



# Accélération des calculs pour la simulation du laminage à pas de pèlerin en utilisant la méthode multimallages

Koffi Woloe Kpodzo

## ► To cite this version:

Koffi Woloe Kpodzo. Accélération des calculs pour la simulation du laminage à pas de pèlerin en utilisant la méthode multimallages. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2014. Français. NNT : 2014ENMP0007 . pastel-01038003

**HAL Id: pastel-01038003**

**<https://pastel.hal.science/pastel-01038003>**

Submitted on 23 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale n° 364: Sciences Fondamentales et Appliquées

## **Doctorat ParisTech**

### **T H È S E**

**pour obtenir le grade de docteur délivré par**

**l'École nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité “Mécanique Numérique ”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Koffi Woloe KPODZO**

le 18 Mars 2014

**Accélération des calculs pour la simulation du laminage à pas de pèlerin en utilisant la méthode multimaillages**

Directeur de thèse : **Lionel FOURMENT**

Co-encadrement de la thèse : **Pierre MONTMITONNET**

#### **Jury**

**M. Hachmi BEN DHIA**, Professeur, Ecole Centrale de Paris  
**M. Laurent STAINIER**, Professeur, Ecole Centrale de Nantes  
**M. Jean-Philippe PONTHOT**, Professeur, Université de Liège  
**M. Alexis GAILLAC**, Docteur, Areva-Cezus  
**M. Pierre MONTMITONNET**, Directeur de Recherche, CEMEF  
**M. Lionel FOURMENT**, Chargé de Recherche (HDR), CEMEF

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à mes directeurs de thèse Lionel Fourment et Pierre Montmitonnet pour m'avoir guidé et encadré avec beaucoup de compétence et de patience durant ces trois années.

Je tiens à remercier Areva-Cezus pour avoir financé mes travaux de thèse. Mes remerciements à Alexis Gaillac, Kader Niang et Céline Ly pour l'accueil et l'encadrement industriel.

Je voudrais remercier Pr. Hachmi Ben Dhia pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Mes remerciements vont également aux autres membres du jury, qui ont bien voulu consacrer du temps à la lecture et à l'examen de ce travail : Pr. Philippe Ponthot, Pr. Laurent Stainier et Dr. Alexis Gaillac.

Mes remerciements vont à Yvan Chastel, puis à Elisabeth Massoni, pour m'avoir accueilli au sein du CEMEF.

Je tiens à remercier Thierry Coupeze, Hugues Digonnet, Luisa Silva, Elie Hachem, Pierre Olivier Bouchard, Katia Mocellin ainsi que tous les autres chercheurs des groupes CIM et M3P.

Un remerciement à tout le personnel administratif et au service informatique du CEMEF : Patrick Coels, Françoise Trucas, Marie-Françoise Guenegan, Florence Morcamp, Carole Torrin, Emmanuel Levrat, ...

Merci à l'équipe de développement de Transvalor, et tout particulièrement à Etienne Perchat pour son aide et son support précieux.

Sans oublier tous les collègues et amis : Ugo, Fadi, Rebecca, Ana-Laura, Guillaume, Son, Frédéric, ...

Pour terminer je souhaite remercier ma famille pour son soutien permanent et sans faille pendant toutes ces années.

*A Pierrette et Solange*



# TABLE DES MATIERES

---

INTRODUCTION GENERALE.....	6
----------------------------	---

## **CHAPITRE 1** LE PROBLEME THERMOMECHANIQUE DE MISE EN FORME

<b>I.1. PROBLEME MECANIQUE .....</b>	<b>11</b>
I.1.1. Equations générales.....	11
I.1.2. Les conditions aux limites du problème.....	11
I.1.3. Formulation élastoplastique incrémentale.....	12
I.1.4. Lois de frottement .....	16
I.1.5. Formulation faible du problème mécanique .....	17
I.1.6. Discrétisation éléments finis et résolution .....	17
I.1.7. Equations de contact .....	19
I.1.8. Résolution numérique du problème mécanique global .....	21
<b>I.2. PROBLEME THERMIQUE .....</b>	<b>25</b>
I.2.1. Equations de la chaleur .....	25
I.2.2. Conditions aux limites .....	25
I.2.3. Formulation faible du problème thermique.....	26
I.2.4. Discrétisation spatiale .....	27
I.2.5. Discrétisation temporelle .....	27
<b>I.3. COUPLAGE THERMOMECHANIQUE INCREMENTAL .....</b>	<b>28</b>

## **CHAPITRE 2** SIMULATION NUMERIQUE DU LAMINAGE A PAS DE PELERIN

<b>II.1. GENERALITE SUR LA SIMULATION NUMERIQUE DU LAMINAGE A PAS DE PELERIN .....</b>	<b>31</b>
II.1.1. Modèles 2D.....	31
II.1.2. Modèles 3D.....	32
<b>II.2. SIMULATION NUMERIQUE DU LAMINAGE A PAS DE PELERIN AVEC FORGE®.....</b>	<b>40</b>
II.2.1. Mise en place de la simulation.....	40
II.2.2. Exemple de simulation .....	43
II.2.3. Améliorations de la qualité des résultats .....	48
II.2.4. Apports du calcul parallèle .....	55
II.2.5. Synthèse.....	57

## **CHAPITRE 3 METHODE MULTIMAILLAGES MULTI PHYSIQUES (MMP)**

<b>III.1. GENERALITE SUR LES METHODES D'ACCELERATION DE CALCUL .....</b>	<b>59</b>
<b>III.2. METHODE MULTIMAILLAGES MULTIPHYSIQUES PARALLELE (MMP) DANS FORGE® ....</b>	<b>65</b>
<b>III.3. GENERATION DU MAILLAGE MECANIQUE .....</b>	<b>67</b>
III.3.1. Définition de la zone de vraie déformation.....	67
III.3.2. Algorithme de déraffinement local de maillage.....	68
III.3.3. Aspects parallèle du déraffinement de maillage .....	70
<b>III.4. TRANSFERT DE CHAMPS.....</b>	<b>72</b>
III.4.1. Transfert de champs P1.....	72
III.4.2. Transfert de champs P0.....	74
III.4.3. Transport sans relocalisation.....	75
III.4.4. Aspects parallèles du transfert de champs .....	75
<b>III.5. QUELQUES APPLICATIONS INDUSTRIELLES .....</b>	<b>77</b>
III.5.1. Procédés discontinus.....	77
III.5.2. Procédés continus.....	79

## **CHAPITRE 4 APPLICATION DE LA METHODE MMP AU LAMINAGE A PAS DE PELERIN**

<b>IV.1. CONSTRUCTION DU MAILLAGE MECANIQUE .....</b>	<b>83</b>
IV.1.1. Notion de métrique.....	84
IV.1.2. Construction de la métrique initiale .....	84
IV.1.3. Calcul de la métrique de déraffinement .....	86
<b>IV.2. PRECISION DE LA VERSION INITIALE DE LA METHODE.....</b>	<b>88</b>
IV.2.1. Variables instantanées .....	88
IV.2.2. Variables d'histoire .....	89
IV.2.3. Origines des perturbations sur les contraintes.....	91
<b>IV.3. AMELIORATION DE LA PRECISION DE LA METHODE.....</b>	<b>95</b>
IV.3.1. Stabilisation de la pression.....	95
IV.3.2. Réactualisation locale des variables d'état: transport non incrémental.....	96
IV.3.3. Réactualisation des variables d'état sur le maillage thermique.....	99
IV.3.4. Amélioration de l'opérateur de transport P0 : transport par recouvrement SPR.....	101
IV.3.4.1. Le recouvrement SPR .....	101
IV.3.4.2. Etude du recouvrement sur des fonctions analytiques .....	106
IV.3.4.3. Interpolation des champs P1 sur le nouveau maillage .....	107
IV.3.4.4. Application à la méthode MMP .....	110
<b>IV.4. PERFORMANCES DE LA METHODE MMP.....</b>	<b>113</b>
IV.4.1. Grandeurs d'analyse.....	113
IV.4.2. Etude des accélérations .....	114
IV.4.2.1. Cas du maillage grossier .....	115
IV.4.2.2. Etude en fonction du nombre de nœuds .....	118
IV.4.2.3. Etude en calcul parallèle .....	118
IV.4.2.4. Accélérations globales .....	120
<b>IV.5. SYNTHESE .....</b>	<b>123</b>

<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>126</b>
---	------------

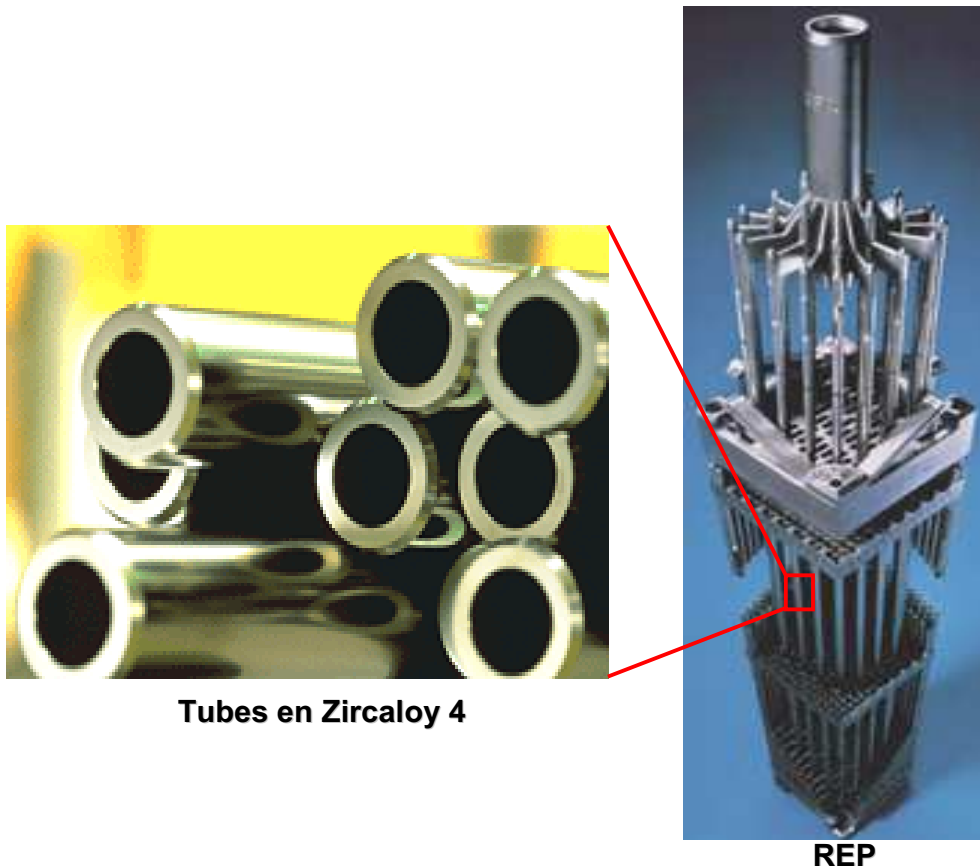
<b>ANNEXES .....</b>	<b>130</b>
----------------------	------------

<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>142</b>
----------------------------	------------

## Introduction générale

---

Le tube de gainage est un élément très important de l'assemblage combustible d'un réacteur à eau pressurisé (REP) de conception française ([Figure 1](#)). Il est en alliage de Zircaloy 4 et contient un empilement de pastilles de dioxyde d'uranium, le tout obturé par soudage de bouchons et pressurisé à l'hélium.



*Figure 1. Assemblage combustible d'un réacteur REP*

Les tubes de gainage doivent résister au fluage en dépit de la température et de la pression des gaz de fission. Il leur faut aussi résister aux produits de fission corrosifs (iode). Cela conduit à rechercher des textures métallurgiques bien précises. Après l'élaboration de l'alliage de Zircaloy 4 par refusions sous vide, le métal est forgé à chaud en barres qui sont usinées, puis filées à chaud. Pour parvenir aux dimensions finales, on passe ensuite par quatre opérations successives de laminage à pas de pèlerin, chacune sur une machine moins puissante mais plus précise que la précédente. Entre chaque opération on effectue des recuits de recristallisation et des opérations de nettoyage des surfaces interne et externe. Après la dernière passe, on effectue un traitement thermique adapté aux caractéristiques demandées par le client, suivi des opérations de finition de surface et des contrôles finaux. La [Figure 2](#) illustre les différentes étapes du processus de fabrication.

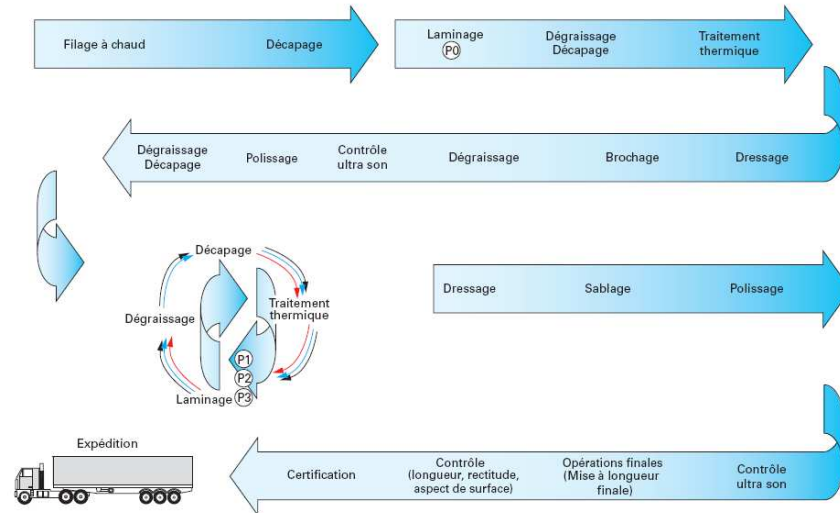


Figure 2. Schéma des différentes étapes du processus de fabrication des tubes de gainage

Le laminage à pas de pèlerin est un procédé de mise en forme à froid de tube durant lequel ce dernier est simultanément réduit en diamètre et en épaisseur. Il tient son nom de l'habitude de certains pèlerins de se rendre sur leur lieu de pèlerinage en faisant trois pas en avant puis deux en arrière. Dans ce procédé, la mise en forme est produite par une déformation plastique du tube ébauché chaussé sur un mandrin lubrifié spatialement fixe qui va imposer la géométrie de la surface interne. Deux matrices cylindriques à gorges viennent alors rouler alternativement (aller et retour) sur l'ensemble (tube et mandrin) de façon à définir la géométrie externe du tube. Entre chaque aller et retour des matrices, le tube est tourné d'un certain angle et avancé de valeurs nominales.

Le dispositif du laminage à pas de pèlerin (Figure 3) est constitué de deux matrices munies de cannelure à gorges profilées qui assurent la réduction de l'épaisseur et du diamètre de l'ébauche engendrant ainsi un allongement du tube. La zone de course des matrices est constituée d'une zone de réduction où se fait l'essentiel de la déformation, et d'une zone de calibrage (Figure 4). Le tube est chaussé sur un mandrin axisymétrique qui assure le calibrage du diamètre intérieur du tube.

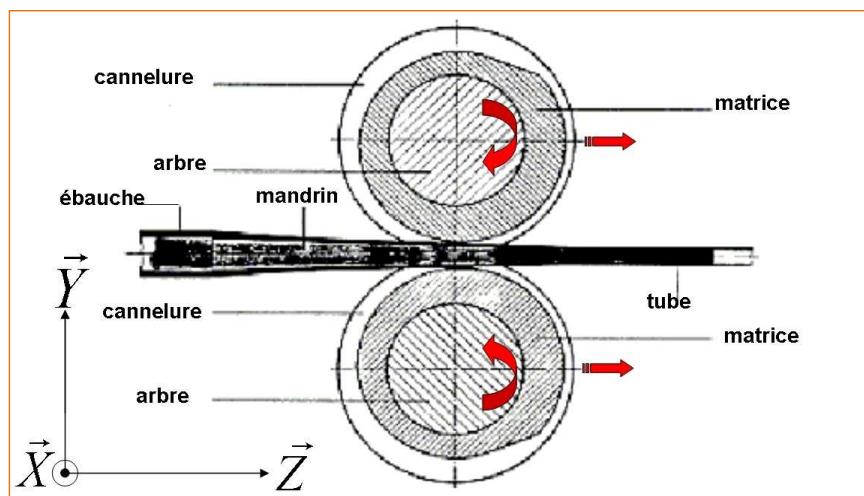


Figure 3. Dispositif du laminage à pas de pèlerin

L'extrémité amont du tube est maintenue par une pince, l'autre extrémité étant guidée par un mors. Le tube en cours de déformation est appelé « *transition* ». On notera que les stations (sections du tube perpendiculaires à l'axe de celui-ci) de matrices et du mandrin sont conjuguées, c'est-à-dire qu'une station du mandrin est en vis-à-vis d'une même station de la matrice supérieure et de la matrice inférieure tout le long du processus de déformation.

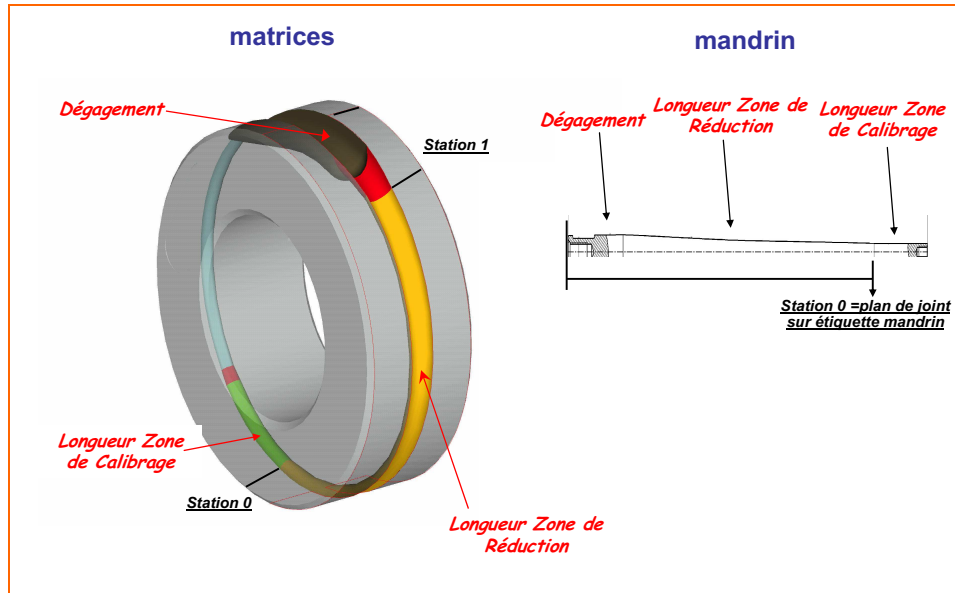


Figure 4. Nomenclature matrice et mandrin

Les matrices sont montées sur une cage qui est elle-même liée à un pignon qui engrène sur une crémaillère fixe par rapport au bâti du laminoir. Le mouvement de translation de la cage assure la rotation des matrices (Figure 5).

Un mouvement aller-retour des matrices constitue ce qu'on appelle « *coup de cage* ».

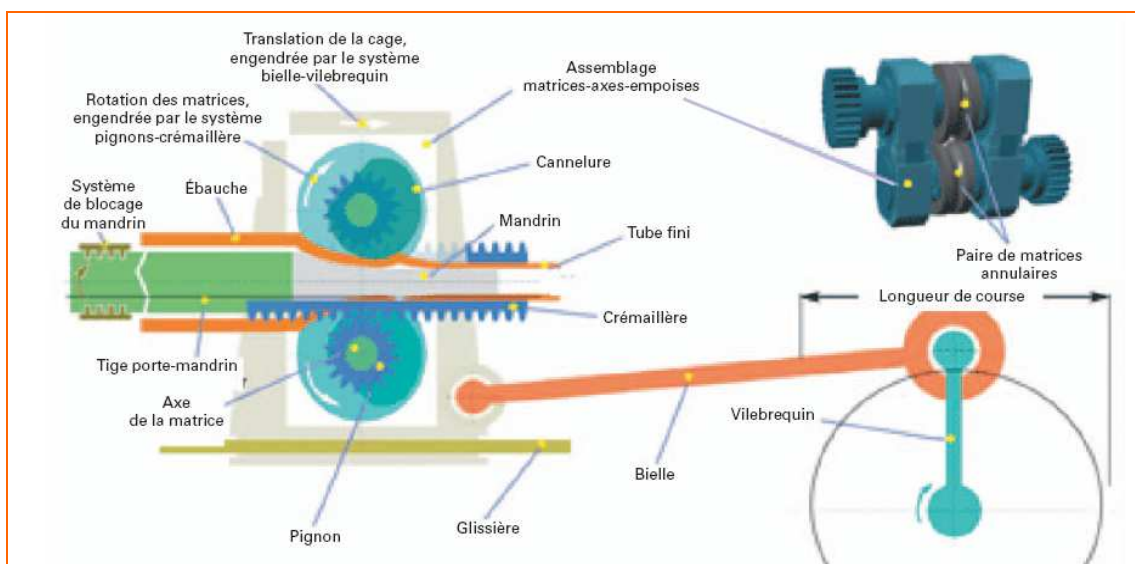


Figure 5. Schéma d'un laminoir à pas de pèlerin

Entre chaque aller et retour des matrices, le tube est tourné et avancé de valeurs nominales. Il est important de souligner qu'un point matériel qui va passer de la zone ébauche à la fin de la

zone de réduction va subir plusieurs dizaines de petites déformations (quelques pourcent) : la déformation est donc incrémentale.

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse à la simulation numérique de la dernière passe (P3) au cours de laquelle il peut apparaître des défauts de surface en faible nombre, mais qui peuvent avoir des conséquences critiques durant l'utilisation du tube au sein du réacteur. Les travaux déjà réalisés [Montmitonnet *et al.* 2002], [Lodej *et al.* 2006] sur le sujet révèlent des temps de calculs très élevés sur des maillages relativement grossiers ; par exemple la simulation d'un coup de cage avec un maillage de 8 000 nœuds, nécessite 8 heures de calcul sur 4 processeurs. Ceci constitue un grand frein du point de vue industriel où l'on a de plus en plus besoin d'effectuer des calculs précis sur des maillages plus fins.

L'objectif principal de cette thèse est donc la réduction du temps de calcul ; pour y parvenir, on s'est orienté vers la méthode Multimallages MultiPhysiques (MMP) développée au cours de la thèse de M. Ramadan [Ramadan 2010]. Cette méthode tire profit de la localisation de la déformation du procédé pour réaliser le calcul mécanique sur un maillage localement raffiné; alors qu'un maillage uniformément raffiné est utilisé pour le calcul thermique. Le calcul mécanique étant le plus coûteux en temps CPU, la réduction du nombre de nœuds permet de diminuer les temps de calculs. Le maillage mécanique étant modifié quasiment à tous les pas de temps, la conservation des variables d'état (contraintes, déformations,...) issues du calcul mécanique est assurée par un maillage de stockage aussi fin que la zone raffinée du maillage mécanique.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la simulation du procédé avec la méthode «*monomallage*» standard. L'objectif de cette première analyse est d'étudier les différentes pistes possibles d'amélioration de la précision des calculs, et de dresser ensuite le bilan en termes de temps de calcul nécessaires pour pouvoir atteindre une précision acceptable. La deuxième partie est consacrée à l'accélération des calculs en utilisant la méthode MMP. Pour appliquer efficacement cette méthode au laminage à pas de pèlerin, deux points clés sont à prendre en compte :

(a) La génération du maillage mécanique

La géométrie complexe du domaine de calcul (tube cylindrique creux profilé) nécessite le développement d'une technique particulière de déraffinement de maillage, afin de garantir un maillage mécanique optimal en termes de nombre de nœuds et de qualité de maillages.

(b) Le transfert de champ entre les différents maillages

Pour des lois de comportement de type viscoplastique comme dans [Ramadan 2010], l'impact des opérateurs de transport est faible puisque la plupart des variables d'état (notamment les contraintes), sont instantanées. Par contre, dans le cas du laminage à pas de pèlerin on utilise une loi de comportement élastoplastique, le calcul mécanique est fortement dépendant de variables comme le tenseur des contraintes et la déformation. L'influence des opérateurs de transport est alors très importante; ce qui impose l'utilisation d'opérateurs plus précis et plus robustes.

---

# I

## **L**e problème thermomécanique de mise en forme résolue dans Forge®

Dans cette partie, proposons une brève description de la formulation éléments finis du problème thermomécanique de mise en forme utilisée dans le code Forge®. Dans le cadre de cette thèse, nous nous concentrons essentiellement sur le cas de la mise en forme à froid, où une formulation élastoplastique est généralement utilisée. Pour les autres types de formulation, notamment celles utilisées pour la mise en forme à chaud, le lecteur pourra se référer aux travaux de [\[Ramadan 2010\]](#).

---

## **SOMMAIRE**

<b>I.1. PROBLEME MECANIQUE.....</b>	<b>11</b>
I.1.1. Equations générales.....	11
I.1.2. Les conditions aux limites du problème.....	11
I.1.3. Formulation élastoplastique incrémentale .....	12
I.1.4. Lois de frottement .....	16
I.1.5. Formulation faible du problème mécanique.....	17
I.1.6. Discrétisation éléments finis et résolution.....	17
I.1.7. Equations de contact.....	19
I.1.8. Résolution numérique du problème mécanique global .....	21
<b>I.2. PROBLEME THERMIQUE.....</b>	<b>25</b>
I.2.1. Equations de la chaleur.....	25
I.2.2. Conditions aux limites.....	25
I.2.3. Formulation faible du problème thermique .....	26
I.2.4. Discrétisation spatiale.....	27
I.2.5. Discrétisation temporelle.....	27
<b>I.3. COUPLAGE THERMOMECHANIQUE INCREMENTAL .....</b>	<b>28</b>

## I.1. Problème mécanique

### I.1.1. Equations générales

A chaque instant  $t$ , l'équilibre mécanique du domaine  $\Omega_t$  en cours de déformation est donné par l'équation suivante:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{g} = \rho \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{I.1})$$

Où  $\boldsymbol{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $\boldsymbol{\gamma}$  le vecteur accélération et  $\mathbf{g}$  de pesanteur.

Pour un grand nombre de procédés de mise en forme (dont ceux qui seront étudiés dans le cadre de cette thèse), l'inertie et l'action de la pesanteur sont négligeables; ce qui ramène l'équation d'équilibre mécanique à la forme simplifiée suivante.

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (\text{I.2})$$

La conservation de la masse du matériau, à tout instant  $t$ , s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{I.3})$$

Avec  $\mathbf{v}$  le champ de vitesse en tout point du domaine. Cette équation peut se réduire à l'équation suivante, pour les matériaux élastoplastiques à plasticité incompressible :

$$\text{div}(\mathbf{v}) = -\frac{\dot{p}}{\chi} \quad (\text{I.4})$$

Où  $\chi = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  est le module de compressibilité élastique du matériau,  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de poisson du matériau.  $\dot{p}$  est la dérivée temporelle de la pression hydrostatique.

### I.1.2. Les conditions aux limites du problème

Soit  $\Omega$  le volume physique occupé par la matière en cours de forgeage, on désigne par  $\partial\Omega$  la frontière de ce volume. Cette frontière peut être décomposée en deux parties disjointes (Figure I-1):

$$\partial\Omega = \partial\Omega_L \cup \partial\Omega_C \quad (\text{I.5})$$

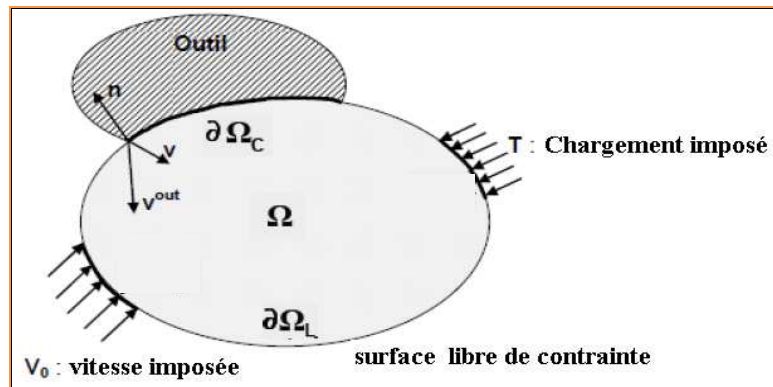


Figure I-1. Conditions aux limites du problème mécanique



$\partial\Omega_L$  est la frontière libre ; sur cette partie la pièce est libre de toute contrainte ce qui se traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\text{I.6})$$

$\partial\Omega_C$  est la frontière en contact avec les outils, elle est sujette à deux types de conditions aux limites :

- Une condition de non pénétration de l'outil par la pièce, donnée par les équations de Signorini qui s'écrivent comme suit

$$\begin{cases} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{out}) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{out}) \cdot \mathbf{n}] \sigma_n = 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Avec  $\mathbf{u}_{out}$  le déplacement de l'outil,  $\mathbf{u}$  celui de la pièce,  $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$  la pression de contact, et  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à l'outil.

- Une condition de frottement entre la pièce et l'outil donnée à travers la scission de frottement définie par :

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) - (\sigma_n) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{I.8})$$

### I.1.3. Formulation élastoplastique incrémentale

#### I.1.3.1. Evolution temporelle du domaine

Lors de la mise en forme des matériaux, le domaine en déformation évolue généralement dans le temps et il existe plusieurs approches pour décrire cette évolution. Dans Forge®, la formulation utilisée est de type lagrangien réactualisé. Le temps total est ainsi divisé en plusieurs incréments  $[t_i, t_{i+1} + \Delta t]$ , et pour chaque incrément, la configuration  $\Omega_{t+\Delta t}$  finale est calculée en prenant la configuration  $\Omega_t$  comme configuration de référence. On utilise un schéma implicite en temps, ce qui signifie que les inconnues  $(\mathbf{v}, p)$  du problème mécanique sont calculées sur la configuration  $\Omega_{t+\Delta t}$ . L'évolution du domaine au cours du temps est donnée par l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}^t}{dt} = \mathbf{v}^{t+\Delta t}(\mathbf{x}^t) \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}^0 \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Pour des raisons de simplicité de notation on pose  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}(\mathbf{x}^t) = \mathbf{v}^{t+\Delta t}$ . En supposant la position  $\mathbf{x}^t$  connue, l'intégration de l'équation (I.9) permet de déterminer la position  $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$ . Dans Forge® on dispose soit du schéma d'Euler Explicite :

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \mathbf{v}^{t+\Delta t} \Delta t \quad (\text{I.10})$$

Soit du schéma de Runge-Kutta 2, où on calcule d'abord une position  $\mathbf{x}^{t+\Delta t/2}$  intermédiaire à l'instant  $t+\Delta t/2$  par un schéma d'Euler explicite exprimé comme suit:

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t/2} = \mathbf{x}^t + \mathbf{v}^{t+\Delta t/2}(\mathbf{x}^t) \Delta t / 2 \quad (\text{I.11})$$

Une fois que cette actualisation est effectuée, la vitesse  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}(\mathbf{x}^{t+\Delta t/2})$  est calculée sur cette configuration intermédiaire et on obtient la nouvelle configuration à l'instant  $t + \Delta t$  à travers :

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^{t+\Delta t/2} + \mathbf{v}^{t+\Delta t}(\mathbf{x}^{t+\Delta t/2}) \Delta t \quad (\text{I.12})$$

### I.1.3.2. Loi élastoplastique incrémentale

La loi élastoplastique permet de modéliser généralement la rhéologie d'un matériau à froid. Avant tout, commençons par une définition de certaines grandeurs physiques utilisées dans la suite de cette section :

Le tenseur des contraintes de Cauchy se décompose en une partie déviatorique  $\mathbf{s}$  et en une partie sphérique  $p\mathbf{I}_d$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} - p\mathbf{I}_d \quad (\text{I.13})$$

$\mathbf{I}_d$  est le tenseur identité et  $p$  la pression hydrostatique définie par :

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{I.14})$$

- Le tenseur des vitesses de déformation s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (\text{I.15})$$

De la même façon que  $\boldsymbol{\sigma}$ , on a une décomposition de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{I}_d \quad (\text{I.16})$$

Des représentations unidimensionnelles de la contrainte et de la déformation sont données par :

- La contrainte équivalente de Von Misès :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s} : \mathbf{s})} \quad (\text{I.17})$$

- La vitesse de déformation généralisée :

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{Pl} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{Pl})} \quad (\text{I.18})$$

Avec  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{Pl}$  le tenseur des vitesses de déformation plastique.

- La déformation généralisée :

$$\bar{\epsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}} \, dt \quad (\text{I.19})$$

Le comportement élastoplastique peut être résumé de la manière suivante :

Tant que la norme du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  est inférieure à une contrainte seuil  $\sigma_0$  (contrainte d'écoulement), le matériau a un comportement purement élastique c'est-à-dire que les déformations subies restent réversibles. Dans ce cas la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par la loi de Hooke; pour un matériau isotrope à élasticité linéaire cette loi s'écrit:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \lambda\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el})\mathbf{I}_d \quad (\text{I.20})$$

Où  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$  est la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}$  est la partie élastique du tenseur des vitesses de déformation,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau donnés par :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{I.21})$$

Dès que la valeur seuil de contrainte  $\sigma_0$  est atteinte, la déformation est élastoplastique.:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (\text{I.22})$$

La partie élastique est calculée par la loi de Hooke présentée plus haut alors que la partie plastique est déterminée à travers le critère de plasticité auquel le matériau obéit.

*Critère de plasticité :*

Le critère de plasticité est défini à l'aide d'une fonction de charge  $f$ . Pour un matériau isotrope et écrouissable, cette fonction fait intervenir le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$  :

$$\begin{cases} f(\bar{\sigma}, \sigma_0) < 0 & \text{Comportement élastique} \\ f(\bar{\sigma}, \sigma_0) = 0 & \text{Comportement élastoplastique} \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons essentiellement au critère de von Mises, basé sur le deuxième invariant du tenseur des contraintes. Pour ce critère, la fonction de charge et la vitesse de déformation plastique s'écrivent :

$$\begin{cases} f(\bar{\sigma}, \sigma_0) = \frac{\bar{\sigma}^2 - \sigma_0^2}{3} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

***Formulation élastoplastique incrémentale:***

Dans la suite, l'élastoplasticité est traitée à l'aide d'une formulation incrémentale [Bellet *et al.* 1998], [Aliaga 2000] qui est généralement la mieux adaptée dans un formalisme de type Lagrangien réactualisé. Le résumé des équations élastoplastique à l'instant  $t$  s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{p}^t = -\frac{\text{tr}(\dot{\mathbf{e}}^t)}{\chi} \\ \dot{\mathbf{e}}^t = (\dot{\mathbf{e}}^{el})^t + (\dot{\mathbf{e}}^{pl})^t \\ (\dot{\mathbf{e}}^{el})^t = \frac{(\dot{\mathbf{s}}^J)^t}{2\mu} + \frac{2\nu-1}{E} \dot{p}^t \mathbf{I}_d \\ (\dot{\mathbf{e}}^{pl})^t = (\dot{\lambda}^{pl})^t \mathbf{s}^t, \quad (\dot{\lambda}^{pl})^t = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\mathbf{e}}}^t}{\sigma_0^t} \\ f(\bar{\sigma}^t, \sigma_0^t) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Avec  $\dot{p}$  la dérivée temporelle de la pression hydrostatique et  $\dot{\lambda}^{pl}$  le multiplicateur plastique. On souhaite vérifier l'équation (I.25) à  $t+\Delta t$  avec :

$$\begin{cases} p^{t+\Delta t} = p^t + \dot{p}^{t+\Delta t} \Delta t \\ \mathbf{e}^{t+\Delta t} = \mathbf{e}^t + \dot{\mathbf{e}}^{t+\Delta t} \Delta t \\ \mathbf{s}^{t+\Delta t} = \mathbf{s}^t + \dot{\mathbf{s}}^{t+\Delta t} \Delta t \\ \bar{\mathbf{e}}^{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{e}}^t + \dot{\bar{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t} \Delta t \\ \sigma_0^{t+\Delta t} = \sigma_0(\bar{\mathbf{e}}^{t+\Delta t}) \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

En combinant les équations (I.25) et (I.26), on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^{t+\Delta t} = \frac{2\mu \dot{\mathbf{e}}^{t+\Delta t} \Delta t + \mathbf{s}^t}{1 + 2\mu (\dot{\lambda}_t^{pl})^{t+\Delta t} \Delta t} \\ \mathbf{s}^{t+\Delta t} : \mathbf{s}^{t+\Delta t} - \frac{3}{2} \sigma_0^2(\bar{\mathbf{e}}^{t+\Delta t}) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

Le système d'équation (I.27) est résolu à l'aide de l'algorithme de retour radial [Bellet *et al.* 1998], [Aliaga 2000] qui comprend deux étapes :

### La prédiction

On suppose que la déformation est purement élastique ( $(\dot{\lambda}_t^{pl})^{t+\Delta t} = 0$ ), ce qui permet de calculer un déviateur de contraintes de prédiction :

$$(\mathbf{s}^p)^{t+\Delta t} = \mathbf{s}^t + 2\mu \dot{\mathbf{e}}^{t+\Delta t} \Delta t \quad (\text{I.28})$$

Posons  $(\bar{\sigma}^p)^{t+\Delta t} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s}^p)^{t+\Delta t} : (\mathbf{s}^p)^{t+\Delta t}}$  la contrainte équivalente prédictive. Si  $(\bar{\sigma}^p)^{t+\Delta t} < \sigma_0(\bar{\mathbf{e}}^{t+\Delta t})$  alors la déformation est réellement purement élastique ; dans ce cas  $\mathbf{s}^{t+\Delta t} = (\mathbf{s}^p)^{t+\Delta t}$ . Sinon la déformation est élastoplastique.

### La correction

Lorsque la déformation est élastoplastique, on apporte des corrections à  $(\mathbf{s}^p)^{t+\Delta t}$  de façon à revenir sur la surface de charge (retour radial). En remplaçant  $(\dot{\lambda}_t^{pl})^{t+\Delta t}$  par son expression en fonction de  $\sigma_0(\bar{\epsilon}^{t+\Delta t})$  se trouvant dans le système (I.25), et en tenant compte de  $\sigma_0(\bar{\epsilon}^{t+\Delta t})$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^{t+\Delta t} = \frac{(\mathbf{s}^p)^{t+\Delta t}}{1 + 3\mu \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{t+\Delta t}}{\sigma_0(\bar{\epsilon}^{t+\Delta t})} \Delta t} \\ \mathbf{s}^{t+\Delta t} : \mathbf{s}^{t+\Delta t} - \frac{2}{3} \sigma_0^2(\bar{\epsilon}^{t+\Delta t}) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

Le système d'équation (I.29) conduit à l'équation non linéaire (I.30) avec  $\dot{\bar{\epsilon}}_{t+\Delta t}$  comme inconnue qui est résolue par la méthode de Newton-Raphson:

$$3\mu \dot{\bar{\epsilon}}^{t+\Delta t} \Delta t + \sigma_0(\bar{\epsilon}^{t+\Delta t}) - (\bar{\sigma}^p)^{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{I.30})$$

Dans la suite, on désignera par  $\lambda^t = \{\mathbf{s}^t, \dot{\bar{\epsilon}}^t, \bar{\epsilon}^t, \dots\}$  l'ensemble des variables d'état impliquées dans la formulation élastoplastique incrémentale, connues à l'instant  $t$  et par  $\Phi_\lambda$  l'opérateur traduisant leur intégration temporelle.

$$\lambda^{t+\Delta t} = \Phi_\lambda(\lambda^t, \mathbf{v}^{t+\Delta t}) \quad (\text{I.31})$$

## I.1.4. Lois de frottement

Plusieurs lois de frottement existent au sein de Forge®. Généralement pour des problèmes de mise en forme à froid, on utilise des lois de frottement de Tresca ou de Coulomb.

### I.1.4.1. Loi de frottement de Tresca

Elle relie la scission de frottement  $\boldsymbol{\tau}$  à la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$  du matériau par la formule :

$$\boldsymbol{\tau} = -\bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\Delta \mathbf{v}_g}{\|\Delta \mathbf{v}_g\|} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \bar{m} \leq 1 \quad (\text{I.32})$$

$\bar{m}$  est le coefficient de frottement de Tresca et  $\Delta \mathbf{v}_g = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}$  représente la vitesse de glissement relative de l'outil par rapport à la pièce.

### I.1.4.2. Loi de frottement de Coulomb

Cette loi relie la scission de frottement  $\boldsymbol{\tau}$  à la pression de contact  $\sigma_n$  :

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \sigma_n \frac{\Delta \mathbf{v}_g}{\|\Delta \mathbf{v}_g\|} \quad (\text{I.33})$$

### I.1.4.3. Loi de Coulomb limitée par la loi de Tresca

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \sigma_n \frac{\Delta \mathbf{v}_g}{\|\Delta \mathbf{v}_g\|} \quad \text{si } |\mu \sigma_n| < \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau} = -\bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\Delta \mathbf{v}_g}{\|\Delta \mathbf{v}_g\|} \quad \text{si } |\mu \sigma_n| \geq \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{I.34})$$

### I.1.5. Formulation faible du problème mécanique

En résumé les équations mécaniques s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\mathbf{s}) - \nabla p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \text{div}(\mathbf{v}) = -\chi \dot{p} & \text{sur } \Omega \\ + CL & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\frac{\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\chi} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{2\mu} + \frac{2\nu-1}{E} \dot{p} \mathbf{I}_d \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \mathbf{s}, \quad \dot{\lambda}^{pl} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sigma_0} \\ f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.35})$$

En tenant compte du schéma d'intégration temporelle globale implicite, le Principe des Puissances Virtuelles (PPV), s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{v}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}) \in V^{ca} \times P$  tels que  $(\mathbf{v}^*, p^*) \in V_0^{ca} \times P$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^{t+\Delta t}} \mathbf{s}^{t+\Delta t}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{t+\Delta t}(\mathbf{v}^*) d\Omega - \int_{\Omega^{t+\Delta t}} p^{t+\Delta t} \text{div}(\mathbf{v}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega^{t+\Delta t}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) \cdot \mathbf{v}^* dS = 0 \\ \int_{\Omega^{t+\Delta t}} (\text{div}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) + \chi \dot{p}^{t+\Delta t}) p^* d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.36})$$

Où  $V^{ca}$  (respectivement  $V_0^{ca}$ ) est l'espace des vitesses cinématiquement admissibles (respectivement cinématiquement admissibles à 0) et  $P$  est l'espace des pressions. Soit  $V$  un sous-espace de  $L^2(\Omega)$ , les sous-espaces  $V^{ca}$ ,  $V_0^{ca}$  et  $P$  sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{ca} = \{ \mathbf{v} \in V / (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_C \} \\ V_0^{ca} = \{ \mathbf{v} \in V / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_C \} \\ P = L^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{I.37})$$

### I.1.6. Discrétisation éléments finis et résolution

Cet ensemble d'équations est discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis tétraédriques où le domaine continu  $\Omega$  est remplacé par domaine discret  $\Omega_h$  formé par un ensemble fini de tétraèdres  $\Omega_h^e$  dont l'union forme un maillage  $(T_h)$ .

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in T_h} \Omega_h^e \quad (\text{I.38})$$

La solution du problème discret  $(\mathbf{v}_h, p_h)$  est alors cherchée dans deux sous ensembles d'approximation de dimensions finies  $V_h$  et  $P_h$ . L'existence et l'unicité de la solution du problème discret sont garanties par la condition Brezzi-Babuska [Babuska 1973]. Dans notre cas, cette condition est vérifiée en utilisant le mini élément P1+/P1 où le champ de vitesse est enrichi par l'ajout d'une fonction bulle linéaire par morceaux sur chaque sous-tétraèdre, alors que la pression reste approximée par une interpolation linéaire à partir des valeurs aux quatre sommets du tétraèdre (Figure I-2).

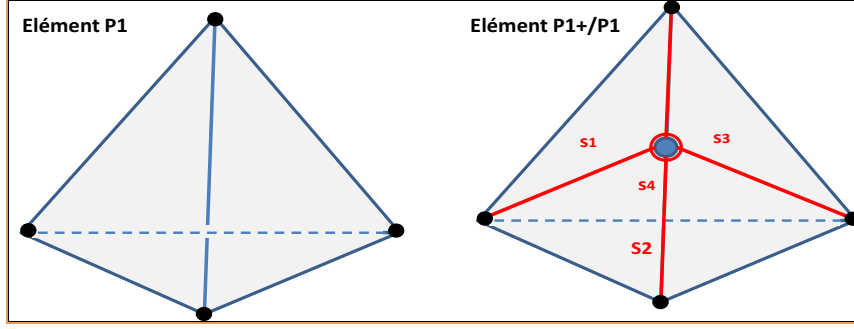


Figure I-2: Mini élément P1+/P1

Les espaces d'approximation discrète sont définis par :

$$\begin{cases} P_h = \{p_h \in C^0(\Omega_h) / \forall e \in T_h, p_h|_{\Omega_h^e} \in P1(\Omega_h^e)\} \\ V_h = L_h \oplus B_h \\ L_h = \{\mathbf{v}_h \in (C^0(\Omega_h))^3 / \forall e \in T_h, \mathbf{v}_h|_{\Omega_h^e} \in (P1(\Omega_h^e))^3\} \\ B_h = \{b_h \in (C^0(\Omega_h))^3 / \forall e \in T_h, b_h|_{\Omega_h^e} \in (P1(\Omega_h^e))^3 \text{ et } b_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i^e\} \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

$\Omega_{h,i}^e (i=1,4)$  sont les sous tétraèdres du tétraèdre  $\Omega_h^e$ . Les Champs de vitesse et de pression discrète s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \mathbf{v}_k^l N_k^l(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{Nbelt} \mathbf{v}_m^b N_m^b(\mathbf{x}) \\ p_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} p_k N_k(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.40})$$

$Nbnoe$  et  $Nbelt$  représentent respectivement les nombres de nœuds et d'éléments dans le maillage.  $N_k^l$  est la fonction d'interpolation linéaire associée au nœud  $k$  utilisée pour l'interpolation des champs de vitesse et de pression.  $N_m^b$  est la fonction d'interpolation bulle associée à l'élément  $m$ , linéaire sur chaque sous tétraèdre.

Le problème discret revient à trouver  $(\mathbf{v}_h, p_h) \in V_h \times P_h$  tels que  $\forall (\mathbf{v}_h^*, p_h^*) \in V_h^0 \times P_h$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} \mathbf{s}^{t+\Delta t}(\mathbf{v}_h) : \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}_h^*) d\Omega - \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_h^{t+\Delta t}} \mu \sigma_n \frac{\Delta \mathbf{v}_{gh}}{\|\Delta \mathbf{v}_{gh}\|} \cdot \mathbf{v}_h^* dS = 0 \\ \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p_h^* (\operatorname{div}(\mathbf{v}_h) + \chi \dot{p}_h) d\Omega = 0 \\ + \text{Contact} \end{array} \right. \quad (\text{I.41})$$

En tenant compte de la décomposition du champ de vitesse en partie linéaire et en partie bulle le problème discret s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{v}_h, p_h) \in V_h \times P_h$  tels que  $\forall (\mathbf{v}_h^*, p_h^*) \in V_h^0 \times P_h$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} \mathbf{s}^{t+\Delta t}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) : \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}_h^{l*}) d\Omega - \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h^{l*}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_h^{t+\Delta t}} \mu \sigma_n \frac{\Delta \mathbf{v}_{gh}}{\|\Delta \mathbf{v}_{gh}\|} \cdot \mathbf{v}_h^{l*} dS = 0 \\ \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} \mathbf{s}^{t+\Delta t}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) : \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}_h^{b*}) d\Omega - \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h^{b*}) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p_h^* (\operatorname{div}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) + \chi \dot{p}_h) d\Omega = 0 \\ + \text{Contact} \end{array} \right. \quad (\text{I.42})$$

### I.1.7. Equations de contact

Dans cette partie, nous nous intéressons aux équations de la gestion numérique du contact entre la pièce et les outils. Nous nous limiterons ici au cas du contact unilatéral entre pièce et outils rigides (considérés comme indéformables). Pour les autres modèles de contact utilisés dans Forge®, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Barboza 2004], [Hachani 2011].

#### I.1.7.1. Condition de contact unilatéral

La condition de non pénétration entre la pièce et l'outil à un instant  $t$  s'écrit sous la forme :

$$\delta^t = \mathbf{M}^t \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{n}^t \geq 0 \quad (\text{I.43})$$

Avec  $\delta^t$  la distance du point  $\mathbf{M}^t$  à la surface de l'outil,  $\mathbf{P}^t$  est la projeté de  $\mathbf{M}^t$  sur la facette de l'outil la plus proche et  $\mathbf{n}^t$  la normale rentrante à l'outil.



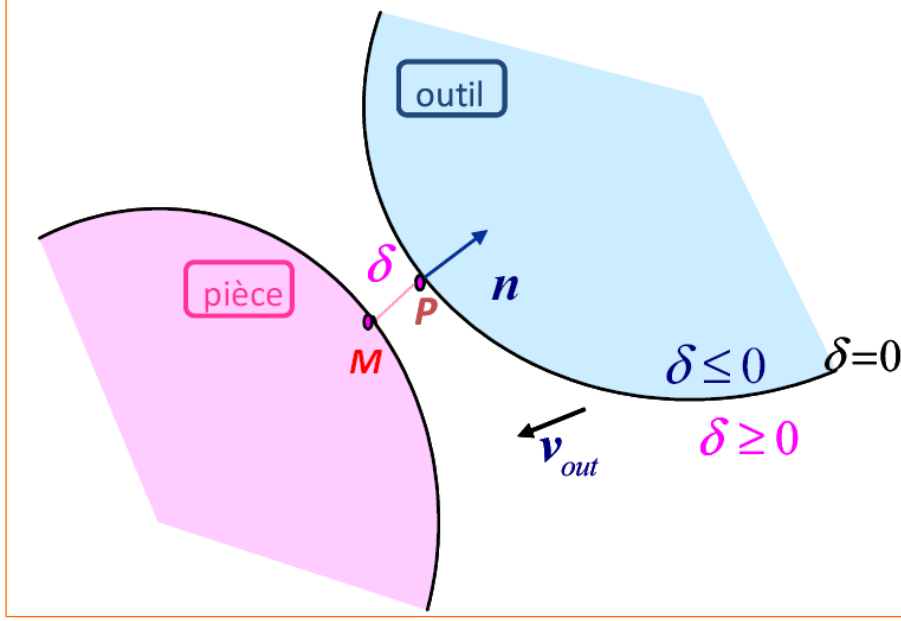


Figure I-3. Contact unilatéral entre pièce et outil

La condition de contact unilatéral à  $t + \Delta t$  s'écrit :

$$\delta^{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{t+\Delta t} \mathbf{P}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n}^{t+\Delta t} \geq 0 \quad (\text{I.44})$$

En faisant un développement limité à l'ordre 1 par rapport au temps on obtient :

$$\delta^{t+\Delta t} \approx \delta^t + (\mathbf{v}_{out}^{t+\Delta t} - \mathbf{v}^{t+\Delta t}) \cdot \mathbf{n}^t \Delta t + \mathbf{M}^t \mathbf{P}^t \cdot \frac{d\mathbf{n}^t}{dt} \Delta t \quad (\text{I.45})$$

Nous allons supposer que, localement, la surface de contact est approximée par un plan tangent issu de  $\mathbf{P}^t$  et défini par la normale  $\mathbf{n}^t$  durant l'incrément  $\Delta t$ . En d'autres termes, on néglige l'évolution de la surface au cours de l'incrément de temps ( $\frac{d\mathbf{n}^t}{dt} \equiv 0$ ). Cette hypothèse est valable pour un pas de temps suffisamment petit et lorsque  $\mathbf{P}^t$  ne quitte pas la facette à laquelle il appartient au cours de l'incrément de temps. On parle alors de condition de non pénétration *explicite*, dans la mesure où les termes de  $\delta^{t+\Delta t}$  sont évalués à l'instant  $t$  et supposés constants durant l'incrément de temps  $[t, t + \Delta t]$ . La condition de contact unilatérale se met alors sous la forme :

$$h(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) = -\frac{\delta^{t+\Delta t}}{\Delta t} = (\mathbf{v}^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_{out}^{t+\Delta t}) \cdot \mathbf{n}^t - \frac{\delta^t}{\Delta t} \leq 0 \quad (\text{I.46})$$

### I.1.7.2. Forme discrète du contact

La condition (I.45) est imposée aux nœuds de la surface frontière qui sont potentiellement en contact. En chaque nœud frontière  $n$ , la condition s'écrit :

$$h(\mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_n^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_{out}^{t+\Delta t}) \cdot \mathbf{n}_n^t - \frac{\delta_n^t}{\Delta t} \leq 0, \forall n \in \partial\Omega_h \quad (\text{I.47})$$

La condition de contact unilatéral est prise en compte dans la forme discrète des équations mécaniques de façon approchée à l'aide d'une méthode de pénalisation [Hachani 2011], [Chenot et al. 2002]. L'avantage d'une telle méthode est qu'elle est facile à implémenter et n'augmente pas le nombre d'inconnues du problème. La fonctionnelle de contact s'écrit donc

$$\phi(\mathbf{v}_n) = \frac{1}{2} \rho \sum_{n \in \partial\Omega_n} [h(\mathbf{v}_n)]^+{}^2 S_n \quad (\text{I.48})$$

Avec  $[\alpha]^+ = \text{Max}(0, \alpha)$  la fonction partie positive,  $\rho$  le coefficient de pénalisation et  $S_n$  la surface associée au noeud  $n$ , utilisée pour affecter un poids proportionnel à la surface des triangles adjacents :

$$S_n = \int_{\partial\Omega_n} N_n dS \quad (\text{I.49})$$

On peut démontrer que le terme  $-\rho[h(\mathbf{v}_n)]^+$  représente une approximation de la contrainte normale de contact  $\sigma_n$ . Ainsi une contrainte normale compressive indique que le nœud est en contact alors qu'une contrainte positive ou nulle indique que le nœud appartient à la surface libre.

Pour obtenir une solution exacte avec la méthode de pénalisation, il faudrait que le coefficient de pénalisation soit infini ; ce qui engendrerait un mauvais conditionnement des matrices du système à résoudre. La précision de la méthode dépend donc du coefficient de pénalisation choisie ( $\varepsilon \approx O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ ). Dans la pratique, des tests numériques ont montré qu'une valeur de

$\rho \approx 10^{-2}$  est satisfaisante et ne perturbe pas le conditionnement du système.

En revenant au problème mécanique discret (I.41), la contribution  $\mathbf{R}_n$  des termes de contact au résidu s'écrit :

$$\mathbf{R}_n^{\text{contact}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{v}_n)}{\partial \mathbf{v}_n} = \rho \left[ \left( \mathbf{v}_n^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_{out}^{t+\Delta t} \right) \cdot \mathbf{n}_n - \left( \frac{\delta_n}{\Delta t} \right) \right]^+ S_n \mathbf{n}_n \quad (\text{I.50})$$

La contribution à la matrice Hessienne s'écrit :

$$\mathbf{H}_n^{\text{contact}} = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{v}_n)}{\partial \mathbf{v}_n \partial \mathbf{v}_n^T} = \begin{cases} \rho(\mathbf{n}_n \otimes \mathbf{n}_n) S_n & \text{si } h(\mathbf{v}_n) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

### I.1.8. Résolution numérique du problème mécanique global

Les équations du problème discret peuvent se résumer par le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} R^l(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) = 0 \\ R^b(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) = 0 \\ R^p(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Ce système d'équations non linéaires est résolu par la méthode de Newton-Raphson. On part d'une approximation initiale  $(\mathbf{v}_0^l, \mathbf{v}_0^b, p_0)$  de la solution, on calcule ensuite itérativement les

corrections successives  $(\Delta \mathbf{v}^l, \Delta \mathbf{v}^b, \Delta p)$  à apporter à cette solution de façon à annuler le résidu  $\mathbf{R}$ . Entre deux itération  $n$  et  $n+1$ , on a :

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}_n^l + \Delta \mathbf{v}^l, \mathbf{v}_n^b + \Delta \mathbf{v}^b, p_n + \Delta p) \approx \mathbf{R}(\mathbf{v}_n^l, \mathbf{v}_n^b, p_n) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}^l} \Delta \mathbf{v}^l + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}^b} \Delta \mathbf{v}^b + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} \Delta p = 0 \quad (\text{I.53})$$

Les termes  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}$ ,  $\mathbf{X} = (\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p)$  représente la matrice hessienne  $\mathbf{H}$  du système non linéaire. Le système linéaire à résoudre à chaque itération de Newton-Raphson s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R^l}{\partial \mathbf{v}^l} & \frac{\partial R^l}{\partial \mathbf{v}^b} & \frac{\partial R^l}{\partial p} \\ \frac{\partial R^b}{\partial \mathbf{v}^l} & \frac{\partial R^b}{\partial \mathbf{v}^b} & \frac{\partial R^b}{\partial p} \\ \frac{\partial R^p}{\partial \mathbf{v}^l} & \frac{\partial R^p}{\partial \mathbf{v}^b} & \frac{\partial R^p}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v}^l \\ \Delta \mathbf{v}^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^l(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) \\ R^b(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) \\ R^p(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) \end{pmatrix} \quad (\text{I.54})$$

En tenant compte de la propriété de la bulle [Perchat 2000], on a également  $\frac{\partial R^l}{\partial \mathbf{v}^b} = \frac{\partial R^b}{\partial \mathbf{v}^l} = 0$ , le système linéaire se réécrit donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R^l}{\partial \mathbf{v}^l} & 0 & \frac{\partial R^l}{\partial p} \\ 0 & \frac{\partial R^b}{\partial \mathbf{v}^b} & \frac{\partial R^b}{\partial p} \\ \frac{\partial R^p}{\partial \mathbf{v}^l} & \frac{\partial R^p}{\partial \mathbf{v}^b} & \frac{\partial R^p}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v}^l \\ \Delta \mathbf{v}^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^l(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) \\ R^b(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) \\ R^p(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^b, p) \end{pmatrix} \quad (\text{I.55})$$

Ce système d'équations linéaires est simplifié par une technique de condensation statique qui permet d'éliminer les termes bulle et d'avoir un meilleur conditionnement du système. Le système linéaire réduit s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} H^{*vv} & H^{*vp} \\ H^{*pv} & -H^{*pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^{*v} \\ R^{*p} \end{pmatrix} \quad (\text{I.56})$$

Où  $\mathbf{H}^*$  désigne la matrice hessienne condensée associée au problème non linéaire et  $\mathbf{R}^*$  le résidu condensé. Dans les travaux de [Perchat 2000] il a été démontré que l'introduction d'un paramètre de stabilisation  $\beta^2$  au niveau des termes de la sous matrice  $H^{*pp}$  (ce qui revient à relaxer les termes de correction du champ de vitesse issus de la bulle pour l'incompressibilité) permet d'obtenir des champs de pression et de contraintes plus lisses, pourvu que la valeur de  $\beta$  soit bien choisie. Ce qui mène à la forme réduite et stabilisée suivante :

$$\begin{pmatrix} H^{*vv} & H^{*vp} \\ H^{*pv} & -\beta^2 H^{*pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^v \\ R^p \end{pmatrix} \quad (\text{I.57})$$

Le système linéaire (I.56) est résolu à l'aide d'une méthode itérative de type résidu conjugué préconditionné [Perchat et al. 1999]. On pose  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  le système d'équations que l'on cherche à résoudre ; rappelons que  $\mathbf{A}$  n'est pas définie positive. On définit la fonctionnelle :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x}) \quad (\text{I.58})$$

Cette fonctionnelle n'est pas strictement convexe donc l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation n'est pas assurée. On s'intéresse donc à une méthode de résidu conjugué, où l'on cherche à minimiser la norme du vecteur résidu  $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$  :

$$E(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) \quad (\text{I.59})$$

On cherche ainsi à minimiser la fonctionnelle :  $E(\mathbf{r}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}, \mathbf{Ax} - \mathbf{b})$ .

On se ramène à un problème où l'on résout  $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{Ab}$ , où  $\mathbf{A}^2$  est une matrice symétrique définie positive. Ceci assure l'existence et l'unicité du minimum de la fonctionnelle, donc de la solution du système que l'on cherche à résoudre. Pour accélérer la convergence, on introduit une matrice de préconditionnement  $\mathbf{M}_{pc}$ , inversible, symétrique et définie positive.

