

École doctorale n°432 : SMI - Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité "Mathématiques et Automatique"

présentée et soutenue publiquement par

Nicolas HENWOOD

le 23 janvier 2014

Estimation en ligne de paramètres de machines électriques pour véhicule en vue d'un suivi de la température de ses composants

Directeur de thèse : **Laurent PRALY**

Co-encadrement de la thèse : **Wissam DIB, Jérémy MALAIZÉ**

Jury

M. Pierre ROUCHON, Professeur, CAS, MINES ParisTech

M. Gildas BESANÇON, Professeur, ENSE3, GIPSA-Lab

M. Alain GLUMINEAU, Professeur des Universités, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes

M. Laurent PRALY, Professeur, CAS, MINES ParisTech

M. Wissam DIB, Docteur, IFPEN

M. Jérémy MALAIZÉ, Docteur, ETEL S.A

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Membre Invité

**T
H
È
S
E**

*A mes neveux et grands-pères,
qui se seront croisés durant ces trois années,*

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée entre octobre 2010 et janvier 2014 en collaboration entre le Centre Automatique et Systèmes de MINES ParisTech et l'IFP Energies Nouvelles, qui l'a financée et où j'ai passé, sur le site de Rueil-Malmaison, l'essentiel de cette période. Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans la contribution et le soutien de nombreuses personnes auxquelles je souhaite exprimer ma gratitude.

En tout premier lieu, je tiens à vivement remercier mon directeur de thèse, Laurent Praly, ainsi que mes deux encadrants successifs à l'IFPEN, Jérémy Malaizé et Wissam Dib. Laurent, pour tout ce qu'il m'a transmis, y compris une part importante de son incroyable passion, pour ses innombrables idées, pour sa disponibilité et sa patience, et pour avoir suivi sans relâche et avec un grand intérêt l'avancée de mes travaux, me poussant à creuser toujours plus profond. Nos interminables discussions autour de nos centaines de pages de charmants calculs vont me manquer. Jérémy, promoteur de cette thèse, pour m'avoir mis sur les bons rails avec enthousiasme, pour sa vision toujours très pertinente sur mon travail, ses idées et conseils avisés, ainsi que pour les discussions enrichissantes qui en ont découlé. Et merci pour la place en conférence à Hawaii ! Wissam, pour avoir réussi à se plonger dans le bain aussi rapidement et avoir si bien pris le relais pour la dernière année et demie, pour son aide très précieuse au banc et notamment pour ne pas y avoir compté ses heures pour que de premiers résultats expérimentaux aient pu être présentés dans cette thèse. Merci également pour le grand soutien apporté dans la dernière ligne droite. Merci à tous les trois pour la confiance que vous m'avez accordée. J'ai beaucoup appris à votre contact pendant cette thèse et cela aura été un grand plaisir de travailler à vos côtés.

Je remercie également Gilles Corde, chef du département Contrôle, Signal et Système à l'IFPEN jusqu'en septembre 2013, pour m'avoir accueilli pendant ces trois ans au sein d'un département faisant la part belle au travail de recherche et pour avoir suivi avec attention l'avancée de ma thèse.

Je souhaite remercier Gildas Besançon et Alain Glumineau qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse. Merci pour l'intérêt que vous avez montré pour mon manuscrit et pour vos questions et commentaires avisés.

J'adresse aussi mes remerciements aux professeurs et doctorants du CAS qui contribuent à rendre ce centre tout à la fois accueillant et studieux. Je tiens en particulier à remercier Pierre Rouchon pour avoir accepté d'endosser le rôle de président du jury lors de ma soutenance et Nicolas Petit pour m'avoir bien aidé afin que la soutenance puisse avoir lieu en 2014.

Un grand merci également à tous mes collègues de l'IFPEN, que j'ai eu le plaisir de travailler auprès d'eux pendant un petit morceau ou l'intégralité de ces trois années. Merci d'avoir contribué à me fournir un cadre de travail très agréable et de grande qualité. Merci bien sûr en particulier à tous les heureux élus passés par le bureau GIR 112 pour leur bonne humeur et pour avoir supporté mes blagues et autres discussions sportives sans trop rechigner : Cyril, Damiano, Djamaledine, Dominique, Fabien N., Giovanni, Laurent, Marcel, Ngourane, Prakash, Riccardo et naturellement Carole Q. qui a été aux premières loges pendant ces trois années. Je remercie aussi sincèrement tous ceux, des départements R113 et R112, qui, même s'ils n'ont pas eu la chance de fréquenter ce bureau, n'en ont pas moins contribué à l'agréable ambiance générale et n'ont pas été avares d'aide ou de conseil au besoin : Abir, Alexandre, Anthony, Antonio, Benoît, Carole G., Delphine, El Hadj, Emmanuel, Fabien V-N., Fabrice, Felix, Florian, Françoise, Frédéric, Gianluca, Ghizlane, Guénaël, Hamid, Ilias, Ioannis, Joachim, Jonathan, Julien L., Julien T., Kim, Laid, Lorenzo, Matthias, Mongi, Morya, Olivier, Philippe, Sébastien, Thomas C., Thomas L., Vassilis, Yann. Et un merci particulier à Michel qui a vaillamment défendu mes intérêts contre l'obscurantisme administratif informatique.

Merci également à mes amis qui m'ont permis de prendre ponctuellement mes distances avec cette bien imposante compagne qu'est la thèse et qui ont répondu présents pour me remonter le moral quand le besoin s'en faisait sentir : Anthony, Carole, Cyril, Fabien, Guilhem, Guillaume,...

Enfin, j'ai une pensée pour ma famille, pour laquelle ces quelques pages doivent sembler rédigées en une langue bien étrange, qui a toujours été d'un soutien inestimable, notamment dans les moments difficiles, et en particulier pour mes parents pour tout ce qu'ils m'ont apporté. C'est à vous que je dois d'en être arrivé là.

RESUME

Afin de rendre compétitifs les véhicules hybrides ou tout électriques, l'amélioration des performances des machines électriques embarquées est primordiale. Dans cette optique, le travail présenté s'intéresse en particulier à l'estimation en ligne des variations de température au sein d'une machine synchrone à aimants permanents. De ce fait, nous proposons d'estimer les paramètres physiques dépendants de la température, à savoir la résistance des enroulements et le flux des aimants. La connaissance des variations de température ou de ces paramètres permet en effet d'éviter une dégradation des performances en adaptant le contrôle en couple et de mettre en place une surveillance thermique autorisant notamment une meilleure disponibilité de la machine, sans risque d'endommagement. Pour répondre à ce double objectif, nous proposons deux observateurs de paramètres basés sur une modélisation réaliste de la machine. Nous établissons donc, en premier lieu, un modèle électrique du moteur qui tient compte de possibles différences entre signaux mesurés et exacts et garantit la robustesse des observateurs aux paramètres mécaniques. Un algorithme d'identification hors ligne des paramètres est proposé pour valider le modèle. Puis, basé sur ce modèle réaliste, les deux observateurs proposés, dit de Luenberger et de Kreisselmeier, estiment respectivement, suivant certaines conditions d'observabilité, le flux et la position pour le premier et un ou plusieurs paramètres parmi la résistance, le flux et l'inductance pour le second. Ces observateurs n'utilisent que les mesures de courant et de tension, ainsi qu'une mesure de position pour l'observateur de Kreisselmeier. Des études théoriques et en simulation sont menées pour valider le fonctionnement des observateurs et appréhender au mieux leurs réglages. En particulier, nous présentons une étude évaluant l'impact du bruit de mesure sur l'observateur de Luenberger afin d'améliorer sa robustesse au bruit sur une large plage de régime. Finalement, l'implémentation des observateurs sur différents bancs d'essais fournit des résultats prometteurs, tant pour l'estimation des paramètres que pour la faisabilité d'estimer les variations de température.

Mots-clés : MSAP, Observateurs, Modélisation, Identification, Sensorless thermique, Analyses de robustesse, Contrôle en couple de machines électriques

ABSTRACT

To make hybrid and full electric vehicles competitive, the performance enhancement of the embedded electric motors is essential. For this purpose, the presented work focuses in particular on the online estimation of temperature variations inside a permanent magnet synchronous motor. Therefore, we propose to estimate the temperature dependant parameters, namely the winding resistance and the magnet flux. The knowledge of these parameters or their temperature variations allows indeed to avoid performance degradation by adapting the torque control and makes possible a thermal monitoring, especially for machine availability improvement without risk of damage. Aiming at this double objective, we propose two parameter observers based on a realistic model of the machine. Thus, we first consider an electrical model of the motor that takes account of possible differences between measured and exact signals and ensures robustness to the mechanical parameters. An offline least squares algorithm for parameters identification is proposed to validate the model. Then, based on this realistic model, we design two observers, called Luenberger and Kreisselmeier. According to some observability conditions, the first one estimates the flux and position while the latter estimates one or several parameters among resistance, flux and inductance. These observers use the currents, voltages, and position for the Kreisselmeier observer, as only measurements. Theoretical and simulation studies are conducted on the observers to validate their efficiency and for a better understanding of their setting parameters. In particular, we present a study assessing the measurement noise impact on the Luenberger observer to improve its robustness to noise over a wide speed range. Finally, the implementation of the observers on different test benches provides promising results, both on parameters estimation and on the feasibility of temperature variations estimation.

Keywords: PMSM, Observers, Modeling, Identification, Temperature sensorless, Robustness analyses, Torque control of electric motors

Table des matières

Acronymes et notations	xxiii
Préambule	xxvii
Introduction générale	xxxi
1 Modélisation de la MSAP et problématique de l'estimation en ligne de sa température	1
1.1 Principe de fonctionnement d'une MSAP	1
1.1.1 Structure de la machine	1
1.1.2 Fonctionnement de la machine	2
1.1.3 Changements de repères : transformations de Concordia et de Park	3
1.2 Modélisations classiques de la MSAP	5
1.2.1 De la physique aux équations	5
1.2.2 Modèle classique d'une MSAP dans le repère lié au rotor	8
1.2.3 Modèle classique d'une MSAP dans le repère lié au stator	9
1.3 Contrôle en couple de la MSAP	11
1.4 Enjeux liés à la connaissance de la température de la MSAP	14
1.4.1 Premier enjeu : Fournir le couple demandé malgré l'échauffement du moteur et maintenir les couple et puissance maximum accessibles	14
1.4.2 Second enjeu : Améliorer la disponibilité du moteur	18
1.5 Estimation de la température interne d'une MSAP	20
1.5.1 Utilisation de capteurs de température	20
1.5.2 Utilisation d'un modèle thermique	21
1.5.3 Estimation en ligne des paramètres dépendants de la température	21
1.5.4 Démarche adoptée	22
1.6 Conclusion	25

2	Exploitation et amélioration de la modélisation classique	27
2.1	Etude de propriétés du modèle classique de la MSAP	27
2.1.1	Propriétés utiles d'invariance	28
2.1.2	Introduction et étude d'une solution particulière	30
2.2	Etablissement d'un modèle plus réaliste de la MSAP par modification du modèle classique : Modèle réaliste ou réaliste-filtre	38
2.3	Approximation du modèle réaliste : Modèle réaliste-déphasage	40
2.4	Conclusion - Bilan sur les différents modèles	45
3	Identification hors-ligne des paramètres physiques du moteur et du déphasage	47
3.1	Algorithme d'identification	47
3.2	Mise en œuvre expérimentale de l'algorithme et validation de la modéli- sation réaliste	50
3.3	Etude de la robustesse aux incertitudes de mesure	55
3.3.1	Caractérisation expérimentale du bruit sur les signaux	56
3.3.2	Caractérisation du bruit sur les valeurs moyennes	59
3.3.3	Analyse de Monte-Carlo	60
3.4	Conclusion	64
4	Observation sans mesure de position : Observateur non linéaire de Luenberger - Cas idéal	67
4.1	Considérations sur le <i>sensorless</i> et la robustesse	68
4.2	Modélisation utilisée	70
4.3	Le problème d'estimation	70
4.4	Observabilité	71
4.4.1	Définitions et méthodes	72
4.4.2	Observabilité instantanée du système	74
4.5	Construction d'un observateur non linéaire de Luenberger	75
4.5.1	Première étape : recherche des fonctions T_j	76
4.5.2	Seconde étape : détermination de T^*	77
4.5.3	Conclusion : Observateur non linéaire de Luenberger	78
4.6	Convergence de l'observateur de Luenberger	79
4.7	Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité	80
4.7.1	Cas à pôles réels	81
4.7.2	Cas à pôles complexes	86

4.8	Sensibilité de l'observateur de Luenberger à une mauvaise connaissance des résistance et inductance (et des amplitudes des courants et tensions)	94
4.8.1	Sensibilité à une mauvaise connaissance de la résistance et de l'inductance	94
4.8.2	Sensibilité à une mauvaise connaissance des amplitudes des courants et tensions	100
4.9	Conclusion	103
5	Observateur non linéaire de Luenberger - Cas réaliste	105
5.1	Observabilité et mesurabilité	106
5.2	Transformation des équations de l'observateur pour la modélisation réaliste	108
5.2.1	Méthode n° 1	109
5.2.2	Méthode n° 2	111
5.2.3	Méthodes n° 1 et n° 2 : Implémentation dans le cas complexe . .	112
5.2.4	Schéma récapitulatif	113
5.3	Etude des approximations découlant de la présence résiduelle de termes en u_c dans les équations de l'observateur	114
5.3.1	Etude de l'approximation de $y_u^T i$ par $y_u^T y_i$	115
5.3.2	Etude de l'approximation de $y_i^T u$ par $y_i^T y_u$	116
5.3.3	Etude de l'approximation de $ i ^2$ par $ y_i ^2$	117
5.4	Déconvolution	118
5.5	Etude en simulation de l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste	122
5.5.1	Apport de la transformation des équations	125
5.5.2	Impact de la déconvolution en entrée	128
5.5.3	Impact de la déconvolution en sortie	129
5.5.4	Comparaison entre pôles réels et complexes	130
5.5.5	Bilan de l'étude en simulation	132
5.6	Conclusion	133
6	Observateur non linéaire de Luenberger - Impact du bruit de mesure et choix des pôles	135
6.1	Extension des propriétés d'invariance aux équations de l'observateur de Luenberger	136
6.1.1	Invariance sous l'action d'une variation de régime	136
6.1.2	Invariance sous l'action d'une variation de couple	137
6.1.3	Bilan	138

6.2	Etude théorique du cas bruité	138
6.2.1	Equations de l'observateur dans le cas bruité	139
6.2.2	Modèle de bruit	139
6.2.3	Résolution des équations de l'observateur dans le cas bruité : Prise en compte d'une unique composante fréquentielle de chacun des bruits	144
6.2.4	Restriction à l'étude de l'impact du bruit sur les tensions sur l'intensité du flux et approximations	145
6.2.5	Calcul de la norme de $C_0^{-1}C_u$ et validation de l'approximation .	149
6.2.6	Estimation du flux après restriction de l'étude et approximations	151
6.2.7	Moyenne temporelle du biais sur le flux estimé	151
6.2.8	Prise en compte de l'ensemble des composantes fréquentielles du bruit sur les tensions	154
6.2.9	Minimisation de la moyenne temporelle du biais et détermination des pôles optimaux	159
6.3	Etude en simulation du cas bruité	164
6.3.1	Première étape : Minimisation des erreurs sur grilles de pôles . .	166
6.3.2	Seconde étape : Analyse de Monte-Carlo	177
6.3.3	Mise en œuvre en simulation de l'alternance des observateurs en fonction du régime	188
6.4	Conclusion	193
7	Observation avec mesure de position : Observateur de Kreisselmeier	195
7.1	Modèle et problème d'estimation	196
7.2	Etude de l'observabilité	197
7.2.1	Test d'observabilité	199
7.2.2	Etude de l'observabilité dans le cas de courants fictifs i_d et i_q constants	200
7.2.3	Etude de l'observabilité dans le cas général	203
7.2.4	Bilan sur l'observabilité de l'état χ_K	206
7.3	Observateur de Kreisselmeier dans le cas idéal	207
7.3.1	Obtention des signaux filtrés	208
7.3.2	Approche par une formulation faible	209
7.3.3	Implémentation des moindres carrés	210
7.3.4	Estimation partielle de l'état	212
7.3.5	Conclusion : Observateur de Kreisselmeier dans le cas idéal . . .	213
7.4	Observateur de Kreisselmeier dans le cas réaliste	213

7.4.1	Obtention des signaux filtrés	215
7.4.2	Implémentation des moindres carrés	217
7.4.3	Conclusion : Observateur de Kreisselmeier dans le cas réaliste . .	218
7.5	Etude en simulation de l'observateur de Kreisselmeier	219
7.5.1	Impact des variations de régime ou de couple	220
7.5.2	Impact du facteur d'oubli	224
7.5.3	Impact de la méthode et du nombre de filtres utilisés	224
7.5.4	Impact du nombre de paramètres estimés	227
7.5.5	Robustesse de l'observateur de Kreisselmeier à une mauvaise connais- sance des paramètres supposés connus	227
7.5.6	Robustesse de l'observateur de Kreisselmeier à une mauvaise connais- sance de la position	231
7.5.7	Impact du bruit de mesure : Analyse de Monte-Carlo	231
7.5.8	Estimation des constantes de temps inconnues	235
7.6	Conclusion	236
8	Mise en œuvre expérimentale des deux observateurs	241
8.1	Présentation du dispositif expérimental	241
8.1.1	Descriptif général des différents bancs électriques de l'IFPEN . .	241
8.1.2	Banc SMILE	242
8.1.3	Banc forte puissance	245
8.1.4	Banc haute vitesse	245
8.2	Résultats expérimentaux	246
8.2.1	Résultats au banc SMILE 2.0	247
8.2.2	Résultats au banc forte puissance	254
8.2.3	Résultats au banc haute vitesse	262
8.3	Conclusion	264
9	Conclusion générale et perspectives	267
A	Démonstrations des propositions du paragraphe 6.2	273
A.1	Notations et identités utilisées dans cette annexe	273
A.2	Démonstration de la proposition 6.1	275
A.2.1	Rappel de l'énoncé de la proposition 6.1	275
A.2.2	Démonstration	276
A.3	Démonstration de la proposition 6.4	283
A.3.1	Rappel de l'énoncé de la proposition 6.4	283
A.3.2	Démonstration	283

A.4	Démonstration de la proposition 6.3	295
A.4.1	Rappel de l'énoncé de la proposition 6.3	295
A.4.2	Démonstration	295
A.5	Démonstration de la proposition 6.5	297
A.5.1	Rappel de l'énoncé de la proposition 6.5	297
A.5.2	Démonstration	297

B Résultats complémentaires en simulation : estimation de la température et boucle fermée 305

B.1	Hypothèses	305
B.2	Impact sur les estimations du contrôle en boucle fermée avec l'observateur de Luenberger	306
B.3	Suivi d'une variation de température avec l'observateur de Luenberger et adaptation du contrôle aux variations du flux	309
B.3.1	Cas non bruité : Estimation de la température des aimants et robustesse à la non prise en compte des variations de la résistance	310
B.3.2	Cas non bruité : Adaptation du contrôle en couple aux variations du flux	310
B.3.3	Cas bruité : Estimation de la température des aimants et robustesse à la non prise en compte des variations de résistance	310
B.3.4	Cas bruité : Adaptation du contrôle en couple aux variations du flux	312
B.3.5	Cas bruité : Estimation de la température des aimants selon le régime	312
B.4	Suivi d'une variation de température avec l'observateur de Kreisselmeier	314
B.4.1	Cas non bruité : Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance et du choix des paramètres estimés	314
B.4.2	Cas non bruité : Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux et du choix des paramètres estimés	317
B.4.3	Cas bruité : Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance et du choix des paramètres estimés	317
B.4.4	Cas bruité : Estimation de la température des aimants selon le régime	317
B.4.5	Cas bruité : Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux et du choix des paramètres estimés	320

B.4.6	Cas bruité : Estimation de la température des enroulements selon le régime	321
C	Publications	325
	Bibliographie	327

Table des figures

1.1	Vues transversales d'une MSAP et de son rotor	2
1.2	Obtention du même champ tournant \vec{B} dans trois systèmes différents	4
1.3	Circuit équivalent d'une phase de la MSAP	6
1.4	Principe de la commande vectorielle de la MSAP	11
1.5	Illustration du problème d'optimisation minimisant les pertes Joule	13
1.6	Apport du contrôle adaptatif sur les performances - moteur à 120°C	17
1.7	Gestion des dépassements de couple par approche heuristique	19
1.8	Apport de la connaissance de la température sur les performances en régime dynamique	20
1.9	Résistivité du cuivre en fonction de la température	23
1.10	Schéma récapitulatif : Modélisation, Estimation, Contrôle, Supervision	25
2.1	Amplitudes des courant et tension en fonction du régime et du couple	36
2.2	Phases des signaux de tension et de courant et déphasage entre eux...	36
2.3	Effet d'une erreur de position sur les performances - Bus électrique	45
2.4	Effet d'un retard sur les performances - Bus électrique	45
3.1	Séparation des paliers - exemple à 4000 tr/min	51
3.2	Coût et paramètres identifiés en fonction du déphasage à 4000 tr/min	53
3.3	Paramètres identifiés en fonction du régime	54
3.4	Exemple de caractérisation du bruit sur la tension y_{u_α} à 1000 tr/min	57
3.5	Matrice de corrélation des bruits sur les courants et tensions dans le repère (d, q)	59
3.6	Distributions des paramètres identifiés à 4000 tr/min, du fait du bruit sur les signaux de courant et tension	61
3.7	Intervalles de confiance à 95% des paramètres identifiés en fonction du régime du fait du bruit sur les signaux de courant et tension	65
4.1	Erreurs d'estimation pour des erreurs de 1% sur résistance et inductance	98

4.2	Erreurs d'estimation en fonction du régime et du couple	99
4.3	Erreurs d'estimation en fonction des erreurs sur résistance et inductance	100
4.4	Erreurs d'estimation pour 1% d'erreur sur les amplitudes des signaux . .	103
4.5	Erreurs d'estimation en fonction du régime et du couple	104
5.1	Transformation de l'observateur pour son adaptation au modèle réaliste	114
5.2	Erreur relative résultant de l'approximation de $y_u^T i$ par $y_u^T y_i$	116
5.3	Erreur relative résultant de l'approximation de $y_i^T u$ par $y_i^T y_u$	117
5.4	Erreur relative résultant de l'approximation de $ i ^2$ par $ y_i ^2$	117
5.5	Comparaison des erreurs relatives résultant des trois approximations . .	118
5.6	Erreurs d'estimation de $x...$	121
5.7	Adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste : différents cas. . .	123
5.8	Impact de l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste	124
5.9	Impact de la méthode de transformation des équations - D1=1, D2=1 .	125
5.10	Impact de la transformation des équations - D1=1, D2=1 - Sans bruit .	127
5.11	Impact de la transformation des équations - D1=0, D2=0 - Sans bruit .	127
5.12	Impact de la transformation des équations - D1=0, D2=0 - Avec bruit .	128
5.13	Impact de la déconvolution en entrée - M=1, D2=1 - Sans bruit	129
5.14	Impact de la déconvolution en entrée - M=0, D2=0 - Sans bruit	129
5.15	Impact de la déconvolution en entrée - M=0, D2=0 - Avec bruit	130
5.16	Impact de la déconvolution en sortie - M=1, D1=1 - Sans bruit	130
5.17	Impact de la déconvolution en sortie - M=0, D1=0 - Sans bruit	131
5.18	Impact de la déconvolution en sortie - M=0, D1=0 - Avec bruit	131
5.19	Comparaison pôle(s) réels/complexe - M=1, D1=1, D2=1 - Sans bruit .	132
6.1	Valeur de la borne b_{proba} en fonction du régime et extrapolation	144
6.2	Etude du domaine de validité de l'approximation	152
6.3	Coût par composante et coût partiel pour différents régimes et pôles . .	161
6.4	Exemple de minimisation sur grille de J à 4000 tr/min	162
6.5	Pôles optimaux λ_{opt} et coût associé $J(\lambda_{opt})$ en fonction du régime	163
6.6	Vérification de la norme pour validation de l'approximation	163
6.7	Coût J en fonction du régime réel et du régime auquel sont choisis les pôles optimaux	165
6.8	Erreurs de flux et de position en fonction des pôles - 1000 tr/min	168
6.9	Erreurs minimales de flux et de position et erreurs associées	171
6.10	Impact du régime d'optimisation des pôles en fonction du régime	174

6.11	Rapport des erreurs dues au bruit sur les tensions sur celles dues au bruit sur les courants - 1000 tr/min	176
6.12	Dépendance des erreurs d'estimation aux pôles due au modèle réaliste .	178
6.13	Un histogramme à chaque instant du profil - Exemple : erreur de position	179
6.14	Déformation de l'histogramme d'erreur de position au cours du temps .	180
6.15	Erreur relative d'estimation du flux sur le profil mixte	182
6.16	Erreur d'estimation de la position sur le profil mixte	183
6.17	Erreurs d'estimation sur le profil Bas régime - 2 pôles \mathbb{R}	184
6.18	Erreurs d'estimation sur le profil Haut régime - 2 pôles \mathbb{R}	186
6.19	Erreurs d'estimation sur le profil Pente - 2 pôles \mathbb{R}	187
6.20	Utilisation de l'amplitude de la tension pour la sélection de l'observateur	190
6.21	Mise en œuvre de l'alternance des observateurs - estimation du flux . . .	191
6.22	Mise en œuvre de l'alternance des observateurs - estimation de la position	192
7.1	Allure des régime et couple et test d'observabilité	221
7.2	Estimation de la résistance en fonction de l'allure des régime et couple .	223
7.3	Impact du facteur d'oubli sur l'estimation de la résistance et du flux . .	225
7.4	Impact de la méthode et du nombre de filtres utilisés	226
7.5	Impact du nombre de paramètres estimés	228
7.6	Observateur de Kreisselmeier cas bruité : Monte-Carlo sur profil mixte .	234
7.7	Constantes de temps inconnues et estimées - Cas sans bruit	237
7.8	Constantes de temps inconnues et estimées - Cas avec bruit	238
8.1	Banc SMILE 1.0	243
8.2	dSPACE MicroAutoBox	244
8.3	Bancs forte puissance et haute vitesse	246
8.4	Banc SMILE - Luenberger - Estimation du flux et apport de τ_u/τ_i . . .	250
8.5	Banc SMILE - Luenberger - Estimation de la position et apport de τ_u/τ_i	251
8.6	Banc SMILE - Luenberger - Influence de l'utilisation de la déconvolution...	252
8.7	Banc SMILE - Kreisselmeier - Estimation de R, L et ϕ simultanément .	255
8.8	Banc SMILE - Kreisselmeier - Estimations séparées et apport de τ_u/τ_i .	256
8.9	Banc SMILE - Kreisselmeier - Influence des paramètres estimés...	257
8.10	Banc forte puissance - Apport de la prise en compte de τ_u et τ_i	259
8.11	Banc forte puissance - Influence de l'utilisation de la déconvolution en complément de la transformation des équations	260
8.12	Banc forte puissance - Alternance entre pôles réglés pour BR et HR . .	261
8.13	Banc haute vitesse - Estimation du flux à deux températures différentes	263

B.1	Profil de régime et sélection de l'observateur	307
B.2	Comparaison des estimations avec contrôle en boucle ouverte ou fermée	308
B.3	Estimation de la température des aimants et robustesse à la variation de la résistance	311
B.4	Impact de l'adaptation du contrôle aux variations du flux	312
B.5	Estimation de la température des aimants et robustesse à la variation de la résistance	313
B.6	Impact de l'adaptation du contrôle aux variations de flux	314
B.7	Estimation de la température des aimants à bas et haut régimes	315
B.8	Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance	316
B.9	Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux	318
B.10	Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance	319
B.11	Estimation de la température des aimants à bas et haut régimes	320
B.12	Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux	322
B.13	Estimation de la température des enroulements à bas et haut régimes .	323

Liste des tableaux

2.1	Récapitulatif des différents modèles	46
3.1	Ecart-types des bruits sur les différents signaux dans le repère (α, β)	58
3.2	Rapport bruit sur signal en fonction du régime (tensions)	58
3.3	Ecart-types des bruits sur les différents signaux dans le repère (d, q)	59
3.4	Valeurs moyennes des paramètres utilisées comme références	62
3.5	Ecart-types et biais de la résistance identifiée	62
3.6	Ecart-types et biais du flux identifié	62
3.7	Ecart-types et biais de l'inductance directe identifiée	63
3.8	Ecart-types et biais de l'inductance en quadrature identifiée	63
4.1	Sensibilités des flux et position estimés aux résistance et inductance	96
4.2	AN - Erreurs d'estimation pour des erreurs de 1% sur R et L	97
4.3	Sensibilités des flux et position estimés aux amplitudes des signaux	102
4.4	AN - Erreurs d'estimation pour des erreurs de 1% sur U et I	102
5.1	Index des huit combinaisons possibles	126
5.2	Inventaire des figures présentées	126
6.1	Pôles optimaux et coûts associés	162
6.2	Erreurs minimales et pôles associés dans le cas à deux pôles réels	169
6.3	Erreurs minimales et pôles associés dans le cas à un pôle complexe	169
6.4	Deux pôles réels - Erreur de flux [%] suivant le régime d'optimisation	173
6.5	Deux pôles réels - Erreur de position [°] suivant le régime d'optimisation	173
6.6	Un pôle complexe - Erreur de flux [%] suivant le régime d'optimisation	173
6.7	Un pôle complexe - Erreur de position [°] suivant le régime d'optimisation	175
6.8	Jeux de pôles utilisés pour l'analyse de Monte-Carlo	175
6.9	Ecart-types des bruits de mesure choisis pour l'analyse de Monte-Carlo	178
6.10	Profil pente - Complémentarité des deux jeux de pôles	188

7.1	Observabilité des paramètres dans les différents cas quand les courants i_d et i_q sont constants	203
7.2	Impact sur l'estimation des approximations sur les paramètres supposés connus - 1000 tr/min - 1Nm	230
7.3	Impact sur l'estimation d'une erreur de position de 1° - 1000 tr/min - 1Nm	231
7.4	Observateur de Kreisselmeier - (ξ, ω_0) optimaux selon régime et paramètre	232
8.1	Paramètres de la MSAP eMot du banc SMILE 1.0	243
8.2	Paramètres de la MSDE eMot du banc SMILE 2.0	244
8.3	Paramètres de la MSAP eMot du banc forte puissance	245
8.4	Paramètres de la MSAP eMot du banc haute vitesse	246

Acronymes et notations

Acronymes

BR	Bas Régime
EMN	Erreur Moyenne Normalisée
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
FAR	Filtre Anti-Repliement
FPGA	<i>Field-Programmable Gate Array</i>
HiL	<i>Hardware-in-the-Loop</i>
HR	Haut Régime
IFPEN	IFP Energies Nouvelles
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i>
MLI	Modulation de Largeur d'Impulsion
MSAP	Machine Synchrone à Aimants Permanents
MSDE	Machine Synchrone à Double Excitation
MTPA	<i>Maximum Torque Per Ampere</i>
PI	Proportionnel Intégral
SMILE	<i>Scaled-down Motor In-the-Loop for Electrified vehicles</i>

Indices, exposants et autres notations

$X_{ij} = (X_i, X_j)^T$	Signal X exprimé dans le repère diphasé (i, j)
$X_{ijk} = (X_i, X_j, X_k)^T$	Signal X exprimé dans le repère triphasé (i, j, k)
$X = X_{\Re} + \Im X_{\Im}$	Notation complexe de X
y_X	Mesure du signal X
\check{X}	Paramètre X identifié hors ligne
\hat{X}	Paramètre X estimé en ligne par un observateur
X^*	Valeur consigne de X

X_a	Valeur approximative connue du paramètre X
X_{eq}	Relatif à un point d'équilibre
X_p	Relatif à la solution particulière
X_0	Relatif au cas non bruité
$\langle X \rangle$	Valeur moyenne de X
σ_X ou $\sigma(X)$	Ecart-type de la distribution de X
$\mathbf{b}(X)$	Biais sur X
$\mathfrak{E}[X]$	Espérance de X

Signaux et paramètres électriques

i_{abc}	Courants triphasés dans les phases a , b et c
$i_{\alpha\beta}$	Courants diphasés dans le repère (α, β)
i_{dq}	Courants diphasés dans le repère (d, q)
u_{abc}	Tensions triphasées appliquées aux phases a , b et c
$u_{\alpha\beta}$	Tensions diphasées dans le repère (α, β)
u_{dq}	Tensions diphasées dans le repère (d, q)
$\Psi_{abc} = \psi_{abc}$	Flux magnétiques totaux dans les phases a , b et c
$\Psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}$	Flux magnétiques totaux dans le repère (α, β)
$\Psi_{dq} = \psi_{dq}$	Flux magnétiques totaux dans le repère (d, q)
$\Phi_{abc} = \psi_{m_{abc}}$	Flux magnétiques dus aux aimants permanents dans les phases a , b et c
$\Phi_{\alpha\beta} = \psi_{m_{\alpha\beta}}$	Flux magnétiques dus aux aimants permanents dans le repère (α, β)
$\Phi_{dq} = \psi_{m_{dq}}$	Flux magnétiques dus aux aimants permanents dans le repère (d, q)
$\psi_{s_{abc}}$	Flux magnétiques dus aux enroulements dans les phases a , b et c
$\psi_{s_{\alpha\beta}}$	Flux magnétiques dus aux enroulements dans le repère (α, β)
$\psi_{s_{dq}}$	Flux magnétiques dus aux enroulements dans le repère (d, q)
$\phi = \Phi = \psi_m $	Intensité du flux magnétique dû aux aimants permanents ou "flux"
R	Résistance statorique
L	Inductance statorique des machines à pôles lisses
L_d	Inductance directe
L_q	Inductance en quadrature

Signaux et paramètres mécaniques

p	Nombre de paires de pôles de la machine électrique
θ_m	Angle mécanique de position du rotor, position mécanique du rotor
$\theta = p\theta_m$	Angle électrique de position du rotor, position électrique du rotor
ω_m	Vitesse mécanique de rotation de l'arbre du rotor, régime mécanique
$\omega = p\omega_m$	Vitesse électrique de rotation de l'arbre du rotor, régime électrique
τ	Couple électromagnétique fourni par la machine
τ_L	Couple de charge
J_m	Moment d'inertie (machine + charge)

Variables thermiques

T_S	Température des enroulements du stator
T_R	Température des aimants permanents du rotor
$\Delta T_S = \Delta T_{enroul.}$	Variation de température des enroulements du stator
$\Delta T_R = \Delta T_{aimants}$	Variation de température des aimants permanents du rotor

Notations relatives à la solution particulière

U	Amplitude des tensions
I	Amplitude des courants
φ_u	Phase des tensions en repère diphasé
φ_i	Phase des courants en repère diphasé
$\Delta\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$	Déphasage entre signaux de courant et de tension
v_u	Tensions normalisées dans le repère (α, β)
v_i	Courants normalisés dans le repère (α, β)

Notations relatives à la modélisation réaliste

τ_u	Constante de temps du filtre passe-bas sur les tensions exactes
τ_i	Constante de temps du filtre passe-bas sur les courants exacts
ϵ	Déphasage entre signaux exacts et mesurés de courant et tension

Notations relatives au bruit de mesure

w_u	Bruit sur les signaux de tension
w_i	Bruit sur les signaux de courant

B_u	Amplitude d'une composante fréquentielle du bruit sur les tensions
B_i	Amplitude d'une composante fréquentielle du bruit sur les courants
ω_u	Pulsation d'une composante fréquentielle du bruit sur les tensions
ω_i	Pulsation d'une composante fréquentielle du bruit sur les courants
φ_{b_u}	Phase d'une composante fréquentielle du bruit sur les tensions
φ_{b_i}	Phase d'une composante fréquentielle du bruit sur les courants

Matrices

Matrice de Concordia	\mathcal{C}
Matrice de rotation d'angle θ	$\mathcal{R}(\theta)$
Matrice de Park d'angle θ	$\mathcal{P}(\theta)$
Matrice identité	\mathcal{I}

Enfin, on définit la matrice suivante :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Remarque : Les vitesses exprimées en tr/min sont des vitesses mécaniques.

Préambule

Ce préambule a pour but de donner un rapide aperçu du déroulement de la thèse, lequel donnera au lecteur quelques éclaircissements sur l'orientation de celle-ci. Il y est notamment question des raisons expérimentales ayant conduit au choix de la modélisation retenue.

Si l'objet de cette thèse est le développement d'observateurs de paramètres, c'est un problème de modélisation qui a occupé le début de celle-ci. En effet, de premières tentatives expérimentales d'estimation de paramètres, basées sur la modélisation usuelle "parfaite" de la machine électrique, nous ont vite fait apparaître les limites de cette modélisation quant à son adéquation avec notre banc d'essais. Une forte dépendance au régime des estimations notamment, menant à des valeurs estimées aberrantes à haut régime. Les observateurs devant être construits à partir d'une modélisation réaliste de la machine électrique, une première phase a été consacrée à la recherche d'un meilleur modèle. Trois différents raffinements de la modélisation ont alors été testés, dont un seul a finalement été retenu. En parallèle, afin de pouvoir comparer le comportement des différents modèles, des algorithmes d'identification ont été développés¹.

La première tentative, traduisant notre mauvaise connaissance de la chaîne d'acquisition à notre disposition, nous vit faire l'hypothèse de l'existence dans celle-ci de filtres déphasant les signaux de courant et de tension. Un nouveau paramètre, modélisant le déphasage, fut alors introduit, et l'hypothèse retenue face à la grande amélioration des estimations. Cependant subsistait toujours une dépendance au régime, certes moindre, ne trouvant son explication dans ce déphasage. En complément de ce dernier, définitivement retenu, nous avons testé deux autres voies d'amélioration potentielle afin d'éliminer la dépendance résiduelle au régime.

La deuxième tentative fut alors de prendre en compte les pertes fer dans le modèle dont on sait qu'elles sont dépendantes du régime. En nous appuyant sur [48], un tel modèle fut établi, nécessitant à son tour l'introduction d'un paramètre supplémentaire, une conductance modélisant les pertes fer. Celle-ci engendrant de fortes non linéarités

1. L'algorithme finalement retenu est présenté au chapitre 3.

dans les équations, ce fut l'occasion de mettre au point un algorithme d'identification basé sur une méthode de résolution par continuation [44]². Cependant, la prise en compte des pertes fer s'avéra accentuer la dépendance au régime et l'hypothèse fut rejetée.

Notre troisième et dernière tentative fut de prendre en compte la saturation magnétique. Pour modéliser ce phénomène faisant disparaître la linéarité entre flux et courants pour des valeurs élevées de ces derniers et du coup dépendre des courants la valeur des inductances, nous avons utilisé le modèle présenté dans [22]. Malheureusement, la conclusion fut la même qu'avec les pertes fer, la modélisation de la saturation magnétique tendant à augmenter la dépendance au régime. L'hypothèse fut rejetée également.

Cependant, parallèlement à ces tentatives, des doutes subsistaient quant à la qualité de la chaîne d'acquisition du banc. Une attente assez longue a malheureusement été nécessaire avant de pouvoir nous procurer un autre moyen expérimental pour vérifier ces doutes. Et c'est finalement grâce à une centrale d'acquisition haute performance, utilisée à haute fréquence et disposant d'un filtre anti-repliement réglable, qu'une campagne d'essais nous a permis de mettre en lumière les faiblesses de notre chaîne d'acquisition dédiée, nos résultats pâtissant en particulier de repliement venant dégrader les acquisitions de tension. Le modèle prenant en compte uniquement le déphasage fut alors validé à l'aide de la centrale. De ce fait, nous avons conservé ce modèle, prenant en compte le déphasage³ et ignorant les pertes fer et la saturation magnétique. Ce sont ces raisons historiques empiriques, liées à notre chaîne d'acquisition initiale, qui nous ont donc poussé à ne pas tenir compte de la saturation magnétique et des pertes fer dans notre modèle, leurs impacts, s'ils existaient, étant négligeables en comparaison des lourdes erreurs causées par l'acquisition.

En conséquence, un nouveau banc a par la suite été mis en place, avec une nouvelle chaîne d'acquisition plus "propre", disposant notamment de filtres anti-repliement. Celle-ci faisant intervenir une dSPACE - MicroAutoBox, cela a été l'occasion de s'exercer à la programmation d'un circuit logique programmable FPGA. Par la même occasion, la machine électrique a été remplacée. Celle-ci présentant des paramètres physiques différents de ceux de la première machine, les résultats en simulation, antérieurs à la mise en place du nouveau banc, utilisent les caractéristiques de l'ancienne machine, tandis que les résultats expérimentaux ont été obtenus avec la nouvelle.

2. Une telle méthode consiste en la résolution d'une équation complexe en partant de celle d'une équation simple, puis en suivant de proche en proche la solution jusqu'à celle de l'équation complexe.

3. Plus tard, le modèle sera amélioré en considérant des filtres passe-bas (produisant en première approximation un déphasage) plutôt qu'un simple déphasage.

Entre temps, deux observateurs, dit de Luenberger et de Kreisselmeier, ont été développés et étudiés de manière théorique et en simulation. Toutefois, le temps passé sur chacun d'entre eux est très inégal. Si les deux observateurs ont dans un premier temps été étudiés en parallèle, nous nous sommes, après avoir constaté le fonctionnement correct de l'observateur de Kreisselemeier, bien plus consacré à l'étude de l'observateur de Luenberger et n'avons du coup pas disposé de beaucoup de temps pour revenir sur l'optimisation de l'observateur de Kreisselmeier. Ce choix de favoriser l'étude de l'observateur de Luenberger se justifie par l'utilisation par l'observateur de Kreisselmeier de méthodes relativement usuelles, sur lesquelles beaucoup d'études ont déjà été réalisées, les difficultés se situant du coup essentiellement dans l'implémentation et le réglage, tandis que l'observateur de Luenberger présente des problématiques moins conventionnelles.

Introduction générale

Contexte, motivations et objectifs

En atteignant les 105,85 km/h, la "Jamais contente", motorisée par deux machines électriques, devient le 29 avril 1899 la première voiture à franchir la barre symbolique des 100 km/h. Cette performance témoigne de l'essor des véhicules électriques à la fin du XIXe siècle, quelques décennies après l'apparition des premiers prototypes dans les années 1830. C'est également en 1899 que la première automobile hybride voit le jour, mais cette technologie ne rencontrera alors jamais le succès et disparaîtra avec l'arrivée de la première guerre mondiale. Le développement de la voiture à essence aura également raison de la voiture électrique et il faudra attendre la fin du XXe siècle pour voir réapparaître ces technologies avec le lancement en 1997 de la première version de la Toyota Prius, voiture hybride combinant un moteur thermique classique et deux moteurs électriques, mais consommant uniquement de l'essence et avec un roulage en électrique pur restant encore marginal.

Motivés par les progrès techniques récents, par l'augmentation du prix du pétrole, combiné au coût relativement faible de l'électricité, et par le développement des préoccupations environnementales, se traduisant par des normes de plus en plus strictes d'émission de CO_2 , plusieurs constructeurs ont depuis emboîté le pas à Toyota, axant leurs recherches sur les hybrides de première génération ou, plus récemment, sur les véhicules tout électriques (lancement de la Nissan LEAF en décembre 2010) ou hybrides rechargeables (lancements de la Chevrolet Volt en décembre 2010, de la Prius III en version hybride rechargeable à l'été 2012). Ces derniers, contrairement aux hybrides de première génération, utilisent également l'électricité en provenance du réseau électrique comme source d'énergie primaire.

Si le déploiement des infrastructures de rechargement, nécessaires à ces véhicules hybrides rechargeables comme aux véhicules tout électriques, est une des clés de la réussite du développement du parc automobile rechargeable, pour atteindre par exemple en France l'objectif fixé en octobre 2009 par le gouvernement de deux millions de

véhicules rechargeables en circulation en 2020, ce n'est pas la seule. Le coût actuellement supérieur à l'achat de tels véhicules à celui des véhicules essence ou diesel et l'autonomie encore limitée des batteries des véhicules tout électriques sont en effet deux freins majeurs.

Afin de compenser ce surcoût et d'augmenter l'autonomie des batteries par une amélioration du rendement du moteur, on attend des systèmes de motorisation de ces véhicules "verts", et notamment des machines électriques, un fonctionnement aussi proche que possible de leurs performances optimales. Ceci passe par la commande de ces machines par des algorithmes de contrôle performants. En embarquant de telles machines au sein d'un véhicule, on sort toutefois du cadre industriel traditionnel, où les machines ont un fort taux d'utilisation, et ce à un régime quasi-constant et dans leur plage nominale de fonctionnement. Au contraire, embarquées, les machines doivent répondre aux sollicitations constamment changeantes, plus ou moins brèves et intenses, du conducteur, et parfois même, temporairement, être autorisées à sortir de leur plage de fonctionnement. De plus, il n'est plus question de réguler le régime mais le couple, et ce sans mesure directe. Afin, dans ce contexte particulier, de fournir à tout instant le couple demandé par le conducteur, tout en minimisant les pertes, maintenant maximales les performances accessibles et préservant l'intégrité de la machine, deux principaux objectifs, directement ou indirectement liés à la température interne du moteur, sont visés par cette thèse. Dans celle-ci, les travaux sont appliqués à une machine synchrone à aimants permanents (MSAP), technologie en plein essor depuis quelques années, sa grande puissance massique notamment, comparativement à celle des machines asynchrones, en faisant une bonne candidate pour les applications automobiles.

Le premier objectif vise à diagnostiquer le fonctionnement de la machine et à améliorer sa disponibilité à l'aide d'une surveillance thermique. Organe qui coûte cher sous le capot, on souhaite utiliser la machine électrique le plus souvent possible, au maximum de son potentiel, mais sans risque de détérioration, i.e. en respectant une contrainte de température maximale. Une surchauffe du moteur peut en effet entraîner une démagnétisation irréversible des aimants ou encore la fonte des isolants entre les fils. Afin de n'être ni trop prudent ni pas assez quant à cette contrainte thermique, la connaissance en permanence de la température interne de celle-ci semble être la solution évidente, le fonctionnement de la machine, lors des phases transitoires notamment, pouvant alors lui être adaptée.

Si le premier objectif a essentiellement pour but d'améliorer les performances en transitoire de la machine, le second concerne quant à lui l'amélioration de ses performances statiques en cherchant à assurer le meilleur contrôle en couple possible, i.e. ne dégradant pas les puissance et couple fournis. Plus précisément, le contrôle en couple

est réalisé à l'aide d'algorithmes faisant intervenir certains paramètres physiques de la machine, parmi lesquels deux - l'intensité du flux des aimants et la résistance des enroulements - dépendent de la température. Ces deux paramètres sont donc amenés à subir des variations au cours d'un trajet et, faire abstraction de celles-ci entraînant une dégradation des performances, une connaissance en ligne de ces paramètres et de leurs évolutions, afin de leur adapter le contrôle en ligne, semble nécessaire.

Il apparaît que ces objectifs sont tous deux liés à la connaissance en ligne de la température interne de la machine électrique, le premier directement, le second indirectement *via* la connaissance des paramètres en dépendant. Des relations simples existant entre variations de température et variations des paramètres, la connaissance directe en ligne de la température permettrait de combiner les deux objectifs. Cependant, l'utilisation d'un capteur interne de température dans un contexte véhicule n'étant pas viable, les deux objectifs sont à l'inverse réunis par la connaissance en ligne des paramètres dépendants de la température. Cette connaissance peut ainsi être directement utilisée en vue du second objectif et préalablement convertie en variations de température en vue du premier.

Dans cette thèse, nous cherchons donc à estimer en ligne les deux paramètres physiques du moteur dépendants de la température, l'intensité du flux des aimants et la résistance des bobinages. A cette fin, il s'agit de concevoir des observateurs de ces deux paramètres, basés sur une modélisation réaliste de la machine, et n'utilisant que les informations disponibles, à savoir celles issues des capteurs électriques existants de tension et courant, voire d'un capteur de position. De plus, afin d'être robuste aux paramètres liés à la charge mécanique (inertie, friction, couple de charge), souvent dynamiquement changeants ou inconnus, nous faisons le choix de n'utiliser que les équations électriques de la machine, nous passant donc de l'équation mécanique. D'autre part, l'estimation de la position, qui fait par ailleurs l'objet de nombreuses recherches spécifiques, n'est certes pas l'objectif premier de cette thèse, mais si celle-ci est accessible simultanément avec l'estimation d'un paramètre dépendant de la température, il serait dommage de s'en priver. Plus de détails sur l'organisation du manuscrit sont désormais donnés.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit s'organise en huit chapitres. Le premier présente la machine synchrone à aimants permanents et revient sur les enjeux de cette thèse et la démarche adoptée. Le second est consacré à l'établissement d'un modèle plus réaliste de la machine, le troisième chapitre étant alors l'écrin du développement et de la mise en œuvre expérimentale d'un algorithme d'identification hors ligne des paramètres de la machine, visant entre autres à valider ce nouveau modèle. Les chapitres 4 à 8 enfin sont consacrés au développement, à l'étude et à l'implémentation de deux observateurs de paramètres. Le premier (chapitres 4 à 6), dit de Luenberger, ne nécessite pas d'information de position et estime en ligne le flux et la position. Au développement de l'observateur dans le cas idéal (chapitre 4) succèdent son adaptation au modèle réaliste (chapitre 5) et l'étude de l'impact du bruit de mesure (chapitre 6). Le chapitre 7 porte lui sur le second observateur, dit de Kreisselmeier, nécessitant une information de position et estimant potentiellement le flux, la résistance et l'inductance de la machine. Enfin, le chapitre 8 est consacré à la mise en œuvre expérimentale de ces deux observateurs.

Chapitre 1 : Modélisation de la MSAP et problématique de l'estimation en ligne de sa température

Le premier chapitre s'intéresse tout d'abord au principe de fonctionnement d'une machine synchrone à aimants permanents et à sa modélisation classique. Le principe d'un contrôle en couple de la machine est ensuite présenté. Celui-ci met notamment en évidence l'importance de la bonne connaissance en ligne des paramètres du moteur dépendants de la température. La suite de ce chapitre revient alors plus en détails sur ce second objectif lié à l'amélioration des performances statiques de la machine, ainsi que sur le premier objectif relatif à l'amélioration des performances en transitoire. Enfin, la manière d'estimer la température est discutée et la démarche adoptée présentée.

Chapitre 2 : Exploitation et amélioration de la modélisation classique

Le deuxième chapitre porte sur la modélisation de la machine. Dans un premier temps, des propriétés de la modélisation classique de la machine sont étudiées et font notamment voir le jour à une solution particulière qui nous sera très utile par la suite à de nombreuses reprises. Dans un second temps, la modélisation classique présentant des limites quand il s'agit de l'utiliser expérimentalement, un modèle plus réaliste est établi, faisant intervenir deux nouveaux paramètres par la modélisation de filtres entre les signaux exacts et les signaux mesurés. Enfin, une version approchée de ce modèle réaliste

est également établie, se concentrant sur le déphasage apporté par les filtres. Cette version approchée, développée pour des raisons historiques, sera utilisée uniquement dans le chapitre 3.

Chapitre 3 : Identification hors-ligne des paramètres physiques du moteur et du déphasage

Le troisième chapitre est consacré à l'identification hors-ligne des paramètres physiques du moteur et du déphasage introduit par la modélisation réaliste du chapitre 2. A cette fin, un algorithme d'identification reposant sur une méthode de moindres carrés est mis au point et mis en œuvre expérimentalement. Si cet algorithme permet non seulement de diagnostiquer à un instant donné l'état du moteur en déterminant la valeur de ses paramètres, il est également précieux pour valider la modélisation réaliste et comparer sa vraisemblance à celle de la modélisation classique. Enfin, une étude de robustesse de l'algorithme aux bruits de mesure sur les signaux de courant et tension est menée par analyse de Monte-Carlo.

Après que les chapitres 2 et 3 ont permis d'établir et de valider un modèle réaliste du moteur, les chapitres 4 à 8 s'intéressent à la conception, à l'étude et à la mise en œuvre de deux observateurs basés sur cette modélisation. Ces deux observateurs correspondent à deux situations bien différentes. Si pour l'observateur de Luenberger, présenté aux chapitres 4 à 6, la position est supposée inconnue, à l'inverse elle est supposée mesurée et connue pour l'observateur de Kreisselmeier, lequel fait l'objet du chapitre 7. Chacun des deux observateurs est dans un premier temps développé à partir de la modélisation classique avant d'être adapté à la modélisation réaliste.

Ainsi, les chapitres 4 à 6 sont consacrés à l'observateur non linéaire de Luenberger. Cet observateur, robuste aux paramètres relatifs à la charge mécanique, permet, à vitesse non nulle, d'estimer l'intensité du flux des aimants et la position du rotor, à l'aide uniquement des signaux mesurés de courant et tension et de la connaissance de valeurs approchées de la résistance et de l'inductance. L'étude est divisée en trois chapitres. Le chapitre 4 introduit l'observateur basé sur la modélisation classique, le chapitre 5 l'adapte à la modélisation réaliste et le chapitre 6 étudie l'impact du bruit de mesure sur l'observateur. Par ailleurs, des résultats expérimentaux sont présentés au chapitre 8.

Chapitre 4 : Observation sans mesure de position : Observateur non linéaire de Luenberger - Cas idéal

Le quatrième chapitre présente l'observateur non linéaire de Luenberger dans le cas idéal où les signaux mesurés de courant et tension sont égaux aux signaux exacts. De ce fait, l'observateur est, dans ce chapitre, construit à partir de la modélisation classique de la machine électrique. Dans un premier temps, aux exposés du sous-système issu de la loi de Faraday sur lequel est basé l'observateur et du problème d'estimation succède l'établissement de l'observabilité instantanée du flux et de la position à vitesse non nulle. L'observateur *sensorless*, i.e. sans utilisation de capteur de position, de Luenberger est alors construit, puis certaines de ses propriétés sont étudiées pour la solution particulière établie au chapitre 2. Enfin, une étude de robustesse de l'observateur à une mauvaise connaissance de la résistance et de l'inductance clôt le chapitre.

Chapitre 5 : Observateur non linéaire de Luenberger - Cas réaliste

Le cinquième chapitre adapte l'observateur non linéaire de Luenberger, présenté au chapitre 4, au cas réaliste, i.e. pour lequel les signaux mesurés de courant et tension diffèrent des signaux exacts. Après avoir constaté que, si l'observabilité n'est pas remise en cause par l'adaptation, ce n'est en revanche pas le cas de la mesurabilité, des solutions sont proposées. Ainsi, des méthodes de transformation des équations de l'observateur puis de reconstruction par déconvolution des signaux exacts à partir des signaux mesurés sont étudiées. Les apports respectifs des différentes solutions sont enfin comparés en simulation.

Chapitre 6 : Observateur non linéaire de Luenberger - Impact du bruit de mesure et choix des pôles

Le sixième chapitre étudie l'impact du bruit de mesure sur les signaux de courant et tension sur les performances de l'observateur, ainsi que le rôle des pôles, i.e. le degré de liberté du réglage de l'observateur, dans la minimisation des biais d'estimation. Le chapitre est essentiellement constitué de deux parties : une étude théorique et une étude en simulation. L'étude théorique vise à résoudre les équations de l'observateur en présence de bruit après avoir défini un modèle de bruit. Elle est menée pour la solution particulière et, les calculs n'étant pas simples, dans le cadre de la modélisation classique, seul le bruit de mesure étant ainsi pris en compte et non pas le bruit de modèle. D'autres hypothèses simplificatrices sont également effectuées, l'étude se concentrant alors notamment sur l'impact du bruit sur les tensions sur l'estimation du flux. La plupart des calculs de cette étude sont détaillés dans l'annexe A. En revanche, l'étude

en simulation, moins limitante, est réalisée dans le cadre de la modélisation réaliste et sans hypothèse supplémentaire. Cette étude se décompose en deux étapes : une minimisation des erreurs sur des grilles de pôles à régimes et bruits fixés, puis une analyse de Monte-Carlo, sur des profils de régime variable et avec des bruits différents d'une simulation à l'autre, permettant de valider les pôles optimaux déterminés par les grilles.

Chapitre 7 : Observation avec mesure de position : Observateur de Kreisselmeier

Le septième chapitre est consacré à l'observation avec mesure de position et à l'observateur de Kreisselmeier développé dans ce but. A partir du modèle de la machine électrique dénué, comme pour l'observateur de Luenberger, de sa partie mécanique, rendant l'observation robuste aux paramètres relatifs à la charge mécanique, on cherche à estimer trois paramètres physiques du moteur, à savoir la résistance des enroulements, l'intensité du flux des aimants et l'inductance. Dans un premier temps, l'observabilité de ces trois paramètres est étudiée et ne permet pas d'établir de condition nécessaire et suffisante simple d'observabilité. Une condition nécessaire, presque toujours suffisante en pratique, est toutefois exposée et peut être complétée d'un test d'observabilité fournissant une condition suffisante. Afin d'exploiter les différents cas d'observabilité, l'observateur de Kreisselmeier est alors introduit, d'abord dans le cas idéal puis adapté au cas réaliste. Selon les situations, il permet d'observer tout ou partie de l'état. Une étude en simulation de l'observateur termine le chapitre.

Chapitre 8 : Mise en œuvre expérimentale des deux observateurs

Le huitième chapitre regroupe les résultats expérimentaux obtenus avec chacun des deux observateurs. Au préalable, les bancs électriques, et en particulier le banc SMILE, ayant servi de support à la mise en œuvre expérimentale sont présentés. Des résultats complémentaires en simulation, notamment d'estimation de variations de température, sont exposés dans l'annexe B.

Chapitre 1

Modélisation de la MSAP et problématique de l'estimation en ligne de sa température

Ce chapitre présente la modélisation classique d'une machine synchrone à aimants permanents et s'intéresse à la problématique de l'estimation en ligne de sa température interne. Dans un premier temps, nous présentons le principe de fonctionnement d'une telle machine (§1.1), lequel nous permet en partant de la physique d'établir les équations classiques du moteur dans deux repères fictifs différents (§1.2). S'ensuit une présentation d'un contrôle en couple de la MSAP (§1.3), laquelle met en évidence l'importance d'une bonne connaissance en ligne des paramètres dépendants de la température afin d'améliorer les performances statiques de la machine. A ce premier enjeu de la connaissance en temps réel de la température vient s'ajouter un enjeu d'amélioration des performances en transitoire (§1.4). Enfin, à un état de l'art des méthodes d'estimation en ligne de la température succède la description de la démarche d'estimation adoptée (§1.5).

1.1 Principe de fonctionnement d'une MSAP

La plupart de ce qui est explicité dans ce paragraphe ainsi que dans le suivant est plus ou moins librement inspiré de [8].

1.1.1 Structure de la machine

Une machine synchrone à aimants permanents est une machine à courant alternatif constituée d'enroulements au stator et d'aimants permanents au rotor. Le schéma 1.1(a)

donne un aperçu en vue transversale d'une telle machine avec deux enroulements au stator, séparés de 90° . Le rotor, au centre, peut adopter une multitude de structures différentes, parmi lesquelles la figure 1.1(b) présente deux exemples.

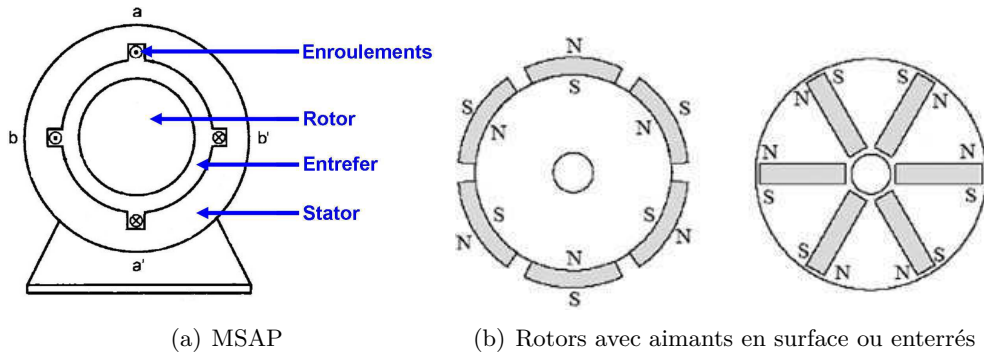


FIGURE 1.1 – Vues transversales d'une MSAP et de son rotor

Le schéma de gauche présente ainsi un rotor avec aimants en surface, tandis que celui de droite présente un rotor à aimants enterrés. La différence essentielle entre ces deux types d'architecture réside dans leur inductance. Dans le cas d'une machine à aimants en surface, la perméabilité magnétique de l'aimant étant proche de celle de l'air de l'entrefer et le fer du rotor ayant partout la même épaisseur, l'inductance est sensiblement identique quelle que soit la position du rotor relativement au stator. La machine est dite à pôles lisses. En revanche, dans le cas d'une machine à aimants enterrés, les aimants sont insérés dans le fer dont la perméabilité est bien différente. Cette saillance des pôles, i.e. cette dissymétrie, fait alors varier à chaque fraction de tour du rotor la valeur de l'inductance de chacun des enroulements statoriques. Une telle machine, dont l'inductance n'est pas invariante par rotation du rotor, est dite à pôles saillants.

La machine à laquelle nous nous intéressons est elle une machine triphasée, i.e. constituée de trois phases au stator, bobinées sinusoïdalement et séparées de 120° l'une de l'autre. Selon les cas, nous considérerons une machine à pôles lisses ou à pôles saillants. Les deux modèles seront explicités au paragraphe 1.2.

1.1.2 Fonctionnement de la machine

Le fonctionnement d'une machine synchrone à aimants permanents repose sur l'interaction entre le champ magnétique tournant \vec{B} créé par les courants injectés dans les trois phases du stator et le moment magnétique \vec{M} des aimants permanents du rotor, aligné avec l'axe du rotor. Le stator est en effet composé, dans le cas d'une machine triphasée, de trois enroulements disposés à 120 degrés l'un de l'autre dans

l'espace et parcourus par des courants triphasés i_a , i_b et i_c équilibrés, i.e. temporellement déphasés de 120° entre eux, si bien que $i_a + i_b + i_c \equiv 0$. On a ainsi $i_a = I_{tri} \sin \omega t$, $i_b = I_{tri} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$ et $i_c = I_{tri} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$, avec I_{tri} et ω l'amplitude et la pulsation des courants. Ces trois enroulements créent trois champs alternatifs dont la résultante est un champ \vec{B} de module constant tournant dans l'espace à la vitesse ω égale à la pulsation des courants.

Le pilotage de la machine s'effectue alors en contrôlant le couple $\vec{\tau}$ exercé sur le rotor par les courants des enroulements statoriques. Macroscopiquement et de manière simplifiée, ce couple moteur peut être vu comme le résultat du produit vectoriel entre le champ magnétique \vec{B} créé par le stator et le moment magnétique \vec{M} du rotor : $\vec{\tau} \approx \vec{M} \wedge \vec{B}$. Le couple moteur est donc fonction du sinus de l'angle entre \vec{M} et \vec{B} . Dans le cas d'un fonctionnement en moteur, le couple est positif si \vec{B} est en avance sur \vec{M} . En l'absence de couple résistant sur le rotor, les deux vecteurs sont colinéaires et le couple moteur nul. L'application d'un couple de charge au rotor tendant à le ralentir, \vec{M} prend alors du retard sur \vec{B} et ce décalage crée le couple moteur au rotor. Si ce couple moteur est capable de compenser exactement le couple résistant, le rotor continue à tourner en synchronisme avec le champ entraîneur \vec{B} et le décalage entre \vec{M} et \vec{B} reste constant. En revanche, en cas de variation brutale de la fréquence des courants ou du couple résistant, l'angle entre \vec{B} et \vec{M} risque de devenir supérieur à 90° , provoquant la décroissance du couple moteur et pouvant mener au décrochage de la machine. Pour éviter tout décrochage et obtenir un comportement stable de la machine, il est donc nécessaire de contrôler la position relative du champ \vec{B} par rapport à \vec{M} , les deux devant tourner à la même fréquence, dite de synchronisme. La fréquence statorique ne doit alors pas être imposée mais être la conséquence de cet asservissement. Dans notre cas, cet asservissement vise à faire suivre un couple consigne au couple moteur de la machine, comme nous le détaillerons dans le paragraphe 1.3. De plus, comme nous allons le voir, cet asservissement nécessite une information précise sur la position du rotor, laquelle peut être obtenue à l'aide d'un capteur de position précis ou bien d'un observateur de cette position, dans le cas d'un contrôle *sensorless*.

Afin de faciliter le positionnement relatif du champ \vec{B} par rapport au moment \vec{M} , i.e. par rapport à l'axe du rotor, un changement de repère préalable est judicieux.

1.1.3 Changements de repères : transformations de Concordia et de Park

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le champ tournant \vec{B} était obtenu par un système de trois enroulements disposés à 120° l'un de l'autre et parcourus par des

courants triphasés équilibrés i_a , i_b et i_c (figure 1.2(a)). Or, fictivement, on obtiendrait ce même champ, tournant à la même vitesse ω , avec un système de deux enroulements placés à 90° et parcourus par des courants sinusoïdaux i_α et i_β en quadrature temporelle, i.e. déphasés de 90° , et d'amplitude $\sqrt{\frac{3}{2}}$ fois supérieure à celle des courants triphasés : $i_\alpha = I \sin \omega t$ et $i_\beta = -I \cos \omega t$ avec $I = \sqrt{\frac{3}{2}} I_{tri}$ (figure 1.2(b)).

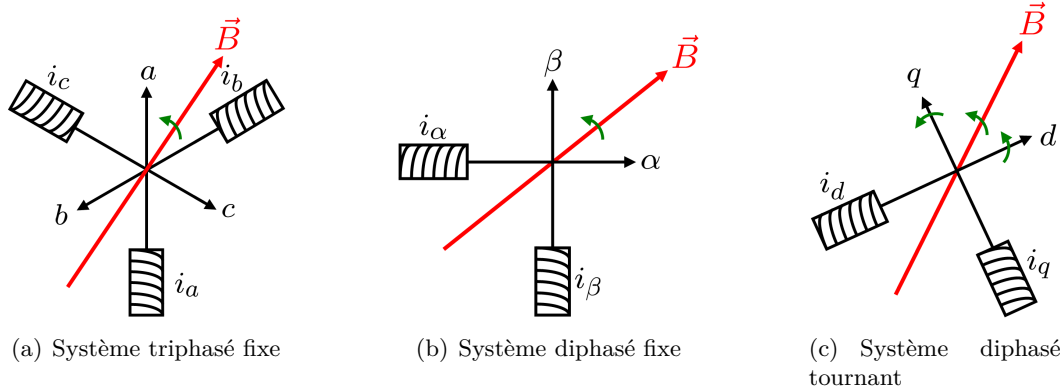


FIGURE 1.2 – Obtention du même champ tournant \vec{B} dans trois systèmes différents

Il est donc possible de passer du système triphasé fixe lié au stator (a, b, c) au système diphasé fixe lié au stator (α, β) pour générer le même champ tournant. Ceci s'effectue par la transformation dite de Concordia à l'aide de la matrice \mathcal{C} donnée par (1.1). De manière générale, tout signal $X_{abc} = (X_a \ X_b \ X_c)^T$ exprimé dans le repère (a, b, c) peut s'exprimer dans le repère (α, β) par $X_{\alpha\beta} = (X_\alpha \ X_\beta)^T = \mathcal{C}X_{abc}$. La matrice \mathcal{C}^{-1} permet le changement de repère inverse.

$$\mathcal{C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

De plus, on obtiendrait toujours ce même champ, tournant à la même vitesse ω , avec un système de deux enroulements disposés à 90° , parcourus par des courants i_d et i_q ("d" pour *direct* et "q" pour *quadrature*), et placés dans un repère (d, q), d'axe d aligné avec le moment magnétique \vec{M} du rotor et tournant en synchronisme avec lui (figure 1.2(c)). On peut donc passer du système diphasé fixe lié au stator (α, β) au système diphasé tournant lié au rotor (d, q). Ceci s'effectue par une rotation, à l'aide de la matrice \mathcal{R} donnée par (1.2), laquelle fait intervenir l'angle θ , appelé angle de Park. Cet angle devant traduire la position du rotor, on a $\theta = \omega t$. De manière générale,

tout signal $X_{\alpha\beta}$ exprimé dans le repère (α, β) peut s'exprimer dans le repère (dq) par $X_{dq} = \begin{pmatrix} X_d & X_q \end{pmatrix}^T = \mathcal{R}(\theta)X_{\alpha\beta}$.

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^{-1}(\theta) = \mathcal{R}(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Il est évidemment également possible de passer directement du repère triphasé fixe (a, b, c) au repère diphasé tournant (d, q) . Ceci s'effectue par la transformation dite de Park, à l'aide de la matrice \mathcal{P} donnée par (1.3). Inversement, on passe du repère (d, q) au repère (a, b, c) par la transformation de Park inverse à l'aide de \mathcal{P}^{-1} donnée par (1.4).

$$\mathcal{P}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{P}^{-1}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

En résumé, on a :

$$X_{dq} = \mathcal{R}(\theta)X_{\alpha\beta} = \mathcal{R}(\theta)\mathcal{C}X_{abc} = \mathcal{P}(\theta)X_{abc}. \quad (1.5)$$

Ainsi, dans le repère tournant (d, q) , le vecteur \vec{M} est fixe et colinéaire à l'axe d . Il suffit alors de positionner le vecteur champ \vec{B} , également fixe à la fréquence de synchronisme, créé par les deux courants fictifs et constants en régime établi i_d et i_q circulant dans les enroulements tournants fictifs.

1.2 Modélisations classiques de la MSAP

1.2.1 De la physique aux équations

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le fonctionnement de la machine synchrone à aimants permanents repose sur les interactions entre les champs créés par les aimants permanents du rotor et par les courants circulants dans les enroulements du stator. Afin d'établir les équations du modèle, notons \vec{B}_R le champ magnétique créé

dans l'entrefer par les aimants du rotor et rappelons que \vec{B} est le champ magnétique créé dans l'entrefer par les courants circulant dans les enroulements du stator.

Le couple $\vec{\tau}$ recherché, exercé par le champ \vec{B} sur le rotor, est impossible à déterminer directement du fait de l'absence d'enroulements au rotor. Le couple $\vec{\tau}_S$, exercé par les aimants du rotor sur les enroulements des différentes phases, est alors dans un premier temps calculé. Puis, par la troisième loi de Newton, les forces magnétiques exercées par le champ magnétique tournant du stator sur le rotor étant opposées aux forces exercées par le champ magnétique du rotor sur les courants statoriques, on en déduit $\vec{\tau} = -\vec{\tau}_S$. Ainsi, de la petite variation de force de Laplace $d\vec{F}_{S_a}$ sur les courants dans les enroulements de la phase a , produit vectoriel de ces courants orientés avec \vec{B}_R , on déduit la petite variation de couple $d\vec{\tau}_{S_a}$ puis le couple $\vec{\tau}_{S_a}$, exercés par \vec{B}_R sur les enroulements de la phase a . Les mêmes calculs sont effectués sur les trois phases. D'après [8, p.454], on obtient alors, dans le cas d'un moteur à pôles lisses :

$$\tau_{S_a} = p\sqrt{\frac{2}{3}}\phi i_a \sin \theta \quad , \quad \tau_{S_b} = p\sqrt{\frac{2}{3}}\phi i_b \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad , \quad \tau_{S_c} = p\sqrt{\frac{2}{3}}\phi i_c \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \quad , \quad (1.6)$$

avec p le nombre de paires de pôles du moteur et ϕ l'intensité du flux dû aux aimants du rotor. On en déduit τ_S en sommant les couples exercés sur les trois phases puis :

$$\tau = -p\sqrt{\frac{2}{3}}\phi \left(i_a \sin \theta + i_b \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) . \quad (1.7)$$

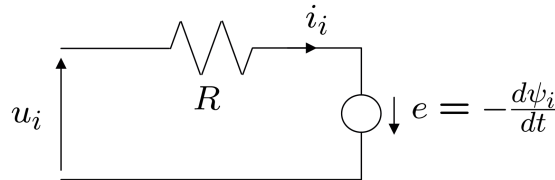


FIGURE 1.3 – Circuit équivalent d'une phase de la MSAP

En ce qui concerne les équations électriques, elles se déduisent des lois d'Ohm et de Faraday, cette dernière stipulant qu'un circuit soumis à un flux magnétique variable est le siège d'une force électromotrice e . Pour ce faire, on regarde chaque phase comme un circuit électrique (figure 1.3). On note ψ_{s_i} le flux magnétique dans les enroulements de la phase i , issu de la somme des champs magnétiques créés par les courants des enroulements des trois phases du stator et ψ_{m_i} le flux dans les enroulements de la phase i issu du champ magnétique créé par les aimants permanents du rotor. Puis on introduit le flux magnétique total $\psi_i = \psi_{s_i} + \psi_{m_i}$. On obtient alors, en supposant les

tensions des différentes phases u_a , u_b et u_c équilibrées :

$$u_{abc} = Ri_{abc} + \frac{d\psi_{abc}}{dt} , \quad (1.8)$$

avec R la résistance de chaque phase du stator, et les flux ψ_{m_i} dus aux aimants donnés, d'après [8, p.452], par :

$$\psi_{m_{abc}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \end{pmatrix} . \quad (1.9)$$

A l'aide de la transformation de Park (1.3), on en déduit $\psi_{m_d} = \phi$ et $\psi_{m_q} = 0$. De même, en appliquant la transformation de Park aux tensions, courants et flux de (1.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_d}{dt} &= -Ri_d + \omega\psi_q + u_d , \\ \frac{d\psi_q}{dt} &= -Ri_q - \omega\psi_d + u_q , \end{aligned} \quad (1.10)$$

soit, en supposant ϕ constant :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{s_d}}{dt} &= -Ri_d + \omega\psi_{s_q} + u_d , \\ \frac{d\psi_{s_q}}{dt} &= -Ri_q - \omega(\psi_{s_d} + \phi) + u_q . \end{aligned} \quad (1.11)$$

D'après [8, p.452], dans le cas d'un moteur non saturé à pôles lisses (i.e. avec une inductance isotrope notée L), on a :

$$\psi_{s_{abc}} = \frac{2}{3}L \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} i_{abc} , \quad (1.12)$$

soit, comme les courants sont équilibrés, i.e. $i_a + i_b + i_c \equiv 0$:

$$\psi_{s_{abc}} = Li_{abc} , \text{ et donc } \psi_{s_{dq}} = Li_{dq} . \quad (1.13)$$

Dans le cas où la machine est à pôles saillants, l'inductance n'est pas invariante par rotation du rotor. Toujours dans le cas d'une machine non saturée¹, cette variation

1. Dans le cas, non traité dans cette thèse, d'une machine saturée, les proportionnalités entre ψ_{s_d} et i_d et ψ_{s_q} et i_q n'existent plus pour les courants élevés.

de l'inductance est traduite dans le repère (d, q) à l'aide de l'introduction de deux inductances notées L_d et L_q , avec donc $L_d \neq L_q$ si la machine est à pôles saillants et $L_d = L_q = L$ si la machine est à pôles lisses, telles que :

$$\begin{aligned}\psi_{s_d} &= L_d i_d , \\ \psi_{s_q} &= L_q i_q .\end{aligned}\tag{1.14}$$

Ainsi, par (1.11) et (1.14), les équations électriques, dans le repère (d, q) , d'une machine non saturée s'écrivent :

$$\begin{aligned}L_d \frac{di_d}{dt} &= -Ri_d + \omega L_q i_q + u_d , \\ L_q \frac{di_q}{dt} &= -Ri_q - \omega(L_d i_d + \phi) + u_q .\end{aligned}\tag{1.15}$$

En outre, s'il est aisé, en appliquant la transformation de Park à (1.7), de voir que, dans le cas d'une machine à pôles lisses, on a $\tau = p\phi i_q$, on admet (cf. [8, p.649]) que l'équation du couple dans le repère (d, q) d'une machine à pôles saillants est donnée par :

$$\tau = p\phi i_q + p(L_d - L_q)i_d i_q .\tag{1.16}$$

Ces équations mécaniques et électriques établies, il nous est désormais possible de présenter les équations du modèle d'une machine synchrone à aimants permanents. Nous allons donner ces modélisations dans les deux repères privilégiés dans lesquels elles sont couramment exprimées : le repère fixe lié au stator (α, β) et le repère tournant lié au rotor (d, q) . Ces deux modèles présentent des intérêts complémentaires. Ainsi, le modèle (α, β) est mieux adapté à la conception d'observateur, tandis que le modèle (d, q) est essentiellement orienté contrôle en couple.

1.2.2 Modèle classique d'une MSAP dans le repère lié au rotor

La modélisation classique, dans le repère (d, q) , d'une MSAP à pôles saillants et non saturée est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}L_d \frac{di_d}{dt} &= -Ri_d + \omega L_q i_q + u_d , \\ L_q \frac{di_q}{dt} &= -Ri_q - \omega(L_d i_d + \phi) + u_q , \\ J_m \frac{d\omega}{dt} &= p\phi i_q + p(L_d - L_q)i_d i_q - \tau_L = \tau - \tau_L , \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega ,\end{aligned}\tag{1.17}$$

avec p le nombre de paires de pôles de la machine, $\omega = p\omega_m$ la vitesse électrique de rotation de l'arbre du rotor et $\theta = p\theta_m$ l'angle électrique de position du rotor, ω_m et θ_m étant les vitesse et angle mécaniques². (u_d, u_q) et (i_d, i_q) représentent respectivement les tensions de commande et les courants dans le repère tournant (d, q) , dépendant des signaux mesurés (i_a, i_b, i_c) et (u_a, u_b, u_c) dans le repère fixe (a, b, c) , et de la position du rotor intervenant dans la transformation de Park (1.3). τ , la grandeur à réguler, est le couple fourni par le moteur, τ_L le couple de charge et J_m le moment d'inertie. Les différents paramètres intervenant dans (1.17) sont la résistance des enroulements statoriques R , l'intensité du flux dû aux aimants du rotor³ ϕ et les inductances directe et en quadrature (L_d, L_q) qui modélisent la saillance du moteur. Notons que si les inductances sont supposées être constantes, la résistance et le flux sont en revanche des paramètres dépendant de la température.

1.2.3 Modèle classique d'une MSAP dans le repère lié au stator

Dans le repère (α, β) , cette modélisation se déduit de (1.17) en utilisant (1.2) et s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \frac{d}{dt} [(L_0\mathcal{I} + L_1M_{2\theta}) i_{\alpha\beta}] + Ri_{\alpha\beta} + \phi\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \\ J_m \frac{d\omega}{dt} &= p\phi(i_\beta \cos\theta - i_\alpha \sin\theta) + pL_1((i_\beta^2 - i_\alpha^2) \sin 2\theta + 2i_\alpha i_\beta \cos 2\theta) - \tau_L, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{1.18}$$

avec $M_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, $L_0 = \frac{L_d + L_q}{2}$ et $L_1 = \frac{L_d - L_q}{2}$. Les courants et tensions (i_α, i_β) et (u_α, u_β) ne dépendent ici plus de la position du rotor qui intervient explicitement. Si la machine est à pôles lisses ($L_d = L_q = L$), ces équations se simplifient pour aboutir au système plus agréable suivant :

$$\begin{aligned} L \frac{di_\alpha}{dt} &= -Ri_\alpha + \omega\phi \sin\theta + u_\alpha, \\ L \frac{di_\beta}{dt} &= -Ri_\beta - \omega\phi \cos\theta + u_\beta, \\ J_m \frac{d\omega}{dt} &= p\phi(-i_\alpha \sin\theta + i_\beta \cos\theta) - \tau_L = \tau - \tau_L, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{1.19}$$

2. Par la suite, toute vitesse exprimée en tr/min est implicitement une vitesse mécanique.

3. Pour simplifier, ce paramètre sera souvent dénommé "flux".

Démonstration. D'après (1.2) :

$$\begin{aligned}
 u_\alpha &= u_d \cos \theta - u_q \sin \theta \\
 &= \left(\cos \theta L_d \frac{di_d}{dt} - \sin \theta L_q \frac{di_q}{dt} \right) + R (\cos \theta i_d - \sin \theta i_q) \\
 &\quad - \omega (L_q i_q \cos \theta + L_d i_d \sin \theta) - \phi \omega \sin \theta .
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{di_d}{dt} &= \cos \theta \frac{di_\alpha}{dt} + \sin \theta \frac{di_\beta}{dt} - i_\alpha \omega \sin \theta + i_\beta \omega \cos \theta , \\
 \frac{di_q}{dt} &= \cos \theta \frac{di_\beta}{dt} - \sin \theta \frac{di_\alpha}{dt} - i_\alpha \omega \cos \theta - i_\beta \omega \sin \theta .
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 u_\alpha &= (L_d \cos^2 \theta + L_q \sin^2 \theta) \left(\frac{di_\alpha}{dt} + \omega i_\beta \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} (L_d - L_q) \left(\frac{di_\beta}{dt} - \omega i_\alpha \right) \\
 &\quad + Ri_\alpha - \omega (L_q \cos^2 \theta + L_d \sin^2 \theta) i_\beta - \omega (L_d - L_q) i_\alpha \frac{\sin 2\theta}{2} - \phi \omega \sin \theta \\
 &= \omega i_\beta (L_d - L_q) \cos 2\theta + \left(\frac{L_d + L_q}{2} + \frac{L_d - L_q}{2} \cos 2\theta \right) \frac{di_\alpha}{dt} \\
 &\quad + \frac{\sin 2\theta}{2} (L_d - L_q) \frac{di_\beta}{dt} - \omega i_\alpha (L_d - L_q) \sin 2\theta + Ri_\alpha - \phi \omega \sin \theta \\
 &= L_1 \left(2\omega i_\beta \cos 2\theta + \cos 2\theta \frac{di_\alpha}{dt} + \sin 2\theta \frac{di_\beta}{dt} - 2\omega i_\alpha \sin 2\theta \right) \\
 &\quad + L_0 \frac{di_\alpha}{dt} + Ri_\alpha - \phi \omega \sin \theta , \\
 u_\alpha &= L_1 \frac{d}{dt} (i_\alpha \cos 2\theta + i_\beta \sin 2\theta) + L_0 \frac{di_\alpha}{dt} + Ri_\alpha - \phi \omega \sin \theta .
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

De même :

$$u_\beta = L_1 \frac{d}{dt} (i_\alpha \sin 2\theta - i_\beta \cos 2\theta) + L_0 \frac{di_\beta}{dt} + Ri_\beta + \phi \omega \cos \theta . \tag{1.23}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 \tau &= p\phi i_q + p(L_d - L_q) i_d i_q , \\
 \tau &= p\phi (i_\beta \cos \theta - i_\alpha \sin \theta) + p(L_d - L_q) \left((i_\beta^2 - i_\alpha^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + i_\alpha i_\beta \cos 2\theta \right) ,
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

et on obtient le résultat. \square

1.3 Contrôle en couple de la MSAP

Dans le contexte automobile, l'objectif de la commande d'une MSAP est de faire suivre au couple τ le couple de consigne τ^* désiré. Le principe de la commande, dite commande vectorielle, de la machine est illustré par la figure 1.4, inspirée de [33].

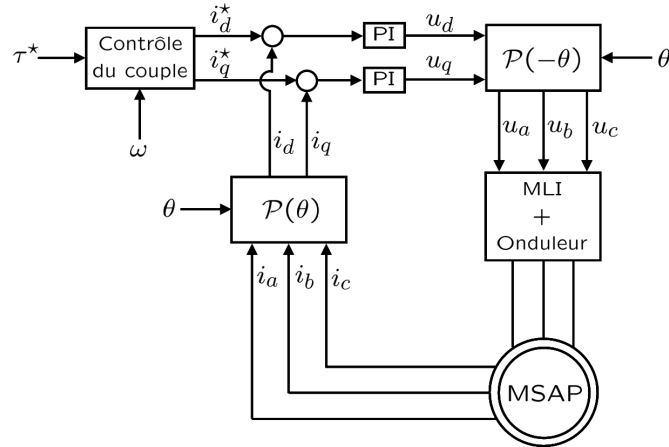


FIGURE 1.4 – Principe de la commande vectorielle de la MSAP

Cette commande s'effectue traditionnellement dans le repère (d, q) . Dans un premier temps, la consigne de couple τ^* est traduite en des consignes de courants i_d^* et i_q^* à l'aide d'un problème d'optimisation sur lequel nous reviendrons un peu plus loin. Deux correcteurs Proportionnels Intégraux (PI), un sur chaque courant, sont alors utilisés et fournissent les tensions de commande u_d et u_q permettant de faire converger les courants i_d et i_q vers leurs références i_d^* et i_q^* . Ces tensions fictives dans le repère (d, q) sont alors transformées en tensions triphasées dans le repère fixe (a, b, c) via la transformation de Park inverse (1.3). Une Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) permet alors d'en déduire les rapports cycliques à envoyer sur chacune des phases d'un onduleur triphasé pour commander l'ouverture et la fermeture de ses interrupteurs de puissance (des IGBT par exemple). Puis les trois phases de la machine sont alimentées par les tensions de sortie de l'onduleur. Par ailleurs, les courants intervenant dans la régulation sont issus de mesures en sortie de machine, i.e. dans le repère triphasé fixe (a, b, c) . Les courants (i_a, i_b, i_c) sont alors convertis en courants fictifs (i_d, i_q) par transformation de Park également.

La transformation de Park (ou son inverse) intervient ainsi à deux reprises dans la commande en couple de la machine. Celle-ci dépendant de la position, une bonne connaissance à tout instant de cette dernière est primordiale pour assurer le meilleur contrôle possible. Outre un potentiel décrochage de la machine pour une erreur de 90° ,

voire une inversion de son sens de rotation, une mauvaise connaissance de la position entraîne en effet des performances sous-optimales de la machine du fait d'un contrôle en couple mal adapté. Ceci sera illustré au chapitre suivant par les figures 2.3 et 2.4. Deux alternatives existent afin de connaître cette position en ligne : l'utilisation d'un capteur de position ou, dans la cadre d'un contrôle *sensorless*, la conception et l'utilisation d'un estimateur de position. De même, le contrôle en couple nécessite la connaissance en ligne de la vitesse, laquelle peut être soit estimée, soit obtenue par dérivation de la position délivrée par un capteur.

Revenons désormais sur l'obtention des consignes de courants i_d^* et i_q^* à partir de la consigne de couple τ^* . L'équation (1.16) nous indique que le couple est une hyperbole dans le plan (i_d, i_q) . Comme il existe une infinité de paires (i_d, i_q) solutions, la référence est déterminée à l'aide d'un problème d'optimisation, visant par exemple à minimiser les pertes. Pour les besoins du contrôle, supposons que nous disposions des paramètres estimés $(\widehat{R}, \widehat{\phi}, \widehat{L}_d, \widehat{L}_q)$. Ces estimations peuvent alors être utilisées pour générer la référence (i_d^*, i_q^*) en résolvant le problème d'optimisation suivant [32], lequel minimise les pertes Joule :

$$\begin{aligned} (i_d^*, i_q^*) &= \arg \min_{(i_d, i_q) \in \mathbb{R}^2} (i_d^2 + i_q^2) , \\ \text{sous contraintes :} \quad & \text{(i)} \quad \tau^* = p\widehat{\phi}i_q + p(\widehat{L}_d - \widehat{L}_q)i_d i_q , \\ & \text{(ii)} \quad i_d^2 + i_q^2 \leq i_{\max}^2 , \\ & \text{(iii)} \quad u_d^2 + u_q^2 \leq u_{\max}^2 , \end{aligned} \tag{1.25}$$

avec i_{\max} issu de considérations thermiques et u_{\max} de contraintes technologiques (tension maximale délivrable par le bus continu). (i) est issu de (1.17) et (iii) est donné par les équations électriques de (1.17) en régime permanent :

$$\begin{aligned} u_d &= \widehat{R}i_d - \omega\widehat{L}_q i_q , \\ u_q &= \widehat{R}i_q + \omega(\widehat{L}_d i_d + \widehat{\phi}) . \end{aligned} \tag{1.26}$$

La contrainte de tension intervient donc aux vitesses élevées. La figure 1.5 illustre ce problème d'optimisation. Le point de fonctionnement minimisant les pertes Joule est la projection orthogonale de l'origine sur l'hyperbole décrite par le couple à condition que ce point soit situé à l'intérieur du cercle limite des courants et de l'ellipse limite des tensions. Si tel n'est pas le cas, le point optimal sera situé à l'intersection de l'hyperbole et du contour limite le plus contraignant. Enfin, si l'hyperbole ne coupe pas les deux contours limites, le problème n'a pas de solution. Ce problème d'optimisation dérive

directement du problème classiquement utilisé dit de *Maximum Torque Per Ampere* (MTPA), qui, à pertes Joule données, maximise le couple :

$$(i_d^*, i_q^*) = \arg \max_{(i_d, i_q) \in \mathbb{R}^2} \tau ,$$

$$\text{sous contraintes : (i) } \tau = p\hat{\phi}i_q + p(\hat{L}_d - \hat{L}_q)i_di_q , \quad (1.27)$$

$$\text{(ii) } i_d^2 + i_q^2 = i_{\max}^2 ,$$

$$\text{(iii) } u_d^2 + u_q^2 \leq u_{\max}^2 .$$

Le problème de MTPA fixe donc le cercle de rayon i_{\max}^2 et lui cherche une trajectoire de couple tangente, tandis que dans le problème minimisant les pertes Joule, la trajectoire de couple est fixée et on cherche le cercle de rayon $i_d^2 + i_q^2$ qui lui est tangent. De plus amples informations sur l'interprétation géométrique de problèmes d'optimisation relatifs à la commande de machines électriques peuvent être trouvées dans [7, partie 1.3].

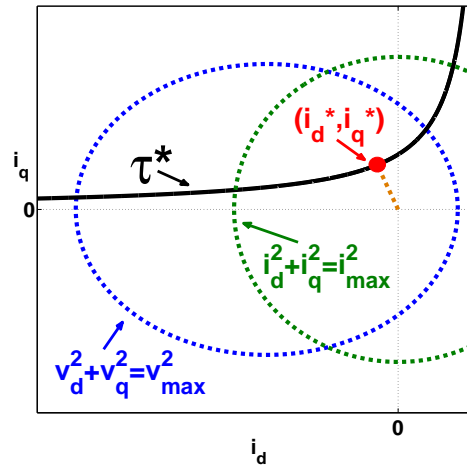


FIGURE 1.5 – Illustration du problème d'optimisation minimisant les pertes Joule

Outre la nécessité susmentionnée d'une bonne connaissance de la position, le principe de la commande de la MSAP donne un premier aperçu de l'importance d'une bonne connaissance des paramètres $(\hat{R}, \hat{\phi}, \hat{L}_d, \hat{L}_q)$ dont dépend fortement la solution du problème d'optimisation. Nous allons désormais nous intéresser plus en détails aux enjeux liés à la bonne connaissance de ces paramètres estimés et de manière plus générale à celle de la température du moteur, dont dépendent certains paramètres.

1.4 Enjeux liés à la connaissance de la température de la MSAP

On distingue deux enjeux essentiels relatifs à la connaissance de la température de la machine. Nous venons en effet d'entrevoir qu'afin d'assurer le meilleur contrôle en couple possible, il était nécessaire de bien connaître à tout instant les valeurs des paramètres du moteur. Or, parmi ces paramètres, deux dépendent de la température du moteur, amenée à subir des variations au cours d'un trajet, à savoir la résistance des enroulements du stator *via* la résistivité du cuivre et le flux des aimants permanents qui se démagnétisent avec la température. La valeur de l'inductance, elle, ne dépend pas de la température. On voit donc apparaître le premier enjeu. Le second enjeu vise à améliorer la disponibilité du moteur tout en évitant toute détérioration, grâce à la connaissance de sa température.

1.4.1 Premier enjeu : Fournir le couple demandé malgré l'échauffement du moteur et maintenir les couple et puissance maximum accessibles

Le premier enjeu consiste à éviter de dégrader les performances du moteur quand celui-ci chauffe, en adaptant en ligne le contrôle en couple aux variations des paramètres physiques du moteur dépendant de la température. Pour ce faire, ces paramètres physiques doivent être déterminés en ligne, soit par une estimation directe des paramètres, soit en reliant leurs variations aux variations de température.

En effet, par défaut, le contrôle en couple est réglé en utilisant les valeurs à température nominale (20°C) des paramètres. De ce fait, à température nominale, le contrôle s'acquitte bien de sa tâche et fournit le couple demandé. En revanche, si la température est différente, les valeurs des paramètres physiques du moteur utilisées pour le contrôle en couple sont différentes de leurs valeurs réelles. Le problème d'optimisation (1.25 ou 1.27) s'en trouve biaisé puisque les courants consigne en résultant, optimaux à température nominale, ne le sont plus à la température réelle. Le couple fourni est alors inférieur au couple demandé, et il en va de même pour la puissance fournie, produit du couple par le régime. En particulier, en limite de zone de fonctionnement, les puissance et couple maximum ne sont plus accessibles. Ainsi, afin de fournir les puissance et couple demandés en tout point de fonctionnement, et en particulier de maintenir les puissance et couple maximum accessibles, il est nécessaire d'alimenter le problème d'optimisation avec les bonnes valeurs des paramètres. En résulte un contrôle

en couple adaptatif permettant de retrouver les mêmes performances à toute température qu'à température nominale. Notons qu'actuellement ce sont essentiellement des cartographies des courants consigne i_d^* et i_q^* en fonction du couple et de la vitesse qui sont utilisées par les constructeurs automobiles. Aucun compte n'est alors tenu des variations des paramètres.

Afin d'illustrer la dégradation des performances due à la non-adaptation en ligne du contrôle aux variations des paramètres dépendant de la température, et donc inversement le gain de performance envisageable en cas d'adaptation, intéressons-nous à la figure 1.6. Les performances de deux moteurs y sont présentées. Les courbes de gauche concernent le moteur du banc SMILE 1.0 (cf. §8.1.2) dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 8.1 et avec $i_{max} = 12.2A$ et $u_{max} = 184V$. Comme la tension maximale autorisée est assez élevée pour ce moteur faible puissance, elle n'est pas encore contraignante (cf. 1.25 (iii)) aux vitesses maximales d'utilisation de la machine. Un cas "plus classique" est donc également présenté sur les courbes de droite. Il s'agit d'un moteur dimensionné pour un bus électrique⁴. Dans chacun des cas, on suppose le moteur chauffé à $120^\circ C$ ⁵. Les figures 1.6(a) et 1.6(b) comparent le couple maximal accessible, dans le cas d'un contrôle adapté aux variations de paramètres et dans celui d'un contrôle nominal utilisant, comme son nom l'indique, les valeurs nominales des paramètres, i.e. leurs valeurs à $20^\circ C$. En pratique, les pertes Joule, c'est-à-dire i_{max}^2 , sont fixées et le problème de MTPA (1.27) effectué pour déterminer les courants consigne maximisant le couple. Dans le cas d'un contrôle adaptatif, l'optimisation est basée sur la bonne valeur des paramètres à $120^\circ C$. Les courants consigne déterminés permettent donc bien d'obtenir le couple maximal. En revanche, dans le cas nominal, l'optimisation est basée sur le moteur à froid, i.e. les valeurs de \hat{R} et de $\hat{\phi}$ utilisées dans le problème d'optimisation sont leurs valeurs nominales. Les courants consigne déterminés seraient donc optimaux à $20^\circ C$ mais ne le sont pas à la température réelle de $120^\circ C$: ils ne permettent pas d'obtenir le couple maximal. Sur les figures, on constate ainsi la dégradation de la plage de fonctionnement allant jusqu'à 8 à 10% lorsque les variations dues à la température ne sont pas prises en compte. A tous les régimes dans le cas du banc SMILE 1.0, pour les régimes faibles dans le cas du bus électrique. Cette dégradation est bien évidemment d'autant plus grande que la température est élevée. En multipliant le couple par le régime, les figures 1.6(c) et 1.6(d) s'intéressent de manière analogue à la dégradation de la plage de puissance accessible. Les ordres de grandeur des gains potentiels sont les mêmes, la principale différence venant du fait que, dans le cas du

4. $p = 4$, $R = 6.3m\Omega$, $\phi = 0.098Wb$, $L_d = 0.30mH$, $L_q = 0.48mH$, $i_{max} = 429A$, $u_{max} = 184V$

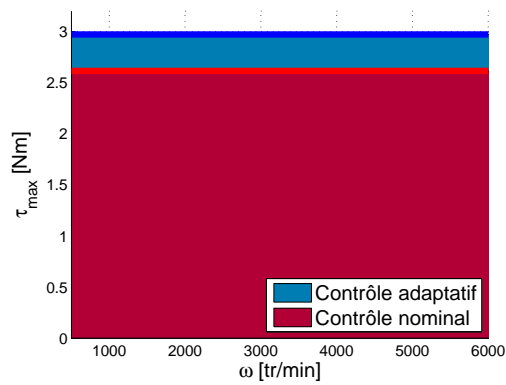
5. D'après (1.30) et (1.31), le flux réel est alors inférieur de 12% au flux nominal à $20^\circ C$ et la résistance réelle supérieure de 40% à la résistance nominale.

bus électrique, c'est cette fois-ci à haut régime qu'il est le plus possible de gagner en puissance accessible. Enfin, les figures 1.6(e) et 1.6(f), obtenues en appliquant le problème de minimisation des pertes Joule à couple fixé (1.25), présentent, sur toute la plage de fonctionnement du moteur, la perte de couple, i.e. le couple demandé moins le couple fourni, en cas de non-adaptation en ligne du contrôle. C'est ainsi pour les couples les plus élevées que la sous-utilisation du moteur est la plus importante sans adaptation. Notons que nous n'avons ici présentés que deux exemples, et que les ordres de grandeurs des extensions des plages de fonctionnement dépendent grandement des paramètres du moteur considéré et des contraintes.

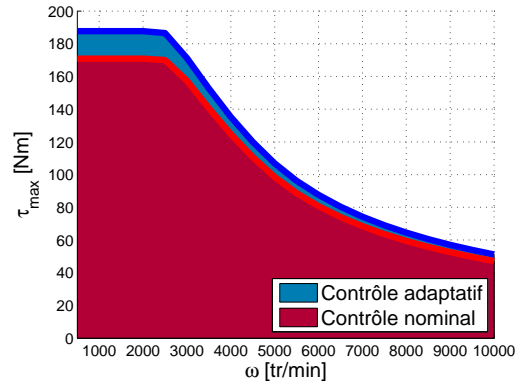
Remarque : Des deux paramètres dépendants de la température, c'est le flux qui joue un rôle essentiel ici, de part sa présence dans l'équation du couple. La résistance n'intervient en effet que dans l'équation des limites de tension et son rôle est nettement moins significatif. Pour plus de précision, il convient d'évoquer l'allure de la courbe régime/couple maximum. Ainsi, la figure 1.6(b) par exemple peut être séparée en deux zones, le régime limite⁶ se situant aux alentours de 2600 tr/min. Sur la figure 1.6(a), le régime limite se situerait au-delà des 6000 tr/min, étant donné que la contrainte u_{max} (tension du bus continu) est très élevée. Pour les régimes inférieurs au régime limite, c'est la contrainte de courant maximum qui est limitante, la tension maximum n'étant pas encore atteinte. Le couple maximum accessible est donc indépendant du régime. La dégradation du couple avec le contrôle nominal a alors pour origine unique la différence entre le flux nominal utilisé dans le problème d'optimisation et le flux réel, et est la même pour tous les régimes inférieurs au régime limite. Puis, au régime limite, la tension maximum est atteinte. Pour maintenir $u_d^2 + u_q^2 = u_{max}^2$ malgré l'augmentation du régime, il est alors notamment nécessaire, comme on le voit avec (1.26), de diminuer le courant i_d , i.e. de l'augmenter en valeur absolue. C'est ce que l'on appelle le défluxage. En conséquence, pour respecter la contrainte de courant maximum, le courant i_q , positif, diminue, tout comme du coup le couple maximum accessible. La différence entre couple demandé et fourni, issue de la différence entre le flux nominal utilisé dans le problème d'optimisation et le flux réel lors du contrôle nominal, diminue alors environ proportionnellement à i_q et au couple. De plus, la différence entre la valeur nominale de la résistance utilisée dans l'équation des limites de tension *via* (1.26) et la résistance réelle impacte également, mais légèrement, l'optimisation et donc la fourniture de couple.

6. régime de base de la machine

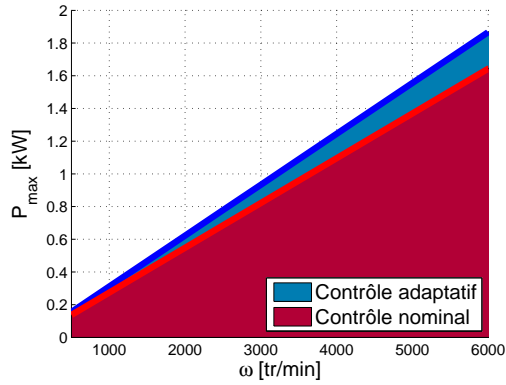
1.4. Enjeux liés à la connaissance de la température de la MSAP



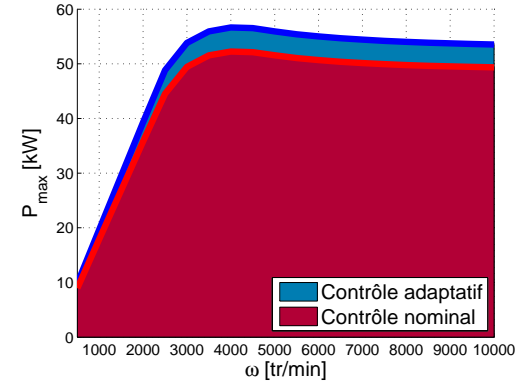
(a) Banc SMILE - Couple maximum accessible



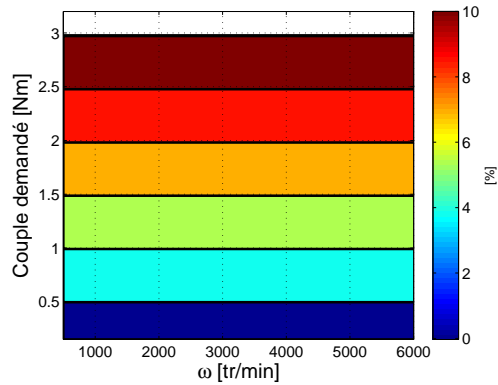
(b) Bus électrique - Couple maximum accessible



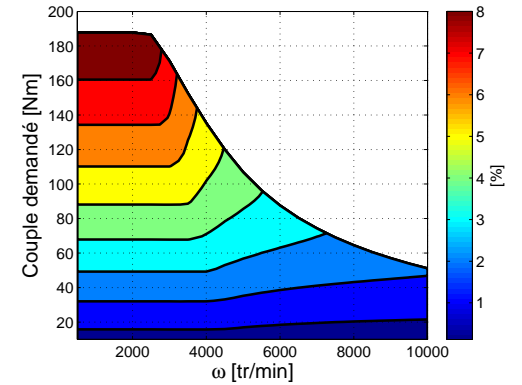
(c) Banc SMILE - Puissance maximum accessible



(d) Bus électrique - Puissance maximum accessible



(e) Banc SMILE - Erreur de fourniture de couple



(f) Bus électrique - Erreur de fourniture de couple

FIGURE 1.6 – Apport du contrôle adaptatif sur les performances - moteur à 120°C

1.4.2 Second enjeu : Améliorer la disponibilité du moteur

Outre le maintien des performances statiques de la machine évoqué au paragraphe précédent, la connaissance de la température peut permettre d'améliorer la disponibilité du moteur *via* une amélioration des performances en transitoire de la machine. Contrairement à la situation précédente où connaître la température n'est qu'indirectement nécessaire, cette potentielle amélioration est directement basée sur la température. La connaissance à tout instant de cette température peut en effet permettre d'autoriser une utilisation sûre de la machine au-delà de ses capacités nominales, lorsqu'il n'y a aucun danger de surchauffe, là où traditionnellement, par un excès de prudence forcé dû à la méconnaissance de la température, les constructeurs limitent énormément ces dépassements. Il ne faut en effet pas perdre de vue qu'il est primordial d'éviter une surchauffe trop importante de la machine, laquelle pourrait détériorer cette dernière, en entraînant par exemple la fonte des isolants entre les fils et/ou une démagnétisation irréversible des aimants (cf. paragraphe 1.5.4). La surveillance de la température alliée à une limite haute de température permet alors d'utiliser le moteur au maximum de son potentiel tout en maintenant son intégrité. Des couples plus élevés étant ainsi accessibles à moteur égal, un sous-dimensionnement de la machine est envisageable pour atteindre des couples similaires avec un plus petit moteur.

Pour illustrer cet enjeu, nous allons comparer deux approches. La première est l'approche usuellement appliquée et consiste en une gestion heuristique, i.e. fournissant rapidement une solution réalisable mais pas nécessairement optimale, de la dynamique thermique. Il s'agit d'une approche pire cas. Sans la connaissance de la température, cette approche consiste, dans un premier temps, à autoriser une surcharge pendant une durée préétablie fonction de la valeur de la surcharge, comme nous l'indiquent les abaques de la figure 1.7, issues du catalogue technique Leroy Somer [1] de la machine électrique utilisée au banc SMILE 1.0 (cf. §8.1.2). Ainsi, dans ce cas, l'application du couple crête standard est autorisée pendant une durée de 2 secondes et celui de 1,2 fois ce couple crête pendant 0,25s. Dans un second temps, s'ensuit une attente durant laquelle aucune surcharge n'est plus autorisée, afin de refroidir le moteur. On voit que cette approche est donc très/trop prudente et qu'elle peut limiter le fonctionnement d'un moteur pourtant encore froid. En revanche, la seconde approche adapte sa gestion à la température. Grâce à la connaissance de cette dernière, la surcharge maximale est connue à tout instant et peut varier d'une fois sur l'autre pour un même dépassement de couple requis, le but étant de ne pas dépasser une température maximale fixée. Aucune attente inutile n'est donc nécessaire et des surcharges plus importantes et plus longues peuvent être autorisées. La mise en œuvre en simulation de ces deux approches

apparaît sur la figure 1.8.

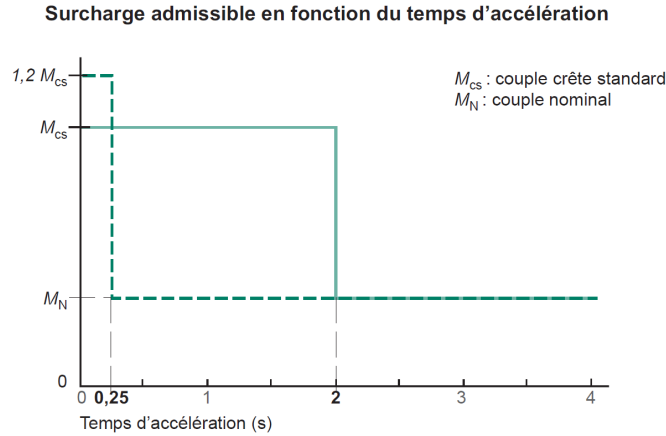


FIGURE 1.7 – Gestion des dépassements de couple par approche heuristique

Le dimensionnement d’une machine pour un cycle est traditionnellement réalisé de telle sorte à ce que le couple maximum le long du cycle soit accessible. Si l’on dimensionne la machine pour le cycle de la figure 1.8(a), le moteur n’aura aucun problème à fournir le couple requis à tout instant du cycle. En revanche, regardons ce qui se passe si on utilise une machine sous-dimensionnée pour ce cycle. Les figures 1.8(b) et 1.8(c) comparent respectivement la température du moteur et le couple fourni lorsque l’une ou l’autre des deux approches est appliquée. La température maximale à ne pas dépasser est ici fixée à $80^{\circ}C$. Dans le cas de l’approche heuristique, après plusieurs surcharges, le couple se retrouve bridé au couple nominal pendant un certain temps, durant lequel le couple requis ne peut plus être fourni. Pourtant, un regard sur la courbe de température nous indique que cette dernière était encore fort raisonnable au moment où le couple a été limité. En revanche, avec l’approche basée sur la température, la température maximale n’étant jamais atteinte, le couple requis est toujours fourni. Sur la figure 1.8(c), la courbe de couple requis est en effet confondue avec celle du couple fourni avec l’approche basée sur la température. Ainsi, la connaissance de la température rend possible un sous-dimensionnement de la machine.

Notons que cette connaissance de la température pourrait également être utilisée à des fins d’étude de vieillissement de la machine, en quantifiant de combien vieillit la machine pour telle température pendant telle durée. Calculs qui seraient reliés aux résultats de tests ponctuels réguliers du vieillissement des aimants (par la valeur du flux) et des enroulements (test d’isolement pour savoir si on se rapproche d’une rupture d’isolement).

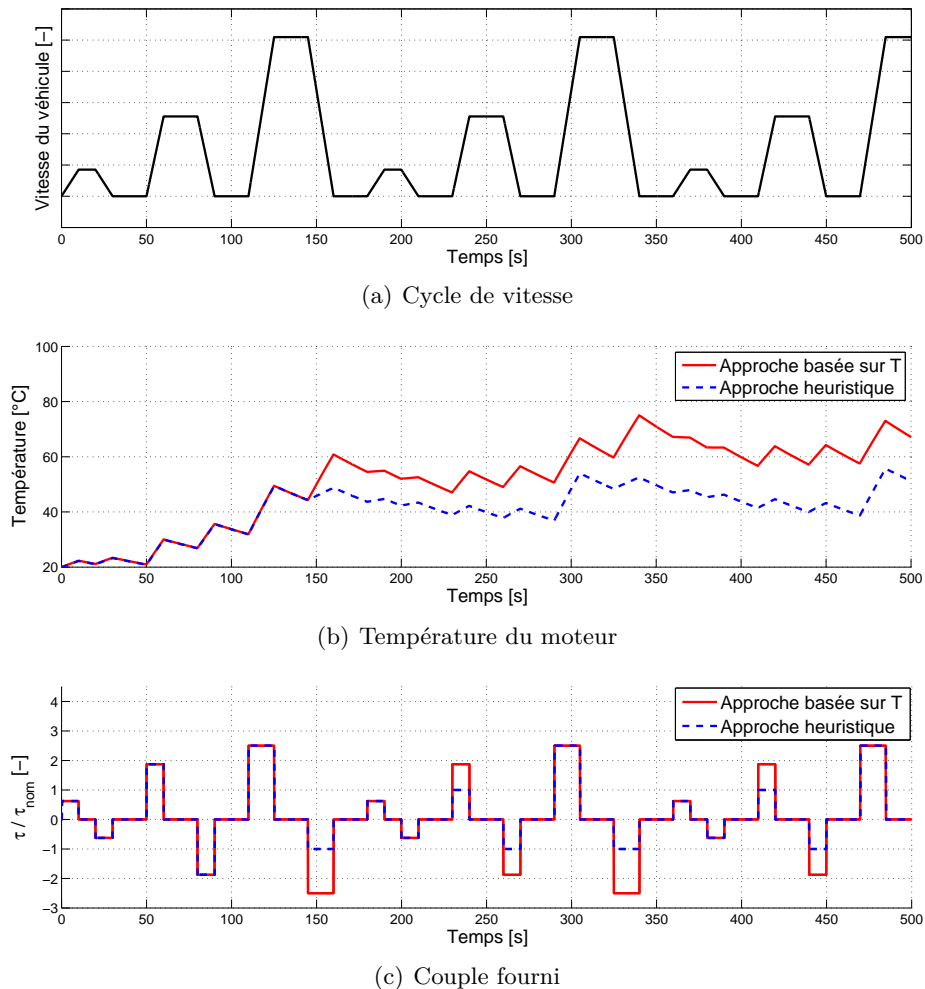


FIGURE 1.8 – Apport de la connaissance de la température sur les performances en régime dynamique

1.5 Estimation de la température interne d'une MSAP

Le paragraphe 1.4 a mis en évidence les améliorations possibles des performances statiques et en transitoire de la machine, en cas de connaissance précise de la température interne du moteur. Le présent paragraphe expose les trois principales solutions pouvant être considérées dans l'optique d'une telle connaissance et précise la démarche adoptée dans cette thèse.

1.5.1 Utilisation de capteurs de température

Une solution pour connaître la température interne du moteur consisterait évidemment à utiliser des capteurs de température, à la surface du rotor et dans les

enroulements statoriques. Cependant, si cette solution peut être envisagée dans le cas d'une machine isolée utilisée sur un banc d'essais, moyennant quelques aménagements, c'est loin d'être le cas pour une utilisation dans un contexte véhicule. Introduction de retards, multiplication des connexions, rotation des aimants et perturbations électromagnétiques par les appareils électriques avoisinants sont autant d'obstacles qui se présentent à l'encontre de cette solution. Se pose également la question du coût pour une mise en série sur véhicule.

1.5.2 Utilisation d'un modèle thermique

Une seconde option repose sur la conception et l'utilisation d'un modèle thermique du moteur. Un tel modèle, généralement assez complexe pour être suffisamment précis, se base sur la géométrie des différents composants de la machine, sur les paramètres spécifiques au matériel, ainsi que sur les sources de chaleurs connues et les échanges de chaleurs entre les différents composants. La température est alors estimée en un certain nombre de points (d'un seul à plus de dix) du moteur. On trouve un bon état de l'art sur les modèles thermiques de MSAP et plus généralement de machines électriques dans [12]. De celui-ci, il ressort que les modèles thermiques sont essentiellement utilisés pour faire du diagnostic et veiller à la préservation de l'intégrité du moteur en prévenant les surchauffes.

Cependant, l'utilisation d'un modèle thermique peut poser problème dans le contexte automobile. En effet, du fait du confinement sous le capot, des sources de chaleur externes, non prises en compte dans le modèle, sont susceptibles de venir perturber ce dernier. Ces modèles sont en outre très complexes, le seraient d'ailleurs d'autant plus si on décidait de prendre en compte les sources externes de chaleur, et peuvent de ce fait être délicats à concilier avec une supervision temps réel et surtout avec le contrôle adaptatif.

1.5.3 Estimation en ligne des paramètres dépendants de la température

Enfin, la troisième méthode repose sur l'estimation en ligne des paramètres dépendants de la température, que l'on peut ensuite relier aux variations de température *via* des relations simples. On rappelle que les deux paramètres dépendants de la température sont le flux des aimants et la résistance des enroulements. Diverses méthodes existent pour estimer ces paramètres. A l'instar de notre objectif, certaines publications, comme [46] ou [49] traitent de l'estimation dans le but de remonter à la température. Ainsi, [46] présente un observateur du flux des aimants, basé sur la prise en compte

des non-linéarités dues aux saturations, dans le but d'estimer la température du rotor. Parallèlement, [49] estime la résistance par plusieurs méthodes basées sur des injections de courants afin de remonter à la température des enroulements. En fait, de nombreuses publications s'intéressent à l'estimation des paramètres de la MSAP dans un contexte plus général et ne se limitent pas à ces deux seuls paramètres. Ainsi, [36] et [29] estiment résistance et inductances, respectivement à l'aide de l'implémentation d'un algorithme basé sur les erreurs de sortie en fixant le flux à sa valeur nominale et à l'aide d'une méthode basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov. [21] s'intéresse également à l'estimation de la résistance et des inductances de deux types de MSAP différents grâce à un algorithme des moindres carrés récursifs. On trouve aussi des estimations du flux, comme dans [50] où un filtre de Kalman est utilisé. Dans [52] sont testés en simulation deux filtres de Kalman étendus, estimant soit le flux, soit la résistance. Enfin, dans [28], un réseau de neurones est implémenté pour estimer, à régime fixé, inductances, résistance et flux à partir des mesures de courant, tension et vitesse. De cet état de l'art, il ressort qu'il semble difficile d'estimer en ligne expérimentalement simultanément la résistance et le flux de manière correcte, l'estimation de la résistance notamment étant délicate quand le régime s'élève du fait d'une mauvaise robustesse aux erreurs sur les autres paramètres du moteur, comme le souligne [25]. Ceux qui s'en sortent le mieux, relativement à ce dernier point, utilisent en général des moteurs présentant une résistance élevée (supérieure à 1Ω) et des points de fonctionnement confortables : régime constant ni trop faible, (pour ne pas avoir de problème d'observabilité), ni trop élevé (le terme contenant la résistance devenant alors faible devant les autres).

Dans [35], P. Milanfar propose également une méthode d'estimation de la température basée à la fois sur une estimation des paramètres dépendants de la température à partir de mesures de courants et de tensions, et sur un modèle thermique assez simple reposant sur un modèle de pertes et une mesure de la température de surface intégrée dans le modèle, ce qui lui permet d'obtenir la température dans les enroulements. Les approches sont alors insuffisamment précises indépendamment mais la combinaison des deux limite les erreurs.

1.5.4 Démarche adoptée

La démarche adoptée dans cette thèse pour estimer la température interne d'une MSAP est la dernière présentée : l'estimation en ligne des paramètres dépendants de la température. Comme nous l'avons évoqué, cette méthode apparaît en effet comme la plus viable dans les contextes automobile et temps-réel. En outre, elle permet de combiner les deux enjeux présentés au paragraphe 1.4, le premier faisant directement

intervenir les estimées des paramètres dépendants de la température, tandis que le second repose directement sur l'estimation de la température. Ces deux estimations (paramètres et température) sont certes liées, mais la précision requise pour l'adaptation en ligne du contrôle est plus grande que celle requise pour la surveillance des limites des température. Il est donc préférable de convertir les variations de paramètres en variations de température que l'inverse.

Il va donc s'agir de concevoir des algorithmes d'estimation - des observateurs - de l'intensité du flux dû aux aimants du rotor et de la résistance des bobinages du stator, basés sur une modélisation réaliste de la machine⁷, utilisant uniquement les capteurs électriques existants de courants et tensions, voire de position. Les variations de résistance et de flux estimées seront alors converties en variations respectives de température du stator et du rotor, à l'aide des relations suivantes.

Relation entre résistance des enroulements et température

Constitués de cuivre, les enroulements du stator voient leur résistivité augmenter avec la température. La figure 1.9 présente ainsi en bleu les valeurs exactes de la résistivité du cuivre à différentes températures telles que données dans [26].

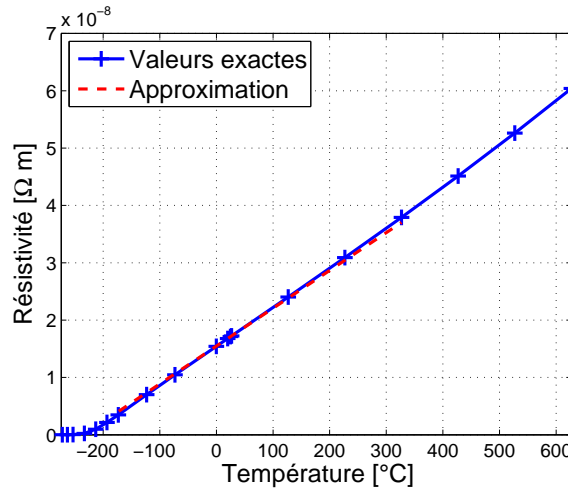


FIGURE 1.9 – Résistivité du cuivre en fonction de la température

On constate que, excepté aux très basses températures, lesquelles ne nous intéressent pas, la résistivité varie quasiment linéairement avec la température. D'après [18], on peut alors écrire :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha(T_S - T_{S_0})) , \quad (1.28)$$

7. Pour des raisons empiriques historiques, la saturation magnétique ne sera toutefois pas prise en compte.

avec ρ la résistivité du cuivre à la température T_S , $\rho_0 = 1,678.10^{-8}\Omega m$ la résistivité du cuivre à la température $T_{S_0} = 20^\circ C$ et α le coefficient de température de résistivité du cuivre. Comme la résistance est proportionnelle à la résistivité, on a :

$$R = R_0(1 + \alpha(T_S - T_{S_0})) , \quad (1.29)$$

avec R la résistance à la température T_S et R_0 la résistance à la température $T_{S_0} = 20^\circ C$. D'après [18], aux alentours de la température ambiante, le coefficient α du cuivre vaut environ $3,93.10^{-3}K^{-1}$. La résistivité calculée avec cette formule est indiquée en rouge sur la figure 1.9. Ainsi pour deux températures quelconques T_{s_1} et T_{s_2} , on a, avec R_1 la résistance à la température T_{s_1} , R_2 la résistance à la température T_{s_2} , $\Delta R = R_2 - R_1$ et $\Delta T_S = T_{s_2} - T_{s_1}$:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \alpha \Delta T_S \quad \text{avec} \quad \alpha = 3,93.10^{-3}K^{-1} . \quad (1.30)$$

Une variation de 1% de la résistance équivaut ainsi à une variation d'environ $2.5^\circ C$, i.e. une variation de $1^\circ C$ équivaut à une variation d'environ 0,4% de la résistance.

Relation entre flux des aimants et température

De type NdFeB, les aimants permanents du rotor se démagnétisent sous l'effet d'une augmentation de température, entraînant une diminution de flux. Une surchauffe trop importante peut d'ailleurs entraîner une démagnétisation irréversible des aimants. Ces aimants fonctionneront ainsi sans détérioration irréversible jusqu'à la température maximale de $180^\circ C$, leur température de Curie, i.e. la température à laquelle l'aimant est complètement démagnétisé, valant $T_{Curie} = 310^\circ C$. Si l'aimant est chauffé entre $180^\circ C$ et $310^\circ C$, la démagnétisation n'est que partielle mais irréversible.

A l'instar des variations de résistivité, le flux varie quasi linéairement avec la température. Aux alentours de la température ambiante, il est possible, d'après [9], d'écrire pour deux températures T_{R_1} et T_{R_2} :

$$\frac{\Delta \phi}{\phi_0} = \alpha_B \Delta T_R \quad \text{avec} \quad \alpha_B = -0.12\%K^{-1} , \quad (1.31)$$

avec ϕ_0 le flux à la température $T_{R_0} = 20^\circ C$, ϕ_1 et ϕ_2 les flux respectifs aux températures T_{R_1} et T_{R_2} , $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta T_R = T_{R_2} - T_{R_1}$ et α_B le coefficient de température de l'induction rémanente des aimants NdFeB.

Une variation de 1% du flux équivaut ainsi à une variation d'environ $8.5^\circ C$, i.e. une variation de $1^\circ C$ équivaut à une variation d'environ 0,12% du flux.

1.6 Conclusion

En guise de conclusion à ce chapitre introductif, intéressons-nous au schéma récapitulatif de la figure 1.10.

