



**HAL**  
open science

## Montée capillaire, tubes et grains

Thomas Cambau

► **To cite this version:**

Thomas Cambau. Montée capillaire, tubes et grains. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2013. Français. NNT: . pastel-00933610

**HAL Id: pastel-00933610**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00933610v1>**

Submitted on 20 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Paris Diderot - Paris 7**

Spécialité Matière Condensée et Interfaces

par

**Thomas CAMBAU**

**Montée capillaire, tubes et grains**



Soutenue le 13 Novembre 2013 devant le jury composé de :

M. José Bico	<i>Directeur de thèse</i>
M. Jérôme Crassous	<i>Rapporteur</i>
M. Jean-Marc Di Meglio	<i>Examineur</i>
Mme Anne Juel	<i>Rapporteuse</i>
Mme Catherine Quilliet	<i>Examinatrice</i>
M. Étienne Reyssat	<i>Directeur de thèse</i>



# Remerciements

Merci à Héloïse de m'avoir supporté (et pas au sens anglo-saxon du terme).

Merci à Tybalt d'avoir pimenté cette troisième année.

Merci à Étienne et José de leur ouverture d'esprit (qui leur a laissé mettre de côté mon "parcours non-linéaire") et de leur courage administratif (qui leur a permis de faire face à toujours plus de non-linéarité, de demi-bourses et d'argent virtuel).

Merci aux MecaWet, en particulier Jérémy et Joël (pour toutes les manips, Cesária, les concerts, la traction biaxiale, ...) mais aussi Suomi (cat lover & yerba mate), Miguel (Gerry Forever), Atsushi (entropie) et les chefs (Benoît, Benjamin et Ramiro, Camille).

Merci à La Famille.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Élastocapillarité . . . . .	7
0.2 “Extreme Mechanics” . . . . .	9
<b>1 Montée élastocapillaire</b>	<b>13</b>
1.1 Dispositif expérimental . . . . .	13
1.2 Imprégnation sans saturation . . . . .	14
1.2.1 Évolution de la hauteur au cours du temps . . . . .	14
1.2.2 Forme du front . . . . .	17
1.3 Dynamique . . . . .	25
1.3.1 Modèle . . . . .	26
1.4 Conclusion . . . . .	31
<b>2 Flambement d’une coque cylindrique en dépression</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Dispositif Expérimental . . . . .	36
2.3 Qu’est-ce qu’un tube “court” ou longueur de persistance . . . . .	38
2.3.1 En loi d’échelle . . . . .	40
2.3.2 Résultats expérimentaux . . . . .	41
2.3.3 Discussion sur $L$ . . . . .	42
2.4 Influence de la géométrie du cylindre sur le nombre de lobes . . . . .	44
2.4.1 Résultats . . . . .	44
2.4.2 Modèle . . . . .	46
2.5 Comportement loin du seuil : torsion spontanée . . . . .	52
2.6 Cylindre pré-étiré . . . . .	53
2.7 Conclusion . . . . .	55
<b>3 Contraintes locales dans la colonne granulaire de Janssen</b>	<b>57</b>
3.1 Introduction . . . . .	57
3.2 Loi de Janssen dans un silo déformable . . . . .	58
3.2.1 Dispositif expérimental . . . . .	58
3.2.2 Masse de saturation au bas du silo . . . . .	60
3.2.3 Élasticité isotrope . . . . .	63
3.3 Contraintes locales - statique . . . . .	64
3.3.1 Montage expérimental . . . . .	64
3.3.2 Méthode . . . . .	68
3.3.3 Contraintes locales dans la colonne granulaire de Janssen . . . . .	75

3.4	Contraintes locales - dynamique/vidange . . . . .	78
3.4.1	Dispositif expérimental . . . . .	78
3.4.2	Procédure d'optimisation . . . . .	79
3.4.3	Résultats . . . . .	80
3.5	Conclusion . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Transport d'une sphère dans un tube cylindrique étroit</b>	<b>85</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Frottement solide . . . . .	87
4.2.1	Chute libre . . . . .	87
4.2.2	À vitesse constante . . . . .	90
4.2.3	Modèle . . . . .	92
4.2.4	Manche d'évacuation . . . . .	94
4.3	Lubrification . . . . .	98
4.3.1	Tirer ou Pousser ? . . . . .	98
4.3.2	Souffler . . . . .	101
4.4	Conclusion . . . . .	105
	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>
	<b>A Article : Capillary rise between flexible walls</b>	<b>109</b>
	<b>B Article : Local stresses in the Janssen granular column</b>	<b>117</b>
	<b>C Fabrication de tubes</b>	<b>127</b>
C.1	Trempage . . . . .	127
C.2	Moulage . . . . .	128
C.3	Tournage . . . . .	129
C.3.1	À l'extérieur d'un moule cylindrique . . . . .	129
C.3.2	À l'intérieur d'un moule cylindrique . . . . .	129
	<b>Références Bibliographiques</b>	<b>131</b>

# Introduction

Ce travail de thèse s'insère dans les thèmes développés dans l'équipe "MécaWet" du laboratoire PMMH. Le fil conducteur de ces activités est l'étude de structures élancées (tiges, plaques, coques) en lien avec les autres thèmes développés au laboratoire. En particulier, nous nous intéresserons à la déformation de tubes flexibles par des forces capillaires, à l'écoulement de petits grains ou au contraire de gros objets dans des tubes souples et au flambement de ces tubes sous l'effet d'une dépression.

L'approche expérimentale est fidèle à l'esprit du laboratoire. Nous développerons ainsi des expériences macroscopiques modèles afin d'extraire les ingrédients physiques d'un problème. Des expériences à taille humaine permettent en effet de contrôler facilement les paramètres expérimentaux sur plusieurs ordres de grandeur.

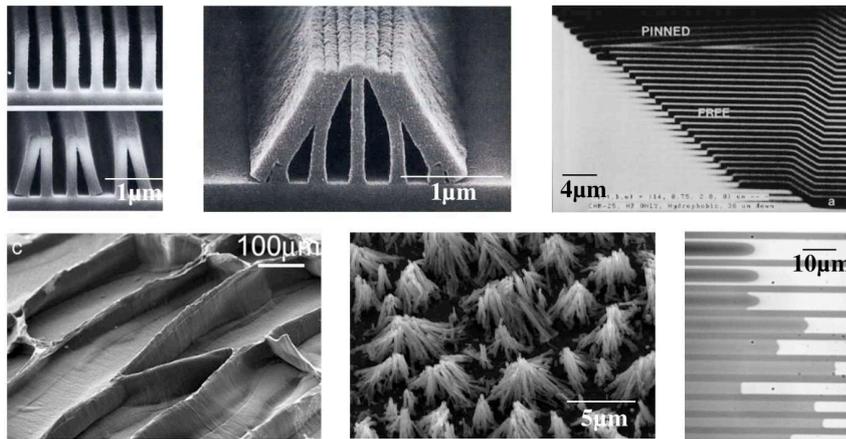
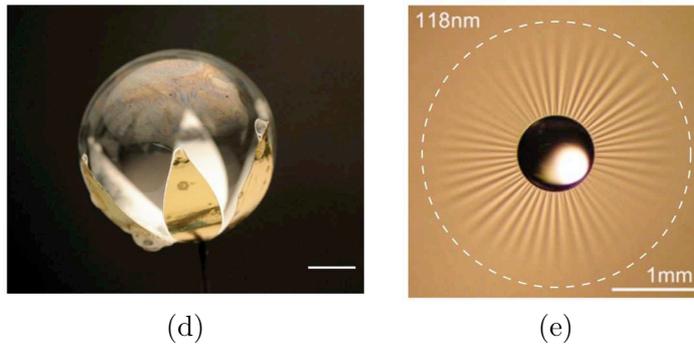
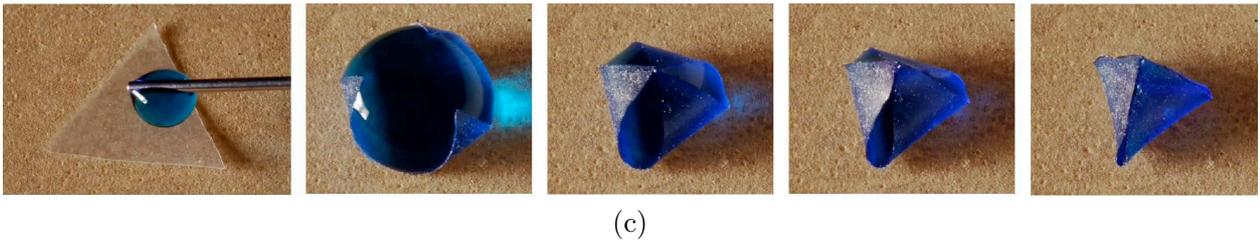
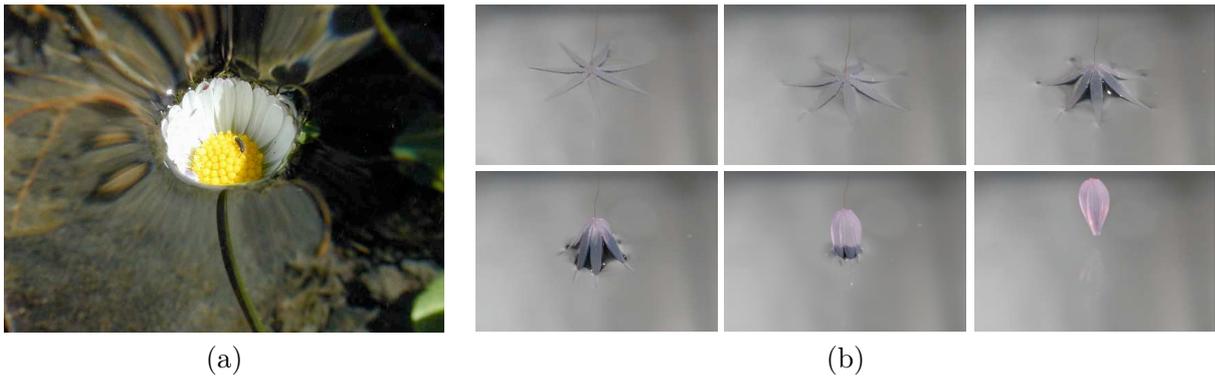
Nous abordons des domaines aux développements récents (moins de dix ans) en nous appuyant sur des outils anciens et nous intéressons plus particulièrement à deux grands thèmes que nous introduisons à présent.

## 0.1 Élastocapillarité

Dès le 16<sup>e</sup> siècle, Léonard de Vinci (de Vinci, 1508) s'interroge sur la formation de gouttes à partir d'un jet. Au 17<sup>e</sup>, Newton s'intéresse au ménisque liquide, observant que la hauteur atteinte par un liquide dans un verre est plus importante près des parois. Jurin remarque, au 18<sup>e</sup> siècle, l'ascension capillaire d'un liquide dans un tube de rayon plus petit que la taille de ce ménisque (de Gennes *et al.*, 2005).

On retrouve ce phénomène d'imprégnation capillaire dès qu'un matériau poreux est mis en contact avec un liquide mouillant. Nous l'observons aussi bien dans les événements les plus banals de notre vie quotidienne (lorsque nous trempions un sucre dans un café ou une éponge sèche dans l'eau, lorsque nous utilisons du papier buvard, ou enfin lorsque nous constatons avec dépit les remontées dans un mur) que dans la science des sols et de l'extraction pétrolière (Powers & Tambling, 1995; Morrow & Mason, 2001), l'industrie agro-alimentaire et papetière (Alava & Niskanen, 2006; Saguy & Wallach, 2005), la micro-fabrication (Tanaka & Atoda, 1993) ou la montée de la sève dans les arbres (Holbrook & Zwieniecki, 2008).

La hauteur et la dynamique d'ascension dans une matrice rigide sont bien connues (de Gennes *et al.*, 2005) et parallèlement à ces études récentes d'imprégnation, l'idée qu'il est possible de déformer une structure élastique sous l'effet des forces capillaires s'est développée (voir figure 1). Ce travail s'inscrit dans le contexte de l'élasto-capillarité qui connaît actuellement une forte activité. C'est un phénomène que l'on rencontre également tous les jours et ses applications vont de l'amélioration du gel à cheveux (Bico & Boudaoud, 2004) à la physiologie du poumon (Heil & White, 2002; Juel & Heap, 2007; Heil *et al.*, 2008; Heap & Juel, 2009) en passant par des applications en micro-fabrication (Chakrapani *et al.*, 2004). Si l'on observe des cheveux ou des poils mouillés, on remarque qu'ils



(f)

FIGURE 1 – (a) Les pétales d'une pâquerette tirée sous le niveau de l'eau se déforment. (b) Symétriquement, une fleur en élastomère tirée au dessus d'un bain emporte une goutte (Reis *et al.*, 2010). (c) Origami capillaire : une feuille d'élastomère enrobe spontanément une goutte d'eau (Py *et al.*, 2007). (d) Origami capillaire avec une bulle de savon. (e) Une goutte d'eau posée sur une fine membrane de polystyrène flottant sur un bain induit la formation de rides sur la membrane (Huang *et al.*, 2007). (f) Exemple d'objets micro-fabriqués détruits par les forces capillaires (références présentées dans (Roman & Bico, 2010)).

forment des paquets dont la taille est fixée par la compétition entre les propriétés élastiques des cheveux et la capillarité (Bico & Boudaoud, 2004). Dans l'ère de gloire des nanotechnologies, on cherche à fabriquer des structures de plus en plus petites. Mais à petite échelle le rapport surface/volume est amplifié. Les forces capillaires deviennent alors importantes et sont capables de déformer ou détruire des nano ou micro-structures (Tanaka & Atoda, 1993).

Les forces capillaires permettent ainsi l'imprégnation de milieux poreux, mais aussi la déformation de milieux élastiques. Que se passe-t-il en cas d'imprégnation d'un milieu poreux suffisamment souple pour être déformé ? L'inspiration de cette étude vient du poumon, dont un modèle simplifié est un tube flexible, dont l'intérieur est recouvert de liquide et qui est ouvert pour laisser passer l'air. Dans certaines conditions, les forces capillaires peuvent déformer ce tube jusqu'à le fermer et empêcher l'air de passer. C'est ce qui arrive à certains bébés prématurés dont les poumons ne s'ouvrent pas à cause des forces capillaires.

Nous proposons ici l'étude de l'effondrement d'un canal sous l'effet de son imprégnation par un liquide.

## 0.2 “Extreme Mechanics”

La mécanique est une science dont l'histoire est liée à l'ingénierie, pour laquelle l'objectif d'une étude appliquée est d'éviter la casse, la rupture, le flambement de la structure (Gordon, 1978). Les matériaux de construction sont "durs" et les modèles sont développés aux petites déformations, restant près du seuil de flambement.

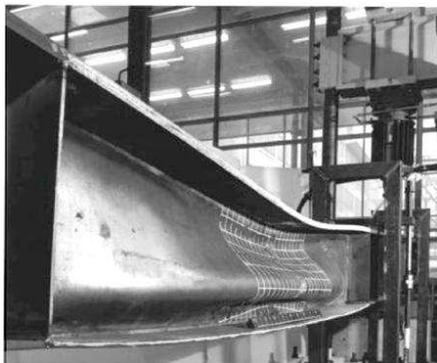


FIGURE 2 – Flambement d'une poutre qui limite son utilisation en ingénierie.

Plus récemment, l'utilisation de matériaux "mous" oblige à réfléchir aux grands déplacements et autorise les expériences au-delà du flambage, loin du seuil. Cela donne accès à des non-linéarités induites par la géométrie des structures élancées (Lobkovsky & Witten, 1997; Cerda & Mahadevan, 2003) et en particulier les coques (Quilliet, 2006; Quilliet *et al.* , 2008; Lazarus *et al.* , 2012; Shim *et al.* , 2012; Quemeneur *et al.* , 2012; Quilliet, 2012; Nasto *et al.* , 2013) et permet l'observation de couplages originaux entre élasticité et capillarité (Roman & Bico, 2010) ou entre élasticité et électricité (Keplinger *et al.* , 2013).

Il s'agit d'un nouveau paradigme en mécanique où l'effondrement de la structure n'est plus évité, mais recherché, pour l'étudier en soi (Ciarletta & Ben Amar, 2011), pour mieux comprendre des

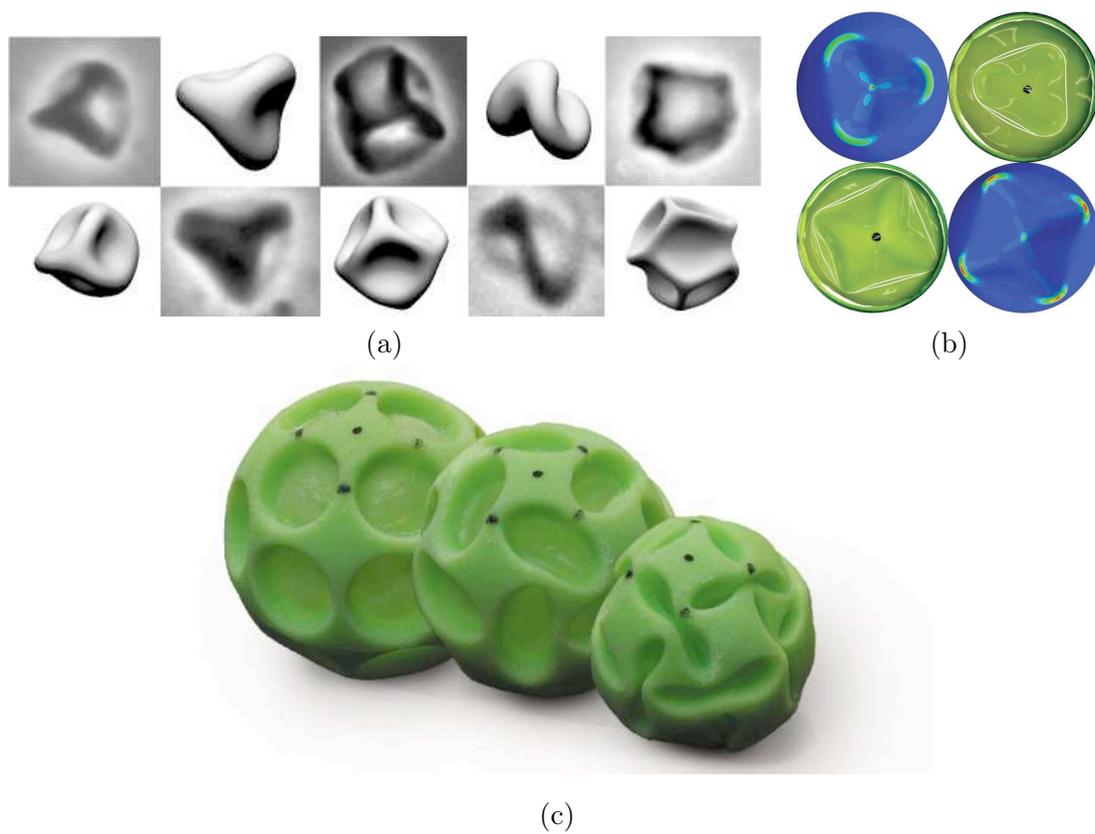
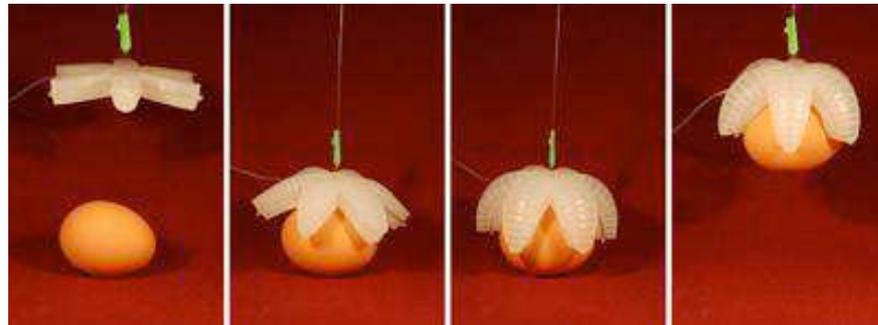
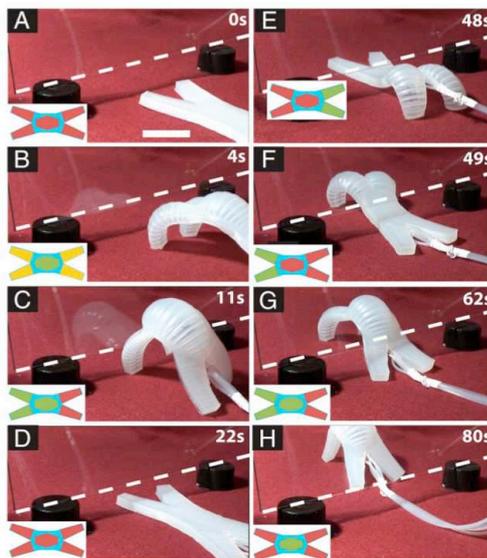


FIGURE 3 – (a) Flambement de vésicules de gel mises en dépression osmotique (Quemeneur *et al.*, 2012). (b) Localisation de la déformation lors de l'indentation d'une coque (Nasto *et al.*, 2013). (c) "Buckliball" : utiliser une instabilité mécanique pour contrôler la manière dont un objet s'écrase (Shim *et al.*, 2012).

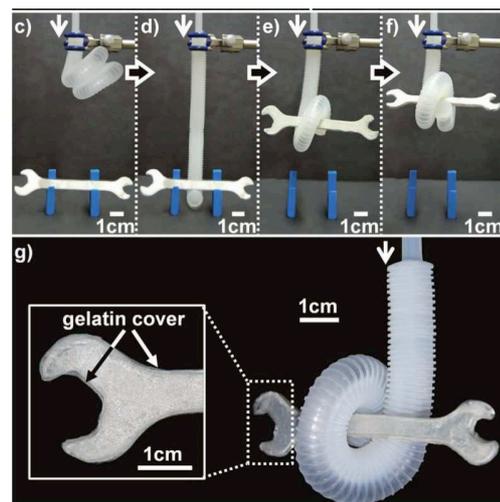
phénomènes biologiques (Armon *et al.* , 2011; Forterre & Dumais, 2011), ou pour des applications innovantes telles que l'électronique flexible (Hwang *et al.* , 2012). Les robots mous (Shepherd *et al.* , 2011; Martinez *et al.* , 2012; Martinez *et al.* , 2013) sont moins fragiles et ils autorisent plus de degrés de liberté que les robots mécaniques. Depuis une dizaine d'années, cette thématique générale connaît un fort succès à la conférence March Meeting de l'APS sous le qualificatif de "Extreme Mechanics".



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4 – Soft robotics. (a) Exemple d'actuateur mou (robot mou) permettant d'attraper un œuf. (b) Robot marcheur mou (Shepherd *et al.* , 2011). (c) Robot préhenseur mou (Martinez *et al.* , 2013).

Nous proposons ici l'étude de coques cylindriques en élastomère : comment flambent-elles lorsqu'elles sont placées en dépression ? Quelles sont les interactions entre un milieu granulaire et un contenant suffisamment souple pour être déformé élastiquement par celui-ci ? Comment transporter un objet à travers un tube élastique plus étroit et quelles forces s'appliquent sur l'objet ?



## Montée élastocapillaire

Nous cherchons ici à mieux comprendre et à décrire les couplages qui existent entre l'imprégnation d'un milieu déformable et la déformation de sa structure par l'avancée du fluide. Nous nous attachons en particulier à l'étude d'un système modèle d'ascension capillaire entre deux plaques dont l'une est rigide, l'autre suffisamment flexible pour être déformée sous l'effet des forces capillaires.

### 1.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons le dispositif expérimental présenté sur la figure 1.1. Deux cales d'épaisseur  $e_0$  sont fixées sur une plaque de verre indéformable. Une plaque déformable, typiquement une feuille de polypropylène, est posée contre les cales. Elle n'est pas fixée à la plaque de verre ou aux cales et peut donc glisser librement. La cellule ainsi obtenue, de largeur  $w$  et d'épaisseur au bord  $e_0$ , est trempée à sa base dans un bain de liquide mouillant. Nous utilisons principalement des huiles de silicone (PDMS) de tension de surface  $\gamma = 21$  mN/m et de viscosité comprise entre 5 et 1000 mPa.s. La cellule est légèrement inclinée par rapport à la verticale (angle de l'ordre de  $1^\circ$ ) afin d'éviter que la plaque déformable, simplement supportée, ne bascule vers l'avant.

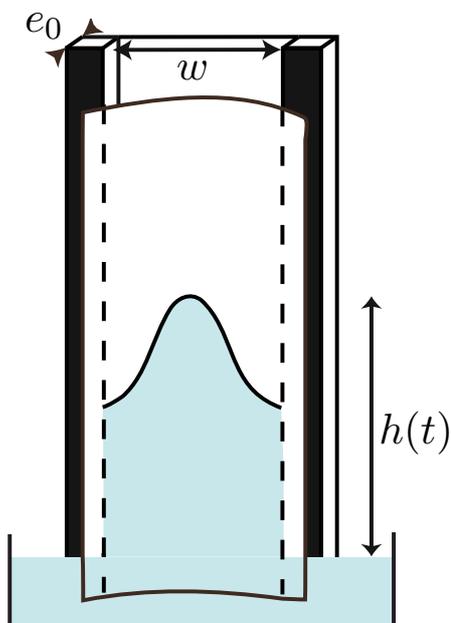


FIGURE 1.1 – Dispositif expérimental : Une plaque de polymère flexible, en blanc, est séparée d'une plaque de verre rigide de largeur  $w$  par des cales d'épaisseur  $e_0$  (en noir). L'ensemble est légèrement incliné afin d'éviter que la plaque déformable ne tombe. Le bas de la cellule ainsi formée est mis en contact avec un bain de liquide mouillant, qui monte entre les deux plaques sous l'effet des forces capillaires.

Nous observons la montée capillaire du liquide mouillant entre les deux plaques. Un illuminateur à fibre est fixé à la cellule de manière à éclairer l'intérieur de la plaque de verre. Nous obtenons ainsi un bon contraste entre les parties mouillées, où la lumière diffuse, et les parties sèches, qui ne sont pas éclairées. Nous filmons l'ascension du front de liquide au cours du temps, en la visualisant à travers la plaque déformable. La figure 1.2 montre une séquence d'images expérimentales. Sous l'effet des forces capillaires, un doigt de liquide se développe au centre de la cellule, laissant, au dessus d'une certaine hauteur, une zone sèche le long des cales.

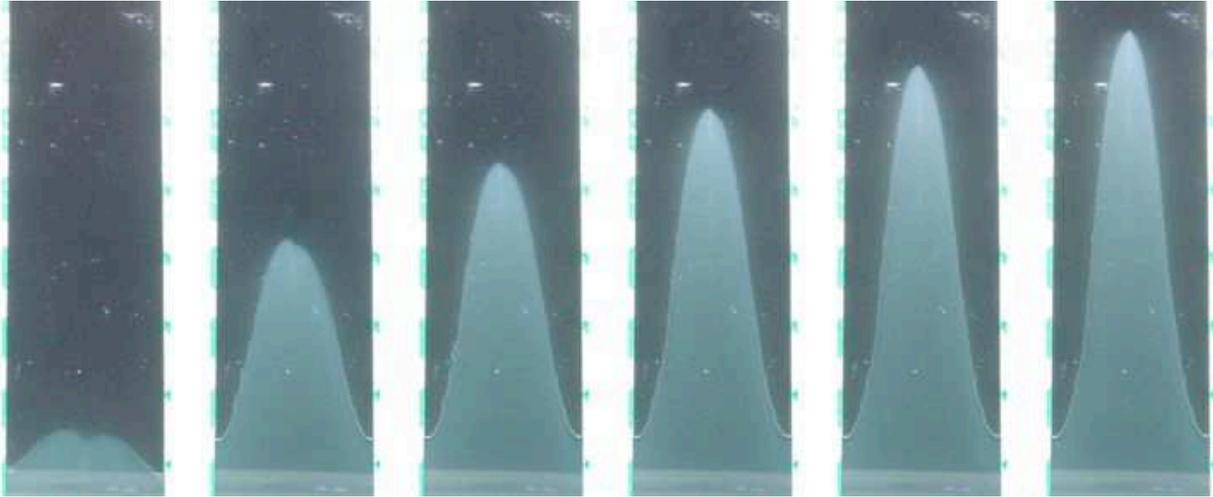


FIGURE 1.2 – Ascension capillaire dans une cellule de Hele-Shaw déformable. Le bas de la cellule est en contact avec un bain d'huile silicone (de viscosité  $\eta = 15,4$  mPa.s). Sous l'effet des forces capillaires, un doigt de liquide se développe spontanément entre les deux plaques. La cellule a pour largeur  $w = 50$  mm et les prises de vue sont espacées de 70 s.

## 1.2 Imprégnation sans saturation

### 1.2.1 Évolution de la hauteur au cours du temps

La figure 1.3 montre l'évolution de la hauteur maximale du front de liquide,  $h$ , en fonction du temps, pour deux cellules de géométries identiques ( $w = 50$  mm,  $e_0 = 0,330$  mm) dont l'une est rigide, l'autre flexible. Nous utilisons ici de l'huile de silicone de viscosité  $\eta = 15,4$  mPa.s, de masse volumique  $\rho = 950$  kg.m<sup>-3</sup> et de tension de surface  $\gamma = 21$  mN/m.

Alors que dans la cellule rigide, le front sature à une hauteur centimétrique en quelques secondes, il atteint une hauteur  $h = 140$  mm en  $t = 1000$  s dans la cellule déformable, et continue son ascension sans saturation apparente. Nous rappelons ici quelques résultats classiques concernant la montée capillaire dans un tube rigide, sur lesquels nous nous appuierons pour décrire le cas flexible.

#### Montée capillaire dans un tube rigide

Lorsqu'on met un tube capillaire en contact avec un liquide mouillant, le liquide monte à l'intérieur du tube par capillarité (voir figure 1.5). L'équilibre est atteint lorsque le poids de liquide est compensé par la capillarité.

Nous considérons un fluide totalement mouillant et utilisons les notations de la figure 1.4 où  $P_A = P_C = P_{atm}$ ,  $P_{atm}$  étant la pression atmosphérique. Le saut de pression à l'interface liquide/air est

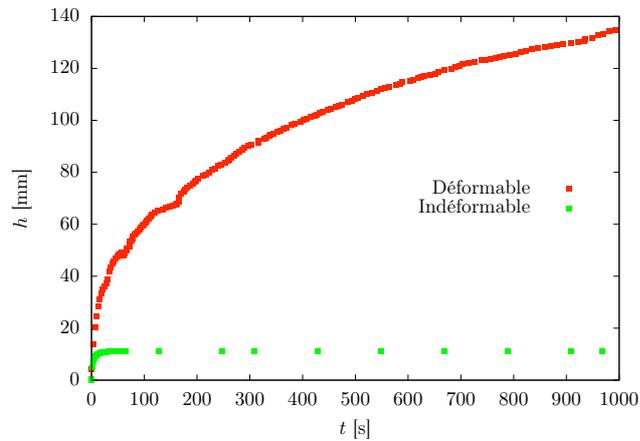


FIGURE 1.3 – Hauteur  $h(t)$  du front liquide en fonction du temps pour deux cellules de dimensions initiales identiques ( $w = 50$  mm et  $e_0 = 0,330$  mm) dont l’une est déformable, l’autre indéformable. Le fluide est de l’huile de silicone de viscosité  $\eta = 15,4$  mPa.s, de masse volumique  $\rho = 950$  kg.m<sup>-3</sup> et de tension de surface  $\gamma = 21$  mN/m. Dans la cellule indéformable (carrés verts),  $h(t)$  sature à la hauteur de Jurin  $h_{eq} \simeq 13$  mm en quelques secondes. Dans une cellule suffisamment flexible (carrés rouges), le front liquide atteint 140 mm en 1000 s et continue son ascension.

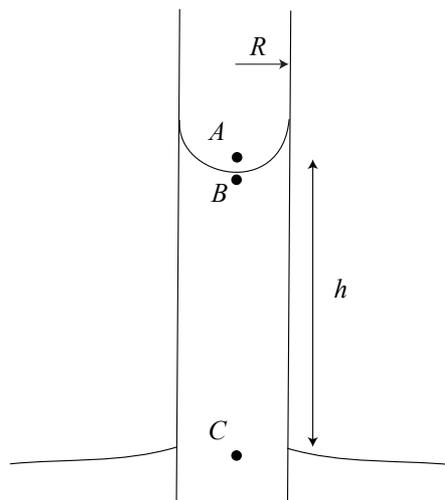


FIGURE 1.4 – Ascension capillaire dans un tube indéformable.

donné par la loi de Laplace. Pour un fluide totalement mouillant :

$$P_A - P_B = \frac{2\gamma}{R} \quad (1.1)$$

où  $\gamma$  est la tension superficielle du liquide et  $R$  le rayon intérieur du capillaire. Par ailleurs, à l'équilibre, la statique des fluides donne :

$$P_B - P_C = -\rho g h_{eq} \quad (1.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $h_{eq}$  est la hauteur de la colonne de liquide. On a donc :

$$\rho g h_{eq} = \frac{2\gamma}{R} \quad (1.3)$$

La hauteur d'équilibre atteinte lorsque le poids de liquide est compensé par la capillarité est donc :

$$h_{eq} = \frac{2\gamma}{\rho g R} \quad (1.4)$$

qui est le résultat classique de Jurin (de Gennes *et al.* , 2005) qui fut démontré pour la première fois par Laplace (de Laplace P.-S., 1845).

La hauteur d'équilibre est donc d'autant plus grande que le tube est fin.

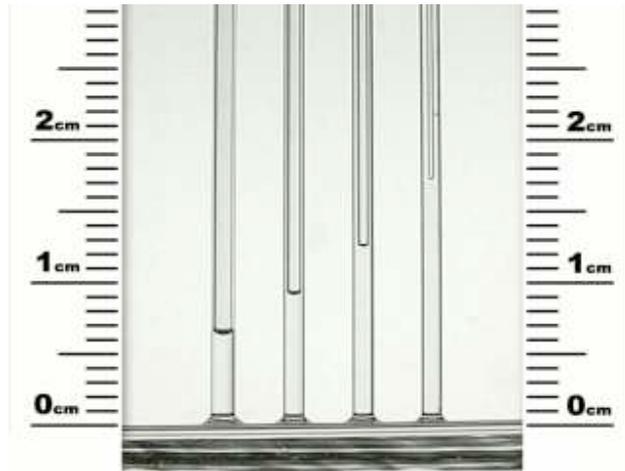


FIGURE 1.5 – Ascension capillaire dans des tubes en verre de diamètres intérieurs, 0,6 mm, 0,43 mm, 0,3 mm et 0,15 mm, de gauche à droite (image du CDRom accompagnant (de Gennes *et al.* , 2005)).

Comme dans un tube capillaire, il y a ascension entre deux plaques suffisamment rapprochées en contact avec un bain de liquide. En notant  $e$  la distance entre les plaques, le liquide atteint une hauteur d'équilibre :

$$h_{eq} = \frac{2\gamma}{\rho g e} \quad (1.5)$$

d'autant plus grande que l'écart entre les plaques est petit.

Dans le cas de la cellule rigide, le front s'arrête rapidement à la hauteur de Jurin correspondant à l'épaisseur  $e_0$  de la cellule :  $h_{eq} = 2\gamma/\rho g e_0 = 13$  mm. Dans la cellule déformable, le ménisque atteint initialement la même hauteur. Le liquide monté par capillarité se trouve en forte dépression

et provoque l'écrasement de la cellule : la paroi flexible tend à se rapprocher de la paroi rigide, réduisant l'épaisseur minimum de la cellule et permettant donc au front de liquide de progresser. Plus le liquide monte, plus la cellule s'écrase sous l'effet de la dépression, et le liquide peut donc atteindre des hauteurs plus grandes que dans le cas rigide.

### 1.2.2 Forme du front

Une des particularités de notre système est la forme digitale du front. Nous décrivons ici les conditions d'existence et la forme de ce doigt.

**Un coin autoconstruit** En éclairant la cellule avec une nappe laser formant un angle faible avec la cellule (voir figure 1.6) nous mesurons  $e(x)$ , l'épaisseur de la cellule en fonction de la distance au bord  $x$ .

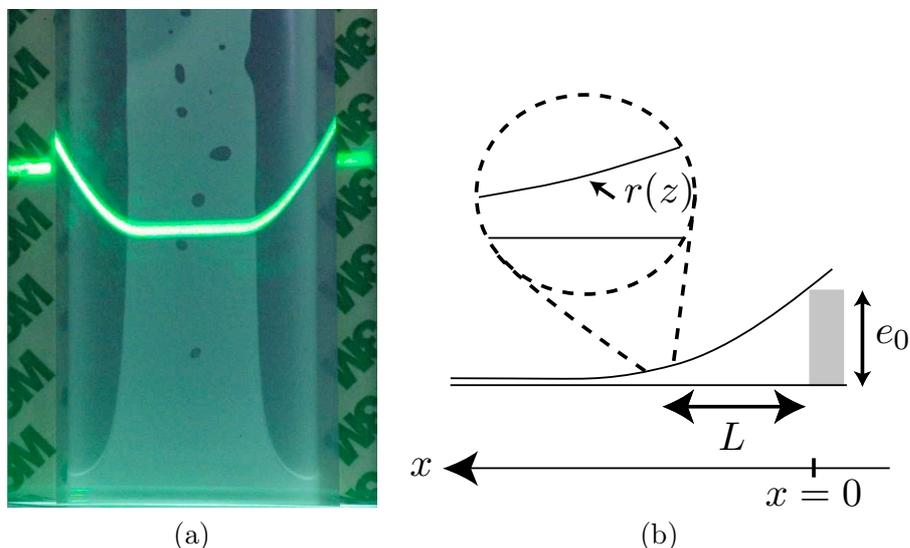


FIGURE 1.6 – (a) Cellule de largeur  $w = 50$  mm, épaisseur  $e_0 = 1,62$  mm avec une feuille de polypropylène d'épaisseur  $a = 0,09$  mm. La cellule est éclairée par une nappe laser avec un angle de 5 degrés. La ligne verte correspond donc à l'intersection du plan laser avec la paroi déformée de la cellule. La déflexion de cette ligne par rapport à sa position avant écrasement de la cellule est proportionnelle au déplacement de la paroi déformable. La cellule est écrasée au centre : la plaque déformable est au contact avec la plaque indéformable. Les bords forment des coins. (b) Schéma en coupe horizontale de la cellule.

Au centre de la cellule, les deux plaques sont au quasi-contact, alors que les bords forment un coin. C'est principalement dans ce coin autoconstruit que se fait l'écoulement. La possibilité d'atteindre des épaisseurs infinitésimales permet au liquide de monter à une altitude infinie.

**Hauteur au bord** Près des cales, la cellule ne peut pas s'écraser et son épaisseur reste donc  $e_0$ . Nous constatons que le front de liquide atteint rapidement une hauteur d'équilibre  $h_b$  près des cales (voir figure 1.7), tandis que l'ascension se poursuit au centre de la cellule.

Le liquide atteint la hauteur de saturation  $h_{eq}$  correspondant au cas rigide de même épaisseur. Nous traçons sur la figure 1.8 la hauteur  $h_b$  en fonction de la grandeur  $h_{eq} = \frac{2\gamma}{\rho g e_0}$ , qui serait la hauteur d'équilibre de Jurin en considérant une mouillabilité totale. Il y a un bon accord entre la théorie et l'expérience.

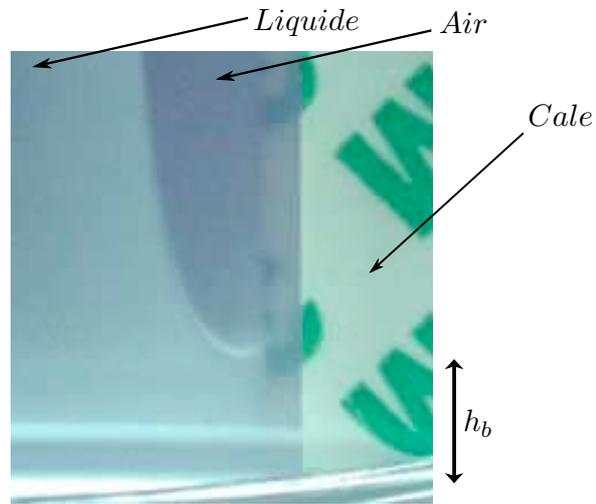


FIGURE 1.7 – Hauteur au bord  $h_b$ , à la base du système, où le liquide imprègne toute la largeur de la cellule.

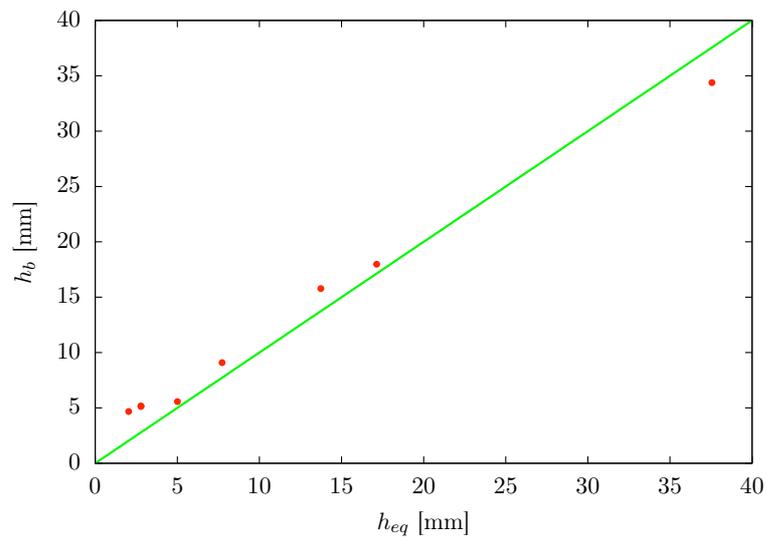


FIGURE 1.8 –  $h_b$  en fonction de  $h_{eq}$ , la hauteur d'équilibre de Jurin qui serait atteinte dans une cellule rigide d'épaisseur  $e_0$ . La droite verte a pour équation  $h_b = h_{eq}$ .

**Coin sec** Aux altitudes grandes devant  $h_b$  et à temps long, le front liquide se maintient à une distance  $L$  du bord de la cellule (voir figure 1.9). Cette distance ne dépend ni du temps ni de l'altitude  $z$ . En conservant les notations de la figure 1.6,  $L$  est la distance au bord,  $e(x)$  l'épaisseur de



FIGURE 1.9 – Forme du front liquide. Aux temps longs, à une hauteur  $h \gg h_b$ , le front liquide se maintient à une distance constante  $L$  des cales.

la cellule,  $e_0$  l'épaisseur de la cale et nous notons  $a$  l'épaisseur de la paroi flexible.

Nous assimilons la plaque à une poutre flexible en faible déflexion ( $h_0 \ll L$ ). En équilibrant les moments des forces appliquées sur une plaque déformable élastique, on a :

$$\frac{d^4 e}{dx^4} = 0 \quad (1.6)$$

Les conditions aux limites du système sont les suivantes :

- $e(0) = e_0$  : l'épaisseur en  $x = 0$  est  $e_0$  l'épaisseur de la cale.
- $e(L) = 0$  : les deux parois sont en contact en  $x = L$ .
- $\frac{d^2 e}{dx^2}(0) = 0$  : le moment est nul en  $x = 0$ .
- $\frac{de}{dx}(L) = 0$  : la pente s'annule en  $x = L$

Par une suite d'intégrations simples et en utilisant les conditions aux limites nous obtenons la forme du coin :

$$e(x) = \frac{e_0 x^3}{2L^3} - \frac{3e_0 x}{2L} + e_0 \quad (1.7)$$

où  $L$ , que nous cherchons à déterminer, reste inconnue. Nous avons donc besoin d'une condition supplémentaire. Nous allons utiliser une condition d'énergie. La taille de la région vide est fixée par la compétition entre l'adhésion capillaire, qui tend à rapprocher les parois, et la rigidité de la plaque flexible qui contrebalance cet effet. L'adhésion de la plaque flexible sur une longueur  $L$

conduirait à un gain d'énergie par unité de surface  $\mathcal{E}_\gamma = 2\gamma L$  (par unité de hauteur de la cellule, en supposant que le liquide mouille totalement les parois). Ce gain serait toutefois lié à un coût en énergie élastique correspondant à la déformation de la plaque flexible. Dans la région où  $L$  ne varie pas avec la hauteur, la paroi est simplement courbée et l'énergie de courbure par unité de surface  $\mathcal{E}_B$  que nous stockons est d'ordre  $B\kappa^2$ , où  $B$  est la rigidité flexionnelle de la plaque déformable et  $\kappa$  la courbure. On peut relier  $B$  à  $E$ , le module d'Young, et  $\nu$  le module de Poisson. Dans notre cas,  $B = \frac{Ea^3}{12(1-\nu^2)}$  (Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, 1964). L'énergie totale stockée dans un coin  $\mathcal{E}$  est la somme de l'énergie de courbure  $\mathcal{E}_B$  et de l'énergie capillaire  $\mathcal{E}_\gamma$ .

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_\gamma \quad (1.8)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}B \int_0^L \left( \frac{d^2e}{dx^2} \right)^2 dx + 2\gamma L \quad (1.9)$$

c'est-à-dire,

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} \frac{Be_0^2}{L^3} + 2\gamma L \quad (1.10)$$

La valeur de  $L$  observée rend l'énergie stationnaire par rapport à  $L$ , ce qui se traduit par :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dL} = 2\gamma - \frac{3}{2}Be_0^2 \times \frac{3}{L^4} = 0 \quad (1.11)$$

La longueur  $L^*$  minimisant l'énergie est donc :

$$L^* = \left( \frac{9}{4} \frac{Be_0^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.12)$$

La figure 1.10 montre la comparaison entre les valeurs mesurées expérimentalement,  $L_{exp}$ , et la prévision théorique  $L^*$ . Il y a un bon accord entre théorie et expériences.

## Poils Mouillés

Nous considérons deux plaques parallèles séparées d'une distance  $e_0$  en contact avec un liquide mouillant (Bico & Boudaoud, 2004). Nous notons  $L_{wet}$  la longueur mouillée et  $L_{stick}$  la longueur sèche séparant le point de contact entre les plaques et leur point d'ancrage. L'énergie de surface (par unité de largeur) varie comme  $\gamma L_{stick}$  et l'énergie de courbure (par unité de largeur) est d'ordre  $BL_{stick}/R^2$ , où  $R$  est le rayon de courbure de la plaque. À l'équilibre,  $R$  est proportionnel à  $\sqrt{B/\gamma} = L_{ec}$  et la courbure  $1/R$  est d'ordre  $e_0/L_{stick}^2$ , ce qui donne :

$$L_{stick} \sim e_0^{\frac{1}{2}} L_{ec}^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

L'expression de  $L^*$  et donc du même ordre que celle de la longueur sèche dans l'expérience des poils mouillés, dans laquelle nous retrouvons exactement les mêmes ingrédients physiques.

## Un critère pour l'imprégnation de la cellule

Nous cherchons ici à établir un critère permettant de déterminer si une cellule de caractéristiques physiques et géométriques données montrera le phénomène d'imprégnation déformable. Expérimen-

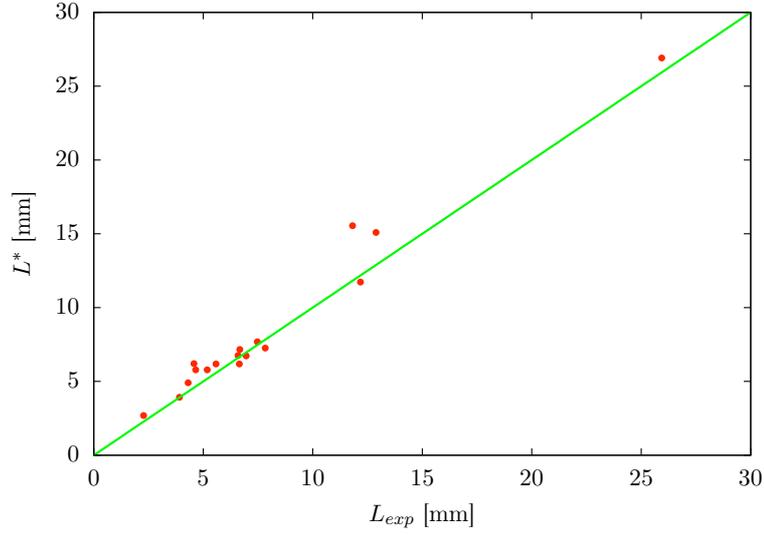


FIGURE 1.10 – Distance au bord théorique,  $L^* = \left(\frac{9}{4} \frac{Be_0^2}{\gamma}\right)^{1/4}$ , en fonction de la distance au bord mesurée  $L_{exp}$ . La droite verte a pour équation  $L^* = L_{exp}$ .

talement, pour un liquide donné, nous observons que les cellules dont les parois sont très flexibles ou très larges montrent le phénomène d’ascension capillaire infinie. Au contraire, dans les cellules très rigides, ou de faible largeur, le front d’imprégnation sature à une hauteur finie, mais peut présenter un front légèrement distordu (voir figure 1.11). L’imprégnation ne se fera sans saturation que si la

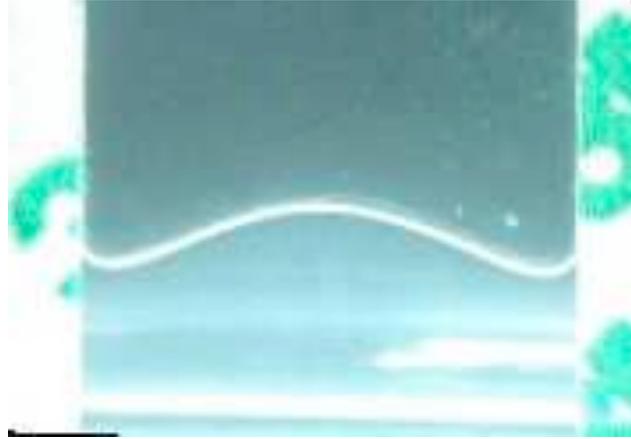


FIGURE 1.11 – Ascension dans une cellule de largeur  $w = 50$  mm, d’épaisseur au bord  $e_0 = 0,58$  mm avec une plaque flexible d’épaisseur  $a = 0,189$  mm et de rigidité flexionnelle  $B = 1,31 \cdot 10^{-3}$  Nm. La cellule n’est pas assez souple pour permettre une ascension dans le mode déformable. La plaque flexible se défléchit, le front liquide, légèrement distordu, s’arrête à une hauteur supérieure à la hauteur d’équilibre de Jurin.

capillarité l’emporte sur l’élasticité des parois de la cellule. Pour que le front de liquide ne s’arrête pas, il est nécessaire que les forces capillaires soient assez fortes pour permettre le contact entre les deux plaques, au centre de la cellule. Autrement dit, il faut que la cellule soit suffisamment large pour permettre au doigt d’imprégnation de se développer. Il faut donc que la largeur  $w$  de la cellule soit au moins égale à deux fois la taille  $L^*$  de la zone sèche. Le critère d’ascension déformable est donc  $w > 2L^*$ . On rappelle :

$$L^* = \left(\frac{9}{4} \frac{Be_0^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.14)$$

En introduisant la longueur élastocapillaire  $L_{ec} = \sqrt{\frac{B}{\gamma}}$  (Roman & Bico, 2010), notre critère devient :

$$w > 2.45\sqrt{e_0 L_{ec}} \quad (1.15)$$

**Mode d'imprégnation** Nous pouvons classer chaque essai expérimental selon son mode d'imprégnation : imprégnation déformable, où le front de liquide monte à l'infini, et imprégnation indéformable, où le front s'arrête à une hauteur finie. Nous regroupons l'ensemble des essais sur le diagramme de la figure 1.12. En abscisse nous plaçons la longueur  $L^*$ , en ordonnée la largeur  $w$  de la cellule. Nous pouvons aller plus loin dans la description des modes possibles d'imprégnation. En effet, certaines cellules vérifient le critère d'imprégnation 1.15, mais ne montrent pas spontanément une ascension déformable. Dans ce cas limite, l'épaisseur  $e_0$  des cales est grande devant la longueur capillaire  $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ , et les parois ne se voient pas initialement. En revanche, si nous donnons un peu d'énergie au système, en appuyant légèrement sur la plaque déformable, nous permettons aux parois de la cellule d'interagir, ce qui permet de déclencher l'ascension déformable, qui continue ensuite comme dans le cas spontané. Nous introduisons donc un troisième mode à notre système : l'ascension déclenchable.

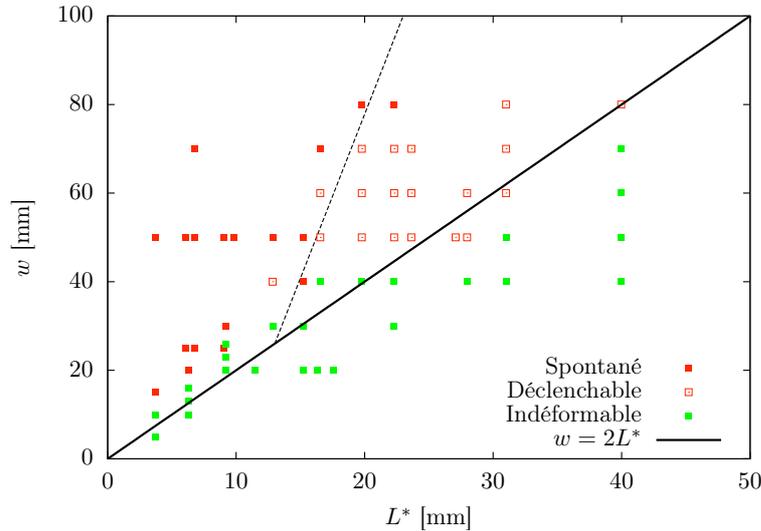


FIGURE 1.12 – Diagramme des modes possibles d'imprégnation en fonction des caractéristiques géométriques et physiques de la cellule. Rappelons que  $L^* = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{e_0 L_{ec}}$ . Les cellules assez souples ( $w > 2L^*$ , carrés rouges) permettent potentiellement l'imprégnation en mode déformable. Parmi celles-ci, certaines développent spontanément un doigt de liquide dont la hauteur ne sature pas (carrés rouges pleins), d'autres ne s'imprègnent qu'après déclenchement de l'imprégnation (carrés rouges creux). Dans les cellules trop rigides ( $w < 2L^*$ , carrés verts), le front sature et l'imprégnation est qualifiée d'indéformable. La droite noire a pour équation  $w = 2L^*$ . La frontière en pointillés est un guide pour l'œil séparant les modes d'imprégnation infinie et déformable.

