



HAL
open science

Processus spatio-temporels en géométrie stochastique et application à la modélisation de réseaux de télécommunication

Frédéric Morlot

► **To cite this version:**

Frédéric Morlot. Processus spatio-temporels en géométrie stochastique et application à la modélisation de réseaux de télécommunication. Mathématiques générales [math.GM]. Télécom ParisTech, 2012. Français. NNT : 2012ENST0026 . pastel-00931407

HAL Id: pastel-00931407

<https://pastel.hal.science/pastel-00931407>

Submitted on 15 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



EDITE - ED 130

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

TELECOM ParisTech

Spécialité « Mathématiques »

présentée et soutenue publiquement par

Frédéric MORLOT

le 2 juillet 2012

Titre

Processus spatio-temporels en géométrie stochastique et application à la modélisation de réseaux de télécommunication

Directeur de thèse : **François BACCELLI**

Jury

M. Daniel KOFMAN, Professeur, Télécom Paristech
M. Sergeï Zuyev, Professeur, Chalmers
M. Alexandre PROUTIERE, Professeur, KTH
M. Thomas BONALD, Professeur associé, Télécom Paristech
Mme Catherine GLOAGUEN, Experte Senior, Orange Labs
M. François BACCELLI, Directeur de recherche, INRIA

Président du jury
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinatrice
Directeur

TELECOM ParisTech

École de l'Institut Télécom - membre de ParisTech

à Tom Tit

Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier mon directeur de thèse François Baccelli, dont l'intelligence, le dévouement et la patience m'ont permis de mener à bien ce travail. Outre sa culture mathématique encyclopédique, sa curiosité insatiable m'a très agréablement accompagné, qu'il s'agisse de géopolitique, de langues indo-européennes ou de pédagogie...Je lui dois probablement une partie de ma vocation d'enseignant, alors qu'adolescent je lisais ses articles dans *Pour la Science*. J'en profite pour saluer tous les autres guides que j'ai trouvés sur le chemin des belles mathématiques, de Marie-Claude Guillemin pour mes premiers pas à mon oncle Jean et aux rédacteurs de la revue *Tangente* pour ma jeunesse, en passant par Jean-Pierre Petit, ses énigmatiques illustrations du retournement de la sphère et ses merveilleux albums d'*Anselme Lanturlu*.

Je ne saurais être trop reconnaissant envers mes deux rapporteurs, Sergeï Zuyev et Alexandre Proutière, de s'être attelés à la tâche de relire mon travail et de m'avoir fait part de leurs précieux commentaires. Je remercie vivement Daniel Kofman pour avoir accepté si spontanément de me donner son aide, Thomas Bonald pour m'avoir donné le goût des probabilités lorsqu'il était mon professeur, et Catherine Gloaguen pour avoir été la compagne de longues discussions mathématiques.

Je voudrais remercier plus généralement tous mes collègues de France Télécom pour leur accompagnement sans faille : Salah et sa rigueur mathématique, Benoît, son sourire et sa disponibilité, Zwi, sa clarinette et son saxophone, Olfa et ses pâtisseries, Arturo et son cognac, Jean-Baptiste et ses anecdotes, Jean-Marc et sa montagne, Berna et sa chorale, Frédéric et ses cigares, Max et son rire, Zbigniew et son flegme, Thomas et son jazz, Ana-Maria et sa palinka, Cezary et sa vodka, Fabien et son whisky, Mathieu et ses balles à jongler, Frédérique et ses chocolats...J'espère ne pas en oublier, même si je sais que c'est impossible et que je leur demande par avance pardon.

Je souhaite aussi saluer tous mes collègues de laboratoire à l'INRIA, anciens comme nouveaux : Pierre, Bartek, Marc, Anne, Ana, Hélène, Justin, Florence, Bruno, Yogesh, Émilie, Mathieu, Mir-Omid, Anastasios, Ahmed, et tous les autres que j'aurais aimé mieux connaître.

Enfin, mes pensées les plus chères vont à ma famille, qui s'est fidèlement tenue au courant de mon travail, souvent avec intérêt, parfois avec sollicitude...À mes parents, à Fanny, à Agnès, à ma grand-mère. À mes amis, et surtout à Juliette.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	i
1. Théorie des processus ponctuels	1
1.1 Introduction	2
1.2 Tribu sur l'ensemble des mesures ponctuelles	2
1.3 Quelques applications	14
1.4 Transformée de Laplace	22
2. Un modèle de population à base de Poisson-lignes	29
2.1 Introduction	30
2.2 Le processus de Poisson-lignes	32
2.3 Le processus de Cox	40
2.4 Modèle de population	42
2.5 Modèle de réseau et probabilité de couverture	46
2.6 Deux généralisations	59
2.7 Meilleure prise en compte de la gestion des ressources radio	66
2.8 Dépendance temporelle	71
2.9 Conclusion	74
2.10 Annexe	76
3. Moutons et fortes têtes	81
3.1 Introduction	82
3.2 Le modèle à moutons	87
3.3 Fortes têtes et dynamique des hotspots	100
3.4 Calibration à l'aide des traces	117
3.5 Conclusion et perspectives	120
4. Les processus déterminantaux	125
4.1 Introduction	126

4.2	Les processus déterminantaux et la répulsion	130
4.3	La classe des processus de Ginibre	134
4.4	La GAF hyperbolique	148
4.5	Techniques de branchement	153
4.6	Conclusion	154
	Conclusion	157

INTRODUCTION

La géométrie stochastique, ou géométrie aléatoire, permet l'étude des formes géométriques sous un angle probabiliste. On trouvera une excellente introduction à cette discipline relativement récente dans [Sto95], même si de nombreux résultats ont été obtenus depuis, qu'ils soient théoriques (transports de mesures, processus déterminantaux, tessellations, stéréologie...) ou appliqués à la modélisation (télécommunications, médecine, écologie...).

Par exemple, si un opérateur mobile décide de dimensionner son réseau cellulaire, il a le choix entre utiliser un simulateur à grande échelle, ou mettre en place un modèle théorique fondé sur quelques hypothèses simples, qui lui permettent de calculer analytiquement certaines grandeurs utiles comme la probabilité de couverture. C'est dans ce second cas que l'emploi de la géométrie stochastique s'avère le plus fécond, car il fournit des outils comme le calcul de Palm qui donnent un sens précis à des idées intuitives comme celle "d'utilisateur typique" ou "d'antenne typique" (voir [Bac10]). D'une manière générale, le calcul de Palm se révèle extrêmement commode lorsqu'on travaille sur des grandeurs qui ne privilégient aucun point en particulier.

Cette thèse, qui a été effectuée pour partie dans les laboratoires de recherche d'Orange, pourrait aussi bien s'intituler *Les mouvements de foule*. En effet, nous nous intéressons particulièrement à la modélisation des utilisateurs dans un réseau cellulaire au cours du temps. Dans la littérature, la plupart des modèles représentent soit un seul individu au cours du temps (citons par exemple [Leb05]), soit une foule statique à un instant donné. Finalement, peu de modèles proposent une conjonction des deux approches (spatiale et temporelle). C'est ce à quoi nous nous employons.

Les traces récupérées dans le réseau mobile d'Orange et de ses filiales pour les besoins de nos expérimentations nous ont permis de créer des vidéos d'animation, qui ont été montrées au Grand Palais dans le cadre de l'exposition d'art numérique *Dans la Nuit, des Images*. Pour en savoir plus et voir les vidéos, on peut aller consulter le site Internet [Urb08]. Ces traces

concernaient trois évènements particuliers du mois de juin 2008, au cours desquels à chaque fois pour des raisons culturelles, une foule importante est spontanément descendue dans les rues d'une grande capitale européenne :

- la fête de la St-Jean (*Wianki*) à Varsovie et Cracovie (21 juin)



- la Fête de la Musique à Paris (21 juin)



- les derniers tours de l'Euro de football vus depuis Bucarest (13 juin), Madrid et Barcelone (28 juin). Le 13 juin était le jour d'un match

Italie-Roumanie très attendu par les Roumains. Le 28 juin était le jour de la finale, gagnée par les Espagnols.



Nous proposons ici trois modèles que nous espérons suffisamment diversifiés pour représenter les principaux comportements d'une foule en milieu urbain, comme observé dans les vidéos de [Urb08] :

- notre premier modèle, le plus générique, prend en compte la géométrie des rues dans une ville, et modélise une population stationnaire. Il est développé dans le chapitre 2
- le deuxième modèle introduit une inter-dépendance entre les individus pour rendre compte de la formation et du transfert de "points chauds" (*hotspots*). C'est l'objet du chapitre 3
- enfin, le troisième modèle s'intéresse à des comportements plus exceptionnels comme les mouvements de répulsion, voire de panique, ou les évacuations soudaines. On le trouvera au chapitre 4

Le premier et le troisième modèle font appel à la théorie des processus ponctuels, tandis que le deuxième s'appuie sur des résultats de type markovien. Avant de les présenter, nous proposons dans le chapitre 1 une introduction au formalisme de la géométrie stochastique, ainsi que la démonstration de nombreux résultats théoriques fondamentaux.

Cette thèse est rédigée de manière à être la plus autonome possible, c'est-à-dire lisible sans trop de prérequis par un néophyte de la géométrie aléatoire. C'est pourquoi nous avons pris le parti de réexposer plusieurs résultats déjà connus et démontrés dans la littérature. Cela est particulièrement vrai dans le chapitre 1, qui est conçu comme un cours magistral et dont les résultats sont déjà établis depuis longtemps; il ne faudrait donc pas y chercher la présence de travaux originaux de la part de l'auteur, mais plutôt une compilation de différents ouvrages de référence que nous espérons la plus claire possible. Plus généralement, chaque chapitre contient en introduction la liste précise des résultats à mettre au crédit de l'auteur, et ceux déjà connus qui ne sont rappelés ici que pour permettre une lecture linéaire de la thèse.

Chapitre 1

THÉORIE DES PROCESSUS PONCTUELS

Résumé

Dans ce chapitre entièrement théorique, nous exposons les fondements de la géométrie aléatoire, et nous proposons les démonstrations rigoureuses de plusieurs résultats implicitement admis par la communauté qui en fait usage. Ces résultats ont bien sûr été tous démontrés par le passé, notamment dans [Kal86] ou [Dal03], mais leur étude peut parfois se révéler rebutante. À celui qui malgré tout voudrait s'atteler à la tâche par exigence de rigueur, il faudra bien souvent réunir des fragments de plusieurs ouvrages différents pour reconstituer une preuve complète.

C'est dans le but d'éviter ce travail préalable que le présent chapitre a été écrit : il compile des résultats variés glanés dans la littérature, et propose quelques preuves complémentaires ou originales pour certains détails techniques. En l'occurrence, il s'agit de :

- la preuve que les unions finies de pavés bornés de \mathbb{R}^2 forment un anneau d'ensembles dans la démonstration du théorème 1.5. Cela permet d'appliquer un théorème plus général de Kallenberg au cas particulier des pavés, qu'ils soient ouverts, fermés ou semi-ouverts (voir à ce sujet la remarque 1.1).
- la démonstration du lemme 1.8 par une technique de pavés semi-ouverts.

Ce chapitre est conçu pour être compréhensible par un étudiant en mathématiques qui possède un bagage de premier cycle universitaire en analyse, en topologie et en théorie de la mesure. Cela dit, il peut être omis en première lecture.

1.1 Introduction

La théorie générale des processus ponctuels s'applique aux espaces dit polonais, c'est-à-dire les espaces métriques séparables (autrement dit, qui admettent une famille de points dénombrable et dense), et complets. Cela dit, pour la plupart des applications, l'espace ambiant considéré sera \mathbb{R}^2 ou une partie fermée de \mathbb{R}^2 . Ce sont évidemment des espaces polonais (considérer la famille des points à coordonnées rationnelles). Aussi, pour des raisons pédagogiques, nous nous limiterons au cas de \mathbb{R}^2 dans l'exposé qui suit.

Nous commençons par définir ce qu'est une mesure ponctuelle, puis nous étudions la tribu standard définie sur l'ensemble de ces mesures. En particulier, nous démontrons que cette tribu est engendrée par les "billards à n boules", c'est-à-dire les événements du type " Φ contient n points dans un rectangle donné". Cela nous permet par la suite de prouver toute une série de résultats sur les mesures ponctuelles aléatoires, comme la formule de Mecke, la caractérisation des processus simples par leurs probabilités vides, ou la caractérisation des processus déterminantaux par leurs intensités jointes. Cela nous permettra aussi dans le chapitre 2 de démontrer la mesurabilité de notre processus de population.

Dans tout le chapitre, si E désigne un espace topologique, on note $\mathcal{B}(E)$ sa tribu borélienne, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de E .

1.2 Tribu sur l'ensemble des mesures ponctuelles

Avant tout, voici un petit lemme très intuitif qui nous sera utile par la suite :

Lemme 1.1. *Soit E un espace topologique et $F \in \mathcal{B}(E)$, muni de la topologie induite. Alors*

$$\mathcal{B}(F) = \{A \in \mathcal{B}(E) / A \subset F\}.$$

Démonstration - Tous les ouverts de F s'écrivent comme l'intersection de F et d'un ouvert de E , donc ils appartiennent à $\mathcal{B}(E)$. Ainsi $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(E)$, et tout élément de $\mathcal{B}(F)$ est à la fois dans $\mathcal{B}(E)$ et inclus dans F . Réciproquement, soit $A \in \mathcal{B}(E)$ avec $A \subset F$. Posons :

$$\mathcal{T} = \{X \subset E / X \cap F \in \mathcal{B}(F)\}.$$

On vérifie sans peine que \mathcal{T} est une tribu sur E et qu'elle contient les ouverts de E . Donc elle contient $\mathcal{B}(E)$, et en particulier A :

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap F \in \mathcal{B}(F).$$

Or $A = A \cap F$, ce qui achève la preuve. ■

Par la suite, nous ferons implicitement usage de ce lemme toutes les fois que nous devons considérer la restriction d'une mesure ponctuelle à une partie de \mathbb{R}^2 , notamment pour les questions de mesurabilité lorsque nous partitionnerons le plan en carrés de plus en plus fins.

1.2.1 Premières définitions

Soit ϕ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour commencer, on pose la

Définition 1.1. ϕ est une mesure ponctuelle ssi :

- elle est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- elle est localement finie, c'est-à-dire finie sur tout borélien borné.

On note \mathbb{M} l'ensemble des mesures ponctuelles sur \mathbb{R}^2 . Pour les applications, on interprète souvent ϕ comme une somme de Diracs $\delta_{\mathbf{x}_n}$, où les $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ sont les "points" de ϕ . Plus précisément, on pose la définition alternative suivante :

Définition 1.2. ϕ est une mesure ponctuelle si et seulement si elle s'écrit $\phi = \sum_{n \in A} \delta_{\mathbf{x}_n}$, où :

- A est au plus dénombrable;
- les \mathbf{x}_n ne présentent aucun point d'accumulation;
- pour tout point de \mathbb{R}^2 , il n'existe qu'un nombre fini de \mathbf{x}_n qui lui sont égaux (en d'autres termes, ϕ ne possède jamais de masse infinie concentrée en un point).

Proposition 1.2. *Les définitions (1) et (2) sont équivalentes.*

Démonstration - Montrons d'abord (2) \Rightarrow (1). Dans ce cas, ϕ est bien à valeurs entières sur tout borélien (notons au passage qu'elle est définie sur toute partie de \mathbb{R}^2 , pas seulement sur les boréliens). Il reste à montrer qu'elle est localement finie. Soit donc B un borné, il est inclus dans un compact K (par exemple son adhérence). Si les \mathbf{x}_n prenaient une infinité de valeurs différentes sur K , alors on pourrait construire par le théorème de Bolzano-Weierstrass un point d'accumulation pour ϕ , d'où contradiction. Ils ne prennent donc qu'un nombre fini de valeurs, et pour chaque valeur ils ne sont qu'un nombre fini à la prendre. On a donc $\phi(K) < \infty$, et *a fortiori* $\phi(B) < \infty$.

On passe à présent à (1) \Rightarrow (2). On commence par considérer $\tilde{\phi}$, la restriction de ϕ à $\mathcal{B}([0, 1[\times [0, 1[)^1$. $\tilde{\phi}([0, 1]^2)$ est un entier n . On va montrer par récurrence sur n que $\tilde{\phi}$ est une somme finie de Diracs. Pour $n = 0$, le résultat est trivial. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$ ($n \geq 1$), et soit $\tilde{\phi}$ telle que $\tilde{\phi}([0, 1]^2) = n > 0$. On commence par partitionner $[0, 1]^2$ en 4 sous-carrés disjoints comme sur la figure 1.1. Au moins l'un d'eux est de mesure ≥ 1 . On partitionne à nouveau celui-ci en 4 sous-carrés, et ainsi de suite.

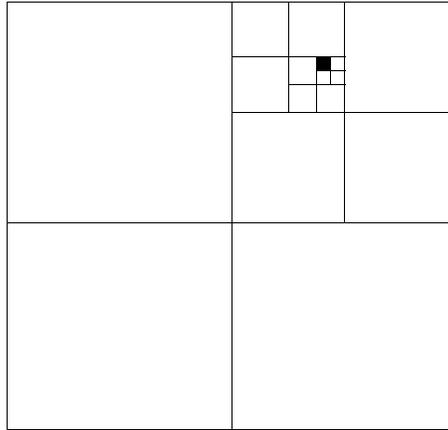


Fig. 1.1: partition du carré unité en sous-carrés emboîtés.

On obtient ainsi une suite (K_m) de carrés emboîtés dont le côté est divisé par deux à chaque étape, et tous de mesure ≥ 1 . Comme pour toute suite

¹ On rappelle qu'il est légitime de restreindre ϕ à $\mathcal{B}([0, 1]^2)$ d'après le lemme 1.1.

emboîtée de compacts dont le diamètre tend vers 0 dans un espace complet, l'intersection des K_m est réduite à un singleton $\{\mathbf{x}\}$. Or la suite $(\tilde{\phi}(K_m))$ est décroissante et minorée par 1. Donc elle admet une limite ≥ 1 , qui est par ailleurs égale à $\tilde{\phi}(\{\mathbf{x}\})$, car $\tilde{\phi}$ est de masse totale $< \infty$.

À partir de là, on vérifie facilement que $(\tilde{\phi} - \delta_{\mathbf{x}})$ est encore une mesure (positive) sur $[0, 1]^2$, de masse totale $\leq n - 1$. Ainsi on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Puis on conclut dans le cas général en remarquant que ϕ est la somme de ses restrictions aux différents carrés $[m, n[\times [m + 1, n + 1[$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). Sur chacun de ces carrés, elle est la somme d'un nombre fini de Diracs. Finalement, une somme dénombrable de sommes finies est encore dénombrable, d'où le résultat. ■

Proposition 1.3. *On a unicité de l'écriture à la permutation des \mathbf{x}_n près.*

Démonstration - Sans perte de généralité, quitte à regrouper les \mathbf{x}_n qui sont égaux, on peut toujours écrire $\phi = \sum_n \alpha_n \delta_{\mathbf{x}_n}$, où les $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ et les \mathbf{x}_n sont tous différents. Supposons qu'on ait deux écritures pour ϕ :

$$\sum_n \alpha_n \delta_{\mathbf{x}_n} = \sum_m \beta_m \delta_{\mathbf{y}_m}.$$

Alors quel que soit \mathbf{y}_m , on a $\phi(\{\mathbf{y}_m\}) = \beta_m > 0$, ce qui montre bien que l'un des \mathbf{x}_n doit être égal à \mathbf{y}_m , et que son coefficient α_n est alors égal à β_m . La réciproque est également vraie, ce qui achève la preuve de l'unicité. ■

Au cours des démonstrations des deux dernières propositions, on a montré que les points de ϕ étaient uniquement déterminés par des grandeurs de la forme $\phi(A)$, où A parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Presque sans aucun travail supplémentaire, en anticipant un peu sur ce qui va suivre, on en déduit le

Corollaire 1.4. *Deux processus ponctuels aléatoires Φ et Ψ sont égaux en loi si et seulement s'ils ont presque sûrement les mêmes points.*

Démonstration - Soient donc Φ et Ψ égaux en loi. Comme les différents carrés $[m, n[\times [m + 1, n + 1[$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) sont en quantité dénombrable, il suffit de prouver que sur chacun d'entre eux, Φ et Ψ possèdent presque sûrement les mêmes points. Sans perte de généralité, on se place sur $[0, 1]^2$. De la même manière que dans la proposition 1.2, on découpe le carré en sous-carrés de

plus en plus petits. L'évènement "Φ et Ψ n'ont pas les mêmes points" est inclus dans l'union des évènements "sur tel sous-carré donné, Φ et Ψ n'ont pas la même valeur". Ces évènements sont tous de probabilité nulle, et ils sont en quantité dénombrable. La réciproque est triviale. ■

Implicitement, ce corollaire sera très largement utilisé toutes les fois qu'on voudra accéder aux points de Φ pour calculer des probabilités. Par exemple, il permet de donner un sens à la notion de "point d'un processus le plus proche de l'origine".

1.2.2 Construction d'une tribu sur \mathbb{M}

Pour pouvoir parler de mesure aléatoire, il est nécessaire de définir une tribu \mathcal{M} sur \mathbb{M} . Généralement, \mathcal{M} est définie dans la littérature comme la plus petite tribu telle que les applications $\phi \mapsto \phi(K)$ soient mesurables, où K parcourt un ensemble donné dans la définition. Par exemple, on peut dire que c'est la tribu engendrée par les ensembles $\{\phi/\phi(K) \leq N\}$, ou $\{\phi/\phi(K) \geq N\}$, ou encore $\{\phi/\phi(K) = N\}$, etc.

La plupart du temps, on demande à K de parcourir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (pour une référence, voir par exemple [Sto95]). Nous allons voir qu'en fait on peut sans dommage restreindre K aux compacts, et même aux pavés bornés.

Définition 1.3. On appelle pavé borné un borélien de la forme $(a, b) \times (c, d)$, où les bornes sont indifféremment ouvertes ou fermées et a, b, c, d sont finis.

Théorème 1.5. *Les deux définitions (avec les compacts et les boréliens) sont équivalentes, elles définissent la même tribu. On peut même se restreindre à $K \in \mathcal{P}$, l'ensemble des pavés bornés, ce qu'on peut résumer symboliquement par :*

$$\mathcal{M}_{\text{pavés}} = \mathcal{M}_{\text{compacts}} = \mathcal{M}_{\text{boréliens}}.$$

Démonstration - Bien sûr, on a déjà :

$$\mathcal{M}_{\text{pavés}} \subset \mathcal{M}_{\text{compacts}} \subset \mathcal{M}_{\text{boréliens}}.$$

Il reste à prouver les inclusions réciproques, nous présentons pour cela deux approches.

Dans un premier temps, nous montrons l'inclusion $\mathcal{M}_{\text{pavés}} \supset \mathcal{M}_{\text{compacts}}$. La preuve est assez directe et visuelle. À vrai dire on pourrait s'en passer,

vu qu'ensuite on prouve la grande inclusion $\mathcal{M}_{\text{pavés}} \supset \mathcal{M}_{\text{boréliens}}$. Mais elle est pédagogiquement utile, car elle nous permet d'introduire une technique de partition d'un compact en carrés qui nous servira par la suite.

Dans un deuxième temps, nous montrons l'inclusion $\mathcal{M}_{\text{pavés}} \supset \mathcal{M}_{\text{boréliens}}$. La preuve est considérablement plus compliquée, et elle n'est absolument pas visuelle. D'ailleurs, il n'est pas indispensable de la parcourir en première lecture. La seule raison pour laquelle nous la proposons ici est que nous n'avons pas pu la trouver *in extenso* dans la littérature. Malgré tout, une très grande partie se trouve dans [Kal86] (et dans une moindre mesure dans [Hal74]). ■

Première approche : $\mathcal{M}_{\text{pavés}} \supset \mathcal{M}_{\text{compacts}}$

La preuve se fait en plusieurs étapes :

- soit K un compact quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on construit un maillage du plan par des carrés fermés de côté $1/2^n$ et centrés sur les points de la forme $(x/2^n, y/2^n)$, avec x et y entiers. Puis on considère la famille $(K_{m,n})_m$ de tels carrés qui ont une intersection non vide avec K . Comme K est borné (en tant que compact), cette famille est finie par simple comparaison des surfaces (voir figure 1.2).

Pour finir, on note $K_n = \bigcup_m K_{m,n}$. $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de compacts emboîtés qui approxime de plus en plus finement K . Son intersection vaut exactement K , car K est fermé en tant que compact (ainsi, tout point extérieur à K se trouve à une distance strictement positive de K , et donc à partir d'un certain rang, tout $K_{m,n}$ le contenant sera disjoint de K).

Ensuite, on voit qu'on peut exprimer les évènements sur K par des évènements sur les $K_{m,n}$, voici comment.

- $\mathcal{M}_{\text{compacts}}$ est engendrée par les évènements du type : $\{\phi(K) \geq N\}$, or toutes les ϕ de \mathbb{M} étant localement finies, on a $\phi(K) = \lim_n \phi(K_n)$, et de plus la limite est décroissante. On en déduit facilement :

$$\{\phi(K) \geq N\} = \bigcap_n \{\phi(K_n) \geq N\}.$$

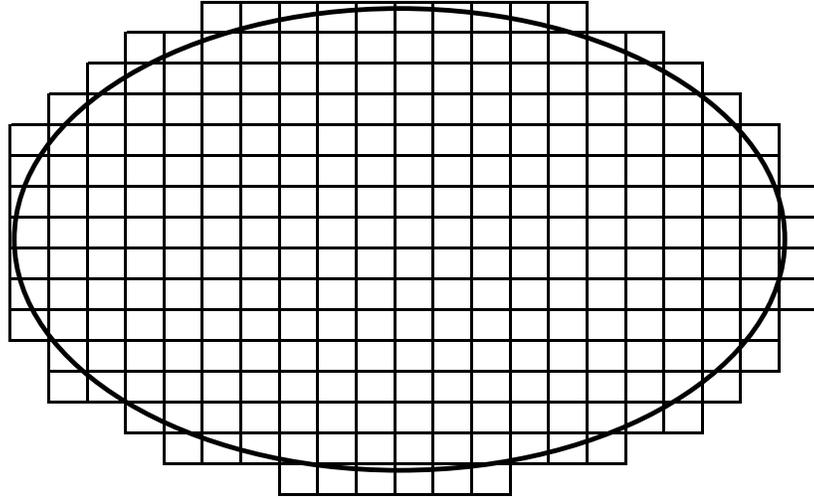


Fig. 1.2: partition d'un compact en carrés.

- étape suivante : enlever les bords de certains $K_{m,n}$ pour qu'ils forment une partition de K_n , et non un simple recouvrement. Pour cela, on exprime K_n comme l'union :
 - des sommets du maillage;
 - puis des arêtes du maillage privées de leurs sommets;
 - puis des $K_{m,n}$ privés de leurs bords.

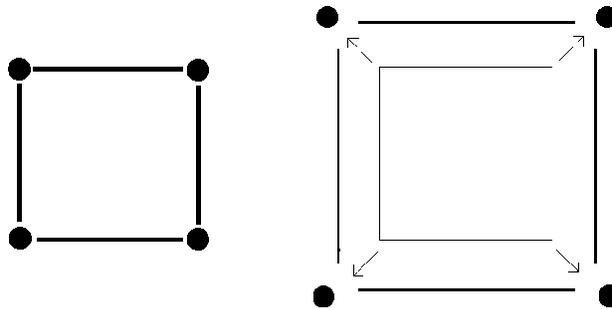


Fig. 1.3: décomposition de K_n .

Les nouveaux \tilde{K}_{in} que l'on obtient ont zéro, une ou deux dimensions. Ce sont tous des pavés (ouverts, fermés ou semi-ouverts).

- dernière étape: on a donc construit nos nouveaux $\tilde{K}_{i,n}$ disjoints en nombre fini ($1 \leq i \leq I$). Il ne reste plus qu'à remarquer :

$$\{\phi(K_n) \geq N\} = \bigcup_{N' \geq N} \bigcup_{\sum_{i=1}^I \alpha_i = N'} \bigcap_{i=1}^I \underbrace{\{\phi(\tilde{K}_{i,n}) = \alpha_i\}}_{\in \mathcal{M}_{\text{pavés}}}$$

pour compléter la preuve. ■

Seconde approche : $\mathcal{M}_{\text{pavés}} \supset \mathcal{M}_{\text{boréliens}}$

Quelques définitions pour commencer :

- on rappelle qu'un anneau d'ensembles est une famille de parties (de \mathbb{R}^2 dans notre cas) qui est stable par union finie et différence ensembliste. Par exemple, la famille \mathcal{B} des boréliens bornés est un anneau d'ensembles. Un $\hat{\sigma}$ -anneau est un anneau qui en plus est stable par union dénombrable dominée par un borné. C'est encore le cas de \mathcal{B} .
- l'intersection de deux anneaux est encore un anneau. De même avec les $\hat{\sigma}$ -anneaux. Par ailleurs, si on se donne une famille de parties de \mathbb{R}^2 , il existe toujours un anneau / $\hat{\sigma}$ -anneau qui la contient, à savoir la famille de toutes les parties de \mathbb{R}^2 . On peut donc légitimement parler de plus petit anneau / $\hat{\sigma}$ -anneau engendré par une famille. Pour une famille \mathcal{A} quelconque de parties de \mathbb{R}^2 , on note $\hat{\sigma}(\mathcal{A})$ le $\hat{\sigma}$ -anneau engendré.

Lemme 1.6. *On a $\hat{\sigma}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$.*

Démonstration - En effet, d'une part \mathcal{B} contient \mathcal{P} et c'est un $\hat{\sigma}$ -anneau, donc $\hat{\sigma}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{B}$.

Réciproquement, soit B un borélien borné. On va montrer que $B \in \hat{\sigma}(\mathcal{P})$. Pour commencer, il existe un pavé $P_0 \in \mathcal{P}$ qui contient B . On considère alors l'ensemble des pavés inclus dans P_0 et le $\hat{\sigma}$ -anneau qu'ils engendrent :

$$\Sigma = \hat{\sigma}(\{P \in \mathcal{P} / P \subseteq P_0\}).$$

Alors $\Sigma \supset \mathcal{B}(P_0)$, la tribu borélienne sur P_0 . En effet Σ contient les pavés $P \subset P_0$, et c'est une tribu sur P_0 :

- $P_0 \in \Sigma$
- si $X \in \Sigma$, alors $P_0 \setminus X \in \Sigma$ (stabilité par différence ensembliste)
- si (X_n) est une famille dénombrable d'éléments de Σ , alors $\bigcup X_n \in \Sigma$ (stabilité par union dénombrable dominée). On rappelle que tous les éléments de Σ sont bornés par P_0 : en effet, la famille de toutes les sous-parties de P_0 est un $\hat{\sigma}$ -anneau qui contient les $P \subseteq P_0$, donc qui contient Σ .

Par ailleurs, on sait que $\Sigma \subset \hat{\sigma}(\mathcal{P})$: en effet, tous les $\hat{\sigma}$ -anneaux qui contiennent les pavés contiennent en particulier ceux inclus dans P_0 , donc ils contiennent Σ . Donc leur intersection contient elle aussi Σ .

Jusqu'ici, on a donc montré $\mathcal{B}(P_0) \subset \hat{\sigma}(\mathcal{P})$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à remarquer que B , en tant que borélien de \mathbb{R}^2 inclus dans P_0 , est aussi un borélien de P_0 d'après le lemme 1.1. ■

À présent, on définit une classe monotone bornée (CMB) comme une famille de parties stable par limite monotone (union croissante ou intersection décroissante) dominée par un borné. On définit de même la plus petite CMB engendrée par une partie.

Lemme 1.7. *Soit \mathcal{C} un anneau de parties bornées, et soit $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ une CMB. Alors $\mathcal{D} \supset \hat{\sigma}(\mathcal{C})$.*

Démonstration - Si on note M la CMB engendrée par \mathcal{C} , on a $\mathcal{D} \supset M$. Ensuite, si on peut montrer que M est un $\hat{\sigma}$ -anneau, on aura $M \supset \hat{\sigma}(\mathcal{C})$ ce qui achèvera la preuve. Introduisons pour toute partie F bornée de \mathbb{R}^2 l'ensemble:

$$K(F) = \{E \text{ borné de } \mathbb{R}^2 \text{ tel que } E \setminus F \in M, F \setminus E \in M \text{ et } E \cup F \in M\}.$$

- on remarque que E et F jouent des rôles symétriques, si bien que $E \in K(F) \Leftrightarrow F \in K(E)$;
- $K(F)$ est stable par limite monotone dominée. En effet, soit (E_n) une suite monotone dans $K(F)$, majorée par un certain $E \subset \mathbb{R}^2$ borné. Montrons que $\lim_n E_n \in K(F)$:

- $\lim_n E_n$ est bien bornée;
- $(\lim_n E_n) \setminus F = \lim_n \underbrace{(E_n \setminus F)}_{\in M}$
or $(E_n \setminus F)$ est monotone bornée par E ;
- $F \setminus (\lim_n E_n) = \lim_n \underbrace{(F \setminus E_n)}_{\in M}$
or $(F \setminus E_n)$ est inversement monotone par rapport à (E_n) , et elle est majorée par F (lui-même borné);
- $F \cup (\lim_n E_n) = \lim_n \underbrace{(F \cup E_n)}_{\in M}$
or $(E_n \cup F)$ est monotone et majorée par $E \cup F$ (lui-même borné).

Conclusion : lorsque $K(F) \neq \emptyset$, c'est une CMB.

- soit $F \in \mathcal{C}$ fixé. Tous les $E \in \mathcal{C}$ sont dans $K(F)$, car ils sont bornés et $E \setminus F$, $F \setminus E$ et $E \cup F$ sont dans $\mathcal{C} \subset M$ (stabilité par différence ensembliste et union finie). Autrement dit, $K(F)$ contient \mathcal{C} , donc elle est non vide, et c'est une CMB. Donc elle contient M .
- continuons : soit $E \in M$ quelconque. Quel que soit $F \in \mathcal{C}$, on a $E \in M \subset K(F)$, donc par symétrie $F \in K(E)$. Ainsi, $K(E)$ contient \mathcal{C} , il est non vide, c'est une CMB et il contient donc M .
- autrement dit, $\forall E \in M, M \subset K(E)$. On en déduit que M est stable par différence ensembliste et par union finie. C'est donc un anneau d'ensembles. Comme il est stable par limite monotone bornée, il est également stable par union dénombrable bornée, comme on peut s'en convaincre en écrivant :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^n E_k \right).$$

M est donc un $\hat{\sigma}$ -anneau, ce qui achève la preuve. ■

Preuve du théorème 1.5 : $\mathcal{M}_{\text{boréliens}} \subset \mathcal{M}_{\text{pavés}}$.

Démonstration - Déjà, notons que pour les évènements de $\mathcal{M}_{\text{boréliens}}$ on peut toujours se ramener aux boréliens bornés. En effet, si B n'est pas borné, il suffit d'écrire :

$$\phi(B) \leq N \Leftrightarrow \forall n, \phi(B \cap D_n) \leq N, \quad (1.1)$$

où D_n est le disque de rayon n centré sur l'origine.

Ensuite, on pose :

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B} / \text{l'application : } \phi \mapsto \phi(B) \text{ est } \mathcal{M}_{\text{pavés}}\text{-mesurable} \}$$

(on rappelle que \mathcal{B} désigne l'ensemble des boréliens bornés de \mathbb{R}^2).

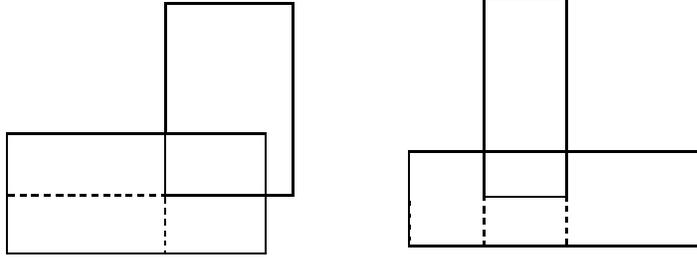
- soit (B_n) une suite monotone bornée d'éléments de \mathcal{D} . Comme ϕ est localement finie, les $\phi(B_n)$ sont uniformément bornés, donc on a $\phi(\lim_n B_n) = \lim_n \phi(B_n)$. À partir de là, on voit facilement que $\lim_n B_n \in \mathcal{D}$. Par exemple :

$$\lim_n \phi(B_n) < N \Leftrightarrow \exists n, \forall m \geq n, \phi(B_m) < N. \quad (1.2)$$

- les unions finies de pavés bornés de \mathbb{R}^2 forment un anneau d'ensembles \mathcal{C} contenu dans \mathcal{D} . En effet :

– tout élément de \mathcal{C} peut-être exprimé comme une union de pavés disjoints. Soit $C = \bigcup_{k=1}^n P_k$ un élément de \mathcal{C} . On prouve le résultat par récurrence sur n :

- * pour $n = 1$, le résultat est trivial.
- * si le résultat est vrai au rang $n - 1$, alors quitte à réécrire l'union des $n - 1$ premiers pavés comme une union disjointe, on peut considérer sans perte de généralité qu'ils sont disjoints. Puis on réécrit chacun des $P_k \cup P_n$ ($1 \leq k \leq n - 1$) comme l'union de P_n et de 3 pavés disjoints au plus, comme illustré sur les figures ci-contre. On vérifie qu'il est toujours possible de rendre les bords disjoints le long de nos découpes (au pire, il suffirait de rajouter des pavés dégénérés en arêtes ou en sommets, comme sur la figure 1.3). Ainsi la récurrence est achevée.



- \mathcal{C} est bien sûr stable par union finie. Quant à la stabilité par différence ensembliste, la différence de deux pavés est encore une union de pavés (voir figures ci-dessus), puis on étend sans peine le résultat à la différence de deux unions de pavés, en écrivant par distributivité cette différence à l'aide d'unions et d'intersections. \mathcal{C} est donc bien un anneau d'ensembles.

- \mathcal{D} contient bien \mathcal{C} .

En effet, soit $C = \bigcup_{k=1}^n P_k$ un élément de \mathcal{C} , où les P_k ont été choisis disjoints; alors $\phi \mapsto \phi(C)$ est bien $\mathcal{M}_{\text{pavés}}$ -mesurable puisque :

$$\{\phi/\phi(C) = N\} = \bigcup_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = N} \bigcap_{k=1}^n \{\phi/\phi(P_k) = \alpha_k\}. \quad (1.3)$$

- finalement, \mathcal{D} est stable par limite monotone bornée et elle contient \mathcal{C} , un anneau de parties bornées. Donc d'après le lemme 1.7, elle contient aussi $\hat{\sigma}(\mathcal{C}) = \hat{\sigma}(\mathcal{P})$.

Or $\hat{\sigma}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$ par le lemme 1.6.

Ainsi le théorème est démontré. ■

Remarque 1.1. On peut restreindre encore plus la famille que parcourt K , et se limiter à la seule famille des pavés ouverts, ou des pavés semi-ouverts, ou des pavés fermés. En effet, tout pavé de \mathcal{P} peut s'exprimer comme limite de pavés d'un genre particulier, puis il suffit d'utiliser l'argument de ϕ localement finie pour conclure comme dans la démonstration du paragraphe 1.2.2. Cette remarque sera abondamment utilisée dans la suite du chapitre.

Remarque 1.2. Le théorème s'étend sans problème au cas des mesures non ponctuelles (c'est à dire à valeurs réelles positives), pourvu qu'elles restent localement finies. Les trois seuls points à adapter sont les équations (1.1), (1.2) et (1.3) :

- pour l'équation (1.1), il suffit de remplacer $N \in \mathbb{N}$ par $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\phi(B) \leq t \Leftrightarrow \forall n, \phi(B \cap D_n) \leq t.$$

- pour l'équation (1.2), on écrit:

$$\lim_n \phi(B_n) < t \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}^+, r < t \text{ et } \exists n, \forall m \geq n, \phi(B_m) \leq r.$$

- enfin, pour l'équation (1.3), on écrit:

$$\{\phi/\phi(C) < t\} = \bigcup_{\substack{r_1+r_2+\dots+r_n < t \\ r_k \in \mathbb{Q}^+}} \bigcap_{k=1}^n \{\phi/\phi(P_k) < r_k\}.$$

1.3 Quelques applications

Avant de prouver la formule de Mecke, il nous semble intéressant de dire quelques mots de la probabilité de Palm d'un processus.

1.3.1 Probabilité de Palm

Soit un processus Φ généré sous une probabilité \mathbb{P} . On suppose que Φ est stationnaire, c'est-à-dire que sa loi est invariante par translation, et on définit son intensité par $\lambda = \mathbb{E}[\Phi([0, 1]^2)]$. Si Φ est d'intensité finie, on vérifie immédiatement que la mesure $\mathbb{E}[\Phi(\cdot)]$ est finie sur tout borné, puisqu'il suffit d'inclure ce borné dans une réunion finie de carrés unité et d'utiliser la stationnarité. Comme elle est aussi invariante par translation, on en déduit qu'elle est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, λ étant le coefficient de proportionnalité.

Le fait que Φ soit stationnaire permet de donner un sens à la notion de "point typique" à-travers la probabilité de Palm. Commençons par donner la définition la plus directe de cette probabilité (due à Matthes), même si ce n'est pas la plus intuitive. Pour plus de détails, on pourra consulter [Sto95], [Bac10] ou [Dal03].

Définition 1.4. Le probabilité de Palm de Φ est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad \mathbb{P}^0(A) = \mathbb{E}^0[\mathbf{1}(\Phi \in A)] = \frac{1}{\lambda m(B)} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{x} \in \Phi \cap B} \mathbf{1}(\Phi_{-\mathbf{x}} \in A) \Phi(d\mathbf{x}) \right]$$

où B est un borélien de mesure (de Lebesgue) non nulle et $\Phi_{-\mathbf{x}}$ est le translaté de Φ selon $-\mathbf{x}$. Par stationnarité, on vérifie que la définition est indépendante du choix de B .

Pour justifier cette définition, nous avons d'abord besoin du

Lemme 1.8. *La fonction $(\mathbf{x}, \phi) \mapsto (\mathbf{x}, \phi_{-\mathbf{x}})$ est mesurable.*

Démonstration - Par définition, la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{M}$ est engendrée par les $B \times Y$, où B est un borélien de \mathbb{R}^2 et Y est \mathcal{M} -mesurable. On sait qu'on peut se restreindre à une famille de B qui engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et à une famille de Y qui engendrent \mathcal{M} .

Par exemple, on peut prendre pour B les pavés semi-ouverts (voir remarque 1.1) de la forme $[a, b[\times [c, d[$ et pour Y les ensembles de la forme $\{\phi/\phi(P) \geq N\}$, où N est un entier et P est un autre pavé semi-ouvert de la même forme $[e, f[\times [g, h[$.

Sans perte de généralité et pour ne pas surcharger les notations, on peut supposer $[a, b[\times [c, d[= [0, 1[$. La question est alors de savoir si :

$$\{(\mathbf{x}, \phi)/(\mathbf{x}, \phi_{-\mathbf{x}}) \in [0, 1[\times Y\}$$

est mesurable pour la tribu produit. Cet ensemble peut se réécrire :

$$E = \bigcup_{\mathbf{x} \in [0, 1[\times [0, 1[} \{\mathbf{x}\} \times \{\phi/\phi(P_{\mathbf{x}}) \geq N\}$$

(où $P_{\mathbf{x}}$ est le translaté de P selon \mathbf{x}). Le problème, c'est que cette union est indénombrable. L'idée est donc de l'approximer de plus en plus finement par des unions dénombrables (voire finies). Notons :

$$E_{\mathbf{x}} = \{\phi/\phi(P_{\mathbf{x}}) \geq N\}$$

et introduisons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \bigcup_{\substack{0 \leq i < 2^n \\ 0 \leq j < 2^n}} \left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right[\times \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right[\right) \times E_{(i/2^n, j/2^n)}.$$

En notant $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, on introduit les entiers i_n et j_n définis par :

$$\frac{i_n}{2^n} \leq x_1 < \frac{i_n + 1}{2^n} \quad , \quad \frac{j_n}{2^n} \leq x_2 < \frac{j_n + 1}{2^n}.$$

L'idée est d'approcher $\phi(P_{\mathbf{x}})$ par les $\phi(P_{(i_n/2^n, j_n/2^n)})$, ce qui a un sens si la fonction $\mathbf{x} \mapsto \phi(P_{\mathbf{x}})$ est continue à gauche selon ses deux coordonnées x_1 et x_2 . Or c'est bien le cas puisque P est un pavé semi-ouvert de la forme $[e, f[\times [g, h[$. Introduisons $F = \liminf_n F_n$.

On a :

- $E \subset F$

En effet, soit (\mathbf{x}, ϕ) tel que $\phi(P_{\mathbf{x}}) \geq N$. Comme

$$\phi(P_{\mathbf{x}}) = \lim_n \phi(P_{(i_n/2^n, j_n/2^n)}),$$

les $\phi(P_{(i_n/2^n, j_n/2^n)})$ sont $\geq N$ à partir d'un certain rang n_0 . Par conséquent, $\phi \in E_{(i_n/2^n, j_n/2^n)}$ pour $n \geq n_0$, et $(\mathbf{x}, \phi) \in F$.

