HAL
open science

Contribution à la modélisation dynamique, l'identification et la synthèse de lois de commande adaptées aux axes flexibles d'un robot industriel.

Marouene Oueslati

▶ **To cite this version:**

Marouene Oueslati. Contribution à la modélisation dynamique, l'identification et la synthèse de lois de commande adaptées aux axes flexibles d'un robot industriel.. Automatique / Robotique. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2013. Français. NNT : 2013ENAM0065 . pastel-01016462

HAL Id: pastel-01016462

https://pastel.hal.science/pastel-01016462v1

Submitted on 30 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2013-ENAM-0065

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Automatique "

présentée et soutenue publiquement par

Marouene OUESLATI

le 18 décembre 2013

Contribution à la modélisation dynamique, l'identification et la synthèse de lois de commande adaptées aux axes flexibles d'un robot industriel

Directeur de thèse : **Olivier GIBARU**
Co-encadrement de la thèse : **Richard BEAREE**
Co-encadrement de la thèse : **George MORARU**

Jury

M. Jean Pierre RICHARD, Professeur, SyNeR - LAGIS, Ecole Centrale de Lille	Président
Mme. Hélène CHANAL, Maître de Conférences, IFMA, Institut Français de Mécanique Avancée	Rapporteur
Mme. Moufida KSOURI, Professeur, LACS, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis	Rapporteur
M. Faïz BEN AMAR, Professeur, SYROCO, Institut des Systèmes Intelligents et Robotique	Examinateur
M. Marc DOUILLY, Docteur, EADS Assembly & Robotics	Examinateur
M. Olivier GIBARU, Professeur, LSIS - INSM, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. Richard BEAREE, Maître de Conférences, LSIS - INSM, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. George MORARU, Maître de Conférences, LSIS - INSM, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur

T H È S E

Arts et Métiers ParisTech - Centre de Lille
Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS) – Equipe Projet INSM

A mes très chers parents pour leur soutien, leur gratitude et leur amour,
A mon épouse Sana qui partage ma vie depuis maintenant deux ans, pour sa patience,
A notre merveilleuse petite Lina,
A mes frères et à toute ma famille,
Et à toi...

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été réalisé aux Arts et Métiers ParisTech au sein du projet Ingénierie Numérique des Systèmes Mécaniques (INSM) du Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS UMR CNRS 7296). Ces travaux entrent dans le cadre d'une collaboration entre le centre de Lille et le centre d'Aix en Provence.

Comme la tradition le veut, ces quelques lignes du manuscrit sont les plus agréables à écrire. Elles signifient que la thèse est enfin terminée et elles permettent de remercier l'ensemble des personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse. Je tiens tout d'abord à exprimer ma vive reconnaissance à Monsieur Jean Pierre RICHARD, Professeur à l'École Centrale de Lille, pour m'avoir fait le grand honneur d'accepter de présider mon jury de thèse. Je remercie aussi chaleureusement Mesdames Hélène CHANAL et Moufida KSOURI, respectivement Maître de Conférences à l'Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA) et Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis d'avoir accepté de rapporter ce mémoire de thèse ; vos remarques et vos observations très constructives m'ont permis de prendre le recul nécessaire à la préparation de ma soutenance. Je tiens à remercier également Monsieur Faïz BEN AMAR, Professeur à l'Institut des Systèmes Intelligents et Robotique (ISIR - Université Pierre et Marie CURIE) pour avoir participé à mon jury de thèse et d'avoir examiné minutieusement ce travail. Je souhaite remercier aussi Monsieur Marc DOUILLY, Docteur à EADS Innovation Works - Assembly & Robotics, pour avoir accepté de faire partie de ce jury et pour avoir apporté ses remarques témoignant d'un intérêt industriel pour les travaux présentés.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Olivier GIBARU, Professeur aux Arts et Métiers ParisTech, centre de Lille. Merci pour sa patience et ses précieux conseils qui m'ont beaucoup aidé à me développer personnellement et professionnellement ainsi que la confiance qu'il m'a accordée. Merci pour les nombreuses réunions de travail, pour les relectures sans cesse, et pour les réunions de préparation de l'exposé final qui ont été une grande source de force. Merci de m'avoir appris le sens de la rigueur scientifique. Je dois également dire qu'Olivier s'implique énormément dans la réussite de ses doctorants. Merci Olivier !

La suite de ses remerciements iront tout naturellement à mon encadrant de thèse Richard BEAREE, Maître de Conférences aux Arts et Métiers ParisTech, centre de Lille, pour son soutien et son implication totale dans ce travail. Sans nos nombreuses discussions et confrontations d'idées, l'évolution de ce travail n'aurait pas été telle que présentée dans ce mémoire. Merci de m'avoir appris le coté pragmatique des choses en me faisant profiter de son expérience et de son

savoir faire. Merci pour tout Richard.

Je remercie chaleureusement mon deuxième encadrant de thèse George MORARU, Maître de Conférences aux Arts et Métiers ParisTech, centre d'Aix en Provence, pour m'avoir bien accueilli lors de mon séjour à l'ENSAM d'Aix en Provence. Les judicieux conseils qu'il m'a prodigué, m'ont permis d'achever ce travail dans les meilleurs conditions. Mes vifs remerciements s'adressent également à Stéphane THIERY, Maîtres de Conférences aux Arts et Métiers ParisTech, centre de Lille, pour le travail de recherche collaboratif mené durant une période de la thèse.

Je remercie également Monsieur Lionel ROUCOULES, directeur de l'équipe LSIS-INSM, qui m'a accueilli au sein du laboratoire pour y réaliser ma thèse. Je profite aussi pour remercier tout le personnel du laboratoire. Merci également à toutes les personnes de l'administration qui nous aident dans nos démarches administratives fastidieuses. C'est avec sympathie aussi que je remercie tous les membres du l'équipe NON-A d'INRIA sous la direction de Michel FLIESS et Jean Pierre RICHARD pour m'avoir accueilli et m'avoir guidé dans mes premiers pas dans le monde de la recherche.

Je souhaite remercier l'ensemble du personnel technique du l'ENSAM de Lille notamment Luc BULTEAU et Marc SUFFYS pour votre grande disponibilité et vos nombreux coups de main. Une spéciale dédicace à Xavier HELLE, qui vient de trouver un nouveau job, pour sa bonne humeur, sa gentillesse et son aide indispensable pour la réalisation des essais expérimentaux. Je remercie également le CITC pour son apport matériel dans le cadre des mesures réalisées par le Laser Tracker. Je remercie vivement, Mohamed DAMAK, Préesident de GEOMNIA à Lille, pour ses conseils qui reflètent un grand savoir faire dans le domaine de la robotique.

Une pensée toute particulière pour mes actuels et mes anciens collègues du bureau avec qui j'ai partagé d'agréables moments au cours de ces dernières années. Je tiens à remercier Adel OLABI, mon ancien collègue du bureau et le nouveau Maître de Conférences, pour les différents échanges scientifiques menés le long de la thèse. Je remercie également Khaled FAWAZ, Ivàn Mauricio GARCIA-HERREROS, Nadim EL HAYEK, Alain VISSIERE, Franck HERNOUX et tout récemment Matthieu FEUGA avec lesquels j'ai bien cohabité. Je n'oublierai pas les pauses cafés quotidiennes de 16 h lancées du bout du couloir. J'ai passé des mémorables moments en votre compagnie.

Mes remerciements s'adressent aussi à Laure ARBENZ, Juliette MORIN, Pierre RAULT, Ngacky NGUYEN, Sijun LIU, DuyHung MAC, Paul SANDULESCU et Basel ASLAN et les autres membres du laboratoire L2EP pour l'ambiance formidable ainsi que nos différentes sorties et soirées en groupe. Merci également à Djamel, Hicham, Julius, Julien, Thomas et tous les autres CDD, post-docs et stagiaires de l'École.

Je ne peux terminer sans avoir une pensée à mes potes et fidèles camarades. Je profite de cette occasion pour remercier infiniment Khaled, Aymen, Mehdi, Fawzi et Fethi pour tout le soutien apporté et la création d'une belle ambiance à la tunisienne qui m'a permis de dégager le

stress.

Ces dernières lignes sont pour ma famille éloignée par la distance durant ces années d'étude en France et qui m'a toujours soutenue. Je remercie infiniment mon père Abderrafik et ma mère Lamia qui m'ont toujours fait confiance et m'ont laissé libre de mes choix lors de mes études. Je les remercie pour leur gratitude, leur amour et surtout d'avoir fait le déplacement pour assister à la soutenance de mon Doctorat. J'espère que j'ai réalisé vos ambitions et que j'étais à la hauteur. Je remercie chaleureusement mes frères Houssem, Amine et Wael pour m'avoir encouragé. Je voudrais souligner que ma réussite est d'abord et avant tout leur réussite. Enfin et surtout, merci à Sana, mon épouse qui est devenue aussi Docteur et surtout maman de notre petite princesse Lina au moment de l'écriture des ces lignes, pour son soutien au quotidien et pour m'avoir supportée pendant déjà quatre ans. Son amour et sa générosité sans limite étaient la force motrice de cette réussite. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance et mon amour. Je voudrais en outre témoigner mes sincères reconnaissances à mes beaux parents Noureddine et Saloua et à la famille CHERIF.

Et pour conclure, vivement notre petite Lina ...

Table des matières

Table des matières xii

Table des figures xvi

Liste des tableaux xvii

Introduction générale 1

1 La modélisation des robots polyarticulés 9

1 Introduction . . . 9
2 Précision : notions et définitions . . . 11
2.1 Fidélité ou répétabilité . . . 11
2.2 Justesse et exactitude . . . 12
3 Modélisation Géométrique des Robots Manipulateurs . . . 13
3.1 Définition de la situation de l'organe terminal . . . 13
3.2 Les paramètres géométriques . . . 14
3.3 Matrice de transformation homogène . . . 16
3.4 Expression du modèle géométrique direct . . . 17
4 Modèle cinématique . . . 18
5 Modèle Dynamique des Robots Manipulateurs . . . 19
5.1 Démarche générale de modélisation dynamique . . . 19
5.2 Modèle de comportement . . . 22
5.3 Modélisation dynamique rigide . . . 23
5.3.1 Expression de l'énergie cinétique . . . 25
5.3.2 Prise en compte des inerties de la chaîne d'actionnement . . . 26
5.3.3 Expression de l'énergie potentielle . . . 28
5.3.4 Génération des équations du mouvement . . . 28
5.3.5 Calcul des éléments de C et G du modèle dynamique . . . 28
5.4 Modélisation dynamique flexible . . . 29
5.4.1 Hypothèses de modélisation . . . 29
5.4.2 Énergie cinétique du modèle dynamique flexible . . . 30
5.4.3 Énergie potentielle du modèle dynamique flexible . . . 31
5.5 Éléments de transmission non linéaire . . . 31
6 Conclusion . . . 33

2 Identification de systèmes. Application aux robots manipulateurs 35
1 Introduction . . . 35
1.1 Procédure d'estimation des systèmes . . . 36
1.2 Structures des modèles physiques . . . 37
2 Méthodes d'identification pour les modèles temporels . . . 38
2.1 Prédiction paramétrique par les approches asymptotiques . . . 39
2.1.1 Algorithme d'optimisation paramétrique . . . 39
2.1.2 Les méthodes des moindres carrés . . . 41
2.1.3 Les méthodes à variables instrumentales . . . 42
2.1.4 Filtre de Kalman Bucy . . . 42
2.2 Prédiction paramétrique par les approches non-asymptotique . . . 44
2.2.1 Structure générale d'un estimateur paramétrique algébrique et mise en oeuvre . . . 45
3 Estimation algébrique de la fréquence . . . 48
3.1 Méthode d'estimation de la fréquence . . . 48
3.2 Analyse statistique de l'estimateur . . . 50
3.2.1 Estimation pour une fenêtre fixée . . . 50
3.3 Estimation à fenêtre glissante . . . 53
3.3.1 Cas sans bruit . . . 53
3.3.2 Cas avec bruit . . . 54
3.3.3 Cas d'une fenêtre glissante : estimation causale . . . 55
4 Etude détaillée de l'estimation paramétrique d'un système mécanique souple . . . 59
4.1 Cadre d'étude et motivation . . . 59
4.2 Positionnement du problème . . . 61
4.3 Estimation par le filtre de Kalman-Bucy . . . 62
4.3.1 Analyse de la variance . . . 63
4.3.2 Influence du facteur d'oubli λ sur la convergence de l'estimateur 64
4.3.3 La trajectoire d'entrée optimale . . . 64
4.4 Estimation par la technique algébrique . . . 66
5 Simulations et analyse . . . 66
5.1 Etude comparative et analyse des performances . . . 67
5.2 Motivation dans le choix de la méthode d'identification . . . 70
5.3 Détection non asymptotique de la variation paramétrique . . . 70
5.3.1 Détection du changement brusque de fréquence . . . 71
5.3.2 Vers la détection d'une variation linéaire de la fréquence . . . 75
6 Conclusion . . . 76

3 Etude de l'influence des phénomènes dynamiques sur un axe d'un robot industriel 79
1 Introduction . . . 80
2 Constat expérimental du comportement dynamique d'un axe de robot et proposition d'un modèle représentatif . . . 80
2.1 Axe étudié et moyens de mesures . . . 80
2.1.1 Axe du robot considéré . . . 80
2.1.2 Moyens de mesure associés . . . 81

2.2 Développement du protocole d'essai 84
2.3 Mise en évidence des phénomènes vibratoires 86
2.3.1 Contribution de la déformation des bras 88
2.3.2 Contribution du système de compensation de gravité 89
2.3.3 Modèle générique d'axe à paramètres localisés 91
3 Estimation des effets associés à la gravité 93
4 Estimation des forces de frottements 95
4.1 Caractérisation du couple de frottement sec 96
4.1.1 Validation du couple gravitationnel et de frottement sec à travers les essais en zone de pré-glissement 98
4.2 Influence du frottement en zone de pré-glissements sur la précision statique du robot 98
4.3 Estimation du couple de frottement total 99
4.3.1 Modélisation : méthode et pratique 101
4.3.2 Procédure d'identification du couple de frottement 104
5 Estimation du moment d'inertie du bras 106
6 Evaluation expérimentale du modèle dynamique rigide 107
6.1 Validation par estimation séquentielle des paramètres physiques 107
6.2 Validation par une estimation simultanée des paramètres 110
7 Intégration du comportement vibratoire de l'axe 111
7.1 Modèle générique de souplesse prépondérante 111
7.2 Analyse expérimentale des phénomènes vibratoires 111
7.3 Estimation paramétrique expérimentale 113
7.3.1 Méthode de calcul des périodes 114
7.3.2 Estimation de la fréquence modale par Transformée de Fourier Rapide 115
7.3.3 Estimation du coefficient d'amortissement 116
7.3.4 Estimation en ligne de la fréquence et du coefficient d'amortissement 116
7.3.5 Expressions de l'estimateur algébrique 117
7.3.6 Calcul de la variabilité de la raideur équivalente et l'amortissement de l'axe 120
7.4 Validation temporelle du modèle dynamique souple 121
8 Bilan sur la compréhension des phénomènes physiques et la modélisation générique d'un axe souple 122

4 Méthodologie d'amélioration du comportement dynamique d'un robot industriel 123
1 Introduction 123
2 Conception d'une précommande en boucle ouverte et génération de loi de mouvement adaptées au mouvement d'un axe souple 124
2.1 Généralités sur les lois de mouvement 125
2.1.1 Loi de mouvement de type bang-bang 126
Bang-bang en accélération 126
Bang-bang en jerk 128

2.2 Méthodologie de réglage de jerk adaptée à la réduction de vibrations . . . 130
2.2.1 Principe . . . 130
2.2.2 Réglage du jerk . . . 132
2.2.3 Loi de mouvement douces à jerk continu . . . 132
2.3 Confrontation avec la technique d'input shaping . . . 133
2.3.1 Etude de sensibilité des techniques de commande basées sur l'Input Shaping . . . 134
ZV Shaper : . . . 134
ZVD Shaper : . . . 135
Analyse et discussion . . . 136
2.4 Adaptation au contexte d'un axe du robot étudié . . . 138
2.5 Conception d'une précompensation de trajectoire d'un axe souple de robot 141
2.5.1 Elaboration de la précompensation souple . . . 141
2.6 Application à la génération de précommande et validations expérimentales 144
3 Caractérisation de l'évolution des fréquences propres pour un robot industriel . 147
3.1 Cadre d'étude et d'analyse . . . 147
3.2 Analyse de la variation fréquentielle . . . 148
4 Application de la technique d'estimation non asymptotique à l'amélioration du comportement vibratoire du robot . . . 151
4.1 Estimation algébrique rapide de la variation fréquentielle modale . . . 154
4.2 Technique d'implantation . . . 154
4.3 Validation expérimentale . . . 156
5 Bilan sur la synthèse de loi de mouvement adaptée et d'une commande d'un axe souple . . . 159

Conclusions et Perspectives **161**

Bibliographie **165**

Table des figures

1 Robot Stäubli 6 axes TX Plastics 160 . . . 1
2 Robot Stäubli 6 axes équipé d'une éléctrobroche UGV . . . 2
3 Architecture d'un système de commande générique d'un axe du manipulateur robotisé . . . 3
4 Schéma global représentant un aperçu du problème de modélisation, d'identification et de la commande du robot. Les zones grisées représentent les thèmes abordés dans cette thèse . . . 6

1.1 Une ligne de soudage par points à l'aide des robots . . . 10
1.2 Répétabilité et précision statique . . . 11
1.3 Définition de l'erreur dynamique . . . 12
1.4 Les paramètres géométriques de Denavit-Hartenberg [Siciliano and Khatib, 2008] 14
1.5 Placement des repères pour le Stäubli RX 170B selon la convention D.H. (a) Configuration zéro "géométrique". (b) Configuration zéro "codeur" . . . 15
1.6 Transformation des repères standards pour le robot Stäubli RX170B . . . 18
1.7 Mesure de déformation des axes 1 et 2 du robot [Olabi, 2011] . . . 23
1.8 Modèle dynamique rigide du Stäubli RX170B : application au 4 premiers axes . . 24
1.9 Desciption géométrique d'un corps i en vue d'un formalisme Lagrangien . . . 24
1.10 Caractérisation d'un rotor . . . 27
1.11 Modèle dynamique flexible du Stäubli RX170B : application au 4 premiers axes . 29
1.12 Modèle flexible d'un axe du robot . . . 30
1.13 Déformation des contacts entre deux solides en mouvement (a) et (b) et effet de la lubrification sur leur déplacement (c), [Thiery, 2005] . . . 32
1.14 Courbe généralisée de Stribeck . . . 32

2.1 Système en boucle ouverte . . . 36
2.2 Système en boucle fermée . . . 37
2.3 Classes d'algorithmes d'optimisation paramétrique . . . 41
2.4 $a = 3, b = 1, c = 1, d = 7$ où chaque X_i $^{\dagger}\mathcal{N}(0, 5)$ . . . 52
2.5 $a = 3, b = 1, c = 1, d = 7$ où chaque X_i $\mathcal{N}(0, 0.5)$ . . . 53
2.6 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=1, erreur à 2% . . . 54
2.7 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=1, erreur à 2% . . . 54
2.8 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=0.1, erreur à 2% . . . 55
2.9 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=0.1, erreur à 2% . . . 55
2.10 f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=1, erreur à 2% . . . 56
2.11 f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=1, erreur à 2% . . . 56

2.12 f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=0.1, erreur à 2% . . . 57
2.13 f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=0.1, erreur à 2% . . . 57
2.14 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, SNR=36dB, A=1, erreur à 2% . . . 58
2.15 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, SNR=22dB, A=1, erreur à 2% . . . 58
2.16 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, SNR=36dB, A=1, erreur à 2% . . . 59
2.17 f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, SNR=22dB, A=1, erreur à 2% . . . 59
2.18 Fonction de transfert en fréquence du bras de robot . . . 60
2.19 Système masse ressort à 1 ddl . . . 61
2.20 Influence du facteur d'oubli λ en analyse de variance . . . 65
2.21 Influence du rapport $Z = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ pour la conception de la trajectoire optimale . . . 65
2.22 Influence de l'amplitude A_1 sur l'estimation paramétrique par le filtre de Kalman-Bucy . . . 67
2.23 Estimation de la fréquence f_0 *via* le filtre de Kalman-Bucy pour différents SNR . 68
2.24 Estimation de la fréquence f_0 *via* l'approche algébrique pour différents SNR . . . 69
2.25 Signal composé de trois séquences consécutives et pour f_0 variable . . . 72
2.26 Transformée de Fourier de $x(t)$ . . . 72
2.27 Détection de la variation fréquentielle pour un signal $x(t)$ non bruité . . . 73
2.28 Spectrogramme de $x(t)$ non bruité . . . 73
2.29 $x(t)$ bruité avec un SNR = 10 dB . . . 74
2.30 Estimation algébrique de la variation fréquentiel pour $x(t)$ bruité avec un SNR = 10 dB (en haut). Spectrogramme de la STFT (en bas). . . . 74
2.31 Etude de la robustesse de l'approche algébrique vis-à-vis du bruit de mesure . . 76
2.32 Signal de type Chirp dont la fréquence varie linéairement entre 3 et 18 Hz . . . 77
2.33 Estimation de la variation fréquentielle linéaire par la méthode algébrique . . . 77
2.34 Erreur d'estimation de la variation fréquentielle linéaire . . . 78

3.1 Système de compensation de la gravité par ressorts de traction . . . 81
3.2 Exemple d'un codeur moteur du robot ABB IRB6600 . . . 82
3.3 Laser Tracker API T3 . . . 82
3.4 Installation expérimentale du dispositif de mesure Laser . . . 83
3.5 Système de coordonnée du Laser Tracker . . . 84
3.6 Structure du contrôle et de mesures d'un axe du robot Stäubli RX 170B . . . 85
3.7 Mesure des positions du bras avec le Laser Tracker . . . 86
3.8 Conversion de la position cartésienne en position articulaire . . . 86
3.9 Variation de la position de l'axe durant le test . . . 87
3.10 Relevés expérimentaux des phénomènes vibratoires . . . 88
3.11 Caractérisation d'une poutre équivalente du bras 2 . . . 89
3.12 Analyse fréquentielle de la déformation de la structure . . . 90
3.13 Schéma de principe du système de transmission . . . 92
3.14 Modèle de d'un axe souple à constantes localisées . . . 93
3.15 Caractérisation des bras en vue du calcul du couple de gravité . . . 94
3.16 Couple de gravité résiduel appliqué sur l'axe 2 . . . 94
3.17 Représentation schématique de la transmission d'une articulation . . . 95
3.18 Trajectoire de test du frottement de Coulomb . . . 96

3.19 Relevés expérimentaux des position, vitesse et couple 97
3.20 Couple de frottement en zone de pré-glissement autour de 0 deg 97
3.21 Relevés expérimentaux des position, vitesse et couple 99
3.22 Couple de frottement en zone de pré-glissement autour de 20 deg 99
3.23 Défauts de transmission de l'axe 2 du robot 100
3.24 Défaut de transmission lié à la phase de démarrage de mouvement (zone 1) . . . 100
3.25 Loi de mouvement Bang-Bang en accélération 101
3.26 Relevés expérimentaux des vitesses et couples d'entrée associés en vue de l'identification du couple de frottement 102
3.27 Couple de frottement moyen en fonction de la vitesse 103
3.28 Comparaison entre couple de frottement mesuré et couple estimé 106
3.29 Exemple de trajectoire utilisée pour la validation du modèle dynamique rigide de l'axe 2 108
3.30 Comparaison entre le couple mesuré et le couple estimé par le modèle rigide . . 109
3.31 Erreur d'estimation du modèle rigide 109
3.32 Trajectoire de test pour l'identification du comportement souple de la chaîne de transmission 112
3.33 Erreur de suivi de position du bras 2 113
3.34 Zoom sur les paliers selectionés du signal 114
3.35 Résultats de l'estimation fréquentiel avec une analyse FFT 116
3.36 Identification du coefficient d'amortissement 117
3.37 Exemple d'estimation algébrique des paramètres fréquentiels : zone 7 119
3.38 Validation du modèle simulé de la déformation angulaire $\delta\theta$ 122

4.1 Architecture d'un système de commande générique d'axe 125
4.2 Boucle interne de l'asservissement d'un axe du robot Stäubli RX 170 125
4.3 Définition générique d'une loi de mouvement bang-bang 126
4.4 Profil à vitesse trapézoïdal 127
4.5 Loi de mouvement bang-bang en accélération 128
4.6 Profil à jerk limité à sept segments 129
4.7 Créneau en jerk 131
4.8 L'amplitude de la réponse fréquentiel du filtre $M(s)$ 131
4.9 Mise en forme de la loi de mouvement avec la technique d'input shaping 133
4.10 Technique de l'input shaping 133
4.11 Convolution entre un échelon unitaire et un shaper de type ZV (2 impulsions) . . 135
4.12 Convolution entre un échelon unitaire et un shaper de type ZVD (3 impulsions) . 136
4.13 Sensibilité des lois de mouvement en jerk limité, d'un ZV shaper et d'un ZVD Shaper en fonction du rapport entre la pulsation estimée ω et la pulsation du mode dominant du système ω_0 137
4.14 Réponse fréquentielle en position de la charge pour une excitation au niveau de l'actionneur 137
4.15 Influence des incertitudes d'estimation de ω_0 sur le spectre fréquentiel de H_δ . . 139
4.16 Influence de l'amortissement ζ sur le comportement vibratoire d'un axe du robot pour un bang bang en jerk 140

4.17 Adaptation du profil initial pour la réduction des vibrations 142
4.18 Erreur de suivi de trajectoire de l'axe 2 liée au changement de vitesse 143
4.19 Idée globale de la précompensation de trajectoires 144
4.20 Structure de la correction dynamique de la déformation articulaire 145
4.21 Loi de mouvement utilisée pour la génération de la précommande 145
4.22 Mesure codeur du couple généré et l'erreur d'asservissement du contrôleur du robot 146
4.23 Apport de la stratégie de précompensation sur la déviation de l'axe 2 147
4.24 Robot en configuration d'usinage 148
4.25 Vibration résiduelle pour un jerk élémentaire en fonction de la variation de la fréquence modale 150
4.26 Différentes configurations utilisées avec le chargement du robot (broche montée) 150
4.27 Mesure de la variation de la fréquence modale en fonction des angles θ_2, θ_3 et la charge du robot 151
4.28 Structure générale de commande et d'adaptation de loi de mouvement 152
4.29 Trajectoire de validation du robot 152
4.30 Trajectoire effectuée par l'axe 2 pour une déplacement suivant X robot 153
4.31 Vitesse articulaire de l'axe 2 le long de la trajectoire suivant Y robot et variation de sa fréquence propre 153
4.32 Détection en ligne de la variation fréquentielle 156
4.33 Position du bras pour les trois stratégies de commande 157
4.34 Vibration résiduelle du bras à vide (broche non montée) pour les trois stratégies de commande 157
4.35 Vitesse du bras à vide (broche non montée) pour les trois stratégies de commande 158
4.36 Vibration résiduelle du bras chargé (broche montée) pour les trois stratégies de commande 159
4.37 Vitesse du bras chargé (broche montée) pour les trois stratégies de commande . . 159

Liste des tableaux

1.1 Principaux avantages et inconvénients des robots à architectures sérielles 10
1.2 Paramètres géométriques du Stäubli RX 170 B 16

2.1 Comparaison qualitative des méthodes d'optimisation 41
2.2 Performance de l'estimateur récursif de type Kalman-Bucy 67
2.3 Performance de l'estimateur basée sur l'approche algébrique 70

3.1 Caractéristique de la poutre équivalente de l'axe 2 89
3.2 Valeurs du couple de frottement sec 98
3.3 Valeurs des paramètres du modèle de frottement de Stribeck 105
3.4 Valeur identifiée du moment d'inertie total de l'axe 2 107
3.5 Valeurs identifiées du modèle dynamique rigide de l'axe 111
3.6 Fréquence propre identifiée *via* la méthodes de calcul des périodes 115
3.7 Identification du mode de déformation à travers une analyse FFT 115
3.8 Identification du mode de déformation à travers la méthode algébrique 120
3.9 Variation de la raideur dynamique K en fonction de la fréquence propre estimée 120
3.10 Variation de l'amortissement D en fonction de la fréquence propre estimée 120
3.11 Paramètres physique estimés 121

4.1 Caractérisation de l'apport de la stratégie de précompensation sur la déviation au bout d'axe 146
4.2 Angles choisies des axes 148
4.3 Configuration de test intermédiaires 149
4.4 Fréquences modales identifiées pour le robot à vide 149
4.5 Fréquences modales identifiées pour le robot chargé 150
4.6 Performances obtenues expérimentalement sur le robot avec 3 stratégies de commande (robot non chargé) 158
4.7 Performances obtenues expérimentalement sur le robot avec 3 stratégies de commande (broche montée) 158

Introduction générale

Contexte et problématique

DAns l'industrie manufacturière d'aujourd'hui, les trois facteurs permettant de maintenir la compétitivité sont le coût, la productivité et l'agilité des moyens de production, notamment afin de répondre aux exigences du phénomène "Mass-Customization". Pour un nombre croissant d'applications industrielles, les robots sont utilisés pour répondre à ces exigences. Ils représentent un moyen de production sophistiqué en partant du principe que ces manipulateurs sont plus agiles, plus flexibles et moins coûteux que les machines-outils spécialisées. Bien que les machines-outils soient structurellement plus rigides, les robots poly-articulés disposent généralement d'un espace de travail plus important. L'exploitation de ces avantages pour la réalisation de tâches de positionnement, de pick-and-place, ainsi que d'opérations à caractères continus, comme l'usinage par exemple, fait l'objet d'une demande croissante. Ces nouveaux procédés robotisés nécessitent lors de leur mise en oeuvre une précision accrue afin de pouvoir garantir la qualité de la réalisation [Brogårdh, 2007, 2009]. L'amélioration de la précision des robots industriels demeure un sujet se heurtant à de nombreux verrous technologiques. La figure 1 présente un robot industriel standard qui se compose d'un bras mécanique avec un certain nombre de liaisons inter-connectées par des articulations, chaque articulation est actionnée par un moteur *via* une chaîne de réduction. Les dynamiques

FIGURE 1: Robot Stäubli 6 axes TX Plastics 160

de ce type de système sont complexes et soumises à de nombreuses sources d'imprécision. On citera pour exemple les défauts géométriques, les défauts de la chaîne de transmission, les variations paramétriques induites par les dérives thermiques, ou encore les éléments de liaison, ainsi que les articulations, qui peuvent être le siège de déformations et de vibrations dégradant sensiblement la précision du système. De plus, certaines de ces dynamiques peuvent être non-linéaires telles que les frottements et les jeux mécaniques dans la transmission. Ces différents phénomènes physiques sont d'autant plus difficiles à compenser que seul un sous

ensemble des états du système est mesuré par les retours des codeurs moteurs. La structure de commande industrielle actuelle d'un robot n'agit donc pas directement sur les phénomènes non vus par la baie tels que les déformations axiales et les défauts de transmission. Ce constat conduit à deux voies d'investigation possibles. La première concerne l'amélioration de la conception du robot, tant sur les aspects structurels (matériaux, architecture) que technologiques (réducteurs, résolveurs, actionneurs). Cette solution nécessite un lourd investissement financier. Une autre piste concerne l'amélioration ou plutôt l'adaptation de la structure de commande des robots à ces nouvelles exigences.

Ces travaux de thèse se placent dans le cadre de l'adaptation de la commande industrielle et proposent une contribution sur le plan de l'identification et notamment de l'estimation rapide de paramètres associés à la dynamique d'un robot. Cette étude s'appuie sur de nombreuses expérimentations réalisées sur le robot industriel anthropomorphe présenté à la figure 2. Une analyse poussée des sources d'erreurs de positionnement statique de ce robot a été présentée dans [Olabi, 2011]. Les erreurs géométriques et les erreurs de calage ou de zéro (définition des références codeurs) représentent les principaux contributeurs de l'imprécision statique globale. Ce type d'erreur, qui peut atteindre plusieurs millimètres, est toutefois en grande partie compensable par la mise en oeuvre de méthodologies expérimentales de recalage/calibration adaptées. Une fois ces erreurs géométriques réduites, les déformations élastiques de la structure et des articulations deviennent dominantes. En dynamique, ces phénomènes de déformations se trouvent amplifiés et induisent des vibrations de l'organe terminal dégradant significativement la précision du suivi de trajectoire.

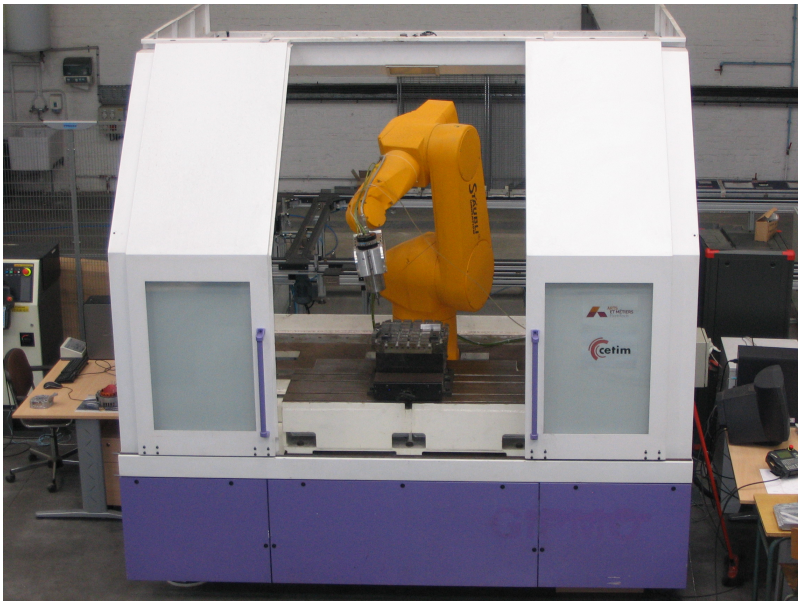


FIGURE 2: Robot Stäubli 6 axes équipé d'une éléctrobroche UGV

Positionnement des travaux

La commande d'un système à dynamique élevée doit réaliser des fonctions telles que le positionnement, le suivi de trajectoire, l'annihilation du comportement vibratoire et le rejet de

perturbations. La figure 3 présente le schéma bloc d'un système de commande générique pour un axe de robot. La consigne de position désirée θ^d (position à atteindre ou de référence) est introduite dans le générateur de commande où le planificateur de mouvement transforme cette variable en un mouvement de référence $\theta^d(t)$ par l'utilisation d'une loi de mouvement également appelée loi horaire. Cette consigne temporelle sera ensuite l'entrée de la précommande pour générer la consigne moteur $\theta_m^d(t)$. Le générateur de commande élabore également la commande de référence $u_{\text{pré}}(t)$ qui est directement injectée en entrée du processus (précommande). La boucle d'asservissement produit alors un signal d'erreur afin de générer un signal de commande en régulation $u_{ass}(t)$. Un signal résultant $u(t)$ sera alors le signal d'entrée générale. Comme illustré sur la figure 3, la partie flexible n'est pas directement mesurée et sa contribution vue des codeurs moteurs est considérablement amoindri par les rapports de réduction important utilisés en robotique sérielle. L'idée exploitée dans cette thèse repose sur une approche de compensation par modèle. Cette piste d'investigation semble la plus adéquate dans un contexte d'implantation industriel puisqu'elle ne nécessite pas de modification profonde de l'architecture de commande implantée dans les contrôleurs de robot. La précommande, comme illustrée dans la figure 3, est théoriquement parfaite si elle correspond à l'inverse du modèle du processus. L'identification des différentes paramètres constitutifs de ce modèle sera un élément central de notre étude. La compensation des défauts dynamiques et la correction des trajectoires peuvent

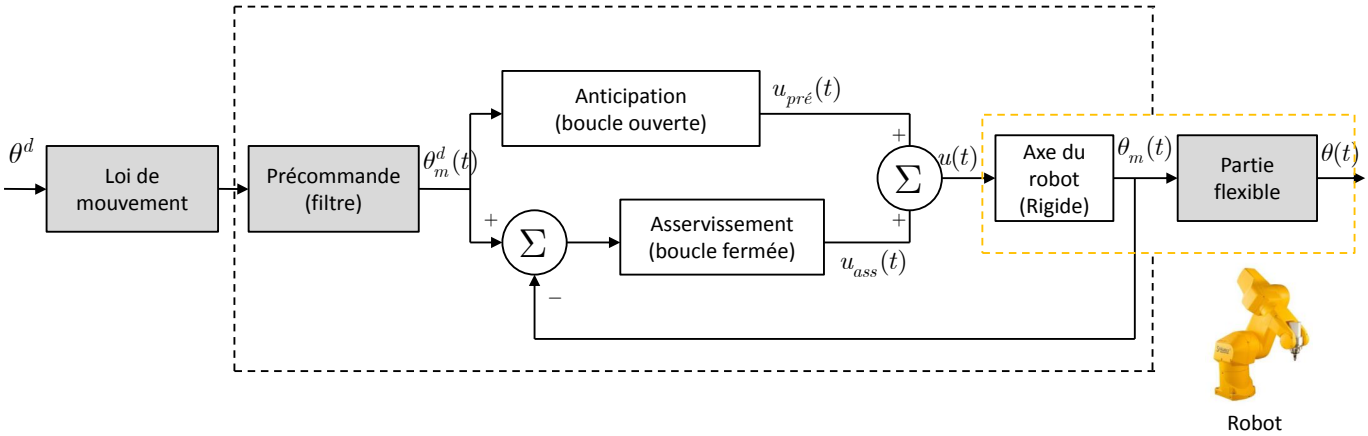


FIGURE 3: Architecture d'un système de commande générique d'un axe du manipulateur robotisé

être effectuées en ligne ou hors ligne. De nombreux travaux de recherche se sont penchés sur cette problématique. Dans [Verdonck and Swevers, 2002] les auteurs donnent une approche de précompensation sur un robot de type KUKA IR 361 où seulement la partie rigide est étudiée. Ils se basent sur la connaissance parfaite du modèle rigide du robot et du contrôleur associé en vue d'implanter hors ligne la compensation globale du modèle pour une trajectoire donnée. Les auteurs mentionnent qu'ils arrivent à améliorer de 70%, sur les 3 premiers axes, les performances au niveau du suivi d'une trajectoire cartésienne vu par le codeur moteur par rapport au réglage industriel initial. Cependant, cette technique ne traite pas tout ce qui se passe après l'étage de réduction et donc la partie flexible. Une démarche similaire a été employée dans les travaux de [Riepl and Gattringer, 2009] pour l'amélioration des performances de suivi de trajectoire en ligne d'un robot de type Stäubli RX 130L. La technique consiste à calculer le modèle rigide inverse numériquement en vue de générer une anticipation rapide en courant, vitesse et

accélération. Cette technique nécessite l'ouverture totale de la baie de commande afin d'accéder à tout moment aux boucles de courant, de vitesse et d'accélération. Cette technique présente les mêmes limitations que celle proposée par [Verdonck and Swevers, 2002] à cause de la non prise en charge de la souplesse de l'axe. Une amélioration de la dynamique des contrôleurs industriels par l'apprentissage neuronale est proposée dans [Lange and Hirzinger, 1999]. Cette approche permet d'améliorer le comportement des contrôleurs pour minimiser l'erreur de pose pour des dynamiques de fonctionnement élevées. Une troisième approche, traitant la génération d'une précommande souple pour les contrôleurs des robots industriels standards, est proposée dans les travaux de [Wang et al., 2009]. Les auteurs introduisent une compensation des déformations élastiques en ligne. Ils exploitent les données issues d'un capteur de force installé au niveau de l'organe terminal pour mesurer les forces appliquées en temps réel. Ce protocole de mesure est utilisé dans le cadre de l'usinage robotisé. Ces forces sont projetées dans l'espace articulaire afin de calculer les déplacements angulaires. Ces déplacements sont injectés dans la boucle de commande pour compenser l'erreur induite. Cette technique reste intéressante, néanmoins, elle augmente la complexité du système de contrôle par l'introduction d'un contrôleur externe dédié. [Alban and Janocha, 1999] proposent une stratégie de compensation basée sur un modèle de déformation des articulations d'un robot industriel. L'erreur dynamique entre la position réelle mesurée au niveau de l'effecteur et la position désirée est obtenue via un système inertiel composé de trois d'accéléromètres et de trois gyromètres laser en anneau. Une fois obtenue, l'erreur de positionnement est approchée par un modèle linéaire discret dont les coefficients sont identifiés de manière hors ligne. Par conséquent, grâce à l'ouverture logicielle, l'erreur dynamique est implantée comme étant une précommande de correction des trajectoires. Cette stratégie de calibration dynamique permet d'améliorer la précision de suivi de trajectoire de 85%.

De façon globale, nous faisons ressortir les points suivants de l'état de l'art :

- Peu de travaux traitent de l'élaboration de précommandes ou d'anticipations adaptées aux axes d'un robot industriel et intégrant les phénomènes de déformation ;
- La planification de trajectoire n'est classiquement pas remise en cause et peu évoquée. Elle représente pourtant un moyen d'action éprouvé afin d'améliorer les performances dynamiques en suivi de profil ;
- La problématique de la réactualisation de certains des paramètres associés aux modèles exploités pour la planification de trajectoire ou à la précommande nécessite la mise en oeuvre de techniques rapides d'identification paramétrique.

Contributions de la thèse

Cette thèse contribue à l'amélioration du comportement dynamique d'un robot industriel par une action sur les trois aspects précédemment soulevés : l'exploitation d'un modèle dynamique représentatif pour la précommande, la réduction des déformations élastiques et des vibrations par une action sur la précommande et sur la loi de mouvement, et enfin l'analyse de techniques d'estimation rapide de paramètres afin de permettre une réactualisation des modèles exploités. La figure 4 présente les domaines scientifiques investigués sous la forme d'un plan arborescent. Ces domaines illustrent la modélisation dynamique des robots manipulateurs, les méthodes d'identification paramétrique et la conception des architectures de commande adaptées aux

axes flexibles des robots manipulateurs. Les principales contributions de cette thèse peuvent être détaillées comme suit :

Contribution 1 : Une modélisation fine d'un axe de robot industriel est réalisée en intégrant tous les phénomènes physiques ayant une contribution non négligeable sur la dynamique. Ce travail est argumenté par l'analyse de nombreux essais expérimentaux réalisés sur le robot démonstrateur.

Contribution 2 : L'introduction d'une nouvelle méthode d'estimation non asymptotique appliquée en robotique, afin d'estimer rapidement les paramètres vibratoires de ce dernier. Il est montré pour la première fois que ces méthodes admettent une statistique sous-jacente, dans le cas de bruits gaussiens, qui n'admet ni moyenne ni variance. Par contre, nous montrons que l'estimation au sens de la médiane permet de robustifier ces estimateurs et démontre le caractère non asymptotique de ces méthodes d'estimation.

Contribution 3 : La mise en oeuvre d'une planification de trajectoires à jerk (dérivée de l'accélération) limité adaptées à la réduction du comportement vibratoire d'un axe de robot.

Contribution 4 : La mise en oeuvre expérimentale d'une précommande intégrant les principaux phénomènes physiques précédemment identifiés.

Plan du mémoire

Le chapitre 1 porte sur la modélisation des robots polyarticulés et présente les outils classiques de modélisation exploités en robotique. Un état de l'art sur la modélisation dynamique des robots est ici développé. Les différents concepts et méthodes présentées seront majoritairement repris dans le chapitre 3 centré sur la modélisation fine d'un axe souple de robot industriel.

Dans le chapitre 2, différentes méthodes d'identification des systèmes sont présentées et analysées. Dans un premier temps, nous exposons les concepts d'identification et d'estimation paramétrique pour une classe de systèmes linéaires. Les méthodes classiques à convergence asymptotique sont comparées ensuite aux approches dite algébriques ou non-asymptotiques. Ces dernières méthodes semblent particulièrement adaptées au contexte de l'estimation rapide en ligne. Ces méthodes algébriques sont ici employées pour la classe des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps. Nous montrons que l'estimation au sens de la médiane de ces estimateurs permet de les robustifier. La sensibilité de l'estimateur développé par rapport aux bruits de mesures est évaluée et une méthodologie de réglage semi-empirique de l'estimateur est proposée.

Le chapitre 3 propose une étude détaillée de l'influence des phénomènes dynamiques pouvant se manifester sur un robot industriel. Pour ce faire, de nombreuses mesures expérimentales sont conduites, puis analysées, afin de justifier par l'observation le modèle d'axe dynamique proposé dans ce chapitre. Ensuite, une second partie est consacrée à l'identification des paramètres inconnus du modèle dynamique précédant. Deux approches sont ici considérées : une estimation "indépendante" phénomène par phénomène et une estimation dite "simultanée" de l'ensemble des paramètres. L'approche d'identification algébrique est notamment appliquée

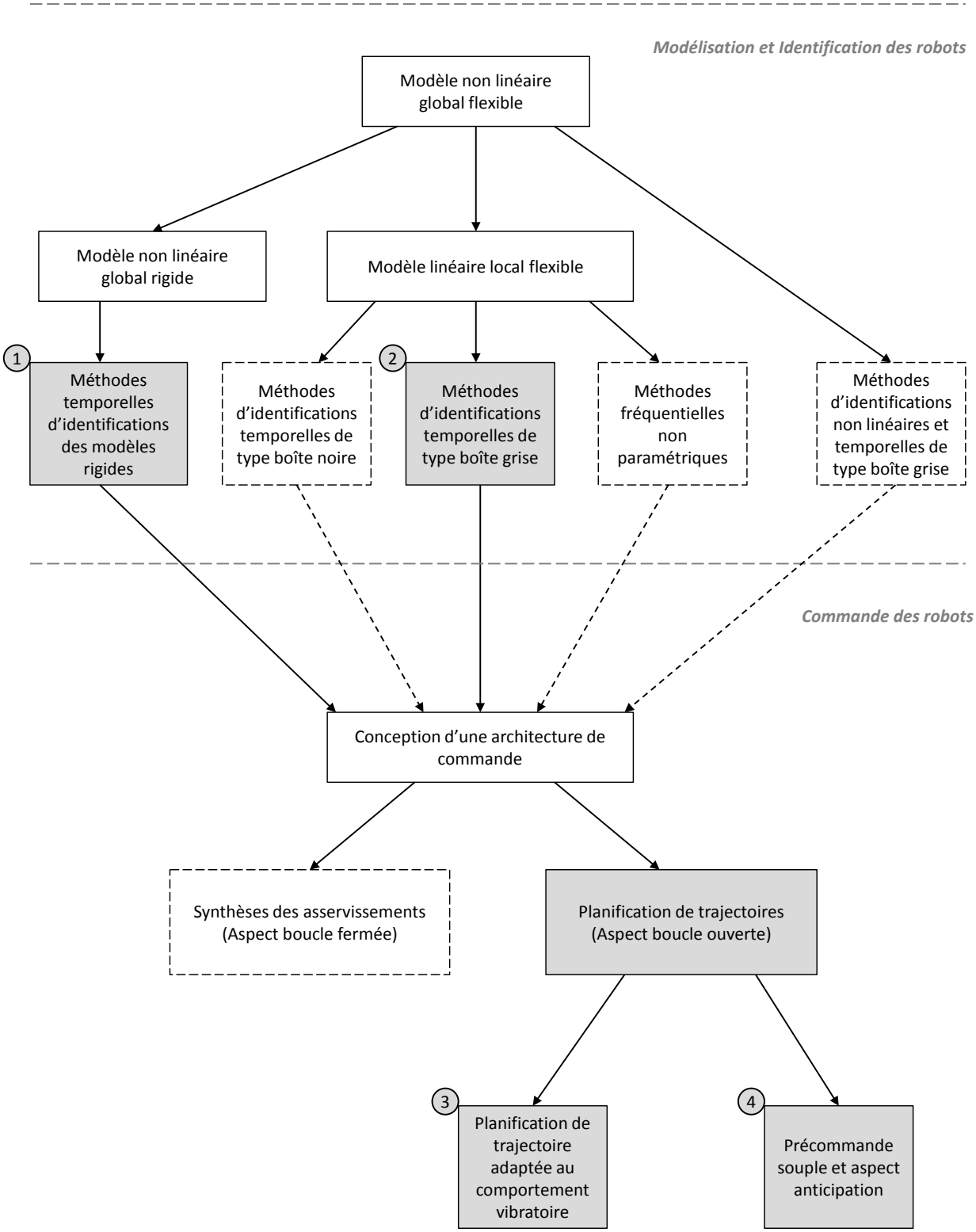


FIGURE 4: Schéma global représentant un aperçu du problème de modélisation, d'identification et de la commande du robot. Les zones grisées représentent les thèmes abordés dans cette thèse

ici afin d'estimer rapidement les caractéristiques vibratoires de l'axe étudié.

Le chapitre 4 exploite le modèle identifié, développé précédemment, afin d'améliorer la

génération de commande d'un axe souple du robot. Dans un premier temps, nous détaillons la problématique de génération de trajectoire (ou planification de trajectoire) et discutons de son influence sur les dynamiques vibratoires du système. Une loi à jerk limité est ensuite adaptée afin de réduire les vibrations d'un axe du robot. Dans cette partie, nous montrons que même pour une structure soumise à plusieurs modes de déformation, une loi à jerk limité permet de réduire, voire de supprimer, le caractère oscillant du système. Une comparaison avec la méthodologie connue d'Input Shaping est réalisée. Dans un second temps, une précommande basée sur l'inversion du modèle de processus est mise en oeuvre. Le gain en précision dynamique est ici clairement démontré. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, l'étude est étendue au cas de variations paramétriques affectant le comportement vibratoire de l'axe. Le couplage entre loi de mouvement adaptée au caractère vibratoire et méthode d'identification en ligne est ici exploité.

La conclusion générale présente la synthèse des développements réalisés et des principaux résultats. De nombreuses perspectives de recherches sont enfin présentées.

Chapitre 1

La modélisation des robots polyarticulés

Sommaire

1 Introduction **9**
2 Précision : notions et définitions **11**
2.1 Fidélité ou répétabilité 11
2.2 Justesse et exactitude 12
3 Modélisation Géométrique des Robots Manipulateurs **13**
3.1 Définition de la situation de l'organe terminal 13
3.2 Les paramètres géométriques 14
3.3 Matrice de transformation homogène 16
3.4 Expression du modèle géométrique direct 17
4 Modèle cinématique **18**
5 Modèle Dynamique des Robots Manipulateurs **19**
5.1 Démarche générale de modélisation dynamique 19
5.2 Modèle de comportement 22
5.3 Modélisation dynamique rigide 23
5.4 Modélisation dynamique flexible 29
5.5 Éléments de transmission non linéaire 31
6 Conclusion **33**

1 Introduction

Un robot est un manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent, à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches. Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet [†]. Un robot manipulateur est constitué par deux sous-ensemble distincts, une structure mécanique articulée et un organe terminal. A cela s'ajoute la pièce à manipuler. Dans ce cas, on parle d'une cellule robotisée (Cf. figure 1.1). Les manipulateurs anthropomorphes 6 axes sériels

†. D'après l'Association Française de Normalisation A.F.N.O.R

FIGURE 1.1: Une ligne de soudage par points à l'aide des robots

représentent les robots les plus utilisés dans l'industrie manufacturière. Leurs architectures est particulièrement adaptée à des opérations ne nécessitant pas une précision très élevée. Un bilan des principaux avantages et inconvénients des robots sériels sont illustrés dans le tableau 1.1. Pour commander un robot, il est indispensable de disposer d'une modélisation qui représente

Avantages	Inconvénients
- Espace de travail très important	- Rapport masse transportable / masse du robot très faible par rapport à celui des robots parallèles
- Grande flexibilité et grande facilité de positionnement grâce à leur architecture	- Faible précision due aux erreurs accumulées au niveau de chaque articulation. Facilité de propagation et amplifications des erreurs de précision et des vibrations jusqu'à l'organe terminal
- Structure facile à modéliser nécessitant une commande moins complexe si on les compare aux robots parallèles	- Comportement dynamique limité à cause des masses et inerties importantes des corps le constituants

TABLE 1.1: Principaux avantages et inconvénients des robots à architectures sérielles

le mieux possible le comportement géométrique, cinématique et dynamique de ce dernier. La démarche de modélisation d'un robot exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. On peut noter que :

- Les modèles géométriques et les modèles cinématiques expriment la position et la vitesse de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement ;
- Les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre couples/forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

Ce chapitre se propose de présenter un état de l'art concernant les différents modèles cités et appliqués à une structure sérielle ouverte. Ces modèles sont adaptés au robot Stäubli RX170 B, support de nos tests, pour lequel une méthode de paramétrage selon la convention D-H

est proposée. Nous proposons de présenter une démarche de modélisation appropriée où les dynamiques rigides et flexibles sont prises en compte. Avant d'aborder cette démarche, nous introduisons quelques définitions permettant de clarifier la notion de précision.

2 Précision : notions et définitions

Dans cette partie nous introduisons quelques définitions couramment utilisées dans l'analyse de performances relatives aux capacités de positionnement d'un robot manipulateur. Les critères de performances ainsi que les méthodes d'essais correspondants aux robots industriels sont fournis par la norme ISO 9283 [ISO, 1998]. Cette norme donne les définitions de la répétabilité et de l'exactitude de pose. Elle est toujours utile lorsque l'on cherche à identifier les différentes causes des erreurs de position et d'orientation de l'organe terminal d'un robot. Cependant, elle doit être associée à d'autres définitions complémentaires tirées des normes métrologiques.

2.1 Fidélité ou répétabilité

La fidélité est définie comme étant l'aptitude à donner, pour une même mesure, des valeurs semblables [Corbel, 2008]. On distingue deux niveaux de fidélité en métrologie : la répétabilité et la reproductibilité. La différence entre ces deux termes réside dans les conditions expérimentales. Dans le cadre de la répétabilité, les résultats sont obtenus par la même méthode, sur des essais identiques, dans le même laboratoire, par le même opérateur utilisant le même équipement et pendant un intervalle de temps bien déterminé. Dans le cadre de la reproductibilité, les résultats sont obtenus par la même méthode, sur des essais identiques, dans différents laboratoires, avec différents opérateurs utilisant des équipements différents. Dans la suite nous nous intéressons particulièrement à la répétabilité. Pour un robot, la répétabilité caractérise la dispersion des poses atteintes par le robot lorsque celui-ci est commandé pour atteindre plusieurs fois le même point. Il est très difficile d'intervenir sur la fidélité d'un robot. En effet, les causes d'une mauvaise fidélité sont issues des phénomènes aléatoires tels que les jeux, les frottements, l'usure au niveau des liaisons. Il est possible de soigner la réalisation des liaisons néanmoins il est impossible d'éliminer tous les phénomènes qui pénalisent la répétabilité. A cela s'ajoute la précision qui

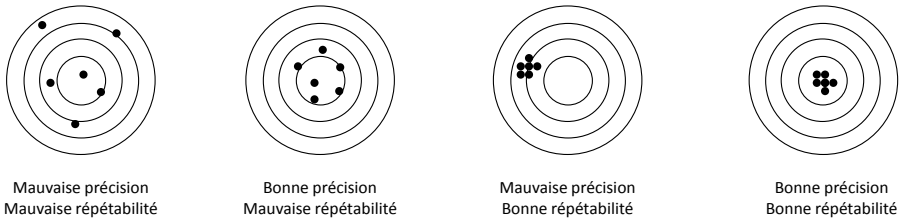


FIGURE 1.2: Répétabilité et précision statique

est définie comme la capacité du robot à se déplacer précisément à une position désirée dans l'espace 3D. Le couple précision et répétabilité décrit, de ce fait, la capacité d'un robot à atteindre une consigne désirée avec le minimum de variance (Cf. figure 1.2).

2.2 Justesse et exactitude

La justesse ou biais de mesure désigne l'étroitesse de l'accord entre la valeur moyenne obtenue à partir d'une large série de résultats d'essais et une valeur de référence acceptée. Cependant, il ne faut pas la confondre avec l'exactitude. Cette dernière désigne une seule valeur mesurée comparée à une valeur de référence donnée. Par conséquent, la mesure de l'exactitude n'est que l'erreur de pose du robot ou autrement dit, la mesure de la précision statique du robot comme indiqué dans la norme citée précédemment. L'erreur d'exactitude de pose des robots industriels est de quelques millimètres. L'origine de cette erreur se manifeste par plusieurs facteurs structurels et géométriques. Quant aux facteurs structurels on distingue les défauts dû à la charge transportée, les problèmes de frottements, les jeux mécaniques, les dérives thermiques et le positionnement de chaque bras par rapport aux autres. Concernant les défauts géométriques, ils sont souvent associés avec les défauts d'offset des axes accompagnés d'un mauvais paramétrage du modèle géométrique et de la définition du repère de l'organe terminal dans l'espace.

A cela s'ajoute la précision dynamique ou le problème de suivi de trajectoire (Cf. figure 1.3). Cette précision est affectée par les mêmes sources citées auparavant auxquelles s'ajoutent l'inertie, les paramètres des asservissements et les problèmes d'élasticité articulaires qui engendrent un comportement vibratoire. En effet, le long de sa trajectoire programmée, l'effecteur subit une déviation tout en restant dans une zone d'incertitude appelée incertitude dynamique. Cette incertitude dépend essentiellement :

- des défauts de transmission de chaque articulation et des souplesses des bras,
- de l'architecture du manipulateur.

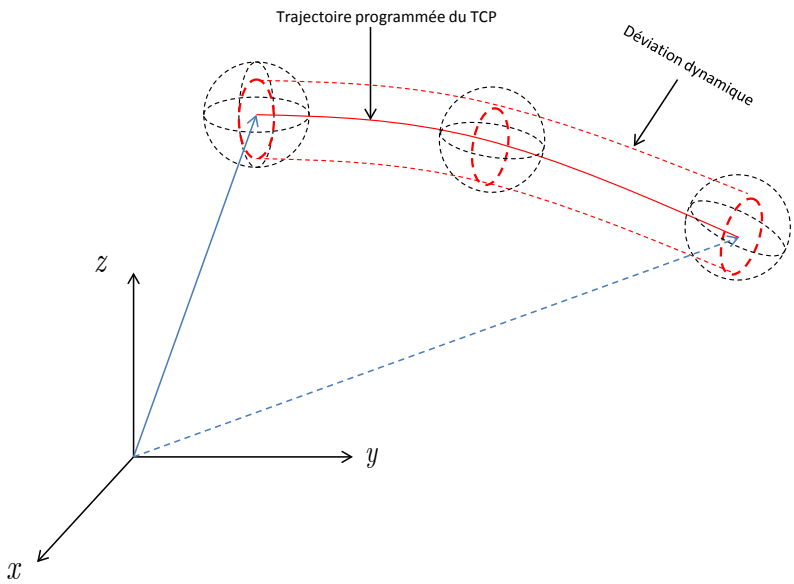


FIGURE 1.3: Définition de l'erreur dynamique

Plusieurs méthodes ont été développées pour remédier à ce problème d'imprécision et permettent de corriger les principaux défauts des robots sériels. Les solutions les plus répandues dans l'industrie sont l'étalonnage ou la calibration du robot. La calibration est la solution qui permet d'améliorer la précision statique du positionnement du robot sans

aucune modification de la structure mécanique ou de la conception du robot lui-même. De façon générale, l'étalonnage permet de mettre à jour dans la commande les valeurs nominales des paramètres géométriques données par le constructeur. Cette opération nécessite bien évidemment un système de mesure externe. Il s'agit généralement d'un système de mesure 3D tel que le laser tracker ou un système photogrammetric [Maas, 1997]. Une fois les mesures réalisées, l'opération consiste alors à déterminer l'écart entre un modèle géométrique donné et des données expérimentales sur le robot afin d'optimiser les paramètres relatifs. Cette opération permet d'améliorer d'environ 97% la précision statique des manipulateurs [Conrad et al., 2000].

Une autre solution consiste à installer des codeurs supplémentaires en bout d'axe du robot afin de mesurer les défauts de la chaîne de transmission. Le retour codeur sera injecté systématiquement dans la boucle de commande en amont [Ruderman et al., 2009]. Ce type de solution augmente le prix du robot et pose de nouveaux problèmes technologiques notamment des problèmes de stabilité. Une troisième approche se base sur l'élaboration d'un modèle comportemental permettant de générer une commande adaptée et permettant de compenser une grande partie des erreurs de poursuite en dynamique. Nous proposons dans la suite de ce chapitre de développer une modélisation élasto-dynamique d'un manipulateur industriel.

3 Modélisation Géométrique des Robots Manipulateurs

3.1 Définition de la situation de l'organe terminal

La définition de la situation de l'organe terminal du robot nécessite la connaissance de sa position et de son orientation usuellement connues sous le vocable de *la pose* du robot. Le nombre de paramètres requis pour la définition complète de la pose d'un corps rigide dans l'espace est six : trois pour la position et trois pour l'orientation. Quant à la définition de la position, nous adoptons les coordonnées cartésiennes qui sont les plus simples à utiliser. D'autres représentations existent aussi telles que les coordonnées cylindriques et sphériques. Concernant la définition de l'orientation de l'organe terminal, plusieurs conventions sont présentées dans la littérature [Sanz, 2009] :

- Angles d'Euler ;
- Angle plus vecteur ;
- Quaternion ;
- Matrice de rotation ou cosinus directeurs.

La représentation minimale de l'orientation est définie par trois paramètres tels que les angles d'Euler. La plus courante des représentations non-minimale est la matrice de rotation à neuf composantes. La représentation par quaternion ou par angle plus vecteur sont des représentations à quatre composantes, une de plus que les angles d'Euler. Les avantages de l'utilisation des quaternions sont largement exposés dans [Funda et al., 1990], tandis que [Campa et al., 2006] proposent une modélisation cinématique et une stratégie de contrôle basées sur les quaternions unitaires d'un poignet rotule d'un robot manipulateur. Une comparaison entre les différents formalismes est proposée dans [Campa and De la Torre, 2009]. Dans ce qui suit, nous introduisons les méthodes classiques de paramétrage pour les structures sérielles.

3.2 Les paramètres géométriques

Dans la littérature, il existe plusieurs conventions pour définir la position ainsi que l'orientation relative de repères successifs. La technique la plus répandue pour modéliser un robot manipulateur consiste à utiliser les paramètres de Denavit-Hartenberg, valable pour les structures ouvertes simples [Spong and Vidyasagar, 1989]. Cette convention utilise quatre paramètres pour la localisation relative de deux repères successifs : deux angles et deux distances.

Considérons un bras manipulateur sériel à architecture ouverte simple constituée de n corps mobiles supposés parfaitement rigides et dont les articulations sont rotoïdes. Soit l'axe i, l'articulation qui relie le bras $i-1$ et le bras i comme illustré dans la figure 1.4. On associe au i^{eme} corps en mouvement une base orthonormal cartésienne R_{i-1}, avec i=1, 2,...,n. Le positionnement d'une articulation selon la convention D-H s'effectue par le nombre minimal nécessaire de quatre paramètres pour une rotoïde (Cf. Figure 1.4) :

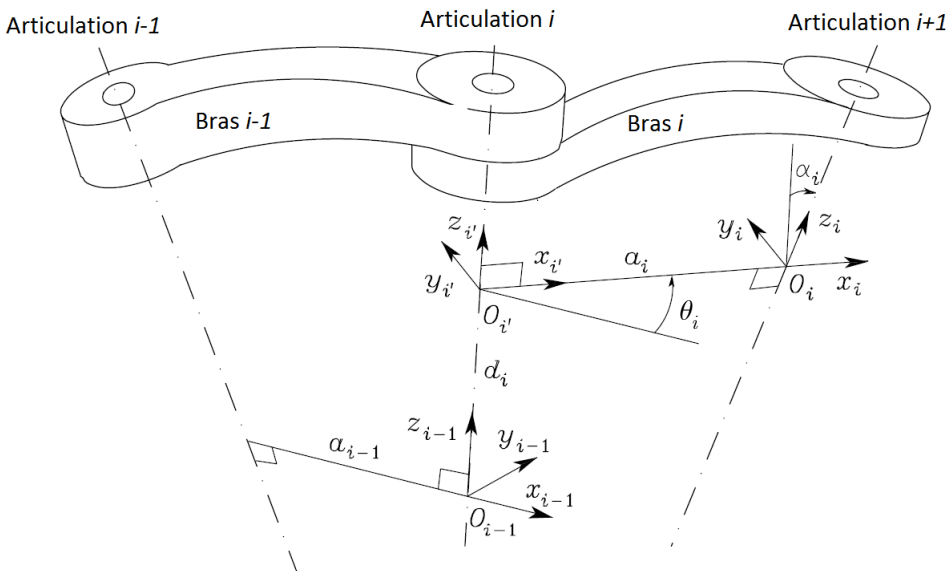


FIGURE 1.4: Les paramètres géométriques de Denavit-Hartenberg [Siciliano and Khatib, 2008]

- L'axe z_i est porté par l'axe de rotation de l'articulation $i+1$;
- L'axe x_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_i et z_{i+1} ;
- L'axe y_i complétera la règle de la main droite afin de définir un repère orthonormé direct ;
- L'origine O_i est l'intersection de l'axe z_i et de la normale commune aux axes z_{i-1} et z_i ;
- Soit le point $O_i^{'}$ l'intersection de l'axe z_{i-1} et de la normale commune aux axes z_{i-1} et z_i. Ceci nous permet de faciliter les notations et les définitions ultérieurement.

La définition des repères étant établie, la position et l'orientation de la base R_i par rapport à R_{i-1} est exprimée en fonction des quatre paramètres suivantes :

- θ_i est l'angle de rotation entre $\overrightarrow{x_{i-1}}$ et $\overrightarrow{x_i}$ autour de $\overrightarrow{z_{i-1}}$;
- α_i est l'angle d'offset entre les axes $\overrightarrow{z_{i-1}}$ et $\overrightarrow{z_i}$ autour de $\overrightarrow{x_i}$ en utilisant toujours la règle de la main droite. Elle définie entre autre la torsion du bras ou le gauchissement ;
- a_i représente la longueur du bras, c'est la distance entre $O_i^{'}$ et O_i le long de $\overrightarrow{x_i}$;
- d_i est la distance entre O_{i-1} et $O_i^{'}$ selon $\overrightarrow{z_{i-1}}$.

La convention D-H reste généraliste et ne donne pas une définition unique du repère dans les

cas suivants :

- Lorsque 2 axes consécutifs sont parallèles, la perpendiculaire commune de distance d_i selon le repère associé n'est pas proprement définie ;
- Pour un repère R_i, seule la direction de z_i est fixée, cependant, le point d'origine O_i ainsi que le vecteur directeur $\overrightarrow{x_i}$ sont arbitrairement choisis.

En adoptant la convention D-H pour le robot Stäubli RX170 B, nous plaçons les repères (Cf. figure 1.5). Le tableau (1.2) illustre les paramètres géométriques du démonstrateur. Ce paramétrage géométrique a été révisé dans [Khalil and Kleinfinger, 1986] où les auteurs proposent une convention unifiée qui permet d'avoir une description homogène des architectures ouvertes simples et complexes de structures mécaniques articulées.

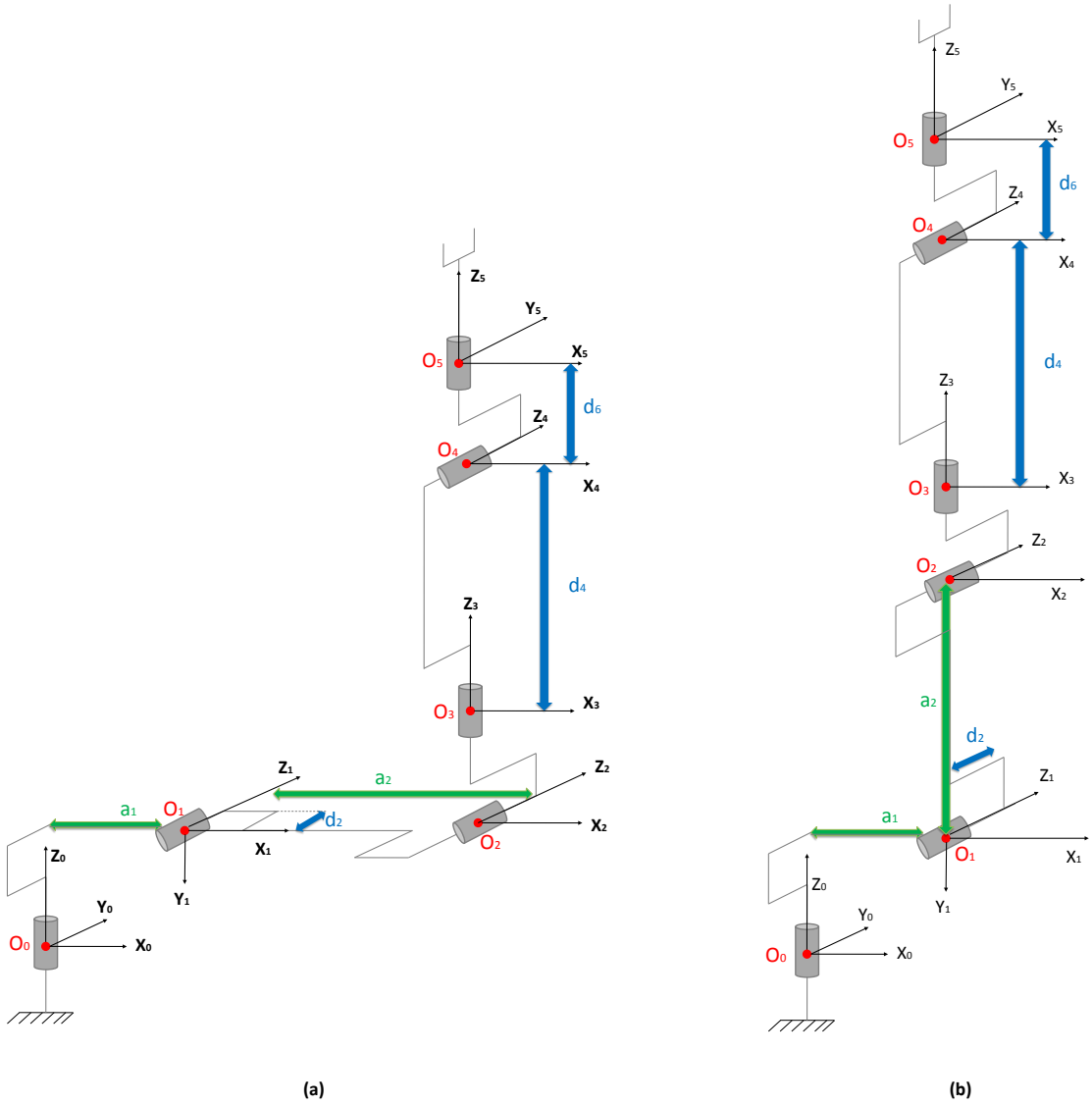


FIGURE 1.5: Placement des repères pour le Stäubli RX 170B selon la convention D.H. (a) Configuration zéro "géométrique". (b) Configuration zéro "codeur"

Articulation i	$d_i(mm)$	$a_i(mm)$	$\alpha_i(deg)$	$\theta_i(deg)$
1	0	100	-90	θ_1
2	70	850	0	θ_2
3	0	0	90	θ_3
4	750	0	-90	θ_4
5	0	0	90	θ_5
6	135	0	0	θ_6

TABLE 1.2: Paramètres géométriques du Stäubli RX 170 B

3.3 Matrice de transformation homogène

La matrice de transformation définissant le repère R_i dans le repère R_{i-1} est obtenue par deux rotations et deux translations comme suit :

$$\begin{aligned} T_i^{i-1} &= Rot(z_{i-1},\theta_i) \times Trans(z_{i-1},d_i) \times Trans(x_i,a_i) \times Rot(x_i,\alpha_i) \\ &= \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha_i) & -sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & sin(\alpha_i) & cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les matrices de rotation présentent plusieurs propriétés intéressantes du point de vue géométrique :
- La matrice de rotation A_i^j est une matrice réelle orthogonale telle que $(A_i^j)^T\ A_i^j = I_3$ où $I_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$. D'où $(A_i^j)^{-1} = (A_i^j)^T = A_j^i$.
- Rotation relative entre matrice de rotation : Soient A_i^0 et A_j^0 deux rotations définies par rapport au repère R_0. La rotation relative entre les deux rotations est définie par :

$$A_i^j = (A_0^i)^T A_0^j = A_i^0 A_0^j \tag{1.2}$$

- Rotation d'un point : Considérons P_i les coordonnées d'un point exprimé dans le repère R_i. Soit A_j^i la matrice de rotation qui lie le repère R_i au repère R_j. Les coordonnées du point P dans le repère R_j sont données par l'équation :

$$P_j = A_j^i P_i \tag{1.3}$$

La représentation d'une rotation par une matrice de rotation n'est pas minimale puisqu'elle utilise neuf paramètres pour représenter les trois degrés de liberté.

La matrice de transformation homogène du repère R_{i-1} au repère R_i est une fonction de l'angle de rotation θ_i vu que les autres paramètres géométriques α_i, d_i et a_i sont constants. La

matrice homogène est définie par :

$$T_i^{i-1} = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i)cos(\alpha_i) & sin(\theta_i)sin(\alpha_i) & a_i cos(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i)sin(\alpha_i) & -cos(\theta_i)sin(\alpha_i) & a_i sin(\theta_i) \\ 0 & sin(\alpha_i) & cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^{i-1}(\theta) & P_i(\theta) \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

La matrice homogène permet de décrire l'orientation entre deux articulations successives à travers neuf composantes et trois composantes pour la translation.

3.4 Expression du modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct exprime la pose du robot en fonction de ses coordonnées généralisées (positions articulaires). Soient X le *m-uplet* des coordonnées opérationnelles et θ le *n-uplet* des coordonnées généralisées. Le modèle géométrique du robot manipulateur est la fonction f qui permet d'exprimer la situation de l'effecteur du robot manipulateur en fonction de sa configuration articulaire θ :

$$X = \begin{pmatrix} P(\theta) \\ A(\theta) \end{pmatrix} = f(\theta) \tag{1.5}$$

où P désigne la position de l'effecteur et A la matrice d'orientation par rapport à un repère relié à la base du robot. $X = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$ désigne le vecteur des coordonnées cartésiennes (position et orientation) de l'organe terminal. $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)^T$ est le vecteur de coordonnées généralisées.

Un robot manipulateur est une chaîne cinématique ouverte constituée de $n + 1$ corps rigides interconnectés par n articulations. En admettant que la première extrémité est fixée à une base, la deuxième extrémité de la chaîne cinématique est liée à un effecteur dont l'objectif est d'exécuter des tâches dans l'espace de travail du manipulateur. Le repère de base R_0 est un repère lié au socle du robot. Le repère R_n est un repère fixé à l'organe terminal où il caractérise le repère outil. Ce repère est reliée généralement à une pointe outil (TCP : Tool Center Point en anglais) qui est choisie en fonction de l'opération à réaliser (Cf. figure 1.6).

En associant un repère R_i à chaque articulation i avec $i = 0, ..., n$, la position et l'orientation du repère outil R_n par rapport à R_0 sont données par la relation reliant les matrices homogènes T_{j-1}^j pour $j = 1..., n$, (1.4) entre elles. Le modèle géométrique direct sera exprimé en fonction des variables articulaires et des paramètres géométriques du robot.

$$T_n^0(\theta) = T_0^1(\theta_1)T_1^2(\theta_2)...T_{n-1}^n(\theta_n) \tag{1.6}$$

La matrice homogène T_0^n permet d'expliciter l'orientation et la position de l'organe terminal par rapport au repère de base du démonstrateur R_0.

