



HAL
open science

Comportement vibratoire du steelpan : effet des procédés de fabrication et dynamique non linéaire

Mélodie Monteil

► **To cite this version:**

Mélodie Monteil. Comportement vibratoire du steelpan : effet des procédés de fabrication et dynamique non linéaire. Vibrations [physics.class-ph]. ENSTA ParisTech, 2013. Français. NNT : . pastel-00913650

HAL Id: pastel-00913650

<https://pastel.hal.science/pastel-00913650>

Submitted on 4 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ENSTA-PARISTECH

Spécialité : Mécanique

Mélodie Monteil

Comportement vibratoire du steelpan : effet des procédés de fabrication et dynamique non linéaire.

Soutenue le 15 novembre 2013 devant le jury composé de :

Jean-Jacques MARIGO	Professeur, École Polytechnique	<i>Président du jury</i>
Bruno COCHELIN	Professeur, École centrale Marseille	<i>Rapporteur</i>
François GAUTIER	Professeur, Université du Maine	<i>Rapporteur</i>
Benoît ROMAN	chercheur CNRS, PMMH ESPCI	<i>Examineur</i>
Emmanuel FOLTETE	Professeur, ENSMM Besançon	<i>Examineur</i>
Cyril TOUZÉ	Professeur, ENSTA ParisTech	<i>Directeur de thèse</i>
Joël FRELAT	chercheur CNRS, d'Alembert Paris VI	<i>Directeur de thèse</i>
Olivier THOMAS	Professeur, ENSAM Lille	<i>Directeur de thèse</i>

À Hanna
« *pim pam pum, bocadillo de atùn* »

« *Le temps n'a pas tout le temps le temps de prendre à temps
le temps de nous laisser le temps de passer le temps...* » .

P. Desproges

Remerciements

En premier lieu, je remercie chaque membre du jury pour avoir accepté d'en faire partie et pour l'ensemble des retours ils m'ont fait. Plus particulièrement, je remercie Jean-Jacques Marigo qui lors de ma soutenance, dès les premières phrases, et en seulement quelques mots, a su instaurer, tout en finesse, avec subtilité et qui plus est de manière amusante, une ambiance agréable et détendue. Je le remercie également pour le rapport de thèse qu'il a écrit et dans lequel, je pense sans le savoir, il fait apparaître une formule à laquelle je suis très attachée : « aussi bien sur le plan humain que sur le plan scientifique » *. Je remercie Bruno Cochelin et François Gautier pour leur rapport et l'intérêt qu'ils ont porté à l'ensemble de mon travail. Je remercie Benoît Roman, sa peau de clémentine et Emmanuel Foltête pour avoir sollicité mon interrogation sur des questions scientifiques qui restent finalement ouvertes en vibrations et en structures. Ma soutenance a été, grâce à eux, un moment très agréable à vivre.

Ensuite, il va de soi et il est de coutume de remercier les personnes qui ont permis à ce projet de voir le jour. Dans mon cas, elles ont été au nombre de trois et il m'est plus qu'évident et sincère aujourd'hui de leur dire merci. Je les remercie d'abord d'avoir fait du steelpan un sujet de recherche pertinent et riche en problématiques d'ordre mécanique. Ce trio forme une entité scientifique complexe, riche et complémentaire avec lequel il m'a fallu jongler pour faire mien ce travail. Quoiqu'il en soit, je les remercie de m'avoir prise sous leur aile respective pour me faire grandir tant sur le plan scientifique que sur le plan humain ** 1.

Joël, sous son air râleur et bougon, a toujours été disponible pour me donner une confiance que j'ai eu du mal à acquérir et que comme tout un chacun, j'affirme encore, mais il m'a guidée sur la bonne voie. Les dénouements des scénarii complexes de champs de contraintes résiduelles et initiales étaient accompagnés de discussions militantes agrémentées d'un savant mélange de caféine et de tabac qui ont peut-être dégradé ma santé physique mais ont par ailleurs bonifié ma santé mentale. Reste à savoir si la balance est à l'équilibre...

Cyril, c'est plutôt la bonne humeur et le « no stress » que je lui attribuerais. D'un grand accompagnement scientifique et humain***, il est toujours à l'écoute de la moindre question, même s'il n'a pas toujours la réponse. Sans vraiment que je le réalise au fur et à mesure, ça n'est qu'aujourd'hui que je prends conscience qu'il m'a transmis une démarche de réflexion et une façon de présenter les choses adaptées au travail qui m'attend dans le futur. L'apprentissage par la recherche prend ici tout son sens. Là aussi, j'ai encore à me perfectionner, mais la base est bien ancrée. Il est aussi pour beaucoup dans mon engouement à venir travailler à Palaiseau. Son accessibilité et sa justesse crée une atmosphère de

1. Cette phrase a été écrite avant réception du rapport de soutenance...

travail agréable et fructueuse ; ce qui, au jour d'aujourd'hui, dans le monde dans lequel on est devient précieux !

Olivier est sans doute la personne la plus perfectionniste que j'ai rencontrée à ce jour. Bien qu'à distance, son implication dans l'intégralité de ce travail a été considérable, toujours dans le souci que je comprenne et que je m'approprie les choses. Son souci du détail m'a permis de présenter systématiquement des travaux propres, esthétiques et rigoureux quitte à y passer du temps. Je tâcherais de garder cette exigence du mieux que je peux. Son expertise expérimentale a aussi été source de progression, surtout dans l'idée de ne pas perdre de vue qu'un bon modèle a un sens physique.

Pour l'ensemble des choses mentionnées et d'autres encore que j'aurais sûrement l'occasion de leur dire, je les remercie grandement de m'avoir accompagnée de près du début à la fin. Comme Jean-Jacques l'a fait habilement remarquer lors de ma soutenance, ils ont été ma protection rapprochée, toujours bienveillante et source de réponses et d'encouragements. Je retiendrai en synthèse que même si « tout est toujours plus compliqué » , « un modèle est toujours faux » et que... « on fait au mieux » !

Ce travail est aussi le fruit de collaborations que je mentionne ci-après.

Tout d'abord, Manu est un des tuners les plus ouverts que je connaisse. Il nous a été très agréable de travailler avec lui. Il a su se prêter à notre petit jeu expérimental en étant curieux de nos interrogations scientifiques. Merci encore pour toute cette disponibilité, cette bonne humeur et cette collaboration enrichissante. Je crois que je peux même me permettre de te remercier grandement au nom de tous les quatre.

Une mesure de contraintes a été réalisée par Wilfrid Seiler à l'ENSAM-Paris et une mesure de géométrie a été réalisée par Charyar Mehdi-Souzani au LURPA-ENS Cachan. Je les remercie pour la facilité avec laquelle cela a été possible.

Je remercie également l'équipe de Dominique Chapelle à l'INRIA qui m'a accueillie au cours des derniers mois pour tenter une modélisation qui n'a malheureusement pas pu donner de résultats encore convaincants mais qui font parti d'une des perspectives de ce travail.

Dans la même veine, je remercie l'équipe du LMSSC du Cnam de Jean François Deü, ex-équipe d'Olivier Thomas dans laquelle je me suis toujours sentie à l'aise et très bienvenue pour réaliser des heures et des heures de manips enfermée dans la cave.

Je remercie les trois stagiaires qui ont participé à ce projet : Simon Benacchio, Simon Durand et Adrien Bitton. Ils ont apporté des résultats complémentaires et ont enrichi le travail présenté.

Je peux également mentionner mes relecteurs officiels : mon père (depuis les landes girondines) et Xuan (en direct du Brésil). Cela contribue grandement à la bonne lecture du mon manuscrit.

La bonne réalisation d'une thèse est aussi due à la bonne ambiance du lieu de travail. Dans mon cas, l'existence de trois directeurs de thèse veut dire trois laboratoires. Cela signifie beaucoup de gens côtoyés et croisés. Je remercierai ceux avec qui j'ai le plus échangé.

Au Cnam, je garde un super souvenir d'Aurélien S., d'Arnaud L. (mon post-doc préféré!) et d'Arnaud G. (avec qui j'ai réalisé mon premier don du sang, et c'est pas rien!).

À d'Alembert, Andrès L. a été un de mes plus proches confidents de thèse. J'ai notamment beaucoup aimé parler du pouvoir de la Nature. Benjamin C. regrettait souvent que je sois de gauche (?!).

À l'UME, il y a pléthore de gens à remercier. En effet, l'extrême bonne ambiance de l'équipe est due à l'ensemble de ses membres. Je commence par Antoine C. qui fait en sorte que tout roule d'une manière remarquable. Régine T., auprès de qui je présente mes excuses pour mon manque de simplicité dans certains remboursements. Thierry P., toujours là quand on a besoin de lui (dommage que tu ne manges plus à la cantine, on pouvait écouter FIP dans ta voiture). Cyril T., (cf plus haut mais) en terme de vie du labo, je crois que tu as été mon meilleur partenaire de fiches. J'espère qu'à mon tour j'ai pu t'enseigner quelques petits trucs et astuces. François B., mon deuxième post-doc préféré (et oui le premier a déjà été cité), on n'a toujours pas rempli notre mission de fabriquer un pan avec une boîte de haricots de cantine, mais qu'est-ce qu'on a rit! Pas de regret puisque visiblement, fidèle comme une ombre, où tu iras j'irai... Jean B., mon chéri, tu l'as bien remplacé le François B. Une ambiance totalement différente : plus de jazz intello, plus de langage châtié, mais une franchise et une simplicité de vie tellement appréciables. Je pense ne pas me tromper en disant que tu as contribué à ma détente (assez surprenante) de fin de thèse. Coco R., je reste sur ma faim de ne pas réussir à te convaincre sur von Kármán, et je laisse surtout à Cyril T. cette lourde tâche. En tout cas, quand je suis en quette de rigueur, je sais vers qui me tourner, quand je cherche un carambar aussi et puis beaucoup d'autres choses mais qui n'ont pas lieu d'être ici. Olivier D., merci d'avoir encouragé mon enthousiasme Cabrelistique. Benjamin C., heureusement que tu étais là pour en connaître encore plus sur la variététoche. Lionnel F., je n'aurais jamais autant rit à Besançon si tu n'avais pas été là (« suivez-moi »). Romain P., souviens-toi que la convivialité compte pour beaucoup, même sur l'A6b. Romain M., même si je ne comprends pas toujours tes blagues, elles ont le mérite d'exister, et si je cherche un resto ou que je ne comprends pas un titre sur une carte, surtout je t'appelle. Marie C., tu m'as offert un des meilleurs cadeaux avant de partir! Michele D., non le verlan n'est pas démodé, il faut absolument que tu le pratiques. Miguel P., prends soin d'Abraham. Thomas A., toujours de bons conseils. Thomas H., ah, Thomas H., dans la famille scientifique Touzé je demande le frère, qui veut toujours courir, dormir peu, boire beaucoup et penser qu'il arrivera à conduire 11 heures d'une traite entre deux concerts. « Petit frère veut grandir trop vite, mais il a oublié que rien ne sert de courir »

Allez, suffit les dédicaces, tous au st Georges, on va faire un jeu!!!

Je remercie également quelques croisages de recherche, que je ne vois que rarement, mais avec qui les discussions sont souvent enrichissantes : Aurélie Helmlinger, Adrien Mamou-mani, Kerem Ege et Adrien Rodrigues.

Quelques profs m'ont marquée et leur cours ont, d'une manière ou d'une autre, eu une influence sur mon travail. Je les remercie pour leurs enseignements ou encadrements : Benoît Fabre, Bertrand

David, Jean Loïc Le Carrou, Pascal Gaillard, Carlos Agon, François Ollivier, Angela Vicenti, Christophe Vergez.

Et enfin, je tire mon chapeau aux amis et famille qui ont subit et accompagnés cette thèse. Ils ont fait du pot et de la fête associée une conclusion très, très, très agréable à ce projet de recherche et à ma vie parisienne. Pour cela, je remercie : Yoann, à chacun son épine du pied, toi c'est Bourdieu, moi c'est von Kármán. Agathe, comment fais-tu pour connaître tous les deuxièmes et troisièmes couplets de Cabrel ? Maria, merci merci merci merci, et non tu n'es pas une scientifique quiche bien au contraire. Demian, en 26 ans, 5 mois et 24 jours, je t'ai battu. Polo, mon binôme, on finira dans le même bureau, c'est sûr. On aura vraiment réussi à terminer ensemble, jusqu'aux œufs à la coque du lendemain matin : un régal. Ilo, allons enfants de la patrie, le jour de gloire est arrivé. Alberto, je remets la première place en jeu. Adrien, et si le ballon de foot vibrait de manière non linéaire ? Thibault : merci Régine !! Manon, Martin, Pascal, Eugénie, Roman, Kurjin, Jerem, Baptiste, Patou, Mathieu, Mati, Kim, Indiana, Bertrand, Oscar, Romain, Orok-baby, mes parents et mon frère.

À tous un grand MERCI !

Table des matières

Introduction Générale	11
Origines et descriptions	13
État de l'art	14
Organisation du manuscrit	15
I Phénoménologie des steelpan : de la fabrication à l'analyse vibratoire	17
1 Introduction à la phénoménologie des steelpan	19
1.1 Généralités	19
1.2 Dispositifs expérimentaux	20
1.3 Objectifs	23
2 Fabrication d'un steelpan au laboratoire	25
2.1 Introduction	25
2.2 Succession des étapes de fabrication	26
2.3 Conclusion	53
3 Analyse vibratoire d'un steelpan	55
3.1 Introduction	55
3.2 Mode de jeu usuel	56
3.3 Analyse modale expérimentale	59
3.4 Comportement non linéaire : vibrations en régime forcé	60
3.5 Conclusion	64
II Mise en forme de la structure : vibrations linéaires de poutres et plaques précontraintes	67
4 Introduction au modèle de chargement	69
4.1 Caractérisation expérimentale	69
4.2 Cadre de la modélisation	72

5	Modèle 1D :	
	Vibrations de poutres précontraintes	79
5.1	Modélisation	80
5.2	Résultats	89
5.3	Conclusion sur le modèle 1D	99
6	Modèle 2D :	
	Vibrations de plaques précontraintes	101
6.1	Modélisation	102
6.2	Résultats	115
6.3	Conclusion sur le modèle 2D	133
III	Vibrations non linéaires des steelpans : interactions modales par résonances internes	137
7	Introduction aux vibrations non linéaires	139
8	Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies : the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances	141
9	Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan	169
	Conclusion Générale	206
	Références & Bibliographie	212
	Résumé & Abstract	219

Introduction

Origines et descriptions

Les steelpans sont des percussions nées sur l'île de Trinidad et Tobago dans les Antilles (voir Fig. 1(a)). Ils sont aussi connus sous le nom de *steel drums* et plus communément appelés simplement *pans* par ceux qui le pratiquent (*les pannists*). Comme montré sur la figure 1(b), ce sont des instruments fabriqués à partir de bidons métalliques, type bidons de pétrole, qui subissent une succession d'étapes de fabrication pour aboutir à une structure concave qui contient des dômes convexes sur lesquels le musicien vient frapper à l'aide de baguettes de bois recouvertes d'un morceau de caoutchouc (des *sticks*). Chacun des dômes est une note finement accordée principalement par un procédé de martelage.

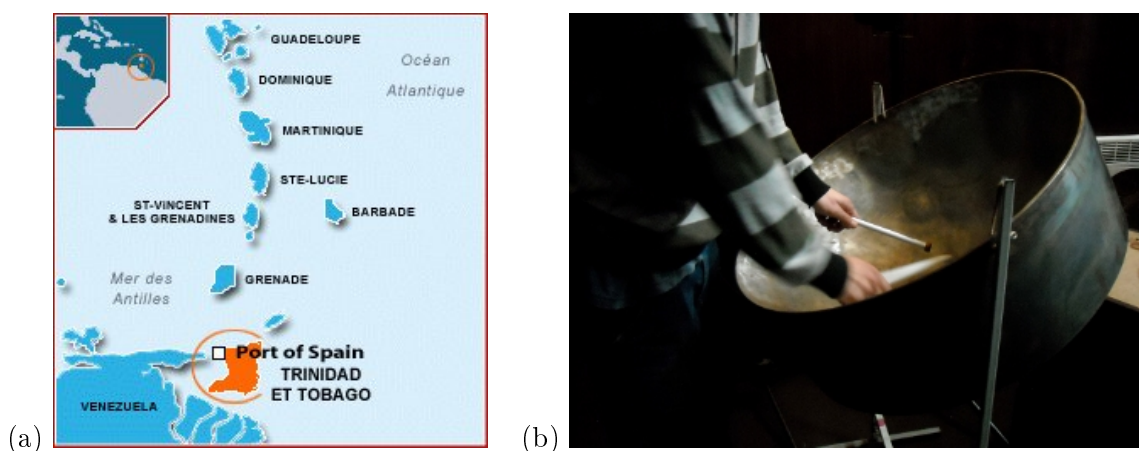


FIGURE 1 – (a) Ile de Trinidad et Tobago. (b) Steelpan en situation de jeu.

Les steelpans ont vu le jour à la suite de faits politiques et historiques qu'a subis l'île de Trinidad sous l'influence de l'empire britannique [28, 29]. Vers la fin de XIX^{ème} siècle, certaines pratiques musicales traditionnelles sont interdites, ce qui conduit les natifs, issus des quartiers défavorisés de la capitale (*Port of Spain*), à utiliser des objets de récupération (boîtes métalliques, ...) pour former des ensembles rythmiques. Les bidons de pétrole, alors laissés à l'abandon après la seconde guerre mondiale, font également partie des supports percussifs utilisés. C'est dans l'observation de l'évolution du métal martelé et la volonté de produire des sons différents pour enrichir les orchestres de percussions que les steelpans se sont peu à peu développés dans cette première moitié du XX^{ème} siècle.

Aujourd'hui, il existe plusieurs steelpans de différents registres qui sont joués en orchestres appelés *steelbands*, illustrés sur la figure 2. Un *steelband* peut être composé de 2 à 3 musiciens mais peut aussi comporter près d'une centaine de musiciens, particulièrement lors des représentations annuelles qui ont lieu à Trinidad au moment du carnaval. Dans ces orchestres, les seuls instruments mélodiques sont des steelpans. Ils sont accompagnés d'une batterie et d'autres percussions appartenant à ce que l'on appelle l'*engine room*. On y trouve des congas, des cloches, des *irons* (percussion métallique dont l'objet principal est un disque de frein de véhicule), ... Les steelpans d'orchestre sont souvent chromatiques dans le but d'interpréter un répertoire musical le plus vaste possible. Chaque registre de steelpan a son propre rôle dans l'orchestre. À la manière des orchestres symphoniques, pour schématiser, les plus aigus

interprètent le thème principal, les steelpans médiums jouent les secondes voix et accompagnent et les steelpans les plus graves, les lignes de basses. Dans les steelpans, les notes les plus graves occupent le plus d'espace dans le bidon. Ainsi plus l'instrument est grave, plus il nécessite d'être fabriqué sur plusieurs bidons pour conserver un nombre de notes suffisant. Au sein des *steelbands*, l'instrument le plus aigu (le *tenor*) est construit sur un seul fût et comporte de 28 à 32 notes, et l'instrument le plus grave est construit sur 12 fûts (le *twelve bass*) où l'on trouve seulement trois notes par bidon (soit 36 notes au total).

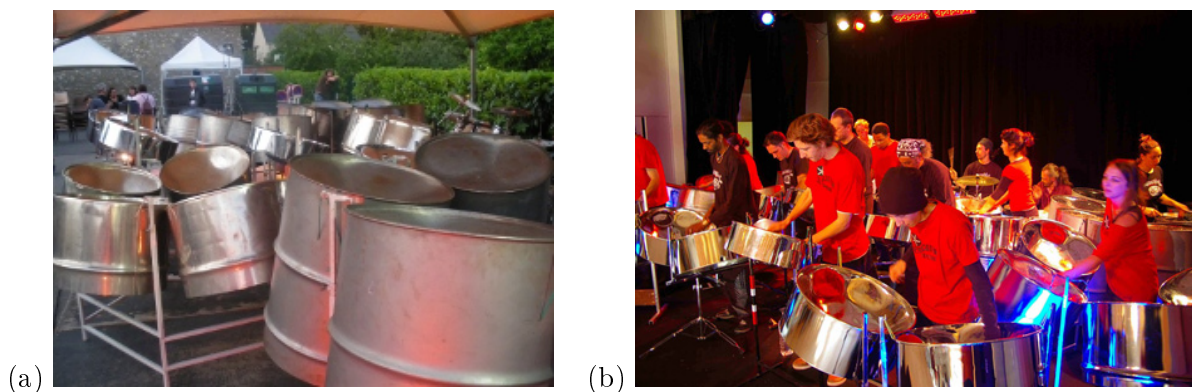


FIGURE 2 – *Steelbands* : orchestres composés de steelpans de registres différents.

Les personnes qui se sont spécialisées dans le développement de la fabrication sont appelées *tuners*. Le procédé de fabrication est aujourd'hui encore en cours d'amélioration. Néanmoins, une série d'étapes semble relativement constante d'un *tuner* à l'autre [32]. En effet, le bidon est d'abord embouti pour obtenir une cuve principale. À l'intérieur de cette cuve, des dômes sont façonnés, *groovés* (c'est à dire poinçonnés selon le pourtour), puis pré-accordés. Ensuite le bidon est chauffé avant d'être plus finement accordé.

Les steelpans possèdent un timbre original qui réside dans les transitoires d'attaque des sons qu'ils sont capables de produire [22]. En effet, les composantes harmoniques des sons de steelpans interagissent au cours des premières millisecondes. On peut alors percevoir une évolution du son au cours du temps qui marque la particularité de ces instruments. Un objectif global, dans lequel va s'insérer cette étude, est l'identification des mécanismes physiques qui sont à l'origine de ce comportement vibratoire ; c'est à dire comprendre quels sont les effets de la fabrication des steelpans sur les caractéristiques dynamiques à l'origine de leur timbre.

État de l'art

Différentes études ont été menées sur les steelpans. Elles peuvent être répertoriées en trois catégories :

- D’abord dans le domaine de la science des matériaux, Murr, Ferreyra *et al.* d’une part et Maloney, Barlow *et al.* d’autre part, se sont intéressés aux effets de la fabrication d’un point de vue métallurgique. Dans [19, 20, 47], il a d’abord été mis en évidence une forte réduction d’épaisseur de la structure au fur et à mesure de la transformation du bidon. Dans [8, 35, 36], on peut se rendre compte que le procédé de martelage entraîne de fortes dislocations qui sont la conséquence d’une déformation d’origine plastique. Celle-ci crée l’existence de contraintes résiduelles. Aussi, le traitement thermique réduit ces disparités en relaxant les contraintes. Seulement, lors de l’accordage final, une nouvelle étape de martelage a lieu. On se rend bien compte de l’existence d’une dualité entre création et relaxation de contraintes, ce qui a une forte conséquence sur le timbre à caractère unique de ces instruments. Ainsi, une série d’études a été réalisée sur des bidons de compositions différentes afin d’identifier les effets du matériau d’origine sur les sons produits [21, 45, 46, 48].
- Les vibrations des steelpans ont également été étudiées. En mode de jeu usuel, c’est à dire lorsqu’une note de steelpan est percutée par un *stick*, l’instrument présente un caractère dynamique complexe qui engendre un timbre riche en harmonique [59]. En effet, l’existence de notes convexes au sein d’une même cuve concave, localise les vibrations autour de la zone de frappe : sur la note directement excitée et sur les notes environnantes accordées [23]. Morisson, Rossing *et al.* se sont intéressés à l’organisation des modes propres linéaires de la structures. Une série d’analyses modales par holographie a montré que grâce aux relations harmoniques générées lors de l’accordage, des vibrations par sympathie pouvaient avoir lieu [42, 43, 18, 53, 54, 55, 56, 58, 57]. Compte tenu de ces rapports de fréquences commensurables et de l’enrichissement spectral perçu, Achong propose alors des modèles de vibrations non linéaires où il montre que les modes sont couplés entre eux. Ainsi, des échanges d’énergie sont possibles entre le mode fondamental, directement excité par la frappe du musicien, et les modes de plus hautes fréquences. Il propose particulièrement des résolutions analytiques de modèles théoriques de résonances internes dans lesquels les premiers modes propres sont accordés à f , $2f$ et $3f$ [5, 4, 3, 1, 2, 6].
- Enfin, Copeland *et al.* ont étudié le rayonnement acoustique des steelpans [44, 17, 13]. Le champ sonore est principalement déterminé par deux caractéristiques : les modes propres (fréquences et déformées localisées) et la géométrie de l’instrument (diamètre, longueur et surface de jeu). Ils proposent également des diagrammes de rayonnement qui peuvent aider à la prise de son de l’instrument.

Organisation du manuscrit

Dans cette étude, nous avons choisi d’essayer de mieux comprendre les mécanismes dynamiques qui ont lieu dans les vibrations des steelpans. Pour cela, deux axes seront privilégiés dans ce manuscrit. D’une part nous allons nous concentrer sur l’effet des procédés de fabrication et d’autre part, nous allons chercher à caractériser la dynamique complexe qui régit la production des sons particuliers de ces instruments.

La première partie rend compte d'une étude phénoménologique des steelpans. Elle-même se divise en deux sous parties. D'abord, une observation détaillée de la fabrication d'un steelpan au laboratoire a été possible grâce à une collaboration étroite avec un *tuner*. Cela a été mis en place afin qu'une étude expérimentale puisse être menée à bien à l'issue de chacune des étapes de la fabrication. Ainsi, un suivi de l'évolution des paramètres dynamiques de la structure en fonction des procédés de fabrication sera présenté. On montrera notamment comment s'organisent les modes propres de la structure au fur et à mesure du processus. Une quantification des amortissements modaux et des fréquences propres sera aussi proposée après chaque nouvelle intervention du *tuner*.

Ensuite, une caractérisation expérimentale menée sur un steelpan en état de jeu sera présentée. Plusieurs modes d'excitation seront utilisés dans le but de révéler les particularités du comportement vibratoire responsables du timbre de l'instrument.

La seconde partie se concentre sur la première étape de fabrication qu'est l'embouti. En effet, le martelage qui permet de passer d'une surface plane initiale à une cuve concave entraîne une transformation d'origine plastique qui confère à la structure un état de contraintes résiduelles non nulles. Il se peut que l'étape de chauffage relaxe ces contraintes, mais nous ne savons pas si l'ensemble des contraintes est relaxé de manière totale ou partielle. De plus, au cours de l'accordage final, l'instrument est de nouveau martelé, c'est à dire qu'il est possible qu'il possède un nouvel état de contraintes résiduelles. Nous allons donc répondre à une question scientifique plus large qui est de comprendre et de quantifier le comportement d'une structure mince précontrainte que l'on cherche à faire vibrer. Cela sera réalisé au moyen de modèles analytiques de structures minces soumises à des champs de contraintes initiales. Dans la résolution, on prendra soin de dissocier le changement géométrique de l'état de contraintes résiduelles dans le but de quantifier l'effet de chacun sur les vibrations de la structure dans son état précontraint.

Enfin, en mode de jeu usuel, suite à l'impact produit par le *stick*, l'instrument terminé présente un comportement dynamique complexe où des échanges d'énergie entre les modes sont clairement audibles et caractérisent le timbre qu'il est capable de produire. L'amplitude de vibration, de l'ordre de grandeur de l'épaisseur, est telle que des non-linéarités géométriques doivent être considérées.

Pour cela, des modèles de résonances internes, qui favorisent les transferts d'énergie entre les modes, sont proposés. Une fine étude théorique sera d'abord réalisée sur deux cas particuliers existants dans les vibrations des steelpans : les résonances 1:2:2 et 1:2:4. Une attention particulière sera donnée à l'étude de la stabilité des systèmes qui est responsable des couplages.

Puis, une étude expérimentale permettra dans un premier temps, d'ajuster les modèles afin de quantifier les non-linéarités présentes dans la dynamique des steelpans et de valider les mécanismes de couplages principaux. Dans un second temps, l'expérience nous montrera qu'il existe en réalité de nombreuses résonances internes qui confèrent à l'instrument toute la richesse de son timbre.

Première partie

Phénoménologie des steelpans : de la fabrication à l'analyse vibratoire

Chapitre 1

Introduction à la phénoménologie des steelpans

Sommaire

1.1 Généralités	19
1.2 Dispositifs expérimentaux	20
1.2.1 Mesure des oscillations libres	20
1.2.2 Analyse modale expérimentale	20
1.2.3 Mesure des oscillations forcées	21
1.3 Objectifs	23

D'une manière générale, cette partie vise à rendre compte des propriétés dynamiques des steelpans. Une attention particulière sera donnée dans un premier temps à l'évolution de ces caractéristiques au cours du processus de fabrication de ces instruments. Dans un second temps, l'étude d'un steelpan soumis à différents types d'excitations révélera un comportement dynamique complexe responsable du timbre particulier qu'il est capable de produire.

1.1 Généralités

Comme dit dans l'introduction générale du manuscrit, les steelpans sont fabriqués à partir de bidons métalliques. Afin d'obtenir la forme finale de l'instrument que l'on peut voir sur la figure 1.1(a), le *tuner*, réalise une série d'étapes au cours desquelles la surface supérieure du bidon est transformée progressivement. À la fin du processus, la forme obtenue est une calotte sphérique concave qui contient différents dômes convexes organisés en cercles concentriques. Chaque dôme est une note de l'instrument précisément accordée. Les notes les plus graves sont réparties sur la couronne extérieure et les notes les plus aiguës sur les couronnes intermédiaires et centrales.

Pour produire un son, le musicien, muni de *sticks*, percute, chacune des notes tour à tour (il peut aussi jouer plusieurs notes en même temps pour produire un accord) avec une frappe plus ou moins

forte selon l'intensité de jeu qu'il souhaite créer. Les sons produits par les steelpans sont originaux. « La qualité du son de steeldrum est notable et ne ressemble à aucun autre son » [22]. D'après les travaux d'Achong [1, 6, 4, 3, 5, 2], on sait que les steelpans opèrent à la manière de systèmes d'oscillateurs non linéaires couplés entre eux. Ainsi des phénomènes d'interactions modales peuvent apparaître. Ces interactions sont responsables des particularités du timbre de l'instrument via des transferts d'énergie entre les modes de vibrations.

Deux études sont menées à bien dans les chapitres suivants. La première, qui fait l'objet du chapitre 2, consiste à suivre l'évolution des paramètres dynamiques des steelpans au cours de sa fabrication. La seconde, développée dans le chapitre 3, vise à mettre en évidence les caractéristiques dynamiques linéaires et non linéaire d'un steelpan en état de jeu.

1.2 Dispositifs expérimentaux

Dans le but d'observer les particularités dynamiques des steelpans, trois types d'expériences sont réalisés dans les chapitres suivants. Les montages expérimentaux et principes associés sont explicités dans cette section.

1.2.1 Mesure des oscillations libres

Une première expérience est de mesurer la réaction du steelpan dans son mode de jeu usuel. Pour cela, la main du musicien, munie d'un *stick*, vient percuter une note en son centre et selon différentes forces de frappe, à savoir faible, forte et très forte et peut ainsi créer les intensités correspondantes : *piano*, *mezzo forte* et *forte*. L'évolution de la vibration au cours du temps est mesurée en un point du dôme directement excité (voir Fig. 1.1(b)) via un accéléromètre collé au moyen de cire d'abeille. Ainsi on pourra observer l'évolution des oscillations libres du signal mesuré. On aura alors accès aux différentes phases temporelles de ce signal :

- Le transitoire d'attaque, c'est à dire le temps nécessaire à l'établissement du son
- La phase de maintien d'amplitude
- La décroissance, soit la diminution de l'amplitude jusqu'à extinction.

1.2.2 Analyse modale expérimentale

L'analyse modale expérimentale permet l'étude des paramètres dynamiques linéaires d'une structure à savoir, pour chaque mode propre k les fréquences propres f_k , les amortissements modaux μ_k et les déformées modales Φ_k .

Le montage expérimental correspondant est représenté sur la figure 1.2. La structure est soumise à une excitation sinusoïdale. Elle est mise en vibrations par l'action d'un système électro-magnétique constitué d'une bobine circulaire et d'un aimant. L'aimant adhère directement à la structure. Il est placé au centre de la bobine qui elle-même est parcourue par un courant. Cela permet de créer une force magnétique proportionnelle à l'intensité du courant et perpendiculaire à la surface excitée [64].

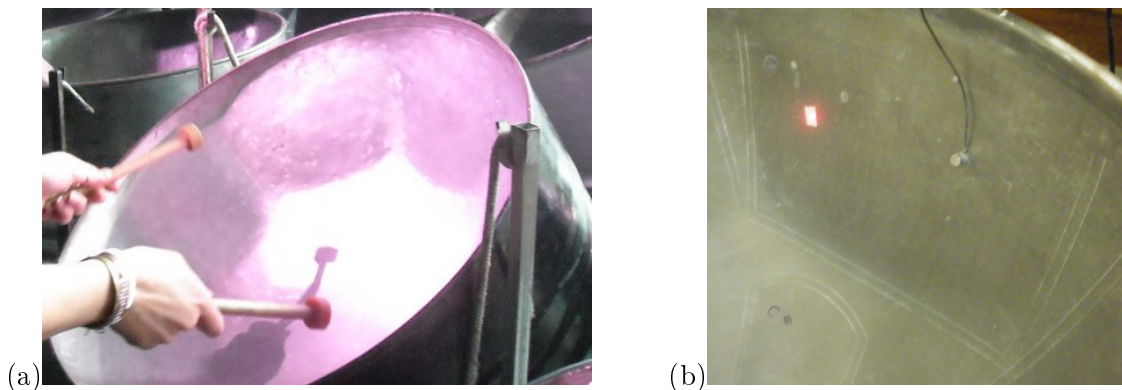


FIGURE 1.1 – (a) Steelpan en condition de jeu. Observation de la forme générale d’un steelpan : cuve concave principale comportant une succession de dômes convexes qui sont les différentes notes de l’instrument. (b) Mesure impulsionnelle d’une note de steelpan en condition de jeu. Accéléromètre collé au moyen de cire d’abeille.

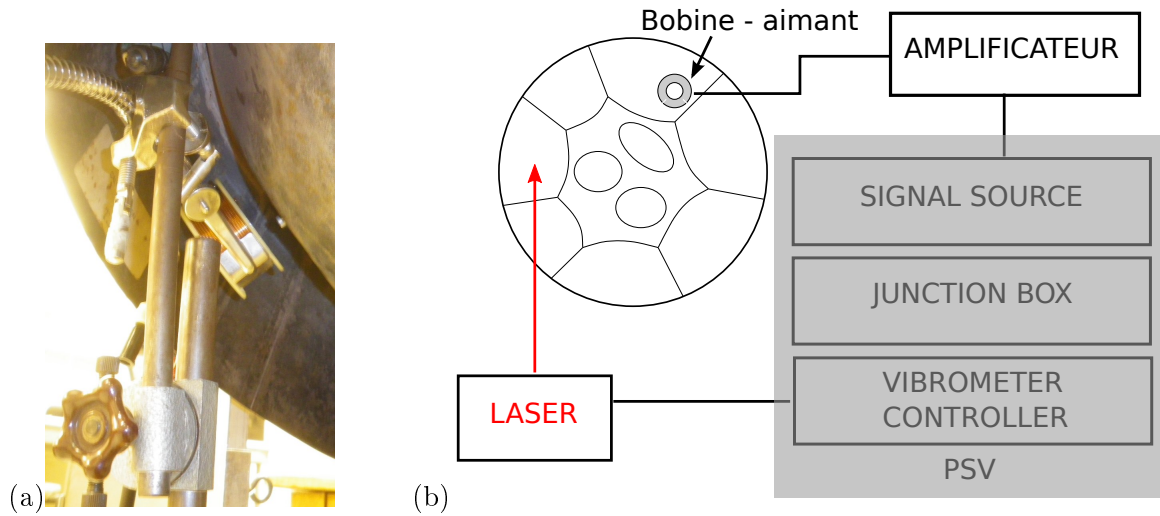
Comparé à la taille de la structure, l’aimant est suffisamment petit pour que l’excitation soit considérée comme ponctuelle. Aussi, le signal choisi sinusoïdal balaie une large bande fréquentielle afin d’exciter un grand nombre de résonances du système. Un vibromètre laser à balayage, piloté par le logiciel *Polytec Scanning Vibrometer (PSV)*, mesure la vitesse d’un ensemble de points de la surface vibrante préalablement définis. Le logiciel PSV permet de configurer les paramètres du signal d’excitation et du signal mesuré (voir le tableau de la figure 1.2(c)). Finalement, on observe le rapport entre vitesse mesurée et intensité du signal d’excitation appelé fonction de réponse en fréquences (FRF). Lorsque l’excitation ($I_0 \sin \Omega t$) est placée en un point x_p et que la vitesse est mesurée en un point x_q de la structure, on peut écrire :

$$H_{pq}(\Omega) = \frac{v(x_q)}{F(x_p)} = \sum_{k=1}^K \frac{\Phi_{kp} \Phi_{kq}}{m_k} \frac{j\Omega}{\omega_k^2 - \Omega^2 + 2j\xi_k \omega_k \Omega}, \quad (1.1)$$

où pour chaque mode propre k , on identifie la valeur de la pulsation propre ω_k , le facteur d’amortissement modal ξ_k , et l’amplitude des déformées modales respectivement au point d’excitation Φ_{kp} et au point de mesure Φ_{kq} . m_k est la masse modale. Enfin, Ω est la pulsation de la force extérieure F appliquée à la structure. Pour des structures très peu amorties ($\xi_k \ll 1$) lorsque la fréquence d’excitation est proche d’une des fréquences propres ($\Omega \simeq \omega_k$), la FRF présente un maximum d’amplitude. C’est autour du pic d’amplitude que l’on va identifier les fréquences propres $f_k = \omega_k/2\pi$, les amortissements modaux $\mu_k = 2\xi_k \omega_k$, et les déformées modales Φ_k (par reconstruction du signal mesuré en chaque point x_q).

1.2.3 Mesure des oscillations forcées

Enfin, dans le but de mettre en évidence de manière précise les caractéristiques non linéaires des steelpans, l’instrument est placé sous une excitation forcée. Le système bobine aimant est à nouveau utilisé mais cette fois avec une intensité de forçage plus importante afin que la structure soit excitée dans un régime non linéaire, avec un forçage extérieur ponctuel, sinusoïdal où la fréquence d’excitation



Paramètres PSV	
(c) Signal d'excitation généré	Sweep balayant [0 : 2000] Hz
Calibre du LASER	125 mm/s/V
Moyennage en amplitude du signal mesuré	5 mesures par point
Fréquence d'échantillonnage du signal mesuré	625 mHz

FIGURE 1.2 – Analyse modale expérimentale. (a) Photographie du système d'excitation appliqué au steelpan. (b) Schéma du montage de l'analyse modale expérimentale où le steelpan est excité au moyen d'un système électromagnétique (bobine-aimant) et la vitesse de vibration de la structure est mesurée par un vibromètre laser à balayage. Le système de montage associé au vibromètre est constitué de trois sous-unités : un générateur de signal, un contrôleur de signal et une *junction box*. (c) Paramètres du signal mesuré, choisis au sein du logiciel PSV.

est proche d'une des résonances du système. Le pas fréquentiel du balayage doit être suffisamment fin et lent pour accéder de manière très précise à la réponse de la structure.

La figure 1.3 montre le montage expérimental associé à ce type de mesures. Cette fois, le vibromètre laser est fixé en un point bien choisi de la structure. Sauf précision, dans les chapitres suivants, lorsque cette expérience sera mise en place, le laser sera dirigé sur un point de la note directement excitée. Le signal mesuré par le vibromètre est alors transmis à un amplificateur à verrouillage de phases. Celui-ci renvoie amplitude et phase de chaque harmonique du signal de réponse, par rapport à une fréquence d'oscillation de référence. Si cette fréquence d'oscillation de référence est identique à la fréquence d'excitation du système, alors le signal mesuré peut être décomposé selon les multiples supérieurs du mode directement excité. Par exemple, si on excite une note autour de sa fréquence fondamentale $f_{dr} \simeq f$ et que la fréquence de référence est telle que $f_{ref} = f_{dr}$, alors le signal mesuré se décompose en harmoniques oscillants à $f, 2f, 3f, \dots$

Si l'on veut maintenant mesurer des échanges d'énergie entre un mode de haute fréquence et un mode de

plus basse fréquence, on place l'excitation telle que $f_{dr} = 2f$ (par exemple), et on impose la fréquence de référence telle que $f_{ref} = f_{dr}/2$. Ainsi les harmoniques mesurés sont toujours les composantes oscillants à $f, 2f, 3f, \dots$ et en excitant autour de $2f$, on récupère amplitude et phase du mode de fréquence moitié. Ainsi, les interactions modales peuvent être précisément mesurées quelle que soit la fréquence du mode directement sollicité.

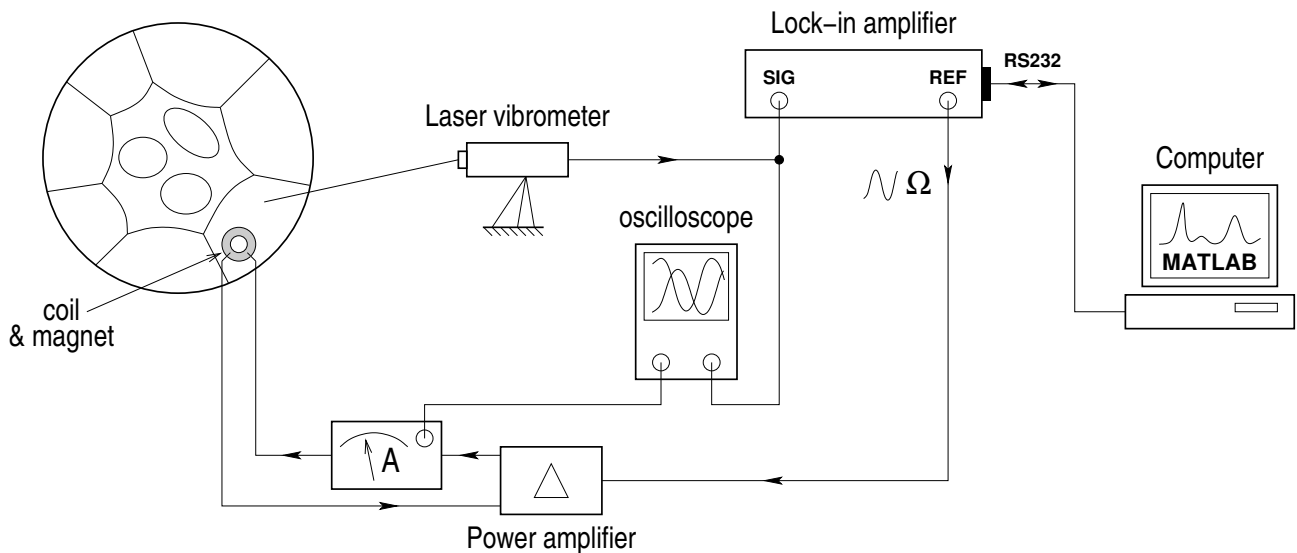


FIGURE 1.3 – Montage expérimental permettant les mesures non linéaires.

1.3 Objectifs

Différentes approches expérimentales vont donc être mises en œuvre dans les chapitres suivants afin de révéler le comportement dynamique des steelpans. Les caractéristiques vibratoires de ces instruments jouent un rôle primordial dans le timbre des sons qu'ils sont capables de produire. Une attention particulière sera donnée au suivi des paramètres dynamiques au cours de la fabrication des steelpans, dans le chapitre 2. Ensuite, le chapitre 3 exposera les particularités dynamiques, linéaires et non linéaires, responsables des sons des steelpans en état de jeu.

Chapitre 2

Fabrication d'un steelpan au laboratoire

Sommaire

2.1 Introduction	25
2.2 Succession des étapes de fabrication	26
2.2.1 Étape 1 : L'embouti	26
2.2.2 Étape 2 : Façonnage des notes	31
2.2.3 Étape 3 : Les <i>grooves</i>	36
2.2.4 Étape 4 : Pré-accordage	40
2.2.5 Étape 5 : Chauffage	46
2.2.6 Étape 6 : Accordage fin	49
2.3 Conclusion	53

Ce chapitre rend compte de l'ensemble des étapes de fabrication d'un steelpan, construit au laboratoire, dans le cadre d'une collaboration avec un *tuner* : Emmanuel Judith. Une étude expérimentale pas à pas visant à quantifier l'évolution des paramètres dynamiques (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales) est réalisée à l'issue de chaque étape.

2.1 Introduction

Dans la littérature, la majeure partie des études qui traitent de la fabrication des steelpans, appartient au domaine de la métallurgie [36, 35, 45, 46, 48, 47, 20, 21, 19]. On peut également référencer un manuel destiné aux futurs *turners* souhaitant connaître la marche à suivre pour fabriquer un steelpan et comprendre les bases du comportement dynamique de l'instrument. Cet ouvrage écrit par Kronman [32] décrit de manière exhaustive l'ensemble des paramètres à prendre en compte pour fabriquer l'instrument.

L'objectif du travail mené à bien était en premier lieu qu'Emmanuel Judith réalise l'ensemble des étapes de fabrication au laboratoire pour observer précisément les modifications subies par la structure.

Le steelpan que nous avons choisi de faire fabriquer est un *single guitar*. C'est un instrument qui se situe au « centre » de l'orchestre dans le sens où il est d'une tessiture moyenne. Comme on peut le voir sur la figure 2.1, il est composé d'un seul fût dans lequel sont réparties dix notes allant du D3 (la plus grave) au E4 (la plus aiguë). Sept notes sont sur la couronne extérieure et trois sont placées au centre de l'instrument. On peut noter qu'il existe deux couples de notes en relation d'octave : E3/E4 et D3/D4. Leurs fréquences fondamentales présentent donc un rapport de fréquences doubles.

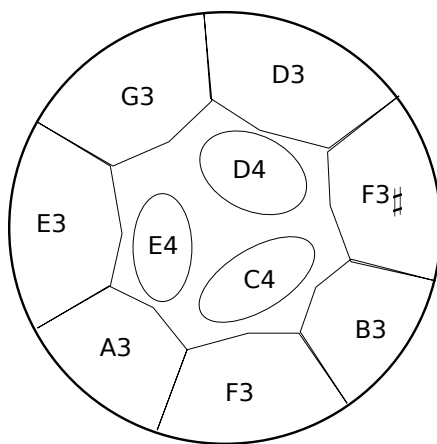


FIGURE 2.1 – *Pattern* du *single guitar* fabriqué au laboratoire.

2.2 Succession des étapes de fabrication

Le fut métallique, destiné à la fabrication du steelpan, est représenté sur la figure 2.2. Il est d'une longueur globale de 883 mm et est constitué d'un plateau supérieur et d'un plateau inférieur initialement plats et circulaires. Ces derniers sont liés au cylindre (appelé jupe) par un cerclage. Ainsi le plateau supérieur est d'un diamètre total (cercle compris) de 580 mm alors que le diamètre intérieur est de 566 mm. Bien qu'indiqué de 1.1 mm, l'épaisseur du plateau dans son état initial est mesurée à 1.3 mm. L'épaisseur de la jupe est mesurée à 1.2 mm.

2.2.1 Étape 1 : L'embouti

La première étape de fabrication d'un steelpan consiste à emboutir la surface supérieure du bidon initialement plane (ou quasi plane) dans le but d'obtenir une cuve concave régulière dont la géométrie est une calotte sphérique.

Pour cela, le *tuner* trace des cercles concentriques qui vont permettre de guider l'enfoncement du bidon au cours de la transformation (voir Fig. 2.3(a)). Ces cercles sont respectivement disposés à 5 et 16 centimètres du bord et indiquent les couronnes de notes extérieures et intérieures. L'outil utilisé pour emboutir peu à peu le plateau supérieur est un marteau pneumatique, montré sur la figure 2.3(b). La flèche maximale (au centre) souhaitée est fixée en fonction du steelpan que l'on désire fabriquer.

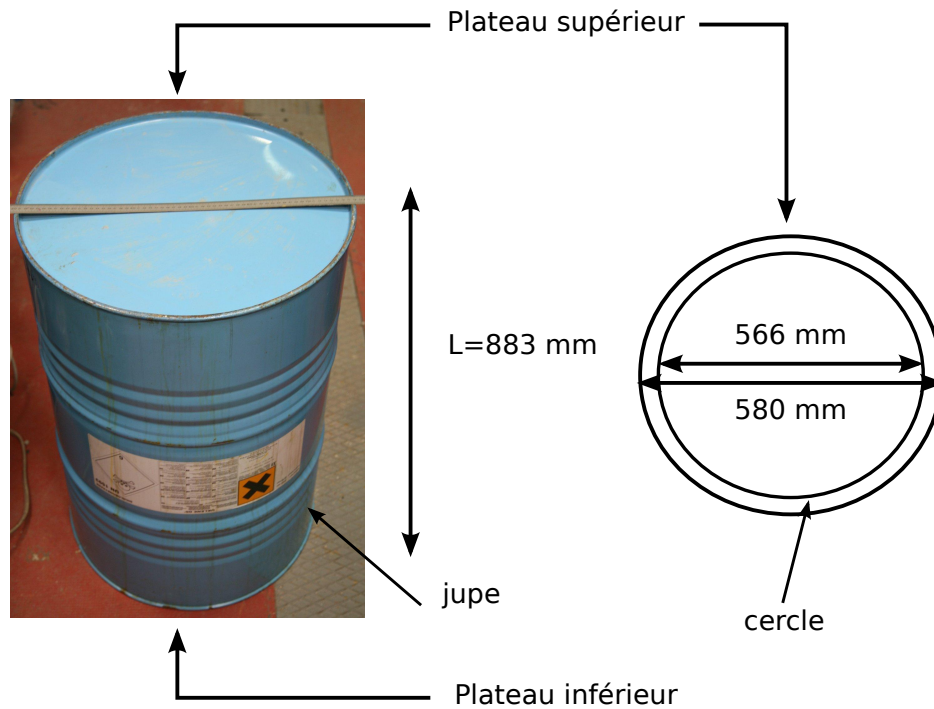


FIGURE 2.2 – Dimensions du fût métallique destiné à la fabrication du steelpan.

Dans notre cas, pour un *single guitar*, la profondeur au centre doit atteindre approximativement 12 centimètres. Selon le *tuner*, l'objectif de l'étape d'embouti est d'étirer le métal pour obtenir une surface plus grande, afin de placer, par la suite, le nombre de notes nécessaire à l'instrument.

Au cours de la transformation, le métal est donc percuté localement et successivement (Fig. 2.3(c)). Cela crée des disparités sur l'ensemble de la surface, comme on peut le voir sur la figure 2.3(d). Lorsque la profondeur souhaitée est atteinte, un second marteau pneumatique, dont l'embout, plus petit, est recouvert d'une protection de cuir, est utilisé pour lisser l'ensemble de la cuve. À l'issue de cette étape, un profil de calotte sphérique quasi parfaite est obtenu (voir Fig. 2.3(f)). Quelques points de mesures confirment la régularité géométrique du résultat final (Fig. 2.3(g)). En effet on peut observer une symétrie de révolution quasi parfaite par rapport à l'axe vertical du bidon.

Remarque :

Comme observé dans [47], l'épaisseur de la structure est différente entre l'état initial et l'état final. N'ayant aucun moyen de la mesurer (de manière non destructive), un calcul d'ordre de grandeur nous permet de nous rendre compte de sa variation. En effet, si l'on considère le volume initial d'un cylindre à base circulaire $V_d = \pi a^2 e_1$ (où a est le rayon et e_1 l'épaisseur), et que ce volume doit être égal au volume de la calotte sphérique obtenue après embouti $V_c = 2\pi h R e_2$ (où h est la hauteur, R le rayon et e_2 l'épaisseur finale), on trouve (avec $e_1 = 1$ mm, $a = 0.3$ m et $h = 0.16$ m), une épaisseur finale d'environ $e_2 = 0.8$ mm. Si de plus, conformément à [47], l'épaisseur est inhomogène (variation non linéaire entre le bord et le fond de la cuve), de sorte à être réduite de moitié au centre, on obtient in fine, une épaisseur de l'ordre de 0.4 mm en centre de la cuve. Ce calcul simple peut nous donner une

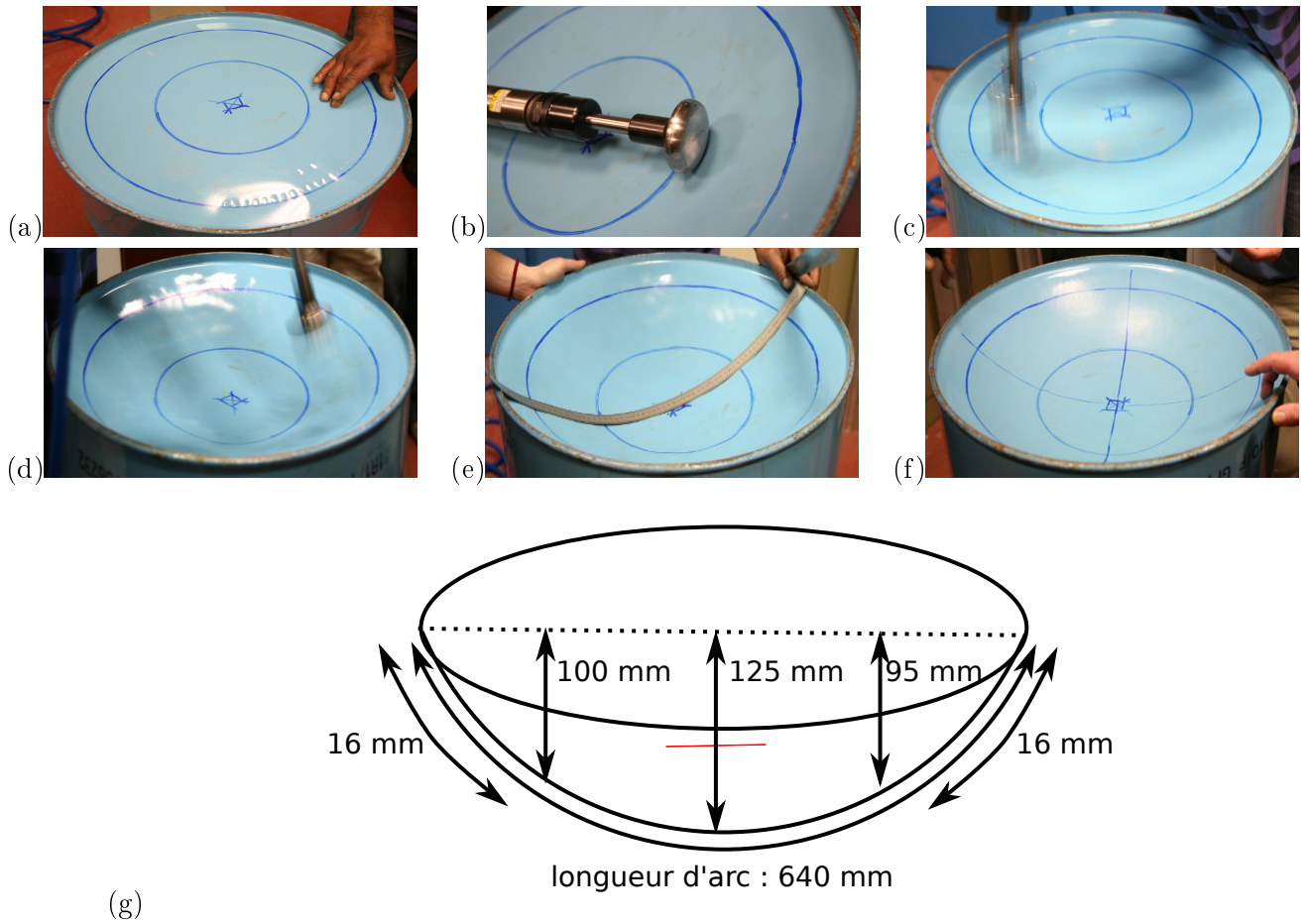


FIGURE 2.3 – Fabrication du steelpan, étape 1 : l'embouti.

idée de l'ordre de grandeur de l'épaisseur obtenue. On constate donc une forte variation entre l'état initial plan et l'état final courbe.

Pour réaliser l'étude dynamique de la cuve emboutie, une analyse modale expérimentale a été menée à bien. Comme le montre la figure 2.4, le système électro-magnétique est disposé de sorte que la force d'excitation soit proche du centre sans être parfaitement centrée afin qu'une majorité de modes (axisymétriques et asymétriques) soient excités. La réponse de la structure est mesurée sur un maillage de points recouvrant la totalité de la surface supérieure emboutie.

La fonction de réponse en fréquences mesurée au point d'excitation est tracée sur la figure 2.5(a). Les paramètres dynamiques associés aux quatre premières fréquences propres sont sur les figures 2.5(b),(c),(d) et (e). Les fréquences propres et les facteurs d'amortissement modaux sont mesurés directement sur le spectre et les déformées opérationnelles sont les reconstructions spatiales qui oscillent à la fréquence sélectionnée.

Sur l'ensemble du spectre, on observe des pics de résonances très distincts qui n'existent qu'à partir d'environ 1300 Hz. Les modes se trouvent donc à des fréquences très élevées ; ce qui n'est pas le cas

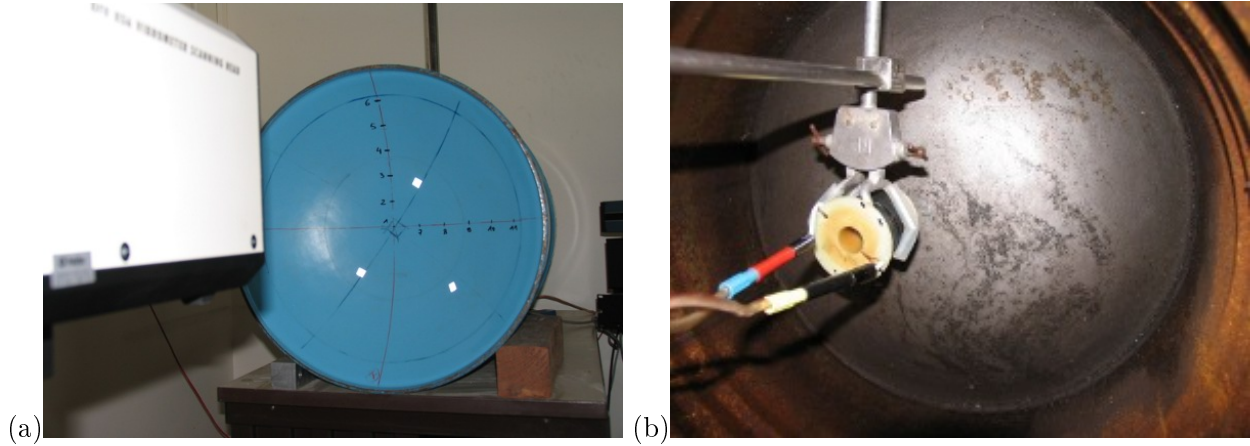


FIGURE 2.4 – Analyse modale expérimentale à l’issue de la première étape de fabrication (embouti). L’excitation est placée proche du centre de la cuve.

pour la plaque plane, avant l’embouti. Nous ne présentons pas de mesures du bidon dans son état initial, mais nous avons pu observer le changement d’ordre de grandeur des fréquences avant et après l’étape d’embouti. Cela est conforme au phénomène de changement de courbure qui, en augmentant la raideur, fait croître l’ensemble des fréquences propres [68]. Les premiers modes mesurés ne présentent aucune relation fréquentielle particulière, en effet les fréquences propres sont telles que : $f_1 = 1309$ Hz, $f_2 = 1372$ Hz, $f_3 = 1438$ Hz et $f_4 = 1532$ Hz.

Les facteurs d’amortissements modaux associés sont calculés par la méthode à -3dB, tels que $\xi_k = \Delta f_k / 2f_k$ où $\Delta f_k = (f_{k,sup} - f_{k,inf})$ est la différence entre la fréquence supérieure et la fréquence inférieure à la fréquence propre considérée, pour lesquelles l’amplitude du spectre atteint l’amplitude du pic moins trois décibels. Pour l’ensemble des modes sélectionnés, il est de l’ordre de 0.002, ce qui nous amène à considérer la structure comme peu amortie. Cela contredit l’impression auditive que nous avons pu avoir au cours de l’expérience.

Les déformées opérationnelles mesurées montrent que la vibration est concentrée au centre de la cuve (loin du bord). Cela peut être dû soit à la variation de courbure, soit à la variation d’épaisseur entre le centre et le bord soulignée précédemment. On peut identifier les quatre premières déformées modales dont les trois premières sont semblables à celles d’une plaque circulaire encastree. Pour conserver les notations proposées par Rossing dans [56], on peut noter la première déformée modale $\Phi_1 = (0, 0)$ où seul un ventre de vibration apparaît. Le second mode présente une ligne nodale qui sépare deux ventres en opposition de phase et on note $\Phi_2 = (1, 0)$. Le troisième est le mode complémentaire du second à savoir que la déformée est la même mais orientée à 90 degrés. On peut la noter $\Phi_3 = (0, 1)$. Le quatrième déformée n’est pas clairement identifiable. On peut imaginer que c’est la déformée $\Phi_4 = (2, 0)$, où deux lignes nodales séparent trois ventres de vibration. Enfin, on peut également remarquer que la vibration n’est pas totalement nulle en périphérie de la cuve, aux abords du cerclage. Les conditions aux limites, qui, de prime abord, sembleraient proches de l’encastrement, ne sont donc pas idéales.

À l’issue de cette étape de fabrication, une mesure de l’état de contraintes résiduelles a également été réalisée, mais elle sera présentée au chapitre 4.

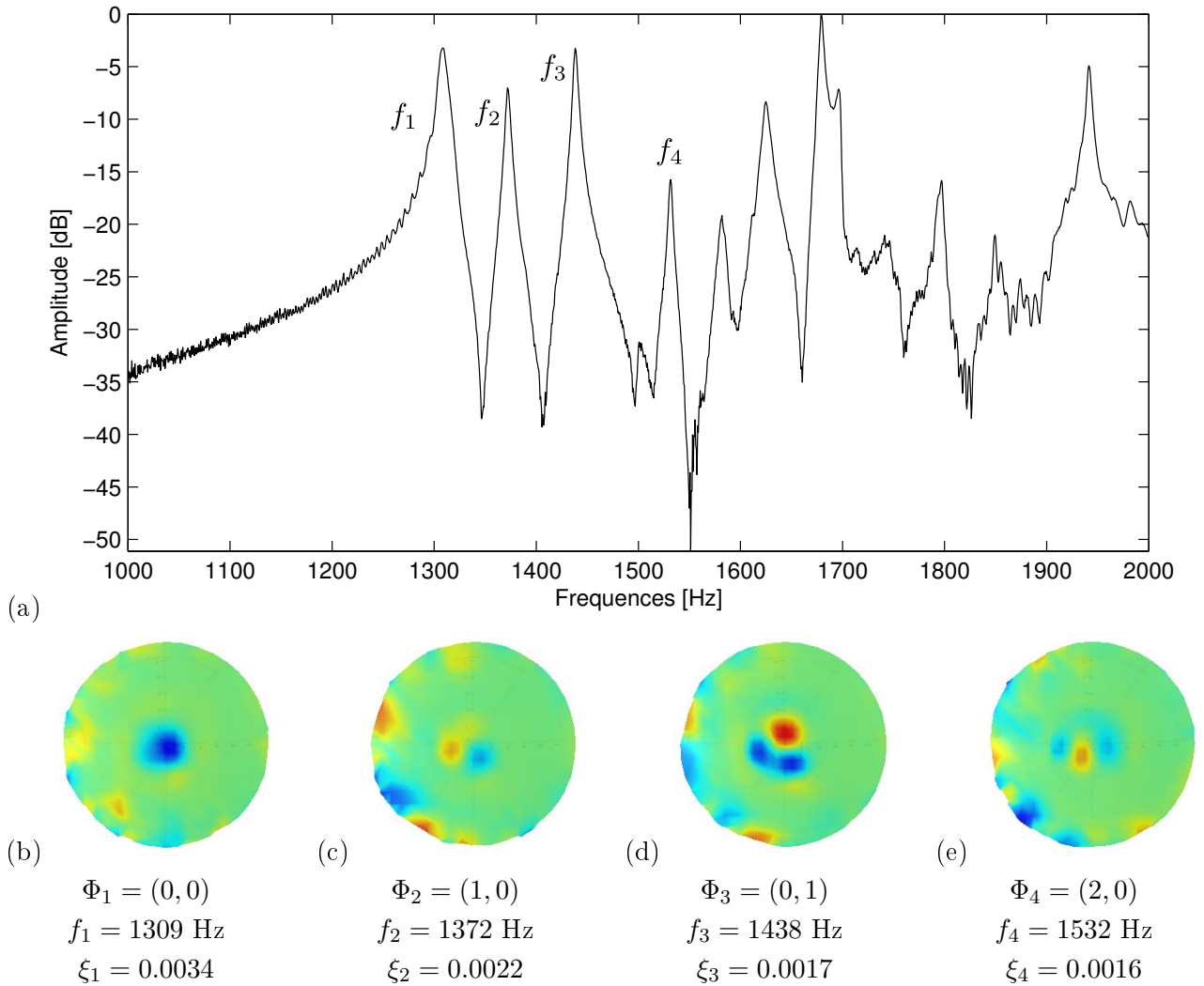


FIGURE 2.5 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la première étape de fabrication. Le steelpan vient d'être embouti. L'excitation est placée proche du centre de la cuve. (a) Fonction de réponse en fréquences mesurée au point d'excitation. (b)-(e) Déformées opérationnelles, fréquences propres et facteurs d'amortissement modaux.

2.2.2 Étape 2 : Façonnage des notes

Avant de procéder à la seconde étape qu'est le façonnage, le *tuner* dessine l'espace que prendront les futures notes à l'aide de gabarits. Ce sont des sortes de pochoirs dont la taille est spécifique à chaque note. Ainsi, il organise l'espace à l'intérieur de la cuve, c'est ce que l'on appelle la *pattern* du steelpan. Elle est faite de sorte que les notes les plus graves sont sur la couronne extérieure et les notes les plus aiguës sur la couronne intérieure. Ensuite, l'organisation entre les notes est spécifique au steelpan fabriqué. La plupart du temps, elle dépend d'une relation harmonique logique qui facilite le geste du musicien [29].

Une fois le schéma de l'instrument dessiné dans la cuve sphérique, comme illustré sur la figure 2.6(a), le *tuner* commence le façonnage. Pour cela, il sépare les notes les unes des autres à l'aide du marteau pneumatique (voir Fig. 2.6(b) et (c)). Il martèle les lignes séparatrices afin de « creuser » le métal et donc de faire ressortir le bombé de la note. Il utilise également un marteau manuel pour exercer un marquage plus radical sur les bordures des notes (voir Fig. 2.6(d) et (e)). Son objectif est d'isoler les notes les unes des autres. En martelant et lissant, chaque sous-espace prend une forme elliptique qui va constituer l'essentiel de la note, dans le sens où la vibration va être concentrée dans cet espace. Cela est possible par la variation de raideur qui délimite la frontière entre note et inter-note [4].

À l'issue de cette étape, l'instrument a pris forme. Chaque sous-espace produit un son différent bien qu'aucune attention particulière, de la part du *tuner*, n'ait été donnée à l'harmonie. On s'attend donc à voir la vibration se localiser sur les différents dômes mais on ne s'attend pas encore à observer des partiels en relation harmonique.

La géométrie de la structure a donc été modifiée, comme cela est schématisé sur la figure 2.6(g). La flèche maximale atteint maintenant 145 mm. On peut également remarquer que par rapport à un plan imaginaire situé au niveau le plus bas de l'instrument, le niveau de l'inter-note se trouve aux environs de 12 mm.

Afin de rendre compte de l'état des caractéristiques dynamiques à l'issue de cette étape de façonnage des notes, une nouvelle analyse modale expérimentale est réalisée. Comme annoncé précédemment, du fait de l'existence des dômes, et de la perception de sons différents produits par chacun d'entre eux, désormais, on ne s'attend plus à observer le comportement vibratoire d'une structure globale mais un phénomène de localisation des vibrations sur les sous-structures. Pour cette raison, il devient désormais nécessaire de choisir l'emplacement du système de d'excitation. Arbitrairement, le choix a été porté sur les notes E3 et E4. Ainsi dans la suite du texte, nous pourrions suivre l'évolution des caractéristiques dynamiques de ces deux notes au fur et à mesure des transformations. La figure 2.7 précise l'orientation du bidon pendant l'expérience, afin de visualiser les deux notes sélectionnées.

2.2.2.1 Analyse modale après façonnage lorsque E3 est directement excitée

On commence par présenter les résultats de la mesure lorsque l'excitation est placée sous la note la plus grave E3 sur la figure 2.8. À première vue, contrairement à l'étape précédente (l'embouti), le

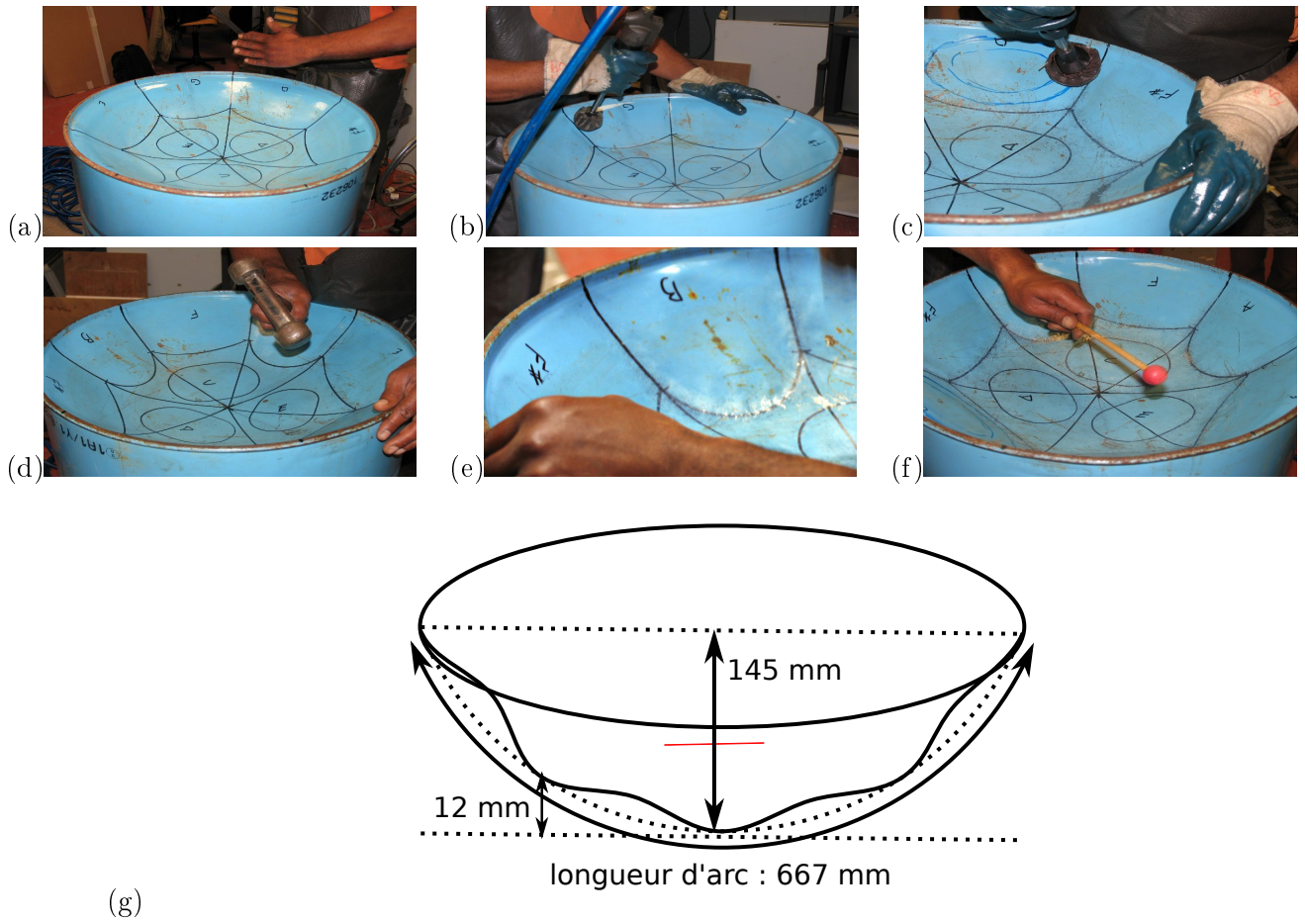


FIGURE 2.6 – Fabrication du steelpan, étape 2 : le façonnage des notes.

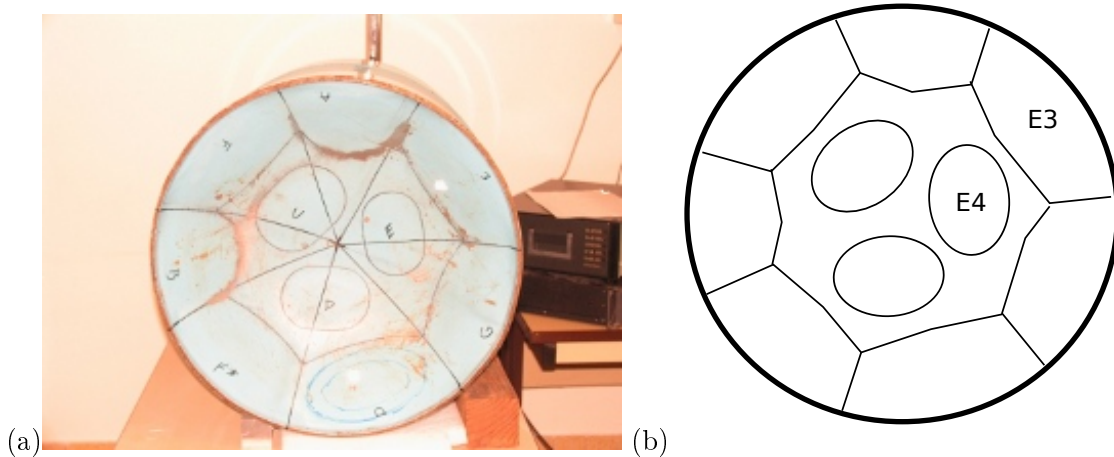


FIGURE 2.7 – Orientation de l'instrument pendant l'analyse modale expérimentale à l'issue du façonnage. Excitation des notes E4 et E3.

spectre montre que les fréquences propres ont considérablement diminué. En effet les premiers modes sont concentrés sur la bande de fréquence [400 1200] Hz. Aussi, on peut voir que les fréquences ne présentent aucune organisation harmonique logique. Les facteurs d'amortissement ont augmenté et sont maintenant de l'ordre de 0.005. Concernant les déformées modales, comme on pouvait s'y attendre, on remarque que la vibration n'est plus celle de la structure globale mais elle est localisée sur les différents dômes. On remarque que pour une fréquence donnée (par exemple sur la figure 2.8(b)), la vibration est observée aussi bien sur la note directement excitée que sur d'autres notes de la structure. On peut voir, pour $f_1 = 529.4$ Hz, que la note E3 présente la première déformée précédemment notée $\Phi_1 = (0, 0)$. D'autres notes telles que A3, B3 et F3# montrent la même géométrie. Autour du second pic de résonance ($f_2 = 548.1$ Hz), sur la figure 2.8(c), la structure complète présente une nouvelle déformée, mais la note E3 vibre toujours sur sa première déformée, ainsi on note $\Phi_2 = (0, 0)$. Sur la figure 2.8(d), la troisième déformée n'est pas clairement identifiable tant pour la structure globale que pour la note E3 en particulier.

2.2.2.2 Analyse modale après façonnage lorsque E4 est directement excitée

Lorsque l'excitation est placée sous la note aiguë E4, on obtient sensiblement le même comportement (voir Fig. 2.9). Les fréquences propres sont beaucoup plus basses que suite à la première étape de fabrication et du même ordre de grandeur que la mesure précédente (excitation sur E3). Elles ne présentent aucun rapport harmonique notable par rapport à $f_1 = 661.2$ Hz. Les amortissements sont plus faibles que lorsque la note grave est excitée. Ils sont de l'ordre de 0.002. Soit du même ordre de grandeur qu'à la suite de l'embouti. La vibration est localisée sur la note excitée, et on peut apercevoir que les autres dômes entrent aussi légèrement en vibration. Le premier mode de la note est identifié comme $\Phi_1 = (0, 0)$ et le second comme $\Phi_2 = (1, 0)$. Le troisième est plus diffus sur l'ensemble de la structure, on ne peut pas discerner de déformée claire sur la note E4.

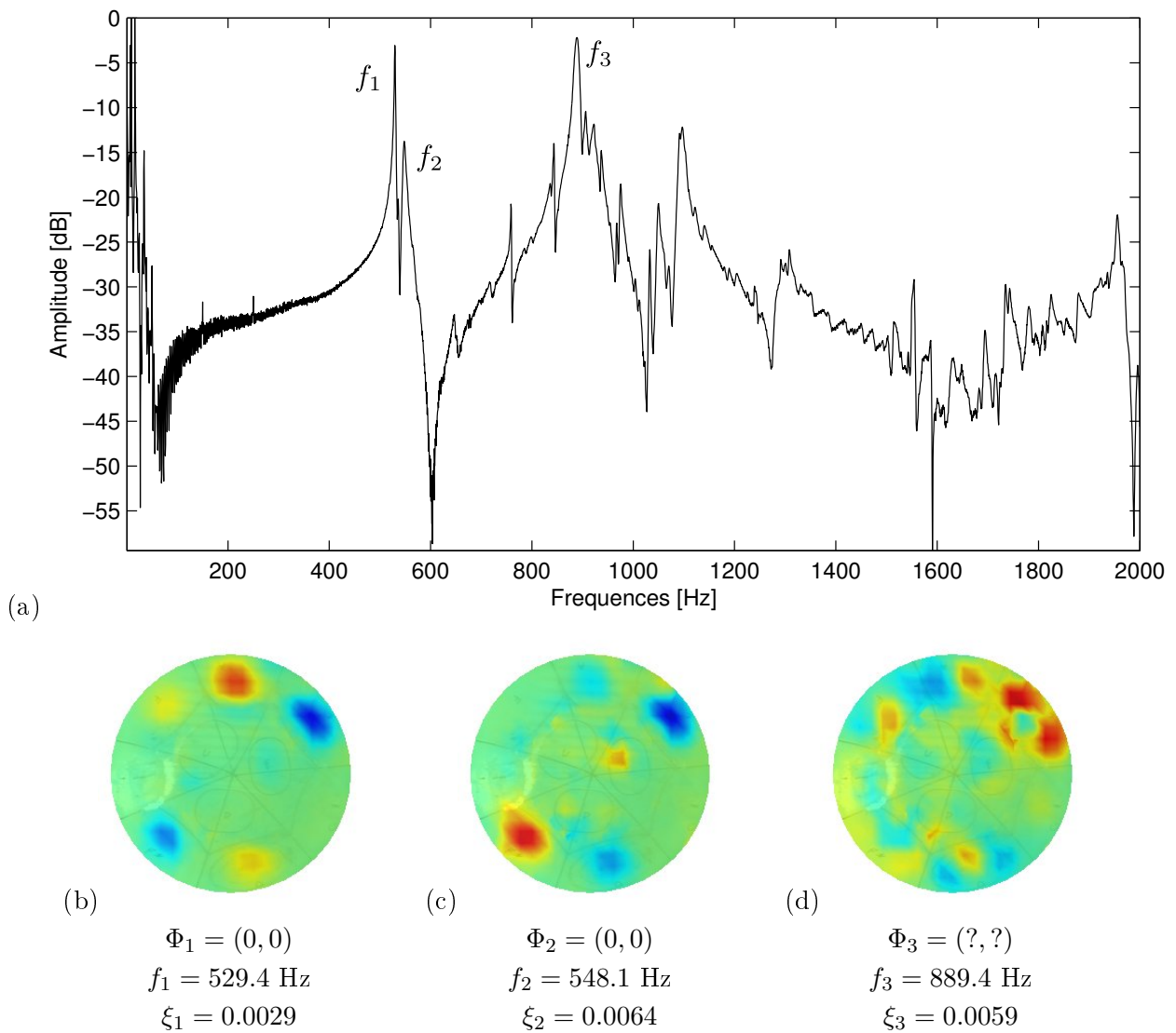


FIGURE 2.8 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la deuxième étape de fabrication (façonnage des notes). L'excitation est placée sous la note E3. (a) Spectre mesuré sur le point d'excitation. (b)-(d) Déformées opérationnelles de la structure. Φ_k interprétation de la déformée concentrée sur la note E3. Fréquences propres et facteurs d'amortissement modaux associés.

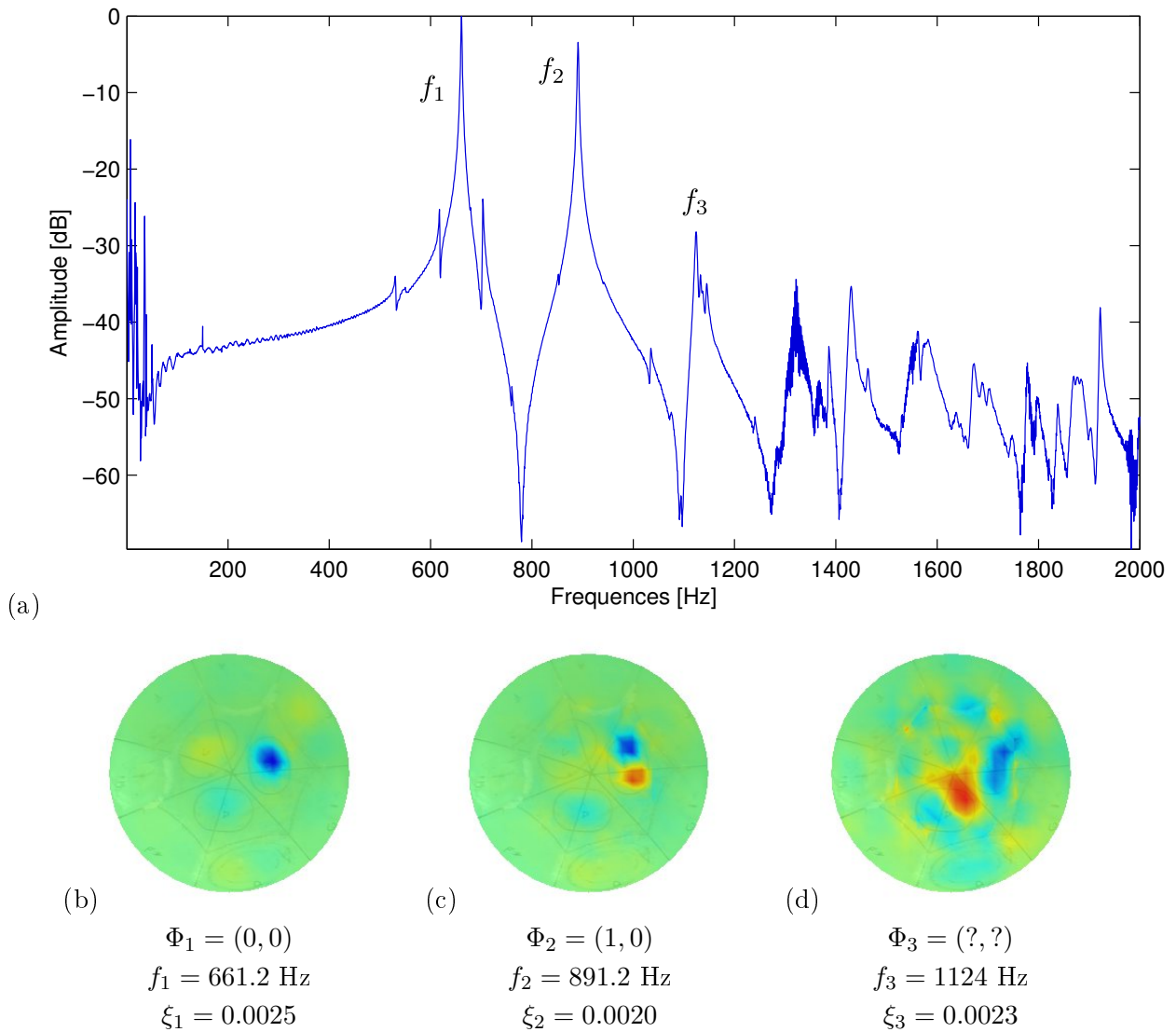


FIGURE 2.9 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la deuxième étape de fabrication (façonnage des notes). L'excitation est placée sous la note E4. (a) FRF au point d'excitation. (b)-(d) Déformées opérationnelles, Φ_k identification de la déformée modale de la note excitée, f_k fréquences propres et ξ_k facteurs d'amortissements modaux.

2.2.3 Étape 3 : Les *grooves*

Avant de procéder à l'étape des *grooves*, le *tuner* re-façonne d'abord l'ensemble des notes. Pour cela, il utilise le marteau manuel et le marteau pneumatique que l'on peut voir sur la figure 2.10(a). Comme le montre la figure 2.11(a), il accentue d'abord le plat des inter-notes. Il modifie ensuite la forme générale des notes en homogénéisant chacune des ellipses. Cette fois, il cherche à équilibrer l'ellipse de la note en éliminant les « bourrelets » qui ont pu se former au cours des précédents martelages. Le marteau pneumatique muni de la protection de cuir permet alors de lisser les disparités à nouveau causées par le martelage (voir Fig. 2.11(c)).