- $F \subset E$

En effet, si $(\mathbf{x}, \phi) \in F$, alors $\exists n_0, \forall n \geq n_0, (\mathbf{x}, \phi) \in F_n$, ou de manière équivalente $\phi(P_{(i_n/2^n, j_n/2^n)}) \geq N$.

Alors par passage à la limite, $\phi(P_{\mathbf{x}}) \geq N$.

Enfin, comme les F_n sont mesurables, F l'est aussi, ce qui achève la preuve du lemme. ■

Revenons à la probabilité de Palm : on peut voir $\mathbb{P}^0(A)$ comme le taux moyen d'observation de A en décalant l'origine successivement sur chaque point de Φ . Bien sûr il ne s'agit que d'un argument heuristique, car Φ comporte une infinité de points, mais dans le cas où Φ est ergodique (voir [Bac10]) on dispose effectivement d'un théorème limite qui justifie cette affirmation (voir [Dal03]) :

$$\mathbb{P} \text{ - presque sûrement, } \quad \mathbb{P}^0(A) = \lim_{B_n \uparrow \mathbb{R}^2} \frac{1}{\lambda m(B_n)} \sum_{x_k \in B_n \cap \Phi} \mathbf{1}(\Phi_{-x} \in A),$$

où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de convexes telle que $m(B_{n+1})/m(B_n) \rightarrow 1$.

1.3.2 La formule de Mecke

Il existe de multiples variantes de cette célèbre formule due à Joseph Mecke, toutes équivalentes. Nous choisissons de montrer la formule (7.1.1.) de [Sto95] (p. 229). Soit Φ un processus ponctuel stationnaire sur \mathbb{R}^2 . On note \mathbb{P} la probabilité stationnaire associée et λ l'intensité de Φ . Soit f est une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{M}$ dans \mathbb{R}^+ , mesurable au sens de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{M}$, alors :

$$\lambda \int \int f(\mathbf{x}, \phi) d\mathbf{x} \mathbb{P}^0(d\phi) = \int \int f(\mathbf{x}, \phi_{-\mathbf{x}}) \phi(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\phi), \quad (1.4)$$

où $d\mathbf{x}$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 , \mathbb{P}^0 désigne la mesure de Palm sur \mathcal{M} , et $\phi_{-\mathbf{x}}$ est le translaté de ϕ selon $-\mathbf{x}$.

Grâce au lemme 1.8, on vérifie la bonne définition de l'intégrale de droite dans (1.4). Ensuite, il suffit d'écrire la formule pour f fonction indicatrice, ce qui est littéralement la définition de la probabilité de Palm, puis on conclut par un argument standard de convergence monotone.

1.3.3 Caractérisation d'un processus ponctuel simple par ses probabilités vides

Nous avons d'abord besoin de la

Définition 1.5. Un processus ponctuel Φ est simple si et seulement s'il ne contient presque sûrement aucun point multiple au sens de la définition 1.2.

On lit souvent qu'un processus ponctuel simple est caractérisé par ses "probabilités vides" (*void probabilities* dans la littérature anglo-saxonne), c'est-à-dire les probabilités $\mathbb{P}(\phi(K) = 0)$ quand K parcourt les compacts. Autrement dit, si deux processus ponctuels simples ont les mêmes probabilités vides, alors ils sont égaux en loi. C'est ce que nous nous proposons de montrer maintenant.

Attention, cette condition de simplicité est essentielle! Par exemple, si Φ est un processus simple, il a les mêmes probabilités vides que 2Φ , mais il n'a évidemment pas la même loi. On restreint donc \mathbb{M} aux processus simples, et on définit \mathcal{M} sur \mathbb{M} de la même manière. Tous les raisonnements précédents restent *a fortiori* valables, et notamment le théorème 1.5.

Lemme 1.9. *Lorsqu'on se restreint aux processus simples, la tribu \mathcal{M} est engendrée par les ensembles de la forme $Y_P = \{\phi/\phi(P) = 0\}$, lorsque P parcourt les pavés semi-ouverts de la forme $[a, b[\times [c, d[$.*

Démonstration - On sait que \mathcal{M} est engendrée par les ensembles de la forme $\{\phi/\phi(P) = N\}$, avec P semi-ouvert et N entier. Sans perte de généralité et pour plus de clarté, on considère là aussi $P = [0, 1[\times [0, 1[$. Comme sur la figure 1.1, on considère pour n fixé la partition de P en 4^n carrés de côté $1/2^n$:

$$P = \bigcup_{\substack{0 \leq i < 2^n \\ 0 \leq j < 2^n}} P_{i,j}^n$$

avec

$$P_{i,j}^n = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right] \times \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right].$$

Alors, comme ϕ est simple, il est immédiat que $\phi(P) = N$ si et seulement s'il existe un n tel que dans la partition d'ordre n , N petits carrés contiennent un point et un seul, et les $4^n - N$ carrés restants sont vides :

$$\{\phi(P) = N\} = \bigcup_n \bigcup_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_N < 2^n \\ 0 \leq j_1 < \dots < j_N < 2^n}} \left(\bigcap_{k=1}^N \{\phi(P_{i_k, j_k}^n) = 1\} \right) \cap \left(\bigcap_{(i,j) \text{ restants}} \{\phi(P_{i,j}^n) = 0\} \right).$$

Il ne reste donc plus qu'à réexprimer chaque $\{\phi(P_{i_k, j_k}^n) = 1\}$. À nouveau pour alléger les notations, on revient à $P = [0, 1[\times [0, 1[$, et c'est $\{\phi(P) = 1\}$ qu'on va réexprimer.

Cette fois, on vérifie facilement que $\phi(P) = 1$ si et seulement si toutes les partitions ont la même propriété, à savoir que presque tous les 4^n petits carrés sont vides, sauf un. Donc :

$$\{\phi(P) = 1\} = \bigcap_n \bigcup_{\substack{0 \leq i_0 < 2^n \\ 0 \leq j_0 < 2^n}} \overline{Y_{i_0, j_0}^n} \cap \left(\bigcap_{(i,j) \text{ restants}} Y_{i,j}^n \right),$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

Lemme 1.10. \mathcal{M} est engendrée par les ensembles $Y_K = \{\phi/\phi(K) = 0\}$, lorsque K parcourt les compacts.

Démonstration - En fait, on a même mieux que cela, puisqu'on peut se restreindre aux compacts qui sont des pavés. L'argument est toujours le même, à savoir par approximation : tout pavé semi-ouvert P est limite croissante de pavés compacts K_n , puis on conclut par : $\phi(K) = 0 \Leftrightarrow \forall n, \phi(K_n) = 0$. ■

Théorème 1.11. Un processus ponctuel simple Φ est caractérisé par les probabilités $\mathbb{P}(\Phi(K) = 0)$, lorsque K parcourt les compacts.

Démonstration - Il suffit de remarquer que la classe des ensembles Y_K pour K compact est stable par intersection finie, car $\phi(K) = 0$ et $\phi(K') = 0$ si et seulement si $\phi(K \cup K') = 0$, or $K \cup K'$ est compact. Ensuite, si deux probabilités-images (issues de deux processus ponctuels) coïncident sur cette classe, alors par le théorème 1.16 elles coïncident sur la tribu engendrée, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. ■

Il s'agit d'une caractérisation extrêmement commode, qui peut servir par exemple à montrer que telle probabilité correspond à la distribution de Palm de telle autre probabilité. Elle permet aussi de parler rigoureusement *du* processus déterminantal de noyau K , comme le montre la partie suivante.

1.3.4 Caractérisation d'un processus déterminantal par ses intensités jointes

Rappelons qu'étant donné un processus ponctuel Φ , sa n -ème mesure factorielle est une mesure sur $(\mathbb{R}^2)^n$. Pour A_1, \dots, A_n boréliens de \mathbb{R}^2 , elle est définie par :

$$M^{(n)}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbb{E} \left[\sum_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \Phi}^{\neq} \mathbf{1}(\mathbf{x}_1 \in A_1, \dots, \mathbf{x}_n \in A_n) \right]. \quad (1.5)$$

Le signe \neq au-dessus de la somme signifie que les \mathbf{x}_i sont pris deux à deux distincts². Rappelons que par le corollaire 1.4, cette espérance est définie

² plus exactement, il s'agit de points distincts de Φ lorsqu'on la regarde comme une somme de Diracs, mais ils peuvent prendre la même valeur sur \mathbb{R}^2 si Φ comporte des points multiples.

sans ambiguïté. Rappelons aussi que d'après le théorème d'extension de Carathéodory, il existe une unique $M^{(n)}$ qui vérifie (1.5).

Ensuite, la n -ème intensité jointe $\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, si elle existe, est la densité de $M^{(n)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour un processus déterminantal, ρ_n possède une forme très particulière, puisqu'il existe un noyau K de carré localement intégrable tel que :

$$\rho_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det (K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)_{1 \leq i, j \leq n}).$$

Théorème 1.12. *Pour un noyau K donné de carré localement intégrable, il existe au plus un processus déterminantal de noyau K .*

Démonstration - Tout d'abord, un processus déterminantal est presque sûrement simple, comme tout processus qui possède des intensités jointes. En effet, l'ensemble "diagonal" $\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^4 / \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Donc il est aussi $M^{(2)}$ -négligeable, et presque sûrement il ne contient aucun point. Ensuite il ne reste plus qu'à utiliser la caractérisation par les probabilités vides.

Soit donc C un compact de \mathbb{R}^2 . Si on se donne les ρ_n , on se donne en particulier les

$$M^{(n)}(C^k) = \mathbb{E} [\Phi(C)(\Phi(C) - 1) \dots (\Phi(C) - k + 1)]$$

(remarquons que cette formule est vraie même dans le cas où $\Phi(C) < k$: un des termes du produit passe alors par 0, si bien que le produit lui-même vaut 0, ce qui est bien ce qu'on attendait).

L'ensemble de ces produits forme une famille de polynômes en $\Phi(C)$ de degrés deux à deux distincts qui prennent toutes les valeurs de \mathbb{N}^* . Avec le polynôme constant 1, ils constituent donc une base de $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent, si deux processus Φ et Ψ ont les mêmes ρ_n , alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E} [\Phi(C)^k] = \mathbb{E} [\Psi(C)^k],$$

c'est à dire que $\Phi(C)$ et $\Psi(C)$ ont les mêmes moments. Malheureusement, on ne peut pas en déduire pour autant que ces deux variables ont même loi (c'est le célèbre "problème des moments"). Cependant, sous certaines conditions suffisantes de régularité, ce sera le cas. Pour un processus déterminantal justement, c'est ce que montre le lemme 4.2.6. de [Ben09]. En utilisant l'inégalité de Hadamard sur les matrices et la condition d'intégrabilité de K ,

les auteurs montrent qu'il existe deux constantes strictement positives A et λ (dépendant de C) telles que :

$$\mathbb{P}(\Phi(C) > p) \leq Ae^{-\lambda p}.$$

Par comparaison série / intégrale, on en déduit une majoration des moments :

$$\begin{aligned} m_k = \mathbb{E}[\Phi(C)^k] &= \sum_{p \geq 0} \mathbb{P}(\Phi(C)^k > p) \\ &\leq A \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda \lfloor p^{1/k} \rfloor} \\ &\leq Ae^\lambda \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda p^{1/k}} \\ &\leq Ae^\lambda \left(1 + \int_0^\infty e^{-\lambda t^{1/k}} dt \right). \end{aligned}$$

Après un changement de variable $u = \lambda t^{1/k}$, on obtient :

$$m_k \leq Ae^\lambda \left(1 + \int_0^\infty e^{-u} \frac{k}{\lambda^k} u^{k-1} du \right) = Ae^\lambda \left(1 + \frac{k!k}{\lambda^k} \right).$$

Or d'après la formule de Stirling :

$$Ae^\lambda \left(1 + \frac{k!k}{\lambda^k} \right) \sim Ae^\lambda \sqrt{2\pi} \frac{k^{k+3/2}}{(\lambda e)^k} \leq A' \frac{k^{k+3/2}}{(\lambda e)^k},$$

d'où : $m_k^{1/k} \leq A'' k$. Pour en déduire la caractérisation de la loi de $\Phi(C)$ par ses moments, il suffit ensuite d'utiliser la condition suivante due à Carleman (voir [Akh65]) :

$$\sum_n \frac{1}{m_{2n}^{1/2n}} = +\infty.$$

Revenons à notre problème initial : comme $\Phi(C)$ et $\Psi(C)$ sont égaux en loi, on a en particulier $\mathbb{P}(\Phi(C) = 0) = \mathbb{P}(\Psi(C) = 0)$. ■

Remarque 1.3. Les conditions d'existence d'un processus ponctuel à partir de ses intensités jointes sont plus complexes. Pour plus de détail, on pourra consulter le chapitre 4 ou [Sos00].

1.4 Transformée de Laplace

Le but de cette partie est de démontrer qu'une mesure aléatoire (pas nécessairement ponctuelle) est caractérisé par sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})\Phi(d\mathbf{x})} \right],$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurables positives. Pour commencer, il convient de vérifier que cette définition est valide. Φ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc l'intégrale est bien définie. Il reste à montrer que l'espérance a un sens, ce qui est une simple conséquence de la

Proposition 1.13. *L'application $\Phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})\Phi(d\mathbf{x})$ est mesurable.*

Démonstration - On commence par écrire f comme limite simple d'une suite croissante de fonctions simples (f_n) (on rappelle qu'une fonction simple est une fonction mesurable, positive, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). Puis, si $t > 0$ est un réel quelconque, en utilisant le théorème de convergence monotone on remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})\Phi(d\mathbf{x}) < t \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^2} f_n(\mathbf{x})\Phi(d\mathbf{x}) < t - r.$$

On peut donc supposer sans perte de généralité que f est simple. En écrivant :

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j},$$

où les α_j sont des réels strictement positifs et les A_j sont des boréliens, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\Phi(dx) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \Phi(A_j).$$

Or chacune des applications $\Phi \mapsto \Phi(A_j)$ est mesurable, donc l'application $\Phi \mapsto \sum_{j=1}^m \alpha_j \Phi(A_j)$ est également mesurable. ■

Une fois cette précaution prise, on va démontrer une série de résultats théoriques très importants en eux-mêmes, qui vont progressivement nous amener à la caractérisation d'une mesure aléatoire par sa transformée de Laplace.

1.4.1 Unicité d'une mesure de probabilité

On cherche ici à caractériser une loi de probabilité par son comportement sur une sous-famille d'évènements suffisamment grande, ce qui sera très commode ensuite pour caractériser l'égalité en loi de deux variables aléatoires, ou vérifier *a posteriori* la distribution d'une variable aléatoire.

Pour un ensemble X , définissons un Π -système sur X comme un ensemble de parties de X stable par intersection finie.

Définissons aussi une classe monotone (abrégée en CM) comme une classe stable par différence ensembliste et par réunion dénombrable croissante.

Ces deux objets peuvent sembler très proches de ceux utilisés dans la démonstration du théorème 1.5 ($\hat{\sigma}$ -anneau, σ -algèbre, CMB). Voici quelques remarques pour éviter de se perdre dans les définitions :

- on est très proche de la définition d'un $\hat{\sigma}$ -anneau, la seule différence étant qu'on remplace "union dénombrable dominée" par "union dénombrable monotone", et qu'on enlève la stabilité par union finie quelconque (elle doit être croissante);
- on est également très proche de la définition d'une σ -algèbre, sauf qu'on ne demande pas nécessairement que $X \in \mathcal{A}$, ni la stabilité par union dénombrable quelconque (elle doit être croissante);
- enfin, on est aussi très proche de la définition d'une CMB, si ce n'est que la réunion n'est plus nécessairement dominée, et qu'il y a en plus stabilité par différence ensembliste.

Comme d'habitude, l'intersection de deux CM est une CM, et pour toute famille \mathcal{A} de parties de X il existe au moins une CM contenant \mathcal{A} . On peut donc légitimement définir $CM(\mathcal{A})$, la CM engendrée par \mathcal{A} .

Lemme 1.14. *Si une classe Σ est à la fois un Π -système contenant X et une CM, alors c'est une σ -algèbre.*

Démonstration - Voici les étapes :

- $X \in \Sigma$, donc en utilisant la stabilité par différence ensembliste, Σ est stable par passage au complémentaire;
- Σ est stable par intersection finie, donc en utilisant le passage au complémentaire, elle est également stable par union finie;

- soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de Σ ; en écrivant :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^n E_k \right)$$

et en utilisant la stabilité par union finie, ainsi que la stabilité par union croissante dénombrable, on obtient la stabilité par union dénombrable quelconque.

Conclusion : Σ est une σ -algèbre. ■

Lemme 1.15 (Lemme de Dynkin). *Si \mathcal{A} est un Π -système contenant X , alors $CM(\mathcal{A})$ est égale à $\sigma(\mathcal{A})$, la σ -algèbre engendrée par \mathcal{A} .*

Démonstration - Il suffit de prouver que $CM(\mathcal{A})$ est elle-même un Π -système contenant X , et on déduira du lemme 1.14 que c'est une σ -algèbre. De plus, ce sera nécessairement la plus petite contenant \mathcal{A} , car toute σ -algèbre est une CM (et donc l'intersection de toutes les CM contenant \mathcal{A} , c'est à dire $CM(\mathcal{A})$, est incluse dans l'intersection de toutes les σ -algèbres contenant \mathcal{A} , c'est à dire $\sigma(\mathcal{A})$).

Commençons par introduire :

$$\mathcal{C}_1 = \{C \in CM(\mathcal{A}) / \forall A \in \mathcal{A}, A \cap C \in CM(\mathcal{A})\}.$$

- $\mathcal{C}_1 \subset CM(\mathcal{A})$
- réciproquement, $CM(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_1$; en effet :
 - $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_1$, car $\forall C \in \mathcal{A}, \forall A \in \mathcal{A}, A \cap C \in \mathcal{A} \subset CM(\mathcal{A})$
(on rappelle que \mathcal{A} est stable par intersection finie)
 - \mathcal{C}_1 est une CM :
 - * soit $C, C' \in \mathcal{C}_1$; alors

$$\forall A \in \mathcal{A}, A \cap (C \setminus C') = \underbrace{(A \cap C)}_{\in CM(\mathcal{A})} \setminus \underbrace{(A \cap C')}_{\in CM(\mathcal{A})} \in CM(\mathcal{A})$$

- * soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille croissante d'éléments de \mathcal{C}_1 , alors

$$\forall A \in \mathcal{A}, A \cap (\bigcup_n C_n) = \bigcup_n \underbrace{(A \cap C_n)}_{\in CM(\mathcal{A})} \in CM(\mathcal{A})$$

comme union d'une famille croissante.

- donc $\mathcal{C}_1 = CM(\mathcal{A})$.

Introduisons maintenant :

$$\mathcal{C}_2 = \{C \in CM(\mathcal{A}) / \forall A \in CM(\mathcal{A}), A \cap C \in CM(\mathcal{A})\}.$$

- $\mathcal{C}_2 \subset CM(\mathcal{A})$
- réciproquement, $CM(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}_2$; en effet :
 - $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_2$, car $\forall C \in \mathcal{A}, \forall A \in CM(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_1, A \cap C \in CM(\mathcal{A})$
 - \mathcal{C}_2 est une CM (démonstration similaire au cas de \mathcal{C}_1).
- donc $\mathcal{C}_2 = CM(\mathcal{A})$. En d'autres mots, $CM(\mathcal{A})$ est stable par intersection finie : c'est un Π -système. Enfin, $X \in \mathcal{A} \subset CM(\mathcal{A})$.

Ainsi le lemme est prouvé. ■

Théorème 1.16. *Si deux probabilités coïncident sur une classe d'évènements stable par intersection finie qui engendre toute la tribu des évènements, alors elles sont égales.*

Démonstration - Soient \mathbb{P} et \mathbb{Q} nos deux mesures de probabilité, et soit \mathcal{A} la classe d'évènements sur lesquels elles coïncident. C'est un Π -système contenant Ω , l'espace de probabilité tout entier (puisque $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{Q}(\Omega) = 1$). Introduisons :

$$\mathcal{E} = \{E \subset \Omega / \mathbb{P}(E) = \mathbb{Q}(E)\}.$$

\mathcal{E} est une CM (par théorème de convergence monotone) qui contient \mathcal{A} ; elle contient donc $CM(\mathcal{A})$. Or d'après le lemme précédent, $CM(\mathcal{A})$ est aussi la tribu entière des évènements, donc $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$. ■

Théorème 1.17. *Si deux variables aléatoires réelles positives ont même transformée de Laplace, alors elles sont égales en loi.*

Démonstration - Les sources pour cette démonstration sont multiples. On pourra par exemple la trouver dans [Kal86].

Soient X et Y nos deux variables, on sait donc que :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E} [e^{-tX}] = \mathbb{E} [e^{-tY}].$$

Associons-leur leurs probabilités-images respectives sur \mathbb{R}^+ , μ_X et μ_Y . Pour toute fonction mesurable f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , on a :

$$\int_{x \in \mathbb{R}^+} f(x) \mu_X(dx) = \mathbb{E}[f(X)].$$

On montre d'abord ce résultat pour f fonction indicatrice, puis on conclut par convergence monotone. De même avec μ_Y évidemment. Donc toutes les fonctions $f_t : x \mapsto e^{-tx}$ ($t \geq 0$) ont même intégrale par μ_X et μ_Y . Plus généralement, il en est de même des combinaisons linéaires (finies) des f_t . Or ces combinaisons permettent d'approcher n'importe quelle fonction continue à support compact sur \mathbb{R}^+ , comme on peut s'en convaincre par le "théorème de Stone-Weierstrass étendu" (voir [Sim63]) :

- considérons le compactifié $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, dont les ouverts sont les ouverts de \mathbb{R}^+ , ainsi que les complémentaires des compacts de \mathbb{R}^+ . Pour cette topologie, on sait que $\overline{\mathbb{R}^+}$ est compact. Soit la fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} donnée par $f_t : x \mapsto e^{-tx}$. On peut toujours la prolonger continûment en une fonction sur $\overline{\mathbb{R}^+}$: si $t = 0$, on pose $f_0(\infty) = 1$, et sinon on pose $f_t(\infty) = 0$.
- on vérifie sans peine que ces prolongements sont continus pour la topologie de $\overline{\mathbb{R}^+}$. Il en est donc de même de leurs combinaisons linéaires. Celles-ci forment une sous-algèbre unitaire A des fonctions continues de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans \mathbb{R} (la stabilité par multiplication vient de la propriété multiplicative de l'exponentielle, qui reste vraie à l'infini). Par ailleurs, elles forment une famille séparante, au sens où $\forall x \neq y \in \overline{\mathbb{R}^+}$, il existe une application f telle que $f(x) \neq f(y)$ (prendre par exemple l'application $f_1 : x \mapsto e^{-x}$).
- donc par le théorème de Stone-Weierstrass (dans sa version classique cette fois), A est dense pour la norme uniforme. Soit maintenant une fonction f continue à support compact de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . On la prolonge par $f(\infty) = 0$ et on l'approche uniformément sur $\overline{\mathbb{R}^+}$ par des combinaisons linéaires des f_t . Cette approximation est encore valable sur \mathbb{R}^+ , et comme μ_X et μ_Y sont de masse totale finie, on en déduit par convergence dominée que f a la même intégrale par rapport à chacune des deux mesures.

Dernière étape : on considère une fonction indicatrice $\mathbf{1}_{x \leq a}$. Elle peut être approchée par des fonctions continues à support compact (au sens de la

convergence simple), et on conclut par le théorème de convergence dominée que μ_X et μ_Y coïncident sur $\mathbb{1}_{x \leq a}$. Or les intervalles $[0, a]$ forment une classe de parties de \mathbb{R}^+ stable par intersection finie qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Donc par le théorème 1.16, μ_X et μ_Y coïncident sur $\mathbb{1}_E$, où E est une partie mesurable quelconque de \mathbb{R}^+ . En d'autres mots, X et Y ont même loi. ■

Remarque 1.4. La preuve s'étend sans difficulté à la transformée de Laplace d'un vecteur de variables aléatoires positives (X_1, \dots, X_n) , définie par :

$$\forall t_1, \dots, t_n \geq 0, \quad \mathcal{L}_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_i t_i X_i} \right].$$

On en vient maintenant au théorème final :

Théorème 1.18. *Si deux mesures aléatoires ont même transformée de Laplace, alors elles sont égales en loi.*

Démonstration - Soient Φ et Ψ qui ont même transformée de Laplace. Alors en faisant parcourir à f l'ensemble des fonctions simples, on voit que les familles finies $(\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_m))$ et $(\Psi(A_1), \dots, \Psi(A_m))$ ont aussi même transformée de Laplace. Donc elles sont égales en loi d'après le théorème 1.17.

Or la famille des évènements du type $(\Phi(A_1) < t_1, \dots, \Phi(A_m) < t_m)$ est une famille stable par intersection finie, et elle engendre toute la tribu des évènements. Donc d'après le théorème 1.16, Φ et Ψ ont même loi. ■

Au passage, on a prouvé le

Corollaire 1.19. *La loi d'une mesure aléatoire Φ est caractérisée par les lois des familles finies $(\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_m))$, quand les A_i parcourent les boréliens bornés.*

Chapitre 2

UN MODÈLE DE POPULATION À BASE DE POISSON-LIGNES

Ce chapitre a donné lieu à l'article suivant, présenté au workshop Spaswin de la conférence WiOpt 2012 à Paderborn (Allemagne) :

A population model based on a Poisson line tessellation, Frédéric Morlot, WiOpt (2012, to be published).

Résumé

Notre but avoué est de construire des processus qui rendent compte des mouvements d'utilisateurs sur un territoire donné, particulièrement en milieu urbain. Ainsi pourrions-nous appliquer des résultats statistiques à la modélisation de réseaux de télécommunication. Avant d'étudier des processus plus originaux dans les chapitres suivants, qui se rapportent à des situations exceptionnelles, il est donc important de couvrir pour commencer un large éventail de configurations génériques. Aussi proposons-nous dans ce chapitre un modèle très général qui peut se décliner en plusieurs variantes. Notre modèle comprend une composante euclidienne forte, et il fait appel au cadre conceptuel de la géométrie stochastique. L'essentiel de ce cadre est exposé dans le chapitre 1. Pour ce qui est des processus de Cox, on pourra par exemple consulter [Dal03] ou [Las10].

L'idée de base consiste à prendre en compte la géométrie des rues dans une ville en les modélisant par un processus de Poisson-lignes, et à répartir des utilisateurs dessus. Nous effectuons ensuite plusieurs calculs de *shot-noise* en introduisant différentes variantes du processus originel. À chaque fois, nous en déduisons une formule analytique de la probabilité de couverture sur la voie montante.

2.1 Introduction

Lorsqu'un opérateur mobile étudie le canal descendant ou *downlink*, généralement il considère que l'utilisateur typique se trouve à l'origine, et il effectue des calculs du type *shot-noise* (voir [Bac10]) sur le processus ponctuel des antennes, qui est supposé indépendant et la plupart du temps poissonnien. Or le calcul de *shot-noise* n'est pas affecté par la nature exacte du processus qui régit les utilisateurs, du moment qu'il est stationnaire (voir [And10] par exemple). Ici au contraire, nous nous intéressons au canal montant ou *uplink*, si bien que nous devons calculer la loi de l'interférence créée par les utilisateurs sur une antenne donnée. Pour cela nous avons besoin d'un modèle de population qui soit à la fois réaliste et calculable analytiquement.

Sur la figure 2.1, on voit d'une part l'importance d'un modèle qui prenne en compte le plan des rues d'une ville, et d'autre part on remarque à quel point ces rues créent des alignements d'utilisateurs qui risquent de provoquer une interférence toute particulière.

Dans les parties 2.2 à 2.4, nous introduisons progressivement notre modèle, qui consiste à jeter des rues au hasard sur le plan selon un processus de Poisson-lignes, puis à distribuer les utilisateurs dans les rues selon des processus de Poisson stationnaires indépendants. Dans les zones urbaines comme Manhattan, il est tout à fait approprié de modéliser les rues par un processus de Poisson-lignes (restreint à deux directions orthogonales). Dans les villes qui montrent moins de régularité, ce choix peut être critiqué au profit d'un Poisson-Voronoi par exemple (voir [Glo06]). Cependant, les tessellations de Poisson-Voronoi ne pourraient en aucun cas donner des résultats analytiques comme ceux que nous proposons, si bien que nous choisissons de garder le modèle de Poisson-lignes, peut-être légèrement moins réaliste mais beaucoup plus calculable. Dans la partie 2.5 nous présentons notre résultat principal, qui donne la probabilité de couverture uplink dans les cas de base. Dans les parties 2.6 et 2.7 nous proposons quelques généralisations et améliorations. Enfin, dans la partie 2.8, nous apportons la clé de voûte en montrant comment introduire une dépendance temporelle.



(a) Bucarest pendant le match Roumanie-Italie, Euro 2008, 13 juin.



(b) Paris pendant la Fête de la Musique 2008, 21 juin.

Fig. 2.1: Deux vues différentes de flux de population en milieu urbain. La géométrie des rues apparaît comme primordiale.

2.2 Le processus de Poisson-lignes

2.2.1 Construction

Voici comment sont construits les processus de lignes sur \mathbb{R}^2 (pour plus de détails, voir [Sto95] p. 244-245) : pour une ligne D donnée, il existe une et une seule perpendiculaire P qui passe par l'origine. On note θ l'angle que fait un vecteur directeur de P avec le vecteur directeur \mathbf{i} de l'axe horizontal. La condition supplémentaire $\theta \in [0, \pi[$ définit θ de manière unique et permet d'orienter P . On note alors r la distance de l'origine O à D , mesurée en valeur algébrique grâce à l'orientation de P .

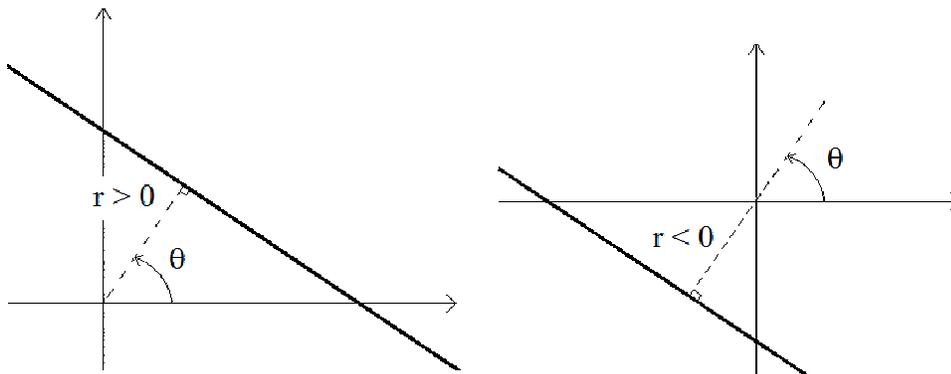


Fig. 2.2: définition de θ et r

Conclusion : on met en bijection les droites D avec les couples (θ, r) de la bande $[0, \pi[\times \mathbb{R}$. Dans la suite, on notera d l'application : $(\theta, r) \mapsto D$. Attention à un détail cependant : on serait tenté d'identifier le bord droit de $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ à son bord gauche, mais il n'en est rien : il faut effectuer un retournement auparavant, comme pour le ruban de Möbius.

On s'en convainc en regardant ce qui se passe par exemple pour une droite qui tourne dans le sens trigonométrique autour du point $(-1, 0)$: au moment où elle franchit la verticale, θ passe brusquement de π à 0 , mais r passe de 1 à -1 . Cette remarque complique un peu les vérifications d'isotropie, mais elle ne les modifie pas fondamentalement.

Dans toute la suite, si A est un borélien de \mathbb{R}^2 , on notera un peu abusivement $d^{-1}(A)$ la région de $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ qui correspond aux droites qui intersectent

A. Par exemple, on a la

Proposition 2.1. *Si A est le disque fermé de centre (a, b) et de rayon ρ , alors :*

$$d^{-1}(A) = \{(\theta, r) / a \cos(\theta) + b \sin(\theta) - \rho \leq r \leq a \cos(\theta) + b \sin(\theta) + \rho\}.$$

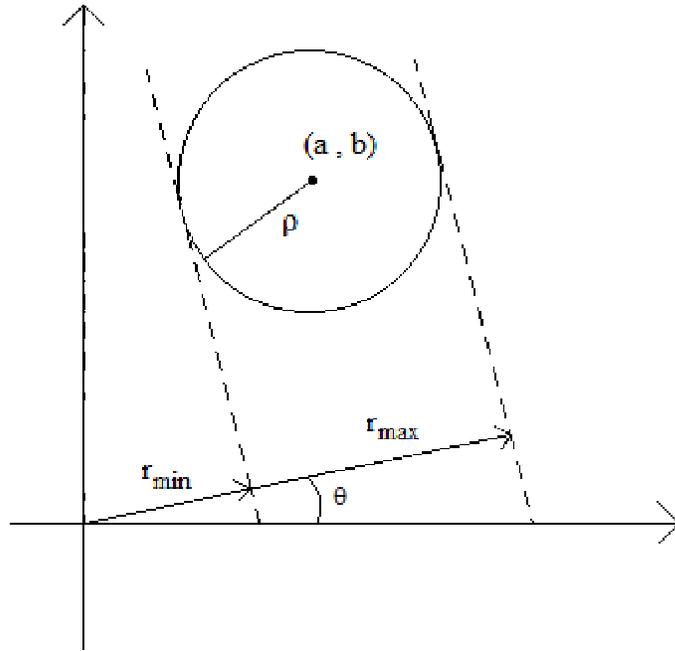


Fig. 2.3: calcul de $r_{\min}(\theta)$ et $r_{\max}(\theta)$

Maintenant, on peut introduire la

Définition 2.1. Un processus de Poisson-lignes d'intensité λ sur \mathbb{R}^2 est simplement l'image par d d'un processus ponctuel de Poisson ξ d'intensité λ sur $[0, \pi[\times \mathbb{R}$.

2.2.2 Mesure aléatoire associée

Définition 2.2. Si μ est un paramètre strictement positif, on peut associer à ξ une mesure aléatoire Λ sur \mathbb{R}^2 comme suit :

$$\forall A \subset \mathbb{R}^2, \quad \Lambda(A) = \sum_{(\theta, r) \in \xi} \mu(A \cap d(\theta, r)),$$

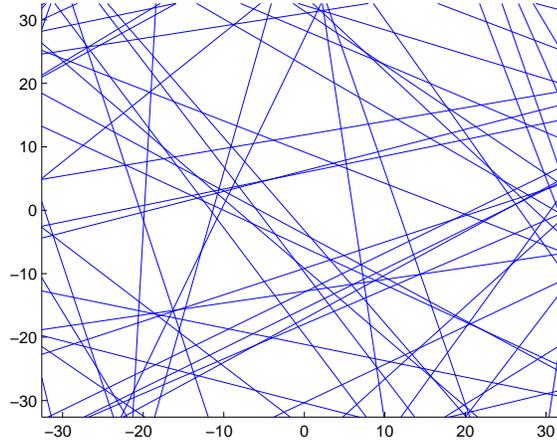


Fig. 2.4: Processus de Poisson-lignes

où l est la mesure de Lebesgue en dimension 1 (aussi appelée "longueur").

Cette formule a bien un sens, car si A est un borélien de \mathbb{R}^2 et D une droite, alors $A \cap D$ est mesurable pour la tribu borélienne définie naturellement sur D (pour s'en convaincre, on peut effectuer une rotation qui ramène D verticalement, et utiliser un résultat bien connu qui dit que toute section verticale d'un borélien de \mathbb{R}^2 est un borélien de \mathbb{R}).

Par ailleurs Λ est bien localement finie. En effet, si A est borné, il est inclus dans un disque B , ce qui permet d'écrire $d^{-1}(A) \subset d^{-1}(B)$. Or $d^{-1}(B)$ ne contient qu'un nombre fini de points $(\theta, r) \in \xi$, puisqu'il est borné d'après la proposition 2.1. Donc *a fortiori* $d^{-1}(A)$ ne contient qu'un nombre fini de points $(\theta, r) \in \xi$, et il n'existe qu'un nombre fini de droites $d(\theta, r)$ qui intersectent A . De plus, chacune des intersections $A \cap d(\theta, r)$ possède une longueur finie (car majorée par le diamètre de B). Ainsi, $\Lambda(A) < \infty$. ■

On peut prouver que le processus Λ est bien mesurable (voir 2.10.1). Enfin, on remarque que la masse de Λ est entièrement concentrée sur les lignes $d(\theta, r)$.

2.2.3 Stationnarité et isotropie de Λ

Proposition 2.2. Λ est isotrope.

Démonstration - On sait que la mesure Λ est caractérisée par les distributions finies $(\Lambda(A_1), \dots, \Lambda(A_k))$ lorsque les A_j parcourent les boréliens de \mathbb{R}^2 , et que

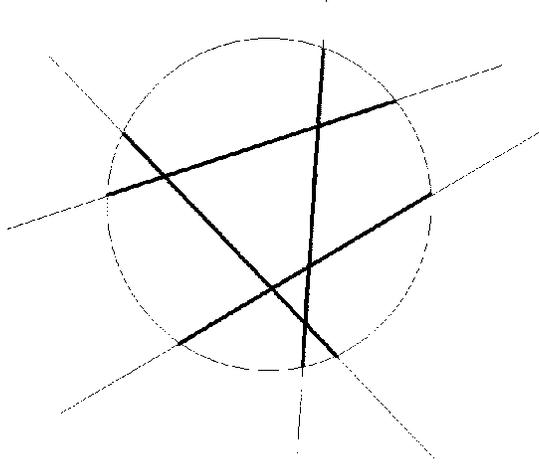


Fig. 2.5: Construction de la mesure Λ .

ces distributions finies sont elles-mêmes caractérisées par leur transformée de Laplace.

Cette transformée vaut :

$$\mathbb{E} \left[e^{-\sum_j s_j \Lambda(A_j)} \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_j s_j \sum_{(\theta, r) \in \xi} \mu l(A_j \cap d(\theta, r)) \right) \right].$$

Supposons que l'on effectue une rotation d'angle θ_0 autour de l'origine. La nouvelle transformée de Laplace vaut :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_j s_j \sum_{(\theta, r) \in \xi} \mu l(\text{rot}_{\theta_0}(A_j) \cap d(\theta, r)) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_j s_j \sum_{(\theta, r) \in \xi} \mu l(A_j \cap \text{rot}_{-\theta_0}(d(\theta, r))) \right) \right] \end{aligned}$$

(car l est invariante par rotation)

$$= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_j s_j \sum_{(\theta, r) \in \xi} \mu l(A_j \cap d(\theta - \theta_0, r)) \right) \right].$$

On a donc simplement effectué une translation horizontale (éventuellement assortie d'un retournement¹) de $-\theta_0$ dans $[0, \pi[\times \mathbb{R}$. Or ξ est invariant par une telle transformation. Pour s'en convaincre, on peut se souvenir qu'il est caractérisé par les "probabilités vides" $\mathbb{P}(\xi(K) = 0)$, lorsque K parcourt les compacts de $[0, \pi[\times \mathbb{R}$. Or ces probabilités sont égales à $e^{-\lambda m(K)}$, où m est la mesure de Lebesgue en deux dimensions (aussi appelée "surface"). Comme m est invariante par translation², on a le résultat. ■

Proposition 2.3. Λ est stationnaire.

Démonstration - On a déjà montré qu'elle était isotrope, il suffit donc de montrer qu'elle est invariante par translation selon une direction donnée. Sans perte de généralité, disons selon le vecteur horizontal $\rho \mathbf{i}$ par exemple. On raisonne là aussi sur les transformées de Laplace. Le calcul est le même, à ceci près que cette fois, $d(\theta, r)$ devient $d(\theta, r - \rho \cos(\theta))$. Or le jacobien de $(\theta, r) \mapsto (\theta, r - \rho \cos(\theta))$ vaut 1, si bien que $m(K)$ reste inchangée. ■

Maintenant que l'on sait que Λ est stationnaire, on peut calculer son intensité. Soit B le disque unité centré à l'origine. $d^{-1}(B)$ est la bande $[0, \pi[\times [-1, 1]$. On connaît la loi de ξ sur cette bande: elle consiste à tirer un entier N selon la loi de Poisson de paramètre $2\pi\lambda$, puis à jeter N points (θ_i, r_i) au hasard indépendamment et uniformément dans la bande. On obtient alors l'intensité de Λ par l'identité de Wald (en vertu de l'indépendance des points):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Lambda(B)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \mu l(B \cap d(\theta_i, r_i)) \right] \\ &= 2\pi\lambda\mu \mathbb{E}[l(B \cap d(\theta_1, r_1))] \\ &= 2\pi\lambda\mu \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{2} \int_{r=-1}^1 2\sqrt{1-r^2} dr d\theta \\ &= \pi^2\lambda\mu \\ &= \pi\lambda\mu m(B). \end{aligned}$$

Ainsi, l'intensité de Λ vaut $\pi\lambda\mu$. ■

¹ attention, la notation $d(\theta - \theta_0, r)$ est en fait légèrement abusive. Si jamais $\theta - \theta_0$ sort de $[0, \pi[$, il faut penser à se ramener modulo π en effectuant sur r le retournement nécessaire: on se souvient qu'on est sur un ruban de Möbius et que $(\theta - \pi, r)$ s'identifie à $(\theta, -r)$.

² et retournement éventuel du morceau de K qui "dépasserait"

2.2.4 Mesure de Palm de Λ

Comme on pouvait s'y attendre intuitivement, on a le

Théorème 2.4. Λ sous Palm se comporte comme Λ sous la probabilité stationnaire, à laquelle on aurait ajouté une droite passant par l'origine, de direction indépendante et uniforme sur $[0, \pi[$.

Démonstration - On utilise la caractérisation par la transformée de Laplace des distributions finies. Pour plus de lisibilité dans les calculs, on se restreint à la transformée de Laplace d'un seul borélien $\mathbb{E}[e^{-s\Lambda(A)}]$, mais la preuve s'étend immédiatement au cas général.

Soit donc A un borélien borné quelconque. On va calculer l'espérance de Palm $\mathbb{E}^0[e^{-s\Lambda(A)}]$ en s'appuyant sur B , le disque unité. Là aussi, on va conditionner par rapport à N : on tire sa valeur, puis on jette N points (θ_i, r_i) i.i.d. dans la bande $[0, \pi[\times [-1, 1]$. Pour chacun de ces points, on note \mathbf{u}_i un vecteur unitaire directeur de $d(\theta_i, r_i)$ (peu importe son sens). On remarque que la portion de $d(\theta_i, r_i)$ qui intersecte B est le segment de milieu $(r_i \cos(\theta_i), r_i \sin(\theta_i))$ (que l'on notera \mathbf{y}_i pour plus de commodité), de direction \mathbf{u}_i et de longueur $2\sqrt{1 - r_i^2}$.