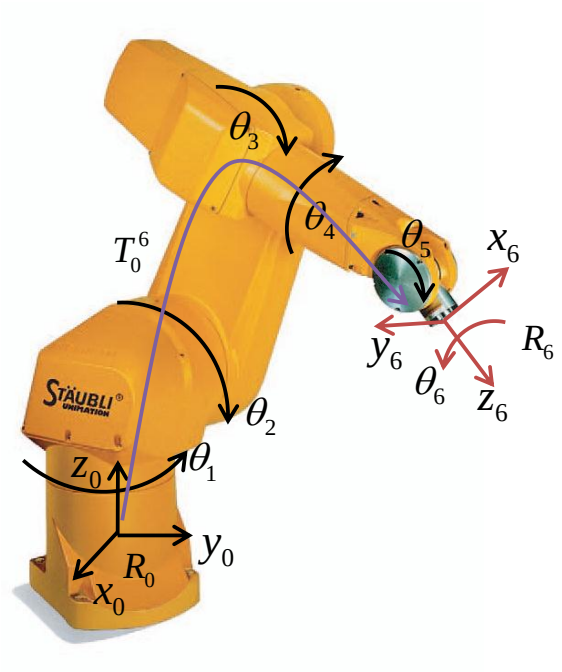


FIGURE 1.6: Transformation des repères standards pour le robot Stäubli RX170B

4 Modèle cinématique

La relation entre la vitesse articulaire $\dot{\theta}$ et la vitesse des coordonnées opérationnelles ou bien cartésiennes $\dot{X}$ de l'organe terminal est décrite par le modèle cinématique direct. Cette relation est déterminée à travers la Jacobienne J comme suit :

$$\dot{X} = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}\dot{\theta} = J(\theta)\dot{\theta} \tag{1.7}$$

L'intérêt de la matrice Jacobienne est multiple :

- En équilibre statique, sous charge, la Jacobienne est utilisée pour établir la relation liant les efforts exercés au niveau de l'effecteur, notée F, et les couples articulaires τ avec $J(\theta)^T\ F = \tau$;
- Elle est la base du modèle différentiel inverse $\dot{\theta} = J^{-1}(\theta)\ \dot{X}$, permettant de détecter les singularités de configuration ;
- Elle facilite le traitement des singularités et la détermination de l'espace opérationnel accessible du robot, [Khalil and Dombre, 1999].

La Jacobienne de base est une matrice de dimension $(6 \times n)$ qui se décompose en deux éléments : une Jacobienne de position, notée J_P, associée à la vitesse linéaire $\dot{p}_e$ du TCP et une Jacobienne d'orientation associée à sa vitesse angulaire ω_e :

$$\dot{p}_e = J_P(\theta)\dot{\theta} \tag{1.8}$$

$$\omega_e = J_O(\theta)\dot{\theta} \tag{1.9}$$

Le modèle cinématique direct s'écrit en fonction de la Jacobienne géométrique du manipulateur :

$$v_e = \begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{pmatrix} = J(\theta)\dot{\theta} \tag{1.10}$$

La matrice Jacobienne est représentée par rapport au repère de base du robot R_0. Pour un robot Stäubli RX170B, $J(\theta)$ est une matrice (6×6) :

$$J = \begin{pmatrix} J_{P_1} J_{P_2} \dots J_{P_6} \\ J_{O_1} J_{O_2} \dots J_{O_6} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

où le vecteur colonne $(J_{P_i}^T \quad J_{O_i}^T)^T$ s'exprime comme suit :

$$\begin{pmatrix} J_{P_i} \\ J_{O_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i-1}^{(0)} \wedge (p_e^{(0)} - p_{i-1}^{(0)}) \\ z_{i-1}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

où $z_{i-1}^{(0)}$ est un vecteur unitaire porté sur l'axe de rotation de l'articulation i et exprimé dans le repère de base R_0. Le vecteur $p_i^{(0)}$ définit la distance entre l'origine de repère de base et l'origine du repère i, il est exprimé dans R_0.

5 Modèle Dynamique des Robots Manipulateurs

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur est donné par l'ensemble des relations mathématiques entre les couples (forces) appliquées aux actionneurs et l'évolution temporelle des positions, vitesses et accélérations articulaires [Shabana, 2003]. Diverses définitions sont adoptées pour décrire la dynamique des systèmes multi-corps, [Grote and Antonsson, 2009]. On distingue deux types de modèles dynamiques :

- Le modèle dynamique direct qui exprime les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples des articulations ;
- Le modèle dynamique inverse, ou tout simplement modèle dynamique, la relation qui exprime les couples en fonctions des variables articulaires.

En général, le modèle dynamique est utilisé pour la simulation, la synthèse des contrôleurs, la conception mécanique des éléments de transmission. Quelques algorithmes de contrôle/commande exigent que le problème de la dynamique inverse soit résolu. Cela signifie que le couple moteur est calculé à partir des déplacements souhaités et ses dérivées successives. Cependant, pour la simulation, les équations différentielles du modèle doivent être résolues sachant que l'entrée du système correspond au couple fourni par les actionneurs, [Siciliano and Khatib, 2008].

5.1 Démarche générale de modélisation dynamique

En fonction de l'utilisation du modèle dynamique et du niveau de précision demandée, le manipulateur est modélisé de façon rigide ou flexible. Quant au modèle rigide, plusieurs méthodes classiques se distinguent : l'approche Newtonienne [Craig, 2005] et l'approche Lagrangienne [Spong and Hutchinson, 2005]. La première technique de *Newton-Euler* est basée sur le principe des puissances virtuelles en dynamique pour un système de solides

indéformables. Son principe consiste à calculer les forces des actionneurs en exprimant pour chaque corps rigide le bilan des efforts. Par conséquent, le modèle dynamique inverse est obtenu systématiquement d'une manière récursive en appliquant le principe fondamental de la dynamique. Pour plus de détails sur cette technique, le lecteur peut se référer à [Spong and Vidyasagar, 1989]. Quant à la méthode d'*Euler-Lagrange*, elle se base sur l'analyse du bilan énergétique échangé par le système et son environnement (énergies cinétiques et potentielles). Le modèle dynamique est obtenu par application de la formulation d'*Euler-Lagrange*, [Siciliano and Khatib, 2008]. Une troisième méthode qui se base sur *la méthode de Kane* se présente pour la modélisation dynamique rigide [Kane and Levinson, 1985], [Lesser, 1995]. Ces différents formalismes sont basés sur la mécanique classique des solides indéformables [Goldstein, 1980] et produisent des résultats identiques même si la méthodologie de traitement diffère d'une approche à l'autre en fonction de l'analyse structurelle.

En réalité, un manipulateur robotique est une structure flexible représentée par un système de relations non linéaires et continues. Il est décrit par des équations à dérivées partielles avec une infinité de degrés de libertés. Une telle démarche de modélisation a pour finalité d'obtenir un modèle de commandes de la structure mécanique, c'est-à-dire un modèle qui servira de base dans la conception d'une architecture de commande. En outre, pour un niveau de précision exigé, il est toujours préférable d'extraire un modèle de dimension finie avec un nombre minimum de paramètres tout en conservant une signature de la réalité physique du système. De point de vue méthodologique, trois niveaux de modélisation des manipulateurs souples se présentent : *modèle à éléments finis*, *modèle à paramètres distribués ou modes continus* et le *modèle à paramètres localisés* [Bascetta and Rocco, 2002]. [Dwivedy and Eberhard, 2006] présente un panorama sur l'analyse dynamique des manipulateurs flexibles à travers les trois approches citées.

La modélisation éléments finis est une méthode de résolution numérique d'équations bien adaptée à la dynamique des structures. Cette méthode consiste à décomposer la structure continue du manipulateur en petits éléments raccordés les uns aux autres *via* des éléments géométriques de base, de manière à décrire au mieux la structure réelle. Cette méthode a émergée avec la nécessité de résoudre des problèmes de calculs complexes, dans un contexte où le développement massif de l'informatique permettait d'automatiser le traitement des systèmes d'équations conséquents. La puissance des calculateurs actuels permet d'approcher le comportement vibratoire global d'une mécanique en un temps de calcul raisonnable [Colas, 2007]. Un développement basé sur les éléments finis non-linéaires est proposé par [Jonker, 1990] afin de décrire le mouvement du robot Stäubli RX90B. Cette approche consiste à extraire la dynamique du manipulateur en utilisant le formalisme Lagrangien [Papastavridis, 1992]. Tandis que [Jonker, 1991] propose une linéarisation locale du modèle éléments finis du manipulateur flexible en vue de la génération de sous-modèles autour d'une trajectoire nominale. Une extension vers des modèles identifiables à travers la modélisation dynamique éléments finis est proposée dans [Hardeman et al., 2006].

Bien que ces modèles soient les plus précis et se rapprochent le mieux de la structure réelle étudiée, ce type de modélisation reste encore trop complexe pour définir un modèle de

commande [Piersol and Paez, 2009]. C'est pourquoi, la modélisation éléments finis est largement utilisée dans la phase de conception mécanique, [Ramachandran et al., 1992] et l'analyse structurelle en dynamique des robots manipulateurs [Piras et al., 2005], [Soares et al., 2008]. L'application de cette approche à des manipulateurs permet de dégager des tendances sur leurs déformation structurelle grâce à une *analyse modale*. L'objectif de cette analyse est d'améliorer la connaissance du modèle dynamique des structures réelles en déterminant ses modes de vibration [Piranda, 2013]. En effet, cette analyse tend à réduire la complexité de la représentation du comportement dynamique d'une structure linéaire en dégageant un nombre de paramètres modaux réduit : fréquences propres, amortissement et formes propres associés. Cette tendance permet de générer un modèle de comportement correspondant à une modélisation continue des modes de déformations dominants [Li et al., 2006], [Martins et al., 2003]. Ceci conduit finalement à une représentation à paramètres distribués qui varient en fonction du temps et de l'espace. *À* l'heure actuelle, l'analyse modale expérimentale est devenue grâce aux progrès de l'informatique et de l'instrumentation, une méthode privilégiée d'investigation dans le domaine de la dynamique des structures [Barre et al., 1997] , [Hatch, 2010]. Une comparaison entre la modélisation continue et éléments finis pour les manipulateurs flexibles multi-corps est étudiée dans [Theodore and Ghosal, 1995].

Un compromis entre la simplicité du modèle à retenir et le fait de rapprocher au mieux sa réponse à la structure réelle du robot manipulateur, nous conduit à réduire le modèle continu aux principaux modes et sources de déformation structurelle comme introduit dans [Khalil and Gautier, 2000]. Dans [Subudhi and Morris, 2002] il est réalisé une modélisation dynamique généralisée qui vise à regrouper les bras et les articulations flexibles pour des robots sériels. Le modèle présenté est issu du formalisme d'Euler-Lagrange couplé à une discrétisation des modes continus des poutres. Il apparaît donc nécessaire de fixer l'ordre maximum des modèles désirés en fonction de l'objectif visé. On distingue deux approches principales pour cette modélisation. La première repose sur une représentation mathématique à paramètres localisés sur la base de l'hypothèse que l'élasticité principale est concentrée au niveau de la chaîne de transmission, à savoir, l'étage de réduction [Spong, 1987]. Une analyse d'un robot industriel a été présenté dans [Sweet and Good, 1985] où il a été conclu que les élasticités de la chaîne cinématique des trois principaux axes sont cruciales pour la conception du modèle qui génére la loi de mouvement. Ces élasticités modélisées sous la forme d'un couple de masse-amortisseur pour chaque articulation, semble indispensable afin d'obtenir une bonne précision dans la plage 0 à 50 Hz. Une autre question liée à la conception d'un modèle à articulation souple est de savoir si les couplages inertiels entre l'arbre du moteur et celle du bras (rigide) devraient être inclus. [Spong, 1986] propose un modèle flexible multivariable, où le couplage inertiel a été négligé en raison de la présence d'un grand rapport de réduction au niveau de la transmission de mouvement et depuis, ce modèle local est considéré comme la principale approche pour la modélisation et la conception des boucles de commande des robots industriels à articulation flexibles. Un modèle complet qui prend en compte tous les couplages est décrit dans [Tomei, 1991] et [De Luca, 2000].

La deuxième approche est un modèle de liaison flexible décrite, par exemple, dans [De Luca and Siciliano, 1991] et aussi dans [Book and Obergfell, 2000]. Dans cette approche,

le bras du robot est modélisé comme des poutres à élasticités infiniment réparties. Cette dimension infinie est tronquée pour obtenir un modèle fini. Ce modèle est souvent connu sous l'appellation modèle continu des modes de déformation dominantes. C'est un modèle appliqué au manipulateurs à liaison unique, directement actionnés par des vérins électriques ou hydraulique sans transmission. Parfois les manipulateurs multi-bras sont également pris en compte [Colas, 2007] et [Béarée, 2005].

Dans le cas des robots polyarticulés à bras rigides, seules les élasticités dans la direction de la rotation angulaire sont considérées. C'est-à-dire que la déformation est limitée à un plan perpendiculaire à l'articulation précédente. On peut citer [Yoshikawa, 1990] et [Ueno et al., 1991] où une représentation 3D de la souplesse et considérée. L'enjeu réside alors dans la génération d'un compromis entre précision et simplicité au niveau du choix de modèle. Dans le cas où la flexibilité se limite uniquement au niveau articulaire, cette réduction permet d'aboutir à différents types de modèles à paramètres localisés [Khalil and Gautier, 2000]. Ce type de modèle est révisé par [Bascetta and Rocco, 2002] où ils donnent un bon aperçu sur les trois grandes approches discutées auparavant. Ce constat permet d'expliquer l'exploitation des modèles discrets à paramètres localisés dans la suite de nos travaux.

5.2 Modèle de comportement

Il est développé généralement deux types de modélisation des robots flexibles : *les robots à bras souples*, [Mehrez and El-Badawy, 2010], [Subudhi and Morris, 2002] et *les robots à articulations flexibles*, [De Luca et al., 2005], [Siciliano and Khatib, 2008]. Lors d'une étude précédente sur le Stäubli RX170B [Olabi et al., 2012], nous avons constaté que la souplesse des bras du robot est négligeable par rapport à celle des articulations. Ce résultat est obtenu à travers une cartographie de souplesse du robot dans l'espace articulaire [Alici and Shirinzadeh, 2005]. La technique employée consiste à appliquer un chargement externe à la structure mécanique. Une fois que les axes sont soumis à un moment, ce dernier produit sous l'effet des souplesses des chaînes cinématiques des axes, des déformations élastiques induisant des déplacements angulaires (Cf. figure 1.7). L'analyse des résultats a montré que la flexion du bras ne dépasse pas dans la plupart du temps les 2% de la souplesse totale. Nous déduisons alors que la souplesse des bras est négligeable par rapport à celle des articulations. Ceci conduit à orienter la modélisation vers les structures sérielles à articulations flexibles. La souplesse d'une articulation se décompose en deux parties. Elle comprend une souplesse angulaire axiale dominante et une souplesse radiale qui peut être considérée à symétrie cylindrique. Nous faisons l'hypothèse que la raideur axiale d'une articulation est regroupée en une raideur équivalente constante K unique pour chaque axe. Ces hypothèses seront investiguées dans le paragraphe 5.4.1.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement le modèle dynamique rigide de base, auquel des éléments de souplesses articulaires s'ajoutent afin d'obtenir le modèle globale à articulations flexibles du robot manipulateur.

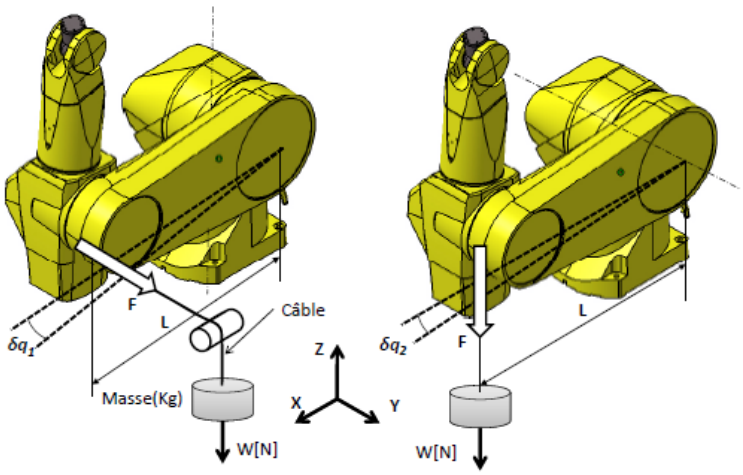


FIGURE 1.7: Mesure de déformation des axes 1 et 2 du robot [Olabi, 2011]

5.3 Modélisation dynamique rigide

Comme mentionné précédemment, et contrairement à la méthode de Lagrange se basant sur l'étude des différentes énergies échangées par le système et son environnement, l'approche de Newton-Euler et la méthode de *Kane* sont obtenues à partir du principe fondamental de la dynamique et le principe de d'Alembert [Tran, 1991]. Cette dernière peut être appliquée à des systèmes soumis à des contraintes holonomes et non holonomes simple †. Le formalisme Lagrangien, généralement plus simple à mettre en oeuvre, sera décrit pour le modèle dynamique du démonstrateur. La méthode de Lagrange consiste à décrire une fonction scalaire de l'énergie cinétique $E_c(\theta, \dot{\theta})$ et potentielle $E_p(\theta)$ en fonction des coordonnées généralisées θ $=(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)^T$. Le Lagrangien L s'écrit alors sous la forme :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_c(\theta, \dot{\theta}) - E_p(\theta). \tag{1.13}$$

L'étape suivante consiste à calculer les quantités du mouvement du manipulateur à n degrés de libertés, extraites *via* l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{1.14}$$

Dans l'équation précédente, τ_i représente le vecteur des forces généralisées en concordance avec le principe des travaux virtuels [Fung and Tong, 2001]. Ce qui se transpose en couple moteur dans notre cas.

Dans un modèle dynamique rigide, le bras ainsi que la chaîne de transmission mécanique relative à chaque axe du manipulateur, sont considérés parfaitement rigides. La structure est composée de n corps indéformables interconnectés *via* des articulations rigides comme illustré

†. Un système mécanique est soumis à une contrainte holonome s'il existe un vecteur de coordonnée $\overrightarrow{\psi_k}$ pour les k éléments du système qui peut s'écrire sous une équation algébrique de la forme $g(\overrightarrow{\psi_1}, \overrightarrow{\psi_2}, ..., \overrightarrow{\psi_k}, t) = 0$. Il est non-holonome dans le cas contraire. En général, si un système mécanique est soumis à l contraintes holonomes, ce dernier aura l moins degrés de libertés que le système non contraint. De ce fait l contraintes holonomes enlèvent l degrés de liberté. Par conséquent, un système de coordonnées généralisées $\theta_1, ..., \theta_n$ sera définit où $\psi_i = \psi_i(\theta_1, ..., \theta_n)$, $n = k - l$ et toutes les θ_i sont indépendantes

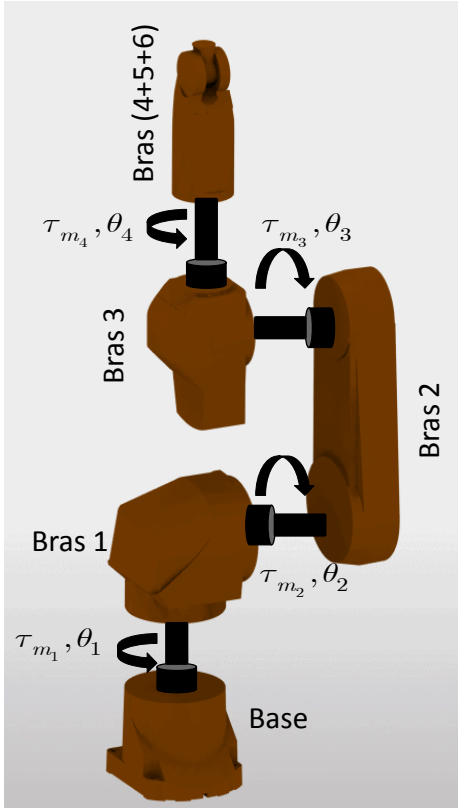


FIGURE 1.8: Modèle dynamique rigide du Stäubli RX170B : application au 4 premiers axes

dans la figure 1.8. Chaque bras est décrit par sa masse m_i, son centre de masse g_i et le tenseur d'inertie I_i lui même exprimé dans un repère lié au centre de gravité (Cf. Figure 1.9). Afin de passer au calcul du modèle dynamique rigide, il sera utile de rappeler quelques notions de base sur la description cinématique d'un solide pour le formalisme de Lagrange.

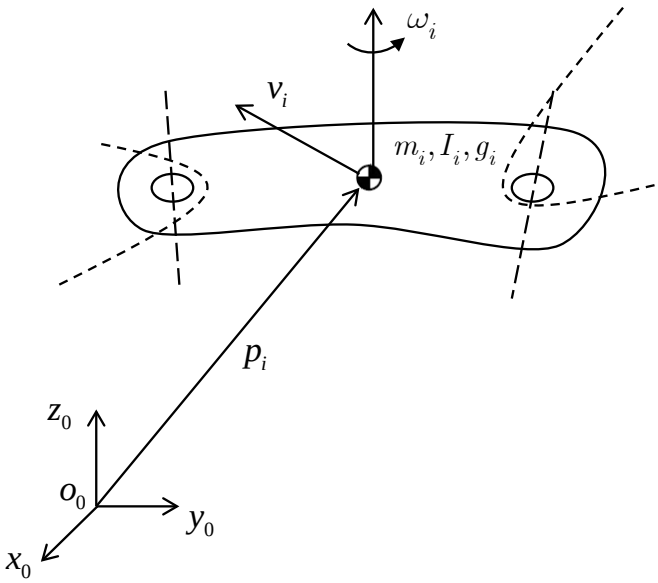


FIGURE 1.9: Desciption géométrique d'un corps i en vue d'un formalisme Lagrangien

- Tenseur d'inertie : Pour une rotation d'un corps rigide C_i par rapport à C_{i-1}, il est nécessaire de décrire sa distribution massique en mouvement rotatif. Ceci est caractérisé par son tenseur

d'inertie I_i :

$$I_i = \begin{pmatrix} I_i^{xx} & -I_i^{xy} & -I_i^{xz} \\ -I_i^{xy} & I_i^{yy} & -I_i^{yz} \\ -I_i^{xz} & -I_i^{yz} & I_i^{zz} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

I_i est une matrice symétrique qui représente le tenseur d'inertie situé au centre de masse g_i et exprimé dans le repère de base R_0. Néanmoins, I_i dépend de la configuration du robot manipulateur et de θ_i en s'exprimant dans R_0. Ce problème est résolu en projetant l'expression du tenseur dans le repère R_i. Soit ω_i la vitesse angulaire de rotation du corps i exprimé dans R_0, la vitesse angulaire de rotation exprimé dans le repère R_i s'écrit :

$$\omega_i^i = (A_i^0)^T \omega_i \tag{1.16}$$

où A_i^0 est la matrice de rotation de R_i par rapport à R_0. Le tenseur d'inertie I_i^i exprimé dans le repère R_i reste toujours constant. Par conséquent, on peut facilement vérifier que :

$$I_i = A_i^0 I_i^i (A_i^0)^T \tag{1.17}$$

5.3.1 Expression de l'énergie cinétique

Considérons le robot Stäubli RX170B à 6 ddl, l'énergie cinétique totale est donnée par la somme de chaque contribution relative au corps qui le composent. L'énergie cinétique pour un corps i se décompose en deux parties : une énergie cinétique due à la rotation et une énergie cinétique de translation. L'énergie cinétique pour un corps i est donnée par :

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T A_i^0 I_i^i A_0^i \omega_i \tag{1.18}$$

Sachant que le modèle cinématique direct permet d'exprimer la vitesse du TCP en fonction des positions des bras, la notion de la Jacobienne sera aussi utilisée pour calculer les vitesses des corps intermédiaires. Pour exprimer l'énergie cinétique en fonction des coordonnées généralisées, on procède au calcul du v_i et ω_i en fonction de θ_i. Ils peuvent être calculés à travers une jacobienne locale relative au corps i et notée $J_i^{(i)}$.
$J_i^{(i)}$ se décompose en deux parties : une Jacobienne de translation $J_{p_i}^{(i)}$ et une Jacobienne de rotation $J_{O_i}^{(i)}$ exprimées dans le repère R_i.

$$v_i = J_{p_1}^{(i)} \theta_1 + \ldots + J_{p_i}^{(i)} \theta_i = J_p^{(i)} \theta \tag{1.19}$$

$$\omega_i = J_{O_i}^{(i)} \theta_1 + \ldots + J_{O_i}^{(i)} \theta_i = J_O^{(i)} \theta \tag{1.20}$$

où,

$$J_p^{(i)} = \begin{pmatrix} J_{p_1}^{(i)} \ldots J_{p_6}^{(i)} & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

$$J_O^{(i)} = \begin{pmatrix} J_{O_1}^{(i)} \ldots J_{O_i}^{(i)} & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

De l'autre coté, $J_{p_j}^{(i)}$ et $J_{O_j}^{(i)}$ s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} J_{p_j}^{(i)} = z_{j-1} \wedge (p_i - p_{j-1}) \\ J_{O_j}^{(i)} = z_{j-1} \end{cases} \tag{1.23}$$

avec, p_{j-1} le vecteur position de l'origine du repère R_{j-1} et z_{j-1} un vecteur unitaire porté sur l'axe de rotation de l'articulation $(j-1)$ exprimé dans R_0. L'énergie cinétique d'un bras i s'exprime alors :

$$E_{c_i} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T J_p^{(i)^T} J_p^{(i)} \dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T J_O^{(i)^T} A_i^0 I_i^i (A_i^0)^T J_O^{(i)^T} \dot{\theta} \tag{1.24}$$

L'énergie cinétique totale des bras s'exprime sous la forme quadratique suivante :

$$E_{c_b} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{b_{ij}}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T B_b(\theta)\dot{\theta} \tag{1.25}$$

5.3.2 Prise en compte des inerties de la chaîne d'actionnement

L'énergie cinétique des actionneurs est calculée de la même façon que celle des bras du manipulateur. Nous présentons par la suite les hypothèses adaptées à la modélisation des actionneurs :

Hypothèse 5.3.1. *Les parties tournantes des actionneurs sont considérées comme des corps uniformes ayant leurs centres de masses sur l'axe de rotation et n'ont pas d'excentricité. Ceci permet de déduire que l'énergie cinétique du rotor est dû uniquement à sa propre rotation par rapport à un référentiel inertiel.*

Hypothèse 5.3.2. *L'actionneur i est monté en amont par rapport au corps i à actionner. Il est placé sur le bras $i-1$.*

Nous insistons sur la pertinence de l'hypothèse 5.3.1 au niveau de la géométrie des rotors. Cette hypothèse entraînera la symétrie du tenseur d'inertie du rotor par rapport à ses axes principaux de rotation. Ceci engendre aussi, l'indépendance de l'énergie potentielle de gravité ainsi que vitesse du centre de masse des parties tournantes, de la position interne du rotor. En se référant à l'hypothèse 5.3.2, l'énergie cinétique peut être exprimée comme suit :

$$E_{c_{m_i}} = \frac{1}{2}m_{m_i}v_{m_i}^T v_{m_i} + \frac{1}{2}\omega_{m_i}^T I_{m_i}\omega_{m_i} \tag{1.26}$$

avec, m_{m_i} la masse du rotor, v_{m_i} représente la vitesse linéaire du centre de masse du rotor, I_{m_i} est le tenseur d'inertie du rotor relative à son centre de masse et ω_{m_i} caractérise la vitesse angulaire du rotor. Si θ_{m_i} désigne la position angulaire du rotor, alors sous l'hypothèse de la rigidité de la transmission on a : $N_i\ \theta_i = \theta_{m_i}$ où N_i est le rapport de réduction de l'articulation i. Se basant sur la règle de composition de vitesse, la vitesse angulaire du rotor s'écrit ainsi :

$$\omega_{m_i} = \omega_{i-1} + N_i\dot{\theta}_i z_{m_i} \tag{1.27}$$

avec ω_{i-1} la vitesse angulaire du bras $i-1$ où le moteur est localisé et z_{m_i} désigne le vecteur unitaire le long de l'axe du rotor. Afin d'exprimer l'énergie cinétique du rotor en fonction des

variables articulaires, le calcul sera identique à (1.19),(1.20) :

$$\dot{p}_{m_i} = J_p^{(m_i)}\dot{\theta} \tag{1.28}$$

$$\omega_{m_i} = J_O^{(m_i)}\dot{\theta} \tag{1.29}$$

La Jacobienne de position et d'orientation du moteur s'expriment alors comme suit :

$$J_p^{(m_i)} = \begin{pmatrix} J_{p_1}^{(m_i)} \dots J_{p_{i-1}}^{(m_i)} & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

$$J_O^{(m_i)} = \begin{pmatrix} J_{O_1}^{(m_i)} \dots J_{O_{i-1}}^{(m_i)} J_{O_i}^{(m_i)} & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

où leurs vecteurs colonnes sont respectivement données par :

$$\begin{cases} J_{p_j}^{(m_i)} = z_{j-1} \wedge (p_{m_i} - p_{j-1}) \\ J_{O_j}^{(m_i)} = \begin{cases} J_{O_j}^{(i)}, & j = 1, ..., i-1 \\ N_{r_i} z_{m_i}, & j = i \end{cases} \end{cases} \tag{1.32}$$

avec, p_{m_i} le vecteur position du rotor i. Par conséquent, l'énergie cinétique totale des actionneurs est la suivante :

$$E_{c_{m_i}} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\theta}^T J_p^{(m_i)^T} J_p^{(m_i)} \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T J_O^{(m_i)^T} A_{m_i}^0 I_{m_i}^{m_i} (A_{m_i}^0)^T J_O^{(m_i)} \dot{\theta} \tag{1.33}$$

Dans le cas où le rotor possède une distribution massique symétrique par rapport à son axe de rotation (5.3.1), le tenseur d'inertie associé (exprimé dans le repère R_{m_i}) admet alors comme origine son centre de masse et un axe de rotation z_{m_i} qui est alignée avec z_i . Il est défini de la manière suivante :

$$I_{m_i}^{(m_i)} = \begin{pmatrix} I_{m_i}^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_i}^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_i}^{zz} \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

avec, $I_{m_i}^{xx} = I_{m_i}^{yy}$. En conséquence, $I_{m_i}^{(m_i)}$ reste toujours invariant à n'importe quelle rotation par rapport à z_{m_i} et le restera toujours en se référant à un repère attaché au bras $i-1$. Enfin, en

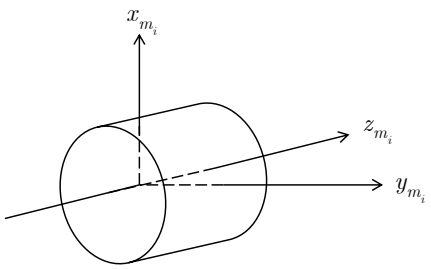


FIGURE 1.10: Caractérisation d'un rotor

additionnant les diverses contributions relatives à un bras du robot (1.24) sollicité en rotation par les actionneurs (1.33), l'énergie cinétique totale du manipulateur est donnée sous la forme

quadratique :

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T B(\theta)\dot{\theta} \tag{1.35}$$

avec $B(\theta)$ est la matrice d'inertie $(n \times n)$ qui est symétrique, définie et positive et dépendant de la configuration.

$$B(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(m_i J_p^{(i)^T} J_p^{(i)} + J_O^{(i)^T} A_i^0 I_i^{(i)} (A_i^0)^T J_O^{(i)} + m_{m_i} J_p^{(m_i)^T} J_p^{(m_i)} + J_O^{(m_i)^T} A_{m_i}^0 I_{m_i}^{m_i} (A_{m_i}^0)^T J_O^{(m_i)} \tag{1.36}$$

5.3.3 Expression de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle stockée dans le manipulateur est la somme des énergies potentielles dues aux bras du manipulateur robotique E_{p_i} ainsi que ses actionneurs $E_{p_{m_i}}$. Sous l'hypothèse de la rigidité des éléments, dans un premier temps, l'énergie potentielle des parties tournantes s'écrit :

$$E_p = \sum_{i=1}^{n}(E_{p_i} + E_{p_{m_i}}) \tag{1.37}$$

où sa contribution est due uniquement à l'action des forces de gravité avec $g_0 = (0 \quad 0 \quad -g)^T$.

$$E_p = -\sum_{i=1}^{n}(m_i g_0^T p_i + m_{m_i} g_0^T p_{m_i}) \tag{1.38}$$

5.3.4 Génération des équations du mouvement

En se référant au calcul des énergies cinétiques et potentielles des différentes parties tout en appliquant le Lagrangien (1.13) au robot manipulateur, le modèle dynamique s'écrit sous la forme suivante :

$$B(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \tag{1.39}$$

où, $C(\theta,\dot{\theta})$ est une matrice $(n \times n)$ représentant l'action des forces de Coriolis et centrifuges et $G(\theta)$ désigne l'action de la pesanteur agissant sur le robot.

5.3.5 Calcul des éléments de C et G du modèle dynamique

On peut calculer les éléments de C d'éléments génériques c_{ij}, à partir du symbole de christoffel :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_k \tag{1.40}$$

où les coefficients sont :

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial \theta_i}\right) \tag{1.41}$$

b_{ij} sont les éléments de $B(\theta)$. Notons que vue la symétrie de la matrice d'inertie B, on a $c_{ijk} = c_{ikj}$

Le couple de gravité $G(\theta)$ est déduit par simple dérivation de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ par

rapport au variables articulaires θ :

$$G_i(\theta) = \frac{\partial E_p}{\partial \theta_i} \tag{1.42}$$

5.4 Modélisation dynamique flexible

Considérons la représentation décrite dans la section 5.3, le robot démonstrateur sera modélisé à travers une description dynamique flexible comme illustré dans la figure 1.11.

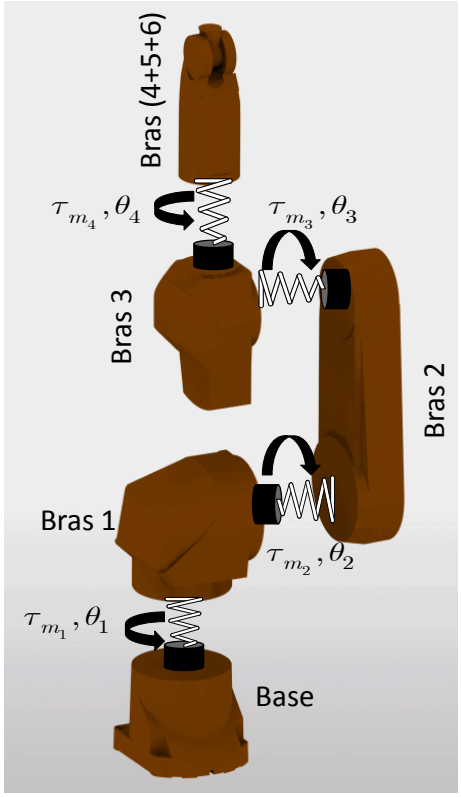


FIGURE 1.11: Modèle dynamique flexible du Stäubli RX170B : application au 4 premiers axes

5.4.1 Hypothèses de modélisation

La chaîne cinématique du robot est composée de $n+1$ corps rigides inter-connectés par n articulations rotoïdes qui subissent des déformations élastiques. Le bras $i+1$ du manipulateur est actionné par un servo-moteur i localisé de façon standard au niveau du bras i. Les réducteurs sont modélisés comme étant placés avant la souplesse articulaire. Ainsi, les hypothèses générales suivantes seront la base du développement du modèle élasto-dynamique :

Hypothèse 5.4.1. *La déformation articulaire étant de faible amplitude, de ce fait les effets de la flexibilité seront limités au domaine linéaire de l'élasticité. La souplesse articulaire est donc modélisée par une raideur linéaire de torsion sans frottement ;*

Cette hypothèse permet de conduire à la modélisation des robots flexibles de la même manière que pour les robots rigides par la méthode de *Lagrange* (1.13). Les $n+1$ bras rigides sont inter-connectés à travers n articulations flexibles composées d'un réducteur. Soient θ_m la position angulaire du moteur, $\theta_n = \frac{\theta_m}{N}$, θ la position angulaire du bras, K la raideur équivalente

de l'axe et D son amortissement, l'architecture d'un axe du robot est présentée dans la figure 1.12. J_m et J_b désignent respectivement le moment d'inertie du rotor et du bras. La présence

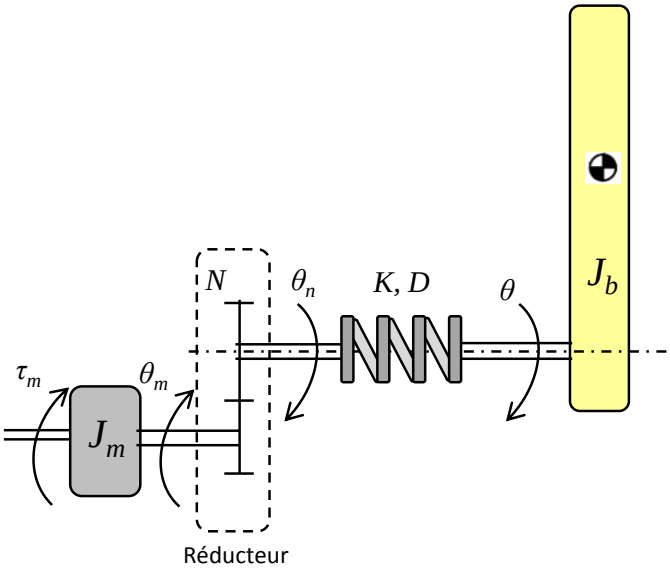


FIGURE 1.12: Modèle flexible d'un axe du robot

d'une élasticité articulaire au niveau de la chaîne de transmission engendre l'augmentation du nombre de degrés de libertés d'un robot manipulateur. Ainsi, le système admet $2 \times n$ ddl. Dans ce qui suit, nous présentons le modèle dynamique associé à un manipulateur composé d'un ensemble de corps rigides couplés *via* des articulations souples.

5.4.2 Énergie cinétique du modèle dynamique flexible

L'énergie cinétique du modèle flexible globale est la somme d'une énergie cinétique relative aux bras rigides donnée par (1.24) et d'énergie cinétique associée au mouvement des moteurs. En partant de la relation (1.27) et en se basant sur la Jacobienne qui relie la vitesse angulaire de rotation à la position du bras, avec la présence d'une souplesse articulaire k au niveau de la chaîne de transmission, la nouvelle expression de la vitesse angulaire de rotation s'écrit :

$$\omega_{m_i} = \sum_{j=1}^{i-1} J_{O_j}^{(m_i)} \dot{\theta}_j + \dot{\theta}_{m_i} z_{m_i}. \tag{1.43}$$

En remplaçant (1.43) dans (1.33), on montre que l'énergie cinétique des rotors s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{c_m} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \Big(M_m(\theta) + S(\theta) J^{-1} S^T(\theta) \Big) \dot{\theta} + \dot{\theta}^T S(\theta) \dot{\theta}_n + \frac{1}{2} \dot{\theta}_n^T B \dot{\theta}_n, \tag{1.44}$$

où, J est une matrice d'inertie diagonale et constante contenant les composantes inertielles des rotors $I_{m_i}^{zz}$. $M_m(\theta)$ contient les masses des rotors ainsi que les autres composantes du tenseur d'inertie selon les autres axes principaux de rotation. $S(\theta)$ est une matrice triangulaire supérieure qui exprime le couplage inertiel entre les rotors et les bras en amant de la structure robotique

(hypothèse 5.3.2). Ainsi, l'énergie cinétique totale du modèle flexible est :

$$E_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\theta}^T & \dot{\theta}_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M(\theta) & S(\theta)\\ S^T(\theta) & J\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}_n\end{pmatrix}, \tag{1.45}$$

avec

$$M(\theta) = B_b(\theta) + M_m(\theta) + S(\theta)J^{-1}S^T(\theta). \tag{1.46}$$

5.4.3 Énergie potentielle du modèle dynamique flexible

L'énergie potentielle d'une structure flexible E_{p_f} est le résultat de l'action de la force de pesanteur ainsi de la déformation élastique articulaire. L'énergie potentielle de gravité est donnée par (1.38)

$$E_{p_f} = E_p(\theta) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_n)^T K(\theta - \theta_n). \tag{1.47}$$

En utilisant le formalisme Lagrangien pour générer les équations du mouvement relatives à une structure flexible (1.14), le modèle dynamique complet est donné par :

$$\begin{pmatrix}M(\theta) & S(\theta)\\ S^T(\theta) & J\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\theta}_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c(\theta,\dot{\theta}) + c_1(\theta,\dot{\theta},\dot{\theta}_{in})\\ c_2(\theta,\dot{\theta})\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}G(\theta) + K(\theta - \theta_n)\\ K(\theta_n - \theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \tau\end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

où c, c_1 et c_2 sont les termes de Coriolis et centrifuges. La contribution de l'énergie potentielle est décomposée en deux parties. En particulier, $G(\theta) = (\frac{\partial E_p(\theta)}{\partial \theta})^T$, cependant $\tau_j = K(\theta_n - \theta)$ est le couple élastique transmis à travers l'articulation.

5.5 Éléments de transmission non linéaire

Les caractéristiques non linéaires de la transmission du mouvement au niveau de l'étage de réduction des articulations peuvent engendrer des impacts majeurs sur le comportement statique et dynamique du robot industriel. Globalement, les robots manipulateurs sont soumis à la force de frottement qui se manifeste à chaque point où deux surfaces en mouvement relatif entrent en contact. Ceci se traduit par la génération d'un frottement sec. De nombreux facteurs, tels que la rugosité de la surface et sa topologie, la viscosité du lubrifiant, la charge locale appliquée, la température interne ainsi que la vitesse de mouvement, influencent l'amplitude des forces de frottement issues du mouvement des surfaces en contact comme illustré dans la figure 1.13. Elle montre aussi que le contact n'apparaît plus exactement de la même façon lorsqu'il y a mouvement en présence de lubrification. Sous l'effet de la vitesse, cette lubrification soulève les surfaces et évite ainsi les contacts points à points. En 1866, Reynolds a introduit la viscosité des fluides dans les modèles de frottement [Reynolds, 1903]. La prise en compte des frottements secs et lubrifiés a donnée naissance au modèle le plus utilisé en ingénierie : le modèle de 'Coulomb-statique-visqueux'. Dans [Stribeck, 1903], il est montré que le coefficient de frottement mixte décroît dans un premier temps lorsque la vitesse de déplacement augmente jusqu'à atteindre un minimum pour ensuite croître en fonction de la vitesse. Cette force dépendante de la vitesse de déplacement est caractérisée par la courbe de Stribeck. La figure (1.14) montre les différents types de frottements dominants en fonction de la vitesse de déplacement des solides.

– **Régime 1** : la force appliquée n'est pas assez élevée pour engendrer un déplacement, il

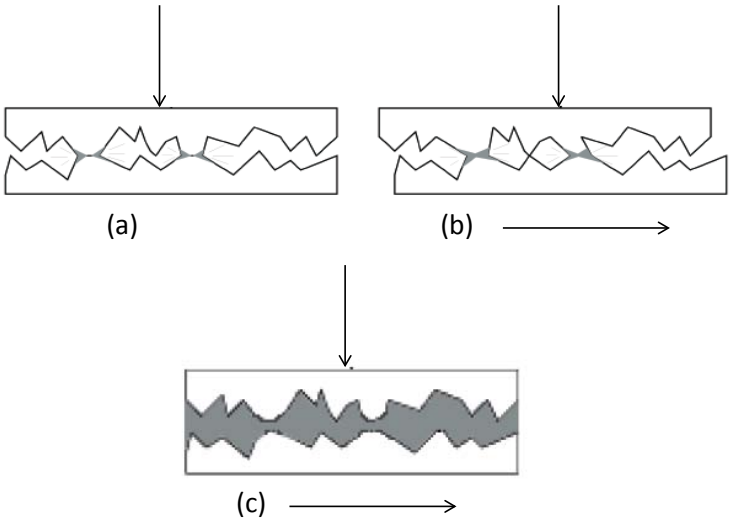


FIGURE 1.13: Déformation des contacts entre deux solides en mouvement (a) et (b) et effet de la lubrification sur leur déplacement (c), [Thiery, 2005]

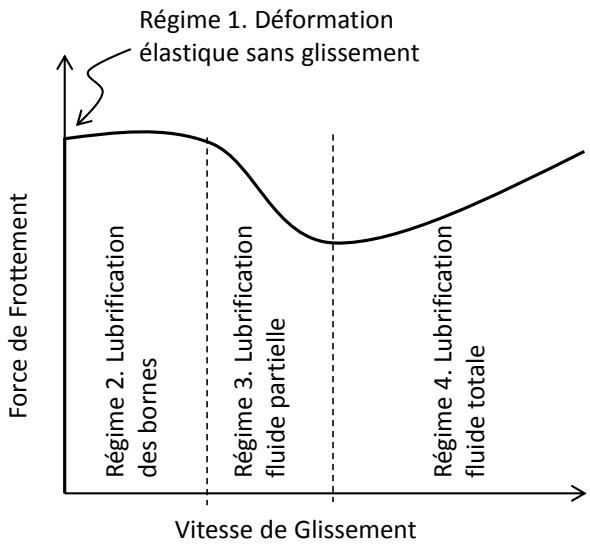


FIGURE 1.14: Courbe généralisée de Stribeck

n'y a que des déformations plastiques ;

- **Régime 2** : la vitesse n'est pas assez élevée pour que la lubrification permette le 'soulèvement' suffisant des surfaces en contact. Les frottements secs sont alors dominants et ainsi les micro-rugosités sont source de frottement ;
- **Régime 3** : A partir d'une certaine valeur, les surfaces commencent à se soulever, ce qui provoque la diminution de la force de frottement. Celle-ci arrive à un minimum avant de croître à nouveau. La vitesse augmentent, la lubrification joue le rôle d'un frein ;
- **Régime 4** : Au delà du minimum, la force de frottement est de type visqueuse et elle est proportionnelle à la vitesse de déplacement. Le point d'inflexion minimum correspond à la vitesse optimum pour la lubrification appliquée.

Les frottements non compensés provoquent en effet des erreurs de positionnement du TCP, des retards et des cycles limites. Il existe de nombreux articles qui traitent la modélisation des frottements et montrent principalement deux groupes de modèles [Dahl], [Armstrong-Helouvry

et al., 1994] et [Canudas de Wit et al., 1995] ;

- **Les modèles statiques de frottement** à trois composantes, autrement dit le frottement mixte, à savoir le frottement visqueux, Coulomb et statique qui ne dépendent que de la vitesse articulaire. Ce type de modèle décrit la relation stationnaire vitesse-couple, alors qu'en réalité des phénomènes dynamiques existent ;
- **Les modèles dynamiques de frottement** qui sont plus complexes à étudier et sont fonctions de la vitesse, de la position et/ou du temps. Citons par exemple le modèle de Lund-Grenoble (LuGre) détaillé dans [Canudas de Wit et al., 1995] et révisé dans les travaux de [Astrom and Canudas-de Wit, 2008] ainsi que le modèle de Dahl [Olsson et al., 1998] et le modèle de Bliman et Sorine [Bliman and Sorine, 1991].

Sans pertes de généralités, la modélisation du couple de frottement sera détaillée et développée dans la section § 4 du chapitre 3. En outre, à partir d'observations expérimentales nous déduisons un graphe de transfert vitesse-couple. A l'issue de cette analyse, nous introduisons l'estimation des forces de frottement sec en zone de pré-glissement (régime 1 et 2) et nous proposons dans un second temps un modèle statique de Stribeck pour décrire le phénomène de frottement détaillé en régime 3 et 4.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des méthodes de modélisation des robots manipulateurs. Une modélisation dynamique classique au sens des modèles rigides couramment utilisée a été introduite. Nous avons ensuite présenté les modèles élasto-dynamiques basés sur la présence d'une souplesse articulaire dominante. Ces différents modèles nous permettront de développer un modèle comportemental d'axe dans le chapitre 3. Le chapitre suivant se propose de présenter des techniques d'identification destinées à l'estimation des différents paramètres des modèles précédemment présentés.

Chapitre 2

Identification de systèmes. Application aux robots manipulateurs

Sommaire

1 Introduction **35**
1.1 Procédure d'estimation des systèmes 36
1.2 Structures des modèles physiques 37
2 Méthodes d'identification pour les modèles temporels **38**
2.1 Prédiction paramétrique par les approches asymptotiques 39
2.2 Prédiction paramétrique par les approches non-asymptotique 44
3 Estimation algébrique de la fréquence **48**
3.1 Méthode d'estimation de la fréquence 48
3.2 Analyse statistique de l'estimateur 50
3.3 Estimation à fenêtre glissante 53
4 Etude détaillée de l'estimation paramétrique d'un système mécanique souple **59**
4.1 Cadre d'étude et motivation 59
4.2 Positionnement du problème 61
4.3 Estimation par le filtre de Kalman-Bucy 62
4.4 Estimation par la technique algébrique 66
5 Simulations et analyse **66**
5.1 Etude comparative et analyse des performances 67
5.2 Motivation dans le choix de la méthode d'identification 70
5.3 Détection non asymptotique de la variation paramétrique 70
6 Conclusion **76**

1 Introduction

L'identification consiste à déterminer les caractéristiques dynamiques d'un système dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en oeuvre d'une régulation performante [Landau, 1993]. Ainsi, un *modèle* est une représentation d'un système physique qui a pour but de reproduire partiellement ou totalement son comportement. Le choix ou la conception d'un modèle est donc lié à la fois à la nature et au comportement du système étudié

mais aussi aux tâches spécifiques pour lesquelles il est étudié. Pour modéliser un système physique, il peut être envisagé des approches empiriques (basées sur les données mesurées du processus) et/ou des approches théoriques basées sur la connaissance des lois qui gouvernent le processus.

1.1 Procédure d'estimation des systèmes

La procédure d'identification consiste à trouver un modèle décrivant la relation entre l'entrée et la sortie respectant certains critères. La recherche de ce modèle est effectuée à partir d'un ensemble de modèles candidats. Expérimentalement, l'identification comporte plusieurs étapes :

1. Conception d'un protocole d'expérimentation et choix du type d'entrées ;
2. acquisition des entrées/sorties du processus ;
3. choix d'une structure du modèle pour représenter le système ;
4. Estimation des paramètres du modèle dont on détermine le "meilleur" modèle dans un ensemble guidé par les données ;
5. Validation du modèle identifié.

Pour chaque étape citée précédemment, il existe plusieurs options qui ne seront pas décrites ici. Certaines options particulières en corrélation avec notre problème étudié seront soulignées. Pour un traitement détaillé, le lecteur est renvoyé, par exemple, à [Landau, 1993], [Söderstrom and Stoica, 1989], [Pintelon and Schoukens, 2001] et [Ljung, 1999]. La conception d'un protocole expérimental et la collecte effective de données mesurées seront traitées dans le chapitre 3. Les 3 dernières étapes sont introduites dans les section suivantes.

la procédure d'identification peut être effectuée en boucle ouverte ou en boucle fermée. Un système qui n'est pas soumis à un contrôle de rétroaction, c'est-à-dire un système en boucle ouverte, est représenté par la figure 2.1. Ce système dispose d'une entrée $u(t)$, d'une sortie $y(t)$ et une perturbation $v(t)$. La perturbation peut inclure le bruit de mesure ainsi que des entrées externes du système, non comprises dans $u(t)$. Un système soumis à un contrôle de rétroaction, à savoir un système en boucle fermée, est représenté par la figure 2.2. Une des raisons qui permet d'opter une procédure d'identification en boucle fermée, pourrait être que le système initial soit instable et qu'il doit être commandé afin de rester stable. De plus, plusieurs processus ne sont pas facilement démontable où on ne peut pas isoler ou démonter le processus. Ceci est typiquement le cas pour un robot manipulateur. D'autres raisons liées aux restrictions de sécurité ou de production ne permettent pas des expérimentations en boucle ouverte. Généralement,

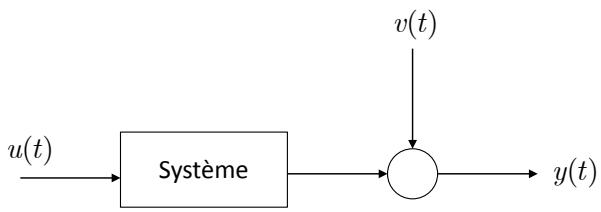


FIGURE 2.1: Système en boucle ouverte

on trouve deux catégories de modèles : les modèles linéaires et non linéaires. Les systèmes

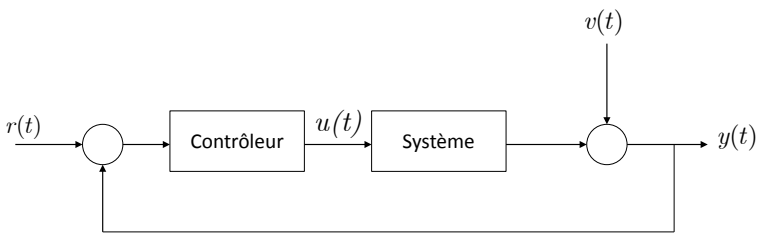


FIGURE 2.2: Système en boucle fermée

physiques sont généralement par nature non linéaire y compris les robots industriels étudiés dans cette thèse. Cependant, des approximations au sens de la stationnarité temporelle sur les paramètres sont souvent utilisées dans certaines régions de l'espace de fonctionnement [Enqvist, 2003].

1.2 Structures des modèles physiques

La procédure d'identification implique une recherche du meilleur modèle parmis un ensemble de modèles candidats. Le choix de ce modèle est l'étape la plus importante et la plus difficile dans la procédure d'identification. La bonne compréhension de la physique ainsi que la connaissance a priori du système sont souvent un moyen d'aide à la décision. Certaines options sont à considérer afin d'effectuer le choix d'une structure adaptée de modèle :

- Modèle linéaire ou non linéaire ;
- Modèle paramétrique ou modèle non paramétrique ;
- Modèle boîte noire ou modèle boîte grise ;
- Modèle continu ou modèle discret ;
- Modèle linéaire en les paramètres ou modèle non linéaire en les paramètres.

La plupart de ces choix peuvent être combinés, ce qui donne un large spectre de modèles possibles. Pour un choix bien déterminé, il existe un certain nombre de méthodes d'identifications paramétriques. Ces méthodes seront discutées dans les sections suivantes. Le travail présenté dans ce chapitre porte essentiellement sur l'identification paramétrique d'un modèle de type boîte noire ou boîte grise préalablement établi.

Considérons un système en temps continu disposant d'une entrée $u(t)$ et d'une sortie $y(t)$. Le modèle est dit linéaire et invariant dans temps si son comportement dans le temps, peut être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. En outre, le système est causal si sa sortie dépend uniquement de l'entrée jusqu'à l'instant actuel t et non du futur. On distingue deux approches principales pour l'identification des systèmes à temps continu : l'approche directe et l'approche indirecte [Mensler, 1999] et [Rao and Unbehauen, 2006]. Ces deux approches utilisent les données d'entrées/sorties échantillonnées *via* les moyens de mesures installés sur le processus. L'approche indirecte consiste en une identification en temps discret. Une fois réalisée, elle sera suivie d'une étape de retour en temps continu pour déterminer le modèle estimé final. L'approche directe consiste à identifier le modèle continu à partir des données échantillonnées en passant par le calcul intermédiaire des dérivées successives des signaux mesurés. Bien que l'identification par l'approche indirecte (identification discrète) ait connu un grand succès [Ksouri and Borne, 1999], [Abdennour et al., 2001], l'approche directe,

basée sur la modélisation et l'estimation dans un cadre continu, présente un avantage décisif [Garnier and Wang, 2008]. Nous présentons quelques points utiles pour décrire brièvement ses propriétés avantageuses [Ibn Taarit, 2010] :

P1. Pertes de signification physique des paramètres du modèle : La modélisation des systèmes en temps continu est souvent couplée à un modèle de connaissance élaboré à partir de principes physiques continus dans le temps. Ce modèle est étroitement lié aux propriétés constitutives du système. C'est le cas par exemple des modèles mécaniques obtenus par des équations de Lagrange. Si la modélisation en temps continu conserve explicitement les paramètres, la discrétisation fait perdre cette connaissance . En effet, les coefficients après la discrétisation sont obtenus *via* des combinaisons non linéaires des paramètres continus et de la période d'échantillonnage ce qui génére la perte du caractère physique de l'équation de fonctionnement du système dans le cas d'un modèle linéaire et stationnaire dans le temps [Mensler, 1999].

P2. Sensibilité au choix de la période d'échantillonnage : Le choix de la période de discrétisation du système dans le cas d'une approche d'estimation indirecte, représente un facteur crucial. Par ailleurs, un mauvais choix de cette période en fonction des constantes du temps du système peut provoquer une instabilité de la représentation discrète. Une faible valeur de T_e induit un déplacement des pôles discrets vers la limite de la stabilité ($z = 1$ où $z = e^{sT_e}$) tandis qu'une valeur élevée, ignore la constante du temps. Dans ce cas, les dynamiques rapides ne seront pas prises en compte.

P3. La discrétisation peut rendre les modèles à temps continu à non minimum de phase : La discrétisation d'une représentation continue fait apparaître des zéros instables dans le modèle discret correspondant et peut produire un phénomène gênant de non minimum de phase. Une discussion plus détaillée est disponible dans [Rao and Unbehauen, 2006].

P5. Type d'entrée d'excitation du système physique : La conception/choix de l'entrée est un enjeu fondamental dans la procédure de prédiction de modèle. Pour l'estimation des systèmes continus, l'entrée échelon constitue une entrée classique. Elle est très utilisée dans la pratique. Bien qu'elle soit satisfaisante pour l'estimation continue, cette entrée pose des problèmes pour l'identification d'un modèle discret. En effet, l'utilisation d'un signal constant pour l'identification d'un modèle échantillonné permet la convergence vers zéro de l'erreur de prédiction sans pour autant que les paramètres estimés convergent vers les "vrais" paramètres du modèle. Ce problème provient du faible degré de persistance de l'échelon pour une estimation d'un modèle discret [Landaun and Besançon-Voda, 2001]. L'utilisation d'un bloqueur d'ordre zéro entre deux périodes successives d'échantillonnage peut conduire aussi à des erreurs d'estimation [Schoukens et al., 1994].

2 Méthodes d'identification pour les modèles temporels

Supposons maintenant que la structure du modèle soit sélectionnée conformément à la section précédente. Selon le choix de la structure du modèle, un certain nombre de méthodes existent. Il faut alors distinguer entre les méthodes conduisant à un modèle en temps continu/discret. Cette section aborde la classification des méthodes d'identification des systèmes linéaires décrit par les modèles à temps continu. Dans un premier temps, nous rappelons les

concepts classiques des techniques d'estimation existantes utilisées dans le domaine de l'identification paramétrique. Ensuite, nous présentons les techniques algébriques d'estimation rapide qui seront utilisées par la suite. Une fois que la structure du modèle est définie, la détermination des paramètres qui en résulte dépend alors de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur appelée aussi critère. Ces critères représentent entre autre les marges de confiance à attribuer aux paramètres. Si N désigne le nombre d'observations ou le nombre d'échantillons mesurés et p le nombre de paramètres du modèle sélectionné, trois critères sont susceptibles d'être évalués lors d'une procédure d'identification paramétrique [Mensler, 1999] :
• l'erreur d'estimation quadratique :

$$\epsilon(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(y_{mesurée}(k) - y_{simulée}(k)\Big)^2, \tag{2.1}$$

• l'écart entre le "vrai" paramètre θ et son estimé $\hat{\theta}$:

$$écart(\%) = 100\frac{\Big|\theta - E(\hat{\theta})\Big|}{|\theta|}. \tag{2.2}$$

• l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur :

$$EQM = E\Big((\theta - \hat{\theta})^2\Big) = Var((\hat{\theta})) + (biais(\hat{\theta}))^2, \tag{2.3}$$

où $Var((\hat{\theta}))$ est la variance du paramètre identifié, $E(\hat{\theta})$ désigne son espérance sur un horizon de longueur N. Le biais est égale à $\Big(\theta - E(\hat{\theta})\Big)$. Afin de réduire le biais d'estimation du modèle, une solution consiste à minimiser un des critères cités précédemment. Cependant une solution analytique minimisant un critère adopté n'est pas toujours garantie. De ce fait, on fait appel à des méthodes d'optimisation [Landaun and Besançon-Voda, 2001].

On distingue deux types d'algorithmes d'optimisation : les algorithmes récursifs et les algorithmes non récursifs. En ce qui concerne les algorithmes non récursifs, ils sont considérés comme des algorithmes hors ligne puisqu'ils ont besoin de la disponibilité de l'ensemble des données entrée-sortie sur tout l'intervalle N. En revanche, les algorithmes récursifs sont réputés pour leur utilisation en vue d'une estimation en ligne. Ils assurent une mise à jour progressive des paramètres estimés en se basant sur une paire de mesure d'entrée-sortie disponible à tout instant. Dans les deux cas, plusieurs techniques de minimisation d'erreur sont disponibles dans la littérature. On peut trouver les méthodes d'optimisation, les méthodes des moindres carrés et le filtre de Kalman Bucy. Bien qu'il existe d'autres techniques, elles sont relativement moins répandues.

2.1 Prédiction paramétrique par les approches asymptotiques

2.1.1 Algorithme d'optimisation paramétrique

L'idée générale de l'optimisation paramétrique consiste à déterminer un ensemble de paramètres qui optimisent un critère soumis à des contraintes comme évoqué dans le paragraphe précédent. Dans la suite, nous parlerons de minimisation d'une fonction coût. Les principales

méthodes d'optimisation peuvent être classées en trois catégories principales :

1. Les méthodes analytiques, qui déterminent l'optimum en fonction des caractéristiques de la fonction ;
2. Les méthodes stochastiques, qui intègrent une part de hasard ;
3. L'énumération, qui consiste à discrétiser l'espace engendré par le vecteur à optimiser et à calculer l'ensemble des possibilités.

La figure 2.3 présente les différentes classes et groupes d'algorithmes utilisés pour l'optimisation paramétriques. On distingue dans ce cas :

- **L'énumération :** Elle consiste à prendre un nombre fini de valeurs pour chaque paramètre et à calculer le critère associé pour l'ensemble des possibilités. Par exemple dans le cas de la détermination des valeurs exactes des paramètres inertiels d'un robot 6 axes à 13 paramètres par axe, il vient en utilisant 50 valeurs de test par paramètres qu'il est nécessaire d'examiner $50^{13\times 6}$ possibilités ! Cette solution n'est pas envisageable dans de telles applications.
- **Les algorithmes d'ordre n :** Fondés sur une décomposition à l'ordre n en séries de Taylor de la fonction à minimiser, ces algorithmes utilisent la dérivée d'ordre n pour la détermination de l'évolution de l'algorithme. Ils sont très rapides lorsque la fonction est continue, dérivable et convexe. Par contre, ils sont peu robustes si la fonction présente des minima locaux.
- **Les algorithmes d'ordre 0 :** Ces techniques n'utilisent que la valeur de la fonction en certains points. Ils sont lents mais robustes en cas de discontinuités de la fonction à optimiser.
- **Les algorithmes génétiques :** Ils utilisent plusieurs vecteurs de paramètres (une population) qui évoluent vers le minimum par la mise en oeuvre de trois opérations stochastiques, la sélection, le croisement et la mutation.
- **Les algorithmes de recuit simulé :** Ce sont des algorithmes capables de déterminer le minimum global d'une fonction. Par contre, le temps de calcul nécessaire à l'obtention du minimum peut être long.
- **Les stratégies d'évolution :** Elles sont fondées sur une évaluation itérative de la fonction à minimiser. La différence fondamentale entre les stratégies d'évolution et le "recuit simulé" est que la première méthode explore la fonction de façon locale alors que la deuxième peut explorer l'ensemble de l'espace.

Le critère de comparaison des différentes méthodes citées repose généralement sur trois éléments essentiels. On distingue la robustesse qui reflète l'aptitude de la méthode à converger vers un minimum global sans être perturbée par des minima locaux. A cela, s'ajoute la vitesse de convergence qui est mesurée en nombre d'itérations sur la fonction de coût le long du processus de convergence. Enfin, on trouve la globalité du minimum trouvé sans aucune connaissance a priori de la position du minimum global. On parle alors d'une initialisation aléatoire.

Nous reprendrons quelques comparaisons trouvées dans la littérature afin d'établir un classement des différentes méthodes par rapport aux trois méthodes à savoir la robustesse, la vitesse et la globalité du minimum. Le tableau 2.1 illustre les performances de quelques algorithmes d'optimisation les plus utilisés. Les notations sous forme de + et - permettent une

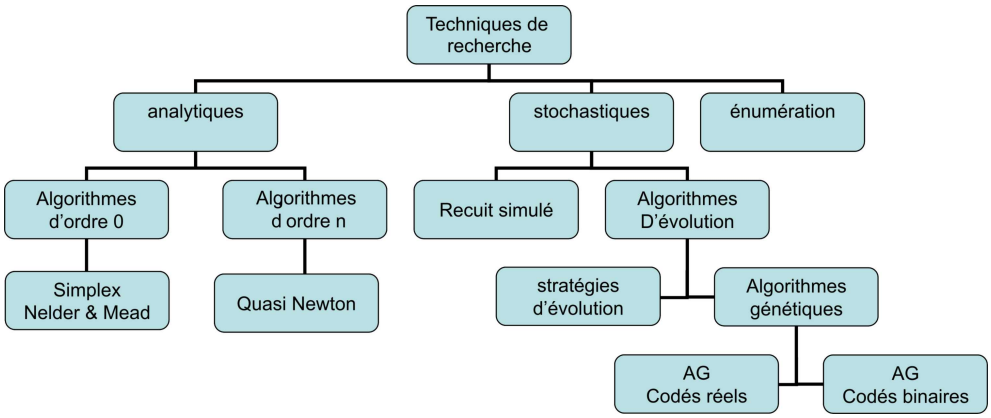


FIGURE 2.3: Classes d'algorithmes d'optimisation paramétrique

comparaison qualitative de quelques méthodes.

Type d'algorithme	Robustesse	Vitesse	Type de minimum
Ordre 0 : Simplex	-	+	local
Ordre 1 : Gradient	- - -	+ +	local
Algorithmes génétiques	+	- - -	global ++
Recuit simulé	++	- - -	global ++
Algorithmes d'évolution	+	- -	global -

TABLE 2.1: Comparaison qualitative des méthodes d'optimisation

2.1.2 Les méthodes des moindres carrés

Elles représentent les techniques d'estimation les plus répandues dans la littérature compte tenu de leur simplicité d'implémentation et leur utilisation dans les algorithmes de commande adaptative. Elles peuvent être récursives (moindres carrée récursif, moindres carrées étendus) [Ljung and Söderström, 1985] et [Ljung, 2002a] ; ou non récursives. Ainsi, pour un système linéaire à paramètre stationnaire, l'équation de régression s'écrit sous la forme suivante :

$$y(t) = \varphi^T \theta + \rho(t), \tag{2.4}$$

où φ^T est la matrice d'observation composée des mesures entrées-sorties du système et de leurs dérivées successives. $\rho(t)$ désigne le vecteur comportant les erreurs de prédiction et les bruits de mesures. La méthode des moindres carrés consiste à calculer la valeur des paramètres $\hat{\theta}$ qui minimisent à chaque instant t une fonction de coût quadratique $J(\hat{\theta})$. Elle s'exprime en :

– en temps continu :

$$J(\hat{\theta}(t)) = \int_0^t \left(y(\tau) - \varphi^T(\tau)\hat{\theta}(t)\right)^2 d\tau. \tag{2.5}$$

– en temps discret :

$$J(\hat{\theta}(t)) = \left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right)^2. \tag{2.6}$$

La fonction coût $J(\hat{\theta})$ est convexe en $\hat{\theta}$ à chaque instant t. Elle est minimisée en cherchant la valeur de $\hat{\theta}$ qui annule son gradient. Un optimum du critère quadratique est donné par

l'expression suivante :

$$\hat{\theta} = (\varphi\varphi^T)^{-1}\varphi^T y. \tag{2.7}$$

L'algorithme des moindres carrées n'est pas considéré comme temps réel puisqu'il nécessite une inversion matricielle après le stockage des mesures. L'application de la technique des moindres carrés ordinaires dans un contexte bruité engendre un biais d'estimation paramétrique. Ce biais est dû aux corrélations entre le regresseur et le bruit de mesure. Dans la littérature, on distingue deux classes de méthodes qui permettent de contourner ce problème [Landau, 1993] et [Borne et al., 1993] :

- Méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction. Cela se présente par exemple dans le cas des estimateurs de type moindres carrés récursifs (MCR), filtre de Kalman-Bucy, moindres carrés pondérés (MCP), erreur de sortie avec modèle de prédiction étendue (ESMPE) et maximum de vraisemblance récursif (MVR). Si $\varepsilon(t)$ désigne l'erreur de prédiction de la sortie du système, c'est-à-dire la différence entre $y(t)$ et $\hat{y}(t)$, cela implique :

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\varepsilon(t-1) = 0. \tag{2.8}$$

- Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction comme dans le cas des méthodes à variables expérimentales.

2.1.3 Les méthodes à variables instrumentales

Bien que les moindres carrés ordinaires comportent de nombreux avantages, ils possèdent aussi de nombreux inconvénients. En effet, ils ne donnent des estimations convergentes que si les aléas sont asymptotiquement orthogonaux aux régresseurs. Par conséquent, les méthodes à variables instrumentales ont pour rôle essentiel de diminuer le biais des paramètres estimés par la méthode des moindres carrés [Söderström and Mahata, 2002], [Linden et al., 2012]. Elles s'avèrent robustes dans le cas d'identification à partir de données bruitées. Le principe de la méthode des variables instrumentales consiste à modifier l'équation de régression linéaire (2.4) en multipliant chaque terme par un vecteur $z(t)$, dit vecteur instrumental. La régression linéaire devient alors :

$$z(t)y(t) = z(t)\varphi^T\theta + z(t)\rho(t). \tag{2.9}$$

Lorsqu'on choisit la matrice instrumentale, notée Z, telle que $Z\varphi^T$ soit inversible, une estimation du vecteur θ est obtenue comme suit :

$$\hat{\theta} = \left(Z\varphi^T\right)^{-1} Zy. \tag{2.10}$$

Cet estimateur sera non biaisé, si la propriété de décorrélation entre les variables instrumentales et l'erreur de prédiction est vérifiée.

2.1.4 Filtre de Kalman Bucy

Le filtre de Kalman Bucy [Kalman and Bucy, 1961], [Kalman et al., 1969] et [Ljung, 2002b] admet les mêmes équations récurrences que celles des moindres carrés récursifs [Ljung and Söderström, 1985] à la différence près de la prise en compte de la variance du bruit de mesure. Ici $\rho(t)$ est considéré comme un bruit de mesure pseudo-blanc gaussien de moyenne nulle, sans

corrélation entre les lots de mesure (2.4). Dans le cadre d'un filtre de Kalman discret, le vecteur des paramètres à estimer $\hat{\theta}$ est mis à jour au fur et à mesure que les données arrivent, d'où sa classification en tant qu'approche d'estimation en ligne. Une raison importante pour l'utilisation de méthodes d'adaptation et d'identification récursive réside dans le comportement du système étudié. Dans la pratique, certaines propriétés du système peuvent être variables dans le temps. Ainsi l'algorithme d'identification doit suivre ces variations. Ceci est géré au niveau du critère (2.11) en lui attribuant un poids, autrement dit un facteur d'oubli, qui a pour rôle de ne pas donner trop d'importance aux premières mesures qui ne sont plus représentatives pour le modèle au fil du temps. Cette partie sera discutée dans §4.3.

Pour simplifier les écritures, on considère uniquement les étapes k et $k-1$. L'objectif est de trouver une forme récursive qui permette de calculer pour chaque itération k :

$$\hat{\theta}_k = \left[(\varphi\varphi^T)\right]_k^{-1} \left[\varphi^T y\right]_k, \tag{2.11}$$

en utilisant l'information disponible à l'instant $k-1$, c'est-à-dire : $\hat{\theta}_{k-1} = \left[(\varphi\varphi^T)\right]_{k-1}^{-1} \left[\varphi^T y\right]_{k-1}$. Pour trouver d'une manière récursive les M paramètres : $\{\theta_0(k),\, \theta_1(k),\, \theta_{M-1}(k)\}$ satisfaisant l'égalité suivante :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \theta_k u_{n-k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.12}$$

où Φ_i est une matrice de mesure constituée des entrées u_i. Ainsi, nous procédons récursivement dans le but de minimiser la somme des erreurs quadratiques :

$$\epsilon(n) = \sum_{i=1}^{n} \beta(n,i) \left[e(i)^2\right] \quad = \sum_{i=1}^{n} \beta(n,i) \left[y(i) - \sum_{k=0}^{M-1} \theta_k(n) u(i-k)\right]^2, \tag{2.13}$$

où le facteur d'oubli $\beta(n,i)$ réduit la contribution des anciennes mesures comme suit

$$\begin{aligned} &0 < \beta(n,i) \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\beta(n,i) = \lambda^{n-i}, \quad 0 < \lambda \ll 1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Soient les nouvelles variables :

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} u(i) u(i)^T, \\ \psi(n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} u(i) y(i). \end{aligned} \tag{2.15}$$

L'équation (2.16) exprime les variables $\Phi(n)$ et $\psi(n)$ en fonction de $\Phi(n-1)$ et $\psi(n-1)$:

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} u(i) u(i)^T = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-1-i} u(i) u(i)^T + u(n) u(n)^T = \lambda \Phi(n-1) + u(n) u(n)^T, \\ \psi(n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} u(i) y(i) = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-1-i} u(i) y(i) + u(n) y(n) = \lambda \psi(n-1) + u(n) y(n). \end{aligned} \tag{2.16}$$

En appliquant le lemme d'inversion matricielle, [Rotella and Borne, 1995], à $\Phi(n) = \lambda\Phi(n-1) + u(n)u(n)^T$, nous obtenons :

$$\Phi(n)^{-1} = \lambda^{-1}\Phi^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-2}\Phi^{-1}(n-1)u(n)u(n)^T\Phi(n-1)^{-1}}{1+\lambda^{-1}u(n)^T\Phi(n-1)^{-1}u(n)}. \tag{2.17}$$

Soient $P(n) = \Phi(n)^{-1}$ et $K(n) = \dfrac{\lambda^{-1}P(n-1)u(n)}{1+\lambda^{-1}u(n)^TP(n-1)u(n)}$, alors il vient après calculs que

$$P(n) = \lambda(n)^{-1}P(n-1) - \lambda(n)^{-1}K(n)u(n)^TP(n-1). \tag{2.18}$$

Par conséquent, nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'équation de mise à jour des paramètres $\theta(n)$. Une nouvelle estimation est alors donnée par la récurrence suivante se basant sur le processus d'innovation (erreur a priori) :

$$\begin{aligned} \theta(n) &= \theta(n-1) + K(n)\alpha(n), \\ \alpha(n) &= y(n) - u(n)^T\theta(n-1). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Par conséquent, l'algorithme d'estimation est formé par le système d'équations ci dessous :

$$\begin{aligned} K(n) &= \frac{\lambda^{-1}P(n-1)u(n)}{1+\lambda^{-1}u(n)^TP(n-1)u(n)}, \\ \alpha(n) &= y(n) - u(n)^T\theta(n-1), \\ \theta(n) &= \theta(n-1) + K(n)\alpha(n), \\ P(n) &= \lambda^{-1}\left[P(n-1) - K(n)u(n)^TP(n-1)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 Prédiction paramétrique par les approches non-asymptotique

Nous détaillons ici les techniques algébriques d'estimation non asymptotique introduites par Fliess et Sira-Ramirez en 2003. Elles seront comparées à des techniques d'identification classiques. Les méthodes algébriques sont développées dans le projet Non-A d'INRIA [†]. C'est un outil d'estimation non-asymptotique permettant d'identifier les paramètres d'un modèle linéaire ou non linéaire. Cette approche est issue de la théorie de l'algèbre différentielle et du calcul opérationnel [Fliess, 1990], [Fliess et al., 1995]. On génère dans ce cas un filtre intégral linéaire permettant d'appliquer des intégrations successives sur l'équation différentielle du système étudié. Ceci produit un effet de filtrage intéressant dans le cas de mesures bruitées [Fliess, 2006]. Les détails et définitions de l'algèbre différentielle ne seront pas rappelés dans ce manuscrit. Ils sont largement exposés dans les articles cités précédemment. Contrairement aux méthodes d'estimation classiques (moindres carrés, méthode du gradient, variable instrumentale, etc..), ces estimateurs sont obtenus par des formules algébriques explicites aboutissant à une prédiction paramétrique en temps fini. Le développement de telles techniques a permis de traiter des problématiques dans le domaine de l'automatique. Nous citons quelques références à titre d'exemple :

- la commande sans modèle [Fliess and Join, 2009], [De Miras et al., 2012] ;
- la détection des retards [Belkoura et al., 2009], [Ibn Taarit et al., 2011] ;

†. Institut National de Recherche en Informatique et Automatique

- la différentiation numérique [Riachy et al., 2011], [Liu et al., 2011b] ;
- le diagnostique et la commande tolérante aux fautes [Fliess et al., 2004], [Moussa Ali et al., 2011] ;
- la détection de changement paramétrique brutal [Belkoura et al., 2010], [Tiganj et al., 2010].