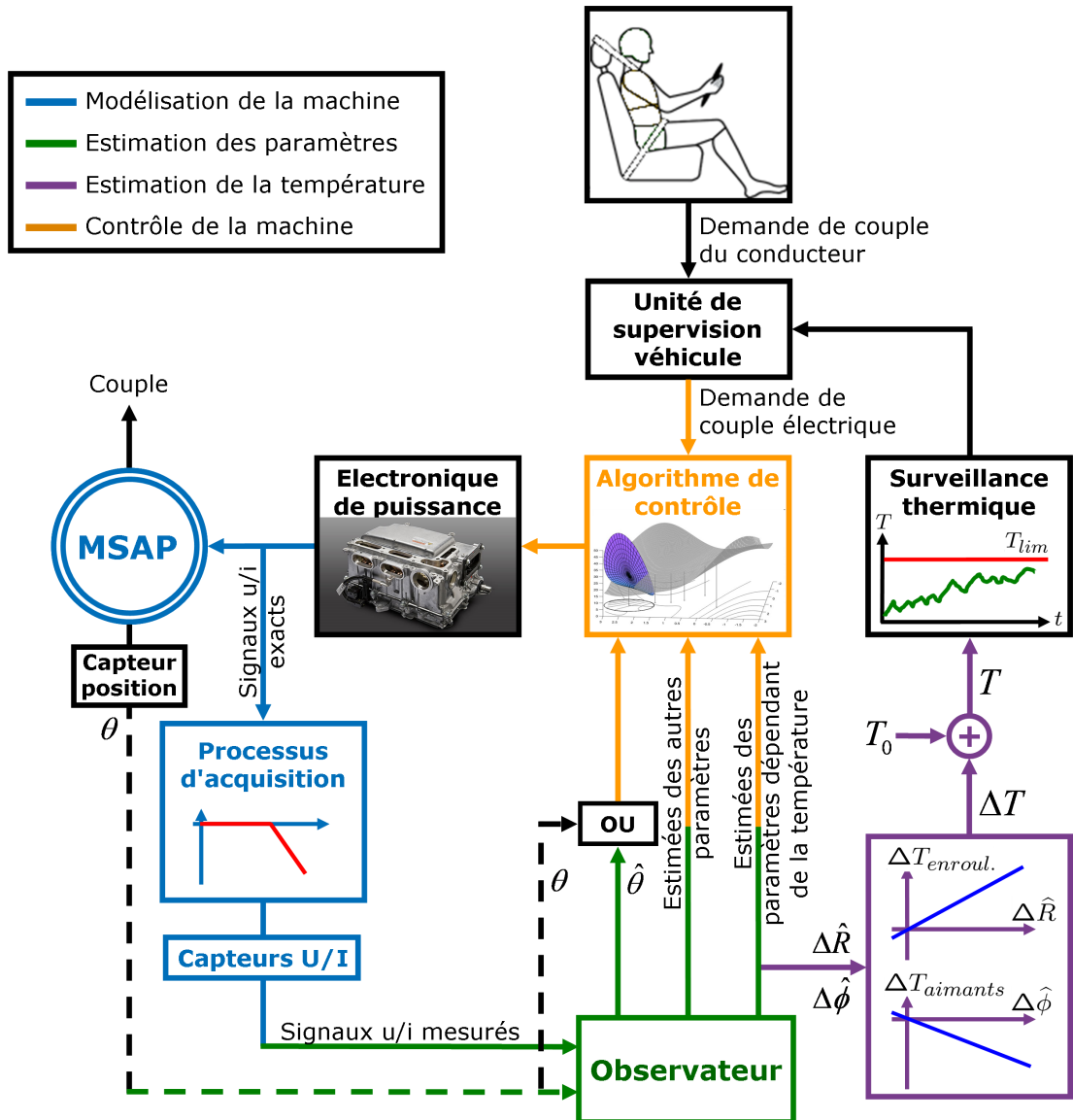


FIGURE 1.10 – Schéma récapitulatif : Modélisation, Estimation, Contrôle, Supervision

La démarche consiste en la conception d'observateurs de paramètres, implémentables en ligne, basés sur une modélisation réaliste de la machine, et ayant comme entrées les signaux mesurés de courant et tension, voire la position θ de la machine donnée par un capteur de position (partie verte). De part la structure des observateurs,

il est toutefois parfois possible, comme nous le verrons plus loin, d'estimer également la position $\hat{\theta}$. Dans ce cas, la position ne fait évidemment plus partie des entrées de l'observateur. Cette estimation de la position et son intégration dans le contrôle de la machine est la base du contrôle *sensorless* d'une machine électrique, qui fait l'objet d'une littérature très fournie, mais n'est pas l'objet principal de cette thèse, à savoir l'estimation de la température. Cependant, si nous pouvons disposer d'une estimation de la position à moindre coût supplémentaire, il n'y a pas de raison de s'en priver. Les paramètres estimés par l'observateur, et notamment les paramètres dépendants de la température, sont alors utilisés, d'une part pour adapter en ligne le contrôle en couple de la machine (partie orange), d'autre part pour estimer en ligne les températures du stator, par les variations $\Delta\hat{R}$ de résistance des enroulements, et du rotor, par les variations $\Delta\hat{\phi}$ du flux des aimants (partie violette). Ces estimations de températures permettent la mise en place d'une surveillance thermique. Cette dernière pourra être utilisée pour diagnostiquer le fonctionnement de la machine et pour améliorer sa disponibilité, sans risque de détérioration.

Revenons désormais sur deux éléments importants de la première phrase du paragraphe précédent : les observateurs doivent être basés sur une modélisation réaliste et ils ont comme entrées les signaux mesurés de courant et tension. De ce fait, l'utilisation de la modélisation classique présentée dans ce chapitre sous-entend que l'on travaille sur les signaux exacts de courant et tension. Ceci étant expérimentalement peu probable, il est préférable de modifier ces équations classiques pour tenir compte de la différence entre signaux mesurés et signaux exacts (partie bleue). Aussi allons nous maintenant nous intéresser à la conception d'un modèle plus réaliste de la machine (chapitre 2) puis à la validation de celui-ci (chapitre 3).

Chapitre 2

Exploitation et amélioration de la modélisation classique

Dans ce chapitre, nous revenons sur la modélisation de la machine synchrone à aimants permanents en étudiant tout d'abord certaines propriétés des équations de la modélisation classique avant d'améliorer cette modélisation de manière à nous rapprocher de la réalité. Ainsi, le paragraphe 2.1 étudie, dans un premier temps, certaines propriétés d'invariance du modèle avant d'introduire et d'étudier une solution particulière à tensions et couple constants dans le repère (d, q) , laquelle sera d'une grande aide pour simplifier des calculs complexes par la suite. Puis, le paragraphe 2.2 établit un nouveau modèle plus réaliste de la machine à partir de la modélisation classique en introduisant des filtres entre signaux exacts et signaux mesurés. Ce nouveau modèle fait alors l'objet au paragraphe 2.3 d'une approximation ne retenant que le caractère déphasant des filtres. Le paragraphe 2.1 est indépendant des paragraphes 2.2 et 2.3, excepté un résultat de 2.1 utile pour les deux autres paragraphes. Les résultats de 2.1 seront également utilisés à plusieurs reprises dans les chapitres suivants.

2.1 Etude de propriétés du modèle classique de la MSAP

Dans ce paragraphe, nous étudions tout d'abord des propriétés d'invariance du modèle, avant d'introduire et d'étudier une solution particulière à tensions et couple constants dans le repère (d, q) à partir de l'équilibre du modèle. Les résultats de ce paragraphe nous seront utiles à diverses reprises par la suite.

2.1.1 Propriétés utiles d'invariance

Les équations de la MSAP présentent plusieurs invariances. Parmi celles-ci, deux nous intéressent particulièrement et nous seront utiles par la suite : l'invariance sous l'action d'une variation du régime et l'invariance sous l'action d'une variation du couple. Nous présentons ces invariances sur le modèle classique de la MSAP dans le repère (d, q) (1.17). Ne touchant pas à la position θ , comme nous allons le voir, ces invariances sont également valables pour le modèle classique dans le repère (α, β) .

Invariance sous l'action d'une variation de régime

Soit $\mathcal{V} = (i_d, i_q, u_d, u_q, \theta, R, L_d, L_q, \phi, J_m, \omega, \tau_L)$. On définit l'action d'une constante réelle k_ω sur \mathcal{V} comme la fonction \mathcal{F}_{k_ω} définie par :

$$\begin{aligned} & (i_d^{k_\omega}, i_q^{k_\omega}, u_d^{k_\omega}, u_q^{k_\omega}, \theta^{k_\omega}, L_d^{k_\omega}, L_q^{k_\omega}, \phi^{k_\omega}, R^{k_\omega}, J_m^{k_\omega}, \omega^{k_\omega}, \tau_L^{k_\omega}, t^{k_\omega}) \\ & = \mathcal{F}_{k_\omega}(\mathcal{V}, t, k_\omega) = \left(i_d, i_q, k_\omega u_d, k_\omega u_q, \theta, L_d, L_q, \phi, k_\omega R, \frac{J_m}{k_\omega^2}, k_\omega \omega, \tau_L, \frac{t}{k_\omega} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ecrites dans les variables k_ω , les équations (1.17) sont :

$$\begin{aligned} L_d^{k_\omega} \frac{di_d^{k_\omega}}{dt^{k_\omega}} &= -R^{k_\omega} i_d^{k_\omega} + \omega^{k_\omega} L_q^{k_\omega} i_q^{k_\omega} + u_d^{k_\omega}, \\ L_q^{k_\omega} \frac{di_q^{k_\omega}}{dt^{k_\omega}} &= -R^{k_\omega} i_q^{k_\omega} - \omega^{k_\omega} (L_d^{k_\omega} i_d^{k_\omega} + \phi^{k_\omega}) + u_q^{k_\omega}, \\ J_m^{k_\omega} \frac{d\omega^{k_\omega}}{dt^{k_\omega}} &= p\phi^{k_\omega} i_q^{k_\omega} + p(L_d^{k_\omega} - L_q^{k_\omega}) i_d^{k_\omega} i_q^{k_\omega} - \tau_L^{k_\omega}, \\ \frac{d\theta^{k_\omega}}{dt^{k_\omega}} &= \omega^{k_\omega}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En revenant aux variables initiales, ceci donne :

$$\begin{aligned} L_d k_\omega \frac{di_d}{dt} &= -k_\omega R i_d + k_\omega \omega L_q i_q + k_\omega u_d, \\ L_q k_\omega \frac{di_q}{dt} &= -k_\omega R i_q - k_\omega \omega (L_d i_d + \phi) + k_\omega u_q, \\ \frac{k_\omega^2}{k_\omega^2} J_m \frac{d\omega}{dt} &= p\phi i_q + p(L_d - L_q) i_d i_q - \tau_L, \\ k_\omega \frac{d\theta}{dt} &= k_\omega \omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ainsi les équations avec les variables transformées (2.3) sont les mêmes que les équations avec les variables originelles (1.17), à condition de multiplier les tensions et la résistance

proportionnellement au régime et de diviser l'inertie par le carré de la constante de proportionnalité. Il y a donc, sous cette condition, invariance sous l'action d'une variation de régime. Nous retrouvons ici l'approximation bien connue de proportionnalité entre tensions et régime, valide lorsque ce dernier est à peu près constant (pour que l'effet de l'inertie soit négligeable) et assez élevé (pour que l'effet de la résistance soit négligeable). Et bien sûr, étant donnée la proportionnalité entre les deux, le régime définit l'échelle de temps. Ce point est essentiel pour la sélection des constantes de temps dans tout ce qui est traitement des signaux électriques, observateurs compris.

Invariance sous l'action d'une variation de couple

On définit l'action d'une constante réelle k_τ sur \mathcal{V} comme la fonction \mathcal{F}_{k_τ} définie par :

$$\begin{aligned} & \left(i_d^{k_\tau}, i_q^{k_\tau}, u_d^{k_\tau}, u_q^{k_\tau}, \theta^{k_\tau}, L_d^{k_\tau}, L_q^{k_\tau}, \phi^{k_\tau}, R^{k_\tau}, J_m^{k_\tau}, \omega^{k_\tau}, \tau_L^{k_\tau}, t^{k_\tau} \right) \\ & = \mathcal{F}_{k_\tau}(\mathcal{V}, t, k_\tau) = \left(k_\tau i_d, k_\tau i_q, u_d, u_q, \theta, \frac{L_d}{k_\tau}, \frac{L_q}{k_\tau}, \phi, \frac{R}{k_\tau}, k_\tau J_m, \omega, k_\tau \tau_L, t \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ecrites dans les variables k_τ , les équations (1.17) sont :

$$\begin{aligned} L_d^{k_\tau} \frac{di_d^{k_\tau}}{dt^{k_\tau}} &= -R^{k_\tau} i_d^{k_\tau} + \omega^{k_\tau} L_q^{k_\tau} i_q^{k_\tau} + u_d^{k_\tau}, \\ L_q^{k_\tau} \frac{di_q^{k_\tau}}{dt^{k_\tau}} &= -R^{k_\tau} i_q^{k_\tau} - \omega^{k_\tau} (L_d^{k_\tau} i_d^{k_\tau} + \phi^{k_\tau}) + u_q^{k_\tau}, \\ J_m^{k_\tau} \frac{d\omega^{k_\tau}}{dt^{k_\tau}} &= p\phi^{k_\tau} i_q^{k_\tau} + p(L_d^{k_\tau} - L_q^{k_\tau}) i_d^{k_\tau} i_q^{k_\tau} - \tau_L^{k_\tau}, \\ \frac{d\theta^{k_\tau}}{dt^{k_\tau}} &= \omega^{k_\tau}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En revenant aux variables initiales, ceci donne :

$$\begin{aligned} \frac{L_d}{k_\tau} k_\tau \frac{di_d}{dt} &= -\frac{R}{k_\tau} k_\tau i_d + \omega \frac{L_q}{k_\tau} k_\tau i_q + u_d, \\ \frac{L_q}{k_\tau} k_\tau \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R}{k_\tau} k_\tau i_q - \omega \left(\frac{L_d}{k_\tau} k_\tau i_d + \phi \right) + u_q, \\ k_\tau J_m \frac{d\omega}{dt} &= p\phi k_\tau i_q + p \left(\frac{L_d}{k_\tau} - \frac{L_q}{k_\tau} \right) k_\tau^2 i_d i_q - k_\tau \tau_L, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ainsi les équations avec les variables transformées (2.6) sont les mêmes que les équations avec les variables originelles (1.17), à condition de multiplier proportionnellement au

couple les courants et l'inertie et de diviser la résistance et les inductances par la constante de proportionnalité. Il y a donc, sous cette condition, invariance sous l'action d'une variation de couple. Si les ordres de grandeur des divers paramètres ne permettent pas de tirer de conclusions aussi pertinentes que dans le cas précédent, nous retenons tout de même que l'échelle de temps est peu affectée par une variation de couple.

2.1.2 Introduction et étude d'une solution particulière

Introduction d'une solution particulière

Dans certains cas, afin de simplifier des calculs quasiment irréalisables dans le cas général, l'utilisation d'une solution particulière, à tensions et couple constants dans le repère (d, q) , pourra nous être utile. Une telle solution permet en effet de donner des expressions aux signaux de courants et tensions et à leurs dérivées.

Afin d'introduire une telle solution particulière, nous recherchons si le modèle (1.17) dans le repère (d, q) admet un point d'équilibre en (i_d, i_q, ω) avec $\omega > 0$ en considérant les entrées, à savoir les tensions u_d et u_q et le couple de charge τ_L , constantes. La proposition suivante nous renseigne sur ce point.

Proposition 2.1. *Si τ_L , u_d et u_q sont constants, le modèle (1.17) dans le repère (d, q) a un point d'équilibre en (i_d, i_q, ω) , avec $\omega > 0$, si le couple de charge τ_L vérifie la contrainte :*

$$\tau_L < \frac{pu_q}{R} \left(\phi + (L_d - L_q) \frac{u_d}{R} \right). \quad (2.7)$$

Le point d'équilibre est alors donné par :

$$\begin{aligned} i_{d_{eq}} &= \frac{Ru_d + \omega_{eq}L_q u_q - L_q \omega_{eq}^2 \phi}{R^2 + L_d L_q \omega_{eq}^2}, \\ i_{q_{eq}} &= \frac{Ru_q - \omega_{eq}L_d u_d - R\omega_{eq} \phi}{R^2 + L_d L_q \omega_{eq}^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

et ω_{eq} solution de :

$$\begin{aligned} (Ru_q - \omega L_d u_d - R\omega \phi)^2 (L_d - L_q) \omega \frac{L_q}{R} - \frac{\tau_L}{p} (R^2 + L_d L_q \omega^2)^2 \\ + (Ru_q - \omega L_d u_d - R\omega \phi) (R^2 + L_d L_q \omega^2) \left(\phi + (L_d - L_q) \frac{u_d}{R} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dans le cas d'un moteur à pôles lisses ($L_d = L_q$), la contrainte sur τ_L devient une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un point d'équilibre.

Démonstration. La recherche d'un point d'équilibre en (i_d, i_q, ω) pour le modèle (1.17) donne :

$$\begin{aligned} u_d &= Ri_d - \omega L_q i_q , \\ u_q &= Ri_q + \omega(L_d i_d + \phi) , \\ \frac{\tau_L}{p i_q} &= \phi + (L_d - L_q) i_d . \end{aligned} \quad (2.10)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{\omega L_q}{R} i_q + \frac{u_d}{R} , \\ u_q &= Ri_q + \omega \left[L_d \left(\frac{\omega L_q}{R} i_q + \frac{u_d}{R} \right) + \phi \right] , \\ \frac{\tau_L}{p i_q} &= \phi + (L_d - L_q) \left(\frac{\omega L_q}{R} i_q + \frac{u_d}{R} \right) , \end{aligned} \quad (2.11)$$

soit :

$$\begin{aligned} i_q &= \frac{Ru_q - \omega L_d u_d - R\omega\phi}{R^2 + L_d L_q \omega^2} , \\ i_d &= \frac{Ru_d + \omega L_q u_q - L_q \omega^2 \phi}{R^2 + L_d L_q \omega^2} , \\ \frac{\tau_L}{p} &= (L_d - L_q) \frac{\omega L_q}{R} i_q^2 + \left[\phi + (L_d - L_q) \frac{u_d}{R} \right] i_q . \end{aligned} \quad (2.12)$$

La dernière équation du système donne (2.9), avec à gauche du signe égal un polynôme de degré 4 en ω , que l'on note P_ω . On a $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} P_\omega(\omega) = -\infty$, et :

$$P_\omega(0) = R^3 u_q \left[\phi + (L_d - L_q) \frac{u_d}{R} \right] - \frac{\tau_L}{p} R^4 . \quad (2.13)$$

Donc, si :

$$\tau_L < \frac{p u_q}{R} \left[\phi + (L_d - L_q) \frac{u_d}{R} \right] , \quad (2.14)$$

on a $P_\omega(0) > 0$ et il existe une solution $\omega_{eq} > 0$ tel que $P(\omega_{eq}) = 0$. On a alors (2.8).

Dans le cas d'un moteur à pôles lisses ($L_d = L_q = L$), on a :

$$P_\omega(\omega) = (Ru_q - \omega L u_d - R\omega\phi)(R^2 + L^2 \omega^2) \phi - \frac{\tau_L}{p} (R^2 + L^2 \omega^2)^2 , \quad (2.15)$$

donc :

$$P_\omega(\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tau_L L^2}{p} \omega^2 + \phi(L u_d + R\phi)\omega + R \left(\frac{\tau_L R}{p} - \phi u_q \right) = 0 \quad (2.16)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-\phi(Lu_d - R\phi) \pm \sqrt{\phi^2(Lu_d + R\phi)^2 - \frac{4\tau_L L^2 R}{p} \left(\frac{\tau_L R}{p} - \phi u_q \right)}}{2\tau_L L^2 / p}. \quad (2.17)$$

Il existe alors une solution $\omega > 0$ si et seulement si $\tau_L < \frac{p\phi u_q}{R}$.

□

Si τ_L , u_d et u_q sont constants, il existe donc toujours un équilibre $(i_{deq}, i_{qeq}, \omega_{eq})$ tant que le couple de charge n'est pas trop fort. C'est cet équilibre que l'on choisit pour définir notre solution particulière à tensions u_d et u_q et couple constants. On introduit l'indice p pour désigner la solution particulière (dans les chapitres suivants, lors des études pour la solution particulière, cet indice sera en général omis). Dans le repère (d, q) , on note alors $(i_{dp}, i_{qp}, \omega_p) = (i_{deq}, i_{qeq}, \omega_{eq})$ le point d'équilibre pour les tensions et couple constants $(u_{dp}, u_{qp}, \tau_{Lp})$. Par la proposition, nous voyons qu'il n'est pas simple d'exprimer $(i_{dp}, i_{qp}, \omega_p)$ en fonction de $(u_{dp}, u_{qp}, \tau_{Lp})$. De ce fait, on choisit plutôt, pour la solution particulière, d'exprimer $(u_{dp}, u_{qp}, \tau_{Lp})$ en fonction de $(i_{dp}, i_{qp}, \omega_p)$. Les équations d'équilibre s'écrivent alors simplement :

$$\begin{aligned} u_{dqp} &= R i_{dqp} + \omega_p \begin{pmatrix} -L_q i_{qp} \\ L_d i_{dp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \omega_p \end{pmatrix}, \\ \tau_{Lp} &= p\phi i_{qp} + p(L_d - L_q) i_{dp} i_{qp}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En passant en coordonnées polaires, on note :

$$u_{dqp} = U \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix}, \quad i_{dqp} = I \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

avec les amplitudes U et I et les phases φ_u et φ_i indépendantes du temps pour la solution particulière. Les équations d'équilibre s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} U \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -L_q \sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & L_d \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RI \\ \omega_p I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \omega_p \end{pmatrix}, \\ \tau_{Lp} &= p\phi I \sin \varphi_i + p \frac{L_d - L_q}{2} I^2 \sin 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Par ailleurs, on note que dans le repère (α, β) , on a :

$$u_{\alpha\beta p} = Uv_u \quad , \quad i_{\alpha\beta p} = Iv_i \quad ,$$

$$v_u = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_u) \\ \sin(\theta + \varphi_u) \end{pmatrix} \quad , \quad v_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_i) \\ \sin(\theta + \varphi_i) \end{pmatrix} . \quad (2.21)$$

Nous allons désormais exploiter cette solution particulière pour caractériser les amplitudes des courants et tensions en fonction de la vitesse et du couple, ainsi que pour déterminer le déphasage entre tensions et courants. Ces caractérisations nous seront utiles ultérieurement, dans le cadre d'applications numériques, d'analyses d'impacts de bruits, ou pour une estimation approximative de la vitesse par exemple.

Caractérisation de l'amplitude des courants et tensions en fonction de la vitesse et du couple

Cherchant à déterminer les amplitudes des courants et tensions à vitesse et couple donnés, pour différents jeux de vitesse et couple, l'utilisation de la solution particulière se prête parfaitement à cette caractérisation. Par ailleurs, comme nous utiliserons celle-ci dans le cas d'un moteur à pôles lisses, nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre d'un tel moteur, i.e. tel que $L_d = L_q = L$. D'après (2.18), pour un moteur à pôles lisses, nous avons :

$$u_{dqp} = Ri_{dqp} + L\omega_p \begin{pmatrix} -i_{qp} \\ i_{dp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi\omega_p \end{pmatrix} , \quad (2.22)$$

$$\tau_{Lp} = p\phi i_{qp} .$$

On en déduit directement l'expression de l'amplitude des courants, qui, comme on pouvait s'y attendre comme conséquence des propriétés d'invariance étudiées au paragraphe 2.1.1, ne dépend que du couple et pas du régime :

$$I = \sqrt{i_{dp}^2 + i_{qp}^2} = \sqrt{i_{dp}^2 + \frac{\tau_{Lp}^2}{p^2\phi^2}} . \quad (2.23)$$

En revanche, l'expression de l'amplitude de la tension dépend du régime et du couple, selon l'expression :

$$U = \sqrt{R^2 I^2 + \frac{2R\tau_{Lp}}{p}\omega_p + (L^2 I^2 + \phi^2 + 2Li_{dp}\phi)\omega_p^2} , \quad (2.24)$$

ou l'expression :

$$U = \sqrt{R^2 i_{dp}^2 + \omega_p^2 (L^2 i_{dp}^2 + \phi^2 + 2L i_{dp} \phi) + \frac{2R\omega_p}{p} \tau_{Lp} + \frac{R^2 + \omega_p^2 L^2}{p^2 \phi^2} \tau_{Lp}^2}. \quad (2.25)$$

La figure 2.1 présente une application numérique de ces relations (valeurs données par le tableau 8.1 et $i_d = -2A$ sauf pour la figure 2.1(a)). La figure 2.1(a) présente pour différentes valeurs du courant direct, l'amplitude du courant en fonction du couple, et les figures 2.1(b) et 2.1(c) présentent l'amplitude de la tension en fonction respectivement du régime pour différents couples et du couple à différents régimes.

D'après (2.23), on remarque que plus i_{dp} est proche de zéro, plus l'amplitude des courants tend à être proportionnelle au couple, la proportionnalité parfaite étant atteinte pour $i_{dp} = 0$, ce que confirme la figure 2.1(a). De même, l'amplitude des tensions est quasiment proportionnelle au régime. Seule la résistance vient en effet "empêcher" cette proportionnalité. Si la résistance était proportionnelle au régime, d'après (2.24), l'amplitude des tensions le serait également. Les deux premiers termes étant négligeables devant le troisième pour des régimes suffisamment élevés, la proportionnalité est quasiment effective. C'est ce que confirme la figure 2.1(b), la proportionnalité étant même déjà réaliste pour des régime très faibles. Ceci peut s'avérer intéressant pour inverser approximativement la relation (2.24) et exprimer le régime en fonction de l'amplitude de la tension. En revanche, comme on le constate sur la figure 2.1(c), l'amplitude de la tension est quasiment indépendante de la valeur du couple.

Détermination du déphasage entre tensions et courants

Toujours dans le cadre d'un moteur à pôles lisses et pour la solution particulière (2.21), la proposition suivante permet de calculer le déphasage entre les tensions et courants.

Proposition 2.2. *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), les phases φ_i et φ_u du courant et de la tension et le déphasage $\Delta\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$ entre courants et tensions sont donnés, pour une MSAP à pôles lisses, selon les conditions initiales, par*

$(\varphi_{i_1}, \varphi_{u_1}, \Delta\varphi_{ui_1})$ ou par $(\varphi_{i_2}, \varphi_{u_2}, \Delta\varphi_{ui_2})$:

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1} &= -\varphi_a + \arcsin\left(\frac{U^2 - L^2 I^2 \omega_p^2 - R^2 I^2 - \omega_p^2 \phi^2}{2\omega_p \phi I \sqrt{L^2 \omega_p^2 + R^2}}\right), \\ \varphi_{i_2} &= \pi - \varphi_{i_1} - 2\varphi_a, \\ \Delta\varphi_{ui_k} &= \arctan 2\left(\frac{LI\omega_p + \omega_p \phi \cos \varphi_{i_k}}{U}, \frac{RI + \omega_p \phi \sin \varphi_{i_k}}{U}\right), \quad k = 1, 2, \\ \varphi_{u_k} &= \Delta\varphi_{ui_k} + \varphi_{i_k}, \quad k = 1, 2,\end{aligned}\tag{2.26}$$

avec :

$$\varphi_a = \arctan 2\left(\frac{LI\omega_p}{I\sqrt{L^2 \omega_p^2 + R^2}}, \frac{RI}{I\sqrt{L^2 \omega_p^2 + R^2}}\right).\tag{2.27}$$

La figure 2.2 présente, en fonction du couple à 4000 tr/min (fig. 2.2(a)) et en fonction du régime à 1Nm (fig. 2.2(b)), les deux jeux de valeurs prises par les phases φ_u et φ_i sur les tensions et sur les courants et les deux déphasages associés. L'application numérique a été réalisée avec les valeurs du tableau 8.1, avec $i_d = -2A$ et avec les amplitudes I et U des courants et tensions données par (2.23) et (2.24). On constate que le déphasage dépend du régime, notamment à bas régime, et aussi très légèrement du couple. Ces valeurs nous seront utiles lors d'applications numériques concernant l'observateur de Luenberger aux paragraphes 4.8, 5.3 et 6.2.9.

Démonstration. La partie électrique des équations d'équilibre (2.20) pour un moteur à pôles lisses est :

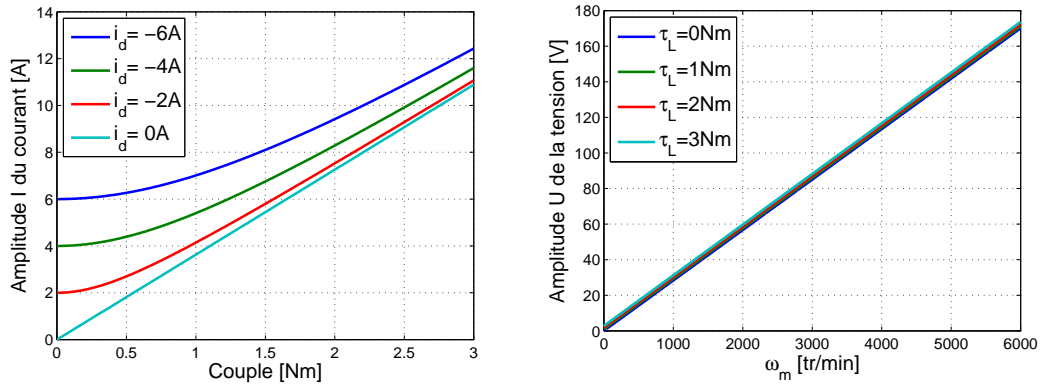
$$a_4 \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} = \mathcal{R}(-\varphi_i) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \end{pmatrix},\tag{2.28}$$

avec la rotation \mathcal{R} définie par (1.2) et $a_1 = LI\omega_p$, $a_2 = RI$, $a_3 = \omega_p \phi$ et $a_4 = U$. En multipliant à gauche par la rotation $\mathcal{R}(\varphi_i)$, on obtient le système suivant que l'on cherche à résoudre en φ_i et en $\Delta\varphi_{ui}$:

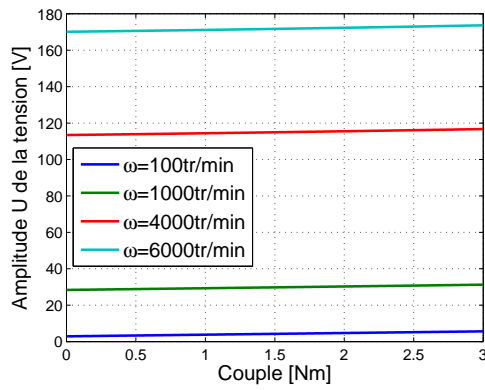
$$\begin{aligned}a_4 \cos \Delta\varphi_{ui} - a_3 \sin \varphi_i &= a_2, \\ a_4 \sin \Delta\varphi_{ui} - a_3 \cos \varphi_i &= a_1.\end{aligned}\tag{2.29}$$

On en déduit :

$$\cos \Delta\varphi_{ui} = \cos\left(\arctan\left(\frac{a_1 + a_3 \cos \varphi_i}{a_2 + a_3 \sin \varphi_i}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_1 + a_3 \cos \varphi_i}{a_2 + a_3 \sin \varphi_i}\right)^2}}.\tag{2.30}$$

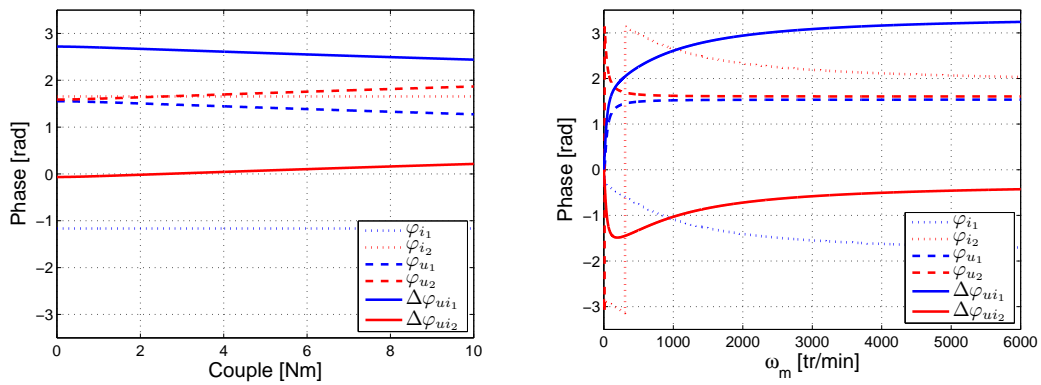


(a) Amplitude du courant en fonction du couple (b) Amplitude de la tension en fonction du régime



(c) Amplitude de la tension en fonction du couple

FIGURE 2.1 – Amplitudes des courant et tension en fonction du régime et du couple



(a) ...en fonction du couple à 4000 tr/min (b) ...en fonction du régime pour un couple de 1Nm

FIGURE 2.2 – Phases des signaux de tension et de courant et déphasage entre eux...

Puis, d'après la première équation de (2.29) :

$$\begin{aligned} \frac{\pm a_4(a_2 + a_3 \sin \varphi_i)}{\sqrt{(a_2 + a_3 \sin \varphi_i)^2 + (a_1 + a_3 \cos \varphi_i)^2}} &= a_2 + a_3 \sin \varphi_i \\ \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_3(a_2 \sin \varphi_i + a_1 \cos \varphi_i)} &= \pm a_4. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ainsi, au carré :

$$a_1 \cos \varphi_i + a_2 \sin \varphi_i = \frac{a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_3}. \quad (2.32)$$

Or,

$$a_1 \cos \varphi_i + a_2 \sin \varphi_i = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sin(\varphi_i + \varphi_a), \quad (2.33)$$

avec :

$$\varphi_a = \arctan 2 \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right). \quad (2.34)$$

Soit :

$$\sin(\varphi_i + \varphi_a) = \frac{a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_3 \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \quad (2.35)$$

Il y a donc deux solutions pour φ_i :

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1} &= \arcsin \left(\frac{a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_3 \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) - \varphi_a, \\ \varphi_{i_2} &= \pi - (\varphi_{i_1} + \varphi_a) - \varphi_a = \pi - \varphi_{i_1} - 2\varphi_a. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Or, par (2.29), on a :

$$\sin \Delta\varphi_{ui} = \frac{a_1 + a_3 \cos \varphi_i}{a_4}, \quad \cos \Delta\varphi_{ui} = \frac{a_2 + a_3 \sin \varphi_i}{a_4}. \quad (2.37)$$

Les deux solutions $\Delta\varphi_{ui_1}$ et $\Delta\varphi_{ui_2}$ sont alors données par :

$$\Delta\varphi_{ui_k} = \arctan 2 \left(\frac{a_1 + a_3 \cos \varphi_{i_k}}{a_4}, \frac{a_2 + a_3 \sin \varphi_{i_k}}{a_4} \right), \quad k = 1, 2. \quad (2.38)$$

□

2.2 Etablissement d'un modèle plus réaliste de la MSAP par modification du modèle classique : Modèle réaliste ou réaliste-filtre

Nous avons donné au paragraphe 1.2 les équations classiques du modèle de la machine synchrone à aimants permanents dans les repères liés au rotor et au stator. Cependant, ce modèle fait intervenir les signaux exacts de courants et de tensions. Or, expérimentalement, les signaux mesurés ont peu de chance d'être rigoureusement égaux aux signaux exacts. En effet, il est probable que des retards voire des filtres, dont nous ne connaissons pas les caractéristiques, se cachent dans les capteurs et plus généralement dans la chaîne d'acquisition. Afin d'approcher au mieux la réalité, nous proposons, outre le modèle classique "parfait" présenté précédemment, d'établir également une version modifiée, dit modèle réaliste ou modèle réaliste-filtre, de ce modèle. Nous serons alors amené, selon les situations à utiliser l'un ou l'autre des modèles.

Afin d'établir ce modèle réaliste, nous faisons l'hypothèse que les tensions et courants mesurés sont issus d'un filtrage du premier ordre de gain unitaire des tensions et courants exacts. Nous introduisons alors deux nouveaux paramètres dans le modèle : τ_u et τ_i les constantes de temps respectives des filtres sur les tensions et courants exacts u_{abc} et i_{abc} . Ainsi, avec $y_{u_{abc}}$ et $y_{i_{abc}}$ les tensions et courants mesurés, on définit :

$$\begin{aligned} y_{u_{abc}} &= \frac{1}{1 + \tau_u s} u_{abc} \ , & \text{soit :} & & u_{abc} &= \tau_u \dot{y}_{u_{abc}} + y_{u_{abc}} \ , \\ y_{i_{abc}} &= \frac{1}{1 + \tau_i s} i_{abc} \ , & & & i_{abc} &= \tau_i \dot{y}_{i_{abc}} + y_{i_{abc}} \ . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les tensions $y_{u_{\alpha\beta}}$ et courants $y_{i_{\alpha\beta}}$ mesurés dans le repère (α, β) sont ensuite obtenus en appliquant la transformation de Concordia (1.1) aux tensions et courants mesurés dans le repère (a, b, c) :

$$\begin{aligned} y_{u_{\alpha\beta}} &= \mathcal{C} y_{u_{abc}} \ , \\ y_{i_{\alpha\beta}} &= \mathcal{C} y_{i_{abc}} \ . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Comme \mathcal{C} est une matrice constante, $\dot{y}_{u_{\alpha\beta}} = \mathcal{C} \dot{y}_{u_{abc}}$ et $\dot{y}_{i_{\alpha\beta}} = \mathcal{C} \dot{y}_{i_{abc}}$ et on alors :

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \tau_u \dot{y}_{u_{\alpha\beta}} + y_{u_{\alpha\beta}} \ , & \text{soit :} & & y_{u_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{1 + \tau_u s} u_{\alpha\beta} \ , \\ i_{\alpha\beta} &= \tau_i \dot{y}_{i_{\alpha\beta}} + y_{i_{\alpha\beta}} \ , & & & y_{i_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{1 + \tau_i s} i_{\alpha\beta} \ . \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.2. Etablissement d'un modèle plus réaliste de la MSAP par modification du modèle classique : Modèle réaliste ou réaliste-filtre

Enfin, on obtient les tensions $y_{u_{dq}}$ et courants $y_{i_{dq}}$ mesurés dans le repère (d, q) en appliquant la rotation (1.2) aux tensions et courants mesurés dans le repère (α, β) :

$$\begin{aligned} y_{u_{dq}} &= \mathcal{R}(\theta)y_{u_{\alpha\beta}} , \\ y_{i_{dq}} &= \mathcal{R}(\theta)y_{i_{\alpha\beta}} . \end{aligned} \quad (2.42)$$

La matrice $\mathcal{R}(\theta)$ n'étant pas constante, on a :

$$\begin{aligned} \dot{y}_{u_{dq}} &= \mathcal{R}(\theta)\dot{y}_{u_{\alpha\beta}} - \omega \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} y_{u_{\alpha\beta}} = \mathcal{R}(\theta)\dot{y}_{u_{\alpha\beta}} - \omega \begin{pmatrix} -y_{u_q} \\ y_{u_d} \end{pmatrix} , \\ \dot{y}_{i_{dq}} &= \mathcal{R}(\theta)\dot{y}_{i_{\alpha\beta}} - \omega \mathcal{J}y_{i_{dq}} , \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec \mathcal{J} défini par (1). On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{dq} &= \tau_u \dot{y}_{u_{dq}} + y_{u_{dq}} + \omega \tau_u \mathcal{J}y_{u_{dq}} , & \text{soit :} & \quad u_{dq} = \frac{1}{1 + \tau_u s} (u_{dq} + \omega \tau_u \mathcal{J}y_{u_{dq}}) , \\ i_{dq} &= \tau_i \dot{y}_{i_{dq}} + y_{i_{dq}} + \omega \tau_i \mathcal{J}y_{i_{dq}} , & & \quad i_{dq} = \frac{1}{1 + \tau_i s} (i_{dq} + \omega \tau_i \mathcal{J}y_{i_{dq}}) . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Il suffit désormais pour obtenir le modèle réaliste de remplacer u_α , u_β , i_α , i_β , u_d , u_q , i_d et i_q dans les équations du modèle classique (1.17), (1.18) et (1.19) dans les différents repères par leurs expressions données par (2.41) et (2.44). Il n'est pas nécessaire d'expliciter les expressions obtenues qui ne feraient qu'amener de la complexité inutile. On note évidemment que si les constantes de temps τ_u et τ_i sont nulles, on retrouve les équations du modèle classique.

En pratique, les retards ou filtrages apparaissant dans la chaîne d'acquisition ne sont pas forcément des premiers ordres. Il s'agit alors de considérer le filtre du premier ordre qui s'en approche le plus. Expérimentalement, pour déterminer les constantes de temps τ_u et τ_i des filtres, une solution consiste à effectuer un réglage "à la main", à l'aide des observateurs présentés plus loin, ce réglage étant à faire une fois pour toute pour un couple moteur/chaîne d'acquisition donné. Une autre solution, si τ_u et τ_i sont proches, consiste à utiliser l'algorithme d'identification présenté au chapitre 3, lequel se base sur la modélisation approchée du modèle réaliste présentée au paragraphe 2.3.

2.3 Approximation du modèle réaliste : Modèle réaliste-déphasage

Pour des régimes faibles par rapport aux fréquences de coupure des filtres, le principal impact des filtres intégrés au modèle est de faire apparaître un déphasage sur les signaux de tensions et courants, la perte de gain étant faible, l'atténuation du gain étant en effet d'ordre 2 tandis que celle de la phase est d'ordre 1. Ceci nous incite, à l'aide d'une approximation valide à bas régime, à simplifier le modèle réaliste ou réaliste-filtre pour y faire apparaître uniquement ce déphasage. Le modèle approché sera dénoté modèle réaliste-déphasage.

Ce modèle approché est établi pour la solution particulière donnée par (2.21). Ainsi, d'après (2.41), $y_{i_{\alpha\beta p}} = \frac{1}{1 + \tau_i s} i_{\alpha\beta p}$ et alors :

$$y_{i_{\alpha\beta p}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2}} \begin{pmatrix} I \cos(\theta + \varphi_i - \arctan \tau_i \omega) \\ I \sin(\theta + \varphi_i - \arctan \tau_i \omega) \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Par un développement limité en $\tau_i \omega$ au voisinage de 0, i.e. à bas régime (pour $\omega \ll 1/\tau_i$), on montre qu'on peut, à l'ordre 1 en $\tau_i \omega$, réaliser l'approximation suivante :

$$y_{i_{\alpha\beta p}} \approx \mathcal{R}(\tau_i \omega) i_{\alpha\beta p}. \quad (2.46)$$

Notons qu'expérimentalement la fréquence de coupure des filtres est très élevée par rapport aux fréquences de rotation du moteur. L'hypothèse de bas régime est donc réaliste.

Démonstration. Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} \arctan \tau_i \omega &= \tau_i \omega + \mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3), \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2}} &= 1 + \mathcal{O}(\tau_i^2 \omega^2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Puis :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega + \mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)) \\ \sin(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega + \mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \\ \sin(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \end{pmatrix} \cos(\mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)) \\ &+ \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \\ \cos(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \end{pmatrix} \sin(\mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)) , \end{aligned} \quad (2.48)$$

et comme $\cos(\mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)) = 1 + \mathcal{O}(\tau_i^6 \omega^6)$ et $\sin(\mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)) = \mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3)$:

$$y_{i_{\alpha\beta p}} = (1 + \mathcal{O}(\tau_i^2 \omega^2)) \left[\begin{pmatrix} I \cos(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \\ I \sin(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3) \\ \mathcal{O}(\tau_i^3 \omega^3) \end{pmatrix} \right] , \quad (2.49)$$

soit :

$$y_{i_{\alpha\beta p}} = \begin{pmatrix} I \cos(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \\ I \sin(\theta + \varphi_i - \tau_i \omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\tau_i^2 \omega^2) \\ \mathcal{O}(\tau_i^2 \omega^2) \end{pmatrix} , \quad (2.50)$$

et donc :

$$y_{i_{\alpha\beta p}} \approx \begin{pmatrix} \cos \tau_i \omega & \sin \tau_i \omega \\ -\sin \tau_i \omega & \cos \tau_i \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \cos(\theta + \varphi_i) \\ I \sin(\theta + \varphi_i) \end{pmatrix} . \quad (2.51)$$

On trouve alors le résultat :

$$y_{i_{\alpha\beta p}} \approx \mathcal{R}(\tau_i \omega) i_{\alpha\beta p} . \quad (2.52)$$

□

On trouve de même que, à bas régime :

$$y_{u_{\alpha\beta p}} \approx \mathcal{R}(\tau_u \omega) u_{\alpha\beta p} . \quad (2.53)$$

Si les deux constantes τ_u et τ_i sont égales, on en déduit alors le modèle réaliste-déphasage (2.54) pour la solution particulière dans le repère (d, q) , comme l'énonce la proposition suivante. Le modèle réaliste-déphasage dans le repère (α, β) ne nous étant pas utile, nous ne le présentons pas.

Proposition 2.3. Pour la solution particulière (2.21), si $\tau_u = \tau_i = \tau_0$ et à bas régime (i.e. $\omega \ll 1/\tau_0$), la modélisation (1.17) avec les expressions des courants et tensions données par (2.44) peut être approchée par :

$$\begin{aligned} y_{u_{dqp}} &\approx \begin{pmatrix} R + \omega_p L_1 \sin 2\epsilon & -\omega_p (L_q \cos^2 \epsilon + L_d \sin^2 \epsilon) \\ \omega_p (L_d \cos^2 \epsilon + L_q \sin^2 \epsilon) & R - \omega_p L_1 \sin 2\epsilon \end{pmatrix} y_{i_{dqp}} + \omega_p \phi \begin{pmatrix} \sin \epsilon \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}, \\ \tau_{L_p} &\approx p\phi(y_{i_{dp}} \sin \epsilon + y_{i_{qp}} \cos \epsilon) + pL_1[(y_{i_{dp}}^2 - y_{i_{qp}}^2) \sin 2\epsilon + 2y_{i_{dp}} y_{i_{qp}} \cos 2\epsilon], \\ \theta &= \omega t, \end{aligned} \tag{2.54}$$

avec $\epsilon = \tau_0 \omega$, $L_0 = \frac{L_d + L_q}{2}$ et $L_1 = \frac{L_d - L_q}{2}$.

Démonstration. On a :

$$y_{i_{dqp}} = \mathcal{R}(\theta) y_{i_{\alpha\beta p}} \approx \mathcal{R}(\theta) \mathcal{R}(\epsilon) i_{\alpha\beta p} = \mathcal{R}(\theta) \mathcal{R}(\epsilon) \mathcal{R}(-\theta) i_{dqp} = \mathcal{R}(\epsilon) i_{dqp}, \tag{2.55}$$

et de même pour les tensions, soit :

$$\begin{aligned} i_{dqp} &\approx \mathcal{R}(-\epsilon) y_{i_{dqp}}, \\ u_{dqp} &\approx \mathcal{R}(-\epsilon) y_{u_{dqp}}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Pour la solution particulière, la partie électrique des équations d'équilibre (2.18) dans le repère (d, q) s'écrit :

$$u_{dqp} = R i_{dqp} + \omega_p \begin{pmatrix} -L_q i_{qp} \\ L_d i_{dp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_p \phi \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Ainsi :

$$y_{u_{dqp}} \approx R y_{i_{dqp}} + \omega_p \mathcal{R}(\epsilon) \begin{pmatrix} -L_q (y_{i_{dp}} \sin \epsilon + y_{i_{qp}} \cos \epsilon) \\ L_d (y_{i_{dp}} \cos \epsilon - y_{i_{qp}} \sin \epsilon) \end{pmatrix} + \mathcal{R}(\epsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_p \phi \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

$$y_{u_{dqp}} \approx \begin{pmatrix} R + \omega_p L_1 \sin 2\epsilon & -\omega_p (L_q \cos^2 \epsilon + L_d \sin^2 \epsilon) \\ \omega_p (L_d \cos^2 \epsilon + L_q \sin^2 \epsilon) & R - \omega_p L_1 \sin 2\epsilon \end{pmatrix} y_{i_{dqp}} + \omega_p \phi \begin{pmatrix} \sin \epsilon \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

Concernant l'équation du couple, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{L_p} &= p\phi i_{qp} + p(L_d - L_q) i_{dp} i_{qp}, \\ \tau_{L_p} &\approx p\phi(y_{i_{dp}} \sin \epsilon + y_{i_{qp}} \cos \epsilon) + pL_1[(y_{i_{dp}}^2 - y_{i_{qp}}^2) \sin 2\epsilon + 2y_{i_{dp}} y_{i_{qp}} \cos 2\epsilon]. \end{aligned} \tag{2.60}$$

On obtient donc le modèle approché (2.54).

□

On vérifie bien dans les équations du modèle approché (2.54) que si ϵ est nul, on retrouve les équations de la modélisation classique (1.17). De ce fait, il sera aisé de faire des comparaisons entre le modèle réaliste-déphasage et le modèle classique.

Remarque : Comme $i_{dqp} = \mathcal{R}(\theta)i_{\alpha\beta p} \approx \mathcal{R}(\theta - \epsilon)y_{i_{\alpha\beta p}}$ et $u_{dqp} = \mathcal{R}(\theta)u_{\alpha\beta p} \approx \mathcal{R}(\theta - \epsilon)y_{u_{\alpha\beta p}}$, on constate que l'intégration dans le modèle d'un déphasage entre signaux mesurés et exacts de courant et de tension se traduit par ce que l'on peut voir comme une erreur de position, les θ étant en effet remplacés par $\theta - \epsilon$. C'est donc, en première approximation, également l'impact d'un filtrage du premier ordre des tensions et courants exacts. Or, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, le contrôle en couple de la machine est effectué dans le repère (d, q) et nécessite une connaissance précise de la position pour effectuer la transformation de Park. *La prise en compte du déphasage dans le modèle est donc essentielle afin d'optimiser le contrôle.*

Pour illustrer ce propos, nous allons nous intéresser à l'impact d'une erreur de position sur les performances de la machine. Cette erreur de position pouvant donc, entre autres origines possibles, être causée par la non prise en compte du déphasage dans le modèle, i.e. par l'utilisation de la modélisation classique plutôt que de la modélisation réaliste.

Impact d'une erreur de position ou d'un retard sur les performances statiques de la machine

Nous nous plaçons ici dans le cadre général où existe une erreur sur la position, quelle qu'en soit la cause, et on suppose que tous les paramètres physiques de la machine sont parfaitement connus. Notons $\delta\theta$ l'erreur de position, et remarquons qu'en régime établi, cette erreur de position peut se traduire aisément en retard δt par la relation $\delta\theta = \omega\delta t$. Etudions alors les impacts respectifs d'une erreur de position et d'un retard sur les performances statiques de la machine, à savoir les couple et puissance maximum accessibles, comme nous avons étudié l'impact de la connaissance des paramètres au paragraphe 1.4.1. La différence entre ces deux situations, illustrées respectivement sur les figures 2.3 et 2.4, réside dans le fait que la première est à erreur de position fixée, tandis que pour la seconde, à retard fixé, l'erreur de position est proportionnelle au régime. Ainsi, une erreur de position causée par une non prise en compte du déphasage s'apparentera à la seconde situation, le déphasage augmentant avec le régime. L'application numérique a été réalisée, comme pour la figure 1.6, dans le cas du

moteur dimensionné pour un bus électrique dont les paramètres sont indiqués en note de bas de page au paragraphe 1.4.1. Sur chaque courbe sont comparées les performances sans erreur de position ou sans retard et les performances avec une erreur de position $\delta\theta$ de 8° électriques (soit 2° mécaniques, puisque $p = 4$) ou un retard δt de $40\mu s$, i.e. une erreur de position valant 0.96° électrique à 1000 tr/min ou 9.6° électriques à 10000 tr/min. En pratique, le problème de MTPA (1.27) a été effectué pour déterminer les courants consignes i_{dq}^* maximisant le couple à pertes Joule fixées. On considère que les courants mesurés $y_{i_{dq}}$ suivent ces consignes. En l'absence d'erreur de position ou de retard, les courants mesurés étant égaux aux courants exacts i_{dq} , les courants exacts suivent bien les consignes et le couple maximal est obtenu. En revanche, dans le cas d'une erreur de position ou d'un retard non nul, on a $i_{dq} \approx \mathcal{R}(-\delta\theta)y_{i_{dq}} = \mathcal{R}(-\delta\theta)i_{dq}^*$. Les consignes ne sont donc pas exactement suivies par les courants exacts, ce qui engendre une perte de performances. Le rôle des tensions, également pris en compte, est moindre. On constate sur les deux figures que cette perte de performances, même pour de légères erreurs de position ou de légers retards, peut être très grande, notamment aux hauts régimes, la chute de performances avec l'augmentation du régime étant d'autant plus brutale si en outre l'erreur de position augmente avec le régime (figure 2.4). En effet, considérons l'équation du couple de la modélisation réaliste-déphasage pour la solution particulière (2.54), en faisant les approximations, ϵ étant petit, $\cos \epsilon \approx 1$ et $\sin \epsilon \approx \epsilon$, et dans le cas d'un moteur à pôles lisses ($L_d = L_q$) pour simplifier. On obtient :

$$\begin{aligned}\tau_{L_p} &\approx p\phi(y_{i_{qp}} + y_{i_{dp}}\epsilon) , \\ \tau_{L_p} &\approx \tau^* + p\phi y_{i_{dp}}\epsilon ,\end{aligned}\tag{2.61}$$

où τ_{L_p} représente ici le couple fourni et τ^* le couple demandé. La différence entre les deux dépend donc du produit $y_{i_{dp}}\epsilon$. Pour les régimes inférieurs au régime limite de 2600 tr/min, on ne défluxe pas ou très peu, étant donné qu'on se situe dans le cas d'un moteur à pôles lisses. Ainsi, $y_{i_{dp}} \approx 0$ et le couple fourni est environ égal au couple demandé. Pour les régimes plus élevés en revanche, on défluxe (comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4) et $y_{i_{dp}}$ diminue, i.e. augmente en valeur absolue, avec le régime. La différence entre couple demandé et couple fourni augmente donc avec le régime, et ce d'autant plus vite si de surcroît ϵ augmente avec le régime. Ceci témoigne une nouvelle fois de l'importance de limiter au maximum les erreurs de position, quelle qu'en soit la cause.

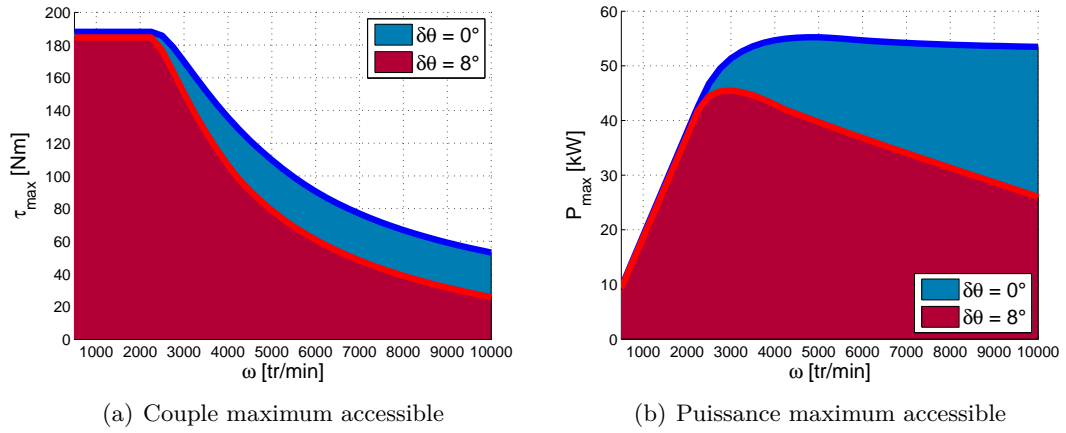


FIGURE 2.3 – Effet d’une erreur de position sur les performances - Bus électrique

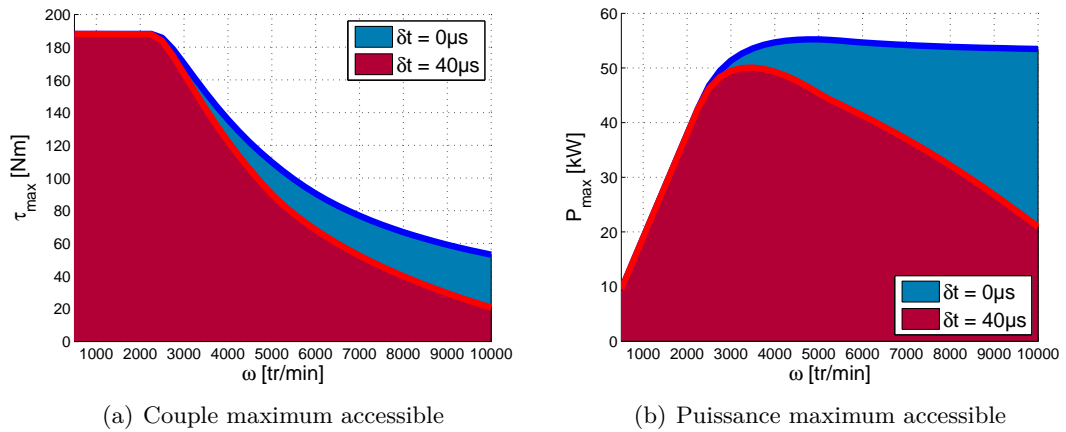


FIGURE 2.4 – Effet d’un retard sur les performances - Bus électrique

2.4 Conclusion - Bilan sur les différents modèles

Outre la modélisation classique de la machine synchrone à aimants permanents présentée au chapitre 1, nous disposons désormais de deux nouvelles modélisations : la modélisation réaliste-filtre, dite aussi modélisation réaliste, et la modélisation réaliste-déphasage. Ces trois modèles de MSAP non saturée et à pôles saillants, exprimés dans les deux repères diphasés (α, β) et (d, q) sont répertoriés dans le tableau 2.1.

Suivant les situations, nous serons amenés à utiliser l’une ou l’autre de ces modélisations. Le modèle réaliste-déphasage pour la solution particulière dans le repère (d, q) (2.54) a notamment été déterminé car il nous sera utile au chapitre 3. De plus, le modèle de la machine à pôles lisses dans le repère (α, β) ((1.19) avec ou sans filtrage) a été présenté. Si la modélisation pôles saillants sera utilisée pour une caractérisation précise

de la machine dans le chapitre 3, les observateurs seront construits sur une modélisation pôles lisses par souci de simplification¹, la différence que l'on constatera entre L_d et L_q lors de la caractérisation de la machine étant faible (cf. tableau 3.4 : $L_d = 0.90L_q$). D'une manière générale, si l'on souhaite s'intéresser au cas d'une machine à pôles lisses, il suffit d'utiliser les équations générales avec $L_d = L_q = L$, soit $L_0 = L$ et $L_1 = 0$.

Revenons également sur les principales différences existant entre les modèles réaliste-filtre et réaliste-déphasage. Deux d'entre elles sont directement issues de l'approximation : le modèle réaliste-déphasage ne tient pas compte de la perte de gain et ne permet pas de différencier les deux constantes de temps τ_u et τ_i . Mais le principal atout de la modélisation réaliste-filtre sur son approximation réside dans le fait qu'une fois les constantes de temps des filtres déterminées, le modèle est valable à tous les régimes. Ceci n'est pas le cas de la modélisation réaliste-déphasage dans laquelle ϵ dépend du régime, et dont l'utilisation en ligne nécessiterait du coup l'ajout d'un estimateur de vitesse. C'est pourquoi les observateurs seront basés sur la modélisation réaliste-filtre. Nous n'allons utiliser la modélisation réaliste-déphasage que dans le chapitre suivant pour un travail hors ligne, travail destiné à valider expérimentalement cette nouvelle modélisation. Par la suite, la modélisation réaliste-filtre sera souvent dénotée simplement modélisation réaliste.

TABLE 2.1 – Récapitulatif des différents modèles

Modèle	Repère (α, β)	Repère (d, q)
Classique	(1.18)	(1.17)
Réaliste-filtre / Réaliste	(1.18) avec (2.41)	(1.17) avec (2.44)
Réaliste-déphasage (solution particulière)	-	(2.54)

1. L'adaptation des observateurs au cas des machines à pôles saillants est possible en théorie.

Chapitre 3

Identification hors-ligne des paramètres physiques du moteur et du déphasage

Ce chapitre s'intéresse à la mise au point, à la mise en œuvre expérimentale et à l'étude d'un algorithme d'identification hors-ligne des paramètres physiques du moteur ainsi que du déphasage. Basé sur la modélisation réaliste-déphasage établie au chapitre 2, l'un des objectifs de cet algorithme est la validation de ce modèle plus réaliste. Ainsi, dans un premier temps, le paragraphe 3.1 présente l'algorithme d'identification, dont la structure particulière permet aisément l'application à la modélisation classique comme à la modélisation réaliste-déphasage. Le paragraphe 3.2 est alors le cadre de la mise en œuvre expérimentale de l'algorithme. Les résultats des deux modélisations y sont comparés. Enfin, dans le paragraphe 3.3 est menée, par analyse de Monte-Carlo, une étude de robustesse des paramètres identifiés par l'algorithme au bruit de mesure sur les signaux de courants et tensions. Ce paragraphe est également l'occasion de caractériser expérimentalement le bruit sur ces signaux.

3.1 Algorithme d'identification

Afin non seulement de valider la modélisation réaliste-déphasage (et par extension la modélisation réaliste-filtre), mais dans le but également de diagnostiquer à une date donnée l'état du moteur en déterminant la valeur de ses paramètres, un algorithme d'identification hors-ligne a été mis au point¹. Ce deuxième objectif peut par exemple

1. Le lecteur intéressé par la problématique analogue de l'identification des paramètres électriques d'un moteur à induction peut se référer à la procédure d'identification à l'arrêt proposée par Malrait

prendre la forme d'une procédure d'identification et de diagnostic à réaliser à intervalles réguliers chez un garagiste (le moteur devant tourner lors de la procédure, un banc à rouleaux par exemple est en effet nécessaire), laquelle permettra de savoir si les paramètres ont bougé depuis le précédent examen. Du fait de la variation série possible des paramètres, un premier diagnostic réalisé par le constructeur dès la sortie d'usine serait d'ailleurs aussi très instructive.

Cet algorithme d'identification repose sur une méthode de moindres carrés basée sur les équations électriques dans le repère (d, q) de la modélisation réaliste-déphasage en régime stationnaire (2.54), à savoir :

$$y_{u_{dq}} = \begin{pmatrix} R + \omega \frac{L_d - L_q}{2} \sin 2\epsilon & -\omega(L_q \cos^2 \epsilon + L_d \sin^2 \epsilon) \\ \omega(L_d \cos^2 \epsilon + L_q \sin^2 \epsilon) & R - \omega \frac{L_d - L_q}{2} \sin 2\epsilon \end{pmatrix} y_{i_{dq}} + \omega \phi \begin{pmatrix} \sin \epsilon \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

L'idée est de réaliser N essais successifs à différents régimes stationnaires (i.e. avec différents courants et tensions), puis d'utiliser les $2N$ équations reliant courants et tensions mesurés en résultant pour formuler un problème de moindres carrés, la non-linéarité des équations en ϵ imposant cependant de traiter l'identification de ce paramètre séparément. Plus précisément, la procédure suivante, effectuée hors-ligne, est suivie pour identifier les paramètres physiques du moteur et déterminer le déphasage.

Procédure 3.1. *Si le régime ω et les courants et tensions mesurés $y_{i_{dq}}$ et $y_{u_{dq}}$ sont connus, et si les courants $y_{i_{dq}}$ prennent un nombre suffisant de valeurs constantes différentes lors de différents régimes stationnaires, alors une estimation $\check{\epsilon}$ du déphasage est donnée par le problème d'optimisation suivant :*

$$\check{\epsilon} = \arg \min_{\epsilon} \left(\min_{\Theta} \|y - \Xi(\epsilon)\Theta\|^2 \right), \quad (3.2)$$

avec y et $\Xi(\epsilon)$ respectivement donnés par (3.7) et (3.8). Des estimations $\check{\Theta}$ des paramètres physiques du moteur peuvent alors être obtenues via :

$$\check{\Theta} = (\check{R}, \check{\phi}, \check{L}_d, \check{L}_q)^T = \Theta^*(\check{\epsilon}), \quad (3.3)$$

avec la fonction Θ^* donnée par :

$$\Theta^*(\epsilon) = \arg \min_{\Theta} \|y - \Xi(\epsilon)\Theta\|^2 = (\Xi^T(\epsilon)\Xi(\epsilon))^{-1}\Xi^T(\epsilon)y. \quad (3.4)$$

dans [34], visant entre autres à fournir des paramètres convenables à l'algorithme de contrôle, sans toutefois tenir compte de la dérive thermique des paramètres résistifs. L'identification, qui utilise également les moindres carrés, y tient notamment compte de la saturation magnétique et procède par séparation des dynamiques rapides et lentes.

En effet, on remarque que la forme stationnaire du modèle (3.1) est linéaire en les paramètres physiques $\Theta = (R, \phi, L_d, L_q)^T$, à déphasage ϵ fixé, et non linéaire en ϵ . De ce fait, l'utilisation d'un algorithme de moindres carrés est envisageable pour identifier Θ à ϵ fixé. Afin de faire apparaître cette linéarité, on réécrit (3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} y_{u_d} &= (\alpha_d(\epsilon) + \beta_d(\epsilon)y_{i_d} + \gamma_d(\epsilon)y_{i_q})\Theta, \\ y_{u_q} &= (\alpha_q(\epsilon) + \beta_q(\epsilon)y_{i_d} + \gamma_q(\epsilon)y_{i_q})\Theta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_d(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \sin \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_q(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \cos \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta_d(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \omega \frac{\sin 2\epsilon}{2} & -\omega \frac{\sin 2\epsilon}{2} \end{pmatrix}, & \beta_q(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \cos^2 \epsilon & \omega \sin^2 \epsilon \end{pmatrix}, \\ \gamma_d(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega \frac{\sin 2\epsilon}{2} & \omega \frac{\sin 2\epsilon}{2} \end{pmatrix}, & \gamma_q(\epsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega \sin^2 \epsilon & -\omega \cos^2 \epsilon \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Afin de pouvoir appliquer les moindres carrés pour identifier Θ à partir de (3.5), il est toutefois nécessaire de disposer d'un nombre suffisant de copies de ces deux équations stationnaires, lesquelles peuvent être obtenues en faisant varier les valeurs constantes de y_{i_d} , y_{i_q} , y_{u_d} et y_{u_q} . En pratique, les courants sont commandés en leur faisant suivre des paliers constants successifs². Sur chacun de ces paliers, les valeurs moyennes des courants $\langle y_{i_j} \rangle^{(i)}$ et des tensions $\langle y_{u_j} \rangle^{(i)}$, $j = d, q$, sont calculées, une fois le régime permanent atteint. Le moyennage est nécessaire d'un point de vue expérimental, même si la théorie indique des valeurs constantes sur le palier. En supposant qu'il y ait N paliers de (y_{i_d}, y_{i_q}) en entrée, nous disposons de N copies reliant courants, tensions et paramètres et donc de $2N$ équations. On définit alors y le vecteur des valeurs moyennes des tensions mesurées sur chaque palier et la matrice $\Xi(\epsilon)$:

$$y = \begin{pmatrix} \langle y_{u_d} \rangle^{(1)} \\ \vdots \\ \langle y_{u_d} \rangle^{(N)} \\ \langle y_{u_q} \rangle^{(1)} \\ \vdots \\ \langle y_{u_q} \rangle^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \Xi(\epsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_d(\epsilon) + \beta_d(\epsilon) \langle y_{i_d} \rangle^{(1)} + \gamma_d(\epsilon) \langle y_{i_q} \rangle^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_d(\epsilon) + \beta_d(\epsilon) \langle y_{i_d} \rangle^{(N)} + \gamma_d(\epsilon) \langle y_{i_q} \rangle^{(N)} \\ \alpha_q(\epsilon) + \beta_q(\epsilon) \langle y_{i_d} \rangle^{(1)} + \gamma_q(\epsilon) \langle y_{i_q} \rangle^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_q(\epsilon) + \beta_q(\epsilon) \langle y_{i_d} \rangle^{(N)} + \gamma_q(\epsilon) \langle y_{i_q} \rangle^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (3.7) \quad (3.8)$$

Notons que, si la vitesse est évidemment constante sur chaque palier, il est possible

2. Imposer des paliers de courants dans le repère (d, q) revient à imposer des paliers de couple.

mais pas obligatoire que celle-ci soit la même sur tous les paliers. Si la vitesse change d'un palier à l'autre, il faut juste prendre garde à la changer également dans la matrice (3.8).

Enfin, cette procédure d'identification à ϵ fixé est répétée pour tout ϵ , pris en pratique dans un intervalle raisonnable autour de zéro, le déphasage étant supposé relativement petit. Ainsi, pour tout ϵ , l'algorithme des moindres carrés donne le meilleur vecteur de paramètres (3.4). Puis, le déphasage $\check{\epsilon}$ est choisi comme étant celui minimisant la fonction coût (3.2) et les paramètres physiques identifiés sont donnés par (3.3).

3.2 Mise en œuvre expérimentale de l'algorithme et validation de la modélisation réaliste

Afin de valider la modélisation réaliste-déphasage développée au chapitre 2 et de déterminer les paramètres du moteur, l'algorithme d'identification a été mis en œuvre expérimentalement au banc SMILE 1.0 (cf. §8.1.2). Notons que, si l'algorithme a été développé pour des raisons historiques en se basant sur la modélisation réaliste-déphasage, la proximité de celle-ci avec la modélisation réaliste-filtre, permet à la validation du premier modèle d'entraîner celle du second.

Concrètement, la validation du modèle est basée sur trois points. Premièrement, un faible coût des moindres carrés, témoignant d'un modèle en adéquation avec les mesures. Deuxièmement, des valeurs cohérentes des paramètres physiques identifiés, en accord avec les valeurs données par le constructeur. Enfin, des valeurs des paramètres identifiés indépendantes du point de fonctionnement de la machine. Notons par ailleurs qu'il va être aisé de comparer modélisation réaliste-déphasage et modélisation classique, cette dernière découlant de la précédente en prenant $\epsilon = 0$.

La figure 3.1 présente tout d'abord les mesures respectives des courants y_{i_d} et y_{i_q} , des tensions y_{u_d} et y_{u_q} et du régime. Comme précisé lors de l'exposé de la procédure, les courants ont été commandés de manière à suivre des paliers constants successifs, 14 paliers d'une dizaine de secondes chacun dans le cas présenté. Les tensions suivent alors également des paliers constants. Sur chaque signal, les paliers ont été séparés et les régimes transitoires ôtés, afin de ne considérer que les régimes stationnaires, puis les valeurs moyennes, représentées en rouge, ont été calculées et intégrées au vecteur y (3.7) et à la matrice $\Xi(\epsilon)$ (3.8). Dans le cas présent, y est donc un vecteur à 28 éléments. Enfin, le régime a été maintenu constant tout au long du processus, mais pour pallier les petites variations, sa valeur moyenne sur chaque palier a été prise en compte.

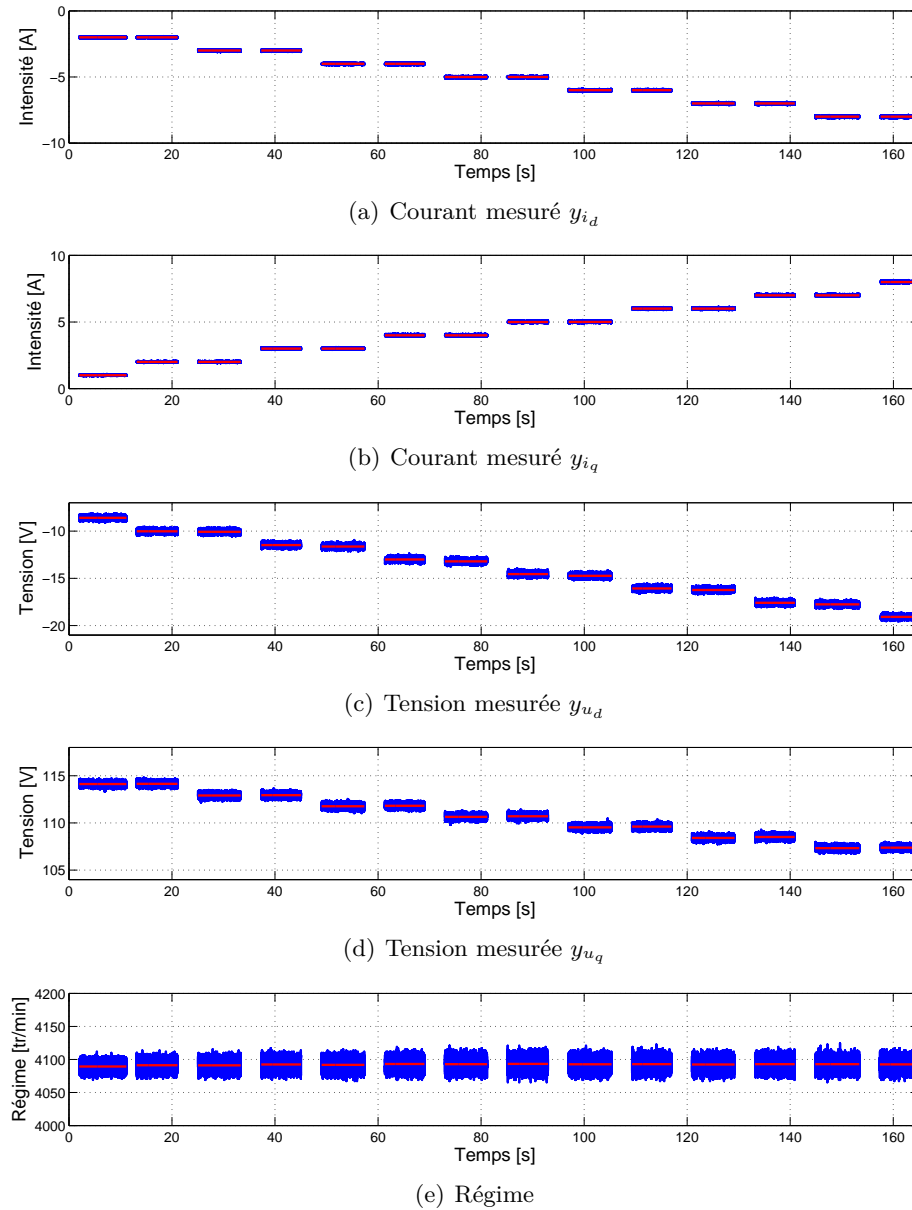


FIGURE 3.1 – Séparation des paliers - exemple à 4000 tr/min

Les résultats de cette mise en œuvre expérimentale de l'algorithme d'identification à 4000 tr/min sont présentés sur la figure 3.2. Sur chaque courbe sont comparés les résultats obtenus avec la modélisation classique ($\epsilon = 0$, triangles) et avec la modélisation réaliste-déphasage ($\epsilon = \check{\epsilon}$, cercles). La figure 3.2(a) présente la fonction coût à minimiser, pour trouver le déphasage $\check{\epsilon}$ donné par (3.2). Cette fonction coût mesure la ressemblance du modèle aux données expérimentales. Avec la modélisation classique le coût est élevé et on est donc loin d'avoir un modèle en accord avec les mesures. En revanche, la prise

en compte du déphasage dans le modèle permet de grandement réduire le coût, divisé par près de 400 sur cet exemple. La modélisation réaliste-déphasage correspond donc nettement mieux aux mesures. On remarque sur les figures 3.2(b) à 3.2(e), présentant les valeurs des quatre paramètres physiques identifiés en fonction du déphasage, i.e. $\Theta^*(\epsilon)$ (3.4), que cette amélioration a des répercussions fortes sur l'identification des paramètres, notamment sur celles de la résistance et des inductances. Ainsi, sur cet exemple, la résistance, identifiée à plus de 7Ω avec le modèle classique, est identifiée aux alentours de 0.3Ω avec le modèle réaliste-déphasage, ce qui est proche de la valeur donnée par le constructeur (cf. tableau 8.1). Il en va de même pour les inductances dont l'une est même identifiée négative avec le modèle classique. Concernant l'identification du flux, la dépendance au déphasage est également présente mais bien moins marquée, et la différence entre les deux modèles est quasi inexistante, les ordonnées des points d'abscisses respectives $\epsilon = 0$ et $\epsilon = \check{\epsilon}$ étant quasiment égales.

La figure 3.3 présente par ailleurs la dépendance des paramètres identifiés au régime. Une dépendance la plus faible possible est une condition nécessaire à la validité d'un modèle, les valeurs des paramètres ne dépendant physiquement pas du régime (aux échauffements près, mais que l'on peut négliger ici). Intéressons-nous tout d'abord à la figure 3.3(a) présentant le déphasage identifié. Rappelons que, contrairement à la modélisation classique pour laquelle le déphasage est identiquement nul, le modèle réaliste-déphasage prévoit une dépendance du déphasage proportionnelle au régime, tandis qu'avec le modèle réaliste-filtre, cette dépendance doit être quasiment linéaire tout en s'accroissant légèrement aux régimes plus élevés (penser au diagramme de Bode en phase d'un passe-bas du premier ordre aux basses fréquences). C'est justement ce que l'on retrouve sur la figure : une dépendance quasi linéaire mais s'accroissant légèrement avec le régime, comme on peut le voir par exemple grâce à la comparaison avec la régression linéaire tracée en noir. A titre indicatif, la pente de la régression linéaire est ici d'environ $1,9 \cdot 10^{-4} s$ (déphasage en *rad* divisé par vitesse électrique en *rad/s*). Nous aurons l'occasion d'utiliser cette valeur aux chapitres 5 et 7. Les figures 3.3(b) à 3.3(e) comparent ensuite la dépendance de l'identification des paramètres physiques au régime dans le cas de la modélisation réaliste-déphasage (cercles rouges) et dans celui de la modélisation classique (triangles bleus). Si la différence concernant l'identification du flux est une nouvelle fois minime, le résultat est sans appel concernant la résistance et les inductances identifiées, lesquelles dépendent énormément du régime dans le cas du modèle classique, cette dépendance étant très fortement réduite avec la modélisation réaliste-déphasage.

En conclusion, la modélisation réaliste-déphasage permet de grandement réduire le coût des moindres carrés par rapport à la modélisation classique et donc d'augmenter la

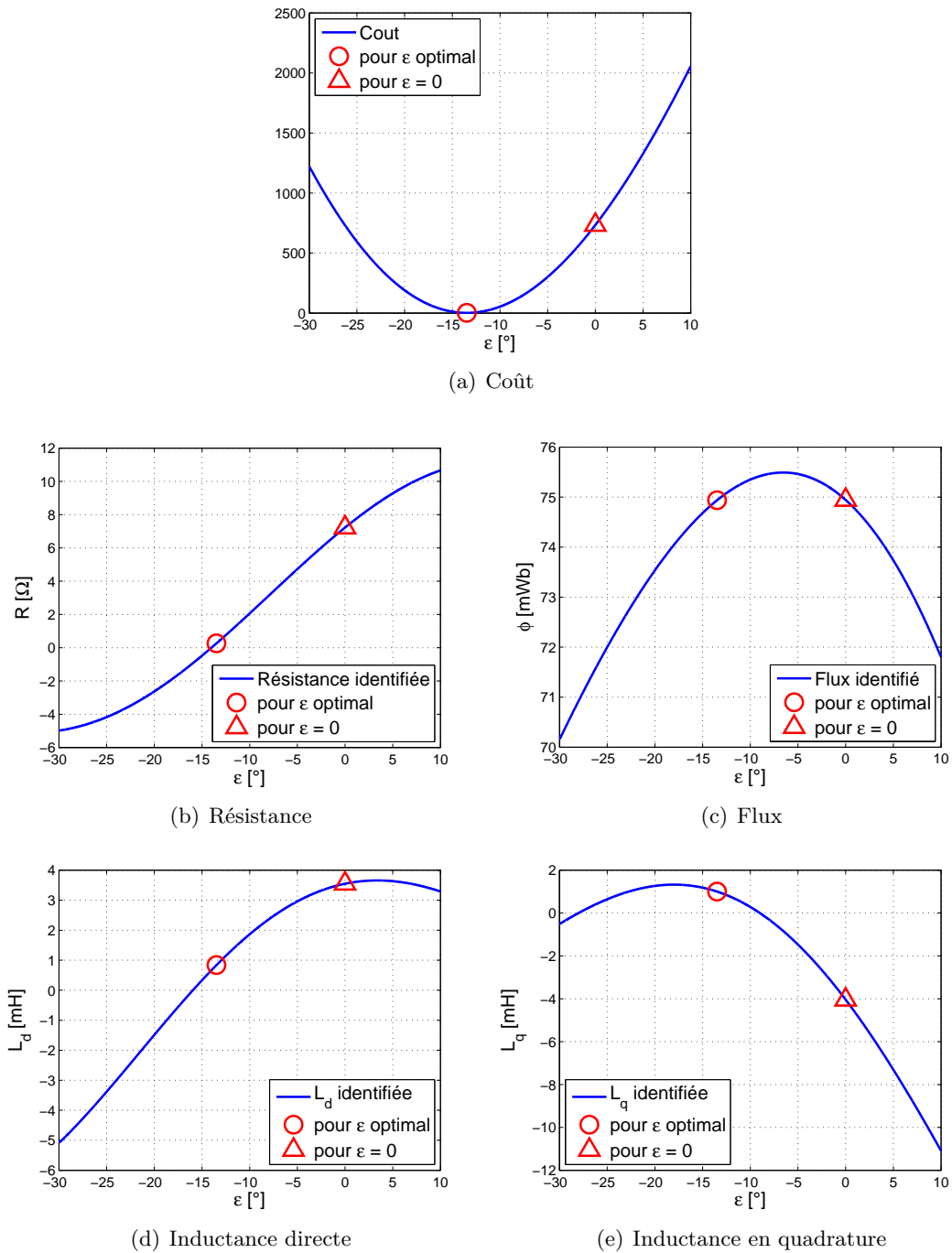
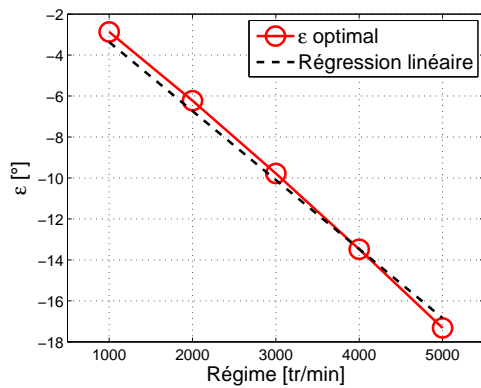
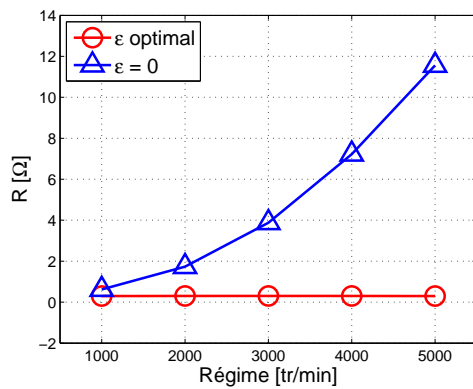


FIGURE 3.2 – Coût et paramètres identifiés en fonction du déphasage à 4000 tr/min

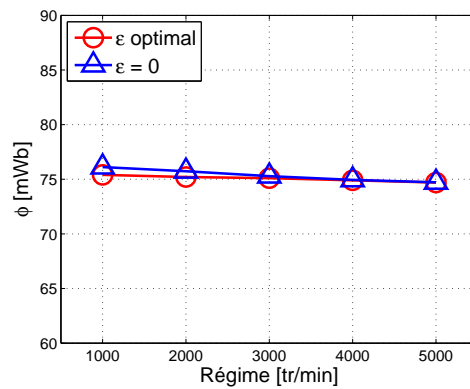
ressemblance du modèle aux mesures, d'obtenir des valeurs cohérentes des paramètres identifiés, lesquelles ne dépendent en outre quasiment pas du régime et d'identifier un déphasage dépendant du régime de la manière prévue. Autant d'éléments permettant



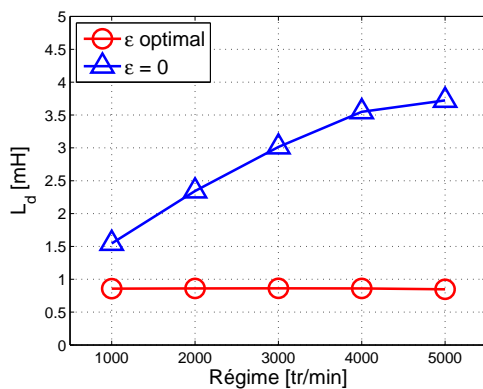
(a) Déphasage



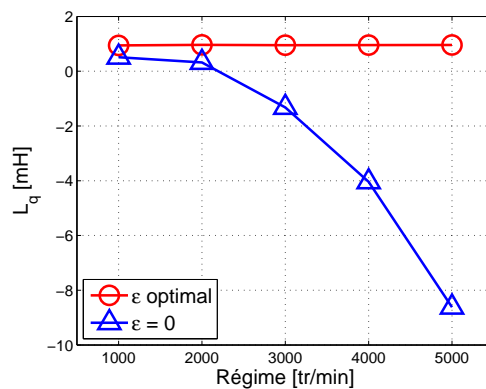
(b) Résistance



(c) Flux



(d) Inductance directe



(e) Inductance en quadrature

FIGURE 3.3 – Paramètres identifiés en fonction du régime

de valider la modélisation réaliste-déphasage et également la modélisation réaliste-filtre, les deux étant très proches et la dépendance du déphasage au régime témoignant du fait que le modèle réaliste-filtre est vraisemblablement meilleur que le réaliste-déphasage. Si

ces modèles ne sont pas forcément parfaits, leur supériorité par rapport au modèle classique est ici flagrante. La chaîne d'acquisition ayant servi à réaliser ces essais n'étant pas particulièrement idéale, l'exemple présenté est toutefois probablement un cas quelque peu extrême avec un important déphasage entraînant des résultats très mauvais avec le modèle classique. L'apport du modèle réaliste est donc potentiellement moindre avec d'autres dispositifs expérimentaux. Cependant, même dans d'autres proportions, l'apport demeure, et dans le "pire" des cas, avec un dispositif parfait, le modèle n'apporte certes rien, mais rien non plus n'est perdu, la modélisation classique en étant un cas particulier ($\epsilon = \tau_0 = 0$).

Toutefois, afin d'être complètement rigoureux, pour valider définitivement ces résultats, il convient de nous assurer de la fiabilité du processus d'identification malgré la présence de bruit de mesure. C'est ce à quoi nous allons nous consacrer dans le paragraphe suivant, en étudiant la robustesse de l'algorithme d'identification aux incertitudes de mesure.

3.3 Etude de la robustesse aux incertitudes de mesure

Afin de caractériser au mieux notre processus d'identification et de nous assurer de sa fiabilité, celui-ci reposant sur des données expérimentales et donc soumises aux bruits, une étude de robustesse aux incertitudes de mesure est menée dans ce paragraphe. Celle-ci repose, en premier lieu, sur une caractérisation de ce qui peut être considéré comme des bruits dans les données expérimentales, puis en simulation sur une analyse de Monte-Carlo exploitant cette caractérisation. Elle vise à quantifier l'impact de bruit sur les signaux de courants et tensions sur les paramètres identifiés. A noter qu'une analyse similaire, non présentée ici, a montré que l'impact d'une mauvaise connaissance du régime sur les paramètres identifiés était quasiment nul.

Comme explicité au paragraphe 3.1, les résultats obtenus au paragraphe 3.2 sont le fruit de l'application d'un algorithme de moindres carrés aux valeurs moyennes des courants et tensions mesurés dans le repère (d, q) . En effet, (3.9) et (3.10) illustrent les dépendances respectives de y (3.7) et $\Xi(\epsilon)$ (3.8) à ces valeurs moyennes :

$$y \left(\left\{ \langle y_{u_d} \rangle^{(i)}, \langle y_{u_q} \rangle^{(i)} \right\}_{1 \leq i \leq N} \right), \quad \Xi \left(\epsilon, \left\{ \langle y_{i_d} \rangle^{(i)}, \langle y_{i_q} \rangle^{(i)} \right\}_{1 \leq i \leq N} \right). \quad (3.9) \quad (3.10)$$

Cependant ces valeurs moyennes sont sujettes à des incertitudes. Avec $\delta_{i_d}^{(i)}$ le bruit sur la valeur moyenne $\langle y_{i_d} \rangle^{(i)}$ du signal y_{i_d} sur le i -ème palier et $\delta_{i_q}^{(i)}$, $\delta_{u_d}^{(i)}$ et $\delta_{u_q}^{(i)}$ définis

de manière analogue, on a en réalité :

$$y \left(\left\{ \langle y_{u_d} \rangle^{(i)} + \delta_{u_d}^{(i)}, \langle y_{u_q} \rangle^{(i)} + \delta_{u_q}^{(i)} \right\}_{1 \leq i \leq N} \right), \quad (3.11)$$

$$\Xi \left(\epsilon, \left\{ \langle y_{i_d} \rangle^{(i)} + \delta_{i_d}^{(i)}, \langle y_{i_q} \rangle^{(i)} + \delta_{i_q}^{(i)} \right\}_{1 \leq i \leq N} \right). \quad (3.12)$$

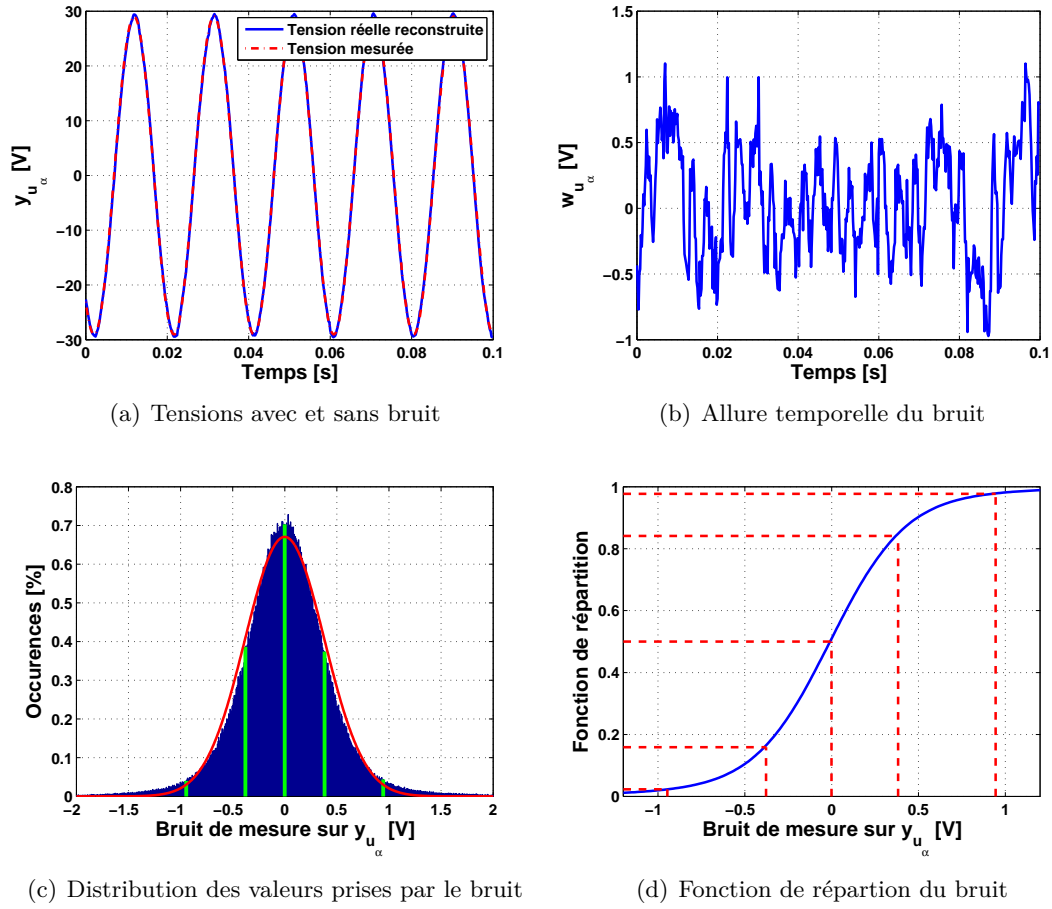
Afin d'étudier la robustesse aux incertitudes de mesure de la procédure d'identification, nous déterminons alors tout d'abord dans ce paragraphe les caractéristiques des processus stochastiques générant ces bruits de mesure sur les différentes valeurs moyennes. Puis, une analyse de Monte-Carlo est menée en générant aléatoirement les bruits suivant les distributions déterminées et en appliquant un grand nombre de fois l'algorithme des moindres carrés, à chaque fois à un jeu de valeurs moyennes différemment bruitées. Dans un premier temps, intéressons-nous donc à la caractérisation expérimentale du bruit de mesure sur les signaux de tensions et de courants.

3.3.1 Caractérisation expérimentale du bruit sur les signaux

Dans ce paragraphe nous cherchons à déterminer des ordres de grandeur des caractéristiques des processus stochastiques générant le bruit de mesure sur les signaux de courants et tensions (et pas encore sur leurs valeurs moyennes sur palier). Remarquons qu'il s'agira des caractéristiques dans le cas d'un moteur particulier associé à une chaîne d'acquisition particulière, mais cela n'a pas grande d'importance car nous ne cherchons ici que des ordres de grandeur. Par ailleurs, notons que l'identification des caractéristiques du bruit permet le réglage des observateurs étudiés dans les prochains chapitres.

Ainsi, afin d'avoir une idée de l'allure expérimentale des bruits w_i et w_u sur les signaux de courants et tensions y_i et y_u et de leurs caractéristiques, nous travaillons à partir d'enregistrements réalisés à différents régimes (de 1000 à 4000 tr/min), provenant d'essais réalisés au banc SMILE 1.0 (cf. §8.1.2). Pour chaque régime, nous disposons des tensions et courants mesurés sur chacune des trois phases a , b et c , que l'on transforme par Concordia (1.1) en tensions et courants dans le repère (α, β) . La figure 3.4 illustre la suite des opérations sur le cas de la tension y_{u_α} à 1000 tr/min.

Dans un premier temps, la tension non bruitée supposée réelle est reconstruite par moindres carrés à partir de la tension mesurée, la tension réelle étant alors supposée être de la forme $a \cos \omega t + b \sin \omega t$. Ceci revenant à considérer que la tension réelle est le fondamental de la tension mesurée, il est également possible de procéder par FFT. La tension réelle reconstruite est présentée en bleu sur la figure 3.4(a) et comparée


 FIGURE 3.4 – Exemple de caractérisation du bruit sur la tension y_{u_α} à 1000 tr/min

à la tension mesurée en rouge. La figure 3.4(b) présente alors la différence entre ces deux tensions, autrement dit le bruit w_{u_α} sur y_{u_α} . Comme nous n'utilisons qu'un seul enregistrement de ce bruit, nous supposons qu'il y a ergodicité pour approximer les caractéristiques du processus stochastique le générant. Ceci nous conduit à supposer que chaque bruit de mesure est généré par des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Dans ce cas, il suit, d'après [5, Theorem 36.4], que les propriétés statistiques de chaque bruit peuvent être approximées par ses statistiques temporelles, à condition que la fenêtre temporelle soit assez longue. Les figures 3.4(c) et 3.4(d) présentent respectivement la distribution temporelle des valeurs prises par ce bruit sur la fenêtre, qui peut donc être considérée comme sa distribution statistique, et la fonction de répartition associée. On constate que le bruit w_{u_α} a une répartition à support fini proche d'une répartition en cloche, que l'on assimilera à celle d'une loi gaussienne tronquée, dont il est possible de déterminer l'écart-type $\sigma_{w_{u_\alpha}}$. Les barres rouges figurant sur

la fonction de répartition, reportées en vert sur la distribution, représentent ainsi les valeurs respectives de moins deux écarts-types (2,28% des valeurs), moins un écart-type (15,87% des valeurs), la moyenne (i.e. environ zéro), plus un écart-type (84,13% des valeurs) et plus deux écarts-types (97,72% des valeurs). L'écart-type $\sigma_{w_{u\alpha}}$ est obtenu en mixant et pondérant ces différentes valeurs. La gaussienne de variance $\sigma_{w_{u\alpha}}^2$ et de moyenne nulle est tracée en rouge pour s'assurer de sa concordance avec la distribution. En procédant de même sur les autres signaux et aux différents régimes, on obtient les différents écarts-types des bruits regroupés dans le tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Ecarts-types des bruits sur les différents signaux dans le repère (α, β)

	1000 tr/min	2000 tr/min	3000 tr/min	4000 tr/min
$\sigma_{w_{u\alpha}}$ [V]	0.380	0.760	1.22	2.06
$\sigma_{w_{u\beta}}$ [V]	0.373	0.740	1.18	2.02
$\sigma_{w_{i\alpha}}$ [mA]	33.0	40.7	52.1	67.5
$\sigma_{w_{i\beta}}$ [mA]	32.7	40.2	51.9	67.0

On constate ainsi que les bruits sur les tensions et les courants augmentent avec le régime, l'augmentation étant d'autant plus marquée pour les tensions. L'amplitude des tensions augmentant avec le régime, comme nous l'avons constaté au paragraphe 2.1.2, ceci n'est pas très étonnant. Afin de se faire une meilleure idée, le tableau 3.2 présente, pour les tensions, un rapport bruit sur signal, déterminé à l'aide de l'expression de l'amplitude de la tension en fonction du régime (2.24). Le rapport σ_{w_u}/U est plus stable, même s'il garde une tendance à l'augmentation. Concernant les courants, l'amplitude dépendant du couple et non du régime, le rapport σ_{w_i}/I augmente avec le régime dans les mêmes proportions que σ_{w_i} .

TABLE 3.2 – Rapport bruit sur signal en fonction du régime (tensions)

Régime	1000 tr/min	2000 tr/min	3000 tr/min	4000 tr/min
σ_{w_u}/U	1.3%	1.3%	1.4%	1.8%

Ensuite, afin de déterminer les propriétés statistiques des bruits dans le repère (d, q) , on choisit d'obtenir les bruits w_{u_d} et w_{u_q} à partir des bruits $w_{u\alpha}$ et $w_{u\beta}$ par la rotation (1.2). Afin de nous assurer que cette rotation ne corrèle pas trop les bruits, la matrice de corrélation entre les quatre bruits est calculée et présentée sur la figure 3.5. On rappelle que la corrélation, par exemple entre les bruits sur les deux courants w_{i_d} et w_{i_q} , est donnée par $Cor(w_{i_d}, w_{i_q}) = \frac{Cov(w_{i_d}, w_{i_q})}{\sigma_{w_{i_d}} \sigma_{w_{i_q}}}$. On remarque de légères corrélations entre

les deux courants et entre les deux tensions, mais comme nous ne cherchons que des ordres de grandeur, celles-ci ne sont pas trop gênantes.

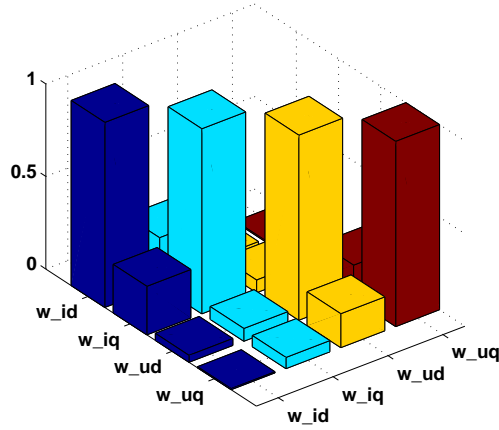


FIGURE 3.5 – Matrice de corrélation des bruits sur les courants et tensions dans le repère (d, q)

En procédant ensuite de la même manière que pour les bruits dans le repère (α, β) , on obtient les différents écarts-types des bruits sur les signaux du repère (d, q) regroupés dans le tableau 3.3. Les petites différences entre les bruits sur les deux axes d et q proviennent vraisemblablement des légères corrélations.

TABLE 3.3 – Ecart-types des bruits sur les différents signaux dans le repère (d, q)

	1000 tr/min	2000 tr/min	3000 tr/min	4000 tr/min
$\sigma_{w_{u_d}}$ [V]	0.347	0.721	1.16	2.08
$\sigma_{w_{u_q}}$ [V]	0.400	0.749	1.20	1.99
$\sigma_{w_{i_d}}$ [mA]	34.1	37.9	49.3	63.7
$\sigma_{w_{i_q}}$ [mA]	32.5	43.4	54.4	68.5

3.3.2 Caractérisation du bruit sur les valeurs moyennes

Maintenant que nous avons un modèle estimé des processus stochastiques à l'origine des bruits de mesure $w_{i_{dq}}$ et $w_{u_{dq}}$ sur les signaux de courants et tensions, il est aisé de déterminer celui des processus générant les bruits de mesure $\delta_{i_{dq}}^{(i)}$ et $\delta_{u_{dq}}^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, sur les valeurs moyennes des différents paliers de courants et tensions. En effet, si $L_{i_{pal}}$ représente la longueur du i -ème palier, alors, d'après [27, Theorem 3.2.4], sous

l'hypothèse précédente d'indépendance des bruits de mesure, la distribution de $\delta_{i_d}^{(i)}$ est une gaussienne à support fini de moyenne nulle et de variance $\sigma_{w_{i_d}}^2/L_{i_{pal}}$. Ainsi, il suffit de diviser les valeurs du tableau 3.3 par $\sqrt{L_{i_{pal}}}$ pour obtenir les écarts-types $\sigma_{\delta_{i_d}^{(i)}}$, $\sigma_{\delta_{i_q}^{(i)}}$, $\sigma_{\delta_{u_d}^{(i)}}$ et $\sigma_{\delta_{u_q}^{(i)}}$, $1 \leq i \leq N$, des processus stochastiques générant les bruits sur les valeurs moyennes. En pratique, tous les paliers ont été pris de même longueur $L_{i_{pal}} = 37700$ et on alors :

$$\forall i, \sigma_{\delta_{i_d}^{(i)}} = \sigma_{\delta_{i_d}}, \sigma_{\delta_{i_q}^{(i)}} = \sigma_{\delta_{i_q}}, \sigma_{\delta_{u_d}^{(i)}} = \sigma_{\delta_{u_d}}, \sigma_{\delta_{u_q}^{(i)}} = \sigma_{\delta_{u_q}}. \quad (3.13)$$

Nous disposons désormais de toutes les informations nécessaires pour réaliser l'analyse de Monte-Carlo.

3.3.3 Analyse de Monte-Carlo

L'analyse de Monte-Carlo menée dans cette partie consiste à appliquer un grand nombre de fois la procédure d'identification des paramètres décrite au paragraphe 3.1, non plus directement aux valeurs moyennes comme dans la partie 3.2, mais aux valeurs moyennes bruitées, le bruit changeant à chaque itération, afin d'étudier l'impact de ce bruit sur la répartition des paramètres identifiés. Concrètement, on remplace (3.9) et (3.10) par (3.11) et (3.12) dans la procédure, avec à chaque itération, les $4N$ bruits $\{\delta_{i_d}^{(i)}, \delta_{i_q}^{(i)}, \delta_{u_d}^{(i)}, \delta_{u_q}^{(i)}\}_{1 \leq i \leq N}$ générés séparément et aléatoirement selon les distributions normales de moyenne nulle et d'écarts-types respectifs $\sigma_{\delta_{i_d}}, \sigma_{\delta_{i_q}}, \sigma_{\delta_{u_d}}, \sigma_{\delta_{u_q}}$. A noter que seuls les bruits changent à chaque itération, les valeurs moyennes étant elles les mêmes pour l'ensemble des expériences aléatoires.

La figure 3.6 présente les distributions résultantes de cette analyse de Monte-Carlo des quatre paramètres identifiés à 4000 tr/min, obtenues grâce à 25000 expériences aléatoires indépendantes. Nous faisons l'hypothèse que ces distributions sont également gaussiennes. Après détermination de leurs valeurs moyennes et écarts-types de la même manière que nous l'avons fait pour la caractérisation des bruits (cf. barres verticales vertes), les gaussiennes théoriques sont représentées en rouge. L'analyse a été effectuée également à d'autres régimes et dans le cas du modèle réaliste-déphasage ($\epsilon = \check{\epsilon}$) et du modèle classique ($\epsilon = 0$). Les tableaux 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8 comparent alors, pour les différents régimes et les deux modèles, un ensemble de caractéristiques statistiques, respectivement pour la résistance \check{R} , le flux $\check{\phi}$ et les inductances \check{L}_d et \check{L}_q identifiés. Ces tableaux s'intéressent non seulement à la robustesse de l'algorithme d'identification au bruit sur les signaux de courants et tensions, mais aussi à sa précision globale, laquelle tient compte outre des incertitudes de mesure également du biais d'identification. Ainsi,

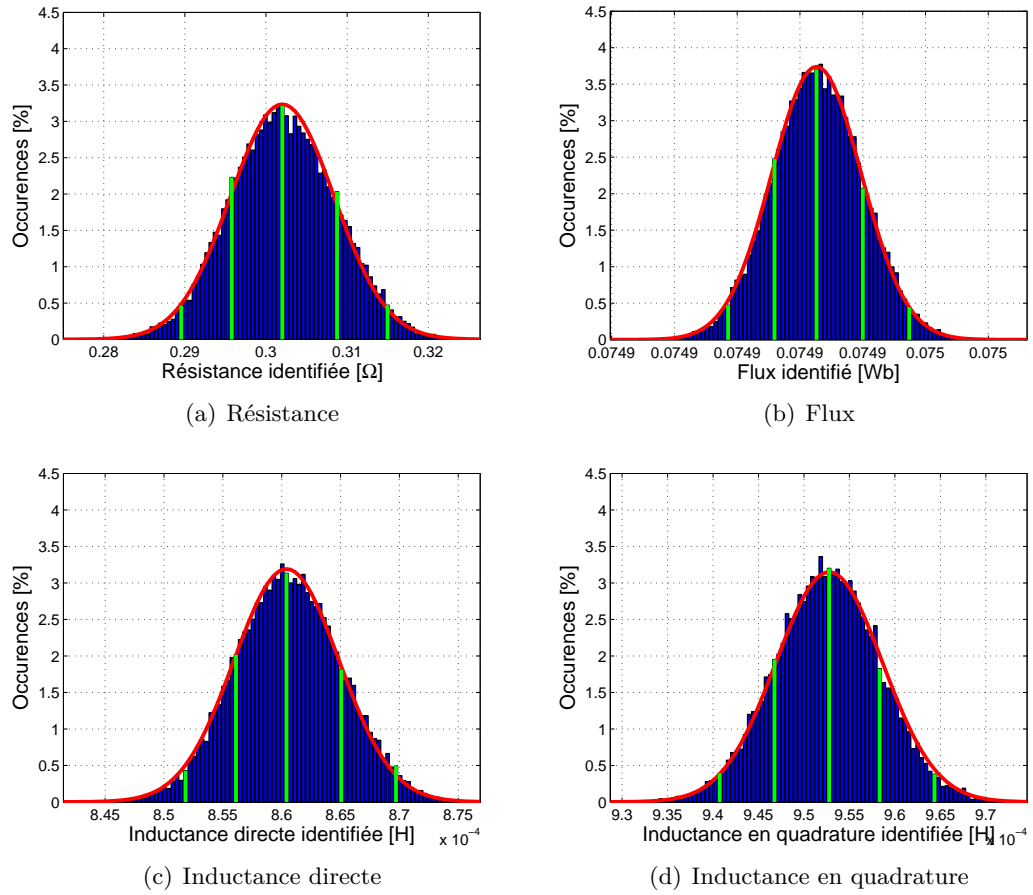


FIGURE 3.6 – Distributions des paramètres identifiés à 4000 tr/min, du fait du bruit sur les signaux de courant et tension

quatre indicateurs sont calculés dans chaque cas, X représentant respectivement R , ϕ , L_d ou L_q :

- l'écart-type $\sigma(\check{X})$ de la distribution du paramètre identifié \check{X} ,
- l'écart-type normalisé $\sigma_N(\check{X})$ de la distribution de \check{X} , i.e. $\sigma(\check{X})$ divisé par X_{ref} , la valeur référence du paramètre X (cf. tableau 3.4),
- le biais d'identification $\mathbf{b}(\check{X}) = \mathfrak{E}[\check{X}] - X_{ref}$, avec \mathfrak{E} l'espérance,
- une "erreur moyenne normalisée" $EMN(\check{X}) = \sqrt{EQM(\check{X})}/X_{ref}$, où EQM représente l'erreur quadratique moyenne. On rappelle que :

$$EQM(\check{X}) \triangleq \mathfrak{E}[(\check{X} - X_{ref})^2] = \sigma^2(\check{X}) + \mathbf{b}^2(\check{X}). \quad (3.14)$$

Ainsi, les deux premiers indicateurs nous renseignent sur la robustesse de l'algorithme au bruit de mesure, tandis que le troisième renvoie aux erreurs d'identification

dues à la modélisation, que nous avons traitées de manière qualitative dans la partie 3.2. Enfin, l'"erreur moyenne normalisée" combine les effets de ces deux sources d'erreurs. On note d'ailleurs que si le biais est nul, l'"erreur moyenne normalisée" est égale à l'écart-type normalisé. Par ailleurs, ces indicateurs font intervenir des valeurs références des paramètres. Ne disposant pas de meilleure alternative, nous choisissons de définir la valeur référence de X comme étant la moyenne des valeurs identifiées de X aux différents régimes avec la modélisation réaliste-déphasage. Avec une telle définition, il est possible que le biais d'identification soit légèrement sous-estimé dans le cas de la modélisation réaliste-déphasage. Les valeurs références utilisées sont alors indiquées dans le tableau 3.4.

TABLE 3.4 – Valeurs moyennes des paramètres utilisées comme références

R_{ref}	ϕ_{ref}	L_{dref}	L_{qref}
0.299 Ω	75.06 mWb	0.858 mH	0.954 mH

TABLE 3.5 – Ecart-types et biais de la résistance identifiée

Résistance	$\epsilon = \check{\epsilon}$				$\epsilon = 0$			
	$\sigma(\check{R})$ [m Ω]	$\sigma_N(\check{R})$ [-]	$\mathbf{b}(\check{R})$ [m Ω]	$EMN(\check{R})$ [-]	$\sigma(\check{R})$ [m Ω]	$\sigma_N(\check{R})$ [-]	$\mathbf{b}(\check{R})$ [Ω]	$EMN(\check{R})$ [-]
1000	1.0	0.34%	4.1	1.4%	0.86	0.29%	0.32	110%
2000	2.3	0.78%	0.9	0.84%	2.0	0.67%	1.4	480%
3000	4.0	1.3%	1.1	1.4%	5.2	1.7%	3.6	1200%
4000	6.4	2.1%	2.5	2.3%	12	4.0%	6.9	2300%

TABLE 3.6 – Ecart-types et biais du flux identifié

Flux	$\epsilon = \check{\epsilon}$				$\epsilon = 0$			
	$\sigma(\check{\phi})$ [μ Wb]	$\sigma_N(\check{\phi})$ [-]	$\mathbf{b}(\check{\phi})$ [mWb]	$EMN(\check{\phi})$ [-]	$\sigma(\check{\phi})$ [μ Wb]	$\sigma_N(\check{\phi})$ [-]	$\mathbf{b}(\check{\phi})$ [mWb]	$EMN(\check{\phi})$ [-]
1000	5.4	0.0070%	0.36	0.48%	5.5	0.0070%	1.1	1.4%
2000	5.2	0.0070%	0.17	0.23%	5.3	0.0070%	0.67	0.89%
3000	5.6	0.0080%	0.08	0.11%	6.7	0.0090%	0.22	0.29%
4000	7.2	0.010%	0.12	0.16%	11	0.014%	0.12	0.16%

TABLE 3.7 – Ecart-types et biais de l'inductance directe identifiée

L_d	$\epsilon = \check{\epsilon}$				$\epsilon = 0$			
	$\sigma(\check{L}_d)$ [μH]	$\sigma_N(\check{L}_d)$ [-]	$\mathbf{b}(\check{L}_d)$ [μH]	$EMN(\check{L}_d)$ [-]	$\sigma(\check{L}_d)$ [μH]	$\sigma_N(\check{L}_d)$ [-]	$\mathbf{b}(\check{L}_d)$ [$m\text{H}$]	$EMN(\check{L}_d)$ [-]
1000	2.9	0.33%	0.3	0.33%	2.3	0.27%	0.69	80%
2000	3.3	0.38%	3.4	0.55%	2.5	0.29%	1.5	170%
3000	3.7	0.43%	3.9	0.63%	3.6	0.42%	2.2	250%
4000	4.5	0.52%	2.6	0.60%	5.6	0.65%	2.7	310%

TABLE 3.8 – Ecart-types et biais de l'inductance en quadrature identifiée

L_q	$\epsilon = \check{\epsilon}$				$\epsilon = 0$			
	$\sigma(\check{L}_q)$ [μH]	$\sigma_N(\check{L}_q)$ [-]	$\mathbf{b}(\check{L}_q)$ [μH]	$EMN(\check{L}_q)$ [-]	$\sigma(\check{L}_q)$ [μH]	$\sigma_N(\check{L}_q)$ [-]	$\mathbf{b}(\check{L}_q)$ [$m\text{H}$]	$EMN(\check{L}_q)$ [-]
1000	4.1	0.43%	9.0	1.0%	4.1	0.43%	0.44	46%
2000	4.1	0.43%	8.0	0.94%	5.2	0.54%	0.64	67%
3000	4.5	0.47%	2.1	0.52%	10	1.1%	2.3	240%
4000	5.9	0.61%	1.1	0.63%	22	2.3%	5.0	520%

A l'aide des tableaux 3.5 à 3.8, on constate tout d'abord que les écarts-types sont du même ordre de grandeur pour les deux modélisations, quels que soient le régime et le paramètre considéré. L'impact, traduit par ces écarts-types, du bruit de mesure sur l'identification des paramètres reste d'ailleurs dans des proportions très raisonnables : quasiment négligeable dans le cas du flux et de l'ordre du pourcent d'erreur relative pour la résistance et les inductances. On remarque également, et ce de manière plus marquée pour la résistance identifiée, que les écarts-types augmentent avec le régime. Cette tendance n'est pas surprenante, étant donnée l'augmentation de l'amplitude du bruit avec le régime. Concernant le biais d'identification, non dû au bruit de mesure mais aux erreurs de modélisation, les tableaux quantifient ce que nous avons constaté dans la partie 3.2, à savoir que le biais est beaucoup plus grand dans le cas de la modélisation classique ($\epsilon = 0$) que dans celui de la modélisation réaliste-déphasage ($\epsilon = \check{\epsilon}$) (attention aux unités!) et que, dans ce premier cas, il augmente avec le régime, exception faite de l'identification du flux. Notons que comparer le biais aux différents régimes dans le cas du modèle réaliste-déphasage n'a pas de sens du fait de la définition des valeurs références des paramètres. Enfin, il est intéressant de comparer l'écart-type

normalisé σ_N et l'"erreur moyenne normalisée" EMN afin d'avoir une idée de la part de l'erreur d'identification due au bruit de mesure. Dans le cas du modèle classique, en exceptant à nouveau le cas du flux, le biais est si grand que l'impact du bruit de mesure est négligeable par rapport aux erreurs de modèle. En revanche, dans le cas du modèle réaliste-déphasage, la part de l'impact du bruit de mesure sur l'identification de la résistance et des inductances est grossièrement équivalente à celle du biais (qui, on le rappelle, est ici potentiellement sous-estimé). En ce qui concerne le flux, quel que soit le modèle, le bruit de mesure a un impact négligeable sur son identification. En conclusion, outre la confirmation de la "supériorité" du modèle réaliste-déphasage sur le modèle classique, ces tableaux témoignent de la relativement bonne robustesse de l'algorithme d'identification aux incertitudes de mesure sur les courants et tensions, et ce quel que soit le modèle, quel que soit le régime et quel que soit le paramètre considéré, avec toutefois une mention particulière pour le flux.

Afin de mieux visualiser la robustesse aux incertitudes de mesure, la figure 3.7 présente, en fonction du régime, les intervalles de confiance à 95% ($\pm 1.96\sigma$) des paramètres identifiés dans le cas de la modélisation réaliste-déphasage. Excepté pour l'identification de la résistance à haut régime un peu plus sujette aux incertitudes de mesure, ceci confirme la bonne robustesse de la procédure d'identification.

3.4 Conclusion

Afin, entre autres, de valider la modélisation réaliste faite au chapitre 2 et de constater son apport par rapport à la modélisation classique, un algorithme d'identification hors-ligne des paramètres, basé sur une méthode de moindres carrés, a été mis au point dans ce chapitre. Sa mise en œuvre expérimentale a permis de montrer la grande ressemblance de la modélisation réaliste aux données expérimentales, là où la modélisation classique faisait pâle figure. L'apport de la nouvelle modélisation est donc indéniable et va s'avérer essentiel lors de la conception d'observateurs, lesquels doivent se baser sur une modélisation réaliste de la machine. En effet, si déjà hors-ligne l'estimation d'un paramètre présente un biais important, il y a peu de chances d'aboutir en ligne à une estimation correcte... L'analyse de Monte-Carlo visant à étudier l'impact des incertitudes de mesure sur les courants et tensions sur l'algorithme d'identification a ensuite permis de montrer la bonne robustesse du processus d'identification au bruit de mesure, quel que soit le régime. Cette étude a également nécessité une caractérisation expérimentale des processus stochastiques générant le bruit sur les tensions et courants, laquelle nous sera à nouveau utile par la suite, notamment pour le réglage des observateurs.

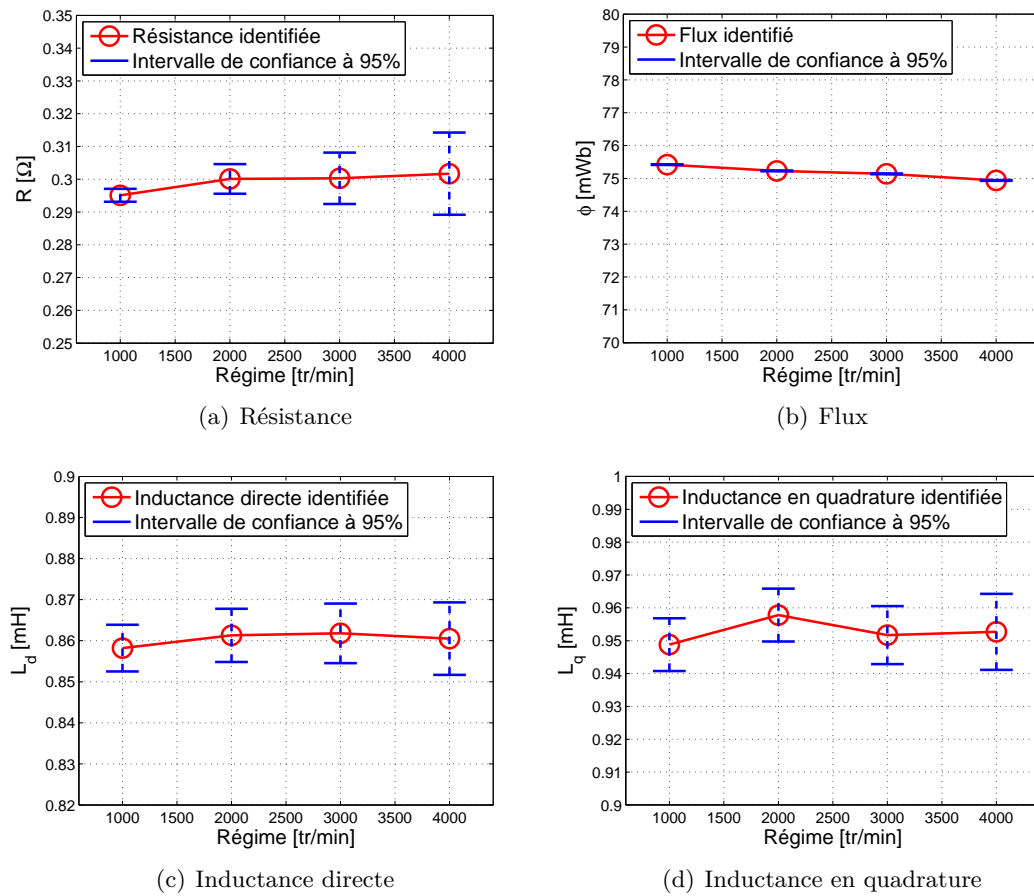


FIGURE 3.7 – Intervalles de confiance à 95% des paramètres identifiés en fonction du régime du fait du bruit sur les signaux de courant et tension

Enfin, notons que, si nous avons dans ce chapitre exposé un processus d'identification hors-ligne des paramètres, ceci est complètement différent de ce qui nous intéressera dans les chapitres suivants, à savoir l'observation en ligne des paramètres. En effet, dans le cas de l'identification, le couple et le régime sont imposés par un protocole expérimental, là où ils sont imposés par le conducteur et les conditions de conduite dans le cas de l'observation, laquelle ne doit pas interférer avec la fourniture du couple.

Chapitre 4

Observation sans mesure de position : Observateur non linéaire de Luenberger - Cas idéal

Après l'établissement au chapitre 2 et la validation au chapitre 3 d'une modélisation réaliste de la MSAP, le présent chapitre ainsi que les suivants concernent la conception, l'étude et l'implémentation de deux observateurs basés sur cette modélisation. Deux observateurs pour deux situations différentes : dans un cas, la position est supposée mesurée et donc parfaitement connue, tandis que dans l'autre cas, elle est supposée inconnue.

Avant de nous consacrer au premier cas au chapitre 7 *via* le développement d'un observateur dit de Kreisselmeier, nous nous intéressons dans les chapitres 4 à 6 au cas où la position est inconnue. A cette fin, un observateur non linéaire, dit de Luenberger, fait l'objet de ces chapitres. Robuste aux paramètres relatifs à la charge mécanique connectée à l'arbre du moteur grâce à un choix approprié de coordonnées, cet observateur permet, à vitesse non nulle, l'estimation en ligne du flux des aimants et de la position du rotor, à l'aide uniquement des mesures de courants et tensions, ainsi que de la connaissance de valeurs approchées de la résistance et de l'inductance. Relativement longue, l'étude de cet observateur de Luenberger est découpée en plusieurs chapitres. Ainsi, ce chapitre 4 introduit tout d'abord l'observateur dans le cas idéal, c'est-à-dire sans bruit, ni de modèle (les signaux mesurés sont supposés être les signaux exacts, cas de la modélisation classique), ni de mesure. Le bruit de modèle est ensuite ajouté au chapitre 5, où l'observateur est ainsi adapté à la modélisation réaliste, puis c'est au tour du bruit de mesure au chapitre 6. Enfin, des résultats expérimentaux sont présentés au chapitre 8 et des résultats complémentaires en simulation dans l'annexe B.

Ainsi, ce chapitre présente l'observateur non linéaire de Luenberger dans le cas idéal. Signaux mesurés et signaux exacts ne font qu'un et de ce fait l'observateur est construit à partir de la modélisation classique de la machine. Après l'exposé de quelques considérations sur le contrôle *sensorless* et la robustesse et l'enjeu de robustesse de l'observation (4.1), les paragraphes 4.2 et 4.3 exposent dans un premier temps, respectivement le sous-système de dimension deux de la machine sur lequel est basé l'observateur et le problème d'estimation. Dans le paragraphe 4.4 est alors établie l'observabilité instantanée du modèle à vitesse non nulle, avant de construire l'observateur non linéaire de Luenberger au paragraphe 4.5. La convergence de celui-ci est étudiée au paragraphe 4.6, les conditions de convergence étant ensuite vérifiées pour la solution particulière au paragraphe 4.7, le nombre de pôles nécessaires y étant notamment déterminé. Enfin, le paragraphe 4.8 étudie la robustesse de l'observateur à une mauvaise connaissance de la résistance et de l'inductance.

