Étude de schémas multi-échelles pour la simulation de réservoir

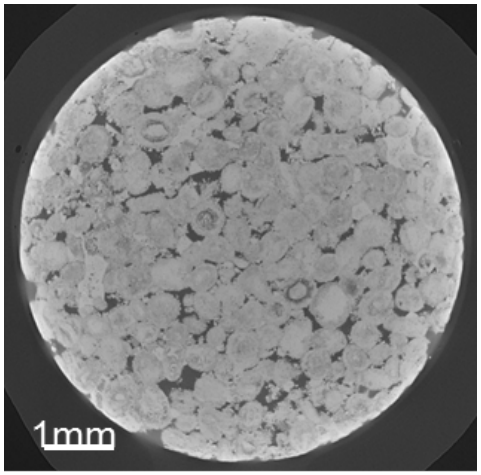
Franck Ouaki

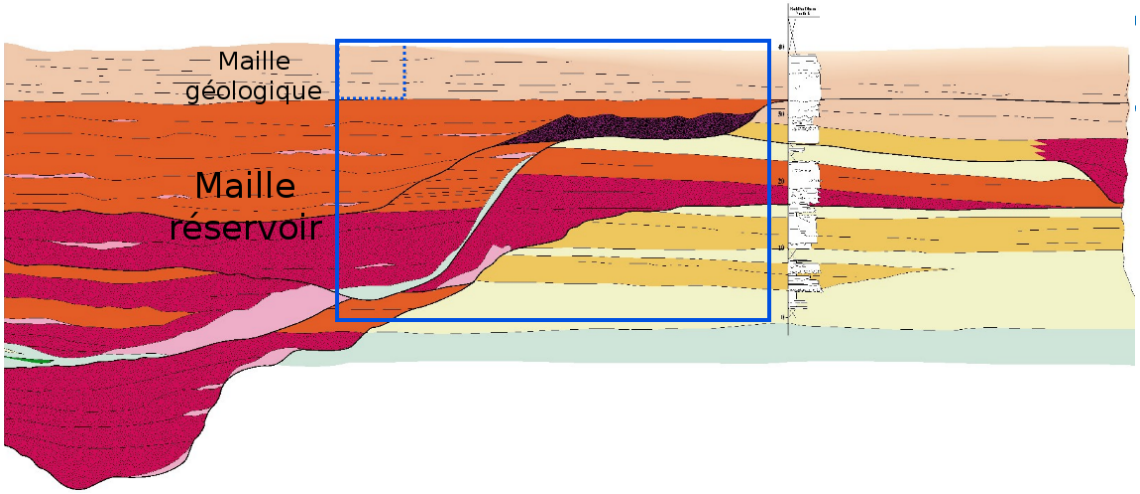
IFP Énergies nouvelles
en collaboration avec le CMAP

16 décembre 2013

Introduction

- Industrie pétrolière ⇒ étude de réservoirs géologiques
- Réservoir : roche poreuse très hétérogène
- Modèle géologique $\simeq$ 100 millions de mailles de taille $\simeq$ 1 m
- Nécessité de mise à l'échelle pour avoir des temps de calcul raisonnables





- Méthodes multi-échelles ⇒ diminution du temps de calcul en gardant une bonne précision à l'échelle fine

État de l'art des méthodes multi-échelles

- Méthodes permettant uniquement de calculer la pression et les flux fins
  - Méthode des éléments finis multi-échelles (Hou, Wu '97) pour résoudre des problèmes elliptiques (généralisée par Allaire, Brizzi '05)
  - Méthode des éléments finis mixtes multi-échelles (Chen, Hou '02) pour obtenir des flux conservatifs après le calcul de la pression dans un écoulement diphasique
  - Nombreux articles sur le plan théorique :
    - Babuška (première méthode multi-échelle)
    - E, Engquist, Abdulle, Ohlberger (Méthode multi-échelle hétérogène)
    - Efendiev, Hou, Ginting, Gloria (Cas non-linéaire)
  - Applications à la simulation des écoulements en milieux poreux :
    - Efendiev, Hou, Wu, Chen (Éléments Finis Multi-échelles)
    - Jenny, Tchelepi (Volumes Finis Multi-échelles)
    - Aarnes, Lie, Krogstad (Applications à des modèles plus complexes : Black-Oil, puits)
- Méthode multi-échelle pour un problème de transport (Henning, Ohlberger '10 et Hou, Liang '09)
- Objectif : Construire une nouvelle méthode multi-échelle pour résoudre un problème de transport

Plan pour construire une nouvelle méthode multi-échelle

- Partir de résultats d'homogénéisation périodique (en partie nouveaux)
- Définir une méthode multi-échelle permettant de bien approcher la solution d'un problème périodique
- Démontrer une estimation *a priori* de l'erreur due à cette méthode
- Faire en sorte que la méthode soit applicable dans des cas non périodiques

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

Cas du transport d'un traceur en milieu poreux

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho^*(x^*)\frac{\partial c^*}{\partial t^*}(t^*,x^*)+b^*(x^*)\cdot\nabla c^*(t^*,x^*)- & \\ \qquad\qquad \operatorname{div}\left(A^*(x^*)\nabla c^*(t^*,x^*)\right) & =0 \text{ dans } (0,\mathcal{T})\times\Omega \\ \qquad\qquad c^*(0,x^*) & =c^0(x^*) \text{ dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

avec $\operatorname{div}(b^*)=0$

- l longueur caractéristique de variation de ρ^*, b^*, A^*
- L_R longueur caractéristique de Ω,
- Hypothèse de séparation d'échelle : $\varepsilon=\frac{l}{L_R}\ll 1$,
- Autres grandeurs caractéristiques : T_R, ρ_R, b_R, c_R, A_R
- $\Omega_\varepsilon=\left\{\frac{x^*}{L_R}\mid x^*\in\Omega\right\}$ et $T=\frac{\mathcal{T}}{T_R}$
- $$x=\frac{x^*}{L_R},\ t=\frac{t^*}{T_R},\ \rho^\varepsilon(x)=\frac{\rho^*(x^*)}{\rho_R}$$
  $$b^\varepsilon(x)=\frac{b^*(x^*)}{b_R},\ A^\varepsilon(x)=\frac{A^*(x^*)}{A_R},\ u_\varepsilon(t,x)=\frac{c^*(t^*,x^*)}{c_R}$$

Problème adimensionné

(1) devient

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{b_R T_R}{L_R \rho_R} b^\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \frac{A_R T_R}{L_R^2 \rho_R} \operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right) &= 0 & \text{dans } (0,\, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0, x) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

À l'échelle fine : $\mathbf{Pe}_{loc} = \frac{l b_R}{A_R}$

À l'échelle macroscopique : $\mathbf{Pe} = \frac{L_R b_R}{A_R}$

Remarque : $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{Pe}_{loc}$

Choix d'échelle : $Pe_{loc} = 1$ et $T_R = \frac{L_R^2 \rho_R}{A_R}$, d'où

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon\right) = 0 \text{ dans } (0,\, T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0, x) = u^0(x) \text{ dans } \Omega_\varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

Cas périodique

Soit $u_\varepsilon \in L^2\left(\mathbb{R}_+, H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) & = 0 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(0,x) & = u^0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{3}$$

avec les hypothèses :

- b, A et ρ Y-périodiques sur $Y = (0,1)^N$,
- ρ borné,
- b, A et ρ réguliers par morceaux mais pouvant être discontinus
- $\operatorname{div}(b) = 0$,
- il existe $\rho_{min} > 0$ tel que $\forall y \in Y, \quad \rho(y) \geqslant \rho_{min}$,
- A coercive,
- u^0 régulière.