Des applications pluridisciplinaires ont fait aussi l'objet de plusieurs contributions :

- la gestion de la loi de mouvement pour les structures mécaniques flexibles [Pereira et al., 2009], [Pereira et al., 2012] ;
- l'estimation de la posture humaine *via* l'utilisation d'accéléromètres, [Perruquetti et al., 2012] ;
- l'application à l'électronique de puissance [Gensior et al., 2008] ;
- la commande de véhicules [Villagra et al., 2009], [D'Andrea Novel et al., 2010] ;
- la transmission sécurisée [Sira-Ramirez and Fliess, 2006], [Zheng et al., 2008].

2.2.1 Structure générale d'un estimateur paramétrique algébrique et mise en oeuvre

Un système linéaire invariant dans le temps (LTI), s'écrit sous la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i \, u^{(i)}, \tag{2.21}$$

où $a_n = 1$, $m < n$, u et y désignent respectivement l'entrée et la sortie du modèle. La méthode algébrique opère dans le domaine opérationnel. Elle consiste à appliquer à (2.21) la transformée de *Laplace*. On obtient alors :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s^i Y(s) - s^{i-1} y_0 - \ldots - y_0^{i-1}\big) = \sum_{i=0}^{m} b_i \big(s^i U(s) - s^{i-1} u_0 - \ldots - u_0^{i-1}\big). \tag{2.22}$$

Grâce à la facilité de traitement qu'offre le domaine opérationnel, l'élimination des conditions initiales et des perturbations structurées est possible en dérivant l'expression précédente n fois par rapport à s. On rappelle la formule de Leibniz :

$$\frac{d^h(X(s)Y(s))}{ds^k} = \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}\big(X(s)\big)}{ds^{h-j}} \frac{d^j\big(Y(s)\big)}{ds^j} \tag{2.23}$$

et la relation :

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \dfrac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & si\ 0 < k < l, \\ 0, & si\ 0 < l < k, \\ \dfrac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & si\ l < 0 < k. \end{cases} \tag{2.24}$$

Il vient alors l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \binom{n}{j} \frac{i!\, s^{i+j-n}}{(i+j-n)!} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \binom{n}{j} \frac{i!\, s^{i+j-n}}{(i+j-n)!} \frac{d^j(u(s))}{ds^j} \right). \tag{2.25}$$

Ces manipulations donnent des termes multipliés par la variable opérationnelle s. Ceci consiste à une action de dérivation dans le domaine temporel. La dérivation par rapport à s dans le domaine opérationnel se traduit par une multiplication par $-t$ en temporel. En outre, la dérivation amplifie le bruit de mesure déjà contenu dans le signal. Une solution à ce problème consiste à rendre l'estimateur plus robuste en multipliant tous le membres de (2.25) par $s^{-\nu}$ où $\nu > i$. Pour chaque paramètre à identifier, nous multiplions alors ses deux membres par $s^{-(n+p)}$. Ceci rend l'estimateur final dépendant des signaux mesurés en utilisant uniquement l'opérateur intégral :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j}}{s^{2n+p-i-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} = \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j}}{s^{2n+p-i-j}} \frac{d^j(u(s))}{ds^j}. \tag{2.26}$$

Bien que l'estimateur algébrique soit traité dans domaine opérationnel, l'identification des paramètres est obtenue dans le domaine temporel. Pour cela, on utilise la formule de Cauchy suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^i}\frac{d^j\Gamma(s)\,(s)}{ds^n}\right) = \frac{(-1)^j}{(i-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{i-1}\,(\tau)^j\,\Gamma\,(\tau)\,d\tau. \tag{2.27}$$

La transformation inverse de Laplace de (2.26) donne

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j}\int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j y(\tau)d\tau}{(2n-i-j+p-1)!}\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j}\int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1}(-\tau)^j u(\tau)d\tau}{(2n-i-j+p-1)!}\right). \tag{2.28}$$

Dans le domaine temporel, les paramètres inconnus $\theta = (a_0 \ldots a_{n-1}\, b_0 \ldots b_m)$ sont alors linéairement identifiables *via* la résolution du système

$$\Delta P \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\theta} = \Delta Q + \Delta R \tag{2.29}$$

où

1. les entrées des matrices ΔP et ΔQ de dimension respectives $(n+m+1 \times n+m+1)$ et $(n+m+1 \times 1)$ appartiennent au sous espace engendré par les dérivées successives du couple (u, y) ;

2. le déterminant de la matrice ΔP est différent de zéro,

3. $\Delta R \in \mathbb{R}$ représente le vecteur des perturbations structurées.

Les estimations des paramètres inconnus $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_m$ de l'équation (2.21) sont données par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \\ \hat{b}_0 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{1a} & -\mathbb{F}_{1b} \\ \mathbb{F}_{2a} & -\mathbb{F}_{2b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\mathbb{F}_{n,1}[y(t)] \\ \vdots \\ -\mathbb{F}_{n,n}[y(t)] \\ -\mathbb{F}_{n,n+1}[y(t)] \\ \vdots \\ -\mathbb{F}_{n,n+m+1}[y(t)] \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

où

$$\mathbb{F}_{1a} = \begin{pmatrix} F_{0,1}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,n}[y(t)] \end{pmatrix}, \mathbb{F}_{1b} = \begin{pmatrix} F_{0,1}[u(t)] & \ldots & F_{m,1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n}[u(t)] & \ldots & F_{m,n}[u(t)] \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}_{2a} = \begin{pmatrix} F_{0,n+1}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,n+1}[y(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n+m+1}[y(t)] & \ldots & F_{n-1,n+m+1}[y(t)] \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}_{2b} = \begin{pmatrix} F_{0,n+1}[u(t)] & \ldots & F_{m,n+1}[u(t)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{0,n+m+1}[u(t)] & \ldots & F_{m,n+m+1}[u(t)] \end{pmatrix},$$

avec $F_{i,p}[f(t)] = \displaystyle\sum_{j=n-i}^{n} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{2n-i-j+p-1} (-\tau)^j f(\tau) d\tau}{(2n-i-j+p-1)!}$

et $c_{i,j} = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \dfrac{i!}{(i+j-n)!}$.

L'indice p désigne un paramètre inconnu de $\theta = (a_0 \ldots a_{n-1}\, b_0 \ldots b_m)$=$(\theta_1 \ldots \theta_p \ldots \theta_{m+n+1})$.

Le développement de cet algorithme dans le domaine opérationnel est explicite. Les opérations permettant d'obtenir cet estimateur ne sont pas uniques. De récents travaux [Ushirobira et al., 2012] tentent de systématiser cette procédure, en proposant une méthodologie pour trouver des annihilateurs minimaux admettant de bonnes propriétés dans le domaine temporel. Ainsi, l'avantage principal de cet algorithme réside dans l'estimation des paramètres sans connaissance préalable des conditions initiales. En effet, elles sont annihilées par les diverses manipulations algébriques dans le domaine opérationnel. Ces estimateurs présentent une convergence non asymptotique contrairement aux approches exposées dans la section §2. Les calculs peuvent être implémentés formellement et effectués de manière très rapide. Dans le paragraphe suivant, nous abordons l'estimation algébrique de la fréquence naturelle d'un système différentiel du second ordre. Cette étude permettra de donner des estimations exactes du paramètre considéré et d'analyser statistiquement la convergence de l'estimateur. Elle nous permettra ultérieurement d'estimer les fréquences propres relatives à l'axe souple d'un manipulateur.

3 Estimation algébrique de la fréquence

3.1 Méthode d'estimation de la fréquence

Considérons le système différentiel d'ordre 2 suivant

$$\begin{cases} x''(t) + 2\zeta\omega_0 x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x'_0, \end{cases} \tag{2.31}$$

où ζ est le taux d'amortissement du système et ω_0 sa pulsation naturelle. Nous supposons de plus que $(x_0, x'_0) \neq (0,0)$. La solution générale de ce système est alors donnée par

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\zeta\omega_0 t}\left(x_0 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + \dfrac{x'_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right) \text{ si } \zeta \in [0,1[, \\ e^{-\omega_0 t}\left(x_0 + t\left(x'_0 + \omega_0 x_0\right)\right) \text{ si } \zeta = 1, \\ e^{-\zeta\omega_0 t}\left(x_0 \cosh\left(\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}t\right) + \dfrac{x'_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}} \sinh\left(\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}t\right)\right) \text{ si } \zeta > 1. \end{cases} . \tag{2.32}$$

Dans la pratique, les systèmes mécaniques ou robotisés présentent un taux d'amortissement $\zeta \ll 1$.

Pour estimer ω_0, nous faisons dans un premier temps l'hypothèse que l'influence de ζ est négligeable. Par conséquent, nous supposerons cette valeur nulle pour définir notre estimateur. Nous souhaitons de plus que notre estimateur soit indépendant des conditions initiales.

Proposition 1. *Soient x une application continue de $[0,T] \to \mathbb{R}$ (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$) et $\theta_e : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$\theta_e(T) = -2\frac{\int_0^T \left(T^2 - 6\tau T + 6\tau^2\right) x(\tau)\, d\tau}{\int_0^T (T-\tau)^2 \tau^2 x(\tau)\, d\tau} \tag{2.33}$$

alors si x est solution de (2.31), il vient pour $0 < \zeta < 1$ que

$$\theta_e(T) = \begin{cases} \left(\omega_0^2 + 2\omega_0\zeta\dfrac{x'_0}{x_0}\right) - \omega_0\zeta\left(\omega_0^2 + \left(\dfrac{x'_0}{x_0}\right)^2 + 2\omega_0\zeta\dfrac{x'_0}{x_0}\right)T + \mathcal{O}\left(T^2\right) \text{ si } x_0 \neq 0, \\ \left(\omega_0^2 - \dfrac{12}{7}\omega_0^2\zeta^2\right) + 4\dfrac{\omega_0\zeta}{T} + \dfrac{1}{147}\omega_0^3\zeta\left(52\zeta^2 - 49\right)T + \mathcal{O}\left(T^2\right) \text{ sinon.} \end{cases} .$$

De plus, si $\zeta = 0$ alors $\theta_e(T) = \omega_0^2$ pour tout $T \geq 0$.

Démonstration. En appliquant une transformée de Laplace à (2.31), nous obtenons

$$s^2 X(s) - s x_0 - x'_0 + \omega_0^2 X(s) = 0,$$

où $X(s)$ désigne la tranformée de Laplace de $x(t)$. En dérivant deux fois cette expression i.e. en appliquant l'opérateur $\dfrac{d^2}{ds^2}$, et en divisant par s^3, il vient

$$\omega_0^2 \frac{1}{s^3}\frac{d^2X(s)}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{d^2X(s)}{ds^2} + \frac{4}{s^2}\frac{dX(s)}{ds} + \frac{2}{s^3}X(s) = 0. \tag{2.34}$$

L'application de la formule de Cauchy classique suivante

$$\begin{array}{l}\text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}^*, \forall T \geq 0, \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^m}\frac{d^n X(s)}{ds^n}\right)(T) = \frac{(-1)^n}{(m-1)!}\int_0^T (T-\tau)^{m-1}\tau^n x(\tau)\, d\tau\end{array}$$

permet alors de "revenir" dans le domaine temporel :

$$\frac{1}{2}\omega_0^2\int_0^T (T-\tau)^2\tau^2 x(\tau)\, d\tau + \int_0^T \tau^2 x(\tau)\, d\tau - 4\int_0^T (T-\tau)\tau x(\tau)\, d\tau + \int_0^T (T-\tau)^2 x(\tau)\, d\tau = 0.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\omega_0^2 = -2\frac{\int_0^T \left(T^2 - 6\tau T + 6\tau^2\right) x(\tau)\, d\tau}{\int_0^T (T-\tau)^2\tau^2 x(\tau)\, d\tau}.$$

Ceci montre bien que si $\zeta = 0$ alors $\theta_e(T) = \omega_0^2$ pour tout $T \geq 0$. Par contre, $\theta_e(T)$ réalise une approximation de ω_0^2 quand $\zeta > 0$. Les expressions de la proposition obtenue par un développement limité en $T = 0$ donne une idée de la qualité de l'approximation au voisinage de cette valeur. En particulier, si le signal x est une sinusoïde amortie sans déphasage alors l'estimateur présente un comportement hyperbolique au voisinage de $T = 0$ qui peut poser un problème d'estimation pour des valeurs de T faibles. ■

L'estimateur (2.33) peut être assimilé à un estimateur "anti-causal" de ω_0^2 à l'origine du temps. Dans la pratique, le signal x est connu seulement aux points d'échantillonnage. Il est de plus généralement corrompu par un bruit. Nous notons alors ce signal par $y(\tau) = x(\tau) + \varpi(\tau)$ où $\varpi(\tau)$ est un bruit. Par conséquent, en remplaçant x par y l'estimateur (2.33) s'écrit

$$\theta_e(T) = -2\frac{\int_0^T \left(T^2 - 6\tau T + 6\tau^2\right) y(\tau)\, d\tau}{\int_0^T (T-\tau)^2\tau^2 y(\tau)\, d\tau}.$$

Cet estimateur est calculé à partir d'une discrétisation des deux intégrales selon soit la méthode des rectangles soit selon la méthode des trapèzes ou de Simpson. Dans le cas de la méthode des trapèzes [Abramowitz and Stegun, 1964], pour $T = mT_e$ où T_e est le pas d'échantillonnage, il vient l'expression approchée suivante

$$\tilde{\theta}_e[m] = -\frac{1}{T_e^2}\frac{m^2.\left(y[0] + y[m]\right) + 2\sum_{k=1}^{m-1}\left(m^2 - 6km + 6k^2\right).y[k]}{\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2 k^2.y[k]}, \tag{2.35}$$

où $y[k] = y(kT_e)$ et $\tilde{\theta}_e[m] = \tilde{\theta}_e(mT_e)$.

A T fixé, $\tilde{\theta}_e[m]$ est donc une variable aléatoire réelle obtenue comme quotient de variables

aléatoires dépendantes

$$\tilde{\theta}_e[m] = -\frac{1}{T_e^2}\frac{\left(m^2.\left(x[0]+x[m]\right)+2\sum_{k=1}^{m-1}\left(m^2-6km+6k^2\right).x[k]\right)}{\left(\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2k^2.x[k]\right)+\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2k^2.\varpi[k]} \tag{2.36}$$

$$-\frac{1}{T_e^2}\frac{m^2.\left(\varpi[0]+\varpi[m]\right)+2\sum_{k=1}^{m-1}\left(m^2-6km+6k^2\right).\varpi[k]}{\left(\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2k^2.x[k]\right)+\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2k^2.\varpi[k]}. \tag{2.37}$$

3.2 Analyse statistique de l'estimateur

3.2.1 Estimation pour une fenêtre fixée

Comme nous pouvons le remarquer l'expression (2.36) indique que $\tilde{\theta}_e[m]$ est une variable aléatoire réelle. Dans le cas où $\mathbf{X} = \varpi$ suit une loi normale de type $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, nous savons que la somme de variables normales mutuellement indépendantes suit aussi une loi normale. Par conséquent, (2.36) peut s'écrire sous la forme homographique

$$\tilde{\theta}_e[m] = \frac{a_m\mathbf{X}+b_m}{c_m\mathbf{X}+d_m},$$

où

$$\begin{cases} a_m = -2\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left(m^2-6km+6k^2\right)\right), \\ b_m = -m^2.\left(x[0]+x[m]\right)-2\sum_{k=1}^{m-1}\left(m^2-6km+6k^2\right).x[k], \\ c_m = T_e^2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2k^2, \\ d_m = T_e^2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)^2k^2.x[k]. \end{cases}$$

Ainsi les coefficients de v.a.r. $\tilde{\theta}_e[m]$ dépendent de m. C'est donc un processus stochastique discret [Parzen, 1999]. La proposition suivante nous permet de calculer la fonction de densité de $\tilde{\theta}_e[m]$ pour un m fixé.

Proposition 2. *Soient* $\mathbf{Y} = \dfrac{a\mathbf{X}+b}{c\mathbf{X}+d}$ *une variable aléatoire réelle (v.a.r.) où* $\mathbf{X}$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, $c \neq 0$ *et* $ad-bc \neq 0$. *Alors la fonction de densité de la v.a.r.* Y *est donnée par la fonction continue suivante*

$$g(y) = \frac{|ad-bc|}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{\exp\left(-\dfrac{\left(\mu+\dfrac{b-dy}{a-cy}\right)^2}{2\sigma^2}\right)}{(a-cy)^2}. \tag{2.38}$$

La v.a.r. Y *n'admet ni espérance, ni moment d'ordre supérieur.*

Démonstration. La fonction $\varphi(x) = y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est continue et bijective. Par conséquent tout y admet un seul antécédent $x = \varphi^{-1}(y) = \dfrac{-b+dy}{a-cy}$. La fonction de densité de la v.a.r. Y est alors donnée classiquement par

$$g(y) = \frac{f\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{\left|\varphi'(x)\right|_{x=\varphi^{-1}(y)}},$$

où $\varphi'(x) = \dfrac{ad-bc}{(d+cx)^2}$ et f est la fonction de densité de la v.a.r. X. Comme X est une v.a.r. gaussienne alors sa fonction de densité s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Après quelques calculs, nous obtenons l'expression (2.38). Cette fonction est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, nous savons que

$$g(y) \underset{\infty}{\sim} \frac{|ad-bc|}{c^2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mu c+d)^2}{2c^2\sigma^2}\right)\frac{1}{y^2}.$$

Comme ces deux fonctions sont continues et elles conservent un signe constant au voisinage de l'infini, il vient que leurs intégrales sont de même nature. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy$ converge par application du critère de Riemann. Cependant, le moment d'ordre un n'existe pas. En effet, nous avons

$$y.g(y) \underset{\infty}{\sim} \frac{|ad-bc|}{c^2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mu c+d)^2}{2c^2\sigma^2}\right)\frac{1}{y}.$$

Par application du critère de Riemann, il vient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y.g(y)\,dy$ diverge. Il en est ainsi de même pour les moments d'ordre supérieur. ■

La classique "loi des grands nombres" [Foata and Franchi, 2012 - 3ème edition] ne s'applique pas ici. Etant donné un n-échantillons de la v.a.r. $\mathbf{Y}$ formé d'un n-uplet $\hat{Y}_n = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de v.a.r Y_k admettant la même loi que $\mathbf{Y}$ et qui soient indépendants, alors l'estimateur classique de la moyenne ne converge pas quand n augmente. Cette moyenne empirique reste aléatoire. La figure 2.4 montre qu'une valeur trop éloignée "empêche" cette moyenne empirique (en bleu) de converger alors que l'estimateur de la médiane (en rouge) "semble" converger. La médiane théorique est donnée par la définition suivante.

Définition 3. *Si la fonction de répartition g d'une v.a.r Y est continue alors le quantile d'ordre $p \in [0,1]$ est le réel y_p tel que*

$$\int_{-\infty}^{y_p} g(y)\,dy = p.$$

*Dans le cas $p = \dfrac{1}{2}$, le réel $\mathbf{y}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{Med_Y}$ est appelé **médiane**.*

Dans la pratique, nous devons estimer cette quantité.

Définition 4. *Soit $\hat{Y}_{(n)} = \left(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}\right)$ l'échantillon ordonné associé au n-échantillon $\hat{Y}_n$ alors*

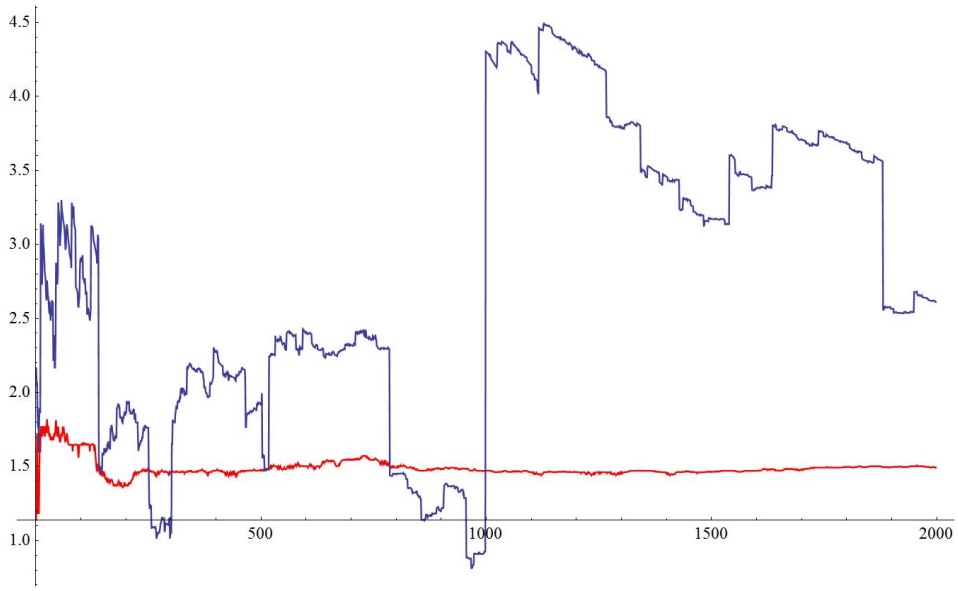


FIGURE 2.4: $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 7$ où chaque X_i †$\mathcal{N}(0, 5)$

l'estimateur de la médiane est donné par

$$\mathbf{MED}\left(\hat{Y}_n\right) = \begin{cases} Y_{\left(\frac{n}{2}\right)} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ Y_{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)} & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Nous avons le résultat important suivant issu de [Sen and da Motta Singer, 1993] qui permet de connaître le comportement asymptotique de cet estimateur.

Proposition 5. *Si la fonction de densité g est continue et est strictement positive alors l'estimateur de la médiane* $\mathbf{MED}\left(\hat{Y}_n\right)$ *est asymptotiquement sans biais et normale i.e. que nous avons la convergence en loi suivante*

$$\sqrt{n}\left(\mathbf{MED}\left(\hat{Y}_n\right) - \mathbf{Med_Y}\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2g\left(\mathbf{Med_Y}\right)}\right). \tag{2.39}$$

Remarque 3.2.1. *Soit X une v.a.r de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2g\left(\mathbf{Med_Y}\right)}\right)$. Pour montrer que $\sqrt{n}\left(\mathbf{MED}\left(\hat{Y}_n\right) - \mathbf{Med_Y}\right)$ converge en loi vers X, il faut montrer que les fonctions de répartition de $\sqrt{n}\left(\mathbf{MED}\left(\hat{Y}_n\right) - \mathbf{Med_Y}\right)$ convergent vers celle de X pour toute valeur de x.*

Cette proposition nous permet de caractériser un intervalle de confiance approximatif de notre estimateur de la médiane. La figure suivante donne 35 simulations de médianes glissantes et une approximation d'intervalle de confiance à trois écart-types de cet estimateur de la médiane pour différente valeurs de n i.e. $\pm\frac{3}{\sqrt{n}}\frac{1}{2g\left(\mathbf{Med_Y}\right)}$ pour $n = 1, \ldots, 10000$ où $\mathbf{Med_Y} = 0.142857$ et $g\left(\mathbf{Med_Y}\right) = 1.954$. Comme nous pouvons le constater sur la figure 2.5, l'intervalle de confiance à 3 écarts type diminue progressivement avec le nombre d'échantillons. La loi normale estime donc correctement les variations de l'estimateur de la médiane. Cette analyse nous permet de

†. variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) où les variables aléatoires ont toutes la même loi de probabilité et sont mutuellement indépendantes

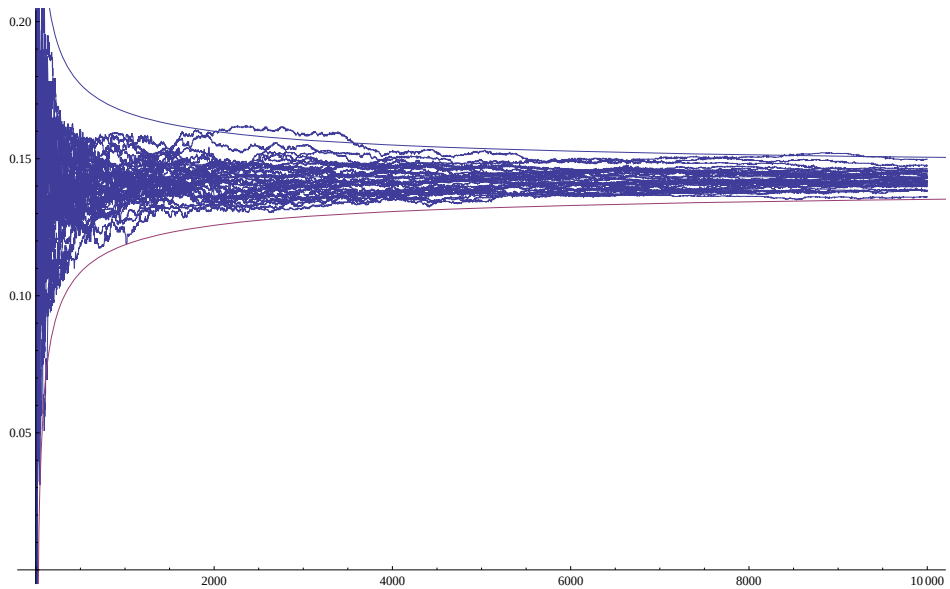


FIGURE 2.5: $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 7$ où chaque X_i $\mathcal{N}(0, 0.5)$

conclure que pour éviter les singularités numériques et rendre ainsi plus robuste l'estimation qu'il est préférable de le faire au sens de la médiane.

3.3 Estimation à fenêtre glissante

Dans le cas d'une fenêtre de longueur variable, l'expression de la densité de l'estimateur de la médiane de la fréquence devient très complexe à calculer. En effet, à chaque nouvel échantillon la loi suivie change et les variables aléatoires associées à chaque estimé ne sont pas indépendantes. Nous proposons dans la suite d'évaluer la robustesse de l'estimation par la médiane à travers quelques expérimentations numériques afin d'en déduire l'influence des paramètres pour l'estimateur (2.35).

3.3.1 Cas sans bruit

Considérons maintenant l'estimateur (2.35), où la valeur de m augmente au cours du temps. Ceci correspond au cas où un nouvel échantillon du signal est pris en compte dans (2.32) à chaque pas d'échantillonnage. Nous réglons l'amortissement $\zeta = 0$, $x_0 = 0$ puis x_0' tel que l'amplitude de vibration soit de 1 ou de 0.1. L'unité peut être en mm ou en rad par exemple.

Nous étudions l'effet du pas T_e et de la valeur de la fréquence sur la convergence. Nous traçons en vert l'estimateur de la médiane de (2.35) et en bleu l'estimateur algébrique (2.35). Il est représenté en rouge la valeur théorique de la fréquence ainsi que l'erreur à 2%. L'estimation par la médiane (en vert) donne une erreur de convergence et une vitesse de convergence d'autant plus faible que T_e diminu. L'erreur "systématique" de la médiane est cependant d'autant plus grande que la fréquence à identifier est grande. Ce résultat est montré dans les figures 2.6 et 2.7 d'une part et les figures 2.10 et 2.11 d'autre part. L'estimateur de la médiane est plus robuste numériquement que l'estimateur algébrique (en bleu) qui présente des singularités. Les figures 2.8 et 2.9 montrent que la valeur de l'amplitude semble être peu sensible pour l'estimateur de la médiane.

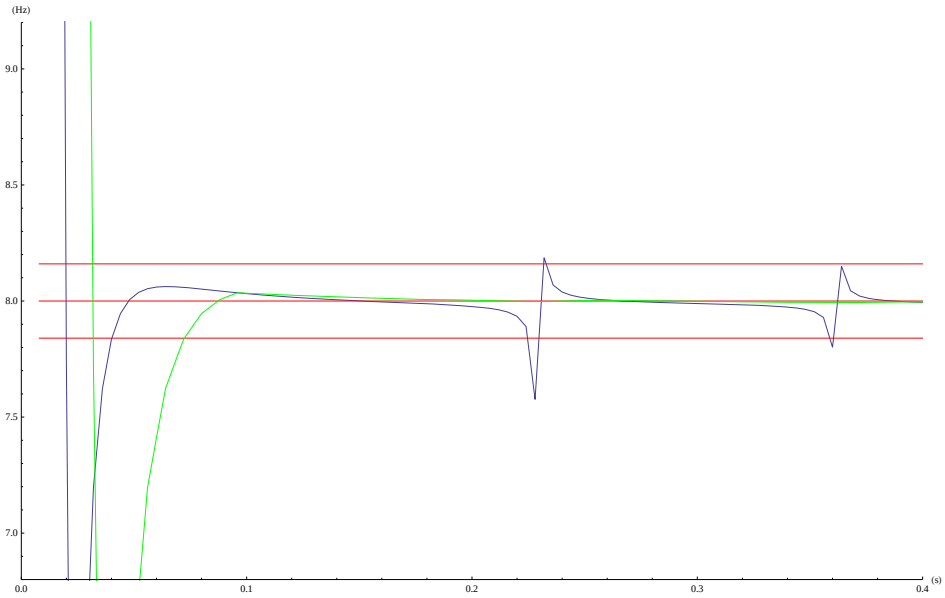


FIGURE 2.6: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=1, erreur à 2%

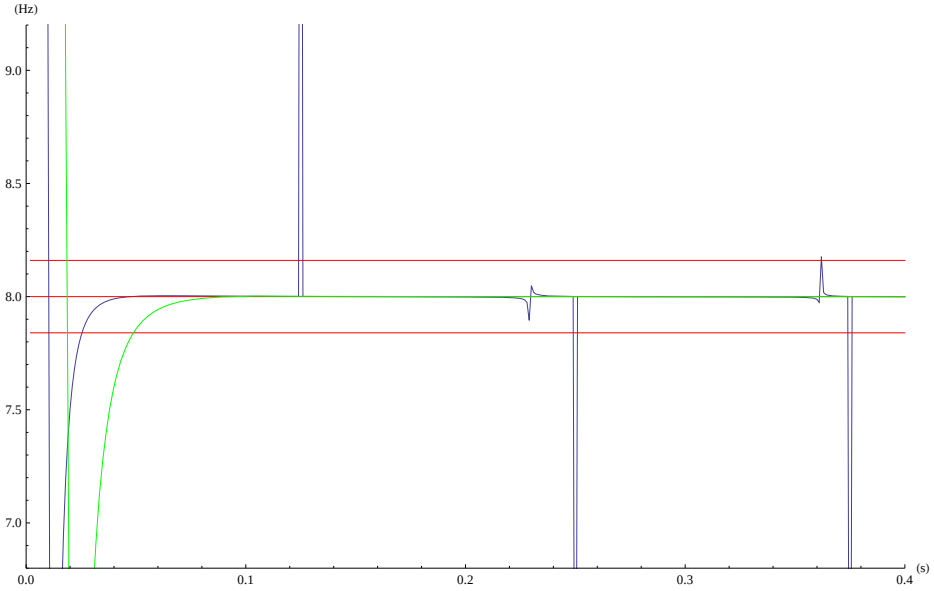


FIGURE 2.7: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=1, erreur à 2%

3.3.2 Cas avec bruit

Pour la prise en charge de tests utilisant du bruit, nous définissons l'indicateur classique de rapport signal à bruit en dB défini par $SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} |y[k]|^2}{\sum_{k=1}^{n} |\varpi[k]|^2} \right)$. Nous étudions alors deux possibilités soit un SNR à 22dB ou un SNR de 36dB. Nous simulons à chaque fois "15 trajectoires" différentes de l'estimateur de la médiane afin d'introduire la notion de convergence non asymptotique de cet estimateur (Cf. figures 2.14, 2.15, 2.16 et 2.17). L'estimation de la médiane est en effet non asymptotique. La variation de la médiane vis à vis d'une erreur à 2% augmente à partir d'une certaine valeur temporelle. En diminuant la valeur de T_e à $1ms$ la

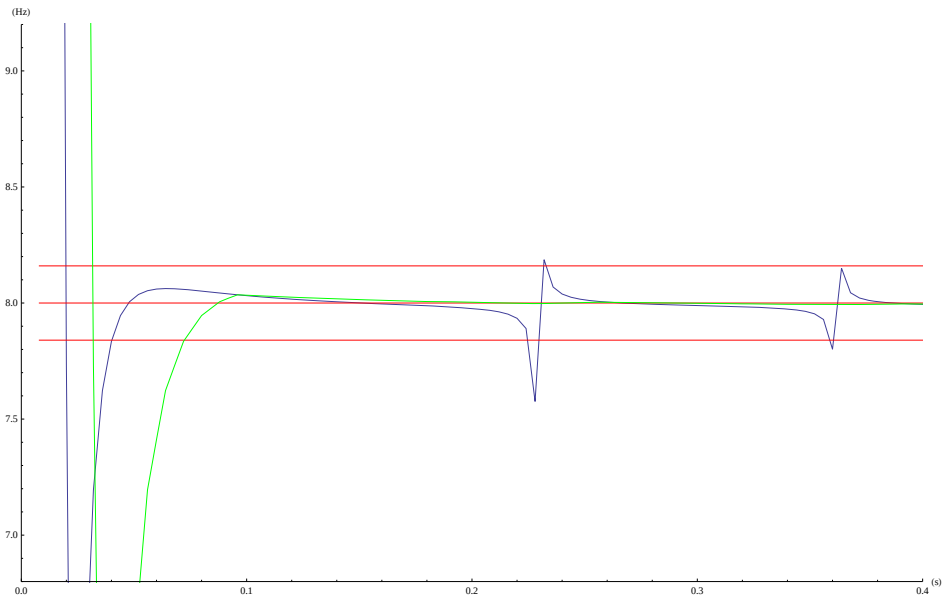


FIGURE 2.8: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=0.1, erreur à 2%

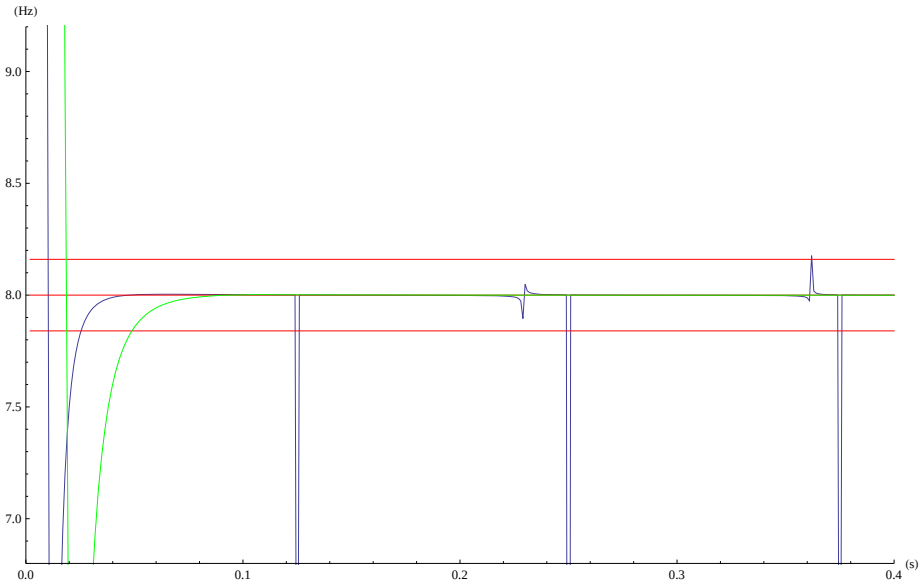


FIGURE 2.9: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=0.1, erreur à 2%

variabilité de la médiane diminue et la longueur de la fenêtre de convergence non asymptotique de l'estimateur augmente légèrement. Pour un SNR plus élevé comme illustré dans les figures 2.14 et 2.16, la vitesse de convergence est accélérée au départ, mais la longueur de la fenêtre de convergence non asymptotique reste sensiblement la même.

3.3.3 Cas d'une fenêtre glissante : estimation causale

Le résultat suivant nous permet de construire des estimateurs causaux de la fréquence à partir de l'utilisation d'une fenêtre d'integration de longueur fixée T. L'estimation causale se fait donc *via* cette fenêtre glissante au cours du temps.

Proposition 6. *Soit y une fonction continue et t un réel strictement positif alors pour tout réel T fixé tel*

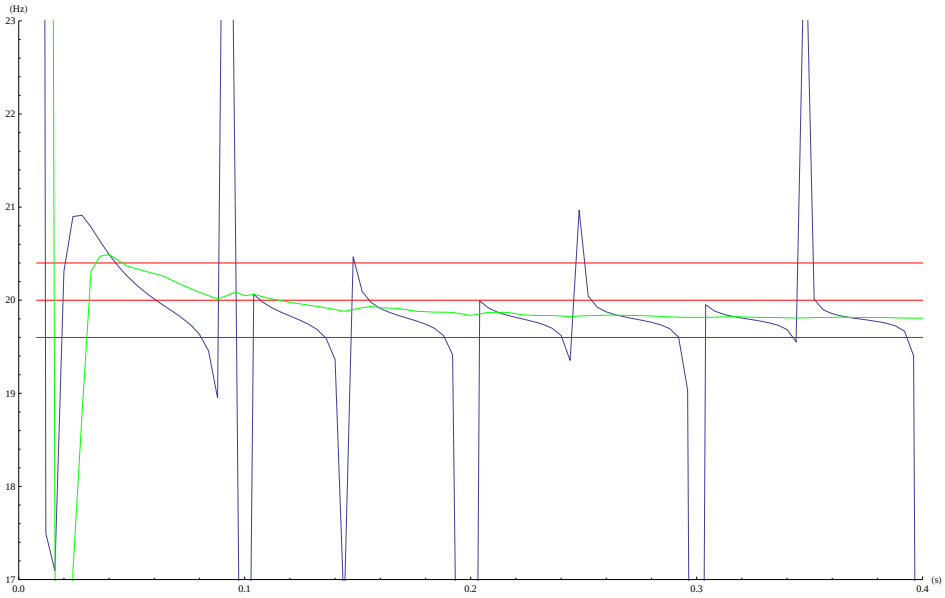


FIGURE 2.10: f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=1, erreur à 2%

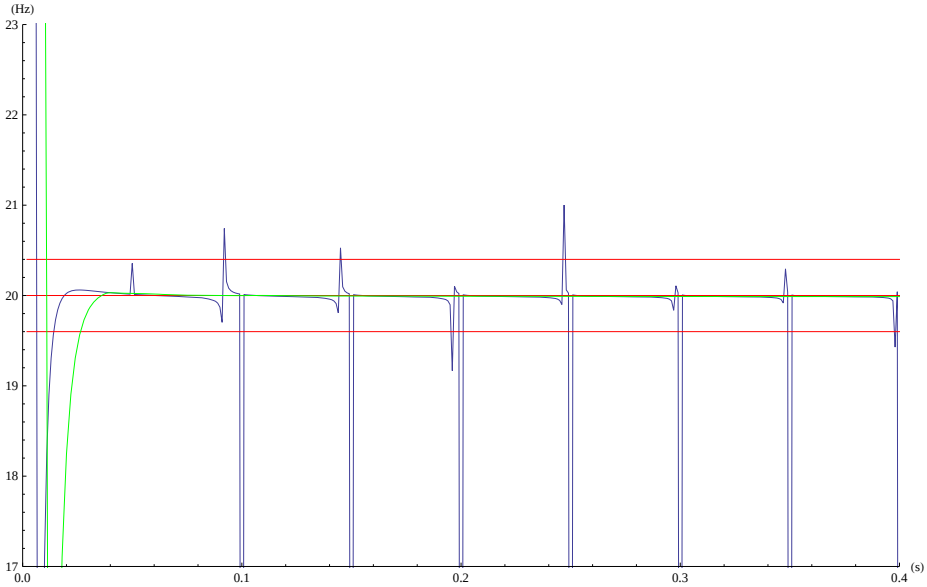


FIGURE 2.11: f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=1, erreur à 2%

que $T \in [0, t]$, *nous avons*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^m}\frac{d^n\mathbf{Y}(t-s)}{ds^n}\right)(T) = \frac{(-1)^n}{(m-1)!}\int_{t-T}^{t}(T-t+\tau)^{m-1}(t-\tau)^n\, y(\tau)\, d\tau, \tag{2.40}$$

$$= \frac{(-1)^n T^{m+n}}{(m-1)!}\int_0^1 (1-\tau)^{m-1}\tau^n y(t-\tau T)\, d\tau, \tag{2.41}$$

où $\mathbf{Y}(t-.)$ *désigne la transformée de Laplace de la fonction* $y(t-.)$.

Démonstration. En notant par X la transformée de Laplace d'une fonction x, il vient par application de la formule de Cauchy que la transformée inverse de Laplace de $\frac{1}{s^m}\frac{d^nX(s)}{ds^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

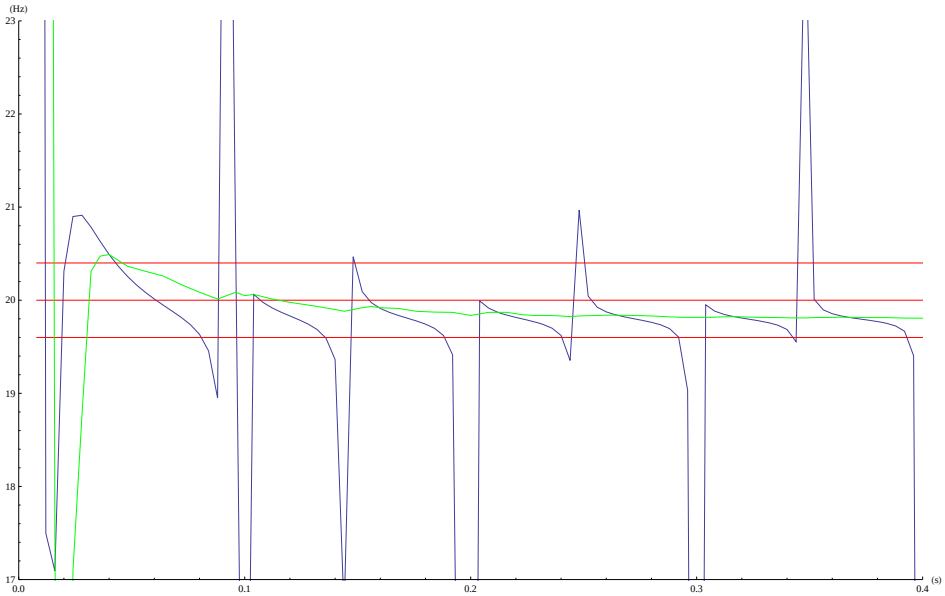


FIGURE 2.12: f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=4ms, A=0.1, erreur à 2%

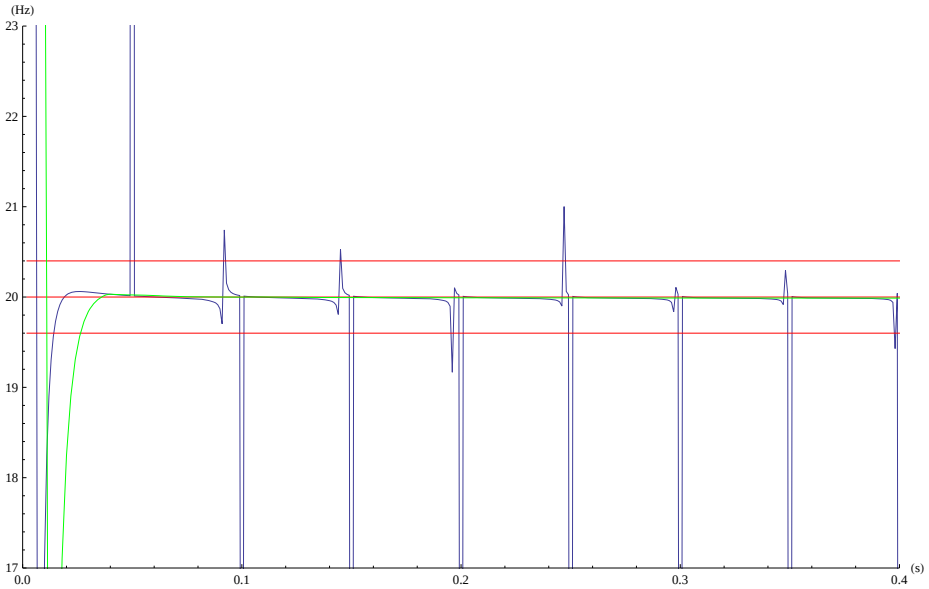


FIGURE 2.13: f_0= 20Hz, ζ=0, T_e=1ms, A=0.1, erreur à 2%

et $m \in \mathbb{N}^*$

$$\text{pour tout } T \geq 0,\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^m}\frac{d^n X(s)}{ds^n}\right)(T) = \frac{(-1)^n}{(m-1)!}\int_0^T (T-u)^{m-1} u^n x(u)\, du.$$

Si nous posons pour tout $u \in [0, T]$ (avec $0 \leq T \leq t$), $x(u) = y(t-u)$, il vient alors que

$$\int_0^T (T-u)^{m-1} u^n x(u)\, du = \int_0^T (T-u)^{m-1} u^n y(t-u)\, du.$$

En appliquant le changement de variable $\tau = t - u$, nous obtenons que

$$\int_0^T (T-u)^{m-1} u^n x(u)\, du = \int_{t-T}^t (T-t+\tau)^{m-1} (t-\tau)^n y(\tau)\, d\tau,$$

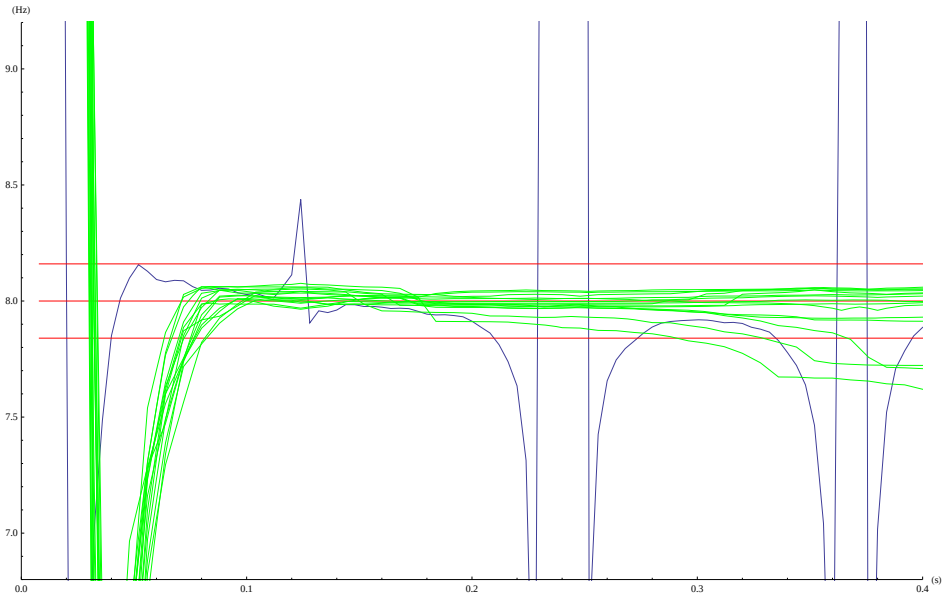


FIGURE 2.14: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, SNR=36dB, A=1, erreur à 2%

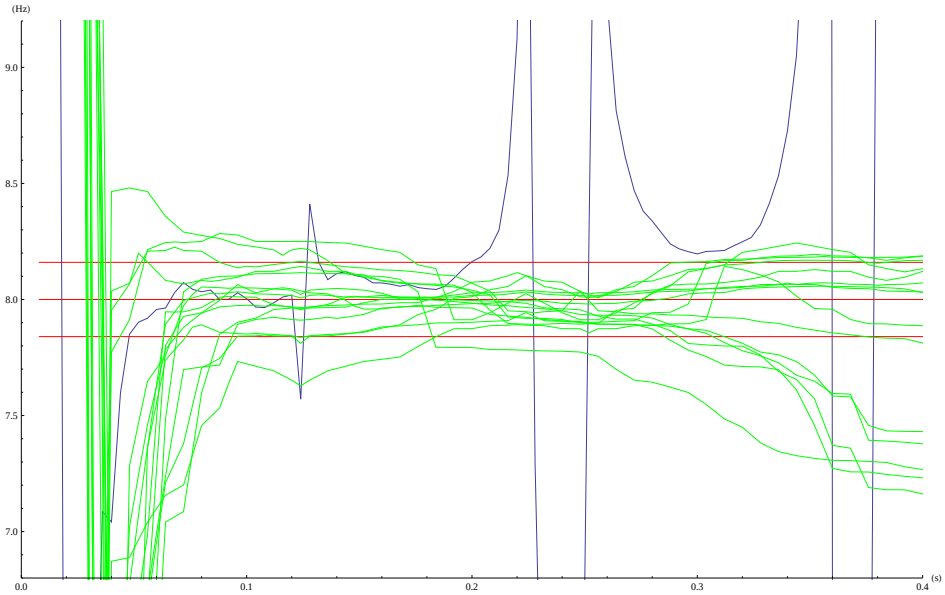


FIGURE 2.15: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=4ms, SNR=22dB, A=1, erreur à 2%

ou si à la place nous appliquons le changement de variable $u = \tau T$, il vient

$$\int_0^T (T-u)^{m-1} u^n x(u)\, du = T^{m+n} \int_0^1 (1-\tau)^{m-1} \tau^n y(t-\tau T)\, d\tau.$$

Ainsi (2.40) est vérifiée. ■

Dans cette proposition le réel t correspond au temps t auquel nous souhaitons réaliser l'estimation. Le réel $T > 0$ caractérise la longueur de la fenêtre d'intégration. Ainsi en appliquant

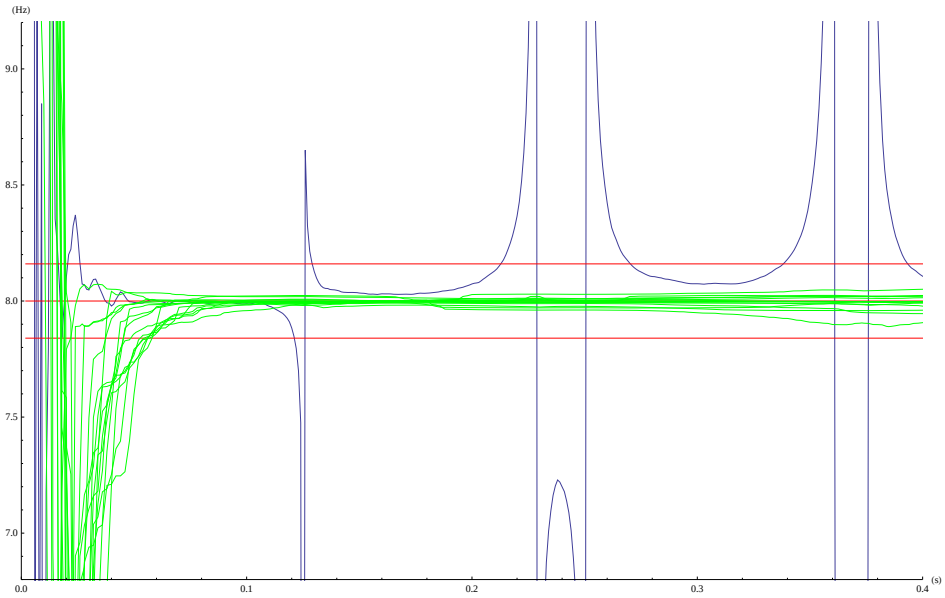


FIGURE 2.16: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, SNR=36dB, A=1, erreur à 2%

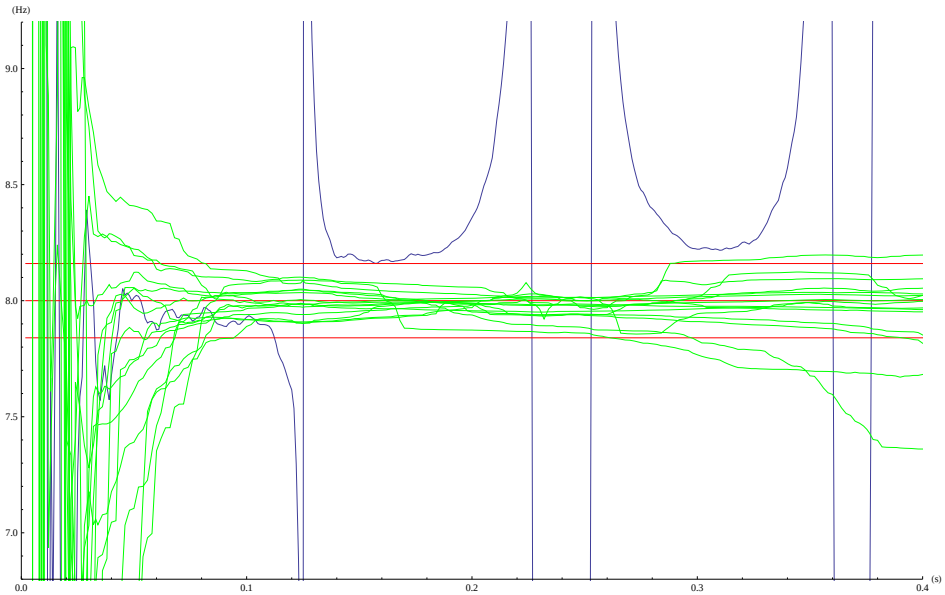


FIGURE 2.17: f_0= 8Hz, ζ=0, T_e=1ms, SNR=22dB, A=1, erreur à 2%

ce résultat à l'expression opérationnelle (2.34), l'estimateur de la fréquence s'écrit

$$\tilde{\theta}_T(t) = -\frac{2}{T^2}\frac{\int_0^1 \left(1-6\tau+6\tau^2\right) y\left(t-\tau T\right) d\tau}{\int_0^1 \tau^2 \left(1-\tau\right)^2 y\left(t-\tau T\right) d\tau}. \tag{2.42}$$

4 Etude détaillée de l'estimation paramétrique d'un système mécanique souple

4.1 Cadre d'étude et motivation

Considérons un bras de robot flexible de fonction de transfert empirique en fréquence (Empirical Transfert Function Estimate "*ETFE*", en anglais) [Moheimani, 2005], représentée à la figure 2.18. Cette fonction représente le transfert fréquentiel entre le couple mesuré en

entrée et l'accélération du bras flexible en sortie. Le signal d'excitation dans ce cas est composé de plusieurs sinusoïdes. A partir de cette représentation non paramétrique, nous pouvons

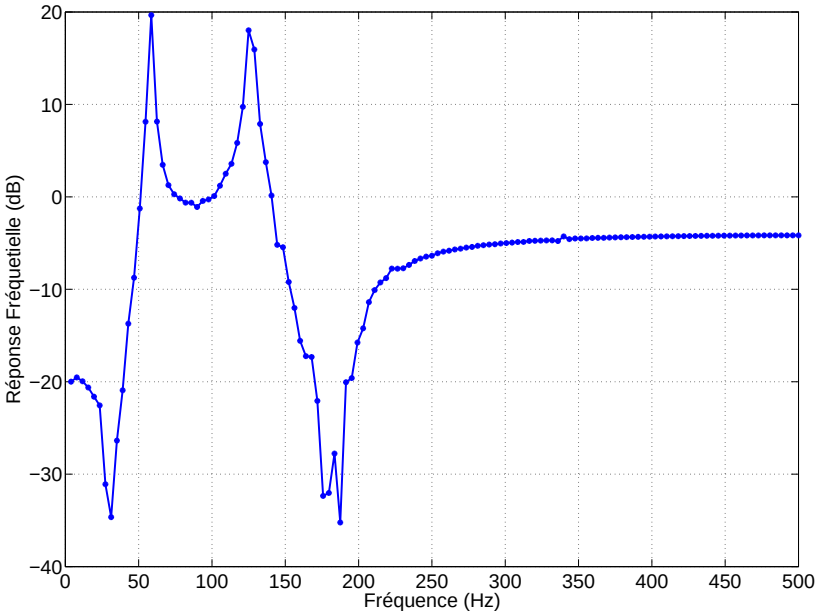


FIGURE 2.18: Fonction de transfert en fréquence du bras de robot

avoir une bonne indication sur l'ordre du système. Le système flexible présente au moins deux résonances et deux anti-résonances dans la bande passante [0, 300] Hz. De ce fait, l'ordre du système sera déterminé par le nombre total des modes présents. Plusieurs structures peuvent être utilisées. Dans ce cas, deux pistes peuvent se présenter en vue de modéliser le processus. Nous distinguons alors en premier lieu les modèles à boîtes noires non linéaires où les approches neuronales sont des techniques couramment utilisées, [Janczak, 2005]. Ce type d'approche bien qu'il présente un bon pourcentage d'ajustement admet un ordre du modèle qui n'est pas toujours en lien avec la signification physique du système étudié. Notre démarche étant déterministe et linéaire, nous nous focalisons sur la réponse fréquentielle du système afin de déterminer un ordre approximatif de la fonction de transfert dont l'entrée est le couple moteur mesuré et la sortie est l'accélération du bras flexible.

Chaque résonance et anti-résonance de la figure 2.18 se traduit alors par un pôle complexe conjugué au niveau du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert du système. Ceci est présenté sous forme d'un système masses-ressorts-amortisseurs montés en cascade selon le degré de liberté du manipulateur d'origine comme illustré dans [Berglund and Hovland, 2000] et [Subudhi and Morris, 2002]. Les robots manipulateurs flexibles sont généralement modélisés par des élasticités localisées au niveau des articulations. Dans ce cas, chaque système d'entraînement est modélisé comme un système masse-ressort à un degré de liberté. Le ressort et l'amortisseur sont situés entre l'inertie de l'actionneur et l'inertie du bras associé. Dans la suite, nous abordons la problématique d'identification d'un système à 1 degré de liberté.

4.2 Positionnement du problème

Cette partie est principalement tirée des travaux présentés dans [Oueslati et al., 2011].

Dans cette section nous nous intéressons à la problématique d'identification paramétrique d'un système mécanique gouverné par une souplesse mécanique prépondérante et modélisé par une structure de type masse ressort à un degré de liberté. Le choix d'une telle structure repose sur une multitude d'applications mécaniques et industrielles. En effet, elle est utilisée pour modéliser la transmission mécanique dans la plupart des structures flexibles, [Hovland et al., 2000] dans le cas de poutres souples ou [Moberg et al., 2008] dans le cas de modélisation d'un robot industriel. Dans cette section, on s'intéresse plutôt à la prédiction des paramètres avec application aux processus industriels. Nous abordons dans un premier temps, une étude comparative entre deux techniques d'estimation en ligne : à savoir le filtre de Kalman-Bucy d'une part et l'estimateur algébrique d'autre part. Considérons un système de type masse-

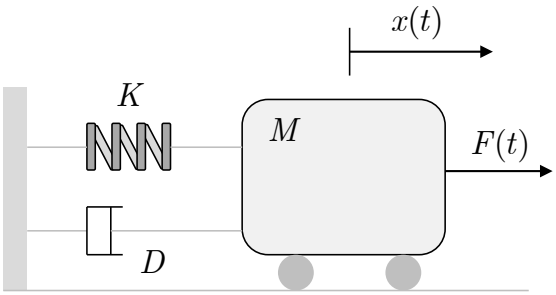


FIGURE 2.19: Système masse ressort à 1 ddl

ressort-amortisseur, il est défini par l'équation suivante :

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t), \tag{2.43}$$

où M désigne la masse de la charge en déplacement, D le coefficient d'amortissement et K la constante de raideur du ressort tandis que $F(t)$ représente la force appliquée. Pour simplifier l'équation, nous définissons deux paramètres : la pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et le taux d'amortissement $\zeta = \frac{D}{2\sqrt{KM}}$. Nous écrivons alors :

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = u(t), \tag{2.44}$$

où $u(t) = \frac{F(t)}{M}$. Dans la suite, on prend $\theta_1 = 2\zeta\omega_0$ et $\theta_2 = \omega_0^2$ les paramètres inconnus. Cette procédure d'identification sera couplée à la problématique de conception d'une entrée sinusoïdale optimisée du système (2.44) permettant de garantir la meilleure convergence paramétrique dans le cas où l'entrée est égale à $u(t) = A_1 sin(\omega_1 t)$. En effet, dans les paragraphes § 4.3.1 et § 4.3.3 nous étudions la conception d'entrée optimale d'estimation paramétrique. Le problème d'entrée optimale est formulé en tant que problème d'optimisation convexe basé sur les statistiques du signal d'entrée [Wahlberg et al., 2010, 2012]. Dans notre cas, l'objectif est de minimiser la variance de l'estimateur et l'incertitude de l'estimation à une pulsation d'excitation déterminée. Nous caractérisons analytiquement la solution optimale pour le filtre récursif et nous effectuons

une étude numérique pour l'approche algébrique en raison de sa complexité.

4.3 Estimation par le filtre de Kalman-Bucy

Dans ce paragraphe nous utilisons le filtre de Kalman-Bucy afin d'estimer le vecteur des paramètres $\Theta = [\theta_1 \;\; \theta_2]$ impliqués dans l'équation de mouvement (2.44). Afin d'identifier rapidement ces paramètres au moyen d'une sinusoïde conçue comme entrée optimale $u(t)$ du système mécanique, une analyse de la variance de l'estimateur est décrite dans ce qui suit. Ceci nous permet de choisir de manière optimale les valeurs de l'amplitude A_1 et de la pulsation ω_1. Les séquences d'entrée $[ui]_{i=1,\ldots,N}$ et de sortie $[xi]_{i=1,\ldots,N}$ sont mesurées d'une manière synchronisée à chaque période d'échantillonnage T_e. Par conséquent, nous obtenons les relations linéaires suivantes à partir de ces mesures :

$$Y_k = X_k\Theta + \rho_k, \quad m < k \leq N, \tag{2.45}$$

où $X_k = [(\dot{x}_i)_e \quad x_i]_{i=m+1,\ldots,k}$ est la matrice de régression et $Y_k = [u_i - (\ddot{x}_i)_e]_{i=m+1,\ldots,k}$ représente le vecteur des signaux observés. Par ailleurs $[\dot{x}_i]_e$ et $[\ddot{x}_i]_e$ désignent respectivement une estimation de vitesse et d'accélération à chaque instant $t_i = iT_e$. Nous supposons que ρ_k est une suite de variables gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance connue σ_ϱ^2 due à la fois aux bruits de mesure ϖ et aux erreurs d'estimation de la dérivée. L'entier m est égal à la valeur minimale nécessaire pour calculer $[\dot{x}_i]_e$ et $[\ddot{x}_i]_e$. Habituellement, l'estimation des dérivées est calculé grâce à un filtre de differentiation fini. La problématique revient à estimer Θ en se basant sur les mesures et les observations. Nous considérons la situation lorsque les observations sont obtenues au fur et à mesure. Dans ce qui suit, une estimation récursive est développée. Au lieu de recalculer les estimations avec toutes les données disponibles, les paramètres issus de l'estimation précédente sont mis à jour avec le nouvel échantillon. Le filtre de Kalman-Bucy est écrit sous la forme d'un algorithme récursif. Il est est donné par la structure suivante :

$$\begin{cases} K_{k+1} &= P_k X_{k+1}^T \left[R_{k+1} + X_{k+1} P_k X_{k+1}^T\right]^{-1}, \\ \alpha_{k+1} &= Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\Theta}_k, \\ \hat{\Theta}_{k+1} &= \hat{\Theta}_k + K_{k+1}\alpha_{k+1}, \\ P_{k+1} &= \lambda^{-1}\left[P_k - K_{k+1}X_{k+1}P_k\right], \end{cases} \tag{2.46}$$

où $\hat{\Theta}_k$ est le vecteur d'estimation des paramètres inconnus après les premiers k échantillons et $\lambda \in]0,\, 1]$ représente le facteur d'oubli qui réduit l'influence des anciennes données dans le processus de prédiction. En particulier, si $\lambda = 1$ alors toutes les données sont prises en compte de la même manière. Dans cet algorithme (2.46), on constate que le vecteur Θ_k et la matrice P_k sont impliqués dans la récurrence. Pour initialiser la récurrence nous devons fournir les valeurs initiales de ces variables. Nous avons choisi alors d'appliquer une solution aux moindres carrées ordinaire (2.11) de ce problème d'initialisation à l'aide d'échantillons issus des m premières mesures. On calcul alors :

$$\hat{\Theta}_m = P_m B_m, \quad \text{where} \begin{cases} P_m = (X_m^T R_m^{-1} X_m)^{-1}, \\ B_m = X_m^T R_m^{-1} Y_m. \end{cases} \tag{2.47}$$

Notons :

$$\alpha(i) = k - \max\{i - m, k\} \text{ pour } i \in \{m+1, \ldots, k\}\,. \tag{2.48}$$

Après $k \geq m$ échantillons empilés, en appliquant les récurrences (2.46) initialisées par (2.47), on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\hat{\Theta}_k = \frac{\sum_{i=m+1}^{k} \lambda^{\alpha(i)} X_i Y_i}{\sum_{i=m+1}^{k} \lambda^{\alpha(i)} X_i^2}, \tag{2.49}$$

$$\text{avec } K_k = \frac{X_k}{\sum_{i=m+1}^{k} \lambda^{\alpha(i)} X_i^2} \text{ et } P_k = \frac{\sigma_\varrho^2}{\sum_{i=m+1}^{k} \lambda^{\alpha(i)} X_i^2}\,. \tag{2.50}$$

4.3.1 Analyse de la variance

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'analyse de la variance de l'estimateur donné par la relation (2.49), dans le but de trouver la trajectoire de référence $u(t)$, à savoir les valeurs de $(A_1)_{opt}$ et $(\omega_1)_{opt}$, qui permettent de minimiser la variance de (2.49). Dans ce cas, la valeur de $(\omega_1)_{opt}$ est étudiée en fonction de la pulsation optimale $Z_{opt} = \dfrac{(\omega_1)_{opt}}{\omega_0}$. L'expérience montre que pour des systèmes industriels, les structures sont très faiblement amorties. Ainsi, en vue de simplifier l'étude de variance, le paramètre $\theta_1 = 2\zeta\omega_0$ est supposé nul. Cette hypothèse permettra de simplifier l'étude de la variance du filtre de Kalman-Bucy. En outre, cette approximation aura lieu uniquement dans le but d'effectuer l'étude de variance de Θ, notée $Var(\Theta)$ en fonction de $Z = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$. Ceci est réalisé afin de trouver une expression de la variance de l'estimateur récursif. Cependant, l'algorithme de Kalman-Bucy sera reconstruit au moyen des équations (2.45) et (2.46) en vue d'estimer les paramètres inconnus θ_1 et θ_2 sur la base du calcul de l'expression de la variance. Sous cette hypothèse, Θ sera uniquement limité à la variable scalaire θ_2. Par ailleurs, la régression X_k est réécrite $X_k = [x_i]_{i=m+1,\ldots,k}$. La solution explicite de cette équation différentielle réduite devient :

$$x(t) = \frac{A_1\left[\omega_1 \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_1 t)\right]}{\omega_0(\omega_1^2 - \omega_0^2)}. \tag{2.51}$$

Nous notons $P_k = ((X_k R_k^{-1} X_k)^T)^{-1}$, avec R_k la matrice diagonale :

$$R_k = diag(\underbrace{r_1, \ldots, r_{k-m}}_{k-m \text{ fois}}), \tag{2.52}$$

où $r_j > 0$ et $e_k = Y_k - X_k\hat{\Theta}_{k-1}$ est l'erreur d'estimation a priori. Par conséquent, le filtre de Kalman-Bucy se compose en deux étapes. La première concerne une estimation de Θ_k en utilisant les informations déjà disponibles à l'instant k tandis que la deuxième fournit une mise à jour du processus d'innovation (erreur a priori), notée α_{k+1} dans (2.46), afin d'estimer Θ_{k+1} à partir des mesures Y_{k+1}, la régression X_{k+1} et Θ_k. En fait, ρ_k représente un vecteur de bruit blanc de moyenne nulle. Il est défini par la fonction d'auto-corrélation :

$$\mathbb{E}[\rho(t)\rho^*(t-\tau)] = \begin{cases} \sigma_\rho^2, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Concernant la matrice P_k, elle représente la matrice des variances covariances de l'erreur d'estimation :

$$P_k = cov[e_k] = \mathbb{E}[(\hat{\Theta}_k - \Theta)^T(\hat{\Theta}_k - \Theta)].$$

Les développements qui suivent, sont basés sur l'algorithme de Kalman-Bucy avec un écart fixe, par exemple, pour tout $k \geq m$, $r_{k-m} = \sigma_\varrho^2$. De ce fait, en appliquant la propriété de linéarité de la variance, on obtient l'expression suivante à partir de (2.49) :

$$Var(\hat{\Theta}_k) = \frac{\sigma_\rho^2 \sum\limits_{i=m+1}^{k} \lambda^{2\alpha(i)} X_i^2}{\left(\sum\limits_{i=m+1}^{k} \lambda^{\alpha(i)} X_i^2\right)^2}. \tag{2.54}$$

La relation (2.54) peut être exprimée en utilisant la solution explicite (2.51), comme suit :

$$Var(\hat{\Theta}_k) = \frac{\sigma_\rho^2}{A_1^2} K(Z, \lambda, \omega_0, T_e, m, k), \tag{2.55}$$

où

$$K(Z, \lambda, \omega_0, T_e, m, k) = \frac{(\omega_0^2(Z^2-1))^2 \sum\limits_{i=m+1}^{k} \lambda^{2\alpha(i)} \left(Z\sin(\omega_0 t_i) - w_0 \sin(Z\omega_0 t_i)\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=m+1}^{k} \lambda^{\alpha(i)} \left(Z\sin(\omega_0 t_i) - \omega_0 \sin(Z\omega_0 t_i)\right)^2\right)^2}. \tag{2.56}$$

La minimisation de la variance de l'estimateur récursif asymptotique peut être obtenue en augmentant l'amplitude A_1 de la force en entrée. Cependant, cette stratégie est naturellement limitée par les contraintes physiques. Concernant l'effet du rapport $Z = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$, il est évoqué dans le paragraphe ci dessous.

4.3.2 Influence du facteur d'oubli λ sur la convergence de l'estimateur

Dans une première série d'expérience, nous étudions numériquement l'influence du facteur d'oubli λ sur la valeur de $K(Z, \lambda, \omega_0, T_e, m, k)$ comme illustré dans la figure 2.20. En effet, la figure 2.21 montre le logarithme de $K(Z, \lambda, \omega_0, T_e, m, k)$ en fonction d'une discrétisation de Z dans l'intervalle $[0.01,\ 2]$ où la période d'échantillonnage $T_e = 0.001$ s, $k = 100$ et $m = 3$. Un ensemble de valeurs du facteur d'oubli $\lambda = \{0.95, 0.98, 0.99, 1\}$ est sélectionné. Comme nous pouvons le constater, $\lambda = 1$ est toujours la valeur optimale pour notre application dans le cas d'une estimation par ce type de filtre.

4.3.3 La trajectoire d'entrée optimale

En choisissant la valeur de $\lambda = 1$, on a :

$$K(Z, \omega_0, T_e, m, k) = \frac{\omega_0^4 (Z^2-1)^2}{\left(\sum\limits_{i=m+1}^{k} \left(Z\sin(\omega_0 t_i) - \sin(Z\omega_0 t_i)\right)^2\right)}. \tag{2.57}$$

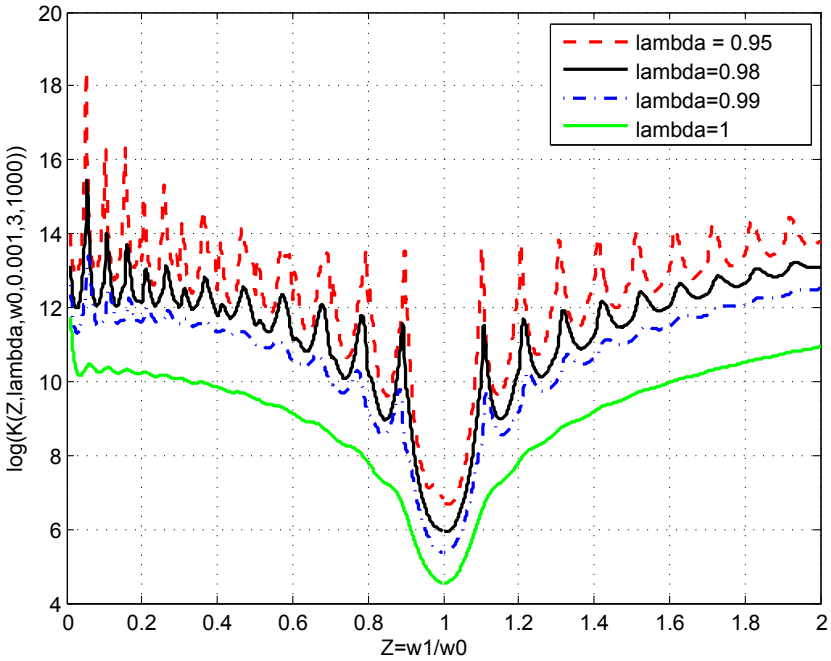


FIGURE 2.20: Influence du facteur d'oubli λ en analyse de variance

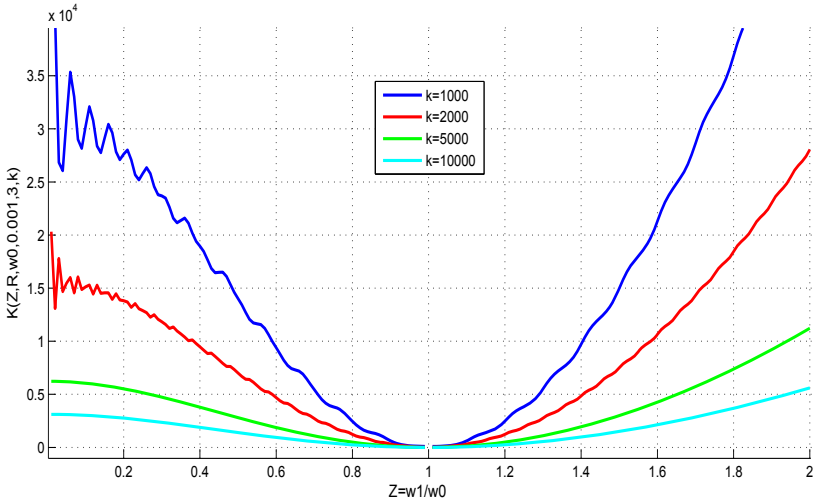


FIGURE 2.21: Influence du rapport $Z = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$ pour la conception de la trajectoire optimale

Un développement en série de Taylor à $Z = 1$ nous permet de conclure que la valeur minimale est obtenue pour $Z = 1$, c'est-à-dire $(\omega_1)_{opt}$. La figure 2.21 représente la valeur de $K(Z, \omega_0, T_e, m, k)$, (2.57) en fonction de Z pour des nombres différents de k échantillons. Les autres paramètres sont les mêmes que ceux utilisés dans le paragraphe précédent. En guise de conclusion, nous pouvons affirmer qu'en étudiant l'influence du facteur d'oubli proposé dans l'algorithme des moindres carrées récursifs et étudié dans le cas d'un filtre de Kalman-Bucy, nous validons l'estimateur classique où $\lambda = 1$. Pour une excitation sinusoïdale, la trajectoire d'entrée optimale garantissant un temps de convergence réduit est donnée par $Z_{opt} = 1$ correspondant à $(\omega_1)_{opt} = \omega_0$ où la variance de l'estimateur est minimisée. En outre, pour l'algorithme récursif, le nombre d'échantillons k contribue fortement à la minimisation de la variance. De ce fait, plus Z s'écarte

de 1, plus nous devenons sensible au nombre d'échantillons stockés k.