Remarque : Dans ce chapitre, nous travaillons dans le repère (α, β) . Ainsi, pour simplifier les équations, nous noterons $i = i_{\alpha\beta}$, $u = u_{\alpha\beta}$, $\Phi = \Phi_{\alpha\beta}$ et $\Psi = \Psi_{\alpha\beta}$. Il s'agit donc de vecteurs à deux éléments. De plus, nous supposons que la machine est à pôles lisses, soit $L_d = L_q = L$.

4.1 Considérations sur le *sensorless* et la robustesse

Ne disposant pas de la mesure de position, nous nous trouvons ici dans le domaine très étudié du *sensorless*, visant, en l'absence d'information de position fournie par un capteur, à contrôler la machine électrique à l'aide d'une estimation précise de cette position. Si l'utilisation d'un capteur de position est moins compliquée que celle de capteurs internes de température (cf. paragraphe 1.5.1), la suppression de ce capteur est une voie de plus en plus étudiée par les constructeurs pour des raisons de réduction des coûts, de diminution de l'encombrement, de suppression de câbles et de fiabilité [13] [31]. L'estimation de la position est alors en général obtenue à l'aide d'observateurs utilisant comme mesures uniquement celles de tension et courant [40]. Cependant, les équations de ces observateurs font aussi intervenir d'autres paramètres, à savoir les paramètres physiques de la machine (résistance des enroulements statoriques, inductance, flux des aimants) et ceux liés à la charge mécanique connectée à son arbre (inertie, friction, couple de charge). De ce fait, la robustesse à ces données, souvent dynamiquement changeantes ou inconnues, constitue un enjeu important de l'estimation de la position. L'objet de cette thèse n'est certes pas le contrôle *sensorless* de la machine mais bien l'estimation des variations de température *via* l'estimation de la résistance des enroulements et du flux des aimants. De ce fait, l'estimation de l'observateur de flux

et de position, que nous allons développer, qui nous intéresse en premier lieu est bien l'estimation du flux et non celle de la position. Toutefois, d'une part, ayant accès grâce à cet observateur à une estimation de la position, il serait dommage de s'en priver, et d'autre part, la qualité des estimations du flux et de la position sont liées, une bonne estimation du flux allant en général de pair avec une bonne estimation de la position (ceci peut légèrement perdre en véracité en présence de bruit de mesure). La robustesse aux paramètres nous intéresse donc grandement également dans notre cas.

Parmi les nombreuses publications traitant de l'estimation de la position pour le contrôle *sensorless*, estimant ou non simultanément des paramètres du moteur, quelques unes s'intéressent à l'impact d'une mauvaise connaissance des paramètres et la plupart développent des estimateurs robustes aux incertitudes de résistance. Par exemple, [20] augmente l'ordre de son observateur de position avec une loi adaptative pour la résistance afin d'améliorer la robustesse à bas régime, tandis que [37] développe une méthode d'identification en ligne de la résistance pour rendre le contrôle de la MSAP robuste aux incertitudes de celle-ci. Les algorithmes de contrôle *sensorless*, basés sur l'estimation d'un vecteur de force contre-électromotrice dans [17] et sur un filtre de Kalman étendu dans [51], sont également assez robustes aux variations de résistance. Si [20] et [17] montrent une bonne robustesse aux variations d'inductance également, les incertitudes de flux entraînent des erreurs de position relativement importantes dans [20], alors que le flux des aimants est supposé constant dans [17]. Concernant [51] et l'observateur utilisant une boucle à verrouillage de phase proposé par [43], ils montrent aussi une bonne robustesse à deux des paramètres (la résistance et le flux pour [51], l'inductance et le flux pour [43]), mais ne considèrent pas la robustesse au troisième paramètre physique de la machine (i.e. respectivement l'inductance et la résistance). Quant à [4], l'étude de la robustesse n'y est pas restreinte aux paramètres physiques de la machine puisqu'un observateur indépendant des paramètres liés à la charge mécanique y est présenté. Celui-ci est alors robuste à la fois aux paramètres mécaniques, *via* une correction adaptative de la vitesse, et aux incertitudes de flux.

L'observateur non linéaire de Luenberger que nous allons présenter est lui, d'une part robuste aux paramètres liés à la charge mécanique, grâce à l'utilisation d'un sous-système spécifique de dimension deux du modèle du moteur, complètement découplé du comportement mécanique du moteur. D'autre part, la robustesse aux paramètres physiques de la machine, et plus précisément l'impact d'une mauvaise connaissance de la résistance et de l'inductance, est étudiée au paragraphe 4.8 et se montre concluante. Quant à la robustesse aux variations de flux des aimants, elle est évidemment assurée par l'estimation conjointe du flux et de la position.

4.2 Modélisation utilisée

Dans cette partie, nous utilisons les équations électriques de la modélisation classique (1.19) :

$$L\dot{i} = -Ri + \omega\phi \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + u. \quad (4.1)$$

Afin d'extraire plus d'information sur la dynamique du modèle, il est intéressant de lui appliquer le changement de coordonnées suivant :

$$\Psi = Li + \Phi, \quad (4.2)$$

avec :

$$\Phi = \phi \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

En faisant ce changement de coordonnées, nous avons remplacé la composante θ par deux coordonnées, à savoir les deux composantes du flux magnétique total (induit + permanent) Ψ . Ceci implique, dans le cas $\dot{\phi} = 0$, l'existence d'une contrainte reliant les deux nouvelles coordonnées :

$$|\Psi - Li|^2 = \phi^2. \quad (4.4)$$

Les équations électriques (4.1) se réécrivent alors :

$$\dot{\Psi} = u - Ri, \quad (4.5)$$

qui n'est rien d'autre que la loi de Faraday. On note que la vitesse ω n'apparaît plus dans ces équations. Le système de dimension deux (4.5) est donc découplé de l'équation mécanique.

4.3 Le problème d'estimation

Remarque préliminaire : Les signaux u et i sont supposés disponibles par mesure. Nous étudierons dans la partie 7.2, l'observabilité de l'état $\chi_K = (L, R, \phi)$ quand la position θ est connue. Ne disposant pas ici de cette information de position, le domaine d'observabilité de $\chi_T = (L, R, \phi, \theta)$ est au mieux aussi grand que celui de χ_K . Autrement dit, dans tous les cas pour lesquels χ_K est non observable, χ_T est également non observable. En particulier, χ_K et χ_T ne sont pas observables pour la solution particulière introduite au paragraphe 2.1. Concernant les cas pour lesquels χ_K est observable, nous n'avons pas pu obtenir de résultats concluants et ne présentons donc pas de preuve

formelle d'observabilité ou de non observabilité de l'état χ_T . Cependant, une version de l'observateur non linéaire de Luenberger visant à estimer l'état $\chi_T = (L, R, \phi, \theta)$ a été développée, sa construction reposant sur le même principe que celle de l'observateur construit au paragraphe 4.5, mais avec des équations beaucoup plus complexes. Cet observateur a alors été implémenté en simulation, et ce sans succès quant à l'observation de l'état χ_T complet. Ceci n'est évidemment pas une preuve de non observabilité mais éveille de forts soupçons. Il est toutefois également possible que cet échec soit issu de problèmes numériques, cette version de l'observateur nécessitant des calculs très lourds, avec notamment des résolutions, *via* une technique du résultant [10] [11], d'équations polynomiales d'ordre parfois supérieur à 10 à 4 inconnues. Quoi qu'il en soit, que ce soit pour raison de non-observabilité ou de problèmes numériques liés à l'implémentation, il ne semble pas viable d'implémenter un observateur de Luenberger pour observer l'état $\chi_T = (L, R, \phi, \theta)$.

Ainsi, supposant toujours que les signaux u et i sont disponibles par mesure, mais également que les valeurs des paramètres R et L sont connues, nous cherchons plus modestement à estimer la position θ et le flux ϕ . D'après (4.3), cela est équivalent à estimer Φ (dont ϕ et θ sont le module et l'argument) et, comme on connaît L et i , c'est également équivalent à estimer Ψ . Nous cherchons donc à estimer l'état $\chi = \Psi$, satisfaisant la dynamique :

$$\dot{\Psi} = u - Ri \quad , \quad (4.6)$$

connaissant les entrées i et u et la sortie mesurée :

$$y(t) = h(\chi, t) \quad , \quad (4.7)$$

où h est définie en s'inspirant de la contrainte (4.4) par :

$$h(\chi, t) = |\Psi - Li|^2 - \phi^2. \quad (4.8)$$

On note donc que la mesure de y est identiquement nulle pour toute solution de (4.6) issue du modèle (4.1).

4.4 Observabilité

Avant de construire un observateur, une étude d'observabilité est nécessaire afin de connaître les signaux qu'il est possible d'observer à partir du modèle et sous quelles conditions. A cette fin, nous rappelons dans un premier temps quelques définitions et

méthodes relatives à l'observabilité et son étude. Ce qui est exposé dans le paragraphe suivant est inspiré de [41], [47] et [16].

4.4.1 Définitions et méthodes

On considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) , \\ y &= h(x, t) , \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ et f et h deux fonctions régulières.

Distinguabilité : Deux états initiaux x_a et x_b appartenant à un ensemble ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n sont dits indistinguables dans \mathcal{O} à t_0 si, pour $t \geq t_0$ et aussi longtemps que les deux solutions issues de ces états initiaux restent dans \mathcal{O} , les sorties $y_a(t)$ et $y_b(t)$ sont identiques. Ils sont dits distinguables dans \mathcal{O} à t_0 sinon.

Observabilité : Le système (4.9) est dit observable sur \mathcal{O} si tous les états initiaux x_a et x_b appartenant à \mathcal{O} sont distinguables à t_0 dans \mathcal{O} pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$. Quand \mathcal{O} est un voisinage d'un certain point x_0 de \mathbb{R}^n , le système est dit localement observable en x_0 . Quand $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, le système est dit globalement observable.

On peut également définir une propriété plus forte décrivant le fait que deux différents états peuvent être distingués en regardant la sortie pendant un laps de temps aussi petit que l'on veut :

Observabilité instantanée : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système (4.9) est localement instantanément observable en x_0 s'il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} tel que pour tout sous-ensemble $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}$ contenant x_0 , le système est observable sur \mathcal{I} . Si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le système est instantanément observable en x_0 , il est localement instantanément observable. Si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, le système est globalement instantanément observable.

On remarque que les implications suivantes sont vérifiées par les différentes observabilités :

$$\begin{array}{ccc} \text{Observabilité globale instantanée} & \Rightarrow & \text{Observabilité globale} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Observabilité locale instantanée} & \Rightarrow & \text{Observabilité locale} . \end{array} \tag{4.10}$$

Introduisons désormais la fonction H_k qui à un état $x \in \mathbb{R}^n$ associe la sortie et ses $k - 1$ premières dérivées temporelles :

$$H_k(x, t) = \begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ \vdots \\ h_k(x, t) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

avec $h_1(x, t) = h(x, t)$ et $h_{j+1}(x, t)$ la j -ème dérivée de $h(x, t)$, soit :

$$h_{j+1}(x, t) = \frac{\partial h_j}{\partial x}(x, t)f(x, t) + \frac{\partial h_j}{\partial t}(x, t). \quad (4.12)$$

En découle la définition suivante :

Observabilité différentielle d'ordre k : *Le système (4.9) satisfait la propriété d'observabilité différentielle d'ordre k à l'instant t sur \mathcal{O} , un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , si la fonction $x \mapsto H_k(x, t)$ (4.11) est injective sur \mathcal{O} .*

S'il existe un entier $k > 0$ tel que la propriété d'observabilité différentielle est satisfaite pour tout t , alors le système est instantanément observable. L'observabilité différentielle signifie que l'état peut être exprimé en fonction des sorties et d'un nombre fini de leurs dérivées en temps.

Illustration sur le cas linéaire

En guise d'illustration, intéressons-nous au cas linéaire avec le système suivant, d'état x de dimension n et de sortie y :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En dérivant la sortie, on obtient :

$$H_n(x) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx \\ CAx \\ CA^2x \\ \vdots \\ CA^{n-1}x \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

On voit alors que pour pouvoir exprimer x en fonction de y et de ses dérivées, la matrice d'observabilité $O = \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{pmatrix}^T$ doit être inversible et donc de rang plein. On retrouve bien la condition d'observabilité du cas linéaire.

4.4.2 Observabilité instantanée du système

Nous démontrons dans cette partie l'observabilité instantanée du système (4.6,4.7) en montrant qu'il est différentiellement observable. Dans ce but, nous supposons en outre que le flux ϕ , paramètre dépendant de la température, varie lentement avec le temps, de manière à considérer que l'on a $\dot{\phi} = 0$. Ceci est réaliste, la constante de temps thermique étant très grande comparée à la constante de temps électrique.

Proposition 4.1. *L'état $\chi = \Psi$, satisfaisant la dynamique (4.6) et avec $\dot{\phi} = 0$, les entrées (i, u, R, L) ainsi que la sortie (4.7) étant connues, est différentiellement observable d'ordre 3 à l'instant t si et seulement si $\omega(t) \neq 0$.*

Démonstration. On cherche à montrer que la fonction ($\chi \mapsto H_3(\chi, t)$), définie par (4.11) est injective. Commençons par calculer les dérivées de la sortie :

$$\begin{aligned} y &= |\Psi|^2 - 2L\Psi^T i + L^2|i|^2 - \phi^2, \\ \dot{y} &= 2\Psi^T \left(u - Ri - L\dot{\hat{i}} \right) - 2Li^T \left(u - Ri - L\dot{\hat{i}} \right), \\ \ddot{y} &= 2\Psi^T \left(\dot{u} - R\dot{\hat{i}} - L\ddot{\hat{i}} \right) + 2 \left| u - Ri - L\dot{\hat{i}} \right|^2 - 2Li^T \left(\dot{u} - R\dot{\hat{i}} - L\ddot{\hat{i}} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Par définition du modèle, ces équations ont au moins une solution $\chi = \Psi$. Supposons désormais qu'il existe une autre solution distincte $\bar{\chi} = \bar{\Psi}$. On a alors $H_3(\bar{\chi}, t) - H_3(\chi, t) = 0$, soit :

$$\begin{pmatrix} |\bar{\Psi}|^2 - |\Psi|^2 + 2Li^T(\bar{\Psi} - \Psi) \\ 2 \left(u - Ri - L\dot{\hat{i}} \right)^T (\bar{\Psi} - \Psi) \\ 2 \left(\dot{u} - R\dot{\hat{i}} - L\ddot{\hat{i}} \right)^T (\bar{\Psi} - \Psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{\Psi} + \Psi)^T - 2Li^T \\ 2 \left(u - Ri - L\dot{\hat{i}} \right)^T \\ 2 \left(\dot{u} - R\dot{\hat{i}} - L\ddot{\hat{i}} \right)^T \end{pmatrix} (\bar{\Psi} - \Psi) = 0. \quad (4.16)$$

Donc, en utilisant (4.1), (4.2) et (4.3), et avec \mathcal{J} donnée par (1) :

$$\begin{pmatrix} (\bar{\Psi} - \Psi)^T + 2\Phi^T \\ -2\omega\Phi^T \mathcal{J} \\ -2\dot{\omega}\Phi^T \mathcal{J} - 2\omega\dot{\Phi}^T \mathcal{J} \end{pmatrix} (\bar{\Psi} - \Psi) = 0 \quad (4.17)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi^T \\ -\omega \Phi^T \mathcal{J} \\ -\dot{\omega} \Phi^T \mathcal{J} - \omega \dot{\Phi}^T \mathcal{J} \end{pmatrix} (\bar{\Psi} - \Psi) = \begin{pmatrix} -\frac{|\bar{\Psi} - \Psi|^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\omega \sin \theta & \omega \cos \theta \\ -\dot{\omega} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta & \dot{\omega} \cos \theta + \omega^2 \sin \theta \end{pmatrix} (\bar{\Psi} - \Psi) = \begin{pmatrix} -\frac{|\bar{\Psi} - \Psi|^2}{2\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\omega \sin \theta & \omega \cos \theta \\ -\dot{\omega} \sin \theta & \dot{\omega} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi} - \Psi \\ |\bar{\Psi} - \Psi|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\phi} \\ 0 \\ \frac{\omega^2}{2\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

On peut en effet diviser par $|\bar{\Psi} - \Psi|^2$ car $\bar{\Psi} \neq \Psi$. Si $\omega = \dot{\omega} = 0$, le système (4.20) a une infinité de solution. Si $\omega = 0$ mais $\dot{\omega} \neq 0$, le système a une unique solution $\frac{\bar{\Psi} - \Psi}{|\bar{\Psi} - \Psi|^2} = -\frac{1}{2\phi} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Enfin, si $\omega \neq 0$, le système n'a pas de solution triviale, même si $\dot{\omega} = 0$. Ainsi, si $\omega \neq 0$, le système $H_3(\bar{\chi}, t) = H_3(\chi, t)$ n'a pas de solution si $\bar{\chi} \neq \chi$. Donc $H_3(\bar{\chi}, t) = H_3(\chi, t) \Rightarrow \bar{\chi} = \chi$. La fonction $(\chi \mapsto H_3(\chi, t))$ est alors injective à l'instant t où $\omega(t) \neq 0$ et l'état χ est différentiellement observable d'ordre 3. Au contraire, si $\omega = 0$, il n'y a plus d'observabilité différentielle d'ordre 3. \square

Remarque : Si $\omega = 0$ mais qu'une de ses dérivées est non nulle, il est possible que le système soit différentiellement observable d'ordre strictement supérieur à 3.

4.5 Construction d'un observateur non linéaire de Luenberger

Sous les conditions précisées par la proposition 4.1, l'état $\chi = \Psi$ est donc instantanément observable. Nous proposons d'exploiter cette observabilité en implémentant un observateur non linéaire de Luenberger, introduit par Luenberger dans le cas linéaire [30] et étendu au cas non linéaire par Kazantzis et Kravaris [23] et Shoshitaishvili [45]. D'après [2], cet observateur prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= -\lambda_j(z_j - y) + \eta_j, \quad 1 \leq j \leq m, \\ \hat{\chi} &= T^*(z_1, \dots, z_m, t), \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec m nombres complexes à parties réelles strictement positives λ_j , que l'on nommera les pôles de l'observateur, avec m composantes d'état complexes z_j et m signaux η_j à définir, dépendant des courants et tensions. $\hat{\chi}$ est l'état estimé et T^* une fonction à déterminer. Pour construire cet observateur, il est ainsi nécessaire de déterminer les signaux η_j et la fonction T^* . Nous devons également déterminer le nombre et les valeurs des pôles λ_j , points sur lesquels nous reviendrons plus tard.

D'après la deuxième équation, on constate qu'avec cet observateur on cherche à estimer l'état à partir des composantes z_j . A cette fin, il est nécessaire, dans un premier temps, d'exprimer les composantes z_j en fonction de l'état, i.e de déterminer les fonctions T_j telles que $z_j = T_j(\chi, t)$. Si ces fonctions, solutions d'équations aux dérivées partielles, peuvent, dans le cas général, être difficiles à déterminer, nous verrons qu'elles prennent dans notre cas une forme polynomiale simple. Dans un second temps, comme nous cherchons à déterminer T^* , qui à l'inverse exprime l'état en fonction des composantes z_j , nous devons résoudre en χ les équations $z_j = T_j(\chi, t)$. Cependant, ces équations pouvant ne pas avoir de solution exacte, nous transformons le problème en un problème de minimisation, afin, à partir de plusieurs équations, de trouver l'état qui correspond le mieux.

4.5.1 Première étape : recherche des fonctions T_j

En procédant suivant la théorie développée dans [2] et appliquée dans un cas similaire dans [42], on recherche les fonctions T_j , telles que $z_j = T_j(\chi, t)$ et les signaux η_j associés. Les fonctions $T_j(\chi, t)$ doivent vérifier :

$$\frac{\partial T_j}{\partial \chi}(\chi, t)\dot{\chi} + \frac{\partial T_j}{\partial t}(\chi, t) = -\lambda_j[T_j(\chi, t) - y(t)] + \eta_j(t) \quad , \quad (4.22)$$

équations auxquelles on cherche des solutions polynomiales. On a alors la proposition suivante.

Proposition 4.2. *La fonction polynomiale de degré 2 :*

$$T_j = |\Psi|^2 - \phi^2 + c_j^T \Psi \quad (4.23)$$

est solution de (4.22), avec :

$$\begin{aligned} \eta_j &= c_j^T(u - Ri) - \lambda_j L^2 |i|^2 \quad , \\ \dot{c}_j &= -\lambda_j c_j - 2(u - Ri + \lambda_j Li) \quad . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Démonstration. En remplaçant, dans (4.22), T_j par son expression donnée par (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned}
 2\Psi^T \dot{\Psi} + \dot{c}_j^T \Psi + c_j^T \dot{\Psi} &= -\lambda_j(|\Psi|^2 - \phi^2 + c_j^T \Psi) + \eta_j \\
 \Leftrightarrow 2\Psi^T(u - Ri) + \dot{c}_j^T \Psi + c_j^T(u - Ri) &= -\lambda_j(L^2|i|^2 + \phi^2 + 2Li^T \Phi - \phi^2 + c_j^T \Psi) + \eta_j \\
 \Leftrightarrow (2(u - Ri)^T + \dot{c}_j^T)\Psi + c_j^T(u - Ri) &= -2\lambda_j Li^T \Psi + L^2 \lambda_j |i|^2 - \lambda_j c_j^T \Psi + \eta_j .
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Puis, en séparant les termes facteurs de Ψ et les autres, on obtient le système (4.24). \square

On remarque que, comme les λ_j sont à parties réelles strictement positives, les composantes de c_j sont bornées si les courants et tensions le sont.

4.5.2 Seconde étape : détermination de T^*

Déterminer T^* revient à résoudre en $\chi = \Psi$ les équations :

$$z_j(t) = T_j(\chi, t) , \quad 1 \leq j \leq m , \tag{4.26}$$

soit à résoudre en Ψ , les équations :

$$z_j = |\Psi|^2 - \phi^2 + c_j^T \Psi . \tag{4.27}$$

Or, on remarque avec (4.4) que :

$$|\Psi|^2 - \phi^2 = 2Li^T \Psi - L^2|i|^2 . \tag{4.28}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
 z_j + L^2|i|^2 &= (c_j + 2Li)^T \Psi \\
 &= (c_j + 2Li)^T (\Phi + Li) ,
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

d'où :

$$(c_j + 2Li)^T \Phi = z_j - c_j^T Li - L^2|i|^2 . \tag{4.30}$$

Il s'agit donc de résoudre en Φ les équations :

$$(c_j + 2Li)^T \Phi = z_j - c_j^T Li - L^2|i|^2 , \quad 1 \leq j \leq m . \tag{4.31}$$

Les pôles λ_j étant complexes, suivant la nullité ou non de leurs parties imaginaires, on cherche à résoudre entre m et $2m$ équations non linéaires à deux inconnues (les deux composantes de Φ). Comme on a potentiellement plus d'équations que d'inconnues, et comme, du fait du bruit ou d'effets non modélisés, ces équations peuvent ne pas avoir

de solution exacte, on transforme le problème en un problème de minimisation. On cherche ainsi l'estimation $\widehat{\Phi}$ de Φ par moindres carrés.

4.5.3 Conclusion : Observateur non linéaire de Luenberger

Ce qui précède nous conduit à l'observateur non linéaire de Luenberger suivant. La dynamique de l'observateur est :

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= -\lambda_j z_j + \eta_j , \\ \dot{c}_j &= -\lambda_j c_j - 2(u - R_a i + \lambda_j L_a i) , 1 \leq j \leq m , \\ \eta_j &= c_j^T (u - R_a i) - \lambda_j L_a^2 |i|^2 . \end{aligned} \quad (4.32)$$

On en déduit l'estimée $\widehat{\Phi}$ du vecteur Φ comme solution aux moindres carrés de :

$$(c_j + 2L_a i)^T \widehat{\Phi} = z_j - c_j^T L_a i - L_a^2 |i|^2 , 1 \leq j \leq m , \quad (4.33)$$

où u et i sont les tensions et courants exacts dans le repère (α, β) aux bornes du moteur, et où R_a et L_a sont les approximations que nous avons de R et L . Les λ_j sont les pôles à choisir. Les estimées $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\theta}$ de l'intensité du flux des aimants et de la position sont ensuite simplement respectivement le module et l'argument du vecteur $\widehat{\Phi}$.

Remarque : Dans le cas où les pôles λ_j sont à partie imaginaire non nulle, il est utile pour l'implémentation de séparer parties réelles et parties imaginaires. Ainsi, en notant $\Im^2 = -1$ et en introduisant les notations suivantes pour les parties réelles et imaginaires :

$$\lambda_j = \lambda_{\Re j} + \Im \lambda_{\Im j} , \quad z_j = z_{\Re j} + \Im z_{\Im j} , \quad c_j = c_{\Re j} + \Im c_{\Im j} , \quad \eta_j = \eta_{\Re j} + \Im \eta_{\Im j} , \quad (4.34)$$

les équations (4.32) et (4.33) se réécrivent :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\Re j} &= -\lambda_{\Re j} z_{\Re j} + \lambda_{\Im j} z_{\Im j} + \eta_{\Re j} , \\ \dot{z}_{\Im j} &= -\lambda_{\Im j} z_{\Re j} - \lambda_{\Re j} z_{\Im j} + \eta_{\Im j} , \\ \dot{c}_{\Re j} &= -\lambda_{\Re j} c_{\Re j} + \lambda_{\Im j} c_{\Im j} - 2(u - R_a i + \lambda_{\Re j} L_a i) , \\ \dot{c}_{\Im j} &= -\lambda_{\Im j} c_{\Re j} - \lambda_{\Re j} c_{\Im j} - 2\lambda_{\Im j} L_a i , \\ \eta_{\Re j} &= c_{\Re j}^T (u - R_a i) - \lambda_{\Re j} L_a^2 |i|^2 , \\ \eta_{\Im j} &= c_{\Im j}^T (u - R_a i) - \lambda_{\Im j} L_a^2 |i|^2 , \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec les équations à résoudre :

$$\begin{aligned} (c_{\Re j} + 2L_a i)^T \widehat{\Phi} &= z_{\Re j} - c_{\Re j}^T L_a i - L_a^2 |i|^2, \\ c_{\Im j}^T \widehat{\Phi} &= z_{\Im j} - c_{\Im j}^T L_a i. \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.6 Convergence de l'observateur de Luenberger

Dans ce paragraphe, nous vérifions la convergence de l'estimation $\widehat{\Phi}$ du vecteur Φ vers Φ , quand la résistance et l'inductance sont parfaitement connues, i.e. quand $R_a = R$ et $L_a = L$.

Par définition de T , on a :

$$\dot{T}_j(\chi, t) = -\lambda_j [T_j(\chi, t) - y] + \eta_j. \quad (4.37)$$

Donc :

$$\overline{z_j - T_j(\chi, t)} = -\lambda_j (z_j - T_j(\chi, t)). \quad (4.38)$$

Si $\text{Re}(\lambda_j) > 0$, on est sûr de la convergence de z_j vers T_j . Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} (c_j + 2Li)^T \widehat{\Phi} &= z_j - c_j^T Li - L^2 |i|^2, \\ (c_j + 2Li)^T \Phi &= T_j - c_j^T Li - L^2 |i|^2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

et donc :

$$(c_j + 2Li)^T (\widehat{\Phi} - \Phi) = z_j - T_j. \quad (4.40)$$

Ainsi, si la matrice constituée des $(c_j(t) + 2Li(t))$ est inversible à gauche uniformément en t (i.e. si son inverse existe et est bornée supérieurement), alors on a convergence de $\widehat{\Phi}$ vers Φ . Se pose alors le problème du rang de la matrice constituée des $(c_j + 2Li)$. Nous l'étudions pour la solution particulière au paragraphe 4.7.

Remarque : L'inversibilité peut également être testée en ligne par un calcul de déterminant. Lorsque la matrice est non inversible, on gèle alors l'estimation. Ceci n'a pas de conséquence puisque la dynamique de l'observateur n'est, elle, pas modifiée, contrairement par exemple au cas d'un observateur faisant intervenir un facteur d'oubli comme celui présenté au chapitre 7.

4.7 Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

Dans cette partie, nous cherchons à résoudre de manière exacte les équations de l'observateur, i.e. sans recourir à un problème de moindres carrés, dans le cas non bruité. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cadre de la solution particulière à tensions et couple constants présentée au paragraphe 2.1. Ceci nous permet notamment d'étudier le problème du rang de la matrice constituée des $(c_j + 2Li)$ et de déterminer les conditions de convergence de l'estimation dans le cadre de cette solution particulière, ainsi que le nombre minimal de pôles nécessaires. Les expressions déterminées tout au long de ces calculs serviront également de support à l'étude du cas bruité menée dans le chapitre 6. Les cas à pôles réels et à pôles complexes sont traités séparément.

On rappelle que, dans le cadre de la solution particulière (2.21), u et i se mettent sous la forme :

$$u = Uv_u \quad , \quad i = Iv_i \quad , \quad (4.41)$$

avec U et I des réels constants et :

$$v_u(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_u) \\ \sin(\omega t + \varphi_u) \end{pmatrix} \quad , \quad v_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \sin(\omega t + \varphi_i) \end{pmatrix} . \quad (4.42)$$

Par ailleurs, dans cette partie, on utilisera un indice 0 pour signifier qu'on se trouve dans le cadre non bruité, par opposition à l'étude qui sera menée plus loin en présence de bruit. Enfin, introduisons quelques notations qui nous seront utiles pour mener à bien les calculs :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= v_u^T v_i = v_i^T v_u = \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad , \\ \mathbf{s} &= v_u^T \mathcal{J} v_i = -v_u^T \mathcal{J}^T v_i = v_i^T \mathcal{J}^T v_u = -v_i^T \mathcal{J} v_u = \sin(\varphi_u - \varphi_i) \quad , \\ A &= U \cos(\omega t + \varphi_u) - R_a I \cos(\omega t + \varphi_i) + \omega L_a I \sin(\omega t + \varphi_i) \quad , \\ B &= U \sin(\omega t + \varphi_u) - R_a I \sin(\omega t + \varphi_i) - \omega L_a I \cos(\omega t + \varphi_i) \quad , \\ E &= A^2 + B^2 = (U\mathbf{c} - R_a I)^2 + (U\mathbf{s} - \omega L_a I)^2 \quad , \\ d_+ &= \lambda_{\Im}^2 + \omega^2 + \lambda_{\Re}^2 \quad , \\ d_- &= \lambda_{\Im}^2 - \omega^2 + \lambda_{\Re}^2 \quad , \\ e &= \lambda_{\Im}^2 - \omega^2 - \lambda_{\Re}^2 \quad , \\ f &= -2\lambda_{\Im} \lambda_{\Re} \quad , \\ D &= (\lambda_{\Im}^2 + \lambda_{\Re}^2)^2 + \omega^4 + 2\omega^2(\lambda_{\Re}^2 - \lambda_{\Im}^2) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.7.1 Cas à pôles réels

Les équations (4.32) et (4.33) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{0_j} &= -\lambda_j z_{0_j} + \eta_{0_j} , \\ \dot{c}_{0_j} &= -\lambda_j c_{0_j} - 2(u - R_a i + \lambda_j L_a i) , \\ \eta_{0_j} &= c_{0_j}^T (u - R_a i) - \lambda_j |L_a i|^2 , \end{aligned} \quad (4.44)$$

$\widehat{\Phi}_0$ étant alors obtenu en résolvant les équations :

$$\tilde{c}_{0_j}^T \widehat{\Phi}_0 = \tilde{z}_{0_j} , \quad 1 \leq j \leq m , \quad (4.45)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{0_j} &= c_{0_j} + 2L_a i , \\ \tilde{z}_{0_j} &= z_{0_j} - c_{0_j}^T L_a i - |L_a i|^2 . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Dans la suite des calculs, par souci de simplicité, on fera abstraction des indices j .

Calcul de \tilde{c}_0

Pour la solution particulière, c_0 vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{c}_0 = -\lambda c_0 - 2(u - R_a i + \lambda L_a i) = -\lambda c_0 - 2(Uv_u - [R_a - \lambda L_a]Iv_i) . \quad (4.47)$$

Or le régime asymptotique de x donné par $\dot{x} = -\lambda x + X \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$ est :

$$x = \frac{X}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}) \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} , \quad (4.48)$$

avec les matrices \mathcal{I} et \mathcal{J} données par (1). Par linéarité, le régime asymptotique de c_0 est alors :

$$c_0 = -2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} Uv_u + 2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} (R_a - \lambda L_a) Iv_i . \quad (4.49)$$

On en déduit \tilde{c}_0 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_0 = c_0 + 2L_a i &= -2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} U v_u + 2 \frac{(\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J})(R_a - \lambda L_a) + (\lambda^2 + \omega^2) L_a \mathcal{I}}{\lambda^2 + \omega^2} I v_i \\
 &= -2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} U v_u + 2 \frac{(\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}) R_a + \omega(\omega \mathcal{I} + \lambda \mathcal{J}) L_a}{\lambda^2 + \omega^2} I v_i \\
 &= -2 \frac{(\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J})(U v_u - R_a I v_i) - \omega(\omega \mathcal{I} + \lambda \mathcal{J}) L_a I v_i}{\lambda^2 + \omega^2} ,
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

et comme on a la relation :

$$\omega \mathcal{I} + \lambda \mathcal{J} = -(\omega \mathcal{J} - \lambda \mathcal{I}) \mathcal{J} , \tag{4.51}$$

on obtient :

$$\tilde{c}_0 = \frac{2(\omega \mathcal{J} - \lambda \mathcal{I})(U v_u - R_a I v_i - \omega \mathcal{J} L_a I v_i)}{\lambda^2 + \omega^2} . \tag{4.52}$$

Calcul de η_0

Pour la solution particulière, on a :

$$\eta_0 = c_0^T (u - R_a i) - \lambda |L_a i|^2 = c_0^T (U v_u - R_a I v_i) - \lambda L_a^2 I^2 . \tag{4.53}$$

En y injectant l'expression de c_0 donnée par (4.49), on obtient :

$$\eta_0 = -2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} [U v_u - R_a I v_i + \lambda L_a I v_i] \right)^T (U v_u - R_a I v_i) - \lambda L_a^2 I^2 . \tag{4.54}$$

4.7. Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

Avec \mathbf{c} et \mathbf{s} définis par (4.43) et en remarquant que $v_u^T v_u = v_i^T v_i = 1$ et que $v_u^T \mathcal{J}^T v_u = v_u^T \mathcal{J} v_u = v_i^T \mathcal{J}^T v_i = v_i^T \mathcal{J} v_i = 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
[\lambda^2 + \omega^2]\eta_0 &= - 2\lambda[Uv_u - R_a I v_i + \lambda L_a I v_i]^T [Uv_u - R_a I v_i] \\
&\quad + 2\omega[Uv_u - R_a I v_i + \lambda L_a I v_i]^T \mathcal{J}^T [Uv_u - R_a I v_i] \\
&\quad - [\lambda^2 + \omega^2]\lambda L_a^2 I^2 \\
&= - 2\lambda[U^2 - 2UR_a I \mathbf{c} + R_a^2 I^2 + \lambda L_a I U \mathbf{c} - \lambda L_a R_a I^2] \\
&\quad + 2\omega[\lambda L_a I U \mathbf{s}] - [\lambda^2 + \omega^2]\lambda L_a^2 I^2 \\
&= - \lambda[U^2 \mathbf{c}^2 - 2UR_a I \mathbf{c} + R_a^2 I^2] \\
&\quad - \lambda[U^2 \mathbf{c}^2 - 2UR_a I \mathbf{c} + R_a^2 I^2 + 2\lambda L_a I U \mathbf{c} - 2\lambda L_a R_a I^2 + \lambda^2 L_a^2 I^2] \\
&\quad - \lambda[U^2 \mathbf{s}^2 - 2\omega L_a I U \mathbf{s} + \omega^2 L_a^2 I^2] \\
&\quad - \lambda U^2 \mathbf{s}^2 \\
&= - \lambda[(U \mathbf{c} - R_a I)^2 + (U \mathbf{c} - [R_a - \lambda L_a] I)^2 + (U \mathbf{s} - \omega L_a I)^2 + U^2 \mathbf{s}^2] , \\
\end{aligned} \tag{4.55}$$

soit :

$$\eta_0 = -\lambda \frac{(U \mathbf{c} - R_a I)^2 + (U \mathbf{c} - [R_a - \lambda L_a] I)^2 + (U \mathbf{s} - \omega L_a I)^2 + U^2 \mathbf{s}^2}{\lambda^2 + \omega^2} . \tag{4.56}$$

On constate que η_0 ne dépend pas du temps.

Calcul de \tilde{z}_0

Pour la solution particulière, z_0 vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z}_0 = -\lambda z_0 + \eta_0 . \tag{4.57}$$

Comme η_0 est constant, on obtient directement le régime asymptotique de z_0 :

$$z_0 = -\frac{(U \mathbf{c} - R_a I)^2 + (U \mathbf{c} - [R_a - \lambda L_a] I)^2 + (U \mathbf{s} - \omega L_a I)^2 + U^2 \mathbf{s}^2}{\lambda^2 + \omega^2} . \tag{4.58}$$

On en déduit $\tilde{z}_0 = z_0 - c_0^T L i - |L i|^2$:

$$\begin{aligned}
 (\lambda^2 + \omega^2)\tilde{z}_0 &= -(U\mathbf{c} - R_a I)^2 - (U\mathbf{c} - [R_a - \lambda L_a]I)^2 - (U\mathbf{s} - \omega L_a I)^2 - U^2 \mathbf{s}^2 \\
 &\quad + 2[(\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J})U v_u - (\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J})(R_a - \lambda L_a)I v_i]^T L_a I v_i \\
 &\quad - (\lambda^2 + \omega^2)L_a^2 I^2 \\
 &= -2(U\mathbf{c} - R_a I)^2 - \lambda^2 L_a^2 I^2 - 2\lambda L_a I(U\mathbf{c} - R I) - 2U^2 \mathbf{s}^2 - \omega^2 L_a^2 I^2 \\
 &\quad + 2U\mathbf{s}\omega L_a I + 2\lambda U L_a I \mathbf{c} + 2U\mathbf{s}\omega L_a I - 2\lambda(R_a - \lambda L_a)L_a I^2 - (\lambda^2 + \omega^2)L_a^2 I^2 \\
 &= -2(U\mathbf{c} - R_a I)^2 - 2(U\mathbf{s} - \omega L_a I)^2 ,
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

soit :

$$\tilde{z}_0 = -2 \frac{(U\mathbf{c} - R_a I)^2 + (U\mathbf{s} - \omega L_a I)^2}{\lambda^2 + \omega^2} . \tag{4.60}$$

On constate que le numérateur du terme de droite ne dépend pas de λ .

Calcul de $\hat{\Phi}_0$

D'après la relation (4.45), on obtient $\hat{\Phi}_0$ en résolvant les équations :

$$\tilde{c}_{0,j}^T \hat{\Phi}_0 = \tilde{z}_{0,j} , \quad 1 \leq j \leq m . \tag{4.61}$$

En utilisant cette relation pour deux pôles réels λ_1 et λ_2 , à l'aide des expressions (4.52) et (4.60), et en notant la matrice carrée $C_0 = (\tilde{c}_0(\lambda_1) \ \tilde{c}_0(\lambda_2))^T$ et le vecteur $Z_0 = (\tilde{z}_0(\lambda_1) \ \tilde{z}_0(\lambda_2))^T$, l'équation à résoudre est :

$$C_0 \hat{\Phi}_0 = Z_0 , \tag{4.62}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{c} [(\omega \mathcal{J} - \lambda_1 \mathcal{I})(U v_u - R_a I v_i - \omega \mathcal{J} L_a I v_i)]^T \\ [(\omega \mathcal{J} - \lambda_2 \mathcal{I})(U v_u - R_a I v_i - \omega \mathcal{J} L_a I v_i)]^T \end{array} \right) \hat{\Phi}_0 \\
 &= - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} [(U\mathbf{c} - R_a I)^2 + (U\mathbf{s} - \omega L_a I)^2] .
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Avec A , B et E définis par (4.43), l'équation devient :

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 A - \omega B & \omega A - \lambda_1 B \\ -\lambda_2 A - \omega B & \omega A - \lambda_2 B \end{pmatrix} \hat{\Phi}_0 = - \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix} . \tag{4.64}$$

4.7. Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

Comme le déterminant de la matrice à inverser est $\omega(\lambda_2 - \lambda_1)E$, les conditions de convergence de l'observateur sont d'avoir ω non nul et λ_1 différent de λ_2 . Pour la solution particulière, nous retrouvons ainsi ici la condition d'observabilité différentielle d'ordre 3 ($\omega \neq 0$) et on vérifie que l'utilisation de deux pôles réels strictement positifs différents ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) est suffisante. On remarque par ailleurs que si $\lambda_1 = \lambda_2$, la matrice n'est plus inversible mais le système (4.64) a encore une solution. Dans les calculs présentés par la suite, on supposera toujours ces conditions vérifiées. En inversant, on obtient alors :

$$\widehat{\Phi}_0 = C_0^{-1}Z_0 = \frac{1}{\omega(\lambda_2 - \lambda_1)E} \begin{pmatrix} \omega A - \lambda_2 B & \lambda_1 B - \omega A \\ \lambda_2 A + \omega B & -\omega B - \lambda_1 A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E \\ -E \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

soit :

$$\widehat{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}_{01} \\ \widehat{\Phi}_{02} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

On peut en déduire les expressions des estimations $\widehat{\phi}_0$ du flux des aimants et $\widehat{\theta}_0$ de la position. Le flux $\widehat{\phi}_0$ estimé est en effet le module de $\widehat{\Phi}_0$:

$$\widehat{\phi}_0 = |\widehat{\Phi}_0| = \frac{\sqrt{E}}{\omega}, \quad (4.67)$$

et la position estimée est donnée par :

$$\widehat{\theta}_0 = \arctan \frac{\widehat{\Phi}_{02}}{\widehat{\Phi}_{01}} = -\arctan \frac{A}{B}, \quad (4.68)$$

avec $\widehat{\Phi}_0 = (\widehat{\Phi}_{01}, \widehat{\Phi}_{02})^T$. Pour la solution particulière, l'estimation $\widehat{\Phi}_0$ de Φ dans le cas non bruité ne dépend pas du choix des pôles. Il en va évidemment de même pour les estimations $\widehat{\phi}_0$ de ϕ et $\widehat{\theta}_0$ de θ .

4.7.2 Cas à pôles complexes

Les équations (4.35) et (4.36) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{\Re 0j} &= -\lambda_{\Re j} z_{\Re 0j} + \lambda_{\Im j} z_{\Im 0j} + \eta_{\Re 0j} , \\
 \dot{z}_{\Im 0j} &= -\lambda_{\Im j} z_{\Re 0j} - \lambda_{\Re j} z_{\Im 0j} + \eta_{\Im 0j} , \\
 \dot{c}_{\Re 0j} &= -\lambda_{\Re j} c_{\Re 0j} + \lambda_{\Im j} c_{\Im 0j} - 2(u - R_a i + \lambda_{\Re j} L_a i) , \\
 \dot{c}_{\Im 0j} &= -\lambda_{\Im j} c_{\Re 0j} - \lambda_{\Re j} c_{\Im 0j} - 2\lambda_{\Im j} L_a i , \\
 \eta_{\Re 0j} &= c_{\Re 0j}^T (u - R_a i) - \lambda_{\Re j} L_a^2 |i|^2 , \\
 \eta_{\Im 0j} &= c_{\Im 0j}^T (u - R_a i) - \lambda_{\Im j} L_a^2 |i|^2 ,
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

$\widehat{\Phi}_0$ étant alors obtenu en résolvant, pour $1 \leq j \leq m$, les équations :

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{\Re 0j}^T \widehat{\Phi}_0 &= \tilde{z}_{\Re 0j} , \\
 c_{\Im 0j}^T \widehat{\Phi}_0 &= \tilde{z}_{\Im 0j} ,
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{\Re 0j} &= c_{\Re 0j} + 2L_a i , \\
 \tilde{z}_{\Re 0j} &= z_{\Re 0j} - c_{\Re 0j}^T L_a i - |L_a i|^2 , \\
 \tilde{z}_{\Im 0j} &= z_{\Im 0j} - c_{\Im 0j}^T L_a i .
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Dans la suite des calculs, par souci de simplicité, on fera abstraction des indices j .

Calcul de $c_{\Re 0}$ et de $c_{\Im 0}$

Pour la solution particulière, $c_{\Re 0}$ et $c_{\Im 0}$ vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_{\Re 0} &= -\lambda_{\Re} c_{\Re 0} + \lambda_{\Im} c_{\Im 0} - 2(U v_u - [R_a - \lambda_{\Re} L_a] I v_i) , \\
 \dot{c}_{\Im 0} &= -\lambda_{\Im} c_{\Re 0} - \lambda_{\Re} c_{\Im 0} - 2\lambda_{\Im} L_a I v_i .
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Or les régimes asymptotiques de x_1 et x_2 donnés par

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a x_1 + b x_2 + X_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{x_1}) \\ \sin(\omega t + \varphi_{x_1}) \end{pmatrix} , \\
 \dot{x}_2 &= -b x_1 - a x_2 + X_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{x_2}) \\ \sin(\omega t + \varphi_{x_2}) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

4.7. Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

sont :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(a^2 + b^2 + \omega^2)a\mathcal{I} + (b^2 - a^2 - \omega^2)\omega\mathcal{J}}{(a^2 + b^2)^2 + \omega^4 + 2\omega^2(a^2 - b^2)} X_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{x_1}) \\ \sin(\omega t + \varphi_{x_1}) \end{pmatrix} \\
&+ \frac{(a^2 + b^2 - \omega^2)b\mathcal{I} - 2ab\omega\mathcal{J}}{(a^2 + b^2)^2 + \omega^4 + 2\omega^2(a^2 - b^2)} X_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{x_2}) \\ \sin(\omega t + \varphi_{x_2}) \end{pmatrix} , \\
x_2 &= \frac{-(a^2 + b^2 - \omega^2)b\mathcal{I} + 2ab\omega\mathcal{J}}{(a^2 + b^2)^2 + \omega^4 + 2\omega^2(a^2 - b^2)} X_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{x_1}) \\ \sin(\omega t + \varphi_{x_1}) \end{pmatrix} \\
&+ \frac{(a^2 + b^2 + \omega^2)a\mathcal{I} + (b^2 - a^2 - \omega^2)\omega\mathcal{J}}{(a^2 + b^2)^2 + \omega^4 + 2\omega^2(a^2 - b^2)} X_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_{x_2}) \\ \sin(\omega t + \varphi_{x_2}) \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Par linéarité, les régimes asymptotiques de $c_{\mathfrak{R}0}$ et $c_{\mathfrak{S}0}$ sont alors, avec d_+ , d_- , e , f et D définis par (4.43) :

$$\begin{aligned}
c_{\mathfrak{R}0} &= \frac{-2}{D} \begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{R}}d_+ & -\omega e \\ \omega e & \lambda_{\mathfrak{R}}d_+ \end{pmatrix} (Uv_u - [R_a - \lambda_{\mathfrak{R}}L_a]Iv_i) \\
&- \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{S}}d_- & -\omega f \\ \omega f & \lambda_{\mathfrak{S}}d_- \end{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{S}}L_aIv_i , \\
c_{\mathfrak{S}0} &= \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{S}}d_- & -\omega f \\ \omega f & \lambda_{\mathfrak{S}}d_- \end{pmatrix} (Uv_u - [R_a - \lambda_{\mathfrak{R}}L_a]Iv_i) \\
&- \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{R}}d_+ & -\omega e \\ \omega e & \lambda_{\mathfrak{R}}d_+ \end{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{S}}L_aIv_i ,
\end{aligned} \tag{4.75}$$

soit :

$$\begin{aligned}
c_{\mathfrak{R}0} &= -2M(Uv_u - [R_a - \lambda_{\mathfrak{R}}L_a]Iv_i) - 2N\lambda_{\mathfrak{S}}L_aIv_i \\
&= -2M(Uv_u - R_aIv_i) - 2L_aI(\lambda_{\mathfrak{R}}M + \lambda_{\mathfrak{S}}N)v_i , \\
c_{\mathfrak{S}0} &= 2N(Uv_u - [R_a - \lambda_{\mathfrak{R}}L_a]Iv_i) - 2M\lambda_{\mathfrak{S}}L_aIv_i \\
&= 2N(Uv_u - R_aIv_i) + 2L_aI(\lambda_{\mathfrak{R}}N - \lambda_{\mathfrak{S}}M)v_i ,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

avec :

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{D}[\lambda_{\mathfrak{R}}d_+\mathcal{I} + \omega e\mathcal{J}] , \\
N &= \frac{1}{D}[\lambda_{\mathfrak{S}}d_-\mathcal{I} + \omega f\mathcal{J}] .
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Identités utiles

Les identités suivantes nous seront utiles pour la suite des calculs :

$$\begin{aligned}
 Dv_u^T M v_i &= Dv_i^T M^T v_u = \lambda_{\mathfrak{R}} \mathbf{c} d_+ + \omega \mathbf{s} e , \\
 Dv_u^T M^T v_i &= Dv_i^T M v_u = \lambda_{\mathfrak{R}} \mathbf{c} d_+ - \omega \mathbf{s} e , \\
 Dv_u^T N v_i &= Dv_i^T N^T v_u = \lambda_{\mathfrak{S}} \mathbf{c} d_- + \omega \mathbf{s} f , \\
 Dv_u^T N^T v_i &= Dv_i^T N v_u = \lambda_{\mathfrak{R}} \mathbf{c} d_- - \omega \mathbf{s} f , \\
 Dv_u^T M^T v_u &= Dv_i^T M^T v_i = \lambda_{\mathfrak{R}} d_+ , \\
 Dv_u^T N^T v_u &= Dv_i^T N^T v_i = \lambda_{\mathfrak{S}} d_- .
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Calcul de $\tilde{c}_{\mathfrak{R}0}^T$ et $c_{\mathfrak{R}0}^T$

D'après (4.76) :

$$\tilde{c}_{\mathfrak{R}0}^T = (c_{\mathfrak{R}0} + 2L_a i)^T = -2(Uv_u^T - R_a I v_i^T) M^T + 2L_a I v_i^T (\mathcal{I} - \lambda_{\mathfrak{R}} M^T - \lambda_{\mathfrak{S}} N^T) , \tag{4.79}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 D\tilde{c}_{\mathfrak{R}0}^T &= -2(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{I} + \omega e \mathcal{J}^T) \\
 &+ 2L_a I v_i^T [(D - \lambda_{\mathfrak{R}}^2 d_+ - \lambda_{\mathfrak{S}}^2 d_-) \mathcal{I} + \lambda_{\mathfrak{R}} \omega (2\lambda_{\mathfrak{S}}^2 - e) \mathcal{J}^T] .
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

On en déduit :

$$D\tilde{c}_{\mathfrak{R}0}^T = -2(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{I} + \omega e \mathcal{J}^T) + 2L_a \omega I v_i^T [\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{J}^T - \omega e \mathcal{I}] . \tag{4.81}$$

On a alors également :

$$Dc_{\mathfrak{R}0}^T = -2(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{I} + \omega e \mathcal{J}^T) + 2L_a \omega I v_i^T [\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{J}^T - \omega e] - 2DL_a I v_i^T . \tag{4.82}$$

Calcul de $c_{\mathfrak{S}0}^T$

D'après (4.76) :

$$c_{\mathfrak{S}0}^T = 2(Uv_u^T - R_a I v_i^T) N^T + 2L_a I v_i^T (\lambda_{\mathfrak{R}} N^T - \lambda_{\mathfrak{S}} M^T) , \tag{4.83}$$

4.7. Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

soit :

$$\begin{aligned}
Dc_{\mathfrak{S}0}^T &= 2\lambda_{\mathfrak{S}}[(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(d_- \mathcal{I} - 2\lambda_{\mathfrak{R}} \omega \mathcal{J}^T) \\
&\quad + L_a I v_i^T (\lambda_{\mathfrak{R}} [d_- - d_+] \mathcal{I} - \omega [e + 2\lambda_{\mathfrak{R}}^2] \mathcal{J}^T)] , \\
Dc_{\mathfrak{S}0}^T &= 2\lambda_{\mathfrak{S}}[(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(d_- \mathcal{I} - 2\lambda_{\mathfrak{R}} \omega \mathcal{J}^T) - L_a I \omega v_i^T (2\omega \lambda_{\mathfrak{R}} \mathcal{I} + d_- \mathcal{J}^T)] .
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Calcul de $\eta_{\mathfrak{R}0}$

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathfrak{R}0} &= c_{\mathfrak{R}0}^T (u - R_a i) - \lambda_{\mathfrak{R}} L_a^2 |i|^2 \\
&= -2(Uv_u^T - R_a I v_i^T) M^T (Uv_u - R_a I v_i) \\
&\quad - 2L_a I v_i^T (\lambda_{\mathfrak{R}} M^T + \lambda_{\mathfrak{S}}^T N^T) (Uv_u - R_a I v_i) - \lambda_{\mathfrak{R}} L_a^2 I^2 ,
\end{aligned} \tag{4.85}$$

soit :

$$\begin{aligned}
D\eta_{\mathfrak{R}0} &= -2[(U^2 + R_a^2 I^2) \lambda_{\mathfrak{R}} d_+ - 2UR_a I \lambda_{\mathfrak{R}} c d_+] - \lambda_{\mathfrak{R}} D L_a^2 I^2 \\
&\quad - 2L_a I [-R_a I (\lambda_{\mathfrak{R}}^2 d_+ + \lambda_{\mathfrak{S}}^2 d_-) + U (\lambda_{\mathfrak{R}}^2 c d_+ + \lambda_{\mathfrak{S}}^2 c d_- + \lambda_{\mathfrak{R}} \omega \mathfrak{s} e + \lambda_{\mathfrak{S}} \omega \mathfrak{s} f)] , \\
D\eta_{\mathfrak{R}0} &= -2\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ [U^2 + R_a^2 I^2 - 2UR_a I c] - \lambda_{\mathfrak{R}} D L_a^2 I^2 \\
&\quad - 2L_a I [(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 d_+ + \lambda_{\mathfrak{S}}^2 d_-) (U c - R_a I) + U \omega \mathfrak{s} (\lambda_{\mathfrak{R}} e + \lambda_{\mathfrak{S}} f)] .
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$\eta_{\mathfrak{R}0}$ est donc constant.

Calcul de $\eta_{\mathfrak{S}0}$

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathfrak{S}0} &= c_{\mathfrak{S}0}^T (u - R_a i) - \lambda_{\mathfrak{S}} L_a^2 |i|^2 \\
&= 2(Uv_u^T - R_a I v_i^T) N^T (Uv_u - R_a I v_i) \\
&\quad + 2L_a I v_i^T (\lambda_{\mathfrak{R}} N^T - \lambda_{\mathfrak{S}}^T M^T) (Uv_u - R_a I v_i) - \lambda_{\mathfrak{S}} L_a^2 I^2 ,
\end{aligned} \tag{4.87}$$

soit :

$$\begin{aligned}
D\eta_{\mathfrak{S}0} &= 2[(U^2 + R_a^2 I^2) \lambda_{\mathfrak{S}} d_- - 2UR_a I \lambda_{\mathfrak{S}} c d_-] - \lambda_{\mathfrak{S}} D L_a^2 I^2 \\
&\quad + 2L_a I [R_a I \lambda_{\mathfrak{R}} \lambda_{\mathfrak{S}} (d_+ - d_-) + U (\lambda_{\mathfrak{R}} \lambda_{\mathfrak{S}} c d_- + \lambda_{\mathfrak{R}} \omega \mathfrak{s} f - \lambda_{\mathfrak{R}} \lambda_{\mathfrak{S}} c d_+ - \lambda_{\mathfrak{S}} \omega \mathfrak{s} e)] , \\
D\eta_{\mathfrak{S}0} &= 2\lambda_{\mathfrak{S}} d_- [U^2 + R_a^2 I^2 - 2UR_a I c] - \lambda_{\mathfrak{S}} D L_a^2 I^2 \\
&\quad + 2L_a I [2\lambda_{\mathfrak{R}} \lambda_{\mathfrak{S}} \omega^2 (R_a I - U c) + U \omega \mathfrak{s} (\lambda_{\mathfrak{R}} f - \lambda_{\mathfrak{S}} e)] .
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$\eta_{\mathfrak{S}0}$ est donc également constant.

Calcul de $z_{\mathfrak{R}0}$

On a :

$$\overline{\begin{pmatrix} z_{\mathfrak{R}0} \\ z_{\mathfrak{S}0} \end{pmatrix}} = - \begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{R}} & -\lambda_{\mathfrak{S}} \\ \lambda_{\mathfrak{S}} & \lambda_{\mathfrak{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\mathfrak{R}0} \\ z_{\mathfrak{S}0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{R}0} \\ \eta_{\mathfrak{S}0} \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Comme $\eta_{\mathfrak{R}0}$ et $\eta_{\mathfrak{S}0}$ sont constants, le régime asymptotique est donné par :

$$\begin{pmatrix} z_{\mathfrak{R}0} \\ z_{\mathfrak{S}0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2} \begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{R}} & \lambda_{\mathfrak{S}} \\ -\lambda_{\mathfrak{S}} & \lambda_{\mathfrak{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{R}0} \\ \eta_{\mathfrak{S}0} \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Ainsi :

$$z_{\mathfrak{R}0} = \frac{\lambda_{\mathfrak{R}}\eta_{\mathfrak{R}0} + \lambda_{\mathfrak{S}}\eta_{\mathfrak{S}0}}{\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2}, \quad (4.91)$$

soit :

$$\begin{aligned} D(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2)z_{\mathfrak{R}0} &= 2(U^2 + R_a^2 I^2 - 2UR_a I \mathbf{c})(\lambda_{\mathfrak{S}}^2 d_- - \lambda_{\mathfrak{R}}^2 d_+) - DL_a^2 I^2 (\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) \\ &+ 2L_a I [-\lambda_{\mathfrak{R}}(U \mathbf{c} - R_a I)(2\lambda_{\mathfrak{S}}^2 \omega^2 + \lambda_{\mathfrak{R}}^2 d_+ + \lambda_{\mathfrak{S}}^2 d_-) - U \omega \mathfrak{s}(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) e] \\ &= 2(U^2 + R_a^2 I^2 - 2UR_a I \mathbf{c})(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) e - DL_a^2 I^2 (\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) \\ &+ 2L_a I [-\lambda_{\mathfrak{R}}(U \mathbf{c} - R_a I)(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) d_+ - U \omega \mathfrak{s}(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) e], \end{aligned} \quad (4.92)$$

soit :

$$\begin{aligned} Dz_{\mathfrak{R}0} &= 2(U \mathbf{c} - R_a I)^2 e + 2U^2 \mathfrak{s}^2 e - 2L_a I (U \mathbf{c} - R_a I) \lambda_{\mathfrak{R}} d_+ - 2L_a I \omega U \mathfrak{s} e - DL_a^2 I^2, \\ Dz_{\mathfrak{S}0} &= 2(U \mathbf{c} - R_a I)[(U \mathbf{c} - R_a I) e - L_a I \lambda_{\mathfrak{R}} d_+] + 2U \mathfrak{s} e (U \mathfrak{s} - L_a I \omega) - DL_a^2 I^2. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Calcul de $z_{\mathfrak{S}0}$

$$z_{\mathfrak{S}0} = \frac{-\lambda_{\mathfrak{S}}\eta_{\mathfrak{R}0} + \lambda_{\mathfrak{R}}\eta_{\mathfrak{S}0}}{\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2}, \quad (4.94)$$

soit :

$$\begin{aligned} D(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2)z_{\mathfrak{S}0} &= 2\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}(U^2 + R_a^2 I^2 - 2UR_a I \mathbf{c})(d_+ + d_-) \\ &+ 2L_a I [\lambda_{\mathfrak{S}}(U \mathbf{c} - R_a I)(-2\lambda_{\mathfrak{R}}^2 \omega^2 + \lambda_{\mathfrak{R}}^2 d_+ + \lambda_{\mathfrak{S}}^2 d_-) + U \omega \mathfrak{s}(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) f] \\ &= 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}(U^2 + R_a^2 I^2 - 2UR_a I \mathbf{c})(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) \\ &+ 2L_a I [\lambda_{\mathfrak{S}}(U \mathbf{c} - R_a I)(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) d_- + U \omega \mathfrak{s}(\lambda_{\mathfrak{R}}^2 + \lambda_{\mathfrak{S}}^2) f], \end{aligned} \quad (4.95)$$

4.7. Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

soit :

$$\begin{aligned} Dz_{\mathfrak{S}_0} &= 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}(U\mathbf{c} - R_a I)^2 + 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}U^2\mathfrak{s}^2 + 2L_a I(U\mathbf{c} - R_a I)\lambda_{\mathfrak{S}}d_- - 4L_a I U \omega \mathfrak{s} \lambda_{\mathfrak{R}} \lambda_{\mathfrak{S}}, \\ Dz_{\mathfrak{S}_0} &= 2\lambda_{\mathfrak{S}}(U\mathbf{c} - R_a I)[2\lambda_{\mathfrak{R}}(U\mathbf{c} - R_a I) + L_a I d_-] + 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}U\mathfrak{s}[U\mathfrak{s} - L_a I \omega]. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Calcul de $\tilde{z}_{\mathfrak{R}_0}$

De (4.82), on déduit :

$$\begin{aligned} Dc_{\mathfrak{R}_0}^T L_a i &= -2L_a I(U\mathbf{c}\lambda_{\mathfrak{R}}d_+ - U\mathfrak{s}\omega e - R_a I\lambda_{\mathfrak{R}}d_+) - 2L_a^2\omega^2 I^2 e - 2DL_a^2 I^2 \\ &= -2L_a I(U\mathbf{c} - R_a I)\lambda_{\mathfrak{R}}d_+ + 2L_a I \omega e(U\mathfrak{s} - L_a I \omega) - 2DL_a^2 I^2. \end{aligned} \quad (4.97)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} D\tilde{z}_{\mathfrak{R}_0} &= D(z_{\mathfrak{R}_0} - c_{\mathfrak{R}_0}^T L_a i - |L_a i|^2) \\ &= 2(U\mathbf{c} - R_a I)[(U\mathbf{c} - R_a I)e - L_a I\lambda_{\mathfrak{R}}d_+] + 2U\mathfrak{s}e(U\mathfrak{s} - L_a I \omega) - DL_a^2 I^2 \\ &\quad + 2L_a I(U\mathbf{c} - R_a I)\lambda_{\mathfrak{R}}d_+ - 2L_a I \omega e(U\mathfrak{s} - L_a I \omega) + 2DL_a^2 I^2 - DL_a^2 I^2, \\ D\tilde{z}_{\mathfrak{R}_0} &= 2e[(U\mathbf{c} - R_a I)^2 + (U\mathfrak{s} - L_a I \omega)^2] = 2eE. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Calcul de $\tilde{z}_{\mathfrak{S}_0}$

De (4.84), on déduit :

$$\begin{aligned} Dc_{\mathfrak{S}_0}^T L_a i &= 2L_a I\lambda_{\mathfrak{S}}[(U\mathbf{c}d_- + 2\lambda_{\mathfrak{R}}U\omega\mathfrak{s} - R_a I d_-) - 2\lambda_{\mathfrak{R}}\omega^2 L_a I] \\ &= 2L_a I\lambda_{\mathfrak{S}}(U\mathbf{c} - R_a I)d_- + 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}L_a I \omega(U\mathfrak{s} - \omega L_a I). \end{aligned} \quad (4.99)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} D\tilde{z}_{\mathfrak{S}_0 j} &= D(z_{\mathfrak{S}_0 j} - c_{\mathfrak{S}_0 j}^T L_a i) \\ &= 2\lambda_{\mathfrak{S}}(U\mathbf{c} - R_a I)[2\lambda_{\mathfrak{R}}(U\mathbf{c} - R_a I) + L_a I d_-] + 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}U\mathfrak{s}(U\mathfrak{s} - L_a I \omega) \\ &\quad - 2L_a I\lambda_{\mathfrak{S}}(U\mathbf{c} - R_a I)d_- - 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}L_a I \omega(U\mathfrak{s} - L_a I \omega), \\ D\tilde{z}_{\mathfrak{S}_0 j} &= 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}[(U\mathbf{c} - R_a I)^2 + (U\mathfrak{s} - L_a I \omega)^2] = 4\lambda_{\mathfrak{R}}\lambda_{\mathfrak{S}}E. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Calcul de $\widehat{\Phi}_0$

D'après (4.70), on obtient $\widehat{\Phi}_0$ en résolvant les équations :

$$\begin{pmatrix} D\tilde{c}_{\mathfrak{R}0j}^T \\ Dc_{\mathfrak{S}0j}^T \end{pmatrix} \widehat{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} D\tilde{z}_{\mathfrak{R}0j} \\ D\tilde{z}_{\mathfrak{S}0j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.101)$$

En utilisant ce système de deux équations pour un unique pôle complexe $\lambda = \lambda_{\mathfrak{R}} + \mathfrak{S}\lambda_{\mathfrak{S}}$, à l'aide de (4.81), (4.84), (4.98) et (4.100), ceci donne :

$$\begin{pmatrix} -(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{I} + \omega e \mathcal{J}^T) + L_a I \omega v_i^T (\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{J}^T - \omega e \mathcal{I}) \\ \lambda_{\mathfrak{S}} [(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(d_- \mathcal{I} - 2\lambda_{\mathfrak{R}} \omega \mathcal{J}^T) - L_a I \omega v_i^T (2\omega \lambda_{\mathfrak{R}} \mathcal{I} + d_- \mathcal{J}^T)] \end{pmatrix} \widehat{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} e \\ 2\lambda_{\mathfrak{R}} \lambda_{\mathfrak{S}} \end{pmatrix} E. \quad (4.102)$$

Si $\lambda_{\mathfrak{S}} = 0$, il existe des solutions bien que la matrice de gauche soit non inversible. Dans le cas $\lambda_{\mathfrak{S}} \neq 0$, nous pouvons simplifier cette seconde équation :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{e} [L_a I \omega v_i^T (\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{J}^T - \omega e \mathcal{I}) - (Uv_u^T - R_a I v_i^T)(\lambda_{\mathfrak{R}} d_+ \mathcal{I} + \omega e \mathcal{J}^T)] \\ \frac{1}{2\lambda_{\mathfrak{R}}} [(Uv_u^T - R_a I v_i^T)(d_- \mathcal{I} - 2\lambda_{\mathfrak{R}} \omega \mathcal{J}^T) - L_a I \omega v_i^T (2\omega \lambda_{\mathfrak{R}} \mathcal{I} + d_- \mathcal{J}^T)] \end{pmatrix} \widehat{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix}, \quad (4.103)$$

soit :

$$C_c \widehat{\Phi}_0 = Z_c \quad \text{avec} \quad C_c = \begin{pmatrix} c_{c1} & c_{c2} \\ c_{c3} & c_{c4} \end{pmatrix}, \quad (4.104)$$

avec les notations évidentes pour la matrice 2×2 C_c et le vecteur à deux éléments Z_c . Cherchons désormais à calculer C_c^{-1} , en commençant par le calcul du déterminant de C_c . On a :

$$\begin{pmatrix} c_{c1} \\ c_{c2} \end{pmatrix} = \frac{1}{e} \left[a_1 \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} v_{i2} \\ -v_{i1} \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} v_{u1} \\ v_{u2} \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} v_{u2} \\ -v_{u1} \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} c_{c3} \\ c_{c4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda_{\mathfrak{R}}} \left[a_5 \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} v_{i2} \\ -v_{i1} \end{pmatrix} + a_7 \begin{pmatrix} v_{u1} \\ v_{u2} \end{pmatrix} + a_8 \begin{pmatrix} v_{u2} \\ -v_{u1} \end{pmatrix} \right], \quad (4.105)$$

avec v_{i1} , v_{i2} , v_{u1} et v_{u2} les composantes respectives de v_i et v_u et :

$$\begin{aligned} a_1 &= I(R_a \lambda_{\mathfrak{R}} d_+ - L_a \omega^2 e) & , & \quad a_2 = -I\omega(L_a \lambda_{\mathfrak{R}} d_+ + R_a e), \\ a_3 &= -U \lambda_{\mathfrak{R}} d_+ & , & \quad a_4 = U \omega e, \\ a_5 &= -I(R_a d_- + 2L_a \omega^2 \lambda_{\mathfrak{R}}) & , & \quad a_6 = I\omega(L_a d_- - 2R_a \lambda_{\mathfrak{R}}), \\ a_7 &= U d_- & , & \quad a_8 = 2U \lambda_{\mathfrak{R}} \omega. \end{aligned} \quad (4.106)$$

4.7. Propriétés de l'observateur pour la solution particulière dans le cas non bruité

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
2e\lambda_{\Re} \det C_c &= v_i^T v_i (a_2 a_5 - a_1 a_6) + v_u^T v_u (a_4 a_7 - a_3 a_8) \\
&+ v_i^T v_u (a_2 a_7 + a_4 a_5 - a_3 a_6 - a_1 a_8) \\
&+ v_i^T \mathcal{J}^T v_u (a_1 a_7 + a_2 a_8 - a_4 a_6 - a_3 a_5) \\
&= (a_2 a_5 - a_1 a_6 + a_4 a_7 - a_3 a_8) + \mathfrak{c}(a_2 a_7 + a_4 a_5 - a_3 a_6 - a_1 a_8) \\
&+ \mathfrak{s}(a_1 a_7 + a_2 a_8 - a_4 a_6 - a_3 a_5) ,
\end{aligned} \tag{4.107}$$

soit après quelques simplifications :

$$2e\lambda_{\Re} \det C_c = (ed_- + 2\lambda_{\Re}^2 d_+) \omega [I^2 (R_a^2 + L_a^2 \omega^2) + U^2 - 2UI R_a \mathfrak{c} - 2UI \omega L_a \mathfrak{s}] , \tag{4.108}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\det C_c &= \left(\frac{d_-}{2\lambda_{\Re}} + \frac{\lambda_{\Re} d_+}{e} \right) \omega [(U\mathfrak{c} - R_a I)^2 + (U\mathfrak{s} - \omega L_a i)^2] , \\
\det C_c &= \frac{D\omega E}{2\lambda_{\Re} e} .
\end{aligned} \tag{4.109}$$

E est strictement positif et D se met sous la forme $D = (\lambda_{\Im}^2 - \omega^2)^2 + 2\omega^2 \lambda_{\Re}^2 + \lambda_{\Re}^4 + 2\lambda_{\Im}^2 \lambda_{\Re}^2$. Nous savons déjà depuis le paragraphe 4.6 qu'une condition nécessaire de convergence de l'observateur est d'avoir $\lambda_{\Re} > 0$. Dans ce cas, D est du coup strictement positif et les conditions de convergence de l'observateur sont alors d'avoir ω non nul, $\lambda_{\Re} > 0$ et $\lambda_{\Im} \neq 0$. Pour la solution particulière, nous retrouvons la condition d'observabilité différentielle d'ordre 3 ($\omega \neq 0$) et nous vérifions que l'utilisation d'un unique pôle complexe à partie réelle strictement positive et à partie imaginaire non nulle est suffisante. En inversant la matrice C_c , on a alors :

$$C_c^{-1} = \frac{2\lambda_{\Re} e}{D\omega E} \begin{pmatrix} c_{c4} & -c_{c2} \\ -c_{c3} & c_{c1} \end{pmatrix} , \tag{4.110}$$

soit :

$$\hat{\Phi}_0 = C_c^{-1} \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix} = \frac{2\lambda_{\Re} e}{D\omega} \begin{pmatrix} c_{c4} - c_{c2} \\ c_{c1} - c_{c3} \end{pmatrix} , \tag{4.111}$$

soit après quelques calculs :

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_0 &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -R_a I v_{i2} - \omega L_a I v_{i1} + U v_{u2} \\ R_a I v_{i1} - \omega L_a I v_{i2} - U v_{u1} \end{pmatrix}, \\ \widehat{\Phi}_0 &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.112}$$

Pour la solution particulière, l'estimation $\widehat{\Phi}_0$ de Φ dans le cas non bruité ne dépend donc pas, dans le cas à pôle(s) complexe(s) comme dans le cas à pôles réels, du choix des pôles.

4.8 Sensibilité de l'observateur de Luenberger à une mauvaise connaissance des résistance et inductance (et des amplitudes des courants et tensions)

4.8.1 Sensibilité à une mauvaise connaissance de la résistance et de l'inductance

Comme nous l'avons vu, des valeurs approchées R_a et L_a de la résistance R et de l'inductance L alimentent l'observateur de Luenberger. Des valeurs de R_a et L_a aussi proches que possibles de R et L sont donc nécessaires. Cependant, la résistance varie légèrement avec la température et l'inductance unique L utilisée dans le modèle diffère de la réalité si la machine n'est pas à pôles tout à fait lisses mais légèrement saillants ($L_d \neq L_q$). De plus, l'inductance peut être impactée par une éventuelle saturation. Afin de déterminer dans quelles proportions de mauvaises approximations R_a et L_a de R et L peuvent être problématiques, nous étudions dans ce paragraphe l'impact d'une mauvaise connaissance de la résistance et de l'inductance sur l'estimation du flux et de la position. Pouvant, par une démarche similaire, étudier la sensibilité de l'observation aux amplitudes des courants et tensions, nous nous y intéresserons également en fin de paragraphe. Cette étude est menée pour la solution particulière et dans le cas idéal.

D'après (4.66) et (4.112), puis (4.67) et (4.68), les flux et position estimés sont donnés par :

$$\begin{aligned}\widehat{\phi} &= \frac{\sqrt{E}}{\omega}, \\ \widehat{\theta} &= -\arctan \frac{A}{B}.\end{aligned}\tag{4.113}$$

Or, en faisant intervenir la rotation $\mathcal{R}(\omega t)$ (1.2), et d'après les expressions de A et B données par (4.43), on a :

$$\mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_a I \\ \omega L_a I \end{pmatrix}, \quad (4.114)$$

tandis que, d'après (2.20), la vraie dynamique, dans le cas $L_d \neq L_q$, est donnée par :

$$U \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -L_q \sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & L_d \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R I \\ \omega I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \omega \end{pmatrix}. \quad (4.115)$$

On introduit les notations α_r et β_r , et on en déduit :

$$\begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R - R_a) I \cos \varphi_i - (L_q - L_a) I \omega \sin \varphi_i \\ (R - R_a) I \sin \varphi_i + (L_d - L_a) I \omega \cos \varphi_i + \phi \omega \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

L'estimation $\hat{\phi}$ de ϕ est alors donnée par :

$$\hat{\phi}(R_a, L_a, R, L_d, L_q) = \frac{\sqrt{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\omega} \left| \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} \right|, \quad (4.117)$$

avec α_r et β_r donnés par (4.116).

Concernant l'estimation $\hat{\theta}$ de θ , on a $\hat{\theta} = -\arctan(A/B)$, donc il existe un réel ρ tel que :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -\sin \hat{\theta} \\ \cos \hat{\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \sin(\omega t - \hat{\theta}) \\ \cos(\omega t - \hat{\theta}) \end{pmatrix}, \quad (4.119)$$

et donc :

$$\hat{\theta}(R_a, L_a, R, L_d, L_q) = \omega t - \arctan \frac{\alpha_r}{\beta_r}, \quad (4.120)$$

avec α_r et β_r donnés par (4.116). Pour simplifier, pour ce qui suit nous considérons le cas $L_d = L_q = L$.

Des équations (4.117) et (4.120), on déduit aisément la sensibilité des estimations à la résistance et à l'inductance, autour des vraies valeurs de celles-ci. En effet, avec

$X_a = (X_{a_1}, X_{a_2}) = (R_a, L_a)$ et $X = (R, L)$, on a pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} &= \frac{1}{2\omega\sqrt{E}} \frac{\partial E}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} \\ &= \frac{1}{\omega\sqrt{E}} \left(\alpha_{r_0} \frac{\partial \alpha_r}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} + \beta_{r_0} \frac{\partial \beta_r}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} \right), \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} = \frac{\phi}{\sqrt{E}} \frac{\partial \beta_r}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X},$$

et :

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} = - \frac{\beta_{r_0} \frac{\partial \alpha_r}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} - \alpha_{r_0} \frac{\partial \beta_r}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X}}{\beta_{r_0}^2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{r_0}^2}{\beta_{r_0}^2}}, \quad (4.122)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X} = - \frac{\phi\omega}{E} \frac{\partial \alpha_r}{\partial X_{a_i}} \Big|_{X_a=X},$$

avec $\alpha_{r_0} = \alpha_r(X_a = X) = 0$ et $\beta_{r_0} = \beta_r(X_a = X) = \phi\omega$. Les différentes sensibilités sont alors regroupées dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Sensibilités des flux et position estimés aux résistance et inductance

$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial L_a} \Big _{X_a=X} = - \frac{I\omega\phi \cos \varphi_i}{\sqrt{E}}$	$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial L_a} \Big _{X_a=X} = \frac{I\omega^2\phi \sin \varphi_i}{E}$
$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial R_a} \Big _{X_a=X} = - \frac{I\phi \sin \varphi_i}{\sqrt{E}}$	$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial R_a} \Big _{X_a=X} = \frac{I\omega\phi \cos \varphi_i}{E}$

En guise d'illustration, le tableau 4.2 présente une application numérique en deux points de fonctionnement. Celle-ci est réalisée en utilisant pour valeurs des paramètres celles du tableau 8.1, ainsi que $i_d = -2A$, et en calculant les amplitudes I , U et la phase φ_i à l'aide respectivement de (2.23), (2.24) et (2.26). Sont ainsi calculées l'erreur relative d'estimation du flux $\Delta\hat{\phi}/\phi$ et l'erreur d'estimation de la position $\Delta\hat{\theta}$, pour des erreurs respectives de 1% sur la connaissance de l'inductance et sur celle de la résistance autour des vraies valeurs de celles-ci. Les deux points de fonctionnements choisis sont un point "moyen" (pour le moteur du banc SMILE 1.0), à 2000 tr/min et 1Nm et, comme nous allons voir que globalement les sensibilités augmentent avec le couple et

4.8. Sensibilité de l'observateur de Luenberger à une mauvaise connaissance des résistance et inductance (et des amplitudes des courants et tensions)

diminuent avec le régime, un point plus susceptible de présenter des sensibilités élevées à 500 tr/min et 3Nm.

TABLE 4.2 – AN - Erreurs d'estimation pour des erreurs de 1% sur R et L

		$\Delta\hat{\phi}/\phi$	$\Delta\hat{\theta}$
$L_a = L + 1\%L$	2000 tr/min - 1Nm	0.017%	0.018 deg
	500 tr/min - 3Nm	0.017%	0.054 deg
$R_a = R + 1\%R$	2000 tr/min - 1Nm	0.016%	0.005 deg
	500 tr/min - 3Nm	0.19%	0.020 deg

Premièrement, on constate que, quel que soit le point de fonctionnement, les erreurs d'estimation sont relativement faibles, la pire situation se présentant au point de fonctionnement "extrême" pour une erreur sur l'estimation du flux provoquée par une mauvaise connaissance de la résistance. Par ailleurs, excepté pour l'erreur d'estimation du flux due à une mauvaise connaissance de l'inductance qui semble indépendante du régime et du couple, les erreurs sont, comme annoncé, plus grandes à couple élevé et régime faible.

Afin de préciser ces premières impressions, regardons dans un premier temps comment varient ces erreurs d'estimation avec le régime et le couple. A cette fin, intéressons-nous aux figures 4.1 et 4.2. La figure 4.1 tout d'abord présente les erreurs d'estimation du flux (4.1(a) et 4.1(b)) et de la position (4.1(c) et 4.1(d)) pour des erreurs de 1% sur la résistance et sur l'inductance, autour des vraies valeurs de celles-ci, en fonction du régime (4.1(a) et 4.1(c)) et du couple (4.1(b) et 4.1(d)). Le couple et le régime sont alors respectivement fixés à 1Nm et 4000 tr/min. D'une part, on remarque que certaines erreurs d'estimation sont indépendantes du couple et/ou du régime. Ainsi, on vérifie que l'erreur d'estimation du flux due à une mauvaise connaissance de l'inductance ne dépend pas du point de fonctionnement. De plus, l'erreur d'estimation de la position provoquée par une erreur sur l'inductance est indépendante du régime et celle provoquée par une mauvaise connaissance de la résistance l'est du couple. D'autre part, on constate que l'erreur d'estimation du flux du fait d'une erreur sur la connaissance de la résistance diminue avec le régime et augmente avec le couple. Enfin, une erreur sur la résistance entraîne une erreur de position décroissante avec le régime et une erreur sur l'inductance une erreur de position croissante avec le couple. En résumé, soit les erreurs d'estimation sont indépendantes du régime, et/ou du couple, soit elles diminuent avec le régime et augmentent avec le couple. Concernant l'augmentation des erreurs avec le couple, celles-ci restent faibles même pour des couples élevés. A l'inverse, il faut être

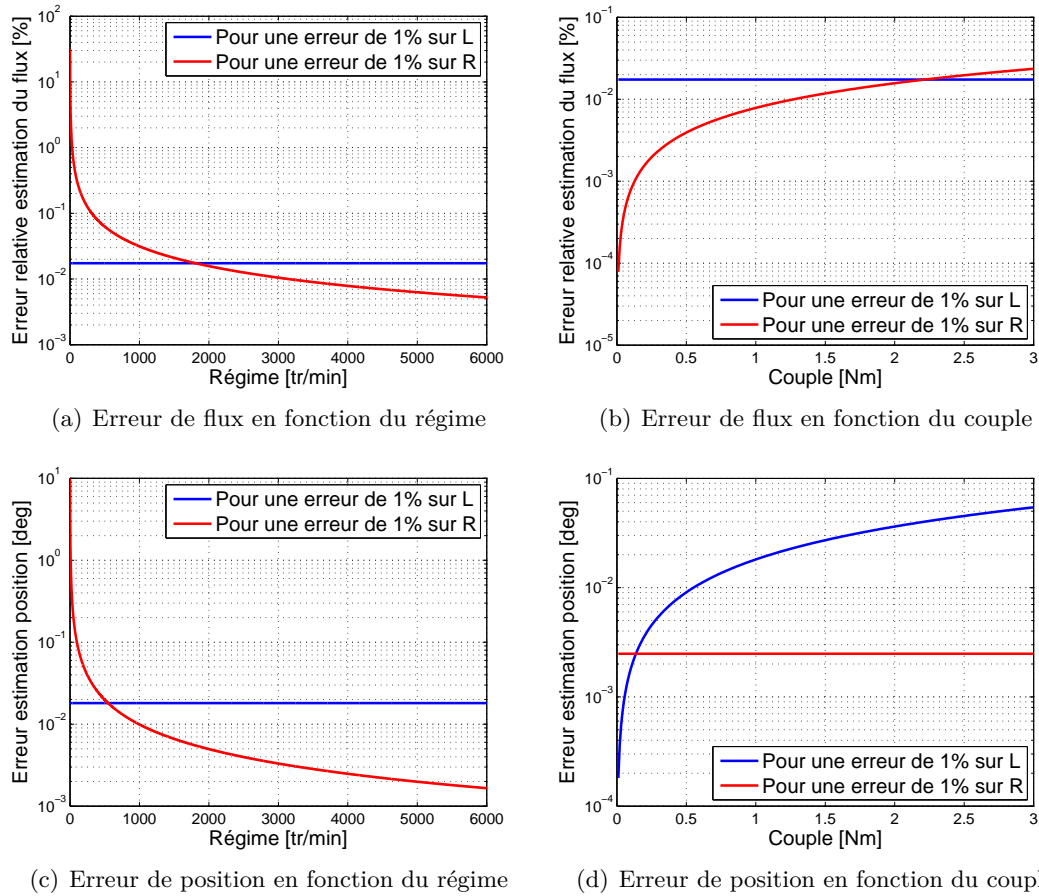


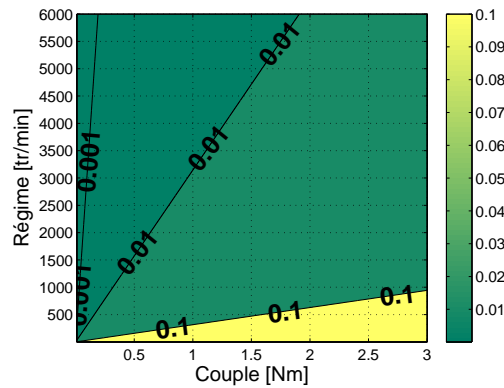
FIGURE 4.1 – Erreurs d'estimation pour des erreurs de 1% sur résistance et inductance

prudent à très bas régime puisque, dans les cas concernés, l'erreur tend asymptotiquement vers l'infini quand le régime tend vers zéro.

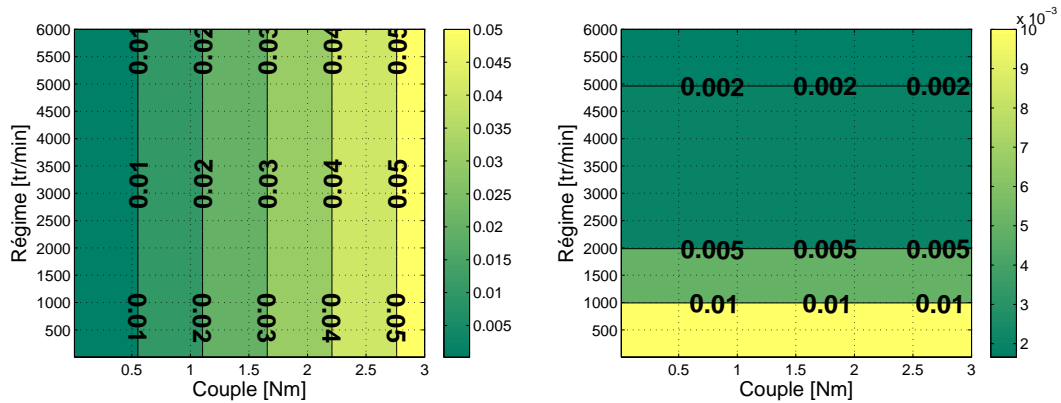
Pour avoir une autre vision de tout ceci, la figure 4.2 présente en fonction simultanément du régime et du couple, i.e. pour tous les points de fonctionnement, les erreurs d'estimation du flux (4.2(a)) et de la position (4.2(b) et 4.2(c)) pour de mauvaises connaissances de la résistance (4.2(a) et 4.2(c)) et de l'inductance (4.2(b)). L'erreur de flux provoquée par une erreur sur la valeur de l'inductance n'est pas présentée puisqu'indépendante du couple et du régime.

Enfin, intéressons-nous aux impacts combinés de mauvaises connaissances de la résistance et de l'inductance. La figure 4.3 s'y emploie, présentant les erreurs d'estimation du flux (4.3(a) et 4.3(c)) et de la position (4.3(b) et 4.3(d)), aux deux points de fonctionnement déjà utilisés pour l'application numérique du tableau 4.2, en fonction des erreurs sur l'inductance en abscisse et sur la résistance en ordonnée. Sans surprise, on y retrouve les ordres de grandeurs précédemment constatés. S'y ajoute cependant ceci

4.8. Sensibilité de l'observateur de Luenberger à une mauvaise connaissance des résistance et inductance (et des amplitudes des courants et tensions)



(a) Erreur de flux (%) pour 1% d'erreur sur R



(b) Erreur de position ($^{\circ}$) pour 1% d'erreur sur L (c) Erreur de position ($^{\circ}$) pour 1% d'erreur sur R

FIGURE 4.2 – Erreurs d'estimation en fonction du régime et du couple

de nouveau que les impacts des erreurs sur la résistance et sur l'inductance peuvent se compenser si l'on a de la chance. Par exemple, une erreur de +20% sur la résistance ($R_a = R + 20\%R$) combinée à une surestimation d'environ 18% de la valeur de l'inductance ($L_a = L + 18\%L$) conduira à une erreur d'estimation du flux nulle à 2000 tr/min et 1Nm. Sans forcément en arriver à ce cas extrême, une erreur d'estimation due à une erreur sur la résistance et à une erreur sur l'inductance est inférieure à la somme des erreurs d'estimation provoquées séparément par chacune des deux erreurs (ou égale dans des cas très particuliers).

Quoi qu'il en soit, les erreurs d'estimation du flux et de la position dues à de mauvaises connaissances de la résistance et de l'inductance sont faibles - un peu moins à fort couple et faible régime -, d'autant qu'il est peu probable de commettre des erreurs très importantes sur la connaissance de ces résistance et inductance. L'observateur de Luenberger peut donc être considéré comme robuste à de mauvaises connaissances de

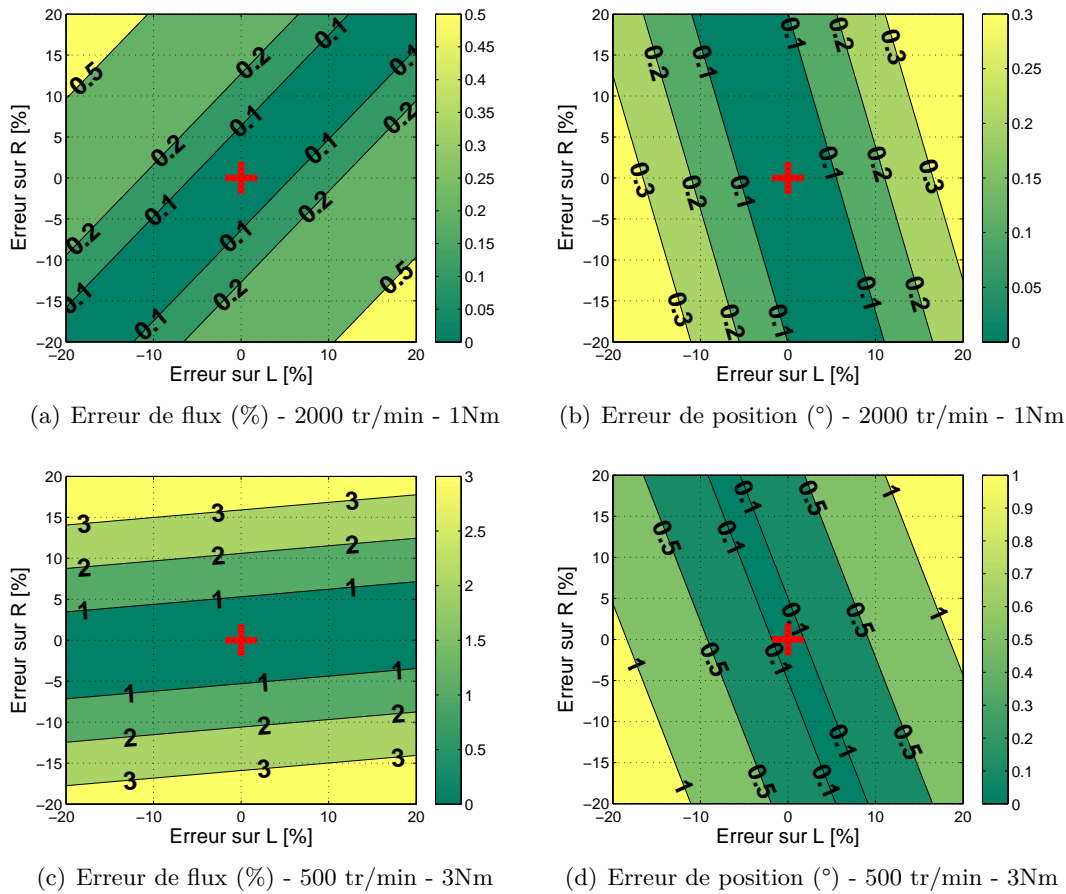


FIGURE 4.3 – Erreurs d’estimation en fonction des erreurs sur résistance et inductance

la résistance et de l’inductance, tant que l’on reste dans le domaine du raisonnable. Du coup, une connaissance approchée de ces deux paramètres est suffisante pour alimenter l’observateur.

4.8.2 Sensibilité à une mauvaise connaissance des amplitudes des courants et tensions

Profitant du travail effectué pour étudier la robustesse de l’observateur de Luenberger à de mauvaises connaissances des paramètres, nous étudions dans cette partie la sensibilité des estimations à une mauvaise connaissance des amplitudes I et U des signaux de courant et tension. En première approximation, ceci peut en effet être vu comme l’impact de bruits de mesure constants sur les courants et tensions. De tels bruits de mesure ne sont évidemment pas réalistes et nous étudierons bien plus en détails les effets du bruit de mesure au chapitre 6, mais ceci permet toutefois de donner

4.8. Sensibilité de l'observateur de Luenberger à une mauvaise connaissance des
résistance et inductance (et des amplitudes des courants et tensions)

une première tendance.

Pour ce faire, nous notons U_a et I_a les valeurs mal connues des amplitudes réelles U et I , et nous supposons que R et L sont parfaitement connues : $R_a = R$ et $L_a = L$. Supposons dans un premier temps que $U_a \neq U$ mais $I_a = I$. On a alors :

$$\mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A_U \\ B_U \end{pmatrix} = U_a \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RI \\ \omega LI \end{pmatrix}, \quad (4.123)$$

avec A_U et B_U obtenus en remplaçant U par U_a dans les expressions de A et B . En substituant la vraie dynamique (4.115) dans cette équation, et en introduisant les notations α'_r et β'_r , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \alpha'_r \\ \beta'_r \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A_U \\ B_U \end{pmatrix} = (U_a - U) \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi\omega \end{pmatrix}. \quad (4.124)$$

Si on suppose désormais $U_a = U$ mais $I_a \neq I$, on a :

$$\mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A_I \\ B_I \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RI_a \\ \omega LI_a \end{pmatrix}, \quad (4.125)$$

avec A_I et B_I obtenus en remplaçant I par I_a dans les expressions de A et B . En y substituant la vraie dynamique (4.115), et en introduisant les notations α''_r et β''_r , on a alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha''_r \\ \beta''_r \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\omega t) \begin{pmatrix} A_I \\ B_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \omega L \end{pmatrix} (I - I_a) + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi\omega \end{pmatrix}. \quad (4.126)$$

En procédant comme pour les sensibilités aux résistance et inductance, les sensibilités des estimations du flux et de la position aux amplitudes des courants et tensions autour des vraies valeurs de celles-ci sont regroupées dans le tableau 4.3 et l'application numérique, aux deux mêmes points de fonctionnement que dans le cas précédent, figure dans le tableau 4.4.

Là encore, les erreurs d'estimation augmentent avec le couple et diminuent avec le régime. Mais ce qui nous intéresse ici essentiellement est la différence entre les impacts respectifs sur l'estimation du flux d'une erreur sur l'amplitude des tensions et d'un erreur sur celle des courants. L'impact sur l'estimation du flux est en effet beaucoup plus grand venant d'une erreur sur l'amplitude des tensions que d'une erreur sur l'amplitude des courants. En revanche, les impacts sont égaux concernant l'estimation de la position, ce qui n'a rien d'étonnant à la vue des expressions des sensibilités.

TABLE 4.3 – Sensibilités des flux et position estimés aux amplitudes des signaux

$\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial U_a} \right _{U_a=U} = \frac{\phi \sin \varphi_u}{\sqrt{E}}$	$\left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial U_a} \right _{U_a=U} = -\frac{\phi \omega \cos \varphi_u}{E}$
$\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial I_a} \right _{I_a=I} = -\phi \frac{R \sin \varphi_i + \omega L \cos \varphi_i}{\sqrt{E}}$	$\left. \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial I_a} \right _{I_a=I} = \phi \omega \frac{R \cos \varphi_i - \omega L \sin \varphi_i}{E}$

TABLE 4.4 – AN - Erreurs d'estimation pour des erreurs de 1% sur U et I

		$\Delta \hat{\phi} / \phi$	$\Delta \hat{\theta}$
$U_a = U + 1\%U$	2000 tr/min - 1Nm	1.0%	0.023 deg
	500 tr/min - 3Nm	1.17%	0.074 deg
$I_a = I + 1\%I$	2000 tr/min - 1Nm	0.0017%	0.023 deg
	500 tr/min - 3Nm	0.17%	0.074 deg

La figure 4.4 présente, en fonction du régime à 1Nm (4.4(a) et 4.4(c)) et du couple à 4000 tr/min (4.4(b) et 4.4(d)), les erreurs d'estimation du flux (4.4(a) et 4.4(b)) et de la position (4.4(c) et 4.4(d)) pour des erreurs de 1% sur les amplitudes U ou I autour des vraies valeurs de celles-ci. D'une part, on vérifie évidemment que les impacts des erreurs sur les deux amplitudes sont identiques sur l'estimation de la position, augmentant avec le couple et diminuant avec le régime. D'autre part, l'impact beaucoup plus important de l'erreur sur l'amplitude des tensions sur l'estimation du flux est confirmé. Cet impact semble d'ailleurs relativement constant avec le régime et le couple.

Enfin, la figure 4.5 présente, sur tous les points de fonctionnement, les erreurs d'estimation du flux (4.5(a) et 4.5(b)) et de la position (4.5(c) et 4.5(d)) pour des erreurs sur U (4.5(a) et 4.5(c)) et sur I (4.5(b) et 4.5(d)). Cette figure permet de confirmer que bas régime et couple élevé ne font pas bon ménage et que l'impact d'une mauvaise connaissance de U domine largement celui d'une mauvaise connaissance de I , et ce quel que soit le point de fonctionnement. Nous reviendrons plus en détails sur ce point dans le chapitre consacré à l'étude du bruit de mesure, validant notamment en simulation la supériorité de l'impact sur l'estimation du bruit de mesure sur les tensions sur celui du bruit de mesure sur les courants. Ceci nous sera utile dans ce même chapitre afin de mener à bien une étude théorique dans laquelle nous serons amenés à négliger le bruit sur les courants.

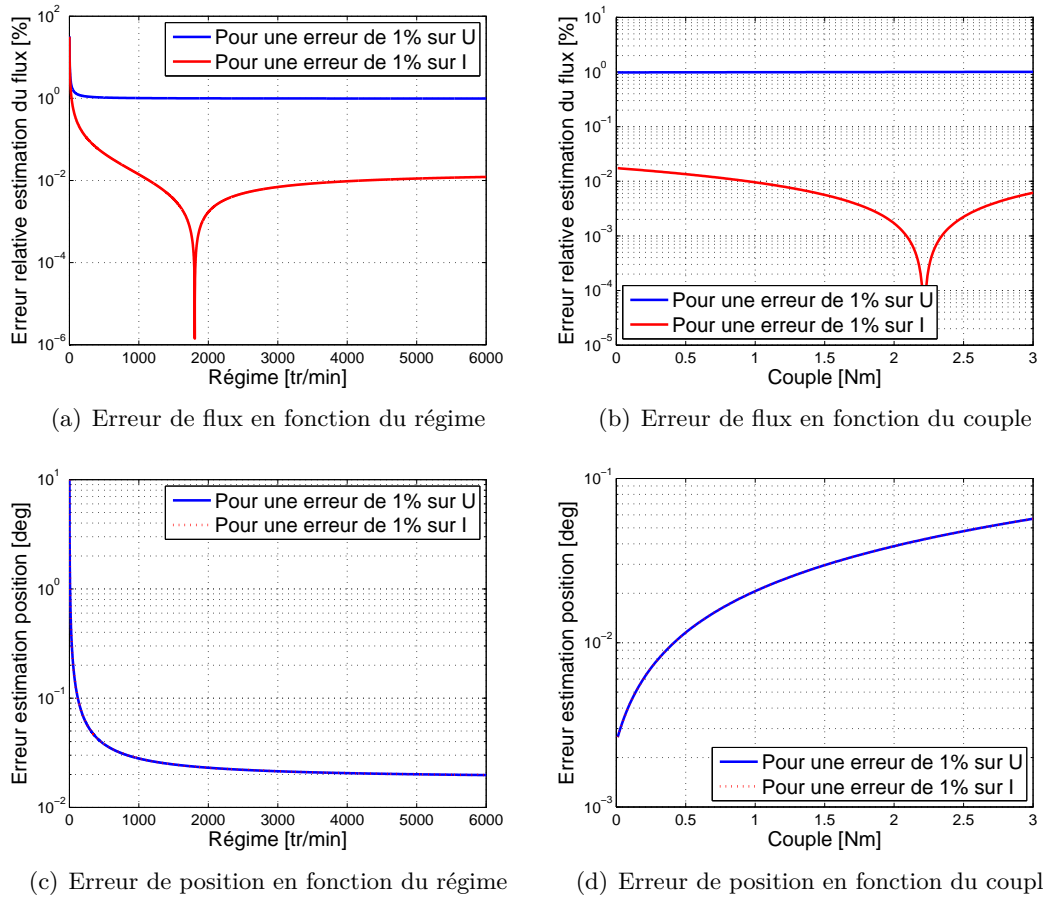
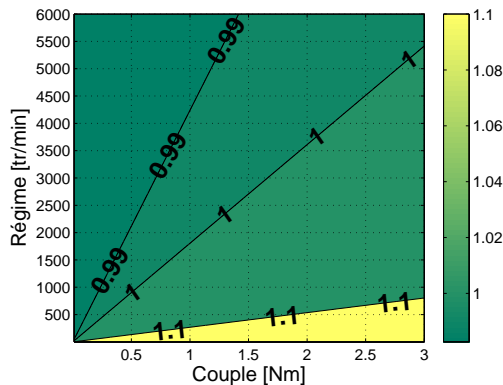


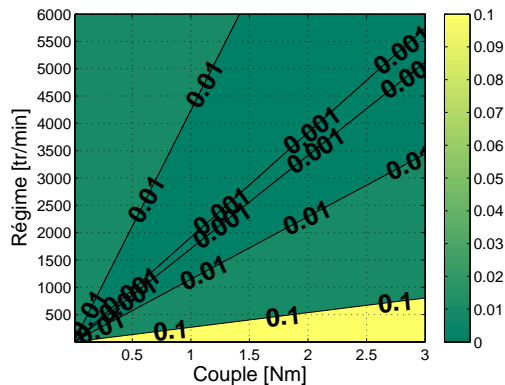
FIGURE 4.4 – Erreurs d'estimation pour 1% d'erreur sur les amplitudes des signaux

4.9 Conclusion

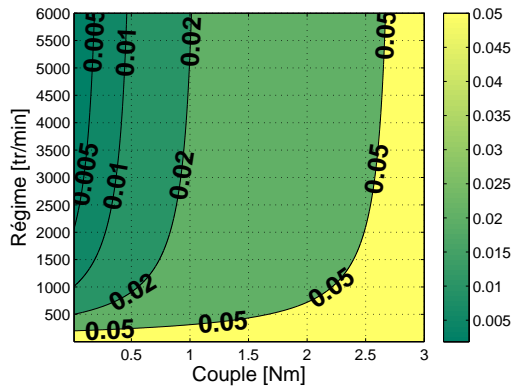
Ce chapitre a permis de poser les bases de l'observateur non linéaire de Luenberger estimant, si la vitesse est non nulle, l'intensité du flux des aimants et la position du rotor à l'aide de la mesure des signaux de courants et tensions et de connaissances approchées de la résistance et de l'inductance. Après avoir appliqué un changement de coordonnées aux équations classiques de la machine, permettant de nous défaire des paramètres mécaniques, nous avons en effet démontré l'observabilité instantanée du flux et de la position à vitesse non nulle quand les signaux électriques, la résistance et l'inductance sont connus. L'étude de sensibilité nous a ensuite permis de constater que nous pouvions nous contenter de valeurs approximatives de ces deux derniers paramètres. Au passage, cette étude de sensibilité nous a également donné une première indication quant à l'impact probablement beaucoup plus grand sur l'observation du bruit de mesure sur les tensions que de celui sur les courants.



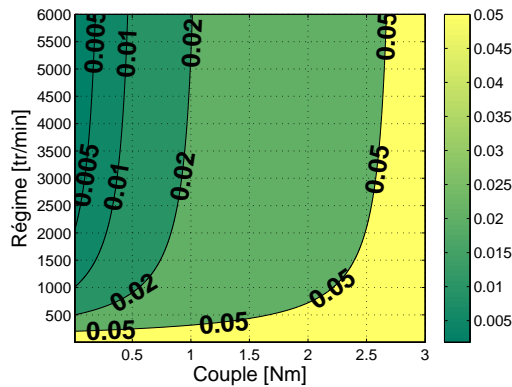
(a) Erreur de flux (%) pour 1% d'erreur sur U



(b) Erreur de flux (%) pour 1% d'erreur sur I



(c) Erreur de position (°) pour 1% d'erreur sur U



(d) Erreur de position (°) pour 1% d'erreur sur I

FIGURE 4.5 – Erreurs d'estimation en fonction du régime et du couple

Par ailleurs, l'étude de la convergence de l'observateur nous a montré que les pôles devaient être à partie réelle positive et que cette convergence nécessitait l'inversibilité d'une matrice. Nous avons étudié le rang de cette matrice pour la solution particulière en résolvant, pour cette solution, les équations de l'observateur de manière exacte. Il en est ressorti que l'estimation converge vers la valeur réelle, à régime non nul (on retrouve ici la condition d'observabilité), en utilisant au minimum deux pôles réels différents strictement positifs ou un pôle complexe à partie réelle strictement positive et à partie imaginaire non nulle.

Notons cependant que cet observateur a pour l'instant été établi dans le cas idéal. Il est désormais temps de l'adapter à la modélisation réaliste, avec des signaux mesurés différant des signaux exacts, avant de nous intéresser à l'impact du bruit de mesure.

Chapitre 5

Observateur non linéaire de Luenberger - Cas réaliste

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié et construit un observateur non linéaire de Luenberger adapté à la modélisation classique du moteur, c'est-à-dire adapté au cas idéal pour lequel les signaux mesurés de courants et tensions sont égaux aux signaux exacts. L'observateur devant être basé sur une modélisation réaliste, ce chapitre présente désormais l'adaptation de cet observateur au modèle réaliste développé au chapitre 2, les signaux de courants et tensions mesurés y différant des signaux exacts. Ainsi, dans un premier temps, le paragraphe 5.1 constate que, si l'adaptation au modèle réaliste ne remet pas en cause l'observabilité, il n'en va pas de même pour la mesurabilité, et propose des solutions pour y remédier au mieux. Ces solutions sont étudiées dans les paragraphes suivants. Ainsi, d'une part, deux méthodes de transformation des équations de l'observateur pour son adaptation à la modélisation réaliste sont proposées au paragraphe 5.2 et analysées au paragraphe 5.3. D'autre part, le paragraphe 5.4 présente une méthode de reconstruction, par déconvolution, des signaux exacts à partir des signaux mesurés. Enfin, ces différentes solutions sont étudiées en simulation au paragraphe 5.5.

Remarque : Dans ce chapitre, nous travaillons toujours dans le cas d'une machine à pôles lisses et dans le repère (α, β) . Nous conservons et élargissons donc les notations $u = u_{\alpha\beta}$, $i = i_{\alpha\beta}$, $y_u = y_{u_{\alpha\beta}}$ et $y_i = y_{i_{\alpha\beta}}$. Par ailleurs, on suppose les paramètres R et L du moteur parfaitement connus : $R_a = R$ et $L_a = L$.

On rappelle que, d'après la paragraphe 2.2, la relation existant entre signaux mesurés et signaux exacts dans la modélisation réaliste, est donnée par :

$$\begin{aligned} y_u &= \frac{1}{1 + \tau_u s} u , & \text{soit :} & & u &= \tau_u \dot{y}_u + y_u , \\ y_i &= \frac{1}{1 + \tau_i s} i , & & & i &= \tau_i \dot{y}_i + y_i , \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec u et i les signaux exacts de tensions et courants, et y_u et y_i les signaux mesurés de ces tensions et courants.

5.1 Observabilité et mesurabilité

D'après le problème d'estimation défini au paragraphe 4.3, on cherche dans le cas idéal à estimer l'état $\chi = \Psi$:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= f(\chi, t, u_c) = u - Ri , \\ y &= h(\chi, t, u_c) = |\Psi - Li|^2 - \phi^2 , \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec u_c la commande constituée des signaux exacts de courants et tensions i et u . Nous avons montré que cet état χ est observable si le régime est non nul et que R , L et la commande u_c sont connues.

En nous plaçant désormais dans le cadre de la modélisation réaliste, u est remplacé par $\tau_u \dot{y}_u + y_u$ et i par $\tau_i \dot{y}_i + y_i$, avec τ_u et τ_i supposés connus et y_u et y_i les mesures de tensions et courants. Comme y_u et y_i sont connus, \dot{y}_u et \dot{y}_i sont, du point de vue théorique de l'observabilité, également supposés connus. u et i sont alors supposés connus et comme la structure de la sortie reste inchangée, l'état χ est toujours observable.

En revanche, si l'observabilité ne pose pas de problème, il n'en va pas de même en pratique avec la mesurabilité, le modèle de notre système n'étant désormais plus parfaitement connu. En effet, les u et i mesurés du cas idéal sont remplacés par les y_u et y_i mesurés du cas réaliste et par leurs dérivées \dot{y}_u et \dot{y}_i . Or, si en théorie on connaît \dot{y}_u et \dot{y}_i car on connaît y_u et y_i , ce qui assure l'observabilité, en pratique on ne connaît que les valeurs temporelles des mesures y_u et y_i et non pas les fonctions du temps $y_u(t)$ et $y_i(t)$. On n'a donc pas accès aux valeurs de \dot{y}_u et \dot{y}_i , dont on a pourtant besoin pour l'implémentation. On n'a plus une représentation d'état usuelle mais un problème d'observateur à entrées inconnues. En effet, en définissant l'état augmenté

$\chi_m = (\Psi, y_u, y_i)$, le problème d'estimation devient :

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_m &= f_m(\chi_m, t, u_c) , \\ y &= h_m(\chi_m, t, u_c) ,\end{aligned}\tag{5.3}$$

avec $\dot{\chi}_m$ décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \tau_u \dot{y}_u + y_u - R(\tau_i \dot{y}_i + y_i) , \\ \dot{y}_u &= \frac{1}{\tau_u}(u - y_u) , \\ \dot{y}_i &= \frac{1}{\tau_i}(i - y_i) .\end{aligned}\tag{5.4}$$

Le problème est donc que u_c , i.e. u et i , ne fait pas partie des entrées. Trois solutions s'offrent alors à nous, pour implémenter l'observateur de Luenberger :

- Approximer u et i par y_u et y_i en tirant parti des faibles valeurs de τ_u et τ_i ,
- Ajouter en entrée des signaux \hat{u} et \hat{i} aussi proches que possible de u et i et leur faire jouer le rôle de u_c ,
- Augmenter l'état χ_m en $\chi_{ma} = (\Psi, y_u, y_i, u_c)$ en définissant un modèle pour la commande u_c .

Aucune de ces trois solutions n'est parfaite, les deux premières impliquant des approximations et la troisième nécessitant d'établir un modèle pour la commande, mais lequel? Afin de réduire les erreurs, on choisit alors d'en combiner deux : la première ou la deuxième avec la troisième. On remarque en effet que les deux premières propositions consistent toutes les deux à faire comme si on connaissait la commande, en considérant soit que c'est y_u et y_i , soit \hat{u} et \hat{i} . Il est donc nécessaire de choisir l'une ou l'autre. Ainsi, à l'aide de changements de variables, on intègre au maximum la dynamique de u_c dans les équations de l'observateur. Comme il est cependant impossible d'intégrer toute cette dynamique, quelques termes résiduels en u_c demeurent. On a alors le choix d'approcher ces termes par les entrées y_u et y_i ou \hat{u} et \hat{i} . Aussi allons-nous maintenant dans un premier temps nous intéresser à la transformation des équations de l'observateur pour limiter au maximum la présence de u_c dans les équations, puis dans un second temps à la manière d'approximer u et i par \hat{u} et \hat{i} par déconvolution.

5.2 Transformation des équations de l'observateur pour la modélisation réaliste

D'après (4.32), les équations de l'observateur de Luenberger, auxquelles l'indice j a été retiré, s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -\lambda z + c^T(u - Ri) - \lambda L^2|i|^2, \\ \dot{c} &= -\lambda c - 2(u - Ri + \lambda Li),\end{aligned}\tag{5.5}$$

soit, en remplaçant u et i par leurs expressions données par (5.1) :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -\lambda z + c^T[\tau_u \dot{y}_u + y_u - R(\tau_i \dot{y}_i + y_i)] - \lambda L^2|\tau_i \dot{y}_i + y_i|^2, \\ \dot{c} &= -\lambda c - 2[\tau_u \dot{y}_u + y_u - (R - \lambda L)(\tau_i \dot{y}_i + y_i)].\end{aligned}\tag{5.6}$$

On remarque que les dérivées des mesures de tensions et courants \dot{y}_u et \dot{y}_i apparaissent à droite du signe égal. Cependant, afin de pouvoir implémenter l'observateur, les dérivées \dot{c} et \dot{z} ne doivent être exprimées qu'en fonction des paramètres connus - la résistance R , l'inductance L , les constantes de temps τ_u et τ_i -, ainsi que des mesures de courants et tensions y_i et y_u , mais pas de leurs dérivées. Ceci ne pose aucun problème dans le cas idéal (cf. (5.5) en considérant que i et u sont les signaux mesurés). En revanche, c'est plus délicat avec la modélisation réaliste. Notons que les changements de variables sont possibles, l'important étant d'exprimer une dérivée en fonction des paramètres connus mais pas de leurs dérivées. S'il reste des dérivées à droite du signe égal qu'il est impossible de faire passer à gauche, il sera nécessaire d'utiliser (5.1) pour les faire disparaître en les remplaçant par u et i , ces termes résiduels en u_c étant alors étudiés au paragraphe 5.3.

A l'aide d'un changement de variable, la transformation de l'équation relative à c ne pose pas de difficulté et on peut faire disparaître complètement les dérivées et u_c du membre de droite. Ainsi :

Proposition 5.1. *La seconde équation de (5.6) est équivalente, en introduisant la variable intermédiaire γ , à :*

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\lambda c + 2(R - \lambda L)y_i - 2y_u, \\ c &= \gamma + 2(R - \lambda L)\tau_i y_i - 2\tau_u y_u.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\lambda c - 2[\tau_u \dot{y}_u + y_u - (R - \lambda L)(\tau_i \dot{y}_i + y_i)] \\ \iff \overbrace{c - 2(R - \lambda L)\tau_i y_i + 2\tau_u y_u} &= -\lambda c - 2y_u + 2(R - \lambda L)y_i. \end{aligned} \quad (5.8)$$

En posant $\gamma = c - 2(R - \lambda L)\tau_i y_i + 2\tau_u y_u$, on obtient le résultat. \square

La transformation de l'équation relative à z est en revanche plus complexe du fait de la présence des termes non linéaires en les dérivées $c^T \dot{y}_u$, $c^T \dot{y}_i$, \dot{y}_i^2 et $y_i \dot{y}_i$, dont on ne connaît directement une primitive que pour le dernier. Il n'est pas possible de faire disparaître toutes les dérivées mais, en rusant un peu, on peut en limiter le nombre. Deux méthodes sont alors proposées et seront comparées plus loin.

5.2.1 Méthode n° 1

Proposition 5.2. *La première équation de (5.6) est équivalente, en introduisant la variable intermédiaire δ_1 , à :*

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= -\lambda z - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\ &\quad - 2\lambda L\tau_u y_u^T y_i + c^T (y_u - Ry_i) - \lambda L i^T (Li - 2\tau_u y_u), \\ z &= \delta_1 + [c + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) - \lambda RL\tau_i^2 |y_i|^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Démonstration.

$$\dot{z} = -\lambda z + c^T [\tau_u \dot{y}_u - R\tau_i \dot{y}_i] - \lambda L^2 |\tau_i \dot{y}_i + y_i|^2 + c^T (y_u - Ry_i). \quad (5.10)$$

Or :

$$\begin{aligned} \overbrace{c^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)} &= c^T (\tau_u \dot{y}_u - R\tau_i \dot{y}_i) + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T \dot{c} \\ &= c^T (\tau_u \dot{y}_u - R\tau_i \dot{y}_i) \\ &\quad + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)(\tau_i \dot{y}_i + y_i) - (\tau_u \dot{y}_u + y_u)]) \\ &= c^T (\tau_u \dot{y}_u - R\tau_i \dot{y}_i) + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\ &\quad + 2(\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T [R\tau_i \dot{y}_i - \tau_u \dot{y}_u] - 2(\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T \lambda L\tau_i \dot{y}_i \\ &= c^T (\tau_u \dot{y}_u - R\tau_i \dot{y}_i) + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\ &\quad - \overbrace{|\tau_u y_u - R\tau_i y_i|^2} - 2\tau_u y_u^T \lambda L\tau_i \dot{y}_i + \overbrace{R\tau_i^2 \lambda L |y_i|^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 c^T(\tau_u \dot{y}_u - R\tau_i \dot{y}_i) &= \overline{[c + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) - \lambda RL\tau_i^2 |y_i|^2} \\
 &\quad - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\
 &\quad + 2\tau_u y_u^T \lambda L\tau_i \dot{y}_i ,
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= -\lambda z + \overline{[c + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) - \lambda RL\tau_i^2 |y_i|^2} \\
 &\quad - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\
 &\quad + 2\tau_u y_u^T \lambda L\tau_i \dot{y}_i - \lambda L^2 |\tau_i \dot{y}_i + y_i|^2 + c^T (y_u - Ry_i) .
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= -\lambda z + \overline{[c + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) - \lambda RL\tau_i^2 |y_i|^2} \\
 &\quad - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\
 &\quad + 2\tau_u y_u^T \lambda L(i - y_i) - \lambda L^2 |i|^2 + c^T (y_u - Ry_i) ,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 &\overline{z - [c + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) + \lambda RL\tau_i^2 |y_i|^2} \\
 &= -\lambda z - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) \\
 &\quad - 2\lambda L\tau_u y_u^T y_i + c^T (y_u - Ry_i) - \lambda Li^T (Li - 2\tau_u y_u) .
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

En posant :

$$\delta_1 = z - [c + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) + \lambda RL\tau_i^2 |y_i|^2 , \tag{5.16}$$

on obtient le résultat.

□

Remarque : Comme il restait certaines dérivées que l'on ne pouvait pas "primitiver", on a été contraint de faire réapparaître i dans certains termes que l'on approchera par y_i ou \hat{i} en pratique, mais ce sont là des approximations acceptables comme nous le verrons plus loin.

5.2.2 Méthode n° 2

Proposition 5.3. Dans le cas λ réel¹, la première équation de (5.6) est équivalente, en introduisant la variable intermédiaire δ_2 , à :

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_2 &= -\lambda z - \lambda \frac{|c|^2}{2} - \lambda L \left[-\tau_i y_i^T (-\lambda c + 2(R - \lambda L)y_i) + c^T y_i \right] - \lambda L \left(L|i|^2 + 2\tau_i y_i^T u \right), \\ z &= \delta_2 - \frac{|c|^2}{4} - \lambda L \tau_i \left(c^T y_i - (R - \lambda L)\tau_i |y_i|^2 \right).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Démonstration. La preuve est écrite pour le cas réel. Pour le cas complexe, il suffit de remplacer $|c|^2$ par $|\operatorname{Re}(c)|^2 + 2i\operatorname{Re}(c)^T \operatorname{Im}(c) - |\operatorname{Im}(c)|^2$. On part de :

$$\dot{z} = -\lambda z + c^T(u - Ri) - \lambda L^2|i|^2.\tag{5.18}$$

Or :

$$\begin{aligned}c^T \dot{c} &= \frac{\dot{|c|^2}}{2} = c^T[-\lambda c - 2(u - Ri + \lambda Li)] \\ &= -\lambda|c|^2 - 2c^T \lambda Li - 2c^T(u - Ri).\end{aligned}\tag{5.19}$$

Donc :

$$c^T(u - Ri) = -\frac{\dot{|c|^2}}{4} - \lambda c^T \left(\frac{c}{2} + Li \right).\tag{5.20}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}c^T \dot{y}_i &= \overbrace{c^T y_i}^{\dot{\quad}} - y_i^T \dot{c} \\ &= \overbrace{c^T y_i}^{\dot{\quad}} - y_i^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)(\tau_i \dot{y}_i + y_i) - (\tau_u \dot{y}_u + y_u)]) \\ &= \overbrace{c^T y_i}^{\dot{\quad}} - y_i^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) - (R - \lambda L)\tau_i \overbrace{|y_i|^2}^{\dot{\quad}} + 2\tau_u y_i^T \dot{y}_u,\end{aligned}\tag{5.21}$$

soit :

$$\begin{aligned}c^T i &= \tau_i c^T \dot{y}_i + c^T y_i \\ &= \tau_i \left(\overbrace{c^T y_i}^{\dot{\quad}} - (R - \lambda L)\tau_i |y_i|^2 \right) \\ &\quad - \tau_i y_i^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) + 2\tau_i \tau_u y_i^T \dot{y}_u + c^T y_i.\end{aligned}\tag{5.22}$$

1. Dans le cas λ complexe, remplacer $|c|^2$ par $|\operatorname{Re}(c)|^2 + 2i\operatorname{Re}(c)^T \operatorname{Im}(c) - |\operatorname{Im}(c)|^2$.