Développement asymptotique avec dérive

- Postulat

$$u_\varepsilon(t,x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

  - b^* : vecteur constant (la dérive),
  - $u_i(t,x,y)$: fonctions Y-périodiques par rapport à y
- Développement asymptotique injecté dans (3)
- Identification des termes par puissance de ε

Propriétés déduites du développement asymptotique (1/2)

- Définition de la dérive

$$b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y)dy \text{ avec } \bar{\rho} = \int_Y \rho(y)dy$$

- $$u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y\right) = u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$$

- w_i solution Y-périodique du problème de cellule

$$b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \mathrm{div}_y \left(A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right)\right) = \rho(y) b^* \cdot e_i, \qquad \text{sur } Y$$

Propriétés déduites du développement asymptotique (2/2)

- Matrice de diffusion homogénéisée

$$A^*_{i,j} = \int_Y A(y)\,(\nabla_y w_i + e_i)\cdot(\nabla_y w_j + e_j)\,dy$$

- u_0 solution du problème *homogénéisé*

$$\bar{\rho}\partial_t u_0 - \mathrm{div}(A^*\nabla u_0) = 0$$

- $$u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) w_i(y)$$

- Remarque : u_0 solution uniquement d'un problème de diffusion mais

$$\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$$

solution de

$$\bar{\rho}\partial_t \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon - \mathrm{div}(A^*\nabla \tilde{u}_\varepsilon) = 0$$

Solution approchée et convergence

Théorème (Allaire, Mikelić, Piatnitski '10)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| u_\varepsilon(t,x) - u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} = 0$$

Théorème (Allaire, Desroziers, Enchéry, Ouaki '12)

$$\left\| u_\varepsilon(t,x) - u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leqslant C\varepsilon$$

Ce théorème justifie l'approximation :

$$u_\varepsilon(t,x) \approx u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\text{i.e.} \quad u_\varepsilon(t,x) \approx u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad (4)$$

Remarque sur ce dernier résultat

- $$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
- L'approximation (4) se réécrit :

$$u_\varepsilon(t,x) \approx u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\widehat{w}_i^\varepsilon(x) - x_i\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$$

- Début d'un développement de Taylor, passage en coordonnées harmoniques (Kozlov '80)

$$u_\varepsilon(t,x) \approx u_0\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) = \tilde{u}_\varepsilon\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x)\right)$$

avec $\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u_0\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$.

- Objectif : reprendre cette idée pour définir une méthode multi-échelle (voir Allaire, Brizzi '05 pour le cas elliptique)

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

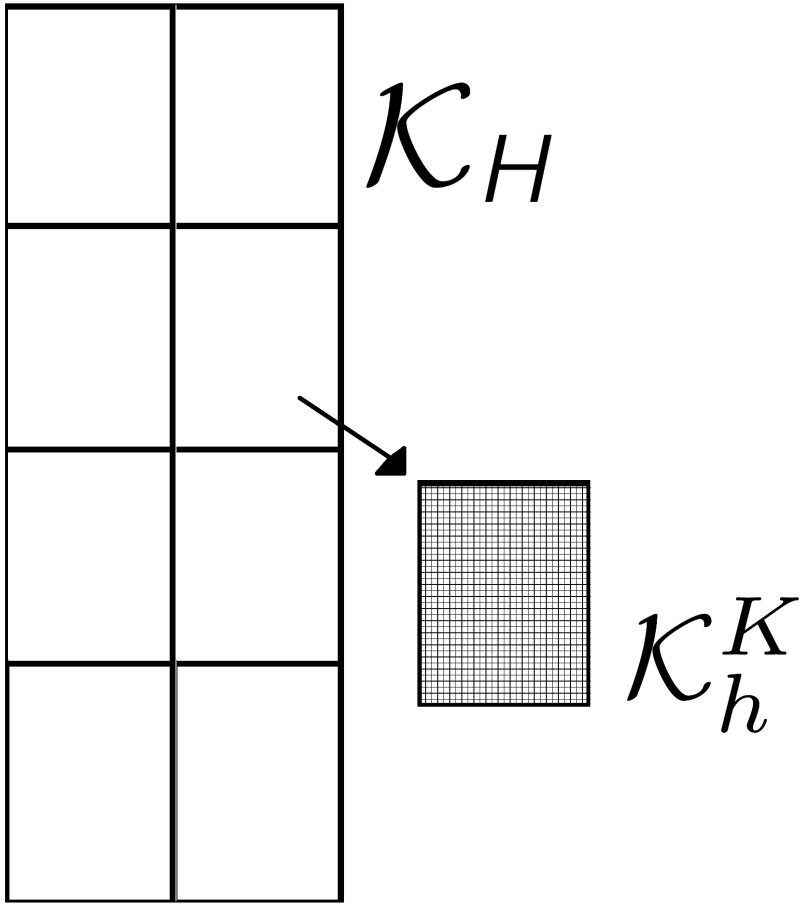
Définition du problème non périodique

- Le domaine Ω est un pavé
- On note $_\#$ la périodicité au bord du domaine
- $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2_\#(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,T), H^1_\#(\Omega)\right)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{c} \rho^\varepsilon(x)\,\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x)\cdot\nabla u_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x)\,\nabla u_\varepsilon\right) = 0 \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ u_\varepsilon(0,x) = u^0(x) \text{ dans } \Omega \\ u_\varepsilon \text{ est } \Omega\text{-périodique} \end{array}\right. \tag{5}$$

- Deux maillages considérés :
  - Un maillage grossier $\mathcal{K}_H$
  - Un maillage fin $\mathcal{K}_h$ local

Principe de la méthode



- Résolution sur le maillage fin d'un problème de cellule par maille grossière en utilisant un maillage fin local $\mathcal{K}_h^K \Rightarrow \widetilde{w}^{\varepsilon,H}$
- Le maillage fin peut potentiellement ne jamais être complètement construit
- Les problèmes de cellule peuvent être résolus en parallèle
- Construction des fonctions $\Phi_l^{\varepsilon,H}$ en composant des fonctions de base Φ_l^H d'une méthode $\mathbb{P}_k$ ou $\mathbb{Q}_k$ Lagrange associée au maillage $\mathcal{K}_H$, avec la fonction $\widetilde{w}^{\varepsilon,H}$:
$$\Phi_l^{\varepsilon,H} = \Phi_l^H \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}, l = 1, ..., D_H$$
- Système linéaire construit à partir de ces fonctions de base et résolu au niveau grossier

Définition des problèmes de cellule

Pour chaque maille grossière K et chaque direction i, $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}\right) & = & \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^{*,K} \cdot e_i \quad \text{dans } K, \\ \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} & = & x_i \quad \text{sur } \partial K, \end{array} \right. \tag{6}$$

même problème que celui dont $\widehat{w}^\varepsilon$ est solution avec des conditions aux bords linéaires et

$$b^{*,K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x) dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x) dx}$$

- $\widetilde{w}^{\varepsilon,H}$ définie par $\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_{|K} = \widetilde{w}^{\varepsilon,K}$
- $V_{\varepsilon,H}$: espace d'approximation engendré par les fonctions

$$\Phi_l^{\varepsilon,H} = \Phi_l^H \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}$$

Définition du problème semi-discretisé

On cherche $u_{\varepsilon,H}$ solution dans $\mathcal{C}^\infty\left((0,T), V_{\varepsilon,H}\right)$ du problème variationnel

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}, \quad \displaystyle\int_\Omega \Big(\rho^\varepsilon \partial_t u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} & & \\ \qquad\qquad + A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,H} \cdot \nabla v_{\varepsilon,H}\Big)\, dx & = & 0 \\ u_{\varepsilon,H}(0,x) & = & \pi_{\varepsilon,H} u^0(x) \end{array}\right. \tag{7}$$

avec

$$\pi_{\varepsilon,H} v = (\pi_H v) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)$$

Hypothèses

- Les problèmes de cellule (6) sont résolus de manière exacte sur chaque maille grossière K,
- Le système d'équations différentielles ordinaires en temps (7) est également résolu de manière exacte

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

Énoncé de l'estimation d'erreur en temps continu

Théorème

On note $u_{\varepsilon,H}$ la solution numérique du problème (7)
Il existe une constante C indépendante de ε et H telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C\left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon}\left(H^{k+1} + \varepsilon\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right), \tag{8}$$

où

$$\|u\|^2_{\Omega_T} = \|u\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))} + |u|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}$$

Remarques sur l'estimation d'erreur

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C\left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon}\left(H^{k+1} + \varepsilon\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right)$$