4.4 Estimation par la technique algébrique

Dans cet exemple nous considérons que $b_0 = 1$, $a_2 = 1$ où $n = 2$ et $m = 0$. Ainsi nous avons $a_1 = \theta_2$ et $a_2 = \theta_1$. Les deux paramètres θ_1 et θ_2 sont alors estimés à partir de la relation d'entrée sortie (2.44). En appliquant les différentes équations issues de (2.30), nous obtenons l'expression suivante qui fournie les relations entre les deux paramètres inconnus ($P = 2$) en fonction d'intégrales portant sur la sortie $x(t)$ et l'entrée $u(t)$:

$$\Delta P\,\hat{\Theta} = \Delta Q$$
$$\begin{pmatrix} F_{0,1}[y(t)] & F_{1,1}[y(t)] \\ F_{0,2}[y(t)] & F_{1,2}[y(t)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{2,1}[y(t)] + F_{0,1}[u(t)] \\ -F_{2,2}[y(t)] + F_{0,2}[u(t)] \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

où $F_{i,p}[f(t)] = \sum_{j=2-i}^{2} \frac{c_{i,j} \int_0^t (t-\tau)^{3-i-j+p} (-\tau)^j f(\tau) d\tau}{(2n-i-j+p-1)!}$ et $c_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 \\ j \end{pmatrix} \frac{i!}{(i+j-2)!}$. Si ΔP est inversible, alors une estimation de Θ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \Delta P^{-1}\,\Delta Q. \tag{2.59}$$

5 Simulations et analyse

Nous considérons le système mécanique modélisé par l'équation de mouvement décrite en (2.44). Soit $x(t)$ un signal de position altéré par un bruit blanc de moyenne nulle et une variance connue. Ce signal bruité est construit à l'aide d'une séquence de variables aléatoires *via* l'instruction *awgn* dans le package Matlab qui permet d'ajouter un bruit blanc gaussien au vecteur initial $x(t)$. La période d'acquisition des k échantillons disponibles, notée T_e, est fixée à 1 ms. Le niveau de bruit est mesuré par le rapport signal sur bruit et est exprimé en dB, avec $\text{SNR} = 10\,log_{10}\left(\frac{\sum_k |x(t_k)|^2}{\sum_k |\rho(t_k)|^2}\right)$. L'excitation du système consiste en une entrée sinusoïdale de la forme $u(t) = A_1 sin(\omega_1 t)$. On peut écrire alors :

$$\ddot{x}(t) + \theta_1 \dot{x}(t) + \theta_2 x(t) = A_1 sin(\omega_1 t). \tag{2.60}$$

Les paramètres de simulation sont fixés tel que, le coefficient d'amortissement $\zeta = 0.1$, la fréquence modale f_0 est égale à 10 Hz et la masse de la charge $M = 10$ Kg. Dans les paragraphes qui suivent, nous comparons la robustesse du filtre de Kalman-Bucy et l'estimateur algébrique concernant l'estimation de la fréquence naturelle du système faiblement amorti. La figure 2.22 démontre l'influence de l'amplitude A_1 de l'entrée sinusoïdale sur l'estimateur de Kalman-Bucy en concordance avec la théorie développée pour différentes valeurs choisies. En effet, dans le paragraphe § 4.3.1, nous montrons que la minimisation de la variance de l'estimateur (2.55) dépend aussi de l'amplitude A_1. Par ailleurs, plus l'amplitude est importante, plus la variance est minimale. Les simulations sont effectuées pour un SNR infini et un rapport $Z = 1$. Certes, cette amplitude dépend essentiellement des caractéristiques de l'actionneur. Cependant nous montrons qu'il est préférable d'exploiter le maximum d'énergie disponible.

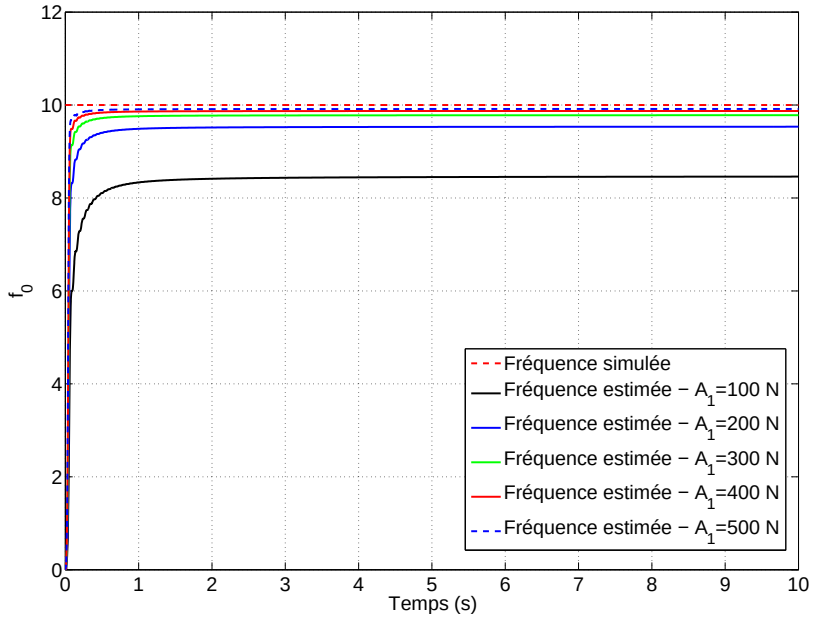


FIGURE 2.22: Influence de l'amplitude A_1 sur l'estimation paramétrique par le filtre de Kalman-Bucy

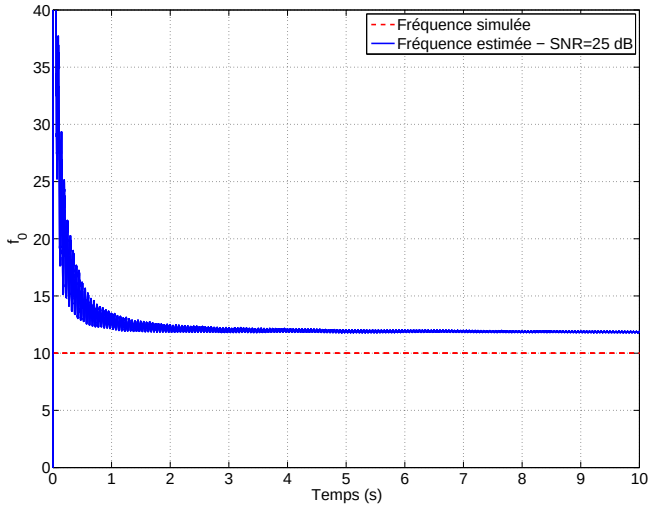
5.1 Etude comparative et analyse des performances

Afin de comparer les performances de la méthode algébrique et l'estimateur récursif, nous générons des simulations numériques avec différents niveaux de bruits permettant d'illustrer la robustesse des estimateurs. Ces estimations sont menées autour de deux grandeurs importantes qui témoignent de leur robustesse, à savoir le rapport signal sur bruit SNR et le rapport $Z = \frac{\omega_1}{\omega_0}$. Par application des résultats trouvés dans le paragraphe nous procédons à l'identification paramétrique récursive. La figure 2.23 montre l'estimation de la fréquence f_0 pour un SNR $\in \{25, 50, 80\}$ dB et A_1 = 300 N. Nous constatons que plus le niveau de bruit est important (rapport signal sur bruit minimale), plus l'écart d'estimation est grand. Par exemple, pour un SNR égale à 25 dB, l'erreur d'estimation relative après la convergence est égale à 19%. Le tableau 2.2 illustre l'erreur relative d'identification (écart) après la stabilisation de l'estimateur : L'approche algébrique est mise en oeuvre pour ces mêmes valeurs du SNR. Cette étude vise à

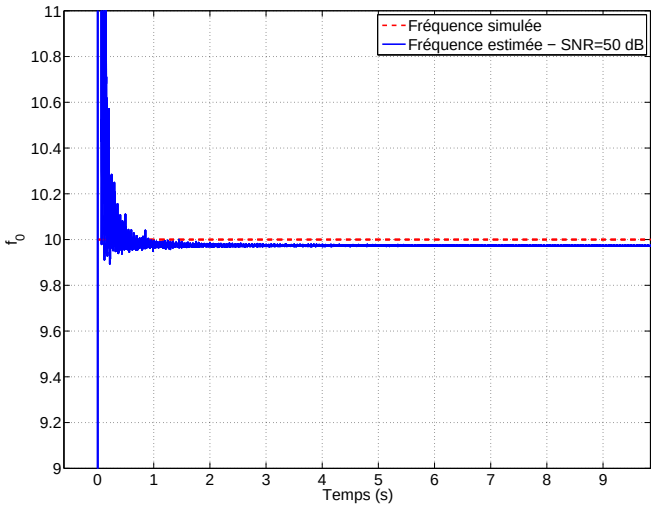
SNR (dB)	25	50	80
écart (%)	19	0.4	0.3
Temps de convergence/stabilisation (s)	2.5	1.2	0.8

TABLE 2.2: Performance de l'estimateur récursif de type Kalman-Bucy

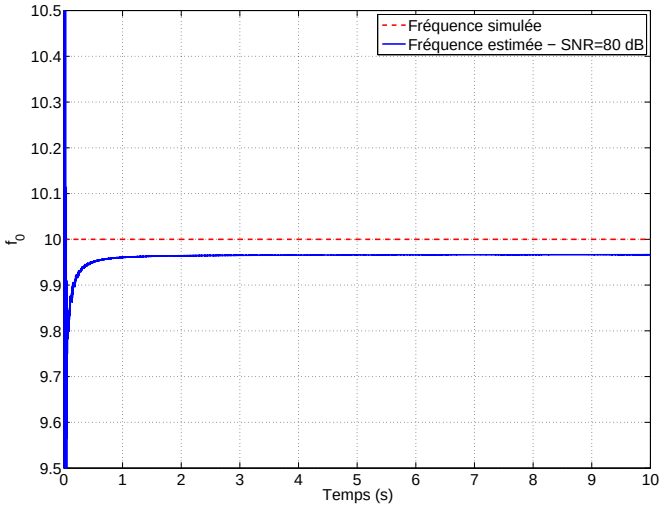
élaborer une comparaison entre ces deux approches tout en investiguant leurs performances en tenue de rejet de bruit, de rapidité de convergence et de stabilité. La figure 2.24 montre l'estimation de la fréquence f_0. Ainsi, le tableau 2.3 illustre ces performances.



(a) Estimation récursive pour SNR = 25 dB

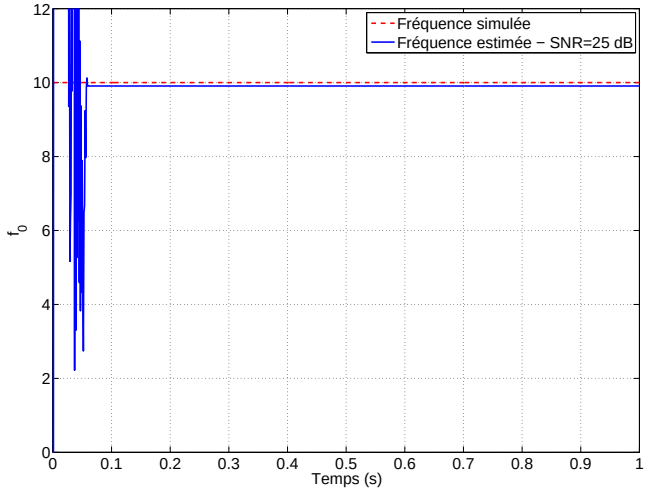


(b) Estimation récursive pour SNR = 50 dB

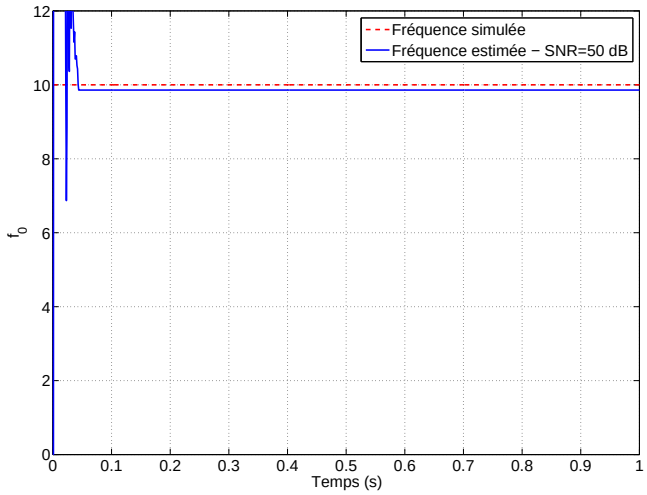


(c) Estimation récursive pour SNR = 80 dB

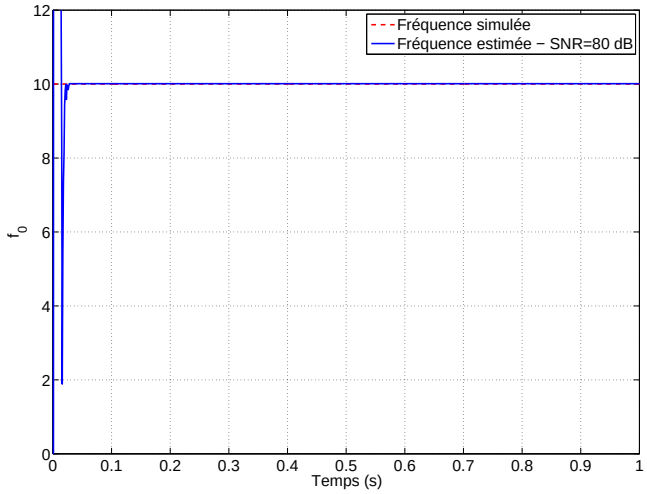
FIGURE 2.23: Estimation de la fréquence f_0 *via* le filtre de Kalman-Bucy pour différents SNR



(a) Estimation non asymptotique pour SNR = 25 dB



(b) Estimation non asymptotique pour SNR = 50 dB



(c) Estimation non asymptotique pour SNR = 80 dB

FIGURE 2.24: Estimation de la fréquence f_0 *via* l'approche algébrique pour différents SNR

SNR (dB)	25	50	80
écart (%)	1.3	1.4	1
Temps de convergence/stabilisation (s)	0.062	0.044	0.028

TABLE 2.3: Performance de l'estimateur basée sur l'approche algébrique

5.2 Motivation dans le choix de la méthode d'identification

La campagne de comparaison entre la technique d'estimation algébrique et le filtre de Kalman-Bucy montre que les deux approches n'admettent pas les mêmes propriétés de convergence. En effet, pour un niveau de bruit élevé (SNR = 25 dB), l'approche algébrique assure une erreur d'estimation 14 fois inférieure comparée à l'approche récursive. Cela est dû à un paramètre de réglage important qui est la taille de la fenêtre glissante. En effet, plus la taille de la fenêtre est importante, plus le bruit de mesure initial est filtré en le moyennant le long de l'intervalle d'observation. De plus, l'estimation algébrique est réalisée *via* une intégration des polynômes exprimés en fonction des entrée et des sortie du système, d'où l'aspect filtrage, contrairement à l'approche récursive qui nécessite la dérivation des signaux afin de mettre en oeuvre le régresseur. En outre, les graphes montrent que l'identification algébrique est beaucoup plus rapide. Pour un rapport bruit sur signal faible de 25 dB, l'estimateur algébrique est 40 fois plus rapide que le filtre de Kalman-Bucy. Ceci présente un avantage majeur pour une estimation paramétrique en ligne. Pour résumer, l'estimation de paramètres par le filtre de Kalman-Bucy est sensible au point de départ (paramètres initiaux) ce qui n'est pas le cas de l'approche algébrique. Par conséquent, en se basant sur ses avantages, nous nous intéressons, dans la suite de ce chapitre, à l'estimation des paramètres non stationnaires *via* l'approche non asymptotique.

5.3 Détection non asymptotique de la variation paramétrique

La détection de la variation paramétrique présente un intérêt important dans de nombreuses applications telles que les changements brusque des propriétés fréquentielles des signaux mesurés dans les processus naturels et industriels. Ainsi, il existe de nombreuses applications où certains paramètres du processus varient dans le temps en raison du comportement dynamique du système ou suite à un changement physique interne. Par exemple, l'inertie équivalente d'un bras du robot manipulateur peut subir une variation non négligeable lorsque la configuration change. Cela peut nécessiter une mise à jour rapide de la loi de commande en vue de s'adapter à de telles situations. La détection de ces changements est une problématique de recherche très intéressante. Selon le type d'application, la procédure d'estimation de la variation s'effectue une fois que l'acquisition ou l'enregistrement de la totalité du signal est achevée. Dans ce cas, on parle de l'estimation hors ligne. Cependant, cette estimation est requise au fur et à mesure que le protocole d'acquisition est actif. Nous parlons alors de détection en ligne. De nombreux travaux se sont consacrés à cette problématique dans sa forme générale. Nous pouvons nous référer à [Basseville and Nikiforov, 1993] pour une présentation introductive contenant de nombreux exemples d'applications et aussi à [Trapero et al., 2007], [Rezk et al., 2008], [Fliess et al., 2010] et [Tiganj et al., 2012] pour des études en lien avec nos travaux. En outre, nous nous appuyons sur la nature non-asymptotique et donc temps réel des estimateurs algébriques afin de détecter rapidement ces variations. Cette partie sera revisitée et utilisée dans la section 4 du chapitre 4.

Considérons un comportement vibratoire d'un système mécanique dont le mouvement peut être simplement décrit par l'équation suivante :

$$x(t) = Asin(\omega_0 t + \phi), \tag{2.61}$$

où $A, \omega_0 = 2\pi f_0$ et ϕ désignent respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase des vibrations induites. Ce signal est solution de (2.31) où $\zeta = 0$.

5.3.1 Détection du changement brusque de fréquence

Nous simulons une variation de la fréquence f_0 dans la plage {5, 10, 18} Hz. Cette variation consiste à un saut de la fréquence propre du signal $x(t)$ après une durée finie. Bien que l'estimateur algébrique soit développé initialement pour des systèmes LTI avec coefficients stationnaires, nous exploitons ici son caractère non asymptotique où nous disposons d'un réglage lié à la taille de la fenêtre glissante T_f. Si T_f est suffisamment petit, nous pouvons garantir une convergence plus rapide. Néanmoins, il faut toujours trouver un compromis entre sa taille et l'effet du bruit de mesure sur l'estimation. En outre, En effet, plus la taille de fenêtre est grande, plus l'estimateur devient robuste aux signaux bruités. L'estimation de la pulsation propre ω_0 est alors donnée dans le domaine temporel par l'estimateur (2.33). Dans le cas d'une fenêtre glissante il s'exprime comme (2.42). Des singularités peuvent apparaître notamment quand la stabilisation de (2.42) est obtenue. Dans ce cas, la pulsation est alors indéterminée. L'estimation par la médiane évite alors cette situation.

Afin d'étudier la robustesse de la méthode algébrique vis à vis de la détection de la variation paramétrique, nous réalisons plusieurs simulations numériques. Nous centrons notre attention autour des quantités tels que : le rapport signal-sur-bruit(SNR), la taille de la fenêtre d'estimation T_f et la variance des estimations obtenues. Le signal $x(t)$ initialement non bruité est donné par la figure 2.25. La longueur du signal est de 15 secondes et la fréquence d'acquisition est fixée à 1000 Hz, soit 15000 échantillons. La méthode de Simpson est utilisée pour discrétiser les intégrales dans (2.42). Un aperçu sur le contenu fréquentiel du signal figure dans le graphe 2.26. L'estimateur algébrique (2.42) est programmé en MATLAB. Ainsi, l'équation (2.42) est implémenté avec un pas fixe. Le pas dans ce cas est alors égale à la période d'échantillonnage T_e utilisée pour l'acquisition des données c'est à dire 1 ms. Par conséquent, la variable $\omega_0(t)$ notée $\omega_0[nT_e] = \omega_0[n]$, est obtenue en évaluant (2.42) en $t_n = nT_e$, $n = 1, 2, ...$ Notons que le processus d'estimation paramétrique opère sur une fenêtre d'intégration glissante en vue d'obtenir une estimation à caractère *"temps réel"*. La figure 2.27 illustre les résultats de la simulation pour une estimation de la fréquence $\hat{f}_0$ dans le cas où le signal $x(t)$ n'est pas bruité. Ainsi, la taille minimale de la fenêtre glissante d'intégration garantissant une estimation propre de la fréquence est égale à 8 échantillons soit 8 ms après la mise en route de l'estimateur. Nous montrons que pour cette valeur de T_f l'erreur d'estimation paramétrique ne dépasse pas 0.24 %. Pour avoir une idée sur la performance de la méthode algébrique comparée à d'autres approches non paramétrique standard, nous comparons nos résultats à ceux obtenus par une transformée de Fourier à court terme ou transformée de Fourier locale (en anglais Short-Time Fourier Transform "*STFT*"). Nous avons appliqué la STFT sur le signal $x(t)$ où nous retrouvons que la taille de la fenêtre glissante permettant de générer des résultats corrects est de 400 échantillons (Cf.

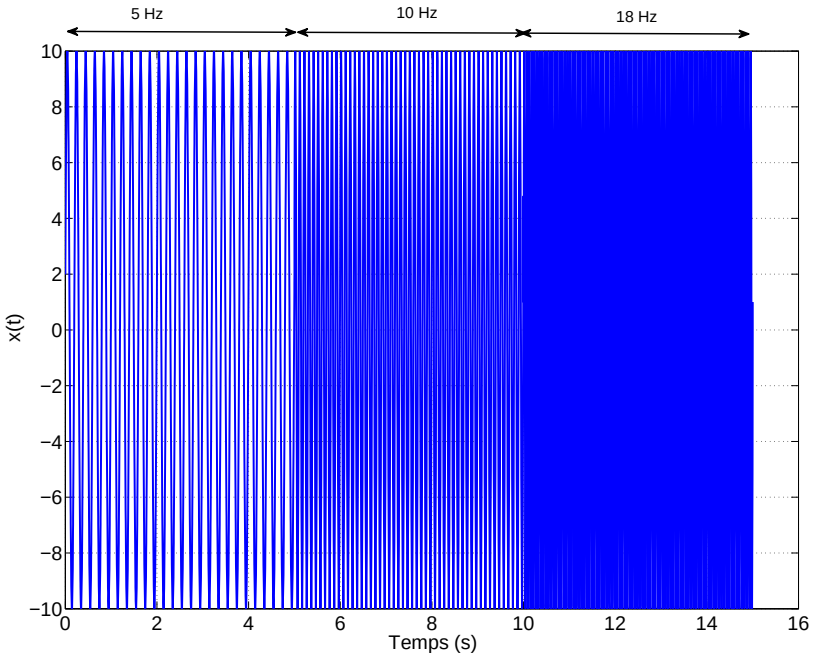


FIGURE 2.25: Signal composé de trois séquences consécutives et pour f_0 variable

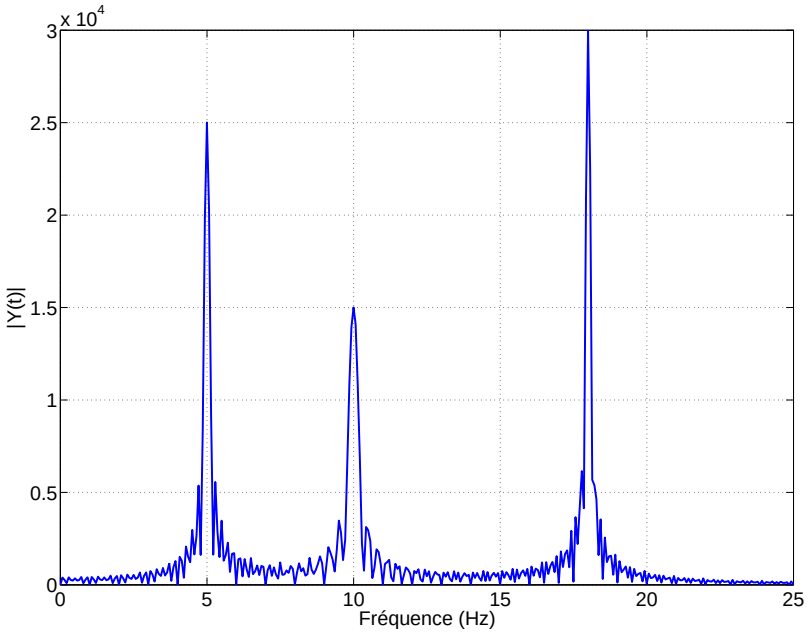


FIGURE 2.26: Transformée de Fourier de $x(t)$

figure 2.28). L'approche algébrique est donc plus efficace dans le cas d'estimations en ligne. Nous analysons maintenant l'influence du bruit appliqué au signal sinusoïdal sur la robustesse de l'estimateur vis-à-vis du SNR. Nous ajoutons un bruit blanc gaussien au signal $x(t)$ avec un rapport signal sur bruit $\in \{10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 50\}$ dB. Soient $\hat{f}_{0_1}$, $\hat{f}_{0_2}$ et $\hat{f}_{0_3}$ les fréquences naturelles identifiées pour les trois intervalles. La figure 2.29 montre un exemple de signal brut $x(t)$ de SNR égale à 10 dB. Ainsi, la figure 2.30 donne un aperçu sur la détection de la variation fréquentielle par les deux méthodes cités auparavant. Nous proposons une étude numérique

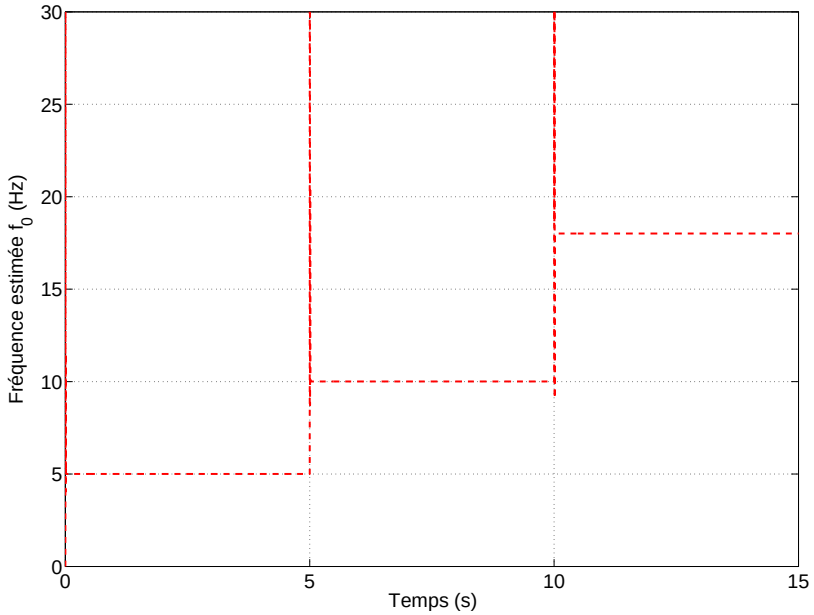


FIGURE 2.27: Détection de la variation fréquentielle pour un signal $x(t)$ non bruité

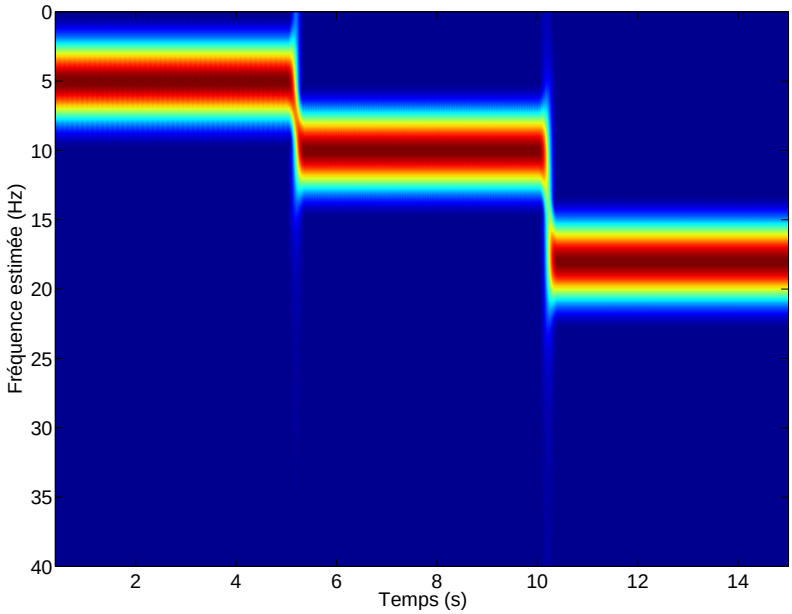


FIGURE 2.28: Spectrogramme de $x(t)$ non bruité

empirique permettant de donner la longueur de la fenêtre glissante en fonction du niveau du bruit du signal afin de garantir un seuil de précision demandé, basé sur l'erreur :

$$PAE(100\%) = 100 * \frac{|\hat{\omega}_0 - \omega_0|}{\omega_0}. \tag{2.62}$$

Nous constatons que l'approche algébrique offre une estimation de f_0 pour une fenêtre glissante de 72 échantillons garantissant ainsi une erreur d'estimation inférieure à 5 %. Pour garantir

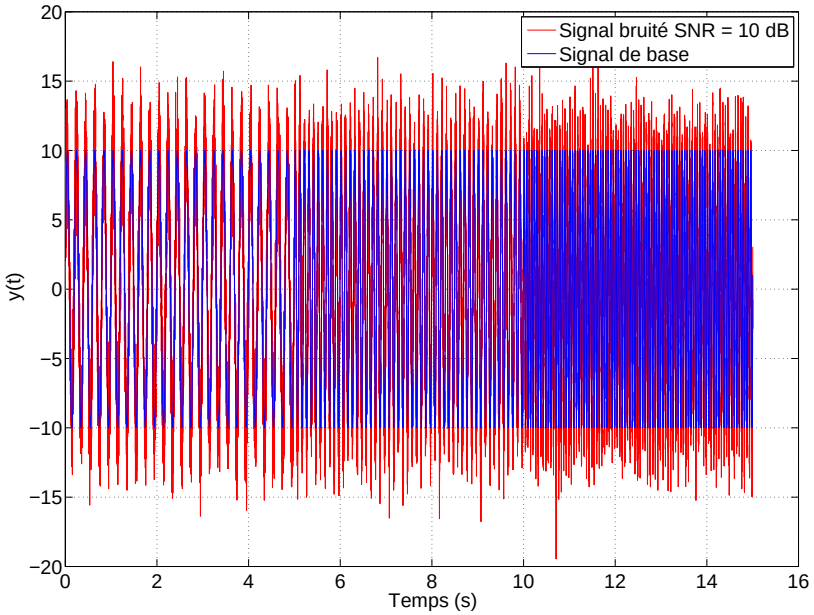


FIGURE 2.29: $x(t)$ bruité avec un SNR = 10 dB

une estimation à $\pm$ 3 %, 80 échantillons sont nécessaires. L'approche non paramétrique permet une estimation correcte du saut fréquentiel seulement après 400 échantillons. L'estimation algébrique est non biaisée et elle est peu sensible à un niveau élevé de bruit. Ceci présente un avantage majeur. La figure 2.31(a) présente une étude réalisée sur les performances de

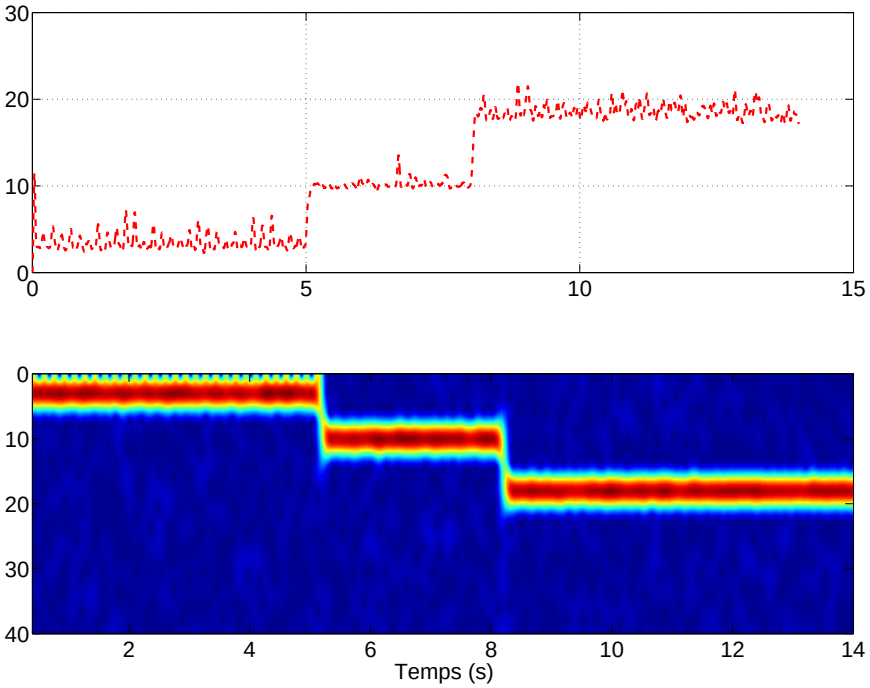


FIGURE 2.30: Estimation algébrique de la variation fréquentiel pour $x(t)$ bruité avec un SNR = 10 dB (en haut). Spectrogramme de la STFT (en bas).

l'estimateur algébrique dans un environnement bruité. Ainsi, pour chaque niveau de bruit nous présentons la valeur de $\hat{f}_{0_i}$, $i = 1, 2, 3$ pour chaque palier en fonction du SNR. Tandis que la figure 2.31(b) illustre la taille de la fenêtre glissante adéquate pour une erreur d'estimation inférieure respectivement à 5 % et 3 % . Ceci montre que plus le niveau de bruit est grand, plus on a besoin d'une taille de fenêtre glissante plus importante permettant de jouer le rôle d'un filtre moyenneur. Ceci se transpose aussi pour une précision de l'ordre de 3 %. Nous donnons alors la taille de fenêtre d'estimation minimale en fonction du niveau de bruit.

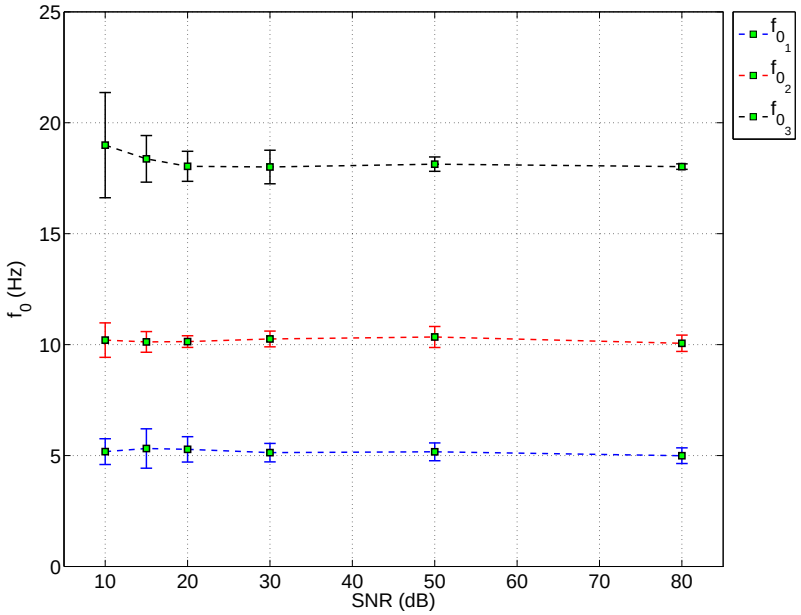
L'approche algébrique basée sur le calcul opérationnel permet une estimation robuste et rapide. Le caractère non-asymptotique permet d'estimer le paramètre inconnu en temps fini. Ce temps dépend du niveau de bruit du signal. Les expériences montrent que l'estimation après un changement brusque de la fréquence nécessite une taille de la fenêtre glissante de l'ordre de 71 échantillons pour une période d'échantillonnage de 1 ms et un SNR égale à 10 dB. Cette méthode est donc très intéressante comparativement aux approches non paramétriques telles que la STFT. De plus, il n'est pas nécessaire de régler des paramètres extérieurs comme un gain par exemple, ce qui facilite l'implantation.

5.3.2 Vers la détection d'une variation linéaire de la fréquence

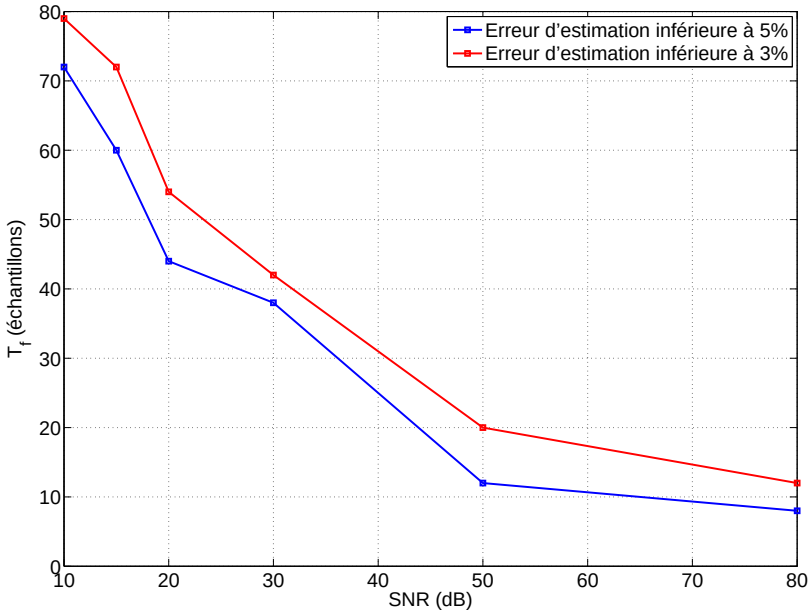
Dans le paragraphe § 5.3.1 nous avons considéré une variation rapide et discontinue de la fréquence. Dans cette section nous nous intéressons plutôt à une variation paramétrique lente où la variation fréquentielle est décrite par une fonction linéaire dépendante du temps. L'estimation de cette de variation est utile dans le cas de nombreuses applications en traitement du signal ou pour l'identification de processus. Nous pouvons citer par exemple le cas des robots cartésien [Colas, 2007] où l'évolution de la fréquence du mode de déformation principal des axes X et Y varie linéairement en fonction de la position du bras Z mobile. De ce fait, cette évolution doit être rapidement estimée afin d'anticiper le contrôle vibratoire adéquat en vue de minimiser les oscillations causées au cours et en fin de mouvement [Béarée and Olabi, 2013]. Une autre application concerne une variation selon un signal de type "Chirp linéaire" où la fréquence dépend linéairement du temps. Ce type de signal est classiquement employé pour l'identification de la fonction de réponse fréquentielle d'un processus. Il s'exprime de la forme suivante :

$$x(t) = A\ sin\Big(2\pi\ f_1\ t + \pi\ \frac{(f_2 - f_1)}{T} t^2\Big), \tag{2.63}$$

où f_1 est égale à 3 Hz et f_2 est égale à 18 Hz. La fréquence évolue linéairement en fonction du temps entre 3 et 18 Hz (Cf. figure 2.32). L'estimateur de fréquence donné par (2.42) est appliqué à $x(t)$ afin d'estimer la variation paramétrique du sinus. La période d'échantillonnage est égale à 1 ms et la taille de la fenêtre est de 28 échantillons. Cette dernière doit être strictement inférieure à la première fréquence du spectre (3 Hz). La figure 2.33 donne un aperçu de l'estimation non asymptotique de cette variation fréquentielle. La figure 2.34 illustre l'erreur d'estimation fréquentielle. Bien que l'estimation présente une erreur n'excédant pas 3%, cette courbe d'erreur montre des discontinuités reflétant les artefacts numériques dus au caractère rationnel de l'estimateur. Ces simulations montrent l'utilité de l'estimation algébrique pour les systèmes à paramètres non stationnaires. Comme l'expérience le montre, une estimation temps réel est possible pour des variations paramétriques linéaires.



(a) Valeur médiane de l'estimation des fréquences naturelles pour les trois niveaux pour différents SNR en dB. La barre verticale désigne la déviation standard



(b) Taille de la fenêtre glissante en fonction du niveau de bruit

FIGURE 2.31: Etude de la robustesse de l'approche algébrique vis-à-vis du bruit de mesure

6 Conclusion

Ce chapitre concerne l'étude de l'estimation paramétrique d'un modèle d'axe de manipulateurs industriels où le processus est de type LTI. Nous donnons dans le cas des estimateurs algébrique, une nouvelle identification au sens de la médiane. Nous comparons ensuite ces estimateurs au filtre de Kalman-Bucy. Nous montrons que cette estimation est plus robuste et

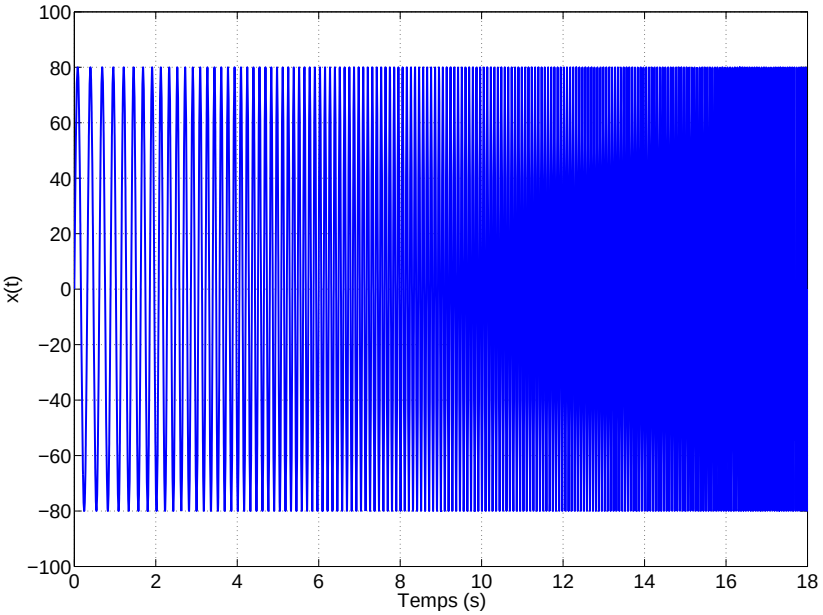


FIGURE 2.32: Signal de type Chirp dont la fréquence varie linéairement entre 3 et 18 Hz

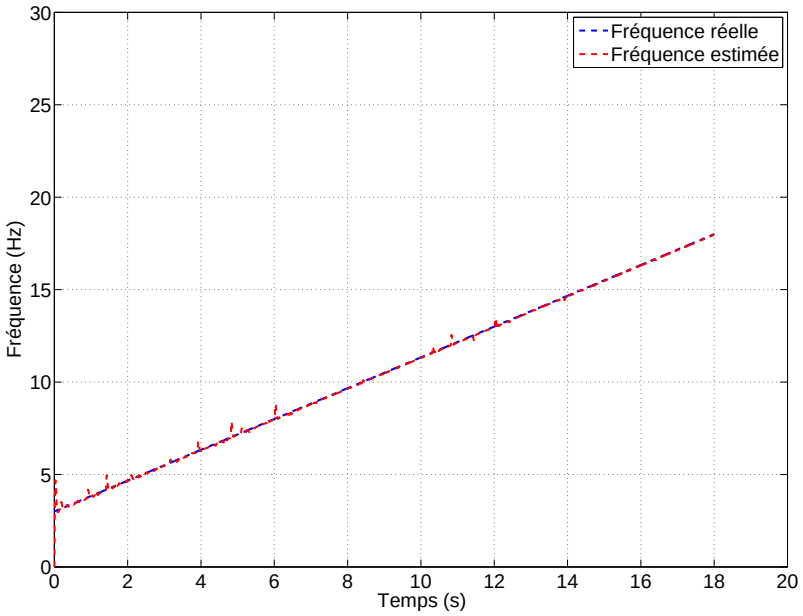


FIGURE 2.33: Estimation de la variation fréquentielle linéaire par la méthode algébrique

permet de qualifier le caractère non asymptotique de ces techniques. Une analyse de la variance de l'estimateur de Kalman-Bucy permet de bien choisir les paramètres adéquats de l'entrée sinusoïdale d'excitation à savoir l'amplitude et le rapport de la pulsation propre du système sur la pulsation de l'excitation. Des simulations montrent que l'approche algébrique présente des bonnes propriétés de robustesse par rapport aux bruits et une très bonne rapidité de convergence. Nous nous intéressons ensuite à l'estimation de paramètres variant linéairement ou brusquement. Nous montrons que l'approche algébrique non asymptotique, permet d'estimer

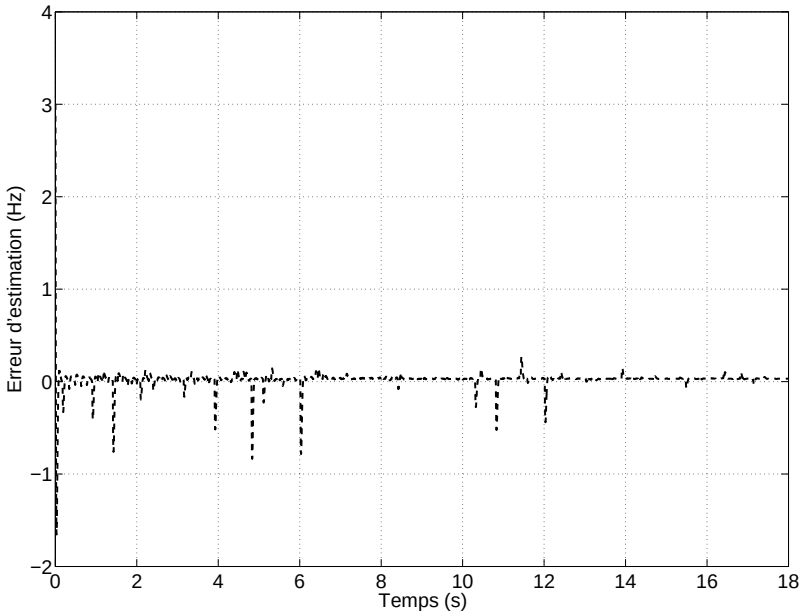


FIGURE 2.34: Erreur d'estimation de la variation fréquentielle linéaire

cette variation paramétrique en un temps fini *via* une fenêtre glissante. Nous proposons dans les chapitres suivants de l'appliquer à l'estimation des paramètres du modèle d'axe d'un système robotisé.

Chapitre 3

Etude de l'influence des phénomènes dynamiques sur un axe d'un robot industriel

Sommaire

1 Introduction . . . 80

2 Constat expérimental du comportement dynamique d'un axe de robot et proposition d'un modèle représentatif . . . 80

2.1 Axe étudié et moyens de mesures . . . 80

2.2 Développement du protocole d'essai . . . 84

2.3 Mise en évidence des phénomènes vibratoires . . . 86

3 Estimation des effets associés à la gravité . . . 93

4 Estimation des forces de frottements . . . 95

4.1 Caractérisation du couple de frottement sec . . . 96

4.2 Influence du frottement en zone de pré-glissements sur la précision statique du robot . . . 98

4.3 Estimation du couple de frottement total . . . 99

5 Estimation du moment d'inertie du bras . . . 106

6 Evaluation expérimentale du modèle dynamique rigide . . . 107

6.1 Validation par estimation séquentielle des paramètres physiques . . . 107

6.2 Validation par une estimation simultanée des paramètres . . . 110

7 Intégration du comportement vibratoire de l'axe . . . 111

7.1 Modèle générique de souplesse prépondérante . . . 111

7.2 Analyse expérimentale des phénomènes vibratoires . . . 111

7.3 Estimation paramétrique expérimentale . . . 113

7.4 Validation temporelle du modèle dynamique souple . . . 121

8 Bilan sur la compréhension des phénomènes physiques et la modélisation générique d'un axe souple . . . 122

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer un modèle d'axe de robot industriel représentatif du comportement dynamique constaté expérimentalement. Ce modèle sera notamment exploité dans le chapitre 4 afin d'améliorer les performances de la commande du système.

La démarche de modélisation mise en oeuvre intègre les principaux phénomènes physiques mis en évidence et justifiés par des campagnes d'essais expérimentales. Ainsi, les effets de la gravité, des systèmes mécaniques de compensation associés et des forces de frottements sont naturellement incorporés. Dans un second temps, le modèle est augmenté afin d'y intégrer les phénomènes vibratoires influençant le comportement dynamique de la charge.

De façon concomitante, l'estimation et l'identification des paramètres du modèle proposé sont au cœurs de ce chapitre. Des algorithmes d'estimation non-asymptotiques sont notamment mis en œuvre afin de permettre une évaluation des fréquences propres perturbant la dynamique de l'axe. L'intérêt de la mise en œuvre de ce type de méthode d'estimation réside dans la rapidité d'obtention des paramètres recherchés. Ce dernier point, illustré par des résultats expérimentaux, permet d'envisager une implantation de ces estimateurs en temps-réel et donc un suivi et une réaction rapide de la commande aux variations paramétriques inhérentes à la structure sérielle du robot étudié.

2 Constat expérimental du comportement dynamique d'un axe de robot et proposition d'un modèle représentatif

2.1 Axe étudié et moyens de mesures

2.1.1 Axe du robot considéré

Dans ce chapitre, l'axe 2 du robot démonstrateur est étudié. Cet axe présente tous les phénomènes physiques classiques contribuants à la dynamique. Il est soumis de plus à l'action d'un système mécanique de compensation de gravité. Dans le cas général, l'importance des couples de gravité obligent le constructeur à utiliser des actionneurs puissants ou/et des systèmes de réduction surdimensionnés sur les corps les plus sollicités [Wongratanaphisan and Chew, 2002]. Afin de limiter ce problème, les manipulateurs sont équipés d'un système d'équilibrage pour compenser les couples dus à la gravité. Dans le cas du robot Stäubli RX 170B, le couple de gravité maximum que peut subir l'axe 2 est de 2060 N.m, représentant la charge maximale lorsque les axes 2 et 3 sont alignés. L'axe 2 est équipé d'un système de compensation mécanique à équilibrage à ressorts (Cf. figure 3.1). Ce système est composé de 4 ressorts dont la longueur varie non-linéairement en fonction de l'angle de rotation. Ces ressorts de compensation génèrent un couple d'équilibrage s'opposant au couple généré par le poids des composants du robot situés en aval de cet axe : le bras 3 muni de son contrepoids, le bras 4 et le poignet. Nous définissons le couple résiduel comme étant la différence entre le couple généré par la gravité et le couple fourni par le système de compensation. En outre, la longueur du bras de levier de cet

axe, contribue majoritairement à la propagation des défauts articulaires vers l'organe terminal. A partir du présent paragraphe, seul l'axe 2 du RX170 B est étudié. Lors des divers essais statiques et dynamiques, les autres axes sont bloqués sous asservissement dans une position : $\theta_1 = -90^\circ$, $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$.

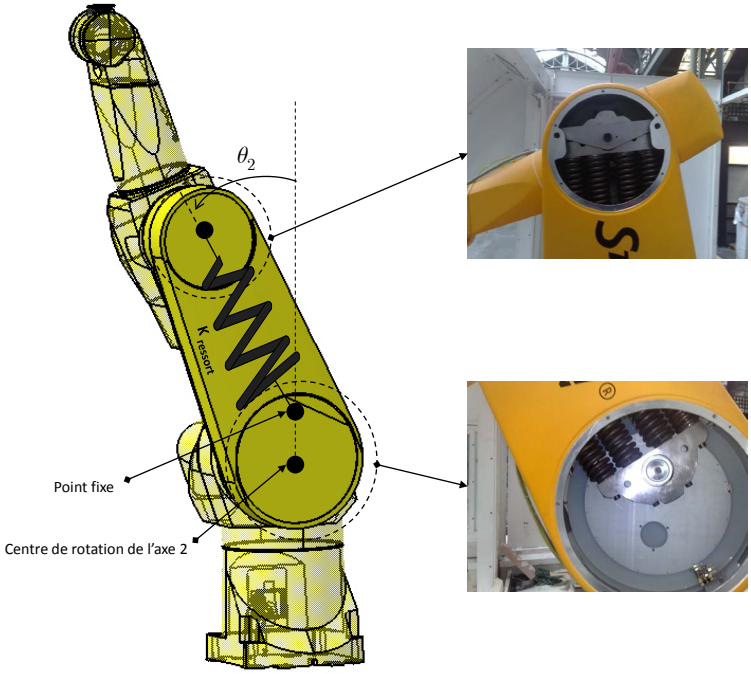


FIGURE 3.1: Système de compensation de la gravité par ressorts de traction

2.1.2 Moyens de mesure associés

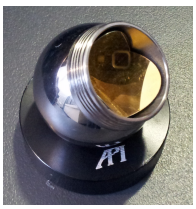
Les moyens de mesures employés se divisent en deux catégories : internes et externes. Les mesures internes sont directement fournis par la baie de contrôle du robot. L'environnement logiciel robotique VAL3 de Stäubli [†] fournit les positions articulaires du moteur θ_m, la vitesse angulaire $\dot{\theta}_m$ ainsi que le couple moteur noté τ_m. Ce couple est en réalité une image du courant circulant dans le rotor noté i_m tandis que les retours en position et en vitesse sont mesurés par des codeurs montés directement sur l'axe de rotation du rotor en amont de la chaîne de transmission, comme le montre la figure 3.2 dans le cas d'un robot ABB IRB6600. L'option "movetraj" permet d'injecter des trajectoires programmées par l'utilisateur qui sont alors interpolées par la baie de commande du robot. Il existe deux façons de planifier des mouvements destinés au manipulateur : soit une programmation directe à travers le langage de programmation VAL3 ou bien à travers un planificateur de trajectoire dédié. Dans notre cas, la majorité des lois de mouvements sont programmées sous Matlab *via* un planificateur où des algorithmes de définition des lois de mouvements sont développés au sein de notre équipe de recherche. Pour plus d'informations, nous renvoyons à l'annexe 2 de [Béarée, 2005]. Les lois générées sont introduites directement dans le contrôleur du robot. Notons que la période d'acquisition des mesures et de l'échantillonnage de la commande est de 4 ms.

†. http ://www.staubli.com/fr/robotique/logiciels-robots/staeubli-robotics-controls/langage-val3/

FIGURE 3.2: Exemple d'un codeur moteur du robot ABB IRB6600

Pour mesurer les défauts de la chaîne de transmission qui ne sont pratiquement pas "visibles" par les asservissements internes, nous proposons d'utiliser un Laser Tracker de type API T3 TrackerCal. Ce système de mesure tridimensionnel est composé d'un laser interférométrique dont le faisceau est orienté suivant deux directions par un miroir piloté par deux moteurs perpendiculaires. Le point mesuré est matérialisé par un coin de cube. Les coordonnées cartésiennes du point mesuré sont obtenues à partir des coordonnées sphériques données par la mesure de distance de l'interféromètre et les mesures d'angles des codeurs des moteurs (Cf. figure 3.5). Ces coordonnées peuvent être mesurées en temps réel avec une fréquence d'échantillonnage maximale de 333 Hz. Le coin de cube est réalisé par trois miroirs plans inclus dans une sphère. Ces miroirs créent un coin de cube qui est situé au centre de la sphère. Il possède alors la propriété de renvoyer un faisceau parallèle au faisceau incident. Ce coin de cube peut être accroché *via* un support magnétique sur l'objet à mesurer, (Cf. figure 3.3(b)). Le seul impératif

(a) Tête articulée du Laser Tracker



(b) Rétroréflecteur sphérique

FIGURE 3.3: Laser Tracker API T3

est que le faisceau laser ne soit jamais coupé par un obstacle. La figure 3.4 montre l'installation expérimentale du dispositif de mesure externe. Le laser tracker est installé à environ 1.8 mètres du robot afin que son volume de mesure englobe le volume de travail du Stäubli RX 170B. La

précision statique et dynamique de mesure dépend de la distance entre le retroréflecteur et la tête articulée. La vitesse de poursuite maximale est de 4 m/s tandis que l'accélération du dispositif est supérieure à 2 g. Ceci permet une poursuite dynamique de la cible à vitesse élevée. Nous notons que la résolution angulaire du laser tracker est de $\pm$ 0.018 arc-secondes induisant une résolution du système de l'ordre de $0.1\mu m/m$. Nous désignons par α_1 l'angle de rotation

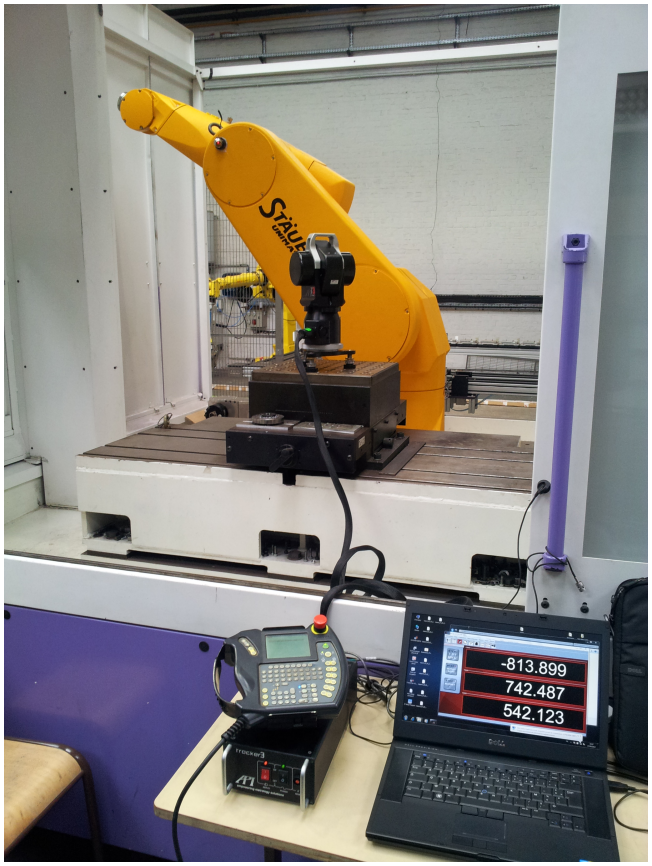


FIGURE 3.4: Installation expérimentale du dispositif de mesure Laser

que forme le premier moteur de la tête articulée du laser avec la verticale Z et α_2 l'angle de rotation du moteur 2 dans le plan (X,Y). La distance entre le retroréflecteur sphérique, placé sur le bras du robot, et l'émetteur du faisceau laser, comme illustré dans la figure 3.5 est appelée d. Les incertitudes de mesure angulaire $\delta\alpha_1$ et $\delta\alpha_2$ des codeurs des moteurs sont de l'ordre de $\pm$ 2 arc-secondes et induisent une incertitude globale de $3.5\mu m/m$. Tandis que l'incertitude sur δd de l'interférométre est de l'ordre de $\pm 10\mu m/m$ pour une distance inférieure à 5 mètres. Les coordonnées cartésiennes sont issues de ces coordonnées sphériques. L'incertitude de mesure dans l'espace cartésien est donc donnée par :

$$\begin{cases} \delta x = x\Big(d, (\alpha_1 + \delta\alpha_1), (\alpha_2 + \delta\alpha_2)\Big) - x\Big(d, \alpha_1, \alpha_2\Big), \\ \delta y = y\Big(d, (\alpha_1 + \delta\alpha_1), (\alpha_2 + \delta\alpha_2)\Big) - y\Big(d, \alpha_1, \alpha_2\Big), \\ \delta z = z\Big(d, (\alpha_1 + \delta\alpha_1)\Big) - z\Big(d, \alpha_1\Big). \end{cases} \tag{3.1}$$

Un développement en série de Taylor à l'ordre 1 en α_1 et α_2 permet de déterminer l'erreur

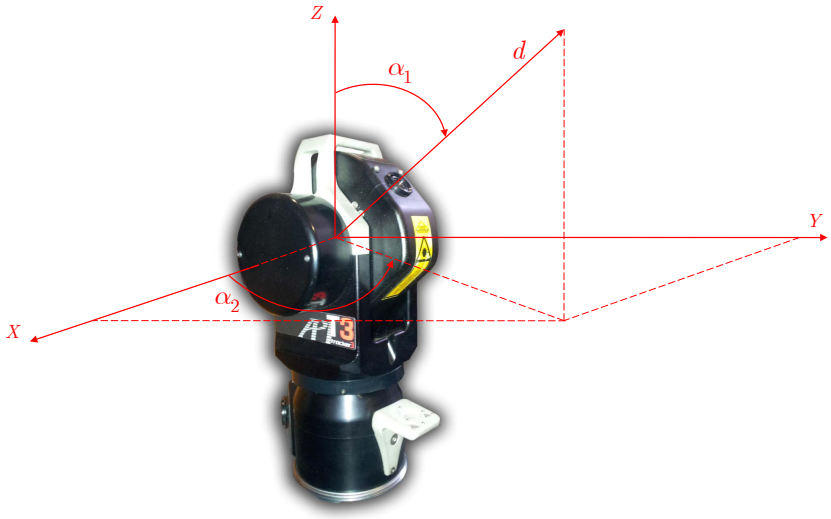


FIGURE 3.5: Système de coordonnée du Laser Tracker

d'approximation à l'ordre 1 des coordonnées :

$$\begin{cases} \delta x \simeq d\Big[cos(\alpha_1)cos(\alpha_2)\delta\alpha_1 - sin(\alpha_1)sin(\alpha_2)\delta\alpha_2\Big], \\ \delta y \simeq d\Big[cos(\alpha_1)sin(\alpha_2)\delta\alpha_1 + sin(\alpha_1)cos(\alpha_2)\delta\alpha_2\Big], \\ \delta z \simeq -dsin(\alpha_1)\delta\alpha_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Comme les erreurs relatives $\frac{|\delta x|}{d}$, $\frac{|\delta y|}{d}$ et $\frac{|\delta z|}{d}$ sont majorées par $\pm 15\mu m/m$, il vient que l'incertitude de mesure sur chaque coordonnée est majorée par $1.8 \times 15 = 27\mu m$. Nous faisons l'hypothèse que dans les conditions dynamiques d'utilisation du Tracker que cette majoration de précision reste identique.

La figure 3.6 illustre la structure de contrôle et de mesure d'un axe du robot industriel. Nous définissons ainsi la variable θ_m comme étant la position du moteur mesurée par le codeur interne et θ la position du bras mesuré par le laser tracker. Soit N le rapport de réduction de l'articulation qui est supposée idéale et sans jeux mécaniques. Admettant que θ_n est la position du rotor vue juste après l'étage de réduction, les relations entre le vecteur de position moteur θ_m, θ_n et ses dérivées successives sont exprimés comme suit :

$$\begin{cases} \theta_n = N^{-1}\theta_m, \\ \dot{\theta}_n = N^{-1}\dot{\theta}_m, \\ \ddot{\theta}_n = N^{-1}\ddot{\theta}_m, \end{cases} \tag{3.3}$$

où les estimations de la vitesse $\dot{\theta}_m$ et de l'accélération $\ddot{\theta}_m$ sont obtenues par une méthode aux différences centrées.

2.2 Développement du protocole d'essai

Les positions cartésiennes mesurées dans un repère déterminé par l'utilisateur sont converties en positions articulaires. Pour ne pas causer un retard entre la mesure codeur et celle

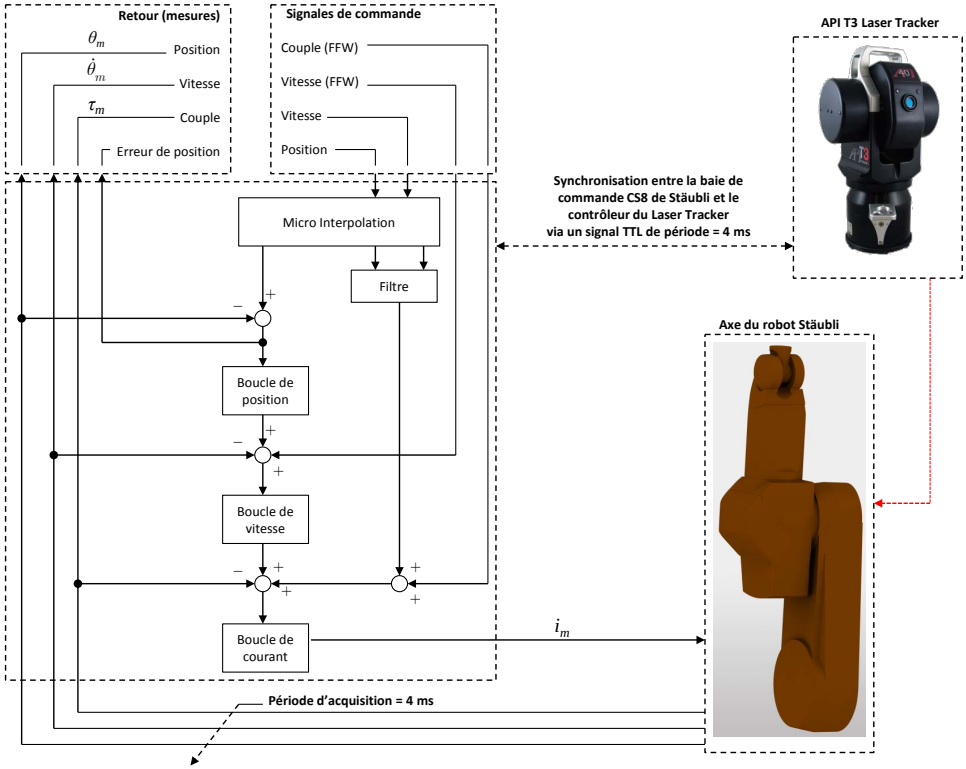


FIGURE 3.6: Structure du contrôle et de mesures d'un axe du robot Stäubli RX 170B

du laser lors de la rotation de l'axe, nous avons développé un protocole de synchronisation entre les deux mesures. La mesure du Tracker est déclenchée par un signal TTL émit par la baie CS8 de Stäubli. Le principe de fonctionnement consiste à générer un front montant qui est injecté vers la baie de commande du Laser Tracker au moment où le robot commence sa trajectoire. La synchronisation entre les deux horloges permet d'avoir une mesure temps réel du comportement dynamique de l'axe.

Les points mesurés lors de la rotation du bras du robot sont exprimés dans un repère interne au Laser Tracker et forment un arc de cercle imparfait. A partir des points observés, une approximation par un cercle au sens des moindres carrées est calculée en hors-ligne (Cf. figure 3.7). Pour extraire les positions articulaires du bras du robot à partir des mesures cartésiennes, nous construisons un repère local dont l'origine est donnée par le centre de rotation de l'axe. L'axe Z est alors porté par la normale au plan de ce cercle. Pour déterminer la direction de l'axe X de ce repère local, nous mesurons un point de référence en mettant l'axe du robot à sa position initiale i.e. $\theta_n = 0$. Une fois ce repère construit, nous projetons le nuage de points mesuré dans ce plan. A partir de ces points projetés, nous calculons une approximation de l'axe de rotation du bras 2. Les coordonnées cartésiennes des points mesurés sont ensuite converties en positions articulaires *via* l'utilisation de la fonction trigonométrique $atan2(y_i, x_i)$. La fonction $atan2$ est définie comme suit :

$$atan2(y,x) = \begin{cases} \varphi.sgn(y) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}.sgn(y) & x = 0 \\ (\pi - \varphi).sgn(y) & x < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

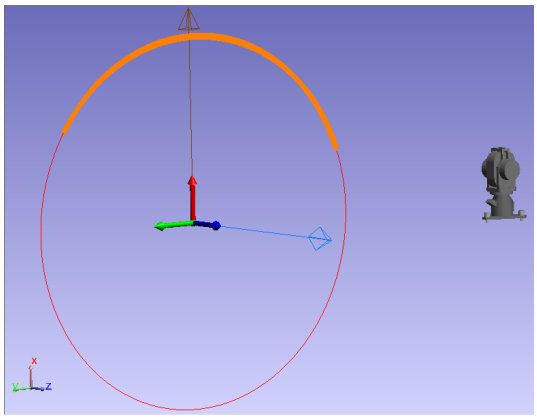


FIGURE 3.7: Mesure des positions du bras avec le Laser Tracker

où φ est l'angle compris dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ et sgn est la fonction signe. Elle permet, contrairement à la fonction *atan* (arc tangente) de déterminer l'angle de rotation sur $[-\pi, \pi]$ (Cf. figure 3.8).

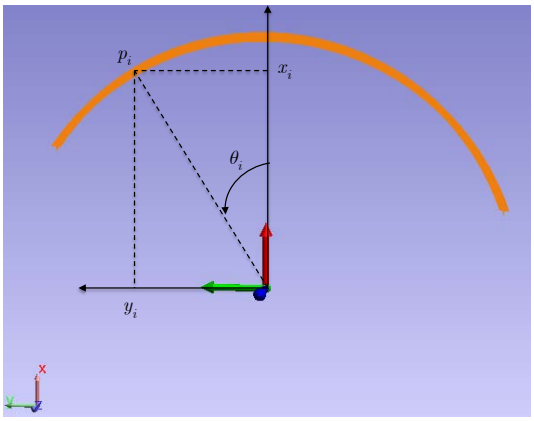


FIGURE 3.8: Conversion de la position cartésienne en position articulaire

2.3 Mise en évidence des phénomènes vibratoires

La figure 3.10 illustre des relevés expérimentaux des phénomènes vibratoires qui influencent le comportement dynamique de l'axe. La figure 3.10(a) présente la mesure des vitesses angulaires du moteur notée $\dot{\theta}_n$ après le réducteur et celle de la charge en bout d'axe notée $\dot{\theta}$. La figure 3.10(b) illustre la déformation axiale issue de la différence entre la position du bras et la position du moteur vue après l'étage de réduction. Dans cet essai, l'axe 2 du robot opère dans la plage de position entre 0° et 50° (Cf. figure 3.9) suite à une consigne en échelon de vitesse égale à 0.3 rad/s. Cette vitesse représente environ 15% de la vitesse maximale admissible de l'axe (2 rad/s). Les oscillations visibles confirment la présence de modes de déformations associés au système mécanique. Nous constatons aussi que les vibrations du bras sont 6 fois plus élevées que celles vues par le moteur. Sachant que le bras du robot est en position tendue (bras vertical) où tous les axes en amont de la deuxième articulation sont alignés, l'amplitude de cette déformation axiale de l'ordre de 5 centième de degré cause une erreur de positionnement dynamique du TCP d'environ 1.8 mm. Ce phénomène non vu et non géré par la commande industrielle a une influence, comme montré, qui ne peut être négligé sur la précision dynamique.

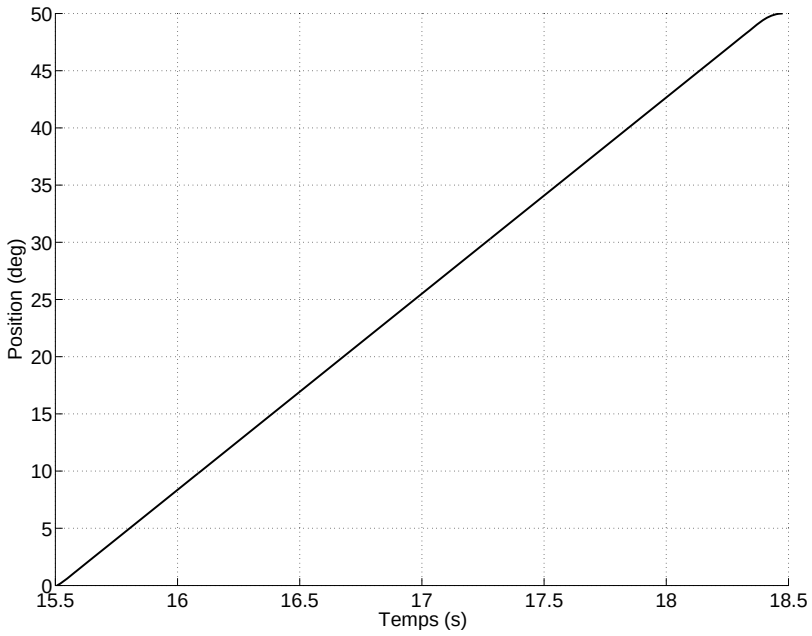


FIGURE 3.9: Variation de la position de l'axe durant le test

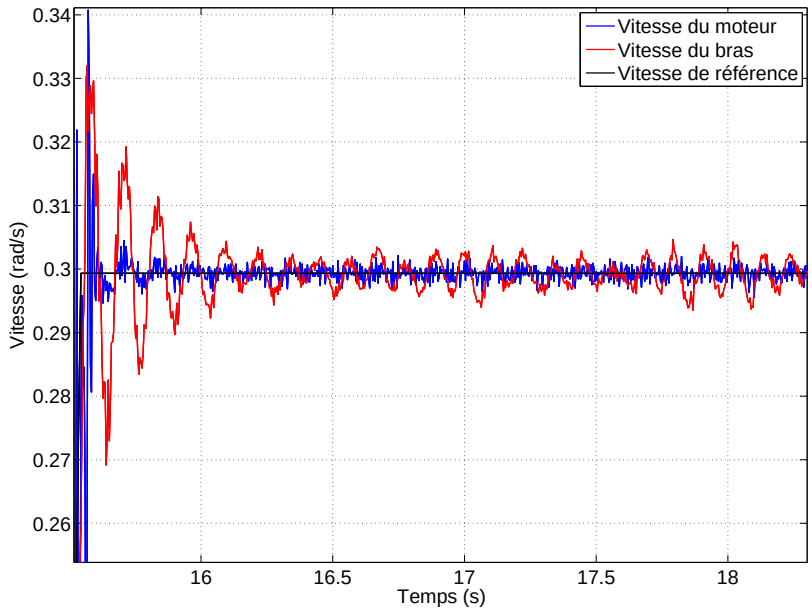
De façon générale, les problèmes vibratoires se posent pour des structures assemblées complexes pour lesquelles la description géométrique et matérielle est forcément assez simplifiée dont les liaisons sont supposées parfaites et le comportement est majoritairement linéaire. Ainsi, les déformées associées aux résonances sensibles dans la bande passante de la commande sont classiquement issues des éléments constituant la chaîne de transmission de mouvement.