Finalement, en regroupant :

$$\begin{aligned} \dot{z} = & -\lambda z - \frac{\dot{|c|^2}}{4} - \lambda \frac{|c|^2}{2} - \lambda L^2 |i|^2 - \lambda L \left[\tau_i \left(\overline{c^T y_i - (R - \lambda L) \tau_i |y_i|^2} \right) \right. \\ & \left. - \tau_i y_i^T (-\lambda c + 2[(R - \lambda L)y_i - y_u]) + 2\tau_i \tau_u y_i^T \dot{y}_u + c^T y_i \right] . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Puis, en faisant réapparaître un u , ne pouvant "primitiver" le terme en $y_i^T \dot{y}_u$:

$$\begin{aligned} \dot{z} = & -\lambda z - \frac{\dot{|c|^2}}{4} - \lambda \frac{|c|^2}{2} - \lambda L^2 |i|^2 - \lambda L \left[\tau_i \left(\overline{c^T y_i - (R - \lambda L) \tau_i |y_i|^2} \right) \right. \\ & \left. - \tau_i y_i^T (-\lambda c + 2(R - \lambda L)y_i) + 2\tau_i y_i^T u + c^T y_i \right] , \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & -\lambda z - \left[\frac{\dot{|c|^2}}{4} + \lambda L \tau_i \left(\overline{c^T y_i - (R - \lambda L) \tau_i |y_i|^2} \right) \right] - \lambda \frac{|c|^2}{2} \\ & - \lambda L \left[-\tau_i y_i^T (-\lambda c + 2(R - \lambda L)y_i) + c^T y_i \right] - \lambda L \left(L|i|^2 + 2\tau_i y_i^T u \right) . \end{aligned}$$

En posant :

$$\delta_2 = z + \frac{|c|^2}{4} + \lambda L \tau_i \left(\overline{c^T y_i - (R - \lambda L) \tau_i |y_i|^2} \right) , \quad (5.25)$$

on obtient le résultat. □

5.2.3 Méthodes n° 1 et n° 2 : Implémentation dans le cas complexe

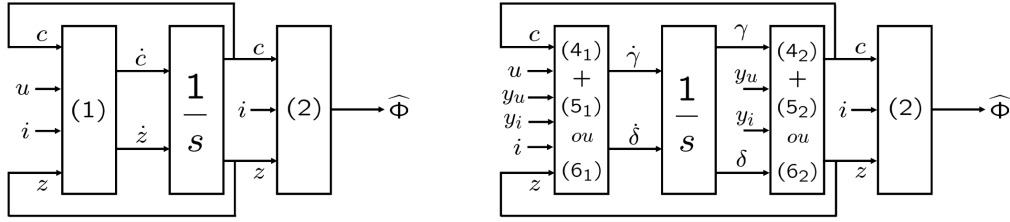
Pour implémenter les méthodes n° 1 et n° 2 dans le cas complexe, il est nécessaire de séparer parties réelles et imaginaires. En posant $\lambda = \lambda_{\Re} + \Im \lambda_{\Im}$, $c = c_{\Re} + \Im c_{\Im}$, $z = z_{\Re} + \Im z_{\Im}$, $\gamma = \gamma_{\Re} + \Im \gamma_{\Im}$, $\delta_1 = \delta_{1\Re} + \Im \delta_{1\Im}$ et $\delta_2 = \delta_{2\Re} + \Im \delta_{2\Im}$, l'implémentation des équations de l'observateur est alors réalisée à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{\Re} &= -\lambda_{\Re}c_{\Re} + \lambda_{\Im}c_{\Im} + 2(R - \lambda_{\Re}L)y_i - 2y_u , \\
 \dot{\gamma}_{\Im} &= -\lambda_{\Re}c_{\Im} - \lambda_{\Im}c_{\Re} - 2\lambda_{\Im}Ly_i , \\
 c_{\Re} &= \gamma_{\Re} + 2(R - \lambda_{\Re}L)\tau_i y_i - 2\tau_u y_u , \\
 c_{\Im} &= \gamma_{\Im} - 2\lambda_{\Im}L\tau_i y_i . \\
 \\
 \dot{\delta}_{1_{\Re}} &= -\lambda_{\Re}z_{\Re} + \lambda_{\Im}z_{\Im} - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda_{\Re}c_{\Re} + \lambda_{\Im}c_{\Im} + 2[(R - \lambda_{\Re}L)y_i - y_u]) \\
 &\quad - 2\lambda_{\Re}L\tau_u y_u^T y_i + c_{\Re}^T(y_u - Ry_i) - \lambda_{\Re}Li^T(Li - 2\tau_u y_u) , \\
 \dot{\delta}_{1_{\Im}} &= -\lambda_{\Re}z_{\Im} - \lambda_{\Im}z_{\Re} - (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)^T (-\lambda_{\Re}c_{\Im} - \lambda_{\Im}c_{\Re} - 2\lambda_{\Im}Ly_i) \\
 &\quad - 2\lambda_{\Im}L\tau_u y_u^T y_i + c_{\Im}^T(y_u - Ry_i) - \lambda_{\Im}Li^T(Li - 2\tau_u y_u) , \\
 z_{\Re} &= \delta_{1_{\Re}} + [c_{\Re} + (\tau_u y_u - R\tau_i y_i)]^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) - \lambda_{\Re}RL\tau_i^2 |y_i|^2 , \\
 z_{\Im} &= \delta_{1_{\Im}} + c_{\Im}^T (\tau_u y_u - R\tau_i y_i) - \lambda_{\Im}RL\tau_i^2 |y_i|^2 . \\
 \\
 \dot{\delta}_{2_{\Re}} &= -\lambda_{\Re}z_{\Re} + \lambda_{\Im}z_{\Im} - \lambda_{\Re} \frac{|c_{\Re}|^2 - |c_{\Im}|^2}{2} + \lambda_{\Im}c_{\Re}^T c_{\Im} - \lambda_{\Re}L \left(L|i|^2 + 2\tau_i y_i^T u \right) \\
 &\quad - \lambda_{\Re}L \left[-\tau_i y_i^T (-\lambda_{\Re}c_{\Re} + \lambda_{\Im}c_{\Im} + 2(R - \lambda_{\Re}L)y_i) + c_{\Re}^T y_i \right] \\
 &\quad + \lambda_{\Im}L \left[-\tau_i y_i^T (-\lambda_{\Re}c_{\Im} - \lambda_{\Im}c_{\Re} + 2(R - \lambda_{\Im}L)y_i) + c_{\Im}^T y_i \right] , \\
 \dot{\delta}_{2_{\Im}} &= -\lambda_{\Re}z_{\Im} - \lambda_{\Im}z_{\Re} - \lambda_{\Im} \frac{|c_{\Re}|^2 - |c_{\Im}|^2}{2} - \lambda_{\Re}c_{\Im}^T c_{\Re} - \lambda_{\Im}L \left(L|i|^2 + 2\tau_i y_i^T u \right) \\
 &\quad - \lambda_{\Im}L \left[-\tau_i y_i^T (-\lambda_{\Re}c_{\Re} + \lambda_{\Im}c_{\Im} + 2(R - \lambda_{\Re}L)y_i) + c_{\Re}^T y_i \right] \\
 &\quad - \lambda_{\Re}L \left[-\tau_i y_i^T (-\lambda_{\Re}c_{\Im} - \lambda_{\Im}c_{\Re} + 2(R - \lambda_{\Im}L)y_i) + c_{\Im}^T y_i \right] , \\
 z_{\Re} &= \delta_{2_{\Re}} - \frac{|c_{\Re}|^2 - |c_{\Im}|^2}{4} - \lambda_{\Re}L\tau_i \left(c_{\Re}^T y_i - (R - \lambda_{\Re}L)\tau_i |y_i|^2 \right) \\
 &\quad + \lambda_{\Im}L\tau_i \left(c_{\Im}^T y_i - (R - \lambda_{\Im}L)\tau_i |y_i|^2 \right) , \\
 z_{\Im} &= \delta_{2_{\Im}} - \frac{c_{\Re}^T c_{\Im}}{2} - \lambda_{\Im}L\tau_i \left(c_{\Re}^T y_i - (R - \lambda_{\Re}L)\tau_i |y_i|^2 \right) \\
 &\quad - \lambda_{\Re}L\tau_i \left(c_{\Im}^T y_i - (R - \lambda_{\Im}L)\tau_i |y_i|^2 \right) .
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

5.2.4 Schéma récapitulatif

Afin de mieux visualiser les changements inhérents à la transformation des équations de l'observateur, la figure 5.1 présente le schéma de l'observateur adapté au modèle classique (figure 5.1(a)), i.e. le cas idéal étudié au chapitre 4, où signaux mesurés et

signaux exacts sont identiques, et le schéma de l'observateur plus adapté au modèle réaliste (figure 5.1(b)) que nous venons de développer dans ce paragraphe. Les équations (1) à (6) font référence aux équations suivantes : (1) \leftrightarrow (5.5), (2) \leftrightarrow (4.33), (4) \leftrightarrow (5.7), (5) \leftrightarrow (5.9), (6) \leftrightarrow (5.17). L'indice 1 ou 2 pour les équations (4) à (6) précise s'il s'agit de la première ou de la deuxième équation de la référence.



(a) Observateur adapté au modèle classique (b) Observateur adapté au modèle réaliste

FIGURE 5.1 – Transformation de l'observateur pour son adaptation au modèle réaliste

On souligne la présence toujours nécessaire de u et i en entrée. Nous étudions au paragraphe 5.3 les approximations qu'engendreraient leurs remplacements par y_u et y_i , avant d'étudier une autre manière d'y remédier au paragraphe 5.4.

5.3 Etude des approximations découlant de la présence résiduelle de termes en u_c dans les équations de l'observateur

A l'aide de (5.7) et des méthodes $n^o 1$ et $n^o 2$, nous avons fait disparaître en grande partie les éléments inconnus (\dot{y}_u et \dot{y}_i ou u et i) des équations de l'observateur. Cependant, que ce soit avec la première ou la seconde méthode, cette disparition n'est pas totale. Ainsi, il reste avec la première méthode un terme $\lambda Li^T(Li - 2\tau_u y_u)$ dans l'expression de $\dot{\delta}_1$, et avec la seconde un terme $\lambda L \left(L|i|^2 + 2\tau_i y_i^T u \right)$ dans l'expression de $\dot{\delta}_2$. Comme nous l'avons déjà évoqué, deux possibilités s'offrent à nous concernant ces i et u résiduels : les remplacer par les mesures y_i et y_u ou par les reconstructions \hat{i} et \hat{u} . Nous verrons au paragraphe 5.4 comment obtenir ces reconstructions des courants et tensions exacts. Avant ceci, nous nous intéressons ici aux approximations effectuées dans le cas d'un remplacement par y_i et y_u .

Il est délicat d'étudier formellement l'impact global des approximations, le poids des termes approximatés relativement aux termes non approximatés étant compliqué à déterminer et dépendant notamment de la valeur de λ . Cet impact global sera toutefois étudié en simulation au paragraphe 5.5. Dans ce paragraphe, nous allons nous contenter

5.3. Etude des approximations découlant de la présence résiduelle de termes en u_c
dans les équations de l'observateur

de calculer les erreurs relatives causées par les approximations de $y_u^T i$ par $y_u^T y_i$, de $y_i^T u$ par $y_i^T y_u$ et de $|i|^2$ par $|y_i|^2$. Pour ce faire, nous utilisons la solution particulière (2.21), et d'après (2.45), on a :

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{I}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_i - \arctan \tau_i \omega) \\ \sin(\theta + \varphi_i - \arctan \tau_i \omega) \end{pmatrix}, \\ y_u &= \frac{U}{\sqrt{1 + \tau_u^2 \omega^2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_u - \arctan \tau_u \omega) \\ \sin(\theta + \varphi_u - \arctan \tau_u \omega) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.3.1 Etude de l'approximation de $y_u^T i$ par $y_u^T y_i$

On a :

$$y_u^T i = \frac{UI}{\sqrt{1 + \tau_u^2 \omega^2}} \cos \varphi_1, \quad (5.28)$$

avec $\Delta\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$ et $\varphi_1 = \Delta\varphi_{ui} - \arctan \tau_u \omega$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} y_u^T y_i &= \frac{UI}{\sqrt{1 + \tau_u^2 \omega^2} \sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2}} \cos(\varphi_1 + \arctan \tau_i \omega) \\ &= \frac{UI}{\sqrt{1 + \tau_u^2 \omega^2} (1 + \tau_i^2 \omega^2)} [\cos \varphi_1 - \tau_i \omega \sin \varphi_1], \end{aligned} \quad (5.29)$$

en utilisant $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$ et $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1 + x^2}$. L'erreur relative est donc :

$$\begin{aligned} \frac{y_u^T i - y_u^T y_i}{y_u^T i} &= \frac{\cos \varphi_1 - \frac{1}{1 + \tau_i^2 \omega^2} (\cos \varphi_1 - \tau_i \omega \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_1} \\ &= \frac{\tau_i^2 \omega^2}{1 + \tau_i^2 \omega^2} + \frac{\tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \tan \varphi_1 \\ &= \frac{\tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} (\tau_i \omega + \tan(\Delta\varphi_{ui} - \arctan \tau_u \omega)), \\ \frac{y_u^T i - y_u^T y_i}{y_u^T i} &= \frac{\tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \left(\tau_i \omega + \frac{\tan \Delta\varphi_{ui} - \tau_u \omega}{1 + \tau_u \omega \tan \Delta\varphi_{ui}} \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

La figure 5.2 présente l'erreur relative résultant de l'approximation de $y_u^T i$ par $y_u^T y_i$ en fonction du régime et pour différentes constantes de temps τ_u et τ_i . L'application numérique a été réalisée en utilisant pour les paramètres les valeurs du tableau 8.1, ainsi que $i_d = -2A$ et un couple de 1Nm. Le déphasage $\Delta\varphi_{ui}$ est calculé grâce à (2.26). On rappelle que l'on a identifié expérimentalement au paragraphe 3.2 une pente, pouvant s'apparenter aux constantes de temps τ_u et τ_i du banc SMILE 1.0, d'une valeur de

$1,9 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. On vérifie sans surprise que l'erreur relative augmente avec le déphasage, i.e. avec le régime et les constantes de temps du filtre. Ces erreurs sont de l'ordre de la dizaine de pourcent, ce qui semble raisonnable étant donné qu'elle n'affecte qu'un seul terme de $\dot{\delta}_1$, les autres n'ayant pas à être approchés².

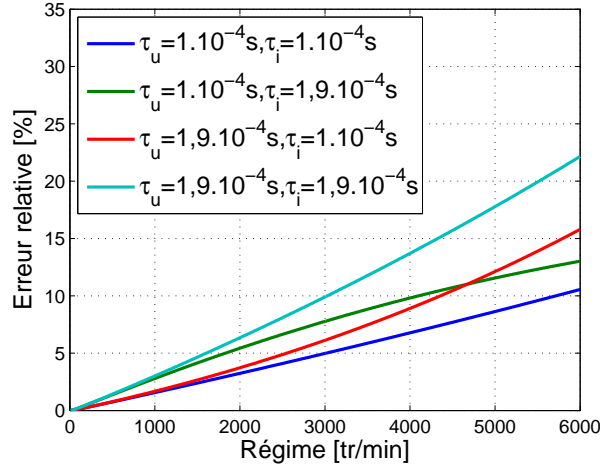


FIGURE 5.2 – Erreur relative résultant de l'approximation de $y_u^T i$ par $y_u^T y_i$

5.3.2 Etude de l'approximation de $y_i^T u$ par $y_i^T y_u$

De manière analogue, on a, avec $\varphi_2 = \Delta\varphi_{ui} + \arctan \tau_i \omega$:

$$\begin{aligned}
 y_i^T u &= \frac{UI}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2}} \cos \varphi_2, \\
 y_i^T y_u &= \frac{UI}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2 (1 + \tau_u^2 \omega^2)}} [\cos \varphi_2 + \tau_u \omega \sin \varphi_2],
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

l'erreur relative étant alors donnée par :

$$\frac{y_i^T u - y_i^T y_u}{y_i^T u} = \frac{\tau_u \omega}{1 + \tau_u^2 \omega^2} \left(\tau_u \omega - \frac{\tan \Delta\varphi_{ui} + \tau_i \omega}{1 - \tau_i \omega \tan \Delta\varphi_{ui}} \right). \tag{5.32}$$

La figure 5.3 présente, dans les mêmes conditions que la figure 5.2, l'erreur relative résultant de l'approximation de $y_i^T u$ par $y_i^T y_u$. Les conclusions à en tirer sont similaires.

2. Se référer aux courbes "équations transformées" de la figure 5.11 pour l'impact sur les estimations du flux et de la position de l'approximation.

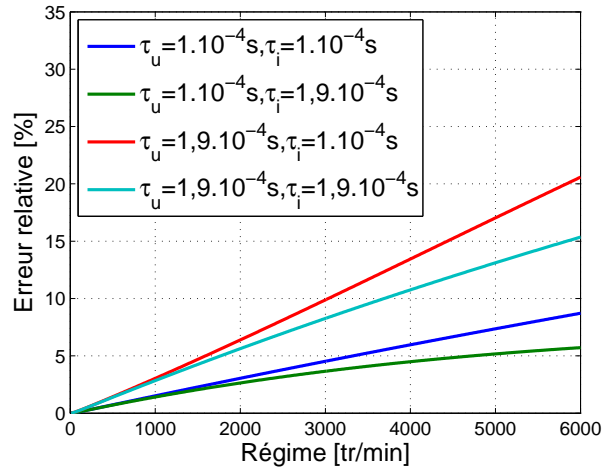


FIGURE 5.3 – Erreur relative résultant de l'approximation de $y_i^T u$ par $y_i^T y_u$

5.3.3 Etude de l'approximation de $|i|^2$ par $|y_i|^2$

On a directement :

$$\frac{|i|^2 - |y_i|^2}{|i|^2} = \frac{\tau_i^2 \omega^2}{1 + \tau_i^2 \omega^2}. \quad (5.33)$$

La figure 5.4 présente, toujours dans les mêmes conditions, l'erreur relative résultant de l'approximation de $|i|^2$ par $|y_i|^2$. L'erreur est légèrement plus faible que pour les deux autres approximations.

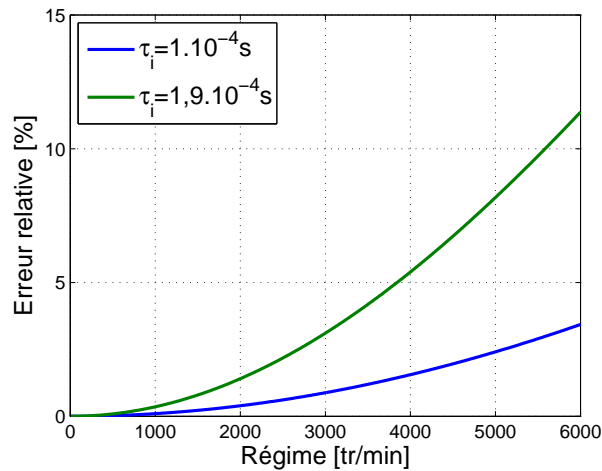


FIGURE 5.4 – Erreur relative résultant de l'approximation de $|i|^2$ par $|y_i|^2$

Enfin, la figure 5.5 compare, pour deux jeux différents de constantes de temps, les erreurs relatives dues aux trois approximations.

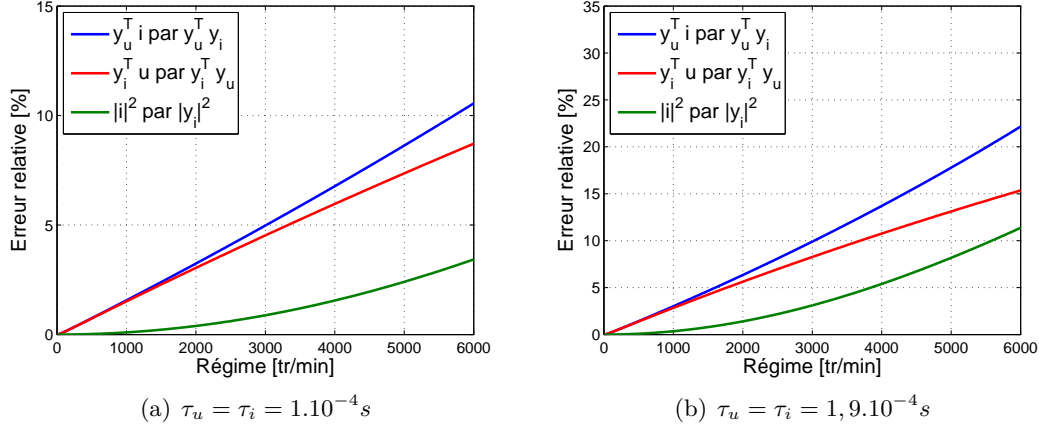


FIGURE 5.5 – Comparaison des erreurs relatives résultant des trois approximations

Ces approximations sont déjà raisonnables et acceptables, ce que nous confirmerons par l'étude en simulation du paragraphe 5.5, mais il est toutefois possible de faire mieux en remplaçant les u et i résiduels par leurs reconstructions \hat{u} et \hat{i} plutôt que par y_u et y_i . Nous allons désormais nous intéresser à la manière d'obtenir ces reconstructions des courants et tensions exacts à partir des signaux mesurés.

5.4 Déconvolution

On cherche dans ce paragraphe à reconstruire les signaux exacts de courants et tensions à partir des signaux mesurés, supposés être obtenus par filtrage des signaux exacts. On cherche ainsi à reconstruire l'entrée d'un filtre, i.e. à réaliser une déconvolution.

Afin de simplifier les notations dans ce paragraphe, nous y notons x l'entrée du filtre à reconstruire à partir de la connaissance de y . Ainsi, x représente i ou u , et y représente y_i ou y_u . Les reconstructions \hat{i} et \hat{u} sont donc notées \hat{x} . Avec τ_x la constante de temps du filtre, représentant τ_i ou τ_u , on a donc :

$$x = \tau_x \dot{y} + y. \quad (5.34)$$

Remarque : Dans ce paragraphe, la notation $\mathfrak{S}^2 = -1$ est remplacée par $j^2 = -1$.

Le problème posé par la déconvolution est de déterminer une fonction de transfert causale H_d de réponse impulsionnelle h_d telle qu'une distance à définir entre les deux

fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto h_d * y(t)$ soit la plus faible possible. En présence de bruit de mesure sur y , connaissant le spectre de x et celui du bruit, une solution est donnée par le filtre de Wiener-Hopf [39]. Lorsque ces spectres ne sont pas connus mais que le contenu fréquentiel de x est dans $[0, \omega_{max}]$, ce que nous supposons être le cas, on peut chercher H_d minimisant :

$$\int_0^{\omega_{max}} |X(j\omega) - H_d(j\omega)Y(j\omega)|^2, \text{ ou } \sup_{\omega \in [0, \omega_{max}]} |X(j\omega) - H_d(j\omega)Y(j\omega)|^2, \quad (5.35)$$

avec dans notre cas :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_x} X(j\omega), \quad (5.36)$$

soit H_d minimisant :

$$\int_0^{\omega_{max}} \left| 1 - \frac{H_d(j\omega)}{1 + j\omega\tau_x} \right|^2, \text{ ou } \sup_{\omega \in [0, \omega_{max}]} \left| 1 - \frac{H_d(j\omega)}{1 + j\omega\tau_x} \right|^2. \quad (5.37)$$

Ainsi, en posant $J_d = \left| 1 - \frac{H_d(j\omega)}{1 + j\omega\tau_x} \right|^2$ et en nous limitant, par exemple, à H_d sous la forme :

$$H_d(j\omega) = \frac{a_x j\omega + b_x}{c_x j\omega + 1}, \quad (5.38)$$

avec $c_x > 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} J_d &= \left| \frac{(1 + j\omega\tau_x)(1 + j\omega c_x) - (b_x + j\omega a_x)}{(1 + j\omega\tau_x)(1 + j\omega c_x)} \right|^2 \\ &= \frac{(1 - \tau_x c_x \omega^2 - b_x)^2 + (\tau_x + c_x - a_x)^2 \omega^2}{(1 + \omega^2 \tau_x^2)(1 + \omega^2 c_x^2)}, \quad (5.39) \\ J_d &= \frac{(1 - b_x)^2 - [2(1 - b_x)\tau_x c_x + (\tau_x + c_x - a_x)^2] \omega^2 + \tau_x^2 c_x^2 \omega^4}{(1 + \omega^2 \tau_x^2)(1 + \omega^2 c_x^2)}. \end{aligned}$$

Pour aller plus loin sans trop compliquer l'analyse, nous supposons $\omega\tau_x \ll 1$ et $\omega c_x \ll 1$, $\forall \omega \in [0, \omega_{max}]$. On a alors :

$$\begin{aligned} J_d &= ((1 - b_x)^2 + \omega^2[(\tau_x + c_x - a_x)^2 - 2(1 - b_x)\tau_x c_x])(1 - \omega^2 \tau_x^2)(1 - \omega^2 c_x^2) \\ &\quad + o(\omega^2 \tau_x^2, \omega^2 c_x^2), \\ J_d &= (1 - b_x)^2 + [-(1 - b_x)^2(\tau_x^2 + c_x^2) + (\tau_x + c_x - a_x)^2 - 2(1 - b_x)\tau_x c_x] \omega^2 \\ &\quad + o(\omega^2 \tau_x^2, \omega^2 c_x^2). \quad (5.40) \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à choisir $b_x = 1$ et $a_x = \tau_x + c_x$ pour minimiser J_d . On a alors :

$$J_d = \frac{\tau_x^2 c_x^2 \omega^4}{(1 + \omega^2 \tau_x^2)(1 + \omega^2 c_x^2)}. \quad (5.41)$$

Comme il s'agit d'une fonction croissante de ω :

$$\sup_{\omega \in [0, \omega_{max}]} J_d(c_x, \omega) = \frac{\tau_x^2 c_x^2 \omega_{max}^4}{(1 + \omega_{max}^2 \tau_x^2)(1 + \omega_{max}^2 c_x^2)}. \quad (5.42)$$

C'est une fonction croissante en c_x , lequel doit donc être pris le plus petit possible. Ceci rend l'approximation $c_x \omega \ll 1$ d'autant plus valide. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} H_d &= \frac{j\omega(\tau_x + c_x) + 1}{j\omega c_x + 1} = 1 + \frac{\tau_x(j\omega c_x + 1) - \tau_x}{c_x(j\omega c_x + 1)}, \\ H_d &= 1 + \frac{\tau_x}{c_x} - \frac{\tau_x}{j\omega c_x + 1}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

et donc l'estimation :

$$\hat{x} = \left(1 + \frac{\tau_x}{c_x}\right) y - \frac{\tau_x}{c_x} y_2, \quad (5.44)$$

avec y_2 donné par :

$$c_x \dot{y}_2 = y - y_2, \text{ soit : } y_2 = \frac{1}{1 + j\omega c_x} y, \quad (5.45)$$

c_x étant alors la constante de temps à fixer d'un filtre passe-bas du premier ordre agissant sur la sortie y du premier filtre. Nous avons vu qu'il fallait choisir cette constante de temps c_x , strictement positive, la plus petite possible. Cependant, en choisissant c_x trop petite, on risque non seulement d'avoir des problèmes numériques, mais surtout on augmente la sensibilité au bruit de mesure de la reconstruction, en augmentant la fréquence de coupure du filtre. Un compromis doit alors être trouvé quant au choix de c_x .

Afin de déterminer l'apport de la déconvolution et le rôle joué par la constante de temps c_x , intéressons-nous à la figure 5.6. A cette fin, on définit e_{xx_h} l'erreur d'estimation de x par \hat{x} , soit avec la déconvolution, et e_{xy} l'erreur d'estimation qui serait commise sans déconvolution :

$$\begin{aligned} e_{xx_h} &= \left| \frac{X - H_d Y}{X} \right| = \sqrt{J_d} = \frac{\tau_x c_x \omega^2}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_x^2} \sqrt{1 + \omega^2 c_x^2}}, \\ e_{xy} &= \left| \frac{X - Y}{X} \right| = \frac{\omega \tau_x}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_x^2}}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

En notant la seconde erreur $e_{xy}(\tau_x)$, on constate que l'on a :

$$e_{xx_h} = e_{xy}(\tau_x)e_{xy}(c_x). \quad (5.47)$$

Notons dans un premier temps que, comme $e_{xy}(\tau_x) < 1$, la déconvolution permet bien de réduire l'erreur d'estimation. La figure 5.6(a) présente, pour différents régimes, l'erreur d'estimation e_{xy} en fonction, au choix, de τ_x ou de c_x .

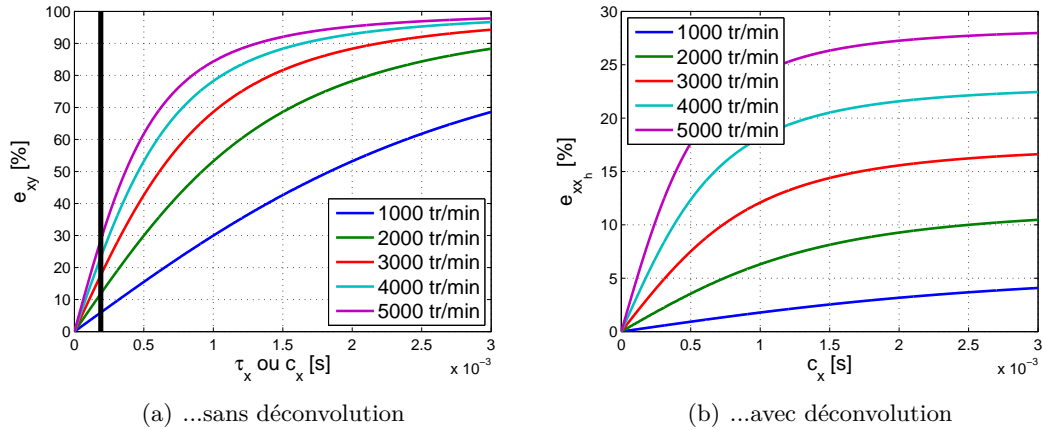


FIGURE 5.6 – Erreurs d'estimation de $x...$

En voyant la figure comme l'erreur d'estimation $e_{xy}(\tau_x)$, on vérifie que celle-ci augmente avec la constante de temps τ_x du filtre, i.e. avec l'écart entre signaux exacts et signaux mesurés. La droite verticale noire indique alors l'erreur d'estimation commise aux différents régimes pour $\tau_x = 1,9 \cdot 10^{-4}$ s. Celle-ci grimpe jusqu'à 30% à 5000 tr/min. Si on voit désormais cette même figure 5.6(a) comme $e_{xy}(c_x)$, la figure nous indique quel pourcentage de cette erreur restera après la déconvolution, en fonction du choix de c_x , de près de 0% pour c_x quasi nulle à près de 100% pour c_x très élevée. L'erreur résultante est indiquée sur la figure 5.6(b) pour $\tau_x = 1,9 \cdot 10^{-4}$ s. En prenant c_x suffisamment petite, on peut donc en théorie grandement réduire l'erreur.

Notons qu'en acceptant ici de garder une légère erreur d'estimation après déconvolution, cette dernière ne nécessite pas la connaissance de ω . D'autres implémentations de la déconvolution seraient possibles et feraient intervenir une estimation du régime ou se baseraient sur un modèle de celui-ci (par exemple en supposant ω constant sur une fenêtre). Diverses méthodes existent pour estimer ω - utilisation d'une *Phase-Locked Loop*, d'un observateur adaptatif, dérivation de l'estimation de la position, *etc.* - mais nous avons choisi ici d'utiliser la méthode présentée plus haut ne faisant pas intervenir le régime.

En l'absence de bruit, nous avons vérifié que la déconvolution présentée dans ce paragraphe permettait de réduire l'erreur commise sur x , quel que soit le choix de c_x , l'amélioration étant d'autant plus importante que c_x est choisie petite. N'étant pas complètement certain du comportement de la déconvolution en présence de bruit, l'utilisation de la déconvolution seule pour adapter l'observateur à la modélisation réaliste, i.e. en gardant pour l'observateur ses équations de la modélisation classique et en les alimentant par les signaux \hat{u} et \hat{i} reconstruits par déconvolution, paraît cependant risqué. C'est pourquoi il sera préférable, si l'on souhaite utiliser la déconvolution, de le faire en complément de la transformation des équations de l'observateur et de remplacer uniquement les termes résiduels en u et i par les signaux \hat{u} et \hat{i} .

Par ailleurs, la déconvolution peut également être utile en sortie d'observateur. En effet, les courants i interviennent dans les équations à résoudre par moindres carrés. Le signal i peut alors être remplacé soit par la mesure y_i , soit par la reconstruction par déconvolution \hat{i} . On note que seul le bruit sur les courants peut ici dégrader la reconstruction par déconvolution, les tensions n'intervenant pas.

5.5 Etude en simulation de l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste

La principale difficulté liée à l'utilisation de la modélisation réaliste vient du fait que les courants et tensions mesurés y_i et y_u sont différents des courants et tensions exacts i et u intervenant dans les équations de l'observateur basé sur la modélisation classique. Afin d'adapter l'observateur à la modélisation réaliste, deux solutions ont été présentées : la transformation des équations de l'observateur (avec les approximations résiduelles étudiées au paragraphe 5.3) et la déconvolution, laquelle peut intervenir en deux endroits. Ces deux méthodes peuvent être utilisées seules ou simultanément. Le schéma 5.7 récapitule alors les différentes situations.

Trois indicateurs $D1$, $D2$ et M y figurent, lesquels peuvent prendre les valeurs 0, 1, voire 2. Ainsi, on peut choisir d'utiliser les équations non transformées de l'observateur ($M = 0$, équations (a) : (5.5)), dans lesquelles interviennent uniquement les courants et tensions i et u qu'il faut remplacer soit par y_i et y_u ($D1 = 0$), soit par \hat{i} et \hat{u} ($D1 = 1$) obtenus par déconvolution (équations (f) : (5.44)). Sinon, on peut choisir d'utiliser les équations transformées de l'observateur, avec la méthode $n^\circ 1$ ($M = 1$, équations (b) : (5.7) et (5.9)) ou la méthode $n^\circ 2$ ($M = 2$, équations (c) : (5.7) et (5.17)). Dans ces équations interviennent les mesures y_i et y_u en majeure partie, mais aussi i et u dans quelques termes. Ce sont ces courants et tensions exacts résiduels que

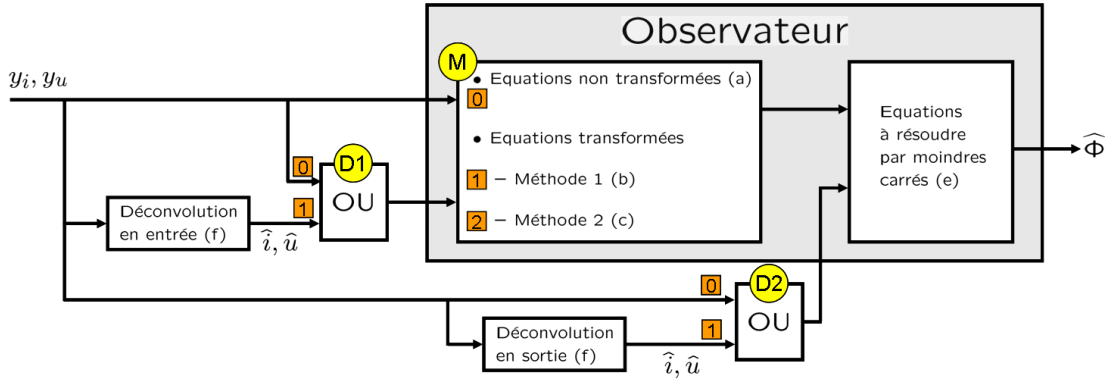


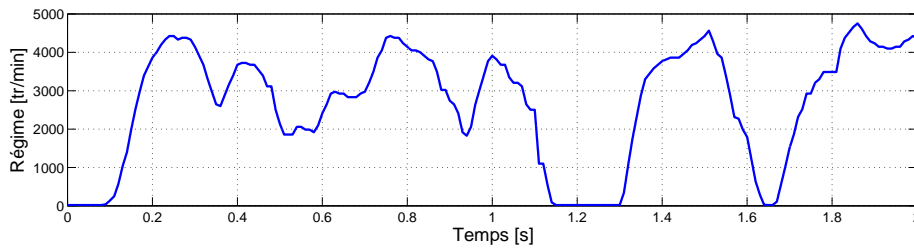
FIGURE 5.7 – Adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste : différents cas.

l'on peut remplacer au choix par y_i et y_u ($D1 = 0$) ou par \hat{i} et \hat{u} ($D1 = 1$). Enfin, les courants et tensions i et u interviennent une dernière fois dans les équations à résoudre par moindres carrés (équations (e) : (4.33)). On a alors une nouvelle fois la même possibilité d'utiliser ($D2 = 1$) ou non ($D2 = 0$) la déconvolution.

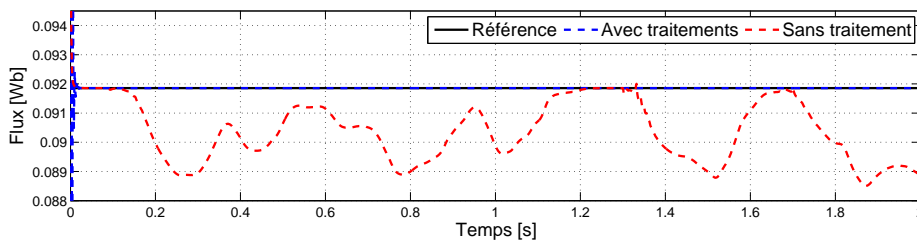
Nous allons dans ce paragraphe étudier en simulation et comparer ces différentes possibilités (déconvolution(s) ou non, transformation des équations ou non, cas réel ou complexe, cas non bruité ou cas bruité). Sauf mention contraire, nous utilisons deux pôles réels. Les simulations ont été réalisées à l'aide de Matlab/Simulink avec les valeurs des paramètres du moteur données par le tableau 8.1, ainsi qu'un couple $\tau = 1Nm$ et un courant $i_d = -2A$. Pour chacune d'entre elles, le même profil de vitesse, présenté sur la figure 5.8(a), a été utilisé. Le régime γ varie entre 20 et 4750 tr/min. Par ailleurs, en accord avec la valeur identifiée pour le banc SMILE 1.0, les constantes de temps des filtres sont fixées à $\tau_u = \tau_i = 1,9.10^{-4}s$. Dans le cas des simulations avec bruit de mesure, nous nous sommes inspiré des bruits caractérisés au chapitre 3 dans le tableau 3.1. Ainsi, nous avons généré des bruits d'écart-types $\sigma_{w_u} = 1V$ et $\sigma_{w_i} = 50mA$. Les pôles ont été fixés à $\lambda_1 = 100$ et $\lambda_2 = 200$ ou à $\lambda = 100 + 200j$. Les pôles n'ont pas ici été réglés spécifiquement, mais toutefois choisis à des valeurs empiriquement cohérentes, le but étant pour l'instant de comparer les différents cas plutôt que de chercher à obtenir des résultats optimaux minimisant les erreurs. Le choix de ces pôles, notamment en présence de bruit de mesure, sera étudié plus en détails au chapitre 6. Enfin, les constantes de temps des filtres utilisés pour la déconvolution ont été choisies les plus petites possibles mais suffisamment grandes pour ne pas avoir de problèmes numériques, soit $c_i = c_u = 3,8.10^{-6}s$.

Avant d'étudier séparément les impacts des différents traitements sur l'observation, la figure 5.8 présente les deux cas extrêmes, en l'absence de bruit de mesure. Ainsi sont

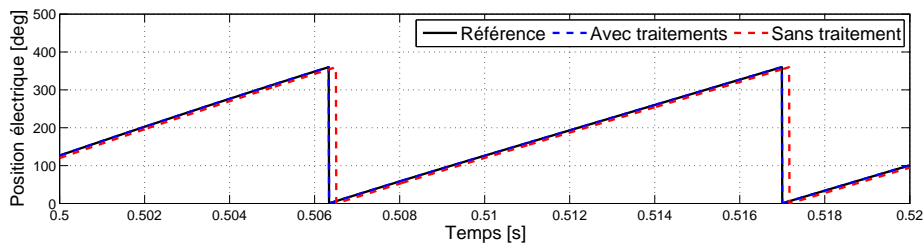
comparés respectivement sur les figures 5.8(b) et 5.8(c) le flux et la position électrique estimés au flux et à la position réels (références en noir), quand tous les traitements ont été appliqués (en bleu : $D1 = 1, D2 = 1, M = 1$) ou en l'absence de tout traitement (en rouge : $D1 = 0, D2 = 0, M = 0$). Ceci nous permet de constater qu'il y a beaucoup à gagner en adaptant l'observateur à la modélisation réaliste. Sans surprise, quand l'observateur est basé sur la modélisation classique, les erreurs d'estimation sont quasiment proportionnelles au régime, i.e. approximativement au déphasage. Le flux estimé reflète alors l'allure du profil et on retrouve le déphasage lors de l'estimation de la position. Sur le profil, ces erreurs atteignent plus de 3% sur l'estimation du flux, soit l'équivalent d'une erreur d'estimation de la température du rotor de plus de $25^{\circ}C$, et de 15 degrés électriques sur celle de la position. En revanche, si l'observateur est adapté au mieux à la modélisation réaliste, les estimations du flux et de la position deviennent quasiment parfaites. Nous allons désormais détailler les apports respectifs des différents traitements, ainsi que leurs robustesses au bruit de mesure.



(a) Profil de vitesse



(b) Estimation du flux



(c) Estimation de la position électrique

FIGURE 5.8 – Impact de l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste

5.5.1 Apport de la transformation des équations

Commençons par nous intéresser à l'apport de la transformation des équations ($M = 1$ ou $M = 2$), et tout d'abord au choix de la méthode de transformation.

Choix de la méthode

La figure 5.9 compare, dans le cas non bruité, les deux méthodes de transformation des équations, tous les autres traitements étant effectifs, i.e. ici les deux déconvolutions. Notons que nous considérerons désormais, dans le cas présent ainsi que dans tous ceux qui suivent, directement les erreurs d'estimation, la courbe de gauche présentant l'erreur relative d'estimation du flux en pourcentage et celle de droite l'erreur d'estimation de la position électrique en degrés. Pour obtenir l'erreur d'estimation de la position mécanique, on divise cette dernière par p , soit 3 dans le cas présent. On constate que les résultats sont très proches avec l'une ou l'autre des méthodes, les performances de la méthode n° 1 étant légèrement meilleures pour l'estimation du flux et celles de la méthode n° 2 pour celle de la position. Le choix de la méthode n'est donc pas primordial. Dans la suite, l'estimation du flux nous intéressant davantage, nous utiliserons la méthode n° 1.

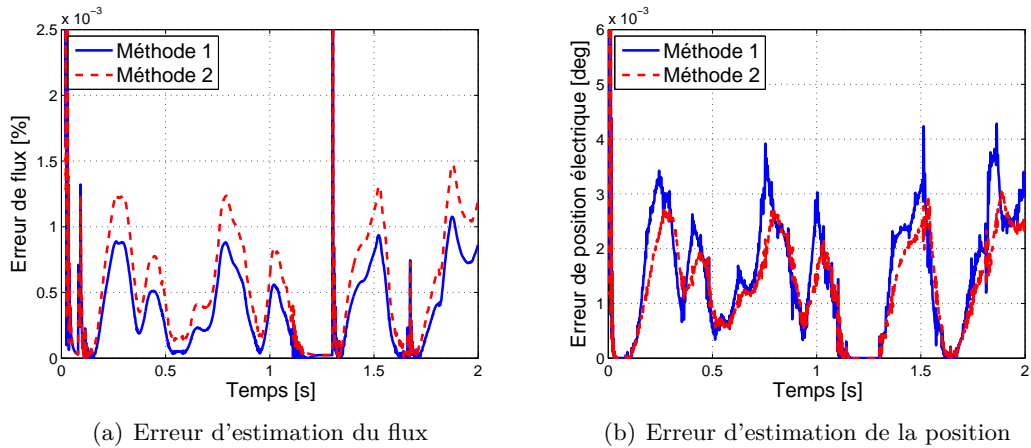


FIGURE 5.9 – Impact de la méthode de transformation des équations - D1=1, D2=1

Impact de la transformation des équations

Transformation des équations incluse, trois traitements sont étudiés dans ce paragraphe et dans les deux suivants, soit 8 combinaisons et 28 comparaisons deux à deux possibles. Nous n'allons pas regarder ces 28 comparaisons, mais pour chacun des trois

traitements, nous considérerons respectivement dans le cas non bruité l'impact de l'absence de ce traitement les deux autres étant effectifs, puis l'impact de la présence de ce traitement les deux autres étant absents, et enfin cette même seconde situation dans le cas bruité. Pour plus de clarté, le tableau 5.1 récapitule les 8 combinaisons possibles et le tableau 5.2 fait l'inventaire des 6 comparaisons deux à deux présentées sur les figures. Notons que la figure 5.8 compare les combinaisons (A) et (H).

TABLE 5.1 – Index des huit combinaisons possibles

Combinaison	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)
M	0	0	0	0	1	1	1	1
D1	0	0	1	1	0	0	1	1
D2	0	1	0	1	0	1	0	1

TABLE 5.2 – Inventaire des figures présentées

Traitement étudié	Figures concernées	Combinaisons comparées
Transformation des équations	5.10	(D) / (H)
	5.11 et 5.12	(A) / (E)
Déconvolution en entrée	5.13	(F) / (H)
	5.14 et 5.15	(A) / (C)
Déconvolution en sortie	5.16	(G) / (H)
	5.17 et 5.18	(A) / (B)

Ainsi, la figure 5.10 compare, dans le cas sans bruit, les estimations quand tous les traitements sont effectués (en bleu) et celles quand les équations ne sont pas transformées (en rouge). Concernant l'estimation du flux, d'une erreur de l'ordre du millième de pourcent, on passe à une erreur de l'ordre du dixième de pourcent, soit cent fois plus grande, quand on ne modifie pas les équations de l'observateur. De même l'erreur de position est multipliée par un facteur supérieur à dix. Ces erreurs restent cependant très faibles. En l'absence de bruit, si la transformation des équations améliore les performances de manière non négligeable, l'utilisation des déconvolutions peut donc s'avérer suffisante.

La figure 5.11 compare désormais, toujours dans le cas sans bruit, les estimations quand aucun traitement n'est effectué (en rouge) à celles quand les équations sont

5.5. Etude en simulation de l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste

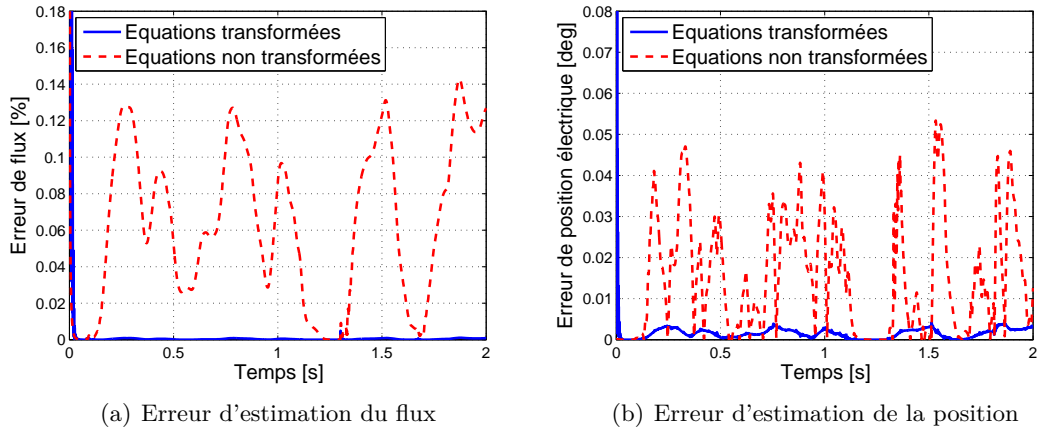


FIGURE 5.10 – Impact de la transformation des équations - $D1=1$, $D2=1$ - Sans bruit

transformées (en bleu). L'apport de la transformation des équations est ici considérable permettant de diviser l'erreur d'estimation du flux par environ 30 et celle de la position par 100. Il est toutefois à noter que l'estimation du flux perd en qualité aux très bas régimes.

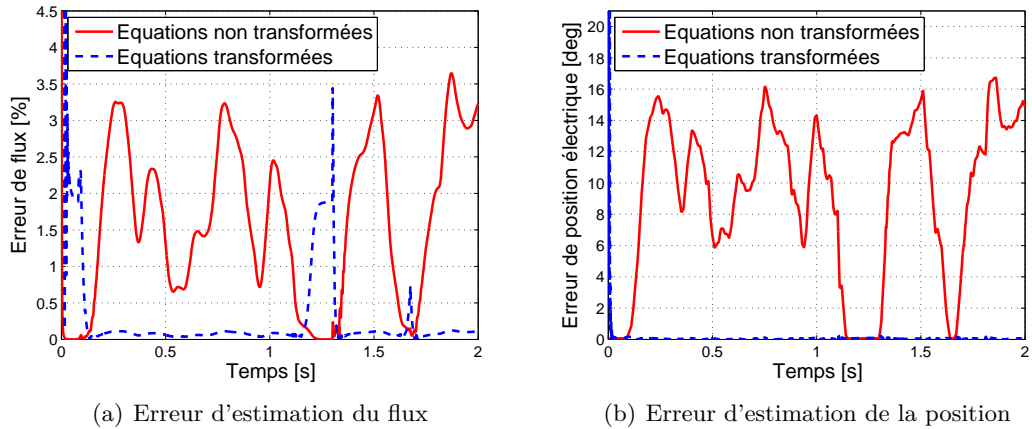


FIGURE 5.11 – Impact de la transformation des équations - $D1=0$, $D2=0$ - Sans bruit

La même comparaison entre absence de traitement (en rouge) et utilisation des équations transformées (en bleu) est présentée sur la figure 5.12, mais cette fois-ci en présence de bruit de mesure. Les performances sont globalement comparables au cas sans bruit, si ce n'est que désormais, que ce soit avec ou sans transformation des équations et qu'il s'agisse du flux ou de la position, l'estimation aux très bas régimes est mauvaise (même si on ne distingue pas toujours la courbe rouge derrière la courbe bleu, c'est bien le cas). On note également que l'estimation, aux régimes suffisamment

élevés, de la position avec équations transformées est légèrement dégradée, avec une erreur culminant aux alentours de 0.5 degré.

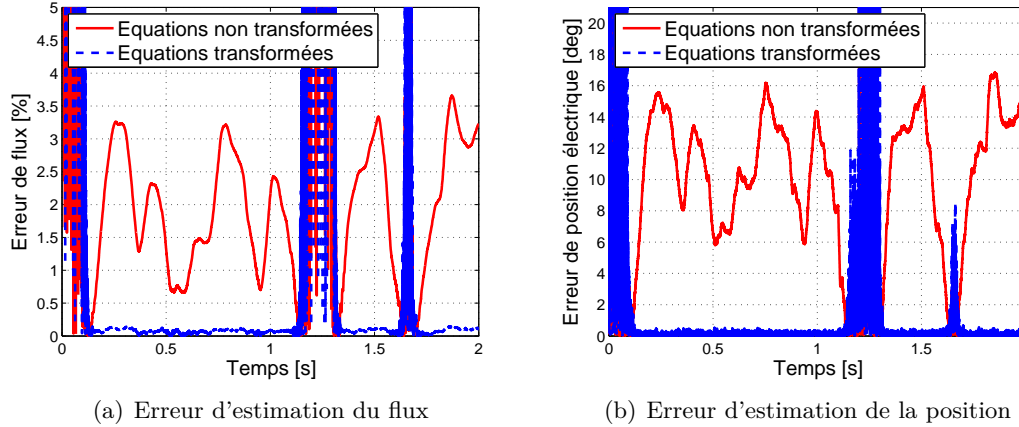


FIGURE 5.12 – Impact de la transformation des équations - $D1=0$, $D2=0$ - Avec bruit

5.5.2 Impact de la déconvolution en entrée

Nous regardons désormais l'impact de l'utilisation de la déconvolution en entrée de l'observateur ($D1 = 1$). La figure 5.13 compare, dans le cas sans bruit, les estimations quand tous les traitements sont effectués (en bleu) et celles quand la déconvolution en entrée n'est pas utilisée (en rouge). Les performances sont du même ordre de grandeur que celles constatées à la figure 5.10, les estimations du flux et de la position étant certes fortement dégradées en cas de non utilisation de la déconvolution en entrée, mais les erreurs restant tout de même faibles. Ainsi, en l'absence de bruit, la transformation des équations et l'utilisation de la déconvolution en sortie peuvent suffire.

De même, les performances constatées sur la figure 5.14, comparant dans le cas sans bruit les estimations quand aucun traitement n'est effectué (en rouge) et celles quand on utilise la déconvolution en entrée (en bleu), sont du même ordre de grandeur à celles obtenus dans le cadre de la figure 5.11. En l'absence de bruit, l'apport de la déconvolution en entrée est donc, à l'instar de la transformation des équations, très important, avec la même perte de qualité pour les très bas régimes.

Cependant, les performances quasi similaires de la déconvolution en entrée et de la transformation des équations se limitent au cas non bruité. En effet, dans le cas bruité, présenté sur la figure 5.15, on constate que, comme on le redoutait au paragraphe 5.4, l'utilisation de la déconvolution en entrée est peu robuste au bruit. Si bien que pour l'estimation du flux, les performances sont comparables avec ou sans déconvolution en entrée. Concernant l'estimation de la position, le bruit dégrade également beaucoup les

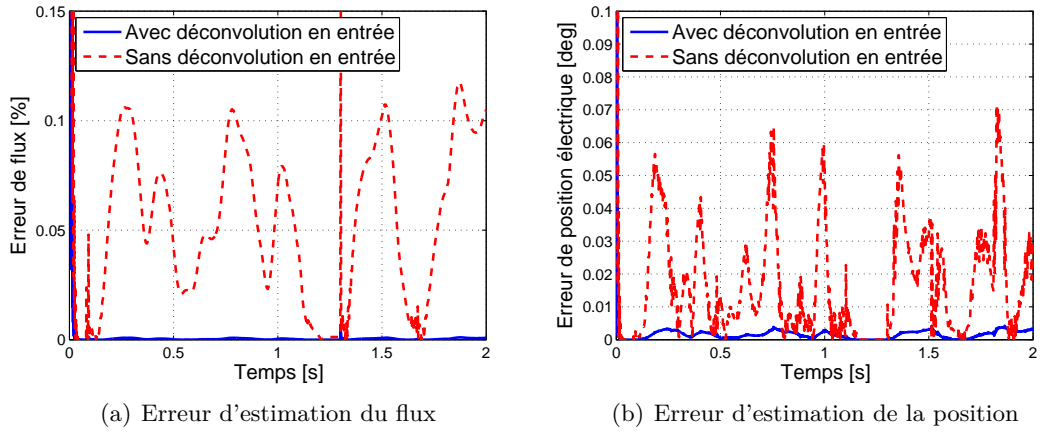


FIGURE 5.13 – Impact de la déconvolution en entrée - $M=1$, $D2=1$ - Sans bruit

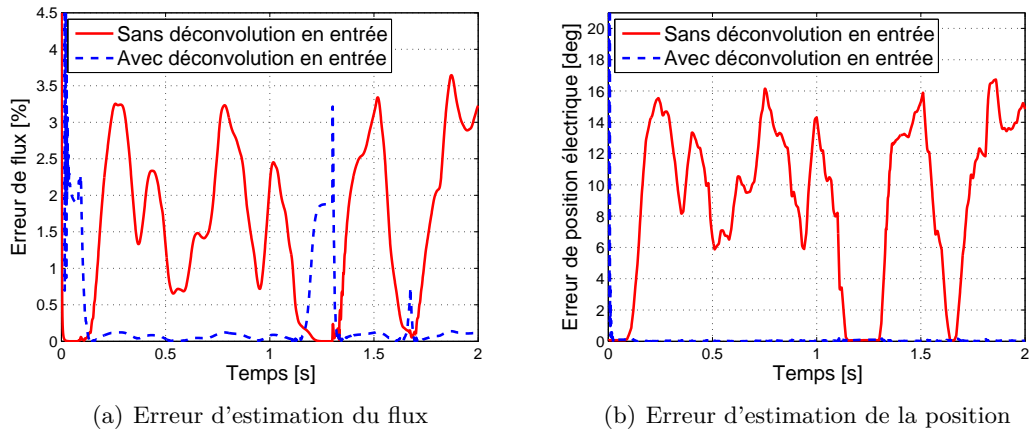


FIGURE 5.14 – Impact de la déconvolution en entrée - $M=0$, $D2=0$ - Sans bruit

performances mais l'erreur reste quand même moindre en utilisant la déconvolution. A choisir entre déconvolution en entrée et transformation des équations, la deuxième solution est donc largement à privilégier.

5.5.3 Impact de la déconvolution en sortie

Passons à l'étude de l'impact de l'utilisation de la déconvolution en sortie ($D2 = 1$). La figure 5.16 compare, dans le cas sans bruit, les estimations quand tous les traitements sont effectués (en bleu) et celles quand la déconvolution en sortie n'est pas utilisée (en rouge). Là encore, aux régimes suffisamment élevés, les performances sont du même ordre de grandeur qu'en l'absence de transformation des équations ou de déconvolution en entrée, l'estimation du flux étant un peu moins dégradée mais celle de

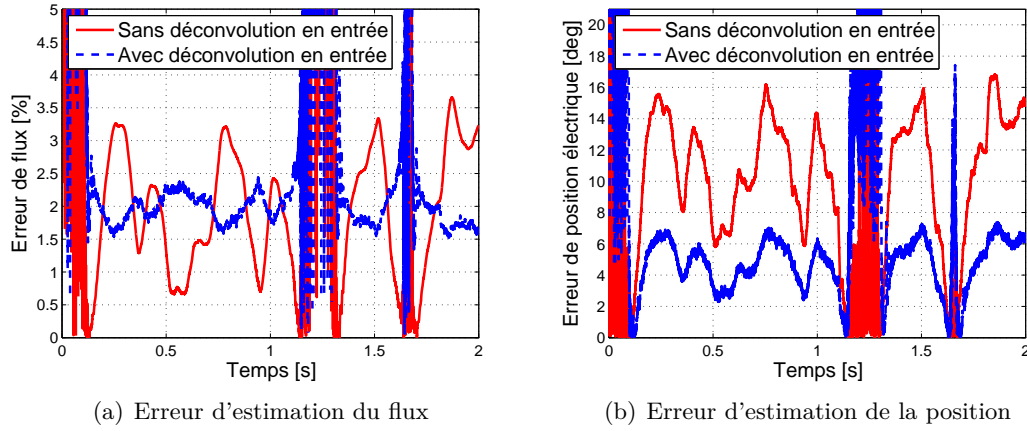


FIGURE 5.15 – Impact de la déconvolution en entrée - $M=0$, $D2=0$ - Avec bruit

la position un peu plus. Par contre, aux très bas régimes les estimations sont fortement dégradées. Ainsi, en l'absence de bruit, la transformation des équations et l'utilisation de la déconvolution en entrée sont suffisantes, exception faite des très bas régimes.

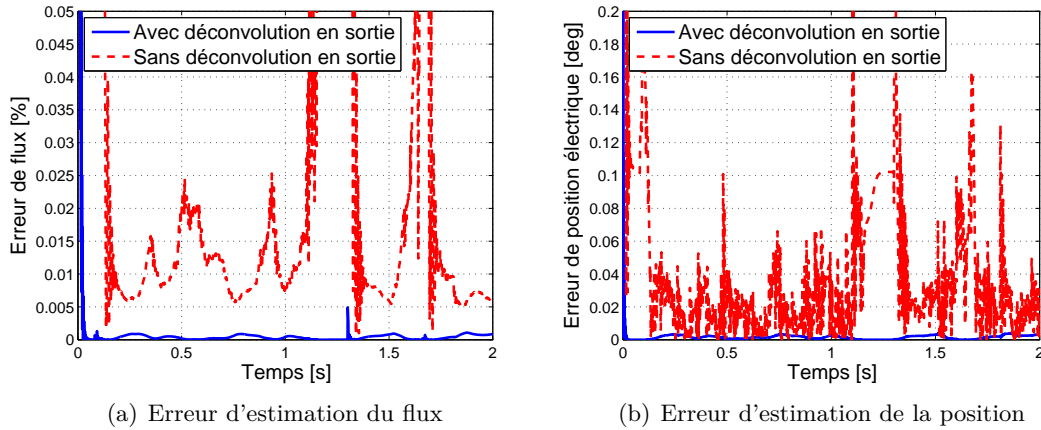


FIGURE 5.16 – Impact de la déconvolution en sortie - $M=1$, $D1=1$ - Sans bruit

Les figures 5.17 et 5.18 témoignent du fait que, dans le cas bruité ou non, l'utilisation seule de la déconvolution en sortie ne permet pas d'améliorer de manière notable l'estimation, ce qui n'est évidemment pas une surprise puisqu'on n'agit pas dans ce cas sur la dynamique de l'observateur.

5.5.4 Comparaison entre pôles réels et complexes

Afin de compléter notre tour d'horizon des différentes situations, un cas reste à envisager : l'utilisation d'un pôle complexe plutôt que de deux pôles réels. Ainsi, la figure

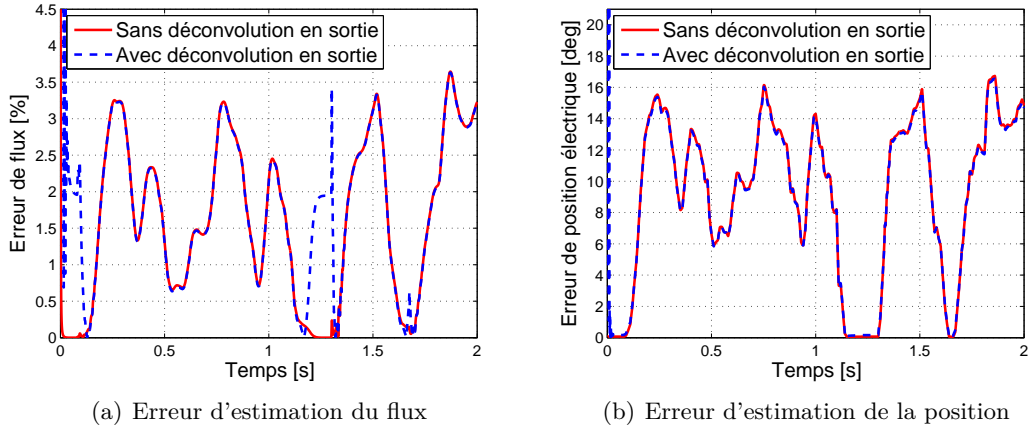


FIGURE 5.17 – Impact de la déconvolution en sortie - $M=0$, $D1=0$ - Sans bruit

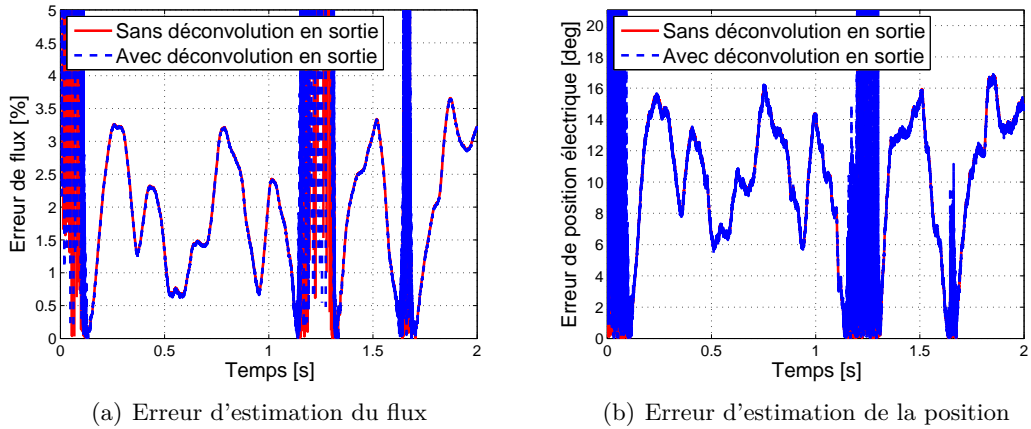
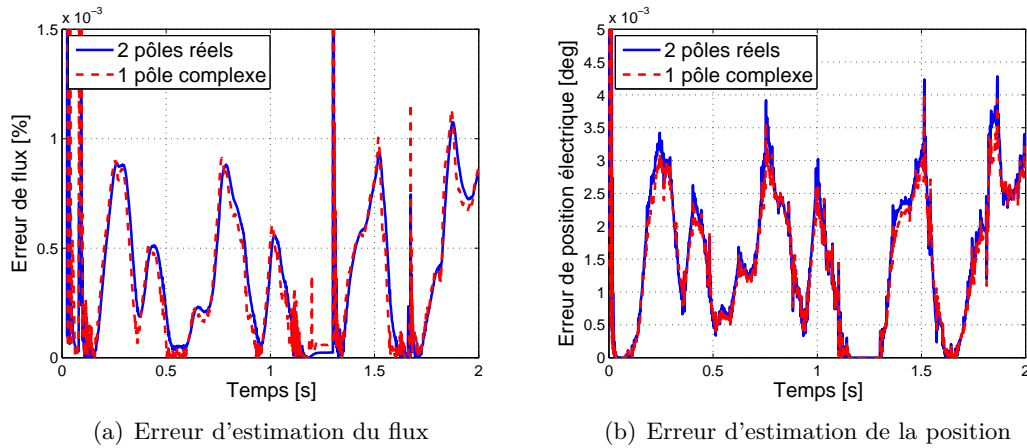


FIGURE 5.18 – Impact de la déconvolution en sortie - $M=0$, $D1=0$ - Avec bruit

5.19 compare, dans le cas non bruité, les estimations quand tous les traitements sont effectués, si on utilise deux pôles réels (en bleu) ou un pôle complexe (en rouge). Comme lorsqu'il s'agissait de comparer les deux méthodes de transformation des équations de l'observateur, on remarque qu'il n'y a pas grande différence sur les performances, que l'on utilise un pôle complexe ou deux pôles réels. Le cas à deux pôles réels s'en sort toutefois mieux aux très bas régimes, mais il est possible que ceci découle du choix des pôles, lesquels n'ont pas été réglés spécifiquement ici. Ce choix des pôles étant d'autant plus important en présence de bruit, il est préférable pour le cas bruité de se rapporter à l'étude plus poussée du chapitre 6.


 FIGURE 5.19 – Comparaison pôle(s) réels/complexe - $M=1$, $D1=1$, $D2=1$ - Sans bruit

5.5.5 Bilan de l'étude en simulation

Cette étude en simulation nous a apporté plusieurs enseignements quant à l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste. Tout d'abord, sans traitement par transformation des équations de l'observateur ou par déconvolution, les estimations du flux et de la position sont plutôt médiocres et dépendantes du régime. En revanche, ces traitements permettent d'importantes améliorations. Ainsi, dans le cas non bruité, l'utilisation uniquement de la transformation des équations, à l'aide de l'une ou l'autre des deux méthodes ($M=1$ ou $M=2$), ou uniquement de la déconvolution en entrée ($D1=1$) permet de très fortement réduire les erreurs d'estimation, estimations qui deviennent alors fort correctes, excepté l'estimation du flux aux très bas régimes. L'utilisation de deux des trois traitements améliore encore les estimations, et l'utilisation conjointe des trois traitements conduit à des estimations quasi parfaites, même aux très bas régimes. Dans le cas bruité, la situation est quelque peu différente. Premièrement, quels que soient les méthodes et traitements que l'on emploie, une estimation correcte est impossible aux très bas régimes. D'autre part, s'il est toujours possible d'utiliser uniquement la transformation des équations pour obtenir de bonnes estimations, il n'est plus question d'utiliser uniquement la déconvolution en entrée. L'utilisation de cette dernière est en effet très sensible au bruit et son apport s'en voit considérablement réduit. En revanche, son utilisation conjointe à celle de la transformation des équations est bénéfique. Quelles que soient les combinaisons de traitements utilisés, la transformation des équations est d'ailleurs toujours nécessaire. L'utilisation de la déconvolution en sortie est moins décisive. Elle risque moins de dégrader les performances en présence de bruit mais ne peut apporter que de légères améliorations.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact de la modélisation réaliste sur les performances de l'observateur et adapté au mieux celui-ci à cette modélisation. L'observateur a en effet initialement été construit sur la modélisation classique. Si le passage à la modélisation réaliste ne remet pas en cause l'observabilité, c'est plus délicat concernant la mesurabilité, le modèle du système n'étant plus parfaitement connu, les courants et tensions exacts intervenant dans les équations de l'observateur n'étant plus directement mesurés. Deux solutions sont alors proposées pour adapter l'observateur : transformer ses équations (deux méthodes sont présentées) et/ou reconstruire au mieux, par déconvolution, les signaux exacts de courant et tension à partir des signaux mesurés. Une étude en simulation nous montre que, si en n'appliquant aucune de ces solutions, les estimations sont médiocres, en revanche on obtient, en l'absence de bruit de mesure, de très bons résultats, excepté pour le flux aux très bas régimes, en appliquant au moins l'une des deux solutions, et encore meilleurs en combinant les deux. Par contre, en présence de bruit, seule la transformation des équations fournit de bons résultats, la déconvolution étant très sensible au bruit. La déconvolution peut toutefois être utilisée conjointement à la transformation des équations.

Chapitre 6

Observateur non linéaire de Luenberger - Impact du bruit de mesure et choix des pôles

Au chapitre précédent, nous avons étudié l'impact de la modélisation réaliste, i.e. du bruit de modèle, sur les performances de l'observateur puis avons adapté du mieux possible l'observateur à cette modélisation. Dans le présent chapitre, c'est désormais l'impact du bruit de mesure sur les performances de l'observateur que nous étudions, ainsi que la manière de choisir les pôles en conséquence. En effet, de la résolution de manière exacte des équations de la modélisation classique de l'observateur de Luenberger pour la solution particulière dans le cas non bruité, au paragraphe 4.7, est ressorti que l'estimation était parfaite quels que soient les pôles choisis. L'estimation ne dépendait alors pas du choix des pôles. Dans le cas bruité en revanche, il est peu probable d'obtenir une estimation parfaite et le choix des pôles aura un rôle à jouer quant à la qualité de l'estimation. Plus précisément, le bruit de mesure va introduire des biais d'estimation qu'il s'agit de minimiser avec les seuls degrés de liberté à notre disposition, à savoir les pôles. C'est cet objectif de minimisation des erreurs d'estimation lié au choix des pôles qui va nous intéresser tout au long de ce chapitre, à travers deux parties : une étude théorique (§6.2) et une étude en simulation (§6.3).

Lors de l'étude théorique, menée pour la solution particulière, les calculs n'étant pas simples, seul le bruit de mesure est pris en compte. Nous travaillons donc avec la modélisation classique où signaux mesurés et exacts sont égaux. De plus, seul le cas à deux pôles réels est étudié et, au cours de l'étude, nous sommes amené à nous focaliser sur l'estimation qui nous intéresse le plus, à savoir celle de l'intensité du flux des aimants. Enfin, des approximations seront nécessaires, notamment celle négligeant

l'impact du bruit sur les courants sur l'estimation du flux. En revanche, l'étude en simulation est moins limitante et permet de combiner les impacts du bruit de mesure et du bruit de modèle en travaillant sur la modélisation réaliste. Les cas à un pôle complexe et de l'estimation de la position peuvent également être traités, et le bruit sur les courants être pris en compte.

Mais avant de nous lancer dans les calculs fastidieux et les longues simulations, il nous est déjà possible, en étendant aux équations de l'observateur les propriétés d'invariance constatées au paragraphe 2.1.1, de faire un constat quant à la dépendance au point de fonctionnement, i.e. au régime et au couple, du choix des pôles. C'est l'objet du paragraphe 6.1.

Remarque : Dans ce chapitre, nous travaillons toujours dans le cas d'une machine à pôles lisses et dans le repère (α, β) . Comme dans les chapitres 4 et 5, les indices $\alpha\beta$ ont été ôtés des notations pour simplification. Par ailleurs, on suppose les paramètres R et L du moteur parfaitement connus : $R_a = R$ et $L_a = L$.

6.1 Extension des propriétés d'invariance aux équations de l'observateur de Luenberger

Au paragraphe 2.1.1, nous avons présenté les paramètres à faire varier pour obtenir les invariances sous l'action d'une variation de régime et sous l'action d'une variation de couple des équations classique de la machine électrique dans le repère (d, q) . La position n'étant pas affectée par les transformations, ces invariances sont identiques dans le repère (α, β) . Dans ce paragraphe, nous poursuivons l'étude des invariances sur les équations de l'observateur de Luenberger (4.32), en rajoutant du coup les paramètres z_j , c_j et λ_j . Ceci a pour but de déterminer *a priori* comment les pôles sont impactés par des variations de régime ou de couple.

6.1.1 Invariance sous l'action d'une variation de régime

Soit $\mathcal{V}^e = (i, u, \theta, R, L\phi, J_m, \omega, \tau_L, z_j, c_j, \lambda_j)$ l'extension aux trois nouveaux paramètres du vecteur \mathcal{V} adapté au repère (α, β) et à un moteur à pôles lisses. On étend l'action de la constante réelle k_ω sur \mathcal{V}^e en définissant la fonction $\mathcal{F}_{k_\omega}^e$ par :

$$\begin{aligned} & \left(i^{k_\omega}, u^{k_\omega}, \theta^{k_\omega}, L^{k_\omega}, \phi^{k_\omega}, R^{k_\omega}, J_m^{k_\omega}, \omega^{k_\omega}, \tau_L^{k_\omega}, z_j^{k_\omega}, c_j^{k_\omega}, \lambda_j^{k_\omega}, t^{k_\omega} \right) \\ & = \mathcal{F}_{k_\omega}^e(\mathcal{V}^e, t, k_\omega) = \left(i, k_\omega u, \theta, L, \phi, k_\omega R, \frac{J_m}{k_\omega^2}, k_\omega \omega, \tau_L, z_j, c_j, k_\omega \lambda_j, \frac{t}{k_\omega} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Transformée par cette action, les équations (4.32) deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{z}_j^{k_\omega} &= -\lambda_j^{k_\omega} z_j^{k_\omega} + (c_j^{k_\omega})^T (u^{k_\omega} - R^{k_\omega} i^{k_\omega}) - \lambda_j^{k_\omega} (L^{k_\omega})^2 |i^{k_\omega}|^2, \\ \dot{c}_j^{k_\omega} &= -\lambda_j^{k_\omega} c_j^{k_\omega} - 2(u^{k_\omega} - R^{k_\omega} i^{k_\omega} + \lambda_j^{k_\omega} L^{k_\omega} i^{k_\omega}),\end{aligned}\quad (6.2)$$

soit :

$$\begin{aligned}k_\omega \dot{z}_j &= -k_\omega \lambda_j z_j + c_j^T (k_\omega u - k_\omega R i) - k_\omega \lambda_j L^2 |i|^2, \\ k_\omega \dot{c}_j &= -k_\omega \lambda_j c_j - 2(k_\omega u - k_\omega R i + k_\omega \lambda_j L i).\end{aligned}\quad (6.3)$$

Ainsi, les équations avec les variables transformées (6.3) sont les mêmes que les équations avec les variables originelles (4.32). Il y a donc invariance sous l'action d'une variation de régime, à condition, en plus des changements établis au paragraphe 2.1.1, de multiplier les pôles proportionnellement au régime. De ce fait, si les pôles λ_j sont les meilleurs au régime ω , les pôles optimaux au régime $\omega^{k_\omega} = k_\omega \omega$ sont $\lambda_j^{k_\omega} = k_\omega \lambda_j$. Le choix des pôles est donc dépendant du régime. Bien sûr dans le cas bruité l'invariance n'est plus parfaite, mais en considérant des bruits très petits devant les signaux, les résultats restent approximativement vrais.

6.1.2 Invariance sous l'action d'une variation de couple

On étend l'action de la constante réelle k_τ sur \mathcal{V}^e en définissant la fonction $\mathcal{F}_{k_\tau}^e$ par :

$$\begin{aligned}& \left(i^{k_\tau}, u^{k_\tau}, \theta^{k_\tau}, L^{k_\tau}, \phi^{k_\tau}, R^{k_\tau}, J_m^{k_\tau}, \omega^{k_\tau}, \tau_L^{k_\tau}, z_j^{k_\tau}, c_j^{k_\tau}, \lambda_j^{k_\tau}, t^{k_\tau} \right) \\ &= \mathcal{F}_{k_\tau}^e(\mathcal{V}^e, t, k_\tau) = \left(k_\tau i, u, \theta, \frac{L}{k_\tau}, \phi, \frac{R}{k_\tau}, k_\tau J_m, \omega, k_\tau \tau_L, z_j, c_j, \lambda_j, t \right).\end{aligned}\quad (6.4)$$

Transformée par cette action, les équations (4.32) deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{z}_j^{k_\tau} &= -\lambda_j^{k_\tau} z_j^{k_\tau} + (c_j^{k_\tau})^T (u^{k_\tau} - R^{k_\tau} i^{k_\tau}) - \lambda_j^{k_\tau} (L^{k_\tau})^2 |i^{k_\tau}|^2, \\ \dot{c}_j^{k_\tau} &= -\lambda_j^{k_\tau} c_j^{k_\tau} - 2(u^{k_\tau} - R^{k_\tau} i^{k_\tau} + \lambda_j^{k_\tau} L^{k_\tau} i^{k_\tau}),\end{aligned}\quad (6.5)$$

soit :

$$\begin{aligned}\dot{z}_j &= -\lambda_j z_j + c_j^T \left(u - \frac{R}{k_\tau} k_\tau i \right) - \lambda_j \frac{L^2}{k_\tau^2} |k_\tau i|^2, \\ \dot{c}_j &= -\lambda_j c_j - 2 \left(u - \frac{R}{k_\tau} k_\tau i + \lambda_j \frac{L}{k_\tau} k_\tau i \right).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Ainsi, les équations avec les variables transformées (6.6) sont les mêmes que les équations avec les variables originelles (4.32). Il y a donc invariance sous l'action d'une variation de couple, avec les changements établis au paragraphe 2.1.1 et sans modification des pôles en fonction du couple. De ce fait, si les pôles λ_j sont les meilleurs pour un

couple τ_L , ils le sont également pour tout autre couple. Le choix des pôles est donc indépendant du couple. Comme dans le cas de l'action d'une variation de régime, dans le cas bruité l'invariance n'est plus parfaite, mais les résultats restent approximativement vrais.

6.1.3 Bilan

L'étude de l'extension des propriétés d'invariance aux équations de l'observateur de Luenberger nous a permis de constater que, dans le cas bruité, les pôles optimaux sont approximativement indépendants du couple et proportionnels au régime. De ce fait, par la suite, nous nous contenterons d'étudier la dépendance au régime du choix des pôles. A commencer par l'étude théorique.

6.2 Etude théorique du cas bruité

Dans ce paragraphe, nous menons une étude théorique sur l'impact de bruits de mesure sur les performances de l'observateur non linéaire de Luenberger. L'objectif de cette étude est de déterminer une expression du biais d'estimation en fonction des pôles et des caractéristiques du bruit. Cette expression pourra alors être utilisée pour débiaiser l'estimation ou au moins pour minimiser le biais d'estimation et déterminer le rôle joué par le choix des pôles dans cette minimisation. Afin de ne pas ajouter de difficultés supplémentaires aux calculs, nous travaillons dans ce paragraphe dans le cadre idéal du chapitre 4, i.e. pour lequel les signaux mesurés de courants et tensions sont égaux aux signaux exacts (modélisation classique). Après avoir présenté les équations de l'observateur dans le cas bruité (6.2.1) et défini un modèle de bruit (6.2.2), les paragraphes 6.2.3 à 6.2.6 s'intéressent à la résolution des équations de l'observateur en présence de bruit. Des hypothèses et approximations devront être faites pour simplifier les calculs. L'étude se concentrera notamment sur l'impact du bruit sur les tensions sur l'estimation du flux. Les paragraphes 6.2.7 et 6.2.8 se chargeront alors de déterminer le biais d'estimation du flux avant qu'on ne cherche à le minimiser au paragraphe 6.2.9, le débiaisage n'étant en revanche pas testé.

6.2.1 Equations de l'observateur dans le cas bruité

En faisant intervenir le bruit de mesure sur les équations de la modélisation classique (4.32) de l'observateur non linéaire de Luenberger, celles-ci deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{z}_j &= -\lambda_j z_j + \eta_j , \\ \dot{c}_j &= -\lambda_j c_j - 2(y_{b_u} - Ry_{b_i} + \lambda_j Ly_{b_i}) , \\ \eta_j &= c_j^T (y_{b_u} - Ry_{b_i}) - \lambda_j |Ly_{b_i}|^2 ,\end{aligned}\tag{6.7}$$

où y_{b_u} et y_{b_i} sont les mesures bruitées des tensions et des courants. Les indices j correspondent aux différents pôles λ_j .

D'après (4.33), on en déduit une estimation $\widehat{\Phi}$ du vecteur de flux en résolvant les équations :

$$(c_j + 2Ly_{b_i})^T \widehat{\Phi} = z_j - c_j^T Ly_{b_i} - |Ly_{b_i}|^2 , \quad 1 \leq j \leq m ,\tag{6.8}$$

que l'on réécrit :

$$\tilde{c}_j^T \widehat{\Phi} = \tilde{z}_j ,\tag{6.9}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}\tilde{c}_j &= c_j + 2Ly_{b_i} , \\ \tilde{z}_j &= z_j - c_j^T Ly_{b_i} - |Ly_{b_i}|^2 .\end{aligned}\tag{6.10}$$

Avec w_u et w_i les bruits de mesure respectifs sur les tensions et les courants, les mesures bruitées s'écrivent :

$$y_{b_u} = u + w_u \quad , \quad y_{b_i} = i + w_i .\tag{6.11}$$

Dans le cadre de la solution particulière (2.21), u et i se mettent sous la forme :

$$u = Uv_u \quad \text{et} \quad i = Iv_i ,\tag{6.12}$$

avec :

$$v_u(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_u) \\ \sin(\omega t + \varphi_u) \end{pmatrix} , \quad v_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \sin(\omega t + \varphi_i) \end{pmatrix} .\tag{6.13}$$

Il nous reste désormais à caractériser les bruits w_u et w_i . Ce point fait l'objet du paragraphe 6.2.2.

6.2.2 Modèle de bruit

Remarque : On met en garde le lecteur à propos de la ressemblance entre les notations utilisées pour le bruit w , la vitesse électrique ω et l'aléa \bar{w} .

Modèle de bruit

Notre modèle de bruit s'appuie sur les observations faites dans le chapitre 3. Pour satisfaire notre hypothèse d'ergodicité et plus précisément de la coïncidence entre statistiques stochastiques et statistiques temporelles, et au vu du paragraphe [14, §XI.7], nous supposons que le bruit \mathbf{b} sur une tension ou un courant est un processus stochastique stationnaire au sens faible (voir [14, §II.8.b]), de moyenne nulle et de fonction de covariance continue. D'après [14, Theorem XI.4.1], ce bruit peut s'écrire :

$$\mathbf{b}(t, \bar{\omega}) = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) d\mathbf{b}_c(\omega, \bar{\omega}) + \int_0^{\infty} \sin(\omega t) d\mathbf{b}_s(\omega, \bar{\omega}) , \quad (6.14)$$

où $\bar{\omega}$ est l'aléa pris dans un ensemble probabilisé, l'intégrale est une intégrale stochastique au sens de [14, §IX.2] et \mathbf{b}_c et \mathbf{b}_s sont des processus à accroissements orthogonaux comme définis dans [14, §II.10]. Ici pour éviter les difficultés de technique mathématique et nous permettre d'aller au plus vite à une quantification des effets des bruits, nous remplaçons l'intégrale stochastique ci-dessus par une somme finie et prenons donc (voir [14, Example XI.3.5]) :

$$\mathbf{b}(t, \bar{\omega}) = \sum_{k=1}^K [\cos(\omega_k t) \mathbf{b}_{c,k}(\bar{\omega}) + \sin(\omega_k t) \mathbf{b}_{s,k}(\bar{\omega})] [\omega_k - \omega_{k-1}] , \quad (6.15)$$

où les réels ω_k satisfont : $0 \leq \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_k < \dots < \omega_K$, et où les $\mathbf{b}_{c,k}$ et $\mathbf{b}_{s,k}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi. Par la suite nous aurons besoin de la bornitude de ces variables. Elles ne peuvent donc pas suivre une loi gaussienne. En revanche, elles peuvent par exemple suivre une loi équidistribuée entre deux valeurs ou encore avoir une répartition en cloche mais à support fini (en suivant par exemple une loi gaussienne tronquée). C'est cette dernière hypothèse qui semble expérimentalement la plus pertinente, comme nous l'avons constaté au paragraphe 3.3.1 sur la figure 3.4(c).

En prenant des coordonnées polaires pour le vecteur $(\mathbf{b}_{c,k}, \mathbf{b}_{s,k})[\omega_k - \omega_{k-1}]$, nous réécrivons ceci sous la forme¹ :

$$\mathbf{b}(t, \bar{\omega}) = \sum_{k=1}^K B_k(\bar{\omega}) \cos(\omega_k t + \varphi_k(\bar{\omega})) . \quad (6.16)$$

Enfin, aussi bien pour les tensions que pour les courants, nous supposons qu'il n'y a qu'une source unique pour le bruit qui donne naissance à un même signal pour les

1. Cette forme est celle donnée directement par le Théorème de Karhunen-Loève [3, §1.4] lorsqu'on s'intéresse à la représentation spectrale sur un intervalle de temps compact.

composantes α et β , à un déphasage de $\pi/2$ près. Les bruits w_u et w_i sont donc :

$$\begin{aligned} w_u(t, \bar{\omega}) &= \sum_{k=1}^K b_{u_k}(t, \bar{\omega}) = \sum_{k=1}^K B_{u_k}(\bar{\omega}) \begin{pmatrix} \cos(\omega_k t + \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})) \\ \sin(\omega_k t + \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})) \end{pmatrix}, \\ w_i(t, \bar{\omega}) &= \sum_{l=1}^L b_{i_l}(t, \bar{\omega}) = \sum_{l=1}^L B_{i_l}(\bar{\omega}) \begin{pmatrix} \cos(\omega_l t + \varphi_{b_{i_l}}(\bar{\omega})) \\ \sin(\omega_l t + \varphi_{b_{i_l}}(\bar{\omega})) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Il nous sera utile d'utiliser les notations plus compactes :

$$w_u(t, \bar{\omega}) = \sum_{k=1}^K e_k(t) Y_{u_k}(\bar{\omega}) \quad , \quad w_i(t, \bar{\omega}) = \sum_{l=1}^L e_l(t) Y_{i_l}(\bar{\omega}) \quad , \quad (6.18)$$

où :

$$\begin{aligned} e_k(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_k t) & -\sin(\omega_k t) \\ \sin(\omega_k t) & \cos(\omega_k t) \end{pmatrix} \quad , \quad e_l(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_l t) & -\sin(\omega_l t) \\ \sin(\omega_l t) & \cos(\omega_l t) \end{pmatrix} \quad , \\ Y_{u_k}(\bar{\omega}) &= B_{u_k}(\bar{\omega}) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})) \\ \sin(\varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})) \end{pmatrix} \quad , \quad Y_{i_l}(\bar{\omega}) = B_{i_l}(\bar{\omega}) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{b_{i_l}}(\bar{\omega})) \\ \sin(\varphi_{b_{i_l}}(\bar{\omega})) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

En notant \mathfrak{E} l'espérance, nous supposons :

$$\begin{aligned} |B_{u_k}(\bar{\omega})| &\leq b_{proba} \quad \forall \bar{\omega} \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{u_k}(\bar{\omega}) \cos \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})] &= \mathfrak{E}[B_{u_k}(\bar{\omega}) \sin \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})] = 0 \quad \forall k \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{u_k}(\bar{\omega}) B_{u_l}(\bar{\omega}) \cos \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega}) \sin \varphi_{b_{u_l}}(\bar{\omega})] &= 0 \quad \forall k, l \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{u_k}(\bar{\omega}) B_{u_l}(\bar{\omega}) \cos \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega}) \cos \varphi_{b_{u_l}}(\bar{\omega})] &= 0 \quad \forall k \neq l \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{u_k}(\bar{\omega}) B_{u_l}(\bar{\omega}) \sin \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega}) \sin \varphi_{b_{u_l}}(\bar{\omega})] &= 0 \quad \forall k \neq l \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{u_k}^2(\bar{\omega}) \cos^2 \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})] &= E[B_{u_k}^2(\bar{\omega}) \sin^2 \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega})] = \frac{\sigma_{b_{u_k}}^2}{2} \quad \forall k \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{u_k}^2(\bar{\omega})] &= \sigma_{b_{u_k}}^2 \quad \forall k \quad , \\ \mathfrak{E}[B_{i_l}^2(\bar{\omega})] &= \sigma_{b_{i_l}}^2 \quad \forall l \quad , \end{aligned} \quad (6.20)$$

où la borne supposée b_{proba} sera déterminée à partir des expériences dans le paragraphe suivant.

Le bruit total est donc vu comme la somme de bruits à différentes fréquences. Nous allons, dans un premier temps, nous limiter à l'étude de l'impact d'une seule des composantes de chacun des bruits. On choisit de prendre une composante différente - la k -ème pour les tensions, la l -ème pour les courants - pour le bruit sur les tensions et pour le bruit sur les courants.

On note alors :

$$\begin{aligned} b_u(t, \bar{\omega}) &= b_{u_k}(t, \bar{\omega}) \quad , \quad B_u(\bar{\omega}) = B_{u_k}(\bar{\omega}) \quad , \quad \varphi_{b_u}(\bar{\omega}) = \varphi_{b_{u_k}}(\bar{\omega}) \quad , \quad \omega_u = \omega_k \quad , \\ b_i(t, \bar{\omega}) &= b_{i_l}(t, \bar{\omega}) \quad , \quad B_i(\bar{\omega}) = B_{i_l}(\bar{\omega}) \quad , \quad \varphi_{b_i}(\bar{\omega}) = \varphi_{b_{i_l}}(\bar{\omega}) \quad , \quad \omega_i = \omega_l \quad . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} b_u(t, \bar{\omega}) &= B_u(\bar{\omega})v_{b_u}(t, \bar{\omega}) \quad , \\ b_i(t, \bar{\omega}) &= B_i(\bar{\omega})v_{b_i}(t, \bar{\omega}) \quad , \end{aligned} \quad (6.22)$$

avec :

$$v_{b_u}(t, \bar{\omega}) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_u t + \varphi_{b_u}(\bar{\omega})) \\ \sin(\omega_u t + \varphi_{b_u}(\bar{\omega})) \end{pmatrix} \quad , \quad v_{b_i}(t, \bar{\omega}) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t + \varphi_{b_i}(\bar{\omega})) \\ \sin(\omega_i t + \varphi_{b_i}(\bar{\omega})) \end{pmatrix} \quad . \quad (6.23)$$

On étudie ainsi le cas où :

$$y_{b_u}(t, \bar{\omega}) = u(t) + b_u(t, \bar{\omega}) \quad , \quad y_{b_i}(t, \bar{\omega}) = i(t) + b_i(t, \bar{\omega}) \quad . \quad (6.24)$$

Par la suite, pour alléger les notations, les dépendances des différents signaux et grandeurs à t et $\bar{\omega}$ ne seront plus forcément indiquées.

Détermination expérimentale de la borne b_{proba} dans le cas des tensions

Avant de nous attaquer à la résolution des équations de l'observateur dans le cas bruité, nous proposons une détermination expérimentale de la borne b_{proba} que nous avons introduit ci-dessus telle que $|B_{u_k}(\bar{\omega})| \leq b_{proba}$ pour tout $\bar{\omega}$. Avant de nous attaquer à la résolution des équations de l'observateur dans le cas bruité, nous proposons une détermination expérimentale de cette borne.

Nous avons caractérisé expérimentalement au paragraphe 3.3.1 les bruits sur les tensions et courants dans les repères (α, β) et (d, q) à partir d'enregistrements provenant d'essais réalisés au banc SMILE 1.0 (cf. §8.1.2). Nous disposons donc des signaux temporels et des distributions des différents bruits, les écarts-types évalués ayant été regroupés dans les tableaux 3.1 et 3.3. Nous nous limitons ici au cas du bruit sur les tensions.

Avec le modèle de bruit défini au paragraphe précédent, nous obtenons, pour tout $T \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T e_k(t)^T w_u(t, \bar{\omega}) dt &= \int_0^T e_k(t)^T \sum_{k_a} e_{k_a}(t) Y_{u_{k_a}}(\bar{\omega}) dt \\
 &= \sum_{k_a} \int_0^T \begin{pmatrix} \cos([\omega_k - \omega_{k_a}]t) & \sin([\omega_k - \omega_{k_a}]t) \\ -\sin([\omega_k - \omega_{k_a}]t) & \cos([\omega_k - \omega_{k_a}]t) \end{pmatrix} Y_{u_{k_a}}(\bar{\omega}) dt \\
 &= TY_{u_k}(\bar{\omega}) \\
 &\quad + \sum_{k_a \neq k} \int_0^T \begin{pmatrix} \cos([\omega_k - \omega_{k_a}]t) & \sin([\omega_k - \omega_{k_a}]t) \\ -\sin([\omega_k - \omega_{k_a}]t) & \cos([\omega_k - \omega_{k_a}]t) \end{pmatrix} Y_{u_{k_a}}(\bar{\omega}) dt \\
 &= TY_{u_k}(\bar{\omega}) + R(T, \bar{\omega}) ,
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

où la fonction $T \mapsto |R(T, \bar{\omega})|$ est une somme finie d'intégrales de fonctions périodiques de moyennes nulles. T n'étant pas forcément multiple de la période de ces fonctions, un résidu fini peut subsister. La fonction $T \mapsto |R(T, \bar{\omega})|$ est donc bornée indépendamment de $\bar{\omega}$, ce qui nous donne :

$$Y_{u_k}(\bar{\omega}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k(t)^T w_u(t, \bar{\omega}) dt , \quad \forall \bar{\omega} , \tag{6.26}$$

et donc aussi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
 |B_{u_k}(\bar{\omega})| = |Y_{u_k}(\bar{\omega})| &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |e_k(t)^T w_u(t, \bar{\omega})| dt \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |w_u(t, \bar{\omega})| dt \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |w_u(t, \bar{\omega})|^2 dt} , \quad \forall \bar{\omega} .
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Une valeur possible pour possible b_{proba} est donc :

$$b_{proba} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |w_u(t, \bar{\omega})|^2 dt} , \tag{6.28}$$

avec T suffisamment grand.

La figure 6.1 présente alors en bleu la valeur calculée de cette borne à différents régimes. Puis, après constat d'une dépendance d'allure quadratique de la valeur de la borne en fonction du régime, on détermine par moindres carrés la fonction $b_{proba} = 8,99.10^{-8}\omega_m^2 + 8,32.10^{-5}\omega_m + 0,207$ avec ω_m la vitesse mécanique exprimée en tr/min, laquelle semble une bonne candidate et permet l'extrapolation. Elle est représentée en rouge sur la figure. Notons que cette valeur de la borne n'est qu'un ordre de grandeur obtenu sur un moteur particulier, destinée à être utilisée plus loin dans le cadre d'une application numérique visant à valider une approximation.

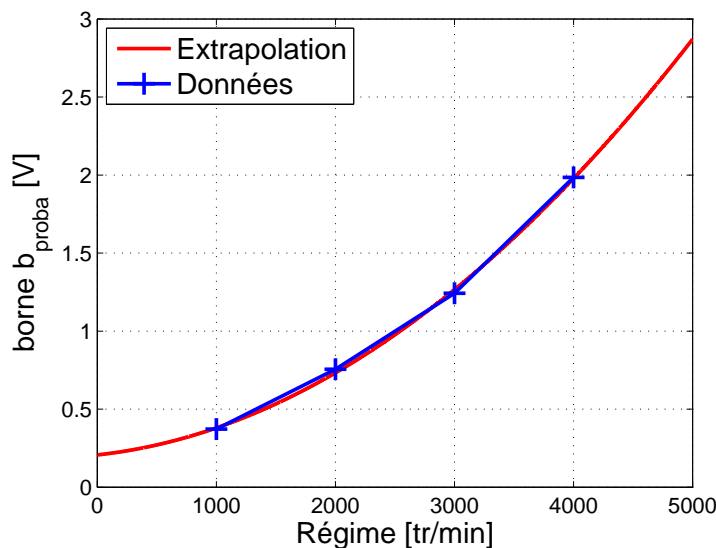


FIGURE 6.1 – Valeur de la borne b_{proba} en fonction du régime et extrapolation

6.2.3 Résolution des équations de l'observateur dans le cas bruité : Prise en compte d'une unique composante fréquentielle de chacun des bruits

Maintenant que les équations de l'observateur dans le cas bruité et le modèle de bruit ont été établis, nous débutons dans ce paragraphe, et poursuivons jusqu'au paragraphe 6.2.6, l'étude de la résolution des équations de l'observateur dans le cas bruité, comme nous l'avions fait dans le cas non bruité au paragraphe 4.7. A nouveau, nous travaillons dans le cadre de la solution particulière. Les calculs étant incomparablement plus complexes que dans le cas sans bruit, nous nous limiterons en revanche à l'étude du cas à deux pôles réels. Si le lecteur motivé, désœuvré et un peu fou souhaite s'atteler à la résolution du non moins complexe cas complexe, les équations du cas non bruité du paragraphe 4.7.2 peuvent lui servir de point de départ. Nous nous appuyerons d'ailleurs

nous-mêmes beaucoup sur leurs homologues réelles du paragraphe 4.7.1. Par ailleurs, pour ne point trop effrayer le lecteur, un condensé des calculs les plus fastidieux a été placé en annexe A. Pour débiter cette résolution, nous considérons le cas ne tenant compte que d'une seule composante fréquentielle du bruit w_u sur les tensions et d'une seule composante fréquentielle du bruit w_i sur les courants. L'ensemble des composantes fréquentielles sera pris en compte à partir du paragraphe 6.2.8. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 6.1. *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions et une composante du bruit de mesure w_i sur les courants, le vecteur $\hat{\Phi}$ à estimer est obtenu en résolvant :*

$$C\hat{\Phi} = Z \quad , \quad (6.29)$$

avec la matrice carrée C et le vecteur Z donnés par :

$$\begin{aligned} C &= C_0 + C_u B_u + C_i B_i \quad , \\ Z &= Z_0 + Z_u B_u + Z_i B_i + Z_{ii} B_i^2 + Z_{uu} B_u^2 + Z_{ui} B_u B_i \quad , \end{aligned} \quad (6.30)$$

les expressions des différents termes intervenant dans les expressions de C et Z étant explicitées au paragraphe A.2.

Démonstration. La preuve figure en annexe au paragraphe A.2. □

C'est ici qu'apparaît la difficulté majeure de cette étude, l'inversion de la matrice C et de surcroît le produit $C^{-1}Z$ étant quasiment irréalisables de manière formelle. Une issue afin de poursuivre l'étude est alors de réaliser des approximations.

6.2.4 Restriction à l'étude de l'impact du bruit sur les tensions sur l'intensité du flux et approximations

La poursuite de l'étude nécessitant la simplification du problème, nous allons commencer par réduire l'étendue de celui-ci en nous focalisant sur l'essentiel, à savoir sur l'estimation du flux ϕ , qui est, des deux paramètres estimés, celui qui nous intéresse en premier lieu du fait de son lien avec la température. Cependant, ceci divise la tâche à accomplir par deux, mais ne rend pas le calcul de $C^{-1}Z$ plus aisé. Remarquons alors que l'étude de sensibilité à une mauvaise connaissance des amplitudes des courants et tensions du paragraphe 4.8 nous a laissé entrevoir la probable dominance de l'impact

sur l'estimation du flux ϕ du bruit sur les tensions vis-à-vis de l'impact sur cette estimation du bruit sur les courants. Cette première impression étant confirmée en simulation un peu plus loin, en fin de paragraphe 6.3.1, nous allons désormais faire l'hypothèse que l'impact sur l'estimation du flux du bruit sur les courants est négligeable par rapport à l'impact du bruit sur les tensions sur le flux ϕ . Nous nous limitons ainsi, à partir de ce point, à cette étude de l'impact du bruit sur les tensions sur l'estimation du flux. L'étude de l'impact du bruit sur les courants se ferait de manière analogue avec des calculs et expressions "légèrement" plus compliqués. Les termes croisés courants-tensions pourraient alors être considérés comme nuls par hypothèse d'indépendance des variables aléatoires relatives aux bruits sur les tensions et aux bruits sur les courants. On cherche donc à résoudre $C\hat{\Phi} = Z$ dans le cas où C_i , Z_i , Z_{ii} et Z_{ui} sont nuls, c'est-à-dire :

$$(C_0 + C_u B_u)\hat{\Phi} = Z_0 + Z_u B_u + Z_{uu} B_u^2, \quad (6.31)$$

i.e.

$$\hat{\Phi} = (C_0 + C_u B_u)^{-1}(Z_0 + Z_u B_u + Z_{uu} B_u^2). \quad (6.32)$$

L'inversion de C et le produit $C^{-1}Z$ n'en restent cependant pas moins inenvisageables. À ce stade il est intéressant d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Soit M une matrice de norme strictement inférieure à 1. Alors, en posant :*

$$S_n = \sum_{i=0}^n M^i, \quad (6.33)$$

nous avons, avec \mathcal{I} la matrice identité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = (\mathcal{I} - M)^{-1}, \quad \|S_n - (\mathcal{I} - M)^{-1}\| \leq \frac{\|M\|^{n+1}}{1 - \|M\|}. \quad (6.34)$$

Remarquons que l'inversibilité de la matrice $\mathcal{I} - M$ pour une norme $\|M\|$ suffisamment petite est une simple conséquence de la continuité du déterminant. L'intérêt de la proposition ci-dessus est de quantifier ce "suffisamment petite" et de donner une estimation de l'erreur.

Démonstration. Soit \mathcal{T} la fonction matricielle :

$$\mathcal{T}(S) = \mathcal{I} + M S. \quad (6.35)$$

Pour deux matrices quelconques S_a et S_b , nous obtenons :

$$\|\mathcal{T}(S_a) - \mathcal{T}(S_b)\| = \|M(S_a - S_b)\| \leq \|M\| \|S_a - S_b\|. \quad (6.36)$$

D'après notre hypothèse sur M , la fonction \mathcal{T} est une contraction. D'après le théorème du point fixe de Banach, puisque la suite S_n vérifie la relation $\mathcal{T}(S_n) = S_{n+1}$, elle admet un point fixe S^* satisfaisant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S^* = \mathcal{T}(S^*) = \mathcal{I} + M S^* , \quad (6.37)$$

et donc :

$$S^*(\mathcal{I} - M) = \mathcal{I} , \text{ soit } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (\mathcal{I} - M)^{-1} . \quad (6.38)$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_n - S^*\| &= \|\mathcal{T}(S_{n-1}) - \mathcal{T}(S^*)\| \leq \|M\| \|S_{n-1} - S^*\| \\ &\leq \|M\|^2 \|S_{n-2} - S^*\| \\ &\leq \|M\|^{n-1} \|S_1 - S^*\| . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Or :

$$\begin{aligned} \|S_1 - S^*\| &= \|\mathcal{T}(S_0) - \mathcal{T}(S^*)\| \leq \|\mathcal{T}(S_0) - \mathcal{T}(S_1)\| + \|\mathcal{T}(S_1) - \mathcal{T}(S^*)\| \\ &\leq \|M\| \|S_0 - S_1\| + \|M\| \|S_1 - S^*\| \\ &\leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|S_0 - S_1\| = \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|M\| , \end{aligned} \quad (6.40)$$

donc :

$$\|S_n - (\mathcal{I} - M)^{-1}\| = \|S_n - S^*\| \leq \frac{\|M\|^{n+1}}{1 - \|M\|} . \quad (6.41)$$

□

Ainsi, si une norme de $C_0^{-1}C_uB_u$ est strictement inférieure à 1, alors nous avons, en prenant $M = -C_0^{-1}C_uB_u$ et $n = 2$:

$$\left\| \left[I - (C_0^{-1}C_uB_u) + (C_0^{-1}C_uB_u)^2 \right] - (I + C_0^{-1}C_uB_u)^{-1} \right\| \leq \frac{\|C_0^{-1}C_uB_u\|^3}{1 - \|C_0^{-1}C_uB_u\|} . \quad (6.42)$$

Puisque nous avons :

$$\widehat{\Phi} = (C_0 + C_uB_u)^{-1}(Z_0 + Z_uB_u + Z_{uu}B_u^2) , \quad (6.43)$$

et comme :

$$(I + C_0^{-1}C_uB_u)^{-1} = (C_0 + C_uB_u)^{-1}C_0 = \widehat{\Phi}(Z_0 + Z_uB_u + Z_{uu}B_u^2)^{-1}C_0 , \quad (6.44)$$

nous en déduisons :

$$\|\widehat{\Phi} - [I - (C_0^{-1}C_u B_u) + (C_0^{-1}C_u B_u)^2] C_0^{-1}[Z_0 + Z_u B_u + Z_{uu} B_u^2]\| \leq \frac{\|C_0^{-1}C_u B_u\|^3}{1 - \|C_0^{-1}C_u B_u\|} \|C_0^{-1}[Z_0 + Z_u B_u + Z_{uu} B_u^2]\| .$$

Nous avons donc une approximation de $\widehat{\Phi}$ qui est d'autant meilleure que la norme de $C_0^{-1}C_u B_u$ est petite. La matrice $C_0^{-1}C_u B_u$ étant homogène de degré 1 en les bruits, sa norme sera d'autant plus petite que le rapport signal sur bruit sera grand. La norme de $C_0^{-1}C_u$ est calculée et étudiée à la section 6.2.5.

Nous allons utiliser cette approximation pour en obtenir une pour l'estimation du module $\widehat{\phi} = |\widehat{\Phi}|$ du flux total. Notre approximation est :

$$\widehat{\Phi} \approx (C_0^{-1} - C_0^{-1}C_u C_0^{-1}B_u + C_0^{-1}C_u C_0^{-1}C_u C_0^{-1}B_u^2)C_0^{-1}[Z_0 + Z_u B_u + Z_{uu} B_u^2] . \quad (6.45)$$

En nous limitant à l'ordre 2 en $\|B_u\|$, nous obtenons :

$$\widehat{\Phi} \approx \widehat{\Phi}_0 + \Phi_u B_u + \Phi_{uu} B_u^2 , \quad (6.46)$$

avec $\widehat{\Phi}_0$, le terme non bruité, donné par (4.66), et les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_u &= C_0^{-1}Z_u - C_0^{-1}C_u \widehat{\Phi}_0 , \\ \Phi_{uu} &= C_0^{-1}Z_{uu} - C_0^{-1}C_u \Phi_u . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}^2 &\approx |\widehat{\Phi}_0 + \Phi_u B_u + \Phi_{uu} B_u^2|^2 \\ &\approx \widehat{\phi}_0^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u B_u + [|\Phi_u|^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}] B_u^2 , \end{aligned} \quad (6.48)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi} &\approx \sqrt{\widehat{\phi}_0^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u B_u + [|\Phi_u|^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}] B_u^2} \\
 &\approx \widehat{\phi}_0 \sqrt{1 + \frac{2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u B_u}{\widehat{\phi}_0^2} + \frac{[|\Phi_u|^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}] B_u^2}{\widehat{\phi}_0^2}} \\
 &\approx \widehat{\phi}_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u B_u}{\widehat{\phi}_0^2} + \frac{[|\Phi_u|^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}] B_u^2}{\widehat{\phi}_0^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{8} \left[\frac{2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u B_u}{\widehat{\phi}_0^2} + \frac{[|\Phi_u|^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}] B_u^2}{\widehat{\phi}_0^2} \right]^2 \right) \\
 &\approx \widehat{\phi}_0 + \frac{\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u B_u}{\widehat{\phi}_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{[|\Phi_u|^2 + 2\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}] B_u^2}{\widehat{\phi}_0} - \frac{(\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u)^2}{\widehat{\phi}_0^3} \right] B_u^2.
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Afin d'obtenir une approximation de notre estimation $\hat{\phi}$ du module du flux, il est donc nécessaire de calculer en particulier $C_0^{-1}C_u$, $C_0^{-1}Z_u$, $C_0^{-1}Z_{uu}$, Φ_u , Φ_{uu} et $\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u$, $|\Phi_u|^2$ et $\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}$. Ces calculs sont réalisés en annexe au paragraphe A.3 et aboutissent à la proposition 6.4. Avant cela, le paragraphe 6.2.5 se consacre à la validation de l'approximation par le calcul d'une norme de $C_0^{-1}C_u$.

6.2.5 Calcul de la norme de $C_0^{-1}C_u$ et validation de l'approximation

Afin de pouvoir valider l'approximation réalisée au paragraphe précédent, il est nécessaire de calculer une norme de $C_0^{-1}C_u$. Nous avons choisi celle de Frobenius.

Proposition 6.3. *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions, et en tenant compte des approximations réalisées dans la partie 6.2.4, la norme de Frobenius de $C_0^{-1}C_u$ est donnée par :*

$$\left\| C_0^{-1}C_u \right\|_F = \frac{1}{\omega \widehat{\phi}_0} \sqrt{\frac{(1 + \alpha_L^2)(1 + \rho_1^2)(1 + \rho_2^2)}{(\rho_1^2 + \alpha_L^2)(\rho_2^2 + \alpha_L^2)}}, \tag{6.50}$$

avec $\alpha_L = \frac{\omega_u}{\omega}$, $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\omega}$ et $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\omega}$.

Démonstration. La preuve figure en annexe au paragraphe A.4. □

Nous avons vu dans la section 6.2.4 que pour valider l'approximation effectuée, la norme de $C_0^{-1}C_u B_u$ devait être strictement inférieure à 1. On rappelle que, d'après les hypothèses sur le bruit effectuées dans la section 6.2.2, on a $|B_{u_k}(\bar{\omega})| \leq b_{proba}$ pour

tout aléa $\bar{\omega}$. Ainsi, $\|C_0^{-1}C_u B_u\|_F \leq \|C_0^{-1}C_u\|_F b_{proba}$ pour tout aléa $\bar{\omega}$. Dans le cadre de l'application numérique, nous utiliserons la formule déterminée en fin de paragraphe 6.2.2 pour calculer cette borne $b_{proba}(\omega)$ croissante avec le régime.

A régime fixé, la dérivée du carré de la norme par rapport à ρ_1 donne :

$$\frac{\partial \|C_0^{-1}C_u\|_F^2}{\partial \rho_1} = \frac{2\rho_1}{\omega^2 \hat{\phi}_0^2} \frac{(1 + \alpha_L^2)(1 + \rho_2^2)}{(\rho_1^2 + \alpha_L^2)^2 (\rho_2^2 + \alpha_L^2)} (\alpha_L^2 - 1). \quad (6.51)$$

L'expression de la dérivée par rapport à ρ_2 est évidemment obtenue en intervertissant ρ_1 et ρ_2 dans cette expression. Ainsi, si $\alpha_L > 1$ (soit $\omega_u > \omega$), la norme est croissante avec ρ_1 et ρ_2 ; si $\alpha_L < 1$ (soit $\omega_u < \omega$), la norme est décroissante avec ρ_1 et ρ_2 ; et si $\alpha_L = 1$ (soit $\omega_u = \omega$), la norme est constante avec ρ_1 et ρ_2 . Si $\alpha_L < 1$, les valeurs les plus élevées de la norme sont donc obtenues pour les faibles $\rho_1 = \lambda_1/\omega$ et $\rho_2 = \lambda_2/\omega$, i.e. pour les faibles pôles λ_1 et λ_2 , la norme étant d'autant plus élevée que le régime ω est élevé. Ainsi, pour $\alpha_L < 1$, le domaine de norme supérieure à 1 concerne les faibles pôles et s'étend à des pôles d'autant plus élevés que le régime est haut. Inversement, pour $\alpha_L > 1$, le domaine de norme supérieure à 1 concerne les pôles élevés et s'étend à des pôles d'autant plus faible que le régime est bas.

La figure 6.2 donne quelques aperçus des domaines de validité de l'approximation, les figures de gauche concernant le bas régime (60 tr/min) et celles de droite un plus haut régime (1000 tr/min). Pour l'application numérique, la valeur utilisée pour $\hat{\phi}_0$ est celle donnée pour ϕ par le tableau 8.1. Les figures 6.2(a) et 6.2(b) présentent, à régime fixé et pour différents jeux de pôles (faibles, intermédiaires et élevés), la valeur de la norme $\|C_0^{-1}C_u\|_F b_{proba}$ en fonction du rapport α_L de la composante fréquentielle ω_u du bruit sur les tensions sur le régime. On vérifie que, quel que soit le régime, quand $\alpha_L < 1$, la norme est d'autant plus faible que les pôles sont élevés et inversement quand $\alpha_L > 1$, la norme étant indépendante des pôles quand $\alpha_L = 1$. On constate également que seuls certains jeux de pôles sont valables sur tout le spectre, d'autres pouvant ne pas permettre une approximation valide à l'une ou l'autre des extrémités de celui-ci. Les figures 6.2(c) à 6.2(f) présentent, respectivement en trois et deux dimensions, la valeur de la norme en fonction des pôles à régime et composante fréquentielle fixés (on notera que les axes de 6.2(c) et 6.2(d) sont orientés différemment). Ces courbes s'intéressent aux zones les plus susceptibles de présenter des normes élevées, à savoir pour $\alpha_L > 1$ à bas régime et pour $\alpha_L < 1$ à "haut" régime, et confirment les tendances annoncées plus haut. Enfin, les figures 6.2(g) et 6.2(h) présentent, dans ces mêmes zones sensibles, les domaines d'invalidité de l'approximation (i.e. pour lesquels la norme est supérieure à 1) pour différents régimes en fonction des pôles λ_1 et λ_2 , la composante fréquentielle

étant fixée par rapport au régime. On y vérifie que pour que l'approximation soit valide à bas régime sur l'ensemble du spectre, les pôles doivent être d'autant plus faibles que le régime est bas, et inversement, qu'à haut régime ils doivent être d'autant plus élevés que le régime est élevé.

Finalement, la figure 6.2 met l'accent sur les quelques zones à problèmes potentiels, mais globalement l'approximation est valide sur un très large domaine, excepté à très bas régime. Ce constat confirme que nous pouvons poursuivre l'étude en réalisant l'approximation. Nous veillerons toutefois à nous assurer *a posteriori* que les pôles optimaux qui résulteront de cette étude seront dans les domaines de validité de l'approximation.

6.2.6 Estimation du flux après restriction de l'étude et approximations

La restriction à l'étude de l'impact du bruit sur les tensions sur l'estimation du flux et les approximations du paragraphe 6.2.4 nous permettent de calculer une estimation approchée de l'intensité du flux des aimants. Elle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 6.4. *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions, et en tenant compte des approximations réalisées dans la partie 6.2.4, l'estimation $\hat{\phi}$ de l'intensité du flux des aimants est approchée par :*

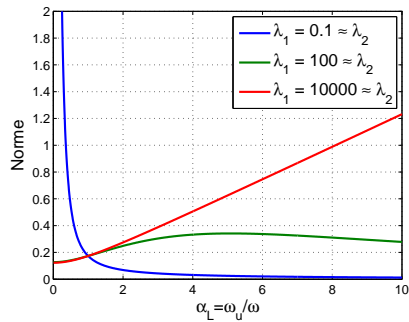
$$\hat{\phi} \approx \hat{\phi}_0 + \frac{T_2 B_u}{\omega \sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega T_1^2 B_u^2}{2E} + \frac{T_3 B_u^2}{\omega} - \frac{T_4 B_u^2}{\omega^2 E} \right), \quad (6.52)$$

les expressions de T_1 , T_2 , T_3 et T_4 étant explicitées au paragraphe A.3 par (A.78), (A.75) et (A.80).

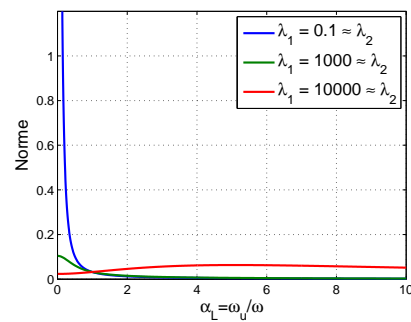
Démonstration. La preuve figure en annexe au paragraphe A.3. □

6.2.7 Moyenne temporelle du biais sur le flux estimé

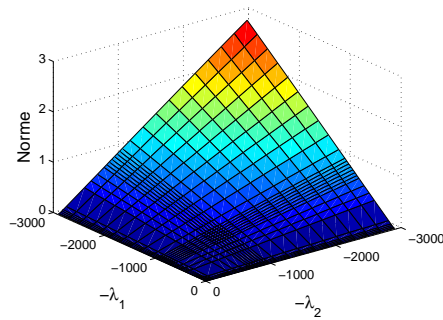
Les paragraphes 6.2.3 à 6.2.6 nous ont permis, en résolvant les équations de l'observateur, moyennant quelques hypothèses et approximations, de déterminer une expression approchée du flux estimé $\hat{\phi}$ en présence de bruit sur les tensions. Une seule composante fréquentielle de ce bruit a toutefois été prise en compte. L'objectif étant désormais que le flux estimé soit le plus proche possible du flux réel, autrement dit du flux $\hat{\phi}_0$, l'estimation du flux étant parfaite dans le cas non bruité, nous allons chercher



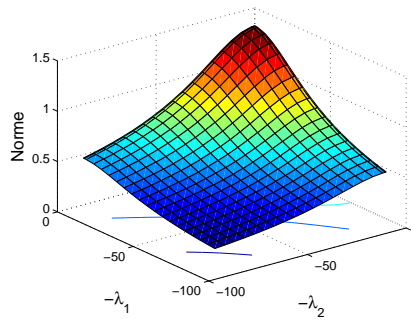
(a) $\omega_m = 60$ tr/min



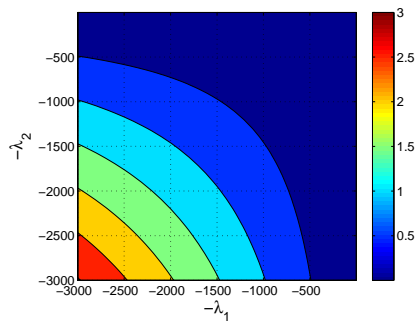
(b) $\omega_m = 6000$ tr/min



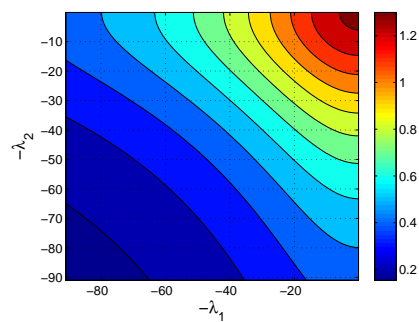
(c) $\omega_m = 60$ tr/min, $\alpha_L = 1000$



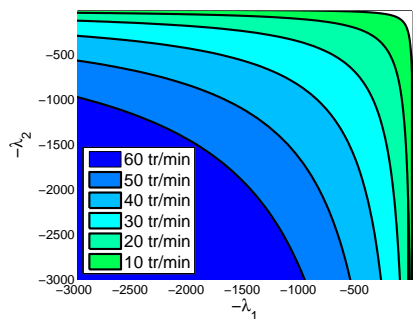
(d) $\omega_m = 1000$ tr/min, $\alpha_L = 0.1$



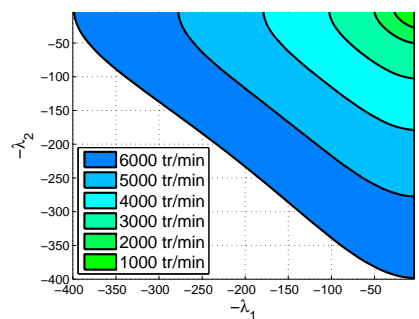
(e) $\omega_m = 60$ tr/min, $\alpha_L = 1000$



(f) $\omega_m = 1000$ tr/min, $\alpha_L = 0.1$



(g) Zones de norme > 1 , $\alpha_L = 1000$



(h) Zones de norme > 1 , $\alpha_L = 0.1$

FIGURE 6.2 – Etude du domaine de validité de l'approximation

à minimiser le biais d'estimation ou plutôt sa moyenne temporelle. A cette fin, nous déterminons tout d'abord dans ce paragraphe l'expression de la moyenne temporelle du biais causé par l'unique composante fréquentielle du bruit, avant de déterminer le biais moyen engendré par l'ensemble des composantes fréquentielles du bruit au paragraphe 6.2.8. Il sera alors temps de le minimiser au paragraphe 6.2.9.

Par définition, le biais sur $\hat{\phi}$ engendré par la composante $b_u(t, \bar{\omega})$ du bruit est donné par :

$$\mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) = \mathfrak{E}[\hat{\phi}] - \hat{\phi}_0, \quad (6.53)$$

Nous avons obtenu :

$$\mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) = \frac{\mathfrak{E}[B_u T_2]}{\omega \sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega \mathfrak{E}[B_u^2 T_1^2]}{2E} + \frac{\mathfrak{E}[B_u^2 T_3]}{\omega} - \frac{\mathfrak{E}[B_u^2 T_4]}{\omega^2 E} \right). \quad (6.54)$$

Puis, l'espérance de la moyenne temporelle étant égale à la moyenne temporelle, notée $\langle . \rangle$, de l'espérance, la moyenne temporelle du biais est donnée par :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{E[\langle B_u T_2 \rangle]}{\omega \sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega E[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{2E} + \frac{E[\langle B_u^2 T_3 \rangle]}{\omega} - \frac{E[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\omega^2 E} \right). \quad (6.55)$$

Proposition 6.5. *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions, et en tenant compte des approximations réalisées dans la partie 6.2.4, la moyenne temporelle $\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle$ du biais sur $\hat{\phi}$ engendré par la composante $b_u(t, \bar{\omega})$ est donnée par :*

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{\sigma_{b_u}^2}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega [(\Delta \gamma_u)^2 + (\Delta \delta_u)^2]}{4} + \frac{\Delta_i \Lambda_u}{\omega} - \frac{\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)}{2\omega^2} \right), \quad (6.56)$$

avec les notations définies par (A.4), (A.5), (A.6) et (A.7). Dans les cas particuliers où $\omega_u = \omega$ ou $\omega_u = 2\omega$, on a le biais moyen, indépendant de λ_1 et λ_2 , suivant :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{\sigma_{b_u}^2}{4\omega \sqrt{E}}. \quad (6.57)$$

Démonstration. La preuve figure en annexe au paragraphe A.5. □

6.2.8 Prise en compte de l'ensemble des composantes fréquentielles du bruit sur les tensions

Nous venons, dans les paragraphes précédents, de déterminer le biais moyen sur le flux engendré par l'une des composantes du bruit sur les tensions. Nous allons désormais nous intéresser au biais moyen engendré par l'intégralité du bruit sur les tensions. Pour ce faire, nous allons démontrer que le biais engendré par le bruit avec toutes ses composantes fréquentielles peut être approximé par la somme des biais pour chaque fréquence, c'est à dire que nous avons :

$$\langle \mathbf{b} \left(\widehat{\phi}, \sum_k b_{u_k}(t, \bar{\omega}) \right) \rangle \approx \sum_k \langle \mathbf{b}(\widehat{\phi}, b_{u_k}(t, \bar{\omega})) \rangle . \quad (6.58)$$

Pour ceci, nous reprenons à la source les équations de l'observateur en l'absence de bruit sur les courants. Par (6.7) nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\lambda c - 2(y_{b_u} - Ri + \lambda Li) , \\ \dot{z} &= -\lambda z + c^T (y_{b_u} - Ri) - \lambda |Li|^2 . \end{aligned} \quad (6.59)$$

En séparant partie déterministe, i.e. non bruitée, caractérisée par un indice 0 et reprenant les notations de la section 4.7, et partie bruitée caractérisée par un indice b , on obtient :

$$\begin{aligned} c &= c_0 + c_b , \\ \dot{c}_0 &= -\lambda c_0 - 2(u - Ri + \lambda Li) , \\ \dot{c}_b &= -\lambda c_b - 2w_u , \\ z &= z_0 + z_b , \\ \dot{z}_0 &= -\lambda z_0 + c_0^T (u - Ri) - \lambda |Li|^2 , \\ \dot{z}_b &= -\lambda z_b + c_0^T w_u + c_b^T (u - Ri + w_u) , \end{aligned} \quad (6.60)$$

avec, d'après (6.17) et (6.18) :

$$w_u(t, \bar{\omega}) = \sum_k e_k(t) Y_{u_k}(\bar{\omega}) = \sum_k b_{u_k}(t, \bar{\omega}) . \quad (6.61)$$

Puis d'après (6.9), on a :

$$\begin{aligned} (c_0 + c_b + 2Li)^T \widehat{\Phi} &= z_0 + z_b - c_0^T Li - c_b^T Li - |Li|^2 , \\ \text{soit : } (\tilde{c}_0 + c_b)^T \widehat{\Phi} &= \tilde{z}_0 + z_b - c_b^T Li . \end{aligned} \quad (6.62)$$

On remarque qu'en introduisant la matrice $\epsilon_k(t)$ vérifiant $\dot{\epsilon}_k = -\lambda\epsilon_k - 2e_k$, on obtient :

$$c_b(t, \bar{\omega}) = \sum_k \epsilon_k(t) Y_{u_k}(\bar{\omega}) , \quad (6.63)$$

c_b ainsi défini vérifiant en effet son équation différentielle (6.60). On en déduit :

$$\dot{z}_b = -\lambda z_b + \sum_k \left[c_0^T e_k Y_{u_k} + (u - Ri)^T \epsilon_k Y_{u_k} \right] + \sum_{k,l} Y_{u_k}^T \epsilon_k^T e_l Y_{u_l} . \quad (6.64)$$

En introduisant le vecteur z_{b_k} et la matrice $z_{b_{kl}}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{b_k} &= -\lambda z_{b_k} + \epsilon_k^T (u - Ri) + e_k^T c_0 , \\ \dot{z}_{b_{kl}} &= -\lambda z_{b_{kl}} + \epsilon_k^T e_l , \end{aligned} \quad (6.65)$$

on obtient de même l'expression de z_b :

$$z_b = \sum_k Y_{u_k}^T z_{b_k} + \sum_{k,l} Y_{u_k}^T z_{b_{kl}} Y_{u_l} . \quad (6.66)$$

En prenant deux pôles réels λ_1 et λ_2 , d'après (6.62), l'estimation $\hat{\Phi}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \tilde{c}_0(\lambda_1)^T + \sum_k Y_{u_k}^T \epsilon_k(\lambda_1)^T \\ \tilde{c}_0(\lambda_2)^T + \sum_l Y_{u_l}^T \epsilon_l(\lambda_2)^T \end{array} \right) \hat{\Phi} \\ &= \left(\begin{array}{c} \tilde{z}_0(\lambda_1) + \sum_m Y_{u_m}^T \left[z_{b_m}(\lambda_1) - \epsilon_m(\lambda_1)^T Li + \sum_n z_{b_{mn}} Y_{u_n} \right] \\ \tilde{z}_0(\lambda_2) + \sum_m Y_{u_m}^T \left[z_{b_m}(\lambda_2) - \epsilon_m(\lambda_2)^T Li + \sum_n z_{b_{mn}} Y_{u_n} \right] \end{array} \right) . \end{aligned} \quad (6.67)$$

Avec la matrice C_0 et le vecteur Z_0 définis par (A.38), et en posant :

$$\begin{aligned} C_{b1} &= \left(\begin{array}{c} \sum_k Y_{u_k}^T \epsilon_k(\lambda_1)^T \\ \sum_l Y_{u_l}^T \epsilon_l(\lambda_2)^T \end{array} \right) , \\ Z_{b1} &= \sum_m \left(\begin{array}{c} Y_{u_m}^T \left[z_{b_m}(\lambda_1) - \epsilon_m(\lambda_1)^T Li \right] \\ Y_{u_m}^T \left[z_{b_m}(\lambda_2) - \epsilon_m(\lambda_2)^T Li \right] \end{array} \right) , & Z_{b2} &= \sum_{m,n} \left(\begin{array}{c} Y_{u_m}^T z_{b_{mn}} Y_{u_n} \\ Y_{u_m}^T z_{b_{mn}} Y_{u_n} \end{array} \right) , \end{aligned}$$

le système constitué par l'équation (6.62) appliquée aux deux pôles λ_1 et λ_2 devient :

$$(C_0 + C_{b1})\widehat{\Phi} = Z_0 + Z_{b1} + Z_{b2} . \quad (6.68)$$

D'après la proposition 6.2, si la norme de la matrice $C_0^{-1}C_{b1}$ est inférieure à 1, nous avons :

$$\| [I - C_0^{-1}C_{b1} + C_0^{-1}C_{b1}C_0^{-1}C_{b1}] - (I + C_0^{-1}C_{b1})^{-1} \| \leq \frac{\|C_0^{-1}C_{b1}\|^3}{1 - \|C_0^{-1}C_{b1}\|} , \quad (6.69)$$

et donc :

$$\begin{aligned} & \| \widehat{\Phi} - [I - C_0^{-1}C_{b1} + C_0^{-1}C_{b1}C_0^{-1}C_{b1}] C_0^{-1}[Z_0 + Z_{b1} + Z_{b2}] \| \\ & \leq \frac{\|C_0^{-1}C_{b1}\|^3}{1 - \|C_0^{-1}C_{b1}\|} \|C_0^{-1}[Z_0 + Z_{b1} + Z_{b2}]\| . \end{aligned} \quad (6.70)$$

Comme précédemment le fait que la norme de $C_0^{-1}C_{b1}$ soit inférieure à 1 est impliquée par le fait que les vecteurs Y_{u_k} soient de normes suffisamment petites et donc qu'il en soit de même des B_{u_k} . Ainsi en se limitant à un développement au deuxième ordre en les Y_{u_k} , et en rappelant que $C_0^{-1}Z_0 = \widehat{\Phi}_0$, nous obtenons l'approximation :

$$\widehat{\Phi} \approx \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_{b1} + \widehat{\Phi}_{b2} , \quad (6.71)$$

en posant :

$$\widehat{\Phi}_{b1} = C_0^{-1}[Z_{b1} - C_{b1}\widehat{\Phi}_0] , \quad \widehat{\Phi}_{b2} = -C_0^{-1}C_{b1}C_0^{-1}[Z_{b1} - C_{b1}\widehat{\Phi}_0] + C_0^{-1}Z_{b2} , \quad (6.72)$$

qui sont des termes de degrés 1 et 2 en les Y_{u_k} .