- H^k obligatoire pour une méthode $\mathbb{P}_k$ ou $\mathbb{Q}_k$ Lagrange sur $\mathcal{K}_H$
- $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$: terme de résonance
- Si $b^* = O(1)$, estimation d'erreur non convergente
- Point de vue physique : la vitesse homogénéisée est $\frac{b^*}{\varepsilon}$
- Terme $\frac{b^*}{\varepsilon}$ présent car le problème de convection-diffusion est résolu avec des éléments $\mathbb{P}_k$ ou $\mathbb{Q}_k$ Lagrange
  Autre solution, partir de méthodes plus adaptées. Par exemple :
  - Méthodes utilisant un décentrement (SUPG, ...)
  - Méthode des caractéristiques (implémentée en pratique)
- Estimation d'erreur dans un cas multi-échelle hétérogène totalement discret sans terme $\frac{b^*}{\varepsilon}$ mais basée sur des hypothèses plus contraignantes sur les paramètres ρ^ε, b^ε et A^ε (Henning, Ohlberger '10)

Idée de la preuve en majorant un terme

- On applique le lemme suivant avec $v_{\varepsilon,H} = \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon(t,x)$

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C \inf_{v_{\varepsilon,H}} \Bigg(\|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} + \|D_t\left(u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)} + \left\| \int_\Omega D_t\left(u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\right) \right\|_{L^2((0,T))} + \|\left(u_{\varepsilon,H} - v_{\varepsilon,H}\right)(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \Bigg) \quad (9)$$

- Rappel : $\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u_0\left(t, x - \dfrac{b^* t}{\varepsilon}\right)$
- On veut majorer le terme $X_1 = |u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}$

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant G_1 + G_2 + G_3,$$

où

$$G_1 = \|\nabla u_\varepsilon - \nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N},$$

$$G_2 = \|\nabla\left(\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\right)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N},$$

$$\text{et} \quad G_3 = \|\nabla\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N},$$

Idée de la preuve en majorant un terme

- Pour $G_1 = \|\nabla u_\varepsilon - \nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}$: résultats d'homogénéisation + développement de Taylor $\Rightarrow$

$$G_1 \leqslant C\varepsilon$$

- Pour $G_2 = \|\nabla\left(\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}$: résultats d'interpolation classiques $\Rightarrow$

$$G_2 \leqslant CH^k$$

- Pour $G_3 = \left\|\nabla\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}$.
$\widetilde{w}^{\varepsilon,H} = \widehat{w}^\varepsilon +$ terme de couche limite : homogénéisation sur chaque maille $\Rightarrow$

$$G_3 \leqslant C\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$$

- Au final

$$X_1 \leqslant G_1 + G_2 + G_3 \leqslant C\left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right)$$

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

Cas d'application périodique sur FreeFem++

- $\Omega = (0,1)^2$,
- $A^\varepsilon = 1$, $\rho^\varepsilon = 1$,

$$b^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} -\delta \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_x^0 \\ \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_y^0 \end{pmatrix}$$

  avec $\delta = 100$, $b_x^0 = b_y^0 = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{200}$
- Maillage grossier 800 triangles de diamètre :

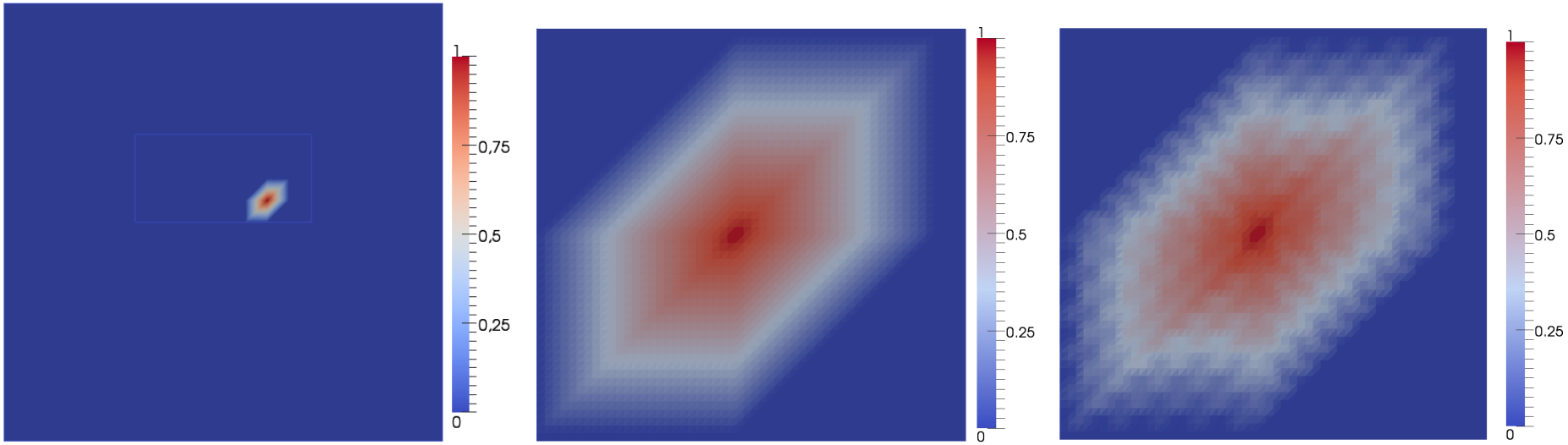
$$H = \frac{1}{20} = 10\varepsilon$$

- Chaque maille grossière contient 5 000 triangles de diamètre :

$$h = \frac{1}{1000} = \frac{\varepsilon}{5}$$

- Maillage fin global : 4 000 000 de triangles

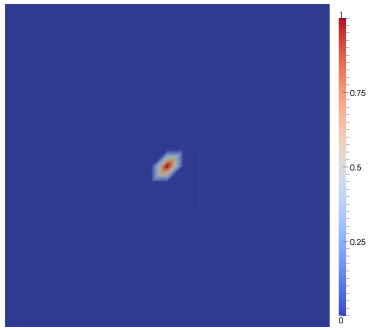
Une fonction de base multi-échelle



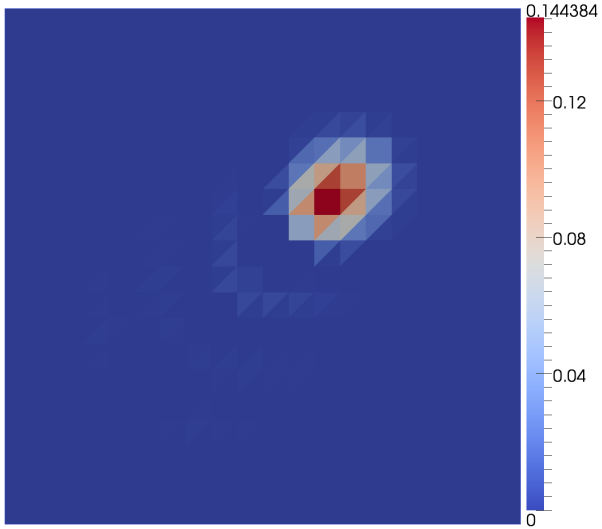
Φ_i^H Zoom sur Φ_i^H $\Phi_i^{\varepsilon,H}$

Figure: Une fonction de base définie sur le maillage grossier (Φ_i^H) et la fonction de base multi-échelle associée ($\Phi_i^{\varepsilon,H}$)

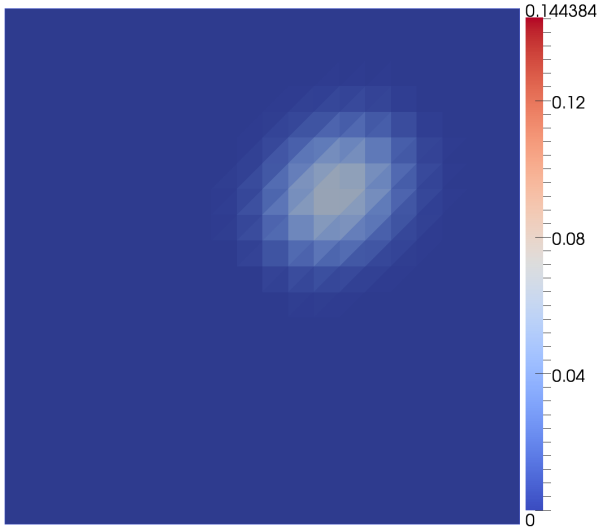
Solution grossière avec la méthode multi-échelle