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle :

$$E(\mathbf{r}) = (\mathbf{M}_{pc}^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \quad (\text{I.60})$$

On souhaite que  $\mathbf{M}_{pc}^{-1}$  soit proche de  $\mathbf{A}^{-1}$  pour que le conditionnement de  $\mathbf{M}_{pc}^{-1}\mathbf{A}$  soit proche de 1. Les préconditionneurs les plus utilisés dans Forge® sont essentiellement basés sur une factorisation incomplète [Perchat 2000], [Mocellin *et al.* 2001] de  $\mathbf{A}$ . Le principe de base est de construire une factorisation incomplète telle que la matrice réduite ait la même structure creuse que la matrice de départ. C'est-à-dire qu'on effectue la factorisation en calculant seulement des termes initialement non nuls, sans se soucier de savoir si l'on trouve des valeurs nulles lors de la factorisation. Les factorisations utilisées sont principalement : la décomposition  $\mathbf{M}_{pc} = \mathbf{LU}$  (préconditionneur de type **ILU**) et la factorisation de Cholesky  $\mathbf{M}_{pc} = \mathbf{LL}^T$  (préconditionneur de type **ICC**). La Figure I-4 illustre l'algorithme de décomposition **LU**. On désigne par **ILU (0)** (resp. **ICC (0)**), la factorisation incomplète telle que l'on n'accorde aucun niveau de remplissage supplémentaire par rapport à celui de la matrice de départ. La précision de la factorisation incomplète est améliorée en autorisant un remplissage supplémentaire ; on obtient ainsi les factorisations **ILU(n)** (resp. **ICC(n)**) où  $n$  représente le niveau de remplissage. Ainsi **ILU(1)** désigne une factorisation incomplète **ILU** avec le calcul d'un terme supplémentaire par ligne. Il est important de souligner que les préconditionneurs **ILU(n)** (resp. **ICC(n)**)  $n > 0$  sont plus complexes à mettre en œuvre et peuvent générer de surcoûts importants au niveau de l'occupation de la mémoire et du temps de calcul (factorisation, descente-remontée).

L'algorithme générique de la méthode de résidu conjugué préconditionné se présente comme suit :

**Initialisations :**

$$k = 0$$

Choix du nombre de pente  $(s + 1)$

$$r_0 = b$$

$$p_0 = M^{-1}r_0$$

$$z_0 = Ap_0$$

**Tant que (non convergence)**

$$\alpha_k = \frac{(r_k, M^{-1}z_k)}{(M^{-1}r_k, z_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k z_k$$

$$j = k - s_k \text{ avec } s_k = \text{Min}(k, s)$$

**Tant que (  $j \leq k$  )**

$$\beta_k^j = -\frac{(AM^{-1}r_{k+1}, M^{-1}z_j)}{(M^{-1}z_j, z_j)} \text{ pour } k - s_k \leq j \leq k \text{ avec } s_k = \text{Min}(k, s)$$

$$j \leftarrow j + 1$$

**Fin tant que**

$$p_{k+1} = M^{-1}r_{k+1} + \sum_{j=k-s_k}^k \beta_k^j p_j$$

$$z_{k+1} = AM^{-1}r_{k+1} + \sum_{j=k-s_k}^k \beta_k^j z_j$$

$$k \leftarrow k + 1$$

**Fin tant que**

*Figure I-4. Algorithme de la méthode de résidu conjugué préconditionné*

## **I.2. Problème thermique**

Dans cette partie nous décrivons le traitement numérique du problème thermique pendant la mise en forme des matériaux. Au cours de la mise en forme d'une pièce, l'essentiel de la chaleur est générée par la déformation plastique et par le frottement outils/pièce ; les échanges thermiques par conduction, convection et radiation sont également à prendre en compte.

### **I.2.1. Equations de la chaleur**

Le problème de transfert thermique à travers le domaine  $\Omega$  peut être décrit par l'équation suivante :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\text{div}(\mathbf{q}) + f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{I.61})$$

Avec  $T$  la température,  $\rho$  la densité du matériau,  $C_p$  la chaleur massique et  $f_p$  la fraction de la puissance de déformation transformée en chaleur. Le flux de chaleur  $\mathbf{q}$  est donné par l'équation de Fourier :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (\text{I.62})$$

Où  $k$  est la conductivité thermique du matériau. Dans notre cas, la formulation étant lagrangienne, les termes d'advection s'annulent. L'équation de la chaleur s'écrit donc :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + k \Delta T = -f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{I.63})$$

Avec  $\Delta T$  l'opérateur de Laplace appliqué à la température.

### **I.2.2. Conditions aux limites**

La frontière  $\partial\Omega$  peut se décomposer en quatre parties, avec différentes conditions aux limites (Figure I-5):

$$\partial\Omega = \partial\Omega_c \cup \partial\Omega_{CR} \cup \partial\Omega_\phi \cup \partial\Omega_T \quad (\text{I.64})$$

L'échange de chaleur par conduction qui a lieu entre la pièce et les outils sur la surface de contact  $\partial\Omega_c$  s'exprime par la relation suivante :

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = h_c (T - T_{out}) \quad (\text{I.65})$$

$h_c$  représente le coefficient d'échange thermique,  $T_{out}$  étant la température de l'outil en contact avec la pièce

La condition aux limites de type convection est appliquée à la partie  $\partial\Omega_{CR}$  de la pièce en contact avec un fluide (de l'air dans la plupart des cas) dont la température est différente de celle de la pièce :

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = h_{conv} (T - T_{\bar{\Omega}}) \quad (\text{I.66})$$

Avec  $h_{conv}$  le coefficient de transfert thermique par convection et  $T_{\bar{\Omega}}$  la température du fluide en contact avec la pièce.

Le rayonnement est pris en compte à travers la l'expression :

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_{\bar{\Omega}}^4) \quad (\text{I.67})$$

Où  $T_{\bar{\Omega}}$  est la température du milieu extérieur,  $\sigma$  la constante de Stefan-Bolzman et  $\varepsilon$  l'émissivité du matériau.

Les conditions aux limites de convection et de radiation peuvent être regroupées dans l'expression suivante :

$$-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = h_{CR}(T - T_{\bar{\Omega}}) \quad (I.68)$$

Avec  $h_{CR}$  le coefficient de transfert prenant en compte la convection et la radiation, et défini par :

$$h_{CR} = h_{conv} + \varepsilon\sigma(T^2 + T_{\bar{\Omega}}^2)(T + T_{\bar{\Omega}}) \quad (I.69)$$

Des conditions aux limites de type Dirichlet imposées sur la partie  $\partial\Omega_T$  sont prises en compte par la relation :

$$T = T_{imp} \quad (I.70)$$

Où  $T_{imp}$  est la température imposée.

Les conditions aux limites de type Neumann, traduisant le flux de chaleur issu du frottement sur la partie  $\partial\Omega_\phi$  de la frontière se traduisent par :

$$-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = \frac{b}{b + b_{out}} \boldsymbol{\tau} \cdot \Delta \mathbf{v}_g \quad (I.71)$$

Avec  $b$  (respectivement  $b_{out}$ ) l'effusivité de la pièce (respectivement de l'outil). L'effusivité du matériau est donnée par la formule :

$$b = \sqrt{k\rho C_p} \quad (I.72)$$

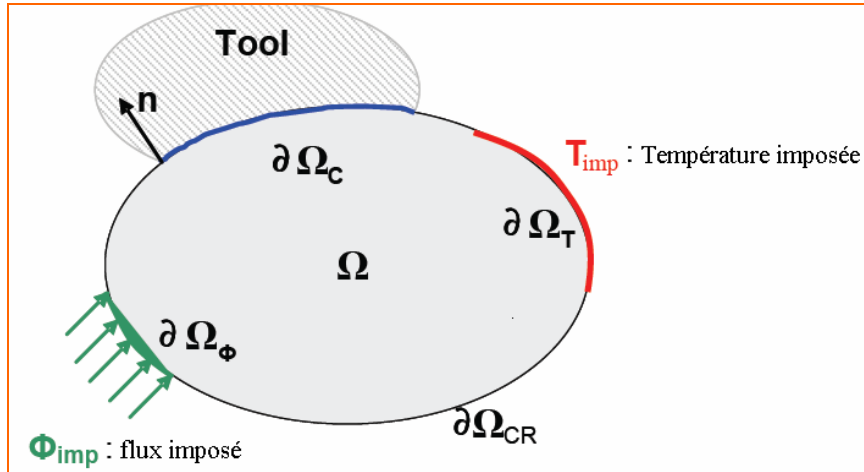


Figure I-5: Conditions aux limites du problème thermique

### I.2.3. Formulation faible du problème thermique

La formulation faible du problème thermique est obtenue en multipliant les équations de transfert thermique par une fonction test  $T^*$  et en intégrant le tout par partie sur le domaine  $\Omega$  :

Trouver  $T \in \theta$  tel que  $\forall T^* \in \theta_0$  :

$$\mathbf{F}^{Th} = \int_{\Omega} T^* \rho C_p \frac{dT}{dt} d\Omega - \int_{\Omega} T^* \text{div}(k \Delta T) d\Omega - \int_{\Omega} T^* f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega = 0 \quad (\text{I.73})$$

Les sous-espaces  $\theta$  et  $\theta_0$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \left\{ T^* \in H^1(\Omega) / T^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega_T \right\} \\ \theta &= \left\{ T \in H^1(\Omega) / T = T_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_T \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

En tenant compte des conditions aux limites présentées précédemment, la forme faible du problème s'écrit :

Trouver  $T \in \theta$  tel que  $\forall T^* \in \theta_0$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T^* \rho C_p \frac{dT}{dt} d\Omega - \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla T^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{CR}} T^* h_{CR} (T - T_{\bar{\Omega}}) dS + \int_{\partial\Omega_C} T^* h_C (T - T_{out}) dS \\ - \int_{\Omega} T^* f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\phi}} T^* \frac{b}{b + b_{out}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \Delta \mathbf{v}_g) dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

#### I.2.4. Discrétisation spatiale

La forme faible du problème, est discrétisée à l'aide de la méthode des éléments finis tétraédriques. La température est approximée par  $T_h$  à l'aide d'une interpolation linéaire des températures  $T_k$  connues à tous les nœuds  $k$  du domaine:

$$T_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} T_k N_k(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{I.76})$$

Le problème peut être alors résumé par la formulation matricielle suivante

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (\text{I.77})$$

Avec  $\mathbf{T}$  le vecteur température en tous les nœuds,  $\mathbf{C}$  représente la matrice de capacité,  $\mathbf{K}$  la matrice de conductivité et  $\mathbf{Q}$  le vecteur de chargement (termes sources). Ces matrices sont définies par :

$$\begin{aligned} \forall i = 1 \dots Nbnoe \\ \forall j = 1 \dots Nbnoe \quad C_{ij} = \int_{\Omega} \rho C_p N_i N_j d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.78})$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} k \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega + \int_{\partial\Omega_C} h_C N_i N_j dS + \int_{\partial\Omega_{CR}} h_{CR} N_i N_j dS \quad (\text{I.79})$$

$$Q_j = \int_{\Omega} (f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) N_j d\Omega + \int_{\partial\Omega_C} h_C T_{out} N_j dS + \int_{\partial\Omega_{CR}} h_{CR} T_{\bar{\Omega}} N_j dS + \int_{\partial\Omega_{CR}} \frac{b}{b + b_{out}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \Delta \mathbf{v}_g) N_j dS \quad (\text{I.80})$$

#### I.2.5. Discrétisation temporelle

Le système d'équations aux dérivées partielles est discrétisé à l'aide d'un schéma à un seul pas ou à plusieurs pas de temps [Soyris 1990]. Dans la suite, on se limite au schéma à un seul



pas de temps. Soit alors  $t_i$  et  $t_{i+1}$  deux instants délimitant un incrément, et  $\theta$  un paramètre compris entre 0 et 1, on a :

$$\begin{aligned} Q_\theta &= (1-\theta)Q_i + \theta Q_{i+1} \\ T_\theta &= (1-\theta)T_i + \theta T_{i+1} \\ \dot{T}_\theta &= \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} \end{aligned} \tag{I.81}$$

Le système matriciel ci-dessus peut s'écrire à un instant  $t_\theta = (1-\theta)t_i + \theta t_{i+1}$  de la façon suivante :

$$C \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} \right) + (1-\theta)(\mathbf{K}\mathbf{T}_i - \mathbf{Q}_i) = \theta(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{K}\mathbf{T}_{i+1}) \tag{I.82}$$

$T_{i+1}$  peut-être alors déterminée en connaissant  $T_i$ . Suivant les valeurs de  $\theta$ , on peut avoir plusieurs variantes du  $\theta$ -schéma :

- Pour  $\theta = 0$ , on retrouve le schéma d'Euler explicite
- Pour  $\theta = 1$ , on a le schéma d'Euler implicite
- Pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , on obtient le schéma de Crank-Nicholson

Dans la suite on utilise  $\theta = 1$ .

### I.3. Couplage thermomécanique incrémental

Les problèmes de mise en forme ont généralement un couplage thermomécanique non négligeable. Ainsi certains paramètres de la mécanique (contrainte d'écoulement,...) dépendent de la température. De même, comme nous venons de voir, la thermique est liée à la mécanique à travers deux contributions :

La puissance thermique engendrée par la déformation plastique :

$$f_p \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{I.83}$$

La puissance dissipée par le frottement pièce/outils :

$$\frac{b}{b + b_{out}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \Delta \mathbf{v}_g) \tag{I.84}$$

Notons que le couplage thermomécanique peut être fort ou faible. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux cas de problèmes faiblement couplés. Les cas de problèmes thermomécaniques fortement couplés sont abordés par exemple dans [\[Delalondre 2008\]](#), [\[Aliaga 2000\]](#). Pour les problèmes faiblement couplés avec des pas de temps petits devant la vitesse d'évolution de la température, le couplage peut être résolu de manière incrémentale. On résout d'abord le problème mécanique (à évolution souvent plus rapide), puis les résultats de ce calcul sont utilisés pour déterminer les termes sources et les conditions aux limites du problème thermique. On passe alors à l'incrément suivant et on calcule les paramètres thermo dépendants du problème mécanique avec les nouvelles valeurs de la température et on continue jusqu'à la fin de la simulation.

---

# II

## **S**imulation numérique du laminage à pas de pèlerin

Ce chapitre est dédié à l'analyse mécanique du laminage à pas de pèlerin par la méthode des éléments finis avec le logiciel Forge®. La première partie est consacrée à un bref aperçu bibliographique des travaux déjà réalisés sur la question. Dans la deuxième partie, nous présentons les résultats obtenus ainsi que leurs analyses.

---

### **SOMMAIRE**

<b>II.1. GENERALITE SUR LA SIMULATION NUMERIQUE DU LAMINAGE A PAS DE PELERIN .....</b>	<b>31</b>
II.1.1. Modèles 2D .....	31
II.1.2. Modèles 3D .....	32
<b>II.2. SIMULATION NUMERIQUE DU LAMINAGE A PAS DE PELERIN AVEC FORGE® .....</b>	<b>40</b>
II.2.1. Mise en place de la simulation .....	40
II.2.2. Exemple de simulation .....	43
II.2.3. Améliorations de la qualité des résultats .....	48
II.2.4. Apports du calcul parallèle .....	55
II.2.5. Synthèse .....	57

## II.1. Généralité sur la simulation numérique du laminage à pas de pèlerin

L'étude du laminage à pas de pèlerin constitue un grand défi scientifique depuis plusieurs décennies maintenant. En effet, la géométrie particulière du tube (tube mince, dont la génératrice évolue suivant un profil particulier), et la cinématique spéciale du procédé induisant un trajet de chargement mécanique complexe sur le matériau compliquent l'étude de ce procédé. Les premières études étaient surtout basées sur des analyses expérimentales et des modèles analytiques [Furugen *et al.* 1984], [Osika *et al.* 1992], [Girard 1993], [Mulot 1997]. Plus récemment des études utilisant la simulation numérique ont vu le jour. L'étude bibliographique présentée ici concerne essentiellement des travaux basés sur la simulation numérique. On rencontre dans la littérature des modèles 2D simplifiés basés sur des hypothèses issues des observations expérimentales, qui permettent d'aller vite, et des modèles 3D qui sont plus complets et proches de la réalité du procédé.

### II.1.1. Modèles 2D

Le modèle éléments finis 2D a été tout d'abord utilisé dans [Davies *et al.* 2002] pour étudier le comportement anisotrope des tubes en alliage de titane. Pour ce faire les auteurs ont simulé 4 régions différentes du tube en cours de fabrication : la région où le tube est en contact uniquement avec les matrices, la région où le tube est en contact à la fois avec les matrices et le mandrin et les régions correspondant respectivement à 50% et 100% de réduction de section du tube. Les résultats présentés permettent d'apporter des informations concernant la direction et l'amplitude de l'écrouissage anisotrope telles que observées durant le procédé. La Figure II-1(a) présente les isovaleurs de la déformation plastique équivalente obtenues. Les amplitudes de la déformation plastique équivalente en fonction des positions angulaires pour les quatre zones simulées sont présentées sur la Figure II-1(b). Grâce à une corrélation des résultats avec un essai biaxial, les auteurs sont parvenus à déterminer les coefficients de Hill caractérisant l'anisotropie du tube.

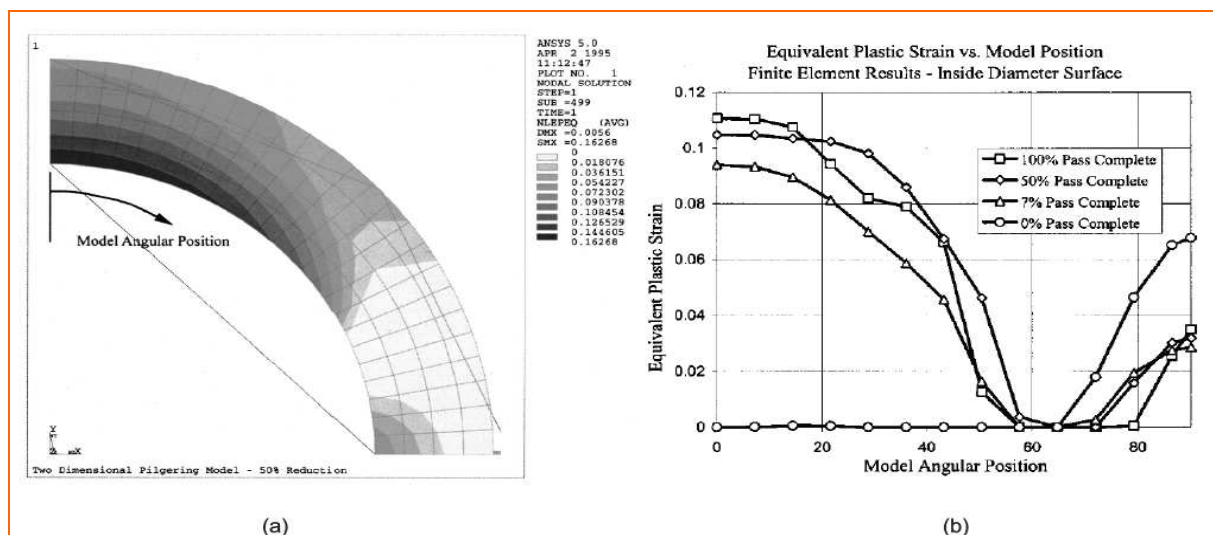
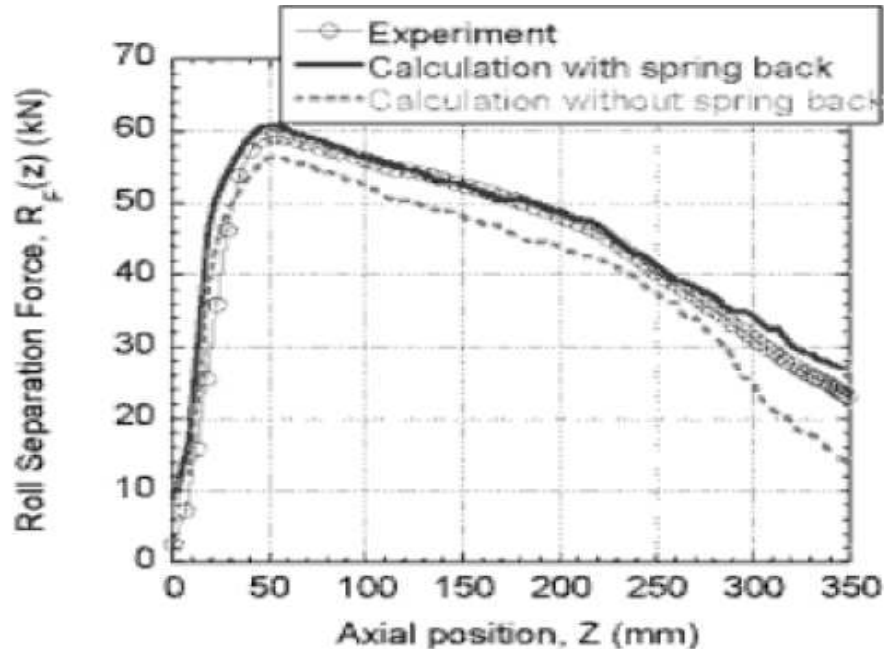


Figure II-1. Isovaleurs de déformation équivalente(a) & amplitude de la déformation plastique équivalente [Davies *et al.* 2002]

Dans [Harada *et al.* 2005] un modèle basé sur la déformation généralisée est proposé. Le tube est supposé viscoplastique pendant les coups de cage et élastique pur après chaque coup de

cage. Les auteurs ont étudié l'effet du retour élastique sur la force de séparation des matrices lors des coups de cage suivants. La Figure II-2 présente l'évolution de la force de séparation des matrices en fonction de la position  $z$  dans la direction de laminage. Les résultats montrent que la prise en compte du retour élastique donne des efforts de laminage plus proches de ceux relevés expérimentalement.



*Figure II-2. Effets de la force du retour élastique sur la force de séparation des matrices*  
[Harada et al. 2005]

### II.1.2. Modèles 3D

La première simulation 3D du laminage à pas de pèlerin par la méthode des éléments finis remonte aux travaux de [Mulot et al. 1996]. Les auteurs ont simulé un coup de cage dans le but de comparer les résultats obtenus avec un modèle semi analytique simplifié basé sur la méthode des tranches [Girard 1993]. Etant donné que la simulation de tous les coups de cage est très coûteuse en temps CPU, les auteurs ont adapté l'approche proposée par [Hacquín et al. 1996] pour le laminage de tôle. Cette approche consiste à simuler un seul coup de cage qui est représentatif de ce qui se passe sur l'ensemble du procédé. Pour ce faire, ils partent d'un tube pré-déformé sur un laminier industriel et nommé « *transition* ». Le tube pré-déformé est choisi de telle façon que celui-ci soit complètement chaussé sur le mandrin. La géométrie de calcul est obtenue à l'aide de mesures 3D sur le tube pré-déformé réel. Les auteurs considèrent une loi élastoviscoplastique isotrope incrémentale ; les outils sont supposés rigides. La Figure II-3 présente la progression de la zone de déformation le long du mandrin. On peut remarquer que la déformation se propage comme une vague suivant la direction de laminage, comme observé expérimentalement et dans les travaux de [Girard 1993].

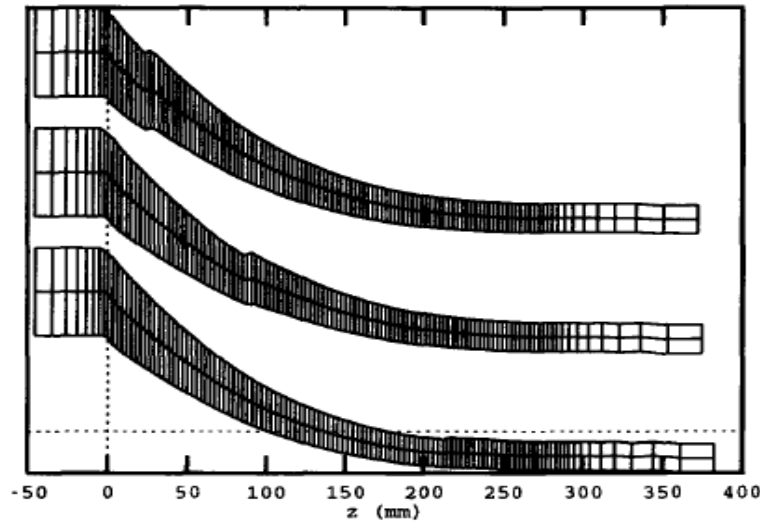


Figure II-3. Ecoulement de la matière le long de l'axe du tube sous forme de vague  
[Mulot et al. 1996]

Une comparaison de la déformation incrémentale obtenue avec le modèle éléments finis 3D et celle obtenue avec le modèle semi analytique est présentée à la Figure II-4 . Le modèle semi analytique ne calcule qu'une déformation moyenne ; cette moyenne coïncide avec la moyenne des déformations obtenues avec le modèle éléments finis 3D.

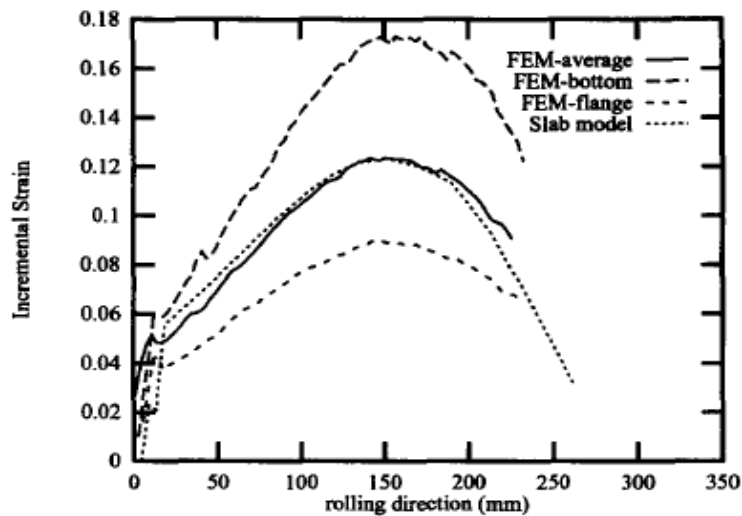


Figure II-4. Comparaison de la déformation incrémentale [Mulot et al. 1996]

La Figure II-5 présente la courbe de la contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction de la position circonférentielle. Cette dernière est tensile près de la bande de roulement et compressive près du fond de la cannelure, comme observé dans [Furugen et al. 1984].

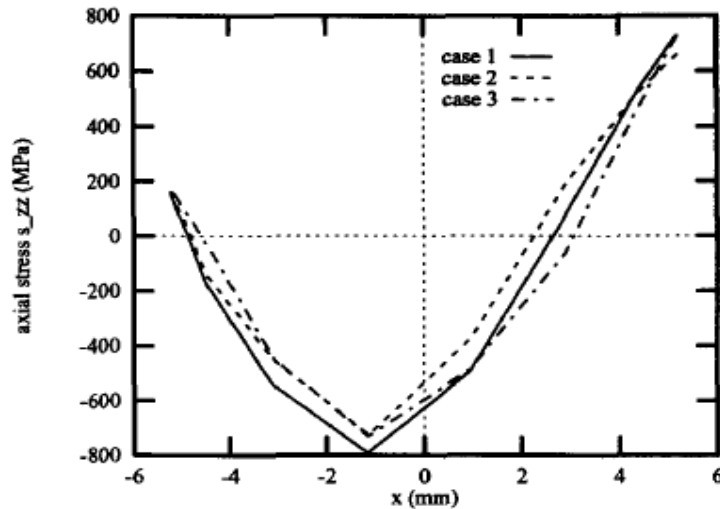


Figure II-5. Contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction de la position circonférentielle [Mulot et al. 1996]

Soulignons que dans ce modèle, le maillage utilisé est grossier :

- 3 nœuds en épaisseur, ce qui est insuffisant pour analyser précisément le cisaillement à l'intérieur du tube.
- 3 ou 4 éléments dans la zone de contact avec les matrices ce qui est insuffisant, il faudrait au minimum 10 éléments afin d'obtenir une bonne distribution des contraintes et déformations, ainsi que la force de laminage.

Pour obtenir des résultats plus précis, les auteurs estiment qu'il faudrait un maillage comprenant entre 30 000 et 40 000 nœuds.

Plus tard, [Montmitonnet et al. 2002] proposent une amélioration du modèle présenté dans [Mulot et al. 1996]. Les auteurs ont montré que pour un matériau sans écrouissage, un état pseudo-périodique peut être atteint au bout de 2 à 3 coups de cage, pourvu que l'on parte d'une initialisation judicieuse de la géométrie du tube. La géométrie initiale est la même que celle de [Mulot et al. 1996] provenant d'une mesure 3D sur un tube en cours de laminage. Seule la passe aller du coup de cage est simulée, la passe retour étant supposée purement élastique en l'absence de la déformation des outils. La Figure II-6 montre le dispositif de simulation :

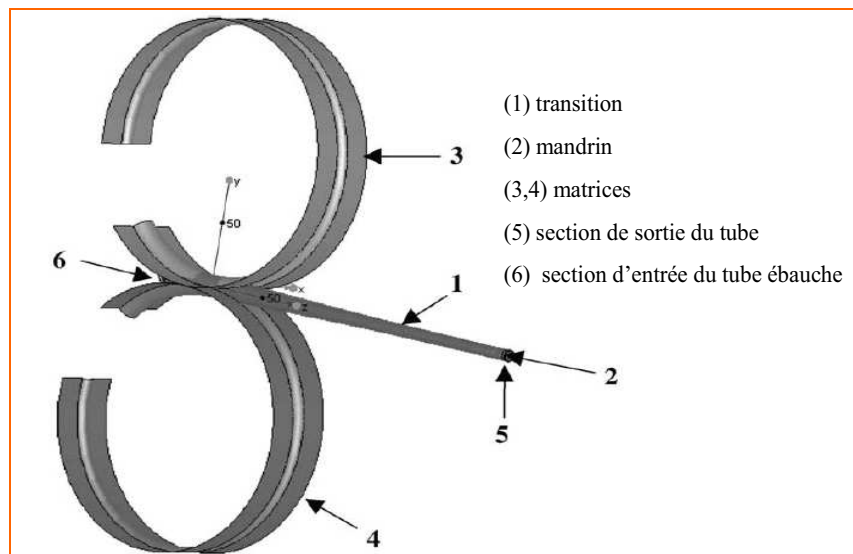


Figure II-6. Dispositif de simulation [Montmitonnet et al. 2002]

Les auteurs ont montré qu'une initialisation à zéro du champ de contrainte n'a pas d'influences notable sur les résultats. La [Figure II-7](#) présente l'évolution de la géométrie et de la contrainte longitudinale, pendant les deux coups de cage dans les zones de déformation. On peut remarquer la stabilisation des résultats après 2 coups de cage.

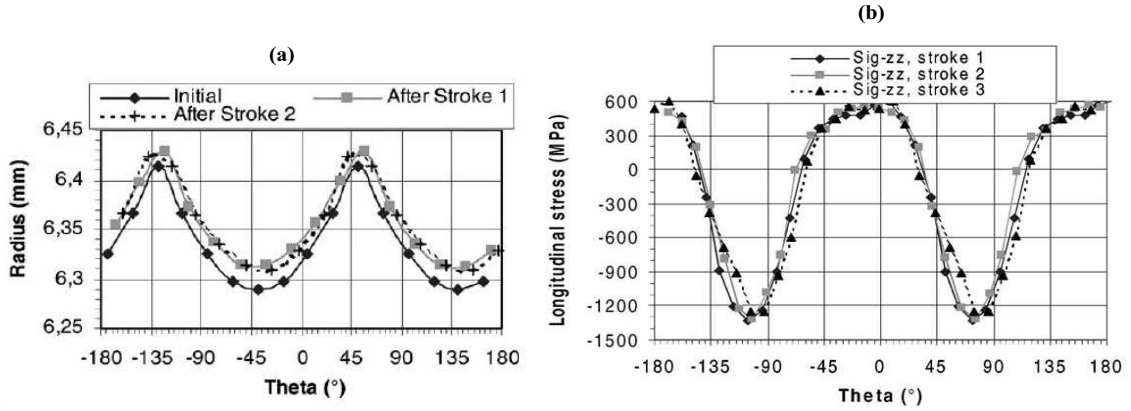


Figure II-7. Evolution de la contrainte et du rayon [Montmitonnet et al. 2002]

Tout récemment, dans [\[Lodej et al. 2006\]](#) l'approche précédente a été couplée avec un post-processeur pour reconstruire l'histoire thermomécanique d'un point matériel. La géométrie de départ du tube est la même que dans les approches de [\[Mulot et al. 1996\]](#) et [\[Montmitonnet et al. 2002\]](#), c'est-à-dire la transition. Cette fois-ci l'écroutissage du matériau étant pris en compte, les auteurs introduisent un écroutissage initial (donnée par la relation (II.1)) afin d'accélérer l'atteinte de l'état pseudo périodique.

$$\bar{\epsilon}(z) = \ln \left( \frac{S_0}{S(z)} \right) \quad (\text{II.1})$$

Avec  $S_0$  la section initiale du tube et  $S_z$  la section en une position  $z$  donnée. Le champ de contrainte initial est supposé nul comme dans l'approche précédente. A cause des hypothèses d'initialisation (géométrie et déformation), quelques coups de cages (itérations) sont nécessaires pour atteindre l'état pseudo-périodique. Les auteurs ont montré que cet état est atteint au bout de 4 à 5 coups de cage comme le montre la [Figure II-8](#) représentant l'évolution de la déformation équivalente pendant 8 coups de cages successifs.

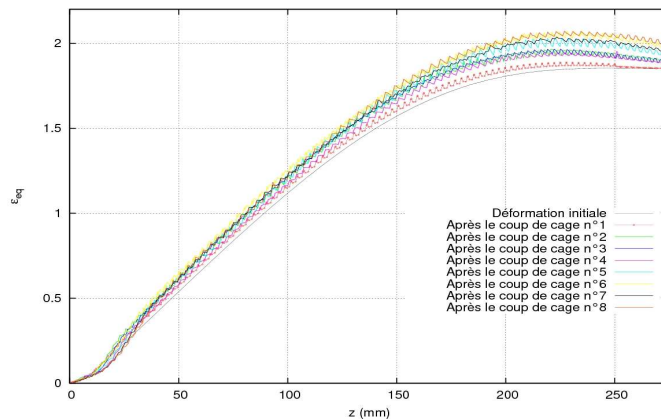


Figure II-8. Stabilisation de la déformation équivalente comme critère d'atteinte de l'état pseudo périodique [Lodej et al. 2006]



On se sert alors du post-processeur pour déterminer l'histoire thermomécanique d'un point matériel le long de la zone de déformation. Pour ce faire, les positions successives d'un point matériel sont obtenues en cumulant les déplacements d'un coup de cage et les mouvements de corps rigide (avance et rotation) entre chaque coup de cage. Ensuite les champs mécaniques sont interpolés entre les positions successives pour déterminer l'histoire mécanique complète (contrainte, déformation). La Figure II-9 présente par exemple l'évolution de la composante  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes pour un point matériel donné durant 60 coups de cage. On peut y observer une alternance entre valeurs positives et négatives. Les valeurs positives correspondent à une traction (laminage dans une zone proche de la bande de roulement) et les valeurs négatives correspondent à une compression (laminage en zone proche du fond de la cannelure).

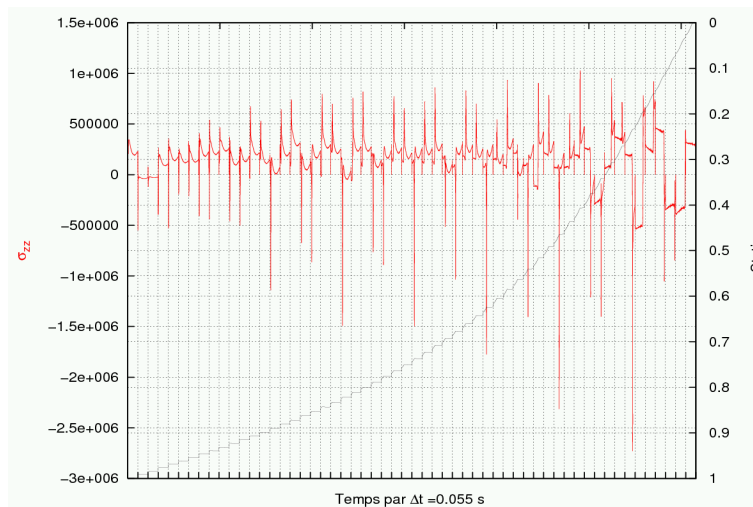


Figure II-9. Evolution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  d'un point matériel sur 60 coups de cage

Cette approche permet de gagner jusqu'à un facteur 10 par rapport à la simulation complète des 70 coups de cage nécessaires pour la traversée de la zone de déformation par un point matériel. Cependant, on peut noter que la précision de cette approche dépend de la période de stockage choisie pour le coup de cage représentatif ; une période de stockage trop grande risque d'entraîner une mauvaise représentation des états mécaniques (mauvaise capture des pics de contraintes par exemple).

Dans [Vanegas-Márquez 2011], les auteurs ont simulé des passes de laminage à pas de pèlerin de tube en acier en partant d'une ébauche de tube complètement cylindrique. Les auteurs se sont intéressés aux laminaires de type HPTR où l'on a trois matrices décalées à  $120^\circ$  chacun comme le montre la Figure II-10.



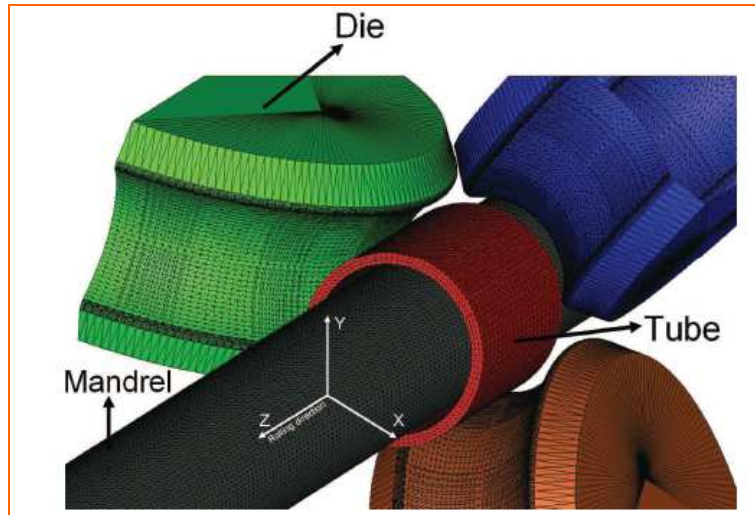


Figure II-10. Dispositif de simulation [Vanegas-Márquez 2011]

Contrairement aux approches précédentes [Lodej *et al.* 2006], [Montmitonnet *et al.* 2002] et [Mulot *et al.* 1996], les auteurs sont partis d'une tube ébauche et ont simulé la déformation intégrale du tube. Ils considèrent une loi élastoplastique incrémentale cyclique permettant de prendre en compte le caractère cyclique du procédé dans le comportement du matériau. L'anisotropie du matériau a aussi été prise en compte. Les paramètres de la loi sont identifiés par analyse inverse à partir des données issues d'essais cycliques sur des éprouvettes. Les phénomènes d'endommagement (apparition de fissures) et de recristallisation ont été également pris en compte dans le modèle.

[Park *et al.* 2005] de leur côté propose une étude de la conception optimale des matrices pour le laminage à pas de pèlerin à l'aide de la simulation numérique. Les auteurs considèrent un cas de laminage de barres. Le logiciel de simulation par éléments finis LS-DYNA 3D® est utilisé pour l'étude ; pour le calcul seul le quart de barre est simulé pour minimiser les temps de calcul. Les paramètres de dimensionnement les plus importants du laminoir sont le profil du fond de cannelure et la vitesse d'avance des matrices. Les auteurs ont testé des profils de cannelure linéaire, quadratique et sinusoïdale (Figure II-11). Les résultats ont montré que le profil de cannelure quadratique permet d'obtenir une faible force de laminage et une géométrie finale plus régulière.

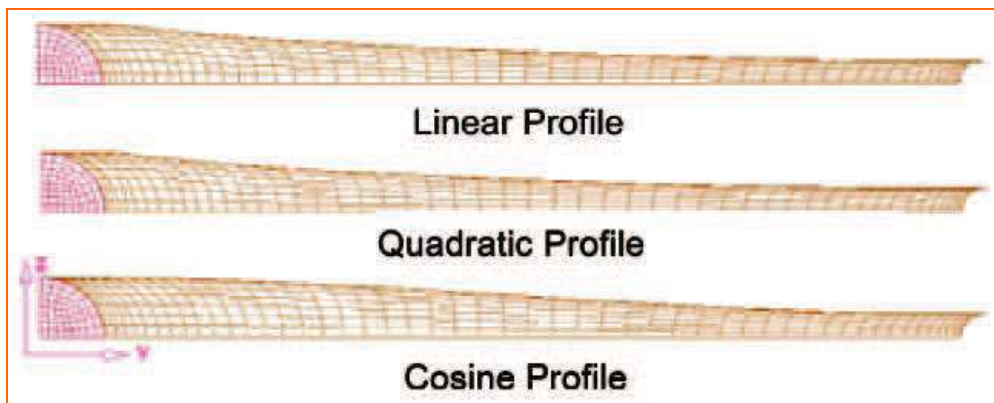


Figure II-11. Profils de fond de cannelure testés [Park *et al.* 2005]

Dans [Karas 2009], l'auteur a étudié l'influence de la géométrie des matrices sur la formation des hélices de laminage le long du tube comme observées expérimentalement par [Osika *et al.* 1992] et [Girard 1993]. Dans ces travaux, 15 coups de cage étaient nécessaires pour obtenir une déformation de 95% du tube. Les auteurs ont utilisé le logiciel de simulation Abaqus avec une formulation ALE afin de maintenir une bonne qualité du maillage pour les grandes déformations qui auront lieu. La Figure II-12 illustre le dispositif pour la simulation.

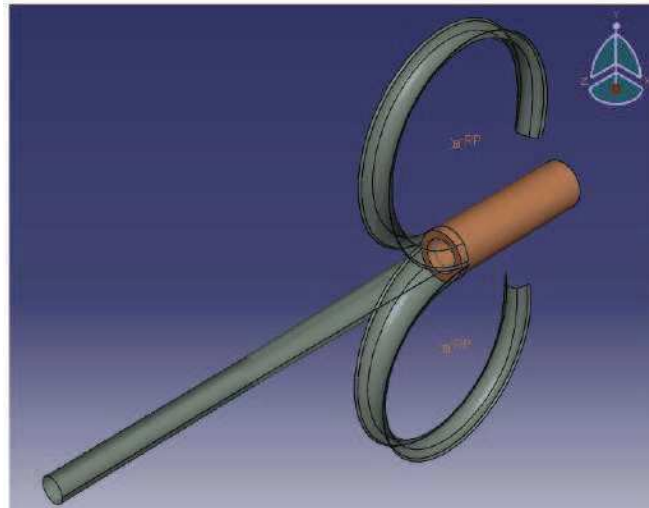


Figure II-12. Dispositif de simulation [Karas 2009]

La formation des hélices de laminage est une conséquence de la dissymétrie entre les matrices et le tube. La dissymétrie engendre également des forces et moments transversaux très élevés.

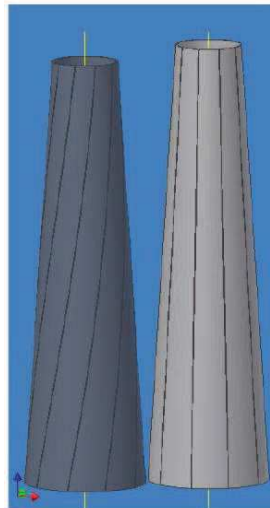
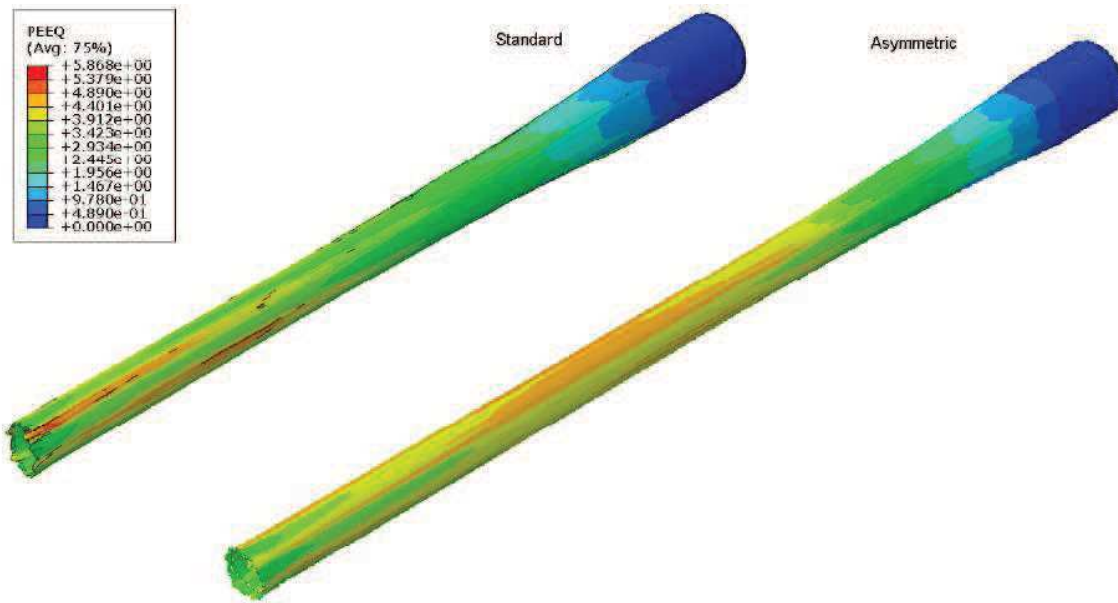


Figure II-13. Formation d'hélice de laminage sur les tubes [Karas 2009]

L'auteur propose de compenser ces effets par une dissymétrie opposée le long du fond de cannelure des matrices, ce qui conduit à des profils de fond de cannelure et de mandrin non circulaires. La Figure II-18 présente les isovaleurs de déformation équivalente après 15 coups de cage. On peut remarquer que pour la même passe, les outils standard donnent lieu à de très grandes déformations équivalentes, ce qui n'est pas le cas pour les outils dissymétriques.



*Figure II-14. Déformation équivalente, outils standard comparé avec l'outil asymétrique [Karas 2009]*

L'auteurs a également montré que les outils dissymétriques permettent de réduire la force de laminage, d'augmenter l'élongation du tube pendant le laminage et de prévenir l'apparition des hélices de laminages.

## II.2. Simulation numérique du laminage à pas de pèlerin avec Forge®

### II.2.1. Mise en place de la simulation

Dans le cadre de cette thèse, nous adoptons le « *modèle du coup de cage représentatif* » tel que présenté dans les travaux de [Mulot *et al.* 1996] , [Montmitonnet *et al.* 2002] et repris dans [Lodej *et al.* 2006]. Cependant, contrairement à ces travaux où la passe retour d'un coup de cage est négligée, nous simulons le coup de cage au complet. Le modèle éléments finis mis en place avec le logiciel Forge® prend en compte la transition (tube), les matrices inférieures et supérieures, le mandrin et le mors (Figure II-15). La déformation élastique des outils est négligée, ces derniers sont donc considérés comme étant rigides.

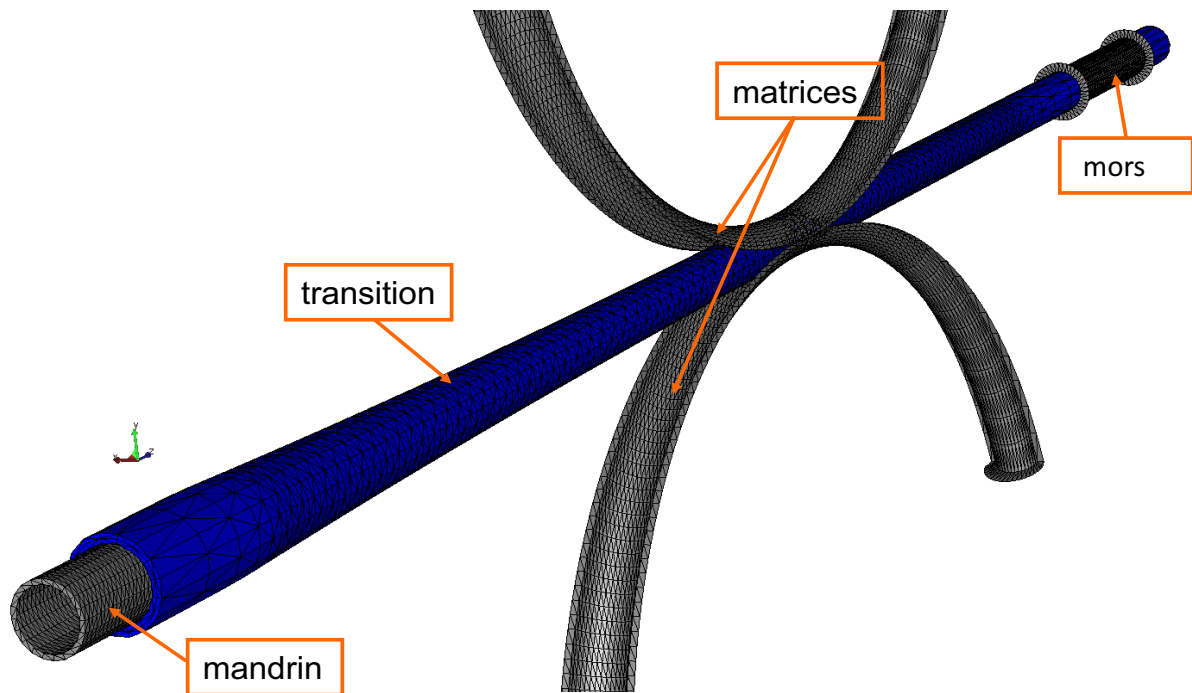


Figure II-15. Modèle du laminage à pas de pèlerin dans Forge®

#### II.2.1.1. Le tube

Dans l'approche basée sur un coup de cage, on part d'une géométrie de tube à moitié déformée. La construction d'un maillage correspondant à cette géométrie passe par deux étapes. La première étape consiste à générer à partir des paramètres outillage, un premier maillage du tube formé d'éléments hexaédriques (Figure II-16). Ceci est possible grâce au logiciel « MaillePèlerin » développé par Cezus.

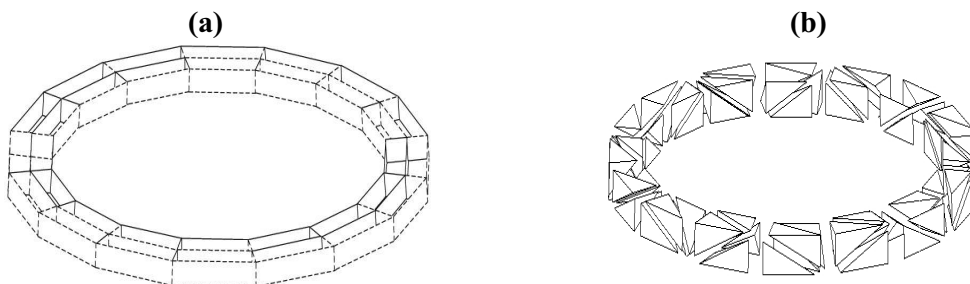


Figure II-16. Éléments hexaédriques (a) découpés en cinq éléments tétraédriques (b)

Les éléments hexaédriques sont ensuite découpés en tétraèdres à l'aide d'un utilitaire développé au Cemef, pour former le maillage final qui servira pour les calculs dans Forge®. Un hexaèdre est découpé soit en 5 tétraèdres soit en 24 tétraèdres en fonction de la finesse et du nombre de nœuds désiré. Le découpage en 5 tétraèdres (Figure II-16) permet de générer des maillages d'une finesse acceptable avec un nombre minimal de nœuds. C'est cette option qui est utilisée dans le cadre de cette thèse.

### II.2.1.2. Les outils

Comme précisé plus haut, les outils sont supposés rigides lors de nos simulations. Ainsi, seule la surface des outils est modélisée et maillée à l'aide de triangles. Les maillages sont obtenus à l'aide du logiciel « MaillePèlerin » en partant des paramètres outillages. La cinématique des matrices (aller-retour) est donnée par les profils de vitesse d'avance et de rotation présentés sur la Figure II-18 ; c'est une vitesse d'avance et de rotation avec inversion au bout. Pour la matrice supérieure, les parties positives correspondent au mouvement aller et les parties négatives correspondent au retour ; le contraire est valable pour les matrices inférieures.

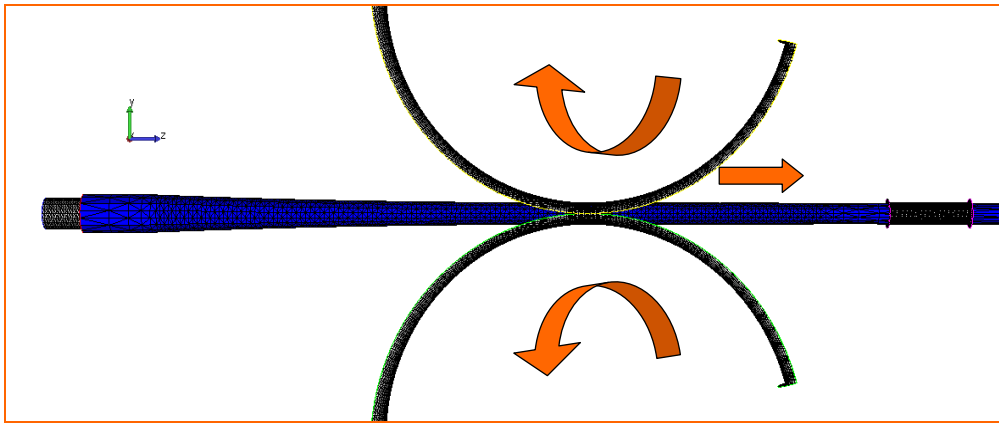


Figure II-17. Cinématique des outils

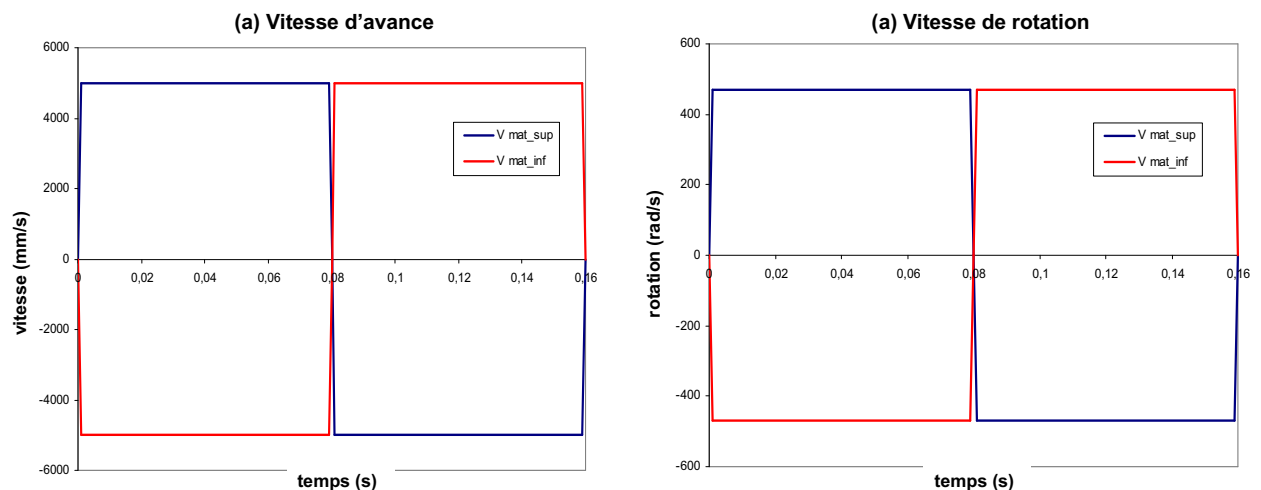


Figure II-18. Profil de vitesse des matrices : avance (a) & rotation (b)

### II.2.1.3. Les paramètres rhéologiques

Le comportement mécanique du tube est modélisé par une loi élastoplastique avec écrouissage isotrope. La loi d'écrouissage est donnée par la relation :

$$\sigma_0(\bar{\varepsilon}) = K\sqrt{3}(\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_0)^n \quad (\text{II.2})$$

Avec  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement du matériau,  $K$  la consistance du matériau,  $\bar{\varepsilon}$  la déformation équivalente,  $\bar{\varepsilon}_0$  est un coefficient de régulation de l'écrouissage, et  $n$  le coefficient de sensibilité à l'écrouissage. Les valeurs de l'ensemble des paramètres matériaux sont inscrites dans le [Tableau II-1](#).

Tableau II-1. Paramètres rhéologiques du matériau

$K$	577 MPa
$\bar{\varepsilon}_0$	0,01
$n$	0,15
$E$	99,3 GPa
$\nu$	0,37

$E$ ,  $\nu$  représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Comme dans [\[Lodej et al. 2006\]](#), on introduit une carte de déformation équivalente initiale donnée par la relation (II.1). Ceci a pour but d'accélérer l'atteinte de l'état pseudo-périodique. Dans la formule (II.1), La section  $S(z)$  est calculée à l'aide d'une expression analytique déterminée au cours de la thèse de S. Mulot [\[Mulot 1997\]](#) :

$$S(z) = 2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2} (R_c^2 - R_m^2) - 2R_c F - 2R_m F + \frac{2\pi}{9} F^2 - \frac{\pi}{18} \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) F^2 - \\ &\frac{3}{4} F^2 \sin\left(\frac{8\pi}{9}\right) + 2F^2 \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \frac{\pi}{9} \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) R_m F + 2R_m F \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

Avec  $R_c$  le rayon d'usinage de la matrice,  $R_m$  le rayon du mandrin et  $F$  le décalage du centre des arcs de cercle par rapport au centre du tube. La [Figure II-19](#) présente l'évolution de la déformation équivalente initiale en fonction de la position  $z$  sur la transition.

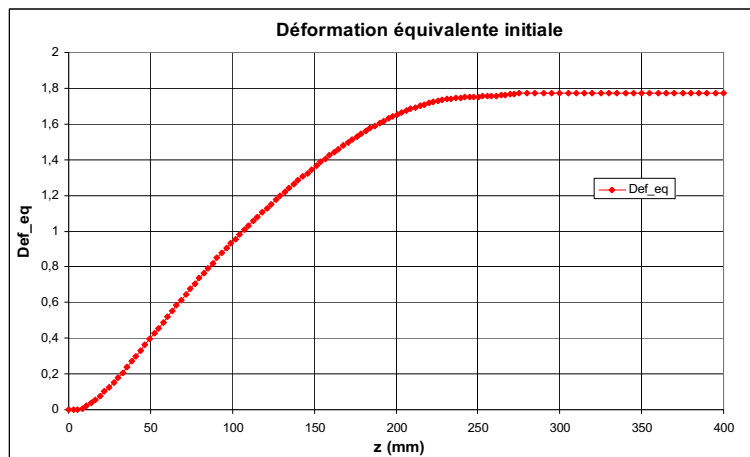


Figure II-19. Carte de déformation initiale d'après [\[Mulot 1997\]](#)

### II.2.1.4. Gestion du frottement et du contact

Les frottements transition-matrices et transition-mandrin sont modélisés par une loi de Coulomb limitée par Tresca telle que présentée dans le [chapitre 1](#). Le frottement transition-mors est considéré comme glissant. Les valeurs des paramètres des lois de frottement sont présentées dans le [Tableau II-2](#).

*Tableau II-2. Paramètres de frottement*

$\overline{m}_{(matrices,mandrin)}$	1
$\mu_{matrices}$	0,05
$\mu_{mandrin}$	0,15
$\overline{m}_{(mors)}$	0,00

Au sein de Forge® le contact étant traité par une méthode de pénalisation, il est possible de définir une distance de pénétration maximale ( $d_{pen}$ ) pour les nœuds potentiellement en contact, et correspondant à la valeur de pénalisation. Les travaux [Lodej *et al.* 2006] ont montré qu'une distance de 0,001 mm était optimale pour le laminage à pas de pèlerin. Il est également possible de minimiser le coût de l'analyse de contact en définissant un rayon minimal ( $d_{penplus}$ ) pour lequel elle est activée. Cela permet d'éviter d'effectuer une analyse de contact systématique sur tous les nœuds surfaciques de la transition. Dans notre cas nous avons choisi un rayon de 0,02 mm.

