



**HAL**  
open science

# Création et caractérisation d'une source ajustable de paires d'atomes corrélés

Josselin Ruaudel

► **To cite this version:**

Josselin Ruaudel. Création et caractérisation d'une source ajustable de paires d'atomes corrélés. Autre [cond-mat.other]. Institut d'Optique Graduate School, 2013. Français. NNT : 2013IOTA0003 . pastel-00961194

**HAL Id: pastel-00961194**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00961194v1>**

Submitted on 19 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

ÉCOLE DOCTORALE ONDES ET MATIERE

*DISCIPLINE : Physique*

**THÈSE**

**pour l'obtention du grade de Docteur en science de l'Institut  
d'Optique Graduate School**

préparée au Laboratoire Charles Fabry

soutenue le 11/12/2013

par

**Josselin RUAUDEL**

Création et caractérisation d'une source  
ajustable de paires d'atomes corrélés.

**Directeur de thèse :** Denis BOIRON – Laboratoire Charles Fabry

*Composition du jury :*

*Présidente du Jury :* Jacqueline BLOCH – Laboratoire de Photonique et de Nanostructures  
*Rapporteurs :* David GUERY-ODELIN – Laboratoire de Collisions - Agrégats - Réactivité  
Nicolas TREPS – Laboratoire Kastler Brossel  
*Examineurs :* Christoph WESTBROOK – Laboratoire Charles Fabry  
Denis BOIRON – Laboratoire Charles Fabry



# Remerciements

Il est évident que l'ensemble des travaux décrits dans cet ouvrage doit beaucoup à toute l'équipe et à l'ensemble des doctorants, post-doctorants et permanents ayant travaillé sur l'expérience. C'est donc *sur l'épaule de ces géants* que j'ai pu me hisser pour obtenir les résultats présentés ici.

J'ai eu la chance d'être accueilli au laboratoire Charles Fabry et je tiens à remercier Christian CHARDONNET qui en était le directeur.

Ma thèse s'est déroulée sous la direction de Denis BOIRON qui a été pour moi le directeur de thèse parfait : toujours présent mais jamais envahissant. Son implication et son dévouement sont des atouts précieux qui m'ont permis de garder espoir même dans les périodes les plus difficiles. Je le remercie pour son soutien, ses conseils et sa disponibilité. Je garde un très bon souvenir des longues discussions au cours desquelles nous avons tenté (souvent en vain) d'expliquer le comportement erratique de l'expérience qui, du jour au lendemain, décidait unilatéralement d'arrêter de fonctionner.

Je remercie également Chris WESTBROOK qui dirige l'équipe Hélium métastable dans la joie et la bonne humeur. C'est lui qui le premier m'a fait découvrir l'expérience et m'a donné envie de me lancer dans cette aventure de trois années. Il m'a également appris à relativiser les échecs et célébrer les avancées aussi petites soient elles. Toujours plein d'idées de manip' en tête, il fait avancer l'expérience et c'est en grande partie grâce à lui que ce vénérable dispositif (presque 20 ans!) continu de fournir des résultats à la pointe de la recherche.

Le groupe d'Optique Atomique peut compter sur son charismatique leader Alain "Big Moustache" ASPECT qui, malgré ces nombreuses responsabilités, continue à suivre les progrès des différentes équipes. Ses questions faussement naïves en réunion de groupes nous poussent à réfléchir et prendre du recul sur nos résultats. Un grand merci à lui pour m'avoir accueilli dans son groupe.

Fraîchement recrutés, David CLÉMENT et Marc CHENEAU ont l'un après l'autre passé plus d'un an sur l'expérience avant de se lancer dans l'élaboration de nouvelles expériences. Grâce à leur savoir-faire et leur point de vue différent nous avons grandement progressé. La nouvelle expérience d'Hélium

métastable dirigée par David est maintenant bien avancée, mais le chemin vers la condensation est encore long et semé d'embûches. L'expérience de Marc n'en est qu'à son commencement, mais je lui fait confiance pour mener à bien son projet. À tous les deux merci et bon courage !

En arrivant dans l'équipe Jean-Christophe JASKULA et Marie BONNEAU m'ont immédiatement pris sous leurs ailes. Je n'étais alors qu'un jeune stagiaire apeuré et ils m'ont initié à la prise et analyse de données. C'est ensemble que nous avons refait entièrement la table optique. J'ai à cette occasion subit le bizutage obligatoire du thésard en optique : l'injection de fibre. La maîtrise qu'avait Jean-Christophe de l'expérience était remarquable et sa rapidité pour trouver les bugs m'a toujours impressionné. Je lui suis reconnaissant de m'avoir transmis une partie de son savoir et de ses techniques. Néanmoins je le maudis pour toutes les fois où l'odeur d'électroniques brûlées de son thé au caramel m'a conduit au bord de la crise de panique sous son regard amusé. Le calme de Jean-Christophe contraste avec l'énergie débordante de Marie. Il m'a fallu un petit temps d'adaptation pour m'habituer au débit mitrailleuse de Marie. Son éloquence supersonique ne l'a jamais empêché de prendre le temps d'analyser les problèmes dans leurs moindres détails. C'est grâce à sa rigueur que de nombreux effets subtils ont pu être découverts alors qu'ils étaient passés inaperçus aux yeux du reste de l'équipe. La plupart des résultats de ce mémoire ont été obtenus avec Marie et sa thèse fut pour moi un modèle.

Raphaël LOPES est arrivé au court de ma première année de thèse et s'est acharné sur l'alignement d'un nouveau piège dipolaire pendant toute la durée de son stage de master. C'est au bord de la déprime qu'il est parti en vacances... pour revenir quelques mois plus tard en thèse alors que l'expérience était en panne depuis presque 3 mois. Autant dire que son doctorat n'a pas débuté sous les meilleurs auspices. Après deux mois supplémentaires de vaines tentatives de réparation, nous en sommes venu à envisager l'utilisation de la magie vaudou et des puissances occultes pour obtenir un condensat convenable. L'expérience a finalement fini par tomber en marche pour des raisons qui restent à ce jour inconnues, néanmoins cette longue "période noire" a contribué à nous rapprocher. Raphaël et moi partageons des manières de travailler proches ce qui nous a permis, je pense, de former un binôme efficace tant en salle de manip' que lors de l'analyse des données. Bien évidemment, l'expérience a continué de nous mettre à l'épreuve régulièrement assistée dans sa tâche par une armée de lézards dépressifs, de souris mangeuses d'hommes et de ninjas coupeurs de câbles. J'espère que les hectolitres quotidiens de café que Raphaël ingurgite lui permettrons de lutter contre ces menaces.

Pour l'assister dans sa tâche, il peut maintenant compter sur l'aide précieuse d'Almazbek IMANALIEV, qui nous a rejoint à la fin de ma deuxième année de thèse. Grâce à son travail nous avons enfin pu publier un article

sur la superadiance qui "traînait dans les cartons" depuis plusieurs années. Au moment de mon départ Almaz était devenu autonome sur l'expérience et nuls doutes que le duo de choc Raphael/Almaz va être à l'origine de très beaux résultats. Un grand merci pour les bons moments ensembles, puisse le *doigté magique* être avec eux!

Bien évidemment, je tiens également à remercier l'ensemble des membres du groupe d'optique atomique qui ont tous contribué à la superbe ambiance de travail du labo.

L'équipe Pince : Vincent, Fred, Killian et Jérémie,

l'équipe Ice : Rémi, Vincent et Pierre-Alain,

l'équipe Helium bis : David , Lynn, Yami et Quentin.

l'équipe Biaro : Andrea, Thomas V, Ralf et Étienne,

les Krübar : Thomas B, Thomas P, Baptiste, Guillaume et Lauriane,

l'équipe Atom Ship : Isabelle, Thibault, Bess et Ashling,

et les théoriciens fous : Laurent, Giuseppe, Marie, Samuel, Guilhem, Lorenzo.

Un grand merci aux électroniciens, Frédéric MORON et André VILLING sans qui rien ne fonctionnerait. La patience de Fred avec la horde de thésards de l'équipe est remarquable. Je tiens également à remercier les mécaniciens, et en particulier André, qui grâce à leur savoir-faire, facilitent grandement notre travail d'expérimentateurs.

Le doctorat fût également pour moi l'occasion d'enseigner à l'Institut d'Optique. En tant qu'ancien élève de l'école, j'ai ainsi pu découvrir l'envers du décor. Je remercie l'ensemble de l'équipe enseignante, d'une part pour les cours que j'ai pu recevoir et d'autre part pour m'avoir accueilli en leur sein. Je remercie en particulier Lionel, Thierry, Cédric, Gaétan et Jean-Marie.

Ce mémoire a été rapporté par David GUÉRY-ODELIN et Nicolas TREPS. Je leur suis très reconnaissant pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de thèse. Je remercie également Jacqueline BLOCH d'avoir bien voulu faire partie de mon Jury et d'avoir apporté son point de vue externe au domaine.

Enfin, je remercie mes amis et ma famille pour leur soutien tout au long de ma thèse. Merci : Eric, Marc, Véronique, Aurélie, Christophe, Sébastien, Aude, Chloé, Camille, Aurore, Gérard, Virginie, Raphaël, Roman, Tahina, Morgane, Papa, Maman, Clem's, Pierre, Jeannette, ma chérie Églantine et Roxane mon petit chameau.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Paires de particules corrélées</b>	<b>5</b>
1.1 Création des paires . . . . .	5
1.1.1 Conversion paramétrique . . . . .	6
1.1.2 Mélange à quatre ondes . . . . .	7
1.1.3 Conclusion . . . . .	8
1.2 Propriétés des paires . . . . .	9
1.2.1 Corrélations . . . . .	9
1.2.2 Fluctuations de la différence du nombre de particules .	16
1.2.3 Conclusion . . . . .	20
1.3 Paires de photons en optique quantique . . . . .	20
1.3.1 Effet Hong, Ou et Mandel . . . . .	20
1.3.2 Interférométrie sous la limite quantique standard . . . .	23
1.3.3 Inégalité de Bell . . . . .	26
1.4 Mélange à quatre ondes de matière . . . . .	28
1.4.1 Éléments théoriques . . . . .	29
1.4.2 Collision en espace libre . . . . .	30
1.4.3 Mélange à quatre ondes dans un réseau optique . . . . .	33
1.5 Conclusion du chapitre . . . . .	35
<b>2 Effets et mise en place d'un réseau</b>	<b>37</b>
2.1 Les réseaux, un outils pour les atomes froids . . . . .	38
2.2 Effet d'un potentiel périodique . . . . .	40
2.2.1 Création d'un réseau optique . . . . .	40



2.2.2	États propres et bandes d'énergie . . . . .	41
2.2.3	Diffraction d'onde de matière par un réseau : cas de la diffraction de Bragg . . . . .	44
2.2.4	Conclusion sur l'effet d'un potentiel périodique . . . . .	46
2.3	Mélange à quatre ondes et conditions d'accord de phase . . . . .	47
2.4	Mise en place expérimentale du réseau optique . . . . .	49
2.4.1	Le banc optique . . . . .	49
2.4.2	Alignement sur le nuage atomique . . . . .	52
2.4.3	Calibration du réseau . . . . .	54
2.5	Création de paires, premiers résultats . . . . .	58
2.5.1	Distribution d'impulsions . . . . .	59
2.5.2	Conditions d'accord de phase . . . . .	59
2.5.3	Conclusion sur les premiers résultats expérimentaux . . . . .	60
2.6	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Caractérisation de la source</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1	Effet du champ moyen . . . . .	63
3.1.1	Correction a posteriori des conditions d'accord de phase . . . . .	64
3.1.2	Résolution numérique des conditions d'accord de phase . . . . .	65
3.2	Effets transverses . . . . .	76
3.2.1	Sans confinement transverse . . . . .	77
3.2.2	Avec confinement transverse . . . . .	77
3.2.3	Conclusion sur l'effet du confinement transverse . . . . .	81
3.3	Corrélations et réduction des fluctuations . . . . .	83
3.3.1	Corrélations . . . . .	83
3.3.2	Réduction du bruit sur la différence du nombre d'atomes . . . . .	92
3.3.3	Conclusion sur les propriétés statistiques . . . . .	95
3.4	Dynamique du processus . . . . .	97
3.4.1	Saturation du processus . . . . .	97
3.4.2	Simulation numérique de la dynamique . . . . .	99
3.4.3	Conclusion sur l'évolution temporelle . . . . .	108
3.5	Conclusion . . . . .	109

<b>4</b>	<b>Vers un effet Hong, Ou et Mandel</b>	<b>111</b>
4.0.1	L'effet d'une séparatrice sur des états quelconques . . .	112
4.0.2	Mise en place expérimentale . . . . .	120
4.0.3	Conclusion . . . . .	121
	<b>Conclusion</b>	<b>125</b>
	<b>Articles</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>155</b>
A.1	Condensat d'hélium . . . . .	156
A.1.1	La source d'hélium métastable . . . . .	156
A.1.2	Ralentissement et piège magnétique . . . . .	157
A.1.3	Piège dipolaire et obtention d'un condensat . . . . .	158
A.2	Un système de détection original . . . . .	160
A.2.1	La galette à micro-canaux . . . . .	160
A.2.2	Les lignes à retard . . . . .	161
A.2.3	Remarque sur la résolution verticale . . . . .	162
A.2.4	Expansion et reconstruction en vitesse . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Hong, Ou et Mandel, cas général</b>	<b>167</b>
B.1	Moyenne de $\hat{A}$ , $\hat{B}$ et variance de $\hat{C}$ . . . . .	168
B.1.1	Moyenne de $\hat{A}$ . . . . .	169
B.1.2	Moyenne de $\hat{B}$ . . . . .	169
B.1.3	variance de $\hat{C}$ . . . . .	169
B.2	Dénominateurs : $\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle^2$ et $\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle \langle \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle$ . . . . .	170
B.3	Moyenne de $f(\hat{N}_A, \hat{N}_B) \hat{X}$ . . . . .	170
B.4	Moyenne de $\hat{X}^2$ . . . . .	171
B.5	Effet de la détectivité . . . . .	172
B.6	Exemples . . . . .	172
B.6.1	Sorties indiscernables d'un amplificateur paramétrique	172
B.6.2	Sorties distinctes de deux amplificateurs paramétriques	173
B.6.3	États cohérents corrélés . . . . .	173
B.6.4	États cohérents indépendants . . . . .	173
	<b>Bibliographie</b>	<b>174</b>



# Introduction

No-one knows the reason for all  
this, but it is probably quantum.

---

*Pyramids*  
Terry Pratchett

En entamant ma thèse dans les atomes froids, je ne m’attendais pas à mettre les pieds dans un domaine aussi riche et varié. Ce domaine est né grâce au développement des techniques de refroidissement laser il y a une trentaine d’années [MS03] et a connu un essor important amenant une diversité extraordinaire des phénomènes étudiés. La mise en place du refroidissement évaporatif a permis d’atteindre, à la fin des années 90, la dégénérescence quantique avec l’obtention des premiers condensats de Bose-Einstein [And+95] et des premières mers de Fermi [DJ99].

Les nuages d’atomes ultra-froids constituent des systèmes extrêmement purs et bien contrôlés qui permettent de simuler la matière condensée. En effet, pour étudier de la supra-conductivité, par exemple, il est très difficile d’observer le comportement des électrons dans les solides, les mesures in-situ sont délicates et les comportements observés dépendent énormément des défauts immanquablement présents au sein de l’échantillon. Grâce aux atomes froids il est possible d’accéder aux comportements microscopiques, on peut également contrôler la forme du potentiel ressenti par les atomes à l’aide de champs magnétiques ou de la force dipolaire électrique [GWO00], contrôler les interactions inter-atomiques grâce aux résonances de Feshbach [Fes58 ; Fes62 ; TVS93], ajouter des impuretés en utilisant plusieurs espèces atomiques et depuis peu, plusieurs équipes produisent des champs de jauges artificiels pour étudier le magnétisme [Dal+11].

Un autre pan important du domaine est la métrologie avec la création d’horloges atomiques [Biz+05], d’accéléromètres, de senseurs inertiels, de gravimètres [Yve+03] et plus généralement d’interféromètres atomiques [CM91 ; Kei+91]. Les très basses températures garantissent alors une faible expansion des nuages autorisant ainsi des temps d’interrogations importants permettant d’atteindre des précisions sans précédent. Ainsi, des horloges

atomiques à travers le monde sont utilisées pour définir le Temps Atomique International.

Une autre application des atomes froids dont le succès ne cesse de grandir est le développement des analogues aux phénomènes relativistes. En effet, les équations de l'hydrodynamique dans les condensats de Bose-Einstein sont formellement équivalentes aux équations de champ dans un espace-temps courbe [Unr81]. Il est par exemple potentiellement possible de créer un trou "muet" analogue à un trou noir pour les ondes sonores. Sur notre dispositif, un projet de recherche entamé par J-C. Jaskula et G. Partridge et maintenant poursuivi par mon compère Raphaël Lopes en parallèle de ma thèse se focalise d'ailleurs sur la réalisation d'un analogue à l'effet Casimir dynamique. J'ai un peu contribué à cette étude mais comme il ne s'agit pas du cœur de mon sujet de thèse, j'ai choisi de ne pas aborder ces travaux dans ce manuscrit. Les lecteurs intéressés peuvent lire l'article publié à ce sujet [Jas+12] et, le moment venu, pourront s'intéresser au manuscrit de Raphaël Lopes (probablement disponible dès 2015 dans toutes les bonnes librairies ou presque).

Mes travaux de thèse quant à eux, se place dans le cadre de l'optique atomique quantique dont l'objectif est la production, puis la manipulation, d'états non-classiques de la matière. L'optique quantique "photonique" est une forte source d'inspiration puisque la recherche sur la création d'états quantiques de la lumière a commencé dès la réalisation des premiers laser dans les années 60 et a donc presque trente ans d'avance sur les atomes froids dans ce domaine. Les sources de photons corrélés sont à la base de très nombreux protocoles de calculs et de cryptographie quantique [ADR82; Wei+98; Eke91; KLM01] et sont maintenant très bien contrôlées contrairement à leurs équivalents atomiques qui sont au centre des recherches actuelles [Bon+13; Jas+10; Büc+11; Gre+05]. L'un des avantages à travailler avec des atomes est la présence d'interactions qui rendent l'observation des processus non-linéaires beaucoup plus aisée et par conséquent rendent la création d'état non classiques plus accessible. Pour créer de tels états de la matière, il est possible d'utiliser des ions qui sont facilement manipulables par des champs électriques grâce à leur charge. Ainsi, l'intrication de plusieurs ions (jusqu'à 14!) a pu être démontrée [Mon+11; Row+01; BW08]. Mais il est tout à fait envisageable de travailler avec des atomes neutres, certes moins facilement manipulables mais pour lesquels on peut obtenir des populations importantes avec typiquement  $10^5$  atomes dans les condensats de Bose-Einstein. Cela permet de se placer aussi bien dans des régimes "macroscopiques" avec des états à beaucoup de corps que dans des régimes "microscopiques" où l'on peut travailler avec très peu d'atomes en moyenne. Dans tous les cas, l'obtention d'une source robuste et contrôlable de paires d'atomes corrélés est une étape incontournable du développement de l'information quantique atomique et c'est ce qui a motivé nos recherches sur le mélange à quatre ondes

dans un réseau optique. Ce processus dont nous allons largement parler tout au long du manuscrit semble en effet un candidat idéal à la réalisation d'une source d'atomes corrélés.

Avant mon arrivée l'équipe avait déjà démontré la création de paires d'atomes fortement corrélés grâce à la collision de deux condensats de Bose-Einstein en espace libre. Malgré la preuve du caractère non-classique de l'état obtenu, de nombreuses limitations sont rapidement apparues. En effet, les paires d'atomes se répartissent dans de très nombreux modes et la population dans chaque mode est en moyenne très faible (de l'ordre de 0.01 atome par mode) et de plus n'est pas facilement réglable. Voilà pourquoi il a été décidé de mettre en place un nouveau dispositif pour dépasser ces limitations. Grâce à l'utilisation d'un potentiel périodique, il est possible de produire spontanément des paires d'atomes dans un nombre limité de modes bien définis [HM05] et obtenir ainsi des faisceaux corrélés de forte intensité.

En débutant mon stage de fin de master sur l'expérience, j'ai eu la chance d'arriver au tout début de ce nouveau projet reposant sur l'utilisation d'un réseau optique et j'ai ainsi pu suivre et participer à son développement depuis le départ. Nous avons installé au court de l'été 2010 un réseau optique, puis nous l'avons caractérisé.

Nous avons ensuite étudié le mélange à quatre ondes dans le réseau et observé le peuplement préférentiel de quelques modes comme prédit par la théorie [HM05] et en accord avec une première observation expérimentale [Cam+06]. Ces résultats sont présentés dans la thèse de Marie Bonneau [Bon11] avec qui j'ai pu travailler une grande partie de mon doctorat. Nous avons alors cherché à comprendre en profondeur les processus en jeu en étudiant l'accordabilité, la dynamique et la statistique de cette nouvelle source ce qui a nécessité une analyse complexe des données expérimentales et la réalisation de modèles numériques adaptés à notre système. L'expérience s'oriente maintenant vers la manipulation de ces atomes jumeaux en vue de réaliser un équivalent atomique de l'effet Hong, Ou et Mandel [HOM87] et ainsi de démontrer le potentiel de notre source pour la réalisation de protocoles d'optique atomique quantique complexes.

## Plan de ce manuscrit

Dans le **premier chapitre** nous nous intéresserons aux paires de particules fortement corrélées en étudiant les effets non-linéaires (conversion paramétrique et mélange à quatre ondes) qui permettent de les produire. Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés statistiques spécifiques de ces paires, propriétés que nous chercherons à retrouver lors de la caractérisation de notre source, puis nous illustrerons l'utilité de ces paires au travers d'exemples marquants utilisant des photons. Ces derniers constituent

une source d'inspiration importante pour l'utilisation future des paires atomiques. Enfin nous présenterons le mélange à quatre ondes de matière qui est le processus vers lequel nous nous sommes tournés pour fabriquer notre source. Après avoir introduit les notions nécessaires à la compréhension du mélange à quatre ondes atomiques, nous présenterons deux exemples de mise en œuvre de cet effet non-linéaire.

On posera les bases théoriques nécessaires à la compréhension de notre réseau optique au début du **deuxième chapitre** en introduisant les concepts de bandes d'énergie et de quasi-impulsions essentiels à la description du mélange à quatre ondes dans un réseau. Nous pourrions ainsi dans la partie suivante nous concentrer sur ce processus non-linéaire. Nous détaillerons alors la mise en place expérimentale du réseau et sa caractérisation avant de présenter les premiers résultats fournis par notre source de paires atomiques.

Enfin, dans le **troisième chapitre** on étudiera en détail les différents aspects des faisceaux jumeaux créés. Tout d'abord en commençant par l'analyse des effets du champ moyen qui modifient de manière quantitative le comportement observé. Nous chercherons à comprendre et simuler l'effet des interactions pour expliquer les résultats obtenus. Nous nous intéresserons dans la partie suivante aux effets transverses afin d'aller au-delà de la description unidimensionnelle de notre système. Ensuite on discutera des propriétés statistiques de la source qui nous renseigneront sur son caractère quantique et sa possible utilité pour la réalisation d'expériences d'optique atomique non classiques. Enfin, nous détaillerons la mise en place d'une simulation numérique de la dynamique de la création de paires.

Afin d'illustrer les perspectives envisagées sur notre expérience nous présenterons dans le **quatrième chapitre** la mise en place récente d'une séparatrice d'ondes de matière pour réaliser un équivalent atomique de l'effet Hong, Ou et Mandel.

# Chapitre 1

## Paires de particules corrélées

Grâce à des mécanismes de création de paires de photons tels que la conversion paramétrique ou le mélange à quatre ondes, le domaine de l'optique quantique a pu étudier de nombreuses expériences fondamentales. La violation des inégalités de Bell [ADR82] ou l'effet Hong, Ou et Mandel [HOM87], par exemple, exposent au grand jour les étonnantes propriétés de corrélations quantiques des paires de photons intriqués qui ont de nos jours trouvé des applications en information et communication quantique [Eke91 ; KLM01]. Récemment, en analogie avec ces photons jumeaux, des paires d'atomes corrélés ont pu être obtenues dans plusieurs configurations expérimentales [Bon+13 ; Jas+10 ; Büc+11 ; Gre+05].

Nous allons dans ce chapitre étudier deux processus communs de création de paires de particules : la conversion paramétrique et le mélange à quatre ondes puis nous nous intéresserons aux propriétés des particules jumelles et les mesures qui les mettent en évidence. Nous illustrerons ensuite l'utilisation des paires de photons en optique quantique au travers de trois applications. Enfin nous détaillerons le principe du mélange à quatre ondes atomiques sur lequel repose la source de paire d'atomes qui va être étudiée tout au long de ce manuscrit.

### 1.1 Création des paires

Les états de la lumière les plus couramment rencontrés sont sans conteste les états thermiques tels qu'un gaz à température fixe, la lumière issue d'une lampe à incandescence, les états cohérents comme les laser pour les photons ou les condensats de Bose-Einstein pour les atomes ou polaritons. Mais ces états ont des propriétés qui peuvent être expliquées grâce à des théories classiques et ne permettent pas d'explorer toute la beauté et l'étrangeté du monde quantique. Voilà pourquoi on cherche à créer des états non classiques



en faisant subir à un état classique, en général un état cohérent, un processus non-linéaire. Nous allons ici aborder deux processus non-linéaires qui permettent de générer des paires de particules fortement corrélées.

### 1.1.1 Conversion paramétrique

En optique quantique, la conversion paramétrique est sans aucun doute le processus le plus utilisé pour générer des paires de photons jumeaux. Les photons ne pouvant pas directement interagir entre eux, il est nécessaire d'utiliser un milieu non-linéaire qui va induire des corrélations non-classiques. La conversion paramétrique est un processus non-linéaire d'ordre deux au cours duquel un photon se scinde en une paire de photons dans laquelle l'énergie initiale est répartie entre les deux photons jumeaux.

#### Description

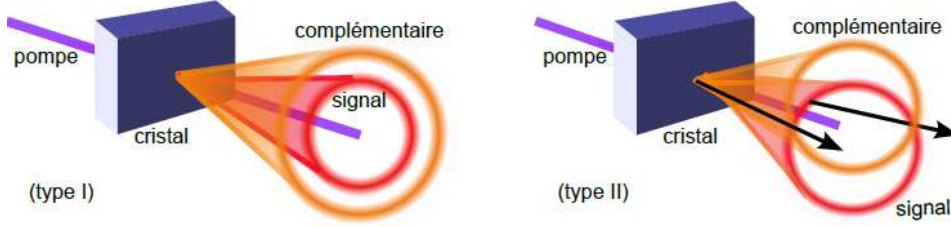
Lors du processus de conversion paramétrique un photon incident dit de "pompe" de fréquence  $\nu_p$  est converti grâce au milieu non-linéaire en une paire de photons "signal" et "complémentaire" de fréquences  $\nu_s$  et  $\nu_c$ . Cette conversion est décrite par le hamiltonien suivant [MW95]

$$H_{CP} = \sum_{j=p,s,c} h\nu_j (\hat{N}_j + \frac{1}{2}) + \hbar\kappa (\hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_c^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_c) \quad (1.1)$$

où  $\hat{a}_i$  est l'opérateur d'annihilation dans le mode  $i$  et  $\hat{N}_i$  est l'opérateur nombre dans ce même mode.  $\kappa$  est le coefficient de couplage proportionnel à la susceptibilité non-linéaire d'ordre deux  $\chi^{(2)}$ . Il est aisé de voir que les opérateurs  $2\hat{N}_p + \hat{N}_s + \hat{N}_c$  et  $\hat{N}_s - \hat{N}_c$  commutent avec ce hamiltonien  $H_{CP}$  ce qui montre que lors du processus un seul photon de pompe crée les deux photons signal et complémentaire, et que le nombre de photons dans le mode  $s$  est le même que celui dans le mode  $c$ . La conversion paramétrique n'est efficace qu'à condition de conserver l'énergie et l'impulsion :

$$\begin{aligned} \nu_p &= \nu_s + \nu_c \\ \vec{k}_p &= \vec{k}_s + \vec{k}_c \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que pour une fréquence et un angle d'incidence de la pompe bien spécifiques qui dépendent de la biréfringence du cristal non-linéaire. La conversion paramétrique peut d'ailleurs prendre deux formes en fonction du type (I ou II) du cristal utilisé [Sut96](voir figure 1.1).



**Figure 1.1** – Conversion paramétrique de type I où les photons signal et complémentaire ont même polarisation, et conversion paramétrique de type II où les deux photons de la paire ont une polarisation différente. Dans cette dernière situation la biréfringence du cristal induit une émission selon des cônes d’axes différents pour le signal et le complémentaire. Aux deux intersections entre les cônes les photons sont alors intriqués en vecteurs d’onde et polarisation.

### Approximation de non-déplétion de la pompe classique

On peut étudier la conversion paramétrique en considérant une pompe classique (c’est-à-dire dont on néglige le bruit de grenaille) et non déplétée. L’opérateur  $\hat{a}_p$  est alors remplacé par sa valeur moyenne  $\sqrt{N_p}$  et la partie de création de paires du hamiltonien devient [MW95] :

$$H_{\text{paires}} = \hbar\kappa\sqrt{N_p}(\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_c^\dagger + \hat{a}_s\hat{a}_c) \quad (1.2)$$

Cet hamiltonien quadratique a été largement étudié [LYS61] et il a ainsi été montré qu’il permet la génération d’états comprimés [Wu+86] présentant de fortes corrélations quantiques [BW70]. Nous verrons dans la suite qu’avec une approximation similaire le mélange à quatre ondes peut être décrit par le même hamiltonien (voir section 1.1.2).

#### 1.1.2 Mélange à quatre ondes

Le mélange à quatre ondes est un effet non-linéaire d’ordre supérieur à la conversion paramétrique puisqu’il s’agit d’un processus d’ordre trois. À cause de la conservation du nombre de particules, la conversion paramétrique est impossible à réaliser à partir d’atomes puisque un atome ne peut pas en créer deux. Pour réaliser l’analogie atomique de la conversion paramétrique il faudrait utiliser des molécules diatomiques qui, en se dissociant, produisent des paires d’atomes. À partir d’un gaz monoatomique tel que notre nuage d’hélium métastable, le mélange à quatre ondes constitue donc la manière la plus simple d’obtenir des paires d’atomes corrélés. Lors de ce processus deux particules de pompe (pas forcément dans le même mode) interagissent et

produisent une paire de particules dans les modes signal et complémentaire. Dans le cas de photons, à l'instar de la conversion paramétrique, il est nécessaire d'utiliser un milieu non-linéaire (dans ce cas de type  $\chi^{(3)}$ ), alors que pour les atomes ce sont directement les interactions qui donnent naissance aux non-linéarités, ce qui rend ce processus particulièrement intéressant en optique atomique.

### Description

Le mélange à quatre ondes peut être décrit par un Hamiltonien de la forme :

$$H_{M4O} = \sum_{j=p1,p2,s,c} h\nu_j(\hat{N}_j + \frac{1}{2}) + \hbar\kappa(\hat{a}_{p1}\hat{a}_{p2}\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_c^\dagger + \hat{a}_{p1}^\dagger\hat{a}_{p2}^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_c) \quad (1.3)$$

où les indices  $p1$  et  $p2$  font références aux deux modes de pompes qui peuvent être dégénérés dans certaines situations expérimentales. Ce Hamiltonien commute avec les opérateurs  $\hat{N}_s - \hat{N}_c$  et  $\hat{N}_{p1} + \hat{N}_{p2} + \hat{N}_s + \hat{N}_c$  (ou  $\hat{N}_p + \hat{N}_s + \hat{N}_c$  si  $p1 = p2 = p$ ) qui illustrent la création par paires des particules signale et complémentaire ainsi que la conservation du nombre de particules. Similairement à la conversion paramétrique, le mélange à quatre ondes n'est efficace que si les conditions d'accord de phase sont vérifiées :

$$\nu_{p1} + \nu_{p2} = \nu_s + \nu_c \quad (1.4)$$

$$\vec{k}_{p1} + \vec{k}_{p2} = \vec{k}_s + \vec{k}_c \quad (1.5)$$

Ces conditions sont encore une fois l'expression de la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Comme dans le cas de l'amplification paramétrique (section 1.1.1), on peut décrire facilement le processus lorsqu'on considère des modes de pompes suffisamment peuplés pour négliger leurs fluctuations quantiques et leur déplétion. On approxime les opérateurs de ces modes par leur valeur moyenne  $\hat{a}_{p1} \approx \sqrt{N_{p1}}$  et  $\hat{a}_{p2} \approx \sqrt{N_{p2}}$ , le hamiltonien de création de paire s'écrit alors sous une forme équivalente à celle obtenue pour la conversion paramétrique sous des approximations similaires :

$$H_{paires} = \hbar\kappa\sqrt{N_{p1}}\sqrt{N_{p2}}(\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_c^\dagger + \hat{a}_s\hat{a}_c) \quad (1.6)$$

### 1.1.3 Conclusion

Que ce soit à l'aide de cristaux non-linéaires ou directement grâce aux interactions, les sources de paires de particules corrélées découlent toutes de processus non-linéaires qui permettent de transformer des états au comportement classique (états thermiques, états cohérents) en des états fortement quantiques. L'aspect non-classique de ces paires s'exprime au travers de corrélations, de réductions de bruits et éventuellement d'intrications comme

nous allons le voir dans la partie suivante qui traite justement des comportements caractéristiques des particules jumelles.

## 1.2 Propriétés des paires

Nous allons dans cette section introduire les outils de caractérisation d'états quantiques que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit. Suite à l'invention du laser et motivé par l'observation de l'effet Hanbury Brown et Twiss [HBT56], R. Glauber a formalisé la description des états quantiques à l'aide des fonctions de corrélations [Gla63] que nous présenterons dans le paragraphe 1.2.1 suivant. Les paires présentent, en plus de corrélations quantiques, des réductions de fluctuations sur la différence du nombre de particules entre les deux modes corrélés comme nous allons le présenter un peu plus loin dans cette section. Enfin, dans certains cas, les particules peuvent être intriquées ouvrant la voie à des tests encore plus poussés de la mécanique quantique.

### 1.2.1 Corrélations

Bien que développé dans le cadre de l'optique quantique, le formalisme des fonctions de corrélations ne se restreint pas qu'aux champs électromagnétiques puisqu'il permet de décrire avec succès n'importe quel champ quantique  $\Psi(\vec{r})$ . La fonction de corrélation d'ordre  $n$  de ce champ est définie de manière générale par :

$$\begin{aligned} G^{(n)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n, \vec{r}_{n+1} \dots \vec{r}_{2n}) &= \langle \Psi^\dagger(\vec{r}_1) \dots \Psi^\dagger(\vec{r}_n) \Psi(\vec{r}_{n+1}) \dots \Psi(\vec{r}_{2n}) \rangle \\ &= \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \Psi^\dagger(\vec{r}_1) \dots \Psi^\dagger(\vec{r}_n) \Psi(\vec{r}_{n+1}) \dots \Psi(\vec{r}_{2n}) \right] \end{aligned}$$

où  $\hat{\rho}$  est la matrice de densité du système étudié. On introduit également les fonctions de corrélations normalisées d'ordre  $n$  :

$$g^{(n)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n, \vec{r}_{n+1} \dots \vec{r}_{2n}) = \frac{G^{(n)}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n, \vec{r}_{n+1} \dots \vec{r}_{2n})}{\prod_{i=1}^{2n} \sqrt{G^{(1)}(\vec{r}_i, \vec{r}_i)}} \quad (1.7)$$

### Corrélation du premier ordre

Considérons l'exemple simple dans lequel deux faisceaux optiques d'intensité  $I_1$  et  $I_2$  interfèrent. On peut alors facilement démontrer [MW95] que la visibilité des franges obtenues est donnée par :

$$v = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| \quad (1.8)$$

Ainsi, la fonction de corrélation d'ordre un caractérise la cohérence de phase du système. Si  $g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  est nulle, la cohérence de phase est perdue et on n'observe pas de franges d'interférence. Au premier ordre, la fonction de corrélation permet de traduire la capacité du champ quantique à interférer, et caractérise ainsi l'échelle de fluctuation de la phase. Cependant, elle ne donne aucune information sur les effets à plusieurs particules découlant de la statistique ou des interactions des particules utilisées et ne permet donc pas de caractériser une source de paires de particules corrélées. Il faut donc se tourner vers les fonctions de corrélation d'ordres supérieurs.

### Corrélations du deuxième ordre

On s'intéresse donc aux corrélations d'ordre deux, qui décrivent les effets à deux particules. La fonction de corrélation du deuxième ordre en position,  $G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2')$  peut être simplifiée en prenant  $\vec{r}_i = \vec{r}_i'$ . On la note alors  $G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  et elle ne dépend plus que des populations en  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ . On peut ainsi l'exprimer en fonction des nombres de particules  $\hat{N}(\vec{r}_i) = |\hat{\Psi}(\vec{r}_i)|^2$

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle : \hat{N}(\vec{r}_1) \hat{N}(\vec{r}_2) : \rangle \quad (1.9)$$

La notation " $: \dots :$ " désigne l'ordre normal, pour lequel les opérateurs créations sont tous placés à gauche de ceux d'annihilation.

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2) \hat{\Psi}(\vec{r}_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_2) \rangle \quad (1.10)$$

$$= \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2) \hat{\Psi}(\vec{r}_2) \rangle \quad (1.11)$$

$$+ [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2), \hat{\Psi}(\vec{r}_1)] \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_2) \rangle \quad (1.12)$$

Comme nous travaillons avec des bosons,  $\Psi$  est un champ bosonique. Le commutateur vaut donc :

$$[\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}_2), \hat{\Psi}(\vec{r}_1)] = -\delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.13)$$

Ainsi, la fonction de corrélation du deuxième ordre vaut :

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \hat{N}(\vec{r}_1) \hat{N}(\vec{r}_2) \rangle - \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \langle \hat{N}(\vec{r}_1) \rangle \quad (1.14)$$

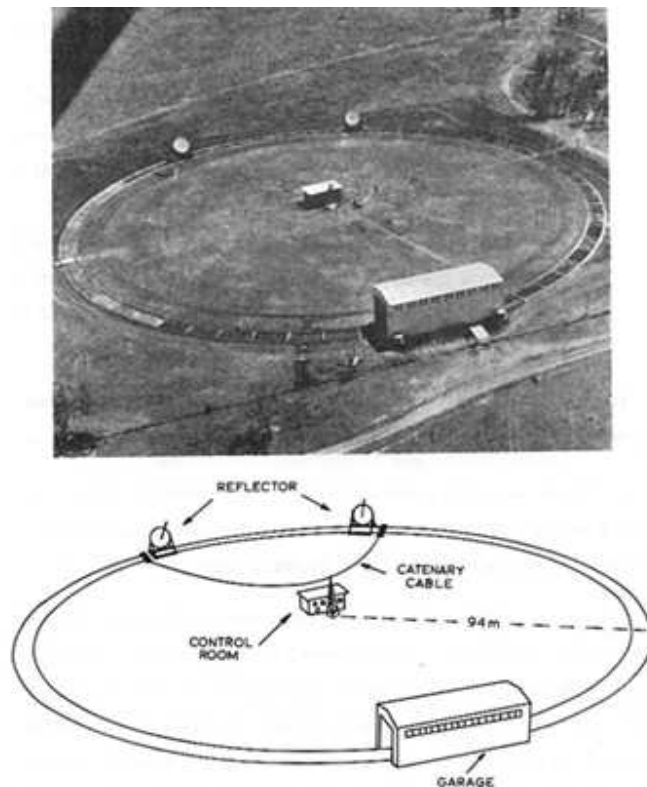
Cette fonction de corrélation de deuxième ordre correspond au taux de détection conjointe d'une particule en  $\vec{r}_1$  et d'une autre en  $\vec{r}_2$ . Elle sera donc d'autant plus importante que les densités moyennes  $\langle \hat{N}(\vec{r}_1) \rangle$  et  $\langle \hat{N}(\vec{r}_2) \rangle$  sont élevées. C'est pour cela que l'on préfère utiliser la fonction de corrélation normalisée

$$g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\langle : \hat{N}(\vec{r}_1) \hat{N}(\vec{r}_2) : \rangle}{\langle \hat{N}(\vec{r}_1) \rangle \langle \hat{N}(\vec{r}_2) \rangle} \quad (1.15)$$

Cette dernière va nous permettre d'étudier les fluctuations de densité et les effets à deux particules, ce qui en fait l'outil idéal pour l'étude de sources de paires. Pour illustrer l'utilisation de cette fonction de corrélation du deuxième ordre, nous allons étudier un des exemples les plus marquant de son application, l'effet Hanbury Brown et Twiss (HBT).

### L'effet Hanbury Brown et Twiss

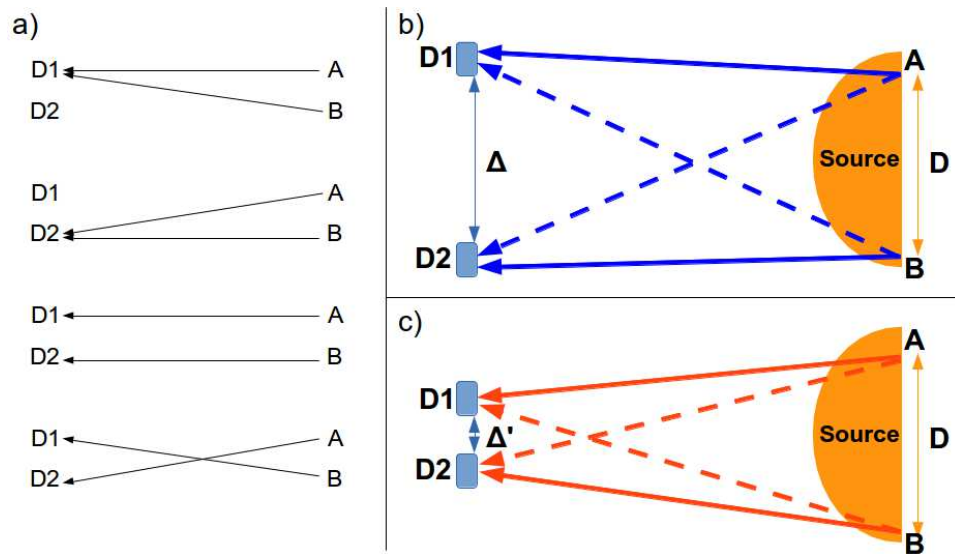
Cet effet tire son nom de l'expérience réalisée par R. Hanbury Brown et R. Twiss pour mesurer la taille de l'étoile Sirius [HBT56]. À cause des turbulences atmosphériques faisant varier l'indice de l'air, les corrélations du premier ordre (corrélation de phase) ne permettaient pas d'obtenir une mesure suffisamment précise. C'est pourquoi Hanbury Brown et Twiss se sont tournés vers les corrélations du deuxième ordre (corrélation en intensité) des photons émis par l'étoile. Leur dispositif, décrit sur la figure 1.2, est constitué de deux télescopes séparés d'une distance réglable. En mesurant la corrélation entre les intensités mesurées sur les deux détecteurs en fonction de l'écartement de ces derniers, il est possible de remonter à la dimension de la source.



**Figure 1.2** – Vue aérienne et schéma du dispositif HBT original. Deux télescopes sont placés sur des rails ce qui permet de modifier leur séparation. Les corrélations entre les photo-courants issus des deux télescopes sont ensuite effectuées dans une salle au centre du cercle décrit par les rails. Figure issue de l'article [HBT56]

L'effet HBT peut très bien être compris à l'aide d'un point de vue ondu-

latoire classique, mais une approche quantique du problème telle que celle que nous allons développer ici permet de mettre en lumière des conclusions étonnantes. Si on considère les photons issus de deux points  $A$  et  $B$  indépendants d'une source, il existe quatre processus contribuant à la probabilité de détection à deux photons (voir figure 1.3 (a)) : soit les deux photons vont sur le même détecteur (deux premiers processus), soit les photons vont sur des détecteurs différents (deux derniers processus). Dans ce cas il est impossible,



**Figure 1.3** – (a) Quatre processus contribuant à la détection à deux photons. Seuls les deux derniers cas conduisent à une détection jointe, les amplitudes de probabilité interférant suite à l'impossibilité de distinguer les deux processus. (b) Lorsque l'écart  $\Delta$  entre les détecteurs est grand, la différence de phase entre les deux processus qui interfèrent (lignes pleines et lignes en pointillées) est importante. (c) Pour un écart réduit, les deux processus ont quasiment la même phase ce qui conduit à des interférences constructives qui augmentent la probabilité de détection jointe.

au moment de la détection, de distinguer les deux processus et ces derniers vont alors interférer. L'état quantique s'écrit donc sous la forme :

$$\psi_{HBT} = \frac{1}{2}(e^{i\phi_1}|2_{D1}, 0_{D2}\rangle + e^{i\phi_2}|0_{D1}, 2_{D2}\rangle + (1 + e^{i\Phi})|1_{D1}, 1_{D2}\rangle) \quad (1.16)$$

La différence de phase  $\Phi$  entre les deux processus qui interfèrent dépend de la différence de chemin optique entre les deux possibilités. En supposant que la source est à une distance  $L$  très grande devant la taille de la source  $D_S$ , la différence de phase entre les deux processus pour des points sources

séparés de  $D \leq D_s$  et des détecteurs séparés de  $\Delta$  est :

$$\Phi \approx \frac{2\pi D \Delta}{\lambda L} \quad (1.17)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde des photons émis. Ainsi, la probabilité de détection jointe d'un photon sur chaque détecteur est donné par :

$$P(\Delta) = \langle 1, 1 | \hat{N}_1 \hat{N}_2 | 1, 1 \rangle \quad (1.18)$$

$$= P_{D1} P_{D2} (1 + \cos(\frac{2\pi D}{\lambda L} \Delta)) \quad (1.19)$$

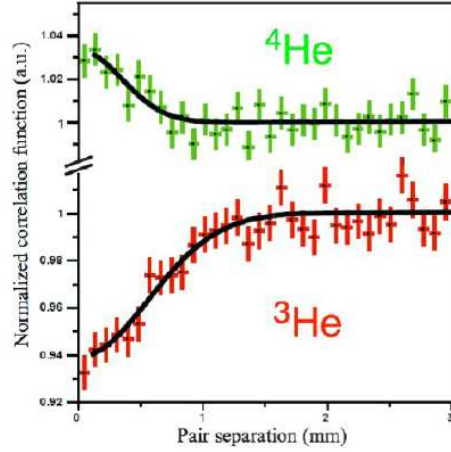
où  $P_{D1}$  et  $P_{D2}$  sont les probabilités de détection en  $D_1$  et  $D_2$ . La fonction de corrélation d'ordre deux normalisée est simplement obtenue en normalisant cette probabilité par  $P_{D1} P_{D2}$  :

$$g^{(2)}(\Delta) = 1 + \cos(\frac{2\pi D}{\lambda L} \Delta) \quad (1.20)$$

On observe ainsi une variation dont la période dépend de la séparation angulaire des points de la source  $\frac{D}{L}$ . Pour prendre en compte tous les couples de points  $A$  et  $B$  possibles, il faut intégrer sur l'ensemble de la source, les franges d'interférence vont alors se brouiller sauf lorsque la séparation  $\Delta$  entre les détecteurs est faible devant la longueur  $l_c = \frac{\lambda L}{D_s}$ . La variation de la probabilité est alors proportionnelle à la transformée de Fourier spatiale de la source (dans le cas d'un disque, on obtient ainsi une tache d'Airy). Lorsque la séparation  $\Delta$  est faible  $g^{(2)}(0) = 2$  et pour une séparation grande devant  $l_c$ , les franges étant brouillées  $g^{(2)}(\Delta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  (figure 1.3 (b) et (c)). Cela met en évidence la tendance qu'ont les photons (et plus généralement les bosons) à se regrouper : la probabilité d'obtenir une détection jointe augmente lorsque les détecteurs se rapprochent. D'ailleurs, si on réalise la même expérience avec des Fermions, on obtient l'effet inverse : à cause du principe d'exclusion de Pauli, lorsqu'on rapproche les détecteurs  $g^{(2)}$  diminue comme l'illustre la figure 1.4 qui reprend des résultats obtenus dans le cadre d'une coopération avec le groupe de V. Wassen à Amsterdam quelques années avant ma thèse.

Cet effet HBT, permet de caractériser une source en donnant une estimation de la dimension de la source lorsque l'on est dans l'approximation de champ lointain. Sur notre dispositif celle-ci est bien vérifiée puisque les nuages ont des dimensions typiques inférieures au millimètre et le détecteur se situe à environ 45 cm en dessous du nuage. On pourra donc, à l'aide de la fonction de corrélation  $g^{(2)}$  déterminer la taille effective de notre source de paires d'atomes. On utilisera la largeur de cette fonction de corrélation "locale" pour définir la taille d'un mode dans l'espace des impulsions. En effet le groupement bosonique qu'indique ce pic de corrélation résulte de l'indiscernabilité des atomes ayant des vecteurs d'onde proches ; la largeur de la fonction de corrélation correspond à la différence de vecteurs d'onde au-delà





**Figure 1.4** – Fonction de corrélation du deuxième ordre mesurée pour les deux isotopes de l’hélium. L’hélium 4 est un boson et on observe bien une augmentation de la probabilité de double détection pour de faibles séparations, contrairement à l’hélium 3, un fermion, qui présente une diminution de la fonction de corrélation à courte échelle. Courbes extraites de [Sch+05] et [Jel+07].

de laquelle les atomes deviennent de plus en plus discernables. On appellera donc mode le volume typique dans l’espace des vecteurs d’ondes, dans lequel les atomes sont indiscernables les uns des autres. Cette définition de mode est celle que l’on utilisera dans toute la suite du manuscrit.

Pour mesurer les propriétés de corrélation entre les deux faisceaux de la source de paires, il faut s’intéresser à ce que l’on appellera les corrélations croisées, c’est-à-dire les corrélations entre particules issues des deux faisceaux de la source à caractériser.

### Corrélations croisées

Si le plan de détection est très éloigné de la source (loin devant la taille de la source), alors l’instant et la position de la détection d’une particule sont directement proportionnels au vecteur d’onde initial de cette particule (approximation de champ lointain). Ainsi, mesurer la fonction de corrélation  $g^{(2)}(x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2)$  devient équivalent à déterminer  $g^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ . Les sources de paires que nous considérons émettent des particules corrélées en vecteur d’onde, c’est-à-dire qu’en détectant une première particule avec un vecteur d’onde  $\vec{k}_1$ , on sait que sa particule jumelle possède un vecteur d’onde aux alentours d’un certain vecteur d’onde  $\vec{k}_2 = f(\vec{k}_1)$ . La fonction  $f$  dépend de la source utilisée et provient généralement de la conservation de l’impul-

sion totale au court du processus de création de paires. Pour mesurer les corrélations croisées on s'intéresse donc à la fonction de corrélation du deuxième ordre entre vecteurs d'ondes reliés par la fonction  $f : g_{cr}^{(2)}(\vec{k}, f(\vec{k}) + \vec{\Delta k})$ . Dans le cas de systèmes homogènes, cette dernière ne dépend que  $\vec{\Delta k}$ . Ainsi en intégrant  $g_{cr}^{(2)}$  par rapport  $\vec{k}$  sur un domaine où le système est relativement homogène, on peut obtenir un meilleur rapport signal sur bruit :

$$\bar{g}_{cr}^{(2)}(\vec{\Delta k}) = \int g_{cr}^{(2)}(\vec{k}, f(\vec{k}) + \vec{\Delta k}) d\vec{k} \quad (1.21)$$

C'est cette quantité que l'on utilisera pour caractériser notre source d'atomes corrélés (voir section 3.3.1). Si la source produit bien des paires, on doit observer un pic de corrélation centré sur  $\vec{\Delta k} = 0$  dont la largeur nous renseigne sur le nombre de modes inter-corrélés. En effet, en divisant le volume de la corrélation croisée par celui d'un mode (équivalent au volume de la corrélation locale : voir la fin de la partie 1.2.1), on peut évaluer le nombre de modes corrélés entre eux.

On peut également tirer de l'information du rapport entre l'amplitude de la corrélation croisée et de celle de la corrélation locale en vérifiant si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée. Pour mieux le comprendre, nous allons maintenant présenter cette inégalité et exposer comment elle peut être utilisée dans nos situations expérimentales.

### Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit simplement que la valeur du produit scalaire de deux vecteurs ne peut pas être plus grande que le produit de leur longueur. On peut appliquer cette inégalité aux quantités fluctuantes, elle signifie alors que la valeur de corrélation croisée  $\langle I_1 I_2 \rangle$  entre deux quantités  $I_1$  et  $I_2$  est majorée par la moyenne géométrique des auto-corrélations (corrélations locales) :

$$\langle I_1 I_2 \rangle \leq \sqrt{\langle I_1^2 \rangle \langle I_2^2 \rangle}. \quad (1.22)$$

En physique classique elle est toujours satisfaite, mais, en mécanique quantique, la présence de distributions de pseudo-probabilités (fonctions de Wigner) pouvant prendre des valeurs négatives autorise la violation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz [MW95][Gla63]. L'observation de la violation de cette inégalité ne peut pas être expliquée par une théorie des champs classique et constitue une preuve du caractère quantique de l'état étudié.

Dans le cas d'un problème quantique à deux modes décrit par les opérateurs bosoniques  $\hat{a}_1^\dagger$  et  $\hat{a}_2^\dagger$  qui créent une particule dans le premier ou deuxième mode, l'inégalité peut être formulée en terme de fonctions de corrélations du deuxième ordre [MW95 ; Gla63 ; Khe+12] :

$$G_{12}^{(2)} \leq \sqrt{G_{11}^{(2)} G_{22}^{(2)}} \quad (1.23)$$

Et en divisant par  $\langle \hat{N}_1 \rangle \langle \hat{N}_2 \rangle$  où  $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ , on peut également l'exprimer à l'aide des fonctions de corrélations normalisées :

$$g_{12}^{(2)} \leq \sqrt{g_{11}^{(2)} g_{22}^{(2)}} \quad (1.24)$$

Cependant, ce modèle se révèle trop simpliste puisque les corrélations mesurées en optique atomique quantique sont généralement des fonctions ayant des hauteurs et largeurs variées et il est nécessaire de définir un domaine d'intégration approprié pour généraliser ces inégalités de Cauchy-Schwarz. Ainsi Karen Kheruntsyan a mis au point une version intégrée adaptée à notre expérience [Khe+12] :

$$\bar{G}_{12}^{(2)} \leq \sqrt{\bar{G}_{11}^{(2)} \bar{G}_{22}^{(2)}} \quad (1.25)$$

où on introduit les fonctions de corrélations intégrées sur les volumes (dans l'espace des vecteurs d'ondes)  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  centrés sur les modes corrélés entre eux :

$$\bar{G}_{ij}^{(2)} = \int_{\mathcal{V}_i} \int_{\mathcal{V}_j} d\vec{k}_i d\vec{k}_j G_{ij}^{(2)}(k_i, k_j) \quad (1.26)$$

Ainsi, même si l'amplitude des corrélations croisées est inférieure à celle des corrélations locales (ce qui est presque toujours le cas pour nous), il est possible que la version intégrée de l'inégalité soit violée si la largeur en croisé est supérieure aux largeurs locales. Cette mesure est donc un atout précieux dans la caractérisation de notre source, cependant, les violations observées peuvent parfois être minimales et insuffisantes au vu des incertitudes expérimentales. Voilà pourquoi, nous allons maintenant introduire une autre mesure permettant de mettre en évidence le caractère non-classique des sources de paires de particules : la variance de la différence du nombre de particules. Cette quantité est, comme nous allons le voir, reliée mathématiquement à la violation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz mais ne lui est pas toujours équivalente [Khe+12]. Elle fournit ainsi une mesure alternative qui pourra dans certaines situations se révéler plus convaincante.

### 1.2.2 Fluctuations de la différence du nombre de particules

Considérons une source de paires qui émet ses particules jumelles avec des vecteurs d'ondes corrélés centrés sur  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2 = f(\vec{k}_1)$ . On peut alors compter les nombres  $N_1$  et  $N_2$  de particules incluses dans des régions de volume  $V$  autour de  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ . Si la largeur de ces régions est grande devant la largeur de la fonction de corrélation croisée  $\bar{g}_{cr}^{(2)}$  alors chaque particule dans la première région a sa partenaire dans la deuxième région et on obtient alors  $\Delta N = N_1 - N_2 = 0$  à chaque réalisation et par conséquent la variance de cette différence  $\mathcal{V}_{\Delta N}$  est nulle. Par opposition, si les deux faisceaux étaient indépendants la variance serait  $\mathcal{V}_{\Delta N, ind} = \mathcal{V}_{N_1} + \mathcal{V}_{N_2}$ . Pour des champs

classiques, la variance minimale est fixée par le bruit de grenaille et on a ainsi au minimum une variance de la différence  $\mathcal{V}_{\Delta N, ind} = N_1 + N_2$ . On appelle ce minimum la limite quantique standard. De manière générale, l'obtention d'une variance inférieure au bruit de grenaille ne peut pas être expliquée par des champs classiques et constitue une preuve du caractère quantique de la source. On normalise donc la variance de la différence du nombre de particules par le bruit de grenaille :

$$V = \frac{\langle (N_1 - N_2)^2 \rangle - \langle N_1 - N_2 \rangle^2}{\langle N_1 + N_2 \rangle} \quad (1.27)$$

Ainsi, si  $V < 1$  l'état considéré est forcément un état non-classique. Remarquons que l'on peut réécrire la variance  $V$  en fonction des corrélations intégrées (définies dans l'équation 1.26) en prenant comme volume d'intégration le volume de comptage [Khe+12] :

$$V = 1 + \frac{\bar{G}_{11}^{(2)} + \bar{G}_{22}^{(2)} - 2\bar{G}_{12}^{(2)} - (\langle \hat{N}_1 \rangle - \langle \hat{N}_2 \rangle)^2}{\langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle}. \quad (1.28)$$

Le lien avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz apparaît alors lorsque  $\langle \hat{N}_1 \rangle = \langle \hat{N}_2 \rangle$ . Dans ces conditions, une variance sub-poissonienne ( $V < 1$ ) implique nécessairement une violation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque :

$$V < 1 \Leftrightarrow \bar{G}_{12}^{(2)} > \frac{\bar{G}_{11}^{(2)} + \bar{G}_{22}^{(2)}}{2} \quad (1.29)$$

et comme d'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{\bar{G}_{11}^{(2)} + \bar{G}_{22}^{(2)}}{2} \geq \sqrt{\bar{G}_{11}^{(2)} \bar{G}_{22}^{(2)}} \quad (1.30)$$

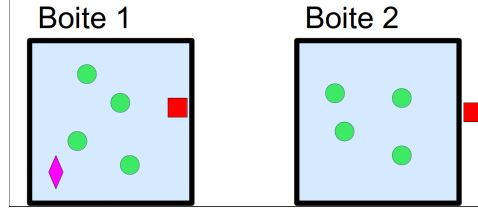
on obtient bien l'implication :

$$V < 1 \Rightarrow \bar{G}_{12}^{(2)} > \sqrt{\bar{G}_{11}^{(2)} \bar{G}_{22}^{(2)}} \quad (1.31)$$

Par contre, la réciproque n'est pas forcément vérifiée. Une mesure de variance en-dessous du bruit de grenaille constitue donc (dans le cas où les moyennes des populations sont identiques) un test plus restrictif que la violation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin, notons que la relation entre la "force" de la violation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le "degré" de réduction du bruit sur la variance de la différence dépend fortement du système considéré et il est possible d'obtenir une faible violation en même temps qu'une réduction importante du bruit et inversement. L'idéal est donc de mesurer les deux quantités pour augmenter les chances d'obtenir un résultat convainquant.

Dans le cas des sources de particules jumelles, comme on s'attend à obtenir  $\mathcal{V}_{\Delta N} = 0$ , on est alors dans le cas de figure où l'état en présence est

clairement indescrivable par un champ classique. Cependant, dans la pratique, lors du comptage un certain nombre de particules n'ont pas leur partenaire dans l'autre région, à cause du volume fini des régions de comptage et de l'efficacité de détection réduite (voir figure 1.5). En effet, si on détecte une particule proche du bord dans la première région, il y a une probabilité importante que sa particule jumelle soit en dehors de la deuxième région de comptage, et comme il s'agit d'un effet aléatoire la différence de populations  $\Delta N$  va fluctuer d'une réalisation expérimentale à l'autre. De même si le détecteur a une efficacité de détection  $\eta < 1$  alors il y a une probabilité  $P = 2(1 - \eta)\eta$  qu'une seule des particules soit détectée ce qui, là encore, introduit des fluctuations sur  $\Delta N$ . Ainsi ces deux effets sont équivalents à



**Figure 1.5** – Certaines particules proches du bord des régions de comptages n'ont pas de partenaire dans l'autre région (cas du carré rouge). Il se peut également qu'une particule ne soit pas mesurée à cause de l'efficacité réduite de détection ce qui laisse sa partenaire seule (cas du losange violet). Ces deux effets introduisent des fluctuations de la différence du nombre de particules dans les régions.

une efficacité de détection effective [Jas10] :

$$\eta_{eff} = \eta \times P_{bord} \quad (1.32)$$

où  $P_{bord}$  est la probabilité de perdre un des deux atomes à cause de effets de bords qui dépend de la largeur de la fonction de corrélation et des dimensions des régions de comptage.

L'effet de cette efficacité de détection effective peut être calculé et on obtient alors une variance normalisée mesurée de la forme :

$$V_{det} = (1 - \eta_{eff}) + \eta V \quad (1.33)$$

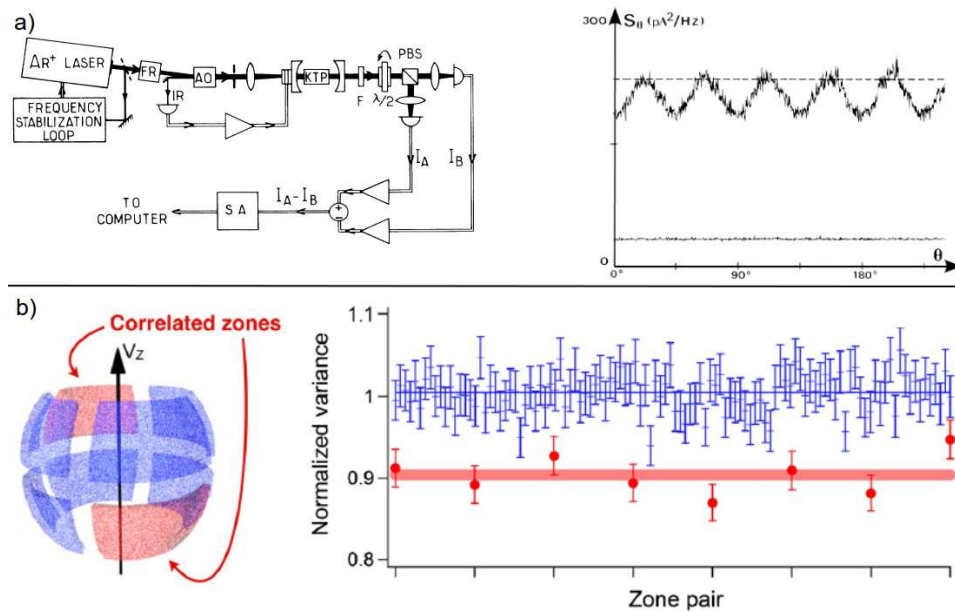
qui, lorsque les régions 1 et 2 sont correctement centrées autour de vecteurs d'onde corrélés, est minimale et vaut :

$$V_{det,min} = 1 - \eta_{eff} \quad (1.34)$$

De telles réductions de bruit ont par exemple été observées pour la première fois avec des paires de photons issues d'un cristal non linéaire de KTP permettant de la conversion paramétrique de type II<sup>1</sup> [Hei+87]. On peut

1. Les faisceaux signal et complémentaire ont des polarisations orthogonales.

également citer l'obtention de réduction de bruit lors de la création de paires d'atomes par mélange à quatre ondes [Jas+10] sur notre dispositif peu de temps avant le début de mon doctorat (voir figure 1.6). Une telle réduction de bruit a également été observée lors de la création de paires par desexcitation par collision à Vienne [Büc+11].



**Figure 1.6** – (a) Première démonstration expérimentale de réduction des fluctuations de la différence d'intensité entre les faisceaux jumeaux à l'aide d'un cristal de KTP. Sur ces figures extraites de [Hei+87] sont représentés : à gauche le montage expérimental et à droite la variance de la différence d'intensité en fonction de l'angle de la lame demi-onde. La variance est inférieure au bruit de grenaille (indiqué en pointillés) sauf lorsque les faisceaux signal et complémentaire sont équitablement répartis dans les voies de détections. Le signal en bas du graphique correspond au bruit de détection. (b) Lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein, des paires d'atomes sont diffusées sur une sphère. Cette sphère est alors subdivisée en différentes zones (figure à gauche) et on mesure la variance normalisée de la différence du nombre d'atomes entre les zones. Comme les atomes d'une même paire sont diamétralement opposés sur la sphère, la variance des zones opposées est réduite (cercles rouges de la figure de droite) alors que pour les autres couples de zones la variance est au bruit de grenaille (croix bleues).

### 1.2.3 Conclusion

Ces propriétés statistiques de corrélation et de réduction de bruit sont très générales et peuvent aussi bien être observées avec des photons qu'avec des atomes, des ions ou encore avec des systèmes plus exotiques comme les excitons-polaritons qui résultent du couplage entre des paires électron-trou (les excitons) et des photons (généralement quantifiés dans une cavité) [Bau+00; KBG04; CSQ01]. Mais la création de photons est de nos jours extrêmement bien maîtrisée par rapport à la création de paires d'atomes neutres. De nombreux laboratoires utilisent les photons jumeaux en les manipulant, les intriquant ou les stockant dans des protocoles de plus en plus étoffés pour le calcul ou la cryptographie quantique. Dans le domaine de l'optique atomique, les recherches en sont encore à l'élaboration de sources suffisamment fiables et versatiles comme c'est le cas sur notre expérience. Afin d'avoir une idée des protocoles expérimentaux qui pourraient être appliqués à des atomes, il est intéressant de s'intéresser à ce qui est fait avec la lumière dans la perspective de transposer ces dispositifs aux ondes de matières, ainsi, la section suivante s'intéressera à quelques exemples d'utilisations clefs des paires de photons en optique quantique.

## 1.3 Paires de photons en optique quantique

Les paires de photons corrélés constituent l'une des briques de base de l'optique quantique et de très nombreux protocoles les utilisent [ADR82; Wei+98; Eke91; KLM01]. Là où l'optique atomique<sup>2</sup> en est encore à ces balbutiements, l'optique quantique "photonique" a depuis longtemps dompté la phase de la création de sources de paires corrélées et se concentre maintenant sur des protocoles pour manipuler et stocker les états quantiques. On présentera ainsi quelques expériences phares d'optique quantique. Par exemple, envoyer simplement la paire de photons sur une séparatrice permet d'observer un comportement fortement non classique : l'effet d'interférence Hong, Ou et Mandel. À l'aide de systèmes un peu plus étoffés les paires de photons permettent de réaliser de l'interférométrie avec un bruit réduit. Il est également possible de réaliser des expériences fondamentales à l'aide de photons corrélés, on présentera par exemple un montage permettant de violer les inégalités de Bell.

### 1.3.1 Effet Hong, Ou et Mandel

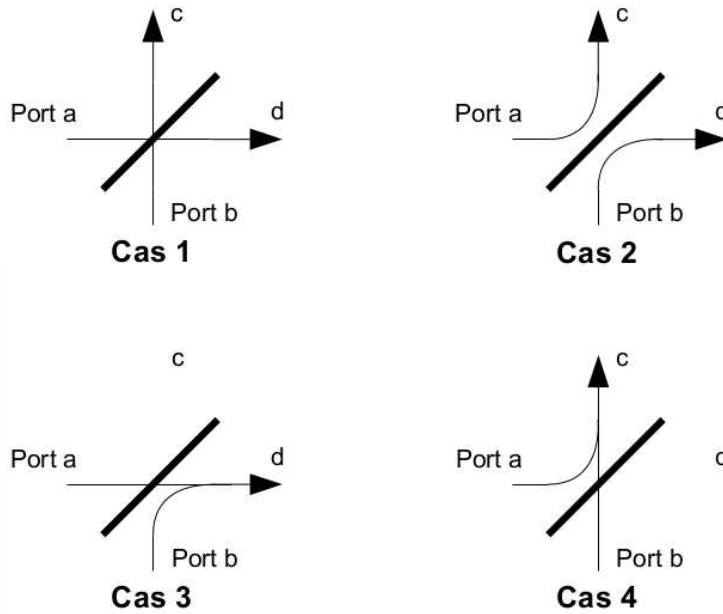
L'effet Hong, Ou et Mandel (H.O.M.) est le résultat d'un phénomène d'interférence quantique à deux photons. Pour la première fois démontré en

---

2. Je parle ici de l'utilisation d'atomes neutres.

1987 par Hong, Ou et Mandel [HOM87], il apparaît lorsque deux photons uniques indiscernables se croisent sur une séparatrice 50/50.

Lorsque deux photons quelconques arrivent chacun sur un port d'entrée d'une séparatrice, les photons peuvent a priori être soit transmis soit réfléchis, il y a alors quatre possibilités (voir fig 1.7).