**Transition indéformable/déformable** Si l'on se place, sur le diagramme de mode, à une largeur  $w$  donnée, et qu'on augmente la longueur  $L^*$ , on peut passer d'un mode spontané à un mode indéformable, en passant éventuellement par un mode déclenchable. Nous décidons de rester dans la zone sans mode déclenchable et traçons sur la figure 1.13 l'évolution de la hauteur en fonction du temps pour 3 cellules de largeur identiques,  $w = 15$  mm, de même épaisseur initiale,  $e_0 = 500 \mu\text{m}$ , mais dont les plaques flexibles ont des rigidités flexionnelles  $B$  différentes.

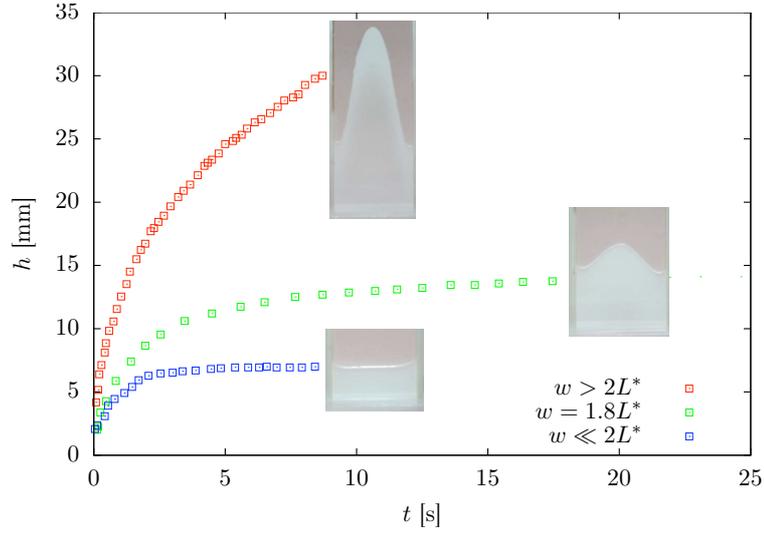


FIGURE 1.13 – Hauteur en fonction du temps pour des cellules de même largeur  $w$  et épaisseurs des cales  $e_0$ , mais d'épaisseur de plaque flexible différentes, donc de rigidité flexionnelles  $B$ , différentes. Si  $w > 2L^*$  (carrés rouges), la cellule est suffisamment flexible pour permettre l'ascension à l'infini. Si  $w \ll 2L^*$  (carrés bleus),  $h$  atteint  $h_{eq}$  et s'arrête en quelques secondes. Si  $w \leq 2L^*$  (carrés verts), la cellule est assez flexible pour fléchir sous l'effet des forces capillaires mais pas pour s'imprégner à l'infini. Le front de liquide atteint une hauteur supérieure à  $h_{eq}$  et s'arrête.

Ainsi, lorsque  $w > 2L^*$ , nous sommes dans le cas déformable, la cellule s'écrase au centre et le front liquide monte à l'infini. Quand  $w \ll 2L^*$ , nous retrouvons le cas rigide, la cellule ne se déforme pas du tout sous l'effet des forces capillaires et le front liquide atteint la hauteur d'équilibre de Jurin en quelques secondes. Quand  $w < 2L^*$  mais est proche de  $L^*$ , nous restons dans un régime saturant, avec une hauteur d'ascension qui sature, mais la cellule commence à s'écraser sous l'effet des forces capillaires. Ainsi, le liquide atteint une hauteur supérieure à la hauteur de Jurin.

Nous traçons (sur la figure 1.14), la hauteur maximum atteinte par le front de liquide,  $h_{max}$  en fonction de la largeur  $w$  de la cellule, en conservant l'épaisseur des cales et les propriétés mécaniques de la plaque déformable constantes.

La hauteur maximum  $h_{max}$ , partant de la hauteur d'équilibre de Jurin  $h_{eq}$ , semble diverger lorsque  $w$  tend vers  $2L^*$ . La dépression capillaire ayant tendance à courber la plaque flexible vers la plaque rigide, plus  $h_{max}$  est grande plus l'écart  $e_m$  entre les plaques est petit. La hauteur d'ascension étant inversement proportionnelle à cet écart, cela mène à un plus grand écart de pression. Le fluide exerce sur la plaque déformable un moment par unité de hauteur proportionnel à  $w^2\gamma/e_m$ , qui est équilibré par le moment exercé par la plaque d'ordre  $B(e_0 - e_m)/w^2$ . En considérant de petites déformations,  $e_m = e_0(1 - \epsilon)$ , l'équilibre des moments donne :

$$\epsilon \sim \frac{1}{\left(\frac{2L^*}{w}\right)^4 - 1} \quad (1.16)$$

Et la hauteur maximum est donc :

$$h_{max} = \frac{2\gamma}{\rho g e_0 \left[1 - \left(\frac{w}{2L^*}\right)^4\right]} \quad (1.17)$$

Cette équation est valable pour de petites déformations, mais reste en bon accord avec les résultats

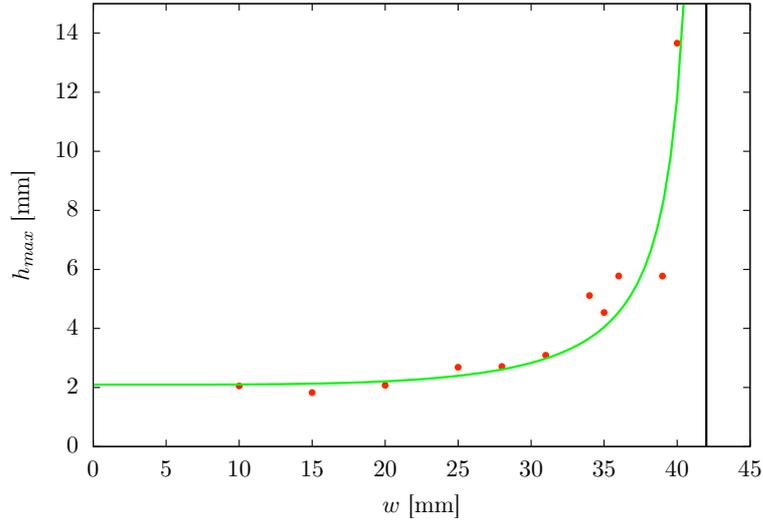


FIGURE 1.14 – Hauteur maximum  $h_{max}$  atteinte par le front liquide en fonction de la largeur  $w$  de la cellule.  $h_{max}$  augmente fortement quand  $w$  tend vers  $2L^*$  (dont la valeur est représentée par le segment noir vertical). La courbe verte a pour équation  $h_{max} = \frac{2\gamma}{\rho g e_0 [1 - (w/2L^*)^4]}$ .

expérimentaux.

**État métastable** Nous avons mentionné l'influence de l'épaisseur initiale de la cellule,  $e_0$ , pour déterminer si l'ascension déformable sera spontanée ou déclenchable. Un ménisque de liquide, dont l'ordre de grandeur est la longueur capillaire,  $l_c$ , se forme sur chacune des parois. Ainsi, si les parois sont suffisamment proches, c'est-à-dire si  $e_0 \sim l_c$ , les deux parois se voient initialement, les deux ménisques entrent en contact et il y a ascension de liquide entre les parois. Mais cela ne suffit pas pour déterminer si l'ascension sera spontanée ou déclenchable. La longueur de la cellule est en effet un paramètre important. La question est de savoir si la montée capillaire initiale, dans le cas  $e_0 \sim l_c$ , apportera suffisamment d'énergie au système pour pouvoir courber la plaque flexible sur toute la longueur de la cellule. En effet, lors de l'imprégnation de la cellule, la plaque flexible est courbée en bas, loin sous le front de liquide. Cependant à l'extrémité opposée loin au dessus du front de liquide, la plaque flexible retrouve son état initial plat (voir figure 1.15).

Près de la pointe du front de liquide, la partie courbée (en dessous) et la partie plate (au dessus) sont connectées par une région de transition dans laquelle la plaque est étirée (Lobkovsky & Witten, 1997; Mahadevan & Das, 2007). La longueur de persistance nécessaire pour passer à une courbure nulle est fixée par l'équilibre entre les énergies de courbure et d'étirement. Pour une plaque de largeur  $W$ , épaisseur  $\delta$  et rayon de courbure à une extrémité  $R$ , la longueur nécessaire pour retrouver une courbure nulle est  $l_p \sim \frac{W^2}{\sqrt{R\delta}}$ . Dans notre cas, la largeur courbée est de l'ordre de la largeur de la cellule,  $W \sim w$ , la plaque a une épaisseur  $a$  et le rayon de courbure est  $R \sim w^2/e_0$ , la longueur de persistance est donc :

$$l_p \sim w \sqrt{\frac{e_0}{a}} \quad (1.18)$$

Pour une feuille de polypropylène d'épaisseur  $a = 100 \mu\text{m}$  sur une cellule de largeur  $w = 20 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $e_0 = 1 \text{ mm}$ , on trouve  $l_p \sim 5 \text{ cm}$ .

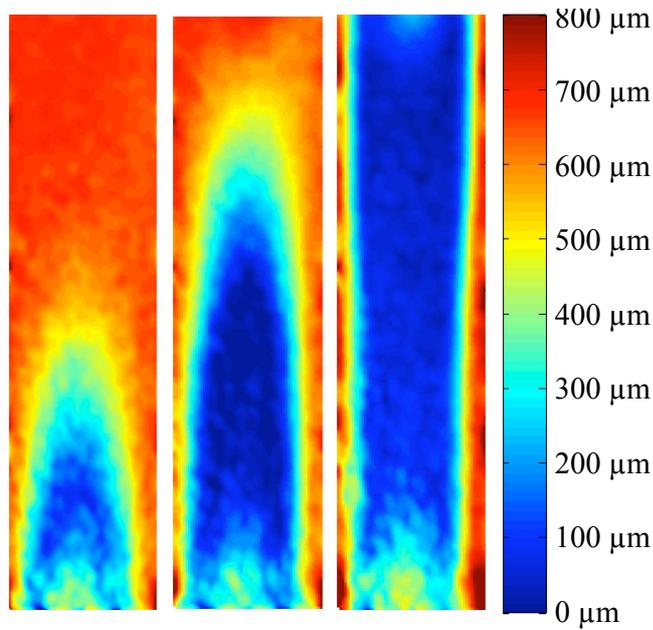


FIGURE 1.15 – Profil d'épaisseur d'une cellule d'épaisseur  $e_0 = 0,8$  mm et de largeur  $w = 40$  mm, à  $t = 15$  s, 200 s, 1200 s. Nous utilisons la technique de profilométrie par projection de franges décrite dans (Maurel & Petitjeans, 2009). Aux temps longs, la plaque déformable est au contact avec la plaque de verre au centre de la cellule. Nous retrouvons les régions sèches, de largeur  $L^*$ , près des cales. À temps court, le bas de plaque flexible est courbé alors que le haut reste plat.

### 1.3 Dynamique

Nous nous plaçons dorénavant dans le cas d'imprégnation déformable, où  $w > 2L^*$ . Nous représentons la hauteur d'ascension  $h$  en fonction du temps pour plusieurs cellules, en faisant varier l'épaisseur et la largeur de la cellule ainsi que la rigidité flexionnelle de la plaque déformable. Nous constatons que toutes les courbes se superposent (voir figure 1.16).

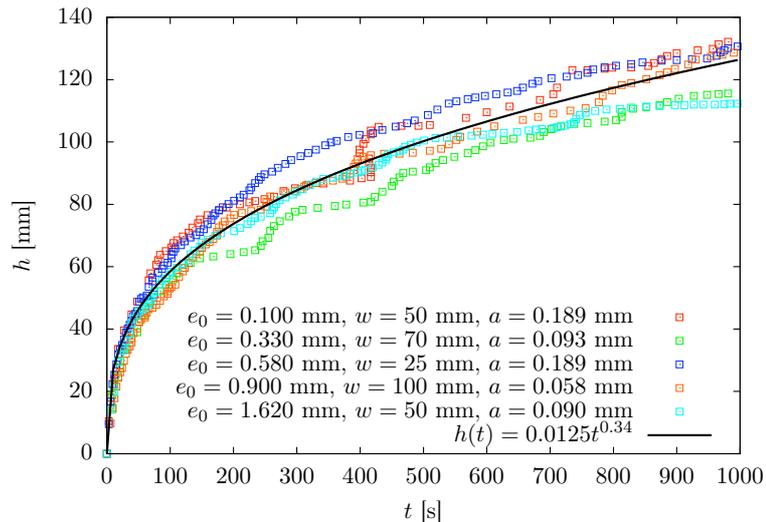


FIGURE 1.16 – Hauteur d'ascension en fonction du temps pour des cellules de différentes géométries. L'huile de silicone utilisée a pour viscosité  $\eta = 15,4$  mPa.s. Les données sont bien ajustées par la fonction  $h(t) = 0,0125t^{0,34}$  (courbe noire).

Il ne semble pas y avoir d'influence ni des caractéristiques mécaniques de la plaque déformable, ni des dimensions géométriques de la cellule. À temps long, les données sont bien ajustées par la loi

$h(t) \simeq 0.0125t^{0.34}$  pour une huile de viscosité  $\eta = 15,4$  mPa.s. L'exposant de cette loi de puissance reste valable pour une large gamme de viscosités (voir figure 1.17).

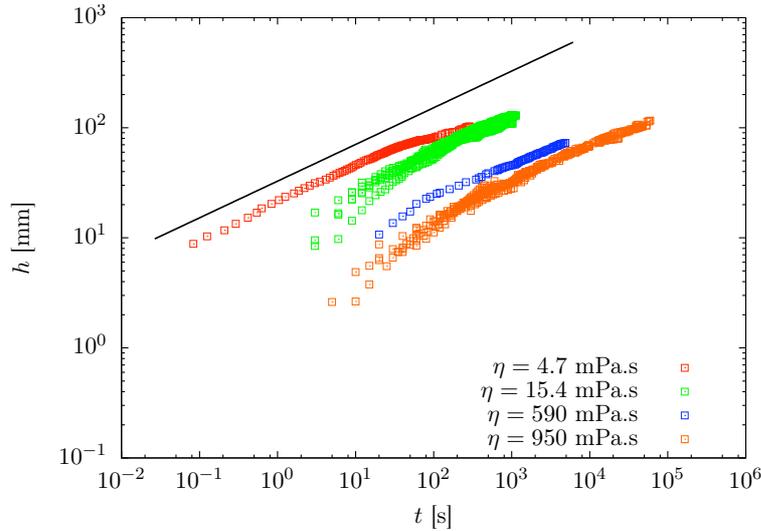


FIGURE 1.17 – Hauteur d’ascension  $h(t)$  en fonction du temps pour différentes géométries et propriétés mécaniques de cellules et des huiles de silicone dont la viscosité va de 5 à 1000 mPa.s. Les points expérimentaux se regroupent par fluide utilisé, et suivent une loi de puissance de la forme  $h \sim t^{1/3}$  (droite noire).

Le préfacteur dépend des propriétés physiques du fluide utilisé : l’ascension est plus lente pour des viscosités plus grandes (voir figure 1.17), mais plus rapide pour des tensions de surface plus élevées.

### 1.3.1 Modèle

#### Cas rigide

Nous décrivons ici l’évolution dynamique de  $h$  vers sa valeur d’équilibre, dans le cas d’un tube rigide, et nous utilisons les notations de la figure 1.4. Le moteur de l’ascension est la force capillaire  $F_\gamma$  qui tire sur la colonne de liquide. La friction visqueuse  $F_\eta$ , l’inertie du fluide et le poids de la colonne de liquide freinent l’ascension. Ces deux dernières forces seront négligées. Dans les cas qui nous intéressent, les tubes sont petits et l’écoulement se fait à faible nombre de Reynolds ( $Re \ll 1$ ) : l’inertie est négligeable. Loin de l’équilibre ( $h \ll h_{eq}$ ), le poids de la colonne de liquide peut être négligé. La force capillaire est proportionnelle à la tension de surface  $\gamma$  et on a :

$$F_\gamma \sim \gamma R \quad (1.19)$$

La contrainte visqueuse est d’ordre  $\eta V/R$  et s’applique sur la surface mouillée du capillaire, d’ordre  $Rh$  où  $\eta$  est la viscosité du fluide et  $V$  sa vitesse d’ascension. La force visqueuse est donc :

$$F_\eta \sim \eta V h \quad (1.20)$$

La dynamique est dictée par un équilibre entre capillarité et viscosité :

$$F_\eta \sim F_\gamma \quad (1.21)$$

Soit, en notant  $V = \frac{dh}{dt} = \dot{h}$  :

$$\eta \dot{h} h \sim \gamma R \quad (1.22)$$

Nous obtenons par intégration la loi de progression du liquide au cours du temps :

$$h(t) \sim \left( \frac{\gamma R}{\eta} t \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.23)$$

Dans un tube, l'ascension capillaire suit la loi couramment attribuée à Washburn (Washburn, 1921). Cette loi d'échelle est très générale et décrit, à des modifications du préfacteur près, la dynamique d'imprégnation capillaire de milieux poreux variés. Elle est utilisée pour décrire l'imprégnation dans les sols, les murs, des surfaces micro-texturées, les tissus, le papier buvard (de Gennes *et al.*, 2005). La loi dynamique entre deux plaques est également pseudo-diffusive et seul le préfacteur change du fait de différences géométriques :

$$h(t) = \left( \frac{\gamma e}{3\eta} t \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.24)$$

Le temps caractéristique,  $\tau$ , nécessaire pour atteindre la hauteur d'équilibre de Jurin  $h_{eq}$ , avec la dynamique de Washburn est :

$$\tau \sim \frac{\eta \rho g}{\gamma^2} h_{eq}^3 \quad (1.25)$$

Ces résultats ont été démontrés, avec pour motivation la science des sols et l'extraction de pétrole, dès le début du 20<sup>e</sup> siècle par Bell et Cameron (Bell & Cameron, 1906), Lucas (Lucas, 1918) et Washburn (Washburn, 1921).

### Cas déformable

Le système est représenté sur la figure 1.18. On rappelle que le liquide qui est monté par capillarité se trouve en forte dépression et provoque l'écrasement de la cellule : la paroi flexible tend à venir au contact de la paroi rigide et le centre de la cellule est plaqué contre la paroi rigide alors que les bords forment un coin.

**Un modèle quasi statique où le rayon dépend de la hauteur** De la même manière que dans le cas indéformable, le moteur de l'ascension est la capillarité. Au point  $A$  d'altitude  $h$ , la force capillaire  $F_\gamma \sim \gamma r(h)$  tire sur la colonne de liquide. La taille  $r(z)$  du ménisque liquide dépend de l'altitude  $z$ . Cette taille est limitée par la pesanteur, si bien qu'un ordre de grandeur de  $r(z)$  est donné par l'équilibre entre gravité ( $P_A - P_B = -\rho g h$ ) et capillarité : la différence de pression au ménisque est donnée par la loi de Laplace  $P_A - P_{atm} \sim \frac{\gamma}{r(h)}$ . Ainsi, nous obtenons au point  $A$  d'altitude  $h$  :

$$r(h) \sim \frac{\gamma}{\rho g h} \quad (1.26)$$

L'écoulement se fait dans le coin formé par les parois rigide et déformable, à l'intérieur d'un ménisque d'épaisseur  $r(h)$ . La contrainte visqueuse est donc d'ordre  $\eta V/r(h)$  et elle s'applique sur une surface proportionnelle à  $hr(h)$ . Si bien que la force de résistance visqueuse est d'ordre  $F_\eta \sim \eta V/r(h) \times r(h)h$ . En équilibrant capillarité et viscosité,  $F_\eta \sim F_\gamma$ , on a donc :

$$\frac{\gamma^2}{\rho g h} \sim \eta V h \quad (1.27)$$

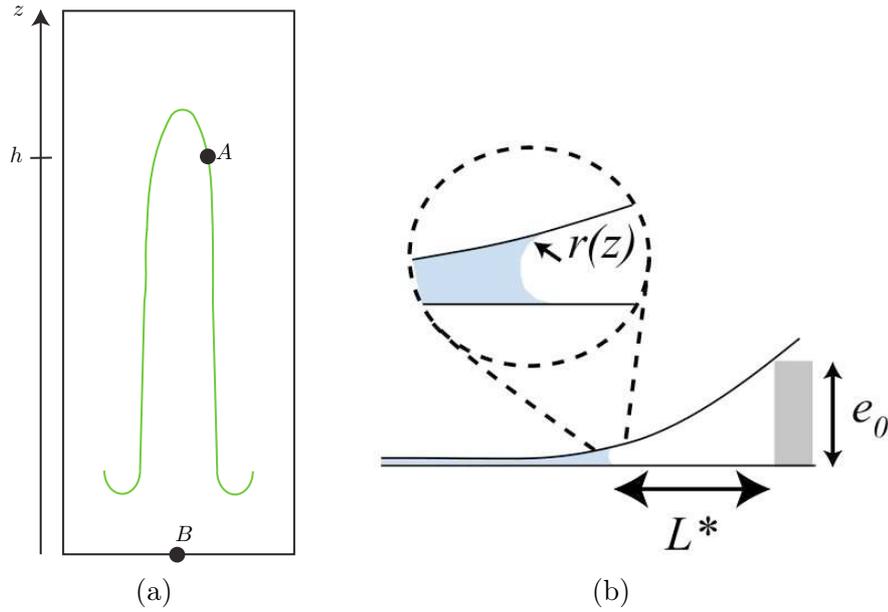


FIGURE 1.18 – (a) Schéma représentant la figure 1.6. Le point  $A$  est au ménisque, à l’altitude  $z = h$ , le point  $B$  dans la colonne de liquide, à l’altitude  $z = 0$ . (b) Vue en coupe : à l’altitude  $z$ , le ménisque a pour rayon  $r(z)$ .

ou encore

$$\frac{\gamma^2}{\rho g h} \sim \eta h \dot{h} \quad (1.28)$$

qu’on peut intégrer pour obtenir la loi de progression du liquide au cours du temps :

$$h(t) \sim \left( \frac{\gamma^2}{\eta \rho g} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}} \quad (1.29)$$

On obtient une loi en  $t^{1/3}$ , qui ne dépend ni des caractéristiques géométriques de la cellule, ni des caractéristiques mécaniques de la plaque déformable, mais seulement des propriétés physiques du fluide utilisé.

**Modèle inverse** Un ordre de grandeur de la taille  $r$  du ménisque liquide à une altitude  $h$  est donné par l’équilibre entre gravité et capillarité :

$$r \sim \frac{\gamma}{\rho g h} \quad (1.30)$$

Le temps caractéristique pour atteindre une hauteur  $h$  dans un capillaire de rayon  $\gamma/\rho g h$  est donné par l’équation 1.25. Si l’on applique cette relation localement, en  $h$ , et qu’on l’inverse, on obtient directement :

$$h(t) \sim \left( \frac{\gamma^2}{\eta \rho g} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}} \quad (1.31)$$

Ce résultat est similaire à celui de la montée capillaire dans un coin (Concus & Finn, 1974; Tang & Tang, 1994; Ponomarenko & Clanet, 2011) qui suit une loi de puissance en  $t^{1/3}$ . Cette équation décrit la dynamique de l’ascension capillaire dans un coin de géométrie quelconque. Elle est également en très bon accord avec nos résultats expérimentaux d’ascension capillaire dans un coin autoconstruit (voir figure 1.19)

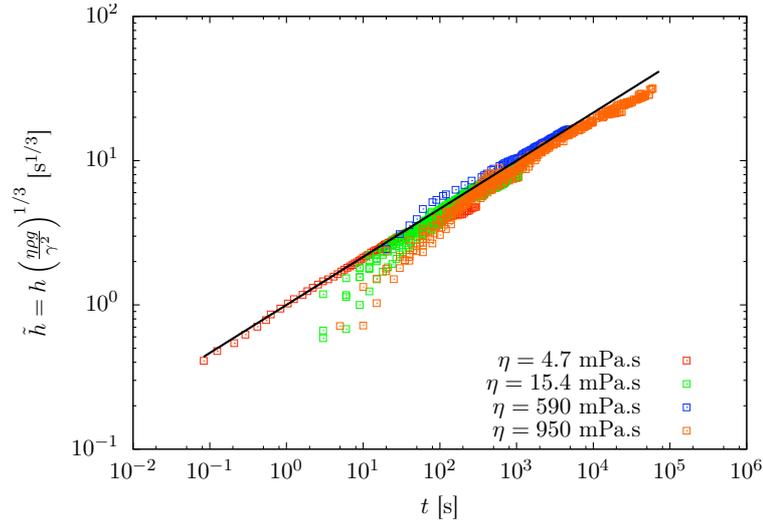


FIGURE 1.19 –  $\tilde{h} = h \left( \frac{\eta \rho g}{\gamma^2} \right)^{1/3}$  en fonction du temps. Toutes les données se regroupent sur une seule courbe maîtresse  $\tilde{h} = t^{1/3}$ .

Toutes les données se regroupent sur une seule courbe maîtresse d'équation  $\tilde{h}(t) = t^{1/3}$  avec  $\tilde{h} = h \left( \frac{\eta \rho g}{\gamma^2} \right)^{1/3}$ . Nous observons toutefois à temps court et à temps long des écarts à ce modèle.

### Divergences

**À temps court** La hauteur croît plus vite que ce que prédit l'équation 1.29. En effet, au début de l'ascension du liquide, la cellule n'est que très faiblement déformée sous l'effet des forces capillaires. La cellule ne présentant pas de coin, on s'attend à ce que la dynamique d'imprégnation soit décrite par la loi de Washburn dans une cellule rigide d'épaisseur  $e_0$  :

$$h(t) = \sqrt{\frac{\gamma e_0 t}{\eta}} \quad (1.32)$$

Le passage de la dynamique classique de Washburn à celle de l'ascension capillaire dans un coin se fait lorsque le liquide a atteint une hauteur suffisante pour que la dépression capillaire soit assez forte pour écraser la cellule. Ceci est vrai lorsque le front liquide atteint une hauteur  $h^*$  suffisamment grande. Lorsque le front liquide est à une hauteur  $h$ , le moment appliqué par le liquide sur la plaque est d'ordre  $w^2 h \gamma / e_0$ . Il est équilibré par le moment résistant de la plaque flexible, qui est courbée sur une longueur de l'ordre de la longueur de persistance déjà rencontrée  $l_p \sim w \sqrt{e_0 / a}$ . La courbure de la plaque flexible est d'ordre  $e_0 / w^2$  et le moment correspondant est donc  $l_p B e_0 / w^2$ . Les forces capillaires peuvent vaincre la rigidité flexionnelle de la plaque si  $h$  est plus grande que :

$$h^* = \frac{E (e_0 a)^{5/2}}{\gamma w^3} \quad (1.33)$$

On s'attend donc à trouver la dynamique d'ascension dans un coin au dessus de  $h^*$ . Pour des valeurs typiques des paramètres de l'équation ( $E = 2$  GPa,  $e_0 = 1$  mm,  $a = 100$   $\mu$ m,  $w = 2$  cm et  $\gamma = 20$  mN/m), on trouve  $h^* \sim 30$  mm, ce qui est l'ordre de grandeur obtenu expérimentalement.

**À temps long** Les expériences s'écartent également des prédictions, le front ralentissant légèrement. Cet effet est dû au drainage transverse du liquide des ménisques, au bord, vers le centre de

la cellule. Cet effet est amplifié à la fois dans les cellules de plus grande rugosité et de plus grande largeur. Nous représentons sur la figure 1.20 l'évolution de la hauteur maximum du front liquide au cours du temps pour deux cellules identiques hormis leur largeur  $w$ . L'ascension est plus rapide

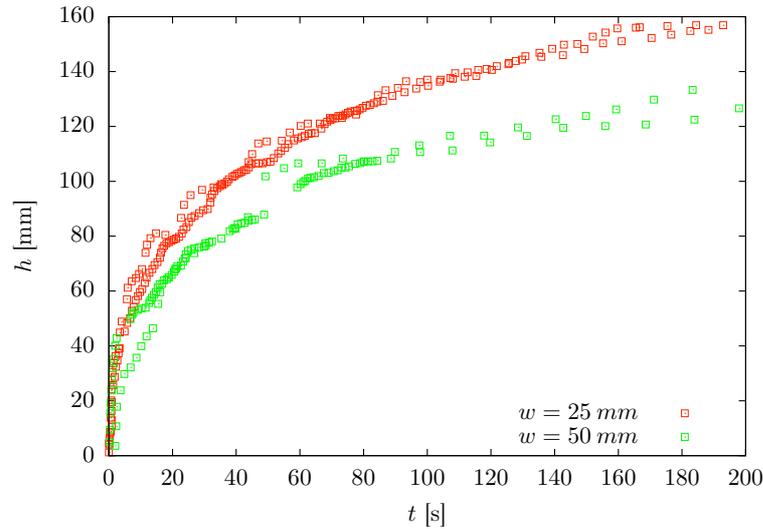


FIGURE 1.20 – Évolution de la hauteur en fonction du temps, pour deux cellules de hauteur, d'épaisseur au bord  $e_0$  et de propriétés mécaniques identiques, mais de largeurs différentes. L'ascension est plus rapide dans la cellule la plus étroite ( $w = 25$  mm, carrés rouges) que dans la cellule plus large ( $w = 50$  mm, carrés verts). Deux expériences ont été réalisées pour chaque largeur.

dans la cellule la plus étroite, l'effet du drainage latéral étant amplifié dans la cellule la plus large. Nous représentons sur la figure 1.21 l'évolution de la hauteur maximum du front de liquide au cours du temps pour trois cellules identiques hormis leur largeur et leur rugosité. L'effet de drainage,

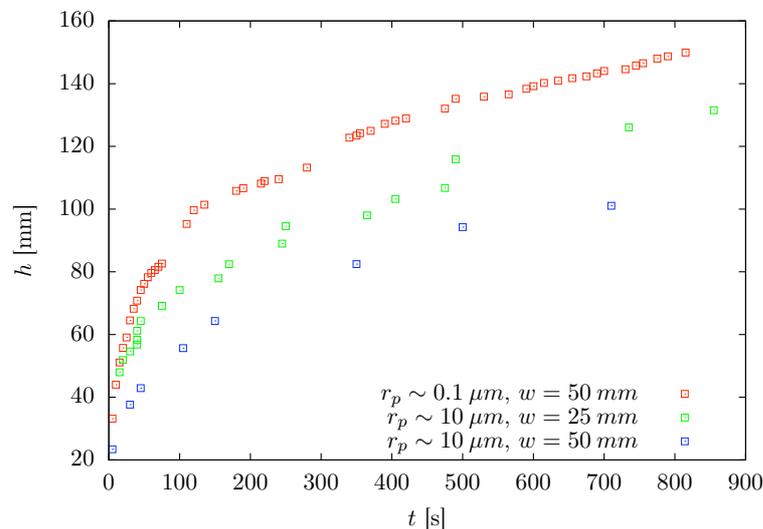


FIGURE 1.21 – Évolution de la hauteur d'ascension en fonction du temps, pour trois cellules de hauteur, d'épaisseur au bord  $e_0$  et de propriétés mécaniques identiques, mais de largeurs et rugosité différentes. L'ascension est plus rapide dans la cellule la moins rugueuse.

amplifié par la largeur, est encore amplifié lorsqu'on augmente la rugosité. Ainsi, la cellule dans laquelle l'ascension est la plus rapide serait une cellule la plus étroite et la moins rugueuse possible. L'ascension est plus lente dans une cellule plus large et plus rugueuse.

**Cellules très larges** Dans une cellule très large, nous observons même une modification de la forme du front liquide. Deux doigts se développent, près des cales, alors que la région centrale se remplit par drainage horizontal (voir figure 1.22). D'un point de vue dynamique, alors que l'ascension

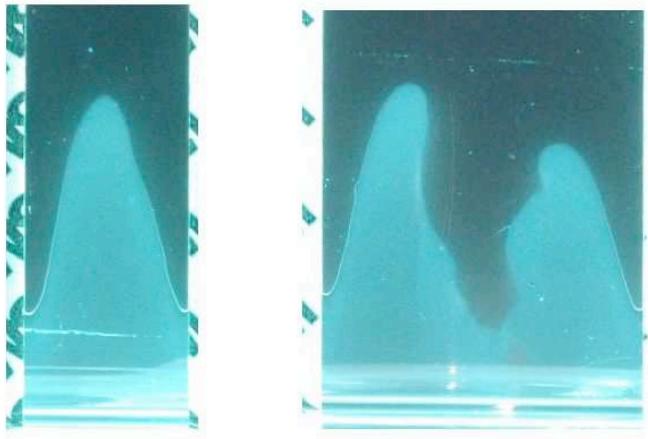


FIGURE 1.22 – Dans une cellule étroite, un seul doigt se développe au centre de la cellule (à gauche,  $w = 25$  mm). Dans une cellule plus large, (à droite,  $w = 50$  mm), la montée se fait simultanément sur deux doigts, près des cales. Dans ce cas, la région centrale est imprégnée horizontalement à partir du ménisque proche des cales.

des doigts suit la loi  $\tilde{h} \sim t^{1/3}$ , le drainage latéral est décrit par la loi de Washburn dans un milieu poreux, en prenant une taille de pore  $r_p$  de l'ordre de la rugosité :

$$x(t) \sim \sqrt{\frac{\gamma r_p}{\eta}} t^{1/2} \quad (1.34)$$

Les doigts de liquide, près des cales, ont ainsi une ascension plus rapide au début, mais ralentissent aussi plus vite que le drainage latéral. Nous observons expérimentalement que les doigts de liquide finissent par se rejoindre pour ne plus former qu'un front.

Dans le cas où  $w \gg 2L^*$ , l'imprégnation horizontale des doigts vers le centre de la cellule prend un temps caractéristique

$$\tau_{imp} \sim \frac{\eta}{\gamma r_p} w^2 \quad (1.35)$$

en reportant ce temps dans l'équation 1.29, nous trouvons ainsi la hauteur atteinte par le front de liquide au moment où les doigts se rejoignent :

$$h \sim \left( \frac{\gamma w^2}{\rho g r_p} \right)^{1/3} \quad (1.36)$$

qui ne dépend pas de la viscosité du fluide utilisé. Avec  $w \simeq 5$  cm et  $r_p \simeq 1 \mu\text{m}$ , nous nous attendons à ce que les doigts liquides se rejoignent à une hauteur  $h \simeq 17$  cm, ce qui est en bon accord avec nos observations expérimentales.

## 1.4 Conclusion

Nous avons présenté des résultats expérimentaux d'ascension capillaire dans une cellule en partie déformable. Nous avons montré qu'il est possible d'utiliser une cellule déformable pour faire atteindre

une hauteur infinie à un doigt de liquide. En particulier, nous avons observé que les propriétés élastiques et géométriques de la cellule décident du mode d'imprégnation : peu de déformation et une dynamique de Washburn dans le cas saturant, écrasement de la cellule et une dynamique de montée capillaire dans un coin dans le cas infini. Dans ce dernier cas, nous observons des cellules ne s'imprégnant pas spontanément mais après déclenchement.

Ces résultats représentent une première étape vers la compréhension des couplages entre imprégnation et déformation de structures plus complexes, telles que des matrices poreuses déformables.

**Montée élasto-capillaire dans un tube** Nous avons initialement prévu l'étude de l'ascension capillaire dans un tube cylindrique déformable, mais n'avons pu obtenir de résultats exploitables quantitativement. Des études théoriques existent sur l'effondrement de cylindres en dépression dont la surface interne est recouverte de liquide (Heil & White, 2002; Heil *et al.* , 2008).

Qualitativement, nos expériences préliminaires montrent un comportement cohérent avec les prévisions numériques de (Heil *et al.* , 2008) (voir figure 1.23). Un faible volume de liquide suffit à fermer

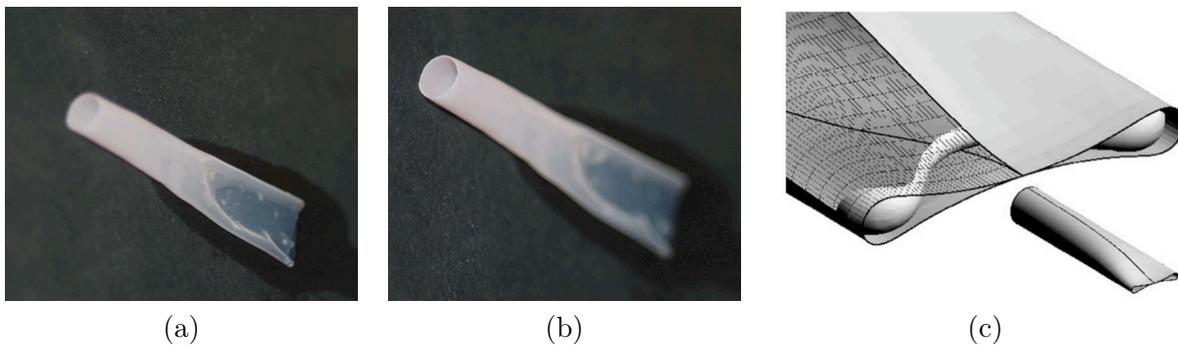


FIGURE 1.23 – Montée capillaire dans un tube cylindrique. *(a,b)* Expérience préliminaire avec un tube d'élastomère de module d'Young  $E \sim 0,24$  MPa, rayon  $R = 2$  mm et épaisseur  $h \simeq 100$   $\mu\text{m}$ . L'extrémité en contact avec le liquide mouillant (mise au point en *(a)*) s'écrase sous l'effet des forces capillaires alors que l'extrémité libre (mise au point en *(b)*) reste à section circulaire. Il existe une zone de transition étirée pour passer de l'état écrasé à l'état au repos. *(c)* Prévision théorique de la forme d'un cylindre obstrué par un pont capillaire liquide (image tirée de (Heil *et al.* , 2008)).

une extrémité du tube cylindrique, qui s'écrase sous l'effet des forces capillaires, l'autre extrémité du cylindre restant à section cylindrique. Nous notons que le cylindre s'écrase ici spontanément, sans mise en dépression ni déclenchement de l'ascension. Un moyen plus simple d'obtenir des résultats qualitatifs serait d'effectuer des expériences avec des cylindres placés en dépression. La différence de pression supplémentaire créée par aspiration permettrait d'utiliser une plus grande gamme de dimensions et caractéristiques élastiques que dans le cas où seule la dépression capillaire est en jeu. Dans ce cadre, (Heil *et al.* , 2008) prévoit la possibilité que la coque cylindrique présente plusieurs lobes (voir figure 1.24). Nous décrivons dans le chapitre suivant comment une coque cylindrique se déstabilise lorsqu'elle est placée en dépression. Nous choisissons ainsi un système plus simple, sans liquide, afin de comprendre quels sont les ingrédients en jeu dans le cas de grandes déformations. Nous prévoyons de poursuivre ensuite l'étude de l'imprégnation capillaire (spontanée et "aidée" par aspiration) de coques cylindriques.

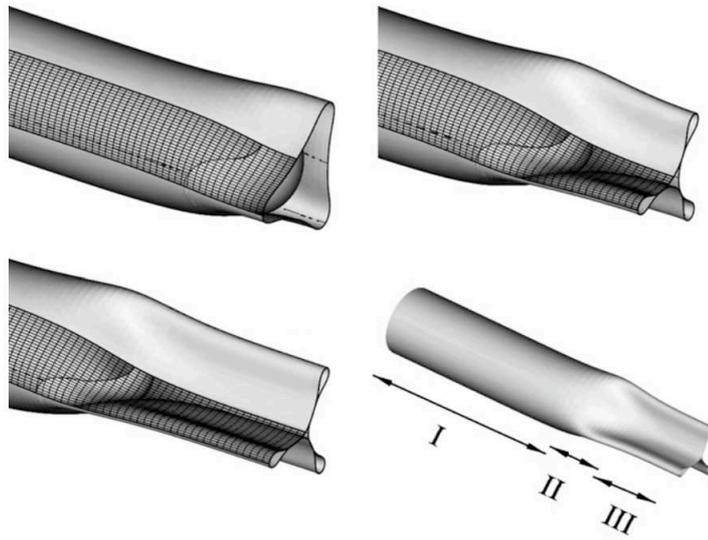


FIGURE 1.24 – Déstabilisation en 3 lobes d'un cylindre, dont la paroi interne est recouvert de liquide, placé en dépression. Image tirée de (Heil *et al.* , 2008)



## Flambement d'une coque cylindrique en dépression

### 2.1 Introduction

L'étude des cylindres sous pression a été importante dès l'essor des machines à vapeur, nécessitant le transport de fluides via des tubes pressurisés. En 1858, William Fairbairn cherche un moyen de prévenir l'effondrement de tubes sous l'effet d'une pression extérieure (Fairbairn, 1858). Il rapporte déjà plusieurs modes de flambement (voir figure 2.1) mais ne s'intéresse pas au nombre de modes en tant que tel, son but étant précisément d'éviter le flambement.

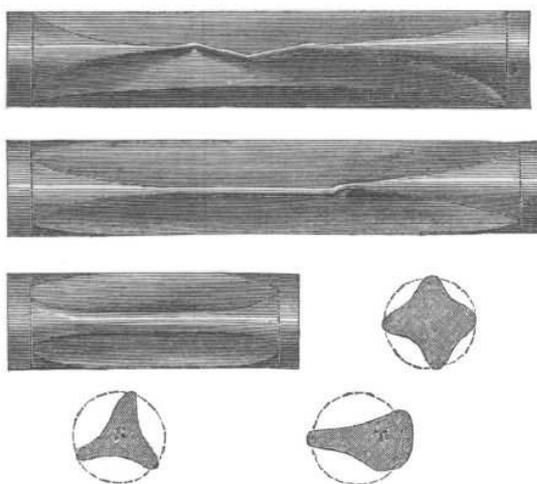


FIGURE 2.1 – Image tirée de (Fairbairn, 1858). Pour un diamètre et une épaisseur identiques, le flambement d'un cylindre plus court présente plus de lobes.

Dès le début du 20<sup>e</sup> siècle, motivés par les travaux sur les fusées (von Karman, 1910; von Mises, 1914) des études présentent des lois reliant la pression, le nombre de lobes et les caractéristiques géométriques du tube, la valeur du nombre de lobes  $n$  étant obtenue par des séries d'essais et erreurs. Dans leur article de 1934, Windenburg et Trilling listent les différentes formules d'instabilités existantes et les comparent à des résultats expérimentaux, de pression et de nombres de lobes, puis proposent une expression analytique du nombre de lobes (Winderburg & Trilling, 1934).

Dans les années 1960 de nombreux rapports sont publiés sous l'impulsion de la NASA et résolvent complètement l'état élastique du cylindre en intégrant les équations différentielles définissant le système (Kennedy & Venard, 1962; NASA, 1965; Antman, 1968). Ces études gardent toujours à l'esprit l'idée de trouver le seuil de flambement, en testant diverses hypothèses (pression externe radiale, axiale, défauts) avec pour but d'éviter la ruine d'un système physique.

Par la suite, des résultats sur le comportement après le seuil de flambement (Flaherty *et al.* , 1972)

et des études exhaustives sur les coques cylindriques (Yamaki, 1984) sont publiés.

Même si la prévention de l'effondrement de cylindre sous l'effet de la pression reste aujourd'hui un enjeu industriel (figure 2.2), les études récentes ne cherchent plus à éviter le flambement mais à l'étudier, voire à l'utiliser, par exemple comme dispositif permettant de délivrer des médicaments (Dion *et al.*, 1995).



FIGURE 2.2 – Photo d'un réservoir industriel en acier, soumis à une dépression interne, avant et après effondrement. Éviter le flambement de tels réservoirs demeure un enjeu industriel.

Nous présentons ici une étude simple de la mécanique d'un tel système, et posons les bases de l'utilisation de ces instabilités mécaniques comme actuateurs, par exemple pour créer un mouvement de rotation et de translation à partir d'un objet mou. Nous proposons d'étudier expérimentalement l'effondrement d'une coque cylindrique placée en dépression. Nous utilisons des tubes modèles en élastomère dont nous varions les caractéristiques géométriques et les propriétés physiques et proposons un modèle simple ne nécessitant pas l'intégration d'équations différentielles. Nous nous intéressons à la structure du cylindre près et loin du seuil de flambement.

## 2.2 Dispositif Expérimental

Nous représentons sur la figure 2.3 le dispositif expérimental et les notations utilisées sur la figure 2.4. Nous étudions un tube de module de Young  $E$  et module de Poisson  $\nu$ . Le cylindre de longueur  $L$ , épaisseur  $h$  et rayon intérieur  $R$ , fermé hermétiquement, est fixé à une extrémité et peut être fixé ou libre de se déplacer à l'autre. Nous aspirons l'air intérieur du tube à l'aide d'une seringue et visualisons l'évolution de sa forme avec la pression sur des prises de vues latérales et axiales, permettant d'observer l'intérieur du dispositif.

Nous utilisons des cylindres réalisés en PolyVinylSiloxane (PVS) de dureté shore 8 (Module de Young  $E = 0,24$  MPa), shore 16 (Module de Young  $E = 0,48$  MPa), shore 22 (module de Young  $E = 0,6$  MPa) et shore 32 ( $E = 0,96$  MPa). La fabrication des tubes est décrite en annexe.

Lorsque nous diminuons la pression à l'intérieur du cylindre, la paroi commence par se déplacer radialement vers l'intérieur. La coque se déstabilise pour former un nombre  $N$  de lobes dépendant de la géométrie du tube. À épaisseur  $h$  et rayon  $R$  constants, diminuer la longueur du tube fait augmenter le nombre de lobes (voir figure 2.5).

Nous ne nous sommes pas intéressés ici à la détermination du seuil de flambement en pression, mais

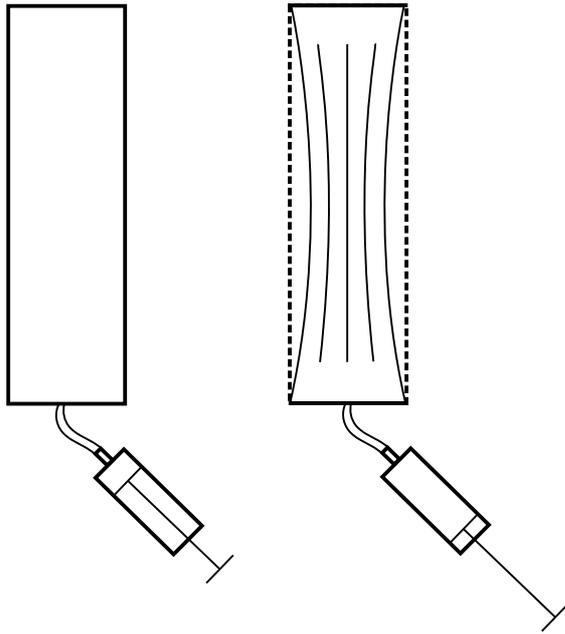


FIGURE 2.3 – Le cylindre, fermé hermétiquement, est fixé à une extrémité alors que l’autre extrémité peut être fixée ou libre de se déplacer. Une seringue permet de retirer de l’air de l’intérieur du tube, le plaçant en dépression et provoquant le flambement.

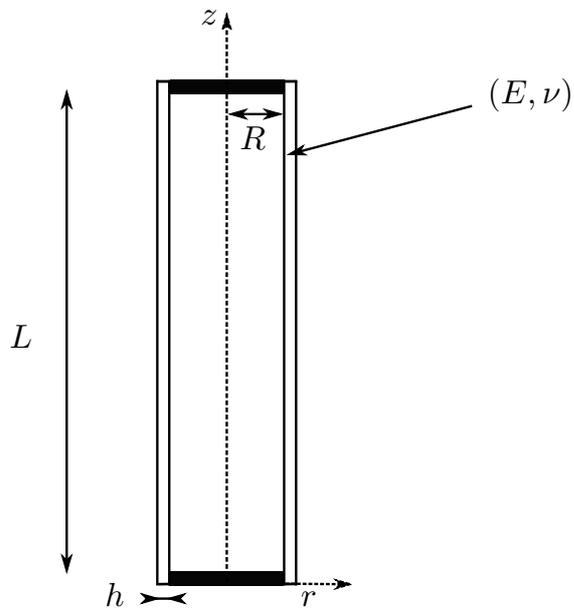


FIGURE 2.4 – Nous considérons un cylindre de longueur  $L$ , épaisseur  $h$ , rayon intérieur  $R$ , module de Young  $E$  et de module de Poisson  $\nu$ .



FIGURE 2.5 – Vue latérale et vue de dessus (axiale) d’un cylindre de PVS Shore 8, de rayon  $R = 18$  mm, d’épaisseur  $h = 2$  mm pour différentes longueurs. Le nombre de lobes varie de  $N = 2$  à  $N = 6$ .

avons constaté que le nombre de lobes sélectionné près du seuil n’évoluait ensuite plus, même très loin du seuil. Nous utilisons donc par la suite nos mesures loin du seuil (telles que sur la figure 2.5), considérant que le nombre de lobes que nous observons est celui qui fut sélectionné au début de l’instabilité.

Nous traçons sur la figure 2.6 l’évolution de  $N$  en fonction de  $L$  à module de Young  $E$ , épaisseur  $h$  et rayon  $R$  fixés. Nous observons que pour un long cylindre, le tube tend à s’aplatir, le nombre de lobes est  $N = 2$ . Cependant si le tube est suffisamment court, le nombre de lobes augmente, pour atteindre ici  $N = 5$  pour un cylindre de longueur  $L = 20$  mm comparable au rayon  $R = 18$  mm, d’épaisseur  $h = 2$  mm et de module de Young  $E = 0,24$  MPa. Avant de nous intéresser plus avant aux résultats expérimentaux, nous nous posons la question de ce qu’est un tube “court”.

### 2.3 Qu’est-ce qu’un tube “court” ou longueur de persistance

Nous constatons expérimentalement qu’un tube court flambe avec un nombre de lobes  $N > 2$ , alors qu’à partir d’une certaine longueur, il se déstabilise toujours en  $N = 2$  lobes. Lorsque nous pinçons un tube déformable à une extrémité (voir figure 2.7), nous modifions localement son rayon. Loin du pincement, le tube retrouve une section circulaire. Lorsqu’on augmente localement le rayon d’un tube, en emmanchant une extrémité sur un cylindre de rayon supérieur, nous remarquons la même zone de transition. Nous cherchons ici à comprendre sur quelle longueur s’étend la zone déformée du tube.

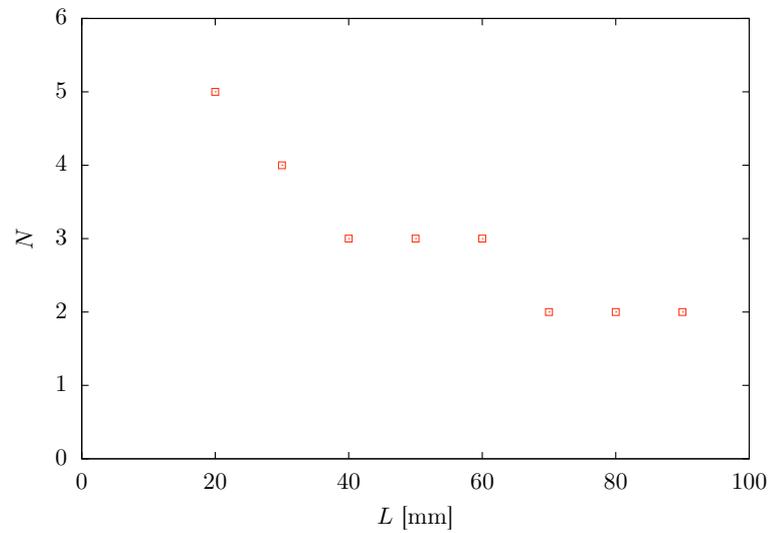


FIGURE 2.6 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur, pour des cylindres de PVS de shore 8 de rayon  $R = 18$  mm, d'épaisseur  $h = 2$  mm constants. Plus le tube est court, plus la coque se déstabilise en un nombre grand de lobes.



FIGURE 2.7 – Photo d'un cylindre pincé. Nous imposons un déplacement local et modifions la section de la coque à une extrémité. Loin de cette zone, le cylindre retrouve son état initial à section circulaire.

### 2.3.1 En loi d'échelle

Nous considérons un cylindre (voir figure 2.8) de rayon  $R$ , d'épaisseur  $h$  et de longueur infinie. Nous lui imposons un déplacement radial local  $w_0$ . Le rayon modifié passe du minimum  $R - w_0$

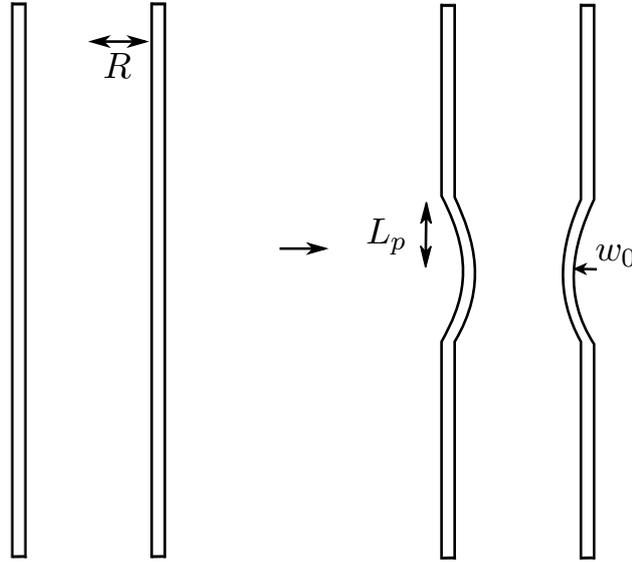


FIGURE 2.8 – Cylindre de rayon  $R$  au repos (à gauche). Nous imposons un déplacement radial  $w_0$ , modifiant localement le rayon du cylindre qui a pour minimum  $R - w_0$ . La longueur de persistance  $L_p$  est la longueur nécessaire au cylindre pour retrouver son état non perturbé.

au rayon initial  $R$  sur une longueur  $L_p$ , la longueur de persistance. La courbure engendrée par cette déformation est d'ordre  $1/\rho \sim w_0/L_p^2$  et l'énergie élastique de courbure par unité de surface  $\mathcal{E}_C \sim Eh^3 \frac{1}{\rho^2}$  s'écrit :

$$\mathcal{E}_C \sim Eh^3 \left( \frac{w_0}{L_p^2} \right)^2 \quad (2.1)$$

La déformation est d'ordre  $\epsilon \sim w_0/R$  et l'énergie d'extension par unité de surface  $\mathcal{E}_S \sim Eh\epsilon^2$  s'écrit :

$$\mathcal{E}_S \sim Eh \left( \frac{w_0}{R} \right)^2 \quad (2.2)$$

En considérant que les énergies mises en jeu s'équilibrent  $\mathcal{E}_S \sim \mathcal{E}_C$  :

$$Eh^3 \left( \frac{w_0}{L_p^2} \right)^2 \sim Eh \left( \frac{w_0}{R} \right)^2 \quad (2.3)$$

c'est-à-dire,

$$L_p^4 \sim \frac{Eh^3}{Eh} w_0^2 \left( \frac{R}{w_0} \right)^2 \quad (2.4)$$

nous obtenons

$$L_p \sim \sqrt{Rh} \quad (2.5)$$

La longueur de persistance  $L_p$  ne dépend ainsi pas de l'amplitude du déplacement radial imposé ou des propriétés physiques du tube, mais uniquement des caractéristiques géométriques du cylindre (Vaziri & Mahadevan, 2008). Pour les cylindres que nous utilisons, de rayon d'ordre  $R \sim 2.10^{-2}$  m et d'épaisseur d'ordre  $h \sim 2.10^{-3}$  m, la longueur de persistance est centimétrique, d'ordre  $L_p \sim 2$  cm.