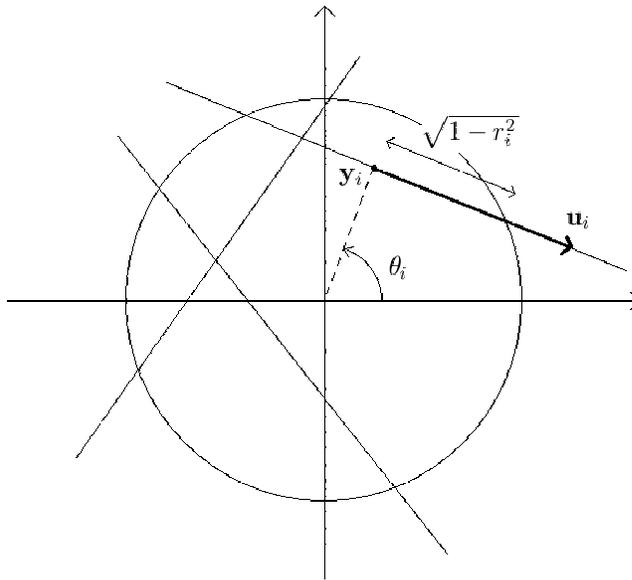


Fig. 2.6: Calcul de la mesure de Palm de Λ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{1}{\pi\lambda\mu m(B)} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{y} \in B} e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y})} \Lambda(d\mathbf{y}) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi^2\lambda\mu} e^{-2\pi\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi\lambda)^n}{n!} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{r_1=-1}^1 \cdots \int_{\theta_n=0}^{\pi} \int_{r_n=-1}^1 \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \int_{t=-\sqrt{1-r_i^2}}^{\sqrt{1-r_i^2}} \mathbb{E} \left[e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y}_i+t\mathbf{u}_i)} \middle| \xi \text{ sur } d^{-1}(B) \right] \\
 &\quad \mu dt d\theta_1 dr_1 \dots d\theta_n dr_n.
 \end{aligned}$$

Par symétrie :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{e^{-2\pi\lambda}}{\pi^2\lambda\mu} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} n \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{r_1=-1}^1 \cdots \int_{\theta_n=0}^{\pi} \int_{r_n=-1}^1 \\
 &\quad \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \mathbb{E} \left[e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1)} \middle| \xi \text{ sur } d^{-1}(B) \right] \\
 &\quad \mu dt d\theta_1 dr_1 \dots d\theta_n dr_n.
 \end{aligned}$$

On sépare ensuite les (θ, r) tels que $|r| \leq 1$ et ceux tels que $|r| > 1$, et on utilise la propriété d'indépendance complète de ξ (processus de Poisson) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{e^{-2\pi\lambda}}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{r_1=-1}^1 \cdots \int_{\theta_n=0}^{\pi} \int_{r_n=-1}^1 \\
 &\quad \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \exp \left(-s\mu \sum_{i=1}^n l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta_i, r_i)) \right) \\
 &\quad \mathbb{E} \left[\exp \left(-s\mu \sum_{\substack{|r|>1 \\ (\theta,r) \in \xi}} l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \right) \right] \\
 &\quad dt d\theta_1 dr_1 \dots d\theta_n dr_n.
 \end{aligned}$$

On scinde alors la somme $\sum_i l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta_i, r_i))$ en deux parties :

- pour $i = 1$, une translation de vecteur $-\mathbf{y}_1 - t\mathbf{u}_1$ montre que :

$$l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta_1, r_1)) = l(A \cap d(\theta_1, 0))$$

- pour $i > 1$, tous les termes sont symétriques.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{e^{-2\pi\lambda}}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\theta_1=0}^{\pi} e^{-s\mu l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\
&\quad \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=-1}^1 e^{-s\mu l((A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r))} dr d\theta \right)^{n-1} \\
&\quad \mathbb{E} \left[\exp \left(-s\mu \sum_{(\theta, r) \in \xi}^{|\mathbf{r}| > 1} l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \right) \right] \\
&\quad dt dr_1 d\theta_1 \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta_1=0}^{\pi} e^{-s\mu l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\
&\quad \exp \left(-2\pi\lambda + \lambda \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=-1}^1 e^{-s\mu l((A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r))} dr d\theta \right) \\
&\quad \mathbb{E} \left[\exp \left(-s\mu \sum_{(\theta, r) \in \xi}^{|\mathbf{r}| > 1} l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \right) \right] \\
&\quad dt dr_1 d\theta_1.
\end{aligned}$$

Intéressons-nous de plus près à :

$$\begin{aligned}
&\exp \left(-2\pi\lambda + \lambda \int_{\theta, r} e^{-s\mu l((A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r))} dr d\theta \right) \\
&= \exp \left(-\lambda \int_{\theta, r} 1 - e^{-s\mu l((A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r))} dr d\theta \right)
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$f(\theta, r) = s\mu l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \mathbb{1}(|r| \leq 1),$$

on peut réécrire l'expression comme :

$$\exp \left(- \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r \in \mathbb{R}} (1 - e^{-f(\theta, r)}) \lambda dr d\theta \right),$$

et on reconnaît là l'expression de la transformée de Laplace de ξ :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-s\mu \sum_{(\theta,r) \in \xi} l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \mathbf{1}(|r| \leq 1) \right) \right].$$

En utilisant à nouveau la propriété d'indépendance complète de ξ , on peut alors regrouper les deux espérances dans le calcul principal pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta_1=0}^{\pi} e^{-s\mu l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\ &\mathbb{E} \left[\exp \left(-s\mu \sum_{(\theta,r) \in \xi} l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \right) \right] \\ &dt dr_1 d\theta_1 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta_1=0}^{\pi} e^{-s\mu l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\ &\mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1)}] dt dr_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

Par stationnarité de Λ , $\mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1)}] = \mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A)}]$, et finalement :

$$\mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] = \mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A)}] \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} e^{-s\mu l(A \cap d(\theta_1, 0))} d\theta_1.$$

Il s'agit exactement de l'espérance qu'on obtiendrait avec Λ générée sous la probabilité stationnaire, à laquelle on aurait ajouté une droite indépendante, passant par l'origine, d'angle uniforme. ■

2.3 Le processus de Cox

Les résultats de ce paragraphe sont déjà connus (voir [Dal03] et [Las10]), ils ne figurent ici que pour rappel.

2.3.1 Construction

Un processus de Cox est la donnée d'un couple de deux mesures aléatoires (Λ, Φ) tel que sachant Λ , Φ soit un processus ponctuel de Poisson d'intensité

Λ . Pour ne pas surcharger les notations, \mathbb{P} désignera indifféremment la loi du couple (Λ, Φ) ou celle de Λ , le contexte permettant de trancher (même remarque pour \mathbb{P}^0). En revanche, la loi de Φ sachant Λ , c'est à dire la loi du processus de Poisson d'intensité Λ , s'écrira \mathbb{P}_Λ . On a donc :

$$\mathbb{P}(\Phi \in \cdot) = \int_{\Lambda} \mathbb{P}_\Lambda(\Phi \in \cdot) \mathbb{P}(d\Lambda).$$

Remarquons tout de suite que pour tout borélien B :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(B)] &= \int_{\Lambda} \mathbb{E}_\Lambda[\Phi(B)] \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \int_{\Lambda} \Lambda(B) \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \mathbb{E}[\Lambda(B)], \end{aligned}$$

ce qui permet de remonter facilement à l'intensité de Φ .

2.3.2 Stationnarité et isotropie

Φ est-il toujours stationnaire ? La réponse est oui dès que Λ l'est; en effet, il suffit de regarder le comportement des probabilités vides :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi(B + \mathbf{x}) = 0) &= \int_{\Lambda} \mathbb{P}_\Lambda(\Phi(B + \mathbf{x}) = 0) \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \int_{\Lambda} e^{-\Lambda(B+\mathbf{x})} \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \mathbb{E} [e^{-\Lambda(B+\mathbf{x})}] \\ &= \mathbb{E} [e^{-\Lambda(B)}] = \mathbb{P}(\Phi(B) = 0). \end{aligned}$$

De même, on montrerait que Φ est isotrope dès que Λ l'est.

2.3.3 Distribution de Palm

Là aussi, comme on pourrait s'y attendre intuitivement, on a le

Théorème 2.5. *Φ sous Palm se comporte comme la somme d'un atome en O et de Φ d'intensité Λ elle-même générée sous Palm.*

Démonstration - Cette fois, on peut utiliser la caractérisation par les probabilités vides car il s'agit d'une mesure ponctuelle (contrairement au cas de Λ qui était une mesure diffuse, et où cette caractérisation n'était pas suffisante). Soit A un compact.

Si $O \in A$, on vérifie immédiatement l'égalité des deux probabilités (nulles toutes les deux).

Sinon, soit B le disque unité, et λ l'intensité de Λ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(\Phi(A) = 0) &= \frac{1}{\mathbb{E}[\Phi(B)]} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{x} \in B} \mathbb{1}(\Phi(A + \mathbf{x}) = 0) \Phi(d\mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda m(B)} \int_{\Lambda} e^{-\Lambda(B)} \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda(B)^n}{n!} \frac{1}{\Lambda(B)^n} \int_{\mathbf{x}_1 \in B} \cdots \int_{\mathbf{x}_n \in B} \\ &\quad \sum_{i=1}^n e^{-\Lambda(A + \mathbf{x}_i \setminus B)} \mathbb{1}(\text{aucun des } \mathbf{x}_j \in A + \mathbf{x}_i) \\ &\quad \Lambda(d\mathbf{x}_1) \dots \Lambda(d\mathbf{x}_n) \mathbb{P}(d\Lambda). \end{aligned}$$

Comme $O \notin A$, on peut éliminer le terme $\mathbb{1}(\mathbf{x}_i \in A + \mathbf{x}_i)$, et par symétrie, il reste :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(\Phi(A) = 0) &= \frac{1}{\lambda m(B)} \int_{\Lambda} e^{-\Lambda(B)} \int_{\mathbf{x} \in B} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(B \setminus A + \mathbf{x})^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(A + \mathbf{x} \setminus B)} \\ &\quad \Lambda(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda m(B)} \int_{\Lambda} e^{-\Lambda(B)} \int_{\mathbf{x} \in B} e^{\Lambda(B) - \Lambda(A + \mathbf{x})} \Lambda(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda m(B)} \int_{\Lambda} \int_{\mathbf{x} \in B} e^{-\Lambda(A + \mathbf{x})} \Lambda(d\mathbf{x}) \mathbb{P}(d\Lambda) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\Lambda(B)]} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbf{x} \in B} \mathbb{P}_{\Lambda - \mathbf{x}}(\Phi(A) = 0) \Lambda(d\mathbf{x}) \right], \end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat recherché. ■

2.4 Modèle de population

2.4.1 Construction

Le modèle est simple : il consiste à simuler un processus de Poisson-lignes d'intensité λ sur le plan, qui figure les routes. Puis sur chaque route, on jette

des usagers au hasard selon un processus de Poisson stationnaire d'intensité μ , indépendants les uns des autres. Remarquons que comme le processus est stationnaire, il est inutile de préciser une origine sur les routes.

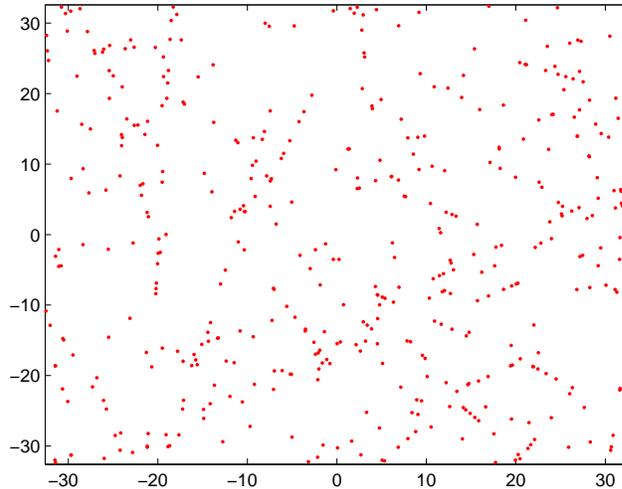


Fig. 2.7: Modèle de population. Cette figure est à mettre en regard avec la figure 2.1.

Après avoir fixé Λ et en regardant les probabilités vides de Φ , on se convainc sans peine que le processus obtenu est un processus de Cox selon la mesure Λ définie au début de l'article, dont la masse est concentrée sur les lignes. D'après les théorèmes 2.4 et 2.5, on a le

Théorème 2.6. Φ est :

- stationnaire, isotrope, d'intensité $\pi\lambda\mu$;
- sa probabilité de Palm revient à considérer Φ sous sa probabilité stationnaire, auquel on aurait rajouté :
 - des points selon un processus de Poisson indépendant, alignés sur une droite passant par l'origine d'angle uniforme et indépendant ;
 - et un point à l'origine.

2.4.2 Fonctionnelle de Laplace de Φ pour des fonctions à symétrie radiale

Rappelons que si on se donne un processus Φ , sa fonctionnelle de Laplace est définie par :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\int f(\mathbf{x})\Phi(d\mathbf{x})} \right],$$

pour toute fonction borélienne positive f . Pour nos besoins, nous devons la calculer dans le cas où f est à symétrie radiale, c'est à dire que $f(\mathbf{x})$ ne dépend que de $\|\mathbf{x}\|$. D'ailleurs, pour plus de simplicité, on notera indifféremment $f(\mathbf{x})$ ou $f(\|\mathbf{x}\|)$.

Théorème 2.7. *Si f est à symétrie radiale :*

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \exp \left[-2\pi\lambda \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu \int_{t=0}^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right) \right) dr \right].$$

Démonstration - Commençons par supposer que f est à support borné, inclus dans le disque de centre O et de rayon $R \geq 0$. Pour le calcul, on commence comme d'habitude par conditionner par rapport au nombre de droites dans le disque. En utilisant la symétrie selon θ et l'indépendance des différentes droites, on obtient :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = e^{-2\pi R\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi R\lambda)^n}{n!(2R)^n} \int_{r_1=-R}^R \cdots \int_{r_n=-R}^R \left(\prod_{i=1}^n g(r_i) \right) dr_1 \cdots dr_n,$$

où $g(r_i)$ correspond à l'espérance calculée sur la i -ème droite (on note Φ_i la restriction de Φ à cette droite) :

$$g(r_i) = \mathbb{E} \left[e^{-\int f(\mathbf{x})\Phi_i(d\mathbf{x})} \right].$$

On obtient ensuite :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \exp \left[-2\pi R\lambda + \pi\lambda \int_{-R}^R g(r)dr \right].$$

g est évidemment une fonction paire, d'où :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \exp \left[-2\pi\lambda \int_0^R (1 - g(r))dr \right].$$

Venons-en au calcul de $g(r)$. Par symétrie radiale, on peut supposer que la droite sur laquelle il s'appuie est verticale, cela simplifie les calculs. Son intersection avec le disque de rayon R est un segment de longueur $2\sqrt{R^2 - r^2}$. En conditionnant par rapport au nombre de points sur le segment, et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} g(r) &= e^{-2\mu\sqrt{R^2-r^2}} \sum_{m \geq 0} \frac{(2\mu\sqrt{R^2-r^2})^m}{m!(2\sqrt{R^2-r^2})^m} \left(\int_{t=-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} dt \right)^m \\ &= \exp \left[-2\mu\sqrt{R^2-r^2} + \mu \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} dt \right] \\ &= \exp \left[-2\mu \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Puisque f est nulle en-dehors du disque de centre O et de rayon R , le terme $1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})}$ est nul pour $t > \sqrt{R^2 - r^2}$, et on peut réécrire :

$$g(r) = \exp \left[-2\mu \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right].$$

Par ailleurs, dès que $r > R$, l'intégrale $\int_0^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt$ est nulle, donc $g(r) = 1$. Ainsi :

$$\mathcal{L}_{\Phi}(f) = \exp \left[-2\pi\lambda \int_0^{\infty} (1 - g(r)) dr \right],$$

et on obtient le résultat pour f à support borné. Dans le cas où f est à support quelconque, on applique la formule précédente à la fonction auxiliaire $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\mathbb{1}_{\|\mathbf{x}\| \leq R}$. En faisant tendre R vers $+\infty$, on conclut :

- d'une part, par le théorème de convergence dominée pour ce qui est de $\mathbb{E} \left[e^{-\int f(\mathbf{x})\Phi(d\mathbf{x})} \right]$;
- d'autre part, par un double usage de la convergence monotone pour l'expression proposée de $\mathcal{L}_{\Phi}(f)$. En effet, \tilde{f} croît vers f donc

$$\int_{t=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\tilde{f}(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \rightarrow \int_{t=0}^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt,$$

et ce en croissant. Donc à nouveau par convergence monotone :

$$\begin{aligned} & \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu \int_{t=0}^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right) \right) dr \\ & \rightarrow \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu \int_{t=0}^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right) \right) dr, \end{aligned}$$

et on conclut par continuité de la fonction exponentielle.

Ainsi s'achève la preuve. ■

Remarque 2.1. Dans le cas où f n'est pas à symétrie radiale, on peut parfaitement effectuer le même travail, et on obtient le

Théorème 2.8 (Cas général). *Si f est quelconque, la transformée de Laplace est donnée par :*

$$\mathcal{L}_{\Phi}(f) = \exp \left[-2\lambda \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=-\infty}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-\mu \int_{t=-\infty}^{\infty} u(f, \theta, r, t) dt \right) \right) d\theta dr \right],$$

avec

$$u(f, \theta, r, t) = 1 - e^{-f(r \cos(\theta) - t \sin(\theta), r \sin(\theta) + t \cos(\theta))}.$$

2.5 Modèle de réseau et probabilité de couverture

On modélise le réseau des antennes par un processus de Poisson Φ_a d'intensité λ_a , indépendant du processus de population Φ . On suppose également qu'un utilisateur est connecté à l'antenne la plus proche (les zones de *best server* forment donc une mosaïque de Voronoï). Pour un utilisateur typique, quelle est alors la probabilité que son antenne reçoive un rapport signal / bruit + interférence (SINR) suffisant sur le canal uplink ?

2.5.1 Probabilité de couverture

Il y a deux manières de voir les choses.

Soit on considère une antenne typique, c'est à dire qu'on regarde Φ_a sous sa distribution de Palm. Ensuite, on calcule pour chaque utilisateur

la probabilité que le SINR uplink soit supérieur au seuil demandé, et on moyenne cette probabilité sur les utilisateurs situés dans la cellule de Voronoï de l'antenne. Le calcul promet d'être compliqué...

Soit on se place du point de vue de l'utilisateur typique, sous la distribution de Palm de Φ (le processus de la population). Notre utilisateur typique est situé à l'origine. Comme Φ_a est indépendant de Φ , il peut être considéré comme un Poisson stationnaire. On connaît donc la densité de distribution de la distance entre l'origine et l'antenne qui couvre celle-ci, et en conditionnant par rapport à cette distance, il ne reste plus qu'à calculer la probabilité que le signal fournisse un SINR suffisant. Le calcul est beaucoup plus simple, et c'est celui que nous faisons maintenant. On suit la même démarche que dans [And10], car elle se transpose très bien. Elle utilise un modèle de propagation simplifié dans lequel :

- la puissance émise par chaque mobile est identique, isotrope, notée $1/\epsilon$;
- à une distance r , le signal subit un affaiblissement en $1/r^\alpha$ ($\alpha > 2$) ;
- on inclut un terme de fading qui suit le modèle de Rayleigh ; selon celui-ci, la puissance reçue à la distance r vaut $hr^{-\alpha}$, où h suit une loi exponentielle de paramètre ϵ ;
- la puissance du bruit est supposée constante égale à σ^2 ;
- pour une antenne située à la distance r de l'utilisateur typique à l'origine, le SINR est donc donné par :

$$\text{SINR} = \frac{hr^{-\alpha}}{\sigma^2 + \sum_{\mathbf{x}_i \in \Phi^0 \setminus \{0\}} h_i r_i^{-\alpha}},$$

où on a noté Φ^0 le processus des mobiles vu sous sa propre mesure de Palm. Il n'y a pas lieu de considérer dans l'interférence la puissance d'émission des autres antennes sur le canal downlink, puisqu'elles utilisent une gamme de fréquences disjointe du canal uplink ;

- le seuil minimal de SINR est noté T ;
- on définit le SNR = $1/\epsilon\sigma^2$ comme étant le rapport moyen signal / bruit à la distance $r = 1$.

Attention, il serait naïf de penser que tous les utilisateurs interfèrent entre eux : quel que soit le système, la ressource radio est divisée en motifs orthogonaux, qu'il s'agisse d'une division en temps (HSDPA), en temps-fréquence (GSM, LTE), ou en code (UMTS). Donc seule une fraction des utilisateurs interfère : ceux qui utilisent la même fréquence au même moment.

Il faut prendre en compte cela dans le choix de μ , en ne gardant qu'une proportion fixe η des utilisateurs dans le processus original Φ . Par exemple, on conserve chaque point avec la probabilité η , et ce de manière indépendante. On voit facilement que le processus obtenu a la même loi que Φ , à cela près que son intensité est multipliée par η (on a effectué un " η -thinning" des processus de Poisson sur les routes). Les calculs sont donc encore valables à condition de prendre $\mu_{\text{radio}} = \eta\mu_{\text{routes}}$.

Théorème 2.9. *La probabilité de couverture en uplink est donnée par :*

$$\mathbb{P}(\text{SINR} > T) = 2\pi\lambda_a \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\pi\lambda_a\rho^2} e^{-\epsilon T\rho^\alpha\sigma^2} p(T, \rho)q(T, \rho)\rho d\rho,$$

avec

$$p_{\lambda, \mu, \alpha}(T, \rho) = \exp \left[-2\pi\lambda\rho \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu\rho \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(r^2+t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right) \right) dr \right]$$

et

$$q_{\mu, \alpha}(T, \rho) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \exp \left[-2\mu\rho \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(\sin^2\theta+t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right] d\theta.$$

Démonstration - Notons ρ la distance entre l'origine et l'antenne la plus proche. Par isotropie, on peut supposer qu'elle est située au point $(\rho, 0)$. Lorsqu'elle reçoit le signal uplink du mobile situé en O , on rappelle la formule du SINR :

$$\text{SINR} = \frac{h\rho^{-\alpha}}{\sigma^2 + \sum_{\mathbf{x}_i \in \Phi^0 \setminus \{0\}} h_i R_i^{-\alpha}},$$

où R_i désigne la distance du i -ème point à $(\rho, 0)$. On rappelle que sous sa mesure de Palm, Φ^0 est égal (en loi) à la somme de Φ^0 stationnaire, d'un processus de Poisson stationnaire sur une droite passant par l'origine, et d'un point à l'origine.

Jusqu'à l'équation (10) de [And10], tout reste identique : on connaît la distribution de ρ grâce aux probabilités vides, et en conditionnant par rapport

à ρ , si on note $I_\rho = \sum_{i \in \Phi^0 \setminus \{0\}} h_i R_i^{-\alpha}$ l'interférence, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{SINR} > T) &= \int_{\rho > 0} e^{-\pi \lambda_a \rho^2} \mathbb{P}(h > T \rho^\alpha (\sigma^2 + I_\rho)) 2\pi \lambda_a \rho d\rho \\ &= \int_{\rho > 0} e^{-\pi \lambda_a \rho^2} e^{-\epsilon T \rho^\alpha \sigma^2} \mathcal{L}_{I_\rho}(\epsilon T \rho^\alpha) 2\pi \lambda_a \rho d\rho. \end{aligned}$$

Le calcul de $\mathcal{L}_{I_\rho}(s)$ est celui d'un *shot-noise* classique (voir [Bac10]). Il commence de la même manière que dans [And10] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_\rho}(s) &= \mathbb{E}^0 \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in \Phi^0 \setminus \{0\}} \mathcal{L}_h(s R_i^{-\alpha}) \right] \\ &= \mathbb{E}^0 \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in \Phi^0 \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Or, par indépendance, $\mathcal{L}_{I_\rho}(s)$ peut être séparé en deux produits distincts :

- d'une part, l'espérance calculée sur Φ vu sous sa probabilité stationnaire. Dans ce cas, on peut très bien déplacer l'antenne vers l'origine et supposer $\rho = 0$. Les R_i deviennent alors les distances au centre. On note p le terme correspondant ;
- et d'autre part, l'espérance calculée sur une droite D passant par l'origine et d'angle uniforme, terme qu'on notera q .

Calculons d'abord p :

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{E} \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in \Phi} \frac{1}{1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{\mathbf{x}_i \in \Phi} f(\mathbf{x}_i) \right) \right], \end{aligned}$$

avec :

$$f(\mathbf{x}) = \log \left(1 + \frac{s}{\epsilon} \|\mathbf{x}\|^{-\alpha} \right)$$

qui est à symétrie radiale. On connaît le résultat (voir théorème 2.7) :

$$p = \exp \left[-2\pi \lambda \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{\epsilon}{s} (r^2 + t^2)^{\alpha/2}} \right) \right) dr \right].$$

Pour $s = \epsilon T \rho^\alpha$, on effectue les deux changements de variable $r \mapsto r/\rho$ et $t \mapsto t/\rho$ et on obtient la valeur annoncée.

Calculons maintenant q . Cette fois, le processus sur D n'est plus stationnaire dans le plan, on doit donc laisser ρ comme il est. En conditionnant par rapport à l'angle θ que fait D avec l'horizontale, on a :

$$q = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathbb{E} \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in D(\theta)} \frac{1}{1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha}} \right] d\theta.$$

Là aussi, l'intégrand peut être vu comme une transformée de Laplace : celle du processus de Poisson sur la ligne D , pour la fonction :

$$f(t) = \log \left(1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha} \right),$$

où t est l'abscisse des points de D (par exemple à partir de l'origine). Le théorème d'Al-Kashi nous donne :

$$f(t) = \log \left(1 + \frac{s}{\epsilon} (\rho^2 + t^2 - 2t\rho \cos \theta)^{-\alpha/2} \right).$$

En utilisant la formule bien connue de la transformée de Laplace d'un processus de Poisson d'intensité μ (voir [Bac10]), on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in d(\theta,0)} \frac{1}{1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha}} \right] = \exp \left[- \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{\mu dt}{1 + \frac{\epsilon}{s} (\rho^2 + t^2 - 2t\rho \cos \theta)^{\alpha/2}} \right].$$

Après un changement de variable $t \mapsto t - \rho \cos(\theta)$ et en utilisant la parité selon t , on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in d(\theta,0)} \frac{1}{1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha}} \right] = \exp \left[-2\mu \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{\epsilon}{s} (\rho^2 \sin^2 \theta + t^2)^{\alpha/2}} \right].$$

Enfin, le même changement de variable que pour p conduit au résultat annoncé. ■

Remarque 2.2. On peut noter que p et q sont indépendants du paramètre de puissance ϵ .

2.5.2 Comparaison avec le processus de Poisson ordinaire

On sait que Φ est d'intensité $\pi\lambda\mu$. Que se passe-t-il si on le remplace par un processus de Poisson ordinaire de même intensité? La probabilité de couverture est toujours donnée par :

$$\mathbb{P}(\text{SINR} > T) = 2\pi\lambda_a \int_{\rho>0} e^{-\pi\lambda_a\rho^2} e^{-\epsilon T\rho^\alpha\sigma^2} \mathcal{L}_{J_\rho}(\epsilon T\rho^\alpha) \rho d\rho,$$

où J_ρ désigne la nouvelle interférence. Il devrait donc suffire de comparer $\mathcal{L}_{I_\rho}(\epsilon T\rho^\alpha)$ et $\mathcal{L}_{J_\rho}(\epsilon T\rho^\alpha)$. Le calcul est assez similaire au précédent. Φ vu sous Palm et privé de son atome en O ayant la même loi que Φ stationnaire d'après le théorème de Slivnyak, on suppose une fois encore que $\rho = 0$.

Cela nous donne :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\mathbf{x}_i \in \Phi} \frac{1}{1 + \frac{s}{\epsilon} R_i^{-\alpha}} \right] = \exp \left[- \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} (1 - e^{-f(\mathbf{x})}) \pi\lambda\mu d\mathbf{x} \right],$$

avec $f(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|) = \log \left(1 + \frac{s}{\epsilon} \|\mathbf{x}\|^{-\alpha} \right)$. Un changement de variables en coordonnées polaires donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_\rho}(s) &= \exp \left[- \int_{r=0}^{\infty} (1 - e^{-f(r)}) 2\pi^2 \lambda \mu r dr \right] \\ &= \exp \left[-2\pi^2 \lambda \mu \int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr}{1 + \frac{\epsilon}{s} r^\alpha} \right], \end{aligned}$$

soit, après un changement de variable $r \mapsto r/\rho$:

$$\mathcal{L}_{J_\rho}(\epsilon T\rho^\alpha) = \exp \left[-2\pi^2 \lambda \mu \rho^2 \int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr}{1 + \frac{r^\alpha}{T}} \right].$$

Il reste à le comparer à $\mathcal{L}_{I_\rho}(\epsilon T\rho^\alpha)$. En utilisant l'inégalité $1 - e^{-A} \leq A$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu\rho \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(r^2+t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right) \right) dr \\ & \leq 2\mu\rho \int_{r=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt dr}{1 + \frac{(r^2+t^2)^{\alpha/2}}{T}}. \end{aligned}$$

Après un passage en coordonnées polaires et en réinjectant l'expression dans $p(T, \rho)$, on trouve :

$$p(T, \rho) \geq \exp \left[-2\pi^2 \lambda \mu \rho^2 \int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr}{1 + \frac{r^\alpha}{T}} \right] = \mathcal{L}_{J_\rho}(\epsilon T \rho^\alpha).$$

Ainsi, Φ regardé sous sa probabilité stationnaire donnerait, s'il était seul, une probabilité de couverture supérieure à un processus de Poisson homogène de même intensité. Mais la multiplication par $q < 1$, correspondant à l'interférence créée par la droite qui passe par O , crée l'effet inverse.

Lequel des deux effets est prépondérant sur l'autre ? Les simulations qui suivent montrent que "cela dépend", mais que la différence n'est jamais très grande (voir figure 2.8).

2.5.3 Simulations numériques

Pour le path-loss, le modèle le plus courant est le modèle COST-Hata. Il consiste à prendre :

$$(P_{\text{reçue}})_{\text{dBm}} = (P_{\text{max}})_{\text{dBm}} - A - B \log_{10}(d),$$

où A est un paramètre d'affaiblissement moyen qui dépend de la hauteur de l'antenne, de la fréquence d'émission et du type de terrain (urbain ou rural), et d est la distance exprimée en kilomètres. Par exemple, pour un système GSM dans la bande des 900 MHz, en milieu urbain, on prendra typiquement $P_{\text{max}} = 34$ dBm, $A = 128$ dB et $B = 35,7$ dB. Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 6 de [Lag99].

En linéaire, cela se réécrit :

$$(P_{\text{reçue}})_{\text{lin}} = (P_{\text{max}})_{\text{lin}} \times 10^{-A/10} \times \frac{1}{d^{B/10}}.$$

Par identification, on a donc

$$\alpha = B/10 = 3,57$$

et

$$1/\epsilon = \frac{(P_{\text{max}})_{\text{lin}}}{10^{A/10}} = 3,98 \times 10^{-13} \text{ W}.$$

Pour σ^2 , en GSM on prend généralement -174 dBm / Hz, auquel on ajoute un facteur de bruit de $10^{0,8}$. En linéaire, sur une bande de 200 kHz, on a donc :

$$\sigma^2 = \frac{10^{-174/10}}{1000} \times (200 \times 10^3) \times 10^{0,8} = 5,02 \times 10^{-15} \text{ W},$$

ce qui nous donne :

$$SNR = 19 \text{ dB}.$$

Il nous reste à choisir les paramètres λ , λ_a et μ . Puisque l'unité de distance est le kilomètre, on sait que le nombre moyen de routes qui intersectent un disque de rayon 1 km vaut $2\pi\lambda$. Dans une ville comme Paris il y a un peu plus de 6000 rues, dont beaucoup sont des ruelles ou des impasses, et sa surface vaut un peu plus de 100 km²; on peut donc prendre légitimement λ de l'ordre de 7 km⁻¹. Du reste, une série de calibrations (ou *fittings*) effectuées sur données réelles, quartier par quartier, nous a montré que λ était toujours compris entre 5 km⁻¹ et 8 km⁻¹ environ.

Pour λ_a , si on reste sur le GSM dans la bande des 900 MHz, on peut considérer que chaque antenne possède un rayon d'action de 300 m environ, ce qui donne un λ_a de l'ordre de $3,5$ km⁻². Ce chiffre est cohérent avec le nombre de mâts d'antennes Orange sur Paris intra-muros en GSM 900.

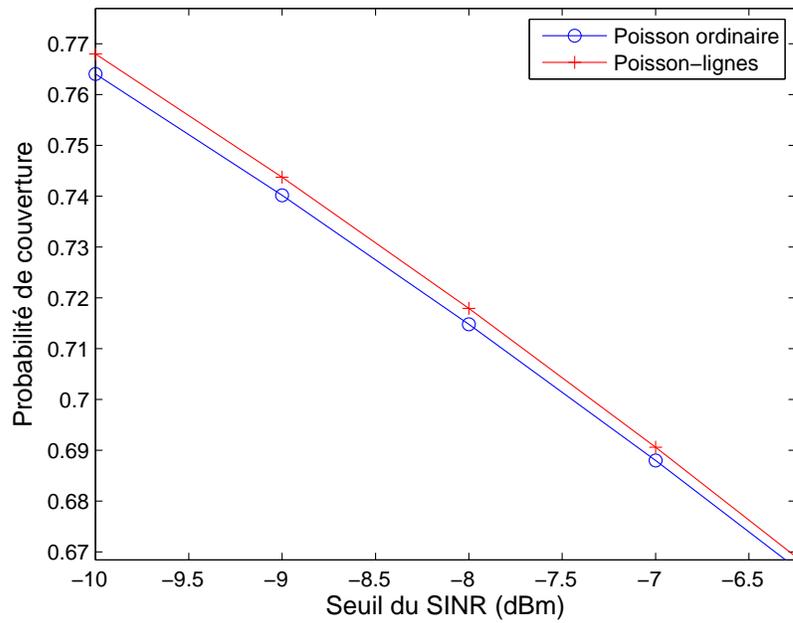
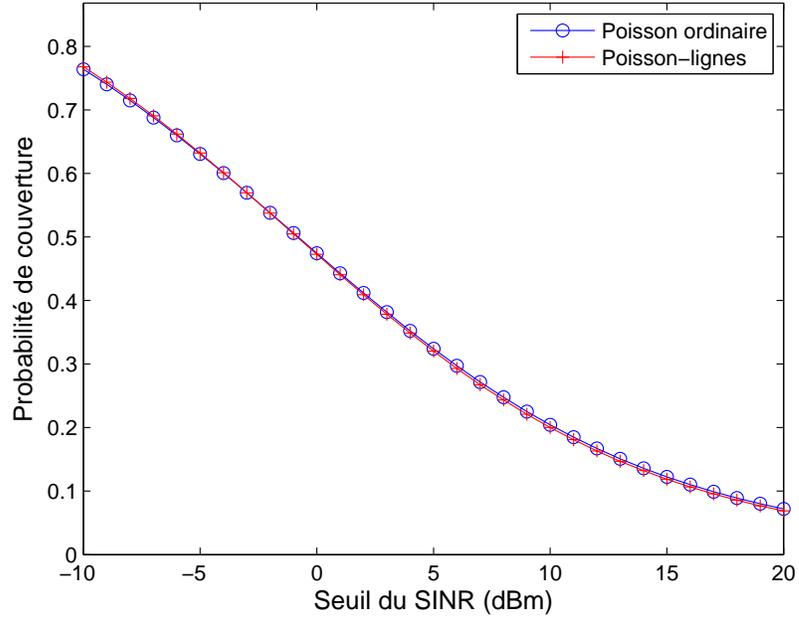
Enfin, pour μ , chaque antenne GSM possédant en moyenne trois TRX sur sept time-slots, elle peut assurer jusqu'à 21 conversations simultanées. Sur un carré de 1 km², en pleine charge, on aurait donc au maximum :

$$\pi\lambda\mu = 21 \times \lambda_a \Rightarrow \mu = \frac{21\lambda_a}{\pi\lambda\mu}.$$

Mais on se souvient qu'il faut prendre en compte l'absence d'interférences due aux techniques d'accès multiple. Comme on l'a écrit plus haut, on a $\mu_{\text{radio}} = \eta\mu_{\text{routes}}$, où η représente la proportion d'utilisateurs qui interfèrent. Dans notre exemple, on a justement $\eta = 1/21$, ce qui donne une valeur maximale de

$$\mu_{\text{radio}} = \lambda_a/\pi\lambda = 0,16 \text{ km}^{-1}.$$

Une valeur raisonnable sera donc $\mu = 0,1$ km⁻¹. La probabilité de couverture est présentée sur la figure 2.8. Par rapport à un processus de Poisson ordinaire, les probabilités sont quasiment les mêmes. Cela peut s'expliquer par le fait que μ est très faible, si bien que les alignements de points ne se



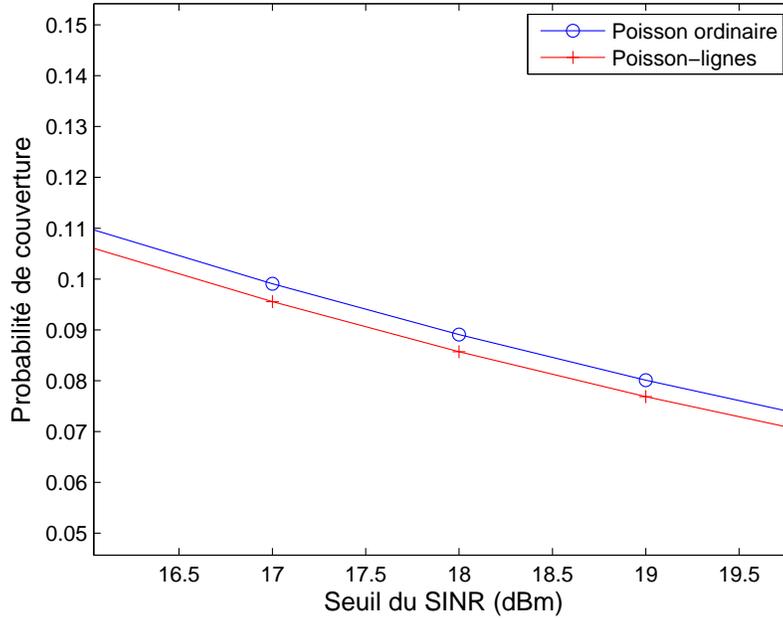
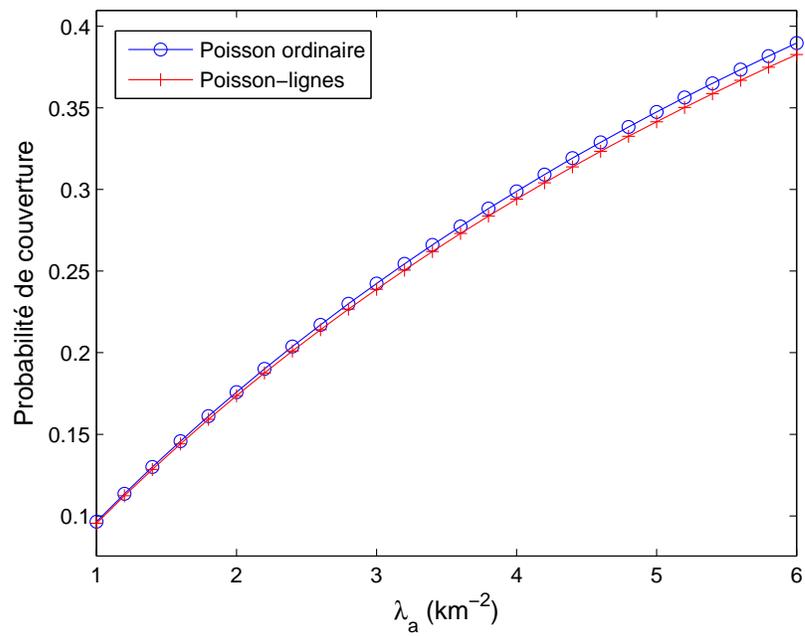
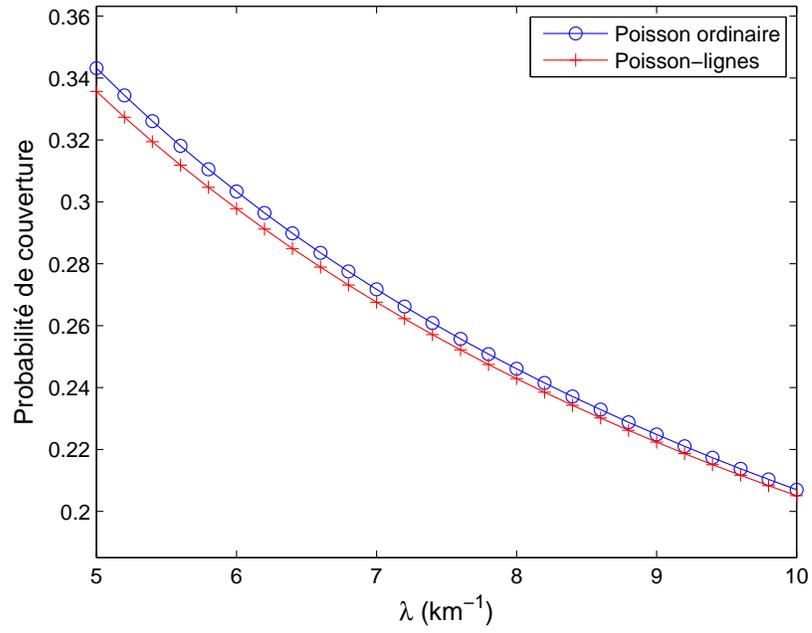


Fig. 2.8: Comparaison des probabilités de couverture du Poisson-lignes et du Poisson ordinaire sur le lien uplink, en fonction du seuil minimal de SINR. $\lambda_a = 3,5 \text{ km}^{-2}$, $\text{SNR} = 19 \text{ dB}$, $\alpha = 3,57$, $\lambda = 7 \text{ km}^{-1}$, $\mu = 0,1 \text{ km}^{-1}$. Le seuil de SINR varie entre -10 dBm et 20 dBm.

font pas tellement sentir. Or ce sont eux qui apportent la différence entre le Poisson-lignes et le Poisson ordinaire.

Comme les simulations sont assez rapides (quelques secondes par valeur calculée), on peut aussi observer la variation de la probabilité de couverture en fonction de λ , λ_a ou μ . C'est ce que nous avons représenté sur la figure 2.9. À chaque fois, seul l'un des trois paramètres varie pendant que les deux autres sont fixés aux valeurs de la figure 2.8. Là aussi, les deux probabilités restent très semblables. Mais si l'on prenait des paramètres plus extrêmes mais moins communs (c'est-à-dire correspondant à des situations plus exceptionnelles), avec des valeurs de μ très importantes de manière à induire des alignements spectaculaires, la différence observée serait évidemment plus grande.



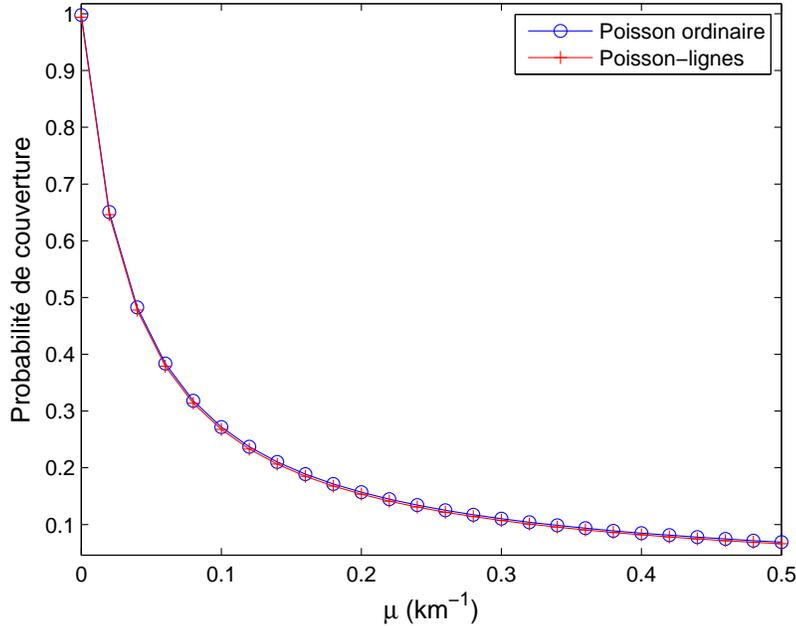


Fig. 2.9: Sensibilité des probabilités de couverture en fonction de λ , λ_a , μ . T est fixé à 7 dBm.

2.5.4 Piétons contre automobilistes

Supposons maintenant qu'il y ait deux sortes d'utilisateurs: des automobilistes, répartis selon notre modèle de lignes, et des piétons (qui n'empruntent pas forcément les routes), répartis selon un processus de Poisson homogène indépendant. Du point de vue du piéton, l'interférence créée par les autres utilisateurs est la somme de l'interférence d'un Poisson stationnaire (par le théorème de Slivnyak) et d'un Poisson-lignes stationnaire. Du point de vue de l'automobiliste au contraire, l'interférence est la somme de l'interférence d'un Poisson stationnaire, d'un Poisson-lignes stationnaire, plus encore d'un Poisson sur une ligne qui passe par l'automobiliste. Elle est donc toujours supérieure, et la probabilité de couverture est plus faible. Conclusion: il vaut mieux être piéton qu'automobiliste!

Ensuite, il s'agit de savoir si le gain du piéton sur l'automobiliste est toujours le même, quelle que soit l'intensité μ . Puisque la différence correspond à une route supplémentaire qui passe par l'utilisateur typique, on pourrait s'attendre intuitivement à ce qu'elle grandisse avec μ . À vrai dire, la figure

2.10 montre que ce n'est le cas qu'en valeur relative.