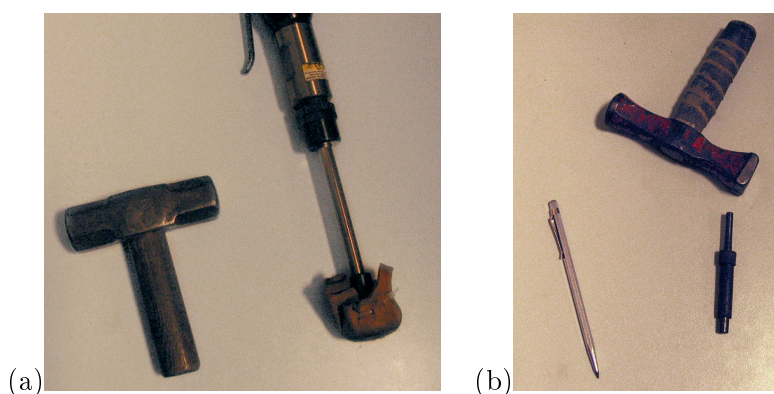


FIGURE 2.10 – Fabrication du steelpan, étape 3 : (a) outils utilisés pour ré-ajuster le façonnage des notes. (b) Outils utilisés pour *groover* les notes : pointe de marquage, marteau et poinçon.

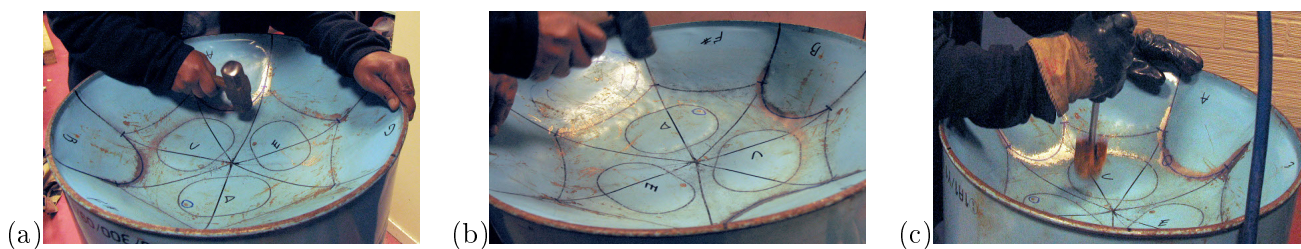
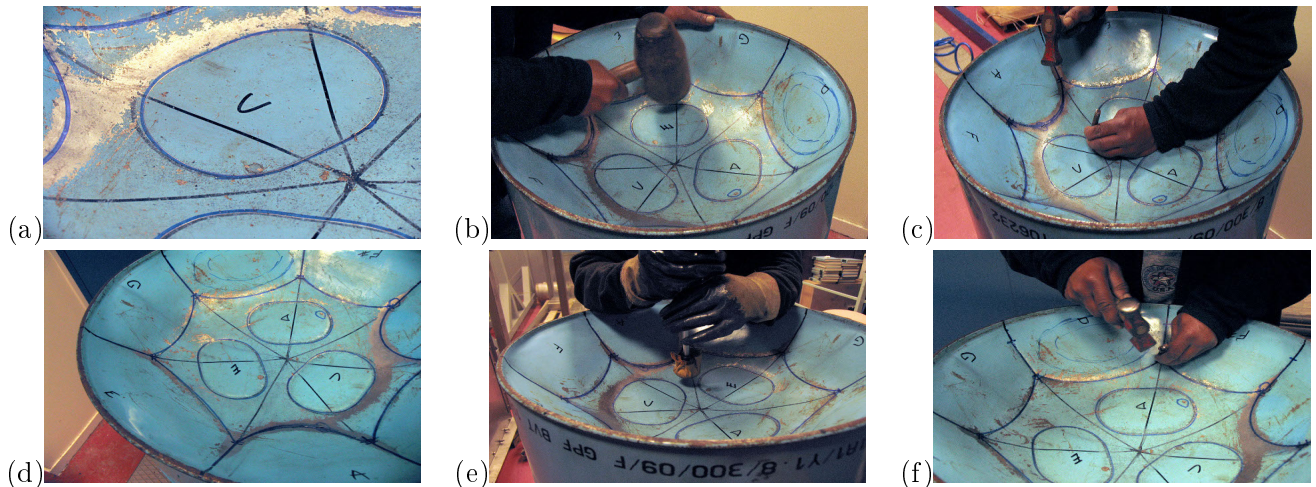


FIGURE 2.11 – Fabrication du steelpan, étape 3 : re-façonnage des notes. Aplatissement des inter-notes et ajustement de la forme des ellipses.

Le *tuner* peut désormais s'apprêter à *groover* les notes. Pour cela, il utilise un poinçon montré sur la figure 2.10(b).

Il réalise d'abord, à l'aide d'une pointe de marquage, une rainure qui délimite précisément le contour de la note (voir Fig. 2.12(a)). Il lisse ces nouvelles marques à l'aide d'un marteau à embout rond (voir Fig. 2.12(b)). Ensuite, comme on peut le voir sur la figure 2.12(c), il poinçonne la périphérie de chaque note en suivant le pourtour marqué par la rainure. Ainsi les notes sont *groovées* (voir Fig. 2.12(d)). Enfin, il lisse et aplatit les zones de *grooves* au marteau pneumatique (voir Fig. 2.12(e)). Il procède de manière identique pour les notes les plus graves (voir Fig. 2.12(f)).

FIGURE 2.12 – Fabrication du steelpan, étape 3 : *grooves*.

Selon les *tuners*, l'objectif de cette étape est de « désolidariser » les notes les unes des autres en créant des sous-espaces bien distincts séparés par les *grooves*. Ceux-ci créent des discontinuités sur la ligne séparatrice. Certains *tuners* remplacent les *grooves* par une série de trous [56]. Selon Achong, les *grooves* ne sont pas essentiels, ils accentuent l'indépendance entre les notes en réduisant les couplages éventuels [4]. En effet, on peut aussi trouver des steelpans non *groovés* dont le timbre ne semble pas foncièrement différent.

2.2.3.1 Analyse modale une fois les notes *groovées* lorsque E3 est directement excitée

Comme le montre la figure 2.13, lorsque les *grooves* sont réalisés, le spectre est proche de celui de l'étape précédente. Les fréquences ont varié. Les amortissements sont également du même ordre de grandeur. Ces variations faibles sont sûrement dues au re-façonnage qui précède l'étape des *grooves* à proprement parler. En effet, les martelages ont encore modifié la géométrie de la structure, d'où les changements des valeurs des paramètres dynamiques, mais les *grooves* ne font que délimiter plus précisément les ellipses des notes, ils n'interviennent donc pas directement sur la vibration de la note. Par contre, on peut voir des différences sur les déformées modales. La première déformée, sur la figure 2.13(b), est maintenant très clairement localisée sur la note directement excitée qui présente son premier mode noté $\Phi_1 = (0, 0)$. Les déformées correspondant aux modes de plus hautes fréquences sont diffuses sur l'ensemble de la structure. Il est alors difficile de définir une notation claire de la déformée.

2.2.3.2 Analyse modale une fois les notes *groovées* lorsque E4 est directement excitée

Dans le cas où l'excitation est placée sous la note E4 (voir Fig. 2.14), on observe encore une fois le même type de phénomènes que précédemment. En effet, fréquences et amortissements sont du même ordre de grandeur qu'à l'issue du façonnage. Les quelques légères variations observées proviennent sûrement du re-façonnage. Une différence notable est que la première résonance s'est scindée en deux

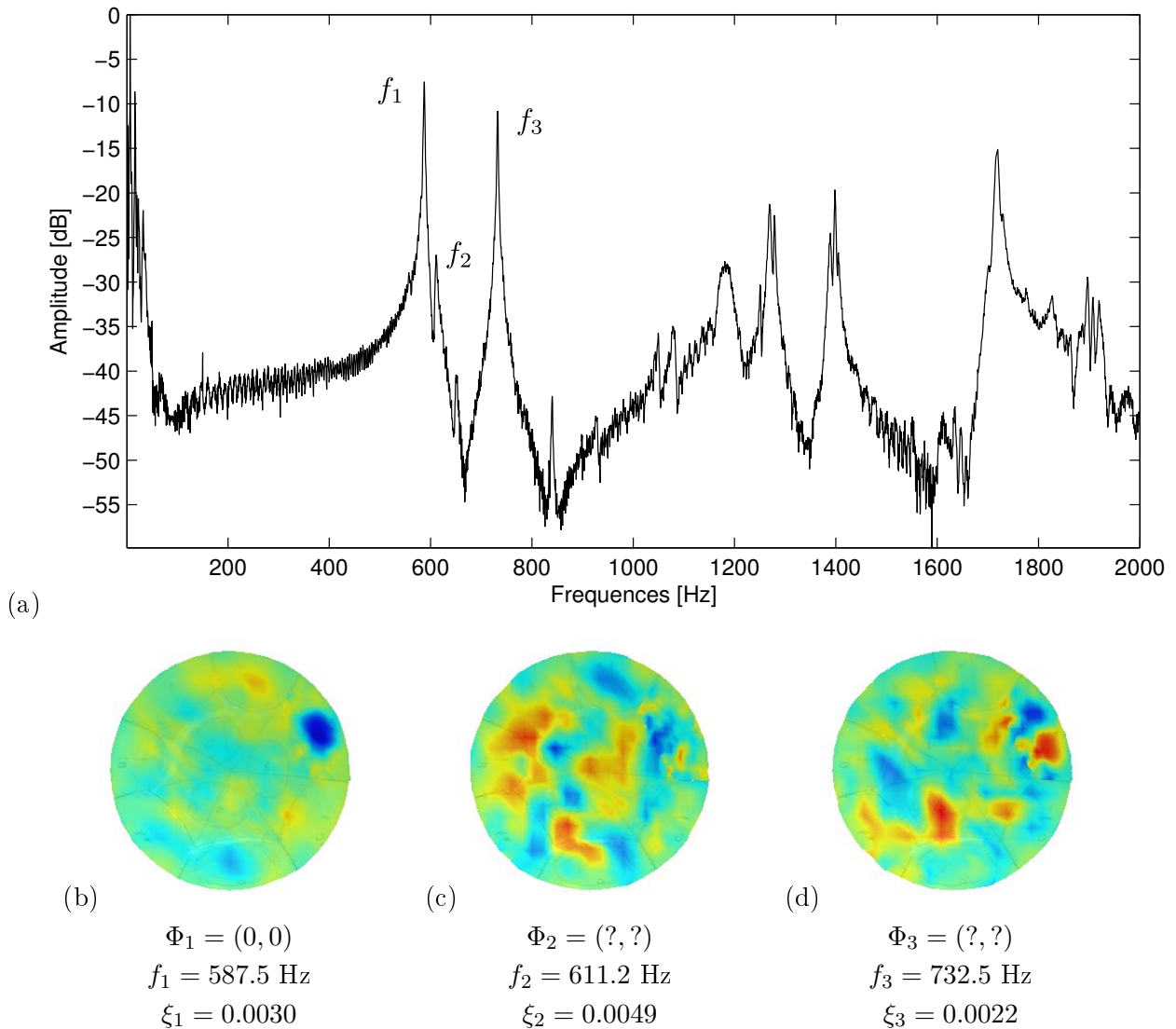


FIGURE 2.13 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la troisième étape de fabrication (*grooves*). L'excitation est placée sous la note E3. (a) FRF au point d'excitation. (b)-(d) Déformées opérationnelles, Φ_k identification de la déformée modale de la note excitée, f_k fréquences propres et ξ_k facteurs d'amortissements modaux.

pics distincts auxquels correspondent des déformées semblables et où la note E4 directement excitée présente la déformée de type (0,0). La troisième quant à elle présente le mode (1,0) précédemment identifié.

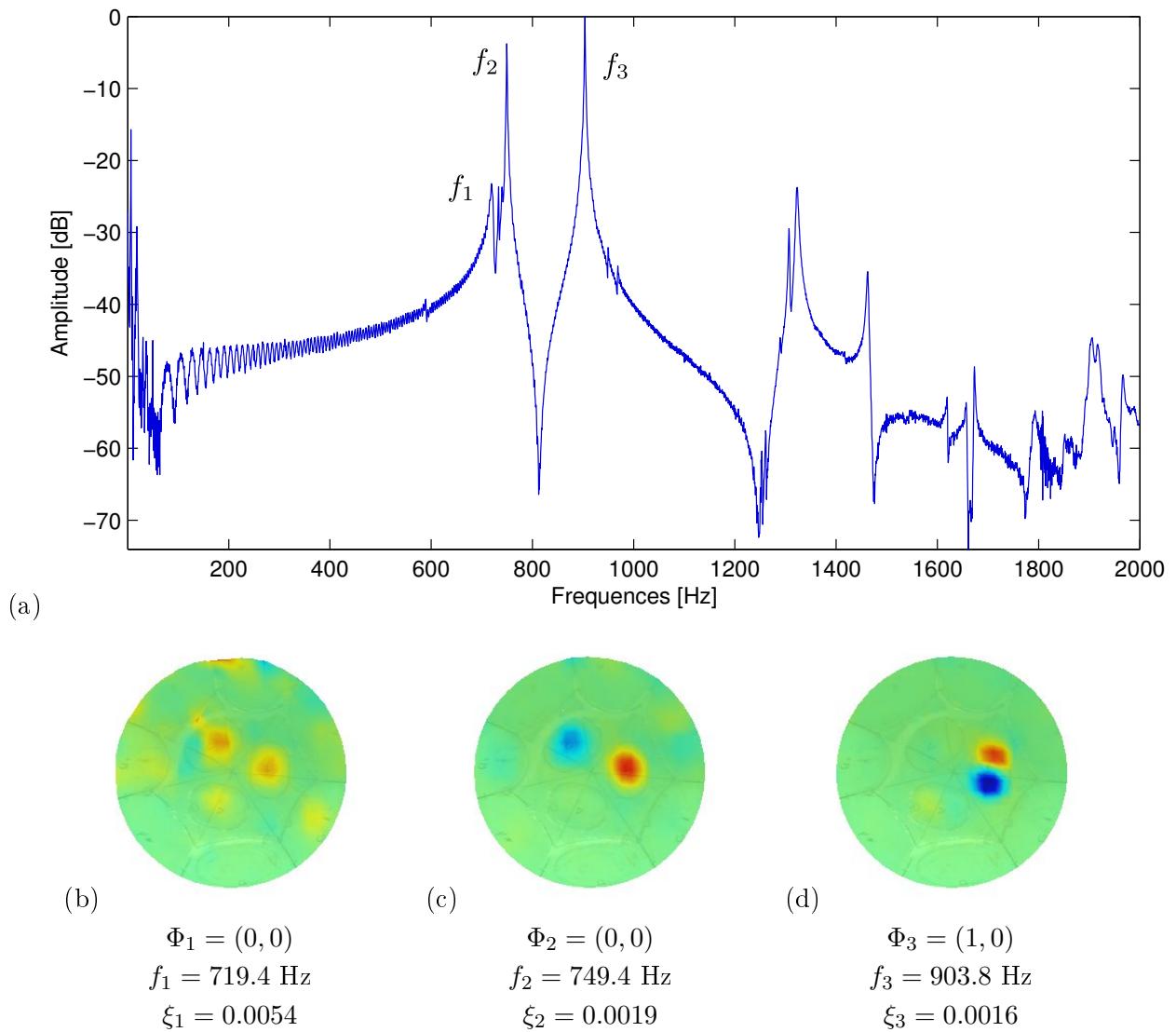


FIGURE 2.14 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la troisième étape de fabrication (*grooves*). L'excitation est placée sous la note E4.

2.2.4 Étape 4 : Pré-accordage

Selon Emmanuel Judith, l'étape 4, le pré-accordage, est une étape fondamentale. En effet, c'est à la fois l'étape la plus longue et celle qui nécessite un savoir-faire de facteur expérimenté. Si un pré-accordage est bien fait, la suite des étapes ne nécessite que très peu de travail pour terminer la fabrication du steelpan.

Avant de procéder au pré-accordage, il est nécessaire de couper la jupe de l'instrument. En effet pour l'étape suivante, le *tuner* aura besoin de passer de la face extérieure à la face intérieure de l'instrument pour marteler des deux côtés de la note. La jupe alors coupée facilitera l'accès aux notes depuis l'intérieur du bidon. La longueur de celle-ci est standard. Comme pour la *pattern*, elle est différente selon l'instrument (plus longue pour les plus graves), mais de dimension identique d'un steelpan à un autre de même registre. Pour un *single guitar* elle est de 56 centimètres. Comme on peut le voir sur la figure 2.15(a), la découpe se fait à l'aide d'une scie électrique. La jupe du steelpan est également percée afin de pouvoir disposer l'instrument sur un *stand*, ce qui facilitera aussi le travail du *tuner* (voir Fig. 2.15(b)).

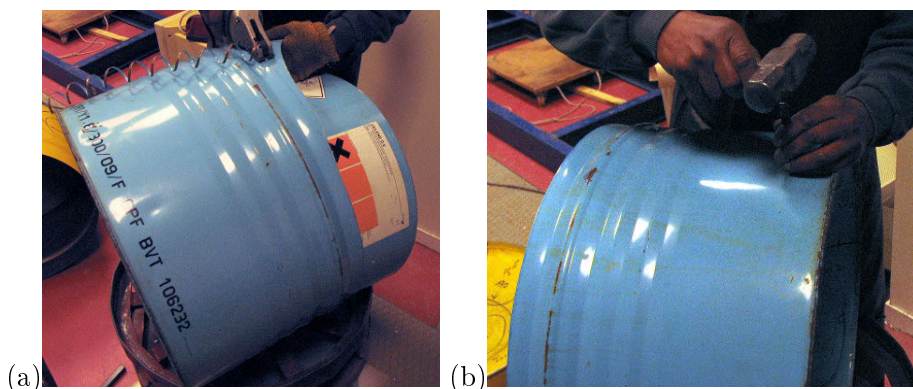


FIGURE 2.15 – Fabrication du steelpan, découpe de la jupe et perçage.

Les outils utilisés pour le pré-accordage de l'instrument sont un assortiment de marteaux de poids et de taille d'embouts différents ainsi qu'un pied-de-biche, montrés sur la figure 2.16.

Pour pré-accorder un steelpan, le *tuner* commence par « décoller » la note. Comme on le voit sur la figure 2.17(a), il utilise le pied de biche depuis l'intérieur du bidon. Il applique une pression au centre de la note afin de la bomber. Il accentue donc la courbure et peut jouer d'une façon assez grossière et franche, sur la fréquence fondamentale. Ensuite, il la modifie plus finement avec un marteau manuel (voir Fig. 2.17(b)). Il retourne alors le bidon pour continuer d'ajuster la valeur de la fréquence, comme sur la figure 2.17(c). Il réalise plusieurs allers-retours entre envers et endroit du bidon jusqu'à ce que la fréquence fondamentale de la note soit parfaitement accordée. Il vérifie la valeur de la fréquence souhaitée avec un accordeur que l'on peut voir sur la figure 2.17(d). Une fois la fondamentale obtenue, il va chercher à accorder les harmoniques de la note en modifiant les bords de l'ellipse (voir Fig. 2.17(e))



FIGURE 2.16 – Fabrication du steelpan, étape 4 : outils nécessaires au pré-accordage de l'instrument.

et (f)). L'octave (double de la fréquence fondamentale) est recherchée sur les bords courts de l'ellipse alors que la quinte est ajustée sur les bords longs. La quinte est d'ailleurs recherchée dans la mesure du possible. Il se peut que ce partiel, soit par volonté du *tuner*, soit par difficulté lors du pré-accordage, soit accordé à une autre fréquence en relation harmonique avec la fondamentale (tierce, quarte ou double octave). Finalement, comme montré sur les figures 2.17(g) et (h), une fois que chaque note est approximativement accordée de manière isolée, le *tuner* ajuste l'ensemble. En effet, comme les notes présentent des relations harmoniques, il se peut qu'une fréquence de l'une corresponde à une fréquence de l'autre. Ce qui est systématique, c'est que dès qu'une note et son octave co-existent dans le même bidon, le second partiel de la note grave est de la même fréquence que la fondamentale de l'octave. Par exemple, si on considère les notes E3 et E4, et que la note E3 est accordée selon les relations $F, 2F, 3F$, E4 sera accordée selon $f = 2F, 2f = 4F$ et $3f$. Il est donc nécessaire que f et $2F$ soient accordées. Enfin, bien que la fabrication ne soit pas totalement terminée, la vérification du travail d'accordage se fait aussi en mode de jeu usuel, avec un *stick* où l'oreille est juge d'un bon pré-accordage.

La fait que le steelpan soit percé et puisse être disposé sur un stand facilite aussi les conditions de l'analyse modale, particulièrement pour installer le système d'excitation. Cela implique que le bidon ne présente pas la même orientation que dans les précédentes analyses. La figure 2.18 montre donc la nouvelle disposition en précisant spécifiquement où se trouvent les notes E3 et E4.

2.2.4.1 Analyse modale une fois les notes pré-accordées lorsque E3 est directement excitée

Sur la figure 2.19, on peut voir que l'étape de pré-accordage a totalement ré-organisé les fréquences propres, on peut maintenant apprécier une relation harmonique entre les modes propres. On peut remarquer qu'il existe un rapport de fréquence double entre le premier et le second mode de vibration. Le troisième mode apparaît à une fréquence telle que $f_3 \simeq 4.5f_1$. On est donc dans un rapport de fondamentale (E3), octave (E4) et tierce (G5) entre les partiels de la note. Les amortissements ont encore un peu varié. Les déformées modales présentent maintenant une organisation claire. On retrouve les modes de coques mais centrés sur la note directement excitée. On observe alors l'organisation

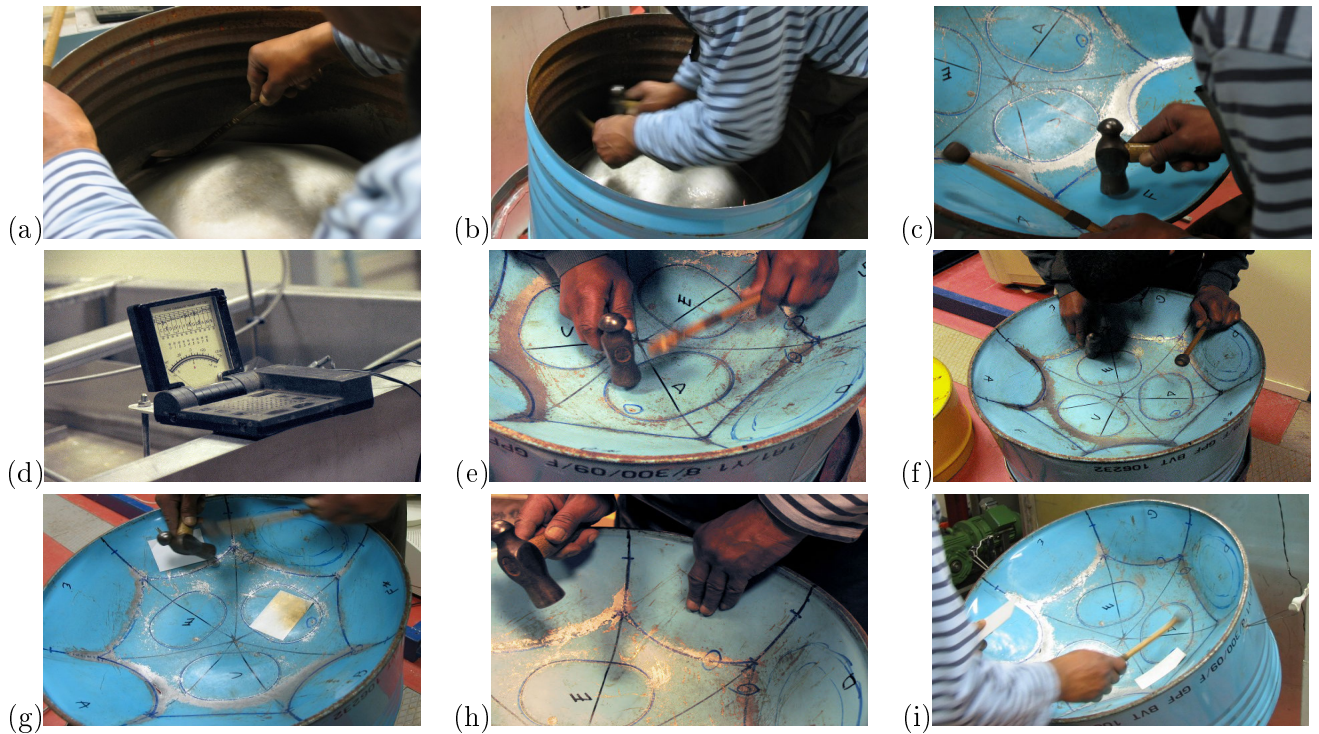
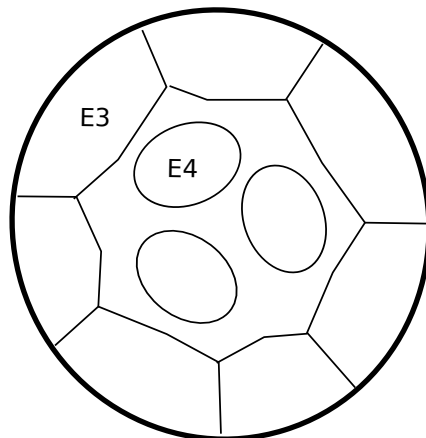


FIGURE 2.17 – Fabrication du steelpan, étape 4 : pré-accordage. (a)-(c) Accord de la fondamentale. (d)-(f) Accord des partiels harmoniques. (g)-(i) Ajustement de l'ensemble.



(b)

FIGURE 2.18 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la quatrième étape de fabrication (pré-accordage). Excitation des notes E4 et E3. Orientation de l'instrument pendant la mesure.

suivante $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. C'est d'ailleurs sur les ventres de vibration qu'intervient le *tuner* quand il cherche à accorder chaque partiel. Sur la troisième déformée, on observe que la note voisine (G3) de la note excitée (E3) entre aussi en vibration. Cela est sûrement dû à une relation harmonique entre les partiels. En effet, cela est cohérent avec la première remarque dite précédemment. Le troisième partiel

de la note E3 est un G5. Cette note se retrouve donc sur le deuxième mode de la note G4. C'est ce que montrent les déformées de la figure 2.19(d). On remarque donc une interaction entre deux notes juxtaposées qui présentent des relations fréquentielles entre leurs partiels. Aussi on peut voir que cela induit un double pic à cette fréquence, sur le spectre. Plus précisément, on mesure un pic à 759.4 Hz et un autre à 775 Hz. On observe alors une particularité qui existe dans les vibrations des steelpans : des interactions entre les notes accordées. Cela fera l'objet de l'étude de la partie III.

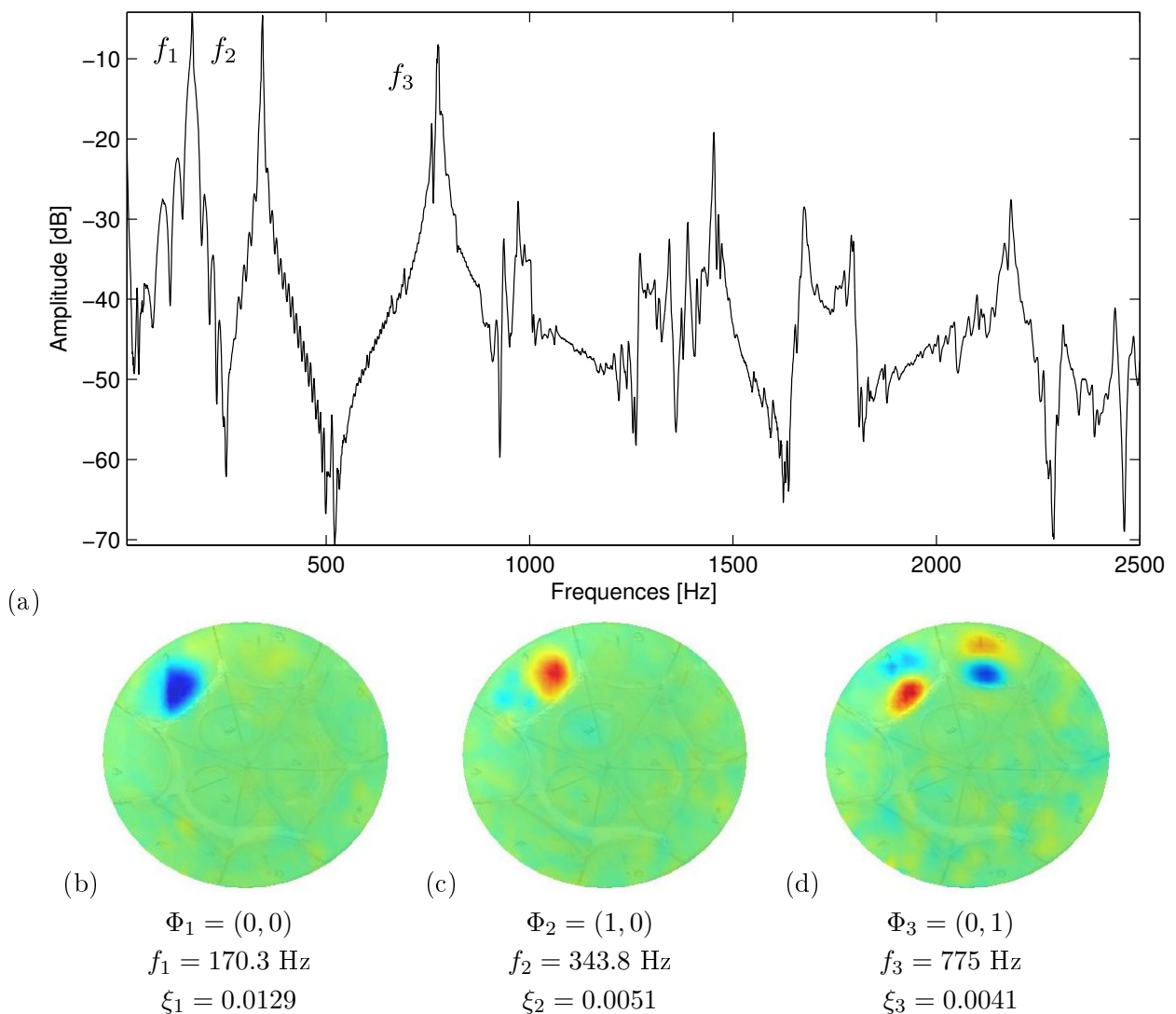


FIGURE 2.19 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la quatrième étape de fabrication (pré-accordage). L'excitation est placée sous la note E3.

2.2.4.2 Analyse modale une fois les notes pré-accordées lorsque E4 est directement excitée

L'analyse modale de la structure excitée sur la note E4 est montrée sur la figure 2.20. Les fréquences propres sont organisées de manière harmonique, en effet on note $f_1 = 316.4$ Hz, $f_2 \simeq 2f_1 \simeq 628.9$ Hz et $f_3 \simeq 3f_1 \simeq 940.6$ Hz. On en déduit alors une relation fondamentale (E4), octave (E5), quinte (B5) entre les partiels de la note. Les modes associés, localisés sur la note directement excitée, conservent la même organisation, c'est à dire $\Phi_1 = (0, 0)$, $\Phi_2 = (1, 0)$ et $\Phi_3 = (0, 1)$. Cette fois, on n'observe aucune interaction avec les notes environnantes. Les notes E3 et E4 présentant une relation d'octave, on s'attendrait à ce que les modes entrent en résonance autour de f_1 , mais comme on a pu le voir au cours de l'expérience précédente (voir Fig.2.19), le mode 2 de la note E3 oscille à 343.8 Hz, alors que le mode 1 de la note E4 est à 316.4 Hz. L'écart entre les fréquences est donc beaucoup trop important pour que celles-ci interagissent.

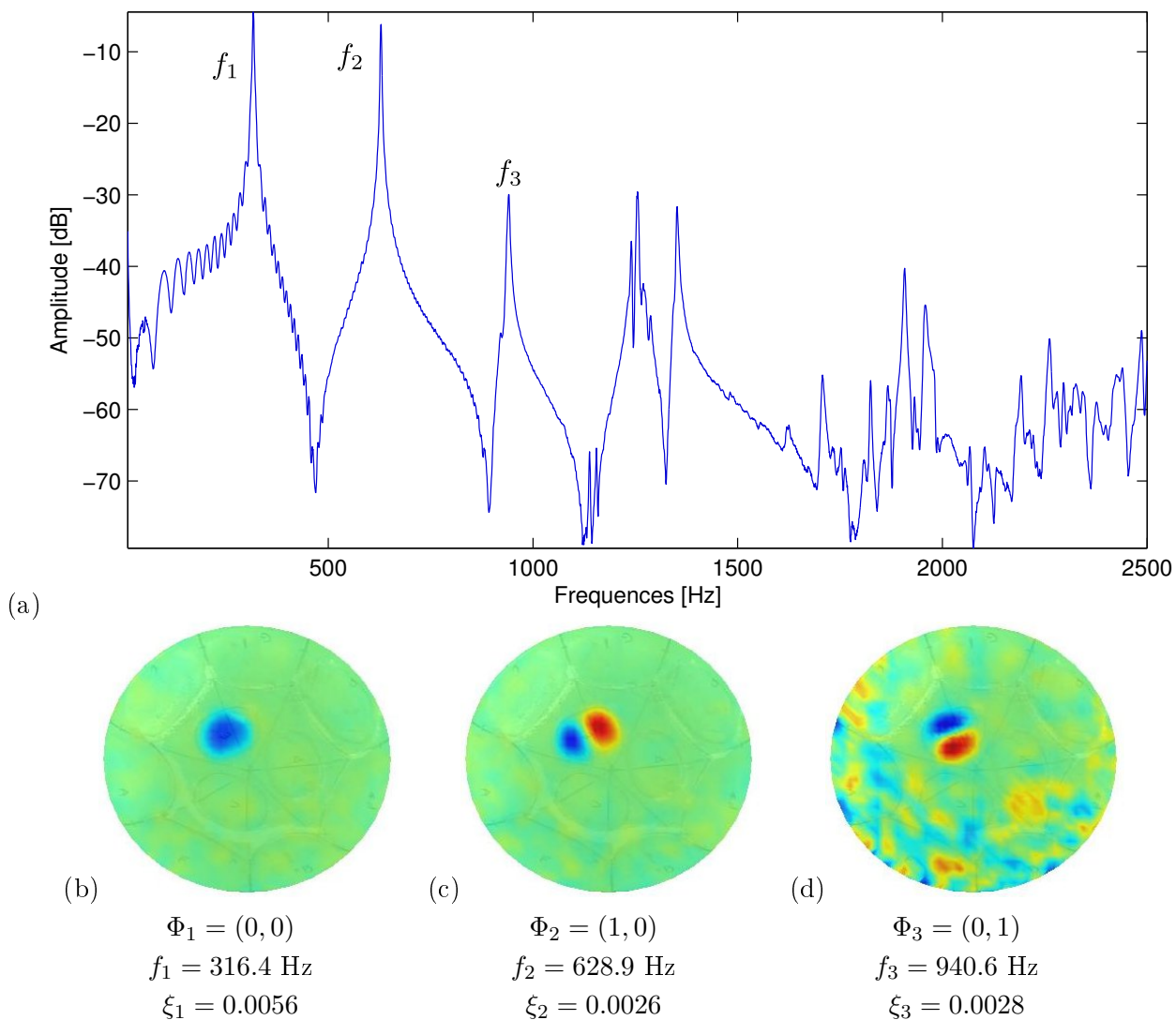


FIGURE 2.20 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la quatrième étape de fabrication (pré-accordage). L'excitation est placée sous la note E4.

2.2.5 Étape 5 : Chauffage

Le steelpan est maintenant chauffé au chalumeau. L'évolution du bidon sous l'effet de la chaleur est montrée sur la figure 2.21. Le durée totale de cette étape est d'environ 20 minutes. Le temps de pose sur chacune des notes est très qualitatif. Le *tuner* apprécie l'aspect visuel du matériau et change de note lorsque la couleur devient blanche. Il nettoie ensuite la peinture alors brûlée avec un grattoir. Le chauffage a pour objectif de réduire les inhomogénéités précédemment produites par les différents martelages [2].

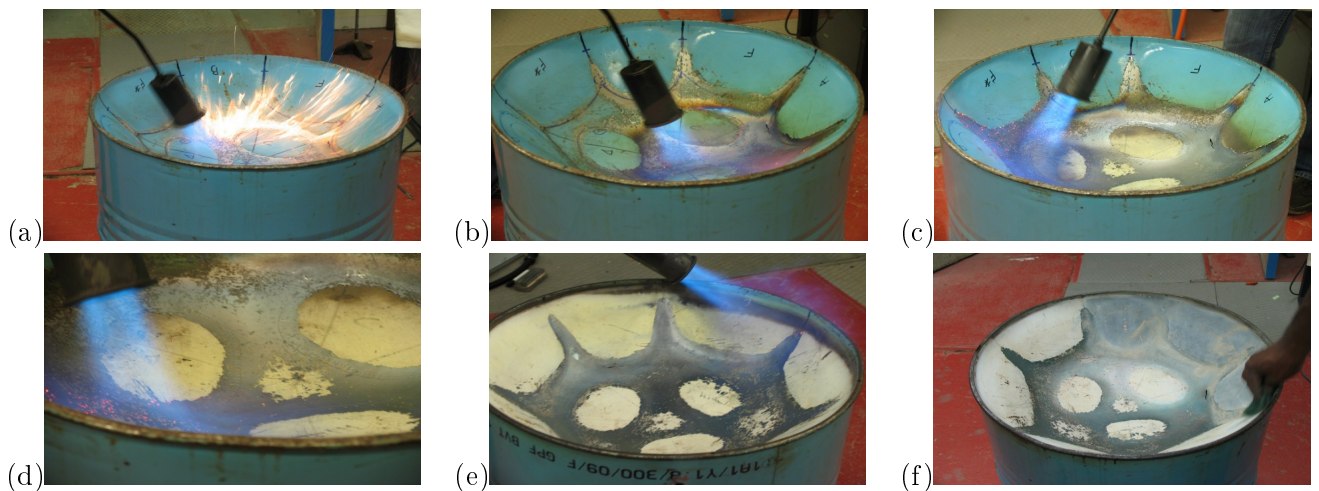


FIGURE 2.21 – Fabrication du steelpan, étape 5 : chauffage. Évolution du métal sous l'effet de la chaleur.

2.2.5.1 Analyse modale après chauffage lorsque E3 est directement excitée

Le chauffage désaccorde totalement l'instrument. Sur le spectre de la figure 2.22, on peut voir que les fréquences ont complètement changé. On peut même spécifier qu'elles ont augmenté (par rapport à l'état de l'instrument avant chauffage). On en déduit alors que la raideur du matériau a augmenté. En effet, dans [35], on constate que le module d'Young augmente avec le chauffage. Concernant les facteurs d'amortissement, on remarque qu'ils ont diminué de moitié. Cela est sûrement lié à la réduction des dislocations provoquées au cours des précédents martelages. On sait aussi que le chauffage relaxe les contraintes. Enfin, les déformées modales gardent la même organisation, à savoir $\Phi_1 = (0, 0)$, $\Phi_2 = (1, 0)$ et $\Phi_3 = (0, 1)$. On remarque qu'aucune interaction entre les notes n'est visible. Cela est sûrement dû aux variations de fréquences qu'a subies la structure au cours des changements thermiques.

2.2.5.2 Analyse modale après chauffage lorsque E4 est directement excitée

Lorsque l'excitation est placée sous la note E4 (voir Fig. 2.23), on remarque les mêmes phénomènes que précédemment. Les fréquences ont augmenté par rapport à l'état précédent le chauffage. Cette

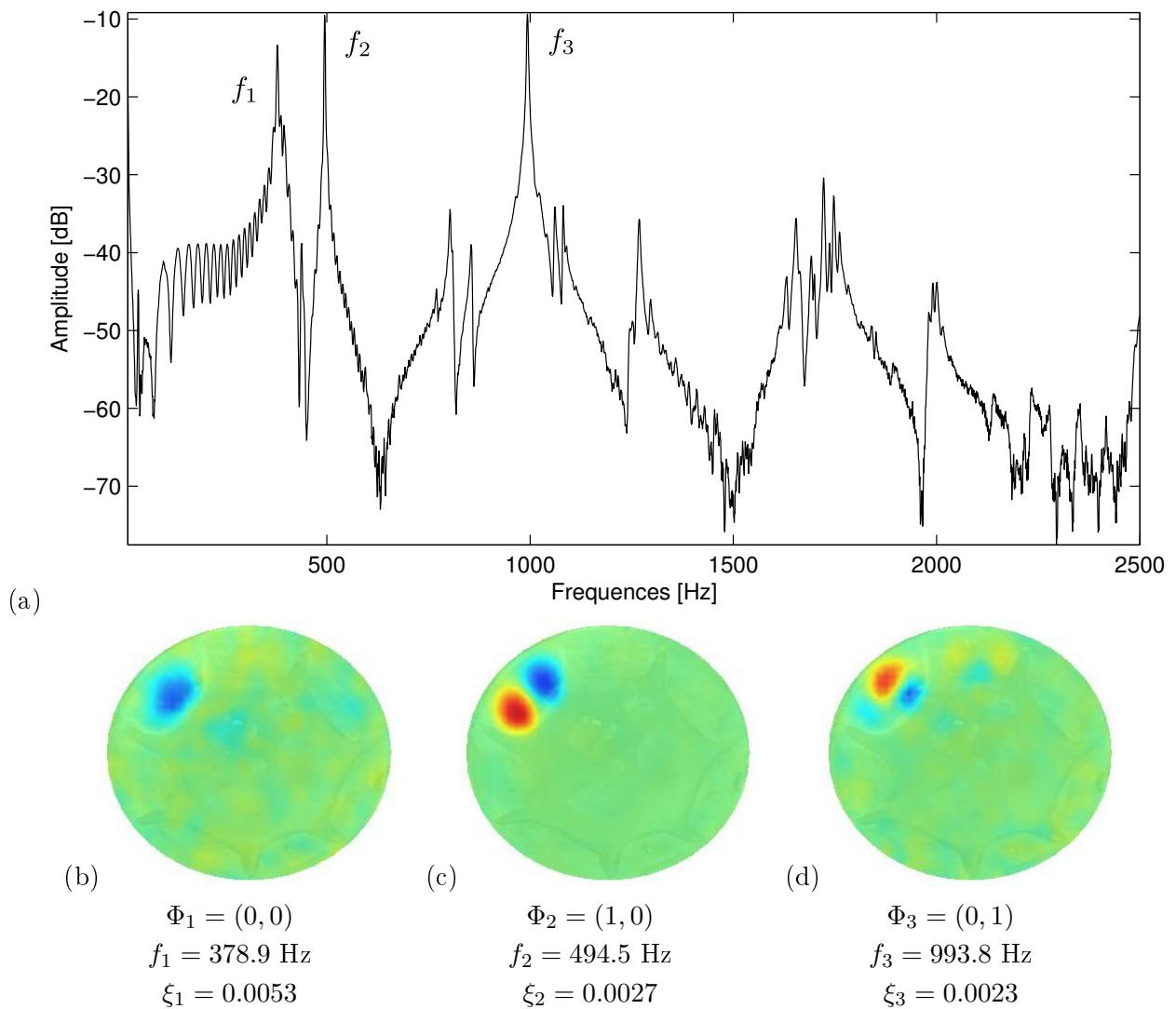


FIGURE 2.22 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la cinquième étape de fabrication (chauffage). L'excitation est placée sous la note E3.

fois, les amortissements sont sensiblement les mêmes. Et les déformées modales ont gardé la même organisation.

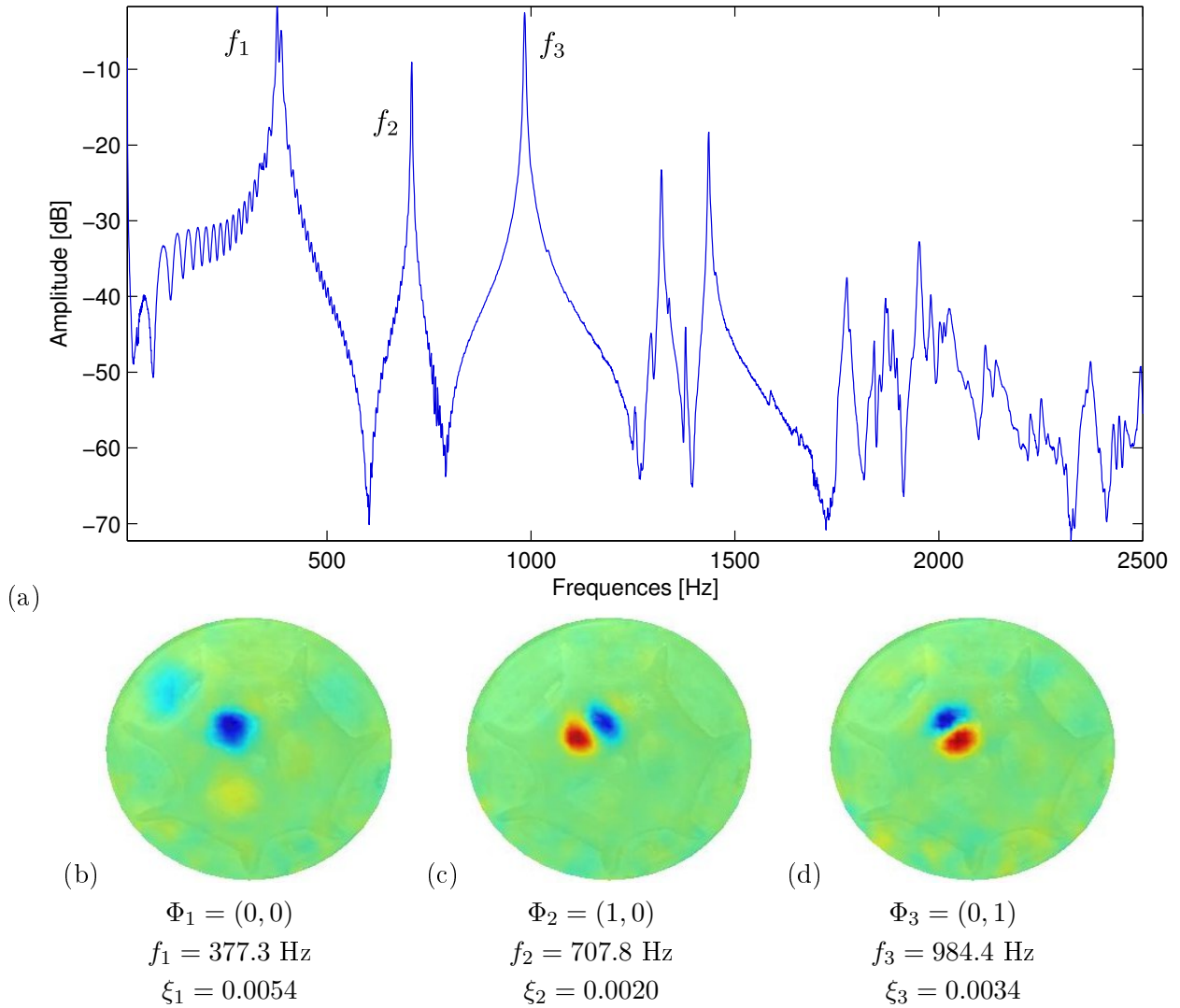


FIGURE 2.23 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la cinquième étape de fabrication (chauffage). L'excitation est placée sous la note E4.

2.2.6 Étape 6 : Accordage fin

Enfin, le *tuner* procède à la dernière étape : l'accordage fin. Il va alors chercher à ré-accorder chacun des trois premiers partiels de chacune des notes afin que ceux-ci présentent les relations harmoniques voulues. Comme pour l'étape de pré-accordage (voir section 2.2.4) et comme montré sur la figure 2.24 il martèle les notes en alternance entre la face extérieure et la face intérieure du bidon. Ainsi, il affine la forme géométrique de la note et peut « jouer » sur les fréquences des modes propres. D'une manière générale, il commence par marteler autour de l'ellipse de la note voire même en dehors de la limite marquée par les *grooves*. Par ce procédé, il re-définit l'espace global de la note. Ensuite, il ré-hausse le centre du dôme depuis l'intérieur. Comme on a pu déjà le voir auparavant, c'est comme cela qu'il accorde la fréquence fondamentale (en modifiant la surface où le premier mode possède son ventre de vibration). Une fois la fréquence fondamentale approximativement accordée, il ajuste les partiels sur les ventres du second mode (« bords courts » de l'ellipse) et du troisième mode (« bords longs » de l'ellipse). Quand les partiels sont accordés, il affine plus précisément la fréquence fondamentale au centre de la note. Il réalise cela pour chacune des notes de l'instrument. L'ensemble du processus peut être très rapide (quelques minutes) ou beaucoup plus long (plusieurs heures). Selon le *tuner* cela est lié à la finesse du pré-accordage qui a été réalisé. En effet, il dit qu'une note « bien pré-accordée » est beaucoup plus facile à accorder finement après chauffage ; que si les modes sont bien « organisés » avant chauffage, alors cette organisation se retrouve aisément après, en quelques coups de marteau. Il parle de « mémoire de la note » qui semblerait « se souvenir » de sa composition modale.



FIGURE 2.24 – Fabrication du steelpan, étape 6 : accordage fin. Martelage des notes en alternance sur la face supérieure (a)-(c) et sur la face intérieure (b).

Encore une fois, on réalise une analyse modale de l'instrument en excitant respectivement les notes E3 et E4 que l'on suit depuis le début du processus de fabrication.

2.2.6.1 Analyse modale après accordage fin lorsque E3 est directement excitée

On commence par présenter, sur la figure 2.25, l'analyse modale quand le système d'excitation est placé sous la note E3. Le spectre est montré sur la figure 2.25(a). Des marqueurs sont ajoutés à la figure, ils présentent les fréquences harmoniques idéales, accordées sur la fréquence fondamentale mesurée ($f_1 = 164.8$ Hz), soit $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$. Les paramètres modaux relevés, associés à f_1 sont sur la figure 2.25(c). La déformée modale montre le premier mode, noté $\Phi_1 = (0, 0)$, qui présente un ventre

de vibration répartie sur l'ellipse de la note. La vibration est entièrement localisée sur la note excitée. Le deuxième pic en fréquence est centré sur le marqueur accordé à $2f_1$, c'est à dire que l'on observe la relation d'octave souhaitée. En zoomant autour de ce pic, comme on peut le voir sur la figure 2.25(b), il y a en réalité deux pics de fréquences très proches qui se succèdent. Les modes associés (montrés sur les figures 2.25(d) et (e)) révèlent une interaction entre les notes E3 et E4. En effet, si E3 vibre selon sa deuxième déformée (1,0), la note E4 (idéalement accordée à l'octave de E3) présente son premier mode (0,0). Ainsi, pour les fréquences ici notée f_2 et f_3 , la structure présente deux déformées modales quasi identiques, à une différence près que les notes E3 et E4 vibrent en opposition de phase. C'est à dire que lorsque E3 vibre selon le mode (1,0), à $f_2 = 326.6$ Hz, le ventre de vibration de E4 est au minimum de son amplitude (code couleur jaune sur la figure); alors qu'à $f_3 = 329.7$ Hz, E4 est au maximum de son amplitude (code couleur bleu).

Enfin, le mode (0,1) est relevé pour $f_4 = 767.2$ Hz. Il est proche du marqueur $5f_1$ mais n'est donc pas en relation parfaitement harmonique avec la fréquence fondamentale. Habituellement, dans les vibrations des steelpans, on observe des rapports 1:2:3 [1] ou 1:2:4 [41, 40] entre les premiers modes. La relation 1:2:5, observée ici n'est donc pas forcément désirée comme tel. Le *tuner* nous a d'ailleurs fait part d'une certaine difficulté à accorder cette note.

Concernant les amortissements modaux, entre l'étape précédente et celle-ci, on note qu'il n'y a presque pas de variation sur $\xi_1 = 0.0052$, alors que comparés à ξ_2 et ξ_3 post-étape 5 de la figure 2.22, $\xi_2 = 0.0008$, $\xi_3 = 0.0020$ et $\xi_4 = 0.0016$ ont diminué.

2.2.6.2 Analyse modale après accordage fin lorsque E4 est directement excitée

La figure 2.26 présente les résultats de l'analyse modale réalisée après l'accordage fin lorsque l'excitation est placée sous la note E4. Ici aussi des marqueurs ajustés sur la première fréquence propre $f_1 = 320.3$ Hz sont ajoutés au spectre de la figure 2.26(a). On remarque alors aisément que les trois premières présentent un rapport harmonique organisé en fondamentale, octave et quinte. En effet, on peut voir que $f_2 \simeq 2f_1$ et $f_3 \simeq 3f_1$. Sur les figures 2.26(b), (c) et (d), on peut alors observer les paramètres modaux associés aux trois premières fréquences propres. On remarque que la vibration est très clairement localisée sur la note directement excitée. Les déformées conservent l'organisation souhaitée à savoir $\Phi_1 = (0, 0)$, $\Phi_2 = (1, 0)$ et $\Phi_3 = (0, 1)$. Enfin, dans ce cas, les amortissements ont diminué par rapport à l'étape précédente. En effet, en comparant les résultats de la figure 2.23 et ceux de la figure 2.26, on remarque que $\xi_1 = 0.0054 \rightarrow 0.0019$, $\xi_2 = 0.0020 \rightarrow 0.0004$ et $\xi_3 = 0.0034 \rightarrow 0.0008$. Conformément à la figure 2.25, on s'attendrait à retrouver des déformées modales identiques entre Φ_2 de la figure 2.25(b) et Φ_1 de la figure 2.25(a) qui devraient osciller à la même fréquence. Or, la mesure est réalisée au moyen d'un système d'excitation électro-magnétique, ce qui implique la pause d'un aimant sur la surface vibrante. Cet aimant possède une masse très faible, mais qui peut néanmoins modifier sensiblement les fréquences de résonance de la structure. Ici on remarque une différence d'environ 6 Hz. Cela suffit à ce que la note E3 n'entre pas clairement en résonance pour une fréquence d'excitation proche de $\Omega \simeq 320.3$ Hz.

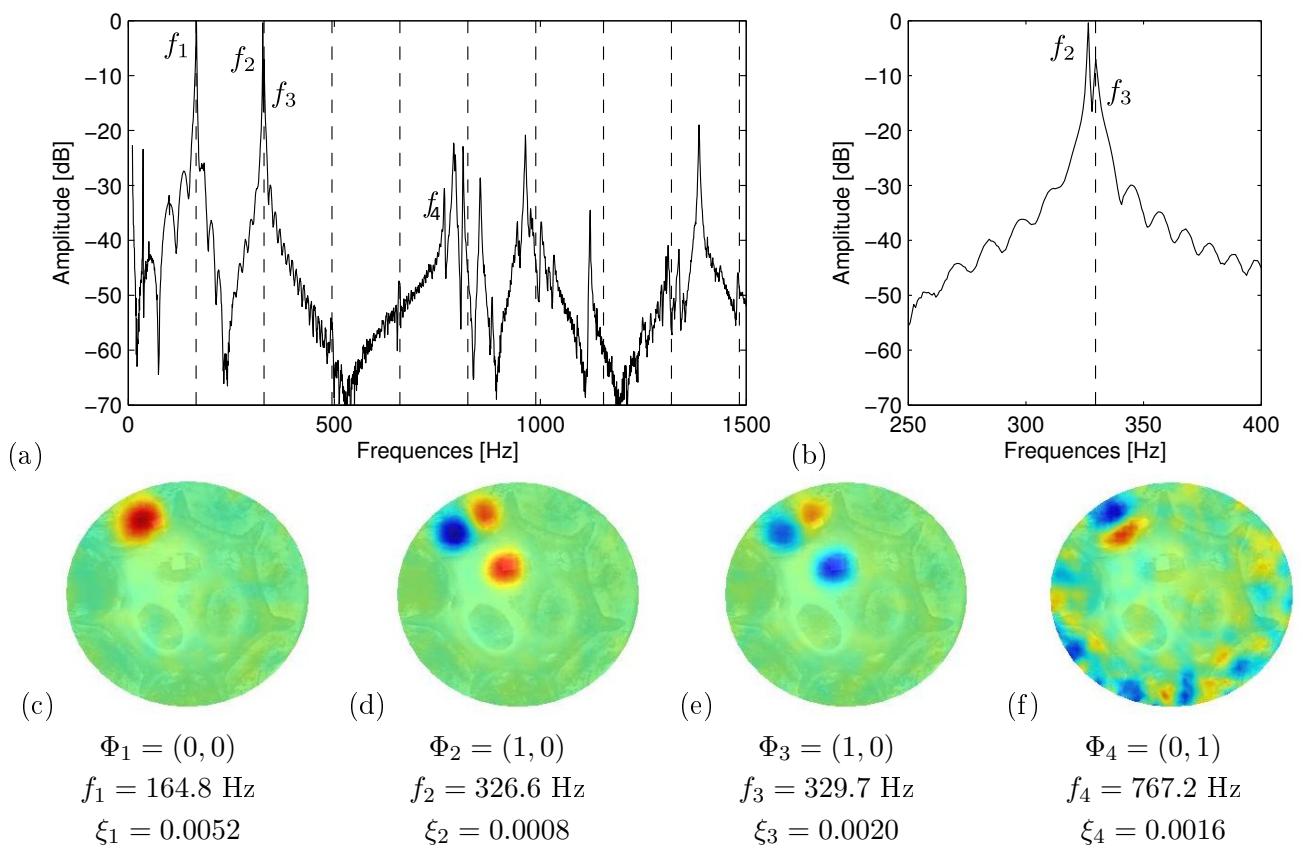


FIGURE 2.25 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la sixième étape de fabrication (accordage fin). L'excitation est placée sous la note E3.

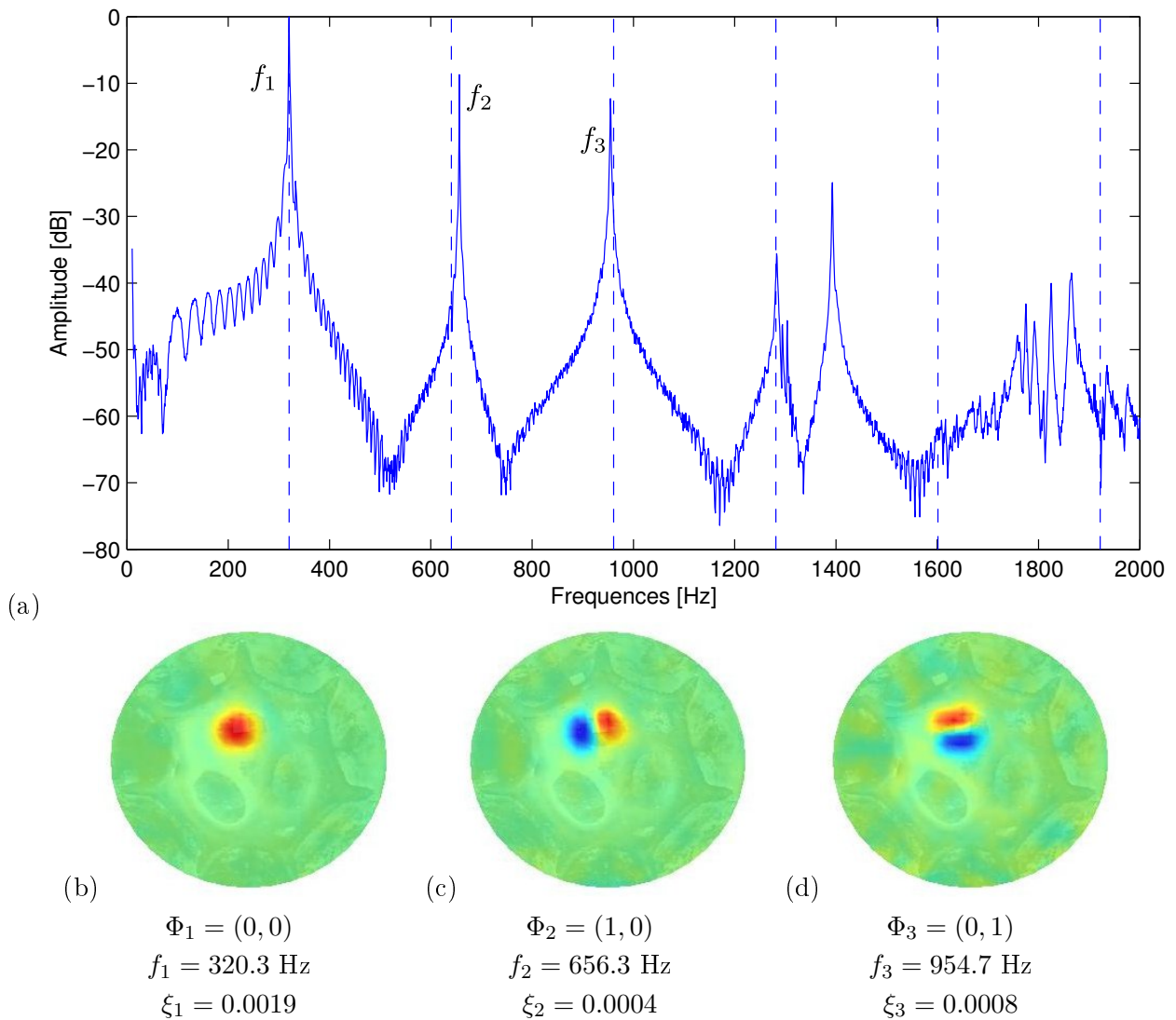


FIGURE 2.26 – Analyse modale expérimentale à l'issue de la sixième étape de fabrication (accordage fin). L'excitation est placée sous la note E4.

2.3 Conclusion

Lors de cette étude, nous avons pu observer précisément chacune des étapes de la fabrication d'un steelpan construit au laboratoire. Au fur et à mesure du processus, le plateau supérieur du bidon initial subit des transformations géométriques considérables. Comme mentionné tout au long du chapitre, nous n'avons pas eu accès aux variations d'épaisseur qui semblent également très importantes.

Différents outils, avec lesquels le *tuner* martèle, lisse, déforme, aplatit la structure, sont utilisés. L'ensemble de ces actions est tel qu'il applique plusieurs fois le même geste au même endroit de la surface selon des intensités différentes. C'est ainsi que la transformation est progressive. Elle est aussi irréversible, car une fois la structure percutée, elle ne peut plus revenir dans son état précédent.

Les analyses modales expérimentales, réalisées à l'aide d'un système électro-magnétique, ont permis de suivre l'évolution des caractéristiques dynamiques linéaires de la structure au cours de la fabrication. L'étude s'est focalisée sur deux notes en particulier qui présentent une relation d'octave : E3 et E4. D'une manière générale, on a pu observer que chacune des étapes a un rôle déterminant dans l'évolution de ces paramètres. Dans le but de lister les liens entre évolution de la transformation et évolution des paramètres, on peut dire que :

- Étape 1 : L'embouti donne l'espace nécessaire à l'emplacement des notes. Nous avons pu identifier une organisation des premières déformées qui est semblable à celle des plaques circulaires encastrées.
- Étape 2 : Le façonnage localise les vibrations. Au lieu de voir des modes dont la vibration est répartie sur la totalité de la structure, on observe que chaque sous-structure réagit comme une plaque de géométrie elliptique. Aucune organisation harmonique n'est encore visible.
- Étape 3 : Les *grooves* sont censés perfectionner cette localisation en rendant chaque sous-espace le plus indépendant possible des autres, mais nous n'avons pas pu nous en assurer complètement.
- Étape 4 : Le pré-accordage organise les modes propres. Les fréquences sont en rapports harmoniques, et les trois premières déformées modales suivent le schéma ordonné suivant : (0,0) (0,1) et (1,0). Le *tuner* « joue » sur les ventres de vibration des déformées pour ajuster les fréquences propres associées.
- Étape 5 : À l'issue de l'ensemble des étapes précédentes la structure est très amortie $\xi_k \simeq 0.005$. Le *tuner* chauffe le métal pour diminuer les facteurs d'amortissement et relâcher les contraintes résiduelles, mais cela déstructure complément l'organisation des fréquences propres préalablement établie.
- Étape 6 : Enfin, le *tuner* ré-accorde les trois premiers modes propres de chacune des notes de sorte à récupérer les relations harmoniques entre les partiels de chaque note. Cela entraîne des interactions entre les sous-structures qui présentent des relations harmoniques (relation d'octave en particulier). On peut alors observer que la structure totale présente des modes doubles de fréquences très proches autour de $2f_1$.

On peut remarquer, tout au long de l'étude, qu'il est difficile de bien quantifier l'effet des procédés

sur les facteurs d'amortissement modaux. En effet, le tableau de la figure 2.27 reprend l'évolution des amortissements des premiers modes des notes E4 et E3 au cours des étapes de fabrication (à partir de façonnage, soit à partir de l'existence des sous-structures). Après le re-façonnage et les *grooves*, les amortissements sont sensiblement les mêmes, alors qu'après le pré-accordage ils ont augmenté. Le chauffage tend à les amoindrir (particulièrement le premier mode $(0,0)$) et l'accordage fin continue de les diminuer. Nous ne pouvons donc pas déduire de ces observations un effet clair des multiples martelages sur les amortissements modaux des notes du steelpan. En effet, le martelage ne joue pas le même rôle sur les amortissements avant et après chauffage. Comme on a pu l'observer, ce procédé implique des variations d'épaisseur et des contraintes sur chaque note qui ont leur influence sur les amortissements des modes.

E3	$\Phi_1 = (0,0)$	$\Phi_2 = (1,0)$	$\Phi_3 = (0,1)$	E4	$\Phi_1 = (0,0)$	$\Phi_2 = (1,0)$	$\Phi_3 = (0,1)$
Étape (2) (Façonnage)	$\xi_1 \simeq 0.003$ =	?	?		$\xi_1 \simeq 0.002$ =	$\xi_2 \simeq 0.002$ =	?
Étape (3) (Re-façonnage + <i>Grooves</i>)	$\xi_1 \simeq 0.003$ ↗	?	?		$\xi_1 \simeq 0.002$ ↗	$\xi_2 \simeq 0.002$ ↗	?
Étape (4) (Pré-accordage)	$\xi_1 \simeq 0.01$ ↘	$\xi_2 \simeq 0.005$ ↘	$\xi_3 \simeq 0.004$ ↘		$\xi_1 \simeq 0.006$ ↘	$\xi_2 \simeq 0.003$ ↘	$\xi_3 \simeq 0.003$ =
Étape (5) (Chauffage)	$\xi_1 \simeq 0.005$ =	$\xi_2 \simeq 0.003$ ↘	$\xi_3 \simeq 0.002$ =		$\xi_1 \simeq 0.005$ ↘	$\xi_2 \simeq 0.002$ ↘	$\xi_3 \simeq 0.003$ ↘
Étape (6) (Accordage fin)	$\xi_1 \simeq 0.005$	$\xi_2 \simeq 0.001$	$\xi_3 \simeq 0.002$		$\xi_1 \simeq 0.002$	$\xi_2 \simeq 0.0004$	$\xi_3 \simeq 0.001$

FIGURE 2.27 – Récapitulatif des premiers facteurs d'amortissement modaux relevés à l'issue de chacune des étapes de fabrication du steelpan.

Enfin, une modélisation de la première étape de fabrication, l'embouti, fera l'objet de la partie II du manuscrit. Cette partie proposera une compréhension de l'effet des contraintes résiduelles sur les fréquences propres d'une structure mince précontrainte.

Chapitre 3

Analyse vibratoire d'un steelpan

Sommaire

3.1 Introduction	55
3.2 Mode de jeu usuel	56
3.3 Analyse modale expérimentale	59
3.4 Comportement non linéaire : vibrations en régime forcé	60
3.5 Conclusion	64

On s'intéresse maintenant au comportement d'un steelpan lorsque l'ensemble des étapes de fabrication est terminé. Différents types de sollicitations (impulsionnelles ou sinusoïdales) mettent en évidence des caractéristiques dynamiques propres au comportement vibratoire des steelpans qui sont responsables de leur timbre singulier. Ce chapitre introduit alors une analyse du comportement de l'instrument qui sera approfondie au chapitre 9.

3.1 Introduction

En mode de jeu normal, les steelpans sont capables de produire des sons originaux dont le timbre laisse entendre des transferts d'énergie entre les composantes fréquentielles. Ce phénomène est typique de non-linéarités telles que des couplages entre les modes propres de la structure [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Afin de mettre en évidence cette caractéristique, une étude de l'instrument sous trois sollicitations différentes est présentée ici. Dans un premier temps, une note sera excitée par un *stick* actionné par la main du musicien, selon différentes intensités de frappe. Dans un second temps, une analyse modale révélera les caractéristiques dynamiques linéaires de la structure, afin de mettre en évidence l'organisation modale de l'instrument. En effet, les travaux de Rossing ont montré que celle-ci pouvait varier d'un instrument à un autre [54, 53, 55, 58]. Enfin, une excitation forcée autour des fréquences de résonance permettra d'observer finement le comportement non linéaire de l'instrument notamment en mesurant l'échange d'énergie qu'il existe entre les modes propres accordés.

Cette étude a été réalisée sur un *double second*. Comme montré sur la figure 3.1, c'est un steelpan

composé de 38 notes réparties équitablement sur deux fûts (19 notes par bidon). Il présente trois couronnes de notes sur lesquelles on peut voir distribués des triplets d'octaves. Par exemple, les notes G3, G4 et G5 dont les fréquences fondamentales sont telles que $f_{1,G4} = 2f_{1,G3}$ et $f_{1,G5} = 2f_{1,G4}$, soit $f_{1,G5} = 4f_{1,G3}$. Ces relations harmoniques entre deux notes voisines favorisent les interactions modales responsables du timbre des steelpans.

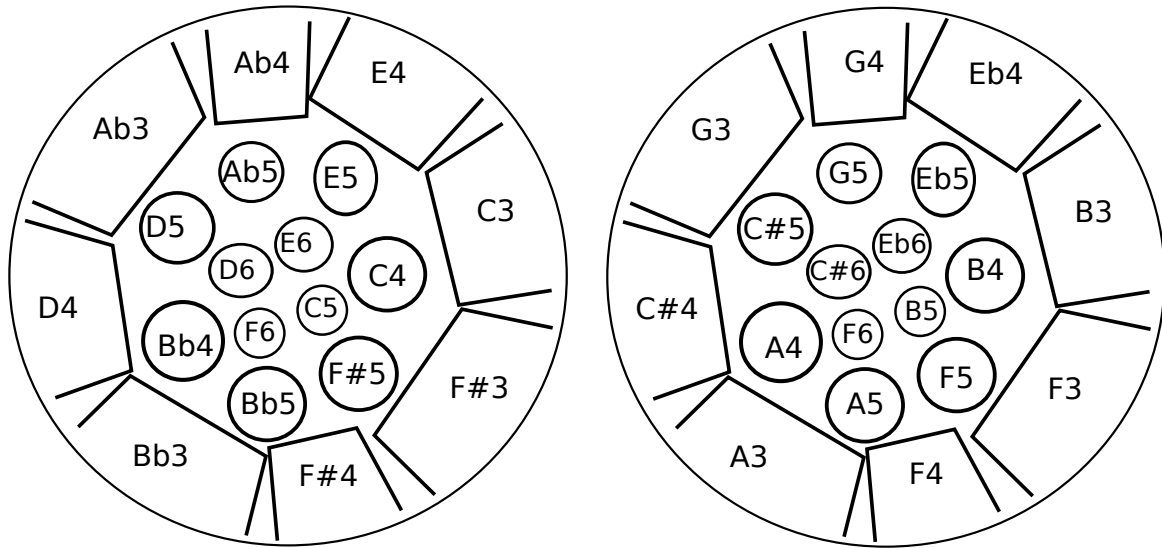


FIGURE 3.1 – Pattern du *double second*.

3.2 Mode de jeu usuel

Lors du mode de jeu usuel des steelpans, le musicien se munit d'une paire de *sticks* qui sont des baguettes de bois recouvertes d'un morceau de caoutchouc avec lesquelles il vient frapper chacun des dômes en leur centre. Le *pannist* percute les notes de manière plus ou moins forte selon la vitesse de jeu ou selon l'intensité de son qu'il veut produire.

Trois mesures des oscillations libres de la note G3 sont représentées sur la figure 3.2.

Sur la colonne de gauche, on peut voir les différentes évolutions temporelles des accélérations pour trois intensités de frappe : faible, forte et très forte. On remarque que plus la frappe est forte plus la forme d'onde présente une enveloppe dont les variations temporelles voient leur fréquence augmenter. Dans tous les cas, le transitoire d'attaque est très court, de l'ordre de quelques millisecondes. Il définit l'établissement de l'onde. En effet, on remarque que dans les sons des steelpans, le maximum d'amplitude est atteint très rapidement, et d'autant plus rapidement que la force de frappe est intense. Comme dans toute percussion, la phase de maintien n'est pas clairement visible. À peine ayant atteint son maximum, l'amplitude de l'onde commence à décroître. Cependant, une des particularités des sons de steelpans est que lors de la décroissance, l'enveloppe temporelle montre des modulations d'amplitude qui sont d'autant plus présentes que la frappe est forte. On observe des regains d'énergie non

négligeables au cours de la décroissance. Pour une frappe faible, sur la figure 3.2(a), la décroissance est progressive. Un faible regain d'énergie est visible aux alentours de 0.2 seconde. Suite à une frappe forte, sur la figure 3.2(c), on peut observer deux battements successifs au cours du temps. Enfin, pour la frappe très forte, plusieurs battements se succèdent.

Sur la colonne de droite, on a représenté les spectrogrammes correspondants à chacun des signaux temporels de la colonne de gauche avec les paramètres du tableau de la figure 3.3. Dans l'ensemble, sur les trois figures on observe des raies fréquentielles qui semblent montrer une certaine harmonicité des sons de steelpans. Ces raies sont les composantes spectrales des premiers modes de vibrations de la structure, dont nous avons suivi l'évolution au cours de la fabrication dans le chapitre précédent. L'énergie est inégalement répartie entre les composantes fréquentielles. Pour une frappe faible, sur la figure 3.2(b), on note que l'intensité principale est concentrée dans les basses fréquences, en particulier sur les deux premiers partiels du spectre. Au début, pendant le transitoire, l'énergie maximale est portée par le premier partiel, mais quelques millisecondes plus tard, c'est le second partiel qui présente un maximum d'énergie. Pour une frappe forte, sur la figure 3.2(d), on peut voir que l'énergie est présente dans les composantes fréquentielles de plus haute fréquence. Néanmoins, l'énergie principale reste concentrée sur les deux premiers partiels. On peut également observer que les maxima d'amplitude s'échangent au cours du temps entre ces deux partiels et que cette alternance correspond aux regains d'amplitudes (battements) présents dans la forme d'onde correspondante. Enfin sur la dernière figure, le spectre est beaucoup plus diffus. L'énergie est observée dans les hautes fréquences et les modulations d'amplitudes sont aussi clairement visibles lors des échanges d'énergie entre les partiels qui apparaissent beaucoup plus tôt que pour des frappes plus faibles.

Les vibrations des steelpans présentent donc des caractéristiques dynamiques qui dépendent des conditions initiales imposées à la note sollicitée. Cela confirme le caractère non linéaire de la vibration. Deux sources différentes de non-linéarités peuvent être soulignées.

D'une part, le steelpan est une structure mince, courbe, qui présente des relations de fréquences harmoniques. Cela entraîne que des non-linéarités de type géométrique ne peuvent plus être négligées. Comme on le verra dans la dernière section, lorsque la structure est soumise à une excitation en oscillations forcées, autour des fréquences de résonances, ces non-linéarités conduisent à des transferts d'énergie entre les modes propres accordés.

D'autre part, dans cette expérience (mode usuel de jeu), le caoutchouc qui est placé au bout du *stick* présente lui aussi un comportement non linéaire. Ce point n'a pas été traité dans notre étude, mais on peut garder à l'esprit que plus la frappe est forte, plus le temps de contact entre le caoutchouc et la structure sera faible. En effet, ce matériau est régi d'un caractère non linéaire qui augmente sa raideur avec la force de frappe appliquée. Une sollicitation plus « percussive » sera donc appliquée pour une frappe forte. Cela peut avoir pour conséquence de venir exciter directement les hautes fréquences de la structure. On peut même ajouter que c'est un effet qui peut être directement contrôlé par le musicien, selon le « rendu » sonore qu'il souhaite produire.

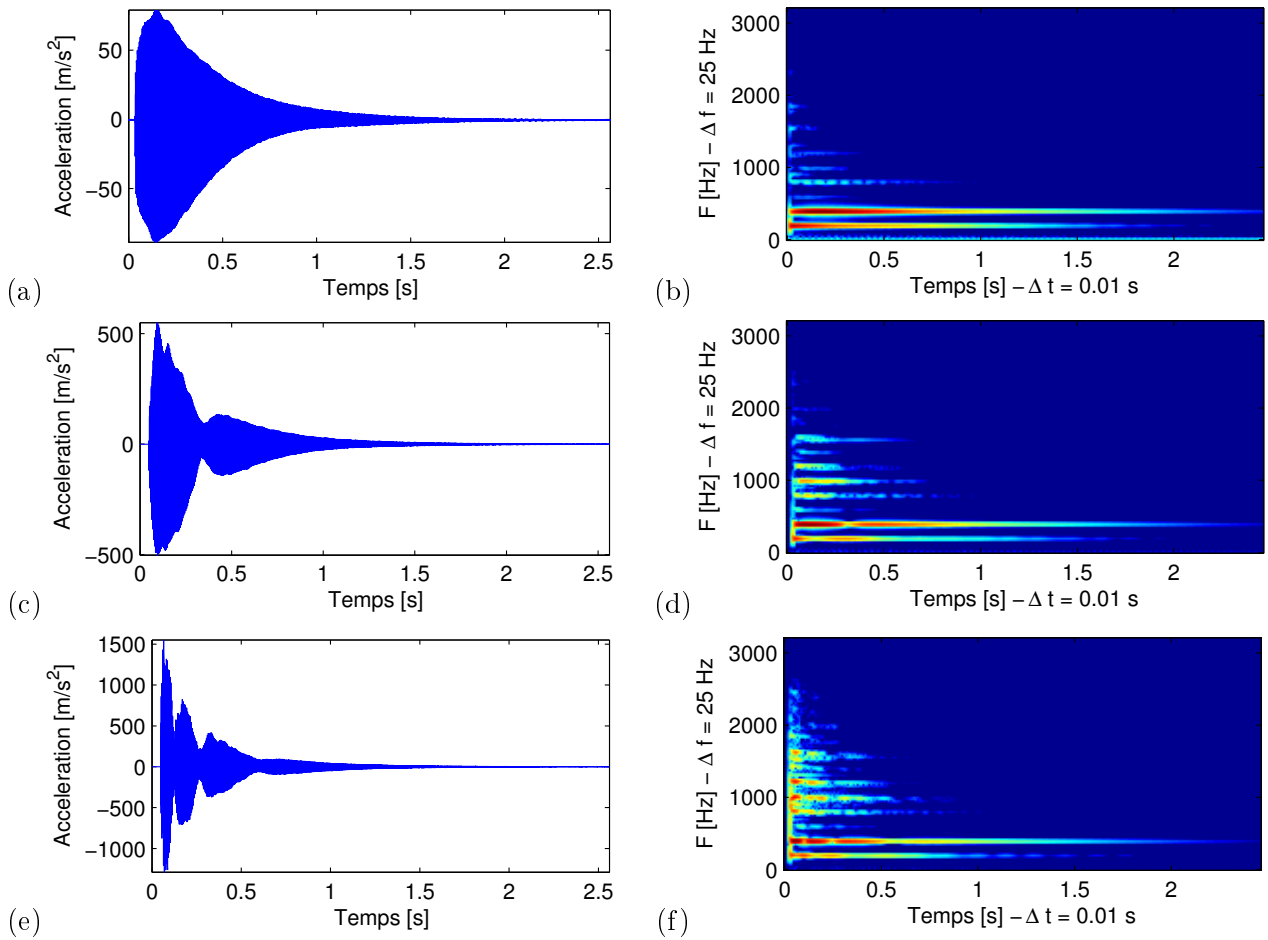


FIGURE 3.2 – *Double second G3* : accélération mesurée selon différentes forces de frappe. Évolutions temporelles (colonne de gauche) et spectrogrammes (colonne de droite) des signaux mesurés. (a)-(b) Frappe faible. (c)-(d) Frappe forte. (e)-(f) Frappe très forte.

Paramètres	Valeurs
Fréquence échantillonnage	$F_e = 51200$ Hz
Longueur de fenêtrage	$N_{fft} = 2^8$
Recouvrement	0.75 %
Limite en énergie	$dB_{range} = 60$ dB
Fréquence max	$F_{max} = 3000$ Hz
Temps min	$T_{min} = 0$ s
Temps max	$T_{max} = 2.5$ s

FIGURE 3.3 – Paramètres des spectrogrammes tracés sur la figure 3.2.

3.3 Analyse modale expérimentale

Comme dans le chapitre 2, lors de l'analyse modale expérimentale, le steelpan est excité au moyen d'un système électro-magnétique constitué d'une bobine et d'un aimant. Dans cette expérience, le système d'excitation ponctuel est placé sous la note G3 du *double second*. Le signal parcourt la bande de fréquences $[0 : 2000]$ Hz. Le vibromètre laser à balayage scanne un ensemble de points recouvrant la totalité de la surface de l'instrument.

La fonction de réponse en fréquences (FRF), tracée au point d'excitation, est représentée sur la figure 3.4(a). Des lignes discontinues, multiples les unes des autres et accordées sur la première fréquence propre $f_1 = 197.5$ Hz, sont ajoutées à la figure afin de mettre en évidence les relations harmoniques existantes entre les fréquences de résonance.

Comme dans le cas du steelpan fabriqué au chapitre 2, le spectre est harmonique. Il présente les trois premières fréquences de résonances accordées selon : f_1 , $2f_1$ et $4f_1$. Les modes de plus hautes fréquences sont plus éloignés des marqueurs. Ils ne sont donc pas en rapports harmoniques exacts avec f_1 . Ils sont situés autour de $6f_1$, $8f_1$ et $9f_1$. On note également un autre pic parfaitement accordé à $10f_1$.

Sur la figure 3.4(b), on a précisément relevé la valeur des fréquences propres et mis en évidence les relations harmoniques sur l'axe des ordonnées, en divisant la valeur de la fréquence relevée par la valeur de la fréquence fondamentale. L'ensemble des fréquences propres relevées montre des rapports parfaitement ou quasi-harmoniques avec la fréquence fondamentale. Il est à noter la particularité suivante : certains maxima de la FRF présentent des doubles pics de fréquence très proches. On peut le voir spécialement autour de deux, huit et neuf fois la fréquence fondamentale. En effet, la *pattern* du *double second* est telle que des triplets de notes en relation d'octave sont présents. Cela favorise l'existence de modes doubles.

Comme montré sur la figure 3.5, et comme dans l'étude précédente, la vibration est localisée autour du point d'excitation. La première déformée opérationnelle, mesurée pour $f_1 = 197.5$ Hz, montre que la vibration est concentrée sur la note G3 (directement excitée). La déformée associée est notée $(0,0)$. Les deux pics présents autour du double de la fréquence fondamentale, respectivement $f_2 = 389.7$ Hz et $f_3 = 397.8$ Hz montrent une interaction entre les notes G3 dans la configuration $(1,0)$ et G4 dans la configuration $(0,0)$. L'utilisation du logiciel Modan¹ a permis de séparer ces modes et d'identifier les paramètres modaux associés, par le passage d'un modèle à trois degrés de liberté (voir Fig. 3.6). Les déformées modales associées aux plus hautes fréquences présentent les déformées suivantes :

- Pour $f_4 = 799.4$ Hz, $\Phi_4 = (0,1)$. C'est le mode complémentaire au précédent. Il présente une ligne nodale qui sépare la note dans sa longueur, impliquant ainsi deux ventres en opposition de phase.
- À $f_5 = 1155$ Hz, la déformée est telle que $\Phi_5 = (1,1)$, soient deux lignes nodales perpendiculaires qui divisent la note en quatre.
- Enfin, la dernière fréquence relevée est $f_6 = 1524$ Hz avec $\Phi_6 = (2,1)$.

L'analyse modale expérimentale réalisée sur la note G3 du steelpan montre donc qu'il existe des

1. Logiciel développé par Emmanuel Foltête à l'Université de Franche-Comté et au CNRS.

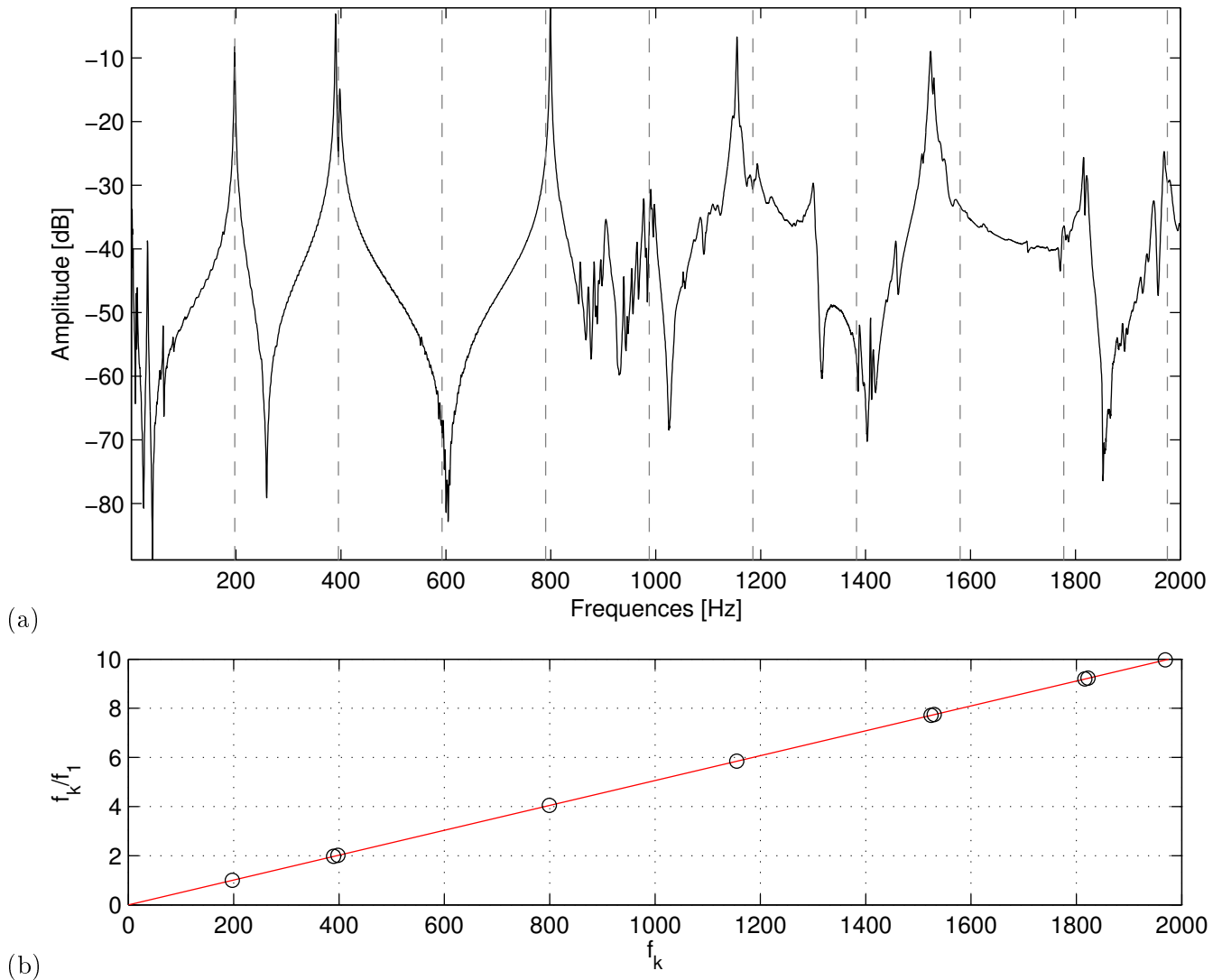


FIGURE 3.4 – Analyse modale expérimentale du *double second* excité sur la note G3. (a) FRF mesurée au point d'excitation. (b) Rapport entre les fréquences propres relevées sur le spectre de la figure (a) et la fréquence fondamentale.

rappports harmoniques entre les modes propres de la note excitée en un point. Aussi, les rapports harmoniques existant entre deux notes voisines créent des interactions modales. Dans les vibrations linéaires des steelpan, on peut observer que deux notes juxtaposées et accordées vibrent pour une même fréquence propre donnée. Cela entraîne l'existence de doubles pics dans la fonction de réponse en fréquences.