### 2.3.2 Résultats expérimentaux

Nous comparons cette expression aux données expérimentales. Pour ceci, nous utilisons des tubes d'élastomère de rayon  $R$ , épaisseur  $h$  et longueur  $L$ , et leur imposons à une extrémité un rayon  $R_2 > R$  (voir figure 2.9). Nous mesurons la longueur  $L_p$  sur laquelle le tube retrouve son rayon naturel. Bien que le tube soit ici étiré, nous attendons que le résultat prédit pour un tube pincé reste valable.

Nous traçons sur la figure 2.10 la longueur de persistance expérimentale  $L_p$  en fonction de  $\sqrt{Rh}$

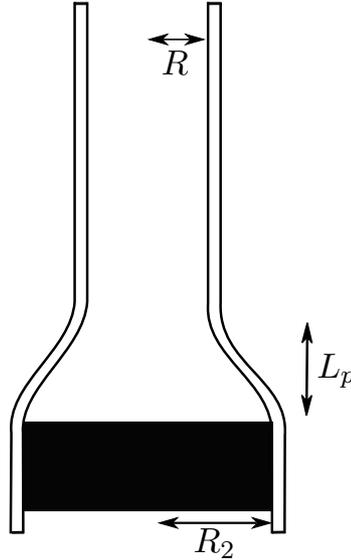


FIGURE 2.9 – Nous considérons un cylindre de rayon intérieur  $R$ . Nous lui imposons à une extrémité un rayon  $R_2 > R$ . La longueur de persistance  $L_p$  est la longueur nécessaire au cylindre pour retrouver son rayon non perturbé  $R$ .

pour différents rayons  $R$  et  $R_2$  et différentes épaisseurs.

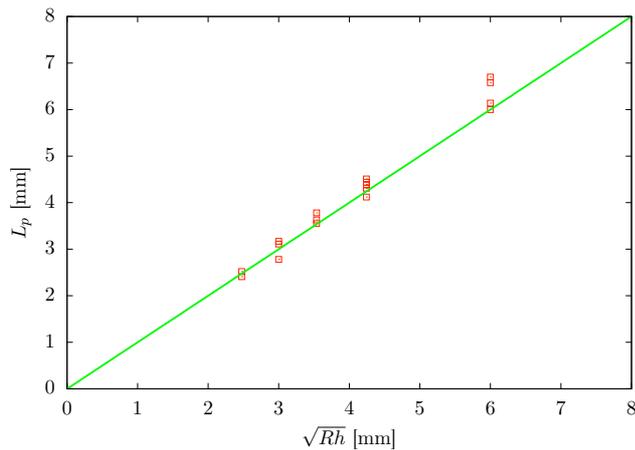


FIGURE 2.10 – Longueur de persistance  $L_p$  mesurée expérimentalement en fonction de  $\sqrt{Rh}$ . La droite a pour équation  $L_p = \sqrt{Rh}$ .

La longueur est mesurée longitudinalement (parallèle à  $z$ ) et est définie comme la plus petite distance séparant une zone où le rayon du tube est  $r \simeq R_2 + h$  et une zone où le rayon est  $r \simeq R + h$ . Il y a un bon accord entre théorie et expérience, les données expérimentales sont bien décrites par l'équation  $L_p = \sqrt{Rh}$ .

### 2.3.3 Discussion sur $L$

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de notre dispositif expérimental. Nous notons  $P$  la pression relative entre l'extérieur et l'intérieur du tube : placer l'intérieur du tube en dépression revient à appliquer une pression  $P$  à l'extérieur.

#### Tube long

Dans le cas d'un tube long, où  $L \gg L_p$ , nous constatons expérimentalement que le nombre de lobes est  $N = 2$ . L'énergie d'extension s'écrit :

$$\mathcal{E}_S \sim RhL \frac{\sigma^2}{E} \quad (2.6)$$

où  $\sigma$  est la contrainte dans le cylindre due à l'application de la pression  $P$ . Cette contrainte peut être exprimée à l'aide de l'expression classique dite "du chaudronnier" :

$$\pi PR^2 = 2\pi\sigma Rh \quad (2.7)$$

ce qui donne

$$\sigma \sim \frac{PR}{h} \quad (2.8)$$

qui, reporté dans 2.6 donne l'énergie d'extension :

$$\mathcal{E}_S \sim \frac{P^2 R^3 L}{Eh} \quad (2.9)$$

Nous considérons un nombre quelconque  $N$  de lobes, et notons  $A$  l'amplitude d'un lobe, comme indiqué sur la figure 2.11. La largeur d'un lobe est donc d'ordre  $R/N$  et l'énergie de courbure pour

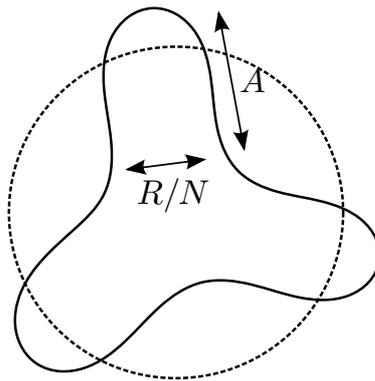


FIGURE 2.11 – Représentation schématique en coupe d'un cylindre déstabilisé en  $N = 3$  lobes. Nous notons  $A$  l'amplitude d'un lobe. La largeur d'un lobe est d'ordre  $R/N$ .

un lobe est d'ordre :

$$\mathcal{E}_{C_{lobe}} \sim Eh^3 L \frac{R}{N} \frac{1}{\rho^2} \quad (2.10)$$

où  $1/\rho$  est la courbure, avec

$$\frac{1}{\rho} \sim \frac{A}{(R/N)^2} \quad (2.11)$$

et en tenant compte des  $N$  lobes, l'énergie de courbure pour le tube est donc :

$$\mathcal{E}_C \sim Eh^3L \frac{R}{N} \left( \frac{A}{(R/N)^2} \right)^2 N \sim \frac{Eh^3}{R^3} A^2 LN^4 \quad (2.12)$$

Pour exprimer l'amplitude des lobes  $A$ , nous notons que la déformation de compression  $\epsilon$  peut s'exprimer à partir de la pression :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \sim \frac{PR}{Eh} \quad (2.13)$$

mais aussi géométriquement :

$$\epsilon \sim \left( \frac{A}{R/N} \right)^2 \quad (2.14)$$

ce qui donne :

$$A^2 \sim \frac{PR^3}{EhN^2} \quad (2.15)$$

ce qui, dans 2.12 donne :

$$\mathcal{E}_C \sim \frac{Eh^3}{R^3} \frac{PR^3}{EhN^2} LN^4 \quad (2.16)$$

ou encore

$$\mathcal{E}_C \sim h^2 PLN^2 \quad (2.17)$$

En équilibrant les énergies de courbure et d'extension  $\mathcal{E}_C \sim \mathcal{E}_S$

$$h^2 PLN^2 \sim \frac{P^2 R^3 L}{Eh} \quad (2.18)$$

nous obtenons une loi pour la pression :

$$\frac{P}{E} \sim N^2 \left( \frac{h}{R} \right)^3 \quad (2.19)$$

Cette pression dépend apparemment de  $N$ , le système choisissant toujours le nombre de lobes le plus petit, correspondant à l'état de plus basse énergie, à savoir  $N = 2$  (Antman, 1968).

## Tube court

Dans le cas d'un tube court ( $L \ll L_p$  et  $L \sim L_p$ ), les bords ont un effet significatif sur la manière dont le cylindre se déforme, et nous constatons expérimentalement que le nombre de lobes augmente lorsque  $L$  diminue. Nous supposons ici que la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur du tube impose un déplacement maximum  $w_0$  et considérons des énergies par unité de surface. L'énergie d'extension s'écrit :

$$\mathcal{E}_S \sim Eh \left[ \left( \frac{w_0}{R} \right)^2 + \left( \frac{w_0}{L} \right)^4 \right] \quad (2.20)$$

l'énergie de courbure :

$$\mathcal{E}_C \sim Eh^3 \left( \frac{w_0}{L^2} \right)^2 \quad (2.21)$$

et le travail de la pression :

$$\mathcal{E}_P \sim Pw_0 \quad (2.22)$$

Considérant  $L \ll \sqrt{Rh}$ , nous notons que  $(w_0/R)^2 \ll (w_0/L)^4$ , et l'énergie d'extension devient :

$$\mathcal{E}_S \sim Eh \left( \frac{w_0}{L} \right)^4 \quad (2.23)$$

Nous pouvons alors distinguer deux cas. Si  $w_0 \ll h$ , alors l'énergie d'extension  $Eh (w_0/L)^4$  est négligeable devant l'énergie de courbure  $Eh^3 (w_0/L^2)^2$  et l'équilibre du système est donné par  $\mathcal{E}_C \sim \mathcal{E}_P$ . Il n'y a pas d'extension ou de compression dans le système, il ne peut pas y avoir flambement. Si  $w_0 \gg h$ , alors l'énergie de courbure  $Eh^3 (w_0/L^2)^2$  est négligeable devant l'énergie d'extension  $Eh (w_0/L)^4$  et l'équilibre du système est donné par  $\mathcal{E}_S \sim \mathcal{E}_P$ . Il y a de l'extension dans le système, il pourrait y avoir flambement. Mais il n'y a aucune contrainte compressive, le tube est simplement étiré axialement, il n'y a donc pas non plus de flambement dans ce cas.

Si nous supposons maintenant que  $L \sim \sqrt{Rh}$ , aucun des termes des énergies ci-dessus n'est négligeable. C'est dans ce régime que nous observons le flambement avec un nombre de lobes  $N \geq 2$ .

En résumé, si  $L \ll L_p$  alors il n'y a pas flambement ; si  $L \gg L_p$  alors  $N = 2$  et  $P/E \sim h^3/R^3$  ; et si  $L \sim L_p$  alors le cylindre flambe avec un nombre de lobes  $N \geq 2$ . Nous nous plaçons pour la suite, sauf mention contraire, dans ce dernier cas.

## 2.4 Influence de la géométrie du cylindre sur le nombre de lobes

### 2.4.1 Résultats

Nous traçons sur la figure 2.12 le nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur du tube  $L$ , à épaisseur  $h = 2$  mm et rayon  $R = 18$  mm constants, pour des cylindres de modules de Young  $E = 0,24$  (shore 8) à  $E = 0,96$  MPa (shore 32). Les points expérimentaux se superposent parfaitement et

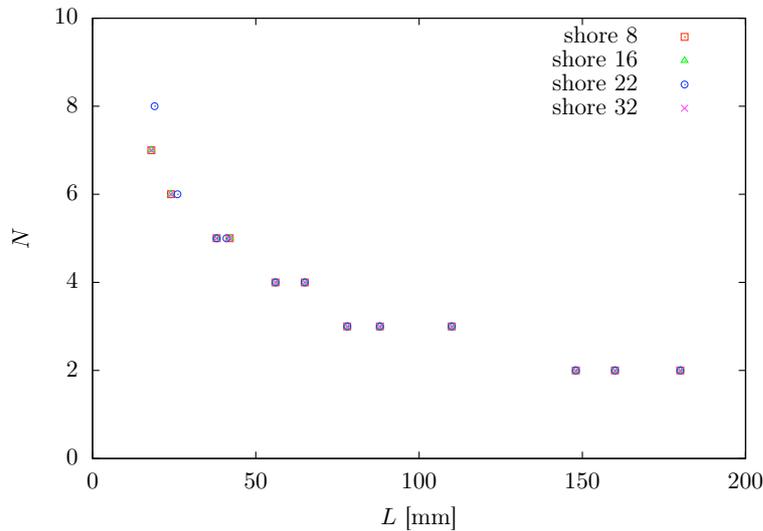


FIGURE 2.12 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur  $L$  du tube pour  $h = 2$  mm et  $R = 18$  mm. Nous utilisons des cylindres de PVS de module d'Young  $E = 0,24$  MPa (shore 8),  $E = 0,48$  MPa (shore 16),  $E = 0,6$  MPa (shore 22) et  $E = 0,96$  MPa (shore 32).

seule la géométrie du cylindre a une influence sur le nombre de lobes. Nous rappelons que nous ne nous intéressons pas ici à l'évolution de la pression, ni à la pression critique de flambement, qui dépend forcément de  $E$ , le module de Young étant la seule grandeur physique ayant les dimensions

d'une pression.

Nous représentons sur la figure 2.13 l'évolution du nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur  $L$  du cylindre, à épaisseur  $h = 0,5$  mm et rayon  $R = 18$  mm constants. Le nombre de lobes varie de

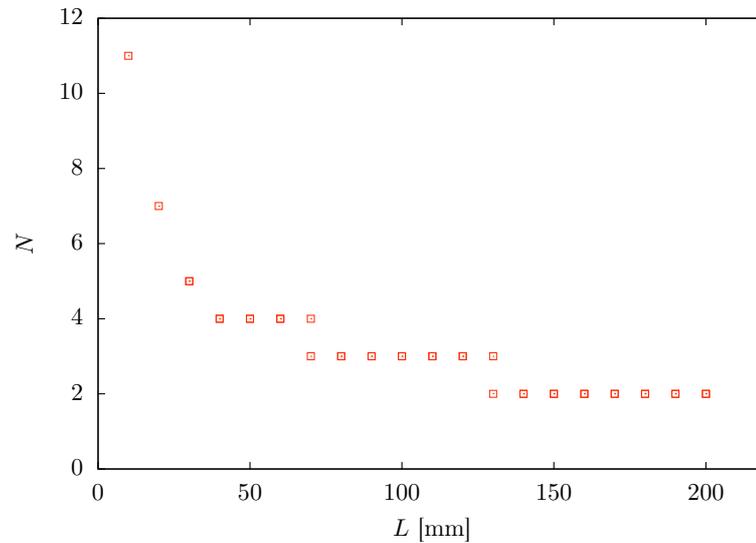


FIGURE 2.13 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur  $L$  du tube pour des cylindres de rayon  $R = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 0,5$  mm fixés. À  $R$  et  $h$  fixés, le nombre de lobes  $N$  augmente lorsque la longueur  $L$  du cylindre diminue.

$N = 11$  pour un tube de longueur  $L = 10$  mm à  $N = 2$  à partir d'une longueur  $L = 130$  mm.

Nous traçons sur la figure 2.14 l'évolution du nombre  $N$  de lobes en fonction de l'épaisseur  $h$  du tube, à rayon  $R = 18$  mm constant, pour 3 longueurs  $L = 18, 25$  et  $65$  mm. À longueur donnée, le

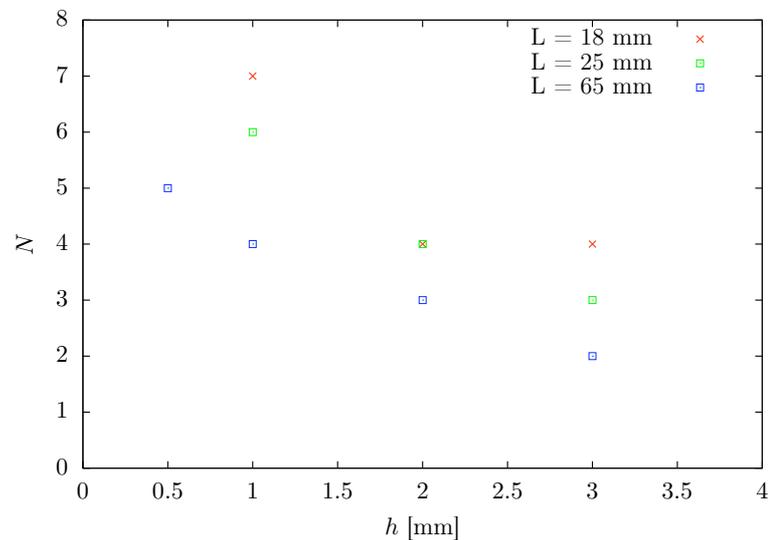


FIGURE 2.14 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de l'épaisseur  $h$  du tube, à rayon  $R = 18$  mm constant. Nous représentons 3 longueurs de tubes,  $L = 18, 25$  et  $65$  mm. À longueur fixée, le nombre de lobes  $N$  augmente lorsque l'épaisseur  $h$  diminue.

nombre de lobes diminue avec l'épaisseur.

Nous représentons le nombre de lobes  $N$  en fonction du rayon  $R$ , à épaisseur  $h = 2$  mm constante, pour 3 longueurs  $L = 30, 40$  et  $80$  mm sur la figure 2.15. À longueur donnée, le nombre de lobes

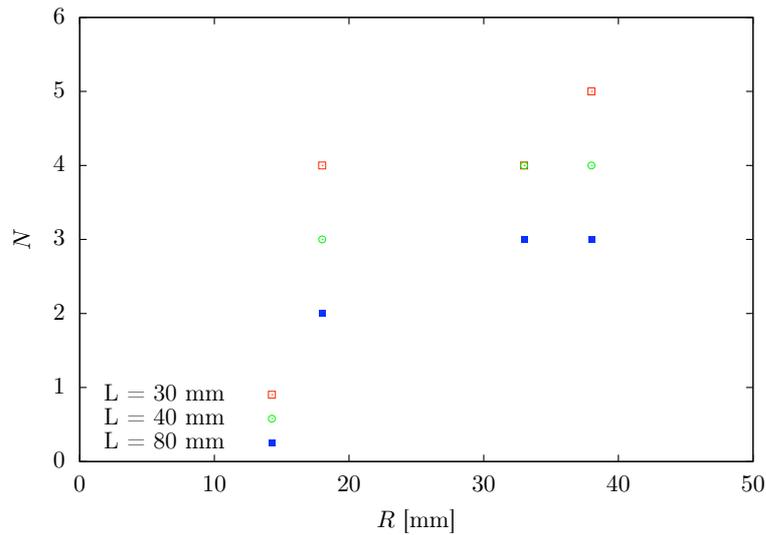


FIGURE 2.15 – Nombre de lobes  $N$  en fonction du rayon  $R$  du tube, à épaisseur  $h = 2$  mm constante. Nous représentons 3 longueurs de tubes,  $L = 30, 40$  et  $80$  mm. À longueur fixée, le nombre de lobes  $N$  augmente lorsque le rayon  $R$  augmente.

augmente avec le rayon du cylindre.

Afin de résumer toutes les données expérimentales sur une seule figure (voir figure 2.16), nous traçons un diagramme du nombre de lobes en fonction des deux rapports d'aspect géométriques du système. Nous représentons en abscisse le rapport du rayon sur l'épaisseur  $R/h$  et en ordonnée le

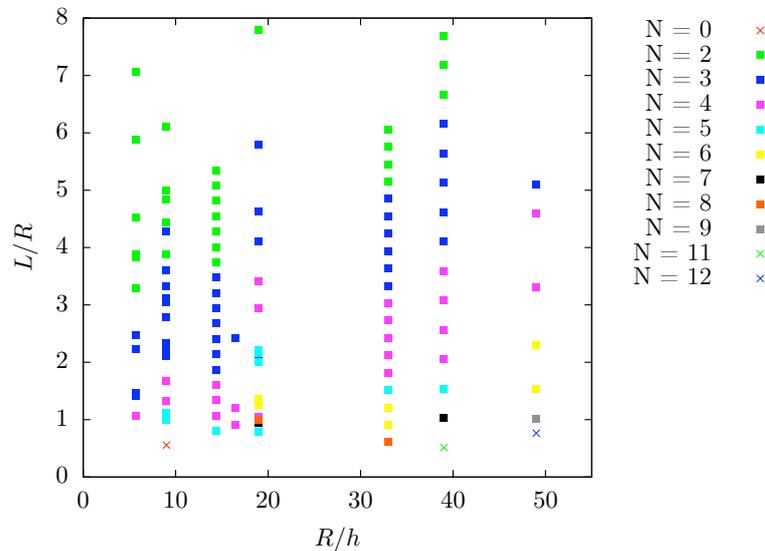


FIGURE 2.16 – Diagramme du nombre de lobes  $N$ , en fonction des deux rapports d'aspect du système  $L/R$  et  $R/h$ . À  $R/h$  fixé, augmenter  $L/R$  diminue le nombre de lobes.

rapport de la longueur sur le rayon  $L/R$ .

## 2.4.2 Modèle

Nous considérons un cylindre de longueur  $L$ , épaisseur  $h$  et rayon moyen  $R$  au repos, doté de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  indiqués sur la figure 2.17. Lorsque nous imposons une pression  $P$  à l'extérieur du cylindre, l'amplitude maximale du déplacement radial vers l'intérieur est  $w_0$  au

milieu du tube ( $z = L/2$ ). Le cylindre forme un nombre  $N$  inconnu de lobes. Nous utilisons la théorie développée dans (Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, 1964) pour décrire les déformations du cylindre et écrire l'énergie élastique totale du système.

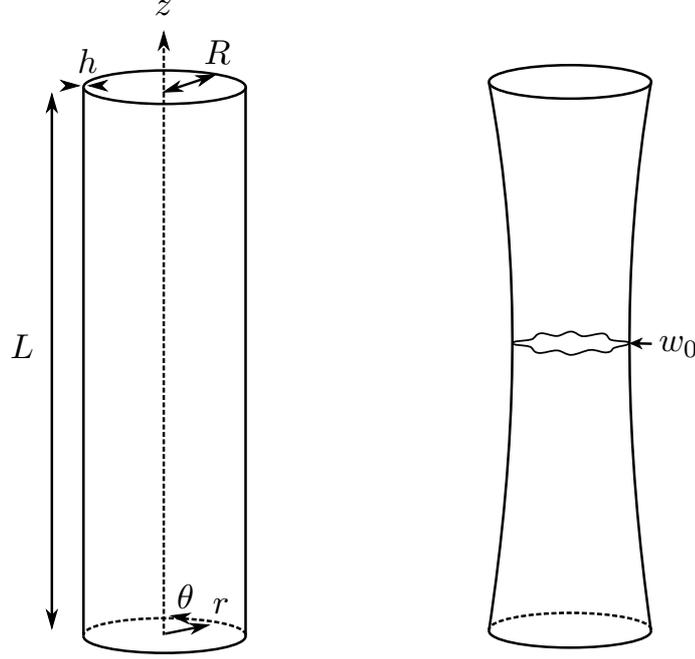


FIGURE 2.17 – Nous considérons un cylindre de rayon  $R$ , d'épaisseur  $h$ , de longueur  $L$ , doté de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Une pression extérieure impose un déplacement radial à tout le cylindre, avec un maximum  $w_0$  au milieu. Le cylindre flambe en un nombre inconnu  $N$  de lobes.

Nous supposons que le cylindre est courbé axialement sur toute sa longueur et orthoradialement en formant les  $N$  lobes. Nous supposons que la forme du cylindre s'écrit :

$$w = w_0 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi z}{L} \right] + \delta w \left[ 1 + \cos \frac{2\pi z}{L} \right] \cos(N\theta) \quad (2.24)$$

où  $w_0$  est le déplacement radial axisymétrique du tube et  $\delta w$  une petite perturbation correspondant au déplacement radial des lobes, avec  $\delta w \ll w_0$ . Cette forme respecte les conditions aux limites expérimentales  $w(-L/2) = w(+L/2) = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial z}(-L/2) = \frac{\partial w}{\partial z}(+L/2) = \frac{\partial w}{\partial z}(0) = 0$ .

La déformation orthoradiale s'écrit

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{w}{R} \quad (2.25)$$

où  $u_\theta$  est le déplacement orthoradial, que nous ne connaissons pas. Nous pouvons exprimer  $u_\theta$  en faisant l'hypothèse que la déformation orthoradiale  $\epsilon_{\theta\theta}$  est équivalente à la déformation orthoradiale moyennée sur la circonférence du cylindre (Audoly & Pomeau, 2010)  $\langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle$  avec

$$\langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \epsilon_{\theta\theta} d\theta \quad (2.26)$$

c'est-à-dire

$$\langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi R} [u_\theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta \quad (2.27)$$

La condition de périodicité impose  $[u_\theta]_0^{2\pi} = 0$ , ce qui conduit à

$$\langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta \quad (2.28)$$

Notre hypothèse  $\epsilon_{\theta\theta} = \langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle$  devient donc

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{w}{R} = \langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle \quad (2.29)$$

ce qui nous permet, par intégration, d'exprimer  $u_\theta$  :

$$u_\theta(\theta, z) = R \int_0^\theta \left( \langle \epsilon_{\theta\theta} \rangle - \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{w}{R} \right) d\theta \quad (2.30)$$

Nous procédons de même pour la déformation axiale, qui s'écrit

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (2.31)$$

et nous faisons l'hypothèse que la déformation axiale  $\epsilon_{zz}$  est équivalente à la déformation axiale moyennée sur la longueur du cylindre  $\langle \epsilon_{zz} \rangle$  avec

$$\langle \epsilon_{zz} \rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \epsilon_{zz} dz \quad (2.32)$$

c'est-à-dire

$$\langle \epsilon_{zz} \rangle = \frac{1}{L} [u_z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \frac{1}{2L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.33)$$

Or les conditions aux limites de bords encastés imposent un déplacement axial nul en haut et en bas du cylindre  $u_z(z = L/2) = u_z(z = -L/2) = 0$  ce qui implique  $[u_z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = 0$ , nous avons donc

$$\langle \epsilon_{zz} \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.34)$$

Notre hypothèse  $\epsilon_{zz} = \langle \epsilon_{zz} \rangle$  devient donc

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \langle \epsilon_{zz} \rangle \quad (2.35)$$

ce qui nous permet, par intégration, d'exprimer  $u_z$  :

$$u_z(\theta, z) = \int_0^z \left( \langle \epsilon_{zz} \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) dz \quad (2.36)$$

Connaissant  $u_\theta$  et  $u_z$ , nous pouvons écrire la déformation de cisaillement

$$\epsilon_{z\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.37)$$

Nous connaissons les déplacements et déformations du cylindre. Pour décrire complètement son

état, nous avons besoin des courbures, qui s'écrivent

$$K_{zz} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.38)$$

$$K_{\theta\theta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (2.39)$$

$$K_{z\theta} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} \quad (2.40)$$

Connaissant les déformations et les courbures, nous pouvons exprimer les déformations totales, notées d'un indice 0 :

$$\epsilon_{zz_0} = \epsilon_{zz} + rK_{zz} \quad (2.41)$$

$$\epsilon_{\theta\theta_0} = \epsilon_{\theta\theta} + rK_{\theta\theta} \quad (2.42)$$

$$\epsilon_{z\theta_0} = \epsilon_{z\theta} + rK_{z\theta} \quad (2.43)$$

La densité volumique d'énergie élastique dans le cylindre s'écrit alors

$$e_{el} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \epsilon_{zz_0}^2 + \epsilon_{\theta\theta_0}^2 + 2\nu\epsilon_{zz_0}\epsilon_{\theta\theta_0} + \frac{1-\nu}{2}\epsilon_{z\theta_0}^2 \right) \quad (2.44)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau constituant le cylindre. L'énergie élastique totale du système s'obtient donc par intégration :

$$\mathcal{E}_L = \iiint_V e_{el} dV = \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} e_{el} r dr d\theta dz \quad (2.45)$$

L'expression de  $\mathcal{E}_L$  dépend des propriétés physiques du matériau ( $E, \nu$ ), des caractéristiques géométriques du cylindre ( $L, R, h$ ) et des grandeurs caractérisant la déformée ( $w_0, \delta w, N$ ).

Nous cherchons le nombre de lobes minimisant l'énergie totale. Nous procédons pour ceci à une analyse de stabilité du système. Nous dérivons l'expression de  $\mathcal{E}_L$  par rapport à  $\delta w$  et ne gardons que les termes linéaires en  $\delta w$ . Nous obtenons une équation, que nous résolvons pour obtenir l'expression de  $w_0$ , ne dépendant plus que des propriétés physiques, des caractéristiques géométriques ( $L/R, R/h$ ) et du nombre de lobes  $N$ . À géométrie et matériau de cylindre donnés, nous connaissons à présent  $w_0(N)$  (voir figure 2.18). Pour un cylindre donné ( $E, \nu, L, R, h$  connus), le système sélectionne le déplacement radial conduisant au plus petit  $N$ . Nous dérivons donc  $w_0(N)$  et cherchons le déplacement radial  $w_{0c}$  donnant le minimum d'énergie, ainsi que le nombre de lobes  $N$  correspondant.

Nous comparons sur la figure 2.19 les valeurs expérimentales à celles données par notre modèle pour l'évolution du nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur  $L$ , pour un cylindre de rayon intérieur  $R = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 0,5$  mm. Il y a un bon accord entre le modèle et l'expérience.

Nous représentons sur la figure 2.20 (respectivement 2.21) le nombre de lobes  $N$  en fonction de l'épaisseur  $h$  (respectivement en fonction du rayon  $R$ ) pour les expériences et pour notre modèle. Nous pouvons nous interroger sur la validité d'utiliser des valeurs non entières de  $N$ .  $w_0$  étant une fonction continue de  $N$ , nous pouvons décider de déclarer que  $N$  est un réel et utiliser les valeurs non entières. Si nous décidons d'utiliser uniquement des nombres de lobes entiers, nous devons définir comment choisir la valeur de  $N$ .

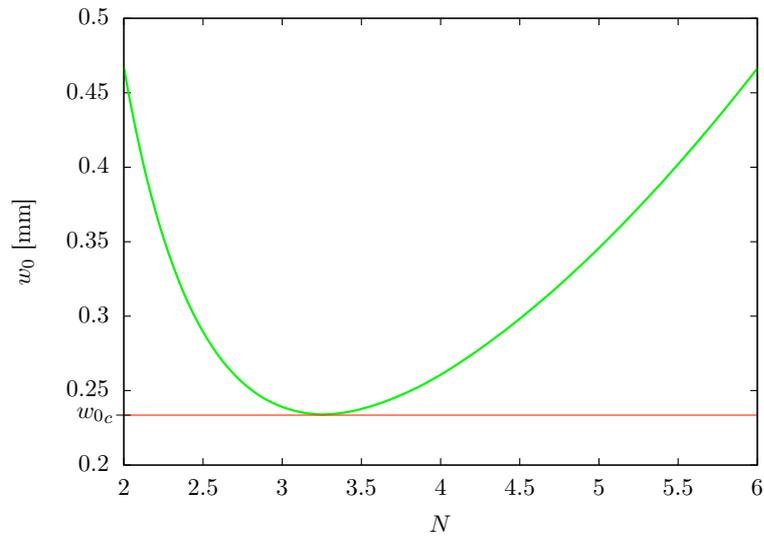


FIGURE 2.18 – Déplacement  $w_0$  en fonction de  $N$ . Le système choisi le plus petit  $w_0$  pouvant induire une instabilité à  $N$  lobes correspondants. Nous notons  $w_{0c}$  le déplacement radial donnant le minimum d'énergie.

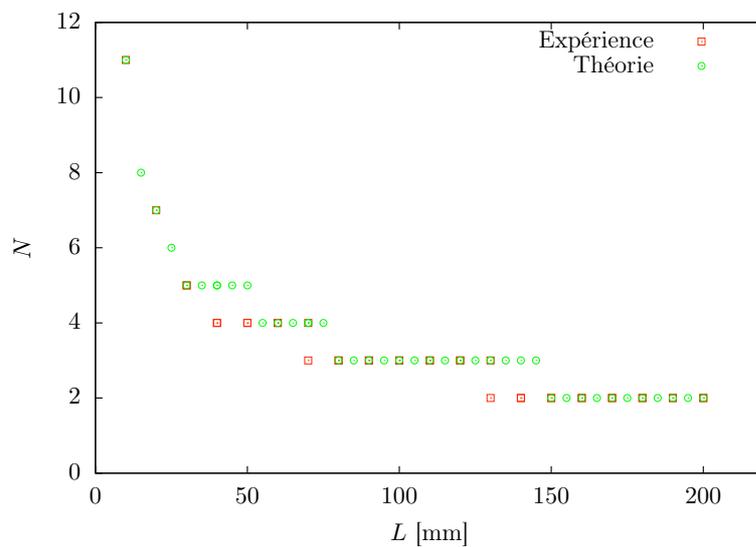


FIGURE 2.19 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur  $L$  du cylindre. Comparaison de l'expérience (carrés rouges) et du modèle (cercles verts) pour un cylindre de rayon  $R = 18$  mm, épaisseur  $h = 0,5$  mm, module de Young  $E = 0,24$  MPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0,5$ .

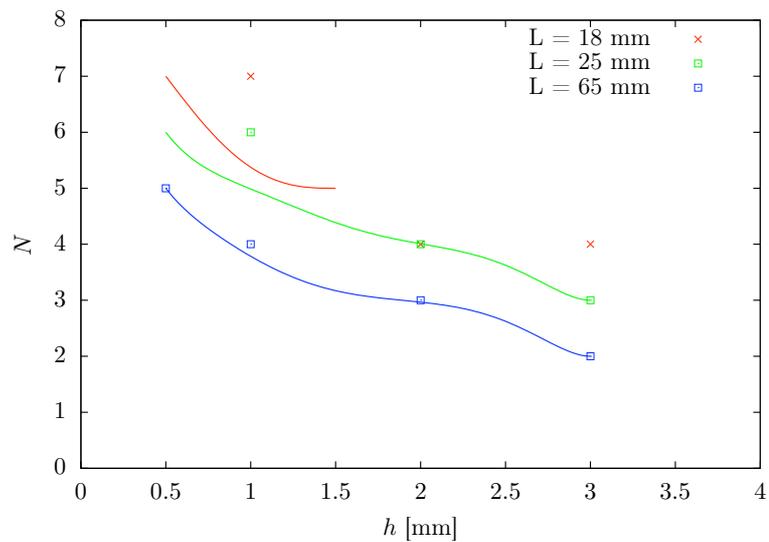


FIGURE 2.20 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de l'épaisseur  $h$  du tube, à rayon  $R = 18$  mm constant. Comparaison de l'expérience (points) et du modèle (lignes pleines). Nous représentons 3 longueurs de tubes,  $L = 18, 25$  et  $65$  mm.

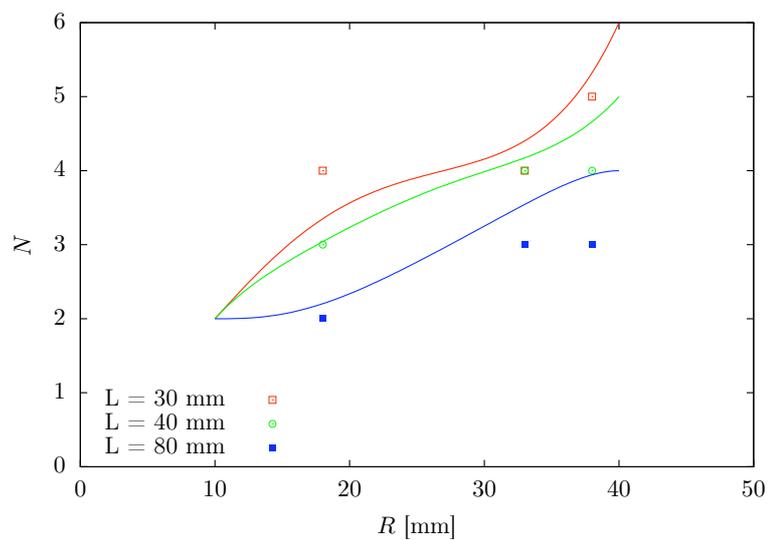


FIGURE 2.21 – Nombre de lobes  $N$  en fonction du rayon  $R$  du tube, à épaisseur  $h = 2$  mm constante. Comparaison de l'expérience (points) et du modèle (lignes pleines). Nous représentons 3 longueurs de tubes,  $L = 30, 40$  et  $80$  mm.

Nous utilisons pour les figures 2.20 et 2.21 des valeurs non entières de  $N$  pour faciliter la lecture. Pour les autres figures, nous calculons une valeur non entière de  $N$  et gardons sa partie entière (ainsi, si  $n = 2.78$ , nous choisissons  $N = 2$ ). Il y a, dans les deux cas, un bon accord entre les résultats expérimentaux et l'approche théorique développée ci-dessus.

Sur la figure 2.22, nous représentons sur un diagramme le nombre de lobes  $N$  en fonction des rapports d'aspects du système, ce pour les données expérimentales et théoriques.

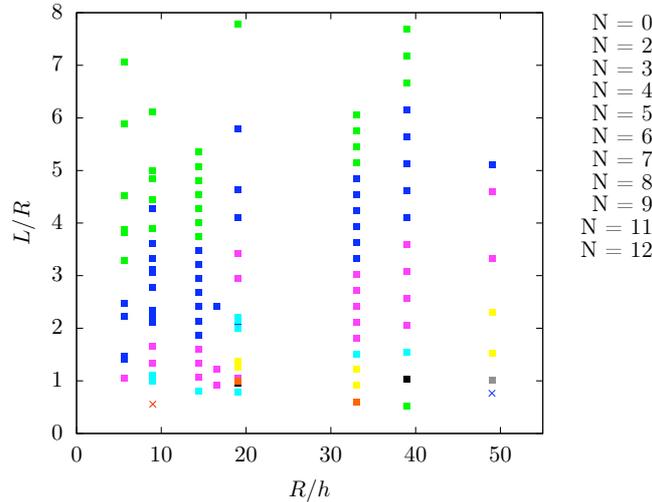


FIGURE 2.22 – Diagramme du nombre de lobes  $N$ , en fonction des deux rapports d'aspect du système  $L/R$  et  $R/h$ . Comparaison de l'expérience (carrés) et du modèle.

Les données s'accordent bien à la théorie, même si on peut remarquer parfois un décalage pour les  $N$  petits, où la théorie arrive à  $N = 2$  pour des tubes plus longs. Les cylindres expérimentaux contenant des défauts, ils doivent présenter un flambement à  $N = 2$  lobes plus facilement, donc pour une longueur de tube plus petite. Par ailleurs, le choix de la fonction déformée, supposée sinusoïdale en longueur et orthoradialement, ne décrit pas parfaitement la forme réelle du cylindre, ce qui peut amener les cylindres théoriques à passer au mode  $N = 2$  pour des longueurs plus grandes.

## 2.5 Comportement loin du seuil : torsion spontanée

Après la mise en place du nombre de lobes au seuil de flambement, l'amplitude des lobes augmente alors que la pression interne diminue, tout en conservant le nombre de lobes identique, même loin du seuil de flambement. Dans le cas où l'une des extrémités du cylindre est fixée alors que l'autre est restée libre, nous observons des comportements nouveaux lorsque les lobes se retrouvent au contact, très loin du seuil.

Nous distinguons deux cas. Lorsque  $N = 2$ , l'extrémité libre du cylindre tourne autour d'un de ses diamètres, pour se rapprocher du corps du tube. Pour  $N > 2$ , l'extrémité libre du tube se rapproche axialement de l'extrémité fixée en tournant autour de l'axe du cylindre. Nous représentons dans ce dernier cas, sur la figure 2.23, la forme du cylindre observée expérimentalement très loin du seuil.

Il est compliqué de créer des mouvements selon ces degrés de liberté avec des objets mous. Nous avons donc ici une solution robuste, réversible, à faible niveau technique, permettant de créer une



FIGURE 2.23 – Forme du cylindre très loin du seuil de flambement. Pour  $N > 2$ , l'extrémité libre du tube se rapproche axialement de l'extrémité fixée en tournant autour de l'axe du cylindre.

flexion ou une torsion à partir d'une pression, en utilisant une instabilité mécanique. Il est nécessaire de caractériser ce mouvement pour pouvoir l'exploiter dans des applications, et c'est une suite possible de ce travail de thèse.

## 2.6 Cylindre pré-étiré

Nous utilisons le même dispositif expérimental, un cylindre fixé par le haut, l'extrémité inférieure étant libre. Nous fixons sur celle-ci un poids de masse  $m$ , qui pré-étire le cylindre. Nous traçons sur

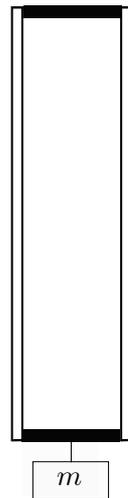


FIGURE 2.24 – Vue schématique du dispositif expérimental. Un surpoids de masse  $m$  est attaché à la partie libre, pesante, du cylindre.

la figure 2.25 le nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur, pour différentes masses de surpoids comprises entre  $m = 0$  et  $m = 280$  g. Pour une masse donnée, le nombre de lobes diminue toujours avec la longueur. Les points expérimentaux sont bien séparés. Nous représentons sur la figure 2.26 le nombre de lobes  $N$  en fonction de la masse de surpoids  $m$  pour différentes longueur de tubes. À longueur fixée, le nombre de lobes augmente avec la masse du surpoids.

**Comportement loin du seuil** Lorsque nous observons le système loin du seuil, nous notons un nouveau comportement en présence du surpoids. Ainsi après établissement du nombre de lobes près du seuil de flambement,  $N$  diminue avec la diminution de la pression interne, très loin du seuil de flambement. Nous représentons sur la figure 2.27 le nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur

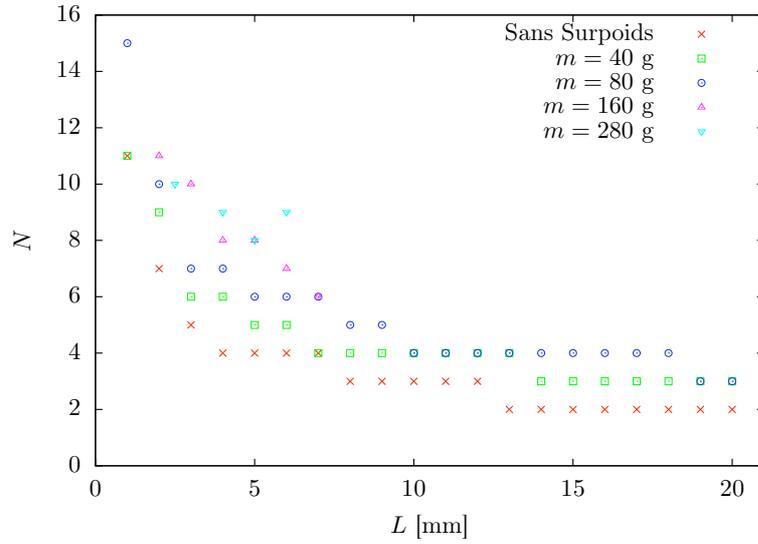


FIGURE 2.25 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de la longueur  $L$  du cylindre. Comparaison en présence de différents surpoids  $m = 0$ ,  $m = 40$ ,  $m = 80$ ,  $m = 160$  et  $m = 280$  g. Nous utilisons un cylindre de rayon  $R = 18$  mm, épaisseur  $h = 0,5$  mm et module de Young  $E = 0,24$  MPa.

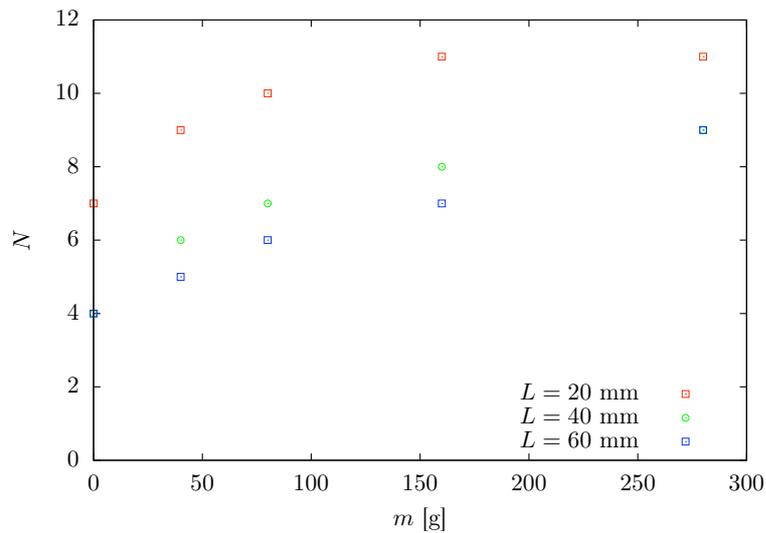


FIGURE 2.26 – Nombre de lobes  $N$  en fonction de la masse  $m$  du surpoids, à rayon  $R$  et épaisseur  $h$  fixés. Nous représentons les données pour trois valeurs de la longueur  $L = 20$  mm,  $L = 40$  mm et  $L = 60$  mm.

$L$  du cylindre, près du seuil et loin du seuil, pour différentes masses  $m$  de surpoids. Près du seuil,

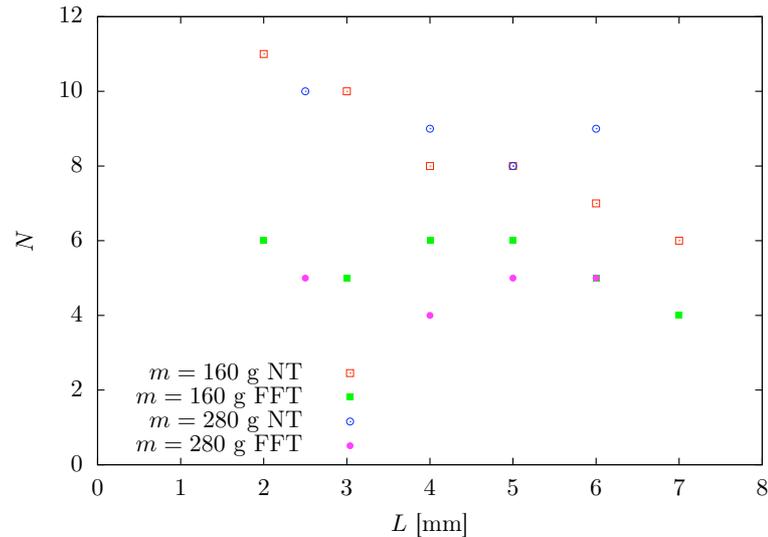


FIGURE 2.27 – Nombre  $N$  de lobes en fonction de la longueur  $L$  du cylindre, près du seuil (NT) et très loin du seuil de flambement (FFT).

nous observons un nombre de lobes prédit par le modèle développé ci-dessus, cohérent avec ce que nous avons observé jusqu'à présent. En l'absence de surpoids, ce nombre de lobes reste inchangé avec la diminution de la pression à l'intérieur du tube. En présence de surpoids, le nombre de lobes diminue avec la pression et ce d'autant plus que sa masse est importante, avec un nombre de lobes très loin du seuil bien inférieur au nombre de lobes attendus, près du seuil.

Ce résultat n'est pas encore compris à l'heure actuelle, mais la présence d'un surpoids pourrait être prise en compte dans le modèle que nous avons décrit dans ce chapitre.

## 2.7 Conclusion

Nous avons étudié le flambement d'un cylindre en dépression. Nous nous plaçons dans le cas d'un tube court, pour lequel  $L \sim \sqrt{Rh}$ . Dans ce cas, la coque peut se déstabiliser en un nombre  $N \geq 2$  de lobes au moment de son effondrement. Le nombre de lobes formés ne dépend pas des propriétés physiques du tube, mais il diminue avec la longueur et l'épaisseur du tube, et augmente avec le rayon.

Nous proposons un modèle simple basé sur l'estimation de l'énergie élastique totale du système et une analyse de stabilité, ne nécessitant pas l'intégration d'équations différentielles. Le modèle donne des résultats en bon accord avec les expériences.

Lorsqu'on ajoute un surpoids à l'extrémité libre du cylindre, le nombre de lobes près du seuil augmente et nous observons que le nombre de lobes loin du seuil diminue avec la pression.

Dans le cas simple, sans surpoids, nous présentons le comportement très loin du seuil. Ainsi, la face libre du système peut montrer un mouvement de translation, de rotation par rapport à un de ses diamètre, ou de rotation par rapport à l'axe du cylindre. Ces mouvements, difficiles à obtenir avec un dispositif "mou", peuvent être exploités pour créer des actuateurs mous, par exemple en robotique.

Une poursuite possible de ce travail de thèse pourrait ainsi porter sur la caractérisation de la réponse

en pression de tels acteurs, afin de présenter des résultats exploitables sur des systèmes appliqués.

# Contraintes locales dans la colonne granulaire de Janssen

## 3.1 Introduction

Nous étudions expérimentalement les contraintes locales dans un milieu granulaire confiné dans un récipient cylindrique. Pour cela, nous utilisons des coques cylindriques en élastomère, suffisamment souples pour être déformées sous l'effet des forces de frottement des grains sur la face interne du silo. En mesurant par corrélation d'images les déplacements de la face externe du contenant, nous pouvons déterminer la distribution locale des contraintes à l'interface entre le milieu granulaire et la paroi. Nous utilisons tout d'abord cette nouvelle méthode de mesure dans le cas quasi-statique d'une colonne de grains confinée dans un silo. Nous mesurons ensuite l'évolution des contraintes au cours de la vidange d'un tel silo.

L'étude des milieux granulaires passe par la compréhension de la répartition des contraintes, aussi bien dans les grains qu'à l'interface avec le milieu extérieur. En 1829, Huber-Burnand remarqua qu'un œuf recouvert d'une grande épaisseur de sable pouvait supporter la charge d'une masse d'acier de 55 livres sans casser (Huber-Burnand, 1829). Il était précurseur dans l'étude de la répartition des forces dans les matériaux granulaires (Smid & Novosad, 1981). L'influence de l'historique de la fabrication d'un tas sur les contraintes dans le milieu granulaire a par la suite été démontrée (Vanel *et al.*, 1999). En 1895, Janssen a étudié la saturation de la pression en bas d'un milieu granulaire confiné dans un contenant vertical cylindrique (Sperl, 2006). La masse apparente de grains en appui sur le piston augmente progressivement avec le remplissage du silo, puis sature. La loi de Janssen considère le frottement des grains contre la paroi du silo et définit la longueur typique sur laquelle la pression sature.

Motivées par l'intérêt pratique d'éviter les dommages et l'effondrement des silos industriels, des études s'intéressent aux contraintes dans une colonne cylindrique (Dogangun *et al.*, 2009; Zhong *et al.*, 2001). Plus récemment, la colonne granulaire confinée de Janssen a été étudiée comme une expérience modèle pour tester l'influence de différents paramètres sur la répartition des contraintes dans un milieu granulaire. Les hypothèses de friction complètement mobilisée (Evesque & de Gennes, 1998; de Gennes, 1999), les effets de l'humidité (Bertho *et al.*, 2004) et les mouvements des parois du silo (Bertho *et al.*, 2003) ont ainsi fait l'objet d'études expérimentales détaillées. Cette expérience modèle a aussi permis de tester des modèles continus de matériaux granulaires, comme la théorie OSL (Oriented Stress Linearity) (Vanel & Clément, 1999; Vanel *et al.*, 2000) ou la théorie élastique (Ovarlez *et al.*, 2003; Ovarlez & Clément, 2005a; Goldenberg & Goldhirsch, 2005). Dans toutes ces études expérimentales sur les matériaux granulaires confinés, les contraintes sur la longueur totale du silo sont déduites de la mesure de la masse apparente en bas de la colonne de

grains. La masse équivalente soutenue par les parois du silo a été mesurée (Perge *et al.*, 2012) mais les mesures directes et locales des contraintes le long de la colonne sont rares. On trouve cependant des résultats numériques (Goldenberg & Goldhirsch, 2005) et récemment une étude expérimentale utilisant des particules photo-élastiques a permis la mesure locale directe du réseau de force dans un silo 2D (Wambaugh *et al.*, 2010). Les conclusions de ces études posent des questions nouvelles et montrent des déviations significatives par rapport au modèle de Janssen. Ainsi, ils montrent que le coefficient de redirection des contraintes dans les grains dépend de la profondeur dans la colonne granulaire, qu’une préparation différente peut mener à des cas où la pression ne sature pas, et mettent en lumière une réponse non-linéaire à l’application d’un poids supplémentaire en haut de la colonne. Cela prouve qu’il est nécessaire de pouvoir mesurer directement les contraintes locales dans un milieu granulaire statique confiné.

Nous proposons ici une méthode nouvelle pour mesurer directement les contraintes aux parois en mesurant les déformations du silo. Nous suivons en cela une idée émise par Janssen dans son article original (*it was the intention of the author to determine the side pressure of the corn directly in the experiments*) qui voulait utiliser un piston latéral inséré dans la paroi du silo, mais n’a pas pu obtenir de résultats assez précis dans son dispositif expérimental (Sperl, 2006).

Au-delà de la loi statique de Janssen, la dynamique des matériaux granulaires confinés a aussi beaucoup été étudiée. Le débit massique de la décharge par gravité d’une colonne de grains confinés dans un silo est décrit par la loi de Beverloo (Beverloo *et al.*, 1961). Même si elle est parfaitement vérifiée expérimentalement (Mankoc *et al.*, 2007), le sens physique de cette loi, parfois décrite comme une conséquence de la loi de Janssen (Andreotti *et al.*, 2011), reste peu clair. Des mesures récentes du profil de pression au niveau de la sortie d’un silo lors de sa vidange ont montré que les conditions de contraintes locales n’ont pas d’influence sur le débit massique (Perge *et al.*, 2012). Durant la vidange, les champs de déplacement locaux des grains révèlent des motifs complexes, par exemple des zones de cisaillement près des murs (Pouliquen & Gutfraind, 1996; MiDi, 2004). Des expériences de spectroscopie montrent la co-existence de collisions de grains à grande vitesse et de mouvements lents de ré-arrangements collectifs (Menon & Durian, 1997). L’état de la mobilisation de la friction à la paroi du silo doit être décrite pour comprendre l’effondrement par flambement du silo pendant la vidange (Gutiérrez *et al.*, 2007). Des mesures de contraintes locales durant la décharge de matériaux granulaires confinés sont donc également nécessaires pour mieux comprendre la loi de Beverloo.