**Figure 1.7** – Les quatre possibilités lorsque deux photons arrivent en entrée d'une séparatrice. cas 1 : les deux photons sont transmis, cas 2 : les deux sont réfléchis, et cas 3 et 4 : l'un est transmis l'autre est réfléchi.

Lorsque les deux photons d'entrée sont discernables l'un de l'autre, les quatre cas sont équiprobables, mais lorsqu'ils sont indiscernables, c'est-à-dire si au moment de la détection dans l'un des ports de sortie il est impossible de savoir de quels ports d'entrée les photons sont issus, alors un phénomène d'interférence quantique se manifeste. En effet, si les photons sont indiscernables, le cas où les deux photons sont transmis (cas 1) devient indifférentiable du cas où les deux photons sont réfléchis (cas 2). Il faut donc sommer les amplitudes de probabilité et non leur carré ce qui conduit à des interférences qui, dans le cas présent, sont destructives. Les photons se retrouvent alors systématiquement dans le même mode de sortie (cas 3 et 4).

Afin de décrire quantitativement cet effet, on considère  $\hat{a}_i^\dagger$ ,  $\hat{b}_i^\dagger$ ,  $\hat{c}_i^\dagger$  et  $\hat{d}_i^\dagger$  les opérateurs de création d'un photon respectivement dans les ports d'entrée a et b, et de sortie c et d de la séparatrice. l'indice  $i$  sert à repérer le "mode"



des photons, il peut s'agir de la polarisation, du mode spatial ou encore de la longueur d'onde. On modélise l'effet de la séparatrice par une matrice unitaire  $S$  qui relie les opérateurs en entrée aux opérateurs en sortie :

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_i^\dagger \\ \hat{d}_i^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_i^\dagger \\ \hat{b}_i^\dagger \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \hat{a}_i^\dagger \\ \hat{b}_i^\dagger \end{pmatrix}$$

avec  $r^2 + t^2 = 1$ .

Lorsque deux photons arrivent en entrée de la séparatrice, l'état quantique est le suivant :

$$|\Psi\rangle = \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger |vac\rangle$$

Avec  $|vac\rangle$  le vide quantique.

En utilisant la matrice  $S^{-1}$  pour déterminer l'état après la séparatrice, on obtient :

$$|\Psi\rangle = (r\hat{c}_i^\dagger + t\hat{d}_i^\dagger)(t\hat{c}_j^\dagger - r\hat{d}_j^\dagger)|vac\rangle \quad (1.35)$$

$$|\Psi\rangle = (rt\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger - rt\hat{d}_i^\dagger \hat{d}_j^\dagger + t^2\hat{d}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger - r^2\hat{c}_i^\dagger \hat{d}_j^\dagger)|vac\rangle \quad (1.36)$$

Et si  $r = t = 1/\sqrt{2}$  :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger - \hat{d}_i^\dagger \hat{d}_j^\dagger + \hat{d}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_i^\dagger \hat{d}_j^\dagger)|vac\rangle \quad (1.37)$$

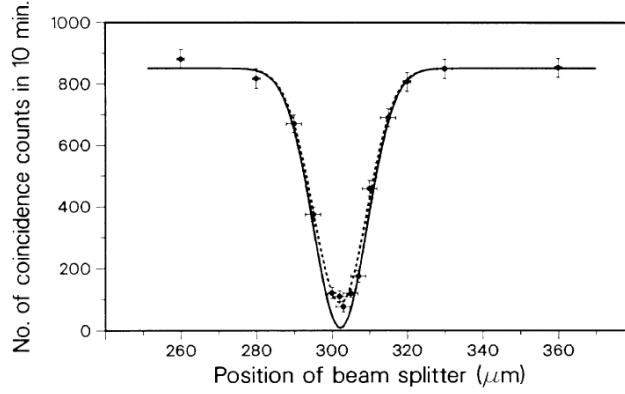
Si les photons sont discernables ( $i \neq j$ ), on retrouve les quatre cas possibles de la figure 1.7 équiprobables. Par contre si les photons sont indiscernables ( $i = j$ ) l'état se réduit à :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(\hat{c}_i^{\dagger 2} - \hat{d}_i^{\dagger 2})|vac\rangle \quad (1.38)$$

Et les deux photons sont alors systématiquement dans le même port de sortie. Cette interférence est liée à la nature bosonique des photons qui, lorsqu'ils sont indiscernables ont tendance à se grouper dans le même mode. En pratique l'observation de ce phénomène se fait par l'observation des coïncidences entre les événements mesurés en  $c$  et en  $d$ .

Dans le cas discernable (eq. 1.37), la moitié du temps on observe des coïncidences, lorsqu'il y a un photon dans chaque port de sortie. Mais dans le cas indiscernable (eq. 1.38) le taux de coïncidence est nul fournissant une signature claire de l'indiscernabilité. Hong et al. ont ainsi observé l'annulation de ce taux en faisant varier le chemin optique de l'un des photons par rapport à l'autre. Lorsque les deux chemins sont de même longueur le taux de coïncidence diminue fortement jusqu'à quasiment s'annuler (figure 1.8).

Au fond du creux de coïncidence l'état est alors la superposition cohérente de deux photons dans le port  $c$  et deux photons dans le port  $d$ . Ce type



**Figure 1.8** – Le taux de coïncidences diminue fortement jusqu'à quasiment s'annuler lorsque le chemin optique de la source de paire de photons à l'un des ports d'entrée de la séparatrice devient identique au chemin optique qui relie la source à l'autre port d'entrée. Dans ces conditions les photons sont temporellement indiscernables et les interférences quantiques détruisent le signal de coïncidences. Figure issue de [HOM87].

d'état appartient à une classe d'états extrêmement importante en optique quantique pour leur caractère fortement non classique : les "N00N-states" de la forme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + e^{iN\phi}|0, N\rangle)$$

où  $N$  est un entier positif. Ce type d'état est maximalelement intriqué au sens de l'entropie de von Neumann [NC00].

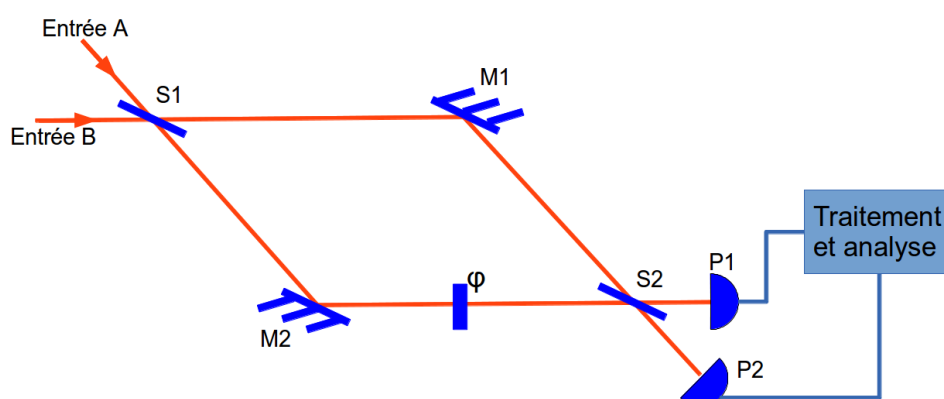
La première proposition de protocole pour créer des N00N-states pour  $N > 2$  repose justement sur l'effet Hong, Ou et Mandel [KLD02]. Il s'agit de mettre en cascade des paires de séparatrices en choisissant correctement les coefficients de transmission et réflexion. Une post-sélection permet ensuite d'isoler les états N00N.

De nombreux autres états permettent de réduire le bruit de mesure de la phase dans un interféromètre, en particulier les paires de particules corrélées [HB93]. L'interférométrie quantique que nous allons présenter maintenant est donc l'une des applications importantes des paires de particules corrélées.

### 1.3.2 Interférométrie sous la limite quantique standard

Comme nous avons pu le voir dans la section 1.2.2, l'une des propriétés importantes des paires de particules corrélées et donc des photons jumeaux

est la réduction du bruit sur la différence du nombre de particules (ou de manière équivalente sur la différence d'intensité) entre les faisceaux signal et complémentaire. Au vu de cette propriété il paraît naturel d'envisager l'utilisation de ces paires pour améliorer la précision des interféromètres. L'interféromètre de Mach-Zender représenté sur la figure 1.9 est finalement le système auquel on pense juste après avoir réalisé l'effet Hong, Ou et Mandel. Il s'agit de renvoyer les faisceaux en sortie d'une première séparatrice vers une deuxième pour les recombinaison. Généralement, les interféromètres de Mach-Zender sont utilisés en envoyant un état cohérent dans le port d'entrée A de la séparatrice S1 et en laissant l'autre port d'entrée B vide. Dans



**Figure 1.9** – Les faisceaux des entrées A et B sont mélangés par la séparatrice S1 puis se propagent en suivant deux chemins distincts accumulant ainsi une phase différente (représentée ici par une lame de phase  $\varphi$ ). En général la variation de phase est produite par l'effet physique que l'on souhaite observer (variation d'indice, rotation, modification de la longueur par des ondes gravitationnelles...). Les deux bras de l'interféromètre sont ensuite recombinaison sur la séparatrice S2. Les intensités mesurées en sortie sur les photorécepteurs P1 et P2 dépendent alors de la différence de phase accumulée.

ces conditions, lorsque l'on mesure l'intensité en sortie des bras de l'interféromètre on peut déterminer la différence de phase entre les deux chemins du Mach-Zender avec une précision de  $\Delta\Phi = 1/\sqrt{N}$  où  $N$  est le nombre de photons envoyés puis détectés dans l'interféromètre. Il s'agit de la meilleure précision accessible à l'aide d'états classiques, on parle alors de la limite quantique standard. Elle est le résultat de l'amplification des fluctuations du vide par le faisceau cohérent suite à leur mélange [Cav81]. Cette limite n'est cependant pas absolue et peut être dépassée grâce à l'utilisation d'états quantiques dont le bruit est inférieur au bruit de grenaille jusqu'à être limité par l'incertitude d'Heisenberg :  $\Delta\Phi = 1/N$ . Ainsi, pour augmenter la préci-

sion d'un interféromètre deux options s'offrent à nous : utiliser un faisceau plus puissant pour augmenter  $N$  ou utiliser un état quantique permettant de passer sous la limite quantique standard. Comme on dispose de nos jours de laser très puissants et que la génération d'états non classiques repose sur des effets non-linéaires peu efficaces, la première solution est bien souvent la plus adaptée. Cependant, il existe un système, l'interféromètre GEO600 de la collaboration LIGO<sup>3</sup> où la puissance optique est déjà tellement importante que la sensibilité de l'interféromètre devient limitée par la pression de radiation sur les miroirs, et seule l'utilisation d'états non classiques permet alors d'améliorer la mesure. Ainsi, en injectant du vide dit comprimé dont les fluctuations d'amplitude sont réduites (au détriment des fluctuations de phase) à la place du vide classique, une amélioration d'un facteur 3.4 de la précision de cet interféromètre a été démontrée [Col11]. L'utilisation de vide comprimé dans un interféromètre avait été proposé par C. Caves en 1981 [Cav81] puis démontrée quelques années plus tard en 1987 par Xiao et al. [XWK87].

Les états N00N présentés à la fin du paragraphe 1.3.1 précédent, permettent d'obtenir des mesures de phases extrêmement précises. En effet, considérons l'observable  $\hat{A} = |N, 0\rangle\langle 0, N| + |0, N\rangle\langle N, 0|$ . L'erreur sur la mesure de la phase est alors [KLD02] :

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\hat{A}}{d\langle\hat{A}\rangle/d\phi} = \frac{1}{N}. \quad (1.39)$$

Cette erreur est à la limite fondamentale due à l'incertitude d'Heisenberg, bien en-dessous de la limite standard  $\Delta\phi \geq 1/\sqrt{N}$ .

Comme proposé en 1993 par M. Holland et K. Burnett [HB93], il est également possible d'utiliser des faisceaux jumeaux en entrée de l'interféromètre, la mesure de la différence des photocourants issus des détecteurs P1 et P2 étant alors extrêmement sensible au déphasage entre les deux bras.

M. Holland et K. Burnett montrent qu'en injectant exactement le même nombre  $N$  de photons dans les deux ports d'entrées de l'interféromètre, la probabilité de trouver une différence de  $2q$  en mesurant le nombre de photons dans les ports de sortie est donnée par :

$$P(2q|\Delta\phi) = |\langle N - q, N + q | e^{\frac{\Delta\phi}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a})} | N, N \rangle|^2 \quad (1.40)$$

où  $\Delta\phi$  est la différence de phase entre les deux bras de l'interféromètre. Lorsque  $\Delta\phi = 0$ , l'interféromètre transmet l'état d'entrée sans l'altérer et la différence du nombre de photon en sortie est nulle. Lorsque l'on détecte un excès de photons d'un coté de l'interféromètre, c'est le signe que la différence

---

3. "Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory".

de phase est non nulle. Pour  $q \ll N$  la distribution de probabilité peut être approximée par :

$$P(2q|\Delta\phi) \approx J_q^2(\Delta\phi N) \quad (1.41)$$

avec  $J_q$  la  $q$ -ième fonction de Bessel de première espèce. Ainsi, en partant d'une situation où la différence de phase est nulle, la probabilité de trouver une différence  $2q = 0$  passe de  $P(0|\Delta\phi) = 1$  à  $P(0|\Delta\phi) = 0.5$  lorsque la différence de phase passe de  $\Delta\Phi = 0$  à  $\Delta\Phi \approx \frac{1}{N}$ . Cela illustre la sensibilité  $\propto \frac{1}{N}$  limitée uniquement par l'incertitude d'Heisenberg.

En dehors du cas particulier de l'interféromètre GEO600, l'utilisation d'états quantiques en vue de l'amélioration de la précision d'interféromètres optiques reste pour le moment anecdotique puisqu'on peut trouver des sources laser intenses facilement. Par contre, avec des ondes de matière, le nombre d'atomes disponible est rapidement limité et les non-linéarités sont bien plus importantes ce qui rend alors l'utilisation d'états quantiques particulièrement appropriés pour l'amélioration des interféromètres atomiques. Cela constitue d'ailleurs l'une des motivations de notre expérience.

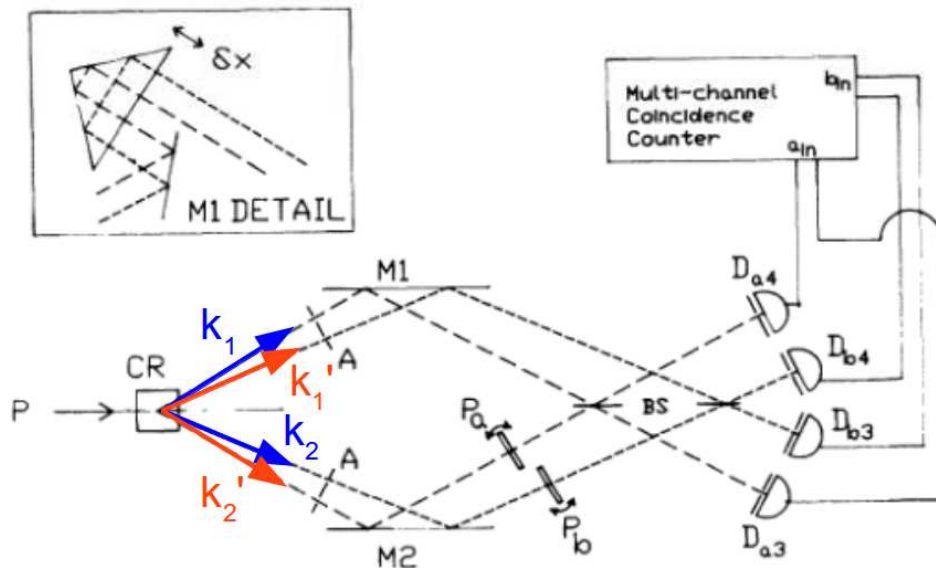
### 1.3.3 Inégalité de Bell

En plus des corrélations et des réductions de fluctuations, dont nous venons de voir l'utilité pour l'interférométrie, les photons d'une même paire sont dans certain cas, intriqués. La mesure de l'état d'un des photons projette alors l'autre photon dans un état bien défini. Autrement dit, la fonction d'onde qui décrit une paire n'est pas séparable, on ne peut pas la factoriser en termes ne dépendant que d'un seul des deux photons. C'est par exemple le cas de l'état créé lors de la conversion paramétrique de type II qui est de la forme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, V\rangle + e^{i\Phi}|V, H\rangle) \quad (1.42)$$

où H et V désignent l'état de polarisation des photons. Ce type d'état conduit à un résultat particulièrement contre-intuitif : si on mesure l'état de polarisation d'un des photons, alors l'état de l'autre particule est immédiatement projeté sur la polarisation orthogonale et ce, quelque soit la distance séparant les photons jumeaux. Ce paradoxe semble violer la causalité, ce qui amena en 1935 Einstein, Podolsky et Rosen à remettre en question la mécanique quantique [EPR35] en envisageant qu'il s'agisse d'une théorie incomplète. Ce type d'état est d'ailleurs dit de type "EPR" en référence à ces physiciens. Ce n'est que près d'une trentaine d'année plus tard que John Bell montra qu'en mesurant des quantités bien choisies, la mécanique quantique prédit un résultat qu'aucune théorie à variables cachées locales ne permet d'expliquer. En appliquant des rotations sur les polarisations des photons puis en mesurant les polarisations finales, les corrélations entre les résultats obtenus sur les deux photons doivent toujours vérifier une inégalité, dite inégalité de

Bell [Bel64] dans le cadre de théorie aux variables "cachées". Or, la mécanique quantique prédit la violation de cette inégalité pour certains angles de rotation des polarisations. Les premiers tests furent réalisés à l'aide de photons issus de la désexcitation à deux photons d'un atome et ont conduit à l'observation d'une violation des inégalités de Bell, confirmant ainsi les prédictions de la mécanique quantique et invalidant les théories aux variables locales "cachées" [FC72] [ADR82]. Quelques années plus tard l'expérience a été reproduite avec des photons issus de conversions paramétriques de type II [OM88] [SA88].



**Figure 1.10** – À l'aide des diaphragmes A, les vecteurs d'ondes  $k_1$ ,  $k_1'$ ,  $k_2$  et  $k_2'$  sont sélectionnés. Lorsqu'un photon est émis avec le vecteur d'onde  $k_1$  (resp.  $k_1'$ ) alors les conditions d'accord de phase imposent au photon complémentaire d'avoir le vecteur d'onde  $k_2$  (resp.  $k_2'$ ). On se retrouve ainsi dans un état intriqué, superposition des deux possibilités (voir équation 1.43). Les corrélations obtenues sur les détecteurs pour certaines valeur de déphasage (contrôlées par  $P_a$  et  $P_b$ ) permettent d'observer une violation des inégalités de Bell. Figure extraite et adaptée de [RT90].

Ces premières démonstrations ont été réalisées à l'aide d'états intriqués en polarisation dont l'équivalent atomique pourrait être l'intrication avec les sous-niveaux Zeeman mais rien n'empêche l'utilisation d'autre variables. Ainsi J. Rarity et P. Tapster ont mesuré une violation des inégalités de Bell à partir de paires de photons intriqués en impulsion [RT90]. La figure 1.10

montre le dispositif qu'ils ont utilisé. L'état produit est de la forme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_b}|k_1, k_2\rangle + e^{i\varphi_a}|k'_1, k'_2\rangle) \quad (1.43)$$

Les phases relatives  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  sont ajustées à l'aide des lames de phase  $P_a$  et  $P_b$  puis après avoir mélangé les deux termes avec les séparatrices (notées BS) on mesure les corrélations entre les détecteurs  $D_{a3}$ ,  $D_{a4}$  et  $D_{b3}$ ,  $D_{b4}$  (voir figure 1.10) :

$$E(\varphi_a, \varphi_b) = \frac{C_{a3,b3}(\varphi_a, \varphi_b) + C_{a4,b4}(\varphi_a, \varphi_b) - C_{a3,b4}(\varphi_a, \varphi_b) - C_{a4,b3}(\varphi_a, \varphi_b)}{C_{a3,b3}(\varphi_a, \varphi_b) + C_{a4,b4}(\varphi_a, \varphi_b) + C_{a3,b4}(\varphi_a, \varphi_b) + C_{a4,b3}(\varphi_a, \varphi_b)} \quad (1.44)$$

où  $C_{ai,bj}$  est le taux de coïncidences entre les détecteurs  $D_{ai}$  et  $D_{bj}$ . En répétant la mesure pour différentes valeurs de  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  on peut mesurer le paramètre de Bell  $S$  :

$$S = E(\varphi_a, \varphi_b) - E(\varphi_a, \varphi'_b) + E(\varphi'_a, \varphi_b) + E(\varphi'_a, \varphi'_b) \quad (1.45)$$

J. Rarity et P. Tapster ont ainsi obtenu  $S = 2.26 \pm 0.06$  [RT90] là où une théorie aux variables locales prédit que  $-2 \leq S \leq 2$ . La mécanique quantique prévoit des valeurs du paramètre de Bell pouvant aller jusqu'à  $S = 2\sqrt{2}$  ( $\approx 2.82$ ), elle permet donc d'expliquer le résultat obtenu et contredit les explications reposant sur des théories aux variables cachées locales ne sont pas valables.

L'intrication d'un état que l'on démontre grâce à la violation des inégalités présente, en plus de son importance fondamentale, un intérêt en tant que support pour l'information quantique [Mon02], la téléportation d'état [Ben+93] et la cryptographie quantique [HB84], l'information étant délocalisée sur les deux photons séparés spatialement. D'après la mécanique quantique il n'y a d'ailleurs aucune limite à la distance séparant des particules intriquées et les tests actuels sont pour le moment limités par des aspects technique. Ainsi, dans le cas des photons, ce sont les pertes engendrés par l'atténuation dans les fibres optiques qui empêchent la propagation de l'intrication sur des distances arbitrairement grande. De l'information délocalisée sur plusieurs centaines de kilomètres a tout de même pu être observée [Sch+09].

## 1.4 Mélange à quatre ondes de matière

Contrairement aux photons, les atomes peuvent interagir fortement entre eux sans l'aide de milieux intermédiaires ce qui rend aisément accessible les phénomènes non-linéaires. La conservation du nombre de particules impose qu'uniquement les non-linéarités d'ordre impair existent et en particulier le

mélange à quatre ondes. Ce dernier peut être compris comme l'interaction de deux modes de pompe donnant naissance à un mode signal et un mode complémentaire comme nous l'avons expliqué dans la section 1.1.2. Nous allons nous intéresser à ce phénomène en commençant par donner quelques éléments théoriques puis en étudiant deux cas particuliers : la collision de deux condensats en espace libre et le mélange à quatre ondes dans un réseau optique.

### 1.4.1 Éléments théoriques

Le système est régi par le hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \right] \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (1.46)$$

où  $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$  est le coefficient d'interaction (avec  $a$  la longueur de diffusion) et  $V(\vec{r}, t)$  est un potentiel externe, de piégeage par exemple.

Dans le cadre du mélange à quatre ondes, il est pratique de décomposer l'opérateur champ en trois termes : deux termes de modes de pompe ( $\Phi_{p1}$  et  $\Phi_{p2}$ ) et un terme représentant les modes diffusés  $\Phi_d$  :

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \Phi_{p1}(\vec{r}, t) \hat{a}_{p1} + \Phi_{p2}(\vec{r}, t) \hat{a}_{p2} + \Phi_d(\vec{r}, t) \hat{a}_d \quad (1.47)$$

On réinjecte alors cette décomposition dans l'expression du hamiltonien d'interaction  $H_{int}$  (voir 1.46) de nombreux termes apparaissent alors, en particulier :

$$\hat{H}_{M4O} = 2g \int d\vec{r} \Phi_{p1}^*(\vec{r}, t) \Phi_{p2}^*(\vec{r}, t) \Phi_d(\vec{r}, t) \Phi_d(\vec{r}, t) \hat{a}_{p1}^\dagger \hat{a}_{p2}^\dagger \hat{a}_d \hat{a}_d + h.c \quad (1.48)$$

décrivant le mélange à quatre ondes où deux atomes des modes de pompe  $p1$  et  $p2$  sont émis en une paire d'atomes dans les modes diffusés (et le processus inverse). On obtient également les termes :

$$\hat{H}_{CM} = 2g \int d\vec{r} |\Phi_i(\vec{r}, t)|^2 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |\Phi_j(\vec{r}, t)|^2 \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \quad (1.49)$$

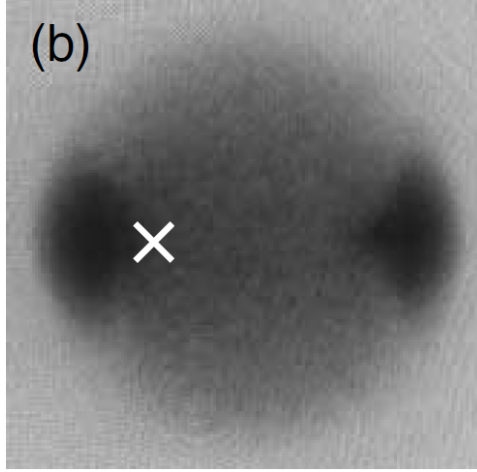
avec  $(i, j) \in (p1, p2, d)$ . Ces termes décrivent l'énergie d'interaction, dite de champ moyen, entre les atomes du mode  $i$  et ceux du mode  $j$ .

Ces deux termes suffisent à décrire la plupart des phénomènes abordés dans ce manuscrit. En effet, dans nos conditions, les autres termes ne vérifient jamais la conservation de l'énergie et influencent donc très peu l'évolution du système.



### 1.4.2 Collision en espace libre

Pour bien comprendre le mélange à quatre ondes de matière intéressons-nous tout d'abord à la collision de deux condensats en espace libre [VCK03]. Il n'y a alors aucun potentiel appliqué sur les atomes et deux condensats



**Figure 1.11** – Image d'absorption du halo d'atomes de rubidium diffusés par mélanges à quatre ondes dans le groupe de Ketterle [VCK03].

d'impulsions opposées  $K$  et  $-K$  entrent en collision. On peut modéliser ces deux paquets d'ondes de pompe par des ondes planes :

$$\Phi_{p1,p2}(\vec{r}, t) = \Phi_{\pm K}(\vec{r}, t) = \sqrt{n_{\pm K}} e^{\mp i \vec{K} \cdot \vec{r}} e^{-i \frac{\hbar K^2}{2m} t} \quad (1.50)$$

avec  $n_{\pm K}$  la densité respective des condensats de pompe. Par simplicité on prendra  $n_{+K} = n_{-K} = n$ . On décompose ensuite les modes diffusés sur la base des ondes planes :

$$\Phi_d(\vec{r}, t) \hat{a}_d = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\vec{k} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} t} \hat{a}_k \quad (1.51)$$

Le hamiltonien du mélange à quatre ondes (1.48) peut maintenant s'écrire sous la forme :

$$H_{M4O} = 2gn \int \int d\vec{k} d\vec{k}' \int d\vec{r} e^{i \frac{\hbar(2K^2 - k^2 - k'^2)}{2m} t} e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} \hat{a}_K^\dagger \hat{a}_{-K}^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_{k'} \quad (1.52)$$

qui sera non négligeable seulement si le processus conserve l'énergie et l'impulsion (en négligeant les effets de champ moyen) :

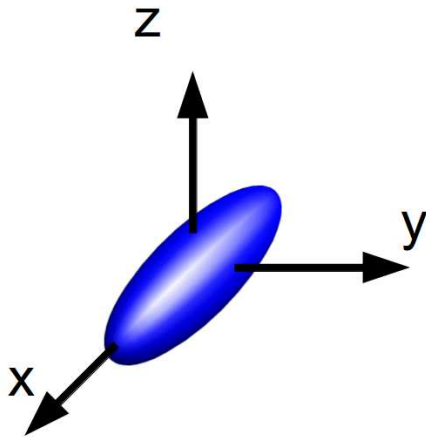
$$\vec{k} + \vec{k}' = 0 \quad (1.53)$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} = 2 \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \quad (1.54)$$

C'est ce qu'on appelle les conditions d'accord de phase. Ici, elles imposent que les atomes diffusés aient des impulsions opposées réparties sur une sphère

de rayon  $K$ . C'est effectivement ce qui a pu être observé expérimentalement dans le groupe de Ketterle (voir fig. 1.11).

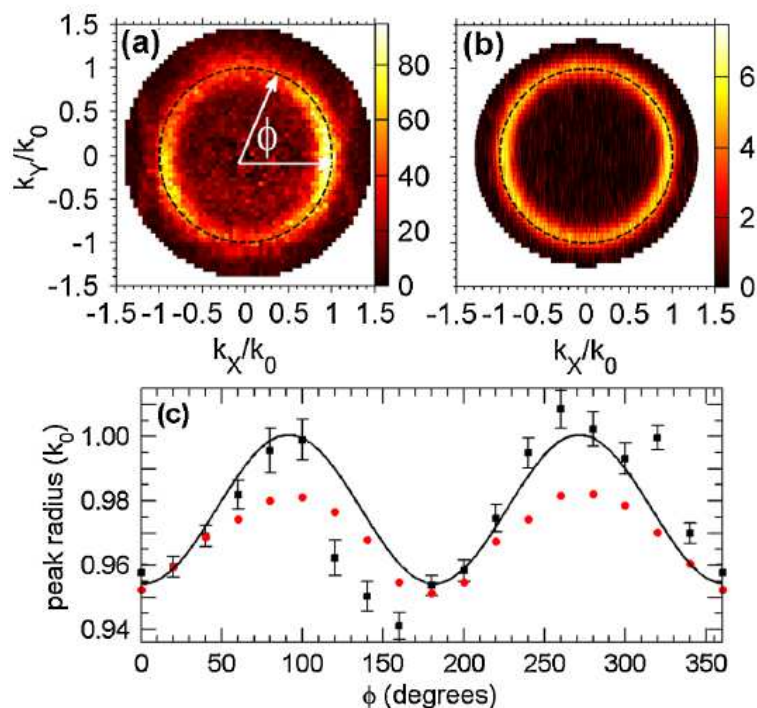
Cependant, les effets de champ moyen ne sont en pratique pas totalement négligeables et changent légèrement la forme du halo de diffusion, comme mis en évidence sur notre expérience avant mon arrivée en thèse [Kra+10].



**Figure 1.12** – À l'époque la collision était réalisée à partir d'un condensat dans le piège magnétique. Le nuage était alors très allongé selon l'axe des bobines du piège (axe  $x$ ).

Dans les conditions de l'époque, le condensat était très anisotrope avec son axe long selon l'axe des bobines du piège magnétique (voir figure 1.12). Le champ moyen introduisait une variation de l'ordre de 5 % du rayon de la sphère (soit une variation de l'ordre de 10 % sur l'énergie) (voir figure 1.13). Cette modification du rayon en fonction de la direction dans le plan équatorial de la sphère (de l'ellipsoïde en fait) peut s'expliquer par l'anisotropie initiale du condensat. La collision a pour effet de déposer les atomes sur une bosse de potentiel de champ moyen dont le profil initial est proportionnel à la densité du condensat. Les atomes diffusés dévalent ensuite cette colline avec une vitesse initiale de l'ordre de la vitesse de recul et convertissent l'énergie potentielle en énergie cinétique. Cependant, le temps nécessaire à ces atomes pour descendre de cette bosse est très différent selon les directions : selon les axes courts (notés  $y$  et  $z$ ) les atomes sortent du champ moyen en environ  $40 \mu\text{s}$  et parviennent à dévaler entièrement la pente, alors que selon l'axe long (axe  $x$  sur la figure 1.13) ils leur faut quasiment 1.2 ms. Or, le champ moyen n'est pas stationnaire, le nuage n'est plus piégé et sa densité s'écroule à cause de son expansion en typiquement  $30 \mu\text{s}$ . C'est suffisant pour que les atomes s'échappant selon les axes courts soient accélérés en dévalant la pente contrairement à ceux s'échappant selon l'axe long qui restent quasiment au sommet de la bosse et n'augmentent pratiquement pas leur vitesse. Cela explique pourquoi, dans le plan équatorial, le rayon en impulsion mesuré selon l'axe  $x$  est plus court que celui selon l'axe  $y$  (voir figure 1.13).

Cet exemple illustre bien qu'il faut garder à l'esprit la présence de ces effets d'interactions qui, comme nous le verrons au chapitre 3 dans la partie

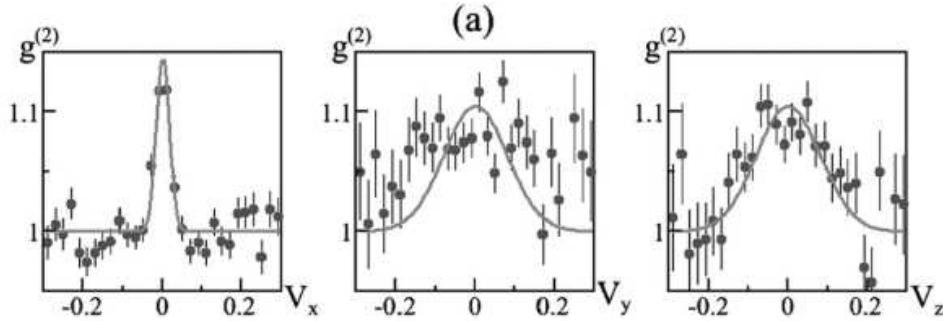


**Figure 1.13** – Lors du mélange atomique en espace libre, l'équipe a pu mettre en évidence les effets subtils des interactions. (a) Densité moyenne dans l'espace des impulsions et dans le plan équatorial de la sphère d'atomes diffusés par mélange à quatre ondes en espace libre. Ce profil est obtenu à partir de près de 1500 réalisations expérimentales. (b) Identique à (a) mais issue d'une simulation positive-P. (c) Évolution du rayon de la sphère dans le plan équatorial obtenue par l'expérience (carrés noirs) et par la simulation (ronds rouges). La courbe noire est un ajustement sinusoïdal aux données expérimentales. Figure issue de [Kra+10]

3.1, se révéleront cruciaux dans la compréhension du mélange à quatre ondes dans un réseau optique.

Lors du mélange à quatre ondes en espace libre, les atomes sont émis par paire comme l'atteste les corrélations obtenues par l'équipe en 2007 [Per+07] (voir figure 1.14). Il s'agit donc d'une source de paires d'atomes corrélés, cependant elle n'est pas directive puisque les atomes sont émis dans  $4\pi$  strad. Sur le halo d'atomes diffusés il n'y a en moyenne que 0.01 atome par mode ce qui, pour de l'interférométrie, s'avère insuffisant mais qui pourrait convenir pour les tests de l'inégalité de Bell ou de l'effet Hong, Ou et Mandel.

C'est donc pour pallier au manque de directivité et à la faible population

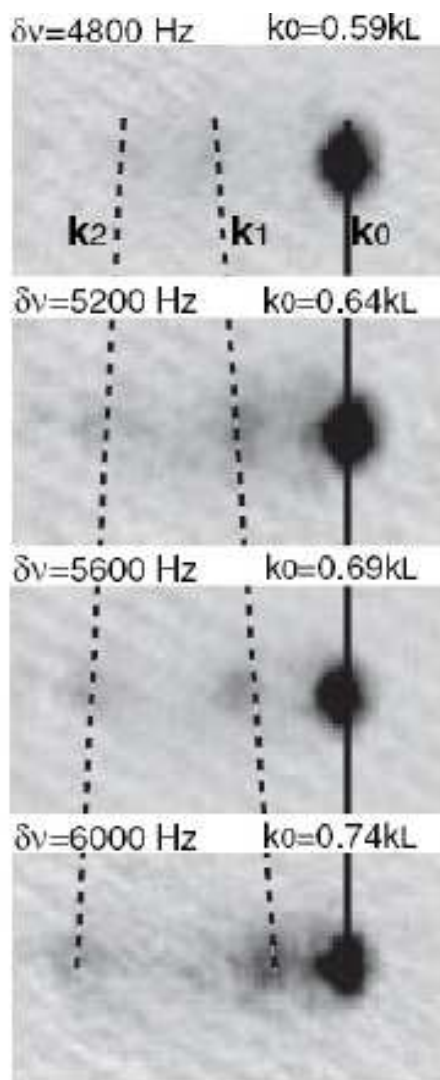


**Figure 1.14** – Projections de  $g^{(2)}(K = \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ . On observe un pic autour de  $K = 0$ , preuve de la corrélation entre atomes d'impulsions  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_1$  opposées. [Per+07]

des modes que nous avons décidé de développer une nouvelle source de paires d'atomes reposant sur le mélange à quatre ondes spontané dans un réseau optique en partant de la proposition de K.M Hilligsøe et K. Mølmer [HM05].

### 1.4.3 Mélange à quatre ondes dans un réseau optique

Le principe du mélange à quatre ondes dans un réseau optique est similaire au mélange à quatre ondes en espace libre : il s'agit de la collision de deux atomes qui donne naissance à une paire d'atomes dont les impulsions sont définies par les conditions d'accord de phase. La différence repose justement sur ces dernières ; l'utilisation d'un réseau permet de modifier les conditions d'accord de phase afin de favoriser la création de paires dans un nombre restreint de modes. Ce mécanisme sera décrit en détail dans le chapitre suivant (Chapitre 2 dans la partie 2.3). Pour la première fois proposée dans [HM05], l'expérience a été réalisée peu de temps après dans le groupe de Ketterle [Cam+06]. En chargeant un condensat dans un réseau optique unidimensionnel l'équipe a observé le peuplement de deux modes conjugués (voir figure 1.15). Cependant leur imagerie par absorption n'a pas permis l'étude des corrélations inter-atomiques ou l'analyse approfondie des conditions d'accord de phase. C'est donc pour améliorer la compréhension de ce mécanisme et avec comme objectif l'utilisation de ce processus pour la création d'une source de paires d'atomes corrélés fiable que nous avons entrepris l'étude du mélange à quatre ondes dans un réseau optique.



**Figure 1.15** – Première observation de mélange à quatre ondes dans un réseau optique dans le groupe de Ketterle par Campbell et collaborateurs. En faisant se déplacer un condensat avec différentes impulsions initiales  $k_0$ , ils ont observé dans l'espace des impulsions l'apparition de nuages autour d'impulsions bien définies dont les valeurs dépendent de  $k_0$ . Ces pics ainsi créés sont la signature du mélange à quatre ondes de matière dans un potentiel périodique. Figure tirée de [Cam+06]

## 1.5 Conclusion du chapitre

Nous avons vu dans ce chapitre à quel point les paires de particules corrélées sont des outils précieux pour l'étude des phénomènes non classiques et pour la réalisation de protocoles de communication et d'information quantique.

La création de particules corrélées repose sur l'utilisation de processus non-linéaires dont nous avons dans ce chapitre décrit les deux plus courants : la conversion paramétrique et le mélange à quatre ondes. Les corrélations propres aux particules jumelles peuvent être mises en évidence grâce à la mesure de la fonction de corrélation d'ordre 2 et la preuve de l'émission par paire peut être apportée en mesurant le bruit sur la différence du nombre de particules dans les modes corrélés. Ce bruit doit être, pour des paires, fortement réduit et même descendre en-dessous du bruit de Poisson.

Cet aspect fortement non-classique des paires de particules a été mis à profit avec des photons par la réalisation d'expériences devenues maintenant de véritables références : l'effet Hong, Ou et Mandel, l'interférométrie en-dessous de la limite quantique standard et la violation de l'inégalité de Bell.

L'enjeu pour la communauté de l'optique atomique quantique est maintenant de créer des sources de paires d'atomes corrélés aussi fiables et ajustables que ce qui est fait avec des ondes lumineuses afin de reproduire, adapter, voir dépasser les expériences réalisées avec des photons il y a maintenant près de trente ans. C'est dans cet objectif que notre équipe étudie le mélange à quatre ondes de matière en commençant par la réalisation, il y a quelques années, d'une source de paires d'atomes corrélés grâce à la collision de deux condensats. Nous avons maintenant ajouté un réseau optique unidimensionnel afin d'obtenir une source plus brillante et plus ajustable.



## Chapitre 2

# Effets et mise en place d'un réseau optique

Au cours des dix dernières années l'utilisation de réseaux optiques dans le domaine des atomes froids s'est démocratisée. La création d'un potentiel périodique à une, deux ou trois dimensions fait apparaître de très divers et nombreux effets physiques qui suscitent l'engouement dans la communauté [BDZ08]. Dans ce chapitre nous partirons d'un point de vue généraliste sur les réseaux avant de, petit à petit, nous focaliser sur l'utilisation particulière que nous en faisons expérimentalement.

Dans un premier temps nous présenterons l'utilisation des réseaux optiques au travers de quelques exemples. Cela donnera ainsi un aperçu des formidables possibilités offertes par les potentiels périodiques. Nous fournirons, dans la partie suivante, les éléments théoriques nécessaires à la compréhension des effets produits par un réseau. Remarquons que, dans cette partie, nous nous restreindrons au cas des réseaux unidimensionnels puisqu'en plus d'être plus simples à étudier, ils correspondent à notre situation expérimentale. Nous développerons en particulier les notions de quasi-impulsions et de structure de bandes d'énergie. Ces notions se révéleront en effet cruciales pour la compréhension des mécanismes du mélange à quatre ondes dans un potentiel périodique. C'est précisément ces mécanismes que nous présenterons dans la partie suivante en discutant comment les conditions d'accord de phase sont modifiées par l'ajout d'un réseau.

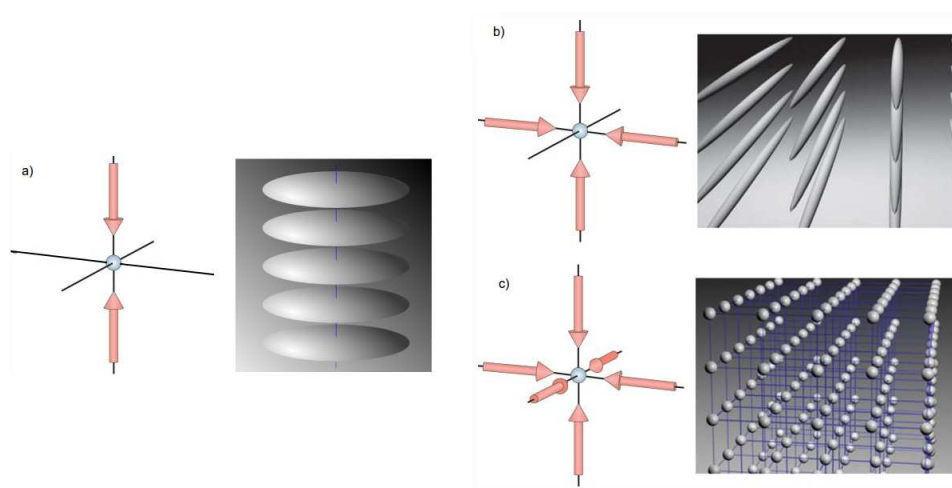
Enfin nous décrirons la mise en place expérimentale du réseau optique et sa caractérisation. Nous vérifierons entre autre l'absence d'effets indésirables de chauffage qu'apporteraient les faisceaux laser du réseau et nous mesurerons la profondeur du potentiel réellement ressentie par les atomes. Nous finirons enfin par la présentation des premières observations de mélange à quatre ondes en présence du potentiel périodique. Les travaux décrits dans ces deux dernières parties ont été, pour la plupart, réalisés en commun avec



Marie Bonneau et sont en grande partie également exposés dans sa thèse, [Bon11] soutenue en 2011.

## 2.1 Les réseaux optiques, un outil pour les atomes froids

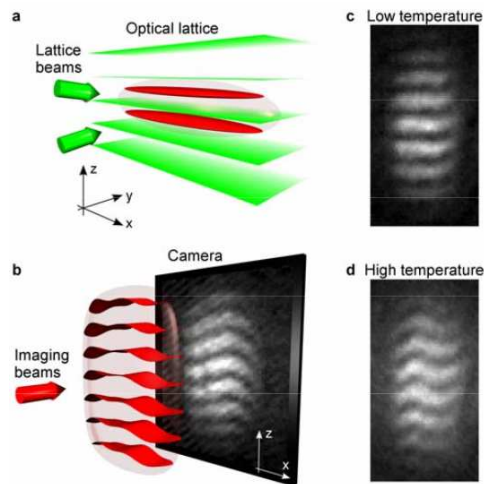
Les réseaux optiques permettent de créer des potentiels périodiques par le biais d'interférences entre plusieurs faisceaux laser. Par exemple, deux faisceaux laser contrapropageants interfèrent et créent des franges espacées de  $\lambda/2$ . Grâce à la force dipolaire les atomes sont ainsi soumis à un potentiel périodique proportionnel à l'intensité des franges d'interférences (voir figure 2.1 (a)). L'ajout de laser dans les deux autres directions de l'espace permet l'obtention de structures périodiques à une, deux ou trois dimensions (voir figure 2.1 (a), (b) et (c)).



**Figure 2.1** – Grâce aux interférences il est possible de réaliser des structures périodiques uni, bi et tridimensionnelles dont on a ici représenté trois exemples simples. En jouant sur les angles des faisceaux et les polarisations il est possible d'obtenir des structures plus exotiques (nid d'abeille, réseau triangulaire ... [ZWD07 ; PCG94])

Ces potentiels périodiques permettent de simuler le potentiel vu par les électrons dans des solides cristallins, ce qui permet de simuler à l'aide des atomes froids le comportement de nombreux systèmes de matière condensée avec un contrôle inégalé sur les différents paramètres du système [BDZ08]. On peut par exemple citer l'observation de la transition de Mott [Gre+02] où les atomes passent d'une phase superfluide à une phase isolante où ils

sont localisés dans les puits du potentiel périodique. Une autre utilisation courante des réseaux est de mettre à profit la dimension réduite des puits de potentiels créés (de l'ordre de  $\lambda/2$ ) pour produire des pièges extrêmement confinants. Par exemple, dans un réseau à une dimension on piège les atomes dans des galettes parallèles de très faibles épaisseurs ce qui permet l'étude des propriétés des gaz bidimensionnels comme c'est le cas sur l'expérience d'Hadzibabic et al. [Had+06]. Dans cette équipe, ils ont choisi d'utiliser un réseau pour créer deux gaz bidimensionnels (voir figure 2.2). Les deux nuages parallèles sont ensuite relâchés abruptement puis ils s'étendent, se recouvrent et interfèrent. La figure d'interférence donne alors des informations sur la phase relative des deux nuages. Le contraste des interférences



**Figure 2.2** – Étude de la cohérence de gaz bidimensionnels par détection hétérodyne d'ondes de matière. (a) Les franges d'interférences de deux laser à 532 nm permettent de séparer un condensat tridimensionnel en deux gaz bidimensionnels indépendants. (b) Après la coupure brutale du potentiel de confinement, les deux nuages s'étendent et interfèrent. Les franges sont alors observées à l'aide d'une caméra CCD grâce à l'absorption d'un faisceau résonant. (c) et (d) Exemples de deux figures d'interférences ainsi obtenues. Figure tirée de [Had+06].

obtenues permet d'étudier les propriétés de cohérence du gaz et a en particulier permis aux auteurs de mettre en évidence la transition de phase de type Berezinskii-Kosterlitz-Thouless.

Dans le domaine de l'interférométrie atomique, les réseaux sont également intensément utilisés pour réaliser l'équivalent atomique des miroirs et des séparatrices à l'aide de la diffraction de Bragg [GML95]. Ce phénomène de diffraction sera abordé dans la partie suivante au paragraphe 2.2.3.

Enfin, on peut également utiliser les potentiels périodiques pour modifier la relation de dispersion, c'est-à-dire changer l'évolution de l'énergie en fonction de l'impulsion des atomes. Cela permet par exemple de changer la masse effective des atomes[BDZ08], et rend également possible le mélange à quatre ondes de matières spontanée comme évoqué à la fin de la partie précédente.

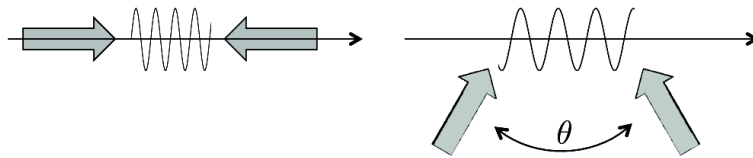
C'est justement cette dernière possibilité qui nous intéresse puisqu'elle permet la création de paires d'atomes jumeaux [HM05 ; Cam+06]. Afin de comprendre l'effet d'un potentiel périodique sur un nuage atomique nous allons, dans la partie suivante donner quelques clés théoriques sur les phénomènes que nous serons amenés à aborder dans ce manuscrit.

## 2.2 Effet d'un potentiel périodique

Dans cette partie nous allons détailler l'effet d'un réseau optique dans le cas unidimensionnel en s'appuyant sur le cours du Collège de France de J. Dalibard [Dal13]. On s'intéressera aux réseaux créés par des laser loin de toutes résonances atomiques. On pourra ainsi considérer les potentiels comme étant conservatifs. Notons que la plupart des résultats obtenus dans cette partie sont généralisables à deux et trois dimensions.

### 2.2.1 Création d'un réseau optique

Comme évoqué dans la partie précédente, la création d'un potentiel périodique à une dimension se fait grâce à l'interférence de deux faisceaux laser (voir figure 2.3).



**Figure 2.3** – réseau optique à une dimension formée par l'interférence de deux faisceaux. Gauche : période  $\lambda/2$ , Droite : période  $\lambda/[2 \sin(\theta/2)]$

Les franges sont formées par deux ondes progressives contrapropageantes de même amplitude  $\varepsilon_0$  qui en projection selon l'axe  $Oz$  s'écrivent :

$$\varepsilon_0 \sin(k_r z - \omega t + \phi_1), \quad \varepsilon_0 \sin(k_r z + \omega t - \phi_2). \quad (2.1)$$

Le champ résultant s'écrit alors :

$$\varepsilon(z, t) = 2\varepsilon_0 \sin\left(k_r z - \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (2.2)$$

Les atomes ressentent ainsi un potentiel périodique  $V(z)$  :

$$V(z) = V_0 \sin^2(k_r z - \Phi), \quad V_0 = d_0^2 \varepsilon_0^2 / \hbar \bar{\Delta} \quad (2.3)$$

où,  $d_0$  est le dipôle atomique réduit,  $\Phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$  et où  $\bar{\Delta}$  est défini par :

$$\frac{1}{\bar{\Delta}} = \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \quad (2.4)$$

avec  $\omega_0$  la pulsation de résonance de la transition atomique. L'intensité et le désaccord par rapport à la transition des faisceaux permettent ainsi de régler l'amplitude et le signe du potentiel. En choisissant une phase relative  $\Phi = (\phi_2 - \phi_1)/2$  qui dépend du temps, il est possible de mettre en mouvement le réseau qui se déplacera alors dans le référentiel du laboratoire à la vitesse :

$$v = \frac{1}{2k_r} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.5)$$

Dans le cas général,

$$k_r = k_L \sin(\theta/2)$$

où  $\theta/2$  est l'angle que font chacune des ondes par rapport à la normale à  $Oz$  et  $k_L = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde des faisceaux laser. La période spatiale du potentiel est donc  $a = \lambda/[2 \sin(\theta/2)]$ . L'angle  $\theta$  constitue ainsi un moyen simple de régler le pas du réseau.

Un réseau optique permet donc la réalisation de potentiels périodiques parfaitement contrôlés dont on peut régler les paramètres clefs. Intéressons-nous maintenant au comportement des atomes dans un tel potentiel.

### 2.2.2 États propres et bandes d'énergie

Pour décrire la dynamique des atomes de masse  $m$  dans le potentiel périodique il faut chercher les états propres  $|\Psi\rangle$  de l'hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \sin^2(k_r \hat{z}). \quad (2.6)$$

On a supposé ici un réseau fixe tel que  $\Phi = 0$  et on néglige les interactions entre atomes.

Le nombre d'onde  $k_r$  fait apparaître naturellement une échelle d'énergie qu'on appelle énergie de recul (Énergie d'un atome de vitesse initiale nulle après l'absorption d'un photon des laser du réseau) :

$$E_r = \frac{\hbar^2 k_r^2}{2m} \quad (2.7)$$

qui permet d'adimensionner l'équation aux valeurs propres  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  :

$$-\psi''(\bar{z}) + \frac{\bar{V}_0}{2}[1 - \cos(2\bar{z})]\psi(\bar{z}) = \bar{E}\psi(\bar{z}) \quad (2.8)$$

où  $\bar{z} = k_r z$ ,  $\bar{V}_0 = V_0/E_r$  et  $\bar{E} = E/E_r$ .

Pour résoudre cette équation, dite équation de Mathieu, on s'appuie sur le théorème de Bloch [Dal13 ; Blo29] qui, en tirant partie de l'invariance par translation de multiples de la période spatiale  $a$ , permet d'écrire les fonctions propres sous une forme particulièrement commode :

$$\psi_q(z) = e^{iqz}u_q(z) \quad (2.9)$$

avec  $u_q(z)$  une fonction périodique de période  $a$ .

Notons également qu'à une phase arbitraire près la fonction d'onde vérifie :

$$\psi_{q+2k_r}(z) = \psi_q(z) \quad (2.10)$$

Grâce à la périodicité spatiale des fonctions  $u_q(z)$ , celles-ci peuvent être décomposées sur la base des ondes planes discrètes :

$$u_q(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(q)e^{-2imk_r z} \quad (2.11)$$

En injectant la fonction d'onde 2.9 dans l'équation aux valeurs propres, on en déduit une équation sur  $u_q$  :

$$\hat{H}_u(q)u_q(z) = E(q)u_q(z) \quad (2.12)$$

où  $\hat{H}_u(q)$  est un hamiltonien dépendant du paramètre  $q$

$$\hat{H}_u(q) = \frac{(\hat{p} + \hbar q)^2}{2m} + \frac{V_0}{2}(1 - \cos(k_r \hat{z})) \quad (2.13)$$

On voit dans cette équation que  $\hbar q$  joue un rôle similaire à celui de l'impulsion d'une particule libre. On appelle ce nombre quantique quasi-impulsion. Suite à la décomposition en ondes planes, on obtient pour un  $q$  donné les équations couplées sur les coefficients  $a_m$  :

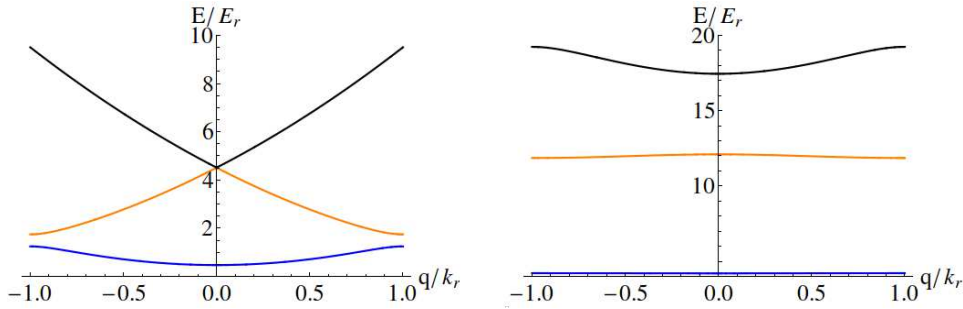
$$\left[(2m + \frac{q}{k_r})^2 + \frac{\bar{V}_0}{2}\right]a_m - \frac{\bar{V}_0}{4}(a_{m-1} + a_{m+1}) = \bar{E}a_m \quad (2.14)$$

Ce système se ramène à une équation aux valeurs propres pour une matrice tri-diagonale, symétrique et réelle. Les solutions sont repérables par un

indice  $n = 0, 1, 2, \dots$  en rangeant les énergies propres  $E_n(q)$  par ordre croissant. La solution associée à  $E_n(q)$  est notée  $u_{n,q}(z)$ , les coefficients de la décomposition en ondes planes sont notés  $a_{m,n}(q)$  et la fonction d'onde est notée  $\psi_{n,q}$ . Comme cette dernière est invariante par la substitution  $q \rightarrow q + 2k_r$ , il en va de même pour les énergies :

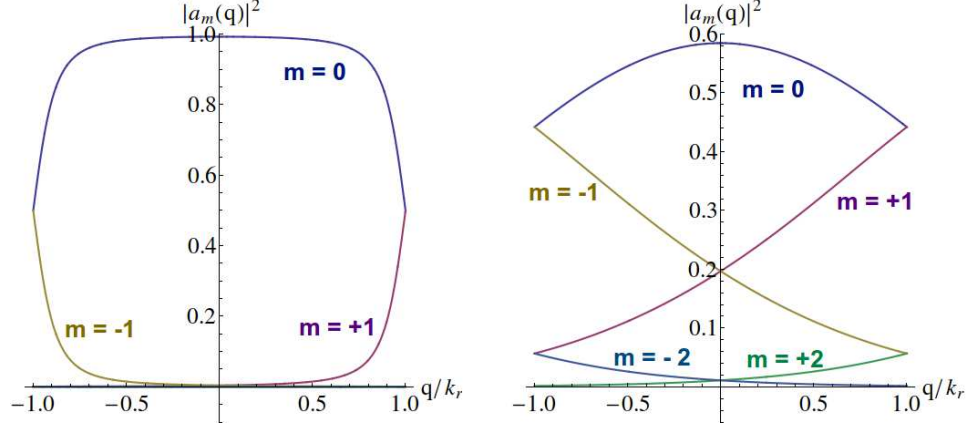
$$E_n(q + 2k_r) = E_n(q) \quad (2.15)$$

On peut donc se limiter à ce que l'on appelle la première zone de Brillouin :  $k_r \leq q \leq k_r$ . La relation de dispersion (variation de l'énergie avec le quasi-moment  $q$ ) présente une structure de bandes repérées par l'indice  $n$ . Entre ces bandes autorisées il y a des zones interdites, ou gaps, dont la largeur augmente avec la profondeur du potentiel (voir figure 2.4).



**Figure 2.4** – Relations de dispersion pour  $V_0 = E_r$  à gauche et  $V_0 = 20E_r$  à droite. Pour de faibles profondeurs la relation de dispersion est proche de la parabole (repliée) obtenue dans l'espace libre. Par contre, à mesure que la profondeur augmente les bandes s'aplatissent et les gaps d'énergie s'élargissent.

En pratique, pour résoudre le système on se limite à un nombre fini d'ondes planes ( $m \in [-N_{op}, N_{op}]$ ) et on diagonalise numériquement le hamiltonien. On obtient alors uniquement les  $2N_{op} + 1$  premières bandes d'énergie. On peut vérifier l'effet de cette troncature a posteriori en regardant la décomposition en ondes planes de la solution ; par exemple si on s'intéresse à la bande fondamentale, on peut tracer la décomposition des  $u_{n,q}(z)$  sur la base des ondes planes (voir figure 2.5). On s'aperçoit que pour  $V_0 \leq 20E_r$  seuls les coefficients d'indices  $m$  inférieurs à  $\pm 3$  dans la bande fondamentale ( $n=0$ ) prennent des valeurs significatives. L'importance des ondes planes d'indices supérieurs est donc négligeable ce qui justifie a posteriori la troncature de la somme.



**Figure 2.5** – Modules carrés des coefficients de la décomposition en ondes planes de la fonction d’onde dans la bande fondamentale  $|a_{m,0}(q)|^2$ . À gauche  $V_0 = E_r$  et à droite  $V_0 = 20E_r$ . Dans les deux cas seuls les coefficients d’indices relativement faibles sont non négligeables ( $|m| \leq 1$  dans le cas de gauche,  $|m| \leq 2$  dans celui de droite).

### 2.2.3 Diffraction d’onde de matière par un réseau : cas de la diffraction de Bragg

En observant les figures de diffractions obtenues après l’application du réseau, il est possible d’obtenir des informations sur ce dernier. Ainsi, en utilisant la diffraction de Bragg que nous allons décrire dans cette section, nous pouvons calibrer la profondeur du potentiel réellement perçue par les atomes comme nous le verrons dans la section 2.4.3.

Pour des raisons de simplicité, on modélise le condensat par une onde plane d’impulsion  $\hbar q$  :  $|\Psi(t=0)\rangle = |\Phi_q\rangle$ . Lors de l’allumage brutal d’un réseau sur le nuage atomique on projette l’état initial  $|\Psi(t=0)\rangle$  sur la base des états de Bloch  $|\psi_{n,q}\rangle$  :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_{n,q} | \Phi_q \rangle |\psi_{n,q}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n}^*(q) |\psi_{n,q}\rangle \quad (2.16)$$

Où on note  $a_{m,n}(q)$  le coefficient de la décomposition de la fonction d’onde dans la bande d’indice  $n$  sur l’onde plane de vecteur d’onde  $q + 2mk_r$ .

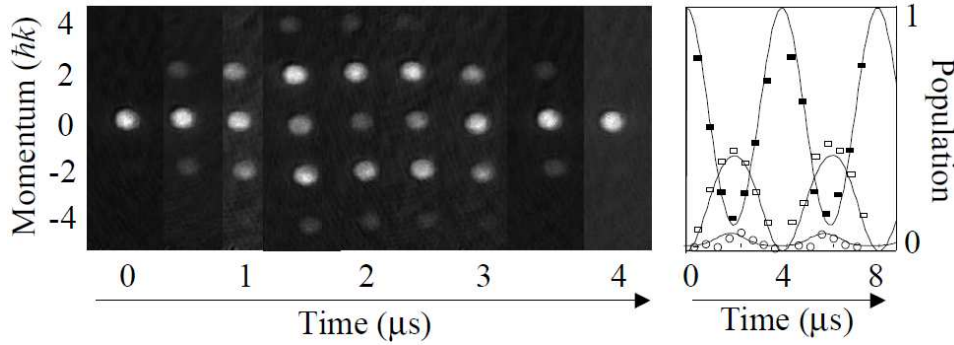
Chaque terme de la décomposition accumule ensuite une phase proportionnelle son énergie :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n}^*(q) e^{-i\frac{E_n(q)}{\hbar}t} |\psi_{n,q}\rangle \quad (2.17)$$

Enfin, après un temps  $\tau$  on coupe le réseau et on observe la fonction d'onde dans la base des ondes planes (base de mesure). L'état s'écrit alors :

$$|\Psi(\tau)\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n}^*(q) a_{m,n}(q) e^{-i \frac{E_n(q)}{\hbar} \tau} \right) |\Phi_{q+2mk_r}\rangle \quad (2.18)$$

On observe donc des ordres de diffraction à  $q + 2mk_r$ , dont l'amplitude dépend du temps d'allumage  $\tau$  du réseau. Un exemple typique de figure de diffraction est donné dans la figure 2.6.



**Figure 2.6** – Figures de diffraction obtenues par Denschlag et al. [Den+02]. L'onde initiale a une impulsion  $\hbar q = 0$  et la profondeur est de  $V_0 = 14E_r$ . À gauche sont représentées des images obtenues après temps de vol pour différentes durées d'allumage du réseau. On observe ainsi l'évolution des populations dans les modes de diffraction à  $0 k_r$ ,  $\pm 2 k_r$  et  $\pm 4 k_r$ .

Et à droite les auteurs ont tracé les populations dans les modes d'impulsions  $0\hbar k_r$  (carrés pleins),  $2\hbar k_r$  (carrés vides) et  $4\hbar k_r$  (cercles) en fonction de la durée d'application du réseau.

Lorsque le réseau est suffisamment peu profond ( $V_0 < 4E_r$  [Kel+99]) seule la bande fondamentale ( $n = 0$ ) et la première bande excitée ( $n = 1$ ) sont significativement peuplées. On a également vu qu'uniquement les coefficients  $a_{m,n}(q)$  d'indices  $|m| \leq 1$  sont non négligeables et la diffraction n'aura lieu que vers les ordres  $\pm 1$ . L'évolution temporelle des populations à  $q$ ,  $q + 2k_r$  et  $q - 2k_r$  peut être déterminée simplement grâce à l'équation 2.18 :

$$P_0(q, \tau) = 1 - C_0(q) \sin^2\left(\frac{\Delta\omega_q}{2} \tau\right) \quad (2.19)$$

$$P_{\pm 1}(q, \tau) = C_{\pm 1}(q) \sin^2\left(\frac{\Delta\omega_q}{2} \tau\right) \quad (2.20)$$

avec

$$C_{\pm 1} = |a_{0,0}^*(q) a_{\pm 1,0}(q) a_{0,1}^*(q) a_{\pm 1,1}(q)| \quad (2.21)$$



et

$$C_0 = |a_{0,0}(q)|^2 |a_{0,1}(q)|^2 = C_{-1} + C_{+1} \quad (2.22)$$

et

$$\Delta\omega_q = [E_1(q) - E_0(q)]/\hbar \quad (2.23)$$

En étudiant le comportement des coefficients  $C_{\pm 1}(q)$  représentés sur la figure 2.7, on observe que chacun exhibe une résonance à  $\mp k_r$ .

Si on se place à résonance la population oscille à la pulsation  $\Delta\omega_{k_r}$  entre les modes  $q = k_r$  et  $q - 2k_r = -k_r$ , c'est la diffraction de Bragg.

$$P_0(k_r, \tau) = 1 - \sin^2\left(\frac{\Delta\omega_{k_r}}{2}\tau\right) \quad (2.24)$$

$$P_{-1}(k_r, \tau) = \sin^2\left(\frac{\Delta\omega_{k_r}}{2}\tau\right) \quad (2.25)$$

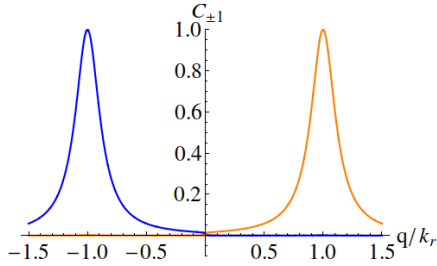
où, toujours en supposant  $V_0 < 4E_r$  :

$$\Delta\omega_{k_r} = \frac{V_0}{2\hbar} \quad (2.26)$$

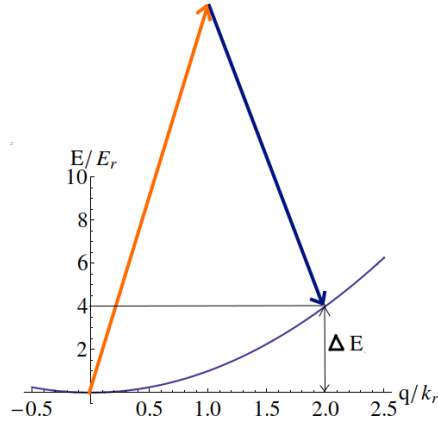
On peut également interpréter la diffraction de Bragg comme un processus à deux photons : un atome absorbe un photon d'un des faisceaux laser et réémet de manière stimulée le photon dans l'autre faisceau. Après ce cycle d'absorption-réémission l'impulsion de l'atome est modifiée de  $2\hbar k_r$ . Pour que ce processus ait lieu il doit conserver l'énergie. Les faisceaux doivent donc avoir une différence de fréquence de  $4E_r/h$  (voir figure 2.8). Cette différence se traduit par une vitesse du réseau par rapport aux atomes de  $v = \frac{\Delta E}{2\hbar k_r} = \frac{\hbar k_r}{m} = v_r$ . On retrouve alors la condition de résonance de l'interprétation précédente : les atomes doivent avoir une impulsion  $-\hbar k_r$  par rapport au réseau.

### 2.2.4 Conclusion sur l'effet d'un potentiel périodique

Un réseau optique a pour effet de changer les états propres du système et de modifier la relation de dispersion avec l'apparition d'une structure de bande. Or, dans le cadre du mélange à quatre ondes décrit dans la partie 1.4 c'est précisément la relation de dispersion qui définit les conditions d'accord de phase. Comme nous allons le voir dans la partie suivante, l'utilisation d'un réseau va par conséquent changer drastiquement le comportement du mélange à quatre ondes.



**Figure 2.7** – Contrastes  $C_{-1}$  et  $C_{+1}$  des modes diffractés  $q \pm 2k_r$  qui présentent une résonance à  $\mp k_r$



**Figure 2.8** – La diffraction de Bragg peut être interprétée comme un processus à deux photons résonant lorsque l'impulsion des atomes dans le référentiel du réseau est  $\pm k_r$ .

### 2.3 Mélange à quatre ondes et conditions d'accord de phase

Pour que le processus de mélange à quatre ondes puisse avoir lieu il faut vérifier les conditions d'accord de phase. Dans un réseau, ces dernières sont modifiées par rapport à l'espace libre. D'une part ce sont maintenant les **quasi**-impulsions qui doivent être conservées (à  $2k_r$  près) et d'autre part l'énergie suit dorénavant la structure de bande trouvée dans la partie précédente. Les nouvelles conditions d'accord de phase pour la collision de deux atomes de quasi-impulsions  $k_0$  et  $k'_0$  vers les modes  $k_1$  et  $k_2$  s'écrivent donc :

$$k_1 + k_2 = k_0 + k'_0 \quad [2k_r] \quad (2.27)$$

$$E_{n_1}(k_1) + E_{n_2}(k_2) = E_{n_0}(k_0) + E_{n'_0}(k'_0) \quad (2.28)$$

avec  $n_0$ ,  $n'_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  les indices des bandes d'énergie dans lesquelles se trouvent les atomes. Dans les conditions expérimentales on ne travaille qu'avec la bande fondamentale et on omettra dans la suite les indices  $n_0 = n'_0 = n_1 = n_2 = 0$ .