En raison d'un rapport de réduction souvent élevée pour les robots manipulateurs ainsi que les éléments de transmission mécaniques, les excitations vibratoires induites par les couples moteurs et les perturbations dynamiques étaient jusqu'alors amoindries. Cependant, dans le cadre de la dynamique élevée, les fortes sollicitations au niveau d'un axe du robot (axes portés, support de broche) excitent les souplesses prépondérantes et par conséquent détériorent la précision dynamique du système.

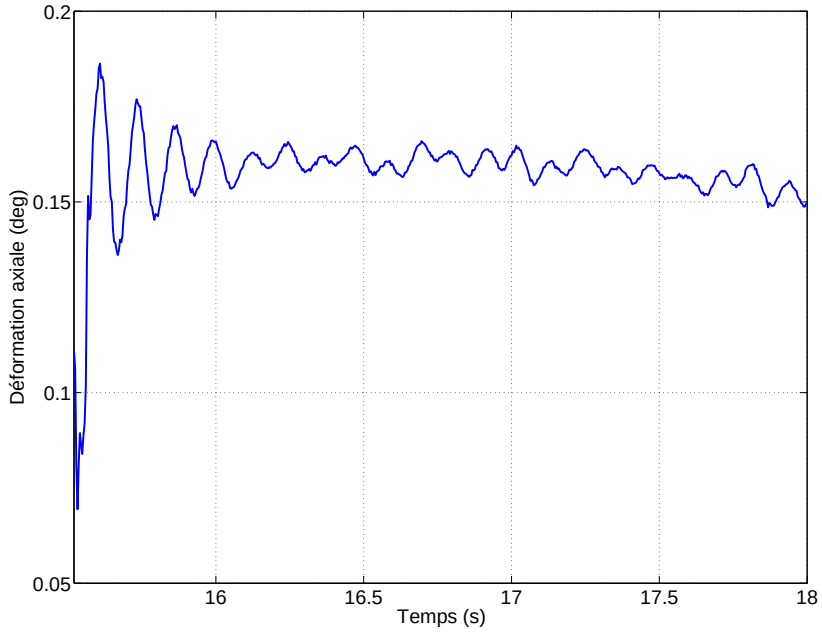
Actuellement, il est donc possible de distinguer deux familles de souplesses qui décrivent les modes de déformations dominants la réponse de l'axe [Ellis, 2000] :

- les souplesses structurelles (modes de bâti) situées en amont de l'actionneur ;
- les souplesses de transmission situées en aval de l'actionneur .

Ces phénomènes sont non vus et non gérés par la commande industrielle, mais dont l'influence sur la précision dynamique ne peut être négligée. La question qui se pose ainsi, c'est lequel parmi ces modes de déformation est le plus dominant en vue d'obtenir un modèle générique de souplesses d'axe mathématiquement non complexe. Pour répondre à cette problématique, nous investiguons par la suite la contribution de chaque élément constituant l'axe considéré tout en présentant les éléments mécaniques susceptibles d'être le siège de ces vibrations.



(a) Oscillation relevées au niveau des vitesses relatives au moteur et au bras de l'axe 2



(b) Déformation axiale mesurée

FIGURE 3.10: Relevés expérimentaux des phénomènes vibratoires

2.3.1 Contribution de la déformation des bras

Les carters de l'axe 2 sont susceptibles de se déformer. On peut alors estimer le premier mode du modèle du bras 2 (Cf. figure 3.11). Ce bras peut être considéré comme une poutre encastrée à une extrémité et libre de l'autre. Elle admet une masse m, une longueur L, un moment quadratique I et un module de Young E. Elle porte une charge qui est l'ensemble des masses des axes 3,4,5,6 notée M. Le premier mode de flexion de la poutre est calculé comme

suit, [Piersol and Paez, 2009] :

$$f_{poutre} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{L^3(M + \frac{33}{140}m)}} \tag{3.5}$$

Les caractéristiques de cette poutre équivalente sont illustrées dans le tableau 3.1. Le module de Young est donné par $E_{Alu} = 69.10^5 Pa$ et sa masse volumique $\rho_{Alu} = 27000\ Kg/m^3$. Le tableau

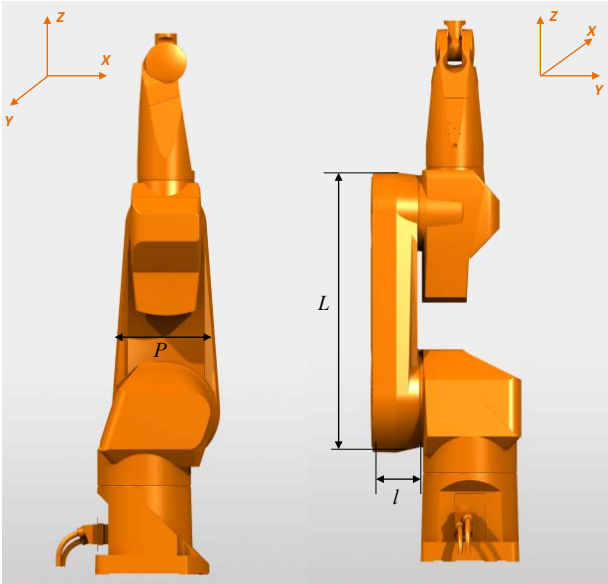


FIGURE 3.11: Caractérisation d'une poutre équivalente du bras 2

présente les dimensions permettant d'obtenir une bonne approximation de la fréquence du premier mode de vibration. Les fréquences cartésiennes de la déformation de la poutre sont

Dimensions	Moment quadratique	Fréquence
L = 850 mm	I_y =3.28 10^{-4} m^4 I_z = 1.12 10^{-4} m^4	f_y = 118.47 Hz f_z = 69.22 Hz
l = 221 mm		
P = 440 mm		
Épaisseur (Ep) = 10 mm		
$l^{'}$ = l - 2×Ep		
$P^{'}$ = P - 2×Ep		
m = ρ_{Alu}×(lP-$l^{'}P^{'}$)×L = 29.42 Kg		
$M_{3,4,5,6}$ = 192.6 Kg		

TABLE 3.1: Caractéristique de la poutre équivalente de l'axe 2

estimées autour de 69 Hz dans la direction de Z et 112.5 Hz dans la direction de Y ; elles sont au-delà du domaine de fréquence provoquant les vibrations observées (Cf. figure 3.12). Par conséquent, la structure de l'axe ne semble pas être à l'origine des déformations.

2.3.2 Contribution du système de compensation de gravité

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de l'influence des vibrations causées par les ressorts de compensation de gravité montés à l'intérieur du carter de l'axe 2. On notera

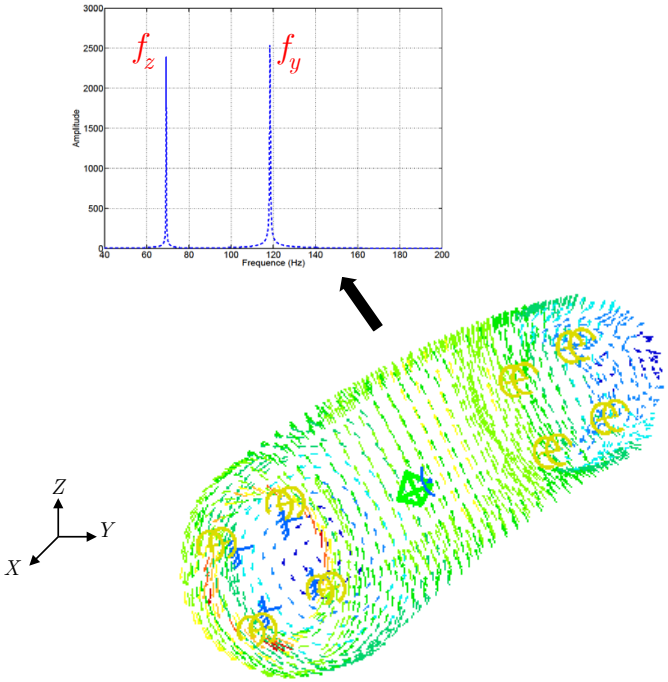


FIGURE 3.12: Analyse fréquentielle de la déformation de la structure

qu'un mouvement de torsion de l'axe dans la direction Y robot s'accompagne d'une flexion des ressorts. Ainsi, ces derniers peuvent également causer un mode de souplesse. Il est possible alors de calculer leur mode vibratoire à partir de la raideur globale de ces éléments de compensation de la gravité et la masse totale en aval donnée par le constructeur. La masse totale en aval de l'axe 2 est égale à 315.8 Kg tandis que la raideur équivalente des ressorts est égale à 129478 N.m. Par conséquent, la fréquence propre est estimée par

$$f_{ressort} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{ressort}}{m_{totale}}} = 3.22Hz. \tag{3.6}$$

Ce mode de déformation est au-deçà du domaine de fréquence provoquant les vibrations observées. En outre, les frottements estimés de l'axe et présentés dans le paragraphe §4 inhibent l'influence de ce mode. En effet, la fréquence associée et calculée dans (3.6) n'est pas responsable des oscillations. Cependant le couple résiduel de gravité admet un effet non négligeable sur le couple moteur de l'axe comme montré dans le paragraphe 3.

Pour conclure, la déformation structurelle et le système de compensation de gravité ne semblent pas être à l'origine des vibrations observées. Ce constat nous conduit, par élimination des effets, à l'hypothèse qui consiste à considérer que les oscillations sont induites par la souplesse des articulations. En conséquence, notre choix du modèle reposera sur celui le plus usité correspondant à un axe dont la souplesse est concentrée au niveau de l'articulation et soumis à un mode de transmission où la rigidité du bras est bien supérieure à celle de la chaîne de transmission.

2.3.3 Modèle générique d'axe à paramètres localisés

On rappelle ici les hypothèses de travail considérées dans cette section :

- La dynamique électrique des actionneurs est supposée négligeable devant la dynamique du système mécanique. La loi de mouvement est définie pour réaliser une commande en couple. La variable de commande dans ce cas est une accélération de référence pour le système étant donné que l'inertie est constante le long du mouvement réalisé ;
- L'influence des asservissements sur la déformation est considérée comme négligeable. La loi de mouvement est ainsi directement imposée en entrée du système mécanique ;
- La modélisation des phénomènes de flexibilité est limitée au domaine linéaire des souplesses articulaires. La flexibilité sera alors modélisée comme étant un système de transmission mécanique de type deux masses, ressort et amortisseur ;
- Les jeux mécaniques ne sont pas pris en compte. On suppose que les défauts induits par les défauts de transmission au niveau du réducteur sont majorés par ceux issus de la souplesse ;
- Le comportement du processus ne dépend que de la configuration du robot. Les paramètres de modélisation sont fonctions uniquement de la position des axes ;
- Les couplages inertiels entre le rotor et les parties tournantes de l'axe sont négligés. En effet, le rapport de réduction est assez élevé dans le cas d'un robot industriel.

La présence d'une souplesse d'articulation dans les transmissions entre les actionneurs et les bras a une grande influence sur la dynamique du robot. Cette souplesse peut permettre au manipulateur de s'adapter à son environnement pour la tâche qu'il a à accomplir. Cette propriété est intéressante pour l'utilisation de robots en vue d'opérations de perçage par exemple. Cette compliance d'instruction ne fait pas l'objet de notre étude. Comme ces souplesses articulaires ne sont pas mesurées, les déformations angulaires engendrent une imprécision de positionnement. Ce phénomène contribue alors à la dégradation de la précision du suivi de trajectoires. Ainsi, les prochains paragraphes sont principalement issus des travaux présentés dans [Oueslati et al., 2010] et [Oueslati et al., 2012].

Chaque liaison est commandée indépendamment par un servo-moteur à travers un étage de réduction. La constante du couple k_m est supposée fixe, tandis que dans la réalité elle peut varier en fonction de la vitesse angulaire du rotor. Cela est dû au fait que l'asservissement se comporte comme un filtre passe-bas pour les courants triphasés. Ainsi, il est supposé que cet effet ne se produit qu'à de très grandes vitesses angulaires, se rapprochant de la limite de vitesse maximale admissible. Le système de transmission de mouvement pour chaque axe du robot est décrit par la figure 3.13. Le couple délivré par le moteur de l'axe, noté τ, est une fonction du courant électrique i_m, de l'inertie du rotor J_m et de l'accélération angulaire du rotor $\ddot{\theta}_m$:

$$\tau = k_m i_m - J_m \ddot{\theta}_m. \tag{3.7}$$

Soit τ_f le couple représentant toutes pertes par frottements au niveau des étages de réduction. L'équation entrée-sortie de système de transmission du mouvement s'écrit alors :

$$N\left(k_m i_m - J_m \ddot{\theta}_m\right) - \tau_f = \mathcal{T}, \tag{3.8}$$

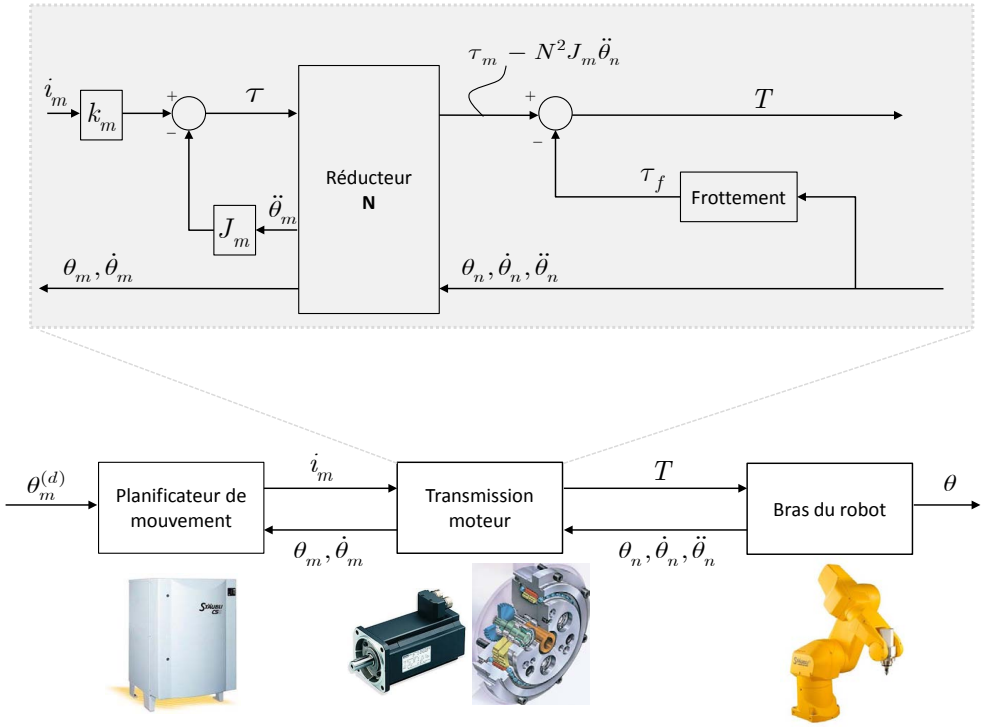


FIGURE 3.13: Schéma de principe du système de transmission

où $\mathcal{T}$ définit le vecteur des couples de sortie du réducteur au niveau du bras du robot. En tenant compte de (3.3), nous obtenons une expression du couple généré par la chaîne de transmission :

$$\tau_m - N^2 J_m \ddot{\theta}_n - \tau_f = \mathcal{T}, \tag{3.9}$$

avec $\tau_m = N k_m i_m$. Comme le système de mesure de position angulaire relatif à chaque articulation n'est pas placé directement sur l'axe de rotation, mais plutôt au niveau du moteur, il est très difficile de mesurer les effets de tous les défauts de la chaîne de transmission. Dans ce cas, nous considérons que nous mesurons les déplacements de la partie rigide de l'articulation au niveau du contrôleur du robot. En conséquence, le modèle de l'axe devra inclure à la fois, le modèle dynamique rigide commandé et le comportement souple de la chaîne de transmission. Nous proposons donc, une modélisation mixte qui prend en compte ces dynamiques. A partir de la représentation décrite par la figure 3.14, nous en déduisons les équations suivantes :

$$\begin{cases} J_b \ddot{\theta}(t) + D(\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_n(t)) + K(\theta(t) - \theta_n(t)) + \tau_r(t) = 0, \\ J_m \ddot{\theta}_n(t) - \dfrac{D}{N}(\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_n(t)) - \dfrac{K}{N}(\theta(t) - \theta_n(t)) + \dfrac{1}{N}\tau_f(t) = \dfrac{1}{N}\tau_m(t), \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\tau_r(t)$ est la somme des couples de gravité, de la compensation du gravité et du chargement extérieur du bras. J_b désigne l'inertie totale équivalente du bras. Nous notons K la raideur articulaire équivalente de l'axe et D l'amortissement interne.

Dans ce qui suit, nous procédons aux calcul numérique et l'estimation expérimentale des phénomènes dynamiques qui affectent le comportement d'un axe de robot industriel. Pour cela, nous aurons besoin d'identifier les paramètres du modèle (3.10).

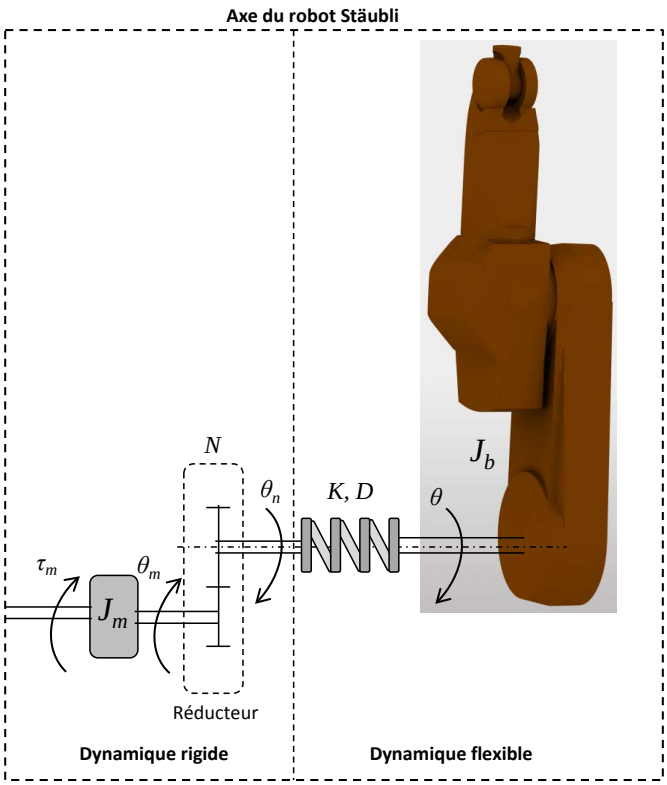


FIGURE 3.14: Modèle de d'un axe souple à constantes localisées

3 Estimation des effets associés à la gravité

Soit τ_g le couple de gravité appliqué sur l'axe 2 et $\tau_{ressort}$ le couple généré par le déplacement des ressorts de compensation de gravité (Cf. figure 3.1). Le couple résiduel noté, τ_r est exprimé comme suit :

$$\tau_r = \tau_g - \tau_{ressort}. \tag{3.11}$$

Le fabriquant du robot fourni des informations sur les masses des composants du robot, ainsi que sur la position de leur centre de gravité (Cf. figure 3.15). Ces informations nous permettent de calculer un modèle de masse assez précis du robot pour toute rotation autour de l'axe 2. Nous faisons l'hypothèse que l'axe 1 est presque colinéaire à la direction de la gravité terrestre locale avec une erreur angulaire très faible. Ainsi l'effet de pesanteur s'exprime au niveau de l'axe i comme suit :

$$\tau_g = -\|\overrightarrow{g}\| \sum_{\substack{k=i+1 \\ i=1}}^{n-1} m_k \overrightarrow{O_iG_k} \wedge \overrightarrow{v}, \tag{3.12}$$

où $\overrightarrow{O_iG_k}$ est un vecteur liant l'articulation i au centre de gravité G_k du bras k. $\overrightarrow{v}$ désigne le vecteur unitaire vertical ascendant et $\|\overrightarrow{g}\|$ la norme du vecteur d'accélération de la pesanteur. Cette formulation vectorielle est exprimée dans le repère R_1 relatif à l'axe 2 selon la convention D-H (Cf. figure 3.15). La projection des différents vecteurs $\overrightarrow{O_iG_k}$ dans la base associée s'effectue grâce aux matrices de transformation homogène entre les repères. L'équilibrage statique est réalisé par l'action des ressorts de compensation qui engendrent un couple sur l'articulation 2 autour de son centre de rotation. Le tarage de ces ressorts est optimisé pour minimiser ce couple sur la plage de mouvement utile du bras. Avec les éléments du modèle de masse (couple

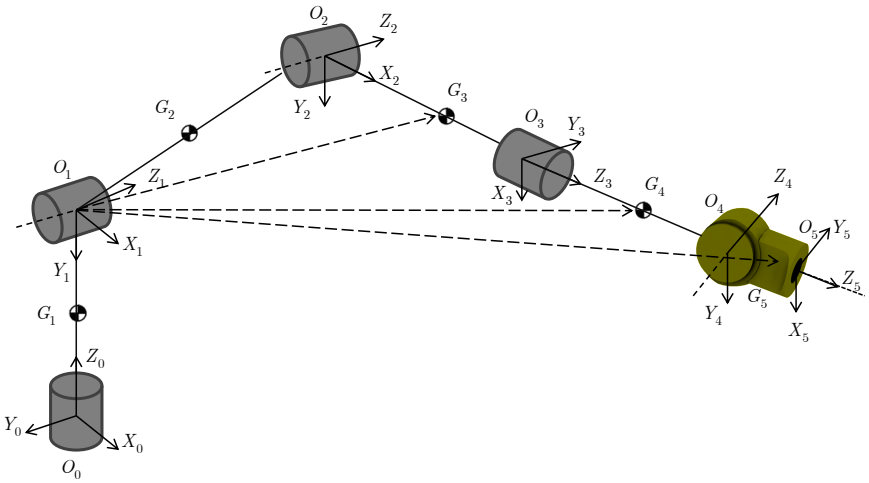


FIGURE 3.15: Caractérisation des bras en vue du calcul du couple de gravité

de gravité) décrit précédemment, les données géométriques et la valeur de pré-charge ressort fournies par Stäubli, nous avons calculé, sur l'articulation 2, le couple axial robot (gravité), le couple axial engendré par les ressorts et le couple résiduel (3.11). Le graphique de la figure

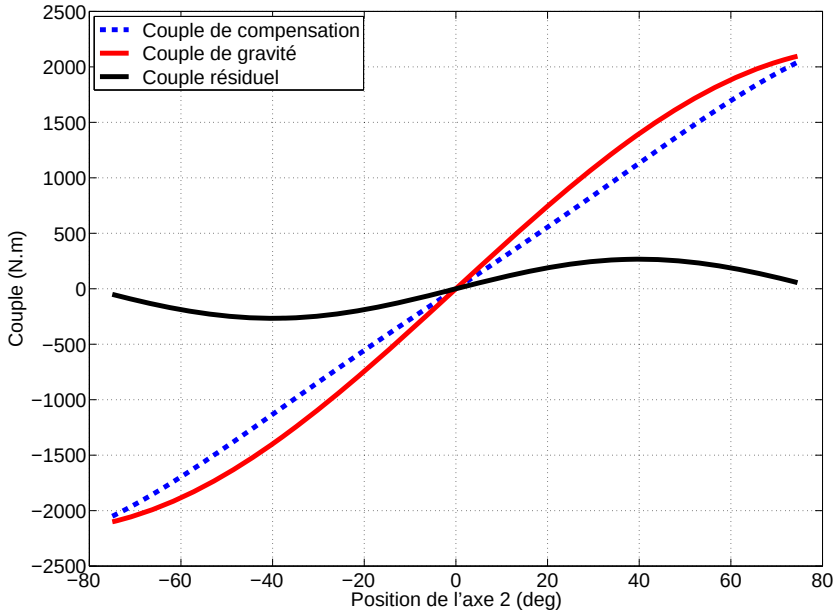


FIGURE 3.16: Couple de gravité résiduel appliqué sur l'axe 2

3.16 montre ces trois couples en fonction de l'angle de rotation de l'axe 2. Ce graphique montre qu'avec un ressort de raideur équivalente égale à $129478\ N.m^{-1}$ et une pré-charge réglée à une valeur de $17900\ N$, le couple résiduel axial supporté par l'articulation 2 n'est pas nul. Il atteint dans les deux sens une valeur maximale de ± 266 N.m. La compensation par l'action du ressort n'est à priori pas suffisante et le couple résiduel génère une déflexion de l'axe. L'influence de cette déflexion sur le comportement de l'axe sera étudiée ultérieurement.

4 Estimation des forces de frottements

L'axe 2 du manipulateur est soumis à des phénomènes de frottement, dont l'importance est principalement issue de la multiplicité et du type des surfaces en contact au niveau de la chaîne de transmission (Cf. §5.5 du chapitre 1). La bonne gestion des frottements est un enjeu constant dans la conception d'un manipulateur robotique. En effet, bien qu'agissant sur la précision, ils participent également à l'amortissement des perturbations que subit l'axe, [Kermani et al., 2007]. C'est pourquoi cette section sera consacrée à leur caractérisation.

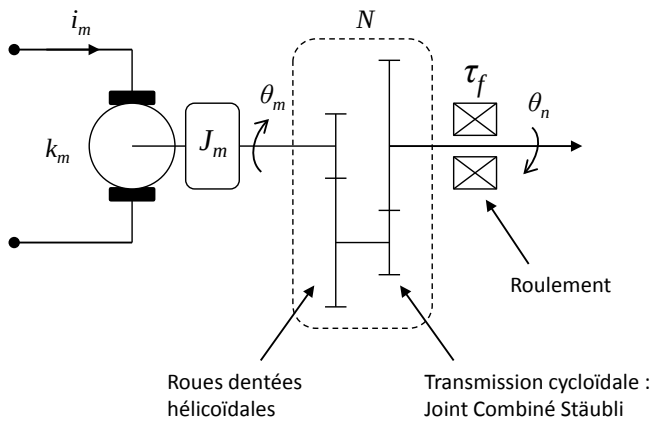


FIGURE 3.17: Représentation schématique de la transmission d'une articulation

La figure 3.17 montre un aperçu schématique de l'action des efforts de frottements sur les composants mécaniques de l'articulation du manipulateur. Les quatre premières articulations du Stäubli RX 170B, dont l'axe 2 fait parti, sont équipées d'un système de réduction à deux étages appelé *JCS* (Stäubli Combined Joint). Ce dernier est un assemblage sophistiqué breveté par Stäubli incluant une transmission de type cycloïdale [Gerat, 1994]. La transmission cycloïdale est actionnée par le biais d'un servo-moteur *via* le premier étage des roues dentées hélicoïdales. Les engrenages ainsi que les roulements de cette transmission sont précontraints de manière à éliminer toute sorte de jeu mécanique. Les engrenages hélicoïdaux et la transmission cycloidale sont constamment lubrifiés afin de réduire les pertes par frottement et de minimiser l'usure des surfaces en contact.

Une modélisation précise du comportement des frottements exige un modèle des forces de friction basé sur le comportement réel de l'articulation [Elhami and Brookfield, 1997]. En vue de construire un modèle de frottement équivalent de l'axe, nous présentons deux régimes pour cette étude :

– Le régime dit de pré-glissement ou de Coulomb (*pre-sliding regime* en anglais), correspond au cas où les forces d'adhérence par contact de type aspérité sont dominantes. Ces forces de frottement sont alors fonction du déplacement plutôt que de la vitesse. Quand le déplacement angulaire augmente au fur et à mesure, la liaison subit une rupture au niveau des surfaces en contact, ce qui provoque un régime de glissement brut. Ce mouvement de décollement (*break-away* en anglais) peut dépendre de diverses caractéristiques comme la texture de la surface et du contact comme la topographie, la dureté et la métallurgie des

couches des surfaces, [Armstrong-Helouvry et al., 1994]. Ce micro-glissement est considéré comme résultant de contacts admettant une distribution aléatoire où chacun obéit à une loi de frottement de Coulomb, [Björklund, 1997].

– Un régime de glissement brut dans lequel toutes les jonctions des aspérités se sont séparées. Au cours de ce régime, le couple de frottement est principalement une fonction de la vitesse. Ceci est dû par exemple à l'accumulation de films lubrifiants.

Dans la suite, nous présentons une étude expérimentale réalisée sur l'axe 2 du robot à vide dans le but d'identifier le couple de friction en fonction de la vitesse et du déplacement angulaire de l'axe. Nous pourrons ainsi valider expérimentalement quelques valeurs déterminées par calcul dans la section 3 du couple résiduel réel de l'axe.

4.1 Caractérisation du couple de frottement sec

Pour identifier le régime de pré-glissement du frottement, dit frottement de Coulomb et noté F_s, les essais ont été réalisés sur l'axe 2 avec une consigne triangulaire (créneaux de vitesse), comme le montre la figure 3.18. La loi de mouvement de l'axe est générée en pré-traitement par un planificateur de trajectoires articulaires dont les principes sont développés en détail dans le chapitre 3. Une fois générée, cette consigne sera envoyée vers la baie du contrôleur du robot industriel à travers le protocole d'échange FTP. Notons que les données requises par le contrôleur afin de garantir le mouvement du robot le long de la consigne désirée, sont la position et la vitesse :

$$\{\theta_n^{(d)}(t)\} = \begin{bmatrix} \theta_n^{(d)}(t) & \dot{\theta}_n^{(d)}(t) \end{bmatrix}^T. \tag{3.13}$$

Toutes les trajectoires utilisées pour les essais sont échantillonnées avec une période de 4 ms (soit une fréquence d'acquisition de 250 Hz). Cette fréquence est la fréquence maximale d'enregistrement de données internes du codeur et de l'amplificateur du courant que peut fournir la baie CS8 de Stäubli. Dans le but de minimiser l'impact du couple résiduel sur le

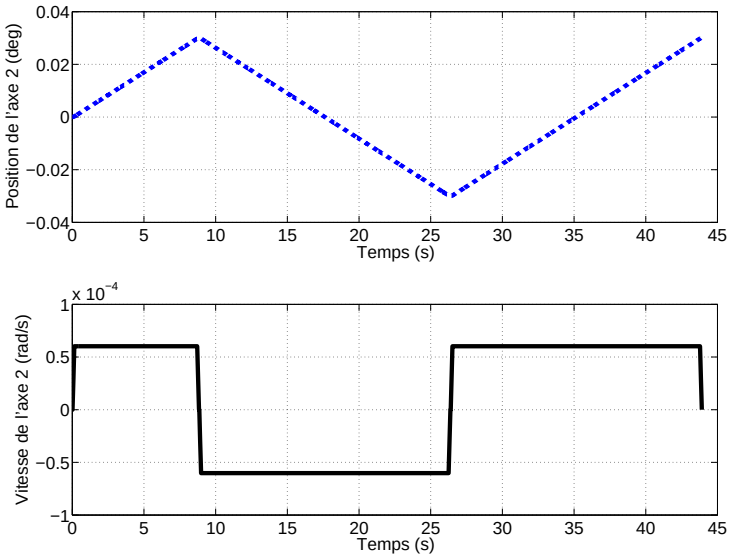


FIGURE 3.18: Trajectoire de test du frottement de Coulomb

comportement statique de l'articulation (Cf.figure 3.16), l'axe 2 réalise un mouvement en aller-

retour autour de sa position d'équilibre verticale à 0 degrés. Ce mouvement cyclique provoque une variation de comportement au niveau des surfaces en contact du réducteur. La vitesse d'avance est réglée à 3.10^{-3} % de la vitesse maximale de l'axe V_{Max} = 2 rad/s. Une vitesse constante très lente permet de négliger le frottement visqueux et l'inertie. En outre, la vitesse angulaire d'une valeur de 6.10^{-5} rad/s est la vitesse la plus petite possible. Elle permet de garantir un déplacement angulaire de $\pm$ 0.03 deg dans les deux sens du mouvement (Cf. figure 3.19). En effet, la force de décollement n'étant pas atteinte, elle correspond à une zone de déformation plastique, [Swevers et al., 2000]. La figure 3.20 montre un relevé expérimental

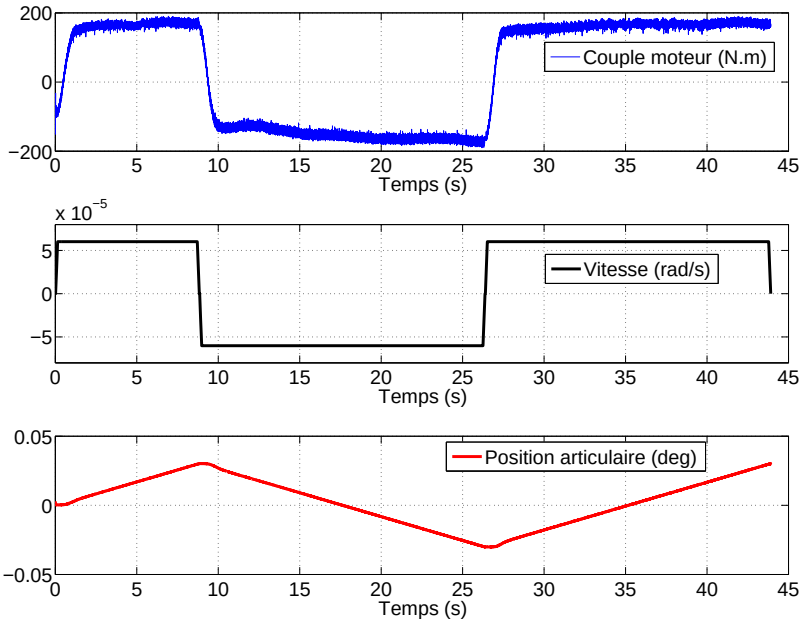


FIGURE 3.19: Relevés expérimentaux des position, vitesse et couple

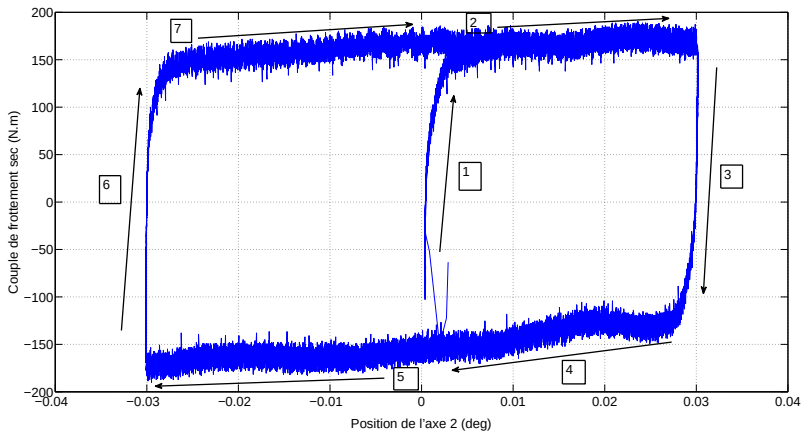


FIGURE 3.20: Couple de frottement en zone de pré-glissement autour de 0 deg

du couple moteur de l'axe en fonction de son déplacement en zone de pré-glissement. Pour cette trajectoire de référence, nous faisons l'hypothèse que la vitesse est très faible, l'accélération moyenne est nulle et les efforts d'inertie et de frottement visqueux sont négligeables. Ainsi,

la variation du couple d'entrée est due principalement aux frottements secs. Dans la figure 3.20 nous constatons un hystérésis. Les valeurs trouvées dans un sens (zones 2 et 7) et dans l'autre (zones 4 et 5), étant proches en moyennant le couple d'entrée, montrent bien qu'il y a une cohérence des résultats dans les deux phases de mouvement comme l'indique le tableau 3.2. Notons que le changement brusque du signe du couple moteur, ce qui est visible au niveau des zones 3 et 6 est expliqué par le rattrapage du jeu au niveau des dentures des engrenages. En outre, nous constatons la présence d'une raideur traduisant l'élasto-plasticité des contacts de deux corps en mouvement au niveau de l'étage de transmission [Dahl, 1968]. Cette raideur équivalente est issue de la courbe de transfert déformation-contrainte dans la zone de pré-glissement. En effet, la figure 3.20 montre aussi la présence de branches de courbures lors du changement du sens de rotation de l'axe. [Nouri, 2004] propose une division de la zone de pré-glissement en 3 régions qui dépendent de la raideur des contacts de type aspérité. Ce type de modélisation ne sera pas employé dans la suite de ce mémoire.

Zones	Sens positif (moyenne)	Sens négatif (moyenne)
(2) et (7)	152.23 $N.m$	
(4) et (5)		151.45 $N.m$

TABLE 3.2: Valeurs du couple de frottement sec

4.1.1 Validation du couple gravitationnel et de frottement sec à travers les essais en zone de pré-glissement

Afin de pouvoir valider les résultats obtenus pour les valeurs de F_s, un autre essai pour une autre position articulaire a été effectué. A l'instar des conditions d'essai décrites au paragraphe § 4.1, on a refait les mêmes expérimentations autour de la position égale à 20 deg. Lors de cette configuration, le bras de robot est sous chargement par un couple résiduel non nul. Les figures 3.21 et 3.22 montrent les relevés du couple de frottement sec lors d'un mouvement cyclique dans les deux sens de rotation. Pour cette position de référence à 20 deg, l'axe 2 du manipulateur subit l'influence des forces de gravité. L'hystérésis associée montre un écart moyen par rapport au premier essai à 0 deg, où le robot n'est pas soumis à l'action de la pesanteur, de 181 N.m. Nous constatons que cet offset de couple correspond à une valeur du couple nominal résiduel de 188 N.m pour une position articulaire de l'axe de 20 deg. Par conséquent, cette campagne de mesure confirme la pertinence du modèle de couple résiduel simulé (3.11) et (3.12). Ceci permet aussi de vérifier les données géométriques fournies par Stäubli.

4.2 Influence du frottement en zone de pré-glissements sur la précision statique du robot

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la contribution des défauts dus à l'action des couples de frottements de pré-glissement au niveau de l'étage de réduction, sur la précision de positionnement en bout d'axe. Nous reprenons le protocole d'essai présenté dans la figure 3.19. On définit $\delta\theta = (\theta - \theta_n)$ l'erreur de position de l'axe 2. La figure 3.23 illustre le défaut $\delta\theta$ de transmission mesuré. Nous avons identifié les différentes zones de fonctionnement du défaut de transmission de mouvement, comme représenté dans la figure 3.20. L'analyse affirme la présence d'un mode vibratoire au niveau de la zone 1 (Cf. figure 3.24). Ceci confirme le constat

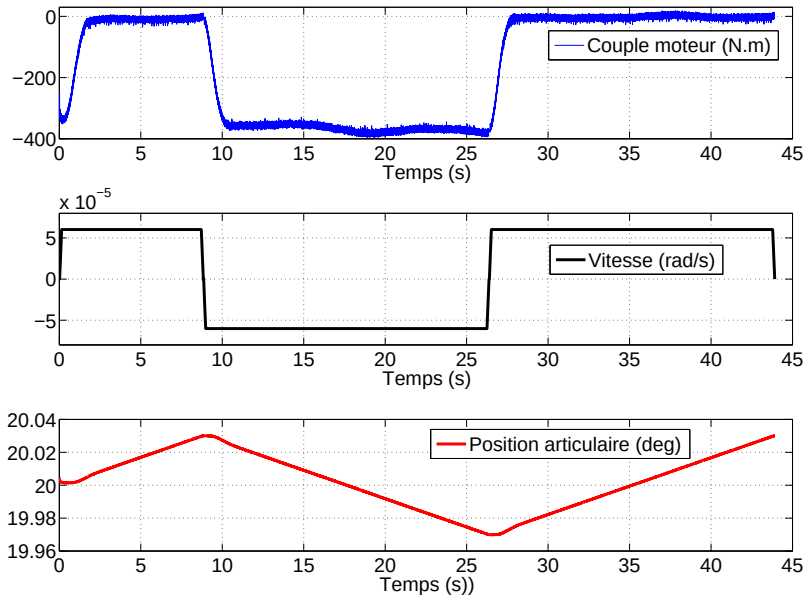


FIGURE 3.21: Relevés expérimentaux des position, vitesse et couple

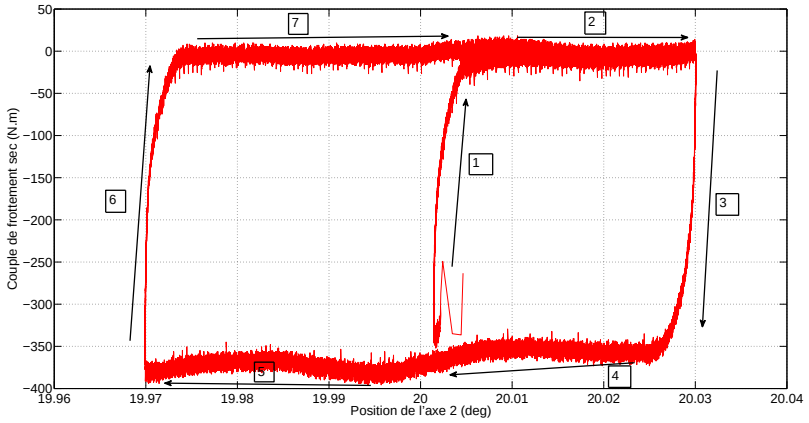


FIGURE 3.22: Couple de frottement en zone de pré-glissement autour de 20 deg

effectué précédemment sur la présence d'une raideur équivalente caractérisant la souplesse axiale. Ce mode est sollicité lors de la phase de démarrage du mouvement. On remarque la présence d'une dissymétrie au niveau de l'amplitude minimale et maximale des défauts de transmission. Ceci est dû au rattrapage du jeu mécanique au niveau des dentures du réducteur et l'inversion du sens de rotation de l'axe. Cet essai permet de qualifier l'ordre de grandeur des défauts de transmission causés par l'action du frottement en zone de pré-glissement.

4.3 Estimation du couple de frottement total

Le couple de frottement en régime de pré-glissement étant caractérisé, nous nous intéressons maintenant à la dépendance du frottement vis-à-vis de la vitesse angulaire de l'axe 2. Ainsi, des mesures sont effectuées pour différentes vitesses. Seuls les paliers à vitesse constants sont exploités. Des moyennes d'effort d'entrée et de sortie sont réalisées pour chaque palier de vitesse

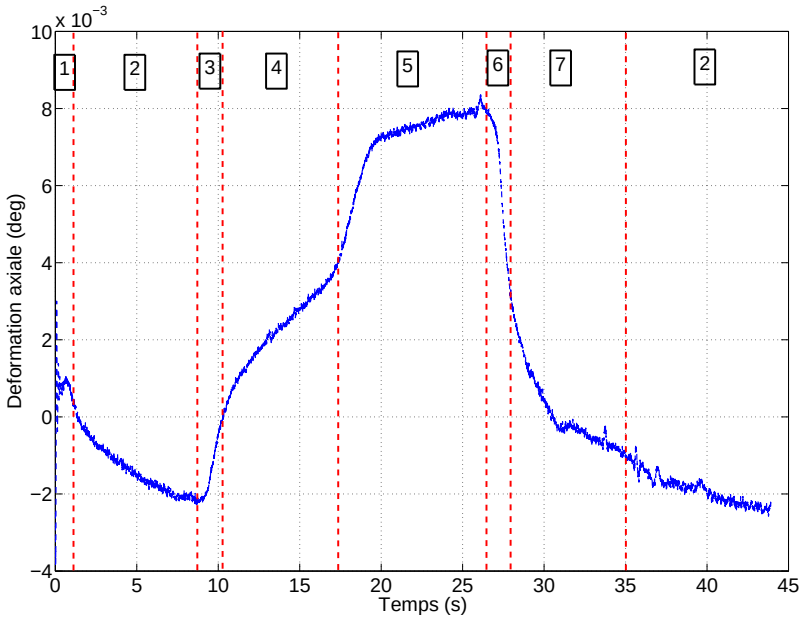


FIGURE 3.23: Défauts de transmission de l'axe 2 du robot

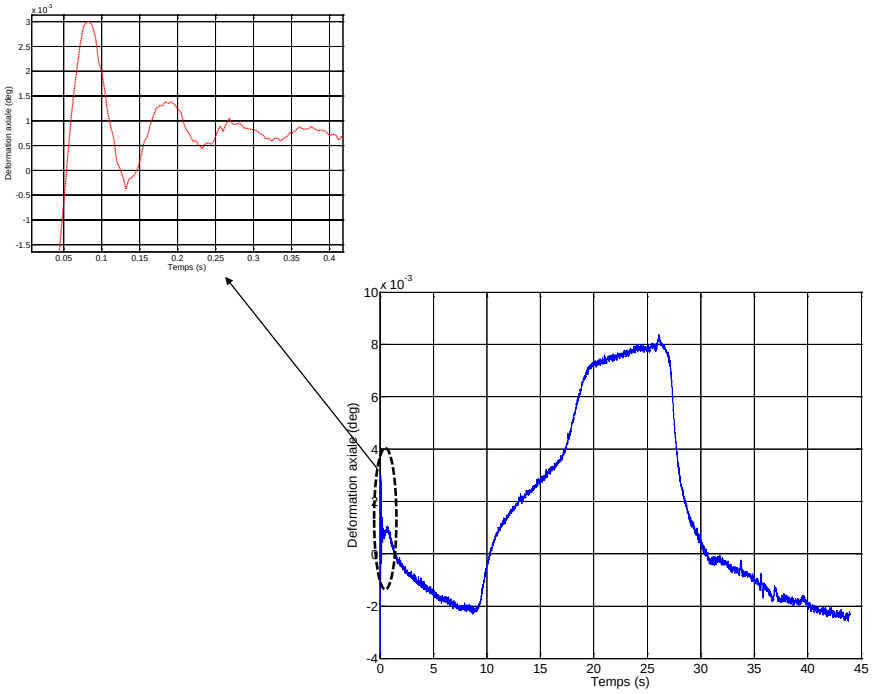


FIGURE 3.24: Défaut de transmission lié à la phase de démarrage de mouvement (zone 1)

ce qui permet d'observer l'allure de la courbe du couple de frottement total le long de la plage de fonctionnement utile de l'articulation en fonction de la vitesse. Une fois que la courbe de frottement est définie, un modèle prenant en compte la vitesse est proposé, [Olsson et al., 1998] et [Bona and Indri, 2005].

4.3.1 Modélisation : méthode et pratique

Pour effectuer les mesures en vue d'établir la relation frottement-vitesse, différentes lois de mouvement peuvent être employées. La détermination de la loi de mouvement lors de la génération de trajectoires de référence peut être faite en fonction de plusieurs critères d'optimisation. On distingue divers critères d'optimalité tels que l'optimalité en temps (loi à accélération limitée), optimalité en douceur (bang-bang en jerk) et optimalité en énergie (lois polynomiales), [Béarée, 2005]. Lors de cette étude, on a adopté une loi de mouvement en bang-bang en accélération afin d'identifier les forces de frottement de la partie rigide de la transmission. Cette commande se compose généralement de trois phases : accélération, vitesse constante (croisière) et décélération. Les contraintes sont : accélération, respectivement décélération, maximale et vitesse maximale (Cf. figure 4.5). Cette loi permet d'imposer les vitesses et les accélérations en fonction de la capacité du servo-moteur, où le choix des amplitudes maximales de vitesse V_M et d'accélération A_M sont cruciales. La trajectoire générée dans ce cas est continue en position et en vitesse. Ainsi, l'accélération sur les segments paraboliques est constante afin de produire un changement de vitesse doux. Lors des essais dynamiques sur l'axe 2, les autres axes sont

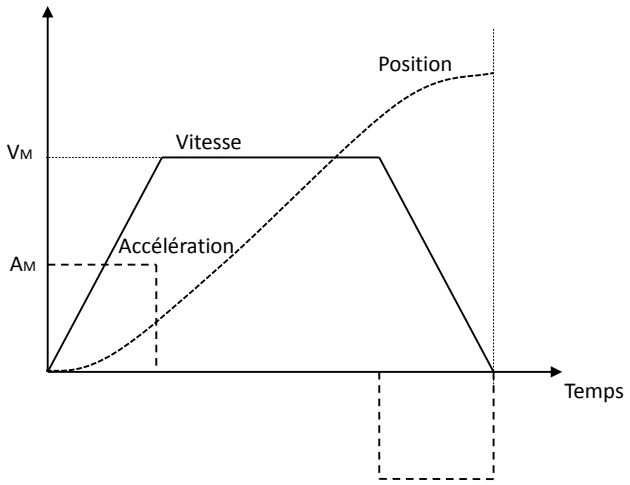


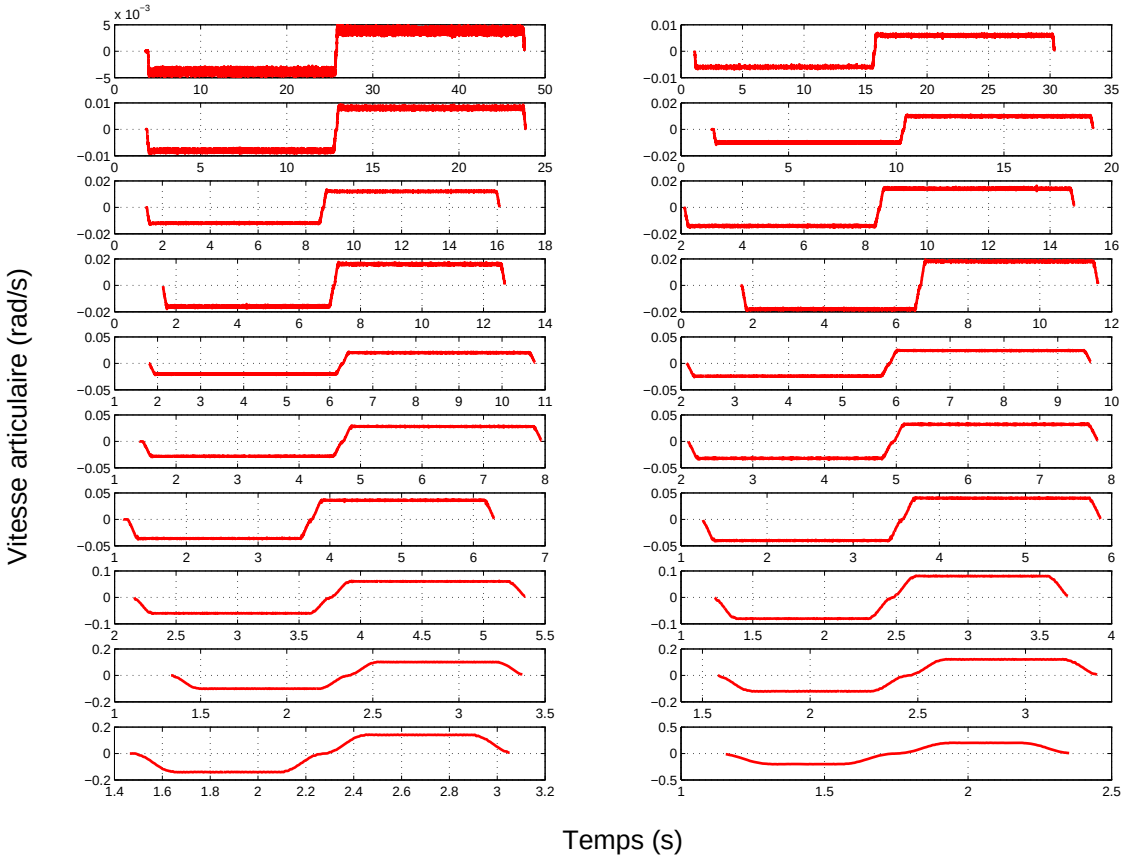
FIGURE 3.25: Loi de mouvement Bang-Bang en accélération

toujours sous asservissement dans une position fixe de -90 deg pour l'axe 1 et 0 deg pour les axes 3, 4, 5 et 6. Au cours de cette étude expérimentale, les essais sont réalisés à travers le générateur de mouvement à accélération limitée avec les vitesses des paliers de 0.2% ; 0.3% ;... ; 1% ; 1.2% ; 1.4% ;... ; 10% ;... ;70% de V_{Max} dans les deux sens du mouvement pour une plage d'évolution du robot comprise entre -50 et 50 degrés. Ceci permet d'exciter correctement les paramètres de frottement. Les différents paliers de vitesses et des couples d'entrée sont présentés dans la figure 3.26. En prenant en compte uniquement la structure classique rigide, le modèle dynamique inverse de l'axe 2 s'écrit de la manière suivante :

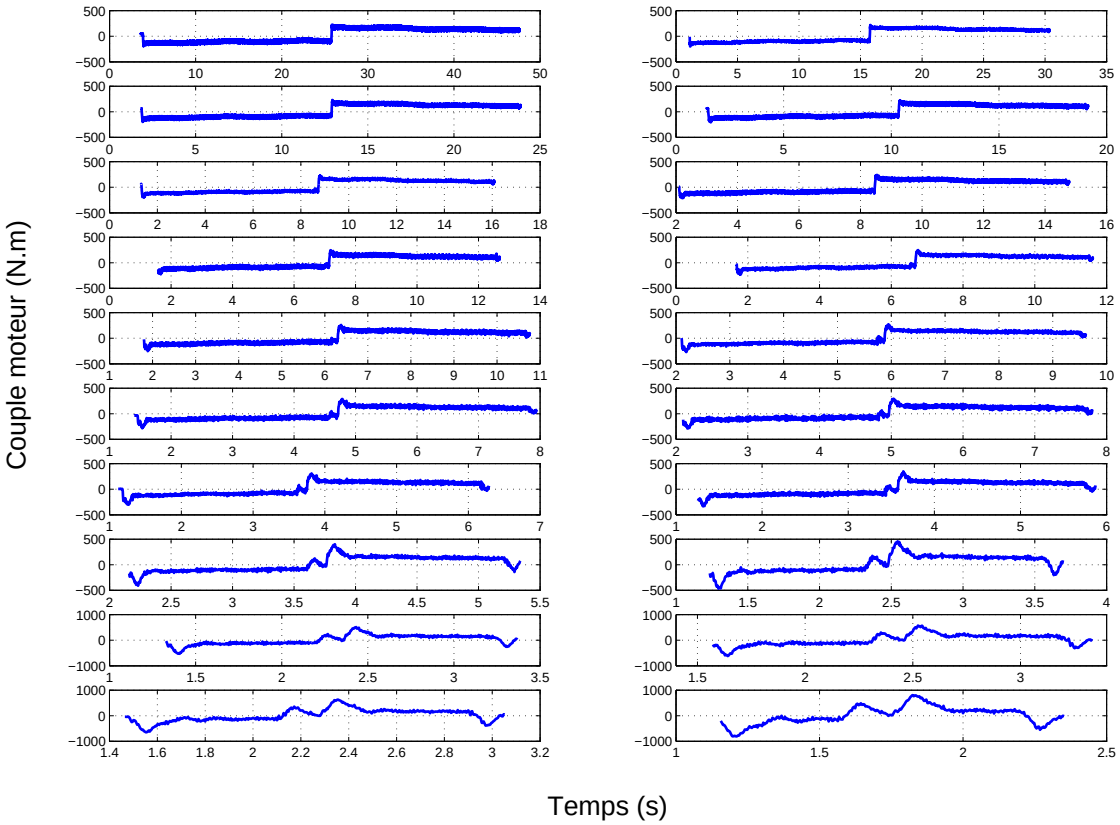
$$\tau_m(t) = J_t\ddot{\theta}_n(t) + \tau_f(\dot{\theta}_n(t)) + \tau_{residuel}(\theta_n(t)) \tag{3.14}$$

où

- J_t est le moment d'inertie total issu de la chaîne d'actionnement J_m et du bras équivalent J_b supporté par l'axe 2 ;



(a) Vitesses mesurées



(b) Couples moteurs mesurés

FIGURE 3.26: Relevés expérimentaux des vitesses et couples d'entrée associés en vue de l'identification du couple de frottement

– $\tau_{residuel}$ est le couple de chargement produit par la masse des différentes parties du robot à partir de la deuxième articulation ainsi que le ressort de compensation ;
– τ_f est le couple de frottement total de l'axe 2 à identifier.

Afin de mesurer uniquement le couple de frottement τ_f, seuls les échantillons sur les paliers à vitesse constante sont retenus. Dans ce scénario, l'accélération étant nulle, les efforts d'inertie seront alors négligés dans (3.14). Le couple moteur est alors calculé à partir de la référence courant. Dans le but d'annuler les perturbations hautes fréquences dans τ_m, le couple d'entrée est filtré avec un filtre passe-bas de Butterworth aller-retour sans distorsion d'amplitude et de phase, [Gautier and Poignet, 2002] et [Hamon et al., 2010]. Ce filtrage permet d'éliminer les perturbations hautes fréquences sur l'effort τ_m provenant de toutes les perturbations exogènes non modélisées et bien au-delà de la bande passante de commande.

En se plaçant sur des paliers de vitesses constantes comme mentionné précédemment et à partir des valeurs mesurées de τ_m et calculées pour $\tau_{residuel}$, on peut tracer la courbe de transfert de la valeur moyenne de τ_f en fonction de la vitesse de déplacement de l'axe. Pour ce type de système mécatronique, nous nous attendons à observer une courbe standard du couple en fonction de la vitesse comme celle illustré dans [Armstrong-Helouvry et al., 1994] et [Kermani et al., 2007]. Conformément à nos attentes, et comme le montre la figure (3.27), le phénomène observé est bel et bien un effet de Stribeck où la courbure est facilement repérée par le fameux point de décroissance. Cet effet assure une transition continue entre le frottement statique et le frottement dynamique. En effet, le couple est élevé pour les vitesses très faibles de 4.10^{-3}

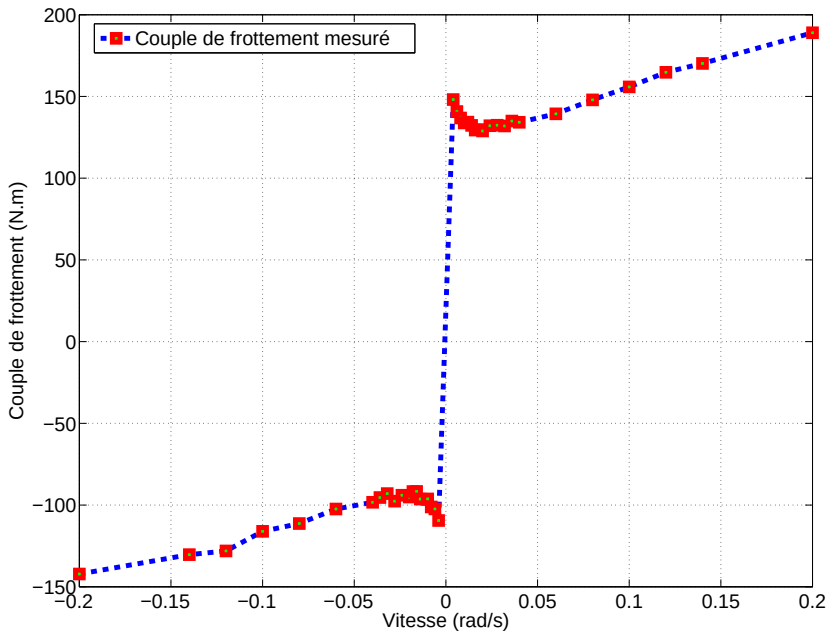


FIGURE 3.27: Couple de frottement moyen en fonction de la vitesse

rad/s (0.2% de V_{Max}) puis il diminue jusqu'à la vitesse de 1.10^{-2} rad/s (0.5% de V_{Max}). Il augmente ensuite à nouveau avec une variation quasi-linéaire en régime permanent distinguant les forces de frottement visqueuses. En conséquence, le frottement sec en régime transitoire est caractérisé par un effet Stribeck, modélisable par un terme exponentiel où la vitesse de 1.10^{-2}

rad/s représente le point de décollement des forces de frictions aussi bien dans le sens positif du mouvement que le sens négatif. Cependant, le couple de frottement présente une asymétrie où la valeur absolue du frottement statique pour une vitesse de déplacement positive est supérieure par rapport à celui associé pour les vitesses négatives. En réalité, le frottement dépend à la fois de la vitesse et de la charge appliquée [Hamon et al., 2011]. Bien que les expérimentations ont été effectuées à vide et sans aucune masse additionnelle sur l'axe 6 du robot, cette asymétrie est certainement due à une asymétrie au niveau des surfaces de contact. Ce problème est exposé dans [Olsson et al., 1998], [Al-Bender and Swevers, 2008] et [Bittencourt et al., 2010]. Ce constat sera pris en compte lors de l'établissement d'un modèle global du couple de frottement.

4.3.2 Procédure d'identification du couple de frottement

A partir des observations faites sur le diagramme de transfert vitesse-couple (Cf. figure 3.27), nous développons dans ce paragraphe la modélisation du couple de frottement τ_f. A partir des observations expérimentales, nous montrons que le passage du régime de *stiction* † vers le régime permanent de l'effort de frottement n'est pas discontinu. Sur la base d'un tel constat, le modèle candidat doit prendre en compte cette continuité du couple au regard de la vitesse et doit prendre aussi en considération l'effet Stribeck. Ainsi, le modèle retenu est un modèle non-linéaire qui décrit à la fois le frottement sec, visqueux et le frottement de Stribeck, [Jamaludin et al., 2008].

$$\tau_f(\dot{\theta}_n) = \begin{cases} \left(F_c^+ + (F_s^+ - F_c^+)e^{-\left|\frac{\dot{\theta}_n}{\dot{\theta}_{n_s}^+}\right|^{\delta_s}}\right) sign(\dot{\theta}_n) + F_v^+\dot{\theta}_n, & si\ sign(\dot{\theta}_n) > 0 \\ \left(F_c^- + (F_s^- - F_c^-)e^{-\left|\frac{\dot{\theta}_n}{\dot{\theta}_{n_s}^-}\right|^{\delta_s}}\right) sign(\dot{\theta}_n) + F_v^-\dot{\theta}_n, & si\ sign(\dot{\theta}_n) < 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

où F_c désigne le frottement de Coulomb, F_s est le frottement statique et F_v le frottement visqueux. $\dot{\theta}_{n_s}$ est la vitesse de Stribeck. δ_s est le facteur de forme de Stribeck dépendant de la nature de la combinaison des matériaux qui est généralement égale à 2 pour les systèmes mécatroniques.

Le modèle présenté (3.15) est un modèle statique. Cependant, c'est le modèle le plus simple et le plus répandu pour la modélisation des frottements dans les systèmes robotiques [Abba and Sardain, 2003]. Il existe aussi les modèles tribologiques, appelés encore modèles dynamiques qui ont été conçus pour prendre en compte un maximum de phénomènes physiques, [Bona and Indri, 2005]. Bien entendu, un modèle très "complet" entraîne une complexité mathématique des équations.

Comme mentionné auparavant, nous procédons à l'identification des paramètres du modèle (3.15) pour les deux sens de rotation de l'axe 2. Il faut alors identifier les 9 paramètres $F_c^{\pm}$, $F_s^{\pm}$, $F_v^{\pm}$, $\dot{\theta}_{n_s^{\pm}}$ et δ_s afin de trouver un modèle mathématique se rapprochant des relevés, et donc de la réalité. Le modèle de frottement est une fonction non-linéaire à deux paramètres, respectivement $\dot{\theta}_{n_s}$ et δ_s. Pour estimer l'ensemble des neuf paramètres à la fois, on a recours à des techniques d'optimisation non-linéaire. Il est communément connu que la technique

†. Stiction est l'abréviation de Static friction en anglais

d'optimisation non-linéaire peuvent conduire à un optimum local pour lequel des valeurs des paramètres non physiques peuvent être obtenues. De ce fait, la technique d'optimisation non-linéaire peut être appliquée avec succès dans le cas où le modèle est cohérent avec le comportement observé lorsqu'il est combiné avec une estimation correcte des valeurs initiales des paramètres inconnus. Pour l'identification de ces paramètres, un algorithme basé sur la méthode du simplex est utilisé [Lagarias et al., 1998]. La fonction *fmincon* de MATLAB permet une telle optimisation non-linéaire en ajoutant des contraintes. Le degré de complexité augmente puisque l'on cherche à identifier la totalité des paramètres de l'équation (3.15). Dans notre cas, tous les coefficients doivent être positifs et $F_s > F_c$. La valeur du frottement statique F_s identifié expérimentalement lors des essais en régime de pré-glissement (Cf. Table 3.2) ainsi que le point de décollement relatif à la vitesse $\dot{\theta}_{n_s}$ repérée sur la figure 3.27 est égal à 1.5 10^{-2} rad/s, vont servir de valeurs initiales pour cette identification.

Soit $\chi_f = [F_s\ F_c\ F_v\ \dot{\theta}_{n_s}\ \delta_s]$ le vecteur de paramètres à identifier *via* l'optimisation non-linéaire. Ceci implique la minimisation de :

$$\hat{\chi}_f = \underset{\chi_f}{argmin} \left\| \tau_f - f(\chi_f, \dot{\theta}_n) \right\|_2^2 \tag{3.16}$$

où $f(\chi_f, \dot{\theta}_n)$ est la fonction à optimiser. L'optimisation consiste à minimiser la distance entre cette fonction et les points expérimentaux. Les valeurs trouvées par l'algorithme sont mises dans le tableau 3.3. Par cette méthode, des valeurs de paramètres sont estimées afin de faire

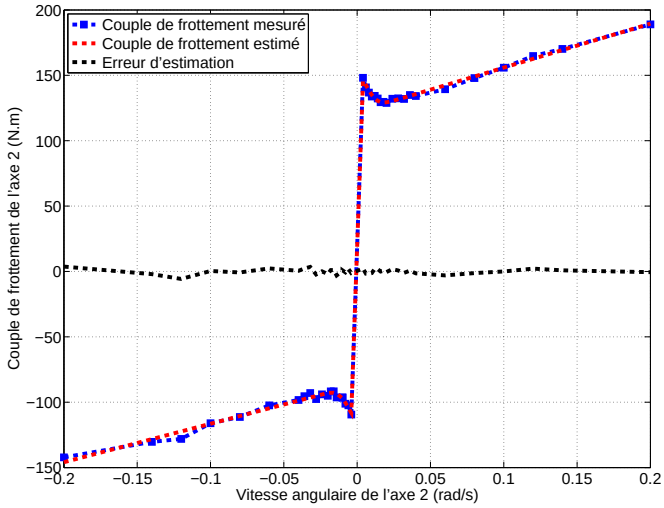
Paramètres	Valeur identifiée
F_s^+ $(N.m)$	148.54
F_s^- $(N.m)$	111.38
F_c^+ $(N.m)$	122.19
F_c^- $(N.m)$	87.02
F_v^+ $(N.m.s/rad)$	336.73
F_v^- $(N.m.s/rad)$	294.44
$\dot{\theta}_{n_s}^+$ (rad/s)	1.73 10^{-2}
$\dot{\theta}_{n_s}^-$ (rad/s)	1.71 10^{-2}
δ_s	2

TABLE 3.3: Valeurs des paramètres du modèle de frottement de Stribeck

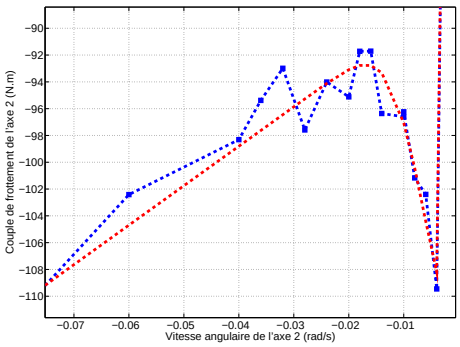
correspondre le modèle aux relevés, modélisant ainsi le phénomène observé. La figure 3.28 montre la validation directe où on superpose le couple mesuré au couple estimé. Le modèle obtenu admet une erreur noté ρ_f qui ne dépasse pas 2% sur l'identification du couple réel τ_f. La qualité de l'estimateur est évaluée en calculant la norme relative du résidu total donnée par l'expression suivante :

$$N_{res} = \frac{\|\rho_f\|_2}{\|\tau_f\|_2} = 0.0152 \tag{3.17}$$

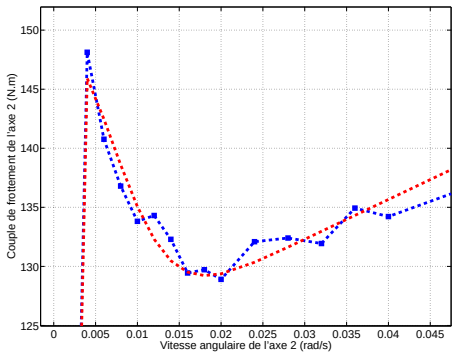
En conclusion, les résultats donnés par le modèle (3.15) sont satisfaisants d'après (3.17). Ceci montre que le modèle statique est cohérent avec les mesures que nous avons effectuées sans qu'il y ait eu besoin d'un modèle tribologique complexe. Cependant, les modèles de type Dahl ou LuGre, [Johanastrom and Canudas de Wit, 2008], permettent d'avoir une implémentation



(a) Couple de frottement estimé et couple mesuré



(b) Zoom sur l'effet de Stribeck pour vitesse positive



(c) Zoom sur l'effet de Stribeck pour vitesse positive

FIGURE 3.28: Comparaison entre couple de frottement mesuré et couple estimé

dynamique mais avec une complexité algorithmique plus importante en vue d'une compensation de ces effets.

5 Estimation du moment d'inertie du bras

Cette section est consacrée à l'identification physique expérimentale du moment d'inertie total qui n'est que la somme de l'inertie des parties tournantes du moteur et du bras 2 du manipulateur robotique. En réalité, l'inertie du bras 2 est issue de l'inertie de tous les bras qui se situent en aval de la deuxième articulation. En vue d'estimer cette inertie notée J_t où :

$$J_t = J_b + N^2 J_m, \tag{3.18}$$

nous nous focalisons uniquement sur la dynamique rigide de (3.10). On rappelle ici le modèle rigide dynamique inverse de l'axe 2 du RX 170B :

$$\tau_m(t) = J_t \ddot{\theta}_n(t) + \tau_f(\dot{\theta}_n(t)) + \tau_{residuel}(\theta_n(t)). \tag{3.19}$$

A la lumière de ce qui précède sur l'estimation expérimentale de l'effort de frottement (3.15) et le calcul du couple résiduel de gravité (3.11), le couple inertiel est défini comme suit :

$$\tau_J(t) = J_t \ddot{\theta}_n(t) \tag{3.20}$$

où τ_J est relevé expérimentalement à partir de la soustraction des couples de friction τ_f, du couple de gravité résiduel $\tau_{residuel}$ et des mesures du couple d'entrée τ_m. Une loi de mouvement en bang-bang d'accélération est planifiée afin de permettre une forte excitation due à l'inertie J_t. Ce paramètre est alors estimé au sens des moindres carrées à partir d'une régression linéaire *via* l'utilisation du modèle d'identification suivant :

$$y[n] = W^T[n] J_t \tag{3.21}$$

où

- $y = \tau_m - \tau_f - \tau_{residuel}$ est le vecteur des mesures ;
- $W = \ddot{\theta}_n$ est la matrice d'observation. Elle est composée du vecteur d'accélération angulaire du bras.

Vu que le vecteur de vitesse angulaire peut être récupéré directement à partir du contrôleur du robot, l'accélération est alors obtenue par l'application d'un filtre passe bas non-causal (filtfilt en Matlab) et de la technique des différences centrées. Dans un deuxième temps, l'estimation de J_t est réalisée pour une plage de variation de la position de l'axe 2 comprise entre -50 deg et +50 deg. Tous les autres axes sont bloqués sous asservissement. La méthodologie consiste à ordonnancer les trajectoires pour des vitesses et des accélérations angulaires différentes. Ce scénario est réalisé pour différentes accélérations, mais en sélectionnant uniquement les échantillons qui se situent sur les paliers.

Le tableau 3.4 illustre l'identification de J_t *via* l'estimateur (3.21). L'estimation de l'inertie montre un écart-type faible. Le système (3.21) assure donc une bonne identification de J_t. Une

Paramètre	Valeur identifiée	Ecart-type	Ecart-type relatif (%)
J_t	298.11 Kg.m^2	8.12	2.72

TABLE 3.4: Valeur identifiée du moment d'inertie total de l'axe 2

fois que l'inertie totale de l'axe 2 est estimée, J_b est alors calculée à partir de (3.18) où l'inertie du rotor J_m=685 10^{-6} Kg.m^2 est donnée par le constructeur. On en déduit alors la valeur de l'inertie du bras $J_b = J_t - N^2 J_m$ = 275.1624 Kg.m^2.

6 Evaluation expérimentale du modèle dynamique rigide

6.1 Validation par estimation séquentielle des paramètres physiques

Une fois que les paramètres d'inertie, de frottement et de gravité sont calculés et identifiés pour le bras du robot, nous procédons à la validation directe du modèle dynamique rigide (3.19). La validation consiste à comparer le couple mesuré issu du contrôleur du robot, au couple estimé par le modèle dynamique rigide. Le choix de la trajectoire de test repose sur le

pouvoir d'exciter au maximum les paramètres dynamiques de (3.19). Notons que l'utilisation de trajectoires spécifiques pour l'identification des paramètres dynamiques en amont, permet de simplifier la recherche des trajectoires excitantes et l'interprétation des résultats.

Le choix de la référence utilisée est donnée par la figure 3.29. Cette référence en position et en vitesse doit être optimisée afin d'avoir un bon conditionnement de la matrice d'observation contenant les variables d'état et de l'entrée. [Gautier and Khalil, 1991] proposent un choix de séquences de positions et de vitesses articulaires permettant d'exciter les paramètres rigides sans provoquer les éléments souples présents dans la chaîne de transmission. Alors que [Swevers et al., 1997] propose une excitation par séries de Fourier finies. Dans ce travail, notre choix s'est porté sur la première approche.

L'essai réalisé pour la validation du modèle dynamique rigide est composé de trajectoires avec phases d'accélération, de décélération et des paliers à vitesse constante pouvant aller jusqu'à 70% de la vitesse maximale. La trajectoire de test est programmée en langage VAL3. Elle est composée de divers blocs avec des paliers de vitesse suffisamment longs à dynamique élevée permettant d'avoir de fortes accélérations.