3.4 Comportement non linéaire : vibrations en régime forcé

On se place maintenant dans le régime non linéaire. Pour cela, le steelpan est excité en un point via le système électro-magnétique utilisé jusqu'ici. La mesure de vibration est réalisée au vibromètre

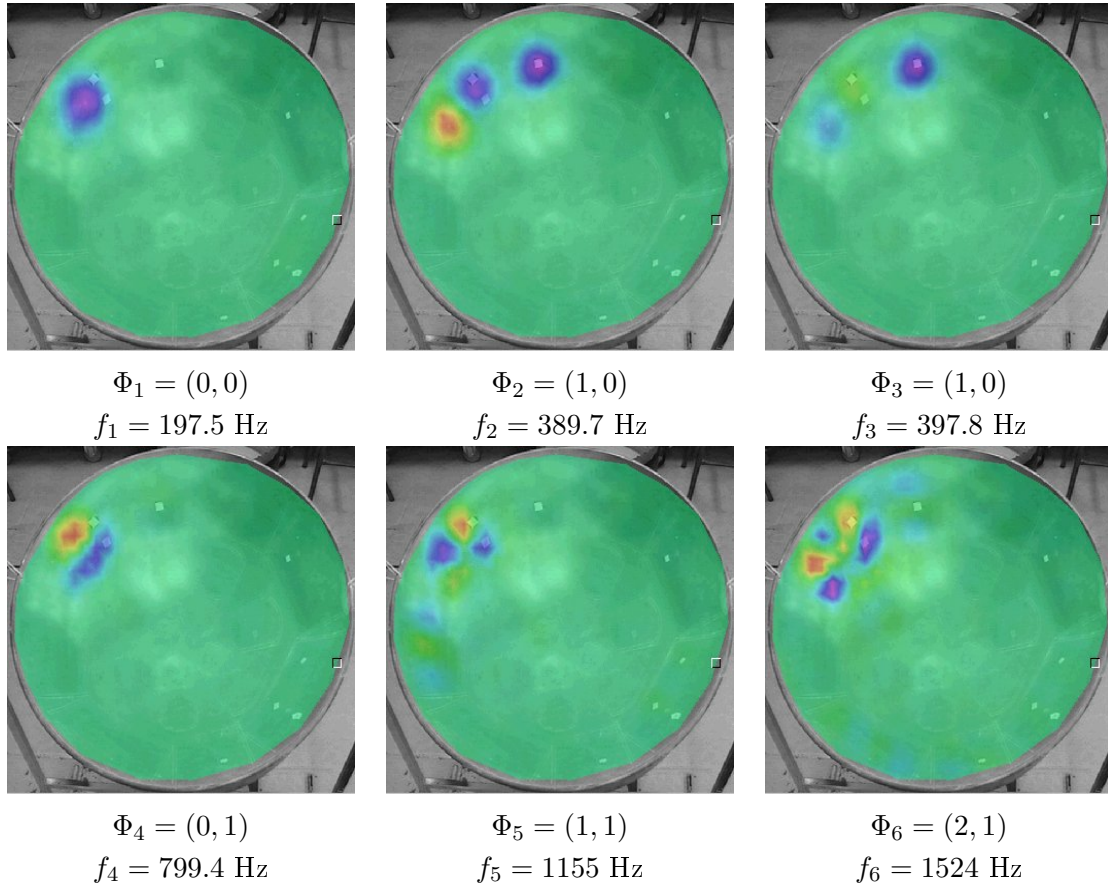


FIGURE 3.5 – Analyse modale expérimentale du *double second* excité sur la note G3. Premières déformées opérationnelles mesurées. Les Φ_k indiquent la déformée de la note G3 associée à la fréquence propre f_k .

laser en un point particulier de la note directement excité. Ce type d'expérience permet de révéler les phénomènes non linéaires présents dans les vibrations des steelpans tout en se dédouanant des effets non linéaires possiblement produits par le *stick*.

Dans un premier temps, on place l'excitation sur la première fréquence propre soit $f_{dr} = 197.5 \text{ Hz}$. On passe du régime linéaire au régime non linéaire en augmentant progressivement l'intensité d'excitation. La figure 3.7(a) représente le spectrogramme de la réponse mesurée en un point. On y voit alors l'arrivée progressive des partiels due à un échange d'énergie entre les modes propres de la structure. C'est un phénomène de résonance interne. À très faible intensité d'excitation, seul le premier partial répond. Très vite, l'énergie est transférée au partial de fréquence double. En suivant, c'est le partial accordé à quatre fois la fréquence fondamentale qui récupère de l'énergie. Enfin, les partiels multiples entrent dans le spectre. L'énergie directement injectée à la fréquence du premier mode est donc très rapidement transférée aux modes de plus haute fréquence. Ce phénomène est possible lorsque le système répond par des phénomènes de résonances internes qui couplent les modes propres entre eux. Une autre expérience, présentée sur la figure 3.7(b), est réalisée. Cette fois, l'excitation oscille à la

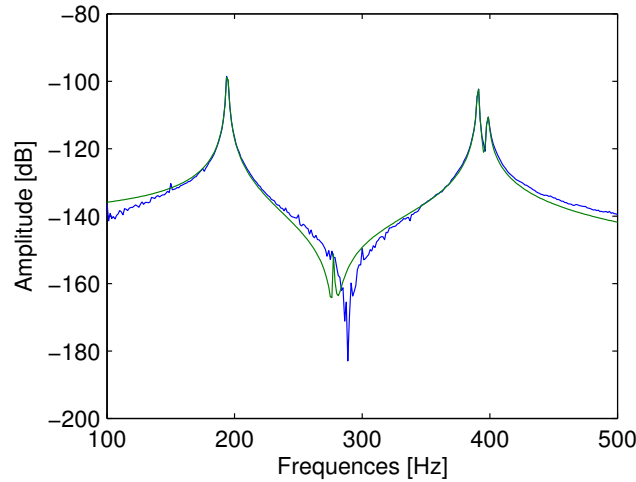


FIGURE 3.6 – Courbe bleue : analyse modale expérimentale du *double second* excité sur la note G3. Courbe verte : Identification modale par un système à trois degrés de liberté par le logiciel Modan.

deuxième fréquence propre de la note considérée : $f_{dr} = 390$ Hz. L'intensité d'excitation augmente progressivement. On remarque que l'énergie directement injectée est d'abord transférée au mode accordé à quatre fois la fréquence fondamentale, soit deux fois la fréquence d'excitation. Ensuite, elle est transmise au premier mode de vibration, qui oscille donc à la fréquence moitié de l'excitation.

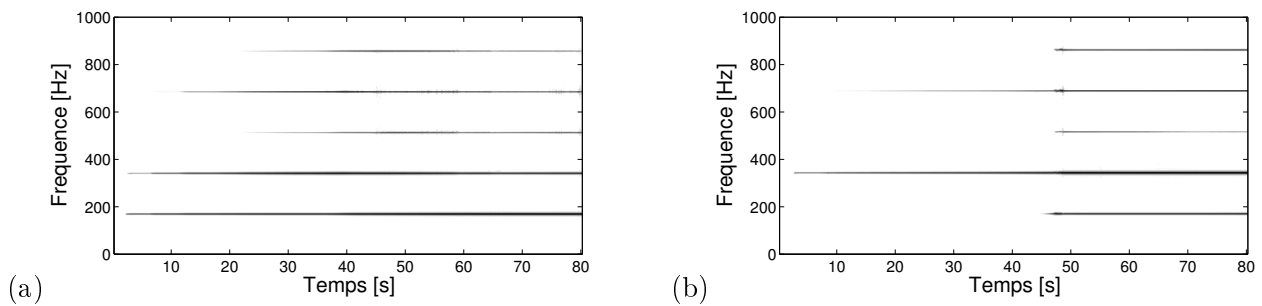


FIGURE 3.7 – Note G3 excitée par le système bobine aimant oscillant à une fréquence fixe. Passage du régime linéaire au régime non linéaire en augmentant progressivement l'intensité de forçage. (a) Fréquence d'excitation accordée sur la fréquence fondamentale. (b) Fréquence d'excitation accordée sur la seconde fréquence propre.

Enfin, une dernière expérience est réalisée. On place maintenant le système directement dans le régime non linéaire en appliquant une forte intensité de vibration à la note G3. On fait varier la fréquence d'excitation autour de la première fréquence propre, d'abord selon un balayage croissant puis décroissant.

La figure 3.8(a) rend compte des mesures d'amplitudes et phases des deux premiers harmoniques, H1 et H2, lorsque le balayage fréquentiel parcourt la résonance du mode fondamental. La couleur bleue représente le balayage croissant tandis que les courbes rouges représentent le balayage décroissant.

Des phénomènes typiquement non linéaires sont observés. Tout d'abord, la courbe de résonance de l'harmonique H1 est beaucoup plus complexe qu'une simple réponse linéaire. Ensuite, bien que l'amplitude de vibration demeure faible ($\simeq 0.03$ mm), l'énergie est bel et bien transférée au mode de haute fréquence. En effet l'amplitude mesurée H2 est non seulement non nulle, mais atteint jusqu'à $\simeq 0.1$ mm soit plus de trois fois l'amplitude du mode directement excité. On voit une forte variation d'amplitude qui donne lieu à un phénomène de saut autour de 196.5 Hz. D'autre part, les mesures des balayages croissant et décroissant ne se superposent pas, le trajet de la réponse présente donc un comportement d'hystérésis. Enfin, aux alentours 193 Hz, la réponse présente un régime instable qui est de nature quasi périodique. La réponse temporelle correspondante a été mesurée et tracée sur la figure 3.8(b). Elle retranscrit le comportement de la vibration de la structure lorsque le balayage fréquentiel externe entre dans cette zone d'instabilité. Pour une amplitude donnée et à une certaine fréquence d'excitation le steelpan présente un phénomène de battement dans sa réponse vibratoire.

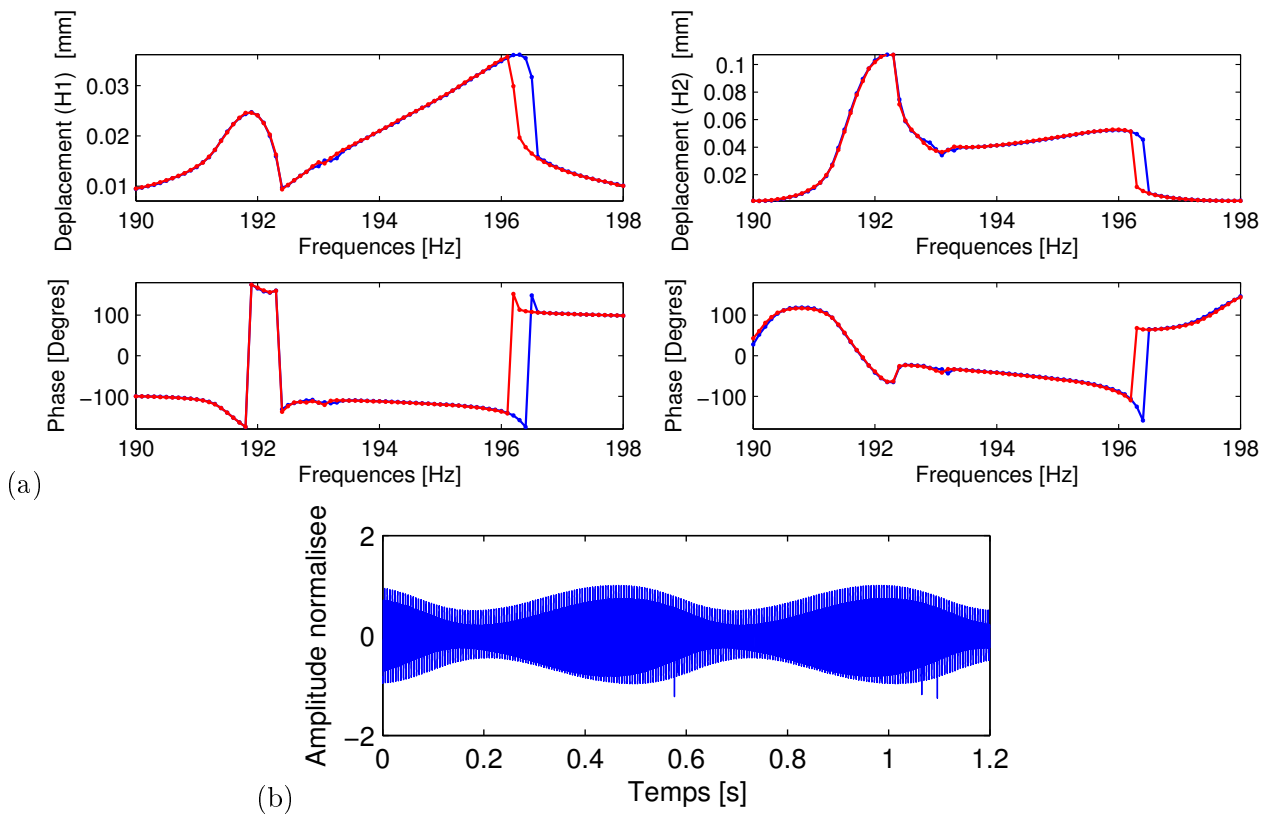


FIGURE 3.8 – Mesure non linéaire de la vibration des steelpan. Balayage fréquentiel autour du premier mode de vibration selon des fréquences croissantes et décroissantes. (a) Mesure de l'amplitude de réponse. (b) Mesure temporelle du régime quasi périodique.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a placé le steelpan sous différentes conditions d'excitation. En conditions normales de jeu, c'est à dire suite à une excitation impulsionnelle exercée par un *stick*, l'instrument présente des transferts d'énergie entre les différentes composantes fréquentielles de son spectre. Ceci est d'autant plus vrai que la sollicitation est forte. Cela est donc la preuve d'une grande sensibilité aux conditions initiales. Les transitoires d'attaque sont très courts, mais les échanges d'énergie complexifient la décroissance du son. D'autre part, l'analyse modale a montré que le steelpan présentait une forte localisation des modes propres autour de la note excitée, mais également sur les notes voisines qui présentent des relations harmoniques grâce à l'accordage. Ces interactions impliquent l'existence de modes doubles visibles dans la fonction de réponse en fréquences. D'une manière générale, le steelpan présente des modes propres accordés dont les premières déformées modales d'une note sont organisées de sorte que $\Phi_1 = (0, 0)$, $\Phi_2 = (1, 0)$ et $\Phi_3 = (0, 1)$. On retrouve donc les résultats de la littérature mis en évidence par Rossing. Enfin on a pu voir que les transferts d'énergie par les résonances internes entre les modes pouvaient finement être mesurés lorsque l'instrument était placé sous excitation forcée. Avec ce type d'expérience, on a aussi pu révéler l'existence d'autres phénomènes typiquement non linéaires tels que des phénomènes de saut entre balayages fréquentiels croissant et décroissant. D'autre part, des régimes quasi périodiques peuvent apparaître même pour de très faibles amplitudes de vibration, montrant des instabilités caractéristiques des systèmes non linéaires. L'ensemble de ces observations nous a amené à proposer une modélisation de ces comportements typiques non linéaires présents dans les vibrations des steelpans qui sera présentée dans la partie III du manuscrit.

Conclusion partielle

Cette partie a fait l'objet d'une étude phénoménologique des steelpans, visant à mettre en évidence, de manière expérimentale, les caractéristiques vibratoires de cet instrument. Elle se divise en deux chapitres.

Le premier rend compte d'une collaboration avec un facteur, qui a permis de suivre la fabrication complète d'un steelpan au laboratoire. Ainsi nous avons pu observer précisément chacune des étapes entrant dans le processus de fabrication des steelpans. L'objectif de ce travail était, dans un premier temps de constater les modifications que subissait la structure au cours de sa fabrication. Dans un second temps une étude de la dynamique linéaire de la structure a été menée à bien de manière à retranscrire l'évolution des paramètres modaux au cours de la fabrication. Nous avons observé que la déformation de la structure était telle que le matériau ne pouvait, en aucun cas, retrouver son état initial. Le processus de fabrication est donc irréversible. D'un point de vue mécanique, on peut parler de phénomène de plasticité. On s'attend donc à ce que le processus modifie l'état de contrainte du matériau. L'objet de la partie II du manuscrit, sera de proposer un principe de modélisation qui rend compte d'une manière quantitative de l'effet de la plasticité sur les paramètres dynamiques. Cela s'intègre dans un cadre plus général de compréhension par modélisation de l'effet des procédés de fabrication sur les paramètres dynamiques des structures.

Ce type d'étude s'applique bien sûr parfaitement à la science des instruments de musique, mais peut également être utile dans le domaine industriel que ce soit dans les transports ou dans l'architecture. En effet beaucoup de structures, particulièrement de fine épaisseur sont sujettes à des vibrations de grandes amplitudes. Il est donc nécessaire d'en connaître le comportement dynamique afin de faire face à des désagréments possibles.

Le second chapitre traite d'une étude réalisée sur un steelpan à l'issue de sa fabrication, lorsque l'instrument est prêt à être joué. L'instrument a été soumis à différents modes de sollicitations, dans le but de mettre en évidence les caractéristiques du comportement vibratoire. On a pu alors observer que les modes propres étaient extrêmement localisés sur les notes de l'instrument. Aussi, des rapports harmoniques existent entre les composantes du spectre fréquentiel. Cela entraîne des interactions modales, à la fois entre les harmoniques d'une note, mais aussi entre les harmoniques de deux notes voisines. On a pu alors observer des phénomènes de modes doubles. Lorsque l'amplitude de sollicitation est suffisamment grande, le steelpan entre dans un régime non linéaire qui semble être la « carte d'identité » des sons qu'il est capable de produire. On a remarqué que ce régime non linéaire était observé même

pour de très faibles amplitudes de vibration. La partie III du manuscrit proposera une modélisation de ces phénomènes de résonances internes qui sont responsables de transferts d'énergie entre les modes propres de la structure. En effet, la combinaison de la fine épaisseur du matériau, de la courbure des sous-structures et des rapports harmoniques entre les modes propres, entraîne le fait que l'effet des non-linéarités géométriques ne peut plus être négligé. Des modèles réduits, à quelques degrés de liberté, seront développés et comparés à l'expérience, dans le but d'extraire les composantes principales responsables du timbre original et particulier des steelpans.

Deuxième partie

Mise en forme de la structure :
vibrations linéaires de poutres et plaques
précontraintes

Chapitre 4

Introduction au modèle de chargement

Sommaire

4.1	Caractérisation expérimentale	69
4.1.1	Mesures de géométrie et état de contraintes résiduelles	70
4.1.2	Objectifs	71
4.2	Cadre de la modélisation	72
4.2.1	De la plasticité aux contraintes initiales	72
4.2.2	Modélisation 3D	74
4.2.3	Choix d'un modèle non linéaire géométrique	75
4.2.4	Résolution numérique par continuation	77

Les travaux décrits dans cette partie portent sur la modélisation des procédés de fabrication des steelpan. Plus particulièrement, nous nous sommes concentrés sur la première étape de fabrication qui consiste à transformer la partie supérieure du bidon (une plaque plane circulaire) en une calotte sphérique d'une profondeur de l'ordre de cent fois l'épaisseur initiale de la plaque.

Dans ce chapitre 4, une caractérisation expérimentale de cette étape de fabrication est d'abord présentée. Par la suite, les bases, concepts et méthodes de résolution des modèles introduits dans les chapitres suivants (5 et 6) sont explicités. On abordera alors une façon de modéliser un phénomène de plasticité par l'introduction de contraintes initiales. Cela permet à la structure d'obtenir une nouvelle géométrie et un état de contraintes résiduelles. On cherchera à quantifier l'effet de ces contraintes par rapport à celui de la géométrie sur les fréquences propres linéaires de la structure dans sa nouvelle configuration. Deux modèles de structures minces seront proposés : un modèle unidimensionnel de poutre droite et un modèle bidimensionnel de plaque circulaire.

4.1 Caractérisation expérimentale

On s'intéresse ici à l'étape d'embouti du steelpan, celle qui permet à la surface du bidon de passer d'un état plan circulaire à une cuve concave au moyen d'un martelage progressif. L'expérience est

décrite précisément au chapitre 2. Je renvoie le lecteur à la figure 2.3 afin d'illustrer le processus correspondant.

4.1.1 Mesures de géométrie et état de contraintes résiduelles

Dans un premier temps, le profil de déformation obtenu est mesuré le long d'un diamètre, à la fin de la transformation (voir Fig. 4.1). Ce profil nous servira de base pour ajuster les modèles proposés par la suite. On note que la flèche maximale ($w_{max} = 120$ mm) est de l'ordre de 100 fois l'épaisseur initiale ($h = 1,3$ mm). On peut également remarquer que la forme globale obtenue est une calotte sphérique axisymétrique quasi parfaite. En effet, malgré l'usage d'un marteau pneumatique, le savoir-faire du *tuner* lui permet d'obtenir une structure extrêmement régulière.

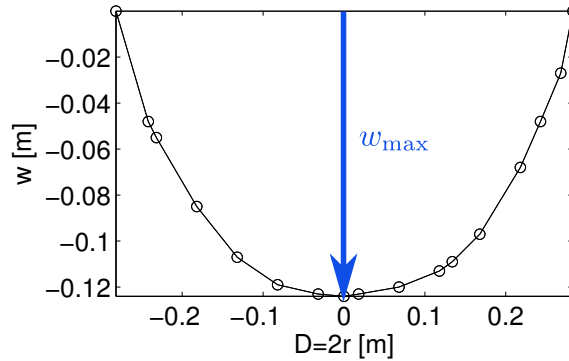


FIGURE 4.1 – Mesure du profil géométrique du steelpan du laboratoire, après mise en forme, à l'issue de la première étape de fabrication : l'embouti.

D'autre part, l'état de contraintes résiduelles a aussi été mesuré¹, par diffractométrie de rayons X (voir Fig. 4.2). Les contraintes résiduelles radiales et circonférentielles (respectivement σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$) ont été mesurées en six points d'un rayon de la surface concave, deux points sur un autre rayon (à 90 degrés du premier) et en un seul point (au centre) à l'intérieur du bidon, soit sur l'extrados de la courbure. On peut noter que les valeurs sont de signes opposés selon si l'on se trouve sur l'intrados (contrainte positive) ou sur l'extrados (contrainte négative) et qu'en valeur absolue, les valeurs des contraintes sont sensiblement les mêmes. Ainsi on peut en déduire qu'au centre de la calotte sphérique, des contraintes de traction sont observées sur l'intrados alors que des contraintes de compression sont observées sur l'extrados. Aussi, si l'on s'intéresse uniquement aux valeurs mesurées le long du rayon, et loin du bord, on peut, en première approximation, considérer que cette contrainte est uniforme, à la fois selon r et selon θ et que l'état de contraintes résiduelles est localement isotrope dans le plan (les contraintes résiduelles radiales et orthoradiales sont égales : $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$).

1. La mesure de contraintes résiduelles a été réalisée par Wilfrid Seiler : Arts & Métiers ParisTech, Laboratoire PIMM, 151 Boulevard de l'hôpital, 75013 Paris

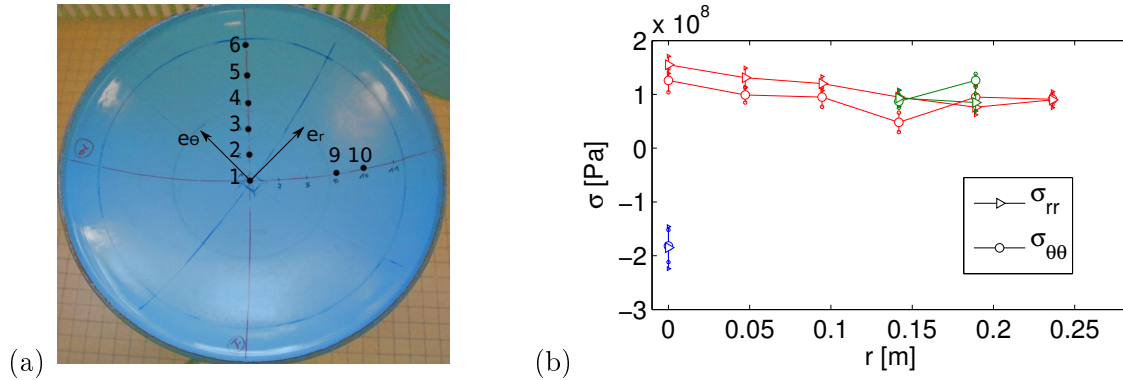


FIGURE 4.2 – Mesures de l'état de contraintes résiduelles, radiales et circonférentielles, par diffractométrie au rayon X, à l'issue de la première étape de fabrication : l'embouti. (a) Position des points de mesure. (b) Valeur des contraintes mesurées. Intrados : points de 1 à 6 sur un rayon donné (rouge) et points 9 et 10 sur un autre rayon (vert). Extrados (bleu) point 1. Barres d'erreurs à $\simeq \pm 20$ MPa.

4.1.2 Objectifs

L'expérience nous montre que l'on passe d'un état initial plan, à un état déformé plastiquement. Le processus de fabrication rend la transformation irréversible. Les mesures de géométrie et de l'état de contraintes nous montrent que la structure, une fois déformée, possède un champ de contraintes résiduelles non nul, réparti selon une géométrie axisymétrique et qui, en première approximation, est isotrope. La question que l'on se pose est la suivante : quel est l'effet de ces contraintes résiduelles sur les vibrations linéaires de la structure ? En effet, si l'on imagine que les contraintes résiduelles ont un effet moindre sur les caractéristiques dynamiques, alors, des modèles fondés uniquement sur la géométrie de la structure sont suffisants. C'est une question ouverte qui ne possède pas de littérature à la connaissance de l'auteur.

Au-delà de cette question, en ce qui concerne le steelpan, d'autres questions doivent être envisagées. Lors de l'expérience réalisée au laboratoire, nous avons pu remarquer de forts changements entre le bidon dans son état plan et à l'issue de l'embouti. Les analyses modales menées au chapitre 2 nous ont amenés à penser que les fréquences et les amortissements avaient foncièrement changé. Cela dit, nous savons aussi qu'à la fin de la fabrication, le bidon est chauffé. Cela aurait pour conséquence de relâcher complètement (ou en partie) les contraintes qui résident dans le matériau. Dans le cas du steelpan en particulier il n'est donc pas forcément utile de conserver un modèle qui tient compte des contraintes résiduelles. Une interrogation sur la pertinence de la prise en compte des contraintes résiduelles dans les modèles de comportement des steelpans est alors soulevée.

L'enjeu de cette partie est de proposer une modélisation originale du processus de déformation plastique dans le but d'aboutir à une modélisation nous permettant de bien séparer les effets respectifs de la géométrie et des contraintes résiduelles. Nous cherchons à quantifier l'effet des contraintes résiduelles par rapport à celui du changement géométrique sur les modes propres de la coque défor-

mée plastiquement. Pour cela, un modèle analytique permettant d'expliciter l'évolution de ces deux paramètres (géométrie + contraintes résiduelles) est proposé.

Un calcul élasto-plastique complet prenant en compte de manière fine le procédé de mise en forme est complexe à mettre en place. En revanche, il est possible de contourner cette difficulté en considérant que l'état du système, après mise en forme, est en équilibre statique. L'écoulement plastique nécessaire pour obtenir la déformation désirée sera vu comme un champ de contraintes initiales qui servira de paramètre de contrôle au chargement du modèle.

Deux modèles particuliers seront développés dans les chapitres suivant (5 et 6) : un modèle unidimensionnel de poutre bi-articulée et un modèle bidimensionnel de plaque circulaire encastree.

4.2 Cadre de la modélisation

Dans cette section, nous rappelons les bases physiques du phénomène de plastification, processus irréversible. Nous montrons comment proposer un modèle équivalent fondé sur le flambage de structures élastiques, afin de déduire les équations des modèles que nous allons développer. Étant donné l'intérêt porté sur l'état final obtenu, on introduira notre principe de modélisation qui consiste à ne pas prendre en compte le procédé réel de fabrication qui est complexe, mais à obtenir directement l'état statique souhaité par l'introduction de contraintes initiales.

4.2.1 De la plasticité aux contraintes initiales

4.2.1.1 Modèle rhéologique à 1 DDL

Dans un premier temps, un modèle rhéologique, à un seul degré de liberté, est introduit afin de présenter d'une façon simple, les bases du processus de plastification des structures. Celui-ci est illustré sur la figure 4.3. Il est constitué d'un assemblage de modèles élémentaires qui, dans le cas de la plasticité, sont un patin et un ressort assemblés en série. Le ressort représente un comportement mécanique purement élastique qui est régi par une loi linéaire reliant contrainte et déformation telle que : $\sigma = E\varepsilon^e$ où σ est la contrainte, ε^e la déformation élastique et E est le module d'Young. Le patin décrit un comportement parfaitement plastique. Il présente une limite en contrainte σ_{\max} , au-delà de laquelle une déformation plastique peut exister. Cette transformation est irréversible. Une fois la contrainte maximale atteinte, un écoulement plastique se produit et un champ de déformation plastique ε^p , différent du champ initial, donne une nouvelle configuration au système dont le déplacement total obtenu s'écrit : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. Le modèle {patin+ressort} contient donc tous les concepts fondamentaux de l'élasto-plasticité que l'on retrouvera dans l'étude des matériaux réels [38]. La loi de comportement du système de la figure 4.3(a) s'écrit :

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (4.1)$$

On peut alors étudier le comportement autour du nouveau point d'équilibre stable ε^p .

Sur la figure 4.3(b) est illustrée la loi élastique parfaitement plastique donnée par l'équation (4.1). Au point A, l'assemblage est à l'état initial (configuration de référence : $\sigma = 0$ et $\varepsilon^p = 0$). Pour passer de A à B, on applique un chargement élastique, qui correspond à une droite de pente E , la raideur du ressort. Au point B, l'assemblage atteint la limite d'élasticité σ_{max} . Ainsi le patin peut se mettre à glisser et impose la force extérieure constante, à sa valeur σ_{max} , jusqu'à atteindre le point C. C'est entre B et C que se produit l'écoulement plastique. Pour atteindre la nouvelle configuration, on impose une décharge au système. Cela est réalisé de manière élastique (linéaire) avec la même pente E que précédemment. On atteint alors le point A' où le système est libre de chargement extérieur : il est à l'équilibre. En A', l'état de contraintes est nul, mais une déformation plastique ε^p , non nulle, donne à la configuration actuelle, un état différent de la configuration initiale.

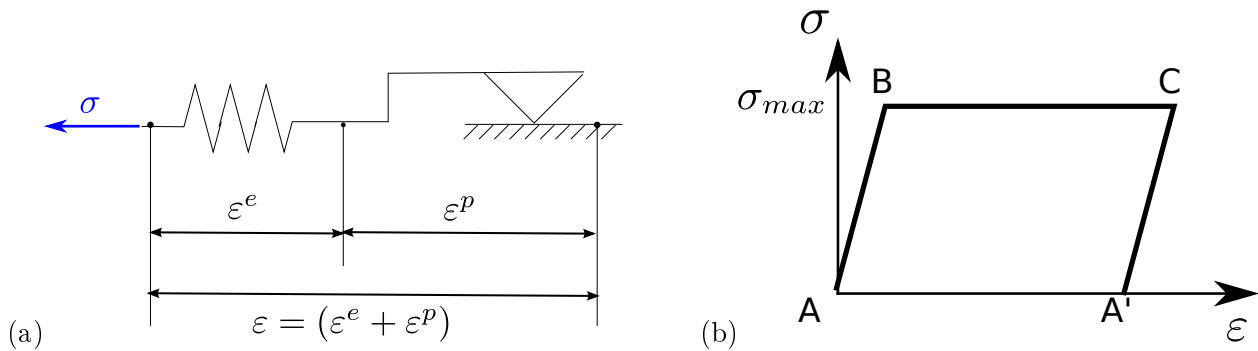


FIGURE 4.3 – (a) Modèle rhéologique élastoplastique {patin+ressort}. (b) Évolution du comportement élasto-plastique.

Ce modèle très simple permet d'introduire une première caractéristique d'une structure élastique parfaitement plastique. Le changement de géométrie est dû à l'écoulement plastique : un modèle à deux degrés de liberté est nécessaire pour introduire les contraintes résiduelles.

4.2.1.2 Modèle rhéologique à 2 DDLs

On introduit maintenant un modèle rhéologique à deux degrés de liberté : à savoir, deux assemblages {patin+ressort} en parallèle (voir Fig. 4.4(a)). Ici, chacun des deux assemblages est régi par sa propre loi de comportement, ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1(\varepsilon - \varepsilon_1^p), \\ \sigma_2 &= E_2(\varepsilon - \varepsilon_2^p).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Aussi, chacun des deux patins a sa propre limite de plasticité telle que $|\sigma_1| < \sigma_{1max}$ et $|\sigma_2| < \sigma_{2max}$. L'équilibre du modèle à deux degrés de liberté est tel que $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

On trace l'évolution du comportement de l'assemblage complet sur la figure 4.4(b). La première figure décompose le trajet de chacun des deux sous-systèmes tandis que la seconde présente l'évolution globale des deux systèmes {patin+ressort} assemblés. En décomposant le trajet, on observe qu'entre

A et B, la structure se charge jusqu'à atteindre la première limite de plasticité σ_{1max} . La charge est élastique et la pente correspond à la somme des deux raideurs associées à chacun des ressorts. Entre B et C, le premier écoulement plastique a lieu pendant que le second assemblage continue d'avoir un comportement élastique jusqu'à ce qu'il atteigne, à son tour, sa limite en contrainte σ_{2max} . Au point C, le système est borné par la somme des deux seuils de plasticité jusqu'au point D. Entre C et D, on observe donc l'évolution de l'écoulement plastique. La décharge linéaire, entre D et A', s'établit avec la même pente qu'entre A et B. Le coefficient de proportionnalité de la droite associée est donc $E_1 + E_2$. En A', plus aucune contrainte extérieure n'est appliquée au système. L'état obtenu présente une déformation plastique non nulle, qui confère au système un nouvel état d'équilibre. Néanmoins, lorsque l'on regarde l'état final de chacun des deux assemblages {patin+ressort}, on peut voir sur la première figure, qu'au point A', des valeurs de contraintes sont différentes pour chacun. En effet, les contraintes σ_1 et σ_2 sont différentes de zéro et se compensent dans les équations d'équilibre global. On vient alors de mettre en évidence qu'à la fin de la décharge le système global est à l'équilibre mais que des contraintes résiduelles existent dans chacun des deux assemblages. On parle d'incompatibilité des déformations plastiques dans la structure [38]. On peut également noter que $\sigma_1 < 0$ et $\sigma_2 > 0$: un assemblage est en compression tandis que l'autre est en traction.

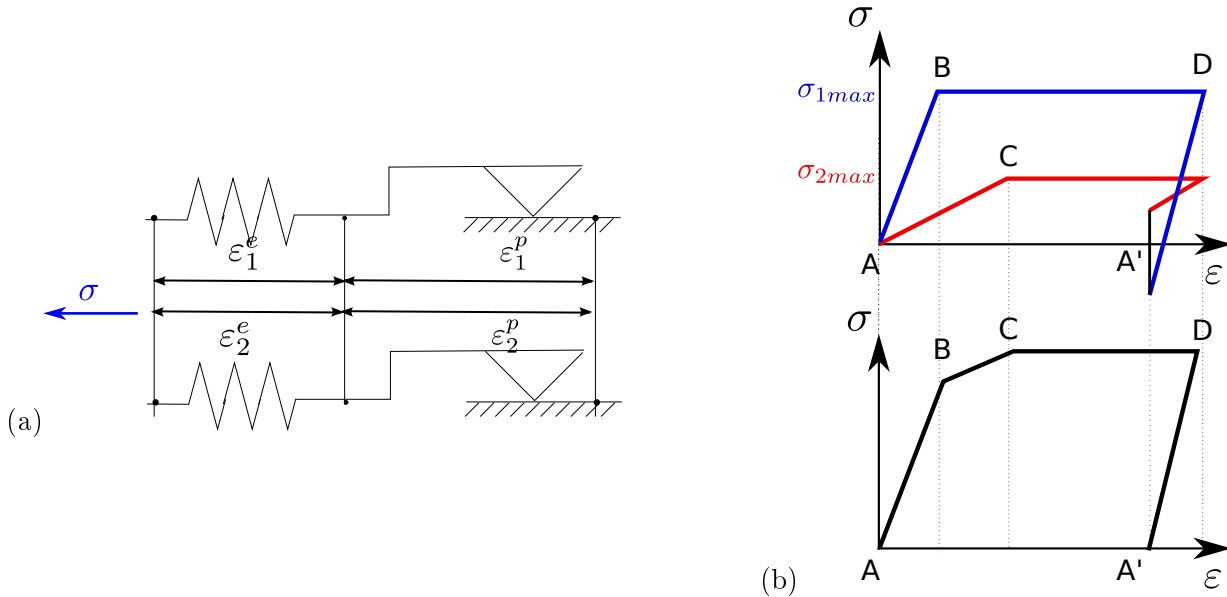


FIGURE 4.4 – (a) Modèle rhéologique élasto-plastique à deux degrés de liberté. (b) Trajet de chargement : mise en évidence des contraintes résiduelles.

4.2.2 Modélisation 3D

Dans un modèle à trois dimensions, la relation de comportement associée au phénomène élasto-plastique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (4.3)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ de contrainte, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le champ de déformation et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ le champ de déformation plastique. \mathbf{L} est l'opérateur d'élasticité. $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ vérifient les équations d'équilibre et les conditions aux limites en effort et déplacement.

On considère une structure initialement libre de contraintes ($\boldsymbol{\sigma} = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$), à laquelle on impose un chargement. Après décharge, jusqu'à annulation du chargement extérieur, il se peut que des efforts intérieurs, différents de zéro, subsistent : on les appelle des contraintes résiduelles [51]. Elles ont été mises en évidence au paragraphe précédent. À l'équilibre statique, lorsque la structure est dans son état final, le champ de contraintes résiduelles est :

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (4.4)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_R = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ est le champ de contraintes résiduelles et $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ correspond à la géométrie de la structure déformée plastiquement. Le symbole ($\hat{\cdot}$) indique que ce sont des variables statiques.

Lors de la déformation plastique du steelpan, le chargement extérieur crée une certaine forme pour $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Le calcul réaliste de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est complexe. Comme dit précédemment, dans le modèle que nous proposons, nous ne cherchons pas à déterminer toute l'évolution de l'histoire de l'écoulement plastique réel, mais nous proposons de voir l'état final résiduel comme une structure soumise à un champ de contraintes initiales. On propose alors de remplacer $\mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon}^p$ par un chargement initial $\boldsymbol{\sigma}_0$ tel que l'équation (4.4) devienne :

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma}_0. \quad (4.5)$$

En choisissant $\boldsymbol{\sigma}_0$ de telle sorte que $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ corresponde à la géométrie du steelpan après l'étape de l'embouti. $\boldsymbol{\sigma}_R$ sera le résultat des équations d'équilibre statique.

La structure est dite précontrainte par le processus de plastification [24]. Le modèle proposé insère un champ de contraintes initiales qui rend compte des modifications subies par la structure [26, 31]. Toute la question est donc de choisir la bonne forme du champ de contraintes initiales $\boldsymbol{\sigma}_0$ pour obtenir une déformée réaliste, qui correspond au profil géométrique souhaité.

Dans les modèle développés par la suite, il sera fait en sorte de pouvoir suivre, au cours des développements analytiques, les termes issus du changement géométrique, des termes issus de l'état de contrainte. Ainsi nous pourrons étudier l'effet de chacune des deux influences sur les vibrations linéaires autour de la nouvelle configuration de la structure.

4.2.3 Choix d'un modèle non linéaire géométrique

Aux vues des paramètres mesurés, on a affaire à une structure mince soumise à de grands déplacements. La variation du déplacement transverse par rapport à l'épaisseur est telle que nous nous plaçons dans le cadre des non-linéarités dites géométriques. Dans ce cas, le couplage non linéaire membrane / flexion ne peut plus être négligé. Le modèle de von Kármán qui permet de rendre compte des

grands déplacements en chaque point de la structure est considéré. Une série d'hypothèses nécessaires à l'établissement du modèle est alors formulée [69, 65, 12, 30, 39, 14, 72] :

- L'épaisseur de la structure est suffisamment faible devant les autres paramètres géométriques pour que l'on considère le cas des structures minces, où des directions privilégiées seront choisies.
- On suppose que les déplacements longitudinaux, dans le plan de la plaque ou suivant l'axe de la poutre, sont d'un ordre inférieur au déplacement transverse.
- On néglige les termes d'inertie de rotation et d'inertie longitudinale.
- Le comportement du matériau reste élastique linéaire, isotrope et à déformations initiales.
- Le cisaillement transverse est négligé, ainsi tout segment normal et droit dans la configuration initiale reste normal à la ligne moyenne après déformation (voir Fig. 4.5).

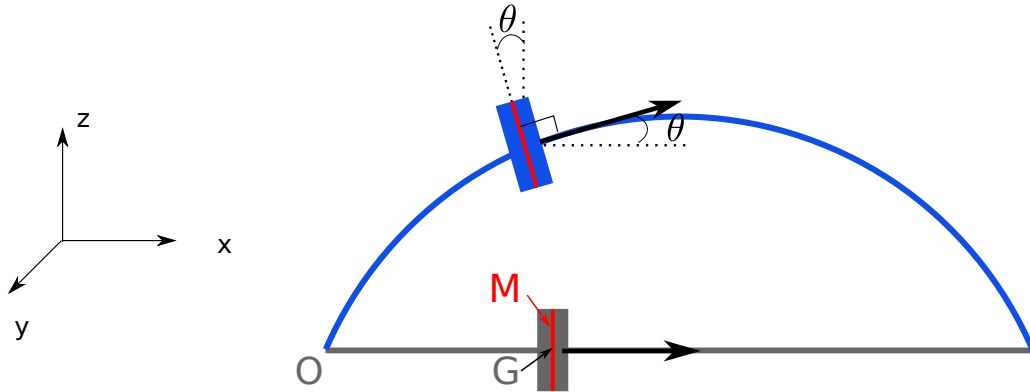


FIGURE 4.5 – Déformation d'une structure plane. Déplacement d'un point d'une section droite de la structure dans sa configuration initiale (en gris) pour atteindre la configuration actuelle (en bleu).

- Les rotations des sections droites sont suffisamment faibles afin que le vecteur déplacement soit linéarisé en fonction des angles. Selon les notations explicitées sur la figure 4.5, on peut écrire le champ de déplacement tel que :

$$\mathbf{U}(M) = \mathbf{U}(G) + \theta \wedge \mathbf{GM}, \quad (4.6)$$

où \mathbf{U} est le déplacement tridimensionnel d'un point M de la section, G est un point qui appartient à la ligne moyenne de la structure et θ est l'angle formé entre la ligne moyenne dans la configuration initiale et la configuration actuelle de la structure.

- Le tenseur des déformations est le tenseur de Green-Lagrange :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}), \quad (4.7)$$

dont la partie non linéaire est tronquée en ne retenant que les termes quadratiques en fonction des déplacements transverses. C'est l'hypothèse de von Kármán. Elle apporte une correction non linéaire au modèle linéaire par une considération des rotations dites « modérées ».

- En supposant le matériau élastique linéaire, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (ici noté $\boldsymbol{\sigma}$) est relié au tenseur des déformations de Green-Lagrange ($\boldsymbol{\varepsilon}$), en l'absence de déformations

initiales, par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.8)$$

où \mathbf{L} est un opérateur d'élasticité.

- Dans l'hypothèse des contraintes planes, classique en structures minces [11], les contraintes transverses sont négligées ($\boldsymbol{\sigma}_{zz}$ en plaques et $(\boldsymbol{\sigma}_{yy}, \boldsymbol{\sigma}_{zz})$ en poutres). Cela permet de définir les efforts généralisés en effort de membrane \mathbf{N} et en moment de flexion \mathbf{M} par intégration des contraintes sur la section. :

$$\mathbf{N} = \iint_S \boldsymbol{\sigma} dS = \mathring{\mathbf{N}} - \mathbf{N}_0, \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{M} = \iint_S z \boldsymbol{\sigma} dS = \mathring{\mathbf{M}} - \mathbf{M}_0. \quad (4.9b)$$

La section S sera précisée en fonction du modèle analytique développé par la suite.

4.2.4 Résolution numérique par continuation

Compte tenu du chargement attendu, il est nécessaire d'utiliser une méthode numérique pour résoudre le problème analytique proposé. Nous avons fait le choix de la méthode asymptotique numérique (MAN). On utilise une version de cette méthode de continuation mise en œuvre dans Matlab sous le nom de Manlab [15, 7].²

Cette méthode fait intervenir un paramètre de chargement (paramètre de continuation) λ qui fait croître la valeur des contraintes initiales jusqu'à obtenir la géométrie souhaitée. Ainsi, l'équation (4.5) s'écrit, dans ce cas :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda\boldsymbol{\sigma}_0. \quad (4.10)$$

Aussi, compte tenu de la définition des efforts généralisés précédente (voir Eq. (4.9), l'équation 4.10, induit les nouvelles relations :

$$\mathbf{N} = \iint_S \boldsymbol{\sigma} dS = \mathring{\mathbf{N}} - \lambda\mathbf{N}_0, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{M} = \iint_S z \boldsymbol{\sigma} dS = \mathring{\mathbf{M}} - \lambda\mathbf{M}_0. \quad (4.11b)$$

λ permet donc de faire évoluer la valeur de la contrainte initiale imposée à la structure sous la forme de deux efforts généralisés initiaux, en membrane ($\lambda\mathbf{N}_0$) et en flexion ($\lambda\mathbf{M}_0$). Dans ce cas, λ fait donc croître les contraintes initiales de manière progressive et simultanée.

Finalement, la démarche utilisée pour résoudre notre problème est résumée par la figure 4.6. Premièrement, l'observation expérimentale nous amène à considérer un problème statique de plasticité qui confère une nouvelle géométrie et un nouvel état de contraintes à une structure mince initialement plane. Le chargement plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ est modélisé par un chargement en contraintes initiales sous

². L'application de cette méthode à notre problème sera détaillée dans les cas particuliers exposés dans les chapitres suivants.

la forme d'un effort de membrane (\mathbf{N}_0) et d'un moment de flexion (\mathbf{M}_0) qui croissent simultanément grâce à l'évolution du paramètre de continuation λ de la MAN. L'objectif est d'obtenir l'état statique final, à savoir la géométrie (\hat{w}) et l'état de contraintes résiduelles ($\hat{\sigma} = \sigma_R$) afin de pouvoir séparer et quantifier l'influence de chacun lorsque l'on s'intéresse aux vibrations de la structure (\tilde{w}) autour de cet état statique (\hat{w}). Autrement dit, on va chercher à étudier l'effet de la géométrie par rapport à l'effet des contraintes (σ_R) sur les fréquences propres de la structure déformée sous l'action des contraintes initiales.

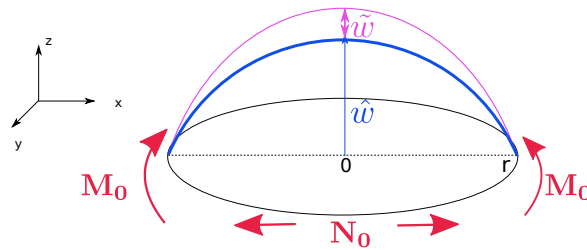


FIGURE 4.6 – Modélisation de la déformation du steelpan sous l'action d'un champ de contraintes initiales en membrane \mathbf{N}_0 et en flexion \mathbf{M}_0 . Vibrations (\tilde{w}) autour de cet état d'équilibre (\hat{w} , σ_R).

Chapitre 5

Modèle 1D :

Vibrations de poutres précontraintes

Sommaire

5.1	Modélisation	80
5.1.1	Modèle de poutre sous l'action de contraintes initiales	80
5.1.2	Séparation des problèmes statique et dynamique	84
5.1.3	Projection modale	84
5.1.4	Conditions aux limites et choix de la forme des contraintes initiales	86
5.1.5	Résolution statique par continuation	87
5.1.6	Évolution des fréquences propres	88
5.2	Résultats	89
5.2.1	Paramètres	89
5.2.2	Reconstruction du champ de déplacement et du champ de contraintes résiduelles	90
5.2.3	Cas $N_0 = 0 \neq M_0 = 0$	90
5.2.4	Cas $N_0 \neq 0 \ M_0 \neq 0$	95
5.2.5	Effets des contraintes initiales sur les contraintes résiduelles en peau	99
5.3	Conclusion sur le modèle 1D	99

Ce chapitre est consacré à l'élaboration d'un modèle de poutre soumise à un champ de contraintes initiales. La poutre droite (configuration de référence), se déforme sous l'action de ce champ et atteint une nouvelle configuration (configuration actuelle) constituée d'une nouvelle géométrie et d'un état de contraintes résiduelles. Les vibrations de la structure autour de ce nouvel équilibre seront étudiées en prenant soin de dissocier l'influence des changements géométriques de celle de l'état de contraintes résiduelles. Bien que ce modèle 1D soit loin de l'expérience, il présente un cas simple de la démarche de modélisation utilisée.

5.1 Modélisation

5.1.1 Modèle de poutre sous l'action de contraintes initiales

5.1.1.1 Présentation du modèle et hypothèses

On considère une poutre droite de longueur L , de section droite rectangulaire, avec b la largeur et h l'épaisseur. On note $S = bh$ l'aire de la section droite. Cette poutre, présentée Fig. 5.1(a) est homogène et isotrope, de module d'Young E et de masse volumique ρ . Elle est soumise à des contraintes initiales décomposées en un effort axial N_0 et un moment de flexion M_0 .

Un des objectifs que l'on se fixe est de chercher à retrouver le profil géométrique décrit dans le chapitre 4. On commencera par présenter les résultats d'un cas de chargement plus simple où seul l'effort axial initial est non nul, soit $N_0 \neq 0$ et $M_0 = 0$, pour ensuite traiter le cas plus général où $N_0 \neq 0$ et $M_0 \neq 0$.

Le modèle utilisé est celui d'Euler-Bernoulli, associé à un modèle de von Kármán qui permet de rendre compte des grands déplacements de chaque point de la poutre. Ainsi, le mécanisme non linéaire de type géométrique rend compte du couplage axial/transverse de la structure. Dans ce cas, on précise les hypothèses du cas général, introduit dans le chapitre 4, par :

- La rotation de la section est reliée au déplacement transverse par : $\theta = w'$ (où $' = \partial \cdot / \partial x$).
- Aussi, les angles de rotation sont supposés petits ($\theta \ll 1$) ce qui permet d'écrire la cinématique selon les coordonnées (u, w) de la ligne moyenne.
- Le déplacement longitudinal u est d'un ordre inférieur au déplacement transverse w : $u \ll w$.
- L'hypothèse des contraintes planes étant maintenue et les contraintes de cisaillement négligées, cela conduit dans le cas 1D à ne conserver que : σ_{xx} car $\sigma_{yy} \ll \sigma_{xx}$ et $\sigma_{zz} \ll \sigma_{xx}$.

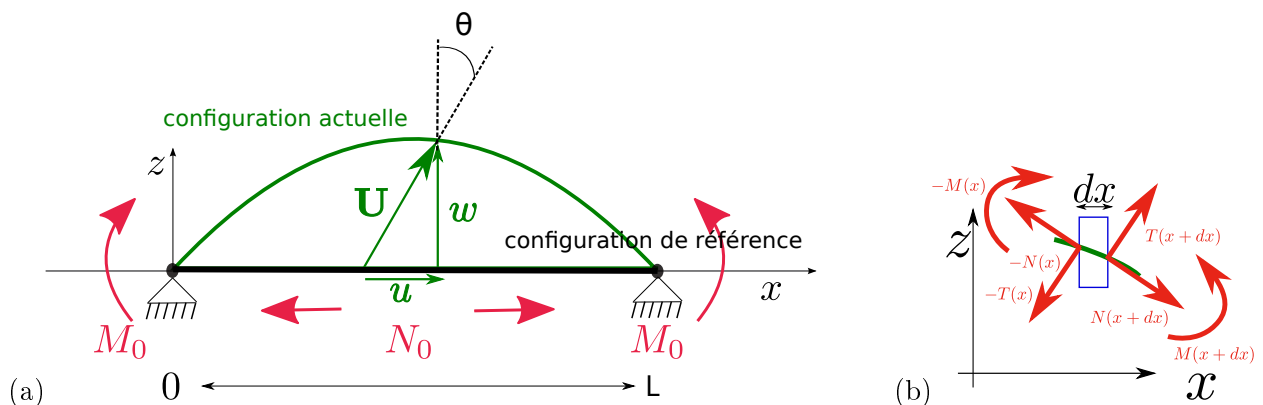


FIGURE 5.1 – Modèle 1D. (a) Déformation d'une poutre droite sous l'action de contraintes initiales en effort N_0 et en flexion M_0 . (b) Élément de poutre, compris entre x et $x + dx$ dans sa configuration actuelle, sous l'action des efforts intérieurs résultants (T effort tranchant, N effort axial, M moment de flexion).

5.1.1.2 Champs des déplacements, des déformations et des contraintes

Dans le plan (O, x, z) , on définit les vecteurs unitaires \mathbf{x} et \mathbf{z} , comme montré sur la figure 5.1. Le champ de déplacement \mathbf{U} d'un point de la section droite courante s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x) &= U_x(x)\mathbf{x} + U_z(x)\mathbf{z}, \\ &= (u(x) - z\theta(x))\mathbf{x} + w(x)\mathbf{z}, \\ &= (u(x) - zw'(x))\mathbf{x} + w(x)\mathbf{z}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

où u et w sont respectivement les déplacements axial et transverse et θ est la rotation de la section (où x en est l'abscisse).

Sous les hypothèses de von Kármán, décrites précédemment, on s'intéresse à la composante ε_{xx} du tenseur des déformations. Elle s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{\epsilon}_{\text{membrane}} - z \underbrace{\kappa}_{\text{flexion}},\tag{5.2}$$

avec

$$\begin{cases} \epsilon = u' + \frac{1}{2}w'^2, \\ \kappa = w''. \end{cases}\tag{5.3}$$

On observe alors que ε_{xx} est composé d'un terme décrivant une déformation de membrane (ici axiale) et d'un autre décrivant une déformation en flexion où w'' est la courbure de la ligne moyenne déformée. La partie non linéaire, due aux hypothèses de von Kármán, apparaît dans ϵ .

Compte tenu des contraintes initiales appliquées à la structure, le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon - \sigma_0,\tag{5.4}$$

où σ_0 est la composante non nulle du tenseur des contraintes initiales. De l'équation précédente (5.4), on peut extraire l'expression des efforts généralisés en membrane et en flexion, telle que :

$$N = \iint_S \sigma_{xx} dS = ES(u' + \frac{1}{2}w'^2) - N_0,\tag{5.5a}$$

$$M = \iint_S z\sigma_{xx} dS = -EIw'' - M_0,\tag{5.5b}$$

où $I = \iint_S z^2 dS$ est le moment quadratique de la section. Finalement, comme indiqué sur la Fig. 5.1(a), un couple de contraintes initiales est imposé à la structure sous la forme d'une contrainte axiale $N_0 = \iint_S \sigma_0 dS$ et d'un moment de flexion $M_0 = \iint_S z\sigma_0 dS$.

5.1.1.3 Équations d'équilibre : formulation en (N, w)

Les équations du mouvement sont écrites à partir d'un élément de la poutre, dans sa configuration actuelle, compris entre les abscisses x et $x + dx$. Il subit la contribution d'un effort tranchant T , d'un

effort normal N et d'un moment de flexion M (voir Fig. 5.1(b)). On établit l'équilibre en projetant l'ensemble des contributions sur les axes du repère initial. Ainsi, on obtient les trois équations d'équilibre suivantes :

$$\text{selon } \mathbf{x} : \quad (N \cos \theta - T \sin \theta)' = \rho S \ddot{u}, \quad (5.6a)$$

$$\text{selon } \mathbf{z} : \quad (T \cos \theta + N \sin \theta)' = \rho S \ddot{w}, \quad (5.6b)$$

$$\text{selon } \mathbf{y} : \quad T - M' = 0. \quad (5.6c)$$

Dans un premier temps, on note que la troisième équation (5.6c) entraîne la relation : $T = M'$ soit $T' = M''$. Dans un second temps, le modèle non linéaire est obtenu en linéarisant la cinématique ($\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$) et en négligeant les termes non linéaires de déformation de Green-Lagrange, excepté celui qui correspond au premier couplage axial/transverse [60]. De plus, avec $\theta = w'$, on obtient finalement :

$$\rho S \ddot{u} = N', \quad (5.7a)$$

$$\rho S \ddot{w} = M'' + (Nw')'. \quad (5.7b)$$

On cherche maintenant à exprimer le problème selon le déplacement transverse w et l'effort axial résultant N . Pour cela, dans un premier temps, on introduit l'équation (5.5b), expression de la contrainte en moment, dans l'équation (5.7b), relative au déplacement transverse, et on obtient :

$$\rho S \ddot{w} + EI w'''' - (Nw')' + M_0'' = 0. \quad (5.8)$$

Ensuite, pour exprimer l'effort normal N , on suppose que :

- (i) l'inertie axiale est négligée ($\rho S \ddot{u} \ll N'$). Cela implique, d'après (5.7a), que la tension est uniforme ($N' = 0$). Finalement, l'effort axial N est une constante.
- (ii) le couplage non linéaire est obtenu par le modèle de von Kármán, à condition que les deux extrémités de la poutre soient bloquées. Un déplacement nul en ces deux points implique que les conditions aux limites soient telles que : $u(0) = u(L) = 0$.

Si on intègre l'effort axial sur l'ensemble de la longueur de la poutre, l'hypothèse (i) implique que l'on trouve :

$$\int_0^L N dx = LN. \quad (5.9)$$

D'après (5.5a) et l'hypothèse (ii), on a :

$$\int_0^L N dx = ES \int_0^L u' dx + \frac{ES}{2} \int_0^L w'^2 dx - \int_0^L N_0(x) dx, \quad (5.10a)$$

$$= \frac{ES}{2} \int_0^L w'^2 dx - \int_0^L N_0(x) dx. \quad (5.10b)$$

car $u(x=0) = u(x=L) = 0$.

En combinant les équations (5.9) et (5.10), on trouve :

$$LN = \frac{ES}{2} \int_0^L w'^2 dx - \int_0^L N_0(x) dx, \quad (5.11)$$

et on obtient :

$$N = \frac{ES}{2L} \int_0^L w'^2 dx - \bar{N}_0, \quad (5.12)$$

où seule la valeur moyenne de N_0 , $\bar{N}_0 = \frac{1}{L} \int_0^L N_0 dx$, intervient.

Finalement, les nouvelles équations du problème sont :

$$\begin{aligned} \rho S \ddot{w} + EI w'''' - N w'' + M_0'' &= 0, \\ N &= \frac{ES}{2L} \int_0^L w'^2 dx - \bar{N}_0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Le problème (5.13) ainsi posé, fait apparaître les contraintes initiales N_0 et M_0 imposées à la structure, ainsi que N , l'effort normal résultant de la transformation.

5.1.1.4 Adimensionnement

On choisit d'adimensionner les équations (5.13) en prenant l'épaisseur h comme échelle caractéristique pour le déplacement transverse w . Pour cela on pose les variables suivantes :

– en espace

$$w = h\bar{w} \quad \text{et} \quad x = L\bar{x}, \quad (5.14)$$

alors la dérivée spatiale s'écrit : $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$,

– en temps

$$t = T_0 \bar{t}, \quad (5.15)$$

alors la dérivée temporelle s'écrit : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$,

– et en efforts :

$$N = N_a \bar{N} \quad ; \quad M_0 = M_a \bar{M}_0 \quad \text{et} \quad \bar{N}_0 = N_a \bar{\bar{N}}_0. \quad (5.16)$$

Les variables munies de $(\bar{\cdot})$ sont donc sans dimension.

Le problème (5.13) devient :

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}} + \bar{w}'''' - \varepsilon \bar{N} \bar{w}'' + \bar{M}_0'' &= 0, \\ \bar{N} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{w}'^2 d\bar{x} - \bar{\bar{N}}_0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

avec l'identification des constantes suivantes :

$$T_0 = L^2 \sqrt{\frac{\rho S}{EI}} \quad ; \quad N_a = \frac{ESh^2}{L^2} \quad ; \quad M_a = \frac{EIh}{L^2}. \quad (5.18)$$

On remarque que le problème ne dépend plus que d'un seul paramètre sans dimension : $\varepsilon = Sh^2/I$ qui donne l'ordre des non-linéarités. On note également que les contraintes initiales appliquées sont adimensionnées de sorte que : $\bar{M}_0 = M_0 L^2 / EIh$ et $\bar{\bar{N}}_0 = \bar{N}_0 L^2 / ESh^2$.

N.B. : Dans un souci de simplifier les expressions manipulées dans la suite du chapitre, on n'écrira plus les barres sur les variables adimensionnées.

5.1.2 Séparation des problèmes statique et dynamique

On va chercher à diviser le problème global (5.17) en un problème statique qui rend compte des changements de géométrie et de contrainte de la structure et un problème dynamique qui donne l'expression des vibrations autour de cette nouvelle position d'équilibre statique. Les notations $(\hat{\cdot})$ pour les variables statiques et $(\tilde{\cdot})$ pour les variables dynamiques sont alors introduites. Déplacement transverse et effort normal se réécrivent sous la forme :

$$\begin{cases} w(x, t) = \hat{w}(x) + \tilde{w}(x, t), \\ N(t) = \hat{N} + \tilde{N}(t). \end{cases} \quad (5.19)$$

En introduisant l'équation (5.19) dans la formulation adimensionnée (5.17), on obtient :

- le problème statique adimensionné :

$$\begin{aligned} \hat{w}'''' - \varepsilon \hat{N} \hat{w}'' + M_0'' &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{w}'^2 dx - \overline{N_0}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

- le problème dynamique adimensionné :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{w}} + \tilde{w}'''' - \underbrace{\varepsilon \hat{N} \tilde{w}''}_{\text{contraintes résiduelles}} - \underbrace{\varepsilon \tilde{N} \hat{w}''}_{\text{géométrie}} - \underbrace{\varepsilon \tilde{N} \tilde{w}''}_{\text{non linéaire}} &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{w}'^2 dx - \overline{N_0}, \\ \tilde{N} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{w}'^2 dx + \int_0^1 \tilde{w}' \hat{w}' dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

À ce stade, on peut d'ores et déjà mentionner que le calcul du problème statique (5.20) donnera la géométrie (\hat{w}) et l'état de contraintes résiduelles (\hat{N}) de la structure en fonction du chargement initial imposé (N_0, M_0). Le problème dynamique (5.21) dépend du résultat statique. En effet, géométrie (\hat{w}) et état de contraintes résiduelles (\hat{N}) apparaissent distinctement dans ces équations. Le dernier terme ($\tilde{N} \tilde{w}''$) est un terme non linéaire qui sera négligé par la suite. Dans le but de quantifier l'influence de ces deux termes sur les vibrations linéaires de la structure, on en maintiendra la distinction visible au cours des développements du calcul.

5.1.3 Projection modale

On décompose le déplacement transverse $w(x, t)$ sur la base des modes propres linéaires de la structure dans sa configuration initiale. Ainsi déplacement statique ($\hat{w}(x)$) et dynamique ($\tilde{w}(x, t)$) sont réécrits comme suit :

$$\hat{w}(x) = \sum_{k=1}^K \Phi_k(x) \hat{q}_k, \quad \text{et} \quad \tilde{w}(x, t) = \sum_{k=1}^K \Phi_k(x) \tilde{q}_k(t), \quad (5.22)$$

où K est le nombre de modes transverses retenus dans la base modale, q_k est la coordonnée modale du $k^{\text{ième}}$ mode et où Φ_k est la déformée modale, solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\Phi_k'''' - \omega_k^2 \Phi_k = 0, \quad (5.23)$$

associé au problème (5.21) linéarisé. ω_k est la pulsation propre du mode k .

En injectant (5.22) dans (5.20), on obtient le problème statique discrétisé équivalent :

$$\begin{aligned} \omega_k^2 \hat{q}_k + \varepsilon \hat{N} \sum_{i=1}^K E_i^k \hat{q}_i - K_0^k &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K H_{ij} \hat{q}_i \hat{q}_j - \overline{N_0}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

où E_i^k et H_{ij} sont des coefficients que l'on explicitera dans la prochaine section. On réalise le même cheminement en injectant les équations (5.22) dans (5.21) pour obtenir le nouveau problème dynamique $\forall k$:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k + \varepsilon \hat{N} \sum_{i=1}^K E_i^k \tilde{q}_i + \varepsilon \tilde{N} \sum_{i=1}^K E_i^k \hat{q}_i + \varepsilon \tilde{N} \sum_{i=1}^K E_i^k \tilde{q}_i &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K H_{jl} \hat{q}_j \hat{q}_l - \overline{N_0}, \\ \tilde{N} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K H_{jl} \tilde{q}_j \tilde{q}_l + \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K H_{jl} \tilde{q}_j \hat{q}_l. \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.1.3.1 Remarques

Quelques remarques sur les modèles obtenus peuvent être faites. Dans le problème statique (5.24), on peut d'ores et déjà noter que les deux termes de contraintes initiales interviennent sous les formes :

$$\overline{N_0} = \int_0^1 N_0 dx, \quad (5.26a)$$

$$K_0^i = - \int_0^1 M_0'' \Phi_i dx, \quad (5.26b)$$

où, pour rappel, N_0 et M_0 sont ici adimensionnés. Dans le problème dynamique (5.25), N_0 et M_0 apparaissent à travers \hat{N} et \hat{q}_i .

Dans le cas où les modes sont normalisés par $\int_0^1 \Phi_k^2 dx = 1$, les coefficients non linéaires qui couplent les modes i et j , sont définis tels que :

$$H_{ij} = \int_0^1 \Phi_i' \Phi_j' dx, \quad (5.27)$$

et

$$E_i^j = - \int_0^1 \Phi_j'' \Phi_i dx. \quad (5.28)$$

Ces coefficients de couplage dépendent donc directement des déformées modales linéaires de la structure. En intégrant par partie, on peut montrer que l'équation (5.28) donne :

$$E_i^j = H_{ij} + [\Phi_i' \Phi_j]_0^1. \quad (5.29)$$

Dans le cas où les extrémités sont articulées ou encastées, on a la relation :

$$E_i^j = H_{ij} = \alpha_i^j = \int_0^1 \Phi_i' \Phi_j' dx. \quad (5.30)$$

Les deux problèmes, statique et dynamique, peuvent donc se réécrire, $\forall k$, en fonction que d'un seul coefficient de couplage α_i^j comme :

$$\begin{aligned} \omega_k^2 \hat{q}_k + \varepsilon \hat{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \hat{q}_i - K_0^k &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^K \alpha_i^k \hat{q}_i \hat{q}_k - \overline{N_0}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k + \varepsilon \hat{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \tilde{q}_i + \varepsilon \tilde{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \hat{q}_i + \varepsilon \tilde{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \tilde{q}_i &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j^l \hat{q}_j \hat{q}_l - \overline{N_0}, \\ \tilde{N} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j^l \tilde{q}_j \tilde{q}_l + \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j^l \tilde{q}_j \hat{q}_l. \end{aligned} \quad (5.32)$$

On note que les non-linéarités du problème étudié sont cubiques.

5.1.4 Conditions aux limites et choix de la forme des contraintes initiales

5.1.4.1 Conditions aux limites

On se place dans le cas d'une poutre bi-articulée. Ainsi, les conditions aux limites sont telles que en $x = 0$ et $x = L$, on ait :

$$\begin{cases} u = 0, \\ w = 0, \\ M = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Les modes normaux correspondants sont alors, pour tout k entier non nul :

$$\omega_k = k^2 \pi^2, \quad \Phi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x). \quad (5.34)$$

Dans ce cas, avec l'équation (5.27), les coefficients non linéaires sont donnés par :

$$\alpha_k^k = k^2 \pi^2, \quad \alpha_j^k = 0, \quad \text{pour } j \neq k. \quad (5.35)$$

5.1.4.2 Effort de membrane initial

Il faut maintenant déterminer l'expression de l'effort normal N_0 que l'on va appliquer à la structure, sachant que l'équation (5.13) restreint grandement les possibilités. En effet, seule la valeur moyenne de

la contrainte axiale \overline{N}_0 (voir Eq. (5.26a)) intervient sous la forme d'une constante dans le problème. On ne spécifiera donc pas la dépendance spatiale par la suite.

D'après l'équation (4.5) qui stipule que $\sigma_0 = L\varepsilon^p$, le sens physique des contraintes initiales est identique à celui d'une déformation plastique. Ainsi, dans le cas présent, imposer une force de traction initiale $N_0 > 0$ uniforme correspond à imposer à la structure un déplacement axial plastique uniforme et donc une élongation de la structure. Ce chargement peut aussi être vu comme une contrainte thermique, et donc dans ce cas à une dilatation de la longueur de la structure. En gardant cela à l'esprit, on peut aisément interpréter les résultats de calcul.

5.1.4.3 Moment de flexion initial

Les équations du problème n'imposent pas de forme particulière à M_0 : il peut donc être défini à souhait.

La forme la plus simple est un moment M_0 uniforme sur la longueur de la poutre. Dans l'équation d'équilibre locale (5.20), $M_0(x) = M_0 = cte$ impose M_0'' nul. En revanche, dans les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$, on peut noter que $M = -EIw'' - M_0 = 0$ (voir Eqs (5.33) et (5.5b)). Cela montre qu'imposer un moment initial uniforme à la structure est équivalent à imposer deux moments extérieurs aux extrémités de la poutre. Pour transférer M_0 des conditions aux limites vers l'équation locale, on utilise une fonction de Heaviside (H) de sorte que :

$$M_0(x) = M_0 [H(x - 0) - H(x - L)]. \quad (5.36)$$

Alors, l'équation (5.26b) devient :

$$K_0^k = - \int_0^1 \left(M_0 \frac{d}{dx} [\delta(x - 0) - \delta(x - 1)] \right) \Phi_k dx, \quad (5.37)$$

que l'on peut intégrer par partie, pour obtenir :

$$K_0^k = -M_0 [\Phi_k [\delta(x - 0) - \delta(x - 1)]]_0^1 + M_0 \int_0^1 (\delta(x - 0) - \delta(x - 1)) \Phi_k' dx. \quad (5.38)$$

Compte tenu de la déformée modale donnée par l'équation (5.34), on obtient finalement :

$$K_0^k = 2\sqrt{2}M_0k\pi \quad \forall k \text{ impair}. \quad (5.39)$$

5.1.5 Résolution statique par continuation

La résolution par la méthode asymptotique numérique [16, 34] mise en œuvre dans le logiciel Manlab, présentée succinctement dans le chapitre précédent, nécessite de formuler le problème sous la forme d'un système non linéaire algébrique tel que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0. \quad (5.40)$$

Ici, \mathbf{U} représente le nombre d'équations total du système et λ (paramètre de continuation) est vu comme un paramètre de chargement. Le problème statique (5.31) est pris en compte dans Manlab sous la forme :

$$\begin{aligned}\omega_k^2 \hat{q}_k + \varepsilon \hat{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \hat{q}_i - \lambda K_0^k &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^K \alpha_i^k \hat{q}_i \hat{q}_k - \lambda \bar{N}_0.\end{aligned}\tag{5.41}$$

Ainsi $\mathbf{U} = [q_1, \dots, q_K, \hat{N}]^T$ sera un vecteur de taille $(K + 1)$. Aussi, le paramètre de chargement λ fera croître les contraintes initiales K_0^k et \bar{N}_0 de manière progressive et proportionnelle, ce qui nous permettra de suivre pas à pas les branches bifurquées du problème de flambage. Plus précisément, lorsque $\lambda = 1$, la structure est préchargée, exactement par \bar{N}_0 en effort axial et K_0^k en moment. Manlab impose que le problème soit conservé sous une forme non linéaire quadratique (on aurait pu éliminer \hat{N} dans la première équation du problème (5.41) et obtenir une formulation cubique).

5.1.6 Évolution des fréquences propres

L'évolution des fréquences propres est extraite du problème dynamique et est calculée en post-traitement du problème statique. Pour obtenir l'expression des fréquences propres du système, on cherche à exprimer le problème dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k + \varepsilon \hat{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \tilde{q}_i + \varepsilon \tilde{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \hat{q}_i + \varepsilon \tilde{N} \sum_{i=1}^K \alpha_i^k \tilde{q}_i &= 0, \\ \hat{N} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j^l \hat{q}_l \hat{q}_j - \lambda \bar{N}_0, \\ \tilde{N} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j^l \tilde{q}_j \tilde{q}_l + \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K \alpha_j^l \tilde{q}_j \hat{q}_l,\end{aligned}\tag{5.42}$$

sous la forme : $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ où seuls les termes linéaires sont conservés. Ainsi, en remplaçant les expressions de \hat{N} et \tilde{N} , on trouve :

$$A_{ki} = \omega_k^2 \delta_{ki} + \varepsilon \left(\underbrace{-\lambda \bar{N}_0 \alpha_i^k + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^K \alpha_i^k \alpha_j^l \hat{q}_j \hat{q}_l}_{\hat{N}} + \underbrace{\sum_{j,l=1}^K \alpha_i^k \alpha_j^l \tilde{q}_j \tilde{q}_l}_{\tilde{w}} \right).\tag{5.43}$$

En cherchant la solution de $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ sous la forme $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{v}e^{j\tilde{\omega}t}$, on obtient le problème aux valeurs propres suivant : $(\mathbf{A} - \tilde{\omega}^2 \mathbf{1})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ qui donne les valeurs propres $\tilde{\omega}$ et les vecteurs propres \mathbf{v} . Ceux-ci permettent d'obtenir les déformées modales $\tilde{\Phi}(x) = \sum_{k=1}^K v_k \Phi_k(x)$. Les fréquences linéaires sont finalement obtenues en diagonalisant la matrice \mathbf{A} qui est une matrice symétrique. La valeur de chaque fréquence

propre de la structure non précontrainte ω_k est donc corrigée à la fois par un terme provenant de l'état de contrainte résiduelle (\hat{N}) et d'un terme provenant de la géométrie (\hat{w}), clairement identifiés.

Ainsi, dans le but de quantifier l'action des contraintes résiduelles sur la valeur des fréquences propres, on va calculer $\tilde{\omega}_k$ avec (ou non) le terme provenant de la contrainte résiduelle (\hat{N}).

5.2 Résultats

Les résultats présentés ci-après sont redimensionnés au moyen des équations (5.16). Dans un premier temps, le cas d'un flambage classique est présenté. Pour cela, seule la contrainte initiale axiale est non nulle ($N_0 \neq 0$, $M_0 = 0$). Dans un second temps, les deux contraintes initiales axiale et de flexion seront imposées ($N_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$) et le rapport entre les deux sera ajusté dans le but d'obtenir le profil de déformation relevé expérimentalement. Dans ces deux cas, les résultats statiques sont présentés, ainsi que l'évolution des paramètres dynamiques linéaires en fonction du chargement imposé. Une attention particulière est portée à l'influence respective de l'état de contraintes résiduelles et des modifications de la géométrie, sur ces caractéristiques dynamiques.

5.2.1 Paramètres

Le problème numérique associé au cas d'une poutre bi-articulée soumise à des contraintes initiales en membrane et en flexion est présenté compte tenu des paramètres listés dans le tableau de la figure 5.2. Ceux-ci sont choisis dans le but de comparer les résultats obtenus à l'expérience décrite dans le chapitre 4. Pour cela les paramètres du matériau sont ceux d'un acier standard et les paramètres géométriques ont été mesurés sur le bidon métallique utilisé lors de l'expérience. Il est à noter qu'il y a une forte incertitude sur l'évolution de l'épaisseur au cours de la transformation. En effet, il n'y a aucun moyen non destructif de la mesurer. Pour cela l'épaisseur h choisie ici est l'épaisseur initiale mesurée avant déformation. Dans la littérature, on peut trouver que la réduction d'épaisseur varie entre 0% et 60% au cours de la fabrication d'un steelpan [47]. De plus, elle n'est pas uniforme spatialement, les bords du domaine subissant un étirement moindre que le centre. Le modèle proposé ne tient pas compte de cette variation d'épaisseur. D'autre part, concernant la largeur de la poutre, nous pouvons observer que les paramètres d'adimensionnement (voir Eqs. 5.18), notamment N_a et M_a sont respectivement exprimés en fonction de la surface S et du moment quadratique I de la section qui tous deux dépendent de b . Nous verrons plus tard, par l'équation (5.45), que les contraintes résiduelles sont indépendantes de la valeur de b . Ainsi, le comportement des contraintes résiduelles de la poutre sera identique quelle que soit la valeur de la largeur de sa section.

Épaisseur	$h=0.0013$ m
Longueur	$L=0.567$ m
Module d'Young	$E=210 \times 10^9$ Pa
Masse volumique	$\rho = 7500$ Kg/m ³
Section	$S = b \times h$
Moment quadratique	$I = b \times h^3 / 12$
Convergence	$K = 10$ modes

FIGURE 5.2 – Paramètres du problème 1D mis en œuvre dans Manlab : poutre bi-articulée soumise à des contraintes initiales en membrane et en flexion.

5.2.2 Reconstruction du champ de déplacement et du champ de contraintes résiduelles

Conformément aux équations établies précédemment, la reconstruction du déplacement transverse est telle que :

$$\hat{w}(x) = \sum_{k=1}^{K=10} \Phi_k(x) \hat{q}_k, \quad (5.44)$$

où les \hat{q}_k sont solutions de l'équation (5.41) et les Φ_k sont définis par l'équation (5.34).

Pour obtenir l'état de contraintes résiduelles de la structure, dans sa configuration actuelle, le modèle de poutre utilisé impose que la déformation initiale est affine dans l'épaisseur. En effet, on sait qu'une infinité de déformations initiales imposées à la structure ($\varepsilon_0(z)$) conduisent aux mêmes contraintes généralisées (N_0, M_0). On peut écrire que la déformation initiale est de la forme $\varepsilon_0(z) = az + b$ entre $z = +h/2$ et $z = -h/2$. Dans ce cas, en combinant la loi de comportement donnée par l'équation (5.4) et l'expression des efforts généralisés des équations (5.5), on peut écrire :

$$\sigma_R = \frac{\hat{N}}{S} + z \frac{\hat{M}}{I}, \quad (5.45)$$

où $\hat{N} = \mathring{N} - N_0$ et $\hat{M} = \mathring{M} - M_0$, avec, selon les équations (5.5), $\mathring{N} = ES(u' + \frac{1}{2}w'^2)$ et $\mathring{M} = -EIw''$. Le problème statique (5.41) donne directement la valeur de \hat{N} , et le moment résultant est obtenu à partir du calcul géométrique tel que le décrit l'équation (5.5b). Finalement dans l'équation (5.45), lorsque $z = 0$ on a accès à la valeur de la contrainte résiduelle sur la ligne moyenne de la structure, et en $z = \pm h/2$ on peut obtenir sa valeur en peau. On note ici que les rapports \hat{N}/S et \hat{M}/I , compte tenu des adimensionnements $N_a = ESh^2/L^2$ et $M_a = EIh/L^2$, rendent la valeur de la contrainte indépendante de la largeur b de la section, comme annoncé précédemment.

5.2.3 Cas $N_0 = 0 \neq M_0 = 0$

On présente ici le cas où seul un effort initial de membrane est imposé à la structure, soit $N_0 \neq 0$ et $M_0 = 0$, ce qui conduit au cas d'un flambage classique.

La figure 5.3(a) représente le diagramme de bifurcation, à savoir la flèche en $x = L/2$, en fonction du paramètre de chargement λ , et la figure 5.3(b) montre la déformée associée à certaines valeurs particulières de λ (jusqu'à $\lambda = 0.0437$). On remarque qu'il existe une valeur critique de λ à partir de laquelle le déplacement transverse devient non nul, après une bifurcation fourche. Elle est ici obtenue à $\lambda_{cr} = 0.008$. Cela équivaut à une valeur critique réelle :

$$\overline{N}_{0cr} = \frac{ESh^2}{L^2} \lambda_{cr} \overline{N}_0 \simeq 0.1\text{N} = \frac{\pi^2 Ebh^3}{12L^2}, \quad (5.46)$$

qui est la charge critique d'Euler pour une poutre bi-articulée [9]. Avant cela, il n'y a aucun changement géométrique. À partir de cette valeur, le phénomène de flambage a lieu et la déflexion augmente progressivement. À la fin du calcul présenté ici, la poutre s'est déformée de sorte à obtenir une flèche maximale de l'ordre de 1.5 mm. Le profil de déformation est proche de la forme du premier mode.

Sur les figures 5.3(c) et (d), le diagramme de bifurcation et l'évolution de la déformée statique sont représentés pour des plus grandes valeurs de λ , jusqu'à ce que la déformée statique soit du même ordre de grandeur que le profil du steelpan mesuré au chapitre précédent. Celui-ci est obtenu pour $\lambda \simeq 286.22$. On remarque alors que le profil géométrique du steelpan (représenté en noir sur la figure 5.3(d)) n'est pas retrouvé. On verra dans la section suivante, qu'il est nécessaire d'ajouter un moment initial non nul pour obtenir la bonne forme géométrique.

Les résultats en contraintes sont tracés sur la figure 5.4. Sur les figures 5.4(a) et (c) on peut voir l'évolution de la valeur de la contrainte résiduelle sur la ligne moyenne en fonction du paramètre de chargement λ , d'abord pour le faible chargement ($\lambda_{\max} = 0.0437$, Fig. 5.4(a)) puis jusqu'au chargement final ($\lambda_{\max} = 286.22$, Fig. 5.4(c)). On remarque que celle-ci décroît linéairement jusqu'à la valeur de la charge critique de flambage. En effet, en accord avec l'équation (5.45), comme en $z = 0$, σ_R est directement proportionnelle à \hat{N} et que avant la charge critique de flambage, l'amplitude des déplacements modaux est nulle, on retrouve une droite proportionnelle à l'équation $y = -\lambda \overline{N}_0$. Après la charge critique, σ_R reste constante avec une valeur de $\sigma_R = -9.10^5$ Pa, calculée ici en fonction des paramètres du système, mentionnés dans le tableau de la figure 5.2. On peut alors obtenir une expression analytique de cette constante telle que :

$$\sigma_{Rcr} = \frac{-\lambda_{cr} \overline{N}_0}{S}. \quad (5.47)$$

L'existence de cette constante provient du fait que le modèle de von Kármán ne peut pas prendre en compte une augmentation de \hat{N} . Sa valeur est imposée par l'équation (5.20), lorsque $M_0 = 0$. Ainsi dans l'équation $\hat{w}'''' - \varepsilon \hat{N} \hat{w}'' = 0$, soit $\hat{N} \neq 0$ et $\hat{w} = 0$, soit $\hat{w} \neq 0$ et $\hat{N} = \hat{N}_{cr} = \text{cte}$.