## 3.2 Loi de Janssen dans un silo déformable

La première partie de ce travail s’insère dans la continuité des études de l’expérience modèle de Janssen dans le cas où la friction est complètement mobilisée. Nous cherchons ici à comprendre l’influence de l’élasticité du silo sur les interactions du milieu granulaire avec le contenant, et commençons donc par mesurer la masse apparente en bas de la colonne de grains en fonction de la masse versée dans le silo. Nous comparons les résultats expérimentaux pour des tubes en élastomères à ceux d’expériences de référence réalisées dans des silos rigides en PolyMethylMethacrylate (PMMA).

### 3.2.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons le dispositif expérimental décrit sur la figure 3.1. Les silos ont pour rayon  $R = 18$  mm,

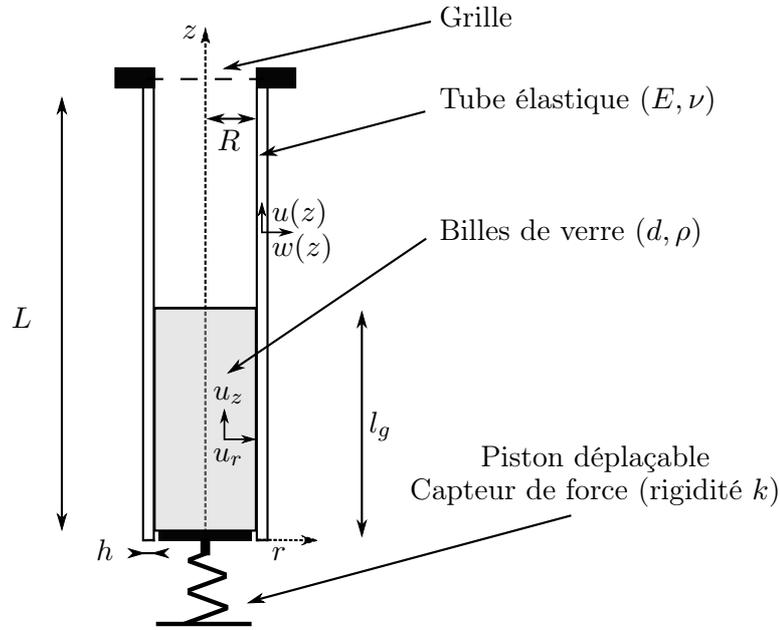


FIGURE 3.1 – Vue en coupe du dispositif expérimental : un tube cylindrique vertical (de longueur  $L$ , rayon  $R$ , épaisseur  $h$ , module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ), fixé à son sommet, est rempli de billes de verre (de diamètre  $d$  et masse volumique  $\rho$ ) jusqu'à une hauteur  $z = l_g$ . Le bas du tube est libre et fermé par un piston mobile de rayon légèrement inférieur à  $R$  situé en  $z = 0$ . Un capteur de force de raideur  $k$  permet de mesurer le poids de grains en appui sur le piston. Les déplacements longitudinaux et radiaux du cylindre (respectivement des grains) sont notés  $\{u, w\}$  (respectivement  $\{u_z, u_r\}$ ).

épaisseur  $h = 2$  mm et sont faits de PolyVinylSiloxane (PVS) de dureté shore 8 (Module de Young  $E = 0,24$  MPa) et shore 32 ( $E = 0,96$  MPa). Le silo rigide de référence est de même dimensions mais est fait en PMMA ( $E = 2,5$  GPa). Les tubes sont fixés par le haut et leur extrémité inférieure est libre de se déplacer. La colonne de grains repose sur un piston mobile, de rayon légèrement inférieur à celui des silos pour éviter les frottements, relié à un capteur de force permettant de mesurer la masse apparente en bas du silo.

Les grains sont des billes de verre de rayon  $d = 1,5$  mm, légèrement polydisperses (10%), de densité  $\rho = 2545$  kg.m<sup>-3</sup>. Le milieu granulaire est sec et toutes les expériences ont été réalisées au moins deux fois à une humidité relative de  $35 \pm 5\%$  à température ambiante (25°C).

L'intérieur des tubes de PVS est recouvert de talc, pour éviter l'adhésion des grains à la paroi. Nous utilisons l'angle de glissement d'un trépied à trois billes sur un plan (également talqué dans le cas du PVS) pour mesurer le coefficient de friction entre les grains et les silos, de la même manière que dans (Ovarlez *et al.*, 2003). Ainsi, l'angle de mise en mouvement du trépied nous donne un coefficient de frottement statique  $\mu_s = 0,5 \pm 0,01$  pour le PMMA,  $\mu_s = 0,51 \pm 0,04$  pour le PVS de dureté shore 32 et  $\mu_s = 0,52 \pm 0,03$  pour le shore 8. Nous diminuons ensuite lentement l'angle du plan jusqu'à arrêt du mouvement du trépied, ce qui nous donne un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d = 0,43 \pm 0,03$  pour le PVS de shore 8, avec lequel les expériences de vidange sont réalisées. Nous considérons dans la suite que le coefficient de frottement statique est le même dans toutes les expériences.

### 3.2.2 Masse de saturation au bas du silo

Nous versons en pluie, à travers une grille, une masse  $M_g$  de grains, remplissant le silo jusqu'à une hauteur  $l_g$ . La grille permet d'obtenir de manière reproductible un empilement dense, de fraction volumique  $\phi = 64\%$ . Le piston est ensuite déplacé vers le bas à une vitesse  $V = 1,5\mu\text{m.s}^{-1}$ , ce qui permet de mobiliser les forces de frottement sur toute la longueur de la colonne et de se placer dans les hypothèses du modèle de Janssen. Nous enregistrons dans le temps la masse apparente  $M_a(t)$  des grains en appui sur le piston (voir la figure 3.2). La masse apparente reste stationnaire au début de

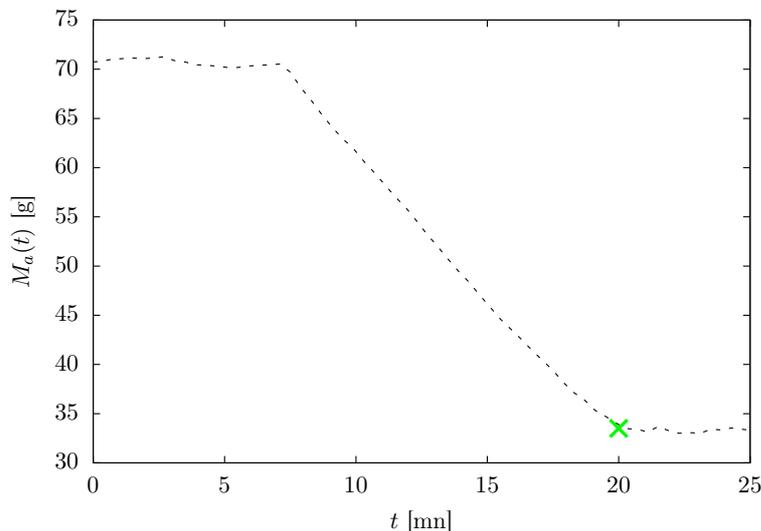


FIGURE 3.2 – Évolution de la masse apparente  $M_a$  au cours du temps lors de la descente du piston. Le point de mesure est représenté par une croix verte, qui correspond au temps à partir duquel la friction est totalement mobilisée.

la mise en mouvement du piston, puis commence à décroître alors qu'une partie du poids des grains est redirigée vers les parois par frottement. Lorsque la masse apparente se stabilise, la colonne de grains se trouve au seuil de glissement de Coulomb. Nous mesurons alors la masse apparente  $M_a$  supportée par le piston correspondant à la masse grains versée  $M_g$ .

Ainsi, à chaque point de la figure 3.3 correspond une expérience où nous versons dans le silo une masse  $M_g$ , déplaçons le piston jusqu'à ce que toute la colonne de grains frotte sur la paroi du silo, puis vidons le silo et recommençons en versant une masse différente. Cette figure représente donc la masse apparente  $M_a$  supportée par le piston en fonction de la masse réelle  $M_g$  de grains versée dans le silo, pour les tubes souples d'élastomère et le tube rigide de PMMA. La masse apparente croît avec la masse versée puis atteint un plateau que nous notons  $M_{sat}$ . Les données se regroupent sur une même courbe maîtresse, indépendamment du matériau du tube utilisé.

Nous décrivons maintenant le modèle de Janssen. Nous considérons une tranche infinitésimale d'épaisseur  $dz$  de milieu granulaire (voir figure 3.4) située à une altitude  $z$ . Nous notons  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{rz}$  les contraintes (respectivement radiales, verticales et de cisaillement) dans le milieu granulaire, moyennées sur la tranche. À l'équilibre, le poids  $P = -\rho\phi g\pi R^2 dz$  de la tranche, où  $g$  est l'accélération de la pesanteur, est compensé par trois forces. La partie supérieure du milieu granulaire applique une force  $-\sigma_{zz}(z + dz)\pi R^2$  et la partie inférieure une force  $\sigma_{zz}(z)\pi R^2$ . La force de frottement des grains sur la paroi interne du silo est  $F_F = \sigma_{rz}(z)2\pi R dz$ . Nous faisons l'hypothèse que le matériau est, en tout point de la paroi, au seuil de glissement de Coulomb :

$$\sigma_{rz} = \mu_s \sigma_{rr} \quad (3.1)$$

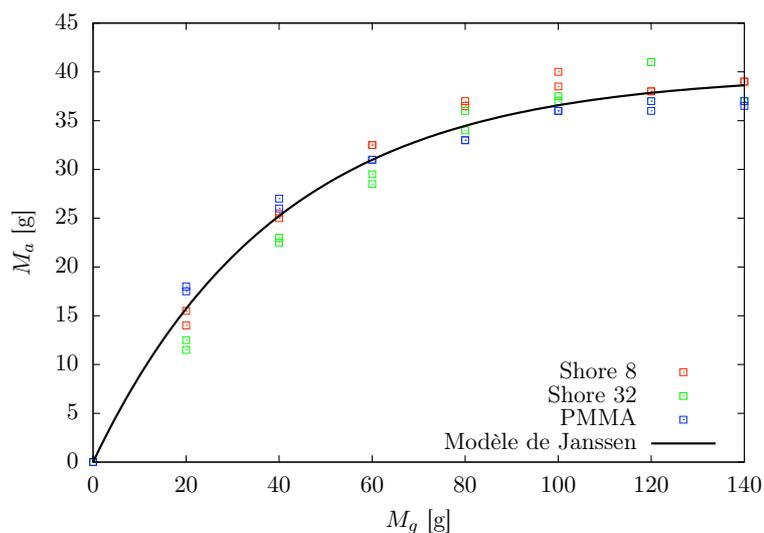


FIGURE 3.3 – Évolution de la masse apparente  $M_a$  supportée par le piston en fonction de la masse de grains  $M_g$  versée dans le silo.  $M_a$  est mesurée grâce au capteur de force relié au piston, en bas du dispositif expérimental, de la même manière que dans (Vanel *et al.*, 2000; Ovarlez *et al.*, 2003). Chaque point représente une expérience complète, et chaque expérience a été reproduite une fois. Les expériences sont réalisées dans des tubes de modules de Young  $E = 0,24$  MPa (carrés rouges),  $E = 0,96$  MPa (carrés verts) et  $E = 2,5$  GPa (carrés bleus). La ligne pleine (en noir) correspond au modèle de Janssen qui donne  $M_a = M_{sat} [1 - \exp(-M_g/M_{sat})]$ , avec  $M_{sat} = 40$  g ajustant au mieux les données expérimentales.

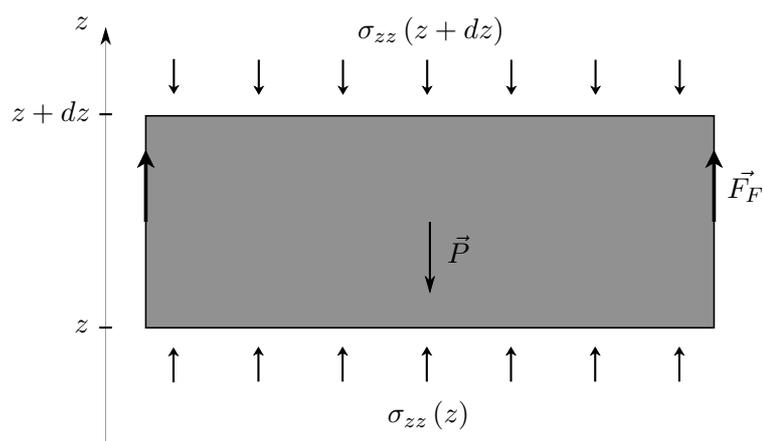


FIGURE 3.4 – Bilan des forces du modèle de Janssen sur une couche infinitésimale d'épaisseur  $dz$ , à une altitude  $z$ . Au poids  $\vec{P}$  s'oppose les forces de frottement  $\vec{F}_F$ , ainsi que les forces dues aux contraintes longitudinales exercées par les grains situés au-dessus ( $-\sigma_{zz}(z + dz)$ ) et en dessous ( $\sigma_{zz}(z)$ ) de la tranche considérée.

où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique entre les grains et le silo. Cette hypothèse nous permet de réécrire la force de friction à la paroi  $\mu_s \sigma_{rr}(z) 2\pi R dz$ . Le modèle de Janssen repose sur l'hypothèse supplémentaire que les contraintes radiales sont proportionnelles aux contraintes verticales

$$\sigma_{rr} = K \sigma_{zz} \quad (3.2)$$

où  $K$  est le coefficient de Janssen, constant sur toute la colonne, et contenant toute l'information sur les caractéristiques mécaniques du matériau granulaire. La force de frottement à la paroi est donc :

$$F_F = \mu_s K \sigma_{zz} 2\pi R dz \quad (3.3)$$

Le bilan des forces exercées par le milieu granulaire extérieur sur la tranche considérée donne :

$$F_G = -\sigma_{zz}(z + dz)\pi R^2 + \sigma_{zz}(z)\pi R^2 = -\pi R^2 dz \frac{d\sigma_{zz}(z)}{dz} \quad (3.4)$$

L'équilibre des forces ( $P = F_F + F_G$ ) donne donc :

$$-\rho \phi g \pi R^2 dz = \mu_s K \sigma_{zz}(z) 2\pi R dz - \pi R^2 dz \frac{d\sigma_{zz}(z)}{dz} \quad (3.5)$$

qui est une équation différentielle sur  $\sigma_{zz}$  :

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} - \frac{2K\mu_s\sigma_{zz}}{R} = \rho\phi g \quad (3.6)$$

dont la solution, avec des contraintes nulles ( $\sigma_{zz} = 0$ ) à la surface libre de grains en  $z = l_g$  et en plaçant le fond du silo en  $z = 0$  est :

$$\sigma_{zz}(z) = -\frac{\rho\phi g R}{2K\mu_s} \left[ 1 - \exp\left(\frac{2K\mu_s(z - l_g)}{R}\right) \right] \quad (3.7)$$

La grandeur que nous mesurons expérimentalement est la masse apparente au piston, en bas de la colonne de grains,  $M_a = |\sigma_{zz}(z = 0)| \frac{\pi R^2}{g}$ . Ce qui donne, connaissant maintenant  $\sigma_{zz}(z)$  :

$$M_a = M_{sat} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{M_g}{M_{sat}}\right) \right] \quad (3.8)$$

où  $M_{sat} = \pi R^3 \rho \phi / 2K\mu_s$  est la masse de saturation mesurée et  $M_g = \pi R^2 l_g \rho \phi$  est la masse de grains versée dans le silo. Nous ajustons les données expérimentales par ce modèle de Janssen (voir la courbe noire sur la figure 3.3) et obtenons  $M_{sat} = 40$  g. Le coefficient de Janssen correspondant à nos grains est donc  $K = \pi R^3 \rho \phi / 2M_{sat}\mu_s = 0,75$ .

L'évolution de la masse apparente supportée par le piston en fonction de la masse de grains versée dans le silo suit donc la loi de Janssen. Les données pour les tubes déformables se superposent parfaitement sur les données de référence dans un cylindre rigide. Nous ne voyons expérimentalement aucune influence de l'élasticité du silo sur la saturation de la masse apparente.

La loi de Janssen ne dépend donc pas explicitement de l'élasticité du silo dans la gamme de paramètres utilisée pour nos expériences. La seule grandeur qui pourrait être influencée par les propriétés mécaniques du contenant est le rayon  $R$  du cylindre utilisé. En effet, la pression exercée par les grains à l'intérieur du tube déforme celui-ci, et change légèrement son rayon apparent. Dans la limite des petites déformations,  $w \ll R$ , ce phénomène n'a pas d'incidence sur la distribution de contraintes

dans les grains et ne modifie pas la loi de Janssen. La pression  $p$  appliquée par les grains sur la paroi du tube est d'ordre  $|p| = \sigma_{rr} \sim \rho g R$ . Le déplacement radial d'un tube élastique soumis à cette pression interne s'écrit  $w \sim pR^2/Eh \sim \rho g R^3/Eh$  (Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, 1964). Le rapport  $w/R$  est donc d'ordre  $\rho g R^2/Eh$ , ce qui est inférieur à  $10^{-2}$  dans le cas de nos expériences. Le critère  $w \ll R$  est donc bien vérifié.

Une autre façon d'influencer la manière dont la masse apparente sature est de changer la fraction volumique du milieu granulaire (Vanel *et al.*, 1999). Le déplacement radial du silo cylindrique doit donc être suffisamment petit pour ne pas changer la fraction volumique initiale. Ceci est le cas tant qu'un grain n'a pas la place nécessaire pour se déplacer, ce qui entraînerait le ré-arrangement du milieu granulaire. Un autre critère à vérifier pour que l'élasticité du silo n'ait pas d'influence sur la loi de saturation est donc  $w < d$ , ce qui est le cas dans le cadre de nos expériences où  $d = 1,2$  ou  $3$  mm et  $w < 0,2$  mm.

### 3.2.3 Élasticité isotrope

Comment décrire le milieu granulaire ? Une hypothèse simplificatrice consiste à considérer le milieu granulaire comme un milieu continu élastique isotrope de module de Young  $E_g$  et de module de Poisson  $\nu_g$ , Ovarlez *et al.* montrent numériquement une forte dépendance de la masse de saturation avec le rapport des modules de Young des grains et du silo  $E_g/E$ . Nous suivons ici la description analytique de (Ovarlez & Clément, 2005a) en tenant compte des propriétés élastiques du cylindre au lieu de supposer un silo infiniment rigide.

Nous nous plaçons dans un cas où les grains sont au seuil de Coulomb sur toute la longueur de la colonne. Loin du piston en  $z = 0$  et de la surface libre des grains en  $z = l_g$ , les contraintes et les déformations dans le milieu granulaire doivent être indépendantes de l'altitude  $z$ . Les termes non nuls du tenseur des déformations  $\epsilon$  peuvent s'écrire en fonction des déplacements radial  $u_r$  et longitudinal  $u_z$  du milieu granulaire :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (3.9)$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho g \quad (3.10)$$

Nous supposons que les relations entre contraintes et déformations dans le milieu granulaire sont données par la loi de Hooke :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1 + \nu_g}{E_g} \sigma_{\alpha\beta} - \nu_g \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \quad (3.11)$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{r, \theta, z\}$  et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Nous résolvons les équations 3.10 avec les conditions aux limites  $\sigma_{rz}(r = R, z) = -\mu_s \sigma_{rr}(r = R, z)$  pour obtenir les déplacements radial et longitudinal :

$$u_r(r, z) = \frac{U_R(z)}{R} r \quad (3.12)$$

$$u_z(r, z) = \frac{1 + \nu_g}{2E_g} \rho g r^2 - z \left( \frac{(1 - 2\nu_g)(1 + \nu_g) \rho g R}{\nu_g E_g} + \frac{1}{\nu_g} \frac{U_R(z)}{R} \right) \quad (3.13)$$

dans le milieu granulaire, où  $U_R(z)$  est le déplacement radial du cylindre. En supposant un cylindre infiniment rigide, le déplacement radial du silo est nul  $U_R = 0$  et nous retrouvons la solution donnée par (Ovarlez & Clément, 2005a).

Le déplacement radial dû à une pression  $p$  peut s'écrire  $U_R = pR^2/Eh$  (Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, 1964), et est donc ici lié à la pression interne des grains sur la paroi  $p = -\sigma_{rr} = \rho gR/2\mu_s$ , ce qui donne :

$$U_R = \frac{\rho g R^3}{2\mu_s E h} \quad (3.14)$$

La masse de saturation en tenant compte de l'élasticité du silo  $M_{sat,elas} = \frac{\pi R^2}{g} |\sigma_{zz}|$  est donc :

$$M_{sat,elas} = M_{sat} \left( 1 + \frac{R}{(1 - \nu_g) h} \frac{E_g}{E} \right) \quad (3.15)$$

où  $M_{sat}$  est la masse de saturation dans un tube rigide.

La masse de saturation dans une expérience de Janssen dans un silo déformable devrait donc fortement dépendre du rapport des modules de Young des grains et du silo. Expérimentalement, nous avons fait varier le rapport  $E_g/E$  par un facteur  $10^4$  sans voir de changement de la valeur de saturation de la masse apparente de grains supportée par le piston. Le modèle élastique isotrope ne décrit donc pas assez précisément le comportement d'un milieu granulaire et des théories anisotropes ou elliptiques doivent être considérées, comme déjà remarqué par (Ovarlez & Clément, 2005a).

### 3.3 Contraintes locales - statique

Nous nous intéressons toujours à l'expérience modèle de Janssen, mais cherchons ici à mesurer directement les contraintes locales tout le long de la colonne de grains. Ayant montré que, dans les limites de notre dispositif expérimental, l'élasticité du silo n'a pas d'influence sur la saturation des contraintes dans le milieu granulaire, nous utiliserons dans la suite de ce chapitre le tube en élastomère (PVS) de dureté shore 8. Il est en effet suffisamment souple pour être déformé sous l'effet des forces de frottement des grains sur sa face interne. Nous pouvons donc mesurer les déplacements de sa face externe et en déduire les contraintes dans les grains près de la paroi.

#### 3.3.1 Montage expérimental

##### Principe de la mesure

Nous mettons en œuvre le même dispositif expérimental que pour la section 4.2. Nous utilisons le tube en élastomère de dureté shore 8, dont nous avons recouvert la paroi externe d'un mouchetis de peinture noire, nous permettant de suivre ses déplacements. Le déroulement d'une expérience est représenté sur le schéma de la figure 3.5.

Nous prenons une image de référence de la totalité de la face avant du cylindre vide, le remplissons d'une hauteur  $l_g$ , correspondant à une masse  $M_g$ , de grains. Nous mobilisons ensuite les forces de frottement sur toute la longueur de la colonne en suivant le protocole décrit précédemment. Une fois le milieu granulaire au seuil de Coulomb (par rapport à la paroi interne) sur toute la longueur de la colonne, nous prenons une nouvelle image de la face avant du silo.

Le tube est suffisamment souple pour être déformé sous l'effet de la pression et du frottement des

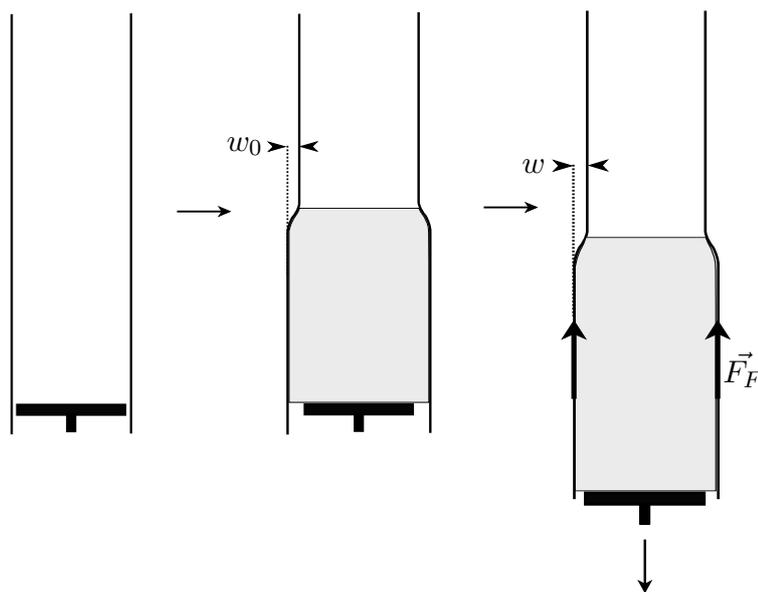


FIGURE 3.5 – Schéma du déroulement d’une expérience. À l’état initial, le silo moucheté, vide, est fixé par le haut, libre en bas, et nous en prenons une photographie de référence. Nous versons ensuite une masse  $M_g$  de grains, formant une colonne granulaire de hauteur  $l_g$ . Dans la partie remplie, le cylindre se déforme radialement sous l’effet de la pression des grains. Nous déplaçons ensuite le piston vers le bas, jusqu’à mobilisation complète des forces de frottement entre les billes et la paroi interne. Lorsque toute la colonne se trouve au seuil de glissement de Coulomb, nous prenons un second cliché. Dans cet état déformé, la pression des grains fait gonfler le tube, et les forces de frottement étirent le cylindre vers le bas. Nous comparons l’image de l’état déformé à celle de l’état au repos par des méthodes de corrélation utilisées en PIV (Particle Image Velocimetry) afin d’obtenir une mesure du champ de déplacement.

grains à la paroi. La pression fait gonfler le tube dans sa partie remplie, et le silo est étiré lors de la descente du piston, sous l'effet du frottement avec le milieu granulaire. La comparaison des deux images par corrélation nous permet d'obtenir expérimentalement le déplacement radial  $w$  et le déplacement longitudinal  $u$  sur toute la longueur du silo.

## PIV

Nous utilisons le logiciel PIVlab (Thielicke & Stamhuis, n.d.) avec Matlab pour traiter les images décrites précédemment. La figure 3.6 montre un exemple de résultat obtenu. Nous utilisons une

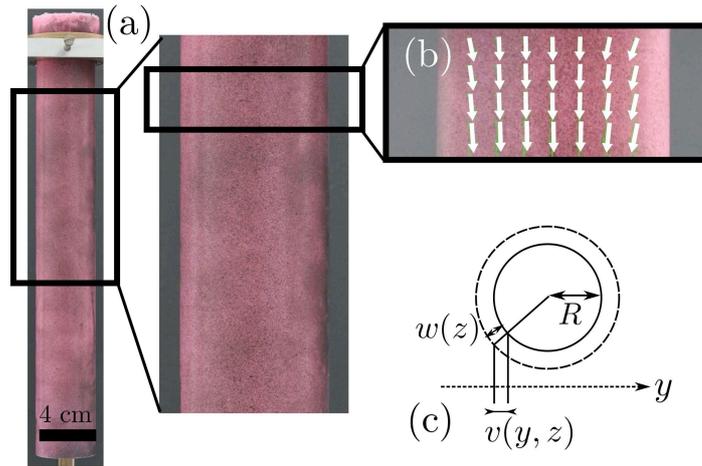


FIGURE 3.6 – (a,b) Le tube de polymère (PVS) est recouvert d'un mouchetis de peinture noire, qui permet de mesurer le champ de déplacements (représenté par les flèches sur (b)) par des techniques de corrélations d'image utilisées en PIV. Une image de référence du tube vide est comparée à une image prise dans l'état déformé du cylindre lorsque toute la colonne de grains est au seuil de glissement de Coulomb. (c) La corrélation d'images donne le déplacement longitudinal local  $u(y, z)$  et le déplacement transverse  $v(y, z)$ . Le déplacement radial est obtenu par transformation géométrique, sachant que  $v(y, z) = (y/R) w(z)$ .

méthode de corrélation par transformée de Fourier, en 3 passes, avec des tailles de fenêtre allant de 256x256 pixels à 64x64 pixels, avec un chevauchement de 50%. Cela nous permet d'obtenir une précision maximum de mesure du déplacement de l'ordre de 1/10 de pixel. Avec une résolution d'image de 4288x2848 pixels, un pixel équivaut environ à 0,05 mm et notre précision maximum sur les déplacements du tube est donc de l'ordre de 5  $\mu\text{m}$ .

Nous obtenons ainsi le déplacement longitudinal  $u(y, z)$  et le déplacement transverse  $v(y, z)$ , qui est un déplacement radial apparent. Pour obtenir le déplacement radial  $w(z)$ , nous devons tenir compte de la courbure du cylindre qui donne géométriquement  $w(z) = v(y, z) R/y$ . Nous convertissons également le déplacement longitudinal local  $u(y, z)$  en déplacement longitudinal moyenné  $u(z) = \langle u(y, z) \rangle_y$ , que nous appellerons par commodité le déplacement longitudinal dans la suite. Nous calculons la moyenne sur la largeur apparente, transverse, du tube, sans tenir compte de la courbure. Nous pourrions, plus rigoureusement, calculer la moyenne sur le demi-périmètre  $\langle u(y, z) \rangle_\theta$  et ainsi prendre en compte plus précisément les déplacements près de l'extérieur du cylindre, mais n'avons pas jugé cela nécessaire.

Nous pouvons donc mesurer les déplacements sur toute la longueur du silo, sur la moitié de sa surface, c'est-à-dire sur la zone correspondant au demi-périmètre faisant face à l'appareil photo.

Nous représentons sur la figure 3.7 le déplacement longitudinal moyenné sur le demi-périmètre visible du cylindre, mesuré sur toute la longueur du tube. Le déplacement est toujours négatif. En

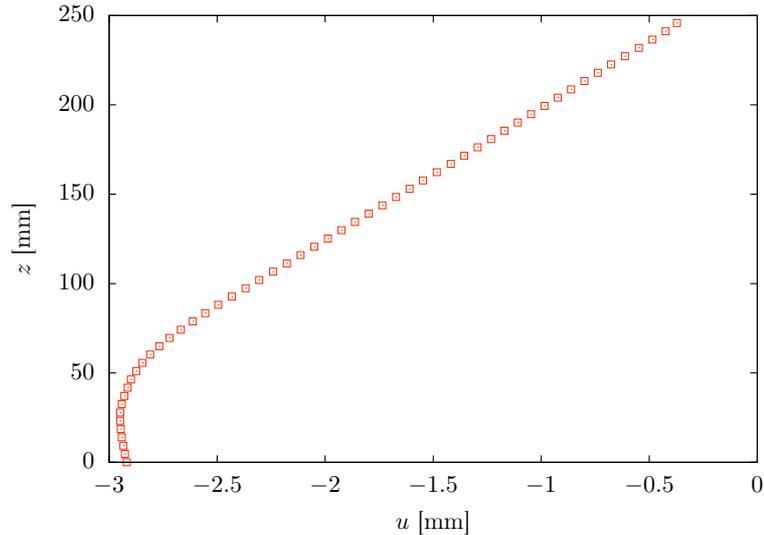


FIGURE 3.7 – Déplacement longitudinal  $u$ , moyenné sur la face visible du cylindre, le long de la hauteur du silo, pour un tube en élastomère de dureté shore 8 ( $E = 0,24$  MPa,  $\nu = 0,5$ ) rempli d'une masse  $M_g = 140$  g de billes de verre, correspondant à une hauteur de grains  $l_g = 80$  mm. Le piston est situé en  $z = 0$  et la surface libre du milieu granulaire en  $z = l_g$ . Le déplacement est compté positivement dans le sens de  $z$  croissant. Le déplacement étant causé par la descente du piston, entraînant les grains qui frottent sur la paroi,  $u$  est toujours négatif. La partie haute ( $z > l_g$ ) est linéaire alors que la partie remplie de billes présente une déviation.

effet, nous comptons positifs les déplacements dans le sens des  $z$  croissants. Or, le déplacement longitudinal du cylindre est dû à l'étirement du tube sous l'effet des forces de frottement des grains sur la paroi intérieure, suite au déplacement du piston vers le bas. L'ensemble du déplacement longitudinal se fait donc vers le bas. Dans cet exemple, la longueur remplie de grains est  $l_g = 80$  mm, le piston est toujours situé en  $z = 0$  et la surface libre en  $z = l_g$ . Dans la zone vide du silo, c'est-à-dire pour  $z > l_g$  mm, le profil de déplacement est une droite, dont la pente est proportionnelle à l'élasticité du silo. En effet, dans cette zone, nous étirons simplement un cylindre vide. Pour  $z < l_g$ , par contre, le profil est perturbé par la présence de grains.

Nous représentons sur la figure 3.8 le déplacement radial mesuré sur toute la longueur du tube. Nous comptons positifs les déplacements dans le sens des  $r$  croissants, c'est-à-dire vers l'extérieur du tube. Le déplacement radial est dû à la pression exercée par les grains sur la paroi. Dans la zone remplie de grains, pour  $z < l_g$ , le tube est gonflé sous l'effet de la pression du milieu granulaire, et le déplacement radial est positif. Dans la partie vide du cylindre, nous observons l'étirement vers le bas d'un cylindre fixé en son sommet. Son rayon apparent est donc diminué par effet Poisson, et nous mesurons pour  $z > l_g$  un déplacement radial négatif.

Les déplacements radial et longitudinal sont des conséquences des contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}(R, z)$  et des contraintes radiales  $\sigma_{rr}(R, z)$  dans les grains, près de la paroi du silo. Nous noterons dans la suite  $\sigma_{rz}(R, z) = \sigma_{rz}(z)$  et  $\sigma_{rr}(R, z) = \sigma_{rr}(z)$  pour faciliter la lecture, tout en gardant à l'esprit que ce sont des contraintes locales, et non pas moyennes, comme dans le modèle de Janssen. Notons qu'un modèle de Janssen amélioré en tenant compte de la dépendance radiale des contraintes donne qualitativement le même comportement (Rahmoun *et al.*, 2008).

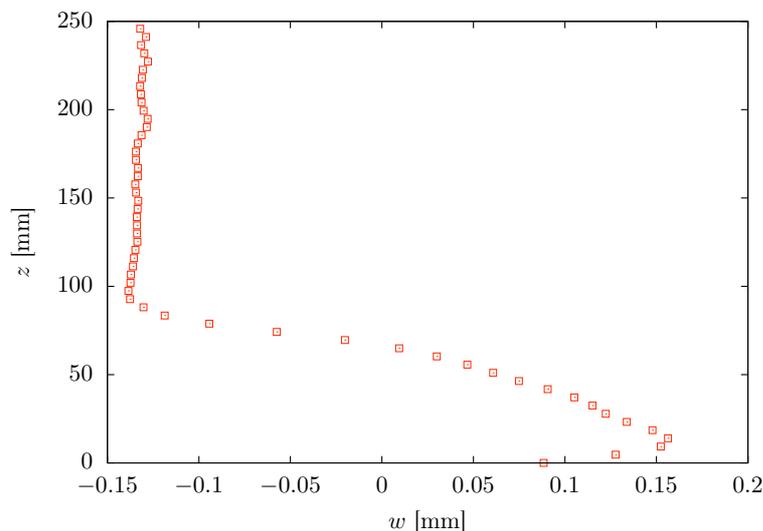


FIGURE 3.8 – Déplacement radial  $w$  le long du silo, pour un tube en élastomère de dureté shore 8 ( $E = 0,24$  MPa,  $\nu = 0,5$ ) rempli d'une masse  $M_g = 140$  g de billes de verre, correspondant à une hauteur de grains  $l_g = 80$  mm. Le piston est situé en  $z = 0$  et la surface libre du milieu granulaire en  $z = l_g$ . Le déplacement est compté positivement dans le sens de  $r$  croissant. Le déplacement étant causé par la pression exercée par les grains sur la paroi,  $w$  est positif dans la partie remplie de billes ( $z < l_g$ ). La partie vide présente un  $w$  négatif car le rayon apparent du cylindre, fixé en haut et étiré vers le bas, diminue par effet Poisson.

### 3.3.2 Méthode

Nous connaissons maintenant précisément les déplacements à l'extérieur du cylindre contenant les grains. Nous sommes intéressés par les contraintes qui s'exercent dans le milieu granulaire. Une première approche très simple consiste à calculer la dérivée seconde de ces déplacements pour obtenir les contraintes dans le silo à l'interface avec les grains, c'est-à-dire, par continuité, les contraintes dans les grains en  $r = R$ . Mais dériver deux fois un signal expérimental introduit beaucoup de bruit, ce qui rend difficile son interprétation, et nous n'avons pas pu obtenir de résultats satisfaisants par cette méthode.

Nous décidons donc de considérer le problème inverse : quelles sont les contraintes dans le cylindre qui, par double intégration, donnent les déplacements mesurés expérimentalement ? Plus précisément, nous utilisons un modèle de coque cylindrique pour modéliser la réponse mécanique du silo aux contraintes de pression et de cisaillement exercées par les grains sur sa paroi intérieure. Nous intégrons avec les conditions aux limites adéquates le système d'équations différentielles obtenu pour exprimer le champ de déplacement. Nous comparons ensuite les déplacements calculés et les mesures effectuées par PIV, modifions les valeurs des contraintes considérées, et recommençons le processus jusqu'à ce que l'écart entre les déplacements mesurés et théoriques soit satisfaisant.

#### Modèle de coque cylindrique

Nous utilisons la théorie linéaire des coques cylindriques élastiques (Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, 1964) pour décrire la déformation du silo. Nous utilisons les notations de la figure 3.9 : le cylindre est de longueur  $L$ , rayon  $R$ , épaisseur  $h$ , module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ .

Nous nous plaçons dans la limite des coques minces ( $h/R \ll 1$ ) et nous considérons des déformations axisymétriques. Dans ces conditions, les termes non nuls du tenseur des déformations  $\epsilon$  peuvent

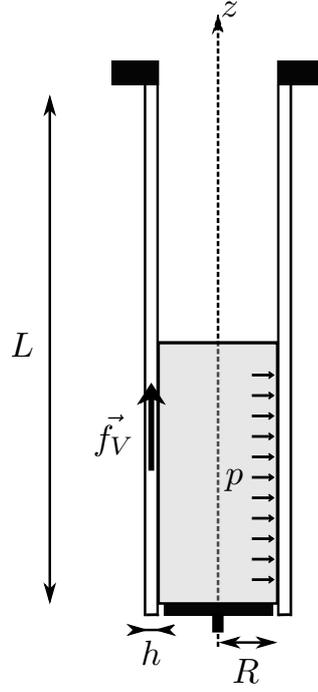


FIGURE 3.9 – Schéma de la coque cylindrique. Nous considérons un cylindre de longueur  $L$ , rayon  $R$ , épaisseur  $h$ , module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ .  $p = -\sigma_{rr}$  est la pression radiale exercée par les grains sur la paroi interne du silo, positive vers l'extérieur.  $f_v$  est la force volumique axiale dans l'épaisseur du cylindre, positive vers le haut, équivalente à la contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}$  due aux grains à la paroi.

s'écrire en fonction du déplacement axial  $u$  et du déplacement radial  $w$  :

$$\epsilon_{zz} = \frac{du}{dz} \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{w}{R} \quad (3.16)$$

de même pour la courbure :

$$\kappa_{zz} = -\frac{d^2w}{dz^2} \quad (3.17)$$

Nous utilisons la loi de Hooke pour exprimer les moments  $m_{\alpha\beta}$  et les contraintes dans le plan  $n_{\alpha\beta}$  :

$$m_{zz} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_{zz} \quad (3.18)$$

$$n_{zz} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{zz} + \nu\epsilon_{\theta\theta}) \quad (3.19)$$

$$n_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{zz}) \quad (3.20)$$

Les équations d'équilibre dans le plan et hors du plan sont donc :

$$\frac{dn_{zz}}{dz} = -hf_v \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2m_{zz}}{dz^2} - \frac{n_{\theta\theta}}{R} = -p \quad (3.22)$$

où  $p$  est la pression exercée sur la face intérieure du cylindre, positive vers l'extérieur, et  $f_v$  est la force volumique axiale dans le cylindre, positive vers le haut, dans le sens des  $z$  croissant. Dans notre cas,

la pression est liée à la présence du milieu granulaire et on a  $p = -\sigma_{rr}(z)$ . Les grains créent aussi une contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}(z)$  à la paroi du tube. Nous ne pouvons pas intégrer directement cette contrainte dans le modèle de coque, mais nous remarquons qu'une force de cisaillement agissant sur une hauteur infinitésimale  $dz$  de tube  $F_{rz} = 2\pi(R - h/2)\sigma_{rz}dz$  est équivalente à une force axiale  $F_v = f_v h 2\pi R dz$ , ce qui donne :

$$f_v h = \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \sigma_{rz} \quad (3.23)$$

Dans le cas d'un silo cylindrique déformé sous l'effet du milieu granulaire, les équations d'équilibre sont donc :

$$\frac{dn_{zz}}{dz} = \left(\frac{h}{2R} - 1\right) \sigma_{rz}(z) \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2 m_{zz}}{dz^2} - \frac{n_{\theta\theta}}{R} = \sigma_{rr}(z) \quad (3.25)$$

Connaissant les fonctions  $\sigma_{rz}(z)$  et  $\sigma_{rr}(z)$ , nous obtenons le déplacement radial et le déplacement axial en résolvant les équations (3.24,3.25) avec les conditions aux limites adéquates.

Nous avons besoin de les résoudre uniquement sur la partie remplie du silo. En effet, la déformation de la partie supérieure du cylindre,  $z > l_g$ , correspond à l'étirement d'une coque vide (sauf près du sommet). Nous pouvons décrire cet état par  $u(z > l_g) = u_0(z/l_g)$  et  $w(z > l_g) = w_0$ , avec  $u_0 = u(l_g)$  et  $w_0 = w(l_g)$ ,  $u_0$  et  $w_0$  étant déterminés expérimentalement. Les conditions aux limites considérées sont des déplacements radial et axial connus en  $z = l_g$ ,  $u(z = l_g) = u_0$ ,  $w(z = l_g) = w_0$  et  $w'(l_g) = 0$ . Nous considérons également une condition de bord libre en bas, où  $n_{zz}(0) = m_{zz}(0) = dm_{zz}/dz(0) = 0$ .

## Procédure d'optimisation

La partie du tube remplie de grains ( $0 \leq z \leq l_g$ ) est discrétisée en  $N - 1$  éléments. Les valeurs des fonctions  $\sigma_{rr}(z)$  et  $\sigma_{rz}(z)$  à chaque point entre les éléments sont les  $2N$  inconnues du problème inverse discret. Les valeurs des fonctions pour tout  $z$  sont interpolées à partir des valeurs à ces  $N$  nœuds. Pour un jeu d'inconnues donné, le problème aux conditions limites (équations 3.24 et 3.25) est résolu par une méthode de collocation (la fonction matlab *bvp4c*) (Kierzenka & Shampine, 2001), ce qui donne le champ de déplacements  $\{u_{opt}, w_{opt}\}$ . Nous calculons les écarts quadratiques entre ces déplacements et les déplacements expérimentaux obtenus par PIV. Nous modifions ensuite les valeurs des  $2N$  inconnues afin de réduire cet écart, par la méthode des moindres carrés, ce jusqu'à ce qu'il soit minimal. Nous utilisons pour ceci l'algorithme de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944) (fonction *lsqnonlin* de matlab) et la méthode "Active-set" (Waltz *et al.*, 2006) (fonction *fmincon* de matlab).

L'idée générale est donc d'intégrer avec les conditions aux limites le système d'équations différentielles pour exprimer le champ de déplacement. Nous comparons ensuite les déplacements calculés et les mesures effectuées par PIV, modifions les valeurs des contraintes considérées, et cherchons ainsi les valeurs des contraintes minimisant à la fois l'écart sur les déplacements longitudinal et radial. La figure 3.10 montre les résultats d'une procédure d'optimisation sur les déplacements et la figure 3.11 les contraintes de cisaillement correspondantes. Sur la partie vide  $z > l_g$ , le déplacement longitudinal est linéaire en  $z$ , représentatif de l'étirement du tube sous l'effet des forces de frottement. Le déplacement radial est constant et négatif, le tube étant fixé en haut, le fait de l'étirer diminue

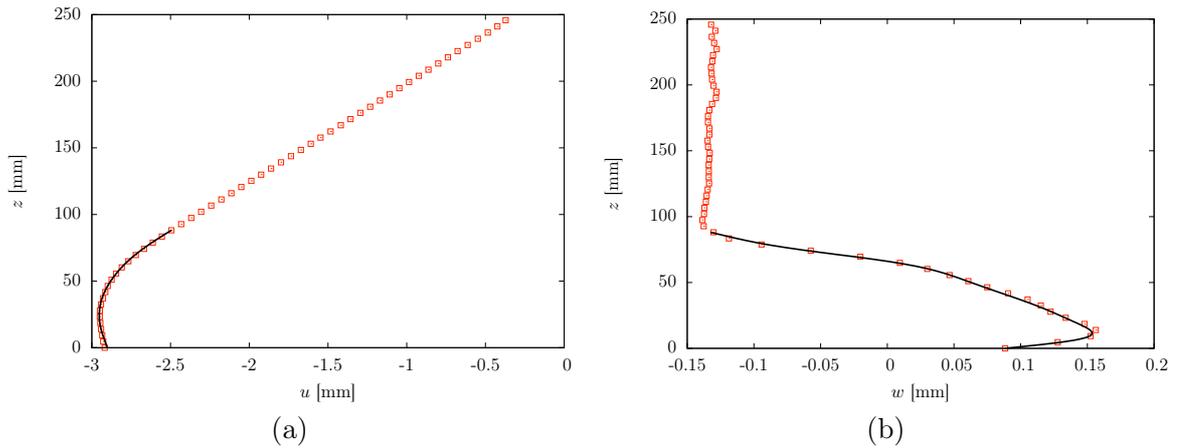


FIGURE 3.10 – Résultat représentatif d’une seule procédure d’optimisation, pour un tube de shore 8 ( $E = 0,24$  MPa,  $\nu = 0,5$ ) rempli d’une masse  $M_g = 140$  g de grains ( $l_g = 80$  mm).  $z = 0$  correspond au bas du tube,  $z = l_g$  à la surface libre de la colonne granulaire. (a,b) Déplacements longitudinal et radial de la face extérieure du cylindre. Les carrés représentent les mesures obtenues par corrélation d’images et les lignes pleines le résultat de la procédure d’optimisation. La résolution n’est faite que sur la partie remplie de grains, avec les conditions aux limites choisies pour décrire la partie vide du cylindre.

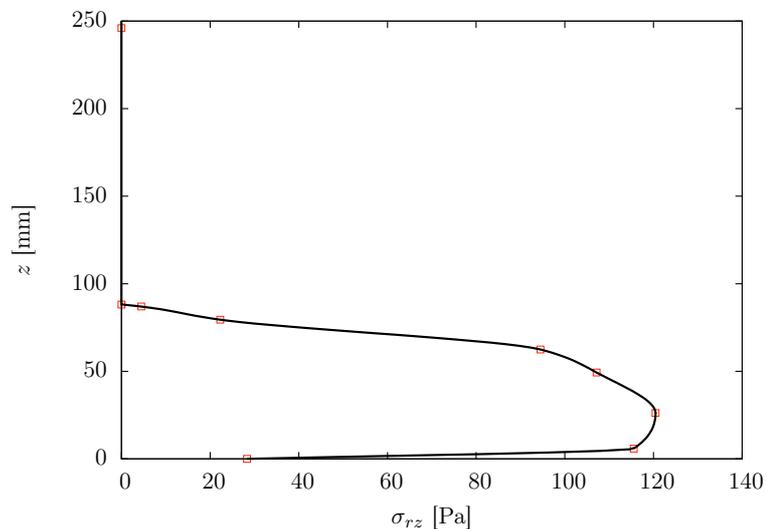


FIGURE 3.11 – Résultat représentatif d’une seule procédure d’optimisation, pour un tube de shore 8 ( $E = 0,24$  MPa,  $\nu = 0,5$ ) rempli d’une masse  $M_g = 140$  g ( $l_g = 80$  mm) de grains.  $z = 0$  correspond au bas du tube,  $z = l_g$  à la surface libre de la colonne granulaire. Contraintes de cisaillement dans le matériau granulaire à la paroi : l’algorithme de minimisation trouve les valeurs des contraintes de cisaillement aux nœuds ajustant au mieux simultanément les deux courbes de déplacement (figure 3.10). La fonction contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}(z)$  (ligne noire) est interpolée entre les  $N = 8$  points d’estimation (carrés rouges) par une fonction cubique.

son rayon apparent par effet Poisson, il se déplace donc radialement vers l'intérieur. Sur la partie remplie de grains  $z < l_g$  le tube se déplace radialement vers l'extérieur sous l'effet de la pression des grains et le déplacement longitudinal est influencé par l'interaction avec le milieu granulaire. La contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}$  est nulle à la surface libre de la colonne granulaire  $z = l_g$  et augmente avec la profondeur.

Il existe une solution unique au système d'équations (3.24 et 3.25) avec les conditions aux limites choisies. Pour trouver une valeur précise de  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{rz}$ , il suffirait donc d'augmenter le nombre de nœuds. Mais, en pratique, augmenter le nombre d'inconnues augmente rapidement le temps de calcul nécessaire tout en pouvant plus souvent mener à des minima locaux. Pour obtenir une solution précise, non locale, tout en optimisant le temps de calcul, nous choisissons un faible nombre de nœuds  $N \sim 10$ , mais plaçons ces nœuds aléatoirement le long de la partie remplie de grains du cylindre, et répétons la procédure d'optimisation (expliquée ci-dessus et sur les figures 3.10 et 3.11) un grand nombre de fois,  $N_r \sim 100$ , où  $N_r$  est le nombre de répétitions de la procédure d'optimisation. Cela nous permet d'estimer les contraintes sur toute la longueur de la partie remplie de grains, tout en optimisant le temps de calcul nécessaire et la précision de la solution trouvée. Nous initialisons les  $2N$  inconnues à zéro, et avons vérifié que le choix de cette valeur initiale n'a pas d'incidence sur la solution trouvée, et ne mène pas à des solutions locales.

Le nombre de répétitions  $N_r$  de la procédure d'optimisation est choisi de manière à avoir un nombre total de points d'estimations des contraintes de l'ordre de 1000. La figure 3.12 montre l'évolution du résidu de la procédure d'optimisation en fonction du nombre de nœuds  $N$  choisi pour une même procédure d'optimisation. La figure 3.13 illustre les contraintes de cisaillement correspondantes. Le

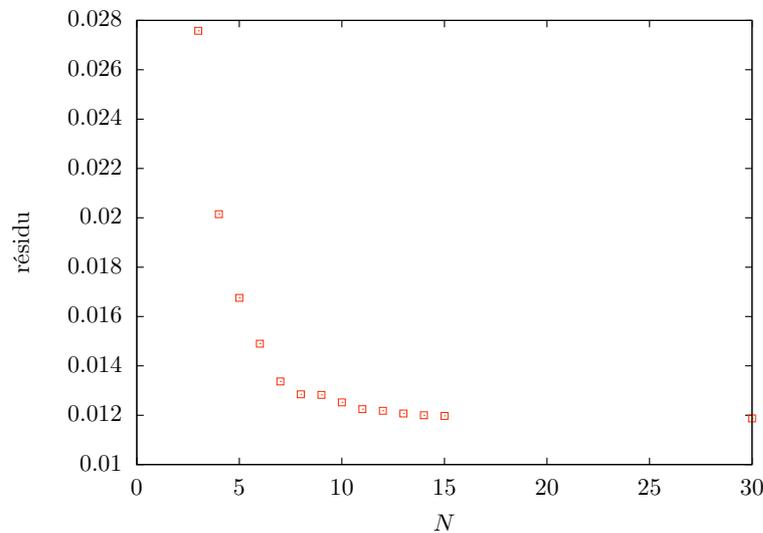


FIGURE 3.12 – Résidu moyen pour  $N_r = 50$  en fonction du nombre de nœuds  $N$  choisis pour la discrétisation en  $z$  du problème aux conditions limites. Le résidu moyen décroît fortement avec  $N$  pour se stabiliser à partir de  $N \sim 10$ .

résidu moyen décroît tout d'abord fortement avec  $N$  puis se stabilise à partir de  $N \sim 10$ . Le nombre de nœuds est ainsi choisi comme le plus petit  $N$  donnant un résidu moyen minimum, c'est-à-dire le nombre minimal au-delà duquel la valeur des fonctions inconnues  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{rz}$  ne change pas, mais à partir duquel augmenter  $N$  ne mène alors qu'à des résultats plus bruités.

Nous récapitulons la méthode globale sur la figure 3.14. Nous avons donc une méthode efficace en temps de calcul et en précision nous permettant d'obtenir les contraintes appliquées à la paroi intérieure du silo à partir des déformations extérieures du cylindre.

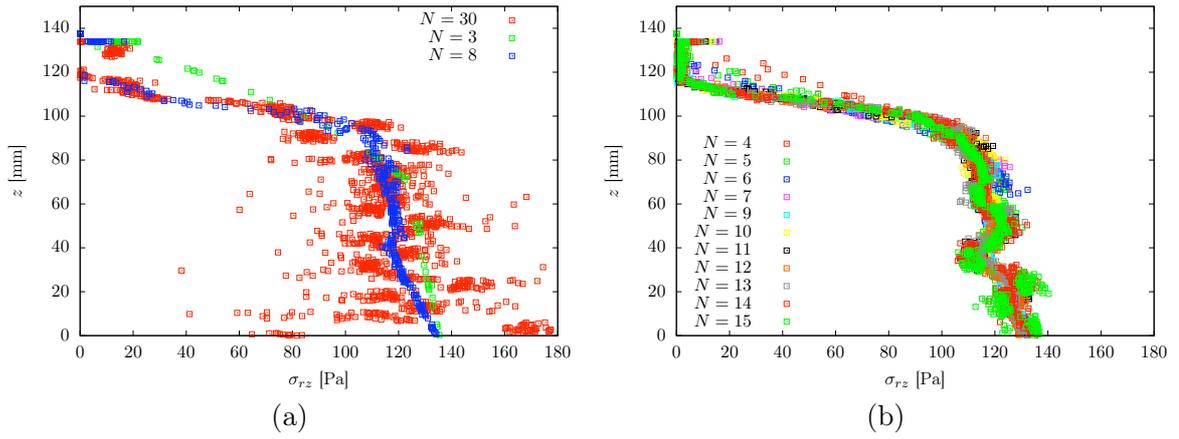


FIGURE 3.13 – Contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}$  pour plusieurs nombres de nœuds  $N$  de discrétisation du problème aux conditions limites. Nous les représentons sur deux figures pour faciliter la lecture.