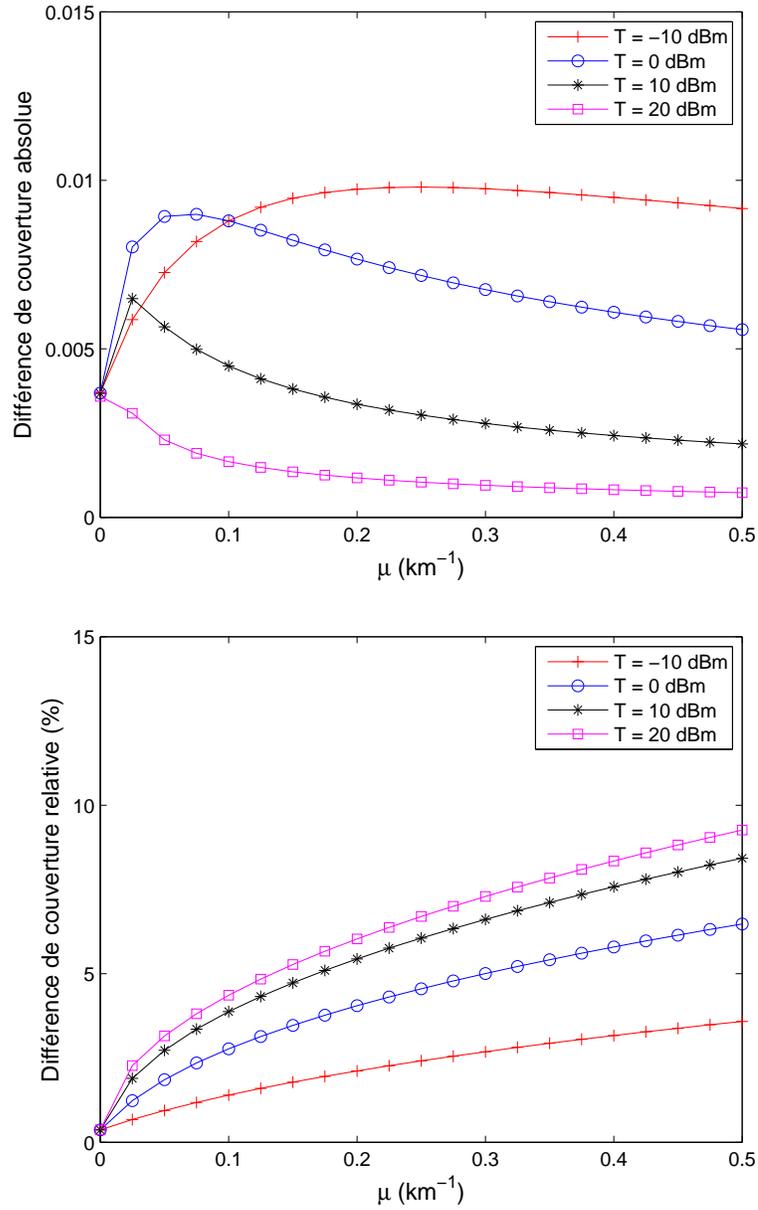


Fig. 2.10: Gain de la probabilité de couverture d'un piéton par rapport à un automobiliste. $\lambda_a = 3,5 \text{ km}^{-2}$, $\lambda = 7 \text{ km}^{-1}$, SNR = 19 dB.

2.6 Deux généralisations

2.6.1 Première généralisation : avec μ variable

On souhaite modéliser un réseau où les routes ne rencontrent pas toutes le même trafic d'usagers (grands axes, petits axes, etc.). On rend donc μ aléatoire, indépendant du processus des routes. La manière la plus commode de procéder est encore d'introduire une famille $\mu_{(\theta,r)}$ de variables aléatoires i.i.d. indexées sur $[0, \pi[\times \mathbb{R}$, indépendantes de ξ , puis de poser :

$$\Lambda(A) = \sum_{(\theta,r) \in \xi} \mu_{(\theta,r)} l(A \cap d(\theta, r)).$$

On se convainc aisément que Λ reste isotrope et stationnaire³. Pour ce qui est de la distribution de Palm, le résultat est plus subtil, car il faut prendre en compte le biais suivant : lorsqu'on sélectionne une route "typique" (ce qui peut être rendu rigoureux par la notion d'ergodicité par exemple), les routes plus intenses (c'est-à-dire avec un plus grand μ) vont avoir plus de poids. Par un léger abus, continuons à noter \mathbb{P} la loi marginale de μ . Alors, d'une manière précise on a le

Théorème 2.10. *Λ sous Palm se comporte comme Λ stationnaire à laquelle on aurait ajouté une droite indépendante passant par l'origine. Cette droite est d'angle uniforme, mais son intensité est donnée par une nouvelle probabilité, de densité par rapport à \mathbb{P} :*

$$\mathbb{P}'(d\mu) = \frac{\mu}{\mathbb{E}[\mu]} \mathbb{P}(d\mu).$$

Démonstration - Pour l'essentiel, les calculs du théorème 2.4 peuvent être repris. Voici cependant quelques points à regarder plus attentivement :

- en utilisant encore l'identité de Wald, on voit immédiatement que l'intensité de Λ vaut $\pi \lambda \mathbb{E}[\mu]$
- dans les premières lignes du calcul de $\mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}]$, on est obligé de conditionner aussi par rapport à la famille des $\mu_{(\theta,r)}$.

³ la raison précise en est que la famille des $\mu_{(\theta,r)}$ a même loi que la famille des $\mu_{(\theta-\theta_0,r)}$ ou que la famille des $\mu_{(\theta,r-\rho \cos(\theta))}$, ce qui vient de la même constatation sur les sous-familles finies et *in fine* du théorème d'extension de Kolmogorov.

Cela nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{1}{\pi^2 \lambda \mathbb{E}[\mu]} e^{-2\pi\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{r_1=-1}^1 \cdots \int_{\theta_n=0}^{\pi} \int_{r_n=-1}^1 \\ &\int_{\mu_1} \cdots \int_{\mu_n} \sum_{i=1}^n \int_{t=-\sqrt{1-r_i^2}}^{\sqrt{1-r_i^2}} \mathbb{E} \left[e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y}_i+t\mathbf{u}_i)} \middle| \xi \text{ et } \mu \text{ sur } d^{-1}(B) \right] \\ &\mu_i dt \mathbb{P}(d\mu_1) \cdots \mathbb{P}(d\mu_n) d\theta_1 dr_1 \cdots d\theta_n dr_n. \end{aligned}$$

- l'argument de symétrie vaut toujours :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{e^{-2\pi\lambda}}{\pi^2 \mathbb{E}[\mu]} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{r_1=-1}^1 \cdots \int_{\theta_n=0}^{\pi} \int_{r_n=-1}^1 \\ &\int_{\mu_1} \cdots \int_{\mu_n} \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \mathbb{E} \left[e^{-s\Lambda(A+\mathbf{y}_i+t\mathbf{u}_i)} \middle| \xi \text{ et } \mu \text{ sur } d^{-1}(B) \right] \\ &\mu_1 dt \mathbb{P}(d\mu_1) \cdots \mathbb{P}(d\mu_n) d\theta_1 dr_1 \cdots d\theta_n dr_n. \end{aligned}$$

- le partage en (θ, r) tels que $|r| \leq 1$ et $|r| > 1$ reste également licite, par indépendance des $\mu_{(\theta,r)}$ correspondants. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{1}{\pi^2 \mathbb{E}[\mu]} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\mu_1} e^{-s\mu_1 l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\ &\exp \left(-\lambda \int_{\theta,r,\mu} 1 - e^{-s\mu l((A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta,r))} dr d\theta \mathbb{P}(d\mu) \right) \\ &\mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{\substack{|r|>1 \\ (\theta,r) \in \xi}} \mu_{(\theta,r)} l((A+\mathbf{y}_1+t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta,r)) \right) \right] \\ &\mu_1 dt dr_1 d\theta_1 \mathbb{P}(d\mu_1). \end{aligned}$$

- par ailleurs, l'interprétation de la première exponentielle comme une transformée de Laplace reste valable. Plus précisément, introduisons la transformée de Laplace d'un processus de Poisson marqué, où les marques sont indépendantes :

$$\mathcal{L}_{\Phi}(f) = \mathbb{E} \left[e^{-\sum_{\mathbf{x} \in \Phi} f(\mathbf{x}, \mu_{\mathbf{x}})} \right].$$

Un raisonnement en tout point similaire à celui du théorème 2.7 (on prend d'abord pour f à support borné, puis on conclut par convergence dominée / monotone) conduit à :

$$\mathcal{L}_{\Phi}(f) = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbf{x}, \mu} (1 - e^{f(\mathbf{x}, \mu)}) d\mathbf{x} \mathbb{P}(d\mu) \right).$$

Revenons à notre calcul principal : on réécrit l'exponentielle de la deuxième ligne comme une espérance, qu'on regroupe avec l'espérance de la ligne en-dessous par indépendance complète. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{1}{\pi^2 \mathbb{E}[\mu]} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\mu_1} e^{-s\mu_1 l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\ &\quad \mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{(\theta, r) \in \xi} \mu_{(\theta, r)} l((A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1) \cap d(\theta, r)) \right) \right] \\ &\quad \mu_1 dt dr_1 d\theta_1 \mathbb{P}(d\mu_1) \\ &= \frac{1}{\pi^2 \mathbb{E}[\mu]} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\mu_1} e^{-s\mu_1 l(A \cap d(\theta_1, 0))} \int_{r_1=-1}^1 \int_{t=-\sqrt{1-r_1^2}}^{\sqrt{1-r_1^2}} \\ &\quad \mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A + \mathbf{y}_1 + t\mathbf{u}_1)}] \mu_1 dt dr_1 d\theta_1 \mathbb{P}(d\mu_1). \end{aligned}$$

Toujours par stationnarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 [e^{-s\Lambda(A)}] &= \frac{\mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A)}]}{\pi \mathbb{E}[\mu]} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\mu_1} e^{-s\mu_1 l(A \cap d(\theta_1, 0))} \mu_1 d\theta_1 \mathbb{P}(d\mu_1) \\ &= \mathbb{E} [e^{-s\Lambda(A)}] \int_{\theta_1, \mu_1} e^{-s\mu_1 l(A \cap d(\theta_1, 0))} \frac{d\theta_1}{\pi} \mathbb{P}'(d\mu_1), \end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat recherché. ■

Ainsi, on en déduit que la "route typique" qui passe par l'origine sous Palm présente une intensité biaisée vers les hautes valeurs. Quant au calcul de la fonctionnelle de Laplace, il aboutit à la nouvelle probabilité de couverture. Plus précisément, on a le

Théorème 2.11. Avec μ variable, la probabilité de couverture est donnée par :

$$\mathbb{P}(SINR > T) = 2\pi\lambda_a \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\pi\lambda_a\rho^2} e^{-cT\rho^\alpha\sigma^2} p(T, \rho)q(T, \rho)\rho d\rho,$$

avec

$$p(T, \rho) = \exp \left[-2\pi\lambda\rho \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \mathcal{L}_\mu \left(2\rho \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(r^2+t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right) \right) dr \right]$$

et

$$q(T, \rho) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\mu} \exp \left(-2\mu\rho \int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(\sin^2\theta+t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right) \frac{d\theta}{\pi} \frac{\mu}{\mathbb{E}[\mu]} \mathbb{P}(d\mu).$$

Démonstration - On conditionne d'abord par rapport à μ avant de prendre l'espérance globale. Dans le calcul de la fonctionnelle de Laplace, on a toujours :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \exp \left[-2\pi\lambda \int_0^{\infty} (1 - g(r))dr \right],$$

mais avec cette fois :

$$g(r) = \mathbb{E}_\mu \left[\exp \left(-2\mu \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right) \right]$$

qui peut se réécrire :

$$g(r) = \mathcal{L}_\mu \left(2 \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right),$$

et le résultat en découle. ■

Remarque 2.3. On voit que les hautes valeurs de μ apportent une contribution significative à q , donc à l'interférence globale. Autrement dit, elles induisent un biais sur la probabilité de couverture. Revenons à notre comparaison avec un modèle de Poisson ordinaire pour les utilisateurs, de même intensité $\pi\lambda\mathbb{E}[\mu]$. Laissons $\mathbb{E}[\mu]$ constante mais faisons augmenter sa variance; on doit voir se dégrader la probabilité de couverture. C'est ce que montre la figure 2.11; certes, la différence apparaît comme très faible, car on

est dans des ordres de grandeur qui garantissent de toute façon une bonne probabilité de couverture, et qui plus est μ est très petit ce qui gomme l'effet d'alignement des utilisateurs. Cependant, cette différence va bien dans le sens escompté si l'on effectue un grossissement de la figure. Et de plus, avec des paramètres plus extrêmes (cas d'un réseau qui gèrerait moins bien les interférences), on peut s'attendre à voir la différence s'accroître.

2.6.2 Deuxième généralisation : modèle Manhattan

Cette fois, on suppose à nouveau μ fixé, mais le plan des rues est orthogonal, c'est à dire que θ vaut toujours 0 ou $\pi/2$. Il y a deux manières équivalentes de construire un tel processus.

- soit on concentre la masse de ξ sur les deux lignes $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{\pi/2\} \times \mathbb{R}$. Pour tout borélien A de $[0, \pi[\times \mathbb{R}$, on pose donc :

$$\nu(A) = \tau l(A \cap (\{0\} \times \mathbb{R})) + \tau l(A \cap (\{\pi/2\} \times \mathbb{R}))$$

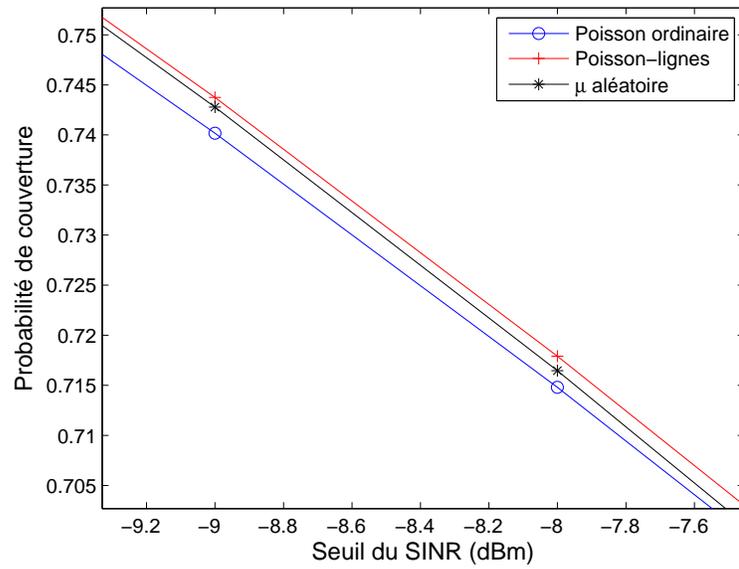
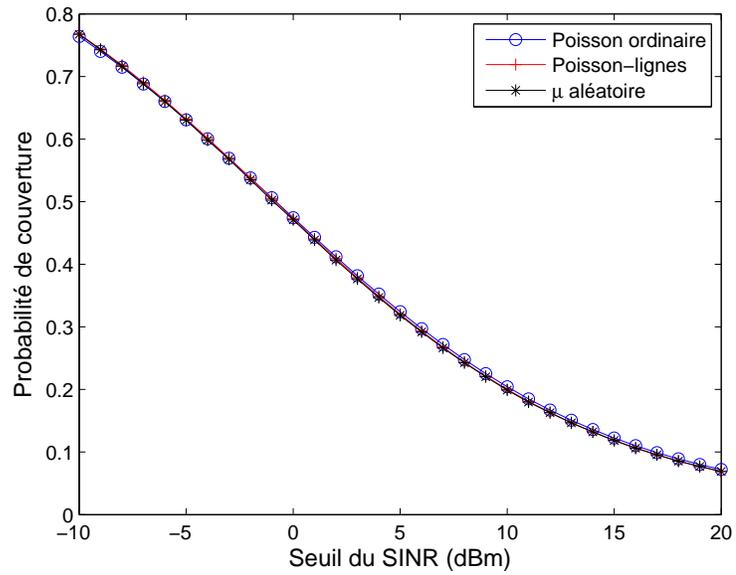
où τ est un paramètre positif donné, puis on construit ξ d'intensité ν .

- soit on voit directement ξ comme la superposition de deux processus de Poisson indépendants d'intensité τ sur $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{\pi/2\} \times \mathbb{R}$. Le résultat est le même comme on le constate en calculant les probabilités vides et en utilisant la propriété d'indépendance complète.

Les deux points de vue nous seront également utiles.

Théorème 2.12. *Sous Palm, Λ est comme Λ stationnaire à laquelle on aurait ajouté une droite passant par l'origine, dont l'angle vaut 0 ou $\pi/2$ avec une chance sur deux.*

Démonstration - Λ n'est évidemment plus isotrope, mais en revanche elle reste stationnaire. Il suffit de vérifier la stationnarité par rapport aux deux axes (Ox) et (Oy) , puisqu'ils engendrent \mathbb{R}^2 . Et par symétrie, la vérification par rapport à (Ox) suffit. Or toute translation de vecteur $\rho \mathbf{i}$ laisse les droites $d(\pi/2, r)$ invariantes, et transforme les $d(0, r)$ en $d(0, r + \rho)$. Cela revient à laisser le processus de Poisson sur $\{\pi/2\} \times \mathbb{R}$ invariant, et à translater celui sur $\{0\} \times \mathbb{R}$ de $\rho \mathbf{j}$ (deuxième point de vue). Les deux processus restent indépendants, stationnaires, de même intensité.



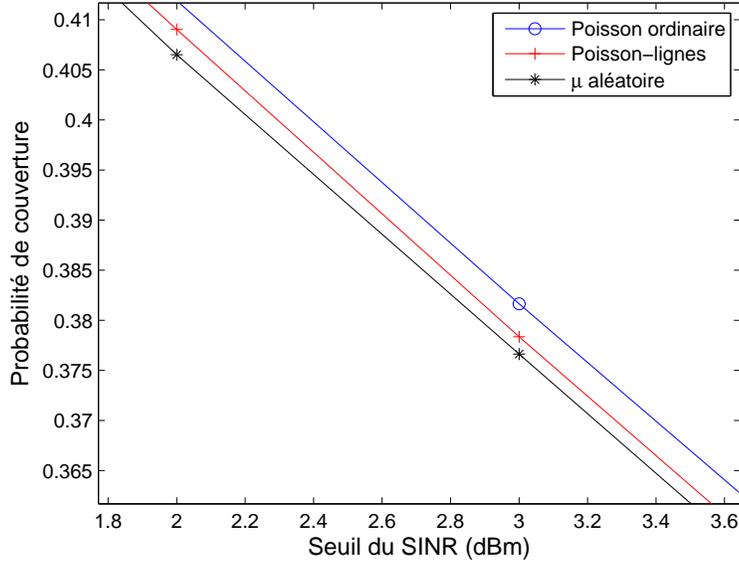


Fig. 2.11: Comparaison de différentes probabilités de couverture en fonction du seuil minimal de SINR. On a $\lambda_a = 3,5 \text{ km}^{-2}$, $\lambda = 7 \text{ km}^{-1}$, $\text{SNR} = 19 \text{ dB}$. μ suit une loi uniforme de moyenne 0.1 km^{-1} et de variance 0.003 km^{-2} .

Pour le calcul de l'intensité, on se place sur le disque unité et on revient au premier point de vue :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\Lambda(B)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N \mu l(B \cap d(\theta_i, r_i)) \right] \\
 &= 4\tau\mu \mathbb{E}[l(B \cap d(\theta_1, r_1))] \\
 &= 4\tau\mu \frac{1}{4} \sum_{\theta \in \{0, \pi/2\}} \int_{r=-1}^1 2\sqrt{1-r^2} dr \\
 &= 2\pi\tau\mu \\
 &= 2\tau\mu m(B).
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intensité vaut $2\tau\mu$. Quant au calcul de la distribution de Palm à proprement parler, il est rigoureusement le même. ■

Théorème 2.13. *À intensité égale (c'est à dire $\tau = \pi\lambda/2$), le modèle Manhattan et le modèle de Poisson lignes ont la même probabilité de couverture.*

Démonstration - Si l'on suivait le calcul effectué en [And10], on conditionnerait d'abord par rapport à la distance ρ de l'antenne la plus proche de l'origine, et par un argument d'isotropie du processus des utilisateurs, on supposerait sans perte de généralité que l'antenne est située en $(\rho, 0)$. Malheureusement, cet argument ne tient plus ici. On peut seulement dire que l'antenne est située en $(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, où θ est uniformément distribué sur $[0, 2\pi[$ par isotropie du processus des antennes. En introduisant la dépendance en θ dans le calcul du SINR, on obtient :

$$\mathbb{P}(\text{SINR} > T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho, \theta} e^{-\pi\lambda_a\rho^2} e^{-\epsilon T\rho^\alpha\sigma^2} \mathcal{L}_{I_{\rho, \theta}}(\epsilon T\rho^\alpha) 2\pi\lambda_a\rho d\rho d\theta.$$

Pour le calcul de p , l'argument de stationnarité qui permet de ramener l'antenne en O tient toujours. La transformée de Laplace pour les fonctions à symétrie radiale devient :

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \exp \left[-4\tau \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu \int_{t=0}^{\infty} \left(1 - e^{-f(\sqrt{r^2+t^2})} \right) dt \right) \right) dr \right].$$

Puisque $\tau = \pi\lambda/2$, p ne change pas. Quant au calcul de q , il s'agit de l'interférence créée en $(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ par une droite passant par l'origine, d'angle 0 ou $\pi/2$ avec probabilité $1/2$. Mais comme θ est uniformément distribué, cela revient à poser $\theta = 0$ tout en prenant un angle uniforme pour la droite qui passe par l'origine⁴. On est donc ramené au cas précédent. ■

2.7 Meilleure prise en compte de la gestion des ressources radio

2.7.1 Motivation et démarche générale

Jusqu'ici, le modèle que nous avons adopté prenait bien en compte l'accès multiple orthogonal, mais dans un même motif temps-fréquence, les utilisateurs étaient répartis uniformément sur le territoire. Or, si nous notons $\mathcal{C}(O)$

⁴ plus exactement, on tire avec une chance sur deux un premier angle uniforme pour la droite, et avec l'autre chance sur deux un deuxième angle uniforme. L'angle obtenu est bien uniforme.

la cellule qui couvre l'origine, il serait plus exact de ne pas prendre en compte les autres utilisateurs de $\mathcal{C}(O)$, mais seulement les utilisateurs extérieurs.

Pour bien faire les choses dans le calcul de la probabilité de couverture, il faudrait d'abord conditionner par rapport à Φ_a , puis calculer notre shot-noise sur la même fonction f que dans le théorème 2.9, à ceci près qu'on annulerait f sur $\mathcal{C}(O)$. Or non seulement la fonction $f(\mathbf{x})\mathbf{1}(\mathbf{x} \in \mathcal{C}(O))$ n'est plus à symétrie radiale⁵, mais surtout il n'y a pas de résultat analytiquement simple sur la géométrie de $\mathcal{C}(O)$, ce qui est beaucoup plus problématique.

Cependant, on pourrait imaginer de procéder ainsi : on commence par conditionner par rapport à ρ (la distance à l'origine de l'antenne la plus proche) et on suppose par isotropie que cette antenne se situe en $\mathbf{x}_a = (\rho, 0)$. Ensuite, un utilisateur \mathbf{x} est couvert par $\mathcal{C}(O)$ si et seulement si le disque ouvert de centre \mathbf{x} et de rayon $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|$ est vide d'antennes. Or par notre conditionnement sur ρ , on sait déjà que le disque ouvert de centre O et de rayon ρ est vide. On obtient donc :

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C}(O) \Leftrightarrow \Phi_a(D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|) \setminus D(O, \rho)) = 0,$$

comme le montre la figure 2.12. Ensuite, l'idée serait d'exploiter le fait que $D(O, \rho)$ est un ensemble d'arrêt pour Φ_a (voir [Bac10]) : par propriété de Markov fort, on a indépendance complète des deux ensembles aléatoires disjoints que sont $D(O, \rho)$ et $D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|) \setminus D(O, \rho)$. En particulier :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi_a(D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|)) = 0 \mid \rho) &= \mathbb{P}(\Phi_a(D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|) \setminus D(O, \rho)) = 0) \\ &= e^{-\lambda_a m(D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|) \setminus D(O, \rho))}. \end{aligned}$$

Pour notre calcul de shot-noise, nous introduirions alors la fonction :

$$f(\mathbf{x}) = \log\left(1 + \frac{s}{\epsilon} \|\mathbf{x}\|^{-\alpha}\right) \times \mathbf{1}(\Phi_a(D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|) \setminus D(O, \rho)) = 0).$$

Si on conditionne par rapport à Φ_a , c'est une fonction déterministe de \mathbf{x} , dont il faudrait calculer la transformée de Laplace (ce qu'on sait faire) avant de prendre l'espérance globale par rapport à Φ_a . Si lors de cette dernière étape, on pouvait appliquer Fubini entre l'espérance selon Φ_a et l'intégrale selon \mathbf{x} pour obtenir des termes du type

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}(\Phi_a(D(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a\|)) = 0 \mid \rho)],$$

⁵ ce qui n'est pas très grave car on connaît la formule générale de la transformée de Laplace, bien qu'elle ne soit pas simple, cf. théorème 2.8.

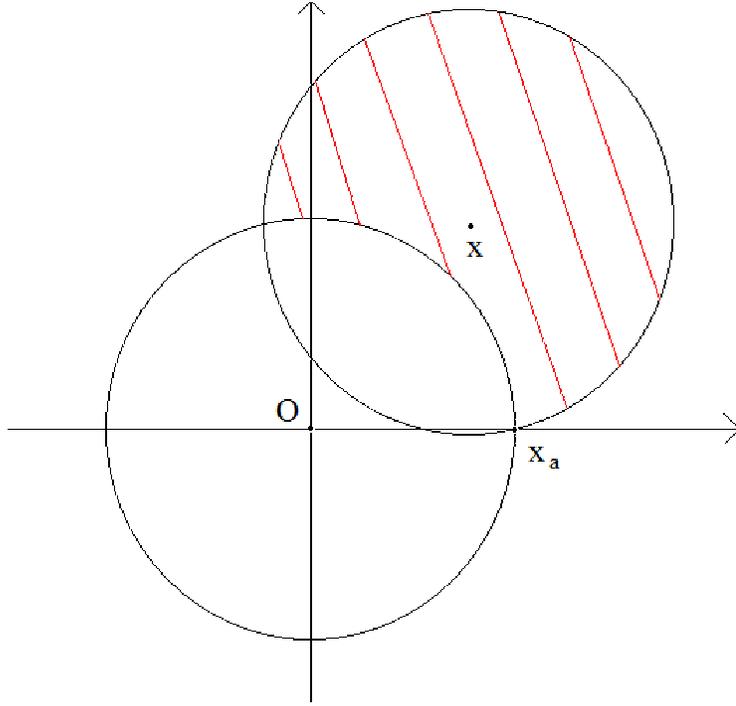


Fig. 2.12: Visualisation de la condition de plus proche voisin.

on serait tiré d'affaire. Malheureusement, on voit immédiatement à partir du théorème 2.8 que des exponentielles viennent s'intercaler entre les intégrales. En cassant la linéarité, elles nous interdisent d'appliquer Fubini.

2.7.2 Démarche approchée

Dès lors, une bonne approximation peut être de remplacer $\mathcal{C}(O)$ par un disque de même surface (en moyenne par rapport à Φ_a). Plus précisément, on n'annule pas f sur $\mathcal{C}(O)$, mais sur un disque centré sur l'origine, dont la surface vaut l'espérance de la surface de $\mathcal{C}(O)$ conditionnellement à ρ . Si on note $R(\lambda_a, \rho)$ le rayon de ce disque équivalent, on a le

Théorème 2.14. *Avec prise en compte de la gestion des ressources radio, en notant $x^+ = \max(0, x)$, la nouvelle probabilité de couverture en uplink est bien approchée par :*

$$\mathbb{P}(SINR > T) \approx 2\pi\lambda_a \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\pi\lambda_a\rho^2} e^{-\epsilon T\rho^\alpha\sigma^2} p(T, \rho)q(T, \rho)\rho d\rho,$$

avec

$$p(T, \rho) = \exp \left[-2\pi\lambda\rho \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu\rho \int_{t=\sqrt{\left(\frac{R(\lambda_a, \rho)^2 - r^2}{\rho^2}\right)^+}}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(r^2+t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right) \right) dr \right]$$

et

$$q(T, \rho) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \exp \left[-2\mu\rho \int_{t=\sqrt{\left(\frac{R(\lambda_a, \rho)^2 - \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)^+}}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{(\sin^2 \theta + t^2)^{\alpha/2}}{T}} \right] d\theta.$$

Démonstration - On reprend la démonstration du théorème 2.9; pour plus de commodité, on note simplement R le rayon du disque équivalent. Pour le calcul de p , la nouvelle fonction à symétrie radiale est donnée par

$$f(\mathbf{x}) = \log \left(1 + \frac{s}{\epsilon} \|\mathbf{x}\|^{-\alpha} \right) \mathbb{1}_{\|\mathbf{x}\| > R}.$$

En distinguant les cas où $r \leq R$ et $r > R$, on obtient :

$$p = \exp \left[-2\pi\lambda \int_{r=0}^{\infty} \left(1 - \exp \left(-2\mu \int_{t=\sqrt{(R^2 - r^2)^+}}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{\epsilon}{s}(r^2 + t^2)^{\alpha/2}} \right) \right) dr \right].$$

Pour le calcul de q , on procède de même et on obtient :

$$q = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp \left[-2\mu \int_{t=\sqrt{(R^2 - \rho^2 \sin^2 \theta)^+}}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{\epsilon}{s}(\rho^2 \sin^2 \theta + t^2)^{\alpha/2}} \right] d\theta.$$

Le résultat s'en déduit. ■

2.7.3 Le problème du rayon équivalent

Il est à peu près certain qu'aucune formule analytique pour $R(\lambda_a, \rho)$ ne peut être trouvée. La manière la plus commode de procéder reste encore de le déterminer par simulation. C'est ce que nous avons fait pour $\lambda_a = 1 \text{ km}^{-2}$.

Le résultat est représenté numériquement dans la table 2.13. Il est inutile de simuler les valeurs pour $\rho > 2$, car on a déjà :

$$\mathbb{P}(\rho > 2) = e^{-4\pi} \approx 3,5 \times 10^{-6}.$$

Après interpolation par la méthode des moindres carrés, nous avons trouvé une excellente approximation de R par un polynôme du troisième degré :

$$R \approx 0.0212\rho^4 - 0.1167\rho^3 + 0.2281\rho^2 + 0.0528\rho + 0.5605.$$

Les courbes comparatives sont représentées sur la figure 2.14.

ρ	rayon équivalent	ρ	rayon équivalent
0,05	0,5659	1,05	0,7576
0,10	0,5686	1,10	0,7698
0,15	0,5720	1,15	0,7822
0,20	0,5773	1,20	0,7939
0,25	0,5857	1,25	0,8065
0,30	0,5924	1,30	0,8187
0,35	0,6010	1,35	0,8298
0,40	0,6114	1,40	0,8427
0,45	0,6216	1,45	0,8542
0,50	0,6316	1,50	0,8664
0,55	0,6417	1,55	0,8782
0,60	0,6526	1,60	0,8906
0,65	0,6640	1,65	0,9027
0,70	0,6751	1,70	0,9147
0,75	0,6866	1,75	0,9242
0,80	0,6974	1,80	0,9366
0,85	0,7099	1,85	0,9486
0,90	0,7215	1,90	0,9608
0,95	0,7334	1,95	0,9720
1,00	0,7461	2,00	0,9835

Fig. 2.13: rayon équivalent en fonction de ρ pour $\lambda_a = 1$.

Notons qu'on peut toujours se ramener au cas $\lambda_a = 1$. En effet, un processus de Poisson d'intensité λ_a peut toujours être vu comme l'image d'un processus de Poisson d'intensité 1 par l'homothétie de centre O et de rapport

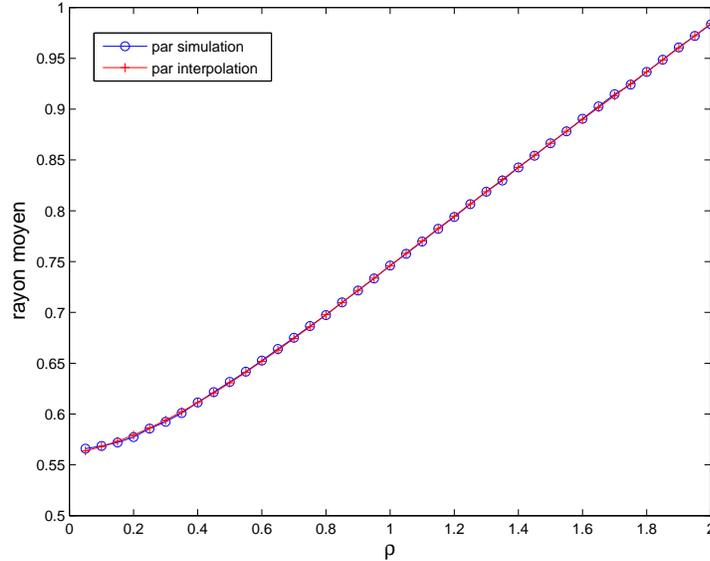


Fig. 2.14: rayon équivalent en fonction de ρ pour $\lambda_a = 1$.

$1/\sqrt{\lambda_a}$ (comme on s'en convainc aisément en regardant les probabilités vides). Ainsi, on a :

$$R(\lambda_a, \rho) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} R\left(1, \rho\sqrt{\lambda_a}\right).$$

Comme on pouvait s'y attendre, la probabilité d'accès devient légèrement supérieure, puisqu'on a cessé de prendre en compte les interférences intracellulaires (cf. figure 2.15).

2.8 Dépendance temporelle

2.8.1 Définition

Que se passe-t-il si on introduit une dépendance temporelle ? Par exemple, on pourrait imaginer de faire déplacer les points de Φ le long des routes. Une manière commode et générique de procéder est d'affecter aux points $\mathbf{x} \in \Phi$ des vitesses i.i.d. $v_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$. Puis il suffit de mettre en place une règle systématique d'orientation des routes pour attribuer un déplacement aux points. Si on ne souhaite pas favoriser un sens plutôt que l'autre sur les routes, on peut demander à la loi de $v_{\mathbf{x}}$ d'être symétrique.

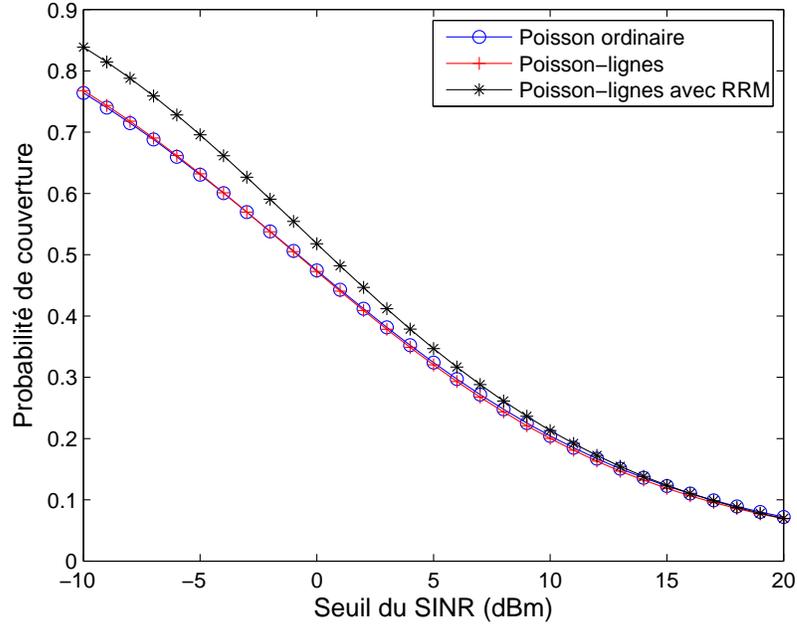


Fig. 2.15: Probabilité de couverture du Poisson-lignes avec prise en compte du *radio resource management* (RRM), en fonction du seuil minimal de SINR. On a $\lambda_a = 3,5 \text{ km}^{-2}$, $\lambda = 7 \text{ km}^{-1}$, $\mu = 0,1 \text{ km}^{-1}$, $\text{SNR} = 19 \text{ dB}$.

Plus précisément, supposons qu'on a attribué à chaque droite de notre Poisson-lignes un vecteur directeur unitaire. Par exemple, on choisit l'unique vecteur unitaire dont l'angle avec \mathbf{i} appartient à $[0, \pi[$.

À l'instant 0, le processus des usagers est donné par :

$$\Phi_0 = \sum_{\mathbf{x} \in \Phi} \delta_{\mathbf{x}},$$

où $\delta_{\mathbf{x}}$ désigne la mesure de Dirac au point \mathbf{x} . Chaque point $\mathbf{x} \in \Phi$ appartient à une route $D_{\mathbf{x}}$, dont on notera $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$ un vecteur directeur unitaire. Notons que $D_{\mathbf{x}}$ est presque sûrement unique⁶. Le processus des usagers à l'instant t

⁶ en effet, soit A l'ensemble des points d'intersection des droites $d(\theta, r)$ entre elles. A est une réunion dénombrable de points, donc $\Lambda(A) = 0$. $\Phi(A)$ est alors une variable aléatoire de Poisson de paramètre 0, autrement dit elle est presque sûrement nulle.

($t \in \mathbb{R}$) est alors donné par :

$$\Phi_t = \sum_{\mathbf{x} \in \Phi} \delta_{\mathbf{x} + tv_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{\mathbf{x}}}.$$

D'après le lemme 2.18, on sait que Φ_t garde la même loi spatiale au cours du temps : on obtient une "perfect simulation" au sens de [Leb05].

2.8.2 Taux de hand-over

Fixons maintenant une route, et considérons son intersection Ψ avec les arêtes de la tessellation de Voronoï des antennes, c'est-à-dire les bords de cellules. Il s'agit manifestement d'un processus ponctuel stationnaire, si bien qu'on peut donner un sens précis au nombre moyen de hand-overs (c'est-à-dire de changements de cellules) qu'effectue un mobile par unité de temps. En utilisant des résultats connus sur la tessellation de Voronoï d'un processus de Poisson dans le plan, on obtient le

Théorème 2.15. *À vitesse v , le taux moyen de hand-over par unité de temps vaut :*

$$T_{HO} = \frac{4v\sqrt{\lambda_a}}{\pi}.$$

Démonstration - On considère le processus stationnaire Ψ sur la droite, d'intensité λ_{Ψ} . Les intervalles entre ses points forment des cellules monodimensionnelles. Intuitivement, il suffit de regarder la taille moyenne $\mathbb{E}^0[L]$ de la "cellule typique" (c'est-à-dire sous Palm), et d'écrire qu'en une seconde le mobile parcourt une distance v , c'est-à-dire qu'il croise en moyenne $v/\mathbb{E}^0[L]$ cellules. D'après la formule de Little, on obtient alors $v/\mathbb{E}^0[L] = v\lambda_{\Psi}$.

Justifions rigoureusement ce calcul. Quel que soit l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, le nombre moyen de hand-overs sur cet intervalle est donné par $\mathbb{E}[\Psi([vt_1, vt_2])] = v\mathbb{E}[\Psi([t_1, t_2])]$. Par stationnarité, ce nombre ne dépend que de $t_2 - t_1$. Plus généralement, la mesure $v \times \mathbb{E}[\Psi(\cdot)]$ est invariante par translation et finie sur les bornés, donc elle est proportionnelle à la mesure de Lebesgue. C'est ce coefficient de proportionnalité qu'on appelle taux moyen de hand-over. Il s'agit simplement de $v\lambda_{\Psi}$.

On utilise maintenant les résultats exposés dans [Mol94]. Møller y introduit un processus légèrement différent de Ψ : à chaque cellule monodimensionnelle, il attache le projeté orthogonal du centre de la cellule bidimensionnelle dont elle est issue (cf. figure 2.16).

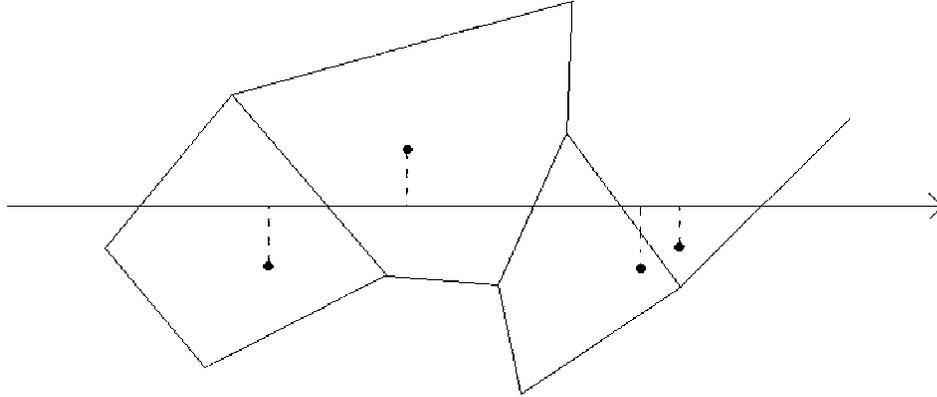


Fig. 2.16: Le processus attaché à la tessellation mono-dimensionnelle tel qu'introduit par Møller dans [Mol94].

En réunissant la proposition 3.4.4.(i) et l'équation (4.2.9.) de [Mol94], on obtient que l'intensité de ce processus est donnée par $4\sqrt{\lambda_a}/\pi$. Comme Møller en fait la remarque p. 73, cette intensité reste la même si on se donne une autre règle de sélection des centres des cellules, pourvu qu'elle reste invariante par translation⁷. Pour notre part, nous choisirons donc plutôt le bord gauche de chaque cellule mono-dimensionnelle, ce qui nous ramène à Ψ , et on conclut ainsi. ■

2.9 Conclusion

Nous avons construit un modèle spatio-temporel suffisamment robuste et générique pour couvrir une large variété de situations, à condition d'effectuer les généralisations correspondantes. Bien sûr, on peut imaginer bien d'autres généralisations que les deux que nous avons proposées : on pourrait choisir une autre loi pour le fading ou pour le bruit, ou mélanger plusieurs classes d'utilisateurs avec plusieurs classes de rues, etc. À chaque fois, nous avons montré comment effectuer les calculs de probabilité de couverture, menant à des résultats analytiques faciles à implémenter.

⁷ le détail se trouve dans le lemme 3.2.1. de [Mol94].

Remarquons en particulier qu'on n'est pas obligé de supposer que tous les utilisateurs émettent à la même puissance. Au contraire, les techniques de contrôle de puissance permettent d'adapter celle-ci pour mieux traiter les interférences. Il serait alors intéressant de chercher à calculer la nouvelle probabilité de couverture. Dans le cas de réseaux CDMA, sous des hypothèses simples sur les utilisateurs, on pourra consulter [Alt02] ou [Tah10].

Enfin, pour confronter notre modèle aux données de terrain, on peut par exemple imaginer de comparer la probabilité de couverture théorique et le taux de rejet réel (à partir de sondes dans le réseau par exemple). Cela dit, notre modèle est assez sensible au paramètre μ , et si on ne le connaît pas avec une bonne précision, une telle comparaison est risquée. Mais à l'inverse, dans une perspective de calibration, en partant du taux de rejet on peut remonter à la probabilité de couverture et *in fine* à μ . Autrement dit, cela fournit un moyen de comptage de la population (au moins pour obtenir un bon ordre de grandeur).

2.10 Annexe

2.10.1 Mesurabilité de Λ

Lemme 2.16. *Si A est compact, alors $d^{-1}(A)$ est aussi compact.*

Démonstration - D'une part, $d^{-1}(A)$ est fermé. En effet, soit (θ_n, r_n) une suite de points de $d^{-1}(A)$ qui converge vers (θ, r) ; pour tout n , on peut choisir (a_n, b_n) dans $A \cap d(\theta_n, r_n)$. Quitte à considérer une suite extraite par compacité de A , on peut supposer que $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \in A$. Utilisons alors l'inégalité triangulaire, en notant δ la distance entre un point et une partie de \mathbb{R}^2 , ou deux droites parallèles :

$$\begin{aligned} \delta((a, b), d(\theta, r)) &\leq \delta((a, b), (a_n, b_n)) \\ &+ \delta((a_n, b_n), d(\theta, r_n)) \\ &+ \delta(d(\theta, r_n), d(\theta, r)). \end{aligned}$$

Le premier terme tend bien sûr vers 0. Pour majorer le deuxième, on remarque que $(a_n, b_n) \in d(\theta_n, r_n)$ (voir figure 2.17).

Ainsi, $\delta((a_n, b_n), d(\theta, r_n))$ est majorée par la distance entre (a_n, b_n) et son image par la rotation autour de l'origine d'angle $\theta - \theta_n$ (image qui appartient à $d(\theta, r_n)$). Or cette distance est elle-même majorée par $\|(a_n, b_n)\| \cdot |\theta - \theta_n|$.

Comme $\|(a_n, b_n)\|$ est bornée car convergente, $\|(a_n, b_n)\| \cdot |\theta - \theta_n| \rightarrow 0$. Quant au troisième terme, il vaut $|r - r_n| \rightarrow 0$. Ainsi, $(a, b) \in d(\theta, r)$, ce qui achève de montrer que $d^{-1}(A)$ est fermé.

D'autre part, A étant borné, il est inclus dans un disque fermé B . Or $d^{-1}(B)$ est borné d'après la proposition 2.1, et $d^{-1}(A) \subset d^{-1}(B)$ est donc lui aussi borné. ■

Théorème 2.17. Λ est mesurable.