Sur les figures 5.4(b) et (d), on peut voir la valeur de la contrainte résiduelle calculée en peau, d'une part en $z = -h/2$ (courbe verte) correspondant à l'intrados de la courbure et en $z = h/2$ (courbe bleue) correspondant à l'extrados. Tant que la poutre ne flambe pas, les deux courbes sont confondues et décroissent linéairement. L'équation (5.5b) montre que le moment résultant dépend uniquement de la déformée statique de la structure (quand M_0 est nul, comme c'est le cas dans cet exemple). Il est donc cohérent que le second terme de σ_R n'ait aucune influence sur sa valeur tant que la poutre

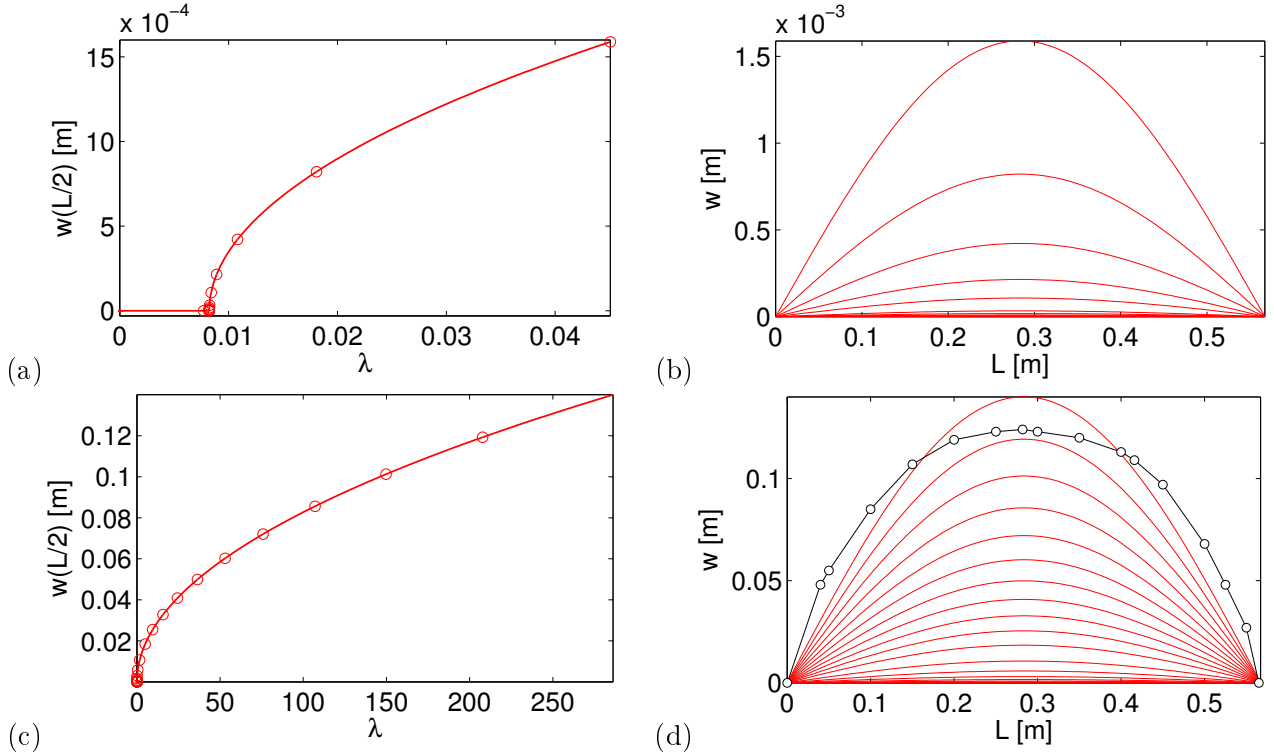


FIGURE 5.3 – Calcul numérique de flambage d’une poutre droite sous contraintes initiales : $\bar{N}_0 = 100$, $M_0 = 0$. (a)-(c) Diagrammes de bifurcation : évolution de la déflexion au centre de la poutre en fonction du chargement. (b)-(d) Profils de déformation de la poutre pour différents pas de chargement. (a)-(b) $\lambda_{\max} = 0.0437$. (c)-(d) $\lambda_{\max} = 286.22$. (—○—) Profil expérimental du steelpan, mesuré au chapitre 4.

ne se déforme pas. Après la charge critique, les valeurs de la contrainte en peau évoluent de manière symétrique. À la fin du calcul, elles sont de signe opposé : on obtient $\sigma_R(+h/2) > 0$ et $\sigma_R(-h/2) < 0$. Soit, l’extrados de la courbure est en traction tandis que l’intrados est en compression.

Enfin on propose de regarder l’évolution des paramètres dynamiques associés aux vibrations linéaires de la poutre subissant cette transformation de type flambage. La figure 5.5 rend compte de l’évolution des quatre premières fréquences propres linéaires redimensionnées et des déformées modales associées. Sur les figures 5.5(a) et (c), on trace chacune des fréquences en fonction du paramètre de chargement. En se référant à l’équation (5.43), sont tracées les valeurs de ces fréquences avec (en pointillés) et sans (en trait plein) la correction issue du terme de contraintes résiduelles et ce pour le chargement faible et jusqu’au λ final. On remarque qu’avant la charge critique, les fréquences linéaires, uniquement dues à la géométrie, sont toutes constantes. Pendant ce temps, le terme de contrainte abaisse leur valeur jusqu’à annuler la première fréquence propre, à l’instant où $\lambda = \lambda_{cr}$. Une fois la charge critique passée, que ce soit avec ou sans contrainte, la valeur reste constante, exceptée pour la première fréquence propre qui augmente progressivement. D’une manière globale, le terme de contrainte apporte juste une correction, mais l’ordre de grandeur des f_k est donné par la variation géométrique. Cette correction reste constante, même pour un chargement important. D’une manière générale, une fois la charge critique

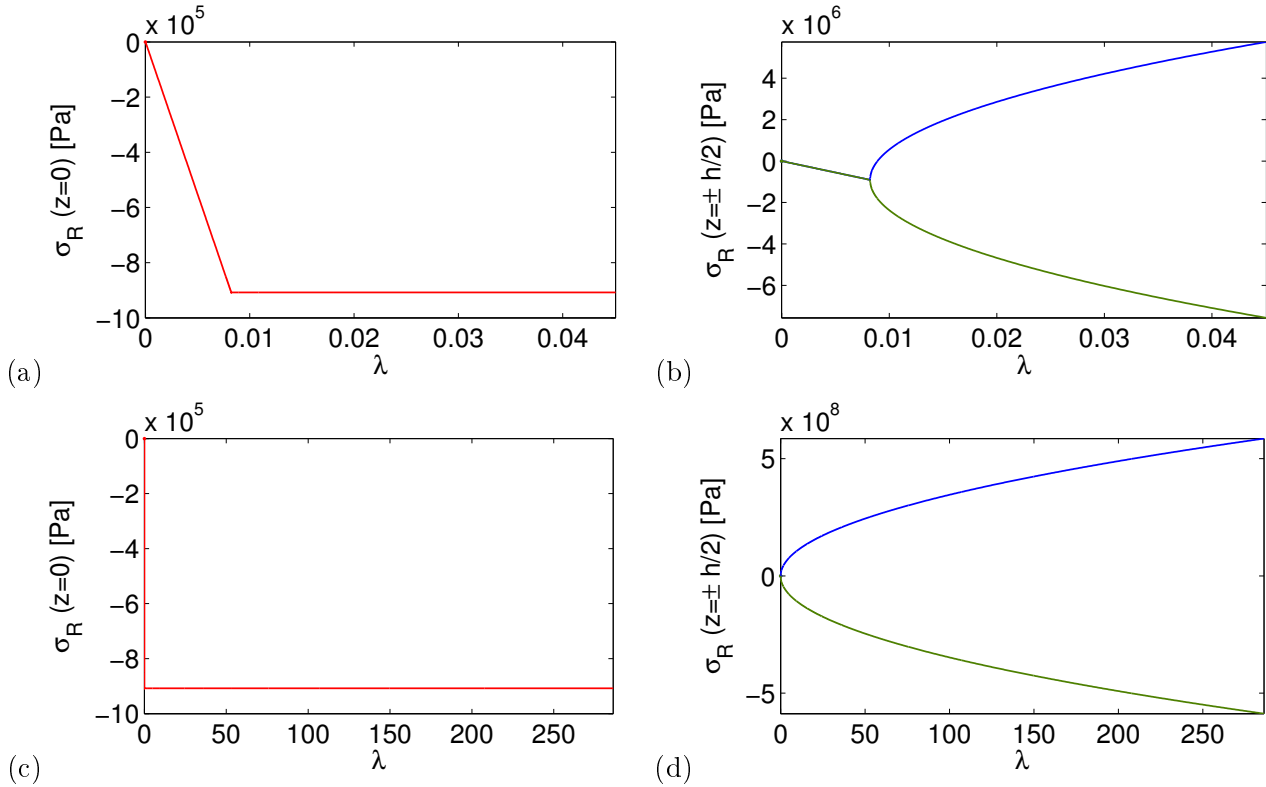


FIGURE 5.4 – Calcul numérique de flambage d’une poutre droite sous contraintes initiales : $\bar{N}_0 = 100$, $M_0 = 0$. $\lambda_{\text{final}} = 0.0437$. (a)-(c) Valeur de la contrainte résiduelle sur la ligne moyenne. (b)-(d) Valeur de la contrainte résiduelle en peau : en $z = h/2$ (bleu) et en $z = -h/2$ (vert). (a)-(b) $\lambda_{\text{max}} = 0.0437$. (c)-(d) $\lambda_{\text{max}} = 286.22$.

de flambage atteinte, on peut noter que l’écart entre les fréquences avec et sans tenir compte du terme de contrainte est constant quelque soit le chargement, car la valeur de σ_R n’évolue plus.

Les figures 5.43(b) et (d) représentent les quatre premières déformées modales associées aux deux valeurs de λ_{final} . En comparant les deux figures, on peut alors observer que le fait que la première fréquence croise les fréquences supérieures, entraîne un croisement entre les déformées modales. En effet, le mode représenté en bleu, qui correspond à la première fréquence propre relevée, est différent entre le premier chargement (avant croisement, Fig. 5.43(b)) et le chargement final (après croisement, Fig. 5.43(d)).

Comme montré sur la figure 5.3(d), le profil de déformation expérimental n’est pas retrouvé dans le cas du flambage classique. La section suivante propose donc un autre cas où $N_0 \neq 0$ et $M_0 \neq 0$.

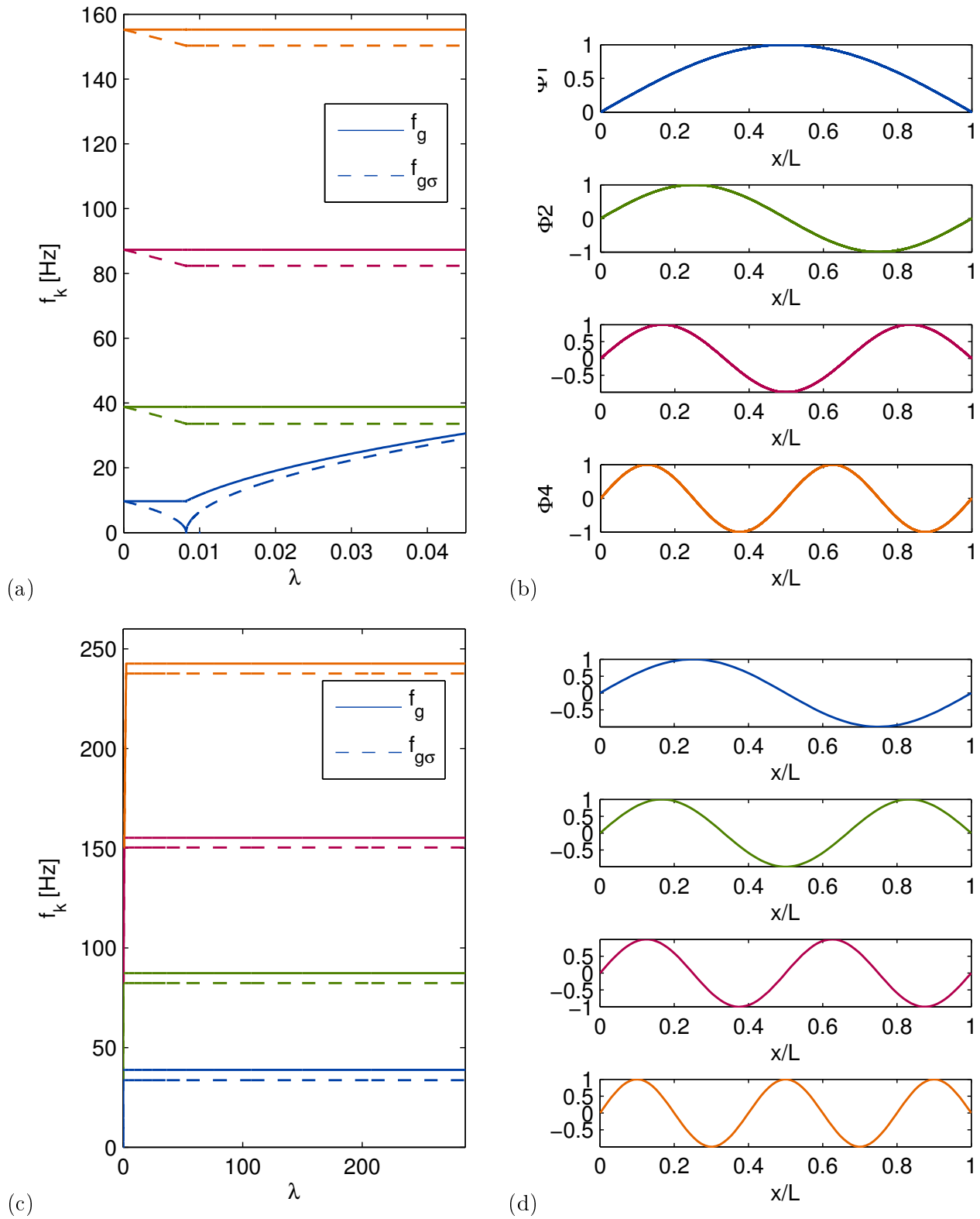


FIGURE 5.5 – Calcul numérique de flambage d’une poutre droite sous contraintes initiales : $\bar{N}_0 = 100$, $M_0 = 0$. $\lambda_{\text{final}} = 0.0437$. (a)-(c) Fréquences propres avec ($f_{g\sigma}$, en tiret) et sans (f_g , en traits pleins) contraintes sur l’ensemble du chargement. (b)-(d) Superposition des déformées modales Φ_k au cours du chargement. (a)-(b) $\lambda_{\text{max}} = 0.0437$. (c)-(d) $\lambda_{\text{max}} = 286.22$.

5.2.4 Cas $N_0 \neq 0$ $M_0 \neq 0$

On s'intéresse maintenant à retrouver le profil expérimental présenté au chapitre 4. Pour cela, on ajoute un moment de flexion initial non nul $M_0 \neq 0$. Comme on peut le voir sur la figure 5.6, le profil expérimental est obtenu par le modèle, lorsque le rapport de contraintes initiales est tel que : $\bar{N}_0 = 10\bar{M}_0$ ($\bar{N}_0 = 100$, $\bar{M}_0 = 10$), et lorsque le paramètre de chargement atteint la valeur : $\lambda_{\text{final}} \simeq 309$. Cela équivaut, en grandeurs redimensionnées, à $\bar{N}_{0\text{final}} \simeq 4440$ N et $M_{0\text{final}} \simeq 0.05$ N.m.

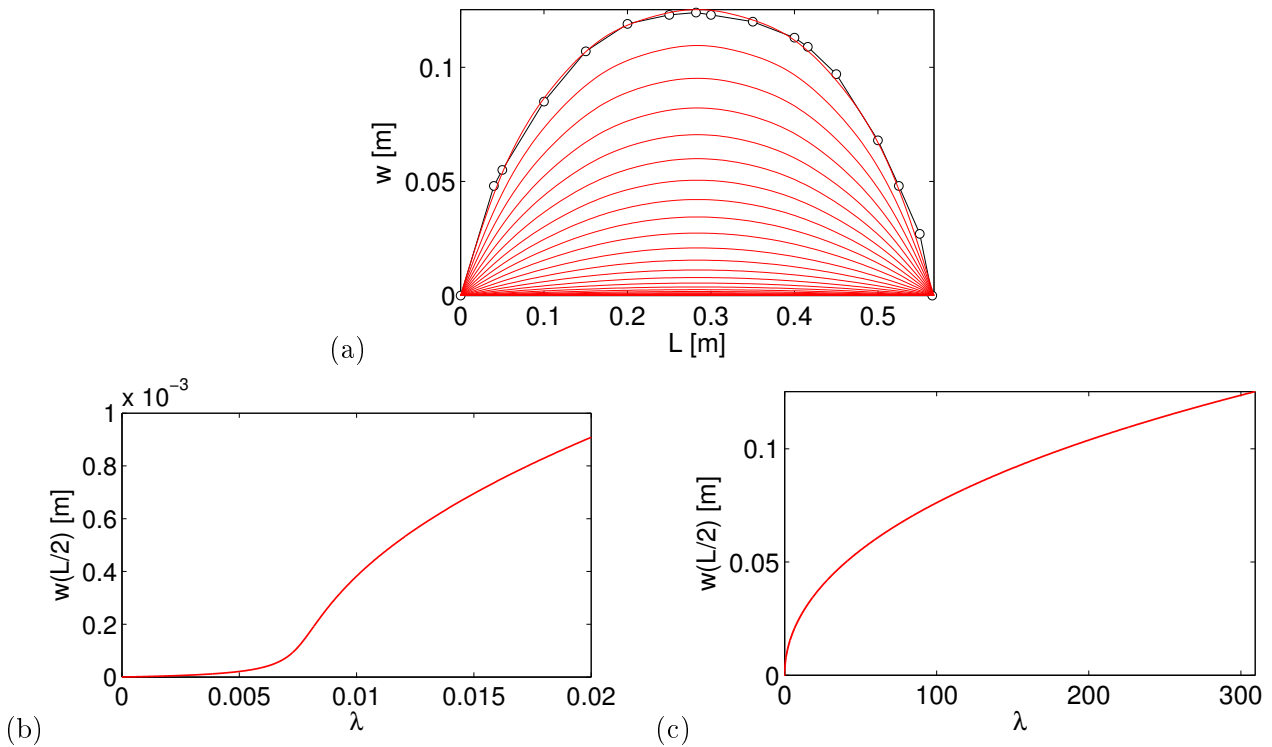


FIGURE 5.6 – Calcul numérique de flambage d’une poutre droite sous contraintes initiales : $\bar{N}_0 = 100$, $\bar{M}_0 = 10$. (a) Ajustement du modèle au profil expérimental lorsque $\lambda_{\text{final}} = 309$. (– o –) Mesure de la déformée d’un steelpan à l’issue de l’étape d’embouti. Représentations du diagramme de bifurcation : (b) au début du chargement. (c) sur l’ensemble du chargement jusqu’à $\lambda_{\text{final}} \simeq 309$.

Le diagramme de bifurcation correspondant est représenté sur les figures 5.6(b) et (c). Plus précisément, la figure 5.6(b) représente le début du chargement, lorsque λ est encore petit. Contrairement au cas précédent, on observe qu’ajouter un moment de flexion initial qui augmente progressivement fait dégénérer le diagramme de bifurcation « idéal ». En effet, on ne voit plus clairement de charge critique à partir de laquelle le déplacement transverse devient non nul. On a alors affaire à une bifurcation imparfaite [25, 37]. La figure 5.6(c) montre la suite de ce diagramme, jusqu’à ce que λ atteigne sa valeur finale. Il nous montre que la flèche ne cesse d’augmenter tant que le chargement croît. À la fin du chargement, l’amplitude du déplacement transverse (\hat{w}) est de l’ordre de cent fois l’épaisseur initiale.

Comme précédemment, on cherche maintenant à observer l’évolution des contraintes résiduelles

au niveau de la ligne moyenne et en peau de la poutre au cours de la déformation. Sur la figure 5.7, on peut voir représenté, en (a) et (c) la contrainte sur la ligne moyenne (en $z = 0$) respectivement pour de faible valeur de λ et sur l'ensemble du chargement ; en (b) et (d) la valeur des contraintes en peau (bleu en $z = h/2$ et vert en $z = -h/2$). On observe alors que pour un chargement très faible, l'ensemble des contraintes décroît. Une fois passée la bifurcation, σ_R en $z = 0$ tend à être constante et négative. En $z = h/2$ et $z = -h/2$, σ_R prend des valeurs différentes avec des signes opposés. On observe alors que $\sigma_R > 0$ sur l'extrados (traction) et $\sigma_R < 0$ (compression) sur l'intrados. Ensuite, plus le chargement augmente, plus les tendances s'inversent. La contrainte en $z = 0$ ré-augmente pour atteindre une valeur positive de l'ordre de 10^5 Pa et les contraintes en peau changent de signe et augmentent jusqu'à atteindre ici une valeur de l'ordre de 10^9 Pa. À la fin du chargement, on a donc une valeur négative sur l'extrados et à l'inverse, elle est positive sur l'intrados. Contrairement au cas du flambage classique et pour de très grands chargements, l'ajout d'un moment initial inverse les tendances, à savoir : l'extrados de la courbure est en compression alors que l'intrados est en traction (comme c'est le cas dans l'expérience mesurée au chapitre 4).

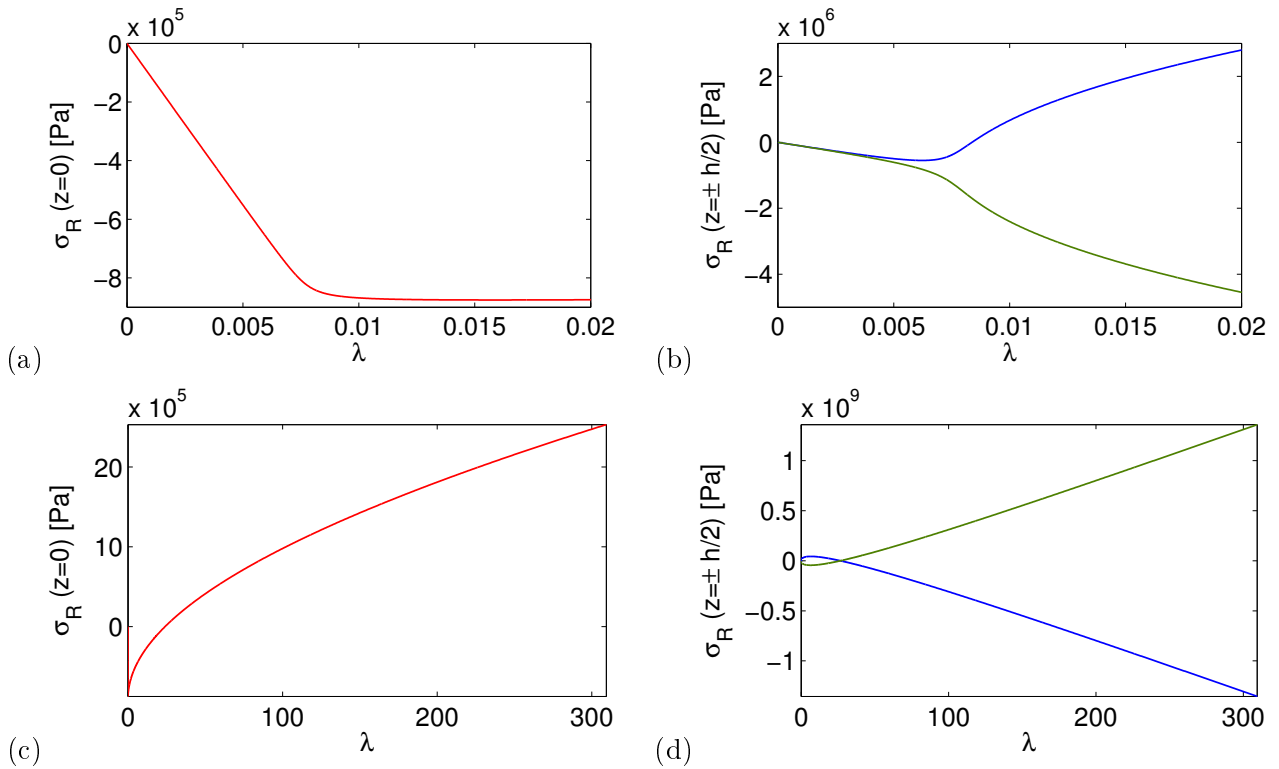


FIGURE 5.7 – Calcul numérique de flambage d'une poutre droite sous contraintes initiales : $\bar{N}_0 = 100$, $\bar{M}_0 = 10$. Ajustement du modèle au profil expérimental. Tracé des contraintes résiduelles : (a) en $z = 0$ pour un faible chargement, (b) en $z = \pm h/2$ (en vert σ^- en bleu σ^+) pour un faible chargement, (c) en $z = 0$ sur l'ensemble du chargement jusqu'à $\lambda = \lambda_{\text{final}}$ (d) en $z = \pm h/2$ (en vert σ^- en bleu σ^+) sur l'ensemble du chargement jusqu'à $\lambda = \lambda_{\text{final}}$.

Enfin, on s'intéresse aux caractéristiques dynamiques (voir Fig. 5.8). On remarque que le change-

ment de signe de la contrainte en peau (directement proportionnelle à la valeur de l'effort axial résultant) inverse la tendance sur le comportement des fréquences. En effet, le terme de contrainte résiduelle commence par diminuer la valeur des fréquences en début de chargement (Fig. 5.8(a)), puis, à partir du changement de signe, les fréquences propres augmentent par rapport à leur valeur provenant du changement géométrique (Fig. 5.8(c)). Cela dit, la valeur globale est due au changement géométrique. Encore une fois, même pour des chargements aussi intenses que celui-ci, la contrainte résiduelle ne joue qu'un rôle correctif. On peut également observer le croisement des modes. Sur la figure 5.8(a), on remarque que la fréquence du mode 1 augmente très rapidement et croise les modes de fréquence supérieure les uns après les autres. En effet les déformées modales se réorganisent à chaque croisement. Pour $\lambda \simeq 0.06$ le mode 1 croise le mode 2. Pour $\lambda \simeq 0.3$ et $\lambda \simeq 1$, il croise le mode 3 puis le mode 4. Sur la figure 5.8(b) qui est associée à $\lambda \simeq 1.8$, on peut noter les croisements progressifs, dans l'ordre d'apparition des déformées modales. Pour le chargement plus important (Fig. 5.8(d)), on remarque que leur forme varie progressivement en fonction du chargement donc en fonction de la déformation de la structure.

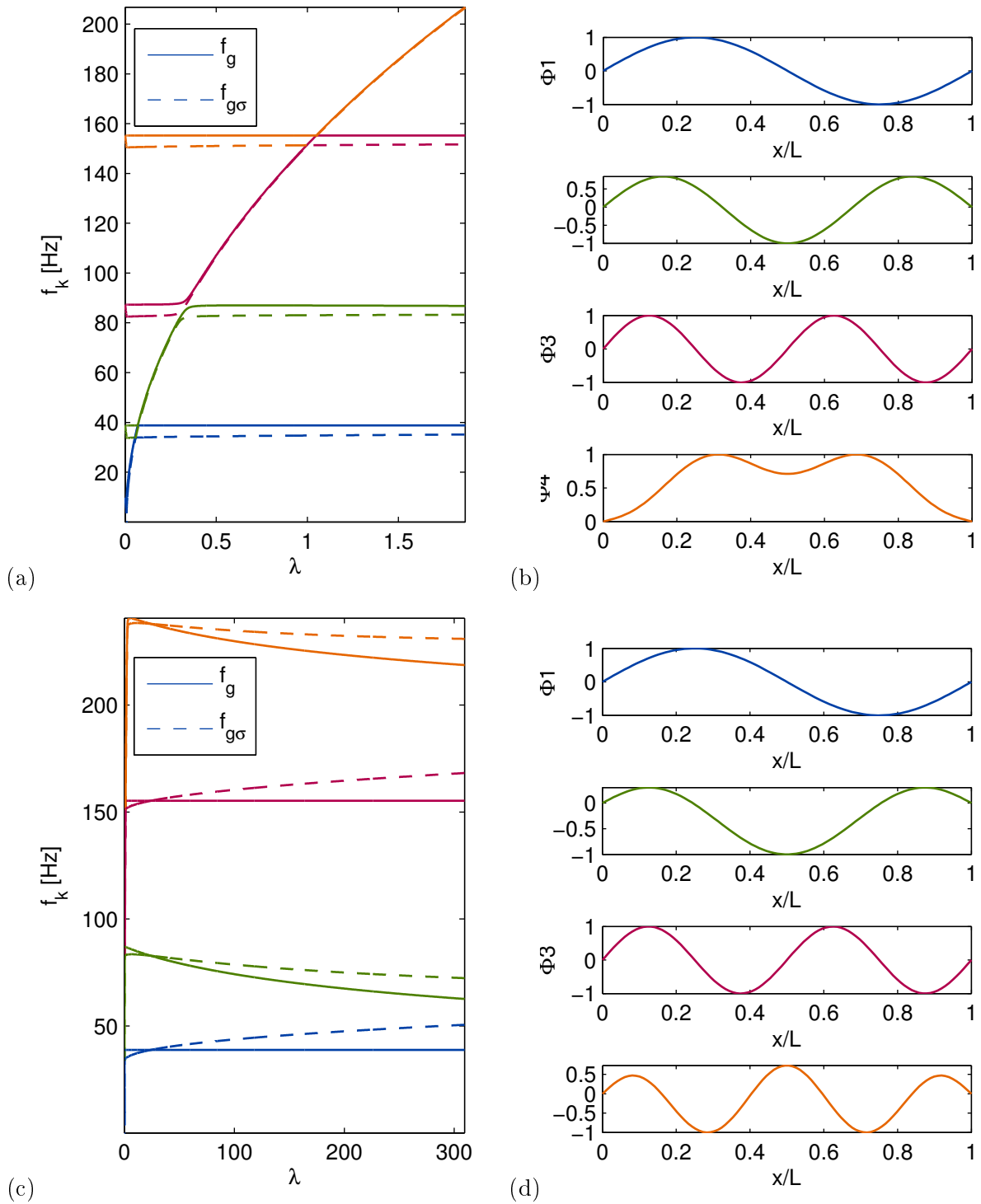


FIGURE 5.8 – Calcul numérique de flambage d’une poutre droite sous contraintes initiales : $\bar{N}_0 = 100$, $\bar{M}_0 = 10$. Ajustement du modèle au profil expérimental. (a)-(c) Évolution des fréquences propres avec (---) et sans (—) terme de correction dû à la contrainte résiduelle. (b)-(d) Allure des déformées modales associées Φ_k à la fin des deux chargements. (a)-(b) $\lambda_{\max} = 1.9$. (c)-(d) $\lambda_{\max} = 309.3$.

5.2.5 Effets des contraintes initiales sur les contraintes résiduelles en peau

Dans le but de présenter un bilan des états contraintes de résiduelles en peau que la poutre est capable de présenter en fonction du chargement initial imposé, la figure 5.9 représente trois cas simples de chargement différents :

- Sur les figures 5.9(a) et (d), on présente le cas où seul un moment initial non nul ($m_0 = 1$) est imposé à la poutre.
- Sur les figures 5.9(b) et (e), on peut voir le cas où un effort axial est non nul ($n_0 = 1$).
- Sur les figures 5.9(c) et (f), un effort axial et un moment initial ($n_0 = 1, m_0 = 1$) sont imposés à la structure.

On remarque alors sur l'ensemble de ces figures, trois états de contraintes résiduelles distincts. Sur le premier cas, lorsque seul un moment de flexion initial est imposé, on peut voir que la poutre est en compression sur l'extrados et en traction sur l'intrados. Dans le second cas, lorsque seul l'effort axial est imposé, c'est l'inverse, la structure est en compression à l'intérieur de la courbure et en traction sur l'extérieur. Enfin, dans le troisième cas, on remarque qu'il y a comme une succession des effets. Au début du chargement l'effort axial domine, la structure est en traction sur l'extrados et compression sur l'intrados. Progressivement, les effets s'échangent, on peut voir que les contraintes inférieure et supérieure se croisent jusqu'à s'annuler et enfin s'inverser pour que la structure soit en traction sur l'intrados et compression sur l'extrados.

5.3 Conclusion sur le modèle 1D

Un modèle unidimensionnel de poutre soumise à un champ de contraintes initiales a été présenté. Fondé sur un modèle d'Euler-Bernoulli associé aux hypothèses de von Kármán, il permet de mettre en évidence des non-linéarités géométriques qui couplent effort de membrane et moment de flexion au cours de la transformation. La structure, une fois déformée sous l'action des contraintes initiales, présente un nouvel état d'équilibre stable. Les vibrations linéaires autour de cet état ont été étudiées en prenant soin de différencier les termes provenant du changement géométrique et ceux provenant de l'état de contraintes résiduelles. Deux cas ont été calculés par la méthode asymptotique numérique. Le premier est un cas de flambage classique où seule une contrainte axiale est imposée. Le second cherche à retrouver le profil de déformation expérimental présenté au chapitre précédent. Dans ces deux cas, on a montré que le terme issu de l'état de contrainte n'apportait qu'une correction aux valeurs des fréquences qui évoluent avec le changement géométrique. Dans le cas du flambage les fréquences sont plus faibles, alors que dans le cas proche de l'expérience, l'existence d'un moment de flexion initial, augmente la valeur des fréquences. Ceci est dû à un changement de signe des contraintes résiduelles.

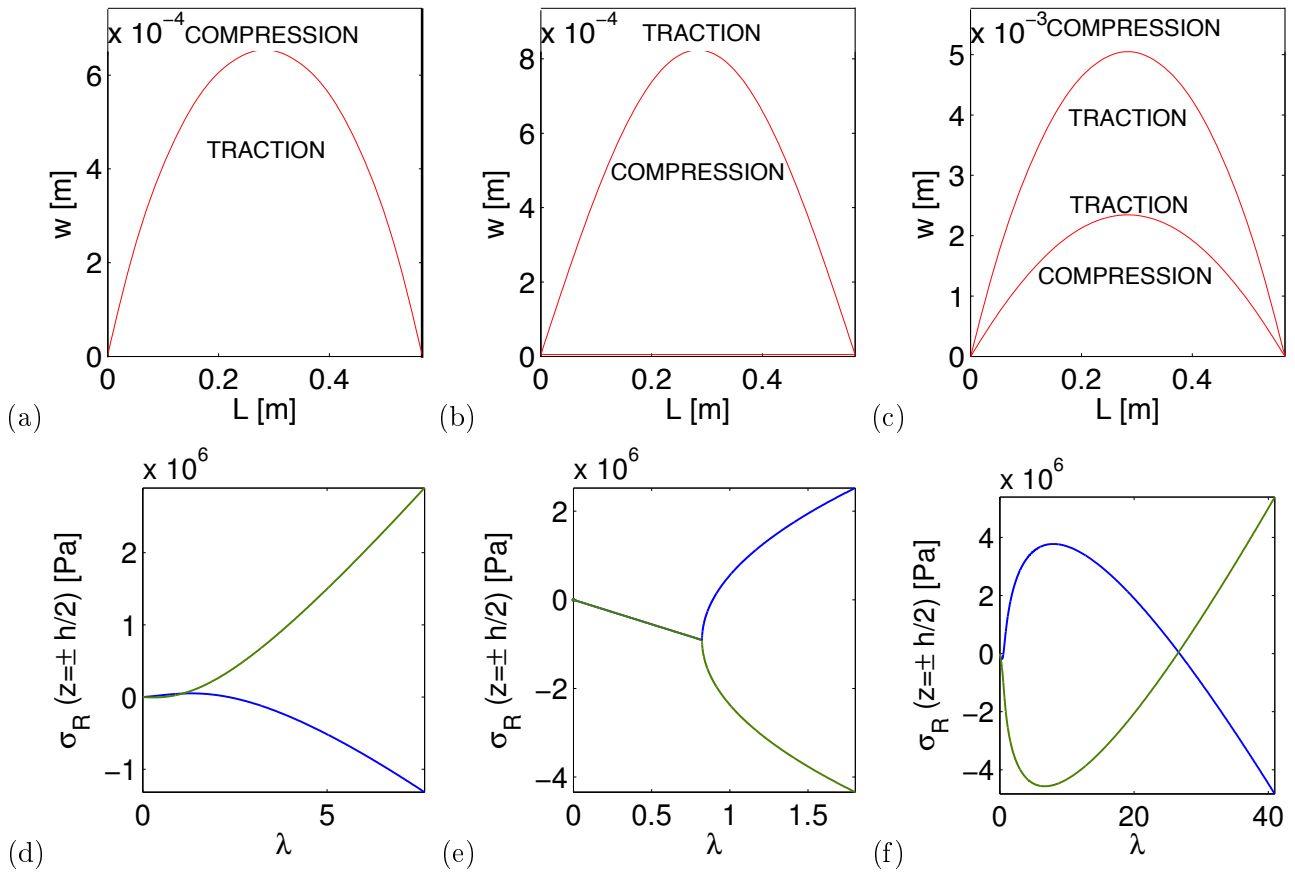


FIGURE 5.9 – (a)-(b)-(c) Déformée statique de la poutre soumise à différents jeux de contraintes initiales . (d)-(e)(f) États de contraintes résiduelles en peau correspondants. Chargements : (a)-(d) : $n_0 = 0$, $m_0 = 1$; (b)-(e) : $n_0 = 1$, $m_0 = 0$; (c)-(f) $n_0 = 1$, $m_0 = 1$.

Chapitre 6

Modèle 2D :

Vibrations de plaques précontraintes

Sommaire

6.1	Modélisation	102
6.1.1	Modèle de plaque sous l'action de contraintes initiales	102
6.1.2	Séparation des problèmes statique et dynamique	105
6.1.3	Projection modale	106
6.1.4	Conditions aux limites et choix de la forme des contraintes initiales	108
6.1.5	Résolution statique par continuation	114
6.1.6	Évolution des fréquences propres	114
6.2	Résultats	115
6.2.1	Paramètres et convergence	115
6.2.2	Reconstruction du champ de déplacement et du champ de contraintes résiduelles	117
6.2.3	Cas $n_0 = 1, m_0 = 0$	117
6.2.4	Comparaison à l'expérience : $n_0 = 1, m_0 = 150$	124
6.2.5	Cas intermédiaire $n_0 = m_0 = 1$	128
6.3	Conclusion sur le modèle 2D	133

Ce chapitre présente un modèle bidimensionnel d'une plaque soumise à un champ de contraintes initiales. De même que dans le cas des poutres, exposé dans le chapitre précédent, cette plaque circulaire plane (configuration de référence) se déforme sous l'action de ce champ et atteint une nouvelle configuration (configuration actuelle) constituée d'une nouvelle géométrie et d'un état de contraintes résiduelles. Les vibrations linéaires autour de cet état statique à l'équilibre seront étudiées dans le but de quantifier l'effet des contraintes résiduelles par rapport à l'effet du changement géométrique sur les fréquences propres.

6.1 Modélisation

6.1.1 Modèle de plaque sous l'action de contraintes initiales

6.1.1.1 Cadre du modèle et hypothèses

On considère une plaque mince circulaire de rayon a et d'épaisseur h . Le matériau est homogène et isotrope, de module d'Young E , de coefficient de poisson ν et de masse volumique ρ . la plaque est soumise à des contraintes initiales décomposées en un effort de membrane \mathbf{N}_0 et un moment de flexion \mathbf{M}_0 (voir Fig. 6.1).

Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre des non-linéarités géométriques. Le modèle de plaque utilisé est celui de Kirchoff-Love. Il est associé au modèle de von Kármán, afin de rendre compte du couplage membrane/flexion au cours de la déformation de la structure. Les hypothèses du chapitre 4 sont précisées comme suit [63, 69, 65] :

- Les hypothèses de Kirchoff-Love sont supposées vérifiées. Tout segment reste perpendiculaire à la surface moyenne. Cela implique notamment que le cisaillement est négligé. Les rotations de la section θ_y et θ_x sont reliées au déplacement transverse w par : $\boldsymbol{\theta} = \nabla w \wedge \mathbf{z}$ ($w_{,x} = -\theta_y$ et $w_{,y} = \theta_x$, où $(\cdot)_{,x} = \partial(\cdot)/\partial x$ et $(\cdot)_{,y} = \partial(\cdot)/\partial y$).
- La cinématique s'écrit selon les coordonnées (u, v, w) de la surface moyenne, où u et v sont les déplacements dans le plan et w le déplacement transverse.
- Les déplacements dans le plan sont d'un ordre inférieur au déplacement transverse : $(u, v) \ll w$.
- D'une part, on se place sous des hypothèses de contraintes planes (σ_{zz} est négligé) et d'autre part les termes de contraintes de cisaillement sont négligés (σ_{xz}, σ_{yz}).

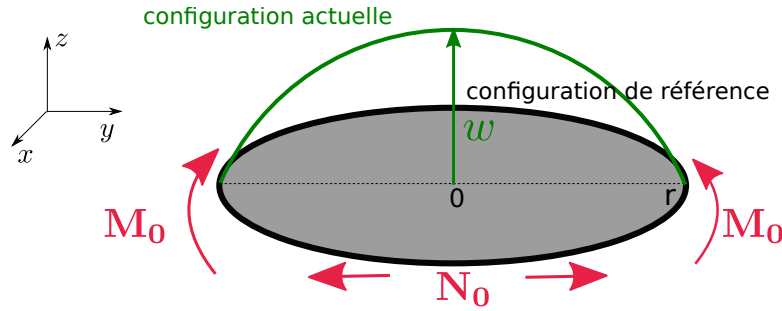


FIGURE 6.1 – Modèle 2D. Déformation d'une plaque circulaire mince sous l'action de contraintes initiales en effort de membrane \mathbf{N}_0 et en flexion \mathbf{M}_0 .

6.1.1.2 Champ de déplacement, de déformation et de contraintes

Dans le repère cartésien (O, x, y, z) , on définit les vecteurs unitaires \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} associés. Sous les hypothèses de Kirchoff-Love, le champ de déplacement \mathbf{U} d'un point M de la plaque s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(M) &= \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \wedge z\mathbf{z} + w\mathbf{z}, \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) - z\nabla w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x})\mathbf{z}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $\mathbf{x} = x\vec{x} + y\vec{y}$ est la position dans le plan de la plaque, z est la coordonnée suivant l'épaisseur de la plaque, $\mathbf{u} = u\vec{x} + v\vec{y}$ est le déplacement dans le plan de la plaque, w est le déplacement transverse, et ∇ le gradient appliqué au champ scalaire w .

Dans le cadre de la théorie de von Kármán, la partie plane du tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit sous la forme [66] :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{membrane}} - \underbrace{z\boldsymbol{\kappa}}_{\text{flexion}}, \quad (6.2)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} + \nabla w \otimes \nabla w) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla\nabla w. \quad (6.3)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ est la composante membranaire du tenseur des déformations et $\boldsymbol{\kappa}$ la composante en flexion. La partie non linéaire géométrique, due aux hypothèses de von Kármán apparaît dans $\boldsymbol{\varepsilon}$. \otimes est le produit tensoriel.

Compte tenu de champ de contraintes initiales que l'on souhaite appliquer à la structure, la loi de comportement du problème bidimensionnel est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_0. \quad (6.4)$$

Elle relie la partie plane du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au tenseur des déformations résultant $\boldsymbol{\varepsilon}$ via l'opérateur d'élasticité \mathbf{L} , et au tenseur des contraintes initiales $\boldsymbol{\sigma}_0$ imposées à la structure. On en déduit l'expression des efforts généralisés en membrane et en flexion sous la forme :

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = A [(1 - \nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1}] - \mathbf{N}_0, \quad (6.5a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z\boldsymbol{\sigma} dz = -D [(1 - \nu)\nabla\nabla w + \nu\Delta w\mathbf{1}] - \mathbf{M}_0, \quad (6.5b)$$

où $A = Eh/(1 - \nu^2)$ et $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ sont respectivement la raideur de membrane et la raideur en flexion de la plaque. Identiquement au modèle 1D, on exprime le champ de contraintes initiales par des efforts généralisés initiaux en membrane \mathbf{N}_0 et en flexion \mathbf{M}_0 .

NB : On définit, par la suite, ces efforts généralisés comme possédant un terme « standard » affecté du symbole (\circ) et d'un terme provenant de la contrainte initiale, indicé de (0) :

$$\mathbf{N} = \mathring{\mathbf{N}} - \mathbf{N}_0, \quad (6.6a)$$

$$\mathbf{M} = \mathring{\mathbf{M}} - \mathbf{M}_0, \quad (6.6b)$$

soient $\mathring{\mathbf{N}} = A [(1 - \nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1}]$ et $\mathring{\mathbf{M}} = -D [(1 - \nu)\nabla\nabla w + \nu\Delta w\mathbf{1}]$.

6.1.1.3 Équations d'équilibre : formulation en (F, w)

Les développements mathématiques qui suivent visent à établir les équations de plaques issues de la théorie de von Kármán. Ils sont inspirés de travaux réalisés auparavant [63, 70, 73, 66, 69, 65]. Dans notre cas, le chargement extérieur est exprimé en fonction des contraintes généralisées initiales,

composées d'un terme en membrane (\mathbf{N}_0) et d'un terme en flexion (\mathbf{M}_0).

Les équations d'équilibre issues du problème de von Kármán, sont :

$$-\mathbf{div}\mathbf{N} + \rho h \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}, \quad (6.7a)$$

$$-\mathbf{div}\mathbf{div}\mathbf{M} - \underbrace{\mathbf{div}(\mathbf{N}\nabla w)}_{\text{membrane/flexion}} + \rho h \ddot{w} = 0, \quad (6.7b)$$

où \mathbf{n} est un chargement exercé dans le plan. En considérant qu'il n'y a aucun chargement dans le plan, dans l'équation (6.7a), on pose $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. L'inertie de membrane est aussi négligée, ce qui implique que $\rho h \ddot{\mathbf{u}} \ll \mathbf{div}\mathbf{N}$. Cela a pour conséquence que l'équation (6.7a) devient :

$$\mathbf{div}\mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (6.8)$$

On peut alors montrer qu'il existe une fonction scalaire $F(x, y)$, appelée fonction de force (ou fonction d'Airy) qui vérifie la relation :

$$\mathbf{N} = \Delta F \mathbf{1} - \nabla \nabla F. \quad (6.9)$$

Considérant l'expérience du chapitre 4, la plaque de notre problème est circulaire. Pour cela, on peut réécrire l'ensemble des équations en coordonnées polaires, où les variables géométriques dans le plan deviennent r et θ . On montre alors que l'équation (6.9) se décompose pour donner les équivalences, entre fonction d'Airy et effort de membrane, suivantes :

$$\begin{cases} N_{rr} = \frac{F_{,r}}{r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta}, \\ N_{\theta\theta} = F_{,rr}, \\ N_{r\theta} = \frac{1}{r^2} F_{,\theta} - \frac{1}{r} F_{,r\theta}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Finalement, nous obtenons trois équations d'équilibre (6.7b), (6.8) et (6.9). Compte tenu des quatre inconnues du problème en effort et déplacement transverse $\{N_{rr}, N_{\theta\theta}, N_{r\theta}, w\}$, la résolution nécessite une quatrième équation que l'on nomme équation de compatibilité et qui s'écrit :

$$\Delta \Delta F = -\frac{Eh}{2} L(w, w), \quad (6.11)$$

où L est un opérateur bilinéaire qui, lorsqu'il s'applique à deux fonctions f et g , est de la forme :

$$L(f, g) = f_{,rr} \left(\frac{g_{,r}}{r} + \frac{g_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + g_{,rr} \left(\frac{f_{,r}}{r} + \frac{f_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left(\frac{f_{,r\theta}}{r} - \frac{f_{,\theta}}{r^2} \right) \left(\frac{g_{,r\theta}}{r} - \frac{g_{,\theta}}{r^2} \right). \quad (6.12)$$

On cherche ensuite à écrire le problème selon le déplacement transverse w et la fonction d'Airy F . Compte tenu de la relation qu'il existe entre N et F , on peut faire apparaître la contrainte initiale en membrane sous la forme $F = \overset{\circ}{F} - F_0$ à condition que \mathbf{N} et \mathbf{N}_0 vérifient séparément l'équation (6.8). C'est une contrainte forte sur la forme de \mathbf{N}_0 . Finalement, la formulation du problème est :

$$\begin{aligned} D \Delta \Delta w + \rho h \ddot{w} &= L(w, \overset{\circ}{F}) - L(w, F_0) - \mathbf{div}\mathbf{div}\mathbf{M}_0, \\ \Delta \Delta \overset{\circ}{F} &= -\frac{Eh}{2} L(w, w) + \Delta \Delta F_0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

où w est donc le déplacement transverse de la plaque et F le chargement dans le plan. On reconnaît alors la formulation classique des plaques de von Kármán, à laquelle ont été ajoutés des termes de contraintes initiales que l'on applique à la structure (effort de membrane et moment de flexion initiaux).

6.1.1.4 Adimensionnement

On choisit d'adimensionner les équations (6.13) en prenant comme échelle caractéristique, pour le déplacement transverse w , l'épaisseur h . Ainsi, on définit les variables sans dimension suivantes :

$$r = a\bar{r} \quad ; \quad t = T_0\bar{t} \quad ; \quad w = h\bar{w} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{N}_0 = N_a\bar{\mathbf{N}}_0 \quad ; \quad \mathbf{M}_0 = M_a\bar{\mathbf{M}}_0 \quad ; \quad F_0 = F_a\bar{F}_0 \quad (6.15)$$

On en déduit les coefficients d'adimensionnement suivants :

$$T_0 = a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad ; \quad N_a = \frac{Eh^3}{a^2} \quad ; \quad M_a = \frac{Dh}{a^2} \quad ; \quad F_a = Eh^3 \quad (6.16)$$

Le problème (6.13) adimensionné devient alors :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w + \ddot{w} &= \varepsilon L(w, \hat{F}) - \varepsilon L(w, F_0) - \text{div}\mathbf{div}\mathbf{M}_0, \\ \Delta\Delta \hat{F} &= -\frac{1}{2}L(w, w) + \Delta\Delta F_0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Il ne dépend plus que d'un paramètre sans dimension : $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$.

NB : Les barres au dessus des variables sans dimension n'ont pas été mentionnées et ne le seront pas non plus dans la suite de l'étude, afin de ne pas alourdir les notations.

Finalement, l'équation (6.17) donne le problème global adimensionné d'une plaque circulaire soumise à un champ de contraintes initiales divisé en un effort de membrane F_0 et un moment de flexion M_0 .

6.1.2 Séparation des problèmes statique et dynamique

Dans le but de séparer le problème global (6.17) en un problème statique et un problème dynamique, on pose les équations suivantes :

$$\begin{cases} w = \hat{w} + \tilde{w}, \\ \hat{F} = \hat{F} + \tilde{F}, \end{cases} \quad (6.18)$$

où (\hat{w}, \hat{F}) représentent les variables statiques, à savoir géométrie et état de contraintes résultant et (\tilde{w}, \tilde{F}) sont les variables dynamiques associées. Ainsi, on va chercher à mettre en évidence l'effet du changement de la géométrie et l'état de contraintes résiduelles sur les vibrations de la structure autour de sa position statique à l'équilibre. Pour cela, on insère les équations (6.18) dans le problème global adimensionné (6.17), et on obtient :

- le problème statique adimensionné :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta \hat{w} &= \varepsilon L(\hat{w}, \hat{F}) - \varepsilon L(\hat{w}, F_0) - \text{div}\mathbf{div}\mathbf{M}_0, \\ \Delta\Delta \hat{F} &= -\frac{1}{2}L(\hat{w}, \hat{w}) + \Delta\Delta F_0, \end{aligned} \quad (6.19)$$

- et le problème dynamique adimensionné :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} &= \underbrace{\varepsilon L(\hat{w}, \tilde{F})}_{\text{géométrie}} + \underbrace{\varepsilon L(\tilde{w}, \hat{F}) - \varepsilon L(\tilde{w}, F_0)}_{\text{contraintes résiduelles}} + \underbrace{\varepsilon L(\tilde{w}, \tilde{F})}_{\text{N.L}}, \\ \Delta\Delta\tilde{F} &= -\frac{1}{2} \left[2L(\hat{w}, \tilde{w}) + \underbrace{L(\tilde{w}, \tilde{w})}_{\text{N.L}} \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Sous cette forme, dans l'équation (6.20) qui caractérise les vibrations autour de l'équilibre statique obtenu, on peut voir clairement apparaître les termes dus à la géométrie d'une part et à l'état de contraintes résiduelles d'autre part. On peut également noter que certains termes non linéaires sont présents dans le problème dynamique. Sachant que nous nous concentrons, dans cette étude, sur les vibrations linéaires autour de l'état statique, la forme simplifiée de (6.20) sera :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} &= \underbrace{\varepsilon L(\hat{w}, \tilde{F})}_{\text{géométrie}} + \underbrace{\varepsilon L(\tilde{w}, \hat{F}) - \varepsilon L(\tilde{w}, F_0)}_{\text{contraintes résiduelles}}, \\ \Delta\Delta\tilde{F} &= -L(\hat{w}, \tilde{w}). \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.1.3 Projection modale

On décompose les variables du problème sur la base des modes propres linéaires associés à la plaque parfaite. Ainsi la partie statique et la partie dynamique du déplacement transverse sont réécrits comme :

$$\hat{w}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(r, \theta) \hat{q}_k, \quad \text{et} \quad \tilde{w}(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(r, \theta) \tilde{q}_k(t), \quad (6.22)$$

où N_w est le nombre de modes transverses retenu dans la base modale, où q_k est la coordonnée modale et Φ_k l'amplitude de la déformée modale linéaire solution du problème spatial associé :

$$\Delta\Delta\Phi_k - \xi_k^4 \Phi_k = 0, \quad (6.23)$$

où pour chaque mode k , $\xi_k^4 = \omega_k^2$ est la valeur propre. Les ω_k représentent alors les pulsations propres associées à chaque mode de flexion k .

Il en est de même pour la composante en effort. On décompose les composantes statique et dynamique de F sur la base modale linéaire associée :

$$\hat{F}(r, \theta) = \sum_{j=1}^{N_F} \Psi_j(r, \theta) \hat{\eta}_j, \quad \text{et} \quad \tilde{F}(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{N_F} \Psi_j(r, \theta) \tilde{\eta}_j(t), \quad (6.24)$$

où N_F est le nombre de modes de membrane retenu dans la base modale, les Ψ_j sont les déformées modales des modes de membrane et les η_j sont les coordonnées modales associées. Ici, le problème spatial s'écrit :

$$\Delta\Delta\Psi_j - \zeta_j^4 \Psi_j = 0, \quad (6.25)$$

où les ζ_j^4 sont les valeurs propres des modes de membrane.

NB : N_w et N_F seront respectivement le nombre total de modes de flexion et de modes de membranes retenus dans les bases modales linéaires utiles à la projection, afin d'obtenir des solutions convergées. Aussi, les modes Φ_k et Ψ_j sont supposés orthonormés.

En injectant (6.22) et (6.24) dans (6.19), on obtient le problème statique équivalent projeté, $\forall k \in [1 : N_w]$ et $\forall j \in [1 : N_F]$:

$$\begin{aligned} \omega_k^2 \hat{q}_k - \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} E_{pj}^k \hat{q}_p \hat{\eta}_j + \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} G_p^k \hat{q}_p + K^k &= 0, \\ \zeta_j^4 \hat{\eta}_j + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \hat{q}_q - f_j &= 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

et en injectant (6.22) et (6.24) dans (6.21), on obtient cette fois le problème dynamique projeté $\forall k$ et $\forall j$:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} E_{rj}^k \hat{q}_r \tilde{\eta}_j - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} E_{rj}^k \hat{\eta}_j \tilde{q}_r + \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} G_r^k \tilde{q}_r &= 0, \\ \tilde{\eta}_j = -\frac{1}{\zeta_j^4} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \tilde{q}_q. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Plusieurs coefficients de couplage apparaissent maintenant dans les équations du problème et sont définis tels que :

$$E_{pj}^k = \frac{\iint_S \Phi_k L(\Phi_p, \Psi_j) dS}{\iint_S \Phi_k^2 dS} \quad G_p^k = \frac{\iint_S \Phi_k L(\Phi_p, F_0) dS}{\iint_S \Phi_k^2 dS} \quad K^k = \frac{\iint_S \Phi_k \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M}_0 dS}{\iint_S \Phi_k^2 dS} \quad (6.28) \quad (6.29) \quad (6.30)$$

$$H_{pq}^j = \frac{\iint_S \Psi_j L(\Phi_p, \Phi_q) dS}{\iint_S \Psi_j^2 dS} \quad f_j = \frac{\iint_S \Psi_j \Delta \Delta F_0 dS}{\iint_S \Psi_j^2 dS}. \quad (6.31) \quad (6.32)$$

On peut alors retrouver les contraintes initiales généralisées (F_0 et \mathbf{M}_0) dans les coefficients G_p^k et f_j pour F_0 et K^k pour \mathbf{M}_0 .

Finalement, dans les systèmes projetés (voir Eqs. (6.26) et (6.27)), on observe un ensemble de modes de membrane (η_j) et de modes de flexion (q_k), qui peuvent être soit statiques ($\dot{\cdot}$) soit dynamiques ($\ddot{\cdot}$) et qui sont couplés par les coefficients non linéaires. On peut alors faire une remarque sur le choix des modes qui seront conservés dans la projection du problème. En effet, nous cherchons à rendre compte de la géométrie obtenue à la suite de l'expérience d'embouti décrite au chapitre 4. Grâce à la symétrie que présente la calotte sphérique résultante, on peut réduire notre problème statique aux

modes axisymétriques uniquement. En revanche, le problème dynamique peut être étendu à l'ensemble des modes axisymétriques et asymétriques de la structure. En effet, même si la déformée statique est axisymétrique, les caractéristiques vibratoires des modes asymétriques s'en trouveront affectés par la géométrie et les contraintes résiduelles. Il est donc légitime de les conserver afin d'en prédire l'effet. Ainsi seules les variables munies du symbole ($\hat{\cdot}$) seront associées aux modes axisymétriques. Les variables munies du symbole ($\tilde{\cdot}$) pourront prendre en compte à la fois les modes axisymétriques et asymétriques du problème.

6.1.4 Conditions aux limites et choix de la forme des contraintes initiales

6.1.4.1 Conditions aux limites

Dans le but de se rapprocher le plus possible de la première étape de fabrication des steelpan, les conditions aux limites de la plaque circulaire sont encastées. Cela implique l'équivalence suivante [66] :

$$E_{pj}^q = H_{pq}^j. \quad (6.33)$$

Ainsi les problèmes projetés statique (6.26) et dynamique (6.27) peuvent alors être simplifiés comme suit. $\forall k$ et $\forall j$ on a :

$$\begin{aligned} \omega_k^2 \hat{q}_k - \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{pk}^j \hat{q}_p \hat{\eta}_j + \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} G_p^k \hat{q}_p + K^k &= 0, \\ \zeta_j^4 \hat{\eta}_j + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \hat{q}_q - f_j &= 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{rk}^j \hat{q}_r \tilde{\eta}_j - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{rk}^j \hat{\eta}_j \tilde{q}_r + \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} G_r^k \tilde{q}_r &= 0, \\ \tilde{\eta}_j = -\frac{1}{\zeta_j^4} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \tilde{q}_q. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Aussi, afin de calculer l'ensemble des coefficients de couplages du problème, il devient nécessaire de développer les conditions aux limites vérifiées par le déplacement transverse et l'effort de membrane en $r = R$ [61, 62, 50, 49, 27]. $\forall \theta$ et pour $r = R$, on a :

$$w(R, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad w_{,r}(R, \theta) = 0, \quad (6.36)$$

et

$$\begin{cases} F_{,rrr} - \nu \left(\frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) = 0, \\ F_{,rrr} + \frac{F_{,rr}}{r} - \frac{F_{,r}}{r^2} + \frac{2+\nu}{r^2} F_{,r\theta\theta} - \frac{3+\nu}{r^3} F_{,\theta\theta} = 0. \end{cases} \quad (6.37)$$

On note que les équations (6.37) diffèrent légèrement des conditions aux limites d'une plaque circulaire libre. Les travaux précédemment réalisés au laboratoire ayant été réalisés sur des plaques circulaires libres [67, 70], les développements analytiques ont dû être adaptés aux nouvelles conditions aux limites

proposées dans cette étude.

Les conditions aux limites du déplacement dans le plan et du déplacement transverse doivent être vérifiées, pour chaque mode, par $\Phi_k(r, \theta)$ et $\Psi_j(r, \theta)$. On réécrit les conditions aux limites comme :

$$\Phi(R, \theta) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{,r}(R, \theta) = 0, \quad (6.38)$$

et

$$\begin{cases} \Psi_{,rrr} - \nu \left(\frac{\Psi_{,r}}{r} + \frac{\Psi_{,\theta\theta}}{r^2} \right) = 0, \\ \Psi_{,rrr} + \frac{\Psi_{,rr}}{r} - \frac{\Psi_{,r}}{r^2} + \frac{2+\nu}{r^2} \Psi_{,r\theta\theta} - \frac{3+\nu}{r^3} \Psi_{,\theta\theta} = 0. \end{cases} \quad (6.39)$$

La géométrie circulaire entraîne que Φ et Ψ sont respectivement solutions d'équations de Bessel ordinaires et modifiées, alors pour chaque mode k on a [24] :

$$\begin{aligned} \Phi_k(r, \theta) = & [A_{1k}J_k(\xi r) + A_{3k}Y_k(\xi r) + A_{2k}I_k(\xi r) + A_{4k}K_k(\xi r)] \cos k\theta + \\ & [B_{1k}J_k(\xi r) + B_{3k}Y_k(\xi r) + B_{2k}I_k(\xi r) + B_{4k}K_k(\xi r)] \sin k\theta. \end{aligned} \quad (6.40)$$

où J_k et Y_k sont des fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre k et $I_k(\cdot) = J_k(i\cdot)$ et $K_k(\cdot) = Y_k(i\cdot)$ sont les fonctions de Bessel modifiées.

En considérant que la solution doit rester finie au centre de la plaque, cela implique l'élimination des fonctions Y_k et K_k qui tendent vers l'infini en $r = 0$. Alors on réécrit :

$$\Phi_k(r, \theta) = [A_{1k}J_k(\xi r) + A_{2k}I_k(\xi r)] \cos k\theta + [B_{1k}J_k(\xi r) + B_{2k}I_k(\xi r)] \sin k\theta. \quad (6.41)$$

Il en est de même pour les modes de membrane, où pour chaque mode j , on a :

$$\Psi_j(r, \theta) = [A_{1j}J_j(\zeta r) + A_{2j}I_j(\zeta r)] \cos j\theta + [B_{1j}J_j(\zeta r) + B_{2j}I_j(\zeta r)] \sin j\theta. \quad (6.42)$$

On peut alors montrer que pour chaque valeur non nulle de k , il existe deux séries de modes indépendants : une en sinus et une en cosinus qui possèdent la même partie radiale ainsi on écrit :

$$\Phi_k(r, \theta) = R_k(r) \begin{vmatrix} \cos(k\theta) \\ \sin(k\theta) \end{vmatrix}, \quad (6.43)$$

et pour les modes de membranes, on écrit :

$$\Psi_j(r, \theta) = S_j(r) \begin{vmatrix} \cos(j\theta) \\ \sin(j\theta) \end{vmatrix}. \quad (6.44)$$

Lorsque $k = 0$ ou $j = 0$, une seule série de modes est obtenue. Ces modes ne dépendent pas de θ et sont qualifiés d'axisymétriques. Si $k \neq 0$ (respectivement $j \neq 0$), ces modes sont asymétriques.

Tous calculs faits, on trouve :

– pour le déplacement transverse :

$$\begin{aligned}\Phi_{0M}(r, \theta) &= R_{0M}(r) && \text{pour } L = 0, \\ \Phi_{LM1}(r, \theta) &= R_{LM}(r) \cos L\theta && \text{pour } L > 0, \\ \Phi_{LM2}(r, \theta) &= R_{LM}(r) \sin L\theta && \text{pour } L > 0,\end{aligned}\tag{6.45}$$

avec

$$R_{LM}(r) = \lambda_{LM} \left[J_k(\xi_{LM}r) - \frac{J_k(\xi_{LM})}{I_k(\xi_{LM})} I_k(\xi_{LM}r) \right],\tag{6.46}$$

où ξ_{LM} est la M -ième solution de l'équation :

$$J_{L-1}(\xi)I_L(\xi) - I_{L-1}(\xi)J_L(\xi) = 0.\tag{6.47}$$

La constante λ_{LM} est choisie de sorte que les modes soient normalisés par $\iint_S \Phi_k^2(x) dS = 1$.

– et pour l'effort de membrane :

$$\begin{aligned}\Psi_{0m}(r, \theta) &= S_{0m}(r) && \text{pour } l = 0, \\ \Psi_{lm1}(r, \theta) &= S_{lm}(r) \cos l\theta && \text{pour } l > 0, \\ \Psi_{lm2}(r, \theta) &= S_{lm}(r) \sin l\theta && \text{pour } l > 0,\end{aligned}\tag{6.48}$$

avec

$$S_{lm}(r) = \kappa_{lm} \left[J_l(\zeta r) - \frac{\tilde{J}_l(\zeta_{lm})}{\tilde{I}_l(\zeta_{lm})} I_l(\zeta r) \right],\tag{6.49}$$

où

$$\begin{cases} \tilde{J}_l = R^2 \zeta^2 J_{l-2}(\zeta r) + R\zeta(-\nu - 2l + 1)J_{l-1}(\zeta r) + (l(l+1) + \nu l(1-l))J_l(\zeta r), \\ \tilde{I}_l = R^2 \zeta^2 I_{l-2}(\zeta r) + R\zeta(-\nu - 2l + 1)I_{l-1}(\zeta r) + (l(l+1) + \nu l(1-l))I_l(\zeta r), \end{cases}\tag{6.50}$$

et où ζ_{lm} est la m -ième solution de l'équation :

$$\begin{aligned}\tilde{I}(\zeta^3 J_{l-3} + (4 - 3l)\zeta^2 J_{l-2} + l(l(1-\nu) - 2)\zeta J_{l-1} + l^2(1+l)J_l) \\ - \tilde{J}(\zeta^3 I_{l-3} + (4 - 3l)\zeta^2 I_{l-2} + l(l(1-\nu) - 2)\zeta I_{l-1} + l^2(1+l)I_l) = 0.\end{aligned}\tag{6.51}$$

La constante κ_{lm} est choisie de sorte que les modes soient normalisés par $\iint_S \Psi_j^2(x) dS = 1$.

Ainsi, le calcul du coefficient de couplage H_{pq}^j initialement défini par l'équation (6.31), peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}H_{pq}^j = \int_0^R S_j \left(\left[R_p'' \left(R_q' - k_q^2 \frac{R_q}{r} \right) + R_q'' \left(R_p' - k_p^2 \frac{R_p}{r} \right) \right] \right. \\ \left. - 2k_p k_q \left[\left(R_p' - \frac{R_p}{r} \right) \left(R_q' - \frac{R_q}{r} \right) \right] \right) dr \\ \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos k_p \theta & \cos k_q \theta & \cos j\theta \\ \sin k_p \theta & \sin k_q \theta & \sin j\theta \end{bmatrix} d\theta,\end{aligned}\tag{6.52}$$

où dans l'intégrale par rapport à la variable θ , on doit comprendre que plusieurs combinaisons sont possibles en sélectionnant un terme de chaque colonne. Des détails complémentaires peuvent être trouvés dans [64].

Afin d'illustrer les résultats obtenus précédemment, les modes (ω_k, Φ_k) et (ζ_j^2, Ψ_j) sont représentés respectivement sur les figures 6.2 et 6.3. On peut noter que les modes de membrane sont proches des modes d'une plaque à bords libres. Ils diffèrent notamment par la valeur des fréquences ζ_j^2 qui changent l'ordre d'apparition des modes dans le spectre [63, 70, 67].

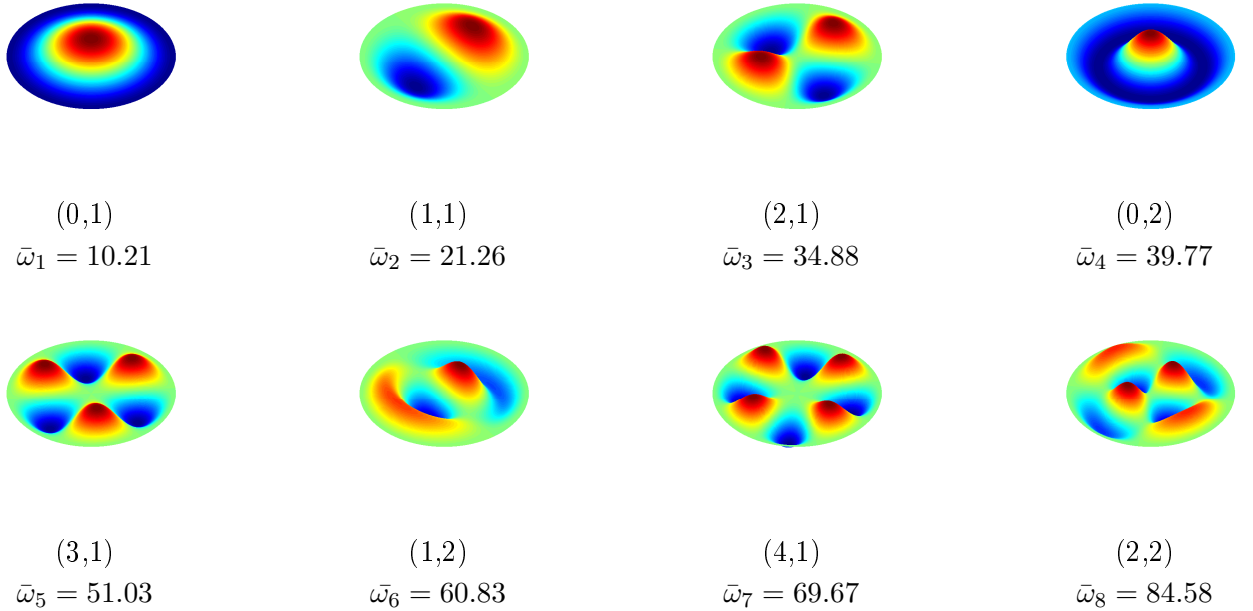


FIGURE 6.2 – Déformées modales Φ_k associées au déplacement transverse d'une plaque encadrée. Elles sont notées (L, M) où L est le nombre de diamètres nodaux et M le nombre de cercles nodaux.

6.1.4.2 Effort de membrane initial

Concernant l'effort de membrane initial, la résolution analytique des équations de plaque que l'on utilise ici nous impose de considérer un effort qui vérifie les équations (6.7). Cela entraîne la condition donnée par l'équation (6.8). Dans le cas où l'on fait intervenir l'expression de contraintes initiales, cette dernière équation se traduit par la condition suivante :

$$\mathbf{div}\mathbf{N} = \mathbf{div}\overset{\circ}{\mathbf{N}} - \mathbf{div}\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}. \quad (6.53)$$

Cela n'est possible que si la contrainte initiale en effort respecte la condition suivante :

$$\mathbf{div}\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}. \quad (6.54)$$

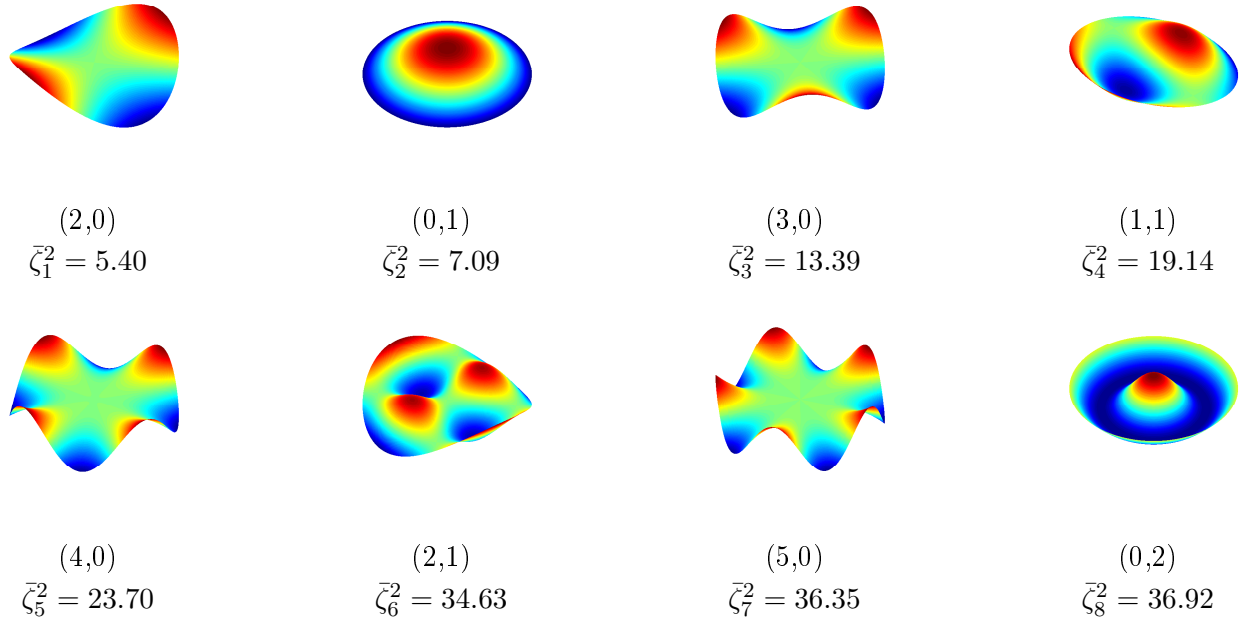


FIGURE 6.3 – Déformées modales Ψ_j associées aux modes de membrane d'une plaque encastree. Elles sont notées (l, m) où l est le nombre de diamètres nodaux et m le nombre de cercles nodaux.

Compte tenu de l'expérience, on formule l'hypothèse que \mathbf{N}_0 est axisymétrique, soit $N_{0r\theta} = N_{0\theta r} = 0$. Ainsi, l'équation (6.54) devient :

$$N_{0rr,r} + \frac{N_{0rr} - N_{0\theta\theta}}{r} = 0. \quad (6.55)$$

Calculs faits, on montre que

$$\mathbf{N}_0 = \begin{pmatrix} n_0 r^\alpha & 0 \\ 0 & (\alpha + 1)n_0 r^\alpha \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

où n_0 est une constante et où α est un entier, est solution de (6.54).

Le cas le plus simple est donc celui pour lequel $\alpha = 0$. Ainsi, le champ de contrainte associé est uniforme et peut s'écrire :

$$\mathbf{N}_0 = n_0 \mathbf{1}. \quad (6.57)$$

Cela a une conséquence directe sur la forme des coefficients associés. En effet, d'une part considérer \mathbf{N}_0 constant et uniforme, entraîne une simplification du coefficient G_p^k , donné par l'équation (6.29), telle que $L(\Phi_p, F_0) = n_0 \Delta \Phi_p$. Alors on peut écrire :

$$G_p^k = n_0 \iint_S \Phi_k \Delta \Phi_p dS. \quad (6.58)$$

Compte tenu des expressions des déformées modales établies précédemment, le coefficient G_p^k s'écrit aussi :

$$G_p^k = n_0 C_p^k, \quad (6.59)$$

où

$$C_p^k = \int_0^R R_k \left[r R_p'' + R_p' - k_p^2 \frac{R_p}{r} \right] dr \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos k_p \theta & \cos k_k \theta \\ \sin k_p \theta & \sin k_k \theta \end{bmatrix} d\theta. \quad (6.60)$$

D'autre part, on trouve $\Delta \Delta F_0 = 0$, alors l'équation (6.32) devient :

$$f_j = 0. \quad (6.61)$$

Ainsi, la contrainte initiale en membrane n'est réduite qu'à une simple constante n_0 .

6.1.4.3 Moment de flexion initial

De manière identique au paragraphe précédent, on fait l'hypothèse que la contrainte initiale en flexion est axisymétrique donc indépendante de θ . En revanche, aucune restriction mathématique n'est imposée. On peut donc écrire :

$$\mathbf{M}_0 = M_0(r) \mathbf{1}. \quad (6.62)$$

Cela dit, cette contrainte initiale intervient dans le système (6.13) sous la forme :

$$\mathbf{divdiv} \mathbf{M}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial M_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 M_0}{\partial r^2}. \quad (6.63)$$

Cela implique que pour avoir une influence non nulle, la contrainte initiale en flexion doit être au minimum proportionnelle au carré du rayon, soit $M_0(r) = m_0 r^2$. Cela entraîne :

$$\mathbf{divdiv} \mathbf{M}_0 = 4m_0 \mathbf{1}. \quad (6.64)$$

Finalement, la forme la plus simple du moment initial en flexion que l'on peut écrire est :

$$\mathbf{M}_0 = m_0 r^2 \mathbf{1}. \quad (6.65)$$

Une constante m_0 émane de cette expression, et c'est cette constante que l'on va pouvoir modifier.

L'expression du coefficient K^k (voir Eq. (6.30)) qui en découle est la suivante :

$$K^k = 4m_0 \iint_S \Phi_k dS. \quad (6.66)$$

Ici aussi, on peut réécrire le coefficient K^k en tenant compte des expressions des déformées modales. Alors,

$$K^k = 4m_0 M^k, \quad (6.67)$$

où

$$M^k = \int_0^R R_k r dr \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos k_k \theta \\ \sin k_k \theta \end{bmatrix} d\theta. \quad (6.68)$$

Compte tenu des hypothèses de la modélisation, les choix faits sur la forme des efforts généralisés initiaux sont les plus simples afin que ceux-ci soient non nuls. Il est bien entendu possible de leur donner une forme analytique plus complexe (sous forme polynomiale par exemple) dans l'idée d'imposer un chargement le plus proche d'une expérience possible. Notre objectif étant de quantifier l'effet de ces contraintes sur les fréquences propres par le modèle de von Kármán, cette première étude est réalisée avec des contraintes initiales de forme simple.

6.1.5 Résolution statique par continuation

De même que dans le modèle à une dimension, le problème statique (6.34) est résolu par continuation, en utilisant la méthode asymptotique numérique mise en œuvre dans Manlab. Le système non linéaire sous forme quadratique est écrit tel que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0. \quad (6.69)$$

Cette fois, \mathbf{U} représente l'ensemble des coordonnées modales relatives aux déplacements transverses et aux efforts de membrane. Alors,

$$\mathbf{U} = [q_1, \dots, q_{N_w}, \eta_1, \dots, \eta_{N_F}]^T. \quad (6.70)$$

\mathbf{U} sera donc un vecteur de taille $(N_w + N_F)$. Le paramètre de chargement λ permet de faire croître les contraintes initiales de manière proportionnelle et simultanée, ainsi, le problème statique sera implémenté sous la forme :

$$\begin{aligned} \omega_k^2 \hat{q}_k - \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{pk}^j \hat{q}_p \hat{\eta}_j + \varepsilon \lambda n_0 \sum_{p=1}^{N_w} C_p^k \hat{q}_p + \lambda 4m_0 M^k &= 0, \\ \zeta_j^4 \hat{\eta}_j + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \hat{q}_q &= 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

On observe bien la contribution des contraintes initiales sous la forme de deux constantes n_0 et m_0 pondérées du paramètre de continuation λ .

6.1.6 Évolution des fréquences propres

L'évolution des fréquences propres est extraite du problème dynamique et est calculée en post-traitement du problème statique. Pour obtenir l'expression des fréquences propres du système, on cherche à exprimer le problème dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{rk}^j \hat{q}_r \tilde{\eta}_j - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{rk}^j \hat{\eta}_j \tilde{q}_r + \varepsilon \lambda n_0 \sum_{r=1}^{N_w} C_r^k \tilde{q}_r &= 0, \\ \tilde{\eta}_j = -\frac{1}{\zeta_j^4} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \tilde{q}_q, \end{aligned} \quad (6.72)$$

sous la forme : $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ où seuls les termes linéaires sont conservés. Ainsi, en remplaçant l'expression de $\tilde{\eta}_j$ dans la première équation, on trouve :

$$\ddot{\tilde{q}}_k + \omega_k^2 \tilde{q}_k + 2\varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} \Gamma_{pqr}^k \hat{q}_p \tilde{q}_q \hat{q}_r - \varepsilon \sum_{q=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{qk}^j \hat{\eta}_j \tilde{q}_q + \varepsilon \lambda n_0 \sum_{q=1}^{N_w} C_q^k \tilde{q}_q = 0. \quad (6.73)$$

où le coefficient non linéaire cubique est :

$$\Gamma_{pqr}^k = \sum_{j=1}^{N_F} \frac{H_{pq}^j H_{rk}^j}{2\zeta_j^4}, \quad (6.74)$$

et où les éléments de la matrice \mathbf{A} se déduisent comme :

$$A_{kq} = \omega_k^2 \delta_{kq} + \varepsilon \left(\underbrace{2 \sum_{p,r=1}^{N_w} \Gamma_{pqr}^k \hat{q}_p \hat{q}_r}_{\hat{w}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{N_F} H_{qk}^j \hat{\eta}_j}_{\hat{F}} + \lambda n_0 \sum_{q=1}^{N_w} C_q^k \right). \quad (6.75)$$

Les fréquences linéaires sont finalement obtenues en diagonalisant la matrice \mathbf{A} , dans laquelle on peut alors clairement identifier les termes provenant de la géométrie de ceux provenant de l'état de contraintes résiduelles de l'équilibre statique. Comme dit précédemment, compte tenu de l'expérience, les modes statiques sont uniquement solutions d'un problème axisymétrique. On peut alors remarquer que l'expression des fréquences propres et le calcul des coefficients non linéaires associés à ces fréquences couplent des modes statiques axisymétriques et des modes dynamiques asymétriques.

6.2 Résultats

On présente maintenant les résultats statiques et dynamiques d'une plaque circulaire encadrée, chargée sous l'action de contraintes initiales en moment de flexion et effort de membrane. Les résultats présentés ci-après seront redimensionnés et donc tracés dans des valeurs réelles au moyen des équations (6.16). Aussi, seuls les modes axisymétriques seront pris en compte autant dans le problème statique que dans le problème dynamique. Le calcul dynamique pour les modes asymétriques serait une extension du travail fourni dans cette thèse.

D'après les équations (6.57) et (6.65), le chargement initial est appliqué à la structure, par l'expression de deux constantes n_0 et m_0 , relatives aux contraintes initiales en membrane $\mathbf{N}_0 = n_0 \mathbf{1}$ et en flexion $\mathbf{M}_0 = m_0 r \mathbf{1}$. Trois cas de chargements sont envisagés.

- Le premier est le cas d'un flambage classique où seul l'effort de membrane initial est appliqué à la structure. Alors $n_0 = 1$ et $m_0 = 0$.
- Le second cas cherche à retrouver le profil expérimental mesuré au chapitre 4. On verra alors qu'il est nécessaire d'appliquer un rapport de contraintes initial tel que $n_0 = 1$ et $m_0 = 150$ pour obtenir la bonne géométrie.
- Finalement, un cas intermédiaire, où les deux constantes associées aux contraintes initiales sont dans les mêmes proportions avec $n_0 = m_0 = 1$, est aussi présenté.

Dans ces trois cas de chargement, une attention particulière sera portée à l'évolution des fréquences propres des modes axisymétriques au cours du chargement, afin de comparer l'influence des contraintes résiduelles par rapport celle du changement géométrique.

6.2.1 Paramètres et convergence

Le problème numérique associé au cas de notre plaque circulaire encadrée soumise à des contraintes initiales en membrane et en flexion est mis en œuvre avec les paramètres du tableau de la figure 6.4.

Ces paramètres sont ceux d'un acier standard. Les dimensions utilisées sont celles du haut du baril utilisé lors de l'expérience (voir chapitre 4).

Une étude de convergence, sur la valeur des coefficients non linéaires axisymétriques Γ_{pqr}^k (voir Eq. (6.74)), a montré qu'il était nécessaire de garder soixante modes de membrane ($N_F = 60$) dans l'équation (6.74). Compte tenu de l'étendue du calcul attendue, dans lequel le déplacement transverse atteint jusqu'à cent fois l'épaisseur initiale de la plaque, nous verrons que trente modes de flexion (axisymétriques) sont nécessaires ($N_w = 30$). Les valeurs des coefficients non linéaires associés aux dix premiers modes axisymétriques sont présentés dans le tableau de la figure 6.5 et ont été validés par les résultats de la littérature [50, 33]. D'autre part, les Γ_{pqr}^k des six premiers modes propres axisymétriques ont également été validés en comparant la relation amplitude-fréquence (*backbone curve*) du premier mode non linéaire avec un calcul direct des coefficients par éléments-finis dans [71].

Épaisseur	$h=0.0013$ m
Diamètre	$D=0.567$ m
Rayon	$r = D/2$
Module d'Young	$E=210 \times 10^9$ Pa
Masse volumique	$\rho = 7800$ Kg/m ³
Coefficient de poisson	$\nu=1/3$
Convergence	$N_w = 30 / N_F = 60$

FIGURE 6.4 – Paramètres du problème 2D mis en œuvre dans Manlab : plaque circulaire encastrée soumise à des contraintes initiales en membrane et en flexion.

(n,k)	ω_k	Γ_{kkk}^k
(0,1)	$\omega_1 = 10.21$	$\Gamma_{111}^1 = 8.6061$
(0,2)	$\omega_2 = 39.77$	$\Gamma_{222}^2 = 294.5437$
(0,2)	$\omega_3 = 89.10$	$\Gamma_{333}^3 = 1824.9$
(0,4)	$\omega_4 = 158.18$	$\Gamma_{444}^4 = 6481.4$
(0,5)	$\omega_5 = 247.01$	$\Gamma_{555}^5 = 17116$
(0,6)	$\omega_6 = 355.57$	$\Gamma_{666}^6 = 37617$
(0,7)	$\omega_7 = 483.88$	$\Gamma_{777}^7 = 72942$
(0,8)	$\omega_8 = 631.91$	$\Gamma_{888}^8 = 129150$
(0,9)	$\omega_9 = 799.70$	$\Gamma_{999}^9 = 213440$
(0,10)	$\omega_{10} = 987.22$	$\Gamma_{10101010}^{10} = 334140$

FIGURE 6.5 – Valeur des coefficients non linéaires cubiques et fréquences propres associés aux dix premiers modes axisymétriques de la plaque encastrée prenant en compte soixante modes de membranes : $N_F = 60$.

6.2.2 Reconstruction du champ de déplacement et du champ de contraintes résiduelles

Comme dans le cas des poutres du chapitre 5, on va chercher à reconstruire le champ de déplacement et le champ de contraintes résiduelles de la structure dans sa configuration déformée.

Compte tenu de l'étude de convergence précédente, le déplacement transverse est reconstruit sur les 30 premiers modes axisymétriques via l'équation (6.22).