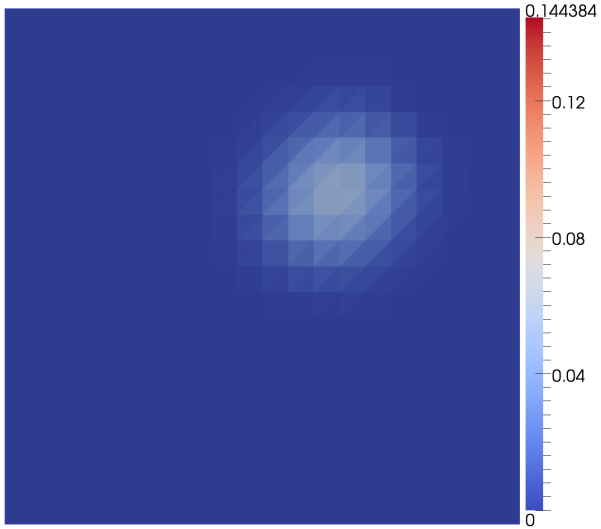
Condition initiale



Solution grossière



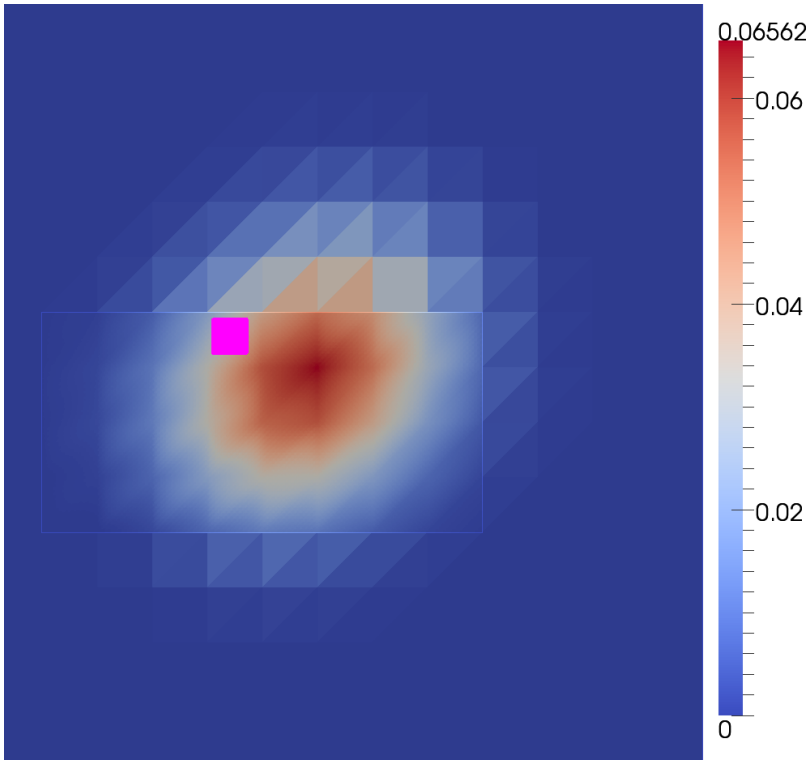
Solution multi-échelle



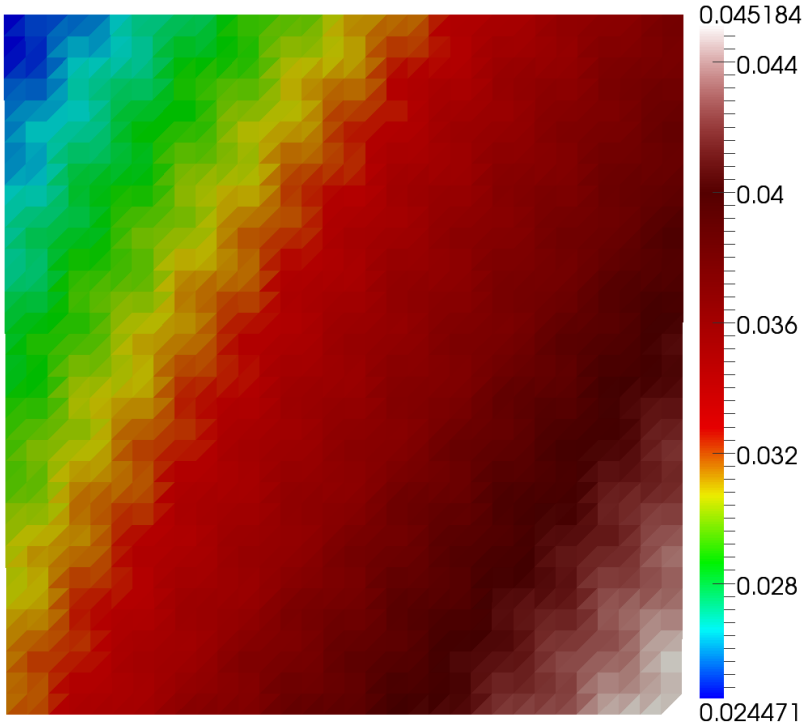
Solution homogénéisée

- Dispersion de Taylor prise en compte

Solution fine avec la méthode multi-échelle



Solution multi-échelle



Zoom de la solution multi-échelle

Figure: La figure de droite est un zoom de la solution multi-échelle. La partie extraite est indiquée avec une pastille rose sur la première figure.

Perspectives pour le problème de transport

- Amélioration de l'estimation d'erreur en intégrant une méthode prenant en compte le terme de convection
- Test de la méthode sur des cas de résolution couplée avec celle de l'équation de Darcy
- Étude des non-linéarités possibles

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

Contexte de la méthode

- Présentation de la méthode introduite dans : Z. Chen, Th.Y. Hou. *A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients*. Math. Comput., 72(242) :541-576, 2002.
- Écoulement diphasique, immiscible, incompressible et sans pression capillaire dans un milieu poreux
- Discrétisation découplée (*IMPES* ou *IMPIMS*)

$$\left\{\begin{array}{rcl} v & = & -k\lambda_T \nabla P \\ \operatorname{div}\left(v\left(P^{n+1}, S^n\right)\right) & = & 0 \\ \phi\frac{S^{n+1}-S^n}{\Delta t} + \operatorname{div}\left(f_w\left(S^\star\right) v\left(P^{n+1}, S^n\right)\right) & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

- Méthode multi-échelle pour le problème en pression
- Reconstruction des flux fins
- Généralisation possible pour un modèle Black-Oil, un maillage CPG et des conditions aux bords données par des puits

Une première méthode

Méthode dite *locale*

- Fonctions de base ψ_Σ et ϕ_Σ (vitesse et pression) pour l'interface $\Sigma = K \cap L$

$$\begin{cases} \psi_\Sigma & = & -k\,\lambda_T\,\nabla\phi_\Sigma & \text{dans} & K \cup L \\ \mathrm{div}(\psi_\Sigma) & = & \omega_{\Sigma,K} & \text{dans} & K \\ \mathrm{div}(\psi_\Sigma) & = & \omega_{\Sigma,L} & \text{dans} & L \\ \psi_\Sigma \cdot \mathrm{n} & = & 0 & \text{sur} & \partial K \cup L \end{cases}$$

- k : perméabilité
- λ_T : mobilité totale (dépend des perméabilités relatives et des viscosités des fluides)
- $\omega_{\Sigma,K}$, $\omega_{\Sigma,L}$ sont des fonctions de poids dépendant de la mobilité λ_T
- Flux de ψ_Σ unitaire à travers Σ
- Reconstruction des vitesses fines

$$v = \sum V_\Sigma\,\psi_\Sigma$$

Une deuxième méthode

Méthode dite *globale* (Efendiev, Hou '09)

- Intégration d'une information *globale* dans les fonctions de base
  - Améliore les résultats dans des cas où les hétérogénités varient également à l'échelle du maillage grossier (pas de séparation d'échelle)
  - Résolution d'un problème monophasique pour calculer une vitesse v^{mono}
- Fonctions de base ψ_Σ et ϕ_Σ pour le couple $\{\Sigma, K\}$

$$\begin{cases} \psi_{\Sigma,K} & = & -k\lambda_T \nabla \phi_{\Sigma,K} & \text{dans} & K \\ \mathrm{div}(\psi_{\Sigma,K}) & = & \omega_{\Sigma,K} & \text{dans} & K \\ \psi_{\Sigma,K} \cdot \mathrm{n} & = & 0 & \text{sur} & \partial K \setminus \Sigma \\ \psi_{\Sigma,K} \cdot \mathrm{n} & = & \dfrac{v^{mono} \cdot \mathrm{n}}{\int_\Sigma v^{mono} \cdot \mathrm{n}} & \text{sur} & \Sigma \end{cases}$$