## II.2.2. Exemple de simulation

### II.2.2.1. Description du cas test

Nous présentons ici les résultats de la simulation d'un coup de cage de laminage à pas de pèlerin. L'objectif est de mettre en relief les différentes variables mécaniques analysées. Pour cette simulation, on considère un maillage relativement grossier (maillage usuel), le but étant d'obtenir (dans un premier temps) les tendances dans des temps de calculs raisonnables. Les caractéristiques des maillages de la transition et ceux des outils sont inscrites dans le [Tableau II-3](#).

*Tableau II-3. Caractéristiques des maillages*

Objets	Nœuds	Éléments
Transition	7 920	31 872
Matrice sup.	3 410	6 468
Matrice inf.	3 410	6 468
Mandrin	3 040	6 040
Mors	1 720	3 360



### II.2.2.2. Analyse des résultats

La Figure II-20 montre les isovaleurs de la déformation équivalente sur un coup de cage. La déformation est maximale près du fond de cannelure (direction de l'axe y), ce qui correspond à ce que l'on attend puisque l'entrefer est minimale dans cette zone et donc la réduction d'épaisseur maximale. Par ailleurs, la réduction se concentre dans la partie centrale de la zone de réduction, la partie finale étant consacrée au calibrage et à la circularisation. La Figure II-21 présente les isovaleurs de la composante  $\varepsilon_{rr}$  du tenseur des déformations. On peut y voir que la déformation est fortement compressive en fond de cannelure, ce qui correspond à la forte réduction d'épaisseur. Au voisinage de la bande de roulement les déformations radiales sont plus faibles et positives.

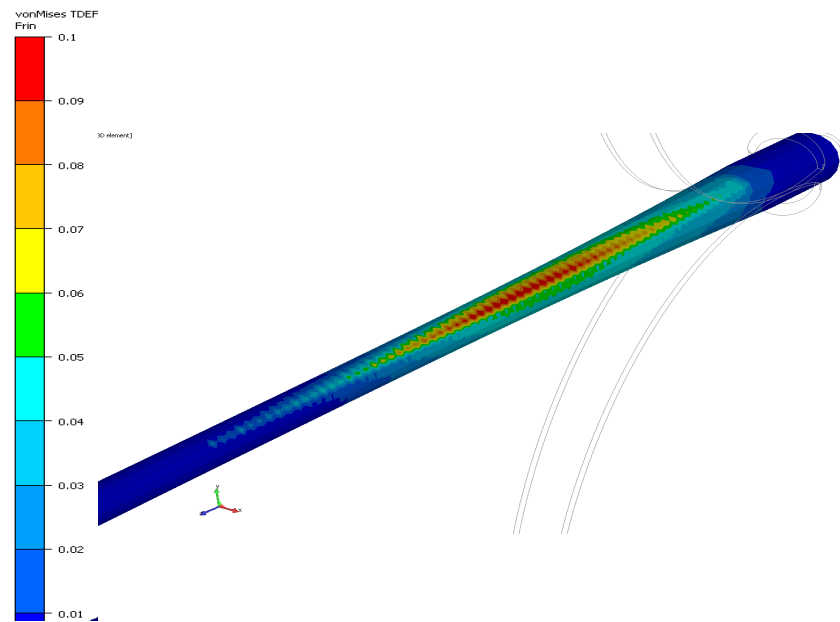


Figure II-20. Isovaleurs de déformation incrémentale sur un coup de cage

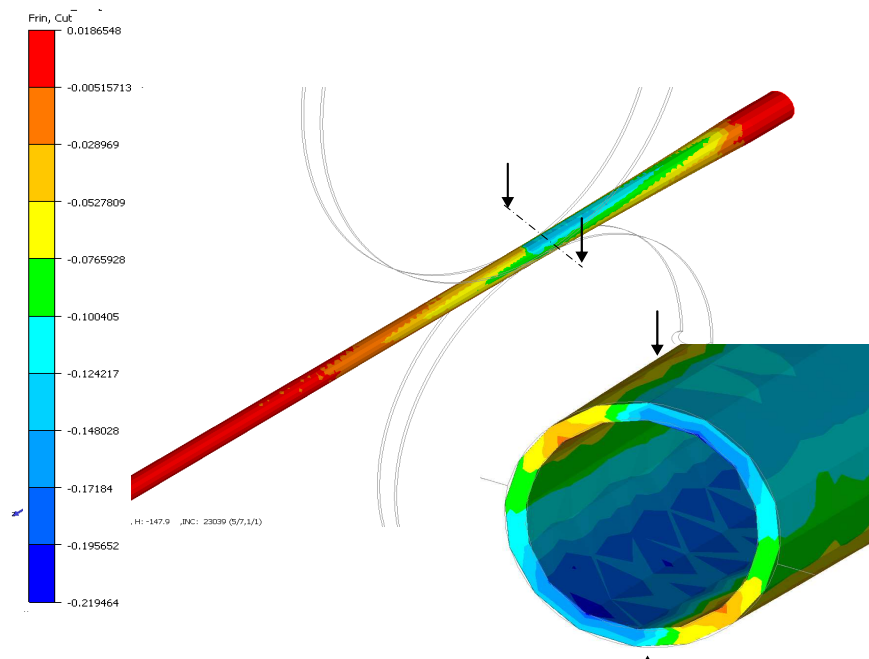


Figure II-21. Isovaleurs de déformation  $\varepsilon_{rr}$  à  $t=0.19$  s sur un coup de cage



En ce qui concerne les contraintes, on se place à un instant correspondant à un stade intermédiaire du coup de cage, lorsque les matrices sont au milieu de la zone de déformation, lors de la passe aller (au voisinage l'incrément de déformation maximale). La Figure II-22 montre les isovaleurs de la composante  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes. Cette contrainte est très compressive (négative) en fond de cannelure, là où l'on écrase la matière. On notera que la déformation associée dans la direction  $z$  ( $\varepsilon_{zz}$ ) est un allongement (positif) car du fait de l'effet de paroi mince, le champ de contrainte est dominé par la contrainte hydrostatique, très compressive. Par contre, près de la bande de roulement,  $\sigma_{zz}$  est fortement tensile (positive). En amont et en aval de la zone de contact avec les matrices, on visualise les contraintes résiduelles qui dépassent les 360 MPa. Le cisaillement quant à lui est plus intense vers la bande de roulement comme le montre la Figure II-23 représentant la contrainte de cisaillement maximum.

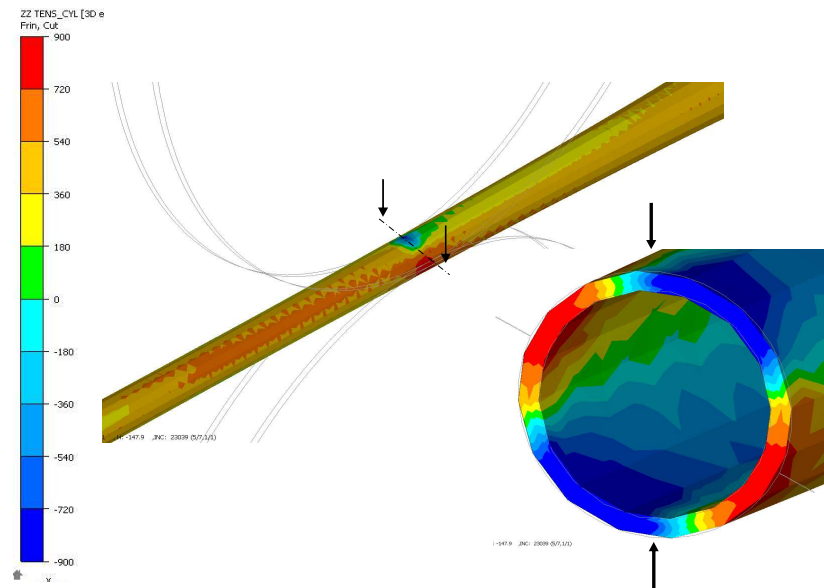


Figure II-22. Isovaleurs de la composante  $\sigma_{zz}$  à  $t=0.19$  s sur un coup de cage

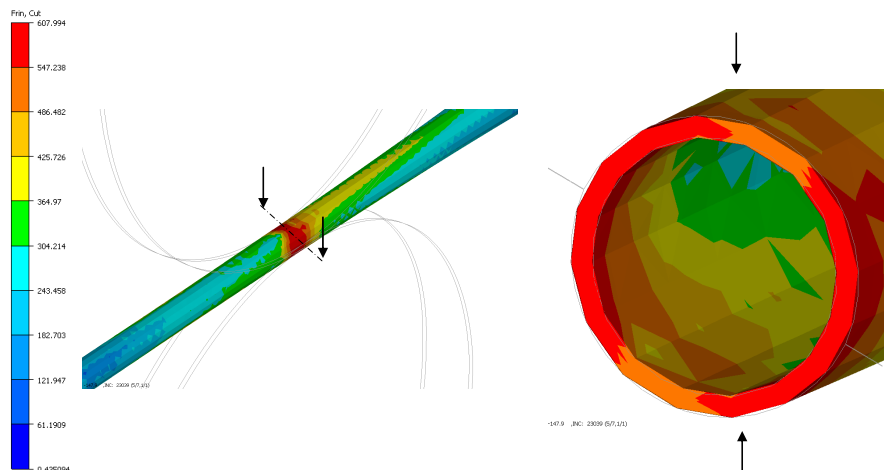
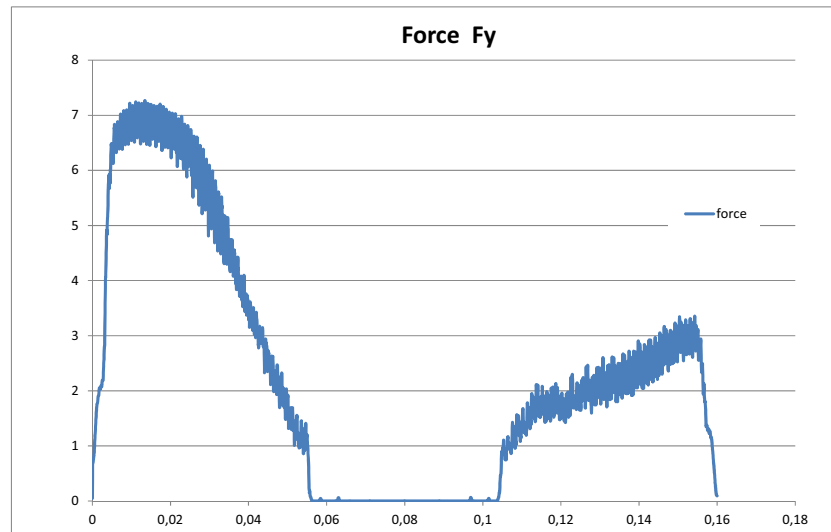


Figure II-23. Isovaleurs de cisaillement maximal à  $t=0.19$  s sur un coup de cage

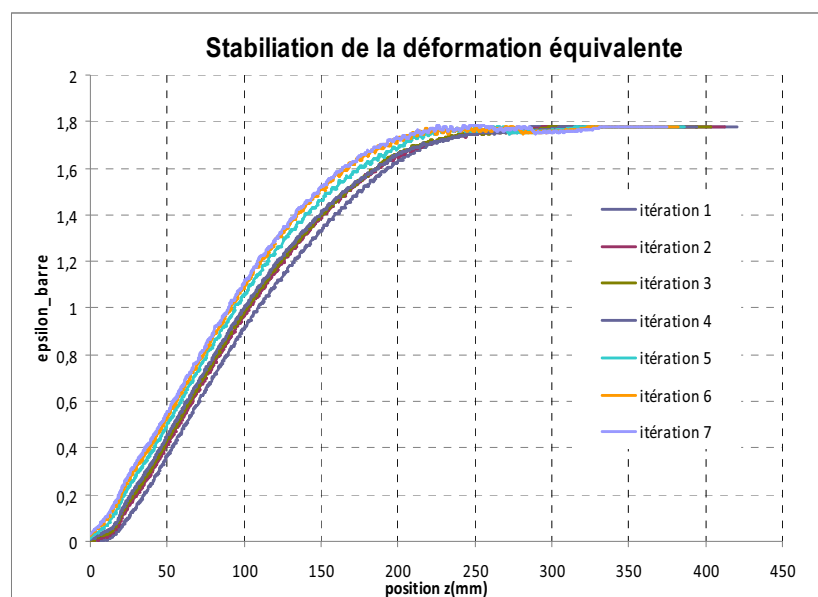
La Figure II-24 présente la composante  $F_y$  de la force de séparation des matrices (*force de laminage*) pendant un coup de cage. Le premier pic correspond à la zone de déformation maximale de la passe aller et le second correspond à celle de la passe retour. On peut

remarquer que l'essentiel de la déformation se fait sur la passe aller, comme observé dans le procédé réel.

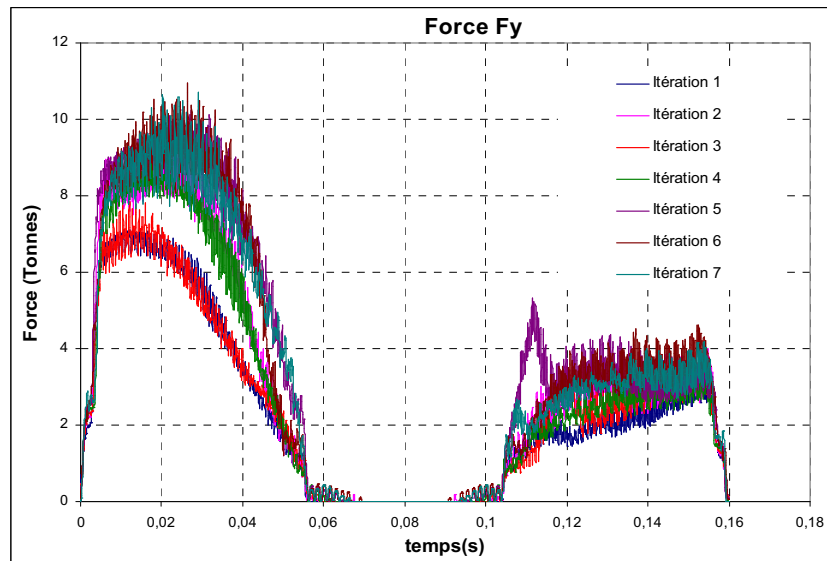


### II.2.2.3. Recherche de l'état pseudo-périodique

On s'intéresse ici à l'atteinte de l'état pseudo périodique. Du point de vue du vocabulaire, nous désignerons par *itérations*, tous les coups cage ayant servi à l'atteinte de l'état pseudo périodique. Nous présentons ici les résultats sur 7 itérations. Les itérations sont faites de façon enchaînée, tout en respectant l'avance et la rotation nominale du tube après chaque itération. Au début de chaque itération, le champ de déplacement est remis à zéro afin d'isoler clairement les déplacements ayant eu lieu à chaque itération. La Figure II-25 présente l'évolution de la déformation équivalente en fonction de la position  $z$  sur le tube, pendant 7 itérations. Entre l'itération 1 et 3, les déformations varient beaucoup ; au-delà de l'itération 4, on remarque une stabilisation des résultats.



La stabilisation est également visible sur la force de laminage ( $F_y$ ). Après l'itération 4 ([Figure II-26](#)), toutes les forces présentent quasiment une même valeur maximum d'environ 10 tonnes.



*Figure II-26. Stabilisation de la force de laminage sur 7 coups de cage*

Les résultats ci-dessus confortent les constatations et hypothèses de départ sur la pseudo stationnarité du procédé et vont dans le même sens que ceux de [\[Lodej et al. 2006\]](#)

### II.2.3. Améliorations de la qualité des résultats

On veut trouver la manière optimale de raffiner le maillage, permettant d'obtenir des résultats les plus précis possible pour un temps de calcul aussi réduit que possible. On souhaite notamment détecter d'éventuels gradients de déformations et de contraintes dans l'épaisseur du tube suivant la direction radiale, pour pouvoir effectuer ensuite des calculs d'endommagement précis.

#### II.2.3.1. Directions optimales de raffinement de maillage

Dans un premier temps, nous avons fait des essais numériques afin de déterminer des directions de raffinement du maillage garantissant le meilleur compromis précision/temps de calcul. On part du maillage grossier présenté précédemment et on effectue trois raffinements différents : suivant la direction  $r$ , suivant les directions  $(r, \theta)$  et suivant les directions  $(r, \theta, z)$  (Figure II-27).

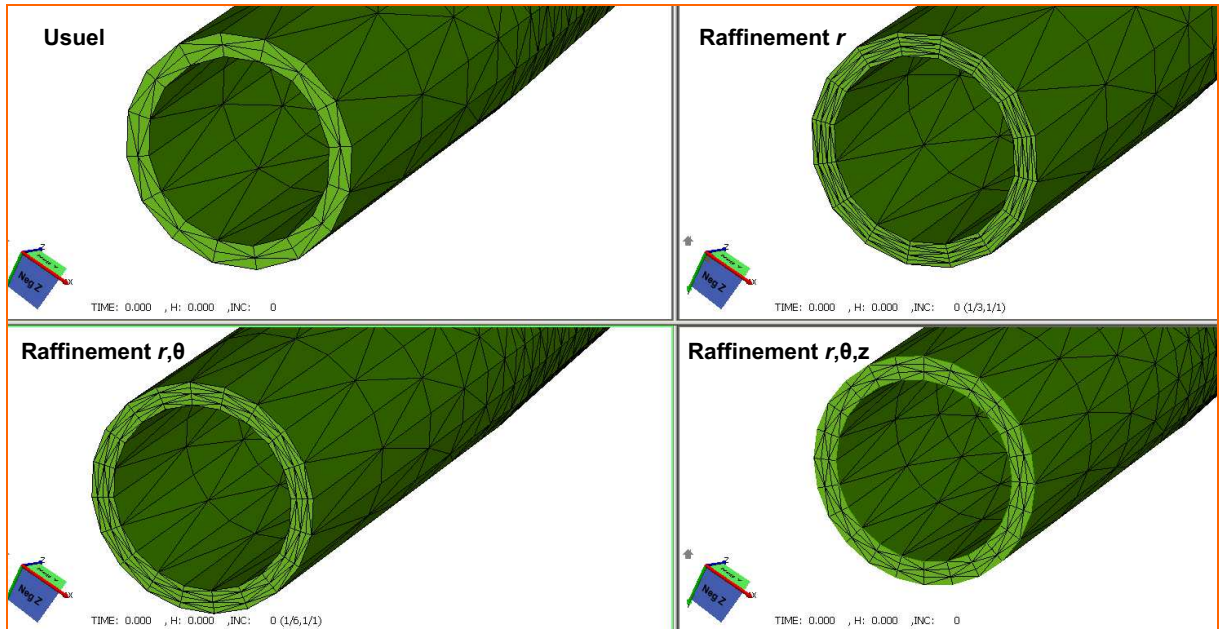
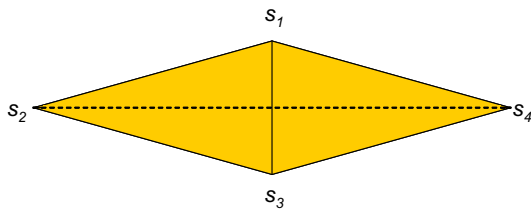


Figure II-27. Maillages utilisés pour déterminer le raffinement optimal

A chaque type de raffinement correspond un degré d'anisotropie que nous caractérisons ici par le facteur d'élongation moyen égal à la moyenne des rapports entre les plus grandes et plus petites arêtes des éléments du maillage (Figure II-28) :



$$\vartheta_{moy} = \frac{1}{Nbelt} \sum_e \frac{\max_{(i \neq j) \in e} \|S_i - S_j\|}{\min_{(k \neq l) \in e} \|S_k - S_l\|} \geq 1 \quad (II.4)$$

Figure II-28. Élément anisotrope 3D

Avec  $S_k$  le  $k^{ième}$  sommet de l'élément  $e$ , et  $N_{belt}$  représente le nombre total d'éléments du maillage. Les facteurs d'élongation et les dimensions des différents maillages sont inscrits dans le [Tableau II-4](#).

Tableau II-4. Dimensions des maillages utilisés pour le raffinement optimal

Maillage	Nb Nœuds suivant $\theta$	Nb Nœuds suivant $r$	Nb Nœuds suivant $z$	Facteur d'anisotropie moyen $\vartheta_{moy}$
Usuel	16	3	167	7,20
Raffinement $r$	16	6	167	17,64
Raffinement $(r, \theta)$	20	5	167	12,43
Raffinement $(r, \theta, z)$	24	4	198	8,18

La [Figure II-29](#) présente les isovaleurs de déformation équivalente en coupe, à l'instant  $t=0,024s$  ; les parties en gris correspondent à des dépassements d'échelle. Dans toutes les simulations, la déformation maximale est localisée à l'intérieur du tube et à proximité de la zone de contact avec le fond des cannelures des matrices. Le maximum de déformation est plus marqué et plus étalé avec le raffinement  $r$ , contrairement au raffinement  $(r, \theta)$  où il est nettement moins prononcé et plus localisé. Avec le raffinement  $r$  on voit apparaître des petits gradients suivant la direction radiale, cependant ils sont assez bruités. Le raffinement  $(r, \theta, z)$  quant à lui permet de mieux lisser les gradients observés avec le maillage usuel mais il n'apporte pas d'informations qualitatives supplémentaires.

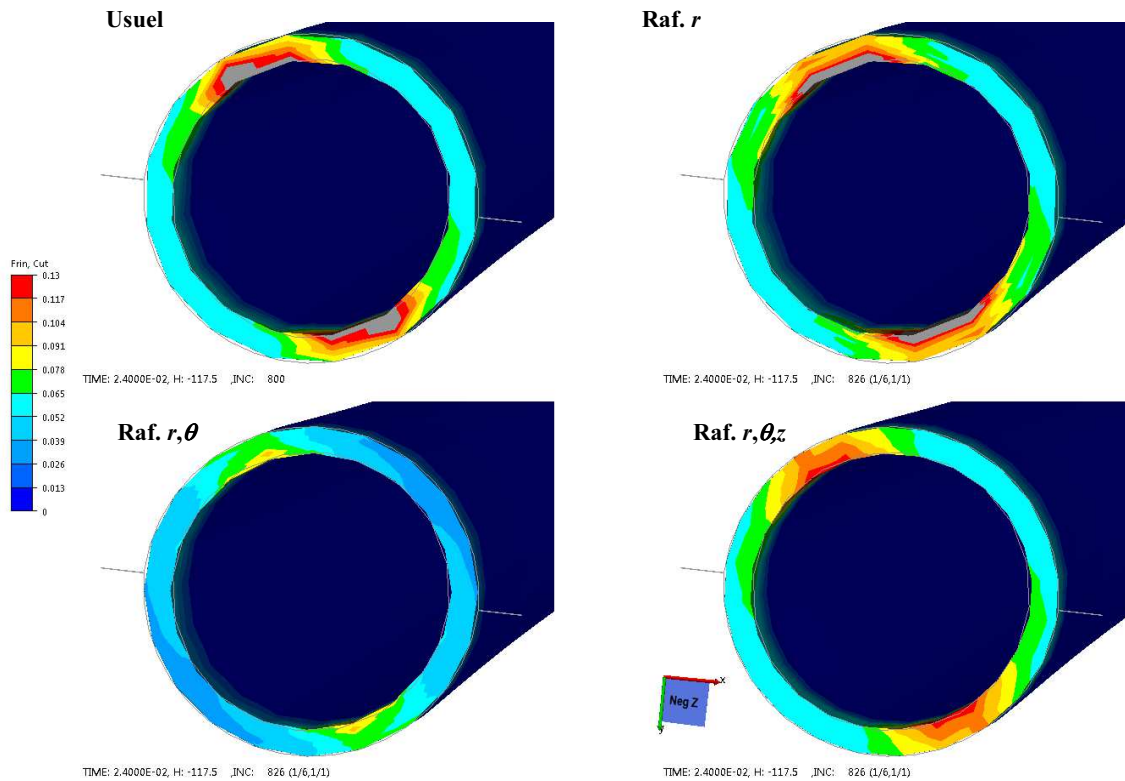
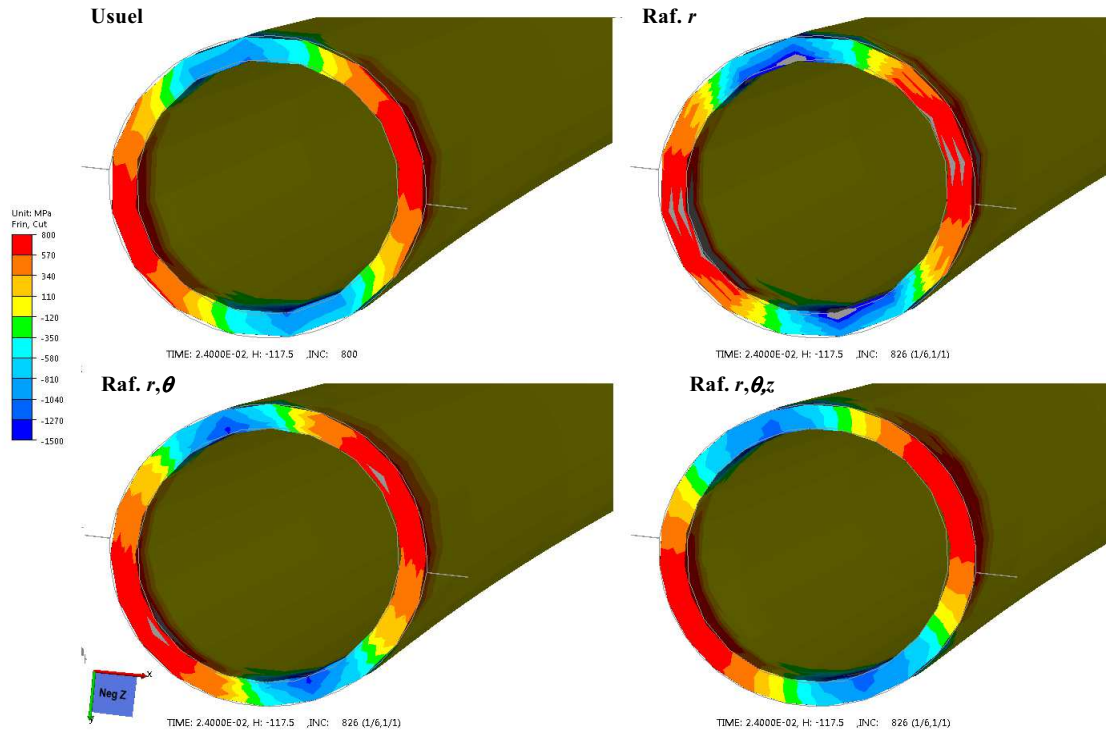


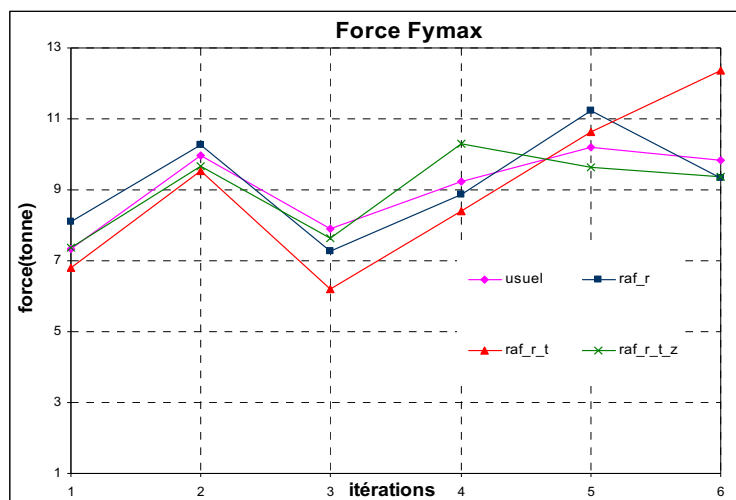
Figure II-29. Comparaison des isovaleurs de déformation équivalente pour différents raffinements de maillage

En ce qui concerne les contraintes, par exemple la composante  $\sigma_{zz}$  dont les isovaleurs sont présentées sur la Figure II-30, la localisation des extrema est la même dans tous les cas. Ici aussi, ils sont plus prononcés dans le cas du raffinement  $r$ . En termes de gradients, on observe quelques isovaleurs intermédiaires supplémentaires avec les raffinements  $r$  et  $(r, \theta)$ ; ces dernières sont un peu plus régulières avec le raffinement  $(r, \theta)$ . Le raffinement  $(r, \theta, z)$  de son côté, donne des champs plus lisses et réguliers. Par contre, ici aussi, il n'apporte pas d'informations qualitatives supplémentaires en termes de gradients.



**Figure II-30. Comparaison des isovaleurs de  $\sigma_{zz}$  pour différents raffinements de maillage**

Après 6 itérations, le raffinement  $(r, \theta, z)$  permet une meilleure stabilisation vers l'état pseudo périodique que les deux autres comme le montre l'évolution du maximum de la force de laminage présenté sur la Figure II-31. Avec les raffinements  $r$  et  $(r, \theta)$  les efforts de laminage continuent à osciller.



**Figure II-31. Stabilisation de la force de laminage**



Tableau II-5. Temps CPU cumulé pour 7 itérations sur une machine à 4 processeurs

	Nœuds total	Facteur d'anisotropie moyen $\vartheta_{moy}$	Temps CPU (h)
Usuel	7 920	7,20	36
Raffinement en $r$	16 032	17,64	126
Raffinement $(r, \theta)$	16 700	12,43	108
Raffinement $(r, \theta, z)$	19 008	8,18	111

Le Tableau II-5 présente les temps de simulation obtenus dans chaque cas. Bien que son maillage ait un plus faible nombre de  $ddl$ , le raffinement  $r$  nécessite le temps de calcul le plus élevé. En revanche pour les raffinements  $(r, \theta)$  et  $(r, \theta, z)$ , on obtient des temps de calcul semblables. Pour comprendre ce paradoxe, nous avons analysé la résolution du problème mécanique en observant le comportement du solveur linéaire dans chacun des cas.

Sur la Figure II-32, on représente l'évolution du nombre d'itérations du solveur linéaire pendant 50 incréments de calcul. Les raffinements  $(r, \theta)$  et  $(r, \theta, z)$  nécessitent un nombre d'itérations linéaires légèrement supérieur à celui du cas usuel ; ce qui est normal puisque le nombre d'itération dépend du nombre de  $ddl$ . Le raffinement  $r$  de son côté nécessite considérablement plus d'itérations ; ce qui pourrait être surprenant, puisque le maillage le plus fin (raffinement  $(r, \theta, z)$ ) qui a 20% de  $ddl$  en plus nécessite plus d'itérations. Le raffinement  $r$  introduit donc une détérioration du conditionnement du système linéaire causé par la forte anisotropie du maillage ( $\vartheta_{moy} > 17$ ).

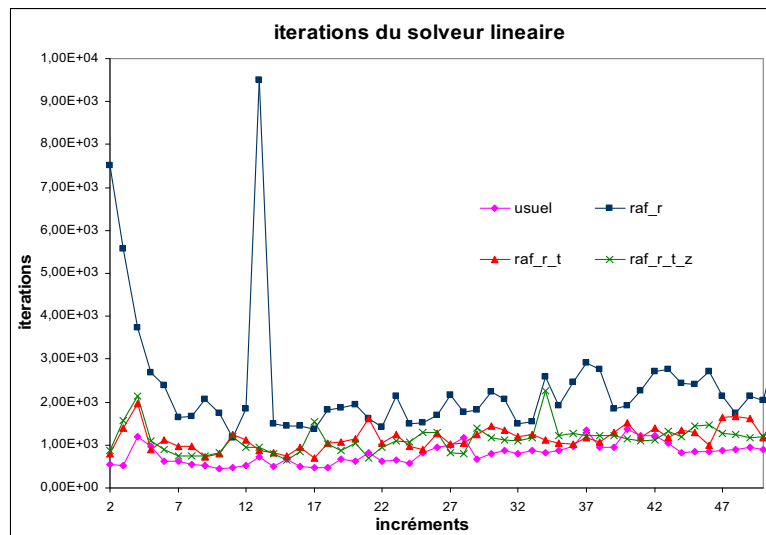


Figure II-32. Evolution des du nombre itération cumulé du solveur linéaire pour les différents raffinements de maillage

En résumé, le test de raffinement suivant les différentes directions nous apporte plusieurs indications. On espérait détecter de nouveaux gradients de déformations et de contraintes, ou mieux révéler ceux déjà présents avec le maillage usuel. Cependant, quel que soit le type de raffinement effectué, il n'apparaît pas d'informations supplémentaires nettes concernant ces

gradients. Les faibles gradients observés dans l'épaisseur avec le raffinement  $r$  sont assez bruités et tout porte à croire qu'ils ne sont pas fiables compte tenu de l'anisotropie du maillage et de la difficulté de convergence du solveur linéaire et de l'atteinte de l'état pseudo périodique. En termes de qualité des résultats, le raffinement  $(r, \theta, z)$  donne des résultats plus lisses et plus réguliers ; il est également le plus intéressant du point de vue de l'atteinte de l'état pseudo périodique.

L'accentuation de l'anisotropie ( $\vartheta_{moy} > 17$ ) du maillage dans le cas du raffinement uniquement suivant la direction  $r$ , engendre un mauvais conditionnement du système linéaire qui se traduit pas un temps de calcul très élevé. Le raffinement  $(r, \theta)$  présentant également un degré d'anisotropie élevé ( $\vartheta_{moy} > 12$ ), il n'apporte aucune informations supplémentaire ni au niveau de la qualité de la solution, ni au niveau de l'atteinte de l'état pseudo périodique.

Les raffinements du maillage de la transition doivent donc se faire de façon à respecter les facteurs d'anisotropie du maillage usuel ( $\vartheta_{moy} = 7$ ), faute de quoi, on risque d'augmenter les temps de calcul sans pour autant améliorer la qualité des résultats voire même la détériorer.

### II.2.3.2. Convergence éléments finis des calculs

L'objectif maintenant est de déterminer la solution la plus précise possible (solution de référence) en raffinant progressivement le maillage suivant  $(r, \theta, z)$ , et de trouver ensuite le plus petit maillage permettant d'obtenir des résultats suffisamment proches de cette solution de référence en un temps de calcul minimum. On considère trois maillages ( $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ ) construits par raffinements successifs du maillage usuel (Figure II-33), en maintenant la valeur du coefficient d'anisotropie initial ( $\vartheta_{moy} \approx 7$ ). Pour les calculs, on considère seulement la passe aller d'un coup de cage. Les caractéristiques des maillages utilisés sont précisées dans le Tableau II-6.

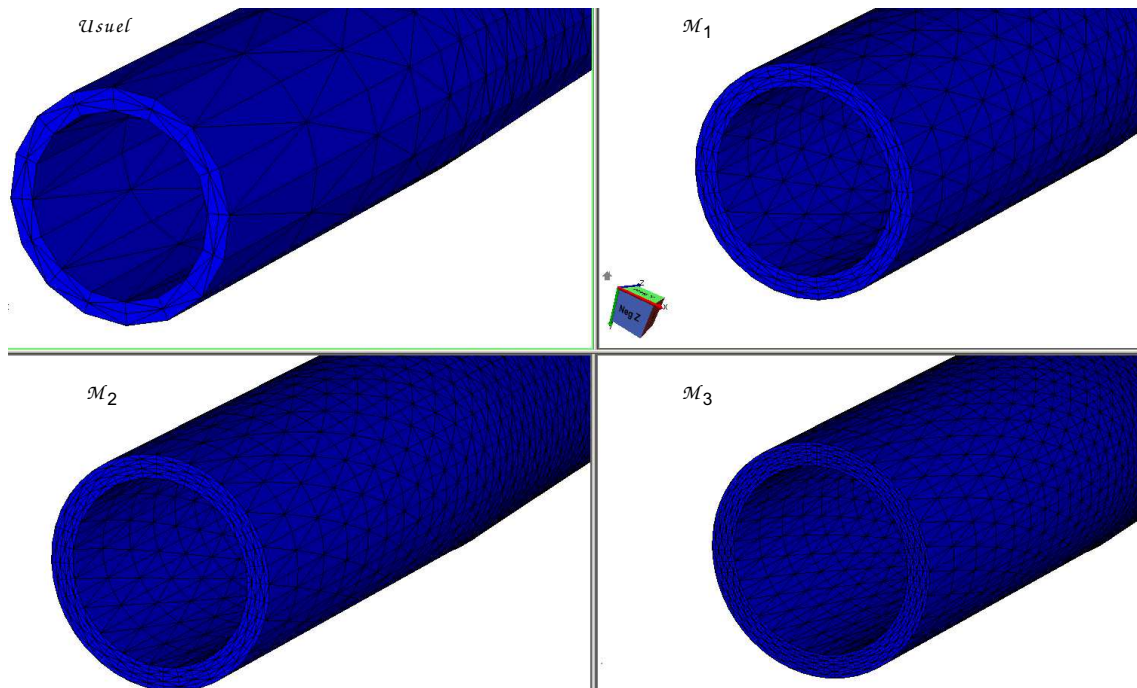


Figure II-33. Maillages utilisés pour l'étude de précision



Tableau II-6. Caractéristiques des maillages pour l'étude de précision

	Nb Nœuds suivant $\theta$	Nb Nœuds suivant $r$	Nb Nœuds suivant $z$	Nœuds
Usuel	16	3	167	7 920
$\mathcal{M}_1$	30	5	234	35 100
$\mathcal{M}_2$	40	6	288	69 116
$\mathcal{M}_3$	60	8	393	188 640

La Figure II-34 et la Figure II-35 montrent les isovaleurs de la composante  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes en vue en surface et en coupe à l'instant  $t = 0,06$  s. On note un gros écart entre le maillage usuel et  $\mathcal{M}_1$ , pour tous les champs et pour les efforts. A partir du maillage  $\mathcal{M}_1$ , les résultats se stabilisent.  $\mathcal{M}_3$  peut clairement être considéré comme un maillage de référence. Les contraintes et les efforts sont plus lisses. Pour  $\sigma_{zz}$  dans l'épaisseur, le calcul  $\mathcal{M}_1$  est plus proche de  $\mathcal{M}_3$ . C'est moins vrai pour la triaxialité des contraintes (Figure II-36) où  $\mathcal{M}_2$  permet de préciser la valeur des minima. En ce qui concerne les valeurs surfaciques de  $\sigma_{zz}$ , il faut atteindre le raffinement  $\mathcal{M}_3$  pour éliminer quasiment toute la trace d'oscillation. Toutefois, d'un point de vue ingénieur, on peut considérer que le maillage  $\mathcal{M}_1$  contient déjà l'essentiel des informations que l'on attend des calculs. Il en irait différemment si l'on voulait effectuer des calculs d'endommagement précis en surface. Quand on regarde le temps de calcul, on constate que le gain en précision a un coût considérable ( $\mathcal{M}_2$  deux fois plus coûteux que  $\mathcal{M}_1$ ).

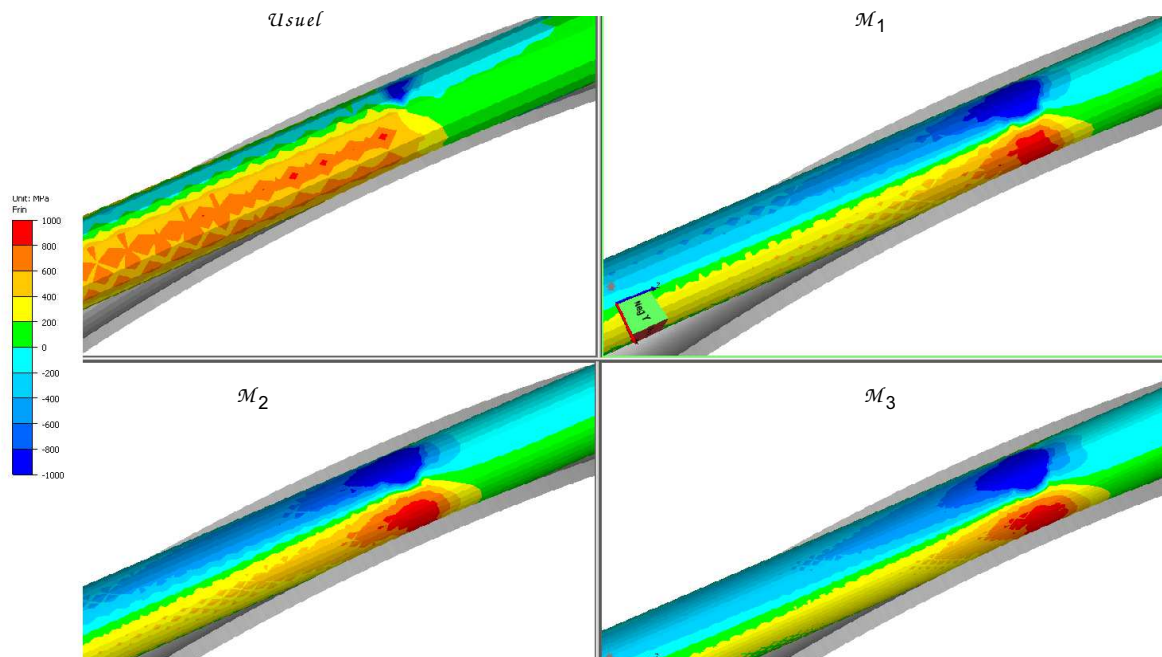


Figure II-34. Comparaison des isovaleurs de  $\sigma_{zz}$  dans la zone de forte déformation pour différents raffinements de maillage

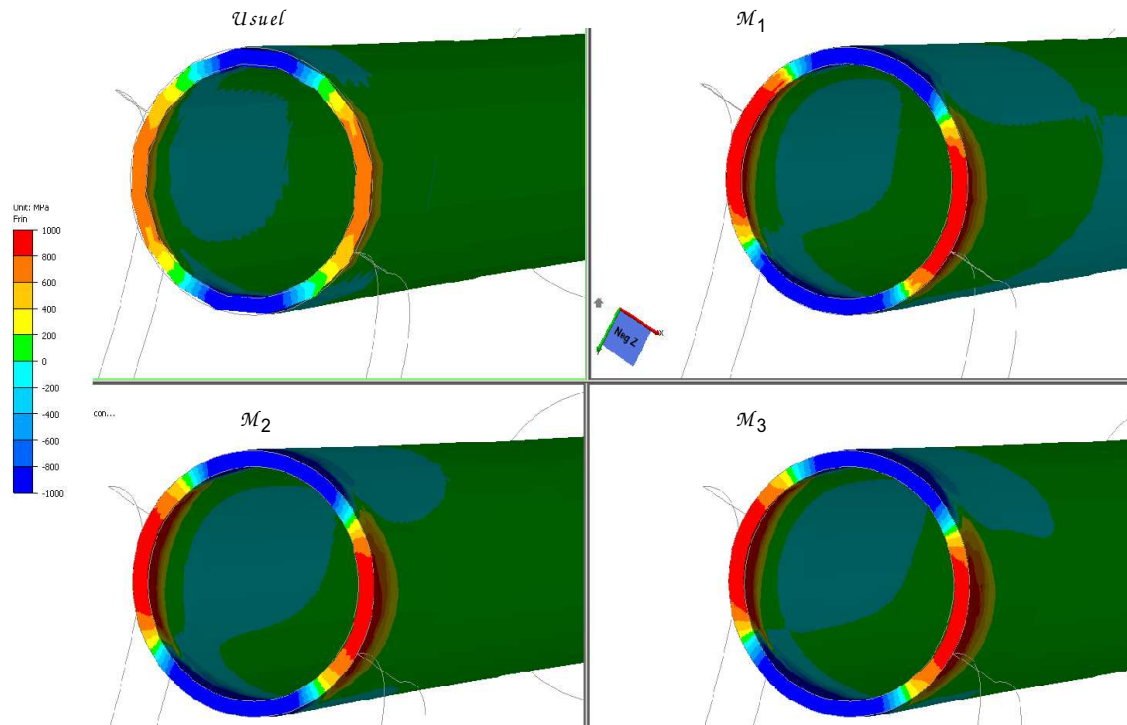


Figure II-35. Comparaison des isovaleurs de  $\sigma_{zz}$  dans la zone de forte déformation pour différents raffinements de maillage : vue en coupe

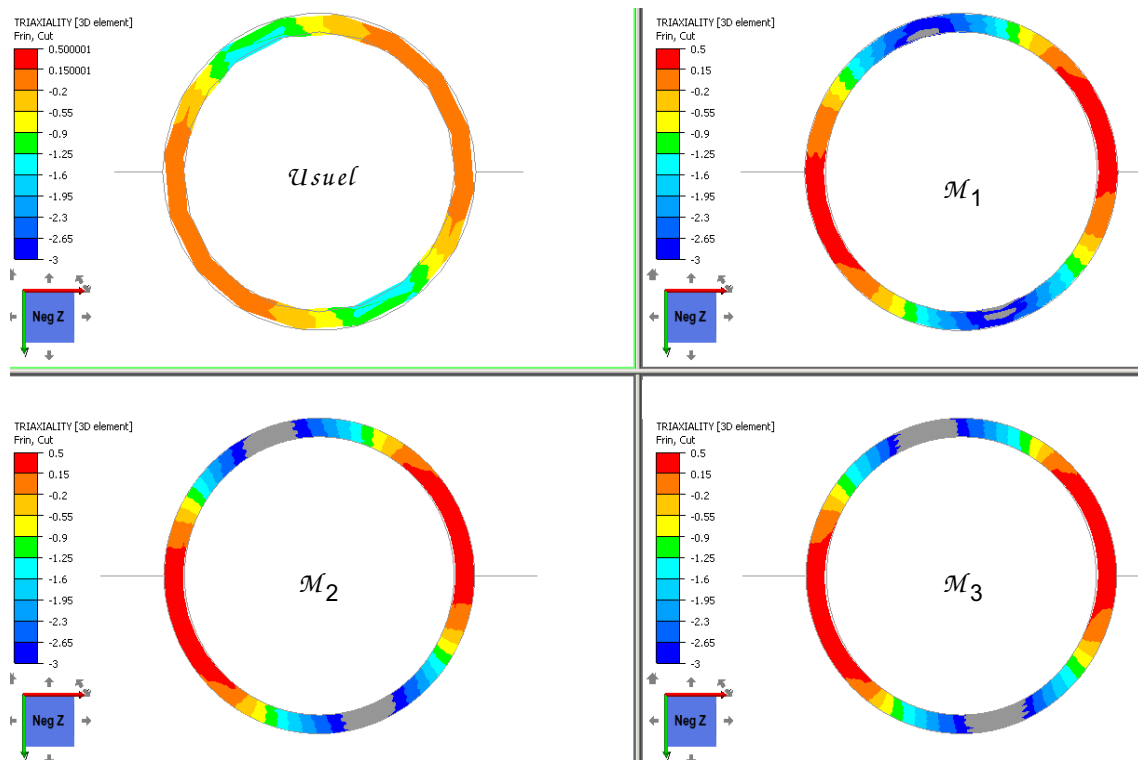


Figure II-36. Comparaison des isovaleurs de triaxialité des contraintes dans la zone de forte déformation pour différents raffinements de maillage

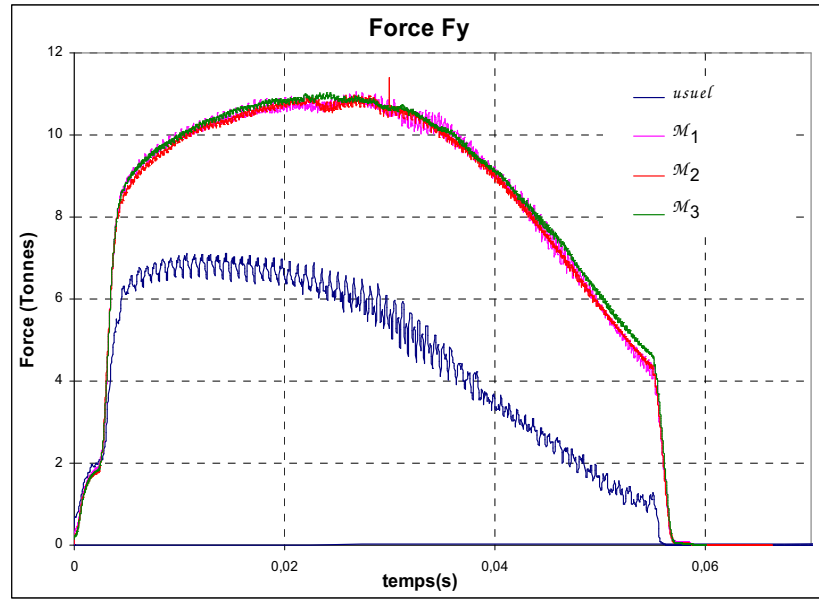


Figure 37. Evolution de la force de laminage pendant la passe aller d'un coup de cage pour différents raffinements de maillage

Tableau II-7. Temps de calcul passe aller sur 16 cœurs (cluster de calcul) pour différents raffinements de maillages

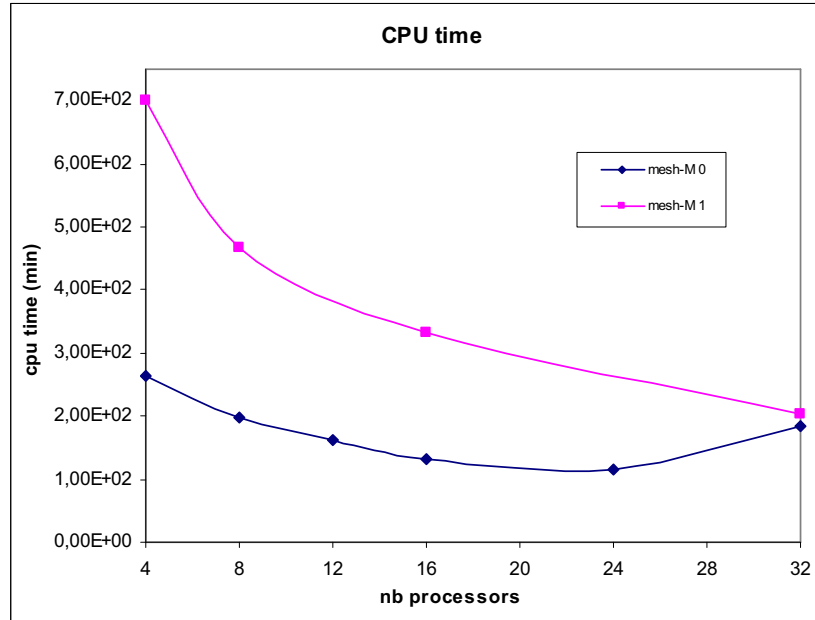
Maillage	Temps de calcul
<i>usuel</i>	10 h 3 min
$\mathcal{M}_1$	25 h 40 min
$\mathcal{M}_2$	48 h 45 min
$\mathcal{M}_3$	137 h 8 min

Comme le montre l'analyse du [Tableau II-7](#), pour passer du maillage usuel au maillage  $\mathcal{M}_1$  il faut un temps de calcul environ 2,5 fois plus grand, on passe de moins d'une demi-journée de calcul à un peu plus d'une journée de calcul. L'atteinte de l'état pseudo périodique nécessitant en moyenne 6 itérations (6 calculs aller-retour des matrices), il faudrait donc environ une semaine de calcul. Quant à  $\mathcal{M}_2$ , il implique un facteur deux supplémentaire, ce qui reste assez élevé dans un contexte industriel.

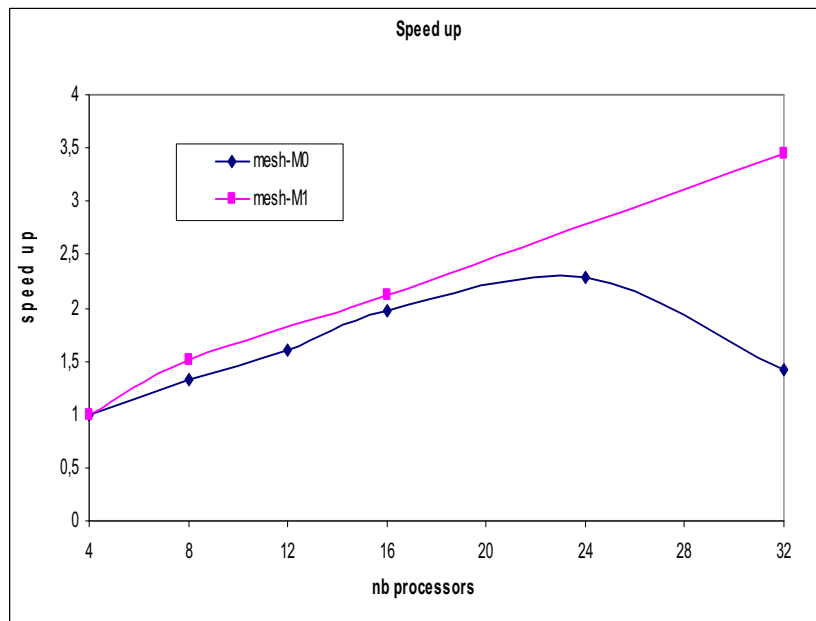
#### II.2.4. Apports du calcul parallèle

On analyse ici les apports du calcul parallèle en tant que solution permettant de réduire le temps de calcul avec le maillage  $\mathcal{M}_1$  et de le faire tendre vers celui du maillage usuel pour qu'il soit plus viable. Pour ce faire, on augmente progressivement le nombre de processeurs de 4 à 32. La [Figure II-38](#) et la [Figure II-39](#) présentent respectivement l'évolution du temps CPU et de l'accélération en fonction du nombre de processeurs. On présente aussi à titre indicatif les résultats obtenus avec le maillage usuel pour ces mêmes nombres de processeurs. Pour ce dernier, le nombre optimal de processeur est 24, au-delà de cette valeur, le temps de calcul commence à croître à cause de la chute de l'efficacité du calcul parallèle. Le temps de calcul avec le maillage  $\mathcal{M}_1$  décroît jusqu'à atteindre celui du maillage usuel sur 4 processeurs,

entre 16 et 24 processeurs. Il devient même plus petit au-delà de 24 processeurs. Ces résultats apportent une première réponse d'un point de vue ingénieur. Cependant, comme le montre la [Figure II-38](#), il faut utiliser plus de 20 processeurs pour retrouver le temps de calcul avec le maillage usuel sur 4 processeurs ; ce qui demeure malgré tout une demande en ressources CPU assez importante du point de vue industriel.



*Figure II-38. Evolution du temps CPU pour le maillage usuel et le maillage  $\mathcal{M}_1$*



*Figure II-39. Evolution du temps CPU pour le maillage usuel et le maillage  $\mathcal{M}_1$*

### **II.2.5. Synthèse**

L'objectif de ce chapitre était de dresser l'état des lieux de la simulation numérique du laminage à pas de pèlerin avec Forge® en version existante, tout en présentant les premières améliorations et préconisations. Des études et analyses menées, il ressort plusieurs éléments intéressants :

Le maillage usuel, malgré son caractère très grossier pour la prédiction des valeurs et des gradients, permet de prédire les principales localisations des extrema ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$ , triaxialité,...) en un temps de calcul relativement faible. Cependant, les résultats obtenus sont assez loin de la réalité en termes de distribution et de valeurs.

Les solutions sont nettement meilleures sur des maillages plus raffinés à condition que le raffinement n'amplifie pas l'anisotropie du maillage usuel qui est quasiment optimale. La principale limitation au raffinement est le temps de calcul. En effet, comme on peut le voir dans le [Tableau II-7](#), le calcul sur une passe aller avec le maillage  $\mathcal{M}_2$  (70 000 nœuds) a nécessité environ 2 jours sur 16 cœurs de calcul. Pour le maillage  $\mathcal{M}_3$  (180 000 nœuds), il faut environ 3 fois plus de temps. La bonne nouvelle est qu'à partir de  $\mathcal{M}_1$  (35 000 nœuds), les résultats obtenus sont très proches de ceux calculés sur le maillage le plus fin ( $\mathcal{M}_3$ ). Les calculs effectués avec un tel maillage peuvent donc être considérés comme satisfaisants et représentatifs de la réalité aussi bien qualitativement que quantitativement, en tout cas du point de vue ingénieur et compte tenu de la longueur des temps CPU évoquée. Cependant le prix à payer pour effectuer un tel calcul n'est pas négligeable.

Grâce au calcul parallèle, il est possible de diminuer considérablement le temps de calcul avec le maillage  $\mathcal{M}_1$  et le ramener à celui avec le maillage usuel. Malheureusement, cette compensation demande un nombre important de processeurs ( $>20$ ), ce qui n'est pas très viable du point de vue industriel où les importantes ressources CPU sont plutôt mobilisées pour des calculs de taille bien plus grandes. L'objectif dans la suite de ce travail est donc de développer une méthode numérique permettant de réduire davantage encore le temps CPU surtout à partir du maillage  $\mathcal{M}_1$  tout en nécessitant le minimum possible de ressources CPU.

---

# III

## Méthode Multimaillages Multi physiques (MMP)

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la description de la méthode multimaillages intégrée au sein de Forge®. La première partie est dédiée à un bref état de l'art des différentes méthodes d'accélération de calcul existant dans la littérature. La deuxième partie est consacrée à la description de la méthode au sein de Forge®, tout en se plaçant dans le cadre d'une loi de comportement élastoplastique utilisé dans le cas du laminage à pas de pèlerin. L'extension de la méthode aux procédés continus est également discutée dans cette partie. Dans la dernière partie du chapitre, deux cas d'application sont présentés, pour illustrer les performances de la méthode sur des procédés discontinus et continus.

---

### SOMMAIRE

<b>III.1. GENERALITE SUR LES METHODES D'ACCELERATION DE CALCUL.....</b>	<b>59</b>
<b>III.2. METHODE MULTIMAILLAGES MULTIPHYSIQUES PARALLELE (MMP) DANS FORGE® ...</b>	<b>65</b>
<b>III.3. GENERATION DU MAILLAGE MECANIQUE .....</b>	<b>67</b>
III.3.1. Définition de la zone de vraie déformation.....	67
III.3.2. Algorithme de déraffinement local de maillage.....	68
III.3.3. Aspects parallèle du déraffinement de maillage .....	70
<b>III.4. TRANSFERT DE CHAMPS.....</b>	<b>72</b>
III.4.1. Transfert de champs P1 .....	72
III.4.2. Transfert de champs P0 .....	74
III.4.3. Transport sans relocalisation.....	75
III.4.4. Aspects parallèles du transfert de champs.....	75
<b>III.5. QUELQUES APPLICATIONS INDUSTRIELLES.....</b>	<b>77</b>
III.5.1. Procédés discontinus .....	77
III.5.2. Procédés continus .....	79

### III.1. Généralité sur les méthodes d'accélération de calcul

La résolution numérique des problèmes multiphysiques par la méthode des éléments finis a connu un essor important ces dernières décennies et a donné lieu à de très nombreuses applications à des problèmes industriels. Cependant un des points limitant demeure le temps de calcul qui peut rester très élevé, même pour un nombre modéré de degrés de liberté. Par exemple, la simulation numérique d'une passe de laminage à pas de pèlerin avec un maillage de 35 000 nœuds, nécessite 24 heures de calcul sur 16 processeurs ; si l'on passe à 70 000 nœuds elle met plus de deux jours pour réaliser le même calcul (comme on l'a vu dans le chapitre 2). Ceci constitue un grand frein du point de vue industriel où l'on a de plus en plus besoin de d'effectuer des calculs précis, faisant donc intervenir des maillages fins.

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de réduction du temps de calcul notamment : les méthodes multigrilles, les méthodes ALE, les méthodes multimaillages... .

Les méthodes Multigrilles consistent à utiliser plusieurs grilles de calcul de tailles décroissantes pour résoudre le système d'équations résultant des équations aux dérivées partielles [Mocellin 1999], [Rey 2007] sur un même domaine.