Pour les contraintes, comme dans le cas 1D, une infinité de champs de déformation initiale $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ associés au champ de contraintes initiales $\boldsymbol{\sigma}_0$ amène aux mêmes contraintes généralisées $(\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0)$. Ici aussi, le champ de déformations initiales est affine dans l'épaisseur. Alors en combinant la loi de comportement (6.4) et l'expression des efforts généralisés (6.5), on peut écrire que le champ de contraintes résiduelles est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \frac{\hat{\mathbf{N}}}{h} + z \frac{12}{h^2} \hat{\mathbf{M}}, \quad (6.76)$$

où $\hat{\mathbf{N}} = \mathring{\mathbf{N}} - \mathbf{N}_0$ et $\hat{\mathbf{M}} = \mathring{\mathbf{M}} - \mathbf{M}_0$.

Aussi, dans le cas d'une plaque circulaire axisymétrique, le tenseur des contraintes est d'ordre 2, tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{rr} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \hat{N}_{rr} & 0 \\ 0 & \hat{N}_{\theta\theta} \end{pmatrix} + z \frac{12}{h^2} \begin{pmatrix} \hat{M}_{rr} & 0 \\ 0 & \hat{M}_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \quad (6.77)$$

et où les composantes axisymétriques en membranes et en flexion sont exprimées par [52] :

$$\begin{cases} \hat{N}_{rr} = N_a \left(\frac{\hat{F}_{,r}}{r} - \lambda n_0 \right), \\ \hat{N}_{\theta\theta} = N_a \left(\hat{F}_{,rr} - \lambda n_0 \right), \\ \hat{M}_{rr} = M_a \left(-\hat{w}_{,rr} - \nu \frac{\hat{w}_{,r}}{r} - \lambda m_0 r^2 \right), \\ \hat{M}_{\theta\theta} = M_a \left(-\nu \hat{w}_{,rr} - \frac{\hat{w}_{,r}}{r} - \lambda m_0 r^2 \right). \end{cases} \quad (6.78)$$

On note alors que les efforts résultants sont obtenus directement par le calcul statique (6.72) où \hat{w} et \hat{F} seront respectivement reconstruits à partir des équations (6.22) et (6.24).

6.2.3 Cas $n_0 = 1, m_0 = 0$

Le modèle est d'abord comparé à la littérature dans le but de valider les résultats statiques. L'étude dynamique attendue, sera par la suite, menée à bien.

6.2.3.1 Validation du modèle

L'étude proposée par A. Wang [74] est semblable à la nôtre. Il traite le cas d'une plaque circulaire encadrée qui, soumise à un effort de membrane, flambe sur les modes axisymétriques de la structure.

Parmi les résultats obtenus dans cette étude, le profil de déformation et l'état de contrainte de la ligne moyenne à l'issue de la transformation sont donnés. Ils sont comparés à notre modèle lorsque la charge est uniquement en membrane ($n_0 = 1$ et $m_0 = 0$) sur la figure 6.6. Dans [74], les résultats sont adimensionnés et le rapport entre le rayon et l'épaisseur est tel que $r/h = 300$. C'est pourquoi, dans cette simulation on affecte la valeur $h_1 = 0.00094$ m à l'épaisseur. Les résultats de la littérature sont tracés en noir et les résultats issus du modèle proposé ici sont en rouge. On observe alors un très bon accord entre les deux profils de déformation qui se superposent parfaitement (voir Fig. 6.6(a)). Les états de contrainte σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ calculés sur la ligne moyenne (en $z = 0$) sont également très proches.

La figure 6.6(c) représente le digramme de flambage, soit l'amplitude maximale (au centre de la plaque) en fonction du paramètre de continuation λ (paramètre de chargement). On observe une bifurcation fourche qui indique l'existence d'une charge critique de flambage à partir de laquelle le déplacement transverse est non nul et augmente progressivement avec le chargement. La valeur de la charge critique $\lambda_{cr} = 14.68$ (ou encore $N_a \lambda_{cr} = 32369.4$ N) de la littérature est retrouvée [74, 10].

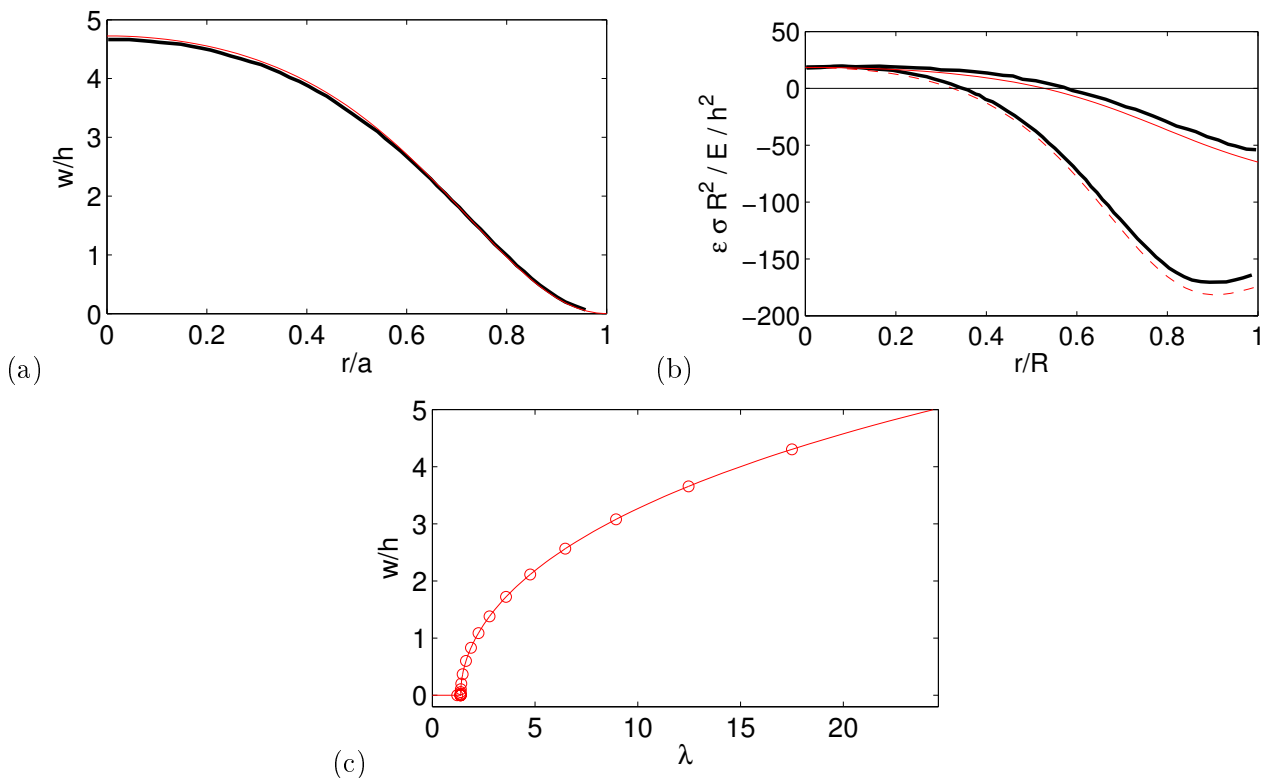


FIGURE 6.6 – Comparaison du modèle lorsque $n_0 = 1$ $m_0 = 0$ (en rouge) avec les résultats de [74] (en noir). (a) Profil de déformation . (b) État de contraintes en $z = 0$ à l'issue de la transformation (—) σ_{rr} et (---) $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction du rayon r . (c) Charge critique de flambage : $\lambda_{cr} = \varepsilon n_0 N_{cr} = 14.68$. (où $N_{cr} = 1.38$, $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$ et $n_0 = 1$).

6.2.3.2 Étude du flambage classique

On se replace maintenant dans le cas des paramètres initiaux de notre modèle (voir le tableau de la figure 6.4). La charge reste celle du flambage classique à savoir $n_0 = 1$ et $m_0 = 0$. Sur la figure 6.7 sont représentés les résultats statiques en déplacement pour deux chargements. Le premier est un chargement relativement faible où l'on peut voir que le déplacement transverse maximal atteint un peu plus de 2 mm (voir Fig. 6.7(a) et (b)). La charge critique de flambage est toujours $\lambda_{cr} = 14.68$. Pour un chargement plus grand, représenté sur les figures 6.7(c) et (d), on remarque que le profil tend à s'aplanir au cours du chargement. Dès 10 mm (soit environ dix fois l'épaisseur initiale), la forme du déplacement transverse présente un plateau central. Nous verrons au paragraphe suivant, lors de l'étude des vibrations, que cette géométrie aura une influence non négligeable sur les modes propres axisymétriques.

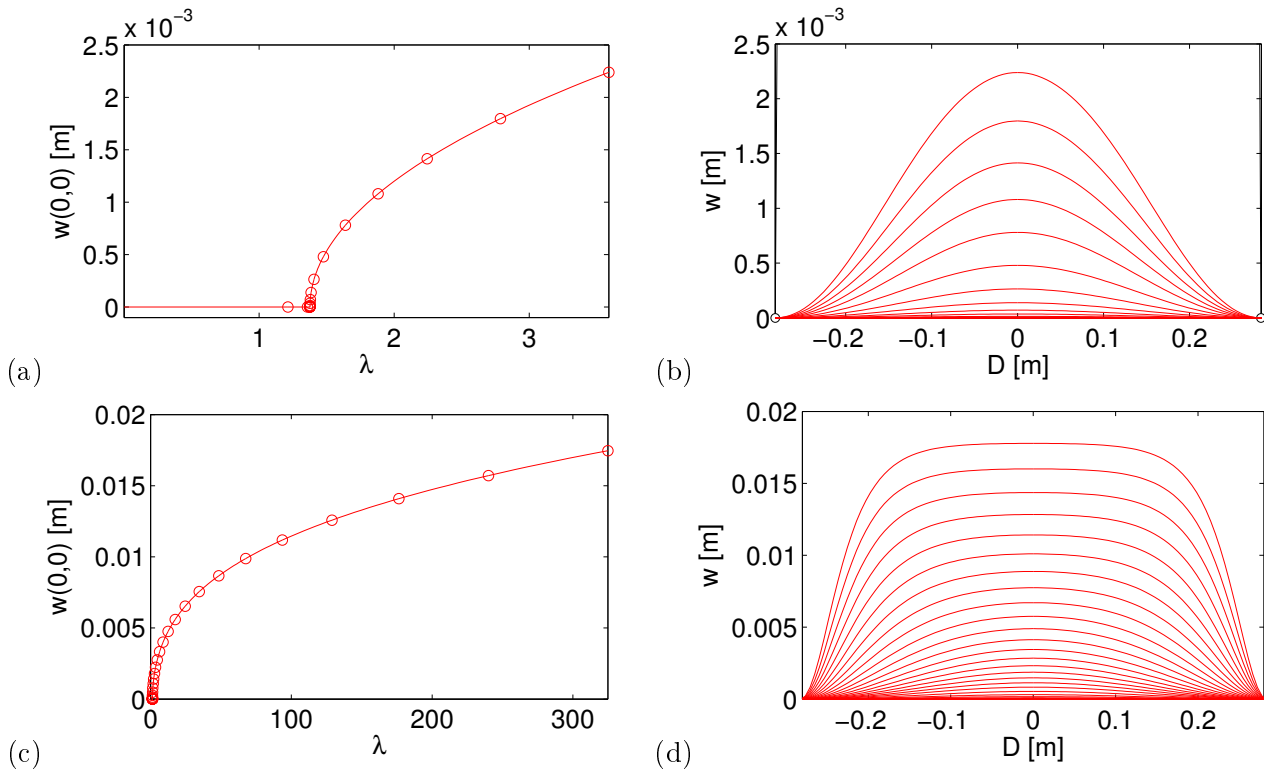


FIGURE 6.7 – Calcul numérique d'une plaque circulaire encadrée soumise à des contraintes initiales : $n_0 = 1$ $m_0 = 0$. Présentation des résultats statiques en déplacement transverse. Charge critique de flambage calculée : $\lambda_{cr} = 14.68$. (a)-(c) Diagrammes de bifurcation : évolution de la déflexion au centre de la plaque en fonction du chargement. (b)-(d) Profil de déformation de la plaque pour différents chargements. (a)-(b) $\lambda_{max} = 3.6$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 342.4$.

La figure 6.8 présente deux états de contraintes résiduelles associés aux deux chargements maximum de la figure 6.7. Les traits pleins sont les contraintes radiales σ_{rr} et les tirets sont les contraintes orthoradiales $\sigma_{\theta\theta}$. Les figures 6.8(a) et (c), sur lesquelles les contraintes sont tracées en rouges, représen-

tent les valeurs correspondantes au niveau de la surface moyenne, et sur les figures 6.8(b) et (d) sont représentées les valeurs en peau, à savoir en bleu lorsque $z = h/2$ (sur l'extrados de la courbure) et en vert lorsque $z = -h/2$ (sur l'intrados de la courbure).

Pour un faible chargement et sur la ligne moyenne, on retrouve le comportement du paragraphe précédent comparé à la littérature. La figure 6.8(b) vient compléter ce résultat en montrant l'évolution des contraintes en peau. On remarque que celles-ci ne sont pas symétriques par rapport à zéro et qu'elles changent de signe en se rapprochant du bord encasté de la plaque. Les contraintes calculées sur l'extrados de la courbure sont positives en $r = 0$ et négatives en $r = R$. Inversement, les contraintes calculées sur l'intrados de la courbure sont négatives en $r = 0$ et positives en $r = R$. Ainsi, au centre de la plaque, la structure est en traction sur l'extrados et compression sur l'intrados, et inversement, près du bord, elle est en traction en $z = -h/2$ et compression en $z = h/2$. On remarque également, contrairement aux contraintes de la ligne moyenne où seul l'effort en membrane résultant intervient, le fait de prendre en compte l'effet du moment de flexion résultant, donne un ordre de grandeur supérieur à la contrainte globale σ_R .

Sur les figures 6.8(c) et (d), on peut observer le résultat en contraintes à l'issue du chargement total. Ici, on voit que tant sur la ligne moyenne qu'en peau, contraintes radiales et orthoradiales tendent à prendre la même valeur sur la majeure partie du rayon. Cette valeur est positive, alors la structure est en traction, excepté sur les bords où elle change de signe entre l'intrados et l'extrados. C'est en se rapprochant des conditions limites que celles-ci diffèrent. Compte tenu de l'équation (6.76), on peut en déduire que si les contraintes en peau sont de même signe alors le moment résultant est très peu influant par rapport à l'effort de membrane ($\hat{\mathbf{M}} \ll \hat{\mathbf{N}}$).

Enfin, on s'intéresse à l'effet des contraintes résiduelles sur les fréquences propres des modes axisymétriques de la structure. Pour cela, compte tenu de l'équation (6.75), on trace sur les figures 6.10(a) et (c), la valeur des quatre premières fréquences propres axisymétriques avec ou sans le terme associé à l'état de contraintes résiduelles et ce pour les deux évolutions de chargement présentées jusqu'à présent. Les courbes ne tenant compte que de la géométrie sont représentées en trait plein et celles tenant compte à la fois de la géométrie et de l'état de contraintes sont en tirets.

Sur la figure 6.10(a), le terme de contraintes diminue la valeur des fréquences jusqu'à annuler la première fréquence propre, au niveau de la charge critique de flambage ($\lambda = \lambda_{cr}$). Ce phénomène est classique du flambage, il a d'ailleurs également été observé dans le cas des poutres au chapitre 5. Une fois que la charge critique est passée et que le déplacement transverse peut commencer à croître, les valeurs des fréquences tendent à augmenter progressivement avec le chargement. Le terme de contrainte apporte une correction, en diminuant la fréquence mais en gardant sensiblement le même comportement.

Sur la figure 6.10(c), on montre l'évolution des fréquences avec et sans tenir compte du terme de contrainte jusqu'à un chargement maximal beaucoup plus important (jusqu'à ce que le profil de déformation présente le plateau observé sur la figure 6.7(d)). Le comportement global est nettement plus compliqué. Plusieurs phénomènes sont observés. Tout d'abord, les courbes en trait plein et en tirets se croisent (dès $\lambda = 25$ pour la première fréquence). On en déduit que l'état de contraintes résiduelles change de signe au cours du chargement. À partir de cette valeur de λ , le terme de contraintes résidu-

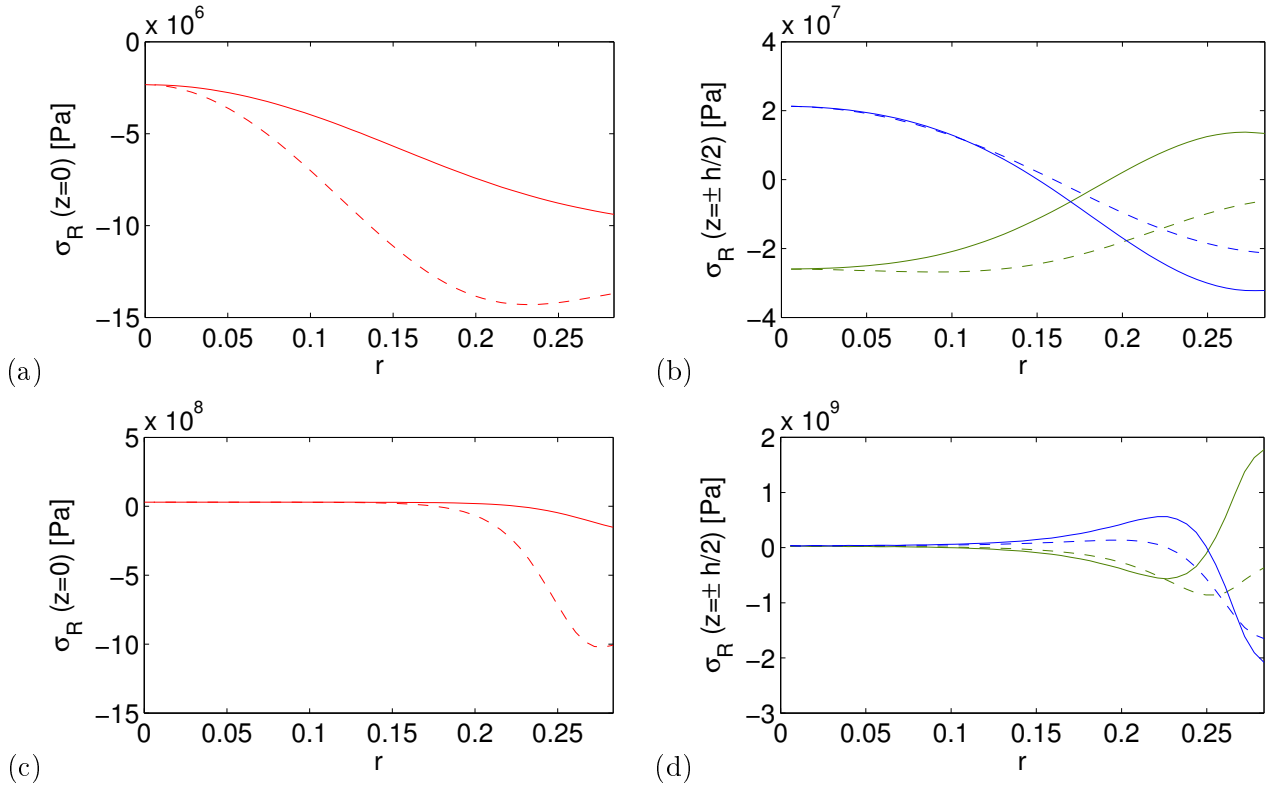


FIGURE 6.8 – Calcul numérique d’une plaque circulaire encadrée soumise à des contraintes initiales : $n_0 = 1$ $m_0 = 0$. Présentation de l’état de contraintes résiduelles en fonction du rayon. Trait plein : (—) contrainte radiale σ_{rr} . Tirets : (---) contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$. (a)-(c) Valeur de la contrainte résiduelle calculée sur le plan moyen (en $z = 0$) (b)-(d) Valeurs de la contrainte en peau en bleu ($z = h/2$ - extrados) et en vert ($z = -h/2$ - intrados). (a)-(b) $\lambda_{max} = 3.6$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 342.4$.

elles augmente la valeur des fréquences par rapport à la géométrie. D’autre part, entre deux fréquences différentes, on peut observer des phénomènes de croisements de modes : entre les modes 1 et 2 lorsque $\lambda_{v1-2} \simeq 25$, entre les modes 2 et 3 pour $\lambda_{v2-3} \simeq 85$ et entre les modes 3 et 4 pour $\lambda_{v3-4} \simeq 205$. Enfin, on remarque que les fréquences géométriques tendent à diminuer au cours du chargement. Si on met en parallèle le profil géométrique calculé de la figure 6.7(d) et la forme des modes obtenus à la fin du chargement de la figure 6.10(d), on observe que la vibration se concentre sur la partie plane de la déformée statique. En associant cette remarque au fait que les fréquences géométriques décroissent, on peut en déduire que ces dernières tendent vers des valeurs de fréquences de plaques circulaires axisymétriques dont le rayon augmente progressivement. L’ensemble de ces observations confère un comportement vibratoire en fonction du chargement de nature assez complexe.

Dans le tableau de la figure 6.9, on récapitule la variation, en pourcentage, que provoquent les contraintes résiduelles par rapport à la géométrie, sur les valeurs des fréquences propres axisymétriques. Ces rapports sont présentés pour trois étapes du chargement, lorsque le déplacement maximal, au centre de la plaque atteint dix fois, vingt fois et cinquante fois l’épaisseur, respectivement $\lambda = 145$, $\lambda = 1038$

et $\lambda = 15380$. On note que cet écart augmente avec l'amplitude du profil de déformation. Aussi, on remarque que les modes de basse fréquence sont plus influencés par les contraintes résiduelles que les modes de haute fréquence.

$\frac{(F_{k,g\sigma} - F_{k,g})}{F_{k,g\sigma}}$	$\hat{w} = 10h$	$\hat{w} = 20h$	$\hat{w} = 50h$
$k = 1$	23.1 %	53.1 %	81.5 %
$k = 2$	13.5 %	35.3 %	69.7%
$k = 5$	4.28 %	12.7 %	41.6 %
$k = 10$	0.6 %	4.5 %	19.1 %

FIGURE 6.9 – Cas du flambage classique : $n_0 = 1$ $m_0 = 0$. Récapitulatif des variations de fréquences f_1 , f_2 , f_5 et f_{10} , avec et sans contraintes pour différents rapports entre déplacement transverse maximal et épaisseur \hat{w}/h .

Étant donné que le profil de déformation tend vers une géométrie plane, même pour des chargements plus grands, le profil expérimental courbe ne pourra jamais être atteint par le modèle dans ces conditions de chargement. Dans le but de cette comparaison, l'ajout d'un moment initial non nul devient nécessaire.

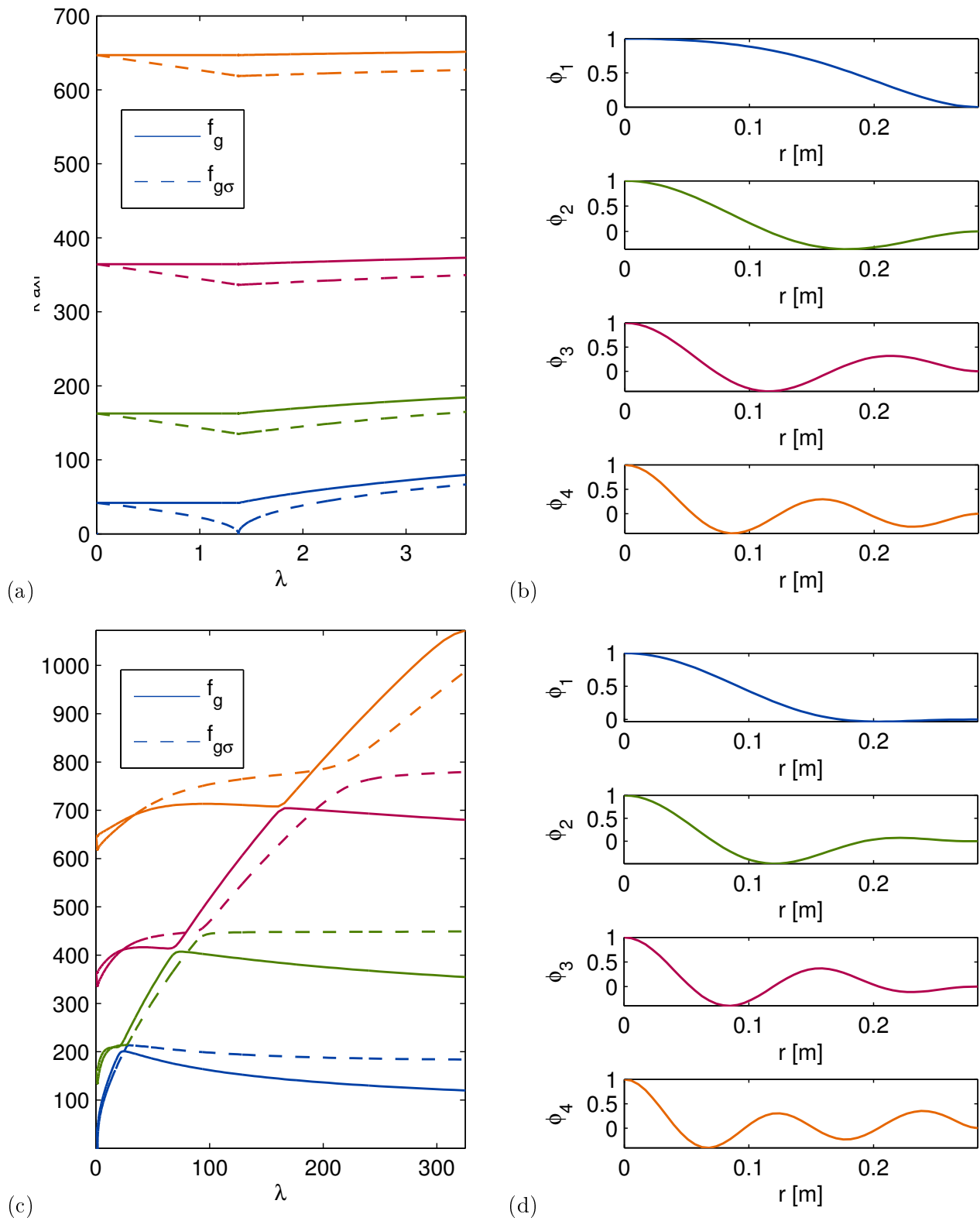


FIGURE 6.10 – Calcul numérique d’une plaque circulaire encastree soumise à des contraintes initiales : $n_0 = 1$ $m_0 = 0$. Influence des contraintes résiduelles sur les caractéristiques dynamiques de la plaque déformée. (a)-(c) Tracé des quatre premières fréquences propres axisymétriques. Trait plein : (—) en ne tenant compte que de la géométrie. Tirets : (---) en tenant compte du terme de géométrie et du terme de contrainte. (b)-(d) Allure des déformées modale à l’issue des chargements. (a)-(b) $\lambda_{max} = 3.6$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 342.4$.

6.2.4 Comparaison à l'expérience : $n_0 = 1$, $m_0 = 150$

Étant donné que nous n'avons pas retrouvé le profil expérimental en imposant une contrainte initiale uniquement en membrane, on présente maintenant le cas d'un chargement simultané en membrane et en flexion. Les constantes associées à l'effort et au moment initiaux sont telles que $n_0 = 1$ et $m_0 = 150$. Comme montré sur la figure 6.11(a), le profil expérimental est bel et bien retrouvé dans ces proportions de contraintes initiales. Les diagrammes de flambage associés, montrés sur les figures 6.11(b) et (c), présentent d'une part, et contrairement au chargement précédent (uniquement en membrane), le fait qu'une bifurcation parfaite n'est plus observée et d'autre part le chargement final qui permet d'atteindre le profil de déformation expérimental est obtenu lorsque $\lambda \simeq 9000$. À la fin du calcul, le déplacement transverse est de l'ordre de cent fois l'épaisseur initiale.

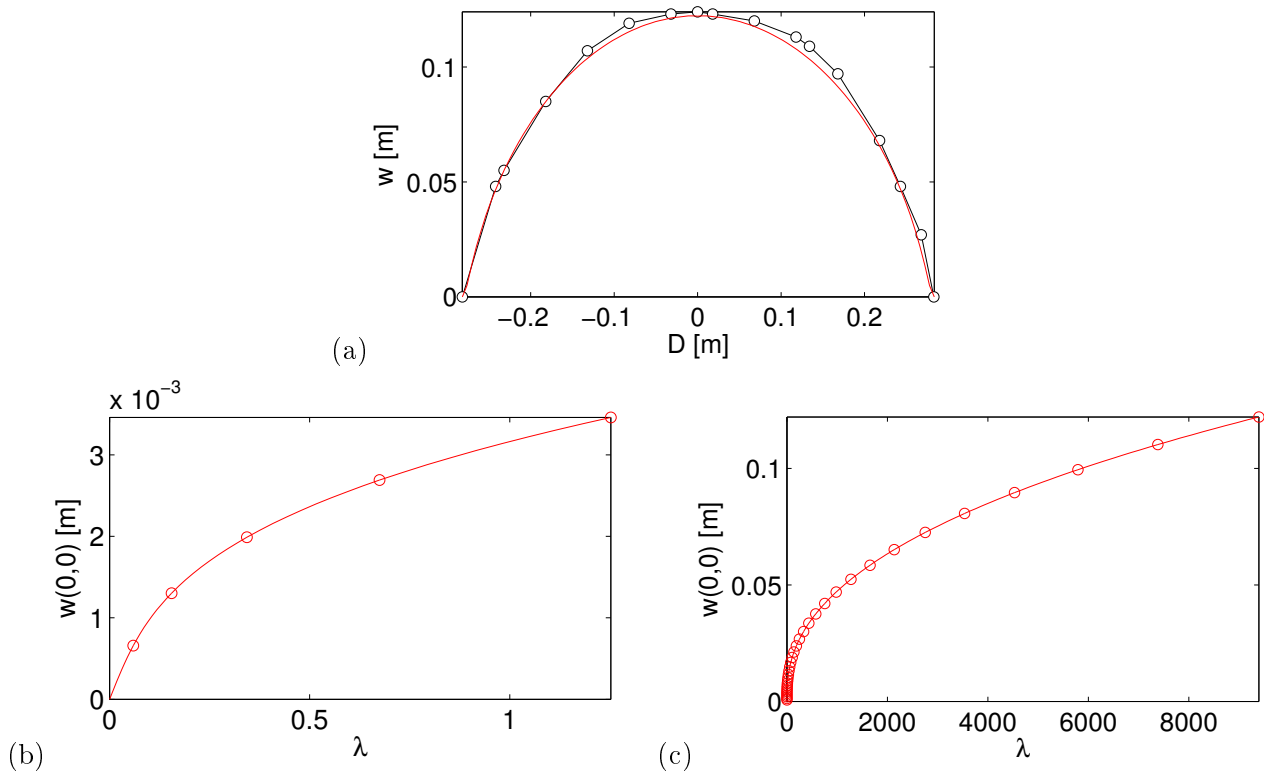


FIGURE 6.11 – Ajustement du modèle à l'expérience avec $n_0 = 1$ et $m_0 = 150$. (a) Profil de déformation du modèle (en rouge) ajusté à celui de l'expérience ($- \circ -$) obtenu pour $\lambda \simeq 9000$. (b) Zoom du diagramme de bifurcation pour les premiers pas de chargement $\lambda_{max} = 1.25$. (c) Diagramme de bifurcation complet : amplitude maximale du déplacement transverse $w(0,0)$ en fonction du paramètre de continuation λ , $\lambda_{max} = 9394$.

L'état de contraintes résiduelles à la fin du calcul est représenté sur la figure 6.12. La figure 6.12(a) montre l'évolution de la valeur des contraintes résiduelles radiales σ_{rr} (en trait plein) et orthoradiales $\sigma_{\theta\theta}$ (en tirets) le long du rayon et sur la ligne moyenne de la structure (en $z = 0$). On remarque que toutes deux tendent vers une valeur commune positive en $r = 0$, alors qu'elles tendent vers des valeurs

différentes $r = R$ avec $\sigma_{rr} > 0$ et $\sigma_{\theta\theta} < 0$. Sur la figure 6.12(b), on peut voir l'évolution des contraintes en peau ($z = \pm h/2$) le long du rayon. L'ajout d'un moment initial entraîne le fait que ces contraintes sont, en première approximation, symétriques par rapport à zéro. σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ tendent à être confondues. On observe une contrainte positive (traction) en peau supérieure (bleu-extrados) et une contrainte globalement négative (compression) en peau inférieure (vert-intrados). Ce résultat est différent, même opposé, à l'allure mesurée expérimentalement au chapitre 4. Plus précisément, en regardant le zoom proposé sur la figure 6.12(c), on remarque que σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ tendent vers la même valeur en $r = 0$ et ce de manière équivalente en peau inférieure et en peau supérieure, alors que lors de l'expérience, la mesure aux rayons X montrait que l'intrados était en traction et l'extrados en compression au centre de la cuve et ce pour des ordres de grandeur identiques en valeur absolue.

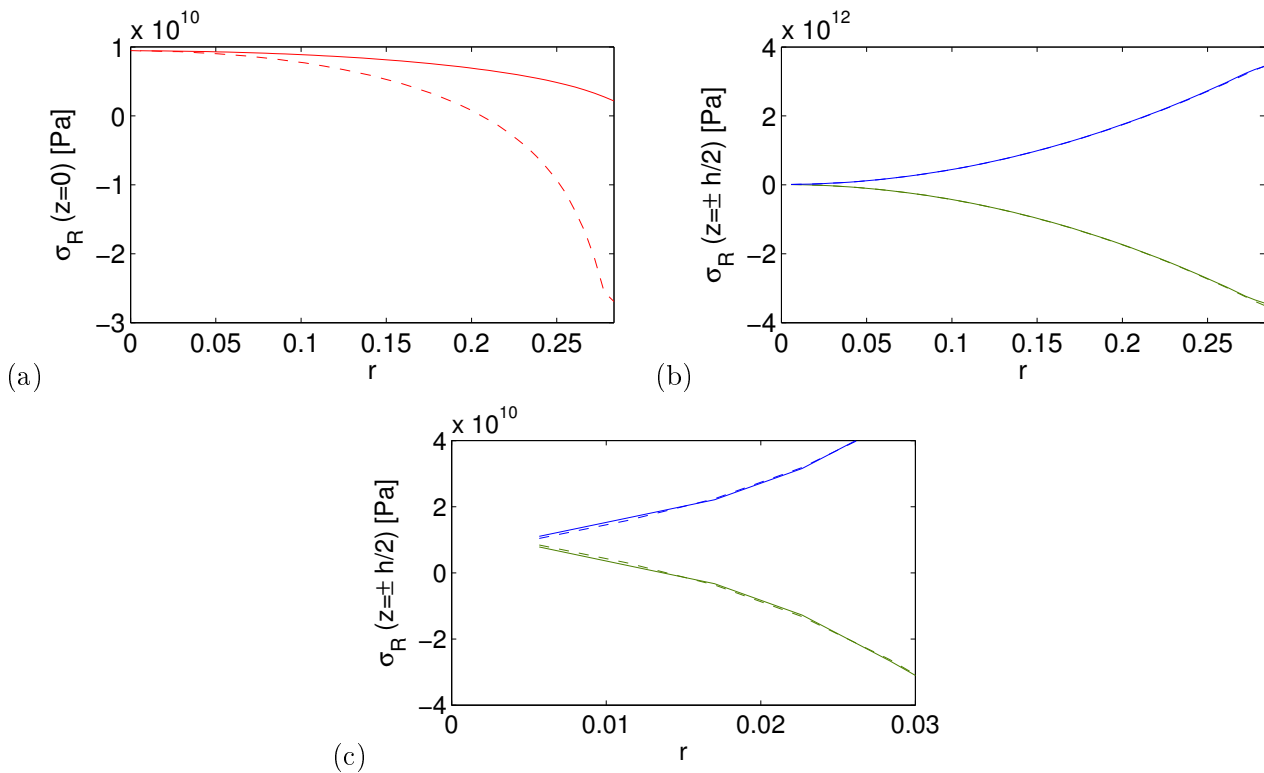


FIGURE 6.12 – Ajustement du modèle à l'expérience $n_0 = 1$ $m_0 = 150$. État de contraintes résiduelles (σ_{rr} (—) / $\sigma_{\theta\theta}$ (---)) le long du rayon, à la fin du calcul. (a) Contraintes sur la ligne moyenne : en $z = 0$. (b) Contraintes en peau : en $z = \pm h/2$. En bleu sur l'extrados et en vert sur l'intrados de la courbure. (c) Zoom de la figure (b) vers le centre de la plaque.

Nous pouvons imaginer tenir pour responsables les formes des contraintes initiales imposées au système. D'autres formes de \mathbf{N}_0 et \mathbf{M}_0 pourraient être envisagées dans le but de mieux représenter le chargement expérimental appliqué. En effet, l'ajustement du comportement expérimental nécessite des fonctions plus complexes. Celles-ci donnent la bonne forme géométrique, et ne rendent pas compte de l'état de contraintes résiduelles.

Néanmoins, le cas étudié, qui présente un moment de flexion initial beaucoup plus important que l'effort de membrane initial, reste intéressant, car totalement différent du flambage classique. Il permet notamment d'atteindre des profils circulaires pouvant atteindre cent fois l'épaisseur.

La figure 6.14 présente l'évolution des quatre premières fréquences propres axisymétriques avec ou sans l'influence de l'état de contraintes résiduelles. Les fréquences sont tracées en fonction du paramètre de chargement λ . Dès le début du chargement, les fréquences avec le terme issu de l'état de contraintes résiduelles sont supérieures à celles ne tenant compte que de la géométrie. Contrairement au flambage classique, la première fréquence propre ne s'annule pas, le système présente une bifurcation imparfaite. Au cours du chargement, l'ensemble des fréquences augmente mais à des vitesses différentes. En effet, le terme de contraintes résiduelles entraîne une valeur des fréquences axisymétriques beaucoup plus élevée que celle due au changement géométrique uniquement. Sur les figures 6.14(b) et (d), on peut observer les déformées associées aux deux chargements respectivement $\lambda_{max} = 1.25$ et $\lambda_{max} = 9394$. On remarque alors que, lorsque le profil géométrique est obtenu, c'est à dire lorsque $\lambda = 9394$, la vibration se localise au centre de la cuve. Ce résultat peut être mis en relation avec les mesures vibratoires de la partie I, réalisées à l'issue de l'étape d'embouti des steelpans. L'analyse modale nous avait permis de mettre en évidence expérimentalement ce phénomène de localisation en centre de la plaque encadrée devenue courbe (voir Fig. 2.5).

Enfin, sur la figure 6.13, on a tracé les rapports de fréquences avec et sans contraintes pour certaines valeurs critiques de chargement de sorte que $\hat{w} = 10h$ ($\lambda = 42$), $\hat{w} = 20h$ ($\lambda = 250$), $\hat{w} = 50h$ ($\lambda = 2137$), $\hat{w} = 100h$ ($\lambda = 11360$). Ce tableau confirme que dans le cas d'un chargement tel que $n_0 = 1$ et $m_0 = 150$, les contraintes résiduelles ont une très forte influence sur la valeur des fréquences propres axisymétriques.

$\frac{(F_{k,g\sigma} - F_{k,g})}{F_{k,g\sigma}}$	$\hat{w} = 10h$	$\hat{w} = 20h$	$\hat{w} = 50h$	$\hat{w} = 100h$
$k = 1$	40.5 %	45.2 %	43.1 %	38.8 %
$k = 2$	37.5 %	53 %	60.2%	59.5%
$k = 5$	43.6%	59.7 %	66.5 %	74.4 %
$k = 10$	20.7 %	40.6%	63.3 %	71 %

FIGURE 6.13 – Ajustement du modèle à l'expérience $n_0 = 1$ $m_0 = 150$. Récapitulatif des variations de fréquences f_1 , f_2 , f_5 et f_{10} , avec et sans contraintes pour différents rapports entre déplacement transverse maximal et épaisseur \hat{w}/h .

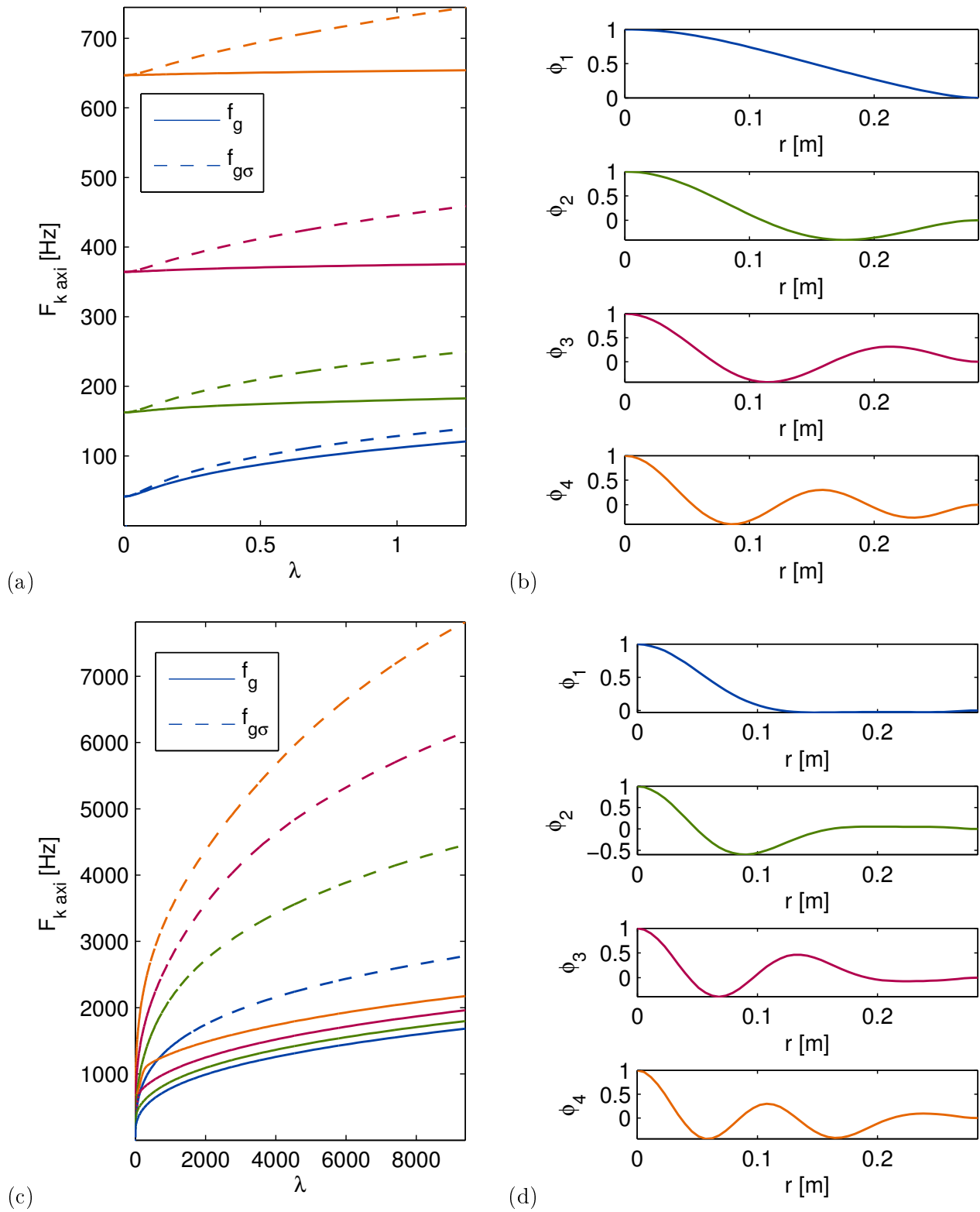


FIGURE 6.14 – Calcul numérique d’une plaque circulaire encastree soumise à des contraintes initiales : $n_0 = 1$ $m_0 = 150$. Cas du fit expérimental. Influence des contraintes résiduelles sur les caractéristiques dynamiques de la plaque déformée. (a)-(c) Tracé des quatre premières fréquences propres axissymétriques. Trait plein : (—) en ne tenant compte que de la géométrie. Tirets : (---) en tenant compte du terme de géométrie et du terme de contrainte. (b)-(d) Allure des déformées modale à l’issue des chargements. (a)-(b) $\lambda_{max} = 1.25$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 9394$.

6.2.5 Cas intermédiaire $n_0 = m_0 = 1$

Afin de clore l'étude du modèle de plaque soumise à l'effet de contraintes initiales, on propose maintenant un cas de chargement intermédiaire. En effet, le cas du flambage classique appliquait uniquement de l'effort de membrane. En revanche, le cas du fit expérimental imposait une proportion de moment de flexion largement supérieure à l'effort de membrane. Maintenant, effort de membrane et moment de flexion sont appliqués dans les mêmes proportions : $n_0 = m_0 = 1$. L'ensemble des figures qui suivent représentent trois quantités de chargement, à savoir : $\lambda_{max} = 2.6$, $\lambda_{max} = 128.3$ et $\lambda_{max} = 2363$.

Sur la figure 6.15, on observe l'évolution des diagrammes et les profils de déformations de plaque correspondants. Les figures 6.15(a) et (b) montrent que l'on a affaire à une bifurcation imparfaite. Pour de faibles amplitudes du déplacement transverse, le profil présente une courbure régulière. Sur les figures 6.15(c) et (d) on observe l'évolution de la réponse statique pour un chargement un peu plus important. Par comparaison aux cas de chargement présentés dans les sections précédentes, on remarque que le profil obtenu présente une allure intermédiaire. En effet, celui-ci reste courbe, mais tend à s'aplanir au centre de la plaque. Enfin, sur les figures 6.15(e) et (f), on peut voir qu'un « plateau » (comme déjà vu à la section 6.2.3) est de plus en plus présent et occupe de plus en plus d'espace sur la surface du profil.

Les états de contraintes résiduelles correspondants aux trois étapes du chargement sont représentés le long du rayon sur la figure 6.16. Sur les figures de la colonne de gauche, on remarque que plus le chargement augmente, plus les contraintes résiduelles sur le plan moyen (en $z = 0$) tendent vers une valeur constante et positive le long du rayon. Les conditions aux limites d'encastrement continuent d'imposer une différence au bord entre σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ qui sont toutes deux négatives. Sur la colonne de droite, on peut voir l'état de contraintes en peau. Pour un faible chargement, sur la figure 6.16(b), on peut voir qu'au centre (en $r = 0$) la plaque est en traction sur l'extrados et compression sur l'intrados de la courbure. Les contraintes se croisent et s'inversent au bord. En $r = R$ la structure est en traction vers l'intérieur et en compression vers l'extérieur. Pour des chargements plus élevés, les contraintes sont toutes positives au centre de la plaque mais les conditions d'encastrement continuent d'imposer le même phénomène au bord (compression en $z = h/2$ et traction en $z = -h/2$).

On peut également remarquer, en comparant l'état de contrainte en peau avec l'évolution du profil de déformation montré sur la colonne de droite de la figure 6.15, que le point de croisement des contraintes en peau supérieure et en peau inférieure correspond à un changement de courbure du profil. En effet, plus la géométrie tend à présenter un plateau qui occupe de plus en plus d'espace, donc qui se rapproche de plus en plus du bord, plus le point de croisement entre σ^+ et σ^- est lui aussi près du bord.

Enfin, on regarde l'évolution des caractéristiques dynamiques en fonction du paramètre de chargement sur la figure 6.17. Au début du chargement, sur les figures 6.17(a) et (b), on peut voir que le terme de contrainte résiduelle abaisse la valeur des fréquences propres axisymétriques par rapport à l'effet de la géométrie. Comme nous l'avons remarqué plus haut, la bifurcation est imparfaite, cela entraîne que la première fréquence ne va pas jusqu'à s'annuler avant de commencer à croître. Les déformées modales associées sont réparties sur l'ensemble de la structure.

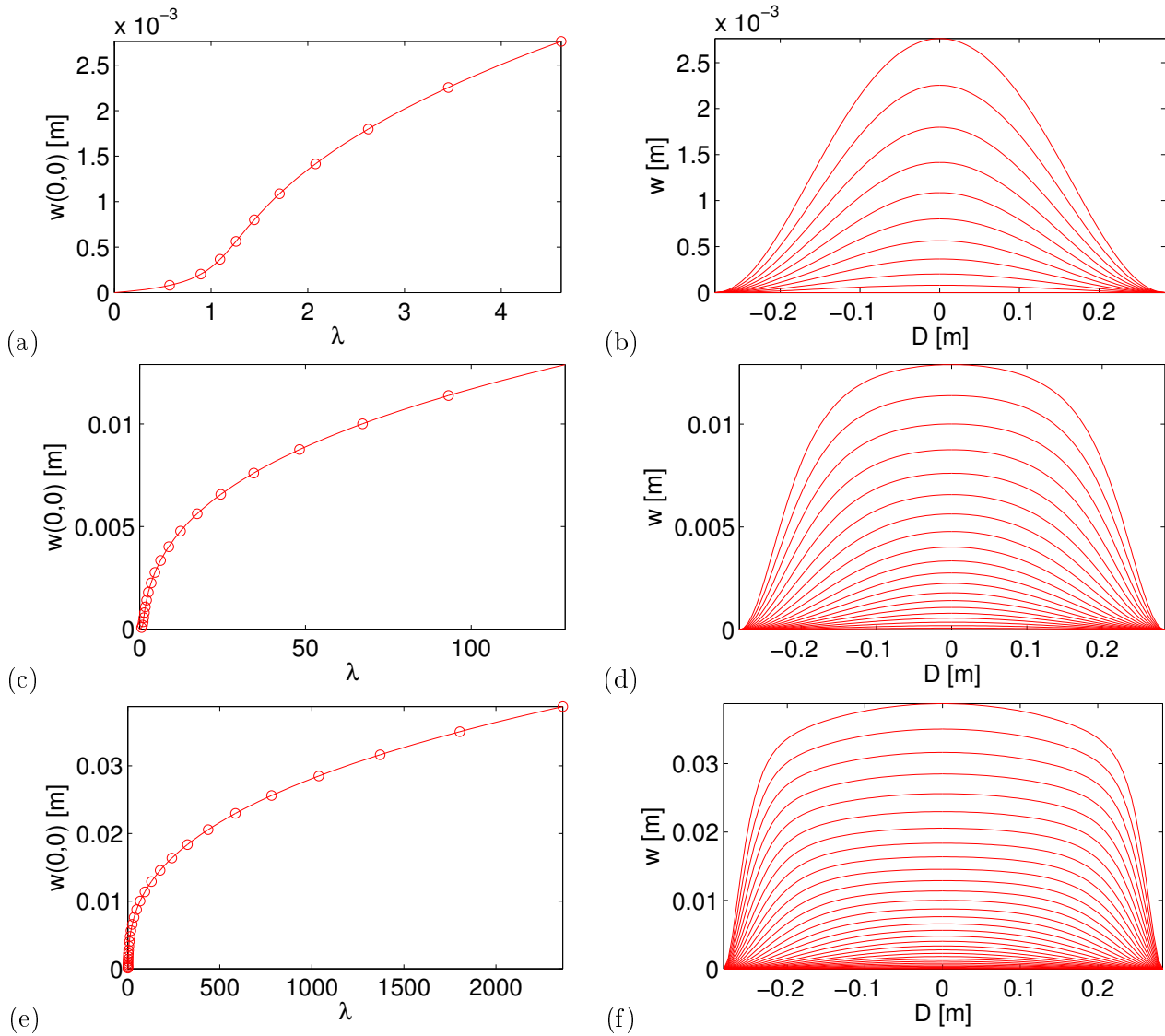


FIGURE 6.15 – Cas intermédiaire $n_0 = 1$ $m_0 = 1$. À gauche Diagrammes de bifurcation et à droite profils de déformation associés au cours de l'évolution du chargement. (a)-(b) $\lambda_{max} = 2.6$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 128.3$. (e)-(f) $\lambda_{max} = 2363$.

Les figures 6.17(c) et (d) sont associées au chargement intermédiaire ($\lambda_{max} = 128.3$). Ici on peut voir plusieurs phénomènes. Les courbes des fréquences tenant compte de la géométrie uniquement et celles des fréquences tenant compte à la fois de la géométrie et de l'état de contrainte se croisent lorsque $\lambda \simeq 35$. D'autre part, on peut aussi remarquer des croisements entre les fréquences qui arrivent progressivement au cours du chargement. Les déformées présentent une localisation de la vibration au centre de la plaque, particulièrement notable pour le mode 1. Les croisements de modes provoquent une divergence entre les fréquences dues à la géométrie qui décroissent progressivement avec le chargement et celles affectées du terme de contraintes qui, au contraire, croissent avec λ .

Enfin, pour le chargement le plus important, les figures 6.17(e) et (f) montrent la continuité du com-

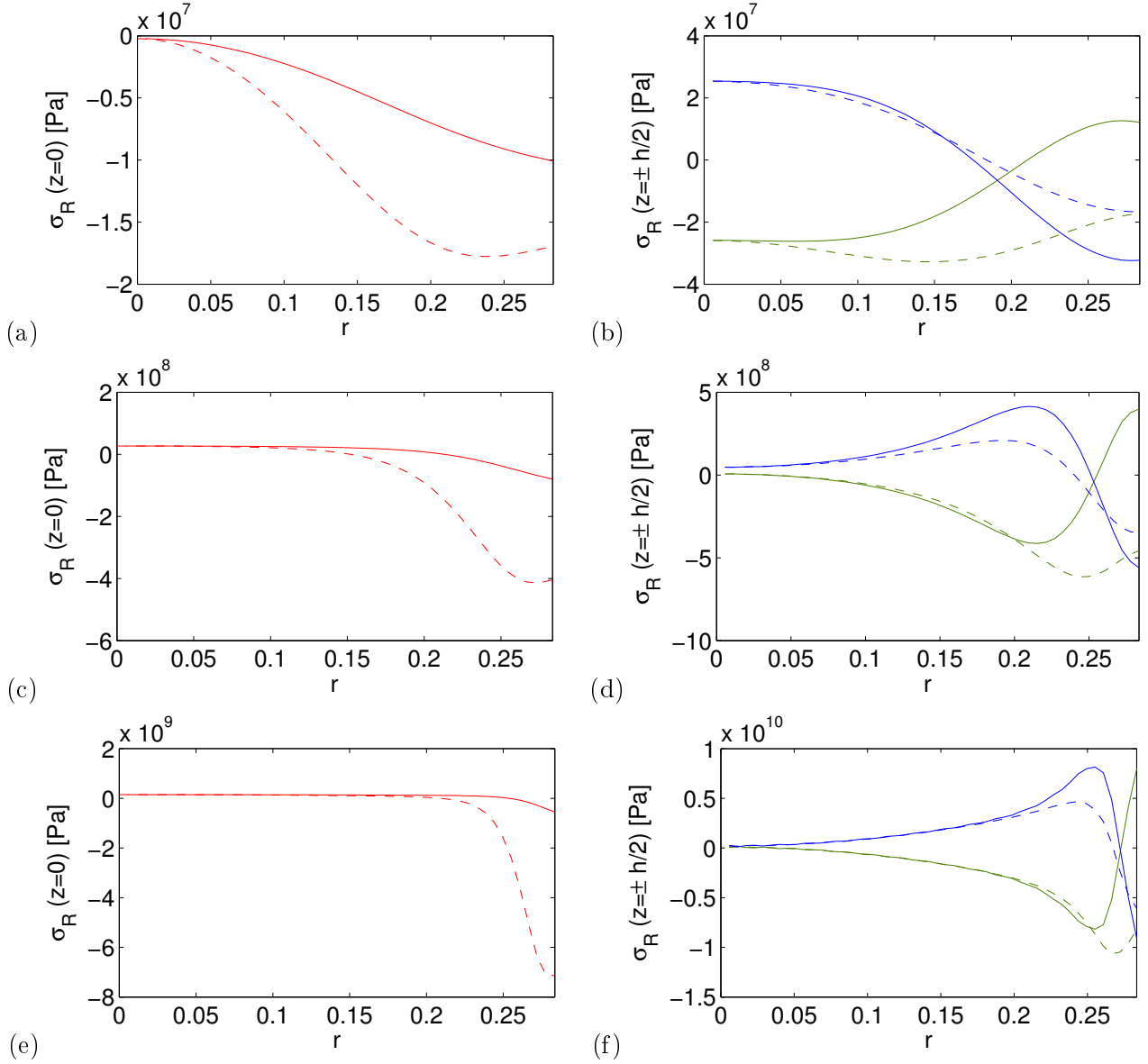


FIGURE 6.16 – Cas intermédiaire $n_0 = 1$ $m_0 = 1$. État de contraintes résiduelles (σ_{rr} (—) / $\sigma_{\theta\theta}$ (---)) le long du rayon. À gauche état de contrainte sur le plan moyen. À droite état de contrainte en peau : en bleu $z = h/2$ (extrados) et en vert $z = -h/2$ (intrados). (a)-(b) $\lambda_{max} = 2.6$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 128.3$. (e)-(f) $\lambda_{max} = 2363$.

portement énoncé précédemment où les fréquences géométriques diminuent et les fréquences qui prennent en compte les contraintes résiduelles augmentent progressivement. Aussi, on voit que les modes se localisent sur le « plateau » dont le rayon augmente avec le chargement.

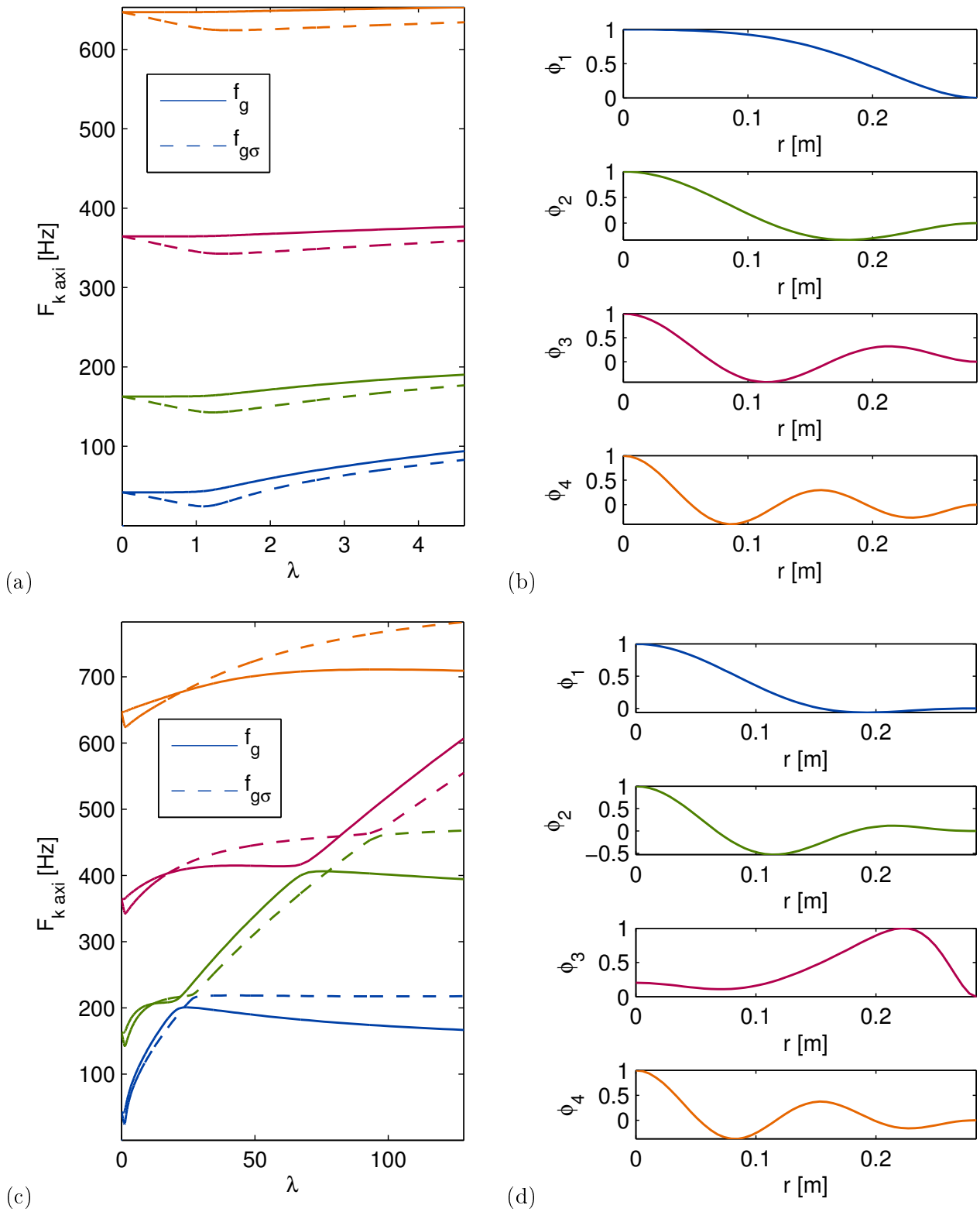
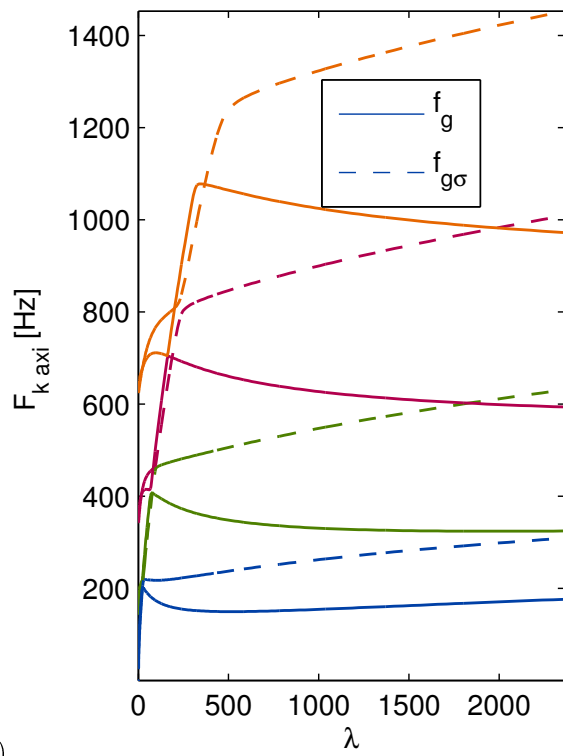
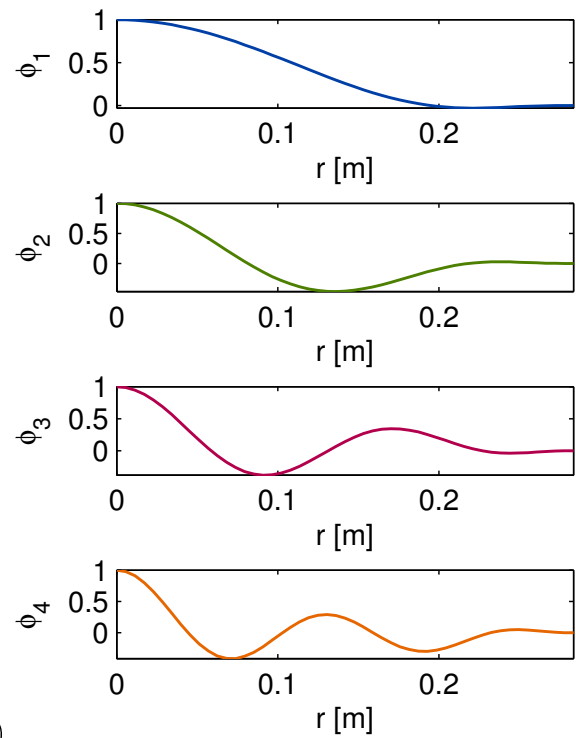


FIGURE 6.17 – Cas de chargement intermédiaire $n_0 = 1$ $m_0 = 1$. Caractéristiques dynamiques À gauche valeur des fréquences propres en fonction du chargement. En trait plein, valeurs des fréquences dues au changement géométrique. En tirets, influence des contraintes résiduelles. À droite déformées modales associées. (a)-(b) $\lambda_{max} = 2.6$. (c)-(d) $\lambda_{max} = 128.3$.



(e)



(f)

FIGURE 6.17 – Voir légende de la figure précédente 6.17. (e)-(f) $\lambda_{max} = 2363$.

6.3 Conclusion sur le modèle 2D

Ce chapitre présente les développements analytiques d'un modèle de plaque circulaire encastrée soumise à des efforts initiaux en membrane et en flexion. Les modèles de Kirchhoff-Love et von Kármán sont associés de sorte à mettre en évidence les non-linéarités géométriques qui couplent effort de membrane et moment de flexion résultants au cours de la transformation. Compte tenu des restrictions mathématiques, une forme polynomiale répartie le long du rayon est imposée aux contraintes initiales. Ici seuls les cas de chargements les plus simples ont été développés.

À la fin du chargement, la structure présente une configuration dite actuelle dans un équilibre stable composé d'une nouvelle géométrie et d'un état de contraintes résiduelles. Les vibrations sont étudiées autour de cet état d'équilibre et les développements sont tels que l'on a accès aux effets de la géométrie et des contraintes résiduelles de manière distincte sur les fréquences propres.

Trois cas de chargements sont présentés pour lesquels les rapports de contraintes initiales sont : $(n_0 = 1, m_0 = 0)$, $(n_0 = 1, m_0 = 150)$ et $(n_0 = 1, m_0 = 1)$. Le calcul dynamique est mené à bien uniquement sur les modes axisymétriques.

- Dans le premier cas, seul l'effort de membrane est appliqué. On remarque que plus le chargement est important, plus la géométrie propose une surface plane au centre de la structure. Aussi, l'état de contrainte tend vers une constante positive répartie en peau sur ce plateau et les conditions d'encastrement échangent les signes des contraintes en peau pour donner un état de compression à l'extérieur de la courbure et traction à l'intérieur. Les fréquences issues de la géométrie uniquement tendent vers celles d'une plaque plane circulaire imposées par la présence du plateau dans la forme obtenue et où les modes se localisent. Les contraintes résiduelles augmentent la valeur des fréquences
- Dans le second cas de chargement, la répartition des contraintes initiales est telle que le moment de flexion est appliqué dans des proportions grandement supérieures à l'effort de membrane. la géométrie est courbe et on retrouve le profil expérimental lié à la fabrication du steelpan. L'état de contrainte en peau tend vers une constante positive au centre (dû uniquement au $n_0(r=0) \neq 0$) et l'ensemble de la structure est en traction à l'extérieur et en compression à l'intérieur. Dans ce cas, les fréquences géométriques augmentent tout au long du chargement, mais les contraintes résiduelles corrigent à la hausse l'ensemble des valeurs. Ici aussi, les modes se localisent au centre de la structure.
- Enfin, un cas intermédiaire où les contraintes initiales sont appliquées de manière équitable est également présenté. On observe une géométrie hybride qui tend à présenter un plateau au centre de la structure, mais ce plateau est courbe par l'influence du $m_0 \neq 0$. L'état de contraintes reste positif au centre, mais on peut remarquer que les points d'inflexion de la géométrie sont liés au point de croisement entre σ^+ et σ^- , ce qui entraîne un changement de signe entre contrainte intérieure et contrainte extérieure. Enfin les fréquences subissent une influence des contraintes qui abaissent leur valeur au début du chargement et la ré-augmente dès que le plateau central tend à exister. Encore une fois les modes se localisent en fonction de la géométrie obtenue.

D'une manière générale, ce modèle permet de prédire et de quantifier l'influence des contraintes résiduelles que une structure proposant une nouvelle configuration géométrique lorsqu'elle a été chargée plastiquement. Pour l'instant ce travail a été réalisé dans des cas de chargement simple et pour les modes axisymétriques uniquement. Il serait intéressant d'étendre cette étude non seulement aux modes asymétriques mais également à des formes de chargements plus fines, qui se rapprocheraient plus d'expériences réelles.

Comparé à l'expérience du steelpan, présentée au chapitre 4, la géométrie est bien retrouvée, mais pas l'état de contraintes résiduelles mesuré en peau. Il est donc difficile de conclure sur la prédiction qu'offre notre modèle sur le comportement des caractéristiques dynamiques du steelpan suite à l'étape d'embouti. Le modèle proposé peut donc être amélioré ne serait-ce que par un raffinement de la forme des contraintes initiales imposées à la structure. D'autre part, mais il n'est pas évident que cela soit aisément solvable analytiquement, des conditions aux limites articulées pourraient relâcher certains effets de bords imposés par l'encastrement.

Conclusion partielle

Les motivations premières ont été de développer un modèle capable de rendre compte de l'effet des contraintes résiduelles sur les vibrations linéaires d'une structure déformée plastiquement, dont la géométrie atteint un déplacement de l'ordre de cent fois l'épaisseur initiale. L'étude a été menée à bien sur deux modèles de structures simples : un modèle de poutre droite bi-articulée et un modèle de plaque mince circulaire encastree.

Pour cela, la théorie de von Kármán a été utilisée. Le principe du modèle est de remplacer le processus de plasticité, qui est complexe à mettre en œuvre, par l'application d'un champ de contraintes initiales à la structure. Un développement analytique permet de suivre, au sein des équations, l'influence des termes provenant d'une part du changement de la géométrie et d'autre part de l'effet des contraintes résiduelles. Ainsi, en séparant le problème statique du problème dynamique, on a accès aux effets de ces deux paramètres, sur les vibrations, de manière distincte.

La résolution du problème a été réalisée à l'aide de la méthode asymptotique numérique implémentée dans Manlab. Le champ de contrainte initial, séparé en un effort de membrane initial et un moment de flexion initial, donne au modèle deux paramètres de contrôle qui permettent d'ajuster la forme géométrique que l'on souhaite obtenir. Par le calcul, il en découle l'état de contraintes résiduelles de la structure une fois déformée et la valeur des fréquences propres que l'on peut observer en tenant compte ou non de ce terme de contraintes résiduelles.

En comparaison à l'expérience, dans les modèles proposés, un couple d'effort de membrane et de moment de flexion initiaux ont permis d'ajuster les modèles à la géométrie expérimentale mais l'état de contraintes résiduelles n'a pas été parfaitement retrouvé. Dans un premier temps, on peut soulever qu'une des limites du modèle de von Kármán est qu'il ne prend pas en compte la variation d'épaisseur. Or, une étude préalablement menée sur les steelpan [47] a révélé une forte variation d'épaisseur du matériau au cours de la fabrication. De plus, celle-ci n'est pas uniformément répartie selon la géométrie et dépend fortement du rayon. Ainsi, le modèle ne rend pas bien compte du résultat géométrique obtenu. D'autre part, le modèle proposé peut tout de même être raffiné dans la forme des contraintes initiales appliquées à la structure. Dans le cas des poutres, le cadre de modélisation restreint l'effort axial à s'exprimer selon sa moyenne $\overline{N_0}$. Dans le cas des plaques, c'est l'équation $\mathbf{div}\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ qui restreint l'effort de membrane. Cela dit, les formes de contraintes choisies ont été les plus simples. Il est donc possible de choisir une forme plus complexe, ce qui est la première perspective du travail réalisé.

Troisième partie

Vibrations non linéaires des steelpans : interactions modales par résonances internes

Chapitre 7

Introduction aux vibrations non linéaires

Comme nous avons pu le voir dans le chapitre 3 de la partie I, les steelpans sont fabriqués et accordés de telle sorte que chaque note possède une géométrie courbe dont les modes propres sont en relations harmoniques. De plus, l'épaisseur initiale de la structure est très fine et l'ensemble du processus de fabrication tend à la diminuer. En mode de jeu usuel, les notes sont percutées et présentent un déplacement transverse de l'ordre de grandeur l'épaisseur. L'ensemble de ces observations justifie la considération du steelpan comme un système propice à présenter des non-linéarités de type géométrique.

Aussi, nous avons pu observer que pour des frappes d'intensités différentes, des transferts d'énergie existaient entre les composantes spectrales de la réponse vibratoire de la note. Ces transferts ont été mesurés pour de faibles amplitudes de vibration et sont d'autant plus présents que la frappe est forte. Ils sont caractéristiques du timbre particulier des steelpans. C'est pourquoi nous allons maintenant nous intéresser à ces transferts d'énergie.

Lors des analyses modales, nous avons pu observer une organisation des déformées modales propre à l'instrument (au moins pour les premiers modes). En combinant nos observations avec les dires du *tuner*, nous savons que cette organisation est recherchée au cours de la fabrication. En effet l'ordre des déformées modales et les fréquences propres associées sont ajustés de manière à présenter des rapports harmoniques entiers. Les fréquences commensurables entraînent l'existence des résonances internes. De plus, la non-linéarité du système active ces résonances et favorise les échanges d'énergie entre les modes de vibration. Cela est vrai non seulement pour une note en particulier mais également pour les notes voisines présentant des relations harmoniques avec la note directement excitée. Ainsi, la prise en compte de modes doubles devient nécessaire dans le phénomène de résonance et leur présence complexifie grandement la dynamique mise en jeu.

Plus particulièrement, on a vu que le steelpan étudié au chapitre 3, présentait un agencement des premières fréquences propres tel que si le premier mode oscille à ω , deux modes oscillent à 2ω et le suivant à 4ω . Deux modèles analytiques à trois degrés de libertés sont alors proposés. Ils présentent respectivement les relations de fréquences $(\omega, 2\omega, 2\omega)$ et $(\omega, 2\omega, 4\omega)$ et sont ainsi appelés résonance 1:2:2 et résonance 1:2:4.

Deux articles sont intégrés à ce manuscrit sous forme de chapitres.

Le premier (chapitre 8) rend compte d'une étude théorique des résonances 1:2:2 et 1:2:4. Les oscillateurs présentent, en première approximation, des couplages non linéaires quadratiques. Les systèmes sont placés sous excitation harmonique où le terme de forçage extérieur oscille à une fréquence (Ω) proche d'une des fréquences de résonance (ω_k) du système. Ainsi dans la résonance 1:2:2, lorsque les fréquences sont telles que $\omega_3 \simeq \omega_2 \simeq 2\omega_1$, deux cas d'excitation ont été envisagés : une excitation basse fréquence ($\Omega \simeq \omega_1$) et une excitation haute fréquence ($\Omega \simeq 2\omega_1$) ; alors que dans le cas de la résonance 1:2:4, où les fréquences propres sont telles que $\omega_3 \simeq 2\omega_2 \simeq 4\omega_1$, trois cas d'excitation ont été étudiés : basse ($\Omega \simeq \omega_1$), moyenne ($\Omega \simeq 2\omega_1$) et haute fréquence ($\Omega \simeq 4\omega_1$). La méthode des échelles multiples est utilisée afin d'obtenir les solutions analytiques en amplitudes et phases de chacun des oscillateurs des systèmes. Une fine étude de stabilité est également menée à bien.

Dans le cas particulier de la résonance 1:2:2 excitée en haute fréquence, c'est à dire lorsque la fréquence extérieure est proche des fréquences de résonance des oscillateurs 2 et 3, il n'existe pas de solution analytique simple. Pour cela, la méthode asymptotique numérique, implémentée dans Manlab, est utilisée. Cet article a été accepté dans la revue *Nonlinear dynamics*.

Le second (chapitre 9) donne l'application directe de ces résonances internes au cas des steelpans. L'excitation par oscillations forcées est utilisée afin de mesurer finement les processus de couplage. Ainsi, modèles et expériences peuvent être ajustés dans le but d'identifier et de quantifier les coefficients associés aux couplages non linéaires. En réalité, les steelpans présentent des résonances internes qui sont beaucoup plus complexes que de simples résonances à 3 modes et ce dès de très faibles amplitudes de vibrations (inférieures à l'épaisseur). Les résonances 1:2:2 et 1:2:4 sont bel et bien présentes mais d'autres couplages avec, par exemple, les sixièmes et huitièmes harmoniques sont aussi observés. Néanmoins, les mécanismes principaux sont identifiés grâce à ces modèles théoriques simples. La simulation des oscillations libres de ces systèmes est comparée à des filtres des mesures vibratoires en conditions de jeu. Il est alors confirmé que les principaux phénomènes de couplage responsables du timbre de l'instrument proviennent de ces couplages non linéaires par résonances internes.

D'autres simulations comprenant plus de modes sont envisageables afin de retrouver le timbre complet que sont capables de produire ces instruments. En revanche, des modèles comprenant plus de degrés de liberté entraînent une difficulté dans la résolution analytique d'une part, car les solutions sont beaucoup plus lourdes à manipuler, et d'autre part, dans l'ajustement des modèles à l'expérience car les paramètres non linéaires que l'on cherche à identifier sont beaucoup plus nombreux.

Chapitre 8

Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies : the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances

Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies: the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances

Mélodie Monteil · Cyril Touzé · Olivier Thomas · Simon Benacchio

Received: 14 May 2013 / Accepted: 27 August 2013
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2013

Abstract This paper is devoted to the analysis of nonlinear forced vibrations of two particular three degrees-of-freedom (dofs) systems exhibiting second-order internal resonances resulting from a harmonic tuning of their natural frequencies.

The first model considers three modes with eigenfrequencies ω_1 , ω_2 , and ω_3 such that $\omega_3 \simeq 2\omega_2 \simeq 4\omega_1$,

thus displaying a 1:2:4 internal resonance. The second system exhibits a 1:2:2 internal resonance, so that the frequency relationship reads $\omega_3 \simeq \omega_2 \simeq 2\omega_1$. Multiple scales method is used to solve analytically the forced oscillations for the two models excited on each degree of freedom at primary resonance. A thorough analytical study is proposed, with a particular emphasis on the stability of the solutions. Parametric investigations allow to get a complete picture of the dynamics of the two systems. Results are systematically compared to the classical 1:2 resonance, in order to understand how the presence of a third oscillator modifies the nonlinear dynamics and favors the presence of unstable periodic orbits.

Keywords Internal resonance · Nonlinear oscillations · Multiple scales

M. Monteil · C. Touzé (✉)
Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech,
828 Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex,
France
e-mail: cyril.touze@ensta-paristech.fr

M. Monteil
e-mail: melodie.monteil@ensta-paristech.fr

M. Monteil
Institut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC-Paris VI/CNRS,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

O. Thomas
Structural Mechanics and Coupled Systems Laboratory,
Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM),
2 rue Conté, 75003 Paris, France
e-mail: olivier.thomas@ensam.eu

O. Thomas
Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes
UMR 7296, Arts et Métiers ParisTech, 8 Boulevard
Louis XIV, 59000 Lille, France

S. Benacchio
IRCAM, CNRS UMR 9912, UPMC, 1 Place Igor
Stravinsky, 75004 Paris, France
e-mail: benacchio@ircam.fr

1 Introduction

Nonlinear resonances in the field of nonlinear vibrations have been recognized since a long time as a major effect that complexifies the nonlinear dynamics by creating strong energy exchange between modes (see, e.g., [23, 24] and references therein). In turn, these strong couplings increase the number of excited modes in a given dynamical response, and thus make the appearance of complex solutions more probable, including quasiperiodicity and chaos, following for instance the Ruelle–Takens scenario [30]. Today, these

general ideas still find applications in the comprehension of the transition scenario to turbulence in vibrating plates [36], as well as in the description of wave turbulence regime, dominated by N-waves nonlinear interactions [26].

For moderately nonlinear vibrations, internal resonances occur for structures displaying a simple (commensurable) relationship between its eigenfrequencies, in the line of the normal form theory [13, 23, 29, 38]. A particular case is the now well-documented 1:2 resonance relationship, where two eigenfrequencies (ω_1, ω_2) are such that $\omega_2 \simeq 2\omega_1$. This second-order internal resonance involves quadratic nonlinearity, and is now classical, since the first report of its effect on the response of a ship system by Froude [10, 22]. References [11, 21, 23, 24, 35] provide a complete picture of analytical solutions and experimental observations. Note that we use here the terminology “1:2” resonance to name that case whereas it is often denoted 2:1 resonance in other studies. Complications to the classical 1:2 case have already been considered as it appears in many physical systems such as strings, cables, plates, and shells. Lee and Perkins [16] reported a study on a 1:2:2 resonance occurring in suspended cables between in-plane and out-of-plane modes, and denoted that resonance as a 2:1:1 case. In their study, only one of the two high-frequency modes was excited, and the coupling with the two other modes was studied. In the field of nonlinear vibrations of shells, multiple cases involving different combinations of 1:1 and 1:2 resonances have been found to occur frequently. Chin and Nayfeh studied the case of a 1:1:2 resonance in a circular cylindrical shell, where only one of the two low-frequency modes were excited [8]. Thomas et al. studied theoretically and experimentally the 1:1:2 resonance occurring in shallow spherical shells, where the driven mode is the high-frequency one [33, 34]. The case of a 1:1:1:2 internal resonance occurring in closed circular cylindrical shells was also tackled by Amabili, Pellicano, and Vakakis [5, 28]. In that case, only one of the low-frequency modes was excited, and solutions to a particular case for the parameter values was analytically and numerically exhibited. Finally, a 1:2:4 resonance has been studied by Nayfeh et al. [25], where the excitation frequency was selected in the vicinity of the high-frequency mode.

Our interest is also directed toward the modeling of musical instruments, where the tuning of eigenfrequencies is generally searched for, as this property sounds better to the ears. Secondly, the particular

sound of some musical instruments can be explained by some nonlinearities, such that they appear as a case where nonlinear resonances between numerous eigenfrequencies should be key to properly understand their dynamical behavior. The string is obviously the most common case for string instruments sharing the two properties of nonlinear vibrations together with commensurable eigenfrequencies; see, e.g., [12, 17, 18, 32]. Nonlinearities are also encountered in reed instruments such as saxophone and clarinette; see, e.g., [27] and brass instruments (see, e.g., [20]) and references therein. For percussion instruments, gongs, cymbals, and steelpans (or steeldrums) are also known for displaying geometric nonlinearity due to the large amplitude vibrations of the main shell structure. In the case of gongs and cymbals, internal resonances between eigenfrequencies are known to make easier the transition to chaos (or wave turbulence) that explains their particular shimmering sound [7, 37]. For steelpans, the eigenfrequencies are intentionally tuned to give rise to nonlinear exchanges of energy between those modes that explains the particular timbre of the instrument [1–4]. The analytical results presented in this contribution are driven by the common occurrence of 1:2:2 and 1:2:4 resonances in numerous instruments of the steelpan family [19].

This contribution is thus focused on two internal resonances involving quadratic nonlinearity, as well as the presence of three modes: the 1:2:4 case, where the eigenfrequencies ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) of the system are such that $\omega_3 \simeq 2\omega_2 \simeq 4\omega_1$, and the 1:2:2 case where $\omega_3 \simeq \omega_2 \simeq 2\omega_1$. The two cases have been grouped together so as to highlight the analogies and differences between them and the more classical 1:2 resonance. The aim of the present paper is also to fill the gap between already published result so as to present them in a unified manner. Although has already been studied in [25], the excitation frequency was in the vicinity of the third mode only. Here, the results are complemented by taking into account an excitation frequency in the vicinity of the first two modes. The results are generalized and thorough parametric studies in each case allow one to get a complete picture of the dynamical solutions. For the 1:2:2 case, our results also complement those of Lee and Perkins [16] by considering all possible excitation frequencies. We also consider the case where both high-frequency modes are excited simultaneously, which renders the analysis more complex as the fundamental solution involves two directly excited modes. The starting point of this study

is the general equations (under their normal form) of the considered resonances in order to obtain results that are not restricted to the particular case of a given structure but which can be applied to any system. Parametric study with important parameters of the problem (detuning parameters, damping ratios, nonlinear coupling coefficients) is also reported for the two cases. Only primary resonances are considered, which means that the case of sub or superharmonic excitations is not reported.

2 The 1:2:4 resonance

This section is devoted to the analysis of a system exhibiting a one-two-four (1:2:4) internal resonance, corresponding to the interaction between three vibration modes with frequencies $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, such that $\omega_2 \simeq 2\omega_1$ and $\omega_3 \simeq 4\omega_1$. Harmonically forced vibrations are considered, and the three cases of a forcing frequency Ω being in the vicinity of (i) the high-frequency $\Omega \approx \omega_3$, (ii) the mid-frequency $\Omega \approx \omega_2$, and (iii) the low-frequency $\Omega \approx \omega_1$, are studied.

2.1 Equations of motion and multiple scales solution

The dynamical system for the 1:2:4 internal resonance consists of three oscillator equations coupled by quadratic nonlinear terms. It reads:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon[\alpha_1 q_1 q_2 - 2\mu_1 \dot{q}_1 + \delta_{\Omega, \omega_1} F_1 \cos \Omega t], \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 \\ = \varepsilon[\alpha_2 q_1^2 + \alpha_3 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2 + \delta_{\Omega, \omega_2} F_2 \cos \Omega t], \end{aligned} \tag{1b}$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon[\alpha_4 q_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + \delta_{\Omega, \omega_3} F_3 \cos \Omega t]. \tag{1c}$$

According to perturbation methods, nonlinear terms (parameterized by $\alpha_{1,2,3,4}$), damping terms (modal damping is assumed via $\mu_{1,2,3}$) and external forcing ($F_k \cos \Omega t$ with $\delta_{\Omega, \omega_k}$ the Kronecker delta symbol used to distinguish the forced cases) are assumed to be small as compared to the linear oscillatory part, and thus are scaled by a bookkeeping device $\varepsilon \ll 1$.

Only four nonlinear quadratic terms are present. They correspond to the resonant monoms, and Eqs. (1a)–(1c) is the normal form of the 1:2:4 internal

resonance [6, 13, 31, 38]. All other possible nonlinear (quadratic) terms have no importance for the global dynamics and can be canceled by a nonlinear change of coordinates. Equivalently, deriving a first-order perturbation scheme with other terms (e.g., q_1^2 on (1a)), one would find that these terms do not appear in the solvability condition.

In order to express the internal resonance relationships, two internal detuning parameters σ_1 and σ_2 are introduced as

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \tag{2a}$$

$$\omega_3 = 2\omega_2 + \varepsilon\sigma_2 = 4\omega_1 + \varepsilon(2\sigma_1 + \sigma_2). \tag{2b}$$

Finally, σ is the external detuning, expressing the fact that the excitation frequency is selected in the vicinity of one eigenfrequency ω_k , with $k = 1, 2$, or 3:

$$\Omega = \omega_k + \varepsilon\sigma. \tag{3}$$

System (1a)–(1c) is solved by the multiple scales method, using several time scales ($T_j = \varepsilon^j t$), to the first order as

$$q_k(t) = q_{k0}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{k1}(T_0, T_1) + o(\varepsilon^2), \tag{4}$$

where $T_0 = t$ is a fast time scale and $T_1 = \varepsilon t$ is a slow time scale.