Ainsi nous obtenons une approximation à l'ordre 2 en les Y_{u_k} de la norme du flux, à comparer à (6.49) :

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} = |\hat{\Phi}| &\approx \sqrt{|\hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}|^2} \\
&\approx |\hat{\Phi}_0| \sqrt{1 + 2 \frac{\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}}{|\hat{\Phi}_0|} + \frac{|\hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}|^2}{|\hat{\Phi}_0|^2}} \\
&\approx |\hat{\Phi}_0| \left(1 + \frac{1}{2} \left[2 \frac{\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}}{|\hat{\Phi}_0|} + \frac{|\hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}|^2}{|\hat{\Phi}_0|^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} \left[2 \frac{\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}}{|\hat{\Phi}_0|} + \frac{|\hat{\Phi}_{b1} + \hat{\Phi}_{b2}|^2}{|\hat{\Phi}_0|^2} \right]^2 \right) \\
&\approx \hat{\phi}_0 + \frac{\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b1}}{\hat{\phi}_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{|\hat{\Phi}_{b1}|^2 + 2\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b2}}{\hat{\phi}_0} - \frac{(\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b1})^2}{\hat{\phi}_0^3} \right].
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Une approximation du biais est donc :

$$\mathbf{b} \left(\hat{\phi}, \sum_k b_{u_k}(t, \bar{\omega}) \right) \approx \frac{\hat{\Phi}_0^T \mathfrak{E}[\hat{\Phi}_{b1}]}{\hat{\phi}_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{E}[|\hat{\Phi}_{b1}|^2] + 2\hat{\Phi}_0^T \mathfrak{E}[\hat{\Phi}_{b2}]}{\hat{\phi}_0} - \frac{\mathfrak{E}[(\hat{\Phi}_0^T \hat{\Phi}_{b1})^2]}{\hat{\phi}_0^3} \right]. \tag{6.74}$$

En utilisant les hypothèses (6.20), nous avons maintenant les expressions suivantes dont la caractéristique essentielle pour nous est que, dans leur version finale, la sommation ne porte que sur un seul indice :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}[\hat{\Phi}_{b1}] &= C_0^{-1} \mathfrak{E}[Z_{b1} - C_{b1} \hat{\Phi}_0] \\
&= C_0^{-1} \sum_k \mathfrak{E} \left[\begin{pmatrix} Y_{u_k}^T [z_{b_k}(\lambda_1) - \epsilon_k(\lambda_1)^T (\hat{\Phi}_0 + Li)] \\ Y_{u_k}^T [z_{b_k}(\lambda_2) - \epsilon_k(\lambda_2)^T (\hat{\Phi}_0 + Li)] \end{pmatrix} \right] \\
&= C_0^{-1} \sum_k \begin{pmatrix} \mathfrak{E}[Y_{u_k}]^T [z_{b_k}(\lambda_1) - \epsilon_k(\lambda_1)^T (\hat{\Phi}_0 + Li)] \\ \mathfrak{E}[Y_{u_k}]^T [z_{b_k}(\lambda_2) - \epsilon_k(\lambda_2)^T (\hat{\Phi}_0 + Li)] \end{pmatrix} \\
\mathfrak{E}[\hat{\Phi}_{b1}] &= 0.
\end{aligned} \tag{6.75}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}[\widehat{\Phi}_{b1}\widehat{\Phi}_{b1}^T] &= C_0^{-1}\mathfrak{E}\left[(Z_{b1}-C_{b1}\widehat{\Phi}_0)(Z_{b1}-C_{b1}\widehat{\Phi}_0)^T\right]C_0^{-1T} \\
&= \sum_{k,l}C_0^{-1}\mathfrak{E}\left[\begin{pmatrix} Y_{u_k}^T[z_{b_k}(\lambda_1)-\epsilon_k(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \\ Y_{u_k}^T[z_{b_k}(\lambda_2)-\epsilon_k(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. \times \begin{pmatrix} Y_{u_l}^T[z_{b_l}(\lambda_1)-\epsilon_l(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \\ Y_{u_l}^T[z_{b_l}(\lambda_2)-\epsilon_l(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \end{pmatrix}^T\right] \times C_0^{-1T} \\
&= \sum_{k,l}C_0^{-1}\begin{pmatrix} [z_{b_k}(\lambda_1)-\epsilon_k(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)]^T \\ [z_{b_k}(\lambda_2)-\epsilon_k(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)]^T \end{pmatrix} \mathfrak{E}[Y_{u_k}Y_{u_l}^T] \\
&\quad \times \left([z_{b_l}(\lambda_1)-\epsilon_l(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] [z_{b_l}(\lambda_2)-\epsilon_l(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)]\right) C_0^{-1T} \\
\mathfrak{E}[\widehat{\Phi}_{b1}\widehat{\Phi}_{b1}^T] &= \sum_k \frac{\sigma_{b_{uk}}^2}{2} C_0^{-1} \begin{pmatrix} [z_{b_k}(\lambda_1)-\epsilon_k(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)]^T \\ [z_{b_k}(\lambda_2)-\epsilon_k(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)]^T \end{pmatrix} \\
&\quad \times \left([z_{b_k}(\lambda_1)-\epsilon_k(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] [z_{b_k}(\lambda_2)-\epsilon_k(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)]\right) C_0^{-1T}. \tag{6.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0\mathfrak{E}[\widehat{\Phi}_{b2}] &= \mathfrak{E}\left[\sum_{k,l}\begin{pmatrix} Y_{u_k}^T\epsilon_k(\lambda_1)^T \\ Y_{u_k}^T\epsilon_l(\lambda_2)^T \end{pmatrix} C_0^{-1}\begin{pmatrix} Y_{u_l}^T[z_{b_l}(\lambda_1)-\epsilon_l(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \\ Y_{u_l}^T[z_{b_l}(\lambda_2)-\epsilon_l(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \end{pmatrix}\right] \\
C_0\mathfrak{E}[\widehat{\Phi}_{b2}] &= \sum_k \mathfrak{E}\left[\begin{pmatrix} Y_{u_k}^T\epsilon_k(\lambda_1)^T \\ Y_{u_k}^T\epsilon_l(\lambda_2)^T \end{pmatrix} C_0^{-1}\begin{pmatrix} Y_{u_k}^T[z_{b_k}(\lambda_1)-\epsilon_k(\lambda_1)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \\ Y_{u_k}^T[z_{b_k}(\lambda_2)-\epsilon_k(\lambda_2)^T(\widehat{\Phi}_0+Li)] \end{pmatrix}\right]. \tag{6.77}
\end{aligned}$$

Puisque chacune de ces expressions est une somme en k , où k est l'indice de la composante fréquentielle, nous avons bien établi que le biais total peut s'écrire, à chaque

instant t , comme une approximation de la somme des biais pour chaque fréquence et donc que nous avons bien (6.58).

Par les expressions (6.58) et (6.57), nous disposons ainsi d'une formule explicite du biais d'estimation $\mathbf{b}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_{b_{uk}})$ en fonction des pôles λ_1 et λ_2 et des variances $\sigma_{b_{uk}}^2$ des composantes du bruit de mesure, en supposant L, R, I, U et ω donnés par ailleurs. Donc, pour deux jeux de pôles $(\lambda_{1a}, \lambda_{2a})$ et $(\lambda_{1b}, \lambda_{2b})$, on obtient $\hat{\phi}_a = \hat{\phi}_0 + \mathbf{b}(\lambda_{1a}, \lambda_{2a}, \sigma_{b_{uk}})$ et $\hat{\phi}_b = \hat{\phi}_0 + \mathbf{b}(\lambda_{1b}, \lambda_{2b}, \sigma_{b_{uk}})$. En soustrayant ces deux estimations $\hat{\phi}_a - \hat{\phi}_b$, on obtient une équation en les $\sigma_{b_{uk}}$. Puis, en faisant la différence de K doublets d'estimations, on obtient K équations à K inconnues (les $\sigma_{b_{uk}}$). En résolvant ce système en les $\sigma_{b_{uk}}$ puis en substituant les solutions dans la formule explicite du biais $\mathbf{b}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_{b_{uk}})$, cette fonction devient connue et on peut débiaiser l'estimation. Si ce débiaisage n'a pas été testé, nous utilisons en revanche dans le paragraphe suivant l'expression obtenue du biais pour minimiser ce dernier sur l'estimation du flux et déterminer le rôle joué par le choix des pôles dans cette minimisation.

6.2.9 Minimisation de la moyenne temporelle du biais et détermination des pôles optimaux

Remarque : Les applications numériques réalisées dans ce paragraphe utilisent les valeurs données dans le tableau 8.1, ainsi que $i_d = -2A$ et un couple de 1Nm. Les amplitudes U et I des tensions et courants sont obtenues grâce aux expressions (2.23) et (2.24) et les phases φ_u et φ_i par (2.26).

Afin de réduire au maximum l'impact du bruit, on cherche à déterminer les pôles (λ_1, λ_2) permettant de minimiser le biais moyen sur l'estimation du flux. Comme explicité dans le paragraphe 6.2.2, on considère que le bruit sur les tensions est la somme des bruits aux différentes fréquences ω_k . Nous avons montré, dans le paragraphe 6.2.8, que sous certaines hypothèses que nous considérons remplies, le biais total peut être approximé par la somme des biais à ces différentes fréquences, dont l'expression en fonction de la fréquence est donné par (6.56). Par ailleurs, n'ayant pas d'information sur les valeurs respectives des $\sigma_{b_{uk}}^2$, nous considérons ici que toutes les composantes du bruit ont la même variance, i.e. que nous avons affaire à un bruit blanc à support spectral fini. Nous supposons donc les variances $\sigma_{b_{uk}}^2$ toutes égales : $\forall k, \sigma_{b_{uk}}^2 = \sigma_{b_u}$. Aussi cherche-t-on désormais, ne connaissant pas la valeur de $\sigma_{b_u}^2$, à minimiser par rapport aux pôles λ_1 et λ_2 et à différentes vitesses ω , le coût total J :

$$J(\lambda_1, \lambda_2, \omega) = \sum_{k=1}^K J_k(\lambda_1, \lambda_2, \omega)[\omega_k - \omega_{k-1}] , \quad (6.78)$$

avec le coût par composante J_k :

$$J_k(\lambda_1, \lambda_2, \omega) = \langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_{u_k}(t, \bar{\omega})) \rangle / \sigma_{b_u}^2 . \quad (6.79)$$

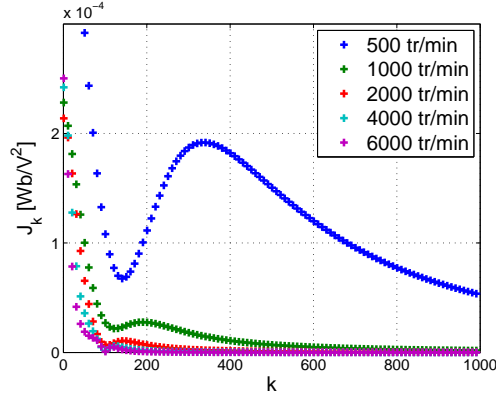
Pour $1 \leq K' \leq K$, on note $J_{K'}(\lambda_1, \lambda_2, \omega) = \sum_{k=1}^{K'} J_k(\lambda_1, \lambda_2, \omega)[\omega_k - \omega_{k-1}]$ le coût partiel sur les K' premières fréquences.

Idéalement, il s'agirait d'annuler, à ω fixé, le gradient de $J(\lambda_1, \lambda_2)$ en prenant garde aux éventuels minima locaux. Cependant, ce calcul étant quasiment irréalisable de manière formelle, nous allons évaluer le coût en tous points d'une grille sur λ_1 et λ_2 , à différentes vitesses fixées.

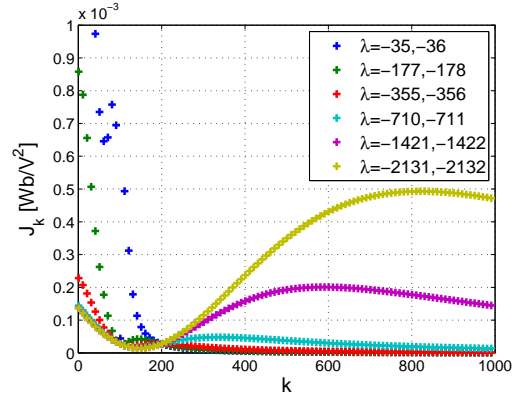
En chaque point des grilles, il s'agit de calculer $J(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$. En pratique, nous considérons les fréquences équiréparties $\omega_0 = 0, \omega_1, \dots, \omega_k = k\omega_1, \dots, \omega_K = K\omega_1$, avec $\omega_1 = 0.01\omega$. Pour déterminer la fréquence ω_K et la valeur de K à laquelle stopper la somme, intéressons-nous à la figure 6.3. Les figures de gauche comparent différents régimes et sont à pôles fixés à 355 et 356. Les figures de droite sont elles à régime fixé à 1000 tr/min et comparent différents pôles. Tout d'abord, les figures 6.3(a) et 6.3(b) présentent le coût par composante $J_k(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ pour les 1000 premières composantes spectrales $b_{u_k}(t, \bar{\omega})$ du bruit sur les tensions. Puis, sur les figures 6.3(c) à 6.3(f) sont représentés les coûts partiels $J_{K'}(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ sur les K' premières fréquences en fonction de K' . Les figures 6.3(e) et 6.3(f) sont des zooms sur les faibles valeurs de K' des deux figures précédentes. Le coût par composante étant d'après 6.3(a) et 6.3(b) toujours positifs, le coût partiel est une fonction croissante de K' . On remarque sur les figures 6.3(c) et 6.3(d) que ce coût partiel semble tendre vers une limite quand K' augmente, la convergence apparaissant d'autant plus lente que les pôles sont élevés et le régime faible. En considérant alors le "pire cas" quant à la rapidité de convergence du coût partiel vers sa limite, i.e. pour le régime le plus faible étudié et pour les pôles les plus importants de la grille de recherche, on choisit d'arrêter la somme pour $K=500000$ (soit $\omega_K = 5000\omega$), la fréquence étant alors suffisante pour avoir atteint une valeur très proche de la limite. Par ailleurs, on vérifie bien sur la figure 6.3(b) ce qu'indiquait (6.57) à la proposition 6.5, à savoir que pour $\omega_k = \omega$ et $\omega_k = 2\omega$, soit pour $k = 100$ et $k = 200$, le biais moyen est indépendant de la valeur des pôles.

Il nous est désormais possible d'évaluer J sur les grilles de recherche. La figure 6.4 présente un exemple de ces grilles, la croix rouge représentant le point de coût minimal. On note $\lambda_{opt}(\omega) = \underset{\lambda_1, \lambda_2}{\operatorname{argmin}} J(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$. Les pôles $\lambda_{opt}(\omega)$, obtenus par affinages successifs des grilles de recherche, ainsi que les coûts associés $J(\lambda_{opt}, \omega)$ sont alors présentés dans le tableau 6.1. Ces pôles optimaux et leurs coûts associés sont également

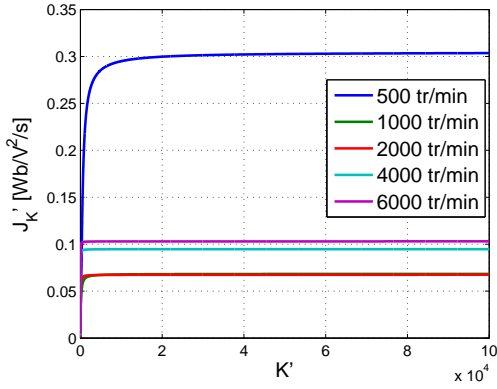
représentés en fonction du régime sur la figure 6.5.



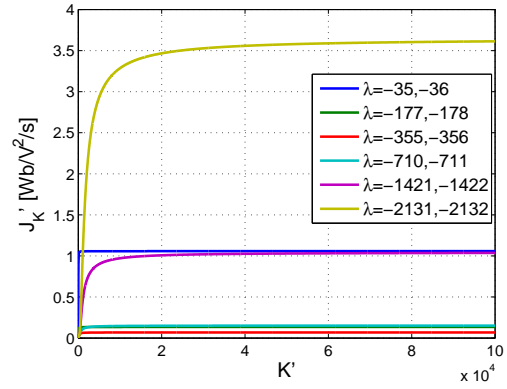
(a) Coût par composante pour $\lambda = 355, 356$



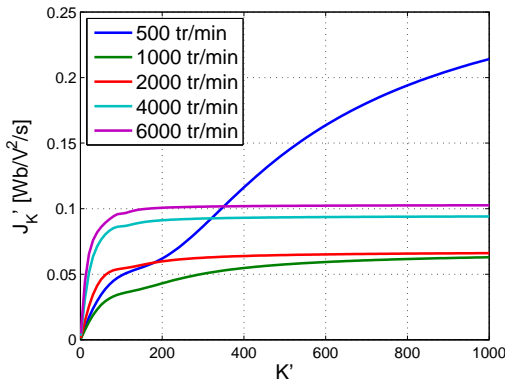
(b) Coût par composante pour $\omega_m = 1000$ tr/min



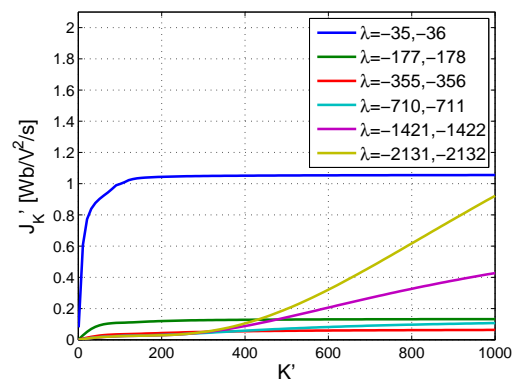
(c) Coût partiel pour $\lambda = 355, 356$



(d) Coût partiel pour $\omega_m = 1000$ tr/min



(e) Coût partiel pour $\lambda = 355, 356$



(f) Coût partiel pour $\omega_m = 1000$ tr/min

FIGURE 6.3 – Coût par composante et coût partiel pour différents régimes et pôles

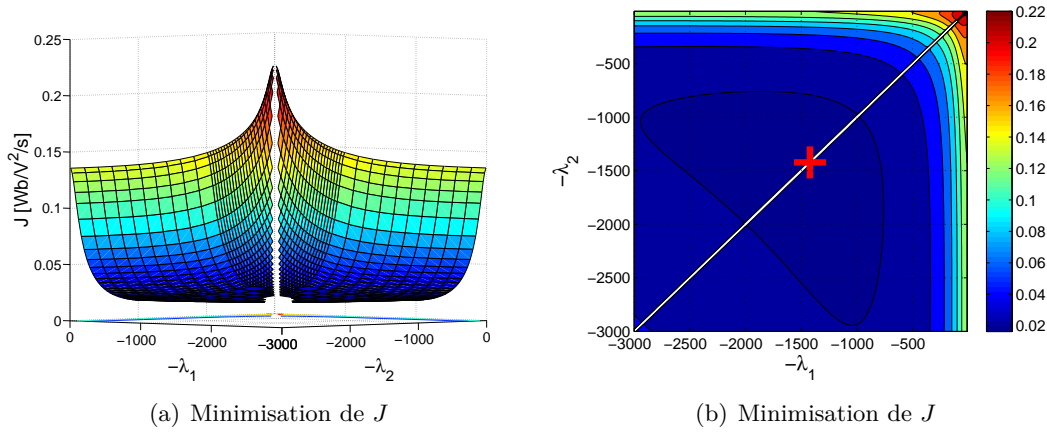


FIGURE 6.4 – Exemple de minimisation sur grille de J à 4000 tr/min

TABLE 6.1 – Pôles optimaux et coûts associés

Régime	λ_{opt}	$J(\lambda_{opt}) [Wb/V^2/s]$
100 tr/min	35,36	0,65
500 tr/min	177,178	0,13
1000 tr/min	355,356	$6,5 \cdot 10^{-2}$
2000 tr/min	710,711	$3,3 \cdot 10^{-2}$
4000 tr/min	1421,1422	$1,6 \cdot 10^{-2}$
6000 tr/min	2131,2132	$1,1 \cdot 10^{-2}$

En premier lieu, nous nous assurons que l'approximation effectuée au paragraphe 6.2.4 et étudiée dans le cas général au paragraphe 6.2.5 est valide pour les pôles optimaux déterminés. A cette fin, sur la figure 6.6 est tracée, en fonction de la composante fréquentielle, la valeur de la norme $\|C_0^{-1}C_u\|_F b_{proba}$, donnée par (6.50), pour les différents régimes avec leurs pôles optimaux associés. Les normes étant largement inférieures à 1, dans tous les cas, sur l'ensemble des composantes fréquentielles, l'approximation est validée.

On remarque d'une part que les paires de pôles minimisant le coût J sont constituées de deux pôles très proches. Ceci étant assez risqué numériquement, on peut voir cela comme une indication qu'il faudrait plutôt utiliser un pôle complexe que deux pôles réels. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 6.3. D'autre part, on remarque que les pôles optimaux sont proportionnels au régime, comme nous l'avions envisagé au paragraphe 6.1, et que le coût associé lui est lui inversement proportionnel. Aussi,

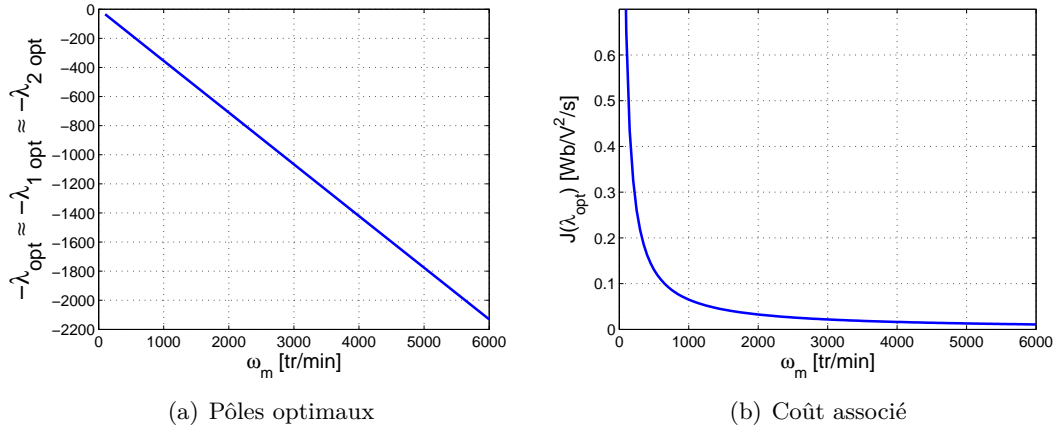
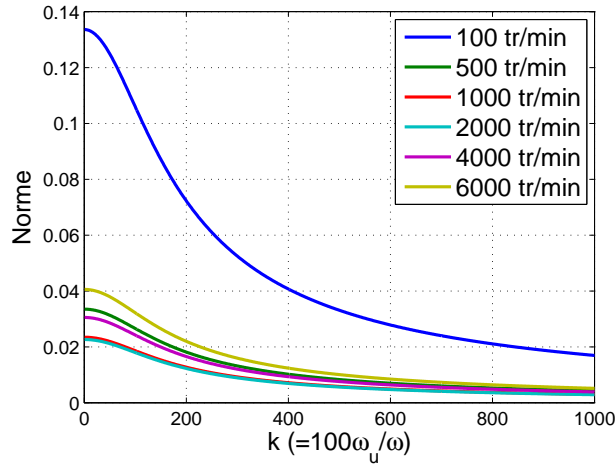
FIGURE 6.5 – Pôles optimaux λ_{opt} et coût associé $J(\lambda_{opt})$ en fonction du régime

FIGURE 6.6 – Vérification de la norme pour validation de l'approximation

même en cas d'utilisation à chaque régime des pôles optimaux à ce régime, le biais sera d'autant plus grand que le régime est faible, et l'estimation d'autant meilleure que le régime est élevé.

Cependant, en pratique, il n'est pas certain que l'on puisse adapter les pôles en temps réel au régime, régime qui n'est en outre pas directement estimé par l'observateur. Il est alors intéressant de regarder ce qui se passe quand le moteur tourne à un régime donné et que les pôles choisis pour l'observateur sont ceux optimaux pour un autre régime. Ceci est présenté sur la figure 6.7, obtenue en utilisant la proportionnalité au régime des pôles optimaux. On a ainsi supposé $\lambda_{opt_1} = 0.355\omega_m$ et $\lambda_{opt_2} = 0.356\omega_m$ avec ω_m exprimé en tr/min. Les figures 6.7(a) et 6.7(b) présentent la valeur du coût en fonction du régime réel et du régime pour lequel les pôles optimaux ont été choisis. La

ligne rouge représente donc les cas où l'optimisation est effectuée sur la bonne valeur. L'information essentielle dévoilée par ces figures est la vigilance accrue dont il faut faire preuve lors du choix des pôles à bas régime. A bas régime, choisir des pôles trop élevés peut en effet conduire à des erreurs gigantesques. *A contrario*, à haut régime, choisir des pôles trop faibles est certes préjudiciable mais moins rédhibitoire. Ceci vient en partie du fait de la diminution du biais à haut régime, les erreurs d'optimisation ayant du coup moins d'impact sur le biais. C'est ce que confirme la figure 6.7(c) pour laquelle, à régime réel fixé, on compare le coût au coût minimal à ce régime. La ligne rouge est donc celle des 0%. On remarque qu'on gagne un peu en symétrie, témoignant du fait qu'une erreur d'optimisation à haut régime peut également conduire à un coût bien supérieur au coût minimal, tout en ayant donc beaucoup moins de conséquences regrettables. En nous repenchant sur la figure 6.7(b), on voit qu'il est quasiment impossible de trouver une paire de pôles fixes permettant de minimiser le biais sur toute la plage de fonctionnement du moteur. Si un tel choix devait cependant être effectué, il serait toutefois préférable de choisir des pôles optimisés pour le bas régime. En revanche, en choisissant deux paires de pôles distinctes, une optimisée pour le bas régime et une optimisée pour le haut régime, on voit qu'on peut déjà fortement minimiser le biais sur l'ensemble de la plage. En pratique, cette solution consiste à faire tourner deux observateurs en parallèle, un avec chaque paire de pôles et à passer de l'un à l'autre en fonction du régime, ou encore en fonction de l'amplitude des tensions qui lui est proportionnelle. Ceci fera, en simulation, l'objet du paragraphe 6.3.3. La proportionnalité des pôles optimaux au régime rend également tentante une adaptation directe des pôles proportionnellement au régime, sous réserve de disposer d'une estimation précise de celui-ci. Cependant, la faisabilité d'une telle adaptation n'est pas du tout certaine, des questions se posant notamment quant à la vitesse de convergence d'un observateur dont on change les paramètres en permanence. Entre ces deux solutions, on peut également envisager de faire tourner simultanément un nombre fini supérieur à deux d'observateurs. Nous reviendrons sur cette question du réglage de l'observateur en fonction du régime lors de l'étude en simulation du paragraphe suivant.

6.3 Etude en simulation du cas bruité

Au paragraphe précédent, nous avons mené une étude théorique sur l'impact du bruit de mesure sur les estimations fournies par l'observateur non linéaire de Luenberger. Cette étude a notamment permis de déterminer les jeux de pôles à choisir, en fonction du régime, pour minimiser le biais sur l'estimation du flux engendré par ces

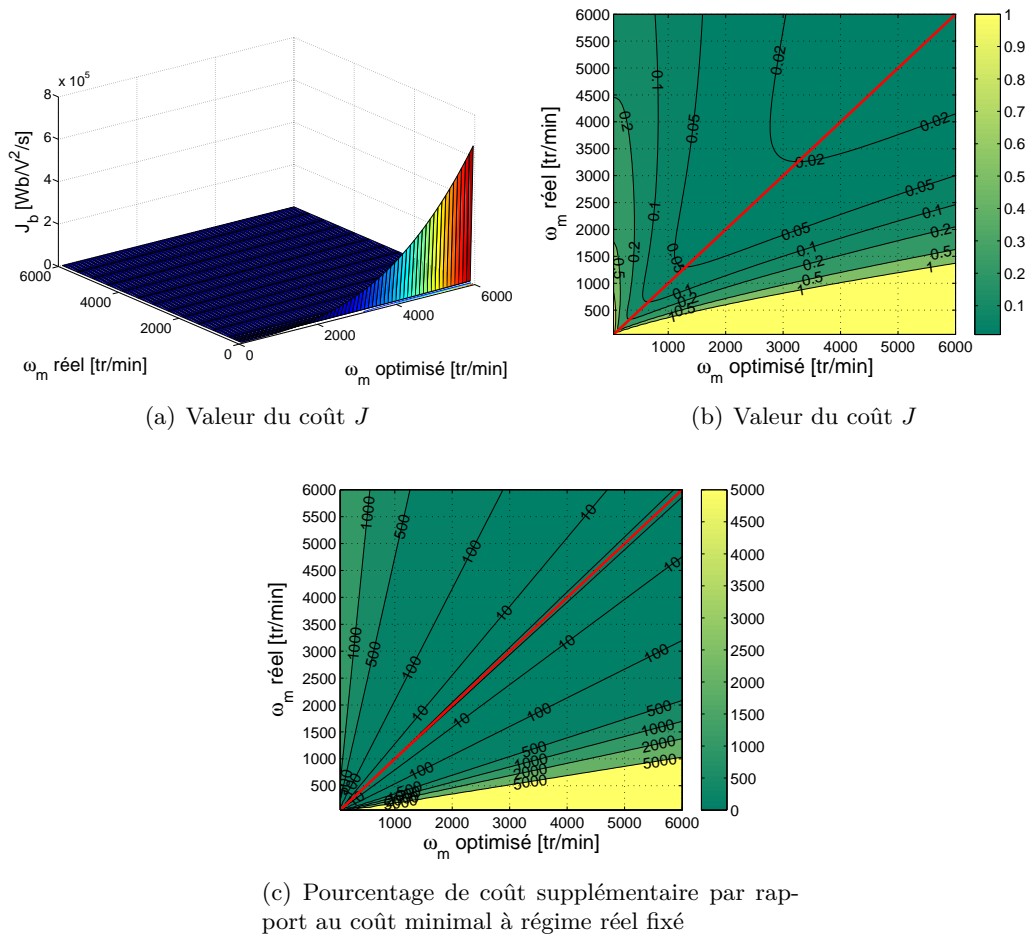


FIGURE 6.7 – Coût J en fonction du régime réel et du régime auquel sont choisis les pôles optimaux

bruits. Afin d'arriver à ce résultat, diverses hypothèses et approximations ont été nécessaires. En particulier, l'étude a été conduite dans le cadre de la modélisation classique supposant les signaux mesurés égaux aux signaux exacts, l'impact du bruit sur les courants a été négligé, et nous avons cherché uniquement à minimiser le biais d'estimation du flux dans le cas à deux pôles réels.

Dans ce paragraphe, nous allons désormais étudier l'impact du bruit de mesure en simulation. Ceci va nous permettre, d'une part de valider ou non les résultats théoriques obtenus, et d'autre part d'étendre l'analyse au cadre de la modélisation réaliste, de tenir compte du bruit sur les courants, ainsi que de considérer le cas de la minimisation du biais d'estimation de la position et le cas à un pôle complexe. L'étude se décompose en deux grandes étapes. La première (6.3.1) concerne l'estimation et consiste, à régime

constant et pour des bruits identiques d'une simulation à l'autre, à minimiser les erreurs d'estimation sur une grille de pôles. Réalisée à différents régimes constants, cette première étape permet ainsi de déterminer, en fonction du régime, des jeux de pôles optimaux. La seconde étape (6.3.2) est une évaluation des performances *via* une analyse de Monte-Carlo permettant de valider le choix des pôles sur des profils de régime non constant et de déterminer leurs zones de fonctionnement. Les pôles sont ainsi fixés d'après les résultats de la précédente étape et s'ensuivent de nombreuses simulations, sur le même profil de régime, utilisant chacune les mêmes signaux mais bruités différemment. Enfin, l'alternance en ligne des jeux de pôles en fonction du régime est mise en œuvre (6.3.3).

Remarque : Dans ce paragraphe, la notation $\mathfrak{S}^2 = -1$ est remplacée par $j^2 = -1$.

6.3.1 Première étape : Minimisation des erreurs sur grilles de pôles

Cette première étape consiste, à régime constant, à minimiser sur une grille de pôles les erreurs d'estimation du flux et de position engendrées par les bruits de mesure sur les courants et tensions. Ainsi, le régime étant fixé, sont tout d'abord générés une fois pour toutes les quatre signaux de bruit w_{i_α} , w_{i_β} , w_{u_α} et w_{u_β} , respectivement sur les deux courants et les deux tensions. Ces bruits suivent les distributions gaussiennes dont les écarts-types ont été déterminés au chapitre 3 et présentés dans le tableau 3.1. Au besoin, pour les régimes ne figurant pas dans le tableau, les valeurs sont extrapolées. Par ailleurs, la machine électrique à pôles lisses dont les paramètres physiques sont indiqués dans le tableau 8.1, avec $i_d = -2A$ et un couple de 1Nm, est simulée au régime donné et génère les signaux exacts de courants et tensions. Afin de nous intéresser à la modélisation réaliste, ces signaux sont filtrés par des passe-bas du premier ordre de constantes de temps $\tau_i = \tau_u = 1,9 \cdot 10^{-4} s$. A ces quatre signaux résultants sont alors ajoutés les quatre signaux de bruit, et les quatre signaux bruités qui en découlent constituent les entrées de l'observateur. A régime donné, ce sont ces mêmes quatre signaux bruités qui sont utilisés pour toutes les simulations, i.e. sur l'intégralité de la grille, pour éviter l'éventuel impact sur les résultats que pourraient causer des signaux de bruits, certes statistiquement identiques, mais temporellement différents. Les autres entrées, à savoir les valeurs de la résistance et de l'inductance, sont supposées connues, de même que les valeurs des constantes de temps des filtres.

Tirant parti de nos travaux du chapitre 5 sur l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste, nous utilisons les équations transformées de l'observateur, en l'occurrence par la méthode n° 1. En revanche, nous n'utilisons pas de déconvolution,

laquelle a montré ses limites en présence de bruit. De toute façon, le but étant de déterminer là où l'erreur est minimale et non de minimiser l'erreur, même s'il est possible d'obtenir des erreurs plus faibles avec d'autres méthodes, le résultat ne devrait pas être trop faussé.

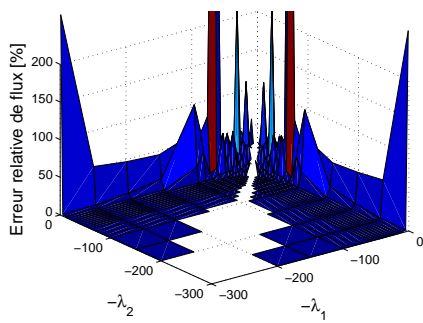
En sortie de l'observateur, on calcule les erreurs d'estimation du flux et de la position. Pour dépendre le moins possible de l'allure temporelle du bruit, les erreurs sont moyennées sur un intervalle de temps suffisamment long, tout en faisant attention à ce que le régime transitoire se soit déjà complètement évanoui. Et ceci est répété en tous les points d'une grille sur les pôles. Il s'agit ensuite de trouver le point de la grille, i.e. les pôles, minimisant les erreurs d'estimation. Nous étudions les deux cas à deux pôles réels et à un pôle complexe. Les grilles sont donc toujours de dimension deux. En pratique, les simulations sont tout d'abord lancées sur une grille dont les valeurs sont situées sur une plage très large et varient approximativement de manière logarithmique, afin de grossièrement localiser la zone d'erreur minimale. Puis de nouvelles grilles plus fines sont successivement utilisées pour préciser le résultat, tout en faisant attention à éviter les potentiels minima locaux.

Tout ce processus est répété à différents régimes constants. A chaque fois, on détermine les pôles permettant de minimiser l'erreur de flux, ainsi que ceux minimisant l'erreur de position, et ce dans le cas à deux pôles réels comme dans celui à un pôle complexe. A chaque régime sont donc associés quatre jeux de pôles optimaux.

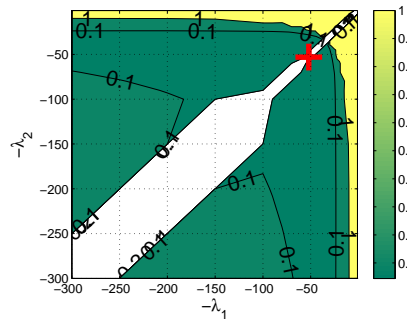
Minimisation des erreurs sur les grilles

La figure 6.8 présente un exemple, à un régime de 1000 tr/min, de grilles sur lesquelles on cherche à minimiser l'erreur d'estimation du flux (figures 6.8(a) à 6.8(d)) ou de la position (figures 6.8(e) à 6.8(h)), dans le cas à deux pôles réels (figures 6.8(a), 6.8(b), 6.8(e) et 6.8(f)) ou à un pôle complexe (figures 6.8(c), 6.8(d), 6.8(g) et 6.8(h)). Sur chaque ligne, les mêmes résultats sont présentés en trois dimensions à gauche et en deux dimensions à droite. La croix rouge indique le point d'erreur minimale (pas forcément obtenu directement grâce à cette grille mais après affinage avec d'autres grilles).

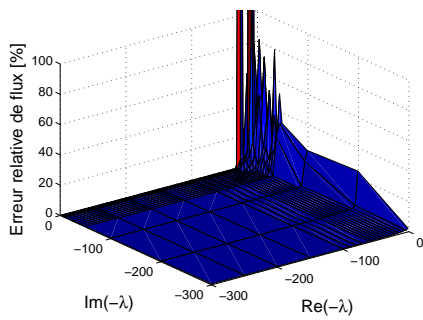
Les tableaux 6.2 et 6.3 récapitulent les résultats des minimisations des grilles respectivement dans le cas à deux pôles réels et dans le cas à un pôle complexe. Sont indiqués pour chaque régime l'erreur minimale d'estimation du flux et les pôles associés ainsi que l'erreur qui, si l'on utilise ces pôles, est commise sur l'estimation de la position. De même sont indiqués l'erreur minimale d'estimation de la position, les pôles associés et l'erreur de flux associée. On note que, dans le cas à un pôle complexe, il arrive parfois



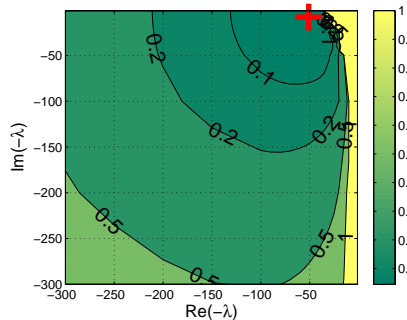
(a) 2 pôles \mathbb{R} - erreur de flux (%)



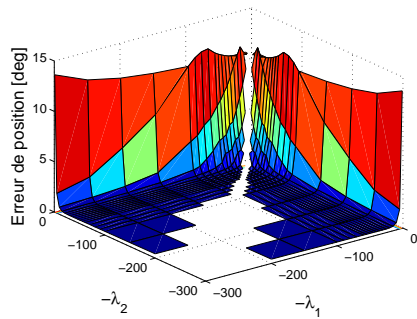
(b) 2 pôles \mathbb{R} - erreur de flux (%)



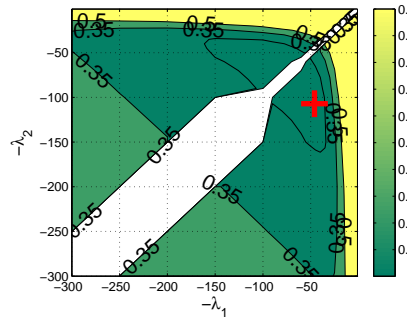
(c) 1 pôle \mathbb{C} - erreur de flux (%)



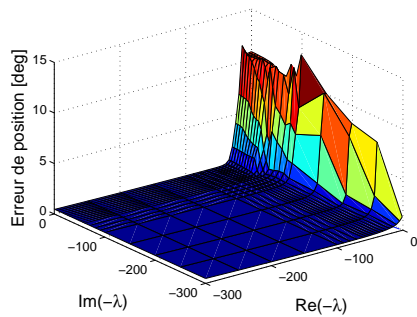
(d) 1 pôle \mathbb{C} - erreur de flux (%)



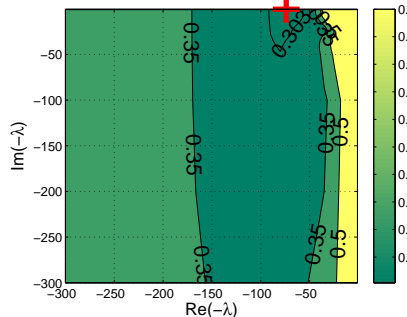
(e) 2 pôles \mathbb{R} - erreur de position (deg)



(f) 2 pôles \mathbb{R} - erreur de position (deg)



(g) 1 pôle \mathbb{C} - erreur de position (deg)



(h) 1 pôle \mathbb{C} - erreur de position (deg)

FIGURE 6.8 – Erreurs de flux et de position en fonction des pôles - 1000 tr/min

que l'erreur décroisse continuellement quand la partie imaginaire tend vers zéro. On note alors ϵ_m la partie imaginaire optimale. En théorie, ϵ_m peut donc être aussi proche de zéro que l'on souhaite. Cependant, choisir ϵ_m trop proche de zéro peut être risqué car on se rapproche alors d'un cas à un seul pôle réel ne permettant pas l'observation. En pratique, on pourra par exemple prendre $\epsilon_m = 0.5$. Ceci ne pose pas de problème majeur car la diminution de la valeur de l'erreur quand ϵ_m tend vers zéro est de toute façon infime.

TABLE 6.2 – Erreurs minimales et pôles associés dans le cas à deux pôles réels

Régime [tr/min]	100	500	1000	2000	4000	6000
Erreur ϕ min [%]	0.16	0.025	0.045	0.045	0.18	0.27
Pôles associés	31,32	36,37	52,53	42,70	63,577	157,705
Erreur θ associée [deg]	0.12	0.15	0.31	0.58	1.2	2.0
Erreur θ min [deg]	0.11	0.15	0.30	0.49	1.2	1.9
Pôles associés	24,26	50,52	46,107	38,236	210,293	350,351
Erreur ϕ associée [%]	0.18	0.033	0.050	0.053	0.23	0.29

TABLE 6.3 – Erreurs minimales et pôles associés dans le cas à un pôle complexe

Régime [tr/min]	100	500	1000	2000	4000	6000
Erreur ϕ min [%]	0.087	0.021	0.045	0.045	0.19	0.28
Pôles associés	11+j22	17+j18	51+j8	50+j ϵ_m	149+j ϵ_m	293+j ϵ_m
Erreur θ associée [deg]	0.096	0.24	0.31	0.62	1.3	2.0
Erreur θ min [deg]	0.084	0.15	0.30	0.49	1.2	1.9
Pôles associés	13+j33	50+j12	74+j ϵ_m	131+j ϵ_m	251+j84	332+j237
Erreur ϕ associée [%]	0.14	0.034	0.056	0.099	0.25	0.34

Notons toutefois que, symétriquement à ce que nous indiquions au paragraphe 6.2.9, à savoir qu'un optimum constitué de deux pôles réels très proches était numériquement risqué et qu'il était alors préférable de passer au cas à un pôle complexe, un pôle complexe optimum à partie imaginaire proche de zéro indique qu'il faut passer à deux pôles réels.

Si nous nous intéressons tout d'abord à la minimisation de l'erreur d'estimation du flux dans le cas à deux pôles réels, i.e. le cas que nous avons étudié formellement au

paragraphe précédent et dont les résultats sont indiqués dans le tableau 6.1, on constate que l'on retrouve la tendance d'augmentation des pôles optimaux avec le régime. Aux bas régimes, on retrouve également que la paire de pôles optimale est constituée de deux pôles très proches. En revanche, les pôles optimaux ne sont plus proportionnels au régime et leurs valeurs sont différentes, même si les ordres de grandeur sont globalement les mêmes. Ces différences ont plusieurs origines possibles : l'utilisation, non plus de la modélisation classique, mais de la modélisation réaliste accompagnée de ses approximations ; la prise en compte, outre des bruits sur les tensions, des bruits sur les courants ; la différence entre la modélisation théorique du bruit avec ses hypothèses et les bruits injectés en simulation ; de possibles approximations dues au schéma numérique lors de la simulation ; le moyennage temporel de l'erreur, *etc.* On note par ailleurs que l'on ne peut pas comparer la valeur ni même la tendance de l'erreur minimale avec le coût obtenu de manière théorique, car ce dernier était calculé indépendamment de l'amplitude du bruit.

Concernant désormais la minimisation de l'erreur de position dans le cas réel, on remarque une tendance similaire d'augmentation des pôles optimaux avec le régime. Ces paires de pôles optimales sont toutefois différentes de celles minimisant l'erreur de flux. Le calcul de l'erreur associée sur l'autre paramètre pour l'optimisation d'un paramètre nous renseigne sur l'importance de l'impact de ces différences de pôles optimaux. Ainsi, en comparant les deuxième et septième lignes, ainsi que les cinquième et quatrième, on constate que ces différences sont loin d'être catastrophiques, avec des erreurs d'estimation du flux supérieures aux erreurs minimales d'uniquement 10 à 30% suivant le régime et des erreurs de position encore moins affectées.

Enfin, dans le cas complexe, les parties réelles des pôles optimaux augmentent également avec le régime, tandis que, pour l'optimisation de l'estimation du flux, la partie imaginaire optimale diminue avec lui. La tendance de la variation avec le régime de la partie imaginaire optimale dans le cas de la minimisation de l'erreur d'estimation de la position est moins claire. Par ailleurs, les erreurs minimales sont très proches, que l'on utilise deux pôles réels ou un pôle complexe. Par contre, le compromis flux/position est légèrement plus compliqué. La figure 6.9 compare ces différents cas en représentant en fonction du régime, pour l'estimation du flux (figure 6.9(a)) et de la position (figure 6.9(b)), les erreurs minimales dans les cas réel (bleu, plein) et complexe (vert, pointillés), ainsi que les erreurs en utilisant les pôles optimisés pour la minimisation de l'autre paramètre (cas réel : rouge, plein et cas complexe : cyan, pointillés). On y visualise ce que nous venons d'évoquer : si les erreurs minimales se valent dans les cas complexe et réel, les erreurs associées sont plus faibles dans le cas réel. Mais ceci n'est de toute façon pas un réel problème puisqu'il est toujours possible de faire tourner deux

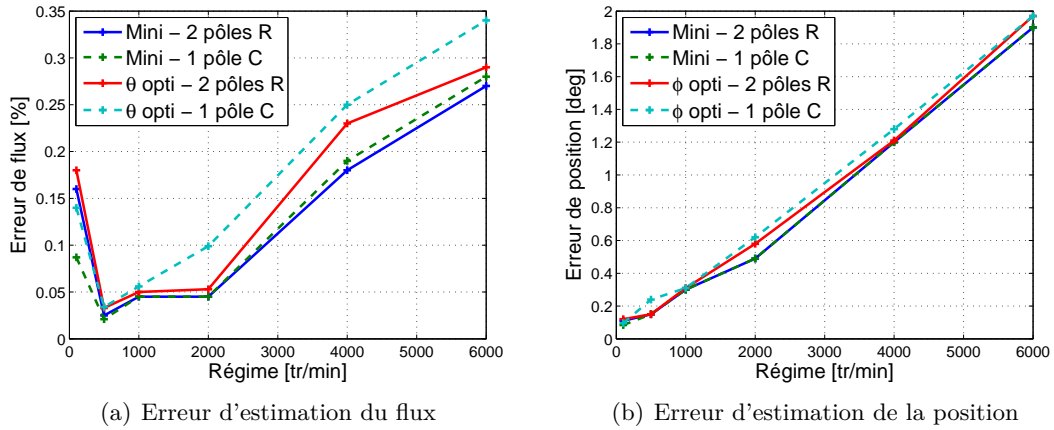


FIGURE 6.9 – Erreurs minimales de flux et de position et erreurs associées

observateurs en parallèle, l'un réglé pour minimiser l'erreur d'estimation du flux, l'autre pour minimiser celle de position. En revanche, se pose désormais la question autrement plus cruciale des erreurs engendrées si l'observateur est réglé, non plus pour minimiser l'erreur d'estimation d'un autre paramètre mais celle à un autre régime. Mais juste avant d'étudier cette question, revenons un instant sur la sélection entre pôle complexe et pôles réels.

Comme nous venons de le voir, les erreurs minimales se valent dans les cas complexe et réel. Utiliser un pôle complexe plutôt que deux pôles réels et inversement est donc possible. Ainsi, pour éviter les potentiels problèmes numériques déjà évoqués liés à deux pôles réels trop proches ou à un pôle complexe à partie imaginaire quasi nulle, on peut choisir dans ces deux cas d'utiliser respectivement le pôle complexe optimal et les deux pôles réels optimaux. Au regard des tableaux 6.2 et 6.3 dans lesquels sont indiqués en rouge les pôles numériquement risqués, on constate en effet qu'il existe à chaque régime, que ce soit pour l'estimation du flux ou de la position, au moins l'un des deux cas (réel ou complexe) pour lequel on ne risque pas de problème numérique. Ainsi, on peut envisager, pour l'estimation du flux, d'utiliser un pôle complexe jusqu'à environ 1000 tour/min puis deux pôles réels au-delà. Dans le cas de l'estimation de la position, il faudrait diviser en trois zones : pôle complexe jusqu'à 500 tr/min puis à partir d'environ 4000 tr/min, deux pôles réels au milieu.

Influence sur l'estimation de pôles réglés pour l'optimisation à un autre régime et choix des pôles

Avec deux paramètres à estimer indépendamment, il est aisé de faire tourner deux observateurs en parallèle. C'est en revanche plus compliqué avec les régimes. D'une

part, il en existe une infinité et on ne peut faire tourner une infinité d'observateurs en parallèle, et d'autre part les régimes ne doivent pas être traités indépendamment mais l'observateur doit s'adapter au régime, et ce sans estimateur de régime.

Lors de l'étude théorique de minimisation du biais d'estimation du flux dans le cas réel, disposant de formules littérales, nous avons pu calculer à tous les régimes ce qu'il advenait de l'erreur si l'observateur était optimisé pour un quelconque autre régime. Il en est ressorti qu'à bas régime, choisir des pôles optimisés pour le haut régime était catastrophique, et qu'à haut régime, choisir des pôles optimisés pour le bas régime était également mauvais mais moins préjudiciable. En tout cas, trouver une paire de pôles fixe permettant de minimiser le biais sur toute la plage de fonctionnement semblait impossible. Les pôles optimaux étant proportionnels au régime, une solution pour pallier l'infinité de régimes aurait été d'estimer le régime et d'adapter directement la valeur des pôles proportionnellement à cette estimation. Toutefois, outre les problèmes liés à l'estimation du régime, la faisabilité d'une telle solution était loin d'être garantie. Cependant, cette question ne se pose plus ici, les pôles optimaux n'étant pas proportionnels au régime. L'autre solution envisagée était de faire tourner deux observateurs en parallèle, l'un réglé pour le bas régime et l'autre pour le haut régime, et de passer de l'un à l'autre en fonction du régime, dont une estimation grossière serait suffisante. Cette solution semblait viable lors de l'étude théorique, l'utilisation de deux jeux de pôles convenablement choisis permettant de minimiser correctement le biais sur l'ensemble de la plage de fonctionnement.

Nous allons vérifier ici si une telle solution à deux jeux de pôles est toujours envisageable, non seulement dans le cas de l'estimation du flux avec deux pôles réels mais également pour l'estimation de la position et le cas complexe. Par contre, ne disposant pas ici d'expression littérale, nous nous contenterons de calculer aux six régimes étudiés ce qui se passe si l'observateur est optimisé pour l'un ou l'autre des cinq autres régimes. Les résultats sont présentés dans les tableaux 6.4 à 6.7, ainsi que sur la figure 6.10. Les tableaux concernent respectivement les erreurs d'estimation du flux puis de la position dans le cas réel, puis ces mêmes erreurs respectives dans le cas complexe. Les colonnes indiquent le régime auquel tourne le moteur, tandis que les lignes précisent pour quel régime l'observateur a été optimisé, les pôles associés étant également indiqués. Les cases grisées correspondent ainsi aux cas idéaux où l'observateur a été optimisé pour le régime adéquat. L'objectif est de savoir s'il est possible de trouver deux régimes d'optimisation garantissant à eux deux des erreurs raisonnables à tous les régimes, i.e. tels que, à chaque régime, le minimum des deux erreurs soit raisonnable. A la vue des tableaux et/ou de la figure 6.10, sur laquelle les figures de gauche représentent le contenu des tableaux sous forme d'histogrammes, tandis que les figures de droite présentent le

rapport entre l'erreur commise avec le régime d'optimisation et l'erreur minimale au même régime avec le bon régime d'optimisation, on s'aperçoit que, quel que soit le cas considéré, c'est possible. Le meilleur choix semble être de retenir les pôles associés à une optimisation à 100 tr/min pour les bas régimes, à savoir pour les régimes inférieurs à une valeur comprise entre 500 et 1000 tr/min, et les pôles associés à une optimisation à 4000tr/min pour les hauts régimes, i.e. pour les régimes supérieurs à la valeur retenue entre 500 et 1000 tr/min. Ce choix est indiqué en rouge dans les tableaux.

TABLE 6.4 – Deux pôles réels - Erreur de flux [%] suivant le régime d'optimisation

Régime [tr/min]		100	500	1000	2000	4000	6000	
Régime d'optimi- -sation et pôles	100 tr/min	31,32	0.16	0.027	3.0	9.8	54	81
	500 tr/min	36,37	0.17	0.025	0.090	3.6	80	66
	1000 tr/min	52,53	0.28	0.035	0.045	0.046	12	66
	2000 tr/min	42,70	0.29	0.035	0.045	0.045	8	51
	4000 tr/min	63,577	3	0.27	0.15	0.10	0.18	0.49
	6000 tr/min	157,705	8.8	0.80	0.43	0.24	0.26	0.27

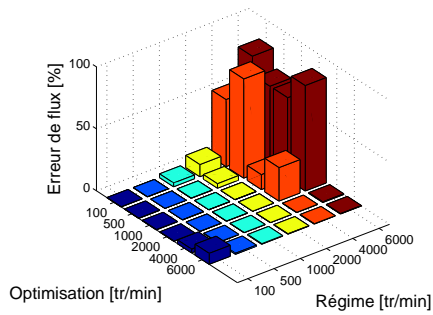
TABLE 6.5 – Deux pôles réels - Erreur de position [°] suivant le régime d'optimisation

Régime [tr/min]		100	500	1000	2000	4000	6000	
Régime d'optimi- -sation et pôles	100 tr/min	24,26	0.11	0.26	4.2	8.1	17	19
	500 tr/min	50,52	0.26	0.15	0.31	0.61	7.1	16
	1000 tr/min	46,107	0.26	0.16	0.30	0.52	2.6	14
	2000 tr/min	38,236	0.45	0.21	0.32	0.49	1.5	6.1
	4000 tr/min	210,293	0.80	0.34	0.43	0.54	1.2	2.0
	6000 tr/min	350,351	1.1	0.45	0.54	0.62	1.2	1.9

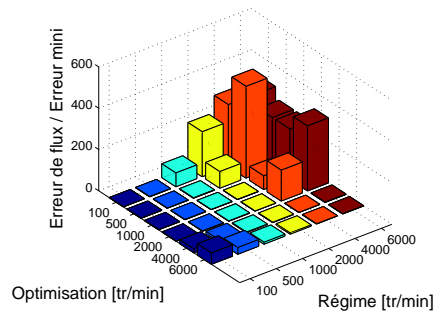
TABLE 6.6 – Un pôle complexe - Erreur de flux [%] suivant le régime d'optimisation

Régime [tr/min]		100	500	1000	2000	4000	6000	
Régime d'optimi- -sation et pôles	100 tr/min	11+j22	0.087	0.055	30	35	142	163
	500 tr/min	17+j18	0.11	0.021	8.1	31	125	163
	1000 tr/min	51+j8	0.27	0.034	0.045	0.047	30	65
	2000 tr/min	50+j ϵ_m	0.25	0.032	0.045	0.045	21	42
	4000 tr/min	149+j ϵ_m	2.0	0.18	0.12	0.11	0.19	0.46
	6000 tr/min	293+j ϵ_m	7.2	0.64	0.35	0.21	0.26	0.28

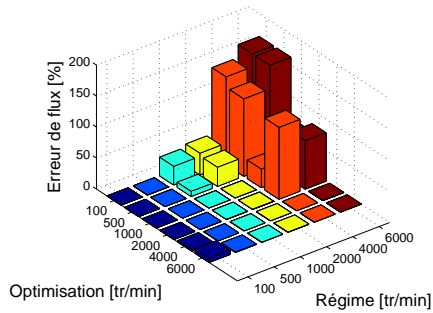
Finalement, nous disposons désormais, pour chacun des quatre cas (optimisation du flux ou de la position avec deux pôles réels ou un pôle complexe), de deux jeux de pôles, l'un pour minimiser les erreurs d'estimation à bas régime et l'autre pour



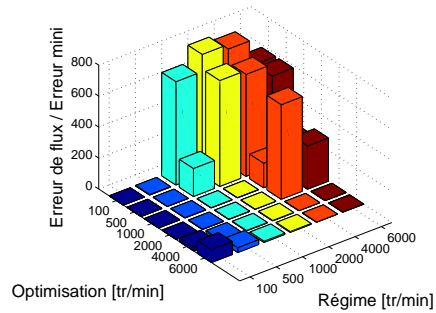
(a) 2 pôles \mathbb{R} - erreur flux



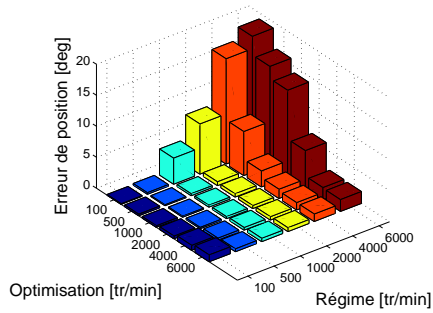
(b) 2 pôles \mathbb{R} - erreur flux/erreur mini



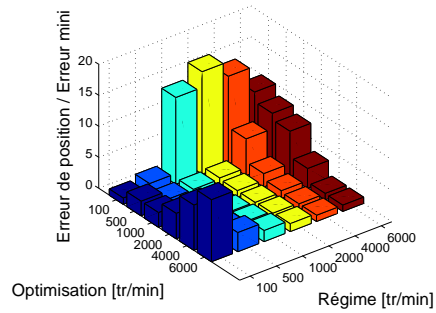
(c) 1 pôle \mathbb{C} - erreur flux



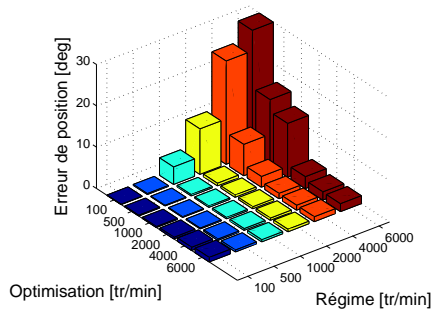
(d) 1 pôle \mathbb{C} - erreur flux/erreur mini



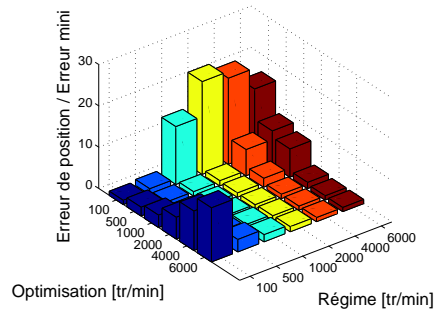
(e) 2 pôles \mathbb{R} - erreur position



(f) 2 pôles \mathbb{R} - erreur position/erreur mini



(g) 1 pôle \mathbb{C} - erreur position



(h) 1 pôle \mathbb{C} - erreur position/erreur mini

FIGURE 6.10 – Impact du régime d’optimisation des pôles en fonction du régime

TABLE 6.7 – Un pôle complexe - Erreur de position [°] suivant le régime d'optimisation

Régime [tr/min]		100	500	1000	2000	4000	6000	
Régime d'optimi- -sation et pôles	100 tr/min	13+j33	0.084	0.21	4.2	11	25	30
	500 tr/min	50+j12	0.18	0.15	0.31	0.61	7.6	16
	1000 tr/min	74+j ϵ_m	0.25	0.15	0.30	0.52	2.6	13
	2000 tr/min	131+j ϵ_m	0.44	0.20	0.32	0.49	1.3	2.9
	4000 tr/min	251+j84	0.80	0.34	0.43	0.54	1.2	2.0
	6000 tr/min	332+j237	1.1	0.45	0.52	0.60	1.2	1.9

les minimiser à haut régime. Il serait possible de combiner cette alternance des jeux de pôles en fonction du régime avec l'alternance pôles réels/pôle complexe évoquée pour les problèmes numériques. Ceci conduirait à choisir deux jeux de pôles (un pôle complexe pour le bas régime, deux pôles réels pour le haut régime) pour l'estimation du flux et trois jeux (un pôle complexe à bas régime, deux pôles réels pour les régimes intermédiaires et un autre pôle complexe à haut régime) pour l'estimation de la position. Cependant, pour des raisons historiques, nous n'avons pas considéré cette alternance pôles réels/pôle complexe. Du coup, ce sont les jeux de pôles regroupés dans le tableau 6.8, parmi lesquels deux peuvent s'avérer risquer, que nous allons utiliser pour l'analyse de Monte-Carlo de la seconde étape. Mais avant de passer à celle-ci, nous allons nous intéresser à deux résultats annexes obtenus en simulation sur les grilles : la comparaison de l'impact sur les erreurs d'estimation du bruit sur les tensions et de celui sur les courants et la mise en évidence de l'impact de la modélisation réaliste sur la dépendance aux pôles.

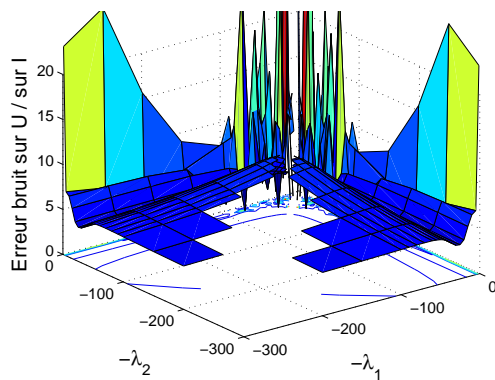
TABLE 6.8 – Jeux de pôles utilisés pour l'analyse de Monte-Carlo

Critère d'optimisation		2 pôles réels	1 pôle complexe
Haut régime (HR)	Flux	$\lambda_1 = 63, \lambda_2 = 577$	$\lambda = 149 + j\epsilon_m$
	Position	$\lambda_1 = 210, \lambda_2 = 293$	$\lambda = 251 + j84$
Bas régime (BR)	Flux	$\lambda_1 = 31, \lambda_2 = 32$	$\lambda = 11 + j22$
	Position	$\lambda_1 = 24, \lambda_2 = 26$	$\lambda = 13 + j33$

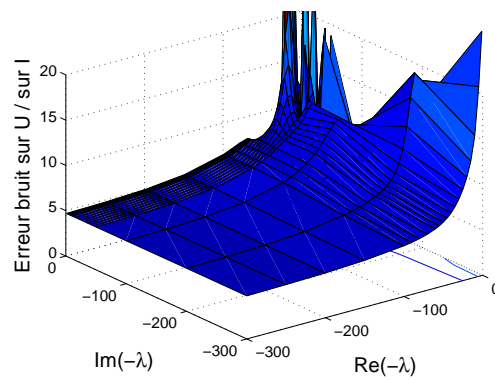
Comparaison des impacts respectifs des bruits sur les courants et sur les tensions et validation de l'hypothèse négligeant les bruits sur les courants

Nous avons, dans le paragraphe précédent, lors de l'étude théorique, fait l'hypothèse que, dans le cas réel, l'impact sur l'estimation du flux du bruit sur les courants était négligeable par rapport à l'impact du bruit sur les tensions. L'étude de la sensibilité à

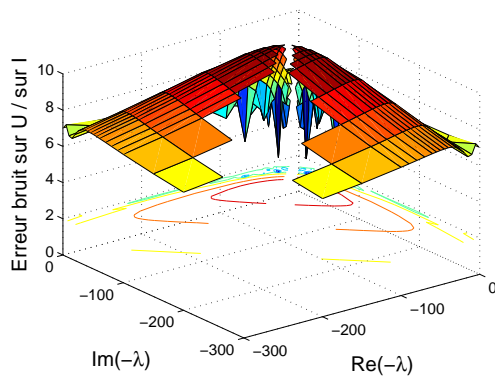
une mauvaise connaissance des amplitudes des courants et tensions du paragraphe 4.8.2 nous en a donné une première idée dans le cas idéal de la modélisation classique et pour la solution particulière. Voyons désormais ce qu'il en est en simulation, à 1000 tr/min, sur une grille de pôles. Outre, le cas de l'estimation du flux avec deux pôles réels, la figure 6.11 présente, également dans les trois autres cas, le rapport des erreurs dues aux bruits sur les tensions sur les erreurs dues aux bruits sur les courants. Pour ce faire, les mêmes simulations ont été effectuées, avec dans un premier temps uniquement du bruit sur les tensions, puis dans un second temps uniquement du bruit sur les courants. On constate que, quelque soit le point de la grille et le cas considéré, il y a au moins un rapport cinq entre les impacts des deux bruits. Ceci valide l'hypothèse nous ayant conduit à ne considérer que le bruit sur les tensions. D'ailleurs, non présentée ici, la grille résultant de la simulation avec uniquement les bruits sur les tensions est très proche de celle avec les bruits sur les tensions et sur les courants.



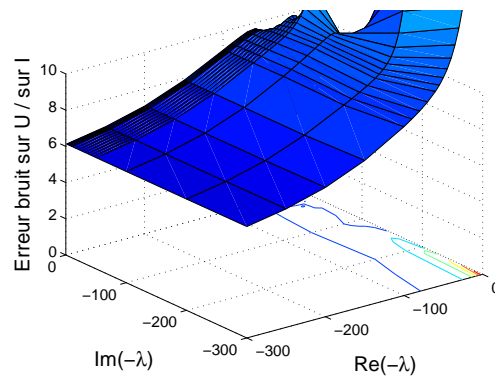
(a) 2 pôles \mathbb{R} - rapport erreur de flux



(b) 1 pôles \mathbb{C} - rapport erreur de flux



(c) 2 pôles \mathbb{R} - rapport erreur de position



(d) 1 pôles \mathbb{C} - rapport erreur de position

FIGURE 6.11 – Rapport des erreurs dues au bruit sur les tensions sur celles dues au bruit sur les courants - 1000 tr/min

Impact de la modélisation réaliste sur la dépendance aux pôles

Nous avons vu au paragraphe 4.7 que, dans le cas idéal sans bruit, l'estimation du flux et de la position ne dépend pas du choix des pôles. Nous avons vu, en revanche, au paragraphe 6.2 dans le cas idéal avec bruit de mesure et dans cette partie dans le cas réaliste avec bruit de mesure, que les pôles avaient leur rôle à jouer dans les estimations. Reste à savoir si le rôle des pôles est uniquement lié au bruit de mesure ou si la modélisation réaliste y est également pour quelque chose. Afin de répondre à cette interrogation, nous vérifions d'abord sur grilles que si l'on utilise la modélisation classique et en l'absence de bruit de mesure, les erreurs d'estimation ne dépendent pas du choix des pôles. Cette vérification, non montrée ici, est réalisée en introduisant volontairement une erreur de 5% sur la valeur de la résistance, afin de ne pas avoir une peu concluante erreur nulle en tous points des grilles. Les grilles présentent alors des erreurs d'estimation constantes en tous points. Dans un second temps, on répète exactement la même expérience mais avec la modélisation réaliste et les équations transformées de l'observateur. La figure 6.12 présente les résultats à 1000 tr/min. On en conclut aisément que la modélisation réaliste a, tout comme le bruit de mesure, un impact sur la dépendance des estimations aux pôles. Il n'est toutefois pas indispensable de mener une étude spécifique plus complète du cas de l'utilisation de la modélisation réaliste sans bruit de mesure puisque l'étude menée en ce début de paragraphe regroupe déjà les deux facteurs impactant la dépendance aux pôles (modélisation réaliste et bruit de mesure).

6.3.2 Seconde étape : Analyse de Monte-Carlo

Cette seconde étape a pour but de valider le choix des pôles effectué lors de la première étape et la viabilité de l'utilisation de deux jeux de pôles sur des profils réalistes et avec différents signaux de bruits. En effet, à bruits et régime fixés, les grilles de la première étape nous ont permis de déterminer les meilleurs jeux de pôles selon que l'on souhaite minimiser l'erreur d'estimation de flux ou de position, à bas régime ou à haut régime (cf. tableau 6.8). Ce sont désormais ces jeux de pôles que nous fixons, mais le régime est maintenant variable, suivant différents profils fixés, et les signaux de bruits varient d'une simulation à l'autre, tout en étant générés suivant les mêmes distributions.

Protocole

Concrètement, l'analyse de Monte-Carlo est réalisée comme suit. Tout d'abord, on fixe un profil de vitesse. Quatre tels profils sont étudiés, à savoir un profil bas

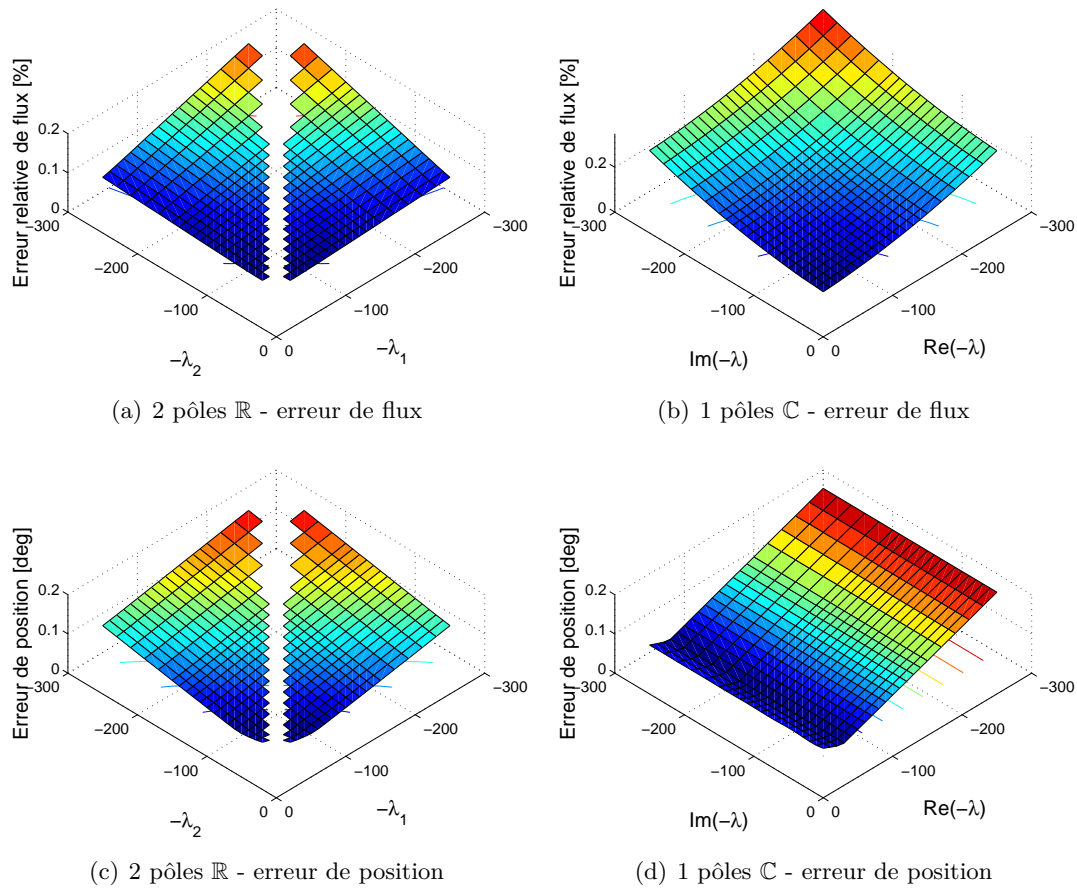


FIGURE 6.12 – Dépendance des erreurs d’estimation aux pôles due au modèle réaliste

régime (figure 6.17(a)), un profil haut régime (figure 6.18(a)), un profil mixte (figure 6.15(a)) et un profil en pentes (figure 6.19(a)). Le jeu de pôles est également fixé suivant l’erreur d’estimation que l’on souhaite minimiser et à quel régime. Pour $N = 400$ simulations, les signaux de bruits sur les courants et tensions sont générés, suivant les distributions gaussiennes de moyennes nulles et d’écart-types donnés par le tableau 6.9, et ajoutés aux signaux exacts de courants et tensions. Ces valeurs sont inspirées de celle du tableau 3.1 et adaptées au régime moyen des profils. Nous obtenons ainsi N

TABLE 6.9 – Ecart-types des bruits de mesure choisis pour l’analyse de Monte-Carlo

Profil	Mixte	Bas régime	Haut régime	Pente
σ_{w_i}	50mA	20 mA	70mA	50mA
σ_{w_u}	1V	0.1V	2V	1V

courbes différentes d'évolution des erreurs d'estimation du flux et de la position. Notons que nous considérons les erreurs en valeur absolue. A chaque instant, i.e. en réalité en sous-échantillonnant toutes les 2ms, on obtient donc un histogramme des valeurs prises par chacune des erreurs. La figure 6.13 illustre ceci en traçant les histogrammes d'erreur d'estimation de la position à trois instants différents, puis la figure 6.14(a) présente la fonction de répartition correspondant à "l'instant bleu" ($t=0.72s$).

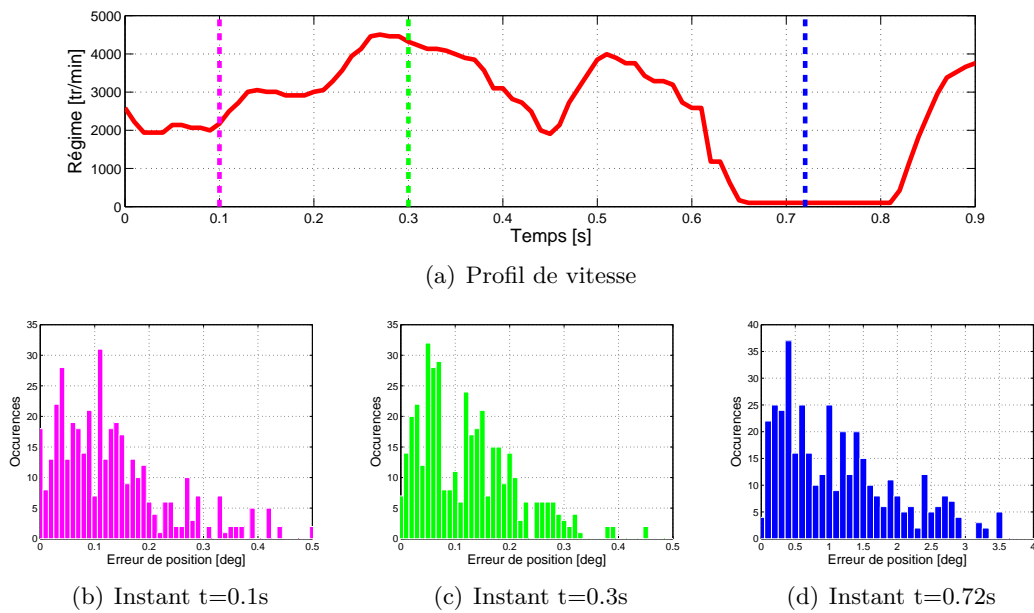


FIGURE 6.13 – Un histogramme à chaque instant du profil - Exemple : erreur de position

Cette fonction de répartition est alors découpée en plusieurs intervalles. Les distributions d'erreur obtenues ne sont certes pas gaussiennes, mais nous nous sommes inspiré de la courbe en cloche pour définir les intervalles de découpage : moins de 2,5% des valeurs, de 2,5 à 15% des valeurs, de 15 à 50% des valeurs, de 50 à 85% des valeurs, de 85 à 97,5% des valeurs et de 97,5 à 99,7% des valeurs. Enfin, ces intervalles sont reportés sur un graphe fonction du temps, comme illustré, sur la période de temps correspondant au palier à bas régime, à la figure 6.14(b) (les valeurs en abscisse de la figure 6.14(a) sont reportées en ordonnée sur la figure 6.14(b)). Est ainsi tracée la déformation de l'historgramme au cours du temps, i.e. au fil du profil.

Résultats

Comme annoncé, l'analyse de Monte-Carlo a été réalisée sur quatre profils différents pour éprouver le plus complètement possible l'observateur.² Un profil "mixte" (figures

2. Le couple de charge est lui fixé à 1Nm.

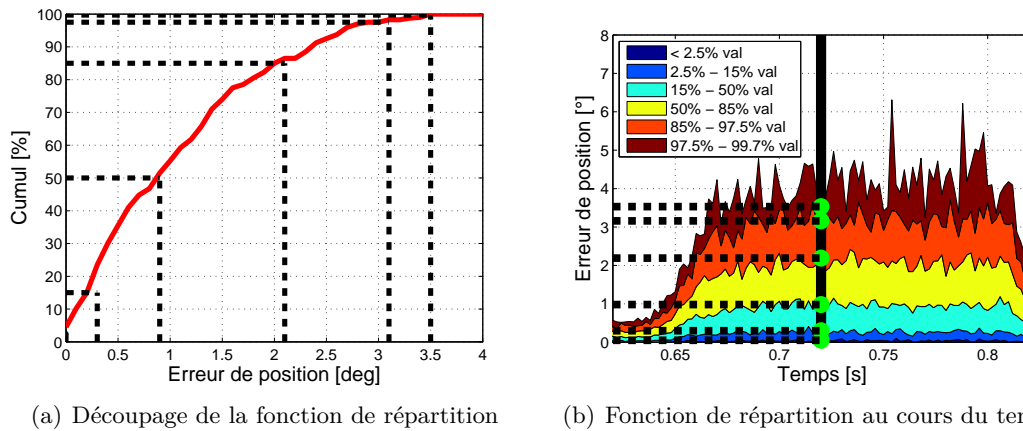


FIGURE 6.14 – Déformation de l’histogramme d’erreur de position au cours du temps

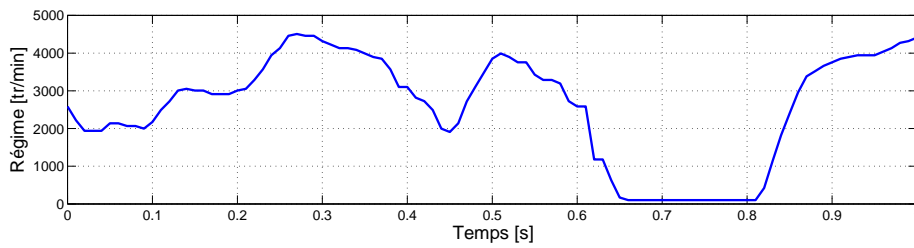
6.15 et 6.16) tout d’abord, présentant des passages à haut (jusqu’à 4500 tr/min) comme à bas régime (notamment un palier à 100 tr/min). Un profil "bas régime" (figure 6.17) ensuite, variant entre 10 et 120 tr/min, puis un profil "haut régime" (figure 6.18) entre 2800 et 5400 tr/min. Enfin, un profil plus atypique en pentes (figure 6.19) a également été testé, montant linéairement de 100 à 5700 tr/min, redescendant aussitôt jusqu’à une vitesse nulle avant de repartir vers les 5700 tr/min. L’intérêt de ce dernier profil est de déterminer plus simplement les vitesses limites en deçà ou au-delà desquelles un jeu de pôles fournit de bons résultats. Notons que, pour des raisons pratiques, les profils sont de courte durée, l’échelle des temps ayant été divisée par 10 par rapport à un profil réaliste. Ceci ayant pour conséquence de rendre le profil plus contraignant du fait de variations plus brusques, nous étudions un cas "pire" que la réalité. Si l’observateur fonctionne sur ces profils, il devrait logiquement encore fonctionner sur des profils plus réalistes. Notons également qu’il ne faut pas tenir compte des résultats aux tous premiers instants du profil, durant lesquels le contrôle du moteur est encore en train de converger.

Par ailleurs, afin de pouvoir bien vérifier la complémentarité ou non des deux jeux de pôles, les résultats sont à chaque fois présentés "en miroir". Ainsi, sur chaque figure est présenté dans la moitié du haut l’erreur d’estimation quand les pôles sont optimisés pour le haut régime (4000 tr/min), et dans la moitié du bas quand ceux-ci sont optimisés pour le bas régime (100 tr/min).

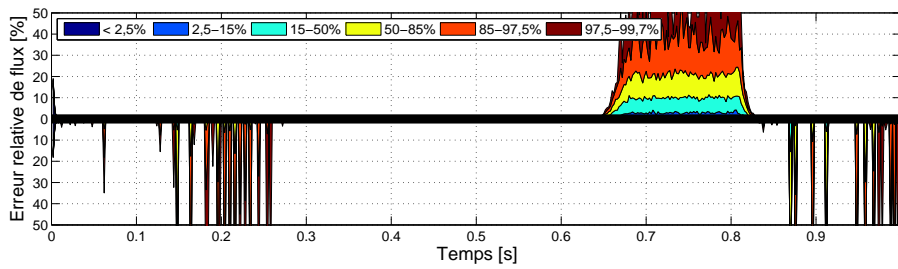
Commençons par les résultats sur le profil mixte des figures 6.15 et 6.16. Pour ce profil, nous avons présenté les résultats de tous les différents cas. Ainsi, la figure 6.15 compare les erreurs relatives d’estimation du flux, dans le cas à deux pôles réels (6.15(b) et 6.15(c)) puis dans le cas à un pôle complexe (6.15(d) et 6.15(e)), suivant que les jeux de pôles sont optimisés pour minimiser l’erreur d’estimation de la position

(6.15(b) et 6.15(e)) ou celle du flux (6.15(c) ou 6.15(d)), et à chaque fois avec les deux jeux de pôles optimisés pour le haut et le bas régime en parallèle. La figure 6.16 fait de même avec les erreurs d'estimation de la position. Sur les autres profils, nous nous contenterons de présenter les résultats, dans le cas réel, de l'erreur d'estimation du flux pour des pôles optimisés pour le flux et de l'erreur d'estimation de la position pour des pôles optimisés pour la position. Première remarque, et d'importance, concernant les résultats sur profil mixte, les deux jeux de pôles haut régime et bas régime semblent à première vue complémentaires dans toutes les situations, les erreurs n'étant jamais trop importantes simultanément avec les deux jeux. Les erreurs sont grandes avec les pôles optimisés pour le haut régime essentiellement sur le plateau à bas régime. C'est un peu moins clair concernant les pôles optimisés pour le bas régime, globalement mauvais toutefois quand le régime s'élève (mais pas toujours). En regardant désormais plus en détails, la comparaison des figures 6.15(b) et 6.15(c) et des figures 6.15(d) et 6.15(e) nous confirme que, dans le cas complexe comme dans le cas réel, l'estimation du flux est meilleure quand les pôles sont optimisés pour le flux et non pour la position. Il en va de même pour l'estimation de la position (comparaison des figures 6.16(b) et 6.16(c) et des figures 6.16(d) et 6.16(e)), globalement meilleure quand les pôles sont optimisés pour la position et non pour le flux, notamment pour le cas à pôles réels (c'est moins net dans le cas complexe). Enfin, en comparant les figures 6.15(c) et 6.15(d) et les figures 6.16(c) et 6.16(d), on constate que les résultats sont plus ou moins similaires avec les pôles réels ou le pôle complexe. Très proches concernant l'estimation de la position, un peu moins concernant celle du flux, pour laquelle avec un pôle complexe l'erreur est moindre à haut régime mais plus grande à bas régime qu'avec deux pôles réels.

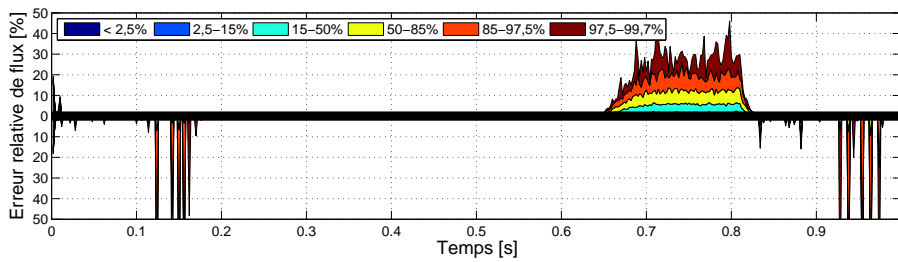
Intéressons-nous désormais au profil bas régime et à la figure 6.17. Sont donc présentés, uniquement dans le cas réel, le cas complexe étant comparable, les erreurs d'estimation du flux (6.17(b) et 6.17(c)) et de la position (6.17(d) et 6.17(e)) quand les pôles sont optimisés pour la bonne grandeur (flux ou position). Les figures 6.17(c) et 6.17(e) sont des gros plans des figures 6.17(b) et 6.17(d). Sans surprise, le passage par le palier à 10 tr/min est catastrophique pour l'observateur réglé pour le haut régime. Ce même observateur est moins mauvais en les autres points du profils mais insuffisant tout de même, notamment pour l'estimation du flux avec des erreurs de plusieurs pourcents. A l'inverse, l'observateur réglé pour le bas régime est plutôt bon, excepté toutefois au passage sur le palier à 10 tr/min, sur lequel l'estimation, en particulier celle du flux, se dégrade progressivement. Un passage bref à très bas régime ne devrait donc pas poser de problème. En revanche, cela devient plus gênant quand la durée de ce passage augmente. Les pôles optimisés pour le bas régime l'étant pour un régime de 100 tr/min, il n'est pas bien surprenant qu'ils ne fassent plus tout à fait l'affaire à



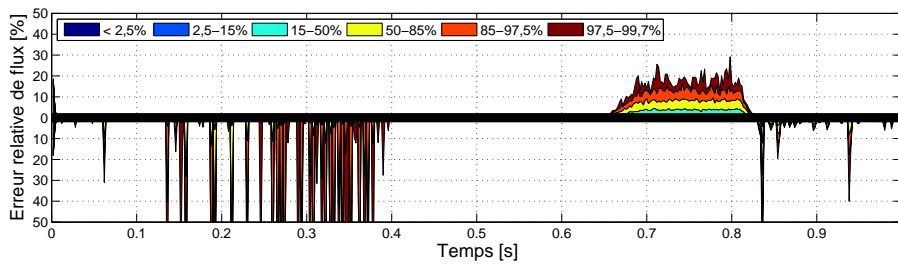
(a) Profil Mixte



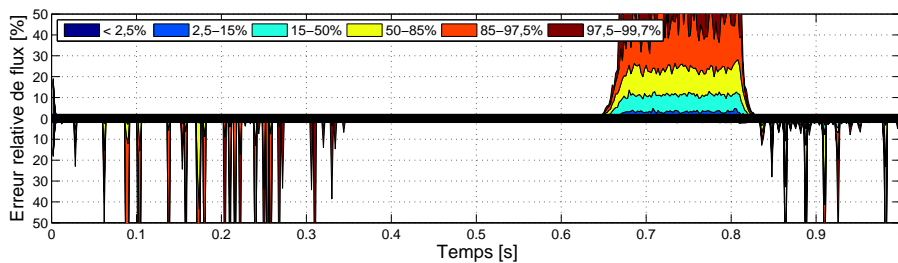
(b) Avec 2 pôles \mathbb{R} optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)



(c) Avec 2 pôles \mathbb{R} optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)

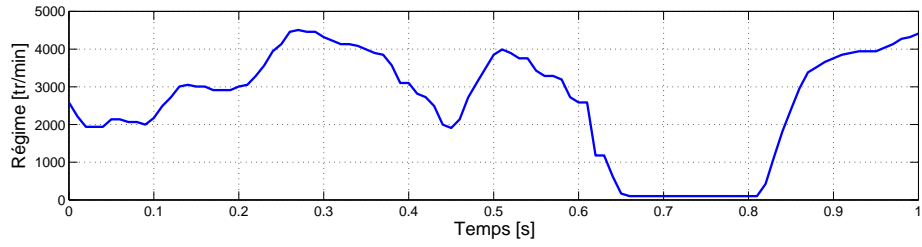


(d) Avec 1 pôle \mathbb{C} optimisé pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)

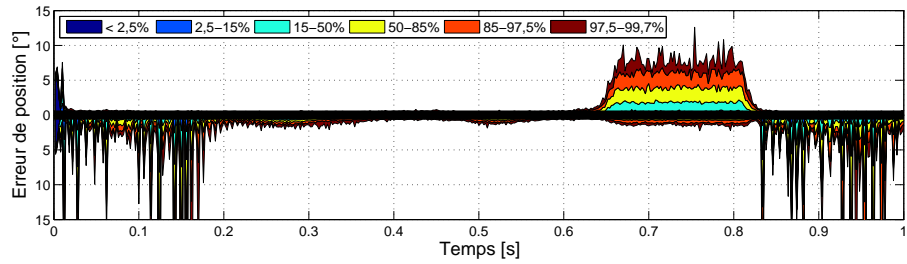


(e) Avec 1 pôle \mathbb{C} optimisé pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

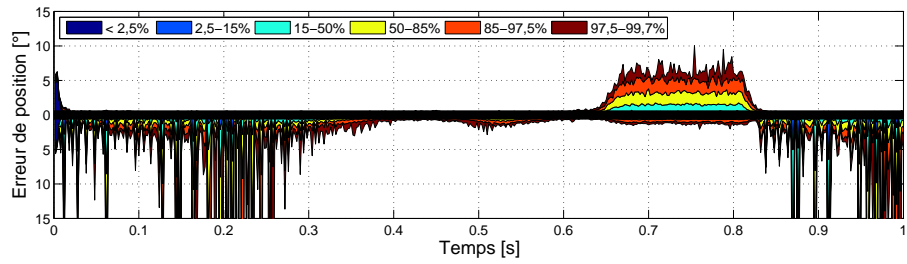
FIGURE 6.15 – Erreur relative d'estimation du flux sur le profil mixte



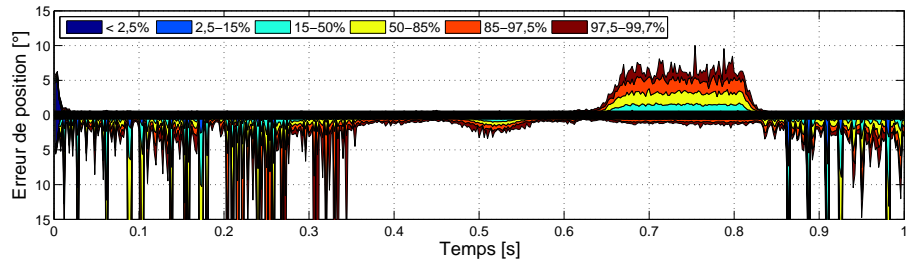
(a) Profil Mixte



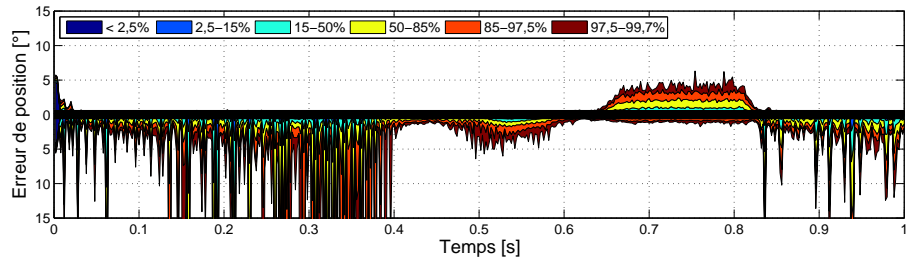
(b) Avec 2 pôles \mathbb{R} optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)



(c) Avec 2 pôles \mathbb{R} optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

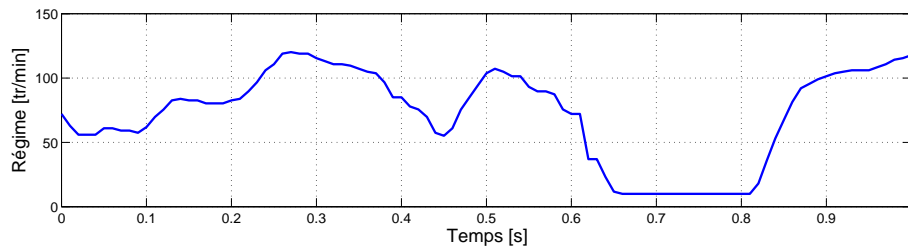


(d) Avec 1 pôle \mathbb{C} optimisé pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

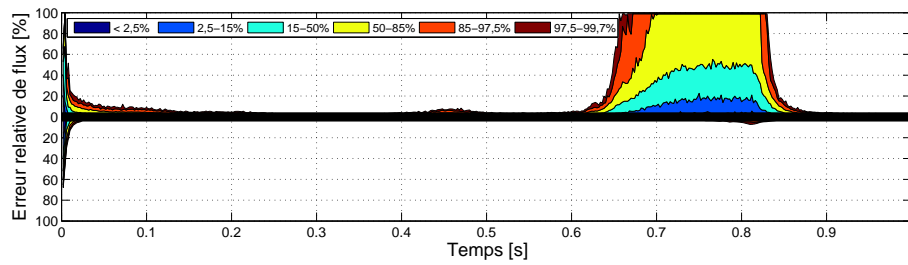


(e) Avec 1 pôle \mathbb{C} optimisé pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)

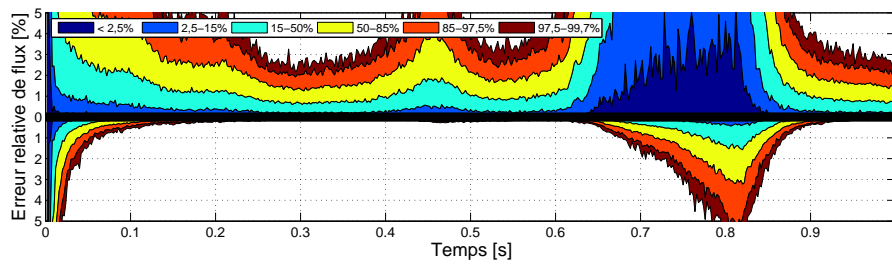
FIGURE 6.16 – Erreur d'estimation de la position sur le profil mixte



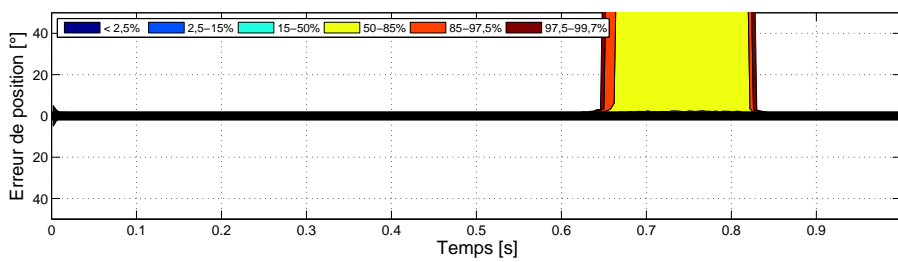
(a) Profil Bas régime



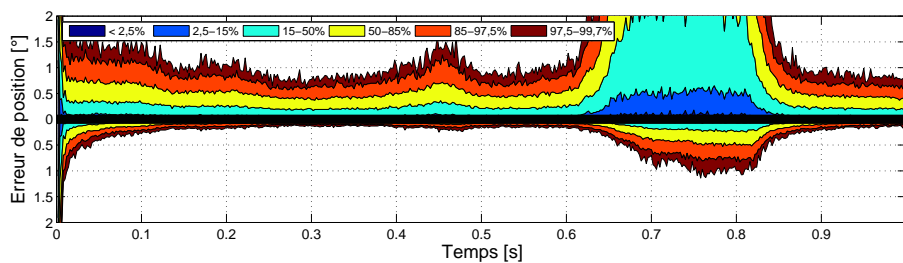
(b) Erreur de flux - Pôles optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)



(c) Erreur de flux - Pôles optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)



(d) Erreur de position - Pôles optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)



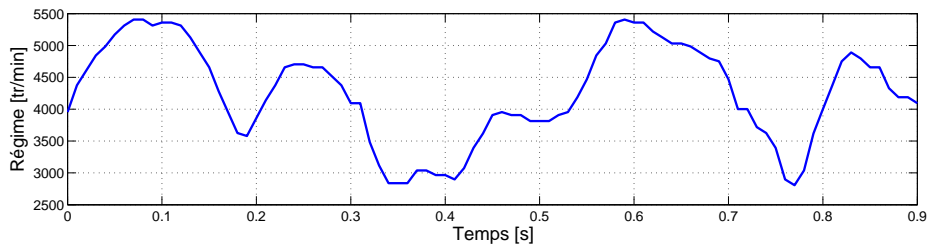
(e) Erreur de position - Pôles optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

FIGURE 6.17 – Erreurs d'estimation sur le profil Bas régime - 2 pôles \mathbb{R}

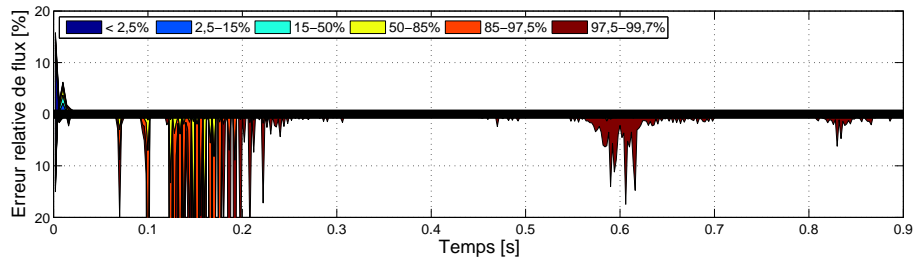
10 tr/min. Peut-être serait-il intéressant du coup d'utiliser un troisième jeu de pôles si l'on souhaite estimer également le très bas régime.

Passons maintenant au profil haut régime et à la figure 6.18. Les deux mêmes cas que pour le profil bas régime sont présentés. En toute logique, l'observateur réglé pour le haut régime est plutôt bon sur l'ensemble du profil avec, pour plus de 50% des simulations des erreurs de flux et de position respectivement inférieures à 0.1%, soit une erreur d'estimation de la température du rotor inférieure à 1°C , et 0.2 degré. Les estimations sont fortement moins bonnes, et ce d'autant plus que le régime est élevé, avec l'observateur réglé pour le bas régime, surtout concernant l'estimation de la position.

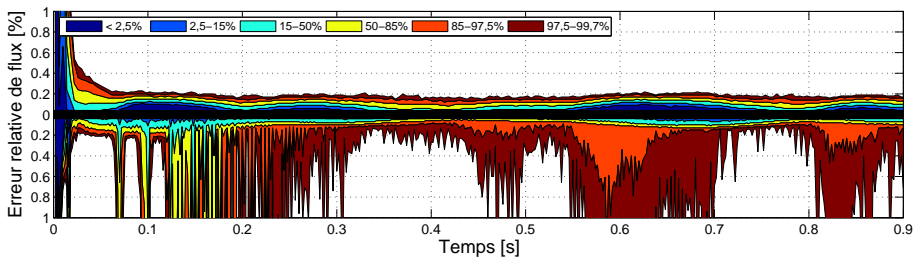
Enfin, considérons le profil en pentes et la figure 6.19, et déduisons-en les zones de régime pour lesquelles chacun des deux jeux de pôles est efficace. A nouveau, les deux mêmes cas sont présentés. On note que si l'estimation du flux avec l'observateur réglé pour le haut régime est surtout mauvaise à bas régime, l'erreur est également légèrement plus élevés aux "très hauts" régimes (i.e. supérieurs aux 4000 tr/min du réglage) qu'aux hauts et moyens régimes. Ce n'est pas le cas de l'estimation de la position, toujours d'autant meilleure que le régime est élevé. Avec l'observateur réglé pour le bas régime, on vérifie bien que les erreurs se produisent aux régimes élevés. On confirme également ce que nous avons évoqué dans le cas du profil bas régime, à savoir qu'aux très bas régimes l'estimation se dégrade progressivement en cas de séjour prolongé. Ce dernier étant ici relativement bref, l'erreur reste raisonnable. On souligne à cette occasion que même pour une vitesse quasi nulle, l'observateur présente des performances tout à fait honorables. Déterminons désormais les vitesses limites d'efficacité des observateurs. Nous considérons qu'un observateur est efficace si, pour 99,7% des simulations, l'erreur d'estimation du flux est inférieure à 1%, soit 8.5°C , et l'erreur d'estimation de la position à 2 degrés. Les limites des zones d'efficacité, suivant cette définition, sont tracées en magenta sur les figures 6.19(c) et 6.19(e). Par reports sur la courbe du profil (6.19(a)), on en déduit les différentes zones d'efficacité des observateurs. Les résultats sont présentés dans le tableau 6.10. A titre informatif sont également présentés dans ce tableau les zones où les critères sont remplis pour 50% des simulations. Ainsi, on constate que, pour l'estimation de la position, on peut utiliser l'observateur optimisé pour le bas régime jusqu'à 800 tr/min et celui optimisé pour le haut régime à partir de 450 tr/min. Les zones se chevauchant, toute la plage de régime peut donc être couverte par ces deux jeux de pôles complémentaires. Il en va de même pour l'estimation du flux, un observateur fonctionnant correctement jusqu'à 860 tr/min et l'autre à partir de 680 tr/min. En choisissant un régime de changement d'observateur aux alentours de 600 tr/min pour l'estimation de la position et de 750



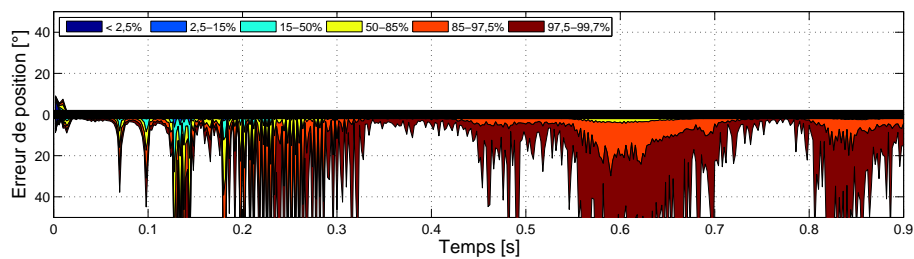
(a) Profil Haut régime



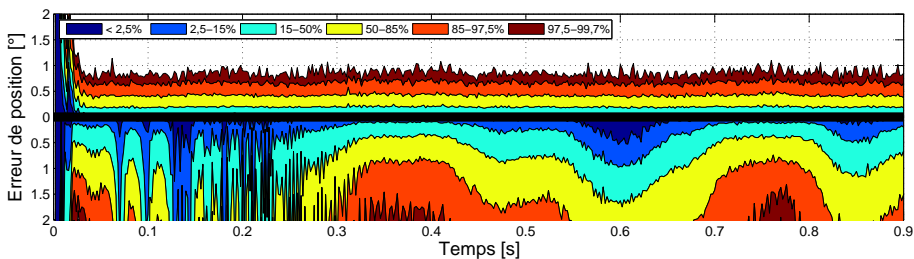
(b) Erreur de flux - Pôles optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)



(c) Erreur de flux - Pôles optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)

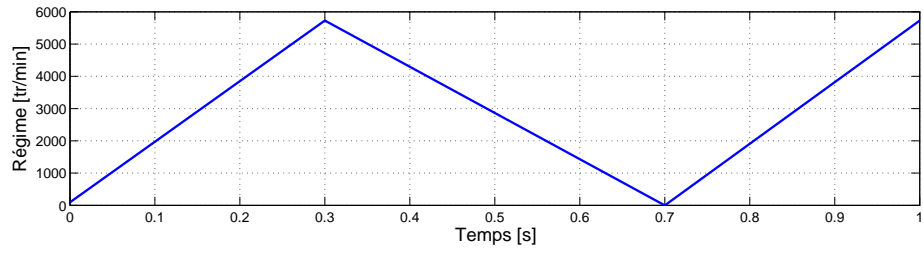


(d) Erreur de position - Pôles optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

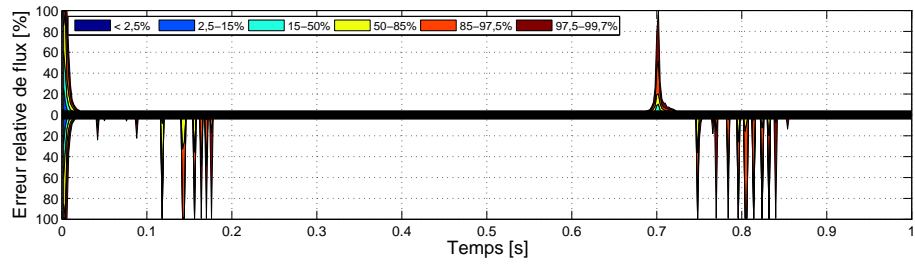


(e) Erreur de position - Pôles optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

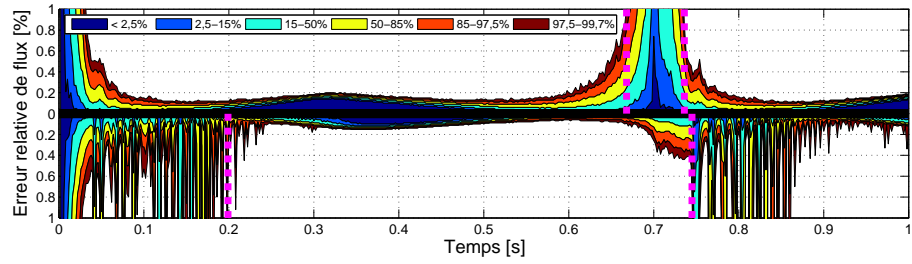
FIGURE 6.18 – Erreurs d'estimation sur le profil Haut régime - 2 pôles \mathbb{R}



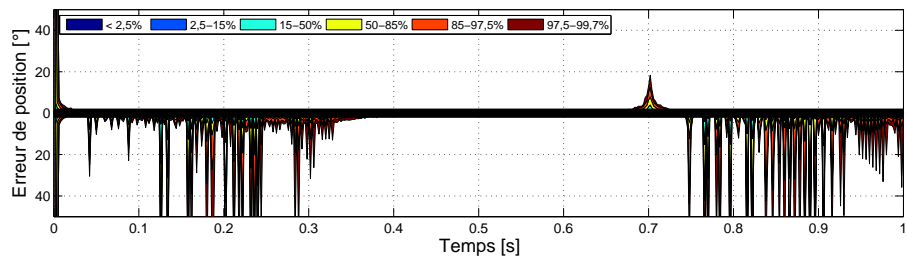
(a) Profil Pente



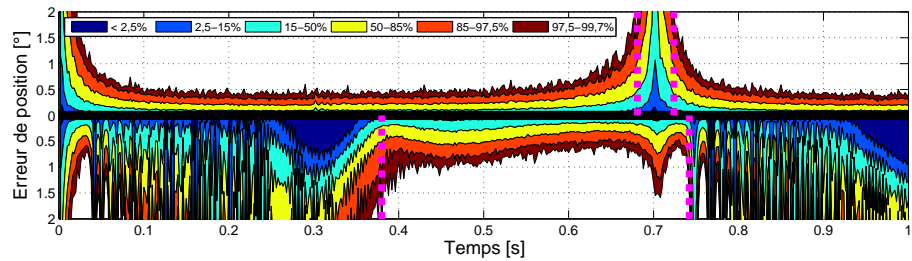
(b) Erreur de flux - Pôles optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)



(c) Erreur de flux - Pôles optimisés pour le flux à HR (en haut) et BR (en bas)



(d) Erreur de position - Pôles optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)



(e) Erreur de position - Pôles optimisés pour la position à HR (en haut) et BR (en bas)

FIGURE 6.19 – Erreurs d'estimation sur le profil Pente - 2 pôles \mathbb{R}

TABLE 6.10 – Profil pente - Complémentarité des deux jeux de pôles

Critère		Optimisation BR	Optimisation HR
Erreur position < 2°	99,7% cas	$\omega_m < 800$ tr/min	$\omega_m > 450$ tr/min
	50% cas	$\omega_m < 870$ tr/min	$\omega_m > 120$ tr/min
Erreur flux < 1%	99,7% cas	$\omega_m < 860$ tr/min	$\omega_m > 680$ tr/min
	50% cas	$\omega_m < 890$ tr/min	$\omega_m > 420$ tr/min

tr/min pour l'estimation du flux, nous devrions donc obtenir une estimation correcte du flux et de la position pour tous les régimes. Attention toutefois aux séjours prolongés à très bas régime, pour lesquels, comme nous l'avons constaté, les estimations peuvent se dégrader. Si la machine est amenée à fonctionner régulièrement à des vitesses quasi nulles, l'utilisation d'un troisième jeu de pôles est à envisager.

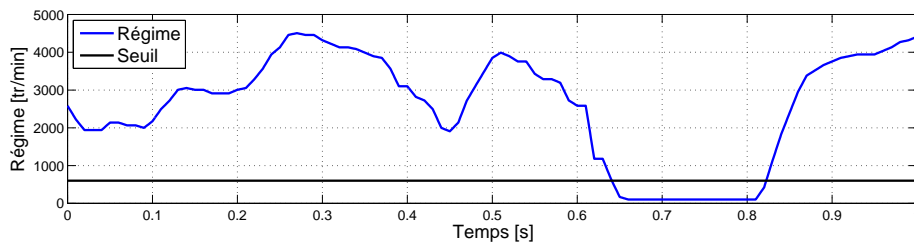
6.3.3 Mise en œuvre en simulation de l'alternance des observateurs en fonction du régime

La minimisation des erreurs sur les grilles nous a permis de déterminer pour chaque situation (réel/complexe, estimation du flux/de la position) deux jeux de pôles optimaux, l'un pour le bas régime, l'autre pour le haut régime. Par l'analyse de Monte-Carlo, nous avons ensuite déterminé les zones de fonctionnement de ces différents jeux de pôles et en avons déduit des valeurs seuil de régime pour procéder au choix de l'observateur à utiliser. Nous allons désormais tester en simulation cette alternance en ligne des jeux de pôles en fonction du régime. Pour ce faire, à l'instar des observateurs de flux et de position, les observateurs bas régime et haut régime fonctionnent en permanence simultanément et l'on vient choisir l'estimation de l'un ou de l'autre comme estimation retenue.

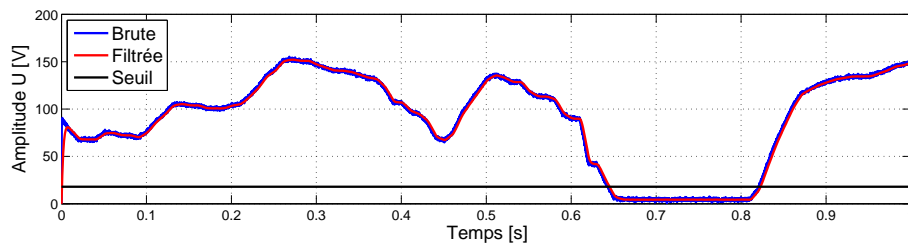
Les caractéristiques du moteur et du bruit sont les mêmes que celles utilisées précédemment dans le paragraphe. La mise en œuvre est illustrée sur le profil mixte, les profils bas régime et haut régime ne nécessitant pas d'alternance d'observateur et le profil en pentes, peu réaliste, ayant surtout eu pour but de déterminer les seuils de régime. Les cas à deux pôles réels et à un pôle complexe étant très proches, nous nous contentons ici de présenter le cas complexe. Par ailleurs, la sélection de l'observateur à utiliser doit se faire par comparaison du régime au régime seuil. Cependant, nous ne disposons pas d'observateur de régime et nous n'avons pas besoin d'une information très précise de ce régime. En effet, il existe une zone autour de la valeur seuil pour laquelle les deux observateurs fournissent des résultats corrects. Ainsi, une information,

éventuellement approximative, de la valeur relative du régime par rapport à la valeur seuil est suffisante, et cette information peut nous être fournie par l'amplitude de la tension. Cette dernière est en effet, d'après le paragraphe 2.1.2, environ proportionnelle au régime, et en outre aisément accessible en ligne grâce à la mesure des signaux de tensions : $U = \sqrt{u_\alpha^2 + u_\beta^2}$. On convertit alors les valeurs seuil de régime en valeurs seuil d'amplitude de la tension (600 tr/min pour la position et 750 tr/min pour le flux deviennent respectivement 18.0V et 22.2V) et on sélectionne l'observateur à utiliser par comparaison de l'amplitude de la tension à la tension seuil. On vérifie, en comparant les figures 6.20(a) et 6.20(b), que ce changement du critère de sélection est viable. Pour plus de sécurité toutefois, l'amplitude de la tension calculée est filtrée, de manière à éviter de faire les frais du bruit quand l'amplitude de la tension est très proche du seuil. En effet, l'amplitude non filtrée risquerait alors d'osciller entre les deux côtés de la valeur seuil, entraînant des changements très fréquents d'observateur, ce qui n'est évidemment pas souhaitable. La figure 6.20 présente alors, ici dans le cas de l'estimation du flux, l'observateur à sélectionner : l'observateur haut régime quand l'état vaut 1, l'observateur bas régime quand l'état vaut 0.

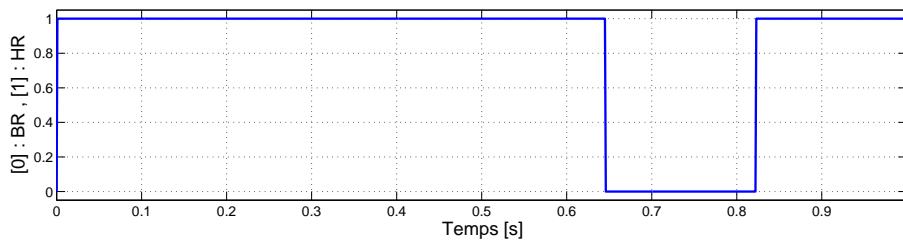
Les figures 6.21 et 6.22 présentent les résultats de cette alternance d'observateurs, respectivement pour l'estimation du flux et de la position. Dans les deux cas sont présentés le paramètre estimé par chacun des deux observateurs et les erreurs d'estimation (figures (b) et (d)), puis ce paramètre estimé et l'erreur d'estimation (figures (c) et (e)) lorsque l'on utilise en ligne l'alternance des observateurs imposée par la figure (a). Les résultats sont très concluants, chacun des deux observateurs pris indépendamment étant passagèrement la source d'erreurs importantes, tandis que le flux et la position estimés grâce à l'alternance des jeux de pôles présentent de faibles erreurs (attention, les échelles des axes des ordonnées ne sont pas les mêmes). On note notamment que la position estimée est continue, ce qui est très important en vue d'une implémentation en boucle fermée sur la position sans risque de détérioration de la machine.