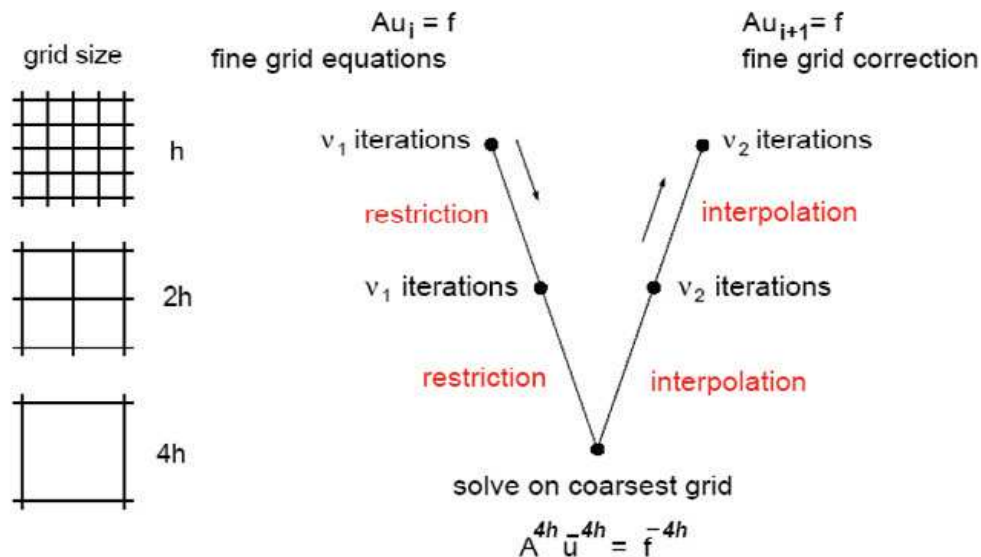


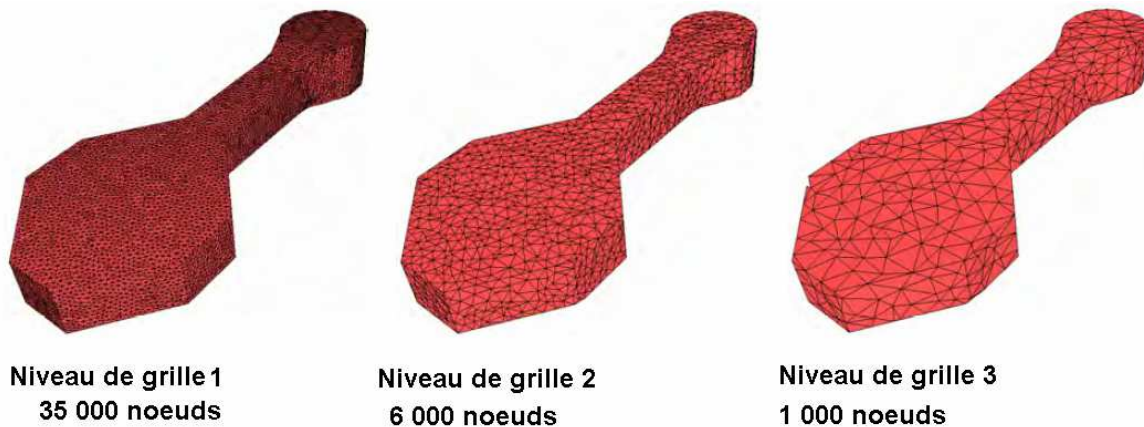
Figure III-1. Principe de la méthode multigrilles [Groche et al. 2007]

Une accélération est obtenue par le fait que les grilles grossières sont plus efficaces que les grilles fines pour réduire les basses fréquences de la solution. La méthode consiste donc à faire quelques itérations sur la grille fine pour «lisser» les hautes fréquences de la solution, puis à calculer une correction sur des grilles de plus en plus grossières pour éliminer les basses fréquences de l'erreur.

Dans le domaine du forgeage, l'approche multigrilles algèbre/géométrique a permis d'obtenir des accélérations par un facteur trois [Rey 2007], sur des problèmes de forgeage de bielle (Figure III-2). Les grilles sont construites de manière géométrique et les corrections sont calculées de manière algébrique sur les grilles ; on itère ces deux méthodes jusqu'à convergence. Pour d'autres applications présentées dans [Ramadan 2010], l'accélération obtenue n'est que de deux alors que l'on s'attend à des accélérations plus conséquentes (facteur 10). La principale limite de cette méthode est la difficulté à générer des grilles très grossières et donc la faiblesse des accélérations obtenues pour certaines applications ([Ramadan 2010]). D'autre part son efficacité parallèle est à démontrer car la construction des



opérateurs de restriction et de prolongement reste délicate sur plusieurs processeurs et peut être source d'importantes chutes de performances.



*Figure III-2. Différentes grilles de résolution pour problème de forgeage de bielle [Rey 2007]*

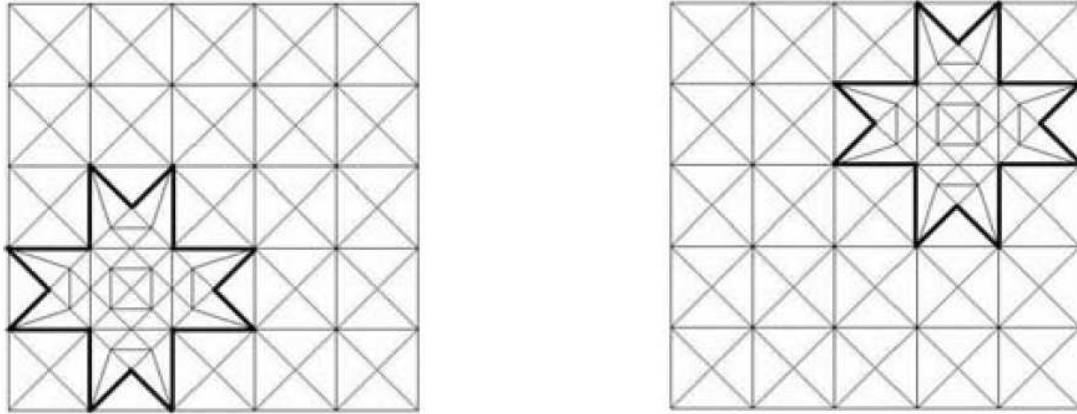
La méthode ALE (Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne) combine à la fois les avantages d'une formulation eulérienne et d'une formulation lagrangienne. Dans la méthode ALE, on autorise le maillage à avoir une vitesse arbitraire par rapport à celle de la matière. La vitesse de maillage étant différente de celle de la matière, l'ALE permet de modéliser des grandes déformations tout en conservant un maillage de bonne qualité tout au long du calcul. Des techniques de régularisation de maillage permettent de limiter la détérioration des éléments. Ainsi, on a besoin de moins d'opérations de remaillage, ce qui permet de réduire les temps de calculs. L'ALE est surtout intéressante pour les procédés où l'on rencontre de fortes déformations de matière, telles que laminage circulaire [Traore 2001], le soudage par frottement malaxage [Guerdoux 2007] et pour des procédés quasi-stationnaires comme le tréfilage, ou le laminage de produits longs avec calcul dans les outils [Philippe 2009] où elle produit une accélération allant jusqu'à un facteur 7. L'ALE constitue donc une approche très intéressante, cependant pour les procédés où l'on a besoin de très peu de remaillages comme le laminage à pas de pèlerin, son intérêt n'est pas évident. Par ailleurs, l'ALE permet surtout de réduire les temps de calcul en réduisant la taille du domaine à mailler ce qui est plus adapté pour des procédés stationnaires.

Une autre méthode de réduction de temps de calcul est la technique du *super élément* proposée dans [Munshi et al. 2005]. Le domaine de calcul est subdivisé en deux zones : une zone de déformation et une zone de non déformation. Toute la zone de non déformation est considérée comme ayant un mouvement de corps rigide, de sorte que les degrés de liberté de tous les éléments de cette zone sont réduits à six. Une accélération des calculs est ainsi obtenue grâce à la diminution drastique du nombre total d'inconnues du problème. Les auteurs considèrent un problème de forgeage orbital, et obtiennent une réduction de temps de calcul d'un facteur d'environ 12. Cette approche est basée sur une hypothèse de déformation rigide plastique ; elle s'applique donc plus difficilement pour des procédés tels que le laminage à pas de pèlerin où les déformations élastiques ne peuvent être négligées.

Dans [Hadoush et al. 2009] une méthode de Raffinement-Déraffinement est proposée pour réduire les temps de calcul. Elle consiste à adapter le maillage par rapport à la déformation imposée. Le maillage est raffiné dans la zone réellement déformée et déraffiné dans la zone de faible déformation, comme le montre la Figure III-3. Les auteurs appliquent la méthode au procédé de formage incrémental et obtiennent une accélération égale à deux. L'inconvénient

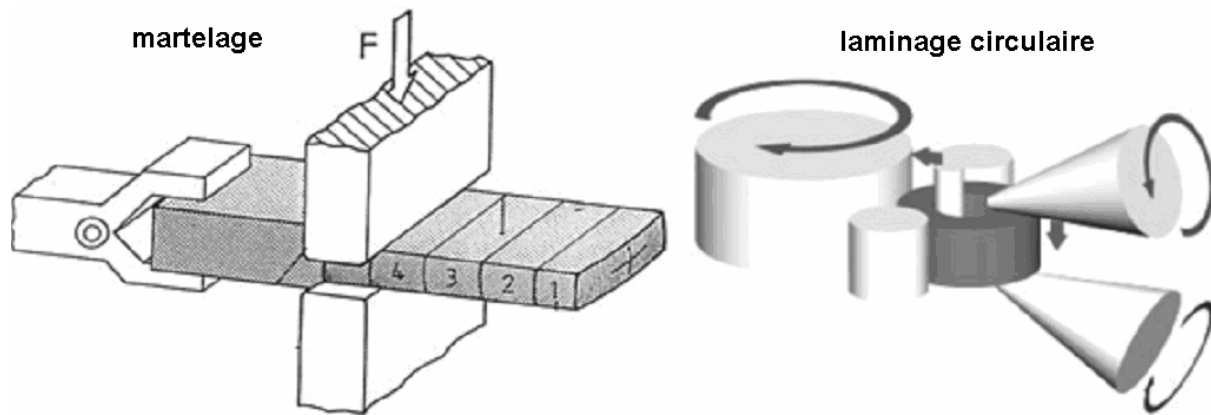


principal de cette méthode est la perte de précision sur les variables cumulées au cours du temps (déformation généralisée,...), car lorsque la zone raffinée du maillage se déplace, les gradients de déformation calculés ne peuvent être conservés avec la même précision sur le maillage déraffiné. Cette méthode est une version très simplifiée de la technique de raffinement adaptatif de maillage autour des zones de forts gradients telle que proposée dans [Boussetta *et al.* 2006; Boussetta *et al.* 2004] par exemple.



*Figure III-3. Maillage raffiné localement à différents instants [Hadoush et al. 2009]*

Dans le cadre des procédés de mise en forme incrémentaux ou à faible zone de contact (Figure III-4), les temps de calcul peuvent être réduits en faisant le calcul sur un maillage raffiné seulement localement (Figure III-5) ; c'est le cas dans les travaux de [Barton *et al.* 2007]. En effet, pour ce genre de procédés, l'essentiel de la déformation se produit dans une zone quasiment réduite à la zone de contact.



*Figure III-4. Procédés à faible zone de contact [Barton et al. 2007]*

L'utilisation d'un maillage localement raffiné permet donc une grande réduction du nombre de degrés de liberté du problème, et donc du temps de calcul, tout en gardant une bonne approximation de la solution.

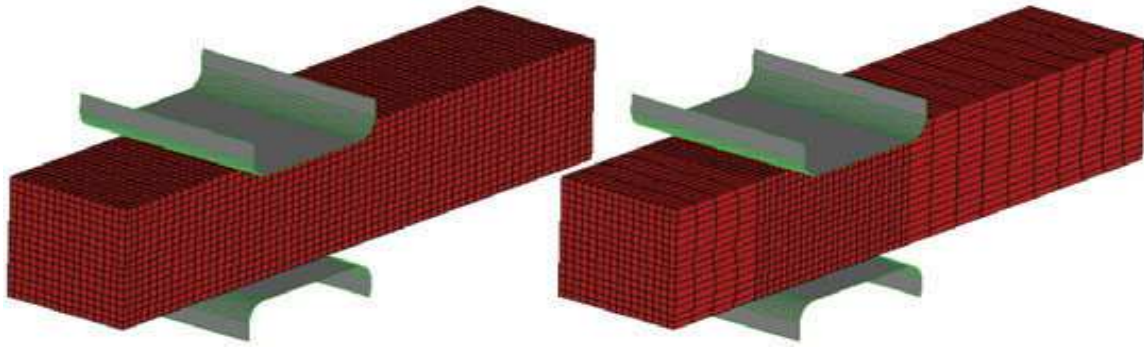


Figure III-5. Maillage FEM usuel (gauche) et maillage localement raffiné (droite) [Barton et al. 2007]

Afin d'éviter la diffusion numérique des champs calculés lors du changement de maillage de calcul, on associe à ces maillages de calcul un maillage de stockage uniformément fin. Ainsi les champs calculés sont interpolés sur ce maillage et sont reprojétés lorsque nécessaire sur des nouveaux maillages localement raffinés (Figure III-6).

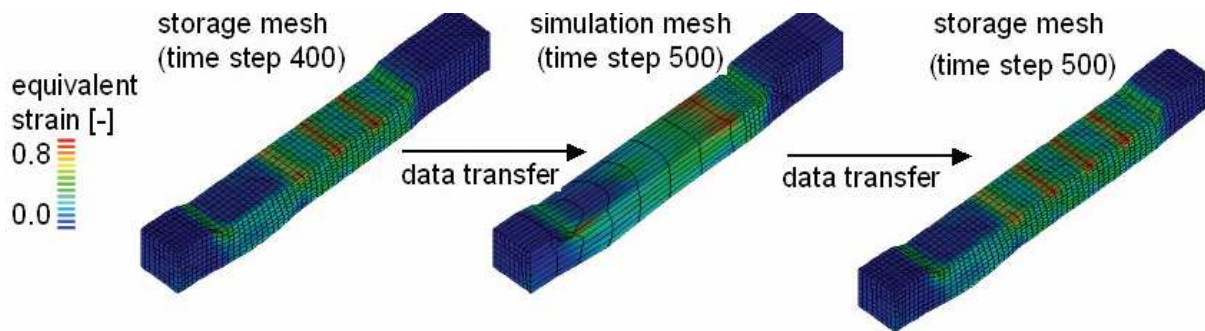


Figure III-6. Transfert de champ entre maillage de calcul et maillage de stockage [Barton et al. 2007]

Cette méthode multimaillages a été appliquée à la simulation de martelage [Barton et al. 2007], et offre des réductions de temps calcul allant jusqu'à 70% (accélération par un facteur supérieur à 3) tout en conservant la même précision (Figure III-7) pour les champs mécaniques.

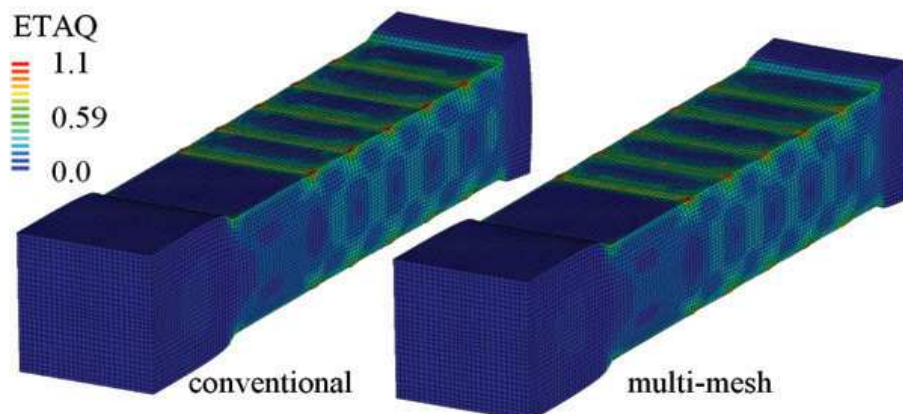
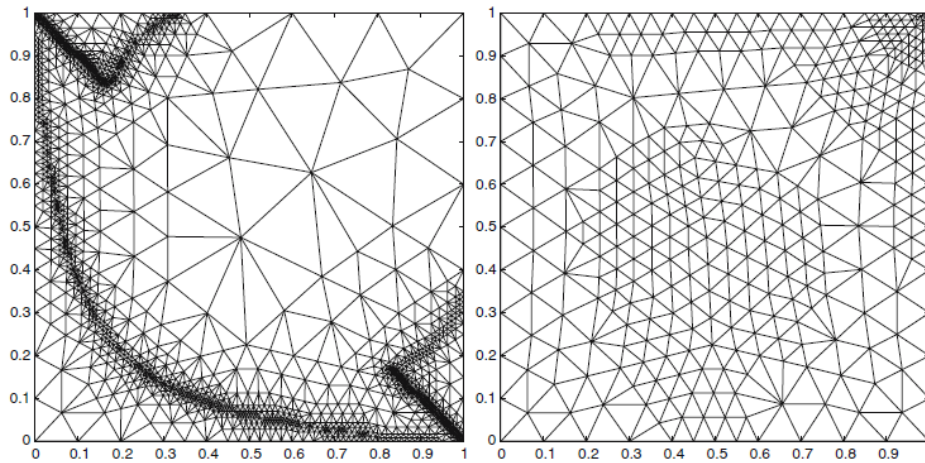


Figure III-7. Précision du calcul avec la méthode multimaillages [Barton et al. 2007]

La principale limitation de cette approche est la perte de précision lorsque le problème étudié présente un aspect multiphysique. En effet dans le procédé de forgeage, la thermique est

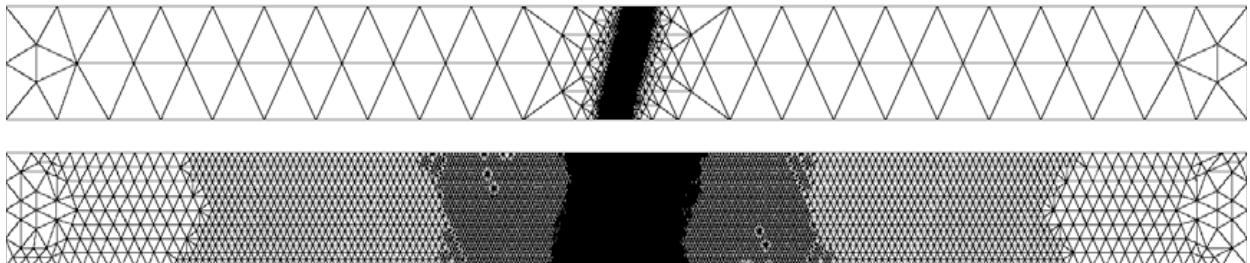
moins localisée que la mécanique, et l'utilisation d'un maillage localement raffiné pour le calcul thermomécanique conduit à une perte de précision du calcul thermique.

Dans la littérature, il existe d'autres approches multimaillages prenant mieux en compte ces problèmes couplés. Chaque inconnue du problème couplé est alors calculée sur un maillage qui est optimal par rapport à cette variable, soit en recherchant le nombre de nœuds minimum pour une précision donnée, soit en visant une précision maximale pour un nombre de nœuds donné. Ceci permet d'optimiser le temps de calcul à précision fixée pour la résolution de chaque physique présente sur le domaine. C'est le cas dans [Li 2005] et [Ge et al. 2009] où les auteurs résolvent un problème de contrôle optimal. Les différentes variables de contrôle présentent de fortes variations à différents endroits du domaine. La qualité des solutions est améliorée grâce à des algorithmes d'adaptation de maillage ([Li 2005], [Ge et al. 2009], [Di et al. 2009a; Di et al. 2009b]) comme présenté sur la Figure III-8. Chacun des maillages correspond à chacune des physiques, ce qui permet d'avoir à la fois un nombre minimal de degrés de liberté sur chaque maillage tout en minimisant les erreurs commises.



**Figure III-8. Différentes composantes de la solution sur différents maillages d'un même domaine pour un problème de contrôle optimal [Li 2005]**

Dans [Di et al. 2009b], les auteurs présentent une application de la méthode multimaillages à un problème d'écoulement de Couette. Les champs de vitesse et de phase sont calculés sur deux maillages différents (Figure III-9).

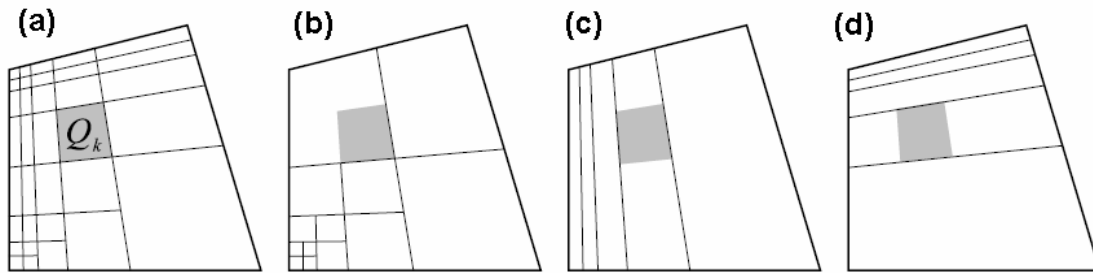


**Figure III-9. Maillages: champ de phase (haut) et champ de vitesse (bas) [Di et al. 2009b]**

La Figure III-9 montre les maillages respectifs des champs de phase (haut) et de vitesse (bas). Le champ de phase étant constant à l'extérieur de la zone d'interface, le maillage y est grossier dans cette zone, il est raffiné dans la zone d'interface le maillage afin de mieux capter les

variations du champ de phase. Par contre, pour le champ de vitesses, le gradient à l'extérieur de la zone d'interface est plus fort, ce qui justifie un déraffinement plus progressif du maillage. Un des points centraux de la méthode multimaillages appliquée à ces problèmes couplés reste le calcul des termes de couplages des différentes variables (physiques) du problème. Dans beaucoup de cas [Li 2005], [Di et al. 2009b], on recourt à un couplage itératif, qui nécessite des transferts de champs entre les maillages. Ainsi la précision du problème couplé va dépendre fortement de la qualité des transferts des champs entre les maillages.

Dans [Solin et al. 2008], [Dubcova et al. 2008; Dubcova et al. 2011] les auteurs proposent une méthode multimaillages multiphysiques où le problème couplé est résolu sur un maillage unique, constitué de l'union des différents maillages adaptées à chacune des physiques.



**Figure III-10. Maillage résultant (a), maillage pour chaque physique (b-d) [Solin et al. 2008]**

Pour cela, on commence par construire les maillages de chacune des physiques par un processus d'adaptation hiérarchique du maillage grossier. Le maillage « réunion » est ensuite construit grâce à la superposition de tous les maillages. Dans [Dubcova et al. 2011], les auteurs considèrent un problème couplé de diffusion de neutron et de thermique au sein d'un réacteur nucléaire. Des comparaisons ont été faites avec la méthode multimaillages utilisant un couplage incrémental et avec la méthode des éléments finis sur un maillage unique. Elles montrent la bonne précision de la méthode. Une autre application au problème de thermoélasticité est présentée dans [Solin et al. 2008]. Dans les travaux cités ci-dessus, tous les maillages sont construits à l'aide d'un raffinement hiérarchique, en partant d'un maillage grossier, ce qui simplifie la construction du maillage « réunion » et par conséquent le calcul des termes de couplage. La question qui se pose donc concerne la mise en place et l'efficacité de cette approche dans le cas où les maillages représentant chaque physique sont non structurés et complètement différents.



### III.2. Méthode Multimaillages Multiphysiques Parallèle (MMP) dans Forge®

L'idée de la méthode de la méthode MMP est d'utiliser plusieurs maillages éléments finis sur le même domaine physique, chaque maillage étant optimisé (en termes de nombre de nœud) par rapport à une physique donnée. Le nombre de maillages de calcul est donc égal au nombre de problèmes physiques résolus simultanément sur le domaine en question. En plus des maillages de calcul, un maillage suffisamment fin est utilisé pour stocker les résultats des différents maillages de calcul afin d'éviter la perte d'information lors d'un éventuel remaillage des maillages de calcul. Cette méthode a été développée initialement pour des procédés incrémentaux tels que le martelage. Les auteurs considèrent un problème thermomécanique de mise en forme où la déformation est très localisée sur une petite zone du domaine [Ramadan 2010] alors que la thermique évolue sur l'ensemble du domaine. Ainsi un maillage localement raffiné dans la zone de déformation et plus grossier sur le reste du domaine peut être utilisé pour résoudre les équations mécaniques, alors qu'un maillage uniformément raffiné est retenu pour le calcul thermique. Le calcul mécanique étant le plus coûteux, la réduction du nombre de nœuds de son maillage permet d'obtenir des accélérations très importantes. Le maillage de calcul thermique étant uniformément fin, il sert aussi de maillage de stockage pour les champs calculés pour les deux physiques. La précision des résultats est assurée par l'utilisation d'opérateurs de transfert de champs précis et robustes entre les maillages. Dans cette partie, nous nous consacrons à la description de la méthode multimaillages multiphysiques existant au début de cette thèse. Les procédés visés dans nos travaux étant essentiellement des procédés de mise en forme à froid, on se place dans le cadre d'une loi de comportement élastoplastique pour la description de la méthode.

A chaque instant  $t$  donné le problème thermomécanique nous conduit à résoudre le système d'équations couplées suivant sur le domaine  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{x}^t, \boldsymbol{\lambda}^t, T^t, \mathbf{v}^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}) = 0 \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}^t, \boldsymbol{\kappa}^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

$\boldsymbol{\lambda}^t = \{\boldsymbol{\sigma}^t, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^t, \dots\}$  est l'ensemble des variables mécaniques intervenant dans la formulation élastoplastique incrémentale,  $\boldsymbol{\kappa}^t = \{(\boldsymbol{\sigma}^t : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t), (\boldsymbol{\tau}^t : \mathbf{v}^t), \dots\}$  regroupe l'ensemble des variables pour le couplage thermomécanique (la puissance due à la déformation plastique et cission au frottement).

Dans la suite, nous désignerons le maillage mécanique par « $\mathcal{M}_m$ » et le maillage thermique par « $\mathcal{M}_{th}$ ». Les maillages thermique et de stockage étant confondus, les symboles  $\mathcal{M}_{th}$  et  $\mathcal{M}_{sto}$  désignent le même maillage. Les variables avec l'indice « $M$ » désigne celles de  $\mathcal{M}_m$  et les variables avec l'indice « $Th$ » celle de  $\mathcal{M}_{th}$ .

Du point de vue fonctionnel, la méthode MMP peut être considérée comme un solveur dont les différentes étapes sont :

#### *Construction de $\mathcal{M}_m$*

On commence par une initialisation de  $\mathcal{M}_m$  comme étant égal à  $\mathcal{M}_{th}$ .  $\mathcal{M}_m$  est ensuite construit à l'aide d'un processus de déraffinement (local) du maillage initial comme présenté dans la [section § III.3](#).

### Résolution du problème mécanique sur $\mathcal{M}_m$

Cette étape débute par un transfert vers  $\mathcal{M}_m$  des variables indispensables au calcul mécanique et stockées sur  $\mathcal{M}_{th}$ :

$$(\lambda_M^t, T_M^t, \mathbf{v}_M^t, p_M^t) = R_{Th}^M(\lambda_{Th}^t, T_{Th}^t, \mathbf{v}_{Th}^t, p_{Th}^t) \quad (III.2)$$

Avec  $R_{Th}^M$  l'opérateur de transport assurant la restriction/projection des champs de  $\mathcal{M}_{th}$  sur  $\mathcal{M}_m$ .

On résout ensuite le problème mécanique sur  $\mathcal{M}_m$  qui s'écrit :

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_M^t, \lambda_M^t, T_M^t, \mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t}) = 0 \quad (III.3)$$

Les solutions  $(\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t})$  sont ensuite interpolées sur  $\mathcal{M}_{th}$ :

$$(\mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}, p_{Th}^{t+\Delta t}) = I_M^{Th}(\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t}) \quad (III.4)$$

Avec  $I_M^{Th}$  l'opérateur de transport assurant l'interpolation des champs de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{th}$ .

### Actualisation des variables d'état et résolution du problème thermique sur $\mathcal{M}_{th}$

On actualise d'abord les variables d'état mécaniques  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  à partir de  $(\mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}, p_{Th}^{t+\Delta t})$  puis on réactualise les termes de couplage thermomécanique  $\kappa_{Th}^{t+\Delta t}$  :

$$\begin{cases} \lambda_{Th}^{t+\Delta t} = \Phi_\lambda(\lambda_{Th}^t, \mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}, p_{Th}^{t+\Delta t}) \\ \kappa_{Th}^{t+\Delta t} = \kappa(\lambda_{Th}^{t+\Delta t}, \mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}) \end{cases} \quad (III.5)$$

$\Phi_\lambda$  est l'opérateur d'actualisation des variables d'état mécaniques. Dans le cas d'une loi viscoplastique de type Norton-Hoff, cet opérateur se résume à une simple réactualisation par un schéma d'Euler implicite :

$$\lambda_{Th}^{t+\Delta t} = \lambda_{Th}^t + \dot{\lambda}_{Th}^{t+\Delta t}(\lambda_{Th}^t, \mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t})\Delta t \quad (III.6)$$

Pour la loi de comportement élastoplastique, cet opérateur résulte d'un algorithme incrémental de type retour radial comme présenté dans la section § I.1.3.2.

On passe ensuite au calcul thermique :

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_{Th}^t, \kappa_{Th}^{t+\Delta t}, T_{Th}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (III.7)$$

Enfin, on actualise les positions des nœuds sur les deux maillages. On actualise d'abord ceux de  $\mathcal{M}_{th}$  à l'aide de  $\mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}$  puis on transporte les coordonnées  $\mathbf{x}_{Th}^{t+\Delta t}$  sur  $\mathcal{M}_m$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{Th}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_{Th}^t + \mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t} \Delta t \\ \mathbf{x}_M^{t+\Delta t} = R_{Th}^M(\mathbf{x}_{Th}^{t+\Delta t}) \end{cases} \quad (III.8)$$

La figure ci-dessous résume l'algorithme général de la méthode MMP.

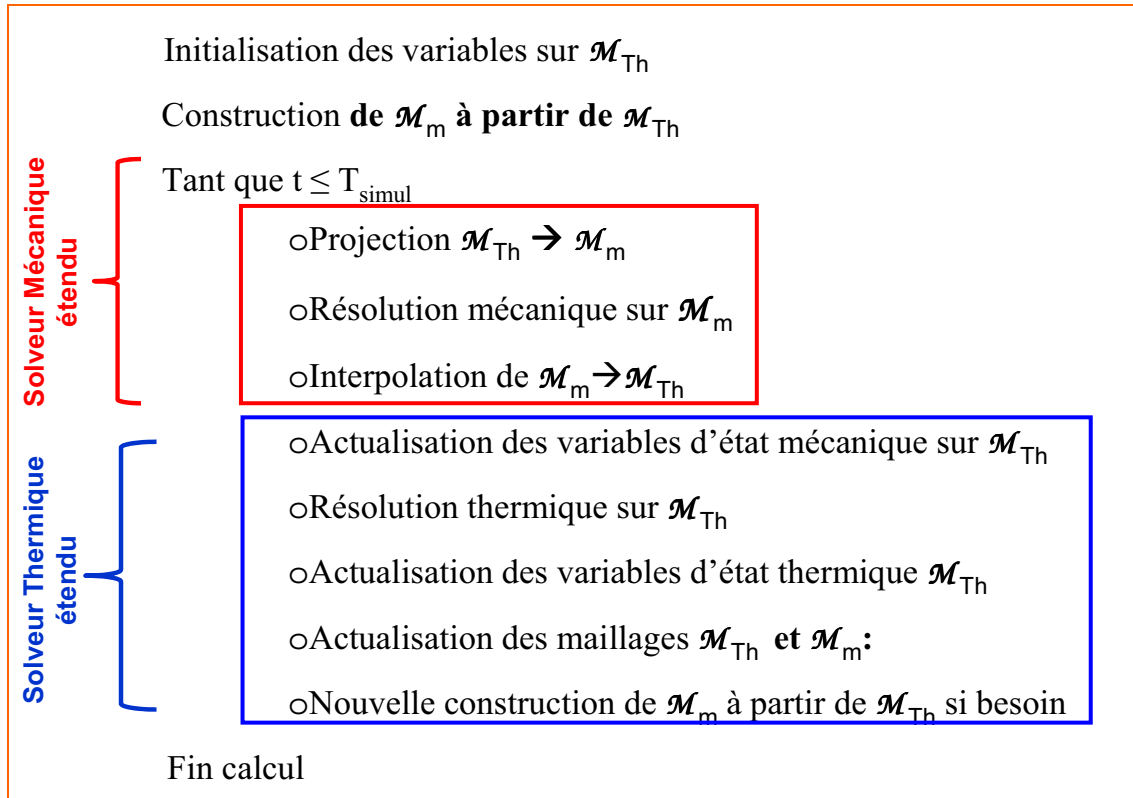


Figure III-11. Schéma des différentes étapes de la méthode MMP

### III.3. Génération du maillage mécanique

À partir d'un maillage de référence uniformément fin (le maillage  $\mathcal{M}_{th}$ ), on souhaite construire un maillage mécanique optimal, uniquement raffiné dans les zones de vraie déformation. On procède en deux étapes : la définition des zones de vraies déformations et la construction du maillage proprement dit.

#### III.3.1. Définition de la zone de vraie déformation

##### III.3.1.1. Généralité

Généralement pour les procédés incrémentaux à faible zone de contact, la grande partie de l'incrément de déformation se produit dans la zone de contact entre l'outil et la pièce. Le maillage mécanique n'a donc besoin d'être fin que dans cette zone. La zone de vraie déformation **ZD** est définie comme étant contenue dans une boîte géométrique englobant cette zone. Le choix de la taille de **ZD** est important, car une zone **ZD** trop grande engendrerait un maillage mécanique non optimal et donc une faible accélération, alors qu'une **ZD** trop petite pourrait poser des problèmes de précision du calcul mécanique. Les travaux de M. Ramadan [Ramadan 2010] ont montré que la taille optimale de **ZD** correspond à la taille de la zone de contact dilatée de 20% pour beaucoup de procédés dont le martelage.

##### III.3.1.2. Extension aux procédés continus

Dans le cas des procédés non continus comme le martelage ([Ramadan 2010; Ramadan et al. 2009]), la **ZD** reste fixe pendant plusieurs incréments de calculs (Figure III-12(a)) correspondant à un coup de marteau; la période de remaillage est donc égale au nombre d'incrémentaires nécessaires à un coup de marteaux soit environ une dizaine d'incrémentaires. Pour les procédés continus, comme laminage ou le laminage à pas de pèlerin, la **ZD** évolue d'un

incrément à l'autre (Figure III-12(b)). Le maillage mécanique doit donc être reconstruit à chaque incrément, ce qui augmente le coût de la méthode. Il faut alors trouver un compromis entre la taille de **ZD** et la période de régénération du maillage mécanique.

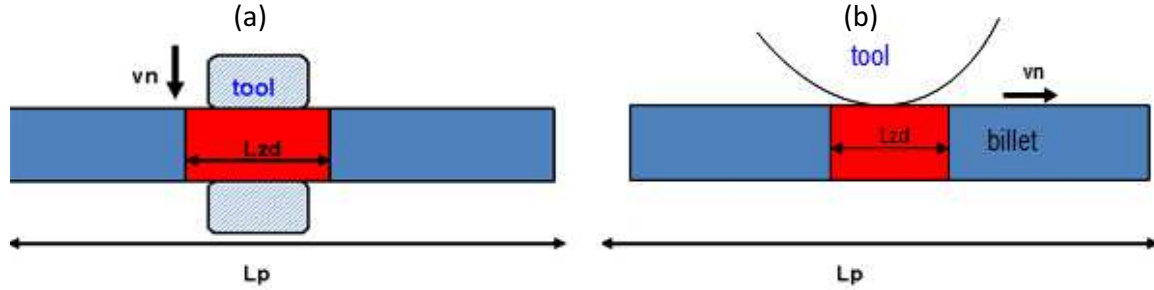


Figure III-12. Zone raffinée dans les procédés continus (droite) et discontinus (gauche)

Une technique consiste à ajouter une «surlongueur»  $\delta_{zd}$  à la taille de la **ZD** dans la direction amont. La «surlongueur» optimale est celle qui minimisera le temps de calcul total. La longueur totale de la **ZD**,  $l_{zd}$ , peut alors s'exprimer en fonction du nombre d'incréments  $a_{rem}$  durant lesquels on peut conserver un même maillage  $\mathcal{M}_m$ , de la vitesse outil/pièce  $v_n$  et de la longueur de la zone de contact  $l_{contact}$  par la relation:

$$\begin{cases} \delta_{zd} = (a_{rem} - 1)v_n \Delta t \\ l_{zd} = 1,2l_{contact} + \delta_{zd} \end{cases} \quad (III.9)$$

### III.3.2. Algorithme de déraffinement local de maillage

Le maillage  $\mathcal{M}_m$  proprement dit est construit grâce à un déraffinement local de  $\mathcal{M}_{th}$ . Il s'agit d'une technique de déraffinement emboîté par nœuds implémentée au sein du mailleur MTC développé au Cemef [Coupez 2000]. Elle consiste à générer un maillage déraffiné à partir d'un maillage fin sans ajouter de nœuds ni les bouger. C'est-à-dire que tous les nœuds du maillage déraffiné sont inclus dans le maillage fin. Les nœuds appartenant à la **ZD** (zone en couleur bleue sur la Figure III-13) sont bloqués lors du processus de déraffinement, tous les nœuds et éléments de cette zone sont confondus pour les deux maillages. L'avantage d'une telle technique est de permettre un transfert exact des champs nodaux du maillage  $\mathcal{M}_{th}$  vers le maillage  $\mathcal{M}_m$ ; dans l'autre sens c'est-à-dire de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{th}$ , le transfert sera encore exact pour les nœuds de  $\mathcal{M}_{th}$  appartenant à  $\mathcal{M}_m$ .



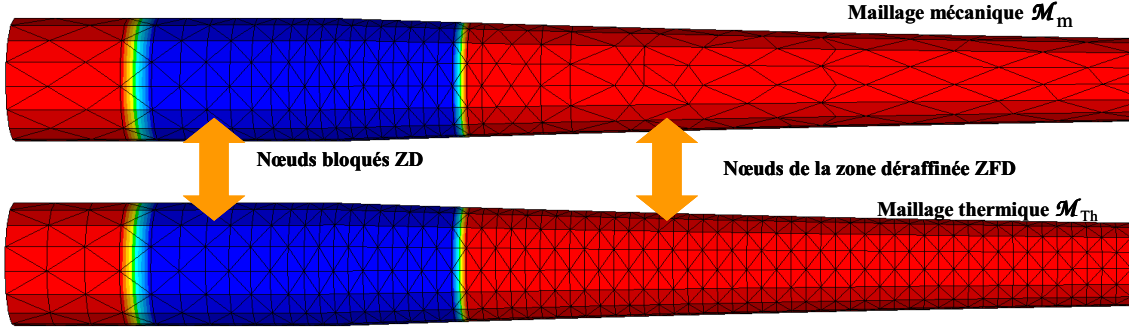


Figure III-13. Emboîtement par nœuds

L'algorithme de déraffinement emboîté peut être décrit de la façon suivante :

Soit  $\mathcal{M}_{th}$  un maillage fin défini par l'ensemble de ses nœuds  $I_H$  et de ses tétraèdres  $T_H$ . Le but est de construire un maillage grossier  $\mathcal{M}_m$  tel que pour tous nœuds  $i$  on ait :  $l_H(i) \approx h_d$ , où  $l_H(i)$  est la longueur moyenne des arêtes connectées aux nœuds  $i$  et  $h_d$  est la taille de maille désirée pour le maillage grossier  $\mathcal{M}_m$ . Soit  $T_H(i)$  l'ensemble des tétraèdres contenant le nœud  $i$ ,  $\mathcal{E}_H(i)$  l'ensemble des nœuds de  $T_H(i)$  ( $i$  exclu) et  $F_H(i)$  l'ensemble des faces externes de  $T_H(i)$  (c'est-à-dire ne contenant pas  $i$ ). L'algorithme de déraffinement est donné sur la Figure III-14.

1. Initialisation de  $\mathcal{M}_m$  par  $\mathcal{M}_{th}$
2. Pour tout  $i \in \mathcal{M}_m$ , on calcule  $l_H(i)$
3. Si  $i \notin \mathbf{ZD}$  alors
  - Si  $l_H(i) \geq h_d$ 
    - ❖  $i \leftarrow i+1$  et on retourne à l'étape 3
  - Sinon
    - ❖ Remailler  $F_H(i)$  ( $i$  exclu)
    - ❖ Si  $T_{nouv}(i)$  est acceptable alors :
      - $I_H = I_H - \{i\}$
      - $T_H = T_H - T_H(i) + T_{nouv}(i)$
      - $i \leftarrow i+1$  et on retourne à l'étape 3
    - ❖ Sinon
      - $i \leftarrow i+1$  et on retourne à l'étape 3

Figure III-14. Algorithme de déraffinement emboîté

On commence par initialiser le maillage  $\mathcal{M}_m$  par  $\mathcal{M}_{th}$  de sorte que  $\mathcal{M}_m$  ait exactement les mêmes nœuds, éléments et faces que  $\mathcal{M}_{th}$ , puis on calcule la taille moyenne  $l_H(i)$  en tous ses nœuds. Pour tout nœud  $i$  n'appartenant pas à la ZD, si  $l_H(i) < h_d$  on essaye de remailler le

volume défini par  $F_H(i)$  en éliminant le nœud  $i$  et en utilisant uniquement les nœuds de  $\varepsilon_H(i)$ . Soit  $T_{nouv}(i)$  l'ensemble des tétraèdres de cette nouvelle triangulation. Si  $T_{nouv}(i)$  est acceptable, on supprime  $i$  et on actualise  $T_H$ . Sinon, on revient à l'étape précédente. Le maillage  $\mathcal{M}_m$  obtenu vérifie la propriété que tous ses nœuds appartiennent au maillage  $\mathcal{M}_{th}$ .

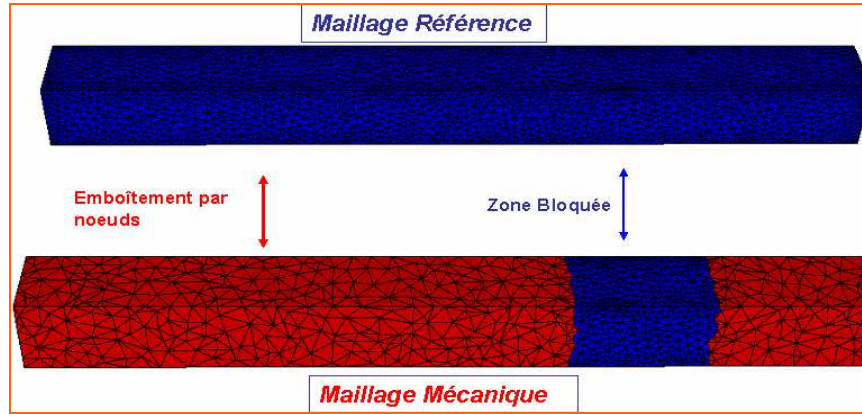


Figure III-15. Déraffinement emboîté par nœuds de barre [Ramadan 2010]

### III.3.3. Aspects parallèle du déraffinement de maillage

En parallèle, le processus de déraffinement du mailleur MTC se fait en plusieurs itérations combinant à chaque fois les opérations de remaillage et de repartitionnement [Digonnet *et al.* 2007]. On commence par effectuer un partitionnement du domaine dans lequel chaque processeur reçoit une partie du domaine, tel que les charges soient équilibrées (nombre de nœuds) et tel qu'il minimise le nombre de nœuds aux interfaces des sous domaines. On effectue ensuite un remaillage de chaque sous domaine, séparément tout en bloquant les interfaces. Une fois ce remaillage « intérieur » réalisé, les interfaces sont décalées pour être prises en compte aux itérations de remaillage suivantes.

Cette procédure de remaillage/repartitionnement est répétée jusqu'à l'obtention d'un domaine complètement remaillé et équilibré. Le point positif de cette stratégie est que le remaillage s'effectue à l'intérieur d'un sous-domaine, indépendamment des autres sous-domaines, ce qui permet de réduire les communications entre les processeurs aux seules étapes de repartitionnement. Cet algorithme peut être schématisé de la façon suivante:

#### 1. Partitionnement initial du domaine

Equilibrer les charges et minimiser les interfaces

#### 2. Remaillage

*Tant que le remaillage n'est pas complet*

*Pour chaque processeur « p » faire*

Effectuer le remaillage sur chaque processeur avec les interfaces bloquées

*Fin chaque processeur*

Repartitionner

Décaler les interfaces vers l'intérieur des sous-domaines

*Fin tant que*

Figure III-16. Algorithme de remaillage en parallèle

La Figure III-17 montre un exemple de remaillage parallèle réalisé à l'aide du mailleur MTC. L'image en haut à droite représente le domaine initial; chaque zone de même couleur appartient à un processeur donné. Chaque étape est matérialisée par une paire d'images. Les partitionnements étant représentés à gauche et les nœuds du nouveau maillage à droite (les éléments remaillés sont en bleu et ceux non remaillés sont en rouge). On peut voir la progression du processus de remaillage/repartitionnement avec le déplacement des interfaces entre sous domaines, jusqu'à l'obtention du maillage final sur l'image la plus en bas.

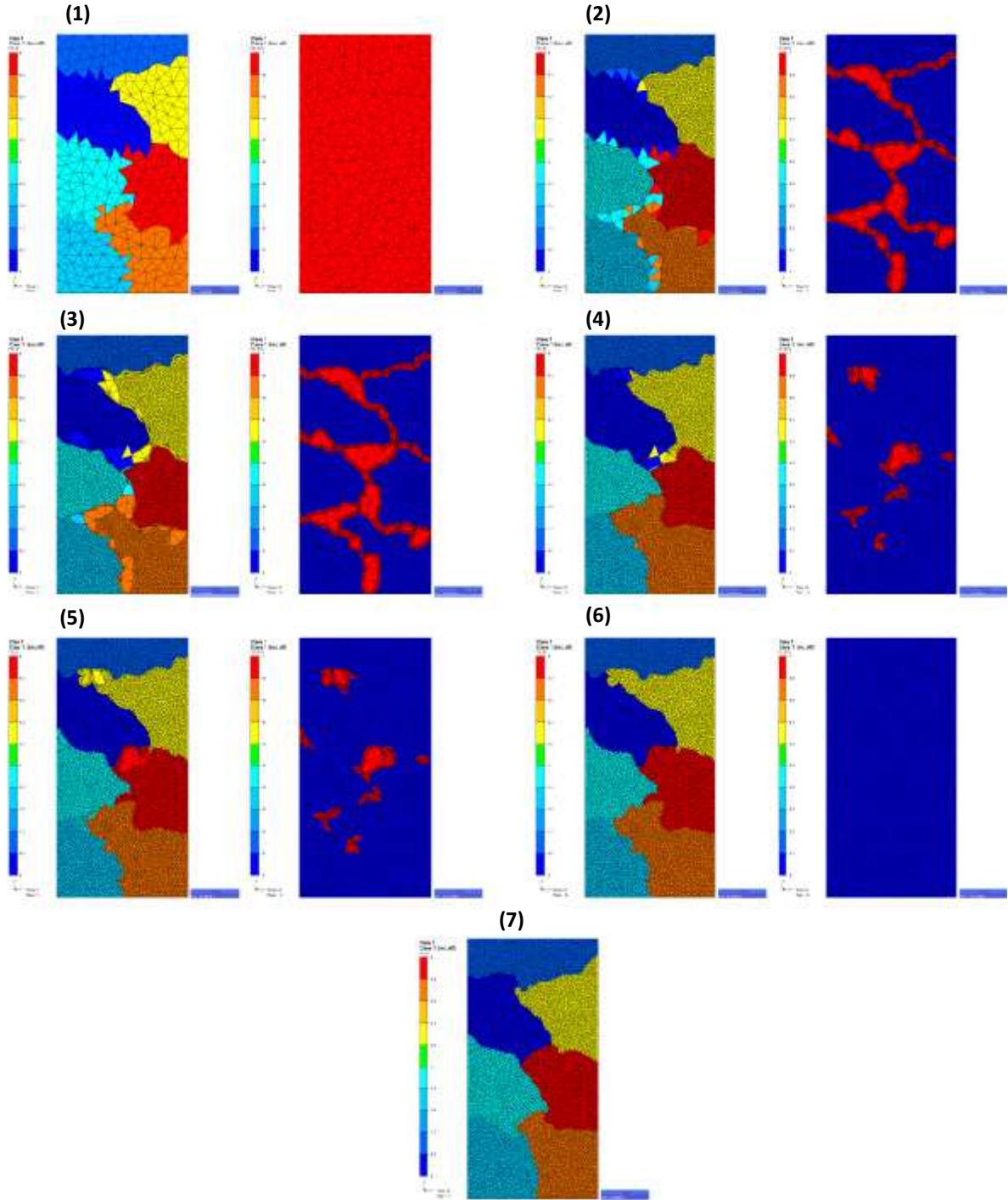


Figure III-17. Différentes étapes de la procédure de remaillage parallèle basée sur le principe de blocage des interfaces et du remaillage local

### III.4. Transfert de Champs

Dans la méthode multimaillages, le transfert des champs entre les différents maillages est une étape clé. C'est elle qui garantit la cohérence et la continuité des résultats entre les différents maillages et donc la précision de la méthode. Dans la résolution du problème mécanique, on a à prendre en compte des champs nodaux de type **P1** ( $\mathbf{v}, p, T$ ), et des champs définis aux points de Gauss ( $\bar{\varepsilon}, \sigma, \dots$ ) de type **P0**.

#### III.4.1. Transfert de champs P1

Les champs **P1** sont continus sur tout le domaine et calculés par interpolation linéaire à partir des valeurs  $\bar{f}_k$  connues aux nœuds :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \bar{f}_k N_k(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{III.10})$$

Le transfert des champs **P1** utilise une interpolation inverse dont les différentes étapes sont :

##### *Localisation de nœuds*

La localisation consiste à trouver, pour chaque nœud  $m$  du maillage d'arrivée  $\mathcal{M}_2$ , l'élément  $e$  du maillage de départ  $\mathcal{M}_1$  le contenant. Les valeurs des fonctions de forme au nœud  $m$  de coordonnées  $\mathbf{x}_m$  sont alors connues :

$\forall m \in \mathcal{M}_2, \exists e^{(1)} \in \mathcal{M}_1$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m &= \sum_{k \in e} \mathbf{x}_k N_k(\mathbf{x}_m) \\ \left| \begin{aligned} N_1(\mathbf{x}_m) &= \frac{\det(\overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_4})}{\Delta}, \\ N_2(\mathbf{x}_m) &= \frac{\det(\overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{m}}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_4})}{\Delta}, \\ N_3(\mathbf{x}_m) &= \frac{\det(\overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{m}})}{\Delta}, \\ \text{avec } \Delta &= \det(\overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3}, \overrightarrow{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_4}) \\ N_4(\mathbf{x}_m) &= 1 - N_1(\mathbf{x}_m) - N_2(\mathbf{x}_m) - N_3(\mathbf{x}_m) \end{aligned} \right. \quad (\text{III.11}) \end{aligned}$$

Où  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)$  sont les positions des 4 nœuds de l'élément  $e$ .

Cet algorithme étant basé sur la recherche de l'élément contenant un nœud à est également valable pour la localisation des points de Gauss.

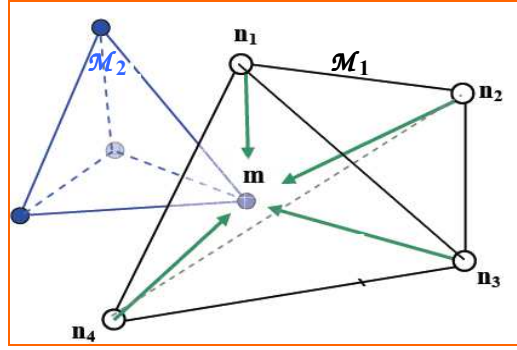


Figure III-18. Transfert de champs P1

### Interpolation

Le champ recherché  $f^{(2)}$  est obtenu par une interpolation à partir des valeurs de  $f^{(1)}$  connues aux nœuds du maillage  $\mathcal{M}_1$  (Figure III-18), soit alors :

$$\bar{f}_m^{(2)} = \sum_{k \in e^{(1)}} \bar{f}_k^{(1)} N_k(\mathbf{x}_m) \quad (\text{III.12})$$

Où  $\bar{f}_m^{(2)}$  représente la valeur du champ  $f^{(2)}$  au point  $m$  de  $\mathcal{M}_2$ ,  $N_k(\mathbf{x}_m)$  représente la  $k^{\text{ième}}$  fonction de forme en  $\mathbf{x}_m$  et  $\bar{f}_k^{(1)}$  la valeur de  $\bar{f}_k^{(1)}$  au  $k^{\text{ième}}$  nœud de l'élément de  $\mathcal{M}_1$  contenant  $\mathbf{x}_m$ . Dans la littérature, on rencontre d'autres méthodes de transfert de champ **P1**, notamment celles reposant sur une minimisation de l'écart entre la valeur recherchée sur le maillage  $\mathcal{M}_2$  et la valeur sur le maillage de départ  $\mathcal{M}_1$ . Soit  $f^{(1)}$  la valeur du champ connue sur le maillage  $\mathcal{M}_1$  et  $f^{(2)}$  la valeur recherchée sur le maillage  $\mathcal{M}_2$ , la fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$\Pi(\bar{f}_m^{(2)}) = \left\| \sum_{k=1}^{Nbnoe1} \bar{f}_k^{(1)} N_k(\mathbf{x}_k) - \sum_{m=1}^{Nbnoe2} \bar{f}_m^{(2)} \bar{N}_m(\mathbf{x}_m) \right\|_{L^2} \quad (\text{III.13})$$

Avec  $Nbnoe1$  et  $Nbnoe2$  représentent les nombre de nœud respectivement pour les maillages de départ et d'arrivée.

La minimisation ci-dessus peut être locale ou globale, et les fonctions d'interpolation  $N_k$  et  $\bar{N}_m$  utilisées pour calculer la norme peuvent être soit des fonctions de forme des deux maillages, soit d'autres fonctions de base. Pour plus de détails concernant cette approche, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Bérard 2011]. Que ce soit par une minimisation locale ou globale, le système linéaire résultant de (III.13) fait intervenir des matrices avec des termes de couplage (matrice *de mortier*) entre les deux maillages. La principale difficulté réside donc dans la construction de ces matrices de couplage. Dans [Bérard 2011], cette difficulté a été contournée par la création d'un maillage auxiliaire composé par la réunion des deux maillages, et sur lequel les termes de couplage sont calculés directement comme le montre la Figure III-19.

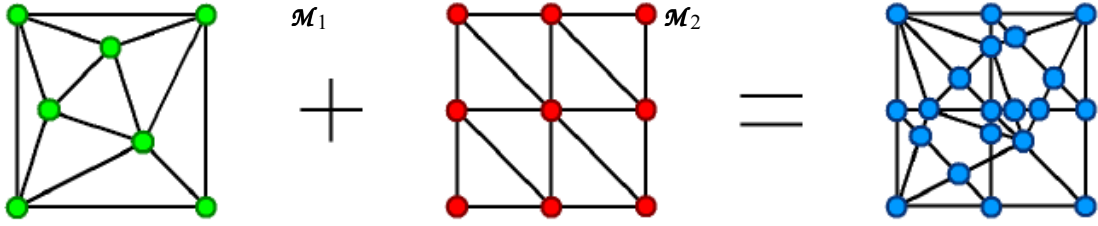


Figure III-19. Maillage auxiliaire = union de deux maillages [Bérard 2011]

La grande question concerne la complexité de la construction de ce maillage auxiliaire dans le cas général de maillages non structurés en 3D et dans un environnement parallèle (sur plusieurs processeurs).

### III.4.2. Transfert de champs P0

Les champs **P0** sont, par définition, constants par élément. Par conséquent ils sont discontinus. Ce caractère rend leur transfert plus complexe. Dans la version initiale de la méthode MMP, le transfert des champs **P0** est fait par une approche directe.

Dans cette approche, les champs **P0** du maillage de départ  $\mathcal{M}_1$  sont directement transférés vers le maillage d'arrivée  $\mathcal{M}_2$ . Pour plus de détail concernant les approches directes, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Srikanth et al. 2000], [Guerdoux et al. 2007], [Liszka 1984], [Bérard 2011]. L'avantage de cette approche est la simplicité de mise en œuvre et la consistance (c'est-à-dire que si le maillage de départ est confondu avec le maillage d'arrivée on retrouve les mêmes valeurs).

Cette technique est quasiment identique à celle utilisée pour les champs **P1**, sauf que cette fois ci, comme les champs sont constants, l'interpolation se réduit à la simple affectation de la valeur au point de Gauss de l'élément parent vers celui de l'élément fils (Figure III-20).

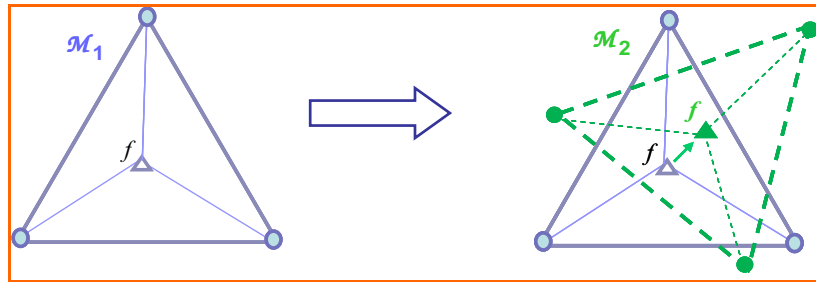


Figure III-20. Transport P0 direct

Soit  $f^{(1)}$  le champ **P0** défini aux points de Gauss du maillage de départ  $\mathcal{M}_1$  et  $f^{(2)}$  le champ **P0** définis aux points de Gauss  $g$  du maillage d'arrivée  $\mathcal{M}_2$ , on a :

$$\forall e^{(2)} \in \mathcal{M}_2, \exists e^{(1)} \in \mathcal{M}_1 \text{ tel que } \mathbf{x}_g^{(2)} = \sum_{k \in e^{(1)}} \mathbf{x}_k N_k(\mathbf{x}_g^{(2)}), \text{ et on a :}$$

$$f_g^{(2)} = f_g^{(1)} \quad (\text{III.14})$$



Où  $f_g^{(2)}$  et  $\mathbf{x}_g^{(2)}$  représentent respectivement la valeur du champ  $f^{(2)}$  et les coordonnées au point de Gauss d'un élément  $e^{(2)}$  du maillage  $\mathcal{M}_2$ ,  $f_g^{(1)}$  est la valeur du champ  $f^{(1)}$  au point de Gauss d'un élément  $e^{(1)}$  du maillage  $\mathcal{M}_2$ . Cette approche est très simpliste et approchée. Nous discuterons dans le chapitre 4 d'une approche plus réaliste et plus précise.

### III.4.3. Transport sans relocalisation

Dans l'algorithme de la méthode MMMP, le transfert de champs entre les deux maillages étant fait à chaque incrément de temps, le surcoût qui y est lié est à prendre en compte. Cette opération peut représenter jusqu'à 10% du coût total de la méthode, ce qui peut en affecter l'efficacité. Pour réduire ce surcoût, les opérations de transport ont été optimisées de façon à ce que l'étape de localisation (étape la plus coûteuse) ne soit faite qu'au moment où on régénère un nouveau maillage mécanique ou lorsqu'il y a remaillage de  $\mathcal{M}_{th}$ . Les informations issues de la dernière localisation (celle ayant eu lieu au précédent remaillage) sont conservées et utilisées dans les transports suivants. Ceci est rendu possible par le fait qu'on transporte les coordonnées de  $\mathcal{M}_{th}$  sur  $\mathcal{M}_m$ , autrement dit, la position relative d'un nœud de  $\mathcal{M}_{th}$  par rapport aux nœuds de  $\mathcal{M}_m$  reste la même.

### III.4.4. Aspects parallèles du transfert de champs

L'étape de localisation utilise une procédure de recherche ([Digonnet *et al.* 2007]). Dans le contexte du transport parallèle, on rencontre des situations où la recherche hiérarchique n'arrive pas à localiser certains nœuds, par exemple les nœuds ou points de Gauss appartenant à une partition différente de celle de son élément parent. La Figure III-21 illustre un exemple de localisation en parallèle ; chaque couleur représente un sous domaine appartenant à un processeur donné. Pour le nœud  $\kappa_2$ , son élément parent  $e_2$  se trouvent sur une partition complètement différente. L'algorithme de transport fait alors appel à une procédure parallèle où des informations sont échangées entre processeurs. On cherche alors sur tous les autres processeurs, l'élément qui pourrait contenir ce nœud (ou point de Gauss), ce qui peut être très coûteux.