L'un des gros avantages de ces nouvelles conditions d'accord de phase est que, contrairement au cas de l'espace libre, elles peuvent être vérifiées pour

des modes de pompe dégénérés  $k_0 = k'_0$  (voir figure 2.9) évitant ainsi d'avoir à séparer le condensat en deux nuages d'impulsions distinctes. En effet, lorsque  $k_0 = k'_0$ , on peut représenter graphiquement les conditions d'accord de phase

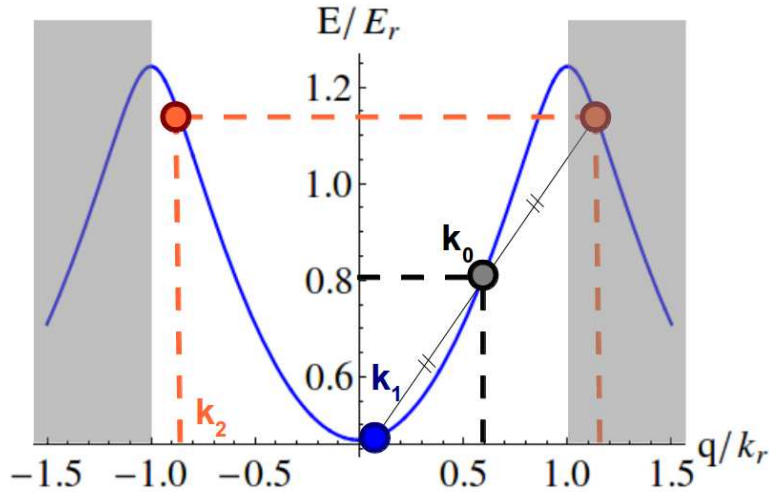
$$k_1 + k_2 = 2k_0 \quad [2k_r] \quad (2.29)$$

$$E(k_1) + E(k_2) = 2E(k_0) \quad (2.30)$$

comme trois points alignés  $M_0 = (k_0, E(k_0))$ ,  $M_1 = (k_1, E(k_1))$  et  $M_2 = (k_2, E(k_2))$  appartenant à la relation de dispersion et tels que  $M_0$  soit le centre du segment  $[M_1, M_2]$  (voir figure 2.9), on comprend alors qu'il faut un changement de concavité dans la relation de dispersion pour satisfaire les conditions d'accord de phase. Pour des atomes dans l'espace libre l'énergie varie comme le carré du vecteur d'onde et est donc une fonction convexe, mais l'ajout d'un réseau périodise la relation de dispersion et introduit un changement de concavité près de  $k = k_r$ , ce qui explique l'existence de triplets de points solutions des conditions d'accord de phase. Le processus ne peut avoir lieu que pour une impulsion initiale supérieure à une valeur seuil  $k_0 > k_{seuil} \approx 0.5k_r$ . La valeur exacte de ce seuil dépend de la forme de la relation de dispersion qui dépend de la profondeur du réseau et des interactions (voir la section 3.1 pour plus de détails). Il est intéressant de noter que ce changement de concavité dans la relation de dispersion peut se retrouver dans d'autres systèmes ; par exemple, les excitons-polaritons possèdent deux branches d'énergie et la plus basse présente un changement de concavité conduisant là aussi à du mélange à quatre ondes à partir d'une pompe dégénérée [Bau+00 ; KBG04 ; CSQ01].

Vérifier la conservation de l'impulsion et de l'énergie ne garantit pas que le processus aura lieu. Si ici le mélange à quatre ondes fonctionne c'est qu'un condensat d'impulsion  $k_0 > k_{seuil}$  dans un réseau est dynamiquement instable [Fal+04 ; WN01 ; WN03 ; Fer+08]. Les atomes, initialement à  $k_0$  vont spontanément se transférer par paires dans les modes  $k_1$  et  $k_2$ . Comme le processus ne peut avoir lieu qu'en présence du réseau, il est aisé de contrôler la population dans les modes  $k_1$  et  $k_2$  en choisissant la durée d'application du potentiel périodique puisque le mélange à quatre ondes s'arrête dès que le réseau est coupé. Cela en fait un avantage crucial de ce processus puisque l'intensité des modes  $k_1$  et  $k_2$  est ainsi directement contrôlable expérimentalement. De plus, les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  étant définies par  $k_0$ , sélectionner l'impulsion initiale permet de choisir simplement les impulsions finales (voir figure 2.10), ce qui fait de ce système une source accordable.

Le mélange à quatre ondes dans un réseau s'annonce comme une source ajustable de paires d'atomes corrélés. Pour la réaliser nous avons dû créer, contrôler et caractériser un potentiel périodique. C'est précisément cette mise en œuvre expérimentale que nous allons détailler dans la partie suivante.



**Figure 2.9** – Exemples de points vérifiant les conditions d'accord de phase dans un réseau optique. Les quasi-impulsions étant définies modulo  $2k_r$ , le point en dehors de la première zone de Brillouin est replié.

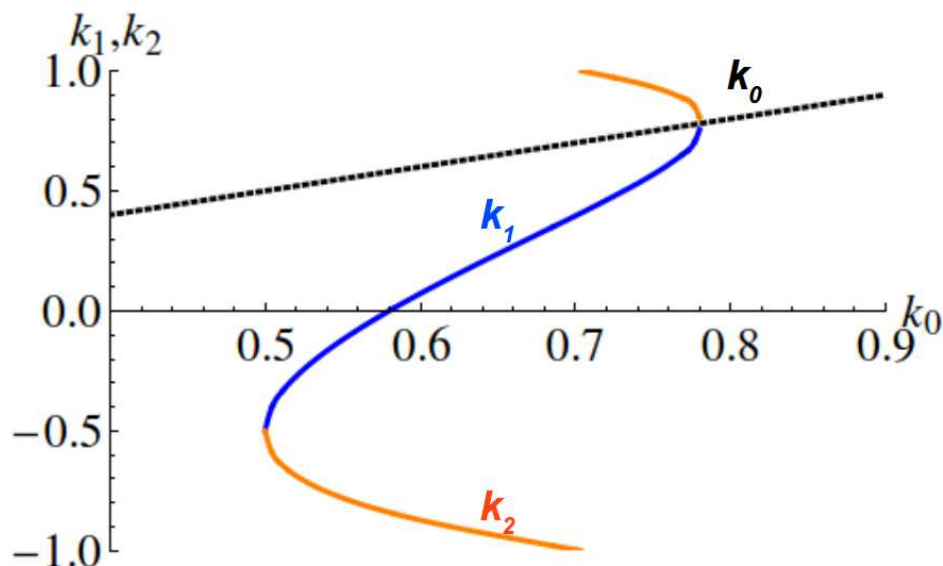
## 2.4 Mise en place expérimentale du réseau optique

Pour la réalisation expérimentale du potentiel périodique présentée figure 2.11 nous avons choisi d'utiliser deux faisceaux laser contrapropageants afin de minimiser le pas  $a$  du réseau. En effet plus ce pas est faible, plus l'échelle en impulsion (donnée par  $k_r = \pi/a$ ) est dilatée ce qui permettra de mieux résoudre les structures créées par le réseau après temps de vol. Dans cette optique nous avons également choisi de nous placer selon un axe proche de l'axe vertical afin de profiter de l'excellente résolution qu'offre le détecteur selon cet axe (voir annexe A).

L'alignement des faisceaux sur les atomes est découplé de l'alignement du banc optique grâce à l'utilisation de fibres. En outre, les fibres garantissent la propreté du mode spatial et coupent d'éventuels faisceaux parasites indésirables.

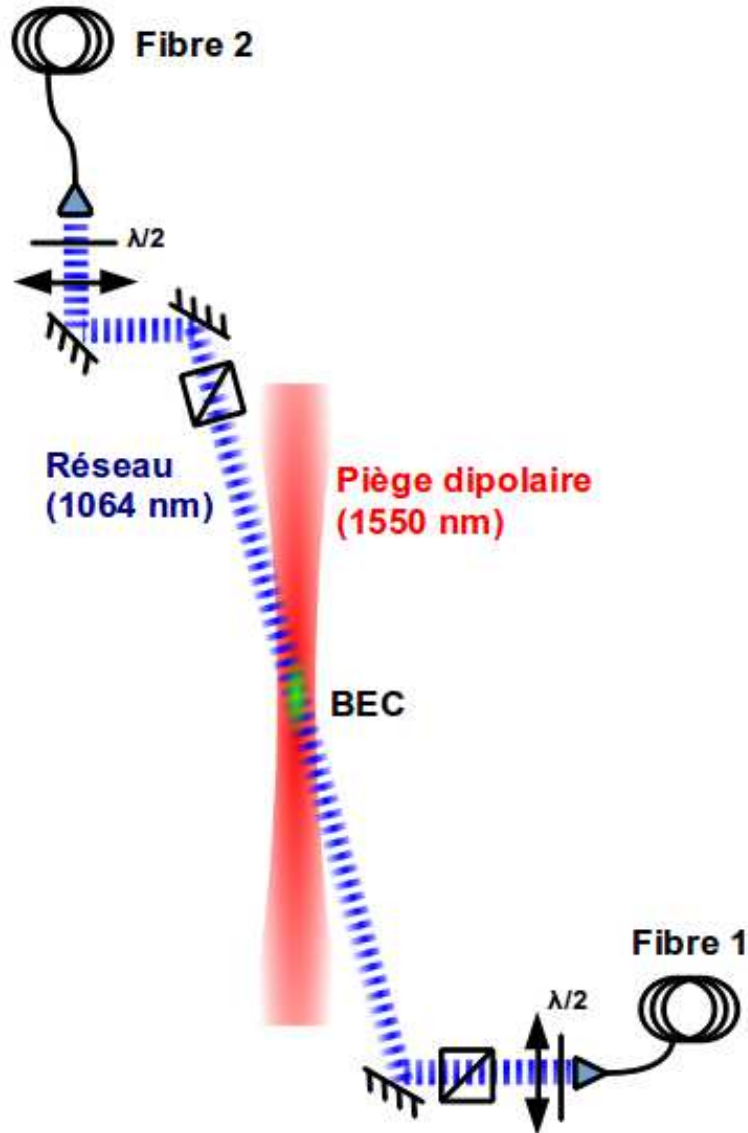
### 2.4.1 Le banc optique

La création et le contrôle des deux faisceaux sont réalisés sur la table optique qui offre une bonne stabilité mécanique. Le schéma optique est représenté sur la figure 2.12. Nous avons choisi d'utiliser un laser Nd :Yag "Mephisto" de chez Innolight extrêmement stable qui fournit jusqu'à 2 W de puissance à 1064 nm. Après avoir collimaté le faisceau nous le divisons à



**Figure 2.10** – Variation des modes  $k_1$  et  $k_2$  vérifiant les conditions d'accord de phase pour une profondeur du réseau  $V_0 = 1 E_r$ . Des solutions n'existent qu'au delà de  $0.5 k_r$  puis varient ensuite de manière monotone ce qui permet en choisissant la valeur de  $k_0$  de contrôler précisément la valeur de  $k_1$  et  $k_2$ .  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$  en unité de  $k_r$ .

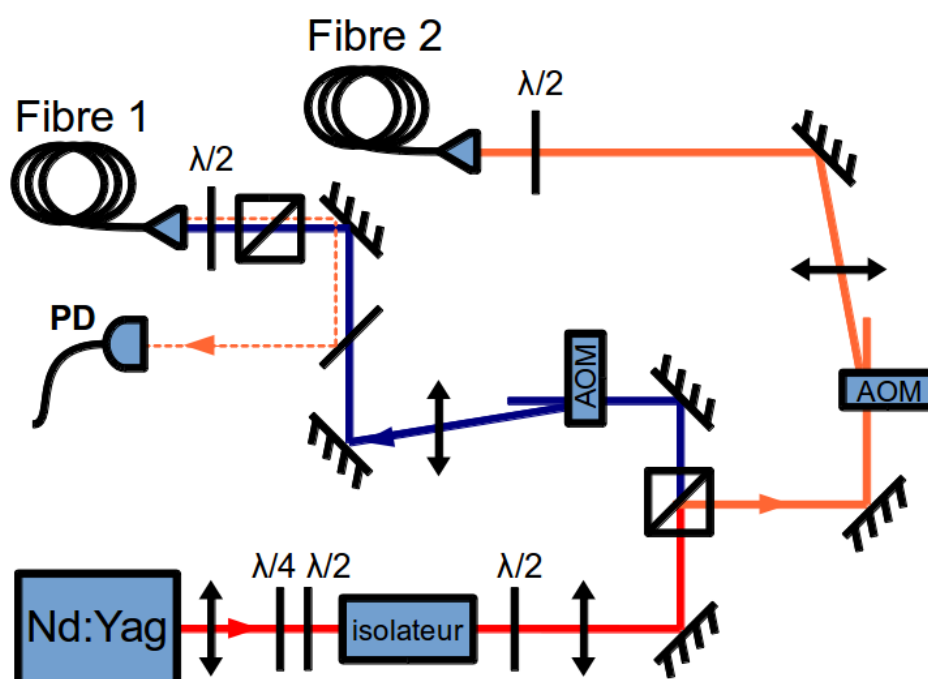
l'aide d'un cube séparateur de polarisation précédé d'une lame demi-onde. On peut ainsi ajuster précisément la puissance envoyée dans chaque bras. Les deux faisceaux suivent ensuite un parcours similaire, ils sont envoyés aux travers de modulateurs acousto-optiques (notés AOM sur la figure 2.12) puis injectés dans des fibres à maintien de polarisation. Les AOM permettent de contrôler électroniquement à la fois la puissance et la fréquence des faisceaux de manière indépendante. Ils modulent les faisceaux à environ 200 MHz grâce à des ondes radiofréquences (RF) générées par des oscillateurs contrôlés en tension (VCO). Un générateur de fonction arbitraire permet de choisir à volonté l'évolution temporelle en amplitude des faisceaux. Cependant, les VCO ont un temps de réponse limité de plusieurs microsecondes ce qui empêche l'allumage et l'extinction rapide du potentiel, nous avons donc ajouté des interrupteurs entre les VCO et les modulateurs qui permettent d'ouvrir ou de fermer le circuit rapidement devant l'ensemble des temps caractéristiques de l'expérience, en environ 20 ns. Le désaccord en fréquence entre les deux bras est réglé par les VCO et peut être vérifié au hertz près à l'aide de fréquences-mètres. Ce désaccord  $\delta$  permet de choisir la vitesse du réseau par rapport au référentiel du laboratoire  $v = \frac{\delta \lambda_L}{2} = \frac{h\delta}{4E_r} v_r$  (voir section 2.2.1) et permet



**Figure 2.11** – Les faisceaux laser issus des fibres 1 et 2 sont superposés sur les atomes qui sont au foyer du piège dipolaire. Grâce à des lames demi-onde et des cubes séparateurs de polarisation on s'assure que les polarisations soient bien identiques pour les deux faisceaux afin d'obtenir un bon contraste d'interférence.

de contrôler l'impulsion des atomes par rapport au réseau  $k_0$  et ainsi régler les valeurs des vecteurs d'onde  $k_1$  et  $k_2$ . Les fréquences en sortie des VCO dérivent au cours du temps, mais en général cette variation est quasiment la même pour les deux VCO ce qui fait que la différence de fréquence est

assez stable. Typiquement, la variation du désaccord est inférieure à 1 kHz/h autrement dit, la variation sur le long terme de la vitesse du réseau par rapport aux atomes est inférieure à  $6 \times 10^{-3} v_r/h$ . Au cours des séances de prise de données de plusieurs heures, un contrôle régulier du désaccord permet de compenser cette dérive.



**Figure 2.12** – Les deux bras du réseau (bleu et orange) sont réalisés en divisant le faisceau issu d'un laser Nd :Yag (en rouge). Des modulateurs acousto-optiques (AOM) permettent de contrôler l'intensité optique et servent à introduire un désaccord entre les deux bras. Les deux faisceaux sont ensuite injectés dans des fibres à maintien de polarisation pour être acheminés vers la chambre de science.

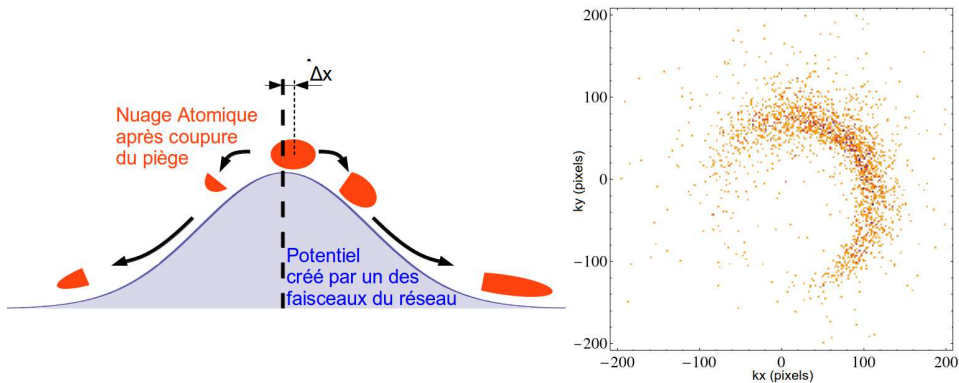
Les deux fibres à maintien de polarisation acheminent les faisceaux vers la chambre de science où ces derniers sont focalisés sur le condensat (figure 2.11).

#### 2.4.2 Alignement sur le nuage atomique

En sortie de fibre nous obtenons des faisceaux monomodes dont le waist est fixé par les collimateurs à 1.75 mm. Chaque laser est focalisé sur les atomes grâce à une lentille de focale 1000 mm montée sur une platine de

translation 3 axes. Le waist est alors de  $205 \mu\text{m}$  au niveau des atomes, ce qui, étant donné l'angle de  $7^\circ$  entre le réseau et la verticale, donne une projection sur l'axe long du condensat de  $1.7 \text{ mm}$ . Ainsi, l'intensité est quasiment homogène sur l'ensemble du nuage de longueur  $\approx 1 \text{ mm}$ . Suite aux passages dans l'ensemble des composants optiques du montage, la puissance maximale disponible au niveau des atomes est de l'ordre de  $500 \text{ mW}$  dans chaque bras ce qui permet en théorie d'obtenir un réseau profond de  $20 E_r$  au maximum.

Afin d'aligner le réseau nous procédons par étapes : le tout premier alignement consiste à centrer les deux faisceaux sur les fenêtres de part et d'autre de l'enceinte. On s'assure ainsi de passer près du centre de la chambre de science, à quelques millimètres au plus du nuage atomique. Ensuite nous allumons uniquement le faisceau du bas (issue de la fibre 1, voir figures 2.11 et 2.12) à pleine puissance juste après avoir relâché les atomes du piège. Le laser ayant une longueur d'onde plus faible que celle de la transition atomique, il crée un potentiel répulsif qui repousse les atomes du maximum d'intensité, donnant naissance à un trou dans le nuage. En déplaçant la lentille de focalisation à l'aide de la platine 3 axes, on modifie la position du faisceau ce qui bouge le trou dans le nuage. En centrant le trou on s'assure de l'alignement du laser sur les atomes (voir figure 2.13). Cet alignement est extrêmement précis et permet en général de placer le faisceau sur les atomes à quelques microns près.



**Figure 2.13** – En allumant un seul bras du réseau, le potentiel créé est répulsif et éjecte les atomes. Si le faisceau n'est pas parfaitement centré sur le nuage atomique, la distribution mesurée est dissymétrique. A droite on peut voir l'exemple d'une distribution obtenue au court de l'alignement et sur laquelle on peut observer la signature d'un décalage le long de la diagonale

Une fois satisfait de l'alignement du faisceau du bas, on lui superpose le faisceau du haut (issu de la fibre 2 figures 2.11 et 2.12) en optimisant la

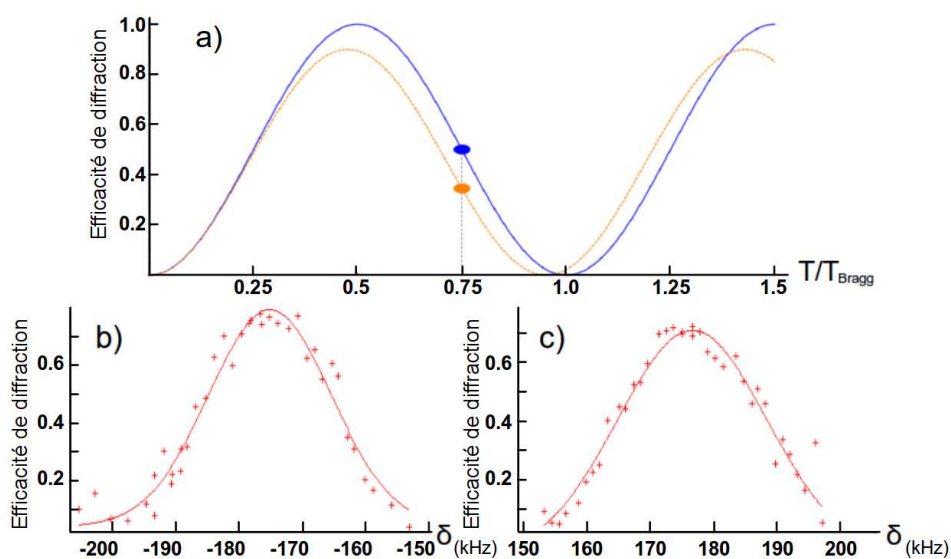


réinjection de ce dernier dans la fibre 1 grâce à une photodiode de contrôle (notée PD sur la figure 2.12).

### 2.4.3 Calibration du réseau

#### Calibration de la profondeur par diffraction de Bragg

Bien que nous puissions mesurer la puissance laser de chaque côté de la chambre à vide, il est difficile d'estimer précisément l'intensité au niveau des atomes. De plus, la profondeur du réseau peut être diminuée par de nombreux facteurs : un mauvais alignement, une mauvaise focalisation, une différence de puissance entre les deux bras ou encore des polarisations non parallèles. Il faut donc absolument calibrer la profondeur du potentiel ressenti par les atomes. Pour cela nous étudions la diffraction de Bragg créée par le réseau puisque la fréquence des oscillations produites est directement proportionnelle à la profondeur du réseau (cf. equation 2.26).

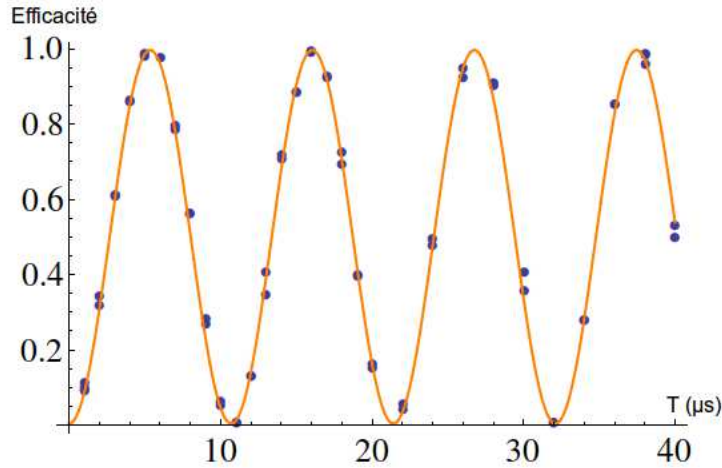


**Figure 2.14** – (a) Principe de la mesure de la résonance Bragg : on se place à une durée d'impulsion  $T = 0.75 T_{Bragg}$  et on relève l'efficacité de diffraction Bragg en fonction du désaccord. À la résonance l'efficacité est maximale (courbe continue bleue) et lorsqu'on s'en éloigne, le contraste diminue et la fréquence augmente ce qui fait baisser l'efficacité mesurée (courbe en pointillés oranges). (b) et (c) Résonances mesurées à  $\delta = -175.2 \pm 0.3$  kHz et  $\delta = 176.7 \pm 0.3$  kHz avec un ajustement gaussien.

Pour les profondeurs typiques que nous utilisons dans nos expériences

(de l'ordre de  $1E_r$ ) on est toujours dans le régime où la diffraction de Bragg est possible ( $V_0 \leq 4E_r$ ). Comme le condensat est au repos, il faut donner une vitesse au réseau en introduisant un désaccord entre les deux bras tel que  $\Delta\omega = 4E_r/\hbar = \pm 2\pi \times 176 \text{ kHz}$ . Pour régler finement ce désaccord on allume le réseau pendant un temps d'environ trois quart de la période Bragg, là où l'efficacité de diffraction est la plus sensible au désaccord (voir figure 2.14 (a)). On mesure ensuite cette efficacité pour différents désaccords pour trouver précisément la résonance. Les figures 2.14 (b) et (c) montrent le résultat de cette mesure.

Une fois la résonance bien identifiée, on mesure l'efficacité de la diffraction en fonction de la durée d'application du réseau et on obtient les oscillations de la figure 2.15 dont la période de  $10.7 \mu\text{s}$  nous donne une profondeur de  $V_{exp} = 4.25 E_r$  cohérente avec la profondeur de  $V_{th} = 5.2 E_r$  attendue avec les puissances des faisceaux ( $P \approx 96.3 \text{ mW}$ ).

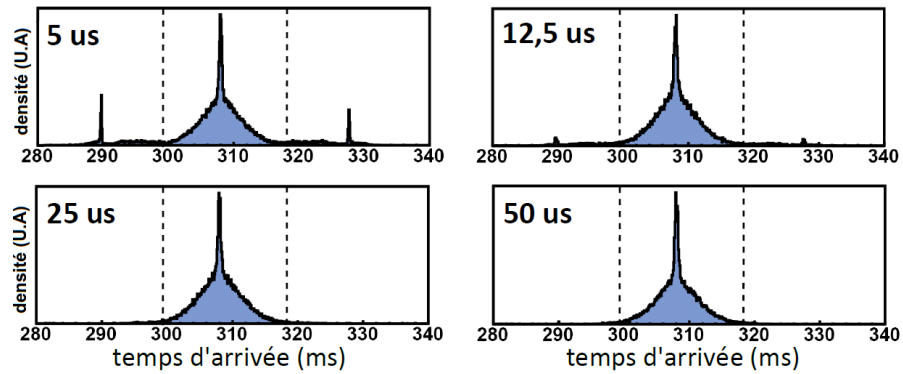


**Figure 2.15** – Oscillations de Bragg mesurées pour  $P \approx 96.3 \text{ mW}$  dans chaque bras. L'ajustement sinusoïdal donne une fréquence de  $\nu_{Bragg} = 93.5 \pm 0.1 \text{ kHz}$  et un contraste de  $99.5 \pm 0.5 \%$ . La profondeur vue par les atomes est donc de  $V_{exp} = 2h\nu_{Bragg} = 4.25 E_r$ .

### Adiabaticité de l'allumage et de l'extinction du réseau

Pour réaliser le mélange à quatre ondes dans le réseau il faut non seulement contrôler parfaitement la profondeur du potentiel, mais également pouvoir placer les atomes à une impulsion souhaitée dans la bande fondamentale. Or, lorsqu'on allume brusquement le réseau les atomes se retrouvent dans

une superposition de plusieurs bandes de Bloch<sup>1</sup>. Si l'on souhaite peupler uniquement la bande fondamentale il faut réaliser un passage adiabatique entre les ondes planes et les ondes de Bloch où par adiabatique on entend lent devant la période lié à l'énergie inter-bande. Afin de mesurer expérimentalement la durée nécessaire pour être adiabatique on augmente la puissance du réseau à l'aide d'une rampe en forme de S jusqu'à une valeur proche de la valeur maximale ( $V_0 = 18 E_r$ ) avant de la réduire de manière symétrique. Si les rampes sont rapides, la non-adiabaticité se traduit par des pics de diffraction à  $\pm 2k_r$  et c'est effectivement ce que l'on observe pour des rampes de durée  $\tau = 5 \mu s$  et  $\tau = 12.5 \mu s$  (figure 2.16). Lorsque les rampes sont plus lentes on observe, comme attendu, que seule la première zone de Brillouin est peuplée (figure 2.16).



**Figure 2.16** – Test d'allumage et d'extinction adiabatique du réseau. Pour des constante de temps au delà de  $25 \mu s$  on n'observe plus de pics de diffraction.

On trouve que la durée minimale est de  $T_{adiab} = 25 \mu s$ . À cette profondeur de  $18 E_r$  la bande fondamentale et la première bande excitée sont quasiment plates (voir figure 2.4) et la différence d'énergie inter-bande ne dépend presque pas de la quasi-impulsion, le critère est donc valable pour charger des atomes à n'importe quelle quasi-impulsion dans la bande fondamentale. On retrouve d'ailleurs que cette durée minimale est bien supérieure à la durée associée à la différence d'énergie entre la bande fondamentale et la première bande excitée qui est  $V_0/2 = 9E_r = 2\pi\hbar(9 \times 44 kHz) \approx 2\pi\hbar\left(\frac{1}{2.5 \mu s}\right)$ . Aux profondeurs de travail habituelle ( $\approx 1 E_r$ ) la différence d'énergie inter-bande varie entre  $\approx 4E_r$  à quasi-impulsion nulle et  $V_0/2 \approx E_r/2$  au bord de la zone de Brillouin. On s'attend donc à des constantes de temps d'adiabaticité entre  $T_{adiab,q=0} \approx 60 \mu s$  et  $T_{adiab,q=k_r} \approx 500 \mu s$ . On a pu vérifier expérimentalement que pour  $V_0 = 1 E_r$  nos estimations sont correctes. Pour des rampes

1. C'est d'ailleurs grâce à cela que l'on fait de la diffraction de Bragg.

de durée  $T \approx 100 \mu\text{s}$  on n'observe pas de diffraction à quasi-impulsion nulle.

### Mesure du chauffage dû à l'émission spontanée

Malgré nos efforts pour réaliser des rampes ayant le moins d'effet possible sur les atomes on observe toujours un élargissement de la distribution en impulsion après l'allumage du laser. Il ne s'agit plus d'un effet du potentiel périodique mais d'un effet de chauffage dû à l'émission spontanée causée par les faisceaux du réseau. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le fait d'être sur le bleu de la transition et donc de piéger les atomes aux minima d'intensité ne diminue pas le chauffage, ce dernier étant en effet indépendant du signe du désaccord  $\Delta$  [GC10 ; GA80]. Pour un faisceau de puissance  $P$  et de waist  $w$  donnés, le taux d'émission spontanée est :

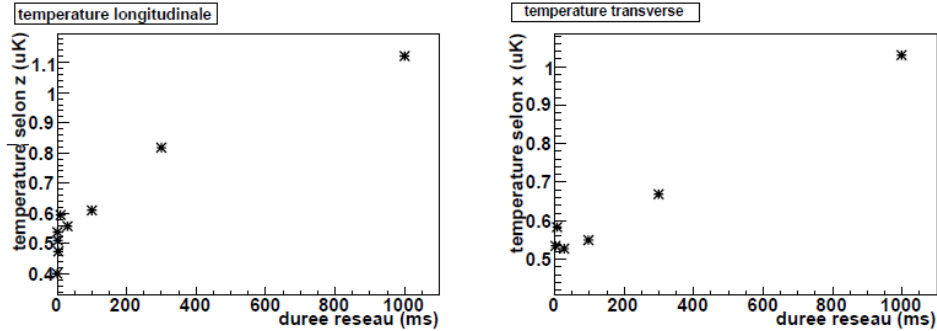
$$\Gamma_{sp} = \frac{\gamma_{He}^3 P}{4\pi I_s w^2 \Delta^2} \quad (2.31)$$

où  $\gamma_{He}^3 = 2\pi 1.62 \times 10^6$  Hz est la largeur spectrale de la transition atomique de l'hélium et  $I_s = 0.16$  mW/cm<sup>2</sup> est l'intensité de saturation. Quand ces mesures ont été réalisées, la puissance maximale dans un bras était  $P_{max} = 300$  mW, ce qui donne un taux maximal de  $\Gamma_{sp,max} = 0.4$  s<sup>-1</sup>. Grâce à des améliorations sur le montage la puissance maximale est maintenant  $P_{max} = 500$  mW). Comme il y a deux faisceaux et que l'énergie moyenne transférée au système par un événement d'absorption-émission spontanée est  $E_r$ , l'augmentation globale d'énergie maximale est :

$$\frac{dE}{dt} = 2 \times \Gamma_{sp,max} \times E_r = 1.6 \mu\text{K} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.32)$$

En mesurant la largeur du nuage thermique entourant notre condensat après différents temps de tenue du réseau, nous pouvons mesurer un taux de chauffage de  $0.6 \mu\text{K/s}$  comme le montre la figure 2.17. Le taux de chauffage mesuré est inférieur au flux d'énergie fourni par l'émission spontanée et cela vient probablement de la faible profondeur du piège. En effet, à cause de la gravité, le long de l'axe vertical la profondeur du piège est inférieure au microkelvin à la fin de l'évaporation (voir annexe A) et lorsque les atomes sont trop chauds ils s'évaporent naturellement ce qui diminue le taux de chauffage mesuré. D'ailleurs, on peut voir sur les courbes que pour des durées courtes du réseau la température longitudinale croît plus rapidement jusqu'à atteindre  $0.6 \mu\text{K}$  qui correspond à la profondeur du piège.

Ces mesures de chauffage sont réalisées à forte puissance pour magnifier l'effet de l'émission spontanée. Aucune autre cause de chauffage n'a été mise en évidence, on peut donc supposer qu'à faible puissance on sera également limité par l'émission spontanée. On peut ainsi déduire un taux de chauffage typique aux profondeurs habituelles de travail ( $\approx 1 E_r$ ).



**Figure 2.17** – Température mesurée pour différents temps de tenue du réseau à la puissance maximale de l’époque ( $P_{max} = 300$  mW ce qui équivaut à  $\approx 13 E_r$ ). Celui-ci est monté et descendu en  $500 \mu s$ . La température est déduite des largeurs en impulsion mesurées au niveau du détecteur

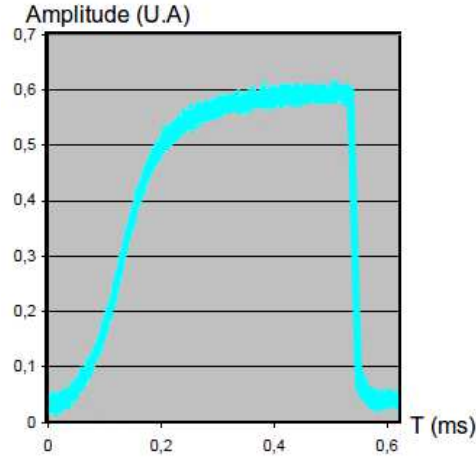
$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{1E_r} \approx 150 \text{ nK/s} \quad (2.33)$$

ce qui ne devrait pas limiter nos expériences dont les durées sont de quelques millisecondes et pour lesquelles le chauffage serait alors inférieur au nanokelvin ce qui est très faible devant les températures typique de nos condensat qui se situent autour de quelques centaines de nanokelvin.

## 2.5 Création de paires, premiers résultats

Maintenant que le réseau est parfaitement calibré et que nous avons quantifié les problèmes éventuels, nous pouvons essayer de nous placer dans des conditions favorables pour le mélange à quatre ondes. On utilise un réseau peu profond (voir paragraphe 3.1.2) et on se place à un désaccord de 115 kHz ce qui correspond à une impulsion des atomes par rapport au réseau d’environ  $0.65 k_r$ . On allume le réseau doucement sur le condensat<sup>2</sup> puis on le garde allumé à une profondeur de  $0.75 E_r$  pendant 1.8 ms avant de le couper brutalement (voir figure 2.18). Nous avons choisi de couper rapidement le réseau à la fin du processus malgré la diffraction que cela engendre car c’est vers la fin que le mélange à quatre ondes est le plus efficace (à cause de la stimulation bosonique) : comme les conditions d’accord de phase dépendent de la profondeur du potentiel, une variation lente de la profondeur risque d’entraîner la création de paires dans toute une gamme d’impulsions plutôt que dans les deux modes souhaités, polluant alors le signal.

2. La procédure d’obtention du condensat est décrite dans l’annexe A.



**Figure 2.18** – Puissance du réseau mesurée à la photodiode lors de l'impulsion. La montée dure environ  $200 \mu s$ , le réseau est ensuite maintenu pendant une durée variable après laquelle il est coupé brutalement.

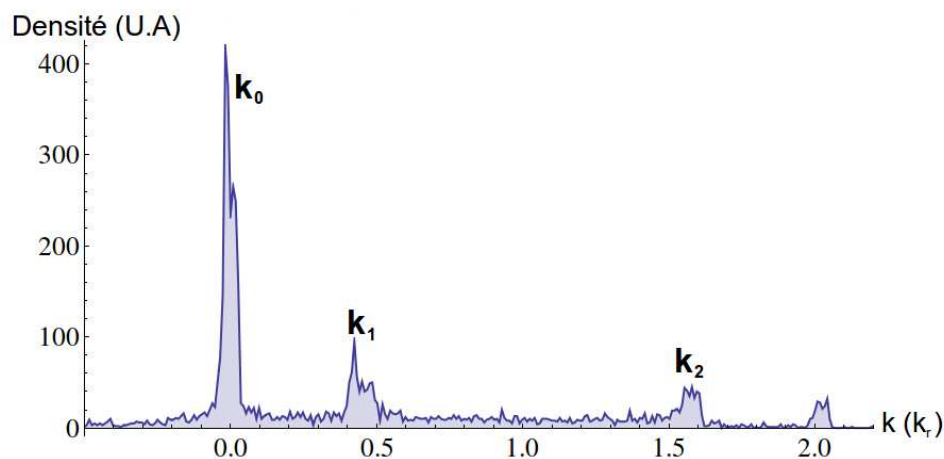
### 2.5.1 Distribution d'impulsions

On obtient, après extinction du réseau et du piège dipolaire, l'image en temps de vol présentée dans la figure 2.19. On observe la création de deux pics macroscopiquement peuplés centrés autour de deux vecteurs d'onde  $k_1$  et  $k_2$ .

La détection tridimensionnelle nous permet d'obtenir la distribution en impulsion complète comme l'illustre la figure 2.20 sur laquelle on a représenté les atomes détectés dans les deux pics centrés sur  $k_1 \approx 0,5 k_r$  et  $k_2 \approx 1,5 k_r$

### 2.5.2 Conditions d'accord de phase

Pour vérifier qu'il s'agisse bien du mélange à quatre ondes, on peut mesurer si les conditions d'accord de phase sont bien satisfaites pour différentes impulsions initiales  $k_0$ . Comme on peut le voir sur la figure 2.21 on retrouve un comportement reproduisant qualitativement les variations attendues avec, en particulier, une impulsion seuil en-dessous de laquelle le mélange à quatre ondes n'a plus lieu. On peut également remarquer que les quasi-impulsions sont bien conservées ( $2k_0 = k_1 + k_2$  [ $2k_r$ ]). Cependant, notre modèle théorique ne permet pas d'expliquer quantitativement les résultats obtenus : la valeur expérimentale du seuil est décalée par rapport à la prédiction théorique et lorsque  $k_0$  s'approche de  $1k_r$  le désaccord entre le modèle et l'expérience s'accroît.



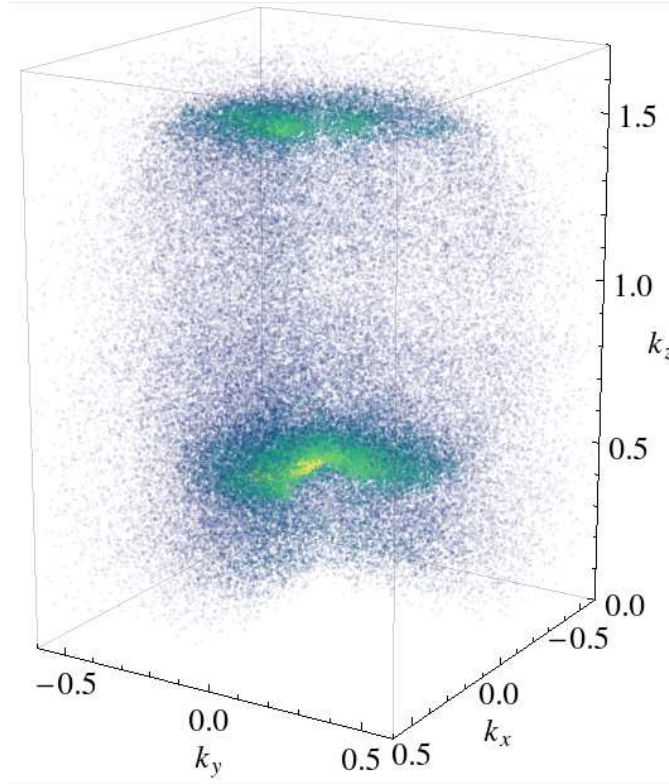
**Figure 2.19** – Distribution en impulsion le long de l’axe vertical (intégrée selon les axes transverses) obtenue en une seule réalisation expérimentale. Le réseau est allumé à une profondeur de  $0.75 E_r$  pendant 1.8 ms avec une vitesse de  $0.65 k_r$  par rapport aux atomes. Le petit pic en  $k = 2 k_r$  provient de la diffraction de Bragg du condensat.

### 2.5.3 Conclusion sur les premiers résultats expérimentaux

L’allumage du réseau en mouvement sur le nuage atomique permet de créer des classes d’impulsion bien définies dont le comportement semble compatible avec du mélange à quatre ondes dans un potentiel périodique. Cependant, une analyse plus approfondie à la fois du côté théorique pour expliquer quantitativement les conditions d’accord de phase et à la fois du côté expérimental pour mettre en évidence les corrélations et la nature non classique du processus est nécessaire.

## 2.6 Conclusion

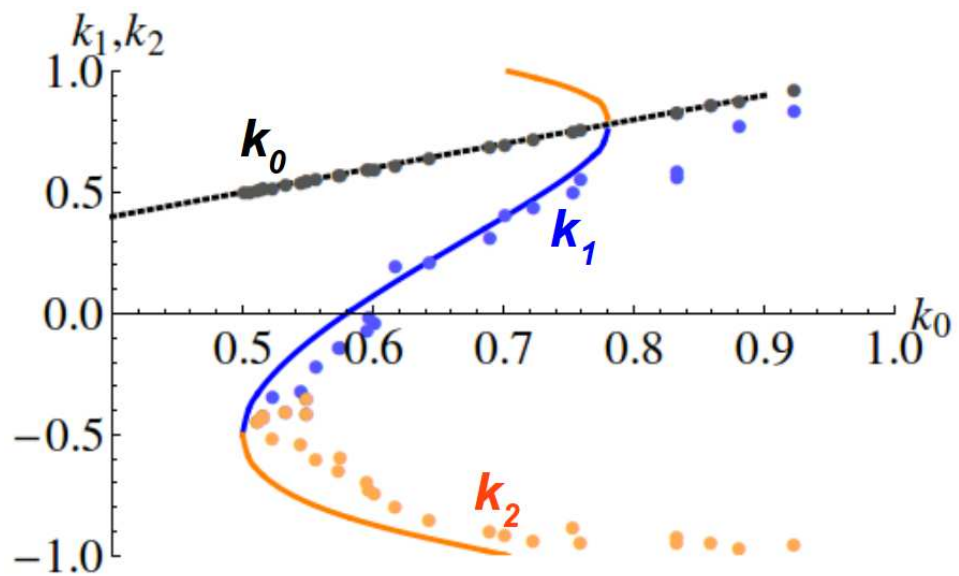
Au cours de ce chapitre nous avons donné les clés théoriques nécessaires à la compréhension des phénomènes apparaissant en présence d’un potentiel périodique. Nous avons ainsi montré que la périodicité du potentiel entraîne la formation d’une structure de bandes. C’est grâce au changement de concavité qui apparaît alors dans la relation de dispersion que la création spontanée de paires d’atomes par mélange à quatre ondes est possible. Nous avons ensuite détaillé la mise en place expérimentale du réseau optique et sa caractérisation au travers des mesures de profondeur, adiabaticité et chauffage. Cette étape de caractérisation a permis de vérifier l’absence de



**Figure 2.20** – Distribution en impulsion à trois dimension obtenue expérimentalement à partir de 45 réalisations. Chaque point correspond à un atome détecté et la couleur représente la densité atomique locale. Pour faciliter la visualisation, un quart de la distribution a été retiré ( $k_x > 0$  et  $k_y > 0$ ) et on a représenté uniquement les pics 1 et 2 et coupé le condensat qui est beaucoup plus dense.  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  en unité de  $k_r$ .

chauffage excessif et nous a confirmé la qualité de notre alignement. Enfin, nous avons présenté nos premières observations de mélange à quatre ondes dans le réseau et obtenu un comportement suivant qualitativement la théorie mais dont l'étude approfondie reste nécessaire et va être développée au chapitre suivant. Grâce aux analyses plus approfondies que nous allons présenter au chapitre suivant nous avons ainsi amélioré la compréhension de notre source par rapport aux résultats exposés dans la thèse de Marie il y a un an [Bon11].





**Figure 2.21** – Comparaison entre les conditions d'accord de phases théoriquement attendues et les vecteurs d'ondes mesurés expérimentalement en faisant un ajustement gaussien des pics de densité mesurés après temps de vol. Malgré une tendance similaire, la théorie n'explique pas quantitativement les résultats obtenus.  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$  en unité de  $k_r$ .

## Chapitre 3

# Caractérisation de la source - au-delà de l'approche naïve

Dans ce chapitre nous allons caractériser la source de paires d'atomes créée grâce au mélange à quatre ondes dans un réseau optique. Tout d'abord nous nous intéresserons aux effets du champ moyen jusque-là ignorés afin de comprendre les déviations observées lors de la mesure des conditions d'accord de phase au paragraphe 2.5.2.

Puis, nous approfondirons notre analyse de la source par rapport aux travaux de Marie Bonneau [Bon11]. Nous commencerons par l'étude des effets transverses, c'est-à-dire de ce qui se passe hors de l'axe du réseau pour aller au-delà du modèle purement unidimensionnel que nous avons utilisé jusque-là. Ensuite, nous étudierons les propriétés statistiques de notre source afin de vérifier son caractère quantique indispensable pour la réalisation de protocoles d'optique atomique quantique.

Nous nous pencherons alors sur la dynamique de la création de paire qui se révèle non triviale. On exposera ainsi la mise en œuvre d'une simulation numérique de la dynamique de notre système.

### 3.1 Effet du champ moyen

Si on se souvient que le mélange à quatre ondes est par nature un effet reposant sur les interactions, on peut facilement comprendre que s'il est efficace les effets de champ moyen vont également avoir de l'importance. Cependant, jusqu'ici nous avons négligé les effets de champ moyen pour étudier le comportement des particules dans un réseau. Or, comme cela avait déjà été observé lors de la collision de deux condensats en espace libre, les interactions modifient les conditions d'accord de phase [Kra+10] (voir 1.4.2). Dans

cette partie nous allons donc étudier l'effet des interactions sur les conditions d'accord phase, tout d'abord à l'aide d'un modèle simple capturant en grande partie le phénomène, puis à l'aide d'un modèle plus raffiné s'inspirant d'un calcul réalisé par B. Wu et Q. Niu [WN01 ; WN03].

### 3.1.1 Correction a posteriori des conditions d'accord de phase

Pour prendre en compte l'effet des interactions simplement, on rajoute artificiellement l'énergie de champ moyen dans la conservation de l'énergie. On ne considère que l'énergie d'interaction du condensat source avec lui-même et avec les atomes diffusés dans les paires. On néglige toujours l'interaction des atomes diffusés entre eux puisque les densités en jeu sont beaucoup plus faibles. La conservation d'énergie devient alors :

$$2 \left[ E(k_0) + gN_0 \int d\vec{r} |\Psi_0(\vec{r})|^4 \right] = E(k_1) + 2gN_0 \int d\vec{r} |\Psi_0(\vec{r})|^2 |\Psi_1(\vec{r})|^2 + E(k_2) + 2gN_0 \int d\vec{r} |\Psi_0(\vec{r})|^2 |\Psi_2(\vec{r})|^2$$

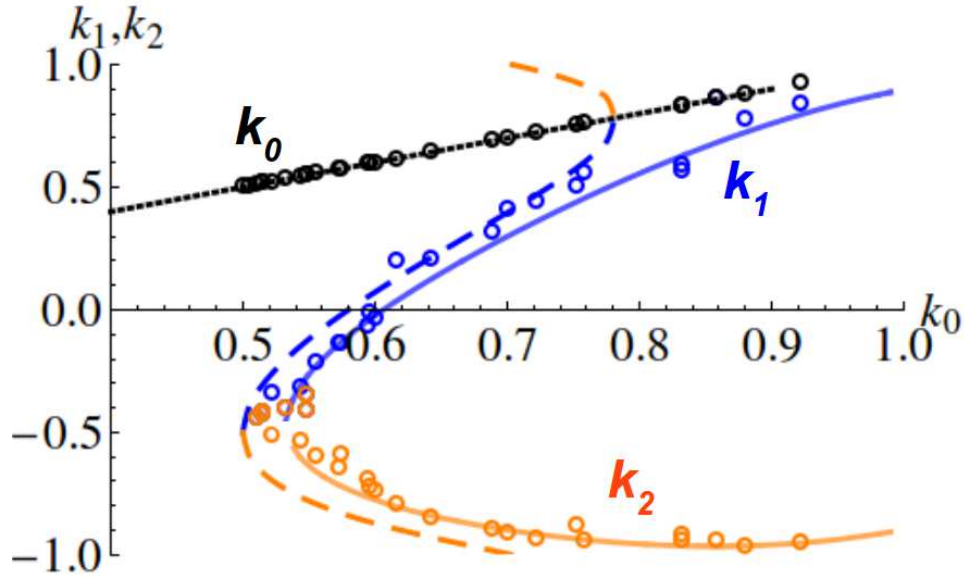
Les intégrales de recouvrement sont de l'ordre de  $1/\mathcal{V}$ . En notant la densité  $n_0 = N_0/\mathcal{V}$  cela donne un bilan d'énergie qui s'écrit :

$$2E(k_0) = E(k_1) + E(k_2) + 2gn_0 \quad (3.1)$$

On peut interpréter ce terme  $2gn_0$  supplémentaire<sup>1</sup> en remarquant que les atomes du condensat de pompe sont indiscernables. Cela ne fait apparaître qu'une seule fois le terme de champ moyen alors que les atomes diffusés sont tout à fait discernables entraînant le double ajout de ce terme et laissant dans le bilan d'énergie un excès de  $2gn_0 \approx 0.1 E_r$ . L'effet de cette correction sur les conditions d'accord de phase est représenté sur la figure 3.1, où l'on peut voir le très net changement par rapport aux cas sans interactions. Cette correction donne un très bon accord avec les données expérimentales lorsque l'on prend une densité  $n_0 = 9 \times 10^{18} \text{ at/m}^3 \pm 20 \%$  en accord avec la densité expérimentale elle aussi estimée autour de  $10^{19} \text{ at/m}^3 \pm 50 \%$ .

Cependant, cette approche reste inexacte et ne permet pas d'expliquer les largeurs des pics observés. En effet, les pics sont typiquement quatre fois plus larges que le condensat et cette largeur augmente fortement lorsque la vitesse du condensat par rapport au réseau s'approche du bord de bande ( $1 v_r$ ). Pour comprendre plus en détail le comportement du mélange à quatre ondes, on

1. Par rapport aux conditions d'accord de phase sans interactions vues dans le chapitre précédent (equation 2.29).



**Figure 3.1** – L'ajout du terme  $2gn_0$  aux conditions d'accord de phase modifie fortement l'allure des solutions. La conservation de l'énergie corrigée en prenant une densité atomique de  $n_0 = 9 \times 10^{18}$  at/m<sup>3</sup> (courbe en trait plein) permet de bien mieux modéliser les données expérimentales (cercles). Pour référence on a aussi représenté les conditions d'accord de phase non corrigées en pointillés.  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$  en unité de  $k_r$ .

se tourne donc vers une méthode plus rigoureuse qui consiste à chercher les états propres du hamiltonien complet dès le début. C'est justement ce calcul que nous allons voir dans la prochaine partie.

### 3.1.2 Résolution numérique des conditions d'accord de phase

Pour étudier le comportement du nuage on va s'intéresser à la stabilité dynamique du gaz dans le réseau. Tout d'abord, nous allons voir comment j'ai mis en œuvre le calcul numérique, puis nous confronterons les résultats obtenus à l'expérience avant de s'intéresser aux effets de la profondeur du réseau et de la densité atomique. Le calcul détaillé ici s'inspire des travaux de Biao Wu et Qian Niu [WN01 ; WN03] qui ont traité l'effet d'un réseau sur la stabilité d'un condensat à une dimension afin d'expliquer les instabilités observées expérimentalement[Bur+01]. D'autres travaux se sont également intéressés à ce problème : [Fer+08 ; MST03 ; Fal+04 ; MTD04].

### Détail du calcul

Comme expliqué au 1.4, la dynamique du système est gouvernée par le hamiltonien suivant :

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}, t) + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right) \hat{\Psi} \quad (3.2)$$

On considère maintenant une situation proche de la situation expérimentale où les degrés de liberté transverse au réseau sont gelés, le problème devient alors unidimensionnel. En se plaçant dans le cadre de la théorie du champ moyen, le hamiltonien devient :

$$H = \int dz \left\{ \psi^*(z) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V(z, t) \right) \psi + \frac{g}{2} |\psi(z)|^4 - \mu |\psi(z)|^2 \right\} \quad (3.3)$$

Avec  $n_0$  la densité moyenne du condensat et  $\mu$  le potentiel chimique.

On cherche dans un premier temps les états stationnaires du système. Pour ce faire, on cherche les états rendant extrémal le hamiltonien  $H$ , c'est à dire vérifiant l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dz^2} + V(z, t) \psi + gn_0 |\psi|^2 \psi = \mu \psi \quad (3.4)$$

Dans notre cas, le potentiel externe  $V(z, t)$  est périodique et indépendant du temps (on se place dans le référentiel du réseau) :  $V(z, t) = \frac{V_0}{2} (1 - \cos(2k_r z))$ . L'équation 3.4 devient après l'avoir adimensionnée :

$$-\frac{d^2 \psi}{d\bar{z}^2} + \frac{\bar{V}_0}{2} (1 - \cos(2\bar{z})) \psi + \bar{\alpha} |\psi|^2 \psi = \bar{\mu} \psi \quad (3.5)$$

Avec les grandeurs sans dimensions  $\bar{z} = k_r z$ ,  $\bar{V}_0 = V_0/E_r$ ,  $\bar{\alpha} = gn_0/E_r$  et  $\bar{\mu} = \mu/E_r$ .

Les solutions à cette équation sont de même période que le potentiel et comme pour le cas sans interactions, la fonction d'onde vérifie le théorème de Bloch :

$$\psi_k(\bar{z}) = e^{ik\bar{z}} u_k(\bar{z}) \quad (3.6)$$

avec  $u_k(\bar{z})$  une fonction périodique de même période que le potentiel qui peut être décomposée sur la base des ondes planes. Pour le calcul on tronque la décomposition pour ne garder que  $2N + 1$  termes :

$$u_k(\bar{z}) = \sum_{m=-N}^N a_m(k) e^{2im\bar{z}} \quad (3.7)$$

Pour trouver la solution dans la bande fondamentale à l'équation 3.5, on traite les interactions de manière perturbative. On trouve d'abord l'état fondamental sans interactions  $\psi_{0,k}$  comme expliqué au 2.2.2. Sans interactions, l'équation 3.5 peut se mettre sous forme matricielle (on se limite à  $N = 5$ ) :

$$M_0 \mathbf{u}_k = \mu_k \mathbf{u}_k \quad (3.8)$$

Avec  $\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} a_{-N} \\ a_{-N+1} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$  et  $M_0 = \begin{pmatrix} C_{-N}(k) & -\bar{V}/4 & & & \\ -\bar{V}/4 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\bar{V}/4 \\ & & & -\bar{V}/4 & C_N(k) \end{pmatrix}$

où  $C_m(k) = (2m + k)^2 + \bar{V}/2$ . Les valeurs et vecteurs propres de cette matrice tri-diagonale peuvent facilement être calculés par des algorithmes numériques standards. Une fois l'état fondamental  $\psi_{0,k}$  calculé, on ajoute un terme d'interaction  $\bar{\alpha}|\psi_{0,k}|^2$  à l'équation précédente et on détermine le nouvel état fondamental. Là encore l'équation peut se mettre sous forme matricielle :

$$[M_0 + \bar{\alpha}(\mathbf{u}_{k,0} \mathbf{u}_{k,0}^T)] \mathbf{u}_k = \mu_k \mathbf{u}_k \quad (3.9)$$

La diagonalisation permet d'obtenir l'état fondamental du système à l'ordre 1. On s'arrêtera à cet ordre après avoir vérifié que les corrections apportées par les ordres supérieurs sont bien négligeables (voir figure 3.2).

On étudie ensuite la stabilité dynamique du système régie par l'équation de Gross-Pitaeskkii dépendante du temps :

$$i \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\bar{V}_0}{2} (1 - \cos(2\bar{z})) \psi + \bar{\alpha} |\psi|^2 \psi \quad (3.10)$$

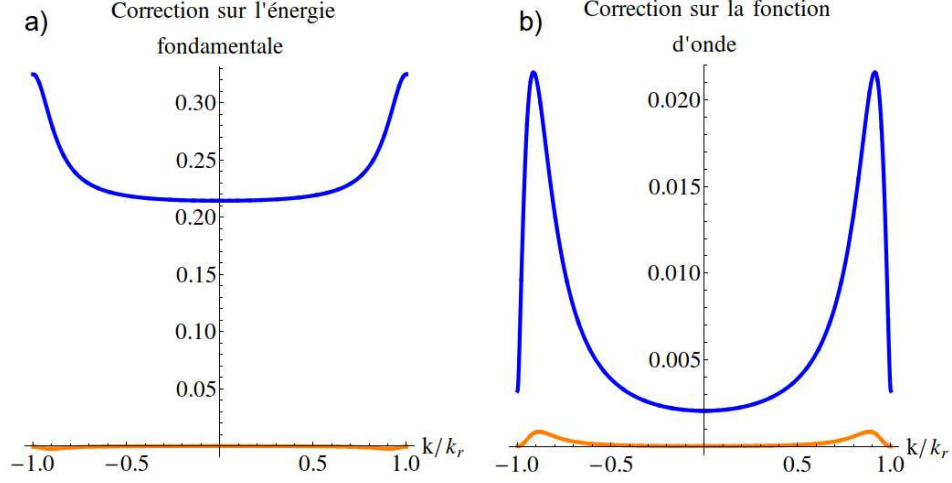
Avec  $\bar{t} = E_r t / \hbar$  le temps exprimé dans les unités de recul.

Pour étudier la stabilité de cette équation, on introduit une perturbation à l'état fondamental qui brise la périodicité et on calcule la réponse du système. La perturbation est de la forme  $\delta\psi_k(q) = v_k(\bar{z}, q) e^{iq\bar{z}} + w_k^*(\bar{z}, q) e^{-iq\bar{z}}$ . Avec  $q \in [-1, 1]$  et avec  $v_k$  et  $w_k$  des fonctions de même périodicité que le réseau. En injectant la fonction d'onde ainsi perturbée dans 3.10 et en la développant à l'ordre 1, on obtient :

$$i \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \begin{pmatrix} v_k(q) \\ w_k(q) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_k(q) \begin{pmatrix} v_k(q) \\ w_k(q) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

où

$$\mathcal{M}_k(q) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(k+q) & \bar{\alpha} \psi_k^2 \\ -\bar{\alpha} \psi_k^{*2} & -\mathcal{L}(-k+q) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$



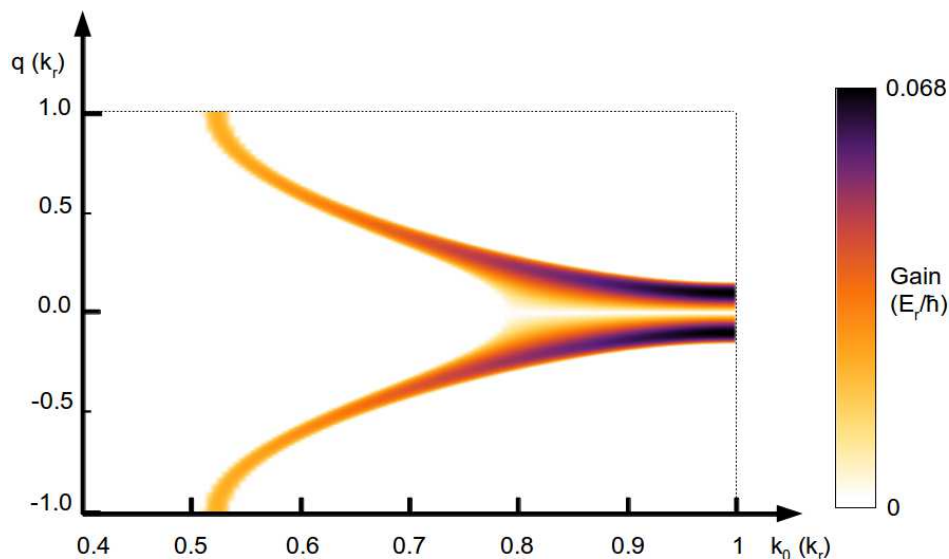
**Figure 3.2** – (a) Modification de la relation de dispersion par la correction d'ordre 1 (en bleu) et d'ordre 2 (en orange). On a représenté ici la correction normalisée par l'énergie en  $k = 0$  :  $Correc = (E^{avant}(k) - E^{apres}(k))/E^{avant}(0)$ . L'ordre 1 change l'énergie jusqu'à 30 % alors que la variation introduite par l'ordre 2 est inférieure à 1 %. (b) Modification de l'état fondamental par la correction d'ordre 1 (en bleu) et d'ordre 2 (en orange). On mesure la correction par la distance entre les vecteurs  $\mathbf{u}_k$  avant et après correction ( $d = \sqrt{\sum_{m=-N}^N [a_m^{avant}(k) - a_m^{apres}(k)]^2}$ ).

avec

$$\mathcal{L}(k) = -\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + ik\right)^2 + \frac{\bar{V}_0}{2}(1 - \cos(2\bar{z})) - \mu + 2\bar{\alpha}|\psi_k|^2 \quad (3.13)$$

Si pour un  $k$  et un  $q$  donnés le système admet une ou plusieurs valeurs propres ayant une partie imaginaire positive alors ce mode va connaître une croissance exponentielle. On diagonalise donc la matrice pour chaque  $k$  et  $q$  et on regarde la partie imaginaire de la valeur propre associée à la bande fondamentale. On peut ensuite tracer pour chaque vecteur d'onde initial  $k = k_0$  du condensat la partie imaginaire de l'énergie associée au mode  $q$ . La figure 3.3 montre les résultats typiques que l'on obtient pour des paramètres représentatifs de nos expériences.

On trouve que pour chaque  $k_0$  initial au-delà d'une valeur seuil, la partie imaginaire est piquée autour d'une certaine valeur de  $q$ . Ainsi, les modes centrés sur  $k_1 = k_0 - q$  et  $k_2 = k_0 + q$  vont connaître une croissance exponentielle. Ce calcul permet de mettre en évidence qu'il ne s'agit pas uniquement d'un couple de modes qui vont apparaître mais un continuum ayant une certaine largeur.



**Figure 3.3** – Gain (partie imaginaire de l'énergie) associé à la perturbation de quasi-impulsion  $q$  en fonction de l'impulsion initiale  $k_0$  du condensat. La profondeur du réseau est  $V_0 = 1 E_r$

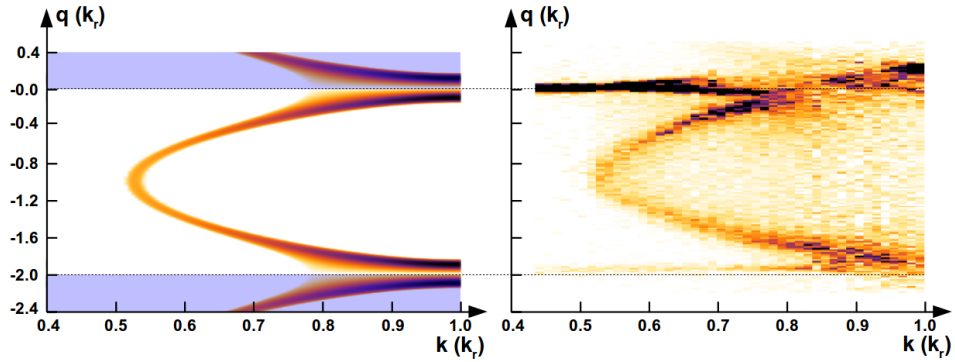
Avant de comparer ces résultats à l'expérience, il faut bien garder à l'esprit qu'ils ne sont valables que si les modes instables peuvent être traités comme des perturbations. Lorsque le réseau est tenu pendant longtemps, la population dans les paires devient importante et ce calcul perturbatif n'est alors plus valable.

### Résultats - accord avec l'expérience

On peut maintenant comparer les résultats de la simulation numérique avec les données expérimentales. Sur la figure 3.4 nous pouvons voir que le calcul numérique permet de correctement prédire les modes créés lors du mélange à quatre ondes dans le réseau. Sur la figure expérimentale (à droite), on peut voir les atomes du condensat autour de  $k = 0 k_r$  ainsi que les atomes diffractés par Bragg autour de  $k = 2 k_r$ . Dans la zone où  $k_0 > 0.8 k_r$  la branche supérieure des modes instables s'approche du condensat, la croissance exponentielle ne se fait donc plus à partir des fluctuations du vide mais à partir des atomes issus du condensat ou de sa partie thermique. Une très grande quantité d'atomes est alors diffusée et l'approche perturbative n'est plus valable. Pour  $k_0$  proche de 1, il n'est plus possible de distinguer le pic 1 du condensat. Et le nuage atomique est alors très déformé.

Pour une comparaison plus quantitative, on peut tracer le vecteur d'onde



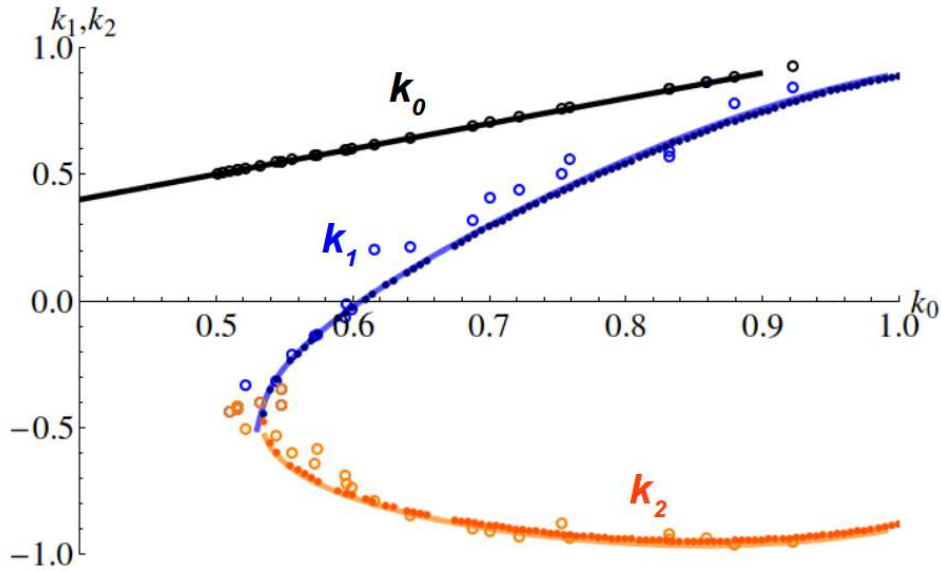


**Figure 3.4** – À gauche, gain calculé en fonction de l’impulsion initiale du condensat  $k$  et de la quasi-impulsion  $q$  des excitations. On a projeté la zone  $q \in [0, 1]$  vers  $q \in [-1, -2]$  pour la comparer aux données expérimentales obtenues dans la base des ondes planes. On peut le faire puisque les quasi-impulsions ont une période  $2 k_r$ . On compare la simulation aux populations mesurées expérimentalement à droite. La profondeur du réseau est de  $V_0 = 1 E_r$  et la densité choisie pour le calcul numérique est  $n_0 = 9 \times 10^{18} \text{ at/m}^3$ .

des modes ayant le gain le plus important en fonction du vecteur d’onde initial du condensat. Sur la figure 3.5 on peut voir le très bon accord entre le calcul numérique et l’expérience.

Il est important de noter qu’il n’y a normalement aucun paramètre ajustable pour ce calcul numérique, la profondeur du réseau a été au préalable calibrée par la mesure de la période des oscillations de Bragg et la densité atomique est estimée en mesurant le nombre d’atomes dans le condensat initial dans les mêmes conditions expérimentales et en utilisant une estimation du volume du nuage.

L’estimation de la densité reste cependant peu précise :  $n_0 = 10^{19} \text{ at/m}^3 \pm 50\%$ . Pour mesurer le nombre d’atomes on élargit la distribution en impulsion (par exemple en chauffant avec un faisceau à résonance) pour limiter les effets de saturation sur le détecteur. On remonte ensuite au nombre d’atomes initial en divisant le nombre d’atomes mesuré par l’efficacité  $\eta \approx 12\%$  de détection. Malheureusement cette efficacité n’est pas bien connue, il s’agit uniquement d’une borne inférieure mesurée lors de l’expérience de mélange à quatre ondes en espace libre [Jas10 ; Jas+10]. Potentiellement l’efficacité peut être jusqu’à deux fois plus grande et notre mesure surestime alors le nombre d’atomes initial. De plus le volume du nuages est estimé en faisant une approximation de Thomas-Fermi qui n’est pas vraiment valable au moins selon l’axe long du condensat. Enfin, pour calculer les rayons de Thomas-Fermi on utilise une mesure du waist et de la puissance du laser dont on peut raisonnablement



**Figure 3.5** – Comparaison entre les conditions d'accord de phase mesurées expérimentalement (cercles vides) et celle calculées soit en ajoutant le terme de champ moyen a posteriori (trait plein, déjà présentée à la figure 3.1) soit par le calcul perturbatif numérique (cercles pleins). Pour nos paramètres d'interaction et de profondeur, la différence est très faible entre les deux modèles.  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  en unité de  $k_r$ .