(a) Comparaison du régime et du régime seuil

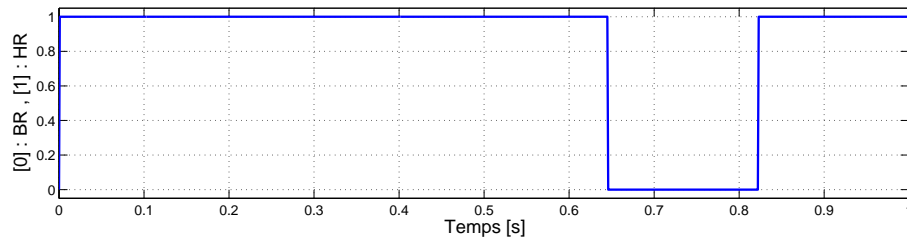


(b) Comparaison de l'amplitude de la tension et de l'amplitude seuil

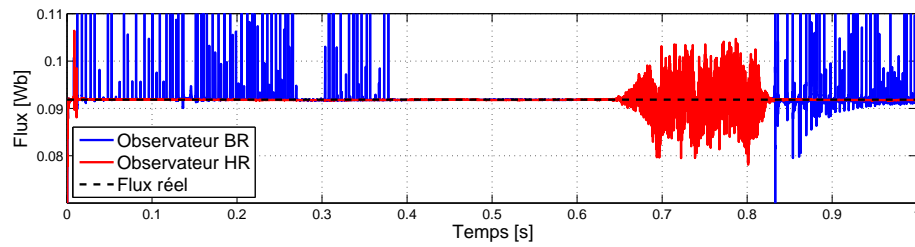


(c) Sélection de l'observateur à utiliser

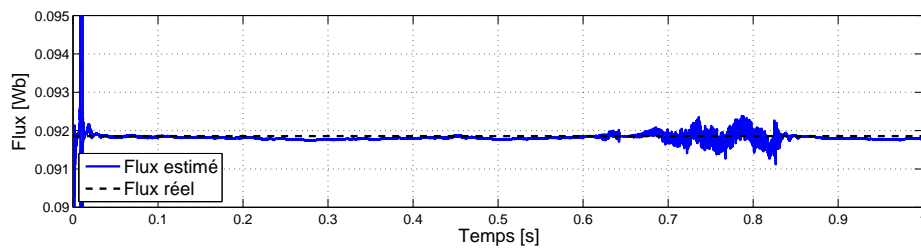
FIGURE 6.20 – Utilisation de l'amplitude de la tension pour la sélection de l'observateur



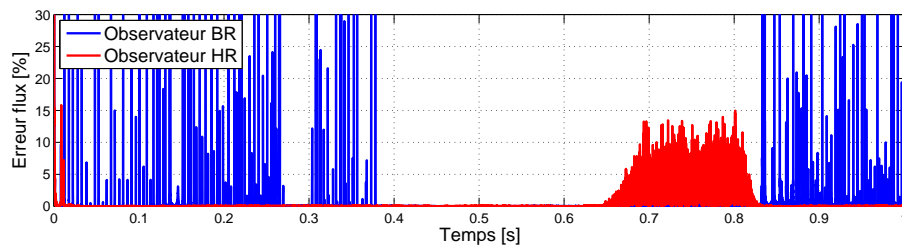
(a) Sélection de l'observateur à utiliser



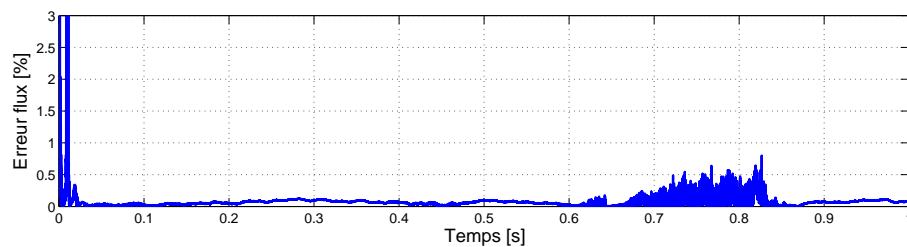
(b) Flux estimés par chacun des deux observateurs



(c) Flux estimé après sélection de l'observateur

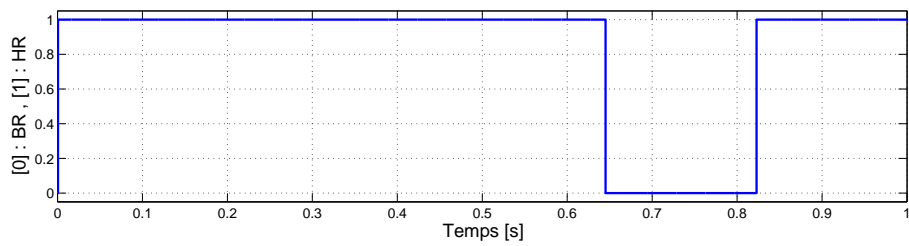


(d) Erreurs de flux pour chacun des deux observateurs

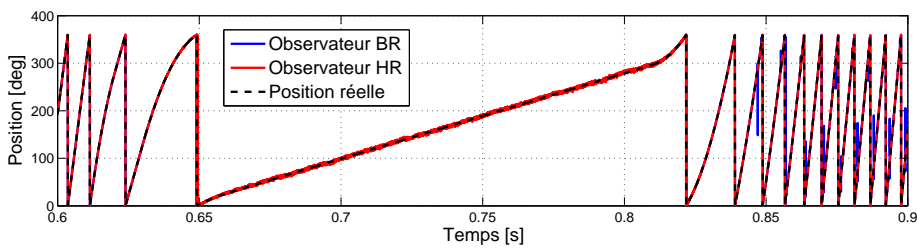


(e) Erreur de flux après sélection de l'observateur

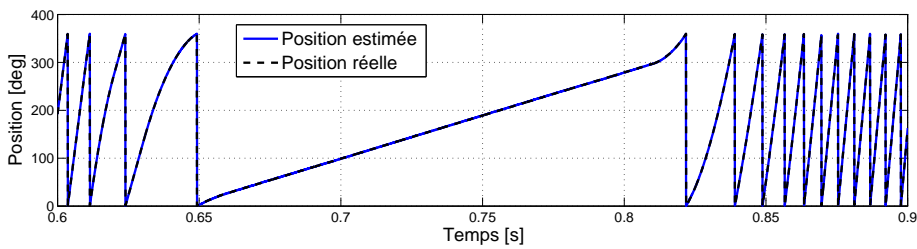
FIGURE 6.21 – Mise en œuvre de l'alternance des observateurs - estimation du flux



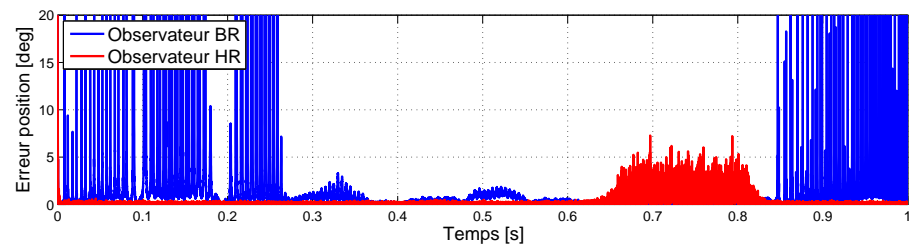
(a) Sélection de l'observateur à utiliser



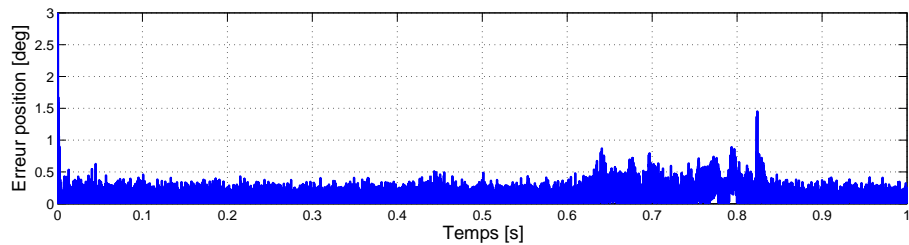
(b) Position estimées par chacun des deux observateurs



(c) Position estimée après sélection de l'observateur



(d) Erreurs de position pour chacun des deux observateurs



(e) Erreur de position après sélection de l'observateur

FIGURE 6.22 – Mise en œuvre de l'alternance des observateurs - estimation de la position

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact de bruits de mesure sur les courants et tensions sur l'estimation du flux et de la position par l'observateur non linéaire de Luenberger. Cette étude avait notamment pour but de minimiser les biais d'estimation engendrés par les bruits grâce au degré de liberté dont nous disposons, à savoir le réglage des pôles. Par un constat initial, nous avons tout d'abord déterminé que le choix des pôles ne dépendait pas ou quasiment pas du couple, mais qu'il était en revanche lié au régime, les pôles optimaux devant être plus ou moins proportionnels à celui-ci. La dépendance au couple n'a alors pas été étudiée.

Dans un premier temps, à l'aide de la définition d'un modèle de bruit, une étude théorique a été menée. Après quelques hypothèses et approximations, et une fois l'étude restreinte au cas de l'estimation du flux avec deux pôles réels, une expression de la moyenne temporelle du biais sur le flux estimé a pu être établie. Sa minimisation numérique par rapport aux deux pôles permet de confirmer le constat initial. Dans le cas étudié au final, i.e. après hypothèses et approximations, les pôles optimaux sont en effet proportionnels au régime. Par contre, ce que ne pouvait nous révéler le constat initial, c'est l'impact sur le biais de l'utilisation, à un régime, de pôles optimaux pour un autre régime. Ceci nous intéresse au plus haut point pour régler l'observateur, l'adaptation en ligne en continu des pôles au régime n'étant vraisemblablement pas envisageable. La conclusion est quasiment sans appel : impossible avec un seul jeu de deux pôles réels de couvrir toute la plage de fonctionnement du moteur de manière efficace. En revanche, l'utilisation de deux jeux de pôles, l'un optimisé pour le bas régime, l'autre pour le haut régime, apparaît beaucoup plus prometteuse. Toutefois, cette étude théorique présente des limites. D'une part, par sa restriction à l'estimation du flux dans le cas réel. D'autre part, par ses approximations et hypothèses, notamment de décorrélations, de limitations des calculs aux termes d'ordre deux, de non prise en compte du bruit sur les courants, et d'utilisation de la modélisation classique et non pas réaliste. Il est probable que tout ceci crée une proportionnalité artificielle des pôles optimaux au régime.

Afin d'y remédier, une étude en simulation est ensuite menée, faisant fi de ces approximations, hypothèses et restrictions, et fournissant ainsi des résultats plus réalistes, dans les cas réel et complexe, d'estimation du flux et de la position. Cette étude est divisée en deux grandes étapes. Avec la première, minimisant les erreurs d'estimation sur des grilles de pôles, nous déterminons des jeux de pôles optimaux en fonction du régime et du cas considéré. Sans grande surprise, la proportionnalité de ces pôles optimaux au régime a disparu, mais la tendance reste toutefois globalement la même, les pôles optimaux augmentant avec le régime. Nous constatons par ailleurs que les

résultats sont relativement comparables que l'on utilise deux pôles réels ou un pôle complexe. Il faut toutefois se montrer prudent quant aux problèmes numériques que pourraient causer deux pôles réels trop proches ou un pôle complexe à partie imaginaire quasi nulle. Nous remarquons également que les pôles optimaux sont différents que l'on souhaite minimiser l'erreur de flux ou l'erreur de position. Ceci incite à utiliser deux observateurs simultanément, l'un pour le flux, l'autre pour la position. Deux observateurs simultanés, c'est aussi ce qu'il nous faut pour couvrir correctement toute la plage de fonctionnement. En confirmation de l'étude théorique, nous constatons en effet que l'utilisation d'un unique jeu de pôles ne permet pas d'obtenir des estimations satisfaisantes à tous les régimes. Deux réglages différents, semblant complémentaires, sont alors retenus. Les analyses de Monte-Carlo de la seconde étape permettent de valider le choix des pôles sur différents profils de régime présentant des caractéristiques variées. Les résultats sont plutôt concluants, au moins l'un des deux observateurs fournissant à tout instant une bonne estimation, excepté aux très bas régimes pour lesquels l'utilisation d'un troisième observateur pourrait s'avérer judicieuse. Ces analyses de Monte-Carlo sont également l'occasion de déterminer des zones de fonctionnement pour chacun des deux observateurs, séparées par un régime seuil. Une estimation grossière du régime permet alors d'alterner automatiquement entre les deux observateurs et d'obtenir des estimations convaincantes sur la totalité d'un profil présentant des hauts comme des bas régimes.

Par ailleurs, nous avons évoqué la possibilité de débiaiser les estimations à partir du calcul des formules explicites du biais. Une telle expression a été déterminée pour le biais sur le flux et il peut être envisagé d'en faire de même pour la position. Cette possibilité de débiaiser n'a pas été testée, mais elle peut s'avérer une voie d'exploration intéressante.

Chapitre 7

Observation avec mesure de position : Observateur de Kreisselmeier

Ce chapitre s'intéresse à l'observation des paramètres physiques (résistance, flux et inductance) de la MSAP dans le cas où la position est connue, *via* le développement d'un observateur dit de Kreisselmeier. Comme l'observateur de Luenberger, cet observateur n'est basé que sur les équations électriques de la machine pour le rendre robuste aux paramètres relatifs à la charge mécanique connectée à l'arbre du moteur. Mais ceci impose de disposer de la mesure de la position du rotor. S'il a pour ambition d'estimer en ligne simultanément la résistance des enroulements, l'intensité du flux des aimants et l'inductance à l'aide des mesures des courants et tensions et de la position, nous nous intéresserons également à des observations partielles, notamment la plus importante à nos yeux du fait de la dépendance de ces deux paramètres à la température, à savoir celle de la résistance et du flux à inductance connue.

Après avoir exposé le problème d'estimation au paragraphe 7.1, nous étudions l'observabilité des trois paramètres au paragraphe 7.2. A défaut d'établir une condition nécessaire et suffisante d'observabilité, une condition nécessaire, presque toujours suffisante en pratique, y est explicitée, laquelle est complétée par un test d'observabilité fournissant une condition suffisante. En suivant la même démarche que pour l'observateur de Luenberger, l'observateur de Kreisselmeier est introduit dans le cas idéal au paragraphe 7.3, i.e. quand les signaux mesurés sont égaux aux signaux exacts. Le paragraphe 7.4 adapte alors cet observateur au cas réaliste. Enfin, le paragraphe 7.5 propose une étude en simulation de l'observateur, visant notamment à discuter du réglage de ses différents degrés de liberté, à tester sa robustesse à une mauvaise connaissance de

paramètres supposés connus et au bruit de mesure, et à se faire une idée de la qualité des estimations auxquelles on peut s'attendre. Notons que des résultats expérimentaux sont présentés au chapitre 8 et des résultats complémentaires en simulation dans l'annexe B.

Remarque : Dans ce chapitre, nous travaillons dans le repère (α, β) . Ainsi, pour simplifier les équations, nous noterons $i = i_{\alpha\beta}$, $u = u_{\alpha\beta}$, etc. De plus, nous supposons que la machine est à pôles lisses, soit $L_d = L_q = L$.

7.1 Modèle et problème d'estimation

Afin d'obtenir un modèle pour résoudre le problème d'estimation des trois paramètres physiques L , R et ϕ du moteur, nous notons que la résistance et le flux varient suffisamment lentement sous l'effet de la température pour pouvoir considérer leurs variations comme nulles quand on les compare aux constantes de temps électriques ou mécaniques. Il en va de même pour les possibles variations de l'inductance dues à des effets de saturation magnétique.

Remarquons que, pour un modèle d'une MSAP, si on choisit comme état (i, θ, ω) , alors l'observabilité différentielle à l'ordre 1 est garantie dès que ω est non nulle, comme démontré dans [19], et ceci quelle que soit la partie mécanique. En revanche, si, comme dans notre cas, on rajoute ne serait-ce qu'un des paramètres R , L ou ϕ comme composante de l'état à observer, alors l'observabilité différentielle doit être regardée à l'ordre 2, ce qui fait explicitement intervenir la partie mécanique, qui elle-même requiert des hypothèses sur le comportement du couple. Par contre, si on suppose que θ est mesurée, on n'a plus besoin de faire intervenir la partie mécanique. C'est cette dernière voie que nous suivons. Ainsi, le modèle que nous utilisons repose uniquement sur les équations électriques de la modélisation classique de la MSAP à pôles lisses dans le repère (α, β) (1.19) et est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_K &= \begin{pmatrix} \dot{L} \\ \dot{R} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ L \dot{\hat{i}} &= -Ri + \omega\phi \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + u, \\ y &= i. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ce modèle a pour entrées u et θ , pour état (χ_K, i) et pour sortie mesurée i . Il n'est pas sous forme standard d'état puisque la dérivée ω de l'entrée θ intervient. Son intérêt est

que, ce dernier point mis à part, il nous permet de résoudre notre problème d'estimation par la technique bien connue des observateurs linéaires adaptatifs.

Insistons bien sur le fait que (7.1) n'est pas le modèle d'une MSAP puisque la partie mécanique du modèle n'est pas prise en compte. Du coup, θ peut être n'importe quelle fonction du temps, alors que, dans la réalité, θ est donnée par l'équation différentielle $J_m \ddot{\theta} = p\phi(-i_\alpha \sin \theta + i_\beta \cos \theta) - \tau_L$. On remarque que si τ_L peut être n'importe quelle fonction du temps, le problème reste le même, puisqu'on peut toujours satisfaire l'équation mécanique (voir (7.5)). En revanche, si un modèle est imposé pour τ_L (couple de charge constant, suivant une rampe, *etc.*), alors la prise en compte de l'équation mécanique a son utilité. Dans notre cas, nous ne traitons donc pas le modèle d'un moteur mais celui d'un système dynamique qui a *a priori* beaucoup plus de solutions possibles, rien n'étant imposé pour θ . Si cette non prise en compte de la partie mécanique associée à un modèle du couple de charge, certes rend probablement plus délicate l'observabilité, comme nous le verrons au paragraphe suivant, et nous contraint à utiliser la mesure de la position, il s'agit néanmoins d'un choix délibéré de notre part dans une optique de robustesse aux paramètres relatifs à la charge mécanique. Rappelons en effet que notre objectif est l'estimation de la résistance et du flux et pas celle de la position, de la vitesse ou encore du couple de charge.

Avant d'entrer dans la présentation de cette solution, intéressons-nous à l'observabilité en général ou à celle d'un seul ou de deux de ces paramètres, l'autre ou les autres étant alors supposé(s) connu(s).

7.2 Etude de l'observabilité

Dans cette partie, nous cherchons à savoir si les trois paramètres intervenant dans le modèle (7.1), i.e. R , L et ϕ , sont observables. A cette fin nous cherchons s'il existe deux moteurs différents produisant la même sortie pour les mêmes entrées. Plus précisément, nous voulons savoir s'il existe ou pas deux jeux de paramètres différents $(\bar{R}, \bar{L}, \bar{\phi}) \neq (R, L, \phi)$ produisant la même sortie i pour les mêmes entrées (u, θ) . Nous avons tout d'abord la proposition suivante :

Proposition 7.1. *Soient (R, L, ϕ) et $(\bar{R}, \bar{L}, \bar{\phi})$ deux jeux de paramètres distincts tel que le produit $(R - \bar{R})(L - \bar{L})$ est strictement positif. Pour toute fonction dérivable $t \mapsto \theta(t)$ (ce qui nous donne la fonction $t \mapsto \omega(t) = \dot{\theta}(t)$), il existe une entrée $t \mapsto u_{bad}(t)$ et une*

sortie $t \mapsto i_{bad}(t)$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{i}}_{bad} &= -Ri_{bad} + \phi\omega \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + u_{bad} , \\ \bar{L}\dot{\hat{i}}_{bad} &= -\bar{R}i_{bad} + \bar{\phi}\omega \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + u_{bad} . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Démonstration. Il suffit de prendre i_{bad} comme une solution de :

$$(L - \bar{L})\dot{\hat{i}}_{bad} = -(R - \bar{R})i_{bad} + (\phi - \bar{\phi})\omega \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} , \quad (7.3)$$

qui est bornée en temps positif puisque $(L - \bar{L})$ et $(R - \bar{R})$ sont de même signe, puis de prendre u_{bad} donnée par :

$$u_{bad} = Ri_{bad} - \phi\omega \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} - L\dot{\hat{i}}_{bad} . \quad (7.4)$$

□

Nous en concluons que le modèle (7.1) n'est pas uniformément observable puisqu'il existe de "mauvaises" entrées ne permettant pas la distinguabilité de son état. Nous remarquons par ailleurs que la prise en compte de la dynamique mécanique n'y changerait rien si le couple de charge est inconnu. Il suffit en effet de prendre pour chacun des moteurs un couple approprié donné par :

$$\begin{aligned} \tau_L &= -J_m\dot{\omega} + p\phi i_{bad}^T \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} , \\ \bar{\tau}_L &= -\bar{J}_m\dot{\omega} + p\bar{\phi} i_{bad}^T \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Le problème d'observabilité que nous avons détecté sur notre modèle (7.1) existe donc aussi sur le modèle complet du moteur, i.e. prenant en compte également la partie mécanique du modèle, si le couple de charge peut être n'importe quelle fonction du temps, ce qui est en général le cas en réalité. Cependant, en pratique, les équations des observateurs construits à partir du modèle complet de la MSAP imposent usuellement un modèle sur le couple de charge, ce qui peut permettre de limiter les couples i_{bad}/u_{bad} , voire de se défaire entièrement de ces problèmes d'observabilité. Ainsi, par exemple, les observateurs adaptatifs interconnectés présentés dans [15] et [19], estimant le régime,

la position, le couple de charge et la résistance, ainsi que le flux pour le premier et l'inductance pour le second, utilisent l'équation de la mécanique en supposant le couple de charge constant.

Heureusement, ces non-observabilités ne sont obtenues que pour des mauvaises entrées très particulières, comme nous le verrons plus loin. En revanche la possibilité de passer au voisinage de telles entrées est possible, ceci engendrant un mauvais conditionnement du problème d'observation. Afin de nous garder de toute mauvaise surprise, nous pouvons effectuer en ligne un test d'observabilité, lequel permettra en outre de corroborer les résultats obtenus sur les cas traités.

7.2.1 Test d'observabilité

Le test d'observabilité proposé s'inspire du grammien d'observabilité ([6, §6.2.1]) et fournit une condition suffisante d'observabilité. Il nécessite la connaissance de la vitesse, ce qui n'est pas un problème insurmontable puisque la position est mesurée.

Proposition 7.2. *Soit $P(t)$ la matrice vérifiant :*

$$\dot{P}(t) = -\alpha_p P(t) + M_{\mathcal{O}}^T(t) M_{\mathcal{O}}(t) , \quad (7.6)$$

avec α_p un coefficient strictement positif et :

$$M_{\mathcal{O}} = \left(u \quad i \quad \begin{pmatrix} \omega \sin \theta \\ -\omega \cos \theta \end{pmatrix} \right) . \quad (7.7)$$

S'il existe $\epsilon_p > 0$, tel que le déterminant de $P(t)$ est supérieur à ϵ_p , alors l'état χ_K est observable sur l'horizon $[0, t]$.

Démonstration. L'état χ_K est observable si :

$$\left(\begin{array}{l} L \dot{\hat{i}} = -Ri + \omega \phi \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + u \\ \bar{L} \dot{\hat{i}} = -\bar{R}i + \omega \bar{\phi} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + u \end{array} \right) \forall t \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K , \quad (7.8)$$

soit si :

$$(L - \bar{L}) \dot{\hat{i}} = -(R - \bar{R})i + \omega(\phi - \bar{\phi}) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \forall t \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K . \quad (7.9)$$

En remplaçant alors \hat{i} par son expression, ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 & (L - \bar{L})u - (L - \bar{L})Ri + (L - \bar{L})\omega\phi \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \\
 & + L(\bar{R} - R)i - L\omega(\phi - \bar{\phi}) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K \\
 & \Leftrightarrow (L - \bar{L})u + (\bar{L}R - L\bar{R})i + (L\bar{\phi} - \bar{L}\phi)\omega \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K \\
 & \Leftrightarrow M_{\mathcal{O}}(t)e = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K ,
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

avec :

$$e = (L - \bar{L}, \bar{L}R - L\bar{R}, L\bar{\phi} - \bar{L}\phi)^T . \tag{7.11}$$

Comme nous avons $e = 0 \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K$, le système est observable si :

$$e^T M_{\mathcal{O}}(t)^T M_{\mathcal{O}}(t)e = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow e = 0 . \tag{7.12}$$

Nous définissons alors :

$$P(t) = \int_0^t \exp(-\alpha_p(t-s)) M_{\mathcal{O}}(s)^T M_{\mathcal{O}}(s) ds , \tag{7.13}$$

et comme nous avons :

$$e^T P(t)e = 0 \quad \Rightarrow e^T M_{\mathcal{O}}(t)^T M_{\mathcal{O}}(t)e = 0 \quad \forall t \in [0, T] , \tag{7.14}$$

une condition suffisante d'observabilité est l'inversibilité de $P(t)$.

□

En pratique, le test consiste à implémenter en ligne l'équation différentielle :

$$\dot{P}(t) = -\alpha_p P(t) + M_{\mathcal{O}}^T(t) M_{\mathcal{O}}(t) \tag{7.15}$$

et à évaluer le déterminant de $P(t)$.

7.2.2 Etude de l'observabilité dans le cas de courants fictifs i_d et i_q constants

Pour vérifier que les mauvaises entrées sont très particulières, nous étudions dans ce paragraphe l'observabilité dans le cas usuel de courants fictifs i_d et i_q constants. Comme

la position θ est supposée connue, nous pouvons faire cette étude dans le repère (d, q) . Dans le repère (d, q) , avec i_d et i_q constants et $L_d = L_q = L$, les équations électriques de la modélisation classique (1.15) s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_d(t) &= Ri_d - \omega(t)Li_q, \\ u_q(t) &= Ri_q + \omega(t)(Li_d + \phi). \end{aligned} \quad (7.16)$$

L'état χ_K est donc observable si :

$$\begin{pmatrix} (R - \bar{R})i_d - \omega(t)(L - \bar{L})i_q = 0 \\ (R - \bar{R})i_q + \omega(t)(L - \bar{L})i_d + \omega(t)(\phi - \bar{\phi}) = 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K. \quad (7.17)$$

En dérivant en t , nous obtenons la condition d'observabilité différentielle à l'ordre K^1 :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega(t)i_q & i_d \\ -\dot{\omega}(t)i_q & 0 \\ -\ddot{\omega}(t)i_q & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -\omega^{(K)}(t)i_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L - \bar{L} \\ R - \bar{R} \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \omega(t)i_d & i_q & \omega(t) \\ \dot{\omega}(t)i_d & 0 & \dot{\omega}(t) \\ \ddot{\omega}(t)i_d & 0 & \ddot{\omega}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega^{(K)}(t)i_d & 0 & \omega^{(K)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L - \bar{L} \\ R - \bar{R} \\ \phi - \bar{\phi} \end{pmatrix} = 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \Rightarrow \begin{pmatrix} L \\ R \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{R} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Nous en déduisons la proposition suivante.

Proposition 7.3. *Si les courants fictifs i_d et i_q sont constants, l'état $\chi_K = (L, R, \phi)$ est différentiellement observable à l'ordre K si et seulement si le courant i_q est non nul et pour tout temps t si au moins une des K dérivées en temps du régime est non nulle.*

Démonstration. Supposons $i_q \neq 0$ et qu'à l'instant t , la k -ème dérivée $\omega^{(k)}$ de ω est non nulle. Nous pouvons alors tirer les 3 équations suivantes de (7.18) :

$$\begin{pmatrix} -\omega^{(k)}(t)i_q & 0 & 0 \\ \omega(t)i_d & i_q & \omega(t) \\ \omega^{(k)}(t)i_d & 0 & \omega^{(k)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L - \bar{L} \\ R - \bar{R} \\ \phi - \bar{\phi} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.19)$$

1. Pour une définition, se référer au paragraphe 4.4.1 ou à [16, définition 4.2].

Le déterminant de la matrice de gauche étant $-\omega^{(k)}(t)^2 i_q^2 \neq 0$, on en déduit le résultat. Inversement, si i_q est nul, alors les seules lignes non nulles dans (7.18) sont du type

$$\begin{pmatrix} 0 & i_d & 0 \\ \omega^{(k)}(t)i_d & 0 & \omega^{(k)}(t) \\ \omega^{(j)}(t)i_d & 0 & \omega^{(j)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L - \bar{L} \\ R - \bar{R} \\ \phi - \bar{\phi} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.20)$$

Donc aucun mineur d'ordre 3 ne peut être non nul. De même, si pour tout k , $\omega^{(k)}$ est nul, seules deux lignes sont non nulles dans (7.18). Il n'existe alors aucun mineur d'ordre 3 non nul.

□

Si la condition énoncée dans cette proposition n'est pas satisfaite, il est tout de même possible que certains des paramètres soient observables, ceci nécessitant éventuellement la connaissance d'un ou des autre(s) paramètre(s). En regardant par quoi est multiplié chacun des écarts de paramètre dans (7.18), on trouve directement les conditions nécessaires suivantes :

- Si L est différentiellement observable, alors i_d ou i_q est non nul, et ω ou au moins une de ses dérivées en temps est non nulle.
- Si R est différentiellement observable, alors i_d ou i_q est non nul.
- Si ϕ est différentiellement observable, alors ω ou au moins une de ses dérivées en temps est non nulle.

Ces conditions ne sont toutefois pas suffisantes. Il existe également des cas où il est nécessaire de connaître la valeur d'un paramètre pour connaître les deux autres, des cas où l'on peut observer un paramètre indépendamment des autres et où l'observabilité d'un second paramètre nécessite la connaissance du troisième, *etc.* Face à cette diversité de situations, le tableau 7.1 présente les différents paramètres observables dans chacun des différents cas que constituent la nullité ou non des courants i_d et i_q , du régime ω et de ses dérivées. Notons que pour i_d , i_q et ω , 0 signifie nul et 1 signifie non nul. Par contre, pour $\omega^{(k)}$, 0 signifie que toutes les dérivées de ω sont nulles, tandis que 1 signifie qu'au moins l'une des dérivées est non nulle. Par ailleurs, la notation $R(\phi)$ (respectivement $\phi(R)$, $L(\phi)$, $\phi(L)$) signifie que l'on peut observer R (respectivement ϕ , L , ϕ) si ϕ (respectivement R , ϕ , L) est connu. On constate donc qu'il existe déjà beaucoup de situations différentes dans ce cas simple à courants i_d et i_q constants. Et ces situations vont se multiplier à l'infini dans le cas général, du fait de la perte du rôle équivalent joué ici par toutes les dérivées successives de ω . Nous nous limiterons alors dans le cas général à déterminer des conditions nécessaires d'observabilité, le test d'observabilité présenté au paragraphe 7.2.1 pouvant être utilisé en complément.

TABLE 7.1 – Observabilité des paramètres dans les différents cas quand les courants i_d et i_q sont constants

$\omega^{(k)}$	ω	i_d	i_q	Param. observables	$\omega^{(k)}$	ω	i_d	i_q	Param. observables
0	0	0	0	-	1	0	0	0	ϕ
0	0	0	1	R	1	0	0	1	L, R, ϕ
0	0	1	0	R	1	0	1	0	$R + L(\phi)$ ou $\phi(L)$
0	0	1	1	R	1	0	1	1	L, R, ϕ
0	1	0	0	ϕ	1	1	0	0	ϕ
0	1	0	1	$L + R(\phi)$ ou $\phi(R)$	1	1	0	1	L, R, ϕ
0	1	1	0	$R + L(\phi)$ ou $\phi(L)$	1	1	1	0	$R + L(\phi)$ ou $\phi(L)$
0	1	1	1	1 connu \Rightarrow 2 autres	1	1	1	1	L, R, ϕ

7.2.3 Etude de l'observabilité dans le cas général

Dans ce paragraphe, nous reprenons ce que nous venons de faire, mais cette fois sans l'hypothèse que i_d et i_q sont constants. Dans le repère (d, q) , avec $L_d = L_q = L$, les équations électriques de la modélisation classique (1.15) s'écrivent :

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{i}}_d(t) &= -Ri_d(t) + \omega(t)Li_q(t) + u_d(t) , \\ L\dot{\hat{i}}_q(t) &= -Ri_q(t) - \omega(t)L(i_q(t) + \phi) + u_q(t) . \end{aligned} \quad (7.21)$$

L'état χ_K est donc observable si :

$$\begin{pmatrix} (R - \bar{R})i_d(t) + (L - \bar{L})(\dot{\hat{i}}_d(t) - \omega(t)i_q(t)) = 0 \\ (R - \bar{R})i_q(t) + (L - \bar{L})(\dot{\hat{i}}_q(t) + \omega(t)i_d(t)) + \omega(t)(\phi - \bar{\phi}) = 0 \end{pmatrix} \forall t \Rightarrow \chi_K = \bar{\chi}_K . \quad (7.22)$$

En dérivant en t , nous obtenons la condition d'observabilité différentielle à l'ordre K :

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \dot{\hat{i}}_d(t) - \omega(t)i_q(t) & i_d(t) \\ \ddot{\hat{i}}_d(t) - \dot{\omega}(t)i_q(t) - \omega(t)\dot{\hat{i}}_q(t) & \dot{\hat{i}}_d(t) \\ \dots & \dots \\ \hat{i}_d(t) - \ddot{\omega}(t)i_q(t) - 2\dot{\omega}(t)\dot{\hat{i}}_q(t) - \omega(t)\ddot{\hat{i}}_q(t) & \ddot{\hat{i}}_d(t) \\ \vdots & \vdots \\ i_d^{(K)}(t) - \dots - \omega(t)i_q^{(K-1)}(t) & i_d^{(K-1)}(t) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} L - \bar{L} \\ R - \bar{R} \end{array} \right) = 0 \\ \forall t \\ \left(\begin{array}{ccc} \dot{\hat{i}}_q(t) + \omega(t)i_d(t) & i_q(t) & \omega(t) \\ \ddot{\hat{i}}_q(t) + \dot{\omega}(t)i_d(t) + \omega(t)\dot{\hat{i}}_d(t) & \dot{\hat{i}}_q(t) & \dot{\omega}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{i}_q(t) + \ddot{\omega}(t)i_d(t) + 2\dot{\omega}(t)\dot{\hat{i}}_d(t) + \omega(t)\ddot{\hat{i}}_d(t) & \ddot{\hat{i}}_q(t) & \ddot{\omega}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i_q^{(K)}(t) + \dots + \omega(t)i_d^{(K-1)}(t) & i_q^{(K-1)}(t) & \omega^{(K-1)}(t) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} L - \bar{L} \\ R - \bar{R} \\ \phi - \bar{\phi} \end{array} \right) = 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} L \\ R \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{R} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

La seconde matrice du système (7.23) peut désormais être de rang 3 au maximum et la première de rang 2. La difficulté d'exprimer des conditions suffisantes d'observabilité vient du fait de la possible existence de relations particulières entre i_d , i_q , ω et leurs dérivées, lesquelles viendraient abaisser le rang de ces matrices, par exemple si, entre autres, $(\dot{\hat{i}}_q + \omega i_d)\hat{i}_q = (\hat{i}_q + \dot{\omega}i_d + \omega\dot{\hat{i}}_d)i_q$. La présence des dérivées de i_d et i_q permet donc d'ajouter de l'information et, en toute logique, d'améliorer l'observabilité, mais, si on est malchanceux, elle peuvent également détruire de l'information. En revanche, il est toujours possible d'établir des conditions nécessaires d'observabilité en regardant, comme précédemment, par quoi est multiplié chacun des écarts de paramètres dans (7.23). Ainsi :

- Si L est différentiellement observable, alors au moins une des dérivées de i_d ou i_q est non nulle, ou ω ou une de ses dérivées est non nulle et i_d ou i_q est non nul.
- Si R est différentiellement observable, alors i_d , i_q ou au moins une de leurs dérivées est non nul.
- Si ϕ est différentiellement observable, alors ω ou au moins une de ses dérivées est non nulle.

On sait également, d'après le cas particulier étudié au paragraphe précédent, que si i_d et i_q sont constants, alors les trois paramètres sont observables si et seulement si $i_q \neq 0$ et qu'au moins l'une des dérivées de ω est non nulle. De tout ceci, on déduit la

condition nécessaire d'observabilité indiquée par la proposition suivante :

Proposition 7.4. *Une condition nécessaire d'observabilité différentielle à l'ordre K de l'état $\chi_K = (L, R, \phi)^T$ est donnée par : pour tout t , (une dérivée du courant $i_d(t)$ ou $i_q(t)$ est non nulle, et le régime $\omega(t)$ ou une de ses K dérivées est non nul) ou (le courant $i_q(t)$ est non nul, et au moins une des K dérivées du régime $\omega(t)$ est non nulle).*

Comme nous l'avons évoqué, cette condition n'est donc mathématiquement pas suffisante, mais elle l'est quasiment en pratique. Par ailleurs, cette proposition indique notamment qu'il est nécessaire que, soit le régime soit variable, soit le courant i_d ou i_q soit variable, pour que l'état χ_K soit différentiellement observable. Ainsi, pour la solution particulière introduite au paragraphe 2.1, l'état χ_K n'est pas observable.

Cas où un ou deux paramètres sont connus

Si l'état χ_K n'est pas observable, il est toutefois parfois possible d'observer quand même un ou deux des trois paramètres. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à ces observabilités partielles, tout d'abord en précisant les conditions nécessaires d'observabilité différentielle de deux paramètres quand l'autre est connu (non suffisantes toujours pour la même raison de possible existence de relations particulières), puis les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité différentielle d'un paramètre quand les deux autres sont connus. Les propositions suivantes sont obtenues à partir de (7.23), en ne considérant pas, dans les deux matrices, les colonnes des paramètres connus.

Proposition 7.5. *Si l'inductance L est connue, une condition nécessaire d'observabilité différentielle à l'ordre K de la résistance R et du flux ϕ est donnée par : pour tout t , ($i_d(t)$ ou l'une de ses K dérivées est non nul et $\omega(t)$ ou l'une de ses K dérivées est non nul) ou (il existe j et k dans $\{0, \dots, K\}$ tels que $i_q^{(j)}(t)\omega^{(k)}(t) \neq i_q^{(k)}(t)\omega^{(j)}(t)$).*

Proposition 7.6. *Si la résistance R est connue, une condition nécessaire d'observabilité différentielle à l'ordre K de l'inductance L et du flux ϕ est donnée par : pour tout t , ($\widehat{i}_d(t) - \omega i_q(t)$ ou l'une de ses K dérivées est non nul, et $\omega(t)$ ou l'une de ses K dérivées est non nul) ou (il existe j et k dans $\{0, \dots, K\}$ tels que $[\widehat{i}_d + \omega i_d]^{(j)}(t)\omega^{(k)}(t) \neq [\widehat{i}_d + \omega i_d]^{(k)}(t)\omega^{(j)}(t)$).*

Proposition 7.7. *Si le flux ϕ est connu, une condition nécessaire d'observabilité différentielle à l'ordre K de l'inductance L et de la résistance R est donnée par : pour tout t , il existe j et k dans $\{0, \dots, K\}$ tels que $([\widehat{i}_d - \omega i_q]^{(j)}(t)i_d^{(k)}(t) \neq [\widehat{i}_d - \omega i_q]^{(k)}(t)i_d^{(j)}(t))$ ou $([\widehat{i}_q + \omega i_d]^{(j)}(t)i_q^{(k)}(t) \neq [\widehat{i}_q + \omega i_d]^{(k)}(t)i_q^{(j)}(t))$.*

Proposition 7.8. *Si l'inductance L et la résistance R sont connues, alors le flux ϕ est différentiellement observable à l'ordre K si et seulement si, pour tout t , le régime ω ou l'une de ses K dérivées est non nul.*

Proposition 7.9. *Si l'inductance L et le flux ϕ sont connus, alors la résistance R est différentiellement observable à l'ordre K si et seulement si pour tout t , le courant $i_d(t)$ ou $i_q(t)$ ou une de leurs K dérivées est non nul.*

Proposition 7.10. *Si la résistance R et le flux ϕ sont connus, alors l'inductance L est différentiellement observable à l'ordre K si et seulement si pour tout t , $\widehat{i}_d(t) - \omega i_q(t)$ ou $\widehat{i}_q(t) + \omega i_d(t)$ ou une de leurs K dérivées est non nul.*

Remarque : Il existe aussi des cas d'observabilité d'un ou deux paramètres sans connaissance nécessaire du ou des paramètres non observés, à l'instar de ce que l'on a vu lors de l'étude du cas particulier à courants i_d et i_q constants (cf. tableau 7.1). Ces cas ne sont pas détaillés ici.

7.2.4 Bilan sur l'observabilité de l'état χ_K

En résumé, l'état $\chi_K = (L, R, \phi)^T$ n'est pas partout observable et, comme il existe une infinité de situations différentes suivant la nullité ou non des signaux de courants i_d , i_q et de leurs dérivées ainsi que du régime et de ses dérivées, il est difficile d'établir une condition nécessaire et suffisante d'observabilité. En revanche, une condition nécessaire d'observabilité est donnée par la proposition 7.4, laquelle indique notamment qu'il est nécessaire que, soit le régime, soit le courant i_d , soit le courant i_q soit variable. En particulier, si le régime ou le couple varie et que l'autre est non nul, alors la condition nécessaire est respectée. Si cette condition nécessaire n'est pas mathématiquement suffisante, elle l'est quasiment en pratique, à moins de se heurter à des cas très particuliers. Pour ne pas prendre de risque, le test d'observabilité de la proposition 7.2, qui fournit une condition suffisante d'observabilité, peut être, en parallèle, implémenté en ligne en complément. Par ailleurs, quelques conditions nécessaires (et suffisantes) ont été présentées sur le cas particulier à courants fictifs constants ou dans le cas d'observations partielles de l'état χ_K .

Enfin, notons que nous avons étudié ici l'observabilité dans le cas d'un moteur à pôles lisses. Peut-être la prise en compte de la saillance pourrait-elle simplifier l'étude de l'observabilité. Ou non...

7.3 Observateur de Kreisselmeier dans le cas idéal

Nous proposons d'exploiter la linéarité en les paramètres du modèle (7.1) par l'implémentation d'un des observateurs linéaires adaptatifs [38] que l'on trouve dans la littérature. Nous avons retenu celui décrit par Kreisselmeier dans [24]. Dans un premier temps, nous présentons cet observateur dans le cas idéal, i.e. quand les signaux mesurés sont égaux aux signaux exacts, la modélisation classique étant alors de mise. Nous nous intéresserons à l'implémentation dans le cas réaliste au paragraphe suivant. A ce stade, nous cherchons à estimer l'état complet sans nous préoccuper de son observabilité. Celle-ci réapparaîtra plus tard sous forme d'inversabilité d'une matrice. Nous préciserons en fin de paragraphe comment n'estimer qu'une partie de cet état, que ce soit pour raison de non observabilité ou par choix.

Le but de l'observateur de Kreisselmeier est de transformer les équations à l'aide de filtres stables, de degré relatif supérieur ou égal à 1, afin de remplacer les équations données par (7.1) par des équations toujours linéaires en les paramètres, mais ne faisant plus intervenir les dérivées. Le problème d'estimation est alors résoluble, par exemple, par moindres carrés. En effet, en l'état, les équations électriques du moteur peuvent s'écrire de manière linéaire en les paramètres à estimer mais elles font intervenir des dérivées de signaux auxquelles nous n'avons pas accès. Pour contourner ce problème, nous intégrons ces équations à l'aide de filtres de degré relatif un.

Reprenons le modèle (7.1) en introduisant la notation :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

en se rappelant que, la position étant mesurée, $\gamma(t)$ est connu. Nous obtenons :

$$L \dot{\hat{i}}(t) = -Ri(t) - \phi \dot{\gamma}(t) + u(t). \quad (7.25)$$

Nous adoptons aussi la notation :

$$i_f(t) = H_0(s)i(t), \quad \text{avec} \quad H_0(s) = \frac{\mu}{s + \mu}, \quad (7.26)$$

pour définir le signal filtré i_f solution de :

$$\dot{\hat{i}}_f(t) = -\mu(i_f(t) - i(t)), \quad (7.27)$$

soit :

$$i_f(t) = e^{-\mu t} i_f(0) + \mu \int_0^t e^{-\mu(t-s)} i(s) ds . \quad (7.28)$$

On a alors aussi $\dot{\hat{i}}_f(t) = H_0(s) \dot{\hat{i}}(t)$, et on pose de la même manière $u_f(t) = H_0(s)u(t)$ et $\gamma_{0f}(t) = H_0(s)\gamma(t)$, ce qui entraîne $\dot{\gamma}_{0f}(t) = H_0(s)\dot{\gamma}(t)$. Du fait de la linéarité, on a du coup :

$$g_0(t) = H_0(s)f_0(t) , \quad (7.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_0(t) &= L \dot{\hat{i}}(t) + Ri(t) + \phi \dot{\gamma}(t) - u(t) = 0 , \\ g_0(t) &= L \dot{\hat{i}}_f(t) + Ri_f(t) + \phi \dot{\gamma}_{0f}(t) - u_f(t) . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Ainsi :

$$\dot{g}_0(t) + \mu g_0(t) = \mu f_0(t) = 0 , \quad (7.31)$$

et donc :

$$g_0(t) = e^{-\mu t} g_0(0) . \quad (7.32)$$

En prenant $\mu > 0$, $g_0(t)$ est nulle en régime établi, i.e. en régime établi, l'équation suivante est vérifiée :

$$L \dot{\hat{i}}_f(t) + Ri_f(t) + \phi \dot{\gamma}_{0f}(t) = u_f(t) . \quad (7.33)$$

En déterminant $\dot{\hat{i}}_f$, i_f , $\dot{\gamma}_{0f}$ et u_f , et en disposant de plusieurs répétitions de (7.33), on peut alors estimer $\chi_K = (L, R, \phi)^T$ comme solution aux moindres carrés de (7.33) et de ses répétitions. Pour ce faire, deux points restent à préciser : la façon dont on détermine les signaux filtrés et la manière dont on implémente les moindres carrés.

7.3.1 Obtention des signaux filtrés

Pour implémenter l'observateur, les signaux $\dot{\hat{i}}_f$, i_f , $\dot{\gamma}_{0f}$ et u_f sont nécessaires. Leur obtention ne présente pas de difficulté particulière en utilisant les représentations d'état suivantes. Afin de déterminer $I_f = (\dot{\hat{i}}_f \ i_f)^T$, on considère :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -\mu x_i(t) + \mu i(t) , \\ I_f(t) &= \begin{pmatrix} -\mu \\ 1 \end{pmatrix} x_i(t) + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} i(t) . \end{aligned} \quad (7.34)$$

De même, $\dot{\gamma}_{0f}$ est déterminé à l'aide de la représentation d'état (7.35), en posant $\Gamma_{0f} = (\dot{\gamma}_{0f} \ \gamma_{0f})^T$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\gamma 0}(t) &= -\mu \ x_{\gamma 0}(t) + \mu \ \gamma(t) , \\ \Gamma_{0f}(t) &= \begin{pmatrix} -\mu \\ 1 \end{pmatrix} x_{\gamma 0}(t) + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \gamma(t) . \end{aligned} \quad (7.35)$$

Enfin, pour déterminer $U_f = u_f$, on considère :

$$\begin{aligned} \dot{x}_u(t) &= -\mu \ x_u(t) + \mu \ u(t) , \\ U_f(t) &= x_u(t) . \end{aligned} \quad (7.36)$$

7.3.2 Approche par une formulation faible

Pour justifier ce que nous appellerons par la suite "moindres carrés en espace", il est utile de donner une autre interprétation de l'équation (7.33). Notre point de départ est que, à chaque instant t , le modèle (7.25) écrit aux instants s , i.e.

$$L\hat{i}(s) = -Ri(s) - \phi\dot{\gamma}(s) + u(s) , \quad \forall s \leq t \quad (7.37)$$

nous donne une infinité d'équations. Pour nous ramener à un nombre fini d'équations, nous projetons, au sens de l'espace Hilbertien des fonctions de carrés intégrables $L^2([-\infty, t])$, sur un sous-espace de dimension finie engendré par m fonctions tests notées ψ_k , $1 \leq k \leq m$. Précisément, nous nous ramenons aux m équations :

$$\int_{-\infty}^t \psi_k(t, s) \left[L\hat{i}(s) + Ri(s) + \phi\dot{\gamma}(s) - u(s) \right] ds = 0 . \quad (7.38)$$

En choisissant ces fonctions tests décroissantes vers 0 suffisamment vite lorsque s tend vers $-\infty$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} L \left[\psi_k(t, t)i(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \psi_k}{\partial s}(t, s)i(s)ds \right] + \phi \left[\psi_k(t, t)\gamma(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \psi_k}{\partial s}(t, s)\gamma(s)ds \right] \\ + R \left[\int_{-\infty}^t \psi_k(t, s)i(s)ds \right] = \int_{-\infty}^t \psi_k(t, s)u(s)ds . \end{aligned} \quad (7.39)$$

Nous récrivons ces m équations sous la forme plus compacte :

$$Li_{pk}(t) + \phi\gamma_{pk}(t) + Ri_k(t) = u_k(t) , \quad (7.40)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} i_{pk}(t) &= \psi_k(t, t)i(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial\psi_k}{\partial s}(t, s)i(s)ds , \\ \gamma_{pk}(t) &= \psi_k(t, t)\gamma(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial\psi_k}{\partial s}(t, s)\gamma(s)ds , \\ i_k(t) &= \int_{-\infty}^t \psi_k(t, s)i(s)ds , \\ u_k(t) &= \int_{-\infty}^t \psi_k(t, s)u(s)ds . \end{aligned} \quad (7.41)$$

Un choix possible pour ces fonctions tests est :

$$\psi_k(t, s) = \mu_k \exp(-\mu_k[t - s]) , \quad (7.42)$$

et dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} i_{pk}(t) &= \frac{\mu_k s}{s + \mu_k} i(t) , \\ \gamma_{pk}(t) &= \frac{\mu_k s}{s + \mu_k} \gamma(t) , \\ i_k(t) &= \frac{\mu_k}{s + \mu_k} i(s) , \\ u_k(t) &= \frac{\mu_k}{s + \mu_k} u(t) . \end{aligned} \quad (7.43)$$

De la sorte, lorsque $m = 1$, nous retrouvons (7.33). Mais nous pouvons également prendre m plus grand de façon à obtenir, à chaque instant t , plus d'équations que d'inconnues. C'est ce cas que nous appelons "en espace".

7.3.3 Implémentation des moindres carrés

Comme nous venons de le voir au paragraphe précédent, une voie possible pour réaliser l'estimation des paramètres R , L et ϕ est l'utilisation de moindres carrés en espace avec m filtres implémentés en parallèle, pouvant être vus comme issus de l'utilisation de m fonctions tests ψ_k données par (7.42), m devant être suffisamment grand pour

disposer d'au moins autant d'équations que d'inconnues. Une autre voie a également été étudiée : l'utilisation de moindres carrés récurrents, i.e. en temps, avec un seul ou plusieurs filtre(s), et avec facteur d'oubli. On note que les moindres carrés récurrents avec plusieurs filtres sont des moindres carrés à la fois en temps et en espace.

Considérons l'implémentation de m filtres en parallèle (avec possibilité de prendre $m = 1$ dans le cas des moindres carrés récurrents). Pour $1 \leq k \leq m$, on note $i_{f_k}(t) = H_{0_k}(s)i(t)$ avec $H_{0_k}(s) = \frac{\mu_k}{s + \mu_k}$. De même, on note $\gamma_{0f_k}(t) = H_{0_k}(s)\gamma(t)$ et $u_{f_k}(t) = H_{0_k}(s)u(t)$. On a alors :

$$y_{0K}(t) = \Phi_{0K}(t)\chi_K, \quad (7.44)$$

avec le vecteur, de taille $2m$, $y_{0K}(t)$ et la matrice, de dimension $2m \times 3$, $\Phi_{0K}(t)$ donnés par :

$$y_{0K}(t) = \begin{pmatrix} u_{f_1}(t) \\ \vdots \\ u_{f_m}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_{0K}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\widehat{i}}_{f_1}(t) & i_{f_1}(t) & \dot{\gamma}_{0f_1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{\widehat{i}}_{f_m}(t) & i_{f_m}(t) & \dot{\gamma}_{0f_m}(t) \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

Résolution par moindres carrés en espace

Dans le cadre de la résolution par moindres carrés en espace, $2m$ doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres à estimer. Si on cherche à estimer χ_K en entier, on prend donc $m \geq 2$. L'estimation, par moindres carrés en espace, $\widehat{\chi}_{KE}$ de χ_K à l'instant t est donnée par :

$$\widehat{\chi}_{KE}(t) = \arg \min_{\chi_K} \|y_{0K}(t) - \Phi_{0K}(t)\chi_K\|^2 = (\Phi_{0K}^T(t)\Phi_{0K}(t))^{-1}\Phi_{0K}^T(t)y_{0K}(t). \quad (7.46)$$

Notons que, s'il y a observabilité, la matrice $\Phi_{0K}^T(t)\Phi_{0K}(t)$ est inversible.

Résolution par moindres carrés récurrents avec facteur d'oubli

Dans le cadre de la résolution par moindres carrés récurrents, on peut se contenter de $m = 1$ puisqu'il s'agit de moindres carrés en temps, mais il est également possible d'en faire des moindres carrés en temps et en espace en prenant $m > 1$. On note f_{oubli} , avec $0 < f_{oubli} < 1$, le facteur d'oubli, lequel permet de ne pas avoir à subir éternellement les conséquences d'une anomalie d'estimation à un instant donné du passé. Le facteur d'oubli pondère en effet les informations utilisées, le poids étant d'autant plus faible que l'information appartient au passé. Utiliser un facteur d'oubli est ainsi proche d'utiliser une fenêtre glissante exponentielle. De plus, si un facteur d'oubli égal à 1 reviendrait à ne jamais rien oublier, plus le facteur d'oubli est faible, moins l'horizon sur lequel on

retient les informations du passé est important et on se rapproche des moindres carrés simples. On introduit également la matrice carrée \mathcal{Q} , de dimension égale au nombre de paramètres à estimer et que l'on initialise à $t = t_0$ par la matrice identité. L'estimation, par moindres carrés récurrents, $\hat{\chi}_{K_R}$ de χ_K à l'instant t_n est alors donnée, d'après [6, §7.4.3], par :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t_n) &= \frac{1}{f_{oubli}} \mathcal{Q}(t_{n-1}) - \frac{1}{f_{oubli}^2} \mathcal{Q}(t_{n-1}) \Phi_{0K}(t_n) \\ &\quad \times \left(\mathcal{I} + \frac{1}{f_{oubli}} \Phi_{0K}^T(t_n) \mathcal{Q}(t_{n-1}) \Phi_{0K}(t_n) \right)^{-1} \Phi_{0K}^T(t_n) \mathcal{Q}(t_{n-1}) , \\ \hat{\chi}_{K_R}(t_n) &= \hat{\chi}_{K_R}(t_{n-1}) + \frac{1}{f_{oubli}} \mathcal{Q}(t_{n-1}) \Phi_{0K}(t_n) \\ &\quad \times \left(\mathcal{I} + \frac{1}{f_{oubli}} \Phi_{0K}^T(t_n) \mathcal{Q}(t_{n-1}) \Phi_{0K}(t_n) \right)^{-1} \left(y_{0K}(t_n) - \Phi_{0K}^T(t_n) \hat{\chi}_{K_R}(t_{n-1}) \right). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Notons que, s'il y a observabilité, la suite matricielle $\mathcal{Q}(t_n)$ est bornée.

7.3.4 Estimation partielle de l'état

Dans le cas où l'état complet $\chi_K = (L, R, \phi)^T$ n'est pas observable, mais où un ou deux de ses paramètres le sont, ou si l'on ne souhaite observer qu'un ou deux paramètres de χ_K , connaissant le ou les autre(s), au moins de manière approchée, une simple petite modification suffit. Que l'on résolve par moindres carrés en espace ou récurrents, il est en effet suffisant de transférer dans le vecteur y_{0K} les colonnes de Φ_{0K} associées aux paramètres connus. Par exemple, si l'on cherche à estimer la résistance et l'inductance connaissant le flux, le problème devient :

$$y_{r0K}(t) = \Phi_{r0K}(t) \chi_{rK} , \quad (7.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} y_{r0K}(t) &= y_{0K}(t) - \phi_a \Phi_{0K3}(t) , \\ \Phi_{r0K}(t) &= \begin{pmatrix} \Phi_{0K1}(t) & \Phi_{0K2}(t) \end{pmatrix} , \\ \chi_{rK} &= \begin{pmatrix} L & R \end{pmatrix}^T , \end{aligned} \quad (7.49)$$

où Φ_{0Kj} représente la j -ème colonne de la matrice Φ_{0K} , et ϕ_a l'approximation dont nous disposons de ϕ . On définit de même R_a et L_a les approximations que nous avons de R et L .

7.3.5 Conclusion : Observateur de Kreisselmeier dans le cas idéal

La dynamique de l'observateur de Kreisselmeier dans le cas idéal est :

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{i}}_{f_k}(t) &= -\mu_k(i_{f_k}(t) - i(t)) , \\ \dot{\gamma}_{0f_k}(t) &= -\mu_k(\gamma_{0f_k}(t) - \gamma(t)) , \quad 1 \leq k \leq m , \\ \dot{u}_{f_k}(t) &= -\mu_k(u_{f_k}(t) - u(t)) ,\end{aligned}\tag{7.50}$$

où i et u sont les courants et tensions exacts dans le repère (α, β) aux bornes du moteur, et où $\gamma = (\cos \theta \quad \sin \theta)^T$. Les μ_k sont à choisir. On en déduit l'estimée $\widehat{\chi}_K = (\widehat{L}, \widehat{R}, \widehat{\phi})^T$ de χ_K comme étant la solution aux moindres carrés en espace ($\widehat{\chi}_K = \widehat{\chi}_{K_E}$) ou récursifs ($\widehat{\chi}_K = \widehat{\chi}_{K_R}$) de :

$$L\dot{\widehat{i}}_{f_k}(t) + Ri_{f_k}(t) + \phi\dot{\gamma}_{0f_k}(t) = u_{f_k}(t) , \quad 1 \leq k \leq m .\tag{7.51}$$

Il est également possible de n'estimer qu'une partie de χ_K , connaissant des valeurs approchées du ou des paramètre(s) que l'on ne souhaite pas estimer. Par exemple, si on cherche à estimer la résistance et l'inductance connaissant le flux, on résout :

$$L\dot{\widehat{i}}_{f_k}(t) + Ri_{f_k}(t) = u_{f_k}(t) - \phi_a\dot{\gamma}_{0f_k}(t) , \quad 1 \leq k \leq m ,\tag{7.52}$$

où ϕ_a est l'approximation que nous avons de ϕ , les approximations R_a et L_a étant définies de manière analogue. Une étude de robustesse à de mauvaises approximations de R , L et ϕ par R_a , L_a et ϕ_a est menée en simulation au paragraphe 7.5.5.

7.4 Observateur de Kreisselmeier dans le cas réaliste

Tout d'abord, rappelons que dans le cadre de la modélisation réaliste présentée au paragraphe 2.2, les signaux mesurés y_i et y_u de courants et tensions ne sont pas égaux aux signaux exacts i et u , mais sont obtenus par filtrage de ceux-ci par des filtres passe-bas du premier ordre, de constantes de temps respectives τ_i et τ_u :

$$\begin{aligned}u(t) &= \tau_u\dot{y}_u(t) + y_u(t) , \\ i(t) &= \tau_i\dot{y}_i(t) + y_i(t) .\end{aligned}\tag{7.53}$$

On met d'ailleurs ici en garde le lecteur afin de bien distinguer les filtres de la modélisation réaliste, établissant les relations entre signaux mesurés et signaux exacts, des filtres utilisés pour implémenter l'observateur de Kreisselmeier. Par ailleurs, nous

considérerons que, même pour la modélisation réaliste, la position mesurée est la position exacte. En effet, contrairement aux signaux de courants et tensions qui doivent être filtrés (notamment pour éviter le repliement dû à la modulation de largeur d'impulsion gouvernant l'onduleur), l'information de position arrive directement du codeur incrémental, i.e. du capteur de position.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.1 dans le cadre de l'observateur de Luenberger, l'utilisation de la modélisation réaliste plutôt que de la modélisation classique ne modifie pas l'observabilité. Ainsi, l'état χ_K est observable dans le cas réaliste si et seulement si χ_K est observable dans le cas classique. Il en va de même pour les observabilités partielles de χ_K . Mais, comme au paragraphe précédent, dans un premier temps, nous ne nous préoccupons pas de l'observabilité et nous cherchons à estimer l'état complet, l'estimation partielle étant évoquée en fin de paragraphe. Nous supposons également que les constantes de temps τ_u et τ_i sont connues. Le cas de leur non connaissance fera l'objet d'une remarque.

Si le principe de l'observateur de Kreisselmeier reste exactement le même dans le cas réaliste que dans le cas classique, il est cependant nécessaire d'y apporter quelques modifications. En effet, du fait du degré de dérivation supplémentaire apporté par les filtres de la modélisation réaliste, les filtres de l'observateur doivent désormais être au minimum de degré relatif deux.

Ainsi, toujours avec $\gamma = (\cos \theta \quad \sin \theta)^T$, et d'après (1.18) et (2.41), les équations électriques de la modélisation réaliste dans le repère (α, β) s'écrivent, toujours de manière linéaire en R , L et ϕ :

$$L(\tau_i \ddot{y}_i(t) + \dot{y}_i(t)) = -R(\tau_i \dot{y}_i(t) + y_i(t)) - \phi \dot{\gamma}(t) + (\tau_u \dot{y}_u(t) + y_u(t)). \quad (7.54)$$

On pose $\ddot{y}_{if}(t) = H_1(s)\ddot{y}_i(t) = H_1(s)s^2 y_i(t)$. Comme $\ddot{y}_i(t)$ et $\dot{y}_i(t)$ ne sont pas accessibles, il est nécessaire de choisir une fonction de transfert $H_1(s)$ du filtre de degré relatif au moins égal à deux. On choisit d'utiliser un filtre passe-bas du second ordre :

$$H_1(s) = \frac{\mathfrak{d}}{s^2 + \mathfrak{a}s + \mathfrak{d}}, \quad (7.55)$$

avec \mathfrak{a} et \mathfrak{d} à choisir. La dynamique du signal filtré y_{if} est donnée par :

$$\ddot{y}_{if}(t) + \mathfrak{a}\dot{y}_{if}(t) = -\mathfrak{d}(y_{if}(t) - y_i(t)). \quad (7.56)$$

On pose alors :

$$y_{if}(t) = H_1(s)y_i(t), \quad y_{uf}(t) = H_1(s)y_u(t) \quad \text{et} \quad \gamma_{1f} = H_1(s)\gamma. \quad (7.57)$$

Par linéarité, on a :

$$g_1(t) = H_1(s)f_1(t) , \quad (7.58)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= L(\tau_i \ddot{y}_i(t) + \dot{y}_i(t)) + R(\tau_i \dot{y}_i(t) + y_i(t)) + \phi \dot{\gamma}(t) - (\tau_u \dot{y}_u(t) + y_u(t)) = 0 , \\ g_1(t) &= L(\tau_i \ddot{y}_{if}(t) + \dot{y}_{if}(t)) + R(\tau_i \dot{y}_{if}(t) + y_{if}(t)) + \phi \dot{\gamma}_{1f}(t) - (\tau_u \dot{y}_{uf}(t) + y_{uf}(t)) . \end{aligned} \quad (7.59)$$

Ainsi :

$$\ddot{g}_1(t) + \mathbf{a}\dot{g}_1(t) + \mathbf{d}g_1(t) = \mathbf{d}f_1(t) = 0 . \quad (7.60)$$

Donc, en imposant que \mathbf{a} et \mathbf{d} soient positifs, nous sommes assurés que $g_1(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, en régime établi, l'équation suivante est vérifiée :

$$L(\tau_i \ddot{y}_{if}(t) + \dot{y}_{if}(t)) + R(\tau_i \dot{y}_{if}(t) + y_{if}(t)) + \phi \dot{\gamma}_{1f}(t) = (\tau_u \dot{y}_{uf}(t) + y_{uf}(t)) . \quad (7.61)$$

Comme dans le cas idéal, en déterminant les signaux filtrés y_{if} , \dot{y}_{if} , \ddot{y}_{if} , y_{uf} , \dot{y}_{uf} et $\dot{\gamma}_{1f}$, et en disposant de plusieurs répétitions de (7.61), on peut estimer $\chi_K = (L, R, \phi)^T$ comme solution aux moindres carrés de (7.61) et de ses répétitions. Intéressons-nous tout d'abord à la manière de déterminer les signaux filtrés.

7.4.1 Obtention des signaux filtrés

Les signaux y_{if} , \dot{y}_{if} , \ddot{y}_{if} , y_{uf} , \dot{y}_{uf} et $\dot{\gamma}_{1f}$ sont obtenus à l'aide des représentations d'état données par les propositions 7.11 et 7.12.

Proposition 7.11. *On détermine $Y_{if} = (\ddot{y}_{if} \ \dot{y}_{if} \ y_{if})^T$ à l'aide de la représentation d'état :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{yi}(t) &= A_i x_{yi}(t) + B_i y_i(t) , \\ Y_{if}(t) &= C_i x_{yi}(t) + D_i y_i(t) , \end{aligned} \quad (7.62)$$

avec :

$$A_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{a} & 1 \\ -\mathbf{d} & 0 \end{pmatrix} , \quad B_i = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^2/\mathbf{a} \end{pmatrix} , \quad C_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{a} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}/\mathbf{d} \\ \mathbf{a}/\mathbf{d} & -\mathbf{d}^2/\mathbf{d}^2 \end{pmatrix} , \quad D_i = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (7.63)$$

Démonstration. On a :

$$Y_{if}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{y}_{if}(t) \\ \dot{y}_{if}(t) \\ y_{if}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} y_{if}(t) = \begin{pmatrix} s^2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} H_1(s) y_i(t) . \quad (7.64)$$

La fonction de transfert entre y_i et Y_{if} est donc donnée par $(s^2 \ s \ 1)^T H_1(s)$. En notant que la première composante $s^2 H_1(s) = \frac{s^2 \mathfrak{d}}{s^2 + \mathfrak{a}s + \mathfrak{d}}$ se décompose en :

$$s^2 H_1(s) = \mathfrak{d} - \mathfrak{d} \frac{\mathfrak{a}s + \mathfrak{d}}{s^2 + \mathfrak{a}s + \mathfrak{d}} , \quad (7.65)$$

notre problème se réduit à trouver (A_i, B_i, C_i, D_i) satisfaisant :

$$\frac{\begin{pmatrix} -\mathfrak{a}s - \mathfrak{d} \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \mathfrak{d}}{s^2 + \mathfrak{a}s + \mathfrak{d}} + \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_i (s\mathcal{I} - A_i)^{-1} B_i + D_i . \quad (7.66)$$

La solution n'est pas unique puisque la base pour x_{y_i} n'est pas spécifiée. Pour contourner cette difficulté, nous imposons la forme suivante pour la matrice A_i :

$$A_i = \begin{pmatrix} -\mathfrak{a} & 1 \\ -\mathfrak{d} & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.67)$$

Par ailleurs, nous avons bien évidemment :

$$D_i = (\mathfrak{d} \ 0 \ 0)^T . \quad (7.68)$$

Il nous reste donc à trouver B_i et C_i solution de :

$$C_i \begin{pmatrix} s & 1 \\ -\mathfrak{d} & s + \mathfrak{a} \end{pmatrix} B_i = \begin{pmatrix} -\mathfrak{a}s - \mathfrak{d} \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \mathfrak{d} . \quad (7.69)$$

Une solution est bien :

$$B_i = \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d}^2/\mathfrak{a} \end{pmatrix} \text{ et } C_i = \begin{pmatrix} -\mathfrak{a} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}/\mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}/\mathfrak{d} & -\mathfrak{a}^2/\mathfrak{d}^2 \end{pmatrix} . \quad (7.70)$$

□

En procédant de la même façon avec l'identité :

$$\frac{\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \mathfrak{d}}{s^2 + \mathfrak{a}s + \mathfrak{d}} = C_u(s\mathcal{I} - A_u)^{-1}B_u + D_u , \quad (7.71)$$

nous obtenons :

Proposition 7.12. *On détermine $Y_{uf} = (\dot{y}_{uf} \ y_{uf})^T$ à l'aide de la représentation d'état :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{yu}(t) &= A_u x_{yu}(t) + B_u y_u(t) , \\ Y_{uf}(t) &= C_u x_{yu}(t) + D_u y_u(t) , \end{aligned} \quad (7.72)$$

avec :

$$A_u = \begin{pmatrix} -\mathfrak{a} & 1 \\ -\mathfrak{d} & 0 \end{pmatrix} , \quad B_u = \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad C_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\mathfrak{d} \end{pmatrix} , \quad D_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (7.73)$$

De même, on détermine $\Gamma_{1f} = (\dot{\gamma}_{1f} \ \gamma_{1f})^T$ à l'aide de la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\gamma 1}(t) &= A_\gamma x_{\gamma 1}(t) + B_\gamma \gamma(t) , \\ \Gamma_{1f}(t) &= C_\gamma x_{\gamma 1}(t) + D_\gamma \gamma(t) , \end{aligned} \quad (7.74)$$

avec :

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} -\mathfrak{a} & 1 \\ -\mathfrak{d} & 0 \end{pmatrix} , \quad B_\gamma = \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad C_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\mathfrak{d} \end{pmatrix} , \quad D_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (7.75)$$

7.4.2 Implémentation des moindres carrés

Disposant en régime établi de (7.61), nous souhaitons estimer R , L et ϕ , les constantes de temps τ_u et τ_i étant connues. Comme dans le cas idéal, on détermine χ_K par moindres carrés en espace ou moindres carrés récurrents avec facteur d'oubli. Considérons que l'on implémente m filtres en parallèle. Pour $1 \leq k \leq m$, avec $m \geq 2$ pour les moindres carrés en espace et $m \geq 1$ pour les moindres carrés récurrents, on note $y_{i_{f_k}}(t) = H_{1_k}(s)y_i(t)$ avec $H_{1_k}(s) = \frac{\mathfrak{d}_k}{s^2 + \mathfrak{a}_k s + \mathfrak{d}_k}$. De même, on note $\gamma_{1_{f_k}}(t) = H_{1_k}(s)\gamma(t)$ et $y_{u_{f_k}}(t) = H_{1_k}(s)y_u(t)$. On a alors :

$$y_{1K}(t) = \Phi_{1K}(t)\chi_K , \quad (7.76)$$

avec le vecteur, de taille $2m$, $y_{1K}(t)$ et la matrice, de dimension $2m \times 3$, $\Phi_{1K}(t)$ donnés par :

$$y_{1K}(t) = \tau_u \begin{pmatrix} \dot{y}_{u_{f_1}}(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{u_{f_m}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{u_{f_1}}(t) \\ \vdots \\ y_{u_{f_m}}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.77)$$

$$\Phi_{1K}(t) = \begin{pmatrix} \tau_i \ddot{y}_{i_{f_1}}(t) + \dot{y}_{i_{f_1}}(t) & \tau_i \dot{y}_{i_{f_1}}(t) + y_{i_{f_1}}(t) & \dot{\gamma}_{1f_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_i \ddot{y}_{i_{f_m}}(t) + \dot{y}_{i_{f_m}}(t) & \tau_i \dot{y}_{i_{f_m}}(t) + y_{i_{f_m}}(t) & \dot{\gamma}_{1f_m} \end{pmatrix}.$$

A l'instar du cas idéal, il est possible de n'observer qu'un ou deux des trois paramètres de χ_K par des manipulations analogues des colonnes.

Remarque : Si les constantes de temps τ_i et τ_u sont inconnues, il peut en pratique être possible de les estimer en plus de R , L et ϕ , en modifiant et adaptant le vecteur $y_{1K}(t)$ et la matrice $\Phi_{1K}(t)$, et en prenant $m \geq 3$ dans le cas de l'utilisation des moindres carrés en espace. Sont alors estimés R , ϕ , τ_u , $a_\chi = L\tau_i$ et $b_\chi = L + R\tau_i$ et L et τ_i sont obtenues par résolution du système constitué de a_χ et b_χ . Cependant, l'observabilité de l'état $(L, R, \phi, \tau_u, \tau_i)$ n'ayant pas été étudiée, nous ne disposons pas de garantie quant aux résultats obtenus.

7.4.3 Conclusion : Observateur de Kreisselmeier dans le cas réaliste

La dynamique de l'observateur de Kreisselmeier dans le cas réaliste est :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{if_k} + \mathbf{a}_k \dot{y}_{if_k} &= -\mathbf{d}_k (y_{if_k} - y_i) , \\ \dot{y}_{uf_k} + \mathbf{a}_k \dot{y}_{uf_k} &= -\mathbf{d}_k (y_{uf_k} - y_u) , \quad 1 \leq k \leq m , \\ \dot{\gamma}_{1f_k} + \mathbf{a}_k \dot{\gamma}_{1f_k} &= -\mathbf{d}_k (\gamma_{1f_k} - \gamma) , \end{aligned} \quad (7.78)$$

où y_u et y_i sont les tensions et courants mesurés dans le repère (α, β) aux bornes du moteur et où γ est donné par $\gamma = (\cos \theta \quad \sin \theta)^T$. Les \mathbf{a}_k et \mathbf{d}_k sont des coefficients positifs à choisir. On en déduit l'estimée $\hat{\chi}_K = (\hat{L}, \hat{R}, \hat{\phi})^T$ de χ_K comme étant la solution aux moindres carrés en espace ou récursifs de :

$$L(\tau_{i_a} \ddot{y}_{if_k} + \dot{y}_{if_k}) + R(\tau_{i_a} \dot{y}_{if_k}) + \phi \dot{\gamma}_{1f_k} = \tau_{u_a} \dot{y}_{uf_k} + y_{uf_k} , \quad (7.79)$$

où τ_{u_a} et τ_{i_a} sont les approximations que nous avons des constantes de temps τ_u et τ_i .

Il est également possible de n'estimer qu'une partie de χ_K , connaissant des valeurs approchées des paramètres que l'on ne souhaite pas estimer. Par exemple, si on cherche

à estimer la résistance et le flux connaissant l'inductance, on résout :

$$R(\tau_{i_a} \dot{y}_{i_{f_k}}) + \phi \dot{\gamma}_{1_{f_k}} = \tau_{u_a} \dot{y}_{u_{f_k}} + y_{u_{f_k}} - L_a(\tau_{i_a} \ddot{y}_{i_{f_k}} + \dot{y}_{i_{f_k}}) , \quad (7.80)$$

où L_a est l'approximation que nous avons de L . On rappelle que R_a et ϕ_a sont définies de manière analogue. Par ailleurs, une étude de robustesse à de mauvaises approximations de R , L , ϕ , τ_u et τ_i par R_a , L_a , ϕ_a , τ_{u_a} et τ_{i_a} est réalisée en simulation et présentée au paragraphe 7.5.5.

Remarque : On note que, quand les constantes de temps τ_i et τ_u sont parfaitement connues, et en l'absence de bruit, l'adaptation de l'observateur au cas réaliste n'altère pas les estimations, contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'observateur de Luenberger, où des approximations, même réduites au maximum, demeurent nécessaires.

7.5 Etude en simulation de l'observateur de Kreisselmeier

Dans ce paragraphe, nous étudions en simulation l'observateur de Kreisselmeier que nous avons présenté aux paragraphes 7.3 et 7.4. Nous nous intéressons notamment aux impacts des différents paramètres de réglage de l'observateur, à une vérification des conditions d'observabilité, et à la robustesse de l'observateur à une mauvaise connaissance des paramètres supposés connus. Pour clôturer cette étude, l'impact du bruit de mesure sera quantifié *via* une analyse de Monte-Carlo.

L'étude est menée sur l'observateur de Kreisselmeier dans le cas réaliste, cas pour lequel, comme nous l'avons vu, les estimations ne sont pas altérées par rapport au cas idéal si les constantes de temps τ_i et τ_u sont parfaitement connues. La machine électrique à pôles lisses, dont les paramètres physiques sont indiqués dans le tableau 8.1, avec $i_d = -2A$, est simulée et génère les signaux exacts de courants et tensions. Ces signaux, pour les besoins de la modélisation réaliste, sont ensuite filtrés par des passe-bas du premier ordre de constantes de temps $\tau_u = \tau_i = 1,9.10^{-4}s$. De plus, dans les cas où du bruit est pris en compte sur les signaux de courants et tensions, celui-ci est généré suivant les distributions gaussiennes dont les écarts-types sont présentés dans le tableau 3.1.

Par ailleurs, il existe cinq degrés de liberté pour régler l'observateur :

- l'utilisation des moindres carrés en espace ou des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli,
- le nombre de filtres utilisé,
- la valeur des coefficients intervenant dans ces filtres,

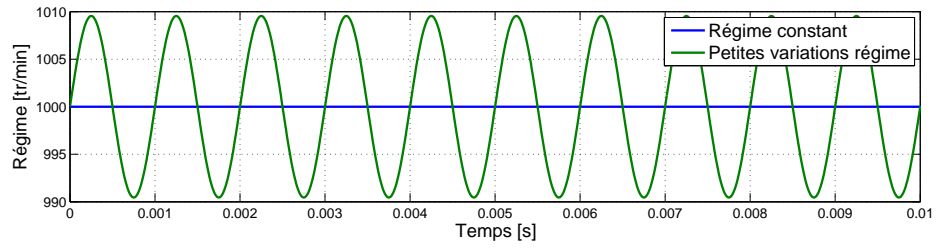
- les paramètres estimés,
- et dans le cas des moindres carrés récursifs, la valeur du facteur d'oubli.

Comme on ne les étudie pas tous en même temps, les degrés de liberté non étudiés sont fixés. Le réglage par défaut retenu est : utilisation des moindres carrés récursifs avec un facteur d'oubli valant $f_{oubli} = 0.9998$, visant à estimer les trois paramètres résistance, flux et inductance, les constantes de temps étant parfaitement connues, avec un unique filtre de paramètres $\mathbf{a} = 2\xi\omega_0$ et $\mathfrak{d} = \omega_0^2$ avec $\xi = 1$ et $\omega_0 = 1000\text{rad/s}$.

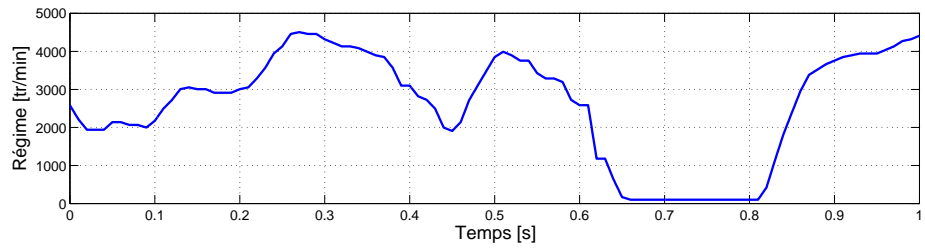
7.5.1 Impact des variations de régime ou de couple

Dans ce premier paragraphe de l'étude en simulation, nous nous attachons à vérifier les conditions d'observabilité liées au régime et au couple. En effet, si, lors de l'étude d'observabilité du paragraphe 7.2, nous n'avons pu tirer de conclusion générale, une multitude de situations différentes pouvant se présenter, la proposition 7.4 fournit toutefois une condition nécessaire d'observabilité de l'état $\chi_K = (L, R, \phi)^T$. De cette proposition ressort notamment que, si le régime ou le couple varie et que l'autre est non nul, alors la condition nécessaire d'observabilité de χ_K est respectée. Cette condition n'étant pas suffisante, on peut la compléter par le test d'observabilité présenté au paragraphe 7.2.1, lequel fournit une condition suffisante d'observabilité si le déterminant ou la valeur propre minimale d'une matrice P est supérieure à une certaine constante $\epsilon_p > 0$.

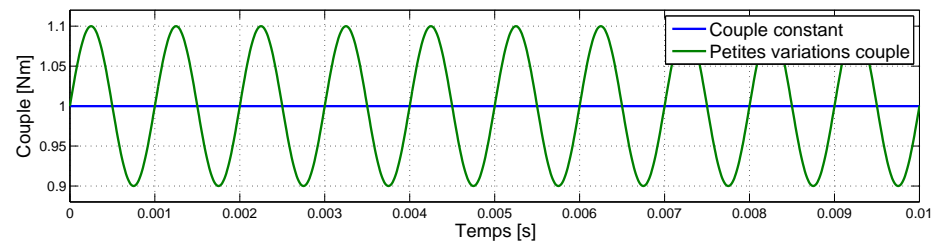
La figure 7.1 présente les différentes configurations auxquelles nous nous sommes intéressé : un régime constant à 1000 tr/min (7.1(a)) allié à un couple constant à 1Nm (7.1(c)), à un couple présentant de petites variations (7.1(c)) ou à un couple suivant un profil (7.1(d)) ; ou un régime présentant de petites variations (7.1(a)) ou suivant un profil (7.1(b)) associé à un couple constant à 1Nm. Dans un premier temps, nous regardons comment se comporte le test d'observabilité dans les différentes configurations. Pour ce faire, la figure 7.1(e) présente, pour ces différentes configurations, la valeur propre minimale de la matrice P (cf. proposition 7.2) en échelle logarithmique. La constante α_p a ici été fixée à 10000. Nous savons uniquement que pour que la condition suffisante d'observabilité soit remplie, cette valeur propre minimale doit être supérieure à une constante $\epsilon_p > 0$. Si nous ne connaissons pas la valeur d' ϵ_p , nous savons en revanche que plus la valeur propre minimale est élevée, plus le risque de non observabilité est faible. Comme le cas à régime et couple constants ne remplit déjà pas la condition nécessaire d'observabilité, il ne risque pas de remplir la condition suffisante. Ceci se confirme sur la figure (courbe bleue), la valeur propre minimale étant très faible dans ce cas stationnaire ($\approx 10^{-15}$). On peut également en déduire que la constante ϵ_p est



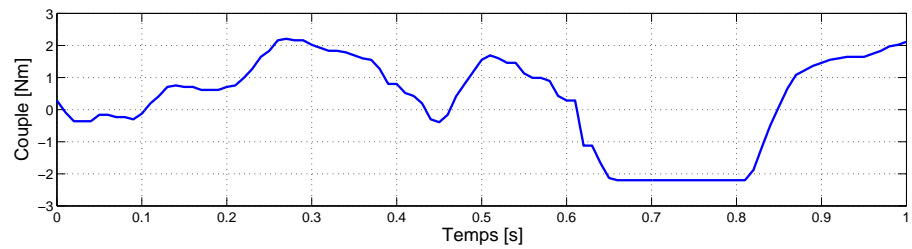
(a) Allure des petites variations de régime



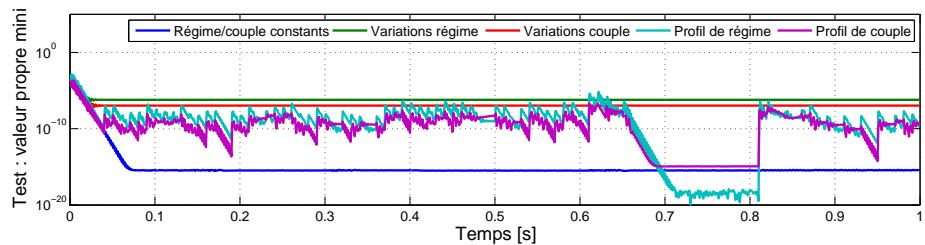
(b) Allure du profil de régime



(c) Allure des petites variations de couple



(d) Allure du profil de couple



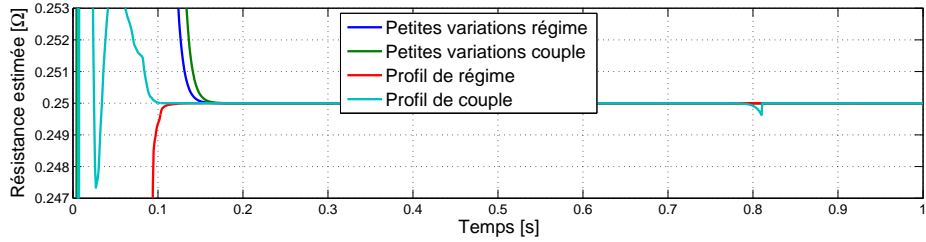
(e) Test d'observabilité : valeur propre minimale

FIGURE 7.1 – Allure des régime et couple et test d'observabilité

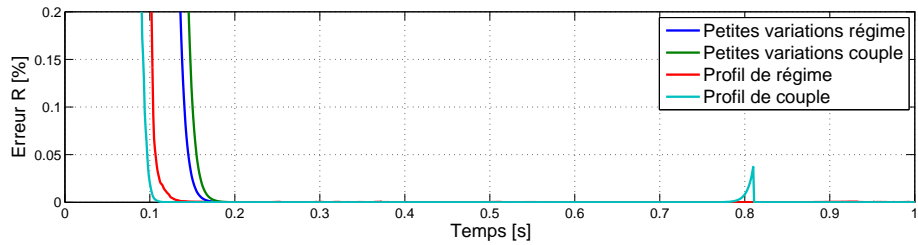
supérieure à 10^{-15} . De même, les passages constants du profil de couple (courbe violette) et du profil de régime (courbe cyan) sont non observables. Notons au passage que les pentes apparaissant sur la figure sont les décroissances exponentielles liées à la convergence de la matrice P , la vitesse de convergence dépendant de la valeur de α_p . En revanche, la valeur propre minimale est beaucoup plus grande dans le cas des variations de régime (courbe verte) ou de couple (courbe rouge) et dans le cas des profils de régime et de couple hors passages constants. Nous pouvons donc présumer de l'observabilité de l'état dans ces configurations.

Tout ceci nous est confirmé par la figure 7.2, laquelle présente les estimations (7.2(a) et 7.2(c)) et erreurs d'estimation (7.2(b) et 7.2(d)) dans les différentes configurations de régime et de couple. Pour ne pas surcharger, les résultats d'estimation de l'inductance et du flux ne sont pas présentés mais ils sont analogues. Tout d'abord, les figures 7.2(a) et 7.2(b) s'intéressent aux cas où l'état est présumé observable (excepté sur les paliers constants des profils de régime et couple). L'observabilité est confirmée, la résistance estimée (tout comme les inductance et flux estimés) convergeant vers la valeur réelle de la résistance. On remarque également le début d'une divergence sur le passage constant du profil de couple, laquelle n'a cependant pas le temps de trop s'accroître, le couple redevenant variable à temps. En zoomant sur la courbe concernant le régime variant suivant le profil, on remarque le même phénomène sur le palier constant mais dans des proportions moindres. Un palier constant plus long et la conséquence serait toutefois tout aussi "désastreuse". Les figures 7.2(c) et 7.2(d) confirment ensuite la non observabilité dans le cas à régime et couple constants. Comme dans le cas des passages constants des profils, la divergence reste mesurée quelques instants avant de s'envoler. Finalement, en pratique, la seule configuration où l'état $\chi_K = (L, R, \phi)^T$ semble non observable est le cas à couple et régime constant.

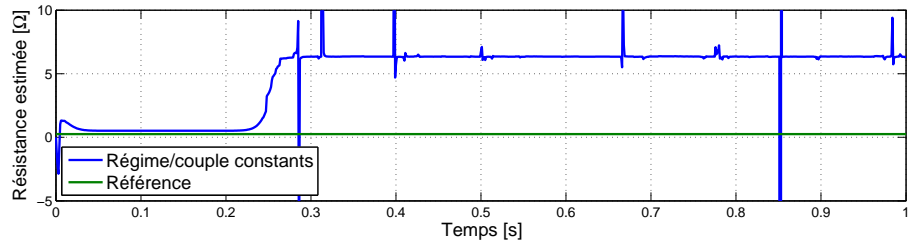
Pour les essais suivants, nous nous placerons toujours dans des cas observables, i.e. pas à régime et couple constants. Comme les résultats en régime établi seront parfaits dans le cas sans bruit, nous nous intéresserons essentiellement au cas bruité. De plus, les effets étant analogues que l'on considère un profil de couple ou un profil de régime, nous nous contenterons, pour ne pas surcharger, d'étudier le cas du régime. En général, on étudiera les estimations sur un profil de régime, avec en outre de petites variations de régime pour ne pas perdre l'observabilité sur le passage constant, et avec du bruit de mesure.



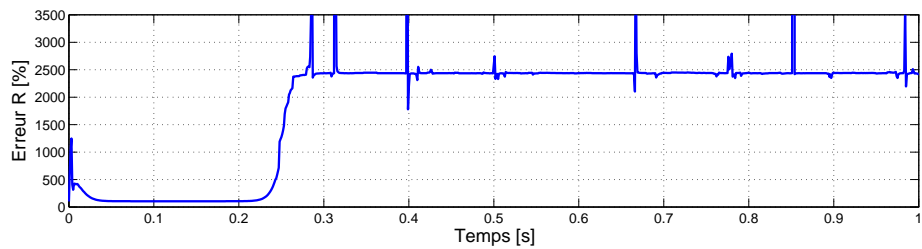
(a) Estimation de la résistance avec variations de régime ou de couple



(b) Erreur d'estimation de la résistance avec variations de régime ou de couple



(c) Estimation de la résistance avec régime et couple constants



(d) Erreur d'estimation de la résistance avec régime et couple constants

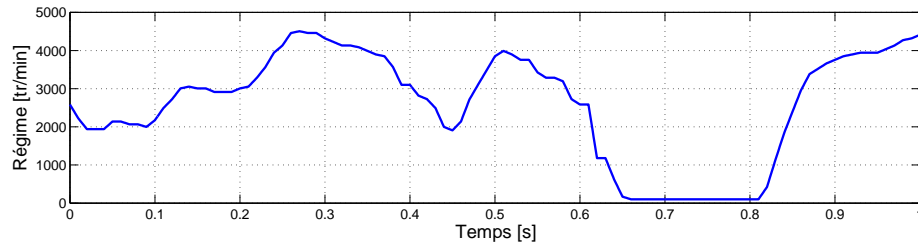
FIGURE 7.2 – Estimation de la résistance en fonction de l'allure des régime et couple

7.5.2 Impact du facteur d'oubli

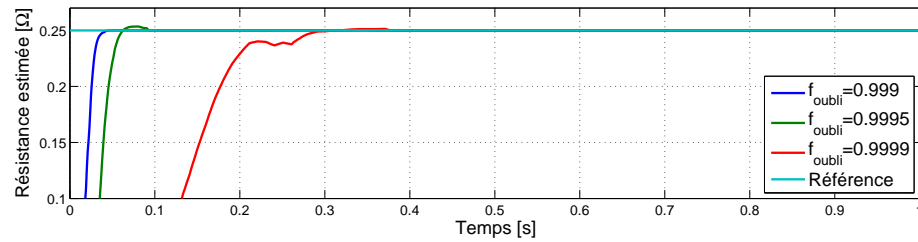
Intéressons-nous désormais aux impacts des différents paramètres de réglage à commencer par le facteur d'oubli. La figure 7.3 présente, pour le profil de régime, soumis en outre à de petites variations de régime, de la figure 7.3(a), les estimations de la résistance (7.3(b) et 7.3(d)) et du flux (7.3(c) et 7.3(e)), dans le cas non bruité (7.3(b) et 7.3(c)) et dans le cas bruité (7.3(d) et 7.3(e)), pour différentes valeurs du facteur d'oubli. Les résultats sont analogues pour l'estimation de l'inductance. Les autres paramètres de réglage sont fixés comme précisé en introduction du paragraphe 7.5. Deux conclusions sont à tirer de ces figures. Premièrement, plus le facteur d'oubli est élevé, plus le temps de convergence est long. Ceci vient du fait que les mauvaises estimations du passé sont conservées plus longtemps. Dans le cas non bruité, on serait donc tenté de choisir un faible facteur d'oubli, nous rapprochant ainsi des moindres carrés simples. Cependant, le deuxième point concerne le cas bruité où le facteur d'oubli agit comme un filtre sur les estimations, moyennant les erreurs. Un facteur d'oubli plus élevé permet alors de meilleures estimations. Un compromis doit donc être trouvé entre vitesse de convergence et intensité du filtrage pour régler le facteur d'oubli.

7.5.3 Impact de la méthode et du nombre de filtres utilisés

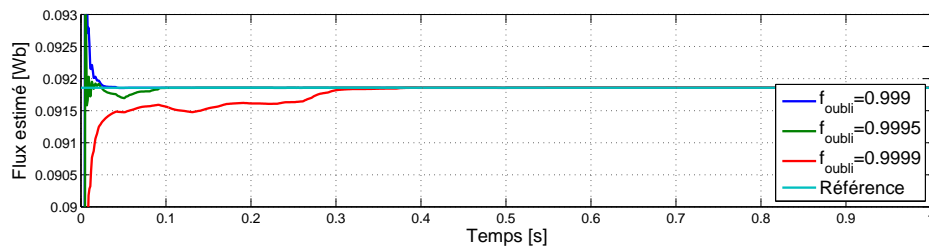
Comparons maintenant moindres carrés en espace et moindres carrés récursifs ainsi que l'impact sur l'estimation du nombre de filtres utilisés. Pour ce faire, la figure 7.4 présente, pour le profil de régime de la figure 7.4(a) et en présence de bruit de mesure, les estimations de la résistance (7.4(b) et 7.4(d)) et du flux (7.4(c) et 7.4(e)), pour différents nombres de filtres, lorsque l'on utilise les moindres carrés en espace (7.4(b) et 7.4(c)) ou les moindres carrés récursifs (7.4(d) et 7.4(e)). Les résultats sont analogues pour l'estimation de l'inductance. Les autres paramètres de réglage sont fixés comme précisé en introduction du paragraphe 7.5. On rappelle que, dans le cadre des moindres carrés récursifs, un seul filtre suffit tandis que dans le cadre des moindres carrés en espace, au moins deux filtres sont nécessaires ici car on estime trois paramètres. D'une part, on constate que, concernant les moindres carrés en espace, il est préférable d'utiliser le plus grand nombre de filtres possible, tandis qu'avec les moindres carrés récursifs, on obtient de meilleurs résultats en utilisant un seul filtre, i.e. en se contentant de moindres carrés en temps et non en temps et en espace. D'autre part, en faisant notamment attention aux différences entre les échelles, on remarque que les estimations sont largement meilleures avec les moindres carrés récursifs avec un filtre qu'avec les moindres carrés en espace, même avec beaucoup de filtres, ceux-ci subissant fortement les bruits. Par la suite, on utilisera donc les moindres carrés récursifs avec un seul filtre.



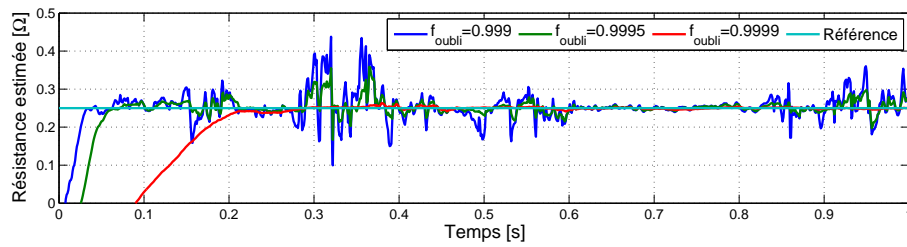
(a) Profil de régime



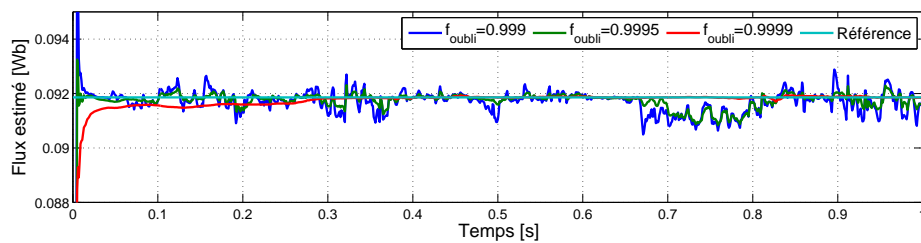
(b) Estimation de la résistance - cas sans bruit



(c) Estimation du flux - cas sans bruit

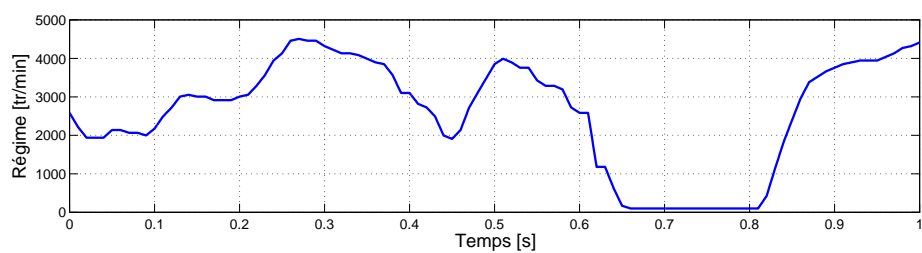


(d) Estimation de la résistance - cas avec bruit

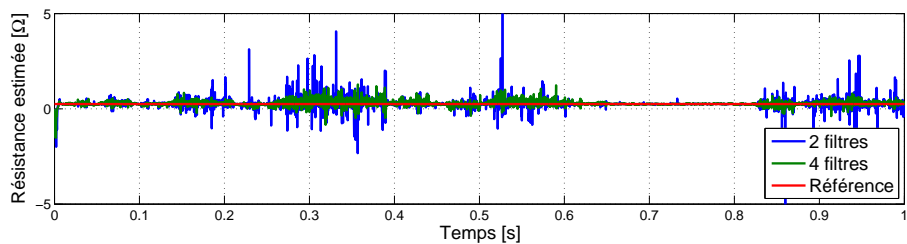


(e) Estimation du flux - cas avec bruit

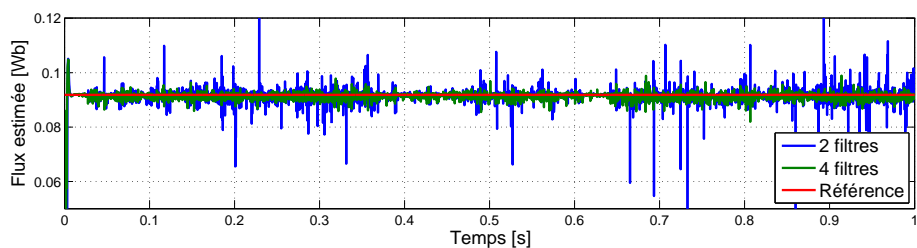
FIGURE 7.3 – Impact du facteur d'oubli sur l'estimation de la résistance et du flux



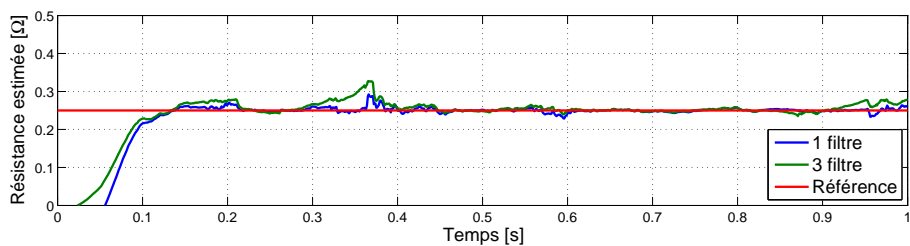
(a) Profil de régime



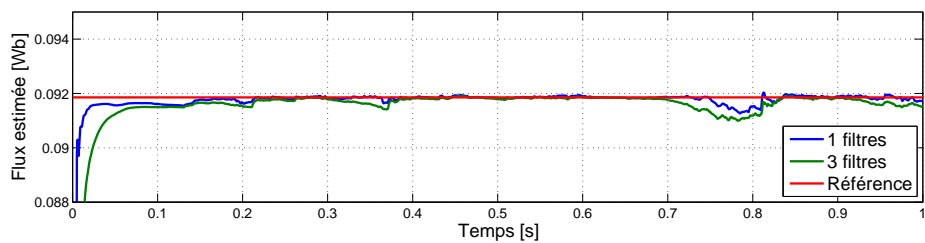
(b) Estimation de la résistance - Moindres carrés en espace



(c) Estimation du flux - Moindres carrés en espace



(d) Estimation de la résistance - Moindres carrés récursifs



(e) Estimation du flux - Moindres carrés récursifs

FIGURE 7.4 – Impact de la méthode et du nombre de filtres utilisés

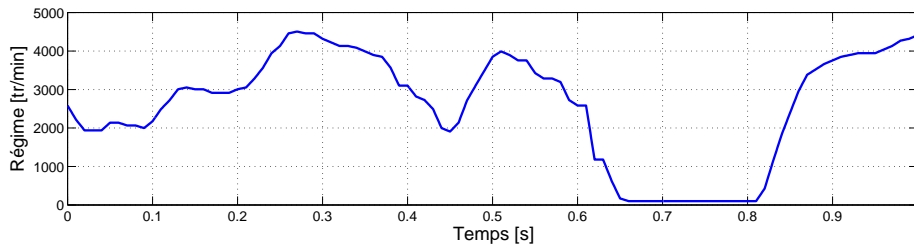
7.5.4 Impact du nombre de paramètres estimés

Un autre paramètre de réglage concerne le nombre de paramètres estimés. En effet, si nous n'avons pour l'instant considéré que des cas où l'on estime les trois paramètres R , L et ϕ de χ_K , il est possible de n'en estimer qu'un ou deux connaissant une (des) valeur(s) approchée(s) de l'autre (des autres). Dans ce paragraphe, nous considérons que nous connaissons parfaitement les paramètres non estimés, i.e. que les valeurs approchées sont les valeurs réelles des paramètres. Le cas où cette connaissance n'est pas parfaite sera étudié lors de l'étude de robustesse du paragraphe 7.5.5. La figure 7.5 présente, pour le profil de régime de la figure 7.5(a) et en présence de bruit de mesure, les estimations de la résistance 7.5(b), du flux 7.5(c) et de l'inductance 7.5(d), selon que l'on estime un ou deux autre(s) paramètre(s) en plus ou uniquement le paramètre concerné. On remarque que, globalement, l'estimation est meilleure quand celle-ci est concentrée sur un unique paramètre, et également meilleure quand on estime deux plutôt que trois paramètres. Ceci n'est pas très surprenant étant donné que les paramètres non estimés sont ici supposés parfaitement connus et ne répercutent donc pas d'erreur sur les paramètres à estimer, contrairement à ce qui peut être le cas quand on estime tous les paramètres. En revanche, si les paramètres non estimés sont mal connus, l'apport n'est plus forcément aussi évident, comme nous le verrons avec l'étude de robustesse du paragraphe 7.5.5.

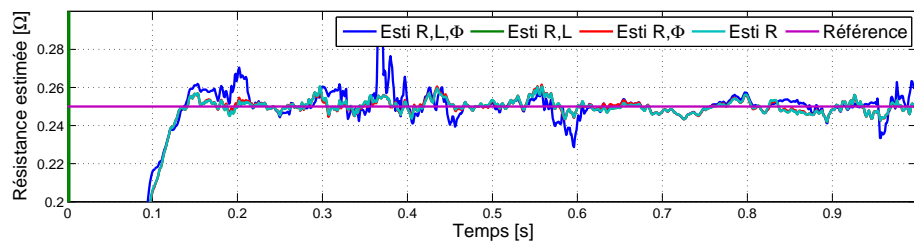
7.5.5 Robustesse de l'observateur de Kreisselmeier à une mauvaise connaissance des paramètres supposés connus

Comme nous venons de l'évoquer, dans le cas où l'on n'estime pas tous les paramètres de l'état $\chi_K = (L, R, \phi)^T$, la meilleure connaissance possible des paramètres non estimés semble *a priori* nécessaire, ces paramètres faisant alors partie des données de l'observateur. On rappelle que les approximations que nous avons des paramètres R , L et ϕ quand ils ne sont pas estimés sont notées respectivement R_a , L_a et ϕ_a . Dans ce paragraphe, nous quantifions les erreurs relatives d'estimation des paramètres dues à une mauvaise connaissance des paramètres supposés connus. Ces derniers peuvent donc être R_a , L_a et ϕ_a , mais également les valeurs approchées τ_{u_a} et τ_{i_a} que nous avons des constantes de temps τ_u et τ_i , constantes de temps que nous avons jusqu'alors supposées parfaitement connues, i.e. $\tau_{u_a} = \tau_u$ et $\tau_{i_a} = \tau_i$. La position en revanche est supposée parfaitement connue, i.e. la position mesurée est supposée être la position exacte. Nous regarderons l'impact d'une erreur de position sur les estimations au paragraphe 7.5.6.

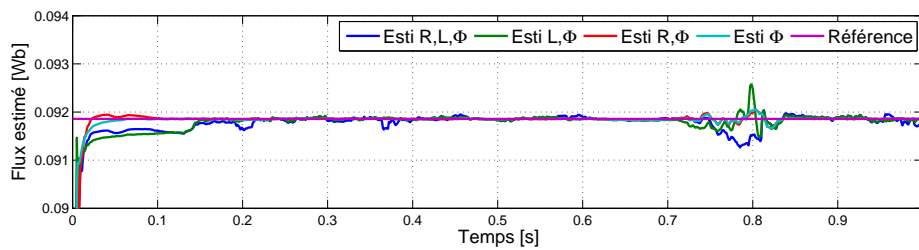
Par ailleurs, afin de n'étudier que l'impact d'une mauvaise connaissance des paramètres, l'étude de robustesse est menée dans le cas non bruité. Le choix des coefficients



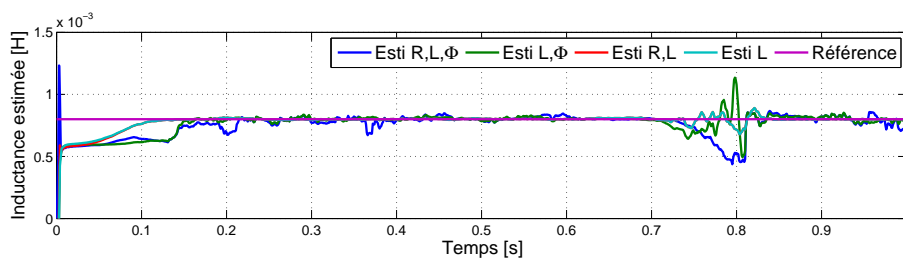
(a) Profil de régime



(b) Résistance estimée selon les paramètres observés



(c) Flux estimé selon les paramètres observés



(d) Inductance estimée selon les paramètres observés

FIGURE 7.5 – Impact du nombre de paramètres estimés

du filtre ne joue alors aucun rôle. Notons également que la robustesse dépend du point de fonctionnement. Nous avons ici choisi un point de fonctionnement "moyen" à 1000 tr/min et 1Nm. De plus, pour éviter de subir la non observabilité du cas à couple et régime constants, de petites variations sont ajoutées au régime. En mesurant la robustesse en d'autres points de fonctionnement, il est difficile de tirer des conclusions générales : suivant les cas, la robustesse est soit meilleure, soit moins bonne, soit identique, quand le couple ou le régime augmente ou diminue. Ce point de fonctionnement donne toutefois une bonne idée de ce qui est robuste à une mauvaise connaissance des paramètres et de ce qui ne l'est pas.

Le tableau 7.2 présente les résultats de l'étude de robustesse . Différentes situations ont été considérées, avec pour chacune d'elles précisé, parmi les cinq paramètres R , ϕ , L , τ_u et τ_i , lesquels sont supposés parfaitement connus (première colonne) et lesquels sont supposés approchés (deuxième colonne), les paramètres restants étant estimés et apparaissant dans les trois dernières colonnes. Pour chacun des paramètres approchés, nous avons supposé une erreur de 1% par rapport à la valeur réelle. Les erreurs en régime établi sur les paramètres estimés figurent alors dans les colonnes de droite. Remarquons que, si les erreurs pour de mauvaises connaissances des paramètres R , L , ϕ et/ou τ_u sont linéaires avec la valeur de cette mauvaise connaissance (i.e. sur l'exemple de la première ligne : si $L_a = L + 10\%$, alors $\Delta\hat{R}/R = 18\%$ et $\Delta\hat{\phi}/\phi = 0.75\%$), ce n'est pas tout à fait le cas avec une mauvaise connaissance de τ_i , l'erreur sur les paramètres estimés croissant en général de moins en moins vite quand τ_{i_a} s'éloigne de τ_i .

Dans un premier temps, ce tableau présente les robustesses à de mauvaises connaissances de paramètres parmi R , ϕ et L , avec des constantes de temps parfaitement connues, respectivement quand deux paramètres sont estimés pour un paramètre approché, quand un paramètre est estimé pour deux paramètres approchés et enfin quand un paramètre est estimé, un paramètre approché et un paramètre parfaitement connu. Dans un second temps, les paramètres R , ϕ et L sont soit parfaitement connus soit estimés, et c'est au tour des constantes de temps d'être approchées. Les erreurs d'estimation qui nous semblent acceptables ont été grisées. On constate qu'il s'agit essentiellement d'estimations du flux. Toutes les estimations du flux apparaissent d'ailleurs robustes à une mauvaise connaissance des autres paramètres, tant que celles-ci restent raisonnables. En revanche, l'estimation de la résistance n'est acceptable, et même parfaite, que quand le flux est parfaitement connu et l'inductance approchée, quelle que soit la valeur de cette approximation, L_a ne jouant pas de rôle dans l'estimation unique de la résistance. Symétriquement, mais cela nous importe moins, son estimation ne nous étant pas primordiale, l'estimation de l'inductance n'est acceptable, et aussi parfaite, que quand le flux est parfaitement connu et la résistance approchée, peu importe sa

TABLE 7.2 – Impact sur l’estimation des approximations sur les paramètres supposés connus - 1000 tr/min - 1Nm

Entrées de l’observateur		Paramètres estimés		
Paramètres parfaitement connus	Paramètres approchés ($X_a = X + 1\%X$)	Erreurs relatives		
		$\Delta\hat{R}/R$	$\Delta\hat{\phi}/\phi$	$\Delta\hat{L}/L$
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	$L_a \neq L$	1.8%	0.075%	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	$\phi_a \neq \phi$	24%	-	13%
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	$R_a \neq R$	-	0.041%	5.5%
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	$(\phi_a, L_a) \neq (\phi, L)$	24%	-	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	$(R_a, L_a) \neq (R, L)$	-	0.014%	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	$(R_a, \phi_a) \neq (R, \phi)$	-	-	13%
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, L_a) = (\tau_u, \tau_i, L)$	$\phi_a \neq \phi$	24%	-	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, \phi_a) = (\tau_u, \tau_i, \phi)$	$L_a \neq L$	0%	-	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, L_a) = (\tau_u, \tau_i, L)$	$R_a \neq R$	-	0.031%	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, R_a) = (\tau_u, \tau_i, R)$	$L_a \neq L$	-	0.017%	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, \phi_a) = (\tau_u, \tau_i, \phi)$	$R_a \neq R$	-	-	0%
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, R_a) = (\tau_u, \tau_i, R)$	$\phi_a \neq \phi$	-	-	13%
$(\tau_{u_a}) = (\tau_u)$	$\tau_{i_a} \neq \tau_i$	1.2%	0.047%	0.69%
$(\tau_{i_a}) = (\tau_i)$	$\tau_{u_a} \neq \tau_u$	3.6%	0.011%	0.07%
-	$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) \neq (\tau_u, \tau_i)$	4.8%	0.16%	0.76%
$(L_a) = (L)$	$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) \neq (\tau_u, \tau_i)$	3.4%	0.10%	-
$(L_a, \phi_a) = (L, \phi)$	$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) \neq (\tau_u, \tau_i)$	0.89%	-	-
$(L_a, R_a) = (L, R)$	$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) \neq (\tau_u, \tau_i)$	-	0.0036%	-

valeur. On note également une faible dépendance de l’estimation de l’inductance à une erreur sur τ_u . Cherchant dans la mesure du possible à estimer au mieux la résistance et le flux, nous voyons qu’une bonne estimation simultanée des deux paramètres est très compliquée, à cause de la résistance, quand on fait intervenir des valeurs approchées d’autres paramètres. Si nous n’auront visiblement pas trop de problème, quelle que soit la situation, avec l’estimation du flux avec, pour ce point de fonctionnement, dans le pire des cas (pour 1% d’erreur sur τ_u et 1% d’erreur sur τ_i) une erreur de 0.16% soit 1.4°C, l’estimation de la résistance simultanément au flux ne semble viable qu’en ne faisant pas intervenir de valeurs approchées et donc qu’en estimant simultanément les

trois paramètres, tout en espérant ne pas trop se tromper sur les constantes de temps.

On retrouve alors ici la situation évoquée en fin de paragraphe 7.5.4 quant au choix du nombre de paramètres à estimer. Si dans le cas bruité, l'estimation d'un seul paramètre, les autres étant parfaitement connus, est meilleure que l'estimation du paramètre simultanément aux autres, ce n'est plus forcément le cas quand les autres paramètres sont mal connus. Un compromis est à trouver entre robustesse au bruit de mesure et robustesse à la mauvaise connaissance des paramètres supposés connus.

7.5.6 Robustesse de l'observateur de Kreisselmeier à une mauvaise connaissance de la position

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que la position mesurée était égale à la position exacte, i.e. que la position était parfaitement connue. Si tel n'est pas le cas, nous regardons dans ce paragraphe comment sont impactées les estimations des paramètres par une erreur de position. L'étude est menée pour le même point de fonctionnement à 1000 tr/min et 1Nm et de manière analogue à ce qui a été effectué au paragraphe précédent. Le tableau 7.3 présente dans quatre cas, où seule la valeur de la position est approchée (par un simple décalage), les erreurs relatives d'estimation de la résistance, du flux et/ou de l'inductance pour une erreur d'un degré sur la position. En conclusion, à moins de ne chercher qu'à estimer le flux en connaissant les valeurs

TABLE 7.3 – Impact sur l'estimation d'une erreur de position de 1° - 1000 tr/min - 1Nm

Entrées de l'observateur	Paramètres estimés		
	Erreurs relatives		
Paramètres parfaitement connus	$\Delta \widehat{R}/R$	$\Delta \widehat{\phi}/\phi$	$\Delta \widehat{L}/L$
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}) = (\tau_u, \tau_i)$	110%	3.5%	2.6%
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, L_a) = (\tau_u, \tau_i, L)$	100%	3.3%	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, L_a, \phi_a) = (\tau_u, \tau_i, L, \phi)$	23%	-	-
$(\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, L_a, R_a) = (\tau_u, \tau_i, L, R)$	-	0.015%	-

exactes de la résistance, de l'inductance et des constantes de temps, il est extrêmement important de disposer d'une mesure très précise de la position.

7.5.7 Impact du bruit de mesure : Analyse de Monte-Carlo

Nous avons dans les paragraphes précédents étudié les impacts de quatre des cinq degrés de liberté. Le dernier paramètre de réglage restant à étudier est la valeur des

coefficients ξ et ω_0 desquels on déduit \mathbf{a} et \mathfrak{d} qui interviennent dans le filtre utilisé. Pour effectuer ce réglage, on se trouve dans une situation analogue à celle du réglage des pôles λ_1 et λ_2 dans le cas de l'observateur de Luenberger (paragraphe 6.3). Comme, pour notre objectif particulier ultime d'estimation de température, seuls la résistance et le flux nous intéressent, nous supposons l'inductance et les constantes de temps parfaitement connues. La position mesurée est supposée exacte. De plus, nous utilisons les moindres carrés récurrents avec un facteur d'oubli valant $f_{oubli} = 0.9998$, avec un unique filtre.

Faute de temps, nous ne menons pas ici une étude aussi complète que celle du paragraphe 6.3, mais nous nous en inspirons. Le propos de ce paragraphe n'est du coup pas de déterminer comment choisir les coefficients ξ et ω_0 en fonction du régime et du paramètre dont on minimise l'erreur d'estimation, mais uniquement d'avoir une rapide idée des ordres de grandeurs auxquels on peut s'attendre en termes d'impact sur les estimations du bruit de mesure.

Ainsi, on cherche tout d'abord, à deux régimes constants différents (100 et 4000 tr/min), à minimiser sur des grilles sur ξ et ω_0 les erreurs d'estimation de la résistance et du flux engendrées par les bruits de mesure sur les courants et les tensions. La procédure est alors la même qu'au paragraphe 6.3.1, en utilisant les mêmes signaux de bruits générés une fois pour toutes w_{i_α} , w_{i_β} , w_{u_α} et w_{u_β} , d'écart-types figurant dans le tableau 6.9, avec $i_d = -2A$ et un couple de 1Nm. Les constantes de temps choisies sont toujours $\tau_u = \tau_i = 1,9 \cdot 10^{-4} s$. Les grilles sont en revanche moins affinées mais prennent toutefois des valeurs variant de façon logarithmique afin d'être efficaces, et on prend soin de vérifier que les optima ne se trouvent pas en bordure de grille. Les résultats, à savoir les coefficients minimisant les erreurs d'estimation aux deux différents régimes et en fonction du paramètre dont on minimise l'erreur sont indiqués dans le tableau 7.4. Ce sont ces valeurs de ξ et ω_0 que nous avons ensuite utilisées pour réaliser

TABLE 7.4 – Observateur de Kreisselmeier - (ξ, ω_0) optimaux selon régime et paramètre

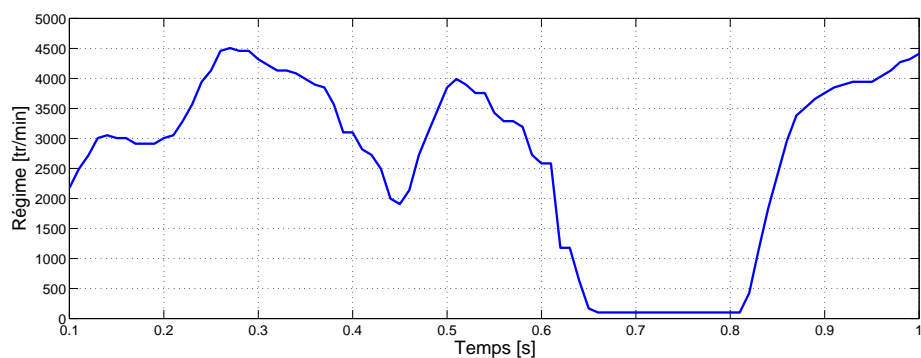
Régime	Minimisation $\widehat{R} - R$	Minimisation $\widehat{\phi} - \phi$
100 tr/min	$\xi = 1.6, \omega_0 = 100 \text{ rad/s}$	$\xi = 0.4, \omega_0 = 100 \text{ rad/s}$
4000 tr/min	$\xi = 0.1, \omega_0 = 1200 \text{ rad/s}$	$\xi = 3.5, \omega_0 = 4000 \text{ rad/s}$

l'analyse de Monte-Carlo dont les résultats sont présentés par la figure 7.6. Comme cette optimisation de ξ et ω_0 a été réalisée rapidement et de manière relativement grossière, il n'est pas impossible que l'on puisse obtenir de meilleurs résultats. Nous ne

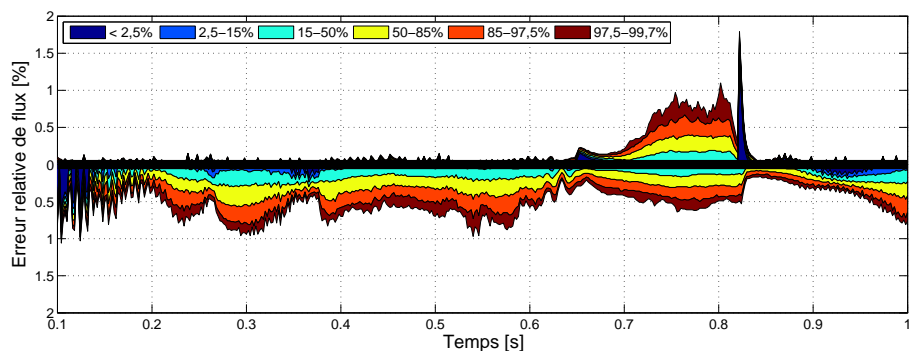
cherchons ici qu'à déterminer les ordres de grandeur des erreurs. L'analyse de Monte-Carlo a été réalisée en suivant le même protocole, détaillé au paragraphe 6.3.2, que dans le cas de l'observateur de Luenberger. Nous l'avons mis en œuvre sur le profil mixte, auquel ont été rajouté de petites variations de régime, rappelé par la figure 7.6(a). Les erreurs relatives d'estimation du flux et de la résistance sur le profil sont indiquées respectivement par les figures 7.6(b) et 7.6(c), avec à chaque fois dans la moitié supérieure les résultats pour l'optimisation de ξ et ω_0 à 4000 tr/min (HR) et dans la moitié inférieure les résultats pour l'optimisation de ξ et ω_0 à 100 tr/min (BR). Notons que nous ne présentons pas les résultats dans le premier dixième de seconde car ceux-ci sont faussés par le temps de convergence dû au facteur d'oubli. Cette convergence est d'ailleurs un peu plus longue dans le cas de l'estimation de la résistance, du fait du choix de ξ et ω_0 optimisés pour le bas régime. Dans ce dernier cas, nous ne considérons alors que les résultats à partir de $t = 0.2s$.

Concernant l'erreur relative d'estimation du flux (figure 7.6(b)), on constate au premier abord que cette erreur reste plutôt faible, quel que soit le régime et que ce soit pour l'optimisation haut régime ou bas régime, cette erreur dépassant rarement les 1% (soit $8.5^\circ C$). En regardant de plus près, on remarque qu'en dehors du palier à très bas régime, l'erreur maximale est très faible avec l'optimisation haut régime, de l'ordre de 0.1%, soit environ $1^\circ C$ seulement. En comparant avec les erreurs d'estimation du flux avec l'observateur de Luenberger optimisé pour le haut régime (moitiés supérieures des figures 6.15(b), 6.15(c), 6.19(b) et 6.19(c)), on note que les ordres de grandeurs sont similaires pour les régimes suffisamment élevés. En revanche, les erreurs sont beaucoup plus raisonnables dans le cas présent pour les bas régimes. Dans le cas de l'observateur de Luenberger, nous pallions ce problème d'erreurs élevées aux bas régimes par une alternance d'observateurs en fonction du régime. Une telle alternance n'est peut-être pas nécessaire avec l'observateur de Kreisselmeier. Elle peut toutefois probablement quand même apporter un plus, comme nous le voyons sur la figure 7.6(b) où l'erreur aux bas régimes est moindre dans la moitié inférieure, celle de l'optimisation bas régime. Si on choisit de n'utiliser qu'un seul jeu de coefficients (ξ, ω_0), il apparaît cependant préférable d'en utiliser un optimisé pour le haut régime.

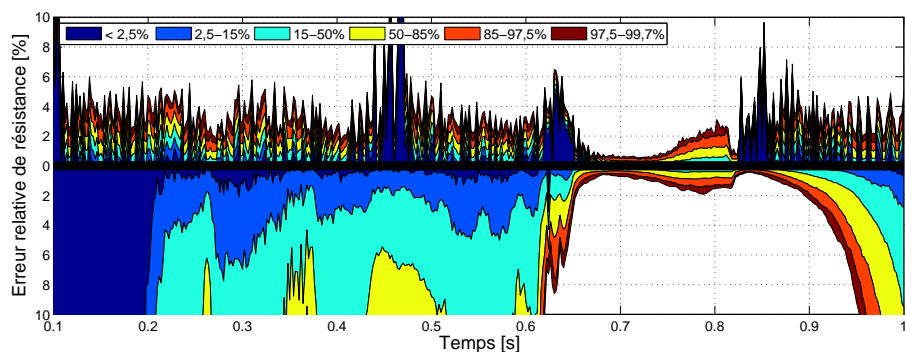
Par ailleurs, nous constatons l'existence d'un "pic" d'erreur à $t = 0.82s$ dans le cas de l'optimisation haut régime, suite à une brusque variation de régime. On retrouve ce phénomène dans le cas de l'estimation de la résistance (figure 7.6(c)), avec de légers "pics" d'erreur consécutifs aux brusques variations de régime. Si des variations de régime sont utiles à l'observabilité, de trop brusques variations peuvent en effet causer des erreurs passagères du fait du temps de convergence de l'algorithme des moindres carrés récursifs, temps de convergence lié à la valeur du facteur d'oubli. L'allure du profil



(a) Profil mixte



(b) Erreur relative d'estimation du flux - Optimisation à HR (en haut) et BR (en bas)



(c) Erreur relative d'estimation de la résistance - Optimisation à HR (en haut) et BR (en bas)

FIGURE 7.6 – Observateur de Kreisselmeier cas bruité : Monte-Carlo sur profil mixte

de régime envisagé peut ainsi être également prise en compte lors du compromis entre vitesse de convergence et intensité du filtrage visant à régler la valeur du facteur d'oubli.

Intéressons-nous désormais à la figure 7.6(c) et à l'erreur relative d'estimation de la résistance. En nous concentrant sur la moitié supérieure, i.e. l'erreur avec le jeu de coefficients ξ et ω_0 optimisé à 4000 tr/min, et en faisant abstraction des "pics" dus à la vitesse de convergence des moindres carrés récursifs, on constate que, quel que soit le régime, l'erreur sur la résistance estimée est inférieure à 6% environ, soit 15°C. On remarque également qu'à l'inverse de l'estimation du flux, c'est à bas régime que l'estimation est meilleure. Ceci n'est pas étonnant. En effet, d'après les équations électriques du moteur (regarder (1.19) par exemple), la résistance apparaît dans le terme Ri , tandis que le flux se trouve dans le terme $\omega\phi (\sin\theta - \cos\theta)^T$. Ainsi, à couple égal, le terme lié au flux est d'autant plus prépondérant et le terme lié à la résistance d'autant moins que le régime augmente. A haut régime, le flux est donc plus simple à identifier, contrairement à la résistance se retrouvant dans un petit terme "noyé" au milieu des autres. A bas régime, la tension étant également plus faible, le terme prépondérant devient celui de la résistance et c'est au tour du flux d'être plus difficile à estimer. De même, une augmentation du couple augmentant les courants, elle amplifie le terme lié à la résistance et améliore l'estimation de celle-ci. L'impact est toutefois plus léger. Par ailleurs, à la vue de l'estimation avec l'optimisation à 100 tr/min (partie inférieure), il n'est pas évident que l'utilisation de ce second jeu soit très utile. On note tout de même une légère amélioration à bas régime. Cependant, il n'est pas à exclure qu'en faisant une étude plus poussée des grilles, comme dans le cas de l'observateur de Luenberger, notamment en étudiant d'autres régimes que 100 et 4000 tr/min, on réussirait à trouver deux jeux plus complémentaires. Cette remarque vaut également pour l'estimation du flux. Toujours est-il, qu'excepté aux bas régimes, l'estimation de la résistance n'est précise en moyenne qu'à 2 ou 4% environ, soit 5 à 10°C, et ce uniquement du fait du bruit de mesure (i.e. sans les problèmes liés à une mauvaise connaissance des constantes de temps, de la position ou de l'inductance). L'estimation de la température des enroulements *via* l'estimation de la résistance semble ainsi beaucoup plus hasardeuse que celle des aimants *via* l'estimation du flux, que ce soit avec l'observateur de Luenberger ou de Kreisselmeier.