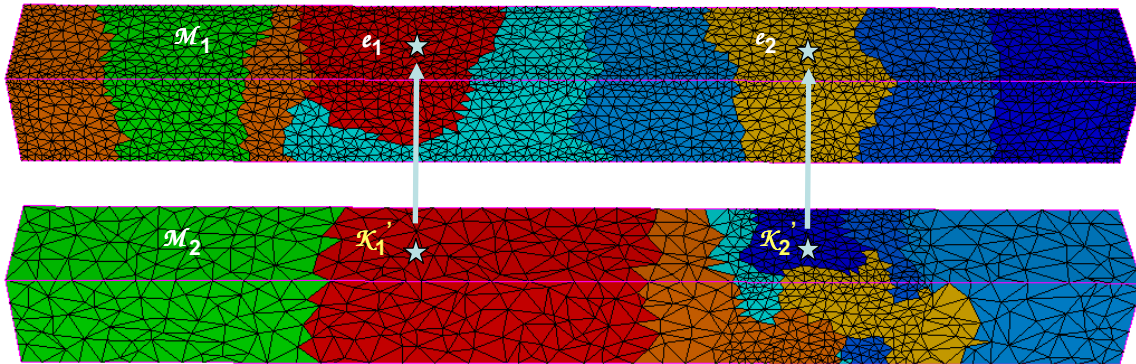


Figure III-21. Localisation en parallèle

Eu égard à la problématique du surcoût de la localisation en parallèle, la question d'avoir des partitionnements différents des deux maillages (Figure III-23) se pose. En effet, on pourrait envisager une procédure dans laquelle le maillage mécanique et le maillage thermique auraient le même partitionnement (Figure III-22). Comme on peut le voir sur la Figure III-22, cette approche implique d'effectuer le partitionnement sur le maillage le plus fin, c'est-à-dire

ici le maillage thermique. Il en résulte que le partitionnement du maillage mécanique n'est pas équilibré alors que l'étape de calcul mécanique est de très loin l'étape la plus coûteuse des calculs. Il est donc primordial d'équilibrer la partition du maillage mécanique (Figure III-23) ce qui ne permet pas dans le cas général de construire une partition du maillage thermique parfaitement correspondante.

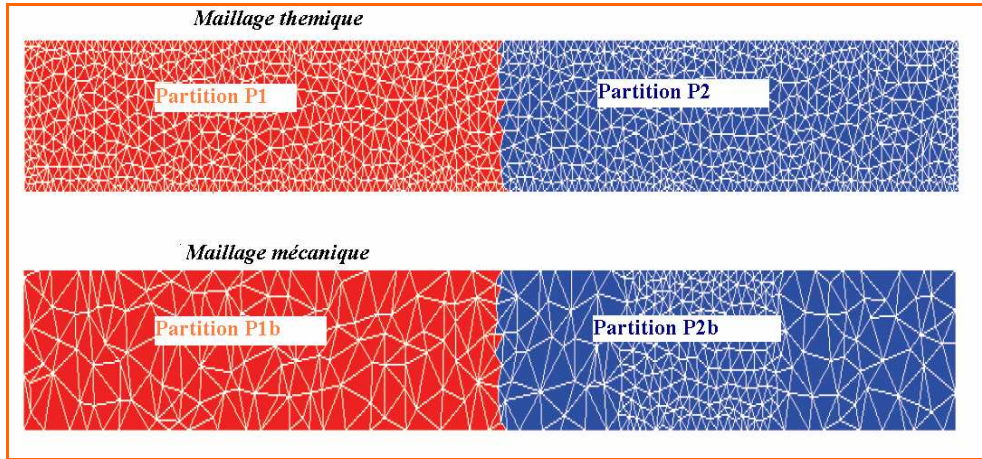


Figure III-22. Exemple de partitions identiques non équilibrées

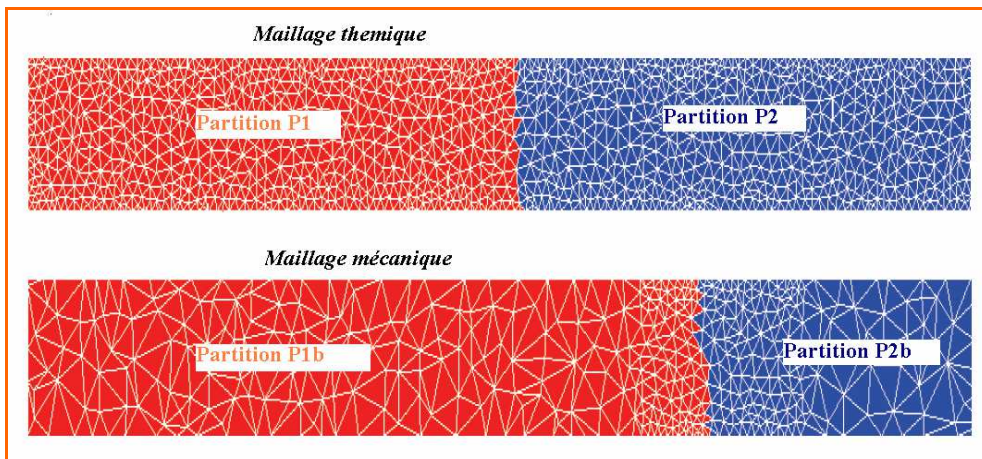


Figure III-23. Exemple de partitions non identiques mais équilibrées



### III.5. Quelques applications industrielles

Pour illustrer les performances de la méthode, nous présentons à titre d'exemple d'applications sur les procédés de martelage et de laminage de tôle respectivement pour des procédés discontinus et continus.

#### III.5.1. Procédés discontinus

On considère le procédé de martelage à chaud telle qu'étudié dans les travaux, de M. Ramadan [Ramadan 2010]. Le dispositif simulé (outils et barre) est présenté sur la Figure III-24.

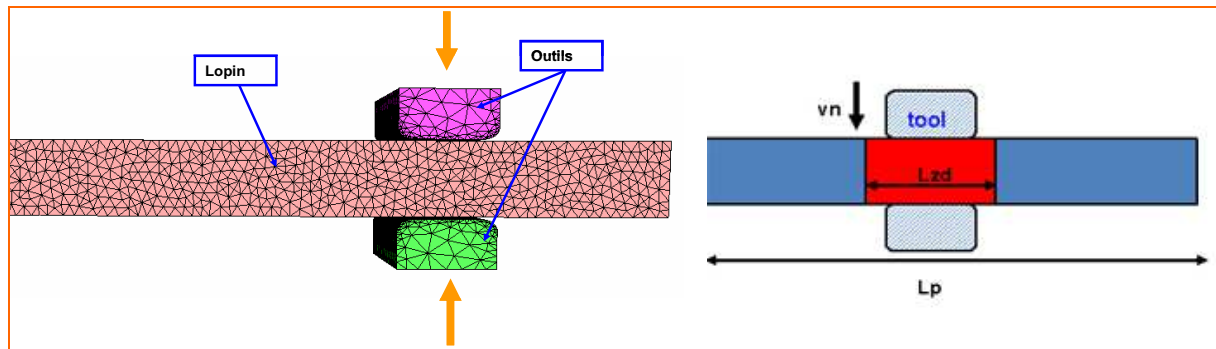


Figure III-24. Schéma du dispositif martelage

Les paramètres de la méthode MMP ainsi que les caractéristiques des maillages sont indiqués dans les tableaux Tableau III-2 et Tableau III-2.

Tableau III-1. Paramètres de la méthode MMP : martelage

Vitesse d'avance de l'outil ( $v_n$ )	Pas de temps	Longueur de la tôle ( $L_p$ )	Longueur de la ZD initiale ( $l_{ZD0}$ )
40 mm/s	$10^{-2}$ s	2000 mm	66 mm

Tableau III-2. Caractéristiques des maillages mécanique et thermique : martelage

maillage thermique (nœuds)	maillage mécanique (nœuds)
26 403	4 845

On étudie les accélérations en fonction du nombre de processeurs. La Figure III-25 présente les maillages thermique et mécanique à un instant donné au cours du calcul.

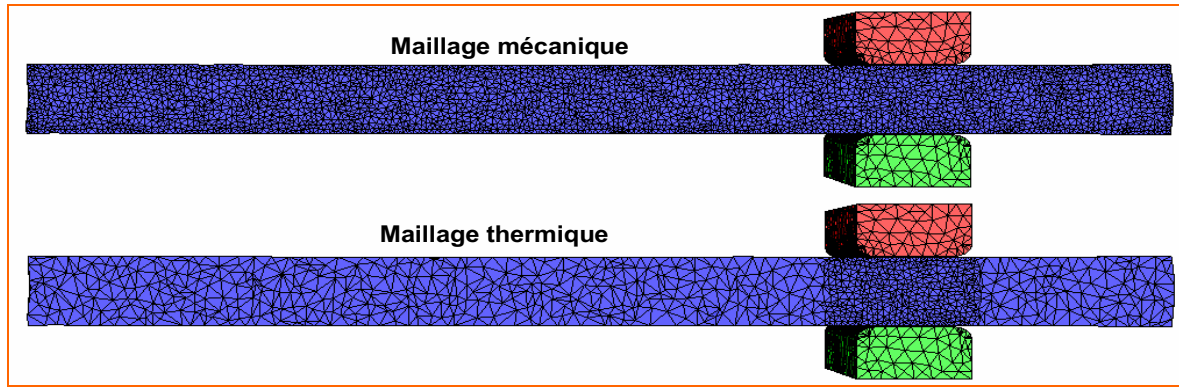


Figure III-25. Maillages thermique et mécanique martelage

Les points de départ des deux courbes présentent un net décalage, mais l'écart diminue lors du passage de un à plusieurs processeurs. L'accélération (voir [section § IV.3.1](#)) au niveau du code Forge® décroît avec le nombre de processeurs, comme le montre la [Figure III-26](#) et la [Figure III-27](#). Elle vaut 7,1 sur un processeur, se réduit à 5,5 sur 2 processeurs, 4,9 sur 4 processeurs et 5,3 sur 8 processeurs. Ceci s'explique principalement par la diminution du nombre de degrés de liberté du calcul mécanique en parallèle. En effet, en séquentiel le calcul mécanique est effectué sur environ 6 000 nœuds, sur huit processeurs chaque processeur effectuerait le calcul sur 750 nœuds. Or le calcul parallèle est d'autant plus efficace qu'il a de nombreux degré de liberté.

Tableau III-3. Temps CPU en fonction du nombre de processeur: martelage

Nb procs	CPU Monomaillage (min)	CPU MMP (min)	Accélérations
1	182	32	5,7
2	108	26	4,2
4	66	13	5,07

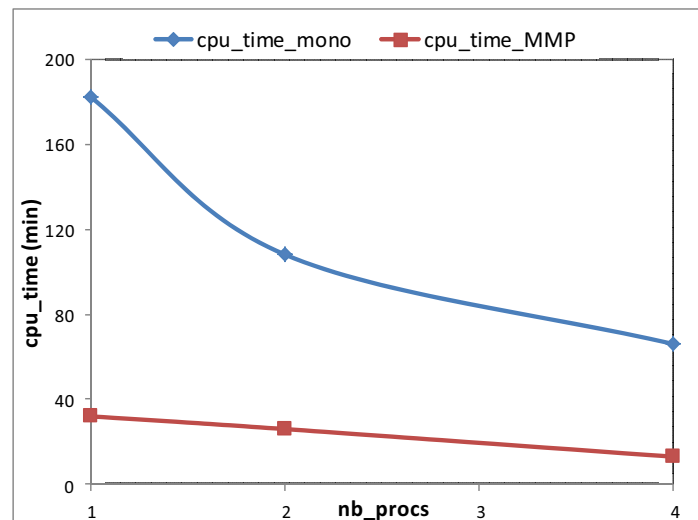


Figure III-26. Evolution du temps CPU en fonction du nombre de processeurs : martelage

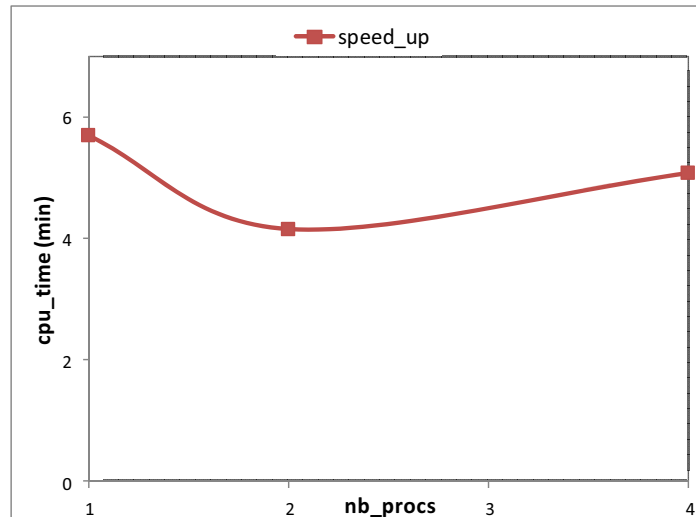


Figure III-27. Evolution de l'accélération en fonction du nombre de processeurs : martelage

### III.5.2. Procédés continus

On considère à présent un cas de laminage de tôle (Figure III-28). Le but est d'analyser le choix des paramètres optimaux pour les procédés continus où la zone de contact bouge d'un incrément à l'autre.

La tôle a une largeur de 100 mm avec une épaisseur de 25 mm à l'entrée. Les outils (cylindre et poussoir) sont considérés comme étant rigides. Le cylindre a un rayon de 300 mm et une vitesse de rotation de 2,74 rad/s, soit une vitesse tangentielle de 100 mm/s. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la tôle est simulé.

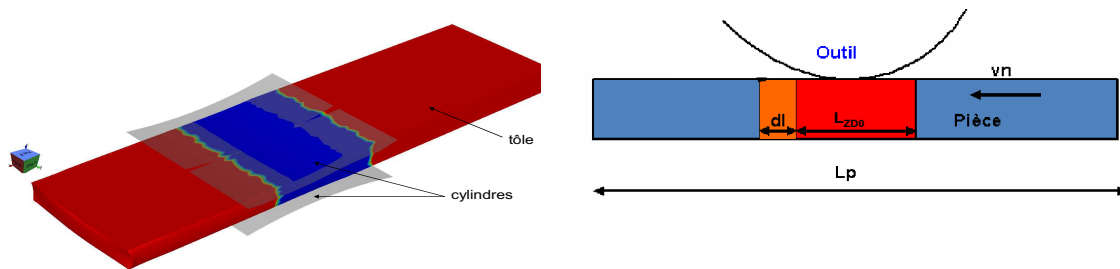


Figure III-28. Schéma du laminage de tôle

Les paramètres pour la méthode MMP sont inscrits dans le tableau ci-dessous :

Tableau III-4. Paramètres de la méthode MMP pour le laminage de tôle

Vitesse d'avance de l'outil ( $v\tau$ )	Pas de temps	Longueur de la tôle ( $L_p$ )	Longueur de la ZD initiale ( $LZD0$ )
100 mm/s	$10^{-3}$ s	365 mm	66 mm

Tableau III-5. Caractéristiques des maillages mécanique et thermique : laminage de tôle

maillage thermique (nœuds)	maillage mécanique (nœuds)
11 007	1 226

La **ZD** initiale est telle que sa longueur est égale à celle de la zone de contact dilatée de 20%. Ces 20% proviennent des essais numériques réalisés dans les travaux de M. Ramadan [Ramadan 2010] qui a montré que cette valeur était la taille « minimum » qui garantit la précision de la méthode pour le martelage. On augmente progressivement cette taille au travers de la surlongueur  $\delta_{ZD}$  afin de déterminer la période de remaillage optimale en servant de la relation (III.9). La Figure III-29 présente les accélérations obtenues, respectivement en fonction de la période de remaillage et de la valeur de  $\delta_{ZD}$  exprimée en pourcentage de la longueur de la **ZD** initiale, pour 1, 2 et 4 processeurs.

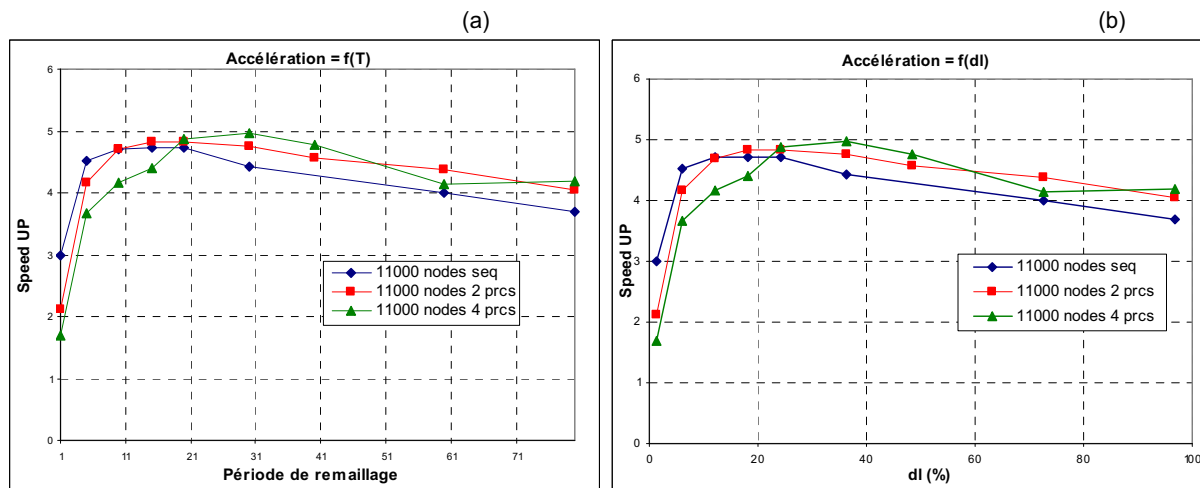


Figure III-29. Taille de la ZD et période de remaillage optimale pour 1,2 et 4 processeurs

Sur la Figure III-29(a), on peut noter que même lorsqu'on régénère le maillage mécanique à chaque pas de temps (période de remaillage= 1), on obtient des accélérations supérieures à un, indépendamment du nombre de processeurs. Ces accélérations croissent jusqu'à des valeurs maximales avant de commencer à décroître. La période optimale de remaillage est située dans l'intervalle [10; 15] en séquentiel. Cet intervalle se décale de plus en plus vers la droite (respectivement [15; 20] et [20; 30]) avec 2 et 4 processeurs. Ces décalages s'expliquent par le fait que le calcul parallèle est plus efficace sur de gros maillages, donc avec une **ZD** plus grande qu'en séquentiel. On peut aussi remarquer que, quel que soit le nombre de processeurs, l'accélération décroît très progressivement, ce qui offre donc beaucoup de flexibilité quant au choix de la valeur optimale de la période de remaillage. Une autre façon de voir les choses est de regarder l'accélération en fonction de la longueur de la **ZD** exprimée en pourcentage de la longueur de la **ZD** initiale (Figure III-29(b)). Ceci permet d'étudier l'évolution de l'accélération indépendamment de la vitesse de l'outil et du pas de temps, et donc de pouvoir extrapoler les résultats obtenus à d'autres procédés continus. En fin, on remarque que les améliorations obtenues en laminage sont semblables à celles obtenues en martelage (proche de 5) et qu'elles dépendent très peu du nombre de processeurs pour une valeur optimale de la période de remaillage.



---

# IV

## **A**pplication de la méthode MMP au laminage à pas de pèlerin

Ce chapitre est consacré à l'application de la méthode MMP au laminage à pas de pèlerin. Dans la première partie, nous nous intéressons aux améliorations apportées à la méthode pour mieux prendre en compte les spécificités liées d'une part à l'élastoplasticité et d'autre part au procédé. La seconde partie concerne l'analyse des performances de la méthode.

---

### SOMMAIRE

<b>IV.1. CONSTRUCTION DU MAILLAGE MECANIQUE .....</b>	<b>83</b>
IV.1.1. Notion de métrique .....	84
IV.1.2. Construction de la métrique initiale .....	85
IV.1.3. Calcul de la métrique de déraffinement.....	86
<b>IV.2. PRECISION DE LA VERSION INITIALE DE LA METHODE .....</b>	<b>88</b>
IV.2.1. Variables instantanées .....	88
IV.2.2. Variables d'histoire .....	89
IV.2.3. Origines des perturbations sur les contraintes .....	91
<b>IV.3. AMELIORATION DE LA PRECISION DE LA METHODE .....</b>	<b>95</b>
IV.3.1. Stabilisation de la pression .....	95
IV.3.2. Réactualisation locale des variables d'état: transport non incrémental .....	96
IV.3.3. Réactualisation des variables d'état sur le maillage thermique .....	99
IV.3.4. Amélioration de l'opérateur de transport P0 : transport par recouvrement SPR.....	101
<b>IV.4. PERFORMANCES DE LA METHODE MMP .....</b>	<b>113</b>
IV.4.1. Grandeurs d'analyse .....	113
IV.4.2. Etude des accélérations.....	114
<b>IV.5. SYNTHESE .....</b>	<b>123</b>

## IV.1. Construction du maillage mécanique

Le tube fabriqué par laminage à pas de pèlerin présente une géométrie tubulaire à section légèrement ovalisée par endroits et dont la génératrice évolue suivant un profil analytique défini par l'outillage (Figure IV-1).

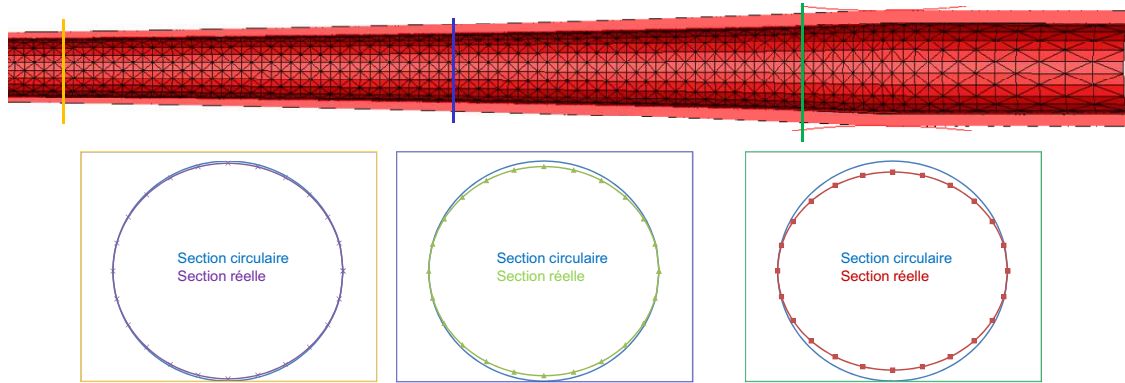


Figure IV-1. Evolution de la section interne et du profil du tube

Pour cette géométrie, la construction du maillage mécanique par déraffinement local pose problème. En effet, l'utilisation de l'algorithme de déraffinement tel que décrit dans la [section § III.3.2](#) conduit à des maillages de mauvaise qualité et à une perte de précision au niveau de la géométrie du tube, comme le montre la [Figure IV-2](#), surtout si l'on veut effectuer des déraffinements importants.

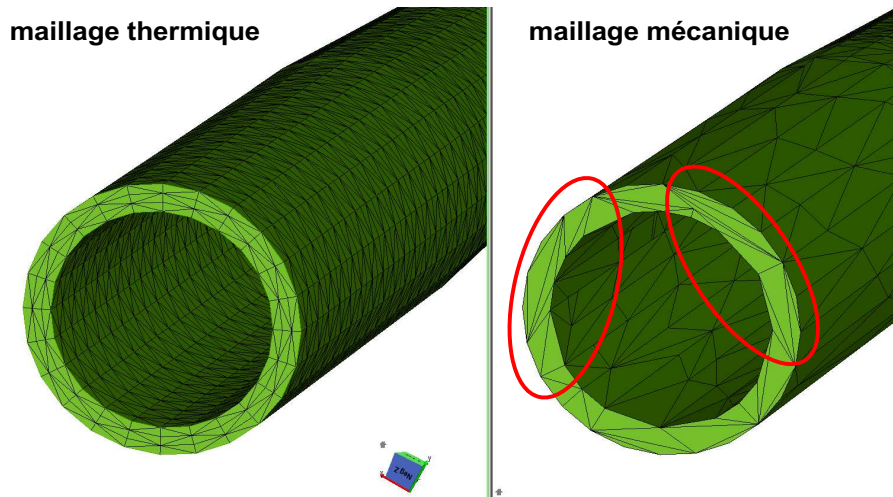


Figure IV-2. Problème de qualité de maillage

L'algorithme de déraffinement décrit dans la [section § III.3.2](#) ne prend pour consigne qu'une taille de maille moyenne. Le mailleur ne dispose pas d'informations sur les directions de déraffinement, par exemple la direction ortho radiale où un déraffinement important conduit à une perte de précision sur la représentation de la frontière du domaine. De ce fait, soit on supprime beaucoup de nœuds en sacrifiant la précision géométrique, soit on privilégie la géométrie et on ne déraffine pas assez le tube.

Comme solution, nous avons mis en place une approche basée sur l'utilisation de métriques anisotropes ([\[Gruau et al. 2005\]](#)) qui permettent le contrôle du déraffinement dans



les différentes directions de l'espace, afin de garantir un déraffinement maximal tout en respectant au mieux la géométrie du tube.

Le problème de déraffinement du tube se pose comme suit :

- ❖ Trouver un champ de métrique représentant l'anisotropie du maillage initial
- ❖ Construire la métrique de déraffinement, de façon à contrôler le déraffinement suivant les différentes directions

#### IV.1.1. Notion de métrique

Une métrique de  $\mathfrak{R}^d$  est une matrice carrée  $\mathbf{M}$  d'ordre  $d$  à valeurs réelles qui est symétrique et définie positive. Elle sert à mesurer la distance dans l'espace auquel elle est associée. Ainsi, on définit le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  dans l'espace euclidien usuel  $\mathfrak{R}^d$  muni de la métrique  $\mathbf{M}$  et défini de la manière suivante:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{M}} = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \quad (\text{IV.1})$$

La norme euclidienne d'un vecteur  $\mathbf{u}$  dans la métrique  $\mathbf{M}$  :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (\text{IV.2})$$

Soit  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathfrak{R}^d$ , on définit alors la distance entre  $A$  et  $B$  par :

$$d(A, B)_{\mathbf{M}} = \|\mathbf{AB}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{(\mathbf{AB})^T \mathbf{M} (\mathbf{AB})} \quad (\text{IV.3})$$

La métrique  $\mathbf{M}$  étant symétrique et définie positive, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^T \quad (\text{IV.1})$$

Avec  $\mathbf{R}$  est la matrice des vecteurs propres et  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice des valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1,3}$  ; les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i=1,3}$  représentent les inverses des carrés des tailles de maille  $(h_i)_{i=1,3}$  suivant les directions propres :

$$(h_i)_{i=1,3} = \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)_{i=1,3} \quad (\text{IV.2})$$

Supposons que l'on veuille résoudre un problème éléments finis dans un espace associé à la métrique  $\mathbf{M}$ . Le maillage est optimal si la taille des éléments est égale à 1 (ou autre valeur constante fixée arbitrairement) dans toutes les directions de cet espace. Dans l'espace réel, cela implique que la taille de maille dans les différentes directions  $(h_i)_{i=1,3}$ . Ainsi, pour toute arête  $(i, j)$  du maillage on a :

$$\forall (i, j) \in \mathbf{M}, \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_{\mathbf{M}} = 1 \text{ et } \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\| = \sqrt{\sum_{l=1,3} h_l^2} = h \quad (\text{IV.3})$$

### IV.1.2. Construction de la métrique initiale

Pour simplifier le problème, nous assimilons localement le tube à un cylindre creux dont l'axe est confondu avec celui du tube réel qui est ici  $(O, z)$ . Ainsi, pour tout nœud  $P$  du maillage, les vecteurs propres de la métrique en  $P$  sont les vecteurs de base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  du repère cylindrique local associé à ce nœud et les valeurs propres  $(h_r, h_\theta, h_z)$  sont reliées aux tailles de maille dans le repère cylindrique local [Gruau *et al.* 2005]. Au point  $P$ , on associe le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  de coordonnées  $(x_r, y_r, z_r) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  ( $(x_0, y_0, z_0)$  sont les coordonnées d'un point quelconque de l'axe  $(O, z)$ ). La métrique en cylindrique en  $P$  définie par les tailles  $(h_r, h_\theta, h_z)$  est donnée par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{h_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z^2} \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^T \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathbf{R}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x_r}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2}} & -\frac{y_r}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2}} & 0 \\ \frac{y_r}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2}} & \frac{x_r}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

$\mathbf{R}_2$  est la matrice des vecteurs propres  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ . Les valeurs des tailles de maille  $(h_r, h_\theta, h_z)$  sont d'abord calculées sur chacun des éléments partageant le nœud  $P$  et moyennés ensuite. Le calcul des tailles de maille élémentaires  $(h_r^e, h_\theta^e, h_z^e)$  repose sur la structuration du maillage du tube utilisé pour les calculs (Figure IV-3). Leurs valeurs sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} h_r^e = \max_{i \neq j} |r_i - r_j| \\ h_\theta^e = 2r_m \sin\left(\frac{1}{2} \max_{i \neq j} |\theta_i - \theta_j|\right) \\ h_z^e = \max_{i \neq j} |z_{ri} - z_{rj}| \end{cases} \quad \forall i, j \in e \quad (\text{IV.6})$$

Où  $r_i$  représente le rayon du nœud  $i$  par rapport à l'axe du tube et  $\theta_i$  la position angulaire de ce nœud dans le repère cylindrique local;  $r_m$  est le rayon moyen des nœuds de l'élément  $e$  :

$$r_i = \sqrt{x_{ri}^2 + y_{ri}^2}, \quad r_m = \frac{\sum_{i \in e} r_i}{4}, \quad \theta_i = \arctg\left(\frac{y_{ri}}{x_{ri}}\right) \quad (\text{IV.7})$$

Les tailles de maille  $(h_r, h_\theta, h_z)$  sont alors données par la moyenne des tailles de maille de tous les éléments  $e$  qui partagent le nœud  $P$  :

$$h_r = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} h_r^e}{N_e}, \quad h_\theta = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} h_\theta^e}{N_e}, \quad h_z = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} h_z^e}{N_e} \quad (\text{IV.8})$$

$N_e$  est le nombre d'éléments  $e$  partageant le noeud  $P$ .

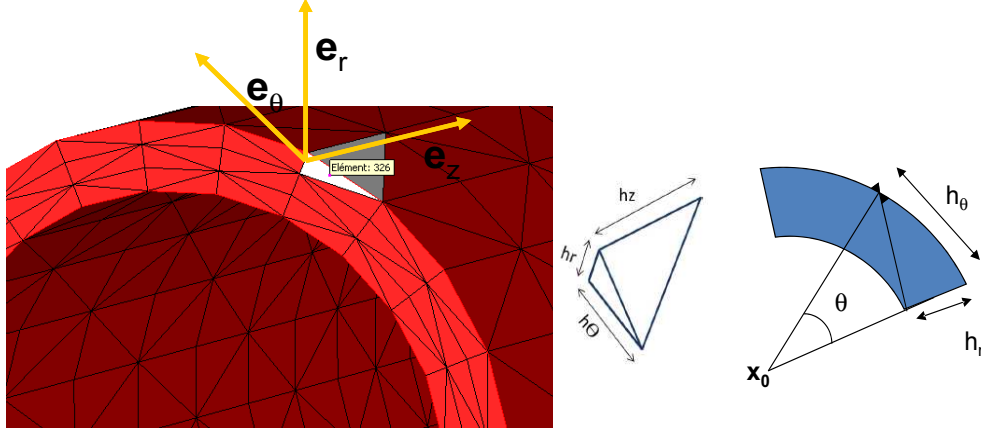


Figure IV-3. Eléments structurés maillage du tube

Pour un tube ayant un axe  $(O, \mathbf{w})$  quelconque, si  $\mathbf{R}_1$  est la rotation qui permet de se ramener à un cylindre creux d'axe  $(O, z)$ , alors la métrique en un nœud  $P$  est donnée par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{h_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z^2} \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \quad (\text{IV.9})$$

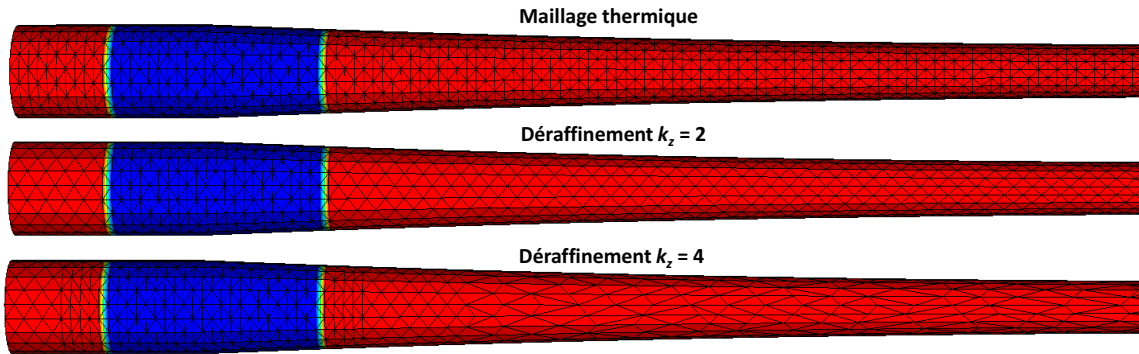
### IV.1.3. Calcul de la métrique de déraffinement

La métrique de déraffinement est calculée en appliquant des facteurs d'échelle à la métrique cylindrique initiale précédemment définie. Ces facteurs d'échelle correspondent aux déraffinements dans les différentes directions. Soit  $\mathbf{K}$  la matrice de transformations homothétiques, la métrique de déraffinement  $\mathbf{M}^{deraf}$  s'écrit :

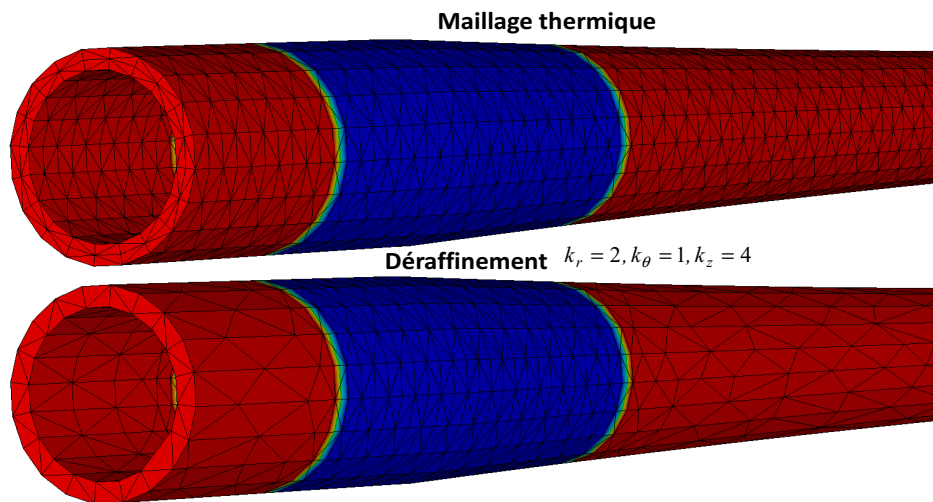
$$\mathbf{M}^{deraf} = \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{K}^T, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_z} \end{pmatrix} \quad \text{pour que} \quad \begin{cases} h_r^{deraf} = k_r h_r \\ h_\theta^{deraf} = k_\theta h_\theta \\ h_z^{deraf} = k_z h_z \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Afin d'éviter les problèmes de précision au niveau des frontières du domaine, c'est-à-dire pour préserver la précision de la description du cylindre, le facteur de déraffinement  $k_\theta$  est souvent bloqué à 1, sauf si le maillage initial présente une frontière discrétisée très finement en  $\theta$ .

La [Figure IV-4](#) illustre un exemple de déraffinement de tubes à l'aide de métriques analytiques pour différents facteurs de déraffinement.



*Figure IV-4. Exemple1 de déraffinement de tube*



*Figure IV-5. Exemple2 de déraffinement de tube*

Avec l'utilisation de la métrique cylindrique, il est possible de contrôler le déraffinement du maillage dans chaque direction de l'espace et ainsi conserver la frontière. On ne peut pas déraffiner dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  (sauf pour des maillages très fins) sans dégrader la précision de la géométrie. Dans la direction  $\mathbf{e}_r$  le déraffinement est limité par le nombre souvent faible de nœuds s'y trouvant. Il ne reste plus alors que la direction  $\mathbf{e}_z$  où le déraffinement n'est pas limité et que l'on va chercher à maximiser, il en résulte parfois des maillages fortement anisotropes, qui peuvent poser des problèmes de conditionnement lors la résolution du système linéaire sous-jacent au problème mécanique comme nous l'avons vu au [chapitre I](#).

## IV.2. Précision de la version initiale de la méthode

Dans [Ramadan 2010] la précision de la méthode MMP a été évaluée sur un cas de martelage avec une loi de Norton-Hoff. L'auteur trouve une précision excellente ; l'erreur commise est de l'ordre de la précision des éléments finis. On s'intéresse ici à la précision de la méthode MMP dans le cas du laminage à pas de pèlerin avec une loi élastoplastique. On considère un maillage à 8 000 nœuds. Les paramètres de la Méthode MMP sont donnés dans les tableaux ci-dessous :

Tableau IV-1. Paramètres de la méthode MMP

Longueur du tube ( $L_p$ )	Longueur de la ZD ( $L_{ZD}$ )	maillage thermique	maillage mécanique
390 mm	42 mm	8 400 nœuds	2 300 nœuds

### IV.2.1. Variables instantanées

La Figure IV-6 et la Figure IV-7 présentent les isovaleurs de la norme du champ de vitesse et du champ de température à l'instant  $t=0,01s$  correspondant au début de la réduction de l'épaisseur du tube. On peut remarquer la similitude des isovaleurs, ce qui témoigne de la bonne précision de la méthode. Du point de vue quantitatif, on note de légères différences sur les extrema, mais ces différences restent faibles et inférieures à la précision éléments finis (0,02% pour la vitesse et 0,014% pour la température en valeurs relatives).

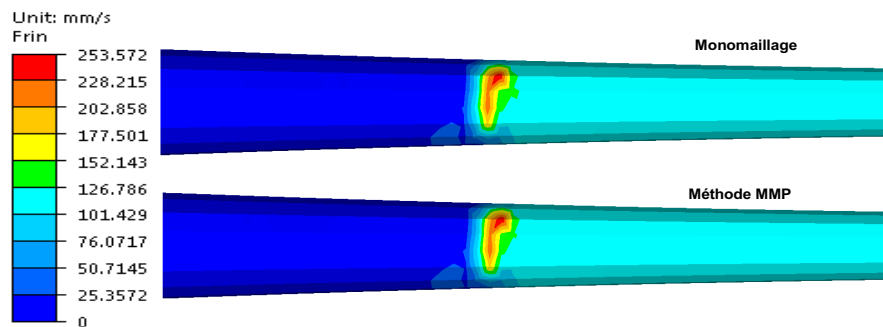


Figure IV-6. Isovaleurs champ de vitesse ( $t=0,01s$ ) MMP initiale vs méthode monomaillage

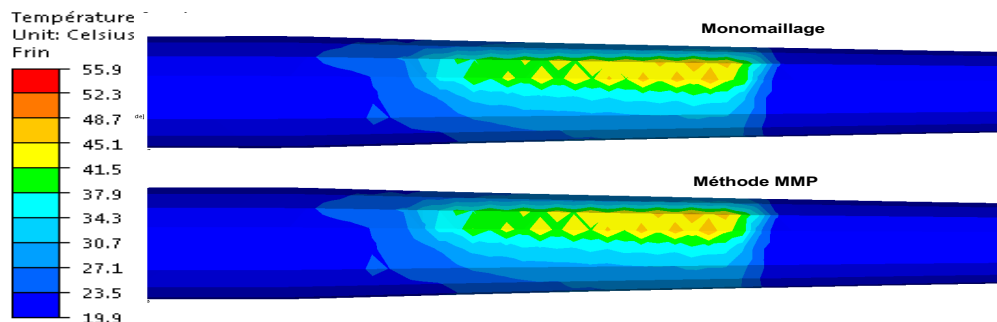


Figure IV-7. Isovaleurs champ de température ( $t=0,01s$ ) MMP initiale vs méthode monomaillage

### IV.2.2. Variables d'histoire

La Figure IV-8 et la Figure IV-9 montrent respectivement les isovaleurs de la déformation équivalente et de la contrainte équivalente de von Mises à l'instant  $t=0,06s$  (correspondant à 3/4 de la passe aller). Globalement, les isovaleurs de déformation sont assez proches. Dans les zones près de l'emprise, les champs sont quasiment les mêmes. Dans les zones loin de l'emprise, on note de légères différences mais on garde une bonne précision. En ce qui concerne la contrainte équivalente de von Mises, on retrouve quasiment les mêmes résultats dans les zones sous emprise (où les maillages sont identiques). Par contre dans les zones loin de l'emprise, on note de grosses perturbations matérialisées par des extrema et des valeurs anormalement élevées.

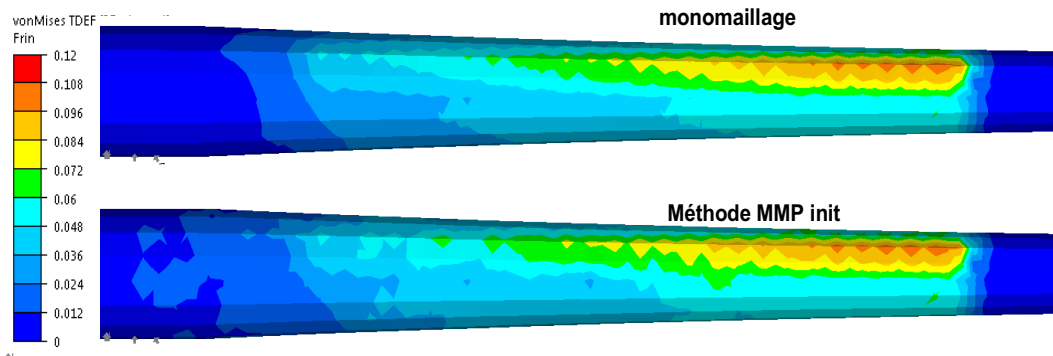


Figure IV-8. Déformation équivalente ( $t=0,06s$ ): monomaillage vs version initiale de méthode MMP

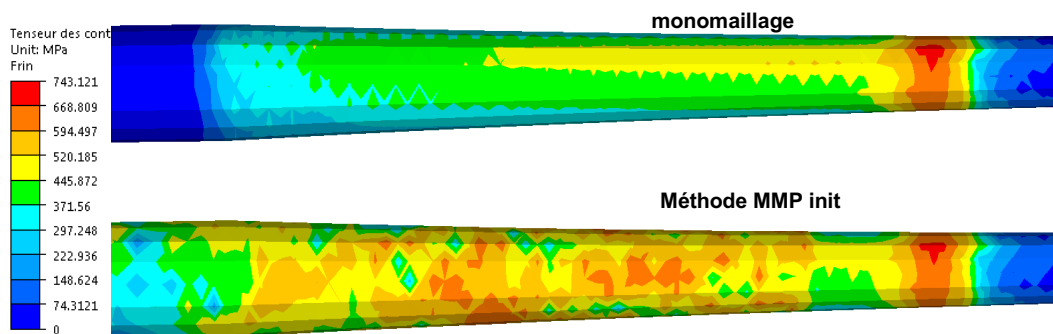


Figure IV-9. Contrainte équivalente de von Mises ( $t=0,06s$ ): monomaillage vs version initiale de méthode MMP

Sur la Figure IV-10 on présente la courbe d'évolution de la contrainte axiale ( $\sigma_{zz}$ ) en fonction de la position  $z$  sur la génératrice du tube. Dans la zone sous emprise, on retrouve le pic de contrainte correspondant à la compression maximale, cependant les contraintes résiduelles dans les zones loin de l'emprise présentent des perturbations dont les pics sont par endroit du même ordre de grandeur que le pic de compression observé sous emprise.

Les perturbations observées sur les contraintes posent problème puisqu'elles interviennent dans les calculs des d'endommagement du tube. Les contraintes interviennent également dans le calcul des efforts sur les outillages, et comme le montre la Figure IV-11, les perturbations sur les contraintes conduisent à des efforts complètement erronés sur la passe retour.

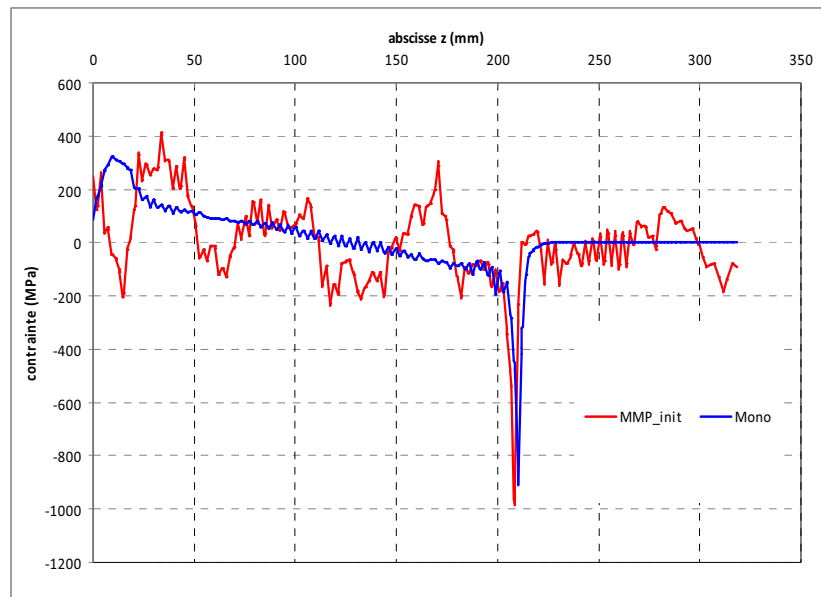


Figure IV-10. Contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction de l'abscisse  $z$  : version initiale de méthode MMP

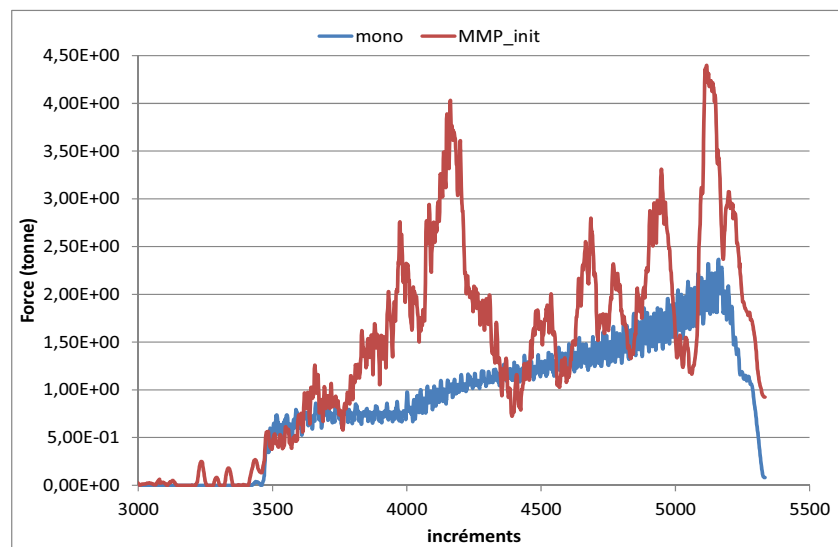


Figure IV-11. Effort de séparation des matrices : monomaillage vs méthode MMP



### IV.2.3. Origines des perturbations sur les contraintes

Afin de comprendre l'origine des perturbations sur les contraintes, intéressons-nous à l'évolution du champ de vitesse au cours de la simulation. Cette analyse se justifie par le fait que dans la formulation élastoplastique incrémentale, la valeur de la contrainte de l'instant actuel dépend de celle de l'instant précédent et du champ des vitesses de l'instant actuel à travers le tenseur des vitesses de déformation :

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^t + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}, \boldsymbol{\lambda}^t) \quad (\text{IV.11})$$

Avec  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}$  l'incrément de contrainte obtenu par intégration de loi élastoplastique présentée dans le chapitre 1. La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^t$ , de son côté, intervient dans le calcul de  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$  à travers le module tangent élastoplastique. Ainsi, la perturbation de la contrainte entraîne celle de la vitesse et vice-versa.

La Figure IV-12 présente les isovaleurs du champ de vitesse avant et après un changement de maillage mécanique (remaillage). Ce champ présente des perturbations à l'incrément de calcul suivant immédiatement le remaillage (incrément 256). Les perturbations sont prononcées dans les zones qui étaient raffinées et qui deviennent déraffinées après remaillage. Au même incrément, comme le montre la Figure IV-13(b), on observe de petites variations sur les contraintes (petites taches sur les isovaleurs). Alors que les perturbations sur le champ des vitesses disparaissent quelques incréments plus tard Figure IV-13(c) et (e), celles sur les contraintes restent et se développent au cours des incréments suivants principalement dans les zones éloignées de l'emprise (Figure IV-13(d) et (f)).

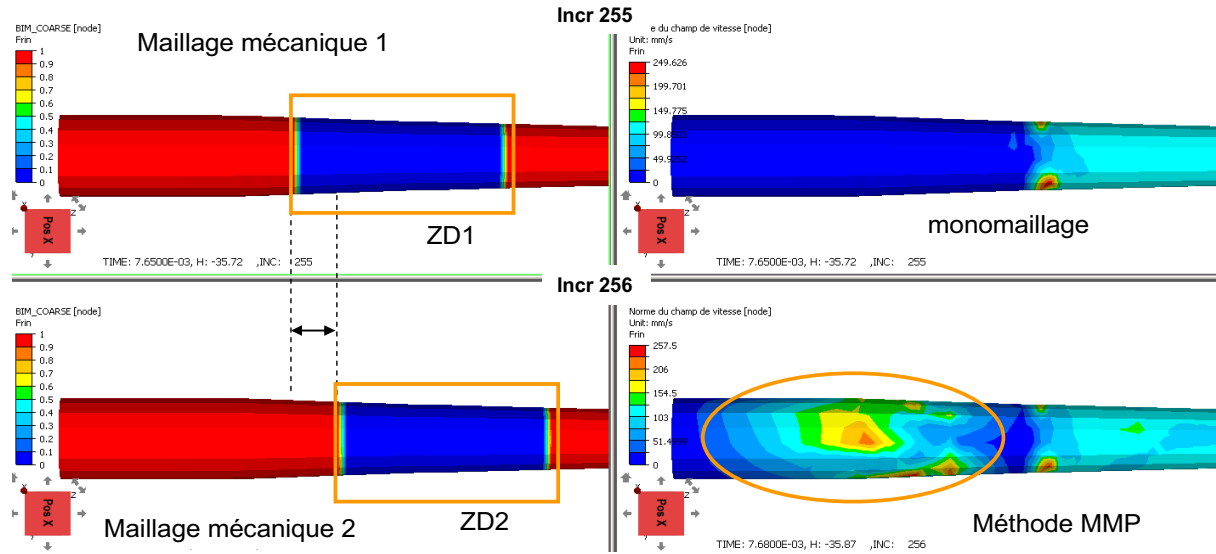


Figure IV-12. Perturbation sur le champ de vitesse après remaillage

Ce phénomène est observé après chaque remaillage. Les perturbations observées sur les contraintes trouvent donc leur origine dans les perturbations sur le champ des vitesses qui succèdent à un changement de maillage mécanique, puis ces perturbations des contraintes se cumulent dans le temps. Il reste à comprendre l'origine des perturbations du champ des vitesses. Pour ce faire, revenons sur l'algorithme global de la méthode MMP résumé sur la Figure IV-14.

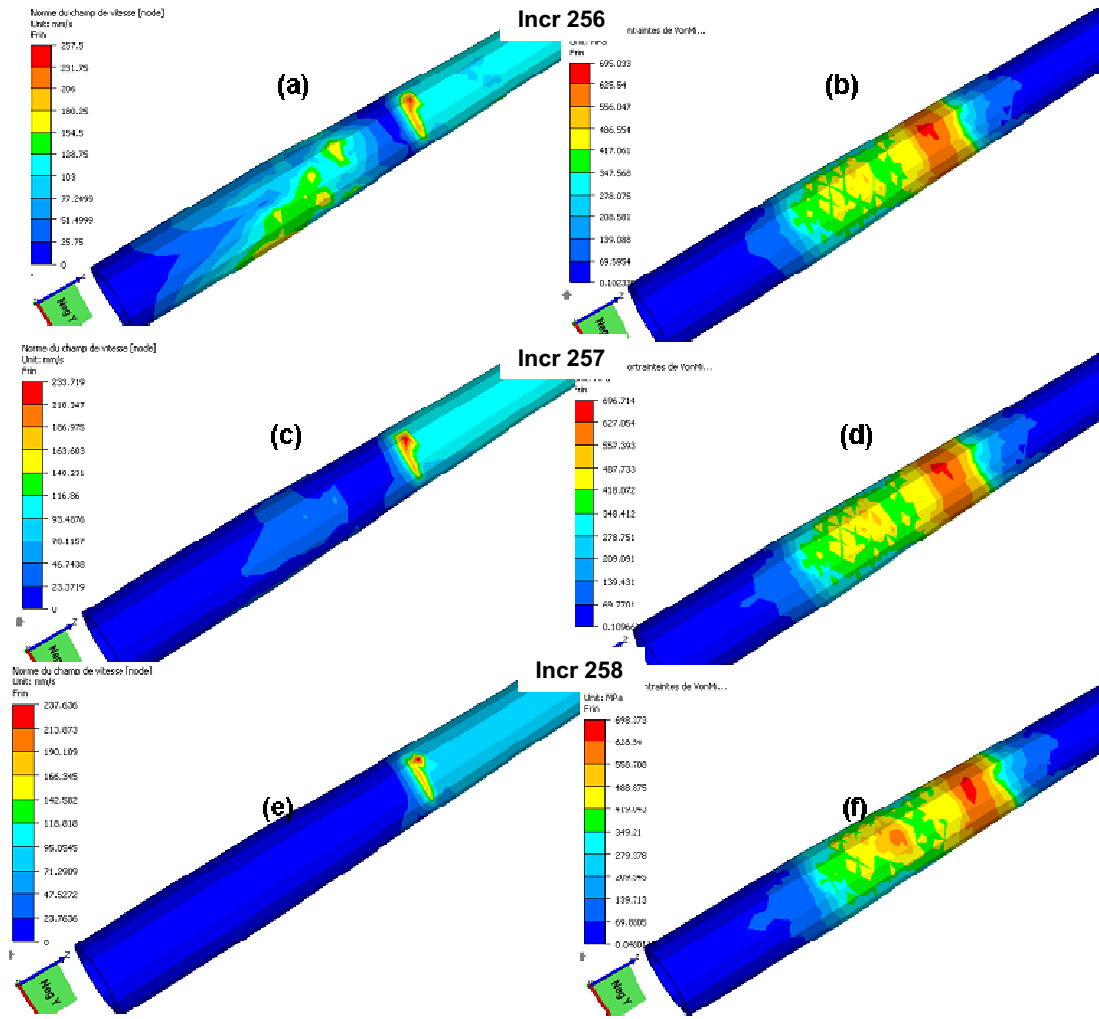


Figure IV-13. Amorçage et développement de la perturbation sur la vitesse et les contraintes après remaillage, gauche : norme de la vitesse, droite : contrainte équivalente

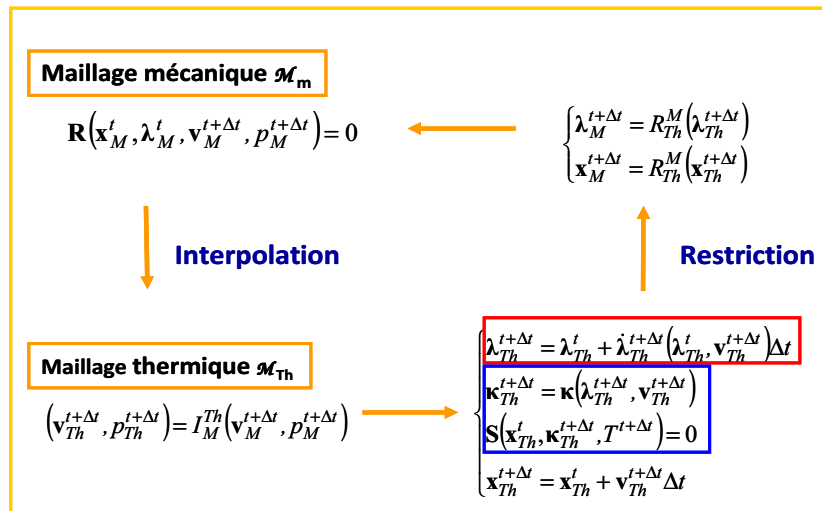


Figure IV-14. Algorithme de la méthode MMP: zoom les opérations de transport

Les variables d'état  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  comprenant la contrainte  $\sigma_{Th}^{t+\Delta t}$  sont calculées sur  $\mathcal{M}_{Th}$  à l'aide du champ de vitesse  $\mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}$  calculé sur  $\mathcal{M}_m$  et interpolé sur  $\mathcal{M}_{Th}$ . Ces variables sont ensuite projetées sur  $\mathcal{M}_m$  au début de l'incrément suivant et sont utilisées pour le calcul mécanique. En cas de régénération du maillage  $\mathcal{M}_m$ , les champs de vitesse et de pression ( $\mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}, p_{Th}^{t+\Delta t}$ ) sont également projetés sur  $\mathcal{M}_m$  en début d'incrément pour initialiser le calcul de ( $\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t}$ ).

Le transport des champs de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{Th}$  qu'ils soient **P0** ou **P1**, est exact dans la ZD comme nous l'avons vu au chapitre 3. Par contre dans les zones déraffinées, ce transport engendre une diffusion numérique surtout pour les champs **P0**, comme le montre la Figure IV-15, où on présente les isovalues du champ des contraintes à l'issue du transport de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{Th}$  succédant à une opération de remaillage.

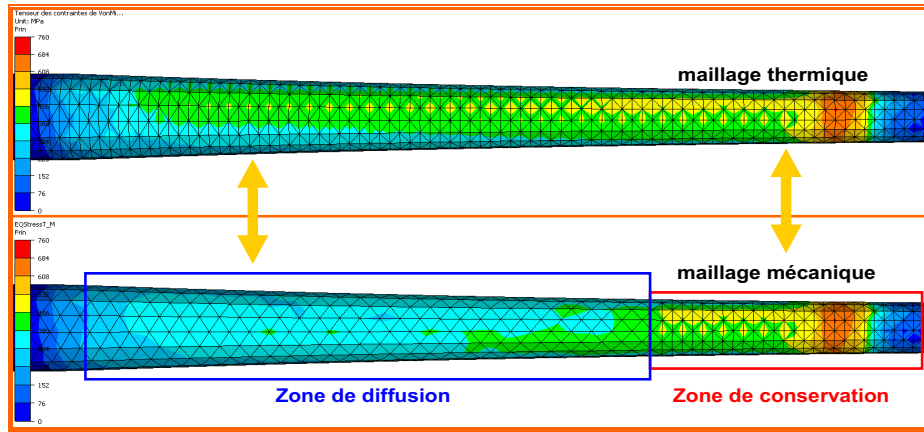


Figure IV-15. Diffusion numérique de la contrainte équivalente après transport de  $\mathcal{M}_{Th}$  vers  $\mathcal{M}_m$

Sur cette figure, on peut remarquer une parfaite conservation des champs dans la ZD et une diffusion numérique importante dans les zones où le maillage est déraffiné.

La diffusion numérique des champs **P0** en l'occurrence le champ des contraintes n'est pas sans conséquence sur la résolution du problème mécanique et expliquerait donc les perturbations observées tout d'abord sur le champ des vitesses, puis sur le champ des contraintes par cumul dans le temps. Pour consolider la piste de la diffusion numérique, nous avons réalisé un test en utilisant deux maillages mécaniques avec des taux de déraffinement différents comme le montre la Figure IV-16. Le deuxième maillage mécanique est deux fois plus déraffiné que le premier. Sur la Figure IV-17 on présente les isovalues de la contrainte équivalente de von Mises à l'instant  $t=0,06s$ . Comme attendu, les perturbations sont d'autant plus importantes que le maillage mécanique est déraffiné.