Remarque 6.1.1. *Pour l'identification et la validation de la dynamique rigide de l'axe, les effets dus aux inerties et à la friction doivent être engendrés sans introduire de fortes oscillations susceptibles d'exciter sa flexibilité. Dans ce cas, un signal basse fréquence est préférable afin de ne pas provoquer ces vibrations au niveau de la transmission ou de la structure. Pour mettre en évidence la contribution du couple de frottement sec sur la dynamique rigide, une excitation dotée de plusieurs phases avec changement du signe de la vitesse a été mise en place.*

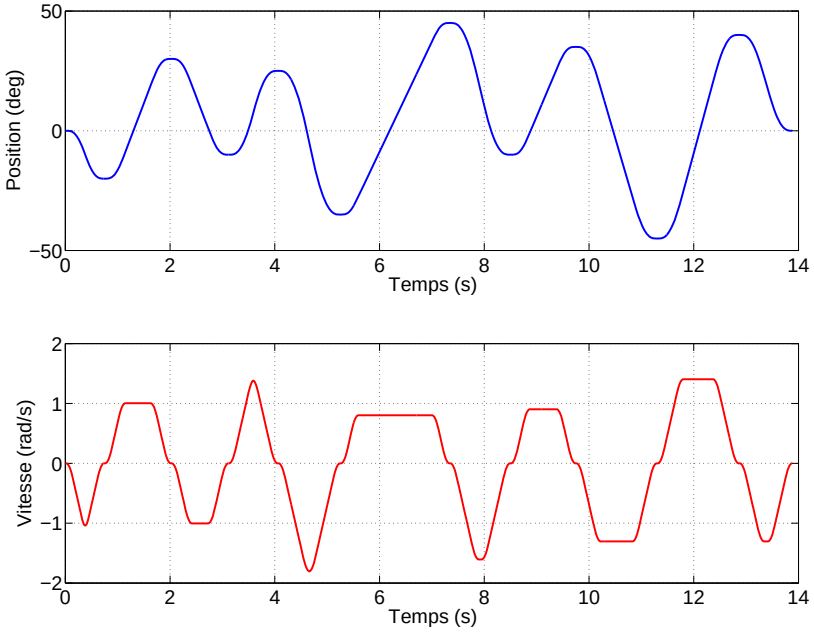


FIGURE 3.29: Exemple de trajectoire utilisée pour la validation du modèle dynamique rigide de l'axe 2

Les paramètres de frottement, de gravité et d'inertie identifiés, nous permettent de simuler

le couple d'entrée $\hat{\tau}_m(t)$ et de le comparer au couple réel $\tau_m(t)$ mesuré. La figure 3.30 montre un bon accord. La figure 3.31 donne le résidu entre le couple reconstrui *via* le modèle dynamique rigide et le couple mesuré. La norme de l'erreur relative d'estimation est de l'ordre de 0.1586.

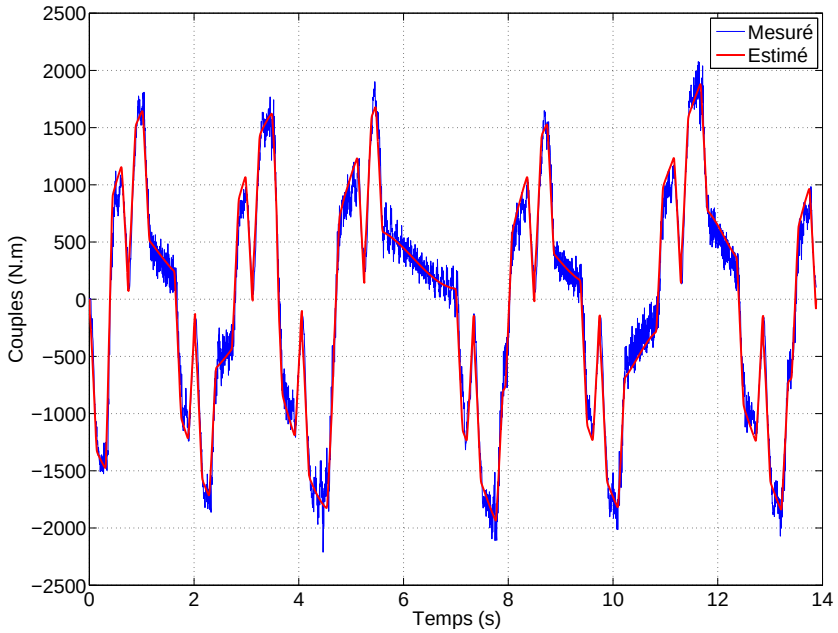


FIGURE 3.30: Comparaison entre le couple mesuré et le couple estimé par le modèle rigide

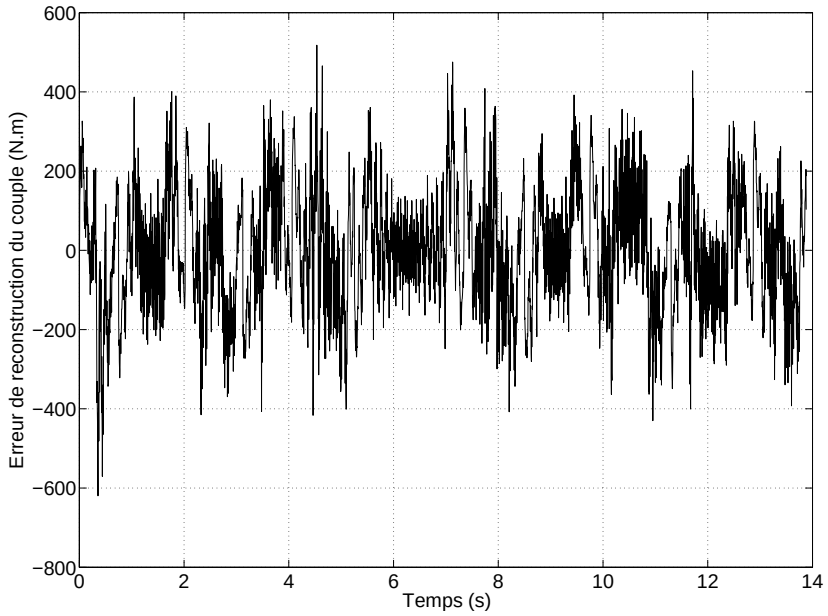


FIGURE 3.31: Erreur d'estimation du modèle rigide

Le taux d'approximation du modèle comme défini par [Ljung, 1999] est égal à :

$$Taux = 100\left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{N}(\tau_m(t) - \hat{\tau}_m(t))^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N}(\tau_m(t) - \bar{\tau}_m(t))^2}}\right) = 92.86\% \tag{3.22}$$

Ce constat confirme la pertinence de notre démarche séquentielle d'estimation paramétrique basée sur une approche expérimentale. Cependant, on remarque que dans certaines zones, l'erreur de prédiction du couple moteur peut atteindre une valeur élevée. Ceci provient certainement de l'erreur de modélisation du couple résiduel et du couple de frottement dans certaines zones à fortes accélérations.

6.2 Validation par une estimation simultanée des paramètres

Dans cette section nous proposons une estimation simultanée au sens des moindres carrés récursifs, de la dynamique rigide de l'axe. Cette approche permet de qualifier l'estimation expérimentale séquentielle présentée dans la section précédente. La procédure standard s'appuie sur un modèle dynamique linéaire en les paramètres. Elle est caractérisée par un nombre minimal de paramètres appelés paramètres de base. Durant cette démarche, nous avons limité le couple de frottement uniquement à ses termes classiques i.e. statique F_c et visqueux F_v. Ainsi la dynamique rigide est exprimée comme suit :

$$(J_b + N^2 J_m)\ddot{\theta}_n + F_v\dot{\theta}_n + F_c sign(\dot{\theta}_n) + \tau_r = \tau_m. \tag{3.23}$$

Notons que le couple de gravité résiduel τ_r est calculé en pré-traitement (3.11) et (3.12). Le modèle (3.23) peut alors être exprimé sous la forme (3.24) :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_n & \dot{\theta}_n & sign(\dot{\theta}_n) & \tau_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_b + N^2 J_m \\ F_v \\ F_c \\ \alpha \end{pmatrix} = \tau_m. \tag{3.24}$$

Remarque 6.2.1. *Comme le système est non linéaire, le spectre, l'amplitude et les formes du signal d'excitation employé a de l'importance sur la qualité d'estimation. Il est alors important d'optimiser le signal d'excitation. Ceci est envisagée dans [Gautier and Khalil, 1991], [Presse and Gautier, 1993] et [Swevers et al., 1997] où des renseignements sur ces techniques d'optimisation sont proposés pour la matrice d'observation.*

Soit n échantillons des signaux mesurés, le vecteur de paramètres à estimer est déterminé comme la solution d'un problème de type moindre carrée récursif où α est un paramètre de test de la fiabilité d'estimation. Si le modèle est bien identifié, alors la valeur de α doit être proche de 1. Les résultats de cette estimation sont illustrés dans le tableau 6.2 où ils sont comparés à ceux obtenus avec l'identification séquentielle. Les paramètres sont estimés par la technique des moindres carrés récursifs avec un facteur d'oubli égale à 0.87. On constate que le paramètre α est très proche de 1 ce qui permet de vérifier l'exactitude du calcul du couple de gravité résiduel τ_r issu des données du constructeur. Ces résultats montrent qu'une estimation du modèle rigide paramètre par paramètre permet d'avoir un meilleur taux d'approximation de modèle. Comme

Paramètre	Estimation simultanée	Estimation séquentielle	
		Vitesse > 0	Vitesse < 0
$J_b + N^2 J_m$ $(Kg.m^2)$	285.06	298.11	
F_v $(N.m.s/rad)$	337.17	336.73	294.44
F_c $(N.m)$	98.42	122.19	87.02
α	0.9767		
Taux d'approximation du modèle (%)	90.78	92.86	
Norme relative du résidu	0.1576	0.1381	

TABLE 3.5: Valeurs identifiées du modèle dynamique rigide de l'axe

nous pouvons le constater, la norme relative des erreurs diminuent de 14% avec une estimation physique fine du couple de frottement par modèle de Stribeck par rapport à une estimation classique. Ces résultats montrent bien la pertinence de la méthode employée. Elle nous servira pour l'identification de la dynamique souple de l'axe.

7 Intégration du comportement vibratoire de l'axe

7.1 Modèle générique de souplesse prépondérante

L'objectif de cette partie consiste à élaborer un modèle générique de souplesse d'axe du robot. Nous nous basons sur une représentation physique simple des phénomènes vibratoires sous la forme d'un modèle à constante localisée. Ce type de modèle, représenté à la figure 3.14 suffit très souvent à décrire l'effet des modes de déformation dominant la réponse de l'axe. Ainsi, la dynamique de l'axe 2 soumis à l'influence dominante d'un mode propre de transmission peut se représenter par un couplage souple de deux masses en rotation.

En adoptant les notations de cette figure, la fonction de transfert canonique représentant la dynamique d'un système soumis à un mode de transmission entre les vitesses $\dot{\theta}_n$ et $\dot{\theta}$ des deux masses en rotation, s'exprime dans le domaine continu sous la forme :

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\dot{\theta}_n(s)} = \frac{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \tag{3.25}$$

où,

• $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{J_b}}$ est la pulsation de résonance de la chaîne de transmission. Elle représente la pulsation des vibrations ressenties au niveau de la charge i.e. le bras du robot.

• $\zeta = \dfrac{D}{2\sqrt{J_b K}}$ désigne le facteur d'amortissement du mode de vibration associé.

Ce modèle comportemental sera utilisé pour la conception d'une précommande afin de commander la position réelle du bras de robot à partir de la consigne en position du moteur. Cette partie sera largement exposée dans les sections qui suivent.

7.2 Analyse expérimentale des phénomènes vibratoires

Dans cette section on s'intéresse à déterminer la dynamique flexible de l'axe soumis principalement à l'action de la raideur K et de l'amortissement axial D. De ce fait, les modes souples

sont susceptibles d'être excités dès que la trajectoire physique du système s'écarte de la loi de mouvement. Ceci engendre une dégradation de la précision dynamique où la position réelle diffère de la position de référence. On définit $\delta\theta$ la déformation dynamique angulaire de l'axe ou simplement l'erreur dynamique du mouvement selon

$$\delta\theta(t) = \theta(t) - \theta_n(t). \tag{3.26}$$

L'erreur dynamique du mouvement de l'axe est issue de la différence entre l'angle mesuré *via* le Laser Tracker ($\theta(t)$) et le déplacement angulaire mesuré par le codeur moteur juste après le réducteur ($\theta_n(t)$).

L'identification de la dynamique rapide de l'axe 2 a été réalisée comme suit : nous avons fait varier l'angle de rotation θ_n de l'axe 2 du robot d'une position initiale de -70° à une position finale de 50° avec des paliers de vitesses en cascade variant entre 0.01 rad/s et 0.3 rad/s comme illustré dans la figure 3.32. Ce profil a été choisi pour produire une forte excitation de l'énergie potentielle interne due à la présence de la souplesse articulaire au niveau de la chaîne de transmission. Ainsi, cette loi de mouvement discontinue en vitesse permet d'exciter les modes souples au niveau de la chaîne de transmission de l'articulation. Nous associons aux asservissements de chaque axe une raideur équivalente. Un test permet de mettre en évidence leur influence. De ce fait, des mesures ont été effectuées avec soit l'asservissement actif ou soit les axes bloqués par les freins. Une étude détaillée sur l'identification statique des raideurs est effectuée dans [Hardeman, 2008]. L'auteur présente une stratégie d'identification des raideurs statiques articulaires et d'asservissement. Pour notre étude, on note que dans les deux cas les résultats sont comparables. Ceci est dû au fait que les freins sont aussi situés au niveau des arbres moteurs, tout comme les codeurs. Ils jouent ainsi le même rôle que l'asservissement quand le robot est immobile. La déformation articulaire de l'axe est alors donnée dans la figure

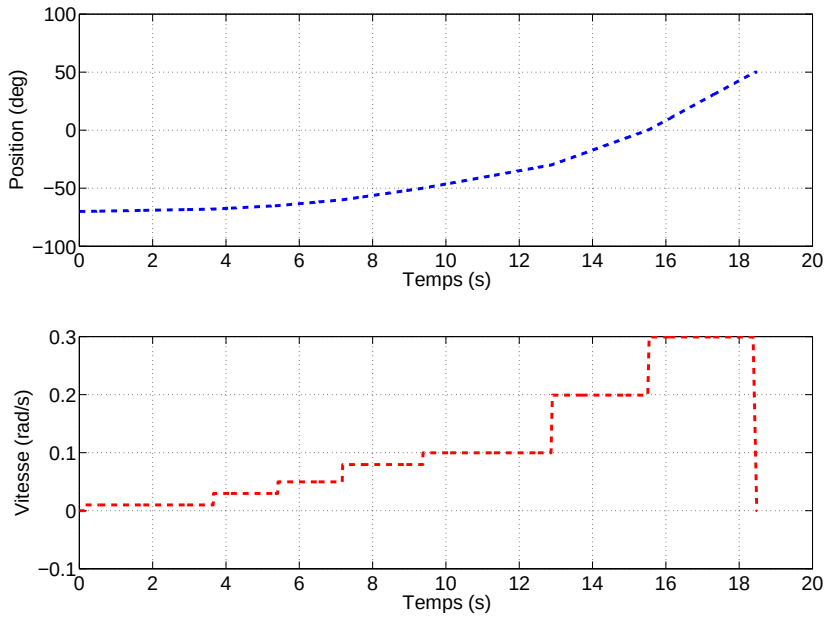


FIGURE 3.32: Trajectoire de test pour l'identification du comportement souple de la chaîne de transmission

3.33. A partir de cette figure, nous pouvons mettre en avant deux phénomènes dominants :

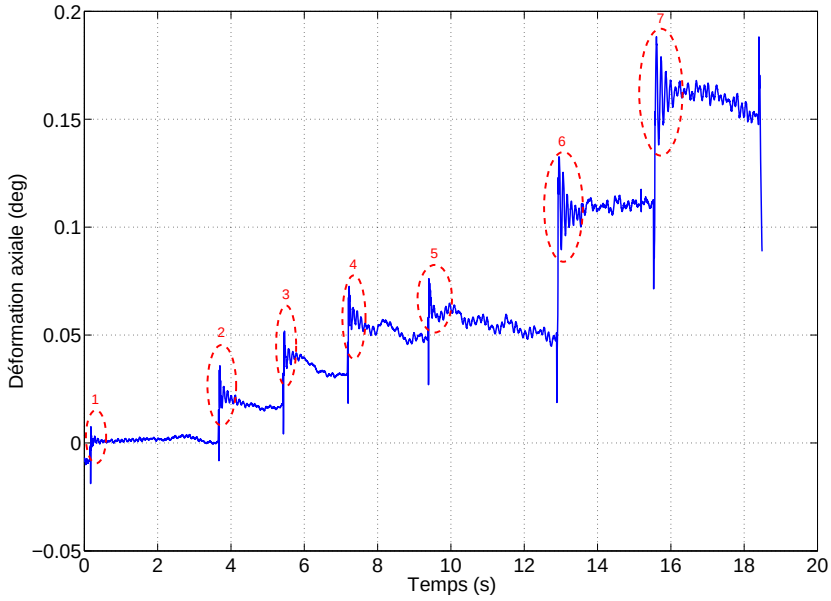


FIGURE 3.33: Erreur de suivi de position du bras 2

- Un comportement vibratoire pour chaque palier de vitesse dû à la présence d'une raideur articulaire K accompagnée d'un amortissement D. Ce phénomène s'amplifie au fur et à mesure en fonction de l'amplitude en vitesse. Il se manifeste lors des phases d'arrêt et de changement de vitesse.
- Une déflexion axiale issue de l'action du couple résiduel de gravité.

Dans la suite de ce travail, nous procédons à la séparation des sources des défauts de transmission. Notre approche est constituée de deux grandes parties. En se basant sur un modèle mathématique simplifié, nous proposons d'abord d'estimer de manière non asymptotique les paramètres issus du mode vibration de la chaîne de transmission. Ce modèle générique de transmission est ensuite utilisé pour concevoir une précommande prenant en compte la flexibilité de l'axe. Cette précommande est alors couplée à la génération de la loi de mouvement.

7.3 Estimation paramétrique expérimentale

Cette section a pour objectif d'estimer la fréquence et l'amortissement des oscillations constatées au niveau des paliers de la déformation articulaire. Trois méthodes sont étudiées :

- la méthode temporelle par calcul moyen des périodes,
- la méthode fréquentielle par transformée de Fourier rapide,
- l'estimation algébrique non asymptotique.

On notera que les deux premières techniques ne sont exhaustives. Cependant elles possèdent l'avantage d'être facilement transposables aux systèmes mécatroniques du type robot. Nous renvoyons le lecteur à [Hayes, 1996] pour une revue plus complète.

Concernant la troisième approche basée sur les estimateurs non asymptotiques, elle présente une des contribution majeure de cette thèse. Elle consiste à développer des algorithmes temps

réel basés sur un modèle. Ainsi, le fait d'estimer les paramètres ω_0 et ζ du modèle local linéaire (3.25) par les deux premières approches physiques permet de valider la robustesse de notre estimateur au regard d'une identification paramétrique réelle. Les caractéristiques de cet estimateur seront exploitées ultérieurement en vue de l'amélioration du comportement dynamique du bras de robot.

7.3.1 Méthode de calcul des périodes

Cette technique consiste à calculer la fréquence directement à partir des périodes du signal étudié, [Destuynder and Santi, 2003]. Le principe de cette méthode est assez simple. Il repose sur la détermination d'un ensemble de périodes en traçant la droite horizontale qui passe par la valeur moyenne du signal. Ainsi, la fréquence dominante est l'inverse de la moyenne de ces périodes.

Cette méthode donne des bons résultats quand le signal ne contient qu'une seule fréquence. Elle permet une estimation assez rapide du paramètre fréquentiel au bout de quelques périodes du signal. Ceci explique le fait que cette approche n'est valable pour pour l'estimation de la fréquence dominante. Par conséquent, on adoptera cette technique pour l'estimation de la fréquence propre de l'axe du robot à partir du graphe de déformation axiale $\delta\theta(t)$ à partir des différents paliers comme montré dans la figure 3.33.

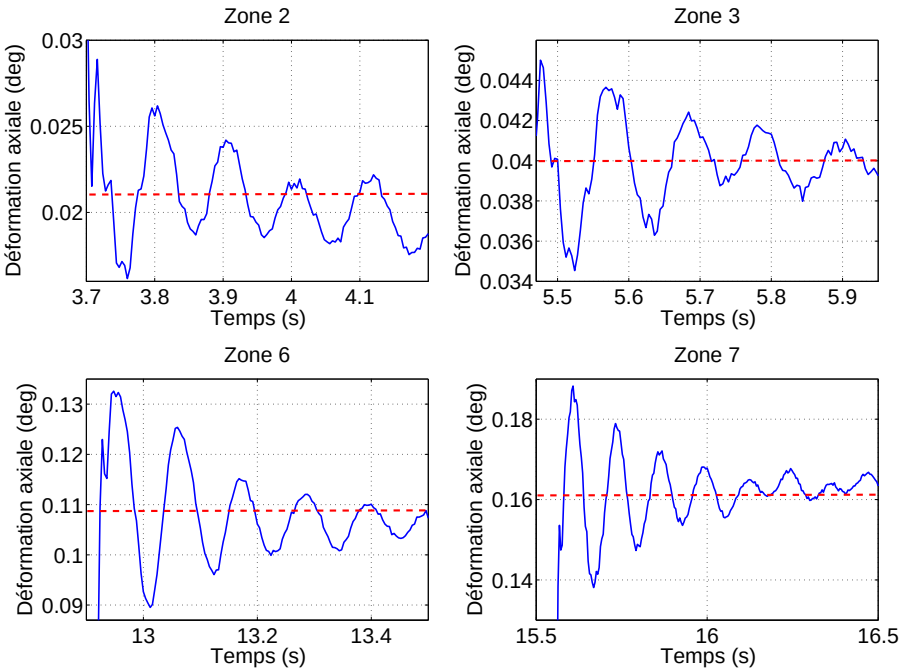


FIGURE 3.34: Zoom sur les paliers selectionés du signal

A partir de zooms effectués sur les différents paliers de la déformation axiale mesurée comme illustré dans la figure 3.34, nous avons retenu les zones : 2, 3, 6 et 7 où l'oscillation de la structure est propre. Nous procédons à l'estimation de la fréquence à partir de la détermination des périodes. Ainsi, le tableau 3.6 montre les résultats de l'identification de la fréquence des

parties sélectionnées du signal. L'identification du mode de déformation peut s'effectuer au bout d'une ou de deux périodes. L'identification de la fréquence propre de l'articulation à partir du

Paramètre estimée	Zone 2	Zone 3	Zone 6	Zone 7
f_0 (Hz)	9.21	9.22	9.13	8.89

TABLE 3.6: Fréquence propre identifiée *via* la méthodes de calcul des périodes

calcul moyen des périodes donne une idée sur le premier mode de vibration associé à $\bar{f}_0$=9.11 Hz. En effet, la déviation standard relative de cet estimateur est égale à 1.68%. Elle montre sa pertinence. Cet estimateur physique ou réel est assez simple à implémenter pour un traitement des données en ligne.

7.3.2 Estimation de la fréquence modale par Transformée de Fourier Rapide

La transformée de Fourier discrète d'un signal périodique quelconque permet de décomposer un signal périodique quelconque en une somme de signaux sinusoïdaux. Cette transformation du domaine temporel vers le domaine fréquentiel, permet alors de réaliser un spectre en amplitude du signal et de procéder à un filtrage de ce signal.

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$, la suite de N termes $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$, définis par :

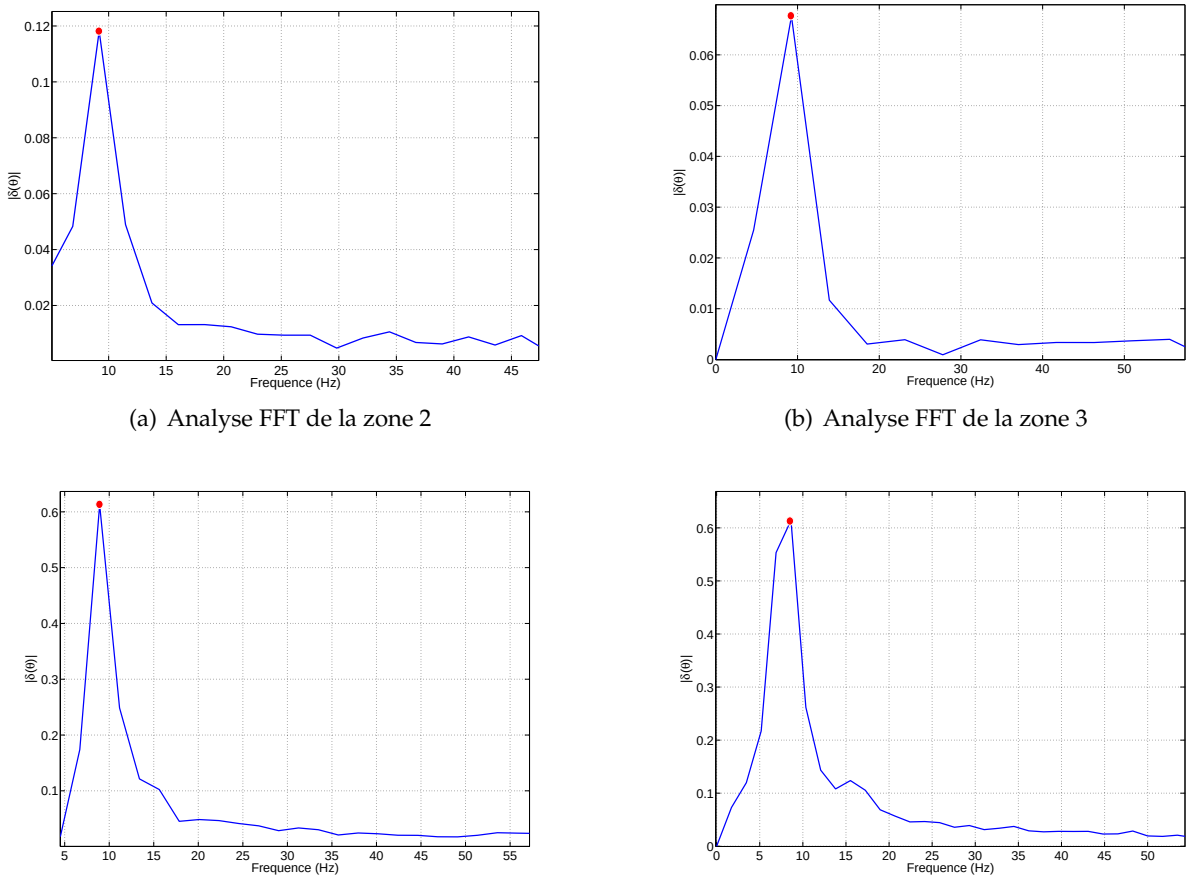
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \tag{3.27}$$

En pratique, $x_n = x(nT_e)$ et les N termes X_k correspondent à une approximation, à un facteur multiplicatif de la période d'échantillonnage T_e près, de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = k\dfrac{f_e}{N}$, avec k varient entre 0 et $N-1$, c'est-à-dire f variant entre 0 et f_e. L'avantage de la transformée de Fourier rapide réside en sa complexité algorithmique par rapport à la complexité du calcul de base. En effet, la complexité de calcul de (3.27) s'exprime en $O(n\ ln(n))$ pour sa version rapide, tandis qu'elle s'exprime en $O(n^2)$ pour la version basique.

La méthode d'estimation consiste à tracer l'amplitude du signal en fonction de la fréquence, où les fréquences dominantes sont celles qui présentent un extremum local. Bien que cette méthode est fiable, elle nécessite plusieurs périodes pour générer des résultats exploitables. On préférera l'utiliser en post-traitement qu'en-ligne. Une analyse FFT est réalisée sur les paliers de la figure 3.34. La figure 3.35 montre les divers résultats d'estimation fréquentielle obtenus par cette approche. L'analyse fréquentielle par FFT montre que les oscillations constatées au niveau des paliers de la déformation axiale sont engendrées par un seul mode de vibration dans le domaine observé. Le tableau 3.7 donne les résultats de cette campagne d'analyse. Ainsi, les

Paramètre estimée	Zone 2	Zone 3	Zone 6	Zone 7
f_0 (Hz)	9.17	9.26	8.93	8.81

TABLE 3.7: Identification du mode de déformation à travers une analyse FFT



(a) Analyse FFT de la zone 2

(b) Analyse FFT de la zone 3

(c) Analyse FFT de la zone 6

(d) Analyse FFT de la zone 7

FIGURE 3.35: Résultats de l'estimation fréquentiel avec une analyse FFT

fréquences obtenues par cette campagne sont cohérentes avec celles du tableau 3.6).

7.3.3 Estimation du coefficient d'amortissement

Généralement les structures mécaniques que l'on étudie sont faiblement amorties et le facteur d'amortissement modal est globalement inférieur à 0.2. Après vérification de cette hypothèse nous calculons d'abord la fréquence propre. Nous déduisons alors l'amortissement ζ à partir du décrément logarithmique comme suit :

$$\delta = ln(\frac{y_1}{y_2}) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.28}$$

où, y_1 et y_2 représentent les amplitudes des premiers dépassements comme montré dans la figure 3.36. Une interpolation exponentielle sur les différents paliers des oscillations permet d'obtenir un facteur d'amortissement constant égale à 0.159.

7.3.4 Estimation en ligne de la fréquence et du coefficient d'amortissement

Nous présentons dans ce paragraphe une application des estimateurs algébriques sur le bras du robot afin d'identifier les paramètres fréquentiels relatifs au modèle souple de l'axe 2 i.e. la fréquence propre f_0 et le coefficient d'amortissement ζ. Rappelons que la dynamique est

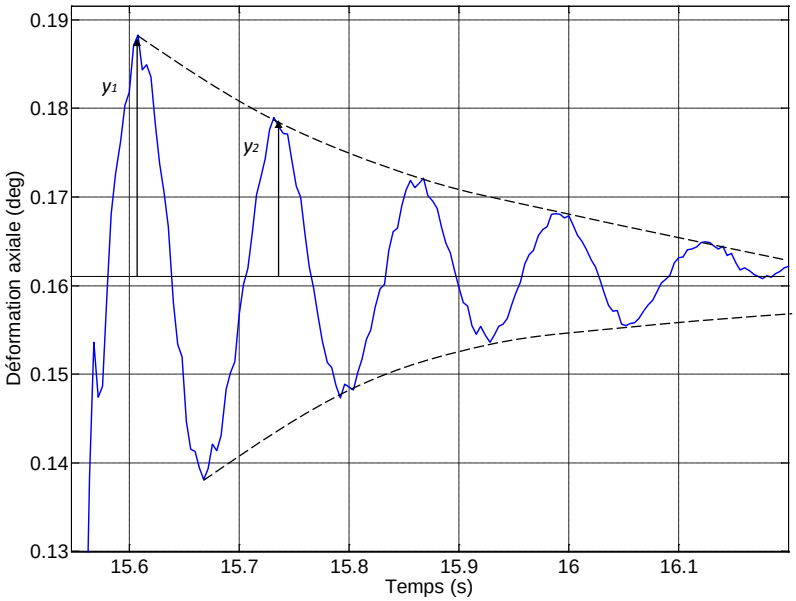


FIGURE 3.36: Identification du coefficient d'amortissement

soumise à l'action de la souplesse articulaire et de l'amortissement du bras de robot :

$$J_b\ddot{\theta}(t) + D\dot{\theta}(t) + K\theta(t) + \tau_r(t) = D\dot{\theta}_n(t) + K\theta_n(t). \tag{3.29}$$

L'estimation pose un problème dans des situations réelles en présence de signaux mesurés, bruités ou couplés avec des entrées inconnues vues comme des perturbations. C'est pourquoi cette section traite les performances de la méthode algébrique afin d'aboutir à des estimateurs rapides et robustes [Oueslati et al., 2012]. Le couple résiduel de gravité τ_r est considéré comme une perturbation de type sinusoïdale (3.11) structurée. Nous nous intéressons ici au régime oscillatoire amorti de la déformation comme montré dans la figure 3.34. Ainsi, l'équation (3.29) est réécrite sous la forme suivante :

$$\lambda_1\delta\theta(t) + \lambda_2\dot{\delta\theta}(t) = -\ddot{\theta}(t) \tag{3.30}$$

où, $\lambda_1 = \dfrac{K}{J_b}$ et $\lambda_2 = \dfrac{D}{J_b}$. Bien que le système (3.30) donne un modèle comportemental de l'axe, il ne représente pas une relation entrée/sortie inspirée d'une représentation d'état classique.

7.3.5 Expressions de l'estimateur algébrique

Définissons le vecteur : $\Lambda = (\lambda_1\ \lambda_2)^T$. L'estimation des paramètres $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ est définie comme suit :

$$P\Lambda = Q. \tag{3.31}$$

Les matrices $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $Q \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} \int_0^t \tau^2(t-\tau)\delta\theta(\tau)d\tau - \int_0^t \tau(t-\tau)^2\delta\theta(\tau)d\tau & \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2(t-\tau)^2\delta\theta(\tau)d\tau \\ \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2(t-\tau)^2\delta\theta(\tau)d\tau - \frac{1}{3}\int_0^t \tau(t-\tau)^3\delta\theta(\tau)d\tau & \frac{1}{6}\int_0^t \tau^2(t-\tau)^3\delta\theta(\tau)d\tau \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4\int_0^t \tau(t-\tau)\theta(\tau)d\tau - \int_0^t \tau(t-\tau)^2\theta(\tau)d\tau - \int_0^t \tau^2\theta(\tau)d\tau \\ 2\int_0^t \tau(t-\tau)^2\theta(\tau)d\tau - \frac{1}{3}\int_0^t \tau(t-\tau)^3\theta(\tau)d\tau - \int_0^t \tau^2(t-\tau)\theta(\tau)d\tau \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

Si P est inversible, Λ est obtenu par :

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} = P^{-1}Q, \tag{3.34}$$

Remarque 7.3.1. *Au temps t = 0 et à d'autres instants, les matrices utilisées pour calculer l'estimateur peuvent être nulle nulles. Les paramètres sont alors indéterminés. Nous devons donc en premier lieu évaluer la formule non pas au temps t = 0 mais après un court instant t = ϵ avec $\epsilon > 0$. Ainsi, le vecteur des paramètres est estimé comme suit :*

$$\hat{\Lambda} = \begin{cases} "arbitraire" & pour \quad t \in [0, \epsilon[\\ P^{-1}Q & pour \quad t \in [\epsilon, \inf[. \end{cases} \tag{3.35}$$

D'après les résultats du chapitre 2, nous pourrons utiliser ensuite l'estimation de la médiane pour remédier à ce problème de singularités.

Mise en oeuvre et implémentation

L'expression temporelle de l'estimateur algébrique (3.32) et (3.33) s'exprime systématiquement sous la forme d'une combinaison d'intégrales qui évoluent sur l'intervalle $[0, t[$. Une étude sur la contribution des bruits sur les estimateurs est présentée dans les travaux de [Liu et al., 2011a]. En pratique, il est utilisé une fenêtre glissante de taille T_f afin de minimiser l'effet des dynamiques non modélisées. L'idée est de calculer ces intégrales sur une fenêtre $[t - T_f, t]$. Le choix de la longueur de la fenêtre glissante en présence de signaux bruités est un problème encore ouvert.

La déformation axiale $\delta\theta$ (Cf. figure 3.33) montre la présence d'une perturbation harmonique. Cette perturbation est issue des bruits de mesures du Laser et du contrôleur du robot. Ces harmoniques sont rejetés en utilisant un filtre passe-bas. Nous utilisons ainsi un filtre similaire à celui présenté dans [Trapero et al., 2007]. Le numérateur et le dénominateur résultant de chaque estimation des paramètres sont filtrés comme suit :

$$\hat{\lambda}_{k,f}(t) = \frac{F(s)n(t)}{F(s)d(t)}, \tag{3.36}$$

où $F(s) = \dfrac{\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta_c\omega_c s + \omega_c^2}$ est un filtre du second ordre. L'utilisation d'un filtre identique pour le numérateur et le dénominateur n'affecte pas la valeur constante du quotient (3.36).

L'estimateur est programmé d'une manière discrète avec un pas d'échantillonnage de 4 ms. Les expressions à base d'intégrales (3.32) et (3.33) sont approchées par une somme en utilisant la méthode des trapèzes. La taille de la fenêtre glissante doit être suffisamment longue pour atténuer le bruit [Mboup et al., 2009]. En outre, plus la taille de la fenêtre est importante plus le bruit est rejeté mais cela engendre un retard d'estimation. Ce constat doit être pris en compte lors du choix de la longueur de T_f. L'expérience montre qu'une fenêtre de glissement de longueur $T_f = 20 \times 4.10^{-3}$ s génère une estimation de Λ. Ainsi, le filtre $F(s)$ est implémenté avec les paramètres $\zeta_c = 0.707$ et $\omega_c = 60 rad/s$.

Au début de l'estimation entre les instants $t = 0$ et $t = t_f$ (l'instant où les paramètres sont non identifiables) λ_1 et λ_2 prennent des valeurs arbitraires. Une fois que le nombre d'échantillons stockés atteint la taille de T_f, les paramètres inconnus deviennent constants et le modèle (3.30) converge vers les données mesurées. La figure 3.37 montre qu'après 0.08 s, les paramètres

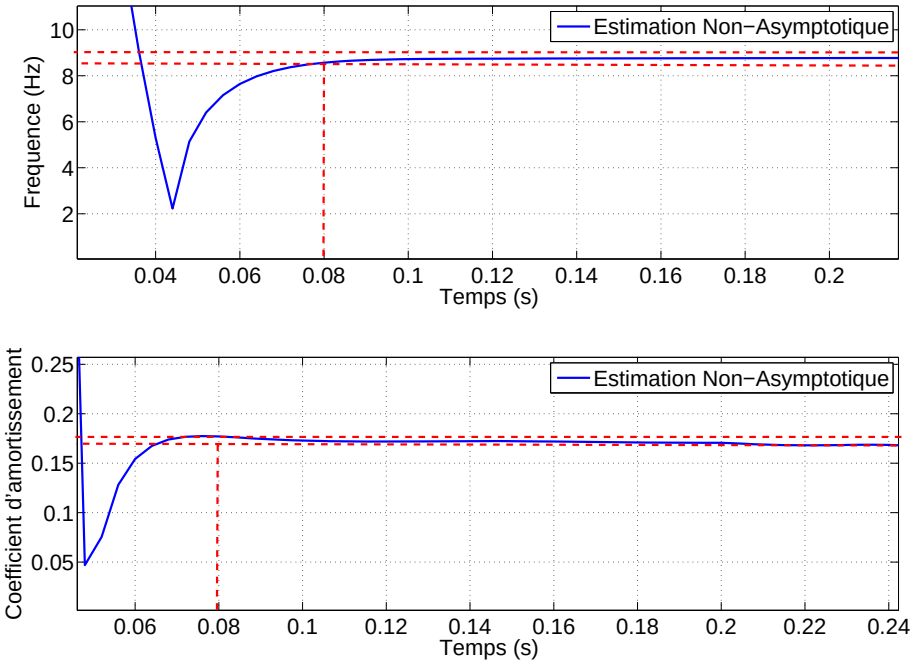


FIGURE 3.37: Exemple d'estimation algébrique des paramètres fréquentiels : zone 7

convergent vers des valeurs constantes pour les différents paliers de vitesses. Le temps de convergence de l'estimateur est obtenu quand la valeur estimée ne change pas plus de $\pm$ 2%. Ainsi, une estimation de la fréquence propre et du coefficient d'amortissement est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_1}, \\ \zeta = \dfrac{\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1}}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Les résultats de l'estimation algébrique de f_0 et de ζ sont obtenus dans le tableau 3.8. Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus par les démarches classiques présentés dans les sections précédentes (FFT et le calcul moyen des périodes).

Paramètre estimée	Zone 2	Zone 3	Zone 6	Zone 7
f_0 (Hz)	9.14	9.2	8.91	8.84

TABLE 3.8: Identification du mode de déformation à travers la méthode algébrique

7.3.6 Calcul de la variabilité de la raideur équivalente et l'amortissement de l'axe

A partir des valeurs identifiées de f_0 et de ζ par les trois méthodes présentées dans §7.3 et de l'estimation du moment d'inertie J_b obtenue précédemment (Cf. table 3.4), nous procédons au calcul de la raideur angulaire équivalente de l'axe souple K et de son amortissement équivalent D. Ces valeurs sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} K = \omega_0^2 J_b, \\ D = 2\zeta\omega_0 J_b. \end{cases} \tag{3.38}$$

Le tableau suivant, donne une étude de variabilité sur l'estimation de la raideur axiale équivalente de la deuxième articulation du robot. Cette étude se base sur la variation de l'estimation de la fréquence au niveau des paliers employés. Bien que le pourcentage de variation d'une estimation de la fréquence f_0 ne dépasse pas les 4% entre les différents paliers, le but est de voir l'impact causé sur la variation de la raideur K et de l'amortissement D de l'axe. Notons que la valeur de l'inertie du bras utilisée est celle trouvée avec une estimation expérimentale séquentielle de l'ordre de 275.16 $Kg.m^2$. L'analyse des résultats obtenus montre que le pourcentage de variation

	Zone 2	Zone 3	Zone 6	Zone 7
Calcul moyens des périodes (10^5 $N.m/rad$)	9.2143	9.2344	9.0550	8.5852
FFT (10^5 $N.m/rad$)	9.1345	9.3147	8.6626	8.4313
Algébrique (10^5 $N.m/rad$)	9.0748	9.1943	8.6238	8.4889

TABLE 3.9: Variation de la raideur dynamique K en fonction de la fréquence propre estimée

	Zone 2	Zone 3	Zone 6	Zone 7
Calcul moyens des périodes (10^3 $N.m.s/rad$)	5.0635	5.0690	5.0195	4.8876
FFT (10^3 $N.m.s/rad$)	5.0415	5.0910	4.9096	4.8436
Algébrique (10^3 $N.m.s/rad$)	5.0250	5.0580	4.8986	4.8601

TABLE 3.10: Variation de l'amortissement D en fonction de la fréquence propre estimée

de la raideur dynamique ne dépasse pas les 7.7% entre la zone 3 et la zone 7 par exemple, pour une estimation par la méthode algébrique. La variation de l'amortissement n'excède pas 3.3%. Comme les différents essais donnent des constantes de raideur et d'amortissement légèrements différentes, il est probablement juste de conclure qu'il se présente un effet non linéaire. Ainsi, pour le modèle générique (3.10) nous avons opté pour des valeurs moyennes $K = 8.8454\ 10^5$

$N.m/rad$ et $D = 4.9604\ 10^3\ N.m.s/rad$. En guise de conclusion nous présentons un tableau récapitulatif (Cf. tableau 3.11) décrivant l'ensemble des paramètres physiques estimés pour le modèle rigide et souple de l'axe. Ce tableau va nous servir pour évaluer le modèle souple dans le paragraphe suivant.

Paramètre	Valeur		Description
	Vitesse > 0	Vitesse < 0	
$\|F_s\|$ $(N.m)$	148.54	111.38	Frottement statique
$\|F_c\|$ $(N.m)$	122.19	87.02	Frottement de Coulomb
F_v $(N.m.s/rad)$	336.73	294.44	Frottement visqueux
$\|\dot{\theta}_{n_s}\|$ (rad/s)	$1.73\ 10^{-2}$		Vitesse de Stribeck
δ_s	2		Facteur frottement de Stribeck
J_m $(Kg.m^2)$	$685\ 10^{-6}$		Inertie du rotor
J_b $(Kg.m^2)$	275.16		Inertie du bras
K $(N.m/rad)$	$8.84\ 10^5$		Raideur articulaire
D $(N.m.s/rad)$	$4.96\ 10^3$		Amortissement articulaire
f_0 (Hz)	9.02		Fréquence propre
ζ	0.159		Coefficient d'amortissement

TABLE 3.11: Paramètres physique estimés

7.4 Validation temporelle du modèle dynamique souple

Dans cette section, nous procédons à la validation du modèle dynamique souple à constantes localisées. Pour vérifier la précision des estimations conduites sur les mesures effectuées au niveau de l'axe2, nous avons opté, pour la reconstruction de la déformation angulaire $\delta\theta(t)$ d'intégrer dans le modèle les différents éléments du tableau 3.11. Cette campagne est réalisée avec le même protocole d'essai décrit à la section § 7.2. La figure 3.38 montre l'évolution de la déformation angulaire $\delta\theta(t)$ simulée vis-à-vis de la déformation mesurée. Le résultat le plus pertinent concerne l'aspect vibratoire lors du changement brusque de la référence en vitesse du moteur. On peut remarquer également le bon comportement du modèle identifié à travers une loi de mouvement articulaire à dynamique élevée. En fait, cette approche intègre une description comportementale des défauts dus aux éléments souples que constituent la chaîne de transmission de l'axe couplée aux erreurs liées au couple de gravité résiduelle et le couple de frottement interne. Le graphe 3.38 donne une idée sur la qualité du modèle avec un taux d'approximation de 94.2 %. Cette approximation nous permet d'exploiter ce modèle identifié en vue de concevoir des boucles d'anticipation permettant de rigidifier la structure flexible *via* une précommande en boucle ouverte. En outre, en raison de la non accessibilité à l'architecture de commande de la baie du robot, la conception de la précommande permet de fournir un signal de commande nominal en position et en vitesse pour que la sortie réelle du bras $\theta(t)$ suive une trajectoire imposée $\theta_{ref}(t)$ en boucle ouverte. Cette correction de trajectoire prenant en compte les phénomènes vibratoires sera étudiée dans le prochain chapitre.

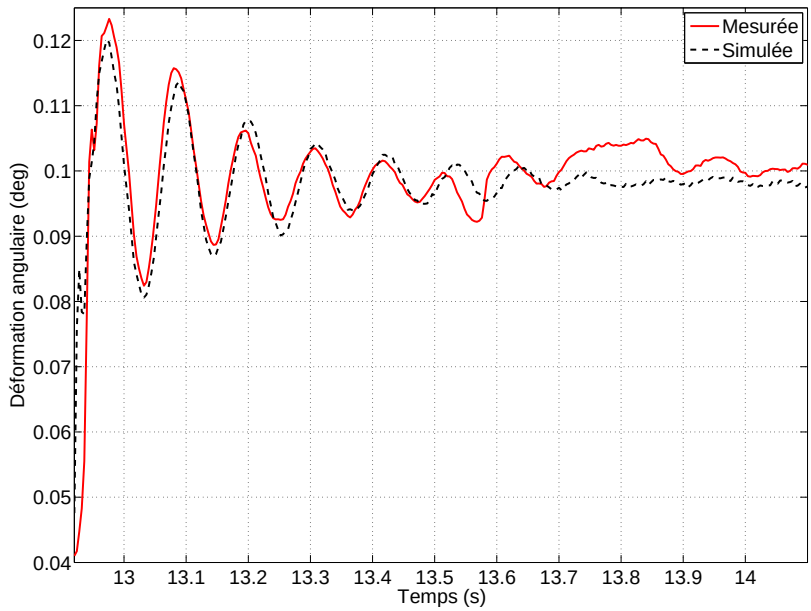


FIGURE 3.38: Validation du modèle simulé de la déformation angulaire $\delta\theta$

8 Bilan sur la compréhension des phénomènes physiques et la modélisation générique d'un axe souple

Dans ce chapitre, nous avons présenté une démarche expérimentale, basée sur la mesure de la dynamique rigide et souple d'un axe de robot industriel, afin d'obtenir un modèle de connaissance imitant le comportement réel du manipulateur. La méthodologie de modélisation retenue consiste tout d'abord à exprimer d'une façon détaillée les couples de gravité, de frottements et d'inertie, représentant la dynamique rigide du robot. Ce modèle est alors validé par des expérimentations. Nous constatons alors que le taux d'approximation de ce modèle par rapport à la réalité rigide du système dépasse les 90%. Ensuite, à partir des mesures de la déformation angulaire à grande vitesse que subit l'axe, nous avons bâti un modèle de comportement intégrant les éléments souples présents. Le modèle basé sur les expérimentations permet de simuler un mode de déformation dominant du robot, de manière simple et générique en utilisant les caractéristiques physique du robot. Ce modèle local linéaire permet de reconstruire la déformation axiale, "non visible" par la commande actuelle au niveau de la baie. L'estimation des paramètres a été effectuée en deux étapes. La première est basée sur des approches physiques classiques. Tandis que la deuxième est inspirée des travaux du chapitre 2 issus d'algorithmes d'estimation non-asymptotiques. Cette redondance permet de vérifier la robustesse de cette approche d'identification. Des relevés expérimentaux obtenus pour un profil à discontinuité en vitesse et à dynamique élevée démontrent la pertinence du modèle avec une précision de l'ordre de 94%. Dans le chapitre 4, nous proposons alors la synthèse d'une pré-commande en vue d'un gain notable en précision dynamique.

Chapitre 4

Méthodologie d'amélioration du comportement dynamique d'un robot industriel

Sommaire

1 Introduction . . . 123

2 Conception d'une précommande en boucle ouverte et génération de loi de mouvement adaptées au mouvement d'un axe souple . . . 124

2.1 Généralités sur les lois de mouvement . . . 125

2.2 Méthodologie de réglage de jerk adaptée à la réduction de vibrations . . . 130

2.3 Confrontation avec la technique d'input shaping . . . 133

2.4 Adaptation au contexte d'un axe du robot étudié . . . 138

2.5 Conception d'une précompensation de trajectoire d'un axe souple de robot . . . 141

2.6 Application à la génération de précommande et validations expérimentales 144

3 Caractérisation de l'évolution des fréquences propres pour un robot industriel 147

3.1 Cadre d'étude et d'analyse . . . 147

3.2 Analyse de la variation fréquentielle . . . 148

4 Application de la technique d'estimation non asymptotique à l'amélioration du comportement vibratoire du robot . . . 151

4.1 Estimation algébrique rapide de la variation fréquentielle modale . . . 154

4.2 Technique d'implantation . . . 154

4.3 Validation expérimentale . . . 156

5 Bilan sur la synthèse de loi de mouvement adaptée et d'une commande d'un axe souple . . . 159

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous poursuivons notre démarche basée sur les modèles obtenus dans le chapitre 3 pour en déduire une stratégie de contrôle. Cette démarche se base sur la conception d'une structure de commande destinée au suivi de profil et caractérisée par un aspect précommande couplé à la génération de loi de mouvement associée. Nous proposons

d'étudier l'impact de la loi de mouvement sur le comportement d'un axe de robot asservi. Une analyse comparative est réalisée entre la loi à jerk limité disponible dans la plupart des commandes numériques de machines de production et d'autres approches brevetées basées sur la technique d'input shaping. Ces stratégies visent à minimiser les vibrations induites dans le cas d'une structure soumise à un mode vibratoire. Nous présentons ensuite une démarche de conception d'une structure de commande destinée au suivi de profil. Cette commande basée sur le principe de précompensation est élaborée à partir du modèle d'axe souple développé et identifié au chapitre 3. Cette démarche rejoint l'objectif global de la commande visant à minimiser l'erreur axiale. A la fin de ce chapitre, nous présentons une approche générale d'adaptation de la loi de mouvement à jerk limité. Elle consiste à identifier en ligne *via* l'estimateur non asymptotique les variations de la configuration du robot en vue de mettre à jour le paramètre de jerk. Cette stratégie permet d'adapter en temps réel le planificateur de mouvement afin d'anticiper les vibrations au cours du mouvement. A l'issu d'une application expérimentale et grâce à l'estimation rapide des paramètres, nous obtenons une réduction de 80% des vibrations résiduelles.

2 Conception d'une précommande en boucle ouverte et génération de loi de mouvement adaptées au mouvement d'un axe souple

Les manipulateurs industriels présentent des commandes classiques intégrés (Cf. les boucles dans les cadres en pointillés de la figure 4.1). Ces commandes sont toujours limitées par le comportement souple de l'axe qui n'est pas pris en charge par les asservissements. Dans cette section nous étudions la partie commande du système déjà identifié au niveau du chapitre 3, ici noté **Robot** dans la figure 4.1.

Nous proposons l'amélioration de la précision dynamique par la réduction des vibrations d'un axe de robot sériel. Nous introduisons une méthode de génération de mouvement de l'axe permettant de prendre en compte la dynamique de son mode de déformation dominant. Nous proposons ensuite une méthode de synthèse d'une précommande associée à un modèle souple de l'axe afin de réduire l'erreur de poursuite entre la référence et la position de la charge. Les blocs grisés de la figure 4.1 caractérisent les contributions de ce chapitre.

Le schémas 4.2 présente les boucles internes d'asservissement et d'anticipation de la figure 4.1. Le robot Stäubli est équipé de contrôleurs PID indépendants pour chaque axe. L'action de commande proportionnelle (P_{PID}) est obtenue en multipliant l'erreur en position (entre $\theta_m^d(t)$ et $\theta_m(t)$) avec un gain proportionnel (k_p). Ceci donne un couple moteur proportionnel à cette erreur. Une action d'intégration, notée (I_{PID}), est introduite dans le dispositif de commande pour réduire l'erreur de position en régime permanent causée par le frottement. Ensuite, cette erreur est intégrée et est multipliée par un gain (k_i) donnant un couple moteur relatif à l'action intégrale. Afin d'assurer la stabilité, un terme (D_{PID}) désignant l'amortissement est ajouté. Il est multiplié par la dérivée de l'erreur en position asservie. Pour la commande du mouvement, la dérivation numérique de l'erreur en vitesse n'est pas souhaitable car elle génére généralement des hautes fréquences sur le signal de la vitesse. Depuis que les servo-moteurs sont équipés de résolveurs, un signal de vitesse de haute qualité est disponible. Ce signal de vitesse est utilisé

pour fournir l'effet d'amortissement dans une boucle de vitesse séparée. Une boucle de vitesse est donc ajoutée à la commande de mouvement. Afin d'améliorer les performances de suivi de trajectoire du dispositif de commande interne, un bloc d'anticipation (boucle ouverte) est ajouté. Le bloc de micro-interpolation permet de calculer une vitesse et une accélération notée respectivement Vel_{ff} et Acc_{ff}. En multipliant cette accélération avec un gain approprié, il est engendré un couple d'anticipation proportionnel au couple requis à la fois pour l'actionneur et la charge.

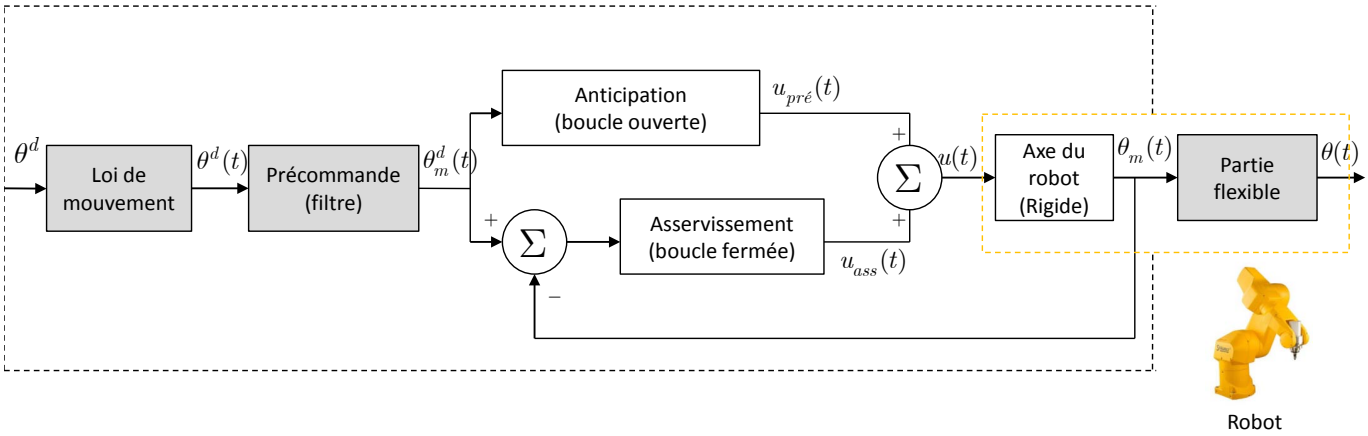


FIGURE 4.1: Architecture d'un système de commande générique d'axe

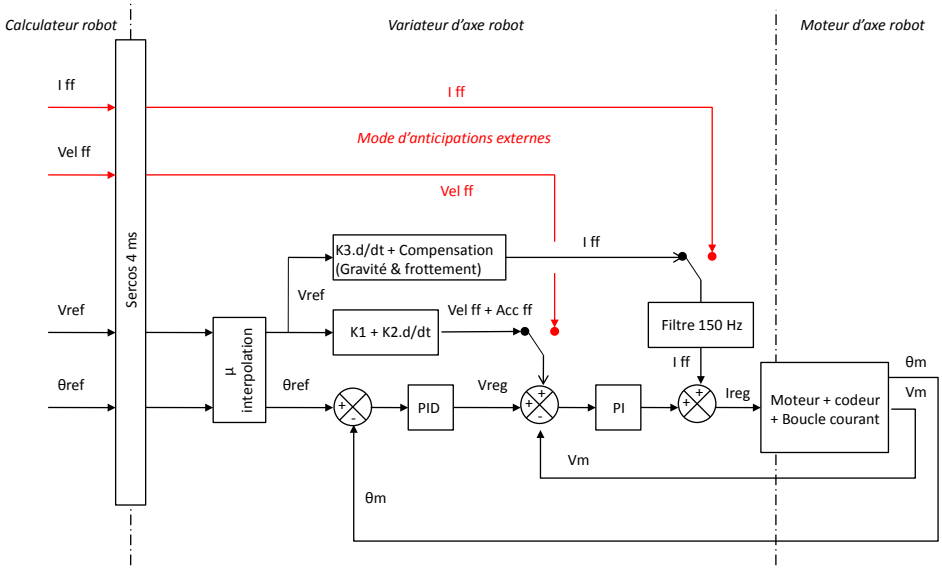


FIGURE 4.2: Boucle interne de l'asservissement d'un axe du robot Stäubli RX 170

2.1 Généralités sur les lois de mouvement

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la planification de trajectoire de l'axe du robot manipulateur. Lorsque cette trajectoire notée X, est caractérisée uniquement par les points de départ X_0 et finale X_f, on parle alors d'une trajectoire de type point à point. Cette trajectoire définit ainsi la cinématique du mouvement. Nous supposons que $X(t)$ est suffisamment dérivable pour calculer sa vitesse et son accélération. De ce fait, une fonction temporelle candidate au titre

de loi de mouvement, doit satisfaire plusieurs propriétés :

1. Elle doit disposer au moins d'une phase d'accélération et d'une phase de décélération ;
2. Elle doit être suffisamment paramétrable pour décrire toutes les longueurs de déplacements possibles ;
3. Elle doit avoir la capacité de limiter les vibrations du système tout en assurant une continuité suffisante.

Nous verrons par la suite que les développements effectués sont facilement transposables au cas d'une trajectoire définie par des points de passage où la vitesse et l'accélération sont imposées. Définissons les fonctions du temps $X(t)$ pour la position de l'axe, $V(t)$ pour sa vitesse, $A(t)$ son accélération et $J(t)$ son jerk. Rappelons ici les notions de base de la cinématique :

$$V(t) = \frac{dX(t)}{dt}, \qquad A(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \qquad J(t) = \frac{dA(t)}{dt} \tag{4.1}$$

Les conditions initiales d'un mouvement sont définies par X_0 pour la position, V_0 pour la vitesse et A_0 pour l'accélération.

2.1.1 Loi de mouvement de type bang-bang

La loi de mouvement de type bang-bang doit son appellation à son principe d'élaboration. Elle consiste à saturer la variable de commande du système, ou une de ses dérivées, en commutant un certain nombre de fois du niveau maximal au niveau minimal tout en respectant les contraintes cinématiques imposées (Cf. figure 4.3). Par ailleurs, la commande en temps optimal repose sur le principe du bang-bang. Ce principe formulé par [Dietze, 1972] consiste à dire que si l'on désire déplacer un système d'un état à un autre en temps minimum, il est nécessaire d'utiliser à tout instant le maximum de puissance disponible [Tuttle, 1997]. Ce type de profil

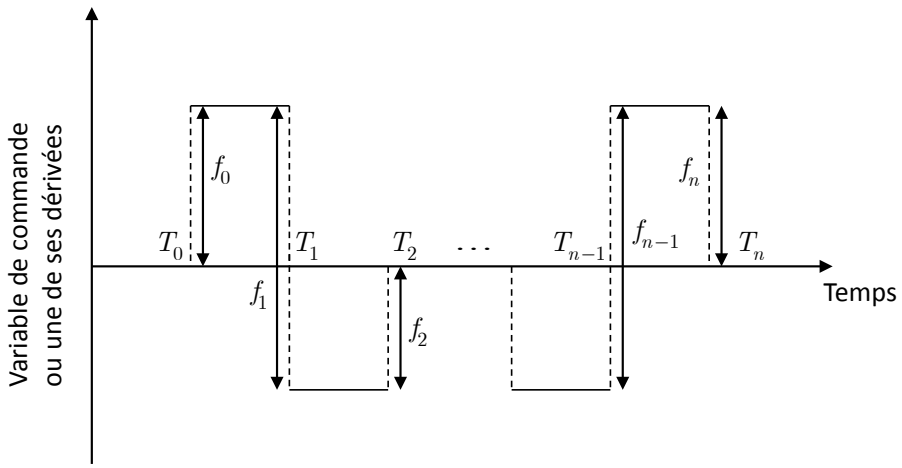


FIGURE 4.3: Définition générique d'une loi de mouvement bang-bang

peut être réalisé par sommation d'échelons de différentes amplitudes et retardés dans le temps.

Bang-bang en accélération Le mouvement point à point à profil d'accélération bang-bang consiste à saturer l'accélération pour des valeurs maximales et minimales données A_{max} et A_{min}. La loi de mouvement est composée alors d'une phase d'accélération, d'une phase à vitesse

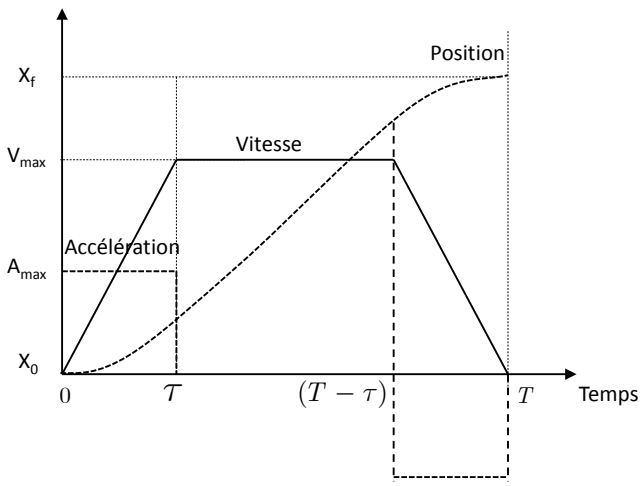


FIGURE 4.4: Profil à vitesse trapézoïdal

constante et d'une décélération. Ce profil trapézoïdal en vitesse est illustré dans la figure 4.4. La trajectoire $X(t)$ est composée alors de trois polynômes successifs d'ordre deux, un et deux. Les huit coefficients sont alors déterminés à partir des huit contraintes de position, des vitesses initiales et finales ainsi que de la continuité entres les phases de transition. Dans la pratique, les actionneurs sont tels que $A_{max} = |A_{min}|$ et $V_{max} = |V_{min}|$ où A_{max} et V_{max} sont respectivement l'accélération et la vitesse maximale de l'axe. Les contraintes A_{max} et V_{max} sont définies en fonction de la capacité de l'actionneur. Ce profil trapézoïdal en vitesse est donné par le système suivant [Khalil, 2002] :

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{(X_f - X_0)}{2\tau(T-\tau)}t^2 + X_0, & 0 \leq t \leq \tau \\ X(t) = \dfrac{(X_f - X_0)}{(T-\tau)}(t - \dfrac{\tau}{2}) + X_0, & \tau \leq t \leq T-\tau \\ X(t) = \dfrac{(X_f - X_0)}{2\tau(T-\tau)}(t-T)^2 + X_f, & T-\tau \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.2}$$

où les durées optimales en temps τ et T vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V_{max}}{A_{max}}, \\ T &= \frac{|X_f - X_0|}{V_{max}} + \tau. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pour ce type de profil, (4.3) impose que :

$$(T-\tau) \geq \tau \Rightarrow |X_f - X_0| \geq \frac{V_{max}^2}{A_{max}}. \tag{4.4}$$

Dans le cas contraire i.e. $|X_f - X_0| < \dfrac{V_{max}^2}{A_{max}}$, le profil trapézoïdal en vitesse est tel que la vitesse V_{max} n'est pas atteinte au cours de mouvement. Le profil à temps minimum est donc constitué de deux phases : une phase d'accélération et une phase de freinage comme le montre la figure 4.5. Le profil est donné par :

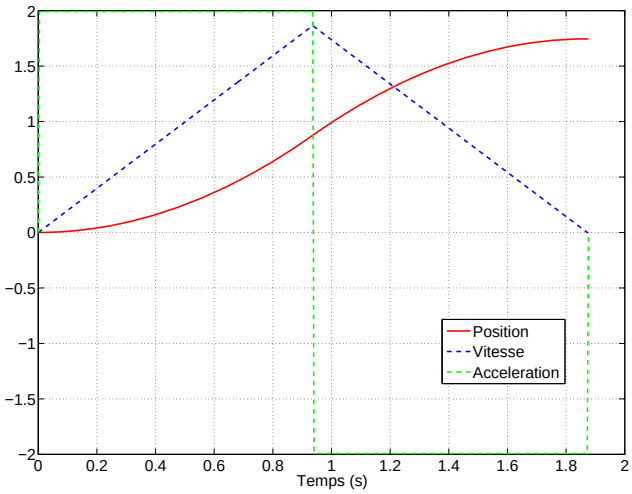


FIGURE 4.5: Loi de mouvement bang-bang en accélération

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2}A_{max}t^2 + V_0 t + X_0, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ X(t) &= -\frac{1}{2}A_{max}(t-T)^2 + V_0 t + X_f, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

où les coefficients sont déterminés à partir des contraintes initiales, finales et de continuité en $t = \frac{T}{2}$. La trajectoire résultante du profil à accélération limitée est dérivable par morceaux. Durant ce type de mouvement, la position s'exprime sous forme d'une spline composée de deux polynômes de degré au plus égale à 2. Comme on peut le remarquer, les deux phases admettent la même durée. Nous pouvons vérifier que la durée optimale du mouvement est donnée par :

$$T = max\Big(2\frac{|X_f - X_0|}{V_{max}}, 2\sqrt{\frac{|X_f - X_0|}{A_{max}}}\Big). \tag{4.6}$$

Dans le cas où la longueur à parcourir avec cette stratégie bang-bang en accélération sature la vitesse avant d'atteindre la position finale, on retrouve le profil en vitesse trapézoïdale.

Ce type de loi est celle que l'on retrouve dans quasiment toutes les commandes industrielles actuelles. Cependant, l'expérience a montré qu'une loi bang-bang d'accélération présente des discontinuités que les systèmes mécaniques flexibles ne peuvent suivre. Il peut alors se produire une excitation vibratoire élevée de l'axe de robot au cours du mouvement. Ceci est montré par les figures 3.10 et 3.33 du chapitre 3. Une solution classique consiste à limiter la variation de l'accélération dans le temps. Il est donc nécessaire de passer au degré 3 et d'optimiser la position *via* une stratégie à *jerk* minimum pour chaque phase [Gasparetto and Zanotto, 2008] et [Yazdani et al., 2012]. Ce choix est dicté par la récente disponibilité de cette notion dans la plupart des systèmes des commandes modernes.

Bang-bang en jerk La loi de mouvement à jerk limité permet d'avoir un mouvement plus doux que celui avec un bang-bang en accélération. Au cours de ce type de mouvement à jerk saturé, l'accélération varie linéairement en fonction du temps, alors que la vitesse et la position varient

de façon polynomiale. Dans [Béarée et al., 2004] il est présenté une analyse de l'influence de la loi de mouvement en jerk sur le comportement vibratoire des machines industrielles de type robot cartésien ou sur une machine outil à dynamique élevée. Les auteurs montrent que le choix d'une longueur du créneau du jerk selon la période du premier mode de l'axe, permet d'avoir une diminution des vibrations résiduelles de 91%, comparée à un profil à accélération limitée classique.

La figure (4.6) montre un profil à jerk limité composé d'une série de sept segments où chacun représente un mouvement élémentaire avec des conditions cinématiques initiales et finales nulles : $A_0 = V_0 = A_f = V_f = 0$. Pour que la loi de mouvement $X(t)$ soit douce, cette

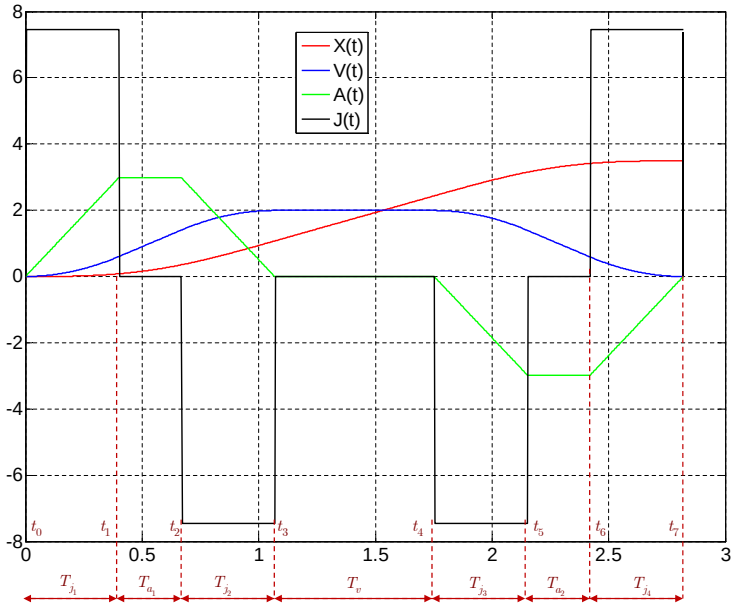


FIGURE 4.6: Profil à jerk limité à sept segments

dernière doit être de classe C^2 sur l'intervalle [0, T]. Ces conditions permettent de garantir un lissage minimum de la position aux instants de commutation. Ceci se traduit par des contraintes d'égalité entre les limites à gauche et à droite des positions, vitesses et accélérations en ces points de commutations.

Chaque intervalle temporel est caractérisé par un mouvement élémentaire comme suit :

- $T_{j_1} = t_1 - t_0$ Mouvement à jerk maximal sur [t_0,t_1]
- $T_{a_1} = t_2 - t_1$ Mouvement à accélération maximale sur [t_1,t_2]
- $T_{j_2} = t_3 - t_2$ Mouvement à jerk minimal sur [t_2,t_3]
- $T_v = t_4 - t_3$ Mouvement à vitesse maximale sur [t_3,t_4]
- $T_{j_3} = t_5 - t_4$ Mouvement à jerk maximal sur [t_4,t_5]
- $T_{a_2} = t_6 - t_5$ Mouvement à accélération minimale sur [t_5,t_6]
- $T_{j_4} = t_7 - t_6$ Mouvement à jerk maximal sur [t_6,t_7]

Si les contraintes cinématiques suivantes sont vérifiées : $|J_{min}| = |J_{max}|$, $|A_{min}| = |A_{max}|$, $|V_{min}| = |V_{max}|$, alors

$$T_{j_1} = T_{j_2} = T_{j_3} = T_{j_4} \quad et \quad T_{a_1} = T_{a_2}. \tag{4.7}$$

L'optimalité en temps sous contrainte d'état est garantie lorsqu'une variable élémentaire est

saturée dans chacun des intervalles. Le temps d'exécution minimal est donné par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} T_{min} &= T_{j_1} + T_{a_1} + T_{j_2} + T_v + T_{j_3} + T_{a_2} + T_{j_4}, \\ &= 4T_j + 2T_a + T_v, \\ &= \frac{X_f}{V_m} + \frac{V_m}{A_m} + \frac{A_m}{J_m}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

où T_j, T_a et T_v sont respectivement les durées de jerk, d'accélération ou de freinage et de vitesse constante. Il est aussi possible d'avoir un profil à jerk continu à travers l'utilisation d'un bang-bang de quark (dérivée du jerk). Cependant, ce profil pose des problèmes de calculs numériques à cause des nombreuses commutations à gérer et aux intégrations successives. Ce type de trajectoire ne rentre pas dans notre démarche de planification.

2.2 Méthodologie de réglage de jerk adaptée à la réduction de vibrations

2.2.1 Principe

Comme vu précédemment, les lois en bang-bang sont basées sur l'obtention d'un trajet en temps minimum, cinématiquement admissible. Elles se ramènent toutes à une succession de créneaux soit sur l'accélération, le jerk ou des dérivées d'ordre supérieures. La durée de ces créneaux peut avantageusement être exploitée pour réduire, voire annuler, les vibrations du système.

Le principe d'annulation des vibrations est relativement simple. Il peut s'exprimer de différentes manières. Qualitativement, lorsqu'un système souple (comportant à minima un mode de vibration dans la bande passante de commande) dont le comportement peut être assimilé à celui d'un système linéaire, est soumis à une entrée indicielle, sa réponse comportera la superposition des réponses à chacun de ses modes : classiquement un mode rigide (1er ordre) et un ou plusieurs modes souples (2nd ordre). Si de plus, le système peut être considéré comme stationnaire et conservatif, l'expression des réponses indicielles des modes souples prendra la forme simple de fonctions sinusoïdales pures d'amplitude constante. Dès lors, toujours sous l'hypothèse d'un comportement linéaire, si on impose une seconde excitation indicielle opposée en signe et décalée en temps, alors par superposition, cette stratégie permet de réduire voire d'annuler dans le cas d'un seul mode, les vibrations par combinaison de ces fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal en créneau peut être dimensionné en temps pour réduire les vibrations. La partie suivante détaille les éléments théoriques associés à ce principe.

La figure 4.7 présente un signal en créneau constitué de deux échelons de mêmes amplitudes mais de signes opposés et décalés dans le temps. Notons U et T, respectivement l'amplitude et la durée de ce créneau. Dans le domaine de Laplace, la fonction créneau normalisée s'écrira :

$$M(s) = \frac{U}{T.s}\left(1 - e^{-T.s}\right). \tag{4.9}$$

On note que l'écriture (4.9) correspond à la version continue d'un filtre FIR moyenneur sur une

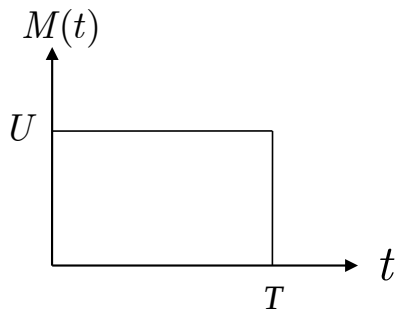


FIGURE 4.7: Créneau en jerk

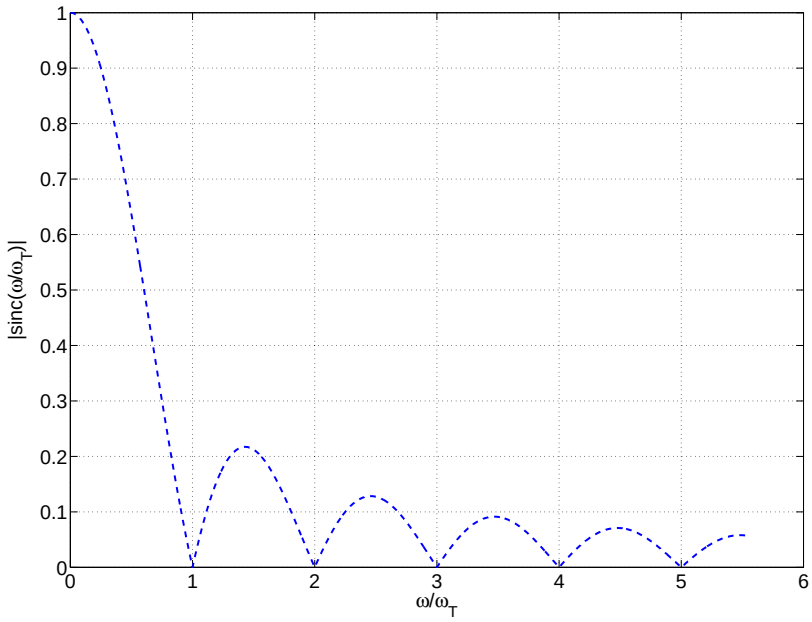


FIGURE 4.8: L'amplitude de la réponse fréquentiel du filtre $M(s)$

durée T. Le spectre fréquentiel de cette fonction s'obtient directement comme suit :

$$M(j\omega) = \frac{U}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = Ue^{-j\frac{\omega T}{2}}\frac{sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}. \tag{4.10}$$

L'amplitude de la réponse en fréquence de $M(j\omega)$ est alors :

$$|M(j\omega)| = U\left|\frac{sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right| = U\left|sinc\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right)\right|, \tag{4.11}$$

où $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T}$ et $sinc(x) = \dfrac{sin(\pi x)}{\pi x}$ est la fonction sinus cardinale. La figure 4.8 présente un exemple d'amplitude spectrale de (4.11) pour $U = 1$. D'après la forme de $M(j\omega)$, il vient immédiatement que l'amplitude du spectre d'excitation du créneau est nulle pour :

$$\omega = k\omega_T, \tag{4.12}$$

avec k un entier strictement positif. Ainsi, si l'on considère un mode de résonance du système à la pulsation ω_0, il suffira de régler la période du créneau telle que :

$$\omega_T = \frac{1}{k}\omega_0 \Rightarrow T = k\frac{2\pi}{\omega_0} = kT_0, \tag{4.13}$$

où T_0 est la période propre du mode considéré. Autrement dit, la durée du créneau devra être égale à un multiple de la période propre du mode de résonance à annuler. Ce résultat issu de la méthode employée dans [Béarée, 2005] a été ensuite étendu dans [Biagiotti and Melchiorri, 2012]. Il peut s'étendre au cas d'une structure faiblement amortie.