- Flux total unitaire à travers Σ avec répartition suivant v^{mono}

Mise à jour partielle des fonctions de base

- Problème non linéaire : fonctions de base dépendent de $\lambda_T(S)$
- Les fonctions de base ne sont recalculées que si le ratio de mobilité fine a *significativement* changé durant le calcul au sein d'une maille fine k incluse dans la maille grossière K

$$E_k = \frac{\lambda_T(S_k^n)}{\lambda_T(S_k^{last})}$$

- Pour une maille donnée K, on remet à jour les fonctions ψ_Σ et ϕ_Σ pour tout $\Sigma \subset \partial K$ si

$$\max(E_k) > 1 + \varepsilon_{tol} \quad \text{ou} \quad \min(E_k) < \frac{1}{1 + \varepsilon_{tol}}$$

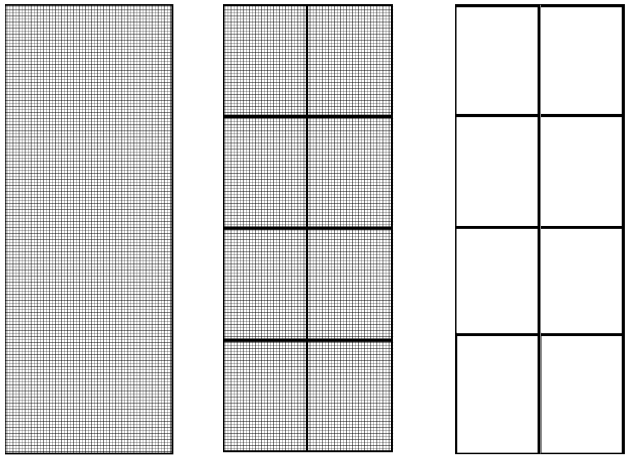
- Grande amélioration des performances des méthodes

1. Méthode multi-échelle pour un problème de transport
   - Définition du problème modèle
   - Résultats d'homogénéisation périodique
   - Construction de la méthode multi-échelle
   - Estimation d'erreur de la méthode
   - Résultats numériques obtenus

2. Étude d'une autre méthode multi-échelle pour un problème elliptique
   - Rappel de la méthode
   - Mise en œuvre adaptée au calcul haute performance

Implémentation

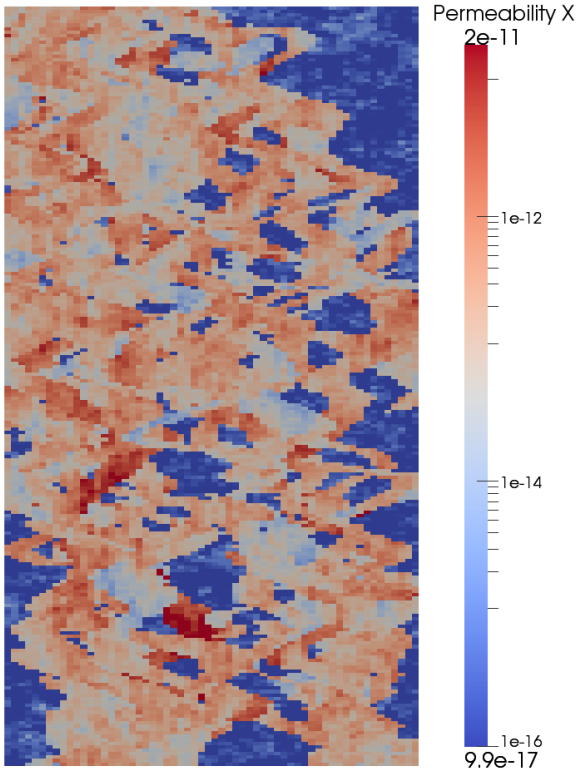
- Développements dans un prototype utilisant la plate-forme de développement *Arcane* (IFPEN, CEA-DAM)
- Maillage multi-échelle
  - Agglomération cartésienne



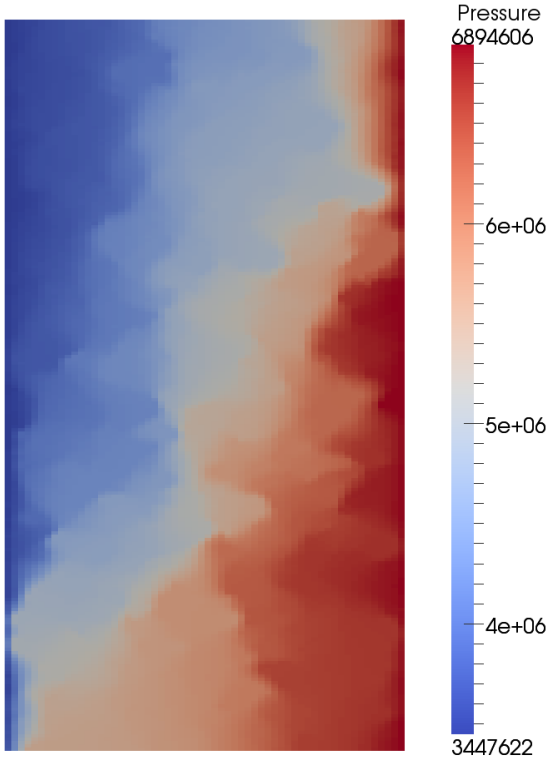
  - Mise en place d'un mailleur à deux échelles parallèle
- Utilisation de schémas volumes finis (deux-points) pour calculer les fonctions de base

Résultats numériques (1/4)

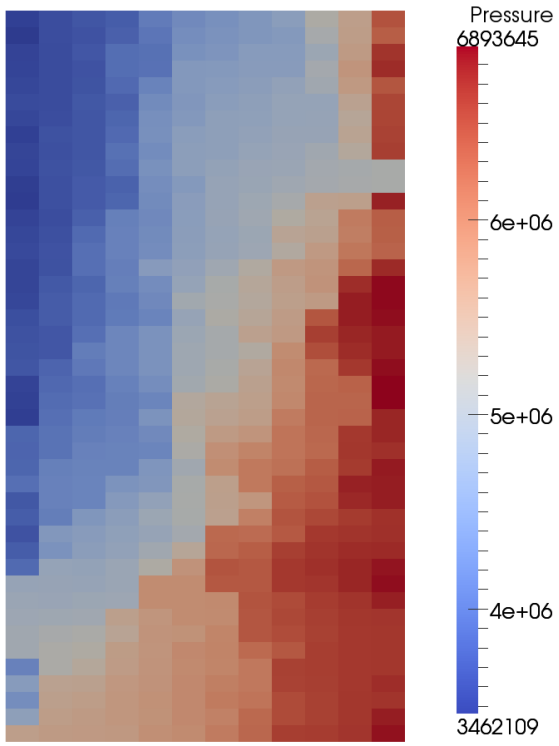
Couche 85 du cas SPE 10 (60×220 mailles)



Perméabilité



Pression fine

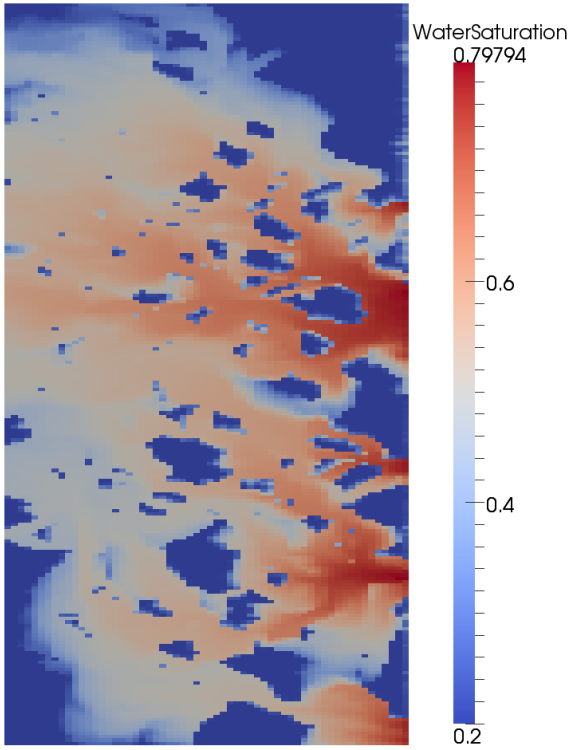


Pression grossière (12×44)