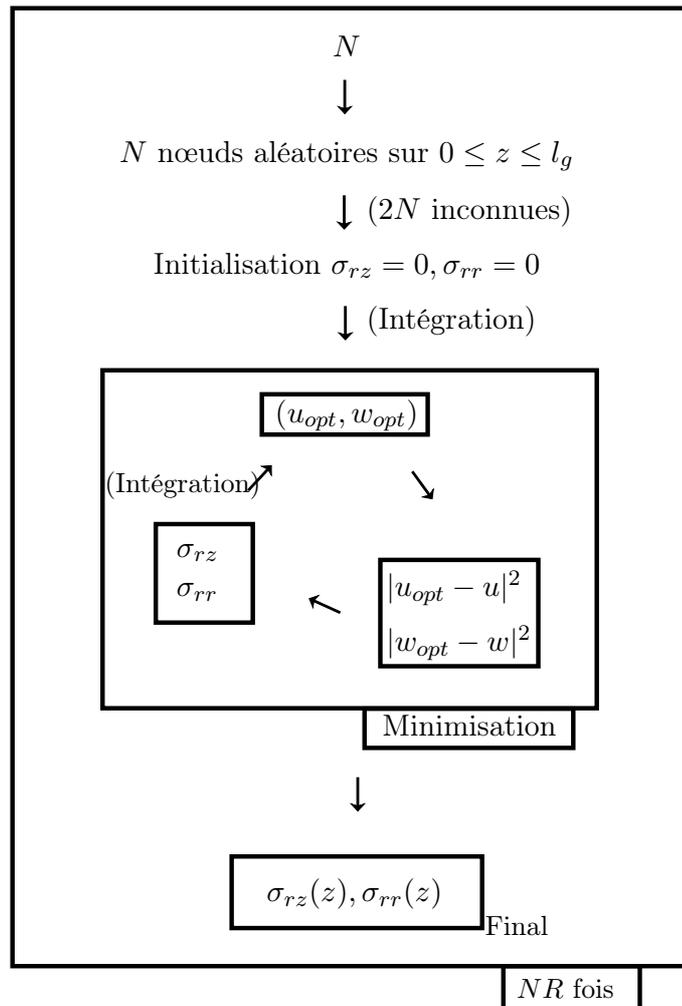


FIGURE 3.14 – Schéma fonctionnel de la méthode d'optimisation globale.

Nous testons la validité de cette méthode sur un problème artificiel dont nous connaissons la solution analytique. Nous imposons une contrainte connue, calculons les déplacements correspondants, et utilisons notre méthode inverse pour obtenir les contraintes. Nous choisissons ainsi un cylindre de module de Young  $E = 0,25$  MPa, d'épaisseur  $h = 2$  mm, de coefficient de Poisson  $\nu = 0,45$ , de rayon intérieur  $R = 18$  mm, de longueur  $L = 200$  mm. Nous plaçons dans ce cylindre une longueur  $l_g = 100$  mm de grains, sur laquelle les contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}$  suivent une loi exponentielle de Janssen avec une valeur de saturation  $\sigma_{rz} = 150$  Pa. Nous choisissons un coefficient de frottement  $\mu = 0,5$ . Nous avons donc un champ de déplacement  $\{u_{test}, w_{test}\}$  connu et des contraintes correspondantes  $\sigma_{rz_{test}}$  de longueur de saturation typique égale au rayon  $R$ . Nous utilisons ensuite notre méthode d'optimisation sur les déplacements de test, et comparons les contraintes calculées par la méthode d'optimisation  $\sigma_{rz_{opt}}$  aux contraintes obtenues analytiquement. Le résultat est tracé sur les figures 3.15 et 3.16. La procédure d'optimisation retrouve les contraintes obtenues analytiquement.

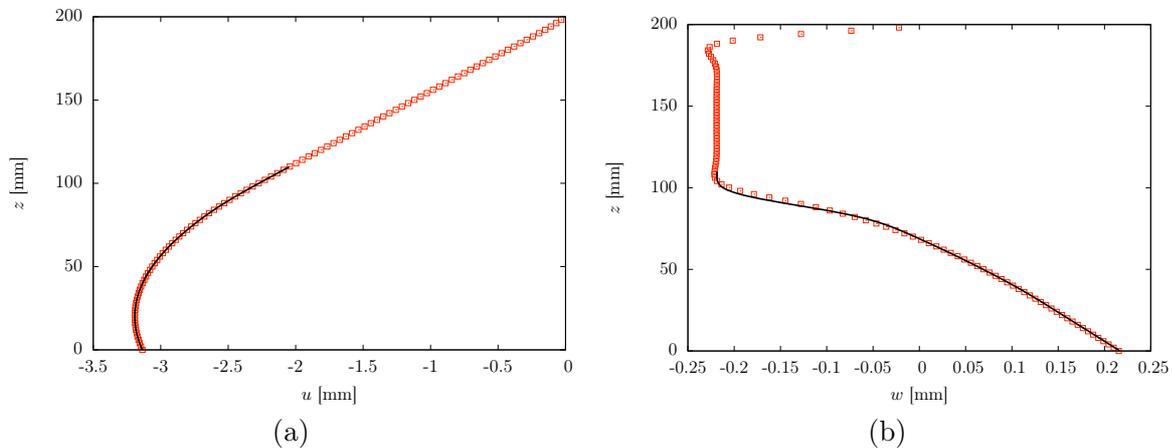


FIGURE 3.15 – Test de validation de la méthode d'optimisation. Nous considérons un cylindre rempli d'une hauteur  $l_g = 100$  mm de grains appliquant une contrainte de cisaillement selon un profil exponentiel  $\sigma_{rz}(z) = 150(1 - \exp((z - l_g)/R))$  et une valeur de saturation  $\sigma_{rz} = 150$  Pa. Il y a un bon accord entre les déplacements longitudinal et radial que nous connaissons (carrés rouges) et ceux donnés par la procédure d'optimisation (ligne continue noire).

Nous allons donc maintenant utiliser cette méthode validée sur des expériences statiques de grains confinés dans une colonne cylindrique.

Plus précisément, nos expériences sont quasi-statiques. En effet, nous déplaçons lentement le piston vers le bas après avoir versé les grains. Nous connaissons donc l'état de frottement à la paroi : la friction est totalement mobilisée, et les grains se trouvent au seuil de Coulomb sur toute la longueur de la colonne. Nous pouvons donc réduire le nombre d'inconnues en considérant que  $\sigma_{rz} = \mu\sigma_{rr}$ , où  $\mu$  devient une inconnue supplémentaire. Nous passons donc de  $2N$  à  $N + 1$  inconnues, sachant que nous connaissons ici parfaitement l'état de friction. C'est cette méthode modifiée que nous utiliserons ici, après avoir vérifié que la méthode à  $N + 1$  inconnues ( $\sigma_{rz}$  discrétisée sur  $N$  points et  $\mu$ ) donne les mêmes résultats que la méthode à  $2N$  inconnues ( $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{rz}$  discrétisées sur  $N$  points).

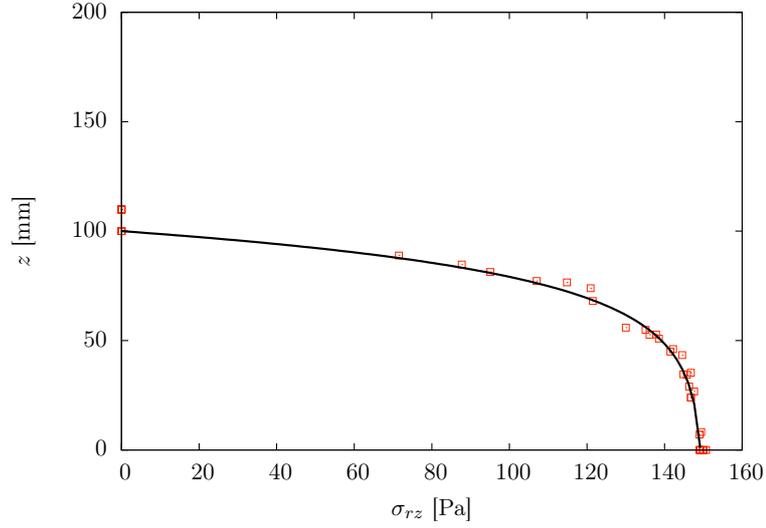


FIGURE 3.16 – Test de validation de la méthode d’optimisation. Nous considérons un cylindre rempli d’une hauteur  $l_g = 100$  mm de grains appliquant une contrainte de cisaillement selon un profil exponentiel et une valeur de saturation  $\sigma_{rz} = 150$  Pa. Nous comparons les résultats de la procédure d’optimisation (carrés rouges) à l’expression analytique des contraintes de cisaillement que nous avons choisie (courbe noire de la forme  $\sigma_{rz}(z) = 150(1 - \exp((z - l_g)/R))$ ).

### 3.3.3 Contraintes locales dans la colonne granulaire de Janssen

#### Contraintes en fonction de la hauteur

Nous utilisons la procédure d’optimisation décrite ci-dessus pour mesurer les contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}$  à la paroi pour différentes masses versées. Les contraintes de cisaillement augmentent avec la profondeur, partant de zéro à la surface libre, jusqu’à une valeur de saturation (voir figure 3.17). La longueur de saturation est de l’ordre du diamètre du tube, ne dépend pas de la masse

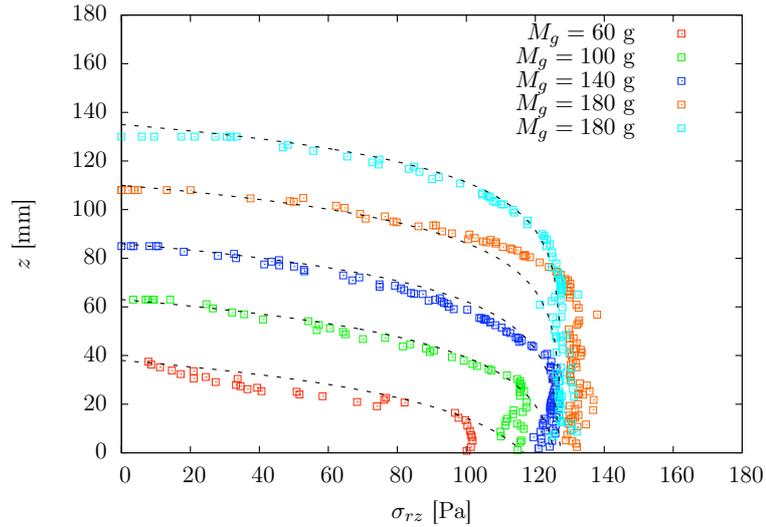


FIGURE 3.17 – Contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}$  le long du tube pour différentes masses versées  $M_g = 60$  g, 100 g, 140 g, 180 g et 220 g.  $\sigma_{rz}$  croît depuis la surface libre  $z = l_g$  jusqu’au piston en  $z = 0$ . Pour une expérience donnée, la procédure d’optimisation a été répétée cent fois avec  $N = 8$  points d’estimations des contraintes de cisaillement. Les lignes en pointillés correspondent à un ajustement des données expérimentales par une fonction  $f(z) = [\mu_s/(1+2\mu_s^2)][gM_a/\pi R^2][1 - \exp(K_w(z-l_g)/R)]$  (Eq. 3.27) avec  $K_w = 1.16$ .

versée et est en accord avec la loi de Janssen. Si la longueur de grains est petite ( $l_g < 60\text{mm}$ ), les contraintes n'atteignent pas la valeur de saturation. Nous obtenons par la méthode d'optimisation un coefficient de friction  $\mu = 0,46 \pm 0,04$ , ce qui est légèrement inférieur à notre mesure de coefficient de frottement statique  $\mu_s = 0,52 \pm 0,03$ . Cette différence est probablement due à une légère désynchronisation entre le temps de prise de vue finale et le temps de mobilisation complète. Si la prise de vue est effectuée après que toute la colonne de grains se soit mise en mouvement, nous nous attendons à trouver un coefficient de frottement dynamique. Notre valeur de  $\mu$  est alors en bon accord avec la valeur mesurée indépendamment  $\mu_d = 0,43 \pm 0,03$ .

La valeur de saturation des contraintes peut être comparée à des prédictions théoriques. Nous supposons un matériau granulaire non-cohésif, pour lequel le coefficient de frottement interne des grains par rapport aux grains est le même que le coefficient de frottement des grains par rapport à la paroi, et un critère de Mohr-Coulomb. Dans ce cas, le rapport des contraintes à la paroi peut s'écrire (Rahmoun *et al.*, 2008) :

$$\lambda_w = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{zz}} = \frac{1}{1 + 2\mu_s^2} \quad (3.26)$$

Avec  $\sigma_{zz} = gM_a/\pi R^2$ , cela donne  $\sigma_{rr} \simeq 280$  Pa, en très bon accord avec notre mesure expérimentale  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz}/\mu \simeq 282$  Pa. Nous utilisons cette valeur de saturation théorique pour ajuster nos données expérimentales avec une équation de la forme

$$f(z) = \frac{\mu_s}{1 + 2\mu_s^2} \frac{gM_a}{\pi R^2} \left[ 1 - \exp\left(\frac{K_w(z - l_g)}{R}\right) \right] \quad (3.27)$$

qui est une équation de Janssen tenant compte du fait que nous mesurons des contraintes à la paroi. La mesure locale des contraintes tout au long de la colonne granulaire confirme directement la description de Janssen des contraintes,  $\sigma_{zz}(z)$  (équation 3.7), alors que les études précédentes déduisent que le modèle est correct à partir de l'évolution de la masse apparente en bas de la colonne,  $M_a(M_g)$  (équation 3.8).

### Influence de la taille des grains

Nous mesurons le champ de contrainte de cisaillement pour la même longueur de la colonne de grains mais trois tailles de billes différents (voir figure 3.18). Nous ne voyons pas d'influence de la taille des grains sur la distribution locale des contraintes. Ce résultat est cohérent avec ce qui est attendu pour une expérience quasi-statique dans la limite  $d \ll R$  (Bratberg *et al.*, 2005; Qadir *et al.*, 2010). Nous notons que près du piston ( $z \in [0 - 10]$  mm) les contraintes sont légèrement inférieures à la valeur de saturation, ce qui est un effet de bord dû à la présence du piston, comme cela a été montré numériquement (Ovarlez & Clément, 2005b).

### Effet d'une masse ajoutée

Ajouter une masse par dessus un milieu granulaire ne change pas la distribution des forces au bas du tas de grains, comme l'a noté Huber-Burnand. Cet effet a été étudié quantitativement dans la colonne granulaire de Janssen (Ovarlez *et al.*, 2003; Wambaugh *et al.*, 2010) où le poids supplémentaire est redirigé vers les parois par friction. Nous utilisons comme sur-poids des cylindres d'acier de masse  $M_{aj}$ , de rayon légèrement inférieur au rayon interne du tube. Nous posons un

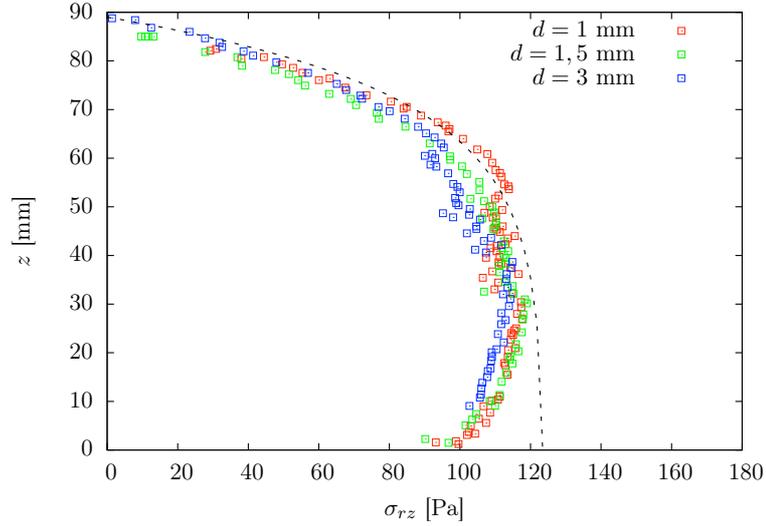


FIGURE 3.18 – Contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz}$  le long du tube, pour une même masse versée  $M_g = 140$  g et trois diamètres de billes différents  $d = 1$  mm, 1,5 mm et 3 mm. La procédure d’optimisation est répétée cent fois ( $N_r = 100$ ) pour chaque expérience avec  $N = 8$  points d’estimation de la contrainte de cisaillement. La ligne en pointillés correspond à un ajustement des données expérimentales par une fonction  $f(z) = [\mu_s/(1 + 2\mu_s^2)][gM_a/\pi R^2][1 - \exp(K_w(z - l_g)/R)]$  (Eq. 3.27) avec  $K_w = 1.16$ .

tel sur-poids par dessus la colonne de grains de masse  $M_g = 140$  g préalablement dans l’état où la friction est complètement mobilisée. Une fois la masse supplémentaire déposée, nous déplaçons à nouveau légèrement le piston vers le bas, jusqu’à ce que la masse apparente soit stabilisée. La distribution des contraintes est représentée sur la figure 3.19 pour une masse de grains  $M_g = 140$  g et une masse ajoutée  $M_{aj} = 60$  g. Les contraintes de cisaillement sont maximales en haut de la

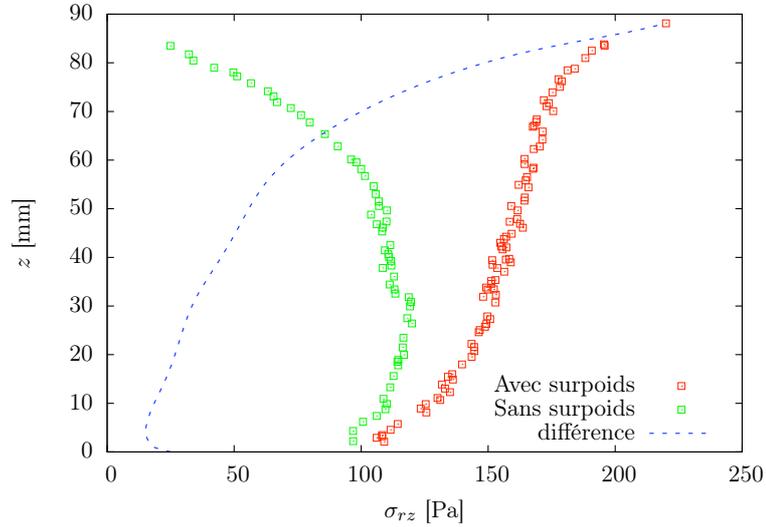


FIGURE 3.19 – Contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}$  tout au long du tube pour  $M_g = 140$  g. Les carrés verts correspondent à l’expérience de référence, les carrés rouges à la même expérience avec un sur-poids de masse  $M_{aj} = 60$  g. La ligne pointillée correspond à la différence entre ces deux courbes.

colonne de grains et décroissent avec la profondeur vers la même valeur de saturation que dans le cas sans masse ajoutée. La contrainte de cisaillement supplémentaire due au sur-poids (en pointillés sur la figure 3.19) décroît depuis la surface libre de la colonne granulaire vers le bas de la colonne, près du piston. La majorité du poids de la masse ajoutée est écrantée au-delà d’une distance de

l'ordre d'un diamètre de tube, ce qui est cohérent avec la description de Janssen.

### Conclusion locale

Les distributions de contraintes mesurées dans le cas quasi-statique confirment la validité de la description de Janssen pour les matériaux granulaires confinés. Ces résultats complètent une autre étude expérimentale de l'évolution des contraintes dans un silo  $2D$  avec des billes photo-élastiques (Wambaugh *et al.*, 2010). Les variations décrites dans ces expériences, qui montrent des réseaux de forces dans le silo, sont dans notre cas, près de la paroi, moyennées par la taille de la fenêtre de corrélation entre les deux images. L'approche développée ici peut être appliquée sur des images de résolution supérieure de zones plus petites de la surface du cylindre, ce qui permettrait de suivre les variations locales des contraintes dans le matériau granulaire près de la paroi. La résolution maximum que l'on peut obtenir est limitée par la taille de la fenêtre de corrélation, qui dépend de la taille caractéristique des taches du mouchetis appliqué sur le tube, mais aussi de l'élasticité du silo, qui impose une grandeur typique de l'ordre de l'épaisseur.

## 3.4 Contraintes locales - dynamique/vidange

Nous nous intéressons ici à l'évolution des contraintes dans le milieu granulaire lors de la vidange d'un silo sous l'effet de la gravité. Il arrive que, lors de la vidange de silos industriels, la structure du contenant ne résiste pas aux forces de frottement des grains sur la paroi interne, menant à son effondrement. La compréhension des mécanismes mis en jeu lors d'une telle vidange a donc un intérêt industriel. Mais l'écoulement des grains hors du silo a aussi un comportement par nature intrigant. Si l'on remplit de liquide un cylindre vertical percé d'un orifice, les contraintes hydrostatiques imposent un débit sortant dépendant de la hauteur de liquide restant dans le contenant. Les graduations d'une clepsydre ne sont ainsi pas également espacées. Ce n'est pas le cas avec un milieu granulaire. Dans un sablier, le temps écoulé est proportionnel au volume de sable restant dans le réservoir supérieur. Le débit est donc indépendant de la hauteur de grains restante. Beverloo (Beverloo *et al.*, 1961) a montré qu'il ne dépend pas non plus du diamètre du contenant. Ainsi, les seules longueurs pouvant influencer le débit restent les diamètres  $d$  des grains et  $D$  de l'orifice de sortie. Nous supposons que le diamètre des grains est petit devant la taille de l'orifice de sortie. La vitesse de vidange sous l'effet de la gravité est donc d'ordre  $V \sim \sqrt{gD}$ . La surface de l'orifice de sortie est d'ordre  $D^2$ , le débit massique en sortie est donc  $Q \sim \rho\sqrt{g}D^{5/2}$ . Beverloo a montré qu'une loi de cette forme ajuste parfaitement les données expérimentales. La loi de Beverloo

$$Q = \rho\phi\sqrt{g}(D - kd)^{\frac{5}{2}} \quad (3.28)$$

tient compte de la compacité  $\phi$  et introduit un diamètre effectif  $D - kd$ , tenant compte de la taille des grains, avec  $k \geq 1,5$ .

### 3.4.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons le même dispositif expérimental que pour les expériences quasi-statiques. Le piston est remplacé par un cylindre fixe de rayon  $R_c = 17,75$  mm, légèrement plus petit que le rayon

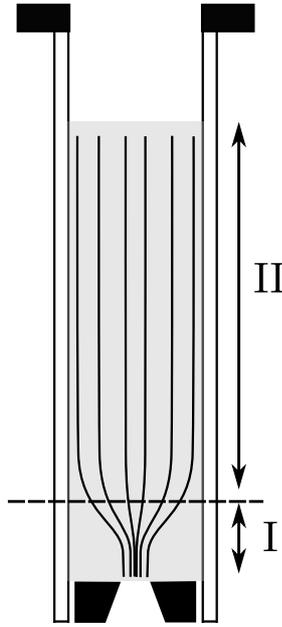


FIGURE 3.20 – Dispositif expérimental : un tube cylindrique vertical (de longueur  $L$ , rayon  $R$ , épaisseur  $h$ , module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ), fixé à son sommet, est rempli de billes de verre (de diamètre  $d$  et masse volumique  $\rho$ ) jusqu'à une hauteur  $z = l_g$ . Le bas du tube est libre et fermé par un cylindre fixe de rayon légèrement inférieur à  $R$  situé en  $z = 0$ . Le cylindre est percé d'un trou conique d'angle  $60^\circ$ , de plus petit diamètre  $D = 11$  mm et de plus grand diamètre  $D = 22$  mm. Un capteur de force permet de mesurer le flux massique de grains sortant du silo.

interne du silo pour éviter qu'il y ait des frottements. Un trou est percé dans ce cylindre pour former une tuyère de sortie. La tuyère est donc de forme conique, de diamètre minimal  $D = 11$  mm, diamètre maximum  $D = 22$  mm et d'angle  $60^\circ$ . Elle est fermée par un bouchon amovible (voir figure 3.20). Le silo est fixé à son sommet et libre de se déplacer à sa base, alors que la tuyère de sortie est fixe. Une fois le tube rempli de grains versés en pluie, nous retirons le bouchon et mesurons la masse de grains qui sort du silo au cours du temps.

Nous mesurons de la même manière que ci-dessus, par corrélation d'image, le champ de déplacements de la face extérieure du cylindre. Nous comparons l'image de référence du tube vide à une vue prise à un temps donné après avoir retiré le bouchon. Nous convertissons ensuite ce champ de déplacement pour obtenir  $\{u(z), w(z)\}$  de la même manière que dans l'étude quasi-statique.

L'instant où nous retirons le bouchon est donc défini comme le temps  $t = 0$  et nous filmons la vidange du silo à une fréquence de 24 images / secondes. Nous avons donc une mesure de l'évolution de l'état du silo toutes les  $\delta t = 1/24$  s.

### 3.4.2 Procédure d'optimisation

Nous utilisons la procédure d'optimisation décrite dans la partie quasi-statique. Ici, l'état de friction à la paroi n'est pas clairement défini. Nous utilisons donc la méthode avec  $2N$  inconnues ( $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{rz}$  discrétisées sur  $N$  points), c'est-à-dire que nous cherchons séparément les valeurs des contraintes de pression et de cisaillement. Nous supposons que la loi de friction de Coulomb est vérifiée à la paroi :

$$|\sigma_{rz}| \leq \mu |\sigma_{rr}| \quad (3.29)$$

où  $\mu$  est ici supposé égal au coefficient de frottement statique  $\mu_s$  que nous avons mesuré expérimentalement. Nous appliquons cette procédure d'optimisation entre deux images : l'image de référence lorsque le tube est vide, et une autre vue prise à un temps donné  $\Delta t$  après que le bouchon ait été retiré.

### 3.4.3 Résultats

Nous utilisons la procédure d'optimisation sur les mesures de déplacement par PIV pour obtenir indépendamment les champs des contraintes de cisaillement  $\sigma_{rz}(z)$  et de la contrainte pressante sur la paroi  $\sigma_{rr}(z)$  sur toute la longueur du silo, au cours de la vidange par gravité. Nous mesurons le débit massique de grains à travers la tuyère de sortie, et trouvons une valeur constante  $Q = 22 \text{ g.s}^{-1}$ , en bon accord avec la loi de Beverloo.

N'ayant pas mobilisé la friction le long de la colonne granulaire, comme nous le faisons dans l'expérience quasi-statique, nous ne connaissons pas l'état des forces de frottement à la paroi. Nous commençons donc par étudier le rapport des contraintes  $\sigma_{rz}/\sigma_{rr}$  tout le long du silo. Nous traçons

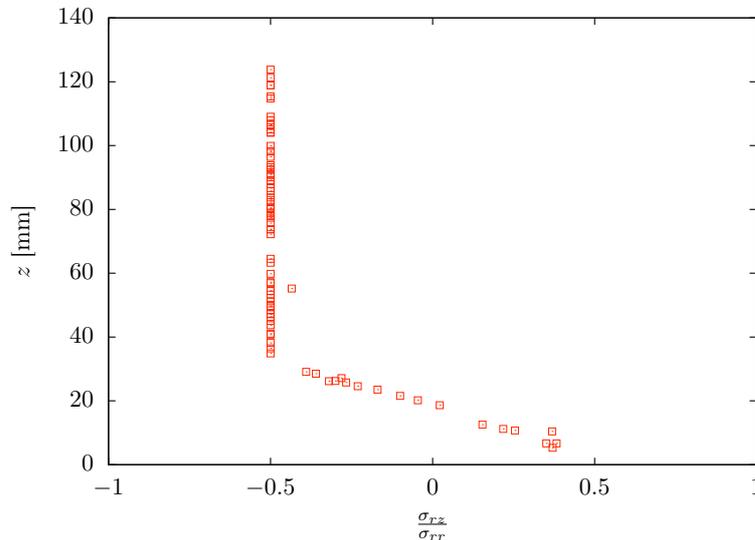


FIGURE 3.21 – Rapport des contraintes  $\mu = \sigma_{rz}/\sigma_{rr}$  le long du tube, à  $\Delta t = 0, 20$  s après avoir retiré le bouchon. Les grains se déplacent vers le bas à la paroi (région II) sauf près du plan de l'orifice de sortie où il n'y a pas de mouvement relatif des grains par rapport à la paroi (région I).

le rapport des contraintes peu de temps après que nous ayons retiré le bouchon sur la figure 3.21, pour  $\Delta t = 0, 2$  s. Nous pouvons remarquer deux régions. Dans la région supérieure  $z \in [30 - 120]$  mm (région II), les grains glissent vers le bas par rapport à la paroi et nous trouvons un rapport des contraintes négatif  $\sigma_{rz}/\sigma_{rr} = -\mu_s$  (équation 3.29). Dans la partie inférieure  $z \in [0 - 30]$  mm (région I), il n'y a pas de mouvement relatif des grains par rapport à la paroi. Le bas du cylindre n'est pas encore en mouvement sous l'effet des forces de frottement à ce temps très rapproché du moment où nous avons retiré le bouchon. La paroi n'étant pas en mouvement, les grains sont donc immobiles. Ils reposent sur le cylindre situé en bas du silo, sur la couronne qui entoure l'orifice de sortie. Ceci est cohérent avec les observations de régions immobiles dans d'autres expériences de vidange (Perge *et al.*, 2012) : les lignes de courant se regroupent vers le centre de la colonne granulaire près du plan de l'orifice de sortie (comme illustré sur le schéma de la figure 3.20). La taille de la région I est de l'ordre du rayon du cylindre. À temps court ( $\Delta t = 0, 2$  s) les forces de frottement sont donc

déjà mobilisées tout le long de la colonne granulaire, sauf près du plan de l'orifice de sortie, où il existe une zone de grains immobiles. Un déplacement vers le bas de quelques diamètres de grains ( $h = (Q\Delta t)/(\rho\phi S) \simeq 10$  mm) est donc suffisant pour mobiliser la friction sur toute la colonne. Pour les temps plus grands ( $\Delta t > 1$  s), le tube et les grains se déplacent simultanément, parfois dans des directions opposées, et le rapport des contraintes est donc plus difficile à interpréter.

Nous traçons les contraintes radiales  $\sigma_{rr}(z)$  le long du silo sur la figure 3.22. À temps court ( $\Delta t = 0, 2$

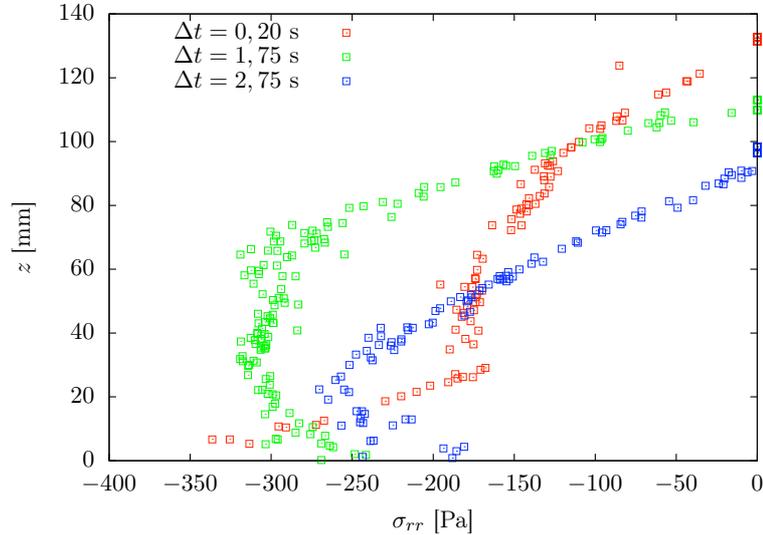


FIGURE 3.22 – Évolution des contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  sur la hauteur du cylindre, pendant la vidange pour une masse de grains versée  $M_g = 220$  g. Chaque courbe correspond à un temps différent après que nous ayons retiré le bouchon,  $\Delta t = 0, 2$  s,  $1, 75$  s,  $2, 75$  s. Nous rappelons que la valeur de saturation de la contrainte radiale dans l'expérience quasi-statique est  $\sigma_{rr} = 280$  Pa.

s), seule une partie de la masse totale de grains est écrantée par frottement aux parois et la pression subie par le silo  $p = -\sigma_{rr}$  sature à une valeur inférieure à celle observée dans le cas quasi-statique. Près du cylindre, en bas de la colonne (région I,  $z \in [0 - 30]$  mm), les grains sont immobiles et ne peuvent pas glisser par rapport à la paroi, ce qui augmente la pression subie par le silo. Plus tard dans le temps, les forces de frottements sont complètement mobilisées tout le long du silo et nous retrouvons un profil caractéristique de la saturation exponentielle de Janssen. Nous retrouvons également la diminution de la pression près du bas de la colonne, qui est un effet de bord. Pour  $\Delta t = 1, 75$  s, la pression augmente exponentiellement le long de la colonne de grains et sature à la même valeur que celle obtenue dans l'expérience quasi-statique. Cette description reste valable pour le reste de l'expérience de vidange alors que la surface libre en haut de la colonne de grains se déplace vers le bas. À  $\Delta t = 2, 75$  s, la masse de grains restant dans la colonne a beaucoup diminué et la pression de saturation est donc plus petite.

Nous traçons sur la figure 3.23 l'évolution temporelle des contraintes radiales à deux positions fixes le long du tube ( $z = 60$  mm et  $z = 90$  mm). La pression subie par la paroi  $p = -\sigma_{rr}$  commence par augmenter jusqu'à atteindre la valeur de saturation  $\sigma_{rr} \simeq 280$  Pa obtenue dans l'expérience quasi-statique. La pression diminue ensuite jusqu'à une valeur nulle alors que le tube se vide. Plus précisément, si nous supposons que le profil de pression suit la loi de Janssen, en considérant que le coefficient de Janssen est le même que dans le cas statique  $K = 0, 75$ , nous pouvons évaluer l'évolution de la pression au cours du temps à une altitude donnée  $z$  :

$$\sigma_{rr}(z, t) = -\frac{\rho\phi g R}{2\mu_s} \left[ 1 - \exp\left(\frac{2K\mu_s}{R}(z - l_g(t))\right) \right] \quad (3.30)$$

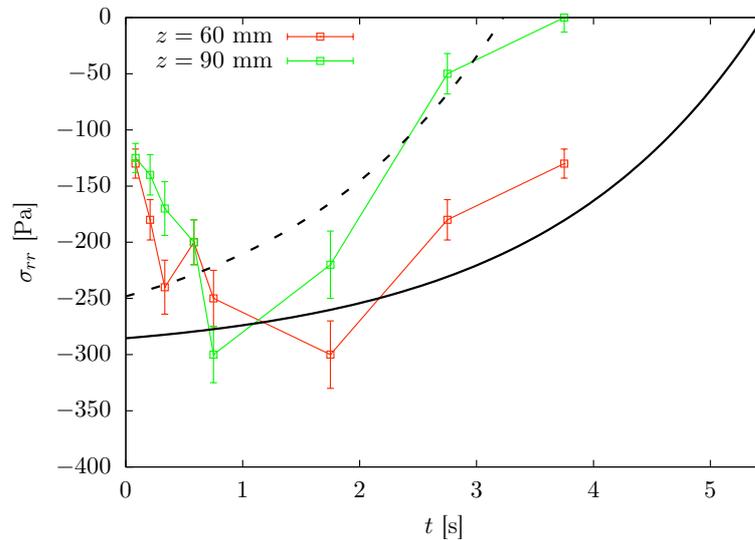


FIGURE 3.23 – Évolution temporelle de la contrainte radiale  $\sigma_{rr}$  dans le matériau granulaire, près de la paroi, à deux altitude fixes sur le silo  $z = 60$  mm et  $z = 90$  mm. La pression  $p = -\sigma_{rr}$  augmente jusqu'à atteindre la valeur de saturation correspondant à l'état de mobilisation complète du frottement, puis décroît jusqu'à une valeur nulle alors que le silo se vide. Les lignes solides et en pointillés sont obtenues en supposant que le profil de contrainte est donné par la loi de Janssen tout au long de la vidange à débit constant (équation 3.30).

où  $l_g(t) = l_g(t = 0) - (Qt)/(\pi R^2 \rho \phi)$ . Cette description est en bon accord avec les mesures expérimentales (voir les lignes solides et en pointillés sur la figure 3.23) pour  $\Delta t > 0,75$  s, qui est le temps typique au delà duquel le frottement est complètement mobilisé. Pour les temps inférieurs  $\Delta t < 0,75$  s la description de Janssen n'est pas valable car l'état du frottement à la paroi n'est pas connu. L'échelle de temps nécessaire à la mobilisation complète du frottement le long de la colonne de grains doit dépendre du rayon du tube et du diamètre de l'orifice de sortie. Ce temps est très court dans le cas de notre dispositif expérimental.

Ces mesures expérimentales de contraintes dans le milieu granulaire pendant la vidange sous l'effet de la gravité montrent que très peu de temps après le début de la vidange, les forces de frottements sont complètement mobilisées. À partir de cet instant, le profil de contrainte près de la paroi du silo suit la loi de Janssen (sauf près du plan de sortie), et ce pratiquement jusqu'à la fin de la vidange.

### 3.5 Conclusion

La répartition des contraintes dans un milieu granulaire confiné dans un contenant cylindrique est habituellement déduite de la saturation de la masse apparente au bas du silo. L'utilisation de tubes souples nous a permis d'estimer le profil des contraintes à la paroi après avoir complètement mobilisé les forces de frottement. Ce profil est en accord avec la théorie de Janssen mais s'avère incompatible avec une description continue isotrope élastique d'une colonne granulaire.

Nous développons une méthode expérimentale pour mesurer, près de la paroi, les champs de contraintes locales dans un milieu granulaire confiné dans un tube vertical. Nous avons validé cette méthode sur des données de test, puis en comparant les résultats de cette méthode avec les conclusions des mesures indirectes de la distribution des contraintes dans une colonne granulaire dans le cas quasi-statique. La distribution locale de contraintes est bien décrite par la loi de Janssen. Nous

ne voyons pas d'influence du diamètre des billes utilisées sur les profils de contraintes. Nous avons mesuré la distribution locale des contraintes additionnelles dues à la présence d'un sur-poids sur la colonne de grains.

Déduire des informations locales sur un matériau granulaire à partir des déplacements extérieurs de son contenant est une nouvelle méthode qui pourrait être utilisée dans une variété d'autres problèmes granulaires. Par exemple pour mesurer les contraintes sous un tas de sable, pour suivre les fluctuations locales des contraintes une colonne granulaire, ou pour évaluer la distribution des contraintes dans une expérience de Couette granulaire. Cette méthode pourrait naturellement être étendue à la rhéologie des fluides complexes. La méthode développée ici peut être appliquée directement à l'étude d'autres problèmes mécaniques de géométrie cylindrique, par exemple la croissance sous contraintes de plantes (Kolb *et al.* , 2012).

Nous avons également mesuré l'évolution temporelle des contraintes durant la vidange sous gravité d'une colonne granulaire. Nous avons montré que, partant d'un état de friction inconnu, un déplacement de la colonne de quelques diamètres de grains suffit à mobiliser les forces de frottement tout au long du silo. Après un court régime transitoire, nous mesurons une pression de saturation égale à celle que nous avons trouvée dans l'expérience quasi-statique. L'évolution des contraintes dans le temps à une altitude donnée du silo est bien décrite en considérant la saturation exponentielle des contraintes de Janssen et le flux massique de grains sortant constant de Beverloo. La connaissance de l'état de friction pendant la vidange est fondamentale pour décrire la défaillance des silos industriels.



## Transport d'une sphère dans un tube cylindrique étroit

### 4.1 Introduction

Après avoir étudié les interactions par friction entre le milieu granulaire et un contenant cylindrique, nous cherchons maintenant à caractériser quelle est la force due à l'élasticité du silo qui est subie par le milieu placé à l'intérieur du cylindre. Pour ceci, nous simplifions le dispositif expérimental et remplaçons le milieu granulaire par un seul grain macroscopique, de rayon supérieur à celui du tube au repos.

Nous nous demandons ainsi quelle est la force ressentie par un éléphant avalé par un serpent (voir figure 4.1).

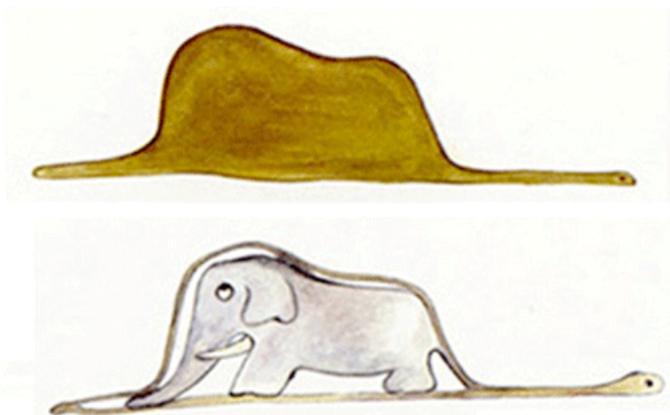


FIGURE 4.1 – Un éléphant dans un serpent doit subir une force dépendant de son écart de taille avec le serpent et de l'élasticité du serpent (*Le Petit Prince*, Antoine de Saint Exupéry.)

Le transport d'objets élastiques à travers des canaux rigides plus étroits que la taille de l'objet est courant en biologie. Les globules sanguins s'écrasent ainsi pour voyager dans les capillaires les plus fins (Yoshida *et al.*, 2006). Il est aussi possible de sonder leur rigidité en les forçant à travers des microcircuits (Abkarian *et al.*, 2006; Pereira *et al.*, 2013b; Pereira *et al.*, 2013a). Nous nous intéressons à la situation opposée du transport d'une sphère rigide dans un cylindre élastique, la sphère étant plus grosse que le cylindre (voir figure 4.2). Cette situation a également un intérêt physiologique puisqu'elle intervient dans le transport des aliments et de leurs résidus le long du tube digestif (Bedrich & Ehrlein, 2001), le transport de vésicules dans des microtubes (Nasseri & Florence, 2003).

Nous réalisons une expérience modèle en plaçant une sphère d'acier de masse  $m$  et rayon  $R$  à l'intérieur d'un cylindre en élastomère (VinylPolySiloxane - PVS) de rayon  $R_0 < R$ . Le tube est d'épaisseur  $h$  et nous notons  $L$  la longueur de contact entre la sphère et la paroi intérieure du tube.



FIGURE 4.2 – Photo d’une sphère à l’intérieur d’un tube. Le rayon de la sphère est plus grand que celui du tube au repos.

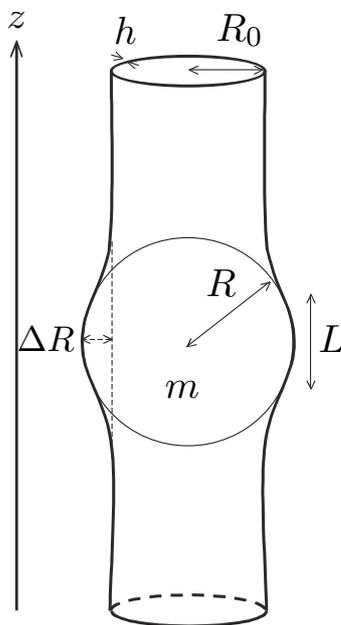


FIGURE 4.3 – Représentation schématique de l’expérience. Une sphère rigide de masse  $m$  et de rayon  $R$  est placée à l’intérieur d’un cylindre vertical de rayon  $R_0 < R$  et d’épaisseur  $h$ . Nous notons  $L$  la longueur de contact entre la sphère et la paroi intérieure du cylindre et  $\Delta R = R - R_0$  est la différence de rayon.

Dans un premier temps, nous commençons par étudier les forces qui s'exercent sur la sphère en frottement contre la paroi, avec deux types d'expériences.

Nous présentons ensuite des résultats qualitatifs dans le cas d'une lubrification fluide, en créant un film d'air entre la sphère et le cylindre. Bien que ces résultats soient récents et manquent d'interprétation, nous trouvons qu'ils ont leur place dans ce manuscrit, ne serait-ce que pour présenter les expériences accessibles et leur lien avec le reste de ce travail de thèse.

## 4.2 Frottement solide

Nous travaillons ici dans le cas où il y a contact entre la sphère et la paroi interne. La surface intérieure du cylindre est recouverte de talc pour éviter l'adhésion. Nous utilisons deux expériences. L'une est une variante de la chute libre, un contrepoids de masse ajustable entraînant la sphère vers le haut. L'autre consiste à déplacer la sphère à vitesse constante à l'aide d'une machine de traction. Nous mesurons dans les deux cas la force de friction  $F_F$  entre la sphère et le cylindre.

### 4.2.1 Chute libre

Un contrepoids de masse  $m'$  est attaché à la sphère comme illustré sur la figure 4.4. Lorsque la

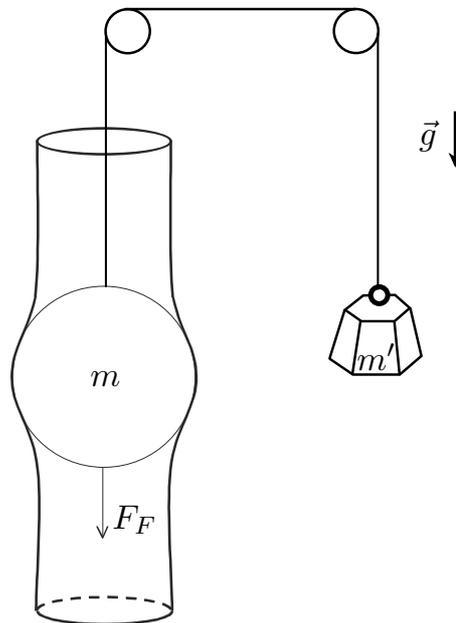


FIGURE 4.4 – Représentation schématique du dispositif expérimental. Le cylindre est fixé en bas, tout en laissant libre le passage de l'air (la pression reste donc identique de part et d'autre de la sphère). La sphère est reliée, via deux poulies, à un contrepoids de masse  $m' > m$ . Lorsque le contrepoids est lâché, la sphère se déplace vers le haut, en frottant sur les parois du cylindre. Ces dernières sont préalablement recouvertes de talc pour éviter l'adhésion.

différence de masse, ou masse apparente,  $\Delta m = m' - m$  est assez grande, la sphère est entraînée vers le haut. Nous suivons ses déplacements à l'aide d'un appareil photo.

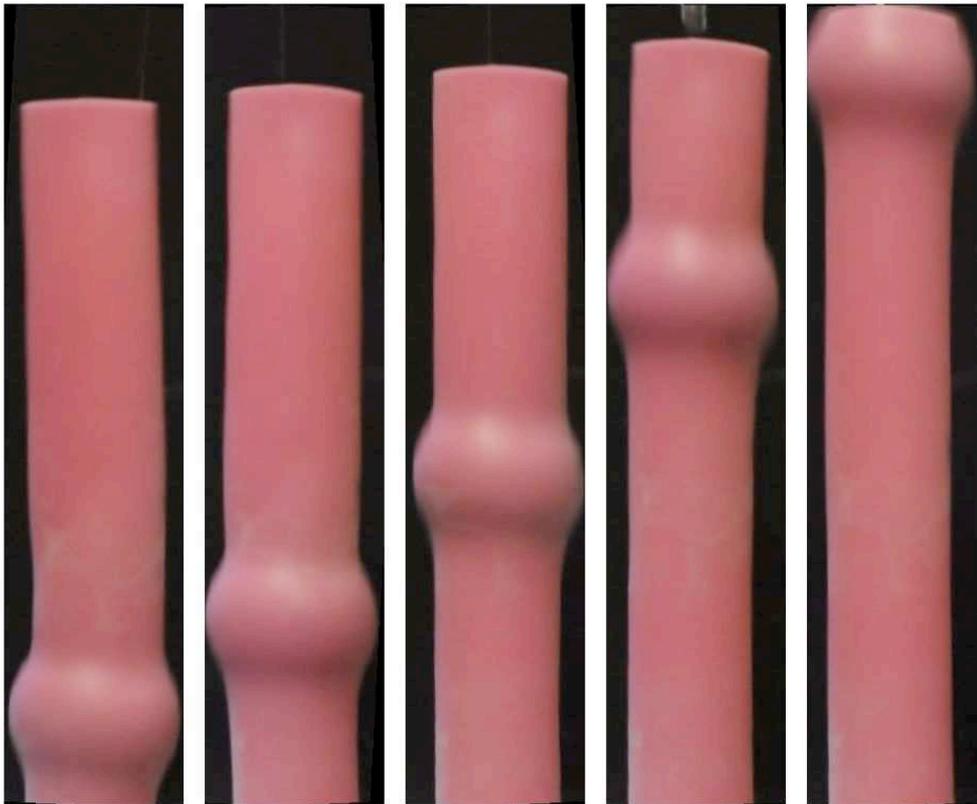


FIGURE 4.5 – Série temporelle de prises de vues d’une expérience avec contrepoids. La sphère d’acier de masse  $m \simeq 500$  g et de rayon  $R = 25$  mm se déplace vers le haut, tirée par un contrepoids de masse  $m' \simeq 1500$  g. Le cylindre de PolyVynilSyloxane (PVS) shore 8 ( $E = 0,24$  MPa) mesure environ 20 cm et a pour rayon  $R_0 = 18$  mm et pour épaisseur  $h = 2$  mm. La sphère parcourt la longueur du tube  $L \simeq 20$  cm en environ 0,8 s.

Nous représentons sur la figure 4.5 une série temporelle de prises de vue. La sphère est entraînée vers le haut et accélère au cours du temps, l'écart de déplacement entre chaque photo augmentant progressivement.

Nous suivons la position  $z$  du centre de la sphère en fonction du temps (voir figures 4.6 et 4.7). Chaque expérience est répétée au moins trois fois pour s'assurer de la précision de la mesure effectuée.

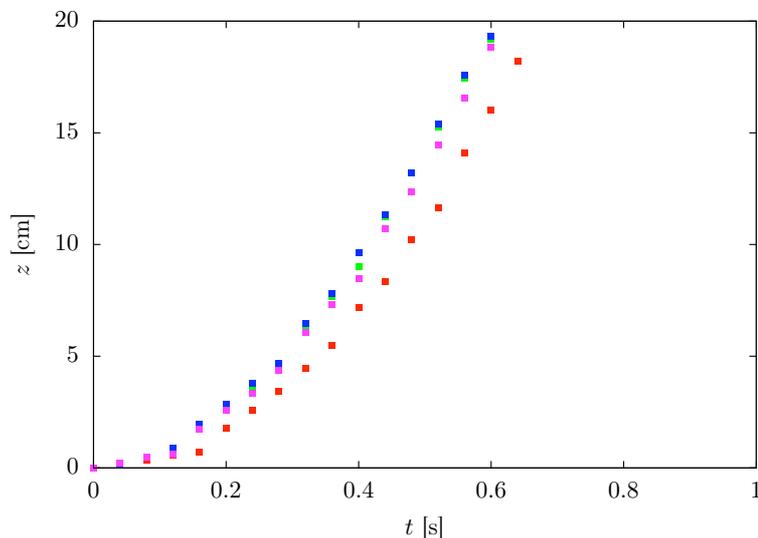


FIGURE 4.6 – Évolution de la position verticale de la sphère en fonction du temps, pour une sphère d'acier de rayon  $R = 20$  mm et le cylindre shore 8 de rayon  $R_0 = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 2$  mm. Chaque expérience est réalisée au moins quatre fois avec le même surpoids (ici,  $\Delta m = 234$  g) afin de s'assurer de la reproductibilité. Le mouvement est uniformément accéléré.

Nous représentons sur la figure 4.7 la dynamique du centre de la sphère, pour un tube donné, une sphère donnée, faisant seulement varier la différence de masse de  $\Delta m = 234$  g à  $\Delta m = 772$  g. Plus

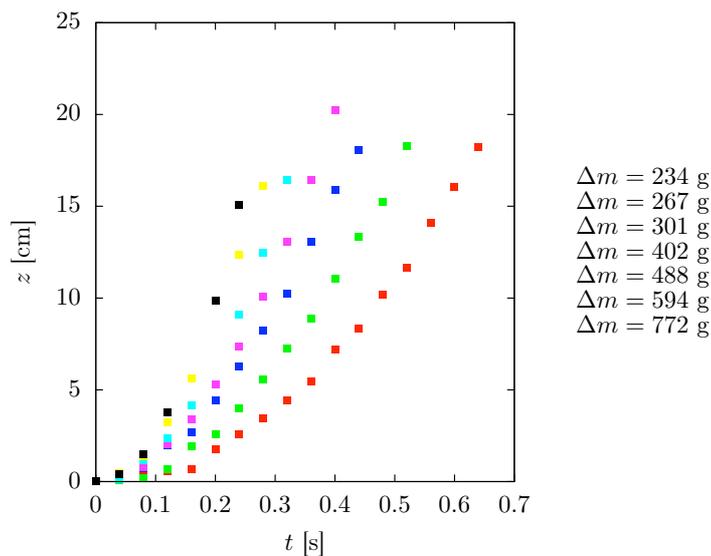


FIGURE 4.7 – Évolution de la position verticale de la sphère en fonction du temps, pour une sphère d'acier de rayon  $R = 20$  mm et le cylindre shore 8 de rayon  $R_0 = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 2$  mm, pour  $\Delta m$  allant de 234 g à 772 g.

l'on tire fort (avec un contreponds lourd), plus la sphère se déplace rapidement, mais toujours dans

un mouvement accéléré.

La masse accélérée est  $m + m'$  et les forces agissant sur le système sont le poids apparent  $(m' - m)g$  et la force de frottement  $F_F$ . Nous avons donc :

$$(m + m') \frac{d^2z}{dt^2} = (m' - m)g + F_F \quad (4.1)$$

En supposant  $F_F$  constante, cette équation s'intègre en

$$z = \frac{(m' - m)g - F_F}{2(m + m')} t^2 \quad (4.2)$$

Nous connaissons maintenant  $z(t)$ . En ajustant chaque courbe parabolique de la figure 4.7 avec cette équation, nous obtenons les valeurs de la force de friction  $F_F$  pour chaque expérience, que nous représentons sur la figure 4.8.

