aspect d'un ellipsoïde
E^{el}	énergie élastique
E^{pot}	énergie potentielle
ψ^*	énergie potentielle à déformation macroscopique et pressions imposées dans le problème du solide élastique troué
ψ'	énergie potentielle à déformation macroscopique et pressions imposées dans le problème du milieu poreux hétérogène
E^{rel}	énergie relâchée
E^{diss}	énergie dissipée

G	taux de relaxation d'énergie
G_c	taux de relaxation d'énergie critique

Modélisation de l'alcali-réaction

α^i	degré d'attaque de la famille de grain i
R^i	rayon du grain i
f^i	fraction volumique de a famille i
ρ^i	fraction volumique de silice réactive dans le grain i
δ	coefficient de dilatation du gel
K_g	module d'incompressibilité du gel
l_c	épaisseur de l'auréole de transition
ρ^{itz}	porosité de l'auréole de transition