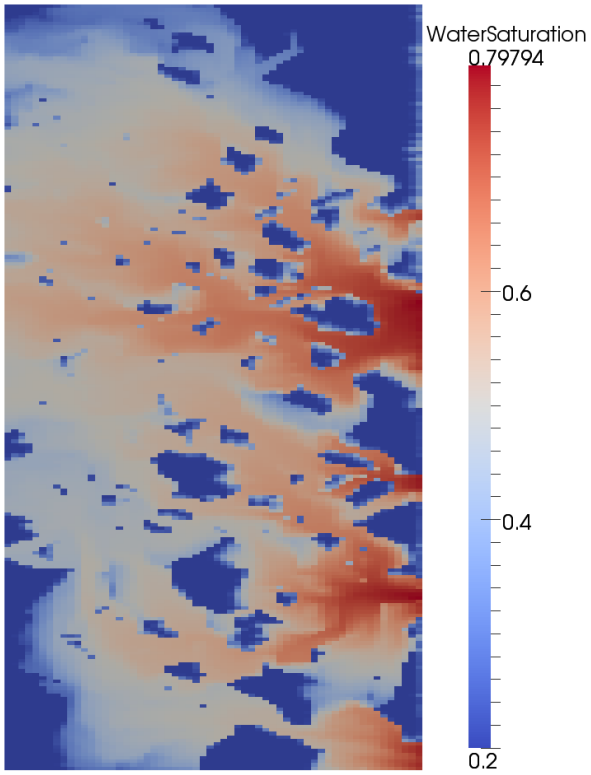
Résultats numériques (2/4)

Couche 85 du cas SPE 10 (60×220 mailles)

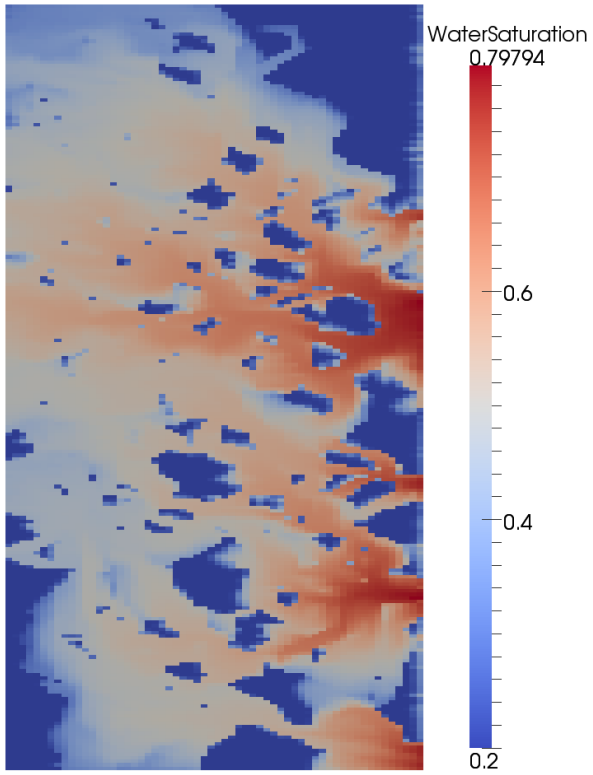
- Méthode globale, $\varepsilon_{tol} = 0,7$



Saturation fine



Saturation reconstruite
(vitesses grossières 12×44)

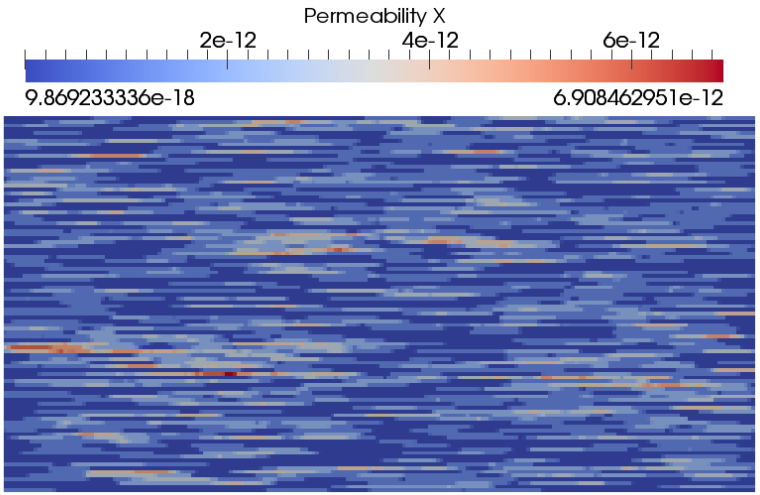


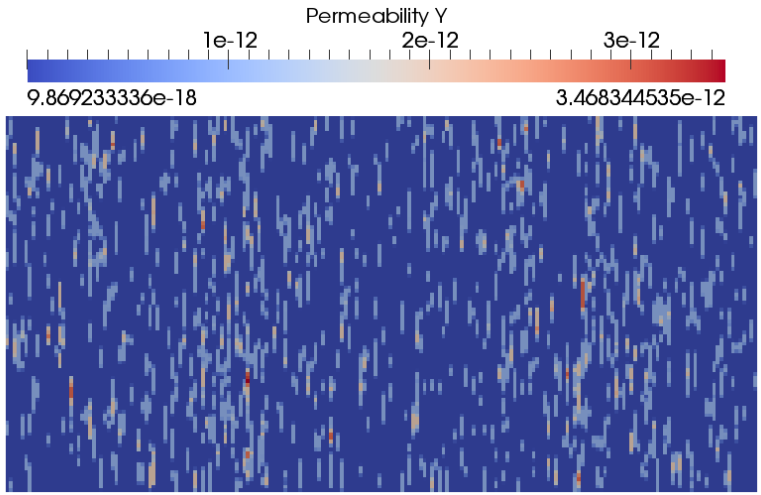
Saturation reconstruite
(vitesses grossières 4×4)

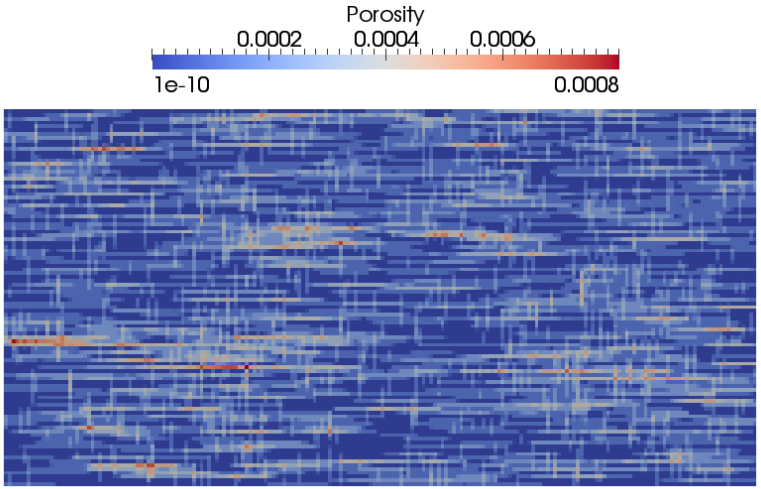
Résultats numériques (3/4)

Présentation du cas fracturé (200 × 100 mailles)