Nous représentons donc la force de frottement  $F_F$  en fonction de la différence de masse  $\Delta m$ , pour

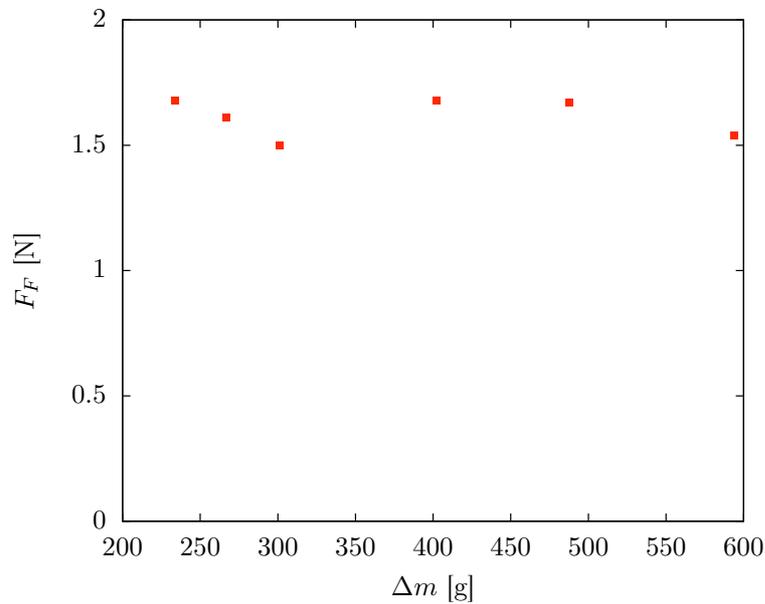


FIGURE 4.8 – Force de frottement  $F_F$  de la sphère sur la paroi interne du cylindre en fonction de la différence de masse, ou masse apparente  $\Delta m$ , pour une sphère d'acier de rayon  $R = 20$  mm et le cylindre shore 8 de rayon  $R_0 = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 2$  mm.

une sphère et un cylindre donné. Nous obtenons une force de frottement constante, qui ne dépend pas de la masse du contrepois. La sphère entraînée par le contrepois suit donc simplement un mouvement accéléré avec une force de frottement constante  $F_F \simeq 1,6$  N.

### 4.2.2 À vitesse constante

La force de frottement étant constante, nous utilisons un dispositif expérimental plus simple, détaillé sur la figure 4.9. La sphère est reliée à une machine de traction : elle est entraînée vers le haut à vitesse constante alors qu'un capteur mesure directement la force de frottement s'appliquant sur l'objet.

Nous faisons varier la vitesse de déplacement de la bille et mesurons la force exercée sur la sphère

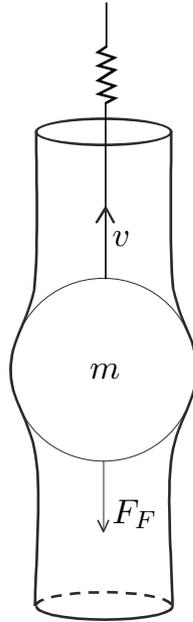


FIGURE 4.9 – Représentation schématique du dispositif expérimental. Le cylindre est fixé en bas, tout en laissant libre le passage de l’air (la pression reste donc identique de part et d’autre de la sphère). La sphère est reliée à une machine de traction permettant de la déplacer à vitesse constante vers le haut tout en enregistrant l’évolution de la force appliquée sur la sphère.

(voir figure 4.10). Dans le cas du cylindre de dureté shore 8, nous ne trouvons pas d’influence de

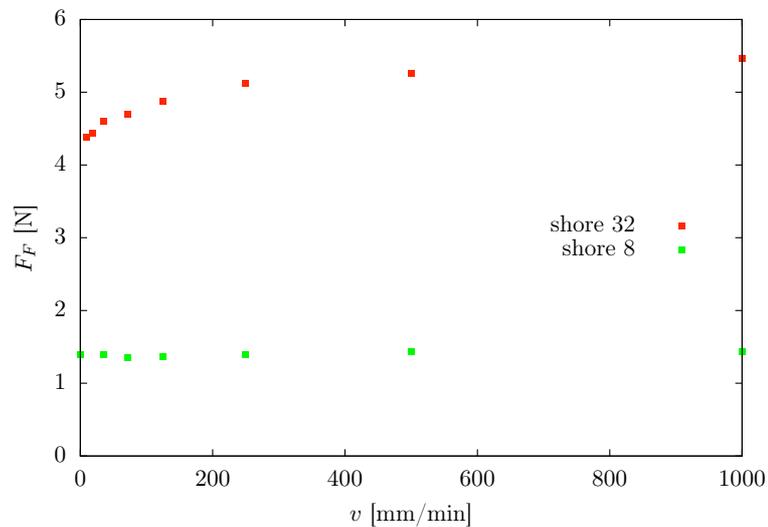


FIGURE 4.10 – Force de frottement  $F_F$  en fonction de la vitesse  $v$  de déplacement de la sphère dans des expériences à vitesse constante (chaque point correspondant donc à une expérience). Nous utilisons une sphère de rayon  $R = 20$  mm dans des tubes de rayon  $R_0 = 18$  mm et épaisseur  $h = 2$  mm. Les cylindres sont fait d’élastomère de shore 8 (module d’Young  $E = 0,24$  MPa, carrés rouges) et shore 32 (module d’Young  $E = 0,96$  MPa, carrés verts).

la vitesse sur la force s’appliquant sur la sphère, et la mesure de la force de frottement est la valeur moyenne pour  $v \in [0, 1000]$  mm/min. Dans le cas du cylindre de dureté shore 32, la force de frottement augmente initialement avec la vitesse de déplacement de la sphère puis se stabilise, et la mesure de la force de frottement est la valeur moyenne pour  $v \in [125, 1000]$  mm/min.

### 4.2.3 Modèle

La sphère est enserrée par le cylindre. La pression exercée sur la surface de contact par le tube sur la sphère dépend de la différence de rayons (pour un tube de même rayon, une sphère plus grosse ressent une pression plus grande) et des propriétés élastiques du tube (pour une même taille d'objet, un cylindre plus rigide enserre plus fortement la sphère). La force normale à la surface du cylindre engendre une force de frottement qui lui est proportionnelle selon la loi de Coulomb.

#### En loi d'échelle

Nous utilisons les notations de la figure 4.3. Autour de la sphère, la déformation  $\epsilon$  du tube élastique est d'ordre  $\epsilon \sim \Delta R/R$ , où  $\Delta R = R - R_0$ . La tension orthoradiale est donc d'ordre

$$\gamma \sim Eh\Delta R/R \quad (4.3)$$

où  $E$  est le module de Young du cylindre et  $h$  son épaisseur. La pression exercée par le cylindre sur la sphère est donnée par la loi de Laplace

$$\mathcal{P} \sim \frac{\gamma}{R} \sim Eh\frac{\Delta R}{R^2} \quad (4.4)$$

La contrainte de frottements  $\tau$  est donnée par la loi de Coulomb  $\tau = \mu\mathcal{P}$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement entre la bille et le cylindre. Cette contrainte s'applique sur la surface latérale de contact entre l'objet et la paroi interne du tube, d'ordre  $2\pi RL$ . La force de friction est donc d'ordre

$$F_F \sim 2\pi\mu EhL\frac{\Delta R}{R} \quad (4.5)$$

où  $L$  est la longueur de contact entre la sphère et le cylindre qu'il nous reste à estimer. Pour un cylindre de module de Young d'ordre  $E \sim 2.10^5$  Pa et d'épaisseur typique  $h \sim 1$  mm, avec une différence relative de rayon d'ordre  $\Delta R/R \sim 0,1$  et une longueur de contact de l'ordre du centimètre  $L \sim 10^{-2}$  m, nous obtenons une force de frottement de l'ordre du Newton  $F_F \sim 1$  N, en accord avec les valeurs expérimentales.

#### Longueur de contact

Supposons que la longueur de contact soit un arc de cercle, comme nous le représentons sur le dessin du bas de la figure 4.11. La photo du haut de la figure 4.11 montre la surface de contact (zone sombre) entre la sphère et le cylindre, en éclairant le cylindre de l'intérieur. La longueur de contact expérimentale est donc plus petite que si elle était simplement un arc de cercle de longueur  $L^* = 2R \arccos R_0/R$ . Nous retrouvons la longueur de persistance  $L_p \sim \sqrt{R_0 h}$ , déjà rencontrée dans les chapitres précédents, fixée par l'équilibre entre les énergies de courbure et d'extension de la paroi du tube.

Nous traçons la longueur de contact expérimentale  $L$  en fonction de la longueur supposée en arc de cercle  $L^*$  sur la figure 4.12. L'accord est tout de même correct, même si la plupart des points expérimentaux sont légèrement en dessous de la courbe théorique, parce nous n'avons pas tenu compte de la longueur de persistance  $L_p$ .

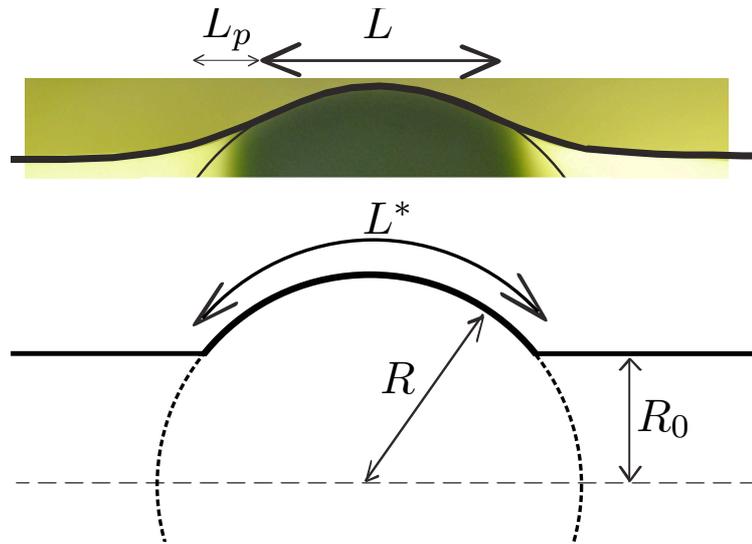


FIGURE 4.11 – (*En haut*) Prise de vue montrant une sphère à l’intérieur d’un cylindre. Le tube est éclairé de l’intérieur, faisant ressortir la surface de contact (zone sombre) entre la sphère et la paroi interne du tube.  $L$  est la longueur de contact expérimentale et  $L_p$  est la longueur de persistance qui détermine la longueur au bout de laquelle le cylindre “oublie” qu’il est étiré par la sphère. (*En bas*) Représentation schématique de la longueur de contact  $L^*$  entre la sphère et la paroi intérieur du cylindre.

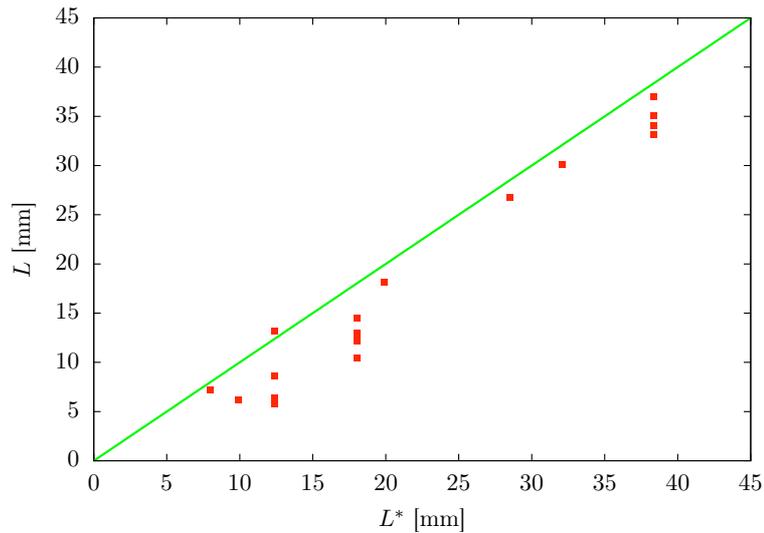


FIGURE 4.12 – Longueur de contact expérimentale en fonction de la longueur théorique  $L^*$  (carrés rouges). La droite à pour équation  $L = L^*$ .

## Comparaison à l'expérience

Représentons à présent la force de frottement  $F_F$  en fonction de  $EhL\Delta R/R$ , où  $L$  est la longueur de contact mesurée expérimentalement, sur la figure 4.13, les données provenant à la fois des expériences accélérées et des mesures directes à l'aide de la machine de traction. Les données expérimentales

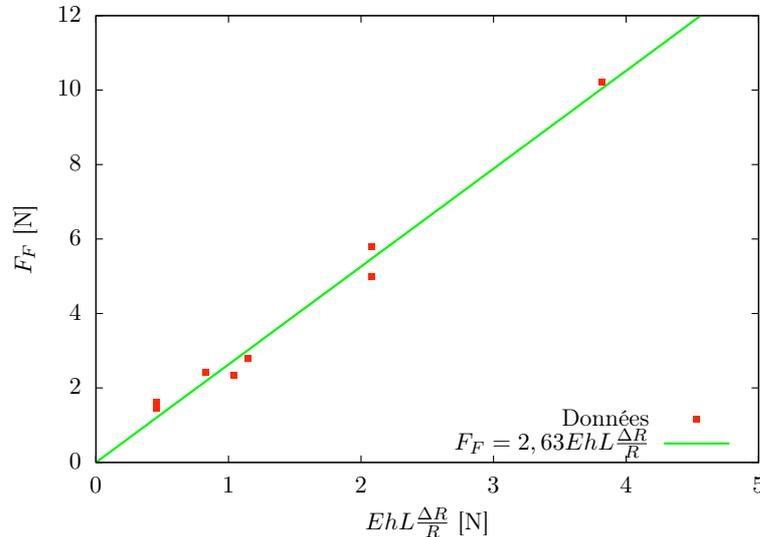


FIGURE 4.13 – Force de frottement  $F_F$  de la sphère sur la paroi interne du cylindre en fonction de  $EhL\Delta R/R$ . Les données, provenant des deux dispositifs expérimentaux décrits ci-dessus, correspondent aux carrés rouges. La droite verte a pour équation  $F_F = 2,63EhL\Delta R/R$ .

sont bien ajustées par la droite d'équation  $F_F = 2,63EhL\Delta R/R$ . Notre approche en termes de friction de Coulomb semble donc valide.

### 4.2.4 Manche d'évacuation

Un exemple macroscopique pratique de cette expérience est la manche d'évacuation (voir figure 4.14). C'est un dispositif d'évacuation d'urgence qui permet d'évacuer rapidement des humains, éventuellement inconscients, depuis des bâtiments pouvant faire plusieurs dizaines d'étages de hauteur. Il s'agit simplement d'un cylindre élastique de rayon plus petit que le rayon transverse caractéristique d'un être humain. L'observation d'un tel dispositif nous amène à nous poser des questions simples sur le transport d'objets à travers un tube étroit.

#### Comment arrêter un objet ?

Lors de l'utilisation de la chaussette d'évacuation, il est conseillé de prendre une position (voir figure 4.14 à droite) permettant à la personne en mouvement (l'objet) de grossir artificiellement sa taille, en écartant les coudes par exemple. La force de frottement entre l'objet et le cylindre étant proportionnelle à  $\Delta R/R$ , augmenter la taille de l'objet tend à augmenter  $\Delta R$ , donc la force de frottement, ce qui permet à l'utilisateur de ralentir.

Mais nous pouvons nous demander s'il est possible de ralentir, depuis l'extérieur, un objet en mouvement à l'intérieur d'un cylindre élastique, par exemple une personne inconsciente dans une manche

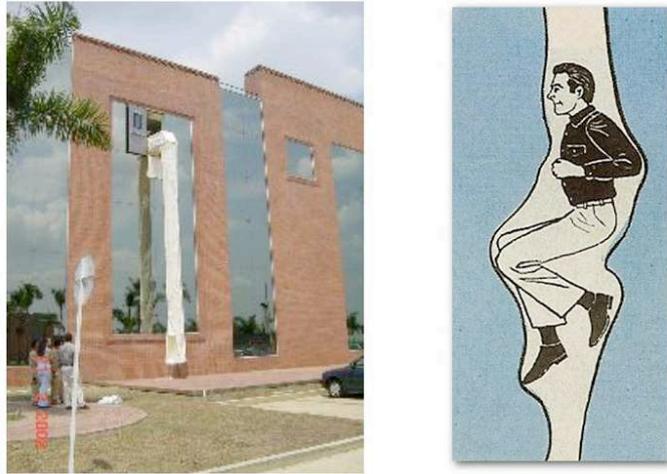


FIGURE 4.14 – (À gauche) Dispositif d'évacuation d'urgence "vertical escape chute", permettant l'évacuation rapide de bâtiments de plusieurs étages. Il s'agit d'un cylindre élastique de rayon plus petit que le rayon caractéristique d'un être humain. (À droite) Position à adopter à l'intérieur du tube d'évacuation.

d'évacuation. Nous observons expérimentalement qu'il est possible de ralentir, voire d'arrêter une sphère en mouvement en étirant le tube dans lequel elle se déplace. Nous représentons sur la figure 4.15 un cylindre au repos et le même cylindre étiré. Le rayon apparent du cylindre diminue, à cause



FIGURE 4.15 – À gauche Cylindre de PVS shore 8 de rayon  $R_0 = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 2$  mm au repos. À droite Le même cylindre est étiré axialement et son rayon apparent ( $R_{0app} < R_0$ ) diminue à cause de l'effet Poisson.

de l'effet Poisson, et devient  $R_{0app} < R_0$ . En utilisant le modèle en loi d'échelle décrit ci-dessus pour la force de frottement, et en remplaçant le rayon du cylindre par le rayon apparent, nous pouvons estimer la force de frottement s'appliquant sur la sphère. Nous représentons sur la figure 4.16 la force de frottement  $F_F$  entre la sphère et la paroi intérieure du tube, en fonction de  $EhL\Delta R_{app}/R$ , où  $\Delta R_{app} = R - R_{0app}$ , pour un cylindre étiré. Nous avons vérifié expérimentalement que l'effet

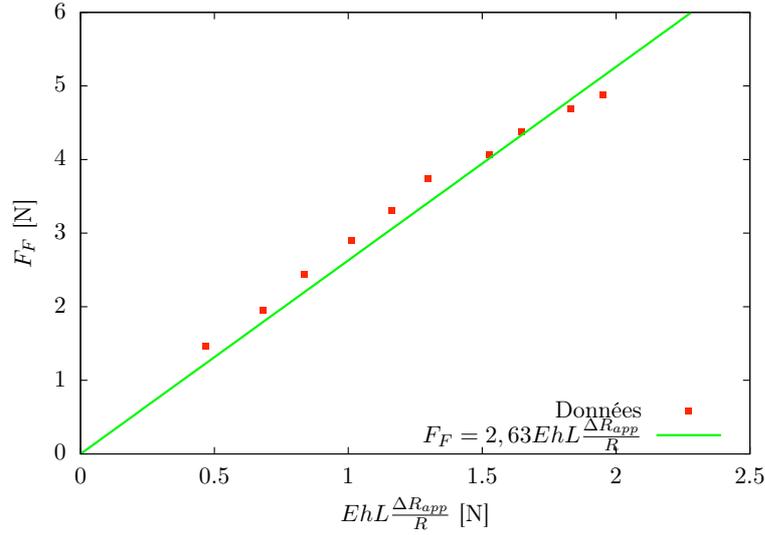


FIGURE 4.16 – Force de frottement  $F_F$  de la sphère sur la paroi interne du cylindre étiré en fonction de  $EhL\Delta R_{app}/R$ , où  $\Delta R_{app} = R - R_{0app}$ , avec  $R_{0app} < R_0$  le rayon apparent du cylindre sous l’effet Poisson. La droite verte a pour équation  $F_F = 2,63EhL\Delta R/R$ , équation ajustant également les données pour des cylindres non étirés.

Poisson ne modifie que très peu l’épaisseur  $h$  du cylindre ( $h_{app} \simeq h$ ) et nous utilisons les longueurs de contact mesurées après étirement.

Cette approche en apparence naïve donne de bons résultats. Pour ralentir ou arrêter un objet se déplaçant dans un cylindre élastique, on peut donc agir sur le tube, en réduisant son rayon, ce qui peut être envisagé sur un dispositif tel que la manche d’évacuation.

### L’objet bouge-t-il ?

Connaissant la force appliquée par le cylindre sur la sphère, nous pouvons prédire si un objet peut ou non se déplacer à travers un tube élastique étroit. Dans le cas de l’expérience accélérée avec un contrepoids, nous avons écrit l’équation du mouvement :

$$(m + m') \frac{d^2 z}{dt^2} = \Delta m g - F_F \quad (4.6)$$

Pour que la sphère se mette en mouvement vers le haut, le poids apparent  $\Delta m g$  doit vaincre la friction aux parois, d’où la valeur limite de  $\Delta m$  :

$$\Delta m > \Delta m_{limite} = \frac{F_F}{g} \quad (4.7)$$

Nous représentons sur la figure 4.17 la valeur expérimentale de  $\Delta m_{limite}$  en fonction de  $F_F/g$ . Le calcul est identique dans le cas d’une sphère pesante sous son propre poids. Nous représentons la masse  $m$  de la sphère en fonction de  $F_F/g$  sur la figure 4.18. Les sphères pour lesquelles le point  $(m, R)$  est au dessus de la courbe d’équation  $m = F_F/g$  se mettent également en mouvement spontanément.

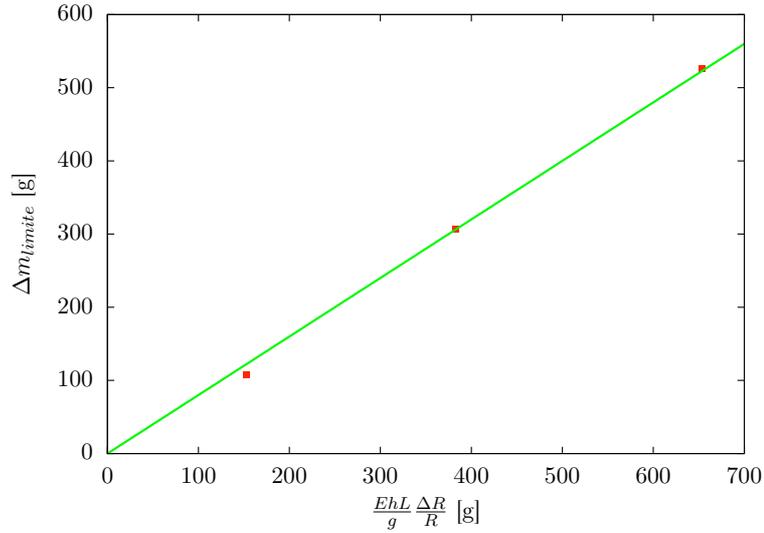


FIGURE 4.17 –  $\Delta m_{limite}$  en fonction  $E/gL\Delta R/R$ .  $\Delta m_{limite}$  est la valeur limite de  $\Delta m$  à partir de laquelle la sphère se met en mouvement ( $\Delta m$  étant la masse apparente dans le cadre du dispositif expérimental avec contrepoids (voir figure 4.4)). Les données sont bien ajustées par une loi de la forme  $F_F/g$ .

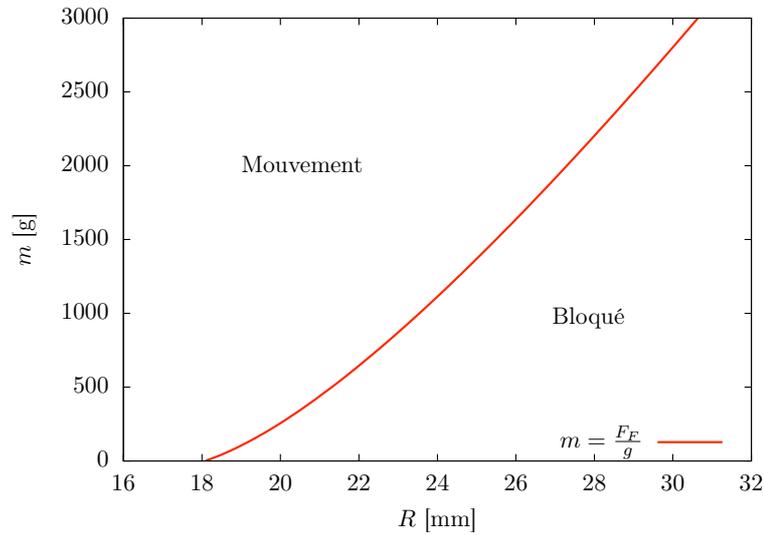


FIGURE 4.18 – Masse  $m$  de la sphère en fonction du rayon  $R$  de la sphère, pour un cylindre de PVS shore 8 de rayon  $R_0 = 18$  mm et d'épaisseur  $h = 2$  mm. La courbe rouge a pour équation  $m = F_F/g$ . Les sphères placées par leur couple (masse, rayon) au-dessus de cette courbe se mettent en mouvement spontanément.

## 4.3 Lubrification

Considérons maintenant le cas où un film de fluide s'intercale entre la paroi intérieure du cylindre et l'objet. Nous commençons par utiliser des cylindres fermés hermétiquement à l'air et à déplacer une sphère à travers le tube, obligeant l'air à s'échapper autour de l'objet.

Nous présentons ici sommairement les expériences et des résultats préliminaires. Nous avons peu de résultats quantitatifs, mais considérons que ces trois types d'expériences peuvent tous apporter quelque chose à la compréhension du problème.

### 4.3.1 Tirer ou Pousser ?

Nous utilisons une machine de traction pour déplacer la sphère à vitesse constante à travers le tube. Le cylindre étant fermé hermétiquement à une extrémité, déplacer la sphère modifie la pression d'un côté de celle-ci, forçant une couche d'air à envelopper l'objet.

#### Pousser

La sphère est déplacée à vitesse constante vers le bas (voir figure 4.19). L'extrémité inférieure du

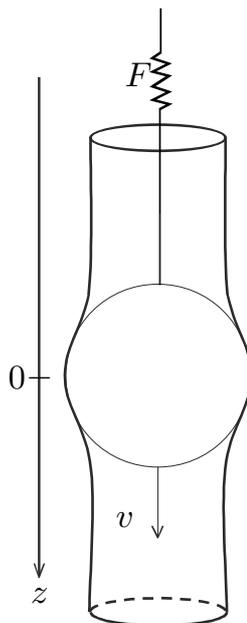


FIGURE 4.19 – Représentation schématique du dispositif expérimental. Le cylindre est fixé et hermétiquement fermé en bas, ouvert en haut. La sphère est reliée à une machine de traction permettant de la déplacer vers le bas à vitesse  $v$  constante (la pression augmente donc sous la sphère lors de l'expérience) tout en enregistrant la force  $F$  exercée sur la sphère.

tube est fermée hermétiquement alors que son extrémité supérieure est ouverte est maintenue fixe. La figure 4.20 montre une série de prises de vue du déroulement d'une expérience. L'extrémité inférieure du cylindre étant fermée hermétiquement, la pression augmente sous la sphère, gonflant le cylindre, jusqu'à ce que l'air s'échappe autour de la sphère.

Nous mesurons à l'aide d'un capteur l'évolution de la force  $F$  appliquée à la sphère au cours de son déplacement pour différents cylindres et une sphère donnée (voir figure 4.21). La force de frottement augmente linéairement (la pente dépendant des caractéristiques du cylindre) au début

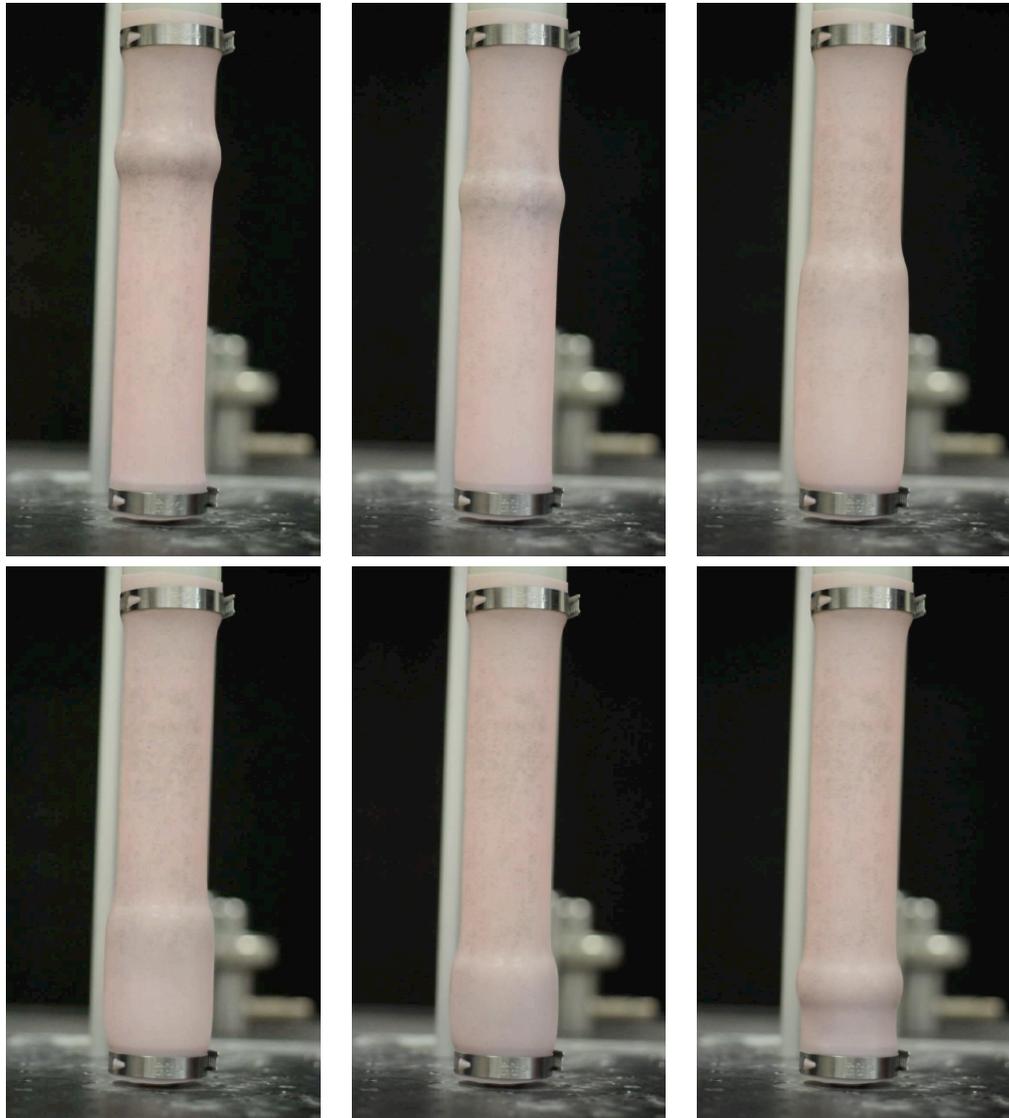


FIGURE 4.20 – Série temporelle de prises de vues d’une expérience de poussée dans un cylindre hermétiquement fermé. La sphère d’acier de masse  $m = 255$  g et de rayon  $R = 20$  mm se déplace vers le bas. Le cylindre de PolyVinylSiloxane (PVS) shore 8 ( $E = 0,24$  MPa) mesure environ 20 cm et a pour rayon  $R_0 = 18$  mm et pour épaisseur  $h = 0,5$  mm. La pression augmente en dessous de la sphère, gonflant le cylindre, jusqu’à ce que le rayon de la partie inférieure atteigne une taille critique, permettant à l’air de s’échapper autour de la sphère.

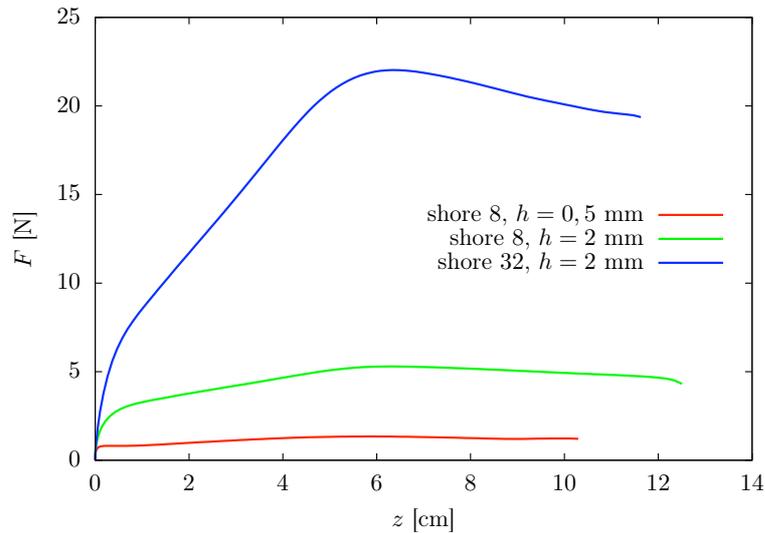


FIGURE 4.21 – Force  $F$  exercée sur la sphère lors d’une expérience de poussée à vitesse constante  $v = 10$  cm/min dans un cylindre de rayon  $R_0 = 18$  mm hermétique en fonction du déplacement de l’objet.

du déplacement, pendant la phase de compression de l’air se trouvant sous la sphère. La force subie par celle-ci décroît ensuite dès que l’air commence à s’échapper de la partie inférieure.

Pour estimer l’effet de l’écoulement du fluide autour de la sphère, nous devons connaître l’ordre de grandeur de l’épaisseur de la lame d’air. Si l’on néglige l’existence de cette lame d’air, nous pouvons supposer que la force subie par la sphère lors du mouvement reste proportionnelle à la force enserrant l’objet, due à l’étirement du cylindre. Cette force doit donc être proportionnelle à  $EhL$ , où  $E$  est le module de Young du tube,  $h$  son épaisseur et  $L$  la longueur de contact mesurée entre la sphère et la paroi intérieure du cylindre. Nous traçons sur la figure 4.22 la force adimensionnée  $F/(EhL)$  qui s’exerce sur la sphère en fonction de son déplacement. La force adimensionnée maximum est

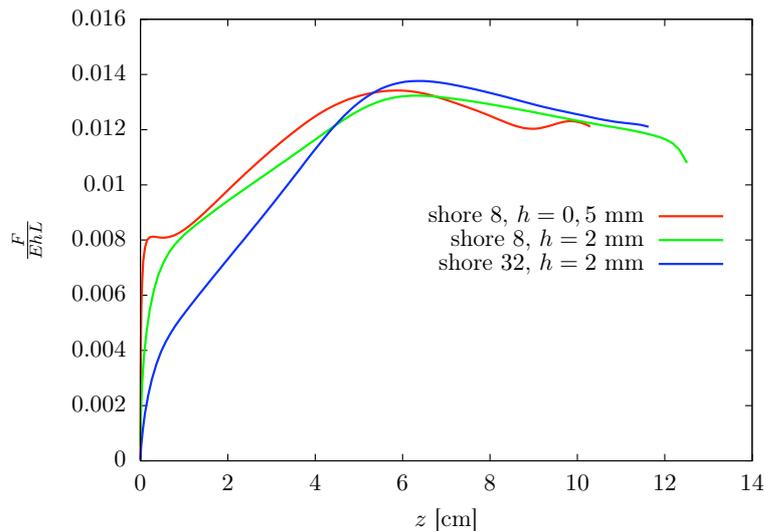


FIGURE 4.22 – Force adimensionnée  $F/(EhL)$  exercée sur la sphère lors d’une expérience de poussée à vitesse constante  $v = 10$  cm/min dans un cylindre de rayon  $R_0 = 18$  mm hermétique en fonction du déplacement de l’objet.

équivalente pour les trois expériences. Nous notons que le déplacement à partir duquel la pente s’inverse semble être identique à  $z \simeq 6$  cm.

## Tirer

La sphère est déplacée à vitesse constante vers le haut (voir figure 4.23). L'extrémité inférieure du

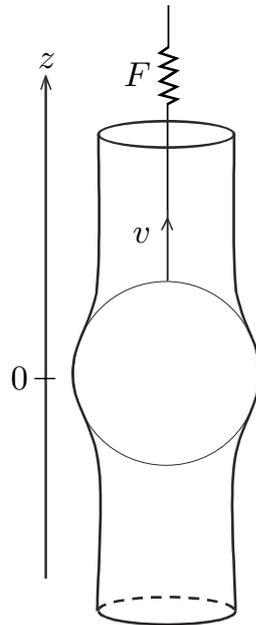


FIGURE 4.23 – Représentation schématique du dispositif expérimental. Le cylindre est fixé et hermétiquement fermé en bas, ouvert en haut. La sphère est reliée à une machine de traction permettant de la déplacer vers le haut à vitesse  $v$  constante (la pression diminue donc sous la sphère lors de l'expérience) tout en enregistrant la force  $F$  exercée sur la sphère.

tube est fermée hermétiquement alors que son extrémité supérieure est ouverte et maintenue fixe. La figure 4.24 montre une série de prises de vue du déroulement d'une expérience. L'extrémité inférieure du cylindre étant fermée, la pression diminue sous la sphère, plaçant le cylindre en dépression, jusqu'à ce que l'air soit aspiré autour de la sphère. Nous constatons que le cylindre se déstabilise en  $N$  lobes sous l'effet de la dépression,  $N$  variant ensuite au cours du déplacement de la sphère, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2.

Nous mesurons à l'aide d'un capteur l'évolution de la force  $F$  appliquée à la sphère au cours de son déplacement pour différents cylindres et une sphère donnée (voir figure 4.25). La force augmente très rapidement, mais une fois la bille mise en mouvement, la force qu'elle subit diminue rapidement, pour se stabiliser à une valeur qui reste du même ordre que dans l'expérience de poussée.

### 4.3.2 Souffler

Dans les expériences de poussée comme de tirée, nous ne contrôlons pas le flux d'air, et les volumes de part et d'autre de la sphère changent au cours du temps. Nous décidons de changer le dispositif (voir figure 4.26) afin d'imposer un régime stationnaire. Nous fixons la sphère à une position donnée, tout en mesurant la force qu'elle subit. La partie inférieure du cylindre est fermée hermétiquement mais reliée à une entrée d'air à débit constant  $Q$ . Nous relierons également la partie basse du cylindre à un capteur de pression, permettant de mesurer la pression relative.

La figure 4.27 montre une série de prises de vues du déroulement d'une expérience. La partie basse du cylindre commence par se gonfler, jusqu'à ce que son rayon soit assez grand pour permettre à

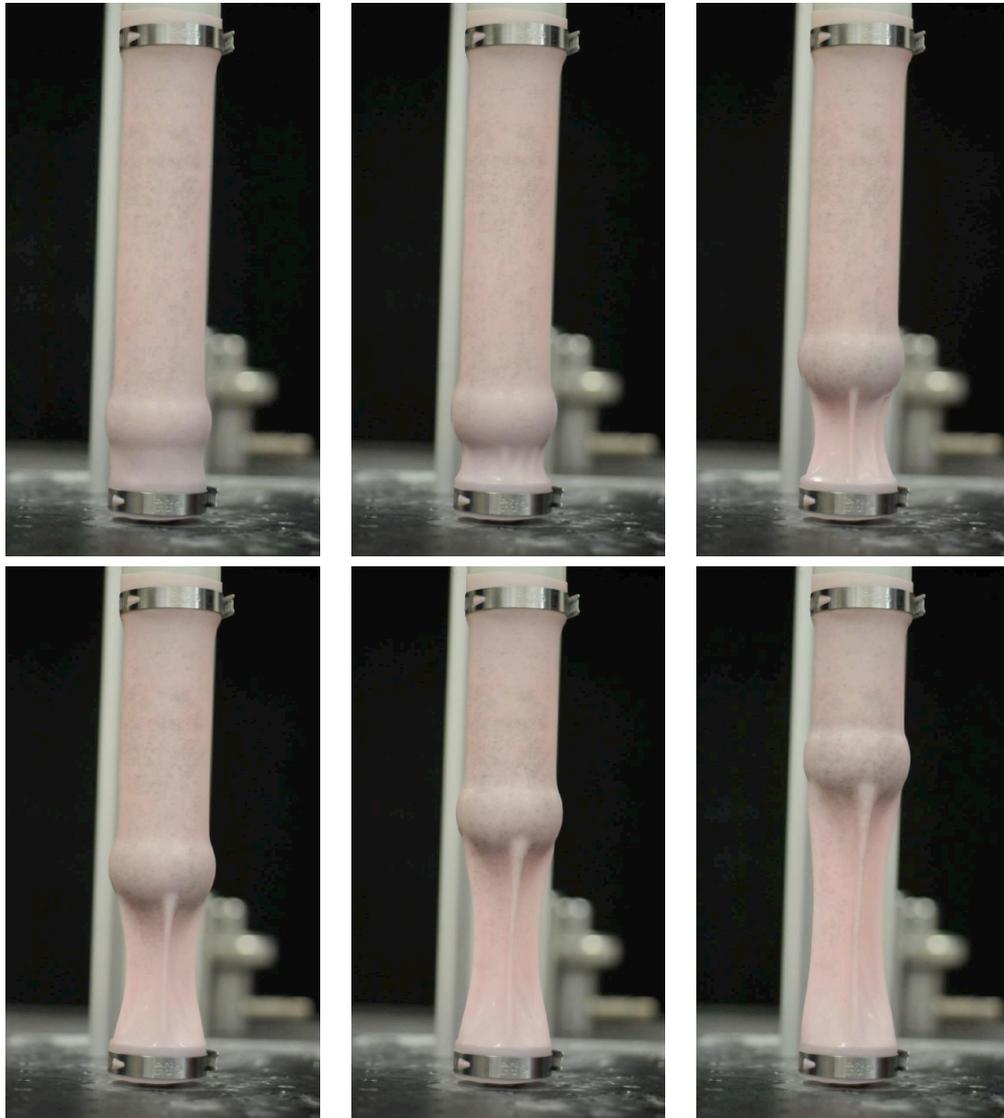


FIGURE 4.24 – Série temporelle de prises de vues d’une expérience de traction dans un cylindre hermétiquement fermé. La sphère d’acier de masse  $m = 255$  g et de rayon  $R = 20$  mm se déplace vers le haut. Le cylindre de PolyVinylSiloxane (PVS) shore 8 ( $E = 0,24$  MPa) mesure environ 20 cm et a pour rayon  $R_0 = 18$  mm et pour épaisseur  $h = 0,5$  mm. La pression diminue en dessous de la sphère, provoquant l’effondrement du cylindre, la coque se déstabilisant en un nombre  $N$  de lobes,  $N$  variant avec le déplacement de l’objet.

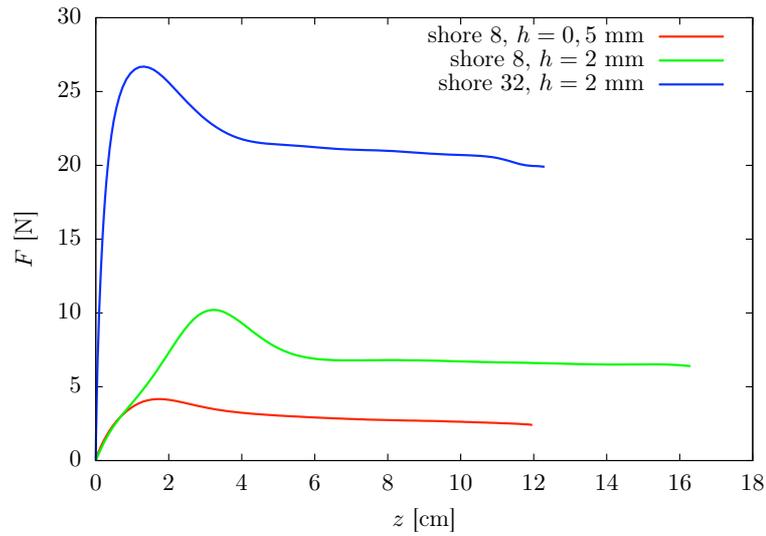


FIGURE 4.25 – Force  $F$  exercée sur la sphère lors d’une expérience de traction à vitesse constante  $v = 10$  cm/min dans un cylindre de rayon  $R_0 = 18$  mm hermétique en fonction du déplacement de l’objet.

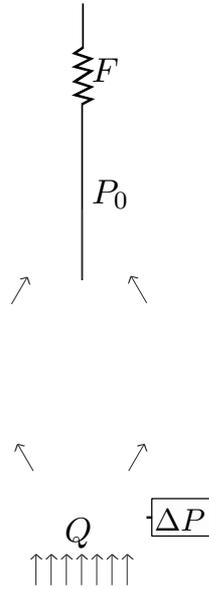


FIGURE 4.26 – Représentation schématique du dispositif expérimental. Le cylindre est fixé et hermétiquement fermé en bas, ouvert en haut. La sphère est reliée à une machine de traction permettant de garder sa position fixe tout en enregistrant la force  $F$  s’exerçant dessus. La partie haute du cylindre est ouverte, donc à pression atmosphérique  $P_0$ . La partie basse est reliée à une arrivée d’air permettant l’écoulement d’un flux à débit constant  $Q$ , un capteur permettant d’y mesurer la surpression  $P$  (avec  $\Delta P = P - P_0$ ).



FIGURE 4.27 – Série temporelle de prises de vues d’une expérience à débit entrant constant. La sphère d’acier de masse  $m = 600$  g et de rayon  $R = 25$  mm est fixe. Le cylindre de PolyVinylSiloxane (PVS) shore 8 ( $E = 0,24$  MPa) a pour rayon  $R_0 = 18$  mm et pour épaisseur  $h = 2$  mm. La pression augmente en dessous de la sphère, gonflant le cylindre, jusqu’à ce que le rayon de la partie inférieure atteigne une taille critique supérieure à  $R + h$ , permettant à l’air de s’échapper autour de la sphère.

l’air de s’échapper autour de la sphère.

Nous représentons sur la figure 4.28 la force exercée sur la sphère en fonction de la surpression dans la partie basse du système. La force ne semble pas dépendre de la pression mais uniquement de la

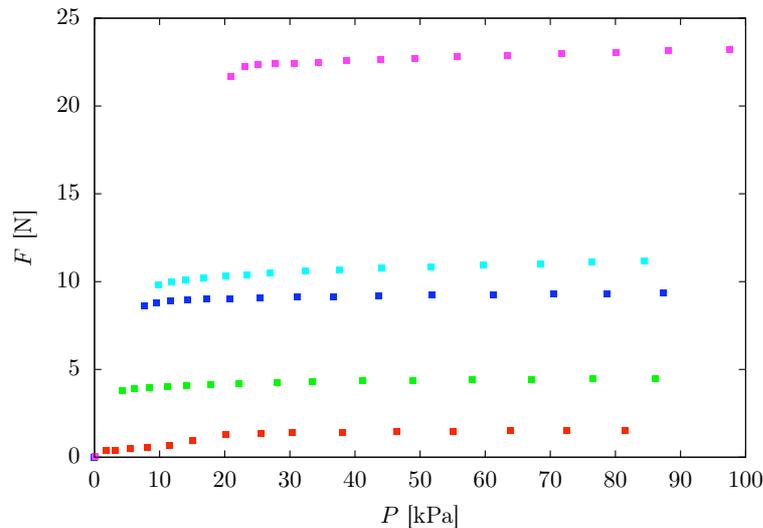


FIGURE 4.28 – Force  $F$  exercée sur la sphère en fonction de la surpression dans la partie basse, une pression  $P$  correspondant à un débit  $Q$  (voir figure 4.29). Les points expérimentaux correspondent à, de bas un haut : shore 8,  $h = 0,5$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm ; shore 8,  $h = 2$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm ; shore 8,  $h = 2$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 25$  mm ; shore 32,  $h = 1$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm et shore 32,  $h = 2$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm.

géométrie du système et des caractéristiques élastiques du cylindre.

Nous représentons sur la figure 4.29 la force exercée sur la sphère en fonction du débit dans la partie basse du système. De la même manière, la force ne dépend pas du débit entrant mais uniquement de la géométrie du système et des caractéristiques élastiques du cylindre.

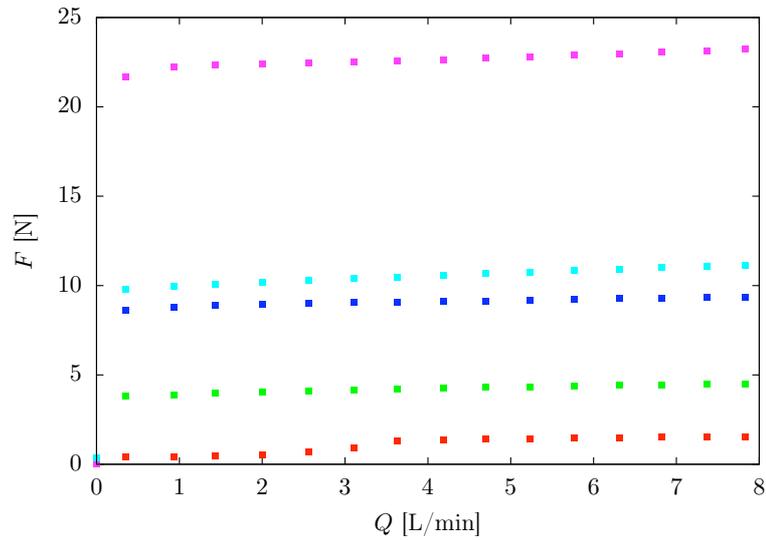


FIGURE 4.29 – Force  $F$  exercée sur la sphère en fonction du débit d’air entrant dans la partie basse, un débit  $Q$  correspondant à une pression  $P$  (voir figure 4.28). Les points expérimentaux correspondent à, de bas en haut : shore 8,  $h = 0,5$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm ; shore 8,  $h = 2$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm ; shore 8,  $h = 2$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 25$  mm ; shore 32,  $h = 1$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm et shore 32,  $h = 2$  mm,  $R_0 = 18$  mm,  $R = 20$  mm.

## 4.4 Conclusion

Nous nous intéressons à la force exercée par une coque cylindrique sur l’objet qu’elle contient. Dans le cas où il existe une surface de contact entre l’objet et le cylindre, la force qu’il subit est bien décrite par un modèle tenant compte de la tension orthoradiale dans le tube.

Nous montrons l’influence de la pré-extension du cylindre sur la force enserrant l’objet, en déduisant un moyen d’arrêter un objet en déplacement.

Nous souhaitons étudier l’influence de la lubrification du système. Nous commençons par forcer une couche d’air à s’intercaler entre la sphère et la paroi interne du tube. Nous prévoyons la poursuite de cette étude vers des systèmes immergés ou lubrifiés par une couche liquide. Dans ce cas, nous supposons qu’il n’est plus possible d’arrêter un objet en déplacement, une couche de liquide restant toujours entre la sphère et le cylindre.



# Conclusion

Nous avons commencé par étudier dans cette thèse des phénomènes de dynamique élasto-capillaire entre deux plaques. L'envie d'étudier la montée capillaire dans un tube mou nous a poussés vers l'étude des instabilités de coques cylindriques en dépression. L'idée de limiter la déstabilisation du cylindre nous a conduits à remplir ces tubes, d'abord de grains. Le rôle de la friction et de la pression à la paroi sur les interactions entre le milieu granulaire et le contenant nous a amenés à nous intéresser aux forces exercées par le cylindre sur un seul grain macroscopique. Lors du déplacement de cet objet, nous avons retrouvé le flambement caractéristique en plusieurs lobes observé au début de cette thèse.

Bouclant la boucle, connaissant maintenant la mécanique du tube, la suite de ce travail apparaît évidente : Comment s'imprègne un tube mou trempé dans un liquide mouillant ? Peut-on fabriquer un robot mou avec seulement des coques cylindriques ? Comment définir une longueur élasto-granulaire ? Un serpent avalant un éléphant doit-il boire un verre d'eau ?



Article : Capillary rise between flexible walls

T. Cambau, J. Bico & E. Reyssat

*Capillary rise between flexible walls* **EPL**, xx-xx, 2011

## Capillary rise between flexible walls

T. CAMBAU, J. BICO and E. REYSSAT<sup>(a)</sup>

*Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, UMR CNRS 7636, ESPCI-ParisTech, Paris Diderot University  
10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France, EU*

received 28 April 2011; accepted in final form 29 August 2011  
published online 29 September 2011

PACS 47.56.+r – Flows through porous media  
PACS 46.70.De – Beams, plates, and shells  
PACS 47.55.N– – Interfacial flows

**Abstract** – We report experimental work on capillary rise of a liquid in a cell formed by parallel plates, one of which is flexible. We show that above a critical width, the cell collapses under the negative capillary pressure in the liquid. This collapse allows the liquid to rise virtually without limit between the plates. The height of the rising front is found to increase with time as  $t^{1/3}$ , a characteristic of capillary imbibition in a wedge.

Copyright © EPLA, 2011

**Introduction.** – When dipped into coffee, a sugar cube absorbs the liquid owing to capillary forces. The very general phenomenon of capillary imbibition occurs as soon as a porous medium is put in contact with a wetting liquid and has important consequences for human, animal and plant lives, from soil sciences and oil extraction [1,2], to construction materials [3], food and paper industries [4,5], the stability of micro-mechanical systems [6], feeding of birds [7] or the rise of sap in trees [8].

The equilibrium height and wicking dynamics of a wetting liquid front rising in a porous medium are both widely documented in textbooks [9]. The equilibrium height  $h_e$  of a liquid column in a circular capillary tube was long observed to be inversely proportional to the radius  $r$  of the tube. This result, experimentally demonstrated in the 18th century and commonly known as Jurin's law, was first explained by Laplace [10]. For a totally wetting liquid,  $h_e$  is set by a balance of the capillary pressure  $2\gamma/r$  with the hydrostatic pressure  $\rho gh_e$ , which yields

$$h_e = \frac{2\gamma}{\rho gr}, \quad (1)$$

where  $\gamma$  and  $\rho$  stand for the surface tension and the density of the liquid and  $g$  for the gravitational acceleration. Note that eq. (1) holds for  $r$  much smaller than the capillary length  $\sqrt{\gamma/\rho g}$ .

The basic dynamical law for the rise of liquid in a tube is commonly referred to as Washburn's law. It describes the progression of the liquid front far from equilibrium

and states that the penetration length  $h(t)$  of liquid in the tube behaves pseudo-diffusively

$$h(t) = \sqrt{\mathcal{D}t}, \quad \mathcal{D} = \frac{2\gamma r}{\eta}, \quad (2)$$

where  $\eta$  is the viscosity of the liquid. Equation (2) remains valid until  $h$  approaches the equilibrium height  $h_e$  within a characteristic time scale  $\tau$  given by  $h_e \sim \sqrt{\mathcal{D}\tau}$

$$\tau \sim \frac{\eta \rho g}{\gamma^2} h_e^3. \quad (3)$$

These results were derived in the early 1900s by Bell and Cameron [11], Lucas [12] and Washburn [13], motivated by separation, soil sciences and oil extraction.