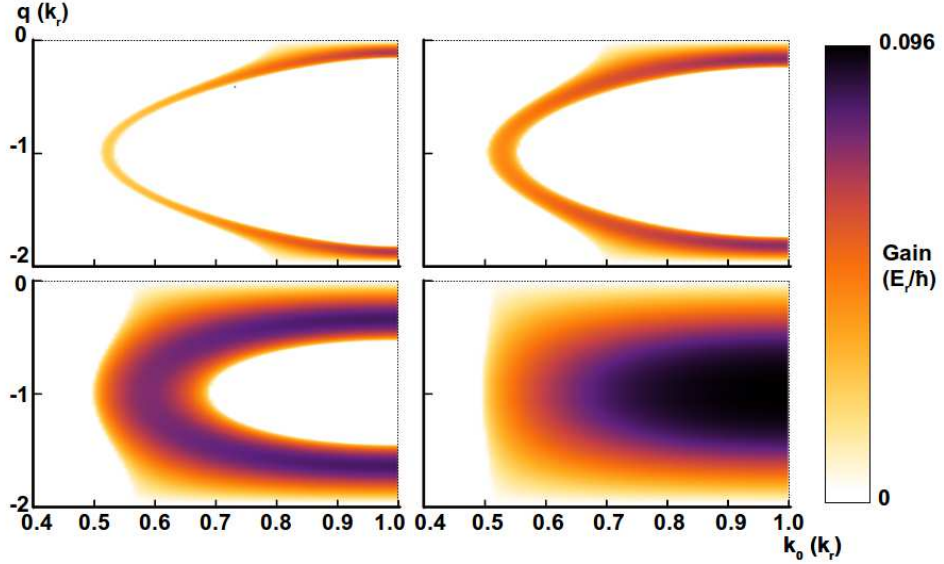
fixer les incertitudes à environ 10 %. À cause de toutes ces sources d'erreurs possibles, l'incertitude finale sur la densité est importante, de l'ordre de 50 %. Ainsi la densité reste dans une certaine mesure un paramètre ajustable dans notre simulation. En observant l'évolution des résultats numériques avec la densité on obtient un accord convenable pour  $n_0 = 9 \times 10^{18} \text{ at/m}^3 \pm 20 \%$ . Ce calcul permet donc une mesure indépendante de la densité qui se révèle dans notre cas être plus précise que l'estimation directe.

Le très bon accord entre le modèle numérique et l'expérience montre que l'instabilité dynamique dans les réseaux et le mélange à quatre ondes spontané sont en fait deux phénomènes identiques.

### Résultats - effet de la profondeur

On peut, grâce à notre modèle numérique prédire le comportement du condensat dans le réseau pour différentes profondeurs du potentiel. Sur la figure 3.6 on a représenté les courbes de gain à quatre profondeurs différentes : 1, 2, 5 et 10  $E_r$ . On peut ainsi voir que l'augmentation de la profondeur du

réseau a essentiellement pour effet d'élargir le nombre de mode instable et d'augmenter la valeur maximale du gain.



**Figure 3.6** – Courbes de gain pour quatre profondeurs différentes (1, 2, 5 et 10  $E_r$ ).

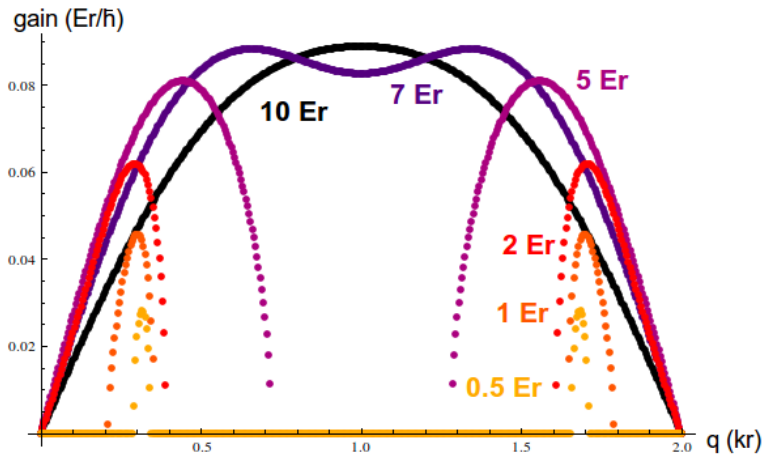
Sur la figure 3.7 on a représenté une coupe des courbes de gain à  $k_0 = 0.75k_r$ . On peut ainsi mieux distinguer l'élargissement et l'augmentation du gain. Grâce à cette analyse, on comprend qu'il est préférable d'éviter les trop fortes profondeurs pour garder deux pics de paires d'atomes bien distincts. Cependant, afin d'avoir des constantes de temps raisonnables, on souhaite que le gain ne soit pas trop faible, c'est pourquoi, on a déterminé empiriquement une zone satisfaisante de travail entre  $0.5E_r$  et  $2E_r$ .

Sur la figure 3.8 on a mesuré le nombre d'atomes détectés dans une zone autour du pic 1 en fonction de la profondeur du réseau. On observe une saturation du nombre d'atomes diffusés dès  $V_0 = 1.5 E_r$  alors que théoriquement le gain augmente jusqu'à  $7 E_r$  (voir figure 3.7). Cela s'explique par le fait qu'on se retrouve rapidement en dehors du régime de faible gain. Par exemple à  $V_0 = 1 E_r$ , le gain maximal théorique est typiquement  $g_{max} \approx 0.025 E_r/\hbar$  (pour  $k_0 = 0.66 k_r$ ) et on en déduit une constante de temps :

$$\tau = \frac{1}{g_{max}} \approx \frac{1}{2\pi 44000 \times 0.025} \quad (3.14)$$

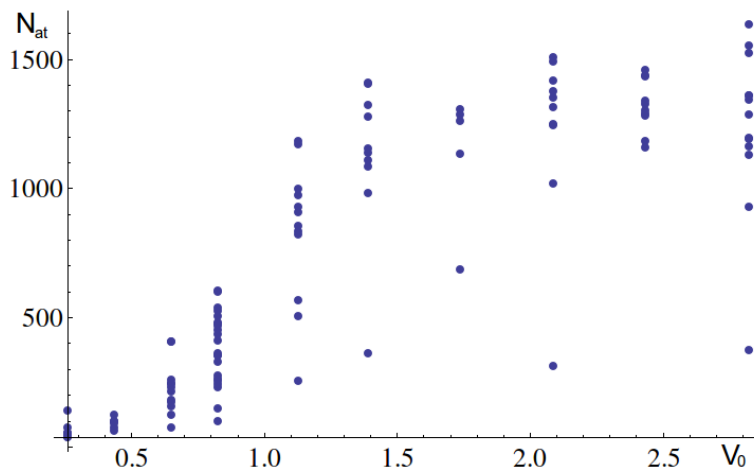
$$\approx 145 \mu s. \quad (3.15)$$

Comme les nombres d'atomes de la figure 3.8 ont été mesurés après  $400 \mu s$  d'application du réseau, on est clairement dans le régime de gain fort pour



**Figure 3.7** – Coupes des courbes de gain prises pour un vecteur du condensat  $k_0 = 0.75$  pour différentes profondeurs.

lequel les nombres d'atomes mesurés ne sont plus directement liés au gain initial. La saturation observée peut provenir, par exemple, de la déplétion de la pompe ou de la présence de processus secondaires. Nous verrons ainsi dans la partie 3.4 sur la dynamique que la croissance n'est clairement plus exponentielle après quelques centaines de microsecondes.

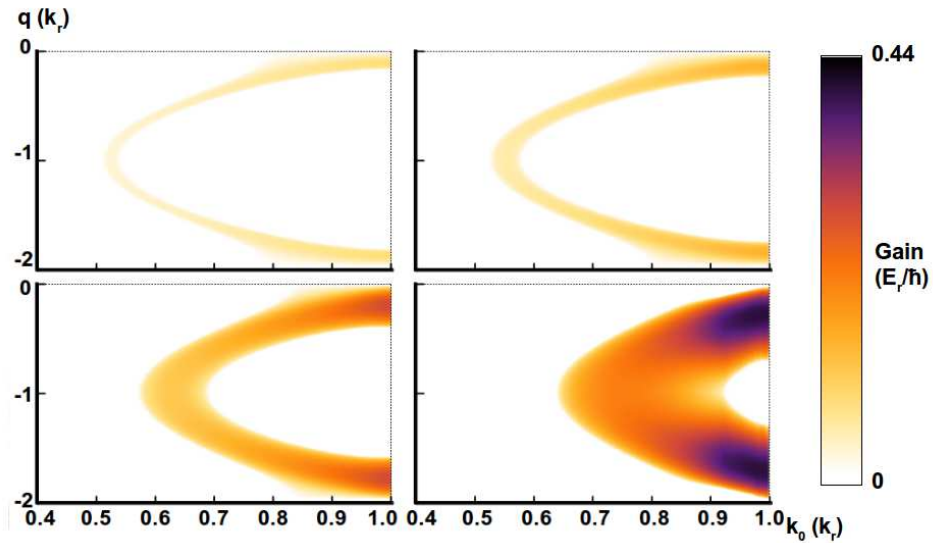


**Figure 3.8** – Nombres d'atomes mesurés à différentes profondeurs  $V_0$  du réseau (en unité de  $E_r$ ) dans une zone autour du pic 1. La durée du réseau est fixée à  $400 \mu s$  et sa vitesse par rapport aux atomes est  $v_0 = 0.66 v_r$ . L'ensemble des mesures ont été réalisées le même jour pour limiter les fluctuations de densité.

### Résultats - effet de la densité

L'autre paramètre du modèle numérique est le coefficient d'interaction  $\bar{\alpha}$  proportionnel à la densité atomique  $n_0$  et à la longueur de diffusion  $a$ . Celui-ci se révèle être un paramètre difficilement réglable expérimentalement sur notre dispositif, mais il est tout de même intéressant de simuler son effet puisqu'on peut imaginer d'autres dispositifs sur lesquels on pourrait le faire varier<sup>2</sup>.

Sur la figure 3.9 on peut voir les courbes de gain pour quatre densités différentes. Lorsque le coefficient d'interaction augmente, le gain maximal augmente ce qui est attendu puisque cela signifie que la probabilité de collision est plus forte augmentant immanquablement l'efficacité du mélange à quatre ondes. L'autre effet moins évident, est l'augmentation de la valeur de seuil  $k_s$ . Ainsi, à mesure que les interactions augmentent, les instabilités sont de plus en plus violentes mais elles apparaissent sur une plage d'impulsions de plus en plus restreinte en bord de zone de Brillouin.

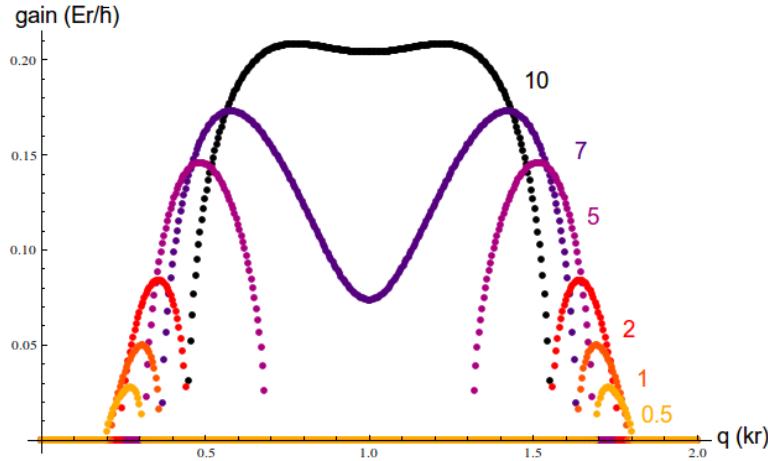


**Figure 3.9** – Courbe de gain pour quatre densités différentes ( $1, 2, 5$  et  $10 \times 10^{19}$  at/m<sup>3</sup>).

Les courbes de la figure 3.10 sont des coupes des courbes de gain à  $k_0 = 0.75 k_r$  où l'on peut observer l'augmentation du gain maximum et de la largeur. Lorsque la densité atteint  $7 \times 10^{19}$  at/m<sup>3</sup>, les pics ne sont plus distincts et l'ensemble des quasi-impulsions de la zone de Brillouin sont

2. Par exemple grâce à des résonances de Feshbach présentes pour d'autres espèces atomiques.

excitées. Ce régime n'est évidemment pas souhaitable pour la production de paires dans des modes bien définis. En plus de cet élargissement, l'augmentation des interactions change la valeur du vecteur d'onde minimale au-delà de laquelle les instabilités apparaissent.



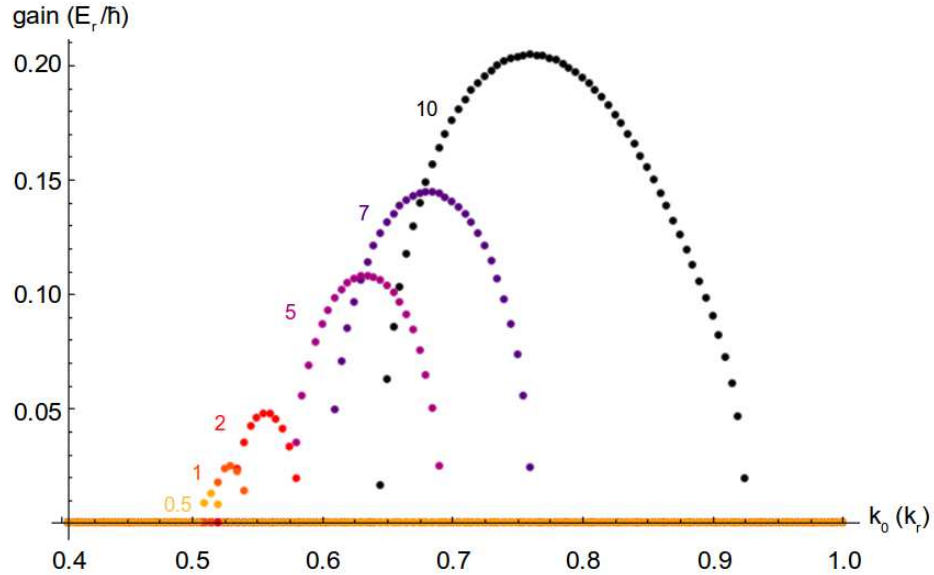
**Figure 3.10** – Coupes des courbes de gain prises pour un vecteur du condensat  $k_0 = 0.75 k_r$  pour différentes densités (en unité de  $10^{19}$  at/m<sup>3</sup>).

Sur la figure 3.11 sont tracées des coupes à  $q = 0$  afin de se rendre compte du décalage de la valeur seuil lorsque les interactions augmentent. Le seuil passe de  $k_s = 0.5 k_r$  lorsque la densité est faible ( $n_0 < 0.5 \times 10^{19}$  at/m<sup>3</sup>) à  $k_s = 0.65 k_r$  pour une densité  $n_0 = 10 \times 10^{19}$  at/m<sup>3</sup>. Expérimentalement la densité se situe aux alentours de  $n_0 \approx 1. \times 10^{19}$  at/m<sup>3</sup> ce qui correspond à un seuil  $k_s \approx 0.51 k_r$ .

### Conclusion sur le calcul numérique

Le calcul numérique exposé dans cette partie permet non seulement de simuler les comportements observés sur notre expérience mais également de faire des prédictions sur ce que l'on pourrait obtenir grâce à un dispositif permettant de régler l'effet des interactions. Les instabilités dynamiques dans les réseaux se révèlent être le même phénomène que le mélange à quatre ondes spontané.

Ce modèle présente cependant deux limites. D'une part les effets transverses sont complètement ignorés puisque le modèle est purement unidimensionnel, d'autre part, comme il repose sur une approche perturbative, il ne permet d'expliquer la dynamique qu'au début du processus puisque la croissance exponentielle des modes diffusés rend rapidement cette approche er-



**Figure 3.11** – Coupes des courbes de gain prises pour une quasi-impulsion  $q = 0$   $k_r$  pour différentes densités (en unité de  $10^{19}$   $\text{at}/\text{m}^3$ ). En plus de l'augmentation du gain maximal avec la densité, on observe un décalage de la valeur de seuil  $k_s$  au-delà de laquelle un condensat d'impulsion  $k_0 > k_s$  est instable et émet des paires.

ronée. Dans les deux prochaines parties, on s'intéressera donc à ces deux aspects.

## 3.2 Effets transverses

Jusqu'ici nous nous sommes uniquement intéressés au comportement selon l'axe du réseau en supposant que le confinement transverse était suffisant pour geler les deux autres degrés de liberté. Afin de se rendre compte de l'importance et de l'effet de ce confinement transverse, nous allons dans un premier temps observer ce qui se passe en l'absence de ce dernier. Puis nous verrons si l'ajout du piège permet effectivement de supprimer les effets transverses. Dans notre situation expérimentale, le piège est en effet très anisotrope : la pulsation de piégeage longitudinale  $\omega_z \approx 11$  Hz est quasiment 200 fois plus faible que celle transverse  $\omega_{\text{perp}} \approx 1.7$  kHz. On s'attend ainsi à être proche d'un comportement unidimensionnel.

### 3.2.1 Sans confinement transverse

En l'absence de piégeage, le comportement longitudinale reste identique à celui décrit jusqu'ici, mais transversalement les atomes ne sont maintenant plus contraints et se comportent comme des particules libres. Par conséquent ils peuvent acquérir, grâce au mélange à quatre ondes, une impulsion transverse à condition que l'énergie reste conservée. Ainsi, les conditions d'accord de phase changent à cause de ces nouveaux degrés de liberté transverses :

$$\vec{k}_{1,\perp} + \vec{k}_{2,\perp} = 0 \quad (3.16)$$

$$k_{1,z} + k_{2,z} = 2k_0 \quad [2k_r] \quad (3.17)$$

$$E(k_{1,z}) + E(k_{2,z}) = 2E(k_0) - \frac{\hbar^2}{2m}(k_{1,\perp}^2 + k_{2,\perp}^2) \quad (3.18)$$

Avec  $k_{i,\perp}$  la composante transverse du vecteur d'onde du mode  $i$ . Les conditions 3.16 définissent une surface tridimensionnelle dans l'espace des impulsions sur laquelle les atomes diffusés vont se répartir.

Afin d'observer ce comportement expérimentalement, nous utilisons la séquence expérimentale habituelle, mais au lieu d'allumer le réseau alors que le piège est allumé, nous coupons le faisceau dipolaire et immédiatement après nous allumons le réseau<sup>3</sup>. La figure 3.12 montre bien la répartition des atomes sur la surface attendue. Comme aucun mode n'est privilégié les atomes sont uniformément répartis sur la surface définie par les conditions d'accord de phase, et on ne retrouve plus les deux pics fortement peuplés observés en présence du piège. Ces observations montrent que la présence du piège dipolaire contraint fortement les degrés de liberté transverses puisqu'il permet de favoriser la création de paires longitudinales et empêche la répartition homogène sur la surface tridimensionnelle. Cependant, on peut se demander si le piège est suffisamment confinant pour geler complètement les effets transverses.

### 3.2.2 Avec confinement transverse

En présence du piège dipolaire, les atomes ne sont plus libres transversalement mais sont soumis à un potentiel harmonique caractérisé par sa pulsation de piégeage  $\omega_\perp = 1.7 \text{ kHz} \approx 0.04E_r/\hbar$ . L'énergie est donc quantifiée transversalement et on repère les modes transverses par les nombres quantiques  $n_{1,x}$ ,  $n_{1,y}$ ,  $n_{2,x}$  et  $n_{2,y}$ . Les conditions d'accord de phase s'écrivent donc maintenant :

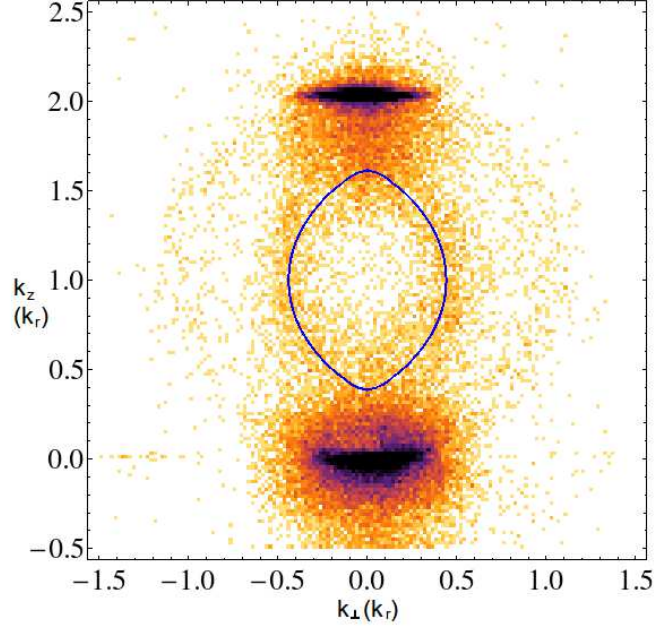
$$k_{1,z} + k_{2,z} = 2k_0 \quad [2k_r] \quad (3.19)$$

$$E(k_{1,z}) + E(k_{2,z}) = 2E(k_0) - (n_{1,x} + n_{1,y} + n_{2,x} + n_{2,y})\hbar\omega_\perp \quad (3.20)$$

---

3. Le temps d'allumage du réseau étant court (inférieur à la milliseconde) on peut négliger l'effet de la chute libre.





**Figure 3.12** – Coupe de la surface solution des conditions d'accord de phase en bleu sur laquelle se répartissent les atomes. La figure est à symétrie de révolution autour d'un axe (quasiment vertical) parallèle au réseau.

Ainsi, pour chaque valeur de la somme  $s = n_{1,x} + n_{1,y} + n_{2,x} + n_{2,y}$ , le couple de vecteurs d'onde  $(k_{1,z}, k_{2,z})$  est différent (voir figure 3.13). Il reste donc à savoir si ces états vont être effectivement peuplés. Pour cela il faut calculer les intégrales de recouvrement suivantes :

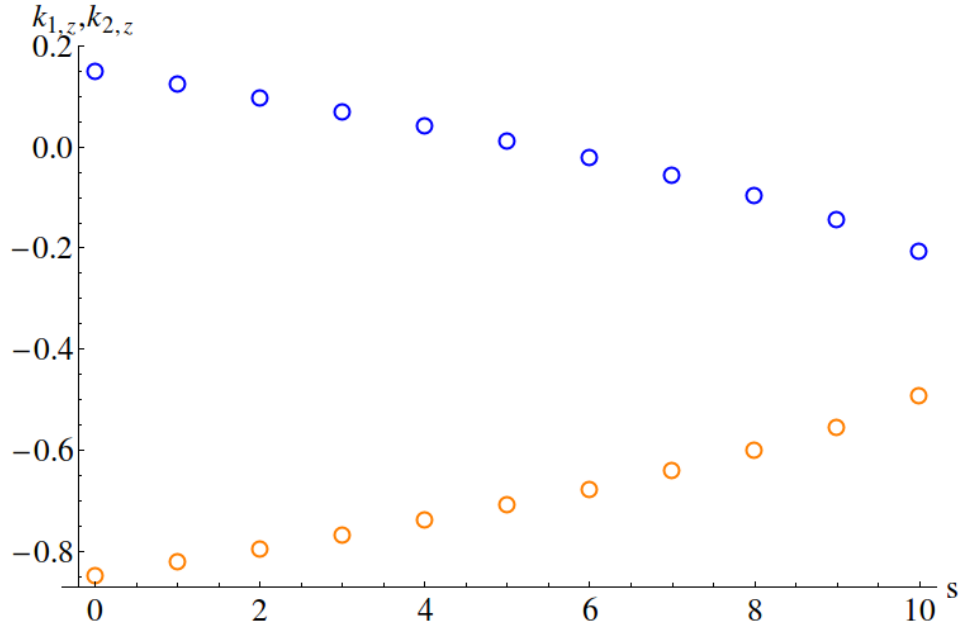
$$\mathcal{I}_{n_{2,x},n_{2,y}}^{n_{1,x},n_{1,y}} = \int \Phi_{\perp 0}^2 \Phi_{\perp n_{1,x},n_{1,y}}^* \Phi_{\perp n_{2,x},n_{2,y}}^* dx dy \quad (3.21)$$

avec  $\Phi_{\perp 0}$ ,  $\Phi_{\perp n_{1,x},n_{1,y}}$  et  $\Phi_{\perp n_{2,x},n_{2,y}}$  les fonctions d'ondes transverses du condensat et des deux modes diffusés. Pour simplifier les calculs, on néglige les interactions. Les fonctions d'ondes sont alors les solutions de l'oscillateur harmonique à deux dimensions :

$$\Phi_{\perp n_x, n_y} = \frac{1}{\sqrt{2^{n_x+n_y} n_x! n_y!}} \frac{1}{\sqrt{\pi} a_{\perp}} H_{n_x} \left( \frac{x}{a_{\perp}} \right) H_{n_y} \left( \frac{y}{a_{\perp}} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2a_{\perp}^2}} \quad (3.22)$$

où  $a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}}$  et avec  $H_n(X)$  le polynôme de Hermite<sup>4</sup> d'ordre  $n$ . Les atomes du condensat sont dans l'état fondamental  $\Phi_0 = \Phi_{n_x=0, n_y=0}$ . Comme

4. Polynôme de Hermite sous la forme dite physique.



**Figure 3.13** – Valeur des vecteurs d'ondes  $k_{1,z}$  et  $k_{2,z}$  solutions des conditions d'accord de phase en fonction de la somme  $s = n_{1,x} + n_{1,y} + n_{2,x} + n_{2,y}$ . Pour  $V_0 = 1 E_r$  et  $k_0 = 0.65 k_r$  onze valeurs de  $s$  sont potentiellement accessibles.

$\Phi_0^2$  est une fonction paire il faut que  $\Phi_{n_{1,x},n_{1,y}}$  et  $\Phi_{n_{2,x},n_{2,y}}$  soient de même parité pour que l'intégrale de recouvrement soit non nulle. Ainsi, il est nécessaire d'avoir  $n_{1,x} + n_{2,x} = 2p_x$  et  $n_{1,y} + n_{2,y} = 2p_y$  avec  $p_x$  et  $p_y$  des entiers positifs ou nuls. Les fonctions d'ondes étant séparables sur les variables  $x$  et  $y$ , on peut scinder les intégrales de recouvrements en deux termes :

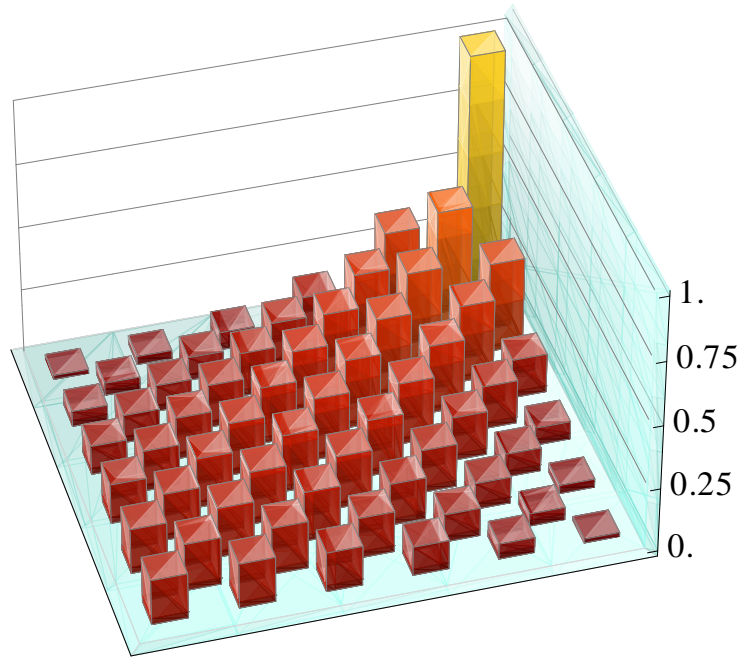
$$\mathcal{I}_{n_{2,x},n_{2,y}}^{n_{1,x},n_{1,y}} = \mathcal{J}_{n_{2,x}}^{n_{1,x}} \times \mathcal{J}_{n_{2,y}}^{n_{1,y}} \quad (3.23)$$

Le calcul des intégrales de recouvrements donne :

$$\mathcal{J}_{n_2}^{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_\perp}} \frac{1}{2^{n_1} 2^{n_2}} \frac{(n_1 + n_2)!}{\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)!} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \quad (3.24)$$

On remarque grâce à cette expression que le rapport  $\frac{\mathcal{J}_{n_2}^{n_1}}{\mathcal{J}_0^{n_1}}$  ne dépend que de  $n_1$  et  $n_2$  et ne dépend pas des paramètres du piège. Ainsi, augmenter la fréquence de piégeage transverse réduit uniquement le nombre de couples  $(k_{1,z}, k_{2,z})$  solutions des conditions d'accord de phase mais ne change pas la proportion d'atomes qui vont être dans les modes transverse par rapport à ceux dans le fondamental. La figure 3.14 montre les valeurs des intégrales  $\mathcal{J}_{n_2}^{n_1}$  pour les premiers modes transverse. On voit que le recouvrement est maximal lorsque

les atomes sont diffusés dans le mode fondamental transverse et qu'il diminue ensuite pour des modes excités d'indices plus importants. Le recouvrement

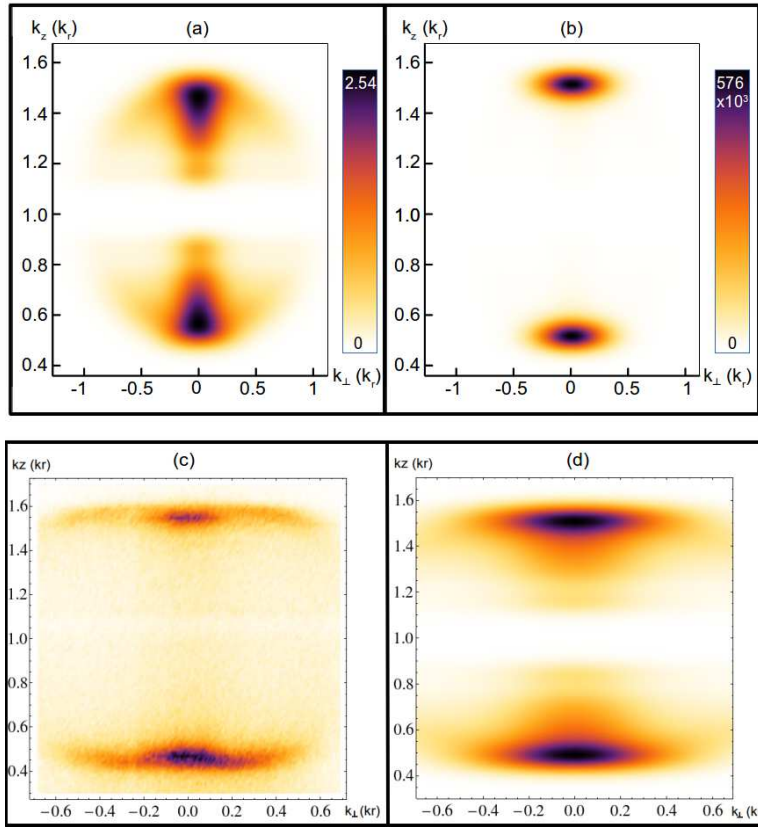


**Figure 3.14** – Intégrales de recouvrement  $\mathcal{J}_{n_2}^{n_1}$  (normalisées par  $\mathcal{J}_0^0$ ).

reste cependant non négligeable même pour les modes excités, ainsi au début de l'émission, tous les modes vont se peupler mais rapidement, comme la croissance est exponentielle, ce sont les modes transverses fondamentaux qui vont prendre le dessus et être majoritairement peuplés.

En modélisant grossièrement l'évolution des populations par des croissances en sinus hyperbolique. On remarque ainsi sur la figure 3.15 qu'initialement tous les modes transverses sont peuplés, puis comme le gain est plus fort dans le fondamental celui-ci prend le dessus à temps long.

Les densités mesurées sont plus larges transversalement en raison de l'élargissement provoqué par le champ moyen à la coupure du piège, cependant, on retrouve des répartitions cohérentes avec notre modèle, en particulier le peuplement de quelques modes transverses. Un examen plus approfondi de la répartition en impulsion révèle cependant quelques différences notables avec notre modèle. La figure 3.16 permet de se rendre compte que ce n'est pas le mode fondamentale transverse qui est majoritairement peuplé et que la distribution n'est pas à symétrie cylindrique. On suppose que ce comportement vient de l'angle que fait le réseau avec le piège dipolaire (environ  $7^\circ$ ), cet angle introduit un couplage entre l'axe vertical (Oz) et l'axe horizon-

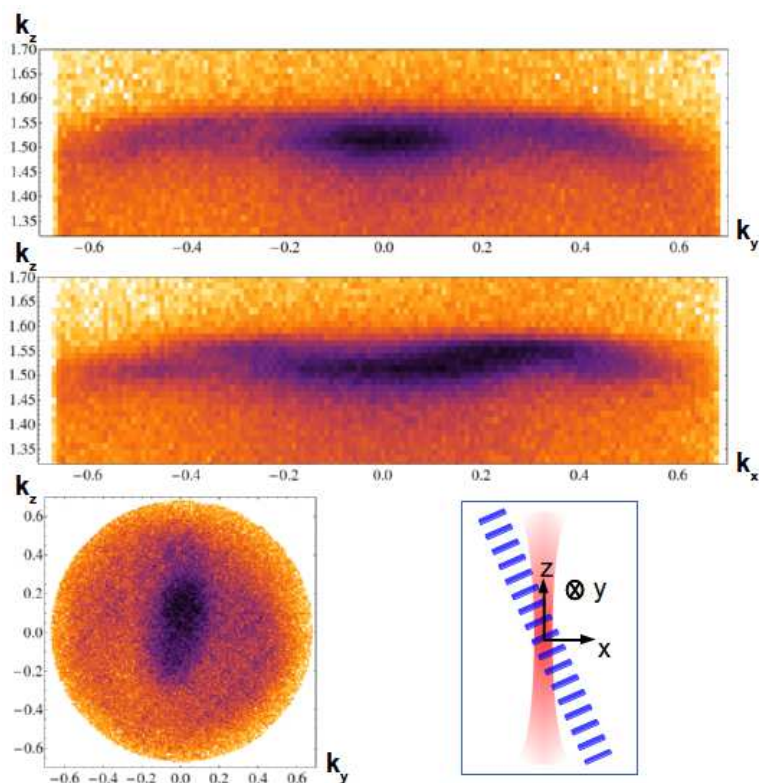


**Figure 3.15** – (a) et (b) Modélisation du peuplement des modes transverses. Initialement tous les modes sont peuplés puis les modes fondamentaux finissent par prédominer. La densité expérimentale (c) présente des structures similaires à notre modélisation simple des effets transverses (d).

tal (Ox). Cette imperfection conduit peut-être au peuplement préférentiel de certains modes transverses et introduit une dissymétrie comme semble l'indiquer la déformation de la densité dans le plan (Oxz). Pour supprimer cet effet l'alignement du réseau sur le piège est actuellement à l'étude.

### 3.2.3 Conclusion sur l'effet du confinement transverse

Comme nous venons de le voir, la présence du piège dipolaire est nécessaire si l'on souhaite privilégier quelques modes et obtenir des populations importantes, néanmoins, le piège n'empêche pas complètement les atomes d'atteindre des états excités transverses. En particulier, pour des durées faibles du réseau, les paires se répartissent dans tous les modes autorisés



**Figure 3.16** – Dans le plan  $(xOz)$ , la densité semble déformée. La coupe selon un plan horizontal  $(xOy)$  fait d'ailleurs apparaître un allongement selon l'axe  $x$ . Cette dissymétrie est probablement causée par l'angle d'environ  $7^\circ$  que fait le réseau avec le piège dipolaire dans le plan  $(xOz)$ .

et ce n'est que pour des temps plus longs que les pics principaux prennent le dessus grâce à un meilleur recouvrement des fonctions d'ondes. Le calcul de ces intégrales met d'ailleurs en évidence que l'augmentation du confinement ne change pas la proportion diffusée dans les modes transverses excités. Cependant, cela permet d'augmenter l'énergie des modes excités et permet donc de réduire le nombre de ces modes qui peuvent vérifier les conditions d'accord de phase. Dans les situations habituelles de prises de données ( $V_0 \approx 1 E_r$  et  $k_0 \approx 0.65 k_r$ ), il faut (d'après l'équation 3.16), pour supprimer complètement les modes transverses que la pulsation de piégeage soit d'au moins  $\omega_\perp > (\frac{2}{\hbar}(E(k_0) - E(k_0 + 1))) \approx 2\pi \times 25$  kHz. Un tel confinement demande une puissance au moins 10 fois plus importante (ou un waist 10 fois plus faible) ce qui n'est actuellement pas faisable sur notre dispositif.

Avec cette étude et à l'aide des calculs numériques des conditions d'ac-

cord de phase, nous sommes en mesure de comprendre les profils de densités détectés après temps de vol. Nous avons ainsi pu nous rendre compte de l'effet de l'angle du réseau par rapport à la vertical. Afin d'améliorer notre dispositif, il sera probablement préférable d'aligner le réseau avec notre piège dipolaire, ce qui, faute d'accès optiques disponibles n'avait jusqu'ici pas été fait. Cette modification est prévue pour les mois à venir et nous espérons que cela supprimera la dissymétrie entre les deux directions transverses. Pour continuer la caractérisation de notre source de paires, nous allons maintenant nous intéresser à un tout autre aspect : ses propriétés statistiques.

### 3.3 Corrélations et réduction des fluctuations

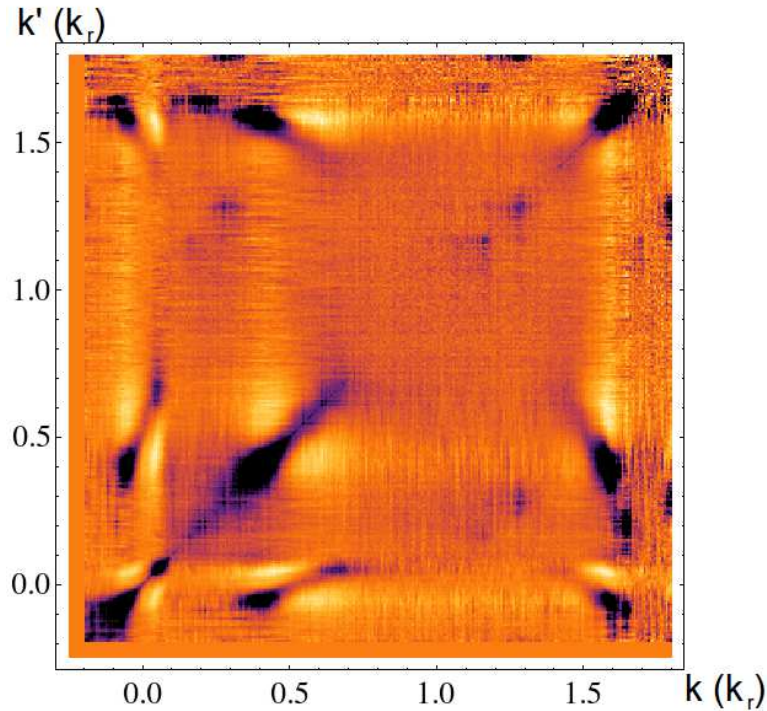
Comme expliqué dans le premier chapitre dans la partie 1.2.1, les atomes étant émis par paire, on s'attend à obtenir une probabilité de double détection supérieure dans les deux modes dans lesquels les atomes sont diffusés par rapport aux autres zones du nuage atomique. Autrement dit, les populations des pics 1 et 2 doivent être corrélées. De même, nous avons vu dans la partie 1.2.2 qu'il doit y avoir autant d'atomes émis dans le mode 1 que dans le mode 2. Ainsi, la différence du nombre d'atomes entre ces deux modes doit être tout le temps nulle. En pratique, il y a toujours un peu de bruit de fond et comme notre efficacité de détection est relativement faible, la différence du nombre d'atomes détectés dans les deux faisceaux ne sera pas nulle. Cependant, nous devrions malgré tout observer que la variance de cette différence est inférieure au bruit de grenaille comme c'était le cas dans le cadre du mélange à quatre ondes en espace libre [Jas+10].

#### 3.3.1 Corrélations

Pour mesurer l'excès de double détection nous utilisons la fonction de corrélation en impulsion d'ordre deux  $g^2(\vec{k}, \vec{k}')$  décrite en 1.2.1 puisqu'on s'attend à des corrélations entre les atomes de vecteurs d'ondes proches de  $k_1$  et ceux proches de  $k_2$ . Pour calculer les fonctions de corrélation on estime la distribution en impulsion à l'aide des positions et des temps d'arrivées sur le détecteur après un temps de vol de 308 ms (voir la partie A.2.4 de l'annexe A).

#### Effet des fluctuations de temps d'arrivée

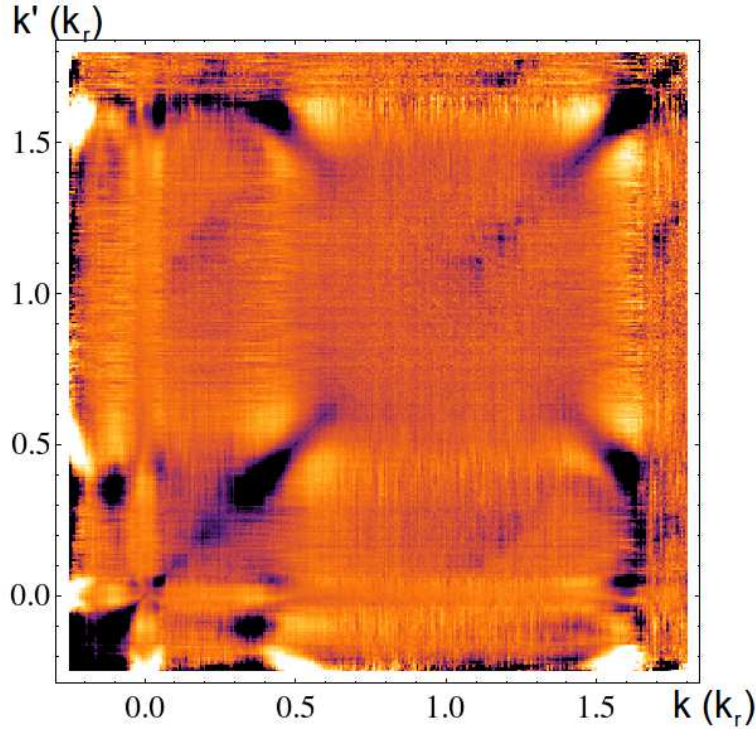
Lors de nos première mesures de fonction de corrélation nous avons observé un très fort signal dans les zones attendues, cependant, la structure de ce signal semblait étrange, en particulier à cause des très fortes valeurs de corrélations locales (voir figure 3.17).



**Figure 3.17** – Correlation en impulsion selon l'axe vertical  $g^{(2)}(k_z, k'_z)$ . Le condensat est en  $k_z = 0 k_r$  et les pics 1 et 2 sont en  $k_z \approx 0.5 k_r$  et  $k_z \approx 1.5 k_r$ . Des structures inattendues apparaissent ce qui nous a poussé à chercher des effets systématiques qui en seraient responsable.

Nous avons donc recherché les effets systématiques qui pourraient être responsables de telles corrélations. D'une réalisation expérimentale à l'autre, le temps d'arrivée du condensat fluctue avec des variations typiques équivalentes à la largeur du nuage (l'écart-type des variations est équivalent à quelques  $10^{-2} k_r$ ). Pour corriger cet effet, nous recentrons chaque réalisation en estimant le temps d'arrivée du condensat à l'aide d'un fit parabolique puis en décalant l'ensemble de la distribution jusqu'à un temps de référence (généralement la moyenne de tous les temps d'arrivée des condensats). Cette procédure fait disparaître la structure autour du condensat (voir figure 3.18) mais pas celle autour des pics 1 et 2. C'est le signe que lorsque le temps d'arrivée du condensat change, celui des pics 1 et 2 ne varie pas de la même manière.

Ces fluctuations de temps d'arrivée du condensat et des pics 1 et 2 peuvent avoir deux origines : une variation de position du nuage à la coupure, ou une variation de la vitesse moyenne du condensat à l'extinction

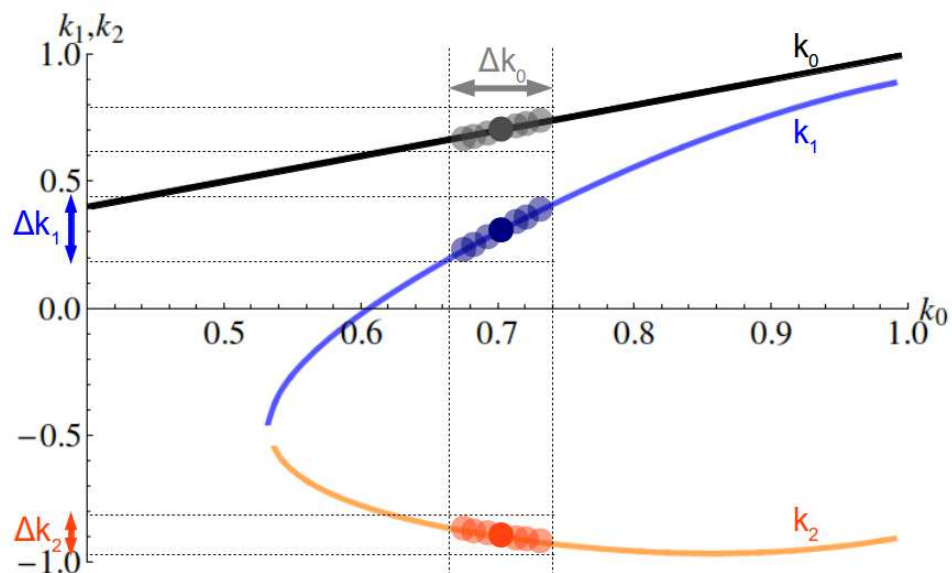


**Figure 3.18** – Corrélations obtenues après avoir décalé chaque réalisation pour recentrer le condensat. La structure disparaît autour du condensat ( $k$  et  $k'$  dans  $[-0.05 k_r, 0.05 k_r]$ ) mais celles associées aux pics 1 et 2 sont toujours présentes.

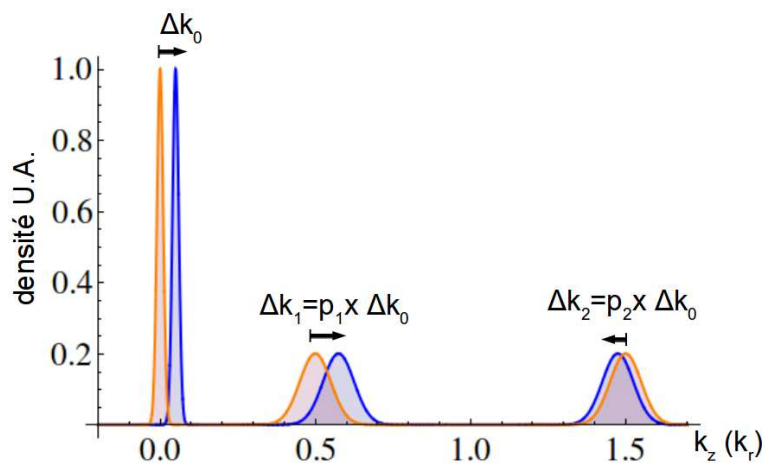
du piège. L'effet d'un changement de position initiale est simple à corriger puisque cela décale toute la distribution de la même quantité et la procédure de recentrage précédemment expliquée doit fonctionner. Par contre les fluctuations de la vitesse initiale sont beaucoup plus complexes puisque lorsque la vitesse du condensat change, les conditions d'accord de phase varient entraînant un changement non trivial de la vitesse des pics 1 et 2. La figure 3.19 illustre l'effet des fluctuations de vitesse sur le mélange à quatre ondes dans un réseau.

À l'aide d'un modèle simple, on vérifie que ces variations sont bien responsables de l'effet observé : on représente la distribution par trois gaussiennes dont les positions des centres varient. La position du centre du condensat suit une loi de probabilité normale d'écart-type  $\sigma_{dk}$  équivalent à la largeur de la distribution ( $\sigma_{BEC} = \sigma_{dk} = 0.01k_r$ ). Les centres des pics 1 et 2 sont reliés à la position du condensat par les conditions d'accord de phase (voir figure 3.20). Avec ce modèle simple, on peut calculer analytiquement la fonction de corrélation  $g^{(2)}(k_z, k'_z)$  représentée sur la figure 3.21. Malgré l'absence de



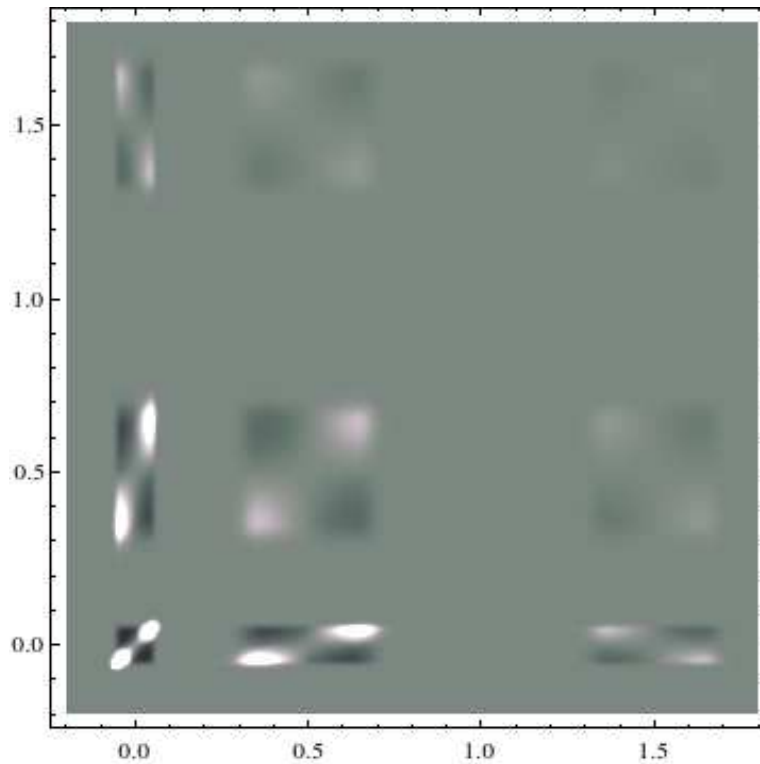


**Figure 3.19** – Une fluctuation de la vitesse initiale du condensat est équivalente à une variation  $\Delta k_0$  de son vecteur d'onde, les solutions aux conditions d'accord de phase sont alors modifiées ce qui entraîne des fluctuations  $\Delta k_1$  et  $\Delta k_2$  des vecteurs d'ondes des pics 1 et 2.  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$  en unité de  $k_r$ .



**Figure 3.20** – Lorsque le vecteur d'onde initial du condensat varie de  $\Delta k_0$  les pics 1 et 2 se déplacent respectivement de  $\Delta k_1 = p_1 \Delta k_0$  et  $\Delta k_2 = p_2 \Delta k_0$  où  $p_1$  et  $p_2$  sont les pentes locales des solutions aux conditions d'accord de phase  $p_i = \left. \frac{dk_i}{dk_0} \right|_{k_{BEC}}$ .

corrélations quantiques, on observe clairement des structures sur la carte de corrélation ce qui confirme l'effet des fluctuations de temps d'arrivée sur le détecteur. Cela montre également qu'il faut rester très prudent sur l'interprétation des fonctions de corrélation puisque des bruits classiques peuvent introduire de très fortes corrélations. Il est par conséquent nécessaire de corriger autant que possible ces fluctuations.

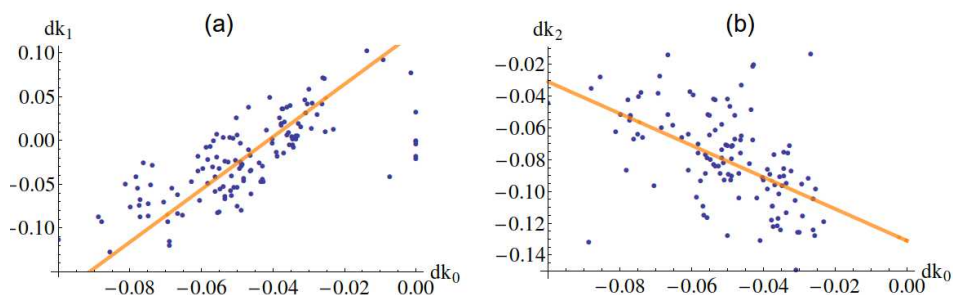


**Figure 3.21** – Corrélation obtenue à partir de notre modèle de fluctuations présenté sur la figure 3.20. On observe des structures sur les corrélations entre les différents pics. Ces structures sont uniquement dues au bruit sur le vecteur d'onde du condensat et sont similaire aux signaux observés expérimentalement sur la figure 3.17

### Procédure de recentrage

Afin de pouvoir tout de même exploiter nos données, nous avons mis au point une procédure de recentrage pour éliminer l'effet de ces fluctuations. Nous avons choisi de recentrer individuellement chaque pic. Au préalable, on fit chacun des pics pour déterminer leur décalage par rapport aux positions attendues compte tenu de la vitesse du réseau (fixée par le désaccord entre les

faisceaux laser), une fois ces décalages  $\delta k_0$ ,  $\delta k_1$  et  $\delta k_2$  obtenus, on sépare les atomes en trois régions : les atomes aux alentours du condensat sont déplacés de  $-\delta k_0$ , ceux autour du pic 1 sont déplacés de  $-\delta k_1$  et ceux proches du pic 2 sont décalés de  $-\delta k_2$ . On peut d'ailleurs remarquer une corrélation (figure 3.22) entre les trois décalages, signe que les fluctuations sont en grande partie dictées par des variations de vitesse initiale.



**Figure 3.22** – Décalages des pic 1 et 2 par rapport au décalage du condensat. Les droites oranges représentent les pentes locales des conditions d'accord de phase et sont cohérentes avec les points expérimentaux. La dispersion des décalages du pic 2 est plus importante en grande partie à cause de la faible qualité de notre ajustement gaussien.

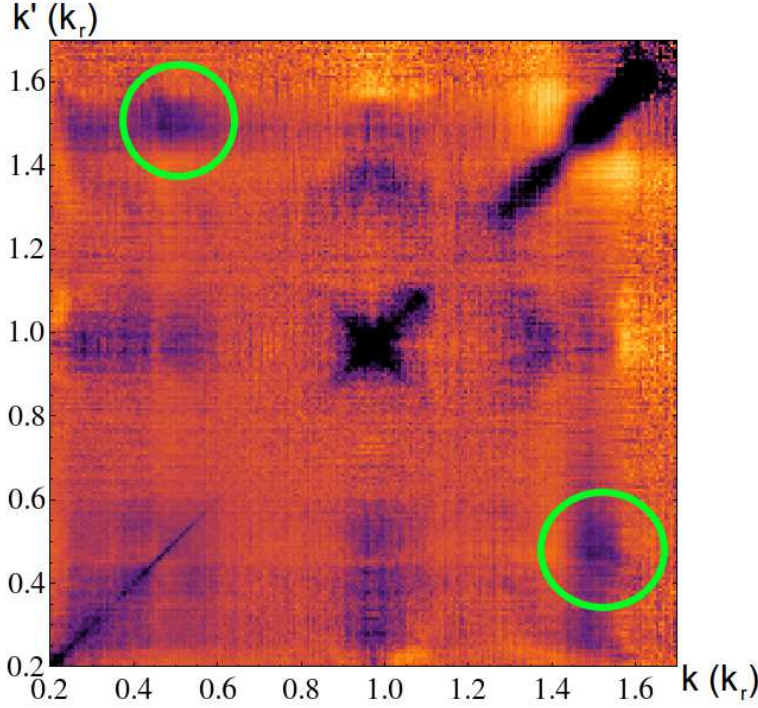
Lorsque les décalages sont trop importants (supérieurs à  $0.05 k_r$ ) ou lorsque les ajustements gaussiens ne sont pas satisfaisants<sup>5</sup> nous écartons les fichiers. Ainsi, seul à peu près un tiers des réalisations expérimentales sont conservées afin d'obtenir le signal le plus propre possible à la fin. Bien évidemment, suite à ce recentrage, tout ce qui se passe à proximité des bords de nos trois régions n'a aucune réalité physique en particulier autour de  $1 k_r$  qui correspond à la limite entre la zone du pic 1 et celle du pic 2.

Transversalement, il n'y a pas de problème de ce type et aucun recentrage n'est nécessaire.

### Corrélations après recentrage

La procédure de recentrage nous a bien permis de corriger les effets liés aux fluctuations de temps d'arrivée mettant ainsi en lumière le véritable contenu physique qui était jusqu'ici caché. Ainsi, sur la carte de corrélation de la figure 3.23 on voit apparaître des corrélations entre les atomes du pic 1 et ceux du pic 2.

5. Lorsqu'il y a trop peu d'atomes, que le fond est trop important ou encore lorsque les pics sont trop ou pas assez larges.



**Figure 3.23** – Corrélations obtenues après recentrage, on s’est limité aux vecteurs d’ondes supérieur à  $0.2 k_r$  pour se concentrer sur les corrélations entre le pic 1 ( $k \approx 0.5$ ) et le pic 2 ( $k \approx 1.5$ ) mises en avant par les cercles verts. Pour  $k$  ou  $k'$  proche de  $1 k_r$  les signaux observés n’ont pas de réalité physique et découlent uniquement de la méthode de recentrage.

Sur la figure 3.24 sont représentées les coupes de la fonction de corrélation  $g^{(2)}(k_z, k'_z)$  selon un axe transverse et selon l’axe longitudinal. On observe un pic pour  $k_z \approx k_1$  et  $k'_z \approx k_2$  (figures 3.24 (a) et (b)) indiquant que les deux faisceaux sont bien corrélés.

Afin d’estimer le nombre de modes peuplés par chaque faisceau et combien sont corrélés, on s’intéresse à la fonction de corrélation locale d’un seul faisceau. Comme on peut le voir sur les figures 3.24 (c) et (d), un groupement bosonique apparaît pour  $k'_z \approx k_z \approx k_1$  à cause de l’effet Hanbury Brown et Twiss [Möl+08] (voir 1.2.1). Un tel signal est également observé à  $k_2$ . La corrélation croisée a des largeurs rms  $\sigma_{c,z} = 0.018 k_r$  et  $\sigma_{c,y} = 0.16 k_r$ . Les corrélations locales ont des dimensions similaires en  $k = k_1$  et  $k = k_2$  :  $\sigma_{l,z} = 0.0037 krec$  et  $\sigma_{c,y} = 0.13 krec$ .

En définissant la taille d’un mode comme la largeur de la fonction de corrélation locale (voir 1.2.1), on la compare à celle de la densité (largeur

rms de  $4 \times 10^{-2} k_r$  longitudinalement et  $4 \times 10^{-1} k_r$  transversalement). Ainsi, on voit que typiquement, 10 modes longitudinaux sont peuplés et également 10 modes transverses ( $\approx 3$  modes selon l'axe transverse  $y$  à mettre au carré pour considérer l'ensemble des modes dans le plan transverse). Au total, le mélange à quatre ondes dans le réseau peuple une centaine de modes. Par mode, on peut ainsi atteindre une population de l'ordre de 100 atomes répartis puisque l'on arrive à en émettre environ  $10^4$  dans chaque pic. Il faut comparer ces valeurs aux  $10^5$  modes que l'on peuple dans le mélange à quatre ondes en espace libre avec typiquement 0.02 atome par mode. De ce point de vue le mélange à quatre ondes dans un réseau est bien plus performant que sa version en espace libre.

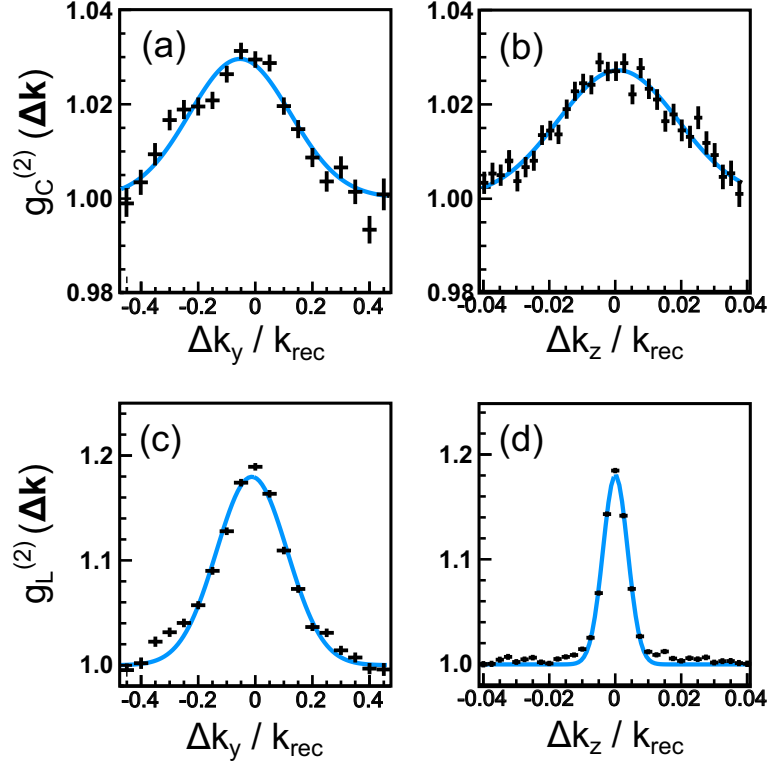
Il apparaît sur la figure 3.24, que bien que les corrélations locales et croisées aient des largeurs transverses similaires, longitudinalement, la corrélation croisée est quasiment cinq fois plus large que la locale. Cela suggère que chaque mode longitudinal est corrélé avec plusieurs modes de l'autre pic.

L'obtention des corrélations ne suffit pas à prouver le caractère quantique de cette source de paires atomiques. En effet, il est possible d'obtenir des corrélations de manière tout à fait classique, les fluctuations de temps d'arrivée illustre d'ailleurs parfaitement cette possibilité puisque ce bruit indésirable et parfaitement classique faisait apparaître de très fortes corrélations dont nous avons dû nous débarrasser. Pour être certain que les corrélations obtenues ne sont explicables par une théorie des champs classique, on peut s'intéresser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz présentée en 1.2.1. En mesurant les amplitudes des corrélations locales des pics 1 et 2  $g_{l,1}^{(2)}(0) = g_{l,2}^{(2)}(0) = 1.19$  et en les comparant à l'amplitude de la corrélation croisée  $g_c^{(2)}(0) = 1.03$ , on se rend facilement compte que l'inégalité de Cauchy-Schwarz simple  $g_c^{(2)}(0) < \sqrt{g_{l,1}^{(2)}(0)g_{l,2}^{(2)}(0)}$  n'est pas du tout violée.

Un tel comportement avait déjà été observé sur notre expérience [Khe+12] et avait conduit à l'élaboration d'une version intégrée de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cette nouvelle inégalité, que nous avons décrite dans la partie 1.2.1 permet de prendre en compte les largeurs des fonctions de corrélations en les intégrant sur un volume fini. Avec les corrélations présentées sur la figure 3.24 on obtient :

$$\frac{\bar{G}_{12}}{\sqrt{\bar{G}_{11}\bar{G}_{22}}} = 1.045 \pm 0.04 \quad (3.25)$$

ce qui n'est pas clairement au dessus de 1 compte tenu des incertitudes (erreur rms). D'ailleurs sur certains jeux de données le rapport est inférieur à 1 confirmant qu'il faut être prudent sur l'observation de cette violation. Afin de s'assurer du caractère non classique des paires d'atomes, nous avons choisi de mesurer le bruit sur la différence de nombre d'atomes entre les deux



**Figure 3.24** – (a) et (b) Coupes selon l'axe y (un des axes transverses) et selon l'axe z (axe longitudinal) de la fonction de corrélation croisée normalisée. la fonction de corrélation est intégrée sur  $k_i$  :  $g_c^{(2)}(\Delta\vec{k}) = \int d\vec{k}_i g_c^{(2)}(\vec{k}_i, \vec{k}_j + \Delta\vec{k})$  avec  $\vec{k}_i + \vec{k}_j = (k_1 + k_2)\vec{e}_z$ . L'intégration est faite sur un volume de dimension  $L_{k_x} = L_{k_y} = 0.4 k_r$  et  $L_{k_z} = 0.05 k_r$ . Les coupes ont des largeurs de  $0.01 k_r$  ( $0.15 k_r$ ) selon z (x et y). L'ajustement gaussien au pic de corrélations observé nous donne une largeur longitudinale (transverse)  $\sigma_{c,z} = 0.018 k_{rec}$  ( $\sigma_{c,y} = 0.16 k_{rec}$ ). (c) et (d) Coupes selon l'axe y et z de la fonction de corrélation locale normalisée. Là encore, elle est intégrée :  $g_l^{(2)}(\Delta\vec{k}) = \int d\vec{k}_i g_c^{(2)}(\vec{k}_i, \vec{k}_i + \Delta\vec{k})$ . Le volume d'intégration est le même que précédemment. Le pic causé par l'effet HBT a une largeur longitudinale (transverse)  $\sigma_{l,z} = 0.0037 k_{rec}$  ( $\sigma_{l,y} = 0.13 k_{rec}$ ). Ces courbes ont été calculées à partir de 850 réalisations expérimentales avec une impulsion du condensat par rapport au réseau de  $-0.65 k_r$ , à  $V_0 = 0.725 E_r$  de profondeur et pour une durée d'application du réseau  $T_L = 2 ms$

faisceaux. On espère ainsi apporter une preuve plus convaincante de l'aspect quantique de la source.

### 3.3.2 Réduction du bruit sur la différence du nombre d'atomes

Comme nous l'avons expliqué dans la partie 1.2.2, les atomes étant émis par paire suite au mélange à quatre ondes, il doit y avoir exactement le même nombre d'atomes dans les deux faisceaux. Cela implique que la différence entre les nombres d'atomes mesurés dans le mode 1 et le mode 2 doit être nulle. Nous allons en particulier nous intéresser au bruit de cette différence d'une réalisation expérimentale à l'autre en mesurant la variance de la différence du nombre d'atomes et en la normalisant par le bruit de grenaille (voir section 1.2.2). La variance normalisée mesurée est donc :

$$V = \frac{\langle (N_1 - N_2)^2 \rangle - \langle N_1 - N_2 \rangle^2}{\langle N_1 + N_2 \rangle} \quad (3.26)$$

Si les atomes sont bien émis par paires la différence est toujours nulle, et par conséquent la variance tend vers 0. Mais dans le cas où les atomes seraient émis par un processus classique, le bruit sur la différence ne pourrait alors pas descendre en dessous du bruit de grenaille, c'est ce qu'on appelle la limite quantique standard. Au minimum la variance vaudrait alors  $V = 1$ . L'observation d'une variance en dessous de 1 constituerait ainsi une preuve du caractère quantique du processus.

Cependant, sur notre dispositif l'efficacité de détection est limitée ce qui signifie que pour chaque paire émise il y a une grande probabilité de ne détecter qu'un seul des deux atomes ce qui introduit des fluctuations de la différence du nombre d'atomes d'une réalisation expérimentale à l'autre. Si on note l'efficacité de détection  $\eta$ , la variance normalisée devient alors :

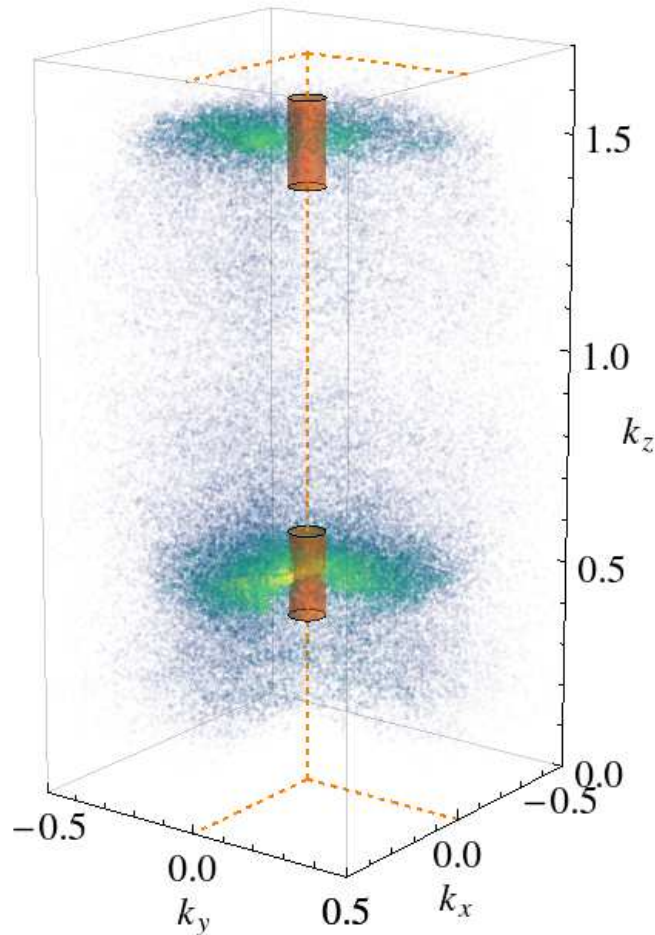
$$V_{det} = (1 - \eta) + \eta V \quad (3.27)$$

Où  $V$  est la variance normalisée définie précédemment en 3.26.