Démonstration - Lorsqu'on définit ξ comme une variable aléatoire, l'ensemble des mesures sur lequel évolue ξ est muni de la tribu engendrée par les applications $\xi \mapsto \xi(A)$, lorsque A parcourt l'ensemble des boréliens de $[0, \pi[\times \mathbb{R}$. Il s'agit maintenant de montrer que l'application qui à ξ associe Λ est mesurable. On sait que la tribu des mesures localement finies sur \mathbb{R}^2 est engendrée par les ensembles du type :

$$E = \{\Lambda/\Lambda([a, b] \times [c, d]) < t\},$$

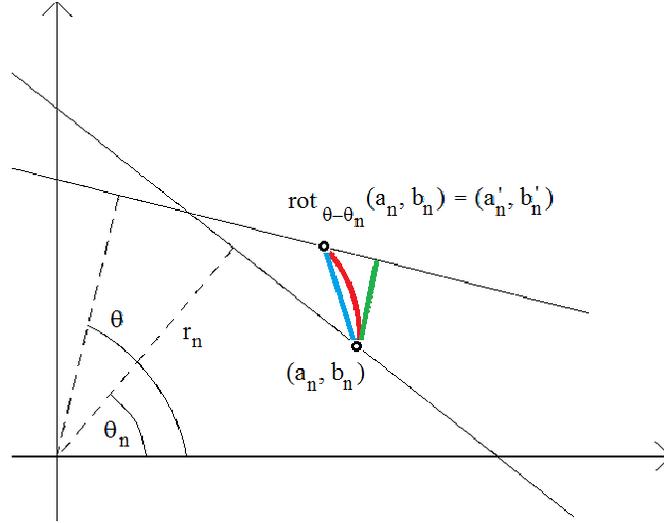


Fig. 2.17: Inégalité entre les trois longueurs dans la preuve du lemme 2.16 :
 $\delta((a_n, b_n), d(\theta, r_n)) \leq \delta((a_n, b_n), (a'_n, b'_n)) \leq \|(a_n, b_n)\| \cdot |\theta - \theta_n|.$

où $[a, b] \times [c, d]$ est un pavé fermé quelconque de \mathbb{R}^2 et t un réel positif (voir chapitre 1).

Si on arrive à montrer que l'ensemble des ξ dont le Λ associé est dans E appartient à la tribu engendrée par les $\{\xi/\xi(A) = n\}$, avec $n \in \mathbb{N}$, on aura terminé. Fixons donc a, b, c, d et t .

Déjà, on remarque que l'application :

$$\psi : (\theta, r) \mapsto l(d(\theta, r) \cap ([a, b] \times [c, d]))$$

est continue car uniformément continue. Pour se convaincre de l'uniforme continuité, on peut fixer θ en faisant varier r , et vice-versa. Ensuite :

$$\Lambda \in E \Leftrightarrow \sum_{(\theta, r) \in \xi} \psi(\theta, r) < \frac{t}{\mu}.$$

On peut même restreindre la somme à $(\theta, r) \in A = d^{-1}([a, b] \times [c, d])$. Ensuite, si on note $(\theta_1, r_1), \dots, (\theta_n, r_n)$ les points de ξ qui sont dans A (nécessairement en nombre fini), on remarque que $\Lambda \in E$ si et seulement s'il existe n rationnels $q_1, \dots, q_n > 0$ tels que $\psi(\theta_i, r_i) < q_i$ et $\sum q_i < t/\mu$. Il existe aussi un autre rationnel $\epsilon > 0$ tel que chaque $\psi(\theta_i, r_i)$ soit dans

$]q_i - \epsilon, q_i[$. Malheureusement, on ne peut pas toujours choisir les $]q_i - \epsilon, q_i[$ deux à deux disjoints (dès que deux $\psi(\theta_i, r_i)$ sont égaux, c'est impossible).

Du coup, on regroupe les $\psi(\theta_i, r_i)$ égaux, et on écrit que $\Lambda \in E$ si et seulement s'il existe :

- un entier $m > 0$
- des rationnels $q_1, \dots, q_m, \epsilon > 0$ avec les $]q_j - \epsilon, q_j[$ deux à deux disjoints
- des entiers $k_1, \dots, k_m > 0$ avec $\sum k_j q_j < t$

tels que dans chaque $]q_j - \epsilon, q_j[$ on trouve k_j termes $\psi(\theta_i, r_i)$. On peut réécrire cela de manière condensée :

$$E = \bigcup_m \bigcup_{(q_j)} \bigcup_{\epsilon} \bigcup_{(k_j)} E_{m, (q_j), \epsilon, (k_j)}.$$

Il s'agit d'une union dénombrable. Il ne reste plus qu'à écrire :

$$\Lambda \in E_{m, (q_j), \epsilon, (k_j)} \Leftrightarrow \xi(A) = \sum k_j \quad \text{et} \quad \forall j, \xi(\psi^{-1}(]q_j - \epsilon, q_j[)) = k_j$$

pour conclure. Notons que d'après le lemme, A est borélien car compact, et que comme ψ est mesurable car continue, les $\psi^{-1}(]q_j - \epsilon, q_j[)$ sont également boréliens. ■

2.10.2 Translation d'un processus de Poisson par des vitesses i.i.d.

Soit un processus de Poisson Φ sur la ligne d'intensité μ . Imaginons que chaque point $x_k \in \Phi$ ($k \in \mathbb{Z}$) soit translaté selon $x_k \mapsto x_k + v_k t$, où t représente le temps et les v_k sont des variables réelles i.i.d.. On note Ψ le nouveau processus obtenu. On a alors le

Lemme 2.18. *Ψ a la même loi que Φ : c'est un processus de Poisson d'intensité μ .*

Démonstration - On va prouver le résultat en identifiant la transformée de Laplace de Ψ à celle de Φ . Soit donc f une fonction positive mesurable :

$$\mathcal{L}_\Psi(f) = \mathbb{E} \left[\prod_{x_k \in \Phi} e^{-f(x_k + v_k t)} \right].$$

Par convergence dominée :

$$\mathcal{L}_\Psi(f) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\prod_{|x_k| \leq X} e^{-f(x_k + v_k t)} \right].$$

Or on sait que la restriction de Φ à l'intervalle $[-X, +X]$ reste un processus de Poisson d'intensité μ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{|x_k| \leq X} e^{-f(x_k + v_k t)} \right] &= e^{-2\mu X} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\mu X)^n}{n!} \frac{1}{(2X)^n} \int_{x_1 = -X}^X \cdots \int_{x_n = -X}^X \\ &\quad \left(\int_{v_1} \cdots \int_{v_n} \prod_k e^{-f(x_k + v_k t)} \mathbb{P}(dv_1) \cdots \mathbb{P}(dv_n) \right) \\ &\quad dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Comme les v_k sont i.i.d. :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{|x_k| \leq X} e^{-f(x_k + v_k t)} \right] &= e^{-2\mu X} \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{n!} \left(\int_{x=-X}^X \mathbb{E}_v [e^{-f(x+vt)}] dx \right)^n \\ &= \exp \left(-\mu \int_{x=-X}^X (1 - \mathbb{E}_v [e^{-f(x+vt)}]) dx \right) \\ &= \exp \left(-\mu \int_{x=-X}^X \mathbb{E}_v [1 - e^{-f(x+vt)}] dx \right). \end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$\mathcal{L}_\Psi(f) = \exp \left(-\mu \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_v [1 - e^{-f(x+vt)}] dx \right),$$

puis en effectuant le changement de variable $x \mapsto x + vt$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Psi(f) &= \exp \left(-\mu \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_v [1 - e^{-f(x)}] dx \right) \\ &= \exp \left(-\mu \int_{x=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-f(x)}) dx \right) \\ &= \mathcal{L}_\Phi(f), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Remarque 2.4. Le lemme reste vrai dans les deux cas suivants :

- cas particulier, mais courant : si toutes les v_k sont égales à une même vitesse v déterministe.
- cas général : avec un processus de Poisson sur \mathbb{R}^d . De fait, il s'agit d'une application du théorème dit de la "transformation aléatoire de points" (voir [Bac10]).

Chapitre 3

MOUTONS ET FORTES TÊTES

Ce chapitre a donné lieu à l'article suivant, présenté à la conférence InfoCom 2010 de San Diego (États-Unis) :

An Interaction-Based Mobility Model for Dynamic Hot Spot Analysis, Frédéric Morlot, Salah-Eddine Elayoubi, François Baccelli, Infocom, Proceedings IEEE (2010).

Par la suite, nous en avons publié une version remaniée et enrichie sur HAL.

Résumé

Les traces laissées par les téléphones GSM dans un réseau de téléphonie pendant les rassemblements urbains révèlent une grande volatilité des comportements. De plus, on assiste fréquemment à la formation de "points chauds" (*hotspots* en anglais) comme on peut le voir sur la figure 3.1, c'est-à-dire des rassemblements significatifs et spontanés. Un phénomène-clé que nous souhaitons étudier est la formation et la disparition de ces rassemblements, qui paraissent aléatoires à la fois dans le temps et dans l'espace. Après avoir prouvé la nécessité d'introduire un nouveau modèle de mobilité pour rendre compte de ces phénomènes, nous présentons le "modèle des moutons et des fortes têtes", fondé sur les interactions entre individus.

3.1 Introduction

3.1.1 Données disponibles

Précisons un peu ce que nous entendons par "aléatoire dans le temps et dans l'espace" lorsque nous parlons des hotspots. On rappelle (voir introduction de la thèse), que les traces utilisées pour notre étude couvraient :

- la fête de la St-Jean à Varsovie et Cracovie (21 juin)
- la Fête de la Musique à Paris (21 juin)
- les derniers tours de l'Euro de Football à Bucarest (13 juin), Madrid et Barcelone (28 juin).

Dans le cas de la St-Jean, les usagers se sont simplement promenés dans la ville sans direction particulière. Le caractère aléatoire des rassemblements est donc bien établi. Seule exception à la règle : un concert sur une scène géante qui a eu lieu dans un parc de Varsovie. Mais même dans ce cas, l'accès était libre si bien que les individus pouvaient vaquer autour et se sont largement déplacés (comme peut en témoigner notre équipe qui était sur place).

Le cas de la Fête de la Musique est assez similaire : à part pour un petit nombre de concerts géants bien identifiés et planifiés, les rassemblements peuvent être considérés comme spontanés. Et même pour lesdits concerts géants, le fait qu'il y en ait plusieurs au même moment à différents endroits incitait les individus à se déplacer en cours de route et réintroduisait une dimension aléatoire.

Enfin, pour ce qui est des matchs de football, la première phase (retransmission sur écran géant) était aléatoire à cause des différentes localisations des écrans dans la ville. Et la deuxième phase (festive après la victoire) était clairement la plus spontanée et la moins planifiée des deux.

Un modèle de mobilité à la fois réaliste et calculable nous permettrait d'améliorer significativement la robustesse des simulateurs en télécommunication et des modèles analytiques, ce qui nous permettrait de mieux comprendre l'impact de la mobilité sur la qualité de service. La prévision des rassemblements permet aussi de mettre au point des algorithmes de gestion dynamique des ressources radio, comme l'allocation dynamique de spectre (voir [Lea04]) ou la radio logicielle (voir [Mit00][Sim07]).



Fig. 3.1: SMS envoyés pendant la Fête de la Musique à Paris, le 21 juin 2008. Il est 23h13. On peut observer d’importants rassemblements dans le centre-ville (Châtelet, Bastille, Saint-Michel), ainsi qu’au Parc des Princes (concert de *Tokio Hotel*) et à l’hippodrome d’Auteuil (concert de France 2).

Dans un premier temps, nous passons en revue les modèles de mobilité existants et nous démontrons la nécessité d’un nouveau modèle pour qui veut modéliser une dynamique des hotspots.

Ensuite, nous introduisons notre modèle markovien. Pour cela, nous divisons le territoire en zones d’attractions potentielles, et nous partons du principe que les individus s’influencent les uns les autres. Dans la partie 3.2, nous étudions un ”modèle à moutons”, pour lequel cette influence est particulièrement grande. Nous commençons par étudier un territoire à deux zones, ce qui nous permet de trouver des formules analytiques pour le temps moyen de formation d’un hotspot ainsi que pour la loi de sa position spatiale. Nous donnons aussi des équivalents asymptotiques de ces quantités, et une borne supérieure de la vitesse de convergence. Enfin, nous généralisons ces résultats à un nombre quelconque de zones. Les hotspots sont bien aléatoires en temps et en espace, mais dès qu’ils se forment ils restent stables. Il nous manque donc encore leur désagrégation.

C'est pourquoi la partie 3.3 introduit un "modèle à moutons et fortes têtes", dont le premier modèle est un cas particulier. Le modèle général est plus réaliste et il reste calculable, ce qui nous permet de modéliser aussi bien la formation de hotspots aléatoires que leur désagrégation.

Dans une dernière partie, nous exploitons les phénomènes d'explosion prédits par notre modèle pour calibrer ce dernier sur les traces de la Fête de la Musique 2008 à Paris.

3.1.2 Pourquoi un nouveau modèle ?

Sur la figure 3.1, on peut voir un instantané des traces laissées par les SMS dans Paris pendant la Fête de la Musique 2008. Tout de suite, on remarque la présence de hotspots. Et sur les animations vidéos de [Urb08], on voit bien que ces hotspots subissent une dynamique. Il ne nous est pas possible de reproduire les vidéos sur papier, mais les clichés de 3.2 donnent une idée de ce qui se passe : la foule commence par quitter petit à petit une zone (nous appellerons cela un "siphonnage") pour en remplir une autre (nous appellerons cela un "remplissage"). La combinaison des deux s'appellera un "transfert". La localisation de tels phénomènes est aléatoire, car lorsque les individus quittent un endroit, nous ne savons pas à l'avance s'ils préfèrent se rendre à tel ou tel concert. Cela dépend de plusieurs paramètres subjectifs, comme leur humeur, l'influence de leur entourage, ou simplement leurs goûts musicaux.

À présent, nous passons en revue les modèles de mobilité existants, et nous étudions s'ils pourraient être adaptés à nos besoins.

Le modèle le plus populaire en télécommunication est probablement le *Random Waypoint Model* (voir [Bou05]). Ce modèle est facile à simuler et de plus il est calculable analytiquement dans un grand nombre de situations, selon les règles de déplacement que l'on donne aux individus et la forme géométrique du territoire. Cependant, il ne s'applique qu'à un seul individu à la fois, ou alors à un groupe d'individus indépendants. En utilisant ce modèle pour faire apparaître de l'attraction, nous devrions choisir une règle de déplacement qui donne plus de poids à certaines zones prédéfinies. Ainsi, la loi de la position d'un individu favoriserait ces zones. Malheureusement, cela empêche toute dynamique au niveau macroscopique. En effet, avec un grand nombre d'individus indépendants superposés, un argument de type loi des grands nombres montre que le résultat empirique constitue un

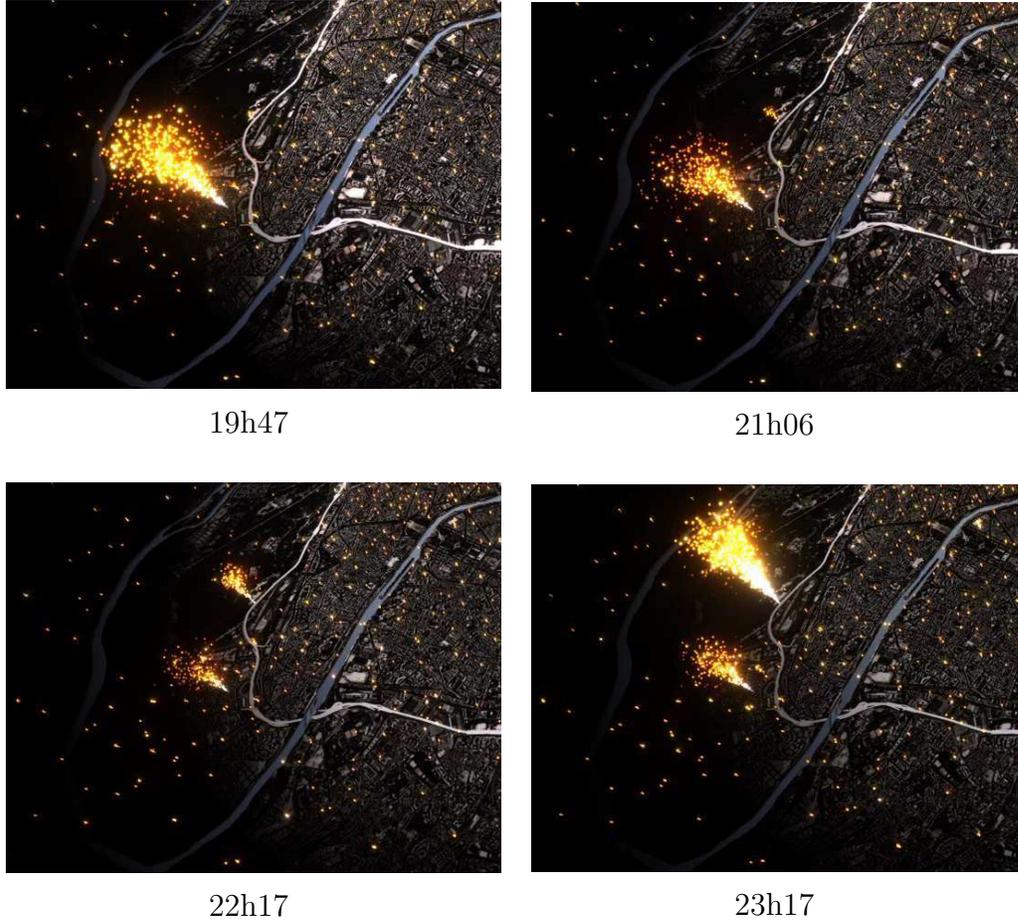


Fig. 3.2: SMS envoyés pendant la Fête de la Musique à Paris, le 21 juin 2008, entre 19h47 et 23h17. On observe un transfert du Parc des Princes à l’hippodrome d’Auteuil.

histogramme quasi-parfait de la loi théorique individuelle.

Plus précisément, cela vient du théorème de Sanov (voir [Dem93], théorème 6.2.10). Soit μ la loi de position individuelle, et X_1, X_2, \dots, X_n les positions de n utilisateurs indépendants qui suivent μ . Soit $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k}$ la loi empirique associée à une observation instantanée. Alors, quel que soit l’évènement B , le théorème de Sanov nous indique que pour n assez grand :

$$\mathbb{P}(\hat{\mu}_n \in B) \sim \exp \left[-n \inf_{\nu \in B} H(\nu | \mu) \right],$$

où $H(\nu|\mu)$ désigne la distance de Kullback-Leibler¹ entre μ et ν . En particulier, si B traduit le fait que les utilisateurs ne s'agglutinent pas là où ils devraient d'après μ , $H(\nu|\mu)$ va être grand $\forall \nu \in B$, et donc $\inf_{\nu \in B} H(\nu|\mu)$ va être grand aussi. Alors la probabilité d'une telle observation va être extrêmement faible dès que n est un tant soit peu important. Ainsi, tous les attroupements vont avoir lieu dans les zones prédéfinies, jamais ailleurs, et ils seront toujours présents. On n'aura donc pas de transfert.

D'une manière générale, on aura le même phénomène à chaque fois qu'on partira de la superposition de plusieurs modèles individuels indépendants. Or pendant les grands événements publics, un point-clé est l'interdépendance entre individus, puisque les traces qu'ils laissent dans le réseau correspondent bien souvent à des rendez-vous donnés à tel ou tel endroit. Par exemple pendant la Fête de la Musique, si un concert est de bonne qualité, les spectateurs en informeront leurs amis pour leur proposer de les rejoindre, ce qui renforcera le hotspot.

Le *Nomadic Community Mobility Model* et le *Reference Point Group Mobility Model* (voir [Cam02]) consistent à faire se déplacer globalement de petits groupes d'individus dans une direction donnée, tandis que les utilisateurs eux-mêmes peuvent graviter autour de la tendance globale. Typiquement c'est ce qui se passe avec un groupe de visiteurs qui suit un guide dans un musée. Mais dans notre cas, nous ne souhaitons pas prédéfinir une direction vers laquelle un groupe doit se déplacer. De plus, nous ne souhaitons pas que les mêmes individus restent toujours ensemble, car il n'est pas crédible que les spectateurs d'un même concert se suivent ensuite toute la nuit.

Passons à présent en revue quelques idées qui pourraient nous permettre de traduire l'influence mutuelle des individus.

Comme nous recherchons une grande interdépendance, une tentative naturelle pourrait être d'utiliser des processus déterminantaux ou des processus permanents (voir [Ben09][Sos00]). Les premiers seront étudiés au chapitre 4, ils modélisent bien une certaine répulsion entre les utilisateurs, au contraire des seconds qui introduisent de l'attraction. Cependant, les processus permanents ne sont rien d'autre que des processus de Cox déguisés (voir [Ben09], section 4.9.). Cela signifie que nous devrions choisir une intensité sous-jacente qui varie dans le temps et qui présente une dynamique des zones

¹ c'est-à-dire une distance L^1 entre les distributions de probabilité.

d'attraction, ce qui est aussi difficile que de construire un processus directement avec les mêmes caractéristiques. On est donc renvoyé au problème initial. Quant aux processus déterminantaux, ils ne peuvent rendre compte de la formation des hotspots.

Une dernière classe de modèles de mobilité que nous pourrions considérer est celle des "processus spatiaux de vie et de mort" (*spatial birth and death processes*, voir [Gar06]). D'abord étudiés par Preston en 1975 (voir [Pre75]), ils peuvent modéliser efficacement certains motifs géométriques, pourvu que l'on choisisse leur distribution stationnaire convenablement. De plus, contrairement au *Random Waypoint Model*, ils présentent une vraie dynamique temporelle. Cependant, on sait qu'ils mènent à des processus de Gibbs, qui ne sont généralement pas calculables analytiquement.

Ce passage en revue nous conforte dans l'idée de trouver un nouveau modèle, qui soit à la fois calculable analytiquement et qui présente une vraie dynamique temporelle des hotspots.

3.2 Le modèle à moutons

Dans cette partie, nous cherchons à modéliser des agrégats d'individus dans des zones prédéfinies. L'idée conductrice est que les gens ont tendance à se diriger là où il y a déjà du monde, ce qui crée des rassemblements auto-alimentés.

3.2.1 Panorama du modèle

Divisons le territoire en K zones géographiques qui ont une identité propre. Ce sont des zones d'influence que l'on peut considérer comme en compétition pour attirer du public. Chaque zone échange donc des individus avec les autres. Notons que nous ne nous intéressons qu'aux mouvements macroscopiques entre zones, pas au détail des déplacements à l'intérieur de chacune d'elles. Dans chaque zone, un individu est supposé rester pendant une durée aléatoire exponentielle de paramètre μ , avant de décider ou non de changer.

Quitte à raffiner notre modèle par la suite, commençons par supposer que les individus sont totalement influencés par leur environnement, c'est-à-dire qu'ils se comportent comme des moutons. Ils décident de se déplacer d'une zone à l'autre proportionnellement au nombre d'individus déjà présents

(voir figure 3.3), y compris dans leur propre zone auquel cas ils décident de ne pas changer. En d'autres termes, si nous notons N le nombre total d'individus, n_1 le nombre d'individus dans la première zone, n_2 le nombre dans la deuxième, etc., un individu de la k -ème zone décide de gagner la k' -ème zone avec la probabilité $n_{k'}/N$. En revanche, il décide de rester avec la probabilité :

$$\frac{n_k}{N} = 1 - \sum_{k' \neq k} \frac{n_{k'}}{N}.$$

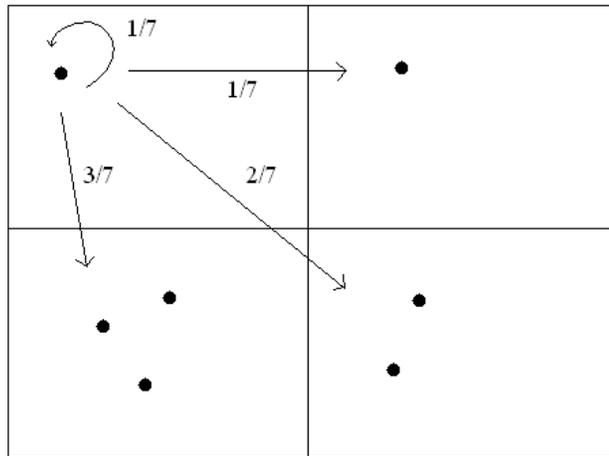


Fig. 3.3: Le modèle à moutons. Ici, $N = 7$ et $K = 4$. L'individu dans le coin en haut à gauche a quatre choix. Les quatre probabilités de décision sont proportionnelles au nombre d'individus.

Nous obtenons alors un processus de Markov à nombre fini d'états codés par (n_1, \dots, n_K) , dont les probabilités de transition sont données ci-dessus. On voit immédiatement qu'il y a K états absorbants, qui correspondent au cas où tous les individus sont regroupés dans une zone (les hotspots stables mentionnés en introduction). Ils sont donnés par :

$$N\mathbf{e}_k = (0, \dots, \underbrace{N}_{k\text{-ème position}}, \dots, 0), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Dans un souci de clarté, nous allons d'abord exposer le cas $K = 2$, avant de donner le cas général.

Remarque 3.1. Nous sommes face à ce que la communauté d’algorithmique en calcul distribué appelle un ”problème de consensus” : plusieurs individus peuvent échanger de l’information entre eux et doivent se mettre d’accord sur une valeur commune (ici, le numéro de la zone finale dans laquelle le système est absorbé). En général, il s’agit de savoir si un tel consensus est accessible dans un temps fini, et si oui, de caractériser ce temps (espérance, voire variance). En particulier, dans le cas $K = 2$, nous avons un problème dit de consensus binaire qui a largement été étudié depuis les années 1980. Le résultat dépend notamment des conditions de synchronisation entre les individus et de leur capacité à ne pas faire d’erreur dans leurs décisions. On connaît à ce sujet un célèbre résultat d’impossibilité dû à Fischer, Lynch et Paterson (voir [Fis85]). On trouvera d’autres études intéressantes en [Per09], [Dra10] ou [Mat11].

3.2.2 Le problème à deux zones

Dans cette section nous choisissons $K = 2$. En quelque sorte, notre modèle pourrait être qualifié ”d’anti-Ehrenfest”, d’après le modèle à deux urnes bien connu (voir [Ehr07]).

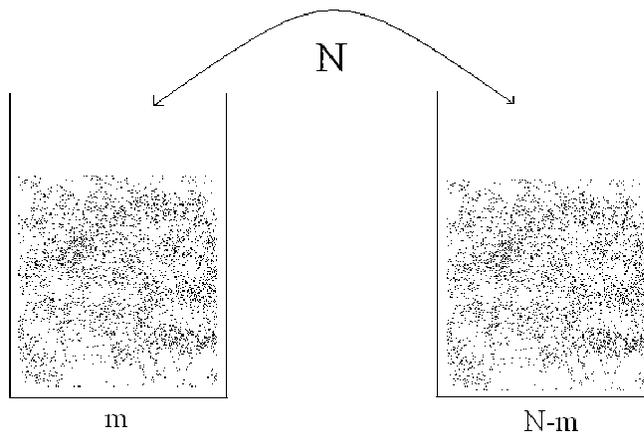


Fig. 3.4: notre modèle à deux zones.

L’état du système à l’instant t est noté :

$$\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t)).$$

Pour plus de simplicité dans les calculs, on se ramène à une seule variable $m(t) = n_1(t)$, l'autre étant donnée par $N - m(t) = n_2(t)$.

Chaque individu reste dans sa zone pendant une durée aléatoire exponentielle de paramètre μ , et tous les temps d'attente sont supposés indépendants. Dans la zone 1, on a donc m horloges exponentielles de paramètre μ en compétition, dont la superposition est une horloge exponentielle de paramètre $m\mu$. Lorsque l'horloge sonne, un individu décide de changer de zone avec la probabilité $(N - m)/N$. Ainsi, la durée jusqu'au prochain changement de zone est une variable exponentielle de paramètre $m\mu(N - m)/N$. La manière la plus rapide de s'en convaincre est d'invoquer la propriété de "*p-thinning*" d'un processus de Poisson (voir [Bac10]). De même, les changements de la zone 2 à la zone 1 sont marqués par une horloge exponentielle de paramètre $(N - m)\mu m/N$. On en déduit les taux de transition de la figure 3.5².

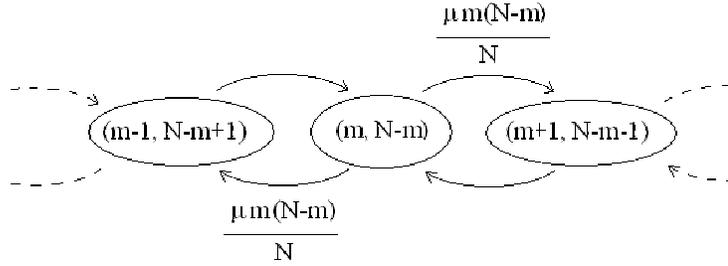


Fig. 3.5: transitions markoviennes du système à deux zones.

Si on indentifie l'état $(m, N - m)$ à l'entier m , le générateur infinitésimal est alors la matrice $(N + 1) \times (N + 1)$ suivante :

² En fait, pour être tout à fait exact, l'intervalle $[T_1, T'_1]$ entre deux transitions $1 \rightarrow 2$ n'est pas une exponentielle de paramètre $m\mu(N - m)/N$, car il peut se produire une transition $2 \rightarrow 1$ entretemps (ce qu'on notera $T_2 \in]T_1, T'_1[$). Dans ce cas, pendant $[T_2, T'_1]$ la probabilité de choisir la zone 2 lorsqu'on est dans la zone 1 passera de $(N - m)/N$ à $(N - m - 1)/N$. Cela dit, nous ne sommes intéressés par le comportement du système que pendant $[T_1, T_2]$, et sur cette durée, le système est équivalent à la concurrence de deux horloges exponentielles indépendantes de paramètre $\mu m(N - m)/N$. Comme T_2 est un temps d'arrêt, les transitions sont bien celles indiquées sur la figure 3.5.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \frac{\mu m(N-m)}{N} & \frac{-2\mu m(N-m)}{N} & \frac{\mu m(N-m)}{N} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Pour caractériser la mobilité entre les deux zones, intéressons-nous à τ , le premier instant où l'on atteint un état absorbant :

$$\tau = \inf\{t/\mathbf{n}(t) = (0, N) \text{ ou } (N, 0)\}.$$

L'espérance de τ dépend bien sûr de l'état initial. Si le système démarre en $(m, N - m)$, notons $h_m = \mathbb{E}[\tau | \mathbf{n}(0) = (m, N - m)]$ le temps moyen d'atteinte d'un état absorbant. On a alors la

Proposition 3.1.

$$h_m = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{0 \leq i < m} \frac{N - m}{N - i} + \sum_{0 \leq i < N - m} \frac{m}{N - i} \right).$$

Démonstration - On sait (voir [Nor98], théorème 3.3.3. sur les *hitting times*) que le vecteur $(h_m)_m$ est la solution minimale de l'équation :

$$\begin{cases} h_0 = h_N = 0 \\ \forall m \notin \{0, N\}, \quad \sum_{0 < i < N} q_{mi} h_i = -1. \end{cases} \quad (3.2)$$

La deuxième ligne peut donc être réécrite comme :

$$\begin{cases} 2h_1 - h_2 = \frac{N}{\mu(N-1)} \\ 2h_{N-1} - h_{N-2} = \frac{N}{\mu(N-1)} \\ 2h_m - h_{m-1} - h_{m+1} = \frac{N}{\mu i(N-i)} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On est donc ramené à inverser la matrice $(N-1) \times (N-1)$ suivante :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $U^{-1} = \frac{1}{N} \cdot V$, où V est donnée par :

$$v_{ij} = \begin{cases} j(N-i) & \text{si } i \geq j \\ i(N-j) & \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \cdot V \cdot \frac{N}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1/N-1 \\ 1/2(N-2) \\ \vdots \\ 1/N-1 \end{pmatrix},$$

et :

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{1}{\mu} \sum_i \frac{v_{mi}}{i(N-i)} \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i < m} \frac{N-m}{N-i} + \frac{1}{\mu} \sum_{m \leq i < N} \frac{m}{i} \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i < m} \frac{N-m}{N-i} - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{N-m}{N} + \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i \leq N-m} \frac{m}{N-i} \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i < m} \frac{N-m}{N-i} - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{N-m}{N} + \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i < N-m} \frac{m}{N-i} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{m}{m} - \frac{m}{N} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i < m} \frac{N-m}{N-i} + \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq i < N-m} \frac{m}{N-i} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Typiquement, N correspond au nombre d'individus dans une ville, et peut donc être très grand. Aussi il n'est pas inutile de trouver un équivalent plus simple de h_m . Si nous notons $x = m/N$, x devient asymptotiquement une variable continue. On a alors la

Proposition 3.2. h_m est bien approché par :

$$h_m \approx -\frac{N}{\mu} \left((1-x) \log(1-x) + x \log(x) \right). \quad (3.3)$$

Pour connaître la marge d'erreur, on sait que la différence :

$$r_m = h_m + \frac{N}{\mu} \left((1-x) \log(1-x) + x \log(x) \right)$$

est uniformément encadrée par :

$$-\frac{2}{\mu} \leq r_m \leq 0.$$

La figure 3.6 compare la courbe approximante avec la courbe réelle.

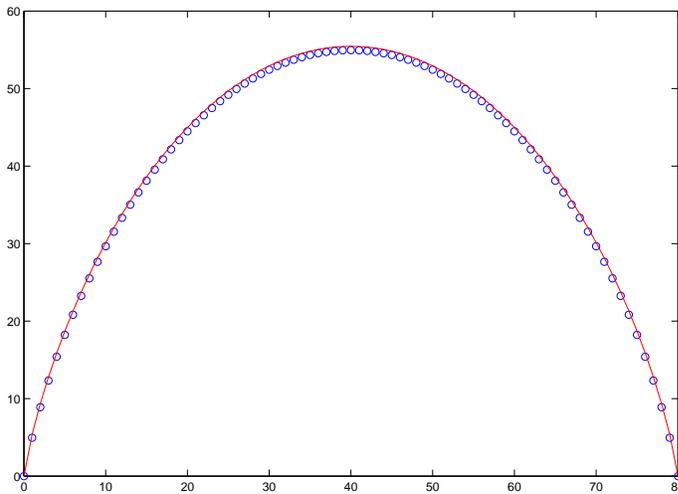


Fig. 3.6: Estimation asymptotique de h_m (en min). $N = 80$, $\mu = 1 \text{ min}^{-1}$. Les cercles représentent h_m , tandis que la ligne continue représente l'estimateur.

Démonstration - Si $m = 0$ ou N , le résultat est encore vrai à condition d'effectuer un prolongement par continuité en posant : $0 \log(0) = 0$.

Sinon, écrivons :

$$\mu h_m = N(1-x) \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{1-i/N} \cdot \frac{1}{N} + Nx \sum_{0 \leq i < N-m} \frac{1}{1-i/N} \cdot \frac{1}{N}$$

Chacune de ces sommes peut être interprétée comme une somme de Riemann. Travaillons sur la première somme par exemple. Par croissance de la fonction $t \mapsto 1/(1-t)$:

$$\int_{-1/N}^{(m-1)/N} \frac{1}{1-t} dt \leq \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{1-i/N} \cdot \frac{1}{N} \leq \int_0^{m/N} \frac{1}{1-t} dt.$$

Comme $m \neq N$, on remarque que $\int_0^{m/N} \frac{1}{1-t} dt$ est bien définie. D'où :

$$\log\left(1 + \frac{1}{N}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{N} - x\right) \leq \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{1-i/N} \cdot \frac{1}{N} \leq -\log(1-x).$$

Et *a fortiori* :

$$-\log\left(1 + \frac{1}{N} - x\right) \leq \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{1-i/N} \cdot \frac{1}{N} \leq -\log(1-x).$$

Par convexité de la fonction $y \mapsto -\log(1-x+y)$:

$$-\log(1-x) - \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1-x} \leq \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{1-i/N} \cdot \frac{1}{N} \leq -\log(1-x)$$

En multipliant par le facteur $N(1-x)$ devant la somme, et en effectuant le même travail sur l'autre somme (quitte à changer m en $N-m$), on obtient le résultat demandé. ■

Remarque 3.2. Il s'agit d'une "bonne approximation" au sens où lorsque N tend vers l'infini, elle fournit un équivalent de h_m quel que soit m . En effet, même lorsque h_m est minimal, c'est-à-dire lorsque $m = 1$ ou $N-1$, on a :

$$-\frac{N}{\mu}(x \log(x) - (1-x) \log(1-x)) \sim -\frac{N}{\mu} \left(\frac{1}{N} \log\left(\frac{1}{N}\right) \right) = \frac{\log(N)}{\mu} \rightarrow \infty,$$

alors que r_m reste borné.

Jusqu'ici, nous avons obtenu une formule fermée pour le temps moyen d'absorption ainsi qu'une estimation asymptotique. On sait aussi qu'un des deux états absorbants sera presque sûrement atteint dans un temps fini. Maintenant, nous aimerions connaître la probabilité d'être absorbé en $(N, 0)$ plutôt qu'en $(0, N)$, toujours conditionnellement au point de départ. Soit p_m cette probabilité. On a la

Proposition 3.3. *La probabilité d'être absorbé en $(N, 0)$ vaut :*

$$p_m = \frac{m}{N}.$$

Démonstration - En utilisant l'équation (3.1), on obtient les probabilités de transition de la chaîne de Markov sous-jacente (voir figure 3.7).

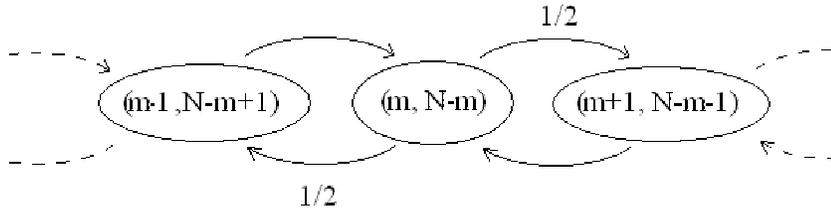


Fig. 3.7: La chaîne de Markov induite par le processus.

En conditionnant par rapport à T_1 , le premier instant de transition (qui est un temps d'arrêt), et en utilisant la propriété de Markov fort, nous obtenons pour $m \notin \{0, N\}$:

$$\begin{aligned} p_m &= \mathbb{P}(n_1(\tau) = 0 | n_1(0) = m) \\ &= \mathbb{P}(n_1(\tau) = 0 | n_1(0) = m, n_1(T_1) = m + 1) \times \mathbb{P}(n_1(T_1) = m + 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(n_1(\tau) = 0 | n_1(0) = m, n_1(T_1) = m - 1) \times \mathbb{P}(n_1(T_1) = m - 1) \\ &= \frac{1}{2} p_{m+1} + \frac{1}{2} p_{m-1} \\ p_{m+1} &= 2p_m - p_{m-1}. \end{aligned}$$

Comme de plus $p_0 = 0$, une récurrence immédiate donne le résultat. ■

3.2.3 Le problème à K zones

Tous les résultats de la section précédente sont généralisables, c'est ce que nous allons voir à présent. L'état du système est maintenant décrit par un K -uplet :

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_K),$$

avec $\sum n_k = N$. Ainsi, l'espace des états possibles est une variété de dimension $K - 1$. Une transition de la k -ème zone à la k' -ème zone est donnée par :

$$\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_{k'} - \mathbf{e}_k.$$

Il s'agit ni plus ni moins d'un "opérateur de migration" au sens de Kelly (voir [Kel79], paragraphe 2.3.). Au maximum, il y a $K(K - 1)$ transitions possibles, et le taux de transition de $(k \rightarrow k')$ vaut :

$$q_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} = \frac{\mu n_k n_{k'}}{N}.$$

À présent, voici une CNS bien commode quoique triviale pour caractériser les transitions :

Lemme 3.4. $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}'$ a un sens si et seulement si $n_k \neq 0$.

Démonstration - Le sens direct est immédiat. Et réciproquement, si $n_k \neq 0$, alors nécessairement $n_{k'} < N$ car $\sum n_l = N$, et la transition est donc bien définie. Notons que si $n_{k'} = 0$, la transition, bien qu'ayant un sens, est de probabilité nulle. ■

Avec un peu plus de difficulté, on peut généraliser la proposition 3.1, et on obtient le

Théorème 3.5. *Lorsque le système démarre en \mathbf{n} , le temps moyen d'absorption est donné par :*

$$h_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\mu} \sum_{1 \leq k \leq K} \sum_{0 \leq i < n_k} \frac{N - n_k}{N - i}. \quad (3.4)$$

Démonstration - Nous cherchons maintenant une solution de l'équation (3.2) en K dimensions. Partons d'abord de l'expression (3.4), et prouvons qu'elle vérifie l'équation.

Première remarque : si l'un des n_k est nul, on peut faire abstraction de la zone k sans modifier la somme dans (3.4), puisque la somme indexée sur $0 \leq i < n_k$ est vide. D'autre part, cela n'altère pas la vérification de (3.2), puisque les transitions vers des zones vides sont interdites. Ainsi on peut se ramener sans perte de généralité au cas où tous les n_k sont non nuls.

Si $K = 1$, on est dans un état absorbant et la formule est vraie. Sinon, introduisons $\epsilon_{\mathbf{n}\mathbf{n}'}$ = $h_{\mathbf{n}'} - h_{\mathbf{n}}$, où \mathbf{n} et \mathbf{n}' sont donnés par la transition de la zone k à la zone k' . On a :

$$\forall \mathbf{n}, \quad \sum_{\mathbf{n}'} q_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} h_{\mathbf{n}'} = h_{\mathbf{n}} \underbrace{\sum_{\mathbf{n}'} q_{\mathbf{n}\mathbf{n}'}}_{=0} + \sum_{\mathbf{n}'} q_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \epsilon_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} = \sum_{\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}} q_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \epsilon_{\mathbf{n}\mathbf{n}'},$$

et :

$$\begin{aligned} \mu h_{\mathbf{n}'} &= \sum_{l \neq k, k'} \sum_{0 \leq i < n_l} \frac{N - n_l}{N - i} + \sum_{0 \leq i < n_k - 1} \frac{N - n_k + 1}{N - i} + \sum_{0 \leq i < n_{k'} + 1} \frac{N - n_{k'} - 1}{N - i} \\ &= \sum_l \sum_{0 \leq i < n_l} \frac{N - n_l}{N - i} - \frac{N - n_k}{N - n_k + 1} + \frac{N - n_{k'}}{N - n_{k'}} \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < n_k - 1} \frac{1}{N - i} - \sum_{0 \leq i < n_{k'} + 1} \frac{1}{N - i} \\ &= \mu h_{\mathbf{n}} + \frac{1}{N - n_k + 1} + \sum_{0 \leq i < n_k - 1} \frac{1}{N - i} - \sum_{0 \leq i < n_{k'} + 1} \frac{1}{N - i}, \end{aligned}$$

si bien que :

$$\epsilon_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{0 \leq i < n_k} \frac{1}{N - i} - \sum_{0 \leq i < n_{k'}} \frac{1}{N - i} \right).$$

Notons que la deuxième somme est bien définie, car comme $n_k \neq 0$ et $K > 1$, alors $n_{k'} < N$ et le dénominateur $N - i$ ne peut pas être nul. Maintenant, nous pouvons prouver que (3.4) vérifie (3.2).

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}} q_{\mathbf{nn}'} \epsilon_{\mathbf{nn}'} &= \sum_{(k,k')}^{\neq} \frac{n_k n_{k'}}{N} \left(\sum_{0 \leq i < n_k} \frac{1}{N-i} - \sum_{0 \leq i < n_{k'}} \frac{1}{N-i} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{(k,k')}^{\neq} \frac{n_k n_{k'}}{N} \left(\sum_{0 \leq i < n_k} \frac{1}{N-i} - \sum_{0 \leq i < n_{k'}} \frac{1}{N-i} \right)}_{0 \text{ par symétrie}} \\
&\quad - \sum_{(k,k')}^{\neq} \frac{n_k n_{k'}}{N} \cdot \frac{1}{N-n_{k'}} \\
&= - \sum_{k'} \frac{n_{k'}}{N(N-n_{k'})} \cdot (N-n_{k'}) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que dans notre cas, il n'existe qu'une seule solution à (3.2). Autrement dit, nous voulons montrer que la seule solution de :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{n} \text{ absorbant, } h_{\mathbf{n}} = 0 \\ \forall \mathbf{n} \text{ non absorbant, } \sum_{\mathbf{n}' \text{ non absorbant}} q_{\mathbf{nn}'} h_{\mathbf{n}'} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

est le vecteur nul.

Conformément à l'usage, notons $q_{\mathbf{nn}} = -\lambda_{\mathbf{n}}$, et $q_{\mathbf{nn}'} = \lambda_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{nn}'}$ si $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'$ (où les $p_{\mathbf{nn}'}$ sont les probabilités de transition). S'il existe une transition réalisable $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'$, alors $p_{\mathbf{nn}'} > 0$, et sinon $p_{\mathbf{nn}'} = 0$.

Comme $h_{\mathbf{n}'} = 0$ si \mathbf{n}' est absorbant, la deuxième ligne de (3.5) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{n}'} q_{\mathbf{nn}'} h_{\mathbf{n}'} &= 0 \\
\sum_{\substack{\mathbf{n}' \neq \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}' \text{ existe}}} p_{\mathbf{nn}'} h_{\mathbf{n}'} &= h_{\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Considérons \mathbf{n} tel que $h_{\mathbf{n}}$ soit maximal. Alors, par convexité, et comme les coefficients $p_{\mathbf{nn}'}$ sont tous strictement positifs, on voit que nécessairement tous les $h_{\mathbf{n}'}$ tels que $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'$ existe avec une probabilité non nulle sont égaux

à $h_{\mathbf{n}}$. De proche en proche, comme on peut atteindre au moins un état absorbant depuis de \mathbf{n} , cela montre que $h_{\mathbf{n}} = 0$.