Equations (1) and (2) have proven very general and robust, and describe the capillary transport in many complex and disordered porous media with typical pore size  $r$ . Yet, in a number of cases, these laws do not hold any longer. The reasons for discrepancies are various: inertial effects [14], evaporation, surfactants, contact angles, geometrical singularities and heterogeneities in the pore network. More particularly, deformations of the porous matrix may occur as the liquid penetrates inside the material. Microfluidic channels closed with thin flexible walls can indeed collapse under negative capillary pressures as nicely shown by van Honschoten *et al.* [15–17]. The possible collapse of nanotubes partially filled with a liquid droplet has also been predicted numerically [18]. More dramatically, a similar collapse may also occur in the lung airways of premature infants with fatal consequences [19–21]. Model experiments allow to extract the physical ingredients involved in complex nanoscale

<sup>(a)</sup>E-mail: etienne.reyssat@normalesup.org

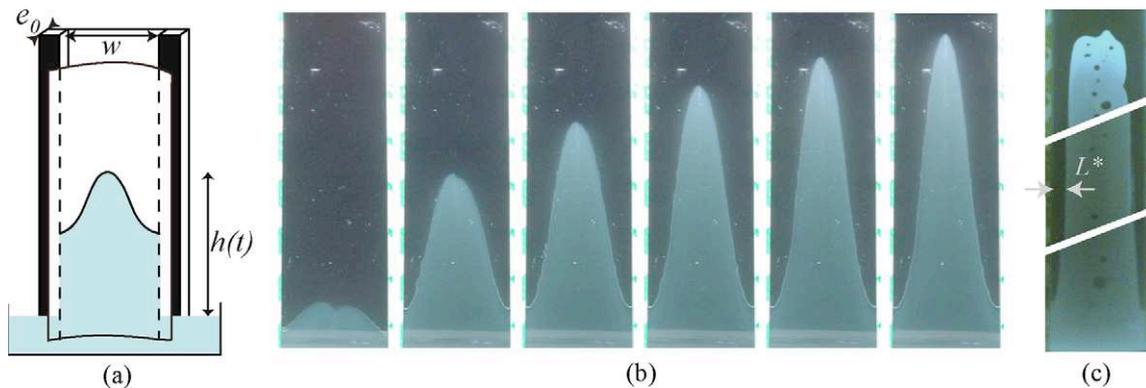


Fig. 1: (Colour on-line) (a) Experimental setup: a flexible polymer membrane (white) is separated from a rigid plate of width  $w$  by spacers of thickness  $e_0$ . The flexible wall is simply supported on the spacers and the cell is very slightly tilted with respect to the vertical direction to prevent the flexible wall from falling. (b) Owing to capillary forces, the liquid rises between the plates and forms a liquid finger.  $w = 5$  cm and the snapshots are taken every 70 s. (c) Shape of the front at very long times. A dry region of width  $L^*$  develops along the spacers. The picture is cut in three parts as its actual height is approximately three times that of the pictures in panel (b) of this figure.

or biological systems. In particular, recent works address the problem of capillary rise in a wedge [22] or between flexible lamella [23–25]. In this paper, we focus on a novel experiment which combines both a geometrical singularity and deformability.

#### Capillary rise between elastic plates: statics. –

We consider the capillary rise between two vertical plates of width  $w$ , separated along the vertical edges by a pair of spacers of thickness  $e_0$  (fig. 1(a)). One of the plates is a thick rigid glass plate, while the other one is a flexible polymer film that is simply supported on the spacers. The lower part of the imbibition cell is put in contact with a bath of wetting liquid, typically silicon oil. We monitor the liquid front that rises owing to capillary forces. In the case of a rigid cell, a horizontal wetting front follows Washburn dynamics and quickly saturates to the Jurin height prescribed by the cell thickness  $e_0$ :  $h_e = 2\gamma/\rho g e_0$ . For silicon oil of viscosity  $15$  mPa s, density  $\rho = 950$  kg m $^{-3}$  and surface tension  $\gamma = 21$  mN/m in a cell of thickness  $e_0 = 330$   $\mu$ m, the rise stops at 14 mm after roughly 10 s. In a flexible cell the phenomenology is very different. As shown in fig. 1(b), a liquid finger rises at the center of the cell, while a small region along the spacers remains dry. At long times (fig. 1(c)), the width of the dry region does not depend on altitude  $z$  any more, except close to the rising front. Reaching 140 mm after 1000 s, the height  $h$  of the front does not seem to saturate (fig. 2). In practice, the finite size of the cell eventually limits the rise.

We first address the statics of these systems, and describe the shape of the flexible wall. The liquid rising between the plates exerts a negative pressure on the walls of the cell which thus tends to collapse. Using the fringe projection technique described in [26], we measure the thickness profile of the imbibed cell (fig. 3): in the central wet region, the flexible membrane is almost flat and contacts the rigid wall.

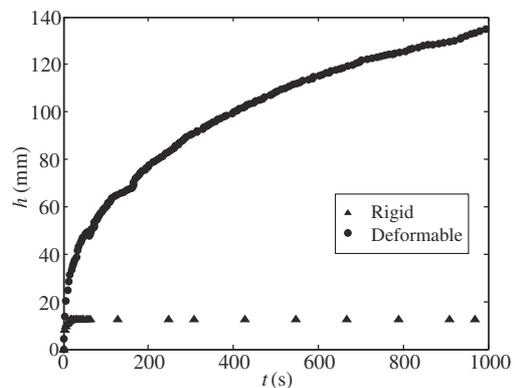


Fig. 2: Height  $h(t)$  of the imbibition front as a function of time in a cell of thickness  $e_0 = 330$   $\mu$ m, for silicon oil of viscosity  $\eta = 15.4$  mPa s, surface tension  $\gamma = 21$  mN/m and density  $\rho = 950$  kg m $^{-3}$ . In a rigid cell (triangles),  $h(t)$  saturates within a few seconds at the Jurin height  $h_e \simeq 13$  mm. In a flexible cell (circles), the contact between opposite walls enables the liquid to virtually rise to infinity. After 1000 s, the liquid front reaches 140 mm and does not saturate.

Close to the sides, the walls gradually separate and form a wedge, whose thickness reaches  $e_0$  at the spacers (fig. 3(b)). The infinitesimal spacing available in this self-generated corner enables the liquid to virtually rise to infinite heights. We note that, at long times, the width  $L^*$  of the dry deformed domain does not change with height. Far from the tip, the section of the collapsed wall is thus almost invariant by translation along the vertical axis (fig. 1(c)). The extension of the void region results from a competition between capillary adhesion that tends to bring the walls in contact and the counterbalancing stiffness of the sheet. Indeed, the adhesion of the flexible wall over a length  $L$  would lead to a gain in surface energy  $E_\gamma = 2\gamma L$  per unit height (we assume that the liquid totally wets the walls). This gain is however reduced by

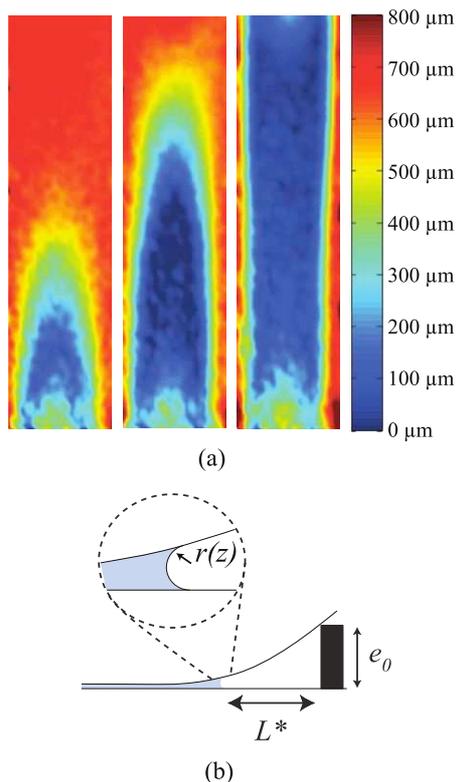


Fig. 3: (Colour on-line) (a) Thickness maps of the cell measured with the fringe projection technique described in [26]. The maps were taken at  $t = 15$  s, 200 s and 1200 s. At long times, the center of the cell is flat, while a dry region of width  $L^*$  close to the spacers forms a wedge. The vertex of this corner is filled with a liquid meniscus. The width of the cell is 40 mm. (b) Schematic horizontal section of the cell at long times.

the cost in elastic energy corresponding to the deformation of the flexible wall. In the region where the section is invariant by translation, the wall is simply bent and the bending energy per unit area stored in this process is of order  $B\kappa^2$ , where  $B$  and  $\kappa$  are the bending modulus and curvature of the elastic membrane. In terms of scaling,  $B$  is proportional to  $E\delta^3$ , where  $E$  and  $\delta$  are the Young modulus and thickness of the wall, and  $\kappa$  scales as  $e_0/L^2$ , where  $L$  is the length of the wedge. Taking all numerical factors into account (within the limit of small deformations), the elastic energy  $\mathcal{E}_B$  stored per unit height of the cell reads [23]

$$\mathcal{E}_B = \frac{3}{2} \frac{B e_0^2}{L^3}. \quad (4)$$

The total energy stored in one wedge is finally given by

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_\gamma = \frac{3}{2} \frac{B e_0^2}{L^3} + 2\gamma L. \quad (5)$$

The selected length  $L^*$  minimizes  $\mathcal{E}$ , which leads to

$$L^* = \left( \frac{9B e_0^2}{4\gamma} \right)^{1/4} \simeq 1.22 \sqrt{e_0 L_{ec}}, \quad (6)$$

where  $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$  is the elastocapillary length of the system [27]. This prediction for  $L^*$  is in quantitative agreement with our experiments (fig. 4(a)). The determination of  $L^*$  provides a criterion for the flexible character of the cell wall. Indeed, the wall is expected to collapse only if  $w > 2L^*$ . In this situation wedges are formed and allow the liquid to rise indefinitely. Otherwise the flexible wall deflects as described in [16], but not enough to collapse. Figure 4(b) shows a phase diagram summarizing these different regimes. Cells with a width  $w < 2L^*$  are not able to convey the liquid to infinite altitude, while wider cells do collapse and exhibit a self-sustained imbibition process. In the first case the liquid front reaches an equilibrium but is distorted, rising more at the center of the cell than close to the spacers. In fig. 5, we show the imbibition dynamics for cells with  $e_0 = 500 \mu\text{m}$  and  $w = 15$  mm but membranes with different thicknesses (*i.e.* different bending stiffnesses  $B$ ). We also report the maximum height  $h_m$  of the imbibition front as a function of the width  $w$  of the cell. Starting from the Jurin height  $h_e$ ,  $h_m$  increases sharply as  $w$  approaches  $2L^*$  (inset in fig. 5). Indeed, the capillary pressure tends to bend the flexible plate, which leads to smaller gap  $e_m$  between the plates and thus to a greater pressure. In terms of scalings, the typical torque per unit height exerted by the fluid on the flexible plate reads  $w^2\gamma/e_m$  and equilibrates the resisting torque from the plate  $B(e_0 - e_m)/w^2$ . Within the limit of small perturbations,  $e_m = e_0(1 - \epsilon)$ , this torque balance leads to  $\epsilon \sim 1/[(2L^*/w)^4 - 1]$  and the maximum height is finally given by  $h_m = 2\gamma/\rho g e_0(1 - (w/2L^*)^4)$ . Although our derivation is in principle restricted to small perturbations, this prediction is in good agreement with our experimental results (inset of fig. 5). We also note that the “flexible cells” region defined in fig. 4(b) can be further separated in two regions. Indeed, it is observed that capillary rise spontaneously starts in the thinnest cells. In thicker cells, though they do fulfill the criterion  $w > 2L^*$ , the walls are initially too far apart to interact through the liquid meniscii separating them. This situation typically occurs when  $e_0$  is large in comparison with the capillary length  $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ . However, the collapse of the cell can be forced by pressing on the flexible sheet. Once triggered, the rise continues indefinitely.

Assuming the independence of the section of the cell with the height is valid far below the tip of the liquid front. However, far above the wetting front, the upper part of the flexible wall is expected to recover its original flat shape. In the vicinity of the liquid boundary, the (lower) bent and (upper) flat parts of the wall are connected by a transition region in which the membrane undergoes some stretching [28,29]. The persistent length along which the curvature of a pinched ribbon decays to zero is set by the balance of stretching and bending energies. This balance is given by  $\ell_p \sim W^2/R^{1/2}\delta^{1/2}$  for a strip of width  $W$  and thickness  $\delta$  with an imposed radius of curvature  $R$  at one

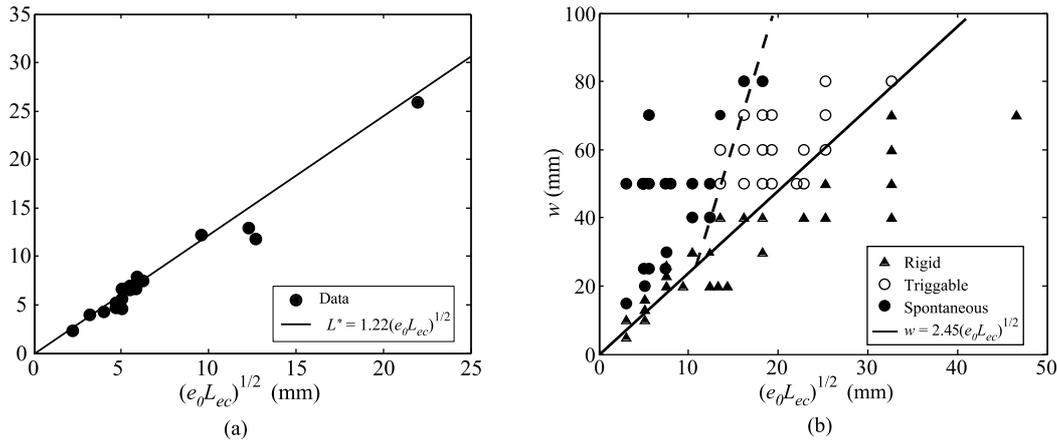


Fig. 4: (a) Width  $L^*$  of the dry region along the spacers as a function of  $\sqrt{e_0 L_{ec}}$ . Straight line: theoretical prediction  $L^* = 1.22\sqrt{e_0 L_{ec}}$  (eq. (6)). (b) Possible imbibition modes as a function of the geometrical and physical properties of the system. Cells narrower than  $2L^*$  do not enable the liquid to rise to infinity (triangles). Wider cells either show spontaneous imbibition (full dots) or need an initial triggering (open circles). The full line ( $w = 2.45\sqrt{e_0 L_{ec}}$ ) separates elastic and rigid cells. Within the elastic domain, the dashed line separates spontaneous from triggered imbibition.

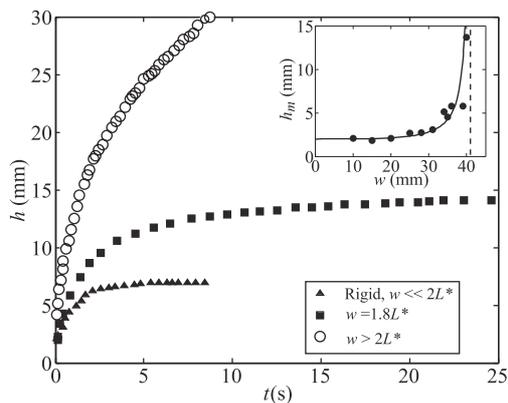


Fig. 5:  $h(t)$  for cells of different thicknesses. If  $w > 2L^*$  (circles), the cell is flexible enough to collapse and induce the infinite rise of the liquid. For  $w \ll 2L^*$  (triangles),  $h$  saturates to  $h_e$  after a few seconds. If  $w \lesssim 2L^*$  (squares),  $h$  still saturates, but the cell deforms moderately and the front reaches a higher position at a later time. Inset: the maximum height  $h_m$  of the front strongly increases as  $w$  approaches  $2L^*$  (dashed line). The full line, of equation  $h_m = 2\gamma/\rho g e_0(1 - (w/2L^*)^4)$ , is a good fit to the experimental results.

end [28]. In the case of a flexible cell, the bent width is of the order of  $w$  and  $R \sim w^2/e_0$ , which leads to

$$\ell_p \sim w \sqrt{\frac{e_0}{\delta}}. \quad (7)$$

In the typical case of polypropylene sheets of thickness  $\delta = 100 \mu\text{m}$ ,  $w = 2 \text{ cm}$  and  $e_0 = 1 \text{ mm}$ , we find  $\ell_p \sim 5 \text{ cm}$ . This characteristic length likely plays a role in determining the shape of the rising liquid front close to its highest point.

**Dynamics.** – We now describe the dynamics of liquid rise in wide cells ( $w > 2L^*$ ). The height of rise  $h(t)$  is

found to increase as  $t^{1/3}$  within a wide range of viscosities as represented in fig. 6(a). For instance in the case of silicon oil of viscosity  $\eta = 15.4 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  and surface tension  $\gamma = 21 \text{ mN m}^{-1}$ , the liquid front reaches  $150 \text{ mm}$  in  $1000 \text{ s}$ . The dynamics do not depend on the cell dimensions  $w$  and  $e_0$ , but the physical properties of the fluid play a role: the rise is slower for larger viscosities and faster for larger surface tensions.

As sketched in fig. 3(b), the liquid mainly flows in a self-constructing wedge whose vertex is localized at a distance  $L^*$  from the spacers. To rise to height  $h$ , it confines in a space of typical radius  $r \sim \gamma/\rho g h$  for capillary forces to balance gravity. The time for liquid to rise up to  $h$  in a capillary of size  $\gamma/\rho g h$  is given by eq. (3) which expresses the characteristic time of capillary rise in a cylindrical tube as a function of the equilibrium Jurin height  $h_e$ . Applying this relationship locally and inverting it, we thus expect the height of the tip of the finger to follow

$$h(t) \sim \left(\frac{\gamma^2}{\eta \rho g}\right)^{1/3} t^{1/3}, \quad (8)$$

as predicted theoretically by Tang and Tang [30] and observed experimentally in several corner geometries by Ponomarenko *et al.* [22]. This result is in good agreement with our experimental observations since our data is well described over several decades in time by  $\tilde{h}(t) = t^{1/3}$ , with  $\tilde{h} = h(\eta \rho g / \gamma^2)^{1/3}$  (fig. 6(b)).

However, we observe deviations from the prediction of eq. (8) at short and long times. At early times, we note that  $h(t)$  increases faster than predicted by eq. (8). Indeed, cell deformations are initially weak and the wicking process should be described by the classical Washburn dynamics in a rigid cell of thickness  $e_0$ :  $h(t) = \sqrt{\gamma e_0 t / \eta}$ . Significant deformations of the cell only arise once  $h$  is large enough for the negative capillary pressure

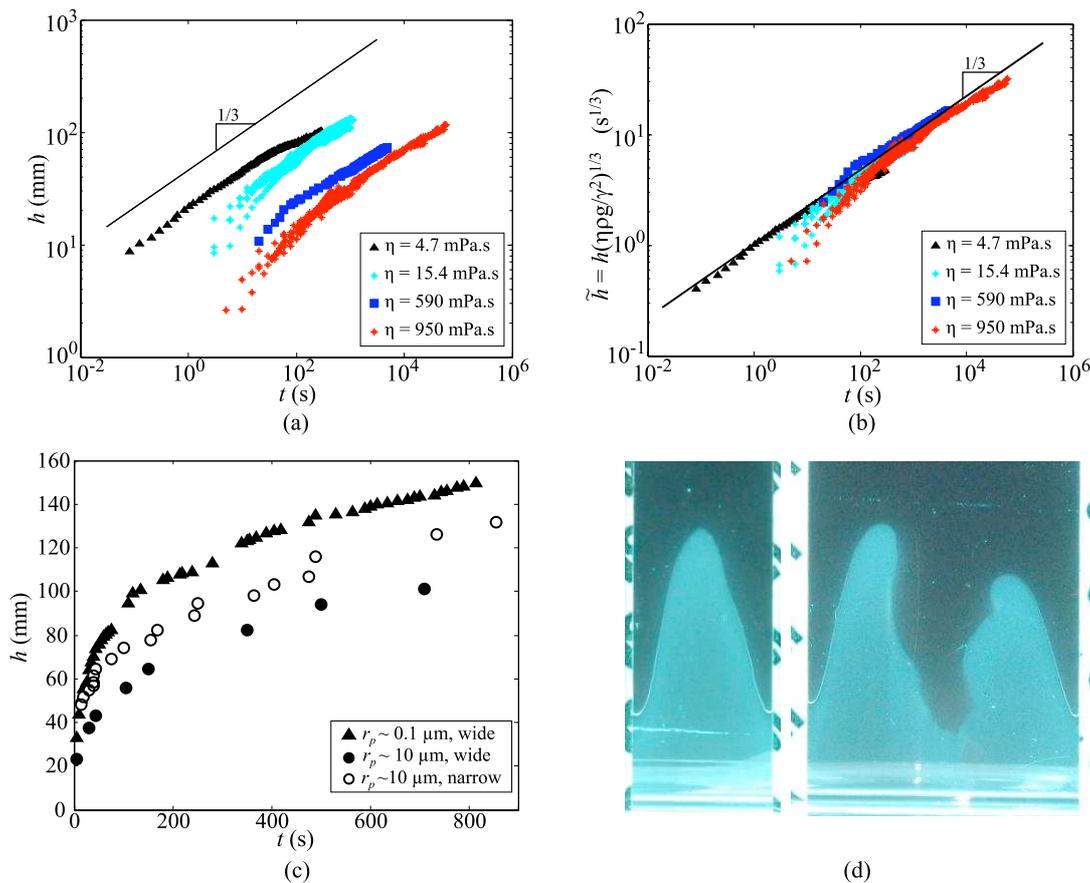


Fig. 6: (Colour on-line) (a) Height of the front as a function of time for silicon oils of viscosity spanning from 5 to 1000 mPa.s. (b) Reduced height  $\tilde{h}$  as a function of time. All data collapse on a single master curve  $\tilde{h} = t^{1/3}$  (eq. (8)). The full line ( $\tilde{h} \simeq t^{1/3}$ ) is a fit to the data of Ponomarenko *et al.* [22] for the capillary rise in a corner, which describes our data as well. (c) The imbibition front rises faster between smooth walls compared to rough walls. This effect is enhanced in wide cells, where there is more volume available for liquid in the central part of the cell. (d) In narrow cells (left,  $w = 25$  mm), a single finger develops, whereas in wide cells (right,  $w = 50$  mm) the front rises in two simultaneous fingers close to the spacers. Indeed, in this latter case the central region fills slower since the liquid is driven horizontally from the liquid corners.

to bend the flexible wall. As in the previous estimate of the height of the front, the typical torque induced by capillarity is given by  $w^2 h \gamma / e_0$ , where  $h$  is the front height. This torque balances the resistance of the plate which is bent along a typical distance  $\ell_p$ . As the cell collapses, the curvature of the flexible plate reads  $e_0 / w^2$  and the corresponding torque is given by  $\ell_p B e_0 / w^2$ . Capillary forces are finally expected to overcome bending stiffness as  $h$  becomes larger than

$$h^* \sim \frac{E(e_0 \delta)^{5/2}}{\gamma w^3}. \quad (9)$$

We expect to recover the dynamics predicted by eq. (8) above  $h^*$ . Typical values of the relevant parameters ( $E = 2$  GPa,  $e_0 = 1$  mm,  $\delta = 100$   $\mu$ m,  $w = 2$  cm,  $\gamma = 20$  mN/m) yield  $h^* \sim 3$  cm, in qualitative agreement with experiments (fig. 6(a)).

At long times, we observe a slight deceleration of the liquid front (in comparison with the  $\tilde{h}(t) \simeq t^{1/3}$  law). We believe that this effect is due to the horizontal

drainage of the liquid from the wedges to the center of the cell as a consequence of the residual gap between the rigid and elastic plates. Indeed, experiments carried out with sheets of roughnesses on the order of  $0.1$   $\mu$ m and  $10$   $\mu$ m (as estimated by optical profilometry) show a more pronounced deceleration with the rougher plates (fig. 6(c)). For a given roughness, the rise is faster in narrower cells (smaller  $w$ ), which suggests that a fast saturation of the central region reduces the drainage from the wedges.

Horizontal imbibition toward the center of the cell is finally responsible for some variation in the shape of the wicking front. In narrow cells ( $w \gtrsim 2L^*$ ), a single wicking finger usually rises in the middle of the cell (fig. 6(d)). Yet, if the width of the cell is large, a pair of fingers develops close to the spacers, while the central region, away from the corners, fills through the horizontal drainage of the lateral fingers. In terms of dynamics law, we expect the horizontal imbibition to be described by a Washburn law in a porous medium with a typical pore size  $r_p$  given by the

roughness of the plates:  $x(t) \sim \sqrt{\gamma r_p t / \eta}$ . The dynamics of the rising fingers ( $\tilde{h} \simeq t^{1/3}$ ) are initially faster than the lateral wicking, but slow down more rapidly. The pair of fingers formed in wide cells eventually merge at the center of the cell and form a single finger. In the case  $w \gg 2L^*$ , horizontal wicking from the fingers to the center takes a time  $\tau_w \sim \eta w^2 / \gamma r_p$ . Using eq. (8), we thus find the height reached by the liquid as the fingers merge

$$h \sim \left( \frac{\gamma w^2}{\rho g r_p} \right)^{1/3}, \quad (10)$$

which is independent of the liquid viscosity. In the typical case illustrated in fig. 6(d) with  $w \simeq 5$  cm and  $r_p \simeq 1$   $\mu$ m, we expect the fingers to merge for a height of the order of 17 cm, in fair agreement with the experimental observations.

**Conclusion.** – We have used a model elastic porous medium to show the peculiar imbibition mechanisms linked to capillary-induced deformations. We have demonstrated experimentally that deformability may be used to rise liquid through capillary imbibition up to infinite altitudes. In particular, we have shown that elastic and geometric properties of the cell dictate the mode of imbibition: slight deformations and Washburn law for the rise ( $h \propto t^{1/2}$ ), or collapse of the cell wall and wedge-rise dynamics ( $h \propto t^{1/3}$ ). In the latter case, the collapse may not occur spontaneously but can be triggered by the operator, which could be interesting for engineering applications. We expect these results to be relevant for more complex porous media ranging from flexible microfluidics channels to simplified versions of lung airways. However wicking through actual three-dimensional elastic material such as a solid foam or sponge may yield interesting results. Besides bending stiffness of the wall and capillary forces as in our model experiment, stretching of the whole matrix may then play a major role. Situations involving the erosion of the porous medium are finally of practical interest: while it rises in sugar, coffee also dissolves the matrix in which it is wicking.

\*\*\*

We thank C. DUPRAT, B. ROMAN and D. VELLA for fruitful discussions. This work was partially funded by the French ANR Mecawet.

## REFERENCES

- [1] POWERS S. E. and TAMBLING M. E., *J. Contam. Hydrol.*, **19** (1995) 105.
- [2] MORROW N. R. and MASON G., *Curr. Opin. Colloid Interface Science*, **6** (2001) 321.
- [3] CEBALLOS-RUANO J. S., KUPKA T., NICOLL D. W., BENSON J. W., IOANNIDIS M. A., HANSSON C. and PINTARB M. M., *J. Appl. Phys.*, **91** (2002) 6588.
- [4] ALAVA M. and NISKANEN K., *Rep. Prog. Phys.*, **69** (2006) 669.
- [5] SAGUY I. S., MARABI A. and WALLACH R., *Trends Food Sci. Technol.*, **16** (2005) 495.
- [6] TANAKA T., MORIGAMI M. and ATODA N., *Jpn. J. Appl. Phys.*, **32** (1993) 6059.
- [7] PRAKASH M., QUÉRÉ D. and BUSH J. W., *Science*, **320** (2008) 931.
- [8] HOLBROOK N. M. and ZWIENIECKI M. A., *Phys. Today*, **61**, issue No. 1 (2008) 76.
- [9] DE GENNES P. G., BROCHARD-WYART F. and QUÉRÉ D., *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (Springer, New York) 2004.
- [10] DE LAPLACE P.-S., *Traité de mécanique céleste*, Livre Dixième (Imprimerie Royale, Paris) 1845.
- [11] BELL J. M. and CAMERON F. K., *J. Phys. Chem.*, **10** (1906) 658.
- [12] LUCAS V. R., *Kolloid-Z.*, **23** (1918) 15.
- [13] WASHBURN E., *Phys. Rev.*, **17** (1921) 273.
- [14] QUÉRÉ D., *Europhys. Lett.*, **39** (1997) 533.
- [15] VAN HONSCHOTEN J. W., ESCALANTE M., TAS N. R., JANSEN H. V. and ELWENSPOEK M., *J. Appl. Phys.*, **101** (2007) 094310.
- [16] VAN HONSCHOTEN J. W., ESCALANTE M., TAS N. R. and ELWENSPOEK M., *J. Colloid Interface Sci.*, **329** (2009) 133.
- [17] TAS N. R., ESCALANTE M., VAN HONSCHOTEN J. W., JANSEN H. V. and ELWENSPOEK M., *Langmuir*, **26** (2010) 1473.
- [18] YANG Y., GAO Y. F., SUN D. Y., ASTA M. and HOYT J. J., *Phys. Rev. B*, **81** (2010) 241407(R).
- [19] HALPERN D. and GROTBORG J. B., *J. Fluid Mech.*, **244** (1992) 615.
- [20] HEIL M. and WHITE J. P., *J. Fluid Mech.*, **462** (2002) 79.
- [21] HAZEL A. L. and HEIL M., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **461** (2005) 1847.
- [22] PONOMARENKO A., QUÉRÉ D. and CLANET D., *J. Fluid Mech.*, **666** (2011) 146.
- [23] BICO J., ROMAN B., MOULIN L. and BOUDAOU A., *Nature*, **432** (2004) 690.
- [24] DUPRAT C., ARISTOFF J. M. and STONE H. A., <http://arxiv.org/abs/1008.3702> (2011).
- [25] ARISTOFF J. M., DUPRAT C. and STONE H. A., *Int. J. Non-Linear Mech.*, **46** (2011) 648.
- [26] MAUREL A., COBELLI P., PAGNEUX V. and PETITJEANS P., *Appl. Opt.*, **48** (2009) 380.
- [27] ROMAN B. and BICO J., *J. Phys.: Condens. Matter*, **22** (2010) 493101.
- [28] LOBKOVSKY A. E. and WITTEN T. A., *Phys. Rev. E*, **55** (1997) 1577.
- [29] MAHADEVAN L., VAZIRI A. and DAS M., *EPL*, **77** (2007) 40003.
- [30] TANG L.-H. and TANG Y., *J. Phys. II*, **4** (1994) 881.



Article : Local stresses in the Janssen granular column

T. Cambau, J. Hure & J. Marthelot

*Local stresses in the Janssen granular column* **PRE**, xx-xx, 2013

**Local stresses in the Janssen granular column**Thomas Cambau,<sup>1</sup> Jérémy Hure,<sup>1,\*</sup> and Joël Marthelot<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*PMMH, CNRS UMR 7636, UPMC & Université Paris Diderot, ESPCI-Paris Tech, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France*<sup>2</sup>*SVI, CNRS UMR 125, Saint-Gobain, 39 Quai Lucien Lefranc, 93303 Aubervilliers Cedex, France*

(Received 14 March 2013; published 26 August 2013)

We study experimentally the distribution of local stresses in a granular material confined inside a vertical cylinder. We use an image correlation technique to measure the displacement field of the container induced by the forces exerted by the grains on the inner wall. We describe an optimization procedure based on the linear theory of elastic shells to deduce the distribution of these forces from the measured displacement field. They correspond to the stress field of the granular material close to the container's inner wall. We first confirm the validity of Janssen's description for various experiments, including the influence of the bead diameter and the effect of an additional mass on top of the granular column. We then apply this method to determine the stress field during the gravity-driven discharge of a silo through an aperture.

DOI: [10.1103/PhysRevE.88.022204](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.022204)

PACS number(s): 81.05.Rm, 46.70.De, 07.10.Lw

**I. INTRODUCTION**

The stress distribution in a granular material is a complex problem illustrated by two canonical experiments: the sandpile and the silo. In 1829, Huber-Burnand [1] noticed that an egg covered with several inches of sand was able to support a mass of iron weighing 55 pounds without breaking, prefiguring the studies of force repartition in granular materials [2]. The importance of the construction history on stress distributions under sandpiles was then demonstrated [3]. In 1895, Janssen [4] quantified the saturation of the bottom pressure in a granular material confined in a vertical container. The so-called *Janssen's law* defines the typical pressure saturation length, accounting for friction of the grains on the container's wall.

The practical interest in avoiding the damage and collapse of silos [5,6] has motivated numerous studies. More recently, the confined granular column has been extensively studied as the simplest experimental setup to test the influence of many parameters on the repartition of stresses in granular materials. The hypothesis of fully mobilized friction [7,8], the effects of humidity [9] and the motion of the wall of the silo [10] have been assessed through careful experiments. Such experiments have been used as tests to validate continuous models of granular materials, as oriented stress linearity (OSL) [11,12] or elastic [13–15] theories.

In all these studies on confined granular materials, stresses all along the container's wall were inferred from the measurement of the apparent mass at the bottom of the column. The total shear stress on the column was obtained directly by measuring the mass of the lateral wall in Ref. [16]. Apart from numerical results [17], direct measurements of local stresses remain scarce. In a recent work, the local force network in a two-dimensional (2D) silo was directly measured with photoelastic particles [18]. The conclusions from these experiments are puzzling, showing significant deviations from Janssen-like models. This clearly indicates that direct measurements of stresses for static confined granular material are still needed.

We propose here a different method to directly measure the stresses at the wall by tracking the minute deformation of the silo. We follow an idea proposed by Janssen in his

original paper: “it was the intention of the author to determine the side pressure of the corn directly in the experiments” by using a side lid pushed against the silo's walls. However, in his experimental setup, he noticed that “accurate results could not be obtained” [4].

In addition to the static Janssen's law, the dynamics of confined granular material have also been studied extensively. The flow rate of the gravity-driven discharge of a granular column in a silo is described by *Beverloo's law* [19]. Even though it was well-verified experimentally [20], the physical meaning of this Beverloo's law, sometimes described as a consequence of Janssen's law [21], remains unclear. The recent measurements of the pressure profile in the outlet plane of a discharging silo have shown that the flow rates are not controlled by the local stress conditions [16]. The local displacement field of the grains exhibits complex patterns, such as shear zones close to the wall [22,23]. Diffusive-wave spectroscopy experiments show the existence of slow collective rearrangements in addition to fast grain collisions [24]. The friction mobilization at the silo's wall during the discharge must also be described to understand collapse events [25]. Measurements of local stresses in confined granular materials are thus also required to gain insight into the physics of Beverloo's law.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we recover Janssen's law from mass measurement at the bottom of silos with different elastic moduli. For the given set of parameters used in this study, there is no dependence of the saturation mass with the mechanical properties of the container. This leads to an experimental setup to measure wall deformations and infer the stress distribution in the granular material close to the wall, detailed in Sec. III. The technique is validated against indirect results for quasistatic experiments in Sec. IV A. We finally use this method to gain insight into the evolution of local stress distribution during the discharge of granular matter through an aperture in Sec. IV B.

**II. JANSSEN'S LAW IN A SOFT CONTAINER****A. Material and setup**

Experiments were performed in elastomer cylindrical tubes and compared to a reference experiment in a rigid tube made

\*Corresponding author: [jeremy.hure@cea.fr](mailto:jeremy.hure@cea.fr)

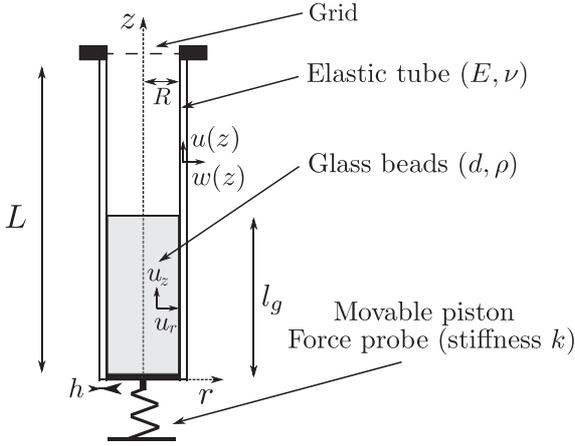


FIG. 1. Experimental setup. A tube (length  $L$ , radius  $R$ , thickness  $h$ , Young's modulus  $E$ , and Poisson's ratio  $\nu$ ) clamped at its top is rain-filled with glass beads (diameter  $d$  and density  $\rho$ ), up to a height  $z = l_g$ . The bottom of the tube is closed by a piston connected to a force probe of stiffness  $k$ . The radius of the piston is slightly lower than  $R$  to prevent friction. The radial and longitudinal displacements of the granular material and the tube are denoted  $\{u_r, u_z\}$  and  $\{u, w\}$ , respectively.

of poly(methyl methacrylate) (PMMA). We used silos of radius  $R = 18$  mm, thickness  $h = 2$  mm made of shore 8 (Young's modulus  $E = 0.24$  MPa) and shore 32 ( $E = 0.96$  MPa) polyvinylsiloxane (PVS) or PMMA ( $E = 2.5$  GPa). The tubes are clamped at the top and free to move at the bottom (Fig. 1). The granular material stands on a movable piston connected to a force probe to measure the apparent mass at the bottom of the silo. The grains are dry, noncohesive, and slightly polydisperse (10%) glass beads of diameter  $d = 1.5$  mm (unless otherwise specified) and density  $\rho = 2545$  kg m $^{-3}$ . The PVS tubes are dusted with talc powder to prevent any adhesion between the grains and the wall of the silo. The static friction coefficient  $\mu_s$  between the glass beads and the PMMA and PVS was measured using the sliding angle of a three-bead tripod. We found  $\mu_s = 0.5 \pm 0.1$  for the PMMA tube, and  $\mu_s = 0.51 \pm 0.04$  ( $\mu_s = 0.52 \pm 0.03$ ) for the shore 32 (shore 8) PVS tube. In the following, the static friction coefficients are thus assumed to be the same in all experiments. The dynamic friction coefficient was measured with the same apparatus: once set into motion, the angle is slightly reduced until the three-bead tripod eventually stops. This leads to  $\mu_d = 0.43 \pm 0.03$  for the shore 8 PVS tube. All the experiments were performed at room temperature and at a relative humidity of  $35 \pm 5\%$  at least twice to ensure repeatability.

### B. Saturation mass at the bottom of the silo

A mass  $M_g$  of beads is poured through a 5 mm grid. Rain filling provides reproducible dense piling (with volume fraction  $\phi \approx 64\%$ ). The piston is then moved downward at constant speed  $V = 1.5$   $\mu\text{m s}^{-1}$  to mobilize the friction of the grains on the wall. The apparent mass is measured as a function of time (inset to Fig. 2) and decreases until it reaches a plateau, noted  $M_a$ , when the friction at the wall is at the Coulomb threshold as described in [12,13]. We plot  $M_a$  as a

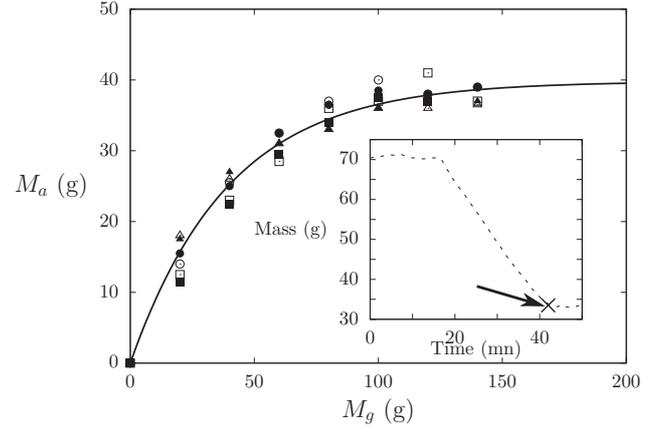


FIG. 2. Evolution of the apparent mass  $M_a$  as a function of the filling mass  $M_g$ .  $M_a$  was measured by the force probe at the bottom of the silo as in [12,13]. Triangles, squares, and circles, respectively, correspond to the PVS shore 8 ( $E = 0.24$  MPa), PVS shore 32 (0.96 MPa), and PMMA (2.5 GPa) tubes. Each experiment was performed twice (open and filled symbols). The solid line corresponds to Janssen's model  $M_a = M_{\text{sat}}[1 - \exp(-M_g/M_{\text{sat}})]$ , with  $M_{\text{sat}} = 39.8$  g best fitting the experimental data. Inset: Evolution of the measured mass as a function of time as the piston is lowered ( $M_g = 80$  g in PVS shore 32). The cross represents the measured point  $M_a$ , which corresponds to a fully mobilized friction and provides a single data point in the main graph.

function of the mass of beads filling the tube (Fig. 2). The apparent mass  $M_a$  increases with  $M_g$  until reaching a plateau noted  $M_{\text{sat}}$ .

At equilibrium, three forces resist the weight  $-\rho\phi g\pi R^2 dz$  of a slice of height  $dz$ , where  $g$  is the gravitational acceleration. The upper part of the granular material applies a force  $\sigma_{zz}(z + dz)\pi R^2$ , the lower part  $-\sigma_{zz}(z)\pi R^2$ , and friction on the wall  $\sigma_{rz}(z)2\pi R dz$ , where  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ , and  $\sigma_{rz}$  are average stresses in the grains on the radial direction. Assuming that the shear stress follows Coulomb law at the threshold, wall friction can be rewritten as  $-\mu_s\sigma_{rr}(z)2\pi R dz$ . Finally, Janssen assumed a constant redistribution of stresses  $\sigma_{rr} = K\sigma_{zz}$ , leading to the equilibrium equation  $d\sigma_{zz}/dz - 2K\mu_s\sigma_{zz}/R = \rho\phi g$ . The solution is

$$\sigma_{zz} = -\frac{\rho\phi g R}{2K\mu_s} \left[ 1 - \exp\left(\frac{2K\mu_s(z - l_g)}{R}\right) \right], \quad (1)$$

where  $z = 0$  is the bottom of the tube. The apparent mass  $M_a = [\pi R^2/g]|\sigma_{zz}(z = 0)|$  at the bottom of the tube is finally

$$M_a = M_{\text{sat}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{M_g}{M_{\text{sat}}}\right) \right], \quad (2)$$

where  $M_{\text{sat}} = (\pi R^3 \rho\phi / 2K\mu_s)$  is the measured saturation mass and  $M_g = \pi R^2 l_g \rho\phi$  is the mass of grains filling the tube. Fitting the experimental data with Janssen's model (solid line Fig. 2), we find  $M_{\text{sat}} = 39.8$  g, leading to  $K = (\pi R^3 \rho\phi) / (2M_{\text{sat}}\mu_s) = 0.75$ .

The evolution of the apparent mass as a function of the mass of beads filling the tube follows Janssen's law and, for our experimental parameters, does not depend on the elasticity of the silo. Indeed, the only quantity that can be changed in Janssen's model accounting for the elasticity of the silo is the

radius  $R$  resulting from the pressure of the grains on the tube. Therefore, in the limit of small deflections,  $w/R \ll 1$ , the stress distribution will not be affected. More quantitatively, the pressure applied on the wall scales as  $|p| = \sigma_{rr} \sim \rho g R$ . The radial displacement of an elastic tube subjected to this pressure can be written as  $w \sim pR^2/Eh \sim \rho g R^3/Eh$  [26]. Thus the ratio  $w/R$  scales as  $\rho g R^2/Eh$ , which is less than  $10^{-2}$  in our experiment. Previous studies have shown that the apparent mass is very sensitive to the compaction [11], thus the radial displacement of the tube has to be small enough not to change the initial compaction. This can be written as  $w < d$ , where  $d$  is the diameter of the glass beads.

Before describing the method to measure local stresses in the granular material, we compare these experimental results to the prediction of a model that assumes isotropic elasticity for the grains.

### C. Isotropic elasticity model

Assuming isotropic elasticity for the granular material, with Young's modulus  $E_g$  and Poisson's ration  $\nu_g$ , Ovarlez *et al.* [14] showed numerically a strong dependence of the saturation mass with the ratio  $E_g/E$ . More quantitatively, we can follow the analytical description given in [14], adding the elasticity of the tube. Far from the free surface and from the piston, both stresses and strains of the granular material should be independent of the coordinate  $z$ . The nonzero terms of the strain tensor  $\epsilon$  can be written as a function of the radial  $u_r$  and longitudinal  $u_z$  displacements:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (3)$$

In this asymptotic regime, the equilibrium equations

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho g \quad (4)$$

are solved by assuming Hooke's law for the granular material:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1 + \nu_g}{E_g} \sigma_{\alpha\beta} - \nu_g \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma}, \quad (5)$$

where  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{r, \theta, z\}$ , and  $\delta$  is the Kronecker symbol, and with the boundary conditions  $\sigma_{rz}(r = R, z) = -\mu_s \sigma_{rr}(r = R, z)$ . This yields the radial and longitudinal displacements:

$$u_r(r, z) = \frac{U_R}{R} r, \quad (6a)$$

$$u_z(r, z) = \frac{1 + \nu_g}{2E_g} \rho g r^2 - z \left( \frac{(1 - 2\nu_g)(1 + \nu_g) \rho g R}{\nu_g E_g} + \frac{1}{\nu_g} \frac{U_R}{R} \right), \quad (6b)$$

with  $U_R$  the radial displacement of the tube. Setting  $U_R$  to 0 in Eqs. (6), we recover the displacements given in [14]. The displacement  $U_R$  is related to the pressure  $p = -\sigma_{rr} = (\rho g R)/(2\mu_s)$  acting on the tube:

$$U_R = \frac{pR^2}{Eh} = \frac{\rho g R^3}{2\mu_s E h}. \quad (7)$$

Finally, the saturation mass  $M_{\text{sat,elas}} = (\pi R^2/g) |\sigma_{zz}|$  takes the form

$$M_{\text{sat,elas}} = M_{\text{sat}} \left( 1 + \frac{E_g}{(1 - \nu_g)E} \frac{R}{h} \right), \quad (8)$$

where  $M_{\text{sat}}$  is the saturation mass considering a rigid tube. Experimentally, we varied the ratio  $E_g/E$  by a factor  $10^4$ , and we did not see any evidence of this dependence. The isotropic elasticity description is thus insufficient to describe confined granular material, and we need to consider anisotropy or elliptic theories, as pointed out in [14]. Nevertheless, the stress distribution in the granular material appears to be the same inside a rigid or soft container, which leads to the method for measuring local stresses detailed in the next section.

## III. EVALUATION OF LOCAL STRESSES

### A. Experimental setup

The saturation of pressure with depth in a granular column is a consequence of friction of the granular material on the silo's inner wall. We propose to measure the resulting displacement field of the outer wall of the silo to reconstruct the stress field of the granular material close to the wall. Although difficult to estimate for industrial silos [6], we will show that such displacements may be obtained by using soft elastomer containers. As shown in Fig. 2, there is no perceptible effect of the elasticity of the silo in our experiments, thus we use the shore 8 tube in the following.

#### 1. Quasistatic experiments

We use the procedure described in Sec. II B. The PVS tubes are additionally sputtered with black paint, as shown in Fig. 3. Displacements were obtained by correlating a picture of the tube, taken as the apparent mass reaches the Janssen's

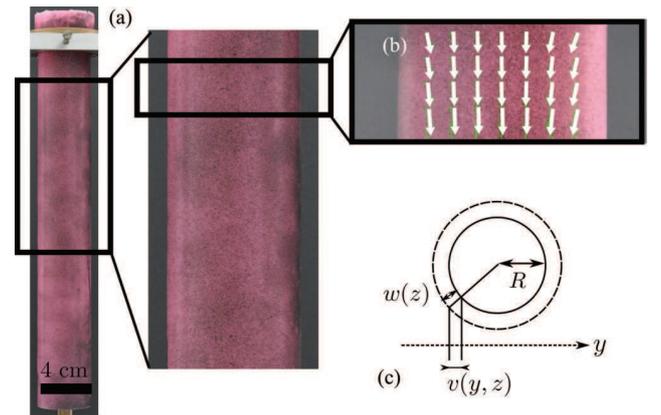


FIG. 3. (Color online) (a),(b) The PVS tube is sputtered with black paint to measure the displacement field (arrows) using an image correlation technique (PIVLAB [27] with MATLAB). A reference picture is taken when the tube is empty. This image is then compared to another one obtained when the apparent mass saturates (quasistatic experiments), or at a given time  $\Delta t$  after the plug was removed (discharge experiments). (c) Image correlation gives both the longitudinal displacement  $u(y, z)$  and the transverse displacement  $v(y, z)$ . The radial displacement can be obtained following  $v(y, z) = (y/R) w(z)$ .

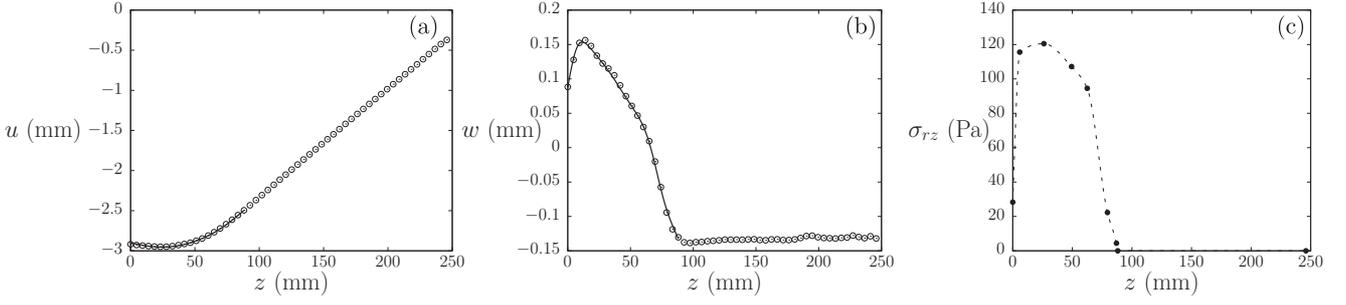


FIG. 4. Quasistatic experiment: Typical results for a shore 8 tube ( $E = 0.24$  MPa,  $\nu = 0.5$ ) and a filling mass  $M_g = 140$  g ( $l_g = 80$  mm).  $z = 0$  corresponds to the bottom of the tube,  $z = l_g$  corresponds to the free surface of the granular column. (a,b) Longitudinal and radial displacements along the tube. The circles correspond to measurements obtained by image correlation, the solid line corresponds to the result of the optimization procedure. The computation was only done in the part of the tube filled with grains, with appropriate boundary conditions to describe the empty part. (c) Shear stress in the granular material at the wall: the minimization algorithm finds the values of the shear stress best fitting both experimental displacement curves. Shear stress is interpolated using cubic spline between the  $n = 8$  evaluation points (black dots).

plateau, with a reference picture of the empty tube.<sup>1</sup> The cross-correlation of the two pictures (PIVLAB [27] with MATLAB) leads to the displacement field  $\{v(y,z), u(y,z)\}$  defined in Figs. 1 and 3. These displacement fields are finally converted into the radial and longitudinal components of the displacement  $v(y,z) = (y/R)w(z)$  so that  $w(z) = R dv(y,z)/dy$  and  $u(z) = \langle u(y,z) \rangle_y$ , respectively.

## 2. Discharge experiments

The piston is replaced by a fixed cylinder of radius  $R_c = 17.75$  mm slightly smaller than the radius of the tube to avoid friction. A conical hole of minimal diameter  $D = 11$  mm, maximal diameter  $D = 22$  mm, and angle  $60^\circ$  drilled into the cylinder is closed by a plug (see the inset of Fig. 8). Once the tube is rain-filled with grains, the plug is removed and the mass of grains flowing outside the tube is recorded as a function of time. The displacement field is obtained by performing the cross-correlation between a reference picture of the empty tube and pictures taken at a given time after releasing the plug. The displacement field  $\{u(z), w(z)\}$  is obtained as in the quasistatic experiment.

A typical result of the image correlation is shown in Figs. 4(a) and 4(b). The tube is stretched axially as the grains pull on the wall. The radial displacement is positive in the filled region because of the pressure of the grains, and negative above because of Poisson's effect (the tube being clamped at the top). The radial and longitudinal displacements are direct consequences of the shear stress  $\sigma_{rz}(R, z)$  and radial stress  $\sigma_{rr}(R, z)$  inside the grains, close to the wall. In the following, we will note  $\sigma_{rz}(R, z) = \sigma_{rz}(z)$  and  $\sigma_{rr}(R, z) = \sigma_{rr}(z)$  to ease legibility, keeping in mind that these quantities are local and not averaged like in the Janssen model. A refined Janssen model accounting for the radial dependence leads to the same qualitative behavior [28]. We recall in the next paragraph the linear theory of cylindrical elastic shells, which links the applied forces on the container's inner wall to the displacement field.

<sup>1</sup>Pictures were taken using a Nikon D200 SLR camera, with a resolution of  $4288 \times 2848$  pixels. A pixel size is about 0.05 mm.

## B. A model for the deformation of the silo

### 1. Cylindrical shells equations

We use the linear theory of elastic cylindrical shells [26] to describe the deformation of the silo.<sup>2</sup> For axisymmetric deformations, the nonzero values of the strain  $\epsilon$  and curvature  $\kappa$  tensors are written in terms of axial  $u$  and radial  $w$  displacement:

$$\epsilon_{zz} = \frac{du}{dz}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{w}{R}, \quad \kappa_{zz} = -\frac{d^2w}{dz^2}. \quad (9)$$

The moment  $m_{\alpha\beta}$  and in-plane stress  $n_{\alpha\beta}$  are given by Hooke's law:

$$m_{zz} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\kappa_{zz}, \quad (10)$$

$$n_{zz} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_{zz} + \nu\epsilon_{\theta\theta}), \quad (11)$$

$$n_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{zz}). \quad (12)$$

Finally, the in-plane and out-of-plane equilibrium equations are

$$\frac{dn_{zz}}{dz} = -hf_v, \quad (13)$$

$$\frac{d^2m_{zz}}{dz^2} - \frac{n_{\theta\theta}}{R} = -p, \quad (14)$$

where  $p$  is the pressure acting on the interior face of the tube (positive toward the exterior) and  $f_v$  is the axial volume force (positive upward). In the case of a tube filled with granular materials, the pressure is given by  $p = -\sigma_{rr}(z)$ . Grains also apply a shear stress  $-\sigma_{rz}(z)$  on the tube which cannot be accounted for directly in shells equations. However, we can note that a shear force acting on a height  $dz$  of a tube,  $-\sigma_{rz}2\pi(R-h/2)dz$ , is equivalent to an axial volume force  $f_v h 2\pi R dz$ , where  $f_v h = -(1-h/2R)\sigma_{rz}$ .