Ainsi, au mieux, on peut espérer atteindre  $V_{det} = 1 - \eta$ . Pour notre dispositif on estime l'efficacité totale de détection à environ 12%, il faut donc accumuler suffisamment de réalisations expérimentales pour que les barres d'erreurs statistiques soient telles que l'on puisse distinguer  $V_{det} = 1$  de  $V_{det} = 0.88$  sans ambiguïtés.

#### Procédure de la mesure

Afin de mesurer la variance normalisée nous recentrons au préalable les données en utilisant la même stratégie que celle employée pour les corrélations. Ensuite, on définit deux cylindres autour des pics 1 et 2 dont on peut fixer le rayon et la hauteur (voir figure 3.25). On compte ensuite le nombre d'atomes présents dans chaque cylindre à chaque réalisation expérimentale et on calcule la variance de la différence entre les nombres d'atomes mesurés.



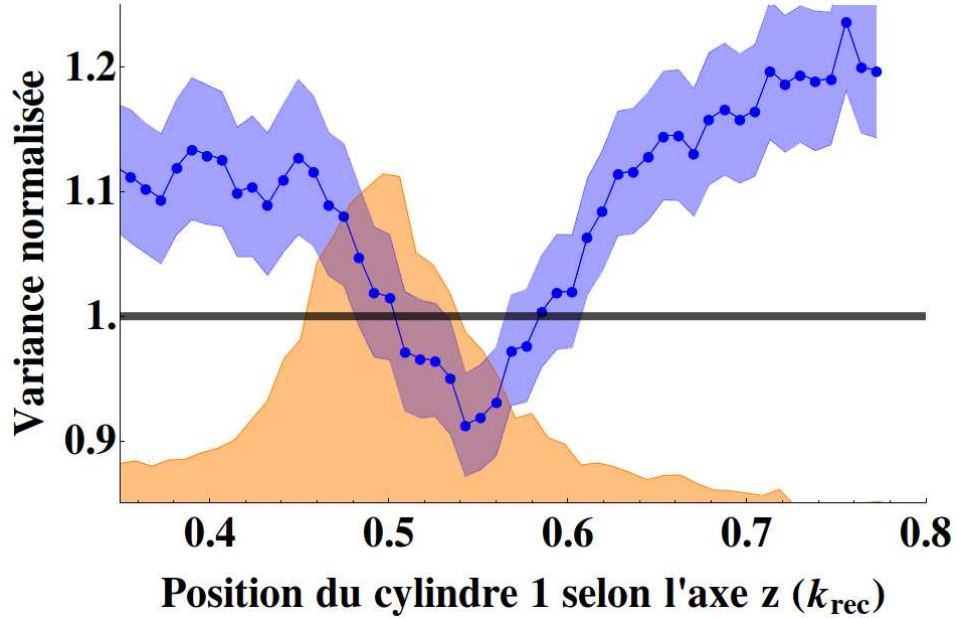
**Figure 3.25** – On comptabilise le nombre d'atomes dans les deux volumes cylindriques représentés ici en orange, puis, on calcule la variance de la différence entre les deux nombres obtenus. Il est possible de faire varier la hauteur et le rayon des cylindres et de modifier leur position.  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  en unité de  $k_r$ .

### Variance mesurée

On fixe la position du cylindre 2 proche du centre du pic 2 : centré horizontalement et en  $k_z = 1.45 k_r$  verticalement (le sommet du pic 2 est en  $1.5 k_r$ ). On trace alors la variance normalisée en fonction de la position de l'autre cylindre, on observe une diminution de la variance lorsque le cylindre passe sur le pic 1 (voir figure 3.26).

La variance passe en-dessous de 1 et atteint quasiment la valeur minimale  $V = 1 - \eta = 0.88$  supposée compte tenu de l'efficacité de détection évaluée





**Figure 3.26** – Variance normalisée de la différence du nombre d’atomes entre deux régions cylindriques proches des pics 1 et 2. Les cylindres ont un rayon  $R_{\perp} = 2.5 \times 10^{-2} k_r$  et une hauteur  $h = 8.5 \times 10^{-2} k_r$  et sont centrés sur les pics dans le plan transverse. Verticalement, on déplace le cylindre du pic 1 en laissant fixe celui du pic 2. On a également tracé la densité du pic 1 en arrière plan (courbe orange) cela permet de se rendre compte du décalage entre le minimum de la variance et le maximum de la densité. La droite  $V=1$  indique la limite quantique standard.

dans [Jas+10]. Ce comportement ne peut pas être expliqué par une théorie des champs classique et met en avant le caractère quantique de notre source. Cependant, il faut rester prudent quant à ces conclusions puisque certains aspects de la mesure de la variance restent incompris. Tout d’abord, le minimum de variance est obtenu lorsque les cylindres sont décalés par rapport à la densité, comme on peut le voir sur la figure 3.26 où le minimum de la variance est décalé de  $0.05 k_r$  par rapport à la densité. La position du deuxième cylindre est également décalé du maximum de densité du pic 2 de la même quantité mais en direction opposée ( $-0.05 k_r$ ). Ce décalage est équivalent à la demi-hauteur des cylindres. Lorsque l’on centre les cylindres sur les pics de densité, on observe tout de même une réduction de la variance normalisée mais elle ne passe alors pas en-dessous de 1.

L’étude des modes transverses dans la partie précédente (3.2) a montré que des paires sont également créées entre les deux pics principaux, il est pos-

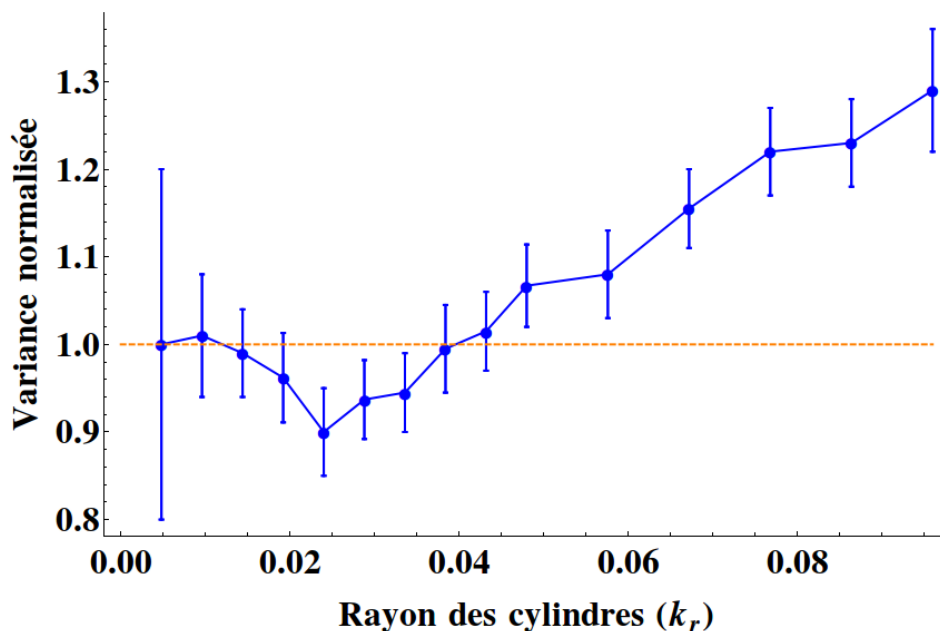
sible que les premiers modes transverses excités (décalés longitudinalement par rapport aux pics) soient plus favorables à l'observation de squeezing. Il est également possible qu'un bruit supplémentaire détruise le signal lorsque l'on est centré sur la densité mais qu'en se décalant cet hypothétique bruit diminue suffisamment pour laisser apparaître le signal. Ce comportement reste inexpliqué, mais ce n'est pas la seule interrogation que soulève ces résultats.

Si on considère un atome issu d'une paire, on sait que son partenaire se trouve dans un volume défini par la fonction de corrélation. Ainsi, pour obtenir une variance normalisée minimale, il faut que les cylindres de comptage aient des dimensions similaires ou supérieures à celles des fonctions de corrélations ce qui maximise les chances de compter les deux atomes issus d'une même paire. Or, transversalement, l'analyse de nos données montre un tout autre comportement puisque la variance est minimale pour un rayon du cylindre presque 10 fois plus faible que la largeur typique des fonctions de corrélations. La figure 3.27 montre la valeur minimale de la variance pour différents rayons transverses, et on voit qu'il existe un rayon optimal de  $R_{\perp} = 2.5 \times 10^{-2} kr$  à comparer à la largeur de la fonction de corrélation  $\sigma_{c,\perp} = 1.6 \times 10^{-1} kr$ .

Nous n'avons pour le moment aucune explication pour ce comportement inattendu, peut-être s'agit-il d'un effet du caractère multimode transverse. Il faut cependant rester très prudent avec l'interprétation de ces résultats puisque nous sommes ici à la limite de la capacité de notre détecteur, en effet le rayon optimal correspond à seulement 5 pixels et la résolution typique est de l'ordre de 2 pixels. Il pourrait donc peut-être s'agir d'effets liés à notre système de détection. Néanmoins, la réduction des fluctuations apparaît uniquement aux alentours des pics 1 et 2. De plus, lorsque l'on utilise la même procédure d'analyse mais en comptant des atomes issus de réalisations expérimentales différentes (donc non corrélés) pour le cylindre 1 et le cylindre 2, on obtient bien une variance égale à 1. Cela semble donc indiquer que le mélange à quatre ondes dans le réseau est bien à l'origine de la variance sub-poissonnienne.

### 3.3.3 Conclusion sur les propriétés statistiques

Pour mettre en évidence les corrélations entre les atomes du pic 1 et ceux du pic 2 nous avons dû mettre en place une procédure de recentrage capable de corriger les effets des fluctuations de la vitesse initiale du condensat. En effet ce bruit produit des structures qui noient le signal de corrélation propre à la création de paires. Les corrélations obtenues après recentrage indiquent que le processus est multimode mais que l'on parvient tout de même à produire jusqu'à une centaine d'atomes par mode ce qui rend notre source nettement plus brillante que celle basée sur la collision de deux condensats en espace libre (typiquement 0.01 atome/mode). À partir des corrélations



**Figure 3.27** – Variance en fonction du rayon des cylindres de comptage, les barres d’erreurs indiquent l’écart-type des mesure. Pour des rayons très faibles, il y a très peu d’atomes dans les cylindres ce qui augmente les incertitudes. La variance commence par diminuer et atteint un minimum  $V = 0.915 \pm 0.045$  vers  $R_{\perp} \approx 2.5 \times 10^{-2} k_r$  avant de croître quasi-linéairement et repasser au dessus du bruit de grenaille.

nous n’avons pas pu observer un signal fiable de violation de l’inégalité de Cauchy-Schwarz ce qui nous a poussé à étudier la variance de la différence du nombre d’atomes entre les deux pics.

Lorsque l’on compte les atomes dans des zones proches des pics 1 et 2 on observe une réduction de la variance de la différence en-dessous du bruit de grenaille signe que le comportement de notre source n’est pas explicable classiquement. Cependant, le comportement de la variance reste intrigant : le minimum de variance est décalé par rapport au maximum en densité et, dans un plan transverse, le rayon de la zone de comptage est presque un ordre de grandeur plus faible que la fonction de corrélation.

Maintenant que les conditions d’accord de phase sont comprises et que l’aspect non-classique de la source est confirmé (avec tout de même quelques réserves étant donné les aspects du comportement de la variance encore inexplicables), nous allons nous intéresser à la dynamique du processus. Les fonctions de corrélations ont mis en évidence le caractère multimode de notre

source qu'il va falloir prendre en compte pour bien comprendre l'évolution temporelle de la création de paires.

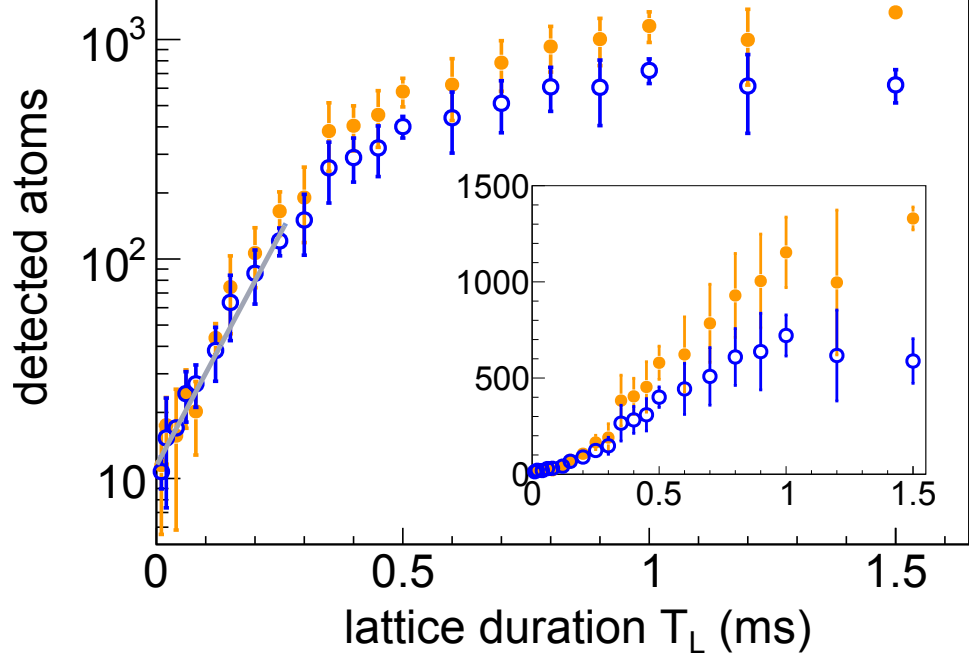
### 3.4 Dynamique du processus

Afin de terminer notre étude du mélange à quatre ondes dans un réseau optique, on s'intéresse maintenant à l'évolution temporelle du processus de création de paires. En partant des observations expérimentales nous allons modéliser la dynamique du système en adaptant un modèle développé à Vienne dans le groupe de Jörg Schmiedmayer [Büc+12].

#### 3.4.1 Saturation du processus

Pour étudier la dynamique de la création de paires dans le réseau, nous allumons le réseau pendant une durée variable puis on détecte la densité après temps de vol. On peut ainsi par exemple mesurer la population dans les pics 1 et 2 en fonction de la durée d'application du réseau. La figure 3.28 montre ainsi la croissance de la population dans les pics 1 et 2. Initialement, le nombre d'atomes croît exponentiellement sur une décade, mais cette croissance finit par saturer. Tout d'abord, on peut remarquer qu'à la saturation on détecte environ 2000 atomes diffusés dans les pics 1 et 2 et qu'il y a à peu près autant d'atomes diffusés en dehors des pics (dans les modes transverses et les pics de diffractions de Bragg), cela représente environ 40000 atomes ce qui correspond à entre 20 % et 40 % de la population initiale du condensat. Dans ces conditions, l'approximation de non déplétion de la pompe n'est évidemment plus valable et il n'est pas étonnant d'observer une déviation à la croissance exponentielle. Si on modélise la création de paires comme un processus à deux modes uniquement, on s'attend même à voir des oscillations de Rabi entre la population des modes 1 et 2 et la population du condensat [HM05]. Or, expérimentalement nous n'observons jamais d'oscillations, les populations croissent de manière monotone jusqu'à saturer. Plusieurs explications sont possibles :

- Grâce aux fonctions de corrélations nous avons vu que le processus est multimode, la dynamique est donc plus complexe et pourrait conduire à la saturation du processus. C'est d'ailleurs ce que les auteurs de [Büc+12] observent sur leur expérience.
- Au fur et à mesure de la création de paires, les pics 1 et 2 se déplacent par rapport au condensat et le recouvrement entre les quatre fonctions d'ondes diminue au cours du temps. Ainsi, si on considère que la dimension d'un mode est celle donnée par la fonction de corrélation locale ( $\sigma_{loc,z} \approx 4 \times 10^{-3} k_r$ ), l'échelle de temps typique de la



**Figure 3.28** – Évolution de la population du pic 1 (cercles pleins oranges) et du pic 2 (cercles vides bleus) en fonction de la durée du réseau  $T_L$ . Le condensat a une impulsion  $k_0 = 0.67 k_r$  par rapport au réseau de profondeur  $V_0 = 1.05 E_r$ . En encadré les mêmes données sont représentées en échelle linéaire.

décroissance du recouvrement est

$$\tau \approx \frac{\sigma_{mode}}{\hbar(k_2 - k_0)/m} \approx 300 \mu s \quad (3.28)$$

où  $\sigma_{mode} \approx 42 \mu m$  est la taille d'un mode dans l'espace réel. Cette durée correspond justement au moment où la croissance ralentit et commence à saturer.

- Enfin, on peut voir sur la figure 3.28 en échelle linéaire que lorsque les populations deviennent importantes, un déséquilibre apparaît entre le nombre d'atomes dans le pic 1 et celui dans le pic 2. Il y a moins d'atomes dans le deuxième pic probablement à cause de processus de mélanges à quatre ondes secondaires. En effet, le vecteur d'onde du premier pic est dans la zone dynamiquement stable puisque  $k_1$  est toujours inférieur à la valeur du seuil des instabilités  $k_s$ , alors que  $k_2$ , lui, est dans la zone instable. Ainsi, lorsque la population dans le deuxième pic devient importante, deux types de processus secondaires peuvent avoir lieu :  $k_0 + k_2 \rightarrow k_3 + k_4$  et  $2k_2 \rightarrow k_5 + k_6$  [Bon11]. La population du pic 2 est alors diminuée ce qui ralentit la dynamique

de création de paires principales.

Afin d'identifier la principale cause de cette saturation et de bien comprendre la dynamique du processus, on réalise une simulation de l'évolution temporelle des populations.

### 3.4.2 Simulation numérique de la dynamique

Pour modéliser la création de paires on s'inspire du modèle développé par [Büc+12] qui repose sur un formalisme en terme de matrice de densité.

#### Présentation du calcul

Pour simuler l'évolution temporelle on décompose la fonction d'onde sur différents modes longitudinaux et transverses. Transversalement, on décompose sur les solutions de l'oscillateur harmonique comme dans la partie 3.2 :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\perp n_x, n_y}(k_x, k_y, t) &= \mathcal{TF} [\Phi_{\perp n_x, n_y}(x, y, t)](k_x, k_y, t) \\ &= \frac{(-i)^{n_x+n_y}}{\sqrt{2^{n_x+n_y} n_x! n_y!}} \sqrt{\pi} a_{\perp} H_{n_x}(k_x a_{\perp}) H_{n_y}(k_y a_{\perp}) \\ &\quad \times e^{-a_{\perp}^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{2}} e^{-i(n_x+n_y+1)\omega_{\perp} t}\end{aligned}$$

Et dans l'axe du réseau on considère  $\mathcal{N}_z$  modes sous la forme d'états de Bloch dans la bande fondamentale et de quasi-impulsion  $q = 2\frac{n_z}{\mathcal{N}_z} - 1$ ,  $n_z \in [0, \mathcal{N}_z[$  étant l'indice permettant de repérer le mode. Ces derniers sont élargis par une gaussienne de largeur<sup>6</sup>  $\sqrt{2}\sigma_k$  afin de prendre en compte la taille finie des modes.

$$\tilde{\Phi}_{\parallel n_z}(k_z, t) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{4}}}{\sigma_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,0}(k_z) e^{-i\omega_{k_z} t} e^{-\frac{(k_z - q - 2mk_z)^2}{4\sigma_k^2}} \quad (3.29)$$

où  $a_{m,0}(k_z)$  est le coefficient d'indice  $m$  de la décomposition en ondes planes de l'onde de Bloch dans la bande fondamentale et de quasi-impulsion  $k_z$ . La fonction d'onde s'écrit donc :

$$\hat{\Psi} = \sum_{n_x, n_y, n_z} \tilde{\Phi}_{\perp n_x, n_y}(k_x, k_y, t) \tilde{\Phi}_{\parallel n_z}(k_z, t) \hat{a}_{n_x, n_y, n_z}^{\dagger} \quad (3.30)$$

Avec  $\hat{a}_{n_x, n_y, n_z}^{\dagger}$  l'opérateur de création dans le mode d'indices  $(n_x, n_y, n_z)$ . Pour simplifier les notations, on utilisera un seul indice  $i \equiv (n_x, n_y, n_z)$  pour repérer chaque mode, on notera ainsi :

$$\hat{\Psi} = \sum_i \tilde{\Phi}_i(k_x, k_y, k_z, t) \hat{a}_i^{\dagger} \quad (3.31)$$

6. on choisit une largeur  $\sqrt{2}\sigma_k$  afin que le module carré de la fonction onde soit élargi de  $\sigma_k$

où  $i$  varie entre 0 et  $\mathcal{N}_x\mathcal{N}_y\mathcal{N}_z - 1$ . Initialement, tous les atomes sont dans un unique mode repéré par l'indice  $i_0 \equiv (0, 0, n_{z0})$  avec  $n_{z0}$  tel que  $2\frac{n_{z0}}{\mathcal{N}_z} - 1 = k_0$ ,  $k_0$  étant la quasi-impulsion du condensat dans le référentiel du réseau.

On suppose que la dynamique du système est régie par le hamiltonien de mélange à quatre ondes suivant :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq i_0, j \neq i_0} \left( \kappa_{ij} (\hat{a}_{i_0})^2 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + h.c. \right) \quad (3.32)$$

Dans ce hamiltonien on retrouve la destruction de deux atomes du condensat dans le mode  $i_0$  et la création d'une paire d'atomes dans les modes  $i$  et  $j$  (et le processus inverse). On néglige ainsi les mélanges à quatre ondes secondaires de type  $(i, j) \rightarrow (i', j')$  où les couples  $(i, j)$  et  $(i', j')$  sont différents du couple  $(i_0, i_0)$  puisque expérimentalement ces processus sont minoritaires pendant une grande partie de la dynamique. Pour simplifier les calculs on ne prend pas en compte les processus du type  $(i_0, i_0) \rightarrow (i_0, j)$  où deux atomes du condensat créent un atome dans le condensat et un atome dans un autre mode. En effet, ces processus ne sont pas résonnants sauf si  $j \approx i_0$ , dans ce cas, cela revient à peupler les quelques modes proches du condensat ce qui ne correspond pas au phénomène qui nous intéresse ici. Le coefficient de couplage est proportionnel à l'intégrale de recouvrement entre les fonctions d'ondes des modes  $i_0, i_0, i$  et  $j$  :

$$\kappa_{ij}(t) = g \int \int \int (\Phi_{i_0}(x, y, z, t))^2 \Phi_i^*(x, y, z, t) \Phi_j^*(x, y, z, t) dx dy dz \quad (3.33)$$

Avec  $\Phi_i(x, y, z) = \mathcal{T}\mathcal{F}^{-1} \left[ \tilde{\Phi}_i \right] (x, y, z)$  les fonctions d'ondes dans l'espace réel. On peut séparer les trois variables d'espace dans l'intégrale de recouvrement ce qui nous donne trois contributions au coefficient de couplage entre les modes  $i \equiv (n_{xi}, n_{yi}, n_{zi})$  et  $j \equiv (n_{xj}, n_{yj}, n_{zj})$  :

$$\kappa_{ij}(t) = g \times \mathcal{J}_{n_{xj}}^{n_{xi}} \times \mathcal{J}_{n_{yj}}^{n_{yi}} \times \zeta_{n_{zj}}^{n_{zi}}(t) \quad (3.34)$$

avec  $\mathcal{J}_{n_j}^{n_i}$  l'intégrale de recouvrement des modes transverses selon  $x$  ou  $y$  déjà calculée dans la partie 3.2 sur les effets transverses (equation 3.24). On rappelle ici son expression :

$$\mathcal{J}_{n_j}^{n_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_\perp}} \frac{1}{2^{n_i} 2^{n_j}} \frac{(n_i + n_j)!}{\left(\frac{n_i + n_j}{2}\right)!} \frac{1}{\sqrt{n_i! n_j!}} \quad (3.35)$$

avec  $(n_i, n_j)$  égal à  $(n_{xi}, n_{xj})$  ou  $(n_{yi}, n_{yj})$ . Le dernier terme  $\zeta_{n_{zj}}^{n_{zi}}$  est l'intégrale de recouvrement longitudinale :

$$\zeta_{n_{zj}}^{n_{zi}}(t) = \int \Phi_{\parallel i_0}^2(z, t) \Phi_{\parallel n_{zi}}^*(z, t) \Phi_{\parallel n_{zj}}^*(z, t) dz \quad (3.36)$$

Pour la calculer, on exprime d'abord les fonctions d'ondes dans l'espace réel :

$$\Phi_{n_z}(z, t) = \mathcal{TF}^{-1} \left[ \tilde{\Phi}_{\parallel n_z} \right] (z, t) \quad (3.37)$$

$$\propto \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int a_{m,0}(k_z) e^{-i\omega_{k_z} t} e^{-\frac{(k_z - q - 2mk_r)^2}{4\sigma_k^2}} e^{ik_z z} dk_z \quad (3.38)$$

Avec  $q = \frac{2n_z}{N_z} - 1$  la quasi-impulsion associée au mode  $n_z$ , et  $\hbar\omega_{k_z}$  l'énergie de la bande fondamentale associée à la quasi-impulsion  $k_z$ . Pour simplifier le calcul de la transformée de Fourier inverse ci-dessus, on fait quelques approximations. À cause de la gaussienne, l'intégrande ne prend des valeurs non négligeables que dans un intervalle de quelques  $\sigma_k$  autour de  $k_z = q + 2mk_r$ . Or, typiquement la taille d'un mode  $\sigma_k$  est très petite devant  $2k_r$ , par exemple si on prend la taille de la fonction de corrélation locale alors  $\sigma_k \approx 4 \times 10^{-3} k_r \ll 2k_r$ . Ainsi, on peut considérer que les coefficients de la décomposition en onde plane ne varient quasiment pas sur la largeur du mode  $a_{0,m}(k_z) \approx a_{0,m}(q + 2mk_r) = a_{0,m}(q)$ . De même, on peut développer la pulsation au premier ordre en  $k_z$  :

$$\begin{aligned} \omega_{k_z} &\approx \omega_{q+2mk_r} + (k_z - q - 2mk_r)v_{q+2mk_r} \\ &\approx \omega_q + (k_z - q - 2mk_r)v_q \end{aligned}$$

où  $v_q = \left[ \frac{d\omega_{k_z}}{dk_z} \right]_{k_z=q}$  est la vitesse de groupe pour un paquet d'onde de quasi-impulsion  $q$ . Cette approximation revient à négliger la dispersion du paquet d'onde. Suite à ces deux approximations la transformée de Fourier inverse est beaucoup plus simple à calculer :

$$\begin{aligned} \Phi_{n_z}(z, t) &\propto \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,0}(q) e^{-i(\omega_q - v_q(q+2mk_r))t} \int e^{-\frac{(k_z - q - 2mk_r)^2}{4\sigma_k^2}} e^{ik_z(z - v_q t)} dk \\ &\propto \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,0}(q) e^{-i(\omega_q t - (q+2mk_r)z)} e^{\sigma_k^2(z - v_q t)^2} \end{aligned}$$

Enfin on normalise la fonction d'onde et on obtient :

$$\Phi_{n_z}(z, t) = \sqrt{\sigma_k} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \sum_m a_m(q) e^{-i(\omega_q t - (q+2mk_r)z)} e^{-\sigma_k^2(z - v_q t)^2} \quad (3.39)$$

On peut maintenant déterminer l'intégrale de recouvrement  $\zeta_{n_z j}^{n_z i}$  :

$$\begin{aligned} \zeta_{n_z j}^{n_z i}(t) &= \sigma_k^2 \left( \frac{2}{\pi} \right) \sum_{m_0, m'_0, m_i, m_j} C_{m_0, m'_0}^{m_i, m_j} e^{i\Delta\omega_{z, ij} t} \\ &\times \int e^{i(\Delta q_{ij} + 2k_r \Delta m_{ij})z} e^{-\sigma_k^2(2(z - v_{q_0} t)^2 + (z - v_{q_i} t)^2 + (z - v_{q_j} t)^2)} dz \end{aligned}$$



Avec  $C_{m_0, m'_0}^{m_i, m_j} = a_{0, m_0}(q_0) a_{0, m'_0}(q_0) a_{0, m_i}^*(q_i) a_{0, m_j}^*(q_j)$   
et où

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{z, ij} &= 2\omega_{q_0} - \omega_{q_i} - \omega_{q_j} \\ \Delta q_{ij} &= 2q_0 - q_i - q_j \\ \Delta m_{ij} &= m_0 + m'_0 - m_i - m_j\end{aligned}$$

représentent les conditions d'accord de phase dans l'axe du réseau. Après quelques manipulations, l'intégrale revient à calculer la transformée de Fourier d'une gaussienne, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\zeta_{n_{zj}}^{n_{zi}} &= \sigma_k \sqrt{\pi} \sum C_{m_0, m'_0}^{m_i, m_j} e^{i(\Delta q_{ij} + 2k_r \Delta m_{ij})(2v_{q_0} + v_{q_i} + v_{q_j})t/4} \\ &\quad \times e^{i\Delta\omega_{z, ij}t} \times e^{-(\Delta q_{ij} + 2k_r \Delta m_{ij})^2 / (16\sigma_k^2)} \times e^{-\sigma_k^2(v_{q_0}^2 + \frac{3}{4}(v_{q_i}^2 + v_{q_j}^2))t^2}\end{aligned}$$

Les trois termes de la deuxième ligne représentent chacun un effet important :

- Le premier terme est celui de la conservation de l'énergie qui, pour des temps longs devant  $1/\Delta\omega_{z, ij}$ , va se moyennner à zero (si  $\Delta\omega_{z, ij} \neq 0$ ). Ainsi, les modes pour lesquels l'énergie est quasiment conservée vont survivre et croître plus longtemps (voir même indéfiniment pour  $\Delta\omega_{z, ij} = 0$ ).
- Le deuxième terme représente la conservation de l'impulsion, la largeur initiale des modes permet une certaine latitude sur cette dernière. Seuls les modes suffisamment proches de la résonance vont pouvoir être amplifier. On peut remarquer que la largeur de la gaussienne est de  $2\sqrt{2}\sigma_k$  ce qui représente presque trois fois la largeur d'un seul mode, si on suppose que les modes sont espacés<sup>7</sup> de  $\sigma_k$ , on voit que le coefficient de couplage va coupler plus de trois modes entre eux.
- Enfin, le troisième et dernier terme représente la perte de recouvrement à cause du mouvement des atomes les uns par rapport aux autres. Le recouvrement diminue de  $\approx 63\%$  pour  $\sigma_k^2(v_{q_0}^2 + \frac{3}{4}(v_{q_i}^2 + v_{q_j}^2))t^2 \approx 1$  ce qui dans les conditions typiques de l'expérience ( $V_0 \approx 1$ ,  $q_0 \approx 0.65$ ) et pour les modes résonants correspond à une durée d'environ  $400 \mu s$ .

Étant donné les profondeurs typiques du réseau dans nos expériences ( $V_0 < 5E_r$ ), seuls les coefficients de la décomposition en onde plane d'indice  $-1$ ,  $0$  ou  $1$  seront non négligeables ce qui limite la somme à  $3^4 = 81$  termes.

Le calcul de l'intégrale de recouvrement nous a ainsi permis de nous faire une meilleure idée du comportement de notre source avant même d'en avoir réellement étudié la dynamique. On retrouve ainsi naturellement les conditions d'accord de phase dans le coefficient de couplage et on voit qu'à

7. Dans ce modèle cela revient à choisir un nombre de pas d'échantillonnage  $N_z$  dans l'espace des impulsion tel que  $\frac{2}{N_z} \approx \sigma_k$ .

cause de la perte de recouvrement l'efficacité du processus diminue fortement au-delà de quelques centaines de microsecondes. Il est ainsi probable que la saturation des populations vienne de cette perte de recouvrement, cependant afin d'être sûr qu'il s'agisse du phénomène prédominant, il faut calculer l'évolution du système qui est régie par le hamiltonien  $\mathcal{H}$  de l'équation 3.32.

Une résolution directe de l'équation de Schrödinger se révèle impossible à cause de la croissance exponentielle de la taille de l'espace de Hilbert pour les modes résonnants [Büc+12], on choisit donc une approche en terme de matrice densité réduite à une particule. Cette matrice correspond à la matrice de densité du système dont on prend la trace sur toutes les particules sauf une [Shc10]. Cela permet de décrire correctement les observables à une particule et de garantir la conservation du nombre de particules [SC85] autorisant ainsi l'étude correcte de la déplétion du mode de pompe.

On cherche donc à calculer l'évolution des termes de la matrice de densité réduite  $\rho$  :

$$\rho_{ij} = \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle \quad (3.40)$$

dont les termes diagonaux sont les populations dans les différents modes et les autres termes sont les cohérences entre modes.

L'évolution de la matrice densité est régie par l'équation de Liouville-Von Neumann qui découle directement de l'équation de Schrödinger :

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, \mathcal{H}] \quad (3.41)$$

Pour simplifier les calculs on sépare le mode de pompe des autres modes. On restreint donc la matrice densité à  $\rho = (\rho)_{i \neq i_0, j \neq i_0}$  et on note  $N_0 = \langle \hat{a}_{i_0}^\dagger \hat{a}_{i_0} \rangle$  la densité dans le mode de pompe. Cela revient à imposer que les cohérences  $\langle \hat{a}_{i_0}^\dagger \hat{a}_j \rangle$  soient nulles.

L'équation 3.41 conduit aux équations suivantes :

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\Delta \kappa - \kappa^* \Delta^*] \quad (3.42)$$

$$\dot{N}_0 = -Tr(\dot{\rho}) \quad (3.43)$$

La matrice  $\kappa$  est la matrice dont les termes sont les coefficients de couplage  $\kappa_{ij}$ . Et la matrice  $\Delta$  est la matrice de densité réduite à deux particules :

$$\Delta_{ij} = \langle (\hat{a}_{i_0})^2 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \rangle \quad (3.44)$$

Une troncature de la hiérarchie de matrices de densité à ce niveau par exemple en factorisant  $\Delta_{ij} \approx \sqrt{N_i N_j} N_{i_0}$  revient à l'approximation de champ moyen [Büc13; VA01]. Mais comme initialement  $N_i = 0$  pour tout  $i \neq i_0$ ,  $\dot{\rho}_{ii} = 0$ . Il est donc nécessaire de déterminer l'équation d'évolution de  $\Delta$ .

Immanquablement, l'expression de  $\dot{\Delta}$  va faire apparaître les termes suivant dans la hiérarchie de matrices de densité, c'est-à-dire la matrice de densité réduite à trois particules. On choisit de la factoriser en produits de matrices de densités d'ordres inférieurs :

$$\langle \hat{a}_{i_0}^\dagger \hat{a}_{i_0} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_m \rangle \approx N_0 \rho_{ij} \rho_{lm} \quad (3.45)$$

Comme le remarque Robert Bücker dans sa thèse [Büc13] cette factorisation n'est pas évidente et il a été suggéré que toutes les combinaisons possibles des opérateurs de champ devraient être moyennées. Cependant dans notre cas, comme dans le cas de l'expérience de Vienne, cette factorisation donne des résultats satisfaisants.

On obtient ainsi une version approchée de l'équation d'évolution de  $\Delta$ <sup>8</sup> :

$$\dot{\Delta} = \frac{i}{\hbar} [(2N_0 + 1)\rho\kappa^*\rho^T - 2N_0(N_0 - 1)(\kappa^*\rho^T + \rho\kappa^* + \kappa^*)] \quad (3.46)$$

où  $\rho^T$  désigne la transposée de la matrice  $\rho$ .

On remarque qu'avec cette expression la croissance des modes initialement vides est possible grâce au dernier terme indépendant de  $\rho$ . Ce modèle devrait donc être suffisant pour capturer l'essentiel de la dynamique de la création de paires.

### Implémentation numérique du calcul

Pour propager les équations d'évolution de  $\rho$  et  $\Delta$  on utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 qui est très robuste et fiable pour résoudre des systèmes d'équations différentielles. Les équations d'évolutions font intervenir plusieurs termes dans lesquels apparaissent des produits de matrices de dimensions  $\mathcal{N}_m \times \mathcal{N}_m$  où  $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_x \mathcal{N}_y \mathcal{N}_z$  est le nombre total de modes, or, ce nombre total de modes devient très vite important. On a vu dans la partie sur les effets transverses 3.2 qu'environ  $10 \times 10$  modes du piège sont accessibles et qu'au moins deux dans chaque direction risquent d'avoir une contribution importante, on prendra donc typiquement  $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y = 2$ . Longitudinalement, si on souhaite échantillonner correctement l'ensemble des quasi-impulsions, il faut choisir un espacement entre les modes proche de la largeur  $\sigma_k$  des modes. Comme la largeur des modes est définie par la largeur de la fonction de corrélation locale (voir partie 1.2.1 sur les propriétés statistiques de la source), on prend  $\sigma_k = \sigma_{cor,loc} \approx 4 \times 10^{-3} k_r$ . Par conséquent, on choisit  $\mathcal{N}_z = 256$  ce qui fait un espacement entre les modes de  $dq = 2/256 = 7.8 \times 10^{-3} k_r \approx 2\sigma_k$ . Au total, il y a donc  $\mathcal{N}_m = 1024$  modes ce qui fait que les produits de matrices requièrent énormément d'opérations

8. Il semblerait que dans [Büc+12] et [Büc13] un facteur 2 soit manquant devant le terme en  $N_0(N_0 - 1)$ .

(typiquement  $\mathcal{N}_m^3 \approx 10^9$  opérations). Comme il faut effectuer une dizaine de ces produits à chaque pas temporel et que l'on souhaite faire plusieurs centaines de pas, le nombre d'opérations devient colossal ! Une première version de l'algorithme codé en C++ mettait ainsi presque une semaine à achever le calcul et n'était donc pas viable.

Afin d'améliorer drastiquement la vitesse d'exécution du programme il faut tirer partie de la structure des équations : le calcul de produits de matrices est un problème dit "trivialement parallélisable" c'est-à-dire que lors du calcul du produit de deux matrices  $C = AB$ , on peut calculer chacun des termes  $C_{ij}$  indépendamment des autres et par conséquent si l'on dispose de plusieurs processeurs, chacun peut calculer une partie des coefficients ce qui réduit le temps total d'exécution. Sur un ordinateur classique de bureau il y a entre 4 et 16 cœurs ce qui reste insuffisant<sup>9</sup> pour atteindre des temps raisonnables de calcul, cependant, la plupart de nos ordinateurs personnels possèdent un outil parfaitement adapté au traitement de tâches en parallèle : les processeurs graphiques. En effet, une carte graphique est conçue pour réaliser énormément de petites opérations en parallèle pour pouvoir traiter les images. De plus, cours des dernières années de nombreux développements ont été réalisés afin de permettre l'utilisation des cartes graphiques pour le calcul scientifique. De nos jours, de nombreux super-calculateurs utilisent d'ailleurs des processeurs graphiques [FN10].

C'est donc en adaptant notre algorithme pour qu'il utilise les processeurs graphiques que nous avons pu réaliser le calcul. Nous avons en particulier utilisé la librairie cuBLAS<sup>10</sup> [Nvi13] qui permet d'utiliser un ensemble de fonctions d'algèbre linéaire (produit de matrice, addition de vecteurs, etc...) qui sont directement lancées sur la carte graphique. Le schéma de la figure 3.29 illustre la structure relativement simple de l'algorithme dont une grande partie est exécutée par les processeurs graphiques.

Grâce à cette nouvelle implémentation le calcul prend moins d'une quarantaine de minutes à s'exécuter ce qui permet de tester aisément différentes valeurs des paramètres (densité, profondeur du réseau, impulsion initiale  $k_0$ ).

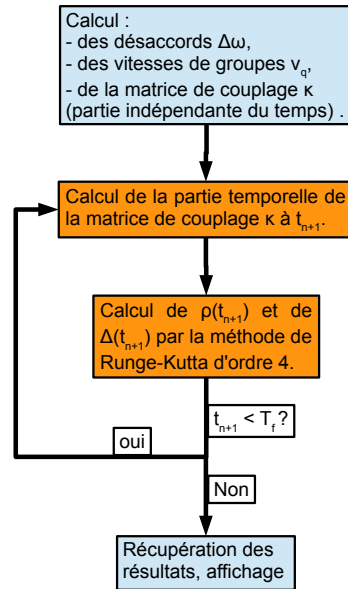
## Résultats et Comparaison avec l'expérience

Nous allons maintenant présenter une partie des résultats obtenus à l'aide de notre simulation. Expérimentalement on a accès à la population dans l'espace des vecteurs d'ondes. Le calcul, lui, nous fournit les populations dans

---

9. En fait la première version du programme était déjà parallélisée sur les processeurs et c'est en tournant sur 8 cœurs qu'elle mettait une semaine à s'exécuter

10. Pour utiliser cette librairie, il est nécessaire de posséder une carte graphique NVIDIA<sup>®</sup> récente. Les constructeurs concurrents possèdent en général des librairies équivalentes

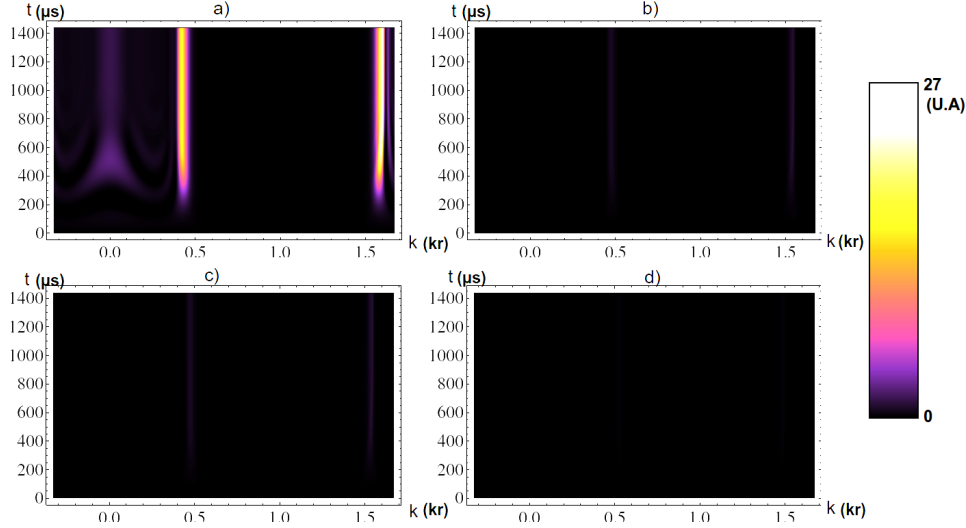


**Figure 3.29** – Schéma de principe de l'algorithme de calcul de l'évolution temporelle. Le cœur du calcul est réalisé sur les processeurs graphiques (blocs oranges). Les initialisations et la récupération des résultats (blocs en bleus) sont exécutées par le processeur de l'ordinateur. Grâce à la structure matricielle du problème, le calcul est très facilement parallélisable ce qui permet de profiter pleinement de la puissance des cartes graphiques.

les modes propres du système "réseau + piège transverse" il faut donc projeter ces modes propres sur la base des ondes planes pour les comparer à l'expérience. Il faut également prendre en compte l'expansion due aux interactions juste après la coupure du piège. Longitudinalement, cette expansion est négligeable mais ce n'est pas le cas transversalement où elle élargit les distributions (voir A.2.4). La figure 3.30 illustre les résultats obtenus en fin de calcul : on retrouve les populations en fonction de l'impulsion et de la durée d'application du réseau pour les quatre premiers modes transverses :

- (0,0) : mode fondamental,
- (0,1) : mode fondamental selon X et premier mode excité selon Y,
- (1,0) : premier mode excité selon X et mode fondamental selon Y,
- (1,1) : premier mode excité selon X et Y.

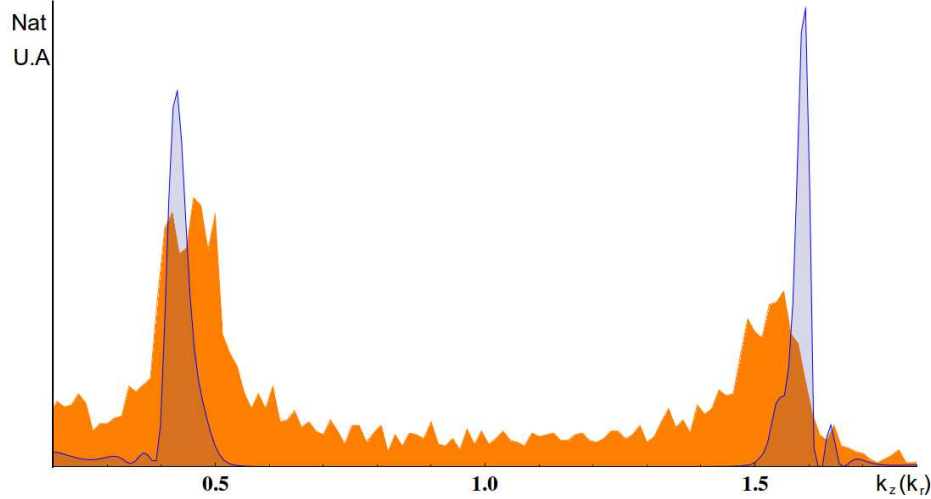
Dans le mode fondamental transverse, on distingue clairement l'apparition de deux faisceaux vers  $k_1 \approx 0.4 k_r$  et  $k_2 \approx 1.6 k_r$ . On remarque également que les modes transverses (0,1) et (1,0) sont légèrement peuplés alors que les populations des modes (1,1) et au-delà sont négligeables ce qui justifie a posteriori de limiter le calcul à ces seuls quatre modes transverses. En projetant les résultats sur la base des ondes planes, on peut comparer le profil de densité simulé à celui expérimental (figure 3.31). On constate ainsi que l'on retrouve bien des valeurs d'impulsion  $k_1$  et  $k_2$  comparables mais expérimentalement les pics sont plus larges à cause de l'angle de  $7^\circ$  entre le piège dipolaire et le réseau : les modes transverses excités sont d'avantage favorisés ce qui augmente la population pour des vecteurs légèrement supérieurs à  $k_1$  et des vecteurs d'onde légèrement inférieurs à  $k_2$  comme on l'avait



**Figure 3.30** – Résultats obtenus par la simulation numérique pour une impulsion initiale  $k_0 = 0.672 k_r$ , une profondeur  $V = 1.05 E_r$  et une densité d'environ  $n_0 \approx 8 \times 10^{18}$  at/m<sup>3</sup>. On a représenté ici les populations en fonction horizontalement de l'impulsion dans le référentiel du laboratoire (condensat en  $k = 0$ ) et verticalement de la durée d'application du réseau. (a) mode transverse (0,0), (b) mode transverse (1,0), (c) (0,1) et (d) (1,1)

déjà remarqué en analysant les effets transverses dans la section 3.2. De plus, expérimentalement le pic  $k_2$  est moins peuplé que le pic  $k_1$  à cause des processus secondaires,  $k_2$  étant dans la zone instable. Comme ces processus de mélanges à quatre ondes du type  $k_0 + k_2 \rightarrow k_3 + k_4$  ou  $2k_2 \rightarrow k_5 + k_6$  ne sont pas considérés dans notre simulation, on n'observe pas ce déséquilibre de population entre  $k_1$  et  $k_2$ . Ces processus secondaires contribuent d'ailleurs probablement aux bruits de fond entre les deux pics.

En plus de reproduire qualitativement les profil de densité, la simulation met aussi en évidence une saturation du processus similaire à celle observée expérimentalement. Au bout d'environ 500  $\mu$ s d'application du réseau, la croissance des modes corrélés ralentie puis la population sature comme l'illustre la figure 3.32. Là encore, on constate que les pertes dans le mode  $k_2$  réduisent la population créant un déséquilibre. Sur ces courbes on constate qu'en jouant sur la durée d'application du réseau il est possible d'atteindre différents régimes : un régime de "paires isolées" où la probabilité d'émettre une paire est faible à temps court, similaire au régime utilisé avec les photons pour l'observation de l'effet Hong, Ou et Mandel ou la violation des inégalités de Bell. Ou un régime de "forte intensité" a priori plus approprié pour l'interférométrie.

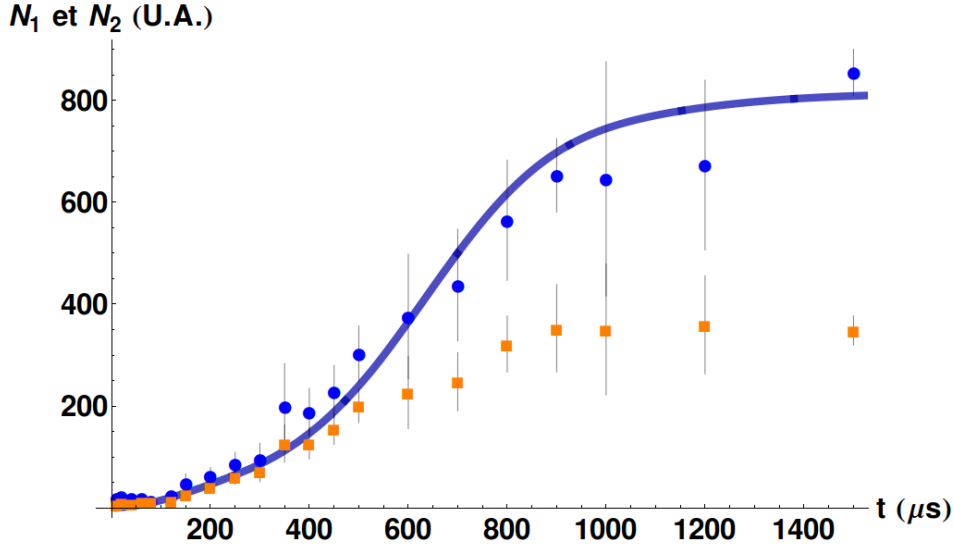


**Figure 3.31** – Comparaison entre le profil expérimental de la densité longitudinale (moyenne de 13 réalisations) et la simulation numérique pour une durée d’application du réseau de  $T_{res} = 600 \mu s$  et une profondeur de  $V = 1.05 E_r$ . Dans la simulation numérique il y a exactement le même nombre d’atomes dans les pics 1 et 2, la différence en amplitude est issue de la différence en largeur entre les pics.

Grâce au calcul, nous avons pu constater que la saturation ne semble pas issue des processus secondaires affectant le pic 2 puisqu’ils ne sont pas simulés et que la saturation est tout de même présente. Numériquement, on peut facilement supprimer la perte de recouvrement due aux déplacements des modes 1 et 2 par rapport au condensat. On remarque alors que le processus ne sature plus et les pics 1 et 2 se remplissent jusqu’à la déplétion totale de la pompe. La cause principale de la saturation est donc bien due à la perte de recouvrement en prenant comme taille des modes la taille inférée suite à la mesure de la largeur de la corrélation locale (due à l’effet Hanbury Brown et Twiss). Le caractère multimode du processus rend la dynamique non triviale mais n’est pas responsable de la saturation. Dans le groupe de Vienne la saturation observée sur leur source de paires d’atomes [Büc+12] a une origine différente, elle est essentiellement due à la déplétion et à l’évolution temporelle de la source et n’est pas causée par une perte de recouvrement.

### 3.4.3 Conclusion sur l’évolution temporelle

Suite à l’observation de l’évolution temporelle de la population des faisceaux jumeaux nous avons décidé de simuler la dynamique du système afin de mieux comprendre les résultats obtenus. En particulier, la saturation du



**Figure 3.32** – Évolution temporelle des populations dans le pic 1 (cercles bleus) et le pic 2 (carrés oranges) obtenues expérimentalement pour différentes durées  $t$  du réseau. L'impulsion initiale du condensat est  $k_0 = -0.67 k_r$  et la profondeur du réseau est  $V_0 = 1.05 E_r$ . La simulation numérique (courbe continue en bleue) permet de bien modéliser le comportement observé pour le pic 1.

processus. En utilisant le formalisme des matrices de densités réduite déjà utilisées à Vienne, et en tirant partie du parallélisme sous-jacent du problème nous avons développé un programme de simulation numérique capable de modéliser notre système. Les résultats obtenus sont cohérents avec les données réelles et ont permis d'identifier la perte de recouvrement comme étant la cause principale de la saturation.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu étudier en détail la création de paires d'atomes par mélange à quatre ondes dans un réseau. Nous avons ainsi constaté l'importance des interactions sur les conditions d'accord de phases.

En observant le comportement des atomes avec et sans piège dipolaire nous avons montré que pour obtenir des faisceaux intense il est nécessaire de confiner transversalement le nuage. Le confinement actuel ne supprime d'ailleurs pas complètement les degrés de liberté transverses mais réduit quand même énormément le nombre de modes accessibles. Malheureusement, en raison des accès optiques limités, le réseau et le piège ne sont pas ali-



gnés mais font un petit angle de  $7^\circ$  suffisant pour introduire une asymétrie transversalement. En modifiant légèrement notre montage, il serait possible d'aligner le piège et le réseau, ce changement est à l'étude et sera peut-être appliqué au court de l'année qui vient dans l'espoir d'obtenir une source plus proche des modèles théoriques.

Nous avons également étudié les propriétés statistiques des paires d'atomes en observant tout d'abord des corrélations entre les modes des pics 1 et 2 et ensuite une réduction du bruit sur la différence du nombre d'atomes en dessous du bruit de grenaille dans une zone dont la largeur transverse, bien inférieure à la largeur des fonctions de corrélations, reste in-comprise. Pour obtenir ces résultats nous avons dû faire une analyse poussée des données en particulier en corrigeant les fluctuations de position et de vitesse initiale du condensat. Dernièrement, l'ajout d'un nouveau faisceau de piégeage horizontal, perpendiculaire au piège vertical habituel a permis de réduire considérablement ces fluctuations permettant de s'affranchir des procédures de recentrage et les résultats préliminaires obtenus dans cette configuration n'ont pas montré de comportements significativement différents des résultats présentés ici. À cause de l'angle de  $7^\circ$ , le comportement transverse est très complexe et il s'agit peut être d'une explication aux largeurs observées de la réduction de bruit. Là encore, la modification du réseau pour l'aligner sur le piège permettrait de le vérifier.

Enfin, nous avons simulé la dynamique de notre système (encore une fois en "oubliant" l'angle entre le réseau et le piège) et nous avons obtenus des résultats compatibles avec l'expérience et permettant d'expliquer pourquoi le processus sature. La durée d'application du réseau se révèle un paramètre de réglage précieux de cette source puisqu'il permet de contrôler la population dans les faisceaux jumeaux.

Maintenant que nous disposons d'une source de paires d'atomes dont nous comprenons la plupart des aspects, nous envisageons de manipuler ces atomes jumeaux avec en particulier comme perspective l'observation d'un effet Hong, Ou et Mandel avec des atomes. Dans le chapitre suivant nous allons donc présenter ce qui est actuellement mis en place sur l'expérience pour utiliser cette source.

## Chapitre 4

# Manipulation des paires, vers un effet Hong, Ou et Mandel

Dans ce court chapitre nous allons exposer enfin la mise en place d'une séparatrice atomique qui, nous l'espérons, permettra de réaliser bientôt un effet Hong, Ou et Mandel avec des ondes de matière.

Comme expliqué en 3.4, il est possible de régler le nombre d'atomes par mode dans les faisceaux jumeaux, en particulier on peut se placer dans un régime de paires isolées où l'on ne crée au plus qu'une paire par mode. Ce régime est en théorie le plus adapté à la réalisation de tests fondamentaux tels que les inégalités de Bell ou l'effet Hong, Ou et Mandel. Cependant, ce régime n'est pas utilisable dans l'état actuel de l'expérience. En effet, afin d'obtenir des paires isolées, il faut qu'à chaque répétition de l'expérience la probabilité de créer une paire soit relativement faible afin d'obtenir le moins possible de réalisations avec plus d'une paire. Considérons par exemple une probabilité de création de paires de 10%, étant donné la détectivité elle aussi de l'ordre de 10%, cela fait une probabilité de détecter une paire par réalisation expérimentale de l'ordre de  $P = (0.1)^2 \times 0.1 = 1/1000$ . Or, un cycle expérimental dure un peu plus de trente secondes et il faudrait presque 8h30 pour obtenir en moyenne un seul événement utile ! Comme évidemment, il faut bien plus d'un seul événement pour obtenir une statistique convenable, ce type de configuration n'est donc pas viable.

Deux solutions s'offrent alors à nous, soit il faut améliorer drastiquement le taux de répétition de l'expérience et l'efficacité de détection, soit il faut se placer dans un autre régime plus favorable. Augmenter la détectivité semble possible [Hoe+13] mais on peut au mieux espérer un facteur deux. Le temps de préparation du condensat est quant à lui quasiment incompressible. Si l'on souhaite augmenter le taux de répétition il faut donc trouver une solution permettant d'extraire les paires du condensat sans détruire le nuage. Ainsi, avec un seul condensat il serait possible de répéter plusieurs fois de suite

l'expérience rapidement (la durée du réseau est inférieure à la milliseconde dans le régime de paires isolées). Malheureusement, malgré quelques bonnes idées, nous n'avons pour le moment trouvé aucune réalisation expérimentale concluante. Nous avons donc choisi de nous tourner vers un régime plus favorable, c'est-à-dire un régime de gain fort où le nombre de paires par réalisation est important. Bien que s'écartant des réalisations bien connues d'optique quantique, nous allons voir que ce régime permet tout de même la mise en évidence des effets quantiques. Je vais dans un premier temps exposer ce qui est attendu dans le cadre de l'expérience d'Hong Ou et Mandel avec de nombreuses particules, puis je décrirai la mise en place expérimentale de la séparatrice nécessaire à cette expérience. Nous espérons que ce nouveau dispositif nous permettra d'observer l'équivalent atomique de l'effet Hong, Ou et Mandel.

#### 4.0.1 L'effet d'une séparatrice sur des états quelconques

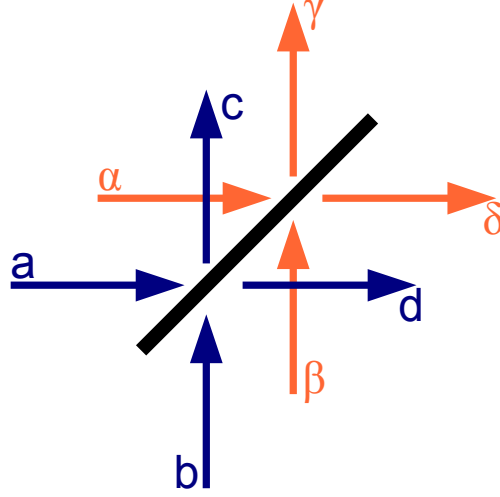
L'expérience d'Hong, Ou et Mandel [HOM87] est un moyen simple et très efficace pour mettre en évidence l'indiscernabilité entre particules d'une même paire. L'objectif premier de l'article d'Hong et al. est d'ailleurs la mesure de la longueur de cohérence à deux photons, c'est-à-dire la distance sur laquelle deux photons issus d'une même paire sont corrélés. Dans le cadre de notre expérience nous souhaitons utiliser ces interférences pour observer le caractère quantique de notre source d'atomes corrélés.

##### Modèle

À l'instar de l'expérience classique de Hong, Ou et Mandel décrite en 1.3.1 on considère une séparatrice sur laquelle les paires d'atomes (bosons) sont recombinaées. On va étudier le cas où les deux ports d'entrée et les deux ports de sortie sont chacun décomposés en deux modes distincts (voir figure 4.1). La séparatrice relie les modes d'entrée aux modes de sortie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{c} &= r\hat{a} + t\hat{b} & \hat{d} &= t\hat{a} - r\hat{b} \\ \hat{\gamma} &= r\hat{\alpha} + t\hat{\beta} & \hat{\delta} &= t\hat{\alpha} - r\hat{\beta} \end{aligned}$$

Avec  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$  les opérateurs d'annihilations dans les modes respectivement  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  et avec  $r$  et  $t$  les coefficients (réels) de réflexion et transmission en amplitude ( $r^2 + t^2 = 1$ ). La décomposition des ports d'entrée et de sortie permet de simuler des particules discernables ou indiscernables. En effet, les particules issues des modes  $a$  et  $b$  vont sortir dans les modes  $c$  et  $d$ , elles sont donc discernables des particules dans  $\alpha$  et  $\beta$  qui sortent dans les modes  $\gamma$  et  $\delta$ . En sortie de la séparatrice seuls les nombres totaux  $\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma$  et  $\hat{n}_d + \hat{n}_\delta$  sont accessibles. On note  $\hat{n}_c = \hat{c}^\dagger \hat{c}$  l'opérateur nombre dans le mode  $c$  (idem pour les autres modes).



**Figure 4.1** – schéma de principe de la séparatrice considérée pour les calculs. Les modes repérés par les lettres grecques sont orthogonaux aux modes repérés par les lettres romanes

### Distribution en sortie de séparatrice

La distribution de la population en sortie de la séparatrice est a priori l'observable la plus naturelle à considérer puisque sur notre expérience nous sommes capable de résoudre le nombre d'atomes. À cause du groupement bosonique on s'attend à obtenir des distributions différentes entre le cas discernable et le cas indiscernable [CST89].

Dans le cas d'états de Fock en entrée, on peut déterminer analytiquement les distributions en sortie des ports de la séparatrice. Par exemple l'état  $|\psi_{ind}\rangle = |N, 0, N, 0\rangle$  qui représente  $N$  particules dans le mode  $a$  et  $N$  particules dans le mode associé  $b$ , on peut déterminer l'expression de l'état en sortie lorsque  $r = t = 1/\sqrt{2}$  :

$$|\psi_{ind}\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger)^N}{N!} |vide\rangle \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{2^N N!} (\hat{c}^{\dagger 2} - \hat{d}^{\dagger 2})^N |vide\rangle \quad (4.2)$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir  $n$  particules d'un coté de la séparatrice est [CST89] :

$$P_{ind}(n = 2p) = \frac{1}{2^{2N}} \binom{2p}{p} \binom{2(N-p)}{N-p} \quad (4.3)$$

$$P_{ind}(n = 2p + 1) = 0 \quad (4.4)$$

Avec  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . On remarque que la probabilité est non nulle uniquement pour les nombres pairs, illustrant l'appariement des bosons après la séparatrice.

On peut également trouver la distribution dans le cas de  $N$  particules dans le mode  $a$  et  $N$  particules dans le mode  $\beta$  qui sont discernables de celles de l'autre mode :

$$P_{dis}(n) = \frac{1}{2^{2N}} \binom{2N}{n} \quad (4.5)$$

Ces deux distributions sont représentées en haut de la figure 4.2. Une très nette différence apparaît entre les deux cas, les interférences quantiques augmentent les probabilités des cas extrêmes et réduit la probabilité autour de la valeur moyenne. Pour  $N = 1$  on retrouve bien l'effet Hong, Ou et Mandel habituel :  $P_{ind}(0) = P_{ind}(2) = 0.5$ ,  $P_{ind}(1) = 0$  et  $P_{disc}(0) = P_{disc}(2) = 0.25$ ,  $P_{disc}(1) = 0.5$ .

Dans le cadre de notre expérience, ces deux distributions bien distinctes ne constituent pas pour autant une signature aussi claire que l'on pourrait le penser. En effet, la faible détectivité (typiquement entre 10 et 15%) réduit la dynamique et lisse la forme en "M" du cas indiscernable. On peut calculer ces probabilités en modélisant la détectivité  $\eta$  par une séparatrice de transmission en amplitude  $\sqrt{\eta}$ . On obtient alors :

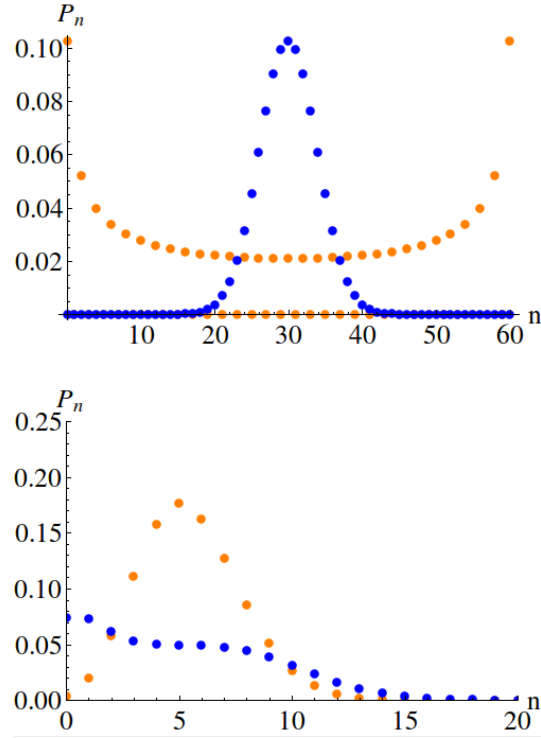
$$P_{ind,det}(k) = \sum_{n=0}^{2N} P_{ind}(n) \binom{n}{k} \eta^k (1-\eta)^{n-k} \quad (4.6)$$

$$P_{disc,det}(k) = \sum_{n=0}^{2N} P_{disc}(n) \binom{n}{k} \eta^k (1-\eta)^{n-k} \quad (4.7)$$

Ces distributions sont représentées en bas de la figure 4.2. Même si les formes des deux distributions restent différentes, elles prennent des valeurs non négligeables pour les mêmes nombres d'atomes (de 0 à 15 sur l'exemple de la figure 4.2), ainsi, si l'état d'entrée est une superposition de plusieurs états de Focks, la distribution détectée risque d'être très similaire dans les deux cas. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser à d'autres observables pour mettre en évidence le caractère indiscernable des atomes issus de notre source.

### Corrélations et variance normalisée

Comme nous venons de le voir, la distribution en nombre d'atomes risque de ne pas être suffisante pour obtenir une preuve non ambiguë du caractère quantique de la source. Dans l'article historique d'Hong, Ou et Mandel [HOM87] ce n'est d'ailleurs pas la distribution mais les corrélations entre



**Figure 4.2** – Distributions obtenues dans le cas discernable (en bleu) et indiscernable (en orange). En haut, distributions telles qu'on les mesureraient avec un détecteur parfait. En bas, distributions attendues avec une détectivité de 15 %. Il y a 30 atomes par mode ce qui correspond à une situation accessible expérimentalement avec notre source.

les deux voies de sortie qu'ils ont mesurées. On s'intéressera donc à ces corrélations entre les deux voies ainsi qu'aux corrélations dites locales au sein d'une même voie mais également à la variance de la différence du nombre de particules entre les deux voies, normalisée par le bruit de grenaille.

On définit les opérateurs  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  ainsi :

$$\hat{A} = (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma)(\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma) \quad (4.8)$$

$$\hat{B} = (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma)(\hat{n}_d + \hat{n}_\delta) \quad (4.9)$$

$$\hat{C} = (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma - \hat{n}_d - \hat{n}_\delta) \quad (4.10)$$

Les quantités expérimentalement mesurables et intéressantes sont la corrélation locale  $g_{loc}^{(2)}$ , l'intercorrélacion entre les ports de sortie  $g_{cr}^{(2)}$  et la variance

normalisée de la différence de population  $V$  :

$$g_{loc}^{(2)} = \frac{\langle \hat{A} \rangle}{\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle^2} \quad (4.11)$$

$$g_{cr}^{(2)} = \frac{\langle \hat{B} \rangle}{\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle \langle \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle} \quad (4.12)$$

$$V = \frac{\langle \hat{C}^2 \rangle - \langle \hat{C} \rangle^2}{\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma + \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle} \quad (4.13)$$

**État de la forme**  $|\Psi\rangle = |n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle$

Dans un premier temps on s'intéresse à un état de la forme  $|\Psi\rangle = |n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle$  :

**Corrélation locale** Pour calculer  $g_{loc}^{(2)}$  on calcule d'abord la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{A}$  :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle &= \langle \Psi | [r^2(\hat{n}_a + \hat{n}_\alpha) + t^2(\hat{n}_b + \hat{n}_\beta) + rt(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{\beta} + \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{\beta}^\dagger \hat{\alpha})]^2 | \Psi \rangle \\ &= [r^2(n_a + n_\alpha) + t^2(n_b + n_\beta)]^2 \\ &\quad + r^2 t^2 [n_a(n_b + 1) + n_b(n_a + 1) + n_\alpha(n_\beta + 1) + n_\beta(n_\alpha + 1)] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g_{loc}^{(2)} = 1 + \frac{r^2 t^2 [n_a(n_b + 1) + n_b(n_a + 1) + n_\alpha(n_\beta + 1) + n_\beta(n_\alpha + 1)]}{[r^2(n_a + n_\alpha) + t^2(n_b + n_\beta)]^2}$$

Afin de comprendre ce qui se cache derrière cette expression, voyons sur quelques exemples simples ce qu'elle signifie (on prendra  $r = t = 1/\sqrt{2}$ ) :

— deux faisceaux discernables avec le même nombre de particules  $|n, 0, 0, n\rangle$

$$g_{loc, Dis}^{(2)} = 1 + \frac{1}{2n}$$

— deux faisceaux indiscernables avec le même nombre de particules  $|n, 0, n, 0\rangle$

$$g_{loc, Ind}^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}$$

Les corrélations locales exhibent une différence entre les configurations discernable et indiscernable même dans les cas un peu plus généraux où  $r \neq t$  et avec des nombres de particules différents dans les deux bras. On a toujours  $g_{loc, Dis}^{(2)} < g_{loc, Ind}^{(2)}$ .