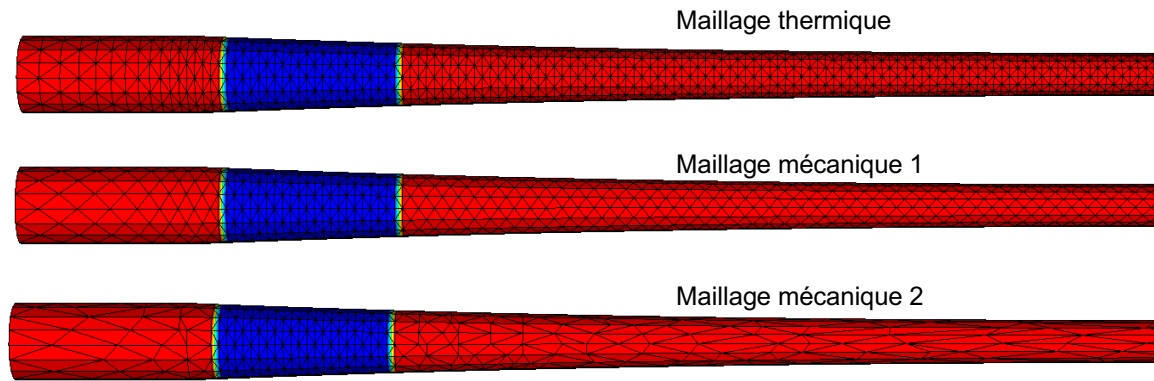


Figure IV-16. Maillages avec différents degrés de déraffinement

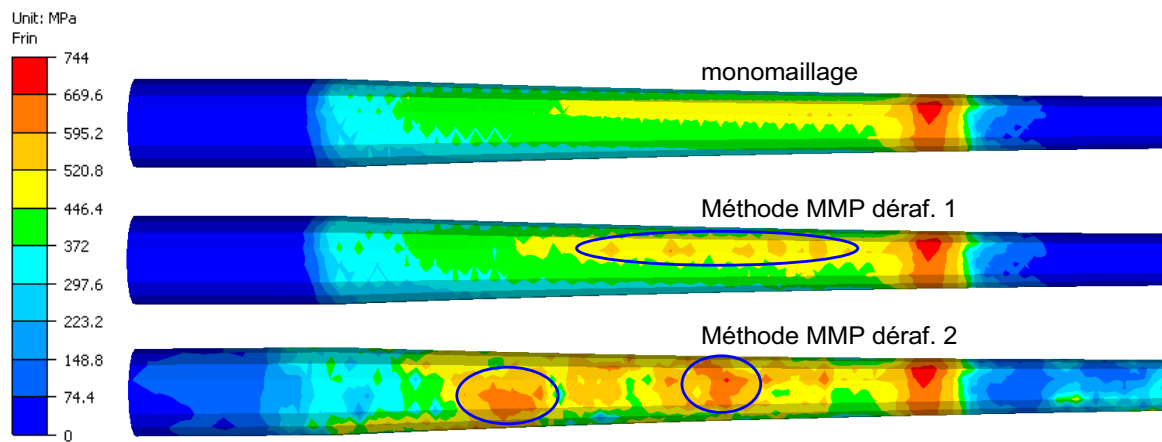


Figure IV-17. Comparaison des contraintes équivalentes pour deux taux de déraffinement différents

En sus, le champ de pression en monomaillage présente un aspect en damier dans les zones loin de l'emprise comme le montre la Figure IV-18.

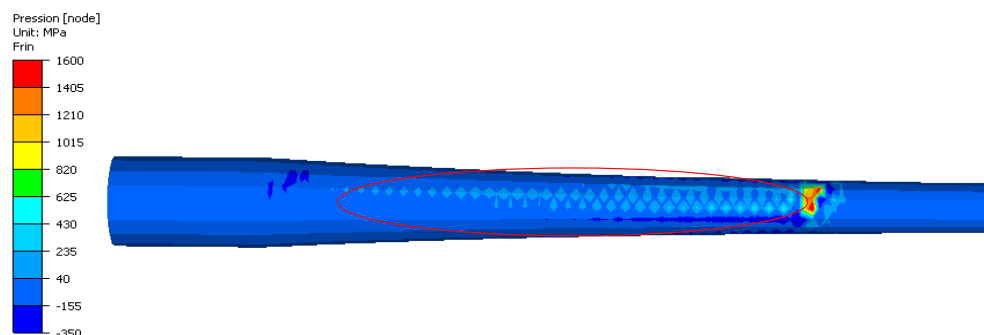


Figure IV-18. Effet damier sur les champs de pression en monomaillage

Le transfert d'un tel champ vers un maillage déraffiné conduit à une diffusion numérique même si les deux maillages sont emboîtés. Or le champs des vitesses est également fortement relié à celui des pressions avec la formulation éléments finis mixte utilisée. Lors de la résolution du problème incrémental, le champ de pression de l'incrément précédent intervient dans l'équation de conservation de masse à travers la relation :

$$\text{div}(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) = -\chi \left( \frac{p^{t+\Delta t} - p^t}{\Delta t} \right) \quad (\text{IV.12})$$

de sorte que des erreurs sur  $p^t$  (résultats d'un mauvais transport) peuvent entraîner des erreurs sur  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$ .

### IV.3. Amélioration de la précision de la méthode

Pour réduire la diffusion numérique et améliorer la précision des contraintes, trois pistes ont été explorées : l'amélioration de la stabilisation de la pression, la réactualisation locale des variables d'état  $\lambda^{t+\Delta t}$  et l'utilisation d'un opérateur de transport **P0** par recouvrement SPR.

#### IV.3.1. Stabilisation de la pression

L'idée ici est de corriger l'effet en damier sur la pression pour avoir un champ plus régulier et par conséquent minimiser les erreurs liées au transport dans les zones déraffinées du maillage  $\mathcal{M}_m$ . Pour ce faire, nous allons agir sur les termes de stabilisation (présentés dans le [chapitre 1](#)) en jouant sur le paramètre de stabilisation  $\beta$ . Rappelons qu'une valeur élevée de  $\beta$  permet d'obtenir un bon lissage de la pression mais introduit une légère compressibilité alors qu'une faible valeur de  $\beta$  (proche de 1) permet de mieux prendre en compte l'incompressibilité mais peut occasionner des oscillations. Des tests numériques ont montré qu'une valeur  $\beta = 2$  est optimale pour beaucoup de problèmes. Malheureusement, dans notre cas, cette valeur conduit à des champs de pression en damier. Nous avons alors testé plusieurs valeurs croissantes de  $\beta$ . Il en ressort que la valeur  $\beta = 6$  permet d'obtenir un bon compromis stabilisation/incompressibilité. La [Figure IV-19](#) montre le champ de pression obtenu avec  $\beta = 6$  en comparaison avec celui obtenu avec la valeur par défaut  $\beta = 2$ . On peut observer la régularité du champ et la disparition de l'effet damier pour  $\beta = 6$ .

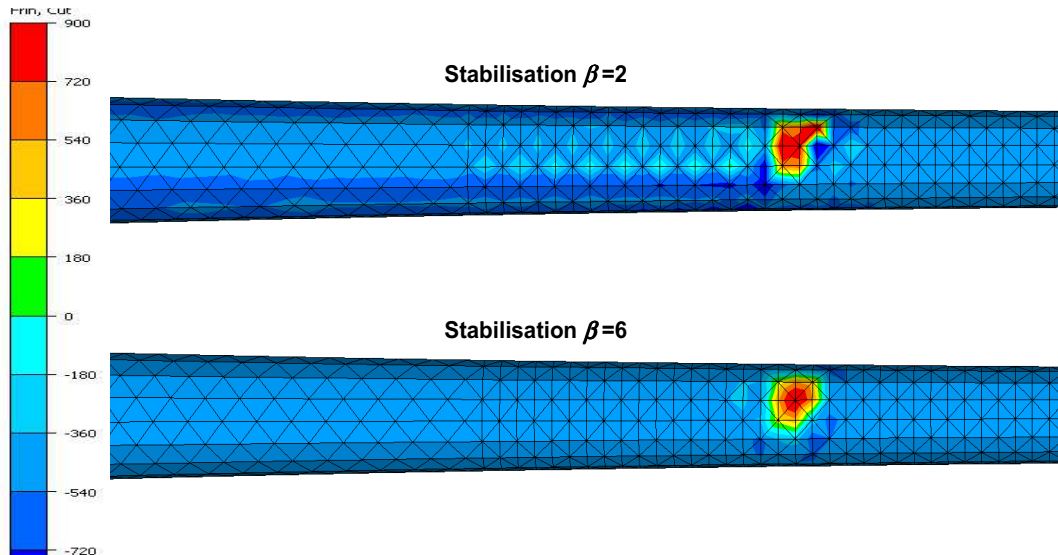


Figure IV-19. Champ de pression pour différentes stabilisations

Intéressons nous à présent à l'effet de la stabilisation sur les perturbations des champs de contraintes (cumul des perturbations sur le champ des vitesses). La [Figure IV-20](#) et la [Figure](#)

IV-21 montrent les champs des contraintes obtenus pour les deux paramètres de stabilisation. Les résultats en monomaillage (Figure IV-20(a) et Figure IV-21(a)) montrent clairement que la stabilisation a aussi un effet sur les contraintes et qu'une valeur  $\beta=6$  permet effectivement de réduire les oscillations sur les contraintes loin de l'emprise. Les perturbations induites par la méthode MMP semblent de nature différente, car non seulement elles ne sont pas réduites lorsqu'on augmente la valeur de  $\beta$  (Figure IV-20(b) et Figure IV-21(b)), mais elles sont amplifiées.

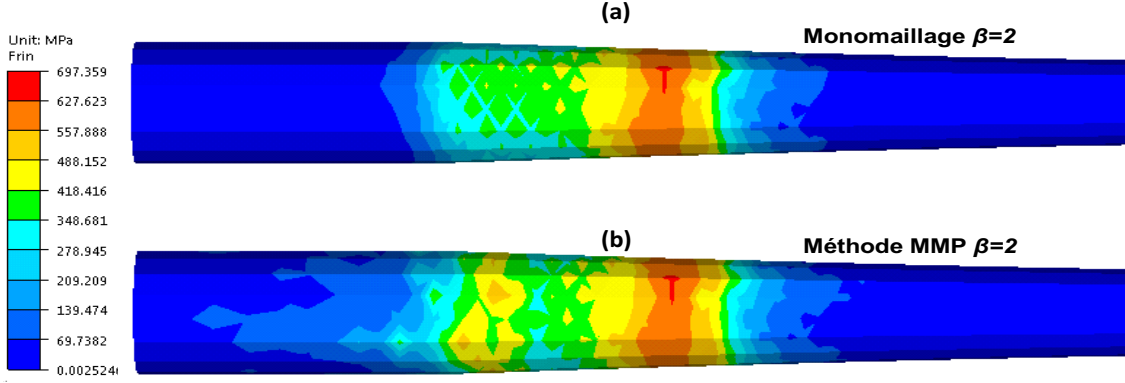


Figure IV-20. Contrainte équivalente de von Mises ( $t=0,02s$ ) : effets de la stabilisation  $\beta=2$

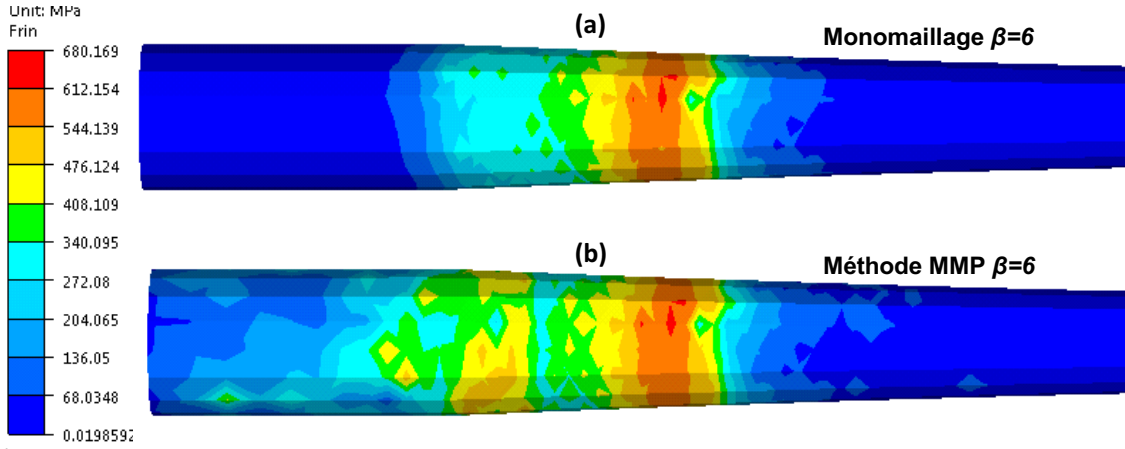


Figure IV-21. Contrainte équivalente de von Mises ( $t=0,02s$ ) : effets de la stabilisation  $\beta=6$

### IV.3.2. Réactualisation locale des variables d'état: *transport non incrémental*

Comme reprécisé dans la section § V.2.3, dans la version initiale de la méthode MMP, les variables d'état mécaniques  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  sont d'abord réactualisées sur  $\mathcal{M}_{th}$  à l'aide du champ de vitesse interpolé  $\mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t}$ , puis projetées sur  $\mathcal{M}_m$  en début d'incrément :

$$\begin{aligned}\lambda_{Th}^{t+\Delta t} &= \lambda_{Th}^t + \dot{\lambda}_{Th}^{t+\Delta t}(\lambda_{Th}^t, \mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t})\Delta t \\ \lambda_M^{t+\Delta t} &= R_{Th}^M(\lambda_{Th}^{t+\Delta t})\end{aligned}\tag{IV.13}$$

L'objectif du transport non incrémental est de réduire la diffusion numérique liée au transport des champs  $\mathbf{P0}$  de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{Th}$ , à travers une réactualisation locale de ces champs, ce qui permet de minimiser le nombre transports. Un autre aspect positif de cette technique est la cohérence des variables d'état  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  vis-à-vis du champ de vitesse et de pression  $(\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t})$ , c'est-à-dire que  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  vérifie à la fois l'équation d'équilibre et la loi de comportement vis-à-vis de  $(\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t})$ . Ainsi, à la place du transport des variables d'état mécanique  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{Th}$  à chaque incrément, ces variables sont actualisées sur  $\mathcal{M}_m$  à l'aide des solutions  $(\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t})$  avec lesquelles elles sont cohérentes. Le transfert des variables d'état mécanique de  $\mathcal{M}_{th}$  vers  $\mathcal{M}_m$  se fait uniquement aux incréments où on génère un nouveau maillage mécanique :

$$\begin{cases} \lambda_{Th}^{t+\Delta t} = \lambda_{Th}^t + \dot{\lambda}_{Th}^{t+\Delta t}(\lambda_{Th}^t, \mathbf{v}_{Th}^{t+\Delta t})\Delta t \\ \lambda_M^{t+\Delta t} = \lambda_M^t + \dot{\lambda}_M^{t+\Delta t}(\lambda_M^t, \mathbf{v}_M^{t+\Delta t})\Delta t, \forall t \neq T_{remesh} \\ \lambda_M^{t+\Delta t} = R_{Th}^M(\lambda_{Th}^{t+\Delta t}), \forall t = T_{remesh} \end{cases} \quad (IV.14)$$

Un autre point positif de cette approche est la cohérence des variables d'état  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  vis-à-vis du champ de vitesse et de pression  $(\mathbf{v}_M^{t+\Delta t}, p_M^{t+\Delta t})$ . En revanche, les résultats  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  stockés sur le maillage  $\mathcal{M}_{th}$  ne correspondent plus directement aux  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  calculés sur le maillage  $\mathcal{M}_m$ .

La Figure IV-22 présente les résultats obtenus avec cette approche. On peut remarquer une disparition d'une bonne partie des perturbations sur les contraintes. Les mêmes constats sont faits pour le cas de tréfilage (Figure IV-25). Ces améliorations sont également visibles du point de vue quantitatif, comme le montre la distribution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  le long de l'axe du tube (Figure IV-24). Cependant, il subsiste encore des perturbations non négligeables qui résultent des diffusions numériques engendrées lors des changements de maillages mécaniques. La précision de la méthode dépend donc de la fréquence de régénération du maillage mécanique. Les déformations (Figure IV-23) quant à elles sont toujours calculées avec la bonne précision déjà observée avec la version initiale.

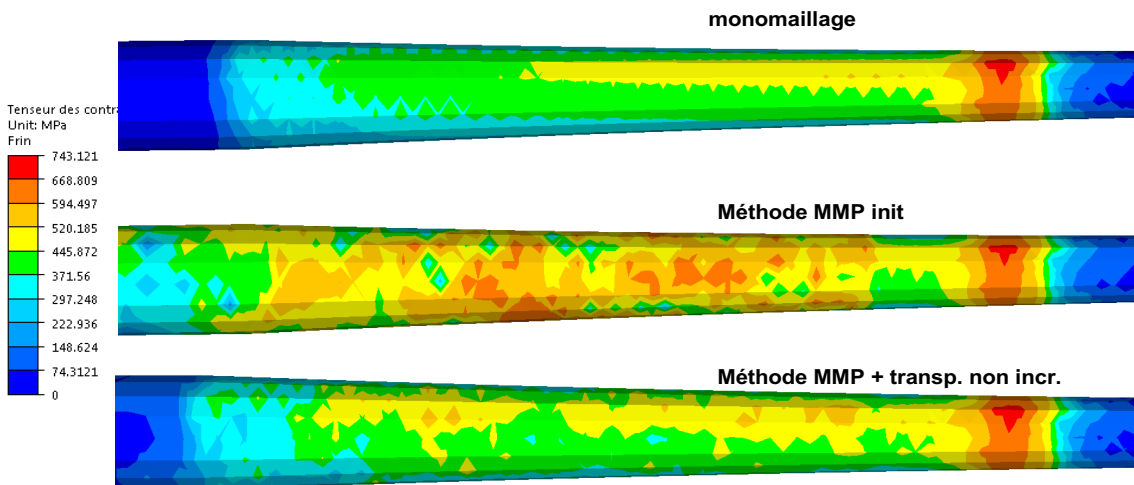


Figure IV-22. Contrainte équivalente de von Mises ( $t=0,06s$ ) : effets du transport non incrémental



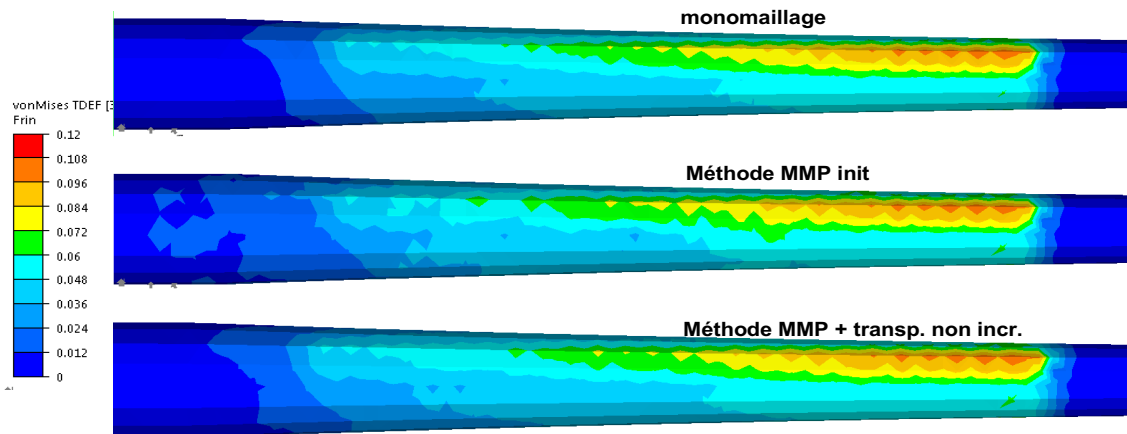


Figure IV-23. Déformation équivalente ( $t=0,06s$ ) : effets du transport non incrémental

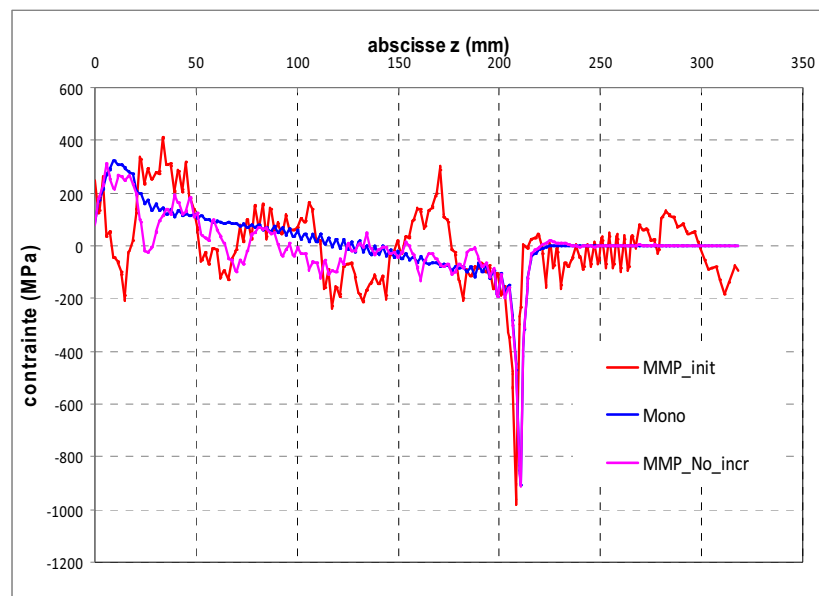


Figure IV-24. Contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction de l'abscisse  $z$  ( $t=0,06s$ ) : effets du transport non incrémental

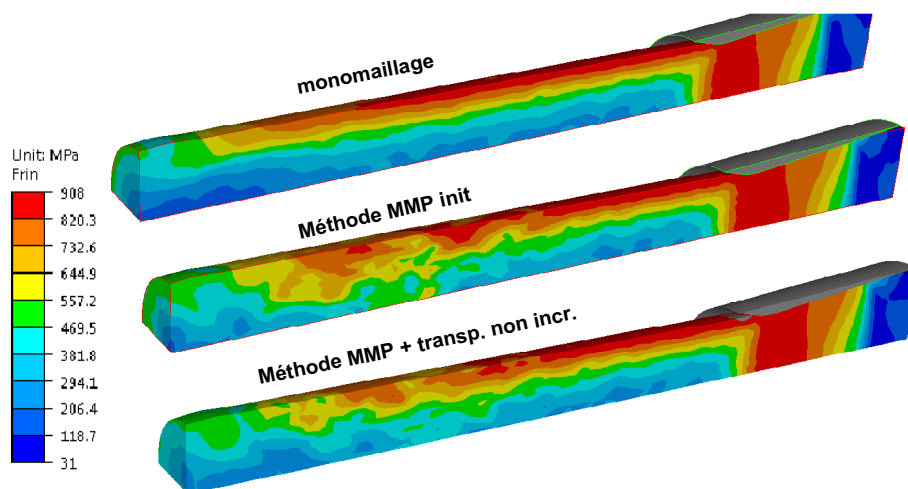


Figure IV-25. Contrainte équivalente de von Mises (cas du tréfilage en fin de passe): effets du transport non incrémental

### IV.3.3. Réactualisation des variables d'état sur le maillage thermique

Dans l'approche de réactualisation locale des variables d'état  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  présentée dans la section [section § IV.3.2](#), les variables d'état  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  sont actualisées parallèlement, sur le maillage  $\mathcal{M}_{th}$ , tout comme le sont les variables d'état  $\lambda_M^{t+\Delta t}$  sur le maillage  $\mathcal{M}_m$ . Ceci implique que les deux variables ne sont plus strictement identiques sauf aux instants où l'on régénère le maillage  $\mathcal{M}_m$ . Nous avons testé deux autres stratégies de réactualisation des variables  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  sur le maillage  $\mathcal{M}_{th}$ :

- (a) On transfère les variables d'état mécaniques déjà actualisées de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{th}$ : c'est le « *transport retour total* ».

$$\lambda_{Th}^{t+\Delta t} = I_M^{Th}(\lambda_M^{t+\Delta t}) \quad (IV.15)$$

- (b) On transfère les variations  $\Delta\lambda_M^{t+\Delta t} = \lambda_M^{t+\Delta t} - \lambda_M^t$  des variables d'état mécaniques réactualisées de  $\mathcal{M}_m$  vers  $\mathcal{M}_{th}$  et on fait ensuite la réactualisation sur  $\mathcal{M}_{th}$  comme proposé dans [\[Barton et al. 2007\]](#) : c'est le « *transport retour incrémental* »

$$\begin{cases} \Delta\lambda_{Th}^{t+\Delta t} = I_M^{Th}(\Delta\lambda_M^{t+\Delta t}) \\ \lambda_{Th}^{t+\Delta t} = \lambda_{Th}^t + \Delta\lambda_{Th}^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (IV.16)$$

Les deux stratégies ont été testées sur le même cas de laminage à pas de pèlerin que dans la [section § IV.3.2](#). La [Figure IV-26](#) présente les isovaleurs de la contrainte équivalente. Dans tous les cas, on retrouve exactement les mêmes résultats dans la zone **ZD** correspondant à la contrainte maximale. Les résultats de la stratégie (b) et de celle présentée dans la [section § IV.3.2](#), sont plus proches de ceux du monomaillage. En analysant finement, on peut noter quelques légères différences. Les contraintes résiduelles en aval de la zone de contrainte maximale sont un peu différentes avec la stratégie (b). La stratégie (a) quant à elle conduit à une forte diffusion des contraintes résiduelles en amont de la zone de contrainte maximale. En, effet à chaque fois qu'on change de maillage  $\mathcal{M}_m$ , on perd tous les gradients dans les zones initialement fines et qui se retrouvent déraffinées ; il s'en suit donc les diffusions observées avec la stratégie (a).

En résumé, les stratégies de « *transport retour* » que ce soit de  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  ou de leur incrément  $\Delta\lambda_M^{t+\Delta t}$  n'a pas d'influences notable sur les contraintes. Au contraire le transport « *transport retour* »  $\lambda_{Th}^{t+\Delta t}$  entraîne une diffusion des contraintes résiduelles en amont de la **ZD**, qui s'amplifie dans le temps. Dans la suite, nous retiendrons la version sans transport retour, puisque cette dernière présente en plus l'avantage d'éviter des opérations de transport supplémentaires qui peuvent s'avérer coûteuses.

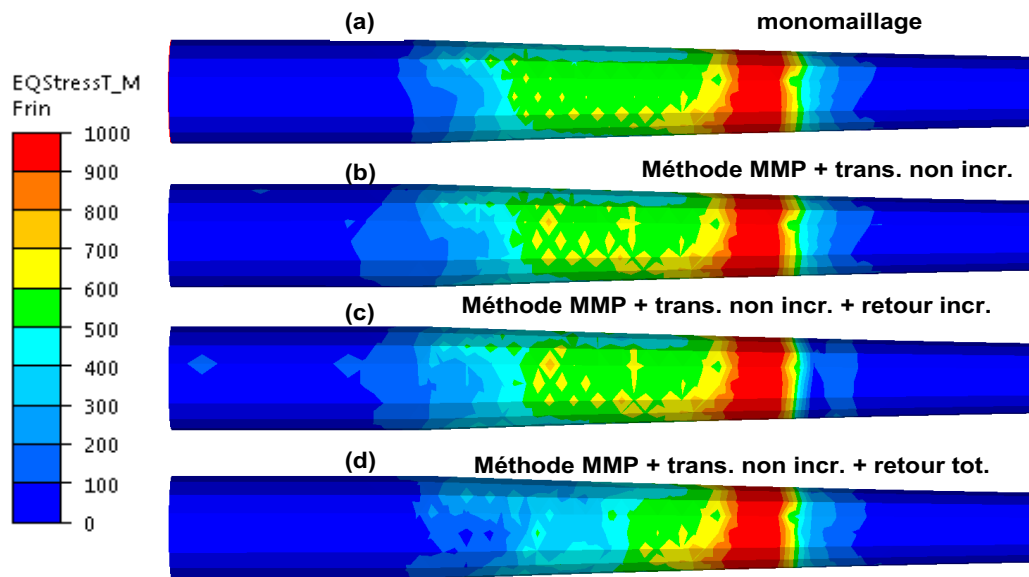


Figure IV-26. Contrainte équivalente de von Mises à  $t=0,02$  s pour différentes options de gestion des variables d'état sur le maillage thermique

#### IV.3.4. Amélioration de l'opérateur de transport P0 : *transport par recouvrement SPR*

L'opérateur de transport **P0** utilisé jusqu'ici est basé sur une interpolation directe des valeurs des points de Gauss<sup>1</sup> du maillage initial vers ceux du maillage d'arrivée. Lorsque le champ à transférer présente de fortes variations d'un élément à l'autre, elles peuvent conduire à d'importantes diffusions numériques. C'est le cas, par exemple, des champs présentés sur la Figure IV-27 où après le transport on a perdu une isovaleur sur deux.

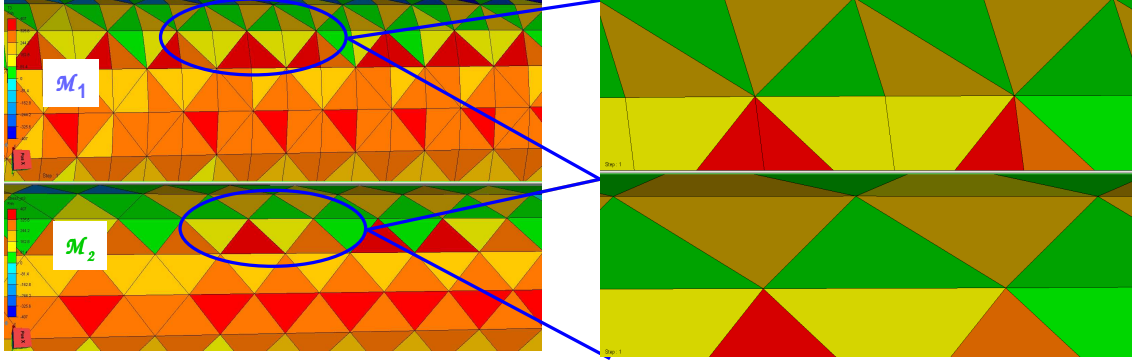


Figure IV-27. Exemple de diffusion numérique occasionnée par l'interpolation directe sur un champ de contraintes équivalente

Pour y remédier, nous avons opté pour une méthode de transport basée sur le recouvrement SPR (Superconvergent Patch Recovery). On construit d'abord des champs **P1** à partir des champs **P0** du maillage initial, par recouvrement SPR, puis les champs **P1** sont interpolés vers le maillage d'arrivée (Figure IV-28). La diffusion est réduite grâce à l'utilisation des champs **P1** d'ordre supérieur issus du recouvrement SPR.

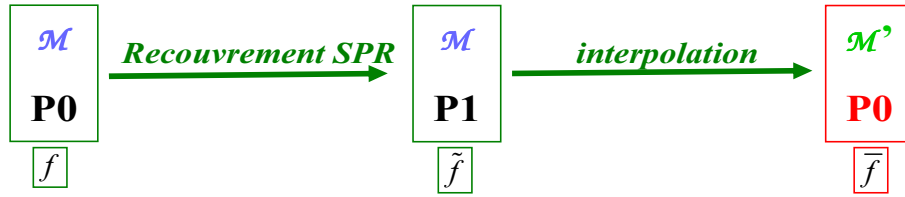


Figure IV-28. Transport par lissage P0-P1

##### IV.3.4.1. Le recouvrement SPR

Le point central de cette méthode est donc la construction des champs **P1**,  $\tilde{f}(\mathbf{x})$ , continus à partir des champs **P0**,  $f_g$  définis aux points de Gauss :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \tilde{f}_k N_k(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.17})$$

<sup>1</sup> Dans le cadre de cette thèse, on considère une intégration avec un seul point de Gauss, qui correspond donc au barycentre de l'élément.

Dans un premier temps, nous faisons une brève revue bibliographique sur les différentes méthodes de construction des champs **P1** à partir des champs **P0** tout en discutant les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles.

Une première méthode, basique, consiste à faire la moyenne des valeurs aux points de Gauss de tous les éléments partageant ce nœud ([Mediavilla *et al.* 2006]), cependant elle reste assez diffusive. Dans la littérature, les méthodes de transport les plus utilisées sont basées sur une minimisation par les moindres carrés. On distingue ainsi, des méthodes basées sur une minimisation globale ([Zienkiewicz *et al.* 1987]) et celles basées sur une minimisation locale.

Pour les méthodes basées sur la minimisation globale, la fonctionnelle s'écrit :

$$\Pi(\bar{f}_k) = \sum_{e=1}^{N_{belt}} V_e (\tilde{f}(\mathbf{x}) - f_g)^2 \quad (IV.18)$$

Avec  $f_g$  est la valeur du champ **P0** au point de Gauss de l'élément  $e$  et  $V_e$  représente le volume de cet élément.

Parmi les méthodes par minimisation locale, on distingue les techniques basées sur une approximation polynomiale telles que la technique **SPR** (Superconvergent Patch Recovery) initialement développée par Zienkiewicz et al [Zienkiewicz *et al.* 1992] et les différences finies locales ([Liszka *et al.* 1980], [Liszka 1984]). Pour chacune de ces méthodes, on cherche à construire au voisinage de chaque nœud  $k$  un champ  $\tilde{f}_k$  qui soit continu et d'un ordre d'interpolation supérieur au champ initial (par exemple linéaire si le champ initial est constant). L'approximation polynomiale dans le voisinage du nœud  $k$  est calculée en considérant les valeurs du champ  $f_g$  aux points de Gauss des éléments contenus dans le patch topologique  $P_k$  formant ce voisinage (Figure IV-29) :

$$\tilde{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{a}^k \quad (IV.19)$$

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, \dots)$  désigne la base polynomiale et  $\mathbf{a}^k = (a_0^k, a_1^k, a_2^k, a_3^k, \dots)^T$  est le vecteur contenant les coefficients du polynôme. La valeur du champ au nœud  $k$  est ensuite donnée par :

$$\bar{f}_k = \tilde{f}_k(\mathbf{x}_k) \quad (IV.20)$$

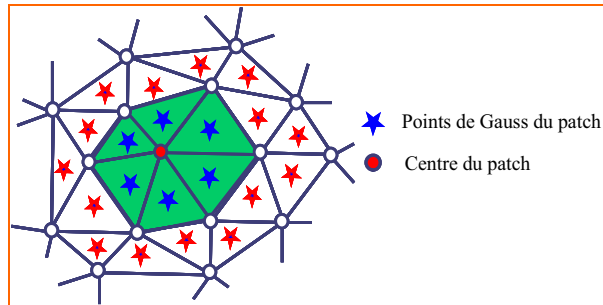


Figure IV-29. Patch topologique  $P_k$  centré sur un nœud  $k$

Les différentes méthodes de minimisation locale se distinguent par le choix des pondérations des contributions des points de Gauss. Dans la méthode **SPR** de base [Zienkiewicz *et al.* 1992], tous les points de Gauss ont le même poids ce qui conduit à la relation suivante :

$$\mathbf{a}^k = \operatorname{argmin} \Pi(\mathbf{a}^k) = \sum_{g=1}^{NbG} (f_g - \mathbf{P}(\mathbf{x}_g) \mathbf{a}^k)^2 \quad (\text{IV.21})$$

Avec  $NbG$  le nombre de point de Gauss du patch considéré.  $\mathbf{x}_g$  représente les coordonnées du point de Gauss  $g$ . La technique proposée par Liszka et al. ([Liszka 1984], [Liszka et al. 1980], [Dyduch 1996]) utilise des fonctions poids  $\omega_g$  inversement proportionnelles à la distance des points de Gauss au centre du patch considéré:

$$\begin{cases} \mathbf{a}^k = \operatorname{argmin}_{\mathbf{a}^k} \Pi(\mathbf{a}^k) = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^{NbG} \omega_g(\mathbf{x}_g) (f_g - \mathbf{P}(\mathbf{x}_g) \mathbf{a}^k)^2 \\ \omega_g(\mathbf{x}_g) = \|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_k\|^{-n} \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

Où  $\mathbf{x}_k$  représente les coordonnées du centre du patch et  $n$  un exposant dépendant du degré d'approximation polynomiale ( $n=4$  pour une approximation linéaire,  $n=6$  pour une approximation quadratique,...).

Cette approche a été utilisée par [Wiberg et al. 1997], [Wiberg 1997] dans le cadre des estimateurs d'erreur et par [Khoie et al. 2007], [Brancherie et al. 2008] pour le transfert de champs entre maillages.

Dans la suite, nous focaliserons sur la technique proposée par ([Liszka 1984], [Liszka et al. 1980]) et utilisée dans [Guerdoux 2007; Kumar et al. 2012].

Pour chaque nœud  $k$  de coordonnées  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$ , on considère une base d'approximation linéaire centrée  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \{1, \Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ , où  $\Delta x = (x - x_k)$ ,  $\Delta y = (y - y_k)$ ,  $\Delta z = (z - z_k)$  sont les coordonnées d'un point dans le repère local centré sur le nœud  $k$ . Le champ approximé  $\tilde{f}_k(\mathbf{x})$  et la fonction poids  $\omega_g$  s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \tilde{f}_k(\mathbf{x}) = a_0^k + a_1^k \Delta x + a_2^k \Delta y + a_3^k \Delta z \\ \omega_g(\mathbf{x}_g) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{-2} \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

La minimisation de la fonctionnelle (IV.22) conduit à un système linéaire où les inconnues sont les coefficients  $\mathbf{a}^k$  :

$$\sum_{g=1}^{NbG} \omega_g(\mathbf{x}_g) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_g) \mathbf{P}(\mathbf{x}_g) \mathbf{a}^k = \sum_{g=1}^{NbG} \omega_g \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_g) f_g \quad (\text{IV.24})$$

Ce système peut encore s'écrire sous la forme simple  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$  avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{g=1}^{NbG} \omega_g(\mathbf{x}_g) \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_g & \Delta y_g & \Delta z_g \\ \Delta x_g & (\Delta x_g)^2 & \Delta x_g \Delta y_g & \Delta x_g \Delta z_g \\ \Delta y_g & \Delta y_g \Delta x_g & (\Delta y_g)^2 & \Delta y_g \Delta z_g \\ \Delta z_g & \Delta z_g \Delta x_g & \Delta z_g \Delta y_g & (\Delta z_g)^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \sum_{g=1}^{NbG} \omega_g(\mathbf{x}_g) f_g \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta x_g \\ \Delta y_g \\ \Delta z_g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Avec  $\Delta x_g = (x_g - x_k)$ ,  $\Delta y_g = (y_g - y_k)$ ,  $\Delta z_g = (z_g - z_k)$

La fonction  $\tilde{f}_k$  étant exprimée dans le repère local centré sur le nœud  $k$ , sa valeur en ce nœud vaut  $\tilde{f}_k(\mathbf{x}_k) = \tilde{f}_k = a_0^k$ .

### Adimensionnalisation du système

La non homogénéité dimensionnelle des termes de la matrice  $\mathbf{A}$  peut rendre le système mal conditionné. Ce problème s'observe surtout pour des maillages fortement anisotropes (cas du laminage à pas de pèlerin), où l'on a des rapports entre les tailles de maille allant jusqu'à 100 voire 1 000. La solution adoptée est l'adimensionnalisation du système, à l'aide d'une longueur caractéristique qui peut être calculée globalement (taille de maille moyenne sur tout le domaine) ou localement sur le patch (longueur minimale, maximale ou moyenne d'arête). Des tests numériques ont montré que la taille moyenne d'arête (Figure IV-30) sur chaque patch offre les meilleurs résultats sur tout type de maillage.

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{l_{car}}, \quad l_{car} = \frac{1}{NbG} \sum_{i \in P_k} l_i \quad (IV.26)$$

Avec  $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$  les coordonnées locales adimensionnalisées et  $P_k$  le patch topologique centré sur le nœud  $k$ .

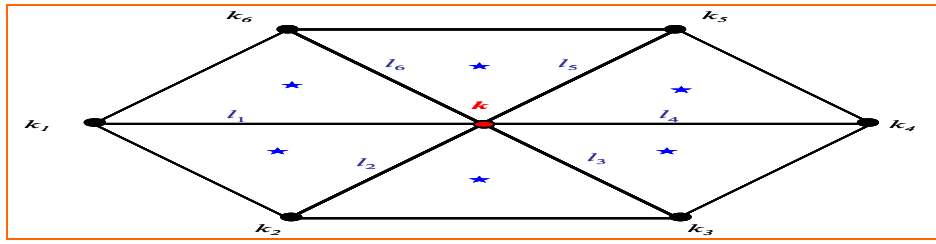


Figure IV-30. Longueur caractéristique sur le patch

### Résolution du système linéaire et détection des cas pathologiques

La résolution du système linéaire (IV.25) est faite par une factorisation LU, qui est optimale compte tenu de la petite taille des systèmes à résoudre et de la précision recherchée. L'inconvénient est que ce solveur trouve toujours une solution même si système le linéaire est mal conditionné (c'est-à-dire que le problème mal posé). Dans ce cas les valeurs obtenues sont aberrantes (Figure IV-31).

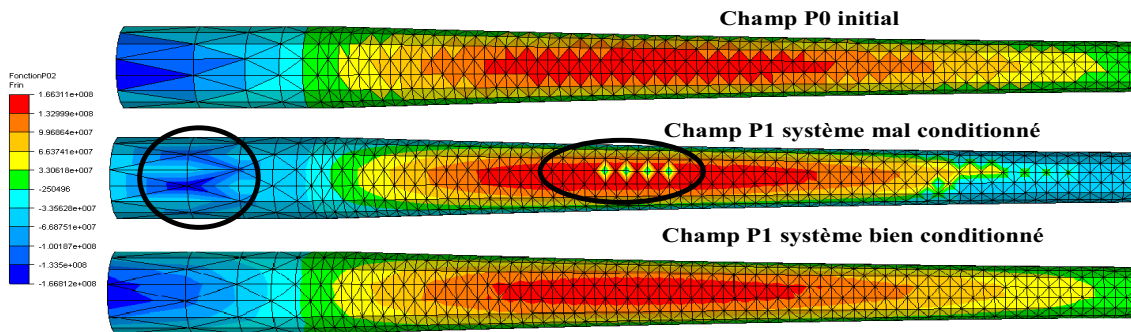


Figure IV-31. Effets du mauvais conditionnement du système sur le champs P1 calculé



Le mauvais conditionnement peut avoir plusieurs origines :

(a) Le patch considéré ne contient pas assez d'information. En effet, le problème fait intervenir 4 coefficients  $\mathbf{a}^k$ , ce qui nécessite un minimum de 4 points de Gauss par patch pour que le problème soit bien posé. Ce n'est pas souvent le cas des nœuds situés dans les coins, comme le montre la Figure IV-32 où les nœuds  $k_1$  et  $k_2$  possèdent respectivement seulement 1 et 2 points de Gauss dans leur patch alors qu'il leur en faudrait 3 au minimum en 2D.

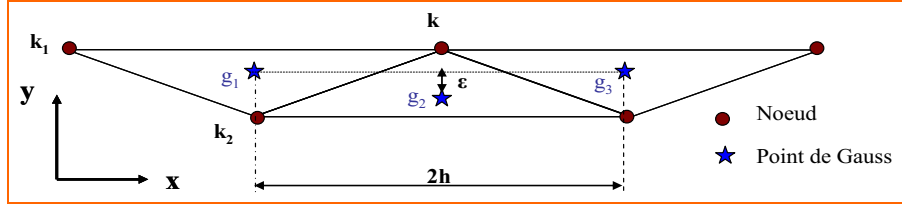


Figure IV-32. Cas pathologiques en 2D

(b) L'information disponible est spatialement mal répartie. C'est le cas du patch centré autour du nœud  $k$  présenté sur la Figure IV-32 où les 3 points de Gauss sont presque alignés suivant la direction horizontale. Il en résulte que le gradient suivant  $y$  est indéterminé. Lorsque qu'il y a seulement un léger désalignement  $\epsilon$ , le gradient est mal déterminé et son calcul conduit à des systèmes mal conditionnés même si l'on adimensionnalise le système.

Cette situation est fréquente avec les maillages anisotropes structurés, utilisés pour le laminage à pas de pèlerin.

Il faut donc trouver un critère permettant d'évaluer si le problème est bien posé. Il peut porter sur le déterminant ou sur le conditionnement de la matrice  $\mathbf{A}$ . Dans tous les cas, on est amené à faire des opérations supplémentaires dont le coût peut être non négligeable. Pour les éviter, nous utilisons une approximation du conditionnement à l'aide des termes de la matrice triangulaire  $\mathbf{L}$  ou  $\mathbf{U}$  issues de la factorisation de  $\mathbf{A}$  :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\max_{i=2,4} |\lambda_i|}{\min_{i=2,4} |\lambda_i|} \approx \frac{\max_{i=2,4} |L_{ii}|}{\min_{i=2,4} |L_{ii}|} \quad (\text{IV.27})$$

Dans la définition ci-dessus du conditionnement, on ne prend en compte que les termes non constants de la matrice  $((L_{ii})_{i=2,4})$ , contenant donc les informations sur les positions des points de Gauss dans le patch.

De nombreux tests numériques ont montré qu'une valeur de conditionnement limite de  $10^5$  permet de détecter un système bien posé pour l'ensemble des problèmes abordés.

### Traitement des cas pathologiques

Dans la littérature, il existe plusieurs techniques permettant de traiter les cas pathologiques pour lesquels le système est mal posé (c'est-à-dire ne respectant pas la condition (IV.28)). Certains auteurs proposent l'ajout des informations provenant des voisins d'ordre 2, c'est-à-dire des points de Gauss appartenant à des patches centrés autour des nœuds du patch courant. L'inconvénient est que la recherche d'information d'ordre supérieur s'avère très complexe en parallèle. D'autres auteurs [Khoei et al. 2007] proposent l'utilisation d'approximations de

plus bas degré en ces nœuds, au prix de la perte du caractère superconvergent de la méthode SPR en ces nœuds.

Ici, ces cas sont traités par une approche itérative [Kumar *et al.* 2012]. Elle consiste à enrichir les informations disponibles aux points de Gauss avec celles calculées aux itérations précédentes aux nœuds du patch. Cet enrichissement est répété jusqu'à stagnation, c'est-à-dire jusqu'à ce que tous les nœuds du patch aient apporté leur contribution ou que le système soit devenu bien conditionné. Si on reprend l'exemple présenté sur la Figure IV-32, à la première itération ( $i$ ), les patches associés aux nœuds  $k_1$  et  $k_2$  ne contiennent que 2 points de Gauss; le problème est mal posé et la solution en ces nœuds n'est pas calculée. En revanche, le patch du nœud  $k$  contient 3 points de Gauss, donc il est possible de calculer la valeur en ce nœud. A l'itération suivante ( $i+1$ ), l'information  $\bar{f}_l^{(k)}$  est ajoutée dans tous les patches contenant ce nœud et où la solution n'a pu être calculée à l'itération ( $i$ ). Le nœud  $k_2$  reçoit alors les informations en provenance de 3 points de Gauss (2 points de Gauss et le nœud  $k$ ), la solution peut être alors calculée. Par contre pour le nœud  $k_1$ , il faut attendre l'itération suivante ( $i+2$ ) où l'on dispose des informations ( $\bar{f}_l^{(k)}$  et  $\bar{f}_l^{(k_2)}$ ) pour pouvoir calculer la solution.

Pour ces itérations, dites de « régularisation », la fonctionnelle à minimiser comprend des contributions supplémentaires :

$$\Pi^*(\mathbf{a}^k) = \Pi(\mathbf{a}^k) + \gamma \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{l \in P_k \\ \bar{f}_l \text{ existe}}} \omega_l (\bar{f}_l - \mathbf{P}(\mathbf{x}_l) \mathbf{a}^k)^2 \right) \quad (\text{IV.28})$$

Où  $\bar{f}_l$  est donc le champ  $\mathbf{P1}$  calculée lors d'une itération précédente au nœud  $l$  appartenant à  $P_k$ ,  $\omega_l$  est le poids affecté au nœud  $l$ ,  $\gamma$  est un coefficient de régularisation permettant de donner plus de poids aux points de Gauss. Des tests numériques [Kumar *et al.* 2012] ont montré que la valeur de  $\gamma = 0,1$  offre un bon compromis.

#### IV.3.4.2. Etude du recouvrement sur des fonctions analytiques

La Figure IV-33 présente des isovaleurs de champ  $\mathbf{P1}$  pour différentes fonctions analytiques sur différents maillages. Les valeurs des fonctions sont connues au centre des éléments et les valeurs aux nœuds sont calculées par recouvrement SPR. Les fonctions analytiques sont données dans le Tableau IV-2.

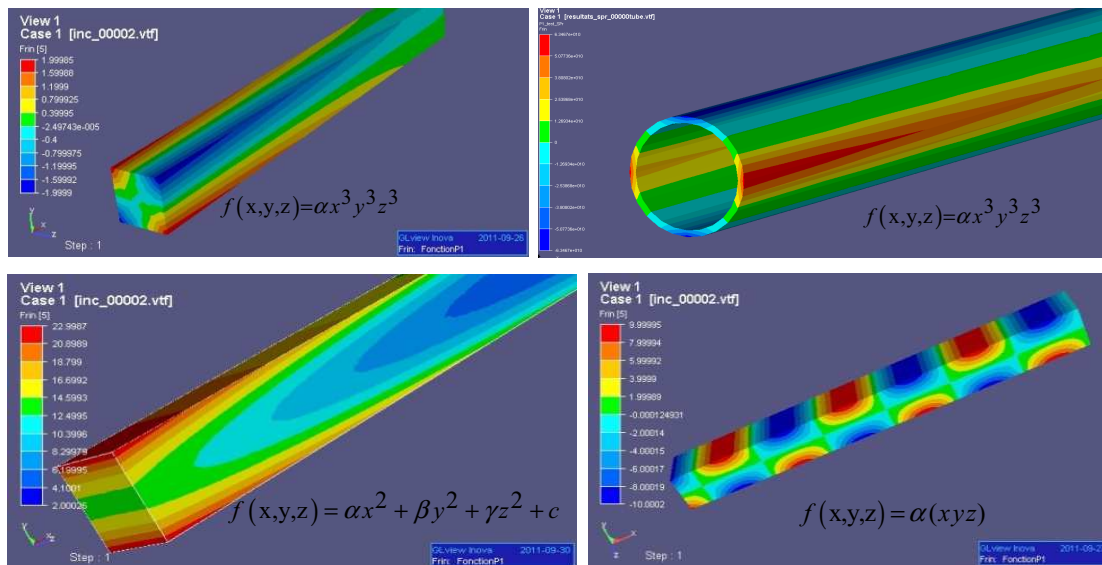


Figure IV-33. Isovaleurs de champ  $\mathbf{P1}$  après recouvrement sur des fonctions analytiques

Le [Tableau IV-2](#) présente une comparaison entre la vitesse de convergence (pente en échelles logarithmiques de la courbe d'évolution de l'erreur en fonction des tailles de maille décroissantes) de la méthode SPR et celle d'une simple moyenne ( $\bar{f}_k = 1/NbG \left( \sum_{g=1}^{NbG} f_g \right)$ ), pour différentes fonctions. Les erreurs  $\mathcal{E}_{Vol}$  et  $\mathcal{E}_{Surf}$  sont évaluées dans la norme  $L_2$  respectivement pour les nœuds volumiques et surfaciques :

$$\mathcal{E}_{Vol} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{NbnoeV} (\bar{f}_k - f_k^{exact})^2}{\sum_{k=1}^{NbnoeV} (f_k^{exact})^2}} \quad \mathcal{E}_{Surf} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{NbnoeS} (\bar{f}_k - f_k^{exact})^2}{\sum_{k=1}^{NbnoeS} (f_k^{exact})^2}} \quad (IV.29)$$

$NbnoeV$  et  $NbnoeS$  représentent respectivement le nombre de nœuds volumiques et surfaciques.

**Tableau IV-2. Vitesse de convergence de différentes fonctions analytiques**

		$\mathcal{E}_{Vol}$		$\mathcal{E}_{Surf}$	
Opérateur		SPR	Moyenne	SPR	Moyenne
1	$f(x, y, z) = \alpha xyz, \alpha = 10^{-3}$	3,2	1,6	3,2	1,5
3	$f(x, y, z) = \alpha x^3 y^3 z^3, \alpha = 10^{-9}$	1,9	1,0	1,9	0,9
4	$f(x, y, z) = \beta y \sin(\alpha x), \alpha = 10^{-1}, \beta = 10$	2,7	1,5	2,5	1,2
5	$f(x, y, z) = (\gamma - \beta \ y\ ) \sin(\alpha x), \alpha = 10^{-1}, \beta = 10, \gamma = 1$	2,4	1,6	2,2	1,2

La vitesse de convergence de la méthode SPR est globalement d'un ordre supérieur à celle de la simple moyenne, tant en surface qu'en volume. Cette vitesse n'est pas dégradée en surface grâce à l'approche itérative retenue pour enrichir les patches de surface. C'est un point très important car en mise en forme, de nombreux phénomènes (comme le frottement) ont un caractère surfacique.

#### IV.3.4.3. Interpolation des champs P1 sur le nouveau maillage

Les champs **P0** sur le maillage d'arrivée  $\mathcal{M}_2$  sont obtenus par interpolation des champs **P1**  $\tilde{f}_k$  précédemment calculés sur le maillage de départ  $\mathcal{M}_1$  par recouvrement SPR.

$$\forall \mathbf{x}_g^{(2)} \in \mathcal{M}_2, \exists e^{(1)} \in \mathcal{M}_1 \text{ tel que} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_g^{(2)} = \sum_{k \in e^{(1)}} \mathbf{x}_k^{(1)} N_k^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)}) \\ f_g^{(2)} = \sum_{k \in e^{(1)}} \tilde{f}_k^{(1)} N_k^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)}) \end{cases} \quad (IV.30)$$

Où  $f_g^{(2)}$  et  $\mathbf{x}_g^{(2)}$  représentent respectivement la valeur du champ  $f^{(2)}$  et les coordonnées au point de Gauss d'un élément  $e^{(2)}$  du maillage  $\mathcal{M}_2$ ,  $N_k^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)})$  représente la  $k^{\text{ième}}$  fonction de forme en  $\mathbf{x}_g^{(2)}$ .

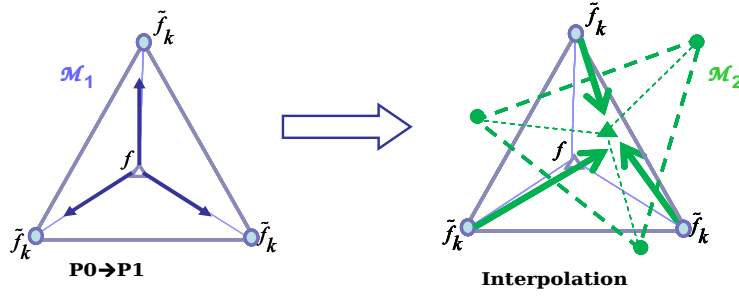


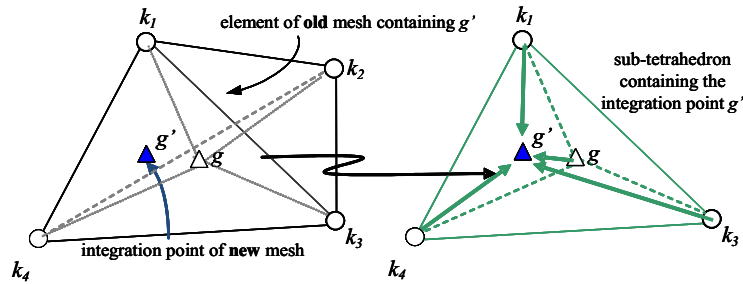
Figure IV-34. Interpolation P1-P0

On peut remarquer que cette interpolation n'est pas «consistante», c'est-à-dire que pour deux maillages  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  identiques, on ne retrouve pas les valeurs de  $\mathcal{M}_1$  sur  $\mathcal{M}_2$ .

$$f_g^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{k \in e^{(1)}} \bar{f}_k \neq f_g^{(1)} \quad (\text{IV.31})$$

$f_g^{(1)}$  est la valeur du champ **P0** connue au point de Gauss d'un élément  $e^{(1)}$  du maillage  $\mathcal{M}_1$ .

Nous utilisons donc une interpolation **P1<sup>+</sup>-P0** permettant de respecter cette consistance en prenant en compte la valeur **P0** du champ sur maillage de départ (Figure IV-35).


 Figure IV-35. Interpolation P1<sup>+</sup>-P0

Pour tout élément  $e^{(1)}$  contenant le point de Gauss  $\mathbf{x}_g^{(2)}$  d'un élément  $e^{(2)}$  de  $\mathcal{M}_2$ , on recherche le sous tétraèdre  $e_s^{(1)}$  de  $e^{(1)}$  (un tétraèdre formé de l'une des facettes de  $e^{(1)}$  et du centre  $\mathbf{x}_g^{(1)}$  de  $e^{(1)}$ ) qui contient  $\mathbf{x}_g^{(2)}$ . La valeur en  $\mathbf{x}_g^{(2)}$  est calculée par interpolation linéaire sur le sous tétraèdre où la valeur en  $\mathbf{x}_g^{(1)}$  est la valeur **P0** originale du champ :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}_g^{(2)} \in \mathcal{M}_2, \exists e^{(1)} \in \mathcal{M}_1 \text{ et } e_s^{(1)} \subset e^{(1)} \text{ tel que} \\ \begin{cases} \mathbf{x}_g^{(2)} = \sum_{k \in e_s^{(1)}} \mathbf{x}_k^{(1)} \bar{N}_k^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)}) \\ f_g^{(2)} = \sum_{k=1}^3 \bar{f}_k^{(1)} \bar{N}_k^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)}) + f_g^{(1)} \bar{N}_4^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)}) \end{cases} \quad (\text{IV.32}) \end{aligned}$$

Avec  $\bar{N}_k^{(1)}(\mathbf{x}_g^{(2)})$  la  $k^{\text{ième}}$  fonction de forme en  $\mathbf{x}_g^{(2)}$  du sous tétraèdre  $e_s^{(1)}$ .