<sup>2</sup>In the thin shell limit,  $h/R \ll 1$ , and for axisymmetric deformations, the nonlinear term in axial strain  $(dw/dx)^2$  can be neglected in the limit  $u/L \gg (w/L)^2$ , which is the case in our experiments.

For given functions  $\sigma_{rr}(z)$  and  $\sigma_{rz}(z)$ , solving the equilibrium equations (13) and (14) with appropriate boundary conditions leads to the axial and radial displacements. We do not solve the equations over the entire length of the tube, as the upper part ( $x > l_g$ ) deformation corresponds to the stretching of an empty shell,<sup>3</sup> a state completely described by  $u(x > l_g) = u_0(x/l_g)$  and  $w(x > l_g) = w_0$ . In the following, the boundary conditions considered are  $u(l_g) = u_0$ ,  $w(l_g) = w_0$ ,  $w'(l_g) = 0$ , and a free edge at the bottom, where  $n_{zz}(0) = m_{zz}(0) = dm_{zz}/dz(0) = 0$ . The values  $u_0$  and  $w_0$  are obtained experimentally.

We now describe the optimization procedure to solve the inverse problem, i.e., once knowing the displacement field, finding the shear stress and pressure in the granular material close to the wall.

## 2. Optimization procedure

The portion of the tube filled with grains,  $0 \leq z \leq l_g$ , is discretized into  $n$  elements. The values of the functions  $\sigma_{rr}(z)$  and  $\sigma_{rz}(z)$  at the nodes constitute the  $2n$  unknowns of our inverse problem, and the values of the functions in each element are interpolated from these points. For a given set of unknowns, the boundary value problem [Eqs. (13) and (14)] is solved by a collocation method (MATLAB's *bvp4c* solver) [29], leading to the displacement field  $\{u, w\}$ . The squared deviation of this field from the experimental measurement is then computed. The procedure is repeated by changing the values of the unknowns until the squared deviation is minimal, using Levenberg-Marquardt or Active-Set algorithms (MATLAB's *lsqnonlin* [30] and *fmincon* [31] functions). The initial guess for the  $2n$  unknowns is set to zero. We checked that the converged solution does not depend on the initial guess. A typical result of the optimization procedure is shown in Fig. 4.

There is a unique solution to the linear system of Eqs. (13) and (14). Thus, in principle, increasing  $n$  leads to better evaluations of the functions  $\sigma_{rz}$  and  $\sigma_{rr}$ . However, large values of  $n$  greatly increase computational cost, and are more likely to lead to local minima. Therefore, we use small values of  $n$ , and we repeat the entire optimization procedure (typically 100 times) for random location of the discretization nodes along the filled region of the tube. This allows us to assess the values of the unknown functions everywhere along the tube in a computationally effective way. For each optimization procedure, the value of  $n$  is selected as the minimal value above which the unknown functions do not change (when increasing  $n$  only leads to noisy results).

## IV. EXPERIMENTAL RESULTS

In the first part of this section, we measure the shear stress and pressure acting on the wall in the quasistatic experiments using the optimization procedure described in the previous section. As friction is expected to be fully mobilized, we can reduce the number of unknowns by considering  $|\sigma_{rz}| = \mu|\sigma_{rr}|$ , where  $\mu$  is an additional unknown. Note that the optimization procedure has also been carried out for

the quasistatic experiments without the hypothesis of fully mobilized friction, leading to identical results.

In a second part, we measure the evolution of stresses during discharge experiments. As the friction state is in this case unknown, we look at the values of the shear stress and pressure separately, assuming the Coulomb friction law:

$$|\sigma_{rz}| \leq \mu|\sigma_{rr}|, \quad (15)$$

where  $\mu$  is taken as the static friction coefficient  $\mu_s$  measured experimentally.

### A. Local stresses in a Janssen granular column

#### 1. Stress distribution as a function of height

We use the optimization procedure described above to evaluate the shear stress  $\sigma_{rz}$  at the wall for different filling masses. The shear stress  $\sigma_{rz}$  increases with depth, from zero at the free surface to a saturation value (Fig. 5). The saturation length is of the order of the tube diameter, independent of the filling mass and in agreement with Janssen's law. The difference between the weight of the total column  $gM_g$  and the force on the wall  $2\pi R \int_0^{l_g} \sigma_{rz} dz$  is in agreement with the bottom weight measurement  $gM_a$ . As expected, if the filling length  $l_g$  is smaller ( $l_g < 60$  mm), stresses do not reach the saturation value. We obtained a friction coefficient  $\mu = 0.46 \pm 0.04$ , consistent with the static friction coefficient measured independently.

The saturation value of the stresses can be compared to theoretical predictions. Assuming a noncohesive material, equality of internal and beads-wall friction angles, and a Mohr-Coulomb criterion, the stress ratio at the wall can be written as [28]

$$\lambda_w = \sigma_{rr}/\sigma_{zz} = 1/(1 + 2\mu_s^2) \quad (16)$$

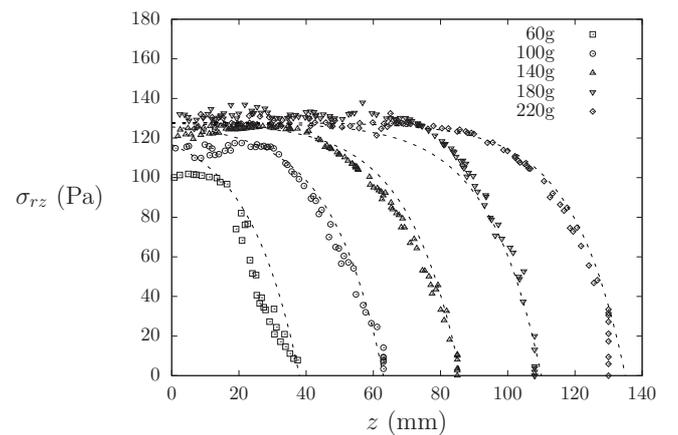


FIG. 5. Quasistatic experiment: Shear stress  $\sigma_{rz}$  along the tube for different filling masses  $M_g = 60$  g (squares), 100 g (circles), 140 g (triangles), 180 g (inverse triangles), and 220 g (diamonds).  $\sigma_{rz}$  saturates from top  $z = l_g$  to bottom  $z = 0$ . For a given experiment, the optimization procedure is repeated 100 times with  $n = 5$  estimation points of the shear stress. Dashed lines correspond to a fit of the experimental data by the function  $f(z) = [\mu_s/(1 + 2\mu_s^2)][gM_a/\pi R^2]\{1 - \exp[K_w(z - l_g)/R]\}$  [Eq. (16)], with  $K_w = 1.16$ .

<sup>3</sup>Except close to the upper clamped boundary.

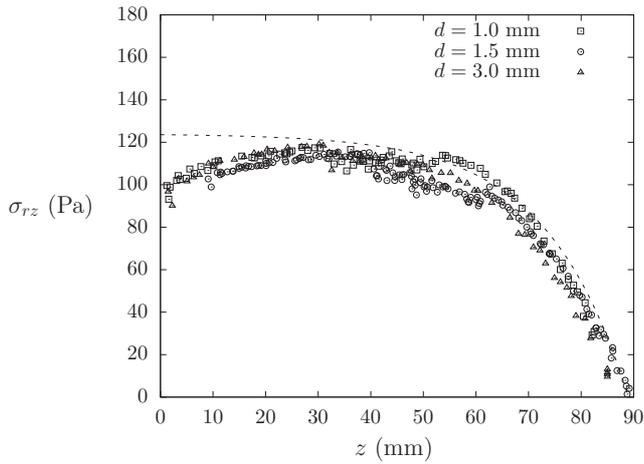


FIG. 6. Quasistatic experiment: Shear stress  $\sigma_{rz}$  along the tube ( $M_g = 140$  g) with three different bead diameters ( $d = 1, 1.5,$  or  $3$  mm). The optimization procedure is repeated 100 times for each experiment with  $n = 5$  estimation points of the shear stress. The dashed line corresponds to a fit of the experimental data by the function  $f(z) = [\mu_s/(1 + 2\mu_s^2)][gM_a/\pi R^2]\{1 - \exp[K_w(z - l_g)/R]\}$  [Eq. (16)], with  $K_w = 1.16$ .

with  $\sigma_{zz} = gM_a/\pi R^2$ . This leads to  $\sigma_{rr} \approx 280$  Pa, in excellent agreement with the measured value  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz}/\mu \approx 282$  Pa. The experimental results shown in Fig. 5 are in very good agreement with an exponential saturation behavior and Eq. (16).<sup>4</sup> Measuring locally the stresses all along the granular column thus directly confirms the Janssen description, i.e., the exponential saturation of the stresses [Eq. (1)], while previous studies inferred the validity of the model from the evolution of the apparent mass at the bottom of the column  $M_a$  ( $M_g$ ) [Eq. (2)].

## 2. Influence of beads diameter

We measure the stress field for the same filling length and three different bead diameters (Fig. 6). We do not see any influence of bead diameter on the distribution of local stresses, as expected in the limit  $d \ll R$  [32,33] for quasistatic experiments. One can note that, near the piston ( $z \in [0 - 10]$  mm), the stresses are slightly smaller than the saturation value, due to the boundary effect, as was reported numerically [14].

## 3. Effect of an overload

Adding a weight on top of a granular media does not change the forces at the bottom of the pile, as noted by Huber-Burnand. This effect was studied quantitatively in the Janssen column [13,18], where the additional weight is redistributed by friction to the wall. A steel cylinder of radius slightly smaller than the radius of the tube and mass  $M_{ov} = 60$  g is added on top of a granular column of mass  $M_g = 140$  g previously fully mobilized. Once the overload is added, the piston is moved

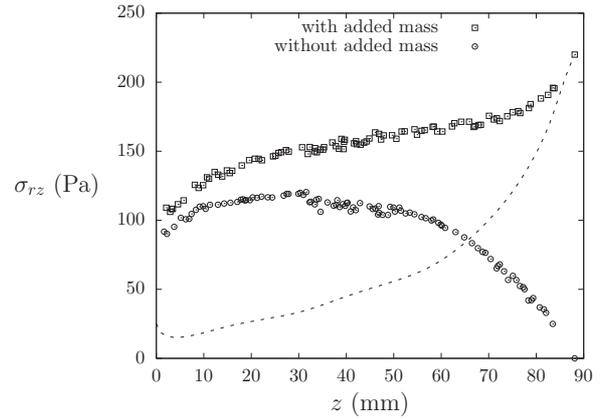


FIG. 7. Quasistatic experiment: Shear stress  $\sigma_{rz}$  along the tube for  $M_g = 140$  g. Circles correspond to the reference experiment, squares to the same experiment with an overload of  $M_{ov} = 60$  g. The dashed line shows the difference between the two curves.

slightly downward until reaching saturation again. The stress distributions with and without the overload are plotted in Fig. 7. The shear stress  $\sigma_{rz}$  is maximum at the top of the column and decreases with depth to the same value as without the overload. The additional shear stress at the wall, plotted by a dashed line, decreases from the free surface to the bottom of the granular column. Most of the weight of the overload is screened after a typical distance of the order of the tube diameter, which is again consistent with Janssen's description.

The stress distributions in the quasistatic experiments confirm the validity of Janssen's description for confined granular materials. They complement another experimental study of the evolution of stresses in a 2D silo with photoelastic beads [18]. The fluctuations reported in such experiments, showing force networks in the silo, are in our case averaged close to the wall by the size of the cross-correlation windows between two pictures. However, the mean-field approach we developed could be applied to higher-resolution pictures on smaller areas of the tube to track local fluctuations of stresses in the granular material at the wall. The maximum resolution would be limited by the size of the cross-correlation window, which depends on the typical scale of the sputtering pattern, but also by the elasticity of the tube, which imposes a typical scale of the order of the thickness.

## B. Local stresses during a discharge

We use the same technique to determine the stress field along the silo during a gravity-driven discharge. The flow rate is found to be constant ( $Q = 22$  g s<sup>-1</sup>), in agreement with Beverloo's law. In this experiment, after rain filling the silo, we do not mobilize friction, as in the quasistatic experiment, but directly remove the plug. In this case, the friction state is unknown and we evaluate the shear stresses and wall pressure separately. At the top, the tube is clamped and at the bottom the tube is free to move while the drilled cylinder in the outlet plane is fixed (inset to Fig. 8). We measure the displacement field as a function of time and apply the optimization method to a subset of two images: the reference image when the tube is empty and another at a given time  $\Delta t$  after the plug was

<sup>4</sup>Equation (1) cannot be used directly for comparison to our results shown in Figs. 5 and 6, as stresses in Janssen's model are averaged along the radial direction. We thus used the exponential behavior with a parameter  $K_w$ , and Eq. (16) to fit our experimental results.

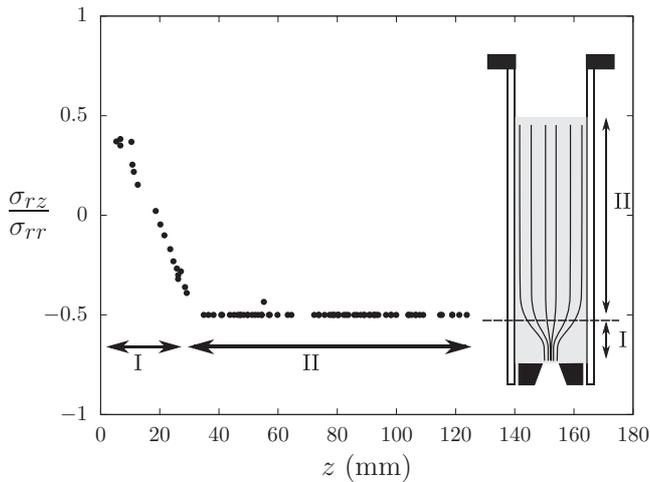


FIG. 8. Discharge experiment: Stress ratio  $\mu = \sigma_{rz}/\sigma_{rr}$  along the tube at  $\Delta t = 0.2$  s after the release of the plug. The grains move downward at the wall (region II) except close to the bottom, where there is no relative motion of the grains with the wall (region I). Inset: The streamlines go toward the interior of the tube [16].

removed. We obtain independently the shear stress  $\sigma_{rz}$  and wall pressure  $\sigma_{rr}$  along the granular column for each time.

As the friction is not mobilized before the discharge, we first need to measure the stress ratio  $\sigma_{rz}/\sigma_{rr}$  along the tube. This ratio is plotted just after the plug is removed (Fig. 8 for  $\Delta t = 0.2$  s). In an upper region  $z \in [30 - 120]$  mm (region II), the grains slide downward at the wall [ $\sigma_{rz}/\sigma_{rr} = -\mu$  Eq. (15)], while in the lower region  $z \in [0 - 30]$  mm (region I), there is no relative motion of the grains on the silo's wall. As the bottom part of the tube is not yet moving at this time, this indicates that the grains stand on the fixed cylinder in a still region, which is consistent with the observations of previous discharge experiments [16]: the streamlines go toward the center of the granular column close to the outlet plane (as sketched in the inset to Fig. 8). The length of the region I is of the order of the tube radius. A displacement of a few grains diameter [ $h = (Q\Delta t)/(\rho\phi S) \approx 10$  mm] is enough to mobilize friction on the whole column. At larger time ( $\Delta t > 1$  s), as the tube and the grains move simultaneously, the stress ratio is more difficult to interpret.

The radial stress along the tube  $\sigma_{rr}(z)$  is plotted in Fig. 9. At short time ( $\Delta t = 0.2$  s), only a part of the grain mass is screened by the friction at the wall, and the pressure  $p = -\sigma_{rr}$  saturates at a lower value than the one observed in the quasistatic experiment. Close to the fixed cylinder at the bottom ( $z \in [0 - 30]$  mm), grains cannot slide on the wall, and the pressure increases. At larger times, the friction is fully mobilized along the tube and we recover a profile characteristic of Janssen's saturation as in the quasistatic experiment, including the pressure decrease at the bottom, due to a boundary effect. For  $\Delta t = 1.75$  s, the pressure  $p = -\sigma_{rr}$  increases exponentially along the tube and saturates at the value obtained in the quasistatic experiment. This description remains valid during the rest of the discharge, as the free surface of the granular column moves downward. At  $\Delta t = 2.75$  s, the grain mass in the column decreases significantly and the saturating pressure is therefore smaller.

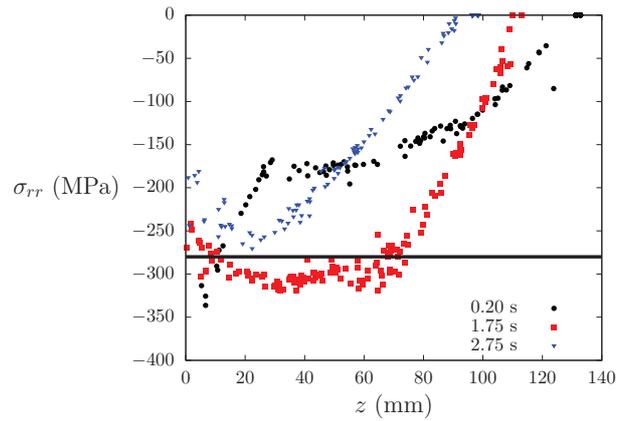


FIG. 9. (Color online) Discharge experiment: Evolution of the radial stress  $\sigma_{rr}$  along the tube during discharge for  $M_a = 220$  g. Each curve corresponds to a different time after the release of the plug,  $\Delta t = 0.2$  s (black circles), 1.75 s (red squares), and 2.75 s (blue inverse triangles). The horizontal solid line indicates the value of the saturation for quasistatic experiments.

The evolution of the radial stress at two different fixed positions along the tube ( $z = 60$  and  $90$  mm) is plotted in Fig. 10. The pressure acting on the wall starts to increase as  $p = -\sigma_{rr}$  until reaching the saturation value  $|\sigma_{rr}| \approx 280$  Pa, obtained in the quasistatic experiments. It then decreases to zero while the tube is discharging. More precisely, if we assume that the pressure profile follows Janssen's law, with  $K_w = 1.16$  as in the quasistatic experiments (Fig. 5), we can compute the evolution of the pressure at a given point along

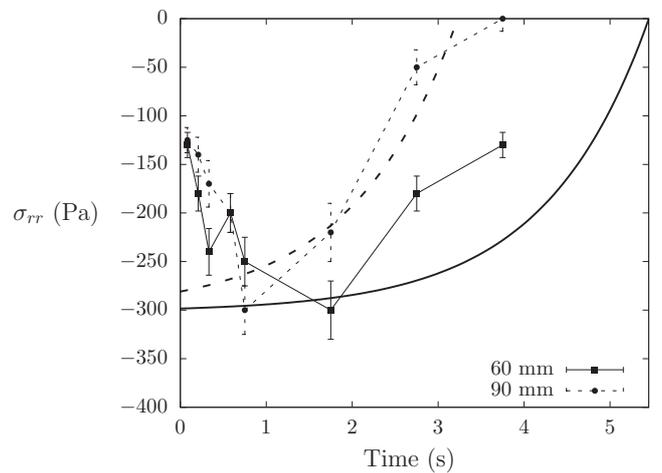


FIG. 10. Discharge experiment: Evolution of the radial stress  $\sigma_{rr}$  in the granular material close to the wall in time at two fixed position on the tube:  $z = 60$  mm (squares) and  $z = 90$  mm (circles). As  $p = -\sigma_{rr}$ , the pressure increases, reaches the saturation value corresponding to the full mobilization of friction, and decreases during the discharge of the silo. The error bars are given by the scatter of the numerical results. The solid and dashed lines correspond to the assumption that the pressure profile along the tube during all the discharge follows Janssen's law with  $K_w = 1.16$  obtained in the quasistatic experiments (Fig. 5).

the tube:

$$\sigma_{rr}(z,t) = -\frac{\rho\phi g R}{2\mu_s} \left[ 1 - \exp\left(\frac{K_w}{R}[z - l_g(t)]\right) \right] \quad (17)$$

with  $l_g(t) = l_g(t=0) - (Qt)/(\pi R^2 \rho\phi)$ . The experimental measurements are in good agreement with this description (solid and dashed lines in Fig. 10) for  $\Delta t \geq 0.75$  s, the typical time after which friction is fully mobilized. For  $\Delta t < 0.75$  s, Janssen's description is not relevant as the friction is undetermined. The typical time scale for full mobilization should depend on the radius of the tube and on the outlet diameter and is found to be very short in our experiments.

These experimental measurements of the stresses in a granular material during a gravity-driven discharge show that soon after the beginning of the discharge, the stress profile close to the container's wall follows Janssen's law (except close to the outlet plane) almost until the end of the discharge.

## V. CONCLUSION

The stress repartition in a confined granular column is classically inferred from the saturation of the apparent mass at the bottom of the silo. We measured the apparent mass as a function of filling mass in soft elastomer containers after full mobilization of friction, and we recovered a unique profile described by Janssen's theory. We show that this experimental evidence is not compatible with an isotropic elasticity description for a granular column.

We developed an experimental technique to measure the local stress field at the wall of a granular material confined in

a vertical container. We validated this method against indirect measurement of the stress distribution in a granular column in a quasistatic experiment. The local stress distribution is found to be in agreement with Janssen's law. The beads diameter was found to have no influence on the stress profiles. The local distribution of additional stresses in the presence of an overload was determined.

Inferring local information in a granular material from the resulting displacements of the container is a method which could be used in a wide range of granular problems, to measure stresses under sandpiles, to track local stresses fluctuations in a granular column, or to evaluate the stress distribution in a Couette granular experiment. It could naturally be extended to study complex fluids rheology. The method developed could be applied to study other mechanical problems, such as, for example, plant growth under constraints [34].

We measured the evolution of stresses in time for gravity-driven discharge experiments. We found that, starting from an unknown friction state, a displacement of a few grain diameters is enough to mobilize friction on the whole column. After a short transient, the pressure is found to be the same as that observed in the quasistatic experiment. Eventually, we showed that the stress evolution in time is well described assuming Janssen's exponential saturation and Beverloo's constant mass flow rate.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank E. Kolb for lending the experimental devices, G. Lagubeau for initial discussion, and J. Bico, P. Jop, E. Reyssat, and L. Pagnaloni for comments on the manuscript.

- 
- [1] Huber-Burnand, *Ann. Phys.* **92**, 316 (1829).  
 [2] J. Smid and J. Novosad, Proc. Powtech. Conference. Int. Chem. Eng. Symp. **63**, 1 (1981).  
 [3] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R. P. Behringer, and E. Clément, *Phys. Rev. E* **60**, 5040 (1999).  
 [4] M. Sperl, *Granular Matter* **8**, 59 (2006).  
 [5] A. Dogangun, Z. Karaca, A. Durmus, and H. Sezen, *J. Perform. Constr. Fac.* **23**, 65 (2009).  
 [6] Z. Zhong, J. Ooi, and J. Rotter, *Eng. Struct.* **23**, 756 (2001).  
 [7] P. Evesque and P.-G. de Gennes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **326**, 761 (1998).  
 [8] P. G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 374 (1999).  
 [9] Y. Bertho, T. Brunet, F. Giorgiutti-Dauphiné, and J.-P. Hulin, *Europhys. Lett.* **67**, 955 (2004).  
 [10] Y. Bertho, F. Giorgiutti-Dauphiné, and J.-P. Hulin, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 144301 (2003).  
 [11] L. Vanel and E. Clément, *Eur. Phys. J. B* **11**, 525 (1999).  
 [12] L. Vanel, Ph. Claudin, J.-Ph. Bouchaud, M. E. Cates, E. Clément, and J. P. Wittmer, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1439 (2000).  
 [13] G. Ovarlez, C. Fond, and E. Clément, *Phys. Rev. E* **67**, 060302 (2003).  
 [14] G. Ovarlez and E. Clément, *Eur. Phys. J. E* **16**, 421 (2005).  
 [15] C. Goldenberg and I. Goldhirsch, *Nature (London)* **435**, 188 (2005).  
 [16] C. Perge, M. A. Aguirre, P. A. Gago, L. A. Pagnaloni, D. Le Tourneau, and J.-C. Géminard, *Phys. Rev. E* **85**, 021303 (2012).  
 [17] J. W. Landry, G. S. Grest, L. E. Silbert, and S. J. Plimpton, *Phys. Rev. E* **67**, 041303 (2003).  
 [18] J. F. Wambaugh, R. R. Hartley, and R. P. Behringer, *Eur. Phys. J. E* **32**, 134 (2010).  
 [19] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. Van de Velde, *J. Chem. Eng. Sci.* **15**, 260 (1961).  
 [20] C. Mankoc, A. Janda, R. Arévalo, J. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartin, and D. Maza, *Granular Matter* **9**, 407 (2007).  
 [21] B. Andréotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen, *Les Milieux Granulaires: Entre Fluide et Solide* (EDP Sciences/CNRS Edition, Paris, 2011).  
 [22] O. Pouliquen and R. Gutfraind, *Phys. Rev. E* **53**, 552 (1996).  
 [23] G. MiDi, *Eur. Phys. J. E* **14**, 341 (2004).  
 [24] N. Menon and D. J. Durian, *Science* **275**, 1920 (1997).  
 [25] G. Gutiérrez, P. Boltenhagen, J. Lanuza, and E. Clément, in *Silo Collapse: An Experimental Study Traffic and Granular Flow '07*, edited by C. Appert-Rolland, F. Chevoir, P. Gondret, S. Lassarre, J. Lebacque, and M. Schreckenberg (Springer, Berlin, 2009), pp. 517–523.

- [26] S. Timoshenko and S. S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [27] W. Thielicke and E. Stamhuis, *PIVlab—Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB*, <http://pivlab.blogspot.fr/>.
- [28] J. Rahmoun, G. Millet, and G. de Saxcé, *J. Stat. Mech.* (2008) P06011.
- [29] J. Kierzenka and L. Champine, *ACM Trans. Math. Soft.* **27**, 299 (2001).
- [30] K. Levenberg, *Quart. Appl. Math.* **2**, 164 (1944).
- [31] R. Waltz, J. Morales, J. Nocedal, and D. Orban, *Math. Program.* **107**, 391 (2006).
- [32] I. Bratberg, K. Maloy, and A. Hansen, *Eur. Phys. J. E* **18**, 245 (2005).
- [33] A. Qadir, H. Guo, X. Liang, Q. Shi, and G. Sun, *Eur. Phys. J. E* **31**, 311 (2010).
- [34] E. Kolb, C. Hartmann, and P. Genet, *Plant Soil* **360**, 19 (2012).

## Fabrication de tubes

Nous exposons ici brièvement les différentes méthodes utilisées pour la fabrication des cylindres en élastomère qui ont servi aux expériences décrites dans cette thèse. Nous utilisons du PolyVinyl-Siloxane (PVS), vendu comme produit de moulage. Il se présente sous la forme d'une base et un catalyseur, à mélanger à volume égal. Il réticule en environ 20 minutes, à température ambiante, sans traitement particulier, ce qui en fait un produit très simple et robuste, parfaitement adapté à l'utilisation en laboratoire. Les méthodes sont bien sûr applicables à d'autres polymères, voire améliorables, par l'utilisation de polymères réticulable sur commande (sous U.V.) par exemple.

Le PVS que nous utilisons est vendu en dureté shore 8 (Module de Young  $E = 0,24$  MPa), shore 16 (Module de Young  $E = 0,48$  MPa), shore 22 (module de Young  $E = 0,6$  MPa) et shore 32 ( $E = 0,96$  MPa), pour des masses volumique comprises entre 990 et 1150 kg/m<sup>3</sup>.

### C.1 Trempage

Nous utilisons la méthode dite de "dip-coating" (voir figure C.1) : Nous trempons un moule cylindrique dans un bain de PVS, le retirons puis le laissons drainer et réticuler. Le moule suspendu de

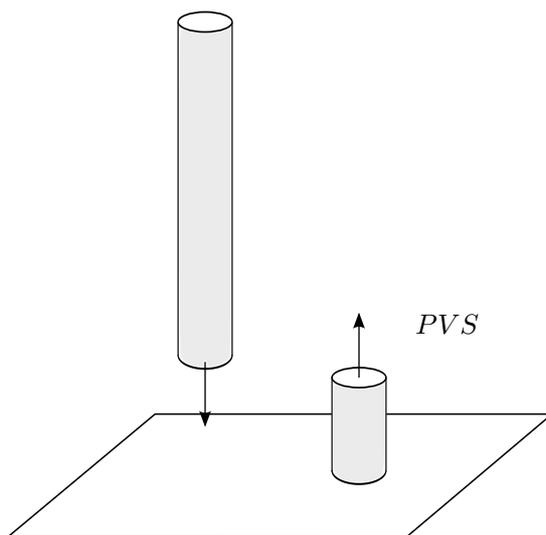


FIGURE C.1 – Trempage d'un modèle cylindrique dans un bain de PVS. Le PVS recouvre partiellement le modèle, formant un tube cylindrique.

manière souple (à un fil) s'aligne verticalement par gravité et le cylindre obtenu est donc identique par révolution axiale. Le drainage par gravité entraîne par contre une variation verticale de l'épaisseur. Les cylindres obtenus ont donc une épaisseur sensiblement différente à chaque extrémité. Le

démoulage se fait facilement en lubrifiant avec de l'eau l'interface entre le tube et le moule. Cette méthode permet de créer des tubes de rayon inférieurs au mm à quelques cm, de longueur centimétrique et d'épaisseur inférieure au mm. C'est une méthode simple, et il est facile de trouver des moules en détournant des objets usuels de laboratoire (tube capillaire, pipette, ...). Les tubes obtenus ont un rayon intérieur très précis, calibré sur le moule utilisé, mais une épaisseur variable.

## C.2 Moulage

Cette méthode consiste simplement à mouler un tube entre deux cylindres (voir figure C.2) coaxiaux. Elle donne accès à une gamme bien plus grande de dimensions. Les limites supérieures sont

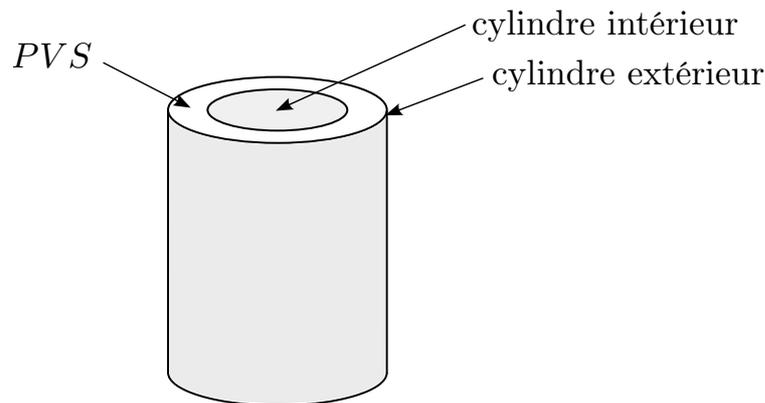


FIGURE C.2 – Nous moulons un tube de PVS entre deux cylindre maintenus coaxiaux.

fixées par le volume de produit nécessaire (et son coût) à la fabrication du tube souple. Les limites inférieures sont celles de l'usinage du moule et de la fragilité du matériau de moulage : un moule très précis donne ainsi accès à des épaisseurs très faibles, mais il est difficile de ne pas déchirer le tube lors du démoulage. Des dimensions acceptables expérimentalement sont donc des épaisseurs allant du mm au cm, des rayons centimétrique pour des longueurs de quelques dizaines de centimètres.

L'état de surface des faces interne et externe dépend de l'état de surface du moule et le démoulage est difficile car ce type de matériau mou adhère très fortement. Nous avons dû casser la partie extérieure du moule pour ne pas abîmer les objets ainsi fabriqués. Un moule démontable, en deux partie, permet d'éviter la casse, mais donne un mauvais état de surface, le PVS à l'état liquide s'insinuant dans la moindre fissure du moule.

Cette méthode donne accès à une large gamme de dimensions et permet de régler à loisir les rayons interne et externe du tube, avec une précision et un état de surface liés à la fabrication du moule. Son principal inconvénient est le sacrifice de la partie extérieure du moule, pouvant s'avérer coûteuse.

## C.3 Tournage

### C.3.1 À l'extérieur d'un moule cylindrique

Cette méthode consiste à recouvrir la paroi d'un cylindre en rotation lente (vitesse de rotation de l'ordre de 100 tours/minute) de PVS liquide, puis d'uniformiser cette couche de liquide en rotation à l'aide d'un outil souple (voir figure C.3). Nous utilisons typiquement une feuille de plastique suf-

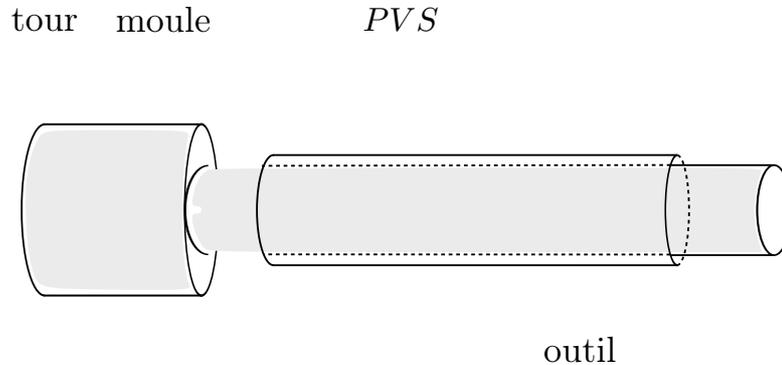


FIGURE C.3 – Tournage à l'extérieur d'un cylindre.

fisamment souple (module d'Young  $E \sim 2$  GPa et épaisseur  $h \sim 500 \mu\text{m}$ ) comme un outil classique de tour, en enlevant de la matière petit à petit, alors que le matériau est toujours liquide. Lorsque l'épaisseur voulue est atteinte, nous laissons le PVS réticuler alors que le cylindre support est toujours en rotation.

Nous pouvons ainsi fabriquer des tubes cylindriques de rayon centimétrique, de longueur de quelques dizaines de centimètres (fixée par la taille du tour utilisé pour la rotation du support) et d'épaisseur comprise entre  $h \sim 50 \mu\text{m}$  et  $h \sim 1$  mm.

Cette méthode est de loin la plus difficile à maîtriser et cumule les défauts : une vitesse de rotation trop rapide entraîne la déstabilisation en gouttes de la couche de liquide, une vitesse trop lente laisse apparaître le drainage sous gravité. Un outil présentant un défaut déstabilisera également le film liquide lors de son avancée. Elle donne cependant accès à des épaisseurs très faibles, tout en permettant de fixer très précisément le diamètre intérieur du tube et donnant un état de surface extérieur parfait.

### C.3.2 À l'intérieur d'un moule cylindrique

Il s'agit ici d'une méthode inspirée du "spin-coating", beaucoup plus simple à utiliser. Nous plaçons un volume fixé de PVS liquide à l'intérieur d'un cylindre fermé à ses extrémités (voir figure C.4). Nous plaçons ce cylindre en rotation rapide (vitesse de rotation de l'ordre de 1600 tours/minute), plaquant le PVS liquide contre la paroi. Nous laissons ensuite le cylindre en rotation jusqu'à réticulation complète.

Le rayon extérieur et la longueur obtenus dépendent de la taille du moule cylindrique, limitée par la taille utile du tour. L'épaisseur finale dépend du volume de polymère introduit initialement, la fabrication se déroulant à volume constant. La précision axiale de l'épaisseur dépend de l'alignement entre l'axe de rotation du tour et l'axe du moule cylindrique.

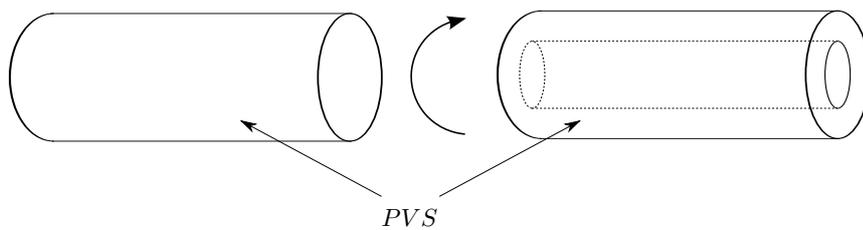


FIGURE C.4 – Tournage à l'intérieur d'un cylindre.

Cette méthode permet de fixer facilement le diamètre extérieur du tube et ses dimensions, mais ne donne pas accès à des épaisseurs inférieures au mm. L'état de surface de la face externe du tube dépend de l'état du moule alors que la face interne présente un aspect "miroir".

# Références Bibliographiques

- ABKARIAN, M., FAIVRE, M., & STONE, H.A. 2006. High-speed microfluidic differential manometer for cellular-scale hydrodynamics. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **103**, 538–542. (p. 85).
- ALAVA, M., & NISKANEN, K. 2006. *Rep. Prog. Phys.*, **69**, 669. (p. 7).
- ANDREOTTI, B., FORTERRE, Y., & POULIQUEN, O. 2011. *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*. EDP Sciences/CNRS Edition. (p. 58).
- ANTMAN, S. S. 1968. *J. Math. Anal. Appl.*, **21**, 132–135. (p. 35, 43).
- ARMON, S., EFRATI, E., KUPFERMAN, R., & SHARON, E. 2011. Geometry and Mechanics in the Opening of Chiral Seed Pods. *Science*, **333**, 1726–1730. (p. 11).
- AUDOLY, B., & POMEAU, Y. 2010. *Elasticity and Geometry*. Oxford University Press. (p. 47).
- BEDRICH, M., & EHRLEIN, H. 2001. Motor function of the large intestine and flow of digesta in sheep. *Small Ruminant Research*, **42**, 141–154. (p. 85).
- BELL, J. M., & CAMERON, F. K. 1906. *J. Phys. Chem.*, **10**, 658. (p. 27).
- BERTHO, Y., GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, F., & HULIN, J.-P. 2003. Dynamical Janssen Effect on Granular Packing with Moving Walls. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 144301. (p. 57).
- BERTHO, Y., BRUNET, T., GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, F., & HULIN, J.-P. 2004. Influence of humidity on granular packings with moving walls. *Europhys. Lett.*, **67**, 955–961. (p. 57).
- BEVERLOO, W. A., LENIGER, H. A., & VAN DE VELDE, J. 1961. The flow of granular material through orifices. *J. Chem. Eng. Sci.*, **15**, 260–296. (p. 58, 78).
- BICO, J., ROMAN B. MOULIN L., & BOUDAUD, A. 2004. *Nature*, **432**, 690. (p. 7, 9, 20).
- BRATBERG, I., MALOY, K.J., & HANSEN, A. 2005. Validity of the Janssen law in narrow granular columns. *Eur. Phys. J. E*, **18**, 245–252. (p. 76).
- CERDA, E., & MAHADEVAN, L. 2003. Geometry and Physics of Wrinkling. *PRL*, **90**, 074302. (p. 9).
- CHAKRAPANI, N., WEL, B., CARRILLO, A., AJAYAN, P. M., & KANE, R. S. 2004. Capillarity-driven assembly of two-dimensional cellular carbon nanotube foams. *PNAS*, **101**, 4009–4012. (p. 7).
- CIARLETTA, P., & BEN AMAR, M. 2011. Peristaltic patterns for swelling and shrinking of soft cylindrical gels. *Soft Matter*, **8**, 1760–1763. (p. 9).
- CONCUS, P., & FINN, R. 1974. *Acta Mathematica*, **132**, 177–198. (p. 28).
- DE GENNES, P. G. 1999. Granular matter : a tentative view. *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 374–382. (p. 57).
- DE GENNES, P.-G., BROCHARD-WYART, F., & QUÉRÉ, D. 2005. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin. (p. 7, 16, 27).
- DE LAPLACE P.-S. 1845. Traité de mécanique céleste. *Imprimerie Royale, Paris*, **Livre Dixième**. (p. 16).

- DE VINCI, LÉONARD. 1508. *Codex Leister*. (p. 7).
- DION, B., NAILI, S., RENAUDEAUX, J.P., & RIBREAU, C. 1995. Buckling of elastic tubes : study of highly compliant device. *Med. & Biol. Eng. & Comput.*, **33**, 196–201. (p. 36).
- DOGANGUN, A., KARACA, Z., DURMUS, A., & SEZEN, H. 2009. Cause of damage and failures in silo structures. *J. Perform. Constr. Fac.*, **23**, 65–71. (p. 57).
- EVESQUE, P., & DE GENNES, P.-G. 1998. Sur la statique des silos. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **326**, 761–766. (p. 57).
- FAIRBAIRN, W. 1858. On the Resistance of Tubes to collapse. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **148**, 389–413. (p. 35).
- FLAHERTY, J. E., KELLER, J. B., & RUBINOW, S.I. 1972. Post Buckling Behavior of Elastic Tubes and Rings with Opposite Sides in Contact. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **23**, 446–455. (p. 35).
- FORTERRE, Y., & DUMAIS, J. 2011. Generating Helices in Nature. *Science*, **333**, 1715–1716. (p. 11).
- GOLDENBERG, C., & GOLDBIRSH, I. 2005. Friction enhances elasticity in granular solids. *Nature*, **435**, 188–191. (p. 57, 58).
- GORDON, J.E. 1978. *Structures : Or Why Things Don't Fall Down*. Da Capo Press. (p. 9).
- GUTIÉRREZ, G., BOLTENHAGEN, P., LANUZA, J., & CLÉMENT, E. 2007. Silo Collapse : An Experimental Study. *In : Traffic and granular flow 07*. (p. 58).
- HEAP, A., & JUEL, A. 2009. Bubble transitions in elastic tubes. *J. Fluid Mech.*, **633**, 485–507. (p. 7).
- HEIL, M., & WHITE, J.P. 2002. *J. Fluid Mech.*, **462**, 79. (p. 7, 32).
- HEIL, M., HAZEL, A. L., & SMITH, J. A. 2008. The mechanics of airway closure. *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **163**, 214–221. (p. 7, 32, 33).
- HOLBROOK, N. M., & ZWIENIECKI, M. A. 2008. *Phys. Today*, **61**, 76. (p. 7).
- HUANG, J., JUSZKIEWICZ, M., DE JEU, W. H., CERDA, E., EMRICK, T., MENON, N., & RUSSEL, T. P. 2007. Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science*, **317**, 650–3. (p. 8).
- HUBER-BURNAND. 1829. blabla. *Ann. d. Phys.*, **92**, 316. (p. 57).
- HWANG, S.-W., H., TAO, D.-H., KIM, H., CHENG, J.-K., SONG, E., RILL, M.A., BRECKLE, B., PANILAITIS, S.M., WON, Y.-S., KIM, Y.M., SONG, K.J., YU, A., AMEEN, R., LI, Y., SU, M., YANG, D.L., KAPLAN, M.R., ZAKIN, M.J., SLEPIAN, Y., HUANG, F.G., OMENETTO, & J.A., ROGERS. 2012. A Physically Transient Form of Silicon Electronics. *Science*, **337**, 1640–1644. (p. 11).
- JUEL, A., & HEAP, A. 2007. The reopening of a fluid-filled, collapsed tube. *J. Fluid Mech.*, **572**, 287–310. (p. 7).
- KENNEDY, C. R., & VENARD, J. T. 1962. *Collapse of Tubes by External Pressure*. Tech. rept. Oak Ridge National Laboratory. (p. 35).
- KEPLINGER, C., SUN, J.-Y., FOO, C.C., ROTHEMUND, P., WHITESIDES, G, M., & SUO, Z. 2013. Stretchable, transparent, ionic conductors. *Science*, **341**, 984–987. (p. 9).
- KIERZENKA, J., & SHAMPINE, L.F. 2001. A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE. *ACM Trans. Math. Soft.*, **27**, 299–316. (p. 70).

- KOLB, E., HARTMANN, C., & GENET, P. 2012. Radial force development during root growth measured by photoelasticity. *Plant and Soil*, **360**, 19–35. (p. 83).
- LAZARUS, A., FLORIJN, H. C. B., & REIS, P. M. 2012. Geometry-Induced Rigidity in Nonspherical Pressurized Elastic Shells. *PRL*, **109**, 144301. (p. 9).
- LEVENBERG, K. 1944. A method for the solution of certain problems in Least-Squares. *Quarterly Applied Math.*, **2**, 164–168. (p. 70).
- LOBKOVSKY, A.E., & WITTEN, T.A. 1997. *Phys. Rev. E*, **55**, 1577. (p. 9, 24).
- LUCAS, V. R. 1918. *Kolloid. Zeitschrift*, **23**, 15. (p. 27).
- MAHADEVAN, L., VAZIRI A., & DAS, M. 2007. *Europhys. Lett.*, **77**, 40003. (p. 24).
- MANKOC, C., JANDA, A., ARÉVALO, R., PASTOR, J., ZURIGUEL, I., GARCIMARTIN, A., & MAZA, D. 2007. The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter*, **9**, 407–414. (p. 58).
- MARTINEZ, R. V., FISH, C. R., CHEN, X., & WHITESIDES, G. M. 2012. Elastomeric Origami : Programmable Paper-Elastomer Composites as Pneumatic Actuators. *Adv. Mater.*, **22**, 1376–1384. (p. 11).
- MARTINEZ, R. V., BRANCH, J. L., FISH, C. R., JIN, L., SHEPHERD, R. F., NUNES, R. M. D., SUO, Z., & WHITESIDES, G. M. 2013. Robotic Tentacles with Three-Dimensional Mobility Based on Flexible Elastomers. *Adv. Mater.*, **25**, 205–212. (p. 11).
- MAUREL, A., COBELLI P. PAGNEUX V., & PETITJEANS, P. 2009. *Applied Optics*, **48**, 380. (p. 25).
- MENON, NARAYANAN, & DURIAN, DOUGLAS J. 1997. Diffusing-Wave Spectroscopy of Dynamics in a Three-Dimensional Granular Flow. *Science*, **275**(5308), 1920–1922. (p. 58).
- MIDI, GDR. 2004. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, **14**, 341–365. (p. 58).
- MORROW, N. R., & MASON, G. 2001. *Curr. Op. Colloid Int. Science*, **6**, 321. (p. 7).
- NASA. 1965. *Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders*. Tech. rept. NASA. (p. 35).
- NASSERI, B., & FLORENCE, A.T. 2003. A vesicular shuttle : transport of a vesicle within a flexible microtube. *J. Controlled Release*, **92**, 233–240. (p. 85).
- NASTO, A., AJDARI, A., LAZARUS, A., VAZIRI, A., & REIS, P. M. 2013. Localization of deformation in thin shells under indentation. *Soft Matter*, **9**, 6796–6803. (p. 9, 10).
- OVARLEZ, G., & CLÉMENT, E. 2005a. Elastic medium confined in a column versus the Janssen experiment. *Eur. Phys. J. E*, **16**, 421–438. (p. 57, 63, 64).
- OVARLEZ, G., & CLÉMENT, E. 2005b. Elastic medium confined in a column versus the Janssen experiment. *Eur. Phys. J. E*, **16**, 421–438. (p. 76).
- OVARLEZ, G., FOND, C., & CLÉMENT, E. 2003. Overshoot effect in the Janssen granular column : A crucial test for granular mechanics. *Phys. Rev. E*, **67**, 060302. (p. 57, 59, 61, 76).
- PERGE, C., AGUIRRE, M.A., GAGO, P.A., PUGNALONI, L.A., LE TOURNEAU, D., & GÉMINARD, J.-C. 2012. Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo. *Phys. Rev. E*, **85**, 021303. (p. 58, 80).
- PONOMARENKO, A., QUÉRÉ D., & CLANET, C. 2011. *J. Fluid Mech.*, **666**, 146. (p. 28).
- POULIQUEN, O., & GUTFRAIND, R. 1996. Stress fluctuations and shear zones in quasistatic granular chute flows. *Phys. Rev. E*, **53**, 552–560. (p. 58).

- POWERS, S. E., & TAMBLING, M. E. 1995. *J. Contaminant Hydrology*, **19**, 105. (p. 7).
- PREIRA, P., GRANDNÉ, V., FOREL, J.-M., GABRIELE, S., CAMARA, M., & THEODOLY, O. 2013a. Passive circulating cell sorting by deformability using a microfluidic gradual filter. *Lab on a Chip*, **13**, 161. (p. 85).
- PREIRA, P., VALIGNAT, M.-P., BICO, J., & THÉODOLY, O. 2013b. Single cell rheometry with a microfluidic constriction : Quantitative control of friction and fluid leaks between cell and channel walls. *Biomicrofluidics*, **7**, 024111. (p. 85).
- PY, C., REVERDY, P., DOPPLER, L., BICO, J., ROMAN, B., & BAROUD, C. N. 2007. Capillary Origami : Spontaneous Wrapping of a Droplet with an Elastic Sheet. *PRL*, **98**, 156103. (p. 8).
- QADIR, A., GUO, H., LIANG, X., SHI, Q., & SUN, G. 2010. Effect of the ratios of diameter of silo to bead on the pressure screening in granular columns. *Eur. Phys. J. E*, **31**, 311–314. (p. 76).
- QUEMENEUR, F., QUILLIET, C., FAIVRE, M., VIALLAT, A., & PÉPIN-DONAT, B. 2012. Gel Phase Vesicles Buckle into Specific Shapes. *PRL*, **108**, 108303. (p. 9, 10).
- QUILLIET, C. 2006. Depressions at the surface of an elastic spherical shell submitted to external pressure. *Phys. Rev. E*, **74**, 046608. (p. 9).
- QUILLIET, C. 2012. Numerical deflation of beach balls with various Poisson's ratios : from sphere to bowl's shape. *Eur. Phys. J. E*, **35**, 48. (p. 9).
- QUILLIET, C., ZOLDESI, C.I., RIERA, C., VAN BLAADEREN, A., & IMHOF, A. 2008. Anisotropic colloids through non-trivial buckling. *Eur. Phys. J. E*, **27**, 13–20. (p. 9).
- RAHMOUN, J., MILLET, G., & DE SAXCÉ, G. 2008. A continuous media approach to modeling the stress saturation effect in granular silos. *J. Stat. Mech.*, **P06011**, 1742–5468. (p. 67, 76).
- REIS, P. M., HURE, J., JUNG, S., BUSH, J. W. M., & CLANET, C. 2010. Grabbing water. *Soft Matter*, **6**, 5705–5708. (p. 8).
- ROMAN, B., & BICO, J. 2010. *J. Phys. : Condens. Matter*, **22**, 493101. (p. 8, 9, 22).
- SAGUY, I. S., MARABI A., & WALLACH, R. 2005. *Trends Food Sci. Tech.*, **16**, 495. (p. 7).
- SHEPHERD, R. F., ILIEVSKI, F., CHOI, W., MORIN, S. A., STOKES, A. A., MAZZEO, A. D., CHEN, X., WANG, M., & WHITESIDES, G. M. 2011. Multigait soft robot. *PNAS*. (p. 11).
- SHIM, J., PERDIGOU, C., CHEN, E. R., BERTOLDI, K., & REIS, P. M. 2012. Buckling-induced encapsulation of structured elastic shells under pressure. *Soft Matter*. (p. 9, 10).
- SMID, J., & NOVOSAD, J. 1981. Pressure distribution under heaped bulk solids. *Proc. Powtech. Conference. Int. Chem. Eng. Symp.*, **63**, 1–12. (p. 57).
- SPERL, M. 2006. Experiments on corn pressure in silo cells - translation and comment of Janssen's paper from 1895. *Granular Matter*, **8**, 59–65. (p. 57, 58).
- TANAKA, T., MORIGAMI M., & ATODA, N. 1993. *J. Appl. Phys. 1*, **32**, 6059. (p. 7, 9).
- TANG, L.-H., & TANG, Y. 1994. *J. Phys. II France*, **4**, 881. (p. 28).
- THIELICKE, W., & STAMHUIS, E.J. *PIVlab - Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB*. <http://pivlab.blogspot.fr/>. (p. 66).
- TIMOSHENKO, S., & S. WOINOWSKY-KRIEGER, S. 1964. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill. (p. 20, 47, 63, 64, 68).

- VANEL, L., & CLÉMENT, E. 1999. Pressure screening and fluctuations at the bottom of a granular column. *Eur. Phys. J. B*, **11**, 525. (p. 57).
- VANEL, L., CLAUDIN, P., BOUCHAUD, J.-PH., CATES, M.E., CLÉMENT, E., & WITTMER, J.P. 2000. Stresses in Silos : Comparison Between Theoretical Models and New Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 1439–1442. (p. 57, 61).
- VANEL, LOIC, HOWELL, DANIEL, CLARK, D., BEHRINGER, R. P., & CLÉMENT, ERIC. 1999. Memories in sand : Experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles. *Phys. Rev. E*, **60**, 5040–5043. (p. 57, 63).
- VAZIRI, A., & MAHADEVAN, L. 2008. Localized and extended deformations of elastic shells. *PNAS*, **105**, 7913–7918. (p. 40).
- VON KARMAN, T. 1910. Untersuchungen iuber Knickfestigkeit. *Mitteilungen iiber Forschungsarbeiten*, **81**. (p. 35).
- VON MISES, R. 1914. Der kritische Aussendruck zylindrischer Rohre. *Zeit. V.D.I.*, **58**, 750–755. (p. 35).
- WALTZ, R.A., MORALES, J.L., NOCEDAL, J., & ORBAN, D. 2006. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*, **107**, 391–408. (p. 70).
- WAMBAUGH, J. F., HARTLEY, R. R., & BEHRINGER, R. P. 2010. Force networks and elasticity in granular silos. *Eur. Phys. J. E*, **32**, 134–145. (p. 58, 76, 78).
- WASHBURN, E. 1921. *Phys. Rev.*, **17**, 273. (p. 27).
- WINDERBURG, D. F., & TRILLING, C. 1934. *Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shells Under External Pressure*. Tech. rept. Experimental Model Basin - Navy. (p. 35).
- YAMAKI, N. 1984. *Elastic stability of circular cylindrical shells*. North-Holland. (p. 36).
- YOSHIDA, K., KONDO, R., WANG, Q., & DOERSCHUK, C.M. 2006. Neutrophil Cytoskeletal Rearrangements during Capillary Sequestration in Bacterial Pneumonia in Rats. *Am. J. Respiratory and Critical Care Medecine*, **174**, 689. (p. 85).
- ZHONG, Z., OOI, J.Y., & ROTTER, J.M. 2001. The sensitivity of silo flow and wall stresses to filling method. *Eng. Struct.*, **23**, 756–767. (p. 57).