- Tenseur diagonal



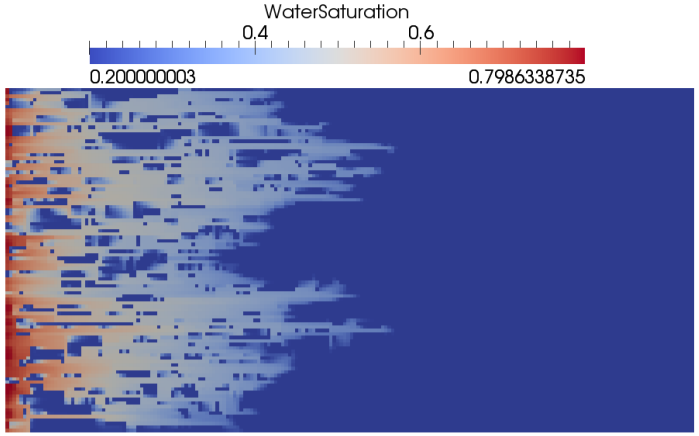




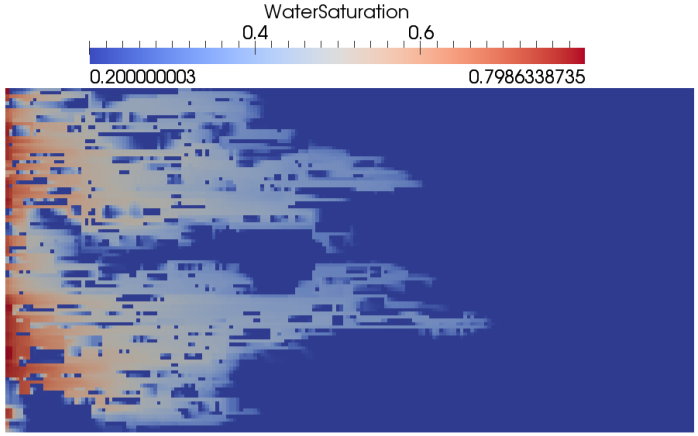
Résultats numériques (4/4)

Cas fracturé (200 × 100 mailles)

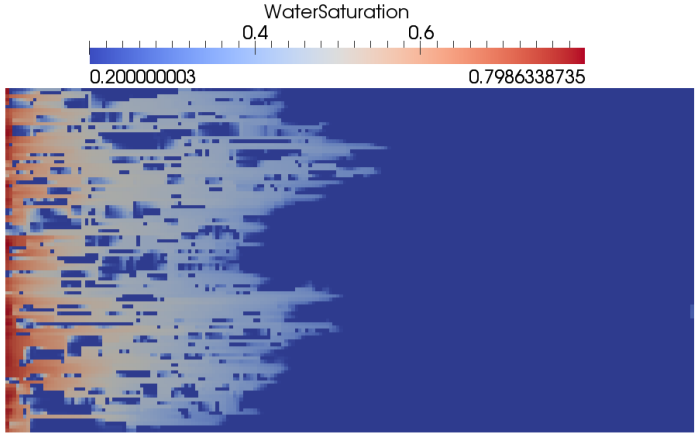
- Maillage grossier 10×10
- Méthode globale avec $\varepsilon_{tol} = 0,7$



Saturation fine



Méthode locale

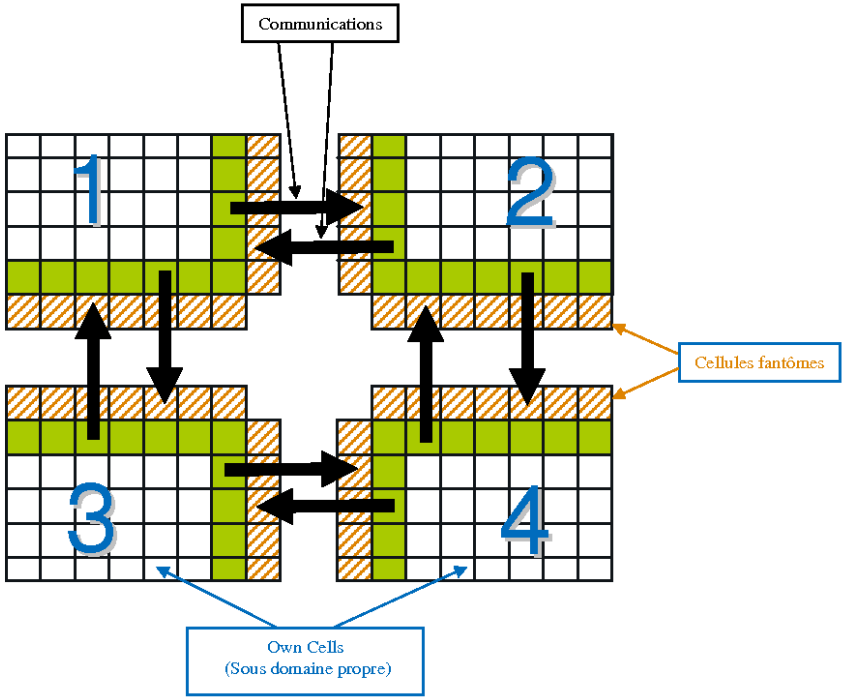


Méthode globale

Stratégie de parallélisation

Approche *MPI*

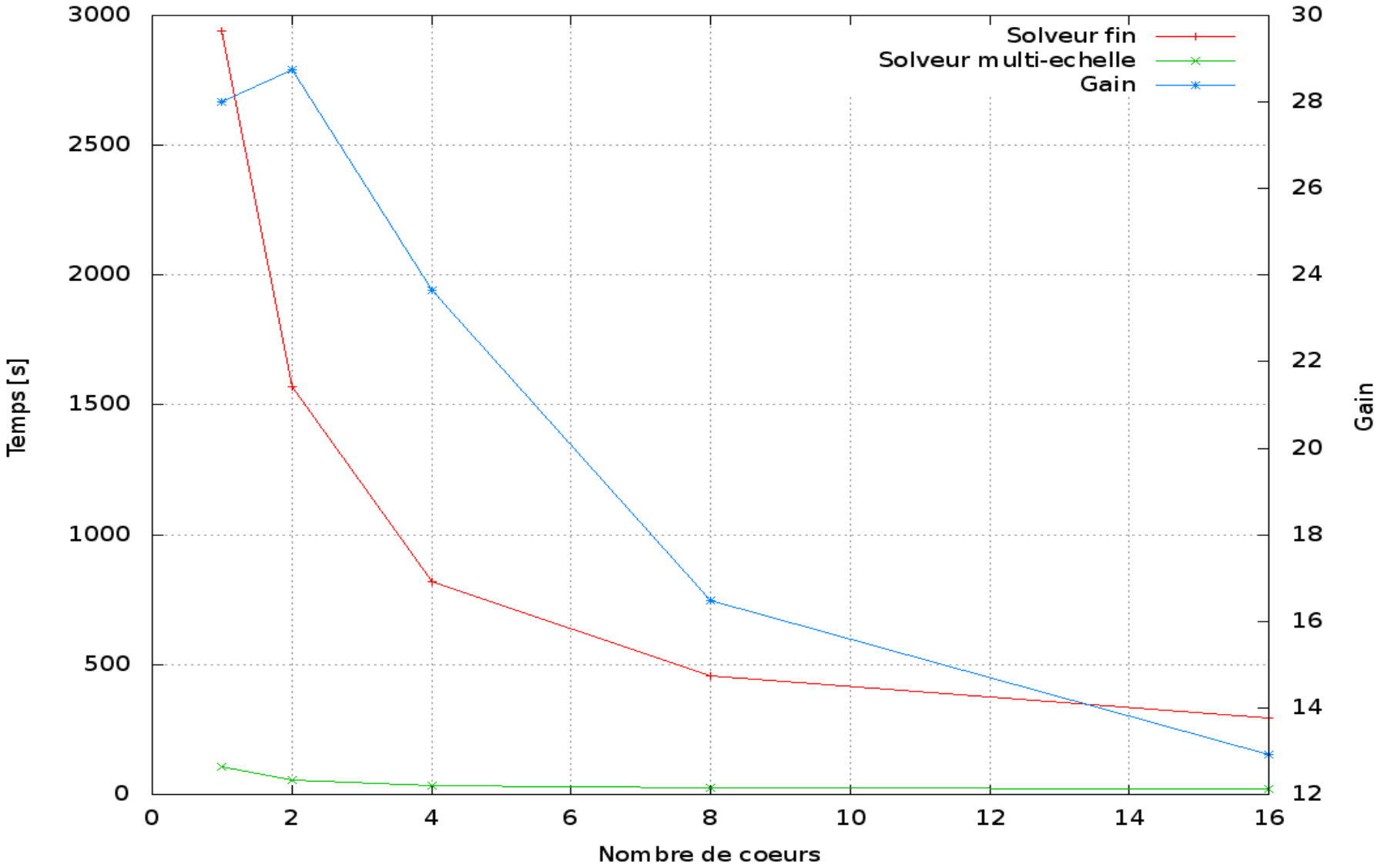
- Les données sont distribuées sur les threads *MPI*