The ε^0 -order equations lead to express the $\{q_{k0}\}_{k=1,2,3}$ as

$$q_{k0}(T_0, T_1) = \frac{a_k(T_1)}{2} \exp[j(\omega_k T_0 + \theta_k(T_1))] + c.c., \tag{5}$$

where a_k are the amplitudes, θ_k are the phases, c.c. stands for complex conjugate and $j^2 = -1$.

Introducing (5) into the ε^1 -order equations leads to the so-called solvability condition, which can be written as a six-dimensional dynamical system by separating real and imaginary parts:

$$\begin{aligned} a_1' = -\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) \\ + \delta_{\Omega, \omega_1} \frac{F_1}{2\omega_1} \sin(\sigma T_1 - \theta_1), \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} a_1 \theta_1' = -\frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \cos(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) \\ - \delta_{\Omega, \omega_1} \frac{F_1}{2\omega_1} \cos(\sigma T_1 - \theta_1), \end{aligned} \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}
 a_2' &= -\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) \\
 &+ \frac{\alpha_3 a_2 a_3}{4\omega_2} \sin(\sigma_2 T_1 + \theta_3 - 2\theta_2) \\
 &+ \delta_{\Omega, \omega_2} \frac{F_2}{2\omega_2} \sin(\sigma T_1 - \theta_2), \tag{6c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 \theta_2' &= -\frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \cos(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) \\
 &- \frac{\alpha_3 a_2 a_3}{4\omega_2} \cos(\sigma_2 T_1 + \theta_3 - 2\theta_2) \\
 &- \delta_{\Omega, \omega_2} \frac{F_2}{2\omega_2} \cos(\sigma T_1 - \theta_2), \tag{6d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3' &= -\mu_3 a_3 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3} \sin(\sigma_2 T_1 + \theta_3 - 2\theta_2) \\
 &+ \delta_{\Omega, \omega_3} \frac{F_3}{2\omega_3} \sin(\sigma T_1 - \theta_3), \tag{6e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 \theta_3' &= -\frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3} \cos(\sigma_2 T_1 + \theta_3 - 2\theta_2) \\
 &- \delta_{\Omega, \omega_3} \frac{F_3}{2\omega_3} \cos(\sigma T_1 - \theta_3), \tag{6f}
 \end{aligned}$$

where $(\cdot)'$ stands for the derivation with respect to T_1 . Then the following variables allow the definition of an autonomous dynamical system:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sigma T_1 - \theta_k, & \gamma_1 &= \sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1, \\
 \gamma_2 &= \sigma_2 T_1 + \theta_3 - 2\theta_2, \tag{7}
 \end{aligned}$$

with $k = 1, 2, 3$ depending on the excited mode. Introducing Eqs. (7) into the dynamical system (6a)–(6f), one can obtain the fixed points giving the oscillatory solutions of this initial dynamical system. They are exhibited in the next subsections for the three different cases of excitation frequency.

2.2 High-frequency excitation

We begin with the case where the third oscillator, having the highest frequency ω_3 , is directly driven at its resonance. Although this case has been analyzed by Nayfeh et al. [25], it is here reconsidered. Firstly, in order to point out the similarities between this case and the two other forcing cases ($\Omega \approx \omega_2$, Sect. 2.3 and $\Omega \approx \omega_1$, Sect. 2.4), which were not considered in [25]. Secondly, it enables to highlight how the 1:2 internal resonance case allows a global understanding of the

1:2:4 case as a cascade of two 1:2 resonances. Thirdly, a thorough parametric study of the behavior of the solution branches with respect to the physical parameters is here provided with a focus on the instability of the fully coupled case, whereas Nayfeh et al. were more interested in the transition to chaos in [25].

The external detuning is introduced with

$$\Omega = \omega_3 + \varepsilon \sigma. \tag{8}$$

According to Eqs. (5) and (7), in this high-frequency case, the ε^0 -order solutions leads to the third directly excited mode, oscillating at the frequency $\Omega \simeq \omega_3$, and the appearance of two subharmonic resonant responses for the two other modes, oscillating at $\Omega/2$ and $\Omega/4$ as

$$q_1(t) = a_1 \cos\left(\frac{\Omega}{4}t + \phi_1\right), \tag{9a}$$

$$q_2(t) = a_2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \phi_2\right), \tag{9b}$$

$$q_3(t) = a_3 \cos(\Omega t + \phi_3), \tag{9c}$$

where $\phi_1 = -(\gamma + \gamma_2 + 2\gamma_1)/4$, $\phi_2 = -(\gamma + \gamma_2)/2$ and $\phi_3 = -\gamma$.

The fixed points of (6a)–(6f) for the high-frequency excitation are found by replacing $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ by $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$, according to Eqs. (7), and then by canceling the time derivatives ($a_1' = \gamma_1' = a_2' = \gamma_2' = a_3' = \gamma' = 0$), leading to:

$$-\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) = 0, \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) \\
 + \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) = 0, \tag{10b}
 \end{aligned}$$

$$-\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\gamma_1) + \frac{\alpha_3 a_2 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) = 0, \tag{10c}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_2 a_1^2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) + \frac{\alpha_3 a_3}{2\omega_2} \cos(\gamma_2) \\
 - \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \cos(\gamma) = 0, \tag{10d}
 \end{aligned}$$

$$-\mu_3 a_3 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3} \sin(\gamma_2) + \frac{F_3}{2\omega_3} \sin(\gamma) = 0, \tag{10e}$$

$$\sigma + \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) + \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \cos(\gamma) = 0. \tag{10f}$$

From Eqs. (10a)–(10f), one can show that only three kinds of solutions are possible:

- (i) The *single-degree-of-freedom solution* (sdof), corresponding to $a_3 \neq 0$; $a_1 = a_2 = 0$. In this case, only the directly excited mode participates to the vibration, without any transfer of energy neither to a_2 nor to a_1 .
- (ii) The *partially coupled solution* (c1) where $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ and $a_3 \neq 0$. In this case, the two upper modes are coupled while the first one stays at rest. It can be noticed that a partially coupled solution with $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, and $a_3 \neq 0$ is not possible, since imposing $a_2 = 0$ in (12a) leads to $a_1 = 0$.
- (iii) The *fully coupled solution* (c2) where $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ and $a_3 \neq 0$. The three modes are now coupled and energy has been transferred from a_3 to a_2 and a_1 .

We now investigate the behavior and stability of the three possible solutions sdof, c1, and c2.

2.2.1 Single-mode solution

From the system (10a)–(10f) simplified with $a_1 = a_2 = 0$, the single degree-of-freedom solution is obtained as

$$a_3^{\text{sdof}} = \frac{F_3}{2\omega_3 \sqrt{\sigma^2 + \mu_3^2}}. \tag{11}$$

It corresponds to the classical resonant solution for linear oscillator with external forcing, displaying a maximum response $a_{3\text{max}}^{\text{sdof}} = \frac{F_3}{2\omega_3 \mu_3}$ when $\sigma = 0$.

The stability analysis is performed by computing the Jacobian matrix of the fixed points system (10a)–(10f) along the sdof solution (i.e., by setting $a_1 = a_2 = 0$), which reads

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) & \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) & -\frac{\alpha_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 + \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3 a_3}{2\omega_2} \sin(\gamma_2) & \frac{\alpha_3}{2\omega_2} \cos(\gamma_2) + \frac{F_3}{2\omega_3 a_3^2} \cos(\gamma) & \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \frac{F_3}{2\omega_3} \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_3}{2\omega_3 a_3^2} \cos(\gamma) & -\frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \sin(\gamma) & 0 \end{pmatrix}.$$

The corresponding eigenvalues are

$$\lambda_1^{\text{sdof}} = 0, \tag{12a}$$

$$\lambda_2^{\text{sdof}} = -\mu_1, \tag{12b}$$

$$\lambda_3^{\text{sdof}} = -\frac{\alpha_3 a_3}{2\omega_2} \sin(\gamma_2), \tag{12c}$$

$$\lambda_4^{\text{sdof}} = -\mu_2 + \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2), \tag{12d}$$

$$\lambda_{5,6}^{\text{sdof}} = -\mu_3 \pm i\sigma. \tag{12e}$$

If all real parts are negative, the corresponding fixed point is stable, otherwise it is unstable. The two last eigenvalues $\lambda_{5,6}^{\text{sdof}}$ correspond to the stability of the sdof solution with respect to perturbations along (a_3, γ) , i.e., the third, directly excited, oscillator. They have thus a negative real part since a single dof linear damped oscillator is stable. The first two eigenvalues

describe the perturbations brought by the first oscillator. As no direct coupling between oscillators 1 and 3 exists (solutions of the type $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ are not possible), they indicate stability and marginality. Finally, only one pair of eigenvalues $\lambda_{3,4}^{\text{sdof}}$ is responsible for the stability of the sdof solution with respect to the perturbations brought by the existence of the second oscillator. The stability can thus be derived from the sign of the product $\lambda_3 \lambda_4$, and by determining the angle $\sin(\gamma_2)$ thanks to Eqs. (10d) and (10f). Finally, the following stability condition for the sdof solution is obtained as:

$$a_3^{\text{sdof}} \leq I_a, \quad \text{where } I_a = \frac{2\omega_2}{\alpha_3} \sqrt{4\mu_2^2 + (\sigma_2 + \sigma)^2}. \tag{13}$$

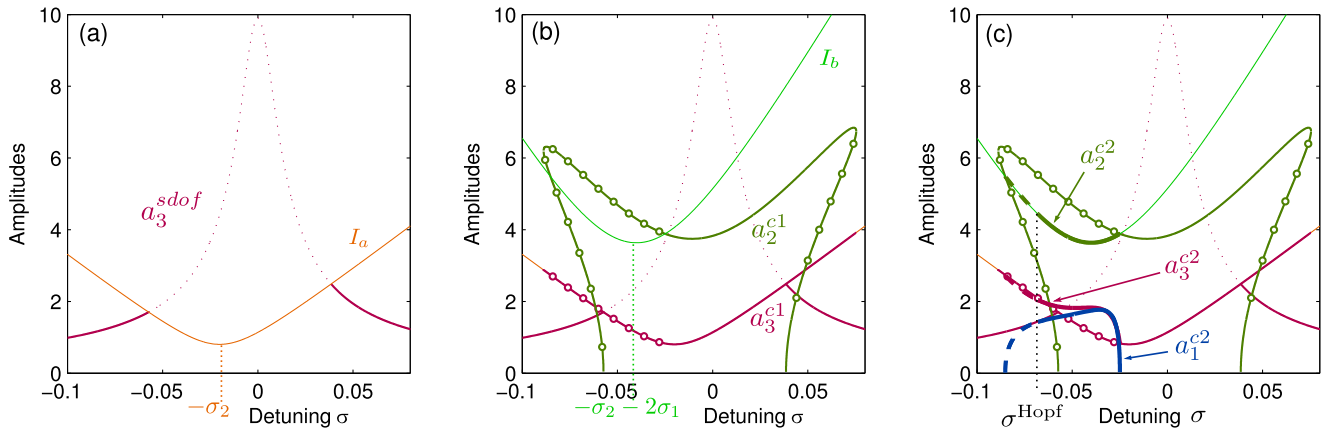


Fig. 1 Frequency-response curves of the 1:2:4 internal resonance for a high-frequency excitation case ($\Omega = \omega_3 + \sigma$). Stability behavior of the three kind of solutions: (\cdots) sdof unstable solution, (\rightarrow) c1 unstable solution, and ($- -$) c2 unstable solution. (a) Sdof solution and instability limit defined

by I_a . (b) Partially coupled 2:4 solution (c1) with its instability limit defined by I_b . (c) Fully coupled 1:2:4 solution (c2) with its Hopf bifurcation occurring at $\sigma^{\text{Hopf}} = -0.07$. Selected values: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2.01, \omega_3 = 4.04, \mu_1 = 0.01, \mu_2 = 0.01, \mu_3 = 0.01, \alpha_1 = 0.011, \alpha_2 = 0.1, \alpha_3 = 0.1; \alpha_4 = 0.1, F_3 = 0.8$

This stability condition is reported in Fig. 1(a), where the sdof solution is also represented. Once the amplitude a_3 is larger than I_a , the sdof solution becomes unstable. One can notice that this first instability is completely equivalent to a simple 1:2 internal resonance where the higher mode is excited; see, e.g., [23, 24, 33]. The instability region is fully characterized by its minimum value:

$$\text{for } \sigma = -\sigma_2, \quad I_{a,\min} = \frac{4\omega_2\mu_2}{\alpha_3}, \quad (14)$$

as well as by the slope of its asymptotic values

$$\text{for } |\sigma| \rightarrow \infty, \quad I_a \approx \frac{2\omega_2\sigma}{\alpha_3}. \quad (15)$$

In particular, these two relationships show that increasing α_3 , and/or decreasing μ_2 , favor the instability of the sdof solution.

It can be noticed that the two asymptotes are deduced by canceling μ_2 in I_a , that leads to $I_a = \pm 2\omega_2(\sigma_2 + \sigma)/\alpha_3$ (see Eq. (13)). The intersection of these two curves is obtained for $\sigma = -\sigma_2$ that is equivalent to $\Omega = \omega_3 - \varepsilon\sigma_2 = 2\omega_2$.

2.2.2 c1 solution: partially coupled 2:4 solution

When a_3^{sdof} becomes unstable, the energy injected into the system can be transferred to the second oscillator thanks to the nonlinear coefficient α_4 (Eqs. (1a)–(1c)).

The partially coupled solution is deduced from the system (10a)–(10f), simplified with $a_1 = 0$. Two new solutions for the amplitudes a_3^{c1} and a_2^{c1} are obtained:

$$(a_2^{c1})^2 = \frac{16\omega_2\omega_3}{\alpha_3\alpha_4} \left(-(\mu_2\mu_3 - \nu_2\nu_3) + \sqrt{\left(\frac{F_3\alpha_3}{8\omega_2\omega_3}\right)^2 - (\nu_2\mu_3 + \mu_2\nu_3)^2} \right), \quad (16)$$

$$a_3^{c1} = \frac{4\omega_2}{\alpha_3} \sqrt{\mu_2^2 + \nu_2^2},$$

where $\nu_2 = \frac{(\sigma + \sigma_2)}{2}$ and $\nu_3 = \sigma$.

Once again, this coupled solution is equivalent to that found for two oscillators presenting a 1:2 internal resonance, except that here the coupling is between oscillators 2 and 3, so that this case may also be called the partially coupled 2:4 solution. The stability of this solution with respect to the presence of the first oscillator is now deduced from the Jacobian of the system (10a)–(10f) with $a_1 = 0, a_2 = a_2^{c1}$, and $a_3 = a_3^{c1}$. The Jacobian is fully separable. It can be analyzed in an equivalent manner to the previous discussion in Sect. 2.2.1.

Within the six eigenvalues, only the first two dictates the stability of the c1 solution with respect to the fully coupled case where energy is shared between the

three oscillators. They read

$$\lambda_1^{c1} = -\mu_1 + \frac{\alpha_1 a_2^{c1}}{4\omega_1} \sin(\gamma_1), \tag{17a}$$

$$\lambda_2^{c1} = -\frac{\alpha_1 a_2^{c1}}{2\omega_1} \sin(\gamma_1). \tag{17b}$$

Interestingly, these two eigenvalues depend only on a_2^{c1} and not on a_3^{c1} , so that a simple stability criterion can be derived as in the previous case, by inspecting the sign of the product $\lambda_1^{c1} \lambda_2^{c1}$, which gives

$$a_2^{c1} \leq I_b,$$

$$\text{where } I_b = \frac{2\omega_1}{\alpha_1} \sqrt{4\mu_1^2 + \left(\frac{\sigma + \sigma_2 + 2\sigma_1}{2}\right)^2}. \tag{18}$$

Hence, the stability of the c1 solution is only determined by the values of a_2^{c1} with a stability limit I_b having an expression similar to I_a . In the same manner, one can deduce the minimum value of I_b :

$$\text{for } \sigma = -\sigma_2 - 2\sigma_1, \quad I_{b,\min} = \frac{4\omega_1 \mu_1}{\alpha_1}, \tag{19}$$

as well as its asymptotic behavior for large values of σ :

$$\text{for } |\sigma| \rightarrow \infty, \quad I_b \approx \frac{2\omega_1 \sigma}{\alpha_1}. \tag{20}$$

As in the previous case, the asymptotes are obtained by canceling μ_1 in I_b Eq. (18), with the intersection at $\sigma = -\sigma_2 - 2\sigma_1$ that is $\Omega = \omega_3 - \varepsilon(\sigma_2 + 2\sigma_1) = 4\omega_1$.

These expressions show how the detuning parameter ($\sigma + 2\sigma_1$), the coupling coefficient α_1 , and the damping μ_1 , influence the stability of the c1 solution and the possibility to obtain a fully coupled solution. The stability curve I_b is represented in Fig. 1(b), for selected values of the parameters. One can remark that for the c1 solution, a_3^{c1} takes exactly the value of the stability region I_a , so that the two curves are the same. For a certain detuning σ , the value of a_2 becomes larger than I_b . At that point, the c1 solution becomes unstable in favor of a fully coupled solution. Finally, one must be aware that the four other eigenvalues that have not been inspected here, may also have positive real parts for certain parameter values. This case is not explicated here as it can be easily recovered from known results on the 1:2 internal resonance [23, 24].

2.2.3 c2 solution: fully coupled 1:2:4 solution

From the fixed-points equations (10a)–(10f) and without canceling any amplitude, one can derive the solution for the c2 case. A simple expression is found for a_2 as

$$a_2^{c2} = \frac{4\omega_1}{\alpha_1} \sqrt{v_1^2 + \mu_1^2},$$

$$\text{where } v_1 = \frac{(\sigma + \sigma_2 + 2\sigma_1)}{4}. \tag{21a}$$

Defining

$$\chi_1(a_2^{c2}) = \frac{16\omega_1\omega_2}{\alpha_1\alpha_2}(\mu_1\mu_2 - v_1v_2) + \frac{\alpha_4\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2} \frac{\omega_1}{\omega_3} \frac{\mu_1\mu_3 + v_1v_3}{(\mu_3^2 + v_3^2)} (a_2^{c2})^2, \tag{21b}$$

$$\chi_2(a_2^{c2}) = \frac{16\omega_2^2}{\alpha_2^2}(\mu_2^2 + v_2^2)(a_2^{c2})^2 - \frac{1}{(\mu_3^2 + v_3^2)} \times \left[\frac{\alpha_3^2 F_3^2}{4\omega_3^2 \alpha_2^2} - \frac{2\alpha_4\alpha_3\omega_2}{\alpha_2^2 \omega_3}(\mu_2\mu_3 - v_2v_3) \times (a_2^{c2})^2 - \frac{\alpha_4^2 \alpha_3^2}{16\omega_3^2 \alpha_2^2} (a_2^{c2})^4 \right] (a_2^{c2})^2, \tag{21c}$$

one obtains, for a_1 and a_3 :

$$a_1^{c2} = \sqrt{-\chi_1(a_2^{c2}) + \sqrt{\chi_1^2(a_2^{c2}) - \chi_2(a_2^{c2})}}, \tag{21d}$$

$$a_3^{c2} = \frac{1}{\sqrt{\mu_3^2 + v_3^2}} \left(\frac{F_3^2}{4\omega_3^2} - \frac{2\alpha_4\alpha_2\omega_1}{\alpha_1\alpha_3\omega_3}(\mu_1\mu_3 + v_3v_1) \times (a_1^{c2})^2 - \frac{2\alpha_4\omega_2}{\alpha_3\omega_3}(\mu_2\mu_3 - v_2v_3)(a_2^{c2})^2 - \frac{\alpha_4^2}{16\omega_3^2} (a_2^{c2})^4 \right)^{1/2}. \tag{21e}$$

Once again, the value of a_2 , which drives the instability from the c1 to the c2 case, now takes a value a_2^{c2} equal to I_b , in a symmetric manner as a_3 for the transition from sdof to c1. The values of a_1^{c2} is slaved to the values of a_2^{c2} through the complicated functions $\chi_1(a_2^{c2})$ and $\chi_2(a_2^{c2})$. Figure 1(c) shows the complete picture with all solution branches, with a c2 solution existing in the range $\sigma \in [-0.08; -0.02]$.

The stability of the c2 solution is given by the Jacobian of the system without any simplification and

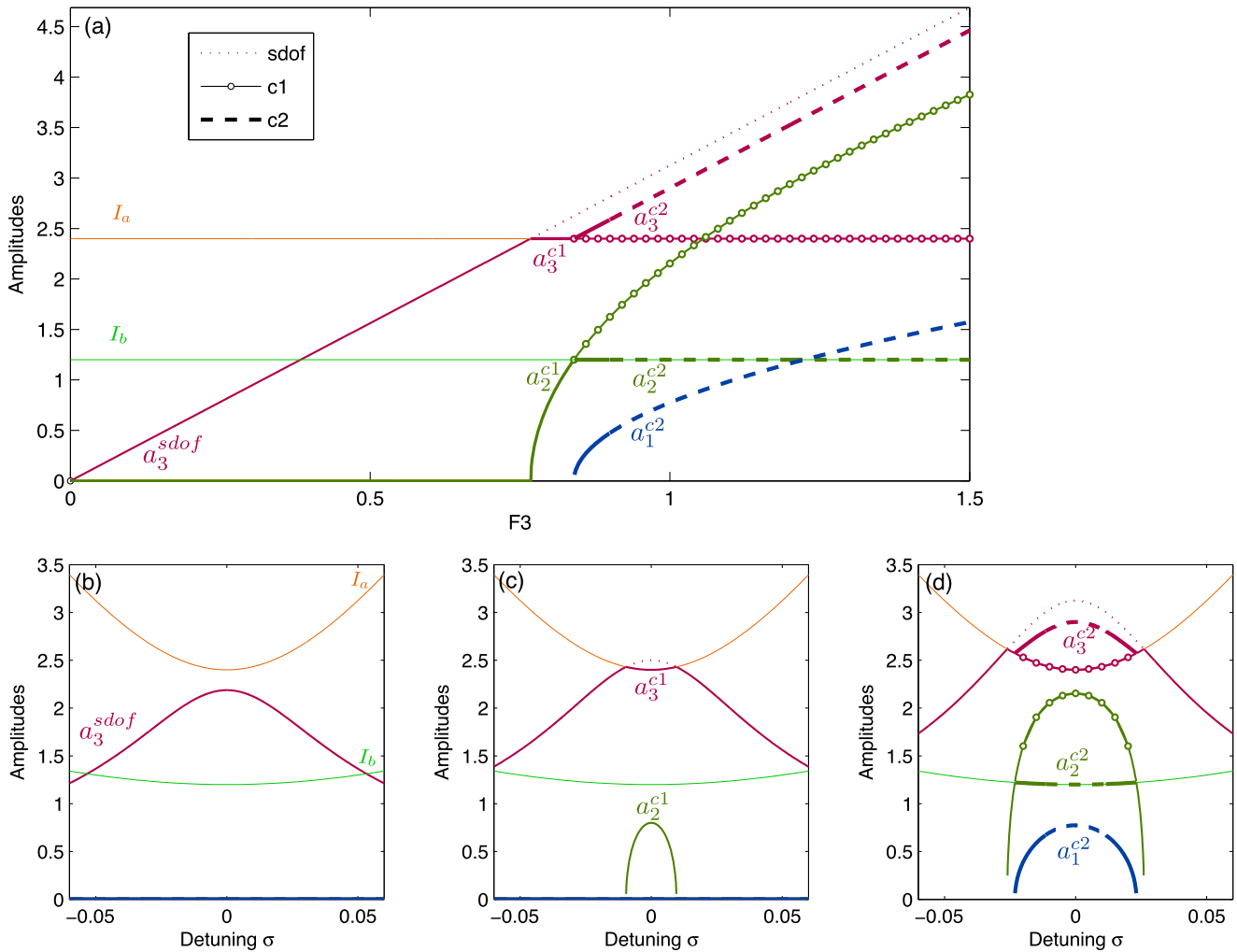


Fig. 2 Cascade of internal resonances in the 1:2:4 internal resonance for a high-frequency excitation case ($\Omega = \omega_3 + \sigma$). (a) Force-response curves. Selected values: $\sigma = 0$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 4$, $\mu_{1,2} = 0.03$, $\mu_3 = 0.04$, $\alpha_{1,2,3,4} = 0.1$. Cor-

responding frequency-response curves for $\sigma = [-0.55 : 0.55]$ and for selected external force: (b) $F_3 = 0.7$, (c) $F_3 = 0.8$, (d) $F_3 = 1$

by substituting a_1 , a_2 , and a_3 for a_1^{c2} , a_2^{c2} , and a_3^{c2} . In that case, no simple analytical solutions are derivable for the eigenvalues (the problem is not separable anymore), and thus the eigenvalues have to be followed numerically. In Fig. 1(c), a Hopf bifurcation has been found along the c2 branch, occurring at $\sigma^{\text{Hopf}} = -0.07$. At that point, no stable periodic orbits exist anymore for the oscillatory initial problem, which thus exhibit a quasiperiodic solution.

Figure 2 shows the effects of varying the excitation amplitude F_3 on the response amplitude a_1 , a_2 and a_3 . Here, we set $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$. The figure presents the different steps of this 1:2:4 nonlinear coupling. First, for small amplitudes, only the sdof solution can exist and the system is totally stable as shown in Figs. 2(a)

and 2(b). As soon as a_3^{sdof} intersects I_a , the first coupling solutions a_3^{c1} and a_2^{c1} can appear and these new solutions are stable until a_2^{c1} intersects I_b . One can see that for $\sigma = 0$, when a_3^{c2} appears, the system is totally unstable and a Hopf bifurcation can exist. The dynamics presents a cascade of successive couplings that evolves here with the amplitude of the external force. Note that Fig. 2(a) shows that the c2 case is mostly unstable so that quasiperiodic solutions are more likely to occur as soon as the transfer of energy is completed.

2.2.4 Parametric study

Now that the general solutions have been established, their behavior with respect to parameter variations are

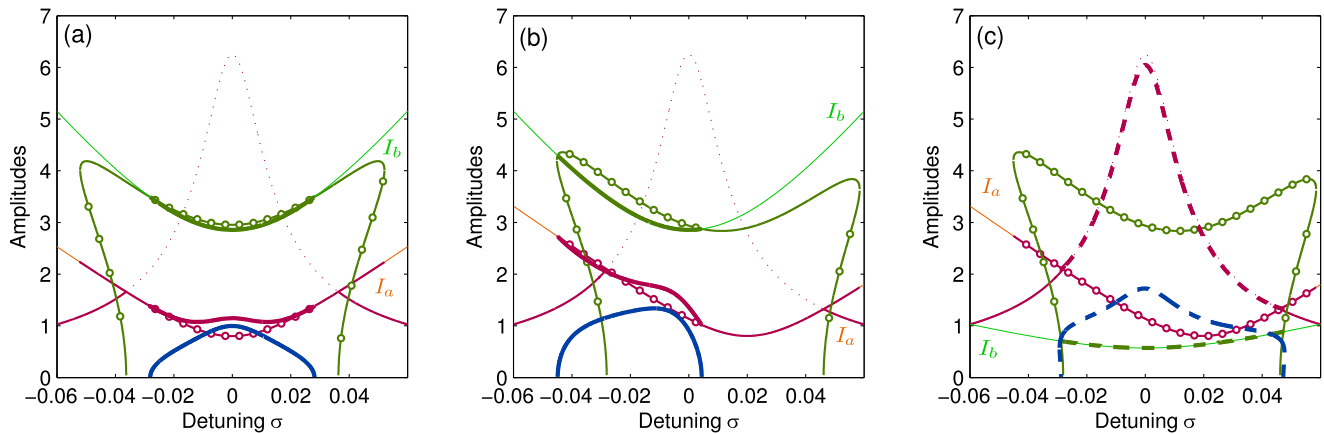
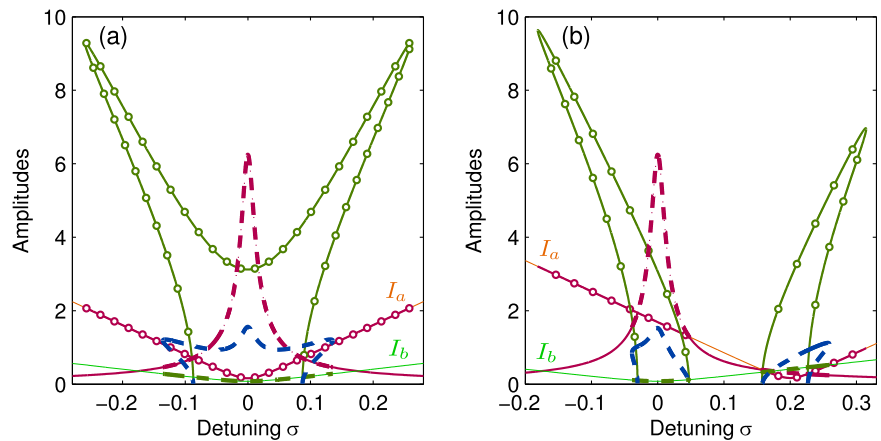


Fig. 3 Frequency-response curves of the 1:2:4 internal resonance for a high-frequency excitation case ($\Omega = \omega_3 + \sigma$). **(a)** Stable symmetric coupled response when $I_b > I_a$ and $\sigma_{1,2} = 0$ (selected values: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 4, \mu_{1,2,3} = 0.01, \alpha_1 = 0.14, \alpha_{2,3,4} = 0.1, F_3 = 0.5$). **(b)** Stable nonsym-

metric coupled response when $I_b > I_a$ and $\sigma_{1,2} \neq 0$ (parameters of **(a)** except: $\omega_2 = 2.01$). **(c)** Unstable nonsymmetric coupled response when $I_a > I_b$ and $\sigma_{1,2} \neq 0$ (parameters of **(a)** except: $\omega_2 = 2.01$ and $\alpha_1 = 0.7$)

Fig. 4 1:2:4 internal resonance. Frequency-response curves when $\Omega = \omega_3 + \sigma$. **(a)** $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 4, \mu_1 = 0.01, \mu_2 = 0.01, \mu_3 = 0.01, \alpha_{1,3} = 0.5, \alpha_{2,4} = 0.1, F_3 = 0.5$. **(b)** Same selected values except: $\omega_2 = 2.1$



illustrated in order to highlight the main dynamical characteristics of the 1:2:4 resonance.

Figure 3(a) shows a perfectly tuned case where $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, which leads to symmetric response with respect to the axis $\sigma = 0$. As noted in the previous section, the dynamics of the system excited at its higher frequency exhibits a cascade of energy from the highest (directly excited mode) to the first one, and the activation of the two steps in the cascade are completely controlled by the instability limits defined by $a_3 < I_a$ (Eq. (13)) and $a_2 < I_b$ (Eq. (18)). One can observe a stable 1:2:4 (c2) coupled solutions for $\sigma \in [-0.03; 0.03]$.

The effect of the detuning is shown in Fig. 3(b) where $\sigma_1 = 0.01$ and $\sigma_2 = -0.02$. The system is not symmetric and depends on the minimum value of I_a and I_b , respectively, in $\sigma = -\sigma_2$ and $\sigma = -\sigma_2 - 2\sigma_1$.

On the left part, for increasing values of σ , when $a_3^{\text{s dof}}$ crosses I_a , a_2 is already unstable because of $a_2^{c1} > I_b$ which imply that the (c2) coupled solutions are directly activated. On the contrary, for decreasing values of σ , the three coupling steps (s dof, c1, c2) are observed.

Figure 3(c) presents the case of the same detuning, but for a larger value of α_1 , implying $I_b < I_a$, so that only the c2 coupling can exist. One can observe that α_1 favors instability and leads, in that case, to a Hopf bifurcation. The c2 branch is completely unstable.

Finally, Fig. 4 shows how the branches are modified when nonlinear coupling coefficients (α_1 and α_3) are increased and motions of a_2 and a_1 go to larger amplitudes. In Fig. 4(a), a symmetric case for which $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ is selected. Note also that I_b is always smaller than I_a so that the c2 solution is directly ex-

cited once the sdof solution crosses I_a . Figure 4(b) shows a more complicated behavior, which is obtained for an important detuning between the second and the third oscillator obtained here by selecting $\omega_2 = 2.1$. In that case, I_a crosses the sdof solution near the resonance, as well as for $\sigma \simeq 0.2$, far away from the linear resonance. Then, if $I_{a,\min}$ is small enough, the coupling can be activated as shown on the figure.

As a conclusion on this high-frequency case, one can notice the important similarities with the 1:2 internal resonance case. The 1:2:4 case can be interpreted easily as a cascade of two imbricated 1:2 resonances, with two stability conditions having a similar expression. Interestingly, the fully coupled case is found to be often unstable due to a Hopf bifurcation, so that once the energy cascade to the first oscillator is achieved, quasiperiodic solutions are more likely to be observed. This can have important physical consequences, e.g., in the transition to chaotic turbulent behavior [36].

2.3 Mid-frequency excitation

In this section, the case where the second oscillator is directly excited is now considered. With respect to Eq. (3), the external detuning now reads

$$\Omega = \omega_2 + \varepsilon\sigma. \tag{22}$$

From Eqs. (5) and (7), the subharmonic resonant responses can be deduced as

$$q_1(t) = a_1 \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \phi_1\right), \tag{23a}$$

$$q_2(t) = a_2 \cos(\Omega t + \phi_2), \tag{23b}$$

$$q_3(t) = a_3 \cos(2\Omega t + \phi_3), \tag{23c}$$

where $\phi_1 = -(\gamma + \gamma_1)/2$, $\phi_2 = -\gamma$ and $\phi_3 = \gamma_2 - 2\gamma$.

New internal detuning parameters ν_1 , ν_2 and ν_3 are introduced as

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\Omega - \varepsilon(\sigma + \sigma_1)) = \frac{\Omega}{2} - \varepsilon\nu_1, \tag{24a}$$

$$\omega_2 = \Omega - \varepsilon\sigma = \Omega - \varepsilon\nu_2, \tag{24b}$$

$$\omega_3 = 2\Omega + \varepsilon(\sigma_2 - 2\sigma) = 2\Omega + \varepsilon\nu_3, \tag{24c}$$

so that $\nu_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1)$, $\nu_2 = \sigma$ and $\nu_3 = (\sigma_2 - 2\sigma)$.

The fixed points of (6a)–(6f) for the mid-frequency case, according to Eqs. (7), are obtained as

$$-\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) = 0, \tag{25a}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) \\ - \frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma) = 0, \end{aligned} \tag{25b}$$

$$\begin{aligned} -\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\gamma_1) + \frac{\alpha_3 a_2 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) \\ + \frac{F_2}{2\omega_2} \sin(\gamma) = 0, \end{aligned} \tag{25c}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_2 a_1^2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) + \frac{\alpha_3 a_3}{2\omega_2} \cos(\gamma_2) \\ + \frac{F_2}{\omega_2 a_2} \cos(\gamma) = 0, \end{aligned} \tag{25d}$$

$$-\mu_3 a_3 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3} \sin(\gamma_2) = 0, \tag{25e}$$

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) + \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) \\ + \frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma) = 0. \end{aligned} \tag{25f}$$

Using Eqs. (25d) and (25e), one can show that letting $a_3 = 0$ implies $a_2 = 0$, which is not possible since a_2 is the amplitude of the directly excited mode. In fact, when the forcing is in the vicinity of the second oscillator, the system composed of oscillators 2 and 3 displays a 1:2 resonance (that will be denoted here for coherence 2:4 resonance) with the forcing on the lower frequency oscillator. It is known that only coupled solutions exist in that case [24]. Hence, only two kinds of fixed points exist for the present case:

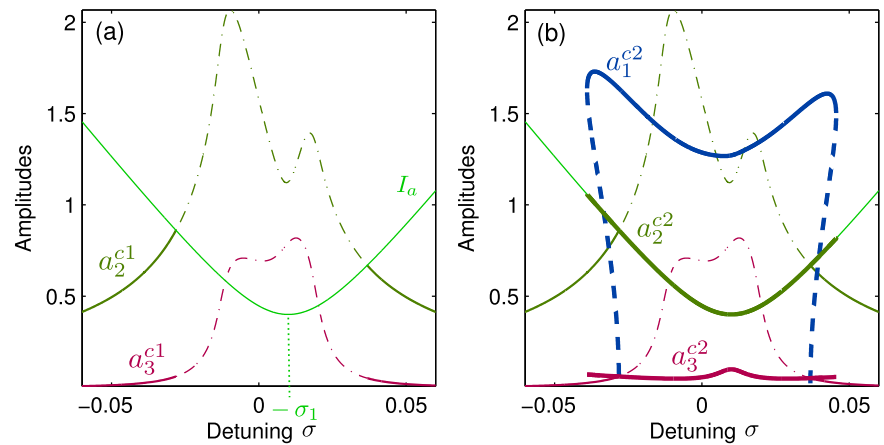
- (i) The *partially coupled solution* (c1) where $a_1 = 0$, $a_2^{c1} \neq 0$, and $a_3^{c1} \neq 0$.
- (ii) The *fully coupled solution* (c2) where $a_1^{c2} \neq 0$, $a_2^{c2} \neq 0$, and $a_3^{c2} \neq 0$.

The next section investigates the behavior and stability of these two types of solutions.

2.3.1 c1 solution: partially coupled 2:4 solution

This case is equivalent to a classical 1:2 internal resonance where the excitation frequency is in the vicinity of the lowest frequency mode. Analytical solutions can be found, e.g., in [24]. They are recovered here for the

Fig. 5 Frequency-response curves of the 1:2:4 internal resonance for a mid-frequency excitation case ($\Omega = \omega_2 + \sigma$). Stability behavior of the two kind of solutions: (---) c1 unstable solution, and (- -) c2 unstable solution. Selected values: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1.99, \omega_3 = 4, \mu_{1,2,3} = 0.01, \alpha_{1,2,3,4} = 0.1, F_2 = 0.1$



2:4 resonance between oscillators 2 and 3 and read:

$$(a_2^{c1})^2 = \frac{4\omega_3 a_3^{c1}}{\alpha_4} \sqrt{\mu_3^2 + \nu_3^2},$$

$$(a_3^{c1})^3 + \frac{8\omega_2 (\mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3)}{\alpha_3 \sqrt{\mu_3^2 + \nu_3^2}} (a_3^{c1})^2 + \frac{16\omega_2^2}{\alpha_3^2} \times (\mu_2^2 + \nu_2^2) a_3^{c1} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3^2 \omega_3 \sqrt{\mu_3^2 + \nu_3^2}} F_2 = 0. \quad (26)$$

One can observe that a_3^{c1} is solution of a third-order polynomial. Hence, depending on the parameter values, one can obtain one or three solutions. a_2^{c1} is slaved to a_3^{c1} through a simple relationship.

The novelty in this case consists in assessing the stability of this 2:4 (c1) solution with respect to perturbations brought by the first oscillator in 1:2:4 resonance. The Jacobian matrix of system (25a)–(25f) for $\Omega \simeq \omega_2$ and for $a_1 = 0$ is reported in Appendix A.1. Interestingly, the six eigenvalues are separable. Four of them drive the 2 : 4 resonance and assess the usual stability conditions found for the 1:2 case [23, 24, 33]. The last two are related to the presence of the first oscillator, and writes

$$\lambda_1^{c1} = -\mu_1 + \frac{\alpha_1 a_2^{c1}}{4\omega_1} \sin(\gamma_1), \quad (27a)$$

$$\lambda_2^{c1} = -\frac{\alpha_1 a_2^{c1}}{2\omega_1} \sin(\gamma_1). \quad (27b)$$

These two eigenvalues depend only on a_2^{c1} . Hence, the stability criterion is studied by the product $\lambda_1^{c1} \lambda_2^{c1}$,

which gives

$$a_2^{c1} \leq I_a \quad \text{where } I_a = \frac{2\omega_1}{\alpha_1} \sqrt{4\mu_1^2 + (\sigma + \sigma_1)^2}. \quad (28)$$

One can remark the similarity of that case with the previous one (see Sect. 2.2). Once again, the stability of the first solution is completely driven by the position of a single amplitude (here a_2) with respect to a limit I_a having a similar expression.

As in the previous section, the stability limit I_a is characterized by its minimum value $I_{a,\min} = \frac{4\omega_1 \mu_1}{\alpha_1}$, obtained for $\sigma = -\sigma_1$ as well as its asymptotic behavior for large values of σ , for $|\sigma| \rightarrow \infty, I_a \approx \frac{2\omega_1 \sigma}{\alpha_1}$. The asymptotes are obtained with $\mu_1 = 0$ in Eq. (28) and the intersection is found for $\sigma = -\sigma_1$ ($\Omega = \omega_2 - \varepsilon \sigma_1 = 2\omega_1$).

In this case, σ_1, α_1 , and μ_1 are the new influential parameters on the stability curve, which is represented in Fig. 5(a) for selected parameters. The instability of the c1 solution is given by the relative values of a_2^{c1} and I_a . In the selected case, the c1 solution is unstable for $\sigma \in [-0.028; 0.037]$. The next subsection gives the expressions of the solution branches for case c2, when $a_1 \neq 0$.

2.3.2 c2 solution: fully coupled 1:2:4 solution

From the system (25a)–(25f) without any simplification, the fully coupled solutions are found to be:

$$a_2^{c2} = \frac{4\omega_1}{\alpha_1} \sqrt{\mu_1^2 + \nu_1^2}, \quad (29a)$$

$$a_3^{c2} = \frac{\alpha_4}{4\omega_3 \sqrt{\mu_3^2 + \nu_3^2}} (a_2^{c2})^2. \quad (29b)$$

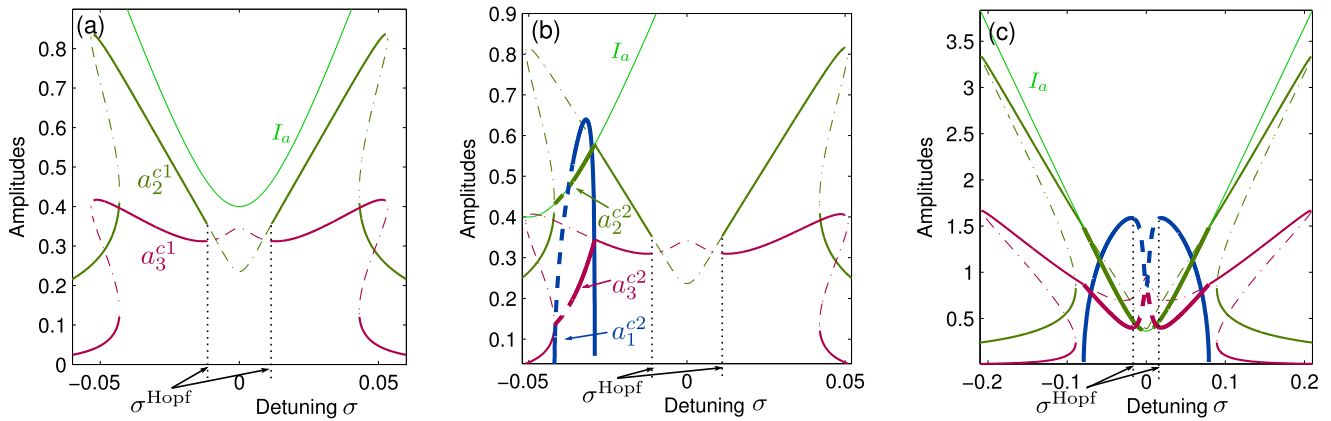


Fig. 6 Frequency-response curves of the 1:2:4 internal resonance for a mid-frequency excitation ($\Omega = \omega_2 + \sigma$). Selected values: (a) 2:4 internal coupling between a_2 and a_3 . Selected values: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 4$, $\mu_{1,2,3} = 0.01$, $\alpha_{1,2} = 0.1$,

$\alpha_{3,4} = 1$, $F_2 = 0.05$. (b) Influence of the detuning, activation of the c2 coupling. Parameters of (a) except $\omega_2 = 2.05$, $\omega_3 = 4.01$. (c) c2 coupling in the Hopf bifurcation range. Parameters of (a) except $\alpha_1 = 0.11$ and $F_2 = 0.2$

Defining

$$C_4 = \left(\frac{\alpha_2}{4\omega_2 a_2^{c2}} \right)^2, \tag{29c}$$

$$C_2 = -\frac{2\omega_1 \alpha_2}{\alpha_1 \omega_2 (a_2^{c2})^2} \left[(\nu_1 \nu_2 - \mu_1 \mu_2) + \frac{\alpha_3 \omega_3 (a_3^{c2})^2}{\alpha_4 \omega_2 (a_2^{c2})^2} (\nu_1 \nu_3 - \mu_1 \mu_3) \right], \tag{29d}$$

$$C_0 = (\mu_2^2 + \nu_2^2) + \frac{2\alpha_3 \omega_3 (a_3^{c2})^2}{\alpha_4 \omega_2 (a_2^{c2})^2} (\mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3) + 2 \left(\frac{\alpha_3 \omega_3 (a_3^{c2})^2}{\alpha_4 \omega_2 (a_2^{c2})^2} \right)^2 (\mu_3^2 + \nu_3^2) - \left(\frac{\alpha_3 a_3^{c2}}{4\omega_2} \right)^2 - \left(\frac{F_2}{2\omega_2 a_2^{c2}} \right)^2, \tag{29e}$$

a_1^{c2} is given by the roots of the following equation:

$$C_4 (a_1^{c2})^4 + C_2 (a_1^{c2})^2 + C_0 = 0. \tag{29f}$$

As in the high-frequency case, the value of a_2 drives the instability from the c1 to the c2 case. Once the instability of the c1 solution is obtained, a_2^{c2} is then equal to I_a . The value of a_3^{c2} is slaved to a_2^{c2} , and finally a_1^{c1} is obtained from a complicated polynomial expression, the coefficients of which depends on a_2^{c2} and a_3^{c2} .

Figure 5(b) shows the complete solutions for the mid-frequency case and the transfer of energy from the directly excited mode to the low-frequency one.

Finally, this case bears resemblance with both a 1:2 internal resonance excited at the lower frequency (through the c1 2:4 solution), and a 1:2 internal resonance excited at the highest frequency (through the instability region).

The stability of the c2 solution is obtained by the Jacobian of the system (25a)–(25f) without any simplification and with $a_1 = a_1^{c2}$, $a_2 = a_2^{c2}$, and $a_3 = a_3^{c2}$. As in the previous case, the eigenvalues have to be followed numerically.

2.3.3 Parametric study

The main dynamical characteristics due to selected values of the parameters are now investigated.

Figure 6(a) presents a perfectly tuned symmetric case. The amplitude solutions are under the stability limit I_a , hence no energy is transferred to the low-frequency mode; consequently, a_1 stays at rest. The stability computation shows the appearance of a quasiperiodic regime in the vicinity of $\sigma = 0$. Note that in that case, only the c2 (2:4) solution is present, so that the stability can be checked by the four eigenvalues of the 2:4 case as reported in Appendix A.1. The Hopf bifurcation in the vicinity of $\sigma = 0$ is classical and has already been reported in studies on the 1:2 internal resonance, see e.g. [24].

In Fig. 6(b), the stability curve is shifted to the low frequencies, by detuning the three eigenfrequencies. The intersection between I_a and a_2 leads to the nonlinear coupling between a_2 and a_1 . The c1 solution is then obtained, and the stability shows that on this

fully coupled branch, a Hopf bifurcation occurs and quasiperiodic motions are at hand. This remark is consistent with the numerical results obtained in the previous section, where fully coupled periodic solutions were found to be often unstable.

Figure 6(c) exhibits a different case where the intersection between I_a and a_2 is located in the center frequency range. This case is obtained for a large value of the external forcing ($F_2 = 0.2$). Once again, the c2 solution is partially unstable so that quasiperiodic solutions are still present.

2.4 Low-frequency excitation

Finally, the case of the low-frequency excitation is presented in this subsection. The external frequency is expressed as

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma. \tag{30}$$

The polar forms (Eq. (5)), are now:

$$q_1(t) = a_1 \cos(\Omega t + \phi_1), \tag{31a}$$

$$q_2(t) = a_2 \cos(2\Omega t + \phi_2), \tag{31b}$$

$$q_3(t) = a_3 \cos(4\Omega t + \phi_3), \tag{31c}$$

where $\phi_1 = -\gamma$ et $\phi_2 = \gamma_1 - 2\gamma$ and $\phi_3 = \gamma_2 + 2\gamma - 1 - 4\gamma$.

The internal detunings are defined by

$$\omega_1 = \Omega - \varepsilon\sigma = \Omega - \varepsilon\nu_1, \tag{32a}$$

$$\omega_2 = 2\Omega + \varepsilon(\sigma_1 - 2\sigma) = 2\Omega + \varepsilon\nu_2, \tag{32b}$$

$$\omega_3 = 4\Omega + \varepsilon(2\sigma_1 + \sigma_2 - 4\sigma) = 4\Omega + \varepsilon\nu_3, \tag{32c}$$

with $\nu_1 = \sigma$, $\nu_2 = (\sigma_1 - 2\sigma)$ and $\nu_3 = (\sigma_2 + 2\sigma_1 - 4\sigma)$.

In this case, the fixed points of (6a)–(6f), according to Eqs. (7), are

$$-\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) + \frac{F_1}{2\omega_1} \sin(\gamma) = 0, \tag{33a}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) \\ + \frac{F_1}{\omega_1 a_1} \cos(\gamma) = 0, \end{aligned} \tag{33b}$$

$$-\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\gamma_1) + \frac{\alpha_3 a_2 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) = 0, \tag{33c}$$

$$\sigma_2 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_2 a_1^2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1)$$

$$+ \frac{\alpha_3 a_3}{2\omega_2} \cos(\gamma_2) = 0, \tag{33d}$$

$$-\mu_3 a_3 - \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3} \sin(\gamma_2) = 0, \tag{33e}$$

$$\sigma + \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \cos(\gamma_1) + \frac{F_1}{2\omega_1 a_1} \cos(\gamma) = 0. \tag{33f}$$

Equation (33a) shows that, if $a_1 = 0$, $F_1 = 0$, which makes no sense in this excitation case. In Eq. (33c), $a_2 = 0$ implies that $a_1 = 0$, which is not possible as previously said. With Eq. (33e), one can show that $a_3 = 0$ leads to $a_2 = 0$. Finally, one can conclude that the only non trivial solution of system (33a)–(33f) is the fully coupled one with $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ and $a_3 \neq 0$.

Some combinations of equations of the system (33a)–(33f) can exhibit analytical solutions for the three amplitudes a_1 , a_2 , and a_3 . First, combining Eq. (33e) with (Eq. (33f) + 2(Eq. (33d) – 2Eq. (33f))) gives a relationship between a_2 and a_3 as

$$a_2^2 = \frac{4\omega_3 a_3}{\alpha_4} \sqrt{(\mu_3^2 + \nu_3^2)}. \tag{34}$$

Then Eqs. (33a), (33b), (33c), and ((33d) – 2(33c)) gives two expressions of a_1 , depending of a_2 and a_3

$$\begin{aligned} a_1^2 (\mu_1^2 + \nu_1^2) \\ = \frac{F_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{\alpha_1^2 a_1^2 a_2^2}{16\omega_1^2} - \frac{2\alpha_1 \omega_2 a_2^2}{\alpha_2 \omega_1} (\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_2) \\ + \frac{2\alpha_1 \alpha_3 \omega_3 a_3^2}{\omega_1 \alpha_2 \alpha_4} (\nu_1 \nu_3 - \mu_1 \mu_3), \end{aligned} \tag{35a}$$

$$\begin{aligned} a_1^4 = \frac{16\omega_2^2 a_2^2}{\alpha_2^2} (\mu_2^2 + \nu_2^2) + \frac{32\omega_2 \omega_3 \alpha_3 a_3^2}{\alpha_4 \alpha_2^2} \\ \times (\mu_2 \mu_3 - \nu_2 \nu_3) + \frac{\alpha_3^2 a_3^2 a_2^2}{\alpha_2^2}, \end{aligned} \tag{35b}$$

that leads to a_2^2 given by the roots of the following five-order polynomial:

$$C_{10} a_2^{10} + C_8 a_2^8 + C_6 a_2^6 + C_4 a_2^4 + C_2 a_2^2 + C_0 = 0, \tag{36}$$

where C_k coefficients are defined and reported in Appendix A.2. Solving this polynomial for each value of σ gives the fully coupled solutions of this low-frequency case.

The stability of the low-frequency solutions is obtained by the Jacobian of the system (33a)–(33f) also

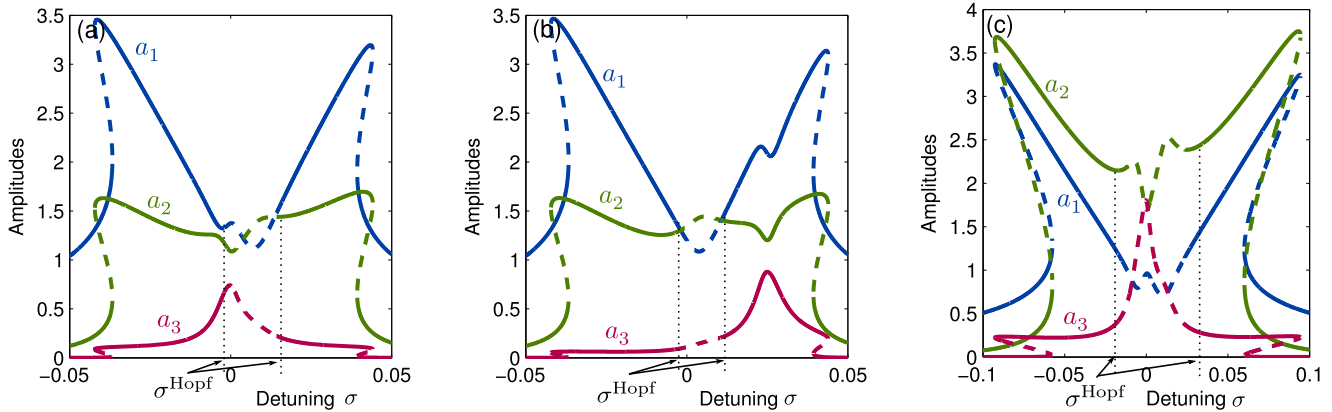


Fig. 7 Frequency-response curves of the 1:2:4 internal resonance for a low-frequency excitation case ($\Omega = \omega_1 + \sigma$). (a) Fully coupled solutions with a Hopf bifurcation, (- -) unstable solution. Selected values: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2.01$, $\omega_3 = 4$,

$\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, $\mu_3 = 0.01$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_3 = 0.1$; $\alpha_4 = 0.1$, $F_1 = 0.1$. (b) Detuning effects. Parameters of (a) except: $\omega_2 = 4.1$. (c) Parameters of (a) large amplitude of nonlinear coupling. Parameters of (a) except: $\alpha_2 = 0.5$

reported in Appendix A.2. They are numerically calculated for each σ in order to obtain the stability of the solution branches.

Figure 7 displays three cases for selected values of parameters. Figure 7(a) shows a simple 1:2:4 internal resonance in the low-frequency excitation case. One can observe that the external energy, applied on the first mode is transferred to the two higher-frequency one. One can recover the behavior of a 1:2 internal resonance [24] with the hysteresis loop between forward and backward frequency sweeps in term of σ , due to the unstable branch; and the Hopf bifurcation leading to a quasiperiodic regime around $\sigma = 0.01$.

The effect of the detuning is shown Fig. 7(b) with $\sigma_1 = 0.01$ and $\sigma_2 = 0.08$. One can observe that increasing the value of σ_2 shifts the maximum value of a_3 and creates corresponding variations of the amplitudes a_1 and a_2 at $\sigma = 0.025$.

Finally, Fig. 7(c) presents a case of large coupling between a_1 and a_2 thanks to a large value of α_2 , which consequently increases the range of the Hopf bifurcation for $\sigma \in [-0.02; 0.02]$.

2.5 Conclusion on the 1:2:4 resonance

In this section, a detailed analysis of the 1:2:4 internal resonance has been proposed. The study of the three excitation cases $\Omega \simeq \omega_1$, $\Omega \simeq \omega_2$, and $\Omega \simeq \omega_3$ are completed.

As compared to the well-known 1:2 internal resonance, each case presents some particularities due to the presence of the third oscillator.

In the high-frequency case, because of the presence of the three oscillators, two stability conditions have been found that lead to three kind of solutions (one sdof, one partially coupled, and one fully coupled). The qualitative behavior of this case is in fact a cascade of two 1:2 internal resonances. On the other hand, in the mid-frequency case, only two kinds of solutions have been found because the coupling between the mode directly excited and the high-frequency one always exists. In this case, the dynamics may be interpreted as a superposition of two internal resonances. Finally, in the low frequency case, only the fully coupled solution can exist, and the energy is always transferred to the higher modes without any stability condition.

An important result is that, in all the three cases, selected sets of parameters can cause Hopf bifurcations to occur, so that the three periodic solutions are totally unstable, giving birth to quasiperiodic regimes.

3 The 1:2:2 resonance

This section is devoted to the analysis of a system exhibiting a one-two-two internal resonance (1:2:2), that is another combination of two 1:2 internal resonance as compared to the previous 1:2:4 case. The interaction between three vibration modes with frequencies ω_1 , ω_2 , ω_3 , such that $\omega_2 \simeq \omega_3 \simeq 2\omega_1$, is studied. As previously, harmonically forced vibrations are considered. Two cases of a forcing frequency Ω being in the vicinity of (i) the lower frequency $\Omega \approx \omega_1$, (ii) the

two higher frequencies $\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_3$, are now introduced.

3.1 Equations of motion and multiple scales solutions

The dynamical system for the 1:2:2 internal resonance consists of three oscillator equations coupled by quadratic nonlinear terms. It reads

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon[-2\mu_1 \dot{q}_1 - \alpha_1 q_1 q_2 - \alpha_2 q_1 q_3 + \delta_{\Omega, \omega_1} F_1 \cos(\Omega t)], \tag{37a}$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon[-2\mu_2 \dot{q}_2 - \alpha_3 q_1^2 + \delta_{\Omega, \omega_2} F_2 \cos(\Omega t)], \tag{37b}$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon[-2\mu_3 \dot{q}_3 - \alpha_4 q_1^2 + \delta_{\Omega, \omega_2} F_3 \cos(\Omega t)]. \tag{37c}$$

As in the 1:2:4 internal resonance (Eqs. (1a)–(1c)), nonlinear terms ($\alpha_{1,2,3,4}$), damping terms ($\mu_{1,2,3}$) and external forcing ($F_k \cos \Omega t$ with $\delta_{\Omega, \omega_k}$) are assumed to be small as compared to the linear oscillatory part ($\varepsilon \ll 1$).

Equations (37a)–(37c) is the real normal form of the system displaying 1:2:2 internal resonance. Hence, only the resonant monoms have been taken into account, so that only four coupling coefficients $\alpha_{1,2,3,4}$ are needed to parameterize the nonlinearity, in an equivalent manner to the previous 1:2:4 case.

Two internal detuning parameters σ_1 and σ_2 are introduced as

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \tag{38a}$$

$$\omega_3 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \tag{38b}$$

and the external detuning σ is such that

$$\Omega = \omega_k + \varepsilon\sigma. \tag{39}$$

Finally, angles relationships are introduced as

$$\gamma_1 = \theta_2 + \sigma_1 T_1 - 2\theta_1, \tag{40}$$

$$\gamma_2 = \theta_3 + \sigma_2 T_1 - 2\theta_1, \quad \text{and} \quad \gamma = \sigma T_1 - \theta_k,$$

where $k = 1, 2$, or 3 depending on the frequency excitation.

As in the previous section, the solvability conditions are obtained with the ε^0 -order equations. The

modal amplitudes $\{q_{k0}\}_{k=1,2,3}$ are expressed as

$$q_{k0}(T_0, T_1) = \frac{a_k(T_1)}{2} \exp[j(\omega_k T_0 + \theta_k(T_1))] + \text{c.c.}, \tag{41}$$

where a_k are the amplitudes, θ_k are the phases, c.c. stands for complex conjugate, and $j^2 = -1$.

3.2 Low-frequency excitation

The low-frequency excitation, for which $\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma$, is first investigated. According to Eqs. (40) and (41), the 1:2:2 internal resonance, excited on its lower mode, leads to the first mode oscillating at the frequency $\Omega \approx \omega_1$ and the two upper modes oscillating at $2\Omega \approx 2\omega_1$ as

$$q_1 = a_1 \cos(\Omega t + \phi_1), \tag{42a}$$

$$q_2 = a_2 \cos(2\Omega t + \phi_2), \tag{42b}$$

$$q_3 = a_3 \cos(2\Omega t + \phi_2), \tag{42c}$$

where $\phi_1 = -\gamma$, $\phi_2 = -2\gamma + \gamma_1$, and $\phi_3 = -2\gamma + \gamma_2$.

The fixed points of the first-order multiple scales method are the solutions of

$$-\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_1 a_3}{4\omega_1} \sin(\gamma_2) + \frac{F_1}{2\omega_1} \sin(\gamma) = 0, \tag{43a}$$

$$\sigma_1 + \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) + \frac{F_1}{\omega_1 a_1} \cos(\gamma) = 0, \tag{43b}$$

$$-\mu_2 a_2 + \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\gamma_1) = 0, \tag{43c}$$

$$\sigma_2 + \frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) + \frac{F_1}{\omega_1 a_1} \cos(\gamma) = 0, \tag{43d}$$

$$-\mu_3 a_3 + \frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3} \sin(\gamma_2) = 0, \tag{43e}$$

$$\sigma - \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{4\omega_1} \cos(\gamma_2) + \frac{F_1}{2\omega_1 a_1} \cos(\gamma) = 0. \tag{43f}$$

From Eqs. (43a)–(43f), one can remark that only the case of fully coupled solutions are possible. Indeed, q_1 is the directly excited mode so that $a_1 \neq 0$, and Eqs. (43c) and (43e) imply $a_2 \neq 0$ and $a_3 \neq 0$. A solution in terms of the amplitudes (a_1, a_2, a_3) of each oscillator can be found by selected linear combination of Eqs. (43a)–(43f). First, Eqs. (43d) and ((43b) – 2(43f)), and secondly Eqs. (43e) and ((43d) – 2(43f)) give a relationship between a_1 and a_2 , and between a_1 and a_3 , respectively, as

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sqrt{\frac{4\omega_2 a_2}{\alpha_3 \Gamma_2}}, \\
 \text{where } \Gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mu_2^2 + (\sigma_1 - 2\sigma)^2}}, \\
 a_1 &= \sqrt{\frac{4\omega_3 a_3}{\alpha_4 \Gamma_3}}, \\
 \text{where } \Gamma_3 &= \frac{1}{\sqrt{\mu_3^2 + (\sigma_2 - 2\sigma)^2}}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

This leads to a relationship between a_2 and a_3 as

$$a_3 = \frac{\omega_2 \alpha_4 \Gamma_3}{\omega_3 \alpha_3 \Gamma_2} a_2. \tag{45}$$

Then Eqs. (43f) and (43a) lead to

$$\begin{aligned}
 &\frac{4\omega_1^2}{F^2} a_1^2 \left(\sigma^2 + \mu_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{16\omega_1^2} a_2^2 + \frac{\alpha_2^2}{16\omega_1^2} a_3^2 \right. \\
 &+ \frac{\alpha_1 \Gamma_2}{2\omega_1} (\mu_1 \mu_2 + \sigma(\sigma_1 - 2\sigma)) a_2 \\
 &+ \frac{\alpha_2 \Gamma_3}{2\omega_1} (\mu_1 \mu_3 + \sigma(\sigma_2 - 2\sigma)) a_3 \\
 &+ \left. \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Gamma_2 \Gamma_3}{8\omega_1^2} (\mu_2 \mu_3 + (\sigma_1 - 2\sigma) \right. \\
 &\left. \times (\sigma_2 - 2\sigma)) a_2 a_3 \right) = 1.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Finally, introducing Eq. (45) in Eq. (46), two third-order polynomials in terms of a_2 and a_3 are obtained. As an example, we can write the polynomial in a_2 as

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \left(\frac{\omega_2 \alpha_2 \alpha_4 \Gamma_3}{\omega_3 \alpha_1 \alpha_3 \Gamma_2} \right)^2 + \frac{2\omega_2 \alpha_2 \alpha_4 \Gamma_3^2}{\omega_3 \alpha_1 \alpha_3} \right. \\
 &\left. \times (\mu_2 \mu_3 + (\sigma_1 - 2\sigma)(\sigma_2 - 2\sigma)) \right) a_2^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(\frac{8\omega_1 \Gamma_2}{\alpha_1} (\mu_1 \mu_2 + \sigma(\sigma_1 - 2\sigma)) \right. \\
 &+ \left. \frac{8\omega_1 \omega_2 \alpha_2 \alpha_4 \Gamma_3^2}{\omega_3 \alpha_1^2 \alpha_3 \Gamma_2} (\mu_1 \mu_3 + \sigma(\sigma_2 - 2\sigma)) \right) a_2^2 \\
 &+ \frac{16\omega_1^2}{\alpha_1^2} (\sigma^2 + \mu_1^2) a_2 = \frac{F_1^2 \alpha_3 \Gamma_2}{\omega_2 \alpha_1^2}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Hence, the amplitude solutions are deduced from Eq. (47), which shows that a_2 may have one or three real solutions, depending on the parameters. Once a_2 is found, a_1 is deduced from Eq. (44) and a_3 from Eq. (45). One can observe that Eqs. (47), (44), and (45) bear similarities with the solution equations for the 1:2 resonance case as given, e.g., in [23, 24].

The stability is given by the Jacobian derived from Eqs. (43a)–(43f). Its analytical expression is given in Appendix B.1. As no simple analytical expressions for the eigenvalues can be derived, the stability is checked numerically.

Figure 8 displays three cases with selected parameters, for small amplitude of external forcing leading to single, stable branch of solution. Only the two internal detunings σ_1 and σ_2 are modified. Figure 8(a) shows that the energy, which is directly injected on a_1 , is simultaneously transferred to a_2 and a_3 . As all parameters of a_2 and a_3 are the same, the two corresponding curves are totally superimposed. In Fig. 8(b), $\sigma_1 \neq \sigma_2$ which implies $a_2 \neq a_3$, so that the two curves are now different. Finally, in Fig. 8(c), σ_2 is further increased, such that the maximum value is shifted to a higher frequency as compared to Fig. 8(b). Consequently, the response for a_1 shows now three successive maxima, a feature that is not observable with a simple 1:2 resonance.

Larger values of the amplitude excitation F_1 , leading to ranges where three solutions are possible, are investigated in Fig. 9. In Fig. 9(a), two regions where three solutions exist are present. As in the 1:2 case, the middle amplitude branch is found to be unstable. The global behavior is very similar to the 1:2 internal resonance case, with also a frequency range delimited by Hopf bifurcations where no stable periodic orbits exist anymore, so that quasiperiodic motions are at hand. A peculiarity of the 1:2:2 case is shown in Fig. 9(b). By playing with the internal detunings (here by increasing σ_2 only), one can find in the vicinity of $\sigma = 0$ two regions of quasiperiodic solutions, separated by a stable region (between $\sigma = 0.0058$ and $\sigma = 0.029$).

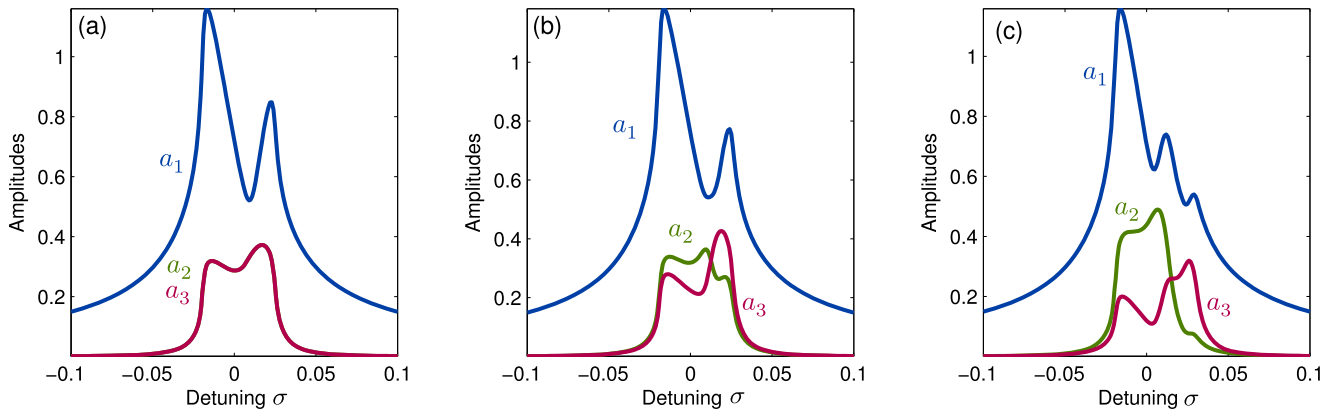
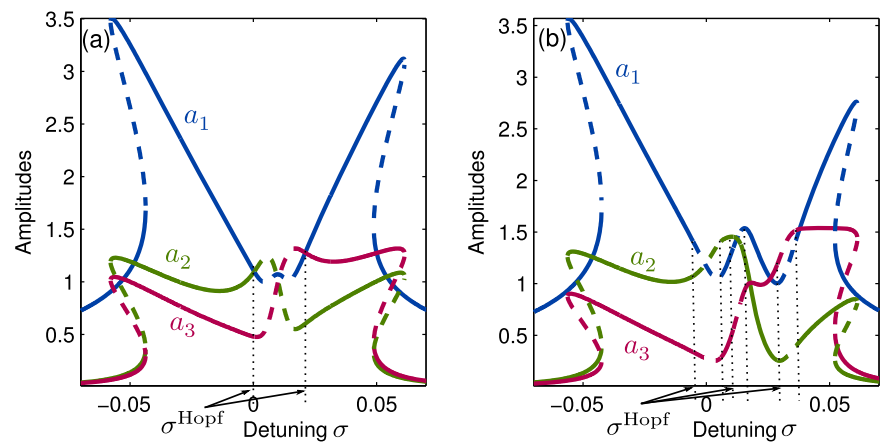


Fig. 8 Frequency-response curves of the 1:2:2 internal resonance for a low-frequency excitation ($\Omega = \omega_1 + \sigma$). Fully coupled solutions and variations of internal detunings. **(a)** Identical high-frequency modes. Parameters: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega_3 = 2.02$,

$\mu_{1,2,3} = 0.1$, $\alpha_{1,2,3,4} = 0.1$, $F_1 = 0.03$. **(b)** Small value of the internal detuning between a_2 and a_3 . Parameters of **(a)** except: $\omega_3 = 2.03$. **(c)** Larger value of the internal detuning between a_2 and a_3 . Parameters of **(a)** except: $\omega_3 = 2.05$

Fig. 9 Frequency-response curves of the 1:2:2 internal resonance for a low-frequency excitation ($\Omega = \omega_1 + \sigma$). Variation of internal detuning when the solutions present unstable branches (- -).

(a) Parameters: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2.02$, $\omega_3 = 2.03$, $\mu_{1,2,3} = 0.1$, $\alpha_{1,2,3,4} = 0.1$, $F_1 = 0.1$. **(b)** Parameters of **(a)** except: $\omega_3 = 2.06$



Once again, similarities with the well-known 1:2 internal resonance are noted. But contrary to the 1:2:4 case, here the two 1:2 internal resonances are totally nested.

3.3 High-frequency excitation

In this last section, the external forcing is in the vicinity of the two high-frequency modes:

$$\Omega = \omega_2 + \epsilon\sigma = \omega_3 + \epsilon(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2). \quad (48)$$

We also consider the case $F_2 \neq 0$ and $F_3 \neq 0$, as in a real experiment, it is almost impossible to enforce either $F_2 = 0$ or $F_3 = 0$. This leads to subharmonic resonance responses as

$$q_1 = a_1 \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \phi_1\right), \quad (49a)$$

$$q_2 = a_2 \cos(\Omega t + \phi_2), \quad (49b)$$

$$q_3 = a_3 \cos(\Omega t + \phi_2), \quad (49c)$$

where $\phi_1 = -(\gamma + \gamma_1)/2$, $\phi_2 = -\gamma$ and $\phi_3 = -\gamma - \gamma_1 + \gamma_2$.

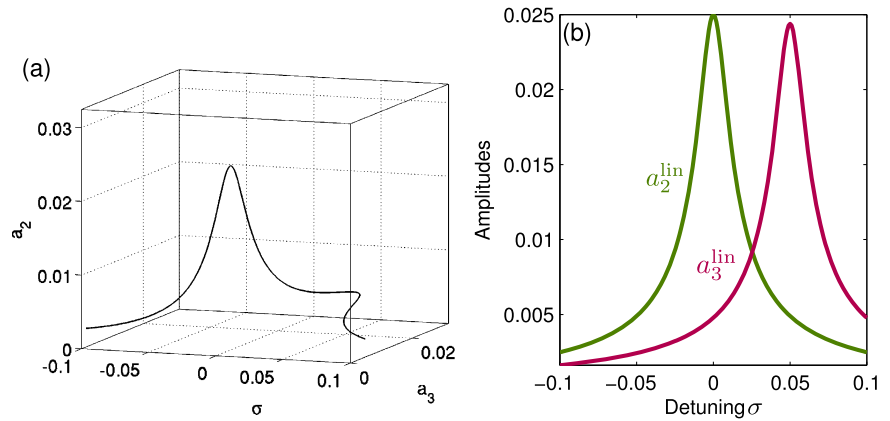
Including the angle relationships (Eq. 40) in the multiple scales method, the corresponding fixed points system reads:

$$-\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_1 a_3}{4\omega_1} \sin(\gamma_2) = 0, \quad (50a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) \\ - \frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma) = 0, \end{aligned} \quad (50b)$$

Fig. 10

Frequency-response curves of the 1:2:2 internal resonance for a high-frequency excitation case ($\Omega = \omega_2 + \sigma$). Uncoupled responses: (a) in a 3D-space (σ, a_2, a_3). (b) Projections onto (σ, a_2) and (σ, a_3). Selected values: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 2.05, \mu_{1,2,3} = 0.1, \alpha_{1,2,3,4} = 0.1, F_2 = F_3 = 0.001$



$$-\mu_2 a_2 + \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\gamma_1) + \frac{F_2}{2\omega_2} \sin(\gamma) = 0, \quad (50c)$$

$$\sigma + \frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) - \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \cos(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) = 0, \quad (50d)$$

$$-\mu_3 a_3 + \frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3} \sin(\gamma_2) + \frac{F_3}{2\omega_3} \sin(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) = 0, \quad (50e)$$

$$\sigma - \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) + \frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma) = 0. \quad (50f)$$

System (50a)–(50f) presents six equations for six unknowns, however, a combination of the angles $\gamma + \gamma_1 - \gamma_2$ appears in Eqs. (50d)–(50e), hence rendering a complete analytical solution untractable. Note that this ill-conditioning of the system appears to be intrinsic and cannot be eliminated through other relationships on angles. However, this ill-conditioning disappears if one lets either $F_2 = 0$ or $F_3 = 0$; and one is led to a most simple case for the stability condition, where a classical 1:2 is recovered. Fortunately, for our case with $F_2 \neq 0$ and $F_3 \neq 0$, uncoupled solutions along with their stability analysis lend themselves to an analytical investigation given in the next subsection.

3.3.1 Uncoupled solutions

Analysis of the possible solutions of Eqs. (50a)–(50f) shows that two types of solutions are possible:

- (i) the uncoupled solutions where the directly excited modes q_2 and q_3 vibrate and q_1 stays at rest ($a_1 = 0$).
- (ii) the coupled solution where a_1, a_2 , and $a_3 \neq 0$.

In case (i), combinations of Eqs. (50c) and (50f) and Eqs. (50e), (50b), and (50d), allow to derive the expressions of the uncoupled amplitudes a_2 and a_3 as

$$\begin{aligned} a_2^{\text{lin}} &= \frac{F_2}{2\omega_2 \sqrt{\mu_2^2 + \sigma^2}}, \\ a_3^{\text{lin}} &= \frac{F_3}{2\omega_3 \sqrt{\mu_3^2 + (\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)^2}}. \end{aligned} \quad (51)$$

These solutions are denoted as $(a_2^{\text{lin}}, a_3^{\text{lin}})$ since $q_1 = 0$ in Eqs. (37a)–(37c) implies linear oscillator equations for q_2 and q_3 . Hence, the solutions found are those of a linear oscillator equation.

In this high-frequency excitation case, the two high-frequency modes are simultaneously excited ($\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_3$). Hence, the fundamental solution, from which stability has to be computed with respect to perturbations brought by the presence of the first oscillator, corresponds to a two-dofs system. This renders the analysis more complicated than the one led in all other cases studied in this paper. Consequently, stability analysis and representations of instability regions are conducted in the space (σ, a_2, a_3) . Figure 10(a) shows the uncoupled solution in that space. It consists of a single branch with two peaks corresponding to the linear resonances. Figure 10(b) shows the two projections of this solution branch on (σ, a_2) and (σ, a_3) .

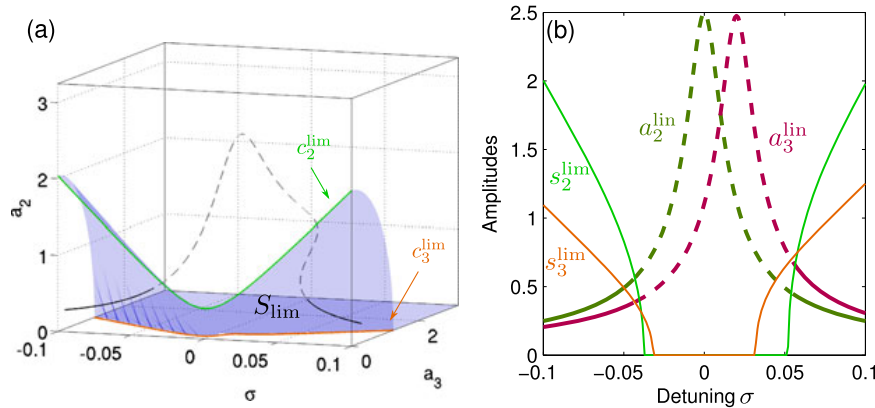


Fig. 11 Frequency-response curves of the 1:2:2 internal resonance for a high-frequency excitation case ($\Omega = \omega_2 + \varepsilon\sigma$). (a) 3D stability surface and intersections $c_2^{\text{lim}} = S_{\text{lim}} \cap \{a_3 = 0\}$

and $c_3^{\text{lim}} = S_{\text{lim}} \cap \{a_2 = 0\}$. (b) 2D stability curves s_2^{lim} and s_3^{lim} . Unstable solutions (- -). Selected values: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 2.02, \mu_{1,2,3} = 0.1, \alpha_{1,2,3,4} = 0.1, F_2 = F_3 = 0.1$

3.3.2 Stability limit and coupling range

In order to study the stability of the linear solutions a_2^{lin} and a_3^{lin} , the Jacobian matrix of the fixed points system is calculated. The analytical expression is given in Appendix B.2.

The Jacobian is separable in this case and the six corresponding eigenvalues are easily found to be

$$\lambda_{1,2} = -\mu_2 \pm i\sigma, \tag{52a}$$

$$\lambda_{3,4} = -\mu_3 \pm i(\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma), \tag{52b}$$

$$\lambda_5 = -\mu_1 - \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_2 \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_2}{4\omega_1} a_3 \sin(\gamma_2), \tag{52c}$$

$$\lambda_6 = \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_2 \sin(\gamma_1) + \frac{\alpha_2}{4\omega_1} a_3 \sin(\gamma_2). \tag{52d}$$

Obviously, the first four eigenvalues dictate the stability of the linear uncoupled solutions with respect to perturbations brought by (a_2, a_3) . They indicate stability, the last two (λ_5, λ_6) governing the stability with respect to the presence of the first oscillator.

With a nontrivial combination of the fixed points equations (explained in Appendix B.2), one is able to derive an instability criterion on the amplitudes (a_2, a_3) only, which is given via the definition of an instability surface S_{lim} in (σ, a_2, a_3) :

$$S_{\text{lim}} = \{(\sigma, a_2, a_3) \mid T_1 = T_2 a_2^2 + T_3 a_3^2\} \tag{53}$$

with

$$\begin{cases} T_1 = 4\omega_1^2(4\mu_1^2 + (\sigma_1 + \sigma)^2), \\ T_2 = \alpha_1^2, \\ T_3 = \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{\omega_3 F_2}{\omega_2 F_3} \\ \quad \times \frac{\mu_2\mu_3 + \sigma(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)}{\mu_2^2 + \sigma^2}. \end{cases} \tag{54}$$

The stability condition is a surface S_{lim} defined by a functional relationship of the form $f(\sigma, a_2, a_3) = 0$. It is represented on Fig. 11(a) in space (σ, a_2, a_3) , together with the uncoupled branch $(a_2^{\text{lin}}, a_3^{\text{lin}})$. Once the amplitudes on the fundamental branch are larger than S_{lim} , then the uncoupled solution becomes unstable. An analogy with the 1:2 internal resonance can be derived by defining c_2^{lim} and c_3^{lim} as the intersections of S_{lim} with either $a_3 = 0$ or $a_2 = 0$: $c_2^{\text{lim}} = S_{\text{lim}} \cap \{a_3 = 0\} = \sqrt{T_1/T_2}$; $c_3^{\text{lim}} = S_{\text{lim}} \cap \{a_2 = 0\} = \sqrt{T_1/T_3}$; see Fig. 11(a). One can remark that the expressions for c_2^{lim} is equivalent to the expression of the instability limit for the 1:2 and 1:2:4 case; see, e.g., Eqs. (13) and (18) defining I_a and I_b in Sect. 2.2. For c_3^{lim} , an equivalent expression is found by imposing also $F_2 = 0$ so as to recover a 1:2 resonance without the presence of the second oscillator.

In order to define a simple criterion on a_2^{lin} and a_3^{lin} independently, substituting for Eq. (51) in Eq. (53), two stability conditions s_2^{lim} and s_3^{lim} can be defined

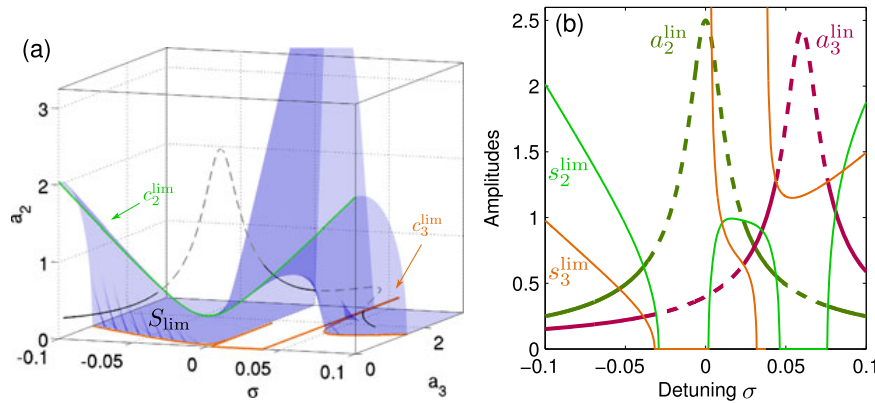


Fig. 12 Frequency-response curves of the 1:2:2 internal resonance for a high-frequency excitation case ($\Omega = \omega_2 + \varepsilon\sigma$). Variation of internal detuning σ_2 and stability consequence. Unstable

ble solutions (- -). **(a)** 3D representation. **(b)** Corresponding 2D representation. Selected parameters: $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 2.06, \mu_{1,2,3} = 0.1, \alpha_{1,2,3,4} = 0.1, F_2 = F_3 = 0.1$

as

$$s_2^{lim} = \sqrt{\frac{T_1 - T_3(a_3^{lin})^2}{T_2}}, \quad \text{and} \quad (55)$$

$$s_3^{lim} = \sqrt{\frac{T_1 - T_2(a_2^{lin})^2}{T_3}}.$$

With that respect, one can check the stability for a_2 and a_3 with a simple scalar condition: a_2 is stable if $a_2^{lin} < s_2^{lim}$ (respectively, a_3 is stable if $a_3^{lin} < s_3^{lim}$). This is illustrated on Fig. 11(b) where s_2^{lim} and s_3^{lim} are represented on two-dimensional projections on (σ, a_2) and (σ, a_3) , defining easily the unstable region of the fundamental solution branch. Due to the complicated functional dependence of T_1 and T_3 with the parameters, s_2^{lim} and s_3^{lim} may have a complex shape, with at worst singular points due to a vanishing value for T_3 . It is also important to note that, contrary to a simple 1:2 resonance, in this case s_2^{lim} and s_3^{lim} are dependent on forcing F_2 and F_3 (via T_3).