7.5.8 Estimation des constantes de temps inconnues

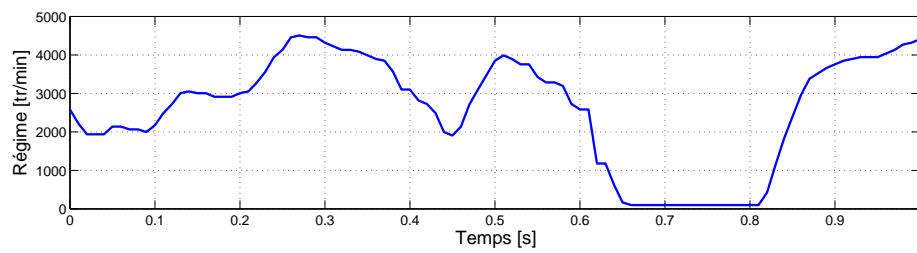
Lors d'une remarque au paragraphe 7.4.2, nous avons évoqué la possibilité d'estimer, sans garantie d'observabilité, simultanément la résistance, l'inductance, le flux et les deux constantes de temps. A titre informel, nous présentons ici les résultats de la mise

en œuvre en simulation de cette quintuple estimation dans le cas non bruité (figure 7.7) puis dans le cas bruité (figure 7.8), sur le profil de régime de la figure 7.7(a), soumis en outre à de petites variations. Le réglage des degrés de liberté est effectué comme indiqué en introduction du paragraphe 7.5, à l'exception des constantes de temps qui ont été différenciées pour l'occasion : $\tau_u = 1,8 \cdot 10^{-4} s$ et $\tau_i = 2,2 \cdot 10^{-4} s$. Les figures présentent les estimations des constantes de temps (7.7(b), 7.8(a) et 7.8(b)), de la résistance (7.7(c) et 7.8(c)), du flux (7.7(d) et 7.8(d)) et de l'inductance (7.7(e) et 7.8(e)). Dans le cas bruité, ces estimations sont en outre comparées à celles obtenues lors de l'estimation de R , L et ϕ uniquement, quand les constantes de temps sont parfaitement connues. Nous constatons que la convergence des cinq paramètres est parfaite dans le cas non bruité. C'est moins le cas dans le cas bruité, où l'on obtient tout de même des estimations proches de celles obtenues pour l'estimation de R , L et ϕ uniquement à τ_u et τ_i parfaitement connues. Cependant, si l'estimation de τ_u est plutôt bonne, l'estimation de τ_i est bien plus douteuse.

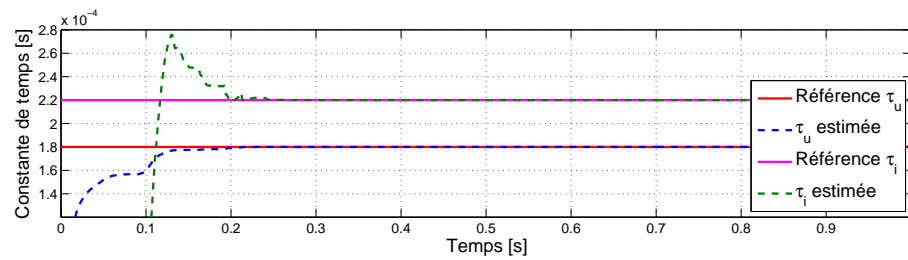
7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté, implémenté et étudié un observateur dit de Kreisselmeier. Celui-ci vise à estimer simultanément la résistance des enroulements, l'intensité du flux des aimants et l'inductance, à l'aide des mesures des signaux de courants et tensions et de la position, voire aussi de la connaissance des constantes de temps des filtres dans le cas réaliste. Mais ceci sans utiliser la partie mécanique des équations du modèle du moteur. Si l'on peut chercher à estimer ces trois paramètres, on peut également se contenter de n'en estimer qu'un ou deux, le ou les autre(s) étant alors supposé(s) connu(s).

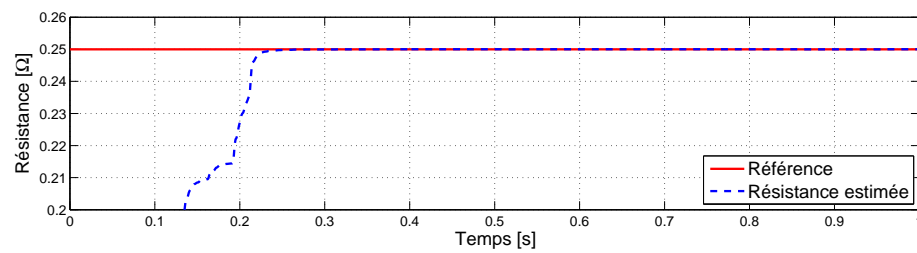
L'étude d'observabilité nous a montré que l'état constitué des trois paramètres physiques du moteur n'était pas partout observable. Si nous n'avons pas été en mesure d'établir une condition nécessaire et suffisante d'observabilité, nous avons en revanche explicité une condition nécessaire, quasiment suffisante en pratique, cette condition nécessaire étant notamment respectée quand le couple ou le régime varie et que l'autre est non nul. Cette condition n'étant toutefois pas suffisante, le test d'observabilité en ligne présenté, fournissant lui une condition suffisante d'observabilité, peut-être utilisé en complément pour éviter toute mauvaise surprise. Par ailleurs, dans le cas d'observabilités partielles, des conditions nécessaires un peu moins restrictives ont été établies pour l'observabilité de deux des trois paramètres, l'autre étant connu, et des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité d'un seul paramètre, les deux autres étant supposés connus.



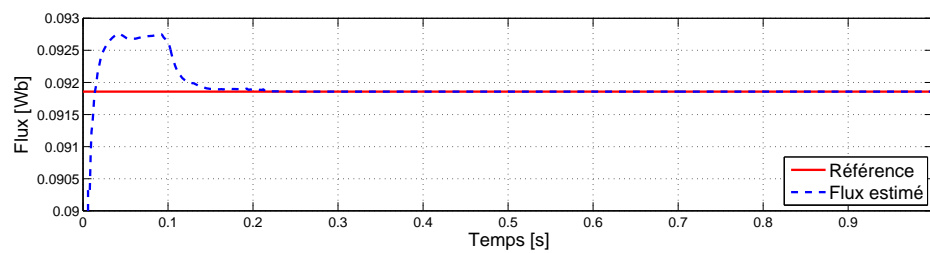
(a) Profil de régime



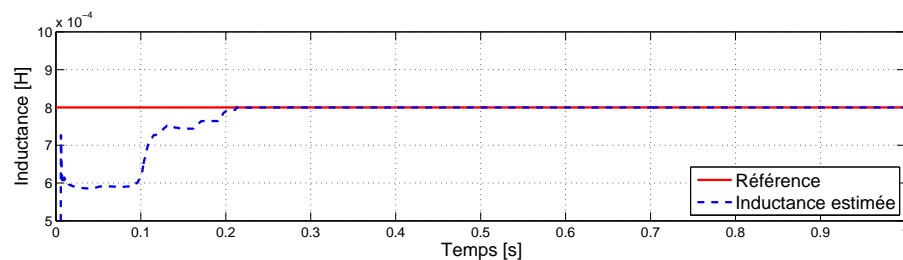
(b) Estimation des constantes de temps



(c) Estimation de la résistance

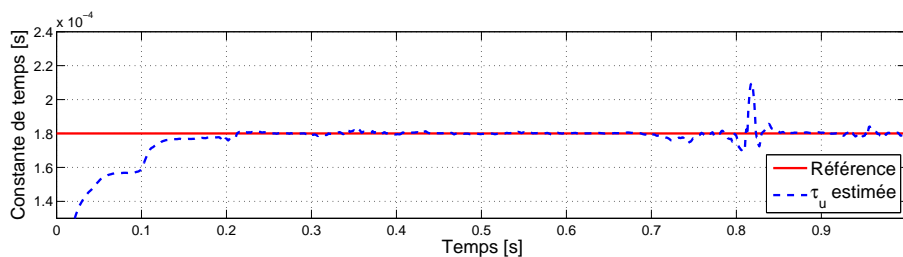


(d) Estimation du flux

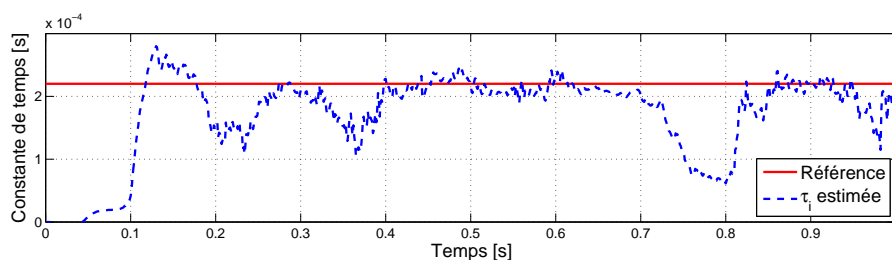


(e) Estimation de l'inductance

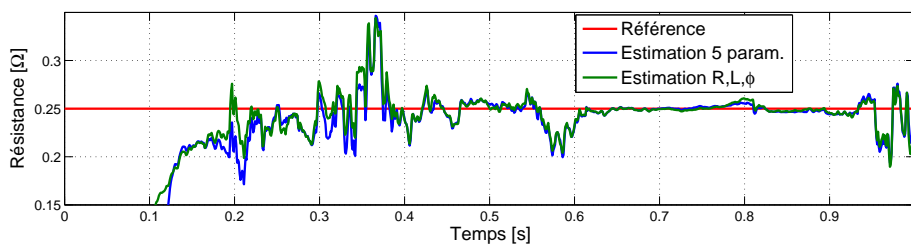
FIGURE 7.7 – Constantes de temps inconnues et estimées - Cas sans bruit



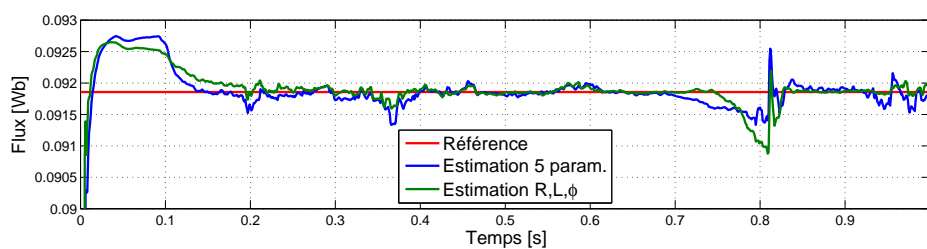
(a) Estimation de la constante de temps τ_u



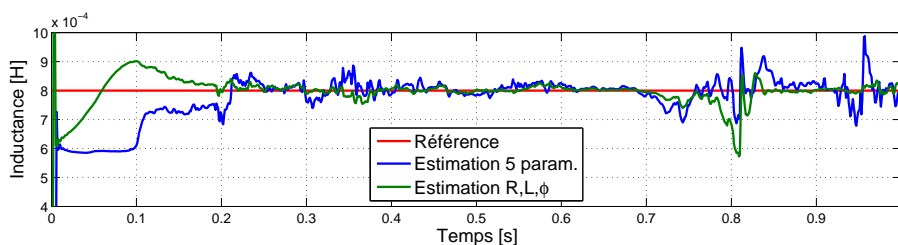
(b) Estimation de la constante de temps τ_i



(c) Estimation de la résistance



(d) Estimation du flux



(e) Estimation de l'inductance

FIGURE 7.8 – Constantes de temps inconnues et estimées - Cas avec bruit

Exploitant cette observabilité quand elle existe et la linéarité en les paramètres du modèle, nous avons implémenté un observateur linéaire adaptatif de Kreisselmeier. Celui-ci consiste à filtrer les équations du modèle afin d'en faire disparaître les dérivées des signaux auxquelles nous n'avons pas accès, pour nous ramener à un problème linéaire classique résoluble par exemple par moindres carrés. Cette linéarité rend par ailleurs aisée l'adaptation de l'observateur à l'estimation partielle de l'état quand la partie non estimée de cet état est connue. Introduit dans le cas idéal, l'observateur de Kreisselmeier est ensuite adapté au cas réaliste sans difficulté majeure, mais en faisant apparaître dans ses équations les constantes de temps des filtres. Si ces dernières sont parfaitement connues, les estimations ne sont en rien altérées lors du passage du cas idéal au cas réaliste. Si tel n'est pas le cas en revanche, leur mauvaise connaissance est source d'erreur, notamment sur l'estimation de la résistance.

En clôture du chapitre, des études en simulation ont été menées. Elles ont tout d'abord servi à vérifier les conclusions auxquelles nous avait conduit l'étude d'observabilité et à valider en parallèle le fonctionnement du test d'observabilité. Elles ont ensuite permis de discuter du réglage des cinq degrés de liberté de l'observateur, à savoir moindres carrés en espace ou récursifs, valeur du facteur d'oubli dans ce second cas, nombre de filtres utilisés, valeur des coefficients intervenant dans ces filtres et paramètres estimés. Ces réglages font, pour la plupart, l'objet de compromis et dépendent notamment du bruit de mesure et de la qualité de la connaissance des paramètres supposés connus. C'est pourquoi des études de robustesse à une mauvaise connaissance de ces paramètres et de la position, ainsi qu'une analyse de Monte-Carlo visant à déterminer l'impact du bruit de mesure sur les estimations, viennent compléter les discussions.

De ces études en simulation, il ressort en particulier que l'estimation du flux s'en sort toujours plutôt bien, que les paramètres à connaître soient mal connus ou que l'on soit en présence de bruit de mesure, avec des erreurs d'estimation, qui, une fois converties en termes de température, correspondent à des erreurs de l'ordre de 1°C . Ainsi, la qualité de l'estimation du flux avec l'observateur de Kreisselmeier est comparable à celle avec l'observateur de Luenberger, qui, rappelons-le, ne nécessite pas la mesure de la position. Cependant, là où il est nécessaire d'alterner, suivant le régime, entre deux observateurs de Luenberger présentant deux jeux de pôles différents, un seul observateur de Kreisselmeier peut s'avérer suffisant pour tous les régimes, même si en utiliser deux peut apporter de légères améliorations. L'estimation de la résistance en revanche est plus délicate, les erreurs d'estimation conduisant plutôt à des erreurs sur la température estimée de l'ordre d'une dizaine de degrés Celsius. La difficulté d'estimation de la résistance étant notamment due aux faibles courants qui circulent dans notre moteur relativement aux fortes valeurs du régime, cette estimation sera

d'autant meilleure que le couple est élevé et le régime faible. De manière analogue, l'estimation de la résistance sera plus simple pour un moteur à résistance élevée et faible flux. C'est l'inverse pour l'estimation du flux. Enfin, notons également qu'il est primordial d'être très précis sur la mesure de la position, la moindre erreur pouvant se payer très cher. C'est là un des avantages importants de l'observateur de Luenberger, ne nécessitant pas, à l'instar de tout observateur *sensorless*, la mesure de la position.

Chapitre 8

Mise en œuvre expérimentale des deux observateurs

Ce chapitre est dédié à la mise en œuvre expérimentale de l'observateur de Luenberger et de l'observateur de Kreisselmeier. Le paragraphe 8.1 présente dans un premier temps les trois bancs électriques de l'IFP Energies Nouvelles (IFPEN) sur lesquels des résultats ont pu être obtenus, résultats présentés ensuite au paragraphe 8.2. En raison des différentes caractéristiques des bancs et du fait des différentes périodes de mise à disposition de ceux-ci, les essais présentés varient d'un banc à l'autre. Par ailleurs, ces moyens expérimentaux ne nous ayant pas permis de réaliser certains essais, notamment de suivi de variation de température, l'annexe B présente des résultats complémentaires obtenus en simulation.

8.1 Présentation du dispositif expérimental

Les différents résultats expérimentaux présentés dans cette thèse, et notamment dans ce chapitre (ainsi qu'au chapitre 3), ont été obtenus sur les bancs électriques de l'IFPEN. Nous présentons dans un premier temps ce que ces bancs ont en commun, avant de revenir sur les spécificités de chacun des trois bancs utilisés.

8.1.1 Descriptif général des différents bancs électriques de l'IFPEN

Les bancs électriques de l'IFPEN sont des moyens d'essais dédiés aux machines électriques en vue de leur utilisation au sein d'applications véhicule, notamment pour :

- le prototypage de lois de commande pour moteurs électriques,
- l'identification et la modélisation des machines électriques en vue de leur pilotage,

- la validation expérimentale à l'aide d'une architecture Hardware-in-the-Loop (HiL) reproduisant un contexte véhicule.

Ces bancs sont constitués de deux MSAP liées mécaniquement par une boîte de vitesse, permettant de choisir les rapports entre les deux machines, ou par un rapport constant. La première de ces deux machines, dénommée eMot, a pour vocation de fournir un couple, tandis que la seconde, dénommée eGen, est utilisée dans le but de contrôler le régime de rotation de la ligne d'arbre. Chacune des deux machines est reliée à un onduleur de tension *via* un câble de puissance acheminant les tensions triphasées nécessaires au fonctionnement des machines depuis leurs onduleurs de tension respectifs.

La machine de charge eGen est pilotée par un onduleur de puissance commercial intégré dans une armoire électrique. Il est possible de la commander en vitesse (en émulant ainsi la vitesse du véhicule). On n'a toutefois pas la main sur ces commandes. La machine de traction eMot, pilotée en couple, est elle, en revanche, commandée par un système de prototypage temps réel ouvert qui nous permet d'intégrer des lois de commande développées à l'IFPEN ou encore les observateurs développés dans le cadre de cette thèse. Ce système de prototypage temps réel varie d'un banc à l'autre. A noter que c'est également l'armoire électrique qui, à l'aide de redresseurs, est chargée de produire, à partir du réseau EDF, les bus de tension continue alimentant les onduleurs.

Par ailleurs, les MSAP sont équipées de capteurs de position (codeur incrémental à 4096 points par tour pour le banc SMILE par exemple), de capteurs de couple, et l'onduleur¹ pilotant la machine de traction eMot est équipé de capteurs de courant dans les différentes phases et de capteurs de tension entre phases.

Nous allons désormais nous intéresser un peu plus en détails aux caractéristiques propres des trois différents bancs électriques utilisés.

8.1.2 Banc SMILE

Le banc SMILE (Scaled-down Motor In-the-Loop for Electrified vehicles) est un banc à échelle réduite équipé originellement de deux MSAP de puissances 1.7kW pour eMot (machine de gauche sur la photo 8.1) et 2.2kW pour eGen (machine de droite), et de même vitesse maximale 6000 tr/min. Le banc SMILE a vu se succéder deux dispositifs que nous nommons SMILE 1.0 et SMILE 2.0, la transformation du banc s'étant produite vers la fin de la thèse. Ainsi, les résultats d'identification du chapitre 3, obtenus durant la première partie de la thèse, l'ont été sur le banc SMILE 1.0, tandis que les résultats d'estimation par les observateurs, présentés dans ce chapitre, sont issus du banc SMILE 2.0.

1. Fréquences des MLI : 20kHz pour le banc SMILE et le banc haute vitesse, 15kHz pour le banc forte puissance



FIGURE 8.1 – Banc SMILE 1.0

Les valeurs des paramètres, tels qu’indiqués par la notice technique, de la machine de traction eMot du banc SMILE 1.0 sont données par le tableau 8.1. Ce sont ces valeurs que nous avons utilisées pour l’essentiel de nos calculs et simulations des chapitres précédents.¹

TABLE 8.1 – Paramètres de la MSAP eMot du banc SMILE 1.0

p	3
$R(20^{\circ}C)$	$0.2525 \Omega^1$
$\phi(20^{\circ}C)$	$\sqrt{3/2} \times 0.075 \text{ Wb}$
L_d	0.77 mH^1
L_q	0.94 mH^1

Pour le banc SMILE 2.0, la MSAP eMot a été remplacée, dans le but d’augmenter la vitesse électrique grâce à un plus grand nombre de paires de pôles, la vitesse mécanique étant limitée, par une Machine Synchrones à Double Excitation (MSDE) dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 8.2. Notons qu’utilisée, comme nous l’avons fait, sans rajouter d’excitation supplémentaire, cette machine est décrite par les mêmes équations qu’une MSAP.

La transformation du banc SMILE a également concerné le système de prototypage temps réel pilotant la machine eMot et la chaîne d’acquisition, ceux du banc SMILE 1.0 ne permettant pas d’obtenir de résultats corrects, la chaîne d’acquisition, mal connue, ne disposant entre autres pas de filtre anti-repliement (FAR). La chaîne d’acquisition du banc SMILE 2.0 a alors notamment été équipée d’un FAR analogique de fréquence de

1. Pour les applications numériques et simulations, nous avons utilisé $R = 0.25\Omega$ et, dans les cas où nous avons considéré une machine à pôles lisses, $L = L_d = L_q = 0.80mH$.

TABLE 8.2 – Paramètres de la MSDE eMot du banc SMILE 2.0

p	10
$R(20^{\circ}C)$	0.167 Ω
$\phi(20^{\circ}C)$	7.3 mWb
L_d	0.6 mH
L_q	0.7 mH

coupure 125kHz et une MicroAutoBox dSPACE utilisée comme système de prototypage temps réel. Celle-ci est constituée de deux modules, comme indiqué sur le schéma 8.2², la MicroAutoBox que nous utilisons n'étant pas équipée du FPGA du module DS1511. Le premier de ces deux modules est un circuit logique programmable FPGA (*Field-*

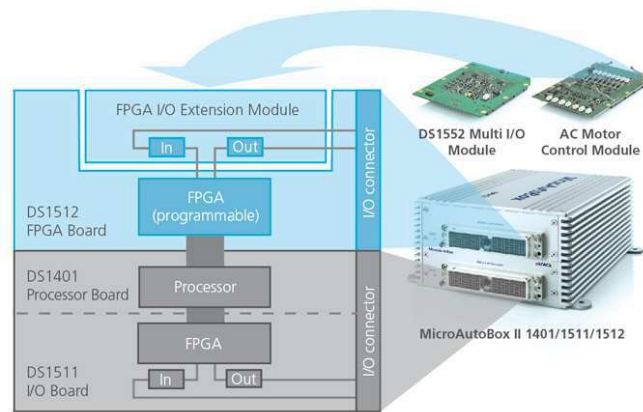


FIGURE 8.2 – dSPACE MicroAutoBox

Programmable Gate Array), échantillonné à 1MHz, placé après le FAR analogique à 125kHz³. Le second module est un processeur échantillonné à 10kHz. Pour ne pas avoir de problème avec ce sous-échantillonnage dans le processeur, des FAR numériques⁴ de fréquence de coupure 5kHz sont implémentés en sortie du FPGA. Le FPGA reçoit de l'onduleur les acquisitions des courants et tensions, ainsi que du capteur de position des signaux permettant de reconstruire la position. Au sein du FPGA, la position est

2. www.dspace.com

3. L'acquisition à 1MHz permet d'utiliser un FAR analogique de bande passante assez élevée, 125kHz en l'occurrence, bien plus élevée que la fréquence de rotation du moteur notamment. Ce filtre ne perturbe du coup quasiment pas les acquisitions de courant et tension.

4. Ces filtres étant numériques, ils sont plus facilement caractérisables que le FAR analogique. La bande passante plus basse n'est donc pas problématique. La modélisation réaliste et ses paramètres τ_u et τ_i permettent notamment de tenir compte de ce filtre.

alors calculée, puis transmise, en compagnie des signaux de courant et tension filtrés (à 5kHz), au processeur. Dans le processeur sont implémentés les observateurs et la commande vectorielle. Le processeur transmet alors les rapports cycliques⁵ au FPGA. A partir de ceux-ci, les temps d'ouverture et de fermeture des IGBT de l'onduleur sont calculés et les signaux carrés résultants sont utilisés pour commander l'onduleur.

Si l'échelle réduite du banc SMILE le rend facilement accessible et à un coût restreint, ce qui rend possible le développement de nos algorithmes, il est néanmoins moins bien instrumenté que les deux bancs IFPEN grande échelle présentés ci-après, sur lesquels quelques essais ont ponctuellement pu être réalisés.

8.1.3 Banc forte puissance

Le banc forte puissance (figure 8.3(a)) est équipé de deux MSAP de puissance 100kW et de vitesse maximale 4000 tr/min, ainsi que d'un onduleur ouvert, réalisé à l'IFPEN, auquel on peut appliquer des lois de commande IFPEN. Le système de prototypage temps réel pilotant la machine eMot est un PC industriel avec xPC Target où il est possible d'intégrer du code. Les paramètres du banc forte puissance sont donnés par le tableau 8.3.

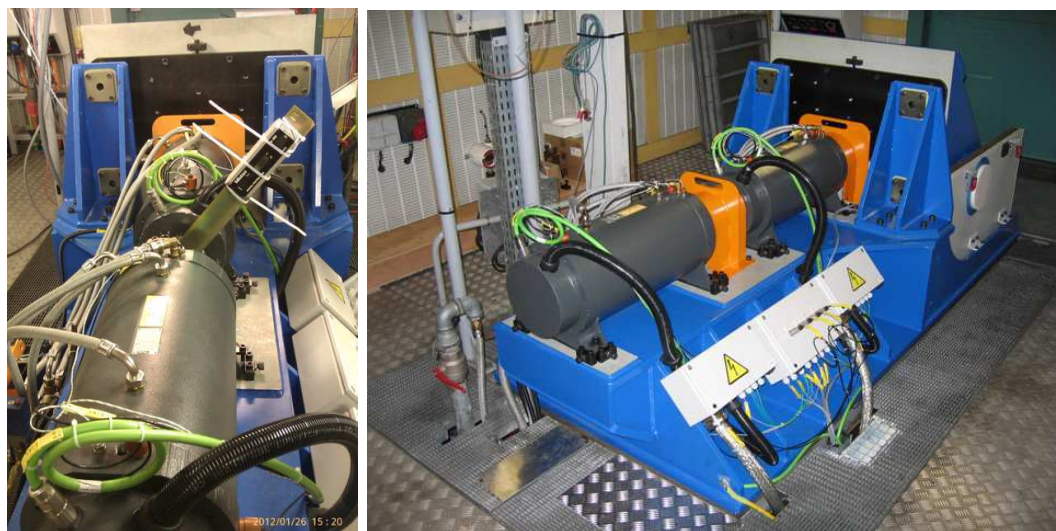
TABLE 8.3 – Paramètres de la MSAP eMot du banc forte puissance

p	9
$R(20^{\circ}C)$	0.014 Ω
$\phi(20^{\circ}C)$	0.116 Wb
L_d	0.15 mH
L_q	0.21 mH

8.1.4 Banc haute vitesse

Le banc haute vitesse (figure 8.3(b)) est équipé de deux MSAP de puissance 40kW et de vitesse maximale 22000 tr/min, ainsi que d'un onduleur fermé mais sur lequel une centrale d'acquisition a été ajoutée, laquelle permet de récupérer les signaux de courant, tension, position, régime et température. Il est également équipé d'une sonde de température sur le stator et d'un circuit de refroidissement liquide dont la température est pilotée entre 5 et 100°C. Les paramètres du banc haute vitesse sont indiqués dans le tableau 8.4.

5. Ratio entre la durée de fermeture des IGBT par période de commutation, fixée à $5 \cdot 10^{-5} s$, et cette même période.



(a) Banc forte puissance

(b) Banc haute vitesse

FIGURE 8.3 – Bancs forte puissance et haute vitesse

TABLE 8.4 – Paramètres de la MSAP eMot du banc haute vitesse

p	3
$R(20^{\circ}C)$	0.0631 Ω
$\phi(20^{\circ}C)$	0.072 Wb
L_d	0.86 mH
L_q	1.45 mH

8.2 Résultats expérimentaux

La plupart des essais expérimentaux ont été menés au banc SMILE, l'accès aux deux autres bancs n'ayant pu être que ponctuel. Le banc SMILE 1.0 a ainsi été le support de l'identification présentée au chapitre 3 et l'instigateur du développement de la modélisation réaliste. Au banc SMILE 2.0, les observateurs de Luenberger et Kreisselmeier ont été testés pour estimer les paramètres et la position. N'ayant en revanche pas été en mesure de chauffer le moteur de ce banc, nous n'avons pas pu tester de suivi de température. À défaut, de tels résultats sont présentés en simulation dans l'annexe B. Grâce à son circuit de refroidissement et à sa sonde de température, le banc haute vitesse nous a tout de même permis de valider la faisabilité du suivi de température par l'observateur de Luenberger. Par ailleurs, nous présentons les résultats de l'implémentation en ligne de l'observateur de Luenberger au banc forte puissance.

Remarque : On rappelle que les positions et erreurs de position présentées sur les

figures sont des positions et erreurs de positions électriques. Ainsi, par exemple, pour un moteur à dix paires de pôles, une erreur de dix degrés électriques sur une figure correspond à une erreur de un degré mécanique.

8.2.1 Résultats au banc SMILE 2.0

Le fonctionnement des observateurs a été vérifié en ligne sur le banc SMILE 2.0. Cependant, les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus hors ligne à partir des acquisitions des courants et des tensions, afin de pouvoir présenter sur un même essai l'influence des différents réglages sur l'estimation⁶. Les deux observateurs, de Luenberger et de Kreisselmeier, ont été mis en œuvre sur ce même essai. Pour cet essai, le couple consigne a été fixé à 1Nm et le régime consigne suit des paliers à environ 100, 500, 1000 et 1500 tr/min⁷, comme indiqué sur la figure 8.4(a). Les valeurs approchées R_a , ϕ_a et L_a des paramètres à utiliser le cas échéant dans les observateurs ont été choisies d'après le tableau 8.2 : $R_a = R(20^\circ C) = 0.167\Omega$, $\phi_a = \phi(20^\circ C) = 7.3mWb$ et, comme nous utilisons le modèle d'une machine à pôles lisses, $L_a = 0.65mH$. A noter que ce sont ces valeurs R_a , ϕ_a et L_a qui servent de références et sont dénommées "résistance réelle", "flux réel" et "inductance réelle" sur les figures. C'est donc un abus de langage dans le cas de l'inductance, la machine n'étant pas à pôles lisses. Par ailleurs, après réglages, les constantes de temps de la modélisation réaliste retenues sont $\tau_u = \tau_i = 1,45 \cdot 10^{-4}s$. Leur ordre de grandeur est cohérent avec la fréquence de coupure du FAR numérique à 5kHz (soit une constante de temps de $2 \cdot 10^{-4}s$) en sortie du FPGA. La légère différence vient, d'une part du fait que le FAR est différent du filtre utilisé pour la modélisation réaliste, et d'autre part du fait que les constantes de temps de la modélisation réaliste peuvent résulter, outre du FAR, d'autres phénomènes physiques. Enfin, comme précisé au paragraphe 8.1.2, le processeur est échantillonné à 10kHz, soit une période d'échantillonnage de $100\mu s$.

Résultats avec l'observateur de Luenberger

Les résultats présentés dans cette sous-partie ont été obtenus avec l'observateur de Luenberger, dont le réglage des pôles retenu est le suivant :

- estimation de la position à bas régime : $\lambda_1 = 370$, $\lambda_2 = 380$,
- estimation de la position à haut régime : $\lambda_1 = 500$, $\lambda_2 = 510$,
- estimation du flux à bas régime : $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 30$,

6. Des résultats obtenus directement en ligne sont présentés dans le cas du banc forte puissance.

7. Un régime de 1500 tr/min au banc SMILE 2.0, dont le moteur a 10 paires de pôles, correspond à un régime électrique de 15000 tr/min, soit le même que lorsque le moteur du banc SMILE 1.0 (3 paires de pôles) tourne à 5000 tr/min.

- estimation du flux à haut régime : $\lambda_1 = 200$, $\lambda_2 = 210$.

Il aurait également été possible d'utiliser des pôles complexes à partie imaginaire non nulle. Par ailleurs, dans le cas de l'utilisation de la transformation des équations, nous avons utilisé la méthode $n^\circ 2$ (5.17), et dans le cas de l'utilisation de la déconvolution (D1 et D2), les constantes de temps retenues valent $c_i = c_u = 4.10^{-6}s$. Enfin, l'alternance entre les observateurs bas régime et haut régime a été réglée à 300 tr/min, soit à une amplitude des tensions U d'environ 3.5V.

Cette alternance est illustrée sur les figures 8.4(a) à 8.4(c). Ainsi, la figure 8.4(a) compare la consigne de régime au régime seuil de 300 tr/min. Cependant, n'ayant pas accès à la mesure de régime, nous utilisons son image approximative, à savoir l'amplitude de la tension (figure 8.4(b)), pour déterminer quand changer d'observateur. L'alternance est alors représentée sur la figure 8.4(c). Les figures 8.4, 8.5 et 8.6 présentent alors les résultats d'estimation du flux et de la position pour différents réglages.

L'alternance entre les deux observateurs étant mise en œuvre, les figures 8.4(d), 8.5(c) et 8.5(d) comparent respectivement le flux estimé, la position estimée et l'erreur d'estimation de la position⁸, que l'on utilise (en rouge) ou non (en bleu) la transformation des équations. Aucune déconvolution n'est ici mise en œuvre. Les courbes bleues représentent donc les estimations que l'on obtiendrait avec un observateur basé sur la modélisation classique. Si l'apport de l'utilisation de la modélisation réaliste, en l'occurrence *via* la transformation des équations, n'est pas considérable dans le cas de l'estimation du flux, il est très important concernant l'estimation de la position, et ce d'autant plus que le régime est élevé. On constate que, avec ou sans transformation des équations donc, l'estimation du flux sur le profil de régime considéré est relativement bonne, hormis sur les brusques variations de régime des transitoires, mais une estimation viable est vite rétablie une fois ceux-ci achevés. On note toutefois une légère dépendance du flux estimé au régime. Le modèle ayant été établi en se basant sur le banc SMILE 1.0, pour lequel pertes fer et saturation magnétique ne semblaient pas jouer de rôle significatif, et les expériences présentes étant menées sur le banc SMILE 2.0 aux caractéristiques différentes, il n'est pas impossible que cette dépendance ait

8. Les petits sauts ne sont pas dus à l'observateur mais au capteur de position fournissant la position référence à laquelle est comparée l'estimation. La précision du capteur de position est en effet de $360/4096=0.088$ degré mécanique, soit 0.88 degré électrique. Notons au passage que, plus un moteur a de paires de pôles, moins la position électrique fournie par le capteur est précise. Un moteur à grand nombre de paires de pôles peut donc s'avérer être un handicap pour l'observateur de Kreisselmeier, peu robuste aux erreurs de position.

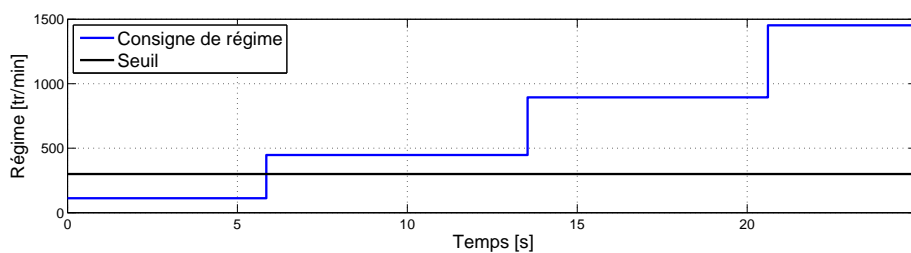
pour origine l'un et/ou l'autre de ces phénomènes physiques non modélisés.⁹ Concernant l'estimation de la position, l'adaptation de l'observateur à la modélisation réaliste en prenant en compte la transformation des équations permet donc d'obtenir de très bons résultats puisqu'on réussit à quasiment annuler l'erreur d'estimation de la position, et ce quel que soit le régime¹⁰. Notre estimation de position est alors précise à un degré électrique (soit 0.1 degré mécanique), voire moins, près.

Parallèlement, la transformation des équations étant utilisée, les figures 8.4(e) et 8.5(e) comparent respectivement le flux et la position estimés par l'observateur réglé pour le bas régime (≤ 300 tr/min, en bleu) et par l'observateur réglé pour le haut régime (> 300 tr/min, en rouge). Si on note notamment le mauvais comportement de l'observateur de flux réglé pour le bas régime aux régimes élevés, l'utilisation de deux observateurs ne semble pas, pour cette plage de régimes et pour ce moteur, indispensable. Comme nous allons le voir, il n'en va pas de même avec la forte puissance.

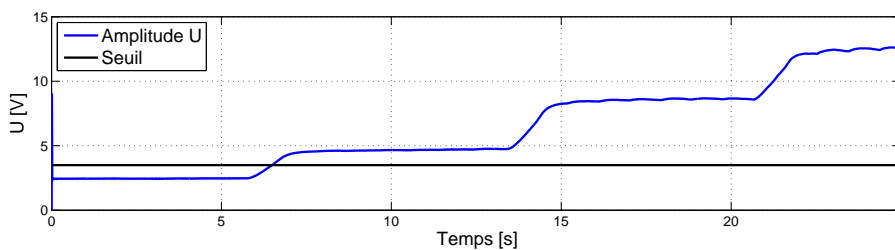
Les résultats présentés sur les figures 8.4 et 8.5 ont été obtenus sans utiliser la déconvolution. Nous étudions l'influence de la mise en œuvre de cette dernière sur la figure 8.6. Les figures 8.6(b) et 8.6(d) étudient les impacts respectifs sur le flux estimé et l'erreur d'estimation de la position de l'utilisation de la déconvolution complément de la transformation des équations, tandis que les figures 8.6(c) et 8.6(e) étudient ces mêmes impacts quand la déconvolution est utilisée seule, i.e. sans transformation des équations. Il apparaît clairement que, tant pour l'estimation du flux que pour celle de la position, la déconvolution ne doit pas être utilisée seule, au risque d'aggraver les défauts des résultats issus de la modélisation classique. En revanche, elle peut être utilisée en complément de la transformation des équations, améliorant alors ici très légèrement les résultats, en réduisant notamment un petit peu la dépendance du flux estimé au régime. Ceci confirme ce que nous avons constaté en simulation au chapitre 5.

9. On remarque également, quand le régime s'élève, l'apparition de légères oscillations basse fréquence. Leur origine n'est pas tout à fait certaine mais il est probable que ces oscillations soient issues de la régulation de vitesse de la machine de charge, sur laquelle nous n'avons pas la main. Elles ne sont donc pas à proprement parler liées à l'observateur, les oscillations étant d'ailleurs déjà présentes sur les acquisitions de tension (cf. figure 8.4(b)).

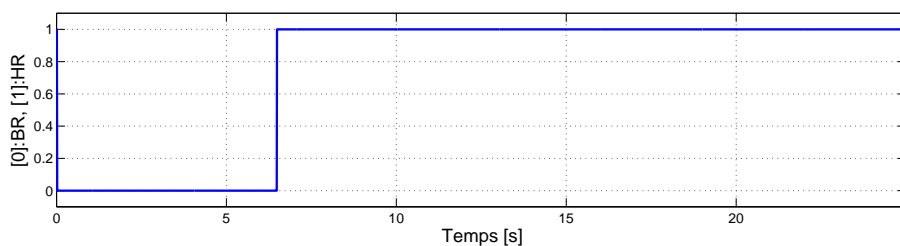
10. Une solution consistant à utiliser la modélisation classique et à corriger l'estimation de la position grâce à la connaissance des caractéristiques du FAR, et donc du déphasage engendré, est bien moins intéressante, non seulement car elle suppose que le déphasage est uniquement l'œuvre du FAR numérique, mais surtout car elle nécessite à la fois d'estimer le régime et d'adapter l'estimation de la position à celui-ci.



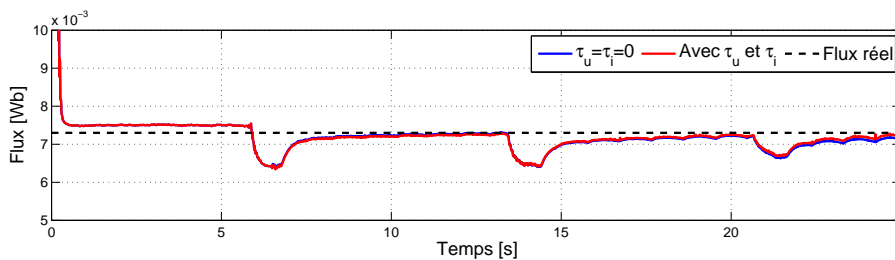
(a) Consigne de régime (comparée au régime seuil)



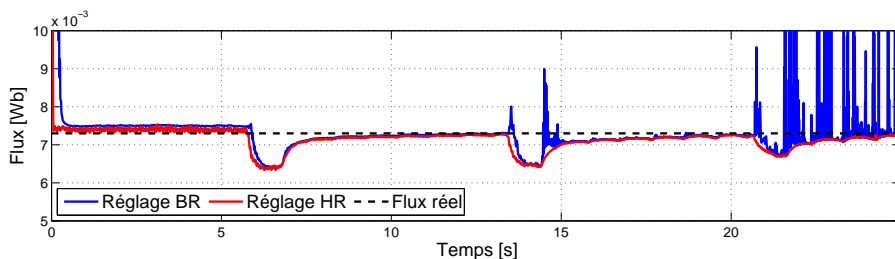
(b) Comparaison de l'amplitude de la tension et de l'amplitude seuil



(c) Sélection de l'observateur à utiliser

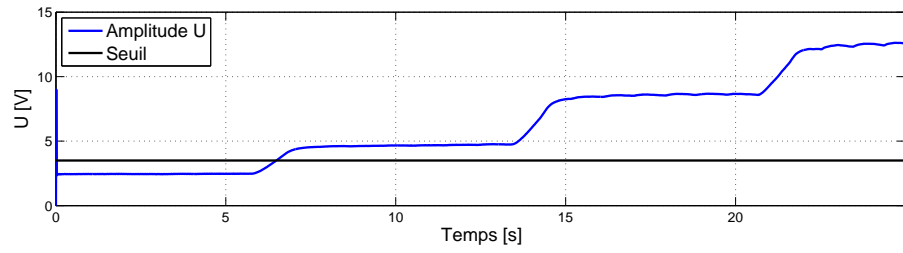


(d) Estimation du flux avec ou sans transformation des équations

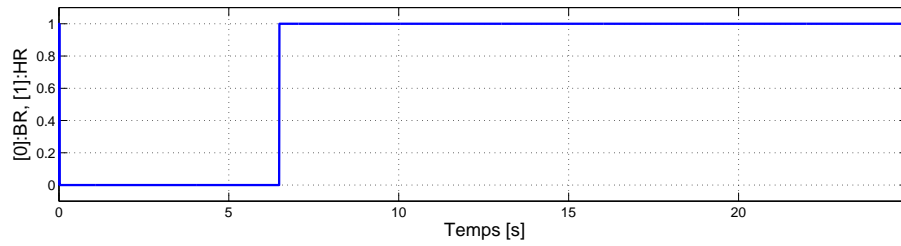


(e) Estimation du flux avec chacun des deux observateurs

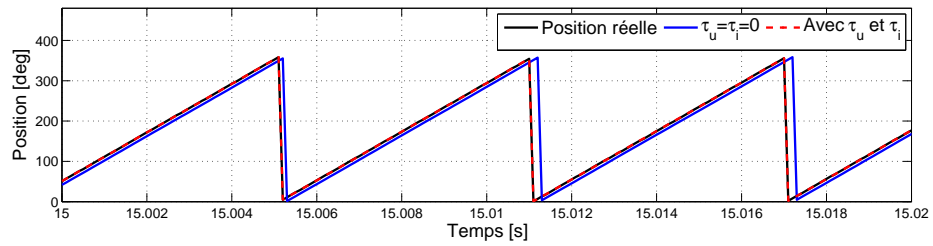
FIGURE 8.4 – Banc SMILE - Luenberger - Estimation du flux et apport de τ_u/τ_i



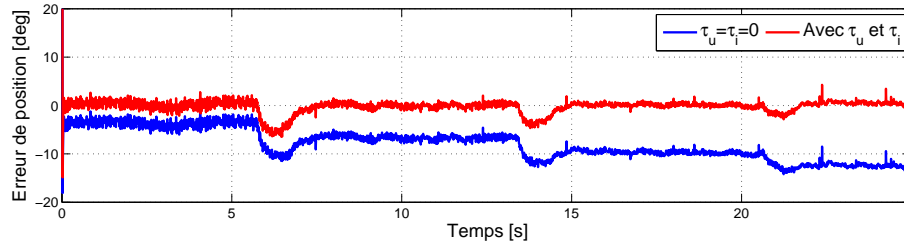
(a) Amplitude de la tension, image du régime, comparée à l'amplitude seuil



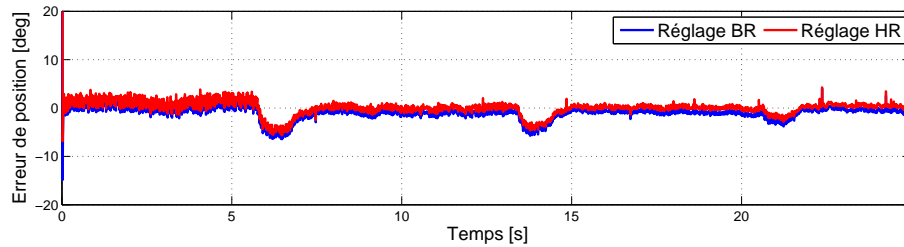
(b) Sélection de l'observateur à utiliser



(c) Estimation de la position avec ou sans transformation des équations

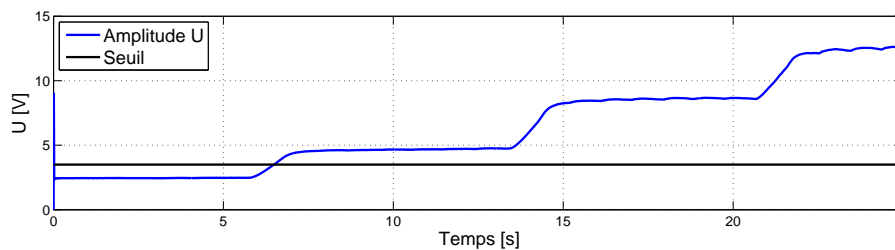


(d) Erreur d'estimation de la position avec ou sans transformations des équations

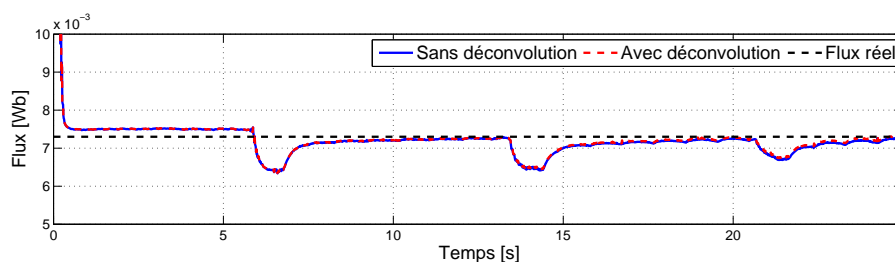


(e) Erreur d'estimation de la position avec chacun des deux observateurs

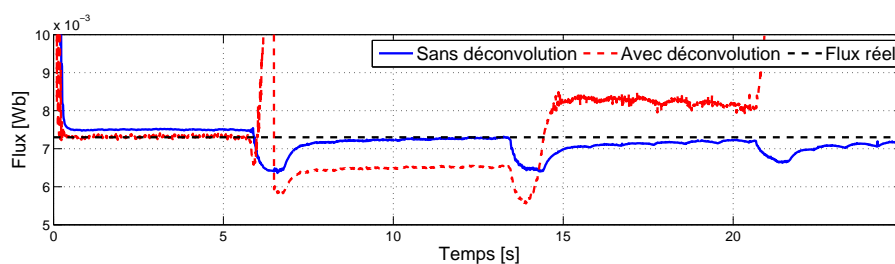
FIGURE 8.5 – Banc SMILE - Luenberger - Estimation de la position et apport de τ_u/τ_i



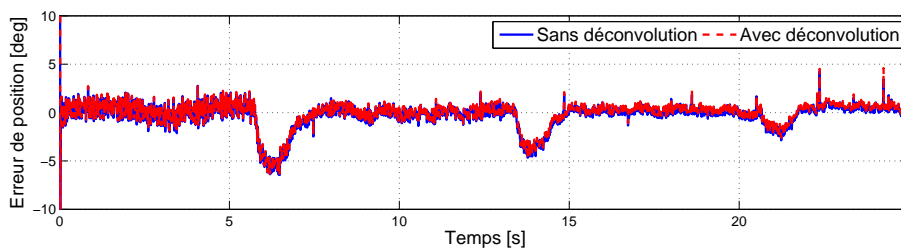
(a) Amplitude de la tension, image du régime, comparée à l'amplitude seuil



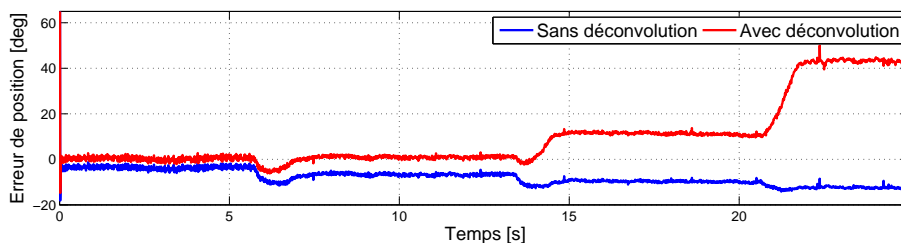
(b) ...sur l'estimation du flux, en complément de la transformation des équations.



(c) ...sur l'estimation du flux, sans utiliser la transformation des équations.



(d) ...sur l'estimation de la position, en complément de la transformation des équations.



(e) ...sur l'estimation de la position, sans utiliser la transformation des équations.

FIGURE 8.6 – Banc SMILE - Luenberger - Influence de l'utilisation de la déconvolution...

Résultats avec l'observateur de Kreisselmeier

Les résultats présentés dans cette sous-partie ont été obtenus avec l'observateur de Kreisselmeier, avec les réglages suivants : utilisation des moindres carrés récurrents avec un facteur d'oubli $f_{oubli} = 0.9998$ et avec un seul filtre de paramètres $\xi = 0.8$ et $\omega_0 = 1000 \text{rad/s}$.

Comme le confirme la faible valeur propre minimale du test d'observabilité de la figure 8.7(b), il n'est malheureusement pas possible sur l'essai considéré, à couple constant et à régime constant par palier, d'estimer simultanément les trois paramètres R , L et ϕ . Les estimations du flux (figure 8.7(c)), de la résistance (figure 8.7(d)) et de l'inductance (figure 8.7(e)) lorsque les trois paramètres sont estimés simultanément sont donc farfelues. Heureusement, nous allons voir sur les figures suivantes que les estimations d'un ou deux paramètres sont plus probantes, les valeurs approchées L_a et/ou R_a et/ou ϕ_a nécessaires étant alors utilisées.

La figure 8.8 présente les estimations respectives du flux (figure 8.8(b)), de la résistance (figure 8.8(c)) et de l'inductance (figure 8.8(d)) lorsque seul le paramètre en question est estimé, les valeurs approchées étant utilisées pour les deux autres paramètres. Sur chaque figure¹¹, on étudie l'apport de la prise en compte des constantes de temps τ_u et τ_i (en rouge), i.e. de la modélisation réaliste, dans l'observateur. L'apport de l'utilisation de l'observateur de Kreisselmeier adapté au modèle réaliste est indéniable, et ce, comme avec l'observateur de Luenberger, d'autant plus que le régime est élevé. Les estimations résultantes sont toutes plutôt bonnes. L'apport est plus discret dans le cas de l'estimation du flux, celle-ci étant déjà relativement correcte avant, mais tout de même bien présent. Toujours à propos de l'estimation du flux, on note la même dépendance au régime de l'estimation que celle constatée avec l'observateur de Luenberger. Ceci va dans le sens de l'hypothèse d'un phénomène physique, non négligeable au banc SMILE 2.0, non modélisé. De même, les estimations de la résistance et de l'inductance dépendent aussi légèrement du régime. Ceci peut provenir du même phénomène, directement ou indirectement¹². La non prise en compte de la légère saillance du moteur dans le modèle peut également y jouer un rôle.

Enfin, la figure 8.9 compare les estimations, respectivement du flux (figure 8.9(b)), de la résistance (figure 8.9(c)) et de l'inductance (figure 8.9(d)), selon que l'on estime un seul ou deux paramètres simultanément. Concernant le flux, on compare les différentes estimations avec celle obtenue avec l'observateur de Luenberger. Dans tous les cas, les

11. La convergence après les brusques variations de régime des transitoires pourrait être accélérée en diminuant la valeur du facteur d'oubli. A noter que, contrairement aux estimations du flux et de la résistance, l'estimation de l'inductance ne décroche pas durant les brusques variations de régime.

12. Par "indirectement", on entend : du fait de la mauvaise robustesse des estimations de la résistance et de l'inductance à l'utilisation d'une valeur approchée du flux différente de sa valeur réelle.

constantes de temps τ_u et τ_i sont prises en compte. Tout d'abord, on retrouve ce que nous avons constaté au paragraphe 7.5.5, à savoir que les estimations de la résistance et de l'inductance sont robustes l'une à l'autre, et du coup leur estimation simultanée ne dégrade pas leurs estimations séparées. Si en régime établi, l'estimation simultanée du flux et de l'inductance se comporte également bien, ce n'est malheureusement pas le cas pour la situation qui nous intéresse le plus, à savoir l'estimation simultanée du flux et de la résistance, les estimations se dégradant pour les régimes les plus élevés. Enfin, l'estimation du flux (simultanément ou non avec celle de l'inductance) avec l'observateur de Kreisselmeier est comparable à celle avec l'observateur de Luenberger. L'estimation avec l'observateur de Luenberger présente toutefois l'avantage de ne pas nécessiter la mesure de la position.

8.2.2 Résultats au banc forte puissance

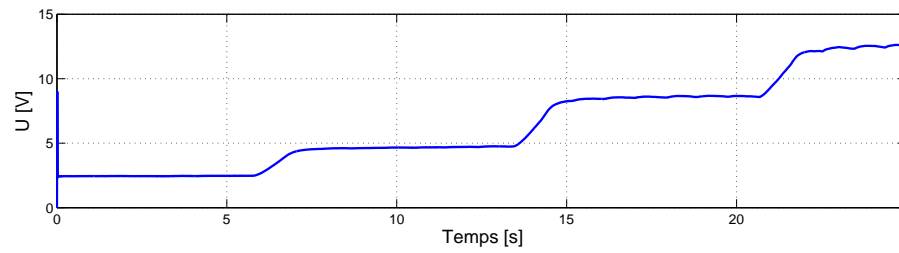
L'observateur de Luenberger a été implémenté au banc forte puissance et testé en ligne. En découlent les résultats présentés sur les figures 8.10 à 8.12, obtenus sur différents essais. Pour ces essais, le couple consigne a été fixé à 2Nm et le régime consigne suit des paliers variables d'un essai à l'autre. Les acquisitions sont échantillonnées à 10kHz, soit une période d'échantillonnage de $100\mu s$. Les valeurs approchées R_a et L_a des paramètres à utiliser dans les observateurs ont été choisies d'après le tableau 8.3 : $R_a = R(20^\circ C) = 14m\Omega$ et $L_a = L_d = 0.15mH$. Les valeurs références dénommées "flux réel" et "position réelle" sont respectivement la valeur du flux à $20^\circ C$ indiquée dans le tableau 8.3 et la position mesurée par le capteur de position. Par ailleurs, après réglage, les constantes de temps de la modélisation réaliste retenues sont $\tau_u = \tau_i = 1,3 \cdot 10^{-4} s$. Le réglage des pôles retenu est lui le suivant :

- jeu de pôles BR : $\lambda_1 = 100, \lambda_2 = 200$,
- jeu de pôles HR : $\lambda_1 = 10000, \lambda_2 = 11000$.

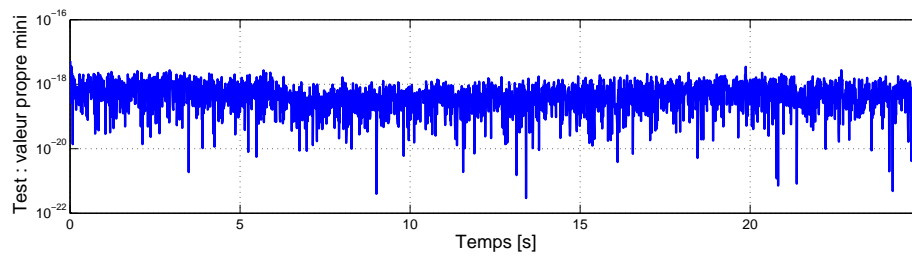
Si rien n'est précisé, c'est le jeu de pôle HR qui est utilisé. D'autre part, dans le cas de l'utilisation de la transformation des équations, nous avons utilisé la méthode n° 1 (5.9), et dans le cas de l'utilisation de la déconvolution (D1 et D2), les constantes de temps retenues valent $c_i = c_u = 4,8 \cdot 10^{-6} s$. Sauf mention contraire, la déconvolution n'est pas utilisée.

La figure 8.10 étudie l'apport de l'utilisation de la modélisation réaliste *via* la transformation des équations (la déconvolution n'est pas utilisée) sur l'estimation du flux (figure 8.10(b)) et de la position (figures 8.10(c)¹³ et 8.10(d)). On fait passer le régime d'un palier à 1000 tr/min à un palier à 3000 tr/min (figure 8.10(a)). Les estimations

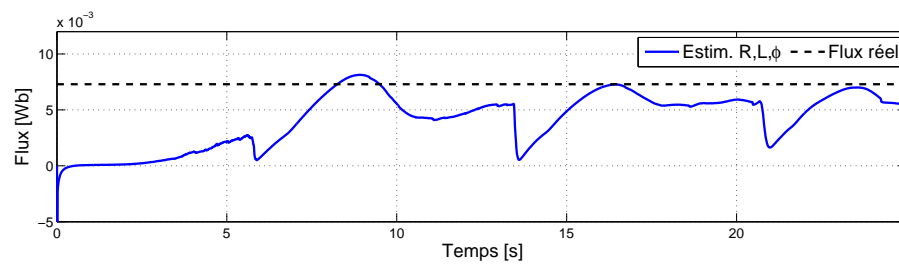
13. Même si cela n'apparaît pas clairement sur la figure du fait d'un sous-échantillonnage lors de l'enregistrement des acquisitions, la position varie bien évidemment entre 0 et 360 degrés.



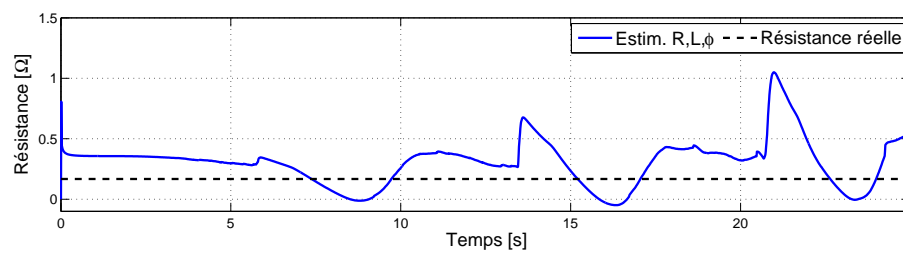
(a) Amplitude de la tension, image du régime



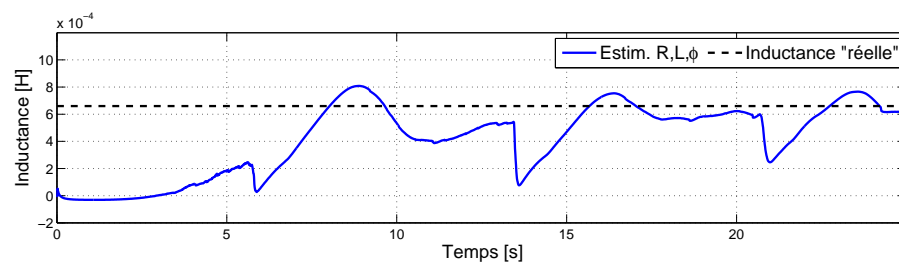
(b) Test d'observabilité : valeur propre minimale



(c) Estimation du flux

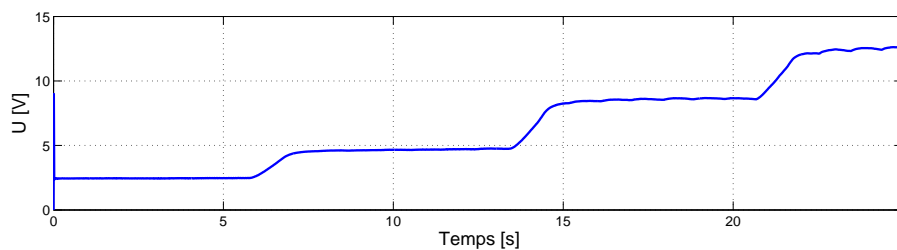


(d) Estimation de la résistance

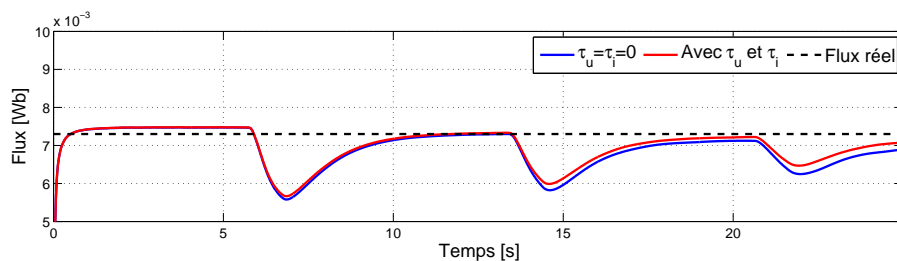


(e) Estimation de l'inductance

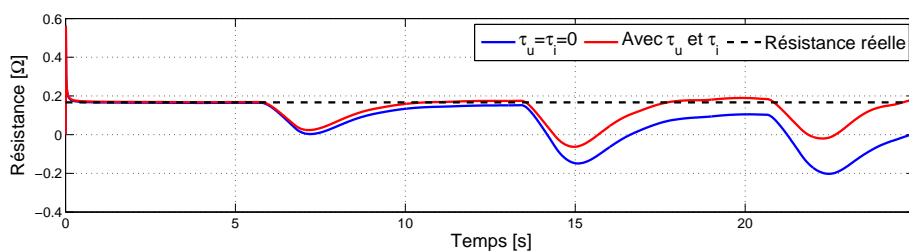
FIGURE 8.7 – Banc SMILE - Kreisselmeier - Estimation de R , L et ϕ simultanément



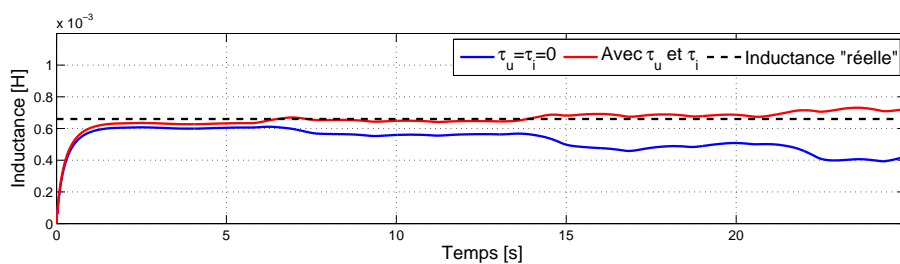
(a) Amplitude de la tension, image du régime



(b) Estimation du flux uniquement

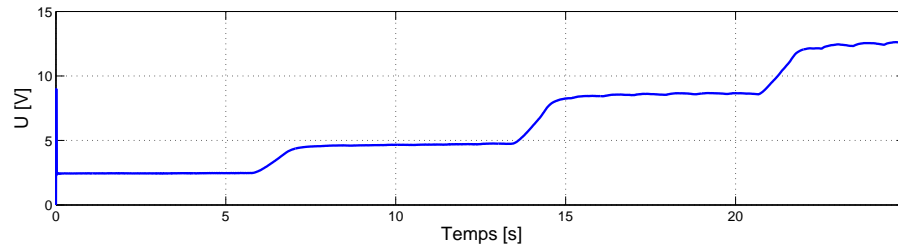


(c) Estimation de la résistance uniquement

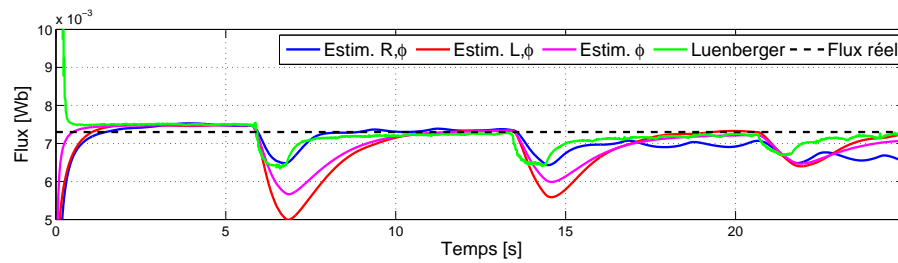


(d) Estimation de l'inductance uniquement

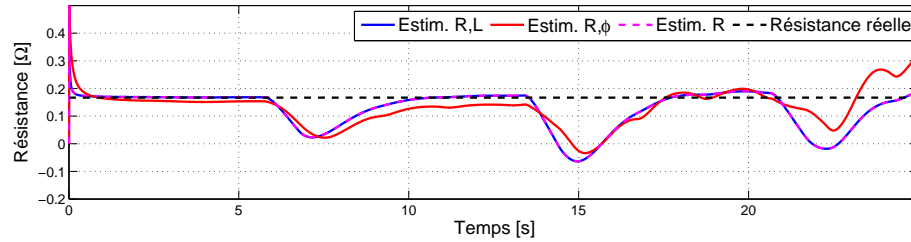
FIGURE 8.8 – Banc SMILE - Kreisselmeier - Estimations séparées et apport de τ_u/τ_i



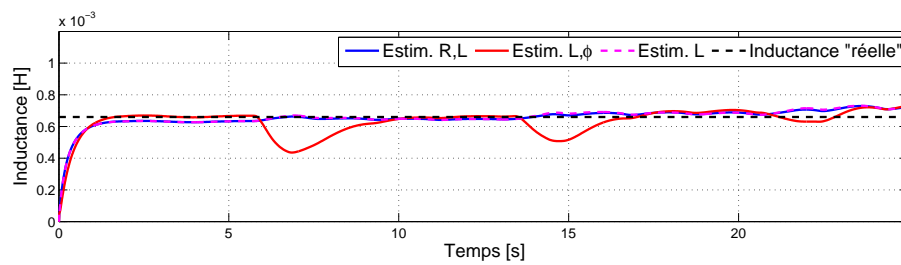
(a) Amplitude de la tension, image du régime



(b) ...sur l'estimation du flux



(c) ...sur l'estimation de la résistance



(d) ...sur l'estimation de l'inductance

FIGURE 8.9 – Banc SMILE - Kreisselmeier - Influence des paramètres estimés...

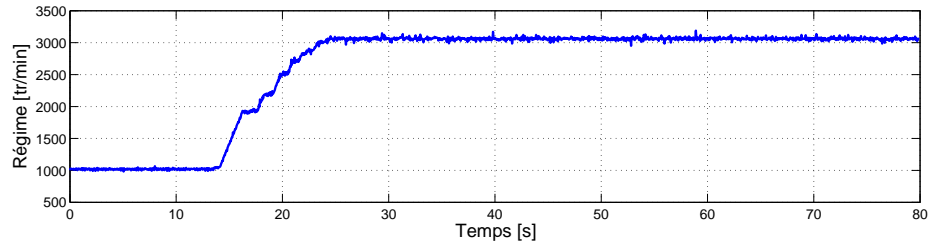
avec l'observateur basé sur la modélisation réaliste (en rouge) sont comparées à celles avec celui basé sur la modélisation classique (en bleu). Si au banc SMILE 2.0 c'est surtout dans le cas de l'estimation de la position que la modélisation réaliste est un véritable atout, c'est ici autant pour le flux que pour la position que les estimations sont grandement améliorées par l'utilisation de la modélisation réaliste. Comme prévu, c'est aux régimes les plus élevés que l'apport est le plus grand, avec des erreurs d'environ 15% et de près de 20 degrés corrigées sur le flux et la position estimés à 3000 tr/min. Si un léger décrochage est à noter pour l'estimation du flux lors du transitoire, l'estimation de la position reste toujours très bonne, avec une erreur de l'ordre du degré. Par ailleurs, contrairement au banc SMILE 2.0, on ne remarque pas de dépendance au régime du flux estimé.

La figure 8.11 s'intéresse à l'influence de l'utilisation de la déconvolution en complément de la transformation des équations sur l'estimation du flux (figure 8.11(b)) et de la position (figure 8.11(c)) pour un régime passant de 1000 à 3000 tr/min (figure 8.11(a)). Comme au banc SMILE 2.0, l'apport de l'utilisation de la déconvolution est très discret, tant sur l'estimation de la position que du flux.

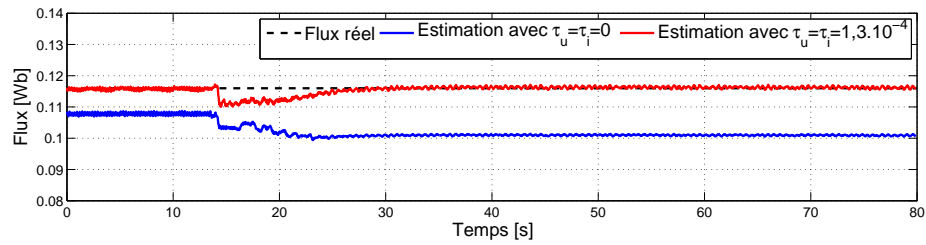
La figure 8.12 compare de même les estimations du flux (figure 8.12(b)) et de la position (figure 8.12(c)) avec deux jeux de pôles différents, l'un réglé pour le bas régime (en rouge) et l'autre pour le haut régime (en bleu), pour l'estimation du flux. La limite entre réglages bas et haut régimes est située aux alentours de 700 tr/min pour le flux. On fait alors alterner le régime (figure 8.12(a)) entre la zone bas régime et la zone haut régime. Si au banc SMILE 2.0, l'utilisation de deux jeux de pôles ne semblait pas absolument nécessaire, il n'en va clairement pas de même au banc forte puissance, notamment pour l'estimation du flux. En effet, concernant l'estimation du flux, seul l'observateur réglé pour les bas régimes est efficace à bas régime et inversement à haut régime. En alternant entre les deux observateurs, il est donc possible d'avoir une estimation correcte aux bas comme aux hauts régimes¹⁴. C'est moins marqué concernant l'estimation de la position, où le jeu de pôles réglé pour le haut régime semble ici suffire. Il apparaît en effet que la limite entre réglages bas et haut régimes pour l'estimation de la position doit être plus basse que celle pour le flux, plutôt vers les 200 ou 300 tr/min, et il aurait probablement fallu tester un régime plus faible pour voir apparaître la pleine utilité du second jeu de pôles pour l'estimation de la position. En

14. La convergence de l'observateur réglé pour le haut régime apparaît ici un peu lente, mais ceci ne vient que du fait que le flux estimé présenté est la sortie d'un filtre passe-bas visant à atténuer les légères oscillations du flux estimé en sortie d'observateur. Il est donc tout à fait possible, en modifiant le filtre, d'accélérer cette convergence, voire de la rendre quasiment instantanée en supprimant le filtre. Cependant, n'ayant plus eu accès au banc forte puissance après ces essais, cette modification n'a pu être effectuée.

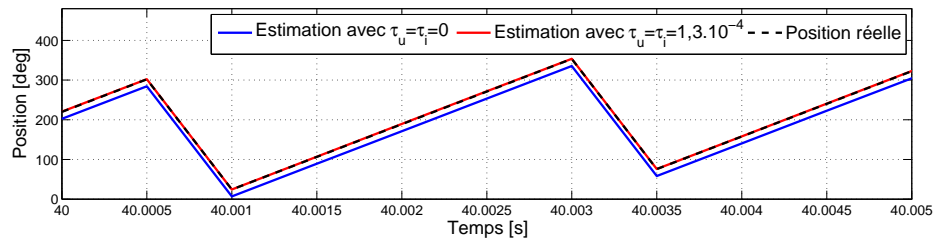
tout cas, avec deux jeux de pôles, quitte à ce qu'ils soient différents pour l'estimation du flux et celle de la position, il est possible d'estimer correctement le flux et la position quel que soit le régime.



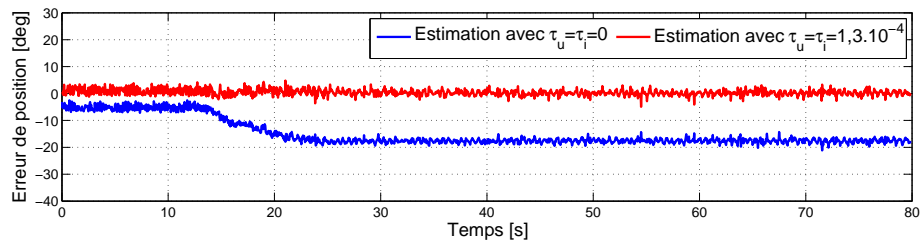
(a) Régime



(b) Estimation du flux

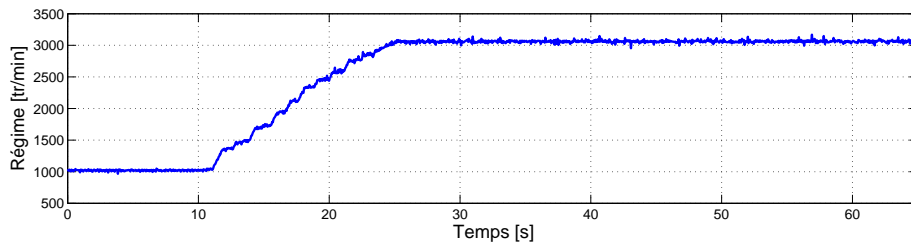


(c) Estimation de la position

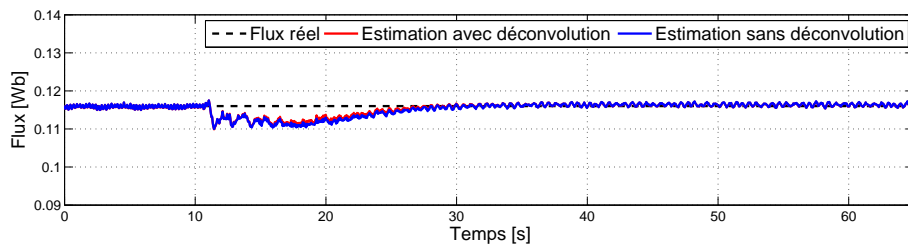


(d) Erreur d'estimation de la position

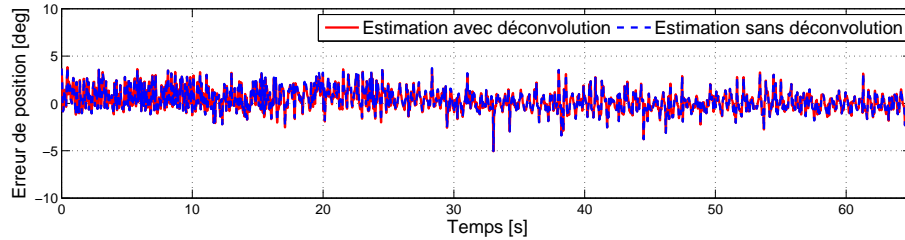
FIGURE 8.10 – Banc forte puissance - Apport de la prise en compte de τ_u et τ_i



(a) Régime



(b) Estimation du flux



(c) Erreur d'estimation de la position

FIGURE 8.11 – Banc forte puissance - Influence de l'utilisation de la déconvolution en complément de la transformation des équations

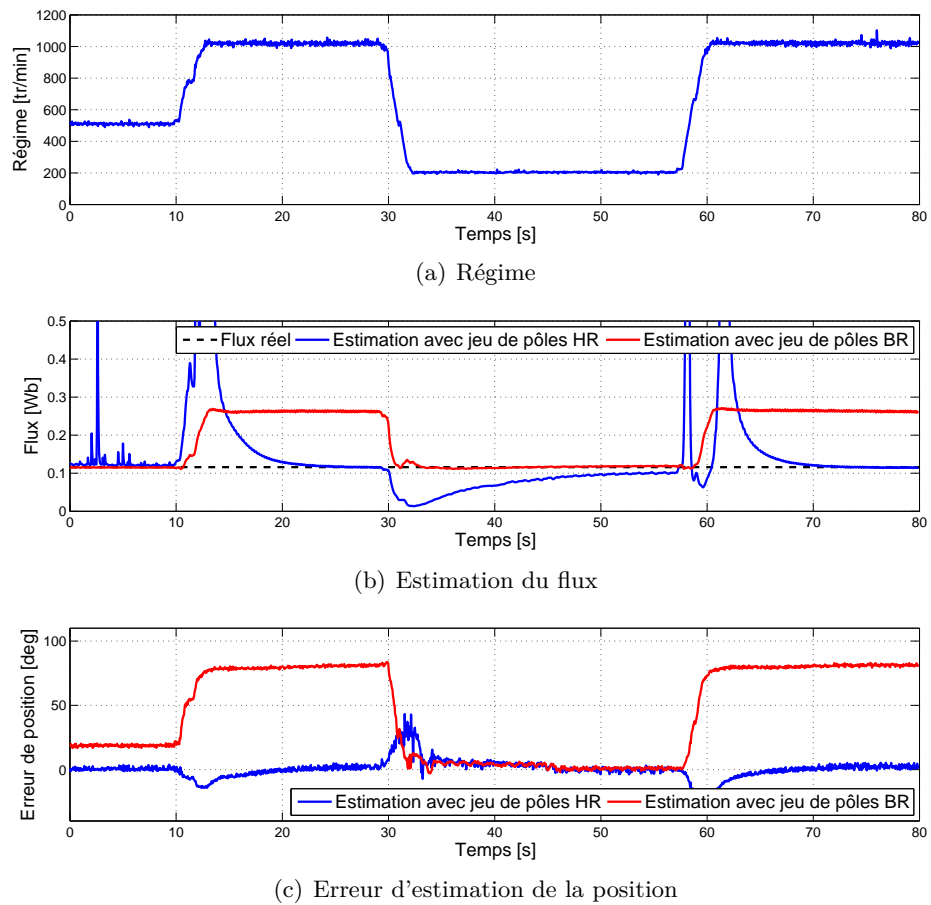


FIGURE 8.12 – Banc forte puissance - Alternance entre pôles réglés pour BR et HR

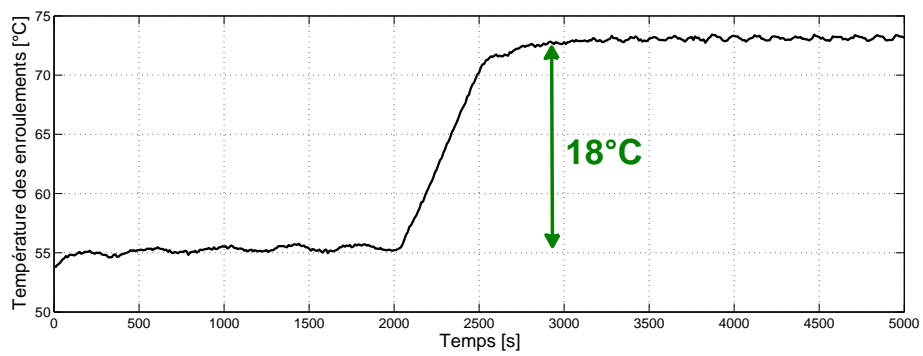
8.2.3 Résultats au banc haute vitesse

Nous avons récupéré un essai, avec variation de température du moteur, réalisé au banc haute vitesse. Pour une température du circuit de refroidissement liquide de 40°C , le moteur a temporairement tourné à 3000 tr/min et sous un couple de 20Nm. Les signaux de courant et tension, ainsi que la température fournie par la sonde de température du stator ont alors été enregistrés. Le moteur a ensuite été chauffé en portant la température du circuit de refroidissement à 60°C et, une fois la température stabilisée, la même acquisition a été réalisée. Le flux des aimants a donc diminué (cf. §1.5.4). Les acquisitions sont échantillonnées à 50kHz, soit une période d'échantillonnage de $20\mu\text{s}$. Sur chacune des deux acquisitions, nous avons alors mis en œuvre hors ligne l'observateur de Luenberger pour estimer le flux¹⁵. Notons que *via* l'estimation du flux, nous estimons la variation de température des aimants, tandis que la température mesurée est celle des enroulements. Concernant les réglages de l'observateur de Luenberger, les valeurs approchées R_a et L_a ont été choisies d'après le tableau 8.4 $R_a = R(20^{\circ}\text{C}) = 63.1\text{m}\Omega$ ¹⁶ et $L_a = 1.16\text{mH}$. Par ailleurs, la chaîne d'acquisition étant équipée d'un FAR à 12.5kHz, nous choisissons $\tau_u = \tau_i = 8.10^{-5}\text{s}$. Après réglage, les pôles retenus sont $\lambda_1 = 600$ et $\lambda_2 = 610$. Enfin, la transformation des équations est utilisée avec la méthode $n^{\circ} 2$ (5.17), mais pas la déconvolution.

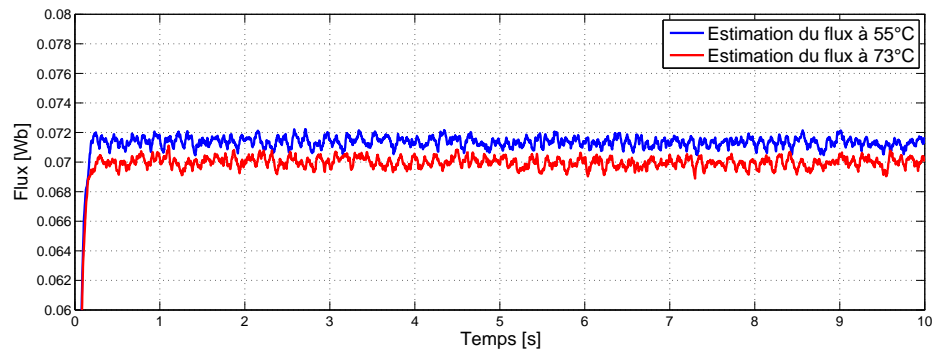
Les résultats sont indiqués sur la figure 8.13. La figure 8.13(a) présente tout d'abord la température mesurée des enroulements du stator tout au long de l'essai. On constate que le passage de la température du circuit de refroidissement de 40 à 60°C se traduit par une augmentation de la température des enroulements de 55 à 73°C , soit une augmentation de 18°C . Ensuite, la figure 8.13(b) compare les estimations du flux obtenues à partir des deux acquisitions, à savoir celle d'avant la chauffe du moteur (en bleu), et celle d'après (en rouge). On note que, comme le flux, le flux estimé a bien diminué avec l'augmentation de la température du moteur. Plus précisément, la valeur moyenne du flux estimé passe de 71.4 mWb à 70.0 mWb, soit une diminution de 1.96%. En utilisant la relation (1.31), on en déduit que la température estimée des aimants a augmenté de 16.3°C . Notre estimation de variation de température des aimants est donc très proche de la variation de température réelle des enroulements. Comme nous n'avons pas accès à la mesure de température des aimants, nous ne pouvons certes pas comparer avec précision notre estimation à la réalité mais ce résultat n'en est pas moins très prometteur.

15. Ne disposant pas de la mesure de la position, nous n'avons pu tester l'estimation de la résistance et du flux par l'observateur de Kreisselmeier.

16. On commet donc une légère erreur étant donné qu'on se situe à des températures supérieures.



(a) Température mesurée des enroulements



(b) Estimation du flux des aimants

FIGURE 8.13 – Banc haute vitesse - Estimation du flux à deux températures différentes

8.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats de la mise en œuvre expérimentale des observateurs de Luenberger et Kreisselmeier sur un banc petite échelle, le banc SMILE 2.0, sur un banc forte puissance et sur un banc haute vitesse.

Les estimations de flux et de position fournies par l'observateur de Luenberger sur le banc SMILE 2.0 et sur le banc forte puissance sont plutôt concluantes, avec des erreurs d'estimation du flux et de la position respectivement de l'ordre du pourcent et du degré électrique (soit bien moins d'un degré mécanique). La comparaison entre les estimations obtenues *via* un observateur de Luenberger basé sur la modélisation classique de la MSAP et l'observateur de Luenberger adapté à notre modélisation réaliste témoigne du grand apport de cette dernière, tant pour l'estimation de la position, pour laquelle des erreurs de la dizaine voire de la vingtaine de degrés électriques selon le régime sont corrigées, que pour l'estimation du flux, notamment au banc forte puissance où des erreurs d'estimation d'une dizaine de pourcents sont annulées. Au banc SMILE 2.0, on note toutefois une légère dépendance résiduelle du flux estimé au régime. La modélisation réaliste retenue peut probablement être encore améliorée afin d'affiner cette estimation. Cette dépendance au régime n'apparaît toutefois pas dans les estimations au banc forte puissance, où notre modélisation semble suffisante. Par ailleurs, nos essais confirment que si l'on souhaite utiliser la déconvolution, ceci ne doit se faire qu'en complément de la transformation des équations par l'une ou l'autre des deux méthodes proposées au chapitre 5, son apport étant alors très léger sur nos deux bancs, et non pas toute seule. D'autre part, l'alternance entre deux observateurs de Luenberger utilisant deux jeux de pôles différents en fonction du régime apparaît absolument nécessaire au banc forte puissance, moins au banc SMILE 2.0.

Concernant la mise en œuvre de l'observateur de Kreisselmeier, celle-ci n'a pu être réalisée qu'au banc SMILE 2.0 et sur des essais ne remplissant pas la condition nécessaire d'observabilité différentielle des trois paramètres physiques résistance, flux et inductance simultanément. Nous nous sommes alors intéressé aux estimations d'un ou deux paramètre(s), le ou les autre(s) étant connu(s). Excepté l'estimation simultanée de la résistance et du flux un peu plus délicate, notamment quand le régime s'élève, ces estimations d'un ou deux paramètre(s) sont plutôt bonnes, avec des erreurs d'estimation du flux comparables à celles obtenues avec l'observateur de Luenberger, lequel ne nécessite toutefois pas la connaissance de la position, et des erreurs d'estimation de la résistance et de l'inductance de quelques pourcents. Comme pour l'observateur de Luenberger, baser l'observateur de Kreisselmeier sur notre modélisation réaliste de la

MSAP, plutôt que sur la modélisation classique, permet de fortement améliorer les estimations de chacun des trois paramètres. On note également la même légère dépendance au régime des estimations.

Enfin, concernant l'estimation de la variation de température, le seul essai qu'il a été possible de réaliser, au banc haute vitesse, est très encourageant avec une variation de température des aimants estimée proche de la variation de température des enroulements mesurée. Des résultats complémentaires en simulation, notamment de suivi de variation de température, sont proposés dans l'annexe B. Par ailleurs, comme nous l'avons mentionné plus haut, et comme nous l'avons évoqué au paragraphe 7.5.7, l'estimation simultanée de la résistance et du flux, i.e. de la température des enroulements et de la température des aimants, semble délicate. Il est de ce fait vraisemblablement judicieux de ne chercher à estimer qu'une des deux températures, l'allure de l'autre devant être proche, peut-être à un gain près.

Chapitre 9

Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans cette thèse avait pour thème l'estimation en ligne de paramètres physiques de la machine synchrone à aimants permanents pour applications automobiles, afin de répondre à deux objectifs liés aux variations de température. D'une part, l'amélioration des performances statiques de la machine *via* l'adaptation de son contrôle en couple aux variations de ses paramètres sous l'effet de la température. D'autre part, la mise en place d'une surveillance thermique, visant à diagnostiquer le fonctionnement de la machine et améliorer sa disponibilité sans risque de détérioration. Grâce aux relations simples existant entre la variation des températures du moteur et la variation des deux paramètres dépendant de ces dernières, la résistance des enroulements et l'intensité du flux des aimants, les deux objectifs ont été réunis en un seul : la connaissance en ligne du flux et de la résistance, le premier objectif devenant ainsi accessible directement et le second par le biais d'une conversion préalable paramètre/température.

Pour atteindre cet objectif, nous avons proposé d'utiliser des observateurs de ces deux paramètres, basés sur un modèle le plus réaliste possible de la machine, utilisant uniquement les signaux mesurés de courant et de tension, voire de position. Ceci avec le parti pris de n'utiliser que les équations électriques du modèle, c'est-à-dire en se passant de l'équation mécanique, afin d'être robuste aux paramètres liés à la charge mécanique (inertie, friction, couple de charge), propriété très intéressante car il est en général plutôt compliqué d'avoir un accès précis à ces données, sujettes à changement quand le moteur tourne.

Ainsi, dans un premier temps, nous avons établi un tel modèle plus réaliste, faisant intervenir des filtres entre les signaux exacts et mesurés des courants et des tensions.

Afin de valider ce modèle, nous avons développé un algorithme d'identification hors-ligne utilisant une méthode de moindres carrés. Celui-ci nous a permis de constater, à partir de données expérimentales, l'apport très important de notre modèle réaliste par rapport au modèle usuel de la MSAP.

Dans un second temps, muni de ce modèle réaliste, nous avons développé deux observateurs, dits de Luenberger et de Kreisselmeier, la différence entre les deux résidant dans la disposition ou non de la mesure de position en plus des signaux de courant et tension. Ainsi, l'observateur de Kreisselmeier dispose-t-il de la mesure de position et l'observateur de Luenberger non. Des études d'observabilité nous ont permis de déterminer qu'il était possible, sans mesure de position d'une part, d'estimer en ligne le flux et la position à régime non nul, et avec mesure de position d'autre part, d'estimer en ligne un à trois des trois paramètres physiques du moteur (résistance, flux et inductance), selon des conditions que nous avons précisées. Dans les deux cas, la connaissance de valeurs approchées des paramètres physiques non estimés est en outre nécessaire. Chacun des deux observateurs a tout d'abord été construit à partir de la modélisation classique de la MSAP avant d'être adapté à notre modélisation réaliste. Les observateurs développés ont alors fait l'objet d'études théoriques et en simulation, notamment de sensibilité à de mauvaises connaissances des paramètres supposés connus, de robustesse au bruit de mesure et d'influence des différents paramètres de réglage. Parmi celles-ci, l'étude la plus marquante a consisté à calculer une expression du biais d'estimation du flux par l'observateur de Luenberger engendré par du bruit de mesure, afin notamment de déterminer comment choisir les pôles de l'observateur en vue de la minimisation de ce biais. Cette étude théorique a été complétée d'une étude en simulation étendue à la minimisation de l'erreur d'estimation de la position. Le tableau de la page suivante donne un rapide aperçu des propriétés des deux observateurs et des résultats des études évoquées. On rappelle que R_a , ϕ_a , L_a , τ_{u_a} et τ_{i_a} sont les valeurs approchées que nous avons de R , ϕ , L , τ_u et τ_i .

Enfin, les observateurs ont été mis en œuvre expérimentalement sur trois bancs d'essais électriques de l'IFPEN aux caractéristiques différentes. Nous avons obtenus des premiers résultats plutôt concluants d'estimation simultanée du flux et de la position avec l'observateur de Luenberger, ainsi que d'estimations séparées de la résistance, du flux ou de l'inductance avec l'observateur de Kreisselmeier. L'estimation simultanée du flux et de la résistance semble en revanche plus délicate. Pour répondre à notre objectif d'estimation du flux et de la résistance, les estimations du flux étant comparables avec les deux observateurs, nous conseillons pour estimer le flux d'utiliser de préférence l'observateur de Luenberger, lequel ne nécessite pas la mesure de la position. Pour l'estimation de la résistance, l'observateur de Kreisselmeier est le seul choix possible.

Observateur	Luenberger	Kreisselmeier
<i>Mesure de position</i>	Non	Oui
<i>Signaux mesurés</i>	Courants et tensions	
<i>Grandeurs nécessaires</i>	$\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, R_a, L_a$	τ_{u_a}, τ_{i_a} (+ R_a, L_a et/ou ϕ_a selon situation)
<i>Grandeurs estimées</i>	ϕ, θ	1, 2 ou 3 paramètres parmi R, ϕ et L selon situation
<i>Conditions d'observabilité</i>	$\omega \neq 0$	Selon situation
<i>Adaptation au modèle réaliste</i>	Paramètres supplémentaires τ_u et τ_i Expressions plus complexes à implémenter	
	Légère approximation	Aucune approximation
<i>Paramètres de réglage</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 2 jeux de 2 pôles \mathbb{R} ou d'1 pôle \mathbb{C} (pour ϕ et de même pour θ) • Régime seuil d'alternance des jeux de pôles • Méthode $n^\circ 1$ ou $n^\circ 2$ • Utilisation ou non de la déconvolution • $\tau_{u_a}, \tau_{i_a}, R_a, L_a$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 2 coefficients (possibilité d'utiliser plusieurs jeux) • Nombre de filtres • Moindres carrés ou moindres carrés récursifs • Facteur d'oubli • Choix des paramètres estimés • τ_{u_a}, τ_{i_a} (+ R_a, L_a et/ou ϕ_a selon situation)
<i>Sensibilité</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Faible sensibilité de $\hat{\phi}$ et $\hat{\theta}$ à $R_a \neq R$ et $L_a \neq L$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Faible sensibilité de l'estimation de $\hat{\phi}$ à $R_a \neq R$ et $L_a \neq L$ • \hat{R} insensible à $L_a \neq L$ et inversement • Fortes sensibilités de \hat{R} et \hat{L} à $\phi_a \neq \phi$ • Fortes sensibilités à une erreur de position (sauf pour $\hat{\phi}$ seul)
<i>Robustesse au bruit de mesure</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Améliorée par l'alternance entre les deux jeux de pôles • Ordres de grandeur des erreurs d'estimation (pour régimes suffisamment élevés) : <ul style="list-style-type: none"> – sur $\hat{\phi}$: $< 0.2\%$ ($\approx 2^\circ C$) – sur $\hat{\theta}$: < 1 degré élec. 	<ul style="list-style-type: none"> • Meilleure quand moins de paramètres à estimer • Ordres de grandeur des erreurs d'estimation (pour régimes suffisamment élevés) : <ul style="list-style-type: none"> – sur $\hat{\phi}$: $< 0.2\%$ ($\approx 2^\circ C$) – sur \hat{R} : 3% ($\approx 8^\circ C$)

Si un premier essai d'estimation d'une variation de température des aimants a pu être effectué en toute fin de thèse et s'est avéré prometteur, tout comme les résultats en simulation de suivi de température et d'adaptation du contrôle au flux estimé, il sera intéressant, dans la continuité des travaux présentés dans cette thèse, de poursuivre la validation expérimentale de nos objectifs, en réalisant des essais sur une machine capable de monter relativement rapidement en température et équipée de capteurs internes de température, à savoir :

- comparer les variations de température estimées au rotor et au stator aux variations réelles de température mesurées,
- adapter en ligne le contrôle en couple aux variations de flux et de résistance estimées,
- mettre en place un organe de surveillance thermique adaptant la disponibilité en transitoire de la machine aux températures estimées.

Avant qu'il ne soit question de température, il sera également intéressant de poursuivre la validation expérimentale des observateurs en testant le fonctionnement :

- des deux observateurs sur des cycles réalistes, présentant notamment des transitoires, en HiL et non uniquement à des points de fonctionnements fixes,
- des deux observateurs sur des calculateurs temps réels dédiés aux applications automobiles, et non plus industrielles, en prenant garde à la compatibilité des temps de calcul,
- de l'observateur de Luenberger en boucle fermée sur la position estimée du contrôle (même si l'estimation de position n'est pas l'objet de cette thèse).

Par ailleurs, des voies d'exploration intéressantes plus théoriques sont envisageables :

- l'adaptation des études d'observabilité et des observateurs au cas des machines à pôles saillants ($L_d \neq L_q$),
- la prise en compte de la saturation magnétique et/ou des pertes fer dans la modélisation réaliste,
- l'étude théorique de la minimisation du biais d'estimation du flux dû au bruit de mesure, non plus pour le cas à deux pôles réels mais pour le cas à un pôle complexe, voire ces deux mêmes études théoriques pour la minimisation du biais d'estimation de la position, dans le cas de l'observateur de Luenberger,
- la tentative de débiaisage des estimations à l'aide des formules explicites du biais, dans le cas de l'observateur de Luenberger,
- l'approfondissement de la méthode d'alternance entre les jeux de pôles de l'observateur de Luenberger en fonction du régime : deux observateurs en parallèle, modification directe en ligne des pôles dans un unique observateur, *etc.*,

-
- l'adaptation des observateurs aux "très faibles" régimes (<100 tr/min) : utilisation d'un troisième jeu de pôles ou d'un autre jeu de coefficients, blocage de l'estimation, alternance avec un autre observateur dédié aux bas régimes, *etc.*,
 - l'exploitation des régimes transitoires pour l'observation,
 - le développement et l'étude d'autres observateurs puis la comparaison de leurs performances avec celles des observateurs présentés.

Annexe A

Démonstrations des propositions du paragraphe 6.2

A.1 Notations et identités utilisées dans cette annexe

Les notations suivantes nous seront utiles tout au long de cette annexe :

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= v_u^T v_i = v_i^T v_u = \cos(\varphi_u - \varphi_i) , \\ \mathbf{s} &= v_u^T \mathcal{J} v_i = -v_u^T \mathcal{J}^T v_i = v_i^T \mathcal{J}^T v_u = -v_i^T \mathcal{J} v_u = \sin(\varphi_u - \varphi_i) ,\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{b_u u} &= v_{b_u}^T v_u = v_u^T v_{b_u} = \cos([\omega_u - \omega]t + [\varphi_{b_u} - \varphi_u]) , \\ \mathbf{s}_{b_u u} &= -v_{b_u}^T \mathcal{J}^T v_u = v_u^T \mathcal{J}^T v_{b_u} = \sin([\omega_u - \omega]t + [\varphi_{b_u} - \varphi_u]) , \\ \mathbf{c}_{b_u i} &= v_{b_u}^T v_i = v_i^T v_{b_u} = \cos([\omega_u - \omega]t + [\varphi_{b_u} - \varphi_i]) , \\ \mathbf{s}_{b_u i} &= -v_{b_u}^T \mathcal{J}^T v_i = v_i^T \mathcal{J}^T v_{b_u} = \sin([\omega_u - \omega]t + [\varphi_{b_u} - \varphi_i]) , \\ \mathbf{c}_{b_i u} &= v_{b_i}^T v_u = v_u^T v_{b_i} = \cos([\omega_i - \omega]t + [\varphi_{b_i} - \varphi_u]) , \\ \mathbf{s}_{b_i u} &= -v_{b_i}^T \mathcal{J}^T v_u = v_u^T \mathcal{J}^T v_{b_i} = \sin([\omega_i - \omega]t + [\varphi_{b_i} - \varphi_u]) , \\ \mathbf{c}_{b_i i} &= v_{b_i}^T v_i = v_i^T v_{b_i} = \cos([\omega_u - \omega]t + [\varphi_{b_i} - \varphi_i]) , \\ \mathbf{s}_{b_i i} &= -v_{b_i}^T \mathcal{J}^T v_i = v_i^T \mathcal{J}^T v_{b_i} = \sin([\omega_u - \omega]t + [\varphi_{b_i} - \varphi_i]) , \\ \mathbf{c}_{b_u b_i} &= v_{b_u}^T v_{b_i} = v_{b_i}^T v_{b_u} = \cos([\omega_u - \omega_i]t + [\varphi_{b_u} - \varphi_{b_i}]) , \\ \mathbf{s}_{b_u b_i} &= -v_{b_u}^T \mathcal{J}^T v_{b_i} = v_{b_i}^T \mathcal{J}^T v_{b_u} = \sin([\omega_u - \omega_i]t + [\varphi_{b_u} - \varphi_{b_i}]) ,\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 A &= U \cos(\omega t + \varphi_u) - RI \cos(\omega t + \varphi_i) + \omega LI \sin(\omega t + \varphi_i) , \\
 B &= U \sin(\omega t + \varphi_u) - RI \sin(\omega t + \varphi_i) - \omega LI \cos(\omega t + \varphi_i) , \\
 E &= A^2 + B^2 = (U\mathbf{c} - RI)^2 + (U\mathbf{s} - \omega LI)^2 , \\
 P &= \cos(\omega_u t + \phi_{b_u}) , \\
 Q &= \sin(\omega_u t + \phi_{b_u}) , \\
 G &= BQ + AP = U\mathbf{c}_{b_{uu}} - RI\mathbf{c}_{b_{ui}} - \omega LI\mathbf{s}_{b_{ui}} , \\
 H &= AQ - BP = U\mathbf{s}_{b_{uu}} - RI\mathbf{s}_{b_{ui}} + \omega LI\mathbf{c}_{b_{ui}} ,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_u(\lambda) &= \frac{\lambda^2 + \omega^2}{\lambda^2 + \omega_u^2} , \\
 \Omega_{ua}(\lambda) &= \frac{\lambda^2 - \omega_u^2 + \omega\omega_u}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , \\
 \Omega_{ub}(\lambda) &= \frac{\lambda^2 - \omega^2 + \omega\omega_u}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , \\
 \Omega_{uc}(\lambda) &= \frac{\lambda(2\omega_u - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , \\
 \Omega_{ud}(\lambda) &= \frac{\lambda(\omega_u - 2\omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , \\
 \Omega'_{ua}(\lambda) &= \Omega_{ua}(\lambda) - \frac{\omega_u}{\omega} , \\
 \Omega'_{uc}(\lambda) &= \Omega_{uc}(\lambda) + \frac{\lambda}{\omega} ,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{uk}(\lambda) &= \Omega_{uk}(\lambda)\Lambda_u(\lambda) , \quad \forall k \in \{a, b, c, d\} , \\
 \Gamma'_{uk}(\lambda) &= \Omega'_{uk}(\lambda)\Lambda_u(\lambda) , \quad \forall k \in \{a, b, c, d\} ,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_u(\lambda) &= \lambda\Omega_{ub}(\lambda) , \\
 \beta_u(\lambda) &= \lambda\Omega_{ud}(\lambda) , \\
 \gamma_u(\lambda) &= \Gamma'_{ua}(\lambda) + \Omega_{ub}(\lambda) , \\
 \delta_u(\lambda) &= \Gamma'_{uc}(\lambda) + \Omega_{ud}(\lambda) .
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Par ailleurs, $\forall \zeta \in \{\Lambda_u, \Omega_u, \Gamma_u, \Gamma'_u, \check{z}, \alpha_u, \beta_u, \gamma_u, \delta_u\}$, on note :

$$\begin{aligned}\Delta\zeta &= \frac{\zeta(\lambda_2) - \zeta(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} , \\ \Delta_d\zeta &= \frac{\lambda_2\zeta(\lambda_2) - \lambda_1\zeta(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} , \\ \Delta_i\zeta &= \frac{\lambda_2\zeta(\lambda_1) - \lambda_1\zeta(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} .\end{aligned}\tag{A.7}$$

On note également :

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \Delta\alpha_u & \Delta\beta_u \\ \Delta_i\alpha_u & \Delta_i\beta_u \end{pmatrix} , \quad M_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} \Delta\gamma_u & \Delta\delta_u \\ \Delta_i\gamma_u & \Delta_i\delta_u \end{pmatrix} .\tag{A.8}$$

Enfin, on a les propriétés suivantes, vérifiées par calcul symbolique avec Matlab :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_u\Delta\gamma_u + \Delta\beta_u\Delta\delta_u &= 0 , \\ (\Delta\alpha_u)^2 + (\Delta\beta_u)^2 &= \omega^2[(\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2] \\ &= -\omega[\Delta\beta_u\Delta\gamma_u - \Delta\alpha_u\Delta\delta_u] , \\ \omega[\omega\Delta\delta_u + \Delta_i\gamma_u] &= -[-\omega\Delta\alpha_u + \Delta_i\beta_u] , \\ \omega[-\omega\Delta\gamma_u + \Delta_i\delta_u] &= [\omega\Delta\beta_u + \Delta_i\alpha_u] .\end{aligned}\tag{A.9}$$

A.2 Démonstration de la proposition 6.1

A.2.1 Rappel de l'énoncé de la proposition 6.1

Proposition . *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions et une composante du bruit de mesure w_i sur les courants, le vecteur $\hat{\Phi}$ à estimer est obtenu en résolvant :*

$$C\hat{\Phi} = Z ,\tag{A.10}$$

avec la matrice carrée C et le vecteur Z donnés par :

$$\begin{aligned}C &= C_0 + C_u B_u + C_i B_i , \\ Z &= Z_0 + Z_u B_u + Z_i B_i + Z_{ii} B_i^2 + Z_{uu} B_u^2 + Z_{ui} B_u B_i ,\end{aligned}\tag{A.11}$$

les expressions des différents termes intervenant dans les expressions de C et Z étant explicitées au paragraphe A.2.

A.2.2 Démonstration

Pour simplifier les notations, les indices j , correspondant aux différents pôles, ne sont pas indiqués.

Calcul de c

D'après (6.7), on a :

$$\dot{c} = -\lambda c - 2(y_{b_u} - Ry_{b_i} + \lambda Ly_{b_i}) , \quad (\text{A.12})$$

soit :

$$\dot{c} = -\lambda c - 2(Uv_u - [R - \lambda L]Iv_i) - 2(B_uv_{b_u} - [R - \lambda L]B_iv_{b_i}) , \quad (\text{A.13})$$

et donc, en utilisant (4.48) et par linéarité :

$$\begin{aligned} c &= c_0 - 2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_u \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_u^2} B_uv_{b_u} + 2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_i \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (R - \lambda L) B_iv_{b_i} , \\ c &= -2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} Uv_u + 2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} (R - \lambda L) Iv_i \\ &\quad - 2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_u \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_u^2} B_uv_{b_u} + 2 \frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_i \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (R - \lambda L) B_iv_{b_i} . \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Calcul de \tilde{c}

En utilisant (4.52) pour le terme non bruité \tilde{c}_0 et en simplifiant de manière analogue le terme bruité, on obtient :

$$\tilde{c} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_u B_u + \tilde{c}_i B_i , \quad (\text{A.15})$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 &= \frac{2(\omega \mathcal{J} - \lambda \mathcal{I})(Uv_u - R Iv_i - \omega \mathcal{J} L Iv_i)}{\lambda^2 + \omega^2} , \\ \tilde{c}_u &= \frac{2(\omega_u \mathcal{J} - \lambda \mathcal{I})}{\lambda^2 + \omega_u^2} v_{b_u} , \\ \tilde{c}_i &= -\frac{2(\omega_i \mathcal{J} - \lambda \mathcal{I})(R \mathcal{I} + \omega_i L \mathcal{J})}{\lambda^2 + \omega_i^2} v_{b_i} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Calcul de η

D'après (6.7), on a :

$$\eta = c^T (y_{b_u} - Ry_{b_i}) - \lambda |Ly_{b_i}|^2, \quad (\text{A.17})$$

soit :

$$\eta = c^T (Uv_u - RIv_i + B_uv_{b_u} - RB_iv_{b_i}) - \lambda L^2 (I^2 + B_i^2 + 2IB_iv_i^T v_{b_i}). \quad (\text{A.18})$$

En injectant l'expression de c donnée par (A.14) et en utilisant (4.56) pour le terme non bruité η_0 , on obtient :

$$\begin{aligned} \eta = & - \lambda \frac{(U\mathbf{c} - RI)^2 + (U\mathbf{c} - [R - \lambda L]I)^2 + (U\mathbf{s} - \omega LI)^2 + U^2 \mathbf{s}^2}{\lambda^2 + \omega^2} \\ & - \lambda L^2 (B_i^2 + 2IB_iv_i^T v_{b_i}) \\ & - 2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_u \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_u^2} B_uv_{b_u} \right)^T (Uv_u - RIv_i) \\ & + 2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_i \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (R - \lambda L) B_iv_{b_i} \right)^T (Uv_u - RIv_i) \\ & - 2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} Uv_u \right)^T (B_uv_{b_u} - RB_iv_{b_i}) \\ & + 2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} (R - \lambda L) Iv_i \right)^T (B_uv_{b_u} - RB_iv_{b_i}) \\ & - 2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_u \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_u^2} B_uv_{b_u} \right)^T (B_uv_{b_u} - RB_iv_{b_i}) \\ & + 2 \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_i \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (R - \lambda L) B_iv_{b_i} \right)^T (B_uv_{b_u} - RB_iv_{b_i}). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

En utilisant les notations (A.2) et en remarquant que $v_{b_i}^T v_{b_i} = v_{b_u}^T v_{b_u} = 1$ et que $v_{b_i}^T \mathcal{J}^T v_{b_i} = v_{b_u}^T \mathcal{J}^T v_{b_u} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \eta = & - \lambda \frac{(U\mathbf{c} - RI)^2 + (U\mathbf{c} - [R - \lambda L]I)^2 + (U\mathbf{s} - \omega LI)^2 + U^2 \mathbf{s}^2}{\lambda^2 + \omega^2} \\
 & - \lambda L^2 (B_i^2 + 2IB_i \mathbf{c}_{b_i}) \\
 & - 2B_u \frac{\lambda(U\mathbf{c}_{b_u} - RI\mathbf{c}_{b_u}) - \omega_u(-U\mathbf{s}_{b_u} + RI\mathbf{s}_{b_u})}{\lambda^2 + \omega_u^2} \\
 & + 2B_i(R - \lambda L) \frac{\lambda(U\mathbf{c}_{b_i} - RI\mathbf{c}_{b_i}) - \omega_i(-U\mathbf{s}_{b_i} + RI\mathbf{s}_{b_i})}{\lambda^2 + \omega_i^2} \\
 & - 2U \frac{\lambda(B_u \mathbf{c}_{b_u} - RB_i \mathbf{c}_{b_u}) - \omega(B_u \mathbf{s}_{b_u} - RB_i \mathbf{s}_{b_u})}{\lambda^2 + \omega^2} \\
 & + 2I(R - \lambda L) \frac{\lambda(B_u \mathbf{c}_{b_i} - RB_i \mathbf{c}_{b_i}) - \omega(B_u \mathbf{s}_{b_i} - RB_i \mathbf{s}_{b_i})}{\lambda^2 + \omega^2} \\
 & - 2B_u \frac{\lambda(B_u - RB_i \mathbf{c}_{b_u}) - \omega_u(RB_i \mathbf{s}_{b_u})}{\lambda^2 + \omega_u^2} \\
 & + 2(R - \lambda L) B_i \frac{\lambda(B_u \mathbf{c}_{b_i} - RB_i) - \omega_i(B_u \mathbf{s}_{b_i})}{\lambda^2 + \omega_i^2} ,
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \eta = & \eta_0 + \eta_{0b_i} B_i^2 + \eta_{0b_u} B_u^2 + (\eta_{cb_i} \mathbf{c}_{b_i} + \eta_{sb_i} \mathbf{s}_{b_i}) B_u B_i \\
 & + (\eta_{cb_i} \mathbf{c}_{b_i} + \eta_{sb_i} \mathbf{s}_{b_i} + \eta_{cb_u} \mathbf{c}_{b_u} + \eta_{sb_u} \mathbf{s}_{b_u}) B_i \\
 & + (\eta_{cb_u} \mathbf{c}_{b_u} + \eta_{sb_u} \mathbf{s}_{b_u} + \eta_{cb_u} \mathbf{c}_{b_u} + \eta_{sb_u} \mathbf{s}_{b_u}) B_u ,
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= -\lambda \frac{(U\mathbf{c} - RI)^2 + (U\mathbf{c} - [R - \lambda L]I)^2 + (U\mathbf{s} - \omega LI)^2 + U^2\mathbf{s}^2}{\lambda^2 + \omega^2}, \\
\eta_{0b_i b_i} &= -\lambda L^2 - \frac{2\lambda(R - \lambda L)R}{\lambda^2 + \omega_i^2}, \\
\eta_{0b_u b_u} &= -\frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega_u^2}, \\
\eta_{cb_i i} &= 2I \left[-\lambda L^2 + R(R - \lambda L) \left(-\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_i^2} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{sb_i i} &= 2I \left[R(R - \lambda L) \left(-\frac{\omega_i}{\lambda^2 + \omega_i^2} + \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{cb_i u} &= 2U \left[\left(\frac{(R - \lambda L)\lambda}{\lambda^2 + \omega_i^2} + \frac{\lambda R}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{sb_i u} &= 2U \left[\left(\frac{(R - \lambda L)\omega_i}{\lambda^2 + \omega_i^2} - \frac{\omega R}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{cb_u i} &= 2I \left[\left(\frac{\lambda R}{\lambda^2 + \omega_u^2} + \frac{(R - \lambda L)\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{sb_u i} &= 2I \left[\left(\frac{\omega_u R}{\lambda^2 + \omega_u^2} - \frac{(R - \lambda L)\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{cb_u u} &= -2U \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_u^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{sb_u u} &= 2U \left[\left(-\frac{\omega_u}{\lambda^2 + \omega_u^2} + \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \right], \\
\eta_{cb_u b_i} &= 2 \left[\left(\frac{\lambda R}{\lambda^2 + \omega_u^2} + \frac{(R - \lambda L)\lambda}{\lambda^2 + \omega_i^2} \right) \right], \\
\eta_{sb_u b_i} &= 2 \left[\left(\frac{\omega_u R}{\lambda^2 + \omega_u^2} - \frac{(R - \lambda L)\omega_i}{\lambda^2 + \omega_i^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Calcul de z

D'après (6.7), on a :

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= -\lambda z + \eta \\
&= -\lambda z + \eta_0 + \eta_{0b_i b_i} B_i^2 + \eta_{0b_u b_u} B_u^2 + (\eta_{cb_u b_i} \mathbf{c}_{b_u b_i} + \eta_{sb_u b_i} \mathbf{s}_{b_u b_i}) B_u B_i \\
&\quad + (\eta_{cb_i i} \mathbf{c}_{b_i i} + \eta_{sb_i i} \mathbf{s}_{b_i i} + \eta_{cb_i u} \mathbf{c}_{b_i u} + \eta_{sb_i u} \mathbf{s}_{b_i u}) B_i \\
&\quad + (\eta_{cb_u i} \mathbf{c}_{b_u i} + \eta_{sb_u i} \mathbf{s}_{b_u i} + \eta_{cb_u u} \mathbf{c}_{b_u u} + \eta_{sb_u u} \mathbf{s}_{b_u u}) B_u.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Or le régime asymptotique de x donné par $\dot{x} = -\lambda x + X_1 \cos(\omega t + \varphi) + X_2 \sin(\omega t + \varphi)$ est :

$$x = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} [(X_1 \lambda - X_2 \omega) \cos(\omega t + \varphi) + (X_2 \lambda + X_1 \omega) \sin(\omega t + \varphi)] . \quad (\text{A.24})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} z &= z_0 + z_{0b_i b_i} B_i^2 + z_{0b_u b_u} B_u^2 + (z_{cb_u b_i} \mathbf{c}_{b_u b_i} + z_{sb_u b_i} \mathbf{s}_{b_u b_i}) B_u B_i \\ &+ (z_{cb_i i} \mathbf{c}_{b_i i} + z_{sb_i i} \mathbf{s}_{b_i i} + z_{cb_i u} \mathbf{c}_{b_i u} + z_{sb_i u} \mathbf{s}_{b_i u}) B_i \\ &+ (z_{cb_u i} \mathbf{c}_{b_u i} + z_{sb_u i} \mathbf{s}_{b_u i} + z_{cb_u u} \mathbf{c}_{b_u u} + z_{sb_u u} \mathbf{s}_{b_u u}) B_u , \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

avec les notations suivantes, z_0 étant définie par (4.58) :

$$\begin{aligned} z_{0b_i b_i} &= \frac{\eta_{0b_i b_i}}{\lambda} , & z_{0b_u b_u} &= \frac{\eta_{0b_u b_u}}{\lambda} , \\ z_{cb_i i} &= \frac{\eta_{cb_i i} \lambda - \eta_{sb_i i} (\omega_i - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_i - \omega)^2} , & z_{sb_i i} &= \frac{\eta_{sb_i i} \lambda + \eta_{cb_i i} (\omega_i - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_i - \omega)^2} , \\ z_{cb_i u} &= \frac{\eta_{cb_i u} \lambda - \eta_{sb_i u} (\omega_i - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_i - \omega)^2} , & z_{sb_i u} &= \frac{\eta_{sb_i u} \lambda + \eta_{cb_i u} (\omega_i - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_i - \omega)^2} , \\ z_{cb_u i} &= \frac{\eta_{cb_u i} \lambda - \eta_{sb_u i} (\omega_u - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , & z_{sb_u i} &= \frac{\eta_{sb_u i} \lambda + \eta_{cb_u i} (\omega_u - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , \\ z_{cb_u u} &= \frac{\eta_{cb_u u} \lambda - \eta_{sb_u u} (\omega_u - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , & z_{sb_u u} &= \frac{\eta_{sb_u u} \lambda + \eta_{cb_u u} (\omega_u - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} , \\ z_{cb_u b_i} &= \frac{\eta_{cb_u b_i} \lambda - \eta_{sb_u b_i} (\omega_u - \omega_i)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega_i)^2} , & z_{sb_u b_i} &= \frac{\eta_{sb_u b_i} \lambda + \eta_{cb_u b_i} (\omega_u - \omega_i)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega_i)^2} . \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Calcul de \tilde{z}

D'après (A.14), on a :

$$\begin{aligned} c^T L y_{b_i} &= 2LI \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} (R - \lambda L) I v_i \right)^T v_i - 2LI \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} U v_u \right)^T v_i \\ &+ 2LI \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_i \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (R - \lambda L) B_i v_{b_i} \right)^T v_i - 2LI \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_u \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_u^2} B_u v_{b_u} \right)^T v_i \\ &+ 2LB_i \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} (R - \lambda L) I v_i \right)^T v_{b_i} - 2LB_i \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega^2} U v_u \right)^T v_{b_i} \\ &+ 2LB_i \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_i \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_i^2} (R - \lambda L) B_i v_{b_i} \right)^T v_{b_i} - 2LB_i \left(\frac{\lambda \mathcal{I} - \omega_u \mathcal{J}}{\lambda^2 + \omega_u^2} B_u v_{b_u} \right)^T v_{b_i} , \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

soit :

$$\begin{aligned}
c^T Ly_{b_i} &= \frac{2LI}{\lambda^2 + \omega^2} [I\lambda(R - \lambda L) - U(\lambda\mathbf{c} + \omega\mathbf{s})] + \frac{2LB_i^2(R - \lambda L)\lambda}{\lambda^2 + \omega_i^2} \\
&\quad - \frac{2LIB_u}{\lambda^2 + \omega_u^2} [\lambda\mathbf{c}_{b_u i} + \omega_u\mathbf{s}_{b_u i}] - \frac{2LUB_i}{\lambda^2 + \omega^2} [\lambda\mathbf{c}_{b_i u} - \omega\mathbf{s}_{b_i u}] \\
&\quad + 2LIB_i(R - \lambda L) \left(\frac{\lambda\mathbf{c}_{b_i i} + \omega_i\mathbf{s}_{b_i i}}{\lambda^2 + \omega_i^2} + \frac{\lambda\mathbf{c}_{b_i i} - \omega\mathbf{s}_{b_i i}}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \\
&\quad - \frac{2LB_u B_i}{\lambda^2 + \omega_u^2} [\lambda\mathbf{c}_{b_u b_i} + \omega_u\mathbf{s}_{b_u b_i}] ,
\end{aligned} \tag{A.28}$$

et :

$$|Ly_{b_i}|^2 = L^2(I^2 + B_i^2 + 2IB_i\mathbf{c}_{b_i i}) . \tag{A.29}$$

En utilisant (4.60) pour simplifier le terme non bruité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= \tilde{z}_0 + \tilde{z}_{0b_i b_i} B_i^2 + \tilde{z}_{0b_u b_u} B_u^2 + (\tilde{z}_{cb_u b_i} \mathbf{c}_{b_u b_i} + \tilde{z}_{sb_u b_i} \mathbf{s}_{b_u b_i}) B_u B_i \\
&\quad + (\tilde{z}_{cb_i i} \mathbf{c}_{b_i i} + \tilde{z}_{sb_i i} \mathbf{s}_{b_i i} + \tilde{z}_{cb_i u} \mathbf{c}_{b_i u} + \tilde{z}_{sb_i u} \mathbf{s}_{b_i u}) B_i \\
&\quad + (\tilde{z}_{cb_u i} \mathbf{c}_{b_u i} + \tilde{z}_{sb_u i} \mathbf{s}_{b_u i} + \tilde{z}_{cb_u u} \mathbf{c}_{b_u u} + \tilde{z}_{sb_u u} \mathbf{s}_{b_u u}) B_u ,
\end{aligned} \tag{A.30}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_0 &= -2 \frac{(U\mathbf{c} - RI)^2 + (U\mathbf{s} - \omega LI)^2}{\lambda^2 + \omega^2} , \\
\tilde{z}_{0b_i b_i} &= -2L^2 - \frac{2(R - \lambda L)(R + \lambda L)}{\lambda^2 + \omega_i^2} , \quad \tilde{z}_{0b_u b_u} = -\frac{2}{\lambda^2 + \omega_u^2} ,
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{cb_i i} &= z_{cb_i i} - 2\lambda LI(R - \lambda L) \left(\frac{1}{\lambda^2 + \omega_i^2} + \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} \right) - 2L^2 I , \\
\tilde{z}_{sb_i i} &= z_{sb_i i} - 2LI(R - \lambda L) \left(\frac{\omega_i}{\lambda^2 + \omega_i^2} - \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) ,
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{cb_i u} &= z_{cb_i u} + \frac{2\lambda LU}{\lambda^2 + \omega^2} , \quad \tilde{z}_{sb_i u} = z_{sb_i u} - \frac{2\omega LU}{\lambda^2 + \omega^2} , \\
\tilde{z}_{cb_u i} &= z_{cb_u i} + \frac{2\lambda LI}{\lambda^2 + \omega_u^2} , \quad \tilde{z}_{sb_u i} = z_{sb_u i} + \frac{2\omega_u LI}{\lambda^2 + \omega_u^2} , \\
\tilde{z}_{cb_u u} &= z_{cb_u u} , \quad \tilde{z}_{sb_u u} = z_{sb_u u} , \\
\tilde{z}_{cb_u b_i} &= z_{cb_u b_i} + \frac{2\lambda L}{\lambda^2 + \omega_u^2} , \quad \tilde{z}_{sb_u b_i} = z_{sb_u b_i} + \frac{2\omega_u L}{\lambda^2 + \omega_u^2} .
\end{aligned} \tag{A.33}$$

On écrit :

$$\tilde{z} = \tilde{z}_0 + \tilde{z}_u B_u + \tilde{z}_i B_i + \tilde{z}_{ii} B_i^2 + \tilde{z}_{uu} B_u^2 + \tilde{z}_{ui} B_u B_i , \quad (\text{A.34})$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_u &= \tilde{z}_{cb_{ui}} \mathbf{c}_{b_{ui}} + \tilde{z}_{sb_{ui}} \mathbf{s}_{b_{ui}} + \tilde{z}_{cb_{uu}} \mathbf{c}_{b_{uu}} + \tilde{z}_{sb_{uu}} \mathbf{s}_{b_{uu}} , \\ \tilde{z}_i &= \tilde{z}_{cb_{ii}} \mathbf{c}_{b_{ii}} + \tilde{z}_{sb_{ii}} \mathbf{s}_{b_{ii}} + \tilde{z}_{cb_{iu}} \mathbf{c}_{b_{iu}} + \tilde{z}_{sb_{iu}} \mathbf{s}_{b_{iu}} , \\ \tilde{z}_{ii} &= \tilde{z}_{0b_i b_i} , \\ \tilde{z}_{uu} &= \tilde{z}_{0b_u b_u} , \\ \tilde{z}_{ui} &= \tilde{z}_{cb_u b_i} \mathbf{c}_{b_u b_i} + \tilde{z}_{sb_u b_i} \mathbf{s}_{b_u b_i} . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Expression à résoudre pour calculer $\hat{\Phi}$

D'après la relation (6.9), on obtient $\hat{\Phi}$ en résolvant :

$$\tilde{c}_j^T \hat{\Phi} = \tilde{z}_j , \quad (\text{A.36})$$

avec $\tilde{c}_j = \tilde{c}(\lambda_j)$, $\tilde{z}_j = \tilde{z}(\lambda_j)$ et \tilde{c} et \tilde{z} définis respectivement par (A.15) et (A.34). En utilisant cette relation pour deux λ , l'équation à résoudre est :

$$C \hat{\Phi} = Z , \quad (\text{A.37})$$

avec la matrice carrée $C = (\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2)^T$ et le vecteur $Z = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix}$. On définit de même :

$$\begin{aligned} C_0 &= \begin{pmatrix} \tilde{c}_0(\lambda_1) & \tilde{c}_0(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , & Z_0 &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_0(\lambda_1) & \tilde{z}_0(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , \\ C_u &= \begin{pmatrix} \tilde{c}_u(\lambda_1) & \tilde{c}_u(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , & Z_u &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_u(\lambda_1) & \tilde{z}_u(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , \\ C_i &= \begin{pmatrix} \tilde{c}_i(\lambda_1) & \tilde{c}_i(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , & Z_i &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_i(\lambda_1) & \tilde{z}_i(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , \\ Z_{uu} &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_{uu}(\lambda_1) & \tilde{z}_{uu}(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , & Z_{ii} &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_{ii}(\lambda_1) & \tilde{z}_{ii}(\lambda_2) \end{pmatrix}^T , \\ Z_{ui} &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_{ui}(\lambda_1) & \tilde{z}_{ui}(\lambda_2) \end{pmatrix}^T . \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} C &= C_0 + C_u B_u + C_i B_i , \\ Z &= Z_0 + Z_u B_u + Z_i B_i + Z_{ii} B_i^2 + Z_{uu} B_u^2 + Z_{ui} B_u B_i . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

A.3 Démonstration de la proposition 6.4

A.3.1 Rappel de l'énoncé de la proposition 6.4

Proposition . *Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions, et en tenant compte des approximations réalisées dans la partie 6.2.4, l'estimation $\hat{\phi}$ de l'intensité du flux des aimants est approchée par :*

$$\hat{\phi} \approx \hat{\phi}_0 + \frac{T_2 B_u}{\omega \sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega T_1^2 B_u^2}{2E} + \frac{T_3 B_u^2}{\omega} - \frac{T_4 B_u^2}{\omega^2 E} \right), \quad (\text{A.40})$$

les expressions de T_1 , T_2 , T_3 et T_4 étant explicitées au paragraphe A.3 par (A.78), (A.75) et (A.80).