- Chaque maille grossière fantôme implique que toutes les mailles fines associées sont fantômes
  - Synchronisation d'une variable fine extrêmement coûteuse : obligatoire pour la méthode locale et limitée pour la méthode globale

Premiers résultats de performances

SPE 10 3D ($60 \times 220 \times 85$ mailles fines et $10 \times 20 \times 5$ mailles grossières)



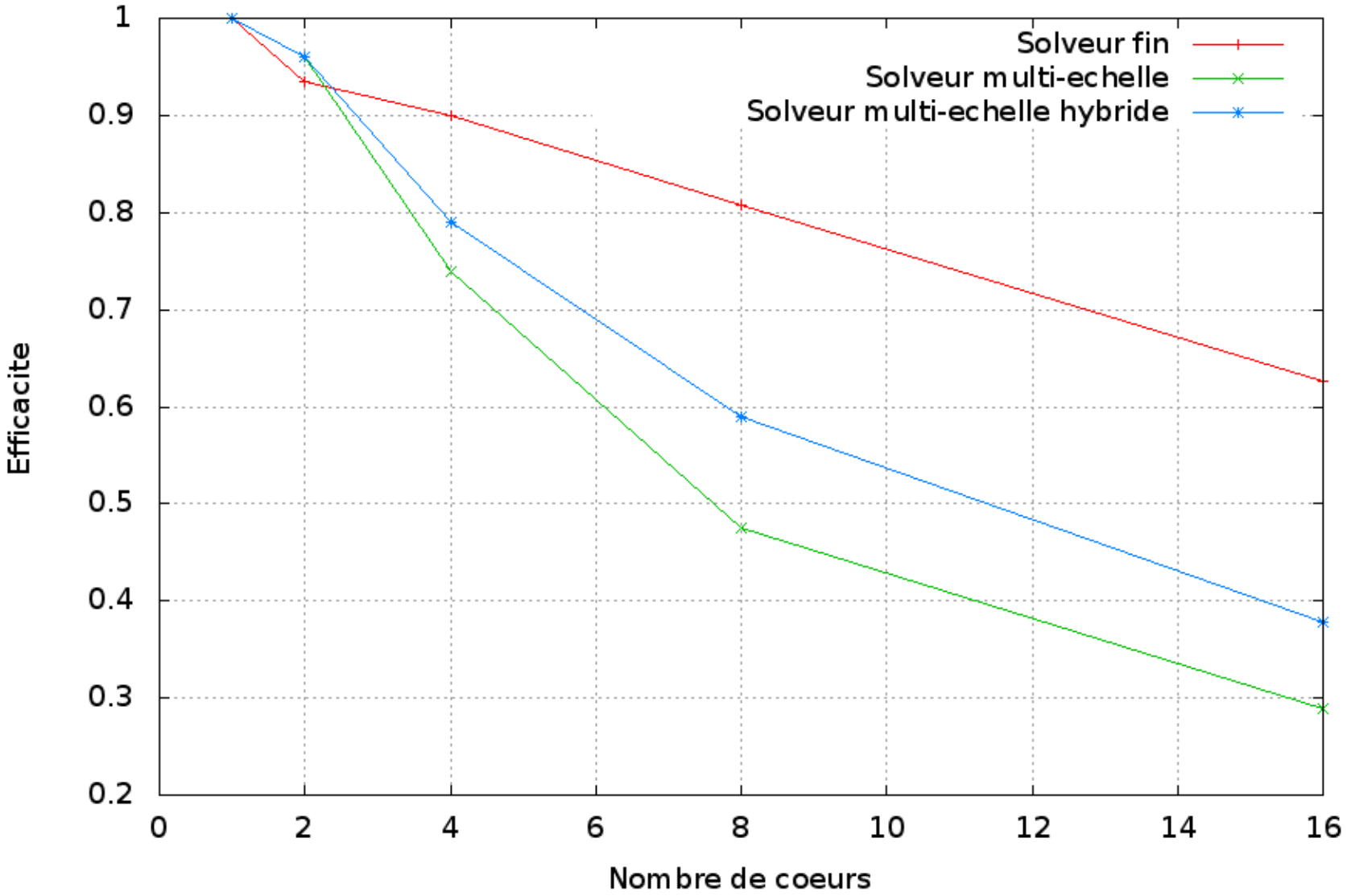
Autre stratégie de parallélisation

Approche *hybride*

- Où sont les problèmes de scalabilité ?
  - Gros volume de communications
  - Système grossier trop "petit" (problème à 1 200 mailles sur 16 processus MPI)
- Passage à parallélisme *hybride*
  - Utilisation de processus *MPI* + processus léger (*threads*)
  - Solveur grossier n'utilise que les ressources *MPI*
  - Calcul des fonctions de base par *parallélisme de tâches*

Efficacité (version hybride)

SPE 10 3D ($10 \times 20 \times 5$)



En résumé

Performances de la méthode hybride (1/2)

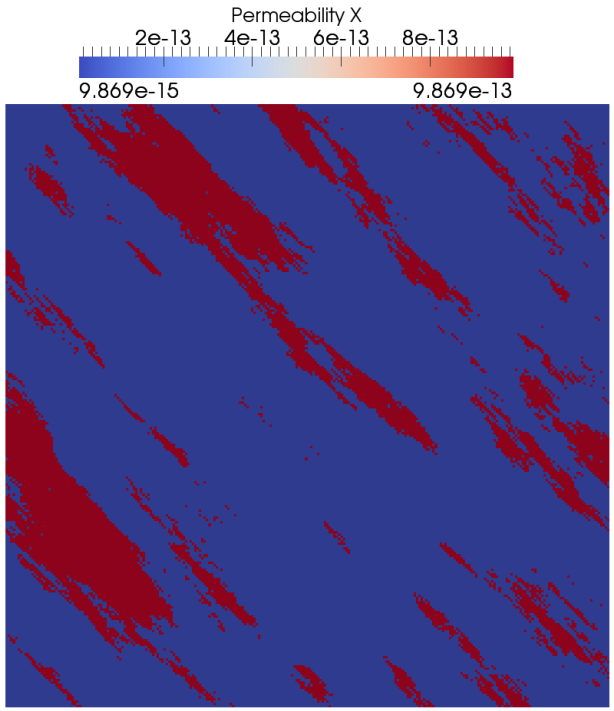
- Résultats obtenus sur ENER110 (Supercalculateur d'IFPEN) avec maillage grossier $10 \times 20 \times 5$
- Erreur relative L^2 pour la saturation : $4,84\%$

Nb cœurs	Solveur fin	Solveur multi-échelle	Gain
1	$2\,939,69$ s	$105,00$ s	28
2	$1\,571,63$ s	$54,65$ s	$28,76$
4	$817,27$ s	$33,24$ s	$24,59$
8	$454,81$ s	$22,26$ s	$20,43$
16	$293,56$ s	$17,36$ s	$16,91$

En résumé

Performances de la méthode hybride (2/2)

- Résultats obtenus sur 128 cœurs CURIE pour un cas à 16 777 216 mailles : 256 mailles fines dans chaque direction avec un maillage grossier $32 \times 32 \times 32$



Solveur fin	Solveur multi-échelle	Gain
$22\,153,31$ s	$466,80$ s	$47,46$

- Objectif : Effectuer une simulation sur un cas à 1 milliard de mailles (cf *Giga-Cell Simulation*, Saudi Aramco)

Perspectives pour le problème en pression

- Étude du modèle de programmation parallèle à continuer
- Décomposition de domaine au niveau grossier
- Comparaison avec un code industriel
- Étude d'un préconditionneur physique multi-échelle
- Poursuite des tests en parallèle avec un modèle Black-Oil, une géométrie plus complexe et des puits

Merci de votre attention