Figure 12 shows a more complicated case, which has been obtained by increasing σ_2 to 0.06. This leads to shift the resonance for a_3 at a higher frequency as compared to Fig. 11. One can remark that c_2^{lim} has a simple expression, which lends it unconcerned with singularities. On the other hand, the expression of c_3^{lim} encounters singularities in that case due to two vanishing points for T_3 ; see Fig. 12(a). In turn, the shape of S_{lim} becomes complex as it always have to join c_2^{lim} to c_3^{lim} . In the projections onto the planes (σ, a_2) and (σ, a_3) , represented in Fig. 12(b), one can see that the tangled shape of S_{lim} leads to complex behaviors for

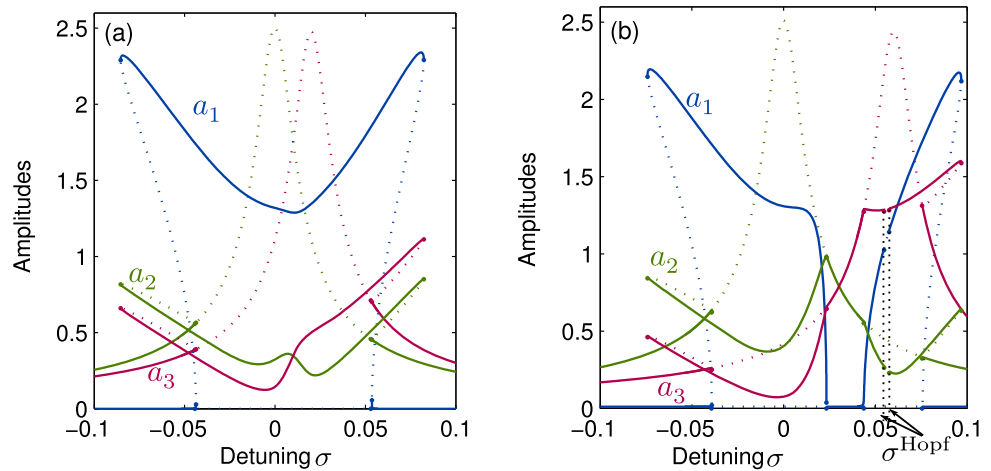
s_2^{lim} and s_3^{lim} . Nonetheless, the scalar stability condition still applies. However, one must take care of the fact that when $T_3 < 0$, which happens here between the two singular points, respectively $\sigma = 0.0024$ and $\sigma = 0.0044$, the stability for a_3 is inverted so as to take into account the negative sign (it remains unchanged for a_2 as s_2^{lim} is not prone to singularities). This is more clearly seen on the 3D-plot, Fig. 12(a), where the part of the branch for $\sigma \in [0.023, 0.043]$ lies under S_{lim} , and is thus stable.

This investigation highlights the complexity brought by the presence of two oscillators in the high-frequency as compared to a simple 1:2 internal resonance. The instability limit can be changed significantly because of the possible complex behavior of T_3 , and thus s_3^{lim} . It may lead, as in Fig. 12, to a stable portion of uncoupled solutions in between two unstable states, a feature that is not possible with a 1:2 resonance.

3.3.3 Coupled solutions

Fully coupled solutions with $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, and $a_3 \neq 0$ for Eqs. (50a)–(50f) have not been derived, analytical expressions are not at hand. They may be derived from the system through complex trigonometric manipulations. However, analytical expressions are convenient when they are simple and prone to physical interpretations, and here their expressions would cover pages. Hence, only numerical solutions are shown here, allowing also to check the stability analysis of the previous section.

Fig. 13 Numerical solutions: MANLab computation. 2D representation. Unstable solutions (\cdots). **(a)** Unstable linear curves and coupled solutions. Parameters of Fig. 11 ($\sigma_2 = 0.02$). **(b)** Multiple frequency ranges of coupling. Parameters of Fig. 12 ($\sigma_2 = 0.06$)



A continuation method is used to find numerically the periodic orbits of the forced system. Continuation is performed thanks to an Asymptotic-Numerical Method (ANM) implemented in the software MANLAB [9, 14], and stability is computed via Hill's method [15].

Two examples are proposed on Fig. 13, with the parameters selected for Figs. 11 and 12. In Fig. 13(a) (parameters of Fig. 11), the stability condition is verified and the transfer of energy from the uncoupled to the coupled solution is retrieved. The second case, displayed on Fig. 13(b), corresponds to the parameters of Fig. 12. Once again, the stability analysis is perfectly retrieved with the appearance of the stable state in the middle of the frequency range. As σ_2 has been increased, this case resembles a succession of two 1:2 internal resonance between (q_1, q_2) and (q_1, q_3) , with a return to an uncoupled state in between. Finally, a very narrow interval of unstable coupled solutions are numerically found around $\sigma \simeq 0.056$, delimited by two Hopf bifurcations. This frequency range increases for larger values of the forcing amplitude, so that a broader occurrence of quasiperiodic solutions is found for higher nonlinearity.

3.4 Conclusion on the 1:2:2 resonance

In this section, a detailed analysis of the 1:2:2 internal resonance has been proposed. The study of the two excitation cases $\Omega \simeq \omega_1$ and $\Omega \simeq \omega_2 \simeq \omega_3$ has been done. In the high-frequency case, only the linear step is analytically solved, but a numerical

method is proposed in order to give the coupled solutions.

Some particularities are exhibited due to the interaction between the two high-frequency modes, but once again, the global behavior of the 1:2 internal resonance has been recovered.

In the low-frequency case, the energy is immediately and simultaneously transferred from a_1 to a_2 and a_3 . For the high-frequency case, the limit of the stability can be understood as a surface represented in a 3D-space. Compared to the 1:2:4 internal resonance (part 1), there is no cascade of energy, but two nested 1:2 resonances.

Finally, contrary to the simple 1:2 internal resonance, the presence of a third oscillator can lead to Hopf bifurcation with quasiperiodic regime in coupled solutions even in the high-frequency case of excitation.

4 Conclusion

In this paper, a detailed analysis of two 3-dofs quadratic nonlinear systems presenting internal resonances, has been proposed. These models are two combinations of the well-known 1:2 internal resonance. Forced oscillations are considered and the systems are expressed under their normal form. In each case, an external forcing is applied on each oscillator equation.

For the 1:2:4 resonance, it has been shown that it may be interpreted as a cascade of two 1:2 internal resonances. When $\Omega \simeq \omega_3$, two components oscillat-

ing at $\Omega/2$ and $\Omega/4$ are created by the first and second oscillators. Energy can be transferred in a two-stage process, first to the second mode, and finally for the first one. The two stability conditions for these different regimes have been exhibited and resembles the stability limit for a classical 1:2 resonance. Finally, it has been found that the presence of the first oscillator leads to the occurrence of Hopf bifurcations in the fully coupled regime so that quasiperiodic responses are favored. When $\Omega \simeq \omega_2$, two components are created oscillating at $\Omega/2$ and 2Ω . The system can be analyzed as composed of two 1:2 resonances, both excited in its lower and its higher frequency at the same time. The last case ($\Omega \simeq \omega_1$) leads to two components oscillating at 2Ω and 4Ω . As in the 1:2 case, there is no stability limit, the energy is directly transferred to the two upper frequency modes. As compared to the 1:2 case, it has been found that quasiperiodic regimes are more easily observed.

The second model, displaying a 1:2:2 resonance, can be seen as two nested 1:2 internal resonances. When $\Omega \simeq \omega_1$, the solutions present a lot of similarities with the 1:2 case. Amplitudes solutions are locally affected by the third oscillator, however the global behavior of a 1:2 resonance is recovered. For the last case ($\Omega \simeq 2\omega_1$), a stability condition has been derived and it has been demonstrated how the shape of the instability region can become complex for certain parameter values. Fully coupled solutions are not analytically tractable in the case considered so that numerical solutions have been exhibited, and once again Hopf bifurcations have been observed on the fully coupled branches.

A general conclusion that can be drawn out, as compared to the simple 1:2 resonance, is that the presence of a third oscillator favors unstable states for fully coupled regions so that quasiperiodic regimes become more generic.

Appendix A: Analytical expressions for the 1:2:4 internal resonance

A.1 1:2:4 mid-frequency case

Jacobian matrix of system (25a)–(25f), with $a_1 = 0$:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\mu_1 + \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \sin(\gamma_1) & \frac{\alpha_1}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) + \frac{F_2}{2\omega_2 a_2^2} \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & -\mu_2 + \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) \\ 0 & 0 & -\frac{F_2}{2\omega_2 a_2^2} \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_4 a_2}{2\omega_3} \sin(\gamma_2) \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_4 a_2}{2\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) - \frac{F_2}{\omega_2 a_2^2} \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \sin(\gamma) & -\frac{\alpha_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) & \frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) \\ \frac{F_2}{2\omega_2} \cos(\gamma) & \frac{\alpha_3 a_2}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) & \frac{\alpha_3 a_3 a_2}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) \\ -\frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \sin(\gamma) & \frac{\alpha_3}{4\omega_2} \cos(\gamma_2) & -\frac{\alpha_3 a_3}{4\omega_2} \sin(\gamma_2) \\ 0 & -\mu_3 & -\frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3} \cos(\gamma_2) \\ -\frac{F_2}{\omega_2 a_2} \sin(\gamma) & \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3 a_3^2} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_3}{2\omega_2} \cos(\gamma_2) & \frac{\alpha_4 a_2^2}{4\omega_3 a_3} \sin(\gamma_2) - \frac{\alpha_3 a_3}{2\omega_2} \sin(\gamma_2) \end{pmatrix}.$$

A.2 1:2:4 low-frequency case

The coefficients of the five-order polynomial of a_2^2 (see Eq. (36)) are given by

$$\left\{ \begin{aligned} C_{10} &= \frac{\alpha_3^2 \alpha_1^4 \alpha_4^2}{16^3 \alpha_2^2 \omega_1^4 \omega_3^2 (\mu_3^2 + \nu_3^2)}, \\ C_8 &= \frac{\omega_2 \alpha_3 \alpha_1^4 \alpha_4 (\mu_2 \mu_3 - \nu_2 \nu_3)}{2^7 \alpha_2^2 \omega_1^4 \omega_3 (\mu_3^2 + \nu_3^2)} + \frac{\alpha_3^2 \alpha_1^2 \alpha_4^2 (\mu_1^2 + \nu_1^2)}{128 \alpha_2^2 \omega_1^2 \omega_3^2 (\mu_3^2 + \nu_3^2)} - \frac{\alpha_3^2 \alpha_1^2 \alpha_4^2 (\nu_1 \nu_3 - \mu_1 \mu_3)^2}{4^3 \alpha_2^2 \omega_1^2 \omega_3^2 (\mu_3^2 + \nu_3^2)^2}, \\ C_6 &= \frac{\omega_2^2 \alpha_1^4}{16 \alpha_2^2 \omega_1^4 (\mu_2^2 + \nu_2^2)} + \frac{\omega_2 \alpha_3 \alpha_1^2 \alpha_4 (\mu_1^2 + \nu_1^2) (\mu_2 \mu_3 - \nu_2 \nu_3)}{4 \alpha_2^2 \omega_1^2 \omega_3 (\mu_3^2 + \nu_3^2)} + \frac{\alpha_3^2 \alpha_4^2 (\mu_1^2 + \nu_1^2)^2}{16 \alpha_2^2 \omega_3^2 (\mu_3^2 + \nu_3^2)} \\ &\quad + \frac{\alpha_1^2 \alpha_3 \alpha_4 \omega_2 (\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2) (\nu_1 \nu_3 - \mu_1 \mu_3)}{2 \alpha_2^2 \omega_3 \omega_1^2 (\mu_3^2 + \nu_3^2)}, \\ C_4 &= \frac{2 \omega_2^2 \alpha_1^2 (\mu_2^2 + \nu_2^2) (\mu_1^2 + \nu_1^2) - 4 \omega_2^2 \alpha_1^2 (\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2) - F_1^2 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 (\nu_1 \nu_3 - \mu_1 \mu_3)}{\alpha_2^2 \omega_1^2 (\mu_2^2 + \nu_2^2) (\mu_1^2 + \nu_1^2) - \alpha_2^2 \omega_1^2 (\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2) - 16 \alpha_2 \omega_3 \omega_1^3 (\mu_3^2 + \nu_3^2)} \\ &\quad + \frac{2 \alpha_3 \alpha_4 \omega_2 (\mu_1^2 + \nu_1^2)^2 (\mu_2 \mu_3 - \nu_2 \nu_3)}{\alpha_2^2 \omega_3 (\mu_3^2 + \nu_3^2)}, \\ C_2 &= \frac{16 \omega_2^2 (\mu_1^2 + \nu_1^2)^2 (\mu_2^2 + \nu_2^2) + F_1^2 \alpha_1 \omega_2 (\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_2)}{\alpha_2^2 (\mu_1^2 + \nu_1^2)^2 (\mu_2^2 + \nu_2^2) + \frac{F_1^2 \alpha_1 \omega_2}{\alpha_2 \omega_1^3} (\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_2)}, \\ C_0 &= -\frac{F_1^4}{16 \omega_1^4}. \end{aligned} \right.$$

The Jacobian matrix associated to Eqs. (33a)–(33f) reads

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\mu_1 + \frac{\alpha_1 a_2}{4 \omega_1} \sin(\gamma_1) & \frac{F_1}{2 \omega_1} \cos(\gamma) & \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4 \omega_1} \cos(\gamma_1) \\ -\frac{Q_1}{2 \omega_1 a_1^2} \cos(\gamma) & -\frac{F_1}{2 \omega_1 a_1} \sin(\gamma) & \frac{\alpha_1}{4 \omega_1} \cos(\gamma_1) \\ -\frac{\alpha_2 a_1}{2 \omega_2} \sin(\gamma_1) & 0 & -\mu_2 + \frac{\alpha_3 a_3}{4 \omega_2} \sin(\gamma_2) \\ -\frac{\alpha_2 a_1}{2 \omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{F_1}{\omega_1 a_1^2} \cos(\gamma) & -\frac{F_1}{\omega_1 a_1} \sin(\gamma) & \frac{\alpha_2 a_1^2}{4 \omega_2 a_2^2} \cos(\gamma_1) + \frac{\alpha_1}{2 \omega_1} \cos(\gamma_1) \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_4 a_2}{2 \omega_3} \sin(\gamma_2) \\ \frac{\alpha_2 a_1}{\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) & 0 & -\frac{\alpha_4 a_2}{2 \omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) - \frac{\alpha_2 a_1^2}{2 \omega_2 a_2^2} \cos(\gamma_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1 a_2}{4 \omega_1} \sin(\gamma_1) & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_2 a_1^2}{4 \omega_2} \cos(\gamma_1) & \frac{\alpha_3 a_2}{4 \omega_2} \sin(\gamma_2) & \frac{\alpha_3 a_3 a_2}{4 \omega_2} \cos(\gamma_2) \\ \frac{\alpha_2 a_1^2}{4 \omega_2 a_2} \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_1 a_2}{2 \omega_1} \sin(\gamma_1) & -\frac{\alpha_3}{4 \omega_2} \cos(\gamma_2) & \frac{\alpha_3 a_3}{4 \omega_2} \sin(\gamma_2) \\ 0 & -\mu_3 & -\frac{\alpha_4 a_2^2}{4 \omega_3} \cos(\gamma_2) \\ -\frac{\alpha_2 a_1^2}{2 \omega_2 a_2} \sin(\gamma_1) & \frac{\alpha_4 a_2^2}{4 \omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) + \frac{\alpha_3}{2 \omega_2} \cos(\gamma_2) & \frac{\alpha_4 a_2^2}{4 \omega_3 a_3} \sin(\gamma_2) - \frac{\alpha_3 a_3}{2 \omega_2} \sin(\gamma_2) \end{pmatrix}.$$

Appendix B: Jacobian matrices for the 1:2:2 internal resonance

B.1 1:2:2 low-frequency case

Jacobian matrix associated to Eqs. (43a)–(43f):

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\mu_1 - \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{4\omega_1} \sin(\gamma_2) & -\frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \cos(\gamma_1) & -\frac{\alpha_1 a_1}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) \\ \frac{\alpha_3 a_1}{2\omega_2 a_2} \cos(\gamma_1) - \frac{F_1}{\omega_1 a_1^2} \cos(\gamma) & -\frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\gamma_1) + \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \sin(\gamma_1) & -\frac{\alpha_1}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) - \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2 a_2^2} \cos(\gamma_1) \\ \frac{\alpha_3 a_1}{2\omega_2} \sin(\gamma_1) & \frac{\alpha_3 a_1^2}{4\omega_2} \cos(\gamma_1) & -\mu_2 \\ \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_3 a_3} \cos(\gamma_2) - \frac{F_1}{\omega_1 a_1^2} \cos(\gamma) & \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \sin(\gamma_1) & -\frac{\alpha_1}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) \\ \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_3} \sin(\gamma_2) & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{2\omega_1 a_1^2} \cos(\gamma) & \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) & -\frac{\alpha_1}{4\omega_1} \cos(\gamma_1) \\ -\frac{\alpha_2 a_1 a_3}{4\omega_1} \cos(\gamma_2) & -\frac{\alpha_2 a_1}{4\omega_1} \sin(\gamma_2) & \frac{F_1}{2\omega_1} \cos(\gamma) \\ \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \sin(\gamma_2) & -\frac{\alpha_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) & -\frac{F_1}{\omega_1 a_1} \sin(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3 a_3} \sin(\gamma_2) + \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \sin(\gamma_2) & -\frac{\alpha_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) - \frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3 a_3^2} \cos(\gamma_2) & -\frac{F_1}{\omega_1 a_1} \sin(\gamma) \\ \frac{\alpha_4 a_1^2}{4\omega_3} \cos(\gamma_2) & -\mu_3 & 0 \\ \frac{\alpha_2 a_3}{4\omega_1} \sin(\gamma_2) & -\frac{\alpha_2}{4\omega_1} \cos(\gamma_2) & -\frac{F_1}{\omega_1 a_1} \sin(\gamma) \end{pmatrix}.$$

B.2 1:2:2 high-frequency

Jacobian matrix associated to Eqs. (50a)–(50f):

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\mu_1 - \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_2 a_3}{4\omega_1} \sin(\gamma_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \sin(\gamma_1) & \frac{F_2}{2\omega_2 a_2^2} \cos(\gamma) - \frac{\alpha_1}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) \\ 0 & 0 & -\mu_2 \\ 0 & \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \sin(\gamma_1) + \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \sin(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) & -\frac{\alpha_1}{2\omega_1} \cos(\gamma_1) \\ 0 & \frac{F_3}{2\omega_3} \cos(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F_2}{2\omega_2 a_2^2} \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \sin(\gamma_2) & -\frac{\alpha_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) & \frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \sin(\gamma) \\ 0 & 0 & \frac{F_2}{2\omega_2} \cos(\gamma) \\ \frac{\alpha_2 a_3}{2\omega_1} \sin(\gamma_2) - \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \sin(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) & \frac{F_3}{2\omega_3 a_3^2} \cos(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) - \frac{\alpha_2}{2\omega_1} \cos(\gamma_2) & \frac{F_3}{2\omega_3 a_3} \sin(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) \\ -\frac{F_3}{2\omega_3} \cos(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) & -\mu_3 & \frac{F_3}{2\omega_3} \cos(\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) \\ 0 & 0 & -\frac{F_2}{2\omega_2 a_2} \sin(\gamma) \end{pmatrix}.$$

The corresponding eigenvalues are computed as

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -\mu_2 \pm i\sigma, \\ \lambda_{3,4} = -\mu_3 \pm i(\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma), \\ \lambda_5 = -\mu_1 - \frac{\alpha_1}{4\omega_1}a_2 \sin(\gamma_1) - \frac{\alpha_2}{4\omega_1}a_3 \sin(\gamma_2), \\ \lambda_6 = \frac{\alpha_1}{4\omega_1}a_2 \sin(\gamma_1) + \frac{\alpha_2}{4\omega_1}a_3 \sin(\gamma_2). \end{cases} \quad (56)$$

The product $\lambda_5\lambda_6$ drives the stability of the solution. Searching for its cancellation points, one can see that it is equivalent to cancel the following expression:

$$\alpha_1 a_2 \sin \gamma_1 + \alpha_2 a_3 \sin \gamma_2 = -4\omega_1 \mu_1. \quad (57)$$

From Eqs. (50b) and (50f), another relationship between γ_1 and γ_2 is obtained:

$$\alpha_1 a_2 \cos \gamma_1 + \alpha_2 a_3 \cos \gamma_2 = 2\omega_1(\sigma_1 + \sigma). \quad (58)$$

The combination of Eqs. (58) and (57) leads to

$$\begin{aligned} 4\omega_1^2(4\mu_1^2 + (\sigma_1 + \sigma)^2) \\ = \alpha_1^2 a_2^2 + \alpha_2^2 a_3^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 a_2 a_3 \cos(\gamma_1 - \gamma_2). \end{aligned} \quad (59)$$

$\cos(\gamma_1 - \gamma_2)$ is expressed thanks to Eqs. (50c) and (50f) as:

$$\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{\omega_3 a_3}{\omega_2 a_2} \frac{F_2}{F_3} \frac{\mu_2 \mu_3 + \sigma(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)}{\mu_2^2 + \sigma^2}. \quad (60)$$

Finally, the stability condition is

$$S_{\text{lim}} = \{(\sigma, a_2, a_3) | T_1 = T_2 a_2^2 + T_3 a_3^2\} \quad (61)$$

where

$$\begin{cases} T_1 = 4\omega_1^2(4\mu_1^2 + (\sigma_1 + \sigma)^2), \\ T_2 = \alpha_1^2, \\ T_3 = \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{F_2}{F_3} \\ \quad \times \frac{\mu_2 \mu_3 + \sigma(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)}{\mu_2^2 + \sigma^2}. \end{cases} \quad (62)$$

References

1. Achong, A.: The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, I: theory, simulations, experiments and bifurcations. *J. Sound Vib.* **197**(4), 471–487 (1996)
2. Achong, A.: The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, part III: the inverse problem—parameter estimation. *J. Sound Vib.* **212**(4), 623–635 (1998)
3. Achong, A.: Mode locking on the non-linear notes of the steelpan. *J. Sound Vib.* **266**, 193–197 (2003)
4. Achong, A., Sinanan-Singh, K.A.: The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, part II: coupled sub-systems, simulations and experiments. *J. Sound Vib.* **203**(4), 547–561 (1997)
5. Amabili, M., Pellicano, F., Valakis, A.F.: Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled, circular shells, part 1: equations of motion and numerical results. *J. Vib. Acoust.* **122**, 346–354 (2000)
6. Arnold, V.I., Levi, M., Szücs, J.: Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer, Berlin (1988)
7. Chaigne, A., Touzé, C., Thomas, O.: Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals. *Acoust. Sci. Technol.* **26**(5), 403–409 (2005)
8. Chin, C.-M., Nayfeh, A.H.: A second-order approximation of multi-modal interactions in externally excited circular cylindrical shells. *Nonlinear Dyn.* **26**, 45–66 (2001)
9. Cochelin, B., Vergez, C.: A high-order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *J. Sound Vib.* **324**, 243–262 (2009)
10. Froude, W.: Remarks on Mr. Scott Russell's paper on rolling. *Trans. Inst. Naval Research* **7**, 232–275 (1863)
11. Haddow, A.G., Barr, A.D.S., Mook, D.T.: Theoretical and experimental study of modal interaction in two-degree-of-freedom structure. *J. Sound Vib.* **97**(3), 451–473 (1984)
12. Hanson, R.J., Anderson, J.M., Macomber, H.K.: Measurements of nonlinear effects in a driven vibrating wire. *J. Acoust. Soc. Am.* **96**(3), 1549–1556 (1994)
13. Iooss, G., Adelmeyer, M.: Topics in Bifurcation Theory. Advanced Series in Nonlinear Dynamics (1998)
14. Karkar, S., Cochelin, B., Vergez, C., Thomas, O., Lazarus, A.: User guide Manlab 2.0. Technical report, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), CNRS UPR 7051 (2012). <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>
15. Lazarus, A., Thomas, O.: A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *C. R., Méc.* **338**, 510–517 (2010)
16. Lee, C., Perkins, N.C.: Three-dimensional oscillations of suspended cables involving simultaneous internal resonances. *Nonlinear Dyn.* **8**, 45–63 (1995)
17. Miles, J.W.: Stability of forced oscillations of a vibrating string. *J. Acoust. Soc. Am.* **38**(5), 855–861 (1965)
18. Miles, J.W.: Resonant, nonplanar motion of a stretched string. *J. Acoust. Soc. Am.* **75**(5), 1505–1510 (1984)
19. Monteil, M., Touzé, C., Thomas, O.: Complicated dynamics exhibited by thin shells displaying numerous internal resonances: application to the steelpan. In: 19th International Congress on Sound and Vibrations (ICSV), Vilnius, Lithuania, 8–12 July 2012
20. Myers, A., Pyle, R.W., Gilbert, J. Jr., Campbell, D.M., Chick, J.P., Logie, S.: Effects of nonlinear sound propagation on the characteristic timbres of brass instruments. *J. Acoust. Soc. Am.* **131**(1), 678–688 (2012)
21. Nayfeh, A.H., Zavodney, L.D.: Experimental observation of amplitude and phase-modulated responses of two inter-

- nally coupled oscillators to harmonic excitation. *J. Appl. Mech.* **55**, 706–710 (1988)
22. Nayfeh, A.H.: On the undesirable roll characteristics of ships in regular seas. *J. Ship Res.* **32**, 92–100 (1988)
 23. Nayfeh, A.H.: *Nonlinear Interactions*. Wiley, New York (2000)
 24. Nayfeh, A.H., Mook, D.T.: *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York (1979)
 25. Nayfeh, T.A., Asrar, W., Nayfeh, A.H.: Three-mode interactions in harmonically excited systems with quadratic nonlinearities. *Nonlinear Dyn.* **3**, 385–410 (1992)
 26. Nazarenko, S.: *Wave Turbulence*. Lecture Notes in Physics, vol. 825. Springer, Berlin (2011)
 27. Noreland, D., Bellizzi, S., Vergez, C., Bouc, R.: Nonlinear modes of clarinet-like musical instruments. *J. Sound Vib.* **324**(3–5), 983–1002 (2009)
 28. Pellicano, F., Amabili, M., Valakis, A.F.: Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid-filled, circular shells, part 2: perturbation analysis. *J. Vib. Acoust.* **122**, 355–364 (2000)
 29. Poincaré, H.: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthiers-Villars, Paris (1892)
 30. Ruelle, D., Takens, F.: On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* **20**, 167–192 (1971)
 31. Sanders, J.A., Verhulst, F.: *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* (1985) (revised ed. 2007)
 32. Thomas, O., Lazarus, A., Touzé, C.: A harmonic-based method for computing the stability of periodic oscillations of nonlinear structural systems. In: *ASME/IDETC 2010 (International Design Engineering Technical Conference)*, Montreal, Québec, Canada, 15–18 Aug. 2010
 33. Thomas, O., Touzé, C., Chaigne, A.: Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance. *Int. J. Solids Struct.* **42**, 3339–3373 (2005)
 34. Thomas, O., Touzé, C., Luminais, E.: Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: experiments on a 1:1:2 internal resonance. *Nonlinear Dyn.* **49**(1–2), 259–284 (2007)
 35. Tien, W.-M., Namachchivaya, N.S., Bajaj, A.K.: Non-linear dynamics of a shallow arch under periodic excitation, I: 1:2 internal resonance. *Int. J. Non-Linear Mech.* **23**(3), 349–366 (1994)
 36. Touzé, C., Bilbao, S., Cadot, O.: Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates. *J. Sound Vib.* **331**, 412–433 (2012)
 37. Touzé, C., Thomas, O., Amabili, M.: Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates. *Int. J. Non-Linear Mech.* **46**(1), 234–246 (2011)
 38. Touzé, C., Thomas, O., Chaigne, A.: Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *J. Sound Vib.* **273**, 77–101 (2004)

Chapitre 9

Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan

Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan

M. Monteil^{a,b}, C. Touzé^a, O. Thomas^{c,d}

^a*Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech, 828 Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France*

^b*Institut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC-Paris VI/CNRS, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

^c*Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes, UMR 7296, Arts et Métiers ParisTech, 8 Boulevard Louis XIV, 59000 Lille, France*

^d*Structural Mechanics and Coupled Systems Laboratory, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), 2 rue Conté, 75003 Paris, France*

Abstract

The vibrations and sounds produced by two notes of a double-second steelpan are investigated, the main objective being to quantify the nonlinear energy exchanges occurring between vibration modes that are responsible of the peculiar sound of the instrument. A modal analysis first reveals the particular tuning of the modes and the systematic occurrence of degenerate modes, from the second one, this feature being a consequence of the tuning and the mode localization. Forced vibrations experiments are then performed to follow precisely the energy exchange between harmonics of the vibration and thus quantify properly the mode couplings. In particular, it is found that energy exchanges are numerous, resulting in complicated frequency response curves even for very small levels of vibration amplitude. Simple models displaying 1:2:2 and 1:2:4 internal resonance are then fitted to the measurements, allowing to identify the values of the nonlinear quadratic coupling coefficients resulting from the geometric nonlinearity. The identified 1:2:4 model is finally used to recover the time domain variations of an impacted note in normal playing condition, resulting in an excellent agreement for the time behaviour of the first four harmonics.

Keywords:

steeldrum, nonlinear vibration, internal resonance, shell, mode coupling, energy exchange.

1. Introduction

Steelpanns are musical percussion instruments coming from the island of Trinidad and Tobago in the Caribbean. They are traditionally played in orchestras called steelbands. These orchestras are composed of several steelpanns covering a range of several octaves. Each steelpan is made of an oil barrel that is subjected to several stages of metal forming that stretch and bend the structure. The top of the barrel is pressed, hammered, punched and burnt in order to obtain a sort of main bowl within which convex domes are formed, each one corresponding to a particular musical note (Fig. 1). These notes are associated

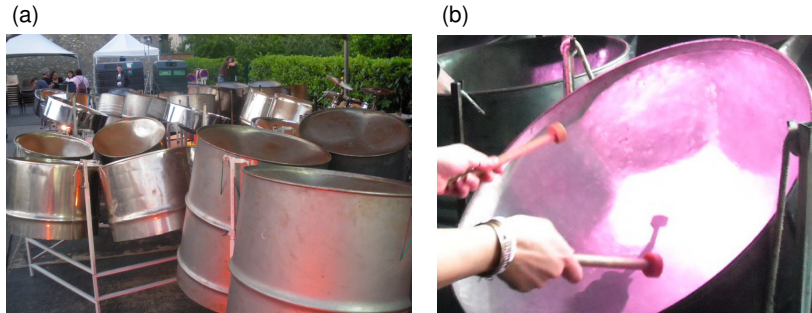


Figure 1: (a) Photograph of a steel band. (b) Photograph of a particular steelpan in normal playing conditions

to vibration modes with strongly localized shapes on the domes, that are finely tuned in harmonic relationships by the tuner. As a consequence, when struck, each dome vibrates with a quasi-harmonic spectrum responsible of a musical note with a clear pitch. In all cases, the second mode is tuned at twice the frequency of the fundamental one, whereas the third one is tuned at three or four times the fundamental, depending on the note and on the tuner. Higher frequency modes are also present, but no general rule exists for their tuning [1].

The vibrational behaviour of the steelpan has been studied for some times and numerous results are already available in literature. The seminal investigations are due to Achong who produced a series of papers in the 1990's that describe the most important physical phenomena: mode localization, nonlinear vibrations, mode couplings and energy exchanges [2, 3, 4, 5]. All these features are now widely recognized as being the key to properly understand the vibrational behaviour of steelpans and their peculiar sound. Mode localization allows creating different notes relying on the same structure, while nonlinear geometric nonlinearity is responsible of energy exchanges and thus on the peculiar tone of the pan. Modal analyses have been performed by Rossing *et al.* in different papers [6, 7, 8], underlining that modes are perfectly tuned during the manufacturing process. In particular, the tuner takes care of adjusting the first modes of each note so that one mode is an octave above the fundamental, while a third one is tuned either a twelfth or two octaves above the fundamental [7, 1]. These findings have been reinforced by other measurements showing either the sound radiation [9, 10], the response to impulsive excitation [11] and the identification of sound sources by time-reversal imaging [12]. On another point of view, detailed metallurgical studies have been realized by Murr, Ferreyra *et al.* [13, 14, 15, 16]. The effects of thickness reduction, deformation, hardness location and heat treatments have been precisely measured and some innovations in steelpan materials have been proposed [17, 18, 19].

The aim of the present paper is to provide new results and insight into the linear and nonlinear vibrations of the steelpan. Two notes of a double second are specifically studied. The modal analysis reveals the systematic occurrence of degenerate modes from the second one, a feature that has not been particularly commented to our knowledge. For the nonlinear vibration, a particular emphasis is put on the identification of mode couplings in order to precisely understand the energy exchanges occurring during the vibration.

Measurements in forced vibrations are used in order to have a finely tuned and perfectly reproducible experiment for which all input parameters are tightly controlled. Thanks to lock-in amplifier, harmonics 1 to 8 of the vibration signals are separated and followed separately. The measurements obviously reveal the complexity of the vibrational patterns and the number of excited modes, even for very small levels of vibration amplitudes. Simple models displaying 1:2:2 and 1:2:4 internal resonance, available in [20], are then used in order to fit some experimental frequency response curves. Finally, time-domain simulations of the models identified from forced vibrations, are used to compare the time response of the first four harmonics of the signal of an impacted note, showing a perfect agreement.

2. Modal analysis of the steelpan

In this section, an experimental modal analysis of the steelpan is presented. The steelpan under study, shown in Fig. 2, is a right barrel of a double second (middle-high frequency steelpan). It is composed of 19 precisely tuned notes, distributed on three concentric circles, the lower notes being on the outer circle. As we focus on the nonlinear response of two different notes, namely G3 and F3, two different modal analysis have been performed, by successively exciting directly the studied note, and by measuring with a scanning laser vibrometer the notes along with its two harmonically tuned neighbours (G4 and G5 for the G3 note, and F4, F5 for the F3 note). As already known from available studies [7, 8, 9, 2, 3], and confirmed by a complete modal analysis performed on the same instrument in our laboratory [21], the vibrations are localized so that scanning the whole surface is not needed (see Fig. 3(b)).

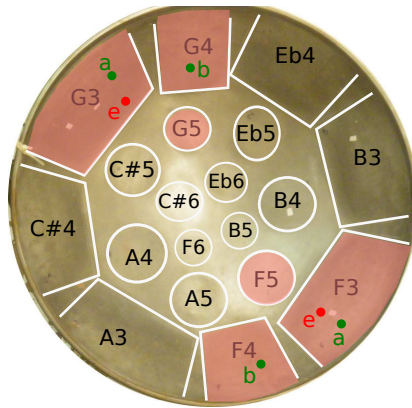


Figure 2: Pattern of the steelpan under study, and selected notes scanned by the vibrometer during the modal analysis. Excitation points on G3 and F3 are denoted e, while a and b refers to the selected points for measuring the transverse displacement. The scanned regions for the mode shapes identifications are pink-shaded.

In the experiments, a pointwise excitation is ensured by a coil/magnet exciter. This home-made device has already been used in numerous experiments on nonlinear vibrations of plates and shells [22, 23]. In particular, the interested reader can find in [22] a

complete study on the calibration and the performance of the device, showing in particular that it allows for a clean harmonic excitation with a very low harmonic distortion due to the nonlinearities of the system. In particular it behaves far better than a classical shaker by ensuring a total harmonic distortion less than 2% [22]. In the experimental set-up, no force transducer is used: the current sent to the coil is measured and a calibration procedure allows us to measure the proportionality coefficient K between the current (in A) and the force (in N). For our set of experiments, the measurement gives $K=0.1$ N/A. Figure 3(a) shows how the device is placed below the steelpan.

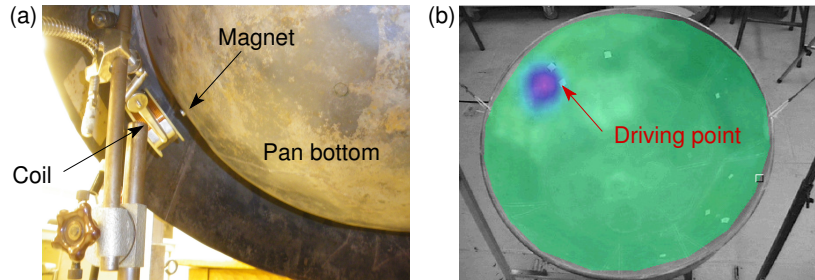


Figure 3: Modal analysis of the double second. (a) Electromagnetic exciter. (b) Mode shape with energy localized on the excited note of frequency 197.5 Hz.

For the modal analysis, the excitation device is fed with a swept sine in the frequency band $[0, 1700]$ Hz. A Polytec PSV-300 scanning laser vibrometer is used for measuring the velocity at a given grid point. Figure 3(b) shows the operational deflection shape when the G3 note is excited at 197.5 Hz, underlining the fact that the vibration is, for this frequency, strongly localized to the G3 dome only.

Fig. 4 shows the frequency response function (FRF) in velocity with respect to the prescribed force at the excitation point, when the steelpan is excited on the note G3. The first mode is identified at 197.5 Hz. Harmonic relationships are exhibited by dashed lines. It can be observed that around $2f_1$, the frequency spectrum presents a double peak indicating that the mode is degenerate, with two mode shapes having nearly equal frequencies. The next mode is located in the vicinity of the harmonic relationship $4f_1$, then the higher eigenfrequencies are significantly shifted as compared to a perfect tuning ($\simeq 6f_1, \simeq 8f_1$).

Two local views around $2f_1$ and $4f_1$ are presented Fig. 4(a) and (b) respectively. The FRF of the excited point e (black line) and of point b, located in the vicinity of the center of the G4 note (red dashed line), are superimposed (see Fig. 2 for the points locations). By changing the measurement point, one clearly reveals that degenerate modes are present both around $2f_1$ and $4f_1$.

The results for the second experiment, for which the F3 note is excited, are reported on Fig. 5. Fig. 5(a) shows that the first three eigenmodes are also tuned at $f_1, 2f_1$ and $4f_1$, where f_1 is identified at 172.2 Hz. Fig. 5(b) and (c) precise the presence of double peaks, revealed when the FRF is measured on the note F4 around $2f_1$ and $4f_1$. In this case, the higher-frequency eigenmodes are also shifted as compared to the perfect tuning. The spectrum repartition is around $\simeq 5f_1, \simeq 7f_1$ and $\simeq 9f_1$.

Figs. 6 and 7 summarize the linear characteristics obtained for the two notes from

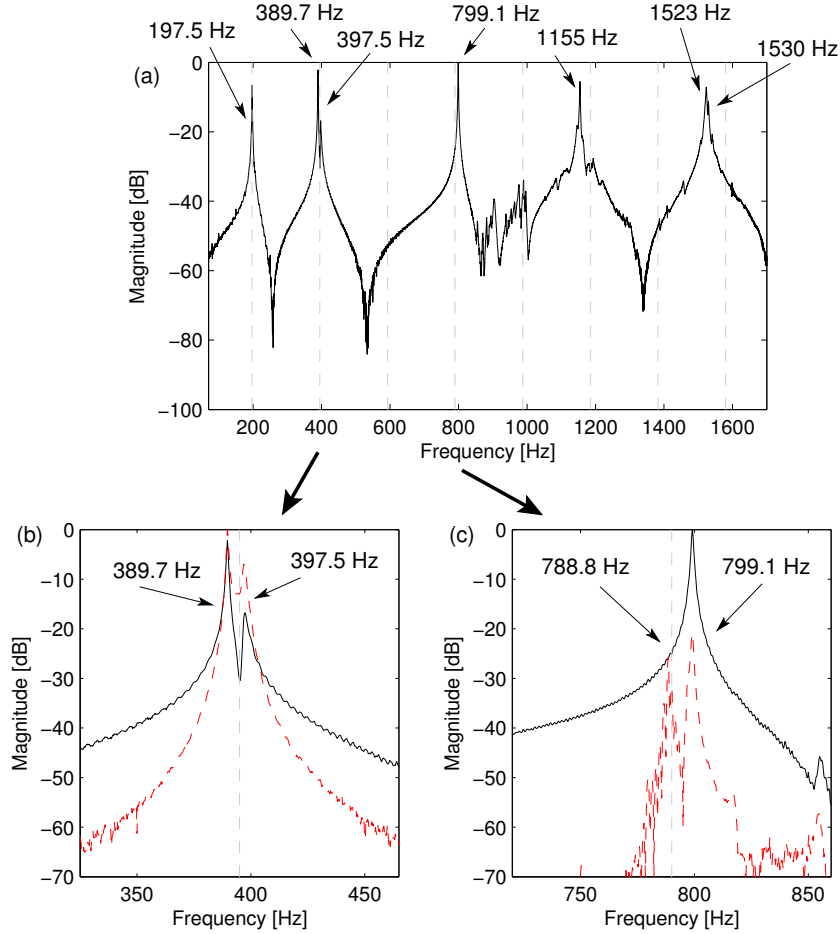


Figure 4: Frequency response curves of the steelpan excited on G3. (a) FRF, (b) zoom on corresponding linear spectrum around $2f_1$ and (c) $4f_1$, comparison between measurements located on the excitation point e (black solid line), and on the point b in the center of G4 (red dashed line).

the modal analysis: eigenfrequencies, modal damping factors and associated operational deflection shapes at resonances are given. In both cases, around f_1 , the vibrational pattern is localized on the center of the note area. This mode, having no nodal diameters, is commonly denoted (0,0). The degenerate modes around $2f_1$ are then shown. Their vibrational pattern is composed of the shape (0,1) with a vertical nodal line on the principal note, accompanied with a shape (0,0) on the harmonically tuned note (G4 and F4). The shape on this auxiliary note is either in-phase, or out-of-phase, and a small detuning between the two frequencies is observed. This degeneracy of modes is a common feature in systems presenting localized vibrations. In particular, one can find in [24] how this degeneracy appears for a one-dimensional beam resting on an elastic foundation with varying stiffness along the position with a symmetric profile. In the present case of the steelpan, this degeneracy is a consequence of both the particular harmonic tuning of

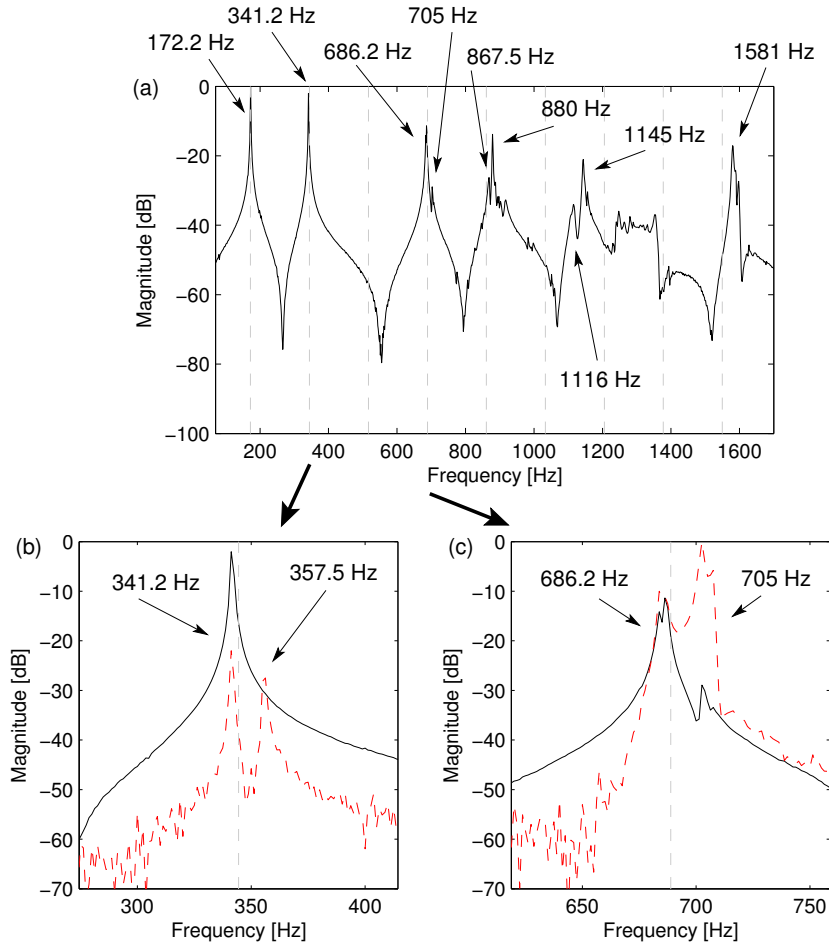


Figure 5: Frequency response curves of the steelpan excited on F3. (a) FRF, (b) zoom on corresponding linear spectrum around $2f_1$ and (c) $4f_1$, comparison between measurements located on the excitation point e (black solid line), and on the point b in the center of F4 (red dashed line).

contiguous notes G3-G4 (or F3-F4) and the mode shape localization.

The phenomenon repeats for the two modes appearing around $4f_1$, where the shape on the principal note is (1,0), (0,1) on the harmonic G4 (or F4) note, and (0,0) on the second harmonically tuned note G5 (or F5). Theoretically, as now the mode expands on three contiguous domes, one would expect to obtain a double degeneracy for the modes around $4f_1$, as the similar process observed for the note at $2f_1$ can now produce four different patterns. However, the quadruplets may be difficult to measure for some physical reasons (difficulty to excite some of the modes, frequency relationship not perfectly fitted, ...).

For the note G3, the measurement at point b shown in Fig. 4(c) shows that secondary peaks are present around 788.8 Hz. This could indicate the presence of a degeneracy with eigenfrequencies very close to the mode identified at 788.8 Hz and shown in Fig. 6. One can note however that the secondary peaks appear to be very small in amplitude,

which means that these two configurations are difficult to measure and to excite in our experimental set-up, for physical reasons due to imperfections of the shell. Moreover, the operational deflection shapes in Fig. 6 show that the pattern is not so perfectly reproducible as for the degenerate modes at $2f_1$, rendering the whole identification of the possible quadruplets very difficult. Hence, in the remainder of the paper, we have decided to extract and identify only the main peaks where most of the vibrational energy is contained, so that only two modes are shown in Fig. 6 at $4f_1$.

For the note F3, the measurements in Fig. 5(c) at points a and b show respectively the presence of a double peak around 686.2 Hz, as well as a double peak around 705 Hz, thus indicating that the double degeneracy at $4f_1$ is also observable. For the same reasons as for the note G3, we have however decided to identify and extract only the main vibratory components, so that only two modes around $4f_1$ are presented in Fig. 6. These choices have also been guided by the fact that in forced vibration experiments shown in the next section, these modes have not been observed.

For the higher frequency modes, the vibrational patterns complexify and the order of appearance of mode shapes differs for the two studied notes. For the note G3, a (1,1) shape is observed around $6f_1$ and two degenerate (2,1) are measured around $8f_1$. For the note F3, two degenerate modes are present around $5f_1$ with a (1,1) shape, and around $6f_1$ with a (0,3) modal shape. Finally a (0,4) is also observed around $8f_1$.

This modal analysis reveals the strong localization phenomenon present in steelpan vibrations, and already underlined in previous investigations. A consequence of this localization is the presence of degenerate modes in the case of harmonically tuned contiguous notes, from the second frequency, where in-phase and out-of-phase components can be present in the auxiliary pattern. Consequently, from the second eigenfrequency, eigenmodes are most likely to appear at least by pair. For the two studied notes, the first eigenfrequencies appear in a ratio $f_1, 2f_1, 4f_1$, denoted in the remainder of the paper 1:2:4 relationship. As the steelpan's shell is particularly thin (of the order of 0.5 mm in the center of the notes), geometrically nonlinear vibrations are excited in normal conditions of playing. The fact that those 1:2:4 relationships are present implies that internal resonance conditions will be easily fulfilled via quadratic nonlinear terms of the model [25, 26, 27, 20]. Hence energy exchanges between modes will be more easily activated, favouring the transfer of energy to higher frequencies. The remainder of the paper is concerned by an experimental identification of these mode couplings.

3. Nonlinear interactions in the steelpan vibrations

In usual playing, the caribbean steelpan is stroke by percussive mallets called *sticks*, which create free vibrations. In order to properly reveal the nonlinear interactions in the nonlinear dynamics of the steelpan, the instrument will be harmonically excited by a pointwise external force imposed by the coil/magnet system. By increasing gradually the amplitude of the external force and by sweeping the excitation frequency, linear and nonlinear responses will be observed. This reproducible and controlled experimental set-up allows for a fine identification of energy transfers and nonlinear interactions, in the vibration amplitude range of the usual playing. We begin by describing the experimental set-up, then the measurements for the two studied notes, G3 and F3, are reported and commented. In particular, the measurements reveal that for vibration amplitudes that

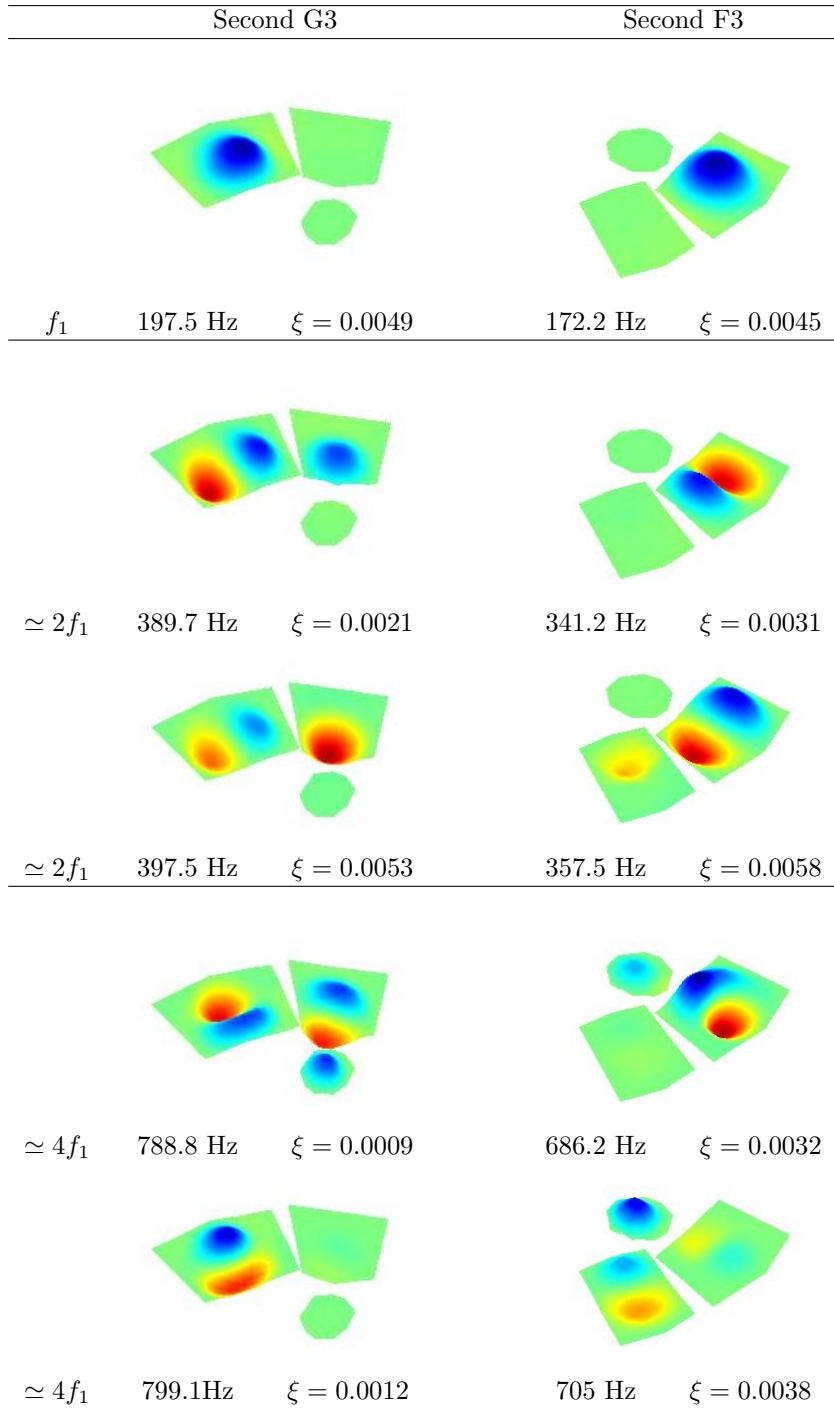


Figure 6: Operational deflection shapes, eigenfrequencies and modal damping ratio, for the notes G3 and F3. Fundamental mode (f_1); modes around $2f_1$ and $4f_1$. The scanned parts of the upper surface of the steel pan are shown by on Fig. 2

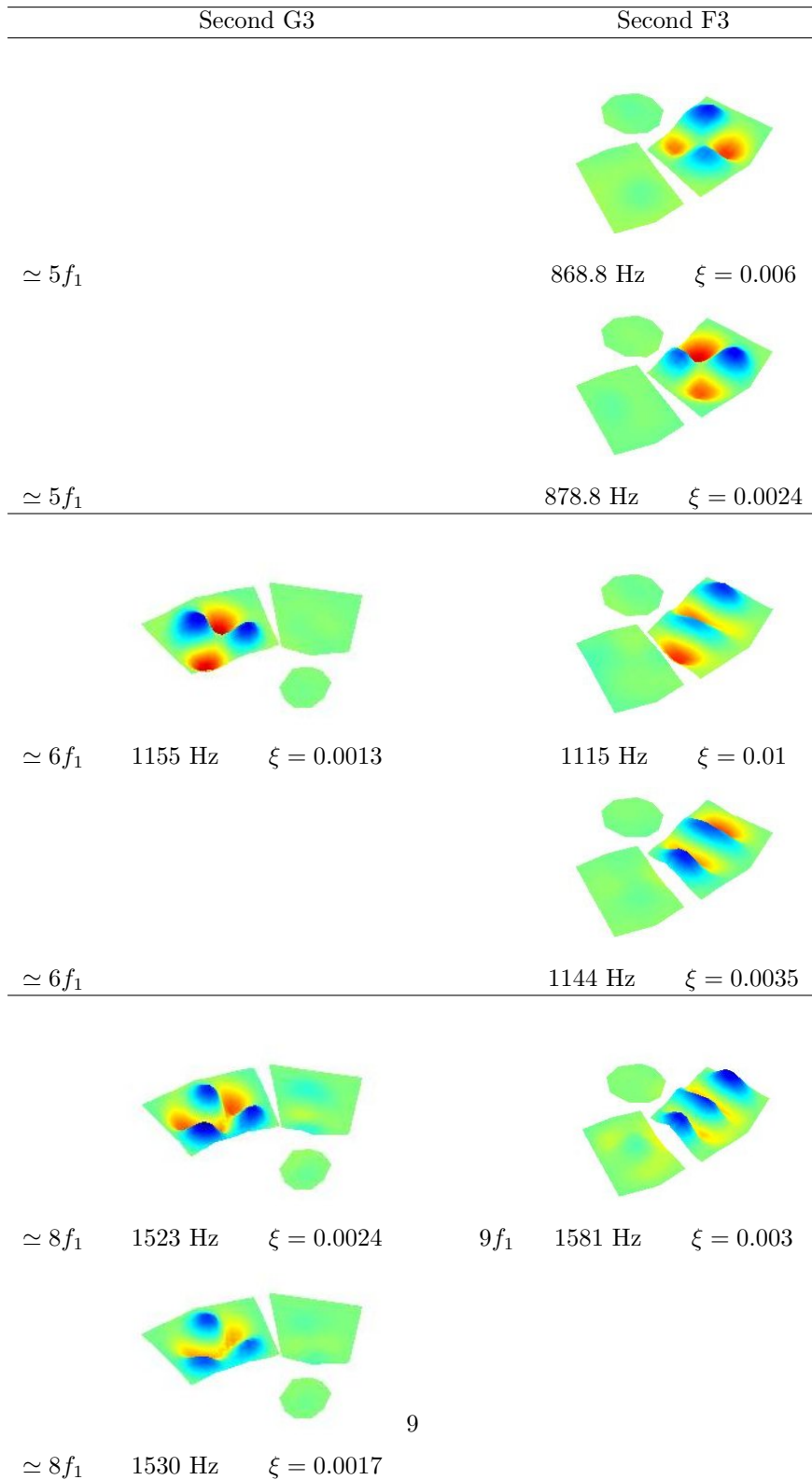


Figure 7: Operational deflection shapes, eigenfrequencies and modal damping ratio, for the notes G3 and F3 (following Fig. 6). Modes around $5f_1$, $6f_1$ and $8f_1$.

are below the amplitudes observed in usual playing, strong modal interactions and energy exchange already occur.

3.1. Experimental setup

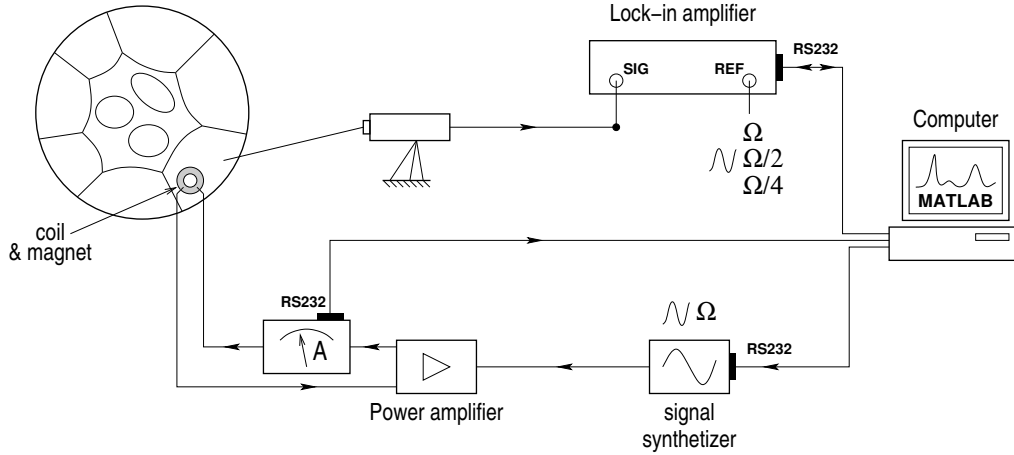


Figure 8: Experimental setup for measuring the harmonics of the nonlinear frequency response curves.

The experimental setup is sketched in Fig. 8. The coil/magnet device, already used for the modal analysis, allows injection of the external force, at a given, selected point of the structure. The coil is fed by a sine signal of frequency $f_{dr} = \Omega/2\pi$, generated by a low distortion signal synthesizer (a Stanford Research System DS-360). The vibration velocity is measured at a given point by the laser vibrometer, and the harmonics amplitudes are estimated by a lock-in amplifier (a Stanford Research System SR-830). To obtain the displacement of each harmonics, the measured velocity is divided by the angular frequency of the harmonics. The reference signal for the lock-in amplifier is the driving sine signal of frequency f_{dr} , or another signal of frequencies $f_{dr}/2$ or $f_{dr}/4$, generated by the built-in generator of the device, in the case in which subharmonic of the driving signal have to be measured. For each measurement reported in the paper, the system is excited in a local frequency band around a particular resonance, at a discrete set of driving frequencies that are followed increasingly (forward “sweep”) or decreasingly (backward “sweep”). For each point, the driving signal is kept at a constant frequency and a time delay of 4 seconds is awaited so as the transient to die out. Then, the amplitudes of each signal harmonics in the steady state are measured during 10 seconds, thanks to the lock-in amplifier. In those ten seconds, about twenty values for the amplitudes are recorder in order to identify potential quasi-periodic oscillations. After, the frequency is changed and the following point is recorded. A forward as well as a backward sweep are realized for each measurement, to identify jump phenomena, so that the total time of measurement for producing a frequency response curve is approximately three hours. All the measurements and the command of the several devices are automated thanks to RS232 protocols and a Matlab computer program.

Analogous measurements have been performed to identify internal resonances in circular plates [22] and spherical shells [23] previously. The main improvement brought in the present work is the use of a lock-in amplifier and the full automation of the experiments, which allows very precise measurements, in term of frequency resolution, identification of quasi-periodic oscillations and number of measured harmonics (up to four distinct harmonics are measured in a given experiment).

3.2. Nonlinear response of the note G3

Frequency relationship	Value [Hz]	Marker symbol
f_1	197.5	(--)
$\simeq 2f_1$	389.7	(- · -)
$\simeq 4f_1$	788.8	(···)
$\simeq 6f_1$	1155	(····)

Table 1: Values of the eigenfrequencies identified for note G3, and marker symbols used in all related figures (Figs. 9, 10, 11 and 12).

The first experiment consists in exciting the note G3 with a driven frequency f_{dr} close to the first three resonances (f_1 , $2f_1$ and $4f_1$) with a forward and a backward sweep. The amplitudes of several harmonics of the response signal are measured. We begin with the case for which the external frequency is in the vicinity of the first eigenfrequency: $f_{dr} \simeq f_1$. For all the figures of this section, readability is helped by inserting vertical markers so as to precisely locate the different eigenfrequencies of the system, as well as their harmonics. The marker symbols for each harmonics are defined in Table 1.

3.2.1. Low frequency excitation : $f_{dr} \simeq f_1$

The amplitude response of the displacement, decomposed on three harmonics oscillating around f_1 , $2f_1$ and $4f_1$ and denoted H_1 , H_2 and H_4 respectively, is shown in Fig. 9. The amplitude of the external forcing is measured as the current in the coil $I=2.01$ A, which thus corresponds to an amplitude of 0.2 N. For that level of excitation, the amplitude of the first harmonic is small, with a maximum value at 0.04 mm, less than one tenth the thickness. However, the response is already nonlinear as shown by the behaviour of the three measured harmonics. H_1 presents a maximum at the linear frequency 197.5 Hz, but the shape of the response function is very different from that of a linear system. The complex shape of H_2 reveals the existence of a 1:2:2 internal resonance which is already activated for this small amplitude of vibration. Two maxima are observed close to the two corresponding linear frequencies (denoted by the two dashed dotted lines (- · -)). Finally, one can observe that the fourth harmonic (H_4) presents a maximum at $4f_1 = 788.8$ Hz (···), which is the identified eigenfrequency of one of the two degenerate modes shown in Fig. 6. The shape of those curves shares obvious similarities with the ones of the response of models with 1:2, 1:2:2 or 1:2:4 internal resonances [25, 20], that systematically show several peaks not precisely located at, but very close to, the resonance frequencies of the system. On the other hand, the second

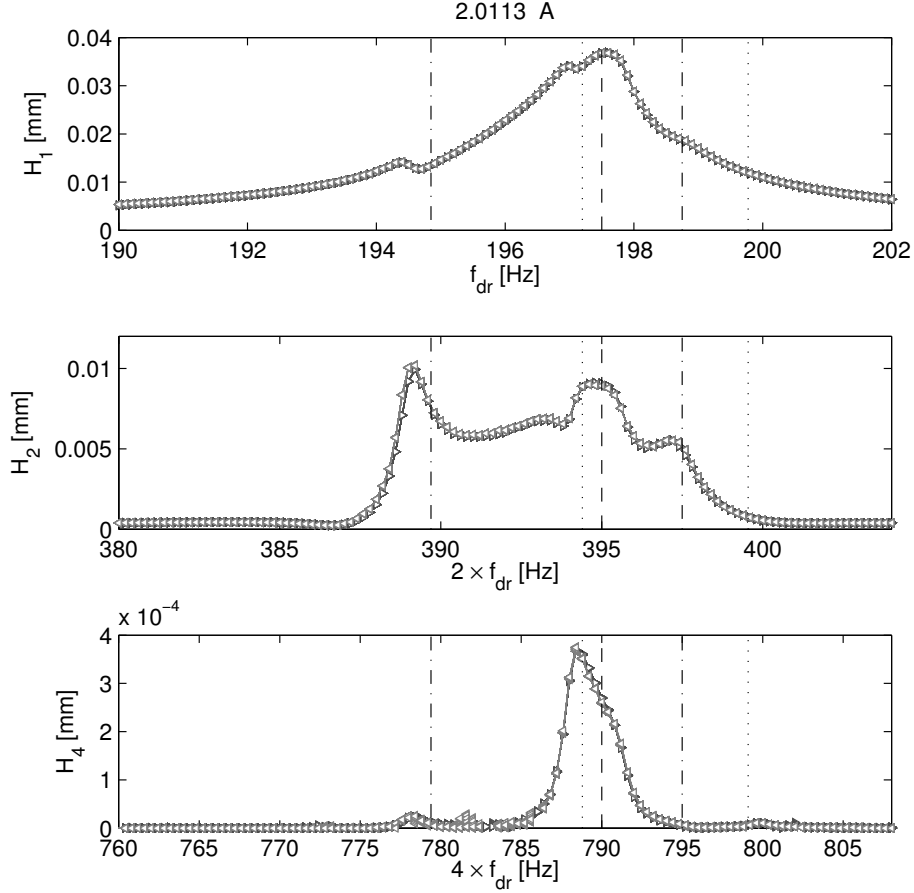


Figure 9: Frequency response curves for the note G3 excited around the first mode $f_{dr} \simeq f_1 = 197.5$ Hz. Amplitudes of harmonic displacements for a weak amplitude of excitation ($I \simeq 2A$): $H_1 \simeq f_{dr}$, $H_2 \simeq 2f_{dr}$ and $H_4 \simeq 4f_{dr}$. Linear eigenfrequency markers f_1 (---), $2f_1$ (-.-) and $4f_1$ (···). Forward sweep (\rightarrow), backward sweep (\leftarrow).

degenerate mode around $4f_1$, whose eigenfrequency is 799.1 Hz, is a bit too far from the main excited resonance so as to be activated by the nonlinear coupling. Forward and backward sweeps are completely superimposed so that for this level of excitation, no jump occurs in the system. This measurement clearly establishes that, for a very small level of vibration amplitude, 4 modes in 1:2:2:4 internal resonance interact and exchange energies in the system, resulting in a complex dynamics due to the intricate non linear behaviour.

A larger amplitude of excitation is now applied to the steelpan. Harmonic measurements are shown in Fig. 10, where the eighth harmonic is also shown. The dynamical response are now more complex and difficult to identify as compared to classical resonance curves of simple systems exhibiting *e.g.* 1:2:2 or 1:2:4 internal resonance [26, 27, 20]. However, a peculiarity of the system's response is the occurrence of jump phenomena and

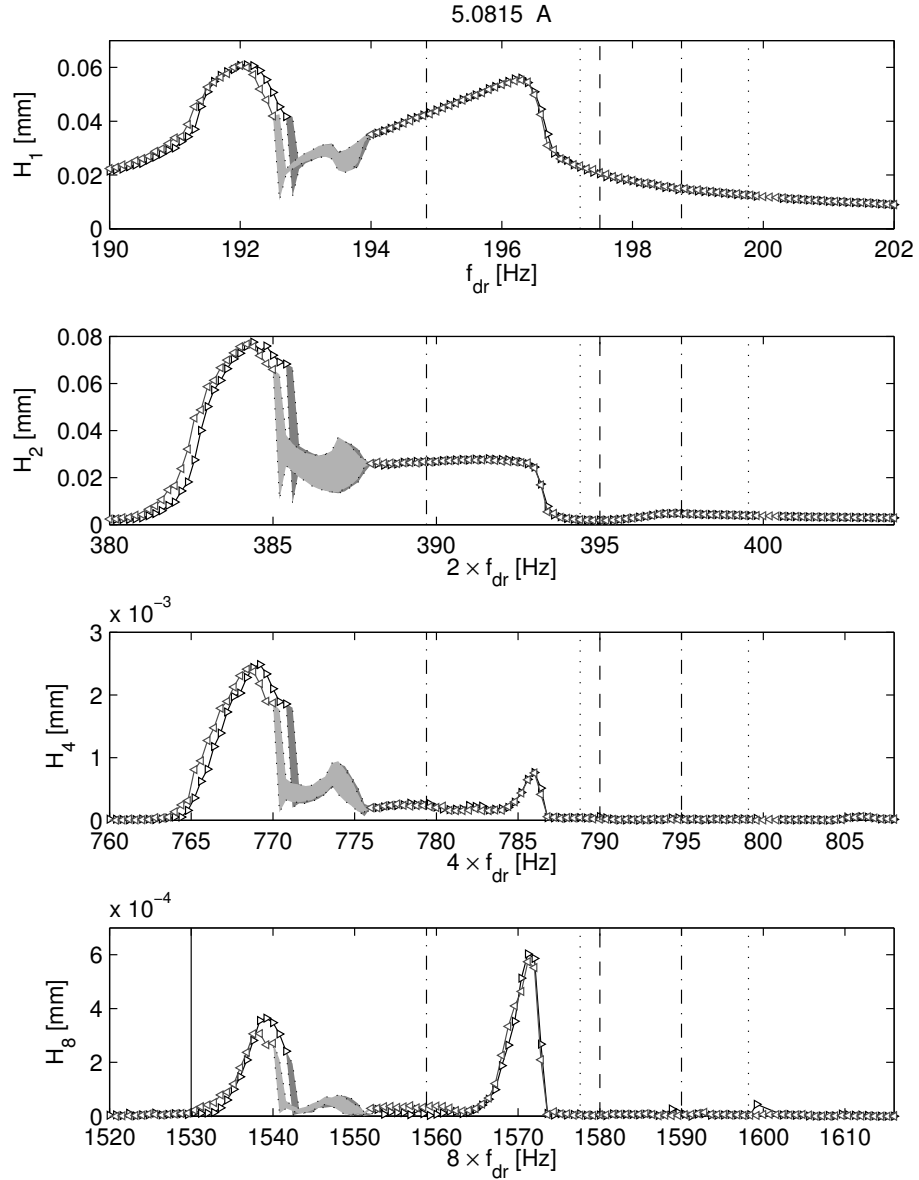


Figure 10: Frequency response for the note G3 excited around the first mode $f_{dr} \simeq f_1$. Amplitudes of harmonic displacements for a large amplitude of excitation ($I \simeq 5A$): H_1 , H_2 , H_4 and $H_8 \simeq 8f_{dr}$. Linear eigenfrequency markers f_1 (---), $2f_1$ (-.-), $4f_1$ (···) and $8f_1$ (-). Forward sweep (-▷-), backward sweep (-◁-).

quasiperiodic responses, which are observed in the frequency band [192.5, 194] Hz. The participation of the second harmonic is the most important as its maximum value has been multiplied by a factor 8 as compared to the previous case for $I=2A$. On the other

hand the maximum amplitude of H_1 has increased of 50% only, which means that most of the injected energy, from those amplitude values, are almost directly transferred to the upper modes and more particularly to the second one. Transfer to the fourth harmonic is also very large so that the coupling identified for the smaller amplitudes still persist. Finally harmonic H_8 shows a significant contribution which means that a 1:2:2:4:8 coupling is surely excited. This measurement evidences the fact that the steelpan's eigenfrequencies are tuned so as to facilitate an easy transfer of energy from the low-frequency modes to the higher modes. This peculiarity has an important consequence on the sound produced by those instruments as they are capable of transferring rapidly energy up to the eighth harmonic.

3.2.2. Mid-frequency excitation : $f_{dr} \simeq 2f_1$

In this section the frequency response curves for the G3 note of the steelpan are measured for an excitation frequency close to the first two degenerate modes, *i.e.* $f_{dr} \simeq 2f_1$. As a coupling with the fundamental frequency mode is expected, and for unifying the notations and experimental procedures, H_2 still refers to the harmonic component in the vicinity of $f_{dr} \simeq 2f_1$. Other harmonics are measured by the lock-in amplifier with a reference at half the driving frequency, in order to recover the subharmonic component at $f_{dr}/2$, oscillating around the fundamental frequency. Two amplitudes of excitation are presented, a moderate value for which the current is $I \simeq 2A$, and a strongly nonlinear one for which $I \simeq 5A$.

Fig. 11 shows the measurement obtained for $I \simeq 2A$, where 4 harmonics are shown. From the theoretical viewpoint, see *e.g.* [26, 27, 20], one expects to obtain a direct (resonant) coupling between the degenerate modes at $2f_1$ with those at $4f_1$, with comparison to a 1:2 internal resonance excited on its lower frequency. Incidentally, it is observed that the mode at 389.7 Hz has a larger amplitude response than its companion at 397.5 Hz. However, the direct coupling is effectively observed with a non-negligible response on the fourth harmonic. For the coupling with the fundamental (non-directly excited) mode, the theory states that an instability region exists and once the amplitude of H_2 crosses this amplitude limit, then energy is transferred to the modes being at half the excitation frequency after a pitchfork bifurcation [20]. Here, this phenomenon is effectively measured, with a significant energy transfer to the fundamental (harmonic H_1 in Fig. 11) at half the excitation frequency f_{dr} , occurring on a narrow frequency interval [194.2, 194.8] Hz. Once again, this coupling, which needs a minimum amount of vibration response to occur, is here activated for a small excitation level, which means that the steelpan is tuned so as to favour such couplings.

Interestingly, the coupling scenario can be analyzed separately in the frequency band $f_{dr} \in [380; 393]$ Hz (band 1), and $f_{dr} \in [393; 403]$ Hz (band 2), because the degenerate modes eigenfrequencies are sufficiently well apart so as to interact individually. On the first frequency range [380; 393] Hz, the 1:2 coupling with the fundamental mode is excited. Moreover, a non-negligible contribution of the sixth harmonic is observed, which let think that the mode at 1155 Hz is also excited. We can thus assume that a 1:2:6 coupling scenario is here present. On the second frequency range, [393; 403] Hz, a clear 2:4:4 interaction is present between mode at 397.5 Hz and the two modes at 788.8 and 799.1 Hz.

Fig. 12 shows the same case for a large excitation amplitude, $I \simeq 5A$. As compared to the previous forcing amplitude, the following comments are worth mentionable:

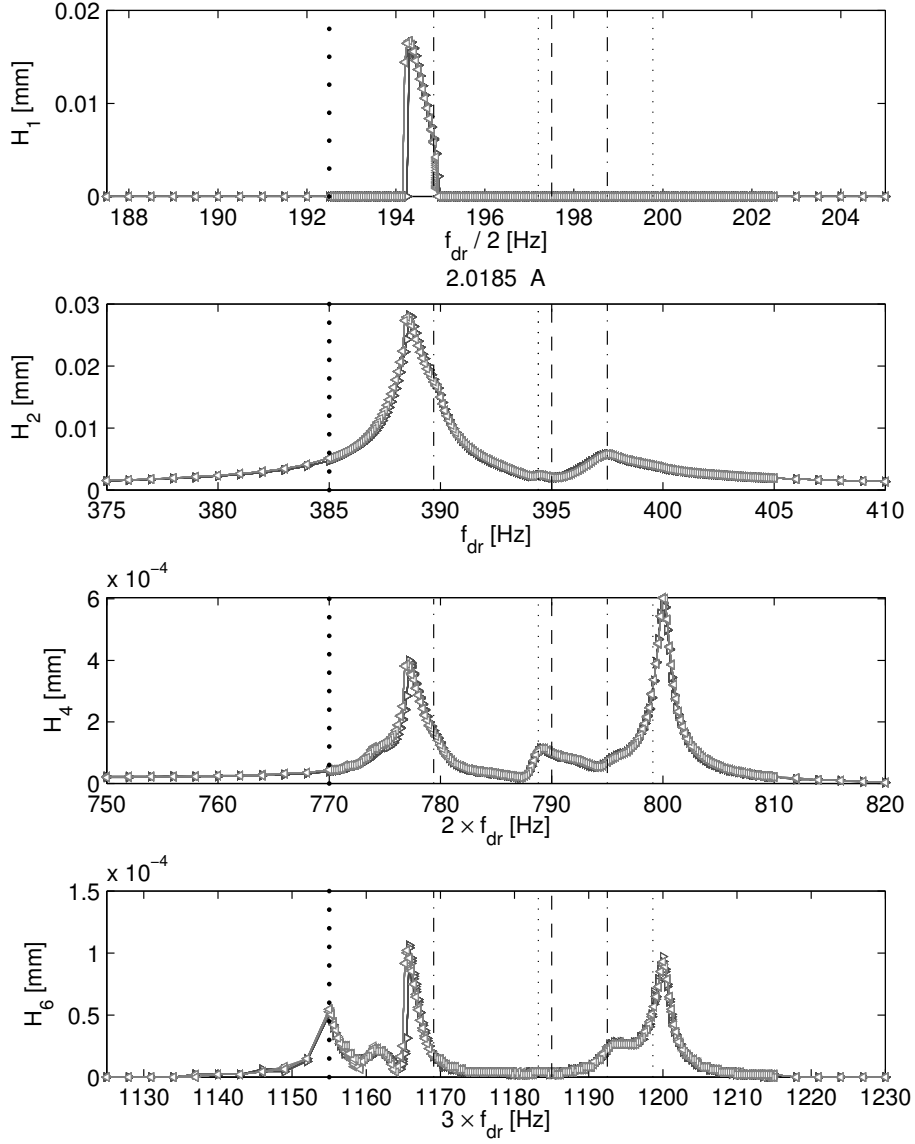


Figure 11: Frequency response for the note G3 excited with a mid-frequency excitation $F_{dr} \simeq 2f_1$. Harmonic amplitude displacements for a weak amplitude of excitation ($I \simeq 2A$): $H_1 \simeq f_{dr}/2$, $wH_2 \simeq f_{dr}$, $H_4 \simeq 2f_{dr}$ and $H_6 \simeq 3f_{dr}$. Linear eigenfrequency markers f_1 (—), $2f_1$ (- · -), $4f_1$ (·· ·) and $6f_1$ (····). Forward sweep ($- \triangleright -$), backward sweep ($- \triangleleft -$).

- (i) the global scheme identified before with the 1:2:6 resonance followed by the 2:4:4 is still present, and its characteristics are enhanced on a larger frequency range.
- (ii) a large hysteresis is now observed between forward and backward sweep around $f_{dr} \simeq 390\text{Hz}$, with jump phenomena.

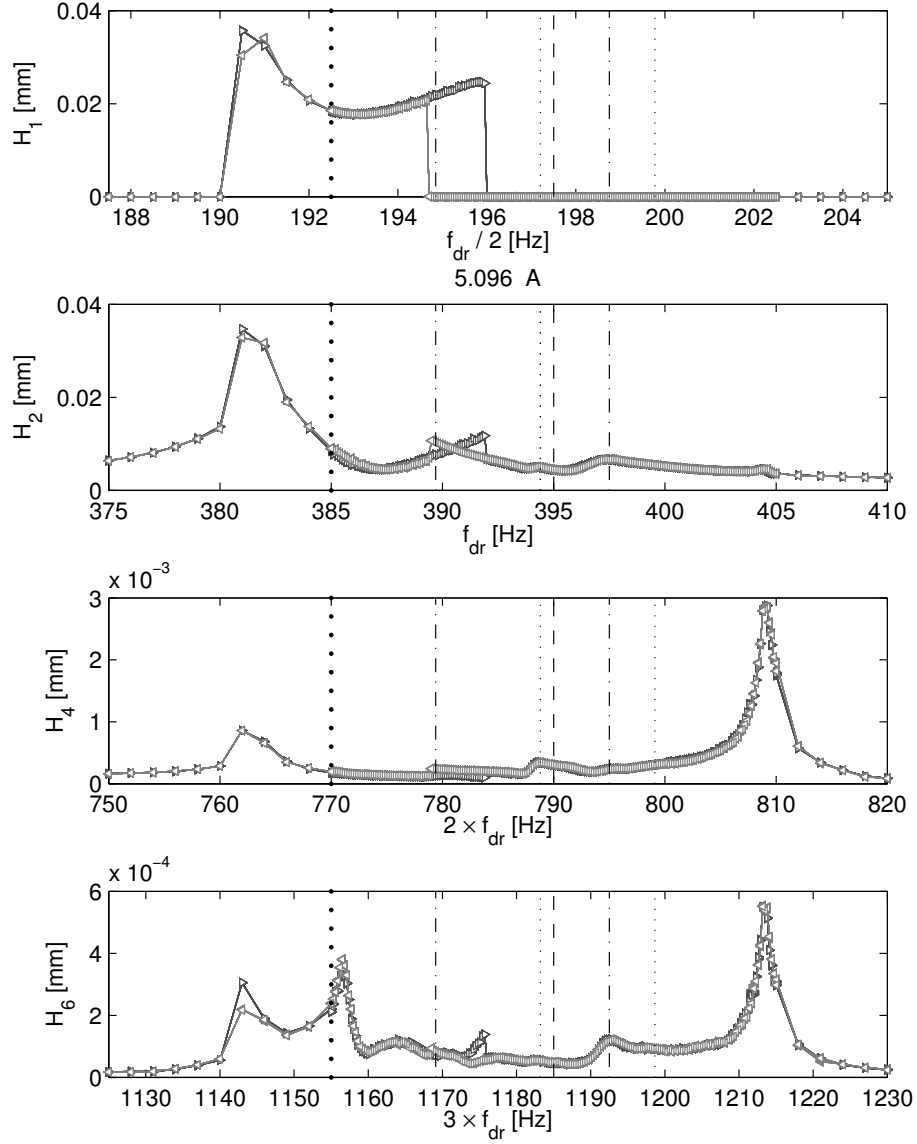


Figure 12: Frequency response for the note G3 excited with a mid-frequency excitation $f_{dr} \simeq 2f_1$. Harmonic amplitude displacements for a high amplitude of excitation ($I \simeq 5A$): $H_1 \simeq f_{dr}/2$, $H_2 \simeq f_{dr}$, $H_4 \simeq 2f_{dr}$ and $H_6 \simeq 3f_{dr}$. Linear eigenfrequency markers f_1 (---), $2f_1$ (- · -), $4f_1$ (···) and $6f_1$ (····). Forward sweep (-▷-), backward sweep (-◁-).

- (iii) a large coupling develops now between the fundamental mode the one at 389.7 Hz. The second mode at $2f_1$, with eigenfrequency 397.5 Hz, still vibrates with a too small amplitude for exciting the fundamental one.

Once again, these measurements clearly establish the fact that, even for very small am-

plitudes of vibrations, numerous and complicated couplings between modes are present in the dynamical response of the steelpan. This undoubtedly emphasizes that energy exchanges are numerous in normal playing conditions, leading to complicated responses in the first milliseconds with efficient build-up of energy to the higher frequencies.

3.3. Nonlinear response of the note F3

Frequency relationship	Value [Hz]	Marker symbol
f_1	172.5	(--)
$\simeq 2f_1$	341.2	(- · -)
	357.5	
$\simeq 4f_1$	686.2	(···)
	705	

Table 2: Eigenfrequencies identified for the note F3, and marker symbols used in all related figures (Figs. 13, 14, 15, 16, 17 and 18).

The second experiment is realized by exciting the note F3 on the same right barrel of the double second steelpan. In this part, three cases of excitation are proposed: the driven frequency is applied in the low frequency case ($f_{dr} \simeq f_1$), in the mid frequency case $f_{dr} \simeq 2f_1$ and in the high frequency case $f_{dr} \simeq 4f_1$. As in the previous sections, markers will be inserted into the figures for better readability and understanding of mode coupling. The markers are the same, with now the frequencies of the note F3, see Table 2.

3.3.1. Low frequency excitation : $f_{dr} \simeq f_1$

Fig. 13 shows the frequency response curves for three harmonics (H_1 , H_2 and H_4) when the F3 note is excited in the vicinity of its fundamental frequency, *i.e.* $f_{dr} \simeq 172$ Hz. The intensity in the current in this case is $I=0.42$ A, resulting in a vibration amplitude of the order of 0.04 mm for H_1 . Note that this range of amplitude is of the order of the measurement for the note G3 (previous section), whereas the amplitude of the forcing is five times smaller. This is due to the fact that the coil/magnet system was located near the center of F3, whereas for G3 it was placed more on the periphery of the note (see the location of excitation points on Fig. 2). As expected from the linear resonance relationships and the theoretical results on 1:2:4 resonance [20], energy should be transferred easily up to the fourth harmonics. This feature is clearly observed, with a large response both on H_2 and H_4 , resulting in a complex shape for the first harmonic, far from a linear response, even though the vibration amplitude is less than one tenth the thickness.

Note that the detuning between the two degenerate modes at $2f_1$ is large, such that the second mode at 357.5 is out of the coupling range. Hence a 1:2:2 resonance is not possible in this case and the system behaves (in terms of nonlinear couplings) as if only one mode is present at $2f_1$. The same remark holds for the two modes at $4f_1$, the upper at 705 Hz being obviously not excited. Hence a 1:2:4 internal resonance is here at hand.

Fig. 14 shows the measurements realized for a larger amplitude of excitation for which $I \simeq 2$ A. The behaviour is here strongly nonlinear with bent frequency response curves and vibration amplitudes of the order of two times the thickness, indicating that the

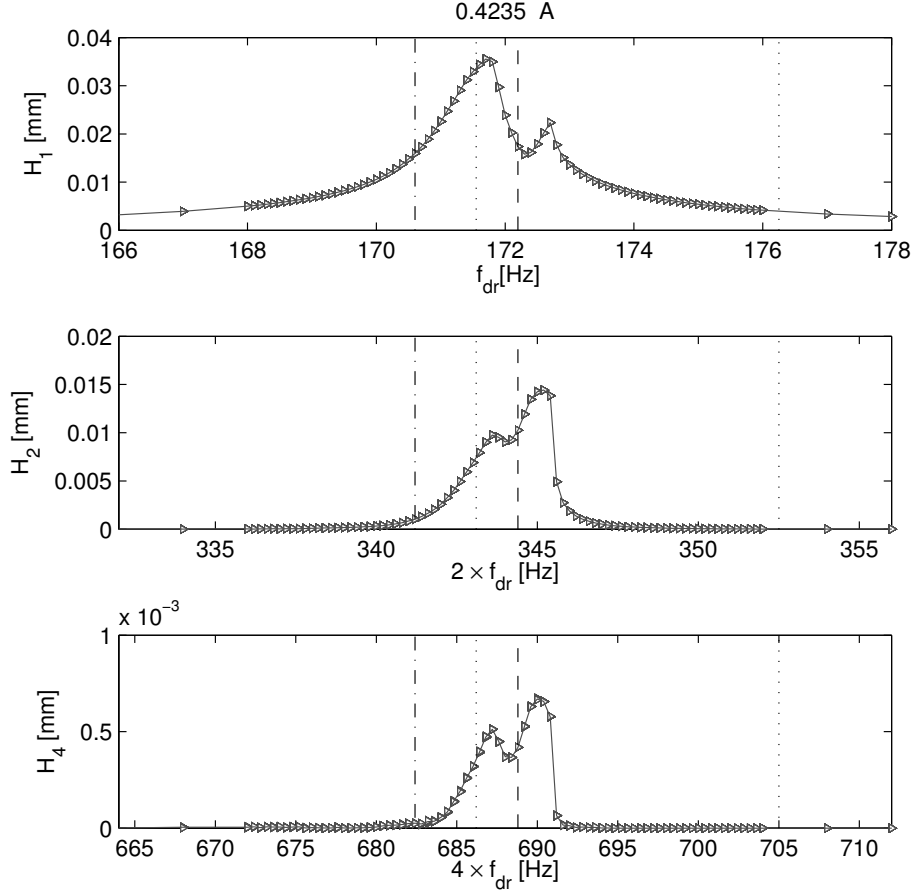


Figure 13: Frequency response curve for the note F3 excited around the first mode $f_{dr} \simeq f_1$. Harmonic amplitude displacements for a small amplitude of excitation ($I \simeq 0.42A$): $H_1 \simeq f_{dr}$, $H_2 \simeq 2f_{dr}$ and $H_4 \simeq 4f_{dr}$. Linear eigenfrequency markers f_1 (---), $2f_1$ (-·-) and $4f_1$ (···). Forward sweep (-▷-).

cubic nonlinearities are also activated. A large jump phenomenon is observed between forward and backward excitation with a quasiperiodic regime around $f_{dr} \simeq 173.8$ Hz on the forward sweep. For the backward sweep, the quasiperiodic regime is observed at $f_{dr} \simeq 172.6$ Hz. Following H_1 from the low frequencies, one observe first an increase of the response until a jump around 173.5 Hz. However, the branch appearing after the jump is still strongly coupled to the higher modes and thus still in 1:2:4 internal resonance, with a saturation phenomenon for H_2 . This measurement shows that for vibration amplitudes of the order of the thickness, the steelpan displays complicated branch of solutions with strong activation of cubic nonlinearities.