Enfin, en changeant le vecteur \mathbf{h} en $-\mathbf{h}$ et en appliquant le résultat précédent, on voit que le minimum des $h_{\mathbf{n}}$ est lui aussi nul, ce qui achève la preuve. ■

Sur la figure 3.8, on trouvera une représentation de $h_{\mathbf{n}}$ dans le cas $K = 3$. On peut immédiatement généraliser la proposition 3.2. Si on considère le vecteur $\mathbf{x} = (\frac{n_1}{N}, \dots, \frac{n_K}{N})$, on a le

Théorème 3.6. *Une bonne approximation de $h_{\mathbf{n}}$ est donnée par :*

$$h(\mathbf{x}) \approx -\frac{N}{\mu(K-1)} \sum_k (1-x_k) \log(1-x_k) \quad (3.6)$$

et la différence est uniformément encadrée par :

$$-\frac{K}{\mu} \leq r_{\mathbf{n}} \leq 0.$$

De même, nous pouvons aussi calculer la probabilité d'atteindre tel ou tel état absorbant en partant de \mathbf{n} , disons par exemple $N\mathbf{e}_K$, probabilité que nous noterons $p_{\mathbf{n}}$:

Théorème 3.7. *La probabilité d'atteindre $N\mathbf{e}_K$ en partant de \mathbf{n} vaut :*

$$p_{\mathbf{n}} = \frac{n_K}{N}.$$

Démonstration - On utilise un joli argument d'associativité : on peut considérer un système à deux zones, dont la première zone serait la réunion des $K-1$ premières zones du système initial, et la deuxième zone serait la K -ème zone du système initial. Alors ce nouveau système à deux zones se comporte exactement selon la même règle, et on peut lui appliquer la proposition 3.3, ce qui donne immédiatement le résultat. ■

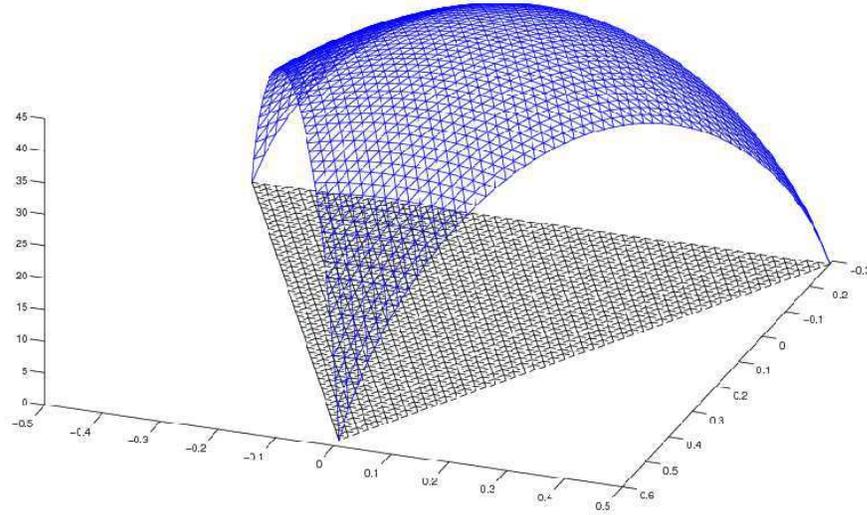


Fig. 3.8: Temps d'absorption moyen (en minutes) dans le cas de 3 zones. $N = 50$, $\mu = 1 \text{ min}^{-1}$. L'axe des z représente le temps, tandis que l'état initial est représenté sur le plan Oxy en coordonnées barycentriques (par rapport à chacun des trois états absorbants).

3.3 Fortes têtes et dynamique des hotspots

Jusqu'ici, nous avons pu modéliser les regroupements d'individus dans une zone donnée, mais ce n'est qu'un aspect de ce que nous observons dans la réalité des réseaux urbains denses. Certes, la zone de regroupement n'est pas définie à l'avance, ce qui est une bonne chose, mais le modèle à moutons possède un inconvénient majeur, qui est la présence d'états absorbants.

À présent, nous proposons un enrichissement du modèle qui nous permet de représenter la désagrégation ultérieure des rassemblements. Pour cela, nous introduisons une petite quantité de "fortes têtes" qui ne se laissent pas influencer par les autres. Lors d'une transition, quand un mouton choisissait sa nouvelle zone proportionnellement aux individus déjà présents, une forte tête choisit sa zone de manière indépendante et uniforme. Plus prosaïquement, nous réintroduisons une petite composante de *Random Way-point* (voir introduction) dans notre modèle. Grâce aux fortes têtes, il n'y a plus un seul état absorbant, et même lorsque tous les individus se trouvent regroupés dans une zone, tôt ou tard, une forte tête en sortira et on peut espérer qu'elle entraînera des moutons à sa suite.

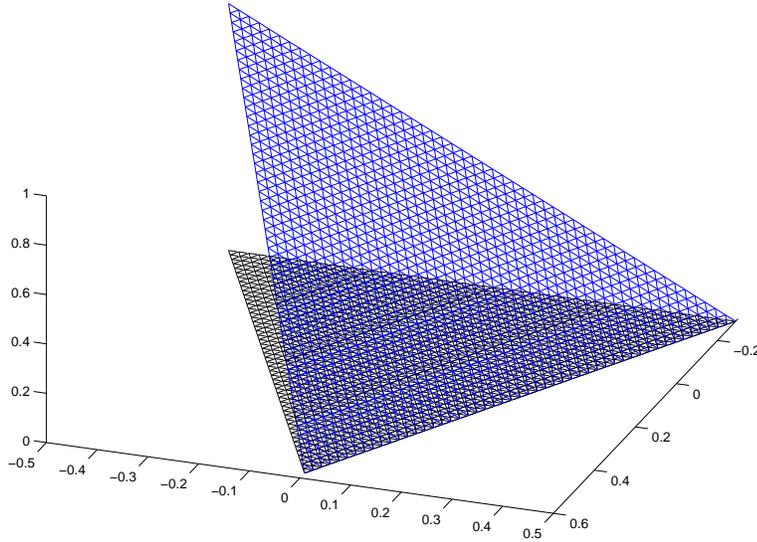


Fig. 3.9: Représentation de p_n pour $N = 50$ et $K = 3$.

Nous choisissons d'introduire les fortes têtes comme suit³ : on introduit un paramètre $\alpha \in]0, 1[$, le taux de fortes têtes, et un individu, au moment de choisir sa zone, se comporte avec la probabilité α comme une forte tête, et avec la probabilité $1 - \alpha$ comme un mouton.

³ on pourrait aussi marquer une fois pour toutes certains individus comme fortes têtes, et ils ne changeraient pas d'état au cours du temps. Mais cette manière de faire comporterait deux inconvénients :

- d'une part, on ne pourrait pas atteindre des proportions de fortes têtes strictement comprises entre 0 et $1/N$. Plus généralement, on ne pourrait atteindre que des proportions de la forme k/N ($k \in \llbracket 0, N \rrbracket$), et le spectre des taux modélisables serait donc discret.
- d'autre part, cela introduirait un biais : il pourrait arriver qu'une zone se vide anormalement rapidement parce qu'elle regroupe à elle seule toutes les fortes têtes. Or une simple considération sociologique montre que les fortes têtes n'ont pas de raison d'être toutes regroupées au même endroit, sauf exception type camp d'internement dans un régime dictatorial - et Paris n'en est pas là, même de l'avis des dissidents les plus enragés. Nous préférons donc faire en sorte qu'à chaque nouveau tirage, les fortes têtes soient uniformément réparties (en loi) sur le territoire.

Sans compter que les calculs s'en trouveraient grandement compliqués, car il faudrait prendre en compte le nombre de fortes têtes dans chaque zone pour le codage des états, et ces derniers deviendraient très nombreux.

Avec les mêmes considérations que précédemment sur les horloges exponentielles en compétition, on montre que le système est encore un processus de Markov, dont les taux de transition sont donnés par :

$$q_{\mathbf{nn}'} = \mu n_k \left(\alpha \cdot \frac{1}{K} + (1 - \alpha) \frac{n_{k'}}{N} \right).$$

3.3.1 Temps moyen d'absorption

À vrai dire, il s'agit d'un léger abus de langage, car les états $N\mathbf{e}_k$ ne sont plus absorbants. On les appellera plutôt "états extrémaux". L'équation (3.2) permet de calculer numériquement $h_{\mathbf{n}}$ par une simple inversion de matrice, et le même raisonnement que pour le théorème 3.5 nous garantit que la solution est unique, et donc que la matrice du système est inversible.

Sur la figure 3.10, nous avons tracé l'évolution de $h_{\mathbf{n}}$ en fonction de α . Lorsque α grandit, on remarque deux choses :

- $h_{\mathbf{n}}$ grandit avec α . En fait, on peut même caractériser cette croissance. Par exemple, si on s'intéresse au $h_{\mathbf{n}}$ maximal (qui correspond au cas où chaque zone contient approximativement N/K individus), la figure 3.11 montre que sa croissance est exponentielle.
- sur la figure 3.10, lorsque α augmente (en d'autres termes, on sature progressivement le système de fortes têtes), la surface prend une forme de plateau (c'est déjà le cas pour $\alpha = 8\%$). Cela signifie qu'à part de toutes petites régions autour des états extrémaux, tous les états sont plus ou moins équivalents (mais pas équiprobables, voir section 3.3.2) car ils fournissent des $h_{\mathbf{n}}$ très proches. Même si on se trouve proche d'un état extrémal, le système fera une longue excursion avant de rejoindre un état extrémal (pas forcément le même). De plus, le fait que l'altitude du plateau grandisse beaucoup montre que les états extrémaux sont de plus en plus difficiles à atteindre (plusieurs dizaines d'heures lorsque pourtant $\mu = 1 \text{ min}^{-1}$) : l'effet de saturation se fait sentir.

Ce qui est intéressant, c'est que cela se produit même pour des valeurs de α relativement faibles, en tout cas bien inférieures à 50% (pour plus de détail, voir la section 3.3.2). Même si cela ne constitue pas encore une preuve, on possède déjà l'intuition que les phénomènes de

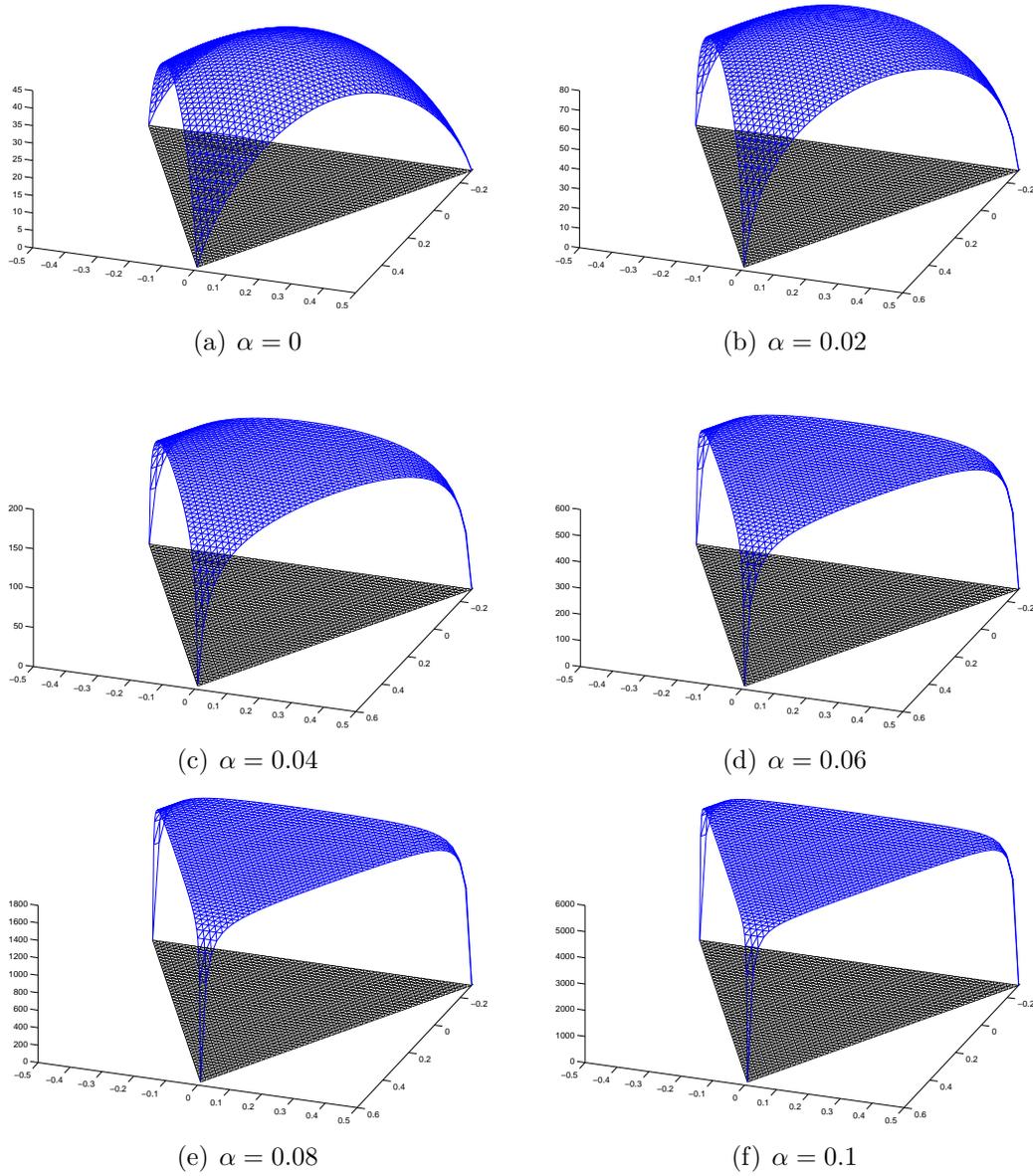


Fig. 3.10: Temps moyen d'absorption (en min) pour $N = 50$, $K = 3$ et $\mu = 1 \text{ min}^{-1}$. Le taux de fortes têtes α varie de 0 à 0.1. Bien noter que l'échelle varie sur l'axe des z .

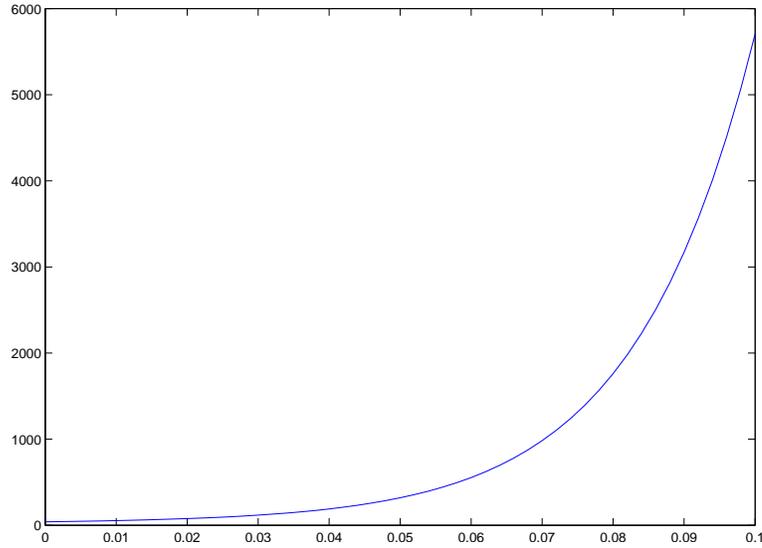


Fig. 3.11: Temps moyen d'absorption maximal (en minutes) en fonction de α . $N = 50$, $K = 3$ et $\mu = 1 \text{ min}^{-1}$.

désagrégation pourront facilement se produire (pour une étude systématique, voir section 3.3.3).

3.3.2 Transition de phase

On souhaite caractériser plus précisément cet effet de saturation, et savoir s'il existe un seuil critique à partir duquel il se fait sentir. Pour cela, on calcule la mesure invariante π de notre processus de Markov, et on montre qu'il existe une valeur de α telle que tous les états soient équiprobables.

π est donné par l'équation $\pi Q = 0$, où on rappelle que Q est la matrice de transition. On montre alors le

Théorème 3.8. *La mesure invariante est donnée par :*

$$\pi(\mathbf{n}) = A \prod_{k=1}^K \frac{1}{n_k!} \prod_{i=0}^{n_k-1} (N\beta + i),$$

où $\beta = \frac{\alpha}{K(1-\alpha)}$, et A est une constante de normalisation qui ne dépend pas de \mathbf{n} .

Démonstration - Nous allons expliquer progressivement comment arriver à l'équation. Pour commencer, supposons que $K = 2$. Comme on est face à un processus de naissance et de mort, qui est donc réversible, on sait qu'on peut se restreindre aux équations de balance locale :

$$\forall m \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket, q_{m,m+1}\pi(m) = q_{m+1,m}\pi(m + 1).$$

On en déduit immédiatement :

$$\pi(m) = \pi(0) \prod_{i=1}^m \frac{(N - i + 1)(N\beta + i - 1)}{i(N\beta + N - i)}.$$

Afin de généraliser cette formule à l'ordre K , on aimerait la réécrire d'une manière symétrique en n_1 et n_2 . De fait, on a :

$$\pi(m) = \pi(0) \frac{\prod_{i=1}^{n_1} \frac{N\beta+i-1}{i} \prod_{i=1}^{n_2} \frac{N\beta+i-1}{i}}{\prod_{i=1}^N \frac{N\beta+i-1}{i}},$$

comme on peut s'en rendre compte en effectuant le changement de variable $i \mapsto N + 1 - i$ dans le produit de droite et dans celui du bas. Ainsi le théorème est prouvé dans le cas $K = 2$.

À partir de là, on peut raisonnablement espérer que la formule fonctionne aux ordres supérieurs. En fait, c'est assez immédiat. En effet, grâce à la forme produit de notre formule, nous savons que dans le cas général, les équations de balance locale continuent à être satisfaites, ce qui achève la preuve. ■

Nous donnons maintenant une estimation asymptotique de $\pi(\mathbf{n})$:

Théorème 3.9. $\pi(\mathbf{n})$ est donné par :

$$\pi(\mathbf{n}) = (1 + r) \frac{AN^{-K/2}}{\beta^{K(N\beta-1/2)}} \prod_{k=1}^K \frac{f(\beta, x_k)}{f\left(\frac{1}{N}, x_k\right)},$$

où

$$f(\beta, x_k) = (\beta + x_k)^{N(\beta+x_k)-1/2}$$

et l'erreur relative r est dominée par :

$$e^{-K(1-\alpha)} - 1 \leq r \leq e^{\frac{K(1-\alpha)}{N\beta}} - 1.$$

Remarque 3.3. En anticipant sur la suite, on va voir que $N\beta$ est souvent de l'ordre de 1. Aussi, l'approximation ci-dessus ne sera réellement utile que pour des valeurs de α très proches de 1, c'est-à-dire dans un système complètement saturé. Sinon, on préférera utiliser la formule exacte.

Démonstration - Pour commencer, écrivons :

$$\log \left(\prod_{i=0}^{n_k-1} (N\beta + i) \right) = n_k \log(N) + \sum_{i=0}^{n_k-1} \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right),$$

et approximations le deuxième terme par une intégrale :

$$\begin{aligned} & N \int_0^{x_k} \log(\beta + t) dt - \sum_{i=0}^{n_k-1} \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \\ &= N \sum_{i=0}^{n_k-1} \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \left(\log(\beta + t) - \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left(t - \frac{i}{N} \right) \frac{1}{\beta + \frac{i+1}{N}} \leq \log(\beta + t) - \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \leq \left(t - \frac{i}{N} \right) \frac{1}{\beta + \frac{i}{N}}.$$

Ainsi, en intégrant sur $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$ et en sommant les intégrales :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{N\beta + i} &\leq N \int_0^{x_k} \log(\beta + t) dt - \sum_{i=0}^{n_k-1} \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{1}{N\beta + i}. \end{aligned}$$

Approchons chacune des deux bornes par une intégrale. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{i}{N} \leq t \leq \frac{i+1}{N} &\Rightarrow \frac{1}{\beta + \frac{i}{N}} \geq \frac{1}{\beta + t} \geq \frac{1}{\beta + \frac{i+1}{N}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{N\beta + i} \geq \int_{i/N}^{(i+1)/N} \frac{1}{\beta + t} dt \geq \frac{1}{N\beta + i + 1}. \end{aligned}$$

Pour $i \geq 1$, on a donc :

$$\int_{i/N}^{(i+1)/N} \frac{1}{\beta + t} dt \leq \frac{1}{N\beta + i} \leq \int_{(i-1)/N}^{i/N} \frac{1}{\beta + t} dt.$$

En particulier :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{N\beta + i} \geq \frac{1}{2} \int_{1/N}^{x_k+1/N} \frac{dt}{\beta + t} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta + \frac{1}{N}} \right)$$

d'où :

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \leq N \int_0^{x_k} \log(\beta + t) dt - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta + \frac{1}{N}} \right).$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{1}{N\beta + i} \leq \frac{1}{N\beta} + \int_0^{x_k} \frac{dt}{\beta + t}$$

d'où :

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \geq N \int_0^{x_k} \log(\beta + t) dt - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta} \right).$$

Pour plus de simplicité, nous cherchons à comparer $\log \left(1 + \frac{x_k}{\beta+1/N} \right)$ à $\log \left(1 + \frac{x_k}{\beta} \right)$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $u \mapsto \log \left(1 + \frac{x_k}{u} \right)$ sur l'intervalle $[\beta, \beta + \frac{1}{N}]$, on obtient :

$$\left| \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta + 1/N} \right) - \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta} \right) \right| \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{x_k}{\beta(\beta + x_k)}.$$

On peut donc conclure :

$$\begin{aligned} N \int_0^{x_k} \log(\beta + t) dt - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta} \right) &\leq \sum_{i=0}^{n_k-1} \log \left(\beta + \frac{i}{N} \right) \\ &\leq N \int_0^{x_k} \log(\beta + t) dt - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x_k}{\beta} \right) + \frac{x_k}{N\beta(\beta + x_k)}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\prod_{i=0}^{n_k-1} (N\beta + i) = N^{n_k} \left(\frac{(\beta + x_k)^{(\beta+x_k)}}{\beta^\beta e^{x_k}} \right)^N \sqrt{\frac{\beta}{\beta + x_k}} \cdot (1 + r_k),$$

avec

$$0 \leq r_k \leq \exp\left(\frac{x_k}{N\beta(\beta + x_k)}\right) - 1.$$

Or ce calcul est parfaitement valable si l'on pose $\beta = \frac{1}{N}$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} n_k! &= \prod_{i=0}^{n_k-1} (N\beta + i) \\ &= N^{n_k} \left(\frac{(1/N + x_k)^{(1/N+x_k)}}{(\frac{1}{N})^{1/N} e^{x_k}} \right)^N \sqrt{\frac{1/N}{1/N + x_k}} \cdot (1 + r'_k) \\ &= N^{n_k+1} (1/N + x_k)^{n_k+1} e^{-n_k} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + n_k}} \cdot (1 + r'_k) \\ &= (n_k + 1)^{n_k+1/2} e^{-n_k} (1 + r'_k), \end{aligned}$$

avec

$$0 \leq r'_k \leq \exp\left(\frac{n_k}{n_k + 1}\right) - 1.$$

Après avoir multiplié terme à terme les K approximations, on obtient l'équivalent annoncé. Reste à dominer l'erreur :

$$1 \leq \prod_k (1 + r_k) \leq \exp\left(\sum_k \frac{x_k}{N\beta(\beta + x_k)}\right).$$

Or :

$$\frac{1}{N\beta} \sum_k \frac{x_k}{\beta + x_k} = \frac{1}{N\beta} \left(K - \sum_k \frac{\beta}{\beta + x_k} \right),$$

et d'après l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne harmonique :

$$\frac{\sum_k \frac{\beta}{\beta + x_k}}{K} \geq \frac{K}{\sum_k \frac{\beta + x_k}{\beta}} = \frac{K}{K + \frac{1}{\beta}} = \frac{K}{K + \frac{(1-\alpha)K}{\alpha}} = \alpha.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{N\beta} \sum_k \frac{x_k}{\beta + x_k} \leq \frac{1}{N\beta} (K - K\alpha),$$

et on obtient :

$$1 \leq \prod_k (1 + r_k) \leq \exp \left(\frac{K(1 - \alpha)}{N\beta} \right).$$

De même, on a :

$$1 \leq \prod_k (1 + r'_k) \leq \exp (K(1 - \alpha)).$$

Le résultat s'en déduit. ■

Sur la figure 3.12, on a représenté la mesure invariante en fonction de α dans le cas $K = 2$. Comme nous l'avons déjà remarqué sur la figure 3.10, lorsque α grandit l'effet "fortes têtes" se fait de plus en plus sentir. À la limite, pour les grandes valeurs de α , la masse de la mesure invariante est concentrée sur les états centraux, c'est-à-dire ceux où il y a sensiblement le même nombre d'individus dans les deux zones.

Apparemment, il existe une valeur critique α_c où le profil de la courbe s'inverse. Les deux questions que nous nous posons sont les suivantes :

- au moment où la courbe s'inverse, passe-t-elle par un stade où elle est complètement plate ?
- si oui, ce résultat est-il généralisable à K zones ?

En fait, le théorème 3.8 montre immédiatement que la réponse est à chaque fois oui : il suffit de choisir $\beta = \frac{1}{N}$ pour obtenir une mesure uniforme. Ainsi on a le

Corollaire 3.10. *Pour la valeur critique de α suivante :*

$$\alpha_c = \frac{K}{N + K},$$

la mesure invariante est uniforme sur tous les états.

Ainsi :

- pour $\alpha < \alpha_c$, l'influence des moutons est encore notable. C'est le cas le plus intéressant, puisque on assiste à la formation de hotspots.

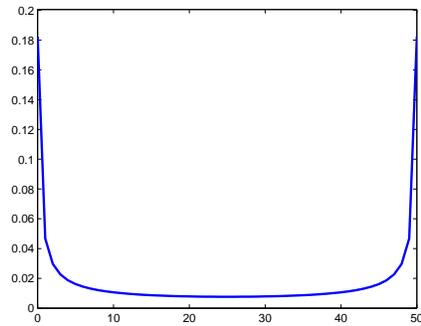
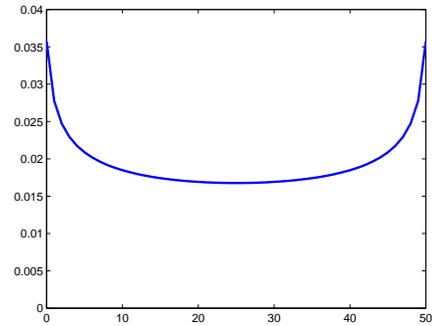
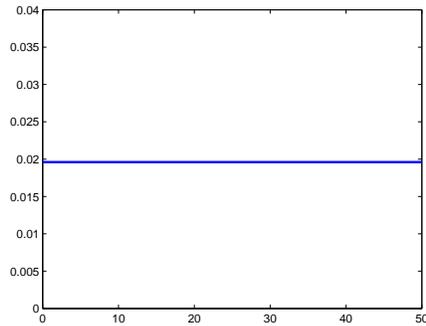
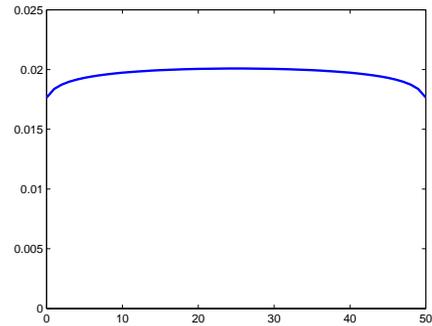
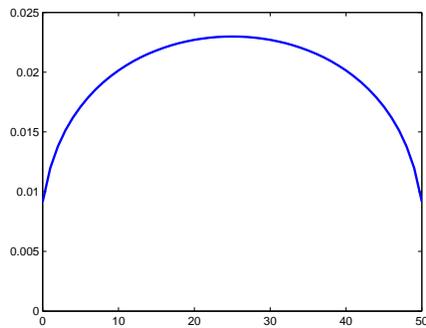
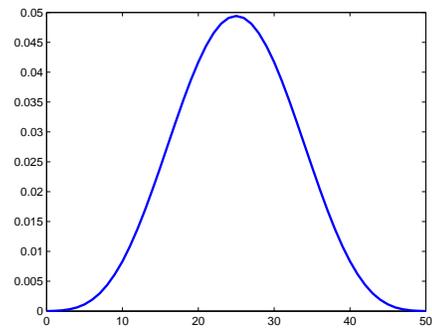
(a) $\alpha = 0.01$ (b) $\alpha = 0.03$ (c) $\alpha = 0.038$ (d) $\alpha = 0.04$ (e) $\alpha = 0.05$ (f) $\alpha = 0.2$

Fig. 3.12: Représentation de la mesure invariante pour $N = 50$ et $K = 2$. Lorsque α dépasse 0.038, le profil de la courbe s'inverse.

- pour $\alpha = \alpha_c$, tous les états sont équiprobables. Lorsque N est grand, comme $\alpha_c \sim \frac{K}{N}$, on obtient une conséquence assez surprenante : il suffit d'une seule forte tête par zone pour perturber tout le système.
- pour $\alpha > \alpha_c$, les moutons perdent toute influence. C'est dans ce cas que le théorème 3.9 se révèle le plus utile, mais ce n'est pas l'objet de notre étude ici.

Comme nous cherchons à modéliser la formation de hotspots, nous supposerons dans tout le chapitre que $\alpha < \alpha_c$.

3.3.3 Macro-états et dynamique des hotspots

Notre système est entièrement caractérisé par quatre paramètres, qui sont N , K , μ et α . Les trois premiers paramètres peuvent être directement mesurés, mais α non, car son sens est plus abstrait. Pourtant, il est de première importance de le déterminer. Une idée pourrait être de trouver une grandeur caractéristique du système, facilement mesurable et étroitement liée à α . C'est ce que nous proposons ici.

Dans le cas $\alpha < \alpha_c$, on peut observer aussi bien la formation de hotspots que leurs désagrégation. Définir un hotspot comme la totalité des individus dans une zone serait trop extrême, car un tel événement est extrêmement rare et il n'est pas réaliste de vouloir le mesurer. En revanche, on peut demander qu'une proportion significative de la population se retrouve dans une zone donnée. C'est ce que nous appellerons un "macro-état", à savoir la réunion de plusieurs états proches d'un état extrémal.

Introduisons le macro-état A_k défini par :

Définition 3.1. $A_k = \{\mathbf{n} : n_k > N_{\text{sup}}\}$, avec $N_{\text{sup}} < N$,

où N_{sup} est un nombre d'individu qualifié de "significatif". De même définissons :

Définition 3.2. $B_k = \{\mathbf{n} : n_k < N_{\text{inf}}\}$, avec $N_{\text{inf}} > 0$.

Alors une désagrégation sera simplement une transition de A_k à B_k . on dira aussi que la zone k a été "siphonnée". Plus précisément, pour k fixé, nous définissons le "temps de siphonnage" S_k comme la durée entre le premier

instant où on se trouve dans A_k et le premier instant ultérieur où on se trouve dans B_k ⁴:

Définition 3.3. Le temps de siphonnage de la zone k est donné par :

$$\begin{aligned} S_k &= \tau(A_k \rightarrow B_k) \\ &= \inf\{t/\mathbf{n}(t) \in B_k \text{ et } \exists u < t, \mathbf{n}(u) \in A_k\} - \inf\{u/\mathbf{n}(u) \in A_k\}. \end{aligned}$$

Le premier temps d'atteinte de A_k est un temps d'arrêt, donc par application de la propriété de Markov fort le futur du système est indépendant de tout ce qui s'est passé auparavant. Aussi, si on s'intéresse à la loi de S_k , on peut supposer sans perte de généralité que le système démarre déjà en A_k . On a alors le

Théorème 3.11. *Sachant que le système démarre en A_k , le temps de siphonnage moyen de la zone k est donné par :*

$$\mathbb{E}[S_k | \mathbf{n}(0) = \mathbf{n} \in A_k] = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=N_{\text{inf}}}^{n_k} \sum_{j=l}^N \frac{\prod_{l \leq i < j} \delta(i)}{j(N(K-1)\beta + N - j)},$$

où

$$\delta(i) = \frac{(N-i)(N\beta+i)}{i(N(K-1)\beta + N - i)}.$$

Démonstration - Comme d'habitude, commençons par le cas $K=2$ et $k=1$. Nous sommes dans l'état initial $(m, N-m)$, et nous cherchons le temps d'atteinte h_m de l'ensemble $\{\mathbf{n}/n_1 < N_{\text{inf}}\}$. Pour l'instant, on ne suppose pas forcément que $m > N_{\text{sup}}$, et on cherche une formule analytique de h_m (disons pour $N_{\text{inf}} \leq m \leq N$, puisque sinon $h_m = 0$).

Si nous introduisons $u_m = h_m - h_{m-1}$, une équation du même type que 3.2 nous fournit la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} -1 &= q_{m,m+1}h_{m+1} + q_{m,m}h_m + q_{m,m-1}h_{m-1} \\ &= q_{m,m+1}h_{m+1} - (q_{m,m-1} + q_{m,m+1})h_m + q_{m,m-1}h_{m-1} \\ u_{m+1} &= \frac{q_{m,m-1}}{q_{m,m+1}}u_m - \frac{1}{q_{m,m+1}} \\ &= \frac{m(N\beta + N - m)}{(N-m)(N\beta + m)}u_m - \frac{N}{\mu(1-\alpha)(N-m)(N\beta + m)}. \end{aligned}$$

⁴ pourquoi ne pas plutôt mesurer la durée à partir du dernier instant où on quitte A_k avant de rejoindre B_k ? Parce que ce n'est pas un temps d'arrêt, ce qui rendrait plus compliqué l'usage de la théorie des processus de Markov.

En théorie, la récurrence est valable pour $N_{\text{inf}} + 1 \leq m \leq N - 1$, mais comme $N_{\text{inf}} > 0$ et $h_{N_{\text{inf}}-1} = 0$, elle est encore valable pour $m = N_{\text{inf}}$. Ensuite l'idée est d'introduire :

$$\delta(i) = \frac{(N-i)(N\beta+i)}{i(N\beta+N-i)} \quad \text{et} \quad v_m = \frac{u_m}{\prod_{i=m}^{N-1} \delta(i)}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} v_{m+1} &= \frac{u_{m+1}}{\prod_{i=m+1}^{N-1} \delta(i)} \\ &= \frac{u_m}{\delta(m) \prod_{i=m+1}^{N-1} \delta(i)} - \frac{N}{\mu(1-\alpha)(N-m)(N\beta+m) \prod_{i=m+1}^{N-1} \delta(i)} \\ &= v_m - \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{m(N\beta+N-m) \prod_{i=m}^{N-1} \delta(i)}, \end{aligned}$$

si bien que pour $N_{\text{inf}} \leq m \leq N$:

$$v_m = v_N + \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=m}^{N-1} \frac{1}{j(N\beta+N-j) \prod_{i=j}^{N-1} \delta(i)}.$$

Comme $q_{N,N}h_N + q_{N,N-1}h_{N-1} = -1$, on a aussi :

$$u_N = -\frac{1}{q_{N,N}} = \frac{2}{\mu\alpha N} = v_N.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{2}{\mu\alpha N} + \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=m}^{N-1} \frac{1}{j(N\beta+N-j) \prod_{i=j}^{N-1} \delta(i)} \\ &= \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=m}^N \frac{1}{j(N\beta+N-j) \prod_{i=j}^{N-1} \delta(i)}, \end{aligned}$$

et :

$$u_m = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=m}^N \frac{\prod_{m \leq i < j} \delta(i)}{j(N\beta+N-j)}.$$

Pour déterminer les h_m , il ne reste plus qu'à remarquer que $u_{N_{\text{inf}}} = h_{N_{\text{inf}}}$:

$$h_{N_{\text{inf}}} = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=N_{\text{inf}}}^N \frac{\prod_{N_{\text{inf}} \leq i < j} \delta(i)}{j(N\beta+N-j)},$$

et plus généralement :

$$h_m = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=N_{\text{inf}}}^m \sum_{j=l}^N \frac{\prod_{l \leq i < j} \delta(i)}{j(N\beta + N - j)}.$$

Intéressons-nous maintenant au cas général, et invoquons le même argument d'associativité que précédemment : il est parfaitement licite de considérer l'union des $K - 1$ zones différentes de la zone k comme une seule grande zone. Un mouton restera dedans avec la probabilité $\frac{\sum_{l \neq k} m_l}{N}$, alors qu'une forte tête y restera avec la probabilité $\frac{K-1}{K}$. C'est cette dernière probabilité qui constitue la seule adaptation que nous ayons à faire. En l'occurrence, nous obtenons la nouvelle récurrence suivante :

$$u_{m+1} = \frac{m(N\beta' + N - m)}{(N - m)(N\beta + m)} u_m - \frac{N}{\mu(1-\alpha)(N - m)(N\beta + m)},$$

avec $\beta' = (K - 1)\beta$. Le reste du calcul est exactement le même. \blacksquare

Dans le cas où on ne démarre pas en A_k , on sait par continuité qu'au premier instant où on entrera dans A_k , on aura presque sûrement $n_k = N_{\text{sup}} + 1$. On a donc le

Corollaire 3.12. *Sachant que le système ne démarre pas en A_k , le temps de siphonnage moyen de la zone k est donné par :*

$$\mathbb{E}[S_k | \mathbf{n}(0) = \mathbf{n} \notin A_k] = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=N_{\text{inf}}}^{N_{\text{sup}}+1} \sum_{j=l}^N \frac{\prod_{l \leq i < j} \delta(i)}{j(N(K-1)\beta + N - j)}.$$

Comme on pouvait s'y attendre, ce nombre est indépendant de \mathbf{n} et k . On le note $\mathbb{E}[S]$.

La figure 3.13 représente l'évolution de $\mathbb{E}[S]$ en fonction de α , et ce pour plusieurs valeurs de N . Sur cette figure on a aussi représenté α_{min} , la valeur de α à laquelle $\mathbb{E}[S]$ est minimal.

De la même manière, on peut calculer le "temps de remplissage moyen" R d'une zone :

Définition 3.4. Le temps de remplissage R_k de la zone k est la durée entre le premier instant où on se trouve dans B_k et le premier instant où on se trouve dans A_k .

On a alors le

Théorème 3.13. *Sachant que le système démarre en B_k , le temps de remplissage moyen de la zone k est donné par :*

$$\mathbb{E}[R_k | \mathbf{n}(0) = \mathbf{n} \in B_k] = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=N-N_{\text{sup}}}^{N-n_k} \sum_{j=l}^N \frac{\prod_{l \leq i < j} \epsilon(i)}{j(N\beta + N - j)},$$

où

$$\epsilon(i) = \frac{1}{\delta(N-i)} = \frac{(N-i)(N(K-1)\beta + i)}{i(N\beta + N - i)}.$$

Démonstration - Le début de la récurrence est le même que pour le théorème 3.11. Seule la plage de valeurs change : pour $1 \leq m \leq N_{\text{sup}}$ on a toujours :

$$\begin{aligned} v_{m+1} &= v_m - \frac{N}{\mu(1-\alpha)(N-m)(N\beta + m) \prod_{i=m+1}^{N-1} \delta(i)} \\ &= v_m - \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N-m-1} \epsilon(i)}{(N-m)(N\beta + m)}, \end{aligned}$$

soit, pour $2 \leq m \leq N_{\text{sup}} + 1$:

$$\begin{aligned} v_m &= v_{m-1} - \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{N-m} \epsilon(i)}{(N-m+1)(N\beta + m-1)} \\ &= v_1 - \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=2}^m \frac{\prod_{i=1}^{N-j} \epsilon(i)}{(N-j+1)(N\beta + j-1)}. \end{aligned}$$

Puis, de manière symétrique par rapport au cas précédent, on a :

$$\begin{aligned} -1 &= q_{0,0}h_0 + q_{0,1}h_1 \\ u_1 &= -\frac{1}{q_{0,1}} \\ &= -\frac{2}{\mu\alpha N} \\ v_1 &= -\frac{2}{\mu\alpha N \prod_{i=1}^{N-1} \delta(i)} \\ &= -\frac{2 \prod_{i=1}^{N-1} \epsilon(i)}{\mu\alpha N}, \end{aligned}$$

d'où :

$$v_m = -\frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=1}^m \frac{\prod_{i=1}^{N-j} \epsilon(i)}{(N-j+1)(N\beta+j-1)}$$

et :

$$u_m = \frac{v_m}{\prod_{i=1}^{N-m} \epsilon(i)} = -\frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=1}^m \frac{\prod_{N-m < i \leq N-j} \epsilon(i)}{(N-j+1)(N\beta+j-1)}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $h_{N_{\text{sup}}} = -u_{N_{\text{sup}}+1}$ pour conclure :

$$h_{N_{\text{sup}}} = -\frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{N_{\text{sup}}+1} \frac{\prod_{N-N_{\text{sup}} \leq i \leq N-j} \epsilon(i)}{(N-j+1)(N\beta+j-1)},$$

et plus généralement :

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=m+1}^{N_{\text{sup}}+1} \sum_{j=1}^l \frac{\prod_{N-l < i \leq N-j} \epsilon(i)}{(N-j+1)(N\beta+j-1)} \\ &= \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=N-N_{\text{sup}}}^{N-m} \sum_{j=l}^N \frac{\prod_{l \leq i < j} \epsilon(i)}{j(N\beta+N-j)}. \end{aligned}$$

La fin de la preuve ne change pas. ■

De même, on a le

Corollaire 3.14. *Sachant que le système ne démarre pas en B_k , le temps de remplissage moyen de la zone k est donné par :*

$$\mathbb{E}[R_k | \mathbf{n}(0) = \mathbf{n} \notin B_k] = \frac{N}{\mu(1-\alpha)} \sum_{l=N-N_{\text{sup}}}^{N-N_{\text{inf}}+1} \sum_{j=l}^N \frac{\prod_{l \leq i < j} \epsilon(i)}{j(N\beta+N-j)},$$

Comme on pouvait s'y attendre, ce nombre est indépendant de \mathbf{n} et k . On le note $\mathbb{E}[R]$.

Remarque 3.4. Il est facile de trouver des formules de récurrence pour $\mathbb{E}[S]$ et $\mathbb{E}[R]$, ce qui permet de ramener la complexité des calculs à un $O(N)$.

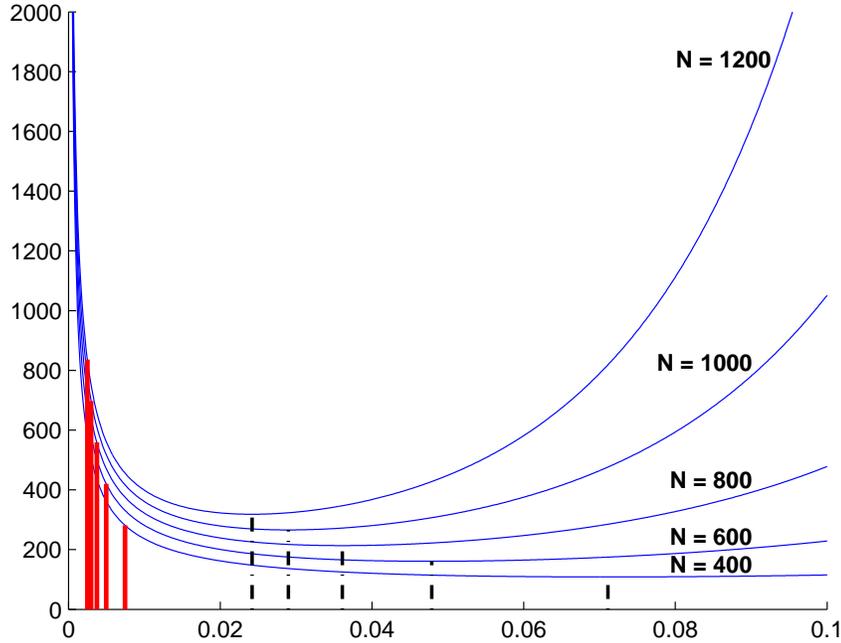


Fig. 3.13: Temps de siphonnage moyen (en minutes) en fonction de α . $N_{\text{sup}}/N = 80\%$, $N_{\text{inf}}/N = 20\%$, $K = 3$ et $\mu = 1 \text{ min}^{-1}$. Pour chaque courbe, le trait plein vertical correspond à la valeur critique α_c , tandis que la ligne pointillée correspond à α_{min} .