On s'intéresse maintenant à l'intercorrélacion entre les ports de sortie.

**Intercorrélations** Pour calculer l'intercorrélation  $g_{cr}^{(2)}$ , on exprime la valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{B}$  en fonction des nombres de particules avant la séparatrice (en posant  $n_{tot} = n_a + n_\alpha + n_b + n_\beta$ ) :

$$\langle \Psi | \hat{B} | \Psi \rangle = r^2 t^2 n_{tot} (n_{tot} - 1) + (r^2 - t^2)^2 (n_a + n_\alpha)(n_b + n_\beta) - 2r^2 t^2 (n_a n_b + n_\alpha n_\beta)$$

On en déduit en normalisant par  $\langle n_c n_\gamma \rangle \langle n_d n_\delta \rangle$  :

$$g_{cr}^{(2)} = 1 - \frac{r^2 t^2 (n_{tot} + 2(n_a n_b + n_\alpha n_\beta))}{r^2 t^2 n_{tot}^2 + (r^2 - t^2)^2 (n_a + n_\alpha)(n_b + n_\beta)}$$

Là encore, des exemples simples permettent d'appréhender le comportement de l'intercorrélation (là encore on prend  $r = t = 1/\sqrt{2}$ ) :

— deux faisceaux discernables avec le même nombre de particules  $|n, 0, 0, n\rangle$

$$g_{cr,Dis}^{(2)} = 1 - \frac{1}{2n}$$

— deux faisceaux indiscernables avec le même nombre de particules  $|n, 0, n, 0\rangle$

$$g_{cr,Ind}^{(2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Là aussi une différence notable apparaît entre le cas discernable et le cas indiscernable. On retrouve le résultat attendu  $g_{cr,Ind}^{(2)} < g_{cr,Dis}^{(2)}$ . On remarquera au passage que le cas  $n = 1$  est l'expérience d'Hong, Ou et Mandel classique pour laquelle on retrouve bien une annulation de l'intercorrélation lorsque les particules sont indiscernables.

**Variance de la différence** La variance de la différence du nombre de particules est une autre grandeur standard de ce type d'expériences. Pour l'exprimer on explicite d'abord  $\langle \hat{C} \rangle^2$  et  $\langle \hat{C}^2 \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle \hat{C} \rangle^2 &= \langle \Psi | (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma - \hat{n}_d - \hat{n}_\delta) | \Psi \rangle^2 \\ &= (r^2 - t^2)^2 (n_a + n_\alpha - n_b - n_\beta)^2 \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}^2 \rangle &= \langle \Psi | (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma - \hat{n}_d - \hat{n}_\delta)^2 | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{C} \rangle^2 + 4r^2 t^2 (n_a(n_b + 1) + n_b(n_a + 1) + n_\alpha(n_\beta + 1) + n_\beta(n_\alpha + 1)) \end{aligned}$$

Il en découle,

$$\begin{aligned} V &= \frac{4r^2 t^2 (n_a(n_b + 1) + n_b(n_a + 1) + n_\alpha(n_\beta + 1) + n_\beta(n_\alpha + 1))}{n_{tot}} \\ &= 4r^2 t^2 \left( 1 + 2 \frac{n_a n_b + n_\alpha n_\beta}{n_{tot}} \right) \end{aligned}$$

Et par exemple (toujours avec  $r = t = 1/\sqrt{2}$ ) :



— pour deux faisceaux discernables  $|n_a, 0, 0, n_b\rangle$

$$V_{Dis} = 1$$

— pour deux faisceaux indiscernables avec le même nombre de particules  $|n0, n, 0\rangle$

$$V_{Ind} = (1 + n)$$

Ainsi, on s'attend à observer un excès de bruit en présence de particules indiscernables. La variance augmentant linéairement avec le nombre de particules dans l'exemple précédent elle permet d'atteindre en théorie un très bon contraste entre le cas discernable et le cas indiscernable.

Le comportement des trois grandeurs  $g_{loc}^{(2)}$ ,  $g_{cr}^{(2)}$  et  $V$  reflète bien le phénomène d'interférence quantique entraînant un groupement bosonique lorsque les atomes sont indiscernables. La corrélation locale augmente alors que l'intercorrélation diminue. Il en découle également une augmentation du bruit sur la différence de population puisque les interférences augmentent la probabilité d'obtenir une différence importante des populations de sorties.

La mesure de la variance permet a priori d'obtenir la signature la plus claire puisque lorsque le nombre de particules augmente le contraste tend vers 1 ce qui permettrait de se placer dans un régime de gain fort, réduisant ainsi le nombre de réalisations expérimentales nécessaires à l'obtention d'un rapport signal à bruit satisfaisant. Cependant, il faut garder à l'esprit que les calculs précédents ne prennent pas en compte la faible efficacité de détection qui risque d'avoir un impact non négligeable, en particulier sur la variance.

Là où réside la force de notre expérience c'est que l'on est capable de mesurer ces trois quantités et la combinaison des trois observations devrait fournir un témoin convaincant de l'interférence quantique. Dans la pratique cependant, l'état quantique issu du mélange à quatre ondes dans le réseau n'est pas un état nombre  $|n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle$  mais plus probablement une superposition cohérente de tels états, voire un mélange statistique. Afin de vérifier que les trois observables choisies sont fiables, on peut s'intéresser à des états plus généraux et à l'effet de la détectivité réduite.

**État de la forme**  $|\Psi\rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha} |n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle$

Il est possible de dériver analytiquement les expressions générales de  $g_{loc}^{(2)}$ ,  $g_{cr}^{(2)}$  et  $V$ , cependant ces expressions sont lourdes et ne sont pas des plus explicites et la dérivation, ainsi que le résultat final, sont reportés en annexe **B**. On s'intéressera ici aux résultats attendus pour quelques exemples bien choisis afin de déduire une tendance générale indépendante de l'état choisi. On considérera les états suivants (on prendra également  $r = t = 1/\sqrt{2}$ ) :

1.  $|\Psi_1\rangle = |n, 0, n, 0\rangle$

2.  $|\Psi_2\rangle = |n_a, 0, 0, n_\beta\rangle$
3.  $|\Psi_3\rangle = \sum_n \frac{(\tanh \lambda)^n}{\cosh \lambda} |n, 0, n, 0\rangle$
4.  $|\Psi_4\rangle = \sum_{n_a, n_\beta} \frac{(\tanh \lambda_a)^{n_a}}{\cosh \lambda_a} \frac{(\tanh \lambda_\beta)^{n_\beta}}{\cosh \lambda_\beta} |n_a, 0, 0, n_\beta\rangle$
5.  $|\Psi_5\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, 0, n, 0\rangle$
6.  $|\Psi_6\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n_a, n_\beta} \frac{\alpha^{n_a}}{\sqrt{n_a!}} \frac{\beta^{n_\beta}}{\sqrt{n_\beta!}} |n_a, 0, 0, n_\beta\rangle$

Les états d'indices impaires (1, 3 et 5) sont des exemples où les particules sont fortement corrélées et indiscernables alors que les états d'indices paires (2, 4 et 6) sont des états ayant des statistiques similaires aux précédents mais pour des particules discernables et non corrélées. Pour ces états rien n'impose d'avoir le même nombre de particules moyen dans les deux voies d'entrée "a" et "b" cependant pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité on supposera  $\langle n_a \rangle = \langle n_b \rangle = N$  pour l'ensemble des états et on note  $\eta$  l'efficacité de détection totale du dispositif.

Les états 1 et 2 sont simplement des états nombres qui permettent de se faire une idée du comportement en sortie de la séparatrice. Les états 3 et 4 sont les états en sortie d'amplificateurs paramétriques et les états 5 et 6 sont des états cohérents fortement corrélés (5) ou indépendants (6). Voici l'ensemble des résultats résumés dans un tableau :

État	$g_{loc}^{(2)}$	$g_{cr}^{(2)}$	V
1	$\frac{3}{2} + \frac{1-\eta/2}{\eta N}$	$\frac{1}{2} - \frac{1-\eta/2}{\eta N}$	$1 + \eta N$
2	$1 + \frac{1-\eta/2}{\eta N}$	$1 - \frac{1-\eta/2}{\eta N}$	1
3	$3 + \frac{1+\eta}{\eta N}$	1	$1 + \eta(2N + 1)$
4	$\frac{3}{2} + \frac{1}{\eta N}$	3/2	1
5	$\frac{3}{2} + \frac{1+\eta}{\eta N}$	1/2	$1 + \eta(N + 1)$
6	$1 + \frac{1+\eta}{\eta N}$	1	1

Plusieurs remarques peuvent être tirées de ces résultats. Tout d'abord, si l'on regarde les corrélations, les valeurs ne sont en absolue pas de bonnes indications du caractère indiscernable puisque par exemple pour les cas 1 et 5 possédant des particules indiscernables on obtient une corrélation locale qui tend vers 3/2 mais c'est également vrai pour le cas 4 qui possède des particules discernables. Cependant on peut noter que si l'on compare, pour un type de statistique donnée, les cas discernables et indiscernables,

on trouve toujours  $g_{loc,Ind}^{(2)} > g_{loc,Disc}^{(2)}$  et  $g_{cr,Ind}^{(2)} < g_{cr,Disc}^{(2)}$ , conséquence directe du groupement bosonique. On remarque que l'on obtient pour ces trois couples d'exemples  $g_{cr,Ind}^{(2)} + 1/2 = g_{cr,Disc}^{(2)}$ .

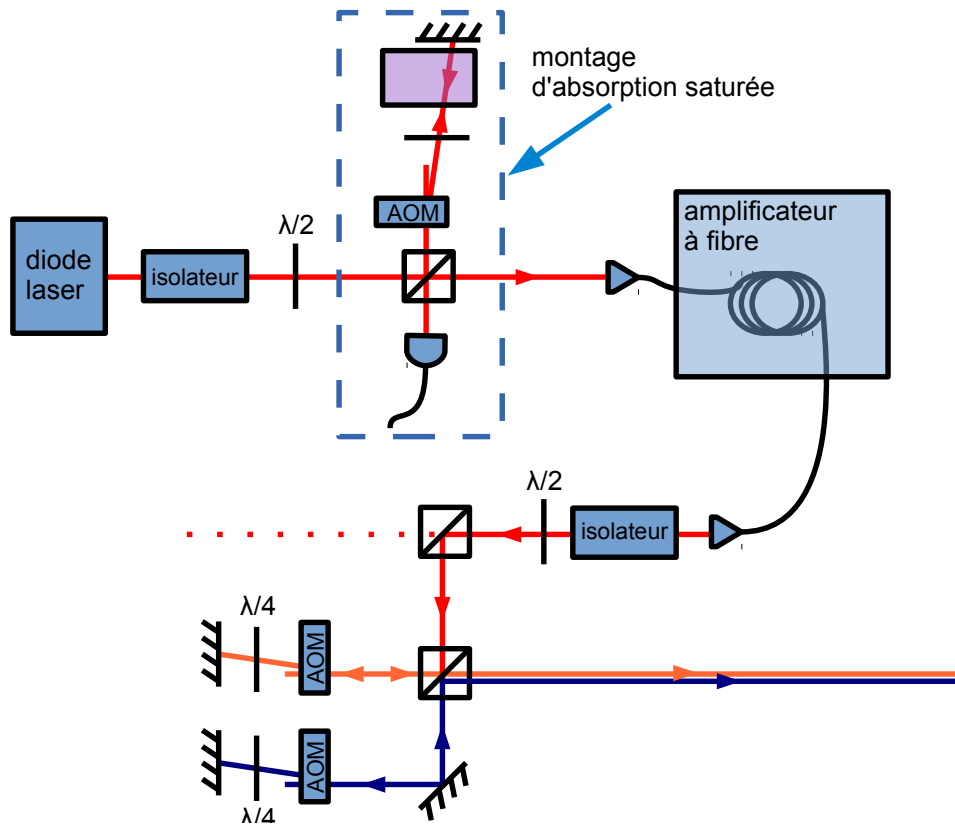
Si on s'intéresse à la variance de la différence du nombre de particules on voit clairement une différence entre les cas discernables et indiscernables puisque dans les premiers on obtient à chaque fois  $V_{Disc} = 1$  alors que dans les derniers la variance croit linéairement avec le nombre moyen de particules. Pour un nombre important de particules la variance constitue un indicateur clair de l'indiscernabilité. Il faut cependant garder à l'esprit qu'une variance supérieure à 1, signe d'un excès de bruit, peut également être provoquée par des bruits techniques indésirables et ne constitue pas à elle seule une preuve de la nature quantique de l'état. De plus, contrairement aux corrélations, la variance mesurée est fortement impactée par la détectivité limitée qui réduit le contraste du signal attendu. Ce n'est donc que par la mesure comparative des trois quantités que l'on pourra tirer des conclusions sur les résultats obtenus.

#### 4.0.2 Mise en place expérimentale

Pour réaliser la séparatrice atomique on utilise un réseau de Bragg dont on règle la durée afin d'obtenir une réflectivité de 50 %. Pour réaliser ce réseau, on utilise une nouvelle diode laser asservie en fréquence à l'aide d'un montage d'absorption saturée, le faisceau est alors amplifié puis séparé en deux faisceaux. Chacun des deux faisceaux fait un allé-retour dans un modulateur acousto-optique pour l'éloigner de la résonance et contrôler parfaitement le désaccord entre les deux bras (voir figure 4.3). Les laser sont désaccordés de 600 MHz sur le rouge de la transition  $2^3S_1 \longleftrightarrow 2^3P_0$  de l'Hélium. L'angle entre les faisceau permet de régler la différence de vecteurs d'onde entre les modes couplés par la séparatrice. On se place à environ  $30^\circ$  d'angle entre les deux bras ce qui permet de mélanger des modes séparer de  $\Delta k \approx 0.55 k_r$ .

Les deux faisceaux suivent alors le même trajet optique vers l'enceinte avant d'être de nouveau séparés pour réaliser le réseau de Bragg (voir figure 4.4). Sur ce montage les deux faisceaux sont copropageants sur une grande partie du chemin optique ce qui permet de réduire les possibles fluctuations de différence de phase et ainsi de préserver la cohérence des atomes.

Chaque faisceau est aligné individuellement sur le nuage atomique en observant l'émission spontanée qu'il produit (voir figure 4.5). En effet, à puissance et désaccord fixés, le nombre d'atomes diffusés par émission spontanée augmente lorsque l'on améliore le recouvrement entre le faisceau laser et le nuage atomique. Après ce premier alignement plutôt grossier, on affine le réglage de la séparatrice en augmentant (à désaccord et puissance donnés) la pulsation de Rabi des oscillations de Bragg (voir 2.4.2).

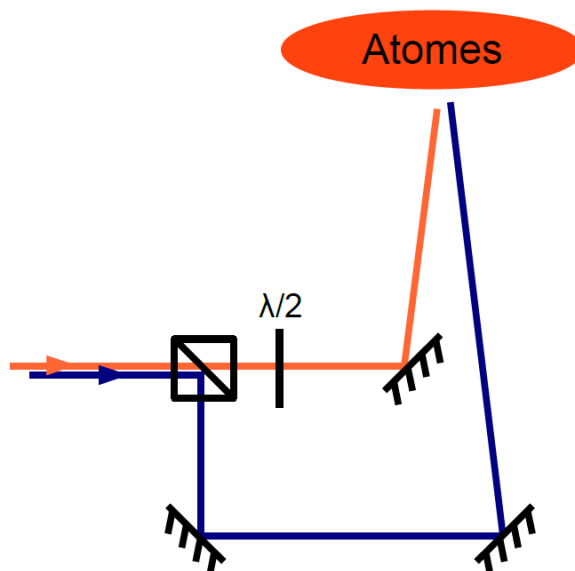


**Figure 4.3** – Les deux faisceaux de la séparatrice Bragg sont obtenus en asservissant une diode laser par rapport à la transition atomique à l'aide d'un montage d'absorption saturée. Le laser est ensuite amplifié puis séparé en deux faisceaux dont on peut contrôler indépendamment la fréquence à l'aide de modulateurs acousto-optiques (AOM).

Une fois la séparatrice correctement alignée on obtient des oscillations de Bragg à 2.6 kHz pour une puissance  $P = 45 \mu\text{W}$  (voir figure 4.6).

### 4.0.3 Conclusion

En choisissant la durée d'application du réseau il est possible de se placer aussi bien dans le régime de paires isolées que dans le régime de gain fort. Le premier cas correspond à l'émission de paires individuelles et semble bien adapté à la réalisation d'expériences telles que l'effet Hong, Ou et Mandel ou la violation des inégalités de Bell. Malheureusement, la faible efficacité de détection sur notre montage (20 % au mieux) associée à un temps de préparation du condensat important ( $\approx 30$  s) nous empêche de travailler



**Figure 4.4** – Près de la chambre de science les faisceaux sont séparés à nouveau par un cube séparateur de polarisation et sont envoyés sur les atomes en faisant un angle d'environ  $30^\circ$  l'un par rapport à l'autre.

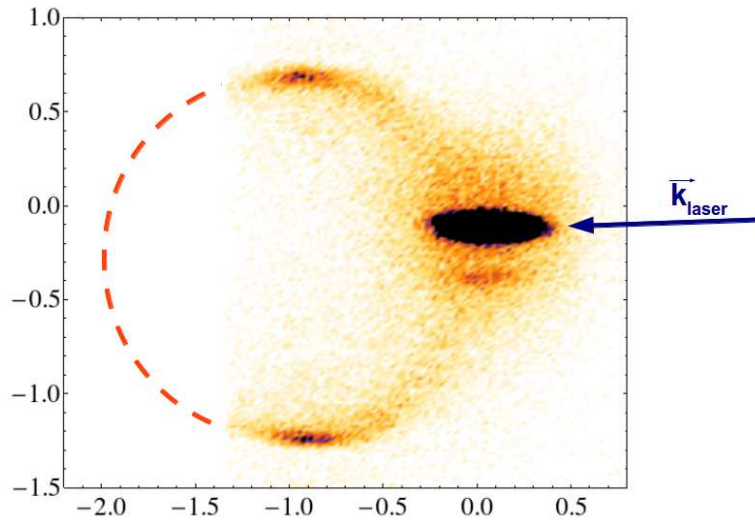
dans ce régime. C'est pourquoi nous avons choisi de nous placer en régime de gain fort afin d'augmenter l'amplitude des signaux observés et de diminuer le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un signal exploitable.

Sur notre expérience, l'objectif est maintenant de démontrer l'indiscernabilité des atomes issus d'une même paire et par la même occasion d'illustrer une application de notre source. Pour cela nous avons choisi de réaliser un équivalent atomique de l'effet Hong, Ou et Mandel dans un régime où le nombre de particule en entrée de la séparatrice est potentiellement important. Nous avons donc commencé par évaluer quelle serait la signature de l'indiscernabilité :

- sur la distribution du nombre d'atomes en sortie de la séparatrice,
- sur les fonctions de corrélations locales et croisées,
- et sur la variance de la différence du nombre d'atomes entre les deux sorties de la séparatrice.

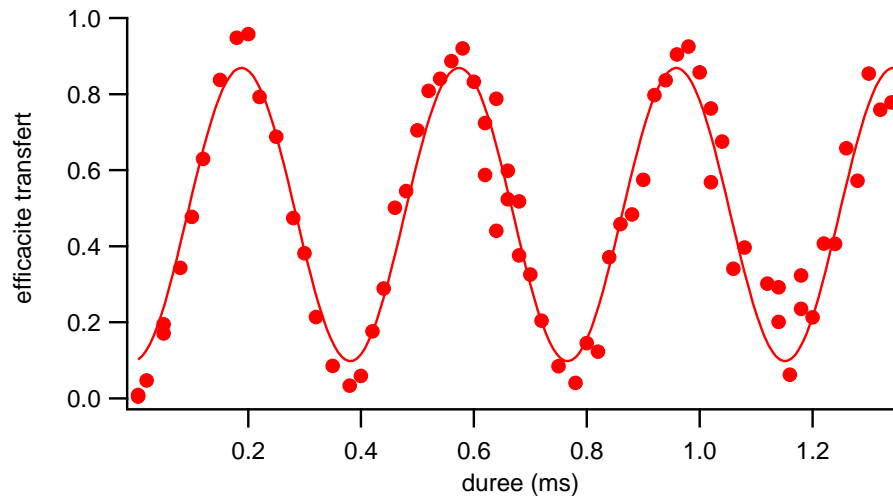
En calculant les résultats attendus pour plusieurs exemples, nous nous sommes convaincus que la mesure de toutes les quantités précédemment listées devrait nous fournir un indicateur clair de l'indiscernabilité sur notre source.

Nous avons donc décidé de mettre en place une séparatrice d'onde de matière à l'aide de deux faisceaux laser. La diffraction de Bragg des atomes dans le réseau créée par ces nouveaux lasers permet de mélanger les pics 1 et



**Figure 4.5** – Halo d’atomes diffusés par absorption d’un photon du faisceau laser (d’impulsion  $k_{laser}$ ) et réémission de manière spontanée. Une partie du Halo tombe hors du détecteur (pointillés oranges). Les surintensités présentes aux pôles sont issues du phénomène de superradiance [Dic54]. Un article à propos des propriétés de cohérence de la superradiance est d’ailleurs en cours d’écriture [Equ14]

2 issus de notre source. En réglant la durée d’application des laser on peut réaliser la séparatrice 50/50 désirée. L’ultime étape de ce projet consiste donc maintenant à appliquer la séparatrice sur les paires d’atomes corrélés. Nous espérons réaliser les premiers tests dans les mois à venir et si tout va bien observer une signature de l’indiscernabilité.



**Figure 4.6** – Oscillations de Bragg obtenues avec la séparatrice nouvellement mise en place. En ajustant la durée des impulsions laser pour qu'elles durent un quart de période  $T/4 = 0.96$  ms, on réalise une séparatrice 50/50.

# Conclusion

Dans ce manuscrit nous avons exposé l'élaboration d'une source ajustable de paires d'atomes reposant sur le mélange à quatre ondes spontané dans un réseau optique. Cette source produit des faisceaux d'atomes jumeaux centrés autour de deux vecteurs d'ondes  $k_1$  et  $k_2$  dont on peut faire varier les valeurs. Sur de nombreux dispositifs les accès optiques sont limités et le contrôle des vecteurs d'émission de nos paires s'avère un atout important puisqu'il est possible de régler le couple  $(k_1, k_2)$  le plus adapté aux contraintes expérimentales. Le nombre de paires créées est également ajustable ce qui permet de potentiellement se placer dans une large gamme de régimes. On peut ainsi produire moins d'une paire par réalisation pour travailler avec des paires isolées adaptées aux tests fondamentaux de la mécanique quantique (Effet Hong, Ou et Mandel [HOM87], Inégalités de Bells [ADR82], etc...). Mais on peut également produire de nombreuses paires à chaque réalisation. Ce régime est particulièrement adapté à l'interférométrie atomique puisqu'il permet d'augmenter le rapport signal à bruit et de diminuer le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un signal exploitable.

La création de paires d'atomes est très similaire à la création de paires de photons. Dans les deux cas, les paires sont issues de phénomènes non-linéaires tels que la conversion paramétrique ou le mélange à quatre ondes. Ces paires sont le premier pas vers la génération d'états comprimés, voir d'états intriqués. La création de tels états avec des photons est maintenant bien maîtrisée [ADR82; Wei+98; Eke91; KLM01] mais dans le domaine de l'optique atomique quantique, la recherche d'une bonne source d'atomes corrélés est encore d'actualité [Bon+13; Jas+10; Büc+11; Gre+05]. L'expérience a montré que les paires issues du mélange à quatre ondes en espace libre sont potentiellement utilisables pour l'optique atomique quantique et l'interférométrie sous la limite quantique standard [Jas+10; DBB02]. Cependant, la géométrie d'une telle source de paires est loin d'être adaptée à ce genre d'usage. En effet, les paires sont émises dans des modes répartis dans  $4\pi$  sr. Voilà pourquoi, en nous inspirant de l'expérience proposée dans [HM05], nous avons décidé de modifier notre dispositif en ajoutant un réseau optique. Comme l'on rapportée [Cam+06], la présence du potentiel périodique permet de favoriser certains modes et de contrôler leur vecteur



d'onde.

En débutant mon stage de master, juste avant ma thèse, je suis arrivé au moment de l'installation du réseau optique. Ainsi, j'ai pu au cours de mon doctorat, prendre part à l'élaboration de notre source ajustable depuis la mise en place des tous premiers éléments optiques du réseau jusqu'à l'analyse poussée des paires créées. J'espère même voir dans les mois à venir la première application de notre source avec la mesure d'un effet Hong, Ou et Mandel [HOM87] atomique. Pour réaliser le potentiel périodique nous avons mis en place deux faisceaux laser contrapropageants. La figure d'interférence créée par ces laser produit un potentiel périodique qu'il a fallu caractériser. Nous avons par exemple vérifié qu'aucun chauffage excessif n'était présent et que la profondeur du réseau ressentie par les atomes était bien cohérente avec les paramètres des faisceaux laser utilisés. En faisant se déplacer le réseau par rapport aux atomes, nous avons observé qu'à partir d'une vitesse donnée, des pics centrés autour de deux impulsions  $k_1$  et  $k_2$  sont apparus. Afin de vérifier qu'il s'agissait bel et bien du mélange à quatre ondes dans un réseau optique, nous avons mesuré si les conditions d'accord de phase étaient vérifiées. À notre surprise, les vecteurs d'onde des pics 1 et 2 ne correspondaient pas tout à fait à ceux attendus compte tenu de la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Cependant, le comportement était quand même qualitativement celui du mélange à quatre ondes. On s'est donc demandé si les conditions d'accord de phase n'étaient pas plus subtiles qu'on ne le pensait.

Ainsi, nous avons constaté que le potentiel de champ moyen avait une influence importante sur les conditions d'accord de phase. À l'aide d'un calcul numérique inspiré par [WN01], nous avons réussi à expliquer les vecteurs d'ondes obtenues expérimentalement. Cela nous a permis de comprendre que derrière le phénomène d'instabilité dynamique dans les réseaux se cache le mélange à quatre ondes. Afin de pleinement caractériser notre source nous nous sommes ensuite intéressés aux effets transverses et nous avons remarqué que la présence d'un angle de  $7^\circ$  entre l'axe long de notre piège optique et le réseau est probablement responsable de structures transverses inattendues. Nous avons d'ailleurs décidé de modifier le montage pour rendre le réseau vertical et aligné sur le piège. Cette modification n'a pas encore été faite mais nous pensons qu'elle réduira le peuplement des premiers modes excités transverses.

Un des travaux important de ma thèse a été l'analyse des propriétés statistiques de notre source avec la mesure des fonctions de corrélations et de la variance de la différence du nombre d'atome. Pour obtenir les fonctions de corrélations il a d'abord fallu mettre au point une procédure de recentrage complexe afin de corriger les fluctuations de la vitesse initiale du condensat. En effet, ces fluctuations produisent des corrélations purement classiques tellement importantes que le signal intéressant est complètement noyé. Après

le recentrage nous avons pu mettre en évidence des corrélations entre les atomes du pic 1 et ceux du pic 2. Les largeurs de ces corrélations nous ont permis d'estimer qu'environ une centaine de modes sont peuplés par les paires et qu'il peut y avoir jusqu'à 100 atomes par mode. Ce résultat montre bien l'amélioration par rapport au mélange à quatre ondes en espace libre pour lequel la population est d'environ 0.01 atomes par mode. Notons, dorénavant que la procédure de recentrage ne devrait plus être nécessaire grâce à la mise en place d'un piège dipolaire croisé qui réduit énormément les fluctuations de la vitesse initiale du condensat.

En plus des corrélations, nous avons également observé une réduction de la variance sur la différence du nombre d'atomes entre les pics 1 et 2 en-dessous du bruit de grenaille. Cette mesure ne peut pas être expliquée par une théorie des champs classiques et montre l'utilité de notre source pour des protocoles d'optique atomique quantique ou d'interférométrie. Néanmoins, certains aspects du comportement de la variance restent incompris : la variance est en-dessous du bruit de grenaille uniquement lorsque que l'on compte les atomes dans un volume dont les dimensions transverses sont bien inférieures à la taille de la fonction de corrélation croisée. C'est inattendu et reste pour le moment inexpliqué.

Pour comprendre l'évolution temporelle de l'émission de paires d'atomes par notre source, nous avons dû développer un modèle théorique s'inspirant des travaux décrits dans [Büc+12]. Ce modèle repose sur le formalisme des matrices de densités réduites et permet de prendre en compte le caractère multimode de l'émission ainsi que l'évolution temporelle de la population de la pompe (population du condensat). Grâce aux résultats de cette simulation nous avons pu comprendre la saturation de la production de paire qui apparaît après plusieurs centaines de microsecondes. Cette saturation est due à la perte de recouvrement entre la fonction d'onde du condensat et celles des pics 1 et 2.

L'ensemble de l'étude de notre source de paires montre que cette dernière est adaptée à l'optique atomique quantique : elle permet de produire des paires d'atomes corrélés dans un faible nombre de modes de manière efficace. On peut, en jouant sur les paramètres du réseau (vitesse par rapport au condensat, profondeur et durée), ajuster les vecteurs d'ondes et la populations des modes créés. L'objectif est maintenant d'utiliser cette source dans des expériences d'optique atomique. La mise en place d'une séparatrice pour les ondes de matière est en cours afin de réaliser un équivalent atomique de l'effet Hong, Ou et Mandel.



# Articles



## Violation of the Cauchy-Schwarz Inequality with Matter Waves

K. V. Kheruntsyan,<sup>1</sup> J.-C. Jaskula,<sup>2,\*</sup> P. Deuar,<sup>3</sup> M. Bonneau,<sup>2</sup> G. B. Partridge,<sup>2,†</sup> J. Ruaudel,<sup>2</sup> R. Lopes,<sup>2</sup>  
D. Boiron,<sup>2</sup> and C. I. Westbrook<sup>2</sup>

<sup>1</sup>The University of Queensland, School of Mathematics and Physics, Brisbane, Queensland 4072, Australia

<sup>2</sup>Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Sud,  
Campus Polytechnique RD128, 91127 Palaiseau, France

<sup>3</sup>Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, Al. Lotników 32/46, 02-668 Warsaw, Poland  
(Received 30 March 2012; published 25 June 2012)

The Cauchy-Schwarz (CS) inequality—one of the most widely used and important inequalities in mathematics—can be formulated as an upper bound to the strength of correlations between classically fluctuating quantities. Quantum-mechanical correlations can, however, exceed classical bounds. Here we realize four-wave mixing of atomic matter waves using colliding Bose-Einstein condensates, and demonstrate the violation of a multimode CS inequality for atom number correlations in opposite zones of the collision halo. The correlated atoms have large spatial separations and therefore open new opportunities for extending fundamental quantum-nonlocality tests to ensembles of massive particles.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.260401

PACS numbers: 03.75.Be, 03.75.Gg, 34.50.Cx, 42.50.Dv

The Cauchy-Schwarz (CS) inequality is ubiquitous in mathematics and physics [1]. Its utility ranges from proofs of basic theorems in linear algebra to the derivation of the Heisenberg uncertainty principle. In its basic form, the CS inequality simply states that the absolute value of the inner product of two vectors cannot be larger than the product of their lengths. In probability theory and classical physics, the CS inequality can be applied to fluctuating quantities and states that the expectation value of the cross correlation  $\langle I_1 I_2 \rangle$  between two quantities  $I_1$  and  $I_2$  is bounded from above by the autocorrelations in each quantity,

$$|\langle I_1 I_2 \rangle| \leq \sqrt{\langle I_1^2 \rangle \langle I_2^2 \rangle}. \quad (1)$$

This inequality is satisfied, for example, by two classical currents emanating from a common source.

In quantum mechanics, correlations can, however, be stronger than those allowed by the CS inequality [2–4]. Such correlations have been demonstrated in quantum optics using, for example, antibunched photons produced via spontaneous emission [5], or twin photon beams generated in a radiative cascade [6], parametric down conversion [7], and optical four-wave mixing [8]. Here the discrete nature of the light and the strong correlation (or anticorrelation in antibunching) between photons is responsible for the violation of the CS inequality. The violation has even been demonstrated for two light beams detected as continuous variables [8].

In this work we demonstrate a violation of the CS inequality in matter-wave optics using pair-correlated atoms formed in a collision of two Bose-Einstein condensates (BECs) of metastable helium [9–12] (see Fig. 1). The CS inequality which we study is a *multimode* inequality, involving integrated atomic densities, and therefore is different from the typical two-mode situation studied in

quantum optics. Our results demonstrate the potential of atom optics experiments to extend the fundamental tests of quantum mechanics to ensembles of massive particles. Indeed, violation of the CS inequality implies the possibility of (but is not equivalent to) formation of quantum states that exhibit the Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) correlations or violate a Bell's inequality [3]. The EPR and Bell-state correlations are of course of wider significance

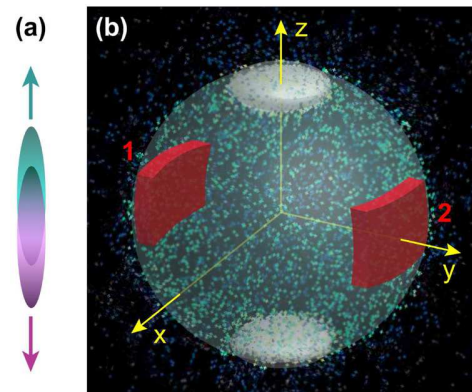


FIG. 1 (color online). Diagram of the collision geometry. (a) Two cigar-shaped condensates moving in opposite directions along the axial direction  $z$  shortly after their creation by a Bragg laser pulse (the anisotropy and spatial separation are not to scale). (b) Spherical halo of scattered atoms produced by four-wave mixing after the cloud expands and the atoms fall to the detector 46 cm below. During the flight to the detector, the unscattered condensates acquire a disk shape shown in white on the north and south poles of the halo. The (red) boxes 1 and 2 illustrate a pair of diametrically symmetric counting zones (integration volumes) for the average cross-correlation and autocorrelation functions,  $\bar{G}_{12}^{(2)}$  and  $\bar{G}_{ii}^{(2)}$  ( $i = 1, 2$ ) (see text), used in the analysis of the Cauchy-Schwarz inequality.

to foundational principles of quantum mechanics than those that violate a CS inequality. Nevertheless, the importance of understanding the CS inequality in new physical regimes lies in the fact that: (i) they are the simplest possible tests of stronger-than-classical correlations, and (ii) they can be viewed as precursors, or necessary conditions, for the stricter tests of quantum mechanics.

The atom-atom correlations resulting from the collision and violating the CS inequality are measured after long time-of-flight expansion using time- and position-resolved atom detection techniques unique to metastable atoms [13]. The 307 ms long expansion time combined with a large collision and hence scattering velocity results in a  $\sim 6$  cm spatial separation between the scattered, correlated atoms. This separation is quite large compared to what has been achieved in recent related BEC experiments based on double-well or two-component systems [14–16], trap modulation techniques [17], or spin-changing interactions [18,19]. This makes the BEC collisions ideally suited to quantum-nonlocality tests using ultracold atomic gases and the intrinsic interatomic interactions.

In a simple two-mode quantum problem, described by boson creation and annihilation operators  $\hat{a}_i^\dagger$  and  $\hat{a}_i$  ( $i = 1, 2$ ), the Cauchy-Schwarz inequality of the form of Eq. (1) can be formulated in terms of the second-order correlation functions,  $G_{ij}^{(2)} = \langle \hat{n}_i \hat{n}_j \rangle = \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_i \rangle$ , and reads [2–4]

$$G_{12}^{(2)} \leq [G_{11}^{(2)} G_{22}^{(2)}]^{1/2}, \quad (2)$$

or simply  $G_{12}^{(2)} \leq G_{11}^{(2)}$  in the symmetric case of  $G_{11}^{(2)} = G_{22}^{(2)}$ . Here,  $G_{12}^{(2)} = G_{21}^{(2)}$ ,  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  is the particle number operator, and the double colons indicate normal ordering of the creation and annihilation operators, which ensures the correct quantum-mechanical interpretation of the process of detection of pairs of particles that contribute to the measurement of the second-order correlation function [2]. Stronger-than-classical correlation violating this inequality would require  $G_{12}^{(2)} > [G_{11}^{(2)} G_{22}^{(2)}]^{1/2}$ , or  $G_{12}^{(2)} > G_{11}^{(2)}$  in the symmetric case.

The situation we analyze here is counterintuitive in that we observe a peak cross correlation (for pairs of atoms scattered in opposite directions) that is smaller than the peak autocorrelation (for pairs of atoms propagating in the same direction). In a simple two-mode model such a ratio of the cross correlation and autocorrelation satisfies the classical CS inequality. However, in order to adequately treat the atom-atom correlations in the BEC collision problem, one must generalize the CS inequality to a multi-mode situation, which takes into account the fact that the cross correlations and autocorrelations in matter-wave optics are usually *functions* (in our case of momentum). The various correlation functions can have different widths and peak heights, and one must define an appropriate integration domain over multiple momentum modes to recover an

inequality that plays the same role as that in the two-mode case and *is* actually violated, as we show below.

The experimental setup was described in Refs. [11,12]. Briefly, a cigar-shaped BEC of metastable helium, containing approximately  $\sim 10^5$  atoms, trapped initially in a harmonic trapping potential with frequencies  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)/2\pi = (1500, 1500, 7.5)$  Hz, was split by Bragg diffraction into two parts along the axial ( $z$ -) direction [see Fig. 1(a)], with velocities differing by twice the single photon recoil velocity  $v_{\text{rec}} = 9.2$  cm/s. Atoms interact via binary, momentum conserving  $s$ -wave collisions and scatter onto a nearly spherical halo [see Fig. 1(b)] whose radius in velocity space is about the recoil velocity [11,20]. The scattered atoms fall onto a detector that records the arrival times and positions of individual atoms [13] with a quantum efficiency of  $\sim 10\%$ . The halo diameter in position space at the detector is  $\sim 6$  cm. We use the arrival times and positions to reconstruct three-dimensional velocity vectors  $\mathbf{v}$  for each atom. The unscattered BECs locally saturate the detector. To quantify the strength of correlations corresponding only to spontaneously scattered atoms, we exclude from the analysis the data points containing the BECs and their immediate vicinity ( $|v_z| < 0.5v_{\text{rec}}$ ) and further restrict ourselves to a spherical shell of radial thickness  $0.9 < v_r/v_{\text{rec}} < 1.1$  (where the signal to noise is large enough), defining the total volume of the analyzed region as  $\mathcal{V}_{\text{data}}$ .

Using the atom arrival and position data, we can measure the second-order correlation functions between the atom number densities  $\hat{n}(\mathbf{k})$  at two points in momentum space,  $\mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \hat{n}(\mathbf{k}') \rangle$  (see Supplementary Material [21]), with  $\mathbf{k}$  denoting the wave vector  $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$  and  $\hbar\mathbf{k}$  the momentum. The correlation measurements are averaged over a certain counting zone (integration volume  $\mathcal{V}$ ) on the scattering sphere in order to get statistically significant results. By choosing  $\mathbf{k}'$  to be nearly opposite or nearly collinear to  $\mathbf{k}$ , we can define the averaged back-to-back (BB) or collinear (CL) correlation functions,

$$\mathcal{G}_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{k} \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}), \quad (3)$$

$$\mathcal{G}_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{k} \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}), \quad (4)$$

which play a role analogous to the cross-correlation and autocorrelation functions,  $G_{12}^{(2)}$  and  $G_{ii}^{(2)}$ , in the simple two-mode problem discussed above. The BB and CL correlations are defined as functions of the relative displacement  $\Delta\mathbf{k}$ , while the dependence on  $\mathbf{k}$  is lost due to the averaging.

The normalized BB and CL correlations functions,  $g_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k})$  and  $g_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k})$ , averaged over the unexcised part of the scattering sphere  $\mathcal{V}_{\text{data}}$  are shown in Fig. 2. The BB correlation peak results from binary, elastic collisions between atoms, whereas the CL correlation peak is a variant

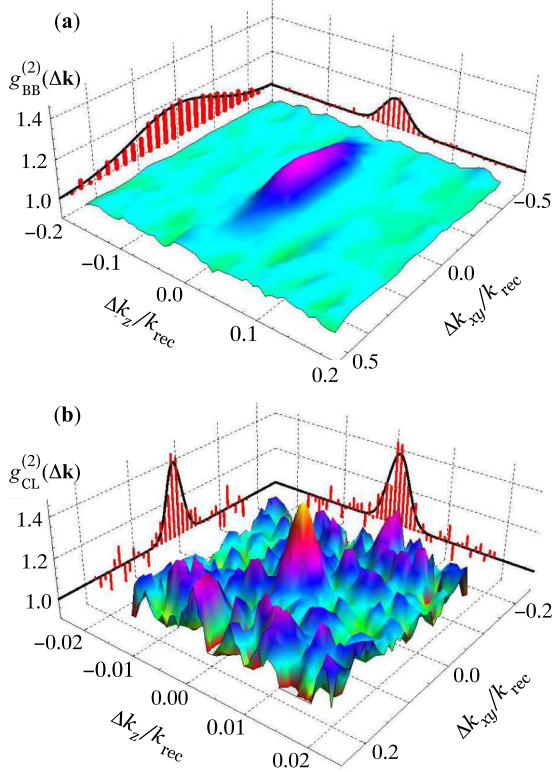


FIG. 2 (color online). Normalized back-to-back (a) and collinear (b) correlation functions,  $g_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k})$  and  $g_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k})$ , in momentum space integrated over  $\mathcal{V}_{\text{data}}$  corresponding to  $|k_z| < 0.5k_{\text{rec}}$  and  $0.9 < k_r/k_{\text{rec}} < 1.1$ , where  $k_{\text{rec}} = mv_{\text{rec}}/\hbar$  is the recoil momentum. The data are averaged over 3600 experimental runs. Because of the cylindrical symmetry of the initial condensate and of the overall geometry of the collision, the dependence on the  $k_x$  and  $k_y$  components should physically be identical and therefore can be combined (averaged); the correlation functions can then be presented as two-dimensional surface plots on the  $(k_z, k_{xy})$  plane. The two-dimensional plots were smoothed with a nearest neighbor running average. The data points along the  $k_z$  and  $k_{xy}$  projections (corresponding to thin slices centered at  $k_{xy} = 0$  and  $k_z = 0$ , respectively) are not smoothed. The solid lines show the Gaussian fits to these projections. The peak height of the back-to-back correlation function is  $\sim 1.2$  while that of the collinear correlation function is  $\sim 1.4$ , apparently confirming the Cauchy-Schwarz inequality. The widths of the two distributions are, however, very different ( $\sigma_{\text{BB},x} \approx \sigma_{\text{BB},y} \approx 0.21k_{\text{rec}}$ ,  $\sigma_{\text{BB},z} \approx 0.019k_{\text{rec}}$ , whereas  $\sigma_{\text{CL},x} \approx \sigma_{\text{CL},y} \approx 0.036k_{\text{rec}}$ ,  $\sigma_{\text{CL},z} \approx 0.002k_{\text{rec}}$ ) and a multimode formulation of the Cauchy-Schwarz inequality, which relates the relative volumes of the correlation functions, is violated.

of the Hanbury Brown and Twiss effect [22,23]—a two-particle interference involving members of two different atom pairs [9,10,24,25]. Both correlation functions are anisotropic because of the anisotropy of the initial colliding condensates.

An important difference with the experiment of Ref. [9] is that the geometry in the present experiment (with

vertically elongated condensates) is such that the observed widths of the correlation functions are not limited by the detector resolution. Here we now observe that the BB and CL correlations have very different widths, with the BB width being significantly larger than the CL width. This broadening is largely due to the size of the condensate in the vertical direction ( $\sim 1$  mm). The elongated nature of the cloud and the estimated temperature of  $\sim 200$  nK also means that the condensates correspond in fact to *quasicondensates* [26] whose phase coherence length is smaller than the size of the atomic cloud. The broadening of the BB correlation due to the presence of quasicondensates will be discussed in another paper [27], but we emphasize that the CS inequality analyzed here is insensitive to the detailed broadening mechanism as it relies on integrals over correlation functions. This is one of the key points in considering the multimode CS inequality.

Since the peak of the CL correlation function corresponds to a situation in which the two atoms follow the same path, we can associate it with the autocorrelation of the momentum of the particles on the collision sphere. Similarly, the peak of the BB correlation function corresponds to two atoms following two distinct paths and therefore can be associated with the cross-correlation function between the respective momenta. Hence we realize a situation in which one is tempted to apply the CS inequality to the peak values of these correlation functions. As we see from Fig. 2, if one naively uses only the peak heights, the CS inequality is *not* violated since  $g_{\text{BB}}^{(2)}(0) < g_{\text{CL}}^{(2)}(0)$  and hence  $\mathcal{G}_{\text{BB}}^{(2)}(0) < \mathcal{G}_{\text{CL}}^{(2)}(0)$  due to the nearly identical normalization factors (see Supplementary Material [21]).

We can, however, construct a CS inequality that is violated if we use integrated correlation functions,  $\bar{\mathcal{G}}_{ij}^{(2)}$ , that correspond to atom numbers  $\hat{N}_i = \int_{\mathcal{V}_i} d^3\mathbf{k} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})$  ( $i = 1, 2$ ) in two distinct zones on the collision halo [21],

$$\bar{\mathcal{G}}_{ij}^{(2)} = \langle : \hat{N}_i \hat{N}_j : \rangle = \int_{\mathcal{V}_i} d^3\mathbf{k} \int_{\mathcal{V}_j} d^3\mathbf{k}' \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (5)$$

The choice of the two integration (zone) volumes  $\mathcal{V}_i$  and  $\mathcal{V}_j$  determines whether the  $\bar{\mathcal{G}}_{ij}^{(2)}$ -function corresponds to the BB ( $i \neq j$ ) or CL ( $i = j$ ) correlation functions, Eqs. (3) and (4).

The CS inequality that we can now analyze for violation reads  $\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} \leq [\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}]^{1/2}$ . To quantify the degree of violation, we introduce a correlation coefficient,

$$C = \bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} / [\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}]^{1/2}, \quad (6)$$

which is smaller than unity classically, but can be larger than unity for states with stronger-than-classical correlations.

In Fig. 3 we plot the correlation coefficient  $C$  determined from the data for different integration zones  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$ , but always keeping the two volumes equal. When  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  correspond to diametrically opposed, correlated pairs

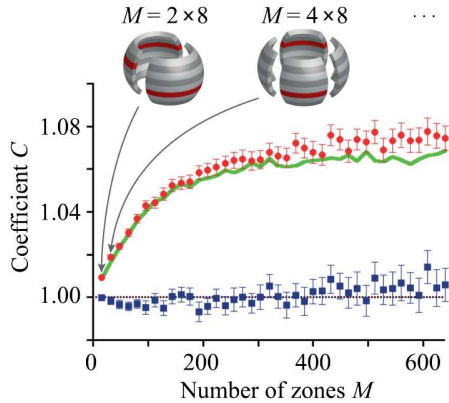


FIG. 3 (color online). Correlation coefficient  $C$  as a function of the number of zones  $M = \mathcal{V}_{\text{data}}/\mathcal{V}_1$  into which we cut the scattering sphere.  $C > 1$  corresponds to violation of the Cauchy-Schwarz inequality. The scattering sphere was cut into 8 polar and from 2 to 80 azimuthal zones; the resulting arrangement of zones for  $M = 16$  and  $32$  is illustrated in the upper panel. The observed values of  $C$  for pairs of correlated diametrically opposite zones (shown as darker red stripes in the upper panel as an example) were averaged to get one data point for a given  $M$ ; the data points for such zones are shown as red circles, for uncorrelated (neighboring) zones—as blue squares. The error bars show the standard deviation of the mean over the number of zone pairs. The (green) thick solid curve is the theoretical prediction (see Supplementary Material [21]) calculated using the experimental parameters and a stochastic Bogoliubov approach [20,28].

of zones (red circles),  $C$  is greater than unity, violating the CS inequality, while for neighboring, uncorrelated pairs (blue squares) the CS inequality is not violated. The figure also shows the results of a quantum-mechanical calculation of  $C$  using a stochastic Bogoliubov approach (green thick solid curve) [20,21,28]. The calculation is for the initial total number of atoms  $N = 85\,000$  and is in good agreement with the observations. The choice of large integration volumes (small number of zones  $M$ ) results in only weak violations, while using smaller volumes (large  $M$ ) increases the violation. This behavior is to be expected (see Supplementary Material [21]) because large integration zones include many, uncorrelated events which dilute the computed correlation. The saturation of  $C$ , in the current arrangement of integration zones—with a fixed number of polar cuts and hence a fixed zone size along  $z$  which always remains larger than the longitudinal correlation width—occurs when the tangential size of the zone begins to approach the transverse width of the CL correlation function. If the zone sizes were made smaller in all directions, we would recover the situation applicable to the peak values of the correlation functions (and hence no CS violation) as soon as the sizes become smaller than the respective correlation widths (see Eq. (S11) in the Supplementary Material [21]).

We have shown the violation of the CS inequality using the experimental data of Ref. [11] in which a sub-Poissonian variance in the atom number difference between opposite zones was observed. Although the two effects are linked mathematically in simple cases, they are not equivalent in general [8,21]. Because of the multimode nature of the four-wave mixing process, we observe stronger (weaker) suppression of the variance below the shot-noise level for the larger (smaller) zones (see Fig. 3 of [11]), whereas the degree of violation of the CS inequality follows the opposite trend. This difference can be of importance for other experimental tests of stronger-than-classical correlations in inherently multimode situations in matter-wave optics.

The nonclassical character of the observed correlations implies that the scattered atoms cannot be described by classical stochastic random variables [29]. Our experiment is an important step toward the demonstrations of increasingly restrictive types of nonlocal quantum correlations with matter waves, which we hope will one day culminate in the violation of a Bell inequality as well. In this case, the nonclassical character of correlations will also defy a description via a local hidden variable theory [4,29]. Nonoptical violations of Bell's inequalities have so far only been demonstrated for *pairs* of massive particles (such as two trapped ions [30] or proton-proton pairs in the decay of  ${}^2\text{He}$  [31]), but never in the multiparticle regime. The BEC collision scheme used here is particularly well-suited for demonstrating a Bell inequality violation [32] using an atom optics analog of the Rarity-Tapster setup [33].

We thank P. Ziń and T. Wasak for useful discussions. K. V. K. is supported by the ARC FT100100285 grant, P. D. by Polish Government research grants for the years 2010–2013 and the EU contract PERG06-GA-2009-256291, J. R. by the DGA, R. L. by the FCT SFRH/BD/74352/2010, and support for the experimental work comes from the IFRAF program, the Triangle de la Physique, and the ANR grants DESINA and ProQuP.

\*Current address: Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Cambridge, MA 02138, USA.

†Current address: Agilent Laboratories, Santa Clara, CA 95051, USA.

- [1] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004).
- [2] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [3] M. D. Reid and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **34**, 1260 (1986).
- [4] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 2008), 2nd ed.
- [5] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [6] J. F. Clauser, *Phys. Rev. D* **9**, 853 (1974).



- [7] X. Zou, L. J. Wang, and L. Mandel, *Opt. Commun.* **84**, 351 (1991).
- [8] A. M. Marino, V. Boyer, and P. D. Lett, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 233601 (2008).
- [9] A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 150405 (2007).
- [10] A. Perrin, C. M. Savage, D. Boiron, V. Krachmalnicoff, C. I. Westbrook, and K. V. Kheruntsyan, *New J. Phys.* **10**, 045021 (2008).
- [11] J.-C. Jaskula, M. Bonneau, G. B. Partridge, V. Krachmalnicoff, P. Deuar, K. V. Kheruntsyan, A. Aspect, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190402 (2010).
- [12] G. B. Partridge, J.-C. Jaskula, M. Bonneau, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. A* **81**, 053631 (2010).
- [13] W. Vassen, C. Cohen-Tannoudji, M. Leduc, D. Boiron, C. I. Westbrook, A. Truscott, K. Baldwin, G. Birkl, P. Cancio, and M. Trippenbach, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 175 (2012).
- [14] J. Estève, C. Gross, A. Weller, S. Giovanazzi, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **455**, 1216 (2008).
- [15] C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Estève, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **464**, 1165 (2010).
- [16] M. F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. W. Hänsch, A. Sinatra, and P. Treutlein, *Nature (London)* **464**, 1170 (2010).
- [17] R. Bücker, J. Grond, S. Manz, T. Berrada, T. Betz, C. Koller, U. Hohenester, T. Schumm, A. Perrin, and J. Schmiedmayer, *Nature Phys.* **7**, 608 (2011).
- [18] B. Lücke, M. Scherer, J. Kruse, L. Pezzé, F. Deuretzbacher, P. Hyllus, O. Topic, J. Peise, W. Ertmer, J. Arlt, L. Santos, A. Smerzi, and C. Klempt, *Science* **334**, 773 (2011).
- [19] E. M. Bookjans, C. D. Hamley, and M. S. Chapman, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 210406 (2011).
- [20] V. Krachmalnicoff, J.-C. Jaskula, M. Bonneau, V. Leung, G. B. Partridge, D. Boiron, C. I. Westbrook, P. Deuar, P. Ziń, M. Trippenbach, and K. V. Kheruntsyan, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 150402 (2010).
- [21] See Supplementary Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.108.260401> for a more detailed discussion of correlation functions, the correlation coefficient  $C$ , and simulation methods.
- [22] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Science* **310**, 648 (2005).
- [23] S. S. Hodgman, R. G. Dall, A. G. Manning, K. G. H. Baldwin, and A. G. Truscott, *Science* **331**, 1046 (2011).
- [24] K. Mølmer, A. Perrin, V. Krachmalnicoff, V. Leung, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. A* **77**, 033601 (2008).
- [25] M. Ögren and K. V. Kheruntsyan, *Phys. Rev. A* **79**, 021606 (2009).
- [26] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).
- [27] P. Deuar *et al.* (to be published).
- [28] P. Deuar, J. Chwedeńczuk, M. Trippenbach, and P. Ziń, *Phys. Rev. A* **83**, 063625 (2011).
- [29] C. Su and K. Wódkiewicz, *Phys. Rev. A* **44**, 6097 (1991).
- [30] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, *Nature (London)* **409**, 791 (2001).
- [31] H. Sakai *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150405 (2006).
- [32] R. Lewis-Swan and K. V. Kheruntsyan (to be published).
- [33] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).

**Violation of the Cauchy-Schwarz inequality with matter waves**

 K. V. Kheruntsyan,\* J.-C. Jaskula, P. Deuar, M. Bonneau, G. B. Partridge,  
 J. Ruadel, R. Lopes, D. Boiron, and C. I. Westbrook

\*To whom correspondence should be addressed; E-mail: karen.kheruntsyan@uq.edu.au

**Definitions of correlation functions.** The second-order correlation function  $\mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  between the particle number densities at two points in momentum space is defined as

$$g^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \langle : \hat{n}(\mathbf{k}) \hat{n}(\mathbf{k}') : \rangle = \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{a}(\mathbf{k}') \hat{a}(\mathbf{k}) \rangle. \quad (\text{S1})$$

Here,  $\hat{a}(\mathbf{k})$  is the Fourier transform of the atomic field annihilation operator  $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$ , and  $\hat{n}(\mathbf{k}) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k})$  is the density operator corresponding to the atomic momentum distribution (with  $\mathbf{k}$  denoting the wave-vector  $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$ ).

The normalized correlation functions shown in Fig. 2 of the main text are defined as

$$g_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = \mathcal{G}_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) / \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{k} \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \rangle \langle \hat{n}(-\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \rangle, \quad (\text{S2})$$

and

$$g_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = \mathcal{G}_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) / \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{k} \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \rangle \langle \hat{n}(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \rangle. \quad (\text{S3})$$

The normalization ensures that for uncorrelated densities  $g_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = 1$  and  $g_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = 1$ .

These functions are shown in Fig. 2 of the main text. The widths and amplitudes of the BB and CL correlation functions are measured using Gaussian fits to their cuts through the centre of the 2D surface plots along the  $k_z$  and  $k_{xy}$  axis; the fits and the data are shown in Fig. S1 (same data as in Fig. 2 of the main text but with error bars).

**CS violation and correlation widths.** A fair understanding of the dependence of the multimode CS violation  $C$  on the correlation functions can be gained from a simple model, which is readily related to the experimental data. Let us make several assumptions: (A) a Gaussian shape for the normalized correlation functions (those shown in Fig. 2 of the main text):

$$g_{\text{CL/BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = 1 + h_{\text{CL/BB}} \prod_d e^{-\Delta k_d^2 / 2\sigma_{\text{CL/BB},d}^2}, \quad (\text{S4})$$

where  $CL$  and  $BB$  are the two kinds of correlations, the index  $d = x, y, z$  runs over spatial directions,  $\sigma_{\text{CL/BB},d}$  are standard deviations (correlation lengths, in wave-number units) of the correlation peak, and  $h_{\text{CL/BB}}$  are the peak heights above the background level of unity. Let us further assume (B) that the counting zones  $\mathcal{V}_i$  are much broader than the relevant correlation lengths in all directions. This allows us to neglect boundary effects caused by atom pairs in which one member

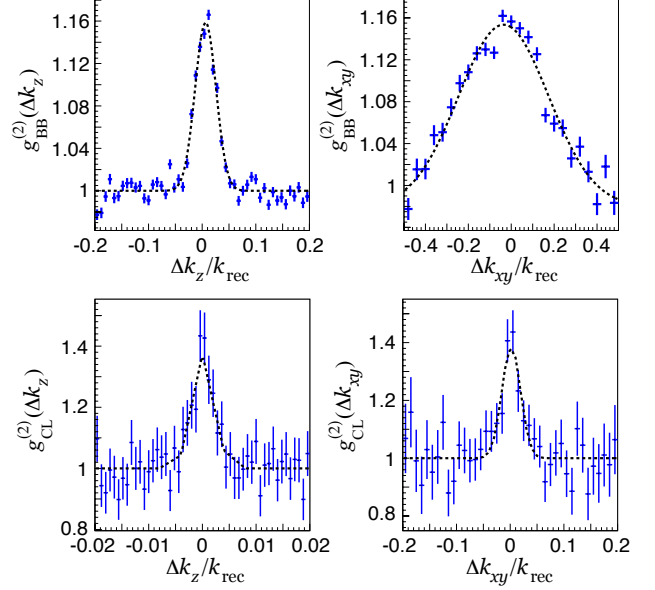


Figure S1. Central cuts of the BB and CL correlation functions,  $g_{\text{BB}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k})$  and  $g_{\text{CL}}^{(2)}(\Delta\mathbf{k})$ , along the  $k_z$  and  $k_{xy}$  axis.

lies just inside the zone and the other just outside [1]. Finally, for simplicity we assume (C) that the halo density in the relevant regions is constant:  $\langle \hat{n}(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \rangle = \bar{n}$ , and (D) that the two counting zones have the same widths in each direction  $d$ , hence the same overall momentum-space volumes  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \equiv \mathcal{V}$ .

With these assumptions, the integrated correlation functions are

$$\bar{\mathcal{G}}_{ii}^{(2)} \approx \bar{n}^2 \mathcal{V} \left\{ \mathcal{V} + h_{\text{CL}} (2\pi)^{3/2} \prod_d \sigma_{\text{CL},d} \right\} \quad (\text{S5})$$

( $i = 1, 2$ ) and

$$\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} \approx \bar{n}^2 \mathcal{V} \left\{ \mathcal{V} + h_{\text{BB}} (2\pi)^{3/2} \prod_d \sigma_{\text{BB},d} \right\}, \quad (\text{S6})$$

where the counting zones  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  are non-overlapping. Taking the widths of the counting zones  $\mathcal{V}$  as  $L_d$ , the next order corrections are  $\sim \mathcal{O}(\sum_d \frac{\sigma_{\text{CL/BB},d}}{L_d})$  with respect to the terms proportional to  $h_{\text{CL/BB}}$ , and so are negligible due to our assumption (B).

It is useful to define an effective geometric mean correlation width

$$\bar{\sigma}_{\text{CL/BB}}^3 = \prod_d \sigma_{\text{CL/BB},d}. \quad (\text{S7})$$

The large counting volume assumption (B) means  $\bar{\sigma}_{\text{CL/BB}}/\mathcal{V}^{1/3} \ll 1$ , and taking leading order terms in this small parameter, we use Eqs. (S5–S6) to obtain an estimate for the CS violation between opposite zones:

$$C \approx 1 + \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mathcal{V}} [h_{\text{BB}} \bar{\sigma}_{\text{BB}}^3 - h_{\text{CL}} \bar{\sigma}_{\text{CL}}^3]. \quad (\text{S8})$$

Now it is clear that nonclassical measurements ( $C > 1$ ) can still occur for a back-to-back correlation peak lower than the collinear one, provided that the coherence volume for the back-to-back pairs is correspondingly larger and that it still fits inside our counting volumes  $\mathcal{V}$ . Expression (S8) also hints that a maximally large CS violation will occur when the counting volumes are of about the same size as the coherence volumes, since the excursion above one is proportional to the ratios  $\bar{\sigma}_{\text{CL/BB}}^3/\mathcal{V}$ .

**CS violation and the number of zones  $M$ .** To apply the above model to our experiment, we take the radial ( $r$ ) width of the counting zone  $L_r$  to be approximately equal to the width  $w_r$  of the scattering sphere in the radial direction,  $L_r \approx w_r$ . Also, the zone size is  $L_z = k_{\text{rec}}/8$  in the longitudinal  $z$  direction (where we recall that the analyzed part of the scattering sphere corresponds to  $|k_z| < 0.5k_{\text{rec}}$ , which is further cut into 8 polar zones), and  $L_c \approx 2\pi k_{\text{rec}}/(M/8)$  along the circumference of the ring in the  $xy$  plane. With this,

$$C \approx 1 + M \frac{\sqrt{2\pi}}{w_r k_{\text{rec}}^2} [h_{\text{BB}} \bar{\sigma}_{\text{BB}}^3 - h_{\text{CL}} \bar{\sigma}_{\text{CL}}^3] \quad (\text{S9})$$

This is a linear growth with  $M$ .

The width of a single zone along the circumference,  $L_c$ , becomes comparable with, or narrower than, the measured correlation width  $\sigma_{\text{BB},xy} \approx 0.21k_{\text{rec}}$  when  $M \gtrsim 150$ . This is indeed when we start to see a deviation from the linear behaviour in Fig. 3 of the main text.

For large  $M$ , the zones are narrow along the circumference, so that the broad zone assumption (B) does not hold, and variation of  $\Delta\mathbf{k}$  along this direction does not change the correlation from its peak value. If one carries out the calculation again, but with an alternative assumption (B') that the counting zone is now much narrower than the correlation widths  $\sigma_{\text{CL/BB},d}$ , the estimate of  $C$  becomes

$$C \approx 1 + \frac{32\pi}{w_r k_{\text{rec}}} [h_{\text{BB}} \sigma_{\text{BB},z} \sigma_{\text{BB},xy} - h_{\text{CL}} \sigma_{\text{CL},z} \sigma_{\text{CL},xy}], \quad (\text{S10})$$

which amounts to a replacement of one set of Gaussian widths  $\sigma_{\text{CL/BB},xy}$  by  $L_c/\sqrt{2\pi}$ . The correlation coefficient  $C$  reaches a saturation value that does not depend on  $M$  at all, but may be larger or smaller than unity, depending on how the widths

and heights play out. In our case it is still a violation, with  $C > 1$ .

If the zones  $\mathcal{V}$  were made narrower in all directions than the corresponding correlation widths, we would recover the two-mode expression

$$C \approx \frac{h_{\text{BB}} + 1}{h_{\text{CL}} + 1}. \quad (\text{S11})$$

In our case, since  $h_{\text{BB}} < h_{\text{CL}}$ , this would not be a CS violation anymore.

Finally, when one considers non-opposite zones, such as the lower experimental data in Fig. 3 of the main text, the value of  $h_{\text{BB}}$  tends to zero as there is no pairing. In this case, the expressions (S9) and (S10) show that  $C$  will lie always slightly below unity for large counting zones. For the small-counting-zone limit,  $C \rightarrow 1/g_{\text{CL}}^{(2)}(0)$ . In neither case can there be CS violation.

**Stochastic Bogoliubov simulations.** The theoretical results shown in Fig. 3 of the main text come from numerical simulations using the positive- $P$  Bogoliubov method, which is described in detail in Ref. [2]. It was used previously for our experiment in Refs. [1, 3]. In a nutshell, we evolve the system in a time-dependent Bogoliubov approximation, taking the condensate part at time  $t$  as the solution of the Gross-Pitaevskii mean field evolution equation for the colliding condensates. The numerical lattice required to describe this model is too large for a direct solution of the Bogoliubov-de Gennes equations to be tractable, so the fluctuation field (which is responsible for the scattered halo) is represented instead using the positive- $P$  representation. This leads to coupled linear stochastic differential equations which can be integrated numerically. The ensemble of such stochastic realisations corresponds to the full Bogoliubov dynamics, and allows one to estimate observables to within a well defined statistical accuracy.

Simulations were carried out for a collision of metastable  $^4\text{He}^*$  atoms in the  $m_F = 0$  state (with the  $s$ -wave scattering length of  $a = 5.3$  nm) for several initial total number of atoms,  $N = 50\,000$ ,  $85\,000$ , and  $110\,000$  (the actual value in the experiment fluctuates from shot to shot in the vicinity of  $\sim 10^5$ ). The atoms were assumed to be trapped initially in the  $m_F = 1$  state in a harmonic trapping potential with frequencies  $\omega_z/2\pi = 7.5$  Hz and  $\omega_x/2\pi = \omega_y/2\pi = 1500$  Hz.

To begin with, several initial states were tried: a zero-temperature ( $T = 0$ ) Bose-Einstein condensate (BEC), and  $T > 0$  quasicondensates in elongated 3D traps with phase coherence lengths of  $l_\phi = 45$   $\mu\text{m}$  and  $l_\phi = 100$   $\mu\text{m}$  (taken as a half-width-at-half-maximum of the first-order correlation function  $g^{(1)}(0, z)$  from the center of the trap in the longitudinal direction), which are in the range expected for the cloud in the experiment. For comparison, the longitudinal size of the initial cloud along  $z$  is about  $980$   $\mu\text{m}$ .

The magnitude of the calculated  $C$  at long times differed by at most 0.007 between the simulations with quasicondensate and BEC initial conditions (see Fig. S2). Since this is a

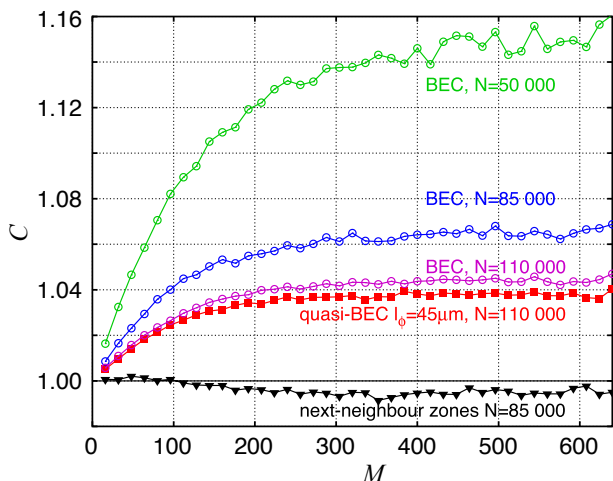


Figure S2. Calculated correlation coefficient  $C$  as a function of the number of zones  $M$  at the end of the simulation ( $t = 186 \mu\text{s}$  for the  $N = 110\,000$  atom simulations,  $248 \mu\text{s}$  for the others). Circles are for  $C$  between opposite zones and BEC initial conditions; squares similarly, but with a quasicondensate initial condition having the shortest phase coherence length  $l_\phi = 45 \mu\text{m}$ . Filled triangles show  $C$  between next-neighbour zones, which do not violate the CS inequality ( $C < 1$ ), as expected. One sees that the value of  $C$  depends strongly on  $N$ , while its shape as a function of  $M$  is almost unchanged.

very small effect on  $C$  in comparison with the effect of particle number (or in comparison with the effect on the shape of correlation functions), we will consider mainly the BEC initial conditions in what follows. The simulation of quasicondensates with a Bogoliubov description, in which the initial  $T > 0$  states were based on the description of Petrov *et al.* [4] for elongated 3D clouds, will be described in a future work [5].

**Theoretical predictions for  $C$ .** The simulation data in Fig. 3 of the main text are for a time of  $248 \mu\text{s}$  after the start of the collision with  $85\,000$  atoms, which we regard as the best-fit value of  $N$ .