Pour évaluer la précision du transport par recouvrement SPR par rapport au transport direct, on considère deux fonctions analytiques  $f_1$  et  $f_2$  dont les expressions sont données par la relation (IV.34) :

$$\begin{cases} f_1(r, \theta) = 20r^2(1-r^2)\cos(2\theta), r^2 = x^2 + y^2, \theta = \text{artg}(y/x) \\ f_2(x, y, z) = (2 + 4x + 3y - 5xy - 2x^2y + 4xy) \times (x^2 - 0.6) \times (y^2 - 0.5) \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Dans les deux cas, il s'agit d'un transport d'un maillage fin vers un maillage grossier ; le but est de voir le comportement de chaque méthode de transport face à la diffusion numérique. Les caractéristiques des maillages sont inscrites dans le tableau suivant :

Tableau IV-3. Caractéristiques des maillages pour le transport de fonctions analytiques

	Maillage $\mathcal{M}_1$		Maillage $\mathcal{M}_2$	
	Nœuds	Elements	Nœuds	Elements
$f_1$	10 963	50 501	1 261	3 782
$f_2$	6 600	29 849	10 74	4 729

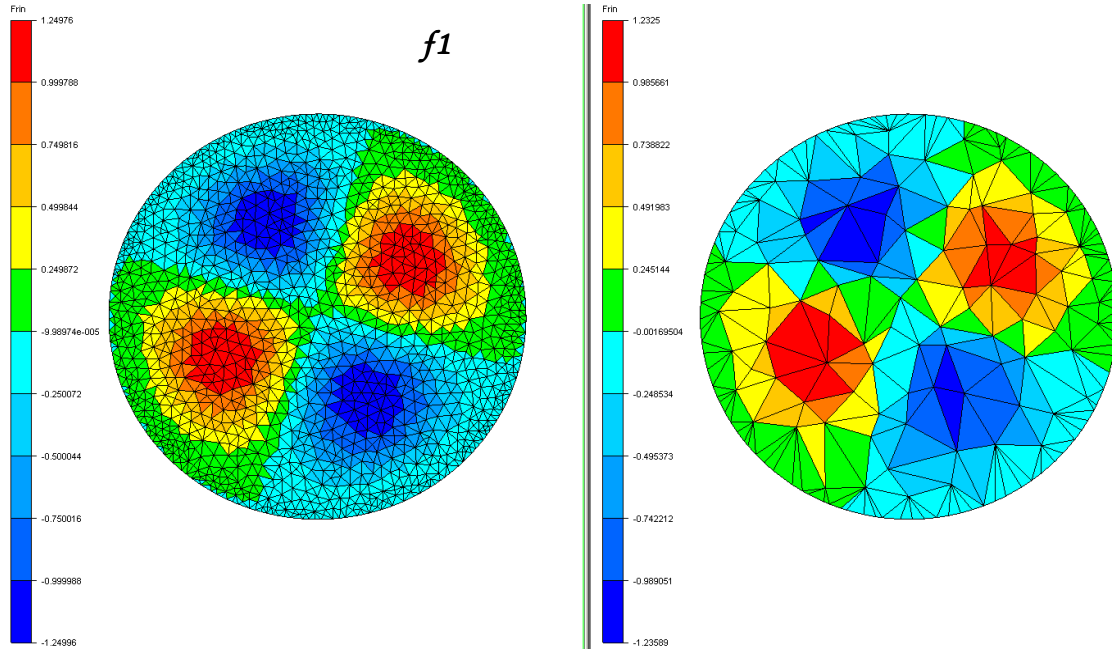


Figure IV-36. Exemple de transport de la fonction analytique  $f1$

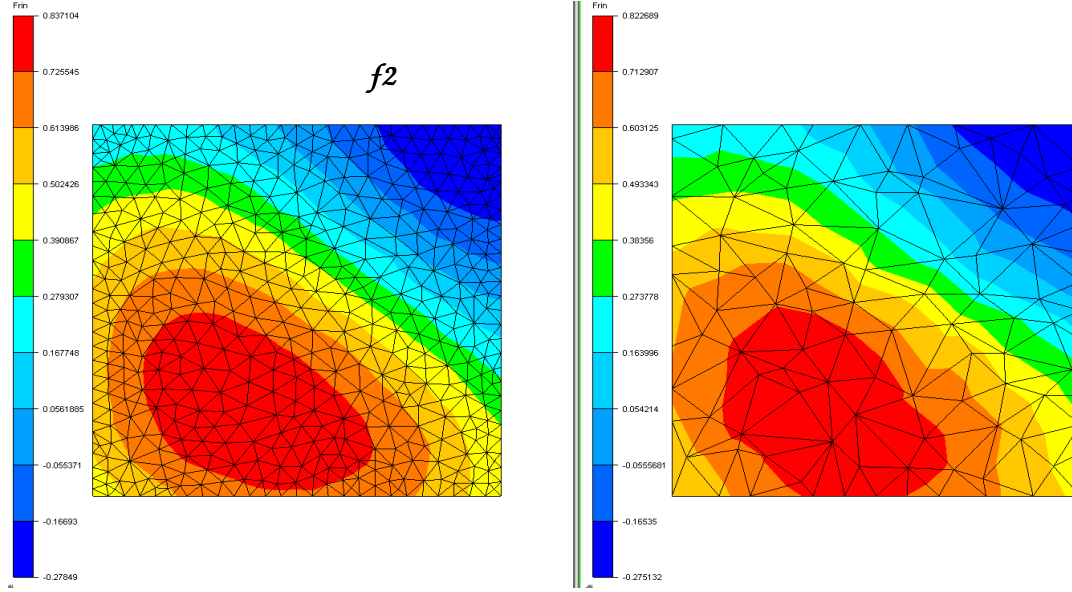


Figure IV-37. Exemple de transport de la fonction analytique  $f_2$

La Figure IV-36 et la Figure IV-37 présentent les isovaleurs des champs sur le maillage de départ et sur le maillage d'arrivée. Le Tableau IV-4 présente les erreurs en normes  $L_2$  pour les deux fonctions. Ces erreurs sont données par la relation :

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\sum_{g=1}^{Nbelt2} (\bar{f}_g - f_g^{exact})^2}{\sum_{g=1}^{Nbelt2} (f_g^{exact})^2}} \quad (IV.34)$$

Où  $\bar{f}_g$  est la valeur obtenue après transport par l'un des deux opérateurs,  $f_g^{exact}$  la valeur calculée sur le maillage d'arrivée.  $Nbelt2$  représente le nombre d'éléments du maillage d'arrivée  $\mathcal{M}_2$ .

Tableau IV-4. Erreurs de transport sur des fonctions analytiques

	$\mathcal{E}_{direct}$	$\mathcal{E}_{SPR}$
$f_1$	7,2%	2%
$f_2$	7,3%	3,1%

Dans les deux cas, on peut remarquer que les résultats obtenus avec le transport par recouvrement SPR sont au moins deux fois plus précis que ceux du transport **P0** direct.

#### IV.3.4.4. Application à la méthode MMP

On s'intéresse à présent aux effets du transport par recouvrement SPR sur la précision de la méthode MMP. Cette approche est couplée au *transport non incrémental* précédemment présenté. On considère des applications de laminage à pas de pèlerin, de tréfilage et de laminage de produits longs comme dans la section § IV.5.

La Figure IV-38 présente les isovaleurs de contraintes équivalentes de von Misès pour le cas de laminage à pas de pèlerin en fin de passe aller ( $t=0,06s$ ). Les contraintes obtenues avec le transport par recouvrement SPR sont bien meilleures ; les perturbations ont quasiment disparu. Ce constat est renforcé en observant la distribution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction de la position  $z$  suivant l'axe du tube (Figure IV-39). Avec le transport SPR, les contraintes résiduelles sont plus lisses et sont très proches des celles obtenues en monomaillage. La déformation équivalente (Figure IV-40) quant à elle conserve la bonne précision déjà constatée avec la version initiale de la méthode MMP. Pour le tréfilage et le laminage de tôle, on note également une nette amélioration de la précision des contraintes comme le montrent la Figure IV-42 et la Figure IV-41. Cette amélioration est bien plus visible dans le cas du tréfilage.

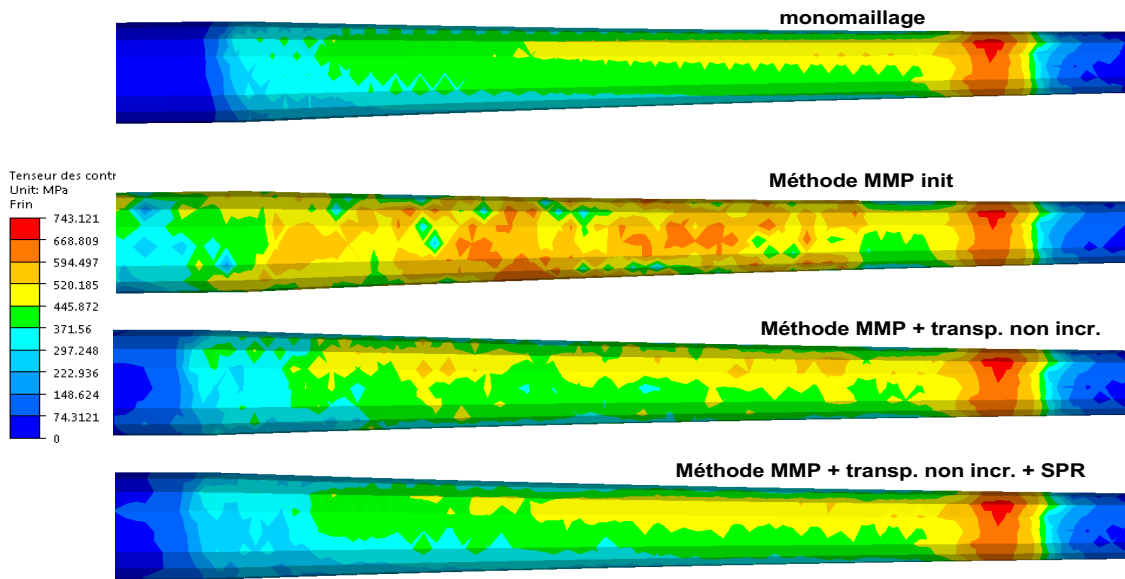


Figure IV-38. Contrainte équivalent de von Misès ( $t=0,06s$ ) : effets du transport SPR

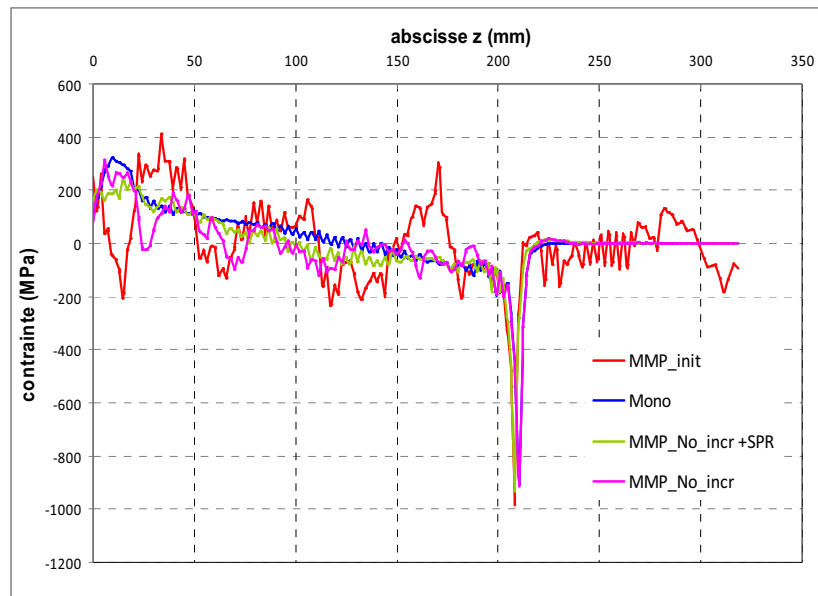


Figure IV-39. Contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction de l'abscisse  $z$  : effets du transport SPR



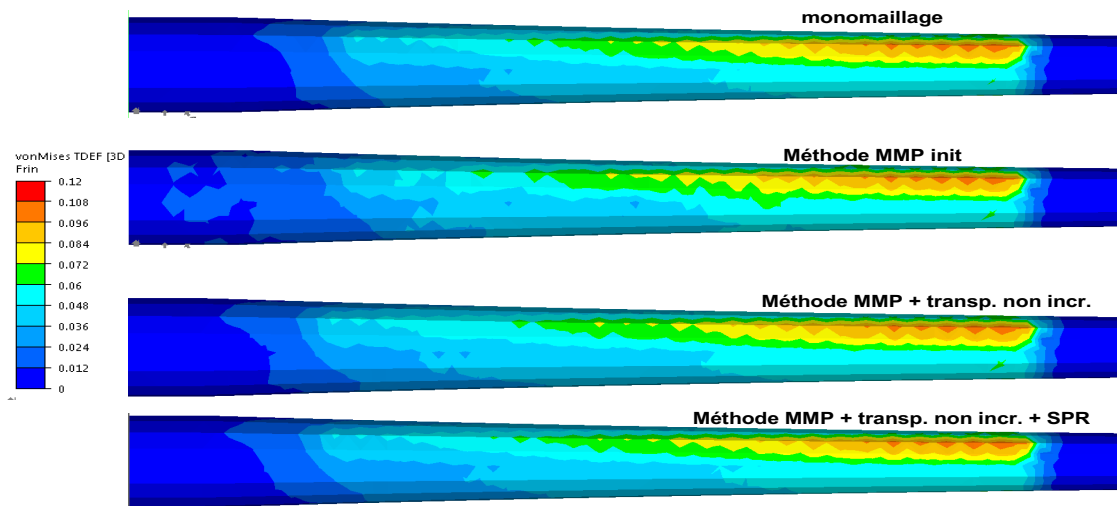


Figure IV-40. Déformation équivalente ( $t=0,06s$ ) : effets du transport SPR

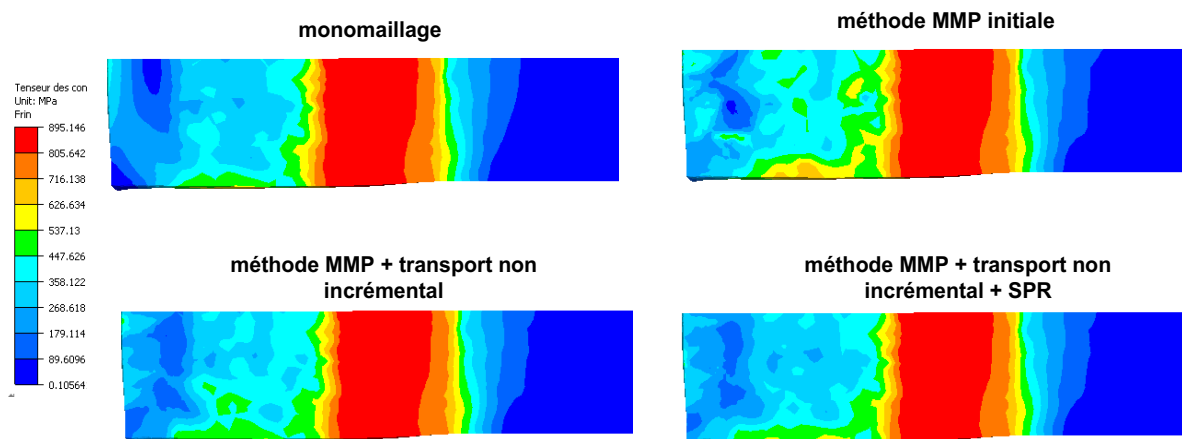


Figure IV-41. Contrainte équivalente de von Mises (cas du laminage de tôle en milieu de passe): effets du transport SPR

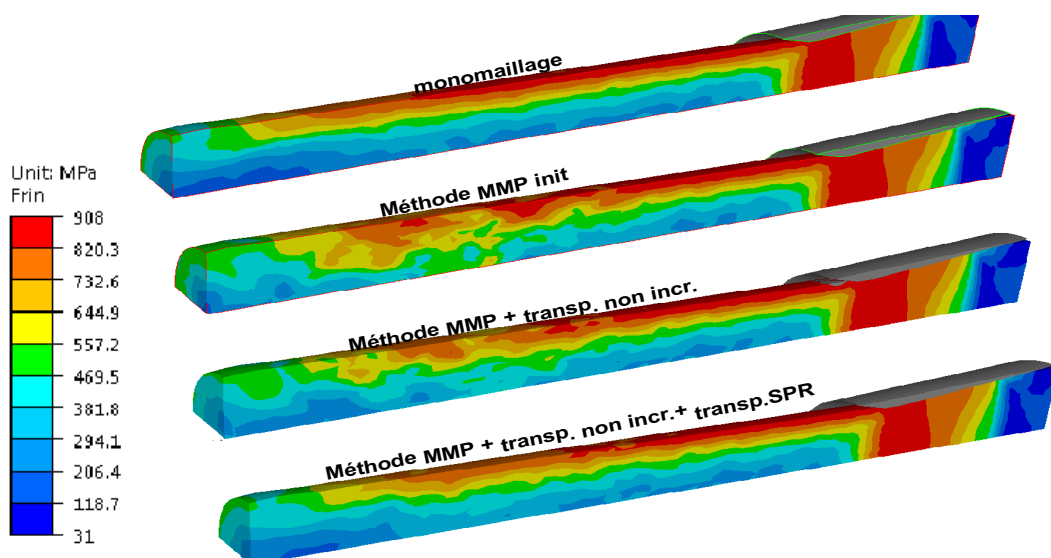


Figure IV-42. Contrainte équivalente de von Mises (cas du tréfilage en fin de passe): effets du transport SPR

En résumé, le comportement élastoplastique entraîne une plus grande dépendance des résultats au déraffinement de maillage, d'autant qu'en laminage à pas de pèlerin il est nécessaire de déraffiner intensément le maillage mécanique pour obtenir des accélérations. Cette dépendance se traduit par des perturbations sur les contraintes alors que les déformations sont bien calculées. L'origine ne vient pas des oscillations observées sur le calcul de la pression en élastoplastique, mais d'une part de l'actualisation des variables d'état qui doivent être cohérentes avec le calcul de vitesse (il faut calculer  $\lambda^{t+\Delta t}$  de la même manière que lors du calcul de  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$  sur le maillage mécanique sous peine d'observer des perturbations sur  $\lambda^{t+\Delta t}$ ) et d'autre part du transport des champs **P0**. Comme les champs **P0** connaissent des variations qui ne sont pas négligeables hors de la partie raffinée, le transport se doit d'être précis. La méthode SPR permet d'obtenir une précision suffisante. Avec tous ces ingrédients, le calcul MMP est aussi précis que le calcul en monomaillage. Il reste des différences, mais si l'on revient au chapitre 2, Figure IV-34 à 36, on voit bien que ces écarts sont inférieurs à la précision éléments finis.

## IV.4. Performances de la méthode MMP

### IV.4.1. Grandeurs d'analyse

Il existe deux façons de mesurer les accélérations obtenues avec la méthode MMP : l'accélération au niveau du solveur MMP seul et l'accélération globale au niveau du code Forge®.

#### *L'accélération au niveau du solveur MMP*

Elle représente le rapport entre le temps de résolution du solveur monomaillage  $T_{solv}^{(Mono)}$  et celui du solveur MMP  $T_{solv}^{(MMP)}$  :

$$Sp^{MMP} = \frac{T_{solv}^{(Mono)}}{T_{solv}^{(MMP)}} \quad (IV.35)$$

Le temps de résolution du solveur monomaillage comprend le temps de résolution du problème mécanique  $T_{meca}^{(Mono)}$  et celui du problème thermique  $T_{Th}^{(Mono)}$ . Le temps de résolution du solveur MMP comprend en plus du temps de résolution thermomécanique ( $T_{meca}^{(MMP)}$  et  $T_{Th}^{(MMP)}$ ), le temps nécessaire pour la création des maillages mécaniques et pour les transferts de champs entre les différents maillages (regroupés dans  $T_{cout}^{(MMP)}$ ).

$$\begin{cases} T_{solv}^{(Mono)} = T_{meca}^{(Mono)} + T_{Th}^{(Mono)} \\ T_{solv}^{(MMP)} = T_{meca}^{(MMP)} + T_{Th}^{(MMP)} + T_{cout}^{(MMP)} \end{cases} \quad (IV.36)$$

A partir des données sur les deux solveurs, on peut établir une approximation théorique de l'accélération au niveau du solveur MMP :

$$Sp^{MMP} = \frac{T_{solv}^{(Mono)}}{T_{solv}^{(MMP)}} = \frac{1 + \left( \frac{T_{Th}^{(Mono)}}{T_{meca}^{(Mono)}} \right)}{\left( \frac{T_{meca}^{(MMP)}}{T_{meca}^{(Mono)}} \right) + \left( \frac{T_{Th}^{(MMP)}}{T_{meca}^{(Mono)}} \right) + \left( \frac{T_{cout}^{(MMP)}}{T_{meca}^{(Mono)}} \right)} \approx \frac{1 + \beta}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (IV.37)$$

Avec  $\alpha = \left( \frac{T_{meca}^{(MMP)}}{T_{meca}^{(Mono)}} \right) \approx \left( \frac{N_{grossier}}{N_{fin}} \right)^\eta$ ,  $N_{grossier}$  et  $N_{fin}$  sont respectivement le nombre de degrés de liberté des maillages mécaniques et thermiques.  $\eta$  représente la complexité asymptotique du solveur linéaire qui vaut environ 1,3 pour un problème élastoplastique,  $\beta = \frac{T_{Th}^{(MMP)}}{T_{meca}^{(Mono)}} = \frac{T_{Th}^{(Mono)}}{T_{meca}^{(Mono)}}$ ,  $\gamma = \frac{T_{cout}^{(MMP)}}{T_{meca}^{(Mono)}}$ . Cette accélération théorique permet d'obtenir des ordres de grandeurs et sert d'élément de comparaison. Par exemple pour un taux de déraffinement  $\frac{N_{fin}}{N_{grossier}} = 5$ ,  $\beta = 1\%$  et un coût  $\gamma = 5\%$ , on s'attend à obtenir une accélération théorique  $Sp^{MMP} = 4,5$ .

### L'accélération globale au niveau de code Forge

Elle représente le rapport entre le temps de simulation du code Forge® en monomaillage et celui avec la méthode MMP :

$$Sp^{Forge} = \frac{T_{simul}^{(Mono)}}{T_{simul}^{(MMP)}} \quad (IV.38)$$

Le temps de simulation du code Forge® comprend le temps de résolution (monomaillage ou MMP) et les temps passés dans les autres parties du code (analyse de contact, actualisation de configuration, ...) qui constituent la fraction incompressible du code.

$$T_{simul}^{(Mono,MMP)} = T_{solv}^{(Mono,MMP)} + T_{Forge} \quad (IV.39)$$

Comme précédemment, on peut définir une accélération globale théorique ; cette dernière tient alors compte de la fraction incompressible  $\delta = \left( \frac{T_{Forge}}{T_{meca}^{(Mono)}} \right)$ .

$$Sp^{Forge}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \approx \frac{1 + \beta + \delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \quad (IV.40)$$

L'idée de la méthode MMP repose sur l'hypothèse que la fraction incompressibles est négligeable, et que l'accélération globale au niveau du code est très proche de celle du solveur MMP.

Les définitions précédentes restent valables en parallèle pour un nombre de processeurs fixé.

## IV.4.2. Etude des accélérations

On considère trois maillages différents : un maillage grossier, un maillage moyen et un maillage fin. Pour chacun des maillages on simule la passe aller d'un coup de cage ; les résultats sont représentatifs de ce qui se passe sur une passe entière. On se focalise dans un premier temps sur les accélérations au niveau du solveur MMP. Le [Tableau IV-5](#) et le [Tableau IV-6](#) contiennent les paramètres de la méthode MMP.

Tableau IV-5. Paramètres de la méthode MMP laminage à pas de pèlerin

Vitesse d'avance de l'outil ( $v_n$ )	Longueur du tube ( $L_p$ )	Longueur de la ZD ( $L_{ZD}$ )	Période de remaillage
5000 mm/s	390 mm	42 mm	40 incréments

Tableau IV-6. Paramètres de la méthode MMP laminage à pas de pèlerin (suite)

	maillage thermique (nœuds)	maillage mécanique (nœuds)	Taux de déraffinement
Maillage Grossier	8 640	1 800	4,8
Maillage Moyen	33 696	5 800	5,8
Maillage Fin	75 780	12 796	5,9

La Figure IV-43 montre les maillages thermique et mécanique dans le cas du maillage moyen.

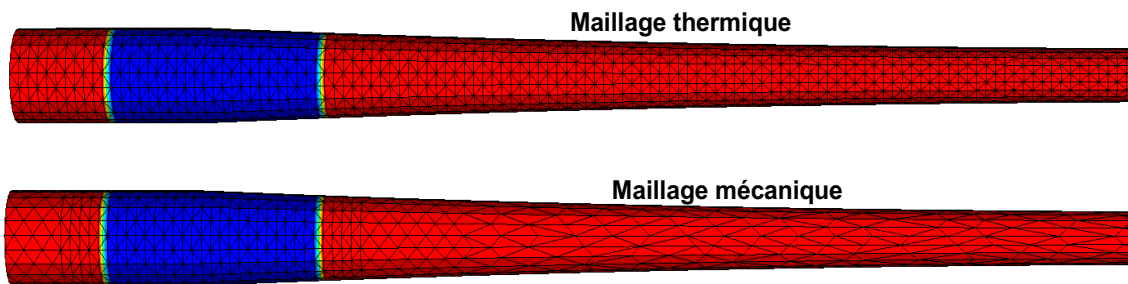


Figure IV-43. Maillages thermique et mécanique : cas test de laminage à pas de pèlerin avec 33 000 nœuds

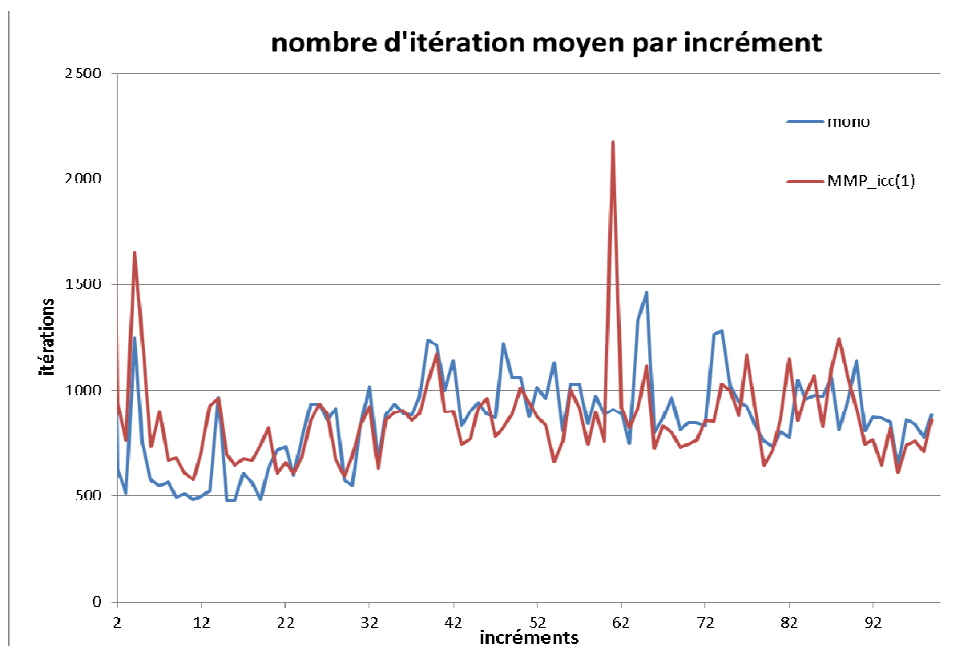
#### IV.4.2.1. Cas du maillage grossier

Pour ce maillage, on obtient une accélération MMP de 2,2 ; on espérait obtenir à une accélération beaucoup plus élevée (accélération théorique d'environ 3,5) pour le taux de déraffinement utilisé. Quelles sont donc les causes de la faiblesse de l'accélération ? Etant donné que l'accélération du solveur MMP dépend fortement du comportement du solveur linéaire pour le calcul mécanique (termes  $\alpha$  dans la formule (IV.38)), nous nous sommes intéressés au comportement réel de ce dernier. Sur la Figure IV-44 on présente l'évolution du nombre d'itérations du solveur linéaire en monomaillage et avec la méthode MMP. Le solveur linéaire nécessite autant d'itérations avec la méthode MMP qu'en monomaillage. Ceci est contraire aux attentes puisque le nombre d'itérations du solveur linéaire décroît normalement avec le nombre de degrés de liberté. Les systèmes linéaires sous-jacents au calcul sur le maillage mécanique sont sans doute mal conditionnés. En effet, comme on déraffine le maillage mécanique de manière intense, on obtient des éléments anisotropes (comme le témoignent les facteurs de forme  $\vartheta$  très élevés présentés dans le Tableau IV-7) qui nuisent au conditionnement du système, comme on l'a vu au chapitre 2, et empêchent la réduction du nombre d'itérations du solveur linéaire attendue. L'idée consiste alors à utiliser

des préconditionneurs plus robustes pour compenser cette anomalie. Nous avons alors testé les préconditionneurs **ICC(2)**, **ILU(2)**, **ILU(3)**. La [Figure IV-45](#) présente l'évolution du nombre d'itérations nécessaires pour le solveur linéaire avec les différents préconditionneurs. Pour les préconditionneurs **ILU(2)**, **ILU(3)**, on retrouve le comportement attendu, c'est-à-dire que les nombres d'itérations nécessaires avec la méthode MMP sont nettement inférieurs à ceux nécessaires en monomailage. Le préconditionneur **ICC(2)** n'apporte aucune amélioration, au contraire, il conduit à des nombres d'itérations encore plus élevés et par conséquent des temps de calcul plus importants. En termes d'accélération, comme le montre le [Tableau IV-8](#), le préconditionneur **ILU(2)** réalise le meilleur compromis entre la réduction du nombre d'itérations du solveur linéaire et le surcoût lié à l'utilisation de ce préconditionneur ; on passe d'une accélération de 2,2 à 2,8. Le préconditionneur **ILU(3)** permet de réduire davantage le nombre d'itérations cependant l'effet sur le temps de calcul est moins important, à cause du surcoût trop important lié à la construction et à l'utilisation de ce dernier.

**Tableau IV-7. Facteur de forme des éléments du maillage grossier**

	$\vartheta_{max}$	$\vartheta_{min}$	$\vartheta_{moy}$
Maillage mécanique $\mathcal{M}_{th}$	15,4	1,4	5,9
Maillage thermique $\mathcal{M}_m$	98	1,4	7,3



**Figure IV-44. Evolution du nombre d'itérations du solveur linéaire pendant 100 incréments de calcul**

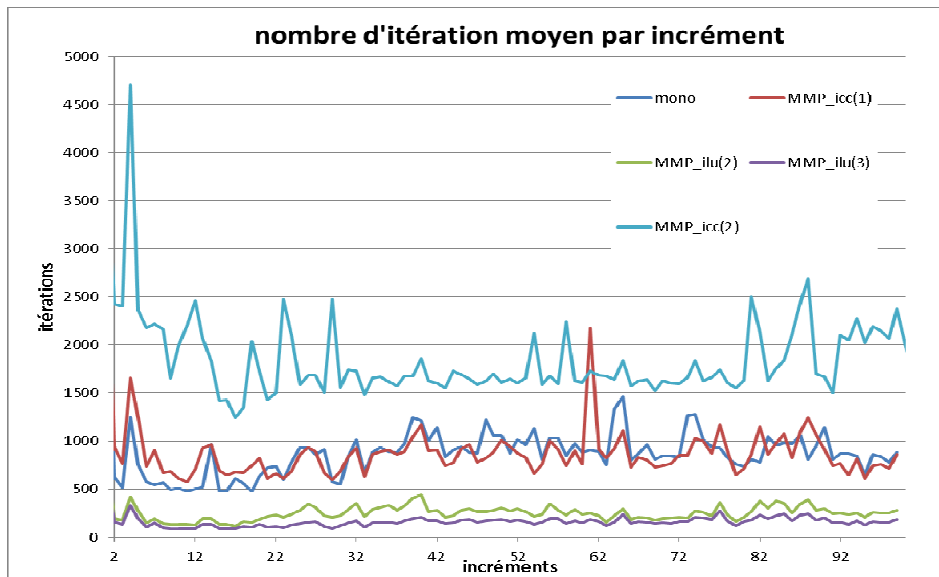


Figure IV-45. Evolution du nombre d'itérations du solveur linéaire pendant 100 incréments de calcul : effets des différents préconditionneurs

Tableau IV-8. Accélération MMP en fonction du préconditionneur

Préconditionneurs	ICC(1)	ICC(2)	ILU(2)	ILU(3)
Accélération du solveur MMP	2,23	1,64	2,8	2,63

Lorsqu'on passe au maillage moyen, le problème de préconditionnement ne se pose plus comme on peut le voir sur l'évolution du nombre d'itérations du solveur linéaire (Figure IV-48). En effet, comme vu dans le chapitre II, la solution éléments finis est beaucoup plus stable avec ce maillage. La forte anisotropie des éléments perturbe moins le conditionnement global du système et donc on retrouve le comportement attendu pour le solveur linéaire.

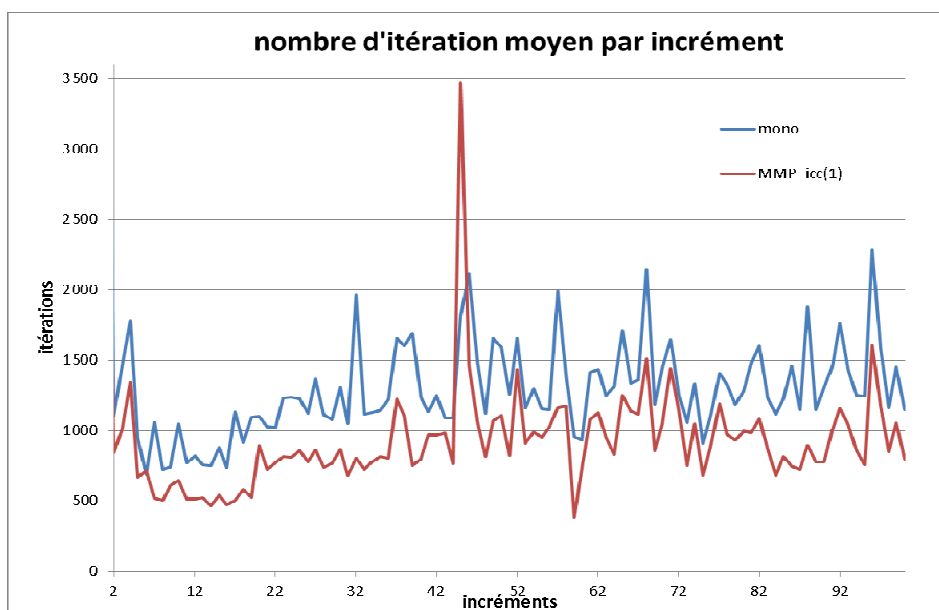


Figure IV-46. Evolution du nombre d'itérations du solveur linéaire pendant 100 incréments maillage moyen

#### IV.4.2.2. Etude en fonction du nombre de nœuds

Le [Tableau IV-9](#) présente les accélérations du solveur MMP obtenues pour les trois maillages étudiés en séquentiel :

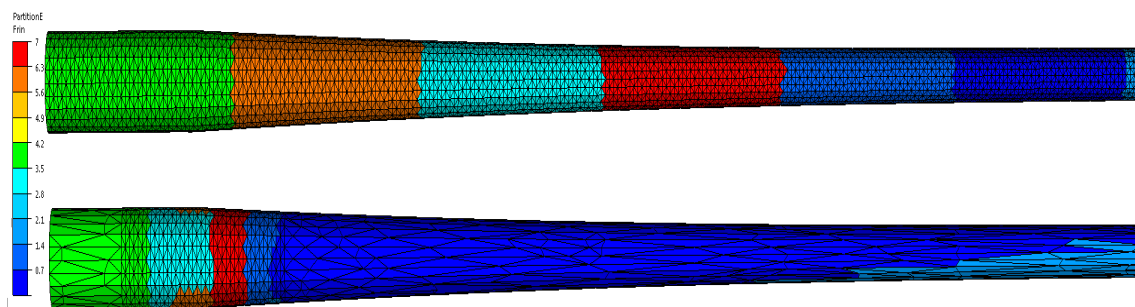
*Tableau IV-9. Accélération en fonction de la taille du maillage*

	maillage thermique (nœuds)	maillage mécanique (nœuds)	Accélération
Maillage Grossier	8 640	1 800	2,8
Maillage Moyen	33 696	5 800	5,1
Maillage Fin	75 780	12 796	6,5

L'accélération croît en fonction du nombre de nœuds du maillage thermique, elle atteint la valeur de 6,5 pour le maillage fin, ce qui peut être considéré comme une bonne performance. On s'attendait à observer une accélération quasi identique pour le maillage fin et le maillage moyen, puisque les deux présentent quasiment le même taux de déraffinement. Cette augmentation de l'accélération en fonction du nombre de nœuds a également été observé dans les travaux de M. Ramadan [\[Ramadan 2010\]](#) et peut s'expliquer par le fait que le comportement asymptotique du solveur linéaire n'est pas encore atteint.

#### IV.4.2.3. Etude en calcul parallèle

Nous analysons à présent le comportement de la méthode sur plusieurs processeurs, l'idée étant de bénéficier également des accélérations procurées par le calcul parallèle. Nous ne considérons que le maillage moyen et le maillage fin puisque le problème grossier ne possède que 1 800 nœuds sur son maillage mécanique, ce qui semble trop peu pour des calculs en parallèle. Les calculs sont réalisés sur une machine Dell Optilex 7010, Processeur Intel ® Xeon possédant 16 processeurs avec 3,1 GHz chacun et une RAM totale de 32Go. Sur la [Figure IV-47](#) on représente les partitionnements des maillages thermique et mécanique.



*Figure IV-47. Partitionnement du maillage moyen : thermique (haut), mécanique (bas) sur 8 processeurs*

Le [Tableau IV-10](#) présente les accélérations obtenues avec le maillage moyen et avec le maillage fin en fonction du nombre de processeurs. La [Figure IV-48](#), de son côté, présente les évolutions de ces accélérations.



Tableau IV-10. Résumé des accélérations en fonction du nombre de processeurs

Nb procs	Maillage Moyen	Maillage Fin
1	5,1	6,5
2	3,9	5,4
4	3,4	4,8
8	2,5	3,2
16	1,8	2,9

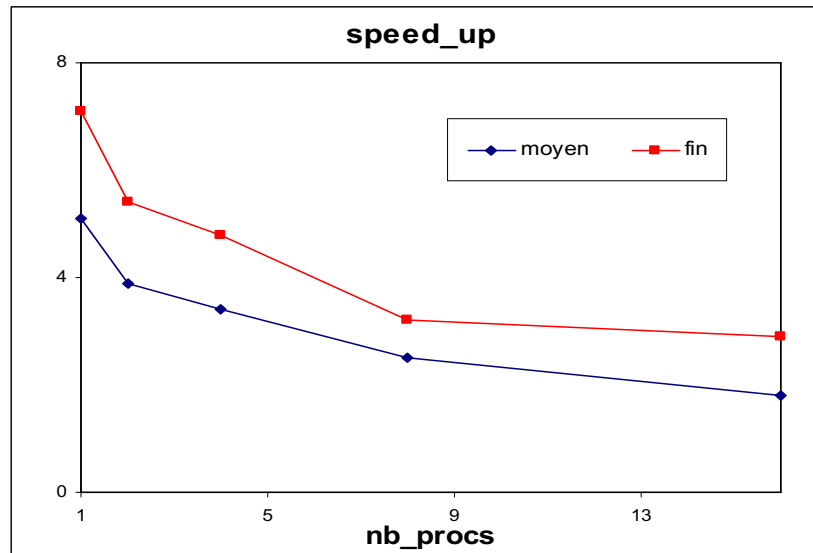


Figure IV-48. Evolution de l'accélération de la méthode MMP en fonction du nombre de processeurs : maillage moyen et maillage fin

Dans les deux cas, l'accélération décroît lorsqu'on augmente le nombre de processeurs. On passe de 6,5 en séquentiel à 2,9 sur 16 processeurs pour le maillage fin, et de 5,1 à 1,8 pour le maillage moyen. Cette décroissance est normale, elle s'explique principalement par la diminution du nombre de degrés de liberté lors du calcul mécanique en parallèle. En effet, pour le maillage moyen par exemple, en séquentiel le calcul mécanique est effectué sur environ 6 000 nœuds ; sur huit processeurs chaque processeur effectue le calcul seulement sur 750 nœuds. Or le calcul parallèle est d'autant plus efficace qu'il y a de degrés de liberté par processeur, faute de quoi le temps passé dans les communications entre les processeurs peut devenir prépondérant. La chute de l'efficacité parallèle suit quasiment la même pente que celle observée en monomaillage, comme le montre la Figure IV-49 présentant le cas du maillage moyen. Cette constatation va dans le même sens que celle faite dans les travaux de M. Ramadan [Ramadan 2010], où l'auteur a montré que l'efficacité parallèle de la méthode MMP est semblable à celle en monomaillage sur le maillage mécanique. Autrement dit, si on compare les efficacités parallèles à maillages mécaniques équivalents, elles sont semblables.

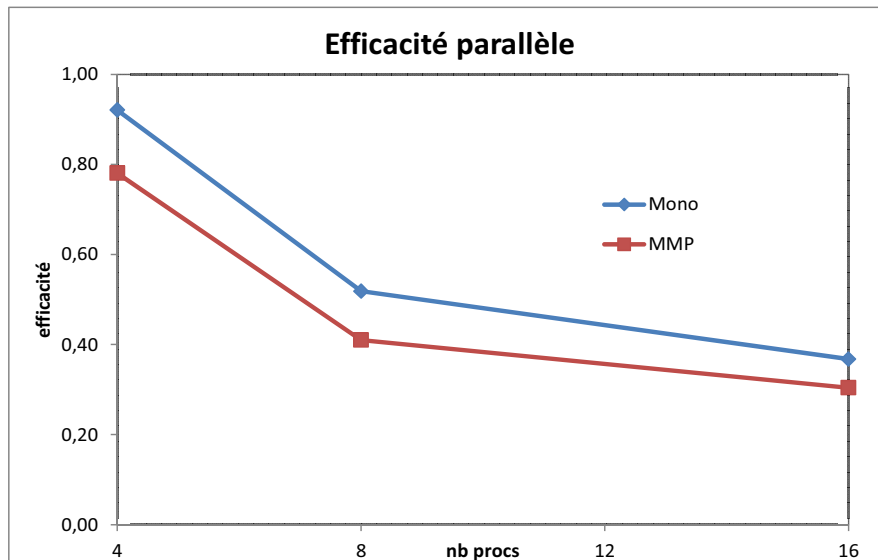


Figure IV-49. Efficacité parallèle monomaillage vs méthode MMP : maillage moyen

#### IV.4.2.4. Accélération globale

Nous nous intéressons ici aux accélérations globales obtenues au niveau du code Forge® en entier, pour le maillage moyen et le maillage fin. Le [Tableau IV-11](#) et le [Tableau IV-12](#) récapitulent les résultats en termes de temps de calcul et en termes d'accélération.

Tableau IV-11. Accélération globale comparée à l'accélération du solveur MMP : maillage moyen

Nb procs	Tps CPU code Forge® Monomaillage (h)	Tps CPU code Forge® MMP (h)	Accélération globale ( $Sp^{Forge}$ )	Accélération solveur MMP seul ( $Sp^{MMP}$ )
1	29,16	12,76	2,3	5,1
2	16,34	7,90	2	3,9
4	9,50	4,38	2,2	3,4
8	5,87	3,43	1,7	2,5

Tableau IV-12. Accélération globale comparée à l'accélération du solveur MMP : maillage fin

Nb procs	Tps CPU code Forge® Monomaillage (h)	Tps CPU code Forge® MMP (h)	Accélération globale ( $Sp^{Forge}$ )	Accélération solveur MMP seul ( $Sp^{MMP}$ )
1	113,59	34,40	3,3	6,5
2	53,52	17,65	3	5,4
4	30,82	11,00	2,8	4,8
8	27,36	10,48	2,6	3,2
16	19,29	7,07	2,7	2,9

Dans les deux cas, l'accélération globale  $Sp^{Forge}$  est nettement inférieure à celle du solveur seul  $Sp^{MMP}$ . En séquentiel, on passe de 5,1 à 2,28 pour le maillage moyen et de 6,5 à 3,3 pour le maillage fin. En revanche, elle décroît de façon moins marquée avec le nombre de

processeurs que  $Sp^{MMP}$  (de 2,3 à 1,7 pour le problème moyen et de 3,3 à 2,7 pour le problème fin). Le point principal est donc la chute de  $Sp^{MMP}$  à  $Sp^{Forge}$ . Elle vient de la fraction incompressible  $\delta$  (IV.41). Sur la Figure IV-50 on voit qu'en monomaillage,  $\delta$  ne représente qu'environ 10%, ce qui correspond bien aux hypothèses faites que plus de 90% du temps est consacré au calcul thermomécanique. Avec le solveur MMP (Figure IV-51), la situation est inversée car  $\delta$  est inchangé alors que le temps de résolution du problème thermomécanique a chuté (ce qui correspond bien à l'accélération  $Sp^{MMP}$ ). Le problème vient donc du fait que  $\delta$  est le même en monomaillage et avec la méthode MMP.

Si l'on change la loi de comportement et que l'on utilise une loi de Norton-Hoff très rigide ( $m=0,01$ ), le solveur a du mal à converger (Figure IV-52), de sorte que  $\delta$  devient tout à fait négligeable. L'accélération  $Sp^{MMP}$  passe de 2,3 à 3,5 pour le problème moyen.

Si on conserve la loi de comportement et que l'on change de géométrie, en passant au laminage de tôles, de nouveau la valeur de  $\delta$  décroît car l'analyse de contact est fortement simplifiée, à cause du caractère bien local de la zone de contact (Figure IV-53). L'accélération  $Sp^{MMP}$  passe alors de 2,3 à 4 sur un problème équivalent.

La faible accélération  $Sp^{MMP}$  a donc 3 causes toutes les 3 liées à la valeur élevée de  $\delta$  en MMP pour 3 raisons différentes.

- Le solveur EVP est très performant de sorte que la valeur de  $\delta$  (qui est une valeur relative) est élevée.
- $\delta$  comprend des temps d'analyse de contact, or le laminage à pas de pèlerin fait apparaître une très grande surface de contact bien que la déformation soit localisée.
- $\delta$  est plus élevée en MMP qu'en monomaillage, ce qui est contraire à une certaine logique. Cela vient du fait que l'implémentation de la méthode MMP dans Forge® nécessite une double analyse de contact pour le maillage mécanique mais aussi pour le maillage thermique. Il faudrait donc accélérer l'analyse de contact sur le maillage thermique (uniquement nécessaire pour l'établissement des conditions aux limites thermiques) en utilisant les informations du contact du maillage mécanique.

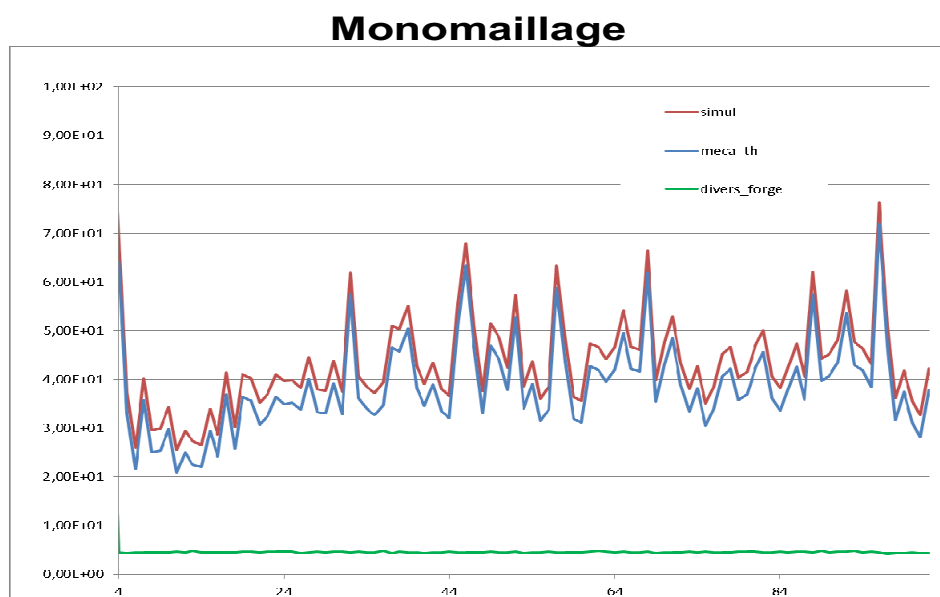


Figure IV-50. Décomposition du temps total de simulation monomaillage et MMP cas du maillage moyen

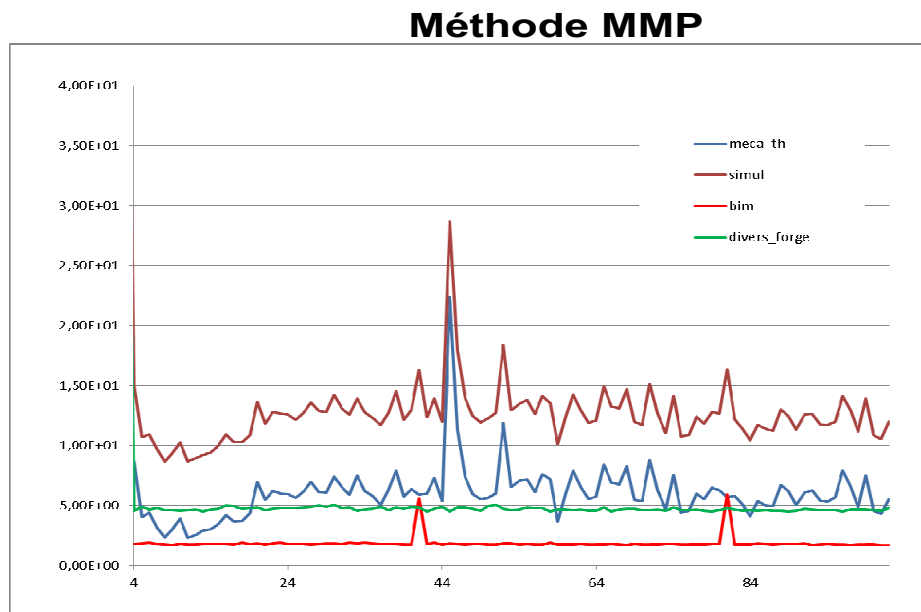


Figure IV-51. Décomposition du temps total de simulation avec la méthode MMP cas du maillage moyen

Pour le laminage de tôle, on obtient une accélération globale plus grande car la surface de contact y est assez localisée (zone sous empreinte) alors qu'elle est assez étalée dans le cas du laminage à pas de pèlerin comme le montre la Figure IV-53. Il en résulte un temps d'analyse de contact (réalisé sur tous les nœuds potentiellement en contact) plus faible, donc une fraction incompressible plus faible et par conséquent une meilleure accélération globale.

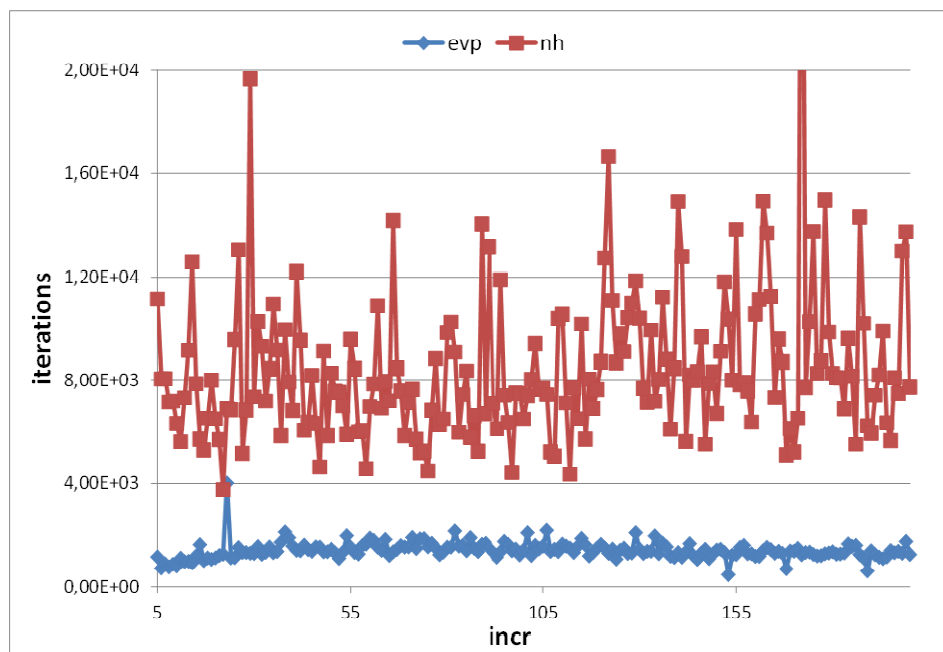


Figure IV-52. Comportement du solveur linéaire pour la loi EVP et Norton-Hoff

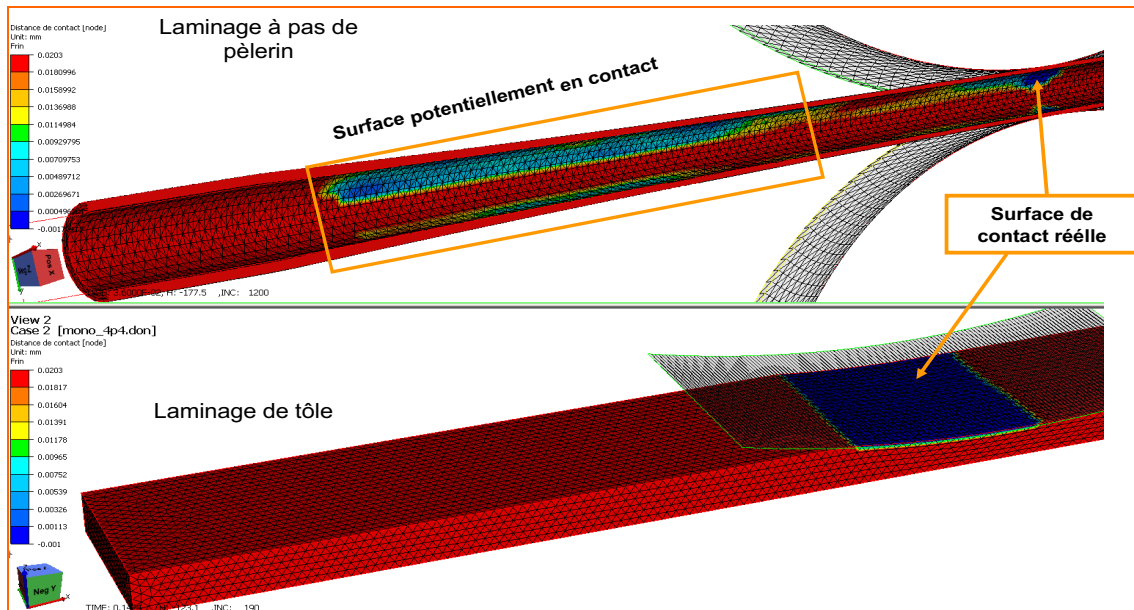


Figure IV-53. Comparaison des surfaces de contact laminage pas de pèlerin vs laminage de tôle

## IV.5. Synthèse

Dans ce chapitre nous avons présenté l'application de la méthode MMP au cas du laminage à pas de pèlerin. Pour y parvenir, plusieurs améliorations ont été apportées à la méthode initiale.

Tout d'abord la difficulté du déraffinement du maillage liée à la géométrie complexe du tube a été surmontée grâce à l'utilisation d'une métrique anisotrope cylindrique. Cette approche nous a alors permis d'effectuer d'importants déraffinements de maillage tout en construisant un maillage mécanique correct pour les calculs. La seule limitation reste l'anisotropie des maillages générés, puisque dans beaucoup de cas, le déraffinement se fait majoritairement suivant la direction de l'axe du tube.

Ensuite, avec la version initiale de la méthode, on obtient une précision satisfaisante sur les déformations. Par contre les contraintes présentent de fortes perturbations. Ces perturbations sont essentiellement liées à la diffusion numérique occasionnée lors du transport des champs  $\mathbf{P0}$  du maillage thermique vers le maillage mécanique. Après avoir étudié plusieurs pistes, une approche combinant deux techniques a été retenue pour améliorer la précision des contraintes : la réactualisation locale des variables d'état, qui consiste à effectuer la mise à jour des variables d'état sur le maillage mécanique plutôt que de l'effectuer sur le maillage thermique avant de transférer ces variables ; et l'utilisation d'opérateurs de transport de champ  $\mathbf{P0}$  super-convergentes. Pour le recouvrement SPR, nous sommes partie de la technique proposée dans [Kumar *et al.* 2012] ; des modifications ont été ensuite apportées afin de mieux traiter les noeuds appartenant à la frontière de domaine et de conserver la propriété de super convergence en surface. Elle permet aussi de mieux prendre en compte les maillages anisotropes grâce à l'utilisation d'un meilleur critère sur l'inversibilité des systèmes linéaires sous-jacents. Ces travaux nous ont permis d'obtenir une précision satisfaisante de la précision éléments finis.

Les performances de la méthode ont été étudiées pour le laminage à pas de pèlerin, sur des maillages de tailles différentes. Sur un maillage grossier, la forte anisotropie et la mauvaise qualité des éléments du maillage mécanique conduisent à un mauvais conditionnement du système linéaire, qui se traduit par une faible accélération. Ce problème a été réglé grâce à

l'utilisation des préconditionneurs plus robustes (**ILU(2)**, **ILU(3)**). Sur des maillages moyens et fins, on obtient des bonnes accélérations (5 et 6,5) au niveau du solveur MMP. On retrouve le même comportement qu'en viscoplastique ([[Ramadan 2010](#)]) , à savoir que l'efficacité parallèle est celle du maillage mécanique. Le temps passé dans le reste du code s'avère occuper une part non négligeable du temps pour ce problème particulier de laminage à pas de pèlerin, ce qui réduit les accélérations globales à 2,3 et 3,3 respectivement pour le maillage moyen et pour le maillage fin. Malgré tout, l'accélération globale se cumule bien à celle du parallélisme.





## Conclusions et perspectives

---

L'objectif principal de cette thèse était d'utiliser la méthode Multimaillages Multiphysiques Parallèle [Ramadan 2010], pour accélérer les calculs lors de la simulation numérique du laminage à pas de pèlerin.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'analyse des simulations en monomaillage. Les résultats ont permis tout d'abord de déterminer le type de raffinement de maillage optimal permettant d'obtenir des résultats plus proches de ceux de la solution de référence, puis de dresser un bilan maillage optimal/temps de calcul nécessaire.

La deuxième partie de notre étude a concerné l'application de la méthode MMP au laminage à pas de pèlerin. Nous sommes partis d'une méthode initialement développée pour des procédés de mise à forme à chaud discontinus (martelage), mettant en jeu des matériaux obéissant à une loi de comportement viscoplastique, pour l'étendre à un procédé de mise en forme à froid continu, où la loi de comportement est élastoplastique.

A travers les applications de laminage de tôle, nous avons montré que la méthode MMP peut s'appliquer avec succès aux procédés continus.

Pour appliquer efficacement la méthode MMP au laminage à pas de pèlerin, plusieurs modifications et améliorations ont été apportées à l'algorithme initial pour pouvoir prendre en compte les spécificités liées à la fois au procédé et à la loi élastoplastique utilisé dans ce cas. En effet, le laminage à pas de pèlerin présente plusieurs particularités. Tout d'abord la géométrie complexe du tube et l'anisotropie du maillage de départ posent des problèmes à l'algorithme de déraffinement de maillage dont la version par défaut est plus dédiée aux géométries massives. Ensuite, dans ce procédé, malgré le fait que la zone de contact soit localisée, les variables d'état telles que les contraintes ne le sont pas. Ce qui se traduisait par des imprécisions importantes sur les contraintes, avec la version initiale de la méthode.

La difficulté du déraffinement du maillage a été surmontée en développant une approche de déraffinement anisotrope basée sur une métrique cylindrique ; ce qui a permis d'effectuer des déraffinements importants tout en construisant un maillage mécanique correct pour les calculs. Avec cette nouvelle approche, la question de l'anisotropie optimale du maillage mécanique se pose puisque dans beaucoup de cas, le déraffinement se fait majoritairement suivant la direction de l'axe du tube, ce qui conduit dans certains cas à un mauvais conditionnement du système linéaire, et une chute de performance de la méthode MMP par la suite. Dans ces cas, nous avons montré que l'utilisation de préconditionneurs plus robustes permet de retrouver une convergence normale du solveur linéaire, et donc des performances de la méthode proche de celles recherchées. Ce travail a donc permis d'étendre la méthode MMP, à des problèmes faisant intervenir des géométries complexes nécessitant l'utilisation de maillages anisotropes.

Les imprécisions sur les contraintes, sont les résultats des diffusions numériques générées par les multiples transferts des champs  $\mathbf{P0}$  du maillage thermique vers le maillage mécanique. Les solutions adoptées combinent une modification de l'algorithme générale de la méthode MMP:

la *réactualisation locale des variables d'état* et l'amélioration des opérateurs de transport de champ **P0** : le transfert par recouvrement super convergent (SPR). La *réactualisation locale des variables d'état* consiste à réactualiser les variables d'état sur le maillage mécanique plutôt que de l'effectuer sur le maillage thermique avant de transférer ces variables. En ce qui concerne le transfert de champs **P0** par recouvrement SPR, une approche itérative telle que proposée dans [Kumar et al. 2012] a été retenue, tout en apportant des améliorations afin de mieux traiter les nœuds appartenant à la frontière du domaine et de conserver la propriété de super convergence en surface sur des maillages anisotropes. Des applications à d'autres procédés continus (laminage de tôle et tréfilage) impliquant des matériaux élastoplastiques ont permis de mettre en évidence la robustesse et la généralité de la solution retenue.