3.4 Calibration à l'aide des traces

Dans cette section, nous regardons si les mouvements de foule observés à l'aide de nos traces mobiles peuvent raisonnablement être décrits par le modèle des moutons et des fortes têtes. Nous proposons d'utiliser $\mathbb{E}[S]$ et/ou $\mathbb{E}[R]$ comme grandeur de calibration. En les mesurant suffisamment précisément, nous pourrions en déduire α en inversant les formules développées ci-dessus. Si la fonction $\mathbb{E}[S] = f(\alpha)$ par exemple est injective, au moins pour $\alpha < \alpha_c$, alors le problème inverse pourra être résolu sans ambiguïté. La figure 3.13 suggère que la fonction $f(\alpha)$ est toujours convexe, et donc injective sur l'intervalle $]0, \alpha_{\text{min}}]$, si bien que si $\alpha_c < \alpha_{\text{min}}$ alors notre problème aura au plus une solution. Malheureusement, c'est faux en général. Un contre-exemple est donné par $K = 2$, $N = 100$ et $N_{\text{sup}}/N = 0.99\%$.

En pratique, α_{min} paraît difficile à calculer analytiquement, à tel point

que nous n'avons pas pu trouver ne serait-ce qu'une condition suffisante simple pour garantir $\alpha_c < \alpha_{\min}$. Et quand bien même ce serait le cas, rien ne nous garantit que la fonction $f(\alpha)$ soit systématiquement convexe, même si intuitivement, on peut s'attendre à ce que ce soit toujours le cas : l'effet mouton est en lutte contre l'effet forte tête, et selon la valeur de α c'est l'un ou l'autre qui l'emporte. Dans les valeurs extrêmes de α , les temps de siphonnage sont extrêmement longs : soit il n'y a pratiquement que des moutons, auquel cas les zones mettent évidemment beaucoup de temps à se vider, soit il n'y a pratiquement que des fortes têtes, auquel cas en permanence toutes les zones sont plus ou moins équilibrées en effectifs.

L'expérience montre que f est toujours convexe, et que les contre-exemples à $\alpha_c < \alpha_{\min}$ sont extrêmement rares, surtout si $K \geq 3$. Cependant, s'il apparaissait qu'il est impossible de choisir N_{\inf} et N_{\sup} correctement, alors nous recommandons de croiser les mesures de $\mathbb{E}[S]$ avec des mesures de $\mathbb{E}[R]$ pour lever autant d'ambiguïtés que possible.

Attention, si on décide de calibrer α uniquement sur $\mathbb{E}[R]$, il faut être plus prudent, car l'expérience montre que l'injectivité de $g(\alpha) = \mathbb{E}[R]$ sur $]0, \alpha_c[$ est moins souvent remplie.

Revenons à notre calibration sur les données de la Fête de la Musique. Il n'est pas question de proposer ici une analyse statistique extensive, d'autant plus que le jeu de données dont nous disposons est trop réduit pour cela, mais plutôt d'illustrer sur un exemple simple la marche à suivre. Considérons par exemple le transfert mis en évidence sur la figure 3.2, entre le Parc des Princes et l'hippodrome d'Auteuil. En observant précisément nos données, nous nous sommes aperçus qu'il y avait trois zones d'attraction :

- Auteuil lui-même
- le Parc des Princes, zone Nord
- le Parc des Princes, zone Sud

Ainsi, nous avons $K = 3$. Sur la figure 3.14, on peut voir l'évolution du nombre d'individus dans chaque zone au cours du temps. Le nombre total de SMS reste plus ou moins constant au cours du temps, si bien que nous choisissons la valeur moyenne $N = 4830$. Cela fournit $\alpha_c = 6.2 \times 10^{-4}$. Dans nos données, un signal SMS dure environ 1 seconde : à chaque fois qu'un SMS est reçu ou envoyé, un nouvel individu est comptabilisé, mais il est systématiquement effacé après une seconde. Ainsi, même si ce n'est pas

vrai dans la réalité mais afin de rester cohérents (puisque seule son influence compte), nous faisons comme si chaque utilisateur restait 1 seconde dans sa zone avant de disparaître, ce qui nous donne $\mu = 1 \text{ sec}^{-1}$. Ainsi, nous avons $K = 3$. Sur la figure 3.14, on peut voir l'évolution du nombre d'individus dans chaque zone au cours du temps. Le nombre total de SMS reste plus ou moins constant au cours du temps, si bien que nous choisissons la valeur moyenne $N = 4830$. Cela fournit $\alpha_c = 6.2 \times 10^{-4}$. Dans nos données, un signal SMS dure environ 1 seconde : à chaque fois qu'un SMS est reçu ou envoyé, un nouvel individu est comptabilisé, mais il est systématiquement effacé après une seconde. Ainsi, même si ce n'est pas vrai dans la réalité mais afin de rester cohérents (puisque seule son influence compte), nous faisons comme si chaque utilisateur restait 1 seconde dans sa zone avant de disparaître, ce qui nous donne $\mu = 1 \text{ sec}^{-1}$.

En choisissant de faire notre calibration sur le remplissage d'Auteuil par exemple, nous prenons $N_{\text{sup}}/N = 55\%$ et $N_{\text{inf}}/N = 45\%$. Après avoir vérifié que $g(\alpha)$ était injective sur $]0, \alpha_c[$, nous obtenons $\alpha = 0.6 \times 10^{-4}$, c'est-à-dire $\alpha \ll \alpha_c$. Afin de vérifier cette valeur de α , nous mesurons également le siphonnage du Parc des Princes en zone Sud, ce qui nous donne $\alpha = 0.5 \times 10^{-4}$. Encore une fois, cela ne saurait constituer une vérification certaine de α , et si l'on a à sa disposition un plus grand jeu de données, il est bon d'effectuer une moyenne sur un échantillon aussi important que possible.

Maintenant, si notre modèle est consistant, il doit être capable de prédire d'autres siphonnages ou remplissages à travers Paris. Considérons le triangle Châtelet-Saint-Michel-Bastille par exemple, dans le cœur de Paris. Nous observons que les trois zones subissent chacune des remplissages de durée à peu près égale (voir figure 3.15). Nous considérons aussi la zone complémentaire, qui connaît un siphonnage. Ainsi $K = 4$.

D'après le corollaire 3.14, le remplissage d'une zone de 5% à 28% par exemple devrait durer environ 10800 secondes, selon la valeur de α que nous avons calculée précédemment. Or le remplissage de Bastille dure environ 11300 secondes, celui de Châtelet également, et celui de Saint-Michel dure 11000 secondes, ce qui est très proche de nos prédictions.

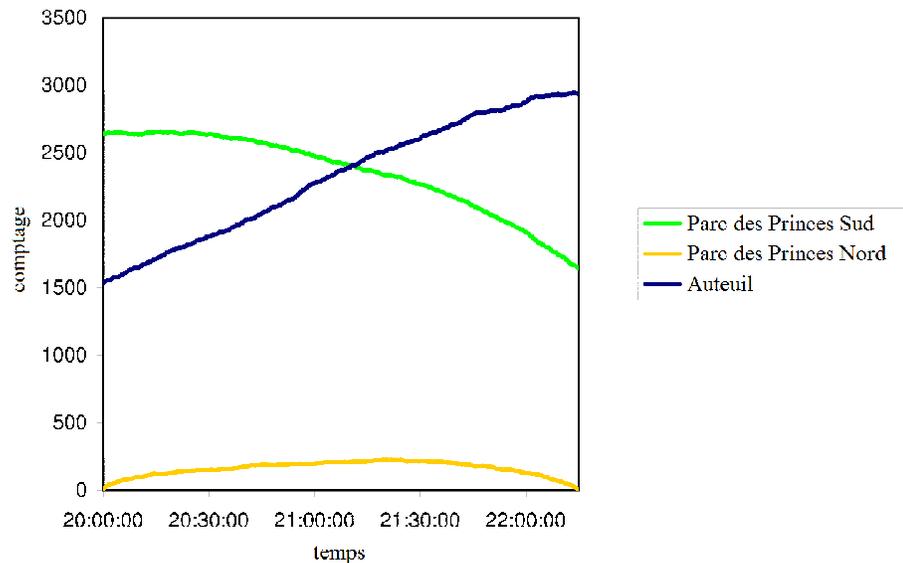


Fig. 3.14: SMS envoyés pendant la Fête de la Musique entre les trois zones d'attraction.

3.5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé un nouveau modèle de mobilité pour représenter la formation de hotspots dans un mouvement de foule, ainsi que leur dynamique aléatoire. Nous avons prouvé que ce modèle était calculable analytiquement en proposant des formules fermées ainsi que des estimations asymptotiques. En utilisant les traces des utilisateurs d'un réseau GSM, nous avons montré comment calibrer ce modèle pour qu'il suive au plus près la réalité. Enfin, ce modèle a montré qu'il pouvait prédire la formation de hotspots dans différentes situations spatio-temporelles.

Notons que d'autres modèles de décision peuvent être imaginés pour les individus, comme d'avoir des fortes têtes qui privilégient une zone en particulier. À ce sujet, on pourra consulter [Bin11].

Avant de passer à quelques applications de ce modèle, voici des réponses à deux objections qui pourraient venir à l'esprit du lecteur :

- pourquoi y a-t-il un nombre constant d'utilisateurs ?

À cela nous répondons d'abord que l'on travaille sur des grands effectifs de population (plusieurs dizaines de milliers), si bien que statistique-

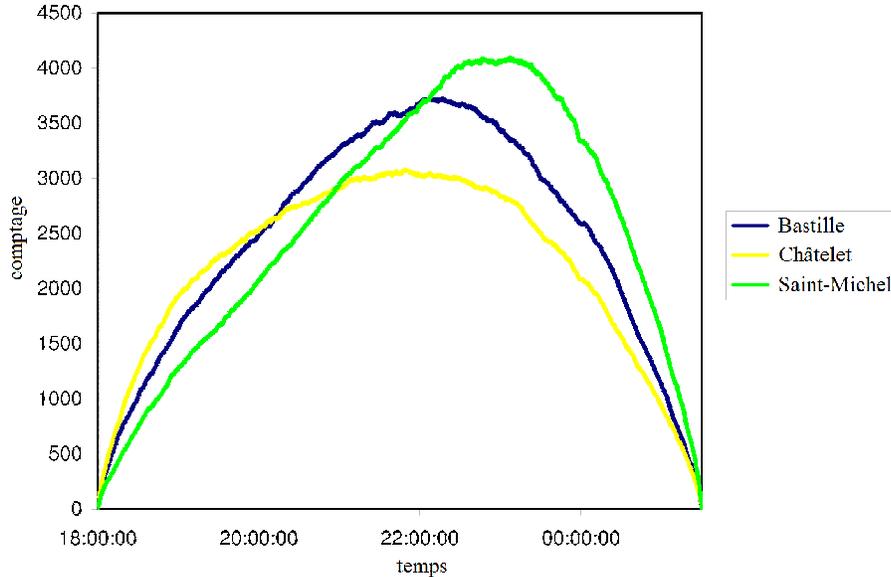


Fig. 3.15: SMS envoyés pendant la Fête de la Musique dans le triangle Châtelet-Saint-Michel-Bastille.

ment, l'évolution du nombre total d'utilisateurs est lente. Sur de petite périodes, on peut considérer que ce nombre est à peu près constant, et qui plus est nous disposons d'équivalents asymptotiques pour la plupart de nos formules. Le fait qu'il existe de tels équivalents donne un sens précis à la notion d'approximation.

- est-ce que les transitions sont instantanées ?

À vrai dire, il n'y a aucune raison *a priori* de supposer les transitions instantanées comme nous l'avons fait, surtout si deux zones sont éloignées géographiquement. Cependant, nous avons considéré qu'à partir du moment où un individu avait décidé de se déplacer dans une nouvelle zone, alors sa décision était prise dès l'instant où il quittait l'ancienne zone. Et c'est cela qui compte, puisque dans un événement comme la Fête de la Musique par exemple, les messages qu'il échange avec ses proches lui servent bien souvent à leur donner rendez-vous à tel ou tel endroit (selon l'âge de l'utilisateur, messages du type: "venez dans la cour du musée Carnavalet, il y a un concert formidable" ou "ramène-toi à Pigalle, y a trop une ambiance de ouf"). Aussi à partir

du moment où il se met en route pour une zone donnée, on peut considérer qu'il y est virtuellement déjà, puisqu'il est désormais capable d'influencer d'autres individus pour venir à sa suite.

Au-delà d'une des applications les plus immédiates, qui est de fournir un modèle de mobilité facilement implémentable pour les simulateurs de réseau, voici quelques autres applications qui reposent sur la capacité à prévoir les siphonnages et les remplissages :

- mettre de la donnée en mémoire cache dans des réseaux ad-hoc denses

Dans un réseau ad-hoc dense, il peut être utile d'ajouter quelques serveurs fixes qui contiennent les données les plus souvent demandées. Plusieurs algorithmes existent déjà dans ce sens (voir par exemple [Har01][Har03][Yin06]). La question est : où et quand doit-on mettre de la donnée en cache ? L'idée est de sélectionner quelques endroits stratégiques où les individus ont l'habitude de se rassembler. Ce sont nos K zones. Supposons que de la même manière que dans la section 3.4, nous ayons préalablement évalué α , éventuellement à un autre endroit de la ville avec d'autres individus. Alors, en mesurant en temps réel le nombre N d'individus et en calculant le temps de siphonnage correspondant, dès qu'un regroupement se produit on sait combien de temps en moyenne il va durer. En d'autres mots, on sait si cela est utile de placer de la donnée en cache à cet endroit. Réciproquement, si une zone est presque vide, en calculant son temps de remplissage on peut savoir s'il existe un risque d'attroupement à cet endroit qui obligerait à placer de la donnée en cache.

- allocation dynamique de spectre

L'allocation dynamique de spectre (*Dynamic Spectrum Allocation* dans la littérature anglo-saxonne, ou DSA), consiste à allouer des ressources variables en bande passante selon les zones et les densités de population. Elle constitue aujourd'hui un champ de recherche très actif. Comme dans le point précédent, si nous savons prévoir à l'avance le remplissage ou le siphonnage d'une zone sur le long terme, nous pouvons décider de la quantité de ressource à allouer.

- améliorer la robustesse de certains optimisateurs

Plus généralement, certains algorithmes d'optimisation sont réputés dépendre d'un réglage fin des paramètres. Par exemple, [Kau07] propose un algorithme pour optimiser les ressources radio dans un réseau 802.11, basé sur un échantillonneur de Gibbs (*Gibbs sampler*). Le "paramètre de température" de l'échantillonneur doit être réglé très soigneusement, afin que l'optimisateur puisse réagir plus rapidement que le temps d'évolution typique du système lui-même. Plus concrètement, dans notre cas, supposons que l'on veuille prendre en compte la mobilité des utilisateurs dans un réseau 802.11; si l'on peut anticiper une désagrégation alors on pourra adapter l'optimisateur d'une manière convenable.

Dans le cas d'un algorithme génétique également, il peut être intéressant d'adapter les taux de mutation et de cross-over de l'optimisateur, afin de savoir réagir à une évolution soudaine du système. En effet, plus ces taux sont hauts, plus la diversité de la population s'accroît. Dans notre cas, un éclatement de population est susceptible de modifier totalement le système à optimiser, aussi il est bon de pouvoir s'y préparer.

Chapitre 4

LES PROCESSUS DÉTERMINANTAUX

Résumé

Nous nous intéressons ici à des foules un peu particulières où les individus semblent vouloir se repousser. Il peut s'agir de vouloir maximiser son espace personnel (penser à la distribution spatiale des serviettes de bain sur une plage pleine de touristes), ou d'un phénomène de dispersion. Une dispersion peut être violente (alerte à la bombe, évacuation sanitaire...) ou plus mesurée (départ d'un stade après un match de football). Quelle que soit l'échelle temporelle, nous étudions une classe de processus spatiaux qui sont connus pour exhiber de la répulsion entre les points : les processus déterminantaux. Ce chapitre s'appuie largement sur les résultats de l'excellent [Ben09]. Les résultats plus originaux sont le lemme 4.2 sur l'interprétation de la mesure factorielle, et toute la partie sur la variation temporelle des processus déterminantaux.

Bien sûr, il existe d'autres techniques que celle-là pour modéliser des foules qui exhibent de la répulsion, comme les équations aux dérivées partielles. Pour ne citer qu'un exemple, on pourra par exemple penser aux jeux à champ moyen (*mean field games*) progressivement introduits par Lasry et Lions à partir de 2006 (voir [Las07] ou [Lac11]).

4.1 Introduction

Commençons par rappeler la définition d'un processus déterminantal, dans son acception la plus générale. Soit Λ un espace polonais (ici $\Lambda = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) muni d'une mesure de Radon μ (le plus souvent la mesure de Lebesgue). Nous avons vu dans le chapitre 1 que pour un processus déterminantal, les intensités jointes (par rapport à μ) étaient données par :

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det (\mathbb{K}(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq n}),$$

où \mathbb{K} est appelé le noyau du processus. Dans la définition complète, on demande que \mathbb{K} vérifie certaines propriétés techniques, qui permettent de garantir l'existence du processus.

- on commence par introduire la

Définition 4.1. \mathbb{K} est de carré localement intégrable lorsque pour tout compact $D \subset \Lambda$, on a :

$$\iint_{D^2} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty.$$

On remarque que dans ce cas, pour tout couple de compacts D_1 et D_2 on peut écrire :

$$\iint_{D_1 \times D_2} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \leq \iint_{(D_1 \cup D_2)^2} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty.$$

Cela permet d'associer un opérateur intégral à \mathbb{K} :

Définition 4.2. Si \mathbb{K} est de carré localement intégrable, l'opérateur intégral \mathcal{K} associé à \mathbb{K} est défini sur $L^2_{\mathcal{C}}(\Lambda)$ (les fonctions de carré intégrable à support compact) par :

$$\mathcal{K}f : x \mapsto \int_{\Lambda} \mathbb{K}(x, y) f(y) d\mu(y).$$

Montrons que \mathcal{K} est bien défini. Si on note D le support de f , alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\left(\int_{y \in D} |\mathbb{K}(x, y) f(y)| d\mu(y) \right)^2 \leq \|f\|^2 \int_{y \in D} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(y).$$

En intégrant cette inégalité sur un voisinage compact de x et en utilisant le fait que \mathbb{K} est de carré localement intégrable, on obtient que

$$\int_{y \in D} |\mathbb{K}(x, y)f(y)| d\mu(y) < \infty$$

pour presque tout x de ce voisinage, ce qui légitime la définition de $\mathcal{K}f$. En revanche, $\mathcal{K}f$ n'a aucune raison d'être à support compact. Mais donnons-nous un compact $D \subset \Lambda$, et restreignons-nous à l'espace $L^2(D)$, qui s'identifie au sous-espace de $L^2(\Lambda)$ des fonctions à support dans D . Alors pour tout f dans $L^2(D)$, on peut considérer la restriction de $\mathcal{K}f$ à D , et elle est de carré intégrable comme on s'en convainc en réutilisant l'inégalité ci-dessus :

$$\int_{x \in D} |(\mathcal{K}f)(x)|^2 d\mu(x) \leq \int_{x \in D} \left(\|f\|^2 \int_{y \in D} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) < \infty.$$

On obtient ainsi un endomorphisme de $L^2(D)$, qu'on note \mathcal{K}_D et qu'on appelle par commodité la restriction de \mathcal{K} à D .

- pour que les ρ_n soient réelles, une condition suffisante simple est que \mathbb{K} ait la symétrie hermitienne. En effet, la matrice $\mathbb{K}(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est alors hermitienne quelle que soit la famille (x_i) , donc son déterminant, qui est égal au produit de ses valeurs propres, est réel.

Si \mathbb{K} possède la symétrie hermitienne, nous allons voir que cela implique toute une série de conséquences. Pour commencer \mathcal{K}_D devient un opérateur auto-adjoint :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_D f, g \rangle &= \int_{x \in D} \overline{\mathcal{K}_D f(x)} g(x) dx \\ &= \int_{x \in D} \overline{\int_{y \in D} \mathbb{K}(x, y) f(y) dy} g(x) dx \\ &= \int_{y \in D} \int_{x \in D} \mathbb{K}(y, x) \overline{f(y)} g(x) dx dy \\ &= \int_{y \in D} \overline{f(y)} (\mathcal{K}g)(y) dy \\ &= \langle f, \mathcal{K}_D g \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème spectral, on sait que \mathcal{K}_D est diagonalisable dans une base orthonormale¹ (ψ_k) . Notons $\{\lambda_k\}$ la famille des valeurs propres associées. Pour presque tout $x \in D$, on a vu que l'intégrale $\int_{y \in D} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(y)$ était finie. Comme les $\overline{\psi_l}$ forment aussi une base orthonormale, il existe des fonctions $u_l(x)$ telles que

$$\mathbb{K}(x, y) = \sum_l u_l(x) \overline{\psi_l(y)}.$$

Elles sont mesurables, car elles sont égales au produit scalaire des $\overline{\psi_l}$ avec le terme de gauche. Par ailleurs, elles sont de carré intégrable, car :

$$\begin{aligned} \int_{x \in D} \left(\int_{y \in D} |\mathbb{K}(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) &= \int_{x \in D} \left(\sum_l |u_l(x)|^2 \right) d\mu(x) \\ &= \sum_l \|u_l\|^2 < \infty, \end{aligned}$$

si bien qu'il existe des complexes $\lambda_{k,l}$ tels que $u_l = \sum_k \lambda_{k,l} \psi_k$. Autrement dit :

$$\mathbb{K}(x, y) = \sum_{k,l} \lambda_{k,l} \psi_k(x) \overline{\psi_l(y)}.$$

On peut alors écrire :

$$(\mathcal{K}f)(x) = \sum_{k,l} \lambda_{k,l} \psi_k(x) \langle \psi_l(y), f(y) \rangle \Leftrightarrow \mathcal{K}f = \sum_{k,l} \lambda_{k,l} \langle \psi_l, f \rangle \psi_k.$$

En écrivant que les ψ_k sont les fonctions propres de \mathcal{K}_D , on obtient que $\lambda_{k,l} = 0$ si $k \neq l$, et que $\lambda_{k,k} = \lambda_k$. Ainsi, la forme finale de \mathbb{K} est :

$$\mathbb{K}(x, y) = \sum_k \lambda_k \psi_k(x) \overline{\psi_k(y)} \quad \text{presque partout sur } D^2.$$

Au passage on a démontré que réciproquement, si les \mathcal{K}_D étaient des opérateurs auto-adjoints, alors \mathbb{K} possédait la symétrie hermitienne.

¹ cette base sera dénombrable car $L^2(D)$ est séparable (considérer par exemple son système de Haar).

- on veut aussi que les ρ_n soient positives. Pour cela, une condition suffisante simple est que les λ_k soient positives ou nulles. En effet, en écrivant par continuité du déterminant :

$$\det(\mathbb{K}(x_i, x_j)) = \lim_{K \rightarrow \infty} \det \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \psi_k(x_i) \overline{\psi_k(x_j)} \right),$$

il suffit de remarquer que $\sum_{k=1}^K \lambda_k \psi_k(x_i) \overline{\psi_k(x_j)}$ est une matrice de Gram associée à une forme quadratique dont les valeurs propres sont précisément les λ_k , et qui est donc positive.

- pour des raisons techniques, on demande que soit satisfaite la

Définition 4.3. \mathcal{K} est dit "localement à trace" lorsque pour tout compact $D \subset \Lambda$, \mathcal{K}_D est à trace, c'est-à-dire que $\sum_k |\lambda_k| < \infty$.

- on peut enfin définir un processus déterminantal :

Définition 4.4. Un processus déterminantal de noyau \mathbb{K} est un processus tel que :

- les intensités jointes par rapport à μ sont données par

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(\mathbb{K}(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq n})$$

- \mathbb{K} est de carré localement intégrable
- chaque restriction \mathcal{K}_D est auto-adjointe, à trace, et à valeurs propres positives ou nulles.

Rappelons que nous avons prouvé dans le chapitre 1 que la famille des intensités jointes ρ_n suffisait à caractériser le processus, ce qui donne un sens à une expression comme "le processus déterminantal de noyau \mathbb{K} ". Pour ce qui est de l'existence, on renvoie à [Sos00]. Par exemple, on a le

Théorème 4.1 (Macchi, Soshnikov). *Si \mathbb{K} hermitien définit un opérateur intégral \mathcal{K} localement à trace, alors il existe un processus déterminantal de noyau \mathbb{K} si et seulement si le spectre de chaque \mathcal{K}_D est inclus dans $[0, 1]$.*

On pourra trouver dans [Ben09] une démonstration de ce théorème (théorème 4.5.5.). Cet ouvrage donne d'ailleurs un tour d'horizon très complet des processus déterminantaux en proposant de nombreux exemples. Parmi ceux-ci, deux en particulier sont susceptibles de fournir une généralisation spatio-temporelle intéressante : le processus de Ginibre, et la fonction analytique gaussienne (GAF, pour *gaussian analytic function*) hyperbolique. Pour chacun, nous proposons une version spatio-temporelle et nous étudions son comportement.

4.2 Les processus déterminantaux et la répulsion

Les processus déterminantaux restent aujourd'hui encore assez mystérieux, car on connaît beaucoup de situations où ils apparaissent, sans pour autant saisir la réalité profonde qui les unit. On comprend encore mal ce qui fait qu'un déterminant apparaît subitement dans une formule d'intensité jointe. En revanche, il existe plusieurs raisons (plus ou moins heuristiques) de comprendre pourquoi ces processus exhibent une répulsion, au moins à courte distance.

Avant de les examiner, comprenons pourquoi on peut souvent lire l'interprétation suivante : $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$ serait la probabilité limite de trouver un point de Φ dans n petits volumes autour des x_k . Formellement, on peut écrire cela de la manière suivante :

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\Phi(x_1 + B_\epsilon) \neq 0, \dots, \Phi(x_n + B_\epsilon) \neq 0)}{m(B_\epsilon)^n},$$

où B_ϵ est une boule de rayon ϵ centrée sur 0, et m la mesure de Lebesgue. Ce résultat est en général faux, mais sous certaines hypothèses supplémentaires de régularité, il devient vrai. Tout le problème est de pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée à un point crucial de la démonstration. À ce sujet, on peut consulter les pages 9 et 10 de [Ben09], qui sont assez techniques. Voici une démonstration plus simple dans le cas d'hypothèses fortes sur les ρ_n .

Lemme 4.2. *Donnons-nous x_1, x_2, \dots deux à deux distincts, et supposons que les ρ_n sont continues (toujours vrai dans le cas où \mathbb{K} l'est) et vérifient :*

$$\forall n, \rho_n(x_1, \dots, x_n) \leq n! U$$

pour un même réel U indépendant de n . Alors la formule est vraie.

Démonstration - La démonstration se fait en plusieurs temps :

- à l'ordre 1

On introduit la variable aléatoire $N_\epsilon = \Phi(x_1 + B_\epsilon)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}(N_\epsilon \geq 2) &\leq \frac{1}{2} \sum_{z_1, z_2 \in \Phi}^{\neq} \mathbb{1}(z_1 \in x_1 + B_\epsilon, z_2 \in x_1 + B_\epsilon) \\ \mathbb{P}(N_\epsilon \geq 2) &\leq \frac{1}{2} M^{(2)}((x_1 + B_\epsilon) \times (x_1 + B_\epsilon)) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_1 + B_\epsilon} \int_{x_1 + B_\epsilon} \rho_2(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\ &\leq (m(B_\epsilon))^2 U. \end{aligned}$$

Plus généralement :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}(N_\epsilon \geq k) &\leq \frac{1}{k!} \sum_{z_1, \dots, z_k \in \Phi}^{\neq} \mathbb{1}(z_1 \in x_1 + B_\epsilon, \dots, z_k \in x_1 + B_\epsilon) \\ \mathbb{P}(N_\epsilon \geq k) &\leq \frac{1}{k!} M^{(k)}((x_1 + B_\epsilon) \times \dots \times (x_1 + B_\epsilon)) \\ &= \frac{1}{k!} \int_{x_1 + B_\epsilon} \dots \int_{x_1 + B_\epsilon} \rho_k(z_1, \dots, z_k) dz_1 dz_k \\ &\leq (m(B_\epsilon))^k U. \end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[N_\epsilon]}{m(B_\epsilon)} - \frac{\mathbb{P}(N_\epsilon > 0)}{m(B_\epsilon)} &= \frac{1}{m(B_\epsilon)} \mathbb{E}[N_\epsilon - \mathbb{1}(N_\epsilon > 0)] \\ &= \frac{1}{m(B_\epsilon)} \sum_{k \geq 2} (k-1) \mathbb{P}(N_\epsilon = k) \\ &= \frac{1}{m(B_\epsilon)} \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(N_\epsilon \geq k) \\ &\leq \frac{U}{m(B_\epsilon)} \sum_{k \geq 2} (m(B_\epsilon))^k \\ &= \frac{U m(B_\epsilon)}{1 - m(B_\epsilon)} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[N_\epsilon]}{m(B_\epsilon)} &= \frac{1}{m(x_1 + B_\epsilon)} \int_{x_1 + B_\epsilon} \rho_1(z) dz \\ &\rightarrow \rho_1(x_1) \text{ par continuité.}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathbb{P}(N_\epsilon > 0)}{m(B_\epsilon)} \rightarrow \rho_1(x_1).$$

- cas général

Fondamentalement, le raisonnement est le même. On introduit :

$$N_\epsilon = M^{(n)}((x_1 + B_\epsilon) \times \dots \times (x_n + B_\epsilon)).$$

Dès que ϵ est suffisamment petit, on a :

$$N_\epsilon = \Phi(x_1 + B_\epsilon) \dots \Phi(x_n + B_\epsilon),$$

car les x_i sont deux à deux distincts. Ensuite, on a toujours :

$$\frac{\mathbb{E}[N_\epsilon]}{m(B_\epsilon)^n} - \frac{\mathbb{P}(N_\epsilon > 0)}{m(B_\epsilon)^n} = \frac{1}{m(B_\epsilon)^n} \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(N_\epsilon \geq k).$$

Reste à majorer $\mathbb{P}(N_\epsilon \geq k)$. On sait que :

$$N_\epsilon \geq k \Leftrightarrow \text{au moins l'un des } \Phi(x_i + B_\epsilon) \text{ est } \geq \lceil k^{1/n} \rceil.$$

Du coup, en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_\epsilon \geq k) &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\Phi(x_i + B_\epsilon) \geq \lceil k^{1/n} \rceil) \\ &\leq nm(B_\epsilon)^{\lceil k^{1/n} \rceil} U.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que :

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V^n} \sum_{k \geq 2} V^{\lceil k^{1/n} \rceil} = 0.$$

Regroupons les k par $\lceil k^{1/n} \rceil$ égaux :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 2} V^{\lceil k^{1/n} \rceil} &= \sum_{l \geq 2} \sum_{\lceil k^{1/n} \rceil = l} V^l \\
&= \sum_{l \geq 2} \sum_{k \in \lceil (l-1)^n, l^n \rceil} V^l \\
&= \sum_{l \geq 2} (l^n - (l-1)^n) V^l \\
&= V^2 \sum_{l \geq 0} ((l+2)^n - (l+1)^n) V^l \\
&\leq V^2 \sum_{l \geq 0} (l+2)^n V^l.
\end{aligned}$$

Or, on a par exemple : $(l+2)^n = o(2^l)$, ce qui achève la preuve. \blacksquare

Remarque 4.1. Remarquons que la condition de majoration des ρ_n sera toujours vérifiée par un processus de Poisson typiquement (dans ce cas elles valent toutes 1). Pour les processus déterminantaux, on pourra utiliser l'inégalité de Hadamard au cas par cas :

$$|\det(X_1, \dots, X_n)| \leq \|X_1\|_2 \dots \|X_n\|_2.$$

Revenons maintenant aux raisons de croire à la répulsion exhibée par les processus déterminantaux :

- première raison : l'intensité jointe d'ordre 2 vérifie

$$\rho_2(z, w) = \mathbb{K}(z, z)\mathbb{K}(w, w) - |\mathbb{K}(z, w)|^2 \leq \mathbb{K}(z, z)\mathbb{K}(w, w) = \rho_1(z)\rho_1(w).$$

Heuristiquement, il y a donc une corrélation négative qui est introduite par le rapprochement de deux points.

- deuxième raison : si on se donne n points z_1, \dots, z_n et si \mathbb{K} est continue, $\rho_n(z_1, \dots, z_n)$ tend vers 0 lorsque l'un des z_i tend vers un autre z_j .
- troisième raison, plus rigoureuse : on peut lire dans [Kri11] un résultat selon lequel, pour le processus de Ginibre comme pour la GAF hyperbolique :

$$\mathbb{P}(\text{on peut trouver deux points dans } D(z, \epsilon)) \sim \epsilon^6 \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0,$$

alors qu'on a un exposant 4 pour le processus de Poisson.

4.3 La classe des processus de Ginibre

Pour commencer, rappelons le résultat de Ginibre (voir [Gin64]) :

Définition 4.5. Le m -ème processus de Ginibre est le processus planaire Φ_m des m valeurs propres d'une matrice $m \times m$, dont les entrées sont gaussiennes complexes standard i.i.d. Φ_m est déterminantal de noyau :

$$\mathbb{K}_m(z, w) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(z\bar{w})^k}{k!}$$

par rapport à la mesure gaussienne $d\mu(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$ (qui est de masse totale 1 comme on le voit par un calcul en coordonnées polaires). De manière équivalente, c'est le processus de noyau

$$\mathbb{K}_m^{\text{leb}}(z, w) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(z\bar{w})^k}{k!}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue². On peut en voir une réalisation sur la figure 4.1.

Montrons que $\mathbb{K}_m(z, w)$ définit bien un processus déterminantal. Tout d'abord, \mathbb{K} est hermitien, et il est évidemment de carré localement μ -intégrable puisqu'il est continu. Ensuite on a le

Lemme 4.3. Les fonctions $\psi_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{k!}}$ ($0 \leq k \leq m-1$) forment une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{C}, \mu)$.

Démonstration - Tout d'abord, si $k \neq l$, montrons que $\langle \psi_k, \psi_l \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \langle z_k, z_l \rangle &= \int_{\mathbb{C}} \bar{z}^k z^l \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^{k+l} e^{i(l-k)\theta} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{r=0}^{\infty} r^{k+l+1} e^{-r^2} dr \right) \underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(l-k)\theta} d\theta \right)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

² en effet, si on se donne une famille de m points z_1, \dots, z_m , la matrice des $\mathbb{K}_m^{\text{leb}}(z_i, z_j)$ est conjuguée à la matrice des $\mathbb{K}_m(z_i, z_j)$ par la matrice diagonale A de terme général $a_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}|z_i|^2}$. Comme $\det(A^*A) = \frac{1}{\pi^m} e^{-\sum |z_i|^2} = \prod \frac{1}{\pi} e^{-|z_i|^2}$, on a le résultat.

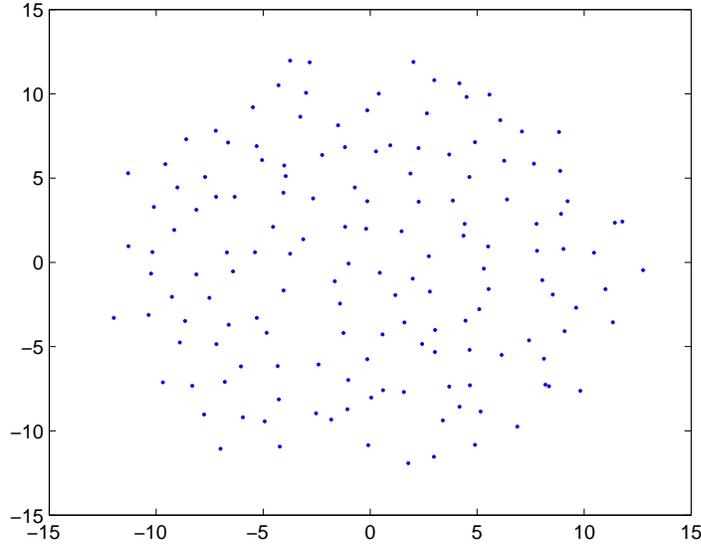


Fig. 4.1: Le processus de Ginibre pour $m = 100$. On observe que, comme dans tout processus déterminantal, les points semblent se repousser à courte distance (on n'observe pas de *clusters* comme pour le processus de Poisson par exemple).

Maintenant, si $k = l \geq 1$, une intégration par parties montre que :

$$\begin{aligned}
 \langle z_k, z_k \rangle &= 2 \int_{r=0}^{\infty} r^{2k+1} e^{-r^2} dr \\
 &= \left[-r^{2k} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} + 2k \int_{r=0}^{\infty} r^{2k-1} e^{-r^2} dr \\
 &= k \int_{r=0}^{\infty} r^{2k-1} e^{-r^2} dr.
 \end{aligned}$$

Comme $\langle z^0, z^0 \rangle = 1$, une récurrence immédiate montre que $\langle z_k, z_k \rangle = k!$, ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 4.4. \mathbb{K}_n définit un processus déterminantal.

Démonstration - Si on adjoint à la famille (ψ_k) une famille (ϕ_i) pour en faire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{C}, \mu)$, on peut écrire

$$\mathbb{K}_n(z, w) = \sum_k 1 \cdot \psi_k(x) \overline{\psi_k(w)} + \sum_i 0 \cdot \phi_i(x) \overline{\phi_i(w)},$$

et les calculs faits en introduction montrent que l'opérateur intégral \mathcal{K} associé à \mathbb{K} est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\psi_k)_{0 \leq k \leq m-1}$. Ainsi, pour tout D compact, on a

$$\forall f \in L^2(D), \quad \|\mathcal{K}_D f\|_D = \|\mathcal{K}f\|_D \leq \|\mathcal{K}f\|_{\mathbb{C}} \leq \|f\|_{\mathbb{C}} = \|f\|_D,$$

ce qui montre que les valeurs propres de \mathcal{K}_D sont inférieures ou égales à 1. Par ailleurs, on a bien sûr

$$\langle f, \mathcal{K}_D f \rangle = \langle f, \mathcal{K}f \rangle \geq 0$$

ce qui montre que les valeurs propres sont positives ou nulles. Enfin, \mathcal{K} étant de rang fini, il en est de même de \mathcal{K}_D , qui est donc à trace. On conclut alors par le théorème 4.1. ■

4.3.1 Le processus de Ginibre infini

Lorsque m tend vers l'infini, on peut donner un sens au processus limite obtenu. En effet, d'une part, le noyau \mathbb{K}_m converge simplement vers :

$$\mathbb{K}(z, w) = e^{z\bar{w}}.$$

D'autre part, on montre ci-dessous que \mathbb{K} définit un processus déterminantal Φ . Ainsi, par continuité du déterminant, les intensités jointes de Φ sont les limites de celles de Φ_m , et comme elles caractérisent le processus, on peut en ce sens considérer Φ comme la limite des Φ_m .

Proposition 4.5. *\mathbb{K} définit un processus déterminantal.*

Démonstration - Comme dans le cas fini, \mathbb{K} est hermitien de carré localement intégrable, et \mathcal{K} est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{C})$ sur $\overline{\text{Vect}(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}}$. De même, les \mathcal{K}_D sont hermitiens positifs à spectre dans $[0, 1]$. Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'ils sont à trace.

Si on diagonalise \mathcal{K}_D dans une base orthonormale (ϕ_k) de $L^2(D)$, on sait qu'on a la décomposition suivante :

$$\mathbb{K}(z, w) = \sum_k \lambda_k \phi_k(z) \overline{\phi_k(w)}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(z, z) &= \sum_k \lambda_k |\phi_k(z)|^2 \\ \int_D \mathbb{K}(z, z) d\mu(z) &= \sum_k \lambda_k \int_D |\phi_k(z)|^2 d\mu(z) \quad \text{par positivité des } \lambda_k \\ &= \sum_k \lambda_k.\end{aligned}$$

Or :

$$\int_D \mathbb{K}(z, z) d\mu(z) = \int_D e^{|z|^2} d\mu(z) < \infty,$$

ce qui achève la preuve. On voit au passage que l'intégrale sur \mathbb{C} tout entier est divergente, et on retrouve le fait que \mathcal{K} n'est pas à trace, mais seulement localement à trace. ■

Le processus de Ginibre infini est intéressant pour modéliser une population, car il est isotrope et stationnaire. C'est ce que nous montrons maintenant.

Théorème 4.6. Φ est isotrope et stationnaire.

Démonstration - Pour plus de commodité, on redéfinit de manière équivalente le noyau de Φ par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\mathbb{K}(z, w) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2) + z\bar{w}}.$$

Si nous notons $\tilde{\Phi}$ le processus après une rotation d'angle arbitraire θ , il s'agit de montrer que

$$\Phi \stackrel{\text{loi}}{=} \tilde{\Phi}.$$

De même, si on note Φ_a ($a \in \mathbb{C}$ fixé) le processus translaté, il s'agit de montrer que :

$$\Phi \stackrel{\text{loi}}{=} \Phi_a.$$

Or on sait que les processus auxquels nous nous intéressons sont caractérisés par les fonctions ρ_n . Il suffit alors de montrer que les ρ_n sont les mêmes pour Φ , $\tilde{\Phi}$ et Φ_a .

Pour l'isotropie, le résultat est immédiat. En effet, le noyau de $\tilde{\Phi}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{K}}(z, w) &= \mathbb{K}(ze^{-i\theta}, we^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{ze^{-i\theta}\overline{we^{i\theta}} - \frac{1}{2}(|ze^{-i\theta}|^2 + |we^{-i\theta}|^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} e^{z\overline{w} - \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2)} \\ &= \mathbb{K}(z, w).\end{aligned}$$

A fortiori, on a donc :

$$\tilde{\rho}_n(z_1, \dots, z_n) = \det(\tilde{\mathbb{K}}(z_i, z_j)) = \rho_n(z_1, \dots, z_n).$$

Passons à la stationnarité. Le noyau de Φ_a est donné par :

$$\mathbb{K}_a(z, w) = \mathbb{K}(z - a, w - a).$$

La preuve est un peu plus longue, car les noyaux ne sont plus égaux. On a :

$$\begin{aligned}(z - a)\overline{(w - a)} - \frac{1}{2}(|z - a|^2 + |w - a|^2) &= z\overline{w} - z\overline{a} - a\overline{w} + |a|^2 - \frac{1}{2}|z|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}z\overline{a} + \frac{1}{2}a\overline{z} - \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|w|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}w\overline{a} + \frac{1}{2}a\overline{w} - \frac{1}{2}|a|^2 \\ &= z\overline{w} - \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\overline{z}a - z\overline{a} + w\overline{a} - a\overline{w}).\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{K}_a(z, w) = \mathbb{K}(z, w) e^{\frac{1}{2}(\overline{z}a - z\overline{a} + w\overline{a} - a\overline{w})}.$$

Fixons alors $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, et introduisons la matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(\overline{z}_1 a - z_1 \overline{a})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\frac{1}{2}(\overline{z}_n a - z_n \overline{a})} \end{pmatrix}.$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ \dots & \mathbb{K}_a(z_i, z_j) & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \dots & \mathbb{K}(z_i, z_j) & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} A^*,$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{K}_a(z_i, z_j)) &= \det(A\mathbb{K}(z_i, z_j)A^*) \\ &= \det(\underbrace{AA^*}_{I_n} \mathbb{K}(z_i, z_j)) \\ &= \rho_n(z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Remarque 4.2. Le noyau peut aussi s'exprimer $e^{z\bar{w}}$ par rapport à la mesure gaussienne, qui est elle-même isotrope. On a alors immédiatement l'invariance par rotation. Le même raisonnement montre que toutes les fois que $\mathbb{K}(z, w)$ s'exprimera comme une fonction de $z\bar{w}$ par rapport à une mesure isotrope, le processus sera lui-même isotrope.

Signalons au passage un résultat dû à Kostlan :

Théorème 4.7 (Kostlan). *Notons $(z_k)_{1 \leq k \leq m}$ les points de Φ_m . Alors l'ensemble des $|z_k|^2$ (sans tenir compte de l'ordre) suit la même loi que m variables indépendantes $X_k \sim \Gamma(k, 1)$. Le résultat est encore vrai pour le processus de Ginibre infini.*

On rappelle que la loi $\Gamma(k, 1)$ est de densité $\frac{x^{k-1}e^{-x}}{(k-1)!}$ sur \mathbb{R}^+ par rapport à la mesure de Lebesgue³. La preuve de ce résultat se trouve dans [Kos92] (article original) ou dans [Ben09] (théorème 4.7.3., comme conséquence du théorème 4.7.1.).

D'après la remarque précédente, les processus de Ginibre finis sont isotropes. Joint au théorème de Kostlan, cela permet d'apprécier un peu mieux l'apparence régulière de la figure 4.1.

³ attention au fait que dans [Kos92], les gaussiennes complexes ne sont pas normalisées de la même manière.

4.3.2 Variation temporelle des processus de Ginibre

Cela dit, en pratique, on voit mal comment simuler le processus de Ginibre infini. Aussi, on pourra sans trop de dommage se restreindre à des processus de Ginibre d'ordre m avec m grand, d'autant plus que le processus de Ginibre infini peut être vu comme la limite des processus finis, en un sens rigoureux qui a été précisé plus haut.

Il suffit donc de se donner une matrice $m \times m$ dont les coefficients varient dans le temps, de manière à rester à chaque instant des gaussiennes standard iid. Par exemple, on peut prendre des processus d'Ornstein-Uhlenbeck indépendants (voir [Uhl30]) :

$$a_{ij}(t) = e^{-t/2} W(e^t), \quad \text{avec } W(t) = \frac{B_1(t) + iB_2(t)}{\sqrt{2}},$$

où B_1 et B_2 sont des browniens réels standard (pour $t > u$, $B(t) - B(u)$ est centré de variance $t - u$).