A.3.2 Démonstration

Expression de C_0^{-1}

En s'inspirant de (4.64), on a :

$$C_0 = 2 \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_1 A - \omega B}{\lambda_1^2 + \omega^2} & \frac{\omega A - \lambda_1 B}{\lambda_1^2 + \omega^2} \\ \frac{-\lambda_2 A - \omega B}{\lambda_2^2 + \omega^2} & \frac{\omega A - \lambda_2 B}{\lambda_2^2 + \omega^2} \end{pmatrix},$$

$$\det C_0 = \frac{2\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)},$$

$$C_0^{-1} = \frac{1}{2\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} (\lambda_1^2 + \omega^2)(\omega A - \lambda_2 B) & (\lambda_2^2 + \omega^2)(\lambda_1 B - \omega A) \\ (\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2 A + \omega B) & (\lambda_2^2 + \omega^2)(-\omega B - \lambda_1 A) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Expression de C_u

D'après (A.38) :

$$C_u = \begin{pmatrix} \tilde{c}_u(\lambda_1) & \tilde{c}_u(\lambda_2) \end{pmatrix}^T, \quad (\text{A.42})$$

avec, d'après (A.16), et en utilisant P et Q définis par (A.3) :

$$\tilde{c}_u(\lambda) = \frac{2(\omega_u \mathcal{J} - \lambda \mathcal{I})}{\lambda^2 + \omega_u^2} v_{b_u} = \frac{2}{\lambda^2 + \omega_u^2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 P - \omega_u Q \\ \omega_u P - \lambda_1 Q \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

Ainsi :

$$C_u = 2 \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_1 P - \omega_u Q}{\lambda_1^2 + \omega_u^2} & \frac{\omega_u P - \lambda_1 Q}{\lambda_1^2 + \omega_u^2} \\ \frac{-\lambda_2 P - \omega_u Q}{\lambda_2^2 + \omega_u^2} & \frac{\omega_u P - \lambda_2 Q}{\lambda_2^2 + \omega_u^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Calcul de $C_0^{-1}C_u$

Avec $\Lambda_u(\lambda)$, $\Delta\Lambda_u$, $\Delta_d\Lambda_u$ et $\Delta_i\Lambda_u$ définis par (A.4) et (A.7), on a :

$$C_0^{-1}C_u = \frac{1}{\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} C_{0u1} & C_{0u2} \\ C_{0u3} & C_{0u4} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.45})$$

avec :

$$\begin{aligned} C_{0u1} &= \Lambda_u(\lambda_1)(\omega A - \lambda_2 B)(-\lambda_1 P - \omega_u Q) + \Lambda_u(\lambda_2)(\lambda_1 B - \omega A)(-\lambda_2 P - \omega_u Q) \\ &= \Lambda_u(\lambda_1)(-\lambda_1 \omega AP - \omega \omega_u AQ + \lambda_1 \lambda_2 BP + \lambda_2 \omega_u BQ) \\ &\quad + \Lambda_u(\lambda_2)(-\lambda_1 \lambda_2 BP - \lambda_1 \omega_u BQ + \lambda_2 \omega AP + \omega \omega_u AQ) \\ &= (\Lambda_u(\lambda_2) - \Lambda_u(\lambda_1))(\omega \omega_u AQ - \lambda_1 \lambda_2 BP) \\ &\quad + (\lambda_2 \Lambda_u(\lambda_2) - \lambda_1 \Lambda_u(\lambda_1))\omega AP + (\lambda_2 \Lambda_u(\lambda_1) - \lambda_1 \Lambda_u(\lambda_2))\omega_u BQ \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)[\Delta\Lambda_u(\omega \omega_u AQ - \lambda_1 \lambda_2 BP) + \Delta_d\Lambda_u \omega AP + \Delta_i\Lambda_u \omega_u BQ]. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

De même :

$$\begin{aligned} C_{0u2} &= (\lambda_2 - \lambda_1)[\Delta\Lambda_u(-\omega \omega_u AP - \lambda_1 \lambda_2 BQ) + \Delta_d\Lambda_u \omega AQ - \Delta_i\Lambda_u \omega_u BP], \\ C_{0u3} &= (\lambda_2 - \lambda_1)[\Delta\Lambda_u(\omega \omega_u BQ + \lambda_1 \lambda_2 AP) + \Delta_d\Lambda_u \omega BP - \Delta_i\Lambda_u \omega_u AQ], \\ C_{0u4} &= (\lambda_2 - \lambda_1)[\Delta\Lambda_u(-\omega \omega_u BP + \lambda_1 \lambda_2 AQ) + \Delta_d\Lambda_u \omega BQ + \Delta_i\Lambda_u \omega_u AP]. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \omega E C_0^{-1} C_u &= \Delta\Lambda_u \left[\omega \omega_u \begin{pmatrix} AQ & -AP \\ BQ & -BP \end{pmatrix} + \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} -BP & -BQ \\ AP & AQ \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \Delta_d\Lambda_u \omega \begin{pmatrix} AP & AQ \\ BP & BQ \end{pmatrix} + \Delta_i\Lambda_u \omega_u \begin{pmatrix} BQ & -BP \\ -AQ & AP \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Expression de Z_u

D'après (A.38) :

$$Z_u = \begin{pmatrix} \tilde{z}_u(\lambda_1) & \tilde{z}_u(\lambda_2) \end{pmatrix}^T, \quad (\text{A.49})$$

avec, d'après (A.33) et (A.35) :

$$\tilde{z}_u(\lambda) = \tilde{z}_{cb_{ui}} \mathbf{c}_{b_{ui}} + \tilde{z}_{sb_{ui}} \mathbf{s}_{b_{ui}} + z_{cb_{uu}} \mathbf{c}_{b_{uu}} + z_{sb_{uu}} \mathbf{s}_{b_{uu}}. \quad (\text{A.50})$$

Or, d'après (A.26) et (A.33) :

$$\tilde{z}_{cb_{ui}} = \frac{\eta_{cb_{ui}}\lambda - \eta_{sb_{ui}}(\omega_u - \omega)}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} + \frac{2\lambda LI}{\lambda^2 + \omega_u^2}, \quad (\text{A.51})$$

donc, avec (A.22) et Ω_{ua} et Ω_{ub} définis par (A.4) :

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \omega^2)\tilde{z}_{cb_{ui}} &= \frac{2I}{\lambda^2 + (\omega_u - \omega)^2} \left[\lambda^2 R\Lambda_u(\lambda) + \lambda^2(R - \lambda L) - (\omega_u - \omega)\omega_u R\Lambda_u(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + (\omega_u - \omega)\omega(R - \lambda L) \right] + 2I\lambda L\Lambda_u(\lambda), \\ (\lambda^2 + \omega^2)\tilde{z}_{cb_{ui}} &= 2I[(R\Omega_{ua}(\lambda) + \lambda L)\Lambda_u(\lambda) + (R - \lambda L)\Omega_{ub}(\lambda)]. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Ainsi, en procédant de même pour les autres termes, on obtient :

$$(\lambda^2 + \omega^2)\tilde{z}_u(\lambda) = 2(\check{z}_{cb_{ui}}(\lambda) \mathbf{c}_{b_{ui}} + \check{z}_{sb_{ui}}(\lambda) \mathbf{s}_{b_{ui}} + \check{z}_{cb_{uu}}(\lambda) \mathbf{c}_{b_{uu}} + \check{z}_{sb_{uu}}(\lambda) \mathbf{s}_{b_{uu}}), \quad (\text{A.53})$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \check{z}_{cb_{ui}}(\lambda) &= I[(R\Omega_{ua}(\lambda) + \lambda L)\Lambda_u(\lambda) + (R - \lambda L)\Omega_{ub}(\lambda)], \\ \check{z}_{sb_{ui}}(\lambda) &= I[(R\Omega_{uc}(\lambda) + \omega_u L)\Lambda_u(\lambda) + (R - \lambda L)\Omega_{ud}(\lambda)], \\ \check{z}_{cb_{uu}}(\lambda) &= -U[\Omega_{ua}(\lambda)\Lambda_u(\lambda) + \Omega_{ub}(\lambda)], \\ \check{z}_{sb_{uu}}(\lambda) &= -U[\Omega_{uc}(\lambda)\Lambda_u(\lambda) + \Omega_{ud}(\lambda)]. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Calcul de $C_0^{-1}Z_u$

D'après (A.41), on a :

$$\begin{aligned}
 C_0^{-1}Z_u &= C_0^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{z}_u(\lambda_1) \\ \tilde{z}_u(\lambda_2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\omega A - \lambda_2 B)\tilde{z}_u(\lambda_1) + (\lambda_2^2 + \omega^2)(\lambda_1 B - \omega A)\tilde{z}_u(\lambda_2)}{2\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ \frac{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2 A + \omega B)\tilde{z}_u(\lambda_1) + (\lambda_2^2 + \omega^2)(-\omega B - \lambda_1 A)\tilde{z}_u(\lambda_2)}{2\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{pmatrix}, \tag{A.55}
 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 2\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)C_0^{-1}Z_u &= \omega[(\lambda_1^2 + \omega^2)\tilde{z}_u(\lambda_1) - (\lambda_2^2 + \omega^2)\tilde{z}_u(\lambda_2)] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &\quad + [\lambda_1(\lambda_2^2 + \omega^2)\tilde{z}_u(\lambda_2) - \lambda_2(\lambda_1^2 + \omega^2)\tilde{z}_u(\lambda_1)] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}. \tag{A.56}
 \end{aligned}$$

Et donc, $\Delta\check{z}$ et $\Delta_i\check{z}$ étant définis par (A.7) :

$$\begin{aligned}
 \omega EC_0^{-1}Z_u &= -\omega[\Delta\check{z}_{cb_{ui}} \mathbf{c}_{b_{ui}} + \Delta\check{z}_{sb_{ui}} \mathbf{s}_{b_{ui}} + \Delta\check{z}_{cb_{uu}} \mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta\check{z}_{sb_{uu}} \mathbf{s}_{b_{uu}}] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &\quad - [\Delta_i\check{z}_{cb_{ui}} \mathbf{c}_{b_{ui}} + \Delta_i\check{z}_{sb_{ui}} \mathbf{s}_{b_{ui}} + \Delta_i\check{z}_{cb_{uu}} \mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta_i\check{z}_{sb_{uu}} \mathbf{s}_{b_{uu}}] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}. \tag{A.57}
 \end{aligned}$$

Avec, en utilisant (A.5) et (A.7) :

$$\begin{aligned}
 \Delta\check{z}_{cb_{ui}} &= I[R(\Delta\Gamma_{ua} + \Delta\Omega_{ub}) + L(\Delta_d\Lambda_u - \Delta_d\Omega_{ub})], \\
 \Delta\check{z}_{sb_{ui}} &= I[R(\Delta\Gamma_{uc} + \Delta\Omega_{ud}) + L(\omega_u\Delta\Lambda_u - \Delta_d\Omega_{ud})], \\
 \Delta\check{z}_{cb_{uu}} &= -U[\Delta\Gamma_{ua} + \Delta\Omega_{ub}], \\
 \Delta\check{z}_{sb_{uu}} &= -U[\Delta\Gamma_{uc} + \Delta\Omega_{ud}], \\
 \Delta_i\check{z}_{cb_{ui}} &= I[R(\Delta_i\Gamma_{ua} + \Delta_i\Omega_{ub}) + L\lambda_1\lambda_2(\Delta\Omega_{ub} - \Delta\Lambda_u)], \\
 \Delta_i\check{z}_{sb_{ui}} &= I[R(\Delta_i\Gamma_{uc} + \Delta_i\Omega_{ud}) + L(\omega_u\Delta_i\Lambda_u + \lambda_1\lambda_2\Delta\Omega_{ud})], \\
 \Delta_i\check{z}_{cb_{uu}} &= -U[\Delta_i\Gamma_{ua} + \Delta_i\Omega_{ub}], \\
 \Delta_i\check{z}_{sb_{uu}} &= -U[\Delta_i\Gamma_{uc} + \Delta_i\Omega_{ud}]. \tag{A.58}
 \end{aligned}$$

Calcul de $C_0^{-1}C_u\widehat{\Phi}_0$

D'après (4.66) et (A.48), on a :

$$\begin{aligned}
 \omega^2 EC_0^{-1}C_u\widehat{\Phi}_0 &= \Delta\Lambda_u \left[\omega\omega_u \begin{pmatrix} AQ & -AP \\ BQ & -BP \end{pmatrix} + \lambda_1\lambda_2 \begin{pmatrix} -BP & -BQ \\ AP & AQ \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \\
 &+ \Delta_d\Lambda_u\omega \begin{pmatrix} AP & AQ \\ BP & BQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \\
 &+ \Delta_i\Lambda_u\omega_u \begin{pmatrix} BQ & -BP \\ -AQ & AP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.59}$$

Soit, avec G et H définis par (A.3) :

$$\begin{aligned}
 \omega^2 EC_0^{-1}C_u\widehat{\Phi}_0 &= \Delta\Lambda_u \left[\omega\omega_u G \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \lambda_1\lambda_2 H \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \right] \\
 &+ -\Delta_d\Lambda_u\omega H \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \Delta_i\Lambda_u\omega_u G \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \\
 &= [\Delta\Lambda_u\omega\omega_u G - \Delta_d\Lambda_u\omega H] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &+ [\Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 H + \Delta_i\Lambda_u\omega_u G] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.60}$$

Calcul de Φ_u

D'après (6.47), $\Phi_u = C_0^{-1}Z_u - C_0^{-1}C_u\widehat{\Phi}_0$. Ainsi, en utilisant (A.57) et (A.60) et en remplaçant G et H par leurs expressions :

$$\begin{aligned}
 \omega^2 E\Phi_u &= [(\Delta\Lambda_u\omega\omega_u RI + \Delta_d\Lambda_u\omega^2 LI - \omega^2\Delta\check{z}_{cb_{ui}})\mathbf{c}_{b_{ui}} \\
 &\quad + (\Delta\Lambda_u\omega^2\omega_u LI - \Delta_d\Lambda_u\omega RI - \omega^2\Delta\check{z}_{sb_{ui}})\mathbf{s}_{b_{ui}} \\
 &\quad - (\Delta\Lambda_u\omega\omega_u U + \omega^2\Delta\check{z}_{cb_{uu}})\mathbf{c}_{b_{uu}} + (\Delta_d\Lambda_u\omega U - \omega^2\Delta\check{z}_{sb_{uu}})\mathbf{s}_{b_{uu}}] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &+ [(\Delta_i\Lambda_u\omega_u RI - \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2\omega LI - \omega\Delta_i\check{z}_{cb_{ui}})\mathbf{c}_{b_{ui}} \\
 &\quad + (\Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 RI + \Delta_i\Lambda_u\omega\omega_u LI - \omega\Delta_i\check{z}_{sb_{ui}})\mathbf{s}_{b_{ui}} \\
 &\quad - (\Delta_i\Lambda_u\omega_u U + \omega\Delta_i\check{z}_{cb_{uu}})\mathbf{c}_{b_{uu}} - (\Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 U + \omega\Delta_i\check{z}_{sb_{uu}})\mathbf{s}_{b_{uu}}] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.61}$$

Or, avec $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$ et δ_u définis par (A.6) :

$$\begin{aligned}
 -(\Delta\Lambda_u\omega\omega_u U + \omega^2\Delta\check{z}_{cb_{uu}}) &= U\omega(-\omega_u\Delta\Lambda_u + \omega\Delta\Gamma_{ua} + \omega\Delta\Omega_{ub}) \\
 &= U\omega^2(\Delta\Gamma'_{ua} + \Delta\Omega_{ub}) = U\omega^2\Delta\gamma_u, \\
 \Delta_d\Lambda_u\omega U - \omega^2\Delta\check{z}_{sb_{uu}} &= U\omega(\Delta_d\Lambda_u + \omega\Delta\Gamma_{uc} + \omega\Delta\Omega_{ud}) \\
 &= U\omega^2(\Delta\Gamma'_{uc} + \Delta\Omega_{ud}) = U\omega^2\Delta\delta_u, \\
 -(\Delta_i\Lambda_u\omega_u U + \omega\Delta_i\check{z}_{cb_{uu}}) &= U(-\omega_u\Delta_i\Lambda_u + \omega\Delta_i\Gamma_{ua} + \omega\Delta_i\Omega_{ub}) \\
 &= U\omega(\Delta_i\Gamma'_{ua} + \Delta_i\Omega_{ub}) = U\omega\Delta_i\gamma_u, \\
 -(\Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 U + \omega\Delta_i\check{z}_{sb_{uu}}) &= U(-\lambda_1\lambda_2\Delta\Lambda_u + \omega\Delta_i\Gamma_{uc} + \omega\Delta_i\Omega_{ud}) \\
 &= U\omega(\Delta_i\Gamma'_{uc} + \Delta_i\Omega_{ud}) = U\omega\Delta_i\delta_u,
 \end{aligned} \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\Lambda_u\omega\omega_u RI + \Delta_d\Lambda_u\omega^2 LI - \omega^2\Delta\check{z}_{cbui} \\
&= I\omega[-R(-\omega_u\Delta\Lambda_u + \omega\Delta\Gamma_{ua} + \omega\Delta\Omega_{ub}) + \omega L\Delta_d\Omega_{ub}] \\
&= I\omega^2[L\Delta_d\Omega_{ub} - R(\Delta\Gamma'_{ua} + \Delta\Omega_{ub})] \\
&= I\omega^2[L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u] , \\
& \Delta\Lambda_u\omega^2\omega_u LI - \Delta_d\Lambda_u\omega RI - \omega^2\Delta\check{z}_{sbui} \\
&= I\omega[-R(\Delta_d\Lambda_u + \omega\Delta\Gamma_{uc} + \omega\Delta\Omega_{ud}) + \omega L\Delta_d\Omega_{ud}] \\
&= I\omega^2[L\Delta_d\Omega_{ud} - R(\Delta\Gamma'_{uc} + \Delta\Omega_{ud})] \\
&= I\omega^2[L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u] , \\
& \Delta_i\Lambda_u\omega_u RI - \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2\omega LI - \omega\Delta_i\check{z}_{cbui} \\
&= I[-R(-\omega_u\Delta_i\Lambda_u + \omega\Delta_i\Gamma_{ua} + \omega\Delta_i\Omega_{ub}) - \omega L\lambda_1\lambda_2\Delta\Omega_{ub}] \\
&= I\omega[-R(\Delta_i\Gamma'_{ua} + \Delta_i\Omega_{ub}) - L\lambda_1\lambda_2\Delta\Omega_{ub}] \\
&= I\omega[L\Delta_i\alpha_u - R\Delta_i\gamma_u] , \\
& \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 RI + \Delta_i\Lambda_u\omega\omega_u LI - \omega\Delta_i\check{z}_{sbui} \\
&= I[-R(-\lambda_1\lambda_2\Delta\Lambda_u + \omega\Delta_i\Gamma_{uc} + \omega\Delta_i\Omega_{ud}) - \omega L\lambda_1\lambda_2\Delta\Omega_{ud}] \\
&= I\omega[-R(\Delta_i\Gamma'_{uc} + \Delta_i\Omega_{ud}) - L\lambda_1\lambda_2\Delta\Omega_{ud}] \\
&= I\omega[L\Delta_i\beta_u - R\Delta_i\delta_u] .
\end{aligned} \tag{A.63}$$

On en déduit :

$$\omega E\Phi_u = \begin{pmatrix} \omega A & B \\ \omega B & -A \end{pmatrix} \left(I[LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}] \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{bui} \\ \mathbf{s}_{bui} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{bui} \\ \mathbf{s}_{bui} \end{pmatrix} \right) , \tag{A.64}$$

avec les matrices $M_{\alpha\beta}$ et $M_{\gamma\delta}$ définies par (A.8).

Expression de Z_{uu}

D'après (A.38) :

$$Z_{uu} = \left(\tilde{z}_{uu}(\lambda_1) \quad \tilde{z}_{uu}(\lambda_2) \right)^T , \tag{A.65}$$

avec, d'après (A.31) et (A.35) :

$$\tilde{z}_{uu}(\lambda) = -\frac{2}{\lambda^2 + \omega_u^2} . \tag{A.66}$$

Calcul de $C_0^{-1}Z_{uu}$

D'après (A.41), on a :

$$\begin{aligned} C_0^{-1}Z_{uu} &= C_0^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{z}_{uu}(\lambda_1) \\ \tilde{z}_{uu}(\lambda_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \Lambda_u(\lambda_1)(\omega A - \lambda_2 B) + \Lambda_u(\lambda_2)(\lambda_1 B - \omega A) \\ \Lambda_u(\lambda_1)(\lambda_2 A + \omega B) + \Lambda_u(\lambda_2)(-\omega B - \lambda_1 A) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

soit :

$$\omega E C_0^{-1}Z_{uu} = \omega \Delta \Lambda_u \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \Delta_i \Lambda_u \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}. \quad (\text{A.68})$$

Calcul de $C_0^{-1}C_u\Phi_u$

D'après (A.64) et (A.48), on a :

$$\begin{aligned} \omega^2 E^2 C_0^{-1}C_u\Phi_u &= \left[\Delta \Lambda_u \omega \begin{pmatrix} AQ & -AP \\ BQ & -BP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega A & B \\ \omega B & -A \end{pmatrix} \right. \\ &+ \Delta \Lambda_u \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} -BP & -BQ \\ AP & AQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega A & B \\ \omega B & -A \end{pmatrix} \\ &+ \Delta_d \Lambda_u \omega \begin{pmatrix} AP & AQ \\ BP & BQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega A & B \\ \omega B & -A \end{pmatrix} \\ &\left. + \Delta_i \Lambda_u \omega_u \begin{pmatrix} BQ & -BP \\ -AQ & AP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega A & B \\ \omega B & -A \end{pmatrix} \right] \\ &\quad \times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{ui}} \\ \mathbf{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{uu}} \\ \mathbf{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

$$\begin{aligned}
\omega^2 E^2 C_0^{-1} C_u \Phi_u &= \left(\Delta \Lambda_u \omega \omega_u \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (\omega H \quad G) - \Delta \Lambda_u \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} (\omega G \quad -H) \right. \\
&+ \left. \Delta_d \Lambda_u \omega \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (\omega G \quad -H) + \Delta_i \Lambda_u \omega_u \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} (\omega H \quad G) \right) \\
&\times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{ui}} \\ \mathfrak{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{uu}} \\ \mathfrak{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right).
\end{aligned} \tag{A.70}$$

Or les termes de la forme $(\omega H \quad G) M_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{ui}} \\ \mathfrak{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix}$ sont des scalaires, donc :

$$\begin{aligned}
\omega^2 E^2 C_0^{-1} C_u \Phi_u &= \omega (\omega_u \Delta \Lambda_u \quad \Delta_d \Lambda_u) \begin{pmatrix} \omega H \quad G \\ \omega G \quad -H \end{pmatrix} \\
&\times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{ui}} \\ \mathfrak{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{uu}} \\ \mathfrak{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
&+ (\omega_u \Delta_i \Lambda_u \quad -\lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u) \begin{pmatrix} \omega H \quad G \\ \omega G \quad -H \end{pmatrix} \\
&\times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{ui}} \\ \mathfrak{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{b_{uu}} \\ \mathfrak{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.71}$$

Calcul de Φ_{uu}

D'après (6.47), $\Phi_{uu} = C_0^{-1}Z_{uu} - C_0^{-1}C_u\Phi_u$. Ainsi, en utilisant (A.68) et (A.71) :

$$\begin{aligned}
 \omega^2 E^2 \Phi_{uu} &= \omega \left[E\omega\Delta\Lambda_u - \begin{pmatrix} \omega_u\Delta\Lambda_u & \Delta_d\Lambda_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega H & G \\ \omega G & -H \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{ui}} \\ \mathbf{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{uu}} \\ \mathbf{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right) \right] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &+ \left[\omega E\Delta_i\Lambda_u - \begin{pmatrix} \omega_u\Delta_i\Lambda_u & -\lambda_1\lambda_2\Delta\Lambda_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega H & G \\ \omega G & -H \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{ui}} \\ \mathbf{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{uu}} \\ \mathbf{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right) \right] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.72}$$

Calcul de $\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u$

En utilisant (4.66) et (A.64) :

$$\begin{aligned}
 \omega^2 E \widehat{\Phi}_0^T \Phi_u &= \begin{pmatrix} 0 & E \end{pmatrix} \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{ui}} \\ \mathbf{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{uu}} \\ \mathbf{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right) \\
 &= E(I[(L\Delta_i\alpha_u - R\Delta_i\gamma_u)\mathbf{c}_{b_{ui}} + (L\Delta_i\beta_u - R\Delta_i\delta_u)\mathbf{s}_{b_{ui}}] \\
 &\quad + U[\Delta_i\gamma_u \mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta_i\delta_u \mathbf{s}_{b_{uu}}]).
 \end{aligned} \tag{A.73}$$

Ainsi :

$$\widehat{\Phi}_0^T \Phi_u = \frac{1}{\omega^2} T_2, \tag{A.74}$$

avec la notation :

$$T_2 = I[(L\Delta_i\alpha_u - R\Delta_i\gamma_u)\mathbf{c}_{b_{ui}} + (L\Delta_i\beta_u - R\Delta_i\delta_u)\mathbf{s}_{b_{ui}}] + U[\Delta_i\gamma_u \mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta_i\delta_u \mathbf{s}_{b_{uu}}]. \tag{A.75}$$

Calcul de $|\Phi_u|^2$

D'après (A.64), on a :

$$\begin{aligned}
 \omega E \Phi_u &= \omega [I[(L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)\mathbf{c}_{b_{ui}} + (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)\mathbf{s}_{b_{ui}}] \\
 &\quad + U[\Delta\gamma_u\mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta\delta_u\mathbf{s}_{b_{uu}}]] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\
 &+ (I[(L\Delta_i\alpha_u - R\Delta_i\gamma_u)\mathbf{c}_{b_{ui}} + (L\Delta_i\beta_u - R\Delta_i\delta_u)\mathbf{s}_{b_{ui}}] \\
 &\quad + U[\Delta_i\gamma_u\mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta_i\delta_u\mathbf{s}_{b_{uu}}]] \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{A.76}$$

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne :

$$\omega^2 E |\Phi_u|^2 = \omega^2 T_1^2 + T_2^2 , \tag{A.77}$$

avec T_2 défini par (A.75) et :

$$T_1 = I[(L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)\mathbf{c}_{b_{ui}} + (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)\mathbf{s}_{b_{ui}}] + U[\Delta\gamma_u\mathbf{c}_{b_{uu}} + \Delta\delta_u\mathbf{s}_{b_{uu}}] . \tag{A.78}$$

Calcul de $\widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}$

En utilisant (4.66) et (A.72) :

$$\omega^3 E^2 \widehat{\Phi}_0^T \Phi_{uu} = \omega E^2 T_3 - E T_4 , \tag{A.79}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \Delta_i \Lambda_u , \\
 T_4 &= \left(\omega_u \Delta_i \Lambda_u \quad -\lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u \right) \begin{pmatrix} \omega H & G \\ \omega G & -H \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \left(I(LM_{\alpha\beta} - RM_{\gamma\delta}) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{ui}} \\ \mathbf{s}_{b_{ui}} \end{pmatrix} + UM_{\gamma\delta} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{b_{uu}} \\ \mathbf{s}_{b_{uu}} \end{pmatrix} \right) .
 \end{aligned} \tag{A.80}$$

Expression de l'approximation de $\hat{\phi}$

D'après (6.49), et en notant, d'après (4.67), que $\hat{\phi}_0^2 = E/\omega^2$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi} &\approx \hat{\phi}_0 + \frac{\hat{\Phi}_0^T \Phi_u}{\hat{\phi}_0} B_u + \frac{1}{2} \left[\frac{[|\Phi_u|^2 + 2\hat{\Phi}_0^T \Phi_{uu}]}{\hat{\phi}_0} - \frac{(\hat{\Phi}_0^T \Phi_u)^2}{\hat{\phi}_0^3} \right] B_u^2 \\
 &\approx \hat{\phi}_0 + \frac{T_2}{\omega^2 \hat{\phi}_0} B_u + \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2 T_1^2 + T_2^2}{\omega^2 E \hat{\phi}_0} + \frac{2\omega E T_3 - 2T_4}{\omega^3 E \hat{\phi}_0} - \frac{T_2^2}{\omega^4 \hat{\phi}_0^3} \right] B_u^2 \\
 &\approx \hat{\phi}_0 + \frac{T_2 B_u}{\omega \sqrt{E}} + \frac{\omega}{2\sqrt{E}} \left[\frac{T_1^2}{E} + \frac{T_2^2}{\omega^2 E} + \frac{2T_3}{\omega^2} - \frac{2T_4}{\omega^3 E} - \frac{T_2^2}{\omega^2 E} \right] B_u^2 \\
 \hat{\phi} &\approx \hat{\phi}_0 + \frac{T_2 B_u}{\omega \sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\frac{\omega T_1^2 B_u^2}{2E} + \frac{T_3 B_u^2}{\omega} - \frac{T_4 B_u^2}{\omega^2 E} \right].
 \end{aligned} \tag{A.81}$$

A.4 Démonstration de la proposition 6.3

A.4.1 Rappel de l'énoncé de la proposition 6.3

Proposition . Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions, et en tenant compte des approximations réalisées dans la partie 6.2.4, la norme de Frobenius de $C_0^{-1}C_u$ est donnée par :

$$\|C_0^{-1}C_u\|_F = \frac{1}{\omega\hat{\phi}_0} \sqrt{\frac{(1 + \alpha_L^2)(1 + \rho_1^2)(1 + \rho_2^2)}{(\rho_1^2 + \alpha_L^2)(\rho_2^2 + \alpha_L^2)}} , \quad (\text{A.82})$$

avec $\alpha_L = \frac{\omega_u}{\omega}$, $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\omega}$ et $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\omega}$.

A.4.2 Démonstration

D'après (A.45), on a :

$$\|C_0^{-1}C_u\|_F = \frac{1}{\omega E(\lambda_2 - \lambda_1)} \sqrt{C_{0u1}^2 + C_{0u2}^2 + C_{0u3}^2 + C_{0u4}^2} , \quad (\text{A.83})$$

donc :

$$\begin{aligned} \omega^2 E^2 \|C_0^{-1}C_u\|_F^2 &= (\Delta\Lambda_u\omega\omega_u A Q - \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 B P + \Delta_d\Lambda_u\omega A P + \Delta_i\Lambda_u\omega_u B Q)^2 \\ &+ (-\Delta\Lambda_u\omega\omega_u A P - \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 B Q + \Delta_d\Lambda_u\omega A Q - \Delta_i\Lambda_u\omega_u B P)^2 \\ &+ (\Delta\Lambda_u\omega\omega_u B Q + \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 A P + \Delta_d\Lambda_u\omega B P - \Delta_i\Lambda_u\omega_u A Q)^2 \\ &+ (-\Delta\Lambda_u\omega\omega_u B P + \Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2 A Q + \Delta_d\Lambda_u\omega B Q + \Delta_i\Lambda_u\omega_u A P)^2 . \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

Comme $A^2Q^2 + A^2P^2 + B^2Q^2 + B^2P^2 = (A^2 + B^2)(P^2 + Q^2) = E$, et les doubles produits se simplifiant entre eux, on obtient :

$$\omega^2 E^2 \|C_0^{-1}C_u\|_F^2 = [(\Delta\Lambda_u\omega\omega_u)^2 + (\Delta\Lambda_u\lambda_1\lambda_2)^2 + (\Delta_d\Lambda_u\omega)^2 + (\Delta_i\Lambda_u\omega_u)^2] E . \quad (\text{A.85})$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \omega^2 E \left\| C_0^{-1} C_u \right\|_F^2 &= (\Lambda_u(\lambda_2) - \Lambda_u(\lambda_1))^2 (\omega^2 \omega_u^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2) \\
 &+ (\lambda_2 \Lambda_u(\lambda_2) - \lambda_1 \Lambda_u(\lambda_1))^2 \omega^2 \\
 &+ (\lambda_2 \Lambda_u(\lambda_1) - \lambda_1 \Lambda_u(\lambda_2))^2 \omega_u^2 \\
 &= \Lambda_u(\lambda_1)^2 [\omega^2 \omega_u^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \omega^2 + \lambda_2^2 \omega_u^2] \\
 &+ \Lambda_u(\lambda_2)^2 [\omega^2 \omega_u^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \omega^2 + \lambda_1^2 \omega_u^2] \\
 &- 2 \Lambda_u(\lambda_1) \Lambda_u(\lambda_2) [\omega^2 \omega_u^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 \omega^2 + \lambda_1 \lambda_2 \omega_u^2] , \\
 &\hspace{15em} (A.86)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \omega^2 E \left\| C_0^{-1} C_u \right\|_F^2 &= \frac{(\lambda_1^2 + \omega^2)^2}{(\lambda_1^2 + \omega_u^2)^2} (\lambda_1^2 + \omega_u^2) (\lambda_2^2 + \omega^2) \\
 &+ \frac{(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}{(\lambda_2^2 + \omega_u^2)^2} (\lambda_2^2 + \omega_u^2) (\lambda_1^2 + \omega^2) \\
 &- 2 \frac{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}{(\lambda_1^2 + \omega_u^2)(\lambda_2^2 + \omega_u^2)} (\lambda_1 \lambda_2 + \omega^2) (\lambda_1 \lambda_2 + \omega_u^2) \\
 &= \frac{(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}{(\lambda_1^2 + \omega_u^2)(\lambda_2^2 + \omega_u^2)} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 (\omega^2 + \omega_u^2) . \\
 &\hspace{15em} (A.87)
 \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (4.68), la norme est donnée par :

$$\left\| C_0^{-1} C_u \right\|_F = \frac{1}{\omega \widehat{\phi}_0} \sqrt{\frac{(\omega^2 + \omega_u^2)(\lambda_1^2 + \omega^2)(\lambda_2^2 + \omega^2)}{\omega^2 (\lambda_1^2 + \omega_u^2)(\lambda_2^2 + \omega_u^2)}} , \quad (A.88)$$

soit :

$$\left\| C_0^{-1} C_u \right\|_F = \frac{1}{\omega \widehat{\phi}_0} \sqrt{\frac{(1 + \alpha_L^2)(1 + \rho_1^2)(1 + \rho_2^2)}{(\rho_1^2 + \alpha_L^2)(\rho_2^2 + \alpha_L^2)}} . \quad (A.89)$$

A.5 Démonstration de la proposition 6.5

A.5.1 Rappel de l'énoncé de la proposition 6.5

Proposition . Dans le cadre de la solution particulière (2.21), de l'utilisation des équations bruitées de l'observateur non linéaire de Luenberger (6.7 et 6.8) avec deux pôles réels, et du modèle de bruit explicité au paragraphe 6.2.2, en ne prenant en compte qu'une composante du bruit de mesure w_u sur les tensions, et en tenant compte des approximations réalisées dans la partie 6.2.4, la moyenne temporelle $\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle$ du biais sur $\hat{\phi}$ engendré par la composante $b_u(t, \bar{\omega})$ est donnée par :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{\sigma_{b_u}^2}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega[(\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2]}{4} + \frac{\Delta_i\Lambda_u}{\omega} - \frac{\omega_u\Delta_i\Lambda_u(\omega\Delta\delta_u + \Delta_i\gamma_u) + \lambda_1\lambda_2\Delta\Lambda_u(-\omega\Delta\gamma_u + \Delta_i\delta_u)}{2\omega^2} \right), \quad (\text{A.90})$$

avec les notations définies par (A.4), (A.5), (A.6) et (A.7). Dans les cas particuliers où $\omega_u = \omega$ ou $\omega_u = 2\omega$, on a le biais moyen, indépendant de λ_1 et λ_2 , suivant :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{\sigma_{b_u}^2}{4\omega\sqrt{E}}. \quad (\text{A.91})$$

A.5.2 Démonstration

Calcul d'espérances utiles

On a :

$$\langle B_u \mathbf{c}_{b_u i} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_u \neq \omega \\ B_u \cos(\varphi_{b_u} - \varphi_i) & \text{si } \omega_u = \omega \end{cases}. \quad (\text{A.92})$$

Or, d'après (6.20) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}[B_u \cos(\varphi_{b_u} - \varphi_i)] &= \mathfrak{E}[B_u \cos \varphi_{b_u}] \cos \varphi_i + \mathfrak{E}[B_u \sin \varphi_{b_u}] \sin \varphi_i = 0, \\ \mathfrak{E}[B_u \sin(\varphi_{b_u} - \varphi_u)] &= \mathfrak{E}[B_u \sin(\varphi_{b_u} - \varphi_i)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

et on alors $\forall \omega_u > 0$:

$$\mathfrak{E}[\langle B_u \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] = \mathfrak{E}[\langle B_u \mathbf{s}_{b_u i} \rangle] = \mathfrak{E}[\langle B_u \mathbf{s}_{b_u u} \rangle] = 0. \quad (\text{A.94})$$

Par ailleurs :

$$\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{c}_{b_u u} \rangle = \begin{cases} \frac{\mathbf{c}}{2} B_u^2 & \text{si } \omega_u \neq \omega \\ B_u^2 \cos(\varphi_{b_u} - \varphi_i) \cos(\varphi_{b_u} - \varphi_u) & \text{si } \omega_u = \omega \end{cases} . \quad (\text{A.95})$$

Soit dans le cas $\omega_u = \omega$, en utilisant (6.20) :

$$\begin{aligned} \langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{c}_{b_u u} \rangle &= B_u^2 \cos^2 \varphi_{b_u} \cos \varphi_u \cos \varphi_i + B_u^2 \sin^2 \varphi_{b_u} \sin \varphi_u \sin \varphi_i \\ &\quad + B_u^2 \cos \varphi_{b_u} \cos \varphi_{b_i} \sin(\varphi_u + \varphi_i) , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] &= \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} (\cos \varphi_u \cos \varphi_i + \sin \varphi_u \sin \varphi_i) = \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} \mathbf{c} . \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Donc, $\forall \omega_u > 0$, $\mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] = \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} \mathbf{c}$. De manière analogue, on obtient $\forall \omega_u > 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] &= \frac{\mathbf{c}}{2} \sigma_{b_u}^2 , & \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{s}_{b_u u} \rangle] &= -\frac{\mathbf{s}}{2} \sigma_{b_u}^2 , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{s}_{b_u i} \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] &= \frac{\mathbf{s}}{2} \sigma_{b_u}^2 , & \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{s}_{b_u i} \mathbf{s}_{b_u u} \rangle] &= \frac{\mathbf{c}}{2} \sigma_{b_u}^2 , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i} \mathbf{s}_{b_u i} \rangle] &= 0 , & \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u u} \mathbf{s}_{b_u u} \rangle] &= 0 , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u i}^2 \rangle] &= \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} , & \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{c}_{b_u u}^2 \rangle] &= \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{s}_{b_u i}^2 \rangle] &= \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} , & \mathfrak{E}[\langle B_u^2 \mathbf{s}_{b_u u}^2 \rangle] &= \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} . \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

On en déduit $\forall \omega_u > 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] &= \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{s}_{b_u i} \rangle] = \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} (U \mathbf{c} - RI) , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] &= \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{s}_{b_u u} \rangle] = \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} (U - RI \mathbf{c} - \omega LI \mathbf{s}) , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{s}_{b_u i} \rangle] &= -\mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] = \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} (U \mathbf{s} - \omega LI) , \\ \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{s}_{b_u u} \rangle] &= -\mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] = \frac{\sigma_{b_u}^2}{2} (RI \mathbf{s} - \omega LI \mathbf{c}) . \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

Calcul des espérances $\forall \omega_u > 0$

De T_1 , donné par (A.78), on déduit :

$$\begin{aligned}
T_1^2 &= I^2[(L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)\mathbf{c}_{b_u i} + (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)\mathbf{s}_{b_u i}]^2 \\
&+ U^2[\Delta\gamma_u\mathbf{c}_{b_u u} + \Delta\delta_u\mathbf{s}_{b_u u}]^2 \\
&+ 2UI[(L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)\mathbf{c}_{b_u i} + (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)\mathbf{s}_{b_u i}][\Delta\gamma_u\mathbf{c}_{b_u u} + \Delta\delta_u\mathbf{s}_{b_u u}] , \\
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= I^2[(L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)^2 + (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)^2] \\
&+ U^2[(\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2] \\
&+ 2UI[(L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)\Delta\gamma_u\mathbf{c} - (L\Delta\alpha_u - R\Delta\gamma_u)\Delta\delta_u\mathbf{s} \\
&+ (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)\Delta\gamma_u\mathbf{s} + (L\Delta\beta_u - R\Delta\delta_u)\Delta\delta_u\mathbf{c}] , \\
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= ((\Delta\alpha_u)^2 + (\Delta\beta_u)^2)L^2I^2 \\
&+ ((\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2)((U\mathbf{c} - RI)^2 + U^2\mathbf{s}^2) \\
&+ 2(\Delta\alpha_u\Delta\gamma_u + \Delta\beta_u\Delta\delta_u)LI(U\mathbf{c} - RI) \\
&+ 2(\Delta\beta_u\Delta\gamma_u - \Delta\alpha_u\Delta\delta_u)LUI\mathbf{s} , \\
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= [((\Delta\alpha_u)^2 + (\Delta\beta_u)^2)L^2I^2 + ((\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2)((U\mathbf{c} - RI)^2 + U^2\mathbf{s}^2) \\
&+ 2(\Delta\beta_u\Delta\gamma_u - \Delta\alpha_u\Delta\delta_u)LUI\mathbf{s}] , \tag{A.99}
\end{aligned}$$

soit en utilisant la deuxième propriété de (A.9) :

$$\begin{aligned}
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= [(\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2][\omega^2 L^2 I^2 + (U\mathbf{c} - RI)^2 + U^2\mathbf{s}^2 - 2\omega LUI\mathbf{s}] \\
&= [(\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2][(U\mathbf{c} - RI)^2 + (U\mathbf{s} - \omega LI)^2] , \\
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= [(\Delta\gamma_u)^2 + (\Delta\delta_u)^2]E . \tag{A.100}
\end{aligned}$$

Ensuite, par T_2 et T_3 , respectivement donnés par (A.75) et (A.80), on a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}[\langle B_u T_2 \rangle] &= 0 , \\
\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_3 \rangle] &= \Delta_i \Lambda_u \sigma_{b_u}^2 . \tag{A.101}
\end{aligned}$$

Enfin, de T_4 , donné par (A.80), on déduit :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle] &= \omega \omega_u \Delta_i \Lambda_u (I[(L \Delta \alpha_u - R \Delta \gamma_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] \\
&\quad + (L \Delta \beta_u - R \Delta \delta_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{s}_{b_u i} \rangle]]) \\
&\quad + U[\Delta \gamma_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] + \Delta \delta_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{s}_{b_u u} \rangle]] \\
&- \lambda_1 \lambda_2 \omega \Delta \Lambda_u (I[(L \Delta \alpha_u - R \Delta \gamma_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] \\
&\quad + (L \Delta \beta_u - R \Delta \delta_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{s}_{b_u i} \rangle]]) \\
&\quad + U[\Delta \gamma_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] + \Delta \delta_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{s}_{b_u u} \rangle]] \\
&+ \omega_u \Delta_i \Lambda_u (I[(L \Delta_i \alpha_u - R \Delta_i \gamma_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] \\
&\quad + (L \Delta_i \beta_u - R \Delta_i \delta_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{s}_{b_u u} \rangle]]) \\
&\quad + U[\Delta_i \gamma_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] + \Delta_i \delta_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 G \mathbf{s}_{b_u u} \rangle]] \\
&+ \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (I[(L \Delta_i \alpha_u - R \Delta_i \gamma_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{c}_{b_u i} \rangle] \\
&\quad + (L \Delta_i \beta_u - R \Delta_i \delta_u) \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{s}_{b_u u} \rangle]]) \\
&\quad + U[\Delta_i \gamma_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{c}_{b_u u} \rangle] + \Delta_i \delta_u \mathfrak{E}[\langle B_u^2 H \mathbf{s}_{b_u u} \rangle]]) , \\
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= (U \mathbf{c} - RI) I[\omega_u \Delta_i \Lambda_u (L(\omega \Delta \beta_u + \Delta_i \alpha_u) - R(\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)) \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (L(\Delta_i \beta_u - \omega \Delta \alpha_u) - R(\Delta_i \delta_u - \omega \Delta \gamma_u))] \\
&+ (U \mathbf{s} - \omega LI) I[\omega_u \Delta_i \Lambda_u (L(\Delta_i \beta_u - \omega \Delta \alpha_u) - R(\Delta_i \delta_u - \omega \Delta \gamma_u)) \\
&\quad - \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (L(\omega \Delta \beta_u + \Delta_i \alpha_u) - R(\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u))] \\
&+ (U - \omega LI \mathbf{s} - RI \mathbf{c}) U \\
&\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\Delta_i \delta_u - \omega \Delta \gamma_u)] \\
&+ (RI \mathbf{s} - \omega LI \mathbf{c}) U \\
&\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\Delta_i \delta_u - \omega \Delta \gamma_u) - \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)] , \\
\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= I[\omega_u \Delta_i \Lambda_u (U \mathbf{c} - RI) - \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (U \mathbf{s} - \omega LI)] \\
&\quad \times [L(\omega \Delta \beta_u + \Delta_i \alpha_u) - R(\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)] \\
&+ I[\omega_u \Delta_i \Lambda_u (U \mathbf{s} - \omega LI) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (U \mathbf{c} - RI)] \\
&\quad \times [L(-\omega \Delta \alpha_u + \Delta_i \beta_u) - R(-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] \\
&+ U[\omega_u \Delta_i \Lambda_u (U - \omega LI \mathbf{s} - RI \mathbf{c}) - \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (RI \mathbf{s} - \omega LI \mathbf{c})] \\
&\quad \times [\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u] \\
&+ U[\omega_u \Delta_i \Lambda_u (RI \mathbf{s} - \omega LI \mathbf{c}) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (U - \omega LI \mathbf{s} - RI \mathbf{c})] \\
&\quad \times [-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u] .
\end{aligned} \tag{A.102}$$

En remarquant que nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} U - \omega LI\mathfrak{s} - RI\mathfrak{c} &= (U\mathfrak{c} - RI)\mathfrak{c} + (U\mathfrak{s} - \omega LI)\mathfrak{s} , \\ RI\mathfrak{s} - \omega LI\mathfrak{c} &= (U\mathfrak{s} - \omega LI)\mathfrak{c} - (U\mathfrak{c} - RI)\mathfrak{s} , \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= (U\mathfrak{c} - RI)LI \\ &\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \beta_u + \Delta_i \alpha_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \alpha_u + \Delta_i \beta_u)] \\ &- (U\mathfrak{c} - RI)RI \\ &\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] \\ &+ (U\mathfrak{c} - RI)U\mathfrak{c} \\ &\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] \\ &+ (U\mathfrak{c} - RI)U\mathfrak{s} \\ &\quad \times [-\omega_u \Delta_i \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)] \\ &+ (U\mathfrak{s} - \omega LI)LI \\ &\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (-\omega \Delta \alpha_u + \Delta_i \beta_u) - \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\omega \Delta \beta_u + \Delta_i \alpha_u)] \\ &+ (U\mathfrak{s} - \omega LI)RI \\ &\quad \times [-\omega_u \Delta_i \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)] \\ &+ (U\mathfrak{s} - \omega LI)U\mathfrak{s} \\ &\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] \\ &+ (U\mathfrak{s} - \omega LI)U\mathfrak{c} \\ &\quad \times [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u) - \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)] . \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

En utilisant les deux dernières propriétés de (A.9), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} &= [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] \\ &\quad \times [-(U\mathfrak{c} - RI)RI + (U\mathfrak{c} - RI)U\mathfrak{c} \\ &\quad \quad - \omega(U\mathfrak{s} - \omega LI)LI + (U\mathfrak{s} - \omega LI)U\mathfrak{s}] \\ &+ [-\omega_u \Delta_i \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u)] \\ &\quad \times [-\omega(U\mathfrak{c} - RI)LI + (U\mathfrak{c} - RI)U\mathfrak{s} \\ &\quad \quad + (U\mathfrak{s} - \omega LI)RI - (U\mathfrak{s} - \omega LI)U\mathfrak{c}] \\ &= [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] \\ &\quad \times [(U\mathfrak{c} - RI)^2 + (U\mathfrak{s} - \omega LI)^2] , \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

soit :

$$\frac{2\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\sigma_{b_u}^2} = [\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)] E. \quad (\text{A.106})$$

Enfin, d'après (6.55), $\mathfrak{E}[\langle B_u T_2 \rangle]$ étant nulle :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega \mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_1^2 \rangle]}{2E} + \frac{\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_3 \rangle]}{\omega} - \frac{\mathfrak{E}[\langle B_u^2 T_4 \rangle]}{\omega^2 E} \right), \quad (\text{A.107})$$

soit :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = & \frac{\sigma_{b_u}^2}{\sqrt{E}} \left(\frac{\omega [(\Delta \gamma_u)^2 + (\Delta \delta_u)^2]}{4} + \frac{\Delta_i \Lambda_u}{\omega} \right. \\ & \left. - \frac{\omega_u \Delta_i \Lambda_u (\omega \Delta \delta_u + \Delta_i \gamma_u) + \lambda_1 \lambda_2 \Delta \Lambda_u (-\omega \Delta \gamma_u + \Delta_i \delta_u)}{2\omega^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Cas particulier $\omega_u = \omega$

Si $\omega_u = \omega$, les expressions définies en (A.4), (A.5), (A.6) et (A.7) deviennent :

$$\begin{aligned} \Lambda_u(\lambda) &= 1, & \Delta \Lambda_u(\lambda) &= 0, & \Delta_i \Lambda_u(\lambda) &= 1, \\ \Omega_{ua}(\lambda) &= 1, & \Omega_{ub}(\lambda) &= 1, & \Omega_{uc}(\lambda) &= \frac{\omega}{\lambda}, & \Omega_{ud}(\lambda) &= -\frac{\omega}{\lambda}, \\ \Omega'_{ua}(\lambda) &= 0, & \Omega'_{uc}(\lambda) &= \frac{\lambda^2 + \omega^2}{\lambda \omega}, & \Gamma'_{ua}(\lambda) &= 0, & \Gamma'_{uc}(\lambda) &= \frac{\lambda^2 + \omega^2}{\lambda \omega}, \\ \gamma_u(\lambda) &= 1, & \Delta \gamma_u &= 0, & \Delta_i \gamma_u &= 1, \\ \delta_u(\lambda) &= \frac{\lambda}{\omega}, & \Delta \delta_u &= \frac{1}{\omega}, & \Delta_i \delta_u &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Ainsi :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{\sigma_{b_u}^2}{4\omega\sqrt{E}}. \quad (\text{A.110})$$

Cas particulier $\omega_u = 2\omega$

Si $\omega_u = 2\omega$, les expressions définies en (A.4), (A.5), (A.6) et (A.7) deviennent :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_u(\lambda) &= \frac{\lambda^2 + \omega^2}{\lambda^2 + 4\omega^2} \quad , \quad \Omega_{ua}(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 2\omega^2}{\lambda^2 + \omega^2} \quad , \quad \Omega'_{ua}(\lambda) = -\frac{\lambda^2 + 4\omega^2}{\lambda^2 + \omega^2} \quad , \\
 \Omega_{ub}(\lambda) &= 1 \quad , \quad \Omega_{uc}(\lambda) = \frac{3\lambda\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \quad , \quad \Omega_{ud}(\lambda) = 0 \quad , \\
 \Omega'_{uc}(\lambda) &= \frac{\lambda}{\omega} \frac{\lambda^2 + 4\omega^2}{\lambda^2 + \omega^2} \quad , \quad \Gamma'_{ua}(\lambda) = -1 \quad , \quad \Gamma'_{uc}(\lambda) = \frac{\lambda}{\omega} \quad , \quad (A.111) \\
 \gamma_u(\lambda) &= 0 \quad , \quad \Delta\gamma_u = 0 \quad , \quad \Delta_i\gamma_u = 0 \quad , \\
 \delta_u(\lambda) &= \frac{\lambda}{\omega} \quad , \quad \Delta\delta_u = \frac{1}{\omega} \quad , \quad \Delta_i\delta_u = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\langle \mathbf{b}(\hat{\phi}, b_u) \rangle = \frac{\sigma_{b_u}^2}{4\omega\sqrt{E}} \quad . \quad (A.112)$$

Annexe B

Résultats complémentaires en simulation : estimation de la température et boucle fermée

Dans cette annexe, nous nous intéressons à la mise en œuvre en simulation de situations n'ayant pu être validées expérimentalement : le fonctionnement en boucle fermée du contrôle dans le cas de l'observateur de Luenberger (i.e. l'utilisation pour le contrôle de la position estimée et non de la position mesurée), l'estimation et le suivi de la température du moteur (aimants et enroulements), et l'adaptation du contrôle à la valeur estimée du flux.

B.1 Hypothèses

Dans cette annexe, la machine électrique à pôles lisses dont les paramètres physiques sont indiqués dans le tableau 8.1 est simulée. Le courant fictif i_d est fixé à $-2A$ et le contrôle en couple repose uniquement sur l'adaptation de i_q , le couple demandé étant $1Nm$. On étudie le cas de la modélisation réaliste. Les signaux exacts de courant et tension simulés sont alors filtrés par des filtres passe-bas du premier ordre de constantes de temps $\tau_u = \tau_i = 1,9 \cdot 10^{-4}s$ supposées parfaitement connues. Dans le cas bruité, on ajoute aux signaux sortant des filtres les bruits générés suivant les distributions gaussiennes dont les écarts-types sont présentés dans les tableaux 3.1 (en extrapolant) et 6.9, à savoir :

- régime constant à 500 tr/min : $\sigma_{w_i} = 25mA$, $\sigma_{w_u} = 0.2V$,
- régime constant à 4000 tr/min : $\sigma_{w_i} = 67mA$, $\sigma_{w_u} = 2V$,
- profil mixte (pour le paragraphe B.2) : $\sigma_{w_i} = 50mA$, $\sigma_{w_u} = 1V$.

Par ailleurs, la valeur exacte L de l'inductance est supposée connue, ainsi que les valeurs exactes à $20^\circ C$ R_0 et ϕ_0 de la résistance et du flux. On rappelle que d'après (1.29) et (1.31), résistance et température des enroulements et flux et température des aimants sont reliés par :

$$\begin{aligned} R &= R_0(1 + \alpha(T_S - T_{S_0})) , \\ \phi &= \phi_0(1 + \alpha_B(T_R - T_{R_0})) , \end{aligned} \tag{B.1}$$

avec $T_{R_0} = T_{S_0} = 20^\circ C$ et R et ϕ les valeurs respectives de la résistance et du flux aux températures respectives T_S des enroulements et T_R des aimants. Les constantes α et α_B valent :

$$\begin{aligned} \alpha &= 3,93.10^{-3}K^{-1} , \\ \alpha_B &= -1,2.10^{-3}K^{-1} . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Ainsi, une variation de 1% de la résistance équivaut à une variation d'environ $2.5^\circ C$ de la température des enroulements et une variation de 1% du flux à une variation d'environ $8.5^\circ C$ de la température des aimants. Inversement, une variation de $1^\circ C$ de la température des enroulements équivaut à une variation d'environ 0.4% de la résistance et une variation de $1^\circ C$ de la température des aimants à une variation d'environ 0.12% du flux.

Enfin, on utilise les réglages suivants pour les observateurs :

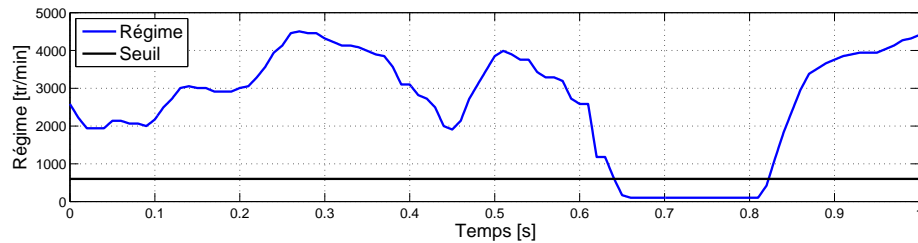
- Observateur de Luenberger :
 - D1=1, D2=1, M=1 (cf. figure 5.7),
 - réglage BR : $\lambda_1 = 31$, $\lambda_2 = 32$,
 - réglage HR : $\lambda_1 = 63$, $\lambda_2 = 577$.
- Observateur de Kreisselmeier :
 - cas non bruité : $f_{oubli} = 0.9992$, $\omega_0 = 4000rad/s$, $\xi = 1.5$,
 - cas bruité, estimation flux : $f_{oubli} = 0.9998$, $\omega_0 = 4000rad/s$, $\xi = 3.5$,
 - cas bruité, estimation résistance : $f_{oubli} = 0.9998$, $\omega_0 = 1200rad/s$, $\xi = 0.1$.

B.2 Impact sur les estimations du contrôle en boucle fermée avec l'observateur de Luenberger

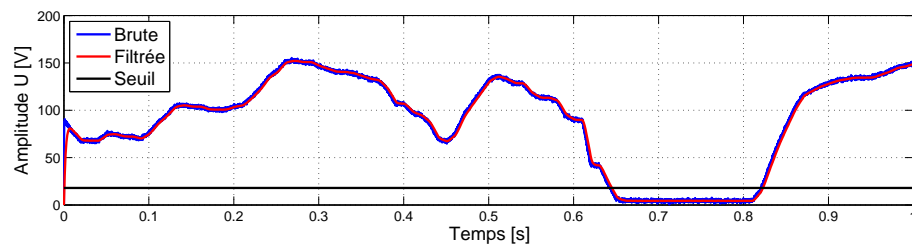
Dans ce paragraphe, on compare les estimations de position et de flux obtenues avec l'observateur de Luenberger quand le contrôle est effectué en boucle ouverte ou en boucle fermée, i.e. si la position utilisée pour réaliser la transformation de Park nécessaire à la commande vectorielle, réalisée dans le repère (d, q) , est la position mesurée ou la position estimée. Dans le cas d'un contrôle *sensorless*, ne disposant pas de la mesure

de la position, on boucle en effet sur la position estimée. Ceci ne concerne pas l'observateur de Kreisselmeier pour lequel la position mesurée est utilisée, mais uniquement l'observateur de Luenberger. Les simulations des chapitres 4 à 6 et les résultats avec l'observateur de Luenberger du chapitre 8 ont été obtenues en boucle ouverte, i.e. en utilisant la position mesurée. Ceci n'est donc pas réaliste mais, comme nous allons le voir sur la figure B.2, cela n'a pas eu une grande influence et nos résultats n'ont pas été faussés.

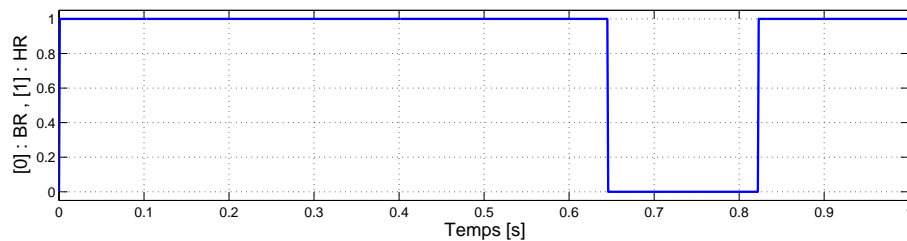
La simulation est réalisée dans le même cadre qu'au paragraphe 6.3.3, sur le profil mixte de la figure B.1(a), en utilisant l'alternance des observateurs. La figure B.1 est du coup la reprise de la figure 6.20.



(a) Profil de régime (comparé au régime seuil)



(b) Comparaison de l'amplitude de la tension et de l'amplitude seuil

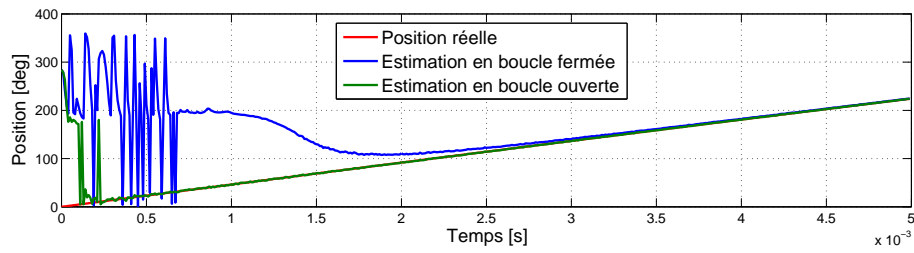


(c) Sélection de l'observateur à utiliser

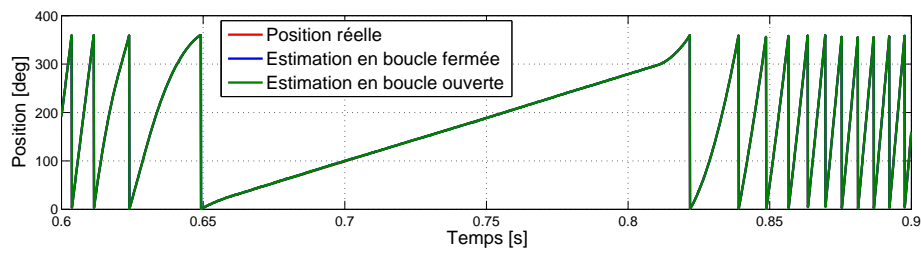
FIGURE B.1 – Profil de régime et sélection de l'observateur

La figure B.2 compare, dans le cas bruité, les estimations de position (figures B.2(a) à B.2(c)) et de flux (B.2(d) et B.2(e)) sur ce profil mixte avec l'observateur de Luenberger, en boucle fermée (en bleu) et en boucle ouverte (en vert). Excepté un temps d'ajustement au démarrage pour la boucle fermée (figures B.2(a) et début de B.2(d)),

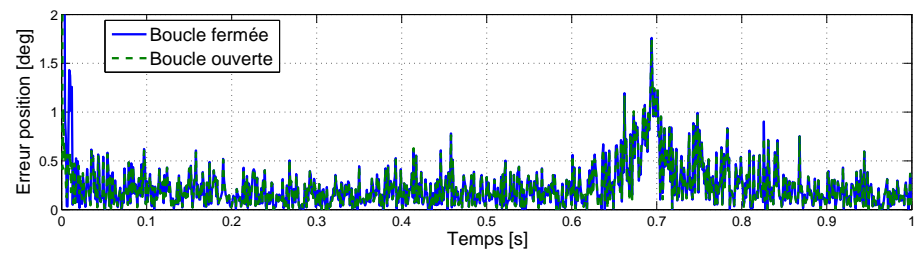
Annexe B. Résultats complémentaires en simulation : estimation de la température et boucle fermée



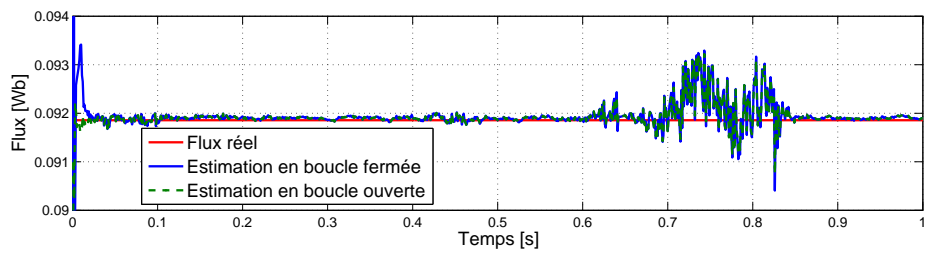
(a) Estimation de la position - démarrage



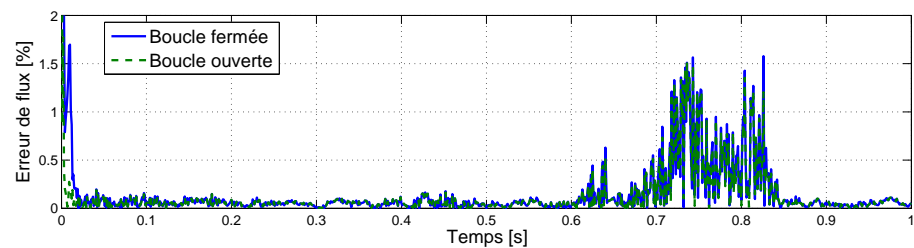
(b) Estimation de la position



(c) Erreur d'estimation de la position



(d) Estimation du flux



(e) Erreur d'estimation du flux

FIGURE B.2 – Comparaison des estimations avec contrôle en boucle ouverte ou fermée

on constate que les estimations sont très proches dans le cas du flux comme de la position. Le bouclage sur la position estimée ne pose donc pas de problème et nos résultats en simulation des chapitres 4 à 6 ne sont pas remis en cause.

B.3 Suivi d'une variation de température avec l'observateur de Luenberger et adaptation du contrôle aux variations du flux

Dans ce paragraphe et le suivant, on cherche à estimer et suivre la température des aimants et des enroulements du moteur. Pour ce faire, on simule une augmentation de température des enroulements (figure B.3(a)) simultanément à une augmentation de la température des aimants (courbe rouge de la figure B.3(d)). Ces variations de températures sont converties en variations respectives de résistance et de flux (figure B.3(b) et courbe rouge de B.3(c)) *via* les relations (B.1). Les résistance et flux estimés sont alors inversement convertis en températures estimées des enroulements et des aimants. On rappelle que les observateurs ont été construits en faisant l'hypothèse $\dot{R} = \dot{\phi} = 0$, i.e. que la résistance et le flux varient suffisamment lentement sous l'effet de la température pour pouvoir considérer leurs variations comme nulles quand on les compare aux constantes de temps électriques ou mécaniques. Les variations simulées étant peut-être ici un peu trop rapides, plus rapides que dans la réalité en tout cas, on peut considérer que l'on est dans une sorte de "pire cas" de ce point de vue là.

Dans ce paragraphe pour l'observateur de Luenberger, comme dans le suivant pour l'observateur de Kreisselmeier, on s'intéresse au suivi des variations de température dans le cas non bruité dans un premier temps puis dans le cas bruité. On étudie notamment l'impact de la non prise en compte de la variation, due à la température, de la résistance ou du flux quand l'un de ces paramètres est supposé connu et qu'on n'en connaît que la valeur exacte à 20°C. On illustre également l'adaptation du contrôle en couple aux variations du flux estimé. Ceci n'est montré que dans le cas de l'observateur de Luenberger mais est analogue avec l'observateur de Kreisselmeier. Enfin, notons que, sauf mention contraire, les simulations sont réalisées à un régime constant de 4000 tr/min, auquel sont ajoutées de petites variations dans le cas de l'observateur de Kreisselmeier pour des raisons d'observabilité. Par ailleurs, dans le cas de l'observateur de Luenberger, on utilise pour le contrôle la position estimée.

B.3.1 Cas non bruité : Estimation de la température des aimants et robustesse à la non prise en compte des variations de la résistance

La figure B.3 compare, dans le cas non bruité, l'estimation du flux (figure B.3(c)), traduite en estimation de la température des aimants (figure B.3(d)), quand la résistance varie (figure B.3(b)), du fait de la variation de la température des enroulements (figure B.3(a)), ou non. La situation réelle est la première (courbes bleues sur les figures B.3(c) à B.3(e)) et sa comparaison avec la seconde (cas artificiel, courbes vertes) permet de déterminer la robustesse de l'estimation à la non prise en compte de la variation de la résistance dans l'observateur (lequel utilise la valeur de la résistance à 20°C)¹. L'erreur d'estimation de la température des aimants (figure B.3(e)) est légèrement augmentée du fait de cette non connaissance des variations de la résistance. L'estimation reste toutefois très bonne. Afin de réduire ce léger problème, on pourrait envisager déduire de la température estimée des aimants une estimation de la température des enroulements et donc de la résistance dont on pourrait alors adapter la valeur dans l'observateur.

Sauf mention contraire, dans les simulations suivantes, la résistance est variable.

B.3.2 Cas non bruité : Adaptation du contrôle en couple aux variations du flux

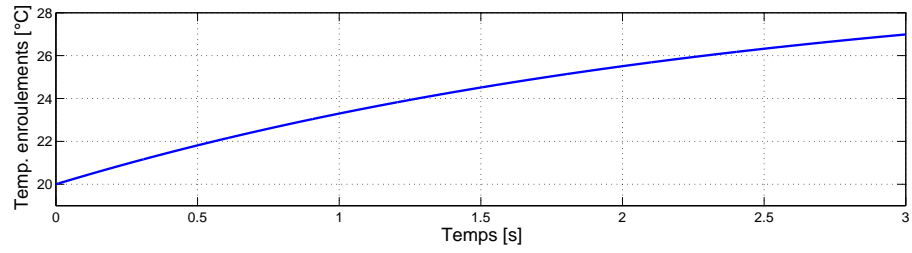
La figure B.4 compare, dans le cas non bruité, les allures du courant i_q (figure B.4(a)) et du couple fourni (figure B.4(b)) quand on adapte le contrôle en couple aux variations du flux estimé (en bleu) ou non (en vert). Dans ce dernier cas, on utilise toujours la valeur à 20°C du flux dans le contrôle. Sans surprise, comme nous l'avons évoqué au paragraphe 1.4.1, l'adaptation du contrôle aux variations de flux, i.e. aux variations de température, permet de fournir le couple demandé, ce qui n'est pas le cas sans adaptation. Cette adaptation est donc essentielle.

B.3.3 Cas bruité : Estimation de la température des aimants et robustesse à la non prise en compte des variations de résistance

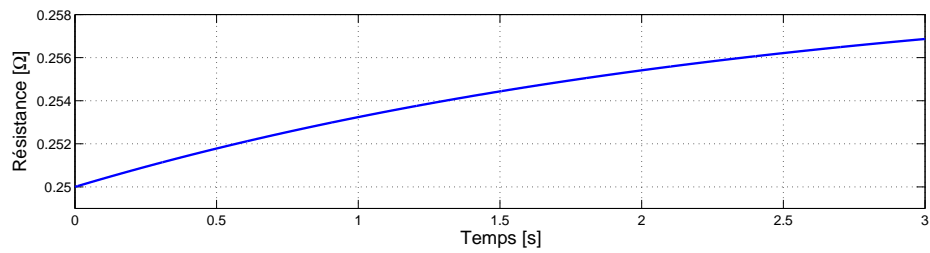
La figure B.5 compare, dans le cas bruité, l'estimation du flux (figure B.5(a)), traduite en estimation de la température des aimants (figure B.5(b)), quand la résistance

1. Pour étudier la robustesse de l'estimation à la non prise en compte de la variation de la résistance physique dans les équations de l'observateur, nous avons choisi de comparer les résultats quand la résistance physique varie ou ne varie pas, la valeur de la résistance utilisée dans l'observateur étant constante. Nous aurions, de manière équivalente, pu comparer les résultats, la résistance physique variant, quand la valeur de la résistance utilisée dans l'observateur est constante ou adaptée à la variation de la résistance physique. Cette remarque vaut également pour la robustesse à la variation du flux.

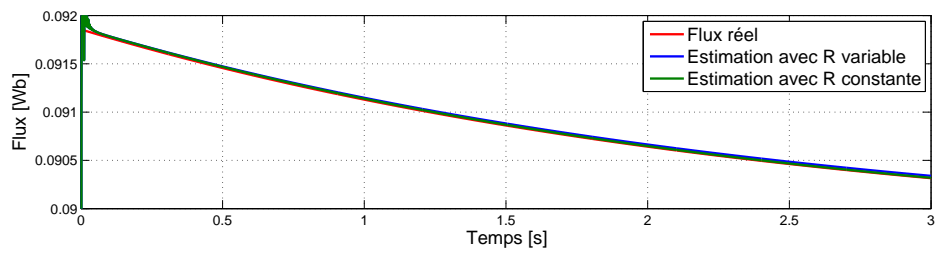
B.3. Suivi d'une variation de température avec l'observateur de Luenberger et adaptation du contrôle aux variations du flux



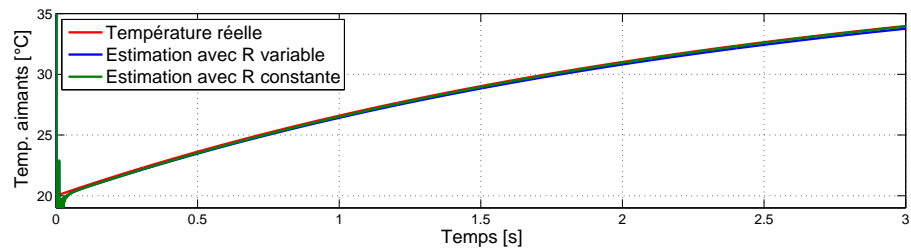
(a) Variation de la température des enroulements



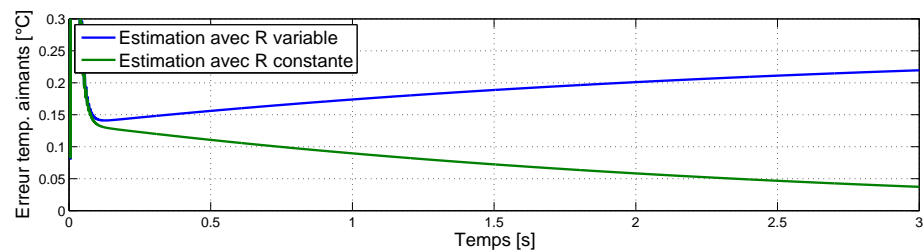
(b) Variation de la résistance



(c) Estimation du flux

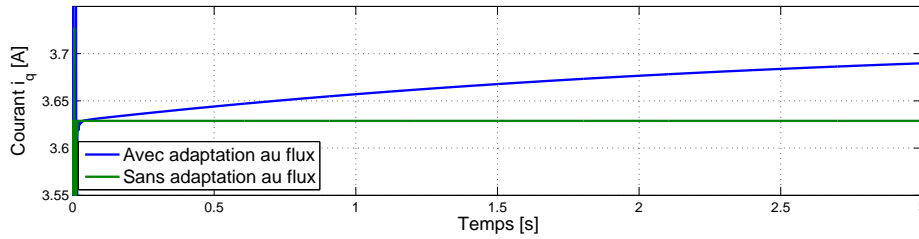


(d) Estimation de la température des aimants

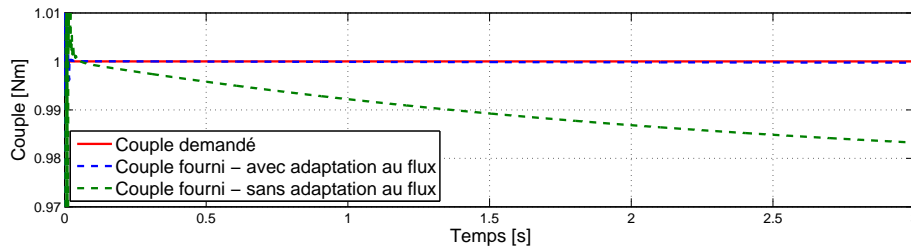


(e) Erreur d'estimation de la température des aimants

FIGURE B.3 – Estimation de la température des aimants et robustesse à la variation de la résistance



(a) Courant i_q



(b) Couples demandé et fourni

FIGURE B.4 – Impact de l’adaptation du contrôle aux variations du flux

varie (cas réel, en bleu), du fait de la variation de la température des enroulements (figures B.3(a) et B.3(b)), ou non (cas artificiel, en vert). L’erreur d’estimation de la température des aimants (figure B.5(c)) est légèrement augmentée du fait de la non prise en compte des variations de résistance dans l’observateur, mais l’ordre de grandeur de l’erreur d’estimation reste le même, à savoir environ $1^\circ C$.

B.3.4 Cas bruité : Adaptation du contrôle en couple aux variations du flux

La figure B.6 compare, dans le cas bruité, les allures du courant i_q (figure B.6(a)) et du couple fourni (figure B.6(b)) quand on adapte le contrôle en couple aux variations du flux estimé (en bleu) ou non (en vert). Comme dans le cas non bruité, l’adaptation du contrôle aux variations du flux permet globalement de fournir le couple demandé, contrairement au cas où l’on utilise toujours la valeur à $20^\circ C$ du flux dans le contrôle.

B.3.5 Cas bruité : Estimation de la température des aimants selon le régime

La figure B.7 compare, dans le cas bruité, l’estimation du flux (figure B.7(a)), traduite en estimation de la température des aimants (figure B.7(b)) à deux régimes différents : 4000 tr/min (en bleu) et 500 tr/min (en vert). L’erreur d’estimation de la

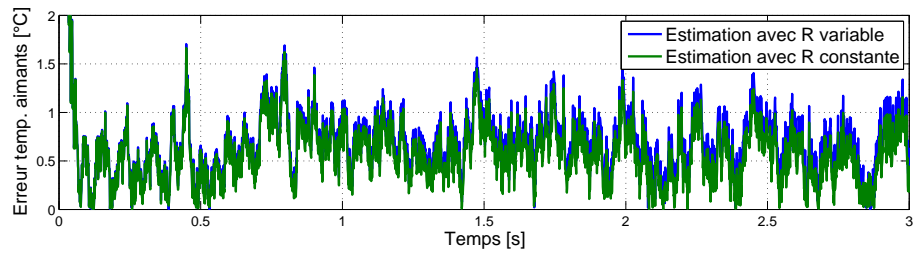
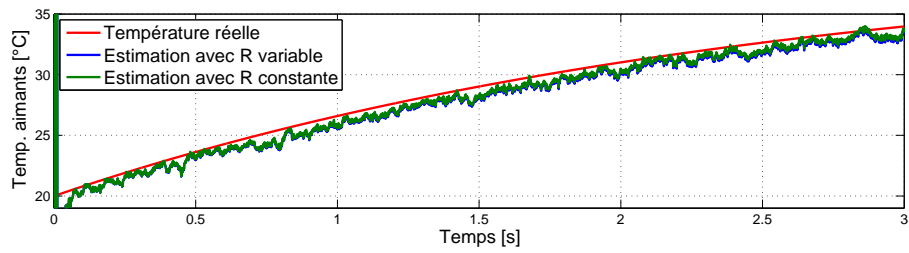
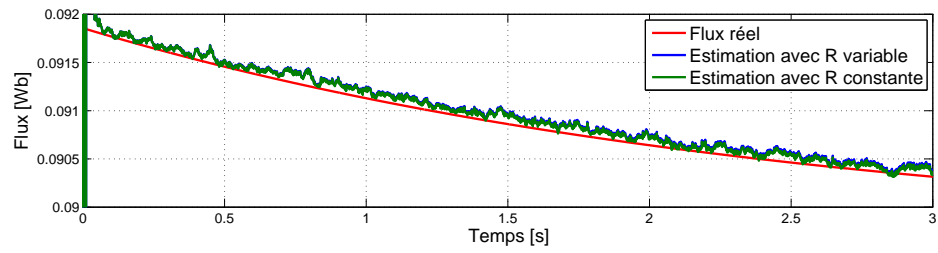
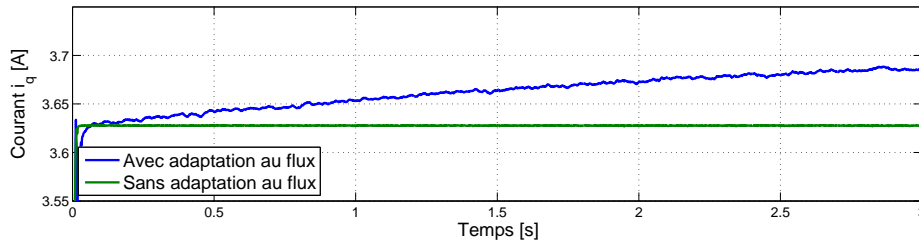
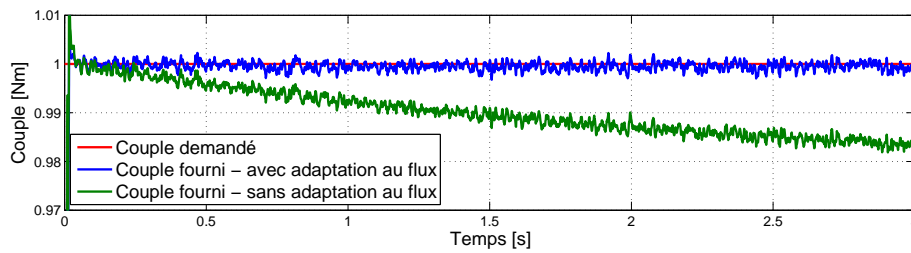


FIGURE B.5 – Estimation de la température des aimants et robustesse à la variation de la résistance



(a) Courant i_q



(b) Couples demandé et fourni

FIGURE B.6 – Impact de l’adaptation du contrôle aux variations de flux

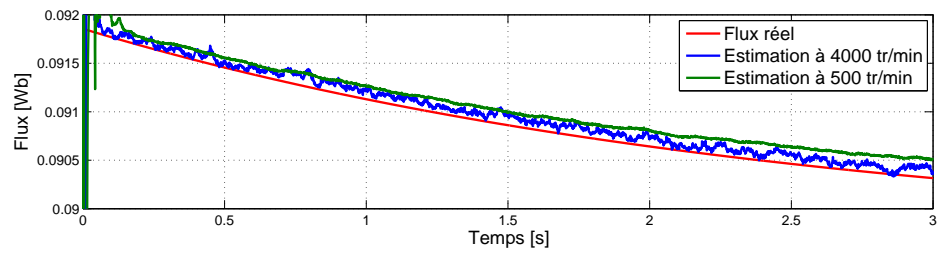
température des aimants (figure B.7(c)) est plus élevée pour le plus faible régime, mais reste raisonnable, aux alentours de 1.5°C .

B.4 Suivi d’une variation de température avec l’observateur de Kreisselmeier

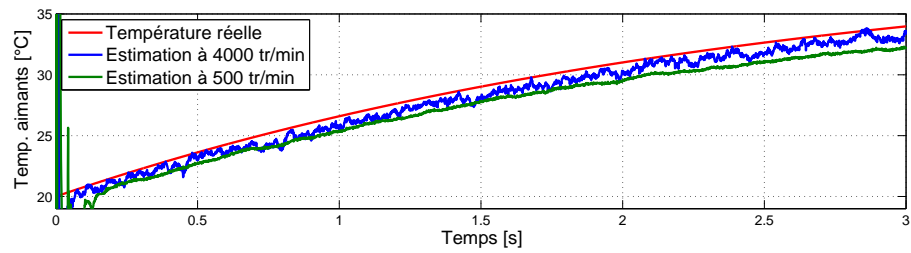
Dans ce paragraphe, nous procédons de la même manière que pour l’observateur de Luenberger au paragraphe précédent (cf. introduction du paragraphe B.3), excepté qu’avec l’observateur de Kreisselmeier il est possible d’estimer la température des enroulements, *via* l’estimation de la résistance, en plus de la température des aimants. Si on peut donc estimer simultanément les deux températures, il est également possible de ne se consacrer qu’à l’estimation d’une seule en connaissant la valeur de la résistance ou de flux selon le cas. On note que l’estimation simultanée des deux températures évite tout problème de robustesse aux variations de résistance ou de flux.

B.4.1 Cas non bruité : Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance et du choix des paramètres estimés

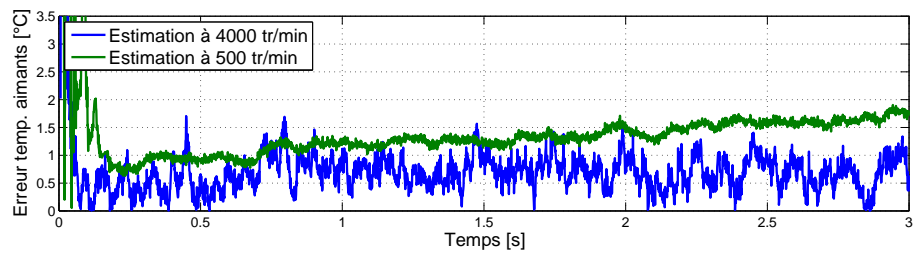
La figure B.8 compare, dans le cas non bruité, l’estimation du flux (figure B.8(a)), traduite en estimation de la température des aimants (figure B.8(b)), quand seul le flux



(a) Estimation du flux



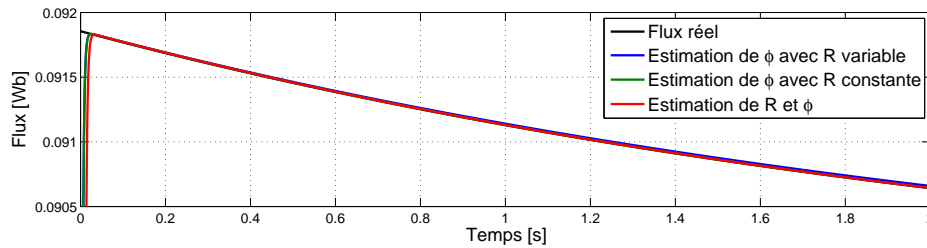
(b) Estimation de la température des aimants



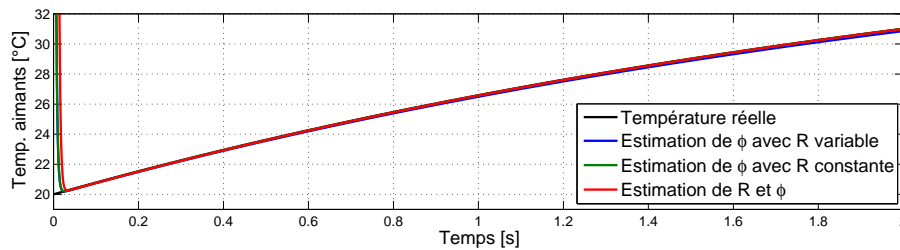
(c) Erreur d'estimation de la température des aimants

FIGURE B.7 – Estimation de la température des aimants à bas et haut régimes

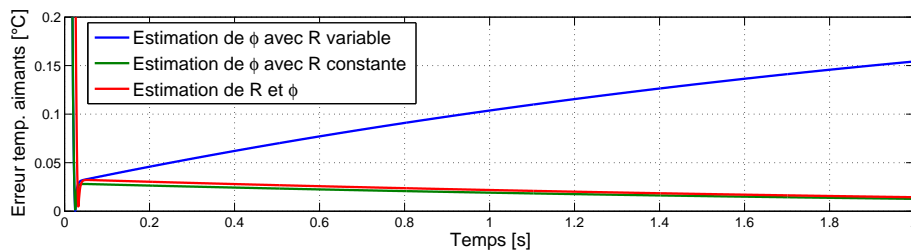
est estimé, avec une résistance qui varie (cas réel, en bleu), du fait de la variation de la température des enroulements (figures B.3(a) et B.3(b)), ou non (cas artificiel, en vert), ou quand flux et résistance variables sont estimés simultanément (cas réel, en rouge).



(a) Estimation du flux



(b) Estimation de la température des aimants



(c) Erreur d'estimation de la température des aimants

FIGURE B.8 – Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance

L'erreur d'estimation de la température des aimants dans les différents cas (figure B.8(c)) nous confirme que l'estimation simultanée de la résistance et du flux évite les problèmes de robustesse à une non prise en compte des variations de résistance, ces problèmes de robustesse restant malgré tout limités.

B.4.2 Cas non bruité : Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux et du choix des paramètres estimés

La figure B.9 compare, dans le cas non bruité, l'estimation de la résistance (figure B.9(a)), traduite en estimation de la température des enroulements (figures B.9(b) et B.9(c)), quand seule la résistance est estimée, avec un flux qui varie (cas réel, en bleu), du fait de la variation de la température des aimants (courbes noires des figures B.8(a) et B.8(b)), ou non (cas artificiel, en vert), ou quand flux et résistance variables sont estimés simultanément (cas réel, en rouge). L'erreur d'estimation de la température des enroulements dans les différents cas (figures B.9(d) et B.9(e)) nous permet de vérifier, en comparant les courbes bleues et vertes, ce que nous avons vu au paragraphe 7.5.5, à savoir que l'estimation de la résistance, et *a fortiori* l'estimation de la température des enroulements, n'est pas robuste à une mauvaise connaissance du flux. En revanche, l'estimation simultanée de la résistance et du flux permet de grandement améliorer l'estimation en se défaisant de ce problème de mauvaise robustesse.

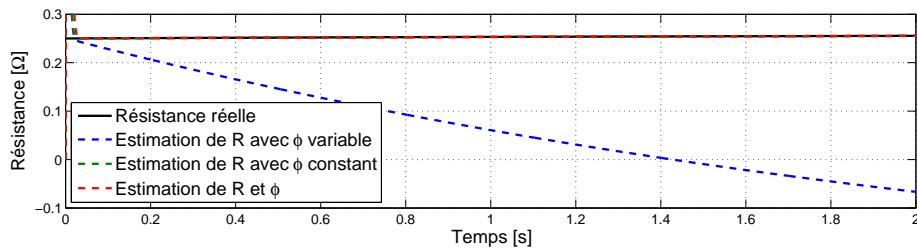
B.4.3 Cas bruité : Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance et du choix des paramètres estimés

La figure B.10 compare, dans le cas bruité, l'estimation du flux (figure B.10(a)), traduite en estimation de la température des aimants (figure B.10(b)), quand seul le flux est estimé, avec une résistance qui varie (cas réel, en bleu), du fait de la variation de la température des enroulements (figures B.3(a) et B.3(b)), ou non (cas artificiel, en vert), ou quand flux et résistance variables sont estimés simultanément (cas réel, en rouge). Si les erreurs d'estimation de la température des aimants (figure B.10(c)) sont un peu plus grandes dans le cas de l'estimation simultanée de la résistance et du flux, l'impact du bruit prenant le pas sur celui de la non prise en compte des variations de résistance, les ordres de grandeurs sont très proches dans les différents cas. On note également que les erreurs d'estimation de la température des aimants sont du même ordre de grandeur avec l'observateur de Kreisselmeier qu'avec l'observateur de Luenberger (figure B.5(c)).

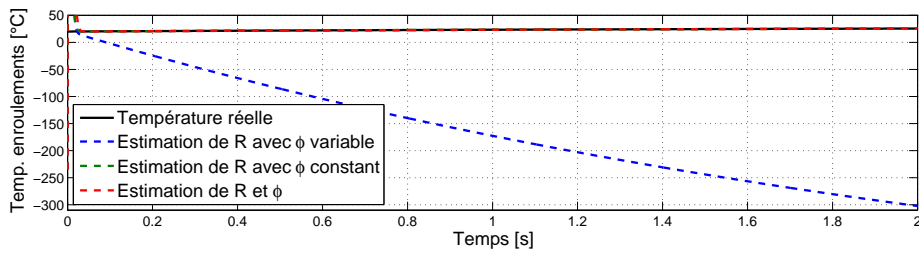
B.4.4 Cas bruité : Estimation de la température des aimants selon le régime

La figure B.11 compare, dans le cas bruité, l'estimation du flux (figure B.11(a)), traduite en estimation de la température des aimants (figure B.11(b)), quand flux et

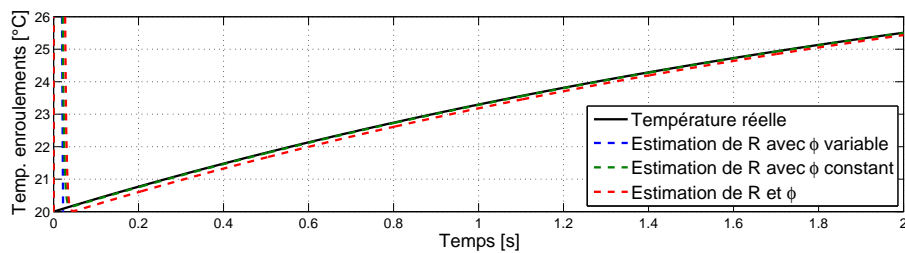
Annexe B. Résultats complémentaires en simulation : estimation de la température et boucle fermée



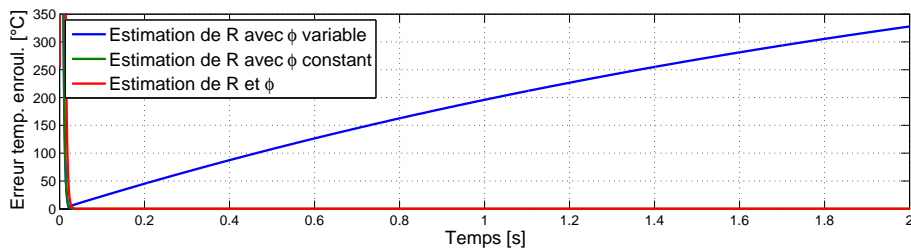
(a) Estimation de la résistance



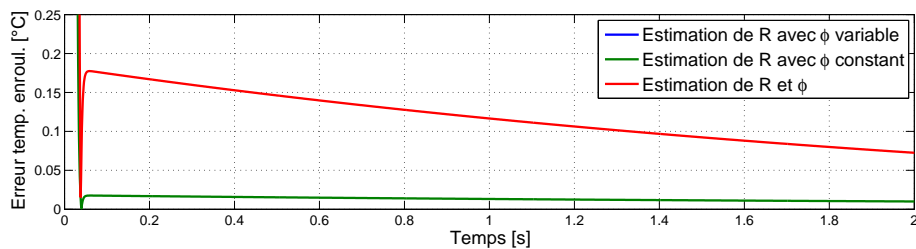
(b) Estimation de la température des enroulements



(c) Estimation de la température des enroulements - Zoom

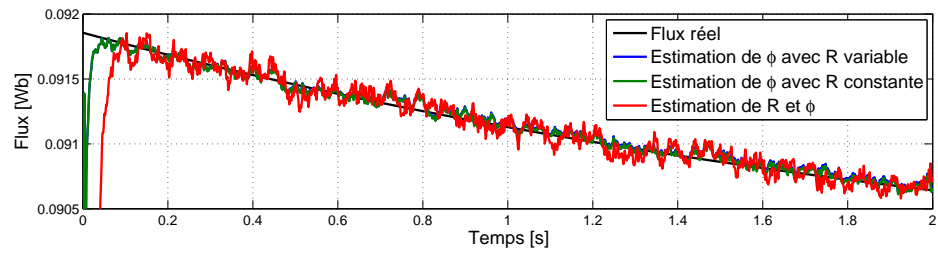


(d) Erreur d'estimation de la température des enroulements

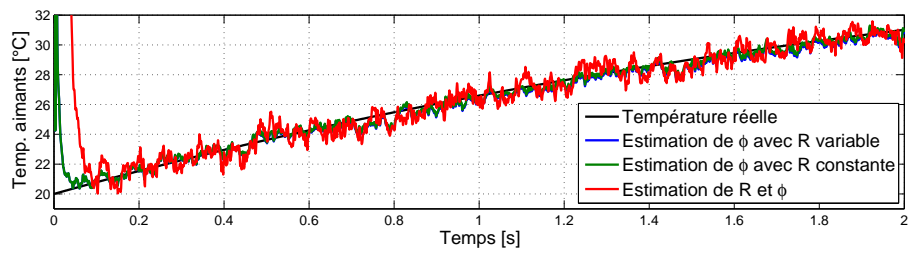


(e) Erreur d'estimation de la température des enroulements - Zoom

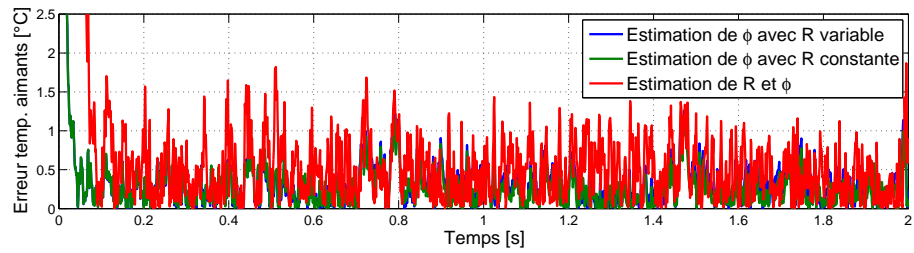
FIGURE B.9 – Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux



(a) Estimation du flux



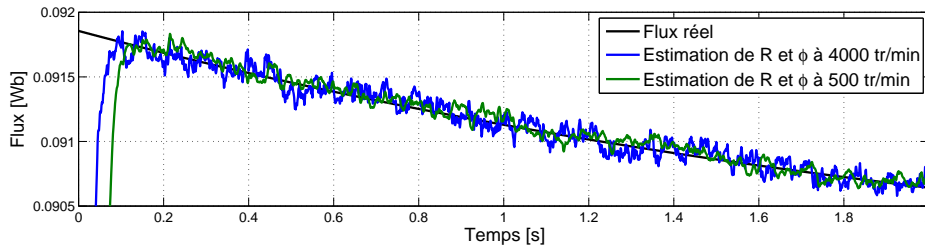
(b) Estimation de la température des aimants



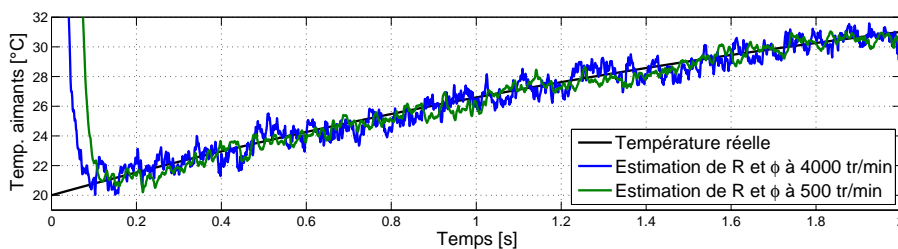
(c) Erreur d'estimation de la température des aimants

FIGURE B.10 – Estimation de la température des aimants et impact de la variation de la résistance

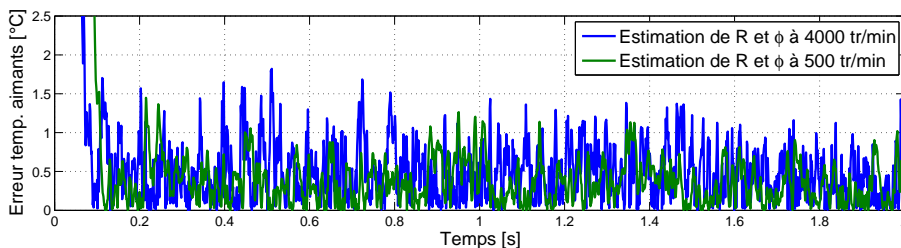
robustesse sont estimés simultanément, à deux régimes différents : 4000 tr/min (en bleu) et 500 tr/min (en vert).



(a) Estimation du flux



(b) Estimation de la température des aimants



(c) Erreur d'estimation de la température des aimants

FIGURE B.11 – Estimation de la température des aimants à bas et haut régimes

L'erreur d'estimation de la température des aimants (figure B.11(c)) est globalement légèrement plus grande pour le régime le plus élevé, mais toujours de l'ordre de 1 ou 1.5°C.

B.4.5 Cas bruité : Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux et du choix des paramètres estimés

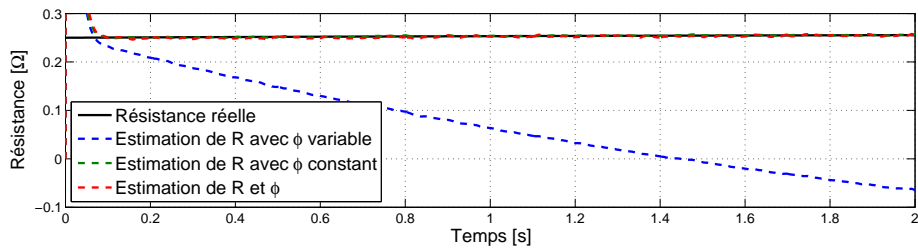
La figure B.12 compare, dans le cas bruité, l'estimation de la résistance (figure B.12(a)), traduite en estimation de la température des enroulements (figures B.12(b) et B.12(c)), quand seule la résistance est estimée, avec un flux qui varie (cas réel, en bleu), du fait de la variation de la température des aimants (courbes noires des figures

B.8(a) et B.8(b)), ou non (cas artificiel, en vert), ou quand flux et résistance variables sont estimés simultanément (cas réel, en rouge). Comme dans le cas non bruité, on vérifie sur les figures d'erreur d'estimation de la température des enroulements (figures B.12(d) et B.12(e)) que l'estimation de la température des enroulements n'est pas robuste à la non prise en compte des variations de flux. L'estimation simultanée de la résistance et du flux permet cependant de grandement améliorer l'estimation mais avec des erreurs d'estimation de la température des enroulements restant toutefois importantes, de l'ordre de 3 ou 4°C.

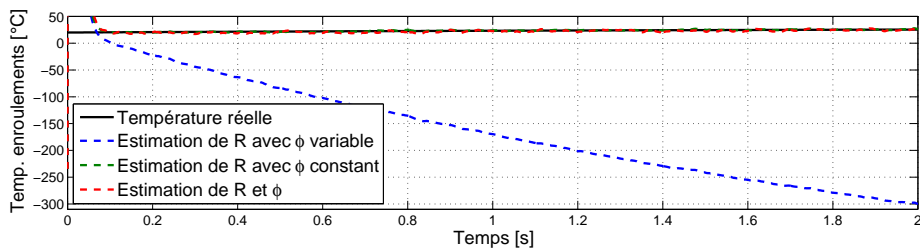
B.4.6 Cas bruité : Estimation de la température des enroulements selon le régime

La figure B.13 compare, dans le cas bruité, l'estimation de la résistance (figure B.13(a)), traduite en estimation de la température des enroulements (figure B.13(b)), quand flux et résistance sont estimés simultanément, à deux régimes différents : 4000 tr/min (en bleu) et 500 tr/min (en vert). L'erreur d'estimation de la température des enroulements (figure B.13(c)) est globalement plus grande pour le régime le plus élevé.

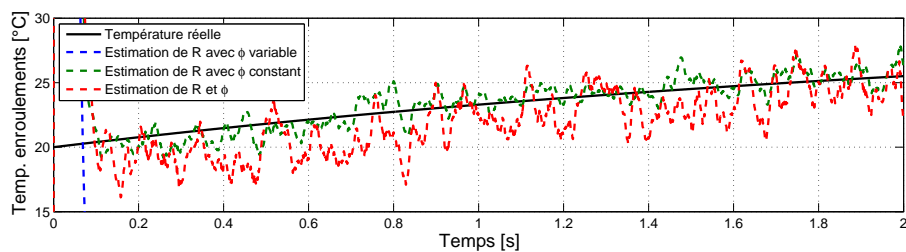
Annexe B. Résultats complémentaires en simulation : estimation de la température et boucle fermée



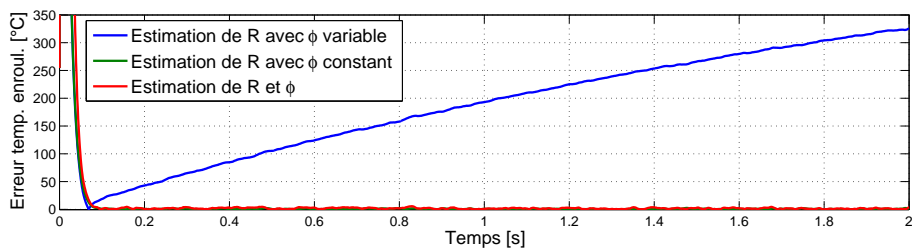
(a) Estimation de la résistance



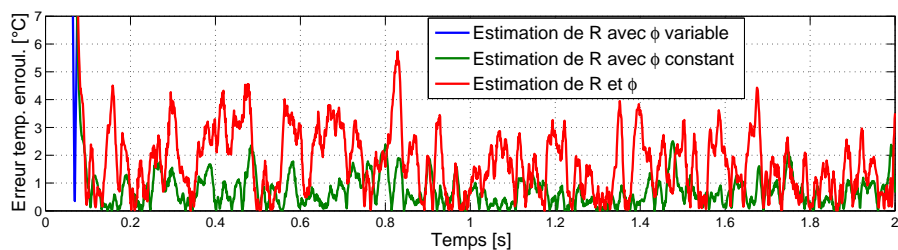
(b) Estimation de la température des enroulements



(c) Estimation de la température des enroulements - Zoom

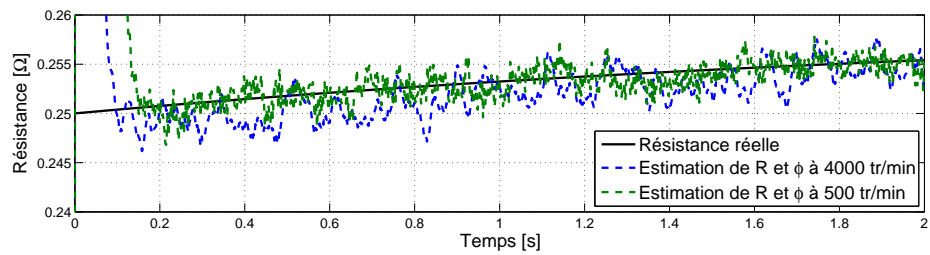


(d) Erreur d'estimation de la température des enroulements

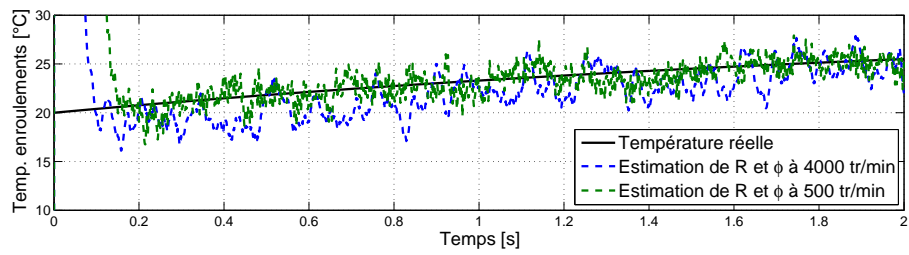


(e) Erreur d'estimation de la température des enroulements - Zoom

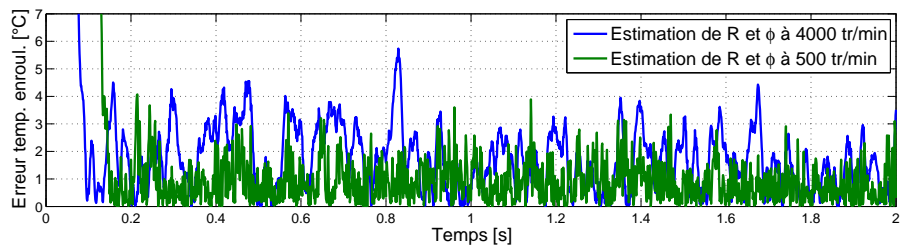
FIGURE B.12 – Estimation de la température des enroulements et impact de la variation du flux



(a) Estimation de la résistance



(b) Estimation de la température des enroulements



(c) Erreur d'estimation de la température des enroulements

FIGURE B.13 – Estimation de la température des enroulements à bas et haut régimes

Annexe C

Publications

Publications

- N. Henwood, J. Malaizé and L. Praly. PMSM Identification for Automotive Applications : Cancellation of Position Sensor Errors. In *Proceedings of the 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society - IECON 2011*, Melbourne, Australia, 7-10 Nov. 2011.
- N. Henwood, J. Malaizé and L. Praly. A Robust Nonlinear Luenberger Observer for the Sensorless Control of SM-PMSM : Rotor Position and Magnets Flux Estimation. In *Proceedings of the 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society - IECON 2012*, Montreal, Canada, 25-28 Oct. 2012.
- J. Malaizé, L. Praly and N. Henwood. Globally Convergent Nonlinear Observer for the Sensorless Control of Surface-Mount Permanent Magnet Synchronous Machines. In *Proceedings of the IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control - CDC 2012*, Maui, HI, USA, 10-13 Dec. 2012.

Brevet

- W. Dib et N. Henwood. Procédé et système de détermination de températures internes d'une machine électrique synchrone au moyen d'observateurs d'état. Référence 6687/00/SK.

Bibliographie

- [1] Unimotor fm - systèmes d'entraînement servo - catalogue technique. Technical Report 4146 fr - 06.2008 / b, Leroy Somer, 2008.
- [2] V. Andrieu and L. Praly. On the existence of a kazantzis–kravaris/luenberger observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(2) :432–456, 2006.
- [3] R. B. Ash and M. F. Gardner. *Topics in stochastic processes*, volume 27. Academic Press New York, 1975.
- [4] T. Batzel and K. Lee. Electric propulsion with the sensorless permanent magnet synchronous motor : model and approach. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 20(4) :818–825, 2005.
- [5] P. Billingsley. *Probability and measure. Third Edition*. John Wiley & Sons, 1995.
- [6] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. Modélisation et identification des processus. edition technip. *Tome 2 Méthodes et Techniques de L'ingénieur*, 1992.
- [7] L. Chédot. *Contribution à l'étude des machines synchrones à aimants permanents internes à large espace de fonctionnement. Application à l'alternateur-démarrateur*. PhD thesis, Université de technologie de Compiègne, 2004.
- [8] J. Chiasson. *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. IEEE Press, 2005.
- [9] S. Constantinides. Understanding and using reversible temperature coefficients. Arnold Magnetic Technologies, 2009.
- [10] M. Coste. Elimination, résultant. discriminant. *Agrégation mathématique de l'université de Rennes*, 1.
- [11] C. D'Andrea and A. Dickenstein. Explicit formulas for the multivariate resultant. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164(1) :59–86, 2001.

- [12] G. Demetriades, H. de la Parra, E. Andersson, and H. Olsson. A real-time thermal model of a permanent-magnet synchronous motor. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 25(2) :463–474, 2010.
- [13] W. Dib, R. Ortega, and J. Malaizé. Sensorless control of permanent-magnet synchronous motor in automotive applications : Estimation of the angular position. In *IECON 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pages 728–733. IEEE, 2011.
- [14] J. L. Doob. *Stochastic processes*, volume 101. New York Wiley, 1953.
- [15] A. El Magri, F. Giri, G. Besançon, A. El Fadili, L. Dugard, and F. Z. Chaoui. Sensorless adaptive output feedback control of wind energy systems with pms generators. *Control Engineering Practice*, 2012.
- [16] J. Gauthier and I. Kupka. *Deterministic observation theory and applications*. Cambridge Univ Pr, 2001.
- [17] F. Genduso, R. Miceli, C. Rando, and G. Galluzzo. Back emf sensorless-control algorithm for high-dynamic performance pmsm. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(6) :2092–2100, 2010.
- [18] D. Giancoli. "27. Current and Resistance". In *Physics for scientists & engineers with modern physics*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 2009.
- [19] M. Hamida, J. De Leon, A. Glumineau, and R. Boisliveau. Adaptive interconnected observer for sensorless control of pm synchronous motors with online parameters identification. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 60, Issue 2 :739–748, 2013.
- [20] M. Hinkkanen, T. Tuovinen, L. Harnefors, and J. Luomi. A combined position and stator-resistance observer for salient pmsm drives : design and stability analysis. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, (99) :1–1, 2012.
- [21] S. Ichikawa, M. Tomita, S. Doki, and S. Okuma. Sensorless control of permanent-magnet synchronous motors using online parameter identification based on system identification theory. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 53(2) :363–372, 2006.
- [22] A. Jebai, F. Malrait, P. Martin, and P. Rouchon. Estimation of saturation of permanent-magnet synchronous motors through an energy-based model. In *Electric Machines & Drives Conference (IEMDC), 2011 IEEE International*, pages 1316–1321. IEEE, 2011.

-
- [23] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using lyapunov auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5) :241–247, 1998.
- [24] G. Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 22(1) :2–8, 1977.
- [25] S.-B. Lee, T. G. Habetler, R. G. Harley, and D. J. Gritter. An evaluation of model-based stator resistance estimation for induction motor stator winding temperature monitoring. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 17(1) :7–15, 2002.
- [26] D. R. Lide. *CRC Handbook of Chemistry and Physics 2004-2005 : A Ready-Reference Book of Chemical and Physical Data*. CRC press, 2005.
- [27] Y. Linnik. *Méthode des moindres carrés*. Dunod, 1963.
- [28] K. Liu, Q. Zhang, J. Chen, Q. Zhu, J. Zhang, and A. Shen. Online Multi-parameter Estimation of Non-salient Pole PM Synchronous Machines with Temperature Variation Tracking. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 58(99) :1776–1788, 2010.
- [29] L. Liu and D. Cartes. Synchronisation based adaptive parameter identification for permanent magnet synchronous motors. *Control Theory & Applications, IET*, 1(4) :1015–1022, 2007.
- [30] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *Military Electronics, IEEE Transactions on*, 8(2) :74–80, 1964.
- [31] J. Malaize, W. Dib, and I. N. Energy. A sensorless-based control scheme to enhance the accuracy of position encoders used in permanent magnet synchronous motors for automotive applications. *Training*, 2005 :07–01.
- [32] J. Malaize, W. Dib, and S. Toru. Adaptive torque control of permanent magnet synchronous motors in automotive applications. In *Vehicle Power and Propulsion Conference*, Lille, September 2010.
- [33] J. Malaizé, L. Praly, and N. Henwood. Globally convergent nonlinear observer for the sensorless control of surface-mount permanent magnet synchronous machines. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 5900–5905. IEEE, 2012.
- [34] F. Malrait. *Problèmes d’identification et d’observabilité du moteur à induction pour la variation de vitesse industrielle’sans capteur’*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.

- [35] P. Milanfar and J. Lang. Monitoring the thermal condition of permanent-magnet synchronous motors. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 32(4) :1421–1429, 1996.
- [36] S. Moreau, R. Kahoul, and J. Louis. Parameters estimation of permanent magnet synchronous machine without adding extra-signal as input excitation. In *Industrial Electronics, 2004 IEEE International Symposium on*, volume 1, pages 371–376. IEEE, 2004.
- [37] B. Nahid-Mobarakeh, F. Meibody-Tabar, and F. Sargos. Mechanical sensorless control of pmsm with online estimation of stator resistance. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 40(2) :457–471, 2004.
- [38] K. Narendra and A. Annaswamy. Stable adaptive systems, 1989. *Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, New Jersey*. *Autom*, 5(2) :183–201, 1989.
- [39] S. OMATU, A. KIKUCHI, and T. SOEDA. The optimal smoothing estimators based on the wiener-hopf theory. *International Journal of Systems Science*, 10(11) :1203–1217, 1979.
- [40] R. Ortega, L. Praly, A. Astolfi, J. Lee, and K. Nam. Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 19(3) :601–614, 2011.
- [41] N. Petit and P. Rouchon. *Automatique - Dynamique et contrôle des systèmes*. MINES ParisTech - CAS - Centre Automatique et Systèmes, 2010.
- [42] F. Poulain, L. Praly, and R. Ortega. An observer for permanent magnet synchronous motors with currents and voltages as only measurements. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 5390–5395. IEEE, 2008.
- [43] M. Preindl and E. Schartz. Sensorless model predictive direct current control using novel second-order pll observer for pmsm drive systems. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 58(9) :4087–4095, 2011.
- [44] S. Richter and R. DeCarlo. Continuation methods : Theory and applications. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 28(6) :660–665, 1983.
- [45] A. Shoshitaishvili. Singularities for projections of integral manifolds with applications to control and observation problems. *Advances in Soviet Mathematics*, 1 :295–333, 1990.

- [46] A. Specht and J. Böcker. Observer for the rotor temperature of IPMSM. In *Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC), 2010 14th International*, pages T4–12. IEEE.
- [47] K. S. Tsakalis and P. A. Ioannou. *Linear time-varying systems : control and adaptation*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [48] N. Urasaki, T. Senjyu, and K. Uezato. Investigation of influences of various losses on electromagnetic torque for surface-mounted permanent magnet synchronous motors. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 18(1) :131–139, 2003.
- [49] S. Wilson, P. Stewart, and B. Taylor. Methods of resistance estimation in permanent magnet synchronous motors for real-time thermal management. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 25(3) :698–707, 2010.
- [50] X. Xiao, C. Chen, and M. Zhang. Dynamic Permanent Magnet Flux Estimation of Permanent Magnet Synchronous Machines. *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, 20(3) :1085–1088, 2010.
- [51] Z. Zhang and J. Feng. Sensorless control of salient pmsm with ekf of speed and rotor position. In *Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, pages 1625–1628. IEEE, 2008.
- [52] Z. Zhu, X. Zhu, P. Sun, and D. Howe. Estimation of winding resistance and PM flux-linkage in brushless AC machines by reduced-order extended Kalman Filter. In *Networking, Sensing and Control, 2007 IEEE International Conference on*, pages 740–745. IEEE.

Estimation en ligne de paramètres de machines électriques pour véhicule en vue d'un suivi de la température de ses composants

RESUME : Afin de rendre compétitifs les véhicules hybrides ou tout électriques, l'amélioration des performances des machines électriques embarquées est primordiale. Dans cette optique, le travail présenté s'intéresse en particulier à l'estimation en ligne des variations de température au sein d'une machine synchrone à aimants permanents. De ce fait, nous proposons d'estimer les paramètres physiques dépendants de la température, à savoir la résistance des enroulements et le flux des aimants. La connaissance des variations de température ou de ces paramètres permet en effet d'éviter une dégradation des performances en adaptant le contrôle en couple et de mettre en place une surveillance thermique autorisant notamment une meilleure disponibilité de la machine, sans risque d'endommagement. Pour répondre à ce double objectif, nous proposons deux observateurs de paramètres basés sur une modélisation réaliste de la machine. Nous établissons donc, en premier lieu, un modèle électrique du moteur qui tient compte de possibles différences entre signaux mesurés et exacts et garantit la robustesse des observateurs aux paramètres mécaniques. Un algorithme d'identification hors ligne des paramètres est proposé pour valider le modèle. Puis, basé sur ce modèle réaliste, les deux observateurs proposés, dit de Luenberger et de Kreisselmeier, estiment respectivement, suivant certaines conditions d'observabilité, le flux et la position pour le premier et un ou plusieurs paramètres parmi la résistance, le flux et l'inductance pour le second. Ces observateurs n'utilisent que les mesures de courant et de tension, ainsi qu'une mesure de position pour l'observateur de Kreisselmeier. Des études théoriques et en simulation sont menées pour valider le fonctionnement des observateurs et appréhender au mieux leurs réglages. En particulier, nous présentons une étude évaluant l'impact du bruit de mesure sur l'observateur de Luenberger afin d'améliorer sa robustesse au bruit sur une large plage de régime. Finalement, l'implémentation des observateurs sur différents bancs d'essais fournit des résultats prometteurs, tant pour l'estimation des paramètres que pour la faisabilité d'estimer les variations de température.

Mots-clés : MSAP, Observateurs, Modélisation, Identification, Sensorless thermique, Analyses de robustesse, Contrôle en couple de machines électriques

Online estimation of electric motors parameters for tracking of its components temperature in automotive applications

ABSTRACT: To make hybrid and full electric vehicles competitive, the performance enhancement of the embedded electric motors is essential. For this purpose, the presented work focuses in particular on the online estimation of temperature variations inside a permanent magnet synchronous motor. Therefore, we propose to estimate the temperature dependant parameters, namely the winding resistance and the magnet flux. The knowledge of these parameters or their temperature variations allows indeed to avoid performance degradation by adapting the torque control and makes possible a thermal monitoring, especially for machine availability improvement without risk of damage. Aiming at this double objective, we propose two parameter observers based on a realistic model of the machine. Thus, we first consider an electrical model of the motor that takes account of possible differences between measured and exact signals and ensures robustness to the mechanical parameters. An offline least squares algorithm for parameters identification is proposed to validate the model. Then, based on this realistic model, we design two observers, called Luenberger and Kreisselmeier. According to some observability conditions, the first one estimates the flux and position while the latter estimates one or several parameters among resistance, flux and inductance. These observers use the currents, voltages, and position for the Kreisselmeier observer, as only measurements. Theoretical and simulation studies are conducted on the observers to validate their efficiency and for a better understanding of their setting parameters. In particular, we present a study assessing the measurement noise impact on the Luenberger observer to improve its robustness to noise over a wide speed range. Finally, the implementation of the observers on different test benches provides promising results, both on parameters estimation and on the feasibility of temperature variations estimation.

Keywords: PMSM, Observers, Modeling, Identification, Temperature sensorless, Robustness analyses, Torque control of electric motors