The values of the correlation coefficient at the end of simulations for various atom numbers and initial conditions are shown in Fig. S2. The time evolution of its saturation value at large  $M$  [i.e., small counting volumes as per Eq. (S10)] is shown in Fig. S3(b), along with the time evolution of the overall number of scattered atoms [Fig. S3(a)]. It is seen that the magnitude of  $C$  depends strongly on the initial number of atoms  $N$ , while its shape as a function of  $M$  remains almost unchanged. In particular, small  $N$  and hence small number of scattered particles in the halo,  $N_{sc}$  [see Fig. S3(a)] correspond to large values of  $C$  for a given counting zone size. This can be roughly understood from a simple two-mode model of standard spontaneous parametric down-conversion in the undepleted pump approximation [6], with a Hamiltonian  $\hat{H} \sim \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \text{h.c.}$  that produces atom pairs in the  $a_1$  and

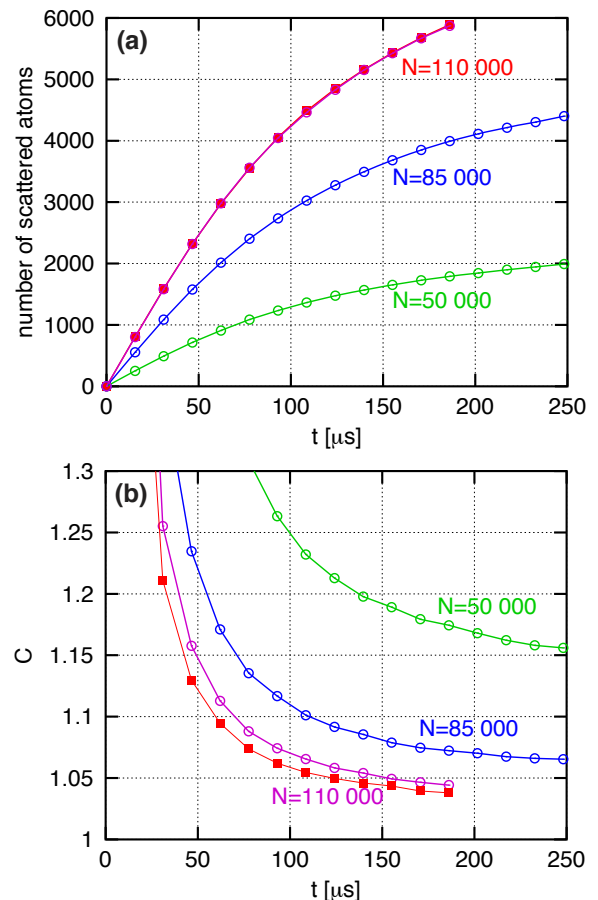


Figure S3. Calculated time evolution. Panel (a) shows the number of scattered atoms as a function of time for various initial atom numbers  $N$ . Panel (b) shows the saturation mean value of  $C$  at large  $M$  between opposite zones – the value is averaged over  $M \geq 400$ . In both panels, circles are for BEC initial conditions, squares for the  $l_\phi = 45 \mu\text{m}$  quasicondensate as in Fig. S2. The  $C(M)$  data in Fig. 3 of the main text and in Fig. S2 here are for the last times shown here. One sees that at that moment  $C$  has already achieved its long-time value, or is very close to it.

$a_2$  modes. This is a process similar to the one that occurs during our condensate collision. In this toy model, the BB correlation analogue is  $g_{12}^{(2)} = 2 + 1/n$  [7], where  $n$  is the mean particle number in modes  $a_1$  and  $a_2$  ( $n_1 = n_2 \equiv n$ ), and the CL correlation analogue is  $g_{11}^{(2)} = g_{22}^{(2)} = 2$ . Hence,  $C \approx 1 + 1/2n$  in this model, showing a similar scaling with atom number to our simulations. Resorting to this toy model is done only for qualitative understanding of the scaling of  $C$  with  $N_{sc}$  and hence with the number of atoms in a given counting zone. The quantitative aspects of the model, however, are too crude to be applicable to our system due to the rapid changes in the “pump” (source condensate) density profile, which is in sharp contrast to the undepleted, i.e., *constant* in time, pump approximation.

The experimental values in Fig. 3 of the main text come from an average over many realizations with different atom

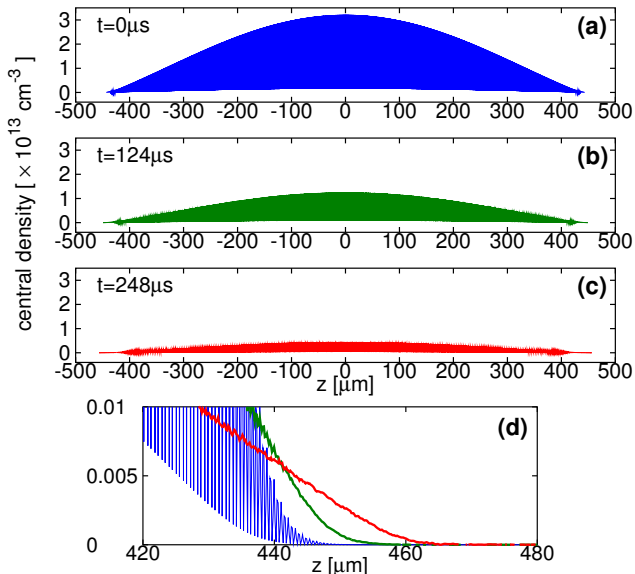


Figure S4. Central density along  $z$  (at  $x = y = 0$ ) of the two colliding condensates, for the total initial number of atoms  $N = 85,000$ , shown at three different times:  $t = 0$  – (a),  $t = 124 \mu\text{s}$  – (b), and  $t = 248 \mu\text{s}$  – (c). The overlap region includes the interference fringes, which are, however, not visible on this scale due to the high frequency of the modulation. As we see, the peak density at  $t = 248 \mu\text{s}$  is reduced by a factor of  $\sim 7$  due to the rapid expansion of the condensates in the transverse dimensions, which is the main reason for the collision to cease. Panel (d) shows detail at the cloud edges.

numbers  $N$  from shot to shot. However, the contribution of small-atom-number shots (which would have a high magnitude of  $C$ , and poor signal-to-noise) to the atom-number fluctuations that go into the calculation of  $C$  is small. Taking this into account, and noting that  $N \approx 85,000$  is the most typical value, best agreement between this value and experiment is very reasonable.

The time evolution in Fig. S3 shows that, at the final simulation times shown in Fig. 3 of the main text and Fig. S3 here, the correlation coefficient  $C$  is already at, or very close to, its long-time value. The maximum simulation time is the result of a trade-off between computational efficiency and accuracy — the size of the numerical grid required to encompass the clouds grows rapidly with longer times. Even though our maximum simulation time is appreciably shorter than the time it takes for the clouds to move completely past each other along  $z$  (about 5 ms), the production of halo particles is already strongly saturating by the end of the simulation [see Fig. S3(a)]. This is due to a rapid loss of central density of the colliding source BECs because of their expansion perpendicular to the long (collision) axis. In other words, the end of collision and the saturation in the number of scattered atoms in Fig. S3(a) is determined not by a geometric consideration (i.e., a complete spatial separation of the colliding BECs along  $z$ ), but by the rapid loss of peak density (see Fig. S4) due to the expansion in the transverse direction. The pair production rate is roughly proportional to the integral of density squared

[8], which is the reason for the premature cessation of particle scattering, and allows relatively short simulation times to be considered adequate.

**Cauchy-Schwarz inequality and sub-Poissonian number imbalance.** The strength of correlation between the atom number fluctuations in two diametrically opposite zones on the collision halo can also be characterised via a normalised variance [1]

$$V = \frac{\langle [\Delta(\hat{N}_1 - \hat{N}_2)]^2 \rangle}{\langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle}, \quad (\text{S12})$$

which can be rewritten in terms of the second-order correlation functions,

$$V = 1 + \frac{\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} + \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)} - 2\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} - (\langle \hat{N}_1 \rangle - \langle \hat{N}_2 \rangle)^2}{\langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle}. \quad (\text{S13})$$

The variance is normalised to the level of uncorrelated, Poissonian fluctuations and  $V < 1$  implies sub-Poissonian statistics of the relative number imbalance. From this we see that the relationship between sub-Poissonian number imbalance and the violation of the CS inequality is especially transparent in the symmetric case of  $\langle \hat{N}_1 \rangle = \langle \hat{N}_2 \rangle$ , in which case stronger-than-classical correlation,  $\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} > [\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)}\bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}]^{1/2}$  (in the sense of CS violation), follows from  $V < 1$  and hence represents a necessary condition for sub-Poissonian statistics. This last assertion follows from the fact that, if  $V < 1$  and  $\langle \hat{N}_1 \rangle = \langle \hat{N}_2 \rangle$ , then one must have  $\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} > \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} + \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)})$ , where  $\frac{1}{2}(\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} + \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}) \geq [\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)}\bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}]^{1/2}$ , and therefore  $\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} \geq [\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)}\bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}]^{1/2}$ . The opposite is, however, not true in general, because having  $\bar{\mathcal{G}}_{12}^{(2)} > [\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)}\bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}]^{1/2}$  does not necessarily guarantee  $V < 1$ , unless  $\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} = \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}$ . Thus, violation of the CS inequality and sub-Poissonian number imbalance are equivalent only in the completely symmetric case of  $\langle \hat{N}_1 \rangle = \langle \hat{N}_2 \rangle$  and  $\bar{\mathcal{G}}_{11}^{(2)} = \bar{\mathcal{G}}_{22}^{(2)}$ .

We emphasise, however, that the equivalence of the CS violation and the relative number imbalance in the symmetric case (or the expected ‘approximate equivalence’ in the nearly symmetric case, as is the case in our experiment) is only of qualitative nature. The quantitative relationship between the *strength* of the CS violation and the *degree* of suppression of  $V$  below the Poissonian level of fluctuations can, on the other hand, be very different if we analyse these as functions of the zone size or the number of zones  $M$  into which we cut the scattering halo. Indeed, as was demonstrated in Ref. [1], strong suppression of  $V$  below unity is observed for the broader zones (see Fig. 3 of [1]) – a situation in which the CS inequality is only marginally violated as seen from Fig. 3 of the main text at small  $M$ . Conversely, the CS inequality is maximally violated for large  $M$  (smaller zone sizes), in which case the variance  $V$  is almost indistinguishable from the Poissonian shot-noise level of  $V = 1$ . This difference highlights

the importance of quantifying any particular type of quantum correlations in an operationally defined manner.

- 
- [1] J.-C. Jaskula, M. Bonneau, G. B. Partridge, V. Krachmalnicoff, P. Deuar, K. V. Kheruntsyan, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, Phys. Rev. Lett. **105**, 190402 (2010).
- [2] P. Deuar, J. Chwedeńczuk, M. Trippenbach, and P. Ziń, Phys. Rev. A **83**, 063625 (2011).
- [3] V. Krachmalnicoff, J.-C. Jaskula, M. Bonneau, V. Leung, G. B. Partridge, D. Boiron, C. I. Westbrook, P. Deuar, P. Ziń, M. Trippenbach, and K. V. Kheruntsyan, Phys. Rev. Lett. **104**, 150402 (2010).
- [4] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **87**, 050404 (2001).
- [5] P. Deuar *et al.*, in preparation.
- [6] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 2008).
- [7] C. M. Savage, P. E. Schwenn, and K. V. Kheruntsyan, Phys. Rev. A **74**, 033620 (2006).
- [8] A. Perrin, C. M. Savage, D. Boiron, V. Krachmalnicoff, C. I. Westbrook, and K. V. Kheruntsyan, New J. Phys. **10**, 045021 (2008).





## Acoustic Analog to the Dynamical Casimir Effect in a Bose-Einstein Condensate

J.-C. Jaskula,<sup>\*</sup> G. B. Partridge,<sup>†</sup> M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruadel, D. Boiron, and C. I. Westbrook

*Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Sud, 2 avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau, France*

(Received 5 July 2012; published 26 November 2012)

We have modulated the density of a trapped Bose-Einstein condensate by changing the trap stiffness, thereby modulating the speed of sound. We observe the creation of correlated excitations with equal and opposite momenta, and show that for a well-defined modulation frequency, the frequency of the excitations is half that of the trap modulation frequency.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.220401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.220401)

PACS numbers: 03.75.Kk, 42.50.Lc, 67.10.Jn

Although we often picture the quantum vacuum as containing virtual quanta whose observable effects are only indirect, it is a remarkable prediction of quantum field theory that the vacuum can generate real particles when boundary conditions are suddenly changed [1–4]. Known as the dynamical Casimir effect, a cavity with accelerating boundaries generates photon pairs. Recent experiments have demonstrated this effect in the microwave regime using superconducting circuits [5,6]. Hawking radiation [7] is another situation characterized by spontaneous pair creation and work on sonic analogs to the Hawking problem [8] has led to the realization that Bose-Einstein condensates (BEC) are attractive candidates to study such analog models [9–11], because their low temperatures promise to reveal quantum effects. Here we exhibit an acoustic analog to the dynamical Casimir effect by modulating the speed of sound in a BEC. We show that correlated pairs of elementary excitations, both phononlike and particlelike, are produced, in a process that formally resembles parametric down-conversion [4,12].

The first analyses of the dynamical Casimir effect considered moving mirrors, but it has been suggested that a changing index of refraction could mimic the effect [13,14]. Our experiment is motivated by a suggestion in Ref. [12] that one can realize an acoustic analog to the dynamical Casimir effect by changing the scattering length in an interacting Bose gas. The change in the interaction strength is analogous to an optical index change: the speed of sound (or light) changes. Seen in a more microscopic way, the ground state of such a gas is the vacuum of Bogoliubov quasiparticles whose makeup is interaction dependent. Changing the interaction strength projects this old vacuum onto a new state containing pairs of the new quasiparticles [12], which appear as pairwise excitations. Instead of changing the interaction strength, we have simply modified the confining potential, which in turn changes the density. Sudden changes such as these have also been suggested as analogs to cosmological phenomena [15–17].

We study two situations, in the first the confining potential is suddenly increased and in the second the potential is modulated sinusoidally. The sinusoidal modulation of the trapping potential was studied in Refs. [18–20] in the

context of the observation of Faraday waves. Our results on sinusoidal modulation are similar to this work and we have extended it to observe correlated pairs of Bogoliubov excitations. We produce these excitations in both the phonon and particle regimes, and observe correlations in momentum space. Parametric excitation of a quantum gas was also studied in optical lattices in which the optical lattice depth was modulated [21,22], although in that experiment, the excitation was observed as a broadening of a momentum distribution.

The experimental apparatus is the same as that described in Refs. [23,24] and is shown schematically in Fig. 1(a). We start from a BEC of approximately  $10^5$  metastable helium ( $\text{He}^*$ ) atoms evaporatively cooled in a vertical optical trap to a temperature of about 200 nK. The trapped cloud is cigar shaped with axial and radial frequencies of 7 and 1500 Hz. In the first experiment we raise the trapping laser intensity by a factor of 2 with a time constant of 50  $\mu\text{s}$  using an acousto-optic modulator [see inset to Fig. 1(b)]. The trap frequencies thus increase by  $\sqrt{2}$ . The compressed BEC is held for 30 ms before the trap laser is switched off (in less than 10  $\mu\text{s}$ ). The cloud falls onto a position sensitive, single atom detector which allows us to measure the atom velocities [25]. After compression, the gas is excited principally in the vertical direction: transversely we only observe a slight heating (about 100 nK). Figure 1(b) shows a single shot distribution of vertical atom velocities relative to the center of mass and integrated horizontally, while Fig. 1(c) shows the same distribution averaged over 50 shots. These distributions are more than 1 order of magnitude wider than that of an unaffected BEC. The individual shots show a complex structure which is not reproduced from shot to shot, as is seen from the washing out of the peaks upon averaging.

We consider the correlations between atoms with vertical velocities  $v_z$  and  $v'_z$ , by constructing a normalized second-order correlation function,  $g^{(2)}(v_z, v'_z)$  [25], averaged over the  $x$ - $y$  plane and shown in Fig. 2(a). The plot exhibits two noticeable features along the  $v'_z = v_z$  and  $v'_z = -v_z$  diagonals. The former reflects the fluctuations in the momentum distribution, as in the Hanbury Brown–Twiss effect [26], except that this cloud is far from thermal



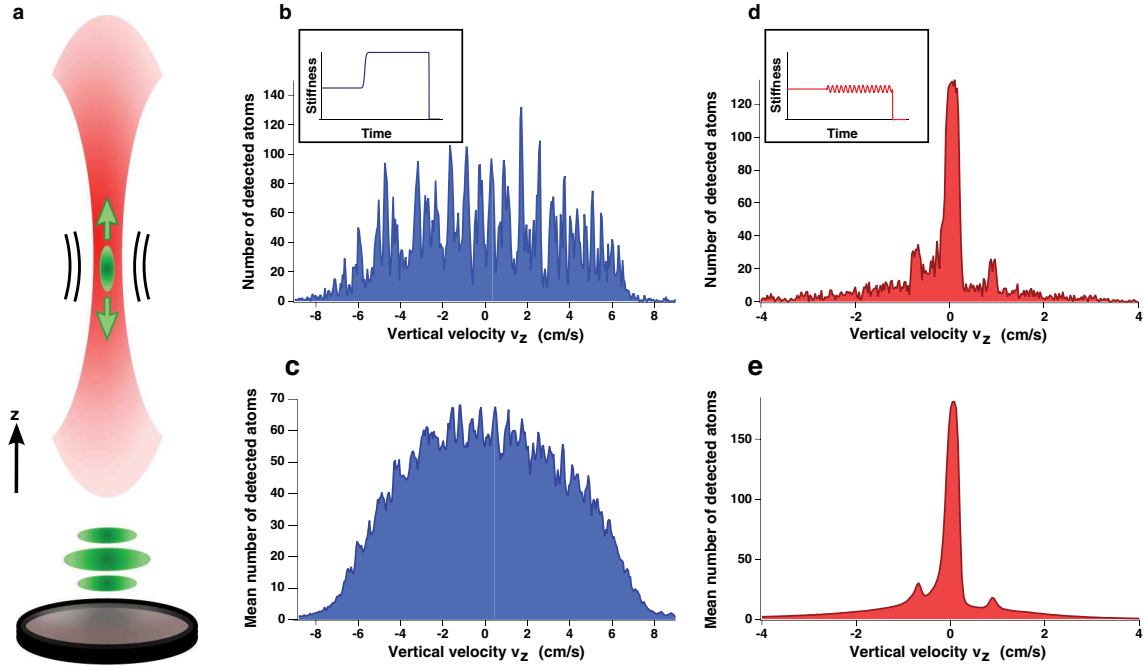


FIG. 1 (color online). Effects of time-varying potentials. (a) Schematic view of the experiment. Pairs of Bogoliubov quasiparticles are created by varying the trap stiffness. After the flight to the detector these excitations appear as a broadening or sidebands on the atom cloud in the vertical ( $z$ ) direction. In the following plots we convert arrival times to relative velocities and average over the transverse dimensions. (b) Single shot velocity distribution for a cloud which was subjected to a sudden increase in the trap stiffness. The inset shows the time evolution of the trap stiffness. (c) As in (b) but averaged over 50 shots. (d) Single shot velocity distribution for a cloud which was subjected to a weak, sinusoidal modulation of the trap stiffness at 2.17 kHz. The inset shows the time evolution of the trap stiffness. (e) As in (d) but averaged over 780 shots.

equilibrium. The  $v'_z = -v_z$  correlation is a clear signature of a correlation between quasiparticles of opposite velocities. A projection of this off-diagonal correlation is shown in Fig. 2(b). At low momentum, the excitations created by the perturbation are density waves (phonons) which in general consist of superpositions of several atoms traveling in opposite directions. In the conditions of our clouds, a phonon is adiabatically converted into a single atom of the same momentum during the release by a process referred to as “phonon evaporation” [27]. Therefore in the phonon regime as well as in the particle regime, we interpret the back-to-back correlation in Fig. 2(a) as the production of pairs of Bogoliubov excitations with oppositely directed momenta as predicted in the acoustic dynamical Casimir effect analysis [12].

To further study this process, we replace the compression by a sinusoidal modulation of the laser intensity  $I(t) = I_0(1 + \delta \cos \omega_m t)$  [inset of Fig. 1(d)]. We choose  $\delta$  such that the trap frequencies are modulated peak to peak by about 10%. The modulation is applied for 25 ms before releasing the condensate. Figures 1(d) and 1(e) show, respectively, single shot and averaged momentum distributions resulting from the modulation. One sees that the momentum distribution develops sidebands, approximately symmetrically placed about the center. Figure 3(a) shows the normalized correlation function, plotted in the

same way as in Fig. 2(a), for a modulation frequency  $\omega_m/2\pi = 2170$  Hz. We again observe antidiagonal correlations as for a sudden excitation except that the correlations now appear at a well-defined velocity, which coincides with that of the sidebands [see Fig. 3(b)].

We have examined sinusoidal modulation for frequencies  $\omega_m/2\pi$  between 900 and 5000 Hz and observed excitations similar to those in Fig. 3. We summarize our observations in Fig. 4(a) in which we plot the excitation frequency as a function of the sideband velocity. We also plot the locations of the peaks in the correlation functions on the same graph. For modulation frequencies much above 2 kHz, the antidiagonal correlation functions are quite noisy preventing us from clearly identifying correlation peaks. This noise may have to do with the proximity of the parametric resonance with the transverse trap frequency ( $\sim 3$  kHz) [19].

A weakly interacting quantum gas obeys the well-known Bogoliubov–de Gennes dispersion relation between the frequency  $\omega_{\mathbf{k}}$  and wave vector  $k$ :

$$\omega_{\mathbf{k}} = \alpha \sqrt{c^2 k^2 + \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}, \quad (1)$$

with  $\alpha = 1$  and  $c$ , the sound velocity. This relation describes both phonons (long wavelength excitations)

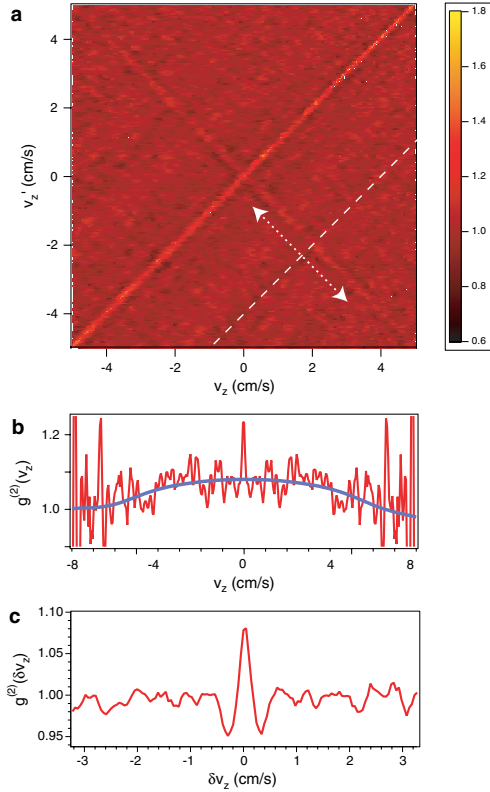


FIG. 2 (color online). Density correlations after a sudden compression. (a) Normalized correlation function  $g^{(2)}(v_z, v'_z)$  of the data in Fig. 1(c) (50 shot average). The signal on the diagonal results from the density fluctuations in the cloud. The antidiagonal line indicates the creation of correlated quasiparticles with opposite momenta, and is the signature of the dynamical Casimir effect. (b) Antidiagonal correlation function  $g^{(2)}(v_z, v'_z = -v_z)$ . The smooth line shows the result of smoothing the data over a window of about 1 cm/s. The correlations apparently persist over a scale comparable to that of the density distribution. (c) Correlation function along the dashed line and integrated over a region indicated by the dotted arrows, as a function of  $\delta v_z = v'_z - v_z$ . The dips on either side of the peak may be related to the effect reported in [32].

whose dispersion is linear and free particles, whose dispersion is quadratic. If our observation indeed corresponds to the creation of pairs, we expect the total excitation energy to be shared between the two excitations. Momentum conservation, on the other hand, requires that the two energies be equal, implying  $\omega_m = 2\omega_k$ . Therefore the relation between the modulation frequency and the sideband velocity should also be given by Eq. (1) but with  $\alpha = 2$  and  $k = mv_z/\hbar$ . Fitting the points in Fig. 4(a) to (1) with  $\alpha$  and  $c$  as free parameters, we obtain  $\alpha = 2.2 \pm 0.3$ . The fitted sound velocity,  $8 \pm 3$  mm/s, is consistent with the value one can calculate from the trap parameters and the estimated number of atoms [25].

We can further corroborate our interpretation of pairwise excitations by a method more direct and robust than the 2

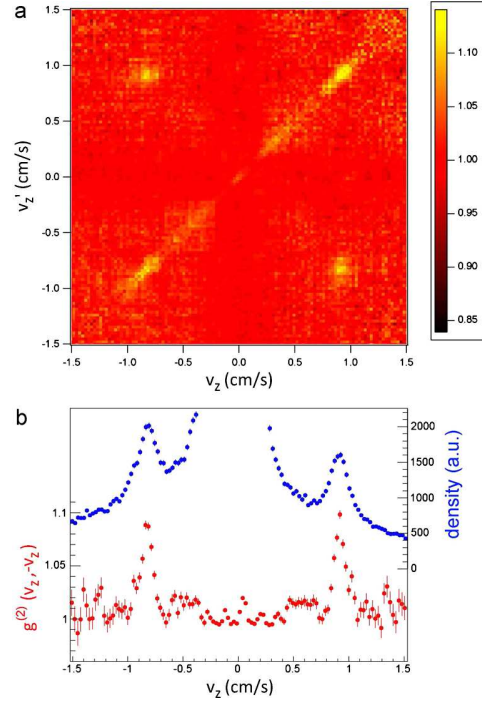


FIG. 3 (color online). Density correlations after a periodic modulation. (a) Normalized correlation function  $g^{(2)}(v_z, v'_z)$  measured after sinusoidal modulation of the trap frequency at a frequency  $\omega_m/2\pi = 2.17$  kHz, averaging over 243 experimental shots. We observe a strong correlation between well-defined, oppositely directed velocities. (b) Plot of the density distribution (blue) and of the antidiagonal velocity correlation function,  $g^{(2)}(v_z, v'_z = -v_z)$  (red).

parameter fit to the data in Fig. 4(a). In Fig. 4(b), we compare the dispersion relation resulting from modulation with that obtained by Bragg scattering. Bragg scattering produces single excitations of quasiparticles at a definite energy and momentum [28]. We excited the BEC with two lasers in the Bragg configuration to determine the frequency for a given  $k$  vector [25]. Then, under the same experimental conditions, using sinusoidal trap laser modulation, we excited the BEC at various frequencies and found the corresponding velocities. The lower curve in Fig. 4(b) is a fit to the Bragg data in which we fix  $\alpha = 1$  and fit the speed of sound. The upper curve is a fit to the trap modulation data in which we set the speed of sound to that found in the first fit and we allowed  $\alpha$  to vary. This second fit yields  $\alpha = 2.07 \pm 0.2$ . The fitted speed of sound for this data set (about 13 mm/s) is higher than in the data of Fig. 4(a), because during these runs the number of atoms in the condensate was larger.

An even more dramatic confirmation of our interpretation would be the observation of sub-Poissonian intensity differences in the two sidebands, as was observed in the experiment of Ref. [5], as well as in Refs. [29]. The latter experiment modulated the center of a trapped, one dimensional gas producing transverse excitations which in turn

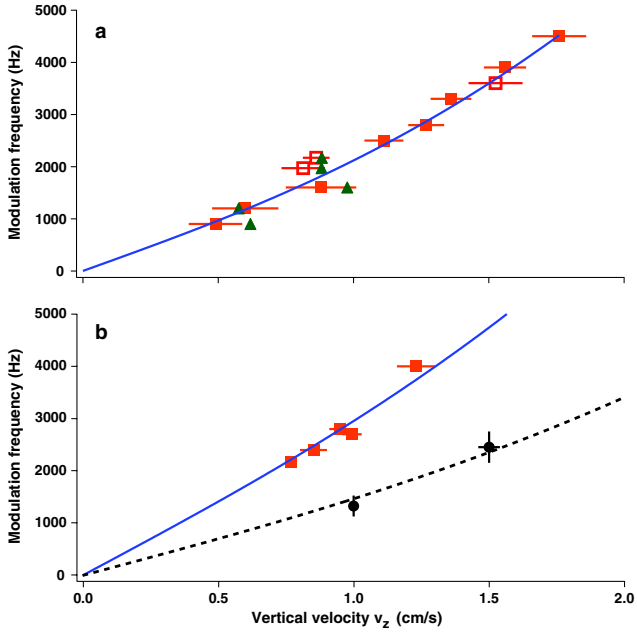


FIG. 4 (color online). Dispersion relation observed by modulating the trap depth. (a) The orange squares show the sideband velocity determined from the density distributions. The green triangles are derived from the correlation functions of the same data. The curve is a fit to the dispersion relation (1) as described in the text. Only the solid squares were included in the fit: these points were all taken on the same day, whereas the open squares were taken under slightly different trap conditions, with possibly different density. The error bars are statistical estimates based on the fits to the velocity distributions such as in Fig. 3(b). (b) Comparison between trap modulation and Bragg scattering. The black circles are observations of the dispersion relation by Bragg spectroscopy. The orange squares are found as in (a), and clearly show that the corresponding frequency is about a factor of 2 higher than in the Bragg data at a given velocity. The curves show the two fits discussed in the text. The vertical error bars on the Bragg data are determined by fits to the Bragg resonances.

produced twin beams. Equivalently, one could ask whether the Cauchy-Schwarz inequality is violated [30], indicating a nonclassical correlation. Comparing intensity differences in the sidebands we observe a reduction of the fluctuations compared to uncorrelated regions of the distribution. However, we observe no sub-Poissonian fluctuations or Cauchy-Schwarz violation, probably because of a background under the sidebands [see Fig. 1(d)]. The background is due to atoms spilling out of the trap before release.

Another difference between our experiment and an ideal realization of the dynamical Casimir effect is that the temperature is not negligible. This means that the pair generation did not arise from the vacuum but rather from thermal noise. For our temperature of 200 nK, the thermal occupation of the mode of frequency 2 kHz is 1.6. In the absence of a thermal background, the normalized

correlation function would show an even higher peak. Using the perturbative approach of Ref. [12], one can show that  $g^{(2)}(v_z, v_z' = -v_z)$  is a decreasing function of the temperature, since thermal quasiparticles are uncorrelated and only dilute the correlation.

Many authors have discussed the relationship of the dynamical Casimir effect to Hawking and Unruh radiation (see [4] for a recent review). It has also been pointed out that the two-particle correlations arising in the sonic Hawking problem constitute an important potential detection strategy [10,31], although the above authors discussed correlations in position space. The present study has confirmed the power of correlation techniques, and shown in addition that *momentum space* is a good place to look for them. We expect that a similar approach can be applied to Hawking radiation analogs as well as the general problem of studying the physics of curved spacetime by laboratory analogies.

This work was supported by the IFRAF institute, the Triangle de la Physique, the ANR-ProQuP project, J.R. by the DGA, R.L. by the FCT scholarship SFRH/BD/74352/2010, and G.B.P. by the Marie Curie program of the European Union. We acknowledge fruitful discussions with D. Clément, I. Carusotto, A. Recati, R. Balbinot, A. Fabbri, N. Pavloff, and P.-E. Larré.

\*Present address: Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Cambridge, MA 02138, USA.

†Present address: Agilent Laboratories, Santa Clara, CA 95051, USA.

- [1] G. T. Moore, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **11**, 2679 (1970).
- [2] S. A. Fulling and P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. A* **348**, 393 (1976).
- [3] V. V. Dodonov, *Phys. Scr.* **82**, 038105 (2010).
- [4] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, and F. Nori, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1 (2012).
- [5] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, and P. Delsing, *Nature (London)* **479**, 376 (2011).
- [6] P. Lähteenmäki, G. S. Paraoanu, J. Hassel, and P. J. Hakonen, *arXiv:1111.5608*.
- [7] S. W. Hawking, *Nature (London)* **248**, 30 (1974).
- [8] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [9] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4643 (2000).
- [10] R. Balbinot, A. Fabbri, S. Fagnocchi, A. Recati, and I. Carusotto, *Phys. Rev. A* **78**, 021603 (2008).
- [11] O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon, S. Rinott, A. Zayats, and J. Steinhauer, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 240401 (2010).
- [12] I. Carusotto, R. Balbinot, A. Fabbri, and A. Recati, *Eur. Phys. J. D* **56**, 391 (2009).
- [13] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1742 (1989).
- [14] F. X. Dezael and A. Lambrecht, *Europhys. Lett.* **89**, 14001 (2010).

- [15] P.O. Fedichev and U.R. Fischer, *Phys. Rev. A* **69**, 033602 (2004).
- [16] P. Jain, S. Weinfurter, M. Visser, and C.W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **76**, 033616 (2007).
- [17] C.-L. Hung, V. Guarie, and C. Chin, [arXiv:1209.0011](https://arxiv.org/abs/1209.0011).
- [18] P. Engels, C. Atherton, and M. A. Hofer, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 095301 (2007).
- [19] K. Staliunas, S. Longhi, and G.J. de Valcárcel, *Phys. Rev. A* **70**, 011601 (2004).
- [20] Y. Kagan and L. A. Manakova, *Phys. Rev. A* **76**, 023601 (2007).
- [21] C. Schori, T. Stöferle, H. Moritz, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 240402 (2004).
- [22] C. Tozzo, M. Krämer, and F. Dalfovo, *Phys. Rev. A* **72**, 023613 (2005).
- [23] G. B. Partridge, J.-C. Jaskula, M. Bonneau, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. A* **81**, 053631 (2010).
- [24] J.-C. Jaskula, M. Bonneau, G. B. Partridge, V. Krachmalnicoff, P. Deuar, K. V. Kheruntsyan, A. Aspect, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190402 (2010).
- [25] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.109.220401> for a description of our data analysis, Bragg spectroscopy, and calculations of the speed of sound.
- [26] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. V. Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Science* **310**, 648 (2005).
- [27] C. Tozzo and F. Dalfovo, *Phys. Rev. A* **69**, 053606 (2004).
- [28] R. Ozeri, N. Katz, J. Steinhauer, and N. Davidson, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 187 (2005).
- [29] R. Bücker, J. Grond, S. Manz, T. Berrada, T. Betz, C. Koller, U. Hohenester, T. Schumm, A. Perrin, and J. Schmiedmayer, *Nat. Phys.* **7**, 608 (2011).
- [30] K. V. Kheruntsyan, J.-C. Jaskula, P. Deuar, M. Bonneau, G. B. Partridge, J. Ruauzel, R. Lopes, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 260401 (2012).
- [31] P.-E. Larré, A. Recati, I. Carusotto, and N. Pavloff, *Phys. Rev. A* **85**, 013621 (2012).
- [32] A. Imambekov, I. E. Mazets, D. S. Petrov, V. Gritsev, S. Manz, S. Hofferberth, T. Schumm, E. Demler, and J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. A* **80**, 033604 (2009).



## An acoustic analog to the dynamical Casimir effect in a Bose-Einstein condensate

J.-C. Jaskula,\* G. B. Partridge,† M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruaudel, D. Boiron, and C. I. Westbrook  
*Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris-Sud, 2 avenue Augustin Fresnel 91127 Palaiseau France*

**Detection and data analysis.** The atoms are detected after falling 46.5 cm to a position sensitive detector which allows reconstruction of the arrival time and horizontal position of individual atoms [1]. The mean time of flight is 307 ms. Given the value of the vertical Thomas-Fermi radius (0.5 mm), this time is long enough for the arrival time to reflect the vertical velocity, provided this velocity is well above 1.5 mm/s.

The experimental correlation function corresponds to a 2D-histogram of the vertical velocities  $v_z$  and  $v'_z$  of each possible pair of atoms originating from a single condensate, and averaging over all realizations. For normalization we divide this first histogram by a second 2D-histogram obtained with pairs of atoms originating from separate realizations. We observe shot to shot fluctuations in the arrival times and widths of the condensate. To avoid spurious correlation signals arising from fluctuations in arrival time, we recentered each shot by aligning the condensate peaks before averaging and normalizing. The fluctuations in the width were reduced by selecting two different width classes and normalizing them separately before adding them to obtain Fig. 3.

**Speed of sound in a quasi-condensate.** For our typical atom number and trap frequencies, the atomic clouds are in the 1D-3D cross-over. We follow the model of Ref. [2] to calculate the speed of sound of atoms confined in a cylindrical trap and obtain  $mc^2 = \frac{\hbar\omega_\perp}{2} (\tilde{\mu} - 1/\tilde{\mu})$  where  $\omega_\perp/2\pi$  is the transverse frequency of the trap and  $\tilde{\mu} > 1$  the chemical potential in units of  $\hbar\omega_\perp$ . We then apply

a local density approximation for the longitudinal confinement on the dynamical structure factor [3] to relate the speed of sound of equation (1) with the atom number.

**Bragg spectroscopy.** In the Bragg spectroscopy measurement of Fig. 4, we use two laser beams at an angle  $\theta$  to provide an excitation wavevector  $\mathbf{k} = 2 \times \sin(\theta/2)k_{laser}\mathbf{e}_z$ . The angles were approximately  $6^\circ$  and  $9^\circ$ . The wave vector was measured by applying an intense 10  $\mu$ s pulse which populated many diffraction orders. The positions of the diffraction orders permitted an accurate fit to find the wavevector. For Bragg diffraction, the excitation pulse was of 5 ms duration. We then varied the relative frequency of the two laser beams to find the Bragg resonances for both positive and negative frequency differences. The difference in the position of the resonances divided by 2 was used as the frequency  $\omega_{\mathbf{k}}$ . The Bragg spectra exhibit a single sideband, showing that phonon excitations appear with a single momentum, as predicted by the phonon evaporation scenario.

---

\* Present address: Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Cambridge, Massachusetts 02138, USA

† Present address: Agilent Laboratories, Santa Clara, CA 95051, USA

- [1] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. V. Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Science* **310**, 648 (2005).
- [2] F. Gerbier, *Europhys. Lett.* **66**, 771 (2004).
- [3] R. Ozeri, N. Katz, J. Steinhauer, and N. Davidson, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 187 (2005).



## Tunable source of correlated atom beams

M. Bonneau,<sup>\*</sup> J. Ruaudel, R. Lopes, J.-C. Jaskula,<sup>†</sup> A. Aspect, D. Boiron, and C. I. Westbrook  
*Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris Sud, 2 avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau, France*  
 (Received 21 December 2012; published 17 June 2013)

We use a one-dimensional optical lattice to modify the dispersion relation of atomic matter waves. Four-wave mixing in this situation produces atom pairs in two well-defined beams. We show that these beams present a narrow momentum correlation, that their momenta are precisely tunable, and that this pair source can be operated in the regimes of low mode occupancy and of high mode occupancy.

DOI: 10.1103/PhysRevA.87.061603

PACS number(s): 03.75.Lm, 34.50.Cx, 42.50.Dv, 67.85.Hj

In quantum optics, the existence of mechanisms to produce photon pairs, such as parametric down-conversion, enabled the realization of several fundamental experiments on quantum mechanics. For example, the violation of Bell's inequalities [1] or the Hong-Ou-Mandel effect [2] reveal the surprising properties of quantum correlations in entangled photon pairs. These fascinating properties have found applications in quantum information and communications [3]. In analogy to photon pairs, there have been several recent demonstrations of correlated atom-pair production [4–10]. In particular, momentum correlations of spatially separated samples is an important requirement for the demonstration of an atomic Einstein-Podolsky-Rosen state [11,12] and the violation of Bell's inequalities. Such momentum correlations were demonstrated for atom pairs produced by molecule dissociation [4] or by spontaneous four-wave mixing in free space through the collision of two Bose-Einstein condensates (BECs) [5,13]. In these experiments the pairs which were produced lay on a spherical shell. This geometry is disadvantageous because many spatial modes are populated, and if one wishes to use Bragg diffraction to manipulate and recombine the pairs on a beam splitter [11,14], the vast majority of the pairs are unusable.

On the other hand, if pair production is concentrated in a small number of modes, experimenters can make more efficient use of the generated pairs. One can then choose to work either with low mode occupation, the well-separated pair regime, or with high mode occupation, referred to as the squeezing regime in Ref. [15]. An example of twin beams generated in the latter regime is described in Ref. [6]. The squeezing regime is well suited to the study of highly entangled multiparticle systems and for investigations of atom interferometry below the standard quantum limit [16,17]. The source we study in this Rapid Communication can be operated in both regimes. We use atomic four-wave mixing in a one-dimensional (1D) optical lattice, which results in production of atom pairs in two well-defined beams, as proposed in Ref. [18] and demonstrated in Ref. [19]. We show that these beams present a narrow momentum correlation, that their momenta are precisely tunable, and that we can control their intensities.

In atom optics, four-wave mixing corresponds to scattering into new momentum classes subject to energy and momentum conservation. In a wave picture, the conservation requirements can be thought of as phase-matching conditions. The presence of an optical lattice modifies the free-space atomic dispersion relation and therefore, for a range of initial quasimomenta  $k_0$  [20], the 1D scattering event  $2k_0 \rightarrow k_1 + k_2$  is allowed, as shown in Fig. 1(a). Thus, beginning from a BEC at  $k_0$ , atom pairs are spontaneously generated along the lattice axis with well-defined quasimomenta  $k_1$  and  $k_2$ . We refer to this process as four-wave mixing, but it can also be viewed as a special case of a dynamical instability [21,22], which was studied in the

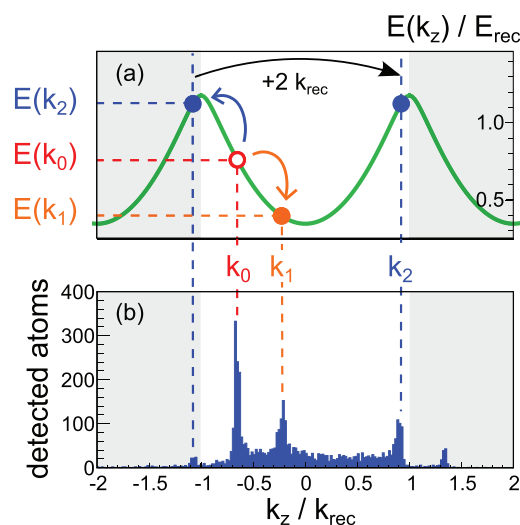


FIG. 1. (Color online) (a) 1D pair creation process in an optical lattice with period  $\lambda_{\text{latt.}}/2$ : The dispersion relation in the first Bloch band (green solid curve) allows scattering of atoms from a BEC with quasimomentum  $k_0$  (open red circle) in the lattice frame into pairs with quasimomenta  $k_1$  (filled orange circle) and  $k_2$  (filled blue circle), so that phase-matching conditions given by energy and momentum conservations are fulfilled. The example here is for a lattice depth  $V_0 = 0.725 E_{\text{rec}}$  and  $k_0 = -0.65 k_{\text{rec}}$ , with  $k_{\text{rec}} = 2\pi/\lambda_{\text{latt.}}$  the recoil momentum and  $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k_{\text{rec}}^2 / 2m = h \times 44$  kHz the recoil energy. (b) Vertical single-shot momentum distribution (integrated over the total transverse distribution) measured for these conditions. The three main peaks correspond to the initial BEC and to the macroscopically populated beams centered at  $k_1$  and  $k_2$ , which are mainly projected in the first Brillouin zone (in white) when the lattice is switched off. As expected, small diffraction peaks at  $k_0 + 2k_{\text{rec}}$  and  $k_2 - 2k_{\text{rec}}$  are also visible, due to the proximity of  $k_0$  and  $k_2$  to the band edge.

<sup>\*</sup>bonneau@lens.unifi.it; Present address: INO-CNR, via G. Sansone 1, 50019 Sesto Fiorentino - Firenze, Italy.

<sup>†</sup>Present address: Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Cambridge, Massachusetts 02138, USA.



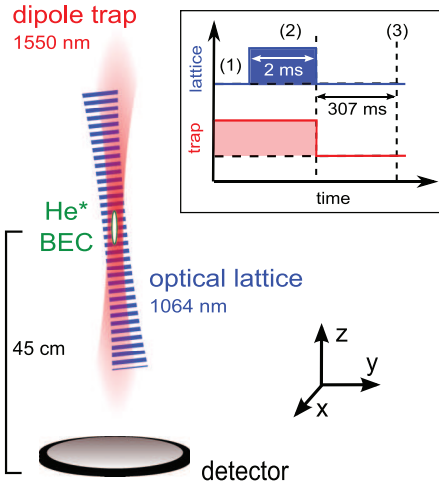


FIG. 2. (Color online) Experimental setup and sequence: (1) Initially, a BEC of metastable helium is trapped in a vertical optical potential with a  $43 \mu\text{m}$  waist. (2) An optical lattice is suddenly applied in the presence of the trap. It is tilted by  $7^\circ$  with respect to the trap axis, and is focused on the BEC with a  $200 \mu\text{m}$  waist. (3) After the dipole trap and optical lattice switch off, the cloud expands and falls on the 3D resolved single atom detector. Given the values of the vertical and transverse Thomas-Fermi radii ( $0.5 \text{ mm}$  and  $3 \mu\text{m}$ ), the arrival time and position reflect the 3D momentum distribution, provided the momenta are well above  $3 \times 10^{-2} k_{\text{rec}}$  along  $z$  and  $2 \times 10^{-4} k_{\text{rec}}$  transversely.

context of coherence [23,24] and atomic [25] losses appearing for a BEC moving in a lattice.

The experiment is performed on  $^4\text{He}$  atoms in the  $m_x = 1$  sublevel of the  $2^3S_1$  metastable state. The experimental setup and sequence are shown in Fig. 2. After evaporative cooling in an elongated, vertical dipole trap with frequencies  $\nu_\perp = 1.5 \text{ kHz}$  and  $\nu_z = 6.5 \text{ Hz}$  [26], we produce a BEC (or more precisely a quasi-BEC [27]) with about  $10^5$  atoms. We then apply a 1D optical lattice with a depth  $V_0 = 0.725 E_{\text{rec}}$ . This lattice is tuned  $19 \text{ nm}$  to the blue of the  $1083 \text{ nm } 2^3S_1 \rightarrow 2^3P$  transition of helium. It is formed by two counterpropagating  $17 \text{ mW}$  beams with  $200 \mu\text{m}$  waists and whose relative detuning  $\delta\nu$  can be varied using acousto-optic modulators. We thus control the value of  $k_0/k_{\text{rec}} = h\delta\nu/4E_{\text{rec}}$ , the BEC's momentum in the lattice frame. The lattice is held on for a duration  $T_L = 2 \text{ ms}$ , and suddenly switched off, simultaneously with the optical trap. To avoid magnetic perturbation of the cloud during free fall, we apply an rf pulse that transfers 50% of the atoms to the field insensitive  $m_x = 0$  sublevel [26]. The atoms remaining in  $m_x = 1$  are subsequently removed by a strong magnetic gradient. After a  $307 \text{ ms}$  mean time of flight, the  $m_x = 0$  atoms fall on a microchannel plate detector, which permits 3D reconstruction of the atomic cloud [28].

As shown in Fig. 1(b), we observe three main density peaks after the time of flight. The tallest is the initial BEC. The two others are formed by atoms scattered into momentum classes centered in  $k_1$  and  $k_2$ , whose values are consistent with those expected from the phase-matching conditions illustrated in Fig. 1(a). Since the optical lattice is switched off abruptly, the Bloch states of momenta  $k_0$ ,  $k_1$ , and  $k_2$  are projected onto plane waves, mainly in the first Brillouin zone due to the

low lattice depth. Each of the beams at  $k_1$  and  $k_2$  contains about  $10^2$  detected atoms, which we estimate to correspond to about  $2 \times 10^3$  atoms per beam. We also detect some atoms between the beams, which result from scattering into excited transverse modes [29]. Due to the low overlap between the transversely excited states and the initial wave function, this transverse excitation is far less efficient than the previously described 1D process. In addition, scattered atoms can also undergo secondary scattering contributing to the background between the beams.

In the following, we focus on the two beams. Using them for quantum atom optics experiments or for interferometry will require recombining them. It is therefore crucial to know the width of their correlation. From the 3D-momentum distribution  $n(\mathbf{k})$ , we computed the normalized second-order cross-correlation function,

$$g_C^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\langle n(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}') \rangle}{\langle n(\mathbf{k}) \rangle \langle n(\mathbf{k}') \rangle}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{k}$  belongs to beam 1 and  $\mathbf{k}'$  to beam 2. The BEC is not exactly at rest in the optical trap, but exhibits shot-to-shot momentum fluctuations on the order of  $10^{-2} k_{\text{rec}}$ . We correct for these fluctuations by recentering separately the single shot momentum distributions  $n(\mathbf{k})$  around  $k_1$  and  $k_2$ , using the shift obtained from Gaussian fits to the peak at  $k_1$  and to the diffraction peak at  $k_0 + 2k_{\text{rec}}$ . This correlation function exhibits a peak for  $k_z \simeq k_1$  and  $k'_z \simeq k_2$  [Figs. 3(a) and 3(b)]. The presence of this peak indicates that the two atomic beams are indeed correlated.

We wish to determine the number of modes present in each beam, and how many of these modes are correlated. We therefore examine the local second-order correlation function of a single beam,  $g_L^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , which is obtained as in Eq. (1) but with both  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{k}'$  belonging to beam 1. This correlation function, plotted in Figs. 3(c) and 3(d), exhibits bunching for  $k'_z \simeq k_z \simeq k_1$ , due to density fluctuations [as in the Hanbury-Brown-Twiss (HBT) effect [30]]. Similar bunching is observed at  $k_2$ . If we suppose that the widths of the local correlation define the size of a single mode, we can compare them to those of the density (longitudinal rms:  $4 \times 10^{-2} k_{\text{rec}}$ ; transverse rms:  $4 \times 10^{-1} k_{\text{rec}}$ ). We see that about 10 longitudinal and 3 transverse modes are populated. Thus the mode population is, roughly, 70 atoms/mode. For comparison, in the case of free-space four-wave mixing [31], starting from a similar initial BEC,  $10^5$  modes were populated, with only about 0.02 atoms/mode.

It appears in Fig. 3 that, while in the transverse direction, the cross and local correlations have similar widths [Figs. 3(a) and 3(c)], the cross correlation is 5 times broader than the local one along the vertical axis [Figs. 3(b) and 3(d)]: each mode is correlated with several modes of the other beam. If one uses two such beams as inputs to a beam splitter, this broadening amounts to a loss of coherence, and the interference contrast would be reduced. We emphasize that the observed widths may be broadened by other effects, and so their numerical ratio is not exactly equal to the number of correlated modes. For the local correlation, we estimate that the finite vertical resolution of the microchannel plate detector contributes notably to the observed width. This resolution comes about because the surface which defines the atom arrival

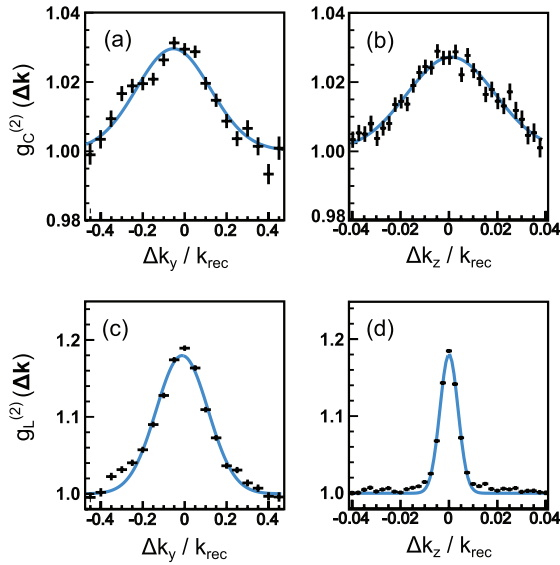


FIG. 3. (Color online) (a) and (b) Cuts along  $y$  and  $z$  of the integrated, normalized cross-correlation function of the two beams,  $g_C^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k}_i g_C^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j + \Delta\mathbf{k})$ . The integration over the momentum distribution  $\mathbf{k}_i$  is performed on a box with dimensions  $L_{k_x} = L_{k_y} = 0.4k_{rec}$  and  $L_{k_z} = 5 \times 10^{-2}k_{rec}$  centered on beam 1,  $\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j = (k_1 + k_2)\hat{e}_z$ , and the cuts have a thickness  $10^{-1}k_{rec}$  ( $1.5 \times 10^{-1}k_{rec}$ ) along  $z$  ( $x$  and  $y$ ). The bunching, due to the correlation between the two beams, has a longitudinal (transverse) width  $\sigma_{c,z} = 1.8 \times 10^{-2}k_{rec}$  ( $\sigma_{c,y} = 1.6 \times 10^{-1}k_{rec}$ ). (c) and (d) Cuts along  $y$  and  $z$  of the integrated, normalized local correlation function of beam 1,  $g_L^{(2)}(\Delta\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k}_i g_L^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i + \Delta\mathbf{k})$ . The integration region is the same as for the cross correlation, and the cuts have a thickness  $2.5 \times 10^{-3}k_{rec}$  ( $0.1k_{rec}$ ) along  $z$  ( $x$  and  $y$ ). The bunching, due to the HBT effect, has a longitudinal (transverse) width  $\sigma_{l,z} = 3.7 \times 10^{-3}k_{rec}$  ( $\sigma_{l,y} = 1.3 \times 10^{-1}k_{rec}$ ). Cuts along  $x$  (not shown here) have the same widths and amplitudes as cuts along  $y$ . These correlation functions are calculated using 850 experimental realizations, with  $k_0 = -0.65k_{rec}$ , a lattice depth  $V_0 = 0.725E_{rec}$ , and a lattice duration  $T_L = 2$  ms. In all plots, the horizontal error bars indicate the bin size and the vertical ones correspond to the statistical  $1\sigma$  uncertainties. The solid lines are Gaussian fits to the data from which we extract the correlation widths.

time is not flat but consists of tilted channels which intercept the atoms at different heights. The width shown in Fig. 3(d) is consistent with this interpretation. For the cross correlation, the observed width is broadened by the fact that the vertical source size is not negligible [32]. Note also that the limited coherence of the initial quasi-BEC plays a role in the cross correlation width [32].

The use of an optical lattice permits control over the output beam momenta. Changing the detuning  $\delta\nu$  between the lattice beams results in varying the value of  $k_0$ . In Fig. 4, we plot the mean vertical momenta  $k_1$  and  $k_2$  of both beams, measured for different  $k_0$ , as well as the expectation (solid line) based on the phase-matching conditions illustrated in Fig. 1(a). We obtain a fair agreement over a large range, even though the solid line presents a small shift in comparison to the data points and does not reproduce the observed shape for high values of  $k_0$ . However, as already observed for four-wave mixing in free space [33], phase-matching conditions can be influenced by

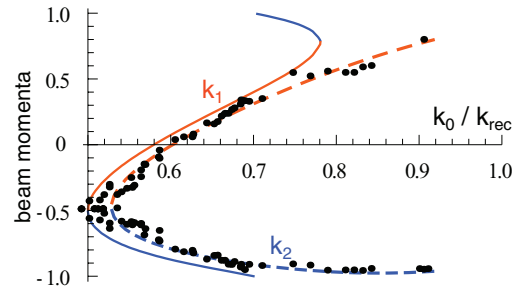


FIG. 4. (Color online) Measured mean momenta  $k_1$  and  $k_2$  of the beams (black dots, in units of  $k_{rec}$ ) as a function of  $k_0$  (initial BEC momentum in the lattice frame) for a depth  $V_0 = 1.05E_{rec}$  and a duration  $T_L = 1.5$  ms of the lattice. The solid line shows the phase-matching curve expected without interactions, while the dashed line includes the mean field [see Eq. (2)].

mean-field effects. A simple correction to the phase-matching curve is found just by adding the mean field to the energy conservation condition: Since the two atoms of a scattered pair are distinguishable from the atoms of the initial BEC, the mean-field energy experienced by each of them is not  $gn_0$  (with  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ,  $a$  and  $m$  the scattering length and the mass of  $\text{He}^*$  and  $n_0 \simeq 10^{13}$  atoms/cm<sup>3</sup> the BEC density), but  $2gn_0$ , so that the energy conservation condition reads:

$$2E(k_0) + 2gn_0 = E(k_1) + E(k_2) + 4gn_0, \quad (2)$$

where the energy  $E(k)$  is given by the dispersion relation in the first Bloch band of the lattice without interaction. As seen in Fig. 4 (dashed line), this correction leads to very good agreement with the experimental data, and accounts for the shift of the phase-matching curve and the change of its shape. A more exact calculation of the phase-matching conditions, inspired by Ref. [21], confirms the accuracy of Eq. (2) in our experimental conditions and will be given in Ref. [34].

Another degree of freedom results from the fact that pair creation only takes place while the lattice is on. We can thus tune the beam populations with the lattice duration  $T_L$ . In the example of Fig. 5 these populations increase exponentially with  $T_L$  during a few hundred  $\mu\text{s}$ , and then reach a plateau. This saturation could be explained by several mechanisms such as the decrease of spatial overlap between condensate and scattered beams [19], multimode effects [35], and secondary scatterings from the beams. Condensate depletion is at most about 20% and should be of little importance in the saturation. For small  $T_L$ , there is no discernible population difference between both beams. By contrast, we observe that at large  $T_L$  the population of beam 1 is almost twice that of beam 2, a phenomenon also noticed in Ref. [19]. This may be due to  $k_2$  being in a dynamically unstable region while atoms with quasimomentum  $k_1$  can only undergo secondary scattering to excited transverse modes.

At intermediate  $T_L$ , we observe negligible losses due to secondary scattering and high mode population (around 60 atoms per mode at  $T_L = 0.2$  ms in the example of Fig. 5). The resulting beams should contain strongly correlated pairs. In an attempt to verify a nonclassical correlation, we examined atom number difference between the two beams. By selecting two regions around the centers of the two beams, we do indeed

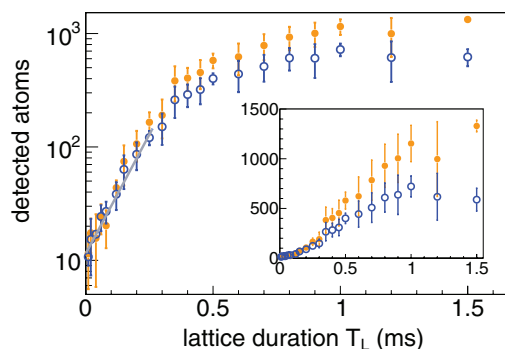


FIG. 5. (Color online) Dependence of the population of beam 1 (orange filled circles) and beam 2 (blue open circles) on the lattice duration  $T_L$  for  $k_0 = -0.67k_{\text{rec}}$  and for a lattice depth  $V_0 = 1.05E_{\text{rec}}$ . The gray line is an exponential fit of the detected population in beam 2 for  $T_L < 0.3$  ms, which gives a time constant of 0.1 ms and an offset of 11.5 detected atoms. This offset is due to the small thermal part of the source cloud with quasimomenta  $k_1$  and  $k_2$ . For a lower lattice depth, as for the data of Fig. 3, the temporal evolution is a few times slower [21]. Inset: same data with linear scale.

observe a sub-Poissonian number difference [6,31], as shown in Fig. 6. The observed variance is consistent with that observed in Ref. [31], and is limited in large part by the quantum efficiency of the detector. Other features of the variance are puzzling, however. First the minimum of the dip in the variance occurs when the center of region 1 is shifted by  $0.1k_{\text{rec}}$  with respect to the center of the density distribution in beam 1. Second, in the transverse plane, the size of the regions over which the variance is reduced is nearly an order of magnitude smaller than the transverse width of the correlation function. We plan to investigate these effects in future experiments.

To conclude, we have demonstrated an efficient process for the production of correlated atom pairs. We have control over

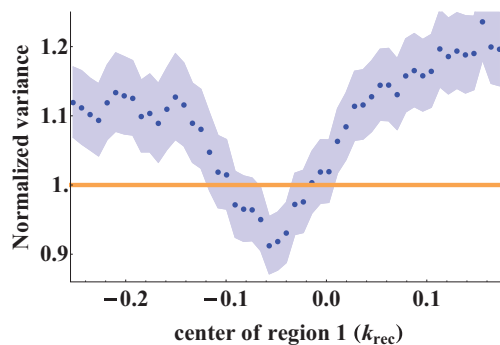


FIG. 6. (Color online) Normalized variance of atom number difference between two regions selected close to beams 1 and 2. The data are the same as those of Fig. 3. Regions are vertical cylinders of radius  $2.5 \times 10^{-2}k_{\text{rec}}$  and height  $8.5 \times 10^{-2}k_{\text{rec}}$ . They are centered on the two beams in the transverse plane. Along the vertical axis, the center momentum (in the lattice frame) of region 1 is scanned, whereas region 2 is fixed. A variance below unity indicates sub-Poissonian fluctuations.

both the final momenta and the intensity of the correlated beams. We characterize the width of the correlation in momentum and find evidence of sub-Poissonian fluctuations of population difference. This source should be useful in multiple particle interference experiments both in the regime of well-isolated pairs [12] and in the regime of large occupation numbers [11].

We thank K. Mølmer, M. Ebner, J. Schmiedmayer, and P. Zin for useful discussions. J.R. is supported by the DGA, R.L. by the FCT scholarship SFRH/BD/74352/2010, and support for the experimental work comes from the IFRAF program, the Triangle de la Physique, the ANR Grant ProQuP, and ERC Grant 267 775 Quantatop.

- 
- [1] A. Aspect, *Nature* **398**, 189 (1999).  
 [2] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).  
 [3] J.-W. Pan, Z.-B. Chen, C.-Y. Lu, H. Weinfurter, A. Zeilinger, and M. Zukowski, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 777 (2012).  
 [4] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).  
 [5] A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 150405 (2007).  
 [6] R. Bücker, J. Grond, S. Manz, T. Berrada, T. Betz, C. Koller, U. Hohenester, T. Schumm, A. Perrin, and J. Schmiedmayer, *Nat. Phys.* **7**, 608 (2011).  
 [7] B. Lücke, M. Scherer, J. Kruse, L. Pezzé, F. Deuretzbacher, P. Hyllus, O. Topic, J. Peise, W. Ertmer, J. Arlt *et al.*, *Science* **334**, 773 (2011).  
 [8] W. RuGway, S. S. Hodgman, R. G. Dall, M. T. Johnsson, and A. G. Truscott, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 075301 (2011).  
 [9] C. Gross, H. Strobel, E. Nicklas, T. Zibold, N. Bar-Gill, G. Kurizki, and M. K. Oberthaler, *Nature* **480**, 219 (2012).  
 [10] C. D. Hamley, C. S. Gerving, T. M. Hoang, E. M. Bookjans, and M. S. Chapman, *Nat. Phys.* **8**, 305 (2012).  
 [11] A. J. Ferris, M. K. Olsen, and M. J. Davis, *Phys. Rev. A* **79**, 043634 (2009).  
 [12] J. Kofler, M. Singh, M. Ebner, M. Keller, M. Kotyrba, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. A* **86**, 032115 (2012).  
 [13] K. V. Kheruntsyan, J.-C. Jaskula, P. Deuar, M. Bonneau, G. B. Partridge, J. Ruaudel, R. Lopes, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 260401 (2012).  
 [14] T. Kitagawa, A. Aspect, M. Greiner, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115302 (2011).  
 [15] L.-M. Duan, A. Sørensen, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3991 (2000).  
 [16] P. Bouyer and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. A* **56**, R1083 (1997).  
 [17] J. A. Dunningham, K. Burnett, and S. M. Barnett, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 150401 (2002).  
 [18] K. M. Hilligsøe and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **71**, 041602 (2005).  
 [19] G. K. Campbell, J. Mun, M. Boyd, E. W. Streed, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 020406 (2006).

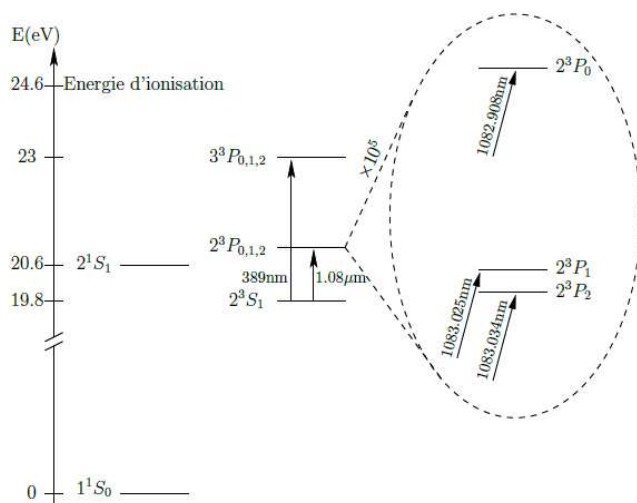
- [20] Throughout this paper we denote momenta by their value divided by  $\hbar$ .
- [21] B. Wu and Q. Niu, *Phys. Rev. A* **64**, 061603 (2001).
- [22] A. Smerzi, A. Trombettoni, P. G. Kevrekidis, and A. R. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 170402 (2002).
- [23] F. S. Cataliotti, L. Fallani, F. Ferlaino, C. Fort, P. Maddaloni, and M. Inguscio, *New J. Phys* **5**, 71 (2003).
- [24] M. Cristiani, O. Morsch, N. Malossi, M. Jona-Lasinio, M. Anderlini, E. Courtade, and E. Arimondo, *Opt. Express* **12**, 4 (2004).
- [25] L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140406 (2004).
- [26] G. B. Partridge, J.-C. Jaskula, M. Bonneau, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. A* **81**, 053631 (2010).
- [27] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).
- [28] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. V. Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Science* **310**, 648 (2005).
- [29] M. Modugno, C. Tozzo, and F. Dalfovo, *Phys. Rev. A* **70**, 043625 (2004).
- [30] K. Mølmer, A. Perrin, V. Krachmalnicoff, V. Leung, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. A* **77**, 033601 (2008).
- [31] J.-C. Jaskula, M. Bonneau, G. B. Partridge, V. Krachmalnicoff, P. Deuar, K. V. Kheruntsyan, A. Aspect, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190402 (2010).
- [32] P. Ziñ *et al.* (unpublished).
- [33] V. Krachmalnicoff, J.-C. Jaskula, M. Bonneau, V. Leung, G. B. Partridge, D. Boiron, C. I. Westbrook, P. Deuar, P. Ziñ, M. Trippenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 150402 (2010).
- [34] J. Ruaudel *et al.* (unpublished).
- [35] R. Bücker, U. Hohenester, T. Berrada, S. van Frank, A. Perrin, S. Manz, T. Betz, J. Grond, T. Schumm, and J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. A* **86**, 013638 (2012).



## Annexe A

# Dispositif expérimental

Une des spécificités de notre dispositif expérimental est l'utilisation d'atomes d'Hélium contrairement à la plupart des expériences qui fonctionnent avec des métaux alcalins (Lithium, Potassium, Rubidium etc...). Dans son état fondamental, l'Hélium ne possède pas de structure hyperfine, et n'a aucune transition facilement accessible optiquement, ce qui nous pousse à travailler avec un niveau métastable de l'hélium.



**Figure A.1** – Spectre de l'hélium  $^4\text{He}$ . Le niveau  $2^3S_1$  est le niveau métastable qui nous sert de fondamental dans nos expériences. Il peut être couplé par des transitions optiques aux niveaux  $2^3P_{0,1,2}$  ce qui permet la manipulation et le refroidissement des atomes

Ce niveau métastable possède une durée de vie de 7900 s [Hod+09] qui est très grande devant la durée typique de nos expériences (environ 30 s) qui nous

permet de le considérer comme un niveau fondamental. On peut refroidir par laser les atomes d'hélium métastables grâce aux transitions  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$  aux longueurs d'ondes proches de  $\lambda \approx 1083$  nm. L'obtention de condensat de Bose-Einstein avec des atomes métastables requiert l'utilisation de techniques standards de refroidissement atomique mais présentent quelques spécificités qui font tout le charme de ces espèces [Vas+12]. Dans la première partie de cette annexe nous allons décrire les étapes qui sur notre expérience conduisent à la condensation de l'hélium métastable.

L'une des caractéristiques qui justifie l'utilisation de l'hélium métastable est l'énergie interne de notre niveau fondamental. En effet, celle-ci est de 19.8 eV et rend possible un type de détection original puisqu'elle est suffisante pour extraire des électrons lors de la collision entre un atome d'hélium métastable et une paroi. Nous détaillerons le fonctionnement de notre détecteur qui repose sur cette idée dans la seconde partie de l'annexe.

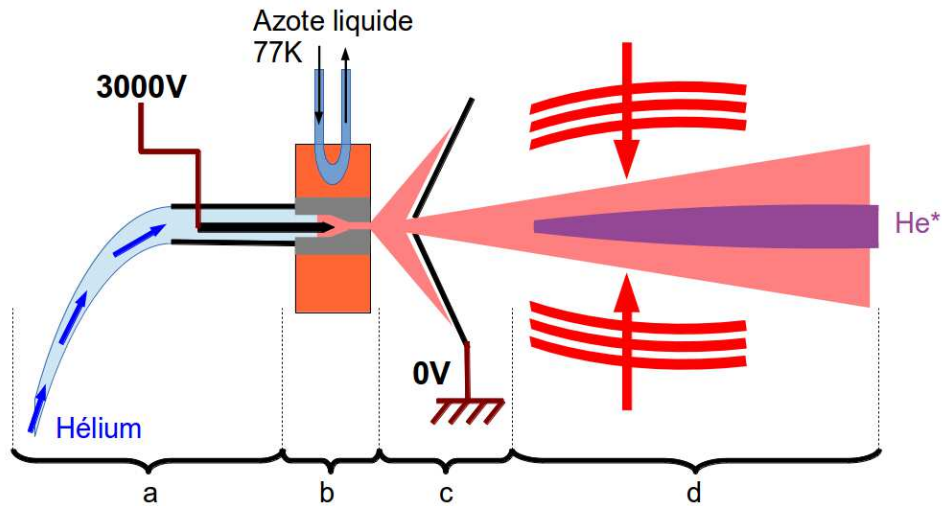
## A.1 Obtention d'un condensat de Bose-Einstein d'Helium métastable

Nous allons dans cette partie aborder les différentes étapes expérimentales qui conduisent à la condensation de Bose-Einstein. Nous nous attarderons particulièrement sur les spécificités de notre dispositif et nous passerons plus rapidement sur les étapes plus communes.