Pour des questions de réalisme, il est souhaitable que les trajectoires de notre processus spatio-temporel soient continues. Ce sont les racines du polynôme caractéristique de la matrice, polynôme dont les coefficients sont des fonctions polynomiales des $a_{ij}(t)$, eux-mêmes continus selon t . Tout revient donc à montrer que si les coefficients d'un polynôme unitaire varient continûment au cours du temps, alors ses racines aussi. C'est ce que nous proposons maintenant. La clé pour contrôler la localisation des racines est l'utilisation du théorème de Rouché en analyse complexe.

Remarque 4.3. On a vu dans le chapitre 1 qu'un processus déterminantal était presque sûrement simple, car l'ensemble $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / z = w\}$ étant de mesure de Lebesgue nulle, il est aussi $M^{(2)}$ -négligeable. Une autre manière de voir les choses est de remarquer que $\rho_2(z, w)$ est nulle sur cet ensemble. *A priori*, cela ne nous garantit pas que dans la version spatio-temporelle, c'est l'ensemble des processus qui sont presque sûrement simples à chaque instant, car il existe une infinité indénombrable d'instant. Pour donner une analogie, à chaque instant le brownien est presque sûrement non nul, et pourtant la trajectoire d'un brownien passe par 0 avec une probabilité non nulle.

Ici, il n'est pas exclu que P_t , le polynôme qui varie continûment au cours du temps, ait des racines multiples. Pour s'en assurer, on peut considérer le discriminant de P_t , qui n'est autre que le résultant de P_t et P'_t . C'est donc un polynôme en les a_{ij} , et le lieu des m^2 -uplets (a_{ij}) qui annulent

ce discriminant est une variété algébrique. Tout revient alors à savoir si la trajectoire complexe m^2 -dimensionnelle $(e^{-t/2}W_{11}(e^t), \dots, e^{-t/2}W_{mm}(e^t))$ intersecte cette variété à un moment donné. En particulier, par continuité, si le discriminant est non nul à un instant, alors il le reste localement. Cette remarque nous permettra ultérieurement de définir l'équation différentielle vérifiée par les zéros de P_t .

Pour commencer, montrons le

Lemme 4.8 (continuité des racines en un point). *Soit P un polynôme unitaire de degré $m \geq 1$:*

$$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_m)$$

(les racines peuvent être multiples). *Soit Q un polynôme unitaire qui tend vers P . Alors on peut écrire*

$$Q = (X - \mu_1) \dots (X - \mu_m),$$

avec $\forall k, \mu_k \rightarrow \lambda_k$.

Démonstration - Isolons chaque racine λ de P (multiple ou non) dans un disque ouvert $D(\lambda, \epsilon)$ de centre λ et de rayon ϵ , de telle sorte que les disques soient deux à deux disjoints. Prenons un disque $D(\lambda, \epsilon)$ en particulier, le raisonnement étant le même sur les autres. Supposons qu'il isole une racine λ d'ordre p . Sur le cercle $\partial D(\lambda, \epsilon)$ qui est compact, $|P(z)|$ est minoré par un $\delta > 0$. Par ailleurs, on se convainc aisément que la fonction $P \mapsto \sup_{z \in \partial D(\lambda, \epsilon)} |P(z)|$ est une norme sur l'espace vectoriel des polynômes (le caractère défini venant de l'infinité de points sur $\partial D(\lambda, \epsilon)$). Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{C}_n[X]$, on en déduit que pour Q assez proche de P on a

$$\sup_{z \in \partial D(\lambda, \epsilon)} |P(z) - Q(z)| \leq \frac{\delta}{2}.$$

On peut alors appliquer le théorème de Rouché, et en déduire que Q possède p racines dans $D(\lambda, \epsilon)$. Comme il y a un nombre fini de disques $D(\lambda, \epsilon)$, il existe un $\eta > 0$ tel que si $\|P - Q\| \leq \eta$, alors ce sont *tous* les disques qui contiennent le même nombre de racines de P et Q (avec leur multiplicité). Comme P et Q possèdent m racines en tout, et que celles de P sont fixées, on est alors certain que toutes les racines de Q se trouvent dans un $D(\lambda, \epsilon)$.

Il suffit ensuite de faire tendre ϵ vers 0 : pour toute valeur de ϵ suffisamment petite (c'est-à-dire telle que les $D(\lambda, \epsilon)$ soient disjoints), on introduit le η associé. Puis pour tout Q tel que $\|P - Q\| \leq \eta$, on sait que les racines de Q sont réparties dans les $D(\lambda, \epsilon)$ selon les ordres de multiplicité des λ . Pour chaque racine λ de P d'ordre p , il existe p indices tels que $\lambda_{k_1} = \dots = \lambda_{k_p} = \lambda$. On sélectionne alors les p racines de Q qui se trouvent dans $D(\lambda, \epsilon)$ et on les numérote $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_p}$ (peu importe l'ordre). Ce procédé est bien défini, et il assure que $\forall k, \mu_k \rightarrow \lambda_k$. ■

On a ainsi prouvé la continuité ponctuelle des trajectoires des racines. Tout le problème maintenant est de trouver une numérotation des μ_k qui assure une continuité globale. Avant de s'attaquer à ce problème, reformulons précisément cette idée de continuité ponctuelle.

On pourrait considérer l'ensemble des racines comme un compact non vide de \mathbb{C} , et parler de continuité au sens de la distance de Hausdorff. Mais cela ne nous permettrait pas de traiter correctement la notion de racine multiple. On va donc plutôt considérer l'ensemble des m racines comme un multi-ensemble $\{\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}\}$ de cardinal m . Formellement, on considère le groupe symétrique S_m d'ordre m , et son action sur \mathbb{C}^m : si $z = (z_1, \dots, z_m)$ est un point de \mathbb{C}^m , $\sigma \in S_m$ agit sur z par $z^\sigma = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)})$. On pose alors la

Définition 4.6. $\{\{z_1, \dots, z_m\}\}$ est la classe d'équivalence de z dans \mathbb{C}^m/S_m .

On considère alors la fonction :

$$d_m(z, z') = \min_{\sigma \in S_m} \|z - z'^\sigma\|_\infty.$$

Intuitivement, d_m est petite si et seulement si, quitte à réordonner z' , tous les $|z_k - z'_k|$ sont petits. Pour en faire une distance, il reste à vérifier qu'elle passe au quotient pour l'action de S_m . Or :

$$\begin{aligned} \forall \tau, \tau' \in S_m, d_m(z^\tau, z'^{\tau'}) &= \min_{\sigma \in S_m} \max_{1 \leq k \leq m} |z_{\tau(k)} - z'_{\tau'(\sigma(k))}| \\ &= \min_{\sigma \in S_m} \max_{1 \leq k \leq m} |z_k - z'_{(\tau' \circ \sigma \circ \tau^{-1})(k)}| \\ &= \min_{\sigma \in S_m} \max_{1 \leq k \leq m} |z_k - z'_{\sigma(k)}| \\ &= d_m(z, z'). \end{aligned}$$

On peut donc définir d_m sans ambiguïté sur les multi-ensembles, et elle devient alors une distance comme on le voit facilement.

Vérifions les quatre axiomes :

- elle est positive
- elle est symétrique, car

$$\begin{aligned}
 d_m(\{\{z\}\}, \{\{z'\}\}) &= \min_{\sigma \in S_m} \max_{1 \leq k \leq m} |z_k - z'_{\sigma(k)}| \\
 &= \min_{\sigma \in S_m} \max_{1 \leq k \leq m} |z_{\sigma^{-1}(k)} - z'_k| \\
 &= \min_{\sigma \in S_m} \max_{1 \leq k \leq m} |z_{\sigma(k)} - z'_k| \\
 &= d_m(z', z).
 \end{aligned}$$

- elle est définie, car si elle est nulle, alors il existe une permutation qui envoie z sur z' , si bien que $\{\{z\}\} = \{\{z'\}\}$
- enfin, elle vérifie l'inégalité triangulaire. Si on se donne $\{\{z\}\}, \{\{z'\}\}$ et $\{\{z''\}\}$, considérons la permutation τ qui minimise la distance de z à z' . Sans perte de généralité, on peut supposer $\tau = Id$. Alors

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma \in S_m, \max_k |z_k - z''_{\sigma(k)}| &\leq \max_k (|z_k - z'_k| + |z'_k - z''_{\sigma(k)}|) \\
 &\leq \max_k |z_k - z'_k| + \max_k |z'_k - z''_{\sigma(k)}| \\
 &= d_m(z, z') + \max_k |z'_k - z''_{\sigma(k)}|.
 \end{aligned}$$

En particulier, en choisissant σ qui minimise la distance de z' à z'' , on obtient

$$\max_k |z_k - z''_{\sigma(k)}| \leq d_m(z, z') + d_m(z', z'').$$

Donc *a fortiori*, on a bien l'inégalité triangulaire.

On peut maintenant considérer l'application

$$\Phi_m : \mathbb{C}_m[X] \rightarrow \mathbb{C}^m/S_m, \quad P \mapsto \{\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}\},$$

et le lemme 4.8 exprime très exactement que Φ_m est continue. En effet, pour Q assez proche de P , on peut numéroter les racines μ_k de Q de telle sorte que chaque μ_k soit proche de chaque λ_k , ce qui signifie que

$$d_m(\{\{\lambda\}\}, \{\{\mu\}\}) \rightarrow 0.$$

Une fois cette formalisation effectuée, on démontre un lemme qu'on peut retrouver dans [Kat76] (chapitre 2, paragraphe 5.2) :

Lemme 4.9. *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et Φ une fonction continue de I dans \mathbb{C}^m/S_m . On note $\Phi(t) = \{\{\lambda_k(t)\}\}$. Alors on peut relever, Φ au sens où il existe m trajectoires continues $\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)$ telles que*

$$\forall t \in I, \{\{\lambda_k(t)\}\} = \{\{\phi_k(t)\}\}.$$

Démonstration - Le résultat se démontre par récurrence forte sur m . Pour $m = 1$, comme les multi-ensembles de cardinal 1 s'identifient aux singletons, on a immédiatement le résultat en posant $\phi_1 = \Phi$. Soit maintenant $m \geq 2$, et supposons le résultat vrai aux rangs inférieurs.

Considérons d'abord $A = \{t \in I / \phi_1(t) = \dots = \phi_m(t)\}$. Soit $t \in \overline{A}$, et donnons-nous une suite d'éléments $t_n \in A$ qui tend vers t . Supposons qu'il existe i et j tels que $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, et isolons $\lambda_i(t)$ et $\lambda_j(t)$ dans deux voisinages V_1 et V_2 disjoints. Par continuité de Φ , on voit que pour n assez grand, on pourrait trouver un $\lambda_k(t_n)$ dans V_1 et un $\lambda_{k'}(t_n)$ dans V_2 , d'où contradiction. Ainsi, A est fermé.

Pour $t \in A$, on peut poser $\phi_1(t) = \dots = \phi_m(t) = \lambda_1(t) = \dots = \lambda_m(t)$. En effet, si $\lambda_1(t) = \dots = \lambda_m(t)$, dire que $\Phi(u)$ est proche de $\Phi(t)$ signifie que tous les points de $\Phi(u)$ sont dans un petit disque autour de l'unique valeur de $\Phi(t)$, et la continuité de Φ en t nous assure donc celle des ϕ_k , quel que soit le choix ultérieur qui sera fait pour les ϕ_k sur $I \setminus A$.

Pour $t \in I \setminus A$, les points de $\Phi(t)$ ne sont pas tous confondus. Donc on peut les isoler en deux sous-ensembles contenus dans des voisinages disjoints V_1 et V_2 . Sans perte de généralité, supposons qu'on a $\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t) \in V_1$ et $\lambda_{p+1}(t), \dots, \lambda_m(t) \in V_2$, et choisissons $\epsilon > 0$ tel que chaque disque ouvert $D(\lambda_k(t))$ soit inclus dans V_1 ou V_2 . Alors par continuité de Φ en t , on sait qu'il existe un petit voisinage $]t - \alpha, t + \alpha[$ sur lequel, quitte à renuméroter les points de $\Phi(u)$, on a $\lambda_k(u) \in D(\lambda_k(t), \epsilon)$. Comme $I \setminus A$ est ouvert, quitte à diminuer α on peut supposer $]t - \alpha, t + \alpha[\subset I \setminus A$. Sur $]t - \alpha, t + \alpha[$, $\Phi(u)$ contient toujours p points dans V_1 et $m - p$ points dans V_2 . Quitte à renuméroter les $\lambda_k(u)$, on peut supposer qu'on a $\lambda_1(u), \dots, \lambda_p(u) \in V_1$ et $\lambda_{p+1}(u), \dots, \lambda_m(u) \in V_2$. Il est alors légitime de considérer l'application Φ_1 de $]t - \alpha, t + \alpha[$ dans \mathbb{C}^p/S_p , qui à u associe $\{\{\lambda_1(u), \dots, \lambda_p(u)\}\}$. Si u est proche de u' , alors les points de $\Phi(u)$ sont proches de ceux de $\Phi(u')$, donc *a fortiori* les points de $\Phi_1(u)$ sont proches de ceux de $\Phi_1(u')$. Donc Φ_1 est continue, et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, en la relevant par p trajectoires $\phi_1(u), \dots, \phi_p(u)$. De même, on définit Φ_2 continue qu'on relève par $m - p$ trajectoires $\phi_{p+1}(u), \dots, \phi_m(u)$. Ainsi, on a relevé Φ sur $]t - \alpha, t + \alpha[$.

Soit maintenant un intervalle $[a, b] \subset I \setminus A$. On peut relever Φ sur un petit voisinage ouvert autour de chaque $t \in [a, b]$. Par compacité, on extrait alors un sous-recouvrement fini de $[a, b]$, et par recollements successifs on relève Φ sur $[a, b]$. Allons plus loin : si on se donne $]c, d[\subset I \setminus A$, alors on construit une suite t_n strictement décroissante telle que $t_0 = \frac{c+d}{2}$ et $t_n \rightarrow c$. On a un relèvement sur chaque $[t_{n+1}, t_n]$, donc par recollement on a un relèvement sur $]c, \frac{c+d}{2}[$. De même, on a un relèvement sur $[\frac{c+d}{2}, d[$, et par un ultime recollement on a un relèvement sur $]c, d[$.

Enfin, on partitionne $I \setminus A$ en composantes connexes. Comme c'est un ouvert, ses composantes connexes (qui sont des ouverts pour la topologie induite) sont des ouverts de \mathbb{R} , donc ce sont des intervalles ouverts. D'après la construction précédente, on sait relever Φ sur chacun d'entre eux, ce qui achève la preuve. ■

Cela permet d'arriver finalement au

Théorème 4.10. *Les points de notre processus de Ginibre spatio-temporel suivent des trajectoires continues au cours du temps.*

4.3.3 Équation différentielle des trajectoires

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser à la régularité des trajectoires. Il existe plusieurs résultats sur ce sujet, notamment dans le cas des polynômes hyperboliques (c'est-à-dire à racines réelles), mais ils s'appuient tous bien sûr sur une hypothétique régularité des coefficients du polynôme en fonction du temps. Le lecteur intéressé pourra consulter avec profit [Rai06] pour en savoir plus.

Notons $P_t(z) = \sum_{k=0}^n c_k(t)z^k$ le polynôme, et intéressons-nous à la trajectoire $z(t)$ d'une racine, qui est presque sûrement simple et qui le reste localement. Sans perte de généralité, plaçons-nous en $t = 0$. Quelle que soit la régularité des $c_k(t)$, on peut toujours regarder la régularité de z non pas en fonction de t , mais en fonction des c_k vus comme des variables. Plus précisément, le théorème de Rouché nous donne l'existence d'un voisinage ouvert V de $z(0)$ tel que, si les c_k évoluent dans un petit ouvert $U \subset \mathbb{C}^{m+1}$ autour de $(c_0(0), \dots, c_m(0))$ alors il existe une unique solution dans V à l'équation polynomiale $\sum_k c_k z^k = 0$. On définit alors la fonction :

$$F : U \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad (c_0, \dots, c_m, z) \mapsto \sum_k c_k z^k,$$

qui est \mathcal{C}^∞ et qui vérifie

$$\begin{cases} F(c_0(0), \dots, c_n(0), z(0)) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(c_0(0), \dots, c_n(0), z(0)) \neq 0 \end{cases}$$

car $z(0)$ est une racine simple. Le théorème des fonctions implicites montre alors que l'unique z solution de $F(c_0, \dots, c_m, z) = 0$ est une fonction \mathcal{C}^∞ des c_k (au sens de l'holomorphie). On peut la noter sans ambiguïté $z(c_0, \dots, c_m)$. En dérivant la relation

$$F(c_0, \dots, c_m, z(c_0, \dots, c_m)) = 0$$

par rapport à chacun des c_k , on obtient :

$$\forall k, \quad \frac{\partial F}{\partial c_k} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial c_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial c_k} = -\frac{\partial F / \partial c_k}{\partial F / \partial z} = -\frac{z^k}{\partial F / \partial z}.$$

Dans le cas idéal où les coefficients de P_t sont de classe \mathcal{C}^1 , on obtient pour les trajectoires l'équation différentielle suivante :

$$z'(t) = \sum_k \frac{\partial z}{\partial c_k} c'_k(t) = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} P_t(z(t))}{P'_t(z(t))}.$$

Malheureusement, dans notre cas les coefficients sont tout sauf réguliers, puisque ce sont des trajectoires browniennes. Cependant, dans la même veine, on peut essayer d'obtenir une équation différentielle stochastique (ou EDS). Pour une bonne introduction au calcul stochastique, on pourra par exemple consulter [Kar02]. Commençons par démontrer le

Lemme 4.11. *Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $a(t) = e^{-t/2}W(e^t)$ vérifie l'EDS suivante :*

$$da(t) = -\frac{1}{2}a(t) + dW(t).$$

Démonstration - Résolvons cette EDS. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz stochastique, donc elle admet une unique solution que l'on note $a(t)$. Par la méthode de variation des constantes, en appliquant la formule d'Itô au processus $X(t) = a(t)e^{t/2}$ on obtient :

$$dX(t) = \frac{1}{2}a(t)e^{t/2}dt + e^{t/2}da(t) = e^{t/2}dW(t).$$

On en déduit :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t e^{s/2} dW(s).$$

En particulier, le processus $X(t)$ est à trajectoires continues, à accroissements gaussiens (car l'intégrand est déterministe, il s'agit d'une intégrale dite de Wiener), indépendants, centrés, et de variance :

$$\mathbb{E}[|X(u) - X(t)|^2] = \mathbb{E}\left[\left|\int_t^u e^{s/2} dW(s)\right|^2\right] = \int_t^u e^s ds = e^u - e^t$$

par définition de l'intégrale d'Itô. Donc à une translation près, il a la loi de $W(e^t)$. En imposant $X(0) = W(1)$ comme condition initiale, l'unique solution de l'EDS est donc donnée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. ■

Remarque 4.4. Attention, il faut comprendre la relation donnée par l'EDS comme une égalité en loi, pas comme une égalité entre trajectoires. Elle signifie précisément :

$$e^{-t/2}W(e^t) - W(1) \stackrel{\text{loi}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-s/2}W(e^s)ds + W(t).$$

Pour appliquer la formule d'Itô, nous avons besoin que $a(t)$ soit adapté, donc on retiendra la définition à partir de l'EDS, c'est-à-dire qu'on posera :

$$a(t) = e^{-t/2}X(t) = e^{-t/2} \left(a(0) + \int_0^t e^{s/2} dW(s) \right).$$

En revanche, pour les simulations, on pourra retenir indifféremment cette définition ou la formule $a(t) = e^{-t/2}W(e^t)$.

Ici, chaque $a_{ij}(t)$ vérifie la même EDS :

$$da_{ij}(t) = -\frac{1}{2}a_{ij}(t)dt + dW_{ij}(t),$$

où les $W_{ij}(t)$ sont des browniens standard indépendants. Ce sont des processus adaptés par rapport à la filtration naturelle des browniens, et on peut donc appliquer la formule d'Itô vectorielle à $z(t)$ (voir par exemple

le théorème 7.2.1 de [Kar02]), où $z(t)$ est interprétée comme une fonction déterministe des $a_{ij}(t)$:

$$\begin{aligned} dz(a_{11}(t), \dots, a_{mm}(t)) &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial z}{\partial a_{ij}}(t) da_{ij}(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^m \frac{\partial^2 z}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}}(t) \langle da_{ij}(t), da_{kl}(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Dans les termes du second ordre, toutes les covariances croisées s'annulent, car les $W_{ij}(t)$ sont deux à deux indépendants. Quant aux termes non croisés $\frac{\partial^2 z}{\partial a_{ij}^2}(t) \langle da_{ij}(t), da_{ij}(t) \rangle$, ils s'annulent aussi car on travaille avec des gaussiennes complexes⁴. On en déduit finalement le

Théorème 4.12. $z(t)$ est solution de l'EDS suivante :

$$dz = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial z}{\partial a_{ij}}(t) a_{ij}(t) dt + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial z}{\partial a_{ij}}(t) dW_{ij}(t).$$

Les dérivées de z par rapport aux a_{ij} se calculent en passant par les c_k comme variables intermédiaires, et en utilisant la relation :

$$\frac{\partial z}{\partial c_k} = -\frac{z^k}{P'_t(z)}.$$

4.4 La GAF hyperbolique

4.4.1 Définition

Considérons une famille de gaussiennes complexes standard iid (a_k) , et introduisons la série entière (aléatoire) :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

f s'appelle la GAF hyperbolique (de paramètre 1). Notons \mathbb{D} le disque unité ouvert. On va voir que presque sûrement, f converge sur \mathbb{D} et pas à l'extérieur :

⁴ en identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , on peut voir cela comme une conséquence du fait que la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique.

Lemme 4.13. *Presque sûrement, le rayon de convergence de f vaut 1.*

Démonstration - Introduisons $b_k = \max(0, \log |a_k|)$. Les b_k sont iid, d'espérance $l < \infty$ (car $0 \leq b_k \leq |a_k|$). La loi forte des grands nombres dit alors que presque sûrement :

$$\frac{b_0 + \dots + b_{k-1}}{k} \rightarrow l.$$

De même, on a :

$$\frac{b_0 + \dots + b_k}{k} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{b_0 + \dots + b_k}{k+1} \rightarrow l.$$

Finalement, par soustraction :

$$\frac{b_k}{k} \rightarrow 0.$$

Soit A_n l'évènement : "tous les $|a_k|$ à partir du rang n sont ≤ 1 ", et $A_{n,N}$ l'évènement : "tous les $|a_k|$ entre les rangs n et $n+N$ sont ≤ 1 ". Alors les $A_{n,N}$ forment une suite décroissante selon N , et :

$$\begin{aligned} A_n = \bigcap_{N \geq 0} A_{n,N} &\Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \lim_N \mathbb{P}(A_{n,N}) \\ &= \lim_N \underbrace{\mathbb{P}(|B| \leq 1)}_{< 1}^{N+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où B est une gaussienne standard quelconque. On en déduit :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_n A_n \right) \leq \sum \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Conclusion par l'absurde : aussi loin que l'on aille chercher, on peut (presque sûrement) trouver des $|a_k| > 1$; en conséquence :

$$\begin{aligned} \limsup \frac{\log(|a_k|)}{k} &= \limsup \frac{b_k}{k} \\ &= \lim \frac{b_k}{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\limsup |a_k|^{1/k} = 1$ presque sûrement. Soit $z \in \mathbb{D}$, et introduisons $\eta > 1$ tel que $\eta|z| < 1$. On a $|a^k|^{1/k} < \eta$ à partir d'un certain rang, soit $|a_k z^k| < (\eta|z|)^k$, si bien que la série $\sum a_k z^k$ converge. De même, si $|z| > 1$, on considère une suite extraite $(a_{\phi(k)})$ telle que $|a_{\phi(k)}|^{1/\phi(k)}|z| > 1$, et on conclut que la série diverge grossièrement. ■

Donc presque sûrement, f définit une fonction analytique sur \mathbb{D} . On a alors le

Théorème 4.14 (Peres et Virág). *L'ensemble des zéros de f sur \mathbb{D} est un processus déterminantal. Son noyau par rapport à la mesure de Lebesgue, le noyau de Bergman, est donné par :*

$$\mathbb{K}(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z\bar{w})^k.$$

On trouvera une démonstration de ce résultat (qui est loin d'être immédiat) dans [Ben09] au chapitre 5.

Remarque 4.5. La relation $\frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z\bar{w})^k$ s'obtient immédiatement en dérivant la relation $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ et en l'appliquant à $t = z\bar{w}$.

Remarque 4.6. On pourrait être tenté de croire que le processus contient un nombre fini de points, car sinon la présence d'un point d'accumulation dans \mathbb{D} obligerait f à être la fonction nulle. Sauf que ce point d'accumulation peut être situé sur le cercle unité. En fait, c'est exactement ce qui se passe avec une probabilité non nulle, puisque dans [Ben09], on trouve en 5.1.3. le

Théorème 4.15. *Pour $r < 1$, le nombre de zéros de f dans le disque $D(0, r)$ suit la loi de $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$, où les X_k suivent des lois de Bernoulli indépendantes de paramètre r^{2k} .*

On en déduit par convergence monotone que l'espérance du nombre de zéros dans $D(0, r)$ vaut $\frac{r^2}{1-r^2}$, puis que l'espérance dans \mathbb{D} , qui est supérieure à l'espérance dans n'importe quel $D(0, r)$, est infinie.

Comme pour le processus de Ginibre, on peut aussi considérer le noyau de Bergman tronqué :

$$\mathbb{K}_m(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m (k+1)(z\bar{w})^k.$$

Comme précédemment, on montre que \mathbb{K}_m et \mathbb{K} définissent bien des processus déterminantaux Ψ_m et Ψ sur \mathbb{D} :

- on commence par remarquer que les fonctions $z \mapsto z^k$ sont deux à deux orthogonales, l'intégrale $\int_{\mathbb{D}} z^k \bar{z}^l dz$ étant nulle pour $k \neq l$ par symétrie radiale. Pour calculer leur norme, on passe en coordonnées polaires et on trouve :

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |z|^{2k} dz = 2 \int_{r=0}^1 r^{2k+1} dr = \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, les fonctions $z \mapsto \sqrt{k+1} \cdot z^k$ forment une famille orthonormale, et l'écriture $\mathbb{K}_m(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m (k+1)(z\bar{w})^k$ montre que \mathbb{K}_m est un projecteur orthogonal. De même pour \mathbb{K} . Ce sont évidemment des opérateurs positifs, donc les spectres de leurs restrictions à des compacts sont inclus dans $[0, 1]$.

- ces mêmes restrictions à des compacts sont à trace, puisque les intégrales $\int \mathbb{K}_m(z, z) dz$ et $\int \mathbb{K}(z, z) dz$ sont alors finies.
- enfin, \mathbb{K}_m converge simplement vers \mathbb{K} , ce qui permet de considérer Ψ comme la limite des Ψ_m .

4.4.2 Simulation

De la même manière, on simulera Ψ_m avec m grand, en prenant garde à supprimer les zéros qui sortent de \mathbb{D} . Notons que le processus reste isotrope (car le noyau s'écrit comme une fonction de $z\bar{w}$, ou encore plus simplement, il s'agit de l'ensemble des zéros d'une fonction isotrope), mais il n'est plus stationnaire (puisque'il n'est défini que sur \mathbb{D}). En revanche, Ψ est invariant par les transformations de Möbius :

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}},$$

avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ (ces transformations forment un groupe de bijections de \mathbb{D}), d'où le nom de GAF hyperbolique. Pour une démonstration, voir le théorème 2.3.4. de [Ben09].

Notons qu'on connaît aussi la distribution des distances au centre :

Théorème 4.16 (Peres et Virág). *Notons $(z_k)_{1 \leq k \leq m}$ les points de Ψ_m . Alors l'ensemble des $|z_k|^2$ (sans tenir compte de l'ordre) suit la même loi que m*

variables $U_1^{1/2}, \dots, U_m^{1/2m}$, où les U_k sont iid uniformes sur $[0, 1]$. Le résultat est encore vrai pour la GAF hyperbolique infinie.

Il s'agit encore d'un corollaire du théorème 4.5.1. de [Ben09].

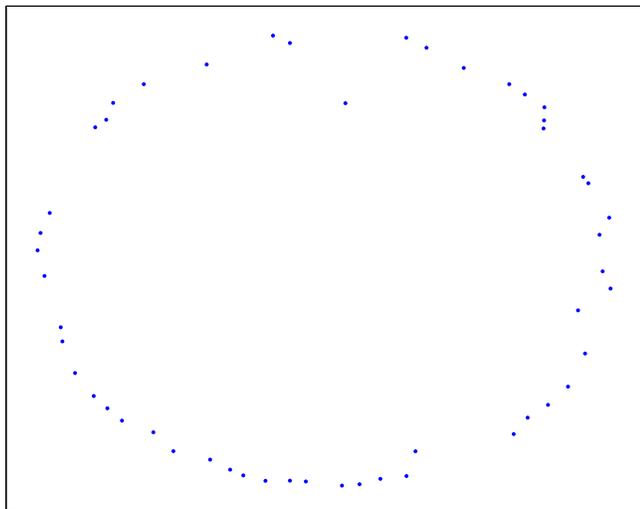


Fig. 4.2: Les zéros de la GAF hyperbolique pour $m = 100$. On notera le contraste avec la figure 4.1.

Très rapidement, les $U_k^{1/2k}$ vont avoir tendance à se rapprocher de 1, si bien que la plupart des points vont être massés sur le pourtour de \mathbb{D} (voir figure 4.2). Une autre manière de s'en rendre compte est de considérer la première intensité jointe :

$$\rho_1(z) = \mathbb{K}_m(z, z) \approx \mathbb{K}(z, z) = \frac{1}{\pi(1 - |z|^2)}.$$

On voit que ρ_1 explose au voisinage du bord. Aussi, la GAF hyperbolique sera adaptée pour représenter des mouvements de foule très particuliers (panique, évacuation subite...ou corrida). Pour les mouvements plus classiques, on lui préférera le processus de Ginibre. Pour en savoir plus sur les différences de fond entre le processus de Ginibre et la GAF hyperbolique, on consultera avec profit [Kri11].

Pour introduire une dépendance temporelle, on procède de la même manière que précédemment : on introduit $m + 1$ processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard iid pour les $a_k(t)$, ce qui fournit des trajectoires continues pour les zéros. En revanche, il faut être prudent au fait que cette fois, les trajectoires peuvent sortir de \mathbb{D} , donc le processus ne possède pas toujours m points. Cependant, on peut toujours s'intéresser à l'équation locale de leur trajectoire, et par la formule d'Itô on obtient :

$$\begin{aligned} dz &= \sum_{k=0}^m \frac{\partial z}{\partial a_k}(t) da_k \\ &= -\frac{1}{P'_t(z)} \sum_k z^k da_k \\ &= -\frac{1}{P'_t(z)} \sum_k z^k \left(-\frac{1}{2} a_k(t) dt + dW_k \right) \\ &= -\frac{P_t(z)}{P'_t(z)} dt - \frac{1}{P'_t(z)} \sum_k z^k dW_k \end{aligned}$$

En se souvenant que $P_t(z) = 0$, on obtient le théorème suivant, que [Ben09] obtient d'une autre manière (voir 8.3.2) :

Théorème 4.17. $z(t)$ est solution de l'EDS :

$$dz = -\frac{\sum_k z^k dW_k}{P'_t(z)}.$$

4.5 Techniques de branchement

Supposons qu'on est en train de simuler un processus spatio-temporel qui ne présente pas particulièrement de répulsion, par exemple un processus de Poisson ou le processus de lignes décrit dans le chapitre 2. On peut souhaiter simuler une répulsion soudaine qui correspond à une situation réelle sous-jacente (mouvement de panique, évacuation d'un stade, etc.). Selon qu'on cherche à modéliser un processus extrême ou non, on choisira la GAF hyperbolique ou le processus de Ginibre. Voici comment s'y prendre dans les deux cas.

4.5.1 Avec le processus de Ginibre

On se donne m points z_1, \dots, z_m qui représentent notre état initial. On peut les interpréter comme les valeurs propres de la matrice diagonale dont les termes sont les z_k . Cela nous donne m^2 valeurs initiales pour les a_{ij} :

$$\begin{cases} a_{ii}(0) = z_i \\ a_{ij}(0) = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit ensuite de construire m^2 processus d'Ornstein-Uhlenbeck issus des $a_{ij}(0)$. L'idéal est de faire une *perfect simulation*, c'est-à-dire de commencer directement dans l'état stationnaire. Pour cela, il suffit de poser :

$$a_{ij}(t) = e^{-t/2} \left(a_{ij}(0) + \int_0^t e^{s/2} dW_{ij}(s) \right).$$

Les $a_{ij}(t)$ varieront bien continûment et ils seront directement dans l'état stationnaire.

Si l'on souhaite obtenir un passage plus progressif vers le processus déterminantal, on peut aussi utiliser la formule $a_{ij}(t) = e^{-t/2} W_{ij}(e^t)$, en générant des browniens issus de 0 en 1. Comme chaque trajectoire démarre au point $W_{ij}(1) = 0$, qui est *a priori* différent de $a_{ij}(0)$ pour $i = j$, on pourra introduire des drifts temporaires⁵ sur les $W_{ii}(t)$ qui permettront de rejoindre la trajectoire $e^{-t/2} W_{ii}(e^t)$ aussi progressivement que l'on veut.

4.5.2 Avec la GAF hyperbolique

La technique est exactement la même : il suffit de considérer le polynôme $\prod(z - z_k)$ qui fournit les $a_k(0)$, puis de simuler des processus d'Ornstein-Uhlenbeck de la même manière que précédemment. De même, on pourra introduire des *drifts* temporaires pour lisser la transition. Ces mêmes *drifts* pourront être utilisés pour rejoindre un nouveau processus-cible à la fin de la simulation.

4.6 Conclusion

Après avoir étudié en détail la définition des processus déterminantaux, nous en avons sélectionné deux particuliers qui étaient susceptibles de donner

⁵ par exemple de la forme $\frac{t_0-t}{t_0} a_{ii}(0)$ avec $t_0 > 0$.

une généralisation spatio-temporelle intéressante. Pour chacun, nous avons montré comment les simuler et nous avons étudié l'équation des trajectoires de leurs points. Nous avons également expliqué comment encapsuler cette simulation dans un segment temporel au milieu d'une simulation plus large, ce qui nous permet de faire le lien avec les autres processus spatio-temporels que nous avons présentés dans les chapitres précédents.

CONCLUSION

À travers trois exemples précis, nous avons pu examiner trois comportements de foule :

- un comportement dit ordinaire, à-travers notre modèle de Poisson-lignes. Ce modèle d'une grande souplesse se décline facilement en de nombreux cas de figure, tout en permettant à chaque fois d'obtenir une formule analytique pour la probabilité de couverture. De plus, il donne lieu à une généralisation spatio-temporelle prometteuse.
- un comportement plus exceptionnel lié à des manifestations festives, le modèle des moutons et des fortes têtes. Nous avons pu conjuguer la dimension spatiale et la dimension temporelle de notre problématique pour obtenir des dynamiques intéressantes et pas nécessairement périodiques. De plus, nous avons obtenu des formules analytiques pour la plupart des grandeurs typiques d'évolution, et nous avons indiqué comment calibrer le modèle à partir de celles-ci.
- enfin, un comportement extrême qui exhibait une très forte répulsion, par l'usage des processus déterminantaux. De même nous en avons tiré une généralisation spatio-temporelle, et nous avons obtenu les équations différentielles stochastiques qui régissaient la trajectoire des individus.

Dans tous les cas de figure, la prise en compte d'une composante aléatoire s'est révélé primordiale, nous permettant de modéliser des comportements complexes avec un minimum de paramètres. Nous en avons tiré des résultats analytiques précis susceptibles de prédire à l'avance des phénomènes collectifs comme les agrégations et les dispersions. Enfin, nous avons montré comment brancher ces modèles les uns à la suite des autres, afin d'introduire des perturbations limitées dans le temps.

Cette thèse ne se veut pas un travail exhaustif en la matière, et certaines directions mériteraient certainement d'être étudiées plus avant. Parmi d'autres citons :

- une généralisation de nos résultats à d'autres variétés que \mathbb{R}^2 , notamment par l'utilisation de la géométrie différentielle stochastique. Par exemple, on pourrait vouloir s'intéresser à la trajectoire des flottes d'avions à la surface de la Terre, voire à celle de particules atomiques dans un espace-temps courbe ;
- une compréhension plus fine de la réalité sous-jacente qui unit les processus déterminantaux entre eux, car comme nous l'avons indiqué, on comprend encore mal aujourd'hui ce qui les sous-tend, à part quelques arguments heuristiques ;
- la calibration des modèles sur des données en temps réel. En effet, les opérateurs mobiles disposent maintenant de sondes dans leurs réseaux 2G (GSM) et 3G (UMTS, HSDPA), qui permettent de remonter des informations de géolocalisation instantanément. Il serait intéressant de concevoir des algorithmes d'apprentissage qui sachent reconnaître le type de foule auquel ils sont confrontés, et calculer ses paramètres d'une manière adaptative ;
- une meilleure description de l'évolution temporelle des grandeurs radio dans le modèle de Poisson-lignes ;
- le développement d'algorithmes qui permettraient de mieux prendre en compte la mobilité des utilisateurs pour leur allouer des ressources radio.

Nous ne pouvons qu'espérer que ces quelques points soient étudiés dans le futur et donnent lieu à des travaux encore plus féconds.

BIBLIOGRAPHIE

- [Akh65] Naum I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*. Oliver & Boyd (1965).
- [Alt02] Eitan Altman, *Capacity of multi-service cellular networks with transmission-rate control: a queueing analysis*, proceedings MobiCom (2002).
- [And10] Jeffrey G. Andrews, François Baccelli, Radha K. Ganti, *A Tractable Approach to Coverage and Rate in Cellular Networks*. Accepted for publication in IEEE Trans. Communications (Sep. 2010).
- [Bac10] François Baccelli, Bartek Blaszczyszyn, *Stochastic Geometry and Wireless Networks*. NOW: Foundations and Trends in Networking (2010).
- [Ben09] John Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, Bálint Viràg, *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*. University Lecture Series, vol. 51. American Mathematical Society (2009).
- [Bin11] David Bindel, Jon Kleinberg and Sigal Oren, *How Bad is Forming Your Own Opinion?*, Proceedings 52nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (2011).
- [Bou05] Jean-Yves Le Boudec, Milan Vojnović, *Perfect Simulation and Stationarity of a Class of Mobility Models*, Proceedings IEEE Infocom (2005).
- [Cam02] Tracy Camp, Jeff Boleng, Vanessa Davies, *A Survey of Mobility Models for Ad Hoc Network Research*, WCMC, Special Issue on Mobile Ad Hoc Networking - Research, Trends and Applications, vol. 2, no. 5, pp. 483-502 (2002).

- [Dal03] Daryl J. Daley, David Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, second edition, Springer-Verlag (1988).
- [Dem93] Amir Dembo, Ofer Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones and Bartlett (1993).
- [Dra10] Moez Draief, Milan Vojnović, *Convergence Speed of Binary Interval Consensus*, IEEE Infocom (2010).
- [Ehr07] Paul Ehrenfest, Tatiana Ehrenfest, *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem*, Physikalische Zeitschrift, vol. 8, p. 311-314 (1907).
- [Fis85] Michael J. Fischer, Nancy A. Lynch, Michael S. Paterson, *Impossibility of distributed consensus with one faulty process*, Journal of the ACM, Volume 32 Issue 2, p. 374-382 (1985).
- [Gar06] Nancy L. Garcia, Thomas G. Kurtz, *Spatial birth and death processes as solutions of stochastic equations*, Alea 1, 281-303 (2006).
- [Gin64] Jean Ginibre, *Statistical Ensembles of Complex, Quaternion, and Real Matrices*. Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey (1964).
- [Glo06] Catherine Gloaguen, Frank Fleischer, Hendrik Schmidt and Volker Schmidt, *Fitting of stochastic telecommunication network models, via distance measures and Monte-Carlo tests*. Telecommunication Systems 31, 353-377 (2006).
- [Hal74] Paul R. Halmos, *Measure Theory*. Springer (1974).
- [Har01] Takahiro Hara, *Effective Replica Allocation in Ad Hoc Networks for Improving Data Accessibility*, Osaka University (2001).
- [Har03] Takahiro Hara, *Replica Allocation Methods in Ad Hoc Networks with Data Update*, Osaka University (2003).
- [Kal86] Olav Kallenberg, *Random Measures*. Academic Press, New York, London. Akademie-Verlag, Berlin (1986).
- [Kar02] Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet, *Introduction au calcul stochastique*, École Polytechnique (2002).

- [Kat76] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 132, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [Kau07] Bruno Kauffmann, François Baccelli, Augustin Chaintreau, Vivek Mhatre, Konstantina Papagiannaki, Christophe Diot, *Measurement-Based Self Organization of Interfering 802.11 Wireless Access Networks*, Proceedings IEEE Infocom, p. 1451 - 1459 (2007).
- [Kel79] Franck P. Kelly, *Reversibility and stochastic networks*, J. Wiley (1979).
- [Kos92] Eric Kostlan, *On the Spectra of Gaussian Matrices*, Linear algebra and its applications, Elsevier (1992).
- [Kri11] Manjunath Krishnapur, Bálint Virág, *The Ginibre ensemble and Gaussian analytic functions*, ArXiv Mathematics e-prints (2011).
- [Lac11] Aimé Lachapelle, Marie-Therese Wolfram, *On a Mean field Game Approach Modeling Congestion and Aversion in Pedestrian Crowds*, Transportation Research, Volume 45, Issue 10, p. 1572-1589 (2011).
- [Lag99] Xavier Lagrange, Philippe Godlewski, Sami Tabbane, *Réseaux GSM-DCS*, 4è édition revue et augmentée, Hermes Science Publications, Paris (1999).
- [Las07] Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, *Mean field games*, Japanese Journal of Mathematics, Volume 2, Number 1, p. 229-260 (2007).
- [Las10] Günter Last, *Modern random measures: Palm theory and related models*, in: *New Perspectives in Stochastic Geometry*, Oxford University Press (2010).
- [Lea04] Paul Leaves, Klaus Moessner, Rahim Tafazolli, David Grandblaise, Didier Bourse, Ralf Tönjes, e Breveglieri, *Dynamic Spectrum Allocation in Composite Reconfigurable Wireless Networks*, IEEE Communications Magazine (2004).
- [Leb05] Jean-Yves Le Boudec, Milan Vojnović, *Perfect Simulation and Stationarity of a Class of Mobility Models*. IEEE Infocom (2005).

-
- [Mat11] Ion Matei, John S. Baras, *Convergence Results for the Agreement Problem on Markovian Random Topologies*, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, p. 8860-8865 (2011).
- [Mol94] Jesper Møller, *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Springer-Verlag (1994).
- [Mit00] Joseph Mitola, *Cognitive Radio: an Integrated Agent Architecture for Software Defined Radio*, PhD Thesis, Royal Institute of Technology (KTH) (2000).
- [Nor98] James R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics (1998).
- [Per09] Étienne Perron, Dinkar Vasudevan, Milan Vojnović, *Using Three States for Binary Consensus on Complete Graphs*, IEEE Infocom 2009.
- [Pre75] Christopher J. Preston, *Spatial birth-and-death processes*, Bull. Int. Statist. Inst. 46 (2) 371-391 (1975).
- [Rai06] Armin Rainer, *Perturbation of complex polynomials and normal operators*, ArXiv Mathematics e-prints (2006).
- [Sim07] Igor S. Simić, *Evolution of Mobile Base Station Architectures*, Microwave Review (2007).
- [Sim63] George F. Simmons, *Introduction to Topology and modern Analysis*. McGraw-Hill (1963).
- [Sos00] Alexander Soshnikov, *Determinantal random point fields*. Uspekhi Mat. Nauk, 55(5(335)):107-160 (2000). Translation in Russian Math. Surveys 55, no. 5, 923-975 (2000).
- [Sto95] Dietrich Stoyan, Wilfrid S. Kendall, Joseph Mecke, *Stochastic geometry and its applications*. Second Edition. John Wiley & Sons, Chichester (1995).
- [Tah10] Mohammad M. Taheri, Keivan Navaie, Mohammad H. Bastani, *On the Outage Probability of SIR-Based Power-Controlled DS-CDMA Networks With Spatial Poisson Traffic*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 59 p. 499-506 (2010).

- [Uhl30] George E.Uhlenbeck, Leonard S. Ornstein, *On the theory of the Brownian Motion*, Physical Review, 36 :823-841 (1930).
- [Urb08] Orange Labs R&D, FaberNovel, www.urbanmobs.fr (Paris, 2008).
- [Yin06] Liangzhong Yin, Guohong Cao, *Supporting Cooperative Caching in Ad Hoc Networks*, Department of Computer Science & Engineering, The Pennsylvania State University (2006).