Les améliorations et modifications effectuées apportent ainsi une impulsion importante à la méthode MMP, quant à la précision des résultats dans le cas de la loi élastoplastique et permettent de consolider davantage les bonnes précisions déjà observées par ([Ramadan 2010] dans le cas de la loi viscoplastique.

En termes de performances, des enseignements intéressants peuvent être tirés.

Tout d'abord en considérant le solveur MMP (équivalent du solveur thermomécanique en monomaillage) uniquement, on observe des accélérations ( $Sp^{MMP}$ ) excellentes, allant jusqu'à 6,5 pour un maillage suffisamment fin (70 000 nœuds) en séquentiel. En parallèle, on observe une décroissance des accélérations avec le nombre de processeurs (3,2 sur 8 processeurs pour le maillage fin) ; ces décélérations sont de même ordre que celles observées dans [Ramadan 2010], l'efficacité parallèle est celle du maillage mécanique qui est inférieure à celle du maillage thermique (monomaillage).

Ensuite, en considérant les temps de simulation totaux, on observe des accélérations globales ( $Sp^{Forge}$ ) moins élevées par rapport à celles espérées et obtenues sur le solveur MMP. Avec le maillage fin, l'accélération globale n'est plus que de 2,6 sur 8 processeurs. La décomposition du temps total de simulation a permis d'établir que la faiblesse des accélérations globales est essentiellement due à l'existence d'une fraction de temps incompressible (analyse de contact, écritures,...) au sein de Forge® qui varie d'un procédé à l'autre.

Malgré tout, nos développements permettent d'obtenir l'accélération minimale recherchée (2,3 sur le maillage moyen) pour ramener le coût du calcul sur le maillage moyen à celui sur le maillage grossier (maillage moyen), ce qui constitue un résultat intéressant du point de vue industriel. L'autre point positif est que l'accélération du solveur  $Sp^{MMP}$  est relativement constante vis-à-vis du nombre de processeurs, ce qui permet donc de les cumuler avec les accélérations.

A l'issue de notre étude, quelques axes d'améliorations et d'extension de la méthode MMP se dégagent. Dans notre travail, le maillage mécanique est construit par déraffinement local emboîté par nœuds en utilisant une métrique cylindrique dont les termes sont calculés manuellement. On peut songer à l'utilisation d'une métrique construite à l'aide d'un estimateur d'erreur, ce qui permettrait de traiter de façon encore plus précise et automatique le problème concernant l'anisotropie optimale du maillage mécanique. Pour que cette technique soit efficace, il faudrait lever la condition d'emboîtement par nœuds, ce qui impose l'utilisation d'opérateurs de transfert de champs **P1** plus robustes que ceux utilisés actuellement. On pourrait par exemple utiliser un recouvrement SPR d'ordre 2.

La seconde piste concerne les opérateurs de transfert de champ **P0** par recouvrement SPR. On pourrait améliorer leur précision en imposant la condition d'équilibre mécanique aux champs recouverts.

Afin de garantir une accélération globale voisine de celle du solveur MMP, il serait intéressant de revisiter la technique d'implémentation de la méthode MMP au sein du code Forge® afin de mieux optimiser la fraction de temps incompressible pour en limiter l'impact.

Le laminage à pas de pèlerin conjugue de nombreux obstacles à la méthode MMP. Il serait intéressant d'appliquer la méthode MMP avec nos améliorations (précision et déraffinement de maillage) à d'autres procédés de mise en forme à froid potentiellement plus favorables (tréfilage, laminage Kocks, ...), afin de mieux bénéficier de ses performances.

Pour accélérer davantage les calculs, on pourrait envisager de coupler la méthode MMP avec d'autres méthodes d'accélération de calcul, telles que la méthode multigrilles par exemple.

Enfin, jusqu'à présent, la méthode MMP, ne prend en compte que la mécanique et la thermique. La possibilité de l'étendre à plus de 2 physiques (calcul microstructural, électromagnétisme, ...) peut être une évolution intéressante de la méthode.



## ANNEXES

### SCHEMA D'INTEGRATION TEMPORELLE POUR LES GRANDES ROTATIONS DANS FORGE®

#### Introduction

L'évolution du domaine dans le temps est décrite par l'équation (I.9). Pour beaucoup de problèmes de mise en forme, les schémas d'Euler implicite ou de Runge-Kutta d'ordre 2 donnent des résultats précis. Cependant, lorsque le problème fait intervenir de grandes rotations, il a été observé que le schéma d'Euler implicite, voir même de Runge-Kutta d'ordre 2 peut conduire à de très grandes variations de volume. Les travaux de [Traore 2001] ont montré que même un schéma Runge-Kutta d'ordre 4 ne donne pas entière satisfaction. Dans [Losilla *et al.* 2002], les auteurs montrent qu'une actualisation basée sur un paramétrage en coordonnées cylindriques permet de bien conserver le volume, cependant seules les rotations autour d'un axe fixe et connu à l'avance sont prises en compte. Nous proposons ici un nouvel algorithme d'intégration temporelle plus général, permettant de prendre en compte les variations des axes de rotation au sein d'un même domaine et les cas où seule une partie du domaine est en rotation (procédé de pliage par exemple). Nous présentons aussi les modifications induites par ce nouveau schéma sur le traitement du contact unilatéral.

#### I. Cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe

Dans les travaux [Losilla *et al.* 2002], l'idée consiste à effectuer la linéarisation inhérente à l'approche incrémentale dans le repère cylindrique associé à la rotation. Ainsi, à chaque instant et en tout point du domaine on écrit la discrétisation temporelle dans la base cylindrique. Considérons une rotation autour d'un axe fixe ( $\mathbf{Oz}$ ), en tout point  $\mathbf{M}^t(x^t, y^t, z^t)$  du domaine, on considère la base cylindrique locale ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ) (Figure 1) dans laquelle le champ de vitesse  $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$  s'écrit :

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t} \begin{cases} v_r^{t+\Delta t} = v_x^{t+\Delta t} \cos \theta^t + v_y^{t+\Delta t} \sin \theta^t \\ v_\theta^{t+\Delta t} = \frac{v_y^{t+\Delta t} \cos \theta^t + v_x^{t+\Delta t} \sin \theta^t}{r^t} \\ v_z^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $r^t = \sqrt{(x^t - x_{centre})^2 + (y^t - y_{centre})^2}$  le rayon de courbure locale par rapport au centre de l'axe de rotation ( $\mathbf{Oz}$ ),  $(x_{centre}, y_{centre}, z_{centre})$  sont les coordonnées du centre de rotation  $\mathbf{O}$ ,

$\theta^t = \arctg\left(\frac{y^t - y_{centre}}{x^t - x_{centre}}\right)$  représente la position angulaire dans la base ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ).

La linéarisation d'ordre 1 du champ de vitesse dans la base cylindrique permet d'exprimer les coordonnées cylindriques réactualisées  $(r^{t+\Delta t}, \theta^{t+\Delta t}, z^{t+\Delta t})$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_{Cyl}^{t+\Delta t} \begin{cases} r^{t+\Delta t} = r^t + v_r^{t+\Delta t} \Delta t \\ \theta^{t+\Delta t} = \theta^t + v_\theta^{t+\Delta t} \Delta t \\ z^{t+\Delta t} = z^t + v_z^{t+\Delta t} \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

En revenant au repère cartésien, les coordonnées réactualisées s'écrivent :

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \begin{cases} x^{t+\Delta t} = r^{t+\Delta t} \cos(\theta^{t+\Delta t}) \\ y^{t+\Delta t} = r^{t+\Delta t} \sin(\theta^{t+\Delta t}) \\ z^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (3)$$

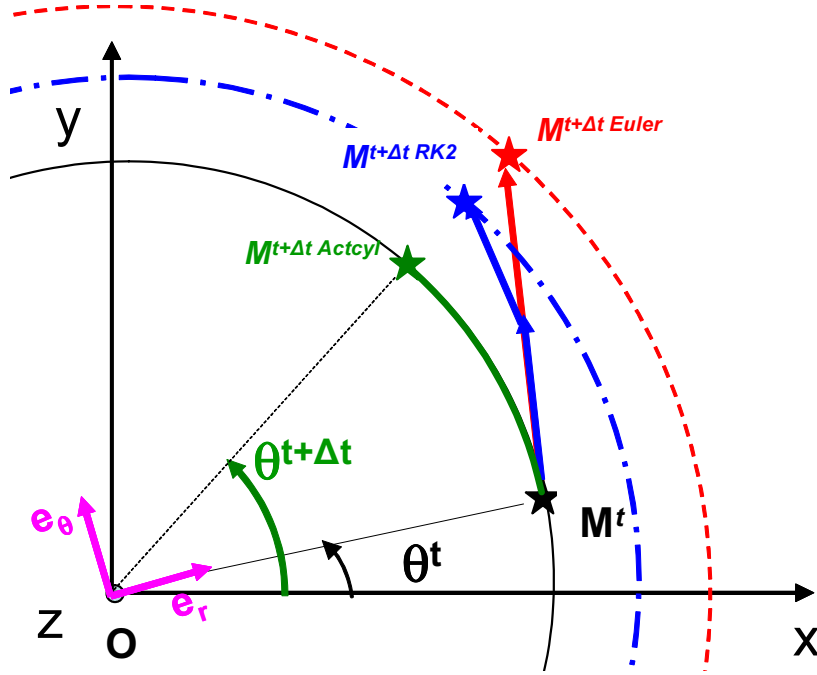


Figure 1. Réactualisation cylindrique autour de (Oz)

## II. Extension au cas d'une rotation quelconque

On souhaite étendre le schéma précédent à un axe de rotation quelconque déterminé localement. On commence par la recherche d'un axe de rotation en tout point du domaine. Ensuite on effectue la projection des coordonnées cartésiennes vers la base locale construite à partir de l'axe détecté. L'étape suivante est la linéarisation d'ordre 1 décrite dans la section précédente dans la base locale. Enfin, on fait une projection inverse dans le repère cartésien.

### II.1. Recherche automatique des axes de rotation

Pour un solide en avec un mouvement sous l'effet d'un champ de vitesse, les termes de rotation sont données par la partie antisymétrique  $\mathbf{\Omega}$  du gradient de vitesse :

$$\mathbf{\Omega}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v}^{t+\Delta t} - \nabla (\mathbf{v}^{t+\Delta t})^T] \quad (4)$$

On peut démontrer que le tenseur  $\mathbf{\Omega}^{t+\Delta t}$  peut s'écrire à partir des composantes  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  du vecteur vitesse de rotation  $\mathbf{\omega}^{t+\Delta t}$  :

$$\mathbf{\Omega}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dans la pratique le vecteur vitesse de rotation est d'abord calculé sur chaque élément ( $\mathbf{\omega}_e^{t+\Delta t}$ ) puis moyenné aux nœuds ( $\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t}$ ). Considérons un patch  $P_k$  d'éléments centré sur le nœud  $k$ ,  $\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t}$  est donné par :

$$\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t} = \frac{1}{d} \sum_{e=1}^d \mathbf{\omega}_e^{t+\Delta t}, \quad d = \text{card}(P_k) \quad (6)$$

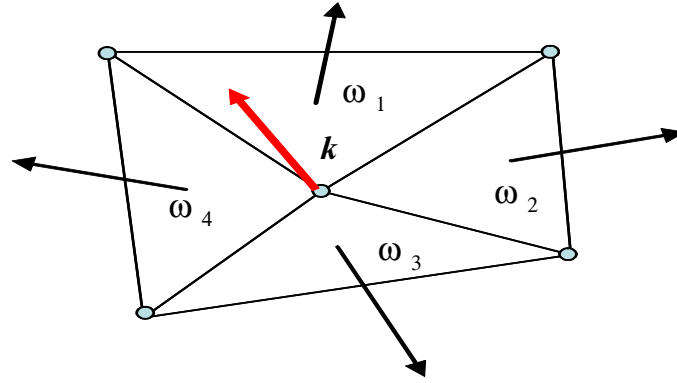


Figure 2. Patch d'éléments en rotation centré sur le nœud  $k$

Avant de poursuivre, on évalue s'il y a une rotation au nœud  $k$  considéré. Dans le cas contraire, le nœud est considéré comme étant en translation et est réactualisé en utilisant le schéma d'Euler implicite habituel. Cette évaluation consiste à vérifier qu'il ne n'y a pas de variation brutale de la vitesse de rotation sur le patch :

- ✓ la norme de la vitesse de rotation moyenne au nœud est proche de celle de ses éléments d'appartenance:

$$0 < \lambda_1 \leq \min \left( \frac{\|\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t}\|}{\|\mathbf{\omega}_e^{t+\Delta t}\|}, \frac{\|\mathbf{\omega}_e^{t+\Delta t}\|}{\|\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t}\|} \right) \leq 1 \quad \forall e \in P_k \quad (7)$$

- ✓ l'orientation du vecteur vitesse de rotation moyenne au nœud est assez proche de celle de ses éléments adjacents :

$$0 < \lambda_2 \leq \cos(\alpha_{ek}) = \left( \frac{\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{\omega}_e^{t+\Delta t}}{\|\mathbf{\omega}_k^{t+\Delta t}\| \|\mathbf{\omega}_e^{t+\Delta t}\|} \right) \leq 1 \quad \forall e \in P_k \quad (8)$$

Notons que ces tests sont utiles dans le cas où seulement une partie du domaine de calcul est en rotation.



## II.2. Construction des bases cylindriques locales et projections

Ayant déterminé le vecteur vitesse de rotation instantanée  $\boldsymbol{\omega}$ , nous pouvons calculer une base locale  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$  autour de cet axe, telle que le troisième vecteur de la base  $\mathbf{w}_0$  soit porté par l'axe :

$$\mathbf{w}_0 = \frac{\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t}}{\|\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t}\|} \quad (9)$$

Les deux autres vecteurs de base  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$  sont déterminés par les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{v}^{t+\Delta t}}{\|\mathbf{v}^{t+\Delta t}\|} \\ \mathbf{v}_0 = \frac{\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t} \wedge \mathbf{v}^{t+\Delta t}}{\|\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t} \wedge \mathbf{v}^{t+\Delta t}\|} \end{cases} \quad (10)$$

Ainsi, la matrice de changement de repère s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_0^x & v_0^x & w_0^x \\ u_0^y & v_0^y & w_0^y \\ u_0^z & v_0^z & w_0^z \end{pmatrix} \quad (11)$$

*Notion d'axe de rotation instantané*

Lorsqu'un solide est en mouvement de rotation de corps rigide, le(s) centre(s) instantané(s) de rotation est (sont) le(s) point  $\mathbf{O}$  du domaine vérifiant(s) l'équation vectorielle :

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t} \wedge \mathbf{OM}^t, \quad \forall \mathbf{M}^t \in \Omega \quad (12)$$

Lorsque le solide se déforme, en sus de la rotation, rigoureusement la notion de centre instantané de rotation n'existe plus. On peut cependant définir un « pseudo centre instantané de rotation » caractérisant la rotation matérielle du domaine. L'équation (I90) permet de déterminer un point de l'axe de rotation, en rajoutant la condition supplémentaire sur  $\mathbf{O}$  :  $\mathbf{OM}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t} = 0$  ( $\mathbf{OM}^t$  soit contenu dans le plan perpendiculaire à  $\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t}$ ) qui permet d'avoir l'unicité du point. On peut alors démontrer que la solution de cette équation vectorielle s'écrit:

$$\mathbf{OM}^t = - \left( \frac{\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t} \wedge \mathbf{v}^{t+\Delta t}}{\|\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t}\|^2} \right) \quad (13)$$

En tenant compte de la construction des repères et après quelques manipulations, le vecteur  $\mathbf{OM}^t$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{OM}^t = - \left( \frac{\mathbf{v}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\boldsymbol{\omega}^{t+\Delta t}\|} \right) \mathbf{v}_0 \quad (14)$$

En notant  $\mathbf{x}_{centre}^*$  les coordonnées du « pseudo centre de rotation instantané »  $\mathbf{O}$ , et  $\mathbf{x}_{loc}^t, \mathbf{v}_{loc}^{t+\Delta t}$  respectivement les positions et vitesse d'un nœud  $\mathbf{m}^t$  dans le repère local correspondant à  $\mathbf{M}^t$  dans le repère global, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{loc}^t = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}_{centre}^*) \\ \mathbf{v}_{loc}^t = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (15)$$

### II.3. Réactualisation dans la base locale et reprojection

Une fois la projection des coordonnées et du champ de vitesse vers le repère local effectuée, les coordonnées réactualisée  $(x_{loc}^{t+\Delta t}, y_{loc}^{t+\Delta t}, z_{loc}^{t+\Delta t})$  de  $\mathbf{m}^{t+\Delta t}$  dans le repère local sont calculée en utilisant le schéma présenté dans la [section § a](#). On en déduit ensuite les coordonnées réactualisée  $(x^{t+\Delta t}, y^{t+\Delta t}, z^{t+\Delta t})$  de  $\mathbf{M}^{t+\Delta t}$  dans le repère global par une projection inverse :

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}\mathbf{x}_{loc}^{t+\Delta t} + \mathbf{x}_{centre}^* \quad (16)$$

### III. Prise en compte du nouveau schéma dans le traitement du contact

Nous nous intéressons ici à la prise en compte du nouveau schéma de réactualisation cylindrique lors de la gestion du contact, en nous basant sur l'approche proposée par [\[Losilla et al. 2002\]](#)

En effet, pour des grands mouvements de rotation, l'approximation la linéarisation  $\frac{\mathbf{M}^{t+\Delta t} - \mathbf{M}^t}{\Delta t} = \mathbf{v}^{t+\Delta t}$  utilisée dans la linéarisation des équations de contact [\(I.39\)](#) n'est plus vérifiée. Il faut tenir compte de la rotation qui a lieu entre  $\mathbf{M}^t$  et  $\mathbf{M}^{t+\Delta t}$ . Plaçons-nous dans le repère local construit autour de l'axe de rotation et décrit dans la section , on a :

$$\begin{cases} \mathbf{m}^t \mathbf{m}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{M}^t \mathbf{M}^{t+\Delta t}) \\ \mathbf{v}_{loc}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (17)$$

La condition de contact unilatéral s'écrit dans ce repère :

$$h(\mathbf{v}^{t+\Delta t}) = \left[ \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{m}^t \mathbf{m}^{t+\Delta t}}{\Delta t} \right) - \mathbf{v}_{out}^t \right] \cdot \mathbf{n}^t - \frac{\delta^t}{\Delta t} \leq 0 \quad (18)$$

A la place de [\(I.51\)](#), la contribution au problème mécanique est donnée par:

$$\mathbf{R}_n^C = \frac{\partial \phi(\mathbf{v}_h)}{\partial \mathbf{v}_n} = \rho [h(\mathbf{v}_n)]^+ \left( \mathbf{P} \frac{\partial \left( \frac{\mathbf{m}^t \mathbf{m}^{t+\Delta t}}{\Delta t} \right)}{\partial \mathbf{v}_n^*} \mathbf{P}^{-1} \right) \cdot \mathbf{n}_n S_n \quad (19)$$

Le terme  $\frac{\partial \left( \frac{\mathbf{m}^t \mathbf{m}^{t+\Delta t}}{\Delta t} \right)}{\partial \mathbf{v}_n^*} = \mathbf{\Lambda}$  qui peut être vu comme un gradient cylindrique dans la base locale. Il est donné par la formule

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A & C & 0 \\ D & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} A &= \cos(\theta^{*t+\Delta t})\cos(\theta^{*t}) + \frac{r^{*t+\Delta t}}{r^{*t}} \sin(\theta^{*t+\Delta t})\sin(\theta^{*t}) \\ B &= \sin(\theta^{*t+\Delta t})\sin(\theta^{*t}) + \frac{r^{*t+\Delta t}}{r^{*t}} \cos(\theta^{*t+\Delta t})\cos(\theta^{*t}) \\ C &= \cos(\theta^{*t+\Delta t})\sin(\theta^{*t}) - \frac{r^{*t+\Delta t}}{r^{*t}} \sin(\theta^{*t+\Delta t})\cos(\theta^{*t}) \\ D &= \sin(\theta^{*t+\Delta t})\cos(\theta^{*t}) - \frac{r^{*t+\Delta t}}{r^{*t}} \cos(\theta^{*t+\Delta t})\sin(\theta^{*t}) \end{aligned} \quad (21)$$

La contribution à la matrice Hessienne locale, s'écrit :

$$\mathbf{H}_n^c = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{v}_h)}{\partial \mathbf{v}_n \partial \mathbf{v}_n^T} = \begin{cases} \rho(\mathbf{P}.\Lambda.\mathbf{P}^{-1}\mathbf{n}_n) \otimes (\mathbf{P}.\Lambda.\mathbf{P}^{-1}\mathbf{n}_n) \mathbf{S}_n & \text{si } h(\mathbf{v}_n) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (22)$$

#### IV. Exemples d'application

Pour toutes les applications présentées ici, on considère un matériau obéissant à la loi de comportement viscoplastique de Norton-Hoff avec comme paramètres :

$K = 1881 \text{ MPa}$  et  $m = 0,15$ .

##### IV.1. Rotation de corps rigide

On considère dans un premier temps un cas d'application académique de rotation de corps rigide autour d'un axe fixe. L'objectif est de d'évaluer la précision du nouveau schéma. Le domaine d'étude est un cylindre creux (Figure 3) soumis à une vitesse de rotation constante de  $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$  autour de son axe, le pas de temps choisi est  $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ . Les résultats sont comparés avec ceux obtenus en utilisant les schémas d'Euler implicite et de Runge-Kutta 2.

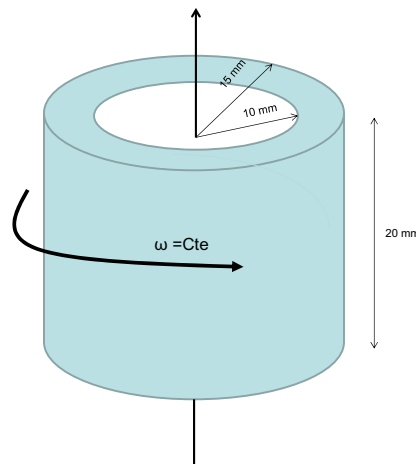


Figure 3. Cas d'application rotation de corps rigide

La Figure 4(a) et la Figure 4(b) présentent respectivement l'erreur en norme  $L_2$  et la variation relative de volume durant quelques incréments. L'échelle de l'axe des ordonnées est

logarithmique alors que celle de l'axe des abscisses est normale. On peut remarquer que le résultat obtenu avec le nouveau schéma est le plus précis. On observe une variation volume très faible ( $\Delta V/V_0 \sim 10^{-8}$ ) pour ce schéma. Avec le schéma de Runge-Kutta 2, on obtient des variations de volume qui sont certes modérés ( $\Delta V/V_0 \sim 10^{-2}$ ) mais non négligeables. Le schéma d'Euler implicite, les variations de volume sont de l'ordre de  $10^{-3}$ , ce qui est complètement aberrant.

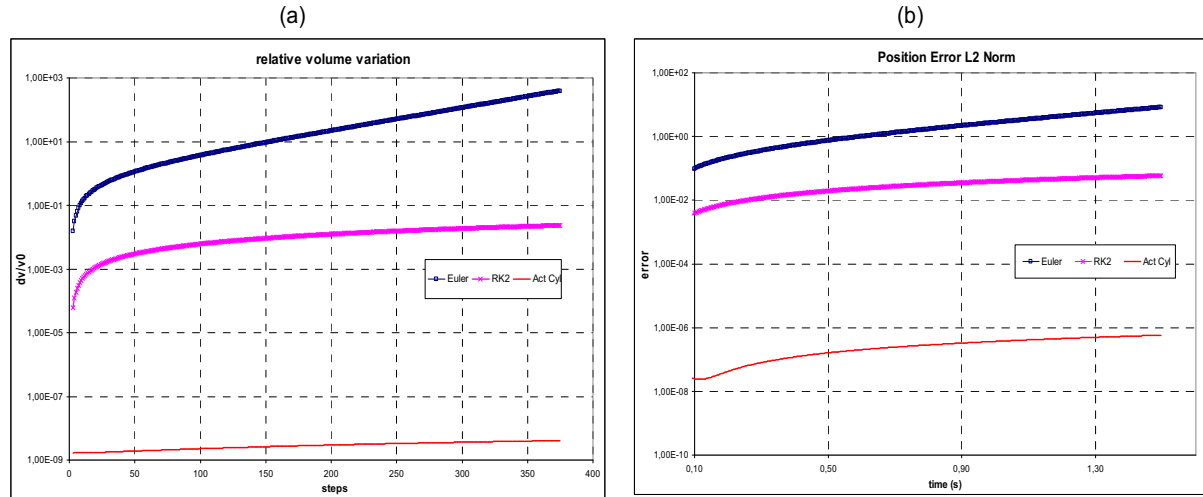


Figure 4. Evolution de la variation relative de volume et de l'erreur de position en Norme  $L_2$  : rotation de corps rigide

#### IV.2. Torsion à chaud

On s'intéresse à présent à un cas de torsion à chaud. L'objectif est de mettre en évidence les effets du nouveau schéma sur la précision de la courbe caractéristique couple-nombre de tour. Les deux outils ont une vitesse de rotation  $\omega = \pi/60 \text{ rad/s}$  ; le pas de temps utilisé est de  $\Delta t = 10^{-1} \text{ s}$ . Comme observé précédemment, le nouveau schéma permet de mieux conserver le volume (Figure 6(a)). La meilleure conservation de volume se traduit ensuite au niveau de la courbe caractéristique par un couple légèrement plus faible (Figure 6(b)) que celui obtenu avec le schéma Runge-Kutta 2 dont le résultat peut être considéré comme la référence.

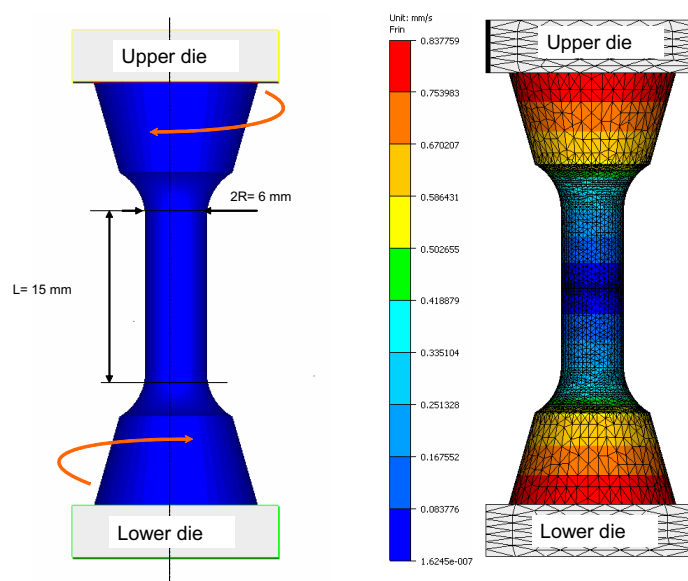


Figure 5. Eprouvette pour le test de torsion à chaud

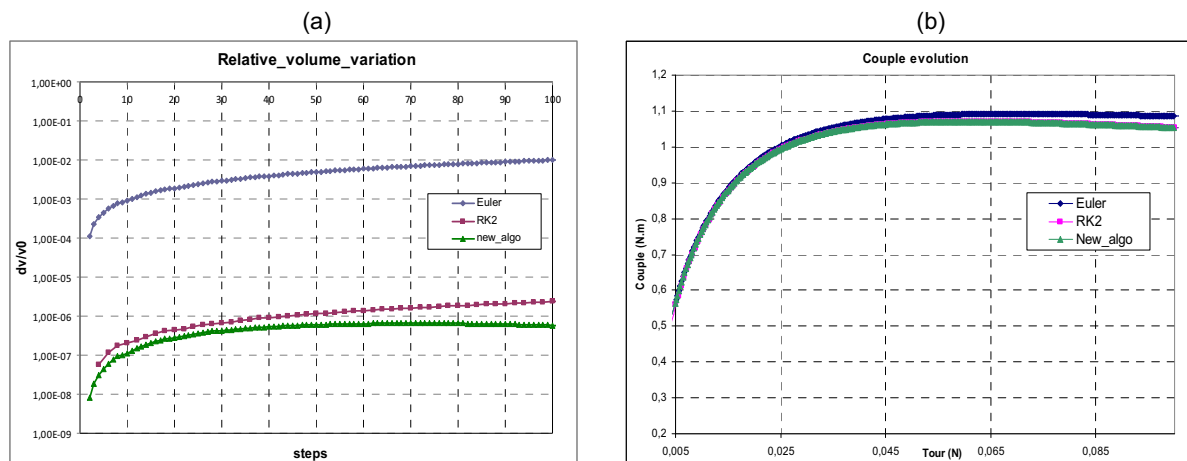


Figure 6. Evolution de la variation relative de volume et de la courbe couple-nombre de tour : rotation de corps rigide

### IV.3. Laminage transversal

Ce procédé sert à la fabrication de pièces automobiles de révolution de forme complexes. On part d'une ébauche de forme cylindrique, la forme finale de la pièce est progressivement imposée par déformation plastique grâce à un mouvement relatif des deux outils. Pour ce procédé, la moindre erreur dans la description cinématique de l'ébauche, peut conduire à une forme erronée de la pièce finale. Il est donc important d'utiliser un schéma d'intégration temporelle précis pour garantir des résultats réalistes, sans avoir recourt à de très petit pas de temps qui impliqueraient des temps de calcul prohibitifs.

On considère pour notre étude deux technologies de fabrication dont la différence se situe au niveau de la cinématique des outils. La première technologie met en jeu deux outils contrarotatifs (avec une vitesse de rotation  $\omega = 1,25 \text{ rad/s}$ ) (Figure 7). La seconde technologie fait intervenir deux matrices avec des mouvements relatifs de translation (avec une vitesse  $v = 30 \text{ mm/s}$ ) (Figure 8). Dans les deux cas, on considère un pas de temps de  $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$ . Des opérations de remaillage sont effectuées fréquemment afin de pouvoir suivre les grandes déformations générées. Afin qu'ils soit pertinent, notre analyse sur la conservation de volume est faite sur les cinquante premiers incréments précédant le premier remaillage.

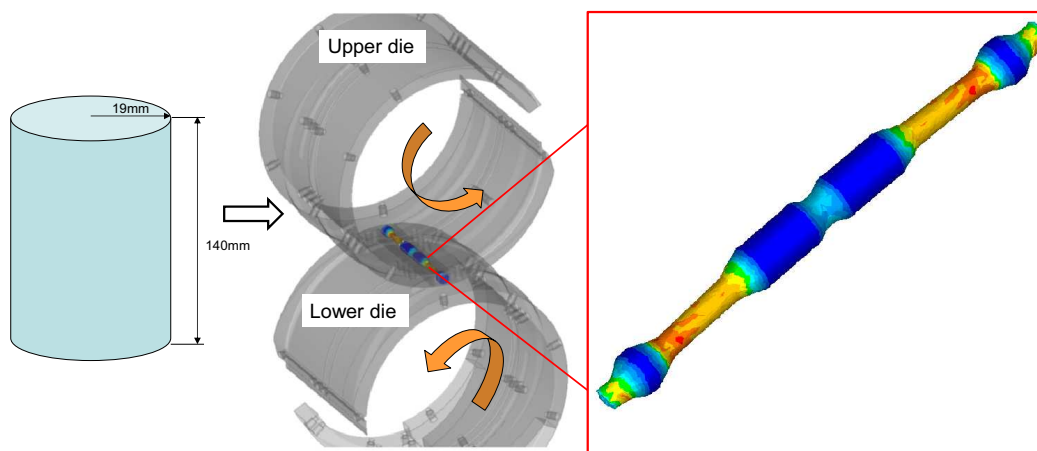


Figure 7. Laminage transversal avec des outils en rotation

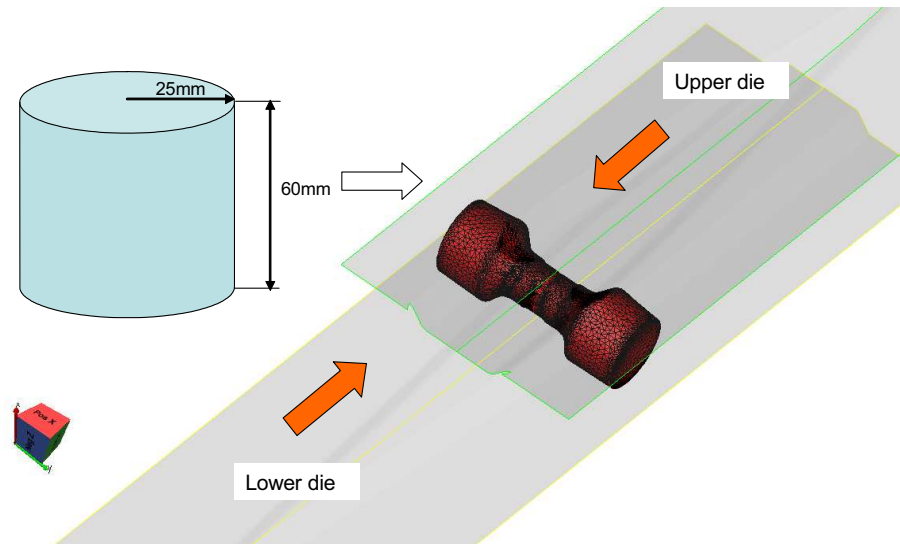


Figure 8. Laminage transversal avec des outils en translation

#### IV.3.1. Technologie avec des outils en translation

Comme on peut le voir sur la Figure 9, la conservation du volume est meilleure pour le nouveau schéma que pour le schéma de Runge-Kutta 2 malgré le mouvement de l'axe de rotation de la pièce en cours de fabrication. L'efficacité du critère de détection des nœuds effectivement en rotation, peut être mise en évidence, en analysant les isovaleurs de champs de détection des nœuds effectivement en rotation (avec les critères de détection définis plus haut) en corrélation avec le champ de pression de contact à deux stades différents de déformation (Figure 10). Notons qu'un champ de détection nul indique que le nœud est considéré comme n'étant pas en rotation, et un champ de détection égale à 1 indique le contraire. On peut donc remarquer que les nœuds non rotatifs correspondent quasiment à ceux qui subissent une très forte compression (pression de contact négatif), de sorte que pour ces nœuds le mouvement de translation de compression prédomine. .

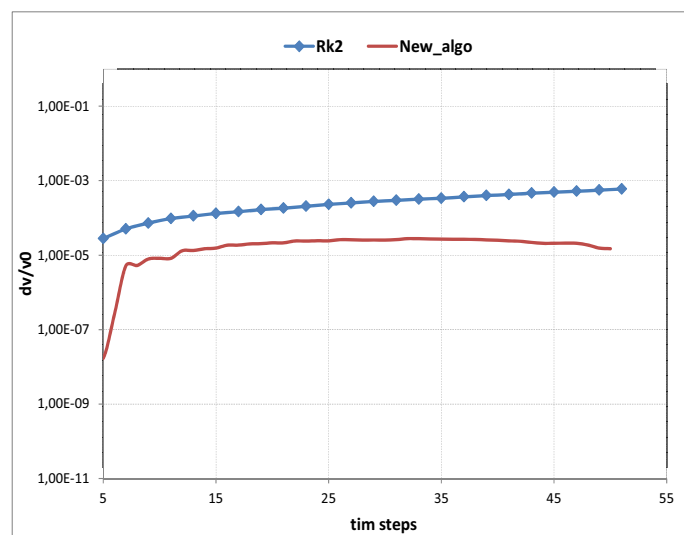


Figure 9. . Evolution de la variation relative de volume : Laminage transversal avec des outils en translation

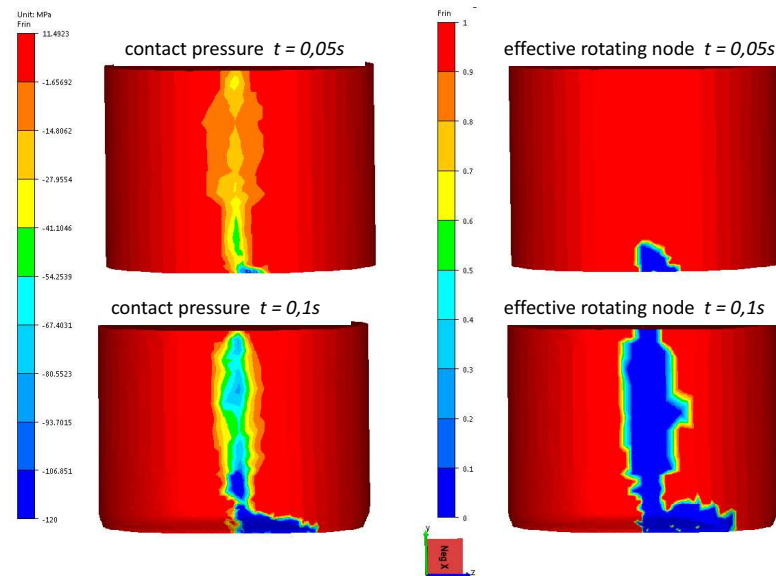


Figure 10. Isovaleurs de champs de détection de noeuds effectivement en rotation corrélés avec les isovaleurs de champ de pression de contact

#### IV.3.2. Technologie avec des outils en rotation

Sur la Figure 11, on présente l'évolution de la forme de la pièce en cours de fabrication. On peut remarquer que le nouveau schéma permet d'obtenir une forme de pièce plus réaliste que le schéma de Runge-Kutta 2, qui lui conduit à une flexion des bouts de la pièce.

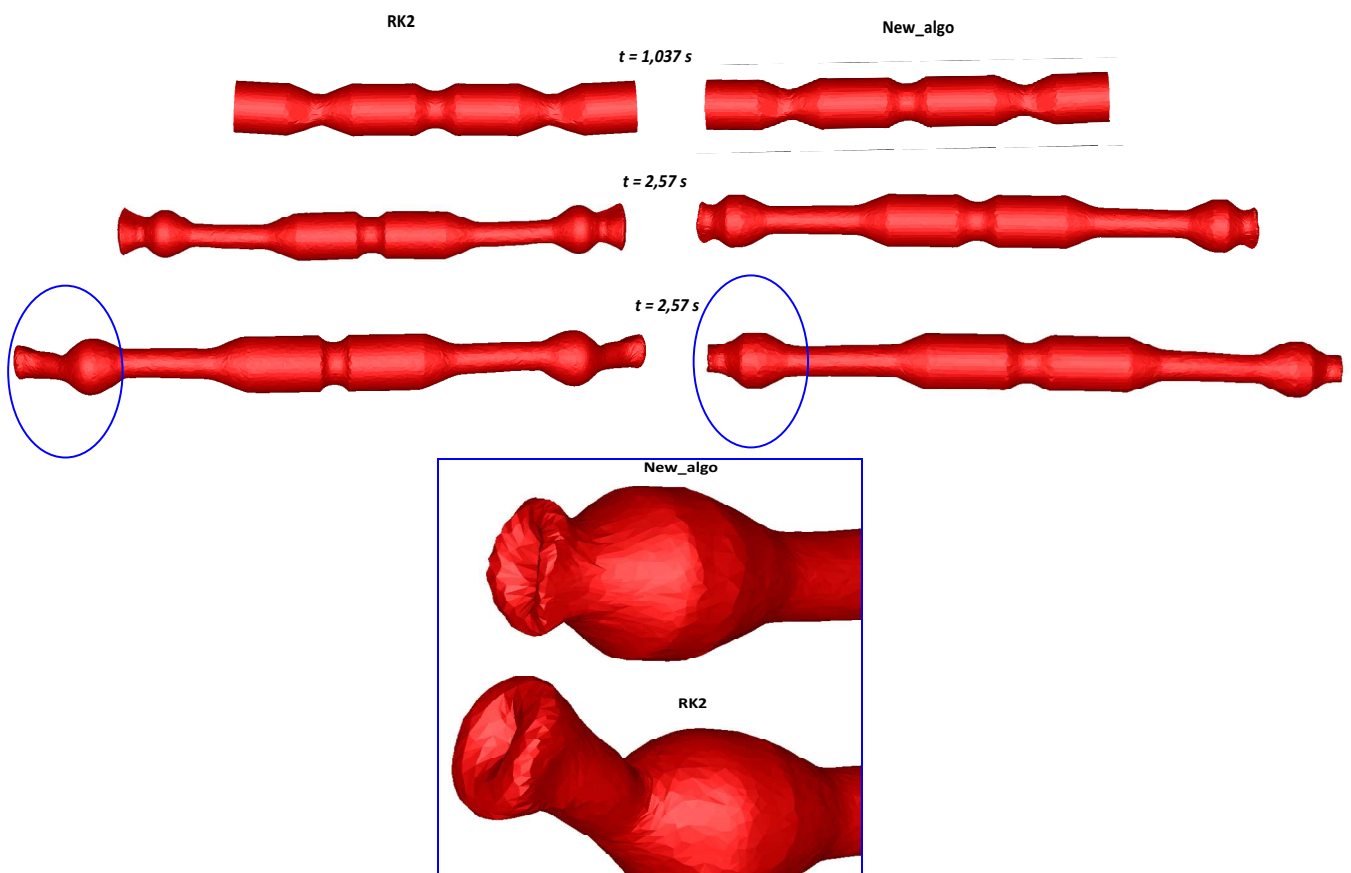


Figure 11. Evolution de la forme de la pièce : laminage transversale avec des outils en rotation



Intéressons-nous à présent aux apports de la prise en compte du nouveau schéma dans le traitement du contact. La Figure 12 présente les isovaleurs de la distance de contact à deux instants différents, avec et sans modifications dans le traitement de contact. Précisons qu'une valeur négative indique que le noeud concerné est en contact. Avec les modifications, les isovaleurs sont plus prononcées (Figure 12(b) et Figure 12(d)), ce qui prouve que le contact est mieux détecté lorsque le nouveau schéma est pris en compte. En comparant les isovaleurs de la Figure 12(c) à celles de la Figure 12(d), on peut remarquer qu'il existe des noeuds qui sont détectés en contact avec les modifications, alors qu'ils ne le sont pas avec l'algorithme par défaut.

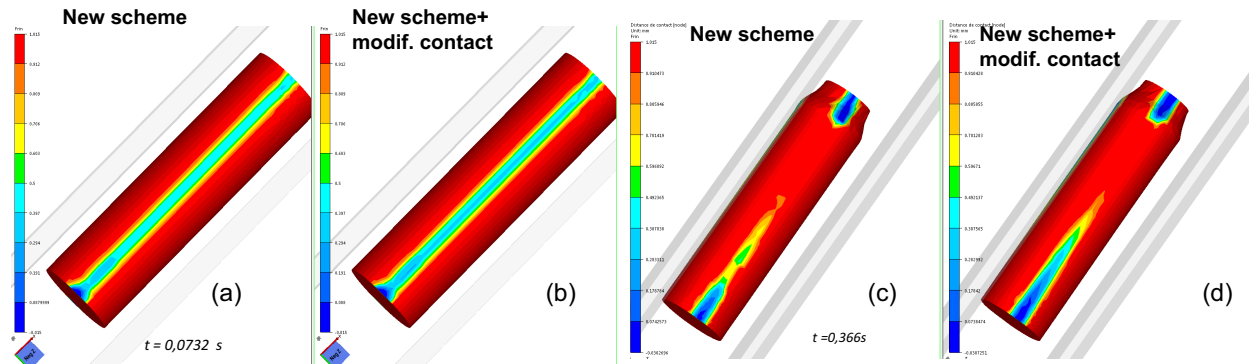


Figure 12. Isovaleurs de distance de contact à deux instants différents

## Conclusion

Un schéma d'intégration temporelle dédié aux grandes rotations a été présenté dans cette section. Les points clés de ce nouveau schéma sont la détection automatique de l'axe de rotation, la détection des nœuds effectivement en rotation, et l'intégration de l'équation d'évolution dans un repère cylindrique construit autour de l'axe de rotation détecté. Des modifications dans les équations de traitement de contact ont été proposées afin de prendre en compte le nouveau schéma, pour une meilleure détection de nœuds en contact. A travers des cas d'application académiques de rotation de corps rigide et des cas d'application industrielle de torsion à chaud et de laminage transversale, nous avons montré la robustesse et la précision du nouveau schéma.



## Bibliographie

---

- [Aliaga 2000] Aliaga C., «Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées», *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*
- [Babuska 1973] Babuska I., «The finite element method with penalty», *Math. Comp.*, vol. 27, 1973, p. 221-228
- [Barboza 2004] Barboza J.a.P., Traitement de contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorpsDept., 2004
- [Barton et al. 2007] Barton G., Li X., Hirt G., *Finite-element modeling of multi-pass forging of nickel-base alloys using a multi-mesh method, THERMEC 2006, Pts 1-5*. Chandra, T., Tsuzaki, K., Militzer, M. and Ravindran, C. Stafa-Zurich, Trans Tech Publications Ltd, 2007, 539-543: 2503-2508
- [Bellet et al. 1998] Bellet M., Deville M., Rappaz M., *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*, 1998
- [Bérard 2011] Bérard A., «Transfert de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures», *Thèse de Doctorat Université de Franche-Comté* 2011
- [Boussetta et al. 2004] Boussetta R., Fourment L., «A Posteriori Error Estimation and Three-dimensional Adaptive Remeshing: Application to Error Control of Non-Steady Metal Forming Simulations», *Numerical Methods in Industrial Forming Processes (NUMIFORM)*, Columbus, Ohio, 13-17 June, 2004, AIP
- [Boussetta et al. 2006] Boussetta R., Coupez T., Fourment L., «Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 48-49, 2006, p. 6626-6645
- [Brancherie et al. 2008] Brancherie D., Villon P., Ibrahimbegovic A., «On a consistent field transfer in non linear inelastic analysis and ultimate load computation», *Computational Mechanics*, vol. 42, n° 2, 2008, p. 213-226

- [Chenot et al. 2002] Chenot J.L., Fourment L., Mocellin K., «Numerical treatment of contact and friction in FE simulation of forming processes», *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 125-126, 2002, p. 45-52
- [Coupez 2000] Coupez T., «Génération et Adaptation de maillage par optimisation locale», *Revue Européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 4, 2000, p. 403-423
- [Davies et al. 2002] Davies R.W., Khaleel M.A., Kinsel W.C., Zbib H.M., «Anisotropic yield locus evolution during cold pilgering of titanium alloy tubing», *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the Asme*, vol. 124, n° 2, 2002, p. 125-134
- [Delalondre 2008] Delalondre F., «Modélisation et étude 3D des phénomènes de cisaillement adiabatiques dans les procédés de mise en forme à grande vitesse», *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2008
- [Di et al. 2009a] Di Y., Li R., «Computation of Dendritic Growth with Level Set Model Using a Multi-Mesh Adaptive Finite Element Method», *Journal of Scientific Computing*, vol. 39, n° 3, 2009a, p. 441-453
- [Di et al. 2009b] Di Y., Wang X.-P., «Precursor simulations in spreading using a multi-mesh adaptive finite element method», *Journal of Computational Physics*, vol. 228, n° 5, 2009b, p. 1380-1390
- [Digonnet et al. 2007] Digonnet H., Silva L., Coupez T., «Cimlib: A fully parallel application for numerical simulations based on components assembly», *NUMIFORM '07: Materials Processing and Design: Modeling, Simulation and Applications, Pts I and II*, vol. 908, 2007, p. 269-274
- [Dubcova et al. 2008] Dubcova L., Solin P., Cervený J., Kus P., «Space and Time Adaptive Two-Mesh hp-Finite Element Method for Transient Microwave Heating Problems», *Electromagnetics*, vol. 30, n° 1-2, 2008, p. 23-40
- [Dubcova et al. 2011] Dubcova L., Solin P., Hansen G., Park H., «Comparison of multimesh hp-FEM to interpolation and projection methods for spatial coupling of thermal and neutron diffusion calculations», *J. Comput. Phys.*, vol. 230, n° 4, 2011, p. 1182-1197
- [Dyduch 1996] Dyduch M., *Adaptative method in finite element simulations of metal forming processes*, Université de LiègeEditor Univ., Faculté des sciences appliquées Dept., 1996

- 
- [Furugen et al. 1984] Furugen M., Hayashi C., «Application of the theory of plasticity of the cold pilgering of tubes», *Journal of Mechanical Working Technology*, vol. 10, n° 3, 1984, p. 273-286
- [Ge et al. 2009] Ge L., Liu W.B., Yang D.P., «Adaptive Finite Element Approximation for a Constrained Optimal Control Problem via Multi-meshes», *J. Sci. Comput.*, vol. 41, n° 2, 2009, p. 238-255
- [Girard 1993] Girard E., «Etude mécanique théorique et expérimentale du laminage à pas de pèlerin», *Thèse de doctorat, École centrale de Nantes*, 1993
- [Groche et al. 2007] Groche P., Fritsche D., Tekkaya E.A., Allwood J.M., Hirt G., Neugebauer R., «Incremental bulk metal forming», *CIRP Ann-Manuf. Technol.*, vol. 56, n° 2, 2007, p. 635-656
- [Gruau et al. 2005] Gruau C., Coupez T., «3D tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, n° 48-49, 2005, p. 4951-4976
- [Guerdoux 2007] Guerdoux S., «Simulation numérique du soudage par frottement malaxage», *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2007
- [Guerdoux et al. 2007] Guerdoux S., Fourment L., «Error Estimation And Accurate Mapping Based ALE Formulation For 3D Simulation Of Friction Stir Welding», *AIP Conference Proceedings*, vol. 908, n° 1, 2007, p. 185-190
- [Hachani 2011] Hachani M., «Amélioration de la modélisation de contact pour les procédés à faible zone de contact», *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2011
- [Hacquin et al. 1996] Hacquin A., Montmitonnet P., Guillerault J.P., «A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation», *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 60, n° 1-4, 1996, p. 109-116
- [Hadoush et al. 2009] Hadoush A., Boogaard A.H., «Substructuring in the implicit simulation of single point incremental sheet forming», *Int J Mater Form*, vol. 2, n° 3, 2009, p. 181-189
- [Harada et al. 2005] Harada M., Honda A., Toyoshima S., *Simulation of cold pilgering process by a generalized plane strain FEM, Zirconium in the Nuclear Industry: 14th International Symposium*. Rudling, P. and Kammenzind, B. W Conshohocken, American Society Testing and Materials, 2005, 1467: 233-247
- [Karas 2009] Karas L., «Development and evaluation of a model for a new
-

- cold pilger process», *Doctoral thesis, Clausthal University of Technology* 2009
- [Khoei et al. 2007] Khoei A.R., Gharehbaghi S.A., «The superconvergence patch recovery technique and data transfer operators in 3D plasticity problems», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, n° 8, 2007, p. 630-648
- [Kumar et al. 2012] Kumar S., Fourment L., «Remapping method for transferring data between two meshes using a modified iterative SPR approach for parallel resolution », *Material Forming - Esaform 2012, Pts 1 & 2*. Merklein, M. and Hagenah, H. Stafa-Zurich, Trans Tech Publications Ltd, 2012, 504-506: 455-460
- [Li 2005] Li R., «On multi-mesh H-adaptive methods», *J. Sci. Comput.*, vol. 24, n° 3, 2005, p. 321-341
- [Liszka et al. 1980] Liszka T., Orkisz J., «The finite differences method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics», *Computers & Structures*, vol. 11, 1980, p. 88-95
- [Liszka 1984] Liszka T., «An interpolation method for an irregular net of nodes», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, 1984, p. 1599-1612
- [Lodej et al. 2006] Lodej B., Niang K., Montmitonnet P., Aubin J.L., «Accelerated 3D FEM computation of the mechanical history of the metal deformation in cold pilgering of tubes», *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 177, n° 1–3, 2006, p. 188-191
- [Mediavilla et al. 2006] Mediavilla J., Peerlings R.H.J., Geers M.G.D., «A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations», *Comput. Struct.*, vol. 84, n° 8–9, 2006, p. 604-623
- [Mocellin 1999] Mocellin K., «Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud », *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 1999
- [Mocellin et al. 2001] Mocellin K., Fourment L., Coupez T., Chenot J.L., «Toward large scale F.E. computation of hot forging process using iterative solvers, parallel computation and multigrid algorithms (English)», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 52, n° 5-6, 2001, p. 473-488
- [Montmitonnet et al. 2002] Montmitonnet P., Logé R., Hamery M., Chastel Y., Doudoux J.L., Aubin J.L., «3D elastic-plastic finite element simulation of cold pilgering of zircaloy tubes», *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 125–126, n° 0, 2002, p. 814-820

- [Mulot 1997] Mulot S., «Etude théorique et expérimentale du laminage à pas de pèlerin », *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris* 1997
- [Mulot et al. 1996] Mulot S., Hacquin A., Montmitonnet P., Aubin J.L., «A fully 3D finite element simulation of cold pilgering», *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 60, n° 1–4, 1996, p. 505-512
- [Munshi et al. 2005] Munshi M., Shah K., Cho H., Altan T., «Finite element analysis of orbital forming used in spindle/inner ring assembly», *8th ICTP, Verona, Italy*, 2005
- [Osika et al. 1992] Osika J., Libura W., «Mathematical model of tube cold rolling in pilger mill», *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 34, n° 1–4, 1992, p. 325-332
- [Park et al. 2005] Park H.J., Kim S.S., Lee S., Choi T.H., Lee H.W., Lim S.J., Kim E.Z., Na K.H., Han C.S., «Optimum design of a Pilger mill process for wire forming using CAD/CAE », *Prism 5: The Fifth Pacific Rim International Conference on Advanced Materials and Processing, Pts 1-5*. Zhong, Z. Y., Saka, H., Kim, T. H. et al, 2005, 475-479: 3275-3278
- [Perchat 2000a] Perchat E., «MINI-élément et factorisation incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D : application au forgeage», *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2000a
- [Perchat 2000b] Perchat E., Mini-élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage, Ecole des Mines de Paris Editor Univ., CEMEF Dept., 2000b
- [Perchat et al. 1999] Perchat E., Fourment L., Coupez T., *Mixed formulations and iterative solver for the parallelisation of a forging simulation software by mesh partitioning*, Edinburgh, Civil Comp Press, 1999
- [Philippe 2009] Philippe S., «Développement d'une formulation arbitrairement lagrangienne eulérienne pour la simulation tridimensionnelle du laminage de produits plats», *Thèse de Doctorat Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2009
- [Ramadan et al. 2009] Ramadan M., Fourment L., Digonnet H., «A parallel two mesh method for speeding-up processes with localized deformations: application to cogging», *12th ESAFORM Conference on Material Forming*, Enschede (Netherlands), 27–29 April 2009, 2009, University of Twente



- [Ramadan 2010] Ramadan M., «Une méthode MultiMaillages MultiPhysiques parallèle pour accélérer les calculs des procédés incrémentaux», *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2010
- [Rey 2007] Rey B., «Méthode multigrilles pour les grandes déformations et simulation numérique du procédé de roulage», *Thèse de Doctorat Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2007
- [Solin et al. 2008] Solin P., Cervený J., Dubcova L., Andrs D., «Monolithic discretization of linear thermoelasticity problems via adaptive multimesh hp-FEM», *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, n° 7, 2008, p. 2350-2357
- [Soyris 1990] Soyris N., «Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud», *Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 1990
- [Srikanth et al. 2000] Srikanth A., Zabaras N., «Shape optimization and preform design in metal forming processes», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n° 13-14, 2000, p. 1859-1901
- [Traore 2001] Traore K., «Simulation thermomécanique du laminage circulaire. Développement d'une formulation quasi-Eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle», *Thèse de Doctorat Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2001
- [Vanegas-Márquez 2011] Vanegas-Márquez E., «Modélisation numérique du laminage à pas de pèlerin de tubes en acier ODS», *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2011
- [Wiberg 1997] Wiberg N.E., «Superconvergent patch recovery - A key to quality assessed FE solutions», *Advances in Engineering Software*, vol. 28, n° 2, 1997, p. 85-95
- [Wiberg et al. 1997] Wiberg N.E., Abdulwahab F., Li X.D., «Error estimation and adaptive procedures based on superconvergent patch recovery (SPR) techniques», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 4, n° 3, 1997, p. 203-242
- [Zienkiewicz et al. 1987] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., «A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, n° 2, 1987, p. 337-357
- [Zienkiewicz et al. 1992] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., «The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptativity», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, 1992, p. 1365-1382

## Accélération des calculs pour la simulation du laminage à pas de pèlerin en utilisant la méthode multimaillages

**RESUME :** Ce travail vise à accélérer les calculs lors de la simulation numérique du laminage à pas de pèlerin. Pour ce faire, nous nous sommes penchés sur la méthode Multimaillages Multiphysiques Parallèle (MMP) implémentée au sein du code Forge®, et destinée à accélérer les calculs pour des procédés de mise en forme à faible où la déformation est très localisée sur une petite zone du domaine. Dans cette méthode, un maillage localement raffiné dans la zone de déformation et plus grossier sur le reste du domaine est utilisé pour résoudre les équations mécaniques, alors qu'un maillage uniformément raffiné est retenu pour le calcul thermique. Le calcul mécanique étant le plus coûteux, la réduction du nombre de nœuds de son maillage permet d'obtenir des accélérations très importantes. Le maillage de calcul thermique étant uniformément fin, il sert aussi de maillage de stockage pour les champs calculés pour les deux physiques. Pour appliquer efficacement la méthode MMP au laminage à pas de pèlerin, plusieurs aspects importants ont été pris en compte. Tout d'abord la géométrie complexe du tube nécessite le développement d'une technique de déraffinement spéciale afin d'assurer un déraffinement maximal tout en garantissant un maillage convenable pour des calculs. Une technique de déraffinement de maillage utilisant une métrique anisotrope cylindrique a été alors développée. Ensuite, avec la loi de comportement élastoplastique utilisée, des perturbations importantes sont observées sur les contraintes dues aux diffusions numériques engendrées par les différents types de transports des champs P0 (constants du maillage thermique vers le maillage mécanique). Pour y remédier, une approche combinant deux techniques a été développée. La première consiste à effectuer la réactualisation des variables d'état directement sur le maillage mécanique plutôt que sur le maillage thermique et de les transporter ensuite. La deuxième technique est l'utilisation d'un opérateur de transport P0 basé sur un recouvrement super convergent (SPR) et la construction de champs d'ordre supérieur recouverts. De bonnes accélérations sont alors obtenues sur les cas de laminage à pas de pèlerin étudiés, allant jusqu'à un facteur 6,5 pour la résolution du problème thermomécanique. Les accélérations globales de simulation vont jusqu'à un facteur 3,3 sur un maillage contenant environ 70 000 nœuds en séquentiel. En parallèle les performances chutent légèrement, mais elles restent semblables (2,7).

**Mots clés :** Multimaillages, transport de champs, élastoplasticité, calcul parallèle, laminage à pas de pèlerin

## Speeding-up the simulation of the cold pilgering process using a multimesh method

**ABSTRACT :** This work aims at speeding-up the calculations of the numerical simulation of the cold pilgering process. To this end, it is focused on a Parallel Multiphysics Multimesh (MMP) method that has been implemented in the Forge® code; this method is dedicated to speeding-up the calculations for processes in which the deformation is localized within a small area of the computational domain. A locally refined mesh is used to solve the mechanical equations while a uniformly refined mesh serves as basic mesh to store state variables and is preferred for thermal calculations. The mechanical computations being the most expensive, reducing the number of nodes of its mesh provides high speed-ups. To effectively apply MMP method to cold pilgering process, many important aspects have been taken into account. Firstly the complex geometry of the tube requires the development of a special mesh coarsening technique, in order to ensure a maximum coarsening while guaranteeing a suitable mesh for calculations. A technique using a cylindrical anisotropic metric is then introduced. Afterwards, with the elastoplastic behaviour law used for the considered process, inaccuracies were observed on the stress field. They are mainly due to the numerical diffusion generated by the different transfers operations of P0 variables (constant per element) from the thermal mesh to the mechanical one. To remedy this issue, an approach combining two techniques has been developed. Firstly state variables are directly updated on the mechanical mesh, instead of doing it on the thermal mesh before transferring them on the mechanical mesh. The second technique consists in using a P0 transfer operator based on super convergent recovery (SPR) technique, which improves the accuracy of the transported field through introduction of higher order recovered fields. High speed-ups are obtained on the studied cold pilgering cases, up to a factor 6,5 for the resolution of the thermomechanical problem, and the global simulation speed-up is up to a factor of 3,2, on a mesh with about 70 000 nodes in sequential calculations. For parallel calculations performances slightly drop but remain quite good.

**Keywords :** Multimesh method, data transfer, elastoplasticity, parallel computing, cold pilgering process