### A.1.1 La source d'hélium métastable

Avant d'espérer obtenir un condensat d'hélium métastable il faut bien évidemment commencer par avoir des atomes d'hélium dans l'état métastable. Comme l'énergie de ce dernier est très importante il est impossible d'y pomper optiquement les atomes (la longueur d'onde de la transition est d'environ 60 nm). Il ne nous reste plus que la manière forte : on fait passer les atomes d'hélium dans une décharge électrique, un plasma se crée et cela excite les atomes dans toutes sortes d'états y compris des ions. Dans le lot, une très faible fraction des atomes, de l'ordre de  $\approx 10^{-4}$ , se retrouvent dans l'état  $2^3S_1$  métastable qui peuvent ensuite être manipulés par des laser à  $\lambda = 1083$  nm.

Juste après la décharge le jet atomique diverge rapidement, on collimate alors le jet avec deux paires de faisceaux laser contrapropageants d'une puissance d'environ 40 mW. Ces faisceaux sont uniquement résonnants avec les atomes d'hélium dans l'état métastable, ainsi, tous les autres états créent par la décharge peuvent facilement être filtrés par des diaphragmes situés entre la source et la chambre de science. Afin de limiter la vitesse longitudinale des



**Figure A.2** – Un flux constant d'hélium est envoyé autour d'une pointe métallique portée à 3000V (a), les atomes passent ensuite dans un bloc refroidi à l'azote liquide (b). Il se crée alors un plasma qui résulte de la décharge entre la pointe métallique et l'écorceur mis à la masse (c). Seule la partie centrale du jet passe au travers de l'écorceur avant d'interagir avec des faisceaux laser qui collimatent seulement les atomes dans l'état métastable (d).

atomes, un bloc de cuivre refroidi à l'azote liquide diminue la température des atomes. La vitesse est d'environ 1500 m/s en sortie de la source. Il faut donc considérablement la diminuer pour pouvoir piéger et refroidir l'hélium.

### A.1.2 Ralentissement et piège magnétique

Pour réduire suffisamment la vitesse des atomes on utilise un ralentisseur Zeeman dans lequel un faisceau désaccordé de -97 Mhz d'une cinquantaine de milliwatt interagit avec l'hélium métastable. la vitesse de recule transférée par un photon à un atome lors d'un processus d'absorption est d'environ 0.1 m/s, il faut donc une moyenne d'à peu près 15000 cycles d'absorption-réémission pour que les atomes soient stoppés. Comme la durée de vie du niveau excité est de  $\tau = 1/\Gamma_{He} \approx 0.1 \mu s$ , la durée typique du ralentissement est d'environ 1.5 ms au cours de laquelle les atomes vont parcourir quasiment 2 m ! C'est une des particularités des expériences d'hélium métastable qui nécessitent des ralentisseurs Zeeman très long. Pour compenser le désaccord Doppler qui varie avec la vitesse décroissante des atomes, des bobines produisent un champ magnétique qui déplace la résonance atomique par effet Zeeman.



En sortie du ralentisseur un flux de  $10^8/10^9$  at/s charge un piège magnéto-optique (MOT) jusqu'à atteindre la saturation au bout de 2 s. Les trois paires de faisceaux rétro-réfléchis sont désaccordés de -56.4 MHz par rapport à la transition atomique et ont une puissance d'environ 12 mW qui est suffisante pour obtenir un nombre d'atomes stable.

Les atomes sont ensuite transférés dans un piège magnétique de type Ioffe-Pritchard [Bro00] avec une étape de pompage optique. On allume ensuite un faisceau proche de résonance à très faible intensité pendant 5 s. Cette étape de refroidissement Doppler 1D permet d'abaisser fortement la température sans perdre d'atomes [Sch+03]. Le piège magnétique est ensuite recomprimé pour augmenter la densité et on commence l'évaporation à l'aide d'un couteau radio-fréquence (RF). En évaporant suffisamment lentement il est ainsi possible d'obtenir un condensat dans le piège magnétique, c'est ainsi qu'a d'ailleurs pu être atteint sur ce dispositif la toute première condensation de l'hélium métastable<sup>1</sup>, cependant, pour des raisons de stabilité nous préférons maintenant créer le condensat dans le piège dipolaire installé il y a quelques années sur l'expérience [Jas10]. L'évaporation dans le piège magnétique est donc plus rapide et permet simplement d'obtenir un gaz suffisamment froid pour être transféré dans le piège optique dont la profondeur est limitée. Suite à ce pré-refroidissement on obtient typiquement  $5 \times 10^6$  atomes à 15  $\mu$ K et on allume alors le faisceau du piège dipolaire.

### A.1.3 Piège dipolaire et obtention d'un condensat

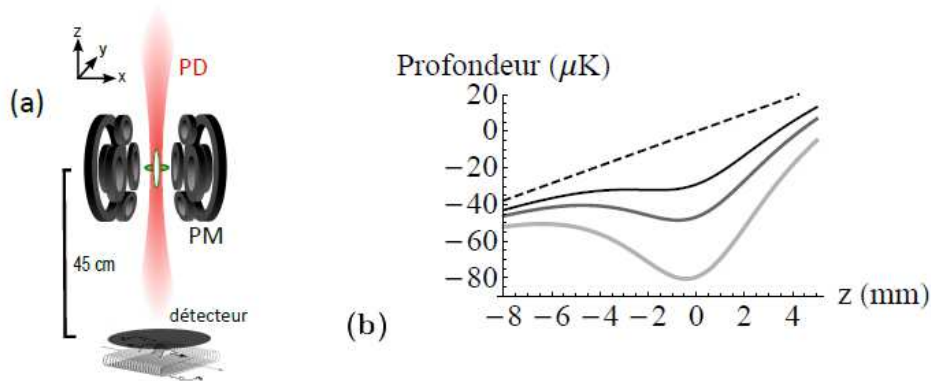
Grâce à la force dipolaire il est possible de piéger des atomes au foyer d'un laser [Ash+86], indépendamment du moment magnétique des atomes. Cela permet ainsi de régler indépendamment du piégeage, l'axe de quantification ce qui peut se révéler crucial pour faire des transitions de type Raman. Cela permet également d'étudier des mélanges de spins [Par+10] chose impossible dans un piège magnétique.

Pour réaliser le piège dipolaire nous utilisons un faisceaux à 1550 nm issu d'un laser fibré télécom focalisé sur le nuage atomique. Le faisceau est vertical et son waist est de 43  $\mu$ m. On commence par allumer le piège en passant de 0 à 1.7 W en 1 s pour transférer les atomes du piège magnétique vers le piège optique. Le piège magnétique est ensuite coupé, puis on baisse petit à petit la puissance pour évaporer restant dans le piège optique. On passe ainsi de 1.7 W à 0.6 W en un peu plus de 4 s jusqu'à atteindre la condensation du gaz.

À cause de la gravité, le piège est très déformé verticalement, et devient fortement anharmonique lorsque la puissance est faible. Il existe également

---

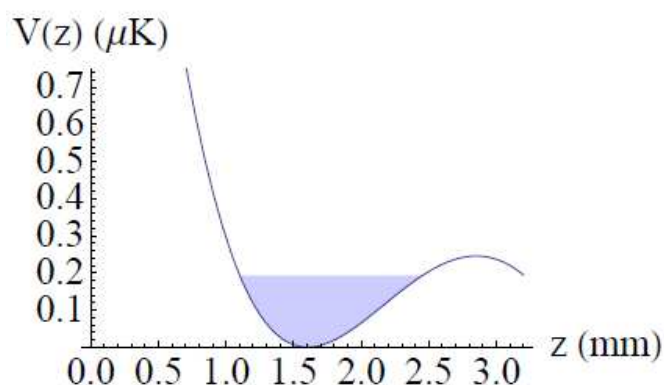
1. suivie quelques mois plus tard par l'obtention d'un autre condensat indépendamment à l'E.N.S.



**Figure A.3** – (a) Schéma du montage expérimental, le nuage dans le piège magnétique (PM) horizontal est transféré dans le piège dipolaire (PD) vertical. On évapore ensuite pour atteindre la condensation puis on réalise les expériences souhaitées avant de relâcher les atomes qui tombent sur le détecteur situé 45 cm plus bas. (b) Évolution du profil vertical du piège au cours de l'évaporation qui débute à profondeur maximale (1,7 W, gris clair) et diminue (1 W, gris foncé) jusqu'à atteindre la fin de l'évaporation (620 mW, noir). Le potentiel dû à la gravité (en pointillé) déforme fortement le piège

une puissance (585 mW) en dessous de laquelle les atomes ne peuvent plus être piégés car la force dipolaire devient alors trop faible pour compenser la gravité. La température critique de condensation est d'environ  $1 \mu\text{K}$  à laquelle une double structure commence à apparaître. À la fin de l'évaporation la température est inférieure à 300 nK, mais il est difficile de la déterminer avec précision. Dans ce piège, le condensat est très anisotrope, proche du régime unidimensionnel. Il fait typiquement 1.2 mm longitudinalement (selon l'axe vertical) et a un diamètre transverse d'environ  $6 \mu\text{m}$ . L'ajout récent d'un deuxième faisceau de piégeage horizontal (dans l'axe du biais) nous permet dorénavant de contrôler l'anisotropie. L'ensemble des résultats présenté dans ce manuscrit sont antérieurs à la mise en place de nouveau bras.

Une fois le condensat obtenu, il est à notre disposition pour faire les expériences voulues. En éteignant le laser de piégeage, on libère les atomes qui, sous l'emprise de la gravité, tombent vers le détecteur qui fait l'originalité de notre expérience.



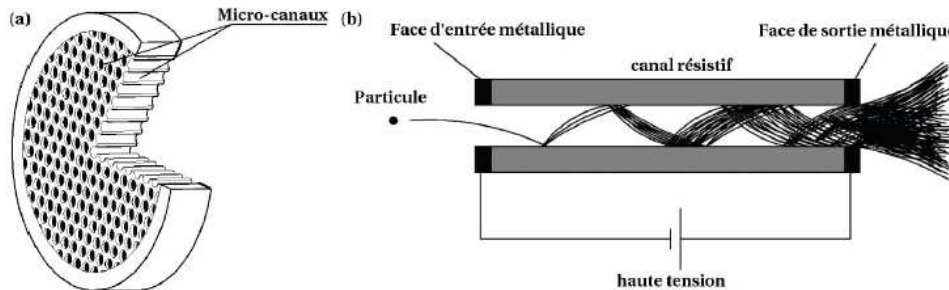
**Figure A.4** – À la fin de l'évaporation pour  $P = 620$  mW, le piège compense à peine la gravité. Il est alors rempli jusqu'au niveau du potentiel chimique (4 kHz) quasiment à la limite de déborder.

## A.2 Un système de détection original

Notre détecteur met à profit l'importante énergie interne des atomes d'hélium métastable pour mesurer la position et le temps d'arrivée des atomes dans un plan situé 45 cm en-dessous de la zone de piégeage du gaz. Il est constitué de deux éléments que nous allons présenter dans la suite : la galette à micro-canaux et les lignes à retard.

### A.2.1 La galette à micro-canaux

Le principe de fonctionnement de la galette à micro-canaux (MCP), illustrée par la figure A.5 est similaire à celui d'un photomultiplicateur : lorsqu'un atome d'hélium métastable heurte la surface métallique du détecteur, l'énergie interne est suffisante pour arracher un ou plusieurs électrons qui sont alors amplifiés dans l'un des micro-canaux. Pour augmenter l'amplification du signal électronique on utilise en fait deux galettes montées l'une derrière l'autre ce qui permet d'obtenir un gain de l'ordre de  $10^7$ . Comme on travaille avec des vides très poussés, les fausses détections sont très faibles et chaque "douche" électronique provient d'un seul atome ce qui permet la détection d'atome unique. L'inconvénient de ce détecteur est sa faible efficacité puisqu'une grande proportion des atomes n'arrive pas à extraire d'électrons. On estime que la détectivité du MCP est de l'ordre de 20 %. Comme le temps de transition des électrons est très faible ( $< 1$  ns), en mesurant le temps d'arrivée des impulsions électroniques on peut aisément déduire le temps d'arrivée des atomes sur le détecteur mais on ne peut pas avoir accès à la position d'impact dans le plan du détecteur. Pour obtenir cette information on utilise



**Figure A.5** – (a) La galette à micro-canaux est constituée de millions de cylindres creux de  $12.5 \mu\text{m}$  de diamètre et long d'environ  $1 \text{ mm}$ . (b) La surface interne des cylindres est traitée pour faciliter l'extraction d'électrons qui sont accélérés par une tension de plusieurs kilovolts appliquée entre les deux faces métalliques de la galette.

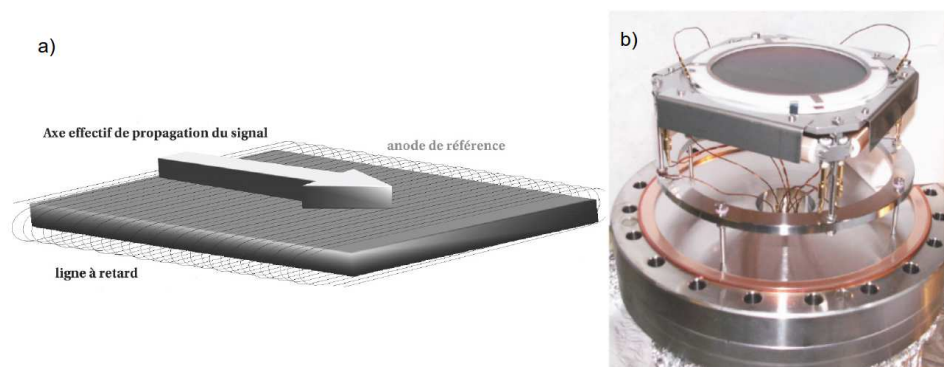
des lignes à retard dont on va maintenant exposer le principe.

### A.2.2 Les lignes à retard

Pour détecter la position d'impact de l'atome dans le plan du détecteur on utilise des lignes à retard. La douche d'électrons issue du MCP tombe sur la ligne retard : un fil métallique le long duquel les électrons se propagent à environ  $v = c/3$  dans les deux sens. En mesurant le temps d'arrivée des impulsions aux deux extrémités de la ligne, on peut déduire l'abscisse du point d'impact le long de la ligne à retard. À l'aide de deux lignes à retard orthogonales on est alors capable de déterminer les coordonnées du point d'impact de l'atome dans le plan du détecteur ainsi que l'instant auquel l'atome est arrivé sur le détecteur. Cela permet la reconstruction en trois dimensions de la distribution atomique après le temps de chute.

Pour améliorer la résolution dans le plan du détecteur, les lignes à retard sont enroulées perpendiculairement à l'axe de la direction mesurée pour réduire la vitesse effective de propagation d'un facteur 100 (voir figure A.6 (a)). Les impulsions sont envoyées vers un convertisseur temps-numérique (Time to Digital Converter TDC) qui numérise les quatre temps obtenus aux extrémités des lignes à retard qui peuvent ensuite être enregistrés pour être analysés plus tard. La résolution du système de détection est essentiellement due à l'électronique. Elle est d'environ  $400 \mu\text{m}$  dans le plan horizontal et de  $3 \text{ nm}$  verticalement<sup>2</sup>. Cette très forte anisotropie de la résolution est parfaitement adaptée à la géométrie du piège optique, l'axe long du condensat est

2. largeur totale à mi-hauteur



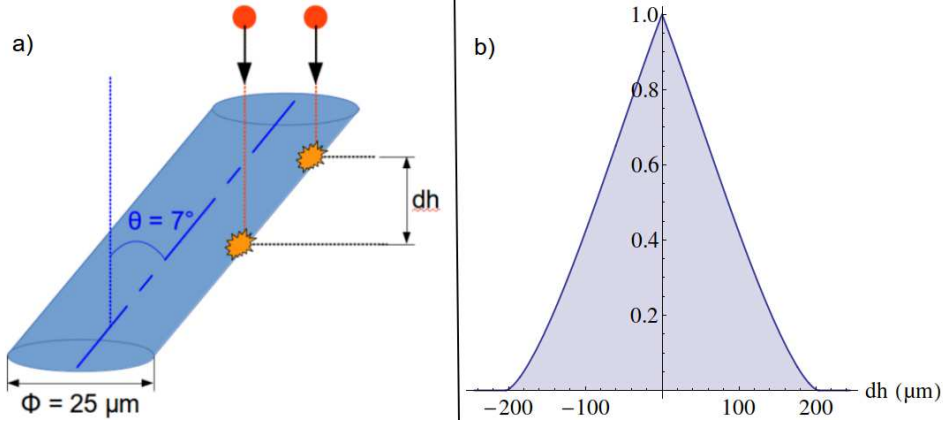
**Figure A.6** – a) Schéma de l'enroulement des lignes à retard sous le MCP. Par exemple, pour se déplacer le long de l'axe effectif de propagation de la distance qui sépare deux spires, les électrons doivent parcourir une spire entière. Le rapport entre l'écartement des spires et la longueur d'une spire donne ainsi la réduction de la vitesse effective. Dans notre cas la vitesse est réduite d'un facteur 100. b) Photo du détecteur sur laquelle on distingue le MCP (disque noir) sous lequel sont enroulées les lignes à retard protégées par des caches métalliques.

selon la verticale ce qui fait qu'à la coupure du piège l'expansion est beaucoup plus rapide dans les directions transverses et à l'arrivée sur le détecteur l'anisotropie est inversée, le nuage ressemble alors à une crêpe horizontale, fine le long de l'axe verticale selon lequel la résolution est bien meilleure (voir [A.2.4](#)).

### A.2.3 Remarque sur la résolution verticale

En fait, cette valeur de résolution verticale est mesurée en observant la dispersion de la somme des quatre temps recueillis aux extrémités des lignes à retard. Cette somme doit théoriquement être une constante et sa dispersion nous donne la résolution du système. Cependant, verticalement, cette résolution que l'on a longtemps pensé être de 3 nm est fortement dégradée par un autre effet qui n'a rien à voir avec l'électronique. À cause de l'inclinaison des micro-canaux, la résolution est dégradée par un simple effet géométrique comme illustré par la figure [A.7](#). En intégrant sur l'entrée d'un canal, on peut obtenir la distribution de décalage en hauteur et en tirer la résolution verticale réelle de notre système de détection. Ainsi la résolution à une particule est de  $140 \mu\text{m}$  et celle à deux particules de  $175 \mu\text{m}$ <sup>3</sup> (voir figure [A.7](#) (b)) ce qui reste inférieur à la résolution transverse mais est beaucoup

3. Largeurs totales à mi-hauteur



**Figure A.7** – a) Deux atomes arrivant au même instant à l'entrée d'un canal du MCP vont atteindre ses parois à des hauteurs différentes. Ainsi, des atomes que l'on devrait mesurer comme arrivant simultanément seront perçus décalés ce qui réduit fortement la résolution. b) Effet de ce phénomène sur la résolution à deux corps (celle qui intervient dans les mesures de corrélations par exemple). Pour deux atomes arrivant simultanément à l'entrée d'un canal, on obtiendra une distribution de différence de hauteurs d'arrivée ayant cette allure.

moins bon que ce qu'on a longtemps cru, cela permet d'ailleurs d'expliquer les largeurs jusque-là incomprises de certaines fonctions de corrélations qui étaient limitées par cet effet.

#### A.2.4 Expansion et reconstruction en vitesse

##### Expansion gouvernée par les interactions

Après la coupure du piège dipolaire les atomes subissent une expansion qui n'est pas balistique, elle est essentiellement gouvernée par les interactions [CD96 ; KSS97]. À la coupure, le condensat s'étend selon une loi d'échelle dérivée par [CD96] :

$$\frac{R_{\perp}(t)}{R_{\perp}(0)} = \sqrt{1 + (\omega_{\perp} t)^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{R_z(t)}{R_z(0)} = 1 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_{\perp}}\right)^2 [\omega_{\perp} t \arctan(\omega_{\perp} t) - \ln(\sqrt{1 + (\omega_{\perp} t)^2})] \quad (\text{A.2})$$

avec  $R_{\perp}(t)$  et  $\omega_{\perp}$  ( $R_z(t)$  et  $\omega_z$ ) le rayon et la pulsation de piégeage transverse (longitudinal). Ces expressions sont valables lorsque  $\frac{\omega_z}{\omega_{\perp}} \ll 1$  ce qui

est le cas sur notre expérience puisque  $\omega_z \approx 10$  Hz et  $\omega_\perp \approx 1.7$  kHz. En utilisant l'approximation dite de Thomas-Fermi pour le rayon longitudinal et en faisant une approximation de densité locale pour le rayon transverse (modèle de [Ger04]), on obtient pour ces paramètres des dimensions initiales [Bon11] :

$$R_\perp(0) = 1.4 \pm 0.2 \mu m \quad (\text{A.3})$$

$$R_z(0) = 800 \pm 80 \mu m. \quad (\text{A.4})$$

Ainsi, après expansion, au niveau du détecteur le condensat a des rayons transverse et longitudinal  $R_\perp = 4 \pm 0.6$  mm et  $R_z = 0.95 \pm 0.08$  mm.

### Conversion en vitesse

La vitesse initiale  $(v_{x,0}, v_{y,0}, v_{z,0})$  d'un atome est calculée en supposant une expansion balistique et en négligeant les effets du potentiel de champ moyen. Cette approximation est raisonnable étant donné que la densité chute très rapidement (divisée par 10 en 300  $\mu s$ ). Pour relier la position et l'instant d'impact sur le détecteur  $(x,y,t)$  à la position et à la vitesse initiale des particules grâce aux équations classiques de la dynamique :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x,0}t \\ y &= y_0 + v_{y,0}t \\ z_{MCP} &= z_0 + v_{z,0}t - 0.5gt^2 \end{aligned}$$

Où l'axe verticale est selon  $z$ . Le détecteur est positionné à la hauteur  $z = z_{MCP}$ . Bien évidemment, on mesure seulement trois quantités  $x$ ,  $y$  et  $t$ , on ne peut donc pas obtenir les six quantités  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $v_{x,0}$ ,  $v_{y,0}$  et  $v_{z,0}$ . Cependant, il est possible d'obtenir la valeur des vitesses initiales lorsque l'on est dans le cadre de ce qu'on pourrait appeler l'approximation de champ lointain, c'est-à-dire si les distances parcourues pendant la propagation sont très grandes devant les dimensions initiales du gaz :  $x_0 \ll v_{x,0}t$ ,  $y_0 \ll v_{y,0}t$  et  $z_0 \ll v_{z,0}t$ . Comme le détecteur est situé loin du piège ( $\approx 45$  cm), le temps de propagation de plus de 300 ms (308 ms pour un condensat au repos) est important ce qui permet d'être la plupart du temps dans le cadre de cette approximation. On a alors :

$$\begin{aligned} v_{x,0} &\approx x/t \\ v_{y,0} &\approx y/t \\ v_{z,0} &\approx (z_{MCP} + 0.5gt^2)/t \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de reconstruire la distribution en vitesses initiales des atomes à partir de laquelle on peut par exemple étudier les corrélations

en vitesse. Cependant, lors de l'analyse de données il faut toujours garder à l'esprit qu'il s'agit d'une approximation. Transversalement la taille initiale du nuage est seulement de quelques micromètres (voir A.2.4), négligeable devant sa taille après expansion (plusieurs millimètres) et devant la distance parcourue par un atome de vitesse transverse initiale  $v_{\perp,0} > 10^{-5}$  m/s. La résolution transverse du détecteur étant de l'ordre de  $1.3 \times 10^{-3}$  m/s, l'approximation de champ lointain est toujours vérifiée selon x et y. Au contraire, selon l'axe vertical l'expansion du condensat est faible devant sa taille initiale ( $\approx 1.6$  mm) et la conversion en vitesse est alors abusive. Pour des écarts en vitesse inférieurs à  $6 \times 10^{-3}$  m/s, la distribution initiale en position intervient également.





## Annexe B

# Hong, Ou et Mandel, cas général

Dans cette annexe nous allons détailler le calcul de la variance de la différence du nombre de particules ainsi que le calcul des corrélations locales et croisées dans le cas général. Les conventions utilisées sont les mêmes que dans la section 4.0.1 (voir figure B.1), la séparatrice relie les modes d'entrée aux modes de sortie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{c} &= r\hat{a} + t\hat{b} & \hat{d} &= t\hat{a} - r\hat{b} \\ \hat{\gamma} &= r\hat{\alpha} + t\hat{\beta} & \hat{\delta} &= t\hat{\alpha} - r\hat{\beta}\end{aligned}$$

Avec  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$  les opérateurs d'annihilations dans les modes respectivement  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  et avec  $r$  et  $t$  les coefficients (réels) de réflexion et transmission en amplitude ( $r^2 + t^2 = 1$ ).

On introduit également les opérateurs "nombre de particules" du côté A :  $\hat{N}_A = \hat{n}_a + \hat{n}_\alpha$  et du côté B :  $\hat{N}_B = \hat{n}_b + \hat{n}_\beta$  et les nombres de particules associés  $N_A = n_a + n_\alpha$  et  $N_B = n_b + n_\beta$ . On considère que les détecteurs en C et D sont incapables de séparer les modes, les quantités mesurées ne peuvent donc dépendre que de  $\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma$  et  $\hat{n}_d + \hat{n}_\delta$ .

On considérera un état incident de la forme :

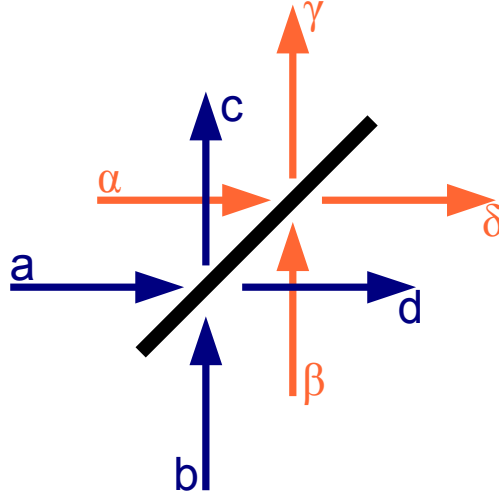
$$|\Psi\rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha} |n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle \quad (\text{B.1})$$

Et on définit les opérateurs  $\hat{A}, \hat{B}$  et  $\hat{C}$  de la même manière qu'en 4.0.1 :

$$\hat{A} = (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma)(\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma) \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{B} = (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma)(\hat{n}_d + \hat{n}_\delta) \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{C} = (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma - \hat{n}_d - \hat{n}_\delta) \quad (\text{B.4})$$



**Figure B.1** – schéma de principe de la séparatrice considérée pour les calculs. Les modes repérés par les lettres grecques sont orthogonaux aux modes repérés par les lettres romanes

Ainsi,

$$g_{loc}^{(2)} = \frac{\langle \hat{A} \rangle}{\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle^2} \quad (\text{B.5})$$

$$g_{cr}^{(2)} = \frac{\langle \hat{B} \rangle}{\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle \langle \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle} \quad (\text{B.6})$$

$$V = \frac{\langle \hat{C}^2 \rangle - \langle \hat{C} \rangle^2}{\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma + \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle} \quad (\text{B.7})$$

De plus, on introduit l'opérateur d'interférence  $\hat{X}$  qui apparaît naturellement dans les calculs :

$$\hat{X} = \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{\alpha}^\dagger \hat{\beta} + \hat{\beta}^\dagger \hat{\alpha} \quad (\text{B.8})$$

## B.1 Moyenne de $\hat{A}$ , $\hat{B}$ et variance de $\hat{C}$

Afin de calculer les trois quantités  $g_{loc}^{(2)}$ ,  $g_{cr}^{(2)}$  et  $V$  qui nous intéressent, on calcule d'abord la valeur moyenne des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , et la variance de  $\hat{C}$ .

**B.1.1 Moyenne de  $\hat{A}$** 

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma)^2 \\
&= (r^2 \hat{N}_A + t^2 \hat{N}_B + rt \hat{X})^2 \\
&= (r^2 N_A + t^2 N_B)^2 + 2rt(r^2 N_A + t^2 N_B) \hat{X} + r^2 t^2 \hat{X}^2
\end{aligned}$$

D'où en moyenne :

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle (r^2 N_A + t^2 N_B)^2 \rangle + 2rt \langle (r^2 N_A + t^2 N_B) \hat{X} \rangle + r^2 t^2 \langle \hat{X}^2 \rangle \quad (\text{B.9})$$

**B.1.2 Moyenne de  $\hat{B}$** 

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma)(\hat{n}_d + \hat{n}_\delta) \\
&= (r^2 \hat{N}_A + t^2 \hat{N}_B + rt \hat{X})(t^2 \hat{N}_A + r^2 \hat{N}_B - rt \hat{X}) \\
&= (r^2 N_A + t^2 N_B)(t^2 N_A + r^2 N_B) + rt(t^2 - r^2)(N_A - N_B) \hat{X} - r^2 t^2 \hat{X}^2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\langle \hat{B} \rangle = \langle (r^2 N_A + t^2 N_B)(t^2 N_A + r^2 N_B) \rangle + rt(t^2 - r^2) \langle (N_A - N_B) \hat{X} \rangle - r^2 t^2 \langle \hat{X}^2 \rangle \quad (\text{B.10})$$

**B.1.3 variance de  $\hat{C}$** 

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \langle \hat{C}^2 \rangle - \langle \hat{C} \rangle^2 \\
&= \langle (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma - \hat{n}_d + \hat{n}_\delta)^2 \rangle - \langle (\hat{n}_c + \hat{n}_\gamma - \hat{n}_d + \hat{n}_\delta) \rangle^2 \\
&= \langle [(r^2 - t^2)(N_A - N_B) + 2rt \hat{X}]^2 \rangle - \langle [(r^2 - t^2)(N_A - N_B) + 2rt \hat{X}] \rangle^2 \\
&= (r^2 - t^2)^2 [\langle (N_A - N_B)^2 \rangle - \langle (N_A - N_B) \rangle^2] + 4r^2 t^2 [\langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2]
\end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\mathcal{V} = (r^2 - t^2)^2 \mathcal{V}_{AB} + 4r^2 t^2 \mathcal{V}_X \quad (\text{B.11})$$

Avec  $\mathcal{V}_{AB} = \langle (N_A - N_B)^2 \rangle - \langle (N_A - N_B) \rangle^2$  la variance de la différence du nombre de particules de l'état initial. Elle ne contribue à la variance finale que si  $(r^2 - t^2) \neq 0$ , c'est à dire si la séparatrice n'est pas 50/50.  $\mathcal{V}_X = \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2$  est la variance liée aux interférences.

## B.2 Dénominateurs : $\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle^2$ et $\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle \langle \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle$

On calcule maintenant les coefficients de normalisation pour les corrélations :

$$\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle^2 = (\langle r^2 N_A + t^2 N_B \rangle + rt \langle \hat{X} \rangle)^2 \quad (\text{B.12})$$

$$\langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle \langle \hat{n}_d + \hat{n}_\delta \rangle = (\langle r^2 N_A + t^2 N_B \rangle + rt \langle \hat{X} \rangle) (\langle t^2 N_A + r^2 N_B \rangle - rt \langle \hat{X} \rangle) \quad (\text{B.13})$$

L'ensemble des expressions précédentes dépendent uniquement des moments d'ordre 1 et 2 des opérateurs  $\hat{N}_A$ ,  $\hat{N}_B$  et  $\hat{X}$  :  $\langle N_A \rangle$ ,  $\langle N_B \rangle$ ,  $\langle \hat{X} \rangle$  et  $\langle N_A^2 \rangle$ ,  $\langle N_B^2 \rangle$ ,  $\langle N_A N_B \rangle$ ,  $\langle \hat{X}^2 \rangle$ ,  $\langle f(\hat{N}_A, \hat{N}_B) \hat{X} \rangle$  avec  $f$  une fonction quelconque<sup>1</sup>. On obtient aisément les moments de  $N_A$  et  $N_B$  :

$$\langle N_A \rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} |C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha}|^2 (n_a + n_\alpha) \quad (\text{B.14})$$

$$\langle N_B \rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} |C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha}|^2 (n_b + n_\beta) \quad (\text{B.15})$$

$$\langle N_A^2 \rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} |C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha}|^2 (n_a + n_\alpha)^2 \quad (\text{B.16})$$

$$\langle N_B^2 \rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} |C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha}|^2 (n_b + n_\beta)^2 \quad (\text{B.17})$$

$$\langle N_A N_B \rangle = \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} |C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha}|^2 (n_a + n_\alpha)(n_b + n_\beta) \quad (\text{B.18})$$

Il suffit maintenant de déterminer  $\langle \hat{X} \rangle$  et  $\langle \hat{X}^2 \rangle$  pour obtenir ce qui nous intéresse. Bien que les calculs soient sans grandes difficultés, les expressions obtenues sont particulièrement lourdes dans leur forme la plus générale.

## B.3 Moyenne de $f(\hat{N}_A, \hat{N}_B) \hat{X}$

On rappelle que :

$$\hat{X} = \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{\alpha}^\dagger \hat{\beta} + \hat{\beta}^\dagger \hat{\alpha}$$

et que

$$\langle n'_a, n'_\alpha, n'_b, n'_\beta | n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta \rangle = \delta_{n'_a}^{n_a} \delta_{n'_\alpha}^{n_\alpha} \delta_{n'_b}^{n_b} \delta_{n'_\beta}^{n_\beta}$$

---

1. Il faut que  $f$  soit telle que  $f(\hat{N}_A, \hat{N}_B) |n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle = f(N_A, N_B) |n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta\rangle$  ce qui me semble vrai tout le temps et qui l'est au moins pour n'importe quelle fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , ce qui est le cas des fonctions considérées ici.

On calcule maintenant  $\langle f(\hat{N}_A, \hat{N}_B)\hat{X} \rangle$  dans le cas général :

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle &= \sum C_{n'_b, n'_\beta}^{n'_a, n'_\alpha} C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha} \langle n'_a, n'_\alpha, n'_b, n'_\beta | f(\hat{N}_A, \hat{N}_B)\hat{X} | n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta \rangle \\ &= \sum C_{n'_b, n'_\beta}^{n'_a, n'_\alpha} C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha} f(N_A, N_B) \langle n'_a, n'_\alpha, n'_b, n'_\beta | \\ &\quad [ \sqrt{(n_a+1)n_b} | (n_a+1), n_\alpha, (n_b-1), n_\beta \rangle + \\ &\quad \sqrt{n_a(n_b+1)} | (n_a-1), n_\alpha, (n_b+1), n_\beta \rangle + \\ &\quad \sqrt{(n_\alpha+1)n_\beta} | n_a, (n_\alpha+1), n_b, (n_\beta-1) \rangle + \\ &\quad \sqrt{n_\alpha(n_\beta+1)} | n_a, (n_\alpha-1), n_b, (n_\beta+1) \rangle ] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle &= \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} f(N_A, N_B) [ \mathcal{D}_{-1,0}^{+1,0} \sqrt{(n_a+1)n_b} + \mathcal{D}_{+1,0}^{-1,0} \sqrt{(n_b+1)n_a} \\ &\quad + \mathcal{D}_{0,-1}^{0,+1} \sqrt{(n_\alpha+1)n_\beta} + \mathcal{D}_{0,+1}^{0,-1} \sqrt{(n_\beta+1)n_\alpha} ] \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \mathcal{D}_{+b,+ \beta}^{+a,+ \alpha} = C_{n_b, n_\beta}^{n_a, n_\alpha} (C_{(n_b+b), (n_\beta+\beta)}^{(n_a+a), (n_\alpha+\alpha)})^*.$$

## B.4 Moyenne de $\hat{X}^2$

Par un développement similaire à celui effectué dans la partie précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}^2 \rangle &= \sum_{n_a, n_\alpha, n_b, n_\beta} [ \mathcal{D}_{-2,0}^{+2,0} \sqrt{(n_a+1)(n_a+2)n_b(n_b-1)} + \mathcal{D}_{+2,0}^{-2,0} \sqrt{(n_b+1)(n_b+2)n_\alpha(n_\alpha-1)} \\ &\quad + \mathcal{D}_{0,-2}^{0,+2} \sqrt{(n_\alpha+1)(n_\alpha+2)n_\beta(n_\beta-1)} + \mathcal{D}_{0,-2}^{0,+2} \sqrt{(n_\beta+1)(n_\beta+2)n_\alpha(n_\alpha-1)} \\ &\quad + (2(n_a n_b + n_\alpha n_\beta) + N_A + N_B) \mathcal{D}_{0,0}^{0,0} \\ &\quad + \mathcal{D}_{-1,-1}^{+1,+1} \sqrt{(n_a+1)(n_\alpha+1)n_b n_\beta} + \mathcal{D}_{+1,+1}^{-1,-1} \sqrt{(n_b+1)(n_\beta+1)n_a n_\alpha} \\ &\quad + \mathcal{D}_{+1,-1}^{-1,+1} \sqrt{(n_b+1)(n_\alpha+1)n_a n_\beta} + \mathcal{D}_{-1,+1}^{+1,-1} \sqrt{(n_a+1)(n_\beta+1)n_b n_\alpha} ] \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Maintenant que l'on a obtenu les expressions de  $\langle N_A \rangle$ ,  $\langle N_B \rangle$ ,  $\langle f(\hat{N}_A, \hat{N}_B)\hat{X} \rangle$  et  $\langle \hat{X}^2 \rangle$ , on est capable de calculer  $g_{loc}^{(2)}$ ,  $g_{cr}^{(2)}$  et  $V$  quelque soit l'état (pur) d'entrée. Dans la majorité des cas il est préférable d'utiliser l'outil informatique pour déterminer numériquement ces quantités cependant certains exemples bien choisis simplifient considérablement les expressions et rendent possible le calcul "à la main" de la variance et des corrélations.

## B.5 Effet de la détectivité

Quelque soit le montage sur lequel on souhaite réaliser l'expérience, les détecteurs en sortie de la séparatrice auront toujours une détectivité  $\eta$  inférieure à l'unité. Pour prendre en compte cet effet, on modélise l'efficacité réduite de détection par une séparatrice de transmission (en amplitude)  $\sqrt{\eta}$  placée derrière les ports de sortie. Sur la deuxième entrée de la séparatrice il n'y a que le vide quantique. On repère les quantités après la séparatrice par un indice *det*. Un rapide calcul permet de trouver  $\langle \hat{A}_{det} \rangle$ ,  $\langle \hat{B}_{det} \rangle$ ,  $\langle \hat{C}_{det} \rangle$  et  $\langle \hat{C}_{det}^2 \rangle$  :

$$\langle \hat{A}_{det} \rangle = \eta^2 \langle \hat{A} \rangle + \eta(1 - \eta) \langle \hat{n}_c + \hat{n}_\gamma \rangle \quad (\text{B.21})$$

$$\langle \hat{B}_{det} \rangle = \eta^2 \langle \hat{B} \rangle \quad (\text{B.22})$$

$$\langle \hat{C}_{det} \rangle = \eta \langle \hat{C} \rangle \quad (\text{B.23})$$

$$\langle \hat{C}_{det}^2 \rangle = \eta^2 \langle \hat{C}^2 \rangle + \eta(1 - \eta) \langle \hat{N}_A + \hat{N}_B \rangle \quad (\text{B.24})$$

On peut alors en déduire  $g_{loc,det}^{(2)}$ ,  $g_{cr,det}^{(2)}$  et  $V_{det}$  :

$$g_{loc,det}^{(2)} = g_{loc}^{(2)} + \frac{(1 - \eta)}{\eta} \frac{1}{\langle r^2 N_A + t^2 N_B \rangle} \quad (\text{B.25})$$

$$g_{cr,det}^{(2)} = g_{cr}^{(2)} \quad (\text{B.26})$$

$$V_{det} = \eta V + (1 - \eta) \quad (\text{B.27})$$

## B.6 Exemples

Dans cette partie on va s'intéresser à quelques cas particuliers pour lesquels on peut calculer sans trop de difficultés la variance et les corrélations. Les exemples choisis vont permettre de mettre en évidence certaines tendances que l'on devrait observer sur l'expérience. Pour chaque cas, on calcule les expressions de la variance et des corrélations.

### B.6.1 Sorties indiscernables d'un amplificateur paramétrique : $|\Psi\rangle = \sum_n \frac{(\tanh \lambda)^n}{\cosh \lambda} |n, 0, n, 0\rangle$

Cet état est celui attendu en sortie d'un amplificateur paramétrique et devrait être un bon modèle de l'état issu du mélange à quatre ondes dans le réseau optique si l'on sélectionne une paire de modes corrélés. Pour  $r = t =$

$1/\sqrt{2}$  et en posant  $N = \langle N_A \rangle = \langle N_B \rangle = (\sinh \lambda)^2$  :

$$g_{loc,det}^{(2)} = 3 + \frac{1 + \eta}{\eta N} \quad (\text{B.28})$$

$$g_{cr,det}^{(2)} = 1 \quad (\text{B.29})$$

$$V_{det} = 1 + \eta(2N + 1) \quad (\text{B.30})$$

### B.6.2 Sorties distinctes de deux amplificateurs paramétriques : $|\Psi\rangle = \sum_{n_a, n_\beta} \frac{(\tanh \lambda_a)^{n_a}}{\cosh \lambda_a} \frac{(\tanh \lambda_\beta)^{n_\beta}}{\cosh \lambda_\beta} |n_a, 0, 0, n_\beta\rangle$

Il s'agit de l'équivalent discernable de l'état précédent. Il peut être obtenu en utilisant une des sorties d'un amplificateur paramétrique pour la voie "a" et celle d'un autre amplificateur paramétrique pour la voie "β". Pour  $r = t = 1/\sqrt{2}$  et si  $\langle N_A \rangle = \langle N_B \rangle = N$  (c'est à dire si  $\lambda_a = \lambda_\beta$ ) :

$$g_{loc,det}^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{\eta N} \quad (\text{B.31})$$

$$g_{cr,det}^{(2)} = \frac{3}{2} \quad (\text{B.32})$$

$$V_{det} = 1 \quad (\text{B.33})$$

### B.6.3 États cohérents corrélés : $|\Psi\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, 0, n, 0\rangle$

Même s'il n'est pas représentatif d'un processus physique simple, cet état est un exemple d'état avec de très fortes corrélations et pour lequel on peut calculer aisément les quantités souhaitées. Pour  $r = t = 1/\sqrt{2}$  et en posant  $\langle N_A \rangle = \langle N_B \rangle = |\alpha|^2$  :

$$g_{loc,det}^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1 + \eta}{\eta N} \quad (\text{B.34})$$

$$g_{cr,det}^{(2)} = \frac{1}{2} \quad (\text{B.35})$$

$$V_{det} = 1 + \eta(N + 1) \quad (\text{B.36})$$

### B.6.4 États cohérents indépendants : $|\Psi\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n_a, n_\beta} \frac{\alpha^{n_a}}{\sqrt{n_a!}} \frac{\beta^{n_\beta}}{\sqrt{n_\beta!}} |n_a, 0, 0, n_\beta\rangle$

C'est l'équivalent discernable de l'état précédent. On peut aisément réaliser cet état en prenant deux états cohérents (des laser pour les photons par exemple) indépendants pour les voies "a" et "β". Pour  $r = t = 1/\sqrt{2}$  et si



$$\langle N_A \rangle = \langle N_B \rangle = N :$$

$$g_{loc,det}^{(2)} = 1 + \frac{1 + \eta}{\eta N} \quad (\text{B.37})$$

$$g_{cr,det}^{(2)} = 1 \quad (\text{B.38})$$

$$V_{det} = 1 \quad (\text{B.39})$$

On remarquera que pour ce dernier exemple on retrouve un bruit poissonnien sur la différence du nombre de particules ( $V = 1$ ) et les corrélations locales et croisées tendent bien vers 1 comme attendu pour des état cohérents.

# Bibliographie

- [And+95] M. H ANDERSON, J. R ENSHER, M. R MATTHEWS, C. E WIE-  
MAN et Cornell E. A. « Observation of Bose-Einstein Condensa-  
tion in a Dilute Atomic Vapor ». Dans : *Science* 269 (5221 juil.  
1995), 198–201 (cité page 1).
- [Ash+86] A. ASHKIN, J. M. DZIEDZIC, J. E. BJORKHOLM et S. CHU.  
« Observation of a single-beam gradient force optical trap for  
dielectric particles ». Dans : *Opt. Lett.* 11 (5 mar. 1986), 288  
(cité page 158).
- [ADR82] A ASPECT, J DALIBARD et G ROGER. « Experimental test of  
bell’s inequalities using time-varying analysers ». Dans : *Phys.*  
*Rev. Lett* 49.25 (1982), 1804–1807 (cité pages 2, 5, 20, 27, 125).
- [Bau+00] J. J BAUMBERG, P. G SAVVIDIS, R. M STEVENSON, A. I TAR-  
TAKOVSKII, M. S SKOLNICK, D. M WHITTAKER et J. S RO-  
BERTS. « Parametric oscillation in a vertical microcavity : A  
polariton condensate or micro-optical parametric oscillation ».  
Dans : *Phys. Rev. B* 62 (24 déc. 2000), R16247–R16250 (cité  
pages 20, 48).
- [Bel64] J. S BELL. « On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox ». Dans :  
*Physics* 1 (1964), 195 (cité page 27).
- [Ben+93] C. H BENNETT, G BRASSARD, Crépeau C, R JOSZA, A PERES  
et W. K WOOTTERS. « Teleporting an unknown quantum  
state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels ».  
Dans : *Phys. Rev. Lett* 70.13 (1993), 1895–1899 (cité page 28).
- [Biz+05] S BIZE, P LAURENT, M ABGRALL, H MARION, I MAKSIMOVIC,  
L CACCIAPUOTI, J GRÜNERT, C VIAN, F PEREIRA DOS SAN-  
TOS, P ROSENBUSCH, P LEMONDE, G SANTARELLI, P WOLF, A  
CLAIRON, A LUITEN, M TOBAR et C SALOMON. « Cold atom  
clocks and applications ». Dans : *J. Phys. B : At. Mol. Opt.*  
*Phys.* 38.9 (2005), S449 (cité page 1).
- [BW08] R BLATT et D. J WINELAND. « Entangled states of trapped  
atomic ions ». Dans : *Nature* 453 (2008), 1008 (cité page 2).

- [Blo29] Felix BLOCH. « Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern ». Dans : *Zeitschrift für Physik* 52.7-8 (1929), 555–600 (cité page 42).
- [BDZ08] Immanuel BLOCH, Jean DALIBARD et Wilhelm ZWERGER. « Many-body physics with ultracold gases ». Dans : *Rev. Mod. Phys.* 80 (3 juil. 2008), 885–964 (cité pages 37, 38, 40).
- [Bon11] M BONNEAU. « Mélange à quatre ondes atomique dans un réseau optique ». Thèse de doct. Université Paris XI, 2011 (cité pages 3, 38, 61, 63, 98, 164).
- [Bon+13] M. BONNEAU, J. RUAUDEL, R. LOPES, J.-C. JASKULA, A. ASPECT, D. BOIRON et C. I. WESTBROOK. « Tunable source of correlated atom beams ». Dans : *Phys. Rev. A* 87 (6 juin 2013), 061603 (cité pages 2, 5, 125).
- [Bro00] A. BROWAEYS. « Piégeage magnétique d’un gaz d’hélium métastable : vers la condensation de Bose-Einstein ». Université Paris Sud, 2000 (cité page 158).
- [Büc13] R. BÜCKER. « Twin-atom beam generation in a one-dimensional Bose gas ». Technischen Universität Wien, 2013 (cité pages 103, 104).
- [Büc+11] R BÜCKER, J GROND, S MANZ, Tarik BERRADA, Thomas BETZ, C KOLLER, U HOHENESTER, T SCHUMM, A PERRIN et J SCHMIEDMAYER. « Twin-atom beams ». Dans : *Nature Physics* 7 (2011), 608–611 (cité pages 2, 5, 19, 125).
- [Büc+12] Robert BÜCKER, Ulrich HOHENESTER, Tarik BERRADA, Sandrine van FRANK, Aurélien PERRIN, Stephanie MANZ, Thomas BETZ, Julian GROND, Thorsten SCHUMM et Jörg SCHMIEDMAYER. « Dynamics of parametric matter-wave amplification ». Dans : *Phys. Rev. A* 86 (1 juil. 2012), 013638 (cité pages 97, 99, 103, 104, 108, 127).
- [Bur+01] S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, F. MINARDI, M. INGUSCIO, M. L. CHIOFALO et M. P. TOSI. « Superfluid and Dissipative Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Periodic Optical Potential ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 86 (20 mai 2001), 4447–4450 (cité page 65).
- [BW70] David C. BURNHAM et Donald L. WEINBERG. « Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 25.2 (juil. 1970), 84–87 (cité page 7).

- [Cam+06] Gretchen K. CAMPBELL, Jongchul MUN, Micah BOYD, Erik W. STREED, Wolfgang KETTERLE et David E. PRITCHARD. « Parametric Amplification of Scattered Atom Pairs ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 96.2, 020406 (2006), 020406 (cité pages 3, 33, 34, 40, 125).
- [CST89] Richard A. CAMPOS, Bahaa E. A. SALEH et Malvin C. TEICH. « Quantum-mechanical lossless beam splitter : SU(2) symmetry and photon statistics ». Dans : *Phys. Rev. A* 40 (3 août 1989), 1371–1384 (cité page 113).
- [CM91] O. CARNAL et J. MLYNEK. « Young’s double-slit experiment with atoms : A simple atom interferometer ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 66 (21 mai 1991), 2689–2692 (cité page 1).
- [CD96] Y. CASTIN et R. DUM. « Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 77 (27 déc. 1996), 5315–5319 (cité page 163).
- [Cav81] C CAVES. « Quantum-mechanical noise in an interferometer ». Dans : *Phys. Rev. D* 23.8 (1981), 1693–1708 (cité pages 24, 25).
- [CSQ01] C CIUTI, P SCHWENDIMANN et A QUATTROPANI. « Parametric luminescence of microcavity polaritons ». Dans : *Phys. Rev. B* 63 (4 jan. 2001), 041303 (cité pages 20, 48).
- [Col11] The LIGO Scientific COLLABRATION. « A Gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit ». Dans : *Nature Physics* 7 (2011), 962–965 (cité page 25).
- [Dal13] J DALIBARD. « Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques ». Cours du Collège de France. 2013 (cité pages 40, 42).
- [Dal+11] J. DALIBARD, F. GERBIER, G. JUZELIUNAS et P. ÖHBERG. « *Colloquium* : Artificial gauge potentials for neutral atoms ». Dans : *Rev. Mod. Phys.* 83 (4 nov. 2011), 1523–1543 (cité page 1).
- [DJ99] B DEMARCO et D. S JIN. « Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas ». Dans : *Science* 285 (5434 sept. 1999), 1703–1706 (cité page 1).
- [Den+02] J. H DENSCHLAG, J. E SIMSARIAN, H HÄFFNER, C MCKENZIE, A BROWAEYS, D CHO, K HELMERSON, S. L ROLSTON et W. D PHILLIPS. « A Bose-Einstein condensate in an optical lattice ». Dans : *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 35.14 (2002), 3095 (cité page 45).
- [Dic54] R. H. DICKE. « Coherence in Spontaneous Radiation Processes ». Dans : *Phys. Rev.* 93 (1 jan. 1954), 99–110 (cité page 123).

- [DBB02] J. A. DUNNINGHAM, K. BURNETT et Stephen M. BARNETT. « Interferometry below the Standard Quantum Limit with Bose-Einstein Condensates ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 89.15 (sept. 2002), 150401 (cité page 125).
- [EPR35] A EINSTEIN, B PODOLSKY et N ROSEN. « Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? » Dans : *Phys. Rev.* 47.10 (1935), 777–780 (cité page 26).
- [Eke91] A. K EKERT. « Quantum cryptography based on Bell’s theorem ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 67 (6 août 1991), 661–663 (cité pages 2, 5, 20, 125).
- [Equ14] Palaiseau EQUIPE HELIUM MÉTASTABLE. *The coherence of superradiance - to be published*. 2014 (cité page 123).
- [Fal+04] L FALLANI, L DE SARLO, J LYE, M MODUGNO, R SAERS, C FORT et M INGUSCIO. « Observation of Dynamical Instability for a Bose-Einstein Condensate in a Moving 1D Optical Lattice ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 93 (14 sept. 2004), 140406 (cité pages 48, 65).
- [Fer+08] Andrew J. FERRIS, Matthew J. DAVIS, Reece W. GEURSEN, P. Blair BLAKIE et Andrew C. WILSON. « Dynamical instabilities of Bose-Einstein condensates at the band edge in one-dimensional optical lattices ». Dans : *Phys. Rev. A* 77 (1 jan. 2008), 012712 (cité pages 48, 65).
- [Fes58] H FESHBACH. « Unified theory of nuclear reactions ». Dans : *Annals of Physics* 5.4 (1958), 357–390 (cité page 1).
- [Fes62] H FESHBACH. « A unified theory of nuclear reactions. {II} ». Dans : *Annals of Physics* 19.2 (1962), 287–313 (cité page 1).
- [FC72] S. J FREEDMAN et J. F CLAUSER. « Experimental test of local hidden-variable theories ». Dans : *Phys. Rev. Lett* 28.14 (1972), 938–941 (cité page 27).
- [FN10] T FURUKAWA et M NOMURA. « Trend of Software R&D for Numerical Simulation - Hardware for parallel and distributed computing and software automatic tuning. » Dans : *Science & Technology Trends - Quaterly Review* 35 (avr. 2010) (cité page 105).
- [Ger04] F. GERBIER. « Quasi-1D Bose-Einstein condensates in the dimensional crossover regime ». Dans : *EuroPhys. Lett.* 66 (6 juin 2004), 771–777 (cité page 164).
- [GC10] F GERBIER et Y CASTIN. « Heating rates for an atom in a far-detuned optical lattice ». Dans : *Phys. Rev. A* 82 (1 2010), 013615 (cité page 57).

- [GML95] D. M GILTNER, R. W MCGOWAN et S. A LEE. « Atom Interferometer Based on Bragg Scattering from Standing Light Waves ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 75 (14 oct. 1995), 2638–2641 (cité page 39).
- [Gla63] R. J. GLAUBER. « The Quantum Theory of Optical Coherence ». Dans : *Phys. Rev.* 130.6 (juin 1963), 2529–2539 (cité pages 9, 15).
- [GA80] J. P GORDON et A ASHKIN. « Motion of atoms in a radiation trap ». Dans : *Phys. Rev. A* 21 (5 1980), 1606–1617 (cité page 57).
- [Gre+02] M GREINER, O MANDEL, T ESSLINGER, T HANSCH et I BLOCH. « Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms ». Dans : *Nature* 415 (jan. 2002), 39–44 (cité page 38).
- [Gre+05] M. GREINER, C. A. REGAL, J. T. STEWART et D. S. JIN. « Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 94.11 (mar. 2005), 110401 (cité pages 2, 5, 125).
- [GWO00] R GRIMM, M WEIDELMULLER et Y. B OVCHINNIKOV. « Optical Dipole Traps for Neutral Atoms ». Dans : *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* 42 (2000), 95 –170 (cité page 1).
- [Had+06] Z HADZIBABIC, P KR GER, M CHENEAU, B BATTELIER et J DALIBARD. « Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas ». Dans : *Nature* 441 (2006), 1118 (cité page 39).
- [HBT56] R HANBURY BROWN et R. Q TWISS. « A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius ». Dans : *Nature* 178.4541 (1956), 1046–1048 (cité pages 9, 11).
- [HB84] *Quantum cryptography : Public key distribution and coin tossing*. IEEE International Conference on Computers, Systems et Signal Processing. Bangalor, 1984 (cité page 28).
- [Hei+87] A. HEIDMANN, R. J. HOROWICZ, S. REYNAUD, E. GIACOBINO, C. FABRE et G. CAMY. « Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 59.22 (nov. 1987), 2555–2557 (cité pages 18, 19).
- [HM05] Karen Marie HILLIGSØE et Klaus M LMER. « Phase-matched four wave mixing and quantum beam splitting of matter waves in a periodic potential ». Dans : *Phys. Rev. A* 71.4, 041602 (2005), 041602 (cité pages 3, 33, 40, 97, 125).

- [Hod+09] S. S. HODGMAN, R. G. DALL, K. G. H. BALDWIN et A. G. TRUSCOTT. « Complete ground-state transition rates for the helium  $2^3P$  manifold ». Dans : *Phys. Rev. A* 80 (4 oct. 2009), 044501 (cité page 155).
- [Hoe+13] A. L. HOENDERVANGER, D. CLÉMENT, A. ASPECT, C. I. WESTBROOK, D. DOWEK, Y. J. PICARD et D. BOIRON. « Influence of gold coating and interplate voltage on the performance of chevron micro-channel plates for temporally and spatially resolved single particle detection ». Dans : *Review of Scientific Instruments* 84.2 (2013) (cité page 111).
- [HB93] M HOLLAND et K BURNETT. « Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 71.9 (1993), 1355–1358 (cité pages 23, 25).
- [HOM87] C. K. HONG, Z. Y. OU et L. MANDEL. « Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 59.18 (nov. 1987), 2044–2046 (cité pages 3, 5, 21, 23, 112, 114, 125, 126).
- [Jas10] J-C JASKULA. « Création et étude de sources d’ tats non classiques pour l’optique atomique quantique ». Thèse de doct. Université Paris XI, 2010 (cité pages 18, 70, 158).
- [Jas+10] J.-C. JASKULA, M. BONNEAU, G. B. PARTRIDGE, V. KRACHMALNICOFF, P. DEUAR, K. V. KHERUNTSYAN, D. BOIRON, A. ASPECT et C. I. WESTBROOK. « Sub-Poissonian Number Differences in Four-Wave Mixing of Matter Waves ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 105.19 (nov. 2010), 190402 (cité pages 2, 5, 19, 70, 83, 94, 125).
- [Jas+12] J.-C. JASKULA, G. B. PARTRIDGE, M. BONNEAU, R. LOPES, J. RUAUDEL, D. BOIRON et C. I. WESTBROOK. « Acoustic Analog to the Dynamical Casimir Effect in a Bose-Einstein Condensate ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 109 (22 nov. 2012), 220401 (cité page 2).
- [Jel+07] T. JELTES, J. M. MCNAMARA, W. HOGERVORST, W. VASSEN, V. KRACHMALNICOFF, M. SCHELLEKENS, A. PERRIN, H. CHANG, D. BOIRON, A. ASPECT et C. I. WESTBROOK. « Comparison of the Hanbury Brown-Twiss effect for bosons and fermions ». Dans : *Nature* 445 (2007), 402–405 (cité page 14).
- [KSS97] Yu. KAGAN, E. L. SURKOV et G. V. SHLYAPNIKOV. « Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps ». Dans : *Phys. Rev. A* 55 (1 jan. 1997), R18–R21 (cité page 163).

- [KBG04] J. Ph. KARR, A. BAAS et E. GIACOBINO. « Twin polaritons in semiconductor microcavities ». Dans : *Phys. Rev. A* 69 (6 juin 2004), 063807 (cité pages 20, 48).
- [Kei+91] David W. KEITH, Christopher R. EKSTROM, Quentin A. TURCHETTE et David E. PRITCHARD. « An interferometer for atoms ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 66 (21 mai 1991), 2693–2696 (cité page 1).
- [Kel+99] C KELLER, J SCHMIEDMAYER, A ZEILINGER, T NONN, S DÜRR et G REMPE. « Adiabatic following in standing-wave diffraction of atoms ». Dans : *Applied Physics B : Laser and Optics* 69 (4 oct. 1999), 303–309 (cité page 45).
- [Khe+12] K. V. KHERUNTSYAN, J.-C. JASKULA, P. DEUAR, M. BONNEAU, G. B. PARTRIDGE, J. RUAUDEL, R. LOPES, D. BOIRON et C. I. WESTBROOK. « Violation of the Cauchy-Schwarz Inequality with Matter Waves ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 108 (26 juin 2012), 260401 (cité pages 15–17, 90).
- [KLM01] E KNILL, R LAFLAMME et G. J MILBURN. « A scheme for efficient quantum computation with linear optics ». Dans : *Nature* 409 (jan. 2001), 46–52 (cité pages 2, 5, 20, 125).
- [KLD02] Pieter KOK, Hwang LEE et Jonathan P. DOWLING. « Creation of large-photon-number path entanglement conditioned on photodetection ». Dans : *Phys. Rev. A* 65 (5 avr. 2002), 052104 (cité pages 23, 25).
- [Kra+10] V. KRACHMALNICOFF, J.-C. JASKULA, M. BONNEAU, V. LEUNG, G. B. PARTRIDGE, D. BOIRON, C. I. WESTBROOK, P. DEUAR, P. ZIŃ, M. TRIPPENBACH et K. V. KHERUNTSYAN. « Spontaneous Four-Wave Mixing of de Broglie Waves : Beyond Optics ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 104.15 (avr. 2010), 150402 (cité pages 31, 32, 63).
- [LYS61] W. H. LOUISELL, A. YARIV et A. E. SIEGMAN. « Quantum Fluctuations and Noise in Parametric Processes. I. » Dans : *Phys. Rev.* 124 (6 déc. 1961), 1646–1654 (cité page 7).
- [MW95] L MANDEL et E WOLF. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Sous la dir. de Cambridge University PRESS. 1995 (cité pages 6, 7, 9, 15).
- [MST03] C MENOTTI, A SMERZI et A TROMBETTI. « Superfluid dynamics of a Bose–Einstein condensate in a periodic potential ». Dans : *New Journal of Physics* 5 (sept. 2003), 112 (cité page 65).
- [MS03] H. J. METCALF et P. van der STRATEN. *Laser cooling and trapping of atoms*. Sous la dir. d’OSA. T. 20. 2003 (cité page 1).



- [MTD04] M. MODUGNO, C. TOZZO et F. DALFOVO. « Role of transverse excitations in the instability of Bose-Einstein condensates moving in optical lattices ». Dans : *Phys. Rev. A* 70 (4 oct. 2004), 043625 (cité page 65).
- [Möl+08] K. MÖLMER, A. PERRIN, V. KRACHMALNICOFF, V. LEUNG, D. BOIRON, A. ASPECT et C. I. WESTBROOK. « Atomic four-wave mixing via condensate collisions ». Dans : *Phys. Rev. A* 77 (2008), 033601 (cité page 89).
- [Mon02] C MONROE. « Quantum information processing with atoms and photons ». Dans : *Nature* 416.6877 (2002), 238–246 (cité page 28).
- [Mon+11] T MONZ, P SCHINDLER, J. T BARREIRO, M CHWALLA, D NIGG, W. A COISH, M HARLANDER, W HÄNSEL, M HENNRICH et R BLATT. « 14-Qubit Entanglement : Creation and Coherence ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 106 (13 mar. 2011), 130506 (cité page 2).
- [NC00] M. A NIELSEN et I. L CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Sous la dir. de Cambridge University PRESS. 2000 (cité page 23).
- [Nvi13] NVIDIA. *CUDA Toolkit documentation*. 2013. URL : <http://docs.nvidia.com/cuda/cublas/> (cité page 105).
- [OM88] Z. Y OU et L MANDEL. « Violation of Bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment ». Dans : *Phys. Rev. Lett* 61.1 (1988), 50–53 (cité page 27).
- [Par+10] G. B. PARTRIDGE, J.-C. JASKULA, M. BONNEAU, D. BOIRON et C. I. WESTBROOK. « Bose-Einstein condensation and spin mixtures of optically trapped metastable helium ». Dans : *Phys. Rev. A* 81.5 (mai 2010), 053631 (cité page 158).
- [Per+07] A. PERRIN, H. CHANG, V. KRACHMALNICOFF, M. SCHELLEKENS, D. BOIRON, A. ASPECT et C. I. WESTBROOK. « Observation of Atom Pairs in Spontaneous Four-Wave Mixing of Two Colliding Bose-Einstein Condensates ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 99.15 (oct. 2007), 150405 (cité pages 32, 33).
- [PCG94] K. I. PETSAS, A. B. COATES et G. GRYNBERG. « Crystallography of optical lattices ». Dans : *Phys. Rev. A* 50 (6 déc. 1994), 5173–5189 (cité page 38).
- [RT90] J. G. RARITY et P. R. TAPSTER. « Experimental violation of Bell’s inequality based on phase and momentum ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 64.21 (mai 1990), 2495–2498 (cité pages 27, 28).

- [Row+01] M. A ROWE, D KIELPINSKI, V MEYER, C. A SACKETT, W. M ITANO, C MONROE et D. J WINELAND. « Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection ». Dans : *Nature* 409 (2001), 791 (cité page 2).
- [Sch+09] T SCHEIDL, R URSIN, A FEDRIZZI, S RAMELOW, X.-S MA, T HERBST, R PREVEDEL, L RATSCHBACHER, J KOFLER, T JENNEWEIN et A ZEILINGER. « Feasibility of 300 km quantum key distribution with entangled states ». Dans : *New Journal of Physics* 11 (8 août 2009), 085002 (cité page 28).
- [Sch+05] M. SCHELLEKENS, R. HOPPELER, A. PERRIN, J. VIANA GOMES, D. BOIRON, A. ASPECT et C. I. WESTBROOK. « Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases ». Dans : *Science* 310 (2005), 648–651 (cité page 14).
- [Sch+03] Piet O. SCHMIDT, Sven HENSLER, Jörg WERNER, Thomas BINHAMMER, Axel GÖRLITZ et Tilman PFAU. « Doppler cooling of an optically dense cloud of magnetically trapped atoms ». Dans : *J. Opt. Soc. Am. B* 20.5 (mai 2003), 960–967 (cité page 158).
- [Shc10] V. SHCHESNOVICH. *The second quantization method for indistinguishable particles - Lecture Notes*. 2010. URL : <http://arxiv.org/abs/1308.3275v1> (cité page 103).
- [SA88] Y. H SHIH et C. O ALLEY. « New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion ». Dans : *Phys. Rev. Lett* 61.26 (1988), 2921–2924 (cité page 27).
- [SC85] W. SHUN-JIN et W. CASSING. « Explicit treatment of N-body correlations within a density-matrix formalism ». Dans : *Annals of Physics* 159.2 (1985), 328–350 (cité page 103).
- [Sut96] R. L SUTHERLAND. *Handbook of nonlinear optics*. Sous la dir. de Marcel DEKKER. 1996 (cité page 6).
- [TVS93] E. TIESINGA, B. J. VERHAAR et H. T. C. STOOF. « Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions ». Dans : *Phys. Rev. A* 47 (5 mai 1993), 4114–4122 (cité page 1).
- [Unr81] W. G. UNRUH. « Experimental Black-Hole Evaporation ? » Dans : *Phys. Rev. Lett.* 46 (21 mai 1981), 1351–1353 (cité page 2).
- [VA01] A. VARDI et J. R. ANGLIN. « Bose-Einstein Condensates beyond Mean Field Theory : Quantum Backreaction as Decoherence ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 86 (4 jan. 2001), 568–571 (cité page 103).

- [Vas+12] W. VASSEN, C. COHEN-TANNOUJDI, M. LEDUC, D. BOIRON, C. I. WESTBROOK, A. TRUSCOTT, K. BALDWIN, G. BIRKL, P. CANCIO et M. TRIPPENBACH. « Cold and trapped metastable noble gases ». Dans : *Rev. Mod. Phys.* 84 (1 fév. 2012), 175–210 (cité page 156).
- [VCK03] J. M. VOGELS, J. K. CHIN et W. KETTERLE. « Coherent Collisions between Bose-Einstein Condensates ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 90 (3 jan. 2003), 030403 (cité page 30).
- [Wei+98] G WEIHS, T JENNEWEIN, C SIMON, H WEINFURTER et A ZEILINGER. « Violation of Bell’s Inequality under Strict Einstein Locality Conditions ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 81 (23 déc. 1998), 5039–5043 (cité pages 2, 20, 125).
- [WN01] B. WU et Q. NIU. « Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices ». Dans : *Phys. Rev. A* 64 (6 nov. 2001), 061603 (cité pages 48, 64, 65, 126).
- [WN03] B. WU et Q. NIU. « Superfluidity of Bose-Einstein condensate in an optical lattice : Landau-Zener tunnelling and dynamical instability ». Dans : *New Journal of Physics* 5 (1 juil. 2003), 104 (cité pages 48, 64, 65).
- [Wu+86] Ling-An WU, H. J. KIMBLE, J. L. HALL et Huifa WU. « Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 57 (20 nov. 1986), 2520–2523 (cité page 7).
- [XWK87] M XIAO, L-A WU et H KIMBLE. « Precision measurement beyond the shot-noise limit ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 59.3 (1987), 278–281 (cité page 25).
- [Yve+03] F YVER-LEDUC, P CHEINET, J FILS, A CLAIRON, N DIMARCQ, D HOLLEVILLE, Ph BOUYER et A LANDRAGIN. « Reaching the quantum noise limit in a high-sensitivity cold-atom inertial sensor ». Dans : *J. Opt. B : Quantum and Semiclas. Opt.* 5.2 (2003), S136 (cité page 1).
- [ZWD07] S.-L ZHU, B. WANG et L.-M. DUAN. « Simulation and Detection of Dirac Fermions with Cold Atoms in an Optical Lattice ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 98 (26 juin 2007), 260402 (cité page 38).