2.2.2 Réglage du jerk

Le principe d'annulation de vibration vu précédemment ne peut s'appliquer à la loi en bang-bang d'accélération en temps minimum classique, puisque dans ce cas la durée des créneaux (ici 2 créneaux) est déjà fixée pour satisfaire des contraintes cinématiques sur l'accélération, la vitesse et la position à atteindre. La loi à jerk limité offre ce degré de liberté supplémentaire. La durée des créneaux de jerk, noté T_j, peut être prise égale à la durée du mode propre dominant de l'axe considéré. La valeur maximale du jerk sera alors donnée par la relation :

$$J_{max} = \frac{A_{max}}{T_j}. \tag{4.14}$$

On notera que le spectre de la loi à jerk limitée peut se déduire du spectre donné à la figure 4.8 par une triple intégration. Ceci revient à diviser l'amplitude par $\frac{1}{\omega^3}$ et introduit ainsi une « douceur » et une robustesse de la loi à jerk limité supérieure à celles obtenues pour une loi de mouvement bang bang d'accélération. Cette méthodologie de réglage du jerk a été exploitée avec succès dans [Olabi et al., 2010]. Pour un axe de robot et dans le cas d'un mode non-stationnaire, dans [Béarée and Olabi, 2013], les auteurs démontrent que cette méthode peut être appliquée en différenciant les durées des créneaux de Jerk lors des différentes phases du mouvement. Il est fait l'hypothèse ici que l'évolution de la fréquence propre est négligeable sur une durée équivalente à une période propre.

2.2.3 Loi de mouvement douces à jerk continu

Il existe aussi d'autres trajectoires de type loi de mouvement douce. Elles utilisent des fonctions polynomiales (polynômes cubiques et quintiques de la position) [Olabi, 2011] ou harmoniques (sinus et sinus carré), [Béarée et al., 2005]. Ces fonctions respectent la définition générale ainsi que les contraintes liées à l'existence d'une phase d'accélération et de freinage. Elles permettent une sollicitation minimale des actionneurs en terme d'énergie fournie. Sans perte de généralités, cette *douceur* est fortement liée aux amplitudes des dérivées successives de la trajectoire de référence. Un moyen d'améliorer cette notion de *douceur* est de minimiser les amplitudes des dérivées de la position tout au long du mouvement [Colas, 2007]. Dans [Béarée et al., 2004] il est proposé une loi en jerk en $sinus^2$ appelée jerk harmonique engendrant un créneau lisse en accélération et un profil en vitesse très doux. Ce type de mouvement est adapté à la physique du système à travers la continuité de la variable de commande en vue de limiter la vibration de la structure mécanique. Néanmoins, l'inconvénient principal de ces lois réside

dans la non-optimalité par rapport au temps.

2.3 Confrontation avec la technique d'input shaping

La technique d'input shaping permet d'améliorer le comportement souple des systèmes flexibles par la réduction, voire l'annulation, des vibrations résiduelles. Le principe de compensation des vibrations s'effectue par la mise en forme de la référence, [Singer and Seering, 1990] et [Singhose, 1997]. Cela consiste à appliquer par convolution un filtre impulsionnel à la trajectoire de référence, constitué d'une série d'impulsions appelées *shaper* (Cf. figure 4.9). L'idée de cette technique est issue d'une observation expérimentale des phénomènes vibratoires

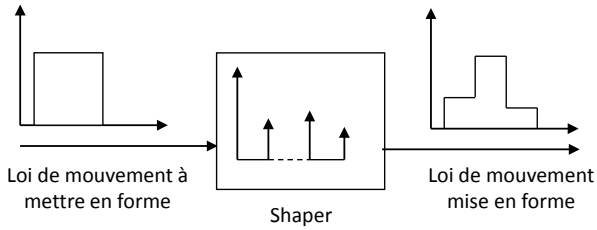


FIGURE 4.9: Mise en forme de la loi de mouvement avec la technique d'input shaping

qui s'annulent naturellement lorsqu'ils sont de même amplitude mais opposés en phase. Ainsi, l'approche repose sur le fait que les vibrations induites par la première impulsion vont s'annuler grâce à une deuxième impulsion déphasée dans le temps et commençant à la demi-période de la première réponse impulsionnelle. Si les impulsions dans le shaper sont choisies correctement, le système répondra sans vibration pour toute commande par l'effet de compensation, comme indiqué dans la figure 4.10. Les amplitudes et les instants de commutations sont obtenus à partir de la connaissance des fréquences propres du système et de ses amortissements [Kang, 2011]. [Singer and Seering, 1992] montrent qu'une séquence limitée à deux impulsions est très sensible

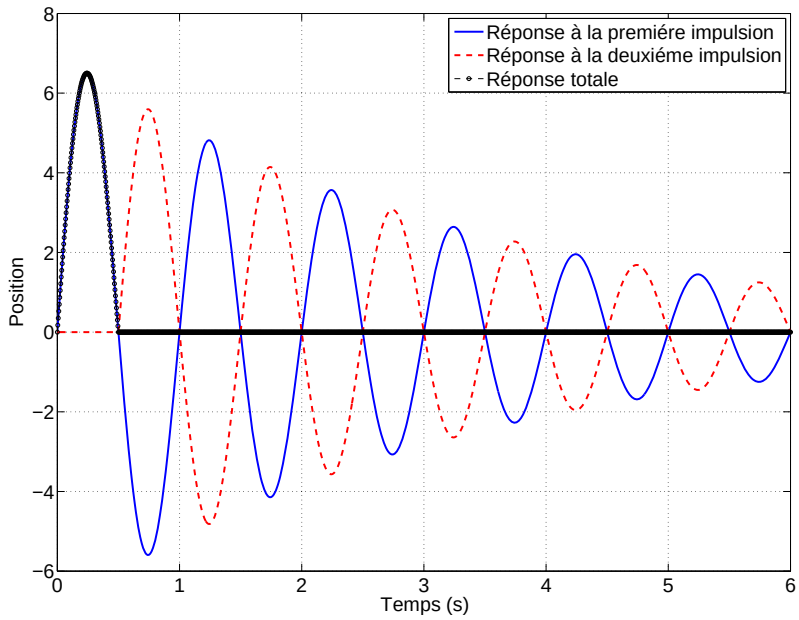


FIGURE 4.10: Technique de l'input shaping

à la variation paramétrique. C'est pourquoi les auteurs proposent d'ajouter d'autres impulsions, bien que cela augmente le temps de cycle. On distingue deux types de shapers couramment employés pour l'annulation des vibrations résiduelles des systèmes industriels :

- Le Zero-Vibration (ZV) shaper qui représente un filtre à deux impulsions pour lequel la vibration en fin du mouvement pour l'état position, doit être égale à zéro
- Le Zero-Vibration Derivative (ZVD) shaper qui est un filtre à trois impulsions pour lequel la position et sa dérivée présentent des vibrations nulles en fin du mouvement.

2.3.1 Etude de sensibilité des techniques de commande basées sur l'Input Shaping

Soit $V(\omega, \zeta)$ l'expression de la vibration résiduelle d'un oscillateur harmonique du second ordre qui résulte d'une suite d'impulsions décalées dans le temps (Cf. figure 4.10), [Singh and Singhose, 2002].

$$V(\omega, \zeta) = e^{-\zeta\omega_0 T_n} \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\zeta\omega_0 T_i} cos(\omega_r T_i)\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\zeta\omega_0 T_i} sin(\omega_r T_i)\Big)^2}, \tag{4.15}$$

où A_i et T_i sont respectivement les amplitudes et les instants de commutation, n est le nombre des impulsions, ω_0 désigne la pulsation propre du processus et $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ sa pulsation de résonance. L'équation (4.15) représente alors le pourcentage de vibration résiduelle. Elle indique le rapport des vibrations causées par une série d'impulsions comparées à une vibration induite suite à une seule impulsion d'amplitude unitaire. La détermination des instants T_i ainsi que les amplitudes A_i permettant d'annihiler les vibrations, est issue de la résolution de l'équation $V(\omega, \zeta) = 0$. Sans pertes de généralités, la solution consiste d'abord à imposer des restrictions sur les amplitudes A_i qui doivent être différentes de zéro. De plus, pour obtenir des résultats normalisés, on impose :

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = 1, \quad A_i > 0. \tag{4.16}$$

ZV Shaper : Dans le cas où la séquence présente uniquement deux impulsions i.e. le cas des *ZV Shaper* en notant $t_1 = 0$ l'instant de la première impulsion, la solution constitant à annuler (4.15) avec la contrainte (4.16) peut alors s'exprimer comme suit :

$$\begin{cases} A_1 + A_2\, e^{\zeta\omega_0 t_2}\, cos(\omega_r t_2) = 0, \\ A_2\, e^{\zeta\omega_0 t_2}\, sin(\omega_r t_2) = 0, \\ A_1 + A_2 = 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Une solution de l'équation (4.17) est telle que $\omega_r t_2 = n\pi \Rightarrow t_2 = \dfrac{n\pi}{\omega_r} = \dfrac{nT_r}{2}$, n=1,2,... où T_r est la période des vibrations. Un choix simple de t_2 consiste à prendre n le plus petit possible, c'est-à-dire $n = 1$. Par conséquent, $t_2 = \dfrac{T_r}{2}$.

Soit $L(\zeta) = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$. La séquence des deux impulsions (Cf. figure 4.11) garantissant une vibration

résiduelle nulle pour un *ZV shaper* est illustrée par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} A_i \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+L} & \dfrac{L}{1+L} \\ 0 & 0.5T_r \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

En pratique, les premiers modes propres des machines de production sont faiblement amorties

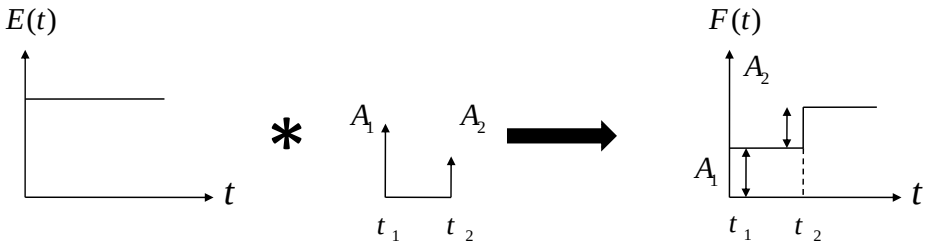


FIGURE 4.11: Convolution entre un échelon unitaire et un shaper de type ZV (2 impulsions)

($\zeta < 2\%$). Nous traitons dans la suite le cas où le coefficient $\zeta \to 0$ d'où $\omega_0 = \omega_r$. En notant par $F_{ZV}(t)$ la fonction résultante d'un ZV Shaper, cette fonction s'écrit dans le domaine de Laplace comme suit :

$$F_{ZV}(s) = \frac{A}{2}\Big(\frac{1+e^{-\frac{Ts}{2}}}{s}\Big). \tag{4.19}$$

Le spectre fréquentiel s'obtient directement par :

$$\begin{aligned} F_{ZV}(j\omega) &= \frac{A}{2}e^{-j\omega\frac{T}{4}}\Big(\frac{e^{j\omega\frac{T}{4}}+e^{-j\omega\frac{T}{4}}}{j\omega}\Big), \\ &= -jA\, e^{-j\omega\frac{T}{4}}\,\frac{cos(\frac{\omega T}{4})}{\omega}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

L'amplitude de $F_{ZV}(j\omega)$ est alors

$$|F_{ZV}(j\omega)| = A\left|\frac{cos(\frac{\omega T}{4})}{\omega}\right|. \tag{4.21}$$

ZVD Shaper : De la même manière que le *ZV shaper*, on montre que pour un shaper de type ZVD, les trois amplitudes et les trois instants de commutation sont définis comme suit [Poty et al., 2003] :

$$\begin{pmatrix} A_i \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+2L+L^2} & \dfrac{2L}{1+2L+L^2} & \dfrac{L^2}{1+2L+L^2} \\ 0 & 0.5T_r & T_r \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Pour un système faiblement amorti ($\zeta \simeq 0$ et $\omega_r \simeq \omega_0$), on peut facilement vérifier que les instants de commutation sont $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{T}{2}$ et $t_3 = \dfrac{T}{4}$. Ainsi, les trois amplitudes pour un créneau de commande d'amplitude initiale A sont respectivement $A_1 = \dfrac{A}{4}$, $A_2 = \dfrac{A}{2}$ et $A_3 = \dfrac{A}{4}$. Soit $F_{ZVD}(t)$ la fonction résultante d'un *ZVD Shaper*. En partant de la figure 4.12, cette fonction peut s'exprimer dans le domaine de Laplace :

$$F_{ZVD}(s) = \frac{A}{4}\Big(\frac{1+2e^{-\frac{T}{2}s}+e^{-Ts}}{s}\Big). \tag{4.23}$$

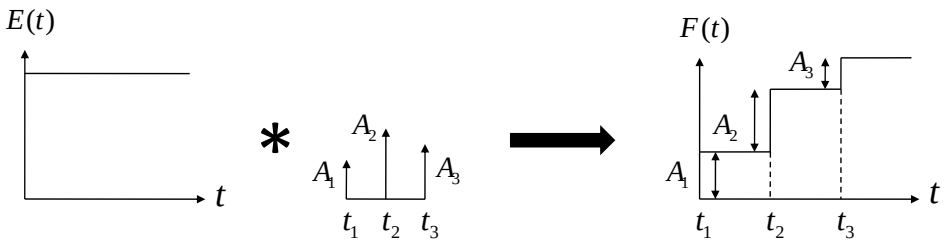


FIGURE 4.12: Convolution entre un échelon unitaire et un shaper de type ZVD (3 impulsions)

Le spectre fréquentiel est alors :

$$F_{ZVD}(j\omega) = \frac{A}{\omega}\, cos(\frac{\omega T}{4})\Big[-sin\Big(\frac{\omega T}{4}\Big) + sin\Big(\frac{3\omega T}{4}\Big) - j\Big(cos\Big(\frac{\omega T}{4}\Big) + cos\Big(\frac{3\omega T}{4}\Big)\Big)\Big]. \quad (4.24)$$

L'amplitude de la réponse en fréquence est donnée par :

$$|F_{ZVD}(j\omega)| = \frac{A}{\omega}\left|cos\Big(\frac{\omega T}{4}\Big)\right| \sqrt{2 + 2\Big[sin\Big(\frac{\omega T}{4}\Big)sin\Big(\frac{3\omega T}{4}\Big) + cos\Big(\frac{\omega T}{4}\Big)cos\Big(\frac{3\omega T}{4}\Big)\Big]}. \quad (4.25)$$

Analyse et discussion La figure 4.13 présente une étude de sensibilité de l'amplitude de la vibration en fin de déplacement en réponse aux trois lois de mouvement étudiées, à savoir le jerk limité, le *ZV Shaper* et le *ZVD Shaper*. Ici on compare $|M(j\omega)|$, $|F_{ZV}(j\omega)|$ et $|F_{ZVD}(j\omega)|$ en fonction du rapport entre la pulsation propre réelle du système et la pulsation estimée. Cette figure est extraite des études présentées dans § 2.2 pour le jerk et § 2.3.1 pour la technique d'Input Shaping pour l'analyse vibratoire en fin de déplacement. Bien que le *ZV Shaper* réduise d'une demi période propre le temps du cycle, il est peu robuste vis-à-vis de la sensibilité du ratio $\frac{\omega}{\omega_0}$ pour un niveau de vibration donné. En effet, pour un pourcentage de vibration inférieur à 20%, ce type de Shaper est robuste pour une variabilité de ω par rapport à la pulsation ω_0 de $\pm$ 12%. Le *ZV Shaper* et le jerk limité présentent respectivement une plage de sensibilité du ratio de pulsation de 60% et 47%. Ceci permet d'affirmer que ces dernières sont beaucoup moins sensibles aux incertitudes d'estimation de la pulsation propre du système en vue d'annihiler les vibrations résiduelles. Ces deux filtres nécessitent une demi période de plus que le ZV. Jusqu'à présent, nous avons traité l'influence de la loi de mouvement pour le cas spécifique d'une souplesse mécanique unique. Il est évident que plusieurs modes de déformation contribuent conjointement au caractère vibratoire du positionnement. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au caractère multimodes d'un système. Soit un système composé de deux oscillateurs harmoniques de second ordre faiblement amortie, en série. En vue de simuler le comportement vibratoire du process, le premier ensemble masse ressort possède une fréquence propre de 10 Hz, tandis que la fréquence du second système est prise égale à 25 Hz. L'objectif de cette étude consiste à vérifier l'influence de la loi de mouvement, dont le réglage est basé uniquement sur la connaissance d'un seul mode dominant sur le comportement vibratoire global du système. La figure 4.14 montre la réponse fréquentielle en position de la charge finale pour une excitation au niveau de l'actionneur. Dans ce cas, trois types de loi de mouvement sont choisies : bang bang en accélération, une loi de type jerk limité dont le réglage du temps de jerk T_j est égale à 0.1 s réglé sur le premier mode et enfin un Shaper de

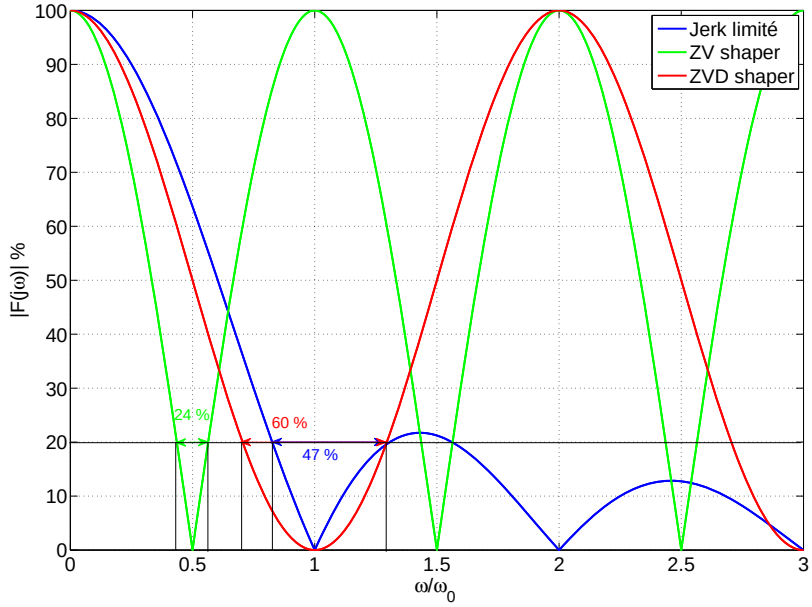


FIGURE 4.13: Sensibilité des lois de mouvement en jerk limité, d'un ZV shaper et d'un ZVD Shaper en fonction du rapport entre la pulsation estimée ω et la pulsation du mode dominant du système ω_0

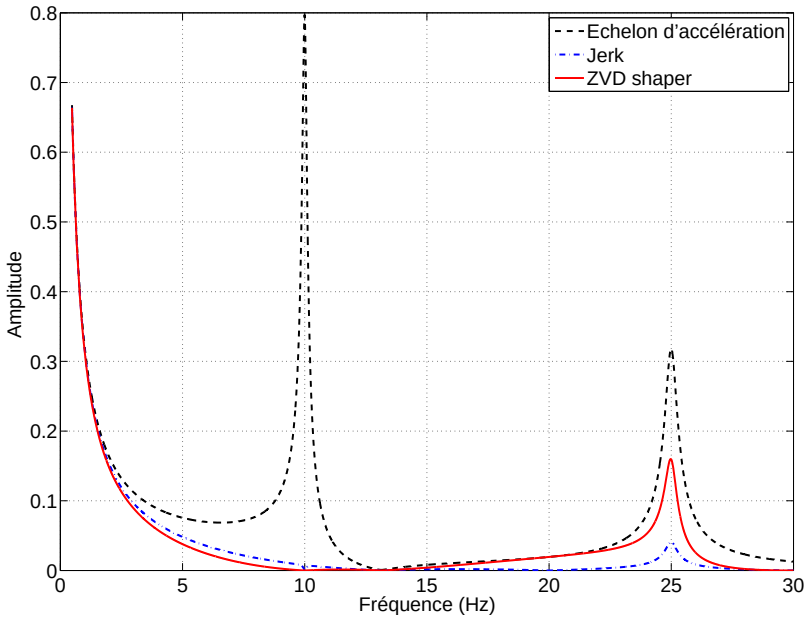


FIGURE 4.14: Réponse fréquentielle en position de la charge pour une excitation au niveau de l'actionneur

type ZVD respectant les contraintes imposées dans §2.3.1. Les amplitude des pics fréquentiels permettent de confirmer la contribution de chaque loi de mouvement sur les oscillations en position du point final. En présence d'un mode de déformation secondaire, l'effet de filtrage intégrale du bang bang en jerk permet de diminuer voir de supprimer toutes les oscillations issues des modes non pris en compte dans le réglage de la loi de mouvement.

Les lois de mouvements en jerk limité sont disponibles dans la majorité des commandes d'axe. En effet, l'implantation est simple à gérer par un filtre moyenneur où le temps de jerk est adapté en fonction du mode dominant de vibration de la structure. De plus, contrairement à la technique d'input shaping où le contrôleur doit être modifié en vue de s'adapter à cette dernière, la loi de mouvement à jerk limité est moins sensible à l'amortissement. En synthèse la technique de réglage du jerk présente :

- une loi robuste pour l'annulation des vibrations du premier mode considéré ;
- une loi réduisant naturellement l'influence des dynamiques négligées.

Dans ce qui suit, nos développements seront basés sur la loi à jerk limité.

2.4 Adaptation au contexte d'un axe du robot étudié

Dans cette section, nous nous intéressons aux vibrations induites par la loi de mouvement considérée lors du déplacement, mais également en phase d'arrêt. Dans les phases d'accélération et de décélération, il se produit des vibrations qui peuvent devenir problématiques lors de cycles de chargement et de déchargement dans le cadre d'opérations robotisées. Nous considérons pour le moment un axe de robot flexible non soumis à l'action de la gravité. La fonction de transfert reliant l'angle du moteur vu après l'étage de réduction à l'angle du bras est donnée par :

$$H_{mb} = \frac{\theta(s)}{\theta_n(s)} = \frac{2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \tag{4.26}$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J_b}}$ et $\zeta = \frac{D}{2\sqrt{KJ_b}}$.
Les paramètres du système (4.26) sont identifiés par les techniques développées dans le chapitre 2 dans le cas de l'axe 2 de notre robot. Ceci nous conduit à une fréquence de résonance $f_r \approx f_0 = 9.02$ Hz et un coefficient d'amortissement égale à 0.159. Comme vu précédemment, le système de commande imposé à l'inertie du moteur J_m est supposé idéal. Ce résultat ne reste fiable que si l'hypothèse d'un asservissement parfait sur le modèle rigide est effectivement vérifié. Cette partie sera validée ultérieurement lors d'analyses expérimentales. Ceci implique que $\theta_{ref}(t) = \theta_n(t)$, où $\theta_n(t)$ est une trajectoire générée *via* un planificateur de mouvement proposé dans la section précédente. Nous analysons alors l'impact du choix du type de trajectoire sur le comportement dynamique de la charge et spécifiquement l'erreur de poursuite ou bien la déviation axiale définie par $\delta\theta = |\theta_{ref}(t) - \theta(t)| = |\theta_n(t) - \theta(t)|$.

Le choix de la durée des créneaux par exemple (4.9) est crucial sur le comportement dynamique vibratoire du système. Par ailleurs, un mauvais choix peut conduire à des oscillations résiduelles importantes en fin de mouvement. La relation dynamique entre la trajectoire de référence $\theta_{ref}(t)$ et l'erreur de poursuite $\delta\theta$ est obtenue après quelques opérations algébriques sur l'équation (4.26) :

$$\frac{\delta\theta(s)}{\theta_{ref}(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}. \tag{4.27}$$

Nous pouvons alors réécrire la relation (4.27) sous la forme suivante :

$$H_\delta(s) = \frac{\delta\theta(s)}{\theta_{ref}^{(2)}(s)} = \frac{\delta\theta(s)}{s^2\theta_{ref}(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}. \tag{4.28}$$

Par conséquent, $\delta\theta$ est obtenue par un simple produit entre l'accélération de référence $\ddot{\theta}_{ref}(t) = \ddot{\theta}_n(t)$ et la fonction de transfert $H_\delta(s)$ qui est caractérisée par sa pulsation propre ω_0 et son coefficient d'amortissement ζ.

La vibration maximale correspond à un profil d'accélération limitée. En effet, la réduction relative de cette vibration sera effective en augmentant au fur et à mesure le temps de filtrage jusqu'à ce que T_j soit un multiple entier de T_0. Bien évidemment, il est possible de surestimer la période naturelle afin de garantir un certain niveau de vibration résiduelle mais il sera accompagné par un retard sur la durée finale du mouvement. La figure 4.15 montre la réponse

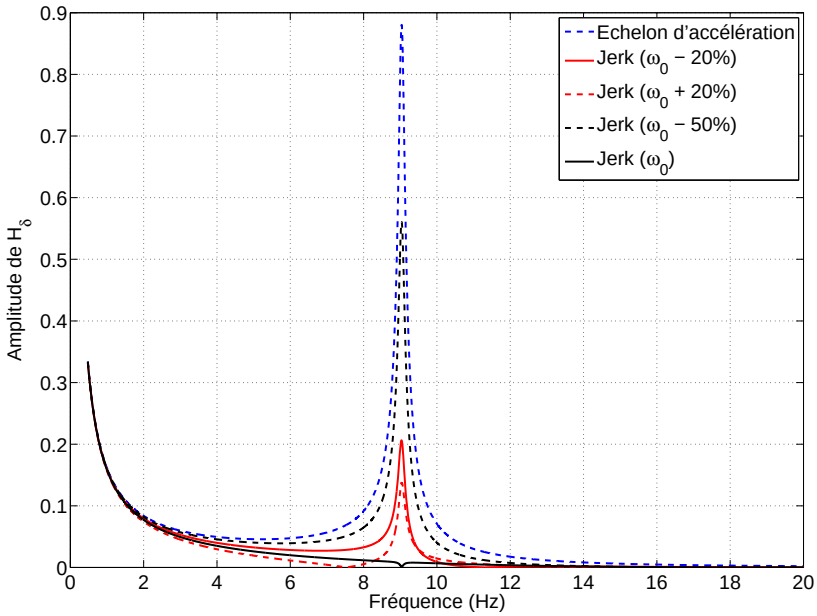
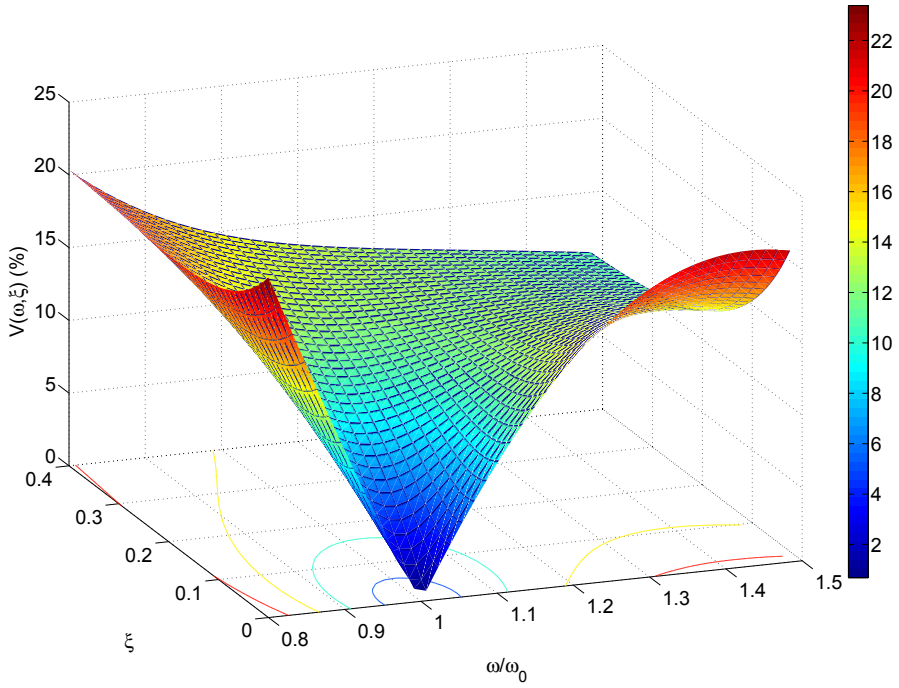


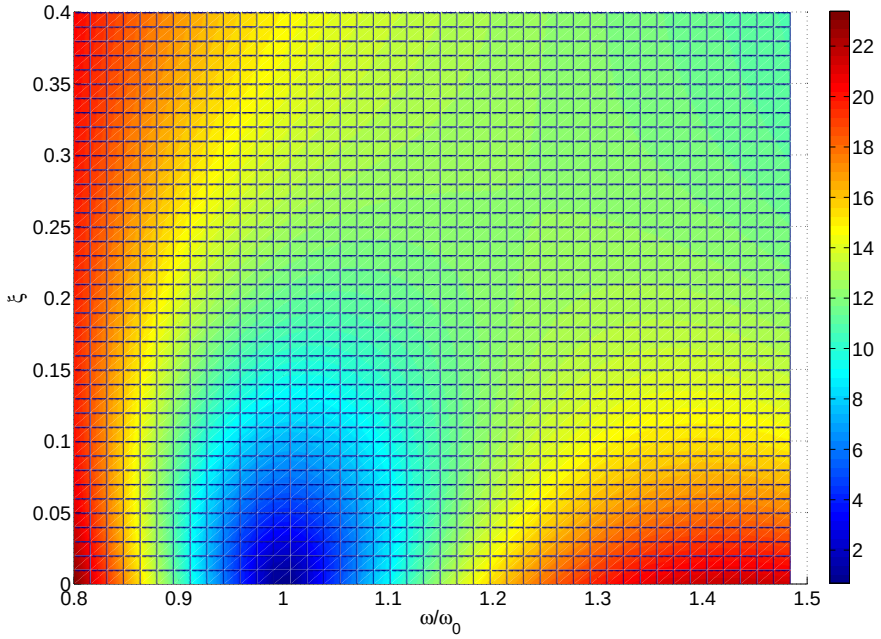
FIGURE 4.15: Influence des incertitudes d'estimation de ω_0 sur le spectre fréquentiel de H_δ

en fréquence de $H_\delta(s)$ pour une loi de mouvement en jerk limité soumise à une incertitude au niveau de l'estimation de la pulsation propre de l'axe du robot manipulateur. En outre, pour le réglage de la période de jerk T_j, nous constatons que l'amplitude de H_δ suite à une incertitude sur la connaissance exacte de f_0 de $\pm 20\%$ est réduite d'environ 80% par rapport à un profil en accélération limitée. La figure 4.16 met en valeur l'influence du coefficient d'amortissement ζ sur la vibration résiduelle d'un oscillateur harmonique du second ordre et résultant d'une loi de mouvement en bang bang de jerk. Nous montrons que pour un taux d'amortissement inférieur à 15% on obtient une amplitude vibratoire ne dépassant pas les 15% (Cf. figure 4.16(b)). L'effet sur l'amplitude de la vibration résiduelle est alors faible. Ceci justifie l'hypothèse classique des modes faiblement amortis pour les machines industrielles.

Ainsi, comme montré dans le paragraphe 2.2, le choix adéquat consiste à prendre une durée de jerk T_j égale à la période propre du système étudié. Cela se traduit par une vibration minimale dans le voisinage de f_0. De ce fait, nous constatons par exemple que le choix de la durée du jerk $T_j = \dfrac{T_0}{4}$, provoque une amplitude vibratoire importante. La déformation axiale $\delta\theta(t)$ présente alors des vibrations non négligeables. Afin de minimiser ces vibrations



(a) Influence de ζ sur la vibration résiduelle d'un axe du robot (3D)



(b) Influence de ζ sur la vibration résiduelle d'un axe du robot (2D)

FIGURE 4.16: Influence de l'amortissement ζ sur le comportement vibratoire d'un axe du robot pour un bang bang en jerk

résiduelles, nous nous basons sur le résultat (4.13) consistant à choisir la durée de créneau de jerk égale à un multiple entier de la période propre du système T_0. Cette loi de mouvement à jerk limité est obtenue en filtrant la position issue d'un profil à vitesse trapézoïdale (stratégie bang-bang en accélération). Le filtre utilisé est un FIR non récursif à moyenne glissante où pour compenser le mode vibratoire dominant de l'axe le temps de filtrage noté $t_f = T_j$, est égale à

$\frac{A_m}{J_m}$. Cette technique de filtrage est utilisée dans les travaux de [Zanotto et al., 2011] et [Béarée and Olabi, 2013]. Une approche similaire est présentée aussi dans [Biagiotti and Melchiorri, 2012].

La figure 4.17(a) montre deux types de profil couramment utilisés. Le premier consiste en une loi en bang bang d'accélération, tandis que le deuxième est un profil à jerk limité où la durée de jerk est prise égale à la période propre de l'axe du robot. Le graphe 4.17(b) illustre deux simulations d'erreurs de poursuite en position pour les deux périodes de filtrage à savoir $t_f = T_0$ et $t_f = \frac{T_0}{4}$. Nous déduisons que le profil à jerk limité présente un potentiel de réduction d'erreur vibratoire théorique de 80%. On constate que le réglage du temps de jerk *via* le filtrage de la position de référence n'annihile pas totalement les vibrations. Ceci est dû à la présence d'un amortissement $\zeta = 0.159$ faible mais non nul. Comme on peut le constater aussi, l'erreur de poursuite moyenne n'est pas modifiée.

2.5 Conception d'une précompensation de trajectoire d'un axe souple de robot

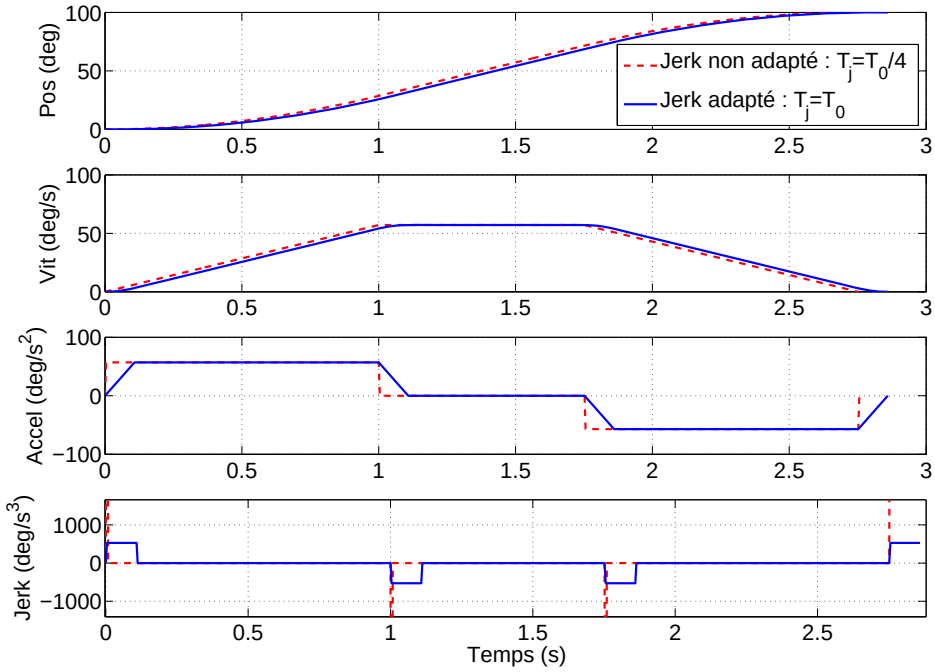
Dans ce paragraphe nous abordons la problématique de la synthèse d'une commande en boucle ouverte adaptée au suivi de trajectoire, dite précommande, gérée par la loi de mouvement développée au § 2.1. L'idée repose sur une approche de compensation basée sur le modèle dynamique souple estimé (3.10) sans remplacer la baie de commande industrielle ni l'architecture de contrôle. Cette piste d'investigation semble la plus adéquate dans un contexte d'implantation industriel.

La précommande comme illustrée dans la figure 4.1 est théoriquement parfaite si elle correspond à l'inverse du modèle du processus. L'identification des différents éléments que constituent le modèle rigide : le couple de gravité, le couple de frottement et l'inertie du bras ainsi que les éléments souples de la chaîne de transmission seront la base du modèle de précommande. L'objectif global de la précompensation est de corriger la déviation du point final de l'axe par rapport à la consigne du moteur engendrée par les défauts de transmission. La compensation des défauts dynamiques de l'axe et la correction des trajectoires seront effectués hors ligne comme exposé dans l'introduction générale de la thèse.

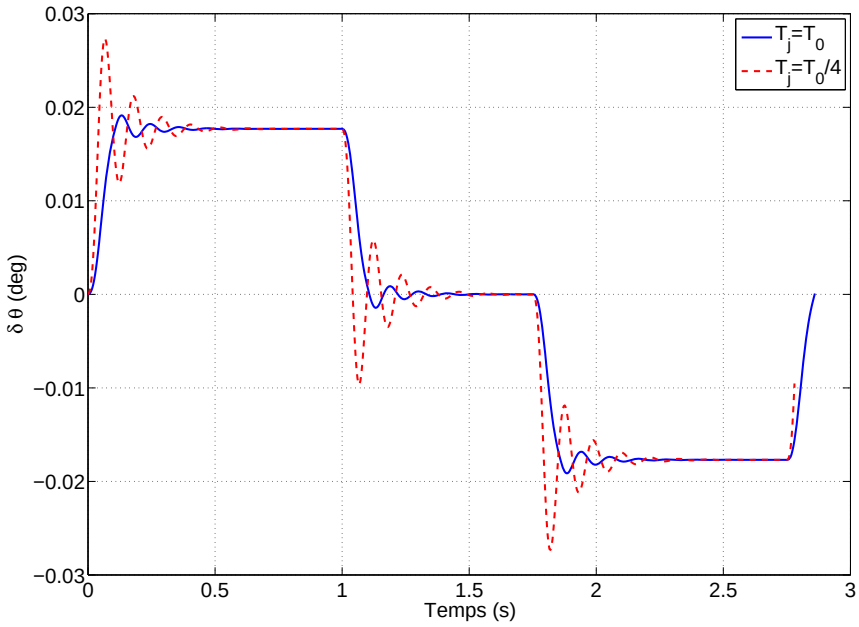
2.5.1 Elaboration de la précompensation souple

Nous reprenons le modèle d'axe soumis à un mode de déformation prépondérant du type mode de transmission (Cf. figure 3.14). Dans le cas de l'axe souple de notre robot, il est évident que les variations de paramètres tels que l'inertie équivalente rapportée à l'axe 2, et la raideurs sont beaucoup plus lentes par rapport aux différentes constantes de temps du système. Par ailleurs, ces paramètres ne présentent pas une discontinuité dans leurs évolutions. Certaines dynamiques agissantes sur le système sont plus rapides comparées à l'évolution des paramètres modaux. Par conséquent, la conception d'une précommande basée sur le modèle élastique ne posera pas de problème lors de son intégration. Si ce modèle est initialement non linéaire, deux solutions peuvent se présenter.

La première consiste à linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement ou bien la



(a) Exemple de profil de référence pour le test avec $V_{max} = 57.29\ deg/s$ et $A_{max} = 57.29\ deg/s^2$



(b) Comparaison de l'erreur de poursuite en position $\delta\theta(t)$ en fonction du réglage de la durée du filtre

FIGURE 4.17: Adaptation du profil initial pour la réduction des vibrations

deuxième approche tend à exploiter quelques propriétés naturelles du système mises en valeur telle que la génération de trajectoire appropriée. Dans ce cas, la génération de trajectoire est facilitée si le processus de départ est un système plat [Fliess et al., 1995]. Ainsi, la précommande est déduite de façon algébrique à partir de variables appelées sorties plates. De manière explicite, un système est plat si on peut trouver un ensemble de sorties (égales en nombre au nombre

d'entrées) tel que tous les états et toutes les entrées du système puissent être déterminés à partir de cet ensemble de sorties et de leurs dérivées en nombre fini. La loi de mouvement peut être entièrement définie dans les coordonnées des sorties plates. La précommande est alors calculée directement sans aucune intégration [Colas, 2007]. Dans le cas contraire (système non plat), la précommande est relativement difficile à concevoir [Graichen et al., 2005]. Ce deuxième cas ne sera pas traité en raison des caractéristiques physiques du système mécanique étudié. Cependant, le contrôleur industriel actuel ne permet pas de fournir un couple moteur désiré en anticipation [De Luca and Flacco, 2010], [Khatib et al., 2008] ou une entrée sous forme d'un effort appliqué d'une manière classique. Nous disposons uniquement d'une ouverture hors ligne permettant d'injecter un profil en position et vitesse désirée au robot. Grâce aux données récupérées au niveau du contrôleur du robot, nous avons tracé l'erreur de l'asservissement en position de l'axe 2 dans le cas d'un profil donné par la figure 3.32.

La figure 4.18 montre que l'erreur entre la consigne et le retour du codeur respecte une tolérance ne dépassant pas les $\pm 10^{-3}$ degré en régime permanent. En conséquence, la dynamique des contrôleurs/conrrecteurs sera négligée dans notre développement. Néanmoins, cette figure montre les discontinuités du couple du moteur de l'axe 2. Elles sont issues du profil à discontinuité en vitesse et dues à une dynamique d'asservissement pas suffisamment rapide au moment de la commutation. Le modèle d'estimation de la déviation angulaire de l'axe 2

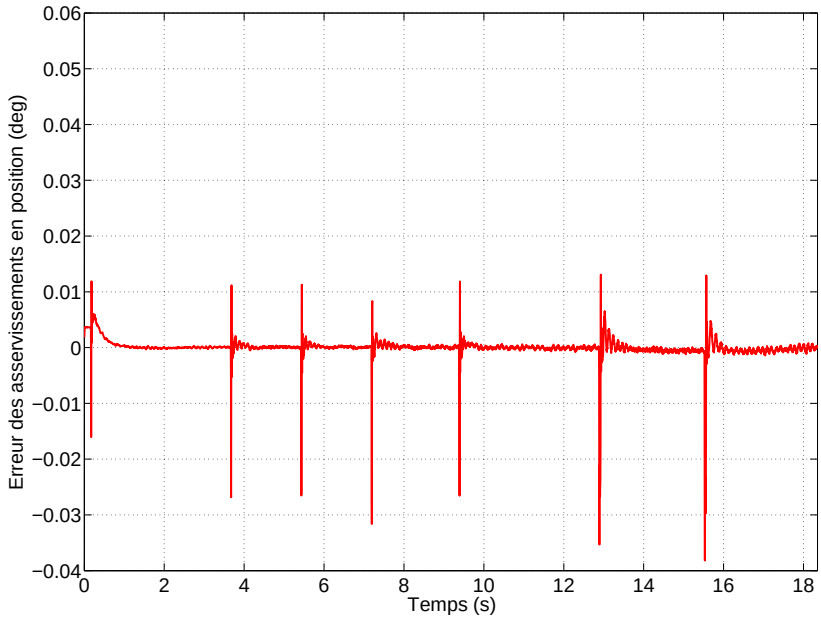


FIGURE 4.18: Erreur de suivi de trajectoire de l'axe 2 liée au changement de vitesse

à partir de la consigne en position angulaire désirée fourni au contrôleur du robot doit décrire le comportement linéaire et non linéaire couvrant l'enveloppe de fonctionnement de l'axe dans tout l'espace. Elle sera basée sur le comportement souple du système où la dynamique du modèle est régie par les équations (3.10). Une description complète de la dynamique du robot est trop complexe pour une compensation d'erreur effectuée en ligne. Le comportement du mouvement est déterminée non seulement par les élasticités et les accouplements, mais

aussi par la structure de la commande conjointe qui est inconnue. En outre, la compensation des déformations doit être assez fluide. Par conséquent, le modèle employé ne doit pas être lourd en terme d'implémentation logicielle. Pour cette raison, l'erreur de position angulaire est décrite dans un modèle simplifié dont les paramètres sont parfaitement identifiés. En réalité, la déformation élastique de l'axe $\delta\theta$ est donnée par l'équation suivante :

$$\delta\theta = \theta - \frac{\theta_m^d}{N} \tag{4.29}$$

où N est le rapport de réduction supposé constant. Dans ce cas, l'action de précompensation consiste alors à anticiper l'erreur de position de l'axe afin de calculer une nouvelle consigne de position comme le montre la figure 4.19. La figure 4.20 montre le schéma global de l'axe du robot

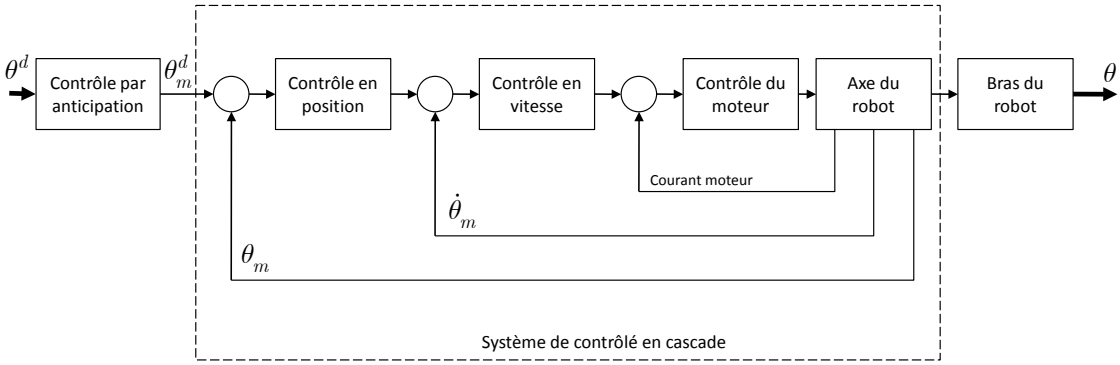


FIGURE 4.19: Idée globale de la précompensation de trajectoires

considéré avec la stratégie de précompensation traitée en hors ligne. Cette précompensation utilise un modèle du système identifié en boucle fermée pour filtrer la trajectoire désirée. Ce modèle inverse consiste en un modèle flexible décrivant la dynamique de la transmission interne de l'axe du robot. La dynamique du contrôleur n'est pas prise en compte dans ce cas de figure étant donné que ce dernier assure déjà, comme montré, un suivi de trajectoire performant. la nouvelle consigne en position s'est basée sur le modèle décrit par la dynamique souple de (3.10). L'intégration de cette nouvelle consigne en vue d'assurer un principe de correction de l'erreur axiale est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \theta_n^d &= \theta_n{}^{\text{théorique}} - \delta\hat{\theta}, \\ \delta\hat{\theta} &= \left[\frac{2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} - 1\right]\theta_n{}^{\text{théorique}} - \left[\frac{J_b}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}\right]\tau_r(\theta_n{}^{\text{théorique}}). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Rappelons que $\theta_n{}^{\text{théorique}}$ est la consigne en position initiale sans précommande (compensation), $\tau_r(\theta_n{}^{\text{théorique}})$ désigne le couple de gravité résiduel §3. L'erreur $\delta\hat{\theta}$ est calculée par le modèle d'élasticité dynamique développée dans §7 et l'équation (4.27). Cette nouvelle consigne θ_n^d permet de réduire la déformation axiale avec la prise en compte du comportement élastique.

2.6 Application à la génération de précommande et validations expérimentales

Dans ce travail, nous intégrons le modèle dynamique élastique dans le planificateur de trajectoire du robot industriel. Le planificateur est celui utilisé pour le réglage du jerk adapté à la réduction des vibrations. Nous avons planifié une trajectoire à loi de mouvement à jerk limité

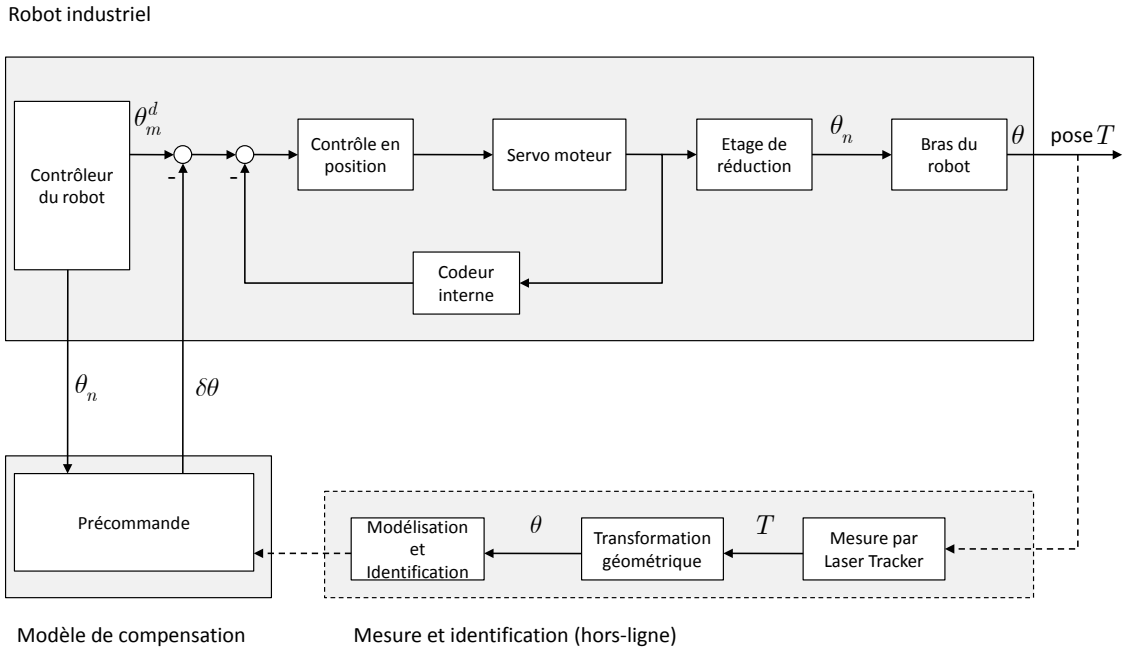


FIGURE 4.20: Structure de la correction dynamique de la déformation articulaire

adapté au premier mode dominant de l'axe 2 pour réduire les vibrations résiduelles en fin de chaque transition. Cette trajectoire est illustrée dans la figure 4.21. Les tests sont effectués sans

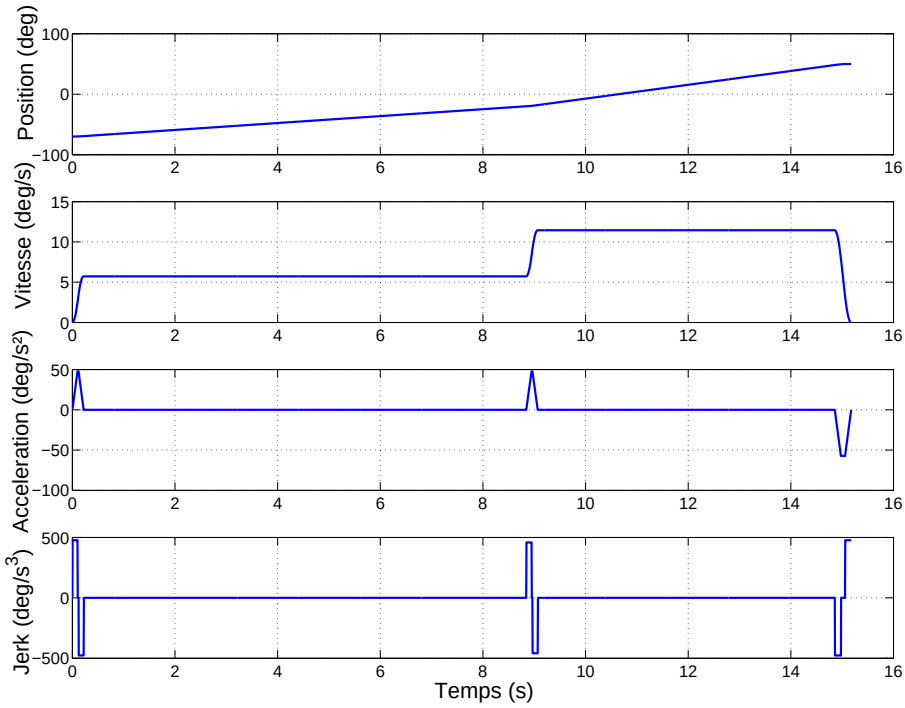


FIGURE 4.21: Loi de mouvement utilisée pour la génération de la précommande

charge. Avant d'appliquer la stratégie de correction dynamique (4.30), nous avons exécuté la trajectoire choisie où seules les données issues du codeur sont reconstruites. Comme constaté auparavant, les défauts issus du couple de gravité résiduel et ceux engendrés par la souplesse articulaire ne sont pas corrigibles par le contrôleur lors de la réalisation de la trajectoire. La

figure 4.22 illustre le couple moteur fourni ainsi que l'erreur d'asservissement de la baie de contrôle limité à l'étage de réduction. Ceci met en évidence l'hypothèse $\left(\theta_n^{\text{théorique}}(t) = \theta_n^{\text{mesurée}}\right)$ où la position théorique désirée est égale à celle fournie par le codeur. La mesure de la position

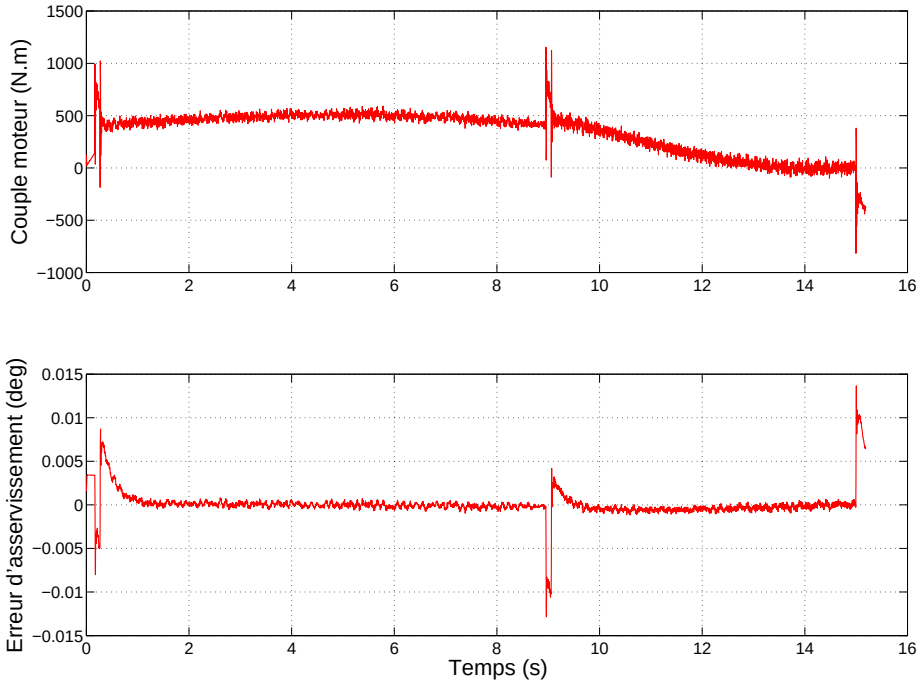


FIGURE 4.22: Mesure codeur du couple généré et l'erreur d'asservissement du contrôleur du robot

du point final du bras 2 du manipulateur est assurée par le Laser Tracker. Ainsi, la figure 4.23 illustre les mesures de la trajectoire désirée de l'axe sans correction et avec corrections des défauts liés au couple de chargement (gravité résiduelle) et aussi aux élasticités présentent au sein de la chaîne de transmission mécanique. Cette figure permet de mettre en évidence l'effet de la déformation articulaire $\delta\theta$ de l'axe 2 en réponse à la stratégie de la précompensation utilisée.

En vue de quantifier l'erreur de position angulaire $\delta\theta$ le long de la trajectoire parcourue par le bras du robot, nous utilisons les deux paramètres suivants :

- la valeur moyenne $M_{\delta\theta} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\delta\theta_k|$, où n est le nombre de points mesurés de la trajectoire ;
- l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale de $E_{\delta\theta} = \delta\theta_{max} - \delta\theta_{min}$.

Trajectoire de l'axe	$M_{\delta\theta}$ (deg)	$\delta\theta_{max}$ (deg)	$\delta\theta_{min}$ (deg)	$E_{\delta\theta}$ (deg)
Sans précompensation	0.06693	0.1042	0.03834	0.06586
Avec précompensation	0.02588	0.03981	0.01341	0.0264

TABLE 4.1: Caractérisation de l'apport de la stratégie de précompensation sur la déviation au bout d'axe

Le tableau 4.1 montre l'apport de la stratégie de précompensation sur l'amélioration du comportement de l'axe en dynamique élevée. De ce fait, la correction des défauts d'élasticité

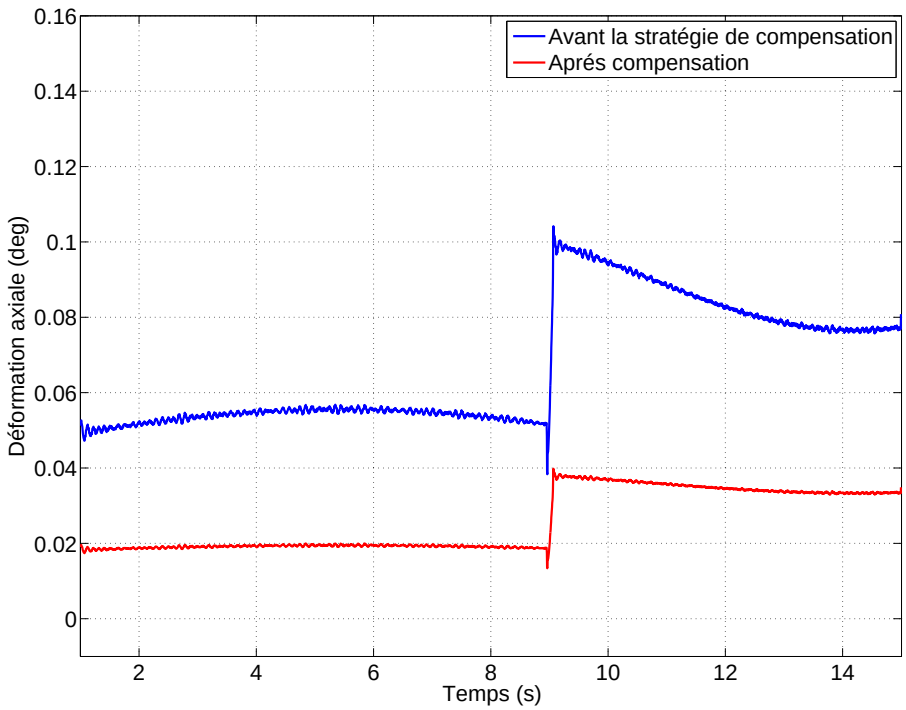


FIGURE 4.23: Apport de la stratégie de précompensation sur la déviation de l'axe 2

axiale réduit $M_{\delta\theta}$ de 61.3 % et $E_{\delta\theta}$ de 60%.

Pour conclure, nous avons présenté une méthode de compensation hors ligne de la dynamique souple de l'axe 2 en vue d'améliorer sa précision de positionnement. Les premiers résultats expérimentaux de cette approche de précompensation par génération de trajectoire adaptée, montrent qu'il est possible d'obtenir une amélioration significative au niveau de la précision de suivi dynamique. Dans les sections suivantes, nous étendons cette étude vers l'amélioration du comportement oscillant lors d'un mouvement multiaxes où on aperçoit un déplacement des modes de déformation.

3 Caractérisation de l'évolution des fréquences propres pour un robot industriel

3.1 Cadre d'étude et d'analyse

Jusqu'à présent, nous avons focalisé notre étude sur une seule configuration du robot où ce dernier effectu son déplacement autour de l'axe 2. Ainsi, le comportement vibratoire est uniquement caractérisé par une fréquence propre associée à un seul mode dominant. Dans ce qui suit, nous proposons d'étendre notre démarche en vue d'étudier l'évolution des modes de déformation de l'axe 2 suite à un changement de la configuration du robot. Pour cela, notre choix repose sur une configuration particulière et utile qui est la configuration d'usinage du robot (Cf. figure 4.24). Ainsi, nous avons planifié une trajectoire dans la direction de Y du robot. Le long de cette trajectoire seuls les axes 2 et 3 bougent, tandis que les autres restent bloqués. Les configurations de départ et d'arrivée sont données dans le tableau 4.2. L'idée est d'effectuer un premier mouvement à vide puis un deuxième mouvement avec montage de la broche au

FIGURE 4.24: Robot en configuration d'usinage

Axes	Configuration de départ (deg)	Configuration d'arrivée (deg)
θ_1	-90	-90
θ_2	-20	40
θ_3	140	70
θ_4	0	0
θ_5	30	30
θ_6	30	30

TABLE 4.2: Angles choisies des axes

niveau de l'effecteur.[†] Cette trajectoire permet de vérifier l'évolution de la fréquence propre associée à l'axe 2 du robot suite au mouvement engendré par la troisième articulation pour une trajectoire classique lors d'un procédé d'usinage robotisé. Ce protocole a pour objectif de détecter le changement de la fréquence et d'anticiper cette variation lors de la planification de trajectoire.

3.2 Analyse de la variation fréquentielle

Dans cette partie, nous ne considérons que l'aspect analyse fréquentielle du bras 2 afin de mettre en évidence la sensibilité du mode propre face aux variations de configuration et au couple de chargement extérieur engendré par le montage de la broche. Pour suivre l'évolution de la fréquence modale, nous choisissons cinq configurations spatiales entre le point initial et final (Cf. tableau 4.3). Durant cette campagne de mesure, le coin de cube du laser tracker est toujours placé à l'extrémité du bras 2. La méthode d'identification expérimentale de la fréquence consiste à analyser la réponse temporelle d'une consigne de type échelon de vitesse pour chaque configuration spatiale choisie. Le principe est simple, on écarte l'axe 2 d'environ 5° de sa configuration de test tout en gardant l'axe 3 bloqué. Le mode relevé sera l'image des

†. Le stäubli RX 170B est équipé d'un support universel de 23.6 Kg conçu en alliage d'aluminium fixé sur l'axe 6. Il porte une électro broche UGV de 6 kW et de 40000 tours/min.

Configuration	θ_2 (deg)	θ_3 (deg)
1	-20	140
2	0	120
3	20	100
4	30	80
5	40	70

TABLE 4.3: Configuration de test intermédiaires

vibrations causées suite à cette excitation en fin de mouvement. Ce mode est identifié par une FFT. Le tableau 4.4 illustre les fréquences relevées pour chaque configuration spatiale du robot à vide. L'analyse des résultats montre que contrairement à notre attente, la variation de l'axe 3 du

Configuration	Fréquence modale de l'axe 2 (Hz)
1	8.594
2	8.348
3	8.284
4	8.22
5	8.202

TABLE 4.4: Fréquences modales identifiées pour le robot à vide

robot n'influence pratiquement pas le comportement vibratoire de l'axe 2. Ainsi, les éléments identifiés présentent un écart type très faible de l'ordre de 0.16 Hz pour un pourcentage de variation ne dépassant pas les 4.5%. Ceci peut être justifié par le fait que le centre de gravité de l'axe 3 est bien équilibré par l'action du contre poids. Ainsi, le centre de gravité du bras 3 est situé vers l'arrière du robot de telle manière que sa masse compense le couple exercé sur l'articulation 3 par les masses m_4 et m_5 des bras 4 et 5. On peut donc considérer que G_{345} ne se déplace pas quand on bouge l'axe 3. Par conséquent, il peut être regroupé avec le centre de gravité G_2 en un nouveau centre de gravité appelé G_{2345}.

La figure 4.25 présente une simulation de la dispersion de la vibration résiduelle autour de la fréquence propre d'un bras du robot en réponse a un mouvement élémentaire en jerk constant. Nous constatons que pour une erreur d'estimation de $\omega(t)$ autour de $\pm$ 9% , le niveau de vibration résiduelle $vib(\omega)$ se place sous la barre de 10% en le comparant par rapport à un profil en accélération limitée. Ceci permet d'affirmer que dans le cas où les axes 2 et 3 du robot se déplacent ensemble selon les configurations illustrées dans le tableau 4.3, le choix de la durée de jerk en fonction d'une des fréquences propres présentées permet de maintenir le niveau de vibration minimale souhaité.

Dans la suite, nous nous intéressons au comportement dynamique de l'axe 2 en charge. De ce fait, on procède au montage de la broche au niveau de l'effecteur. Nous proposons de refaire les mêmes expérimentations faites sur le robot à vide. Pour cela, nous ordonnançons la même trajectoire d'usinage. Nous analysons au fur et à mesure la réponse fréquentielle en chaque configuration géométrique. Les différentes configurations utilisées sont décrites dans la figure 4.26. L'analyse spectrale de la réponse temporelle pour les cinq configurations différentes est

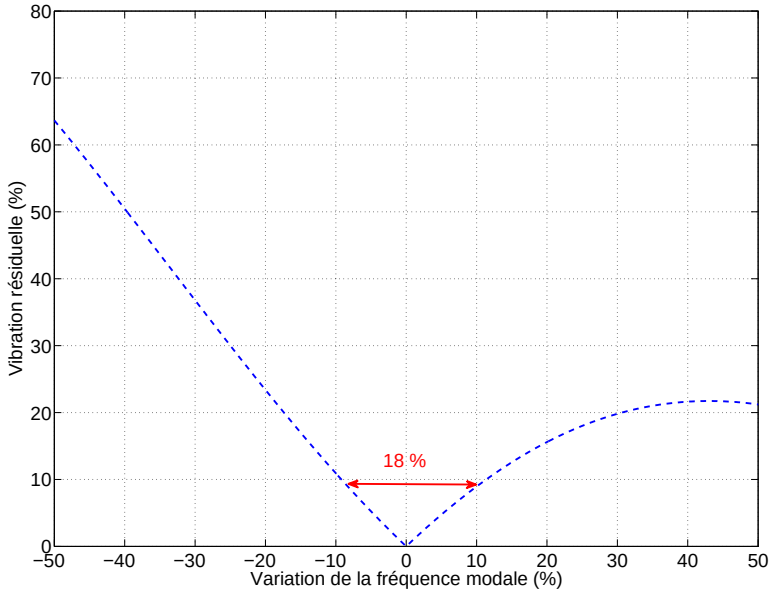


FIGURE 4.25: Vibration résiduelle pour un jerk élémentaire en fonction de la variation de la fréquence modale

illustrée dans le tableau 4.5. Comme dans le cas du robot à vide, la fréquence modale n'est

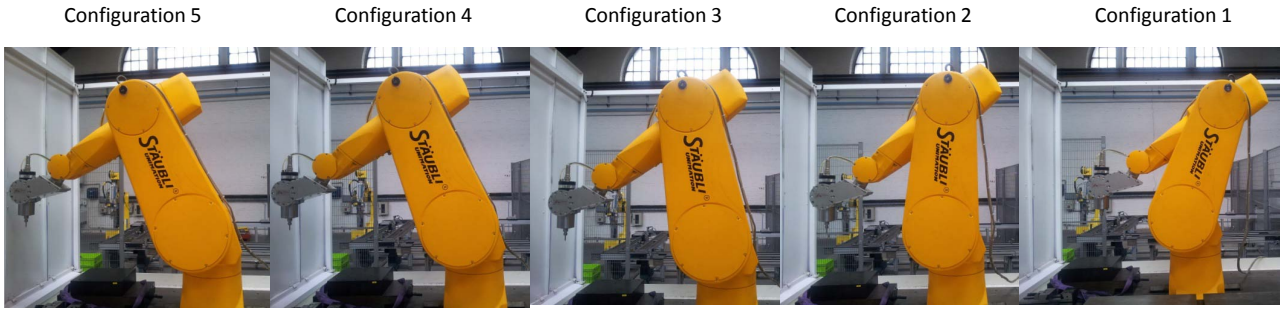


FIGURE 4.26: Différentes configurations utilisées avec le chargement du robot (broche montée)

Configuration	Fréquence modale de l'axe 2 (Hz)
1	7.708
2	7.549
3	7.568
4	7.478
5	7.437

TABLE 4.5: Fréquences modales identifiées pour le robot chargé

pas sensible à la variation de l'axe 3 du robot. Cependant, la variation de la charge (masse additionnelle suite au montage de la broche) induit une variation de 12% sur la fréquence propre de l'axe 2 comme le montre la figure 4.27. En vue de mettre en évidence l'effet de cette variation fréquentielle ainsi que son comportement sur la dynamique de l'axe au cours d'une trajectoire planifiée, nous procédons à un mouvement classiquement utilisé dans l'industrie de type *pick and place*, où la broche fera l'objet de la masse additionnelle portée par le robot

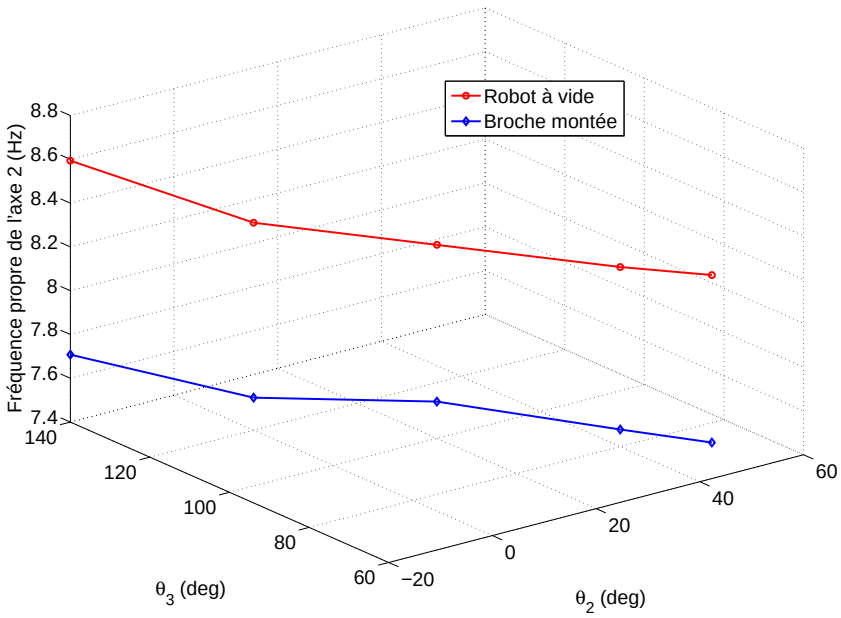


FIGURE 4.27: Mesure de la variation de la fréquence modale en fonction des angles θ_2, θ_3 et la charge du robot

manipulateur. Comme nous l'avons déjà constaté, ce changement de masse supporté par l'axe 2, fait varier systématiquement l'inertie équivalente notée J_b du manipulateur au niveau de son deuxième axe. Ceci engendre un changement de sa fréquence propre induisant finalement la variation de son comportement vibratoire. En conséquence, dans le cas d'un générateur de trajectoire à jerk limité, une stratégie d'adaptation de loi de mouvement en fonction de la période propre de l'articulation flexible est indispensable pour annihiler ces vibrations résiduelles causées par le changement du mode souple dominant.

L'enjeu ici réside alors dans l'évolution de la fréquence propre de l'articulation lors du changement de l'inertie équivalente ressentie par l'axe. Par ailleurs, pour le planificateur à loi de mouvement à jerk limité, la durée du filtrage du jerk est basée sur la connaissance de la période propre du processus. Ainsi, dans le cas où la fréquence associée à un mode vibratoire varie, une mise à jour de la durée du filtrage au fur et à mesure est indispensable pour maîtriser le comportement vibratoire. En vue de pallier à ce phénomène, un planificateur de trajectoire capable de générer des amplitudes et des temps de jerk variables basés sur la connaissance de la variation du mode associé semble nécessaire. Nous proposons alors l'application de l'estimateur non-asymptotique pour détecter les variations de ω_0.

4 Application de la technique d'estimation non asymptotique à l'amélioration du comportement vibratoire du robot

L'étude menée dans la section 3, a permis de mettre en évidence l'évolution de la fréquence propre de l'axe 2 du robot. Une structure générale de l'adaptation de la loi de mouvement en fonction de l'évolution de la période propre de l'axe est alors proposée dans la figure 4.28. La stratégie se compose d'un planificateur robuste à bang-bang en jerk couplé à un estimateur de

fréquence non-asymptotique ω_0. Le protocole d'estimation se base sur la mesure de la position du point final du bras ou bien de l'une de ses dérivées. Par ailleurs, une bonne détection de cette variation paramétrique permet de mettre à jour le planificateur de trajectoire afin d'adapter la durée T_j. Une fois réalisé, les amplitudes des vibrations résiduelles seront réduites à travers une action d'anticipation. Nous planifions une trajectoire rectiligne dans la direction Y du robot.