3.3.2. Mid frequency excitation : $f_{dr} \simeq 2f_1$

The F3 note is now excited in the vicinity of $2f_1$, *i.e.* $f_{dr} \simeq 345$ Hz. A single amplitude of excitation, $I \simeq 0.6$ A, is presented in Fig. 15 with forward and backward

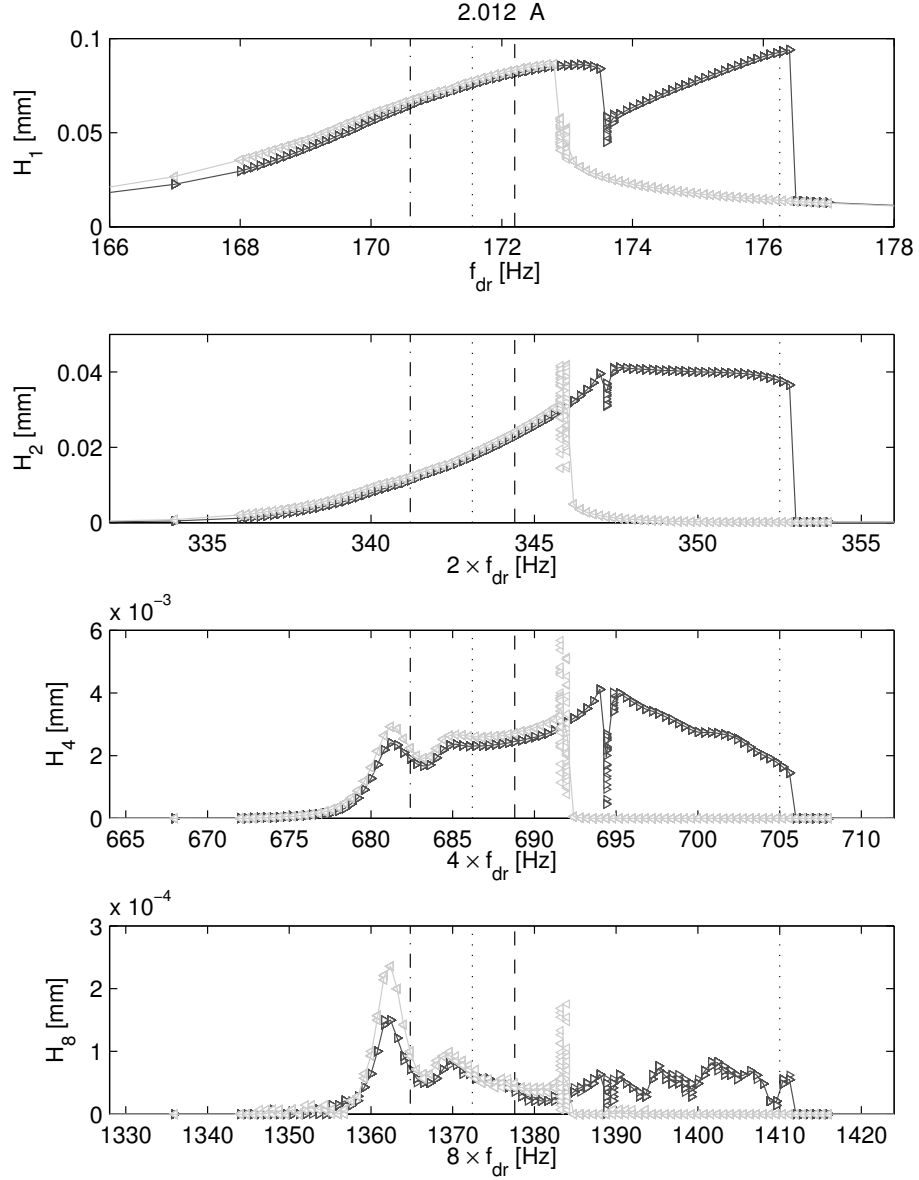


Figure 14: Frequency response curve for the note F3 excited around the first mode $f_{dr} \simeq f_1$. Harmonic amplitude displacements for a high amplitude of excitation ($I \simeq 2A$): $H_1 \simeq f_{dr}$, $H_2 \simeq 2f_{dr}$, $H_4 \simeq 4f_{dr}$ and $H_8 \simeq 8f_{dr}$. Forward sweep (\rightarrow), backward sweep (\leftarrow). Quasiperiodic oscillations are obtained for $f_{dr} \simeq 173$ Hz

sweep. The energy is simultaneously transferred from H_2 to H_1 and from H_2 to H_4 , which means that a fully coupled case of a 1:2:4 scenario is once again involved. As in the low frequency excitation case, only one of each degenerate mode is activated, so

that in that case, the complexity brought by the appearance of companion modes is not observed. A small jump is noticeable at $f_{dr} \simeq 345$ Hz which mark a small difference between forward and backward sweeps.

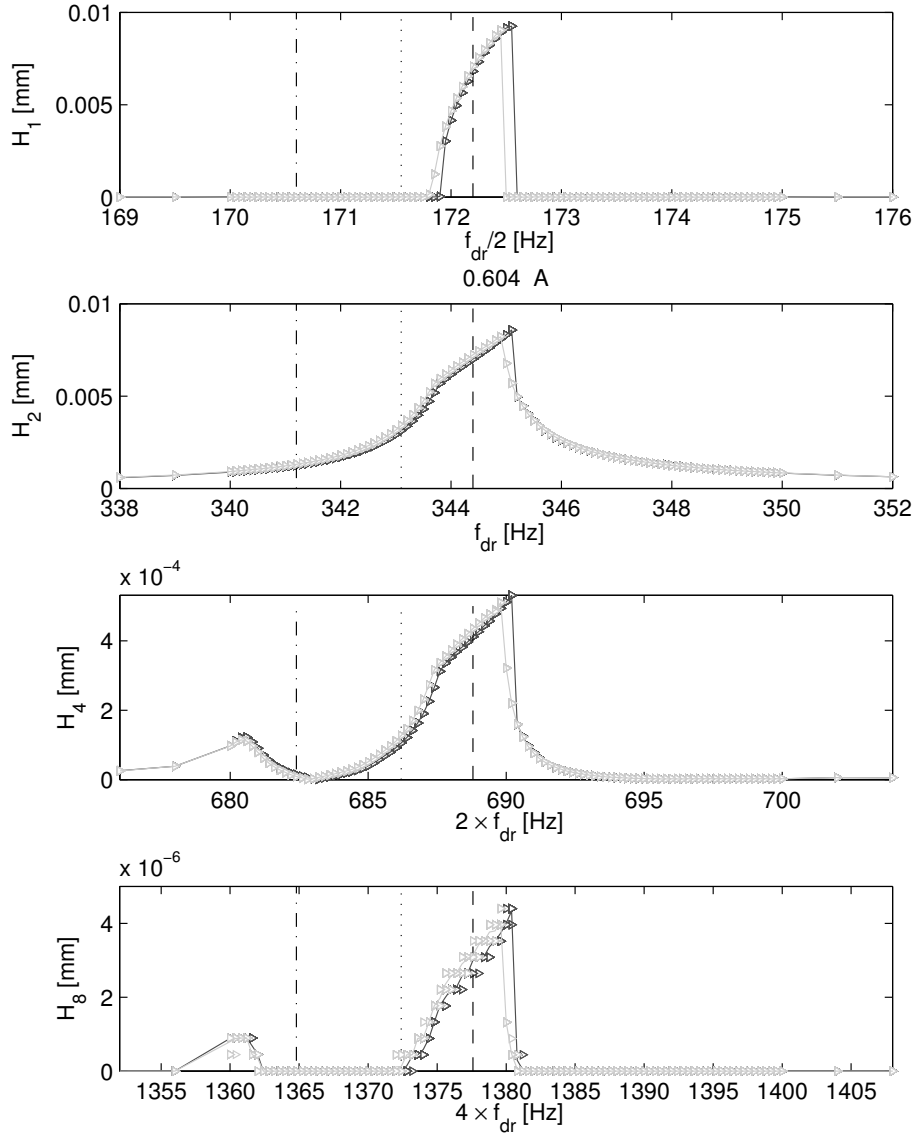


Figure 15: Frequency response curve for the note F3 excited with a mid-frequency excitation $f_{dr} \simeq 2f_1$. Harmonic amplitude displacements for $I \simeq 0.6A$: $H_1 \simeq f_{dr}/2$, $H_2 \simeq f_{dr}$, $H_4 \simeq 2f_{dr}$ and $H_8 \simeq 4f_{dr}$. Forward sweep (\rightarrow), backward sweep (\leftarrow).

3.3.3. High frequency excitation : $f_{dr} \simeq 4f_1$

Finally, for the last experiment presented in this section, the driven frequency is around four times the fundamental, *i.e.* $f_{dr} \simeq 680$ Hz. This case is particularly challenging since the goal is here to observe the cascade of coupling in a 1:2:4 resonance excited at its higher frequency, where energy can be transferred from $4f$ to $2f$ and then to f [20]. With that goal in mind, three amplitudes of excitations are shown to observe how the energy can be transferred to the lowest-frequency modes.

As already noted, the measurement time for each frequency response curve (of the order of 3 hours), which is very large, renders all the measurements difficult. Due to material problems, this last set of measurements have been realized one month after all the other ones, and the set-up has needed to be completely remounted. As a consequence of small displacements of sensors (in particular excitation magnet), a slight shift of some eigenfrequencies is expected. In order to measure correctly the eigenfrequency of one of the two degenerate modes at $4f_1$, a linear measurement is first performed and reported in Fig. 16, with a very small amplitude of excitation ($I \simeq 0.03$ A, resulting in vibration amplitude of 3.10^{-4} mm). In that case the response is linear and the eigenfrequency is measured at 681 Hz, instead of 686.2 Hz in the first series of measurements.

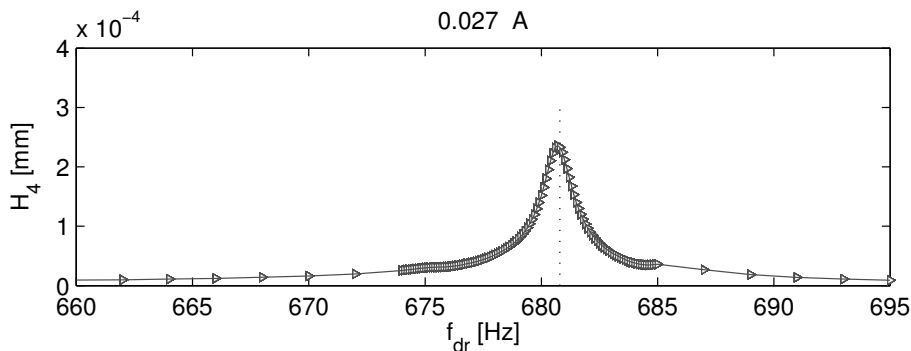


Figure 16: Frequency response curve for the note F3 excited with a high-frequency excitation case $f_{dr} \simeq 4f_1$. Harmonic amplitude displacements for $I \simeq 0.03$ A: $H_4 \simeq f_{dr}$.

Fig. 17 shows a moderate amplitude of excitation, $I=1$ A, for which the directly excited harmonic H_4 is reported together with H_2 and H_8 . The shape of H_4 in the vicinity of the eigenfrequency is not linear anymore, and the shape of H_8 shows that a 1:2 resonance is already activated. More interestingly, the transfer of energy to the lower frequency mode at $2f_1$ is observed on a small frequency range, where H_2 departs from zero around 343 Hz. We can then argue that a 2:4:8 internal resonance is observed.

Finally, Fig. 18 shows the last measurement realized, for a large value of the forcing, $I= 2$ A. In that case the transfer of energy down to the lowest frequency mode is observed, so that here a complete 1:2:4:8 resonance is measured. The behaviour is strongly nonlinear with two large frequency range on which quasiperiodic regimes are found. This observation is coherent with the theoretical results on the 1:2:4 resonance shown in [20], where it was emphasized that the presence of a third oscillator (as compared to a more classical 1:2 resonance) leads more easily to quasiperiodic regime. Here the complete

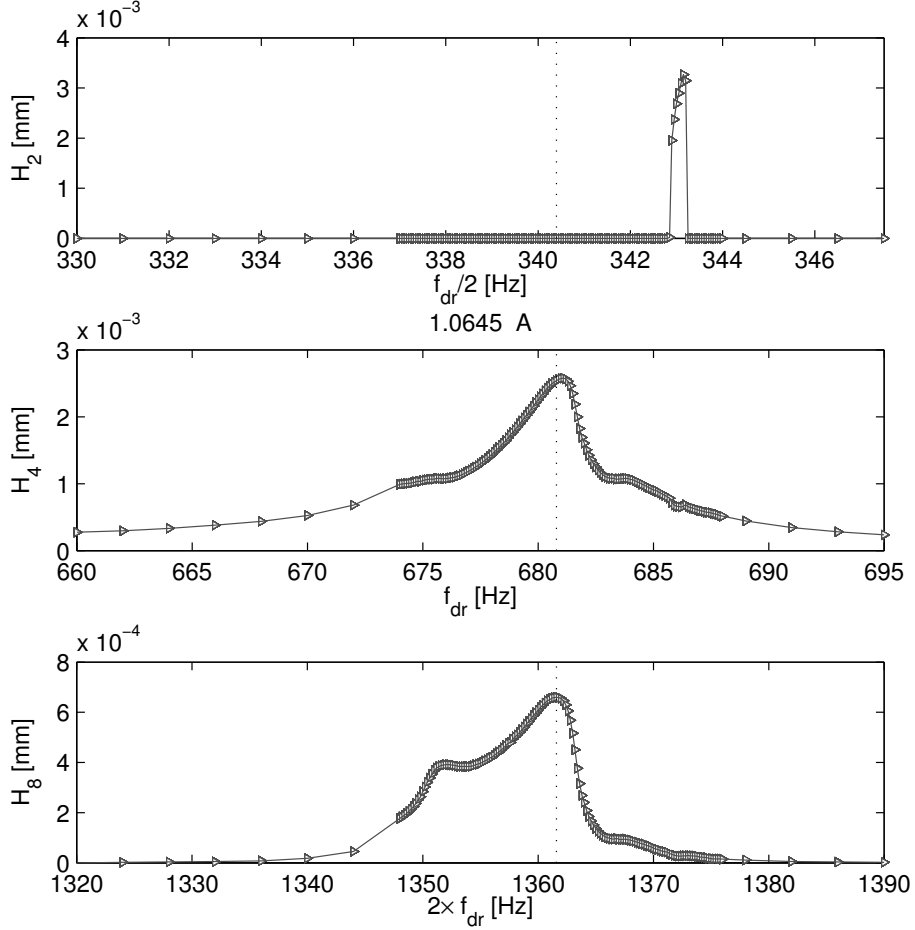


Figure 17: Frequency-response curves for the note F3 excited with a high frequency $f_{dr} \simeq 4f_1$. Harmonic amplitude displacements for $I \simeq 1A$: $H_2 \simeq f_{dr}/2$, $H_4 \simeq f_{dr}$ and $H_8 \simeq 2f_{dr}$.

coupling involves immediately the appearance of quasiperiodicity.

3.4. Conclusion on the measurements

The measurements made on the two notes of the double-second steelpan reveal a complex and rich dynamics featuring numerous internal resonances and energy exchanges between internally resonant modes. Thanks to a harmonic, perfectly controlled excitation, we have been able to shed light on the most salient couplings appearing in permanent regime. In particular, the measurements clearly underline that 1:2 and 1:2:4 internal resonance are excited for very small level of vibration amplitudes, and are at the ground basis of the dynamical solutions. This basic scheme is complexified by the fact that modes appear by pairs from the second one, so that the usual scheme is more that of a 1:2:2:4:4:6:8 dynamics. The presence of many modes favours unstable periodic states that have also been measured with the occurrence of quasiperiodic regimes. Moreover,

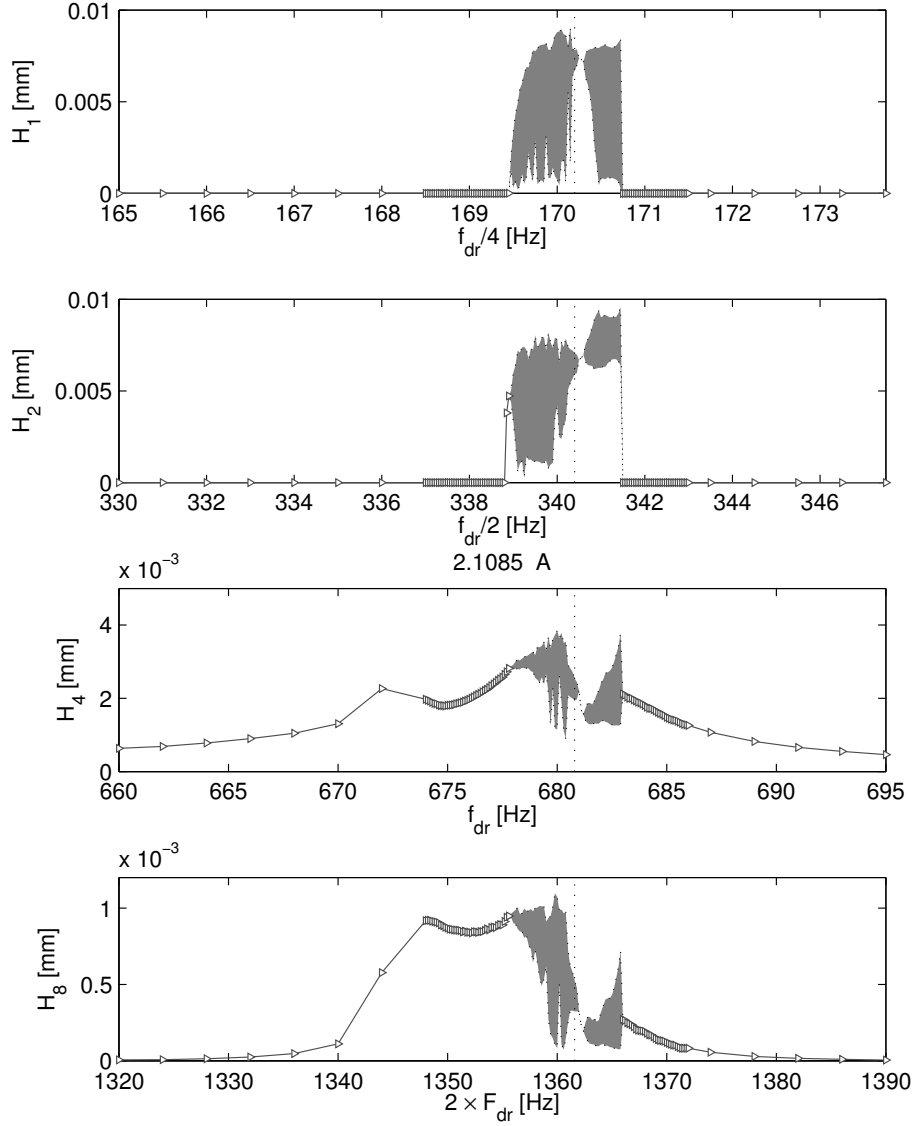


Figure 18: Frequency-response curves for the note F3 excited with a high frequency $f_{dr} \simeq 4f_1$. Harmonic amplitude displacements for $I \simeq 2A$: $H_1 \simeq f_{dr}/4$, $H_2 \simeq f_{dr}/2$, $H_4 \simeq f_{dr}$ and $H_8 \simeq 2f_{dr}$. The gray regions depict quasiperiodic oscillations.

we have also observed that the couplings with modes at six or eight times the excitation frequency, are often excited, again complexifying the dynamical solutions. With that respect, the frequency response curves becomes very complicated as more and more modes are involved in the vibrations. Coming back to the normal playing where energy is inputted to the structure by an impact, one easily understands that these couplings, being excited for very small vibration amplitudes, are present and are the key to understand

the peculiar sound of the steelpan with the rapid build-up of energy to higher modes.

The objective of the remainder of the paper is twofold. First to identify the values of some of the quadratic nonlinear coupling terms. For that, two simple models displaying respectively 1:2:2 and 1:2:4 internal resonances are considered, since they provide analytical solutions [20], for a reasonable complexity. Higher-order models with more modes involved would be too difficult to fit on the measurements because of the number of coefficients to fit. Once these values identified, we will show that a 1:2:4 model with all the fitted parameters allows to recover the main features of the dynamical solutions of an impacted note, hence definitely showing that these internal resonances are key for a meaningful understanding of steelpan's vibrations.

4. Theoretical models - nonlinear parameter identification

4.1. Model equations

4.1.1. The 1:2:2 internal resonance model

The 1:2:2 internal resonance model displays three modes which eigenfrequencies are tuned such that $\omega_3 \simeq \omega_2 \simeq 2\omega_1$. The nonlinear dynamics, considering quadratic nonlinear terms due to geometric nonlinearity only, reads [20]:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= [-2\xi_1 \omega_1 \dot{q}_1 - \alpha_1 q_1 q_2 - \alpha_2 q_1 q_3 + F_1 \cos(\Omega t)], \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= [-2\xi_2 \omega_2 \dot{q}_2 - \alpha_3 q_1^2], \\ \ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 &= [-2\xi_3 \omega_3 \dot{q}_3 - \alpha_4 q_1^2],\end{aligned}\tag{1}$$

where $\omega_k = 2\pi f_k$ is the angular frequency of mode k and ξ_k is the associated modal damping ratio. Only the case of a forcing in the vicinity of the first eigenfrequency is considered here, so that the excitation is on the first oscillator only, with an amplitude F_1 and a driving frequency $f_{dr} = \Omega/2\pi$, where $\Omega \simeq \omega_1$. The theoretical response, described in details in [20], can be interpreted as two nested well-known 1:2 internal resonances [25, 28, 27].

When the system is driven by $\Omega \simeq \omega_1$, the first-order solutions of Eqs. (1) are obtained by the multiple scales method as [20]:

$$\begin{aligned}q_1(t) &= a_1 \cos(\Omega t + \varphi_1), \\ q_2(t) &= a_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2), \\ q_3(t) &= a_3 \cos(2\Omega t + \varphi_3),\end{aligned}\tag{2}$$

where a_k and φ_k are amplitudes and phases of the solutions q_k , respectively. One can note that driving the system on its low-frequency mode creates two upper harmonic solutions, oscillating at twice the driven frequency.

In order to properly compare the measurements realized at a given point of the structure with the theoretical model, one has first to reconstruct the transverse displacement $w(t)$ at a given point of the steel-pan upper surface as:

$$w(t) = w_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + w_2 \cos(2\Omega t + \psi_2).\tag{3}$$

Whereas w_1 is easily related to a_1 with the formula $w_1 = a_1\Phi_1$ (where Φ_1 refers to the modal amplitude of mode 1 at the measurement point); w_2 and w_3 involve combinations of the amplitude solutions a_2, a_3 , phases φ_2, φ_3 as well as modal amplitudes Φ_2, Φ_3 at the measurement point. The detailed calculation is given in [Appendix A](#). Finally, Eq. (3) allows to compute, from the model, the two harmonics amplitudes H_1 and H_2 of the displacement at the measurement point, so as to compare them with the measurements.

4.1.2. The 1:2:4 internal resonance model

The second model proposed here is a 1:2:4 internal resonance model. Three modes oscillating at $\omega_3 \simeq 2\omega_2 \simeq 4\omega_1$ are now considered. The system equations reads [\[20\]](#):

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= [-2\xi_1\omega_1\dot{q}_1 - \alpha_5 q_1 q_2 + F_1 \cos \Omega t], \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= [-2\xi_2\omega_2\dot{q}_2 - \alpha_6 q_1^2 - \alpha_7 q_2 q_3], \\ \ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 &= [-2\xi_3\omega_3\dot{q}_3 - \alpha_8 q_2^2].\end{aligned}\tag{4}$$

Compared to the 1:2:2 case, four different resonant coupling coefficients α_i are introduced. Once again, the forcing is considered on the first oscillator as we restrict ourselves to an excitation frequency in the vicinity of the first eigenfrequency.

With this model three amplitude solutions are obtained as:

$$\begin{aligned}q_1(t) &= a_1 \cos(\Omega t + \varphi_1), \\ q_2(t) &= a_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2), \\ q_3(t) &= a_3 \cos(4\Omega t + \varphi_3).\end{aligned}\tag{5}$$

The reconstruction of the transverse displacement w is simpler than in the 1:2:2 case, because only one amplitude solution per oscillating frequency is present. Hence, when $\Omega \simeq \omega_1$, the transverse displacement at the measurement point writes:

$$w(t) = w_1 \cos(\Omega + \varphi_1) + w_2 \cos(2\Omega + \varphi_2) + w_3 \cos(4\Omega + \varphi_3),\tag{6}$$

where $w_1 = a_1\Phi_1$, $w_2 = a_2\Phi_2$ and $w_3 = a_3\Phi_3$, and Φ_p corresponding to the amplitude of the eigenmode at the measurement point.

4.2. Model fitting

The fitting procedure consists in adjusting all the model parameters so that the theoretical resonance curves fit the experimental ones. The values of the natural frequencies ω_p and the modal damping ratio ξ_p are identified from a fit (not shown here) of the linear response of the model on resonance curves with a very low driving amplitude. The mode shapes Φ_p are obtained from the operational deflection shapes of [Fig. 6](#) and [7](#), measured with a laser vibrometer. They are normalized so that $\Phi_p = 1 \forall p$ at the excitation point. Then, the values of the nonlinear coupling coefficients α_i , the main unknowns, are identified on the nonlinear resonant response of the steelpan.

As compared to other similar works of the literature (e.g. [\[22\]](#) for 1:1 internal resonance in circular plates and [\[23\]](#) for 1:1:2 internal resonance in spherical shells), the present case is rendered difficult because for all the measured nonlinear response curves, always more than three modes are resonantly coupled, so that both three degree of freedom models are not as realistic as they should be. For those reasons, only a few fits are

reported here: one from the G3 note and one from the F3 note, both excited at a small level and in the vicinity of the fundamental frequency.

Models (1) and (4) are dimensionless, so as the fitted values of the α_i and of the forcing amplitude F_1 . These dimensionless variables (denoted here with overbars) are defined with the following amplitude and time scalings:

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{2\pi f_0}, \quad \bar{t} = 2\pi f_0 t \quad (7)$$

with $w_0 = 1$ mm, $f_0 = 197$ Hz for the G3 note and $f_0 = 171.7$ Hz for the F3 note.

4.2.1. Second G3 : low-frequency excitation / 1:2:2-1:2:4 internal resonance models

The first case corresponds to the measurement shown in Fig. 9, for which a clear 1:2:2:4 internal resonance scenario has been identified in section 3.2.1. As a complete model involving 1:2:2:4 have no simple analytical solutions and would display too many free parameters for the fitting, we show the results obtained by both the 1:2:2 and the 1:2:4 models, in order to show their ability to retrieve the most important parts of the frequency response curves for harmonics H_1 , H_2 and H_4 .

The linear parameters of the models (Eqs. (1) and (4)), namely the eigenfrequencies f_k , the modal damping ratios ξ_k and the modal amplitudes at measurement points Φ_k , are retrieved from the linear modal analysis. Variations of these parameters have been allowed in order to obtain the best possible fit. This is justified by the fact that linear parameters are very sensitive to experimental variations (*e.g.* temperature, position of magnet), that can vary from one experiment to the other. We recall that the measurement of a given nonlinear response curve lasts about three hours (see §3.1). The nonlinear coupling parameters α_k of the two models are left completely free and selected so as to obtain the best fit.

	osc. 1	osc. 2	osc. 3
f_k [Hz]	197.002	389.2	397.2
ξ_k	0.0051	0.0005	0.0023
Φ_k	0.56	0.47	0.53

Table 3: Linear parameters used for the fitting of the 1:2:2 model of Eqs. (1), shown in Fig.19

	osc. 1	osc. 2	osc. 3
f_k [Hz]	197.1	389.2	788.6
ξ_k	0.0045	0.001	0.001
Φ_k	0.30	0.34	0.06

Table 4: Linear parameters used for the fitting of the 1:2:4 model of Eqs. (4), shown in Fig.19.

The results of the two fits are shown in Fig. 19. The linear parameters are given in Tables 3 and 4. One can observe that variations have been allowed in order to obtain the best fit. For the 1:2:2 model, the following values of the nonlinear coupling terms have been found to give the best frequency response curves: $\alpha_1 = 0.42$, $\alpha_2 = 0.46$, $\alpha_3 = 0.46$,

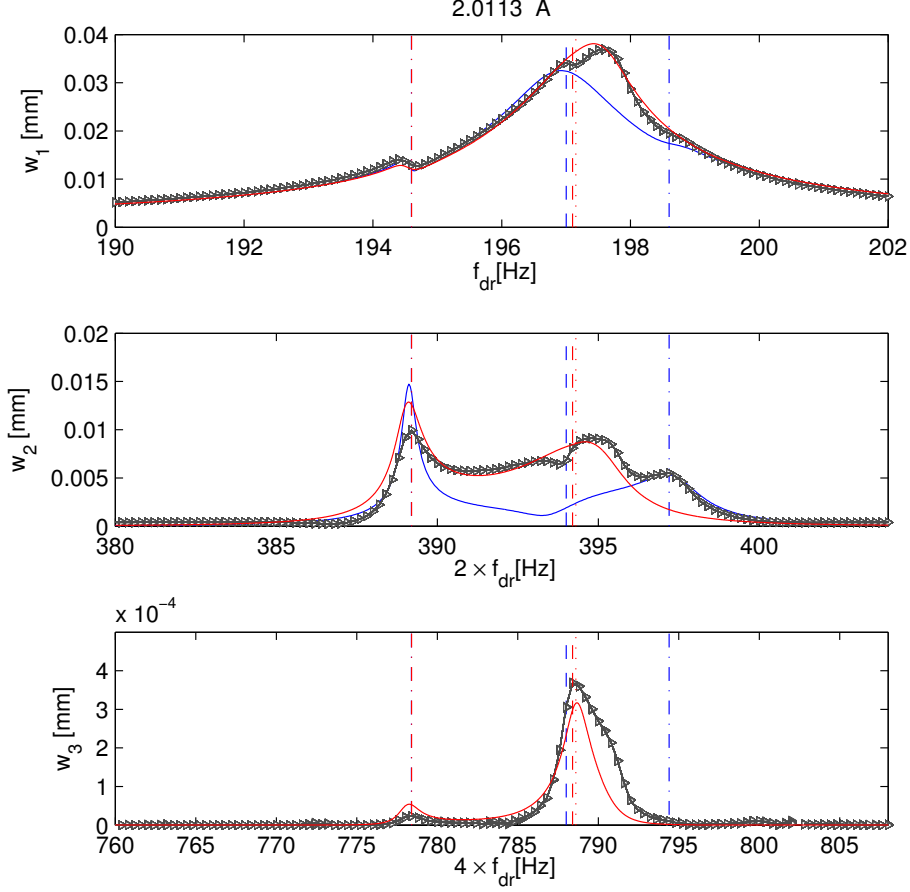


Figure 19: Model fitting to experiments for the G3 note excited at moderate amplitude ($I=2A$). Frequency response curves for harmonics H_1 (w_1), H_2 (w_2) and H_4 (w_3). Measurements (black line and triangles \triangleright) versus 1:2:2 model (blue solid line) with $\alpha_1 = 0.42$, $\alpha_2 = 0.46$, $\alpha_3 = 0.46$, $\alpha_4 = 0.39$, and 1:2:4 model (red solid line) with $\alpha_5 = 0.24$, $\alpha_6 = 0.34$, $\alpha_7 = 0.88$, $\alpha_8 = 0.53$.

$\alpha_4 = 0.39$, with $F_1 = 6.3 \cdot 10^{-4}$. One can observe that the 1:2:2 model allows to recover with a good accuracy the two peaks in the second harmonic (component w_2), and gives a correct approximation of the frequency response of the first harmonic (component w_1) before the fundamental frequency. However, as expected from the model, the oscillator at $4f_1$ is missing which result in a poor approximation of the peaks appearing in the three measured harmonics around 197 Hz. The missing information is retrieved when considering the 1:2:4 model, which allows to recover the main peak of the first harmonic, the peak on w_2 around 394 Hz and the resonance of the third mode at 788 Hz on component w_3 . The nonlinear coefficients for the 1:2:4 model have been found to be equal to: $\alpha_5 = 0.24$, $\alpha_6 = 0.34$, $\alpha_7 = 0.88$, $\alpha_8 = 0.53$, with $F_1 = 12 \cdot 10^{-4}$. One can

observe that all the nonlinear coefficients have the same order of magnitude, indicating the strength of the quadratic nonlinearity.

These fits definitely ensure that a 1:2:2:4 resonance scenario is here activated, and allows us to obtain values of the nonlinear coupling coefficients that can be used to feed a time model including the correct geometric nonlinearities, proposed in section 5.

4.2.2. Second F3 : low-frequency excitation / 1:2:4 internal resonance model

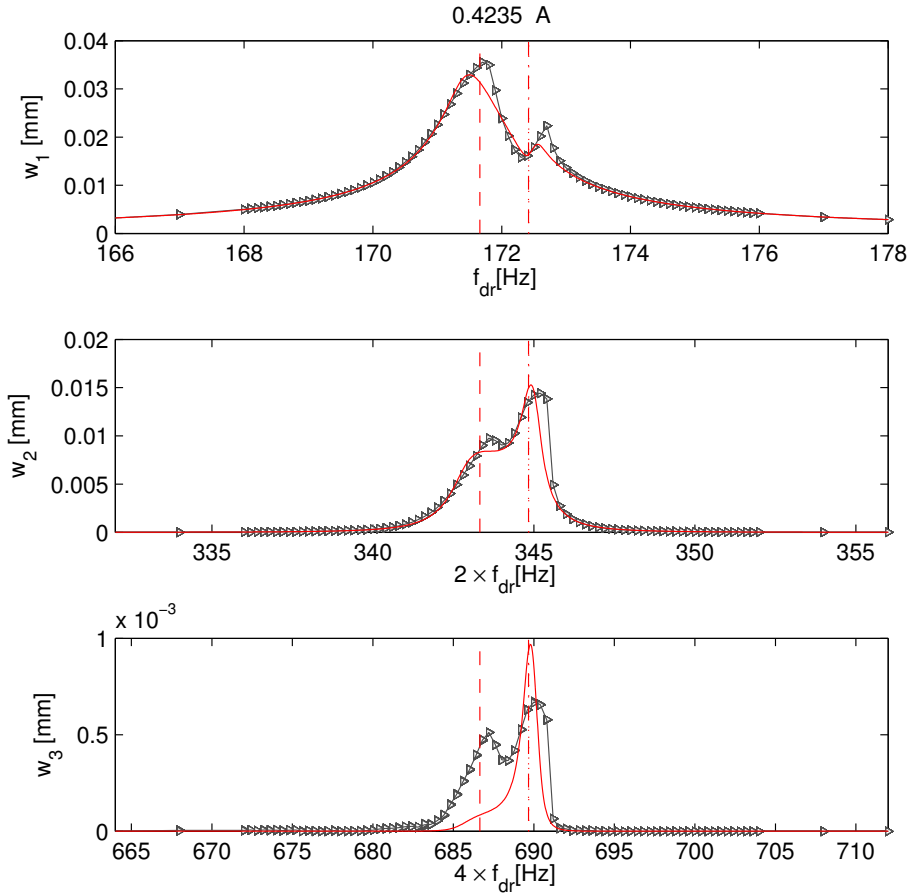


Figure 20: Model fitting to experiments for the F3 note excited at moderate amplitude ($I=0.42$ A). Frequency response curves for harmonics H_1 (w_1), H_2 (w_2) and H_4 (w_3). Measurements (black line and triangles \triangleright) versus 1:2:4 model (red solid line) with $\alpha_5 = 0.48$, $\alpha_6 = 0.57$, $\alpha_7 = 0.68$, $\alpha_8 = 0.43$.

The second selected example is the low-frequency excitation of the note F3 shown in Fig. 13. In that case, a 1:2:4 scenario has been identified in section 3.3, and the occurrence of a more complex dynamical solution involving the companion mode of either the mode at $2f_1$ or the one at $4f_1$ has been discarded since the detuning was too large between the

eigenfrequencies. The fitting procedure is the same as in the previous section: the linear parameters are derived from the modal analysis and variations are allowed. The values used for the fit are given in table 5. The nonlinear coefficients have been identified as: $\alpha_5 = 0.48$, $\alpha_6 = 0.57$, $\alpha_7 = 0.68$, $\alpha_8 = 0.43$, with $F_1 = 2.13 \cdot 10^{-4}$. They are of the same order of magnitude as those for the note G3. The result of the fitting is shown in Fig. 20. One can note that most of the important parts of the frequency response curves are correctly reproduced by the model. However, a detail in the main resonance is still missing: the experimental frequency peak at resonance around 172.8 Hz is still underestimated by the model, and the secondary peak on the second harmonic (w_2 at 343 Hz) and more obviously on the fourth harmonic (w_3 at 687 Hz) is not large enough in the model. An assumption would be that another coupling, for example with the mode at $8f_1$, is already activated, so that a 1:2:4:8 scenario is already involved in the measurement. However, H_8 has not been measured in that case so that we are led to conclude that the 1:2:4 resonance is able to catch the most important part of the dynamics in this case, but a more complicated resonance should already be activated so that the frequency responses still present a small discrepancy with the theoretical one.

	osc1	osc2	osc3
f_k [Hz]	171.7	344.8	689.7
ξ_k	0.003	0.0006	0.0013
Φ_k	1.002	1.06	0.95

Table 5: Linear parameters used for the fitting of the 1:2:4 model of Eqs. (4), shown in Fig.20.

As a conclusion on this section, simple 3-dofs models displaying 1:2:2 and 1:2:4 internal resonance have been used to fit experimental frequency response curves. In the two tested cases, good results have been found, allowing to:

- (i) obtain a numerical estimate for the nonlinear quadratic coupling coefficient,
- (ii) better qualify the resonance scenario involved in some frequency response curve.

In particular, it has been shown that even in a simple case as the 1:2:4 scenario found for the F3 note, some details of the frequency-response curve may be missed by the model, indicating that a more complex dynamics may be already activated. In the other experimental cases shown in section 3 for larger amplitudes of excitation, the fits have not been made possible since the scenario are more complex, with more modes involved, as well as with an evident participation of cubic nonlinearities, not taken into account in the simple models. However, the proposed fittings allowed to retrieve an estimate of the quadratic coupling terms as well as an assessment of the 1:2:4 scenario as key to drive the nonlinear response in steelpan's vibrations. This will be further illustrated in the last section of the paper, by considering free (impacted) vibrations, and showing that the simple fitted model allows recovering the time variations of the first four harmonics of the signal.

5. Free oscillations

The objective is to compare the time domain response of an impacted note of the steelpan in usual playing with the time response of a simple model exhibiting 1:2:4 internal resonance for the parameters identified in the previous section. The measurement is presented first.

5.1. Experiment in free oscillations

The time domain acceleration of a single point of the vibrating G3 note is considered, in usual condition of playing. An accelerometer, glued at a given position in the vicinity of the center of the G3 dome, is used. A musician hits the note as usual and for two different impact forces, roughly corresponding to a *mezzo-piano* and a *forte* intensity. The spectrograms of the two time acceleration signals are shown in Fig. 21. Whereas the energy is mainly concentrated into the two first components for the weak strike, Fig. 21(a), a strong build-up of energy to higher modes is evident in the strong strike, with significant energy levels up to 1700 Hz. This particular behaviour is typical of the fact that the geometric nonlinearity is excited in the second case, so that energy exchanges are possible thanks to internal resonances scenario, and particularly to the 1:2:4 resonance. In the weak strike where the vibration is mostly linear, the energy is confined to the modes where it has been inputted by the impact.

5.2. Filtered time response

In order to more precisely follow the time evolution of the first four harmonics H_1 , H_2 and H_4 , a filter based on a short-time Fourier transform procedure, and allowing to extract the time domain response of these partials, is used. The three first frequency components (oscillating at f_1 , $2f_1$ and $4f_1$) are extracted from each measurement, are shown in Fig. 22. For the *mezzo-piano* intensity, Fig. 22(a), most of the energy is concentrated into H_1 and H_2 . The nonlinear coupling between the two components is already present as attested by the small time delay between the maximum amplitudes of H_1 and H_2 , clearly assessing that part of the energy directly transferred into H_1 by the impact is then transmitted by nonlinear couplings to H_2 . For the *forte* intensity, Fig. 22(b), the transfer of energy is so evident that H_2 reaches an amplitude level of four times H_1 , and H_4 strongly participates to the vibration with an amplitude comparable to that of H_1 . Finally, one can also observe modulation in the time response for the harmonics (more particularly pronounced for H_2), with a period decreasing with the strike amplitude. This is again an obvious manifestation of a nonlinear behaviour, with the energy coming back and forth to each oscillators through the nonlinear coupling terms (see *e.g.* [25] for a general two degree of freedom model with quadratic nonlinearities and [2, 3, 4] in the case of steelpan).

5.3. Simulations with the 1:2:4 model

The 1:2:4 internal resonance model presented in section 4.1.2 is used to recover the behaviour of the first four harmonics shown in Fig. 22. The model is used with the parameters identified from the experiment in forced vibrations, and given in section 4.2.1. The model is integrated in time domain using a fourth-order Runge-Kutta scheme with a variable timestep (routine “ode45” built in Matlab) [29]. An initial condition,

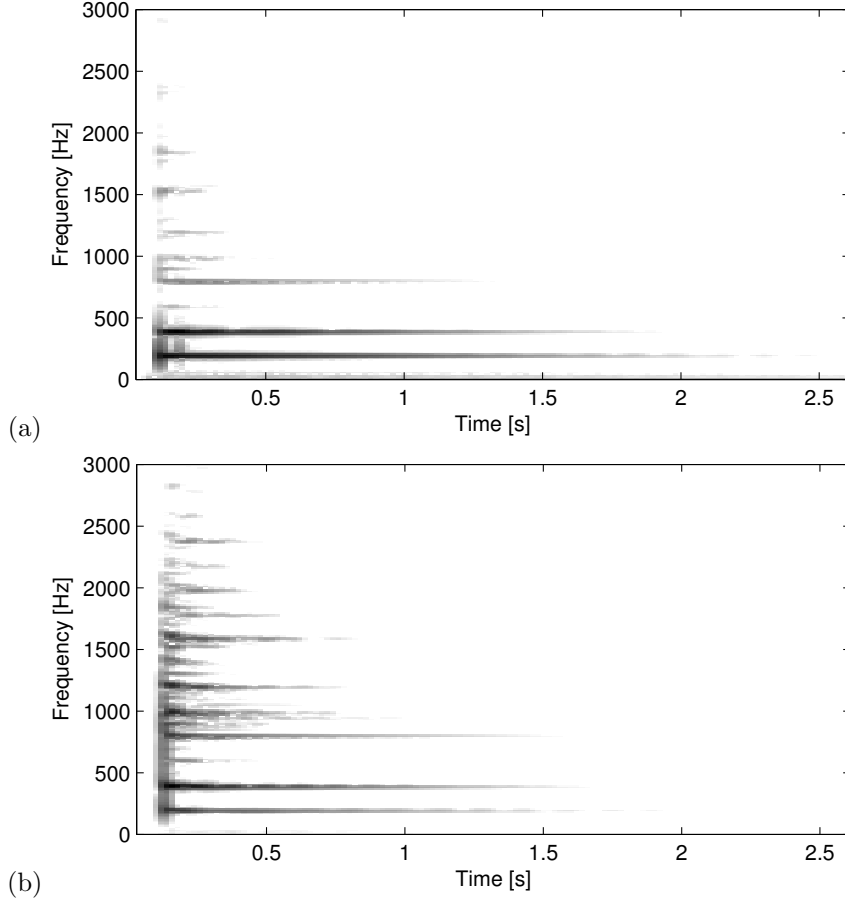


Figure 21: Experimental spectrograms of free oscillations measurements with two stick-impact intensities on note G3 of the double second. (a) Weak strike (*mezzo-piano*). (b) Strong strike (*forte*).

imposed on the first oscillator only (at $t = 0$, $w_1 = w_{10}$, $w_2 = w_3 = 0$ in Eq. (6)), with a selected amplitude in displacement, is used so as to mimic the impact brought by the stick hammer. Two different amplitudes of initial conditions are used for reproducing the impacts: $w_{10} = 0.15$ mm for the *mezzo-piano* one and $w_{10} = 0.65$ mm for the *forte* one. Fig. 23 shows the time response of harmonics H_1 , H_2 and H_4 . One can observe that the correspondance between the model and the experiment is particularly impressive. All the main nonlinear features are recovered by the model:

- (i) the amplitudes of all the harmonics in both cases,
- (ii) the time delay in the response of H_2 for the weak strike,
- (iii) the amplitude modulation in both cases and its increasing frequency when the strike is stronger.

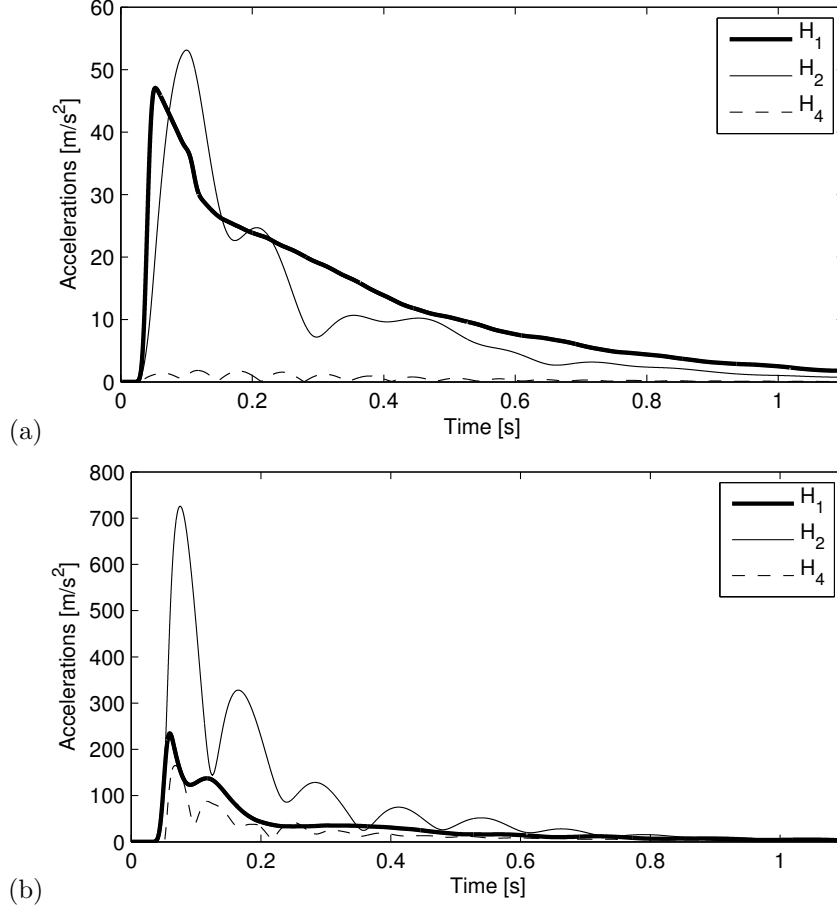


Figure 22: Time domain evolution of harmonics H_1 , H_2 and H_4 extracted from the time response of the signals which spectrograms are shown in Fig. 21. (a) Weak strike (*mezzo-piano*). (b) Strong strike (*forte*).

This shows that the model identified from the forced response is robust and able to reproduce with an excellent accuracy the main dynamical characteristics of an impacted note played in usual condition. Once again, this shows that a 1:2:4 internal resonance scenario is the basic ingredient for understanding the nonlinear phenomena in steelpan vibrations, a scenario that is generally complexified by the appearance of degenerate modes, as well as some higher-modes couplings with *e.g.* modes at $6f_1$ or $8f_1$.

6. Conclusion

In this paper, a detailed analysis of nonlinear vibrations of a double second steelpan has been performed. The modal analysis underlines that for the two notes under study, the first modes were tuned so that their frequencies share a 1:2:4 relationship. The pattern of harmonic relationships then deflects a bit from perfect commensurable ratios,

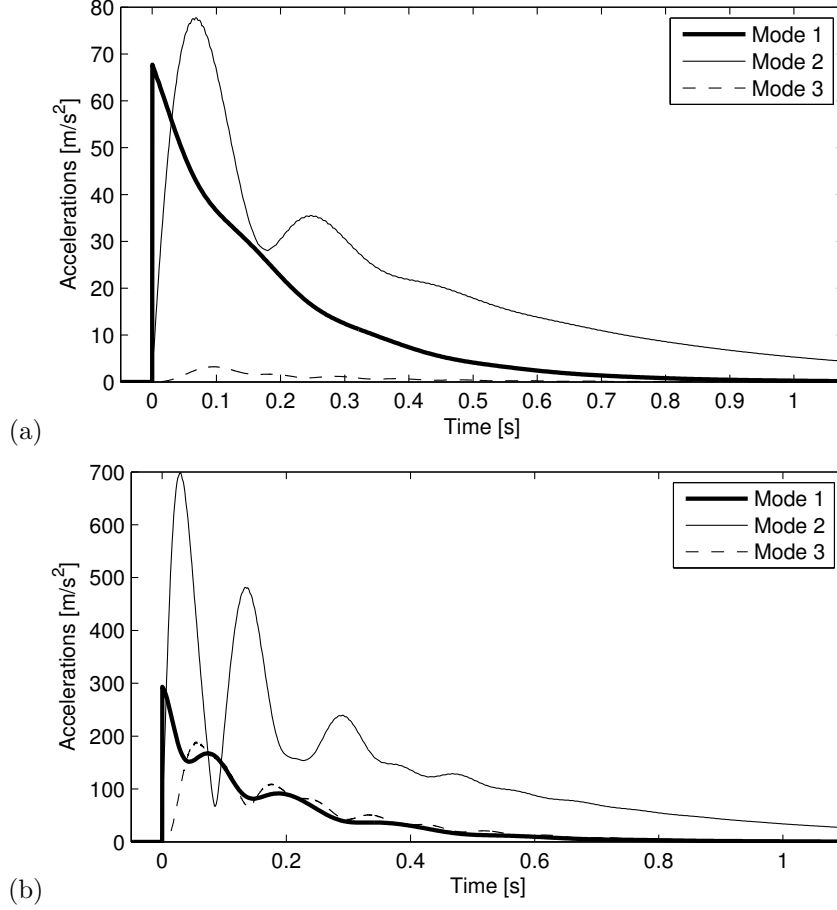


Figure 23: Time domain evolution of harmonics H_1 , H_2 and H_4 extracted from the time response of the model presenting a 1:2:4 internal resonance, which coefficients have been adjusted from the forced frequency response curves. Initial conditions in displacement: (a) $w_{10} = 0.15$ mm, (b) $w_{10} = 0.65$ mm.

however modes are generally found around important selected harmonics such as near $6f_1$ or $8f_1$. An important result from our analysis, that were not particularly stressed in previous investigations on the steelpan, is the appearance of degenerate modes from the second one, so that the usual pattern should generally be of (at least) a 1:2:2:4:4 tuning for the first frequencies. This degeneracy is a consequence of mode localization and has already been observed in simpler systems.

The forced responses have been then studied in order to properly reveal, with a fine-tuned and reproducible experiment, the nonlinear couplings and the energy exchanges observable between modes. It has been underlined that mode couplings are numerous, leading to complex dynamical responses even for small amplitudes of vibrations, hence underlining that these couplings are necessarily activated in usual playing conditions. For small levels of excitation, simple couplings scenario invoking variations on the 1:2:4 resonance are easily recognized. For higher vibration amplitudes, frequency response

curves becomes complicated with a significant contribution of the cubic nonlinearity, the presence of more modes involved in the vibrations, and the appearance of quasiperiodic regimes. The main conclusion is that in steelpan's vibrations where numerous modes are tuned and thanks to the geometric nonlinearity, complex response involving numerous modes up to eight times the frequency are frequent.

Thanks to two simple models displaying 1:2:2 and 1:2:4 internal resonance, for which analytical solutions remains tractable, frequency response curves have been fitted. This allows to better characterize the resonance scenario, as well as to produce numerical values for the nonlinear quadratic coupling terms that can be used for time domain synthesis. This has been realized in the last section, where the identified 1:2:4 model has been used to compute time domain response of an impacted note, revealing a perfect agreement for the behaviour of the first four harmonics.

These results obviously identify the nonlinear couplings in steelpan vibration as the key to understand the rapid build-up of energy from low to high-frequencies. Two features are necessary : (i) the fact that the modes are well tuned so that 1:2:4:8 resonance are present between the eigenfrequencies, (ii) the presence of geometric nonlinearity allowing activation of energy exchanges through quadratic nonlinear terms. The simple models used in the last section can also be used within the realm of sound synthesis for producing steelpan-like sounds. This study underlines that simple models with quadratic nonlinear terms, and a sufficient number of modes (*e.g.* 1:2:2:4:8 resonance) should be sufficient for producing interesting sounds with a reduced order models comprising a few oscillators. In particular, such simple models should be achievable in real-time synthesis nowadays.

Acknowledgement

The authors are grateful to Bertrand David (Telecom-ParisTech) for computing the code allowing the STFT filtering procedure used in section xx. The filter has been designed in the framework of the PAFI project (Plateforme d'Aide la facture Instrumentale, www.pafi.fr) which is also thanked.

Appendix A. Transverse displacement expression w_2 for the 1:2:2 internal resonance model

The amplitude w_2 and phase ψ_2 of the second harmonics of displacement at the measured point, as a function of the model variables, can be obtained by identifying Eqs. (2) and (3). Using complex numbers manipulations, one finally obtains:

$$w_2 = \sqrt{\Phi_2^2 a_2^2 + \Phi_3^2 a_3^2 + \Phi_2 \Phi_3 a_2 a_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}, \quad (\text{A.1})$$

and

$$\psi_2 = \varphi_2 + \theta, \quad (\text{A.2})$$

where

$$\theta = \text{atan} \left(\frac{\Phi_3 a_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\Phi_2 a_2 + \Phi_3 a_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)} \right). \quad (\text{A.3})$$

References

- [1] U. Kronman, Steel pan tuning: a handbook for steel pan making and tuning, Musikmuseet skrifter, 1992. ISSN 0282-8952.
- [2] A. Achong, The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, I: Theory, simulations, experiments and bifurcations, *Journal of Sound and Vibration* 197(4) (1996) 471–487.
- [3] A. Achong, K. A. Sinanan-Singh, The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, Part II: coupled sub-systems, simulations and experiments, *Journal of Sound and Vibration* 203(4) (1997) 547–561.
- [4] A. Achong, The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, part III: the inverse problem—parameter estimation, *Journal of Sound and Vibration* 212(4) (1998) 623–635.
- [5] A. Achong, Non-linear analysis of compressively/thermally stressed elastic shell structures on the steelpan and the underlying theory of the tuning process, *Journal of Sound and Vibration* 222(4) (1999) 597–620.
- [6] T. D. Rossing, D. S. Hampton, U. J. Hansen, Music from oil drum : the acoustics of the steel pan, *Physics Today* march (1996) 24–29.
- [7] T. D. Rossing, U. J. Hansen, D. S. Hampton, Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. I. Tenor and double second, *Journal of the Acoustical Society of America* 108(2) (2000) 803–812.
- [8] T. D. Rossing, U. J. Hansen, Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. II. Cello and bass, *Applied acoustics* 65 (2004) 1233–1247.
- [9] B. Copeland, A. Morrison, T. D. Rossing, Sound radiation from Caribbean steelpans, *Journal of the Acoustical Society of America* 117(1) (2005) 375–383.
- [10] F. Muddeen, B. Copeland, Sound radiation from Caribbean steelpans using nearfield acoustical holography, *Journal of the Acoustical Society of America* 131(2) (2012) 1558–1565.
- [11] T. Ryan, P. O’Malley, A. Glean, J. Vignola, J. Judge, Conformal scanning laser doppler vibrometer measurement of tenor steelpan response to impulse excitation, *Journal of the Acoustical Society of America* 132(5) (2012) 34943501.
- [12] É. Bavu, C. Auzou, M. Monteil, M. Melon, C. Langrenne, A. Garcia, Time-Reversal Imaging and Field-Separation-Method applied to the study of the Steelpan radiation, in: *Proc. of Acoustics 2012 conference*, Nantes, France, 2012.
- [13] L. E. Murr, E. Ferreyra, J. Maldonado, E. A. Trillo, S. Pappu, C. Kennedy, J. De Alba, M. Posada, D. P. Russel, J. L. White, Materials science and metallurgy of the Caribbean steel drum. Part I: Fabrication, deformation phenomena and acoustic fundamentals, *Journal of materials science* 34 (1999) 967–979.
- [14] E. Ferreyra, J. Maldonado, L. E. Murr, S. Pappu, E. A. Trillo, C. Kennedy, M. Posada, J. De Alba, R. Chitre, D. P. Russel, Materials science and metallurgy of the Caribbean steel drum. Part II: Heat treatment, microstructures, hardness profiles and tuning effects, *Journal of materials science* 34 (1999) 981–996.
- [15] E. Ferreyra, L. Murr, Metallography in music. microstructures in the caribbean steel drum., *Materials Characterization* 45 (2000) 341–351.
- [16] E. Ferreyra, L. Murr, D. P. Russel, J. Bingert, Elastic interactions and the metallurgical and acoustic effects of carbon in the caribbean steel drum., *Materials Characterization* 47 (2001) 325–363.
- [17] L. Murr, E. Esquivel, A. Bujanda, K. Martinez, N.E.and Soto, A. Tapia, S. Lair, A. Somasekharan, C. Imbert, R. Kerns, S. Irvine, S. Lawrie, Metallurgical and acoustical comparisons for a brass pan with a Caribbean steelpan standard, *Journal of materials science* 39 (2004) 4139–4155.
- [18] L. Murr, E. Esquivel, S. Lawrie, M. Lopez, S. Lair, K. Soto, S. Gaytan, D. Bujanda, R. Kerns, P. Guerrero, J. Flores, Fabrication of aluminum, Caribbean-style, musical pan: Metallurgical and acoustical characterization, *Materials Characterization* 57 (2006) 232–243.
- [19] L. Murr, S. Gaytan, M. Lopez, D. Bujanda, E. Martinez, G. Whitmyre, H. Price, Metallurgical and acoustical characterization of a hydroformed, 304 stainless steel, Caribbean-style musical pan., *Materials Characterization* 59 (2008) 321–328.
- [20] M. Monteil, C. Touzé, O. Thomas, Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies: the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances, *Nonlinear Dynamics* in press (2013).
- [21] M. Monteil, Vibrations non linéaires de steeldrums, caractérisation expérimentale et modèle phénoménologique, Master’s thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010. In french.
- [22] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 2: experiments, *Journal of Sound and Vibration* 265 (2003) 1075–1101.

- [23] O. Thomas, C. Touzé, E. Luminais, Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: experiments on a 1:1:2 internal resonance, *Nonlinear Dynamics* 49 (1-2) (2007) 259–284.
- [24] A. Luongo, Mode Localization in Dynamics and Buckling of linear Imperfect Continuous Structures, *Nonlinear Dynamics* 25 (2001) 133–156.
- [25] A. Nayfeh, D. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [26] T. Nayfeh, W. Asrar, A. Nayfeh, Three-mode interactions in harmonically excited systems with quadratic nonlinearities, *Nonlinear Dynamics* 3 (1992) 385–410.
- [27] A. H. Nayfeh, *Nonlinear interactions*, John Wiley and sons, 2000.
- [28] A. Haddow, A. Barr, D. Mook, Theoretical and experimental study of modal interaction in two-degree-freedom structure, *Journal of Sound and Vibration* 97(3) (1984) 451–473.
- [29] L. F. Shampine, M. W. Reichelt, The matlab ode suite, *SIAM J. of Scientific Computing* 18 (1997) 1–22.

Conclusion Générale

Conclusion

Ce travail s'intègre, d'une manière globale, dans la compréhension de l'effet des mécanismes de fabrication sur le comportement dynamique des steelpans. En effet, ces instruments possèdent un timbre très particulier dont la caractéristique première est de présenter des échanges d'énergie entre les composantes spectrales, issus d'une dynamique non linéaire complexe.

Pour y répondre, nous avons d'abord cherché à décrire précisément, d'une part, l'ensemble du processus de fabrication, d'autre part, le comportement dynamique des steelpans en état de jeu. Le suivi expérimental de la fabrication a été possible grâce à une collaboration étroite avec un *tuner* dont le travail consistait à fabriquer un steelpan au laboratoire. Ainsi, nous avons pu précisément observer chacun des procédés et réaliser des expériences visant à quantifier les caractéristiques dynamiques (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales) à l'issue de chacune des étapes. Nous avons pu observer des transformations considérables et irréversibles de la structure initiale. Ces phénomènes d'origine plastique confèrent à la structure une nouvelle géométrie et un état de contraintes résiduelles. Il en résulte une forte localisation des modes de vibration dès la création des notes et des variations notables des fréquences et des amortissements. L'accordage fin vise à ajuster au moins les trois premières fréquences propres de chaque note de sorte à provoquer des rapports harmoniques entre elles.

La seconde étude, menée sur un steelpan terminé et placé sous différentes sollicitations, a permis d'observer un comportement dynamique non linéaire. En effet, les rapports harmoniques favorisent les couplages entre les modes propres de la structure. Cela entraîne des échanges d'énergie entre les modes qui sont d'autant plus présents que l'amplitude de sollicitation est intense. Aussi, on a pu mettre en évidence l'existence de modes doubles lorsque deux notes juxtaposées, à l'intérieur du steelpan, présentent des rapports d'octave. Ceux-ci complexifient la vibration. Ces phénomènes de couplages sont appelés des résonances internes. Ils produisent des regains d'énergie qui sont clairement audibles au sein des sons des steelpans. À l'issue de ces observations, deux axes de modélisation ont été proposés.

Le premier se concentre sur la première étape de fabrication, l'embouti du bidon, au cours de laquelle la surface supérieure du bidon initialement plane est martelée jusqu'à l'obtention d'une cuve de géométrie sphérique et dont la flèche maximale atteint une profondeur de l'ordre de cent fois l'épaisseur initiale. Une modélisation analytique de cette déformation plastique a été proposée sur deux structures simples : un poutre bi-articulée et une plaque circulaire encastree. Toute l'originalité du modèle consiste à considérer la structure une fois plastifiée, c'est à dire dans son état final. Ainsi, peu importe le trajet de chargement parcouru, ce qui nous intéresse, c'est l'état statique obtenu déformé et précontraint, l'objectif étant de quantifier ces deux paramètres (géométrie et état de contraintes résiduelles) sur les vibrations linéaires autour de son équilibre statique. Pour cela, la structure est chargée par l'ajout de contraintes initiales rapportées à un effort de membrane et des moment de flexion initiaux. Le développement analytique se fait par la théorie de von Kàrmàn qui permet de tenir compte des couplages non linéaires membrane/flexion au sein de la structure. Une résolution numérique par la méthode asymptotique numérique implémentée dans Manlab a été utilisée. Une étude paramétrique,

sous divers types de chargements possibles, nous a alors permis d'observer le comportement dynamique de ces structures précontraintes, en prenant soin de séparer l'effet géométrique de l'effet des contraintes résiduelles sur les fréquences propres axisymétriques calculées.

Enfin, la dernière partie émane des observations du comportement dynamique des steelpans. Dans le but d'identifier les mécanismes principaux qui régissent ces vibrations, des modèles analytiques de résonances internes ont été proposés. Compte tenu des relations de fréquences observées, un modèle de résonance 1:2:2 d'une part et 1:2:4 d'autre part, soient deux modèles à trois degrés de liberté ont été développés. Une étude théorique fine a d'abord été réalisée dans le but de mieux comprendre les échanges d'énergie possibles par des instabilités du système. L'établissement des modèles s'est fondé sur la théorie des modes normaux non linéaires et la résolution s'est faite par la méthode des échelles multiples. Un ensemble de solutions analytiques a donc été obtenu. Dans le cas où les expressions analytiques ne permettaient pas une manipulation simple, la méthode asymptotique numérique implémentée dans Manlab a de nouveau été utilisée. En particulier, dans le modèle 1:2:2, lorsque l'excitation est proche de $2\omega_1$, les deux modes de hautes fréquences sont simultanément excités, il en résulte une étude de stabilité plus complexe. Dans les deux cas de résonances internes, des phénomènes non linéaires classiques ont été retrouvés (phénomènes de sauts, bifurcations, échanges d'énergie) et une étude paramétrique a été menée à bien. En effet, par comparaison à la résonance 1:2, bien connue de la littérature, la présence d'un troisième oscillateur rend le système plus instable, ce qui favorise les échanges d'énergie entre les modes. Ces résultats sont généraux et peuvent s'appliquer à tout système mécanique présentant ces relations de résonance.

Dans le cadre de notre étude, on a pu observer, au cours de la partie I, que dans les vibrations des steelpans, les couplages possibles sont plus riches que les modèles à trois degrés de liberté. En effet, de nombreux modes présentent des relations de fréquences commensurables. Grâce à des méthodes de mesure très fines, on a pu suivre un ensemble d'harmoniques et quantifier précisément les échanges d'énergie. On a montré qu'il existait des couplages forts pour des amplitudes de vibrations d'un ordre de grandeur inférieur à l'épaisseur. Des couplages avec des modes de très hautes fréquences (de 6 à 8 fois la fréquence fondamentale) ont également pu être mis en évidence. Cela montre que les transferts d'énergie sont extrêmement efficaces dans la dynamique des steelpans. Ils permettent ainsi d'enrichir très rapidement le spectre et de donner cette couleur si particulière au timbre produit. Des ajustements de nos modèles simples aux mesures réalisées sur le steelpan placé sous excitation forcée, ont permis de quantifier les non-linéarités responsables des couplages présents dans les vibrations des steelpans. La simulation des oscillations libres a confirmé la présence fondamentale des résonances internes dans les sons de ces instruments. Les modèles à trois degrés de liberté permettent de capter l'essentiel de la dynamique des steelpans, en rendant compte des mécanismes fondamentaux, produits par les résonances internes, qui sont la source de l'enrichissement spectral des sons produits par ces instruments.

Perspectives

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées en fonction des différentes parties abordées dans ce manuscrit.

Concernant la fabrication des steelpan, bon nombre d'observations restent encore incomprises. En particulier, comme nous l'avons vu, la littérature nous dit que le chauffage relaxe les contraintes résiduelles qui proviennent des divers martelages des étapes précédentes. Cependant, lors de l'accordage fin, la structure est de nouveau martelée. Pouvons-nous imaginer qu'un nouvel état de contraintes réside au sein de la structure finale ? Comme nous l'avons fait pour les paramètres dynamiques, il pourrait être envisagé de suivre l'évolution des contraintes, de manière expérimentale, à l'issue de chaque étape de fabrication, afin de savoir si elles possèdent ou non un rôle dans les vibrations de l'instrument. Aussi, nous avons pu constater certaines variations de l'amortissement de la structure en fonction des divers martelages. Le comportement semble complexe et peu intuitif. Comprendre l'influence des procédés de fabrication et plus généralement de l'état des matériaux sur l'amortissement structurel pourrait être une perspective à envisager.

Les modèles de structures précontraintes proposés ici sont une première approche dans le sens où ils peuvent être raffinés. En effet, la forme des contraintes initiales imposées à la structures (par l'effort de membrane et le moment de flexion) tient compte des hypothèses des modèles analytiques choisis. Cependant, seuls les cas les plus simples, respectant ces hypothèses, ont été développés. Dans un premier temps, on pourrait donc imaginer complexifier les formes des contraintes initiales pour aboutir à un état de contraintes résiduelles différent. Ainsi l'étude paramétrique serait enrichie. D'autre part, le comportement des modes asymétriques doit également être étudié dans le cas de la plaque circulaire. En effet, la présence de diamètres nodaux dans les modes asymétriques entraînera une influence différente des contraintes et des changements géométriques sur les paramètres dynamiques de la structure.

Aussi, il pourrait être envisagé de complexifier la géométrie de départ par rapport aux modèles de poutre et plaque proposés dans ce manuscrit. Par exemple, dans le but de se rapprocher de la forme du steelpan, nous pourrions chercher à modéliser une calotte sphérique qui présente des défauts géométriques causés par la plasticité (formation des notes) ; et se demander alors quel est le rôle des contraintes résiduelles, sur la dynamique, lorsque elles sont réparties d'une manière complexe sur l'ensemble de la structure.

Enfin, toujours dans l'idée de se rapprocher du comportement des steelpan, il serait intéressant de lier l'effet du traitement thermique au processus de plasticité. En effet, la question de tenir compte ou non des contraintes résiduelles dans les vibrations des steelpan reste ouverte.

Dans cette idée, nous avons tenté de mettre en œuvre un modèle éléments-finis de coque reconstruit à partir d'une mesure géométrique du steelpan à la fin de sa fabrication (réalisée au LURPA-ENS Cachan). L'idée était de calculer les coefficients non linéaires à partir de ce modèle uniquement fondé sur la géométrie de la structure. Une comparaison expérimentale aurait alors permis de quantifier les différences entre les vibrations du modèle géométrique, et celles de la structure réelle (précontrainte).

En fonction des différences observées, on pourrait se rendre compte de l'importance (ou non) de considérer des contraintes résiduelles dans les modèles géométriques des steelpans.

Enfin, concernant la dynamique de l'instrument dans son état final, on a pu voir que de nombreux modes interagissaient, par des phénomènes d'échanges d'énergie qui donnent lieu à un timbre riche et complexe. Des modèles de synthèse sonore devraient donc contenir plus de modes. Nous avons fait des tests de synthèse sonore en augmentant le nombre de modes compris dans les modèles. Ainsi nous avons pu constater, de manière auditive, l'importance de leur présence pour que les sons simulés se rapprochent des sons mesurés.

Aussi, il n'est pas exclu que la frappe produite par le *stick* possède un comportement non linéaire qui entre en jeu dans la production du son. En effet, la rigidité du caoutchouc variant avec la force de frappe, des modes de hautes fréquences peuvent être directement excités par cette impulsion. La prise en compte du système d'excitation devient alors indispensable pour obtenir une évolution des oscillations libres la plus réaliste possible. Une étude complète sur l'impact du *stick*, à commencer par une campagne de mesures, devrait être envisagée pour mieux comprendre l'origine de la production de ces sons.

Bibliographie

- [1] A. Achong. The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, I : Theory, simulations, experiments and bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 197(4) :471–487, 1996.
- [2] A. Achong. Vibrational analysis of mass loaded plates and shallow shells by the receptance method with application to the steelpan. *Journal of Sound and Vibration*, 191(2) :207–217, 1996.
- [3] A. Achong. The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, part III : the inverse problem- parameter estimation. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4) :623–635, 1998.
- [4] A. Achong. Non-linear analysis if compressively/thermally stressed elastic shell structures on the steelpan and the underlying theory of the tuning process. *Journal of Sound and Vibration*, 222(4) :597–620, 1999.
- [5] A. Achong. Mode locking on the non-linear notes of the steelpan. *Journal of Sound and Vibration*, 266 :193–197, 2003.
- [6] A. Achong and K. A. Sinanan-Singh. The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, Part II : coupled sub-systems, simulations and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 203(4) :547–561, 1997.
- [7] R. Arquier, S. Karkar, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez, and B. Cochelin. Manlab 2.0 : an interactive path-following and bifurcation analysis software. Technical report, Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique, CNRS (<http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>), 2005-2011.
- [8] C. Barlow, S.E. Maloney, and J. Woodhouse. The role of damping in steelpan manufacture. In *Stockholm Music Acoustics Conference 2013, SMAC 2013, Stockholm, Sweden*, 2013.
- [9] Z.P. Bazant and L. Cedolin. *Stability of structures : elastic, inelastic, fracture and damage theories*. Oxford University Press, 1991.
- [10] F. Bloom and D. Coffin. *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*. Chapman & Hall, CRC, 2001.
- [11] D. Chapelle and K.J. Bathe. *The finite element analysis of shells - Fundamentals*. Springer, 2011.
- [12] C.Y. Chia. *Nonlinear analysis of plates*. McGraw Hill, New-York, 1980.
- [13] D. Chow. Modelling and optimization of steelpan performance. Master’s thesis, University of the West Indies, 2010.
- [14] P.G. Ciarlet. A justification of the von kármán equations. *Arch. Rat. Mech. analysis*, 73 :349–389, 1980.

- [15] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès Science, 2007.
- [16] B. Cochelin and C. Vergez. A high-order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324 :243–262, 2009.
- [17] B. Copeland, A. Morrison, and T. D. Rossing. Sound radiation from Caribbean steelpan. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(1) :375–383, 2005.
- [18] J. Defrance. Acoustics of the steelpan. Master’s thesis, Northern Illinois University - Université du Maine, 1991.
- [19] E. Ferreyra, J.G. Maldonado, L. E. Murr, S. Pappu, E. A. Trillo, C. Kennedy, M. Posada, J. De Alba, R. Chitre, and D. P. Russel. Materials science and metallurgy of the Caribbean steel drum. Part II Heat treatment, microstructures, hardness profiles and tuning effects. *Journal of Materials Science*, 34 :981–996, 1999.
- [20] E. Ferreyra and L.E. Murr. Metallography in music. microstructures in the caribbean steel drum. *Materials Characterization*, 45 :341–351, 2000.
- [21] E. Ferreyra, L.E. Murr, D. P. Russel, and J.F. Bingert. Elastic interactions and the metallurgical and acoustic effects of carbon in the caribbean steel drum. *Materials Characterization*, 47 :325–363, 2001.
- [22] P. Gaillard. *Étude de la perception des transitoires d’attaque des sons de steeldrums : particularités acoustiques, transformation par synthèse et catégorisation*. PhD thesis, Université de Toulouse II - Le Mirail, 2000.
- [23] D. Gay. Finite Element Modelling of Steelpan Acoustics. In *Acoustic2008*, 2008.
- [24] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1992.
- [25] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [26] B. Halphen and Q.S. NGuyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de mécanique*, 14 (1) :39–63, 1975.
- [27] M. Haterbouch and R. Benamar. The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. part 2 : iterative and explicit analytical solution for non-linear coupled transverse and in-plane vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 277 :1–30, 2004.
- [28] A. Helmlinger. *Mémoire et jeu d’ensemble, la mémorisation du répertoire musical dans les steelbands de Trinidad et Tobago*. PhD thesis, Université Paris X Nanterre, 2005.
- [29] A. Helmlinger. *Pan Jumbie, mémoire sociale et musicale dans les steelbands (Trinidad et Tobago)*. Société d’ethnologie, Nanterre, 2012.
- [30] G. Herrmann. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. Technical Report 3578, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1955.

- [31] G. Inglebert and J. Frelat. Quick analysis of inelastic structures using a simplified method. *Nuclear Engineering and Design*, 291 :116–281, 1989.
- [32] U. Kronman. *Steel pan tuning : a handbook for steel pan making and tuning*. Musikmuseet, 1992.
- [33] G.C. Kung and Y.H. Pao. Nonlinear flexural vibrations of clamped circular plate. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4) :1050–1054, 1972.
- [34] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *C.R. mécanique*, 338 :510–517, 2010.
- [35] S.E. Maloney. *Acoustics and manufacture of caribbean steel pans*. PhD thesis, Wolfson College, University of Cambridge, 2010.
- [36] S.E. Maloney, C.Y. Barlow, and J. Woodhouse. A study of mode confinement in caribbean steel drums. In *International Congress on Sound and Vibration, Daejeon, Korea*, 2008.
- [37] P. Manneville. *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic Press, 1990.
- [38] J.J. Marigo. *Plasticité et rupture. Manuel universitaire*. École Polytechnique, 2008.
- [39] O. Millet, A. Hamdouni, and A. Cimetière. Justification du modèle bidimensionnel non-linéaire de plaque par développement asymptotique des équations d'équilibre. *C. R. Académie des Sciences Iib*, 1997.
- [40] M. Monteil, C. Touzé, and O. Thomas. Nonlinear vibrations of steel pans : analysis of mode coupling in view of modal sound synthesis. In *SMAC Stockholm Music Acoustics Conference*, 2013.
- [41] M. Monteil, C. Touzé, and O. Thomas. Complicated dynamics exhibited by thin shells displaying numerous internal resonances : application to the steelpan. In *19th International Congress on Sound and Vibrations (ICSV), Vilnius, Lithuania*, 8-12 juillet 2012.
- [42] A. Morrison. *Acoustical studies of the steelpan and hang : phase-sensitive holography and sound intensity measurements*. PhD thesis, Northern Illinois University, 2005.
- [43] A. Morrison, D. Zietlow, and T. Moore. Time-resolved interferometry and phase vocoder analysis of a caribbean steelpan. In *Stockholm Music Acoustics Conference 2013, SMAC 2013, Stockholm, Sweden.*, 2013.
- [44] F. Muddeen and B. Copeland. Sound radiation from Caribbean steel pans using nearfield acoustical holography. *Journal of the Acoustical Society of America*, 131(2) :1558–1565, 2012.
- [45] L.E. Murr, E.V. Esquivel, A.A. Bujanda, N.E. Martinez, K.F. Soto, A.S. Tapia, S. Lair, A.C. Somasekharan, C.A.C. Imbert, R. Kerns, S. Irvine, and S. Lawrie. Metallurgical and acoustical comparaisons for a brass pan with a Caribbean steelpan standard. *Journal of Materials Science*, 39 :4139–4155, 2004.
- [46] L.E. Murr, E.V. Esquivel, S.C. Lawrie, M.I. Lopez, S.L. Lair, K.F. Soto, S.M. Gaytan, D. Bujanda, R.G. Kerns, P.A. Guerrero, and J.A. Flores. Fabrication of aluminum, Caribbean-style, musical pan : Metallurgical and acoustical characterization. *Materials Characterization*, 57 :232–243, 2006.
- [47] L.E. Murr, E. Ferreyra, J.G. Maldonado, E.A. Trillo, S. Pappu, C. Kennedy, J. De Alba, M. Posada, D.P. Russel, and J.L. White. Materials science and metallurgy of the Caribbean

- steel drum. Part 1 Fabrication, deformation phenomena and acoustic fundamentals. *Journal of Materials Science*, 34 :967–979, 1999.
- [48] L.E. Murr, S.M. Gaytan, M.I. Lopez, D.E. Bujanda, E.Y. Martinez, G. Whitmyre, and H. Price. Metallurgical and acoustical characterization of a hydroformed, 304 stainless steel, Caribbean-style musical pan. *Materials Characterization*, 59 :321–328, 2008.
- [49] A.H. Nayfeh. *Nonlinear interactions*. John Willey & Sons, 2000.
- [50] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Willey & Sons, 1979.
- [51] Q.S. Nguyen. *Stabilité et mécanique non linéaire*. Hermès Sciences, 2000.
- [52] J.N. Reddy. *Theory and analysis of elastic plates*. Taylor and Francis, 1999.
- [53] T.D. Rossing. *Science of percussion instruments*. 2000.
- [54] T.D. Rossing, D. S. Hampton, and Uwe J. Hansen. Music from oil drum : the acoustics of the steel pan. *Physics Today*, march :24–29, 1996.
- [55] T.D. Rossing and Uwe J. Hansen. Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. II. Cello and bass. *Applied acoustics*, 65 :1233–1247, 2004.
- [56] T.D. Rossing, Uwe J. Hansen, and D. S. Hampton. Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. I. Tenor and double second. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(2) :803–812, 2000.
- [57] T.D. Rossing, A. Morrison, Uwe Hansen, F. Rohner, and S. Schäer. Acoustics of the hang : a hand-played steel instrument. In *International Symposium on Music Acoustics 2007*, 2007.
- [58] T.D. Rossing, J. Yoo, and A. Morrison. Acoustics of percussion instrument : an update. *acoust. sci. & tech*, 25 :406–412, 2004.
- [59] T. Ryan, P. O’Malley, A. Glean, J. Vignola, and J. Judge. Conformal scanning laser doppler vibrometer measurement of tenor steelpan response to impulse excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 132(5) :3494–3501, 2012.
- [60] A. Sénéchal. *Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques – Application aux turbomachines*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2011.
- [61] S. Sridhar, D.T. Mook, and A.H. Nayfeh. Non-linear resonances in the forced responses of plates, part 1 : symmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibrations*, 41(3) :359–373, 1975.
- [62] S. Sridhar, D.T. Mook, and A.H. Nayfeh. Non-linear resonances in the forced responses of plates, part 2 : asymmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 59(2) :159–170, 1978.
- [63] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques. Applications aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [64] O. Thomas. *Vibrations non-linéaires de calottes sphériques minces*. Rapport de Post Doctorat de l’ENSTA, 2001-2003.

- [65] O. Thomas. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélastiques. Instruments de musique, réduction de vibrations, micro/nano systèmes électromécaniques*. Habilitation à diriger les recherches. École normale supérieure de Cachan, 2011.
- [66] O. Thomas and S. Bilbao. Geometrically non-linear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315 :569–590, 2008.
- [67] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 2 : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :1075–1101, 2003.
- [68] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance. *Internal Journal of Solids and Structures*, 42 :3339–3373, 2005.
- [69] C. Touzé. *Vibrations non linéaires géométriques de structures minces. Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos*. Habilitation à diriger les recherches. Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [70] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 1 : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4) :649–676, 2002.
- [71] C. Touzé, M. Vidrascu, and D. Chapelle. Calcul direct de la raideur non linéaire géométrique pour la réduction de modèles de coques en éléments finis. In *CSMA, 11e Colloque National de Calcul des Structures*, Giens 2013.
- [72] T. von Kármán. Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 4(4) :311–385, 1910.
- [73] F.F. Waleed. *Nonlinear dynamics of annular and circular plates under thermal and electrical loadings*. PhD thesis, Faculty of the Engineering, Virginia Polytechnic Institute, 2003.
- [74] A. Wang. Axisymmetric postbuckling and secondary bifurcation buckling of circular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35 :279–292, 2000.

Résumé

Cette étude porte sur le *steeldrum*, aussi appelé *steelpan*, percussion mélodique de Trinidad et Tobago, fabriquée à partir de bidons métalliques dont une des faces subit un ensemble de déformations irréversibles afin d'obtenir une cuve principale à l'intérieur de laquelle sont façonnées les différentes notes de l'instrument. Cette thèse s'organise autour de deux axes. D'une part les processus de fabrication sont étudiés afin de mieux comprendre le travail du facteur et de proposer une modélisation de la première étape de fabrication. D'autre part, des études vibratoires sont menées sur l'instrument fini, pour comprendre la dynamique complexe responsable de son timbre.

La première partie rend compte de l'évolution des caractéristiques vibratoires au cours de la fabrication. On remarque une forte localisation vibratoire au moment de la création des notes, des évolutions marquées des amortissements et des fréquences propres lors du chauffage, et des relations harmoniques après l'accordage final. La seconde partie se concentre sur la première étape de fabrication au cours de laquelle le haut du bidon est martelé pour obtenir une calotte sphérique concave. Ce processus de plasticité est modélisé analytiquement sous les hypothèses de von Kármán par une structure mince soumise à des contraintes initiales. L'influence du changement géométrique et celle de l'état de contraintes résiduelles sont alors quantifiées sur les paramètres dynamiques de la structure dans son nouvel état d'équilibre. Enfin la dernière partie s'intéresse aux vibrations de l'instrument terminé qui présente un comportement dynamique caractéristique des systèmes non linéaires géométriques. En mode de jeu usuel, des échanges d'énergie entre les modes sont clairement audibles. Cette richesse de timbre provient des résonances internes dues à l'accordage, si bien que des couplages complexes sont mesurés pour des amplitudes vibratoires très faibles. Des modèles originaux de résonances internes sont proposés.

Abstract

This study is devoted to the steelpan, a harmonically tuned percussion from Trinidad and Tobago. It consists in a steel barrel subjected to several steps of irreversible metal forming to obtain a main spherical bowl within which convex domes are formed. This work is mainly focused on two topics. Firstly, the study of the making processes allows us to gain a better understanding of the work of the tuner in order to propose a model of the first step of steelpan making. Secondly, a vibration analysis of the steelpan, at the end of this process, is performed to understand its dynamics which is responsible of its particular tone.

In the first part of the manuscript we study the evolution of the dynamical parameters during manufacturing. In particular, mode localization after note forming, strong variations of modal dampings, natural frequencies after burning and harmonic relationships after fine tuning are observed. The second part of the manuscript focuses on the first step of manufacturing during which the top of the barrel is hammered to obtain the spherical shell. The shell is analytically modeled as a nonlinear von Kármán plate and the plastic strains are introduced as initial inelastic strains. The effect of the geometry and of the residual stress fields are separately quantified on the dynamical parameters of the structure in its final equilibrium state. The last part is concerned with the complex nonlinear dynamics of the steelpan at the end of the forming process. During normal playing, energy exchanges between modes are clearly identifiable : they result in a rich sound due to numerous internal resonances. Modal coupling are measured even for small amplitudes of vibrations. Original models of internal resonances are proposed.