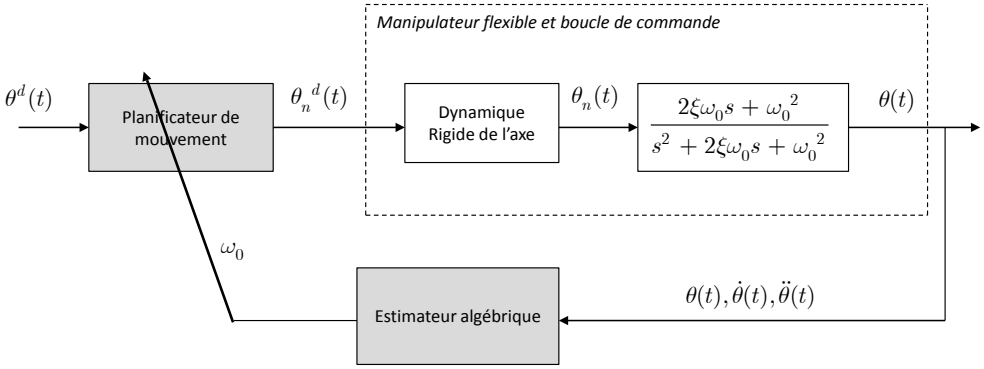


FIGURE 4.28: Structure générale de commande et d'adaptation de loi de mouvement

Le protocole de test consiste en un premier mouvement dit *aller* sans montage de la broche sur l'axe 6 où le robot est à vide jusqu'à la configuration 5 (Cf. tableau 4.2). Ce premier déplacement est suivi d'un mouvement dit *retour* où le robot rejoint sa position de départ i.e. configuration 1. La figure 4.29 illustre le chemin réalisé par le robot pour mettre en évidence la variation paramétrique au cours de ce mouvement. La trajectoire articulaire de l'axe 2 est donnée par la

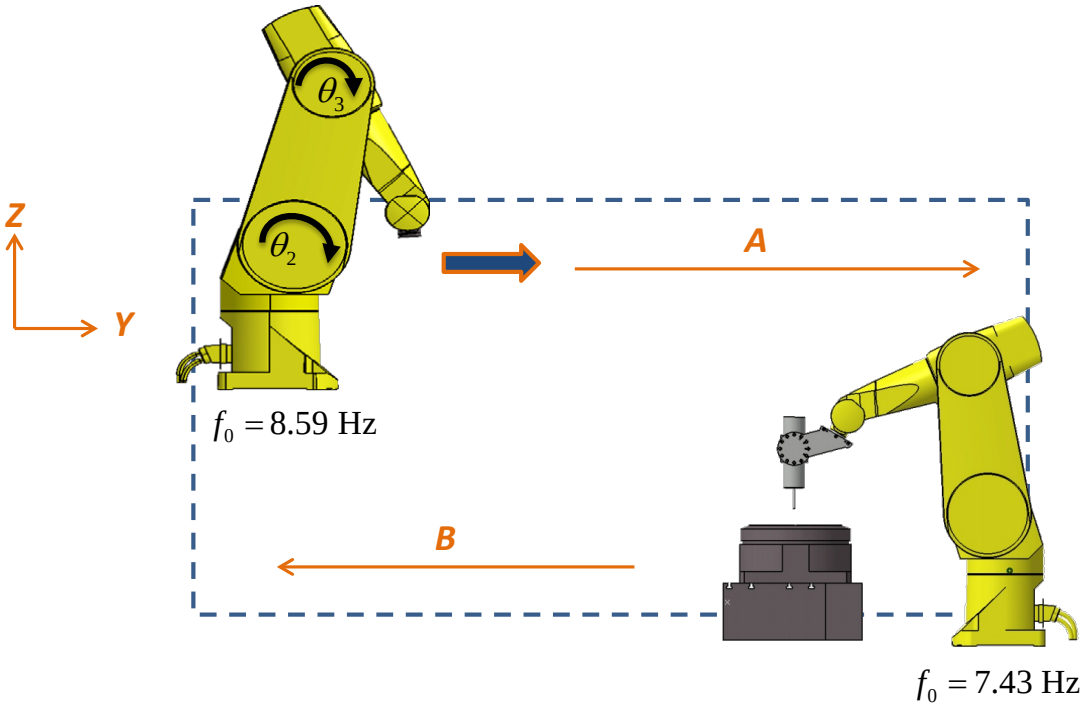


FIGURE 4.29: Trajectoire de validation du robot

figure 4.30. L'expérience montre que la fréquence associée au mode vibratoire dominant de cette articulation varie de 12% entre les deux phases. La figure 4.31 illustre cette variabilité. Dans un premier temps, un profil d'entrée en bang-bang d'accélération est utilisé afin d'obtenir la plus

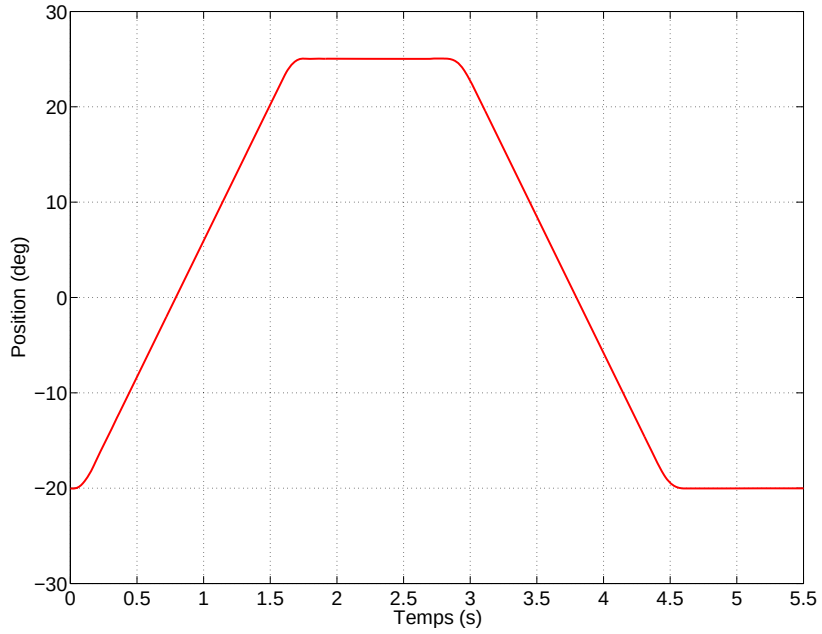


FIGURE 4.30: Trajectoire effectuée par l'axe 2 pour une déplacement suivant X robot

grande amplitude de vibrations.

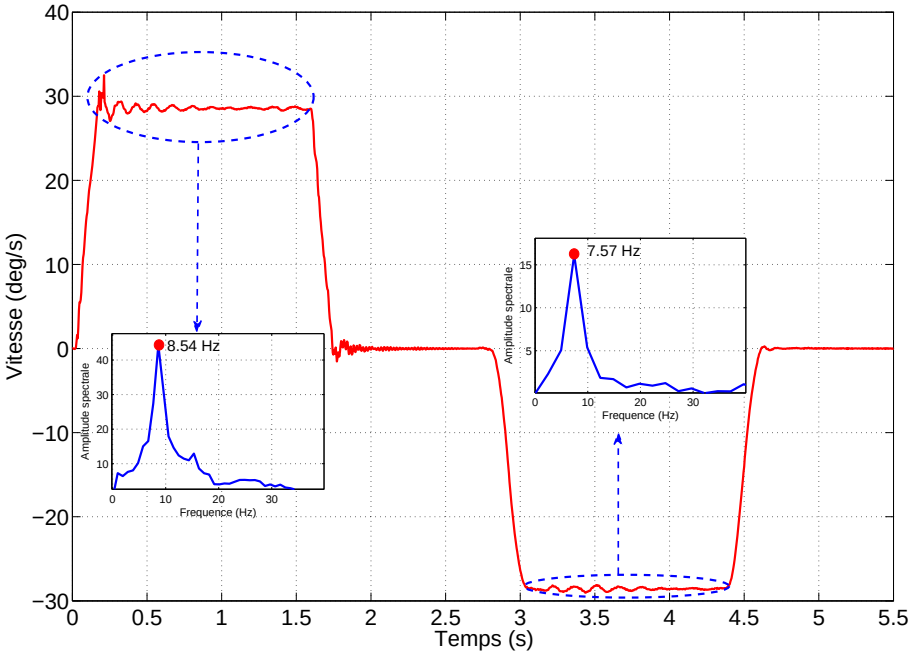


FIGURE 4.31: Vitesse articulaire de l'axe 2 le long de la trajectoire suivant Y robot et variation de sa fréquence propre

4.1 Estimation algébrique rapide de la variation fréquentielle modale

Dans ce paragraphe, nous étudions la détection en ligne de la variation de la fréquence propre caractérisant le mode de déformation dominant la réponse de l'axe 2 du robot. Pour assurer la limitation des phénomènes vibratoires, la durée d'estimation de la fréquence de résonance doit être inférieure à une période du mode propre.

Typiquement, les vibrations résiduelles d'une structure mécanique souple peuvent être modélisées par une somme de sinusoïdes où chacune est associée à un mode de déformation [Pereira et al., 2011]. Par ailleurs, les résultats illustrés dans la figure 4.31 permettent d'exprimer les vibrations résiduelles noté ici $y(t)$ sous la forme d'une fonction périodique suivante :

$$y(t) = Asin(\omega_0 t + \phi), \tag{4.31}$$

où A, ω_0 et ϕ désignent respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase des vibrations induites. En dérivant (4.31) deux fois par rapport au temps, on obtient une équation linéaire différentielle comme suit :

$$\ddot{y}(t) = -\omega_0^2 y(t). \tag{4.32}$$

Il est important de signaler que l'équation (4.32) ne dépend ni de l'amplitude A ni de la phase ϕ. Dans ce cas, l'estimateur vise à identifier uniquement ω_0. A partir des expressions génériques données dans le chapitre 2, une estimation de la pulsation propre ω_0 est donnée dans le domaine temporel, par le quotient (2.42) dans le chapitre 2.

4.2 Technique d'implantation

L'estimateur algébrique illustré à la figure 4.28 est programmé en MATLAB. Ainsi, l'équation (2.42, voir chapitre 2) est implantée avec un pas fixe. Le pas dans ce cas est égal à la période d'échantillonnage T_e utilisée pour l'acquisition des données, c'est-à-dire 4 ms. La variable $\omega_0(t)$ est notée $\omega_0(nT_e) = \omega_0(n)$. Elle est obtenue en évaluant (2.42) en $t = nT_e$, $n = 1, 2, ...$ Nous notons que le processus d'estimation paramétrique opère sur une fenêtre d'intégration glissante en vue d'obtenir une estimation *"temps réel"*.

Il est intéressant d'ajouter un critère de validation de l'identification de la pulsation. Ce critère doit permettre de sélectionner un nombre n_p d'échantillons à partir duquel $\omega_0^p = \omega_0(n_p)$ sera calculé avec une précision déterminée. Nous proposons alors le critère dit de mise à jour comme suit :

$$\frac{\sigma(n)}{|E[\hat{\omega}_0(n)]|} \leq \Delta, \tag{4.33}$$

où le paramètre Δ désigne la précision requise pour l'identification de ω_0. $E[\omega_0(n)]$ et $\sigma(n)$ représentent respectivement la moyenne glissante et la déviation standard glissante de $\omega_0(n)$ estimée. Une telle démarche a été employée dans les travaux de [Pereira et al., 2012]. Ces quantités sont calculées par les formules suivantes :

$$E[\omega_0(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \omega_0(n-k), \tag{4.34}$$

$$\sigma(n) = \sqrt{E[(\omega_0(n))^2] - (E[\omega_0(n)])^2}, \tag{4.35}$$

où n est le nombre d'échantillons utilisés pour le calcul de la moyenne glissante. Par conséquent, σ et N sont choisis en fonction des critères suivants :

- $(n-1)T_e$ doit être suffisamment large pour garantir une bonne estimation de ω_0 et suffisamment petit, c'est-à-dire $(n-1)T_e$ strictement inférieur à $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ pour une loi de mouvement à jerk limité ;
- la précision σ dépend essentiellement de l'intervalle de tolérance et de la marge d'erreur permise pour l'estimation de la pulsation propre permettant de garantir un seuil de vibration.

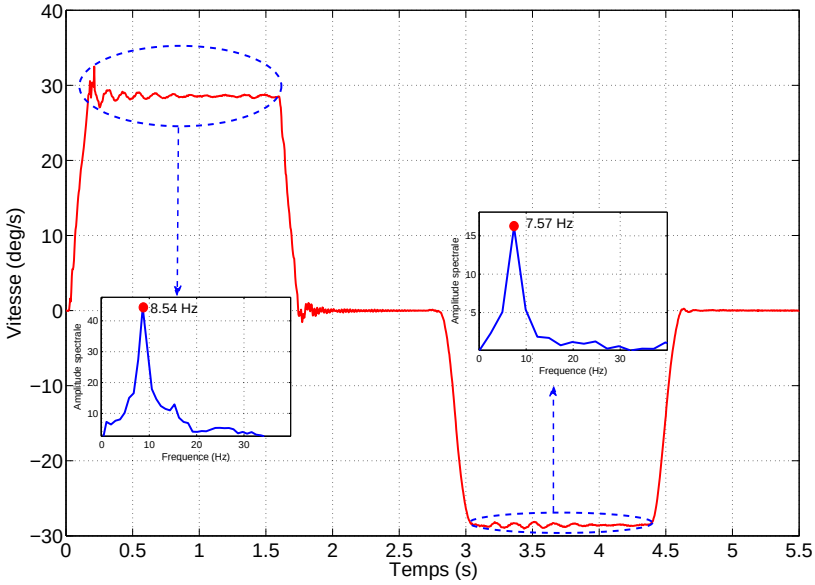
Par conséquent, en se référant à l'étude de sensibilité de la loi de mouvement en jerk limité (Cf. figure4.13) et pour garantir un niveau de vibration $F(j\omega)$ inférieur à environ 10%, la variabilité d'une estimation de la fréquence propre de l'axe du robot doit être comprise entre ω_0-9% et ω_0+9% comme illustré dans la figure 4.25. Cela se traduit par l'erreur relative suivante :

$$PAE(100\%) = 100 * \frac{|\hat{\omega}_0^p - \omega_0|}{\hat{\omega}_0} \leq 9\%. \tag{4.36}$$

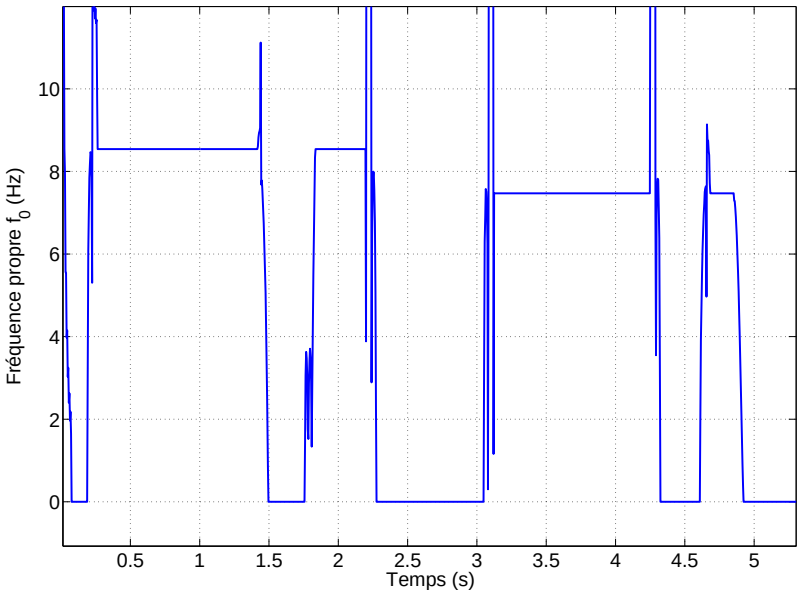
Dans le cas d'une opération de chargement/déchargement de la broche, la fréquence propre f_0 de l'axe 2 varie de 12% entre les deux phases. De ce fait, la taille de la fenêtre glissante nT_e doit être choisie de telle sorte qu'elle soit strictement inférieure à la valeur minimale de la variation de la période propre du processus T_0. Ainsi, pour $T_e = 0.004$ s $\Rightarrow n \leq \dfrac{\left(\frac{1}{f_{0_{max}}}\right)}{T_e}$ où $f_{0_{max}}$ représente la fréquence propre maximale que peut avoir l'axe 2. Elle est égale à 9.02 Hz. Par conséquent, la taille de la fenêtre glissante permettant d'identifier la fréquence associée au mode de déformation, doit être inférieure à 27 échantillons.

La figure 4.32 montre une estimation non asymptotique de la fréquence d'oscillation des vibrations causées par le mouvement de l'axe 2 du manipulateur. L'expérience montre qu'avec une longueur n de la fenêtre glissante égale à 18 échantillons de la vitesse articulaire en entrée de l'estimateur algébrique, l'identification de $\hat{f}_0 = \dfrac{\hat{\omega}_0}{2\pi}$ est obtenue par une intégration par la méthode de Simpson. Cette figure montre aussi l'aspect temps réel de (2.42) lors de la détection d'un changement fréquentiel du mode de déformation. Le résultat le plus évident concerne l'estimation non asymptotique de la fréquence. Une estimation de cette dernière est obtenue après $t = 0.064$ s pour chaque variation de configuration.

L'erreur d'estimation ne dépasse pas les 0.5% durant la phase d'avance dans la direction Y^+ du robot (robot non chargé) et elle est inférieure à 1.5% quand le robot est chargé (changement de la fréquence modale de l'axe 2) dans la direction Y^- du démonstrateur. Cette application illustre bien la mise en oeuvre d'une procédure de détection de la variation modale que peut subir le robot manipulateur. En effet, les résultats expérimentaux montrent l'efficacité de notre méthode. Elle ne nécessite qu'un faible temps de calcul. Ainsi, cet estimateur algébrique sera utilisé pour alimenter le planificateur de mouvement en vue de définir le temps de jerk. Cette structure permet de mettre à jour la durée de filtrage du jerk en fonction de la fréquence de résonance du système afin de réduire le vibrations résiduelles. Une approche similaire est étudiée dans [Pereira



(a) Evolution de la vitesse articulaire de l'axe 2 du manipulateur pour une trajectoire selon X robot



(b) Estimation non asymptotique de la variation de la fréquence f_0

FIGURE 4.32: Détection en ligne de la variation fréquentielle

et al., 2009, 2012] où les auteurs s'intéressent à l'adaptation d'un générateur de mouvement basé sur la technique d'Input Shaping pour le contrôle vibratoire du mouvement d'un bras souple.

4.3 Validation expérimentale

Dans cette section, nous nous intéressons à l'application des résultats issus de l'identification non asymptotique de la fréquence de résonance de l'axe en vue de maîtriser le comportement vibratoire lorsque le robot manipulateur assure un mouvement décrit par la figure 4.29. Lors de

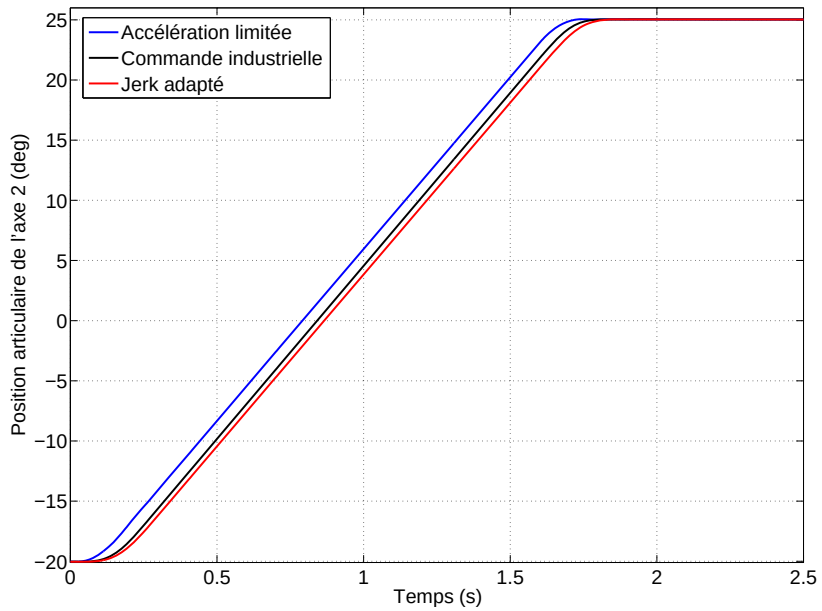


FIGURE 4.33: Position du bras pour les trois stratégies de commande

la première phase du mouvement (configuration 1 vers configuration 5), la loi de mouvement à jerk limité basée sur l'estimation de la fréquence modale de l'axe 2 permet de réduire de 85.8 % l'erreur maximale vibratoire par rapport à une loi de mouvement à accélération limitée (Cf. figure 4.34). La loi de mouvement en jerk adaptée surclasse la commande industrielle. Ainsi, le

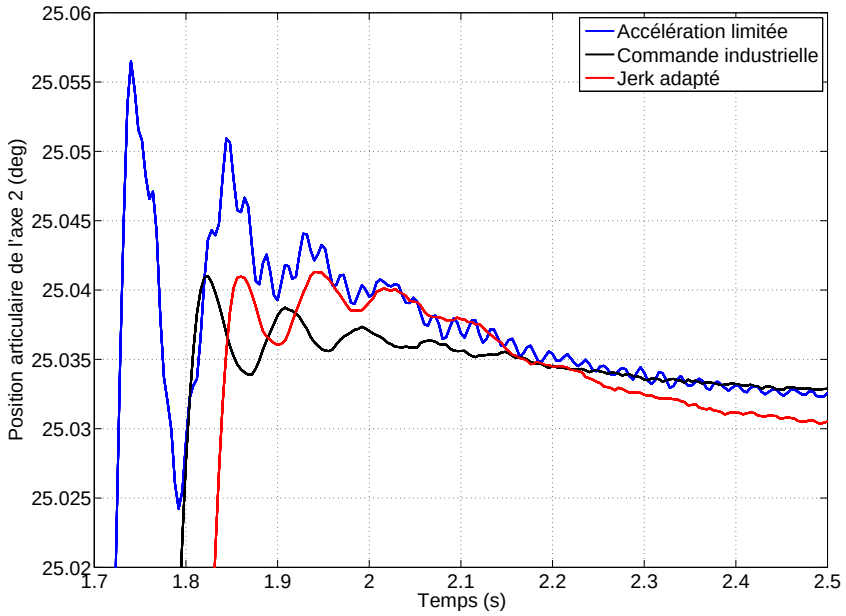


FIGURE 4.34: Vibration résiduelle du bras à vide (broche non montée) pour les trois stratégies de commande

gain vibratoire en fin de mouvement est de l'ordre de 9.4 % comme présenté dans le tableau 4.6. Cette amélioration se fait bien évidemment au détriment de la durée du mouvement. En

outre, le temps de stabilisation d'un profil en jerk limité réduit considérablement le temps de stabilisation où le temps associé à la commande industrielle est supérieure de 4.94% et de 27.37% pour un profil en accélération limitée. Par conséquent, ces résultats montrent que la commande par bang bang de jerk permet d'annuler quasiment les vibrations au niveau de la charge (Cf. figure 4.35). En chargeant le manipulateur industriel par montage de la broche UGV au niveau

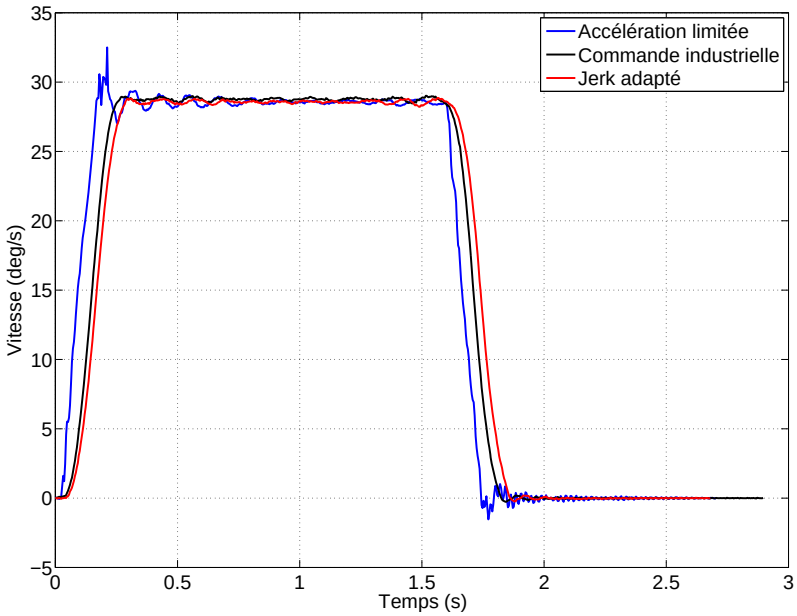


FIGURE 4.35: Vitesse du bras à vide (broche non montée) pour les trois stratégies de commande

	Accélération limitée	Commande industrielle	Jerk limité
Vibration résiduelles (deg)	0.0317 (100 %)	0.0075 (-76.4 %)	0.0045 (-85.8 %)
Temps de stabilisation (s)	2.68 (+27.37 %)	2.208 (+4.94 %)	2.104 (ref)

TABLE 4.6: Performances obtenues expérimentalement sur le robot avec 3 stratégies de commande (robot non chargé)

de l'organe terminal, l'axe 2 subit un changement de sa résonance. L'adaption du temps de jerk au fur et à mesure permet alors de garantir une réduction de l'amplitude vibratoire résiduelle de 80.78 % comparée à celle engendrée par un temps de filtrage de jerk aligné avec la première phase. Ce réglage adaptatif garantit aussi une performance de réduction vibratoire assez élevée par rapport à la commande industrielle de Stäubli (inférieure de 50%, Cf. tableau 4.7).

	Jerk limité non adaptée	Commande industrielle	Jerk limité adapté
Vibration résiduelles (deg)	0.0051 (100 %)	0.0035 (-31.37 %)	0.00098 (-80.78 %)
Temps de stabilisation (s)	2.088 (+7.85 %)	2.016 (+4.13 %)	1.936 (ref)

TABLE 4.7: Performances obtenues expérimentalement sur le robot avec 3 stratégies de commande (broche montée)

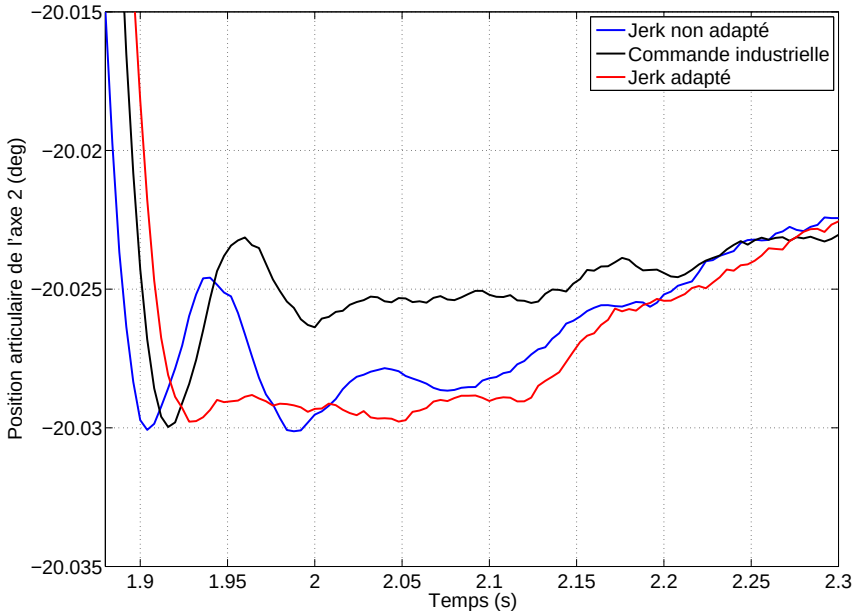


FIGURE 4.36: Vibration résiduelle du bras chargé (broche montée) pour les trois stratégies de commande

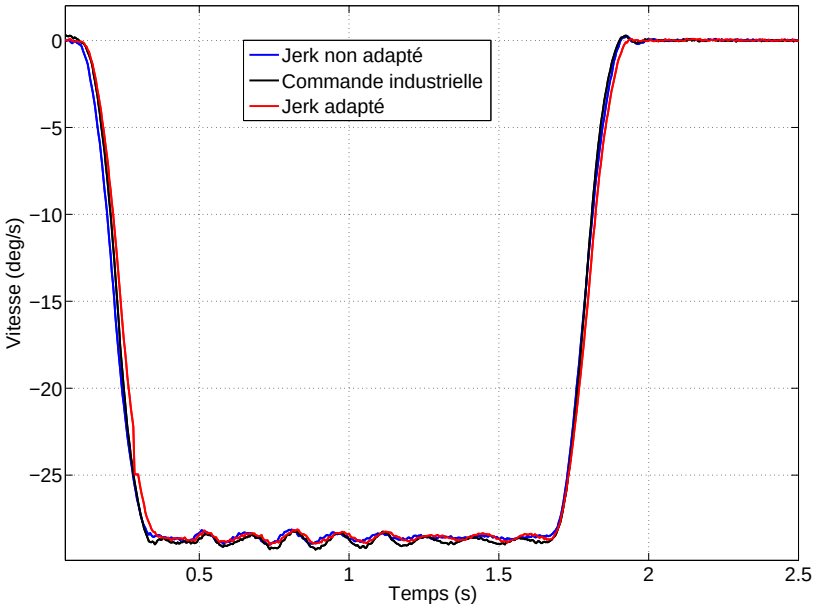


FIGURE 4.37: Vitesse du bras chargé (broche montée) pour les trois stratégies de commande

5 Bilan sur la synthèse de loi de mouvement adaptée et d'une commande d'un axe souple

Dans ce chapitre, nous avons proposé tout d'abord une analyse comparative des performances de différentes lois de mouvements spécifiques à une application particulière, celle de la commande d'un axe souple avec une application à la commande de robots industriels polyarticulés. Nous avons étudié l'impact de loi de mouvement sur le comportement vibratoire d'un axe de robot. Des méthodologies de réglage de loi de mouvement ont été investiguées

afin de les adapter à la réduction des vibrations. Une comparaison entre un bang-bang en jerk et des approches aussi répandues que l'Input Shaping ont été réalisées. Différents critères de comparaison et d'étude de sensibilité ont été mis en place. Le comparatif réalisé entre les deux techniques dans la première partie de ce chapitre, a permis de mettre en valeur le planificateur de mouvement à jerk limité pour sa quasi disponibilité dans la majorité des contrôleurs industriels d'une part, et la facilité de son implémentation numérique d'autre part. Par conséquent, pour un mode stationnaire de la structure mécanique légèrement amortie, nous avons réduit d'une manière très sensible les vibrations au cours du mouvement.

En raison de l'architecture actuelle de la baie de contrôle du démonstrateur qui ne dispose pas d'une ouverture logicielle ou matérielle permettant l'accès total aux boucles de courant, de position ou de vitesse, nous n'avons pas eu la possibilité de fournir des anticipations en couple moteur. La connaissance du comportement dynamique du processus modélisé et identifié dans le chapitre 3 nous a permis alors de concevoir une précommande souple du système couplé au générateur de trajectoire en amont. L'ajout d'une telle précommande permet d'améliorer de façon conséquente les performances de suivi des trajectoires, ce qui présente une action de précompensation ne déstabilisant pas les asservissements du système. Cette stratégie de génération de trajectoire adaptée *via* précommande permet de maîtriser le comportement vibratoire de l'axe ainsi que la réduction des défauts de transmission et de chargement.

La dernière partie de ce chapitre traite la problématique de la variation du mode propre qui est classiquement le cas pour les modes dépendant de la variation de la configuration ou de masse de la charge. Ceci présente le cas de figure lorsque les axes 2 et 3 se déplacent ensemble et lorsqu'une broche est montée au niveau de l'organe terminal. Ainsi, une extension vers l'estimation temps réel de cette variation paramétrique de la fréquence de résonance a été proposée par l'intermédiaire de l'approche algébrique non asymptotique. Les résultats obtenus sont très satisfaisants et permettent de détecter la variation de la fréquence en un temps très court. Ceci a pour objectif d'injecter au fur et à mesure, dans le contrôleur du robot, la nouvelle durée du filtrage de jerk par une approche pragmatique. Les résultats expérimentaux montrent que l'amplitude de vibration résiduelle est réduite de 10% par rapport à la commande industrielle déjà existante pour le robot à vide et de 50% dans le cas d'un chargement du robot avec une broche UGV. Ce constat démontre l'intérêt de la planification de trajectoire proposée ainsi que la connaissance du comportement dynamique de l'axe étudié.

Conclusions générales et principales Perspectives

Synthèse des travaux réalisés

Ce travail de thèse porte sur la problématique de l'adaptation de la commande des robots industriels, conçus à l'origine pour des tâches répétitives, au contexte des processus continus et exigeants en termes de précision dynamique. Nos axes de recherche principaux concernent les domaines de la modélisation et de l'identification paramétrique. Dans ce contexte, un des enjeux majeurs pour la commande consiste alors à pouvoir s'appuyer sur un modèle représentatif, fiable et robuste permettant de simuler, d'anticiper ou de compenser les principaux phénomènes physiques impactant la précision absolue.

Après avoir dressé un état de l'art concernant la modélisation géométrique, cinématique et dynamique des structures sérielles poly-articulées dans le premier chapitre, nous nous sommes intéressés dans le second chapitre à la phase cruciale et délicate de l'identification paramétrique de ces modèles. Les principaux résultats apportés par cette partie, portent sur une analyse comparative entre l'approche algébrique, dites non-asymptotique, et les algorithmes plus classiques à voir le filtrage de Kalman-Bucy. Après avoir proposé un estimateur algébrique au sens de la médiane, l'étude théorique des variances de chacun des estimateurs, ainsi que l'analyse en simulation, montrent que l'approche algébrique est non seulement moins sensible aux bruits de mesures que le filtre de Kalman-Bucy, mais qu'elle est également associée à une vitesse de convergence significativement plus rapide. Ces avantages sont liés à la forme de l'estimateur qui est une expression formelle et exacte des paramètres inconnus en fonction d'un nombre fini d'intégrales des entrées et des sorties du système considéré. Notons que l'approche non asymptotique possède les propriétés suivantes :

- Les calculs sont formellement implémentés ;
- Les algorithmes sont non asymptotiques et il n'y a pas des paramètres de gain à régler pour la convergence ;
- La méthode est robuste par rapport au bruit de mesure qu'il soit blanc ou d'une autre nature.

Ces résultats sont particulièrement prometteurs dans l'optique d'une implantation temps réelle des estimateurs pour la robotique industrielle. De fait, ces éléments ont motivé, dans la suite de l'étude, l'exploitation des méthodes algébriques pour l'estimation rapide de certains paramètres, notamment ceux associés aux phénomènes vibratoires.

Le troisième chapitre fait état d'une étude détaillée du comportement dynamique d'un axe de robot industriel. Le modèle d'axe proposé intègre les forces d'inerties et gravitationnelles, les phénomènes de frottement, ainsi que les souplesses d'axe principalement induites par la transmission de l'articulation. On notera que plusieurs modèles de frottement sont exploités en fonction du niveau de granulométrie recherché. Cette étude phénoménologique s'appuie sur de nombreuses expérimentations afin de justifier du modèle d'axe proposé. Dans ce chapitre, les méthodes algébriques sont mises en oeuvre afin d'estimer les paramètres modaux (fréquence propre et amortissement) du mode vibratoire dominant la réponse de l'axe considéré. Nous démontrons ainsi la convergence rapide de ce type d'estimateur dans le cas d'un système industriel complexe. Ce dernier résultat permet d'envisager la réactualisation rapide des paramètres de commande dédiés à la réduction de vibration.

Le quatrième chapitre est dédié à l'exploitation du modèle précédemment établi et des paramètres identifiés pour la structure de commande d'axe du robot. Dans une première partie, la problématique de la planification de trajectoire adaptée à la réduction de vibrations est exposée. Nous rappelons dans un premier temps les propriétés des lois de mouvement à jerk limité, immédiatement disponibles dans les contrôleurs industriels. Une contribution apportée par cette partie concerne l'analyse comparative des performances en réduction de vibration de ces lois de type "bang-bang" face aux techniques dédiées à la compensation de vibrations résiduelles de type "input shaping" (Zero-Vibration et Zero-Vibration-Derivative Shaper). De cette analyse il ressort que les lois à jerk limité sont particulièrement adaptées à la réduction de vibration pour des axes industriels soumis à un mode dominant faiblement amorti. Ces lois horaires permettant d'associer le respect de la cinématique imposée à la réduction des vibrations, sont de plus naturellement robustes face aux dynamiques vibratoires négligées. Dans une deuxième partie de ce chapitre, une méthodologie d'élaboration d'une précommande d'axe est exploitée afin de compenser la déformation axiale et par conséquent la déviation dynamique de l'organe terminale. Cette anticipation permet de compenser les dynamiques non gérées par le codeur d'une part et assure une réduction notable du mode souple dominant en adéquation en avec le planificateur de trajectoire. Des mesures expérimentales viennent confirmer un gain notable en précision dynamique. Dans une troisième et dernière partie, notre étude a porté sur la généralisation des résultats obtenus en réduction de vibration lorsque les paramètres vibratoires du système deviennent non-stationnaires. Ce phénomène est particulièrement marqué lorsque la charge embarquée par le robot varie dans le temps. Les propriétés de vitesse de convergence des estimateurs algébriques sont ici mises à profit afin de réactualiser les paramètres de la loi de mouvement. Malgré les variations paramétriques, les expérimentations démontrent que les estimateurs non asymptotiques permettent de détecter des variations de fréquence en un temps très court.

Perspectives et Problèmes ouverts

A l'issue de ce travail de thèse, plusieurs problèmes demeurent toutefois ouverts. Nous présentons ici ce qui nous semble être les pistes d'investigations envisageables.

Une piste d'investigation consiste à généraliser la modélisation axe par axe sur l'ensemble

des articulations que constituent le robot. Pour ce faire, une analyse fine des couplages inter-axes semble indispensable. Nous avons vu que l'étude du comportement élasto-dynamique des robots sériels est complexe dans la mesure où il s'agit d'un mécanisme poly-articulé soumis à de nombreux phénomènes physiques. On citera pour exemple les irrégularités cinématiques des réducteurs qui n'ont pas été considérée dans nos modèles. Une étude précédente a montré que ces défauts peuvent engendrer une erreur statique au niveau de l'organe terminal de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre. Ainsi, une étude possible consiste à modéliser dynamiquement la signature de ces erreurs, afin de les intégrer dans un modèle de commande [Ghorbel et al., 2001] et [Dhaouadi et al., 2003]. Par ailleurs, les différents axes du robot présentent une cartographie de rigidité qui évolue en fonction de leur configuration spatiale. Les résultats obtenus dans cette thèse permettent d'envisager une adaptation en ligne de la planification de trajectoire et donc une prise en compte de ces variations. Il reste toutefois les phénomènes de couplage vibratoire inter-axes qui, s'ils ne sont pas considérés, peuvent remettre en cause la structure de compensation axe par axe.

Une autre piste d'investigation concerne la généralisation de la méthode exploitée en planification de trajectoire pour compenser les vibrations, supposée non amorties, au cas de modes flexibles amortis. Une étude en cours dans l'équipe porte sur cette problématique, qui devient d'autant plus sensible si l'on considère l'ajout de systèmes d'amortissement actif ou passif sur le robot.

Concernant la prise en compte des variations paramétriques, deux solutions peuvent être envisagées. La première consisterait à adapter les paramètres du modèle de précommande lors du traitement hors-ligne de la loi de mouvement. Les variations des paramètres seraient alors préalablement quantifiées par des mesures en différents points de fonctionnement. La deuxième solution traiterait plutôt directement l'estimation en ligne des paramètres afin de les intégrer dans la commande. Cette solution nécessite un développement logiciel et matériel conséquent et difficile à mettre en oeuvre sur un robot industriel. On notera que si l'ordre du modèle évolue sensiblement pour différentes configurations spatiales, une approche du type multi modèles pourrait être également envisagée [Sadati et al., 2005].

D'autres pistes visent l'amélioration de la précision par l'ajout de capteurs de positions embarqués au niveau des bras du robot. Grâce à ce retour d'informations, la dynamique élastique des différentes parties situées en aval des chaînes de transmission sera disponible en temps réel. D'une part, l'intégration de ces capteurs dans les boucles de commande du manipulateur pourrait permettre de corriger les défauts des articulations. D'autre part, une identification en temps-réel *via* les algorithmes non-asymptotique permettra d'anticiper les vibrations pour la planification de trajectoire.

Bibliographie

G. Abba and P. Sardain. Modélisation des frottements dans les éléments de transmission d'un axe de robot en vue de son identification. *Mécanique and Industries*, 4 :391 – 396, 2003. ISSN 1296-2139. 104

R.B. Abdennour, P. Borne, M. Ksouri, and F. M'sahli. *Identification et Commande numérique des procédés industriels*. Méthodes et pratiques de l'ingénieur. Editions Technip, 2001. ISBN 9782710807988. 37

M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications, 1964. ISBN 9780486158242. 49

F. Al-Bender and J. Swevers. Characterization of friction force dynamics. *Control Systems, IEEE*, 28(6) :64–81, 2008. ISSN 1066-033X. 104

T. Alban and H. Janocha. Dynamic calibration of industrial robots with inertial measurement systems. In *European Control Conference. ECC'99*, Karlsruhe, 1999. 4

G. Alici and B. Shirinzadeh. Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators. *Robotics, IEEE Transactions on*, 21(4) :554–564, 2005. ISSN 1552-3098. 22

B. Armstrong-Helouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7) : 1083–1138, July 1994. ISSN 0005-1098. 32, 96, 103

K.J. Astrom and C. Canudas-de Wit. Revisiting the lugre friction model. *Control Systems, IEEE*, 28(6) :101–114, 2008. ISSN 1066-033X. 33

R. Béarée. *Prise en compte des phénomènes vibratoires dans la génèration de commande des machines-outils à dynamique élevée*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, Décembre 2005. 22, 81, 101, 132

R. Béarée and A. Olabi. Dissociated jerk-limited trajectory applied to time-varying vibration reduction. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29 :444 –453, 2013. 75, 132, 141

R. Béarée, P.-J. Barre, P. Borne, and J.-P. Hautier. Analyse dune loi de mouvement en jerk sur le comportement vibratoire d'une structure mécanique. *Journal européen des systèmes automatisés, RS série JESA Lavoisier*, 38 :475–496, 2004. 129, 132

R. Béarée, P.-J. Barre, and J.P. Hautier. Vibration reduction abilities of some jerk controlled movement laws for industrial machines. In *Proceeding de 16th IFAC World Congress*, pages 532–537, Prague, Czech Republic, July 2005. 132

P.-J. Barre, J. Charley, and J.-P. Hautier. The use of modal analysis to improve the axis control. *Mécanique industrielle et matériaux*, 50(1) :19–23, 1997. 21

L. Bascetta and P. Rocco. Modelling flexible manipulators with motors at the joints. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 8(2) :157–183, 2002. 20, 22

M. Basseville and I.V. Nikiforov. *Detection of abrupt changes : theory and application*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice Hall, 1993. ISBN 9780131267800. 70

L. Belkoura, J-P. Richard, and M. Fliess. Parameters estimation of systems with delayed and structured entries. *Automatica*, 45(5) :1117 – 1125, 2009. ISSN 0005-1098. 44

L. Belkoura, T. Floquet, K. Ibn Taarit, W. Perruquetti, and Y. Orlov. Estimation problems for a class of impulsive systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(10) : 1066–1079, 2010. ISSN 1099-1239. 45

E. Berglund and G.E. Hovland. Automatic elasticity tuning of industrial robot manipulators. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 5, pages 5091–5096, 2000. 60

L. Biagiotti and C. Melchiorri. Fir filters for online trajectory planning with time- and frequency-domain specifications. *Control Engineering Practice*, 20 :1385 – 1399, 2012. ISSN 0967-0661. 132, 141

A.C. Bittencourt, E. Wernholt, S. Sander-Tavallaey, and T. Brogardh. An extended friction model to capture load and temperature effects in robot joints. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 6161–6167, 2010. 104

S. Björklund. A random model for micro-slip between nominally flat surfaces. *Journal of Tribology*, 119, 1997. 96

P.A Bliman and M. Sorine. Friction modelling by hysteresis operators, application to dahl, sticktion, and stribeck effects. In *In Proc. Conf. Models of Hysteresis*, Trento, Italy, 1991. 33

B. Bona and M. Indri. Friction compensation in robotics : an overview. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pages 4360–4367, 2005. 100, 104

W. Book and K. Obergfell. Practical models for practical flexible arms. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 835–842, 2000. 21

P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and L. Zambettakis. *Analyse et régulation des processus industriels : régulation continue*. Analyse et régulation des processus industriels. Éd. Technip, 1993. ISBN 9782710806424. 42

T. Brogårdh. Present and future robot control developmentan industrial perspective. *Annual Reviews in Control*, 31(1) :69 – 79, 2007. ISSN 1367-5788. 1

T. Brogårdh. Robot Control Overview : An Industrial Perspective. *Modeling, Identification and Control*, 30(3) :167–180, 2009. 1

R. Campa and H. De la Torre. Pose control of robot manipulators using different orientation representations : A comparative review. In *American Control Conference, 2009. ACC '09.*, pages 2855–2860, 2009. 13

R. Campa, K. Camarillo, and L. Arias. Kinematic modeling and control of robot manipulators via unit quaternions : Application to a spherical wrist. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 6474–6479, 2006. 13

C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(3) :419–425, 1995. ISSN 0018-9286. 33

F. Colas. *Synthèse et réglage de lois de commande adaptées aux axes souples en translation - Application aux robots cartésiens 3 axes -*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2007. 20, 22, 75, 132, 143

K.L Conrad, P.S Shiakolas, and T.C Yih. Robotic calibration issues : Accuracy, repetability and calibration. Rio, Patras, Greece, Jul 2000. Proceedings of the 8th Mediterranean Conference on Control Automation (MED),. 13

D. Corbel. *Contribution à lamélioration de la précision des robots parallèles*. PhD thesis, Université de Montpellier II - Sciences et Techniques de LangueDoc, December 2008. 11

J.J. Craig. *Introduction to Robotics : Mechanics and Control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering : control engineering. Pearson Education, Incorporated, 2005. ISBN 9780201543612. 19

P.R. Dahl. Measurement of solid friction parameters of ball bearings. Technical report, Engineering Science Operations - The Aerospace Corporation - El Segundo, Calif. 90245. 32

P.R. Dahl. A solid friction model. Technical report, The Aerospace Corporation, May 1968. 98

B. D'Andrea Novel, C. Boussard, M. Fliess, O. El Hamzaoui, H. Mounier, and B. Steux. Commande sans modèle de la vitesse longitudinale d'un véhicule électrique. In *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2010)*, Nancy, France, 2010. 45

A. De Luca. Feedforward/feedback laws for the control of flexible robots. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 233–240, 2000. 21

A. De Luca and F. Flacco. Dynamic gravity cancellation in robots with flexible transmissions. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 288–295, 2010. 143

A. De Luca and B. Siciliano. Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 21(4) :826–839, 1991. ISSN 0018-9472. 21

A. De Luca, R. Farina, and P. Lucibello. On the control of robots with visco-elastic joints. In *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, pages 4297–4302, 2005. 22

J. De Miras, S. Riachy, M. Fliess, C. Join, and S Bonnet. Vers une commande sans modèle d'un palier magnétique — first steps towards a model-free control of a magnetic bearing. In *Septième Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, page CDROM, Grenoble, France, 2012. SURFDIAG, CID SURFDIAG, CID. 44

P. Destuynder and F. Santi. *Analyse et contrôle numérique du signal - Calcul scientifique - Niveau C*. Technosup - ELLIPSES, 2003. ISBN 9782729817268. 114

R. Dhaouadi, F.H. Ghorbel, and P.S. Gandhi. A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 50(6) :1165–1171, 2003. ISSN 0278-0046. 163

S. Dietze. *H, Hermes and J.P. La Salle, Functional Analysis and Time Optimal Control. (Mathematics in Science and Engineering, Volume 56). VIII + 136 S. m. Abb. New York/London 1969. Academic Press*, volume 52. WILEY-VCH Verlag, 1972. 126

S.K Dwivedy and P Eberhard. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41(7) :749 – 777, 2006. ISSN 0094-114X. 20

M.R. Elhami and D.J. Brookfield. Sequential identification of coulomb and viscous friction in robot drives. *Automatica*, 33(3) :393 – 401, 1997. ISSN 0005-1098. 95

G Ellis. *Control System Design Guide, (2nd Ed.),*. Academic Press, 2000. 87

M Enqvist. *Some Results on Linear Models of Nonlinear Systems*. Linköpings universitet, Linköping, Sweden, 2003. ISBN 91-7373-758-5. 37

M. Fliess. Some basic structural properties of generalized linear systems. *Systems and Control Letters*, 15(5) :391 – 396, 1990. ISSN 0167-6911. 44

M. Fliess. Analyse non standard du bruit. *Comptes Rendus Mathematique*, 342(10) :797 – 802, 2006. ISSN 1631-073X. 44

M. Fliess and C. Join. Model-free control and intelligent pid controllers : towards a possible trivialization of nonlinear control. In *15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2009)*, Saint-Malo, France, 2009. IFAC. 44

M. Fliess, J. Lévine, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61 :1327–1361, 1995. 44, 142

M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. Robust residual generation for linear fault diagnosis : An algebraic setting with examples. *International Journal of Control*, 77(14) :1223–1242, 2004. 45

M. Fliess, C. Join, and M. Mboup. Algebraic change-point detection. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 21(2) :131–143, 2010. 70

D. Foata and J. Franchi. *Calcul des probabilités*. Sciences Sup. Dunod, 2012 - 3ème edition. ISBN 9780071633437. 51

J. Funda, R.H. Taylor, and R.P. Paul. On homogeneous transforms, quaternions, and computational efficiency. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 6(3) :382–388, 1990. ISSN 1042-296X. 13

Y. Fung and P. Tong. *Classical and Computational Solid Mechanics*. Advanced series in engineering science. World Scientific, 2001. ISBN 9789810241247. 23

H. Garnier and L. Wang. *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*. Advances in Industrial Control Series. Springer-Verlag London Limited, 2008. ISBN 9781848001619. 38

A. Gasparetto and V. Zanotto. A technique for time-jerk optimal planning of robot trajectories. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 24(3) :415 – 426, 2008. ISSN 0736-5845. 128

M. Gautier and W. Khalil. Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots. In *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pages 494–499 vol.1, 1991. 108, 110

M. Gautier and P. Poignet. Identification en Boucle Fermée par Modèle Inverse des Paramètres Physiques de Systèmes Mécatroniques. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 36(3) : 465–480, 2002. 103

A. Gensior, J. Weber, J. Rudolph, and H. Guldner. Algebraic parameter identification and asymptotic estimation of the load of a boost converter. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 55(9) :3352–3360, 2008. ISSN 0278-0046. 45

V. Gerat. Speed reducer of the cycloidal type for robots and other industrial manipulators. Number Patent US5286235-A. S.A. Des Etablissements Staubli, USA, 15. Feb 1994. 95

F.H. Ghorbel, A. Alpeter, and P.S. Gandhi. On the kinematic error in harmonic drive gears. *Journal of Mechanical Design*, 123 :90–97, 2001. 163

H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, USA, 1980. ISBN 9788177582833. 20

K. Graichen, V. Hagenmeyer, and M. Zeitz. A new approach to inversion-based feedforward control design for nonlinear systems. *Automatica*, 41(12) :2033 – 2041, 2005. ISSN 0005-1098. 143

K.H. Grote and E.K. Antonsson. *Springer Handbook of Mechanical Engineering*. Number vol. 10 in Springer Handbook of Mechanical Engineering. Springer, 2009. ISBN 9783540491316. 19

P. Hamon, M. Gautier, and P. Garrec. Identification dynamique de robots avec un modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse. In *Sixième Conference Internationale Francophone d'Automatique*, page 154, Nancy, France, 2010. 103

P. Hamon, M. Gautier, and P. Garrec. New dry friction model with load- and velocity-dependence and dynamic identification of multi-dof robots. In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 1077–1084, 2011. 104

T. Hardeman. *Modelling and identification of industrial robots including drive and joint flexibilities*. PhD thesis, University of Twente, Enschede, February 2008. 112

T. Hardeman, R.G.K.M. Aarts, and J.B. Jonker. A finite element formulation for dynamic parameter identification of robot manipulators. *Multibody System Dynamics*, 16(1) :21–35, 2006. ISSN 1384-5640. 20

M.R. Hatch. *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Taylor & Francis, 2010. ISBN 9781420035759. 21

M-H. Hayes. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley and Sons, 1996. ISBN 978-0-471-59431-4. 113

G.E. Hovland, E. Berglund, and O.J. Sordalen. Identification of joint elasticity of industrial robots. In *Experimental Robotics VI*, volume 250 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 455–464. Springer London, 2000. ISBN 978-1-85233-210-5. 61

K. Ibn Taarit. *Contribution à l'identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes hybrides*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille ; Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (Tunisie), Dec 2010. 38

K. Ibn Taarit, L. Belkoura, M. Ksouri, and J-P. Richard. A fast identification algorithm for systems with delayed inputs. *International Journal of Systems Science*, 42(3) :449–456, 2011. 44

ISO. *Manipulating industrial robots - Performance criteria and related test methods (ISO 9283)*. International Standards Organization, 1998. 11

Z. Jamaludin, H. Van Brussel, and J. Swevers. Quadrant glitch compensation using friction model-based feedforward and an inverse-model-based disturbance observer. In *Advanced Motion Control, 2008. AMC'08. 10th IEEE International Workshop on*, pages 212–217, 2008. 104

A. Janczak. *Identification of Nonlinear Systems Using Neural Networks and Polynomial Models : A Block-Oriented Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2005. ISBN 9783540231851. 60

K. Johanastrom and C. Canudas de Wit. Revisiting the lugre friction model. *Control Systems, IEEE*, 28(6) :101–114, 2008. ISSN 1066-033X. 105

B. Jonker. A Finite Element Dynamic Analysis of Flexible Manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 9(4) :59–74, August 1990. 20

B. Jonker. Linearization of dynamic equations of flexible mechanisms - a finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(7) :1375–1392, 1991. 20

R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 83 :95–107, 1961. 42

R.E. Kalman, P.L. Falb, and M.A. Arbib. *Topics in mathematical system theory*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1969. 42

T.R. Kane and D.A. Levinson. *Dynamics : Theory and Applications*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill Ryerson, Limited, 1985. ISBN 9780070378469. 20

C-G. Kang. On the derivative constraints of input shaping control. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(2) :549–554, 2011. ISSN 1738-494X. 133

M.R. Kermani, R.V. Patel, and M. Moallem. Friction identification and compensation in robotic manipulators. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 56(6) :2346–2353, 2007. ISSN 0018-9456. 95, 103

W. Khalil. *Commande des robots manipulateurs*. IC2 : Série Systèmes automatisés. Hermes Science Publications, 2002. ISBN 9782746204744. 127

W. Khalil and E. Dombre. *Modélisation, identification et commande des robots*. Collection robotique. Hermes Science Publications, 1999. ISBN 9782746200036. 18

W. Khalil and M. Gautier. Modeling of mechanical systems with lumped elasticity. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3964–3969 vol.4, 2000. 21, 22

W. Khalil and J. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 1174–1179, 1986. 15

O. Khatib, P. Thaulad, T. Yoshikawa, and Jaeheung Park. Torque-position transformer for task control of position controlled robots. In *Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, pages 1729–1734, 2008. 143

M. Ksouri and P. Borne. *La commande par calculateur : application aux procédés industriels : avec 100 exercices et problèmes résolus*. Collection Sciences et technologies. Technip, 1999. ISBN 9782710807636. 37

J.C Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, and P.E. Wright. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9 :112–147, 1998. 105

I.D. Landau. *Identification et commande des systèmes*. Traité des nouvelles technologies. Série Automatique. Hermes Science Publications, 1993. ISBN 9782866013653. 35, 36, 42

I.D. Landaun and A. Besançon-Voda. *Identification des systèmes*. IC2 : Série Systèmes automatisés. Hermes Science Publications, 2001. ISBN 9782746202207. 38, 39

F. Lange and Gerhard Hirzinger. Learning accurate path control of industrial robots with joint elasticity. In *Robotics and Automation, Proceedings, IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2084–2089, 1999. 4

M. Lesser. *Analysis of Complex Nonlinear Mechanical Systems : A Computer Algebra Assisted Approach*. World scientific series on nonlinear science. Series A. World Scientific, 1995. ISBN 9789810234775. 20

T. Li, H. Jia-Xiu, and Z. Pi-Xuan. Research on modeling and dynamics of flexible manipulators. In *Machine Learning and Cybernetics, 2006 International Conference on*, pages 840–845, 2006. 21

J.G. Linden, T. Larkowski, and K.J. Burnham. Algorithms for recursive/semi-recursive bias-compensating least squares system identification within the errors-in-variables framework. *International Journal of Control*, 85(11) :1625–1643, 2012. 42

D. Liu, O. Gibaru, and W. Perruquetti. Error analysis of jacobi derivative estimators for noisy signals. *Numerical Algorithms*, 58(1) :53–83, 2011a. ISSN 1017-1398. 118

D-Y Liu, O. Gibaru, and W. Perruquetti. Differentiation by integration with jacobi polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(9) :3015 – 3032, 2011b. ISSN 0377-0427. 45

L. Ljung, editor. *System identification (2nd ed.) : Theory for the user*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999. ISBN 0-13-656695-2. 36, 110

L. Ljung. Identification for control : simple process models. In *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, volume 4, pages 4652–4657 vol.4, 2002a. 41

L. Ljung. Recursive identification algorithms. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 21(1) :57–68, 2002b. ISSN 0278-081X. 42

L. Ljung and T. Söderström. *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press series in signal processing, optimization, and control. MIT Press, 1985. 41, 42

H.-G. Maas. Dynamic photogrammetric calibration of industrial robots. In *in Proc. SPIE Videometrics V*, pages 106–112, 1997. 13

J.M. Martins, Z. Mohamed, M.O. Tokhi, J. Sa da Costa, and M.A. Botto. Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 150(4) :401–411, 2003. ISSN 1350-2379. 21

M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, 50(4) :439–467, 2009. ISSN 1017-1398. 119

M.W. Mehrez and A.A El-Badawy. Effect of the joint inertia on selection of under-actuated control algorithm for flexible-link manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 45(7) :967 – 980, 2010. ISSN 0094-114X. 22

M Mensler. *Analyse et étude comparative de méthodes didentification des systèmes à représentation continue. Développement dune boîte à outils logicielle*. PhD thesis, UHP - Université Henri Poincaré, Nancy 1, 1999. 37, 38, 39

S. Moberg, J. Ohr, and S. Gunnarsson. A benchmark problem for robust control of a multivariable nonlinear flexible manipulator. In *Proc. 17th IFAC World Congress*, pages 1206–1211, Seoul, Korea, July 2008. 61

R. Moheimani. *Mechatronic Systems 2004*. Number vol. 1 in Elsevier-IFAC publications. Elsevier Science & Technology Books, 2005. ISBN 9780080442631. 59

Abdouramane Moussa Ali, Cédric Join, and Frédéric Hamelin. Diagnostic des systèmes dynamiques linéaires sans modèle explicite. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 45(Spécial : Nouvelles tendances en automatique) :339–362, Jan 2011. 45

Bashir M.Y. Nouri. Friction identification in mechatronic systems. *{ISA} Transactions*, 43(2) :205 – 216, 2004. ISSN 0019-0578. 98

A. Olabi. *Amélioration de la précision des robots industriels pour des applications d'usinage à grande vitesse*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - CER de Lille, Novembre 2011. xiii, 2, 23, 132

A. Olabi, R. Béarée, O. Gibaru, and M. Damak. Feedrate planning for machining with industrial six-axis robots. *Control Engineering Practice*, 18(5) :471 – 482, 2010. ISSN 0967-0661. 132

A. Olabi, M. Damak, R. Béarée, O. Gibaru, and S. Leleu. Improving the accuracy of industrial robots by offline compensation of joints errors. In *Industrial Technology (ICIT), 2012 IEEE International Conference on*, pages 492–497, 2012. 22

H. Olsson, K-J. Astrom, C. Canudas de Wit, M. Gafvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of control*, 4 :176195, 1998. 33, 100, 104

M. Oueslati, O. Gibaru, R. Béarée, G. Moraru, and Damak. M. Modélisation et identification des défauts dans la chaine de transmission d'un axe de robot industriel usinant. Cluny, France, October 2010. Proceeding of the $6^{me} AssisesMachinesetUsinageGrandeVitesse$. 91

M. Oueslati, S. Thiery, O. Gibaru, R. Béarée, and G. Moraru. On algebraic approach for msd parametric estimation. In *Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation conference*, pages 83–91, Rome, Italie, September 2011. 61

M. Oueslati, R. Béarée, O. Gibaru, and G. Moraru. Improving the dynamic accuracy of elastic industrial robot joint by algebraic identification approach. In *Systems and Computer Science (ICSCS), 2012 1st International Conference on*, pages 1–6, 2012. 91, 117

J.G. Papastavridis. On jourdain's principle. *International Journal of Engineering Science*, 30(2) :135 – 140, 1992. ISSN 0020-7225. 20

E. Parzen. *Stochastic Processes*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. ISBN 9780898714418. 50

E. Pereira, J.R. Trapero, I.M. DÃaz, and V. Feliu. Adaptive input shaping for manoeuvring flexible structures using an algebraic identification technique. *Automatica*, 45(4) :1046 – 1051, 2009. ISSN 0005-1098. 45, 155

E. Pereira, J.R. Trapero, I.M Diaz, and V. Feliu. Algebraic identification of the first two natural frequencies of flexible-beam-like structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7) :2324 – 2335, 2011. ISSN 0888-3270. 154

E. Pereira, J.R. Trapero, I.M. Diaz, and V. Feliu. Adaptive input shaping for single-link flexible manipulators using an algebraic identification. *Control Engineering Practice*, 20(2) :138 – 147, 2012. ISSN 0967-0661. 45, 154, 156

W. Perruquetti, M. Mboup, R. Ushirobira, P. Fraisse, and V. Bonnet. An algebraic approach for human posture estimation in the sagittal plane using accelerometer noisy signal. In *51st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 7389–7394, Maui, Hawaii, Etats-Unis, Sep 2012. 45

A. Piersol and T. Paez. *Harris Shock and Vibration Handbook*. McGraw-Hill handbooks. Mcgraw-hill, 2009. ISBN 9780071633437. 21, 89

R. Pintelon and J. Schoukens. Measurement of frequency response functions using periodic excitations, corrupted by correlated input/output errors. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 50(6) :1753–1760, 2001. ISSN 0018-9456. 36

J. Piranda. *Vibrations en milieu industriel, mesures, surveillance et contrôle*, volume base documentaire : 42424210. Editions T.I., 2013. 21

G. Piras, W.L. Cleghorn, and J.K. Mills. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links. *Mechanism and Machine Theory*, 40(7) :849 – 862, 2005. ISSN 0094-114X. 21

A. Poty, P. Melchior, B. Orsoni, F. Levron, and A. Oustaloup. Zv and zvd shapers for explicit fractional derivative systems. In *Advanced Robotics, Proceedings of ICAR 2003., The 11th International Conference on*, pages 399–404, 2003. 135

C. Presse and M. Gautier. New criteria of exciting trajectories for robot identification. In *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, pages 907–912 vol.3, 1993. 110

S. Ramachandran, T. Nagarajan, and N. Siva Prasad. A finite element approach to the design and dynamic analysis of platform type robot manipulators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 10 (4) :335 – 350, 1992. ISSN 0168-874X. 21

G. P. Rao and H. Unbehauen. Identification of continuous-time systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 153(2) :185–220, 2006. ISSN 1350-2379. 37, 38

O. Reynolds. *The Sub-mechanics of the Universe*. Rede lectures / R. Rede. At the University Press, 1903. 31

S. Rezk, C. Join, S. El Asmi, M. Dogui, and M. Hédi Bedoui. Frequency Change-Point Detection in physiological Signals : an Algebraic Approach. *International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, 2(1) :456–468, 2008. 70

S. Riachy, M. Mboup, and J.P Richard. Multivariate numerical differentiation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6) :1069 – 1089, 2011. ISSN 0377-0427. 45

R. Riepl and H. Gattringer. Accurate high-speed robotics. Technical report, B & R Industrial Ethernet Award 2009, Austria, January 2009. 3

F. Rotella and P. Borne. *Théorie et pratique du calcul matriciel*. Méthodes et pratiques de l'ingénieur. Editions Technip, 1995. ISBN 9782710806752. 44

M. Ruderman, F. Hoffmann, and T. Bertram. Modeling and identification of elastic robot joints with hysteresis and backlash. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 56(10) :3840–3847, 2009. ISSN 0278-0046. 13

N. Sadati, M. Bagherpour, and R. Ghadami. Adaptive multi-model controller for robotic manipulators based on cmac neural networks. In *Industrial Technology, 2005. ICIT 2005. IEEE International Conference on*, pages 1012–1017, 2005. 163

P. Sanz. Robotics : Modeling, planning, and control (siciliano, b. et al ; 2009) [on the shelf]. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 16(4) :101–101, 2009. ISSN 1070-9932. 13

J. Schoukens, R. Pintelon, and H. Van Hamme. Identification of linear dynamic systems using piecewise constant excitations : Use, misuse and alternatives. *Automatica*, 30(7) :1153 – 1169, 1994. ISSN 0005-1098. 38

T. Söderström and K. Mahata. On instrumental variable and total least squares approaches for identification of noisy systems. *International Journal of Control*, 75(6) :381–389, 2002. 42

T.S. Söderstrom and P.G. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall International Series In Systems And Control Engineering. Prentice Hall, 1989. ISBN 9780138812362. 36

P.K. Sen and J. da Motta Singer. *Large Sample Methods in Statistics : An Introduction with Applications*. Chapman and Hall Texts in Statistical Science Series. Chapman & Hall, 1993. ISBN 9780412042218. 52

A.A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521544115. 19

B. Siciliano and O. Khatib. *Springer Handbook of Robotics*. Gale virtual reference library. Springer, 2008. ISBN 9783540239574. xiii, 14, 19, 20, 22

N.C. Singer and W.P. Seering. Preshaping command inputs to reduce system vibration. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 112 :76–82, 1990. 133

N.C. Singer and W.P. Seering. An extension of command shaping methods for controlling residual vibration using frequency sampling. In *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 800–805, 1992. 133

T. Singh and W.E Singhose. Input shaping/time delay control of maneuvering flexible structures. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 3, pages 1717–1731. IEEE, 2002. 134

W.E Singhose. *Command Generation for Flexible Systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997. 133

H. Sira-Ramirez and M Fliess. An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(02) :295–309, 2006. 45

C.A.M. Soares, J.A.C. Martins, H.C. Rodrigues, J.A.C. Ambrósio, C.A.B. Pina, C.M.M. Soares, E.B.R. Pereira, and J. Folgado. *III European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering : Book of Abstracts*. Springer, 2008. ISBN 9781402053702. 21

M. W. Spong. Modeling and control of elastic joint robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109, 1986. 21

M. W. Spong. Modeling and control of elastic joint robots. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme*, 109(4) :310–318, 1987. 21

M.W. Spong and S. Hutchinson. *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005. ISBN 9780471649908. 19

M.W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. Wiley, 1989. ISBN 9780471612438. 14, 20

R. Stribeck. *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager*. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 7. Julius Springer, 1903. 31

B. Subudhi and A.S. Morris. Dynamic modelling, simulation and control of a manipulator with flexible links and joints. *Robotics and Autonomous Systems*, 41(4) :257 – 270, 2002. ISSN 0921-8890. 21, 22, 60

L.M. Sweet and M.C. Good. Redefinition of the robot motion-control problem. *Control Systems Magazine, IEEE*, 5(3) :18–25, 1985. ISSN 0272-1708. 21

J. Swevers, C. Ganseman, D.B. Tukel, J. De Schutter, and H. Van Brussel. Optimal robot excitation and identification. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 13(5) :730–740, 1997. ISSN 1042-296X. 108, 110

J. Swevers, F. Al-Bender, C.G. Ganseman, and T. Projogo. An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(4) :675–686, 2000. ISSN 0018-9286. 97

R.J. Theodore and A. Ghosal. Comparison of the assumed modes and finite element models for flexible multilink manipulators. *I.J. Robotic Res.*, 14(2) :91–111, 1995. 21

S. Thiery. Modélisation et compensation de frottements dans un moteur linéaire. Technical report, Institut National Polytechnique de Grenoble, May 2005. xiii, 32

Z. Tiganj, M. Mboup, C. Pouzat, and L. Belkoura. An algebraic method for eye blink artifacts detection in single channel eeg recordings. In Selma Supek and Ana Suac, editors, *17th International Conference on Biomagnetism Advances in Biomagnetism Biomag2010*, volume 28 of *IFMBE Proceedings*, pages 175–178. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-12196-8. 45

Z. Tiganj, M. Mboup, S. Chevallier, and E. Kalunga. Online frequency band estimation and change-point detection. In *1st International Conference Systems and Computer Science*, Lille, France, August 2012. 70

P. Tomei. A simple pd controller for robots with elastic joints. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(10) :1208–1213, 1991. ISSN 0018-9286. 21

D.M. Tran. A presentation of kane's method for formulating equations of motion. *La Recherche Aérospatiale*, 3 :121, 1991. ISSN 0379-380X. 23

J.R. Trapero, H. Sira-Ramirez, and V. Feliu. A fast on-line frequency estimator of lightly damped vibrations in flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 307 :365–378, 2007. 70, 118

T-D. Tuttle. *Creating time-optimal commands for linear systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997. 126

H. Ueno, Y. Xu, and T. Yoshida. Modeling and control strategy of a 3-d flexible space robot. In *Intelligent Robots and Systems '91. 'Intelligence for Mechanical Systems, Proceedings IROS '91. IEEE/RSJ International Workshop on*, pages 978–983 vol.2, 1991. 22

R. Ushirobira, W. Perruquetti, M. Mboup, and M. Fliess. Algebraic parameter estimation of a biased sinusoidal waveform signal from noisy data. In *Sysid 2012, 16th IFAC Symposium on System Identification*, Brussels, Belgique, 2012. 47

W. Verdonck and J. Swevers. Improving the dynamic accuracy of industrial robots by trajectory pre-compensation. In *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3423–3428, 2002. 3, 4

J. Villagra, B. D'Andrea Novel, S. Choi, M. Fliess, and H. Mounier. Robust stop-and-go control strategy : an algebraic approach for nonlinear estimation and control. *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, 7(3/4) :270–291, 2009. 45

B. Wahlberg, H. Hjalmarsson, and Petre Stoica. On optimal input signal design for frequency response estimation. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 302–307, 2010. 61

B. Wahlberg, H. Hjalmarsson, and P. Stoica. On the performance of optimal input signals for frequency response estimation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(3) :766–771, 2012. ISSN 0018-9286. 61

J. Wang, H. Zhang, and T. Fuhlbrigge. Improving machining accuracy with robot deformation compensation. In *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 3826–3831, 2009. 4

T. Wongratanaphisan and M. Chew. Gravity compensation of spatial two-dof serial manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 19(7) :329–347, 2002. ISSN 1097-4563. 80

M. Yazdani, G. Gamble, G. Henderson, and R. Hecht-Nielsen. A simple control policy for achieving minimum jerk trajectories. *Neural Networks*, 27(0) :74 – 80, 2012. ISSN 0893-6080. 128

T. Yoshikawa. *Foundations of Robotics : Analysis and Control*. MIT Press, 1990. ISBN 9780262240284. 22

V. Zanotto, A. Gasparetto, A. Lanzutti, P. Boscariol, and R. Vidoni. Experimental validation of minimum time-jerk algorithms for industrial robots. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, 64(2) : 197–219, 2011. ISSN 0921-0296. 141

G. Zheng, D. Boutat, T. Floquet, and J.-P Barbot. Secure data transmission based on multi-input multi-output delayed chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(07) : 2063–2072, 2008. 45

Contribution à la modélisation dynamique, l'identification et la synthèse de lois de commande adaptées aux axes flexibles d'un robot industriel

RESUME : Les robots industriels représentent un moyen de production sophistiqué pour l'industrie manufacturière d'aujourd'hui. Ces manipulateurs sont plus agiles, plus flexibles et moins coûteux que les machines-outils spécialisées. L'exploitation de ces avantages fait l'objet d'une demande croissante de l'industrie. La dynamique de ces manipulateurs est soumise à de nombreuses sources d'imprécision. En effet les défauts de la chaîne de transmission, ou encore les éléments de liaisons peuvent être le siège de déformations et de vibrations dégradant sensiblement leur précision. Ces phénomènes physiques sont d'autant plus difficiles à compenser que seul un sous ensemble des états du système est mesuré par les codeurs moteurs. La structure de commande industrielle actuelle d'un robot n'agit donc pas directement sur ces phénomènes. Il est nécessaire alors de progresser sur le front de l'amélioration de la précision par l'adaptation de la commande à ces nouvelles exigences. Un état de l'art met en évidence un manque de travaux qui traitent de l'élaboration d'anticipations adaptées aux axes d'un robot et intégrant les phénomènes de déformation. En outre, la planification de trajectoire n'est classiquement pas remise en cause et peu évoquée. Elle représente pourtant un moyen d'action éprouvé afin d'améliorer les performances dynamiques en suivi de profil. L'approche proposée dans ce mémoire se veut une alternative à ces méthodes. Elle est basée sur une exploitation d'un modèle dynamique représentatif et détaillé. Il intègre les principaux phénomènes physiques mis en évidence tels que les effets de la gravité, les systèmes mécaniques de compensation, les forces de frottement et la flexibilité articulaire. Cette modélisation associée à des méthodes d'identification expérimentale est exploitée afin de déduire une structure de commande. Elle permet la réduction des déformations élastiques et des vibrations par une action sur la précommande et sur la loi de mouvement adaptée. Ainsi, nous introduisons une méthode d'estimation non asymptotique appliquée en robotique, afin d'estimer rapidement les paramètres vibratoires de ce dernier et contribue à une réactualisation des modèles exploités. Des résultats expérimentaux montrent que cette méthodologie mène à une amélioration des performances de positionnement par rapport à la commande industrielle.

Mots clés : Robot poly-articulé, Précision, Modélisation dynamique, Estimation non asymptotique, Identification expérimentale, Flexibilité, Planification de trajectoire, Contrôle des vibrations, Pré-compensation.

Contribution to dynamic modeling, identification and synthesis of control laws for flexible industrial robot

ABSTRACT : Anthropomorphic robots are widely used in many fields of industry to carry out repetitive tasks such as pick and place, welding, assembling, and so on. Due to their flexibility and ability to perform complex tasks in a large workspace, industrial robots are finding their way to realize continuous operations. Then, high level pose accuracy is required to achieve a good path tracking. Unfortunately these systems were designed to have a good repeatability but not a good accuracy. The dynamics of these manipulators is subject to many sources of inaccuracy. Indeed, friction, kinematic errors and joint flexibilities may be the seat of deformation and vibration which degrade the position performance. These physical phenomena are even more difficult to manage even only a subset of states of the system is measured by motor encoders. Hence, the structure of current industrial control does not act directly on these phenomena. Nevertheless, there is a growing interest from industry for an improved path tracking accuracy with standard robots controllers. A state of the art highlights a lack of works considering the development of expectations adapted to the axes of an industrial robot and incorporating deformation phenomena. The approach proposed in this PhD. Thesis is meant to be an alternative to such techniques by proposing a methodology based on exploitation of detailed physical modeling and associated to experimental identification methods. This model incorporates the main highlighted physical phenomena. It is then exploited to obtain adapted control structures and tuning methods allowing enhancing the system's performance. It is integrated in our trajectory planner in order to realize a compensation scheme of joint errors. Thus, we introduce a new non-asymptotic estimation method applied in robotics, to on-line estimate the vibration parameters and to update operated models. Experimental results show that the proposed methodology leads to an improved motion control of the point-tool.

Keywords : Industrial robot, Path tracking accuracy, Path planning, Non-asymptotic estimation, System identification, Joint elasticity, Vibration control, Trajectory pre compensation.

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY