



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude de la chromodynamique quantique perturbative appliquée à la diffusion profondément inélastique à petit $x$

Stéphane Munier

► **To cite this version:**

Stéphane Munier. Contributions à l'étude de la chromodynamique quantique perturbative appliquée à la diffusion profondément inélastique à petit  $x$ . Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Ecole Polytechnique X, 2000. Français. NNT: . tel-00002344

**HAL Id: tel-00002344**

**<https://pastel.hal.science/tel-00002344>**

Submitted on 31 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

**Thèse**

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École polytechnique**

Spécialité : Physique théorique des particules élémentaires

par

Stéphane MUNIER

**Contributions à l'étude de la chromodynamique  
quantique perturbative appliquée à la diffusion  
profondément inélastique à petit  $x_{Bj}$**

soutenue le 15 septembre 2000 à l'École polytechnique  
devant la Commission d'examen composée de :

MM.	J.-P. BLAIZOT	Examineur
	P. CHIAPPETTA	Président
	G. KORCHEMSKY	Rapporteur
	A.H. MUELLER	Rapporteur
	R. PESCHANSKI	Directeur de thèse



# Contributions à l'étude de la chromodynamique quantique perturbative appliquée à la diffusion profondément inélastique à petit $x_{Bj}$

Stéphane MUNIER  
Service de physique théorique, CEA/Saclay

## Résumé

Le proton est un objet composite, constitué d'une collection de partons, quarks et gluons, qui interagissent selon les lois de la chromodynamique quantique (QCD). Dans cette thèse, on expose une formulation hamiltonienne de cette théorie dans le repère du cône de lumière.

On retrouve dans ce cadre les équations d'évolution des partons en impulsion transverse (équation DGLAP), et longitudinale (équation BFKL). Cette dernière se présente ici sous la forme du modèle des dipôles de couleur. On transpose dans ce formalisme l'ensemble des calculs nécessaires à nos recherches personnelles, portant sur le développement et les applications du modèle des dipôles.

Ce modèle est ajusté aux données expérimentales d'HERA pour les fonctions de structure inclusives, qui sont reliées aux sections efficaces d'interaction électron-proton. La contribution à celles-ci de la production de particules charmées est prédite, en bon accord avec l'expérience. D'autre part, l'importance phénoménologique de certaines composantes sous-dominantes de l'équation BFKL (de spin conforme non nul), qui apparaissent comme solutions des équations d'évolution, est démontrée : on compare leur effet à celui du poméron mou de Donnachie-Landshoff.

On montre sur des observables particulières l'équivalence entre la formulation hamiltonienne et une formulation covariante de la QCD, et on l'applique à la détermination de la densité effective de dipôles primordiaux à l'origine d'un *jet* vers l'avant qui se matérialise quelquefois dans l'état final d'une réaction de diffusion profondément inélastique ou d'une diffusion de protons.

Enfin, le processus de diffraction dure, plus exclusif, est considéré dans l'approche BFKL. Sur le plan phénoménologique, une étude des données des expériences d'HERA dans le cadre du modèle des dipôles est présentée. Sur le plan théorique, le calcul des composantes de spin conforme non nul de l'équation BFKL pour la production diffractive de photons est effectué.

Les publications qui contiennent les résultats originaux présentés ici sont incluses dans ce document.

# Contributions to the study of perturbative Quantum Chromodynamics applied to small- $x_{Bj}$ deep-inelastic scattering

Stéphane MUNIER  
Service de physique théorique, CEA/Saclay

## Abstract

The proton is a composite object, consisting of a collection of partons, quarks and gluons, which interact according to the laws of Quantum Chromodynamics (QCD). In this work, we consider a Hamiltonian formulation of this theory in a light-cone frame.

In this context, we derive the parton evolution equations in transverse momentum (DGLAP equation) as well as in longitudinal momentum (BFKL equation) on the same footing. The latter is obtained as the colour-dipole model. We traduce in this Hamiltonian formalism the complete set of calculations that are needed to present our personal contributions, which mainly consist in new developments and applications of the colour-dipole model.

The latter is successfully fitted to the HERA data for the inclusive structure functions, which are related to the electron-proton cross-sections. The contribution of the production of charmed particles is predicted, and exhibits a fair agreement with the experimental data. On the other hand, we show the phenomenological relevance of some subleading components of the BFKL equation (classified according to their conformal spin), which appear as solutions of the evolution equations : we compare their effect to the one of Donnachie and Landshoff's soft Pomeron.

Studying some particular observables, we show the equivalence between the Hamiltonian formulation of QCD and a covariant formulation. We apply it to the derivation of the effective primordial dipole density at the origin of a forward jet which sometimes appears in the final state of either a deep-inelastic scattering process or a proton diffusion.

Finally, hard diffraction is studied in the BFKL approach. On the phenomenological side, we compare the HERA experimental data to the dipole model. On the theoretical side, we compute the higher-conformal spin components of the BFKL equation for diffractive photon production.

The papers containing the original results presented here are included.

# Remerciements

---

Cette thèse a été effectuée au sein du Service de physique théorique du Commissariat à l'énergie atomique. J'y ai bénéficié d'un environnement scientifique enrichissant et de conditions matérielles exceptionnelles : merci à ses chefs successifs, d'abord Jean Zinn-Justin qui m'y a accueilli en 1997, puis Jean-Paul Blaizot, ainsi qu'à tous les responsables scientifiques et administratifs, pour leur attachement à toujours mettre à la disposition des thésards les moyens nécessaires à une formation de qualité.

L'encadrement de ce travail a été assumé par Robi Peschanski. Il a guidé mes premiers pas dans le domaine en m'intégrant au groupe de phénoménologie de Saclay, et en m'introduisant à la physique des petits  $x_{Bj}$ . Il m'a surtout initié à la recherche, et m'a ouvert aux richesses et spécificités de ce métier dont une dimension essentielle est la créativité, dimension dont l'expérience fait souvent défaut à un étudiant de DEA, accoutumé à jongler avec des connaissances principalement livresques. Je le remercie vivement pour ses enseignements et pour le suivi consciencieux qu'il a assuré ces trois années durant.

Je dois beaucoup à Henri Navelet, qui m'a en particulier communiqué son enthousiasme pour les calculs formels, qui m'a montré maintes redoutables astuces mathématiques, et qui a su rendre attrayantes les équations les plus absconses. Je lui suis très reconnaissant de la disponibilité qui ne lui a jamais fait défaut pour répondre à mes questions à propos d'aspects de physique et de techniques mathématiques.

Une partie des résultats phénoménologiques obtenus dans cette thèse est le fruit d'une collaboration avec Christophe Royon, expérimentateur au Service de physique des particules de Saclay (SPP). J'ai également tiré profit de discussions éclairantes avec Laurent Schoeffel (SPP), et Hannes Jung (Université de Lund et DESY). La fréquentation de collègues expérimentateurs s'est révélée très stimulante dans ce domaine de la physique théorique dont la progression dépend de façon cruciale des avancées expérimentales.

Deux séjours à l'étranger ont ponctué utilement et agréablement cette thèse. En novembre 1998, Giuseppe Marchesini m'a permis de joindre son groupe à l'Université de Milan. Je suis reconnaissant à Gavin Salam d'avoir sacrifié de son temps à m'expliquer posément des points de physique des petits  $x_{Bj}$ , et à m'initier à ses méthodes d'investigation.

En mars 2000, Al Mueller a accepté de me recevoir à l'Université Columbia. Il a fait preuve d'une grande disponibilité et m'a enseigné avec pédagogie et patience, des heures durant, beaucoup de facettes de la chromodynamique quantique. Je le remercie pour ces apports inestimables. Ce séjour à New York a également été l'occasion de rencontrer Allen Caldwell et Yuri Kovchegov, auxquels je suis redevable de discussions instructives.

J'ai passé de nombreuses heures dans le bureau de Jean-Yves Ollitrault, à réviser, ou apprendre, des aspects de mécanique quantique et de théorie des champs. Je le remercie de sa générosité à cet égard. La clarté de ses explications m'a aidé à structurer mes connaissances et la rigueur que j'ai acquise à son contact m'a été et me sera précieuse.

Plusieurs jeunes chercheurs, anciens étudiants du Service, m'ont apporté leur soutien. Tout d'abord, Samuel Wallon, qui m'a précédé dans le groupe de phénoménologie et dont la thèse s'inscrit dans le même contexte que mon propre travail, m'a fait bénéficier de son expérience à travers de nombreuses discussions. Patrick Valageas, dont j'ai eu le plaisir de partager le bureau, a fait preuve d'un intérêt stimulant pour mon travail, pourtant bien éloigné de son domaine de recherches, et m'a prodigué de nombreux conseils de (jeune!) "ancien". Enfin, Christophe Grojean ne m'a jamais refusé ni ses lumières ni son appui technique. Qu'ils en soient ici vivement remerciés.

Quelques visiteurs de passage à Saclay m'ont éveillé à leurs vues : je remercie notamment Leszek Motyka pour les discussions intéressantes que nous avons eues au cours de son séjour ici. Parmi les membres du Service, je remercie plus particulièrement Peter Uwer, Jean-Marie Normand, Marc Chemtob, Jean-Marc Luck et Edmond Iancu pour avoir répondu avec sérieux et bienveillance à quelques-unes de mes questions.

Enfin, je sais gré à mon directeur de thèse Robi Peschanski et aux membres du jury, Jean-Paul Blaizot et Pierre Chiappetta, de me faire l'honneur de bien vouloir juger ce travail. Je remercie chaleureusement Gregory Korchemsky et Al Mueller pour avoir volontiers accepté de rédiger le rapport.

# Table des matières

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Notations</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>1 Chromodynamique quantique perturbative dans une formulation hamiltonienne</b>	<b>7</b>
1.1 Champs et lagrangien . . . . .	8
1.2 Formulation hamiltonienne et espace de Fock à temps fini . . . . .	9
1.3 Théorie invariante des perturbations et amplitudes de diffusion . . . . .	18
1.A Détails du calcul du hamiltonien pour l'électrodynamique . . . . .	19
<b>2 Partons et dipôles dans le formalisme hamiltonien. Équations d'évolution.</b>	<b>21</b>
2.1 Densité de partons au premier ordre . . . . .	22
2.2 Extension à tous les ordres : doubles logarithmes dominants . . . . .	27
2.3 Limite des grandes impulsions transverses . . . . .	28
2.4 Limite des petites impulsions longitudinales . . . . .	33
<b>3 Diffusion profondément inélastique à haute énergie dans une approche de voie <math>s</math></b>	<b>47</b>
3.1 Fonctions de structure . . . . .	48
3.2 Modèle des dipôles pour les fonctions de structure d'un onium . . . . .	52
3.3 Phénoménologie des données d'HERA . . . . .	62
3.4 Résumé – prolongements . . . . .	74
3.A Détails du calcul de l'amplitude de diffusion dipôle-dipôle . . . . .	76
<b>4 Équivalence entre approches de voie <math>s</math> et de voie <math>t</math></b>	<b>81</b>
4.1 Équation BFKL à transfert nul en approche de voie $t$ . . . . .	82
4.2 “ $k_{\perp}$ -factorisation” et fonctions de structure . . . . .	87
4.3 Équivalence entre “ $k_{\perp}$ -factorisation” et factorisation des dipôles . . . . .	90
4.4 Application au calcul de la densité de dipôles dans un jet vers l'avant . . . . .	92
<b>5 Diffraction dure dans l'approche de voie <math>s</math></b>	<b>99</b>
5.1 Diffraction dure à HERA . . . . .	100
5.2 Formulation perturbative dans le cadre du modèle des dipôles . . . . .	102
5.3 Production diffractive de photons . . . . .	116
<b>Conclusions et perspectives</b> . . . . .	<b>124</b>



## Annexe

<b>A Quelques résultats d'analyse complexe</b>	<b>127</b>
A.1 Transformées de Mellin, représentations intégrales et fonctions spéciales . . . . .	127
A.2 Calcul de certaines intégrales bidimensionnelles . . . . .	129
A.3 Calcul de quelques sommes et séries . . . . .	130

## Bibliographie

<b>Bibliographie générale</b> . . . . .	<b>133</b>
<b>Liste des publications personnelles</b> . . . . .	<b>141</b>

## Détail des publications personnelles

**Article I**

“High energy factorization predictions for the charm structure function $F_2^c$ at HERA” Nucl.Phys. B524 :377-393,1998 . . . . .	<b>143</b>
---	------------

**Article II**

“Hard diffraction at HERA in the dipole model of BFKL dynamics” Nucl.Phys. B534 :297-317,1998 . . . . .	<b>165</b>
--	------------

**Article III**

“QCD, conformal invariance and the two Pomerons” Eur.Phys.J.C9 :479-485,1999 . . . . .	<b>193</b>
---	------------

**Article IV**

“The (BFKL)Pomeron- $\gamma^*$ - $\gamma$ vertex for any conformal spin” Eur.Phys.J.C13 :651-661,2000 . . . . .	<b>209</b>
--	------------

**Article V**

“Forward jets in the color dipole model” Soumis à Phys.Rev. D . . . . .	<b>231</b>
--	------------

# Introduction

---

À la fin des années 60, l'idée d'une structure composite du proton a été émise [Bjorken 69]. Le réexamen des données des expériences de SLAC a confirmé cette intuition : en effet, en sondant la structure du proton par diffusion d'électrons qui interagissent *via* l'échange d'un photon virtuel  $\gamma^*$ , dont la virtualité  $Q^2$  fixe l'échelle des distances  $L \sim 1/Q$  explorées, on mesure pour  $Q$  suffisamment grand, une section efficace typique d'objets ponctuels de spin 1/2.

Le modèle des partons [Feynman 72] est né de l'interprétation théorique de tels résultats. On imagine le proton comme constitué de particules ("partons") qui portent chacune une fraction  $x_i$  de son impulsion longitudinale. Une expérience de diffusion d'électrons est alors vue comme l'interaction électromagnétique ponctuelle d'un photon virtuel avec l'un de ces partons ( $j$ ) qui porte une charge électrique, et la fraction d'impulsion longitudinale  $x_j = x_{Bj}$ . La variable  $x_{Bj}$  est contrôlée, dans ce modèle, uniquement par la cinématique du proton incident, de l'électron incident et de l'électron diffusé. La structure fondamentale du proton telle qu'elle fut analysée dans les premières expériences de SLAC, effectuées à des  $Q$  relativement modestes, consiste en trois quarks dits de valence, et est invariante d'échelle ("scaling de Bjorken") : les sections efficaces mesurées sont indépendantes de  $Q$ . Cette propriété est bien vérifiée dans le domaine des  $Q$  et  $x_{Bj}$  modérés, c'est-à-dire en particulier pour des résolutions suffisamment grossières. Néanmoins, les expériences auprès d'accélérateurs qui permettent d'atteindre des énergies plus élevées et ainsi d'étendre le domaine d'investigation à la fois en  $Q$  et en  $x_{Bj}$ , ont révélé des violations de cette loi d'échelle, qui sont notamment de plus en plus importantes à mesure que  $x_{Bj}$  décroît.

Celles-ci peuvent se comprendre si on admet que les quarks de valence nus s'habillent dynamiquement, sous l'effet des interactions données par une théorie de jauge non abélienne, de groupe de jauge  $SU(3)$  : la *chromodynamique quantique* (QCD), qui prédit que les quarks interagissent par l'échange de gluons, et que ceux-ci interagissent également entre eux. Ces particules portent chacune une charge de *couleur*, qui peut prendre trois formes différentes pour les quarks et huit pour les gluons. Sur le plan technique, on peut prédire dans le cadre de cette théorie les sections efficaces que l'on mesure en effectuant un développement perturbatif, dont le paramètre  $\alpha_s$  est la constante de couplage de la théorie. Une telle méthode est valable lorsque les interactions sont suffisamment ténues, c'est-à-dire lorsque  $\alpha_s$  est bien inférieur à l'unité. Par contre, on ne connaît à l'heure actuelle pas d'expression analytique *exacte* pour ces observables physiques. On peut s'interroger *a priori* sur le pouvoir prédictif d'une telle théorie lorsqu'on l'applique à l'étude d'un objet comme le proton, car les interactions des constituants de ce dernier sont très fortes. On peut illustrer ce point en s'appuyant sur le fait que le diamètre géométrique du proton est de l'ordre du fermi : les inégalités d'Heisenberg impliquent alors que l'impulsion de chacune des particules qui y est confinée est proche de 200 MeV, ce qui est le tiers de la masse du proton. Ceci confère à chacun des trois quarks constituants une masse effective de cet ordre de grandeur, qui est bien supérieure à leur masse nue, voisine quant à elle de 10 MeV. Cette différence est symptomatique de l'importance des

interactions chromodynamiques, et laisse donc supposer une valeur élevée du couplage  $\alpha_s$ , qui invaliderait certainement, dans le cas général, les méthodes perturbatives.

Néanmoins, la QCD a la propriété d'être asymptotiquement libre : la constante de couplage observée, *effective*, présente en fait une dépendance en l'échelle d'énergie  $Q$  : sa valeur décroît à mesure que  $Q$  augmente, selon la formule suivante :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b \log(Q^2/\Lambda^2)} \quad \text{avec} \quad b = \frac{11C_A - 4N_f T_R}{12\pi} > 0.$$

La validité des méthodes perturbatives peut alors être justifiée à condition de se restreindre à des processus qui ont une échelle d'énergie  $Q$  suffisamment grande :  $Q \gg \Lambda$ . Leur section efficace peut être calculée en chromodynamique, ordre par ordre en  $\alpha_s$ , quitte à paramétrer de façon *ad hoc* les distributions de partons nus. De tels processus sont par exemple la diffusion profondément inélastique d'électrons sur des protons, dans le régime dans lequel l'interaction de ces deux objets est médiée par un photon virtuel de grande virtualité  $Q^2$ , ou encore la diffusion inélastique de protons avec production d'un *jet* de grande impulsion transverse. Les études phénoménologiques présentées dans la suite de ce mémoire auront pour objet de tels processus.

Avec cette condition, un développement des sections efficaces en puissances de  $\alpha_s$  a un sens, au moins asymptotiquement. Cependant, il apparaît dans le cours du calcul que chaque puissance de la constante de couplage est accompagnée de puissances des logarithmes des variables cinématiques,  $\log(Q/\Lambda)$  et  $\log(1/x_{Bj})$ . Ceux-ci proviennent des singularités infrarouges de la chromodynamique, qui apparaissent dans toute théorie de jauge de particules de masses nulles ou faibles. Ainsi, si  $Q \gg \Lambda$  ou  $x_{Bj} \ll 1$ , on ne peut plus se contenter de ne conserver que les premières puissances de  $\alpha_s$  : l'ordre le plus bas devient l'ordre des *logarithmes dominants*, c'est-à-dire la série complète  $\sum C_n(\alpha_s \log(Q^2/\Lambda^2))^n$  (si  $Q \gg \Lambda$ ) ou  $\sum C_n(\alpha_s \log(1/x_{Bj}))^n$  (si  $x_{Bj} \ll 1$ ), qu'il convient de sommer. L'objet de cette thèse est précisément l'étude théorique et phénoménologique de telles sommations, dans le domaine cinématique dans lequel la variable  $x_{Bj}$  est petite. D'un point de vue théorique, la mise au point de techniques de calcul analytique de plus en plus poussées dans ce contexte dans lequel des contributions de tous les ordres de la théorie des perturbations sont prises en compte, permet de se rapprocher du régime de couplage fort, que l'on ne peut traiter pour l'instant que par des méthodes numériques. D'un point de vue phénoménologique, une meilleure compréhension de cette région cinématique dans laquelle  $x_{Bj}$  est petit s'avère indispensable pour rendre compte des données collectées auprès des accélérateurs, HERA, Tevatron, et bientôt LHC, dans les processus de diffusion profondément inélastique d'électrons sur des protons, comme dans les processus de diffusion de protons.

Nous formulerons la chromodynamique quantique dans l'optique d'interpréter un hadron, à l'instant de sa collision avec une sonde, comme un ensemble de partons libres qui constituent l'habillage des quarks de valence nus sous l'effet des interactions de chromodynamique quantique. C'est ce que nous appellerons une image physique de voie  $s$ . Celle-ci est bien représentée dans une formulation un peu inhabituelle de la QCD, qui est une formulation hamiltonienne dans le repère de moment infini. Aussi une présentation de ce formalisme fera l'objet du chapitre **1**. Tous les calculs menés dans la suite y feront appel. On s'attachera à transposer dans ce formalisme l'ensemble des calculs, connus ou originaux, qui ont été nécessaires à nos recherches personnelles.

Dans le chapitre **2**, nous verrons comment calculer dans un contexte dans lequel la théorie des perturbations est justifiée, le contenu en partons d'un objet initial, à tous les ordres,

mais en ne conservant que les termes dominants dans la limite de grand  $Q$  dans un premier temps, puis dans celle de petit  $x_{Bj}$ . Nous retrouverons ainsi d'abord l'équation de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP), et ensuite l'équation de Balitski-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL), sous la forme du modèle des dipôles de couleur de Mueller. Ces deux équations somment les logarithmes dominants pour les cas respectifs où  $Q$  est grand et où  $x_{Bj}$  est petit.

Dans le chapitre **3**, nous exposerons nos travaux [Munier I, Munier I'] qui concernent l'application du modèle des dipôles à l'étude des fonctions de structure en diffusion profondément inélastique. Nous prouverons en particulier la viabilité d'une telle approche, qui reproduit les données d'HERA avec un petit nombre de paramètres, et fournit des bonnes prédictions pour des observables un peu moins inclusives, comme les fonctions de structure associées à la production de particules charmées. Nous montrerons également la pertinence de certaines composantes non requises à l'ordre des logarithmes dominants et qui n'avaient encore jamais été étudiées phénoménologiquement, mais qui apparaissent néanmoins comme solutions de l'équation d'évolution du modèle des dipôles. Cette partie reproduira les résultats de la publication de la référence [Munier III].

Le chapitre **4** sera centré autour de l'équivalence entre la formulation de voie  $s$  de l'équation BFKL donnée par le modèle des dipôles, et la dérivation originelle de cette équation, dans une image de voie  $t$ , dans laquelle on décrit l'interaction de deux objets à haute énergie par l'échange d'une "échelle" de gluons, appelée *pomeron dur*. Là aussi, nous présenterons des travaux originaux qui montrent comment les deux formulations sont reliées [Munier I], et qui mettent à profit cette équivalence pour traduire un *jet* vers l'avant d'une expérience de diffusion de protons par une fonction d'onde sur la base des dipôles [Munier V].

Enfin, le chapitre **5** présentera des études phénoménologiques [Munier II] et théoriques [Munier IV] du processus de dissociation diffractive de photons virtuels sur des protons. De tels événements observés dans les expériences de diffusion profondément inélastique admettent une interprétation dans cette même image de voie  $s$  du modèle des dipôles.

Certains points techniques ont été relégués dans l'annexe. Bien que ce mémoire ait vocation à présenter l'ensemble de nos travaux de manière détaillée et complète, nous avons jugé utile de reproduire ici les publications sur lesquelles est basé le contenu original de cette thèse : on les trouvera dans les dernières pages.



# Notations

---

*On donne ici quelques notations et conventions en usage dans ce mémoire.*

## Abréviations

Dans l'ensemble du texte, les abréviations suivantes sont employées :

QCD	chromodynamique quantique
QED	électrodynamique quantique
LL( $\alpha$ )	ordre des logarithmes de $\alpha$ dominants
N <sup>n</sup> LL( $\alpha$ )	nième ordre des logarithmes de $\alpha$ sous-dominants
DLL	ordre des doubles logarithmes dominants.

La signification mathématique des trois dernières expressions sera précisée au chapitre 2.

## Métrie et système de coordonnées

On adopte la signature suivante pour la métrie minkowskienne :

$$g^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1) .$$

Les quadrivecteurs ont les composantes  $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Leur partie purement spatiale est notée  $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ , et leur projection sur le plan transverse à la direction ( $Oz$ ) est notée  $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2)$ . L'élément de volume, noté  $d^3\vec{x}$ , vaut  $dx^1 dx^2 dx^3$ .  $x^\perp$  sera soit une autre notation pour  $\mathbf{x}$ , soit le quadrivecteur  $(0, \mathbf{x}, 0)$ , selon le contexte. Le bivecteur  $\mathbf{x}$  peut également être représenté par le nombre complexe  $\underline{x} = x^1 + ix^2$ . L'élément d'intégration dans le plan transverse est  $d^2\mathbf{x}$ , ou de façon équivalente, en notation complexe :  $d\underline{x} d\bar{\underline{x}}/2i$ .

On utilisera abondamment les coordonnées du cône de lumière  $x^\mu = (x^+, x^-, \mathbf{x})$ . Les composantes  $x^+$  et  $x^-$  se déduisent des coordonnées de Lorentz par les formules suivantes :

$$x^+ = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} , \quad x^- = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}} .$$

L'élément d'intégration quadri-dimensionnel est  $d^4x^\mu$  qui est équivalent à  $dx^+ dx^- d^2\mathbf{x}$ . L'élément de volume de l'espace des positions  $d^3\vec{x}$  vaut  $dx^- d^2\mathbf{x}$ , et celui de l'espace des impulsions  $d^3\vec{k}$  vaut  $dk^+ d^2\mathbf{k}$ .

Plus de propriétés de ce système de coordonnées seront données dans le chapitre 1.

## Constantes de couplage de l'électrodynamique et de la chromodynamique

On note  $g_{em}$  la constante de couplage de l'électrodynamique quantique, égale à la valeur absolue de la charge élémentaire  $|e|$ . La constante de structure fine est définie par l'équation  $4\pi\alpha_{em} \equiv g_{em}^2$ .

La constante de couplage de la chromodynamique est notée  $g_s$ , et on définit  $\alpha_s$  par  $4\pi\alpha_s \equiv g_s^2$ .  $N_c$  est le nombre de couleurs, c'est-à-dire la dimension de la représentation fondamentale du groupe de jauge. On gardera  $N_c$  quelconque, afin de pouvoir effectuer des développements en puissances de  $1/N_c$ .

Comme on le verra dans le chapitre 2, c'est souvent la quantité  $\alpha_s N_c / \pi$  qui apparaît dans les calculs : on la notera  $\bar{\alpha}_s$ .

### Autres conventions

On notera “log” le logarithme népérien.

# CHAPITRE 1

## Chromodynamique quantique perturbative dans une formulation hamiltonienne

---

### Sommaire

---

<b>1.1 Champs et lagrangien</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1.1 Électrodynamique . . . . .	8
1.1.2 Chromodynamique . . . . .	9
<b>1.2 Formulation hamiltonienne et espace de Fock à temps fini</b> . . . . .	<b>9</b>
1.2.1 Système de coordonnées et notations . . . . .	9
1.2.2 Quantification . . . . .	10
1.2.3 Hamiltonien . . . . .	14
1.2.4 Théorie des perturbations sur le cône de lumière . . . . .	17
<b>1.3 Théorie invariante des perturbations et amplitudes de diffusion</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1.A Détails du calcul du hamiltonien pour l'électrodynamique</b> . . . . .	<b>19</b>

---

*Nous présentons les grandes lignes de la formulation hamiltonienne de la chromodynamique quantique et de l'électrodynamique quantique dans le repère du cône de lumière. Pour rédiger ce chapitre, on s'est essentiellement inspiré des références [Kogut 70, Bjorken 71, Lepage 80, Brodsky 91]. Le formalisme exposé ici nous permettra ultérieurement d'établir les équations d'évolution qui relient les densités de partons d'impulsions transverses (DGLAP) ou d'impulsions longitudinales (BFKL) différentes. Il constitue la base du modèle des dipôles de couleur [Mueller 94a], qui est une méthode de dérivation de l'équation BFKL dans une image physique de voie  $s$ , et qui sous-tend la plupart des travaux présentés dans cette thèse.*

La formulation hamiltonienne que nous exposons ici est le cadre naturel pour le calcul des *fonctions d'onde* d'un objet sur un certain état, qui sont les amplitudes de probabilité de présence d'une fluctuation quantique donnée à un temps  $\tau$  fini. Les raisons de ce choix inhabituel pour présenter QCD et QED sont les suivantes. D'une part, bien que ni l'invariance relativiste ni l'invariance de jauge ne soient manifestes dans une telle formulation, elle a l'avantage de bien représenter le modèle des partons, dont les densités sont alors reliées aux carrés des fonctions d'onde. D'autre part, et c'est là la motivation principale pour introduire un tel formalisme dans ce mémoire, les équations d'évolution dynamique des gluons à haute énergie (BFKL à l'ordre dominant) sont particulièrement simples. Ce point sera traité en détail dans le chapitre suivant. Cette simplicité de forme a déjà été mise en évidence, dans un contexte légèrement différent, dans l'article de la référence [Weinberg 66].



Techniquement, on procède de la manière suivante. On se place dans le repère de moment infini, défini par un changement de système de coordonnées qui se traduit par l'introduction de nouvelles variables  $x^+$  et  $x^-$  construites à partir des variables du quadri-vecteur  $x^\mu$  :  $x^+ \equiv (x^0 + x^3)/\sqrt{2}$  et  $x^- \equiv (x^0 - x^3)/\sqrt{2}$ . La nouvelle coordonnée  $x^+$  est interprétée comme le temps sur le cône de lumière, et la quantification canonique s'opère à  $x^+$  fixé. On choisit une jauge du cône de lumière ( $A^+ = 0$ ), ce qui apporte de grandes simplifications, en particulier en supprimant beaucoup de contributions qui seraient présentes dans d'autres jauges. On isole les degrés de liberté dynamiques indépendants, que l'on identifie aux champs physiques et que l'on quantifie en les interprétant comme des opérateurs qui agissent sur un espace de Fock. On écrit ensuite le hamiltonien, qui est l'opérateur conjugué à  $x^+$ . La théorie des perturbations sur le cône de lumière permet finalement de calculer les fonctions d'onde.

La première partie de ce chapitre rappelle le contenu en champs de QCD et QED ; la deuxième partie est consacrée à la définition des états de l'espace de Fock. Nous écrirons ensuite le hamiltonien de la théorie, qui nous permettra de calculer, *via* un développement perturbatif sur le cône de lumière, les fonctions d'onde associées aux états de partons présents à temps fini. Enfin, dans la dernière partie, nous retrouverons la théorie des perturbations invariante de Lorentz, bien adaptée quant à elle aux calculs d'amplitudes de diffusion.

## 1.1 Champs et lagrangien

Comme les observables que nous devons calculer par la suite concernent la diffusion d'électrons sur des protons, nous aurons besoin de savoir traiter sur un pied d'égalité l'électrodynamique quantique, qui nous permettra de coupler l'électron aux constituants du proton qui portent une charge électrique, et la chromodynamique quantique, qui nous fournira les outils pour le calcul des interactions de ces constituants.

Nous commençons par écrire le lagrangien de ces deux théories :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QED}} \uplus \mathcal{L}_{\text{QCD}} , \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  et  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  sont les lagrangiens classiques de l'électrodynamique et de la chromodynamique respectivement. Le symbole "⊕" signifie qu'on ne compte qu'une seule fois les termes communs.

### 1.1.1 Électrodynamique

Le lagrangien de l'électrodynamique contient la description de la propagation et des interactions électromagnétiques du photon et des leptons :

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^\gamma + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma \cdot \mathcal{D}_\gamma - m_{q_f}) q_f + \sum_f \bar{l}_f (i\gamma \cdot \mathcal{D}_\gamma - m_{l_f}) l_f . \quad (1.2)$$

On a détaillé la sommation sur les saveurs de leptons ( $l_f$ ) et de quarks ( $q_f$ ).  $m_i$  désigne la masse de la particule  $i$ . Le tenseur du champ électromagnétique  $F_\gamma^{\mu\nu}$  et la dérivée covariante  $\mathcal{D}_\gamma$  sont définis par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} F_\gamma^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu A_\gamma^\nu - \partial^\nu A_\gamma^\mu \\ i\mathcal{D}_\gamma^\mu &\equiv i\partial^\mu - g_{em} e_f A_\gamma^\mu , \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $A_\gamma^\mu$  désigne le quadri-potential vecteur du champ électromagnétique, c'est-à-dire le champ du photon.  $g_{em}$  est la constante de couplage électromagnétique, égale à la valeur absolue de la charge électrique  $|e|$  de l'électron, et  $e_f$  est la charge du fermion  $f$  en unités  $|e|$ .

### 1.1.2 Chromodynamique

Le lagrangien de la chromodynamique regroupe la dynamique des quarks et des gluons, ainsi que leurs interactions :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_g^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^g) + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma \cdot \mathcal{D}_g - m) q_f . \quad (1.4)$$

Le premier terme est le lagrangien de Yang-Mills, qui régit la dynamique du champ de couleur, c'est-à-dire l'évolution libre des fonctions d'onde des gluons, et leurs interactions ; le second terme concerne la dynamique des quarks et leur couplage aux gluons. Le tenseur du champ de couleur et la dérivée covariante sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} F_g^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu A_g^\nu - \partial^\nu A_g^\mu + ig_s[A_g^\mu, A_g^\nu] \\ i\mathcal{D}_g^\mu &\equiv i\partial^\mu - g_s A_g^\mu . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les fonctions d'onde des quarks  $q_f$  sont des 4-spineurs de Lorentz, et sont également vus comme des  $N_c$ -vecteurs de couleur. Les gluons sont regroupés au sein du 4-vecteur de Lorentz  $A_g^\mu = \sum_C (A_g^C)^\mu t^C$ . Les  $N_c^2 - 1$  matrices  $t^C$  de taille  $N_c \times N_c$  sont les matrices de la représentation fondamentale du groupe de jauge  $SU(N_c)$ , qui satisfont aux relations de commutation  $[t^A, t^B] = if^{ABC}t^C$  avec  $f^{ABC}$  les constantes de structure. Remarquons que le tenseur du champ de couleur  $F_g^{\mu\nu}$  a une structure différente de celui de l'électrodynamique : il comprend un terme (non linéaire) supplémentaire  $ig_s[A_g^\mu, A_g^\nu]$ . Celui-ci est responsable des interactions ponctuelles à trois et quatre gluons, qui sont elles-mêmes à l'origine de la propriété de liberté asymptotique de la QCD.

## 1.2 Formulation hamiltonienne et espace de Fock à temps fini

Comme annoncé, nous allons donner une formulation de la chromodynamique quantique qui permette de calculer perturbativement des fonctions d'onde du cône de lumière à  $n$  partons d'un objet hadronique. Celles-ci représentent le contenu en partons d'un objet à un "temps" donné. On se place dans la jauge  $A_{\gamma,g}^+ = 0$  : ce choix apporte de grandes simplifications.

Comme les règles de Feynman qui découlent de cette formulation sont assez subtiles et compliquées, nous nous arrêterons à la construction de l'espace de Fock et à l'écriture du hamiltonien. Les processus (simples) que nous rencontrerons plus loin seront évalués directement à l'aide des éléments de matrice de ce hamiltonien. On trouvera plus de détails dans la référence [Weinberg 66], qui met en exergue les avantages du repère de moment infini, ainsi que dans les articles [Bjorken 71] et [Kogut 70] qui proposent une formulation complète de QED, et [Lepage 80] pour QCD. Les développements que nous reproduisons ci-dessous s'appuient également sur la revue de la référence [Brodsky 91].

### 1.2.1 Système de coordonnées et notations

On définit les coordonnées du cône de lumière par la transformation :

$$V^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) \rightarrow (v^+, v^-, \mathbf{v}^\perp), \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} v^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3) \\ \mathbf{v}^\perp &= (v^1, v^2) \end{aligned} . \quad (1.6)$$

Ce nouveau repère n'est *pas* un repère de Lorentz, c'est-à-dire qu'il ne se déduit pas d'un référentiel tel que celui de temps propre par une transformation de Lorentz. Néanmoins, il peut être vu comme la limite d'un repère de Lorentz en translation suivant l'axe ( $Oz$ ) dans le sens des  $z$  négatifs à une vitesse voisine de celle de la lumière, ce qui justifie l'appellation "repère de moment infini".

<i>Propriétés des matrices de Dirac</i>		
$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$		
$\gamma^\pm \equiv (\gamma^0 \pm \gamma^3)/\sqrt{2}$	$(\gamma^\pm)^2 = 0$	$\gamma^\pm \gamma^\mp = \sqrt{2} \gamma^0 \gamma^\mp$
<i>Projecteurs</i>		
$\Lambda_\pm = \gamma^0 \gamma^\pm / \sqrt{2}$	$\Lambda_\pm \psi = \psi_\pm$	$\Lambda_\pm \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_\pm$

TAB. 1.1 – Quelques relations utiles sur le cône de lumière.

Avec ces définitions, la contraction de deux quadrivecteurs  $V_1^\mu$  et  $V_2^\mu$  vaut  $V_1 \cdot V_2 = v_1^+ v_2^- + v_1^- v_2^+ - \mathbf{v}_1^\perp \cdot \mathbf{v}_2^\perp$ . Si  $V^\mu$  est le quadrivecteur énergie-impulsion  $(E, p_x, p_y, p_z)$ , alors le quadrivecteur qui lui correspond en coordonnées du cône de lumière s'écrit  $(p^+, p^-, \mathbf{p}) = ((E+p_z)/\sqrt{2}, (E-p_z)/\sqrt{2}, \mathbf{p})$ . La relation d'Einstein  $p^2 = m^2$  se traduit par  $p^- = (\mathbf{p}^2 + m^2)/2p^+$ , et la condition de jauge  $A_{\gamma,g}^+ \equiv 0$  peut se réécrire  $\eta \cdot A_{\gamma,g} \equiv 0$  à l'aide du quadrivecteur auxiliaire  $\eta^\mu \equiv (0, 1, \mathbf{0})$ .

Notons au passage que pour une particule ultrarelativiste qui se déplace suivant l'axe  $(Oz)$ ,  $p^- \ll p^+$  tandis que  $p^+ \simeq p_z \sqrt{2}$ .

Le "temps"  $\tau$  sur le cône de lumière est la variable conjuguée à  $p^-$  dans le produit  $p \cdot x$ , où  $x^\mu \equiv (x^+, x^-, \mathbf{x}^\perp)$ , c'est-à-dire  $\tau \equiv x^+ = (t+z)/\sqrt{2}$ . Dans la suite, nous entendrons par "temps" la composante  $x^+$  d'un quadrivecteur position  $x^\mu$ , et par "énergie" la composante  $k^-$  d'un quadrivecteur énergie-impulsion  $k^\mu$ .

On opte pour une représentation chirale des matrices de Dirac  $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.7)$$

les  $\sigma^i$  étant les matrices  $2 \times 2$  de Pauli usuelles. Les matrices de Dirac sur le cône de lumière  $(\gamma^+, \gamma^-, \gamma^\perp)$  s'écrivent alors :

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^\perp \\ \sigma^\perp & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Remarquons que contrairement à  $\gamma^0$  et  $\gamma^3$ , les matrices  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  ne sont pas inversibles : elles sont proportionnelles à des projecteurs.

### 1.2.2 Quantification

La quantification de la théorie sur le cône de lumière s'opère en définissant l'espace de Fock à un temps  $\tau$  déterminé.

### Fermions

Commençons par identifier les degrés de liberté indépendants des champs de fermions. Pour simplifier, nous considérerons un spineur représentatif  $\psi$  partout où la distinction des saveurs ne se révélera pas indispensable. Les spineurs obéissent à l'équation de Dirac, donc

seules deux de leurs composantes sont indépendantes. Posons  $\Lambda_{\pm} = \gamma^0 \gamma^{\pm} / \sqrt{2}$ . Ces matrices sont des projecteurs sur l'espace de représentation des spineurs, car  $\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$  et  $\Lambda_{\pm} \Lambda_{\mp} = 0$ . Définissons  $\psi_{\pm} \equiv \Lambda_{\pm} \psi$ . Le spineur  $\psi_{-}$  peut être exprimé en fonction de  $\psi_{+}$  *via* les équations du mouvement, comme nous allons le voir. En effet, l'équation de Dirac satisfaite par le spineur  $\psi$  s'écrit :

$$\left( i\gamma^{+} \mathcal{D}^{-} + i\gamma^{-} \mathcal{D}^{+} - i\gamma^{\perp} \mathcal{D}^{\perp} - m \right) \psi(x) = 0 . \quad (1.9)$$

Multiplions-la à gauche par la matrice  $\gamma^{+}$ . L'algèbre des matrices de Dirac rappelée dans la table (1.1) permet de simplifier cette équation :

$$i\sqrt{2} \partial^{+} \psi_{-} = (i\gamma^0 \gamma^{\perp} \cdot \mathcal{D}^{\perp} + \gamma^0 m) \psi_{+} , \quad (1.10)$$

et par intégration sur  $x^{-}$ , on est conduit à l'expression de  $\psi_{-}$  :

$$\psi_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma^0}{i\partial^{+}} \left( i\mathcal{D}^{\perp} \cdot \gamma^{\perp} + m \right) \psi_{+} . \quad (1.11)$$

On a introduit la notation formelle  $(1/\partial)f$  pour une primitive de  $f$  fixée par des conditions aux limites appropriées.

Pour simplifier cette écriture, on définit le champ  $\tilde{\psi}_{-}$  comme le champ qui coïncide avec  $\psi_{-}$  en l'absence d'interaction électromagnétique ou chromodynamique. On l'obtient en remplaçant simplement la dérivée covariante dans (1.11) par une dérivée partielle :

$$\tilde{\psi}_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma^0}{i\partial^{+}} \left( i\gamma^{\perp} \cdot \partial^{\perp} + m \right) \psi_{+} = \frac{\gamma^{+}}{2i\partial^{+}} \left( i\gamma^{\perp} \cdot \partial^{\perp} + m \right) \psi_{+} . \quad (1.12)$$

La seconde égalité a été obtenue en écrivant  $\psi_{+} = \gamma^0 \gamma^{+} \psi_{+} / \sqrt{2}$ , et en utilisant l'algèbre de Dirac de la table (1.1). L'équation (1.11) devient alors, avec cette nouvelle notation :

$$\psi_{-} = \tilde{\psi}_{-} - \frac{g}{2} \frac{\gamma^{+}}{i\partial^{+}} \gamma^{\perp} \cdot \mathbf{A}^{\perp} \psi_{+} . \quad (1.13)$$

Le spineur défini par  $\tilde{\psi} \equiv \psi_{+} + \tilde{\psi}_{-}$  représente alors un spineur de Dirac libre sur couche de masse, et on peut exprimer  $\psi$  en fonction de  $\tilde{\psi}$  :

$$\psi = \tilde{\psi} - \frac{g}{2} \frac{\gamma^{+}}{i\partial^{+}} \gamma^{\perp} \cdot \mathbf{A}^{\perp} \tilde{\psi} . \quad (1.14)$$

Ceci nous sera utile lorsque nous devons déduire du lagrangien le hamiltonien du cône de lumière et exprimer celui-ci en fonction des champs libres (section (1.2.3)).

Décomposons maintenant le champ indépendant  $\psi_{+}(\vec{x}, \tau=0)$  en modes de Fourier :

$$\begin{aligned} \psi_{+}(\vec{x}, \tau=0) = \sum_{\alpha=\pm 1/2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^{+}}} & \left( b_{\alpha}(\vec{p}) \sqrt{p^{+}} 2^{-1/4} w^{(\alpha)} e^{-i(p^{+} \cdot x^{-} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right. \\ & \left. + d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{p}) \sqrt{p^{+}} 2^{-1/4} w^{(-\alpha)} e^{i(p^{+} \cdot x^{-} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right) . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Les spineurs  $w^{(+1/2)} = (1, 0, 0, 0)$  et  $w^{(-1/2)} = (0, 0, 0, 1)$  forment une base du sous-espace invariant par le projecteur  $\Lambda_{+}$ . On impose aux opérateurs d'échelle  $b$  et  $d$  de satisfaire les relations d'anticommutation suivantes :

$$\{b_{\alpha'}(\vec{p}'), b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{p})\} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad , \quad \{d_{\alpha'}(\vec{p}'), d_{\alpha}^{\dagger}(\vec{p})\} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) , \quad (1.16)$$

toutes les autres combinaisons possibles ayant un anticommutateur nul. Vérifions maintenant que ces choix entraînent bien les relations d'anticommutation canoniques entre  $\psi_+$  et son moment conjugué. Ce dernier s'écrit :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial \psi_+ / \partial \tau)} = \frac{\delta (i \bar{\psi} (\gamma \cdot \partial) \psi)}{\delta(\partial^- \psi_+)} = \frac{\delta (i \sqrt{2} \psi_+^\dagger \partial^- \psi)}{\delta(\partial^- \psi_+)} = i \sqrt{2} \psi_+^\dagger, \quad (1.17)$$

et le calcul de l'anticommutateur conduit à :

$$\{\psi_+(\vec{x}, \tau=0), i \sqrt{2} \psi_+^\dagger(\vec{y}, \tau=0)\} = i \Lambda_+ \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \quad (1.18)$$

En utilisant alors l'équation (1.12), un calcul relativement long nous permet d'exprimer le spineur libre complet :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{x}, \tau=0) = \psi_+(\vec{x}, \tau=0) + \tilde{\psi}_-(\vec{x}, \tau=0) &= \sum_{\alpha=\pm 1/2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}} \times \\ &\times \left( b_\alpha(\vec{p}) u^{(\alpha)}(\vec{p}) e^{-i(p^+ \cdot x^- - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + d_\alpha^\dagger(\vec{p}) v^{(\alpha)}(\vec{p}) e^{i(p^+ \cdot x^- - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec

$$\begin{aligned} u^{(+1/2)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{p^+ \sqrt{2}}} \begin{pmatrix} p^+ \sqrt{2} \\ \underline{p} \\ m \\ 0 \end{pmatrix} & u^{(-1/2)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{p^+ \sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -\underline{p}^* \\ p^+ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ v^{(+1/2)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{p^+ \sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -\underline{p}^* \\ p^+ \sqrt{2} \end{pmatrix} & v^{(-1/2)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{p^+ \sqrt{2}}} \begin{pmatrix} p^+ \sqrt{2} \\ \underline{p}' \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

On construit les états à  $n$  fermions (resp.  $n$  antifermions) d'hélicité<sup>1</sup>  $\alpha$  et d'impulsion  $\vec{p}$  de l'espace de Fock par  $n$  applications successives des opérateurs  $b_\alpha^\dagger(\vec{p})$  (resp.  $d_\alpha^\dagger(\vec{p})$ ) sur le vide :

$$|\vec{p}\rangle_\alpha = b_\alpha^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \dots \text{ (resp. } |\vec{p}\rangle_\alpha = d_\alpha^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \dots). \quad (1.21)$$

Les définitions choisies pour les opérateurs d'échelle entraînent les normalisations suivantes pour les états :

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad \alpha' \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle_\alpha = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (1.22)$$

Ceux-ci sont également états propres du hamiltonien libre, calculé plus loin (section (1.2.3)).

## Bosons

Examinons maintenant le secteur bosonique. Les champs du photon  $A_\gamma^\mu$  et des gluons  $A_g^\mu$  (notés génériquement  $A^\mu$ ) ont chacun deux composantes indépendantes : en effet, le choix de jauge fixe  $A^+$  à 0, et  $A^-$  s'obtient en fonction de  $\mathbf{A}^\perp$  grâce aux équations du mouvement.

Détaillons le cas simple du photon. Les équations de Maxwell dérivent du lagrangien et s'écrivent :

$$(g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_{\gamma,\nu} = j^\mu \quad \text{avec le courant électromagnétique } j^\mu = g_{em} e_f \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.23)$$

<sup>1</sup>L'hélicité est en fait définie par rapport au repère de Lorentz de moment infini, en déplacement à une vitesse proche de  $-1$  selon  $(Oz)$ .

On choisit  $\mu = +$ ; la condition de jauge adoptée  $A_\gamma^+ = 0$  permet alors d'éliminer le premier terme, qui contient l'opérateur d'alembertien. La composante  $+$  du courant vaut  $j^+ = g_{em} e_f \bar{\psi} \gamma^+ \psi$ . L'intégration de l'équation (1.23) sur  $x^+$  conduit au résultat suivant :

$$A_\gamma^- = \frac{1}{i\partial^+} i\partial^\perp \cdot \mathbf{A}_\gamma^\perp + \frac{g_{em} e_f}{(i\partial^+)^2} \bar{\psi} \gamma^+ \psi . \quad (1.24)$$

On peut introduire le champ  $\tilde{A}_\gamma^-$  qui coïncide avec  $A_\gamma^-$  en l'absence de source. On peut également remplacer dans l'équation (1.24)  $\psi$  par  $\tilde{\psi}$ , étant donné que la matrice  $\gamma^+$  présente dans l'expression du courant sélectionne la composante indépendante  $\psi_+$ . Ainsi :

$$A_\gamma^- = \tilde{A}_\gamma^- + \frac{g_{em} e_f}{(i\partial^+)^2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_\gamma^- = \frac{1}{i\partial^+} i\partial^\perp \cdot \mathbf{A}_\gamma^\perp . \quad (1.25)$$

Il n'y a donc que deux champs indépendants, regroupés au sein du bivecteur  $\mathbf{A}_\gamma^\perp$ .

Le champ du gluon se traite de façon similaire, bien que les équations de Yang-Mills soient plus compliquées en raison de l'apparition de matrices de  $SU(N_c)$  et, de fait, de la non-commutativité des champs  $\mathbf{A}_g^\perp$ . On trouve :

$$\begin{aligned} A_g^- &= \frac{1}{i\partial^+} i\partial^\perp \cdot \mathbf{A}_g^\perp + \frac{g_s}{(i\partial^+)^2} \left( [i\partial^+ \mathbf{A}_g^\perp, \mathbf{A}_g^\perp] + \sqrt{2} \psi_+^\dagger t^a \psi_+ t^a \right) \\ &= \tilde{A}_g^- + \frac{g_s}{(i\partial^+)^2} \left( [i\partial^+ \mathbf{A}_g^\perp, \mathbf{A}_g^\perp] + \sqrt{2} \psi_+^\dagger t^a \psi_+ t^a \right) . \end{aligned} \quad (1.26)$$

On décompose le champ générique  $A^\mu$  en modes de Fourier selon :

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{x}, \tau=0) &= \sum_\lambda \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \left( a_\lambda(k) \varepsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) e^{-i(k^+ \cdot x^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \right. \\ &\quad \left. + a_\lambda^\dagger(\vec{k}) \varepsilon_\lambda^{\mu*}(\vec{k}) e^{i(k^+ \cdot x^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

On n'a pas distingué le cas du photon de celui du gluon ; à ce niveau, la seule différence est que pour le gluon,  $A^\mu$  doit être vu comme un vecteur à  $N_c^2 - 1$  composantes dans l'espace des couleurs.

On quantifie les champs transverses indépendants  $\mathbf{A}^\perp$  en imposant des relations de commutation pour les opérateurs d'échelle  $a$  et  $a^\dagger$  :

$$[a_{\lambda'}(\vec{k}'), a_\lambda^\dagger(\vec{k})] = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{\lambda, \lambda'} . \quad (1.28)$$

Les deux champs indépendants  $\mathbf{A}^\perp$  et leurs moments conjugués  $\partial^+ \mathbf{A}^\perp$  obéissent alors à une loi de commutation canonique :

$$[\mathbf{A}^i(\vec{x}, \tau=0), \partial^+ \mathbf{A}^j(\vec{y}, \tau=0)] = i \delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (1.29)$$

L'opérateur  $a_\lambda^\dagger(\vec{k})$  créé un photon (resp. un gluon) de polarisation  $\lambda$  et d'impulsion  $\vec{k}$  :  $a_\lambda^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}\rangle_\lambda$ , avec la normalisation  ${}_{\lambda'} \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle_\lambda = \delta_{\lambda \lambda'} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})$ .

### 1.2.3 Hamiltonien

Le hamiltonien du cône de lumière est conjugué à la variable  $\tau$ , et se déduit donc du lagrangien  $\mathcal{L}$  par la transformation de Legendre usuelle :

$$\mathcal{H} = \int d^3\vec{x} \left( \sum_{\phi} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{L} \right), \quad (1.30)$$

où  $\phi$  indexe les champs en présence et  $\partial/\partial\tau = \partial^-$ .  $\mathcal{H}$  doit être exprimé en fonction des champs indépendants.

Calculons en détail les termes du hamiltonien de l'électrodynamique. Celui-ci est essentiellement constitué de deux parties : le hamiltonien de Maxwell, qui provient de la transformation du premier terme du lagrangien de l'équation (1.2), et le hamiltonien de Dirac, qui provient du second et du troisième terme de l'équation (1.2). D'après la formule (1.30), on a  $\mathcal{H}_{\text{QED}} = \mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} + \mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}}$ , avec :

$$\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} = \int d^3\vec{x} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial^i A^j)^2 - \frac{(g_{em} e_f)^2}{2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \right) \quad (1.31)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}} = \int d^3\vec{x} \sqrt{2} \psi_+^\dagger i\partial^- \psi_+.$$

Pour simplifier les notations, on a considéré un fermion générique  $\psi$  de charge  $e_f$  sans détailler la sommation sur les saveurs. Les détails de ce calcul sont présentés dans l'appendice à ce chapitre. Résumons-en les principaux ingrédients. On s'est servi des équations du mouvement pour exprimer les champs dépendants  $A^-$  et  $\psi_-$  en fonction des champs indépendants  $\mathbf{A}^\perp$  et  $\psi_+$ . De cette manipulation résulte le fait que le hamiltonien de Dirac se résume au terme dérivatif de la formule (1.30), le second terme, l'opposé du lagrangien, étant nul sur couche de masse. Pour arriver à la forme simple que nous avons écrite pour le hamiltonien de Maxwell, nous avons effectué plusieurs intégrations par parties. La simplicité de son expression repose en grande partie sur le choix de jauge.

On peut développer le hamiltonien de Dirac pour le mettre sous une forme sur laquelle apparaissent explicitement la partie libre  $\mathcal{H}_0$  et les termes d'interaction  $\mathcal{H}_I$ . Pour cela, on reprend l'équation de Dirac (1.9), et on la multiplie cette fois-ci à droite par la matrice  $\gamma^-$ . En utilisant de plus l'équation (1.11), on peut en extraire l'expression suivante pour la dérivée "temporelle" de  $\psi_+$  :

$$i\partial^- \psi_+ = eA^- \psi_+ + (m - \gamma^\perp \cdot (i\partial^\perp - g_{em} e_f \mathbf{A}^\perp)) \frac{1}{2i\partial^+} (m + \gamma^\perp \cdot (i\partial^\perp - g_{em} e_f \mathbf{A}^\perp)) \psi_+. \quad (1.32)$$

On développe le produit du second terme, on remplace  $A^-$  dans le premier terme par son expression en fonction des champs libres (1.25) puis on reporte ce résultat dans la formule (1.31). On trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}} = & \int d^3\vec{x} \left( \bar{\psi}_+ (m + i\gamma^\perp \cdot \partial^\perp) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (m + i\gamma^\perp \cdot \partial^\perp) \psi_+ \right. \\ & + (g_{em} e_f)^2 \bar{\psi}_+ (\gamma^\perp \cdot \mathbf{A}^\perp) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (\gamma^\perp \cdot \mathbf{A}^\perp) \psi_+ + (g_{em} e_f)^2 \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \\ & + g_{em} e_f \bar{\psi}_+ (\gamma^+ \tilde{A}^-) \psi_+ + \bar{\psi}_+ (m + i\gamma^\perp \cdot \partial^\perp) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (-g_{em} e_f \gamma^\perp \cdot \mathbf{A}^\perp) \psi_+ \\ & \left. + \underbrace{\bar{\psi}_+ (-g_{em} e_f \gamma^\perp \cdot \mathbf{A}^\perp) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (m + i\gamma^\perp \cdot \partial^\perp) \psi_+}_{\tilde{\psi}_-} \right). \quad (1.33) \end{aligned}$$

Le dernier terme peut être transformé en identifiant l'un de ses facteurs à l'équation (1.12) comme indiqué par l'accolade, et une manipulation similaire peut être effectuée sur l'avant-dernier terme. Ainsi, en utilisant les propriétés des matrices de Dirac (notamment  $(\gamma^+)^2 = 0$ ), la somme des trois derniers termes se réécrit :

$$g_{em}e_f \left( \bar{\psi}_+(\gamma^+ \tilde{A}^-) \psi_+ - \tilde{\psi}_- \gamma^\perp \cdot \mathbf{A}^\perp \psi_+ - \bar{\psi}_+ \gamma^\perp \cdot \mathbf{A}^\perp \tilde{\psi}_- \right) = g_{em}e_f \tilde{\psi}(\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{\psi}. \quad (1.34)$$

Le hamiltonien de l'électrodynamique a alors pour expression, en rassemblant les équations (1.31), (1.33) et (1.34) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{QED}} = & \int d^3\vec{x} \left( \bar{\psi}_+(m+i\gamma^\perp \cdot \partial^\perp) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (m+i\gamma^\perp \cdot \partial^\perp) \psi_+ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial^i A^j)^2 \right. \\ & \left. + g_{em}e_f \tilde{\psi}(\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{\psi} + \frac{(g_{em}e_f)^2}{2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} + (g_{em}e_f)^2 \tilde{\psi}(\gamma \cdot \tilde{A}) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{\psi} \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Les deux premiers termes (première ligne) représentent la partie libre du hamiltonien. Ils peuvent aisément être réexprimés dans l'espace des impulsions comme la somme d'opérateurs "nombres" pondérés des énergies de cône de lumière correspondantes. Les termes suivants constituent le hamiltonien d'interaction. On a tout d'abord le vertex usuel fermion-fermion-photon :

$$\mathcal{H}_I^{f\bar{f}\gamma} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \int d^3\vec{x} g_{em}e_f \left[ \tilde{\psi}(\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{\psi} \right], \quad (1.36)$$

où l'on a introduit la notation  $\mathcal{H}_I^{f\bar{f}\gamma}$  qui nous sera utile par la suite. Les termes suivants sont des vertex effectifs à quatre particules externes : quatre fermions, et deux fermions et deux photons respectivement. Ceux-ci peuvent se représenter de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \int d^3\vec{x} \frac{(g_{em}e_f)^2}{2} \left[ \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \right] \\ \text{et} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \int d^3\vec{x} (g_{em}e_f)^2 \left[ \tilde{\psi}(\gamma \cdot \tilde{A}) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{\psi} \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

où le tiret marque un échange *instantané* de fermion ou de photon, qui se traduit par la présence de l'opérateur  $\gamma^+/i\partial^+$  et  $1/(i\partial^+)^2$ , respectivement.

Ainsi, nous venons de montrer que le hamiltonien de l'électrodynamique quantifiée sur le cône de lumière contient de nouveaux vertex, inconnus dans un schéma de quantification covariante. Leur présence même semble constituer *a priori* une complication technique : nous verrons cependant dans le chapitre 2 qu'ils disparaissent dans les limites dans lesquelles nous nous placerons.

La même procédure, quoique plus fastidieuse, peut être répétée pour la chromodynamique quantique. Nous obtenons alors le hamiltonien complet de ces deux théories. Nous écrivons la partie libre à l'aide des opérateurs "nombres"  $a^\dagger a$ ,  $b^\dagger b$ ,  $d^\dagger d$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \sum_{\gamma,g} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \sum_\lambda \frac{\vec{k}^2}{k^+} a_\lambda^\dagger(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) \\ & + \sum_{q,l} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}} \sum_\alpha \left( \frac{\vec{p}^2 + m^2}{p^+} b_\alpha^\dagger(\vec{p}) b_\alpha(\vec{p}) + \frac{\vec{p}^2 + m^2}{p^+} d_\alpha^\dagger(\vec{p}) d_\alpha(\vec{p}) \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$



Les différentes classes de vecteurs (gluons, photon) et de spineurs (leptons, quarks) sont prises en compte dans la sommation.

On peut schématiser les termes de la partie d'interaction comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_I = & \sum_{l,q} \left[ \begin{array}{c} \text{QED} \\ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \end{array} \right] + \sum_q \left[ \begin{array}{c} \text{QED+QCD} \\ \text{diagram 4} \end{array} \right] \\
 & + \underbrace{\sum_q \left[ \begin{array}{c} \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \text{diagram 10} + \text{diagram 11} \end{array} \right]}_{\text{QCD}} \quad (1.39)
 \end{aligned}$$

Les sommations sont étendues aux saveurs des fermions. Donnons l'expression des termes que nous n'avons pas calculés explicitement. Le vertex à 4 particules mixte, de couplage d'un quark à un photon et à un gluon s'écrit :

$$\begin{array}{c} \text{diagram 4} \end{array} = \int d^3 \vec{x} g_s g_{em} e_f \left[ \tilde{q} (\gamma \cdot \tilde{A}_\gamma) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (\gamma \cdot \tilde{A}_g) \tilde{q} \right]. \quad (1.40)$$

Enfin, la partie purement chromodynamique du hamiltonien d'interaction est constituée des vertex ordinaires, déjà présents en formulation covariante :

$$\mathcal{H}_I^{ggg} \equiv \begin{array}{c} \text{diagram 5} \end{array} = \int d^3 \vec{x} 2g_s \left[ \text{Tr} \left( i\partial^+ \tilde{A}^\nu [\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \right) \right] \quad (1.41)$$

$$\mathcal{H}_I^{Ag} \equiv \begin{array}{c} \text{diagram 6} \end{array} = \int d^3 \vec{x} \frac{g_s^2}{2} \left[ \text{Tr} \left( [\tilde{A}^\mu, \tilde{A}^\nu] [\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \right) \right] \quad (1.42)$$

$$\mathcal{H}_I^{q\bar{q}g} \equiv \begin{array}{c} \text{diagram 7} \end{array} = \int d^3 \vec{x} g_s \left[ \tilde{q} (\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{q} \right] \quad (1.43)$$

ainsi que des vertex effectifs à 4 corps :

$$\begin{array}{c} \text{diagram 8} \end{array} = \int d^3 \vec{x} g_s^2 \left[ \text{Tr} \left( [i\partial^+ \tilde{A}^\mu, \tilde{A}_\mu] \frac{1}{(i\partial^+)^2} [i\partial^+ \tilde{A}^\nu, \tilde{A}_\nu] \right) \right] \quad (1.44)$$

$$\begin{array}{c} \text{diagram 9} \end{array} = \int d^3 \vec{x} g_s^2 \left[ \tilde{q} (\gamma \cdot \tilde{A}) \frac{\gamma^+}{2i\partial^+} (\gamma \cdot \tilde{A}) \tilde{q} \right] \quad (1.45)$$

$$\begin{array}{c} \text{diagram 10} \end{array} = \int d^3 \vec{x} (-g_s^2) \left[ \tilde{q} \gamma^+ \frac{1}{(i\partial^+)^2} [i\partial^+ \tilde{A}^\nu, \tilde{A}_\nu] \tilde{q} \right] \quad (1.46)$$

$$\begin{array}{c} \text{diagram 11} \end{array} = \int d^3 \vec{x} \frac{g_s^2}{2} \left[ \tilde{q} \gamma^+ t^a \tilde{q} \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{q} \gamma^+ t^a \tilde{q} \right]. \quad (1.47)$$

On a sous-entendu l'indice  $g$  pour le champ du gluon. Il faut comprendre tous ces opérateurs comme étant renormalisés par l'application du produit normal “: :”.

### 1.2.4 Théorie des perturbations sur le cône de lumière

Nous allons maintenant examiner l'évolution "temporelle" d'un état du temps  $-\infty$  jusqu'au temps  $\tau$ .

Dans la représentation d'interaction, les états  $|\psi(\tau)\rangle$  évoluent selon l'équation suivante :

$$i \frac{\partial |\psi(\tau)\rangle}{\partial \tau} = \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau) \cdot |\psi(\tau)\rangle, \quad \text{avec} \quad \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau) = e^{i\mathcal{H}_0\tau} \mathcal{H}_I e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \quad (1.48)$$

Étant donnée la condition initiale  $|\psi(\tau = -\infty)\rangle = |\omega_0\rangle$ , où  $|\omega_0\rangle$  est un état propre de l'énergie  $\mathcal{H}_0$  associée à la valeur propre  $p_i^-$ , cette équation peut se résoudre formellement en introduisant le produit ordonné noté "T". Celui-ci est défini par son action sur des opérateurs  $f(x^+, \mathbf{x})$  et  $g(y^+, \mathbf{y})$  :

$$T(f(x^+, \mathbf{x})g(y^+, \mathbf{y})) = \theta(x^+ - y^+)f(x^+, \mathbf{x})g(y^+, \mathbf{y}) + \theta(y^+ - x^+)g(y^+, \mathbf{y})f(x^+, \mathbf{x}). \quad (1.49)$$

En ces termes, la solution de l'équation (1.48) s'écrit :

$$|\psi(\tau)\rangle = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau') \right) |\omega_0\rangle. \quad (1.50)$$

Choisissons  $\tau = 0$  et réécrivons cette solution sous une forme développée :

$$|\psi(\tau = 0)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \cdots d\tau_n T \left( \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau_1) \cdots \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau_n) \right) |\omega_0\rangle. \quad (1.51)$$

On introduit la base complète  $|\omega\rangle$  d'états propres de l'énergie  $\mathcal{H}_0|\omega\rangle = p_\omega^-|\omega\rangle$ , et on définit la fonction d'onde  $\psi_\omega$  par  $\langle \omega | \omega_0 \rangle \psi_\omega \equiv \langle \omega | \psi(\tau = 0) \rangle$ . Alors :

$$|\psi(\tau = 0)\rangle = \sum_{\omega} |\omega\rangle \psi_\omega \langle \omega | \omega_0 \rangle. \quad (1.52)$$

La sommation sur les états inclut, pour chaque état à  $n$  particules, une intégration sur les impulsions des particules qui le composent et une sommation sur leurs nombres quantiques.  $\psi_\omega$  représente la fonction d'onde de l'objet physique considéré au temps  $\tau = 0$ . On la notera aussi sous une forme plus développée  $\psi_{\mathcal{N}_i}^{(n-n_0)}(\vec{k}_i)$  :  $n$  est le nombre de particules de l'état  $|\omega\rangle$ ,  $n_0$  celui de l'état initial  $|\omega_0\rangle$ , et  $\mathcal{N}_i$  et  $\vec{k}_i$  représentent les nombres quantiques et les impulsions des particules de l'état  $|\omega\rangle$ . L'indice supérieur  $(n-n_0)$  est le nombre de particules ajoutées à l'objet nu duquel on part au temps  $\tau = -\infty$ , c'est donc également la puissance de la constante de couplage des diagrammes en arbres qui contribuent à cette fonction d'onde.

Dans le but d'exprimer  $\psi_\omega$ , on projette l'équation (1.51) sur l'état  $|\omega\rangle$ , et on introduit une base complète d'états propres du hamiltonien  $\mathcal{H}_0$  entre chaque  $\widehat{\mathcal{H}}_I$  :

$$\begin{aligned} \langle \omega | \psi(\tau = 0) \rangle &= \langle \omega | \omega_0 \rangle + (-i) \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \langle \omega | \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau_1) | \omega_0 \rangle \\ &\quad + (-i)^2 \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \sum_{\omega_1} \langle \omega | \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau_1) | \omega_1 \rangle \langle \omega_1 | \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau_2) | \omega_0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.53)$$

et en intégrant sur les temps intermédiaires  $\tau_1 \cdots \tau_n$ , on obtient

$$\langle \omega | \omega_0 \rangle \psi_\omega = \langle \omega | \omega_0 \rangle + \frac{\langle \omega | \mathcal{H}_I | \omega_0 \rangle}{p_{\omega_0}^- - p_\omega^- + i\epsilon} + \sum_{\omega_1} \frac{\langle \omega | \mathcal{H}_I | \omega_1 \rangle \langle \omega_1 | \mathcal{H}_I | \omega_0 \rangle}{(p_{\omega_0}^- - p_\omega^- + i\epsilon)(p_{\omega_0}^- - p_{\omega_1}^- + i\epsilon)} + \cdots \quad (1.54)$$

La régularisation  $i\epsilon$  a été ajoutée afin de pallier aux singularités de *self-énergie*, qui doivent *in fine* être absorbées ordre par ordre dans une redéfinition appropriée de chacun des états  $|\omega\rangle$ . Remarquons que l'énergie n'est pas conservée entre les états  $|\omega\rangle$  et  $|\omega_0\rangle$  : seule la tri-impulsion l'est. Ceci résulte du fait que nous nous intéressons à des fluctuations quantiques à temps fini.

Dans toute la suite du texte, les normalisations sont fixées par la relation d'orthogonalité suivante entre les états  $|\omega\rangle$  et  $|\omega'\rangle$  d'un nombre identique de particules  $n$  :

$$\langle\omega'|\omega\rangle = {}_{N'_i}\langle k'_i|k_i\rangle_{N_i} \equiv \prod_{i=1}^n \delta_{N'_i, N_i} \delta^3(\vec{k}'_i - \vec{k}_i) . \quad (1.55)$$

Avec cette convention, l'état physique  $|\psi(\tau=0)\rangle$  s'écrit comme la somme des états à  $n$  particules d'énergie déterminée, pondérés par les fonctions d'onde :

$$|\psi(\tau=0)\rangle = |\psi(\tau=-\infty)\rangle + \sum_{\omega, n \equiv n(\omega), N_i(\omega)} \int d^3\vec{k}_1 \cdots d^3\vec{k}_{n-1} \times \psi_{N_i(\omega)}^{(n-n_0)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n-1}) \underbrace{|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n-1}, \vec{k}_n\rangle_{N_i(\omega)}}_{\text{état } |\omega\rangle} , \quad (1.56)$$

où  $|\psi(\tau=-\infty) = |\omega_0\rangle$ , et le vecteur  $\vec{k}_n$  n'est pas indépendant, il est déterminé par la conservation de l'impulsion entre l'état  $|\omega_0\rangle$  et l'état  $|\omega\rangle$ .

### 1.3 Théorie invariante des perturbations et amplitudes de diffusion

Si on s'intéresse à l'évolution d'un état initial  $|i\rangle$  donné jusqu'à des temps  $\tau$  positifs très grands, la borne supérieure de l'intégrale (1.51) devient, à la limite,  $+\infty$  :

$$|\psi(\tau=+\infty)\rangle = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \widehat{\mathcal{H}}_I(\tau') \right) |i\rangle \quad (1.57)$$

i.e.  $|f\rangle = T \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) |i\rangle .$

L'amplitude de transition d'un état initial  $|i\rangle$  à un état final asymptotique  $|f\rangle$  que l'on observe dans un détecteur est l'élément de matrice  $S$  entre les états  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  :

$$S_{fi} = \langle f|\psi(\tau=+\infty)\rangle = \langle f|T \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) |i\rangle \quad (1.58)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle f|T \mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)|i\rangle .$$

On peut vérifier que cette écriture est invariante de Lorentz.

Le développement de Taylor de l'exponentielle dans l'équation précédente jette les bases de la théorie invariante des perturbations. Chaque terme correspond à un ensemble de diagrammes de Feynman qui comprennent chacun  $n$  vertex. Les intégrales sur  $x_1, \dots, x_n$  étendues à tout l'espace Minkowskien conduisent à la conservation de l'énergie-impulsion à chaque vertex. L'élément de matrice  $S_{fi}$  peut être exprimé en fonction de l'amplitude de transition d'un état à l'autre en factorisant la conservation globale de l'énergie et de l'impulsion :

$$S_{fi} \equiv \delta_{fi} + iT_{fi} \quad \text{avec} \quad T_{fi} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} \prod_k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_{f,k}^+}} . \quad (1.59)$$

Pour calculer les éléments de matrice ci-dessus ordre par ordre en théorie des perturbations, on exprime le lagrangien, et on utilise l'algèbre canonique des opérateurs pour réduire le  $T$ -produit à des  $T$ -produits de deux champs (théorème de Wick) qui sont les propagateurs de Feynman des champs :

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-x') &= i\langle 0|T A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle \quad \text{pour le photon et les gluons} \\ D_{\alpha\beta}(x-x') &= i\langle 0|T \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')|0\rangle \quad \text{pour les quarks .} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Le propagateur des quarks ne présente pas de difficulté et se calcule aisément par exemple à partir du lagrangien. Les propagateurs des champs bosoniques sont les fonctions de Green des équations du mouvement de ces champs, qui dérivent du lagrangien *via* les équations d'Euler-Lagrange, et s'écrivent *a priori* :

$$(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu) A_\nu(x) = j^\mu(x) , \quad (1.61)$$

où les quadrvecteurs  $j^\mu$  sont les sources des champs, représentées par les différents courants de charges électrique ou de couleur, selon le cas. L'opérateur  $g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu$  n'étant pas inversible, cette équation ne définit pas un champ  $A_\mu$  unique, mais toute une classe de champs physiquement équivalents et liés par une transformation de jauge de la forme  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda$ , où  $\Lambda$  est une fonction différentiable quelconque. On peut néanmoins fixer la jauge, c'est-à-dire opter pour une valeur particulière des composantes des champs associées aux degrés de liberté surnuméraires, de manière à pouvoir déterminer une fonction de Green. Ce programme est réalisé en ajoutant par exemple un terme de fixation de jauge au lagrangien.

Le formalisme de quantification canonique que nous avons employé jusqu'à présent pour définir l'espace des états à  $\tau = 0$  est mal adapté à la quantification de la théorie dans une jauge quelconque, en particulier lorsque la condition de jauge choisie mélange les composantes du champ  $A^\mu$ , comme par exemple la jauge de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Néanmoins, des méthodes d'intégrale fonctionnelle permettent dans ce cas une quantification élégante. De nouvelles particules apparaissent alors (les fantômes de Faddeev-Popov [Faddeev 67]) dans les états intermédiaires : celles-ci proviennent de la traduction sous forme intégrale du déterminant du changement de variable entre une condition du type  $\{\partial_\mu A^\mu = 0\}$  et une autre du type  $\{A'^\mu = 0\}$ .

Les règles de Feynman pour les éléments de matrice réduits  $\mathcal{M}$  peuvent être trouvées par exemple dans la référence [Cheng 84].

## 1.A Détails du calcul du hamiltonien pour l'électrodynamique

*Dans cet appendice, on précise le calcul qui permet de déduire du lagrangien de l'électrodynamique (1.2) le hamiltonien (1.31).*

Le lagrangien de Dirac s'écrit  $\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu(\partial^\mu - ig_{em}e_f A^\mu) - m)\psi$ . La formule (1.30) donne le hamiltonien :

$$\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}} = \int d^3\vec{x} \left( \frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}}}{\delta(\partial^-\psi)} \partial^-\psi + \frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}}}{\delta(\partial^-A^i)} \partial^-A^i + \frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}}}{\delta(\partial^-A^-)} \partial^-A^- - \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}} \right) , \quad (1.62)$$

où les champs sont exprimés en fonction des champs indépendants *via* les équations du mouvement. De l'équation de Dirac résulte immédiatement que le dernier terme donne une contribution nulle. Il ne reste alors que le premier terme :

$$\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Dirac}} = \int d^3\vec{x} \sqrt{2} \psi_+^\dagger i\partial^-\psi_+ , \quad (1.63)$$

qui est bien le résultat donné dans l'équation (1.31).

Le lagrangien de Maxwell peut se transformer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\left((\partial^i A^j)^2 - (\partial^+ A^-)^2 - \partial^i A^j \partial^j A^i + 2\partial^+ A^i \partial^i A^- - 2\partial^- A^i \partial^+ A^i\right).\end{aligned}\quad (1.64)$$

On obtient le hamiltonien par la formule de transformation (1.30) :

$$\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} = \int d^3\vec{x} \left( \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}}}{\delta(\partial^- A^i)} \partial^- A^i - \mathcal{L}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} \right), \quad (1.65)$$

qui implique que  $\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}}$  est l'intégrale spatiale de l'opposé du lagrangien duquel on a supprimé les termes linéaires en  $\partial^- A^i$  :

$$\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} = \int d^3\vec{x} \left( \underbrace{\frac{1}{2}(\partial^i A^j)^2 - \frac{1}{2}(\partial^+ A^-)^2}_{\text{II}} + \underbrace{\partial^+ A^i \partial^i A^- - \frac{1}{2}\partial^i A^j \partial^j A^i}_{\text{I}} \right). \quad (1.66)$$

Une double intégration par parties sur les deux derniers termes (notés I) permet de les réécrire sous la forme  $\partial^i A^i \partial^+ A^- - \frac{1}{2}\partial^i A^i \partial^j A^j$ . On identifie alors les trois derniers termes (notés II) à l'expression  $-\frac{1}{2}(\partial^+ A^- - \partial^i A^i)^2$ . Or les équations du mouvement pour le champ  $A^\mu$  conduisent, après intégration sur  $x^+$  et élévation à la puissance 2, à la formule suivante :

$$(\partial^+ A^- - \partial^i A^i)^2 = \left( \frac{g_{em} e_f}{\partial^+} \bar{\psi} \gamma^+ \psi \right)^2 \quad (\text{voir l'équation (1.24)}). \quad (1.67)$$

Une nouvelle intégration par parties par rapport à  $x^+$  permet d'obtenir le résultat de l'équation (1.31) :

$$\mathcal{H}_{\text{QED}}^{\text{Maxwell}} = \int d^3\vec{x} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial^i A^j)^2 - \frac{(g_{em} e_f)^2}{2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{\psi} \gamma^+ \tilde{\psi} \right). \quad (1.68)$$

## CHAPITRE 2

# Partons et dipôles dans le formalisme hamiltonien. Équations d'évolution.

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Densité de partons au premier ordre . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1.1	Densité de gluons dans un quark primordial . . . . .	22
2.1.2	Densité de gluons dans un gluon primordial . . . . .	25
<b>2.2</b>	<b>Extension à tous les ordres : doubles logarithmes dominants . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.3</b>	<b>Limite des grandes impulsions transverses . . . . .</b>	<b>28</b>
2.3.1	Variation des densités de partons lors d'un accroissement du moment transverse mesuré . . . . .	29
2.3.2	Equations de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi . . . . .	31
<b>2.4</b>	<b>Limite des petites impulsions longitudinales . . . . .</b>	<b>33</b>
2.4.1	Premier ordre . . . . .	34
2.4.2	Ordres suivants . . . . .	38
2.4.3	Densité de dipôles à tous les ordres et équations de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov . . . . .	40

---

*Dans ce chapitre, on calcule l'évolution des partons dans le cadre de la formulation hamiltonienne introduite dans le chapitre précédent. Dans les sections (2.1) et (2.2), nous transposons, dans ce formalisme, des calculs classiques de QCD au premier ordre, que nous généraliserons ensuite à tous les ordres. Les deux sections suivantes (2.3) et (2.4) seront consacrées aux équations d'évolution DGLAP et BFKL, que nous interpréterons toutes deux de façon unifiée comme des équations de bilan, dans l'esprit de la référence [Ellis 96]. L'équation BFKL sera établie sous la forme du modèle des dipôles de couleur [Mueller 94a], sur lequel seront basés les modèles phénoménologiques présentés dans les chapitres 3 et 5.*

Nous commencerons par évaluer les fonctions d'onde d'un parton primordial (quark ou gluon) en deux partons à  $\tau = 0$  (section (2.1)), puis nous réitérerons ce calcul pour trouver la fonction d'onde à  $n$  partons, qui est une quantité qui dépend de tous les ordres de la théorie des perturbations (section (2.2)). Cette itération n'a de sens que si on peut factoriser les émissions successives, ce qui ne peut évidemment être réalisé que dans des cas bien particuliers. La clé de la factorisation proposée ici est l'ordonnancement fort en *date* d'émission des partons qui composent les états de fonctions d'onde d'ordre de plus en plus élevé : chaque nouveau quark ou gluon est émis à partir d'un ensemble de partons statiques, et sa dynamique est ainsi

découplée de celle de ses parents. Comme nous le verrons, les temps de vie de ces partons sont proportionnels à  $k^+ / \mathbf{k}^2$ , où  $\mathbf{k}$  est leur impulsion transverse et  $k^+$  leur impulsion longitudinale du cône de lumière. Les deux régions cinématiques que nous pourrions traiter, dans lesquelles on a bien hiérarchisation des dates d'émission, sont les régions de grand  $\mathbf{k}^2$  ou de petit  $k^+$ . Le premier cas conduit aux équations d'évolution en impulsion transverse (DGLAP, section (2.3)), le second aux équations d'évolution en impulsion longitudinale (BFKL, section (2.4)), selon la formulation proposée dans l'article de la référence [Mueller 94a].

Bien que les travaux originaux de cette thèse aient été presque exclusivement menés autour de l'équation BFKL, nous présentons tout de même les deux approches BFKL et DGLAP en parallèle dans ce même formalisme hamiltonien. L'exposé des équations DGLAP n'a bien sûr pas vocation à rivaliser avec les méthodes de développement de produits d'opérateurs (OPE) [Wilson 69, Zimmermann 73] qui donnent une assise beaucoup plus rigoureuse à la factorisation des ordres successifs. On pourra par exemple se référer au livre [Cheng 84] pour un exposé détaillé de cette méthode.

## 2.1 Densité de partons au premier ordre

### 2.1.1 Densité de gluons dans un quark primordial

En suivant l'approche de la référence [Mueller 99], on développe la fonction d'onde  $\psi(\tau=0)$  d'un quark sur l'espace de Fock de ses fluctuations partoniques :

$$|\psi(\tau=0)\rangle = |\vec{p}\rangle_\alpha + \sum_{\alpha'\lambda,C} \int d^3\vec{k} \psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)}(\vec{k}) \left[ |\vec{p}-\vec{k}\rangle_{\alpha'} \otimes |\vec{k}\rangle_{\lambda,C} \right] + \dots \quad (2.1)$$

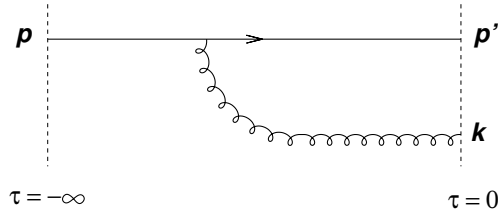


FIG. 2.1 – *Fluctuations d'un quark au premier ordre.*

On a appliqué la formule (1.56) page 18, dans laquelle on n'a écrit explicitement que le terme à deux particules finales, qui correspond à un état  $\omega$  formé d'un quark et d'un gluon, dont les nombres quantiques  $\mathcal{N}_i$  sont l'hélicité  $\alpha'$  du quark final, la couleur  $C$  et la polarisation  $\lambda$  du gluon. L'indice  $\alpha$  désigne, pour mémoire, l'hélicité du quark initial.

La fonction d'onde  $\psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)}$  se calcule en théorie des perturbations sur le cône de lumière suivant la formule (1.54), dans laquelle on ne conserve que l'ordre le plus bas (i.e. l'ordre 1 pour ce processus) en la constante de couplage  $g_s$ . La partie du hamiltonien d'interaction qui contribue à cet ordre est simplement  $\mathcal{H}_I^{q\bar{q}g}$  de la formule (1.43) page 16. On a donc :

$$\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k})\psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)}(\vec{k}) = \frac{\left[ \alpha' \langle \vec{p}' | \otimes_{\lambda,C} \langle \vec{k} | \right] \mathcal{H}_I^{q\bar{q}g} | \vec{p} \rangle_\alpha}{p'^- + k^- - p^-} . \quad (2.2)$$

Cette fonction d'onde est l'amplitude de transition entre un état "quark nu" au temps  $\tau = -\infty$  et un état "quark+gluon" au temps  $\tau = 0$ , comme l'indique le schéma de la figure (2.1). Le numérateur représente l'élément de matrice, évalué entre des états de particules sur leur couche de masse. Le dénominateur représente la différence entre les énergies des particules à  $\tau = 0$  et celles à  $\tau = -\infty$ . On rappelle que le terme du hamiltonien qui correspond à l'interaction de deux quarks et d'un gluon s'écrit (formule (1.43)) :

$$\mathcal{H}_I^{q\bar{q}g} = g_s \int d^3\vec{x} : \bar{q}(x) \gamma^\mu t^C q(x) A_{\mu,C}(x) : , \quad (2.3)$$

où l'on a précisé la matrice de couleur pour le gluon, et écrit explicitement le produit normal. On remplace dans l'équation initiale (2.2) les développements (1.19,1.27) des champs en modes de Fourier, puis on simplifie l'expression obtenue en utilisant les propriétés de commutation (resp. d'anticommutation) des opérateurs (équations (1.28,1.16)). Enfin, en intégrant sur  $\vec{p}'$  pour éliminer la distribution de Dirac qui correspond à la conservation de la tri-impulsion au vertex, on est conduit à l'expression suivante pour la fonction d'onde :

$$\psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)}(\vec{k}) = \frac{g_s}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \frac{\bar{u}^{(\alpha')}(p-k)(\gamma^\mu \varepsilon_\mu^\lambda) t^C u^{(\alpha)}(p)}{\sqrt{2(p-k)^+} \sqrt{2p^+}} \frac{1}{(p-k)^- + k^- - p^-} . \quad (2.4)$$

On définit la densité (non intégrée) de gluons d'impulsion  $\vec{k}$  dans le quark physique comme la valeur moyenne de l'opérateur "nombre de gluons"  $\sum_{\lambda,C} a_{\lambda,C}^\dagger(k) a_{\lambda,C}(k)$  sur la fonction d'onde complète  $\psi(\tau=0)$  du quark :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\lambda,C} \int_0^{+\infty} dk^+ \delta(x - k^+/p^+) \langle \psi(\tau=0) | a_{\lambda,C}^\dagger(k) a_{\lambda,C}(k) | \psi(\tau=0) \rangle \\ &= \frac{p^+}{2} \sum_{\alpha\alpha'\lambda,C} \psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)\dagger}(xp^+, \mathbf{k}) \psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)}(xp^+, \mathbf{k}) + \mathcal{O}(g_s^4) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

où l'on a adopté la paramétrisation  $\vec{k} \equiv (xp^+, \mathbf{k})$ , et pris la moyenne des hélicités du quark initial. L'évaluation de cette dernière quantité est un calcul classique (voir par exemple [Cheng 84]), que l'on reproduit complètement ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha\alpha'\lambda,C} \psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)\dagger}(xp^+, \mathbf{k}) \psi_{\alpha\alpha'\lambda,C}^{(1)}(xp^+, \mathbf{k}) &= \frac{g_s^2}{(2\pi)^3 2k^+} \overbrace{\left( \sum_C t^C t^C \right)}^{\text{I}} \times \\ &\times \underbrace{\left( \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\alpha'} \frac{\bar{u}^{(\alpha')}(\vec{p}-\vec{k}) \gamma^\mu u^{(\alpha)}(\vec{p}) \bar{u}^{(\alpha)}(\vec{p}) \gamma^\nu u^{(\alpha')}(\vec{p}-\vec{k})}{4(p-k)^+ p^+} \right)}_{\text{II}} \times \\ &\times \underbrace{\left( \sum_\lambda \varepsilon_\mu^{*\lambda}(k) \varepsilon_\nu^\lambda(k) \right)}_{\text{III}} \times \underbrace{\frac{1}{((p-k)^- + k^- - p^-)^2}}_{\text{IV}} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le facteur de couleur (I) vaut  $\sum_C t^C t^C = C_F$ . Le calcul du facteur (II) se ramène à l'évaluation d'une trace d'un produit de matrices de Dirac, à condition de remarquer la relation

$$\sum_\alpha u^{(\alpha)}(\vec{p}) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(\vec{p}) = \gamma \cdot p . \quad (2.7)$$

La somme sur les polarisations qui apparaît dans le facteur (III) s'écrit, dans la jauge du cône de lumière  $\eta \cdot A = 0$  :

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\mu^{*\lambda}(k) \varepsilon_\nu^\lambda(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu}{\eta \cdot k} . \quad (2.8)$$



Ainsi, la contraction (II)·(III) devient :

$$\frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(\gamma \cdot (p-k) \gamma^\mu (\gamma \cdot p) \gamma^\nu)}{4(p-k)^+ p^+} \cdot \left( -g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu}{\eta \cdot k} \right) = \frac{1}{(p-k)^+ p^+} \frac{(\eta \cdot p)(k \cdot (p-k)) + (\eta \cdot (p-k))(k \cdot p)}{\eta \cdot k} . \quad (2.9)$$

Enfin, le dénominateur d'énergie dans (IV) vaut :

$$(p-k)^- + k^- - p^- = \frac{p^+}{2k^+} \frac{\mathbf{k}^2}{p^+ - k^+} , \quad (2.10)$$

où l'on a utilisé le fait que toutes les particules intermédiaires sont sur leur couche de masse en théorie des perturbations sur le cône de lumière. On se place maintenant dans le repère dans lequel la tri-impulsion du quark initial est dirigée suivant l'axe ( $Oz$ ). Seule la composante (+) est alors non nulle :

$$p^\mu = (p^+, 0, \mathbf{0}) . \quad (2.11)$$

$x \in [0, 1]$  défini en (2.5) est maintenant la fraction d'impulsion du quark emportée par le gluon. On a la paramétrisation suivante :

$$k^\mu = \left( xp^+, \frac{\mathbf{k}^2}{2xp^+}, \mathbf{k} \right) , \quad (p-k)^\mu = \left( (1-x)p^+, \frac{\mathbf{k}^2}{2(1-x)p^+}, -\mathbf{k} \right) . \quad (2.12)$$

On obtient alors après quelques manipulations simples une forme compacte :

$$\mathcal{F}(x, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\pi \mathbf{k}^2} \left( C_F \frac{1 + (1-x)^2}{x} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) . \quad (2.13)$$

Il est facile de relier cette quantité à la densité de gluons intégrée  $\mathcal{G}$ , pour laquelle on somme sur toutes les impulsions transverses du gluon entre une échelle inférieure  $\mu$ , qui est un *cutoff* arbitraire fixé destiné à rendre l'intégrale convergente, et une échelle supérieure  $Q$  qui caractérise la résolution qu'on se donne :

$$\mathcal{G}(x, Q^2) = \int_{\mu^2}^{Q^2} d^2 \mathbf{k} \mathcal{F}(x, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \left( C_F \frac{1 + (1-x)^2}{x} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) . \quad (2.14)$$

Remarquons la croissance logarithmique de cette densité de gluons avec le rapport  $Q/\mu$ , qui survient soit à la limite où le *cutoff*  $\mu$  tend vers zéro, soit pour des grandes échelles d'impulsion transverse  $Q$ , domaine cinématique dans lequel le système  $qg$  a une petite taille transverse. La dépendance en fraction d'impulsion sur le cône de lumière se trouve quant à elle toute entière factorisée entre les parenthèses, et correspond à la *fonction de splitting*  $\widehat{P}_{gq}$  d'Altarelli-Parisi :

$$\widehat{P}_{gq}(x) = C_F \frac{1 + (1-x)^2}{x} . \quad (2.15)$$

Celle-ci caractérise la distribution du partage de l'énergie au vertex entre les deux partons. Dans le contexte plus général d'un quark initial d'impulsion longitudinale  $\xi p^+$  qui émet un gluon d'impulsion longitudinale  $x p^+$ , l'argument de la fonction de splitting serait le *rapport* des impulsions longitudinales au vertex  $z \equiv x/\xi$ . La fonction de splitting contient un pôle en  $x = 0$ , qui, après intégration, donnera également naissance à un facteur logarithmique. Ce sont les émissions de gluons mous qui sont responsables de cette singularité. Elle ne présente

pas de caractère pathologique ici, car on ne peut mesurer de gluon d'impulsion longitudinale arbitrairement faible : par conséquent, la limite observationnelle nous imposera toujours une borne inférieure finie sur toute intégration en  $x$ . Les comportements logarithmiques que nous rencontrons dans le contexte de ce calcul sont caractéristiques des deux types de "singularités" auxquelles on a affaire en théorie de jauge : les singularités colinéaires, qui proviennent du fait qu'une particule de masse nulle ou faible a une masse invariante proche de celle de la même particule habillée de bosons de jauge d'impulsions colinéaires, et les singularités infrarouges, qui résultent du rayonnement de gluons d'impulsions faibles. Incidemment, on connaît des théorèmes généraux qui stipulent que ces singularités se compensent pour des observables suffisamment inclusives [Bloch 37, Kinoshita 62, Lee 64].

La densité de quarks se déduit à cet ordre de la densité de gluons en remplaçant simplement la fonction de splitting par  $\widehat{P}_{qq}(x) = \widehat{P}_{gq}(1-x)$ , c'est-à-dire :

$$\widehat{P}_{qq}(x) = C_F \frac{1+x^2}{1-x} . \quad (2.16)$$

Cette fois-ci, on a un pôle en  $x=1$  dû à l'émission par le quark auquel on s'intéresse d'un gluon très mou, qui ne modifie quasiment pas son impulsion. Ici, rien ne nous protège *a priori* des divergences induites par cette singularité. Nous verrons cependant plus loin comment cette dernière est naturellement régularisée dans l'expression des quantités mesurables.

### 2.1.2 Densité de gluons dans un gluon primordial

Calculons maintenant l'évolution à l'ordre le plus bas d'un *gluon* initial. La méthode étant la même, nous nous contentons d'esquisser les principales étapes du calcul. La fonction d'onde d'un gluon d'impulsion  $\vec{p}$ , de polarisation  $\lambda$  et de couleur  $C$  en deux gluons d'impulsions respectives  $\vec{p}'$  et  $\vec{k}$ , de polarisations  $\lambda'$ ,  $\eta$  et de couleurs  $C'$  et  $D$  s'écrit (équation (1.54) page 17) :

$$\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k})\psi_{\{\lambda'\eta,C'D\}}^{(1)}(\vec{k}) = \frac{\{\lambda'\eta,C'D\}\langle\vec{p}',\vec{k}|\mathcal{H}_I^{ggg}|\vec{p}\rangle_{\{\lambda,C\}}}{p'^-+k^- - p^-} , \quad (2.17)$$

où  $\mathcal{H}_I^{ggg}$  est l'élément du hamiltonien QCD qui correspond au couplage de trois gluons (équation (1.41) page 16) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^{ggg} &= \int d^3\vec{x} : 2g_s \text{Tr} (i\partial^\mu A^\nu(x)[A_\mu(x), A_\nu(x)]) : \\ &= \sum_{C'C'D} -g_s f^{CC'D} \int d^3\vec{x} : \partial^\mu A_D^\nu(x) A_\mu^C(x) A_\nu^{C'}(x) : . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Après un peu d'algèbre opératorielle, l'élément de matrice présent au numérateur de l'équation de départ (2.17) se transforme essentiellement en un produit de vecteurs polarisation :

$$\begin{aligned} \{\lambda'\eta,C'D\}\langle\vec{p}',\vec{k}|\mathcal{H}_I^{ggg}|\vec{p}\rangle_{\{\lambda,C\}} &= \delta^3(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k}) \frac{if^{CC'D}g_s}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{\varepsilon_\lambda^{*\mu}(-\vec{p})}{\sqrt{2p^+}} \frac{\varepsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{p}')}{\sqrt{2p'^+}} \frac{\varepsilon_\eta^\rho(\vec{k})}{\sqrt{2k^+}} \times \\ &\quad \times ((k-p')_\mu g_{\nu\rho} - (p+k)_\nu g_{\rho\mu} + (p+p')_\rho g_{\mu\nu}) . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Remarquons dès à présent qu'en vertu de la propriété  $\kappa \cdot \varepsilon(\kappa) = 0$ , il est facile de voir que le dernier terme domine lorsque le gluon d'impulsion  $\vec{k}$  est mou, i.e. lorsque  $|\vec{k}| \ll |\vec{p}|$ . Nous nous servirons de cette observation lorsque nous nous intéresserons à la limite des petites impulsions longitudinales (section (2.4.1)).

Le dénominateur d'énergie est donné par l'équation (2.10), et la paramétrisation des impulsions par l'équation (2.12). On obtient la densité de gluons intégrée à l'échelle  $Q$  en prenant le carré de la fonction d'onde, la moyenne sur la polarisation et couleur de l'état initial et la somme sur ces mêmes nombres quantiques pour l'état final. Pour ce faire, il est utile de prendre une forme explicite pour les vecteurs de polarisation des gluons. Les contraintes de choix de jauge ( $\eta \cdot \varepsilon = 0$ ) et de transversalité ( $p \cdot \varepsilon(p) = 0$ ) entraînent  $\varepsilon_\lambda^\mu(\vec{p}) = (0, \mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda^\perp / p^+, \varepsilon_\lambda^\perp)$ , où  $\varepsilon_\lambda^\pm = (1, \pm i) / \sqrt{2}$ . Puis, on remarque la propriété  $\sum_\lambda (\varepsilon_\lambda^\perp \cdot \mathbf{a}) (\varepsilon_\lambda^{*\perp} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

La densité de gluons dans un gluon primordial est définie à partir de la fonction d'onde (2.17) de la même manière que la densité de gluons dans un quark initial, donnée par la formule (2.5). Les manipulations simples décrites précédemment permettent d'arriver au résultat suivant pour la densité *intégrée* :

$$\mathcal{G}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \left[ C_A \left( \frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (2.20)$$

La fonction de splitting de ce processus s'identifie à la fonction de  $x$  factorisée entre les parenthèses :

$$\widehat{P}_{gg}(x) = C_A \left( \frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right), \quad (2.21)$$

qui présente les deux pôles infrarouges en  $x=0$  et  $x=1$ .

Dans le même esprit, on pourrait calculer la création d'une paire  $q\bar{q}$  à partir d'un gluon<sup>1</sup>. On trouverait que ce processus est associé à la fonction de splitting suivante :

$$\widehat{P}_{gq}(x) = T_R (x^2 + (1-x)^2), \quad (2.22)$$

où  $T_R$  est défini par l'équation  $\delta^{AB} T_R \equiv \text{Tr}(t^A t^B)$ . Celle-ci ne présente pas de pôle infrarouge : seules les fonctions de splitting associées à l'émission d'un boson de jauge ( $\widehat{P}_{gg}$  ou  $\widehat{P}_{qq}$ ) sont singulières.

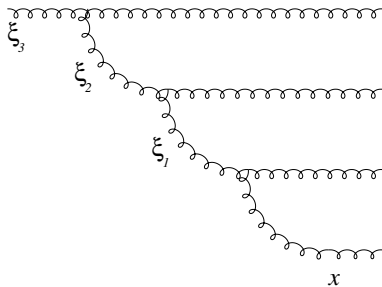


FIG. 2.2 – Fluctuations d'un gluon à l'ordre 3.

Jusqu'à présent, ces calculs simples effectués au premier ordre en  $\alpha_s$  sont exacts. Cependant, la forme obtenue doit beaucoup d'une part à la simplicité de l'élément de matrice évalué, d'autre part au repère choisi dans lequel l'impulsion du parton nu n'a pas de composante transverse. L'extension du calcul de la densité de gluons aux ordres supérieurs se révèle très difficile, et dans cette approche, il faut renoncer à un calcul exact à tous les ordres. Par contre, on peut par exemple se limiter à mesurer des partons qui ont une grande impulsion transverse, d'ordre  $Q^2$ , par rapport à l'échelle transverse initiale ou à défaut par rapport au *cut-off* infrarouge  $\mu^2$  et ne calculer, ordre par ordre, que les termes dominants dans cette limite. On peut aussi adopter un point de vue complémentaire, et ne

s'intéresser qu'aux partons ayant une fraction d'impulsion longitudinale  $x$  faible. Ces deux limites sont examinées plus en détail dans les sections suivantes. D'autre part, nous verrons plus loin que la sélection expérimentale de l'une ou l'autre de ces limites est possible, et équivaut à restreindre l'analyse des données de diffusion de hadrons à certaines régions cinématiques.

<sup>1</sup>Nous serons amenés à calculer le processus d'électrodynamique  $\gamma \rightarrow q\bar{q}$  dans le chapitre suivant. En échangeant les facteurs de charge électrique et de couleur, c'est le même calcul que pour le processus de chromodynamique correspondant.

## 2.2 Extension à tous les ordres : doubles logarithmes dominants

Dans cette section, on suppose que la sonde employée pour mesurer la densité de partons à  $\tau = 0$  n'est sensible qu'aux partons ayant à la fois une très grande impulsion transverse, et une très petite impulsion longitudinale par rapport à celles de la distribution initiale de partons. À ce moment-là, pour calculer la fonction d'onde, il nous suffit de considérer les cascades de partons pour lesquelles chaque nouvelle particule émise porte une grande impulsion transverse et une petite impulsion longitudinale par rapport à son parton parent. Que les termes dominants soient générés par de telles configurations dans la limite considérée est relativement intuitif; nous tenterons cependant de donner *a posteriori* quelques arguments heuristiques pour accréditer cette hypothèse.

Examinons donc dans ce contexte le cas simple de l'évolution d'un gluon initial, en ne conservant que la partie la plus singulière des émissions successives, à la fois en impulsion transverse  $\mathbf{k}^2$  et en fraction d'impulsion longitudinale  $\xi$ . Nous avons déjà remarqué que de toutes les fonctions de splitting qui impliquent l'évolution d'un gluon, seule  $\widehat{P}_{gg}(z)$  est singulière en  $z \rightarrow 0$ , et s'écrit dans cette limite :  $\widehat{P}_{gg}(z) \simeq C_A/z$ . Si  $\mathcal{G}^{(n)}$  désigne la densité de gluons à l'ordre  $n$ , c'est-à-dire après  $n$  émissions de partons, on peut écrire la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(n+1)}(x, Q^2) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}_n^2}{\mathbf{k}_n^2} \int dz \widehat{P}_{gg}(z) \int d\xi_n \mathcal{G}^{(n)}(\xi_n, \mathbf{k}_n^2) \delta(x - z\xi_n) \\ \Rightarrow x \mathcal{G}^{(n+1)}(x, Q^2) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}_n^2}{\mathbf{k}_n^2} \int_x^1 \frac{d\xi_n}{\xi_n} C_A \xi_n \mathcal{G}^{(n)}(\xi_n, \mathbf{k}_n^2) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Cette factorisation des ordres successifs repose explicitement sur le fait que les échelles transverses liées aux émissions successives sont très différentes : à chaque nouvelle étape ( $n+1$ ), on peut se contenter de ne conserver de l'étape antérieure ( $n$ ) que la mémoire de la distribution de gluons *intégrée* jusqu'à une échelle  $\mathbf{k}_n^2$ , (très) inférieure à celle de la nouvelle émission. Ainsi, du point de vue de l'étape ( $n+1$ ), on néglige l'impulsion transverse des gluons de l'étape ( $n$ ). Le gluon ( $n+1$ ) ne "voit" que des gluons bien distincts, et aucun effet de cohérence n'est à prendre en compte. Cette remarque permet notamment de s'affranchir des difficultés qui surviendraient si on tenait compte précisément des sommes vectorielles des impulsions transverses à deux dimensions.

En choisissant pour condition initiale un gluon de tri-impulsion  $\vec{p} = (p^+, \mathbf{0})$ , donc caractérisé par la densité  $\mathcal{G}(x, Q^2) = \delta(1-x)$ , la récurrence précédente se résout simplement :

$$\begin{aligned} x \mathcal{G}^{(n)}(x, Q^2) &= \left( \frac{\alpha_s C_A}{\pi} \right)^n \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}_n^2}{\mathbf{k}_n^2} \dots \int_{\mu^2}^{k_2^2} \frac{d\mathbf{k}_1^2}{\mathbf{k}_1^2} \int_x^1 \frac{d\xi_n}{\xi_n} \dots \int_{\xi_2}^1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} \xi_1 \delta(1-\xi_1) \\ &= \frac{1}{n!(n-1)!} \left( \frac{\alpha_s C_A}{\pi} \right)^n \left( \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^n \left( \log \frac{1}{x} \right)^{n-1} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le produit des factorielles au dénominateur est un facteur combinatoire qui signe le double ordonnancement, à la fois en  $\mathbf{k}^2$  et en  $\xi$ . La distribution de gluons à tous les ordres  $x \mathcal{G}$  est la

série de ces termes :

$$x \mathcal{G}(x, Q^2) = \sum_{n=1}^{\infty} x \mathcal{G}^{(n)}(x, Q^2) = \sqrt{\frac{\alpha_s C_A \log Q^2 / \mu^2}{\pi \log 1/x}} \cdot I_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\alpha_s C_A}{\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \log \frac{1}{x}} \right) \quad (2.25)$$

$$\underset{1/x, Q^2 \rightarrow \infty}{\simeq} \exp \left( 2 \sqrt{\frac{\alpha_s C_A}{\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2} \log \frac{1}{x}} \right),$$

où  $I_1$  est une fonction de Bessel, dont le comportement asymptotique

$$I_1(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \exp(x) / \sqrt{2\pi x} \quad (2.26)$$

conduit à l'approximation donnée ci-dessus. Tous les termes comportent  $n$  facteurs  $\alpha_s \log(Q^2/\mu^2)$  et  $(n-1)$  facteurs  $\log(1/x)$ . On a sommé la série des *doubles<sup>2</sup> logarithmes dominants* (DLL). On remarque que d'après ce schéma, la densité de gluons croît très rapidement avec  $\log(1/x)$  et/ou  $\log(Q^2/\mu^2)$ , plus rapidement que n'importe quelle puissance de l'une de ces quantités.

Justifions maintenant le fait que le terme dominant de chaque ordre s'obtienne en hiérarchisant strictement les émissions successives, lorsqu'on sélectionne des partons caractérisés par des échelles très différentes. Il est clair que la substitution d'une des bornes d'intégration  $\mathbf{k}_i^2$  par  $\lambda \mathbf{k}_i^2$  dans la formule (2.24) génère en plus du terme double-logarithmique, un terme dans lequel l'un des facteurs  $\log(Q^2/\mu^2)$  est remplacé par  $\log \lambda$ , qui est *sous-dominant* dans l'approximation considérée. Les domaines d'intégration bornés par exemple inférieurement par  $\mathbf{k}_i^2$  et supérieurement par  $\lambda \mathbf{k}_i^2$ ,  $\lambda$  d'ordre unité, ne contribuent donc pas à l'ordre dominant en  $Q^2$ , ce qui signifie que les régions cinématiques dans lesquelles deux partons de la chaîne ont des impulsions transverses comparables peuvent être négligées. Quant à l'*ordonnement* proprement dit en "date" d'émission, il résulte en partie d'un choix : comme on se place dans les limites asymptotiques en  $Q^2$  et  $1/x$ , le parton mesuré possède la plus grande impulsion transverse et la plus petite impulsion longitudinale. De tous les partons restants, son parton parent est choisi comme ayant l'impulsion transverse la plus grande. Le cas où les échelles d'impulsion transverse de ces particules sont du même ordre ne contribue pas au DLL, comme nous l'avons vu ci-dessus. Ce parton parent a également l'impulsion longitudinale la plus faible au sein du lot restant, bien qu'elle soit très supérieure à celle du parton mesuré. En effet, si ce n'était pas le cas, l'un des gluons de la chaîne serait émis avec une valeur de partage de l'énergie au vertex  $z$  proche de 1, et cette émission ne conduirait alors pas à un facteur  $\log(1/x)$  ; un tel déficit de ces facteurs caractérise les termes d'ordre sous-dominant en  $\log(1/x)$ .

Cet ordonnancement apparaît cependant comme naturel d'un point de vue physique, si on considère le *temps de vie*  $\Delta\tau$  d'une fluctuation d'un parton (d'impulsions  $\vec{p}$ ) en deux partons (d'impulsion  $\vec{p}'$  et  $\vec{k}$ ). D'après les relations d'incertitude d'Heisenberg, comme la variable d'énergie sur le cône de lumière  $p^-$  est conjuguée à  $\tau$ , on a  $\Delta\tau \cdot \Delta p^- \sim 1$ , où  $\Delta p^-$  est le dénominateur d'énergie de l'équation (2.10), qui représente l'amplitude de la violation de la conservation de l'énergie du cône de lumière que coûte la fluctuation partonique. Ceci conduit à un temps de vie proportionnel à  $k^+/\mathbf{k}^2$ , ce qui signifie que les partons sont produits à des dates  $\tau$  d'autant plus proches de  $\tau=0$  qu'ils ont des impulsions longitudinales faibles, et des impulsions transverses élevées.

### 2.3 Limite des grandes impulsions transverses

Nous allons maintenant nous affranchir de l'hypothèse stipulant que le parton mesuré a une impulsion longitudinale faible par rapport aux partons initiaux, et examiner simplement la limite dans laquelle seul  $Q^2$  est grand. Ceci nous conduira aux équations DGLAP.

<sup>2</sup>Le fait qu'il y ait un facteur  $\log(1/x)$  de moins par rapport aux nombre de facteurs  $\alpha_s \log(Q^2/\mu^2)$  résulte simplement de notre choix de *fixer* la fraction d'impulsion longitudinale du parton le plus mou.

L'approche probabiliste que nous choisissons est bien adaptée pour l'écriture de programmes de simulation Monte-Carlo. On pourra par exemple se reporter à la référence [Ellis 96] pour avoir des détails supplémentaires.

### 2.3.1 Variation des densités de partons lors d'un accroissement du moment transverse mesuré

Les équations (2.14) et (2.20) donnent la densité de gluons dans un quark (resp. un gluon) initial. C'est aussi la probabilité de présence d'un gluon d'impulsion longitudinale fixée et d'impulsion transverse plus petite que  $Q$ . Généralisons maintenant ces équations à tous les ordres de la théorie des perturbations. La probabilité de présence dans un parton  $j$ , d'un parton  $i$  d'impulsion transverse  $\mathbf{k}$  à  $d^2\mathbf{k}$  près et de fraction d'impulsion longitudinale (par rapport à  $j$ )  $z$  à  $dz$  près, est donnée par une expression similaire à celle de l'équation (2.13), en remplaçant la fonction de splitting  $\hat{P}_{gq}$  par la fonction de splitting générique  $\hat{P}_{ij}$ , et en multipliant par la mesure de l'espace des impulsions  $dz d^2\mathbf{k}$  :

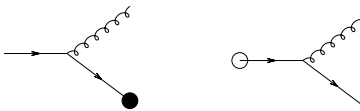
$$d\hat{P}_{ij}(z, \mathbf{k}) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{k}}{\pi\mathbf{k}^2} \hat{P}_{ij}(z) dz \quad \Rightarrow \quad d\hat{P}_{ij}(z, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} d(\log Q^2) \hat{P}_{ij}(z) dz, \quad (2.27)$$

où l'on a intégré sur l'angle dans le plan transverse et posé  $\mathbf{k}^2 = Q^2$  pour obtenir la seconde égalité. Écrivons maintenant la variation de la densité *intégrée*  $f_i$  de partons de type  $i$  par changement d'échelle transverse de  $Q^2$  à  $Q^2 + \delta Q^2$  :

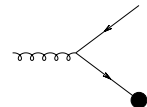
$$\begin{aligned} \delta f_i(x, Q^2) &= \sum_j \int_0^1 d\hat{P}_{ij}(z, Q^2) \int_0^1 d\xi f_j(\xi, Q^2) \delta(x - z\xi) - \sum_j \int d\hat{P}_{ji}(z, Q^2) f_i(x, Q^2) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial f_i(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \int_0^1 dz \sum_j \left[ \hat{P}_{ij}(z) \frac{1}{z} f_j\left(\frac{x}{z}\right) - \hat{P}_{ji}(z) f_i(x) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans un cas concret,  $f_i$  est à remplacer par la densité de gluons  $\mathcal{G}$  ou par la densité de quarks  $\mathcal{Q}$  d'une saveur particulière. Le premier terme représente le nombre de partons de type  $i$  ayant une tri-impulsion  $\vec{k} = (xp^+, \mathbf{k})$  (avec  $\mathbf{k}^2 < Q^2 + \delta Q^2$ ), créés à partir du parton  $j$  de tri-impulsion  $(\xi p^+, \mathbf{p})$  (avec  $\mathbf{p}^2 < Q^2$ ). Le second terme, négatif, figure le nombre de partons  $(xp^+, \mathbf{p})$  qui se disparaissent de la région cinématique qui nous intéresse en se transformant en des particules ayant d'autres caractéristiques cinématiques, et qu'il convient donc de soustraire. Notons que  $\delta f_i$  est bien une quantité physique : elle correspond à la variation de la densité de partons  $j$  que l'on mesure lorsque l'on change de résolution, de  $Q^2$  à  $Q^2 + \delta Q^2$ .

Spécialisons-nous au cas où le parton  $i$  est un quark. On obtient immédiatement :



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \int_0^1 dz \left[ \hat{P}_{qq}(z) \frac{1}{z} \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right) - \hat{P}_{gq}(z) \mathcal{Q}(x) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dz \hat{P}_{qg}(z) \frac{1}{z} \mathcal{G}\left(\frac{x}{z}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$



Sur la représentation graphique qui symbolise chacun des termes, un disque noir marque le parton créé, et un cercle le parton perdu. Au nombre de quarks qui entrent dans la région cinématique  $(x, Q^2 + \delta Q^2)$  par le rayonnement d'un gluon (1er terme), on soustrait le nombre de ceux qui quittent cette région par le processus symétrique (2ème terme). À ceci, il convient d'ajouter les paires  $q\bar{q}$  créées à partir des gluons (3ème terme).

En faisant le changement de variable  $z \rightarrow 1-z$  sur le second terme et en se souvenant de la relation  $\widehat{P}_{qq}(z) = \widehat{P}_{gq}(1-z)$ , on peut simplifier cette écriture comme suit :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \int_0^1 dz \widehat{P}_{qq}(z) \left[ \frac{1}{z} \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right) - \mathcal{Q}(x) \right] + \int_0^1 dz \widehat{P}_{gq}(z) \frac{1}{z} \mathcal{G}\left(\frac{x}{z}\right) \right). \quad (2.30)$$

Le terme négatif du premier intégrant peut alors être absorbé dans une redéfinition de la fonction de splitting correspondante selon la substitution  $\widehat{P}_{qq}(z) \rightarrow P_{qq}(z)$ , avec :

$$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+. \quad (2.31)$$

En effet, la prescription “+” transforme une fonction  $g(z)/(1-z)$  en une distribution de type “valeur principale”  $(g(z)/(1-z))_+$ , que l'on caractérise de manière générale par son action sur une fonction-test  $f(z)$  :

$$\int dz f(z) \left( \frac{g(z)}{1-z} \right)_+ \equiv \int dz g(z) \frac{f(z) - f(1)}{1-z}. \quad (2.32)$$

Ici, on a  $f(z) = \mathcal{Q}(x/z)/z$  et le première intégrale de l'équation (2.30) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \widehat{P}_{qq}(z) \left( \frac{1}{z} \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right) - \mathcal{Q}(x) \right) &= \int_0^1 dz \left( \widehat{P}_{qq}(z) \cdot (1-z) \right) \frac{\mathcal{Q}(x/z)/z - \mathcal{Q}(x)}{1-z} \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \left( \frac{\widehat{P}_{qq}(z)(1-z)}{1-z} \right)_+ \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Notons au passage qu'on peut développer l'expression de  $P_{qq}(z)$  de l'équation (2.31) en se servant de la définition de la distribution “+”. On aboutit à :

$$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right), \quad (2.34)$$

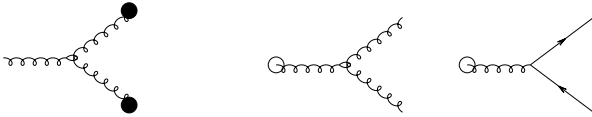
qui est une expression plus usuelle pour cette quantité. Remarquons dès à présent que le pôle de la fonction de splitting en  $z=1$  est régularisé : le petit raisonnement probabiliste qui nous a conduit à la redéfinition de la fonction de splitting est en fait équivalent à la prise en compte de corrections virtuelles qui se manifestent, dans le langage des graphes, par un diagramme de *self-énergie* dans lequel aucun gluon n'est rayonné. Celui-ci est exactement à l'origine du terme proportionnel à “ $\delta(1-z)$ ” dans l'équation (2.34).

Ainsi, l'évolution de la densité de quarks s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( P_{qq}(z) \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right) + P_{qg}(z) \mathcal{G}\left(\frac{x}{z}\right) \right), \quad (2.35)$$

où la borne inférieure  $x$  de l'intégrale sur  $z$  provient de la conservation de l'impulsion : un parton de fraction d'impulsion longitudinale  $x$  est forcément issu d'un parton dont la fraction d'impulsion longitudinale  $\xi$  est supérieure à  $x$ .

Traisons maintenant le cas où le parton  $i$  que l'on mesure est un gluon. En reprenant l'équation (2.28), on obtient :



$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \int_0^1 dz \left[ 2\widehat{P}_{gg}(z) \frac{1}{z} \mathcal{G}\left(\frac{x}{z}\right) - \widehat{P}_{gg}(z) \mathcal{G}(x) - \widehat{P}_{qg}(z) \mathcal{G}(x) \right] + \widehat{P}_{gq}(z) \frac{1}{z} \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right) \right) \quad (2.36)$$

Cette équation traduit le fait que les gluons sont créés par le couplage d'un gluon initial à une paire de gluons (1er terme : la symétrie entre les gluons finals explique la présence du facteur 2), et sont perdus dans ce même processus (2ème terme) ou bien dans le couplage d'un gluon à une paire  $q\bar{q}$  (3ème terme). Ils peuvent aussi être générés radiativement par le courant d'un quark (dernier terme). On trouve alors l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( P_{gg}(z) \mathcal{G}\left(\frac{x}{z}\right) + P_{gq}(z) \mathcal{Q}\left(\frac{x}{z}\right) \right), \quad (2.37)$$

où la fonction de splitting  $P_{gg}(z)$  est définie par :

$$P_{gg}(z) = 2C_A \left( \left( \frac{z}{1-z} + \frac{z(1-z)}{2} \right)_+ + \frac{1-z}{z} + \frac{z(1-z)}{2} \right) - \frac{2}{3} N_f T_R \delta(1-z). \quad (2.38)$$

L'entier  $N_f$  désigne comme d'habitude le nombre de saveurs de quarks. L'autre fonction de splitting en jeu ne nécessite aucune régularisation.

On donne dans la table (2.3.1) la liste complète des fonctions de splitting à l'ordre le plus bas, régularisées à l'aide de la prescription décrite dans l'équation (2.32), et écrites sous leur forme la plus usuelle, en manipulant éventuellement cette définition.

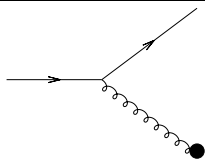
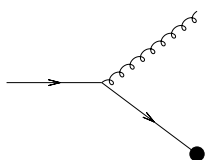
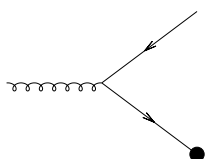
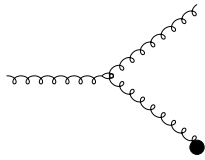
### 2.3.2 Equations de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi

En rassemblant les équations obtenues dans la section précédente, on obtient un système intégral-différentiel d'évolution, en échelle d'impulsion transverse  $Q^2$ , des densités de quarks et de gluons. Il manque cependant un élément important : comme les émissions successives de partons se font à des  $Q^2$  très différents, par définition du  $LLQ^2$ , la valeur de la constante de couplage  $\alpha_s$  doit être prise précisément à l'échelle  $Q^2$  du parton qui a l'impulsion transverse la plus grande. Le fait que ce soit effectivement cette échelle qu'il faille prendre en compte n'est pas complètement évident : on se référera à l'article de revue [Dokshitzer 80] pour plus de détails.

En apportant cette modification aux équations (2.35) et (2.37), on aboutit au système matriciel suivant [Gribov 72, Dokshitzer 77, Altarelli 77] :

$$\frac{\partial}{\partial \log Q^2} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}(x, Q^2) \\ \mathcal{G}(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \begin{pmatrix} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right), P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ P_{gq}\left(\frac{x}{\xi}\right), P_{gg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}(\xi, Q^2) \\ \mathcal{G}(\xi, Q^2) \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$



	$P_{gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{x}$
	$P_{qq}(z) = C_F \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right)$
	$P_{gg}(z) = T_R (z^2 + (1-z)^2)$
	$P_{gg}(z) = 2C_A \left( \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right) + \delta(1-z) \frac{11C_A - 4N_f T_R}{6}$

TAB. 2.1 – Fonctions de splitting (régularisées) d'Altarelli-Parisi. Le disque noir marque le parton sondé.

Son interprétation physique est intuitive et découle du raisonnement probabiliste dont nous sommes servis pour l'établir. Lorsque l'échelle de résolution  $Q^2$  qu'on se fixe augmente, le nombre de gluons dans la fonction d'onde d'un objet hadronique, constitué d'une distribution de partons croît selon deux mécanismes : soit l'un des quarks rayonne un gluon, soit l'un des gluons se divise. La distribution de quarks est quant à elle modifiée par le couplage de gluons à des paires  $q\bar{q}$  du vide, qui crée de nouveaux quarks et antiquarks, et par le rayonnement de gluons, qui modifie les caractéristiques cinématiques des quarks parents. Comme nous l'avons vu, la disparition de certains partons dans ces processus est automatiquement prise en compte par la régularisation des fonctions de splitting que nous avons effectuée.

La forme des équations DGLAP rappelle celle des équations du groupe de renormalisation. C'est en effet bien l'indépendance des quantités physiques dans le *cutoff* de régularisation, ou de façon équivalente dans l'échelle de factorisation, qu'elles traduisent : pour mieux le voir, il suffit de remplacer les fonctions de  $Q^2$  de l'équation (2.39) par des fonctions de  $\mu^2$ , ce qui est équivalent, car les dépendances en ces deux variables dans les processus du premier ordre que nous avons calculés apparaissent uniquement au travers du facteur  $\log(Q^2/\mu^2)$ .

**Limite des doubles logarithmes dominants.** La limite DLL de ces équations présente une croissance asymptotique en  $Q^2$  plus faible que celle estimée par le calcul naïf de l'équation (2.25). En effet, puisqu'il convient de tenir compte de la constante de couplage effective, il faut remplacer chacun des facteurs  $\log(Q^2/\mu^2) = \int_{\mu^2}^{Q^2} d\mathbf{k}^2/\mathbf{k}^2$  de l'équation (2.25) par :

$$\int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2} \alpha_s(\mathbf{k}^2) = \frac{1}{b} \log \frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)}. \quad (2.40)$$

Il en découle le comportement asymptotique suivant pour la densité de gluons :

$$x \mathcal{G}(x, Q^2) \underset{1/x, Q^2 \rightarrow \infty}{\simeq} \exp \left( 2 \sqrt{\frac{C_A}{b\pi} \log \frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(\mu^2/\Lambda^2)} \log \frac{1}{x}} \right). \quad (2.41)$$

## 2.4 Limite des petites impulsions longitudinales

Dans cette section, nous nous plaçons dans le régime cinématique complémentaire à celui de la section précédente : seuls les partons très mous de la fonction d'onde sont mesurés.

Nous reproduisons ici l'approche décrite dans la référence [Mueller 94a], qui consiste à calculer la fonction d'onde à  $n+2$  partons d'un (quark)onium, formé d'une paire quark-antiquark lourds de masse  $m \gg \Lambda$ , liés en un singulet de couleur. Ce calcul permet de trouver l'équation de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL).

Dans ce cas très idéalisé, les calculs perturbatifs sont applicables, car les échelles de distances typiques en jeu,  $L \ll 1/(2m)$ , sont petites.

Cet objet pourrait physiquement être le méson-vecteur  $J/\Psi$  constitué d'une paire  $c\bar{c}$  (charmonium) : en effet, chacun des quarks charmés qui le constituent a une masse de l'ordre de 1,5 GeV tandis que leur état lié  $J/\Psi$  a une masse de 3,097 MeV, ce qui n'est pas très loin du double de la masse du quark  $c$ . Ceci montre que, contrairement au cas du proton évoqué dans l'introduction, les énergies de liaison en jeu ici sont faibles. Ce modèle présente l'avantage de fournir un cadre dans lequel les calculs perturbatifs sont complètement justifiés. Néanmoins, l'objet physique dont on mesure actuellement la densité partonique auprès des accélérateurs est le proton, qui n'est *a priori* pas caractérisé par des échelle de courtes distances. Nous évoquerons plus loin une façon de modéliser la structure interne du proton à haute énergie en prenant néanmoins de tels calculs perturbatifs pour point de départ.

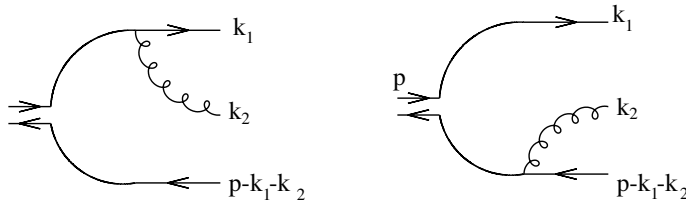


FIG. 2.3 – Diagrammes d'émission d'un gluon par un onium au premier ordre.

Les calculs effectués ici se limiteront à sélectionner à chaque ordre les termes les plus singuliers lorsque  $x$  tend vers 0 : on obtiendra l'ordre des logarithmes de  $1/x$  dominants. Comme seuls les splittings  $q \rightarrow qg$  et  $g \rightarrow gg$  sont singuliers dans cette limite, les  $n+2$  partons de la fonction d'onde sont constitués des deux quarks initiaux accompagnés de  $n$  gluons rayonnés. De plus, comme l'onium est faiblement lié à l'échelle d'énergie à laquelle on se place, on ne prend pas en compte explicitement les échanges de gluons qui contribuent à son énergie de liaison. Sa fonction d'onde au temps  $\tau = -\infty$  représente alors une paire  $q\bar{q}$  de quarks libres, et s'écrit :

$$|\psi(\tau = -\infty)\rangle = \int d^3 \vec{\kappa}_1 \psi^{(0)}(\vec{\kappa}_1) |\vec{p} - \vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_1\rangle, \quad (2.42)$$

où l'état  $|\vec{p} - \vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_1\rangle$  est constitué d'un quark d'impulsion  $\vec{\kappa}_1$  et d'un antiquark d'impulsion  $\vec{p} - \vec{\kappa}_1$ . On ne précise pas les nombres quantiques des quarks.

D'après l'équation (1.56) page (18), la fonction d'onde à temps fini  $|\psi(\tau = 0)\rangle$  se développe selon :

$$\begin{aligned} |\psi(\tau = 0)\rangle &= |\psi(\tau = -\infty)\rangle + \sum_{\lambda_2, C_2} \int d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2 \psi_{\lambda_2, C_2}^{(1)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \left[ |\vec{p} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle \otimes |\vec{k}_2\rangle_{\lambda_2, C_2} \right] \\ &+ \sum_{\lambda_2 \lambda_3, C_2 C_3} \int d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2 d^3 \vec{k}_3 \psi_{\lambda_2 \lambda_3, C_2 C_3}^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \times \\ &\times \left[ |\vec{p} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3, \vec{k}_1\rangle \otimes |\vec{k}_2, \vec{k}_3\rangle_{\lambda_2 \lambda_3, C_2 C_3} \right] + \dots \quad (2.43) \end{aligned}$$

L'état  $|\vec{p} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle \otimes |\vec{k}_2\rangle_{\lambda_2, C_2}$  est un quark d'impulsion  $\vec{k}_1$ , un gluon d'impulsion  $\vec{k}_2$ , de polarisation  $\lambda_2$  et de couleur  $C_2$  et un antiquark d'impulsion  $\vec{p} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ , et ainsi de suite.

On ne calculera dans un premier temps que les termes des fonctions d'ondes  $\psi^{(k)}$  qui correspondent à  $k$  particules "réelles" produites à  $\tau = 0$ , c'est-à-dire que pour un état final donné, on ne conservera que les termes d'ordre le plus bas en la constante de couplage. Les corrections virtuelles ont pour effet de renormaliser les fonctions d'onde, et on verra qu'on peut, comme dans le cas de l'équation DGLAP, en tenir compte *in fine* par un raisonnement probabiliste.

### 2.4.1 Premier ordre

Le calcul de la fonction d'onde  $\psi^{(1)}$  s'effectue en utilisant la formule (1.54) à l'ordre le plus bas. L'état  $|\omega\rangle$  est formé d'un quark, d'un antiquark et d'un gluon, et l'état  $|\omega_0\rangle$  est donné par la formule (2.42). Le terme du hamiltonien d'interaction qui intervient ici est  $\mathcal{H}_I^{q\bar{q}g}$  (voir

la formule (1.43) page (16)) :

$$\begin{aligned} & \delta^3(\vec{p}-\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{p}')\psi_{\lambda_2, C_2}^{(1)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \\ &= \int d^3\vec{k}_1 \frac{[\langle \vec{p}', \vec{k}_1 | \otimes_{\{\lambda_2, C_2\}} \langle \vec{k}_2 |] \mathcal{H}_I^{q\bar{q}g} [\psi^{(0)}(\vec{k}_1) | \vec{p}-\vec{k}_1, \vec{k}_1]}{(p-\kappa_1)^- + \kappa_1^- - p' - k_1^- - k_2^-}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En employant les mêmes techniques que dans la section précédente, on exprime facilement  $\psi^{(1)}$  en représentation d'impulsion en fonction des états propres de l'hélicité  $u, v$  et  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_2, C_2}^{(1)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \frac{g_s}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_2^+}} \left( \frac{\bar{u}^{(\alpha')}(\vec{k}_1) (\gamma \cdot \varepsilon^{\lambda_2}(k_2)) t^{C_2} u^{(\alpha)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{\sqrt{2k_2^+} \sqrt{2(k_1 + k_2)^+}} \frac{\psi^{(0)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{(k_1 + k_2)^- - k_1^- - k_2^-} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{v}^{(\beta')}(\vec{p}-\vec{k}_1-\vec{k}_2) (\gamma \cdot \varepsilon^{\lambda_2}(k_2)) t^{c_2} v^{(\beta)}(\vec{p}-\vec{k}_1)}{\sqrt{2(p-k_1-k_2)^+} \sqrt{2(p-k_1)^+}} \frac{\psi^{(0)}(\vec{k}_1)}{(p-k_1)^- - (p-k_1-k_2)^- - k_2^-} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Les deux termes de cette expression correspondent respectivement aux deux diagrammes représentés sur la figure (2.3). Le signe “ $-$ ” est une conséquence du produit normal présent dans  $\mathcal{H}_I^{q\bar{q}g}$  et des propriétés d'anticommuation des opérateurs fermioniques.

À ce stade, on peut utiliser l'approximation eikonale pour évaluer les produits de spineurs du type  $\bar{u}\gamma^\mu u$ . En effet, d'une part la limite de haute énergie implique que  $k_i^+ \gg |\mathbf{k}_i|$ , d'autre part comme on ne cherche qu'à conserver les logarithmes dominants, les impulsions longitudinales des partons successifs de la fonction d'onde sont hiérarchisées :  $k_{i+1}^+ \ll k_i^+$ . Ceci entraîne en particulier que  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 \simeq \vec{k}_1$ . Comme la normalisation des spineurs a été choisie telle que  $\bar{u}(l)\gamma^\mu u(l) = l^\mu$ , on trouve :

$$\bar{u}^{(\alpha')}(\vec{k}_1)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \simeq \bar{u}^{(\alpha')}(\vec{k}_1)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(\vec{k}_1) = 2\delta_{\alpha\alpha'} k_1^\mu. \quad (2.46)$$

On peut réécrire ce résultat de manière un peu plus formelle et plus générale : l'élément de matrice pour l'émission d'un gluon d'impulsion  $k^\mu$ , de polarisation  $\lambda$  et de couleur  $C$  par un quark d'impulsion  $p^\mu$ , d'hélicité  $\alpha$  et de couleur  $a$  vaut, à la limite où les composantes de  $k$  sont petites devant celles de  $p$  :

$$\{\lambda\alpha', C\alpha'\} \langle \vec{k}, \vec{p}' | \mathcal{H}_I^{q\bar{q}g} | \vec{p} \rangle_{\{\alpha a\}} = \frac{g_s t_{aa'}^C 2p \cdot \varepsilon_\lambda(k) \delta^{\alpha\alpha'}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+} \sqrt{2p'^+} \sqrt{2k^+}} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k}). \quad (2.47)$$

Cette approximation donne de manière générale le terme dominant d'émission d'un boson vecteur mou par le courant associé à une particule rapide (la même expression vaut pour une antiparticule). Remarquons que l'hélicité de la particule rapide est conservée par le processus : on va en tirer parti pour simplifier nos notations, et sous-entendre les indices d'hélicité des spineurs.

Les éléments de matrice des deux termes de l'équation (2.45) sont évalués dans le cadre de l'approximation eikonale. Le quadrivecteur polarisation  $\varepsilon_{\lambda_2}^\mu(k_2)$  est contraint par les deux conditions  $k_2 \cdot \varepsilon_{\lambda_2}(k_2) = 0$  et  $\eta \cdot \varepsilon_{\lambda_2}(k_2) = 0$ , et s'écrit donc  $\varepsilon_{\lambda_2}^\mu(k_2) = (0, \mathbf{k}_2 \cdot \varepsilon_{\lambda_2}^\perp / k_2^+, \varepsilon_{\lambda_2}^\perp)$ . On se trouve dans le repère du cône de lumière dans lequel :

$$p^\mu = (p^+, 0, \mathbf{0}) \quad \begin{aligned} k_1^\mu &= (z_1 p^+, \mathbf{k}_1^2 / (2z_1 p^+), \mathbf{k}_1) \\ k_2^\mu &= (z_2 p^+, \mathbf{k}_2^2 / (2z_2 p^+), \mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les composantes “ $-$ ” se calculent en utilisant la condition de couche de masse. Les dénominateurs d'énergie valent alors, toujours dans l'approximation où l'on ne conserve que les

termes dominants en fractions d'impulsion longitudinale :

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)^- - k_1^- - k_2^- &= \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2}{2(k_1 + k_2)^+} - \frac{\mathbf{k}_1^2}{2k_1^+} - \frac{\mathbf{k}_2^2}{2k_2^+} \simeq \frac{\mathbf{k}_2^2}{2k_2^+} \\ (p - k_1)^- - (p - k_1 - k_2)^- - k_2^- &= \frac{\mathbf{k}_1^2}{2k_1^+} - \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2}{2(p - k_1 - k_2)^+} - \frac{\mathbf{k}_2^2}{2k_2^+} \simeq \frac{\mathbf{k}_2^2}{2k_2^+}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dans le cadre de ces approximations, l'équation (2.45) devient :

$$\psi_{\lambda_2, C_2}^{(1)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{2g_s t^{C_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_2^+}} \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \varepsilon_{\lambda_2}^\perp}{\mathbf{k}_2^2} \left( \psi^{(0)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) - \psi^{(0)}(\vec{k}_1) \right). \quad (2.50)$$

Notons au passage que l'émission de gluons d'impulsion transverse  $|\mathbf{k}_2| < |\mathbf{k}_1|$  est défavorisée. Physiquement, ceci provient du fait que l'impulsion  $\mathbf{k}_2$  caractérise la "résolution" du gluon émis, vu comme une sonde de l'onium. Si la résolution est faible, i.e. si  $\mathbf{k}_2$  est petit, l'onium apparaît comme un singulet de couleur, et ne peut alors être sujet à des interactions chromodynamiques. Remarquons également que sous la forme (2.50), aucune factorisation évidente n'apparaît entre  $\psi^{(1)}$  et  $\psi^{(0)}$ . On va voir qu'il n'en va pas de même dans l'espace des *coordonnées* transverses.

**Coordonnées transverses et limite de grand  $N_c$ .** Considérons la transformée de Fourier bidimensionnelle des fonctions d'ondes à  $n$  parton d'un onium initial ( $n-1$  partons d'impulsions  $\vec{k}_1$  à  $\vec{k}_{n-1}$  et 1 parton d'impulsion  $\vec{p} - \vec{k}_1 - \dots - \vec{k}_{n-1}$ ).

Les états d'impulsions transverses déterminées sont reliés aux états de coordonnées transverses déterminées par la transformation de Fourier suivante<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{k}_1 - \dots - \vec{k}_{n-1}\rangle \otimes |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n-1}\rangle &= (p^+)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{d^2 \mathbf{x}_0}{2\pi} \dots \frac{d^2 \mathbf{x}_{n-1}}{2\pi} \times \\ &\times e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \dots - \mathbf{k}_{n-1}) \cdot \mathbf{x}_0 + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + i\mathbf{k}_{n-1} \cdot \mathbf{x}_{n-1}} |\mathbf{x}_0\rangle \otimes |z_1, \mathbf{x}_1, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{n-1}\rangle. \end{aligned} \quad (2.51)$$

On a isolé l'état  $|\mathbf{x}_0\rangle$ , car on va bientôt s'intéresser à des quantités qui ne dépendent que des tailles transverses des *paires* de partons. Le facteur  $(p^+)^{-1/2}$  qui accompagne chaque  $z_i$  permet le changement de variable des impulsions longitudinales  $k_i^+ = z_i p^+$  aux fractions d'impulsion  $z_i$ . Le développement (1.56) page 18 peut alors se réécrire comme suit dans ces nouvelles variables :

$$\begin{aligned} |\psi(\tau = 0)\rangle &= |\psi(\tau = -\infty)\rangle + \sum_{\omega, n \equiv n(\omega)} \int d^2 \mathbf{x}_0 d^2 \mathbf{x}_1 dz_1 \dots d^2 \mathbf{x}_{n-1} dz_{n-1} \\ &\times \sum_{N_i(\omega)} \tilde{\psi}_{N_i(\omega)}^{(n-2)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{0n-1}) [|\mathbf{x}_0\rangle \otimes |z_1, \mathbf{x}_1, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{n-1}\rangle]_{N_i(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La notation  $\mathbf{x}_{ij} \equiv \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$  a été introduite, et le vecteur  $\mathbf{x}_0$  est le vecteur des coordonnées transverses du quark. La fonction d'onde dans l'espace des coordonnées transverses  $\tilde{\psi}$  ne dépend plus de  $\mathbf{x}_0$  : ceci est dû à l'invariance par translation globale du système dans l'espace transverse, qui provient en particulier du fait qu'on a choisi  $p$  comme dépourvu de composante transverse. Cette fonction d'onde s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{N_i(\omega)}^{(n-2)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{0n-1}) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{2\pi} \dots \frac{d^2 \mathbf{k}_{n-1}}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{01} + \dots + i\mathbf{k}_{n-1} \cdot \mathbf{x}_{0n-1}} \\ &\times (p^+)^{\frac{n}{2}-1} \psi_{N_i(\omega)}^{(n-2)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.53)$$

<sup>3</sup>La normalisation est choisie de sorte que les états  $|z, \mathbf{r}\rangle$  satisfassent précisément à la relation d'orthogonalité  $\langle z_1, \mathbf{r}_1 | z_2, \mathbf{r}_2 \rangle \equiv \delta(z_1 - z_2) \delta^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ .

où les indices de polarisation et de couleur ont été omis. Considérons la probabilité d'avoir un état à  $n + 1$  particules dans l'état final, qui fait intervenir le carré du module de la fonction d'onde. En intégrant le carré du module de l'équation (2.53) page 36, on trouve la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \int d^2 \mathbf{x}_{01} dz_1 \cdots d^2 \mathbf{x}_{0n-1} dz_{n-1} \times (2\pi)^2 \left| \tilde{\psi}_{N_i(\omega)}^{(n-2)}(\mathbf{z}_1, x_{01}, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{0n-1}) \right|^2 \\ = \int d^3 \vec{k}_1 \cdots d^3 \vec{k}_{n-1} \left| \psi_{N_i(\omega)}^{(n-2)}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n-1}) \right|^2 . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Cette égalité signifie que la densité de probabilité  $\Phi^{(1)} \equiv |\tilde{\psi}^{(1)}|^2$  d'un état  $\omega = |\mathbf{x}_{01}, z_1, \dots, \mathbf{x}_{0n-1}, z_{n-1}\rangle_{N_i(\omega)}$  associée à la mesure  $d^2 \mathbf{x}_{01} dz_1 \cdots d^2 \mathbf{x}_{0n-1} dz_{n-1}$  vaut :

$$\Phi^{(n-2)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{0n-1}) = (2\pi)^2 \left| \tilde{\psi}_{N_i(\omega)}^{(n-2)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, \dots, z_{n-1}, \mathbf{x}_{0n-1}) \right|^2 . \quad (2.55)$$

Appliquons ces formules au calcul de la transformée de Fourier de  $\psi^{(1)}$  (équation (2.50)). D'après (2.53), elle vaut :

$$\tilde{\psi}_{\lambda_2, C_2}^{(1)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, z_2, \mathbf{x}_{02}) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\psi}^{(0)}(z_1, \mathbf{x}_{01}) \frac{2ig_s t^{C_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2z_1}} \left( \frac{\mathbf{x}_{02} \cdot \varepsilon_{\lambda_2}^\perp}{\mathbf{x}_{02}^2} + \frac{\mathbf{x}_{21} \cdot \varepsilon_{\lambda_2}^\perp}{\mathbf{x}_{21}^2} \right) , \quad (2.56)$$

où l'on a utilisé la formule d'analyse de Fourier connue :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{2\pi} \frac{\varepsilon^\perp \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = i \frac{\varepsilon^\perp \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} . \quad (2.57)$$

La densité de probabilité est alors donnée par la formule (2.55). En sommant sur les couleurs et polarisations du gluon émis, on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, z_2, \mathbf{x}_{02}) &= (2\pi)^2 \sum_{\lambda_2, C_2} \left| \tilde{\psi}_{\lambda_2, C_2}^{(1)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, z_2, \mathbf{x}_{02}) \right|^2 \\ &= \Phi^{(0)}(z_1, \mathbf{x}_{01}) \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \frac{1}{z_2} \frac{\mathbf{x}_{01}^2}{\mathbf{x}_{02}^2 \mathbf{x}_{12}^2} . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ce résultat est remarquablement simple : la fonction d'onde de l'objet initial se factorise.

Arrêtons-nous un instant à l'interprétation de ce résultat. On voit apparaître trois vecteurs du plan des positions transverses :  $\mathbf{x}_{01}$ , la taille transverse de l'onium initial, et  $\mathbf{x}_{02}$  et  $\mathbf{x}_{12}$ , les tailles des systèmes  $\bar{q} + g$  et  $q + g$  respectivement. Ces deux systèmes s'interprètent, dans la limite de 't Hooft de grand  $N_c$  [t Hooft 74], comme des *dipôles* de couleur, et la fonction d'onde obtenue dans l'espace  $(z_i, \mathbf{x}_i)$  est l'amplitude de probabilité de trouver dans l'onium initial des dipôles de tailles  $\mathbf{x}_i$ , dont chaque constituant porte au plus la fraction d'impulsion longitudinale  $z_i$ . Pour voir ceci, examinons plus en détail ce que devient un gluon et son couplage à un quark dans cette limite. Pour cela, on évalue le facteur de couleur associé au graphe d'interaction

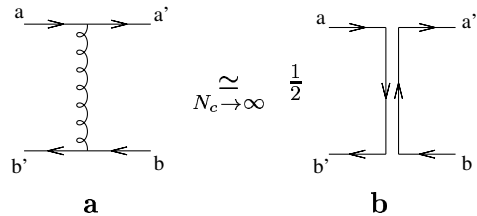


FIG. 2.4 – Vertex  $q\bar{q}g$  et propagateur du gluon dans la limite  $N_c \rightarrow \infty$ .

quark-antiquark de la figure (2.4.a), qui vaut  $\sum_C t_{aa'}^C t_{bb'}^C$ , où  $C$  indexe la couleur du gluon échangé. On utilise une identité connue, dont on prend la limite :

$$\sum_C t_{aa'}^C t_{bb'}^C = \frac{1}{2} \left( \delta_{ab'} \delta_{a'b} - \frac{1}{N_c} \delta_{aa'} \delta_{bb'} \right) \underset{N_c \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{2} \delta_{ab'} \delta_{a'b}. \quad (2.59)$$

Ceci signifie que pour  $N_c$  grand, les couleurs du quark et de l'antiquark incidents sont identiques, ainsi que celles du quark et de l'antiquark diffusés : ainsi, un gluon peut être représenté par une double ligne d'indices qui correspondent respectivement aux représentations  $N_c$  et  $\bar{N}_c$  du groupe de jauge  $SU(N_c)$ , et le vertex  $q\bar{q}g$  connecte ces lignes de couleur. Ceci est représenté sur la figure (2.4.b). Plus formellement, le gluon appartient à la représentation adjointe, de dimension  $N_c^2 - 1$  de  $SU(N_c)$ , qui devient, à la limite de grand  $N_c$ , le produit des représentations fondamentales de dimensions  $N_c$  et  $\bar{N}_c$  :

$$N_c \otimes \bar{N}_c = \underbrace{(N_c^2 - 1)}_{\text{adjointe}} \oplus \underbrace{1}_{\text{singulet}} \underset{N_c \rightarrow +\infty}{\simeq} \underbrace{(N_c^2 - 1)}_{\text{adjointe}}. \quad (2.60)$$

On peut maintenant réécrire l'équation (2.58) sous une forme qui admette une représentation graphique en termes de graphes de lignes de couleur :

$$\Phi^{(1)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, z_2, \mathbf{x}_{02}) = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{1}{z_2} \Phi^{(0)}(z_1, \mathbf{x}_{01}) \times \left( \frac{1}{\mathbf{x}_{02}^2} - 2 \frac{\mathbf{x}_{02} \cdot \mathbf{x}_{12}}{\mathbf{x}_{02}^2 \mathbf{x}_{12}^2} + \frac{1}{\mathbf{x}_{12}^2} \right), \quad (2.61)$$

où, pour être cohérent, on a également remplacé le facteur  $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$  par sa limite  $N_c/2$ . L'équation précédente peut être mise en correspondance avec la représentation suivante :

$$\Phi^{(1)}(z_1, \mathbf{x}_{01}, z_2, \mathbf{x}_{02}) = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{1}{z_2} \times \left[ \text{Diagram 1} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}. \quad (2.62)$$

Il s'agit maintenant de prolonger ces résultats aux ordres supérieurs.

### 2.4.2 Ordres suivants

On considère maintenant la fonction d'onde de l'onium accompagné de deux gluons. Les différentes formes que peuvent prendre les contributions à cette fonction d'onde sont représentées graphiquement sur la figure (2.5). Tout d'abord, pour ne conserver que les termes dominants à la limite LL( $1/x$ ), on doit respecter la hiérarchie des impulsions longitudinales,  $k_3^+ \ll k_2^+$  ; comme nous l'avons vu dans le contexte des DLL, les autres configurations donnent lieu à des contributions à des ordres au-delà du LL( $1/x$ ). Ceci implique une hiérarchie dans la variable conjuguée à  $k^+$ , le temps du cône de lumière  $\tau$ , et exclut donc d'emblée les termes du hamiltonien d'interaction qui couplent au même temps deux gluons et deux quarks, représentés sur les graphes d'échanges instantanés du type de ceux de la figure (2.5.b). Pour les

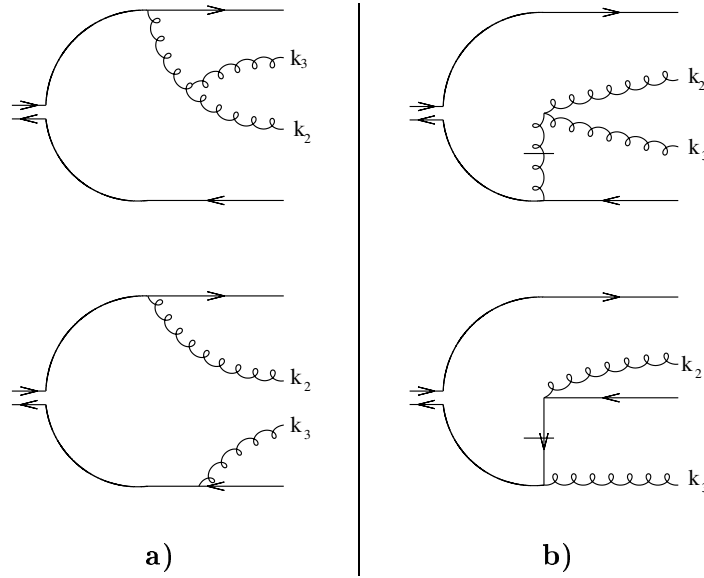


FIG. 2.5 – Exemple de diagrammes qui contribuent à la fonction d'onde à deux gluons. **a)** Processus à prendre en compte au LL(1/x). **b)** Processus d'ordre supérieur.

ordres suivants, cette remarque permet également d'exclure les vertex à quatre gluons. Il ne reste plus que les graphes du type (2.5.a).

Le vertex à trois gluons présent dans certains de ces graphes a une expression simple lorsque l'un des gluons est mou. Pour le voir, reprenons le terme dominant, dans la limite LL(1/x), de l'élément de matrice de l'équation (2.19) :

$$\begin{aligned} \langle \lambda' \eta, C' D \rangle \langle \vec{p}', \vec{k} | \mathcal{H}_I^{ggg} | \vec{p} \rangle \langle \lambda, C \rangle &\simeq \frac{if^{CC'D} g_s \varepsilon_{\lambda}^{*\mu}(-\vec{p}) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(\vec{p}-\vec{k}) \varepsilon_{\eta}^{\rho}(\vec{k})}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+} \sqrt{2(p-k)^+} \sqrt{2k^+}} (p+p')_{\rho} g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k}) \\ &\simeq \frac{ig_s f^{CC'D} 2p \cdot \varepsilon_{\eta}(k) \delta_{\lambda\lambda'}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+} \sqrt{2(p-k)^+} \sqrt{2k^+}} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}'-\vec{k}) , \end{aligned} \quad (2.63)$$

où pour arriver au résultat, on a en particulier utilisé l'identité  $\varepsilon_{\lambda}(-p) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(p) = \delta_{\lambda\lambda'}$ . On remarque que cet élément de matrice est identique, au facteur de couleur près que nous examinerons plus en détail dans la suite, à l'élément de matrice de l'équation (2.47) : dans cette limite eikonale, le vertex  $q\bar{q}g$  a une expression très similaire à celle du vertex  $ggg$ .

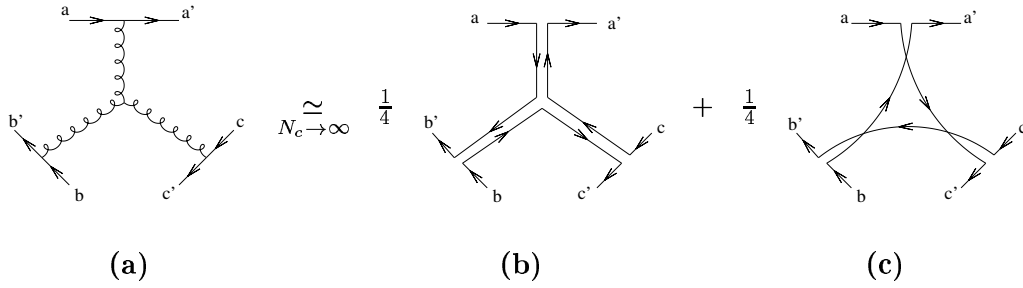
Attachons-nous maintenant à considérer le carré du module de la somme des graphes qui subsistent à la limite de petit  $x$ . La limite de grand nombre de couleur  $N_c$  permet de réduire le nombre de graphes : seuls les diagrammes planaires subsistent à l'ordre dominant en  $1/N_c$ .

On a déjà vu dans le paragraphe précédent que le vertex  $qqg$  se réduit à un couplage de lignes d'indices à grand  $N_c$ . On peut généraliser ceci au vertex à 3 gluons couplés à trois lignes de quarks. Le facteur de couleur associé au diagramme de la figure (2.6.a) se réduit comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{ABC} if_{ABC} t_{aa'}^A t_{bb'}^B t_{cc'}^C &= \sum_{AB} t_{aa'}^A t_{bb'}^B [t_A, t_B]_{cc'} \\ &\underset{N_c \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{4} (\delta_{ab'} \delta_{a'c} \delta_{bc'} - \delta_{ac'} \delta_{a'b} \delta_{b'c}) , \end{aligned} \quad (2.64)$$

où l'on s'est servi de façon répétée de l'identité sur les matrices de couleur de l'équation (2.59). Ainsi, le vertex à trois gluons peut être remplacé par un couplage de lignes d'indices, selon les graphes (b) et (c) de la figure (2.6). Le vertex (c) donnera lieu à des diagrammes non



FIG. 2.6 – Vertex  $ggg$  dans la limite  $N_c \rightarrow \infty$ .

planaires, et est donc à exclure dans la limite de grand  $N_c$ . Les règles pour la sélection des graphes que l'on tire de ces considérations sont les suivantes : à un ordre donné, on dessine tous les graphes possibles en remplaçant les gluons par des doubles lignes d'indices et leurs vertex par la jonction planaire de ces lignes, et parmi ceux-ci, on sélectionne les graphes planaires. En effet, on vérifie par un comptage de couleurs sur l'exemple de la figure (2.7) que si on moyenne sur les couleurs des particules initiales et si on somme sur les couleurs des particules finales, le graphe (a) apporte un facteur  $N_c^2$ , tandis que le graphe (b) contribue à hauteur d'un facteur 1. Sur cet exemple, on voit bien que les lignes d'indices de couleur, qui proviennent soit d'un quark, soit de la "moitié" d'un gluon, délimitent sur le graphe planaire des "boucles" polygonales dont chaque paire de côtés opposés forme un dipôle de couleur. Dans cette représentation, chaque nouveau gluon ajouté à la fonction d'onde est émis par un dipôle, et réabsorbé (dans la fonction d'onde complexe conjuguée) par le même dipôle, sans que soient affectées les caractéristiques des autres dipôles présents. Ce gluon est lui-même équivalent, dans la limite de grand nombre de couleurs, à une paire de lignes d'indices : de ce fait, l'émission d'un gluon peut être réinterprétée comme la scission d'un dipôle. Que le dipôle initial soit formé d'une paire quark-antiquark ou de "moitiés" de gluons est indifférent : en effet, ces vertex sont identiques dans l'approximation eikonale pour ce qui concerne leur partie dynamique, comme on le voit en comparant les équations (2.47) et (2.63). Dans le carré de la fonction d'onde interviennent les facteurs de couleur respectifs  $C_F$  et  $C_A$ , mais ceux-ci sont identiques à la limite de grand nombre de couleurs : en effet,  $C_F \simeq N_c/2$  et  $C_A \equiv N_c$  soit être remplacé par  $N_c/2$ , car seul le premier terme de la formule (2.64) donne lieu à des graphes planaires.

Le fait que les dipôles une fois formés émettent des gluons indépendamment les uns des autres est lié à la limite de petit  $x$  qui conditionne l'ordonnement des émissions successives, et ainsi la factorisation des dénominateurs d'énergie associés.

En résumé, ces arguments montrent que l'ajout d'un gluon à la fonction d'onde de l'onium s'interprète comme la scission *indépendante* d'un dipôle formé par les partons déjà présents dans la fonction d'onde. L'indépendance résulte de la limite de petit  $x$ , dans laquelle les positions des partons successifs sont gelées. L'interprétation en termes de dipôles, qui est la clé de la simplicité de cette formulation, repose en grande partie sur la limite de grand nombre de couleurs.

### 2.4.3 Densité de dipôles à tous les ordres et équations de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov

Maintenant que nous avons établi la factorisation des fonctions d'onde de dipôles d'ordres successifs, nous pouvons écrire une relation de récurrence pour la densité de gluons. Pour cela, nous procédons de la même manière que pour le cas des  $LLQ^2$ . Nous obtiendrons la densité inclusive de dipôles de taille et de fraction d'impulsion longitudinale données (équations (2.86) et (2.87)), puis nous donnerons, sans l'établir, la densité de dipôles de taille donnée dans un

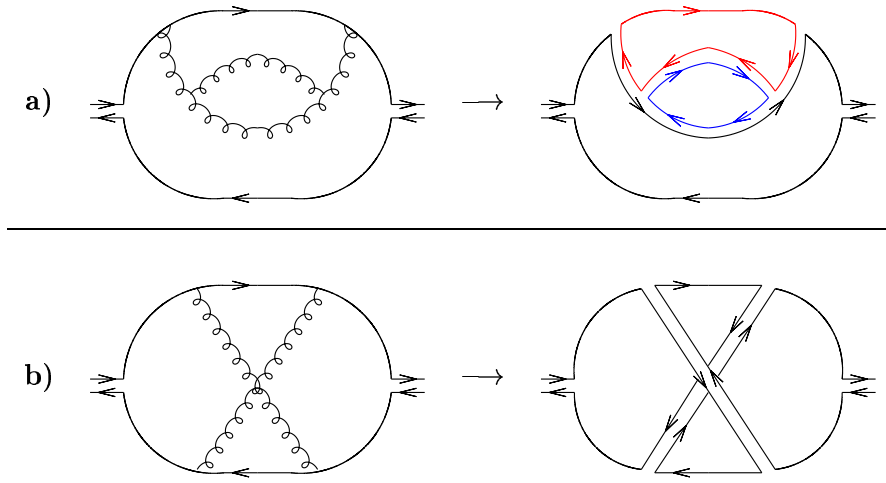


FIG. 2.7 – Comptage de couleur d'un graphe planaire (a) et non planaire (b).

dipôle initial, à paramètre d'impact fixé (équations (2.94) et (2.96)).

Définissons le nombre complexe  $u \equiv \underline{x}_{02}/\underline{x}_{01}$  et réécrivons en fonction de cette variable la densité de probabilité de présence dans un dipôle initial de taille  $\mathbf{x}_{01}$ , d'un dipôle de taille  $\mathbf{x}_{02} = u\mathbf{x}_{01}$  :

$$\begin{aligned} d\widehat{P}_{dd}(x, u) &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \frac{dx}{x} \widehat{P}_{dd}(u, \bar{u}) \frac{du d\bar{u}}{2i} \\ \Rightarrow d\widehat{P}_{dd}(x, u) &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} d\left(\log \frac{1}{x}\right) \widehat{P}_{dd}(u, \bar{u}) \frac{du d\bar{u}}{2i} . \end{aligned} \quad (2.65)$$

La fonction méromorphe

$$\widehat{P}_{dd}(u, \bar{u}) = \frac{1}{|u|^2 |1-u|^2} \quad (2.66)$$

joue le rôle d'une fonction de splitting pour les dipôles, mais qui dépend cette fois-ci du rapport des tailles transverses et non de celui des impulsions longitudinales. La mesure associée  $du d\bar{u}/2i$  est la mesure dans le plan complexe qui correspond par simple changement de variable à la mesure  $d^2\mathbf{u}$ . Dans la suite, on utilisera indifféremment l'une ou l'autre de ces notations.

En nous inspirant de la méthode employée pour dériver la densité de partons dans la section consacrée à la limite de grand  $Q^2$ , nous pouvons écrire la variation de la densité<sup>4</sup>  $n(x, \underline{r})$  de dipôles de taille  $\mathbf{r}$  sous l'effet d'un accroissement de la variable d'évolution qui, cette fois-ci, est  $1/x$ . D'une part, des dipôles de taille  $\mathbf{r}$  sont créés à partir de dipôles de taille  $\mathbf{r}_0$  à un taux  $d\widehat{P}(x, u) + d\widehat{P}(x, 1-u)$ , avec  $u = \underline{r}/\underline{r}_0$ . D'autre part, une fraction  $\int d\widehat{P}_{dd}(x, u)$  des dipôles de taille  $\mathbf{r}$  disparaît par branchement dipolaire. Ceci se traduit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \delta n(x, \underline{r}) &= \int \left( d\widehat{P}_{dd}(x, u) + d\widehat{P}_{dd}(x, 1-u) \right) \int \frac{d\underline{r}_0 d\bar{\underline{r}}_0}{2i} n(x, \underline{r}_0) \cdot \delta^2(\underline{r} - u\underline{r}_0) \\ &\quad - \int d\widehat{P}_{dd}(x, u) n(x, \underline{r}) , \end{aligned} \quad (2.67)$$

<sup>4</sup>La normalisation adoptée sera telle que  $\int d^2\mathbf{r} n(x, \mathbf{r})$  représente le nombre total de dipôles de fraction d'impulsion longitudinale comprise entre  $x$  et 1.

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial n(x, \underline{r})}{\partial \log(1/x)} = \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int \frac{du d\bar{u}}{2i} \hat{P}_{dd}(u, \bar{u}) \left( \frac{1}{|u|^2} n\left(x, \frac{\underline{r}}{u}\right) + \frac{1}{|1-u|^2} n\left(x, \frac{\underline{r}}{1-u}\right) - n(x, \underline{r}) \right). \quad (2.68)$$

La distribution de Dirac  $\delta^2$  introduite est normalisée de sorte que  $\int dz d\bar{z}/(2i) \delta^2(\underline{z}) = 1$ . On exploitera par la suite la symétrie  $u \rightarrow 1-u$  pour identifier les deux premiers termes, mais sous cette forme, la convergence de l'intégrale de l'équation (2.68) en  $u=0$  et  $u=1$  apparaît bien.

Néanmoins, pour pouvoir poursuivre le calcul, il va falloir régulariser les divergences ultraviolettes potentielles de l'intégrale de chacun des termes pris séparément. Pour cela, on peut modifier légèrement la loi de probabilité, en introduisant un petit paramètre  $\epsilon$  positif dans la fonction de splitting des dipôles :

$$P_{dd}^\epsilon(u, \bar{u}) = \frac{1}{|u|^{2-2\epsilon}|1-u|^{2-2\epsilon}}. \quad (2.69)$$

La résolution de l'équation (2.68) est facilitée si on s'affranchit de la dérivée par rapport à  $\log(1/x)$  en remplaçant la dépendance en  $x$  par une dépendance en son paramètre conjugué de Mellin  $\omega$ . La transformée de  $n$  et sa transformée inverse s'écrivent :

$$n_\omega(\underline{r}) = \int_0^1 \frac{dx}{x} x^\omega n(x, \underline{r}) \quad \Rightarrow \quad n(x, \underline{r}) = \int \frac{d\omega}{2i\pi} x^{-\omega} n_\omega(\underline{r}). \quad (2.70)$$

L'équation (2.68) devient alors une équation algébrique :

$$n_\omega(\underline{r}) = \frac{1}{\omega} n^0(\underline{r}) + \frac{1}{\omega} \mathcal{K} \cdot n_\omega(\underline{r}). \quad (2.71)$$

On a inclus la condition initiale pour l'évolution  $n(x=1, \underline{r}) = n^0(\underline{r})$ , et le noyau  $\mathcal{K}$  est caractérisé par son action sur  $n_\omega$  :

$$\mathcal{K}^\epsilon \cdot n_\omega(\underline{r}) = \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int \frac{du d\bar{u}}{2i} \frac{1}{|u|^{2-2\epsilon}|1-u|^{2-2\epsilon}} \left( \frac{2}{|u|^2} n_\omega\left(\frac{\underline{r}}{u}\right) - n_\omega(\underline{r}) \right). \quad (2.72)$$

Une solution explicite de cette équation est donnée par une combinaison linéaire particulière des fonctions propres du noyau  $\mathcal{K}^\epsilon$ . Ces dernières sont, comme nous allons le montrer ci-dessous, les puissances  $\mu$  de  $r$  et  $\tilde{\mu}$  de  $\bar{r}$ . Paramétrons-les à l'aide des fonctions  $E_0^{\mu, \tilde{\mu}}(\underline{r})$  définies par l'équation suivante :

$$\underline{r}^{-\mu-1} \bar{\underline{r}}^{-\tilde{\mu}-1} \equiv E_0^{\mu, \tilde{\mu}}(\underline{r}) / |\underline{r}|^3. \quad (2.73)$$

Nous verrons plus loin l'origine de cette notation ; en particulier, nous verrons que le "0" en indice correspond à une impulsion transverse nulle transférée au dipôle.

Ces fonctions forment une base complète de l'espace des fonctions méromorphes pour la paramétrisation suivante de  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$  :

$$\mu = \frac{1-n}{2} + i\nu \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = \frac{1+n}{2} + i\nu, \quad (2.74)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\text{Im}(\nu) = 0$ . En effet, la transformation de la fonction méromorphe  $f(\underline{r}, \bar{\underline{r}})$  en  $f_n(\nu)$  définie par projection sur les  $E_0^{\mu, \tilde{\mu}}$  :

$$f_n(\nu) = \int \frac{d\underline{r} d\bar{\underline{r}}}{2i} \frac{E_0^{-\mu-1, -\tilde{\mu}-1}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} f(\underline{r}, \bar{\underline{r}}) \quad (2.75)$$

est une double transformation sur  $f$  vue comme une fonction à deux variables de  $\underline{r} \hat{=} (|\underline{r}|, \text{Arg}(\underline{r}))$ . C'est une intégrale de Mellin sur  $|\underline{r}|$ , et une somme de Fourier sur  $\text{Arg}(\underline{r})$ . On fait agir le noyau  $\mathcal{K}$  sur ces fonctions :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \cdot \left[ \frac{E_0^{\mu, \tilde{\mu}}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} \right] &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int \frac{du d\bar{u}}{2i} \frac{1}{|u|^{2-2\epsilon} |1-u|^{2-2\epsilon}} \left( \frac{2}{|u|^2} \frac{E_0^{\mu, \tilde{\mu}}(\underline{r}/u)}{|\underline{r}/u|^3} - \frac{E_0^{\mu, \tilde{\mu}}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} \right) \\ &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \underline{r}^{-\mu-1} \bar{\underline{r}}^{-\tilde{\mu}-1} \left( \int \frac{du d\bar{u}}{2i} 2u^{\epsilon+\mu-1} \bar{u}^{\epsilon+\tilde{\mu}-1} |1-u|^{2\epsilon-2} \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{du d\bar{u}}{2i} |u|^{2\epsilon-2} |1-u|^{2\epsilon-2} \right). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Chacune des intégrales complexes peut être calculée grâce à la formule (A.13) donnée dans l'appendice page 130 :

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{du d\bar{u}}{2i} u^{\epsilon+\mu-1} \bar{u}^{\epsilon+\tilde{\mu}-1} |1-u|^{2\epsilon-2} &= 2\pi \frac{\Gamma(\mu+\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(\mu+2\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\tilde{\mu}-2\epsilon)}{\Gamma(1-\tilde{\mu}-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)} \\ \int \frac{du d\bar{u}}{2i} |u|^{2\epsilon-2} |1-u|^{2\epsilon-2} &= \pi \frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)} \frac{\Gamma(1-2\epsilon)}{\Gamma^2(1-\epsilon)}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

On voit que la différence de ces deux termes est finie pour  $\epsilon$  tendant vers 0. Ceci est dû à la convergence du noyau  $\mathcal{K}^\epsilon$  complet dans l'ultraviolet. En se plaçant dans cette limite, on aboutit au résultat suivant :

$$\mathcal{K} \cdot \left[ \frac{E_0^{\mu, \tilde{\mu}}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} \right] = \bar{\alpha}_s \left( \underline{r}^{-\mu-1} \bar{\underline{r}}^{-\tilde{\mu}-1} \right) (2\Psi(1) - \Psi(1-\tilde{\mu}) - \Psi(\mu)), \quad (2.78)$$

où la fonction  $\Psi$  est la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$ . En vertu de la propriété  $\Psi(x) = \Psi(1-x) - \pi/\tan \pi x$ , la somme de fonctions  $\Psi$  du membre de droite s'écrit encore  $2\Psi(1) - \Psi(\tilde{\mu}) - \Psi(1-\mu)$ , et donc, en exprimant  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$  et en tenant compte de cette symétrie, cette somme est la fonction  $\chi_n(\nu)$  définie par :

$$\chi_n(\nu) = 2 \left( \Psi(1) - \mathcal{R}e \Psi \left( \frac{1+|n|}{2} + i\nu \right) \right). \quad (2.79)$$

On peut alors réécrire l'action du noyau  $\mathcal{K}$  sur les fonctions  $E_0^{n, \nu}$  comme suit :

$$\mathcal{K} \cdot \left[ \frac{E_0^{n, \nu}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} \right] = \bar{\alpha}_s \chi_n(\nu) \cdot \left[ \frac{E_0^{n, \nu}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} \right]. \quad (2.80)$$

Ceci achève la démonstration du fait que les fonctions  $E_0^{n, \nu}(\underline{r})/|\underline{r}|^3$  sont fonctions propres du noyau  $\mathcal{K}$ , et prouve que les valeurs propres associées sont  $\bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)$ . Effectuons le changement de variable  $\gamma \equiv 1/2 + i\nu$ . La fonction  $\chi_n(\gamma)$  se réécrit, dans ces variables :

$$\chi_n(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi \left( \gamma + \frac{|n|}{2} \right) - \Psi \left( 1 - \gamma + \frac{|n|}{2} \right), \quad (2.81)$$

et jouit des propriétés suivantes :

- C'est une fonction réelle, i.e.  $\chi_n(\gamma)^* = \chi_n(\gamma^*)$ .
- Elle est méromorphe, et présente une série de pôles simples en  $|1/2 - \gamma| = 1/2 + k + |n|/2$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- Sa branche principale, définie sur le domaine d'analyticité connexe à  $\gamma = 1/2$ , a un minimum parabolique en  $\gamma = 1/2$  :

$$\chi'(\gamma=1/2) = 0 \quad \text{et} \quad \chi''(\gamma) \underset{\gamma \sim 1/2}{\sim} 28\zeta(3). \quad (2.82)$$

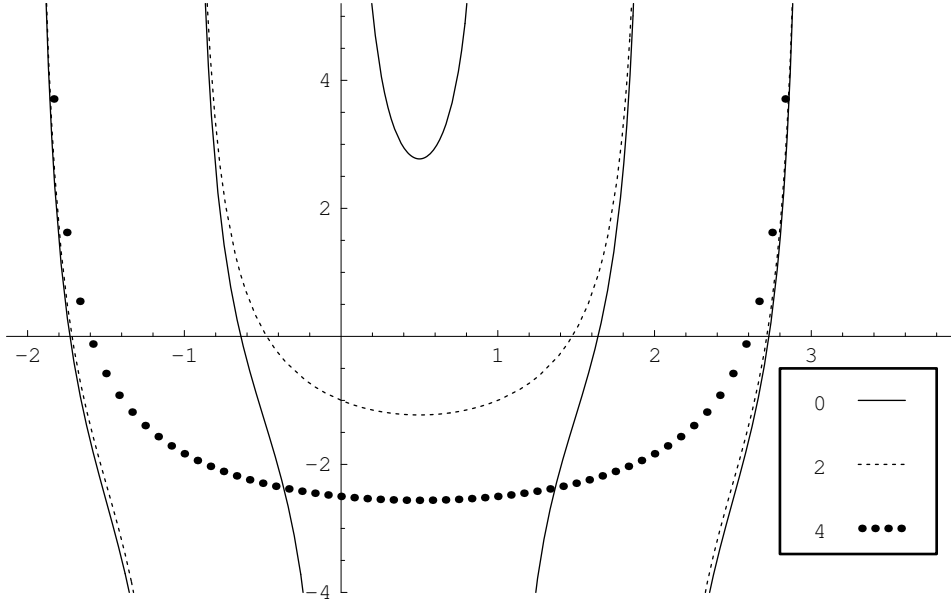


FIG. 2.8 – Fonction propre  $\chi_n(\gamma)$  du noyau d'évolution des dipôles. Ligne continue :  $n=0$ . Pointillés fins :  $n=2$ . Points :  $n=4$ . Cinq branches pour la composante  $n=0$ , trois pour  $n=2$  et la branche principale de la composante  $n=4$  sont représentées.

– Elle présente la propriété de symétrie suivante :  $\chi_{-n}(1-\gamma) = \chi_n(\gamma)$ . Cette fonction est représentée sur la figure (2.8) pour  $n \in \{0, 2, 4\}$ .

La solution de l'équation de départ (2.71) peut être complètement déterminée en développant dans un premier temps la condition initiale, supposée fonction méromorphe de  $\underline{r}$ , sur la base des fonctions propres du noyau :

$$n^0(\underline{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\nu}{2\pi} n_n^0(\nu) \frac{E_0^{n,\nu}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3}, \quad (2.83)$$

puis en l'injectant dans l'équation (2.71) et en utilisant l'équation aux valeurs propres pour l'opérateur  $\mathcal{K}$  :

$$\begin{aligned} n_\omega(\underline{r}) &= \frac{1}{\omega} n^0(\underline{r}) + \frac{1}{\omega} \mathcal{K} \cdot n^0(\underline{r}) + \frac{1}{\omega^2} \mathcal{K} \cdot \mathcal{K} \cdot n^0(\underline{r}) + \dots \\ \Rightarrow n_\omega(\underline{r}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{E_0^{n,\nu}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} \frac{n_n^0(\nu)}{\omega - \bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

On peut maintenant aisément prendre la transformée de Mellin inverse par rapport à  $\omega$  pour réexprimer  $n$  en fonction des variables cinématiques physiques. Il suffit pour cela de prendre le pôle en  $\omega = \bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)$  au dénominateur de l'intégrand de l'équation (2.84) :

$$n(x, \underline{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{E_0^{n,\nu}(\underline{r})}{|\underline{r}|^3} n_n^0(\nu) x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)}, \quad (2.85)$$

ce que l'on peut réécrire, en exprimant également la condition initiale en fonction de la variable physique  $\underline{r}'_0$  :

$$n(x, \underline{r}) = \int \frac{d\underline{r}_0 d\underline{r}'_0}{2i} n(\underline{r}'_0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{1}{|\underline{r}|^2} \left(\frac{\underline{r}'_0}{\underline{r}}\right)^{\gamma-n/2} \left(\frac{\underline{r}'_0}{\underline{r}}\right)^{\gamma+n/2} x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\gamma)} . \quad (2.86)$$

En prenant pour condition initiale  $n(\underline{r}'_0) \equiv \delta^2(\underline{r}'_0 - \underline{r}_0)$ , on trouve la densité de dipôles de taille  $\underline{r}$ , d'impulsion longitudinale au moins égale à  $xp^+$  dans un dipôle initial de taille  $\underline{r}_0$  :

$$n(x, \underline{r}|\underline{r}_0) = \frac{1}{|\underline{r}|^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{\underline{r}_0}{\underline{r}}\right)^{\gamma-n/2} \left(\frac{\underline{r}_0}{\underline{r}}\right)^{\gamma+n/2} x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\gamma)} . \quad (2.87)$$

Cette équation s'interprète comme donnant l'évolution d'un dipôle de l'échelle d'impulsions longitudinales  $p^+$  jusqu'à l'échelle  $xp^+$ .

Comme elle nous servira par la suite, nous écrivons l'inverse de cette équation, i.e. la transformée de Mellin directe de la densité  $n$  de dipôles :

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{d(\underline{r}/\underline{r}_0) d(\bar{r}/\bar{r}_0)}{2i} |\underline{r}_0|^2 \left(\frac{\underline{r}}{\underline{r}_0}\right)^{\gamma-n/2} \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\right)^{\gamma+n/2} n(x, \underline{r}|\underline{r}_0) = x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\gamma)} . \quad (2.88)$$

### Limite des doubles logarithmes dominants

Il est également instructif d'explorer la limite  $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}_0|$  à partir de l'expression (2.87). En effet, c'est une limite de double logarithmes dominants, dans laquelle les tailles des dipôles (et donc les impulsions transverses des gluons de la fonction d'onde) sont fortement hiérarchisées. On s'intéresse ici à la moyenne de la densité  $n$  sur les orientations des dipôles, que l'on note  $\langle n \rangle$ . Ceci sélectionne la composante  $n=0$ . On a alors :

$$\langle n(x, r|r_0) \rangle = \frac{1}{r^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\gamma} x^{-\bar{\alpha}_s \chi_0(\gamma)} , \quad (2.89)$$

où l'on a effectué le changement de variable approprié sur la fonction  $\chi$ . Celle-ci s'écrit :

$$\chi_0(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1-\gamma) . \quad (2.90)$$

Remarquons que lorsque  $r \ll r_0$ , le comportement en  $\gamma \sim 0$  de l'intégrant détermine la valeur de l'intégrale. Comme dans cette limite  $\Psi(\gamma) \simeq -1/\gamma$ , on trouve que  $\chi_0(\gamma) \simeq 1/\gamma$ , et donc :

$$\langle n(x, r|r_0) \rangle = \frac{1}{r^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}_s \log(1/x)/\gamma} . \quad (2.91)$$

Le contour d'intégration, qui va à l'origine du point  $1/2 - i\infty$  au point  $1/2 + i\infty$ , peut être fermé vers la gauche. On reconnaît à présent, à un changement de variable sur  $\gamma$  près, la représentation intégrale de la fonction de Bessel  $I_1$  donnée par l'équation (A.5) page 128 :

$$\langle n(x, r|r_0) \rangle = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_s \log(1/x)}{\log(r_0^2/r^2)}} I_1 \left( 2\sqrt{\bar{\alpha}_s \log \frac{r_0^2}{r^2} \log \frac{1}{x}} \right) . \quad (2.92)$$

Cette équation est très semblable à celle obtenue pour la densité de gluons à l'ordre DLL (2.25). Le rapport des tailles transverses remplace celui des impulsions transverses, et le préfacteur obtenu diffère dans les deux cas, car il dépend des définitions exactes et des conditions initiales pour l'évolution.

### Densité de dipôles à paramètre d'impact fixé

Dans ce paragraphe, nous discutons une quantité plus exclusive : le nombre de dipôles de taille  $\mathbf{r}$  dans un dipôle initial de taille  $\mathbf{r}_0$ , distants du paramètre d'impact  $\mathbf{b}$ , après évolution jusqu'à des fractions d'impulsion longitudinale de l'ordre de  $x$ . Cette quantité intervient dans des processus dans lesquels il y a un transfert d'impulsion  $\mathbf{q}$  : celui-ci est conjugué au paramètre d'impact  $\mathbf{b}$ . Un exemple de tels processus sera donné au chapitre 5.

Nous pourrions écrire une équation d'évolution en  $\log(1/x)$  de la même forme que l'équation (2.68). Sa résolution serait plus fastidieuse que celle de son analogue inclusive en paramètre d'impact. Nous nous contentons ici de donner le résultat, démontré par exemple dans les références [Mueller 94b, Mueller 95, Navelet 98b].

Reprenons la formule (2.87), et réécrivons-la à l'aide des fonctions  $E_0^{n,\nu}$  :

$$n(x, \underline{r}|\underline{r}_0) = \frac{1}{|\underline{r}|^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{|\underline{r}_0|}{|\underline{r}|} \bar{E}_0^{n,\nu}(\underline{r}_0) E_0^{n,\nu}(\underline{r}) x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\gamma)}. \quad (2.93)$$

Le nombre de dipôles à un paramètre d'impact  $\mathbf{b}$  donné s'écrit en remplaçant simplement les  $E_0$  par des fonctions que nous notons  $E_q$  (avec  $E_{q=0} = E_0$ ), et en prenant la transformée de Fourier de l'expression obtenue par rapport à cette variable bidimensionnelle  $\mathbf{q}$  [Lipatov 86]. Comme annoncé, cette variable est l'impulsion transverse transférée, qui est bien la variable conjuguée au paramètre d'impact  $\mathbf{b}$ . On obtient :

$$n(x, \underline{r}, \underline{b}|\underline{r}_0) = \frac{1}{|\underline{r}|^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{|\underline{r}_0|}{|\underline{r}|} \int d^2\mathbf{q} \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} \bar{E}_q^{n,\nu}(\underline{r}_0) E_q^{n,\nu}(\underline{r}) x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\gamma)}. \quad (2.94)$$

L'expression des  $E_q$  est relativement complexe [Navelet 96a]. Ces fonctions sont, à des facteurs près, les transformées de Fourier des fonctions propres  $E^{n,\nu}$  des Casimirs de l'algèbre conforme à deux dimensions :

$$\begin{aligned} E_q^{n,\nu}(\underline{r}) &= \frac{4\pi^2}{b_{n,\nu}} \frac{1}{|\underline{r}|} \int d^2\mathbf{b} e^{i\mathbf{q}\mathbf{b}} E^{n,\nu}(\underline{b}+\underline{r}/2, \underline{b}-\underline{r}/2), \\ \text{avec } b_{n,\nu} &= \frac{\pi^3 2^{4i\nu}}{|n|/2-i\nu} \frac{\Gamma((1+|n|)/2-i\nu)}{\Gamma((1+|n|)/2+i\nu)} \frac{\Gamma(|n|/2+i\nu)}{\Gamma(|n|/2-i\nu)}, \\ \text{et } E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2) &= (-1)^n \left( \frac{\underline{\rho}_1 - \underline{\rho}_2}{\underline{\rho}_1 \underline{\rho}_2} \right)^{(1-n)/2+i\nu} \left( \frac{\bar{\underline{\rho}}_1 - \bar{\underline{\rho}}_2}{\bar{\underline{\rho}}_1 \bar{\underline{\rho}}_2} \right)^{(1+n)/2+i\nu}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

L'apparition de telles fonctions résulte de l'invariance par les transformations de Möbius  $r \rightarrow (ar+b)/(cr+d)$  du noyau d'évolution des dipôles. Cette propriété a été mise en évidence, dans un contexte légèrement différent mais équivalent, dans la référence [Lipatov 86]. Cette discussion nous permet d'identifier le nombre quantique  $n/2$  au *spin conforme* de l'algèbre conforme à deux dimensions.

Pour être exhaustifs, exprimons directement la densité de dipôles de taille  $\mathbf{r}$  au paramètre d'impact  $\mathbf{b}$  en fonction des  $E^{n,\nu}$ . En tenant compte du fait que  $b_{n,\nu} \bar{b}_{n,\nu} = \pi^6/(\nu^2 + n^2/4)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} n(x, \underline{r}, \underline{b}|\underline{r}_0) &= \frac{4}{\pi^2} (\nu^2 + n^2/4) \frac{1}{|\underline{r}|^4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d\nu}{2\pi} x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)} \\ &\quad \times \int d^2\mathbf{R} \bar{E}^{n,\nu}(\underline{R}+\underline{r}_0/2, \underline{R}-\underline{r}_0/2) E^{n,\nu}(\underline{b}+\underline{R}+\underline{r}/2, \underline{b}+\underline{R}-\underline{r}/2). \end{aligned} \quad (2.96)$$

# Diffusion profondément inélastique à haute énergie dans une approche de voie $s$

## Sommaire

<b>3.1 Fonctions de structure . . . . .</b>	<b>48</b>
3.1.1 Définition . . . . .	48
3.1.2 Mesure . . . . .	50
<b>3.2 Modèle des dipôles pour les fonctions de structure d'un onium . . . . .</b>	<b>52</b>
3.2.1 Fonction d'onde du photon virtuel . . . . .	53
3.2.2 Interaction de dipôles . . . . .	59
3.2.3 Expression des fonctions de structure . . . . .	61
<b>3.3 Phénoménologie des données d'HERA . . . . .</b>	<b>62</b>
3.3.1 Composante de spin conforme nul . . . . .	62
3.3.2 Composantes de spin conforme supérieur . . . . .	68
<b>3.4 Résumé – prolongements . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>3.A Détails du calcul de l'amplitude de diffusion dipôle-dipôle . . . . .</b>	<b>76</b>

*Nous ferons ici le lien entre les densités de dipôles à petit  $x$  calculées dans le chapitre précédent et les observables inclusives et semi-inclusives des expériences de diffusion profondément inélastique que sont les fonctions de structure du proton. Après un rappel de la définition et de la mesure de ces dernières (section (3.1)), nous expliquerons comment les décrire par le modèle des dipôles. Nous reproduirons à cette occasion d'une part le calcul de la fonction d'onde d'un photon virtuel, d'autre part celui de la section efficace d'interaction dipôle-dipôle, dans le cadre du formalisme exposé au chapitre 1. Les sections (3.2) et (3.3) présenteront les résultats phénoménologiques publiés dans les articles et compte-rendus des références [Munier I, Munier I', Munier III].*

Les fonctions de structure du proton quantifient l'interaction entre une sonde (photon virtuel de différentes polarisations) et le proton-cible. Nous les définissons précisément dans la première partie. La partie suivante donne en complément un aperçu sommaire de l'aspect expérimental : on y évoquera la façon de mesurer ces fonctions de structure.

Pour pouvoir les décrire dans le cadre du modèle des dipôles, il nous faut pouvoir factoriser la sonde et la cible, toutes deux décrites par des densités de dipôles. C'est l'objet de la section (3.2). Dans ce schéma, le contenu en dipôles primordiaux du proton cible est le seul



élément qui ne soit pas calculable en QCD perturbative, car les échelles de distance caractéristiques à ce niveau sont de l'ordre de  $\Lambda_{QCD}$ . Nous proposerons un modèle et présenterons l'étude phénoménologique basée sur ces différents éléments dans la section (3.3).

### 3.1 Fonctions de structure

#### 3.1.1 Définition

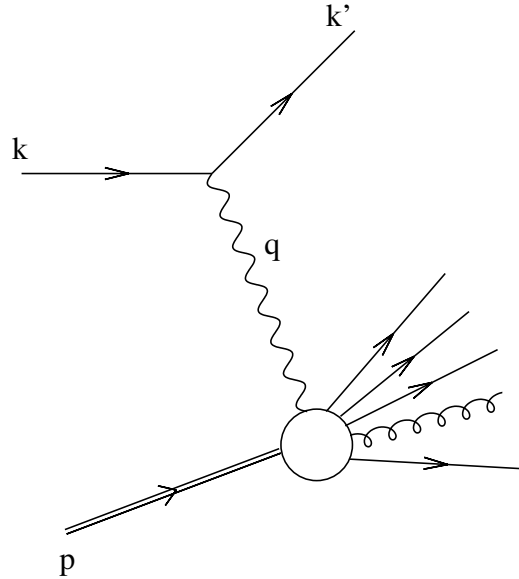


FIG. 3.1 – *Processus de diffusion profondément inélastique.*

On considère un processus inclusif de diffusion d'électrons sur des protons, représenté sur la figure (3.1). Le proton incident est décrit par le quadrivecteur énergie-impulsion  $p^\mu$ , et l'électron incident et l'électron diffusé par  $k^\mu$  et  $k'^\mu$  respectivement. On néglige la masse de ceux-ci. L'énergie dans le centre de masse de la réaction est notée  $\sqrt{s} \equiv \sqrt{(p+k)^2}$ . Dans le domaine cinématique qui nous intéresse, ce processus est dominé par l'échange d'un photon virtuel en voie  $t$ , de quadrivecteur  $q^\mu = k'^\mu - k^\mu$ . On introduit la variable d'inélasticité  $y = p \cdot q / p \cdot k$ , qui mesure, dans le repère de moment infini du système électron-proton, la fraction d'énergie du cône de lumière de l'électron transférée au photon virtuel.

La section efficace différentielle s'écrit (voir par exemple [Halzen 84]) :

$$d\sigma = \frac{1}{4(k \cdot p)} \left( \frac{g_{em}^2}{q^2} \right)^2 (L^{\mu\nu}(k, k') d\omega) \times (4\pi W_{\mu\nu}(p, q)) \quad (3.1)$$

où  $L^{\mu\nu}$  et  $W^{\mu\nu}$  correspondent respectivement à la partie purement électromagnétique et hadronique du processus. La différentielle  $d\omega \equiv d^3\vec{k}' / ((2\pi)^3 2k'^-)$  est l'espace des phases pour l'électron diffusé, et  $W^{\mu\nu}$  contient l'espace des phases intégré des débris hadroniques, à un nombre arbitraire de particules. On ne s'intéresse pas aux caractéristiques de l'état final; on ne connaît que le carré de sa masse invariante totale  $W^2 = (p+q)^2$ . Le facteur  $1/(4p \cdot k)$  est le facteur de flux des électrons et protons incidents, et le facteur  $4\pi$  du numérateur est purement conventionnel et est lié à la définition même de  $W^{\mu\nu}$ .

Le tenseur  $L^{\mu\nu}$  est le carré du courant électromagnétique de l'électron incident, dont on a pris la moyenne des hélicités de l'état initial, et la somme des hélicités de l'état final. Il vaut :

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}(k, k') &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\bar{u}_\alpha(k) \gamma^\mu u_\beta(k')) (\bar{u}_\alpha(k) \gamma^\nu u_\beta(k'))^* \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}((\gamma \cdot k) \gamma^\mu (\gamma \cdot k') \gamma^\nu) = 2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu}) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le tenseur hadronique inclusif  $W^{\mu\nu}$  encode la structure du proton vue par le photon. Il décrit le sous-processus "photon virtuel-proton", et dépend des deux variables cinématiques  $p$  et  $q$ . On peut former à l'aide de ces variables les invariants de Lorentz  $x_{Bj} \equiv Q^2 / (2p \cdot q)$ , qui est la variable de Bjorken,  $Q^2 \equiv -q^2$ , qui est la virtualité du photon, et  $W^2 \equiv (p+q)^2$ , le carré de la masse invariante des produits hadroniques. Notons les relations suivantes entre les invariants :

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2} , \quad x_{Bj} y s = Q^2 . \quad (3.3)$$

La variable  $x_{Bj}$  est donc directement liée à  $\sqrt{W^2}$ , qui est aussi l'énergie dans le centre de masse de la réaction  $\gamma^* - p$ . Par cette relation, on comprend que la limite de haute énergie ( $W^2 \gg Q^2$ ) est également la limite de petit  $x_{Bj}$ .

Intéressons-nous plus particulièrement au sous-processus  $\gamma^* - p$ , dont la dynamique est toute entière décrite par le tenseur  $W^{\mu\nu}$ . On peut écrire une décomposition de  $W^{\mu\nu}$  sur la base des tenseurs covariants à deux indices du groupe de Lorentz, qui dépendent des seules variables  $p^\mu$  et  $q^\mu$ . L'invariance par parité de la théorie que l'on utilise ici (QED+QCD) exclut l'emploi du tenseur complètement antisymétrique  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . En tenant compte des contraintes supplémentaires dues à la symétrie  $\mu \leftrightarrow \nu$  et à la conservation du courant électromagnétique  $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$ , on peut écrire la décomposition la plus générale suivante :

$$W^{\mu\nu}(p, q) = - \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1(x_{Bj}, Q^2) + \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) W_2(x_{Bj}, Q^2) . \quad (3.4)$$

La structure du proton est donc décrite par deux facteurs de forme scalaires  $W_1$  et  $W_2$ . Définissons à partir de ces quantités les *fonctions de structure* usuelles suivantes :

$$\begin{aligned} F_T(x_{Bj}, Q^2) &\equiv 2x_{Bj} W_1(x_{Bj}, Q^2) \\ F_L(x_{Bj}, Q^2) &\equiv (p \cdot q) W_2(x_{Bj}, Q^2) - 2x_{Bj} W_1(x_{Bj}, Q^2) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

et posons  $F_2$  leur somme  $F_2 \equiv F_T + F_L$ . On peut réécrire le tenseur  $W^{\mu\nu}$  en fonction de  $F_T$  et  $F_L$  :

$$W^{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{2x_{Bj}} \left( \Pi_T(p, q) \cdot F_T(x_{Bj}, Q^2) + \Pi_L(p, q) \cdot F_L(x_{Bj}, Q^2) \right) , \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_T(p, q) &= -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu \bar{q}^\nu + p^\nu \bar{q}^\mu}{p \cdot \bar{q}} \\ \Pi_L(p, q) &= \frac{Q^2}{(p \cdot q)^2} \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) , \end{aligned} \quad (3.7)$$

où l'on a introduit le quadrivecteur sur le cône de lumière  $\bar{q}^\mu \equiv q^\mu + p^\mu Q^2 / (2p \cdot q)$ . En remontant aux équations (3.2) et (3.1), on peut maintenant exprimer la section efficace différentielle électron-proton en fonction de  $F_2$ ,  $F_L$  et des invariants cinématiques  $x_{Bj}$ ,  $Q^2$  et  $y$  :

$$\frac{d^2\sigma}{dx_{Bj}dQ^2} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{x_{Bj}Q^4} \left( (1+(1-y)^2)F_2(x_{Bj}, Q^2) - y^2 F_L(x_{Bj}, Q^2) \right) , \quad (3.8)$$

où l'on a intégré l'élément différentiel de l'espace des phases de l'électron diffusé sur l'angle azimuthal dont ne dépend pas la section efficace, et exprimé les deux variables restantes en fonction de  $x_{Bj}$  et  $Q^2$ .

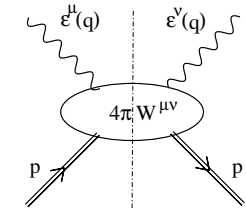
La suite de cette section est consacrée à l'interprétation des fonctions de structure comme des sections efficaces d'interaction photon-proton. On voit qu'on peut extraire  $F_T$  et  $F_L$  de l'équation (3.6) par projection du tenseur  $W^{\mu\nu}$  :

$$\begin{aligned} F_T(x_{Bj}, Q^2) &= 2x_{Bj} W^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \sum_{\lambda=D,G} \varepsilon_\mu^\lambda(\bar{q}) \varepsilon_\nu^{\lambda*}(\bar{q}) \right) \\ F_L(x_{Bj}, Q^2) &= 2x_{Bj} W^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^L(\bar{q}) \varepsilon_\nu^{L*}(\bar{q}) , \end{aligned} \quad (3.9)$$

où les quadrivecteurs “polarisation”  $\varepsilon_\mu$  avec lesquels on a exprimé les projecteurs sont définis par :

$$\begin{aligned} p^\mu \varepsilon_\mu^{D/G}(\bar{q}) = 0 \quad \bar{q}^\mu \varepsilon_\mu^{D/G}(\bar{q}) = 0 \quad \varepsilon^{D/G}(\bar{q}) \cdot \varepsilon^{D/G}(\bar{q}) = -1 \\ \text{et} \quad \varepsilon_L^\mu(\bar{q}) = \frac{Q}{p \cdot q} \bar{p}^\mu . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le premier jeu d'équations a pour solution deux quadrivecteurs orthogonaux  $\varepsilon^G$  et  $\varepsilon^D$ , qui décrivent des photons transverses en jauge du cône de lumière  $p \cdot A = 0$ . La seconde équation définit le quadrivecteur du champ d'un photon virtuel pour son état de polarisation longitudinale. Cette remarque est la base de la réinterprétation des fonctions de structure comme des “sections efficaces” de photons virtuels. En effet, considérons dans un premier temps la limite de photoproduction ( $Q^2 \rightarrow 0$ ) dans laquelle la section efficace inclusive  $\gamma - p$  est bien définie. Celle-ci peut s'écrire en fonction du tenseur  $W^{\mu\nu}$  comme suit :

$$\sigma_{\gamma p} = \frac{4\pi\alpha_{em}}{4(p \cdot q)} (4\pi W^{\mu\nu}) \left( \frac{1}{2} \sum_{\lambda=G/D} \varepsilon_\mu^\lambda(q) \varepsilon_\nu^{\lambda*}(q) \right) , \quad (3.11)$$


où  $4(p \cdot q)$  est le flux du photon par rapport au proton,  $4\pi\alpha_{em} = g_{em}^2$  la constante de couplage électromagnétique qu'on n'a pas incluse dans  $W^{\mu\nu}$  et  $\varepsilon^\mu$  le quadrivecteur polarisation du photon initial. On a pris la moyenne sur la polarisation du photon initial. On choisit de définir la section efficace *photon virtuel*-proton exactement de la même manière<sup>1</sup>, en remplaçant simplement le produit tensoriel des quadrivecteurs polarisation par l'expression qui correspond au photon virtuel (équation (3.10)). En utilisant les équations (3.9) et la définition  $x_{Bj} = Q^2/(2p \cdot q)$ , on trouve :

$$F_{T,L}(x_{Bj}, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \sigma_{\gamma^*(T,L)p}(x_{Bj}, Q^2) . \quad (3.12)$$

### 3.1.2 Mesure

Les fonctions de structure du proton ont été mesurées dans différentes expériences de diffusion profondément inélastique. Les détecteurs actuellement les plus performants pour de telles expériences à haute énergie sont H1 [H1 97b] et ZEUS [ZEUS 93], situés sur l'accélérateur HERA de DESY, qui est un collisionneur circulaire d'une circonférence de 6,3 km, situé à Hambourg et mis en service en 1992.

Des électrons d'énergie 26,7 GeV entrent en collision avec des protons d'énergie 820 GeV : le carré de l'énergie dans le centre de masse disponible pour la réaction, est donc  $s = 87500 \text{ GeV}^2$ .

Les détecteurs sont divisés en plusieurs sous-parties. Très schématiquement, on trouve au centre des détecteurs de traces qui permettent de reconstruire précisément les trajectoires des particules chargées. En périphérie, des calorimètres électromagnétiques, hadroniques, puis des chambres à muons servent pour certains à identifier les particules et pour d'autres à mesurer leur énergie. Comme le référentiel du laboratoire diffère d'une transformation de Lorentz (boost) de celui du centre de masse, les hadrons produits sont détectés essentiellement à l'avant du détecteur, ce qui explique le choix d'une géométrie dissymétrique (voir la figure (3.2)).

<sup>1</sup>Ceci est un *choix*, car le facteur de flux pour un photon virtuel est arbitraire ; on le prend ici égal à ce qu'il serait si le photon était réel.

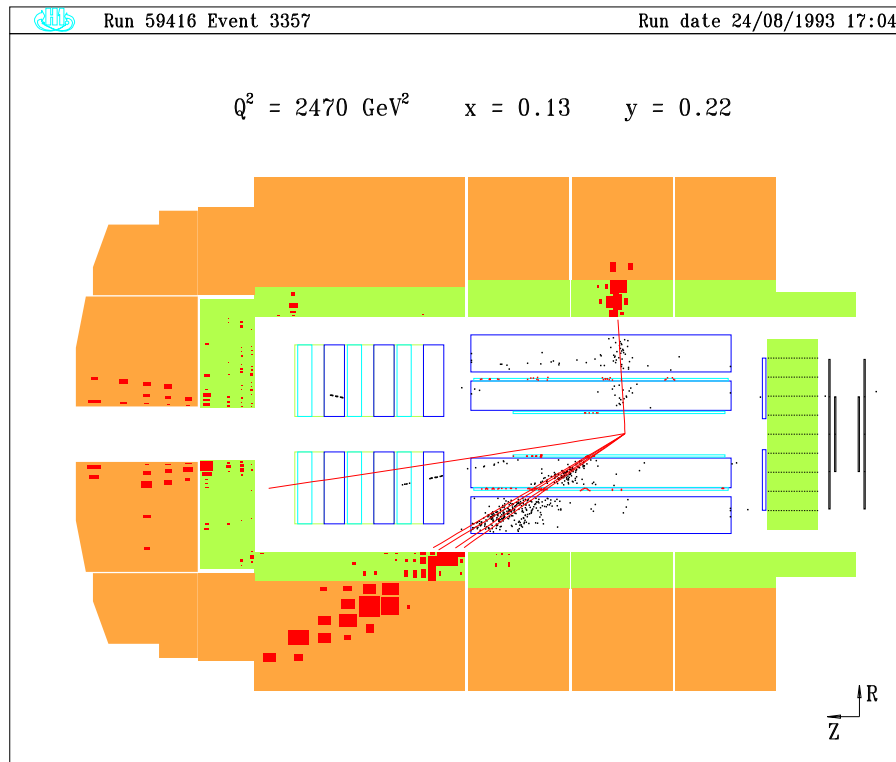


FIG. 3.2 – Coupe longitudinale du détecteur H1. Au centre, les détecteurs de traces des particules chargées. Les détecteurs extérieurs sont, de l'intérieur vers l'extérieur, les calorimètres électromagnétiques et hadroniques. Les protons vont de la droite vers la gauche et les électrons de la gauche vers la droite. Leur point d'interaction se trouve au centre, à l'intersection des traces reconstruites. Les signaux représentés dans ces derniers permettent d'identifier des hadrons (à gauche, à l'avant du détecteur), tandis que les signaux dans les calorimètres électromagnétiques correspondent à l'électron diffusé (en haut).

L'acceptance des détecteurs donne accès à diverses plages cinématiques. Celle qui nous intéresse plus particulièrement concerne les valeurs modérées de  $Q^2$  ( $5 \leq Q^2 \leq 150$ ), et les valeurs faibles de  $x_{Bj}$  ( $10^{-4} \leq x_{Bj} \leq 10^{-2}$ ). On détermine la variable cinématique indépendante  $Q^2$  par une mesure de l'énergie et de l'angle de l'électron diffusé. La seconde variable indépendante,  $y$ , est déterminée à partir de ce même quadrivecteur de l'électron diffusé, et/ou à partir de l'énergie totale des hadrons produits. L'acceptance du détecteur impose que  $y$  soit proche de 0. On voit alors d'après la formule (3.8) que la section efficace électron-proton est alors essentiellement proportionnelle à la fonction de structure  $F_2$ . Pour l'instant, seules des méthodes indirectes permettent l'extraction des composantes du photon de différentes polarisations [H1 97a].

### 3.2 Modèle des dipôles pour les fonctions de structure d'un onium

Dans un premier temps, on va se placer dans un cadre dans lequel seules des échelles dures entrent en jeu. On va formuler la diffusion profondément inélastique d'électrons sur un *onium* à partir du modèle des dipôles. La transposition de ces calculs au cas plus réaliste, en regard des possibilités expérimentales, où l'onium est remplacé par un proton fera l'objet de la section suivante.

L'onium incident est représenté, à la date de l'interaction  $\tau = 0$ , par une densité  $n(x, \mathbf{r})$  de dipôles. La variable  $x$  est la fraction d'impulsion longitudinale de l'onium emportée par le dipôle le plus mou, et la variable  $\mathbf{r}$  la taille transverse du dipôle. Ces dipôles interagissent avec le photon virtuel du processus DIS, qui peut également être représenté, sur une base de dipôles à  $\tau = 0$  par la densité  $n_{\gamma^*}(x_{\gamma^*}, \mathbf{r}_{\gamma^*})$ . En ce sens, notre image physique est une image *de voie s*.

On se place dans le repère dans lequel l'onium initial a son impulsion orientée le long de l'axe ( $Oz$ ) dirigé suivant les  $z$  positifs. D'autre part, il a une masse négligeable par rapport à son énergie :  $p^\mu = (p^+, 0, \mathbf{0})$ . Le photon a son impulsion sur le même axe, dans le sens opposé, et sa virtualité est  $Q^2 = -q^2$  :  $q^\mu = (-Q^2/2q^-, q^-, \mathbf{0})$ . Ainsi, les fractions d'impulsion longitudinale  $x$  et  $x_{\gamma^*}$  se rapportent aux impulsions  $(p^+, 0, \mathbf{0})$  et de  $(0, q^-, \mathbf{0})$  respectivement.

La section efficace d'interaction photon virtuel-onium est alors donnée par l'équation de convolution suivante :

$$\sigma_{\gamma^* \mathcal{O}} = \int d^2 \mathbf{r} \int d^2 \mathbf{r}_{\gamma^*} n_{\mathcal{O}}(x, \mathbf{r}) n_{\gamma^*}(x_{\gamma^*}, \mathbf{r}_{\gamma^*}) \sigma_{dd}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\gamma^*}) . \quad (3.13)$$

$x$  et  $x_{\gamma^*}$  dépendent des limites cinématiques.  $\sigma_{dd}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\gamma^*})$  est la section efficace *élémentaire* d'interaction de deux dipôles de tailles respectives  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_{\gamma^*}$ . On a anticipé sur un résultat démontré par la suite : cette section efficace ne dépend pas des impulsions longitudinales portées par les dipôles.

Pour écrire cette équation, on a supposé qu'il n'y avait qu'une seule interaction entre les deux ensembles de dipôles. Comme on le montrera ci-dessous, ceci revient à négliger des termes sous-dominants en  $N_c$ , qui interviennent uniquement si on s'intéresse aux corrections à l'unitarité. En effet, la section efficace dipôle-dipôle a la propriété de ne pas dépendre du facteur de couleur  $N_c$ .

Remarquons qu'on peut réécrire la densité de dipôles dans le photon virtuel comme la convolution du carré de la fonction d'onde du photon virtuel en paires  $q\bar{q}$  de taille transverse  $\mathbf{r}_0$  avec le nombre de dipôles dans un dipôle primordial de taille  $\mathbf{r}_0$  :

$$n_{\gamma^*}(x_{\gamma^*}, \mathbf{r}_{\gamma^*}) = \int d^2 \mathbf{r}_0 n(x_{\gamma^*}, \mathbf{r}_{\gamma^*} | \mathbf{r}_0) \cdot \int_0^1 dz \phi_{\gamma^*}(z, \mathbf{r}_0) . \quad (3.14)$$

Ceci découle du fait que le photon n'interagit avec les gluons de l'onium physique que par l'intermédiaire d'une paire  $q\bar{q}$ , et que l'onium est essentiellement constitué, à l'approximation des logarithmes dominants, de dipôles formés de recombinaisons de paires de gluons. On a intégré sur la variable  $z$  de partage de l'impulsion longitudinale au vertex du photon. On calculera cette fonction d'onde  $\phi_{\gamma^*}(z, \mathbf{r}_0)$  dans le paragraphe suivant.

Examinons maintenant la contribution dominante à ces intégrales dans la limite de haute énergie (petit  $x_{Bj}$ ). Pour cela, on va faire l'hypothèse que l'échelle des impulsions transverses est unique, et fixée par la virtualité du photon initial. Comme nous le verrons, ceci découle de cette limite de haute énergie. Écrivons le carré de l'énergie dans le centre de masse  $\hat{s}$  pour le sous-processus d'interaction élémentaire dipôle-dipôle, qui, pour que la réaction soit possible, doit être une quantité positive. Si  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}$  désignent les impulsions transverses associées aux dipôles élémentaires qui entrent en collision, on a alors, dans des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (xp^+ + x_{\gamma^*}q^- + k^\perp + q^\perp)^2 = xx_{\gamma^*} 2p^+q^- - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 \\ &\simeq Q^2 \left( \frac{xx_{\gamma^*}}{x_{Bj}} - \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{Q^2} \right) \geq 0 . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comme à la fois  $\mathbf{k}^2$  et  $\mathbf{q}^2$  sont d'ordre  $Q^2$ , il vient  $xx_{\gamma^*}/x_{Bj} \geq 1$ . Ceci fournit une borne inférieure sur  $x_{\gamma^*}$ . Comme les densités de dipôles  $n(x, \mathbf{r})$  croissent avec  $1/x$  (voir l'équation (2.87) page 45), la section efficace (3.13) est contrôlée par la région  $x_{\gamma^*} = x_{Bj}/x$ . On obtient alors pour la section efficace photon virtuel-onium :

$$\sigma_{\gamma^* \mathcal{O}} = \int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}_{\gamma^*} n_{\mathcal{O}}(x, \mathbf{r}) \int d^2\mathbf{r}_0 n\left(\frac{x_{Bj}}{x}, \mathbf{r}_{\gamma^*} \mid \mathbf{r}_0\right) \phi_{\gamma^*}(\mathbf{r}_0) \sigma_{dd}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\gamma^*}) . \quad (3.16)$$

$x$  demeure un paramètre *arbitraire*,  $x > x_{Bj}$ , qui dépend en fait du repère choisi : changer  $x$  équivaut à effectuer un boost suivant l'axe ( $Oz$ ). Ce paramètre gère le partage de l'évolution QCD entre l'onium et le photon virtuel. Comme on le démontrera dans la suite par un calcul explicite, la section efficace photon virtuel-onium est bien indépendante de  $x$ .

La fonction d'onde du photon et la section efficace dipôle-dipôle sont calculées dans les deux paragraphes suivants. On rassemblera les différents éléments pour obtenir le résultat à la fin de cette section.

### 3.2.1 Fonction d'onde du photon virtuel

Calculons le couplage d'un photon à une paire quark-antiquark de masse  $m$ , en théorie des perturbations sur le cône de lumière. C'est un calcul d'électrodynamique quantique. On suppose qu'on se trouve dans le repère dans lequel le photon a une grande impulsion suivant l'axe ( $Oz$ ), dans le sens des  $z$  négatifs, et la jauge du cône de lumière adoptée est telle que  $\bar{\eta} \cdot A \equiv 0$  avec  $\bar{\eta} = (1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ , de telle sorte que  $A^- \equiv 0$ . Il suffit de reprendre le formalisme du chapitre 1 en intervertissant les composantes "+" et "-". Le photon est virtuel, de virtualité  $q^2 \equiv -Q^2$ ; les composantes de son quadri-vecteur énergie-impulsion valent  $q^\mu = ((\mathbf{q}^2 - Q^2)/2q^-, q^-, \mathbf{q})$ . Il possède trois états de polarisation. Rappelons que ses deux états physiques (transverses) sont contraints par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} q \cdot \varepsilon_{R/L}(q) &= 0 \\ \eta \cdot \varepsilon_{R/L}(q) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.17)$$

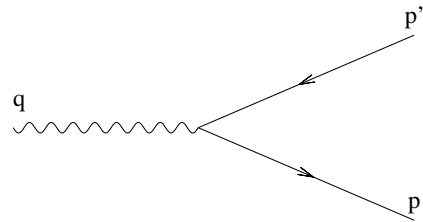


FIG. 3.3 – Couplage d'un photon (virtuel) à une paire  $q\bar{q}$ .

qui déterminent les deux quadrivecteurs polarisation “gauche” (G) et “droite” (D) :

$$\varepsilon_{D/G}^\mu(q) = \left( \frac{\mathbf{q} \cdot \varepsilon_{D/G}^\perp}{q^-}, 0, \varepsilon_{D/G}^\perp \right), \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{D/G}^\perp = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i). \quad (3.18)$$

Comme le photon n’est pas sur sa couche de masse, il possède un état de polarisation longitudinale dont le quadrivecteur  $\varepsilon_L^\mu$  qui peut s’obtenir de la façon suivante<sup>2</sup>. Rappelons que le tenseur de polarisation vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=D,G,L} \varepsilon_\lambda^{\mu*}(q) \varepsilon_\lambda^\nu(q) &\equiv \varepsilon_D^{\mu*}(q) \varepsilon_D^\nu(q) + \varepsilon_G^{\mu*}(q) \varepsilon_G^\nu(q) - \varepsilon_G^{\mu*}(q) \varepsilon_G^\nu(q) \\ &= -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu \bar{\eta}^\nu + q^\nu \bar{\eta}^\mu}{\bar{\eta} \cdot q}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Définissons le quadrivecteur  $\bar{q}^\mu \equiv (\mathbf{q}^2/2q^-, q^-, \mathbf{q})$ , c’est-à-dire  $\bar{q}^\mu = q^\mu + (Q^2/2q^-)\bar{\eta}^\mu$ , de sorte que  $\bar{q}^2 = 0$ . L’équation (3.19) devient, dans ces notations :

$$\varepsilon_D^{\mu*}(q) \varepsilon_D^\nu(q) + \varepsilon_G^{\mu*}(q) \varepsilon_G^\nu(q) - \varepsilon_L^{\mu*}(q) \varepsilon_L^\nu(q) = -g^{\mu\nu} + \frac{\bar{q}^\mu \bar{\eta}^\nu + \bar{q}^\nu \bar{\eta}^\mu}{\bar{\eta} \cdot \bar{q}} - \frac{Q^2}{q_+^2} \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu. \quad (3.20)$$

Les premiers termes correspondent au tenseur de polarisation des états physiques  $D$  et  $G$ , c’est-à-dire à la somme sur les états de polarisation du produit des vecteurs polarisation d’un photon d’impulsion  $\bar{q}$  sur sa couche de masse. On obtient par identification des termes restants :

$$\varepsilon_L^\mu(q) = \frac{Q}{q^-} \bar{\eta}^\mu. \quad (3.21)$$

La fonction d’onde qui correspond aux différentes polarisations des particules initiale et finales se calcule en théorie des perturbations sur le cône de lumière d’après l’équation (1.54) page 17 à l’aide du hamiltonien d’interaction de la formule (1.36) page 15 :

$$\delta^3(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{q}) \psi_{\lambda\alpha\alpha'}(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{\alpha\alpha' \langle \vec{p}, \vec{p}' | \mathcal{H}_I^{q\bar{q}\gamma} | \vec{q} \rangle_\lambda}{p_- + p'_- - q_-}, \quad (3.22)$$


qui donne, par un calcul élémentaire similaire à ceux du chapitre précédent :

$$\psi_{\lambda\alpha\alpha'}(\vec{p}) = \frac{g_{em} e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{z(1-z)}{2q^-}} \frac{\bar{v}^{\alpha'}(p') \gamma \cdot \varepsilon_\lambda(q) u^\alpha(p)}{(1-z)\mathbf{p}^2 + z\mathbf{p}'^2 + m^2 + z(1-z)(Q^2 - \mathbf{q}^2)}, \quad (3.23)$$

où la variable  $z$  est le rapport des impulsions longitudinales au vertex  $z \equiv p^-/q^-$ . On n’a pas explicité  $\vec{p}'$ , mais il est entendu que ce vecteur s’exprime en fonction de  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$ . L’étape suivante consiste à évaluer le produit des spineurs au numérateur en utilisant la représentation explicite donnée dans l’équation (1.20) page 12. On passe ensuite en représentation mixte, par transformation de Fourier bidimensionnelle par rapport aux impulsions transverses  $\mathbf{p}$  ou  $\mathbf{p}'$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\lambda\alpha\alpha'}(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{2\pi} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{r}'} \sqrt{q^-} \psi(\vec{p}, \vec{q} - \vec{p}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{p}'}{2\pi} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p}')\mathbf{r}} \sqrt{q^-} \psi(q - \vec{p}', \vec{p}'). \end{aligned} \quad (3.24)$$

<sup>2</sup>Un photon virtuel n’existe pas à proprement parler en tant qu’état initial. La méthode de dérivation de la polarisation longitudinale exposée ici n’est qu’heuristique : en effet, en vieille théorie des perturbations, toutes les particules des graphes doivent normalement être prises sur leur couche de masse. La contribution de l’état de polarisation longitudinale du photon apparaît, dans ce contexte, dans l’évaluation d’un graphe d’échange

instantané du type .

$\lambda$	$(\alpha, \alpha')$	$\sqrt{q^-} \cdot \psi_{\lambda\alpha\alpha'}(\vec{p}, \vec{p}')$	$(2\pi)^2 \tilde{\psi}_{\lambda\alpha\alpha'}(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$
D	(+, -)	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}}(1-z) \frac{p-zq}{(\mathbf{p}-z\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{-ig_{em}e_q}{\sqrt{2\pi}}(1-z) \frac{\rho}{\rho} \epsilon K_1(\epsilon\rho) e^{iz\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(1-z)\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(-, +)	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}}z \frac{p'-(1-z)q}{(\mathbf{p}'-(1-z)\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{ig_{em}e_q}{\sqrt{2\pi}}z \frac{\rho}{\rho} \epsilon K_1(\epsilon\rho) e^{iz\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(1-z)\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(+, +)	0	0
	(-, -)	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{m}{(\mathbf{p}-z\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{2\pi}} m K_0(\epsilon\rho) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
L	(+, -)	$\frac{g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{Qz(1-z)\sqrt{2}}{(\mathbf{p}-z\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{g_{em}e_q}{\sqrt{\pi}} Qz(1-z) K_0(\epsilon\rho) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(-, +)	$\frac{g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{Qz(1-z)\sqrt{2}}{(\mathbf{p}-z\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{g_{em}e_q}{\sqrt{\pi}} Qz(1-z) K_0(\epsilon\rho) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(+, +)	0	0
	(-, -)	0	0
G	(+, -)	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}}z \frac{p^*-(1-z)q^*}{(\mathbf{p}'-(1-z)\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{ig_{em}e_q}{\sqrt{2\pi}}z \frac{\rho^*}{\rho} \epsilon K_1(\epsilon\rho) e^{iz\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(1-z)\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(-, +)	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}}(1-z) \frac{p^*-zq^*}{(\mathbf{p}-z\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{-ig_{em}e_q}{\sqrt{2\pi}}(1-z) \frac{\rho^*}{\rho} \epsilon K_1(\epsilon\rho) e^{iz\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(1-z)\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(+, +)	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{m}{(\mathbf{p}-z\mathbf{q})^2+m^2+z(1-z)Q^2}$	$\frac{-g_{em}e_q}{\sqrt{2\pi}} m K_0(\epsilon\rho) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'}$
	(-, -)	0	0

TAB. 3.1 – Fonctions d'onde d'un photon de polarisation  $\lambda$  en une paire quark anti-quark d'hélicités respectives  $\alpha$  et  $\alpha'$ . On a adopté les notations  $\epsilon^2 \equiv m^2 + z(1-z)Q^2$  et  $\rho \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

On a simplement appliqué une transformation de Fourier similaire à celle de la formule (2.53) de la page 36, avec  $n=2$ . Remarque que comme ici, le photon a des composantes transverses, la fonction d'onde  $\tilde{\psi}$  dépend *a priori* des coordonnées  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  séparément.

On utilise alors les formules d'intégration suivantes :

$$\int \frac{d^2\mathbf{p}}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{p}^2 + M^2} = K_0(M|\mathbf{r}|) \quad \text{et} \quad \int \frac{d^2\mathbf{p}}{2\pi} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\underline{p}}{\mathbf{p}^2 + M^2} = iM \frac{\underline{r}}{|\mathbf{r}|} K_1(M|\mathbf{r}|). \quad (3.25)$$

Les résultats pour les différentes composantes sont résumées dans le tableau (3.1). Notons que ces expressions avaient déjà été obtenues par exemple dans la référence [Ivanov 99], mais nous avons ici effectué un calcul complet des fonctions d'ondes dans le contexte de la théorie des perturbations sur le cône de lumière, qui nous a permis de justifier l'ensemble des facteurs qui sont apparus.

Remarquons également sur la forme analytique de  $\psi_{\lambda\alpha\alpha'}(\vec{p}, \vec{p}')$  que l'échelle des impulsions transverses des quarks  $\vec{p}$  est de l'ordre de  $\sqrt{m^2 + z(1-z)Q^2}$ .

Calculons maintenant la distribution de dipôles dans le photon à cet ordre. Il s'agit d'évaluer les modules carrés des diverses fonctions d'onde, de sommer sur les hélicités  $\alpha, \alpha'$  et couleurs des quarks finals et de prendre la moyenne sur les états de polarisation du photon initial. On remarque que les modules-carrés ne dépendent que de la taille transverse du dipôle  $\rho \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Ainsi, si on ne s'intéresse qu'à des états d'hélicité du photon purement circulaires ou longitudinales, on a une symétrie de rotation dans le plan transverse. Cette symétrie n'est pas présente si on s'intéresse par exemple à des états de polarisation linéaire : on se reportera à la référence [Marchal 00] pour une discussion détaillée.



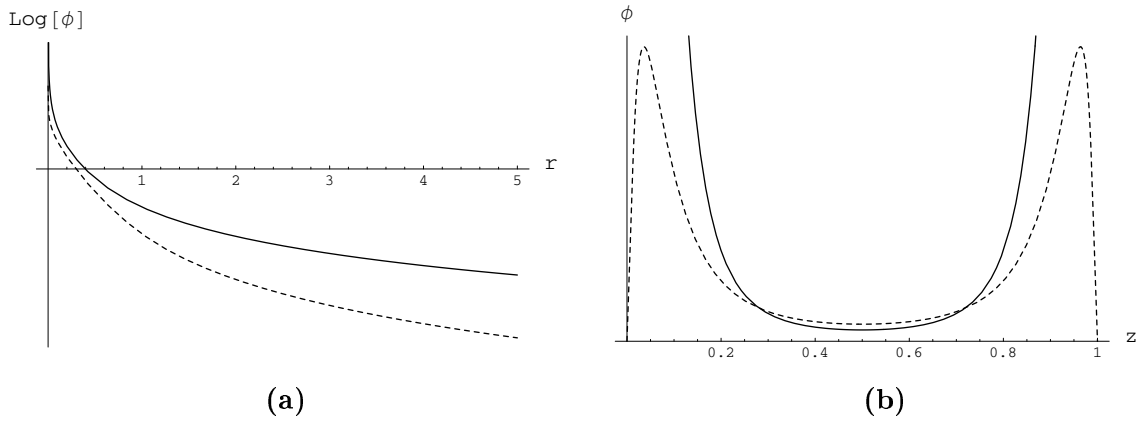


FIG. 3.4 – Graphe des fonctions  $\Phi_T$  (lignes continues) et  $\Phi_L$  (lignes pointillées). Les paramètres  $Q$  et  $m$  sont fixés à 10 et 1 respectivement. **a)** dépendance en  $r$  seul : on a intégré sur toutes les valeurs de  $z$  entre 0 et 1. **b)** dépendance en  $z$ . La taille  $r$  du dipôle est fixée à 1.

On a alors, pour les polarisations transverse et longitudinale :

$$\Phi_T(z, \rho) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=D/G} \sum_{\alpha\alpha', c} (2\pi)^2 |\tilde{\psi}_{\lambda\alpha\alpha'}(z, \rho)|^2 \quad \text{et} \quad \Phi_L(z, \rho) = \sum_{\alpha\alpha', c} (2\pi)^2 |\tilde{\psi}_{L\alpha\alpha'}(z, \rho)|^2. \quad (3.26)$$

En tenant compte de la relation  $4\pi g_{em}^2 = \alpha_{em}$  et en introduisant la variable composée  $\epsilon^2 = m^2 + z(1-z)Q^2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi_T(z, \rho) &= \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} e_q^2 ((z^2 + (1-z)^2)\epsilon^2 K_1^2(\epsilon\rho) + m^2 K_0^2(\epsilon\rho)) \\ \Phi_L(z, \rho) &= \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} 4e_q^2 Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon\rho). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le comportement de ces fonctions est représenté sur la figure (3.4), et appelle quelques commentaires.

- Asymptotiquement ( $r \rightarrow \infty$ ), ces deux fonctions présentent une décroissance exponentielle (voir la figure (3.4.a)), à l'instar des carrés des fonctions de Bessel  $K_0$  et  $K_1$  qui les composent :

$$K_{1,0}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (3.28)$$

Ceci signifie que seuls les dipôles de taille  $\rho$  inférieure à  $1/2\epsilon$  sont représentés de façon significative dans la fonction d'onde. Si  $z$  est fini, on voit donc que  $Q$  et  $m$  tiennent lieu de régularisateur infrarouge.

- La fonction  $\Phi_{\perp}(z, \rho)$  présente une divergence ultraviolette non intégrable, en  $\rho=0$ . En effet, les fonctions de Bessel  $K_{0,1}(x)$  ont les équivalents suivants au voisinage de  $x=0$  :

$$K_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad K_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \log\left(\frac{1}{x}\right), \quad (3.29)$$

et l'intégrale sur toutes les valeurs des tailles des dipôles dans un photon transverse diverge donc logarithmiquement. On introduit le régularisateur ultraviolet  $\Lambda$ . Il vient alors :

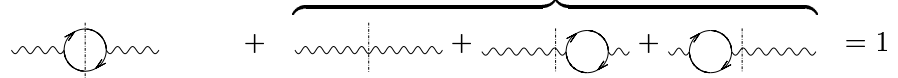
$$\int_0^1 dz \int_{\Lambda^2} d^2\rho \Phi_{\perp}(z, \rho) \underset{\Lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha_{em} N_c}{3\pi} e_q^2 \log \Lambda^2. \quad (3.30)$$

Cette divergence logarithmique est la divergence ultraviolette habituelle qui apparaît dans l'évaluation des diagrammes de correction au propagateur à une boucle dans une théorie des champs renormalisable. Montrons-le plus précisément.

Le photon virtuel physique se décompose sur la base de ses fluctuations quantiques, selon la formule (2.52) page 36 :

$$|\gamma_{\text{physique}}\rangle = |\gamma\rangle + \int d^2\rho dz \psi(\rho, z) |q\bar{q}(\rho, z)\rangle, \quad (3.31)$$

où l'on n'a conservé que les termes au plus du premier ordre en la constante de couplage de l'électrodynamique, et où  $|\gamma\rangle$  est l'état non physique "photon nu", à l'instant  $\tau = -\infty$ . La probabilité totale d'observer un photon est normalisée à l'unité, et ainsi  $\langle \gamma_{\text{physique}} | \gamma_{\text{physique}} \rangle = 1$ . Ceci implique que l'état nu  $|\gamma\rangle$ , initialement également de carré unitaire, doit être renormalisé :  $|\gamma\rangle \rightarrow \sqrt{Z_3} |\gamma\rangle$ , où  $Z_3 = 1 + \mathcal{O}(\alpha_{em})$ . En utilisant la décomposition (3.31), on trouve alors l'équation suivante d'ordre  $\alpha_{em}$ , que l'on illustre par les graphes correspondants :

$$\int_0^1 dz \int_{\Lambda^2} d^2\rho |\psi(\rho, z)|^2 + Z_3 \langle \gamma | \gamma \rangle = 1 \quad (3.32)$$


Le trait vertical discontinu marque l'endroit où l'on coupe. Le premier graphe représente la probabilité, à l'ordre  $\alpha_{em}$ , de trouver un dipôle  $q\bar{q}$  dans le photon initial. Celle-ci est donnée par l'intégrale de  $\Phi_{\perp}(z, \rho)$  sur  $z$  et  $\rho$ . La somme des trois graphes suivants est la probabilité de trouver un photon "nu", ses fluctuations quantiques étant calculées jusqu'à l'ordre  $\alpha_{em}$ . Cette équation probabiliste entraîne la relation suivante :

$$1 - Z_3 = \frac{\alpha_{em} N_c}{3\pi} e_q^2 \log \Lambda^2 + \mathcal{O}(\alpha_{em}^2), \quad (3.33)$$

qui donne bien la valeur connue de la constante  $Z_3$  (voir par exemple [le Bellac 88]), dans un schéma de renormalisation dans lequel le régularisateur ultraviolet consiste en un *cut-off*  $\Lambda$ .

- Enfin, à  $\rho$  fixé et pour des quarks de masse négligeable, la fonction d'onde du photon transverse atteint un minimum en  $z = 1/2$ , et est très piquée en  $z = 0$  et  $z = 1$ , d'autant plus que  $Q$  est plus grand (voir la figure (3.4.b)). On peut avoir une estimation de cet effet en calculant par exemple le rapport de la valeur de  $\Phi_{\perp}$  en  $z = 0$  à celle en  $z = 1/2$  :

$$\frac{\Phi_{\perp}(0, \rho)}{\Phi_{\perp}(1/2, \rho)} = \frac{8}{Q^2 \rho^2 K_1^2(Q\rho/2)} \underset{Q \rightarrow \infty}{\sim} \frac{8}{Q\rho} e^{Q\rho}. \quad (3.34)$$

Ceci signifie que les configurations de dipôles privilégiées sont celles pour lesquelles l'un des quarks emporte l'essentiel de l'impulsion du photon : en dépit de la symétrie  $z \rightarrow 1-z$  de la fonction de splitting d'un photon qui se branche en une paire  $q\bar{q}$ , les paires de quarks sont, statistiquement, très dissymétriques. C'est cette topologie des *jets alignés* [Bjorken 72] qui domine la fonction d'onde d'un photon polarisé transversalement.

### Transformée de Mellin de la fonction d'onde du photon

Exprimons maintenant  $\phi_T$  et  $\phi_L$  dans l'espace de Mellin de la variable complexe conjuguée à  $\rho$ . Ce calcul nous permettra d'écrire les fonctions de structure d'un onium sous une forme

compacte. Ces carrés des fonctions d'onde ne dépendent que du module de  $\rho$  : ainsi on ne se préoccupe que de la composante  $n=0$ , car toutes les autres sont nulles. Nous allons détailler le calcul de la transformée de Mellin de la composante longitudinale, qui est le plus direct car  $\phi_L$  ne comporte qu'un seul terme.

$$\int \frac{d^2\rho}{2\pi} \rho^{2-2\gamma} \int_0^1 dz \phi_L(z, \rho) = \phi_L(\gamma) Q^{2\gamma-2}. \quad (3.35)$$

On commence par effectuer l'intégration sur  $\rho$ , grâce à la formule [Gradshteyn 65] :

$$\int_0^\infty d\rho \rho^{3-2\gamma} K_\nu^2(\epsilon\rho) = \sqrt{\pi} \epsilon^{2\gamma-4} \frac{\Gamma(2-\gamma-\nu)\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2-\gamma+\nu)}{\Gamma(5/2-\gamma)}. \quad (3.36)$$

On obtient :

$$\phi_L(\gamma) Q^{2\gamma-2} = \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} 4e_q^2 Q^2 \sqrt{\pi} \frac{\Gamma^3(2-\gamma)}{\Gamma(5/2-\gamma)} \int_0^1 dz z^2 (1-z)^2 (m^2 + Q^2 z(1-z))^{\gamma-2}. \quad (3.37)$$

L'intégration sur  $z$  s'effectue de la manière suivante. On commence par développer en série entière le dernier facteur de l'expression précédente :

$$(1-x)^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(1+k)} x^k, \quad (3.38)$$

puis on intègre chacun des termes ainsi obtenus par la formule classique donnée ci-dessous :

$$\int_0^1 dz z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (3.39)$$

et on écrit la série à laquelle on aboutit sous la forme d'une fonction hypergéométrique :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{Q^2}{4m^2}\right)^k \frac{\Gamma(3+k)\Gamma(2-\gamma+k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(7/2+k)} = 2 \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(7/2)} {}_2F_1(2-\gamma, 3; 7/2; -Q^2/4m^2), \quad (3.40)$$

où l'on a utilisé la formule de "doublement"  $\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma(1+z)/\sqrt{\pi}$  et la définition de la série hypergéométrique de l'appendice (équation (A.7) p128). Enfin, on utilise la formule de transformation [Gradshteyn 65] :

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z/(z-1)), \quad (3.41)$$

puis les relations de contiguité des fonctions hypergéométriques [Gradshteyn 65] pour exprimer le résultat en fonction de  ${}_2F_1(1-\gamma, 1/2; 3/2; Q^2/(Q^2+4m^2))$ . En rassemblant ces différents résultats intermédiaires, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_L(\gamma, m^2) &= \frac{\alpha_{em} N_c}{3\pi^2} e_q^2 \frac{4^{-2\gamma}}{(1+2\gamma)(1-\frac{2}{3}\gamma)} \frac{\Gamma^2(1-\gamma)\Gamma^2(2-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} \frac{1}{1+4m^2/Q^2} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{4m^2}{Q^2}\right)^\gamma \left(2(1-\gamma) + 3\frac{4m^2}{Q^2}\right) + \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2}\right)^{\gamma-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(4\gamma(1-\gamma) - \frac{4m^2}{Q^2} \left(3\frac{4m^2}{Q^2} + 4(1-\gamma)\right) {}_2F_1\left(1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+4m^2/Q^2}\right)\right) \right\}. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Un calcul basé sur des techniques similaires conduit à l'expression de la composante transverse :

$$\begin{aligned} \phi_T(\gamma, m^2) = & \frac{\alpha_{em} N_c}{3\pi^2} e_q^2 \frac{4^{-2\gamma}}{(1+2\gamma)(1-\frac{2}{3}\gamma)} \frac{\Gamma^2(1-\gamma)\Gamma^2(2-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} \frac{1}{1+4m^2/Q^2} \\ & \times \left\{ \left( \frac{4m^2}{Q^2} \right)^\gamma \left( 2(3\gamma-1) + \frac{4m^2}{Q^2}(\gamma-2) \right) + \left( 1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{\gamma-1} \left( 2(1+\gamma)(2-\gamma) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4m^2}{Q^2} \left( 7+\gamma-6\gamma^2 - \frac{4m^2}{Q^2}(\gamma-2) \right) {}_2F_1 \left( 1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+4m^2/Q^2} \right) \right) \right\}. \quad (3.43) \end{aligned}$$

### 3.2.2 Interaction de dipôles

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la diffusion élastique de deux dipôles à l'ordre le plus bas en  $\alpha_s$ . Le calcul est effectué entre des états *asymptotiques* de paires  $q\bar{q}$  libres. En effet, il suffit de faire ce calcul particulier pour obtenir l'amplitude générale de diffusion élastique de dipôles, car on sait qu'à haute énergie, dans l'approximation des logarithmes dominants et à la limite de grand nombre de couleurs, une paire  $q\bar{q}$  et une paire de gluons en singulets de couleur présentent des propriétés identiques. D'autre part, ce calcul est à replacer dans le contexte de la diffusion d'onies accompagnés de leur nuage de gluons : en raison de la limite de haute énergie, la durée typique de l'interaction entre les dipôles élémentaires est très faible par rapport aux temps caractéristiques des interactions à l'intérieur des onies incidents. Ainsi, au moment de la collision, chaque onium "voit" son partenaire comme une collection de dipôles libres, dont les constituants sont sur leur couche de masse.

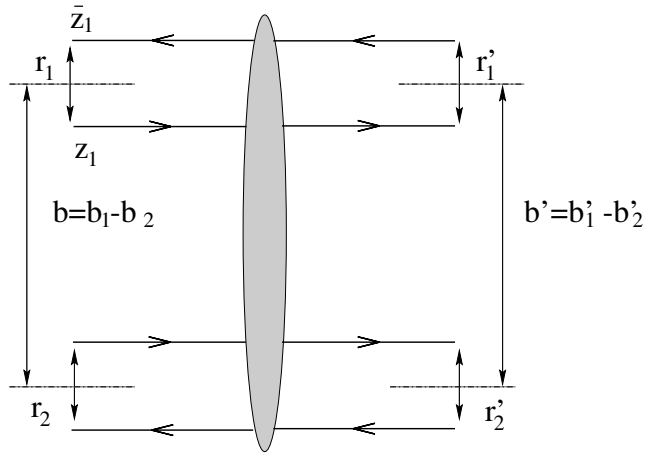


FIG. 3.5 – *Processus d'interaction élastique de dipôles.*

Dans l'esprit de la référence [Mueller 94b], on considère la collision élastique de deux onies, l'un ayant une grande composante de son impulsion selon ( $Oz$ ) (vers la droite), l'autre se déplaçant dans le sens opposé. On calcule l'élément de matrice de transition entre deux états  $q\bar{q}$ , notés 1 et 2 dans l'état initial et 1' et 2' dans l'état final. Ceux-ci sont caractérisés par les fractions d'impulsions longitudinales de leurs quarks constituants, notées  $z_i$  et  $z'_i$  pour les quarks, et  $\bar{z}_i$  et  $\bar{z}'_i$  pour les antiquarks, et par leurs tailles transverses. Ces dernières sont les différences des coordonnées transverses (par rapport à une origine arbitraire) des quarks, notées  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}'_i$ , et des antiquarks, notées  $\bar{\mathbf{x}}_i$  et  $\bar{\mathbf{x}}'_i$  :  $\mathbf{r}_i|_{i=1,2} = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i$  et  $\mathbf{r}'_i|_{i=1,2} = \mathbf{x}'_i - \bar{\mathbf{x}}'_i$ . L'amplitude d'interaction dépend également *a priori* des positions  $\mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{b}'_i$  des centres de ces dipôles :  $\mathbf{b}_i = (\mathbf{x}_i + \bar{\mathbf{x}}_i)/2$  et  $\mathbf{b}'_i = (\mathbf{x}'_i + \bar{\mathbf{x}}'_i)/2$ , et on définit le paramètre d'impact d'un dipôle par rapport à l'autre par la relation  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ . Ces notations sont illustrées sur la figure (3.5).

Les calculs, relativement longs, sont détaillés dans l'annexe (3.A) à ce chapitre (page 76). Le résultat pour l'élément de matrice pris entre les états de positions transverses déterminées

est donné par l'équation (3.95) et s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'_1, z'_1, \bar{z}'_1; \mathbf{r}'_2, z'_2, \bar{z}'_2; \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2 | T | \mathbf{r}_1, z_1, \bar{z}_1; \mathbf{r}_2, z_2, \bar{z}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle &= \delta(z_1 - z'_1) \delta(\bar{z}_1 - \bar{z}'_1) \delta(z_2 - z'_2) \delta(\bar{z}_2 - \bar{z}'_2) \\ &\times \delta^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \delta^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \delta^2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}'_1) \delta^2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}'_2) \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} \mathcal{A}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) , \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{\alpha_s^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{\mathbf{l}^2 (\mathbf{q} - \mathbf{l})^2} \left( e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_1/2} - e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_1/2} \right) \left( e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_2/2} - e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_2/2} \right) \\ &\times \left( e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{l})\mathbf{r}_1/2} - e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{l})\mathbf{r}_1/2} \right) \left( e^{-i(\mathbf{q}-\mathbf{l})\mathbf{r}_2/2} - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{l})\mathbf{r}_2/2} \right) . \end{aligned} \quad (3.45)$$

$\mathbf{q}$  est le bivecteur transfert d'impulsion transverse. Ce calcul a été effectué dans la jauge de Feynman. Nous commenterons les choix de jauge ultérieurement. La forme de l'interaction proprement dite  $\mathcal{A}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  appelle quelques commentaires.

- Comme nous l'avons déjà noté, seules les impulsions transverses des gluons échangés interviennent dans l'intégrale de la formule (3.45). Ceci est un fait récurrent à haute énergie : lorsqu'on ne conserve que l'ordre dominant, seules les variables transverses jouent un rôle dans la dynamique. Les degrés de liberté sont les impulsions transverses ou leurs transformées de Fourier, les positions transverses.
- Chacun des facteurs de phase correspond à un couplage d'un des gluons à l'un des quarks ou antiquarks.
- L'interaction dépend de la constante de couplage  $\alpha_s$ , mais celle-ci n'est pas accompagnée de facteur de couleur  $N_c$  : elle est sous-dominante, dans la limite d'un grand nombre de couleurs, par rapport à un diagramme d'émission d'un gluon. Ceci explique que les interactions multiples sont défavorisées dans la limite d'un grand nombre de couleurs, et justifie *a posteriori* notre factorisation de l'interaction d'onia de l'équation (3.16).

**Section efficace totale** Pour exprimer les fonctions de structure, on a besoin de connaître uniquement la section efficace totale d'interaction de dipôles  $\sigma_{dd}$ , qui est liée à l'amplitude vers l'avant par le théorème optique. Celle-ci s'écrit, dans ce contexte :

$$\sigma_{dd}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2\mathcal{A}_{el}(\mathbf{q}=\mathbf{0}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) . \quad (3.46)$$

On a donc

$$\sigma_{dd}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \alpha_s^2 \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{\mathbf{l}^4} \left( 2 - e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_1} - e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_1} \right) \left( 2 - e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_2} - e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_2} \right) . \quad (3.47)$$

Remarquons que la transformée de Mellin par rapport  $\mathbf{r}_1$  (ou  $\mathbf{r}_2$ ) est particulièrement simple, et peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int d^2 \left( \frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right) \left( \frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right)^{-\mu-1} \left( \frac{\bar{\underline{r}}_1}{\bar{\underline{r}}_2} \right)^{-\tilde{\mu}-1} \sigma_{dd}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = |\underline{r}_2|^2 \frac{\alpha_s^2 \pi^2}{\mu(1-\tilde{\mu})\tilde{\mu}(1-\mu)} \quad (3.48)$$

où les nombres complexes  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$  ont la paramétrisation usuelle suivante :

$$\mu = \frac{1-n}{2} + i\nu \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = \frac{1+n}{2} + i\nu . \quad (3.49)$$

Ce résultat peut se réécrire sous la forme d'une transformée de Mellin inverse :

$$\begin{aligned} \sigma_{dd}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{\alpha_s^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\nu \frac{(1+(-1)^n)/2}{(\nu^2 + (n-1)^2/4)(\nu^2 + (n+1)^2/4)} \\ &\times \underline{r}_2 \bar{\underline{r}}_2 \left( \frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} \right)^{(1-n)/2+i\nu} \left( \frac{\bar{\underline{r}}_1}{\bar{\underline{r}}_2} \right)^{(1+n)/2+i\nu} . \end{aligned} \quad (3.50)$$

On voit ici que seuls les  $n$  pairs contribuent à cette section efficace. Seul le cas  $n=0$  donnera, comme nous le verrons plus loin, la composante dominante du processus d'interaction onium-onium à haute énergie :

$$\sigma_{dd}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|_{n=0} = \frac{\alpha_s^2}{2} \int \frac{d\nu}{(\nu^2 + 1/4)^2} |\mathbf{r}_1|^{1+2i\nu} |\mathbf{r}_2|^{1-2i\nu} \quad (3.51)$$

Les résultats de ce paragraphe peuvent être retrouvés dans les références [Navelet 98b, Salam 96].

### 3.2.3 Expression des fonctions de structure

Dans ce paragraphe, nous reprenons l'expression de la section efficace photon virtuel-dipôle établie plus haut (3.16) et y remplaçons les éléments que nous avons calculés.

Commençons par exprimer la section efficace élémentaire totale dipôle-dipôle en nous servant de la formule (3.50) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma^* \mathcal{O}} &= \frac{\alpha_s^2}{2} \sum_n \int d\nu \frac{(1+(-1)^n)/2}{(\nu^2 + (n-1)^2/4)(\nu^2 + (n+1)^2/4)} \\ &\quad \times \int d^2 \underline{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{r}}^{(1-n)/2+i\nu} \bar{\underline{\mathbf{r}}}^{(1+n)/2+i\nu} n(x, \underline{\mathbf{r}}) \\ &\quad \times \left[ \int d^2 \left( \frac{\underline{\mathbf{r}}_{\gamma^*}}{\underline{\mathbf{r}}_0} \right) |\underline{\mathbf{r}}_0|^2 \left( \frac{\underline{\mathbf{r}}_{\gamma^*}}{\underline{\mathbf{r}}_0} \right)^{(1+n)/2-i\nu} \left( \frac{\bar{\underline{\mathbf{r}}}_{\gamma^*}}{\bar{\underline{\mathbf{r}}}_0} \right)^{(1-n)/2-i\nu} n \left( \frac{x_{Bj}}{x}, \underline{\mathbf{r}}_{\gamma^*} | \underline{\mathbf{r}}_0 \right) \right] \\ &\quad \times \left[ \int d^2 \underline{\mathbf{r}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(1+n)/2-i\nu} \bar{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(1-n)/2-i\nu} \phi_{\gamma^*}(\mathbf{r}_0) \right] . \quad (3.52) \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression des transformées des densités de dipôles. Celles-ci ont été obtenues dans le chapitre 2 et ont la forme suivante (voir la section (2.4.3) page 40) :

$$\begin{aligned} \int d^2 \left( \frac{\underline{\mathbf{r}}_{\gamma^*}}{\underline{\mathbf{r}}_0} \right) |\underline{\mathbf{r}}_0|^2 \left( \frac{\underline{\mathbf{r}}_{\gamma^*}}{\underline{\mathbf{r}}_0} \right)^{(1+n)/2-i\nu} \left( \frac{\bar{\underline{\mathbf{r}}}_{\gamma^*}}{\bar{\underline{\mathbf{r}}}_0} \right)^{(1-n)/2-i\nu} n \left( \frac{x_{Bj}}{x}, \underline{\mathbf{r}}_{\gamma^*} | \underline{\mathbf{r}}_0 \right) \\ = \pi \left( \frac{x_{Bj}}{x} \right)^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(-\nu)} , \quad (3.53) \end{aligned}$$

et

$$\int d^2 \underline{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{r}}^{(1-n)/2+i\nu} \bar{\underline{\mathbf{r}}}^{(1+n)/2+i\nu} n(x, \underline{\mathbf{r}}) = \pi n_n^0(\nu) x^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)} \rho^{1+2i\nu} , \quad (3.54)$$

où  $\rho$  est la taille caractéristique des dipôles primordiaux. On voit alors que du fait de la symétrie  $\chi_n(-\nu) = \chi_n(\nu)$ , l'intégrant ne dépend pas du paramètre  $x$  dans la formule (3.52) page 61. On a donc vérifié *a posteriori* que  $x$  est un paramètre arbitraire : dans notre image physique, il dépendrait du repère choisi. Il vaudrait 1 dans le repère de repos de l'onium cible, et  $x_{Bj}$  dans celui du photon virtuel. Fixer sa valeur revient à répartir l'évolution QCD entre la cible et la sonde.

On définit encore la transformée du carré de la fonction d'onde du photon virtuel comme suit :

$$\phi_{\gamma^*, n}(\nu) \equiv Q^{2i\nu-1} \int \frac{d^2 \underline{\mathbf{r}}_0}{2\pi} \underline{\mathbf{r}}_0^{(1+n)/2-i\nu} \bar{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(1-n)/2-i\nu} \phi_{\gamma^*}(\underline{\mathbf{r}}_0) , \quad (3.55)$$

où  $Q$ , la virtualité du photon, est aussi l'échelle caractéristique des impulsions au niveau du photon. Le résultat pour la fonction de structure  $F$  s'écrit alors, en utilisant en particulier les relations (3.12) :

$$F(x_{Bj}, Q^2) = \frac{\alpha_s^2}{2} \sum_n d\nu \int \frac{(1 + (-1)^n)/2}{(\nu^2 + (n-1)^2/4)(\nu^2 + (n+1)^2/4)} \times x_{Bj}^{-\bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)} (Q\rho)^{1+2i\nu} \left( \frac{\pi}{2\alpha_{em}} \phi_{\gamma^*, n}(\nu) \right) \pi n_n^0(\nu) . \quad (3.56)$$

Remarquons que le calcul des densités de dipôles a été effectué dans une jauge du cône de lumière différente pour chacun des deux objets qui entrent en collision, et la section efficace d'interaction de dipôles élémentaires a été calculée dans la jauge de Feynman. Pour justifier ce choix, on peut voir que dans le référentiel du centre de masse, ces trois jauges sont équivalentes à la jauge de Coulomb  $A^0 = 0$  [Chen 95].

Dans la partie suivante, On va comparer le résultat (3.56) aux données expérimentales recueillies à HERA.

### 3.3 Phénoménologie des données d'HERA

Commençons par étudier la composante isotrope, de spin conforme  $n = 0$ . On verra dans une étude plus générale que c'est elle qui présente la dépendance en énergie la plus forte, et ainsi, qui est dominante à petit  $x_{Bj}$ .

#### 3.3.1 Composante de spin conforme nul

On part de la formule (3.56), de laquelle on ne conserve que la composante  $n = 0$ . On utilise la variable  $\gamma = 1/2 + i\nu$ . La cible (protons) est supposée caractérisée par une densité de dipôles  $n(\gamma)$  à l'échelle  $Q_0 \equiv 1/\rho$ . On choisit pour décrire le photon les composantes transverses circulaires et longitudinale des fonctions d'onde des équations (3.43) et (3.42). Ainsi, l'expression des fonctions de structure transverse et longitudinale, associées à la production, au vertex du photon, d'une paire  $q\bar{q}$  dont chacun des quarks a une masse  $m$ , s'écrit, en transformée de Mellin :

$$F_{T,L}(x_{Bj}, Q^2, m^2) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^\gamma x_{Bj}^{-\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)} \phi_{T,L}(\gamma, m^2) \cdot \frac{1}{16\gamma^2(1-\gamma)^2} \cdot n(\gamma) . \quad (3.57)$$

L'intégration sur  $\gamma$  se fait le long d'un contour parallèle à l'axe imaginaire du plan complexe, avec  $\mathcal{R}e(\gamma) = 1/2$ .

Pour la densité de dipôles primordiaux  $n(\gamma)$ , on va prendre deux différents *ansatz* pour cette quantité. Ceci constituera notre modélisation du couplage des échelles de distance non perturbatives liées au proton.

#### Modélisation du proton primordial

Remarquons tout d'abord que la fonction d'onde  $\phi(\gamma)$  décroît exponentiellement pour  $|\gamma|$  grand (voir les équations (3.42,3.43) page 58) :

$$\phi_{T,L}(\gamma, m^2) \underset{|\gamma| \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\pi|\gamma|} , \quad (3.58)$$

à des puissances de  $|\gamma|$  près. Le facteur dépendant de  $x_{Bj}$  dans l'équation (3.57) a, quant à lui, une dépendance beaucoup plus faible en  $|\gamma|$ , en loi de puissance. Par conséquent, le

comportement de l'intégrand est dominé à l'infini par cette atténuation exponentielle imposée par  $\phi_{T,L}(\gamma, m^2)$ . La fonction de structure ne va donc pas être très sensible au comportement asymptotique du facteur  $n(\gamma)$  qui encode les caractéristiques (non perturbatives) des dipôles primordiaux présents dans le proton.

Par contre, la structure analytique de l'intégrand de l'équation (3.57) en  $\gamma=0$  est liée aux *singularités colinéaires*. En effet, une puissance de  $1/\gamma$  génère pour la fonction de structure, un logarithme du rapport des échelles transverses  $Q/Q_0$ , comme on peut s'en convaincre à partir de la formule (3.57).

Nous allons étudier l'influence de la présence de ces logarithmes en choisissant pour  $n(\gamma)$  parmi un jeu de fonctions méromorphes dont le comportement au point  $\gamma=0$  est de la forme :

$$n(\gamma) \sim \gamma^k, \quad (3.59)$$

ce qui donne un comportement global du type  $1/\gamma^{2-k}$  pour l'intégrand, et ce pour les composantes les plus singulières, à savoir la contribution des polarisations transverses du photon virtuel.

On a pu obtenir un ajustement aux données d'HERA pour  $k=1$  (modèle 1) et  $k=2$  (modèle 2) : la description précise des fonctions  $n(\gamma)$  utilisées dans chacun des cas est donnée dans l'article de la référence [Munier I]. Pour les autres valeurs de  $k$  testées, nous n'avons trouvé aucun jeu de paramètres apte à reproduire les données de façon satisfaisante.

### Ajustement aux données de HERA pour $F_2$

Avec ces modèles, on va maintenant décrire les données d'HERA. Chacun de ces deux modèles a trois paramètres libres. Tous d'abord, deux paramètres décrivent la partie non calculable de la structure du proton : la normalisation globale, qui représente l'ordre de grandeur du nombre de dipôles primordiaux présents dans le proton, et l'échelle de factorisation de ces dipôles primordiaux  $Q_0$ . D'autre part, la constante de couplage  $\alpha_s$  est un paramètre libre dans le formalisme de BFKL à l'ordre des logarithmes dominants.

On détermine ces paramètres par un ajustement aux données pour la fonction de structure  $F_2 = F_T + F_L$ , dans la région de validité supposée du modèle (petit  $x_{Bj}$  : on prend donc une coupure sur les données à  $x_{Bj} \leq 10^{-2}$ ). Dans cette région,  $Q^2$  est automatiquement limité supérieurement par la cinématique d'HERA. Il reste ainsi 103 points expérimentaux qui correspondent à l'ensemble des données recueillies en 1994 par la collaboration H1 [H1 95] dans le domaine cinématique décrit ci-dessus. Notre modèle est ajusté à ces données par une méthode des moindres carrés. L'intégrale complexe de la formule (3.57) est évaluée numériquement. On inclut les contributions des quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  supposés de masses nulles, et la contribution du quark  $c$  dont on prend la masse effective  $m_c$  à différentes valeurs comprises entre 1,35 et 1,6 GeV, pour tenir compte de l'incertitude sur l'échelle de renormalisation de ce paramètre.

Le résultat de l'ajustement, avec  $m_c = 1,5$  GeV, est représenté sur la figure (3.6), et les paramètres de l'ajustement sont donnés dans le tableau (3.2). La constante de normalisation, de l'ordre de 10 dans chacun des cas de figure, n'est pas indiquée, car elle dépend de la forme exacte prise pour  $n(\gamma)$ , que l'on n'a pas précisée ici, et d'autre part, sa valeur n'est pas définie à une grande précision par l'ajustement. La valeur des autres paramètres est stable dans chacune des classes de modèles considérées. On se référera à l'article [Munier I] pour tous les détails.

Commentons maintenant les valeurs des paramètres. Dans le cas de l'ajustement 1, la valeur de  $Q_0$  est de l'ordre de 330 MeV, ce qui est une échelle non perturbative typique du proton. La valeur de la constante de couplage effective  $\alpha_s$  (0,07) est plutôt faible. Elle



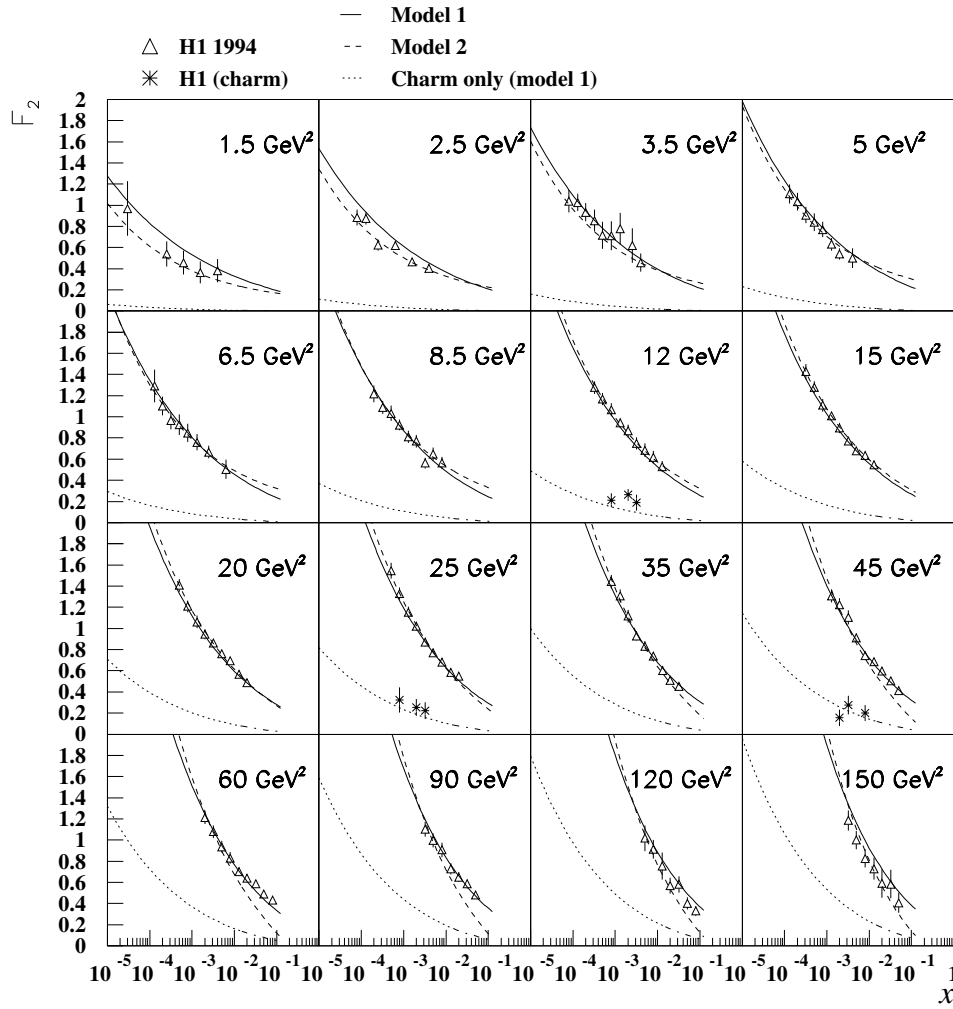


FIG. 3.6 – Ajustements des modèles 1 (courbe continue) et 2 (courbe pointillée) aux données de la collaboration H1 (triangles) pour différentes valeurs de  $Q^2$ , et en fonction de  $x_{Bj}$  (en abscisse). La contribution de la production de charme seule est représentée par les courbes en pointillés fins.

correspond à un intercept du poméron, qui caractérise la variation de la fonction de structure en fonction de l'énergie dans le centre de masse, de l'ordre de

$$\alpha_{\mathbb{P}} = 1 + \frac{\alpha_s N_c}{\pi} 4 \log 2 \simeq 1,18 . \quad (3.60)$$

Cette valeur faible est symptomatique de l'importance des corrections à l'évolution des dipôles dûes aux termes sous-asymptotiques en  $\log(1/x)$ .

Le modèle 2 présente des caractéristiques très similaires. Il semble qu'il décrive un peu mieux les données ( $\chi^2$  plus faible), particulièrement dans la région de petits  $x_{Bj}$  et  $Q^2$ . La valeur de l'échelle de factorisation  $Q_0$  est plus grande, de l'ordre du GeV, et la constante de couplage  $\alpha_s$  proche de sa valeur mesurée à une échelle de renormalisation de l'ordre de la masse du boson intermédiaire  $Z$ .

Ces différents ajustements sont compatibles avec ceux obtenus dans des travaux antérieurs, moins précis, mais basés sur des modèles semblables [Navelet 96b, Navelet 96c] (voir aussi [Wallon 96]).

Modèle 1				Modèle 2			
$m_c$	$\chi^2/\text{point}$	$Q_0$	$\alpha_s$	$m_c$	$\chi^2/\text{point}$	$Q_0$	$\alpha_s$
1,35	77/103	0,334	0,070	1,35	51/103	1,208	0,105
1,50	82/103	0,326	0,070	1,50	51/103	1,215	0,104
1,70	88/103	0,321	0,070	1,70	52/103	1,227	0,103

TAB. 3.2 – Paramètres de l'ajustement des fonction de structure du proton.

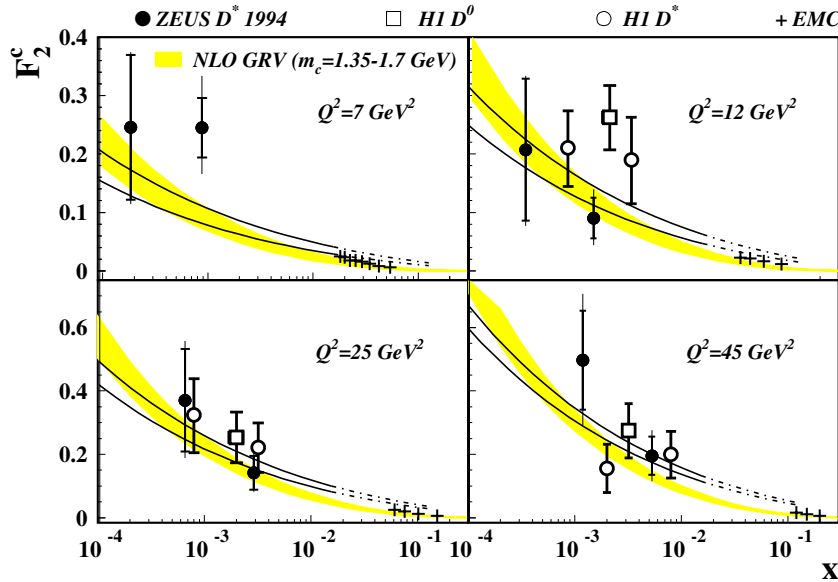


FIG. 3.7 – Contribution de la production de quarks charmés à la fonction de structure  $F_2$ . Les prédictions du modèle 1 sont comparées aux données de H1, ZEUS et EMC (dans région de grand  $x_{Bj}$ ). La ligne la plus basse correspond à une masse du quark  $c$  égale à 1,7 GeV, et la ligne la plus haute à 1,35 GeV. La bande pleine représente des prédictions DGLAP à l'ordre  $NLLQ^2$ , issues des références [Gluck 94, Harris 95].

### Prédictions du modèle

Une fois l'ajustement de  $F_2$  aux données réalisé et les paramètres libres déterminés, on peut prédire d'autres observables mesurées à HERA : la contribution du charme à la fonction de structure  $F_2^c$ , ainsi que la fonction de structure longitudinale  $F_L$  et sa composante charmée  $F_L^c$ . La comparaison de nos prédictions avec les données d'HERA publiées dans [H1 96, ZEUS 97] d'une part, et avec d'autres prédictions théoriques obtenues dans le cadre de la resommation des log  $Q^2$  (DGLAP) d'autre part, est représentée sur les figures (3.7) et (3.8).

On trouve un bon accord entre les données et nos prédictions dans la région cinématique dans laquelle l'ajustement a été réalisé. L'extrapolation (en lignes pointillées) à la région cinématique accessible à l'expérience EMC est correcte en ordre de grandeur ; le modèle utilisé n'est cependant pas justifié dans cette région.

D'autre part, la dispersion des résultats avec la valeur de la masse du quark  $c$  est petite dans le cas du modèle 1 : au maximum 10% dans la région de très petit  $x_{Bj}$ . Les prédictions sont compatibles avec celles données par le modèle basé sur l'évolution DGLAP. Le modèle 2, dont les prédictions sont présentées sur la figure (3.8), reproduit également convenablement les données. Ses prédictions sont supérieures à celles du modèle 1, et également à celles du

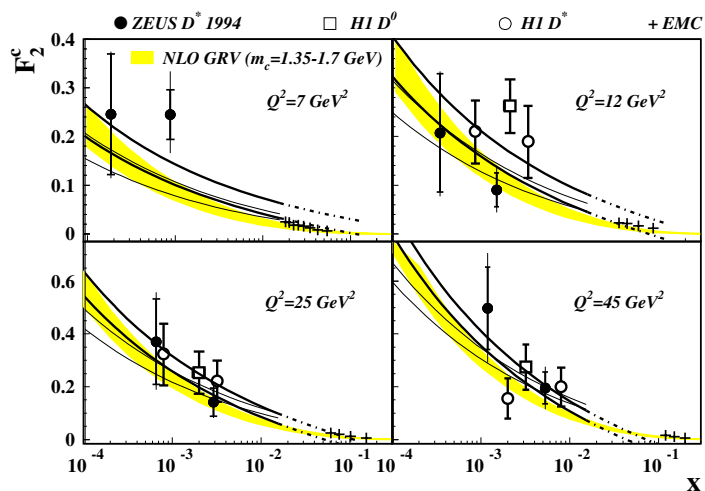


FIG. 3.8 – Contribution de la production de quarks charmés. Les prédictions du modèle 2 sont représentées par les lignes pleines épaisses, et celles du modèle 1 sont rappelées, pour comparaison, par les lignes pleines fines.

modèle DGLAP. Une réduction des barres d'erreurs à petit  $x_{Bj}$  permettrait de distinguer les deux modèles.

La figure (3.9) donne nos prédictions pour la fonction de structure longitudinale, dans le cadre des deux modèles. Les quelques rares données expérimentales disponibles sont indiquées : on observe une compatibilité avec ces données, même si nos modèles sont systématiquement en-dessous des valeurs les plus probables.

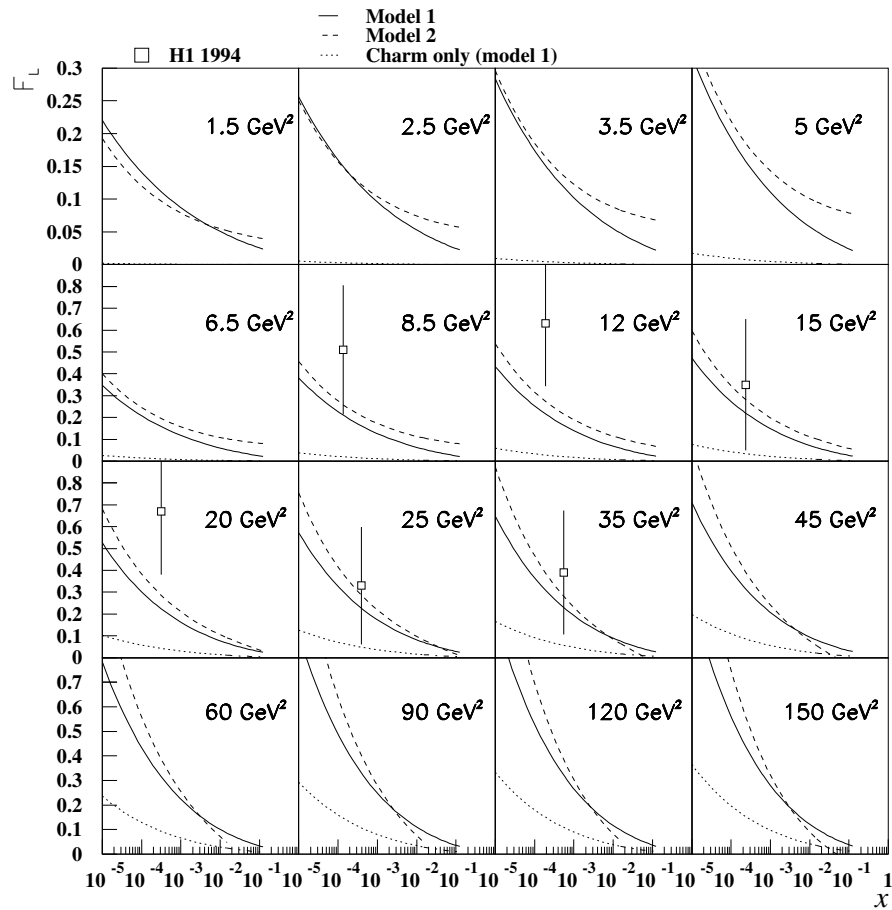


FIG. 3.9 – Prédiction des deux modèles pour la fonction de structure longitudinale. Les points expérimentaux proviennent de l'analyse des données de la collaboration H1 collectées en 1994 [H1 97a].

### 3.3.2 Composantes de spin conforme supérieur

L'analyse que nous avons menée jusqu'à présent ne tenait compte que de la composante  $n = 0$  de la fonction de structure du proton qui, en première approximation, suffit à rendre compte des données de diffusion profondément inélastique dans les régions cinématiques de  $Q^2$  modéré et de  $x_{Bj}$  petit.

Complétons maintenant cette étude par celle des composantes de spin conforme supérieur. Celles-ci sont en général négligées, car d'une part il est connu qu'elles sont sous-dominantes en énergie, et d'autre part, elles ne contribuent pas si on s'en tient à ne mesurer que des polarisations du photon purement circulaires ou longitudinales [Bartels 97]. Nous allons cependant montrer qu'elles peuvent présenter un certain intérêt. Sur le plan théorique, ces composantes ne sont pas directement requises par la procédure de sommation de diagrammes du modèle des dipôles. Néanmoins, elles apparaissent comme solution des équations d'évolution, et elles sont une conséquence de l'invariance conforme du noyau d'évolution. Ces investigations pourraient s'intégrer dans un programme plus général d'étude des liens entre la QCD et les théories conformes. Nous allons ici nous contenter de montrer leur intérêt phénoménologique.

Le paragraphe suivant présente leur étude théorique, que nous mettrons ensuite en perspective par rapport à une récente étude phénoménologique des données expérimentales [Donnachie 98].

#### Étude théorique

Nous allons étudier les composantes pour lesquelles  $n \equiv 2p$ , où  $p$  est un entier. Nous excluons *a priori* les cas où  $n$  est impair, car ils ne contribuent pas aux amplitudes élastiques : la section efficace élastique élémentaire dipôle-dipôle est en effet nulle pour  $n$  impair (voir l'appendice (3.A) page 76).

Nous nous en tiendrons ici à une analyse phénoménologique de la dépendance effective en  $x_{Bj}$  et en  $Q^2$  de la fonction de structure  $F_2$ , prédite par le modèle. Le degré de précision recherché ne requiert pas que nous nous attachions aux détails des fonctions d'ondes des objets qui entrent en collision, comme nous l'avions fait dans la section précédente. La forme générale telle qu'elle est obtenue dans le modèle des dipôles est la suivante :

$$F_2(Y, Q^2) = \sum_{p=0}^{+\infty} F_2^{(p)}(Y, Q^2) = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}_s \chi_p(\gamma) Y} f_p(\gamma), \quad (3.61)$$

où l'on a noté  $Y \equiv \log(1/x_{Bj})$ .  $Q_0$  est, comme précédemment, une échelle caractéristique de la cible. On a en outre posé  $\gamma \equiv 1/2 + i\nu$ , et  $\chi_p(\gamma)$  vaut, dans ces nouvelles variables :

$$\chi_p(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(p+1-\gamma) - \Psi(p+\gamma). \quad (3.62)$$

La fonction  $f_p(\gamma)$  englobe le produit des facteurs de forme du proton et du photon, qui sont, dans le présent cadre du modèle des dipôles, les fonctions d'onde dipolaires de ces objets primordiaux. L'étude de la composante  $p = 0$  dans le paragraphe précédent nous a permis d'exhiber une expression précise pour cette quantité. Pour la suite, nous nous contenterons de choisir une forme raisonnable pour cette fonction, de telle sorte qu'elle contienne l'essentiel des effets que nous souhaitons étudier.

Commençons par évaluer le comportement asymptotique de  $F_2$ . La fonction  $\chi_p(\gamma)$  est réelle, c'est-à-dire  $\chi_p(\gamma^*) = \chi_p(\gamma)^*$ , et présente un minimum local sur l'axe réel, en  $\gamma = 1/2$ ; l'intégrand de chaque composante  $F_2^{(p)}$  a donc un point-selle en ce point, d'autant plus marqué

que la rapidité  $Y$  est plus grande. La méthode du col conduit alors à l'expression suivante :

$$F_2(Y, Q^2)|_{Y \rightarrow \infty} \simeq \frac{Q}{Q_0} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f_p(1/2)}{\sqrt{\pi \bar{\alpha}_s \chi_p''(1/2) Y}} e^{\bar{\alpha}_s \chi_p(1/2) Y} . \quad (3.63)$$

La dépendence en  $Q$  est entièrement factorisée. Dans cette série en  $p$ , seul le premier terme a un intercept  $\partial \log F_2^{(p)} / \partial Y \sim \bar{\alpha}_s \chi_p(1/2)$  positif, et donc une dépendance en rapidité non négligeable à grand  $Y$ . En effet :

$$\begin{aligned} \chi_0(1/2) &= 4 \log 2 \simeq 2,77 , & \chi_1(1/2) &= \chi_0(1/2) - 4 \simeq -1,23 \\ \text{et } \chi_{p+1}(1/2) &< \chi_p(1/2) < \dots < 0 & \text{ pour } p \geq 1 . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ceci explique que l'on néglige habituellement les composantes de spin conforme non nul à haute énergie. On peut voir sur la figure (3.10) la représentation graphique des branches principales de  $\chi_p(\gamma)$ , et les points-selles correspondants, situés aux minima de chacune des branches sont marqués par un petit cercle.

À grand  $Q^2$ , le point-selle se déplace de sa position ultra-asymptotique, par un mécanisme de "glissement" dû, comme nous allons le voir, à la présence d'un facteur diffusif que nous avons négligé dans la formule (3.63), mais qui a un effet important en particulier pour des grandes valeurs de  $Q^2$ . Ce mécanisme a pour effet d'augmenter l'intercept effectif et de diminuer la dimension anormale effective. Incidemment, c'est ce facteur, pour la composante  $p=0$ , qui nous a permis de décrire les données d'HERA pour les fonctions de structure, et en particulier l'évolution de la pente de  $F_2(x_{Bj})$  en fonction de  $Q^2$ .

Pour caractériser ce mécanisme d'une façon plus générale, on s'intéresse aux deux observables :

$$\begin{aligned} \text{Intercept effectif (en unités de } \bar{\alpha}_s) : & \quad \epsilon = \frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial Y}(Y, Q^2) \\ \text{Dimension anormale effective :} & \quad \gamma = \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial \log Q^2}(Y, Q^2) \end{aligned} \quad (3.65)$$

que l'on calculera pour chaque valeur de  $p$ ,  $Y$  et  $Q^2$ .

Notre première observation est la suivante : quelle que soit la fonction  $f_p(\gamma)$ , les "points de fonctionnement" se répartissent dans le plan  $(\gamma, \epsilon)$  le long de la courbe qui représente le graphe de  $\chi_p(\gamma)$ . En effet, l'équation qui définit le point-selle de  $F_2^{(p)}(Y, Q^2)$ , noté  $\gamma_c$  est la suivante :

$$\frac{\partial F_2^{(p)}}{\partial \gamma_c} = 2 \log(Q^2/Q_0^2) + \bar{\alpha}_s Y \chi_p'(\gamma_c) + (\log f_p(\gamma_c))' = 0 . \quad (3.66)$$

L'intégrale de Mellin qui entre dans l'expression de  $F_2^{(p)}$  peut alors être approximée par :

$$F_2^{(p)}(Y, Q^2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(Q^2/Q_0^2)^{\gamma_c} e^{\bar{\alpha}_s \chi_p(\gamma_c) Y} f_p(\gamma_c)}{\sqrt{\bar{\alpha}_s Y \chi_p''(\gamma_c) + (\log f_p(\gamma_c))''}} , \quad (3.67)$$

d'où il découle, en négligeant les facteurs au dénominateur de l'expression précédente, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{dF_2^{(p)}}{dY} &= \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial \gamma_c} \cdot \frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{\partial \gamma_c}{\partial Y} + \frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial Y} = \frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial Y} \equiv \chi_p(\gamma_c) \\ \frac{dF_2^{(p)}}{d \log Q^2} &= \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial \gamma_c} \frac{\partial \gamma_c}{\bar{\alpha}_s \partial \log Q^2} + \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial \log Q^2} = \frac{\partial \log F_2^{(p)}}{\partial \log Q^2} \equiv \gamma_c , \end{aligned} \quad (3.68)$$

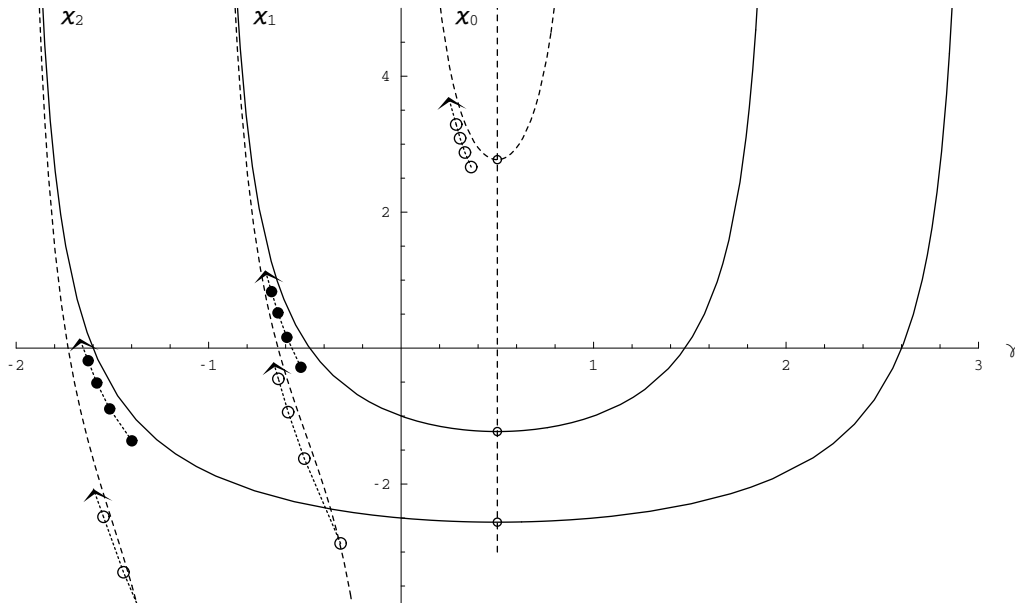


FIG. 3.10 – Intercept effectif (en unités de  $\bar{\alpha}_s$ )  $\partial \log F_2^{(p)} / \partial \bar{\alpha}_s \partial Y$  en fonction de la dimension anormale effective  $\partial \log F_2^{(p)} / \partial \log Q^2$ , comparé à la fonction caractéristique du noyau BFKL  $\chi_p(\gamma)$ . Une forme phénoménologique pour  $f_p$  est choisie (voir texte).  $Y$  est fixé,  $Y = 10$ , et pour chacune des composantes  $p$ , on a pris les valeurs  $\{4, 6, 8, 10\}$  pour  $\log(Q^2/Q_0^2)$ . Les flèches représentent le sens des  $Q^2$  croissants. Les cercles correspondent aux résultats pour la composante  $p=0$ , y compris pour ses branches auxiliaires ; les lignes pointillées sont le graphe de la fonction  $\chi_p(\gamma)$  ; les points représentent les contributions des composantes  $p=1$  et  $p=2$ .

qui correspondent bien au résultat annoncé :  $(\gamma, \epsilon) \simeq (\gamma_c, \chi_p(\gamma_c))$ . Cette propriété est *a priori* valable quelle que soit la fonction  $f_p(\gamma)$ , pour peu qu'elle ne soit pas singulière au point de dominer l'intégrand. La seule condition de validité est qu'on ait un point-selle déterminé par l'exponentielle de l'intégrand de la formule (3.61), et ceci est assuré dès lors que  $Y$  ou  $Q^2$  sont suffisamment grands.

Illustrons ces propos en fixant une forme particulière pour  $f_p(\gamma)$  et en évaluant *numériquement*, pour quelques valeurs des paramètres  $p$ ,  $Y$  et  $\log(Q^2/Q_0^2)$ , l'intercept et la dimension anormale effectifs. En nous inspirant de l'étude phénoménologique des préfacteurs effectuée pour la composante  $p = 0$  dans la section précédente, on choisit la forme suivante pour  $f_p$  :

$$f_p(\gamma) = \frac{1}{\cos(\pi\gamma/4)} . \quad (3.69)$$

Ce choix nous assure d'une part une bonne convergence de l'intégrale en  $|\gamma| = +\infty$ , grâce à la décroissance exponentielle de la fonction  $\cos^{-1}$ , et d'autre part une région d'analyticité suffisamment étendue ( $|\gamma| < 2$ ) au voisinage du point  $\gamma=0$ , ce qui garantit que nous nous trouvons dans l'une des classes d'équivalence des modèles viables phénoménologiquement dont nous avons présenté l'étude pour la composante  $p=0$  dans la section précédente. Le résultat des calculs numériques est représenté sur les figures (3.10) et (3.11). On a inclus les contributions des branches auxiliaires  $-1 < \gamma < 0$  et  $-2 < \gamma < -1$  de  $\chi_0$  (représentées par des cercles).

On voit que la propriété que nous avons démontrée dans des limites asymptotiques est confirmée par cet exemple. Le décalage que l'on observe entre les courbes  $\chi_p(\gamma)$  et les résultats numériques demeure faible, et est essentiellement lié au préfacteur choisi. Le point essentiel

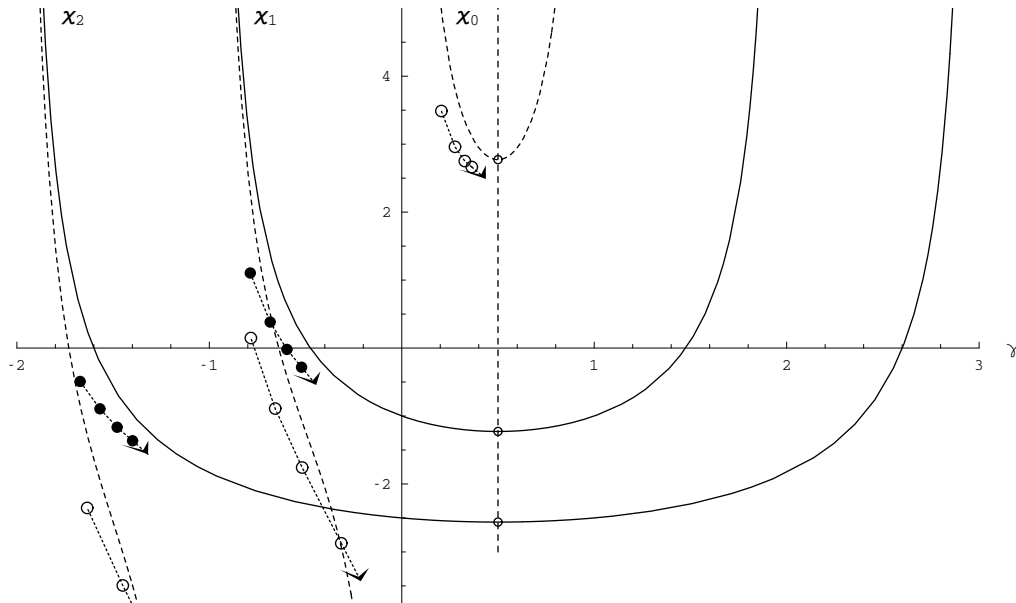


FIG. 3.11 – *Intercept effectif en fonction de la dimension anormale effective (voir la figure (3.10) et le texte). Cette fois-ci, on a fixé  $\log(Q^2/Q_0^2)$  à la valeur 4.  $Y$  est pris dans l'ensemble  $\{4, 6, 8, 10\}$  ; les flèches sont dirigées dans le sens de  $Y$  croissants.*

est que dans tous les cas, l'intercept effectif et la dimension anormale sont décalés par rapport au point-selle naïf situé en  $\gamma = 1/2$ . De plus, ce décalage est d'autant plus important que d'une part  $p$ , d'autre part  $Q^2$  sont grands. Si la valeur de l'intercept de la composante  $p = 0$  est proche de  $1/2$  à une correction (faible) d'ordre  $\alpha_s$  près, il n'en va pas du tout de même pour les composantes  $p = 1$  et  $p = 2$ , pour lesquelles la correction est très forte. La composante  $p = 1$  acquiert par, le mécanisme diffusif, un intercept nettement plus grand que celui donné par le point-col naïf, qui devient même positif pour des grandes valeurs de  $Q^2$  ( $\log(Q^2/Q_0^2) > 6$ ) tandis que la dimension anormale effective, qui valait à l'origine  $+1/2$ , "glisse" vers la valeur  $-1/2$ . Le même scénario se répète pour les composantes de spin conforme supérieur, bien que l'intercept obtenu reste négatif, même pour des grandes valeurs de  $Q^2$ .

Nous avons vérifié que cette propriété reste vraie pour une vaste classe de fonctions  $f_p(\gamma)$  : il suffit que la convergence de l'intégrale et sa positivité soient respectées, et qu'il n'y ait pas de singularité proche de  $\gamma = 0$ . À l'inverse, si on place un pôle à l'origine  $\gamma = 0$  en choisissant une fonction  $f_p(\gamma)$  qui ait cette particularité analytique, on observe que le déplacement du point-selle est "bloqué" par ce point. Ceci est visible sur la figure (3.12) qui représente les résultats de calculs effectués avec le préfacteur singulier suivant :

$$f_p(\gamma) = \frac{1}{\gamma \cos(\pi\gamma/4)} . \quad (3.70)$$

Dans ce cas, on voit que seule la composante  $p = 0$  a une dépendance en énergie suffisamment forte pour avoir une influence notable.

### Intérêt phénoménologique

Les résultats que nous avons obtenus suggèrent que la composante  $p = 1$ , bien que sous-dominante en énergie, peut jouer un rôle dans la description des données. Nous nous proposons ici de comparer ces résultats à une analyse récente des données de diffusion profondément



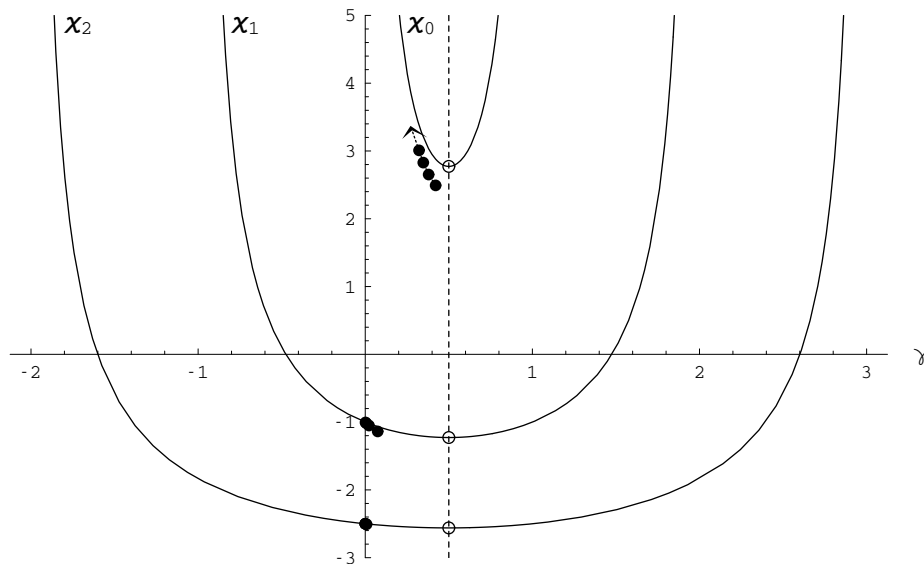


FIG. 3.12 – *Intercept effectif en fonction de la dimension anormale effective pour un préfacteur singulier en  $\gamma=0$  (voir le texte). On note l'accumulation des points près de la singularité pour  $p=1, 2$ .*

inélastique et de photoproduction sous l'angle des théories de Regge, et présentée dans la référence [Donnachie 98]. L'une des prédictions de ces théories est qu'une observable hadronique inclusive peut toujours s'écrire comme une somme de termes qui sont eux-mêmes produits d'une fonction de l'énergie de la forme  $x_{Bj}^{-\epsilon}$  et d'une fonction qui dépend exclusivement des autres variables cinématiques (pour une revue, voir par exemple la référence [Collins 77]). La paramétrisation adoptée dans l'article [Donnachie 98] possède trois tels termes :

$$F_2(x_{Bj}, Q^2) = \underbrace{f_0(Q^2)x_{Bj}^{-\epsilon_0}}_{\text{poméron dur}} + \underbrace{f_1(Q^2)x_{Bj}^{-\epsilon_1}}_{\text{poméron mou}} + \underbrace{f_2(Q^2)x_{Bj}^{-\epsilon_2}}_{\text{reggéons}}. \quad (3.71)$$

Le terme noté “poméron mou” a une dépendance en énergie qui est telle que  $\epsilon_1 = 0,0808$ . Le terme “reggéons” tient compte des trajectoires de Regge secondaires. L'exposant de l'énergie vaut  $\epsilon_2 = -0,4525$ . La forme fonctionnelle suivante pour les coefficients dépendant de  $Q^2$  a été postulée :

$$\begin{aligned} f_0(Q^2) &= A_0 \left( \frac{Q^2}{Q^2 + a_0} \right)^{1+\epsilon_0} \left( 1 + X \log \left( 1 + \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) \right), \\ f_1(Q^2) &= A_1 \left( \frac{Q^2}{Q^2 + a_1} \right)^{1+\epsilon_1} \frac{1}{1 + \sqrt{Q^2/Q_1^2}}, \\ f_2(Q^2) &= A_2 \left( \frac{Q^2}{Q^2 + a_2} \right)^{1+\epsilon_2}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

et ajustée aux données de diverses expériences, pour toutes les valeurs de  $Q^2$ , et pour  $x_{Bj} < 0,07$ . Les valeurs des paramètres pour lesquelles les données sont reproduites de la façon la plus fidèle sont les suivantes :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0410 & a_0 &= 7,13 & Q_0^2 &= 10,6 \\ \epsilon_0 &= 0,418, & A_1 &= 0,387, & a_1 &= 0,684, & Q_1^2 &= 48,0 \\ A_2 &= 0.0504 & a_2 &= 0,00291 & X &= 0,485 \end{aligned} \quad (3.73)$$

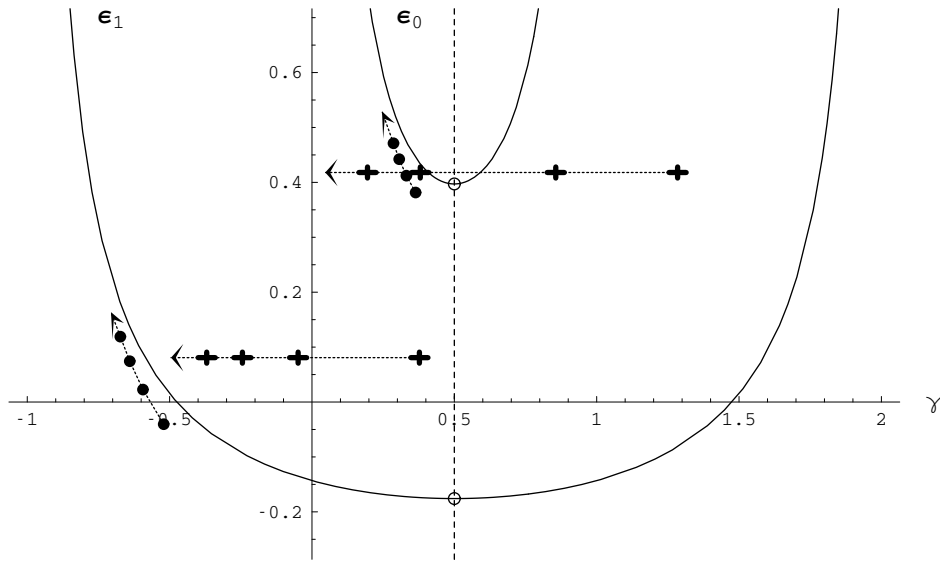


FIG. 3.13 – Comparaison de la paramétrisation de type “Regge” (croix) et des composantes  $p=0$  et  $p=1$  (points). On a représenté l’intercept effectif ( $\epsilon$ ) en fonction de la dimension anormale effective.  $Y$  est fixé à 10 et on a fait varier  $\log(Q^2/Q_0^2)$  uniformément entre 4 et 10. Le sens de la flèche indique les  $\log(Q^2/Q_0^2)$  croissants.

avec un excellent estimateur de la qualité de l’ajustement,  $\chi^2=1,16$  par point.

Cette paramétrisation présente la propriété suivante :  $f_0(Q^2)$  est une fonction croissante de  $Q^2$ , tandis que  $f_1(Q^2)$  est une fonction décroissante de  $Q^2$  pour  $Q^2 > 10$  GeV ; le poméron mou aurait, aux grandes échelles, un comportement effectif de la forme  $1/Q$ . On a représenté ce comportement sur la figure (3.13) en regard de celui des composantes de spin conforme  $p=0$  et  $p=1$ . On a fixé  $\bar{\alpha}_s$  à la valeur 0,15, et  $Q_0$  à 135 MeV. On voit que pour les grandes valeurs de  $Y$  et de  $Q^2$ , on peut identifier le poméron dur avec la composante  $p=0$ , et le poméron mou avec la composante  $p=1$ . Un parallèle exact ne peut cependant pas être établi dans tout le domaine cinématique, étant donné que l’analyse de QCD perturbative que nous avons effectuée requiert explicitement la présence d’une échelle dure  $Q^2$ , alors que les théories de Regge sont également valables dans la limite  $Q^2 \rightarrow 0$ . Une différence importante entre les deux approches réside également dans le fait que la QCD perturbative prédit une dépendance en rapidité qui est une fonction de  $Q^2$ , alors que les intercepts des termes du développement de Regge sont fixes.

## Discussion

Cette étude des composantes de spin conforme non nul nous a permis d’en prouver l’intérêt phénoménologique, en tant que scénario basé sur la QCD qui explique les différents termes ressortant d’une paramétrisation de type “Regge” des données de diffusion profondément inélastique. Ces composantes ont une dépendance en  $Q$  du type  $1/Q^{\alpha_p}$ , avec  $\alpha_1$  d’ordre 1, tout comme le poméron mou de Donnachie-Landshoff, et  $\alpha_p > \alpha_1$ . L’intercept effectif trouvé, bien que dépendant de  $Q^2$ , se situe également, pour  $p=1$ , qualitativement dans la même région que celui du poméron mou. Cependant, certaines précautions doivent être prises quant à l’applicabilité réelle de ce modèle basé sur la QCD perturbative.

- Tout d’abord, le facteur diffusif indispensable au mécanisme de glissement qui permet d’obtenir un intercept fort pour la composante  $p=1$ , représente en fait une diffusion de

l'impulsion transverse des gluons que l'on mesure. Celle-ci est d'autant plus importante que la valeur absolue de la dérivée de la fonction caractéristique  $\chi_p(\gamma)$  en  $\gamma = 1/2$  est faible (voir l'équation de point-selle (3.66)). Or, on a :

$$\chi_0''(1/2) \simeq 33,6 \quad , \quad \chi_1''(1/2) \simeq 1,66$$

et  $0 < \chi_{p+1}''(1/2) < \chi_p''(1/2)$  pour  $p \geq 2$  , (3.74)

ce qui signifie que la diffusion est de plus en plus forte pour les grandes valeurs de  $p$ . Ce problème de diffusion dans l'infrarouge, déjà bien connu dans le cas de la composante  $p=0$  [Bartels 93], est accentué pour les spins conformes supérieurs. Les échelles de grandes distances peuvent être facilement atteintes dans ce mécanisme pourtant perturbatif, ce qui entrave la validité de l'approche.

- À première vue, il semblerait que si les fonctions d'onde des objets qui entrent en collision sont isotropes, seule la composante  $p=0$  peut émerger dans une mesure d'observables inclusives :  $f_p(\gamma)$  serait identiquement nul pour  $p \geq 1$ . Il faudrait imaginer une distribution de dipôles primordiaux du proton qui présenterait une certaine anisotropie pour que les composantes  $p > 0$  puissent effectivement contribuer. Cet aspect des choses a fait l'objet d'investigations détaillées dans un travail réalisé ultérieurement [Marchal 00]. Ses auteurs ont conclu à la nécessité d'introduire un mécanisme non perturbatif qui puisse engendrer une telle anisotropie.

Malgré ces réserves, il est clair que les composantes de spin conforme  $p > 0$  ont une influence sur la phénoménologie bien plus importante que ce à quoi on pouvait s'attendre en s'en tenant à une approche naïve. Nous y reviendrons plus loin dans ce mémoire, à l'occasion d'études de processus plus exclusifs, pour lesquels les composantes  $p > 0$  sont non nulles, déjà au niveau perturbatif.

### 3.4 Résumé – prolongements

Nous avons montré dans ce chapitre qu'on peut accéder à la mesure des densités de partons à haute énergie, à savoir par des expériences de diffusion profondément inélastique. Nous avons évalué quelques observables de ce type d'expériences, les fonctions de structure, dans le cadre du modèle des dipôles, qui donne la densité de partons au temps  $\tau=0$  en chromodynamique quantique perturbative à tous les ordres dans cette limite de haute énergie. La fonction de structure est alors représentée comme une série de composantes indexées par un nombre quantique discret, le spin conforme.

Dans un deuxième temps, les prédictions de ce modèle ont été confrontées aux données expérimentales recueillies par les collaborations H1 et ZEUS : un accord très satisfaisant a été mis en évidence, tant pour la fonction de structure inclusive  $F_2$  que pour des observables plus exclusives comme la contribution de la production de paires de quarks charmés  $F_2^c$ , ou la contribution de la polarisation longitudinale du photon virtuel incident  $F_L$ . Pour ce travail, on s'est uniquement intéressé à la composante de spin conforme  $n=0$ , dominante à haute énergie. Ces études phénoménologiques, menées en 1997, avaient pour seul but de prouver que le modèle des dipôles peut être adapté de façon à décrire de manière satisfaisante et économique (faible nombre de paramètres) les données de diffusion profondément inélastique à haute énergie. Le modèle présenté ici n'a pas vocation à rivaliser avec des paramétrisations basées sur l'équation DGLAP, qui incluent dans la sommation des  $\log Q^2$  réalisée des termes d'ordre sous-dominant (actuellement jusqu'à l'ordre NNLL $Q^2$ ). Pour pouvoir poursuivre cette phénoménologie et comparer les approches de type DGLAP et dipôles, il faudrait d'une part d'un point de vue théorique inclure les ordres sous-dominants (NNLL( $1/x_{Bj}$ )), et d'autre part d'un point de vue expérimental, disposer de données à plus petit  $x_{Bj}$ , afin d'être sûr que l'approximation des doubles logarithmes dominants, qui comme nous l'avons vu est la limite

de petit  $x_{Bj}$  et de grand  $Q^2$  commune aux deux schémas de sommation, ne suffise pas à rendre compte du comportement des données. Ce genre d'étude est pour l'instant inaccessible tant d'un point de vue théorique qu'expérimental.

Le travail que nous avons présenté ensuite dépassait le cadre de cette comparaison entre les schémas de sommation des logarithmes dominants. Nous avons montré la pertinence phénoménologique des composantes de spin conforme  $|n| = 2, 4$  qui apparaissent dans le modèle des dipôles, et en particulier de la première d'entre elles : l'intercept et la dimension anormale effectifs qui lui sont associés sont très proches, dans la région cinématique de grand  $Q^2$  et de petit  $x_{Bj}$ , de ceux du poméron mou des théories de Regge, dont l'effet est visible dans les données expérimentales.

### 3.A Détails du calcul de l'amplitude de diffusion dipôle-dipôle

Cette annexe relativement technique vise à reproduire les résultats présentés en annexe de la référence [Mueller 94b].

Les états de positions transverses déterminées sont reliés aux états d'impulsions déterminées par une transformation de Fourier dans le plan transverse (comparer à la formule (2.51) de la page 36) :

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_i, z_i, \bar{z}_i; b_i\rangle &= p_i^\pm \int \frac{d^2 \mathbf{k}_i}{2\pi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{k}}_i}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}_i \mathbf{x}_i + \bar{\mathbf{k}}_i \bar{\mathbf{x}}_i)} |\vec{k}_i, \vec{\bar{k}}_i\rangle \\ &= p_i^\pm \int \frac{d^2 \mathbf{k}_i}{2\pi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{k}}_i}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}_i(\mathbf{b}_i + \mathbf{r}_i/2) + \bar{\mathbf{k}}_i(\mathbf{b}_i - \mathbf{r}_i/2))} |\vec{k}_i, \vec{\bar{k}}_i\rangle . \end{aligned} \quad (3.75)$$

La présence du facteur  $p_i^\pm$  (plus explicitement  $p_1^+$  ou  $p_2^-$ ) est de nature dimensionnelle, et permet le passage de la représentation en impulsions longitudinales à celle en fractions d'impulsions longitudinales. Le même type de transformation vaut pour les dipôles de l'état final, et il découle de ceci la formule suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'_1, z'_1, \bar{z}'_1; \mathbf{r}'_2, z'_2, \bar{z}'_2; \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2 | T | \mathbf{r}_1, z_1, \bar{z}_1; \mathbf{r}_2, z_2, \bar{z}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \\ = (p_1^+)^2 (p_2^-)^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{2\pi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{k}}_1}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{k}_2}{2\pi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{k}}_2}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{k}'_1}{2\pi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{k}}'_1}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{k}'_2}{2\pi} \frac{d^2 \bar{\mathbf{k}}'_2}{2\pi} \times \\ \times e^{i(\mathbf{k}_1(\mathbf{b}_1 + \mathbf{r}_1/2) + \bar{\mathbf{k}}_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{r}_1/2))} e^{i(\mathbf{k}_2(\mathbf{b}_2 + \mathbf{r}_2/2) + \bar{\mathbf{k}}_2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{r}_2/2))} e^{i(\mathbf{k}'_1(\mathbf{b}'_1 + \mathbf{r}'_1/2) + \bar{\mathbf{k}}'_1(\mathbf{b}'_1 - \mathbf{r}'_1/2))} \times \\ \times e^{i(\mathbf{k}'_2(\mathbf{b}'_2 + \mathbf{r}'_2/2) + \bar{\mathbf{k}}'_2(\mathbf{b}'_2 - \mathbf{r}'_2/2))} \langle \vec{k}'_1, \vec{\bar{k}}'_1; \vec{k}'_2, \vec{\bar{k}}'_2 | T | \vec{k}_1, \vec{\bar{k}}_1; \vec{k}_2, \vec{\bar{k}}_2 \rangle . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Commençons donc par calculer l'élément de matrice dans l'espace des impulsions transverses :

$$\langle \vec{k}'_1, \vec{\bar{k}}'_1; \vec{k}'_2, \vec{\bar{k}}'_2 | T | \vec{k}_1, \vec{\bar{k}}_1; \vec{k}_2, \vec{\bar{k}}_2 \rangle . \quad (3.77)$$

Les classes de diagrammes à considérer sont représentés sur la figure (3.14). Nous évaluerons

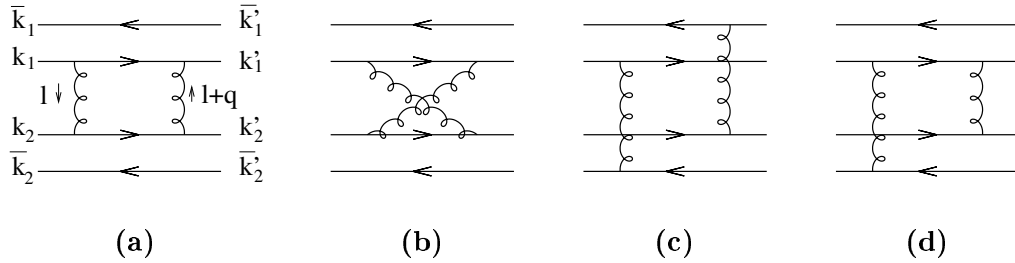


FIG. 3.14 – Diagrammes d'interaction de deux dipôles.

les diagrammes (a) et (c) en détail.

**Diagramme (a) dans l'espace des impulsions.** Présentons dans un premier temps les calculs qui se rapportent au diagramme (a). Les deux lignes déconnectées représentent de simples contractions d'états. En utilisant la condition de normalisation  $\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ , on voit qu'il leur correspond un facteur  $\delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2)$ . Notons que cette fonction "δ" ne s'applique pas aux mêmes coordonnées pour les deux facteurs : l'onium du haut (1) et l'onium du bas (2) se déplacent en sens opposés. Ainsi, les impulsions du cône de lumière des constituants du premier sont les composantes "+", tandis que celles du second sont les composantes "-".

Calculons le sous-diagramme restant. L'élément de matrice s'écrit<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned}
& g_s^4 \mathcal{C} \int d^4 q (2\pi)^4 \delta^4(k'_1 - k_1 - q) \delta^4(k'_2 - k_2 + q) \times \\
& \times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(k'_1)}{\sqrt{2k_1^+} (2\pi)^3} \gamma^{\mu_1} \frac{\gamma \cdot (k_1 - l)}{(k_1 - l)^2 + i\epsilon} \gamma^{\nu_1} \frac{u(k_1)}{\sqrt{2k_1^+} (2\pi)^3} \frac{g_{\mu_1 \mu_2} g_{\nu_1 \nu_2}}{l^2 (l + q)^2} \times \\
& \times \frac{\bar{u}(k'_2)}{\sqrt{2k_2^+} (2\pi)^3} \gamma^{\mu_2} \frac{\gamma \cdot (k_2 + l)}{(k_2 + l)^2 + i\epsilon} \gamma^{\nu_2} \frac{u(k_2)}{\sqrt{2k_2^+} (2\pi)^3} , \quad (3.78)
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}$  est le facteur de couleur. Les gluons échangés sont représentés par leurs propagateurs de Feynman. Les deux fonctions  $\delta$  en facteur proviennent de la conservation globale de l'énergie-impulsion  $(2\pi)^4 \delta(k'_1 + k'_2 - k_1 - k_2)$  dans laquelle on a introduit le quadrivecteur transfert d'impulsion  $q$ . On va traiter le produit de spineurs du numérateur en utilisant l'approximation eikonale. En effet, à haute énergie et à l'ordre des logarithmes dominants, les gluons échangés sont mous par rapport aux quarks des onia, c'est-à-dire que leurs impulsions longitudinales sont faibles. D'autre part, les impulsions transverses de toutes les particules sont du même ordre. Ceci se traduit par les relations :

$$\begin{aligned}
& k_1^+, \bar{k}_1^+ \gg l^+, q^+ \quad k_2^-, \bar{k}_2^- \gg l^-, q^- \\
& |\mathbf{q}| \sim |l| \sim |\mathbf{k}_1| \sim |\mathbf{k}_2| \sim |\bar{\mathbf{k}}_1| \sim |\bar{\mathbf{k}}_2| , \quad (3.79)
\end{aligned}$$

et les mêmes relations valent pour les particules de l'état final. Évaluons alors les dénominateurs des propagateurs des quarks  $(k_1 - l)^2$  et  $(k_2 + l)^2$  :

$$\begin{aligned}
(k_1 - l)^2 &= l^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = l^2 - 2 \left( k_1^+ \frac{l^2 + \mathbf{l}^2}{2l^+} + \frac{\mathbf{k}_1^2}{2k_1^+} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{l} \right) \\
&= l^2 \left( 1 - \frac{k_1^+}{l^+} \right) - \frac{l^+}{k_1^+} \mathbf{k}_1^2 - \frac{k_1^+}{l^+} \mathbf{l}^2 - 2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{l} \\
&\simeq -2k_1^+ l^- , \quad (3.80)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé extensivement les relations d'ordonnement (3.79). Tous ces dénominateurs se traitent de cette manière. Les produits de spineurs au numérateur de l'équation (3.78) se simplifient en utilisant dans un premier temps la relation (2.7) page 23 :

$$\sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(p) = \gamma \cdot p , \quad (3.81)$$

puis l'approximation eikonale (2.46) :

$$\bar{u}^{(\alpha')}(p) \gamma^{\mu} u^{(\alpha)}(p') \simeq 2\delta_{\alpha\alpha'} p^{\mu} , \quad (3.82)$$

valable pour  $p \simeq p'$ . On remarque également que les virtualités  $l^2$  et  $(l + q)^2$  sont données par l'opposé du carré de l'impulsion transverse de ces quadrivecteurs, i.e. :

$$l^2 = -\mathbf{l}^2 \quad \text{et} \quad (l + q)^2 = -(\mathbf{l} + \mathbf{q})^2 . \quad (3.83)$$

Ceci découle du fait que  $(k_1 - l)^2 \sim l^2$ .

<sup>3</sup>La normalisation des états diffère de celle de la référence [Mueller 94b] ce qui explique en particulier les facteurs supplémentaires  $\sqrt{(2\pi)^3}$  présents au dénominateur.

Une fois ces différentes opérations effectuées, il reste, pour le sous-diagramme en boucle (3.78) :

$$g_s^4 \mathcal{C} \delta(k_1'^+ - k_1^+ - q^+) \delta(k_2'^- - k_2^- - q^-) \\ \times \int dq^+ dq^- d^2 \mathbf{q} (2\pi)^4 \delta^2(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \delta^2(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}) \delta(k_1'^- - k_1^- - q^-) \delta(k_2'^+ - k_2^+ - q^+) \\ \times \int \frac{dl^+ dl^- d^2 \mathbf{l}}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (\mathbf{l} + \mathbf{q})^2} \frac{1}{-l^- + i\epsilon} \frac{1}{l^+ + i\epsilon} . \quad (3.84)$$

On réduit maintenant l'intégrale sur  $q^+$  en utilisant la fonction  $\delta(k_2'^+ - k_2^+ + q^+)$ , et de façon symétrique, l'intégrale en  $q^-$  en utilisant  $\delta(k_1'^- - k_1^- - q^-)$ . On tient compte des relations d'ordonnement  $q^+ \ll k_1^+$  et  $q^- \ll k_2^-$  pour simplifier les fonctions  $\delta$  qui concernent les impulsions longitudinales restantes. L'intégrale sur  $l^+$  s'effectue en utilisant l'identité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl^+}{l^+ + i\epsilon} = -i\pi , \quad (3.85)$$

et il en va de même pour l'intégrale sur  $l^-$ .

Calculons le facteur de couleur. Les deux gluons échangés forment forcément un singulet de  $SU(N_c)$  : dans la cas contraire, la structure de couleur des dipôles ne serait pas conservée par l'interaction, et celle-ci ne serait alors pas élastique. Ce facteur vaut donc :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{N_c^2} \sum_{a,b} \text{Tr}(t^a t^b) \text{Tr}(t^a t^b) = \frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \underset{N_c \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{4} , \quad (3.86)$$

et il est le même pour tous les diagrammes. En rassemblant les différents résultats intermédiaires, on obtient finalement l'expression du diagramme (a) dans l'espace des impulsions :

$$\langle \vec{k}'_1, \vec{k}'_1; \vec{k}'_2, \vec{k}'_2 | T | \vec{k}_1, \vec{k}_1; \vec{k}_2, \vec{k}_2 \rangle |_{(a)} = \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) \delta(k_1'^+ - k_1^+ - q^+) \delta(k_2'^- - k_2^- + q^-) \times \\ \times \frac{\alpha_s^2}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} \delta^2(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \delta^2(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}) \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{l^2 (\mathbf{l} + \mathbf{1})^2} . \quad (3.87)$$

**Diagramme (c) dans l'espace des impulsions.** Tournons-nous maintenant vers le diagramme (c), qui est d'une structure assez différente du diagramme (a). L'élément de matrice s'écrit :

$$g_s^4 \mathcal{C} (2\pi)^4 \delta^4(k_1' + \bar{k}'_1 - k_1 - \bar{k}_1) (2\pi)^4 \delta^4(k_2' + \bar{k}'_2 - k_2 - \bar{k}_2) \\ \times \frac{\bar{u}(k'_1)}{\sqrt{2k_1'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\mu_1} \frac{u(k_1)}{\sqrt{2k_1^+} (2\pi)^3} \frac{g_{\mu_1 \mu_2}}{(k_1 - k'_1)^2} \frac{\bar{v}(\bar{k}'_2)}{\sqrt{2\bar{k}_2'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\mu_2} \frac{v(\bar{k}_2)}{\sqrt{2\bar{k}_2^+} (2\pi)^3} \\ \times \frac{\bar{v}(\bar{k}'_1)}{\sqrt{2\bar{k}_1'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\nu_1} \frac{v(\bar{k}_1)}{\sqrt{2\bar{k}_1^+} (2\pi)^3} \frac{g_{\nu_1 \nu_2}}{(\bar{k}'_1 - \bar{k}_1)^2} \frac{\bar{u}(k'_1)}{\sqrt{2k_1'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\nu_2} \frac{u(k_1)}{\sqrt{2k_1^+} (2\pi)^3} . \quad (3.88)$$

Le premier facteur représente la conservation de l'énergie et de l'impulsion globale; il peut se réécrire en introduisant les impulsions transférées  $l$  et  $l + q$ . Il y a deux manières de les implémenter, mais une seule d'entre elles correspond au diagramme de la figure (c), ce qui explique le facteur 1/2 dans la formule suivante :

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1' + \bar{k}'_1 - k_1 - \bar{k}_1) (2\pi)^4 \delta^4(k_2' + \bar{k}'_2 - k_2 - \bar{k}_2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1' + l - k_1) \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(\bar{k}'_1 - \bar{k}_1 - l - q) (2\pi)^4 \delta^4(k_2' + l + q - k_2) (2\pi)^4 \delta^4(\bar{k}'_2 - \bar{k}_2 - l) , \quad (3.89)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& g_s^4 \mathcal{C} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1' + l - k_1) (2\pi)^4 \delta^4(\bar{k}_1' - \bar{k}_1 - l - q) (2\pi)^4 \delta^4(k_2' + l + q - k_2) (2\pi)^4 \delta^4(\bar{k}_2' - \bar{k}_2 - l) \\
& \quad \times \frac{\bar{u}(k_1')}{\sqrt{2k_1'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\mu_1} \frac{u(k_1)}{\sqrt{2k_1^+} (2\pi)^3} \frac{g_{\mu_1 \mu_2}}{l^2} \frac{\bar{v}(\bar{k}_2')}{\sqrt{2\bar{k}_2'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\mu_2} \frac{v(\bar{k}_2)}{\sqrt{2\bar{k}_2^+} (2\pi)^3} \\
& \quad \times \frac{\bar{v}(\bar{k}_1')}{\sqrt{2\bar{k}_1'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\nu_1} \frac{v(\bar{k}_1)}{\sqrt{2\bar{k}_1^+} (2\pi)^3} \frac{g_{\nu_1 \nu_2}}{(l+q)^2} \frac{\bar{u}(k_1')}{\sqrt{2k_1'^+} (2\pi)^3} \gamma^{\nu_2} \frac{u(k_1)}{\sqrt{2k_1^+} (2\pi)^3} . \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Comme précédemment, les produits des spineurs au numérateur sont évalués dans le cadre de l'approximation eikonale, et les virtualités des gluons échangés, qui interviennent au niveau de leurs propagateurs, sont données à un signe près, par le carré de leur impulsion transverse. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{g_s^4 \mathcal{C}}{2(2\pi)^2} \delta(k_1'^+ - k_1^+) \delta(\bar{k}_1'^+ - \bar{k}_1^+) \delta(k_2'^- - k_2^-) \delta(\bar{k}_2'^- - \bar{k}_2^-) \\
& \quad \times \int dq^+ dq^- dl^+ dl^- \delta(k_1'^- - k_1^- + l^-) \delta(\bar{k}_1'^- - \bar{k}_1^- - l^- - q^-) \delta(k_2'^+ - k_2^+ + l^+ + q^+) \delta(\bar{k}_2'^+ - \bar{k}_2^+ - l^+) \\
& \quad \times \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{1}}{l^2(1+\mathbf{q})^2} \delta^2(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1 + \mathbf{1}) \delta^2(\bar{\mathbf{k}}_1' - \bar{\mathbf{k}}_1 - \mathbf{1} - \mathbf{q}) \delta^2(\mathbf{k}_2' - \mathbf{k}_2 + \mathbf{1} + \mathbf{q}) \delta^2(\bar{\mathbf{k}}_2' - \bar{\mathbf{k}}_2 - \mathbf{1}) , \quad (3.91)
\end{aligned}$$

où l'on a séparé les intégrations sur les impulsions longitudinales et transverses, et utilisé l'ordonnement des impulsions longitudinales pour simplifier ces dernières. La dernière étape consiste à réduire les intégrales sur  $l^+$ ,  $l^-$ ,  $q^+$  et  $q^-$  à l'aide des fonctions  $\delta$  que l'on a isolées. Le résultat final est :

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{k}_1', \vec{k}_1'; \vec{k}_2', \vec{k}_2' | T | \vec{k}_1, \vec{k}_1; \vec{k}_2, \vec{k}_2 \rangle_{(c)} = \frac{\alpha_s}{2} \delta(k_1'^+ - k_1^+) \delta(\bar{k}_1'^+ - \bar{k}_1^+) \delta(k_2'^- - k_2^-) \delta(\bar{k}_2'^- - \bar{k}_2^-) \\
& \quad \times \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{1}}{l^2(1+\mathbf{q})^2} \delta^2(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_1 + \mathbf{1}) \delta^2(\bar{\mathbf{k}}_1' - \bar{\mathbf{k}}_1 - \mathbf{1} - \mathbf{q}) \delta^2(\mathbf{k}_2' - \mathbf{k}_2 + \mathbf{1} + \mathbf{q}) \delta^2(\bar{\mathbf{k}}_2' - \bar{\mathbf{k}}_2 - \mathbf{1}) . \quad (3.92)
\end{aligned}$$

**Espace des coordonnées transverses.** Traduisons ces résultats dans l'espace des positions transverses. Il suffit d'en prendre les transformées de Fourier des équations (3.87) et (3.92), définies par l'équation (3.76), par rapport aux impulsions transverses de l'état initial et de l'état final. Quelques manipulations élémentaires sur les distributions de Dirac conduisent au résultat suivant pour le diagramme (a) :

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{r}_1', z_1', \bar{z}_1'; \mathbf{r}_2', z_2', \bar{z}_2'; \mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2' | T | \mathbf{r}_1, z_1, \bar{z}_1; \mathbf{r}_2, z_2, \bar{z}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle_{(a)} \\
& \quad = \delta(z_1 - z_1') \delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_1') \delta(z_2 - z_2') \delta(\bar{z}_2 - \bar{z}_2') \delta^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1') \delta^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2') \delta^2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1') \delta^2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_2') \times \\
& \quad \quad \times \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} \frac{\alpha_s^2}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{1}}{l^2(1+\mathbf{q})^2} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2} . \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Le diagramme croisé (b) donne un résultat identique dans cette approximation. Il contribue donc par un facteur 2.

Le diagramme (c) s'écrit dans l'espace des positions transverses :

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{r}_1', z_1', \bar{z}_1'; \mathbf{r}_2', z_2', \bar{z}_2'; \mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2' | T | \mathbf{r}_1, z_1, \bar{z}_1; \mathbf{r}_2, z_2, \bar{z}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle_{(a)} \\
& \quad = \delta(z_1 - z_1') \delta(\bar{z}_1 - \bar{z}_1') \delta(z_2 - z_2') \delta(\bar{z}_2 - \bar{z}_2') \delta^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1') \delta^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2') \delta^2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1') \delta^2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_2') \times \\
& \quad \quad \times \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} \frac{\alpha_s^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{1}}{l^2(1+\mathbf{q})^2} e^{i\mathbf{l}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)} . \quad (3.94)
\end{aligned}$$



On remarque que les résultats (3.93) et (3.94) obtenus pour ces deux diagrammes que nous avons calculés en détail ne diffèrent que par des facteurs de phase.

Les autres diagrammes qui contribuent au processus se calculent exactement de la même manière : le résultat est très semblable, à des facteurs de phase près.

En rassemblant les différentes contributions, on peut mettre le résultat final sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}'_1, z'_1, \bar{z}'_1; \mathbf{r}'_2, z'_2, \bar{z}'_2; \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2 | T | \mathbf{r}_1, z_1, \bar{z}_1; \mathbf{r}_2, z_2, \bar{z}_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle &= \delta(z_1 - z'_1) \delta(\bar{z}_1 - \bar{z}'_1) \delta(z_2 - z'_2) \delta(\bar{z}_2 - \bar{z}'_2) \\ &\times \delta^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \delta^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) \delta^2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}'_1) \delta^2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}'_2) \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} \mathcal{A}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) , \quad (3.95) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{el}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{\alpha_s^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{l^2(\mathbf{q} - \mathbf{l})^2} \left( e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_1/2} - e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_1/2} \right) \left( e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_2/2} - e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_2/2} \right) \\ &\times \left( e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{l})\mathbf{r}_1/2} - e^{-i(\mathbf{q} - \mathbf{l})\mathbf{r}_1/2} \right) \left( e^{-i(\mathbf{q} - \mathbf{l})\mathbf{r}_2/2} - e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{l})\mathbf{r}_2/2} \right) . \quad (3.96) \end{aligned}$$

Les fonctions  $\delta^2$  en facteur identifient les positions des dipôles initiaux et finals : ceci montre explicitement que l'interaction est *diagonale* dans l'espace des positions transverses. À haute énergie, celles-ci ne sont pas modifiées par les échanges de gluons groupés en un singulet de couleur.

# Équivalence entre approches de voie $s$ et de voie $t$

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Équation BFKL à transfert nul en approche de voie <math>t</math></b>	<b>82</b>
<b>4.2</b>	<b>“<math>k_{\perp}</math>-factorisation” et fonctions de structure</b>	<b>87</b>
4.2.1	Cas général	87
4.2.2	Cas particulier de la diffusion profondément inélastique	88
<b>4.3</b>	<b>Équivalence entre “<math>k_{\perp}</math>-factorisation” et factorisation des dipôles</b>	<b>90</b>
<b>4.4</b>	<b>Application au calcul de la densité de dipôles dans un jet vers l’avant</b>	<b>92</b>
4.4.1	Émission dans l’état final d’un jet vers l’avant	92
4.4.2	Interprétation dans le cadre du modèle des dipôles de couleur	94
4.4.3	Conclusions et perspectives	97

Dans ce chapitre, on montrera l’équivalence entre l’approche de voie  $s$  de la formulation hamiltonienne développée jusqu’ici, et une approche de voie  $t$  que l’on exposera dans les sections (4.1) et (4.2). Dans la section (4.3), on vérifiera l’équivalence pour certaines observables de diffusion profondément inélastique par un calcul explicite, publié dans l’article [Munier I], et on l’appliquera à un autre processus dans la section (4.4) : celle-ci reproduit la publication [Munier V].

Jusqu’à présent, l’image physique sur laquelle reposaient les modèles dont nous avons discuté était une image de voie  $s$  : une mesure physique était vue comme l’interaction, à un instant donné, d’une sonde avec les fluctuations quantiques de l’objet mesuré, décrites par un jeu de fonctions d’ondes. Nous avons calculé celles-ci à tous les ordres en théorie des perturbations sur le cône de lumière, dans une approximation de type “logarithmes dominants”. Cette approche s’est avérée relativement simple sur le plan technique, et réalise bien, physiquement, le modèle des partons de QCD, dans la mesure où l’on peut interpréter les fluctuations quantiques de l’objet étudié comme une distribution de partons de la mer.

Cependant, cette image n’est *a priori* pas très naturelle dans le contexte d’un calcul d’observables très exclusives : en effet, les fluctuations partoniques calculées ne sont reliées à l’état final observé dans le détecteur que par l’intermédiaire de l’opérateur d’évolution entre les temps  $\tau$  et  $+\infty$ , qui est du type  $T \exp(-i \int_{\tau}^{+\infty} d\tau' \hat{H}_I(\tau'))$ , et dont l’évaluation se révèle très fastidieuse. Une approche consistant à calculer directement, ordre par ordre, l’amplitude invariante de diffusion de la sonde sur la cible est plus directe, et s’avère bien plus adaptée. Comme nous allons le voir, ces amplitudes font intervenir des diagrammes de Feynman en échelles : c’est ce que nous appelons une *approche de voie  $t$* .

De tels calculs ont été effectués dans la limite d'une part de grand  $Q^2$  et d'autre part de petit  $x$ , à des précisions allant au-delà de l'approximation des logarithmes dominants (NNLL $Q^2$  et NLL( $1/x$ ) respectivement). Comme dans les chapitre précédents, nous nous intéresserons ici uniquement aux termes dominants à haute énergie, et les calculs présentés se limiteront à l'ordre des logarithmes dominants (LL( $1/x$ )).

L'équation de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) est présentée dans la section (4.1), et un théorème de factorisation fait l'objet de la section (4.2). Grâce à celui-ci, nous pourrions recalculer les fonctions de structure, et montrer l'équivalence entre les approches de voie  $s$  et de voie  $t$ . De ce résultat, nous déduirons la densité de dipôles à l'origine d'un jet vers l'avant dans l'état final.

#### 4.1 Équation BFKL à transfert nul en approche de voie $t$

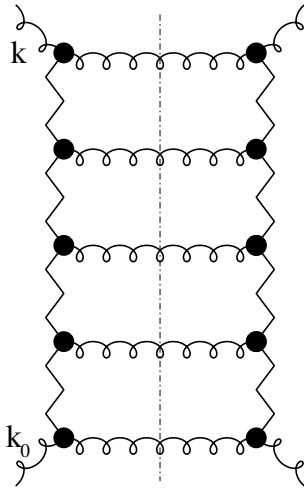


FIG. 4.1 – Échelle BFKL d'ordre  $(\alpha_s \log 1/x)^5$ .

Dans cette section, nous discutons l'amplitude d'interaction élastique vers l'avant de deux gluons, ou de façon équivalente, la fonction de Green  $G^{\mu\nu\mu_0\nu_0}(k, k_0)$  à quatre gluons externes hors couche de masse. On se spécialisera rapidement au cas où le gluon "du bas" d'impulsion  $k_0$  est fixé : l'amplitude que nous considérerons sera alors notée  $G^{\mu\nu}(k)$ .

Cette amplitude a été calculée dans les références [Balitsky 78, Kuraev 76, Kuraev 77]. Nous ne reproduisons pas ce calcul ici, qui est long et difficile : nous nous contentons d'en suggérer les ingrédients essentiels. On pourra consulter l'ouvrage de la référence [Forshaw 97] pour une présentation moderne détaillée de la dérivation de l'équation BFKL : le calcul y est effectué complètement en jauge covariante, en faisant un abondant usage de relations de dispersion pour construire les ordres supérieurs, ce qui apporte des simplifications notables.

Le principe du calcul BFKL repose sur l'évaluation de l'amplitude élastique  $g^*g^* \rightarrow g^*g^*$  à tous les ordres de la théorie des perturbations, en ne conservant de l'ordre  $n$  que la contribution dominante dans la limite de haute énergie dans le centre de masse  $s \propto 1/x$ . Cette contribution se trouve être proportionnelle à  $(\bar{\alpha}_s \log 1/x)^n$ . La voie  $t$  de la réaction est projetée sur son état singulet de couleur.

Le résultat du calcul peut se mettre sous une forme élégante, et on s'aperçoit alors que cela revient à évaluer un diagramme *effectif* en échelle, unique à chaque ordre, du type de celui représenté sur la figure (4.1). Les gluons coupés par la ligne interrompue sont réels et observés dans l'état final, tandis que les barreaux verticaux sont des gluons *reggésés*. Explicitons cette terminologie.

Pour cela, commençons par introduire une paramétrisation de Sudakov pour les impulsions de ces deux types d'objets, dont les quadrvecteurs sont notés  $q_i^\mu$  et  $k_i^\mu$  respectivement :

$$k_i^\mu = x_i p^\mu + \bar{x}_i \bar{p}^\mu + k_i^{\perp\mu} \quad \text{et} \quad q_i^\mu = k_i^\mu - k_{i+1}^\mu, \quad (4.1)$$

où  $p^\mu$  et  $\bar{p}^\mu$  sont les deux quadrvecteurs suivants :

$$p^\mu = \left( \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \quad \text{et} \quad \bar{p}^\mu = \left( \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{s}}{2} \right), \quad (4.2)$$

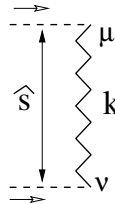
qui sont tels que  $2p \cdot \bar{p} = s$ . Remarquons que pour un gluon initial (au "bas" de l'échelle) d'impulsion  $k_0^\mu = p^\mu$ , on a  $x_0 = 1$  et  $\bar{x}_0 = 0$ . Par ailleurs, on note  $(x, \bar{x}, \mathbf{k})$  les variables de Sudakov du gluon d'impulsion  $k^\mu$  en haut de l'échelle.

La contribution LL( $1/x$ ) est obtenue pour une cinématique dite “multiregge”, caractérisée d’une part par un fort ordonnancement des variables de Sudakov  $x_i$ , et d’autre part, par l’unicité de l’échelle des impulsions transverses  $\mathbf{k}_i$ , qui, de surcroît, est petite par rapport à l’échelle de l’énergie dans le centre de masse. Ceci se traduit mathématiquement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1| &\sim \dots \sim |\mathbf{k}_n|, & |\mathbf{k}_i|^2 &\ll s, \\ x_1 &\gg x_2 \gg \dots \gg x_n \\ \text{et } \bar{x}_1 &\ll \bar{x}_2 \ll \dots \ll \bar{x}_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

L’ordonnancement des variables  $\bar{x}_i$  ne constitue pas véritablement une condition supplémentaire : il découle de celui des variables  $x_i$ , et de l’hypothèse que les impulsions transverses sont toutes du même ordre de grandeur.

Chaque gluon reggisé représente toute une série de diagrammes de corrections virtuelles au propagateur du gluon nu. Ils sont ainsi nommés en raison de l’expression de leur “propagateur” effectif, qui inclut une dépendance dans le carré de l’énergie dans le centre de masse transférée. En jauge de Feynman, ce propagateur s’écrit :

$$D_{\mu\nu}(\hat{s}, \mathbf{k}^2) = \frac{i g_{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2} \left( \frac{\hat{s}}{\mathbf{k}^2} \right)^{\epsilon_G(\mathbf{k}^2)} \quad (4.4)$$


L’échelle de  $\hat{s}$ , prise égale à  $\mathbf{k}^2$ , est arbitraire à l’ordre LL( $1/x$ ). L’exposant  $\epsilon_G(\mathbf{k}^2)$  de  $\hat{s}$  est proportionnel à  $\alpha_s$ . Ceci montre bien que le gluon reggisé comporte des diagrammes de Feynman de tous les ordres. L’expression explicite de cet exposant est la suivante :

$$\epsilon_G(\mathbf{k}^2) = -\frac{\bar{\alpha}_s}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{2\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 (\mathbf{k}')^2}. \quad (4.5)$$

Cette intégrale est divergente dans l’infrarouge ; il faut la régulariser en introduisant un *cut-off*  $\mu$  sur les petites valeurs de l’impulsion transverse  $\mathbf{k}'$ . Remarquons au passage que le dénominateur du propagateur est simplement le carré de l’impulsion transverse du gluon, et non le carré de Lorentz de son impulsion. Ceci résulte une fois encore de la cinématique multiregge. Montrons-le. Pour cela, considérons les gluons reggisés ( $i$ ) et ( $i+1$ ). La condition de couche de masse pour la particule réelle de masse nulle et d’impulsion  $q_i^\mu$  qui est rayonnée dans l’état final s’écrit :

$$q_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_i - x_{i+1})(\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1})s - (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2 = 0. \quad (4.6)$$

En utilisant l’hypothèse d’ordonnancement des  $x_i$  et des  $\bar{x}_i$ , on peut déduire de cette équation que  $x_i$  est de l’ordre de  $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2 / (\bar{x}_{i+1}s)$ . La virtualité du gluon reggisé s’écrit alors :

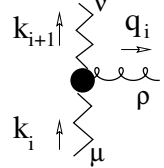
$$k_i^2 = x_i \bar{x}_i s - \mathbf{k}_i^2 = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2 \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_{i+1}} - \mathbf{k}_i^2 \simeq -\mathbf{k}_i^2, \quad (4.7)$$

où l’approximation qui conduit à la seconde égalité fait appel à la relation d’ordonnancement fort  $\bar{x}_i \ll \bar{x}_{i+1}$  de l’équation (4.3).

Ceci s’avère un fait très général que nous avons déjà rencontré auparavant, lorsque nous avons calculé la section efficace élémentaire d’interaction de dipôles : à haute énergie, la virtualité des particules échangées en voie  $t$  est donnée par leur impulsion transverse, i.e.

$$k^2 = -\mathbf{k}^2.$$

Il nous faut maintenant préciser la seconde “règle de Feynman” pour évaluer les diagrammes en échelles : celle-ci est symbolisée graphiquement par les disques noirs sur la figure (4.1) qui représentent des vertex non-locaux (vertex de Lipatov). Ceux-ci ont l’expression analytique suivante :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{2\bar{p}_\mu p_\nu}{s} \left\{ \left( x_i + \frac{2\mathbf{k}_i^2}{\bar{x}_{i+1}s} \right) p^\rho + \left( \bar{x}_i + \frac{2\mathbf{k}_{i+1}^2}{x_i s} \right) \bar{p}^\rho - (k_i^{\perp\rho} + k_{i+1}^{\perp\rho}) \right\}. \quad (4.8)$$


Le facteur de couleur, qui est ici une constante de structure du groupe de jauge, a été omis. On remarque les projecteurs eikonaux sur les impulsions  $p$  et  $\bar{p}$  : la non localité du vertex de Lipatov provient de ceux-ci.

En évaluant les diagrammes en échelle à l’aide de ces deux “règles de Feynman”, on constate que les ordres successifs sont donnés par une équation intégrale. Écrivons-la pour la quantité que nous définissons comme suit :

$$\mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\bar{x} \frac{\mathbf{k}^2}{s} p^\mu p^\nu G_{\mu\nu}(k), \quad (4.9)$$

qui est en un certain sens, la densité de gluons non intégrée dans un gluon initial qui a pour variables de Sudakov  $x_0 = 1$  et  $\mathbf{k}_0$ . On ne s’intéresse pas ici aux dépendances angulaires, si bien que cette quantité est uniquement fonction du module  $\mathbf{k}^2$  de l’impulsion transverse. L’équation intégrale satisfaite par  $\mathcal{F}$  a la forme suivante :

$$\mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{\pi} \delta(1-x) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_0^2) + \mathcal{K} \cdot \mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2). \quad (4.10)$$

Ceci est l’équation BFKL. Son noyau  $\mathcal{K}$  est donné par :

$$\mathcal{K} \cdot \mathcal{F}(x, \mathbf{k}) = \bar{\alpha}_s \int_x^1 \frac{dz}{z} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{\pi\mathbf{q}^2} \left( \mathcal{F}(x/z, |\mathbf{k}+\mathbf{q}|^2) - \theta(|\mathbf{k}|-|\mathbf{q}|) \mathcal{F}(x/z, \mathbf{k}^2) \right). \quad (4.11)$$

Le premier terme de l’intégrand, positif, correspond à des émissions de gluons réels. Le second terme, négatif, représente les corrections virtuelles au propagateur du gluon échangé en voie  $t$ . Nous commenterons plus en détail la structure de cette équation fondamentale plus loin. Attachons-nous d’abord à la résoudre.

Il est intéressant de remarquer qu’elle a la même structure que l’équation d’évolution de la densité de dipôles (2.71) page 42, et ainsi, elle se résout exactement de la même manière. Pour ce faire, on utilise la variable complexe  $\omega$ , conjuguée de Mellin à la variable  $x$ , en définissant la transformée suivante :

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{k}^2) = \int_0^1 \frac{dx}{x} x^\omega. \quad (4.12)$$

On trouve que les fonctions propres du noyau ainsi transformé sont des fonctions puissances de la forme  $|\mathbf{k}|^{2\gamma-2}$ , et les valeurs propres associées sont  $\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)$ . Ainsi :

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{k}^2) = \frac{1}{\pi\mathbf{k}^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{\mathbf{k}^2}{Q_0^2} \right)^\gamma \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)/\omega}. \quad (4.13)$$

où  $Q_0$  est l'échelle de virtualité caractéristique du gluon initial, i.e.  $Q_0 = |\mathbf{k}_0|$ . Cette fonction est la transformée de Mellin inverse de la fonction  $1/(1 - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)/\omega)$ .

Il convient cependant de souligner à ce niveau une différence notable avec l'équation l'évolution des dipôles. Chacun des deux termes du noyau de l'équation (4.11) est divergent à la limite où les gluons échangés ont une petite impulsion transverse  $\mathbf{k}$ . Comme dans le cas des dipôles, il s'agit là de divergences qui se compensent entre les deux termes, et les quantités physiques, invariantes de jauge sont également finies. Mais c'est une divergence *infrarouge*, alors que les termes du noyau d'émission de dipôles sont divergents pour les petites tailles de dipôles, c'est-à-dire dans l'*ultraviolet*. Cette différence provient du fait que la séparation entre le terme d'émissions réelles et le terme de corrections virtuelles n'est pas la même dans le cas BFKL et dans le cas des dipôles. En effet, comme le calcul de la densité de dipôles s'effectue à un temps  $\tau$  fini, il ne donne accès à la densité de partons qu'au moment de l'interaction : toutes les émissions de gluons dans l'état final, après l'instant de l'interaction, ne sont pas prises en compte dans le terme positif. Nous renvoyons le lecteur à la référence [Chen 95] pour une démonstration détaillée.

### Forme exclusive

Revenons un instant sur l'interprétation de l'équation (4.10). On a vu que la méthode de BFKL consiste à calculer entièrement la section efficace  $g^* g^* \rightarrow \{n \text{ gluons}\}$ , pour tout  $n$ . Les émissions successives de ces  $n$  gluons dans l'état final n'apparaissent pas très explicitement sur l'équation (4.10), qui comporte un terme négatif : on va la transformer, pour réécrire l'équation sous une forme *exclusive*.

Pour cela, on peut prendre sa dérivée par rapport à  $\log(1/x)$ , afin d'obtenir la forme intégral-différentielle d'une équation d'évolution (on ne tient pas compte du terme inhomogène, qui constitue la condition initiale) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2)}{\partial \log(1/x)} = \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{\pi \mathbf{q}^2} (\mathcal{F}(x, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2) - \theta(|\mathbf{k}| - |\mathbf{q}|) \mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2)) . \quad (4.14)$$

Introduisons un *cut-off* infrarouge  $\mu$  dans l'intégrale sur  $\mathbf{q}$ . On peut alors séparer les deux termes de l'intégrale dans le membre de droite, et réécrire l'équation sous la forme suivante :

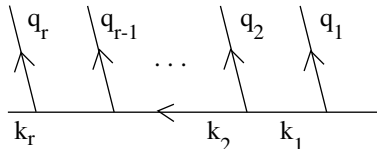
$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2)}{\partial \log(1/x)} + \bar{\alpha}_s \log \frac{\mathbf{k}^2}{\mu^2} \mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2) = \bar{\alpha}_s \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d^2 \mathbf{q}}{\pi \mathbf{q}^2} \mathcal{F}(x, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2) , \quad (4.15)$$

où la borne supérieure  $Q^2$  de l'intégrale, que nous n'avons pas précisée jusqu'à présent, représente l'échelle de virtualité maximale donnée par la limite cinématique. La solution de l'équation sans second membre est  $\mathcal{F} = \Delta$ , avec :

$$\Delta(x, \mathbf{k}^2) \equiv \exp(-\bar{\alpha}_s \log(1/x) \log(\mathbf{k}^2/\mu^2)) , \quad (4.16)$$

ce qui suggère le changement de variable fonctionnel  $\mathcal{F} \rightarrow \Delta \cdot \mathcal{F}$ . En intégrant l'équation (4.15) par rapport à  $\log(1/x)$  avec la condition initiale  $\mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2) = \delta(1-x) \delta(\mathbf{k}^2)/\pi$  et en résolvant

récurivement l'équation obtenue, on trouve :

$$\mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{\pi} \delta(1-x) \delta(\mathbf{k}^2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^n \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{\pi \mathbf{q}_i^2} \int_x^1 dz_i \right) \times \begin{matrix} \propto P_{gg}(z_i) \\ \overbrace{\frac{\alpha_s}{z_i}} \\ \text{Facteur de forme} \\ \underbrace{\Delta(z_i, \mathbf{k}_i^2)} \end{matrix} \times \delta^2(\mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \quad (4.17)$$


où  $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_{i-1} + \mathbf{q}_i$  (voir le schéma). Le  $n$ ième terme de la somme représente la contribution de l'émission de  $n$  gluons dans l'état final. Ceux-ci sont émis avec la fonction de splitting  $N_c/z_i$ , qui est la limite à petit  $z_i$  de  $\widehat{P}_{gg}(z_i)$ . Remarquons que seule la conservation de l'impulsion *transverse* est prise en compte ; si on imposait la conservation de l'impulsion *longitudinale*, on obtiendrait des termes formellement sous-dominants dans le cadre de l'approximation LL( $1/x$ ), néanmoins phénoménologiquement importants (voir par exemple [Kwiecinski 95, Kwiecinski 96]). L'équation ainsi obtenue est équivalente à l'équation BFKL (4.10) seulement à des termes de type *higher twist*  $\mu/Q$  près, qui proviennent de l'intégrale sur  $|\mathbf{k}|$  de 0 à  $\mu$  que l'on a négligée. On se reportera aux références précédemment citées pour une étude plus détaillée.

D'autre part, le terme (négatif) de l'équation BFKL initiale, qui était le terme de corrections virtuelles, a été exponentié pour donner le facteur de forme  $\Delta$ . Celui-ci, qui provient de la reggésiation du gluon de la voie  $t$ , contribue à "espacer" les émissions en  $x$  :  $\Delta$  est d'autant plus petit que  $z_i$  est petit et  $\mathbf{k}$  grand, et donc la suppression du rayonnement de gluons est importante pour ces deux régions cinématiques. Ce facteur de forme confère en un certain sens un temps de vie fini au gluon reggésié.

Enfin, notons qu'une approche directe de la description de l'état final d'un processus à haute énergie a été proposée dans les références [Ciafaloni 88, Catani 90b, Catani 90a, Marchesini 95]. L'équation qui a été obtenue pour  $\mathcal{F}$  (équation CCFM) diffère de celle que nous venons d'adapter à partir de l'équation BFKL (4.17) par un facteur *d'ordonnement angulaire* des partons gluons successifs émis dans l'état final. Les termes de la série qui est sommée par cette équation comportent, au maximum, deux facteurs  $\log(1/x)$  par facteur  $\alpha_s$  :

$$\begin{aligned} \text{BFKL} &\rightarrow \sum_n C_n (\alpha_s \log(1/x))^n \\ \text{et CCFM} &\rightarrow \sum_n C'_n (\alpha_s \log^2(1/x))^n + \sum_n C_n (\alpha_s \log(1/x))^n . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Cependant, les termes de coefficients  $C'_n$  ne contribuent pas aux quantités inclusives, si bien que l'équation CCFM se réduit à l'équation BFKL pour celles-ci.

L'équation CCFM présente un intérêt pratique et phénoménologique indéniable, en raison de la condition d'ordonnement angulaire qui contribue à limiter la diffusion dans l'infrarouge des impulsions transverses des gluons émis. Pour s'en convaincre, on pourra par exemple se reporter à la description Monte-Carlo des données d'HERA réalisée dans la référence [Jung 99]. Cependant, outre le fait qu'elle se réduise à l'équation BFKL pour les quantités inclusives, aucune observable n'a été exhibée à ce jour qui puisse être sensible à ces nouveaux termes  $C'_n$  ; sur le plan théorique, il semble même que les états finals donnés par l'une et l'autre approche soient complètement identiques [Salam 99].

## 4.2 “ $k_{\perp}$ -factorisation” et fonctions de structure

Afin de pouvoir calculer des sections efficaces et des fonctions de structure à haute énergie, il faut pouvoir disposer de théorèmes de factorisation, qui nous permettent de raccorder l’amplitude gluon-gluon à l’amplitude gluon-objet physique externe.

### 4.2.1 Cas général

Considérons le cas général du processus vers l’avant représenté sur la figure (4.2), où deux objets physiques d’impulsions respectives  $\bar{p}$  et  $p$  (données par l’équation (4.2)) entrent en collision.  $A$  et  $B$  représentent un ensemble de diagrammes invariant de jauge. En outre, le repère est choisi de sorte que les particules du sous-diagramme  $A$  aient leurs impulsions essentiellement parallèles à  $\bar{p}^{\mu}$ , et que celles du sous-diagramme  $B$  soient parallèles à  $p^{\mu}$ . Suivant ce critère, le gluon factorisé est supposé appartenir au sous-diagramme  $A$ . Il a l’impulsion  $k^{\mu}$  qui admet la décomposition de Sudakov :

$$k^{\mu} = xp^{\mu} + \bar{x}\bar{p}^{\mu} + k^{\perp\mu}, \quad (4.19)$$

avec  $\bar{x} > x$ . On peut écrire la section efficace d’interaction sous la forme suivante :

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2s} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\bar{p}, k) \left( \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{*\bar{\mu}}(k) \right) \times \left( \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{* \bar{\nu}}(k) \right) B_{\mu\nu}(p, k), \quad (4.20)$$

où l’on a inclus le dénominateur  $k^2$  du propagateur du gluon échangé dans l’amplitude  $B_{\mu\nu}$ . Le quadrivecteur  $\varepsilon^{\mu}$  est le quadrivecteur polarisation du gluon échangé. En utilisant la propriété d’invariance de jauge de l’amplitude  $A^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ , qui se traduit par la relation  $k^{\bar{\mu}} \cdot A_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ , on voit que d’une part cette section efficace se réécrit :

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2s} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_{\mu\nu}(\bar{p}, k) B^{\mu\nu}(p, k), \quad (4.21)$$

et d’autre part, en exploitant l’hypothèse supplémentaire d’invariance par parité et la symétrie  $\mu \leftrightarrow \nu$ , il vient la décomposition tensorielle suivante :

$$A^{\mu\nu}(\bar{p}, k) = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2} \right) A_1(\bar{p}, k) - \frac{1}{k^2} \left( k^{\mu} - \frac{k^2}{\bar{p} \cdot k} p^{\mu} \right) \left( k^{\nu} - \frac{k^2}{\bar{p} \cdot k} p^{\nu} \right) A_2(\bar{p}, k), \quad (4.22)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des fonctions scalaires des invariants de Lorentz construits à partir des quadrivecteurs  $\bar{p}$  et  $k$ .  $A_1$  et  $A_2$  sont du même ordre de grandeur, comme on peut le vérifier au cas par cas par un calcul explicite.

Examinons maintenant ce que deviennent leurs coefficients tensoriels à haute énergie. Le coefficient de  $A_1$  n’est pas singulier dans cette limite. Par contre, le coefficient de  $A_2$  équivaut à :

$$\left( \frac{4\mathbf{k}^2}{xs} \right) \left( \frac{1}{x} \right) \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{s}. \quad (4.23)$$

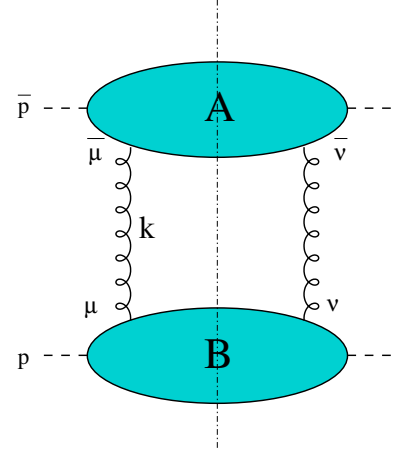


FIG. 4.2 –  $k_{\perp}$ -factorisation.



Le fait que  $k^2$  vaille  $-\mathbf{k}^2$  entraîne que  $\mathbf{k}^2/xs \gg \bar{x}$ . Comme par hypothèse,  $\bar{x} > x$ , on voit alors que le coefficient (4.23) de  $A_2$  domine celui de  $A_1$  par un facteur d'ordre  $1/x$ , et ainsi, l'amplitude  $A^{\mu\nu}$  est essentiellement proportionnelle à  $A_2$ . Le résultat pour la section efficace s'écrit donc, en reprenant les formules (4.21) et (4.23) :

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2s} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_2(\bar{p}, k) \frac{4\mathbf{k}^2}{(xs)^2} p^\mu p^\nu B_{\mu\nu}(p, k) . \quad (4.24)$$

Comme  $A_2$  n'est fonction que des invariants construits à partir de  $\bar{p}$  et  $k$ , et est de ce fait indépendante de  $\bar{x}$ , on peut réécrire le résultat précédent comme suit :

$$\sigma_{AB} = \int \frac{dx}{x} \int d^2\mathbf{k} \frac{A_2(s, x, \mathbf{k})}{xs} \int \frac{d\bar{x}}{(2\pi)^4} \frac{\mathbf{k}^2}{s} p^\mu p^\nu B_{\mu\nu}(p, k) . \quad (4.25)$$

Ceci constitue le théorème de " $k_\perp$ -factorisation", établi dans la référence [Catani 91] (on pourra aussi consulter l'article de la référence [Collins 91]).

#### 4.2.2 Cas particulier de la diffusion profondément inélastique

Dans cette section, nous utilisons le théorème de factorisation précédemment établi pour évaluer la section efficace électron-proton à haute énergie. Le proton est représenté dans ce contexte de haute énergie par une densité de gluons primordiaux, pour laquelle on adoptera une paramétrisation adéquate.

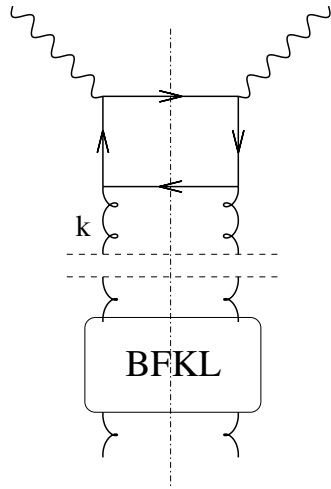


FIG. 4.3 – Factorisation de la section efficace  $\gamma^* - g$ .

En employant les relations du chapitre 3 entre les fonctions de structure et la section efficace, nous nous ramenons d'emblée au calcul de la section efficace d'interaction entre un photon virtuel et un gluon. Afin de satisfaire à l'hypothèse d'invariance de jauge des ensembles de diagrammes  $A$  et  $B$  requise par la  $k_\perp$ -factorisation, il suffit d'imaginer ces graphes comme des sous-diagrammes du véritable processus physique qui implique un électron dans l'état initial, plutôt qu'un photon virtuel. Ceci ne pose pas de problème dans le cas qui nous intéresse.

$A$  est alors constitué des deux diagrammes en boîte de fusion photon-gluon à l'ordre le plus bas, dont l'un d'eux est représenté sur le haut de la figure (4.3). Malgré la simplicité apparente du diagramme, son expression analytique est compliquée. Le photon a l'impulsion  $q^\mu$  (son impulsion transverse est notée  $\mathbf{q}$ ), et la virtualité  $Q^2$ , qui est aussi une échelle dure du problème (une autre échelle dure peut provenir de la masse  $m$  des quarks produits, si ceux-ci sont lourds). La fonction scalaire  $A_2$  de la section précédente dépend maintenant des invariants formés à partir des quadrivecteurs  $q^\mu$  et  $k^\mu$ , c'est-à-dire de  $x$ ,  $x_{Bj} \equiv Q^2/(2p \cdot q)$  et  $\mathbf{k}$ .

Le diagramme  $B$  représente l'amplitude élastique vers l'avant  $g^*g^*$  donnée par l'équation BFKL :  $B^{\mu\nu} \equiv G^{\mu\nu}$ .

Si on pose, avec les notations du paragraphe précédent :

$$\hat{\sigma}(x_{Bj}/x, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \equiv \frac{4m^2}{xs} A_2(x, x_{Bj}, \mathbf{k}) , \quad (4.26)$$

pour la section efficace photon virtuel-gluon à l'ordre le plus bas, alors l'équation (4.25) se

réécrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \frac{1}{4m^2} \int d^2\mathbf{k} \int \frac{dx}{x} \underbrace{\frac{4m^2 A_2(x, x_{Bj}, \mathbf{k})}{xs}}_{\hat{\sigma}(x_{Bj}/x, \mathbf{k}, \mathbf{q})} \underbrace{\int \frac{d\bar{x}}{(2\pi)^4} \frac{\mathbf{k}^2}{s} p^{\mu} p^{\nu} B_{\mu\nu}(p, k)}_{\mathcal{F}(x, \mathbf{k})} \\ \Rightarrow \sigma_{\gamma^* g^*} &= \frac{1}{4m^2} \int d^2\mathbf{k} \int \frac{dx}{x} \hat{\sigma}(x_{Bj}/x, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \mathcal{F}(x, \mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (4.27)$$

La section efficace  $\hat{\sigma}$  a été calculée dans la référence [Catani 91]. On l’appelle également “facteur d’impact” du photon virtuel. Afin de factoriser la convolution de l’équation (4.27) et de simplifier l’expression de  $\hat{\sigma}$ , on peut introduire la fonction-coefficient  $h_{\omega}(\gamma, \gamma')$ , qui est la transformée de Mellin de  $\hat{\sigma}(x, \mathbf{k}, \mathbf{q})$  par rapport à  $x$ , à  $\mathbf{k}^2$  et à  $\mathbf{q}^2$  respectivement :

$$\frac{h_{\omega}(\gamma, \gamma')}{\gamma\gamma'} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\pi\mathbf{k}^2} \left( \frac{\mathbf{k}^2}{4m^2} \right)^{\gamma} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{\pi\mathbf{q}^2} \left( \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right)^{\gamma'} \int_0^1 \frac{dx}{x} x^{\omega} \hat{\sigma}(x, \mathbf{k}, \mathbf{q}) . \quad (4.28)$$

La contribution dominante en énergie est obtenue pour  $\omega=0$ , et est donnée dans la référence [Catani 91]. Elle s’écrit, pour la fonction-coefficient correspondant à la somme des polarisations transverses et longitudinales du photon virtuel initial, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} h_{\omega=0}(\gamma, \gamma') &= \frac{\pi^2}{4} \alpha_{em} \alpha_s e_q^2 (7 - 5(\gamma + \gamma') + 3\gamma\gamma') \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\gamma')\Gamma(1-\gamma')}{\Gamma(5/2-\gamma)\Gamma(5/2-\gamma')} \Gamma(1-\gamma-\gamma') . \end{aligned} \quad (4.29)$$

On introduit de plus la transformée de Mellin  $\mathcal{F}_{\omega}(\gamma)$  de la densité non intégrée de gluons  $\mathcal{F}_{\omega}(\mathbf{k})$  de l’équation (4.13) :

$$\mathcal{F}_{\omega}(\gamma) = \int d^2\mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{k}^2}{Q_0^2} \right)^{-\gamma} \mathcal{F}_{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)/\omega} , \quad (4.30)$$

où  $Q_0$  est une échelle de factorisation, qui est l’échelle typique des impulsions transverses des gluons du proton. Cette fonction contient le pôle BFKL en  $\omega$  universel  $1/(\omega - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma))$ . Le résidu à ce pôle correspond ici à un gluon initial d’impulsion transverse  $|\mathbf{k}_0|=Q_0$  déterminée, mais, par la suite, il sera *paramétré* car il dépend de la distribution initiale des gluons dans le proton, qui, par essence, est non perturbative. La section efficace totale se réécrit, à partir des équations (4.27), (4.28) et (4.30) :

$$\sigma_{\gamma^* g^*} = \frac{1}{4m^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi\gamma} \left( \frac{Q_0^2}{4m^2} \right)^{-\gamma} \int \frac{d\gamma'}{2i\pi\gamma'} \left( \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right)^{-\gamma'} \int \frac{d\omega}{2i\pi} x^{-\omega} h_{\omega}(\gamma, \gamma') \mathcal{F}_{\omega}(\gamma) . \quad (4.31)$$

On remarque qu’on peut effectuer l’intégrale sur  $\gamma'$  et ainsi définir la fonction de  $\gamma$  suivante :

$$\frac{h_{\omega}(\gamma)}{\gamma} = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \left( \frac{Q^2}{4m^2} \right)^{-\gamma} \left( \frac{1}{4m^2} \int \frac{d\gamma'}{2i\pi\gamma'} h_{\omega}(\gamma, \gamma') \left( \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right)^{-\gamma'} \right) , \quad (4.32)$$

où  $|\mathbf{q}|$  est l’échelle des impulsions transverses au niveau du photon, donnée par  $Q$ . Grâce aux relations (3.12) page 50 entre sections efficaces et fonctions de structure, on obtient finalement l’expression suivante pour les fonctions de structure :

$$F(x_{Bj}, Q^2) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{\gamma} \int \frac{d\omega}{2i\pi} x_{Bj}^{-\omega} h_{\omega}(\gamma) \frac{\mathcal{F}_{\omega}(\gamma)}{\gamma} , \quad (4.33)$$

ou, plus explicitement, dans l'approximation  $h_\omega \simeq h_{\omega=0}$  et en effectuant l'intégrale sur  $\omega$  :

$$F(x_{Bj}, Q^2) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^\gamma x_{Bj}^{-\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)} h_{\omega=0}(\gamma) \Omega(\gamma) . \quad (4.34)$$

$\Omega(\gamma)$  est une fonction qu'on ne précise pas ici : c'est la condition initiale de l'évolution BFKL, c'est-à-dire une représentation des caractéristiques du gluon que l'on extrait du proton à l'échelle de factorisation  $Q_0$ .

### 4.3 Équivalence entre “ $k_\perp$ -factorisation” et factorisation des dipôles

Les images physiques qui sous-tendent les approches dites de voie  $s$  et de voie  $t$  des fonctions de structure sont très différentes. Dans la première, on calcule les fonctions d'onde des objets qui interagissent en théorie des perturbations sur le cône de lumière : celles-ci encodent les fluctuations quantiques de la sonde et du projectile à un temps donné. Le processus de base est une interaction parton-parton élémentaire. Dans la seconde formulation, on calcule tous les graphes qui contribuent à un état final donné à  $n$  gluons, et on somme ceux-ci. Comme nous l'avons vu, cette somme se réduit à une expression simple, l'équation BFKL. L'équivalence entre ces deux approches a été prouvée au niveau inclusif par différentes approches : un calcul comparé de graphes de Feynman [Chen 95] a montré qu'il y a moins de graphes dans l'approche de voie  $s$  car le rayonnement dans l'état final n'est par essence pas pris en compte, mais qu'en dépit de cela, les résultats obtenus pour les quantités inclusives sont identiques. D'autres auteurs [Navelet 97, Navelet 98b] ont montré directement l'équivalence des noyaux des équations d'évolution respectives. Dans cette section, nous nous basons sur la référence [Munier I] pour montrer explicitement, par un calcul, que la formulation des *fonctions de structure* dans l'une ou dans l'autre de ces approches conduit à des résultats identiques.

Pour cela, nous commençons par reprendre l'équation (4.32) et nous effectuons explicitement l'intégration sur  $\gamma'$  pour  $\omega = 0$ , en y insérant auparavant l'équation (4.29). Un calcul long mais élémentaire nous conduit aux expressions suivantes correspondant aux cas où la polarisation du photon virtuel est longitudinale et transverse circulaire respectivement :

$$h_{\omega=0,L}(\gamma) = \frac{\alpha_s}{6\pi} \frac{4^{-\gamma}}{(1+2\gamma)(1-\frac{2}{3}\gamma)} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma^3(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} \frac{1}{1+\frac{4m^2}{Q^2}} \times \\ \left\{ \left( \frac{4m^2}{Q^2} \right)^\gamma (2(1-\gamma) + 3\frac{4m^2}{Q^2}) + \left( 1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{\gamma-1} \times \right. \\ \left. \left( 4\gamma(1-\gamma) - \frac{4m^2}{Q^2} (3\frac{4m^2}{Q^2} + 4(1-\gamma)) \right) \times \right. \\ \left. {}_2F_1 \left( 1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+\frac{4m^2}{Q^2}} \right) \right\} , \quad (4.35)$$

et

$$h_{\omega=0,T}(\gamma) = \frac{\alpha_s}{6\pi} \frac{4^{-\gamma}}{(1+2\gamma)(1-\frac{2}{3}\gamma)} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma^3(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} \frac{1}{1+\frac{4m^2}{Q^2}} \times \\ \left\{ \left( \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{\gamma} \left( (3\gamma-1) + \frac{4m^2}{Q^2}(\gamma-2) \right) + \left( 1 + \frac{4m^2}{Q^2} \right)^{\gamma-1} \times \right. \\ \left. \left( 2(1+\gamma)(2-\gamma) + \frac{4m^2}{Q^2}(7+\gamma-6\gamma^2 - \frac{4m^2}{Q^2}(\gamma-2)) \right) \times \right. \\ \left. {}_2F_1 \left( 1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+\frac{4m^2}{Q^2}} \right) \right\}. \quad (4.36)$$

En comparant ces équations aux équations (3.42,3.43) page 58 qui donnent la densité de dipôles dans le photon virtuel transverse et longitudinal, on s’aperçoit qu’on a la relation

$$\phi_{T,L}(\gamma) = \frac{\alpha_{em} e_q^2 N_c}{\alpha_s} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{v(1-\gamma)} \frac{h_{T,L}(\gamma)}{\gamma}, \quad (4.37)$$

où  $v(\gamma)$  est donné par :

$$v(\gamma) = \frac{2^{-2\gamma-1} \Gamma(1-\gamma)}{\gamma \Gamma(1+\gamma)}. \quad (4.38)$$

Cette fonction de  $\gamma$  s’interprète, à des facteurs près, comme la transformée de Mellin de la section efficace totale gluon-dipôle. Une façon intuitive de comprendre cette relation pourrait être la suivante : diviser la fonction-coefficient représentée sur la figure (4.3) par le facteur  $v(1-\gamma)$  revient à supprimer le vertex eikonal du gluon échangé, qui, dans cette représentation, est également un vertex gluon-dipôle.

On peut alors transposer le résultat (4.34) dans le langage des fonctions d’onde et écrire :

$$F(x_{Bj}, Q^2) = 8 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{\gamma} x_{Bj}^{-\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)} \frac{1}{\alpha_{em}} \phi(\gamma) \sigma'_{dd}(\gamma) n(\gamma) \quad (4.39)$$

où

$$\sigma'_{dd}(\gamma) = \alpha_s^2 v(\gamma) v(1-\gamma) = \alpha_s^2 / (16\gamma^2 (1-\gamma)^2) \quad (4.40)$$

est à un facteur numérique près la section efficace dipôle-dipôle que nous avons obtenue dans le chapitre 3. Remarquons qu’elle est proportionnelle au produit de deux sections efficaces gluon-dipôles : ceci illustre le théorème de  $k_{\perp}$ -factorisation appliqué à la diffusion élémentaire dipôle-dipôle. La fonction  $n(\gamma)$  s’interprète comme la densité de dipôles primordiaux dans la cible (proton), de taille typique  $\rho \sim 1/Q_f$ .

Ainsi, la formulation perturbative des fonctions de structure est bien identique dans les approches de voie  $t$  et de voie  $s$ . La seule différence se situe au niveau de la modélisation non-perturbative du proton primordial. Le modèle des dipôles suppose une densité initiale de dipôles, car ceux-ci sont les degrés de liberté dynamiques du modèle, tandis que l’équation BFKL nécessite l’introduction d’une densité *ad hoc* de gluons primordiaux. Ceci ne constitue évidemment pas une différence essentielle. Dans un contexte totalement perturbatif, on pourrait pousser l’identification jusqu’au bout en appliquant une seconde fois le théorème de  $k_{\perp}$ -factorisation au dipôle primordial dans la cible ; on obtiendrait essentiellement un facteur  $v(\gamma)$  supplémentaire. Ici, nous avons simplement montré l’équivalence entre  $k_{\perp}$ -factorisation et factorisation des dipôles au vertex du photon. Cette équivalence est résumée par la formule (4.37).

Plusieurs questions demeurent ouvertes :

- on a identifié les fonctions d'onde du photon au premier ordre  $\phi(\gamma)$  avec les fonctions-coefficient  $h_\omega(\gamma)$  obtenues dans le cadre de la  $k_\perp$ -factorisation uniquement pour  $\omega = 0$ . Ainsi, la factorisation de voie  $s$  et celle de voie  $t$  ne semblent se correspondre qu'à la limite ultra-asymptotique. On pourrait se demander quelle forme prend cette correspondance pour  $\omega \neq 0$  : à quelle(s) composante(s) du modèle des dipôles correspondent ces termes ? [Bialas 00]
- contrairement à l'approche BFKL, on ne considère dans le modèle des dipôles que les termes dominants dans la limite de 't Hooft d'un grand nombre de couleurs. Ainsi, il peut paraître surprenant que les résultats soient point par point identiques au niveau de la dépendance en énergie.

#### 4.4 Application au calcul de la densité de dipôles dans un jet vers l'avant

Les études phénoménologiques que nous avons menées jusqu'à présent avaient pour objet les fonctions de structure du proton. Nous avons pu obtenir des prédictions dans le cadre de modèles basés sur la QCD perturbative en raison de la présence d'une échelle d'énergie dure  $Q$  dans l'état initial, fournie par le photon virtuel, et qui nous assure, grâce à la propriété de liberté asymptotique de la QCD, la validité du développement perturbatif qui a pour paramètre la constante de couplage effective  $\alpha_s(Q^2)$ . Pour ce type d'observables, des modèles de type BFKL (à des corrections sous-dominantes importantes près, qui sont à prendre en compte au moins de façon effective) sont compétitifs avec des modèles de type DGLAP basés sur l'équation du groupe de renormalisation, qui donne l'évolution de l'échelle  $Q_0$  à laquelle on factorise les densités de partons jusqu'à l'échelle  $Q$ .

Cependant, la section efficace d'événements sélectionnés en requérant un jet vers l'avant dans l'état final d'impulsion transverse  $\mathbf{q}$  de l'ordre de  $Q$ , n'est apparemment pas prédite correctement par les équations DGLAP (voir [Potter 99] et les références qui y sont citées). En effet, la cinématique est ici typiquement une cinématique de Regge, et sélectionne *a priori* la dynamique BFKL.

Dans les collisions proton-antiproton au Tevatron, il n'y a pas d'échelle dure dans l'état initial. Cependant, elle peut être générée dans la collision et se manifester dans l'état final sous la forme d'un jet à grande impulsion transverse. Les événements de ce type doivent pouvoir être interprétés dans le cadre de la QCD perturbative.

On va s'intéresser ici à la collision d'onies à haute énergie en tant que modèle pour les collisions de protons. La section efficace d'interaction onium-onium a été décrite en utilisant, pour l'évolution de ces paires  $q\bar{q}$ , une cascade de dipôles [Mueller 94a]. On demande ici qu'au moins l'un des gluons de l'état final ait son impulsion transverse plus grande qu'une certaine échelle  $\mu$ ; ce gluon est alors un jet vers l'avant, et on l'interprète comme une distribution effective de dipôles présente au temps de l'interaction.

Dans le paragraphe suivant, nous détaillerons la modélisation que nous adoptons pour le jet vers l'avant. Nous montrerons ensuite comment extraire, à l'ordre des doubles logarithmes dominants, le contenu en dipôles d'un tel objet. Ce passage s'appuyera sur l'équivalence entre la  $k_\perp$ -factorisation et la factorisation des dipôles que nous avons montrée dans la section précédente. On retrouvera ce travail dans l'article de la référence [Munier V].

##### 4.4.1 Émission dans l'état final d'un jet vers l'avant

L'amplitude d'interaction onium-onium implique l'échange de deux gluons entre les onies initiaux. À haute énergie, nous avons vu qu'on doit tenir compte de la possibilité d'interactions

multiples de ces gluons dans la voie  $t$ . Ceci peut être réalisé soit en factorisant par “ $k_{\perp}$ -factorisation” [Catani 91] une échelle BFKL du type de celle de la figure (4.1) entre les deux onia, ou bien, de façon équivalente, en calculant l'échange des gluons entre deux onia physiques habillés d'un nombre arbitraire de gluons mous de la mer. Cette dernière approche est celle des dipôles de Mueller [Mueller 94a] présentée au début de ce mémoire. Comme nous l'avons déjà signalé, l'équivalence de ces deux méthodes a été prouvée sur différentes caractérisations de ces images physiques (voir la section précédente, et les références [Chen 95, Navelet 97, Navelet 98b, Munier I]).

Dans ce paragraphe, on va calculer, dans une image de voie  $t$ , la densité de gluons  $f$  qui doit être considérée comme point de départ d'une évolution BFKL dans un système “onium+jet vers l'avant” en interaction. Le paragraphe suivant sera consacré à l'interprétation de la densité de gluons obtenue comme une densité *effective* de dipôles primordiaux.

On a à calculer l'amplitude “dipôle + gluon(virtuel)  $\rightarrow \bar{q}q$ +gluon” où le dipôle initial de rayon  $\mathbf{r}$  est un onium, et le gluon de l'état final a une impulsion transverse  $\mathbf{q}$ . Le module  $q \equiv |\mathbf{q}|$  est plus grand qu'une échelle donnée  $\mu$ .

Gardant à l'esprit le fait que dans un processus physique, le dipôle de l'état initial proviendra d'un hadron plutôt que d'un onium lourd, on considérera dans la suite que  $\mu \gg 1/r$  lorsque, pour des raisons techniques, le besoin s'en fera ressentir.

Notre point de départ est la section efficace gluon(virtuel)-dipôle  $\hat{\sigma}_{g-d}$  qui définit la densité de gluons dans un dipôle, à l'ordre le plus bas en  $\bar{\alpha}_s \equiv \alpha_s N_c / \pi$ . Elle s'écrit (voir [Navelet 98b]) :

$$f^0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{\hat{\sigma}_{g-d}}{\mathbf{k}^2} = \frac{\bar{\alpha}}{\mathbf{k}^2} \left( 2 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (4.41)$$

Nous ne reproduisons pas ce calcul ici, d'autant plus qu'une telle “section efficace” est mal définie comme elle implique une particule initiale virtuelle. Cependant, on peut comprendre ce résultat en remarquant que la formule (3.47) page 60, qui donne la section efficace dipôle-dipôle, peut se réécrire comme la convolution dans l'espace des impulsions transverses de deux sections efficaces gluon-dipôle :

$$\begin{aligned} \sigma_{dd}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \alpha_s^2 \int \frac{d^2\mathbf{l}}{\mathbf{l}^4} \left( 2 - e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_1} - e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_1} \right) \left( 2 - e^{i\mathbf{l}\mathbf{r}_2} - e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}_2} \right) \\ &= \int d^2\mathbf{l} f^0(\mathbf{l}, \mathbf{r}_1) f^0(\mathbf{l}, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

C'est simplement l'expression de la “ $k_{\perp}$ -factorisation” de la formule (4.25), où les sous-graphes  $A$  et  $B$  sont tous deux des graphes d'interaction gluon-dipôle à l'ordre le plus bas.

On exprime  $f^0$  comme une transformée de Mellin inverse dans le plan transverse :

$$f^0(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{4\bar{\alpha}}{\mathbf{k}^2} \int \frac{d\sigma}{2i\pi} (kr)^{2\sigma} v(\sigma), \quad (4.43)$$

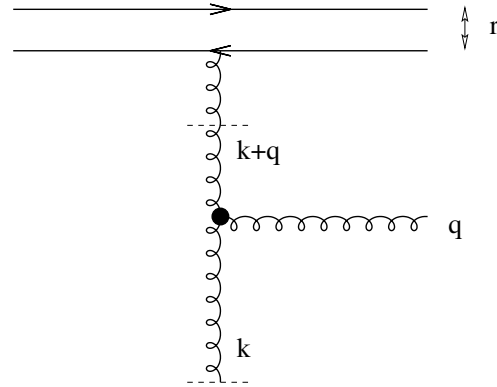


FIG. 4.4 – Un des diagrammes qui contribuent à la section efficace dipôle –  $g^* \rightarrow g$  (forward) + .... Les lignes pointillées marquent le point d'application de la  $k_{\perp}$ -factorisation.

où  $v$  est interprété comme le vertex dipôle-gluon en transformée de Mellin (voir l'équation (4.38)) :

$$v(\sigma) = \frac{2^{-2\sigma-1} \Gamma(1-\sigma)}{\sigma \Gamma(1+\sigma)}. \quad (4.44)$$

L'étape suivante consiste à factoriser l'émission d'un gluon dans l'état final. On peut calculer les graphes de Feynman nécessaires directement dans la limite de haute énergie de la QCD (voir la figure (4.4)), mais il s'avère plus commode de voir ceci comme un barreau de l'échelle BFKL. La densité de gluons initiale  $f^0$  et la densité  $f$  après l'émission d'un gluon sont liées par la formule suivante :

$$f(x, \mathbf{k}^2) = \bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{\pi \mathbf{q}^2} \theta(\mathbf{q}^2 - \mu^2) f^0(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2), \quad (4.45)$$

qui est l'équation BFKL sous forme exclusive, à l'ordre le plus bas en  $\alpha_s$  (voir par exemple [Kwiecinski 95]). La variable  $x$  est proportionnelle à  $|t|/s$ , où  $s$  et  $t$  sont les variables de Mandelstam ordinaires de la réaction. Dans le cas de la diffusion profondément inélastique,  $x$  serait la variable de Bjorken  $x_{Bj}$ .

Écrivons la transformée de Mellin de l'équation (4.45) :

$$\frac{h(\gamma)}{\gamma} \equiv \int_0^\infty \frac{d^2 \mathbf{k}}{\pi \mathbf{k}^2} |\mathbf{k}|^{2\gamma} f(x, \mathbf{k}^2) = \bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{\pi \mathbf{q}^2} \theta(\mathbf{q}^2 - \mu^2) \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{\pi \mathbf{k}^2} |\mathbf{k}|^{2\gamma} f^0(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2), \quad (4.46)$$

où l'on a utilisé des notations similaires à celles de la référence [Catani 91], bien que nous n'ayons pas effectué de transformée de Mellin en  $x$ . La variable  $\gamma$  décrit un contour  $]\gamma_0 - i\infty, \gamma_0 + i\infty[$  dans le plan complexe, avec  $0 < \Re \gamma_0 < 1/2$ . En insérant les équations (4.41)-(4.44) dans l'équation (4.46), on trouve :

$$\frac{h(\gamma)}{\gamma} = 4\bar{\alpha}^2 \left( \log \frac{1}{x} \right) \int \frac{d\sigma}{2i\pi} v(\sigma) r^{2\sigma} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{\pi \mathbf{q}^2} \theta(\mathbf{q}^2 - \mu^2) \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{\pi} |\mathbf{k}|^{2\gamma-2} |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^{2\sigma-2}. \quad (4.47)$$

L'intégration sur  $\mathbf{k}$  peut être effectuée en l'interprétant comme une intégration dans le plan complexe des  $k$  et en utilisant l'identité donnée en appendice. Le résultat s'écrit :

$$\frac{h(\gamma)}{\gamma} = 2\bar{\alpha}^2 \left( \log \frac{1}{x} \right) \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \mu^{2\gamma-2} G_{35}^{40} \left( \begin{matrix} 1, 1, 2-\gamma \\ 0, 0, 1-\gamma, 1-\gamma, 1-\gamma \end{matrix} \middle| \left( \frac{\mu r}{2} \right)^2 \right), \quad (4.48)$$

où la fonction de Meijer  $G_{35}^{40}$  (dont les arguments seront abrégés dans la suite, pour plus de lisibilité) est définie par :

$$G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\sigma}{2i\pi} \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma-\sigma)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)}, \quad (4.49)$$

le contour d'intégration  $\mathcal{C}$  étant défini sur la figure (4.5). La fonction  $h(\gamma)/\gamma$  peut être vue comme la fonction coefficient au sens donné dans la référence [Catani 91] pour le système onium+jet vers l'avant.

#### 4.4.2 Interprétation dans le cadre du modèle des dipôles de couleur

On a établi une relation entre la fonction-coefficient  $h(\gamma)/\gamma$  d'un photon virtuel et le module carré de la fonction d'onde sur une base de dipôles correspondante  $\varphi(\gamma)$ . On va utiliser ce résultat dans ce contexte de factorisation semi-exclusive dans le but d'extraire de la

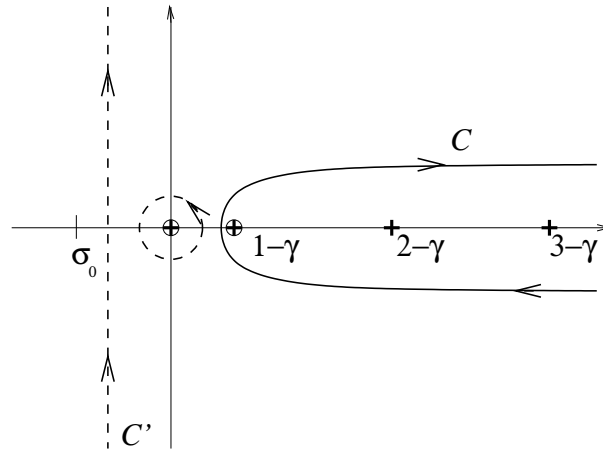


FIG. 4.5 – *Chemin d'intégration. Les croix représentent les pôles de l'intégrant. Les cercles sont les pôles doubles. Lignes pointillées : chemin d'intégration après déformation.*

fonction-coefficient le contenu en dipôles du jet vers l'avant, dans l'approximation DLL. Les doubles logarithmes se manifesteront au travers de facteurs du type  $\bar{\alpha} \log(1/x) \log(r/r_0)$ , où  $r_0$  est une taille caractéristique associée à l'état final. La relation entre le module carré de la fonction d'onde et la fonction-coefficient s'écrit, à des facteurs de normalisation près (voir la formule (4.37) page 91) :

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{h(\gamma)}{\gamma} \frac{1}{v(1-\gamma)}. \quad (4.50)$$

Ainsi, on aboutit au contenu en dipôles de l'objet qui interagit :

$$\varphi(\gamma) = 4\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\mu}{2} \right)^{2\gamma-2} (1-\gamma)^2 \times G_{35}^{40}(\gamma, \mu r). \quad (4.51)$$

Intéressons-nous maintenant à la limite cinématique  $\mu r \gg 1$ , dans laquelle le jet vers l'avant a une impulsion transverse beaucoup plus grande que l'échelle caractéristique liée à l'onium initial. La fonction de Meijer  $G_{35}^{40}$  peut être facilement approximée en prenant le pôle en  $\sigma=0$ , qui se trouve à la gauche du chemin d'intégration. En effet, le contour  $\mathcal{C}$  peut être déformé en  $\mathcal{C}'$  (voir la figure (4.5)) comme l'intégrale converge sur tout chemin tel que  $\text{Re } \sigma > \sigma_0$ , où  $\sigma_0 \equiv -1/2 - \text{Re } \gamma$  :

$$\begin{aligned} G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d\sigma}{2i\pi} \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma-\sigma)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \left( \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{1-\gamma-\sigma} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)} \right) \\ &\quad + \int_{\mathcal{C}'} \frac{d\sigma}{2i\pi} \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma-\sigma)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

L'intégrale prise sur le contour  $\mathcal{C}'$  est sous-dominante d'une certaine puissance de  $2/(\mu r)$  par rapport à la contribution du pôle double à  $\sigma=0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) &= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} \left\{ 2 \log \frac{\mu r}{2} - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma) + \frac{1}{1-\gamma} \right\} \\ &\quad + \{ \text{termes supprimés par des puissances de } 1/(\mu r) \}. \end{aligned} \quad (4.53)$$



Cette approximation reproduit avec une très bonne précision l'expression exacte, comme on peut le vérifier numériquement, même pour des valeurs de  $\mu r$  relativement faibles. Le module carré de la fonction d'onde des dipôles s'écrit, dans le cadre de cette approximation :

$$\varphi(\gamma) = 4\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\mu}{2} \right)^{2\gamma-2} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \left( 2 \log \frac{\mu r}{2} - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma) + \frac{1}{1-\gamma} \right). \quad (4.54)$$

On veut obtenir une expression pour la distribution de dipôles dans le système dans l'espace des coordonnées transverses, c'est-à-dire comme une fonction de la taille transverse  $\rho$ . Elle est donnée par la transformée de Mellin inverse de  $\varphi(\gamma)$  :

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \rho^{2\gamma-2} \varphi(\gamma). \quad (4.55)$$

On aboutit au résultat suivant :

$$\varphi(\rho) = 8\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \left( \log \frac{r}{\rho} \right) \frac{\mu}{\rho} J_1(\mu\rho) + \frac{1}{\rho^2} J_0(\mu\rho) \right). \quad (4.56)$$

Le second terme n'est pas à conserver dans le cadre de notre approximation, comme la limite de grand  $\mu r$  sélectionne les doubles logarithmes : on n'a pas de contrôle sur les termes au-delà de cette approximation. Ainsi, l'interaction du système formé par le dipôle initial et le gluon vers l'avant peut être vue comme une interaction dipôle-dipôle, à condition que le système en question soit décrit par la distribution de dipôles suivante :

$$\varphi_{\text{DLL}}(\rho) = 8\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \log \frac{r}{\rho} \right) \frac{\mu}{\rho} J_1(\mu\rho). \quad (4.57)$$

Donnons maintenant une interprétation des différents facteurs de cette distribution. Tout d'abord, notons que la dépendance en la taille du dipôle initial  $r$  n'apparaît que dans le facteur  $\log(r/\rho)$ . Ce point technique remarquable résulte de la combinaison du terme  $\log(\mu r/2)$  avec la transformée de Mellin inverse de la fonction  $\psi$  dans la transformée de Mellin inverse de l'équation (4.54). Physiquement, le facteur global  $2\bar{\alpha} \log(1/x) \log(r/\rho)$  peut être interprété comme la probabilité de trouver un dipôle de taille  $\rho$  dans un dipôle de taille  $r$ . En effet, dans l'approximation DLL à l'ordre le plus bas en  $\alpha_s$  et en supposant que l'on dispose d'une énergie proportionnelle à  $1/x$ , la probabilité de trouver un dipôle de taille  $|\varrho|$  comprise entre  $|\rho|$  et  $|\mathbf{r}|$  s'écrit [Mueller 94a] :

$$\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int_{\rho^2}^{r^2} \frac{d^2\varrho}{\pi} \frac{\mathbf{r}^2}{\varrho^2(\mathbf{r}-\varrho)^2} \simeq \bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int_{\rho^2}^{r^2} \frac{d^2\varrho}{\pi\varrho^2} = 2\bar{\alpha} \log \frac{1}{x} \log \frac{r}{\rho}, \quad (4.58)$$

où la seconde égalité, approximative, est vérifiée pour  $\varrho \ll r$ . En divisant ce facteur dans l'équation (4.57), on est conduit au contenu universel en dipôles du gluon rayonné dans l'état final. On normalise le premier moment du module-carré de la fonction d'onde obtenue à l'unité<sup>1</sup> (i.e.  $\phi(\gamma=1/2) \equiv 1$ ), et on est conduit à :

$$\phi(\rho) = \frac{\mu^2}{\rho} J_1(\mu\rho). \quad (4.59)$$

Notons que l'expression de ce carré de fonction d'onde que nous avons calculé est exactement celle (intégrée sur la valeur de la variable de partage de l'énergie  $z$  et avec la normalisation

<sup>1</sup>Ce choix implique que  $\phi$  n'a pas la dimension usuelle, mais plutôt, [masse]<sup>3</sup>. Ceci permet de comparer à la distribution de dipôles dans le photon  $\phi^*$ , pour laquelle le moment  $\gamma=0$  est logarithmiquement divergent.

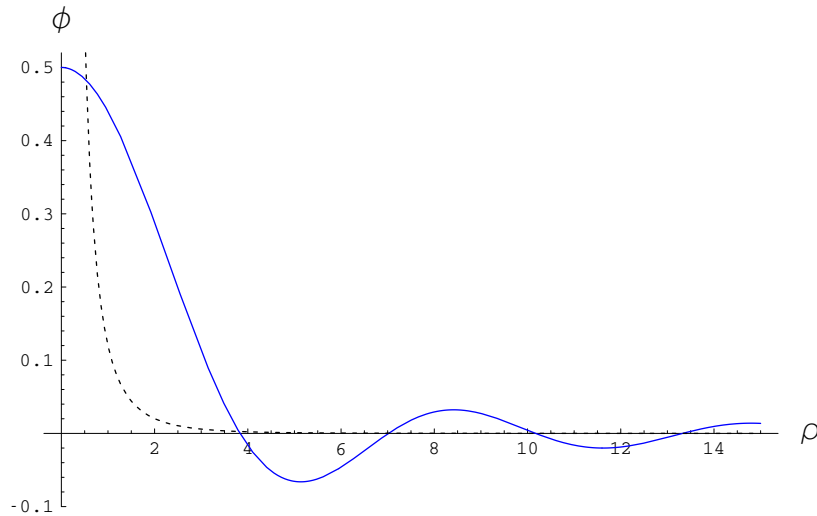


FIG. 4.6 – Densité de dipôles en fonction de la taille transverse. L'échelle  $\mu$  est fixée à 1. Ligne continue : jet vers l'avant. Ligne interrompue : photon virtuel (polarisation transverse).

adéquate) qui a été postulée dans les références [Peschanski 99a, Peschanski 99b]. Ceci se voit facilement, en se souvenant simplement de la transformée de Mellin de la fonction  $J_1(\mu\rho)/\rho$  :

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2\rho}{\pi} |\rho|^{2-2\gamma} \frac{J_1(\mu\rho)}{\rho} = \mu^{2\gamma-3} 2^{2-2\gamma} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}. \quad (4.60)$$

Le comportement de  $\phi$  est représenté sur la figure (4.6). On le compare au comportement de la distribution de paires  $q\bar{q}$  dans le photon virtuel, intégrée sur la fraction d'impulsion longitudinale  $z$  emportée par le quark. Celle-ci s'écrit :

$$\phi^{\gamma^*}(\rho) = \frac{64\mu}{9\pi^3} \int_0^1 dz \mu^2 z(1-z)(z^2 + (1-z)^2) K_1^2(\mu\rho\sqrt{z(1-z)}), \quad (4.61)$$

où nous avons adopté pour la normalisation  $\phi^{\gamma^*}(\gamma=1/2) \equiv 1$ .

Nous terminerons ce paragraphe par quelques remarques :

- Le module-carré  $\phi$  de la fonction d'onde représente la distribution effective de dipôles qui résulte d'un gluon dans l'état final, de grande impulsion transverse  $q > \mu$ , et vers l'avant. On note que cette distribution décroît faiblement avec  $\rho$  ( $\sim \rho^{-3/2}$ ), ce qui signifie que les dipôles de grande taille interviennent avec une probabilité non négligeable. Les fluctuations entre grandes et petites tailles sont de fait également importantes.
- La largeur de cette distribution est d'ordre  $1/\mu$ , mais comme le comportement à l'infini n'est qu'une fonction puissance,  $\mu$  ne représente pas un *cut-off* très marqué.
- Enfin, on note des oscillations, de longueur d'onde d'ordre  $1/\mu$ . La fonction  $\phi$  prend aussi des valeurs négatives, ce qui signifie qu'une interprétation probabiliste directe, comme dans le cas de la distribution de paires  $q\bar{q}$  du photon, n'est pour l'instant pas envisageable. Ceci pourrait provenir du fait qu'on ne dispose pas d'un ensemble complet d'états.

#### 4.4.3 Conclusions et perspectives

En utilisant un modèle simple et un calcul de chromodynamique quantique dans l'approximation des doubles logarithmes dominants, nous avons montré qu'une sonde constituée d'un

gluon vers l'avant dans l'état final peut être caractérisée par une distribution de dipôles effective  $\phi(\rho)$ . Cette distribution décroît faiblement avec  $\rho$  et prend des valeurs négatives. Nous confirmons le résultat (du moins celui intégré sur  $z$ ) obtenu dans la référence [Peschanski 99a].

La distribution obtenue peut maintenant être utilisée pour calculer des prédictions QCD pour des observables ayant différentes caractéristiques : par exemple des observables de diffusion profondément inélastique à petit  $x_{Bj}$ , d'interactions  $p - \bar{p}$  avec deux jets dans l'état final de fractions d'impulsion longitudinale très différentes. Dans tous ces cas, la formulation en termes de dipôles pour ces observables est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \propto \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{\alpha_s^2}{\gamma^2(1-\gamma)^2} \left(\frac{\mu}{Q_0}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} \times \\ \times \int d^2\rho (\mu\rho)^{2\gamma} \phi^{(\mu)}(\rho) \int d^2\rho_t (Q_0\rho_t)^{2-2\gamma} \phi_t^{(Q_0)}(\rho_t) , \end{aligned} \quad (4.62)$$

avec  $\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma)$  la valeur propre du noyau BFKL, et  $Y \equiv \log(1/x)$ . Les sondes sont caractérisées par les distributions de dipôles  $\phi^{(\mu)}$  et  $\phi_t^{(Q_0)}$ . Notons que l'observable la plus simple que l'on puisse calculer en utilisant cette formule est la section efficace  $\sigma$  de production dans une collision hadronique de dijets d'impulsions transverses supérieures à  $k_1$  et à  $k_2$  respectivement. Elle s'écrit :

$$\sigma \propto \frac{\alpha_s^2}{k_1 k_2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} , \quad (4.63)$$

ce qui est la formule de Mueller-Navelet [Mueller 87], *modulo* une normalisation globale que l'on n'a pas précisée ici. Ce petit calcul est un test de notre distribution de dipôles que représente, au moment de l'interaction, le gluon rayonné vers l'avant.

Cette étude appelle plusieurs travaux complémentaires. Tout d'abord, ces résultats ont été obtenus dans l'approximation des doubles logarithmes dominants : il serait utile d'effectuer un calcul plus détaillé et plus précis, en tenant compte de tous les termes contribuant à l'ordre LL( $1/x$ ) et ainsi, vérifier si à cet ordre, la factorisation des dipôles est toujours valide. D'un autre côté, il serait utile de substituer à notre méthode indirecte de détermination du contenu en dipôles un calcul direct. Ceci nous assurerait, dans un cadre conceptuel unique, le contrôle de tous les termes de l'ordre LL( $1/x$ ), y compris de ceux qui relèvent de graphes de corrections virtuelles. Cependant, même si la formulation d'un tel programme était assez directe, on rencontrerait rapidement d'importantes difficultés techniques.

# Diffraction dure dans l'approche de voie $s$

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Diffraction dure à HERA</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulation perturbative dans le cadre du modèle des dipôles</b>	<b>102</b>
5.2.1	Formules pour les fonctions de structure diffractives	107
5.2.2	Phénoménologie	109
5.2.3	Conclusions et perspectives	113
<b>5.3</b>	<b>Production diffractive de photons</b>	<b>116</b>
5.3.1	Définition du processus d'interaction	116
5.3.2	Projection sur les fonctions propres du groupe conforme	118
5.3.3	Conclusion et perspectives	124

*Ce chapitre est consacré essentiellement à la formulation et à la comparaison aux données d'un modèle de voie  $s$  pour la diffraction dure à HERA. Dans la section (5.1), nous introduirons la cinématique de ces processus et les fonctions de structure diffractives. Puis, dans la section (5.2), nous présenterons l'étude phénoménologique des données collectées à HERA que nous avons menée (et qui est publiée dans l'article de la référence [Munier II]) : celle-ci compte parmi les quelques études de QCD perturbative qui décrivent la diffraction à HERA avec un petit nombre de paramètres. Enfin, la section (5.3) contient le calcul du facteur d'impact associé à la leptoproduction diffractive de photons, pour tous les spins conformes : il a fait l'objet de la publication [Munier IV].*

Dans l'image physique de voie  $s$  dans laquelle nous nous sommes placés dans l'essentiel de cette thèse, les fonctions de structure du proton étaient vues comme l'interaction des fluctuations quantiques du photon virtuel-sonde et du proton au temps  $\tau=0$ . À haute énergie, nous avons représenté ces fluctuations par des dipôles en nombre proportionnel à l'énergie dans le centre de masse disponible. L'interaction proprement dite ne concernait qu'un seul dipôle de chaque système partonique, et consistait en l'échange d'un gluon. L'état final n'est pas prédictible de façon simple dans ce genre d'image, car, comme nous l'avons déjà signalé, pour accéder aux partons de l'état final, il faudrait encore appliquer l'opérateur d'évolution entre les temps  $\tau=0$  et  $\tau=+\infty$ . Nous allons tout de même proposer quelques arguments qualitatifs qui permettent de distinguer les états finals suivant certains critères, dans cette approche.

Dans le cas des fonctions de structure, le photon et le proton "habillés" se transforment l'un et l'autre en octets de couleur sous l'effet de l'interaction. Après l'interaction, ces octets

se déplacent rapidement en sens opposé, et une corde de couleur se tend entre eux, dont la fragmentation donne naissance à des particules réparties dans l'ensemble du détecteur. La réaction est profondément inélastique.

Imaginons maintenant qu'au lieu d'un octet, l'interaction consiste en l'échange d'un singulet de couleur, par exemple une paire de gluons, d'impulsion totale modérée. Dans ce cas, les caractéristiques des systèmes partoniques qui constituent l'habillage du photon virtuel et du proton ne sont quasiment pas modifiées, et les partons se recombinent dans l'état final, qui est un proton et un photon réel ou l'une de ses fluctuations de multiplicité faible (deux jets colinéaires par exemple). La réaction est ici quasi-élastique. Comme l'état final est distinct de l'état initial, on parle de processus *diffusif*, par analogie avec l'optique.

Cette interprétation des événements diffractifs dans une image de voie  $s$  et dans le cadre du modèle des partons a été proposée initialement, dans le contexte de la diffusion de hadrons, dans les références [Miettinen 78, Good 60]. Donnons-en une formulation plus précise. De manière générale, les fonctions d'onde  $\psi$  des particules incidentes peuvent être développées sur la base des états propres  $|\omega\rangle$  de l'interaction, de sorte que le calcul du processus consiste simplement à adjoindre un coefficient (complexe) d'absorption à chacun de ces états :

$$|\psi\rangle = \sum_{\omega} \psi_{\omega} |\omega\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m T |\omega\rangle = t_{\omega} |\omega\rangle, \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{I}m T$  est la partie imaginaire de l'opérateur de diffusion. Les nombres complexes  $t_{\omega}$  sont les facteurs d'absorption associés à chacun des états  $\omega$ .

Du théorème optique résulte que la section efficace totale, différentielle en paramètre d'impact, est donnée par le double de la valeur moyenne de l'opérateur  $\mathcal{I}m T$  pris sur l'état  $|\psi\rangle$ , tandis que la section efficace élastique vaut le carré du module de cette valeur moyenne. En utilisant le développement (5.1), on voit que ces quantités peuvent se réexprimer en fonction de la valeur moyenne  $\langle t \rangle$  des  $t_{\omega}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{tot}}{d^2\mathbf{b}} &= 2\langle\psi|\mathcal{I}m T|\psi\rangle = 2\langle t \rangle \\ \frac{d\sigma_{el}}{d^2\mathbf{b}} &= |\langle\psi|\mathcal{I}m T|\psi\rangle|^2 = \langle t^2 \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

La section efficace diffractive, de laquelle on soustrait la section efficace élastique, vaut quant à elle :

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d^2\mathbf{b}} = \sum_{\omega} |\langle\omega|\mathcal{I}m T|\psi\rangle|^2 - \frac{d\sigma_{el}}{d^2\mathbf{b}} = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2. \quad (5.3)$$

Cette équation nous fournit une interprétation de la section efficace diffractive dans le cadre d'une image de voie  $s$  : elle correspond aux fluctuations des facteurs d'absorption. Avant de présenter la manière de mettre en oeuvre cette idée dans le cadre du modèle des dipôles, nous donnons les caractéristiques expérimentales des processus diffractifs observés à HERA.

## 5.1 Diffraction dure à HERA

Des événements de type diffractif ont été détectés dans les données d'HERA à hauteur de 10% du total des événements observés [H1 95, ZEUS 95]. Ceux-ci sont caractérisés par le fait qu'on ne trouve aucune particule dans un grand intervalle angulaire du détecteur autour de la direction du proton (voir la figure (5.2)). Ce dernier est supposé subir une diffusion élastique, ou quasi-élastique au sens où soit il demeure un proton, soit il se convertit en l'un de ses états excités. En tout cas, soit on ne l'observe pas, soit il est détecté dans les calorimètres récemment ajoutés aux expériences, situés très à l'avant et qui couvrent des angles polaires très faibles.

**Cinématique.** En plus des variables cinématiques usuelles de la diffusion profondément inélastique  $Q^2$  (virtualité du photon-sonde) et  $x_{Bj} \equiv Q^2/(2p \cdot q)$ , on introduit trois variables supplémentaires :  $x_{\mathbb{P}}$ ,  $\beta$ , et  $t$ . Cette dernière représente le carré du quadrivecteur énergie-impulsion transférée au proton. Précisons les deux autres variables.

L'intervalle angulaire vide de particules est un intervalle de pseudo-rapacité  $\eta$ . Cette quantité est définie pour une particule de l'état final à partir de son angle polaire  $\theta$  par rapport à la direction du proton dans le référentiel du laboratoire :

$$\eta = -\log \tan(\theta/2) . \quad (5.4)$$

Pour une particule de l'état final de quadrivecteur  $l^\mu$  et de masse nulle, la pseudo-rapacité est égale à la rapidité, que l'on définit par  $Y = \log(l^+/l^-)/2$ . En effet, on a :

$$\tan \theta = \frac{|l|}{l^3} = \frac{2|l|/\sqrt{2}l^+}{1 - (|l|/\sqrt{2}l^+)^2} . \quad (5.5)$$

En comparant cette formule à l'identité trigonométrique  $\tan \theta = 2 \tan(\theta/2)/(1 - \tan^2(\theta/2))$ , il vient :

$$\tan(\theta/2) = \frac{|l|}{\sqrt{2}l^+} = \frac{1}{\sqrt{l^+/l^-}} = e^{-Y} . \quad (5.6)$$

La rapidité maximale des particules observées est liée à la fraction d'impulsion longitudinale par rapport au proton des particules les plus molles. En effet, on peut transformer l'expression de  $Y$  de sorte à ce qu'elle ne dépende que de  $l^+$  et de la masse  $m$  de la particule produite :

$$Y = \frac{1}{2} \log(l^+/l^-) = \log(\sqrt{2}l^+/m) . \quad (5.7)$$

Si la quadri-impulsion du proton est  $p^\mu = (p^+, m_p^2/2p^+, \mathbf{0})$ , on sait alors (voir le chapitre 3) que  $l^+$  est au moins égale à  $x_{Bj}p^+$ . D'autre part,  $m$  est de l'ordre de l'échelle de masse hadronique. L'intervalle de rapidité maximum autorisé par la cinématique  $Y_{max}$  et qui puisse contenir des particules de l'état final est donc donné par la différence de cette rapidité, pour la valeur extrême du paramètre  $l^+$ , et de la rapidité du proton  $Y_p = \log(\sqrt{2}p^+/m_p)$  :

$$Y_{max} = \log(\sqrt{2}p^+/m_p) - \log(\sqrt{2}x_{Bj}p^+/m_p) = \log(1/x_{Bj}) . \quad (5.8)$$

Pour un événement diffractif, par définition, le secteur angulaire occupé par les particules de l'état final ne coïncide pas avec l'ensemble du domaine autorisé par la cinématique de l'état initial. Aussi, celles-ci ont leur impulsion longitudinale bornée supérieurement : on introduit la fraction d'impulsion longitudinale  $x_{\mathbb{P}}$  qui correspond à cette borne. L'intervalle de rapidité  $\log(1/x_{\mathbb{P}})$  est alors vide de particules. On introduit d'autre part la variable  $\beta = x_{Bj}/x_{\mathbb{P}}$  pour caractériser le secteur qui correspond à la zone de fragmentation du photon virtuel. Notons que si on introduit la masse invariante totale des particules produites  $M$ , on a les relations :

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{Q^2}{Q^2 + M^2} \quad \Rightarrow \quad x_{\mathbb{P}} = \frac{Q^2 + M^2}{Q^2 + W^2} . \quad (5.9)$$

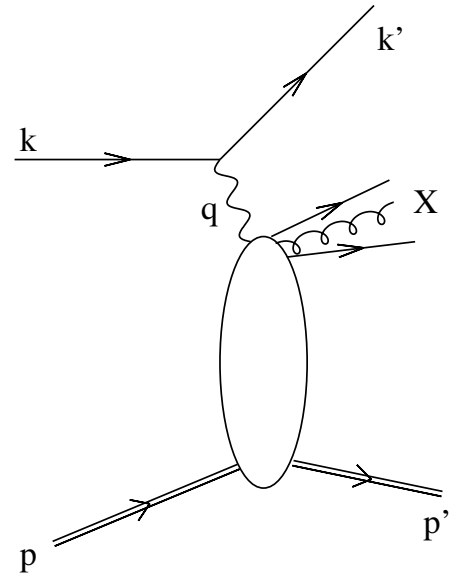


FIG. 5.1 – *Processus diffractif.*

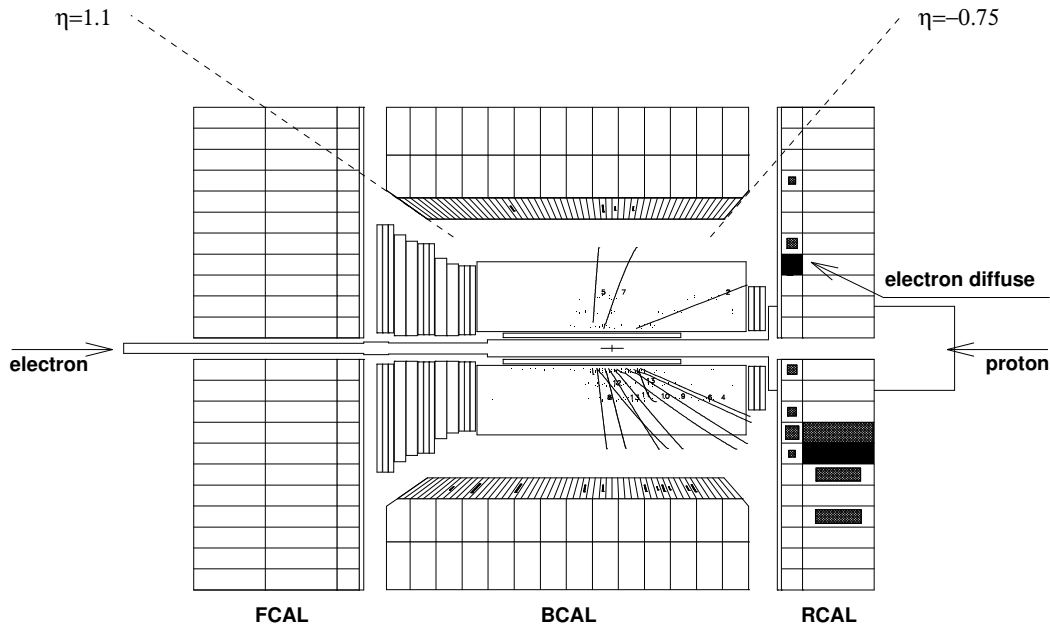


FIG. 5.2 – Représentation d'un événement diffractif dans le détecteur ZEUS en coupe longitudinale. On n'observe aucune particule dans un grand secteur angulaire à l'avant (dans la direction du proton diffusé).

**Fonction de structure diffractive.** L'observable mesurée est la fonction de structure diffractive, reliée à la section efficace différentielle électron-proton pour ces événements par la formule suivante (comparer à la formule (3.8) page 49) :

$$\frac{d^4\sigma_{diff}^{ep}}{d\beta dQ^2 dx_{\mathbb{P}} dt} = \frac{2\pi\alpha_{em}}{\beta Q^4} \left( (1+(1-y)^2)F_2^{D(4)}(\beta, Q^2, x_{\mathbb{P}}, t) - y^2 F_L^{D(4)}(\beta, Q^2, x_{\mathbb{P}}, t) \right), \quad (5.10)$$

où  $y = p \cdot q / p \cdot k$  est la variable d'inélasticité. La section efficace diffractive mesurée jusqu'à présent dans les expériences est intégrée sur le transfert  $t$ , car le proton n'est pas détecté dans l'état final. Seules des mesures récentes concernant des processus exclusifs bien spécifiques, comme par exemple la production diffractive de photons ou de mésons, donnent accès à la section efficace différentielle en  $t$ . On s'intéressera donc dans la partie suivante à la quantité suivante :

$$\frac{d^3\sigma_{diff}^{ep}}{d\beta dQ^2 dx_{\mathbb{P}}} = \int dt \frac{d^4\sigma_{diff}^{ep}}{d\beta dQ^2 dx_{\mathbb{P}} dt}. \quad (5.11)$$

## 5.2 Formulation perturbative dans le cadre du modèle des dipôles

Dans cette partie, nous allons donner une formulation de la diffraction dure à HERA dans l'image de voie  $s$  fournie par le modèle des dipôles. Les idées de cette formulation ont été proposées à l'origine dans les références [Nikolaev 92, Nikolaev 94]. Nous nous basons ici sur le modèle développé dans les articles [Bialas 96b, Bialas 96a], qui repose sur le modèle des dipôles de couleur de QCD de la référence [Mueller 94b], et qui a permis d'aboutir à une bonne description des fonctions de structure diffractives à HERA. Nous reproduisons ci-dessous l'étude phénoménologique à laquelle nous avons participé [Munier II].

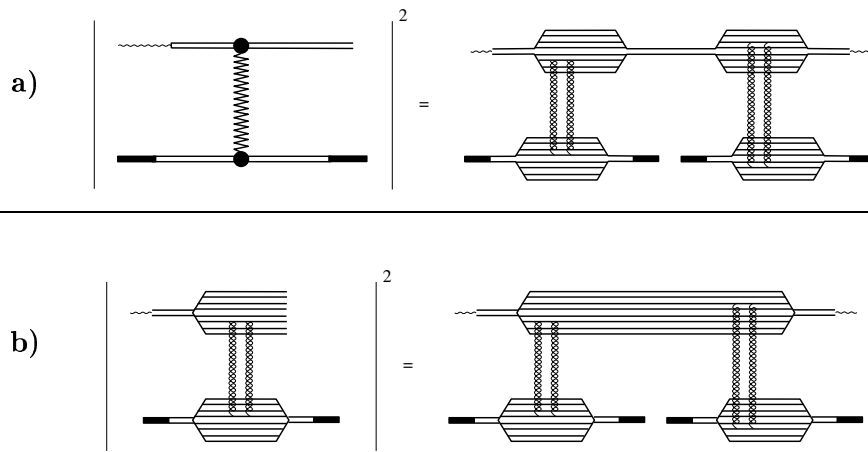


FIG. 5.3 – Représentation schématique du modèle des dipôles pour la diffraction. **a)** composante élastique. **b)** composante inélastique.

L'observation fondamentale des auteurs des références [Bialas 96b, Bialas 96a] est que les dipôles constituent une base diagonale pour l'interaction élémentaire qui consiste en l'échange de deux gluons à haute énergie. En effet, on voit bien sur l'expression de l'amplitude de l'équation (3.44) page 60 que leurs tailles et positions sont conservées au cours de l'interaction. Celle-ci se résume simplement à un facteur d'absorption pour chaque paire de dipôles, qui dépend de leurs tailles respectives et du paramètre d'impact qui les sépare. En ce sens, les dipôles paraissent constituer une réalisation de l'image physique de Good & Walker.

Deux contributions ont été distinguées : une composante quasi-élastique, pour laquelle un dipôle issu de l'évolution du photon virtuel interagit élastiquement avec le dipôle issu de l'évolution du proton (voir la figure (5.3.a)). La multiplicité de l'état final, ou de façon équivalente la masse totale des particules dans la zone de fragmentation du photon, est alors faible. Le paramètre d'impact  $\mathbf{b}$  est conjugué à l'impulsion transférée  $\mathbf{q}$ . On a d'autre part une composante inélastique (voir la figure (5.3.b)) dans laquelle *deux* dipôles différents issus de l'évolution du photon virtuel se couplent au proton. L'intervalle de rapidité qui les sépare est alors peuplé de particules dans l'état final ; la masse invariante de l'ensemble de celles-ci s'exprime en fonction de  $\log(1/\beta)$ . Notons que cette correspondance ne semble pas encore bien comprise dans le cadre de cette formulation de voie  $s$  : pour l'instant, seule une interprétation de voie  $t$  [Mueller 94b] qui fait usage des règles de coupure AGK [Abramovsky 73] (qui de surcroît ne sont pas prouvées en QCD) permet d'établir un lien quantitatif entre la rapidité qui sépare les deux dipôles et la masse invariante totale des particules issues de la fragmentation du photon virtuel.

L'ingrédient essentiel de ce modèle est l'amplitude  $T(\mathbf{r}, \rho, \mathbf{b}; x_{\mathbb{P}})$  d'interaction d'un dipôle de taille  $\mathbf{r}$  et d'un dipôle de taille  $\rho$ , séparés par le paramètre d'impact  $\mathbf{b}$  et l'intervalle de rapidité  $Y \equiv \log 1/x_{\mathbb{P}}$ . Celle-ci s'exprime comme la convolution de la densité  $n$  de dipôles de taille  $\mathbf{r}'$  dans un dipôle primordial de taille  $\mathbf{r}$  (équation (2.96) page 46) avec l'interaction élémentaire dipôle-dipôle (équation (3.45) page 60). Bien qu'il soit possible de travailler avec les expressions exactes pour ces quantités, nous nous contentons dans cette étude, d'une approximation de cette amplitude qui ait la bonne limite de grand paramètre d'impact, et dont l'intégrale sur toutes les valeurs de ce paramètre d'impact  $\mathbf{b}$  conduit à l'expression exacte de l'amplitude vers l'avant  $T^{(avant)} = \int d^2\mathbf{b} T(\mathbf{r}, \rho, \mathbf{b}; x_{\mathbb{P}})$ .

En utilisant une représentation en transformée de Mellin inverse, nous allons vérifier que



la forme suivante pour l'amplitude convient :

$$T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}}) = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 r^2}{b^4} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} (1 - 2\gamma) d(\gamma) \left( \frac{16b^2}{r\rho} \right)^{2\gamma} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)}. \quad (5.12)$$

$T$  ne dépend que des modules des vecteurs transverses. On a noté  $\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)$  l'intercept du poméron :

$$\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma), \quad (5.13)$$

et on rappelle que la fonction  $\chi(\gamma)$  est donnée par  $\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma)$ . La quantité :

$$d(\gamma) = \frac{\alpha_s^2}{16\gamma^2(1 - \gamma)^2} \quad (5.14)$$

est la transformée de Mellin de la section efficace élémentaire dipôle-dipôle (voir l'équation (3.51) page 61). Cette expression vérifie bien les conditions fixées, à savoir :

- L'intégration sur le paramètre d'impact conduit à l'expression bien connue pour l'amplitude vers l'avant (on écrit la formule pour  $r > \rho$ ) :

$$\int_{r/4}^{+\infty} \int_{r/4}^{+\infty} 2\pi b db T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}}) = 8\pi\rho^2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} d(\gamma) \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2\gamma} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)} \equiv T(\text{avant}). \quad (5.15)$$

Il est nécessaire de prendre la borne inférieure de l'intégrale égale à  $r/4$  pour obtenir les bonnes normalisations, ce qui est cohérent avec l'approximation de grand paramètre d'impact.

- Une méthode du col appliquée à l'évaluation de l'intégrale sur  $\gamma$  dans la formule (5.12) conduit aux expressions approchées utilisées dans les références [Bialas 96b, Mueller 94b], au facteur d'échelle 16 près. Celui-ci ne peut être obtenu dans un traitement approché, car il ne représente qu'un facteur multiplicatif pour  $b$ , qui est négligé lorsqu'on se contente de l'ordre dominant de la méthode du col, c'est-à-dire l'ordre dominant en  $\log b$ . Par contre, il apparaît dans un calcul complet. Par ailleurs, des études numériques ont démontré son importance [Salam 96] et comme nous le verrons dans la suite, il joue un rôle majeur pour la diffraction, car il rend la distribution en paramètre d'impact plus centrale.

On va maintenant appliquer la formule (5.12) au calcul des fonctions de structure diffractives. Dans un premier temps, notre cible est un dipôle de taille  $r$ . On en déduira dans le paragraphe suivant, à l'aide d'un modèle pour le proton similaire à celui utilisé pour les fonctions de structure inclusives, les expressions des fonctions de structure diffractives.

Celles-ci sont définies par les formules usuelles qui relient fonctions de structure et sections efficaces différentielles photon virtuel-proton :

$$F_{T,L}^D(Q^2, x_{\mathbb{P}}, M^2) = \frac{Q^4}{4\pi^2 \alpha_{em}} \frac{1}{\beta x_{\mathbb{P}}} \frac{d\sigma_{T,L}}{dM^2} = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \frac{1}{x_{\mathbb{P}}} \beta \frac{d\sigma_{T,L}}{d\beta}, \quad (5.16)$$

où  $d\sigma_T$  (respectivement  $d\sigma_L$ ) est la section efficace différentielle de diffusion diffractive d'un photon de polarisation transverse (respectivement longitudinale) sur un dipôle, et  $M$  est la masse invariante totale des particules produites dans la zone de fragmentation du photon. On a également utilisé la relation  $\beta = Q^2 / (Q^2 + M^2)$ .

**Composante élastique.** Le modèle des dipôles pour la composante élastique (représentée schématiquement sur la figure (5.3.a)) s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{(el)}}{dM^2} = \frac{N_c \alpha_{em} e^2}{2\pi} Q^2 \int_{r/4}^{\infty} d^2b \int_0^1 dz f_{T,L}(z) |\mathbb{T}_{T,L}(b; x_{\mathbb{P}})|^2 ,$$

$$\text{où } \mathbb{T}_{T,L}(b; x_{\mathbb{P}}) = \int_0^{4b} d\rho \rho T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}}) K_{1,0}(\hat{Q}\rho) J_{1,0}(\hat{M}\rho) ,$$

$$\text{et } f_T(z) \equiv z^2(1-z)^2(z^2+(1-z)^2) \quad , \quad f_L(z) \equiv 4z^3(1-z)^3 .$$
(5.17)

La notation “  $\hat{X}$  ” est définie par  $\hat{X} = (z(1-z))^{1/2} X$ .

Les formules (5.17) décrivent l'interaction d'une configuration  $q\bar{q}$  de taille transverse  $\rho$  du photon virtuel avec un dipôle de taille  $r$ . La fonction d'onde du photon virtuel en termes de paires  $q\bar{q}$  est projetée sur ses états de polarisation transverse ( $T$ ) et longitudinaux ( $L$ ), qui diffèrent par les facteurs  $f_{T,L}(z)$  et par l'ordre des fonctions de Bessel impliquées :  $K_1$ ,  $J_1$  sont associées à la composante transverse, et  $K_0$ ,  $J_0$  à la composante longitudinale. Comme d'habitude,  $z$  (respectivement  $(1-z)$ ) représente la fraction d'impulsion longitudinale emportée par le quark (respectivement l'antiquark).

Notons qu'il y a des effets d'interférence [Bialas 96a] : les dipôles de couleur sont des états de taille transverse déterminée, alors que l'état final diffractif est caractérisé par la variable  $\beta$ , qui est liée à sa masse. Le changement de base (transformée de Fourier) est à l'origine du produit de fonctions de Bessel de différentes espèces ( $K$  et  $J$ ) dans les équations (5.17).

Le *cutoff* en paramètre d'impact apparaît deux fois dans les équations (5.17) : dans la première d'entre elles, il constitue la borne supérieure  $4b$  sur  $\rho$ , et dans la seconde, la borne inférieure  $r/4$  sur le paramètre d'impact  $b$ . En pratique, nous ne considérerons pas la première de ces bornes, ce qui simplifiera grandement les calculs et permettra de trouver une forme analytique pour l'amplitude diffractive. On s'attend à ce que cette approximation influe uniquement sur la valeur des normalisations globales.

En insérant l'expression de l'amplitude d'interaction dipôle-dipôle dans les équations (5.17), on obtient des expressions pour  $F_{T,L}^D$  (5.16) qui contiennent des intégrales sur le paramètre  $b$ , la fraction d'impulsion longitudinale  $z$  et la taille  $\rho$  de la paire  $q\bar{q}$ . Ces intégrales peuvent être factorisées et calculées exactement en utilisant le changement de variable  $\rho \rightarrow \hat{\rho} = (z(1-z))^{1/2}\rho$ . Tous calculs faits, les intégrales successives donnent :

$$F_T^{D(el)} = \frac{16^3 N_c e^2}{2x_{\mathbb{P}} \pi^2} \beta^2 (1-\beta) \left(\frac{Q_0}{Q}\right)^2 \int \prod_{j=1,2} \left[ \frac{d\gamma_j}{2i\pi} \left(\frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}}\right)^{2\gamma_j} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma_j)} \right]$$

$$\times \prod_{j=1,2} \left\{ (1-2\gamma_j) d(\gamma_j) \Gamma(2-\gamma_j) \Gamma(3-\gamma_j) {}_2F_1(2-\gamma_j, -1+\gamma_j; 2; 1-\beta) \right\}$$

$$\times \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)(3 - 2(\gamma_1 + \gamma_2))} B(\gamma_1 + \gamma_2, 1/2) , \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
F_L^{D(el)} &= \frac{16^3 N_c e^2}{x_{\mathbb{P}} \pi^2} \beta^3 \left( \frac{Q_0}{Q} \right)^2 \int \prod_{j=1,2} \left[ \frac{d\gamma_j}{2i\pi} \left( \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} \right)^{2\gamma_j} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma_j)} \right] \\
&\quad \times \prod_{j=1,2} \left\{ (1-2\gamma_j) d(\gamma_j) \Gamma^2(2-\gamma_j) {}_2F_1(2-\gamma_j, -1+\gamma_j; 1; 1-\beta) \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{3-2(\gamma_1+\gamma_2)} B(\gamma_1+\gamma_2, 1/2), \quad (5.19)
\end{aligned}$$

où l'on a introduit l'échelle d'énergie  $Q_0 \equiv 2/r$ . Notons que ces expressions impliquent deux transformées de Mellin inverses en  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  : chacune d'elles correspond à une interaction élastique de dipôles (voir la figure (5.3.a)).

**Composante inélastique.** La composante inélastique (voir la figure (5.3.b)) provient du processus suivant : la paire  $q\bar{q}$  initiale du photon virtuel développe une cascade de dipôles de couleur, et la composante diffractive est due à l'interaction de deux des dipôles produits avec le dipôle cible, chacune de ces interactions étant décrite par l'amplitude (5.12). La section efficace peut s'exprimer de la façon suivante [Bialas 96b] :

$$\beta \frac{d\sigma_{T,L}^{(in)}}{d\beta} = 16^3 \alpha_{em} e^2 \alpha_s^5 N_c^2 \frac{1}{Q^2} \int_{r/4}^{\infty} \frac{d^2b}{b^2} \langle \varrho^2 \rangle^2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{bQ}{2} \right)^{2\gamma} (1-\gamma)^3 H_{T,L}(\gamma) \beta^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)}, \quad (5.20)$$

avec

$$\langle \varrho^2 \rangle = \int_0^{4b} \frac{d\varrho}{\varrho} \varrho^2 \frac{T(r, \varrho, b; x_{\mathbb{P}})}{4\pi\alpha_s^2 \varrho^2} \quad (5.21)$$

et

$$\begin{aligned}
H_T(\gamma) &= \frac{V(\gamma)}{16\gamma^2(1-\gamma)^4} \frac{\Gamma(3-\gamma)\Gamma^3(2-\gamma)\Gamma(2+\gamma)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)} \\
H_L(\gamma) &= \frac{V(\gamma)}{8\gamma(1-\gamma)^3(1+\gamma)(2-\gamma)} \frac{\Gamma(3-\gamma)\Gamma^3(2-\gamma)\Gamma(2+\gamma)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

où  $V(\gamma)$  est une notation abrégée pour la fonction hypergéométrique généralisée  ${}_3F_2(1-\gamma, 1-\gamma; 1, 3/2; 1)$ . Notons que l'évaluation de cette composante équivaut, dans une image de voie  $t$ , au calcul du vertex à trois pomérons durs, qui est difficile par une méthode diagrammatique directe dans l'esprit de celle de la section (4.1). Néanmoins, le calcul exact a été effectué [Bartels 96], et son résultat comparé à celui obtenu dans l'image de voie  $s$  du modèle des dipôles.

L'interaction dipôle-dipôle est contenue dans la formule (5.21), qui donne la moyenne des carrés des tailles transverses des dipôles vus du paramètre d'impact  $b$ . En effet, la quantité  $T(r, \varrho, b; x_{\mathbb{P}})/4\pi\alpha_s^2 \varrho^2$  n'est autre que la densité de dipôles de taille  $\varrho$  émis d'un dipôle de taille  $r$  au paramètre d'impact  $b$ . La transformée de Mellin inverse et son intégrant  $V(\gamma)$  proviennent du calcul du branchement d'un dipôle en deux au vertex du photon virtuel. Les différents préfacteurs qui apparaissent dans  $H_T$  et  $H_L$  (formule (5.22)) ont respectivement pour origine les fonctions d'onde transverses et longitudinales du photon virtuel.

En insérant l'expression (5.21) dans l'équation (5.20) et en intégrant sur le paramètre d'impact  $b$ , on obtient :

$$F_{T,L}^{D(in)} = \frac{1}{x_{\mathbb{P}}} \frac{16^5}{\pi^3} e^2 \alpha_s N_c^2 \int \prod_{j=1,2} \left\{ \frac{d\gamma_j}{2i\pi} \frac{1-2\gamma_j}{2-2\gamma_j} d(\gamma_j) x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma_j)} \right\} \\ \times \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q}{4Q_0} \right)^{2\gamma} \beta^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)} (1-\gamma)^3 H_{T,L}(\gamma) \frac{1}{2-\gamma-\gamma_1-\gamma_2} . \quad (5.23)$$

Les formules (5.18, 5.19, 5.23) résument sous forme analytique les prédictions de la QCD pour les fonctions de structure diffractives d'un dipôle de taille  $2/Q_0$ .

### 5.2.1 Formules pour les fonctions de structure diffractives

Ce paragraphe est dédié à l'application des calculs précédents aux fonctions de structure du proton. Il s'agit maintenant de modéliser le proton en termes de dipôles.

**Composante élastique.** On applique la méthode du col aux formules (5.18, 5.19). Le point-selle est situé en :

$$\gamma_{sp} = \frac{1}{2} \left( 1 - a(x_{\mathbb{P}}) \log \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} \right), \quad (5.24)$$

où  $a(x) = \pi/(7\zeta(3)\alpha_s N_c \log 1/x)$  est le coefficient de diffusion en  $k_{\perp}$  qui provient de l'évolution BFKL [Bartels 93]. Le pôle en  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  dans la formule (5.18) requiert une attention particulière, car comme les points-selles  $\gamma_{sp}$  tendent asymptotiquement vers la valeur  $1/2$ , il est susceptible de contribuer fortement lorsque  $x_{\mathbb{P}} \rightarrow 0$ . Par contre, toutes les autres singularités ne sont pas importantes, car elles se trouvent loin du point selle.

Dans le domaine cinématique considéré,  $1 - 2\gamma_{sp} = a(x_{\mathbb{P}}) \log Q/2Q_0\sqrt{\beta} \ll 1$ . On ne garde que l'ordre dominant par rapport à ce petit paramètre, et on trouve :

$$F_T^{D(el)} = 12 \frac{N_c e^2 \alpha_s^4}{\pi} x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}}) \log^3 \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} e^{-a(x_{\mathbb{P}}) \log^2(Q/2Q_0\sqrt{\beta})} \\ \times \beta(1-\beta) \left[ {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1-\beta \right) \right]^2, \quad (5.25)$$

$$F_L^{D(el)} = 16 \frac{N_c e^2 \alpha_s^4}{\pi} x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}}) \log^2 \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} e^{-a(x_{\mathbb{P}}) \log^2(Q/2Q_0\sqrt{\beta})} \\ \times \beta^2 \left[ {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; 1-\beta \right) \right]^2, \quad (5.26)$$

avec  $\alpha_{\mathbb{P}} \equiv 1 + \Delta_{\mathbb{P}}(1/2) = 1 + 4 \log 2\alpha_s N_c / \pi$ . Le pôle à  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  présent dans l'expression de  $F_T^{D(el)}$  de l'équation (5.18) s'est transformé en un facteur  $\log Q/2Q_0\sqrt{\beta}$  qui peut prendre de grandes valeurs. Remarquons que la dépendance en  $\beta$  est complètement déterminée perturbativement pour ces composantes, et est en grande partie factorisée sous forme de fonctions hypergéométriques. Notons aussi que celles-ci s'écrivent comme des différences de fonctions elliptiques.

Les formules (5.25, 5.26) fournissent l'expression explicite des composantes élastiques de la diffraction dans le modèle des dipôles. Ce calcul montre que le facteur d'échelle responsable des violations de l'invariance d'échelle est  $2Q_0\sqrt{\beta}$ , où  $Q_0$  représente l'échelle liée au dipôle dans le proton. La dépendance en  $\beta$  n'est pas polynomiale.

**Composante inélastique.** En utilisant une nouvelle fois une méthode du col pour évaluer les trois intégrales en  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de la formule (5.23), on trouve des points-cols en :

$$\gamma_{sp} = \frac{1}{2} \left( 1 - a(\beta) \log \frac{Q}{4Q_0} \right), \quad \gamma_{j,sp} = \frac{1}{2} (1 - a(x_{\mathbb{P}})) . \quad (5.27)$$

Notons que contrairement au cas de la composante élastique, il n'y a pas de couplage des intégrales aux points-cols ; néanmoins, on doit prendre en compte les zéros des préfacteurs en  $\gamma_j = 1/2$ , voir l'équation (5.23). Le résultat final est le suivant :

$$F_{T,L}^{D(in)} = 2^9 \sqrt{\frac{2}{\pi}} H_{T,L}(1/2) \frac{N_c e^2 \alpha_s^5}{\pi^4} x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}}) \frac{Q}{Q_0} e^{-(a(\beta)/2) \log^2(Q/4Q_0)} a^{\frac{1}{2}}(\beta) \beta^{-\Delta_{\mathbb{P}}} . \quad (5.28)$$

En comparant l'expression (5.28) au résultat original (formule (11) de la référence [Bialas 96b]), on voit que les résultats sont identiques à un facteur d'échelle près pour l'impulsion transverse de l'évolution BFKL :  $4Q_0$  au lieu de  $Q_0$ . Cette modification provient du facteur d'échelle de l'équation (5.12) discuté plus haut, qui n'avait pas été considéré en première approximation, mais qui a une certaine importance phénoménologique.

Dans le modèle des dipôles, il y a un rapport étroit entre les fonctions de structure totales et diffractives. Dans le chapitre 3, on avait modélisé les fonctions de structure inclusives du proton en décrivant celui-ci par une distribution de dipôles primordiaux. Ses caractéristiques non perturbatives se manifestent alors simplement par une échelle "molle"  $Q_0$  et une normalisation globale liée à la densité de dipôles primordiaux. On utilise ici cette même représentation du proton dans les formules (5.25, 5.26, 5.28). Dans ce contexte, le paramètre d'échelle  $Q_0$  est réinterprété comme l'inverse de la moyenne des tailles des dipôles primordiaux,  $Q_0 = 1/\langle r \rangle$ , et on introduit les normalisations arbitraires  $N_T^{(el)}$ ,  $N_L^{(el)}$ ,  $N^{(in)}$  en facteur des formules (5.25, 5.26, 5.28) respectivement.

Avec ce modèle, on est prêt à écrire une paramétrisation des données de diffraction d'HERA. Les paramètres libres sont  $\alpha_{\mathbb{P}}$ , qui est lié à la constante de couplage  $\alpha_s$ , fixe dans le formalisme BFKL à l'ordre dominant ;  $Q_0$ , qui correspond à une échelle non perturbative pour le proton, et les trois normalisations  $N_T^{(el)}$ ,  $N_L^{(el)}$ ,  $N^{(in)}$ . Il suffit d'un seul paramètre de normalisation ( $N^{in}$ ) en facteur des composantes inélastiques transverses et longitudinales, car dans ce modèle, on a la relation suivante :

$$\frac{F_L^{D(in)}}{F_T^{D(in)}} = \frac{2}{9} . \quad (5.29)$$

On ajoute une trajectoire de Regge secondaire (phénoménologique) pour prendre en compte le domaine de grande masse produite et de petit intervalle de rapidité vide de particules. Celle-ci peut se paramétrer de la façon suivante :

$$F_2^{D(R)}(x_{\mathbb{P}}, \beta, Q^2) = f^{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{P}}) F_2^{\mathbb{R}}(\beta, Q^2) , \quad (5.30)$$

où le flux de reggeon  $f^{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{P}})$  est supposé avoir un comportement de Regge, avec une trajectoire linéaire  $\alpha_{\mathbb{R}}(t) = \alpha_{\mathbb{R}}(0) + \alpha'_{\mathbb{R}} t$  :

$$f^{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{P}}) = \int_{t_{cut}}^{t_{min}} dt \frac{e^{B^{\mathbb{R}} t}}{x_{\mathbb{P}}^{2\alpha_{\mathbb{R}}(t)-1}} , \quad (5.31)$$

	H1	ZEUS
$\alpha_P$	$1,395 \pm 0,005 \pm 0,003$	$1,327 \pm 0,001 \pm 0,016$
$\alpha_R$	$0,682 \pm 0,046 \pm 0,049$	—
$Q_0$	$0,428 \pm 0,011 \pm 0,001$	$0,241 \pm 0,002 \pm 0,014$
$N^{in}$	$0,00244 \pm 0,00028 \pm 0,00033$	$0,00374 \pm 0,00015 \pm 0,00076$
$N_T^{el}$	$40,0 \pm 1,6 \pm 3,6$	$126,9 \pm 0,5 \pm 37,6$
$N_L^{el}$	$12,8 \pm 1,2 \pm 1,1$	$24,43 \pm 0,51 \pm 8,12$
$N_R$	$7,44 \pm 1,84 \pm 3,50$	$0 \pm 58 \pm 0$
$\chi^2$	255,4 pour 226 points soit 1,17/degré de liberté	89,6 pour 53 points soit 1,95/degré de liberté

TAB. 5.1 – Paramètres de l’ajustement des prédictions pour  $F_2^D$  aux données expérimentales. L’ajustement a été effectué en ne tenant compte que des erreurs statistiques. La première erreur donnée correspond à l’erreur statistique uniquement, la seconde à l’erreur systématique.

$|t_{min}|$  étant la valeur minimale de  $|t|$  compte tenu des contraintes cinématiques. La borne inférieure pour l’intégration  $t_{cut} = -1 \text{ GeV}^2$  est la limite des mesures expérimentales. Les valeurs de  $B^{\mathbb{R}}$  et  $\alpha'_{\mathbb{R}}$  proviennent d’un ajustement aux données des collisions hadron-hadron [H1 97c] et la fonction de structure du reggéon est supposée être identique à celle du pion [Gluck 92]. Les paramètres libres pour cette composante sont la normalisation  $N^{\mathbb{R}}$  et l’exposant  $\alpha_{\mathbb{R}}$ .

La paramétrisation finale est la somme des contributions données par les équations (5.25, 5.26, 5.28, 5.30), à savoir :

$$F_2^{D(3)} = \frac{1}{N_c e^2} \left( N^{in} (F_T^{D(in)} + F_L^{D(in)}) + N_T^{el} F_T^{D(el)} + N_L^{el} F_L^{D(el)} + N_R F_2^{\mathbb{R}} \right). \quad (5.32)$$

### 5.2.2 Phénoménologie

Un ajustement des paramétrisations précédentes aux données de H1 et de ZEUS est réalisé. Les valeurs des paramètres pour les deux expériences sont indiquées dans la table (5.1), et les ajustements correspondants sont représentés graphiquement sur les figures (5.4) et (5.5). L’ajustement aux données d’H1 est de très bonne qualité, et conduit à un excellent estimateur  $\chi^2$ .

Commentons les valeurs des paramètres de l’ajustement. La valeur obtenue pour  $\alpha_{\mathbb{R}}$  est en accord avec celle à laquelle on pouvait s’attendre (de l’ordre de 0,5), tandis que la valeur de  $\alpha_{\mathbb{P}}$  est proche (en fait un peu plus élevée) de celle que l’on trouve comme résultat d’un ajustement d’un modèle BFKL aux données inclusives.  $Q_0$  correspond bien à une échelle non perturbative typique pour le proton. Remarquons que l’échelle effective qui intervient n’est pas directement  $Q_0$  : pour la composante élastique, c’est  $2Q_0\sqrt{\beta}$ . Nous avons vérifié qu’une échelle indépendante de  $\beta$  ne peut rendre compte correctement des données.

Remarquons que l’ajustement aux données de l’expérience ZEUS est nettement moins bon. Ce fait est à mettre en relation avec un désaccord des données d’H1 et de ZEUS, en particulier à petit  $\beta$  et petit  $Q^2$ . Plus de détails à ce sujet sont donnés dans la référence [Munier II], mais ils dépassent le cadre de ce chapitre.

**Intercept effectif.** On étudie la variation en fonction de  $Q^2$  et  $x_{\mathbb{P}}$ , de la pente de  $F_2^D(x_{\mathbb{P}})$ , qui caractérise la dépendance de la fonction de structure diffractive par rapport à l’intervalle de rapidité vide de particules. Pour cela, on définit l’intercept effectif comme suit (comparer

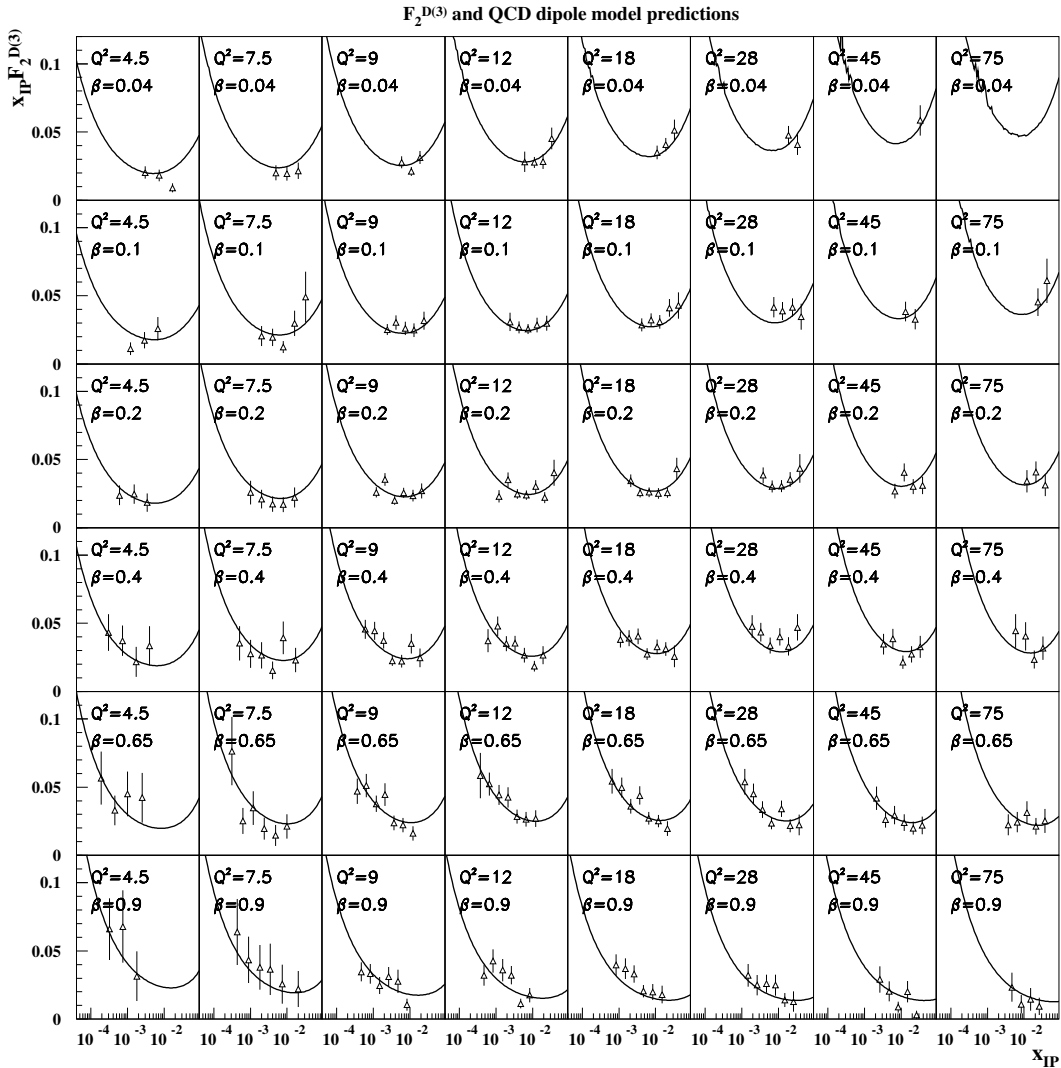


FIG. 5.4 – Résultat de l'ajustement aux données de H1. Les points expérimentaux sont notés par des triangles (les barres d'erreur représentent les erreurs statistiques et systématiques ajoutées en quadrature). Les données sont représentées en fonction de  $x_P$ , pour différentes valeurs de  $\beta$  et  $Q^2$ .

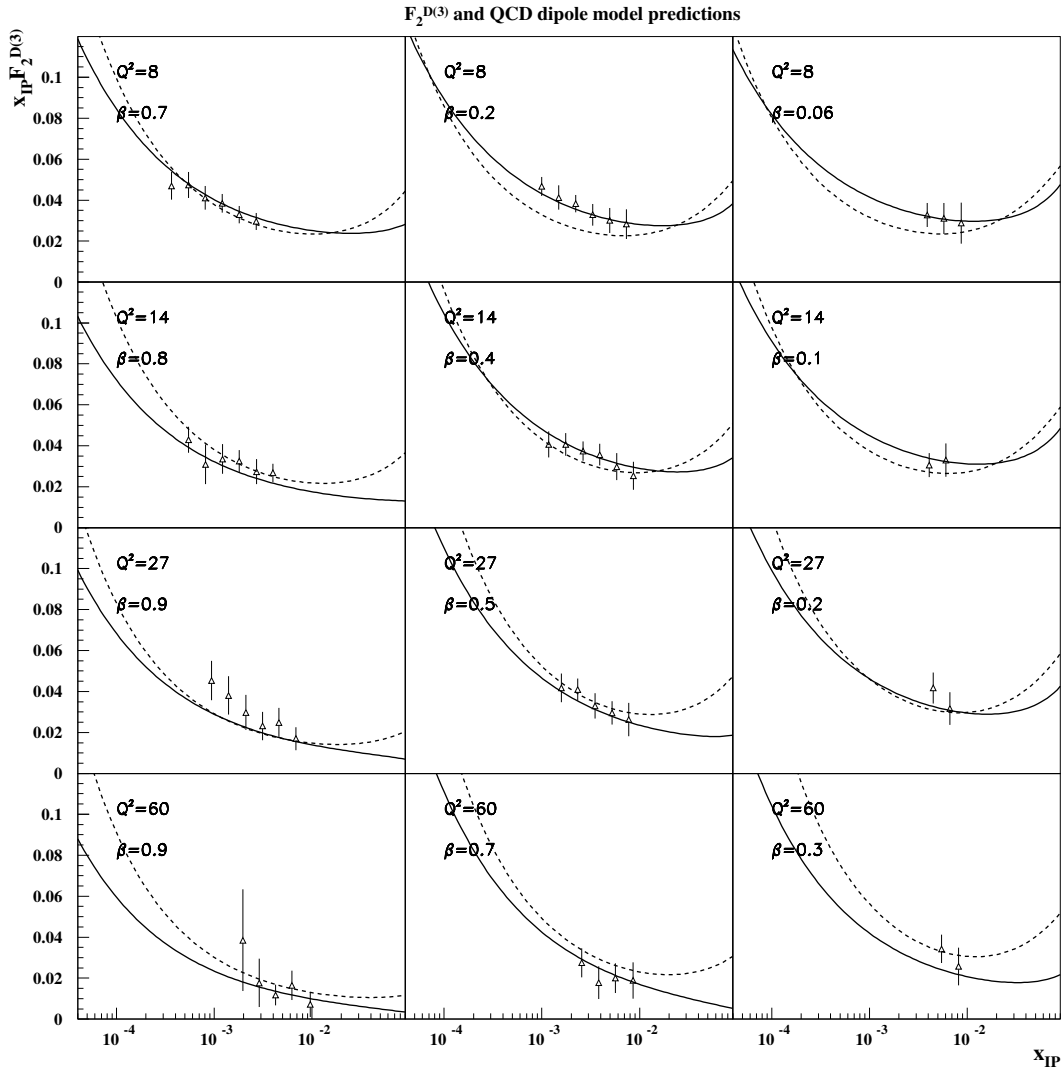


FIG. 5.5 – Résultat de l'ajustement aux données de ZEUS (traits pleins). Les points expérimentaux sont représentés par des triangles. Les barres d'erreur marquent les incertitudes systématiques et statistiques ajoutées en quadrature. Pour comparaison, l'ajustement aux données de H1 est reporté en traits pointillés.



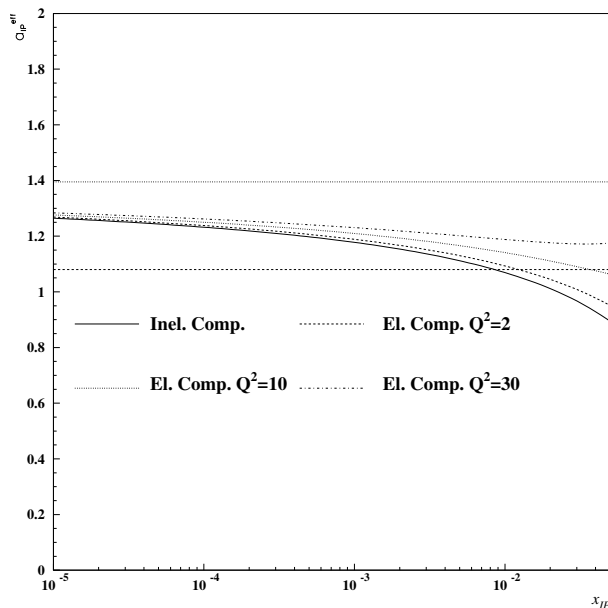


FIG. 5.6 – *Intercept effectif (formule (5.33)) en fonction de  $x_{\mathbb{P}}$ . Les différentes composantes ont été distinguées : la composante inélastique, dont l'intercept ne dépend pas de  $Q^2$  (ligne continue), et la composante élastique, représentée pour trois valeurs de  $Q^2$  différentes. La valeur de  $\beta$  a été fixée à 0,3. Les graphes de fonctions constantes à  $\alpha_{\mathbb{P}} = 1,395$  et  $\alpha_{\mathbb{P}} = 1,08$  correspondent respectivement au poméron BFKL et au poméron mou.*

à la définition de  $\epsilon$ , équation (3.65) page 69) :

$$\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{d \log F_2^D}{d \log(1/x_{\mathbb{P}})} \right), \quad (5.33)$$

où l'on a intégré sur le transfert d'impulsion  $t$ .  $\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{eff}}$  peut être calculé pour les composantes élastiques et inélastiques séparément.

Sur la figure (5.6), les intercepts effectifs des deux composantes ainsi que leur somme sont comparés à l'intercept du poméron mou et à celui du poméron dur. Les valeurs obtenues sont essentiellement comprises entre ces deux limites, sauf dans la région de grand  $x_{\mathbb{P}}$  ( $x_{\mathbb{P}} \geq 10^{-2}$ ). Clairement, ces valeurs sont incompatibles avec l'intercept de l'un ou de l'autre de ces pomérons. Le fait qu'elles soient bien en-dessous du poméron BFKL nu trouve une explication technique dans la présence du facteur  $a^3(x_{\mathbb{P}})$ , proportionnel à  $1/\log^3(1/x_{\mathbb{P}})$ , dans chacune des composantes de la diffraction.

La dépendance en  $x_{\mathbb{P}}$  est différente selon les composantes, ce qui a pour conséquence une brisure de la factorisation du flux du poméron dans le proton qui contiendrait entièrement la dépendance en  $x_{\mathbb{P}}$  et qui serait universel, et de sa fonction de structure, qui dépendrait uniquement des variables  $\beta$  et  $Q^2$ .

D'autre part, on voit sur la figure (5.7) que la dépendance en  $Q^2$  de l'intercept est très faible. Elle est en bon accord avec la détermination expérimentale réalisée par l'expérience H1. Par contre, elle est incompatible avec à la fois le poméron mou et le poméron BFKL nu. L'affaiblissement de l'intercept de ce dernier est dû, dans notre modèle, à d'importantes corrections logarithmiques qui ne peuvent être négligées.

**Violations de l'invariance d'échelle.** L'une des caractéristiques frappantes des fonctions de structure diffractives est leur dépendance en  $Q^2$  à  $\beta$  et  $x_{\mathbb{P}}$  fixés : elles croissent lentement avec

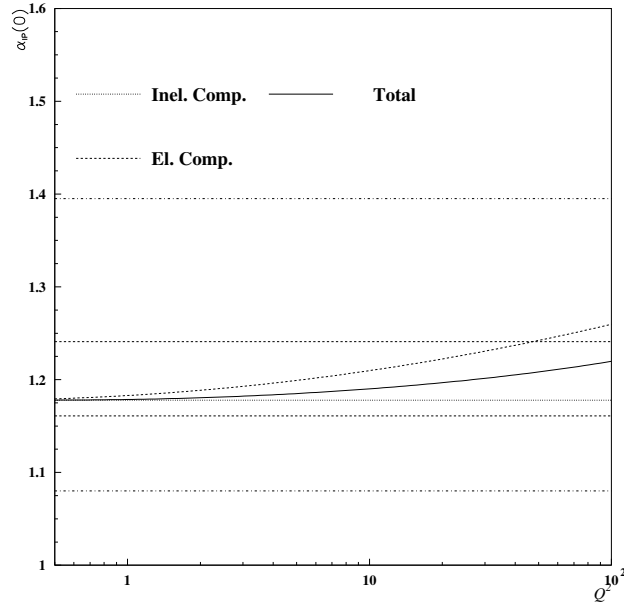


FIG. 5.7 – Intercept effectif en fonction de  $Q^2$ . La composante élastique est représentée en traits interrompus, la composante inélastique en traits pointillés, et la somme de celles-ci en traits continus. Les valeurs de  $\beta$  et  $x_{\mathbb{P}}$  sont fixées :  $\beta = 0,3$  et  $x_{\mathbb{P}} = 10^{-3}$ . Les lignes constantes correspondent respectivement, de haut en bas, aux intercepts théorique du poméron mou, expérimental déterminé par H1 et théorique donné par le poméron BFKL.

$Q^2$ , même pour les grandes valeurs de  $\beta$ , ce qui contraste avec le comportement des fonctions de structure inclusives. Dans le modèle des dipôles, ce fait expérimental est bien reproduit par le jeu des composantes élastiques et inélastiques. On montre les prédictions du modèle des dipôles sur la figure (5.8.a).

**Dépendance en  $\beta$ .** On peut voir sur la figure (5.8.b) la dépendance en  $\beta$  des fonctions de structure diffractives pour une valeur fixée de  $x_{\mathbb{P}}$ . Cette dépendance est relativement faible, et bien reproduite par le modèle des dipôles. À petit  $Q^2$ , c'est la composante inélastique qui domine, alors qu'à grand  $Q^2$ , les deux composantes sont du même ordre, et toutes deux sont nécessaires à une bonne description des données.

On renvoie le lecteur à l'article [Munier II] pour une investigation plus détaillée de l'importance respective des diverses composantes, ainsi que pour une étude de la composante longitudinale des fonctions de structure diffractives, qui ne nous intéresse pas directement ici dans la mesure où celle-ci n'est pour l'instant pas accessible expérimentalement.

### 5.2.3 Conclusions et perspectives

Nous avons montré que le modèle des dipôles peut être appliqué à la description des fonctions de structure diffractives à HERA. D'un point de vue théorique, ce travail nous permet de donner une interprétation de QCD perturbative, dans une image de voie  $s$ , de la diffraction à HERA.

Le même formalisme hamiltonien s'applique pour les fonctions de structure inclusives et diffractives. Contrairement à d'autres modèles [Ingelman 85], on n'a pas besoin d'introduire le poméron comme constituant élémentaire du proton. Le singulet de couleur échangé et

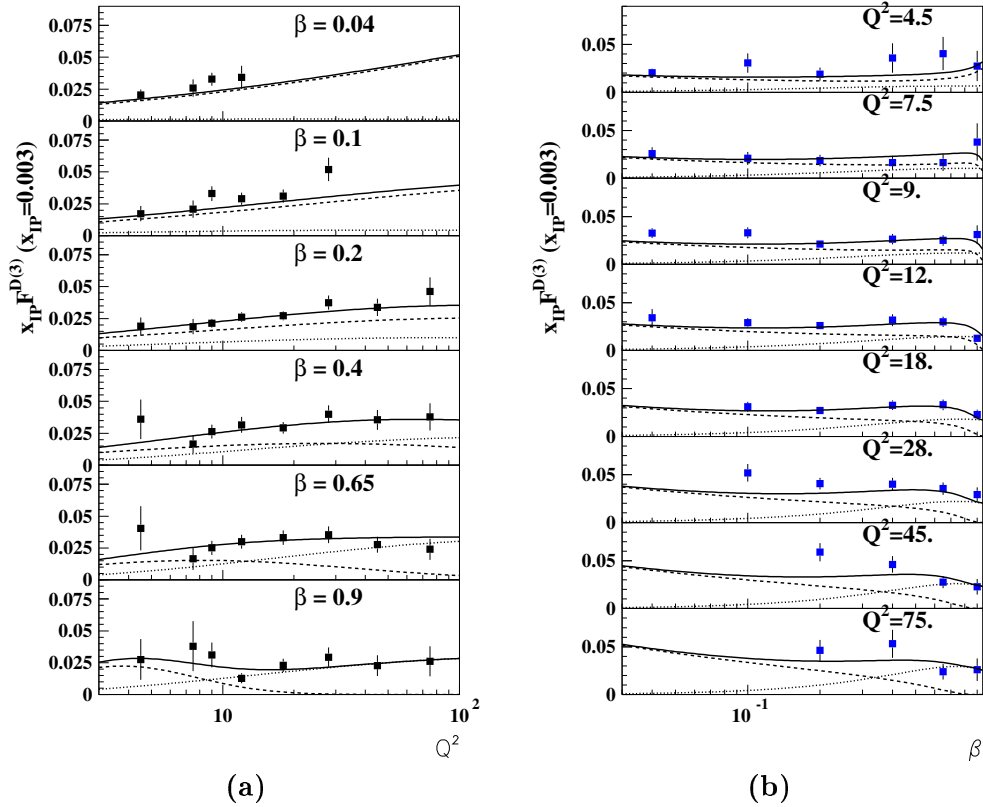


FIG. 5.8 – **a)** Violations de l'invariance d'échelle. On a représenté la dépendance de  $x_{\mathbb{P}} F_2^D$  en fonction de  $Q^2$  à  $x_{\mathbb{P}}$  fixé ( $x_{\mathbb{P}} = 3.10^{-3}$ ) pour différentes valeurs de  $\beta$ . **b)** Graphe de  $x_{\mathbb{P}} F_2^D$  en fonction de  $\beta$  à  $x_{\mathbb{P}}$  fixé ( $3.10^{-3}$ ) pour différentes valeurs de  $Q^2$ . Les données expérimentales [H1 97c] sont présentées (carrés) avec les prédictions du modèle des dipôles. Ligne interrompue : composante élastique. Ligne pointillée : composante inélastique. Ligne continue : total.

responsable de l'intervalle de rapidité vide de particules est, dans une image de voie  $t$  qui se compare à celle d'Ingelman & Schlein, une échelle BFKL de gluons.

Les calculs présentés ici étaient approchés. Comme on ne cherchait pas à atteindre un grand degré de précision mais plutôt à montrer que le modèle des dipôles pouvait décrire les données, les méthodes présentées étaient suffisantes. Néanmoins, bien que ce soit techniquement difficile, signalons que nous pourrions calculer complètement et exactement les fonctions de structure diffractives d'un dipôle primordial, dans le formalisme commun à l'ensemble de ce mémoire. Un tel calcul permettrait une meilleure maîtrise des constantes de normalisation de chacune des composantes, et ainsi, peut-être, de réduire le nombre de paramètres libres. Sur ce point, nous renvoyons aux articles [Bialas 98a, Bialas 98b, Bialas 99].

D'autre part, ce modèle pourrait être utilement complété par l'ajout d'une composante de multiplicité moyenne, comprenant par exemple trois jets dans l'état final non hiérarchisés en rapidité.

### 5.3 Production diffractive de photons

Dans cette section, nous allons calculer la section efficace de production exclusive de photons. Les détails de ce calcul ont été publiés dans l'article de la référence [Munier IV].

Un calcul de ce type a été entrepris dans les articles [Evanson 99, Ivanov 99]. Cependant, seule la composante de spin conforme nul a été considérée, comme la dépendance azimuthale qui engendre des composantes de spin conforme supérieur n'a qu'un effet sous-dominant. Néanmoins, nous avons montré dans le chapitre 3 que ces composantes peuvent avoir un intérêt phénoménologique : en effet, sur le plan de la dépendance en énergie et de leur comportement en fonction de l'échelle de virtualité  $Q^2$ , elles présentent des caractéristiques très semblables à celles du pomérou mou de Donnachie et Landshoff [Donnachie 98]. Dans le but de réaliser une étude plus complète de ces composantes, nous nous proposons donc de calculer le facteur d'impact de la transition  $\gamma^* \rightarrow \gamma$  pour tout spin conforme.

Le paragraphe suivant présente précisément le cadre de ce calcul.

#### 5.3.1 Définition du processus d'interaction

On considère la transition de deux objets 1 et 2 en 1' et 2'. La fonction  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  (resp.  $\phi'$ ) représente leur facteur d'impact de dépend des variables transverses bidimensionnelles  $\rho_1, \rho_2$ , conjuguées aux impulsions transverses des gluons échangés  $\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}$ . Plus spécifiquement, le facteur d'impact que nous considérons implique un photon virtuel dans l'état initial (1), diffusé en un photon réel dans l'état final (1').

Dans le formalisme BFKL du chapitre 4<sup>1</sup>, l'expression de l'amplitude d'interaction de deux objets 1 et 1' s'écrit [Lipatov 86] :

$$A(s, t) = \frac{isG}{(2\pi)^{10}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\nu \frac{\nu^2 + \frac{n^2}{4}}{\left(\nu^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right) \left(\nu^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)} e^{\bar{\alpha} \log(s/s_0) \chi_n(\nu)} I^{n,\nu} \bar{I}^{m,\nu}, \quad (5.34)$$

où  $G$  est le facteur de couleur correspondant au processus que l'on considère,  $\bar{\alpha} \equiv \alpha_s N_c / \pi$  et  $\chi_n(\nu)$  est la valeur propre du noyau BFKL donnée par l'équation (2.79) page 43. L'échelle de référence pour les énergie  $s_0$  n'est pas déterminée au LL(1/x). Les fonctions  $I^{n,\nu}$  et  $\bar{I}^{m,\nu}$  sont ce qu'on appelle les fonctions de vertex, c'est-à-dire les facteurs d'impact  $\phi$  projetés sur les fonctions propres correspondantes  $E^{n,\nu}$  du noyau de l'équation BFKL :

$$I^{n,\nu} = -\frac{1}{4} \int d\underline{\rho}_1 d\underline{\rho}'_1 \int d\underline{\rho}_2 d\underline{\rho}'_2 \phi(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2) E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2), \quad (5.35)$$

où  $\phi(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2)$  est le facteur d'impact et

$$E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2) = (-1)^n \left( \frac{\underline{\rho}_1 - \underline{\rho}_2}{\underline{\rho}_1 \underline{\rho}_2} \right)^a \left( \frac{\underline{\rho}'_1 - \underline{\rho}'_2}{\underline{\rho}'_1 \underline{\rho}'_2} \right)^{\tilde{a}}. \quad (5.36)$$

La notation  $a = (1 - n)/2 + i\nu$  et  $\tilde{a} = (1 + n)/2 + i\nu$  a été introduite dans l'équation précédente.

L'amplitude  $A$  est invariante par rotation. Le pomérou BFKL se factorise en deux éléments indépendants, qui sont respectivement fonctions des variables transverses du vertex supérieur au travers du vecteur propre  $E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2)$ , et de celles du vertex inférieur au travers de  $\bar{E}^{n,\nu}(\underline{\rho}'_1, \underline{\rho}'_2)$ . Ceci implique que chacune des projections  $I^{n,\nu}$  et  $\bar{I}^{n,\nu}$  de ces vertex doit être séparément invariante par les rotations dans le plan transverse. D'autre part, le facteur

<sup>1</sup>Le langage utilisé ici correspond à la formulation de voie  $t$  du chapitre 4.

d'impact  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  couple deux particules externes de spin 1. Ceci signifie que dans l'espace des impulsions, il s'écrit :

$$\tilde{\phi}_{h_1 h_2}(k_1^\perp, k_2^\perp) = \epsilon_{h_1}^\mu T_{\mu\nu}(k_1^\perp, k_2^\perp) \epsilon_{h_2}^\nu, \quad (5.37)$$

où  $\epsilon_{h_i}$  sont les vecteurs polarisation des photons externes, et  $T_{\mu\nu}$  est un tenseur. Les propriétés de covariance de Lorentz et d'invariance par parité du tenseur  $T_{\mu\nu}$  permettent de le décomposer de la façon suivante :

$$T_{\mu\nu} = t_1(k_1^\perp, k_2^\perp) g_{\mu\nu} + t_2(k_1^\perp, k_2^\perp) (k_{1,\mu}^\perp k_{2,\nu}^\perp - k_{2,\mu}^\perp k_{1,\nu}^\perp) \quad (5.38)$$

où  $t_1$  et  $t_2$  sont des fonctions scalaires. Ceci signifie que  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  peut être écrit comme la somme d'un scalaire de Lorentz, invariant par les rotations  $\rho_{1,2} \rightarrow e^{i\varphi} \rho_{1,2}$ , et d'un autre terme qui se transforme comme un tenseur, c'est-à-dire qui prend un facteur  $e^{\pm 2i\varphi}$  sous l'action des mêmes rotations. D'un autre côté,  $E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$  sont les fonctions propres des opérateurs de Casimir de l'algèbre conforme, et à ce titre, se transforment en  $e^{in\varphi} E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$  sous l'action de ces rotations. On voit que pour que  $I^{n,\nu}$  soit effectivement invariant, les seules valeurs possibles de  $n$  sont  $|n|=0, 2$ .

Le paramètre d'impact  $\phi$  a été calculé dans la référence [Evanson 99] d'après les graphes de Feynman appropriés (l'un d'eux est représenté sur la figure (5.9)). On peut retrouver aisément ces résultats à partir des fonctions d'onde du cône de lumière du photon virtuel calculées au chapitre 3, et de l'équivalence des approches de voie  $s$  et de voie  $t$  du chapitre 4, mais nous nous contentons ici de reprendre les expressions que l'on peut trouver dans la référence [Evanson 99].

Deux cas doivent être distingués, correspondant aux différents états d'hélicités relatives de la particule initiale et de la particule finale, circulaires droite ou gauche. L'état de polarisation longitudinale du photon de l'état initial ne contribue pas à l'ordre LL( $1/x$ ). L'expression obtenue peut être écrite de la manière suivante :

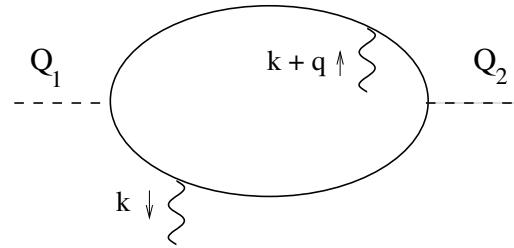


FIG. 5.9 – L'un des graphes qui contribue au facteur d'impact  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \phi(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2) = & -4\pi^2 \alpha_e \alpha_s e^2 \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \int d\underline{r}_1 d\bar{\underline{r}}_1 \int d\underline{r}_2 d\bar{\underline{r}}_2 e^{i\alpha \text{Re}(\underline{q}\underline{r}_1)} e^{i(1-\alpha)\text{Re}(\underline{q}\underline{r}_2)} \times \\ & \times \frac{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)^\delta (\bar{\underline{r}}_1 - \bar{\underline{r}}_2)^{\tilde{\delta}}}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2} \hat{Q} K_1(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2| \hat{Q}) \times \\ & \times \left( \delta^2(\underline{r}_1 - \underline{\rho}_1) - \delta^2(\underline{r}_2 - \underline{\rho}_1) \right) \left( \delta^2(\underline{r}_1 - \underline{\rho}_2) - \delta^2(\underline{r}_2 - \underline{\rho}_2) \right), \quad (5.39) \end{aligned}$$

où  $\hat{Q} = \sqrt{\alpha(1-\alpha)} Q$ ,  $e^2 = \sum_q e_q^2$  et  $\delta = (1-\Delta)/2$ ,  $\tilde{\delta} = (1+\Delta)/2$ . La fonction  $f(\alpha)$  et l'exposant  $\Delta$  dépendent des hélicités considérées. Pour les processus qui conservent l'hélicité ( $+\rightarrow+$ ) et ( $-\rightarrow-$ ), on a  $f(\alpha) = \alpha^2 + (1-\alpha)^2$  et  $\Delta = 0$ . Pour les processus qui changent l'hélicité,  $f(\alpha) = 2\alpha(1-\alpha)$ ,  $\Delta = -2$  pour la transition ( $+\rightarrow-$ ) et  $\Delta = +2$  pour ( $-\rightarrow+$ ). Les “+” and “-” se réfèrent aux hélicités de l'état initial (respectivement de l'état final) par rapport à la base standard du plan transverse :

$$\epsilon_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i). \quad (5.40)$$

Le calcul de  $I^{n,\nu}$  est présenté dans la section suivante.

### 5.3.2 Projection sur les fonctions propres du groupe conforme

Calculons maintenant les fonctions de vertex  $I^{n,\nu}$ . Suivant [Evanson 99], on insère l'équation (5.39) dans l'équation (5.35). Le produit des fonctions  $\delta$  présentes dans le facteur d'impact (5.39) peut être développé. Deux des termes correspondent au couplage du poméron BFKL à une ligne de quarks unique, et s'annulent lorsqu'on les projette sur les fonctions  $E^{n,\nu}$ . En effet, les termes de la forme  $\delta^2(\underline{x}_1 - \underline{\rho}_1)\delta^2(\underline{x}_2 - \underline{\rho}_2)$  peuvent être réarrangés en  $\delta^2(\underline{\rho}_2 - \underline{\rho}_1)\delta^2(2\underline{x}_1 - \underline{\rho}_1 - \underline{\rho}_2)$ , et donnent une contribution nulle, comme  $E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2) = 0$  pour  $\underline{\rho}_1 = \underline{\rho}_2$ . En tenant compte de la symétrie  $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$  de la fonction  $f(\alpha)$ , les deux contributions restantes sont identiques, et on obtient :

$$I^{n,\nu} = 8\pi^2 \alpha_e \alpha_s e^2 \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \hat{Q} \int d\underline{\rho}_1 d\bar{\underline{\rho}}_1 \int d\underline{\rho}_2 d\bar{\underline{\rho}}_2 E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2) K_1(|\underline{\rho}_1 - \underline{\rho}_2| \hat{Q}) \times \\ \times e^{i\alpha \mathcal{R}e(\bar{q}\underline{\rho}_1)} e^{i(1-\alpha)\mathcal{R}e(\bar{q}\underline{\rho}_2)} \frac{(\underline{\rho}_1 - \underline{\rho}_2)^\delta (\bar{\underline{\rho}}_1 - \bar{\underline{\rho}}_2)^{\bar{\delta}}}{|\underline{\rho}_1 - \underline{\rho}_2|^2}. \quad (5.41)$$

Dans la suite, le calcul sera effectué uniquement pour les  $n$  positifs. On en déduira la contribution pour les  $n$  négatifs par une formule générale de transformation  $E^{n,\nu} \rightarrow E^{-n,\nu}$ .

On insère l'expression des  $E^{n,\nu}$  dans l'équation (5.41) et on prend une représentation intégrale de la fonction de Bessel  $K_1$  (voir la formule (A.6)) :

$$K_1(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{\mathcal{A}}{2}\right)^{-2s-1} \Gamma(s)\Gamma(1+s), \quad (5.42)$$

où le contour d'intégration est parallèle à l'axe ( $Oy$ ) et  $\mathcal{R}e(s) > 0$ . Les changements de variables  $\underline{\rho}_1 = \underline{b}(1 + \underline{t})$  et  $\underline{\rho}_2 = \underline{b}(1 - \underline{t})$  permettent de réduire l'une des intégrales du type {holomorphe}  $\times$  {antiholomorphe} de l'équation (5.41). En effet, dans ces nouvelles coordonnées, il est possible de factoriser et d'effectuer l'intégration sur  $\underline{b}$ . Le résultat s'écrit :

$$\int d\underline{b} d\bar{\underline{b}} \underline{b}^{\gamma-1} \bar{\underline{b}}^{\bar{\gamma}-1} e^{i\frac{\pi}{2}(\underline{Q}\bar{\underline{b}} + \bar{\underline{Q}}\underline{b})} = 2i\pi e^{i\frac{\pi}{2}(\gamma-\bar{\gamma})} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+\bar{\gamma}}{2} + \frac{|\gamma-\bar{\gamma}|}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\gamma+\bar{\gamma}}{2} + \frac{|\gamma-\bar{\gamma}|}{2}\right)} \left(\frac{2}{\underline{Q}}\right)^\gamma \left(\frac{2}{\bar{\underline{Q}}}\right)^{\bar{\gamma}} \\ = 2i\pi e^{i\frac{\pi}{2}(\gamma-\bar{\gamma})} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\bar{\gamma})} \left(\frac{2}{\underline{Q}}\right)^\gamma \left(\frac{2}{\bar{\underline{Q}}}\right)^{\bar{\gamma}} \quad \text{if } \gamma - \bar{\gamma} \geq 0, \quad (5.43)$$

avec les valeurs des paramètres  $\underline{Q} = \underline{q}(1 - (1 - 2\alpha)\underline{t})$ ,  $\gamma = 1/2 - a - s + \delta$ ,  $\bar{\gamma} = 1/2 - \bar{a} - \bar{s} + \bar{\delta}$ , et la convention  $\bar{s} = s$ . L'intégrale sur  $\underline{t}$  peut ensuite être calculée. Elle est de la forme :

$$\int d\underline{t} \underline{t}^{-\frac{3}{2}+a-s+\delta} (1-\underline{t}^2)^{-a} (1-(1-2\alpha)\underline{t})^{-\frac{1}{2}+a+s-\delta} \times \{\text{a.h.}\}, \quad (5.44)$$

où on n'a pas écrit de façon détaillée la partie antiholomorphe, qui peut être obtenue en prenant simplement le complexe conjugué de  $\underline{b}$  et en remplaçant les exposants par leur équivalent "tildé".

Le changement de variable conforme  $\underline{t} \rightarrow \underline{t}/(2 - \underline{t})$  conduit, à un facteur global  $2^{-a-\bar{a}+2s}$

près, à une intégrale holomorphe connue et rappelée dans l'appendice (A.2)<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned}
& \int d\underline{t} \underline{t}^{a_1-1} (1-\underline{t})^{b_1-a_1-1} (1-(1-\alpha)\underline{t})^{b_0-a_0-1} \times \{\text{a.h.}\} = 2i \frac{\mu}{\sin \pi b_1} \frac{\pi^2}{\Gamma(b_1-a_0)\Gamma(b_1-a_1)} \times \\
& \times \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{a}_1)}{\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1)} \frac{\alpha^{b_1-a_0-a_1} \bar{\alpha}^{\tilde{b}_1-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1}}{\Gamma(1-a_0)\Gamma(1-a_1)} {}_2G_1 \left( \begin{matrix} b_1-a_0, b_1-a_1 \\ b_1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) \times \right. \\
& \quad \times {}_2G_1 \left( \begin{matrix} \tilde{b}_1-\tilde{a}_0, \tilde{b}_1-\tilde{a}_1 \\ \tilde{b}_1 \end{matrix} \middle| 1-\bar{\alpha} \right) - \frac{(1-\alpha)^{1-b_1} (1-\bar{\alpha})^{1-\tilde{b}_1}}{\Gamma(1-b_1+a_0)\Gamma(1-b_1+a_1)} \times \\
& \quad \left. \times {}_2G_1 \left( \begin{matrix} a_0-b_1+1, a_1-b_1+1 \\ 2-b_1 \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) {}_2G_1 \left( \begin{matrix} \tilde{a}_0-\tilde{b}_1+1, \tilde{a}_1-\tilde{b}_1+1 \\ 2-\tilde{b}_1 \end{matrix} \middle| 1-\bar{\alpha} \right) \right\}, \quad (5.45)
\end{aligned}$$

où on a noté  ${}_2G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; z) \equiv \Gamma(\mathcal{A})\Gamma(\mathcal{B})/\Gamma(\mathcal{C}) \times {}_2F_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; z)$ , et

$$\mu = (-1)^{a_0-\tilde{a}_0} \frac{\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1)}{\Gamma(1-b_1+a_1)} \frac{\Gamma(1-\tilde{a}_0)}{\Gamma(a_0)}. \quad (5.46)$$

Dans notre cas, les valeurs des paramètres sont  $a_0 = 1/2 - a - s + \delta$ ,  $a_1 = -1/2 + a - s + \delta$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1/2 - s + \delta$ . On voit que la convergence de l'intégrale (5.45) impose que l'on choisisse le contour d'intégration sur  $s$  de telle sorte que  $\mathcal{R}e(s) < 1/2$ .

À ce niveau, il convient de commenter les valeurs possibles de  $n$ . Grâce à la relation  $a_0+a_1=2b_1-1$ , le changement de variable conforme  $\underline{t} \rightarrow -\underline{t}/(\underline{t}-1)$  appliqué à l'équation (5.45) conduit à la même expression, à un facteur  $(-1)^n$  et à l'interversion des variables  $1-\alpha$  et  $\alpha$  près. Comme on intègre sur  $\alpha$  et comme tous les facteurs qui dépendent de  $\alpha$  sont symétriques par échange  $\alpha \leftrightarrow 1-\alpha$ , on voit que l'expression finale a un facteur  $(1+(-1)^n)/2$ , et ainsi, seules les composantes de  $n$  entier sont non nulles. On s'y attendait, car le poméron BFKL a uniquement des composantes de spin conforme pair [Navelet 98b]. Physiquement, ceci provient du fait que la fonction de Green à 4 gluons qui constitue le noyau BFKL est symétrique par rapport à l'échange des gluons. Cette symétrisation se traduit par l'échange des variables  $\underline{\rho}_1$  et  $\underline{\rho}_2$ , qui se traduit par la transformation de  $E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2)$  en  $(-1)^n E^{n,\nu}(\underline{\rho}_1, \underline{\rho}_2)$ . Cependant, notre méthode s'applique pour  $n$  quelconque, indépendamment de cette remarque, et le résultat final permettra une vérification de la validité de l'ensemble du calcul.

On arrive à l'expression intermédiaire suivante (on a utilisé la relation  $\delta+\tilde{\delta}=1$ ) :

$$\begin{aligned}
I^{n,\nu} &= 32\pi^3 (-1)^{n/2+(\delta-\tilde{\delta})/2+1/2+\delta} \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{a+\tilde{a}-2} \sin \pi a \frac{\Gamma(1-\tilde{a})}{\Gamma(a)} \int \frac{ds}{2i\pi} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1+s)}{\sin \pi s} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\Gamma(3/2-\delta-a+s)\Gamma(1/2-\delta+a+s)} \left(\frac{q}{Q}\right)^{-1/2+\tilde{a}+s-\tilde{\delta}} \left(\frac{\bar{q}}{Q}\right)^{-1/2+a+s-\delta} \times \\
& \quad \times \left\{ \Gamma(-1/2+\tilde{\delta}+\tilde{a}-s)\Gamma(1/2+\tilde{\delta}-\tilde{a}-s) \sin \pi \tilde{a} \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \alpha^s (1-\alpha)^{-s} \times \right. \\
& \quad \times {}_2G_1 \left( \begin{matrix} a, 1-a \\ 1/2-s+\delta \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) {}_2G_1 \left( \begin{matrix} \tilde{a}, 1-\tilde{a} \\ 1/2-s+\tilde{\delta} \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) - \Gamma(3/2-\delta-a+s)\Gamma(1/2-\delta+a+s) \times \\
& \quad \left. \times \sin \pi a \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \alpha^{-s} (1-\alpha)^s {}_2G_1 \left( \begin{matrix} a, 1-a \\ 3/2+s-\delta \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) {}_2G_1 \left( \begin{matrix} \tilde{a}, 1-\tilde{a} \\ 3/2+s-\tilde{\delta} \end{matrix} \middle| 1-\alpha \right) \right\}. \quad (5.47)
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Il est à noter que notre calcul diffère à ce niveau de ceux des références [Evanson 99, Ivanov 99] mais après intégration sur  $\alpha$ , on obtient le même résultat, voir l'équation (5.61) et l'appendice D de l'article [Munier IV] pour une comparaison détaillée.



Les intégrations sur  $\alpha$  restent à effectuer. On peut traiter tous les cas en calculant l'intégrale générique suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m(a, c) &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \frac{\sin \pi \tilde{c}}{\pi} \Gamma(\tilde{c} - \tilde{a}) \Gamma(\tilde{c} + \tilde{a} - 1) \times \\ &\times \int_0^1 d\alpha \alpha^{m+1-c} (1-\alpha)^{c-1} {}_2G_1(a, 1-a; c; 1-\alpha) {}_2G_1(\tilde{a}, 1-\tilde{a}; \tilde{c}; 1-\alpha), \end{aligned} \quad (5.48)$$

où  $c = 1/2 - s + \delta$  pour la première intégrale et  $c = 3/2 + s - \delta$  pour la seconde. Pour simplifier, on considère que lorsqu'un des arguments de la fonction  $\mathcal{J}$  a un "tilde", cela signifie qu'on échange dans la formule l'argument en question avec l'argument "tilde" correspondant. L'indice  $m \in \{0, 1, 2\}$  a été introduit pour prendre en compte les termes des fonctions  $f(\alpha)$  possibles, que l'on réécrit  $1 - 2\alpha + 2\alpha^2$  et  $2\alpha(1 - \alpha)$ . Ainsi les intégrales "physiques" à calculer sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{++}(a, c) &= \mathcal{J}^0(a, c) - 2\mathcal{J}^1(a, c) + 2\mathcal{J}^2(a, c) \\ \mathcal{J}_{+-}(a, c) &= 2\mathcal{J}^2(a, c). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Avec ces notations, les amplitudes peuvent être réécrites :

$$\begin{aligned} I_{h_1 h_2}^{n, \nu} &= 32\pi^4 (-1)^{\frac{n}{2} + \frac{\delta - \tilde{\delta}}{2} + \frac{1}{2} + \delta} \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{a + \tilde{a} - 2} \sin \pi a \frac{\Gamma(1 - \tilde{a})}{\Gamma(a)} \int \frac{ds}{2i\pi} \frac{\Gamma(s) \Gamma(1+s)}{\sin \pi s} \times \\ &\times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} - \delta - a + s) \Gamma(\frac{1}{2} - \delta + a + s)} \left(\frac{q}{Q}\right)^{-\frac{1}{2} - \tilde{\delta} + \tilde{a} + s} \left(\frac{\bar{q}}{Q}\right)^{-\frac{1}{2} - \delta + a + s} (-1)^n \times \\ &\times \left\{ \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{1}{2} + \tilde{\delta} - s)} \mathcal{J}_{h_1 h_2}(a, \frac{1}{2} + \delta - s) - \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{3}{2} - \delta + s)} \mathcal{J}_{h_1 h_2}(1 - \tilde{a}, \frac{3}{2} - \tilde{\delta} + s) \right\}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

où  $h_1, h_2 \in \{+, -\}$ .

On peut intégrer directement l'équation (5.48). Notre méthode consiste à remplacer l'une des fonctions hypergéométriques  ${}_2G_1(1 - \alpha)$  dans la formule (5.48) par une somme de fonctions  ${}_2G_1(\alpha)$ . Notons que le résultat est invariant par l'échange de  $a$  et de  $\tilde{a}$ , car on a deux choix possibles pour réaliser cet échange. L'intégration conduit alors à des fonctions  ${}_4G_3$ , sur lesquelles on voit bien que les composantes  $|n| > 2$  sont nulles. On pourra se reporter à l'appendice **E** de la référence [Munier IV] pour les détails.

Nous exposons ici une méthode qui conduit directement à des fonctions  ${}_3G_2$ , que l'on calcule explicitement dans l'annexe. Le principe est d'exprimer les fonctions  ${}_2G_1(z)$  comme une fonction de Meijer  $G_{22}^{22}(1 - z)$  :

$$\begin{aligned} {}_2G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; z) &= \frac{1}{\Gamma(\mathcal{C} - \mathcal{A}) \Gamma(\mathcal{C} - \mathcal{B})} G_{22}^{22} \left( \begin{matrix} 1 - \mathcal{A}, 1 - \mathcal{B} \\ \mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} \end{matrix}; 1 - z \right) = \frac{1}{\Gamma(\mathcal{C} - \mathcal{A}) \Gamma(\mathcal{C} - \mathcal{B})} \times \\ &\times \int \frac{ds'}{2i\pi} (1 - z)^{s'} \Gamma(-s') \Gamma(\mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B} - s') \Gamma(\mathcal{A} + s') \Gamma(\mathcal{B} + s'). \end{aligned} \quad (5.51)$$

En insérant cette identité dans l'équation (5.48), puis en effectuant l'intégration sur  $\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m(a, c) &= \frac{\sin \pi \tilde{c}}{\pi} \int \frac{ds'}{2i\pi} \Gamma(\tilde{a} + s') \Gamma(1 - \tilde{a} + s') \times \\ &\times \left\{ \frac{\Gamma(-s') \Gamma(m + 1 + s') \Gamma(\tilde{c} - 1 - s') \Gamma(m + 2 - c + s')}{\Gamma(m + 2 - a + s') \Gamma(m + 1 + a + s')} \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ensuite, on transforme cette intégrale en une somme de fonctions  ${}_3G_2$ , ce que l'on peut faire en simplifiant le quotient de fonctions  $\Gamma$  qui apparaît entre les crochets dans le membre de droite, puis en reconstituant la série qui définit l'hypergéométrique  ${}_3G_2$  par déformation du contour d'intégration. Plus concrètement, on écrit :

$$\left\{ \dots \right\} = \frac{\pi}{\sin \pi(-s')} \frac{\pi}{\sin \pi(\tilde{c}-1-s')} \left[ \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (1+s'+j) \times \Gamma(m+2-c+s')/\Gamma(2-\tilde{c}+s')}{\prod_{j=0}^{k-1} (m+1+a+s'-k+j)(m+2-a+s'-k+j)} \right] \times \frac{1}{\Gamma(m+1+a+s'-k)\Gamma(m+2-a+s'-k)}. \quad (5.53)$$

Par simple inspection, on trouve, pour tout  $m$  :

$$\left\{ \dots \right\} = \frac{\pi}{\sin \pi(-s')} \frac{\pi}{\sin \pi(\tilde{c}-1-s')} \sum_{p,q=0}^m \frac{\mathcal{A}_{pq}(a, c)}{\Gamma(1+a+p+s')\Gamma(2-a+q+s')}, \quad (5.54)$$

où les  $\mathcal{A}_{pq}$  ne dépendent pas de  $s'$ . L'intégrale qui définit  $\mathcal{J}$  peut alors être calculée en construisant deux séries dont les coefficients sont les résidus aux pôles situés à droite du contour de l'inverse de la fonction sinus. Chacune des séries est une fonction hypergéométrique  ${}_3G_2$ , qui est calculée dans l'annexe (A.3). Les valeurs des coefficients  $\mathcal{A}_{pq}$  non nuls sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{00} &= 1, \quad \mathcal{A}_{01} = \frac{2}{2a-1} (a(a-1)+c(2-a)+c^2), \\ \mathcal{A}_{10} &= \frac{2}{1-2a} (a(a-1)+c(a+1)+c^2), \\ \mathcal{A}_{12} &= \frac{2}{2a-1} (a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1), \\ \mathcal{A}_{21} &= \frac{2}{1-2a} a(a+1)(a+c)(a+c-1) \end{aligned} \quad (5.55)$$

pour l'amplitude qui conserve l'hélicité ( $+\rightarrow +$ ), et

$$\mathcal{A}_{11} = 2, \quad \mathcal{A}_{12} = \frac{2}{2a-1} (a(a-3)+2), \quad \mathcal{A}_{21} = \frac{2}{1-2a} a(a+1) \quad (5.56)$$

pour celle qui ne la conserve pas ( $+\rightarrow -$ ). Poursuivons le calcul de  $\mathcal{J}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{h_1 h_2}(a, c) &= \sum_{p,q} \mathcal{A}_{h_1 h_2, pq}(a, c) \left\{ {}_3G_2 \left( \begin{matrix} 1, \tilde{c}+\tilde{a}-1, \tilde{c}-\tilde{a} \\ \tilde{c}+a+p, \tilde{c}-a+1+q \end{matrix} \middle| 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - {}_3G_2 \left( \begin{matrix} 1, \tilde{a}, 1-\tilde{a} \\ 1+a+p, 2-a+q \end{matrix} \middle| 1 \right) \right\}, \quad (5.57) \end{aligned}$$

où nous avons factorisé et simplifié  $\pi/\sin \pi\tilde{c}$ , ce qui est possible car  $c$  et  $\tilde{c}$  diffèrent dans tous les cas d'un entier pair (0 ou 2). Les différences de fonctions  ${}_3G_2$  dans le membre de droite peuvent être évaluées en utilisant les formules établies en appendice.

La formule (A.26) nous permet de faire le calcul pour tout  $n$  : on peut l'appliquer pour exprimer les fonctions  $\mathcal{J}$  comme une somme de fractions rationnelles en  $a$ ,  $\tilde{a}$  et  $c$ , multipliée par un coefficient non rationnel, qui est

$$\text{soit } \sin \pi a / \sin \pi \tilde{a}, \quad \text{soit } \Gamma(c-\tilde{a})\Gamma(c+\tilde{a}-1)/\Gamma(c-a)\Gamma(c+a-1). \quad (5.58)$$

Les fractions rationnelles sont simplifiées en utilisant `mathematica`. En insérant l'équation (5.57) dans l'équation (5.50), et en se souvenant que  $a = (1-n)/2+i\nu$ , on trouve, pour  $n=0$  :

$$\mathcal{J}_{++}\left(\frac{1}{2}+i\nu, 1-s\right) + \mathcal{J}_{++}\left(\frac{1}{2}-i\nu, 1+s\right) = \frac{\pi}{16i\nu(1+\nu^2)} \frac{\sin^2 \pi s \tan \pi i\nu}{\cos \pi(i\nu-s) \cos \pi(i\nu+s)} \times \\ \times (11+12\nu^2+4s^2) \quad (5.59)$$

$$\mathcal{J}_{+-}\left(\frac{1}{2}+i\nu, 2-s\right) + \mathcal{J}_{+-}\left(\frac{1}{2}-i\nu, 2+s\right) = \frac{\pi}{4i\nu(1+\nu^2)} \frac{\sin^2 \pi s \tan \pi i\nu}{\cos \pi(i\nu-s) \cos \pi(i\nu+s)} .$$

Les formules correspondantes pour  $n=2$  s'écrivent :

$$\mathcal{J}_{++}\left(-\frac{1}{2}+i\nu, 1-s\right) + \mathcal{J}_{++}\left(-\frac{1}{2}-i\nu, 1+s\right) = -\frac{\pi}{32i\nu(1+\nu^2)} \times \\ \times \frac{\sin^2 \pi s \tan \pi i\nu}{\cos \pi(i\nu-s) \cos \pi(i\nu+s)} (-1+2i\nu-2s)(1+2i\nu-2s) \quad (5.60)$$

$$\mathcal{J}_{+-}\left(-\frac{1}{2}+i\nu, 2-s\right) + \mathcal{J}_{+-}\left(-\frac{1}{2}-i\nu, 2+s\right) = -\frac{\pi}{8i\nu(1+\nu^2)} \times \\ \times \frac{\sin^2 \pi s \tan \pi i\nu}{\cos \pi(i\nu-s) \cos \pi(i\nu+s)} .$$

On trouve que toutes les autres composantes sont nulles.

Résumons les résultats que nous avons obtenus. On a vérifié la règle de sélection qui prescrit que seules les composantes  $n=0$  et  $n=\pm 2$  contribuent pour le facteur d'impact d'un photon virtuel. On donne ci-dessous les expressions des amplitudes non nulles. On introduit l'angle  $\phi$  du vecteur transverse  $\mathbf{q}$  par rapport à une origine arbitraire (les quantités physiques ne dépendent pas de cet angle). Les composantes  $n=0$  s'écrivent :

$$I_{++}^{0,\nu} = -2\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi \nu}{\pi \nu (\nu^2 + 1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + i\nu)} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma(\frac{1}{2} - i\nu - s) \Gamma(\frac{1}{2} + i\nu - s) \times (11+12\nu^2+4s^2)$$

$$I_{+-}^{0,\nu} = 8\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi \nu}{\pi \nu (\nu^2 + 1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + i\nu)} e^{2i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma(\frac{3}{2} - i\nu - s) \Gamma(\frac{3}{2} + i\nu - s) . \quad (5.61)$$

On vérifie que ces deux expressions sont en accord avec celles de la référence [Evanson 99] à un signe global près.

Les composantes  $n = 2$  valent :

$$I_{++}^{2,\nu} = -4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi \nu}{\pi \nu (\nu^2 + 1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + i\nu)} \frac{-\frac{1}{2} + i\nu}{+\frac{1}{2} + i\nu} e^{2i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma(\frac{3}{2} - i\nu - s) \Gamma(\frac{3}{2} + i\nu - s)$$

$$I_{+-}^{2,\nu} = 4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} e^{4i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma(\frac{1}{2}+i\nu-s) \Gamma(\frac{5}{2}-i\nu-s). \quad (5.62)$$

Enfin, les composantes  $n = -2$  se déduisent des précédentes en utilisant une relation appropriée entre  $E^{n,\nu}$  et  $E^{-n,\nu}$ . Nous allons l'établir.

Revenons à l'équation (5.41) et notons que grâce aux changements de variables  $\underline{\rho}_1 = \underline{b} + \underline{\rho}/2$  et  $\underline{\rho}_2 = \underline{b} - \underline{\rho}/2$ , elle peut être factorisée de la manière suivante :

$$I^{n,\nu} = \int_0^1 d\alpha \int d\underline{\rho} d\underline{\bar{\rho}} \mathcal{H}(\alpha, \underline{\rho}) \pi^3 \frac{2^{4i\nu}}{-i\nu+n/2} \frac{\Gamma(-i\nu+(1+n)/2)}{\Gamma(i\nu+(1+n)/2)} \frac{\Gamma(i\nu+n/2)}{\Gamma(-i\nu+n/2)} E_q^{n,\nu}(\underline{\rho}), \quad (5.63)$$

où  $E_q^{n,\nu}(\underline{\rho})$  est la transformée de Fourier bidimensionnelle de  $E^{n,\nu}(\underline{b} + \underline{\rho}/2, \underline{b} - \underline{\rho}/2)$  par rapport au paramètre d'impact  $\underline{b}$  [Lipatov 86]. La fonction  $\mathcal{H}(\alpha, \underline{\rho})$  regroupe toutes les autres dépendances, c'est-à-dire :

$$\mathcal{H}(\alpha, \underline{\rho}) = 8i \alpha_e \alpha_s e^2 f(\alpha) \hat{Q} e^{i(\alpha-1/2)\mathcal{R}e(\underline{q}\underline{\rho})} K_1(|\underline{\rho}|\hat{Q}) \frac{\underline{\rho}^\delta \underline{\bar{\rho}}^{\bar{\delta}}}{|\underline{\rho}|}. \quad (5.64)$$

Remarquons que cette formule montre que  $I^{n,\nu}$  est la projection du facteur d'impact sur  $E_q^{n,\nu}$  [Navelet 98a]. On remarque ensuite que pour  $n$  positif [Lipatov 86] :

$$E_q^{-n,\nu}(\underline{b}) = 2^{-12i\nu} \frac{n/2-i\nu}{n/2+i\nu} \frac{\Gamma^2(n/2-i\nu)}{\Gamma^2(n/2+i\nu)} \underline{q}^{2a-1} \underline{\bar{q}}^{2\bar{a}-1} E_q^{n,-\nu}(\underline{b}), \quad (5.65)$$

et ainsi, on arrive à la relation suivante :

$$I^{-n,\nu} = 2^{-4i\nu} \frac{\Gamma^2(-i\nu+(1+n)/2)}{\Gamma^2(i\nu+(1+n)/2)} \underline{q}^{2a-1} \underline{\bar{q}}^{2\bar{a}-1} I^{n,-\nu}. \quad (5.66)$$

En l'appliquant à l'équation (5.62), on obtient :

$$I_{++}^{-2,\nu} = -4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} e^{-2i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma(\frac{3}{2}-i\nu-s) \Gamma(\frac{3}{2}+i\nu-s)$$

$$I_{+-}^{-2,\nu} = 4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma(\frac{1}{2}-i\nu-s) \Gamma(\frac{5}{2}+i\nu-s). \quad (5.67)$$

Notons que les intégrales complexes sur  $s$  peuvent être exprimées à l'aide d'une (ou une somme de) fonction de Legendre. Notons également que la composante qui change l'hélicité pour  $n = 2$  ne s'annule pas à petit  $|\mathbf{q}|$ .

Les autres amplitudes d'hélicité s'obtiennent simplement en utilisant les relations  $I_{--}^{n,\nu} = I_{++}^{-n,\nu}|_{\phi \rightarrow -\phi}$  et  $I_{-+}^{n,\nu} = I_{+-}^{-n,\nu}|_{\phi \rightarrow -\phi}$ .

### 5.3.3 Conclusion et perspectives

On vient donc de calculer le couplage du facteur d'impact de la transition  $\gamma^* \rightarrow \gamma$  au poméron BFKL. On a trouvé que le résultat obtenu est identique, pour la composante  $n=0$ , à un résultat établi dans la référence [Evanson 99]. Pour les composantes de spin conforme supérieur, seules les valeurs  $n = \pm 2$  apportent une contribution, comme on s'y attendait par des considérations de symétrie. On ne peut être sensible aux composantes de spin conforme supérieur du poméron BFKL que dans des processus dans lesquels le moment cinétique total des particules en jeu peut prendre des valeurs grandes, c'est-à-dire, en pratique, pour des multiplicités plus importantes.

La motivation physique sous-jacente était l'étude précise de la production diffractive de photons dans le régime de haute énergie, en incluant les termes de twist élevé requis par l'invariance conforme de la théorie.

Les méthodes développées sont assez générales pour pouvoir être utilisées pour de nombreux processus physiques.

# Conclusions et perspectives

---

Nous nous sommes efforcés de rédiger la majeure partie de cette thèse dans un formalisme unique, basé sur une image de voie  $s$  des interactions électron-proton et proton-proton. Nous avons vu que la formulation hamiltonienne de la chromodynamique quantique sur le cône de lumière présente des propriétés intéressantes, tant sur le plan de l'implémentation de cette image physique de voie  $s$ , que sur le plan technique, car dans ce formalisme, les équations d'évolution des partons sont particulièrement simples lorsqu'on se restreint à ne considérer que l'ordre des logarithmes dominants.

Diverses études phénoménologiques ont été présentées, qui concernaient les fonctions de structure inclusives et semi-inclusives, avec production de particules charmées, et les fonctions de structure diffractives mesurées à HERA dans un contexte cinématique de petit  $x_{Bj}$ . Des calculs théoriques ont été menés, notamment l'évaluation du processus de production diffractive de photons pour tout spin conforme. Les résultats obtenus seront appliqués dans des travaux ultérieurs à une étude phénoménologique complète et précise des composantes de spin conforme non nul des processus diffractifs.

Nous renvoyons le lecteur aux chapitres 3, 4 et 5 pour le détail des conclusions et perspectives spécifiques qui sont associées à ces différents travaux.

Soulignons que le cadre de l'ensemble de cette thèse est la chromodynamique quantique perturbative sommée à l'ordre des logarithmes de  $1/x_{Bj}$  dominants (LL( $1/x_{Bj}$ )). En janvier 1998, le calcul de l'ordre sous-dominant (NLL( $1/x_{Bj}$ )) a été achevé [Fadin 98, Ciafaloni 98], et les corrections qu'il apporte se sont révélées très importantes. Des études phénoménologiques plus précises des fonctions de structure devront être réalisées à partir de ces résultats théoriques. Néanmoins, un tel programme n'est pas à notre portée pour l'instant, car le couplage du photon virtuel au poméron BFKL n'a pas été complètement calculé à l'ordre NLL( $1/x_{Bj}$ ) [Ciafaloni 99] : les difficultés techniques à surmonter semblent colossales.

D'autre part, il serait intéressant d'étendre l'image de voie  $s$  du modèle des dipôles de couleur à l'ordre NLL( $1/x_{Bj}$ ). Malheureusement, cet objectif semble également très difficile à atteindre, en raison des complications [Kovchegov 00b] introduites par la quantification de la théorie sur le cône de lumière : en particulier, les vertex instantanés doivent être pris en considération, et les corrections virtuelles ne peuvent plus être déduites d'un simple bilan probabiliste, mais doivent faire l'objet d'un calcul complet.

Une autre direction d'investigations pourrait être de s'intéresser, dans ce formalisme, aux corrections d'unitarité, données en particulier par les interactions multiples de dipôles. Ces corrections se manifestent par des termes sous-dominants en  $1/N_c$  et devraient intervenir dans le régime de plus petit  $x_{Bj}$ . Elles ont déjà suscité de nombreux travaux (voir par exemple [Salam 96, Kovchegov 00a]), et sont un domaine de recherche très actif.



# ANNEXE A

## Quelques résultats d'analyse complexe

---

### Sommaire

<b>A.1 Transformées de Mellin, représentations intégrales et fonctions spéciales</b>	<b>127</b>
A.1.1 Transformées de Mellin . . . . .	127
A.1.2 Représentation intégrale des fonctions de Bessel . . . . .	128
A.1.3 Fonctions hypergéométriques . . . . .	128
<b>A.2 Calcul de certaines intégrales bidimensionnelles . . . . .</b>	<b>129</b>
<b>A.3 Calcul de quelques sommes et séries . . . . .</b>	<b>130</b>
A.3.1 Une formule de sommation . . . . .	130
A.3.2 Calcul d'une fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2$ . . . . .	131

*Cette annexe a pour objet de donner quelques résultats d'analyse utiles pour mener à bien les calculs qui apparaissent dans la physique de haute énergie. Les sections (A.1) et (A.2) rassemblent quelques résultats connus, et la section (A.3) présente des résultats originaux, établis à l'occasion du travail de la référence [Munier IV].*

### A.1 Transformées de Mellin, représentations intégrales et fonctions spéciales

#### A.1.1 Transformées de Mellin

La transformée de Mellin d'une fonction  $f$  de variable réelle  $x$  s'écrit :

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} x^{-\gamma} f(x) . \tag{A.1}$$

En vertu de la relation  $\int_0^{\infty} dx x^{a-1} = 2i\pi\delta(a)$ , la transformée de Mellin inverse est une intégrale de contour dans le plan complexe :

$$f(x) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2i\pi} x^{\gamma} \tilde{f}(\gamma) , \tag{A.2}$$

où le contour  $\mathcal{C}$  est parallèle à l'axe imaginaire.

Si  $f$  est une fonction méromorphe de la variable complexe  $z$ , alors il est utile de définir la transformée suivante :

$$\tilde{f}(\alpha, \tilde{\alpha}) = \int d^2z z^{\alpha-1} \bar{z}^{\tilde{\alpha}-1} f(z, \bar{z}) , \tag{A.3}$$



avec  $\tilde{\alpha} - \alpha = n$ ,  $n$  entier. Cette condition revient à demander que  $f$  n'ait qu'une seule détermination, i.e. soit méromorphe. Si  $\alpha = (1-n)/2 + i\nu$  et  $\alpha = (1+n)/2 + i\nu$ , alors la transformée inverse s'écrit :

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu z^{-\alpha} \bar{z}^{-\tilde{\alpha}} \tilde{f}(\alpha, \tilde{\alpha}) . \quad (\text{A.4})$$

### A.1.2 Représentation intégrale des fonctions de Bessel

On a la représentation suivante pour la fonction de Bessel  $I_\nu$  [Watson 58] :

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2i\pi} \gamma^{-\nu-1} \exp\left(\gamma + \frac{z^2}{4\gamma}\right) . \quad (\text{A.5})$$

Le contour d'intégration part du point  $-\infty - i\epsilon$ , entoure le point  $\gamma = 0$  dans le sens anti-horaire, et se termine au point  $-\infty + i\epsilon$ .

Pour la fonction de Bessel  $K_1$ , on peut écrire :

$$K_1(z) = \frac{1}{2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\gamma-1} \Gamma(\gamma)\Gamma(1+\gamma) . \quad (\text{A.6})$$

### A.1.3 Fonctions hypergéométriques

La fonction hypergéométrique  ${}_pF_q(z|\{a_i\}, \{b_i\})$  est définie par la série entière suivante [Prudnikov 86] :

$${}_pF_q\left(z \left| \begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{\Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_p)} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\Gamma(a_1+k) \cdots \Gamma(a_p+k)}{\Gamma(b_1+k) \cdots \Gamma(b_q+k)} . \quad (\text{A.7})$$

Un prolongement analytique de cette série est donné par la représentation intégrale de Mellin-Barnes :

$${}_pF_q\left(z \left| \begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{\Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_p)} \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{2i\pi} z^s \Gamma(-s) \frac{\Gamma(a_1+s) \cdots \Gamma(a_p+s)}{\Gamma(b_1+s) \cdots \Gamma(b_q+s)} , \quad (\text{A.8})$$

où le contour  $\mathcal{C}$  sépare les pôles de  $\Gamma(-s)$  et ceux des  $\Gamma(a_i+s)$ . Une illustration en est donnée sur la figure (A.1).

Pour simplifier certaines écritures, on introduit la fonction suivante construite à partir de cette hypergéométrique :

$${}_pG_q\left(z \left| \begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_q)} {}_pF_q\left(z \left| \begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \right. \right) . \quad (\text{A.9})$$

Les fonctions  ${}_pG_q$  sont des cas particuliers des fonctions de Meijer, définies comme suit :

$$G_{pq}^{mn}\left(z \left| \begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \right. \right) = \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{2i\pi} z^s \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} . \quad (\text{A.10})$$

De nombreuses propriétés de ces fonctions peuvent être trouvées dans la référence [Prudnikov 86]. On calcule une fonction hypergéométrique  ${}_3F_2$  pour des valeurs particulières des paramètres dans la section (A.3).

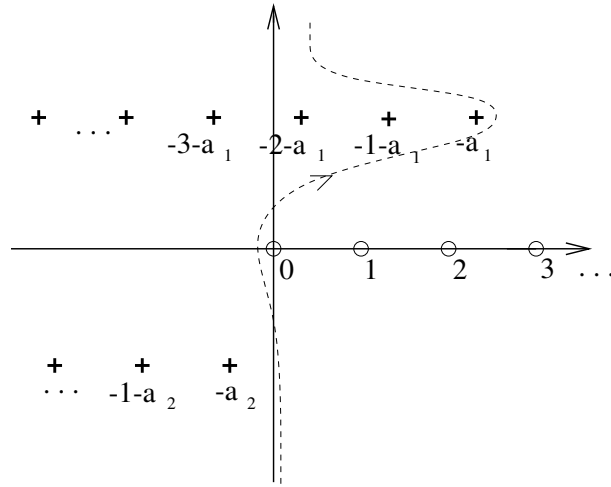


FIG. A.1 – Exemple de contour d'intégration, dans le plan complexe de  $s$ , pour la représentation de Mellin-Barnes de la fonction hypergéométrique (équation (A.1)).

## A.2 Calcul de certaines intégrales bidimensionnelles

Dans beaucoup de calculs liés à la physique de type BFKL apparaissent des intégrales bidimensionnelles étendues à tout le plan complexe  $z \in \mathbb{C}$ . Qu'elles soient exprimées dans le plan des impulsions ou des distances transverses, leur origine physique repose sur les propriétés d'invariance conforme de la QCD à haute énergie : dans l'espace transverse, petites distances et grandes distances sont à mettre sur un pied d'égalité. Leurs intégrands peuvent souvent se ramener par changement de variable de type homographique  $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ , à des puissances de  $z$ ,  $\bar{z}$ ,  $1 - z$ ,  $1 - \bar{z}$  etc... S'ils sont composés de fonctions spéciales, celles-ci admettent en général une représentation intégrale qui fait apparaître de tels facteurs (voir la section précédente). Les résultats donnés ci-dessous, et extraits de la référence [Geronimo 00], sont d'une utilité constante :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dzd\bar{z}}{2i\pi} z^{a_1-1} \bar{z}^{\tilde{a}_1-1} (1-z)^{b_1-a_1-1} (1-\bar{z})^{\tilde{b}_1-\tilde{a}_1-1} (1-tz)^{-a_0} (1-t\bar{z})^{-\tilde{a}_0} = \\
& = \frac{\mu}{\sin \pi b_1} \frac{\pi}{\Gamma(b_1-a_0)\Gamma(b_1-a_1)} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{a}_1)}{\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1)} \frac{(1-t)^{b_1-a_0-a_1} (1-\bar{t})^{\tilde{b}_1-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1}}{\Gamma(1-a_0)\Gamma(1-a_1)} \times \right. \\
& \times {}_2G_1 \left( \begin{matrix} b_1-a_0, b_1-a_1 \\ b_1 \end{matrix} \middle| t \right) {}_2G_1 \left( \begin{matrix} \tilde{b}_1-\tilde{a}_0, \tilde{b}_1-\tilde{a}_1 \\ \tilde{b}_1 \end{matrix} \middle| \bar{t} \right) - \frac{t^{1-b_1} \bar{t}^{1-\tilde{b}_1}}{\Gamma(1-b_1+a_0)\Gamma(1-b_1+a_1)} \times \\
& \left. \times {}_2G_1 \left( \begin{matrix} 1-b_1+a_0, 1-b_1+a_1 \\ 2-b_1 \end{matrix} \middle| t \right) {}_2G_1 \left( \begin{matrix} 1-\tilde{b}_1+\tilde{a}_0, 1-\tilde{b}_1+\tilde{a}_1 \\ 2-\tilde{b}_1 \end{matrix} \middle| \bar{t} \right) \right\}, \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

avec

$$\mu = (-1)^{a_0-\tilde{a}_0} \frac{\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1)}{\Gamma(1-b_1+a_1)} \frac{\Gamma(1-\tilde{a}_0)}{\Gamma(a_0)}. \quad (\text{A.12})$$

Les conditions d'applicabilité sont les suivantes :

- $b_j, \tilde{b}_j, a_i, \tilde{a}_i \notin \mathbb{Z}$ ,
- $a_i - a_j, \tilde{a}_i - \tilde{a}_j, b_i \neq 0 - b_j, \tilde{b}_i \neq 0 - \tilde{b}_j, i \neq j \notin \mathbb{Z}$ ,
- $a_i - b_j, \tilde{a}_i - \tilde{b}_j \notin \mathbb{Z}$ ,

$$- a_i - \tilde{a}_i, b_j - \tilde{b}_j \in \mathbb{Z}.$$

Un cas particulier fréquemment utilisé est le suivant :

$$\begin{aligned} \int \frac{dzd\bar{z}}{2i\pi} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} \bar{z}^{\tilde{\alpha}-1} (1-\bar{z})^{\tilde{\beta}-1} &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta})}{\Gamma(1-\tilde{\alpha})\Gamma(1-\tilde{\beta})} \\ &= \frac{1}{\pi} B(\alpha, \beta) B(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \frac{\sin \pi \tilde{\alpha} \sin \pi \tilde{\beta}}{\sin \pi (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Un second résultat utile est le suivant :

$$\int \frac{dzd\bar{z}}{2i} z^{\gamma-1} \bar{z}^{\tilde{\gamma}-1} e^{i(\bar{q}z+q\bar{z})} = q^{-\tilde{\gamma}} \bar{q}^{-\gamma} e^{i(\tilde{\gamma}-\gamma)\pi/2} \sin \pi \gamma \Gamma(\gamma) \Gamma(\tilde{\gamma}), \quad (\text{A.14})$$

où  $q$  est un nombre complexe quelconque et  $\tilde{\gamma}-\gamma$  est un entier.

### A.3 Calcul de quelques sommes et séries

Dans cette section, nous présentons quelques résultats mathématiques originaux, qui ont été établis pour les besoins du calcul du facteur d'impact photon virtuel-photon du chapitre 5, et qui sont publiés dans les appendices à la référence [Munier IV].

#### A.3.1 Une formule de sommation

Dans cette annexe, on donne une expression compacte de la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^l \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{(-l)_k (\alpha)_k}{(\gamma)_k} \{ \Psi(\beta+k) - \Psi(\beta) \}.$$

Notre première observation est que la différence des fonctions  $\Psi$  entre les parenthèses peut se réécrire de la manière suivante :

$$\Psi(\beta+k) - \Psi(\beta) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\beta+i},$$

et on définit la fonction suivante :

$$f(z) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{(-l)_k (\alpha)_k}{(\gamma)_k} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{z^{\beta+i}}{\beta+i} \right\}, \quad (\text{A.15})$$

où  $z$  est une variable complexe arbitraire. La somme à calculer est la valeur de  $f$  en  $z=1$ . La dérivée de  $f(z)$  peut être calculée, et est la différence de deux fonctions hypergéométriques  ${}_2F_1$  :

$$f'(z) = \frac{z^{\beta-1}}{z-1} \{ {}_2F_1(-l, \alpha, \gamma, z) - {}_2F_1(-l, \alpha, \gamma, 1) \}. \quad (\text{A.16})$$

En utilisant une formule de transformation connue [Gradshteyn 65] pour le premier terme du membre de droite de l'équation précédente, on obtient :

$${}_2F_1(-l, \alpha, \gamma, z) = (1-z)^l \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+l)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+l)} {}_2F_1(-l, \gamma-\alpha, 1-l-\alpha, 1/(1-z)). \quad (\text{A.17})$$

L'intégrale sur  $z$  peut être calculée pour  $\mathcal{R}e(\beta) > 0$ . Quelques manipulations simples permettent de réécrire le résultat sous une forme compacte :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^l \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{(-l)_k (\alpha)_k}{(\gamma)_k} \{\Psi(\beta+k) - \Psi(\beta)\} \\ = \frac{(\alpha)_l}{(\beta)_l (\gamma)_l} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k-l} \frac{\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k)} \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\beta-l)_k}{(1-\alpha-l)_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Notons le cas particulier suivant, lorsque  $\alpha \equiv \gamma$  :

$$\sum_{k=0}^l (-1)^{k+1} \binom{l}{k} \Psi(\beta+k) = B(\beta, l). \quad (\text{A.19})$$

### A.3.2 Calcul d'une fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2$

On démontre ici une formule de sommation pour la fonction hypergéométrique particulière suivante :

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1 \right)$$

pour tout entier  $n$ , et pour tous entiers positifs  $p$  et  $q$ . Notons qu'on peut se restreindre à des  $n$  positifs et obtenir le résultat pour des  $n$  négatifs en changeant  $b$  en  $c$ , et  $p$  et  $q$ . Les résultats sont donnés sous différentes formes dans les équations (A.21), (A.24) ou (A.26).

La fonction  ${}_3F_2$  en question est bien définie pour les valeurs de positives de  $s$ , avec :

$$s \equiv (1+b+p) + (1+c+q) - 1 - (b+n) - (c-n) = 1+p+q.$$

Les valeurs des paramètres intéressantes pour la calcul de physique que nous avons effectué au chapitre 5 sont tous les entiers  $n$  et  $p, q \in \{0, 1, 2\}$ .

Une méthode élémentaire consiste à exprimer la fonction  ${}_3F_2$  comme une série (hypergéométrique) de quotients de fonctions  $\Gamma$ , qui, en raison des valeurs particulières des arguments, se réduit à une série de fractions rationnelles. Celles-ci peuvent être décomposées en éléments simples, c'est-à-dire, ici, en une série de termes n'ayant que des dénominateurs polynomiaux en l'index de sommation, et de degré 1. On peut resommer cette série, et finalement, on obtient une somme finie de termes qu'on peut exprimer comme des rapports de fonctions  $\Gamma$ , et, éventuellement (selon les valeurs relatives de  $p$  et de  $n$ ), des fonctions  $\Psi$ . Cependant, le nombre de termes de la somme restante croît apparemment linéairement avec  $n$ , et on ne peut pas obtenir simplement par cette méthode un nombre de termes qui reste faible pour des grands  $n$ . Cette remarque peut être illustrée en appliquant la formule de transformation suivante (voir [Prudnikov 86], formule (1) page 533) :

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1 \right) &= \frac{\Gamma(1+p+q)}{\Gamma(1+n+q)} \frac{\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(1+c+p+q-n)} \times \\ &\times {}_3F_2 \left( \begin{matrix} p-n, b+p, c-n \\ 1+c+p+q-n, 1+b+p \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

On voit que dans le cas  $n < p$ , le membre de droite de l'équation précédente est un *polynôme* hypergéométrique qui a  $n-p$  termes. Ainsi, une méthode plus sophistiquée doit être trouvée.

Distinguons les cas (i)  $n > p$  et (ii)  $n \leq p$ .

(i)  $n > p$ .

On peut obtenir ce cas par application immédiate de la formule (6) (*Ibidem*, page 534). La condition d'applicabilité est  $\operatorname{Re}(c+q) > 0$ , qui est satisfaite dans le cas du calcul du chapitre 5. Le résultat s'écrit :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(b+n)\Gamma(c-n)} \frac{\Gamma(c-b-n-p)}{\Gamma(1+c-b+q-n)} B(1+p+q, n-p) \\ - \frac{(b+p)(c+q)}{(n-p)(c-b-n-p)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -p-q, 1-b-p, 1 \\ 1+n-p, 1+c-b-n-p \end{matrix}; 1\right) \quad (\text{A.21})$$

Notons que grâce au paramètre négatif  $-p-q$ , la fonction  ${}_3F_2$  dans le membre de droite est une somme finie, n'ayant que  $p+q$  termes

(ii)  $n \leq p$ .

Ce cas est un peu plus subtil. On utilise la formule (3) (voir la référence [Prudnikov 86]), mais auparavant, il faut régulariser en introduisant un petit paramètre  $\epsilon$  tel que :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\epsilon, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right).$$

Ceci conduit à l'équation suivante :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\epsilon, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) = \Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)\Gamma(-\epsilon) \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma(c-b-2n)}{\Gamma(1+p-n)\Gamma(1+c-b+q-n)\Gamma(b+n-\epsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b+n)_k (b-c+n-q)_k (n-p)_k}{\Gamma(1+k)(b+n-\epsilon)_k (1+b-c+2n)_k} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} b \leftrightarrow c \\ n \leftrightarrow -n \\ p \leftrightarrow q \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{A.22})$$

dans laquelle on a utilisé la notation classique  $(\mathcal{A})_k = \Gamma(\mathcal{A}+k)/\Gamma(\mathcal{A})$ , et les crochets représentent le terme déduit du précédent par les échanges de paramètres indiqués. L'étape suivante consiste à prendre la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . On utilise le développement au premier ordre en  $\epsilon$  de la fonction  $\Gamma(\mathcal{A}+\epsilon) = \Gamma(\mathcal{A})(1+\epsilon\Psi(\mathcal{A})) + o(\epsilon)$  et on obtient :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) = -\frac{\Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(b+n)\Gamma(c-n)} \left\{ \frac{\Gamma(c-b-2n)}{\Gamma(1+p-n)\Gamma(1+c-b+q-n)} \times \right. \\ \times \sum_{k=0}^{p-n} \frac{(b-c-q+n)_k (n-p)_k}{\Gamma(1+k)(1+b-c+2n)_k} (\Psi(b+n+k) - \Psi(b+n)) \\ \left. + \frac{\Gamma(c-b-2n)}{\Gamma(1+p-n)\Gamma(1+c-b+q-n)} \frac{\Gamma(1+p+q)}{\Gamma(1+n+q)} \frac{\Gamma(1+b-c+2n)}{\Gamma(1+b-c+n+p)} \Psi(b+n) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} b \leftrightarrow c \\ n \leftrightarrow -n \\ p \leftrightarrow q \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{A.23})$$

On a écrit ce résultat sous cette forme de manière à isoler les fonctions spéciales que l'on pourra sommer en utilisant la formule (A.18). Après quelques manipulations immédiates, on

arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) &= -\frac{\Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(b+n)\Gamma(c-n)} \left\{ (-1)^{p-n} \binom{p+q}{p-n} \times \right. \\
&\times \frac{\Gamma(c-b-n-p)}{\Gamma(1+c-b+q-n)} (\Psi(b+n) - \Psi(c-n)) + \left[ \frac{\pi}{\sin \pi b} \frac{\Gamma(c-b-p-n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(1+q+n)} \times \right. \\
&\times \left. \sum_{k=0}^{p-n-1} \frac{1}{n-p+k} \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{\Gamma(1+q+n+k)\Gamma(1-b-p+k)}{\Gamma(1+c-b+q-p+k)} + \left[ \begin{matrix} b \leftrightarrow c \\ n \leftrightarrow -n \\ p \leftrightarrow q \end{matrix} \right] \right] \left. \right\}. \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

On voit que si  $c = 1 - b$ , qui est le cas particulier dont on a besoin au chapitre 5, alors la différence des fonctions  $\Psi$  se réduit à une fonction tangente :

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \frac{\pi}{\tan \pi x}. \quad (\text{A.25})$$

L'un des points intéressants de ces formules est que le nombre de leurs termes est au plus égal à  $p+q$ , quelle que soit la valeur de  $n$ . Notons que dans les cas particuliers  $n = 0$  et  $\{p, q\} = 0, 1$ , la formule obtenue correspond aux expressions données par exemple dans la référence [Prudnikov 86].

On peut ainsi obtenir de nombreuses formules semblables en utilisant les relations entre les différentes fonctions  ${}_3F_2$ . L'une d'entre elles s'écrit :

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)\Gamma(c-b-n-p)}{\Gamma(b+n)\Gamma(c-n)\Gamma(1+c-b-n+q)} \times \\
&\times \sum_{i=0}^{p+q} \frac{(-1)^i}{n-p+i} \binom{p+q}{i} \left( 1 - \frac{\Gamma(b+n+i)}{\Gamma(b+p)} \frac{\Gamma(c-n)}{\Gamma(c-p+i)} \right). \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

(nous ne donnons pas la preuve ici, mais pour  $p < n$ , elle s'appuie principalement sur la formule (25) page 108 de la référence ref. [Luke 69]). Cette formule est visiblement analytique pour  $n > p$ , mais elle l'est également dans la limite  $n \equiv m \leq p$  : tous les termes ont un pôle du type  $1/(n-p+i)$ , mais son résidu s'annule et l'expression du membre de droite est finie.

On a vérifié numériquement que l'expression obtenue est correcte pour les valeurs de  $p$  et  $q$  qui nous intéressent. Ce n'est pas évident car le comportement asymptotique de la fonction  ${}_3F_2$  ne satisfait pas aux hypothèses du théorème de Carlson, et ainsi, il y a une infinité de prolongements analytiques possibles pour  $n > p$ .



# Bibliographie générale

---

- [Abramovsky 73] V. A. Abramovsky, V. N. Gribov & O. V. Kancheli. *Character of inclusive spectra and fluctuations produced in inelastic processes by multi-pomeron exchange*. *Yad. Fiz.*, vol. 18, pages 595–616, 1973.
- [Altarelli 77] G. Altarelli & G. Parisi. *Asymptotic freedom in parton language*. *Nucl. Phys.*, vol. B126, page 298, 1977.
- [Balitsky 78] I. I. Balitsky & L. N. Lipatov. *The pomeron singularity in quantum chromodynamics*. *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 28, pages 822–829, 1978.
- [Bartels 93] J. Bartels & H. Lotter. *A note on the BFKL pomeron and the 'hot spot' cross-section*. *Phys. Lett.*, vol. B309, pages 400–408, 1993.
- [Bartels 96] J. Bartels, L. N. Lipatov & M. Wusthoff. *Conformal invariance of the transition vertex  $2 \rightarrow 4$  gluons*. *Nucl. Phys.*, vol. B464, pages 298–318, 1996. hep-ph/9509303.
- [Bartels 97] J. Bartels, V. Del Duca & M. Wusthoff. *Azimuthal dependence of forward-jet production in DIS in the high-energy limit*. *Z. Phys.*, vol. C76, page 75, 1997. hep-ph/9610450.
- [Bialas 96a] A. Bialas & R. Peschanski. *Hard Diffraction From Quasi-Elastic Dipole Scattering*. *Phys. Lett.*, vol. B387, pages 405–410, 1996. hep-ph/9605298.
- [Bialas 96b] A. Bialas & R. Peschanski. *Hard diffraction in the QCD dipole picture*. *Phys. Lett.*, vol. B378, pages 302–306, 1996. hep-ph/9512427.
- [Bialas 98a] A. Bialas, H. Navelet & R. Peschanski. *High-mass diffraction in the QCD dipole picture*. *Phys. Lett.*, vol. B427, page 147, 1998. hep-ph/9711236.
- [Bialas 98b] A. Bialas, H. Navelet & R. Peschanski. *The QCD triple pomeron coupling from string amplitudes*. *Phys. Rev.*, vol. D57, pages 6585–6589, 1998. hep-ph/9711442.
- [Bialas 99] A. Bialas, H. Navelet & R. Peschanski. *Diffraction at small  $M^2/Q^2$  in the QCD dipole picture*. *Eur. Phys. J.*, vol. C8, page 643, 1999. hep-ph/9811345.
- [Bialas 00] A. Bialas, H. Navelet & R. Peschanski. *À paraître*. 2000.
- [Bjorken 69] J. D. Bjorken. *Asymptotic sum rules at infinite momentum*. *Phys. Rev.*, vol. 179, pages 1547–1553, 1969.
- [Bjorken 71] J. D. Bjorken, J. B. Kogut & D. E. Soper. *Quantum electrodynamics at infinite momentum : scattering from an external field*. *Phys. Rev.*, vol. D3, page 1382, 1971.
- [Bjorken 72] J. D. Bjorken. *Deep inelastic electroproduction*. 1972. Presented at Conf. on Particle Physics, Irvine, Calif., Dec 3-4, 1971.
- [Bloch 37] F. Bloch & A. Nordsieck. *Note on the radiation field of the electron*. *Phys. Rev.*, vol. 52, pages 54–59, 1937.



- [Brodsky 91] S. J. Brodsky & H. C. Pauli. *Light cone quantization of quantum chromodynamics*. 1991. Invited lectures given at 30th Schladming Winter School in Particle Physics : Field Theory, Schladming, Austria, Feb 27 - Mar 8, 1991.
- [Catani 90a] S. Catani, F. Fiorani & G. Marchesini. *QCD coherence in initial state radiation*. Phys. Lett., vol. B234, page 339, 1990.
- [Catani 90b] S. Catani, F. Fiorani & G. Marchesini. *Small- $x$  behavior of initial state radiation in perturbative QCD*. Nucl. Phys., vol. B336, page 18, 1990.
- [Catani 91] S. Catani, M. Ciafaloni & F. Hautmann. *High-energy factorization and small- $x$  heavy flavor production*. Nucl. Phys., vol. B366, pages 135–188, 1991.
- [Chen 95] Z. Chen & A. H. Mueller. *The dipole picture of high-energy scattering, the BFKL equation and many gluon compound states*. Nucl. Phys., vol. B451, pages 579–604, 1995.
- [Cheng 84] T. P. Cheng & L. F. Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. 1984. Oxford, UK : Clarendon 536 P. (Oxford Science Publications).
- [Ciafaloni 88] M. Ciafaloni. *Coherence effects in initial jets at small  $Q^2/s$* . Nucl. Phys., vol. B296, page 49, 1988.
- [Ciafaloni 98] M. Ciafaloni & G. Camici. *Energy scale(s) and next-to-leading BFKL equation*. Phys. Lett., vol. B430, pages 349–354, 1998. hep-ph/9803389.
- [Ciafaloni 99] M. Ciafaloni & D. Colferai.  *$k$ -factorization and impact factors at next-to-leading level*. Nucl. Phys., vol. B538, page 187, 1999. hep-ph/9806350.
- [Collins 77] P. D. B. Collins. *An introduction to Regge theory and high-energy physics*. 1977. Cambridge, 445p.
- [Collins 91] J. C. Collins & R. K. Ellis. *Heavy quark production in very high-energy hadron collisions*. Nucl. Phys., vol. B360, pages 3–30, 1991.
- [Dokshitzer 77] Yu. L. Dokshitzer. *Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and  $e^+e^-$  annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics*. Sov. Phys. JETP, vol. 46, pages 641–653, 1977.
- [Dokshitzer 80] Yu. L. Dokshitzer, D. Diakonov & S. I. Troian. *Hard processes in quantum chromodynamics*. Phys. Rept., vol. 58, page 269, 1980.
- [Donnachie 98] A. Donnachie & P. V. Landshoff. *Small- $x$  : Two pomerons!* Phys. Lett., vol. B437, pages 408–416, 1998. hep-ph/9806344.
- [Ellis 96] R. K. Ellis, W. J. Stirling & B. R. Webber. *QCD and collider physics*. 1996. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1996) 435 p. (Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology : 8).
- [Evanson 99] N. G. Evanson & J. R. Forshaw. *Diffraction photon production in  $\gamma$ - $p$  and  $\gamma$ - $\gamma$  interactions*. Phys. Rev., vol. D60, page 034016, 1999. hep-ph/9902481.
- [Faddeev 67] L. D. Faddeev & V. N. Popov. *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*. Phys. Lett., vol. B25, page 29, 1967.
- [Fadin 98] V. S. Fadin & L. N. Lipatov. *BFKL pomeron in the next-to-leading approximation*. Phys. Lett., vol. B429, pages 127–134, 1998. hep-ph/9802290.
- [Feynman 72] R. P. Feynman. *Photon-hadron interactions*. Benjamin, New York, 1972.
- [Forshaw 97] J. R. Forshaw & D. A. Ross. *Quantum chromodynamics and the pomeron*. Cambridge University Press (Cambridge lecture notes in physics. 9), 1997.

- [Geronimo 00] J. S. Geronimo & H. Navelet. *On certain two-dimensional integrals that appear in conformal field theory*. 2000. math-ph/0003019.
- [Gluck 92] M. Gluck, E. Reya & A. Vogt. *Pionic parton distributions*. Z. Phys., vol. C53, pages 651–656, 1992.
- [Gluck 94] M. Gluck, E. Reya & M. Stratmann. *Heavy quarks at high-energy colliders*. Nucl. Phys., vol. B422, pages 37–56, 1994.
- [Good 60] M. L. Good & W. D. Walker. *Diffraction dissociation of beam particles*. Phys. Rev., vol. 120, pages 1857–1860, 1960.
- [Gradshteyn 65] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1965.
- [Gribov 72] V. N. Gribov & L. N. Lipatov. *Deep inelastic ep scattering in perturbation theory*. Yad. Fiz., vol. 15, pages 781–807, 1972.
- [H1 95] Collaboration H1. *First measurement of the deep inelastic structure of proton diffraction*. Phys. Lett., vol. B348, pages 681–696, 1995. hep-ex/9503005.
- [H1 96] Collaboration H1. *Inclusive  $D_0$  and  $D_+^*$  - production in neutral current deep inelastic ep scattering at HERA*. Z. Phys., vol. C72, page 593, 1996. hep-ex/9607012.
- [H1 97a] Collaboration H1. *Determination of the longitudinal proton structure function  $F_L(x, Q^2)$  at low  $x$* . Phys. Lett., vol. B393, pages 452–464, 1997. hep-ex/9611017.
- [H1 97b] Collaboration H1. *The H1 detector at HERA*. Nucl. Instrum. Meth., vol. A386, page 310, 1997. Voir aussi <http://www-h1.desy.de>.
- [H1 97c] Collaboration H1. *Inclusive measurement of diffractive deep-inelastic ep scattering*. Z. Phys., vol. C76, page 613, 1997. hep-ex/9708016.
- [Halzen 84] F. Halzen & A. D. Martin. *Quarks and leptons : an introductory course in modern particle physics*. 1984. New York, Usa : Wiley 396p.
- [Harris 95] B. W. Harris & J. Smith. *Heavy quark correlations in deep inelastic electroproduction*. Nucl. Phys., vol. B452, pages 109–160, 1995. hep-ph/9503484.
- [Ingelman 85] G. Ingelman & P. E. Schlein. *Jet structure un high mass diffractive scattering*. Phys. Lett., vol. B152, page 256, 1985.
- [Ivanov 99] D. Y. Ivanov & M. Wusthoff. *Hard diffractive photon - proton scattering at large  $t$* . Eur. Phys. J., vol. C8, page 107, 1999. hep-ph/9808455.
- [Jung 99] H. Jung. *CCFM prediction for  $F_2$  and forward jets at HERA*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., vol. 79, page 429, 1999. hep-ph/9905554.
- [Kinoshita 62] T. Kinoshita. *Mass singularities of Feynman amplitudes*. J. Math. Phys., vol. 3, pages 650–677, 1962.
- [Kogut 70] J. B. Kogut & D. E. Soper. *Quantum electrodynamics in the infinite momentum frame*. Phys. Rev., vol. D1, pages 2901–2913, 1970.
- [Kovchegov 00a] Yu. V. Kovchegov. *Unitarization of the BFKL pomeron on a nucleus*. Phys. Rev., vol. D61, page 074018, 2000. hep-ph/9905214.
- [Kovchegov 00b] Yu. V. Kovchegov & A. H. Mueller, 2000. Communication privée.
- [Kuraev 76] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov & V. S. Fadin. *Multi-Reggeon processes in the Yang-Mills theory*. Sov. Phys. JETP, vol. 44, pages 443–450, 1976.

- [Kuraev 77] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov & V. S. Fadin. *The Pomeron singularity in nonabelian gauge theories*. Zh. Eksp. Teor. Fiz., vol. 72, pages 377–389, 1977.
- [Kwiecinski 95] J. Kwiecinski, A. D. Martin & P. J. Sutton. *The gluon distribution at small  $x$  obtained from a unified evolution equation*. Phys. Rev., vol. D52, pages 1445–1458, 1995. hep-ph/9503266.
- [Kwiecinski 96] J. Kwiecinski, A. D. Martin & P. J. Sutton. *Constraints on gluon evolution at small  $x$* . Z. Phys., vol. C71, pages 585–594, 1996. hep-ph/9602320.
- [le Bellac 88] M. le Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*. Éditions du CNRS, 1988.
- [Lee 64] T. D. Lee & M. Nauenberg. *Degenerate systems and mass singularities*. Phys. Rev., vol. 133, page B1549, 1964.
- [Lepage 80] G. Peter Lepage & S. J. Brodsky. *Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics*. Phys. Rev., vol. D22, page 2157, 1980.
- [Lipatov 86] L. N. Lipatov. *The bare Pomeron in quantum chromodynamics*. Sov. Phys. JETP, vol. 63, pages 904–912, 1986.
- [Luke 69] Y. L. Luke. *The special functions and their approximations*. Academic Press, 1969.
- [Marchal 00] N. Marchal & R. Peschanski. *Conformal couplings and 'azimuthal matching' of QCD pomerons*. Eur. Phys. J., vol. C14, page 503, 2000. hep-ph/9905378.
- [Marchesini 95] G. Marchesini. *QCD coherence in the structure function and associated distributions at small  $x$* . Nucl. Phys., vol. B445, pages 49–80, 1995. hep-ph/9412327.
- [Miettinen 78] H. I. Miettinen & J. Pumplin. *Diffraction scattering and the parton structure of hadrons*. Phys. Rev., vol. D18, page 1696, 1978.
- [Mueller 87] A. H. Mueller & H. Navelet. *An inclusive minijet cross-section and the bare pomeron in QCD*. Nucl. Phys., vol. B282, page 727, 1987.
- [Mueller 94a] A. H. Mueller. *Soft gluons in the infinite momentum wave function and the BFKL pomeron*. Nucl. Phys., vol. B415, pages 373–385, 1994.
- [Mueller 94b] A. H. Mueller & Bimal Patel. *Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high-energy hard processes*. Nucl. Phys., vol. B425, pages 471–488, 1994. hep-ph/9403256.
- [Mueller 95] A. H. Mueller. *Unitarity and the BFKL pomeron*. Nucl. Phys., vol. B437, pages 107–126, 1995. hep-ph/9408245.
- [Mueller 99] A. H. Mueller. *Small- $x$  physics, high parton densities and parton saturation in QCD*. 1999. Lectures given at International Summer School on Particle Production Spanning MeV and TeV Energies (Nijmegen 99), Nijmegen, Netherlands, 8-20 Aug 1999, hep-ph/9911289.
- [Navelet 96a] H. Navelet & R. Peschanski. *Conformal blocks in the QCD pomeron formalism*. 1996. hep-ph/9611396.
- [Navelet 96b] H. Navelet, R. Peschanski & C. Royon. *Deep inelastic onium scattering*. Phys. Lett., vol. B366, pages 329–336, 1996. hep-ph/9508259.
- [Navelet 96c] H. Navelet, R. Peschanski, C. Royon & S. Wallon. *Proton structure functions in the dipole picture of BFKL dynamics*. Phys. Lett., vol. B385, pages 357–364, 1996. hep-ph/9605389.

- [Navelet 97] H. Navelet & R. Peschanski. *Conformal invariance and the exact solution of BFKL equations*. Nucl. Phys., vol. B507, page 353, 1997. hep-ph/9703238.
- [Navelet 98a] H. Navelet & R. Peschanski. *Selection rules at the quark anti-quark vertex of the QCD pomeron*. Nucl. Phys., vol. B515, page 269, 1998. hep-ph/9709371.
- [Navelet 98b] H. Navelet & S. Wallon. *Onium - onium scattering at fixed impact parameter : Exact equivalence between the color dipole model and the BFKL pomeron*. Nucl. Phys., vol. B522, page 237, 1998. hep-ph/9705296.
- [Nikolaev 92] N. N. Nikolaev & B. G. Zakharov. *Pomeron structure function and diffraction dissociation of virtual photons in perturbative QCD*. Z. Phys., vol. C53, pages 331–346, 1992.
- [Nikolaev 94] N. N. Nikolaev & B. G. Zakharov. *The Triple pomeron regime and the structure function of the pomeron in the diffractive deep inelastic scattering at very small  $x$* . Z. Phys., vol. C64, pages 631–652, 1994. hep-ph/9306230.
- [Peschanski 99a] R. Peschanski. *Hard jet probes in terms of colorless QCD dipoles*. 1999. hep-ph/9910377.
- [Peschanski 99b] R. Peschanski. *On the QCD dipole content of hard photon and gluon probes*. In Proceedings of the High Energy Physics International Euroconference on Quantum Chromo Dynamics - QCD '99, Montpellier, France, 7-13 Jul 1999., 1999. hep-ph/9909359.
- [Potter 99] B. Potter. *Forward jet production at HERA*. 1999. hep-ph/9909320.
- [Prudnikov 86] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov & O. I. Marichev. *Integrals and series*. Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [Salam 96] G. P. Salam. *Quarkonium scattering at high energy*. Thèse de Doctorat, University of Cambridge, 1996.
- [Salam 99] G. P. Salam. *Soft emissions and the equivalence of BFKL and CCFM final states*. JHEP, vol. 03, page 009, 1999. hep-ph/9902324.
- [’t Hooft 74] G. ’t Hooft. *A planar diagram theory for strong interactions*. Nucl. Phys., vol. B72, page 461, 1974.
- [Wallon 96] S. Wallon. *Diffusion profondément inélastique à grande énergie en chromodynamique quantique perturbative*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud Orsay, 1996.
- [Watson 58] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge, 1958.
- [Weinberg 66] S. Weinberg. *Dynamics at infinite momentum*. Phys. Rev., vol. 150, pages 1313–1318, 1966.
- [Wilson 69] K. G. Wilson. *Nonlagrangian models of current algebra*. Phys. Rev., vol. 179, pages 1499–1512, 1969.
- [ZEUS 93] Collaboration ZEUS. *Status report*. Rapport technique, DESY, 1993. Voir aussi [http ://www-zeus.desy.de](http://www-zeus.desy.de).
- [ZEUS 95] Collaboration ZEUS. *Measurement of the diffractive structure function in deep elastic scattering at HERA*. Z. Phys., vol. C68, pages 569–584, 1995. hep-ex/9505010.
- [ZEUS 97] Collaboration ZEUS.  *$D^*$  production in deep inelastic scattering at HERA*. Phys. Lett., vol. B407, page 402, 1997. hep-ex/9706009.

- [Zimmermann 73] W. Zimmermann. *Normal products and the short distance expansion in the perturbation theory of renormalizable interactions*. Ann. Phys., vol. 77, pages 570–601, 1973.

# Publications personnelles

---

- [Munier I] S. Munier & R. Peschanski. *High energy factorization predictions for the charm structure function  $F_2^c$  at HERA*. Nucl. Phys., vol. B524, page 377, 1998. hep-ph/9802230. **Voir page 145.**
- [Munier I'] S. Munier.  *$k_{\perp}$ -factorization predictions for  $F_2^c$  at HERA*. Exposé présenté à la conférence “6th International Workshop on Deep Inelastic Scattering and QCD (DIS 98)”, Bruxelles, 4-8 Avril 1998. Publié dans les compte-rendus, 1998, p179-182. hep-ph/9805326.
- [Munier II] S. Munier, R. Peschanski & C. Royon. *Hard diffraction at HERA in the dipole model of BFKL dynamics*. Nucl. Phys., vol. B534, page 297, 1998. hep-ph/9807488. **Voir page 167.**
- [Munier III] S. Munier & R. Peschanski. *QCD, conformal invariance and the two pomerons* Eur. Phys. J., vol. C9, page 479, 1999. hep-ph/9811400. **Voir page 195.**
- [Munier IV] S. Munier & H. Navelet. *The (BFKL) pomeron  $\gamma^*\gamma$  vertex for any conformal spin*. Eur. Phys. J., vol. C13, page 651, 2000. hep-ph/9909263. **Voir page 211.**
- [Munier V] S. Munier. *Forward jets in the colour-dipole model*. Soumis à Phys. Rev. D, 2000. hep-ph/0004174. **Voir page 233.**



# Article I





# High energy factorization predictions for the charm structure function $F_2^c$ at HERA

S. Munier and R. Peschanski  
 CEA, Service de Physique Théorique, CE-Saclay  
 F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

## Abstract

High energy factorization predictions for  $F_2^c$  are derived using BFKL descriptions of the proton structure function  $F_2$  at HERA. The model parameters are fixed by a fit of  $F_2$  at small  $x$ . Two different approaches of the non perturbative proton input are shown to correspond to the factorization at the gluon or quark level, respectively. The predictions for  $F_2^c$  are in agreement with the data within the present error bars. However, the photon wave-function formulation (factorization at quark level) predicts significantly higher  $F_2^c$  than both gluon factorization and a next-leading order DGLAP model.

## 1 Motivation

High energy factorization [1,2] is a QCD factorization scheme suited for high-energy hard processes - and in particular for deep-inelastic  $e^\mp$ - $p$  scattering in the small  $x$ -regime ( $x \simeq \frac{Q^2}{W^2}$ ) ( $W^2$  is the energy squared in the virtual photon-proton center of mass frame). This scheme takes into account the resummation of the  $(\alpha_s \log \frac{1}{x})^n$  terms in the QCD perturbative expansion of the structure functions. It amounts to proving the factorization of the perturbative amplitude in terms of a gluon-gluon BFKL kernel [3] convoluted with a first order (virtual)photon-(virtual)gluon cross section. A graphical illustration of this property is given in figure 1. The main difference between this scheme and the renormalization group factorization [4] which is valid at finite  $x$  is that the former involves a bidimensional integration in transverse momentum  $k_\perp$ , whereas the latter is a convolution in energy. Interestingly enough, high energy factorization can be applied to the resummation of the  $(\alpha_s \log \frac{W^2}{M^2})^n$  terms in heavy quark pair photoproduction, and the combined resummation for heavy quark leptonproduction involving  $(\alpha_s \log \frac{W^2}{Q^2})^n$  and  $(\alpha_s \log \frac{W^2}{M^2})^n$  terms can also be studied [1]. Our aim is to test the high energy factorization predictions for the massive charm quark pair contribution to  $F_2$  at HERA.

In references [5,6], a formulation and a phenomenological analysis of the proton structure function  $F_2$  satisfying high energy factorization in the framework of Mueller's color dipole picture [7] of BFKL dynamics were proposed.  $F_2$  is the triple transverse momentum convolution of a coefficient function, the BFKL kernel and a non perturbative term. The non perturbative inputs, which can be interpreted as the density and size of primary dipoles in the parton sea of the proton [6], lead to a satisfactory description of  $F_2$  at HERA range, with 3 parameters. In this analysis, quarks were assumed massless, and the convolution integral was approximated by a steepest-descent method for sake of simplicity. However, since the coefficient functions were considered constant and the quarks massless, the procedure was not specifically a check of high energy factorization itself.

In the following, we shall discuss the high energy factorization predictions by taking full account of the convolution integral and of the massive quark component in the phenomenological analysis.

On the experimental point of view, the HERA experiments have recently published [8] data for the contribution of charmed meson production to the structure function  $F_2$ . Their analysis was based on  $D^0$  and  $D^*$  meson tagging. This allows to single out the charm contribution  $F_2^c$  to the total structure function and thus to investigate the quark mass dependence of the structure functions. We use this nice possibility to check whether the high energy factorization scheme gives a correct prediction for the mass-dependent contribution both in  $x$  and  $Q^2$ . Our analysis can be considered as the analog within the BFKL dynamics of the one which can be performed using ordinary renormalization group evolution [9, 10]. Thus, we are also aiming to see whether there are agreements or differences in charm lepton production between the different schemes available for analyzing deep-inelastic scattering.

However, the high energy factorization scheme adapted to the proton structure functions is not uniquely defined in terms of the separation between perturbative and non-perturbative contributions. Indeed, an *a priori* different factorization exists in which the virtual photon is described in terms of a quark-antiquark wave function configuration which then interacts with the proton (see for instance [11, 12]). One of our goals is to investigate the possible differences between the two schemes. Recently also, some theoretical doubt has been cast on the validity of the operator product expansion in the low- $x$  range due to the  $k_\perp$ -diffusion property [13] inherent to the BFKL dynamics. In the context of our structure function studies, we thus also want to discuss phenomenologically the kinematical range in  $x$  and  $Q^2$  where high energy factorization is valid and not spoiled by  $k_\perp$ -diffusion in the low momentum region.

The plan of our study is the following. Section 2 recalls the formulation of high energy factorization for the pair production of quarks of mass  $M$  in terms of the coefficient functions and unintegrated gluon distribution in the proton. We give the  $M$ -dependent expression of the coefficient functions. In section 3, we derive the expression of the proton structure function including the charm component in the framework of high energy factorization. We derive a new constraint on the unintegrated gluon distribution function due to the renormalization group property at high  $k_\perp$ . In section 4, we consider the alternative model of factorization based on the wave function formulation. We show the connection between the two models. We prove the equivalence at perturbative level between both schemes for the hard vertex while they are based on different non-perturbative inputs. In section 5, both models are applied to a phenomenological fit of  $F_2$  and parameter free predictions for  $F_2^c$ ,  $F_L$ , and  $F_L^c$ . The final section 6 contains our conclusions on the validity of the high energy factorization predictions at HERA and an outlook on future studies. Taking into account both present experimental and theoretical uncertainties, high energy factorization is proved to be in agreement with the present experimental data. However, more precise data could discriminate between the different schemes, since the photon wave function formulation predicts higher  $F_2^c$  than both the gluon factorization and a next-leading order DGLAP model.

## 2 High energy factorization

Let us compute the pair production of quarks of arbitrary mass  $M$  at the virtual photon vertex of deep-inelastic scattering (see figure 1). Using the high energy factorization scheme [1], the inclusive transverse (resp. longitudinal) structure functions  $F_T$  ( $F_L$ ) can be expressed as follows :

$$F_{T,L}(Y, Q^2, M^2) = \frac{1}{4\pi^2\alpha_{em}} \frac{Q^2}{4M^2} \int d^2k_\perp \int_0^\infty dy \hat{\sigma}_{\gamma^*g,T,L}(Y-y, q_\perp/M, k_\perp/M) \mathcal{F}(y, k_\perp) , \quad (1)$$

where  $Q^2 = -q^2$  is the virtuality of the photon.  $Y$  represents the rapidity range available for the reaction.  $\mathcal{F}(y, k_\perp)$  is the unintegrated gluon distribution [1], which describes the probability of finding a gluon with a longitudinal momentum fraction  $z = e^{-y}$  and two-dimensional transverse momentum  $k_\perp$  in the target.  $q_\perp$  is the photon transverse momentum in the photon-proton centre of mass frame.  $\hat{\sigma}_{\gamma^*g,T,L}$  is the hard cross section for (virtual)photon-(virtual)gluon fusion computed at order  $\alpha_s\alpha_{em}$ .

In order to express more easily high energy factorization, it is convenient to work with triple Mellin-transforms with respect to the rapidity  $Y$  and transverse momenta  $k_\perp$  and  $q_\perp$ . The result is :

$$F_{T,L}(Y, Q^2, M^2) = \frac{1}{4\pi^2\alpha_{em}} \frac{Q^2}{4M^2} \int \frac{d\gamma'}{2i\pi\gamma'} \left(\frac{4M^2}{Q^2}\right)^{\gamma'} \int \frac{d\gamma}{2i\pi\gamma} \left(\frac{4M^2}{Q_f^2}\right)^\gamma \int \frac{dN}{2i\pi} e^{YN} h_{T,L,N}(\gamma', \gamma) \mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2), \quad (2)$$

where  $Q_f^2$  stands for the factorization scale and the inverse Mellin-transforms in  $\gamma$ ,  $\gamma'$  and  $N$  are given by complex integrals along the axes  $\frac{1}{2} \pm i\infty$ ,  $\frac{1}{2} \pm i\infty$  and  $N_0 \pm i\infty$  ( $N_0$  larger than the real part of the rightmost singularity in the  $N$ -plane) respectively. By definition,  $h_{T,L,N}(\gamma', \gamma)$  is the triple inverse Mellin-transform of the hard  $\gamma^*$ -gluon cross-section, namely :

$$h_{T,L,N}(\gamma', \gamma) \equiv \gamma' \gamma \int \frac{d^2q_\perp}{\pi q_\perp^2} \left(\frac{q_\perp^2}{4M^2}\right)^{\gamma'} \int \frac{d^2k_\perp}{\pi k_\perp^2} \left(\frac{k_\perp^2}{4M^2}\right)^\gamma \times \int_0^\infty dY e^{-YN} \hat{\sigma}_{\gamma^*g,T,L}(Y, q_\perp/M, k_\perp/M). \quad (3)$$

$\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2)$  is obtained from the unintegrated gluon distribution  $\mathcal{F}(y, k_\perp)$ . It reads :

$$\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2) \equiv \int_0^\infty dy e^{-yN} \int \frac{d^2k_\perp}{\pi k_\perp^2} \left(\frac{k_\perp^2}{Q_f^2}\right)^{-\gamma} \mathcal{F}(y, k_\perp). \quad (4)$$

Note that the coefficient functions  $h_{T,L,N}$  are known to have a weak dependence on  $N$  [1], hence we will consider in the following only their values at  $N = 0$  denoted  $h_{T,L}(\gamma; M^2)$ .

The final expression for the high energy factorized structure function is

$$F_{T,L}(Y, Q^2, M^2) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{Q^2}{Q_f^2}\right)^\gamma h_{T,L}(\gamma; M^2) \frac{\mathcal{F}(Y, \gamma; Q_f^2)}{\gamma}, \quad (5)$$

where

$$\mathcal{F}(Y, \gamma; Q_f^2) = \int \frac{dN}{2i\pi} e^{YN} \mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2) \quad (6)$$

and the coefficient functions related to  $F_T$  and  $F_L$  respectively are [14] :

$$\begin{aligned}
 h_T(\gamma; M^2) = & \frac{\alpha_s}{6\pi} \frac{4^{-\gamma}}{(1+2\gamma)(1-\frac{2}{3}\gamma)} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma^3(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} \frac{1}{1+\frac{4M^2}{Q^2}} \times \\
 & \left\{ \left( \frac{4M^2}{Q^2} \right)^\gamma \left( (3\gamma-1) + \frac{4M^2}{Q^2}(\gamma-2) \right) + \left( 1 + \frac{4M^2}{Q^2} \right)^{\gamma-1} \times \right. \\
 & \left. \left( 2(1+\gamma)(2-\gamma) + \frac{4M^2}{Q^2}(7+\gamma-6\gamma^2 - \frac{4M^2}{Q^2}(\gamma-2)) \right) \times \right. \\
 & \left. {}_2F_1 \left( 1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+\frac{4M^2}{Q^2}} \right) \right\} \quad (7)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 h_L(\gamma; M^2) = & \frac{\alpha_s}{6\pi} \frac{4^{-\gamma}}{(1+2\gamma)(1-\frac{2}{3}\gamma)} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma^3(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} \frac{1}{1+\frac{4M^2}{Q^2}} \times \\
 & \left\{ \left( \frac{4M^2}{Q^2} \right)^\gamma \left( 2(1-\gamma) + 3\frac{4M^2}{Q^2} \right) + \left( 1 + \frac{4M^2}{Q^2} \right)^{\gamma-1} \times \right. \\
 & \left. \left( 4\gamma(1-\gamma) - \frac{4M^2}{Q^2} \left( 3\frac{4M^2}{Q^2} + 4(1-\gamma) \right) \right) \times \right. \\
 & \left. {}_2F_1 \left( 1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{1+\frac{4M^2}{Q^2}} \right) \right\} , \quad (8)
 \end{aligned}$$

where  ${}_2F_1(a, b; c; \zeta)$  is the hypergeometric function [15].

It is easy to check that in both limits  $M^2 \rightarrow 0$  (light quarks [16]) and  $Q^2 \rightarrow 0$  (heavy flavour photoproduction [1]), the well-known expressions for the coefficient functions are recovered.

Inserting the expressions (7,8) for  $h_{T,L}(\gamma; M^2)$  and a model for  $\mathcal{F}(Y, \gamma; Q_f^2)$  in formula (5), and summing over all active flavours weighted by their electric charges squared, we obtain the explicit expression for the proton structure functions.

### 3 The proton structure functions

Let us now introduce the QCD dipole model for the proton structure functions. This model satisfies high energy factorization and gives a phenomenological description of the unintegrated structure function  $\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2)$ , see (4), in the framework of BFKL dynamics. We parametrize the factor

$$\frac{\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2)}{\gamma} = \frac{\omega_N(\gamma; Q_f^2)}{N - \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma)} . \quad (9)$$

Notice the factor  $1/\gamma$  which corresponds to the  $k_\perp$  integration in Mellin transform and thus,  $\omega_N(\gamma; Q_f^2)$  appears as the residue of the BFKL pole in the integrated gluon distribution in the target.  $\mathcal{F}_N$  is assumed to contain the well-known BFKL singularity [3] at  $N = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma)$  with

$$\chi(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1-\gamma) . \quad (10)$$

The function  $\omega_N(\gamma; Q_f^2)$  will explicitly depend on the nature of the target. It may also contain other singularities than the BFKL pole, which will be discussed later on. For a target of small

size (parton, massive onium), it can be deduced from perturbative calculations, whereas for extended targets like a proton, it is supplied by a model.

Following the suggestion of ref. [6], one assumes for the proton structure functions the following scaling form :

$$\omega_{N \simeq 0}(\gamma; Q_f^2) = \omega(\gamma) \left( \frac{Q_f}{Q_0} \right)^{2\gamma}, \tag{11}$$

where  $\omega(\gamma)$  and  $Q_0$  are the non-perturbative inputs of the model. Indeed, the scaling assumption (11) is the simplest one allowing to obtain formulae independent of the arbitrary factorization scale  $Q_f$  (see equation (5)). Note that  $Q_0$  can be considered to be independent of the quark mass  $M$ , which is quite a reasonable assumption for a non perturbative proton parameter. Inserting (9) and the expressions for the coefficient functions (7,8) in equation (5), and taking into account the scaling (11), the overall formula reads :

$$\begin{aligned} F_{T,L}(x, Q^2; Q_0^2) &= \sum_{\mathcal{Q}} e_{\mathcal{Q}}^2 F_{T,L}(Y_{\mathcal{Q}}, Q^2, M_{\mathcal{Q}}^2; Q_0^2) \\ &= \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{\gamma} \omega(\gamma) \int \frac{dN}{2i\pi} \frac{\sum_{\mathcal{Q}} e_{\mathcal{Q}}^2 e^{Y_{\mathcal{Q}} N} h_{T,L}(\gamma; M_{\mathcal{Q}}^2)}{N - \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma)}, \end{aligned} \tag{12}$$

where

$$Y_{\mathcal{Q}} = \log \frac{1}{x(1 + \frac{4M_{\mathcal{Q}}^2}{Q^2})} \tag{13}$$

is the maximal available rapidity range for the produced gluons in association with quarks of mass  $M_{\mathcal{Q}}$ . The summation  $\sum_{\mathcal{Q}}$  takes into account the contributions of all active flavours with charge  $e_{\mathcal{Q}}$ , mass  $M_{\mathcal{Q}}$ .

The unintegrated gluon distribution in the proton  $\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2)$  is thus model dependent in particular through the input function  $\omega(\gamma)$ . However, let us show that it obeys a theoretical constraint when  $\gamma$  goes to infinity [17]. Indeed, as we shall demonstrate, this limit corresponds to a situation in which the intermediate gluon emitted from the dipole (see fig.1) has a large transverse momentum  $k_{\perp}$ . Hence its evolution from  $Q_0^2$  up to  $k_{\perp}^2$  is governed by the gluon-gluon DGLAP evolution equation (in its small- $x$  approximation).

Let us then consider formula (4) and single out the integration region  $k_{\perp}^2 \gg Q_0^2$ . In this hard region where  $k_{\perp}$ -ordering of intermediate gluons is valid, the unintegrated gluon distribution is simply related to  $\mathcal{G}(Y, k_{\perp}^2)$ , the gluon distribution function in the proton at the scale  $k_{\perp}^2$ , by :

$$\mathcal{F}(Y, k_{\perp}^2) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dk_{\perp}^2} \mathcal{G}(Y, k_{\perp}^2). \tag{14}$$

Introducing the Mellin transform in rapidity, the gluon-gluon DGLAP evolution equation at small  $x$  (small  $N$ ) reads

$$\int_0^{\infty} dY e^{-YN} \mathcal{G}(Y, k_{\perp}^2) \equiv \mathcal{G}_N(k_{\perp}^2) \simeq \left( \frac{k_{\perp}^2}{Q_0^2} \right)^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi N}} \mathcal{G}_N(Q_0^2). \tag{15}$$

Inserting formula (15) into equation (4) (for  $k_{\perp}^2 \gg Q_0^2$ ), one gets a contribution

$$\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2) \underset{|\gamma| \rightarrow \infty}{\simeq} \left( \frac{Q_f^2}{Q_0^2} \right)^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi N}} \frac{1}{\gamma - \frac{\alpha_s N_c}{\pi N}} \mathcal{G}_N(Q_0^2), \tag{16}$$

where  $\gamma = \frac{\alpha_s N_c}{\pi N}$  is the well-known DGLAP singularity when  $N$  goes to 0.

As well-known, when  $\gamma$  is small  $\chi(\gamma) \simeq 1/\gamma$  and the BFKL pole (9) can be approximated by

$$\frac{1}{N - \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma)} \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\gamma - \frac{\alpha_s N_c}{\pi N}} \frac{\gamma}{N} \quad (17)$$

and thus coincides with the DGLAP pole (16). However, in the large  $|\gamma|$  region,  $|\chi(\gamma)| \simeq 2 \log |\gamma|$  and thus the DGLAP pole at  $\gamma = \frac{\alpha_s N_c}{\pi N}$  is separated from the BFKL singularity and dominates over it at small  $N$ .

Integrating over this dominant singularity in the inverse Mellin transform (6), we observe that the unintegrated structure function  $\mathcal{F}$  satisfies the constraint

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{Q_0^2}{Q_f^2} \right)^\gamma \frac{\mathcal{F}(\gamma, Y; Q_f^2)}{\gamma} \right|_{|\gamma| \rightarrow \infty} &\simeq \left| \frac{\alpha_s N_c}{\pi \gamma^3} e^{Y \frac{\alpha_s N_c}{\pi \gamma}} \mathcal{G}_{\frac{\alpha_s N_c}{\pi \gamma}}(Q_0^2) \right| \\ &\sim \frac{\alpha_s N_c}{\pi |\gamma|^3} \mathcal{G}_{N \simeq 0}(Q_0^2) \end{aligned} \quad (18)$$

assuming a regular input  $\mathcal{G}_{N \simeq 0}(Q_0^2)$ . On the other hand, the large  $|\gamma|$  behaviour of the coefficient functions is given by

$$\begin{aligned} h_{T,L}(\gamma; M^2) &\underset{\gamma \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma^3(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)} {}_2F_1(1-\gamma, 1/2; 3/2; 1) \times \\ &\quad \times \left\{ \text{terms of the form } \gamma^\alpha \left( \frac{4M^2}{Q^2} \right)^\beta \right\} \\ &\sim e^{-\pi|\gamma|} \times \{ \text{Power-like terms} \} , \end{aligned} \quad (19)$$

and thus gives an exponential cutoff at  $\gamma \simeq \frac{1}{\pi}$ .

The following remarks are in order :

- The obtained behaviour (16) for  $\mathcal{F}_N(\gamma; Q_f^2)$  at  $|\gamma|$  large is in agreement with the scaling assumption (11) at the pole  $\gamma = \frac{\alpha_s N_c}{\pi N}$ .
- Most importantly, the large  $|\gamma|$  behaviour of the coefficient functions  $|h_{T,L}(\gamma, M^2)| \simeq e^{-\pi|\gamma|}$  dominates over the unintegrated structure function  $\mathcal{F}(Y, \gamma; Q_f^2)$  which is only power-like in  $\gamma$ , showing that the main integration region is for finite  $|\gamma| \leq \frac{1}{\pi}$ .
- The large  $|\gamma|$  behaviour of  $\mathcal{F}(Y, \gamma; Q_f^2)$  is actually not dominated by the BFKL singularity but by the DGLAP singularity which differ in this domain. However, we shall neglect this modification occurring in a domain where the integrand is cutoff by the coefficient functions. A more detailed analysis of high energy factorization could need taking care of this modification.

## 4 High energy factorization at the quark level

In the previous section, we have found that the main integration region is for finite  $|\gamma|$ . In fact, the structure of the integrand singularity at  $\gamma = 0$  appears to be essential both for the theoretical analysis and the phenomenological application. We note that in formulae (7) and (8) for the coefficient functions,  ${}_2F_1(1-\gamma, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1/(1+4M^2/Q^2)) \propto 1/\gamma$  when  $\gamma$  goes to 0. We thus find that the Mellin-transform  $h_{T,L,N}(\gamma; M^2)/\gamma$  of  $\hat{\sigma}$  in formula (1) has in general a double pole at  $\gamma = 0$  (but for e.g.  $h_L$  when  $M^2 = 0$ ). It is easy to realize that this double pole corresponds to an extra  $(\log k_\perp^2/Q^2)$  in the small  $k_\perp$ -behaviour of the hard photon-gluon

cross section due to the quark propagator (see fig.1). This behaviour is thus characteristic of the high energy factorization formalism at the perturbative level.

However, it is well-known [18] that there is an ambiguity in the separation between perturbative and non perturbative contributions in the small- $k_{\perp}$  domain. The relevance of the perturbative double pole depends on the physical picture of the non perturbative input. For definiteness, we will consider two classes of models relying on different hypotheses on the behaviour of the residue function  $\omega(\gamma)$  near  $\gamma = 0$ . In the first type of models, with

$$\omega(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} (\text{constant}) , \quad (20)$$

one keeps the full perturbative information on the  $\gamma^*$ -gluon vertex. This corresponds to the *factorization at the gluon level* (see fig.1). In the second class of models, the perturbative singularity at the hard vertex is smoothed by the proton scaling function (11), namely

$$\omega(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} (\text{constant}) \times \gamma . \quad (21)$$

The resulting single pole at the hard vertex may be interpreted as a direct pointlike coupling of the virtual photon to the quark. This may be interpreted as a *factorization at the quark level* (see fig.1).

In summary, either the contribution of the off-shell gluon at the hard vertex is maintained, or it is compensated by the non perturbative input. In the first case (model 1), the hard photon is assumed to probe the gluon content of the target, and consequently, the  $1/\gamma^2$  singularity of the coefficient functions is preserved. In the latter case (model 2), the photon probes the quark distribution and thus the coefficient function double pole can be compensated by the proton scaling function  $\omega(\gamma) \propto \gamma$  when  $\gamma$  goes to 0, see formula (12).

As we shall see, a prototype of model 2 is provided by the wave function formulation of the photon-proton interaction [11, 12]. In this framework, deep-inelastic scattering processes are formulated in terms of the probability distribution of a  $Q\bar{Q}$  pair (considered as a dipole configuration) in the virtual photon, convoluted by the dipole-proton cross section. In our case, the dipole-proton cross-section is described by the convolution of the probability distribution of primordial dipoles in the proton times the dipole-dipole BFKL cross-section [7]. This will allow a direct comparison between model 1 and 2, which have a similar parametrization differing only by the pole structure at  $\gamma = 0$ .

In references [11, 12], one finds the expressions for the wave function and probability distribution of the photon  $Q\bar{Q}$  states. The virtual photon can be described in terms of probability distributions (when the interference terms [19] are not relevant) depending on the quark mass  $M$  and charge  $e$

$$\begin{aligned} \Phi_T^\gamma(z, r; Q^2, M^2) &= \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} e^2 ((z^2 + (1-z)^2) \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r) + M^2 K_0^2(\epsilon r)) , \\ \Phi_L^\gamma(z, r; Q^2, M^2) &= \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} 4e^2 Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r) , \end{aligned} \quad (22)$$

where  $\epsilon^2 = z(1-z)Q^2 + M^2$ , and the  $K_{0,1}$  are the Bessel functions of second kind [15].  $\Phi_{T,L}^\gamma(z, r; Q^2, M^2)$  are the probability distributions of finding a dipole configuration of transverse size  $r$  at a given  $z$ , the variable  $z$  (resp.  $(1-z)$ ) being the photon light-cone momentum fraction carried by the antiquark (resp. quark).

The transverse and longitudinal total cross sections  $\sigma_{T,L}$  read

$$\sigma_{T,L} = \int d^2 r dz \Phi_{T,L}^\gamma(r, z; Q^2, M^2) \int d^2 r_p dz_p \Phi^p(r_p, z_p) \sigma_d(r, r_p; Y) , \quad (23)$$



where we have introduced the probability distributions  $\Phi^p(r_p, z_p)$  of dipoles inside the proton [5, 6, 20]. The dipole-dipole cross section  $\sigma_d(r, r_p; Y)$  is assumed not to depend on  $z$ . This hypothesis means that we neglect sub-asymptotic effects related to the momentum carried by the quarks (while we do not neglect the quark masses). In practice, it corresponds to consider  $N \simeq 0$  in the Mellin-transform with respect to rapidity as in section 2.

$\sigma_d(r, r_p; Y)$  reads [7, 20, 21] :

$$\sigma_d(r, r_p; Y) = 4\pi r r_p \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2\gamma-1} e^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma) Y} A_{el}(\gamma) , \quad (24)$$

where  $\chi(\gamma)$  is the BFKL kernel (10) and the elementary two-gluon exchange amplitude is given by

$$A_{el}(\gamma) = \frac{\alpha_s^2}{16\gamma^2(1-\gamma)^2} . \quad (25)$$

We define the non-perturbative scale  $Q_0$  characterizing the average dipole size by [20]

$$\int d^2 r_p r_p^{2\gamma} \int dz_p \Phi^p(r_p, z_p) \equiv \frac{n_{eff}(\gamma)}{(Q_0^2)^\gamma} , \quad (26)$$

where  $n_{eff}$  can be interpreted as the  $\gamma$ -dependent average number of primary dipoles in the proton. Finally, the Mellin-transform of the photon wave-function is defined by :

$$\int \frac{d^2 r}{2\pi} (r^2)^{1-\gamma} \int dz \Phi_{T,L}^\gamma(r, z; M^2) = \phi_{T,L}(\gamma; M^2) (Q^2)^{\gamma-1} , \quad (27)$$

where we have explicitly factorized the photon scale dependence. After plugging these formulae into equation (23), and performing the integrations with respect to  $r$ ,  $r_p$  and  $z$ ,  $z_p$  one finds :

$$\sigma_{T,L} = \frac{32\pi^2}{Q^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^\gamma e^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma) Y} \phi_{T,L}(\gamma; M^2) A_{el}(\gamma) n_{eff}(\gamma) . \quad (28)$$

Inserting the virtual photon probability distribution  $\Phi_{T,L}^\gamma(r, z; Q^2, M^2)$  into equation (27) and after a straightforward but tedious calculation, one finds expressions for  $\Phi_{T,L}(\gamma; M^2)$  which can be cast into the following form :

$$\phi_{T,L}(\gamma; M^2) = \frac{\alpha_{em} e^2 N_c}{\alpha_s} \frac{h_{T,L}(\gamma; M^2)}{4\pi \gamma} \left\{ 2^{-2\gamma+3} (1-\gamma)^2 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \right\} , \quad (29)$$

where  $h_{T,L}(\gamma; M^2)/\gamma$  is related to the Mellin transform of  $\hat{\sigma}$  accounted for in the preceding section (see equation (3)). It is clear from formula (29) that the double pole of  $h_{T,L}(\gamma; M^2)/\gamma$  is turned into a single pole due to the factor  $\{...\}$ . This shows that the factorization of the probability distributions  $\phi_{T,L}(\gamma; M^2)$  at the hard vertex leads to the singularity structure (21) of model 2.

Some comments are in order :

- The  $\gamma$ -dependent but  $M^2$ -independent factor  $\{...\}$  is nothing but the coupling of the virtual gluon to the  $Q\bar{Q}$  pair configuration of the virtual photon wave function. Indeed, the two-gluon exchange elementary amplitude (25) can be rewritten as

$$A_{el}(\gamma) = \frac{\alpha_s^2}{16\gamma^2(1-\gamma)^2} = \alpha_s^2 v(\gamma) v(1-\gamma) , \quad (30)$$

with

$$v(\gamma) = \frac{2^{-2\gamma-1} \Gamma(1-\gamma)}{\gamma \Gamma(1+\gamma)} \quad (31)$$

which is, up to a factor  $\frac{\alpha_s N_c}{\pi}$ , the eikonal coupling of a gluon to a dipole [6, 22] at the lower vertex. Thus, the factorized factor  $\{\dots\}$  is nothing else than  $v(1-\gamma)$ , i.e. the coupling of the gluon to the photon's dipole configuration, as shown in figure 1.

- Using (30,31), equation (29) can be rewritten

$$A_{el}(\gamma) \cdot \phi_{T,L}(\gamma; M^2) = \alpha_{em} \frac{\alpha_s N_c}{4\pi} v(\gamma) \cdot \frac{h_{T,L}(\gamma; M^2)}{\gamma} . \quad (32)$$

In the hard perturbative domain where we consider a photon-dipole interaction with a dipole of small size, formula (32) means that both high energy factorization and the wave-function formalism are identical. The cross section can be equivalently factorized in two ways : either by the convolution of the photon gluon cross section times the gluon coupling to the dipole (right hand side), or by the probability distribution of a pair of quarks in the photon times the dipole-dipole elementary interaction (left hand side).

However, as previously discussed, the non perturbative input may lead to distinguishable models.

- At the level of the non perturbative input, we note a relation between the two formulations (12) and (23), namely

$$\omega(\gamma) = \frac{2\alpha_s N_c}{\pi} n_{eff}(\gamma) \frac{v(\gamma)}{\gamma} , \quad (33)$$

which generalizes the result for  $M = 0$ , obtained in ref. [6].

## 5 Phenomenology

Following our theoretical discussions of the previous sections, we will consider two definite models relying on different formulations of the residue function  $\omega(\gamma)$ . On the one hand, the model 1, with

$$\omega(\gamma) = C_1 \text{ (constant)} \quad (34)$$

corresponds to the factorization at the gluon level (see figure 1). On the other hand, in the wave function formulation of the dipole model of section 4, we can reformulate the integrand of the structure function (see equation (12)) by using relation (32), namely :

$$\frac{h_{T,L}(\gamma)}{\gamma} \cdot \omega(\gamma) = \left( \frac{4\pi\alpha_s}{\alpha_{em} N_c} \right) \phi(\gamma) \cdot \omega(\gamma) \cdot v(1-\gamma) . \quad (35)$$

In the model 2, the hard vertex is thus described by factorizing  $\phi(\gamma)$  which means that we consider

$$\omega(\gamma) \cdot v(1-\gamma) = C_2 \text{ (constant)} . \quad (36)$$

As expected,  $\omega(\gamma)$  behaves like  $\gamma$  when  $\gamma$  goes to zero in this framework. In the large  $|\gamma|$  region ( $\gamma = 1/2 + i\nu$ ,  $\nu$  goes to infinity), one has  $|\omega(\gamma)| \simeq |C_2/v(1-\gamma)| \propto |\gamma|^2$ . The exponential cutoff of  $\phi_{T,L}$  is the same as the one (19) of the coefficient function and thus the large  $|\gamma|$  constraint is satisfied. Note that, in both cases, the proton structure functions depend on three free

parameters only : the global normalization  $C_1$  or  $C_2$ , the effective constant strong coupling  $\alpha_s$ , and the non perturbative scale  $Q_0$ .

We determine these parameters for the two models by a fit of  $F_2 = F_T + F_L$  in their kinematical region of validity ( $x \leq 10^{-2}$ ). In this region,  $Q^2$  is automatically limited by the HERA kinematics. Using the corresponding 103 experimental points given by the H1 collaboration [23], we fit our results with the contribution of the three light quarks  $u, d, s$  (assumed massless) and of the charm quark (mass  $M_c$ ). As usual, we will vary  $M_c$  in the range 1.35 – 1.7 GeV [8].

The  $F_2$ -fit for the medium mass  $M_c = 1.5$  GeV is displayed in figure 2, together with the predictions for its charm component  $F_2^c$ . In table I, we give the  $\chi^2$  and the value of the fit parameters for the fits for model 1 and 2 and for  $M_c = 1.35, 1.5,$  and  $1.7$ . For model 1, the  $\chi^2$  per point is always less than 0.9, while for model 2 it is even lower.

Some comments on the parameter values are in order. For fit 1, the value of  $Q_0$  is around 330 MeV which is a typical non perturbative scale for the proton. The value of the effective coupling constant in the BFKL mechanism  $\alpha_s$  (0.07) is rather low. This value would amount to an effective pomeron intercept  $\alpha_P = 1 + \alpha_s N_c 4 \log 2 / \pi \simeq 1.18$ . (It is known that  $\alpha_P$  is influenced by sub-leading corrections to the BFKL kernel, see e.g. references [24]). Note that the fit of model 1 for  $F_2$  in the framework of the QCD dipole model and high energy factorization is compatible with the previous ones in the same framework [6].

We also in parallel performed the phenomenological analysis using the model 2-ansatz (36). The obtained fit reproduces fairly well the data for  $F_2$  (see figure 2). As indicated by the lower value of  $\chi^2$ , it seems that the data, especially in the small- $x$  small- $Q^2$  region are even better reproduced than for model 1. Note that the value of  $Q_0 \simeq 1.2$  is substantially higher and the effective coupling constant  $\alpha_s$  is larger ( $\simeq \alpha_s(M_Z)$ ).

Following the factorization scheme and using formulae (5) (model 1) or (23) (model 2), we obtain now parameter-free predictions for the longitudinal structure functions  $F_L$  and  $F_L^c$  (see figure 3). The predictions for  $F_L$  and  $F_L^c$  are shown together with the indirect H1 determination of  $F_L$  [25]. As expected,  $F_L^c$  becomes a significant part of  $F_L$  at small  $x$  and high  $Q^2$ . As already noticed [6], the predictions are low but compatible with the present large error bars. Note also that the determination [25] depends on the theoretical scheme one considers [26], so it is difficult to draw any conclusion on  $F_L$  at this stage.

The main outcome of our analysis is a parameter free prediction for  $F_2^c$ , the charm component of the structure function (see fig.4). When compared to ZEUS and H1 data for the charm component in the same range in  $x$  and  $Q^2$  [8], we find a good agreement within the present experimental error bars. The extrapolation of the prediction to the kinematical range of EMC data is correct while the dipole model is not expected to be valid in this region.

Looking in more detail to the predictions of model 1 (figure 4-a) and model 2 (figure 4-b), we observe the following features. The dispersion of the results with respect to  $M_c$  is rather small for fit 1 with a maximum of 10% when  $x$  reaches  $10^{-4}$ . Moreover, the prediction is comparable to the next-leading order prediction [9] based on the GRV parton distribution set [27] which proves that  $F_2^c$  cannot allow one to distinguish between the two approaches.

For model 2, the predictions obtained for  $F_2^c$  are displayed in figure 4-b. The prediction for the HERA region is quite satisfactory and, interestingly enough, somewhat higher than both the NLO predictions [9] and fit 1. It would certainly be useful to deserve some experimental and theoretical attention to this difference. Indeed, the scheme of model 2 which is based on a different factorization than both GRV and model 1 could lead to a better understanding of the data. A sensible decrease of the experimental errors on  $F_2^c$  in the region where  $Q^2$  is moderate (of the order 10 GeV<sup>2</sup>) and  $x$  small (of the order  $10^{-3}$ ) could allow a refinement of this analysis.

All in all, the comparison of fits 1 and 2 shows that the high energy factorization predic-

tion for  $F_2^c$  depends on the non-perturbative input in the HERA range. Indeed, a different factorization scheme such as model 2 corresponds to a modification of the non perturbative input of high energy factorization. However, the largest uncertainty due to this effect is of the order 20% and less than the experimental uncertainty. Thus, there is no present evidence of a distinction between these schemes and the DGLAP scheme.

## 6 Conclusions and outlook.

Let us summarize the results of our analysis.

- (i) High energy factorization [1] gives predictions for the  $x$  and  $Q^2$  behaviour of  $F_2^c$  at low  $x$  in the framework of models based on the BFKL dynamics. The charm prediction is fixed by high energy factorization once the total proton structure function  $F_2$  is fit. More generally, this prediction is well defined for any quark mass.
- (ii) The factorization of the hard virtual photon vertex at the level of the exchanged gluon (model 1) or the exchanged quark (model 2) leads to two specific classes of models which both give a satisfactory fit of  $F_2$ . The formulation [11,12] based on the virtual photon wave function is shown to lead to a physical realization of model 2.
- (iii) Both models lead to predictions for  $F_2^c$  in agreement with the present data. However, the second scheme leads to a higher  $F_2^c$  than both model 1 and NLO DGLAP predictions [8]. This justifies further experimental and theoretical studies.
- (iv) The derivation leads to a new constraint on the unintegrated gluon distribution in the proton due to the renormalization group evolution at high transverse momentum of the off-shell gluon.

It is interesting to discuss the gluon distribution functions in this framework. In the high energy factorization scheme, it would consist in an expression like (12), replacing the coefficient functions by unity. However, the convergence of the integral (12) is then not *a priori* preserved and even if convergent, the dependence of the result on the large  $|\gamma|$  region would be larger, casting a doubt on the relevance of the BFKL dynamics. In the wave-function framework, the extraction of the gluon structure function is even more problematic since the factorization is at the quark level (see fig.1). On a more general ground, this confirms the statement of caution [14] about extracting the gluon from this kind of analysis, especially at low  $x$ . We think that this point deserves more studies.

Finally, the running of the coupling constant and other aspects of next leading order BFKL resummation features have been neglected in the present analysis. The small value obtained for the effective coupling constant in the fits clearly indicates that such effects are important and should be included in a more detailed analysis. Indeed, a preliminary theoretical hint on the effective behaviour of the pomeron singularity at NLO accuracy leads to a small and constant intercept of the order 0.2 [24]. A NLO BFKL analysis of  $F_2^c$  would thus be required in view of a future improvement of the experimental analysis.

## Acknowledgments

We thank Stefano Catani for fruitful discussions and Henri Navelet and Christophe Royon for stimulating remarks.

## References

- [1] S. Catani, M. Ciafaloni, F. Hautmann, *Nucl. Phys.* **B366** (1991) 135.

- [2] J. C. Collins, R. K. Ellis, *Nucl. Phys.* **B360** (1991) 3.  
E. M. Levin, M. G. Ryskin, Yu. M. Shabelskii, A. G. Shuvaev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **53** (1991) 657.
- [3] V. S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, *Phys. Lett.* **B60** (1975) 50 ;  
I. I. Balitsky and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.
- [4] See for instance J.C. Collins, D.E. Soper, G. Sterman, in *Perturbative quantum chromodynamics*, ed. A.H. Mueller (*World Scientific*, Singapore, 1989).
- [5] H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, *Phys. Lett.* **B366** (1995) 329.
- [6] H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, S. Wallon, *Phys. Lett.* **B385** (1996) 357.
- [7] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 373.  
A. H. Mueller, B. Patel, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 471.  
A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 107.
- [8] H1 Coll., C. Adloff et al., *Z. Phys.* **C72** (1996) 593 ;  
ZEUS Coll., J. Breitweg et al., *Phys. Lett.* **B407** (1997) 402.
- [9] B. W. Harris and J. Smith, *Nucl. Phys.* **B452** (1995) 109, quoted by the ZEUS Coll. in the second paper of ref. [8].
- [10] M. Glück, E. Reya and M. Stratmann, *Nucl. Phys.* **B422** (1994) 37.  
M. Buza, Y. Matiounine, J. Smith, W. L. van Neerven, *Phys. Lett.* **B411** (1997) 211 and references therein.  
R. S. Thorne and R.G. Roberts, hep-ph/9709442, hep-ph/9711223 and references therein.
- [11] J. D. Bjorken, J. B. Kogut, D. E. Soper, *Phys. Rev* **D3** (1971) 1382.
- [12] N. N. Nikolaev, B. G. Zakharov, *Phys. Lett.* **B332** (1994) 184.
- [13] A. H. Mueller, *Phys. Lett.* **B396** (1997) 251.
- [14] S. Catani, *Z. Phys.* **C75** (1997) 665.
- [15] P.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals series and products*, (*Academic Press*, New York and London, 1965).
- [16] S. Catani, F. Hautmann, *Nucl. Phys.* **B427** (1994) 475-524.
- [17] We thank S. Catani for suggesting to us these remarks.
- [18] S. Catani, *Z. Phys.* **C70** (1996) 263.
- [19] A. Bialas, R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 405.
- [20] A. Bialas, *Acta Phys. Pol.* **B28** (1997) 1239.
- [21] R. Peschanski, unpublished.
- [22] S. Wallon, *Thèse de doctorat*, Orsay, 1996.
- [23] H1 Coll., T. Ahmed et al., *Phys. Lett.* **B348** (1995) 681 ;  
ZEUS Coll., M. Derrick et al., *Z. Phys.* **C68** (1995) 569.
- [24] M. Ciafaloni, hep-ph/9709390 and references therein.
- [25] H1 Coll., C. Adloff et al., *Phys. Lett.* **B393** (1997) 452.
- [26] R. S. Thorne, *Phys. Lett.* **B392** (1997) 463,  
hep-ph/9708302, *Nucl. Phys.* **B512** (1998) 323.
- [27] M. Glück, E. Reya and A. Vogt, *Z. Phys.* **C67** (1995) 27.

## TABLE CAPTION

Table I

*Total proton structure function :  $\chi^2$  and parameters for the fits*

For each model, we give the  $\chi^2$  value for 103 points and the parameters  $C$ ,  $Q_0$  and  $\alpha_s$ . Three different charm masses,  $M_c = 1.35, 1.5, 1.7$  GeV are considered. **I-a.** Model 1. **I-b.** Model 2.

$M_c$	$\chi^2$	$C_1$	$Q_0$	$\alpha_s$
1.35	77	19.88	0.334	0.070
1.50	82	20.27	0.326	0.070
1.70	88	20.70	0.321	0.070

**a.** Model 1

$M_c$	$\chi^2$	$C_2$	$Q_0$	$\alpha_s$
1.35	51	8.68	1.208	0.105
1.50	51	9.22	1.215	0.104
1.70	52	9.86	1.227	0.103

**b.** Model 2

Table I

## FIGURE CAPTIONS

### Figure 1 *Quark-antiquark pair leptonproduction at high energy*

The upper vertex represents the virtual photon (with momentum  $q$ )-virtual gluon (with momentum  $k$ ) fusion diagram through the production of a pair of quarks of mass  $M$ . The proton (with momentum  $p$ ) interacts with the gluon through the BFKL kernel. The non perturbative proton vertex is schematized by the shaded area. Model 1 corresponds to factorization at the gluon level, model 2 at the quark level, see text.

### Figure 2 *The fits (model 1 and model 2) for the structure function $F_2$*

The structure function  $F_2$  and its parametrization are displayed for model 1 and model 2. The fits have been performed with the 1994 H1 data (triangles) but only using the 103 experimental points for which  $x \leq 10^{-2}$ . Continuous line : fit for model 1 ; dashed line : fit for model 2 ; dotted line : prediction for the charm component  $F_2^c$ , for  $M_c = 1.5$  GeV and model 1. The available H1 data are marked by stars.

### Figure 3 *Predictions for the longitudinal structure functions $F_L$ (continuous line) and $F_L^c$ (dashed line)*

Continuous line : model 1 ; dashed line : model 2 ; dotted line :  $F_L^c$  (model 1). The experimental points available from H1 [25] have been reported on the graph.

### Figure 4 *Predictions for $F_2^c$*

The reported data on the plots are from H1  $D^0$  (squares), H1  $D^*$  (circles), ZEUS  $D^*$  (full circles), and at lower energy, EMC data (crosses). The predictions of our models are displayed by a band delimited by the two continuous lines ( $M_c = 1.35$  for the higher curves and  $M_c = 1.7$  for the lower curves). Extrapolations of our predictions down to the EMC range are plotted as dot-dashed lines.

Figure 4-a : model 1 predictions. The NLO prediction based on the GRV parton distribution set [9] is indicated by the shaded band (borrowed from ref. [8], second paper).

Figure 4-b : model 2 predictions : the band of solutions is delimited by thick lines. The model 1 predictions are recalled by the band delimited by thin lines, for comparison.

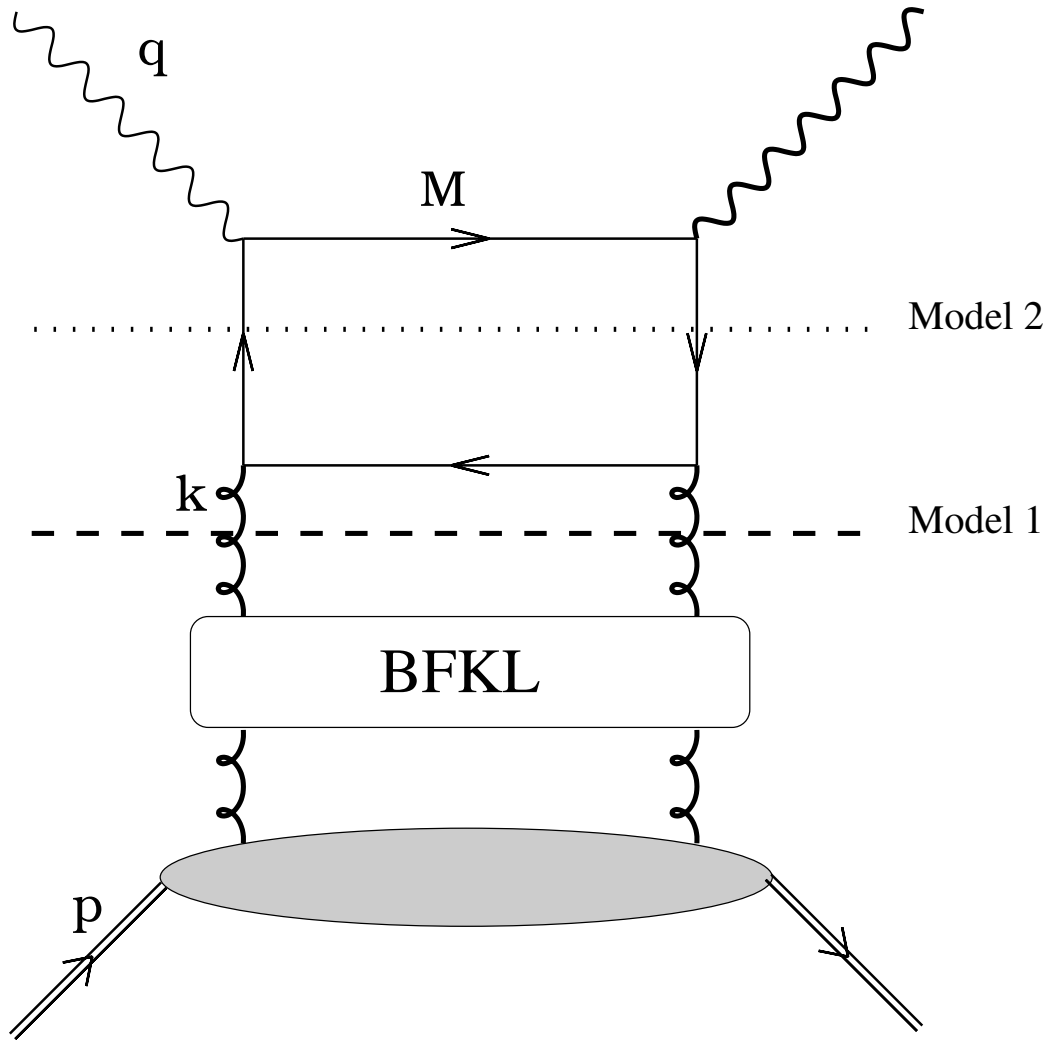


Figure 1



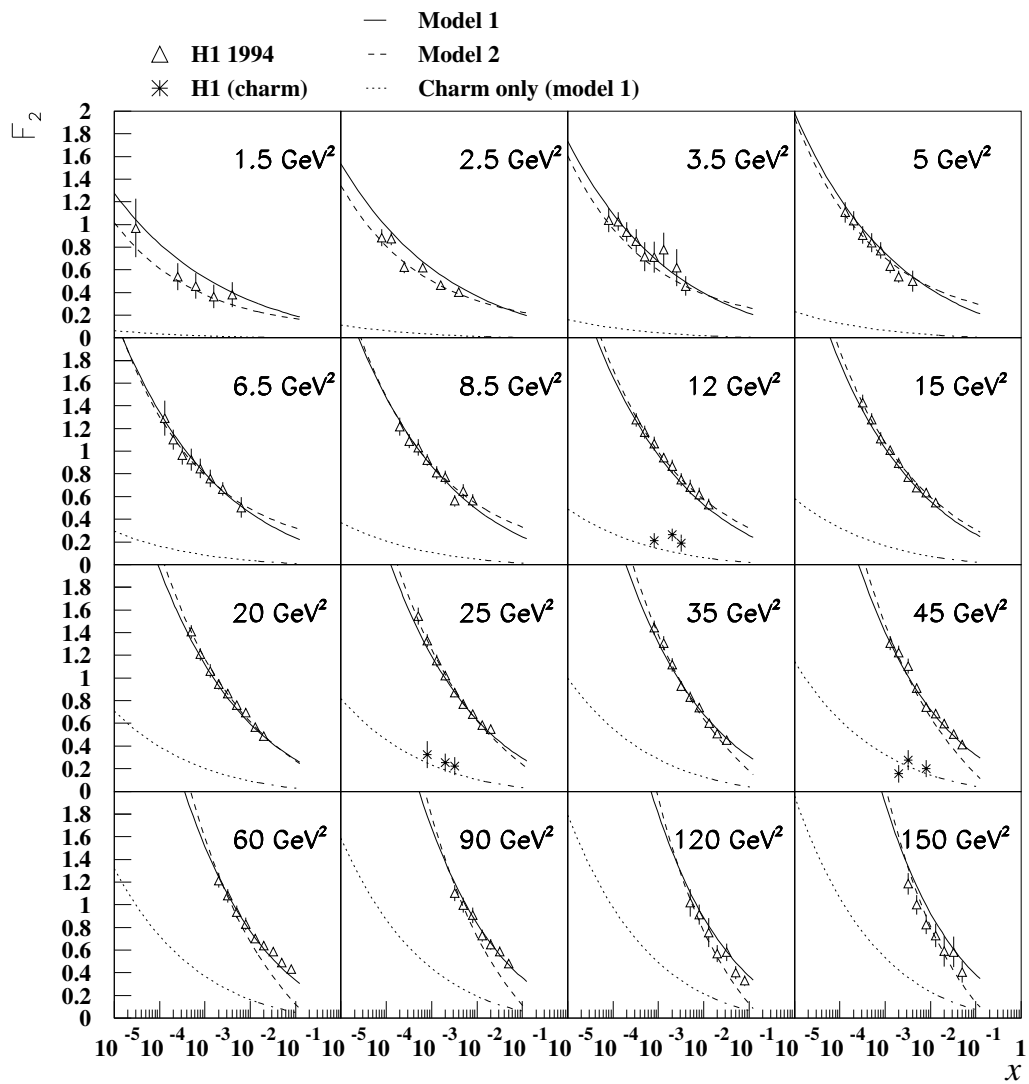


Figure 2

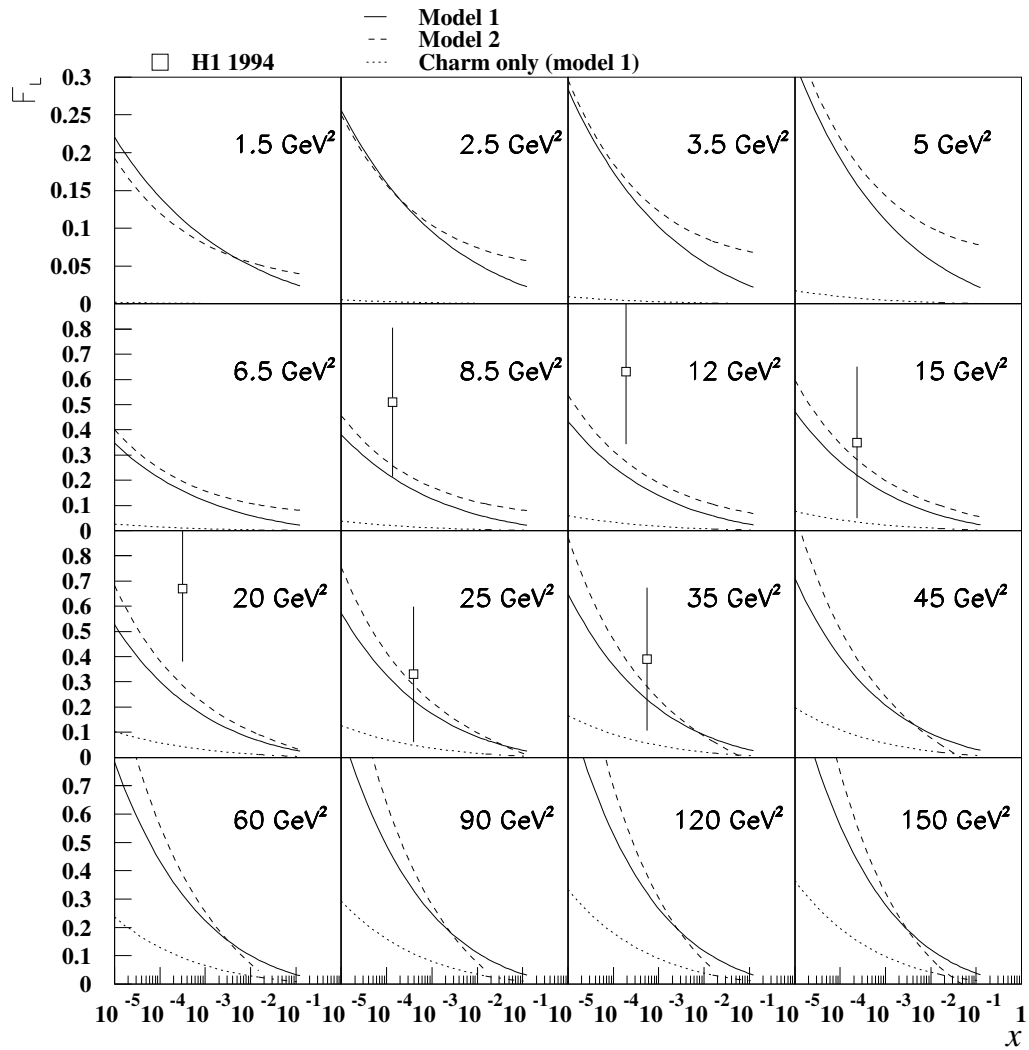


Figure 3

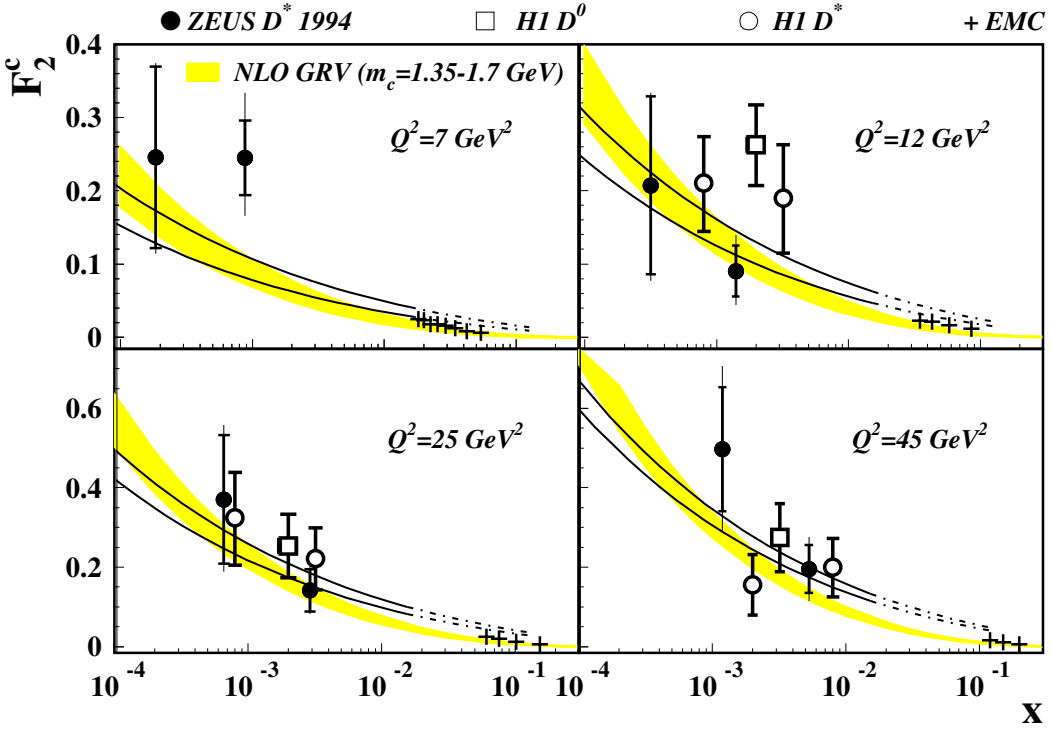


Figure 4-a

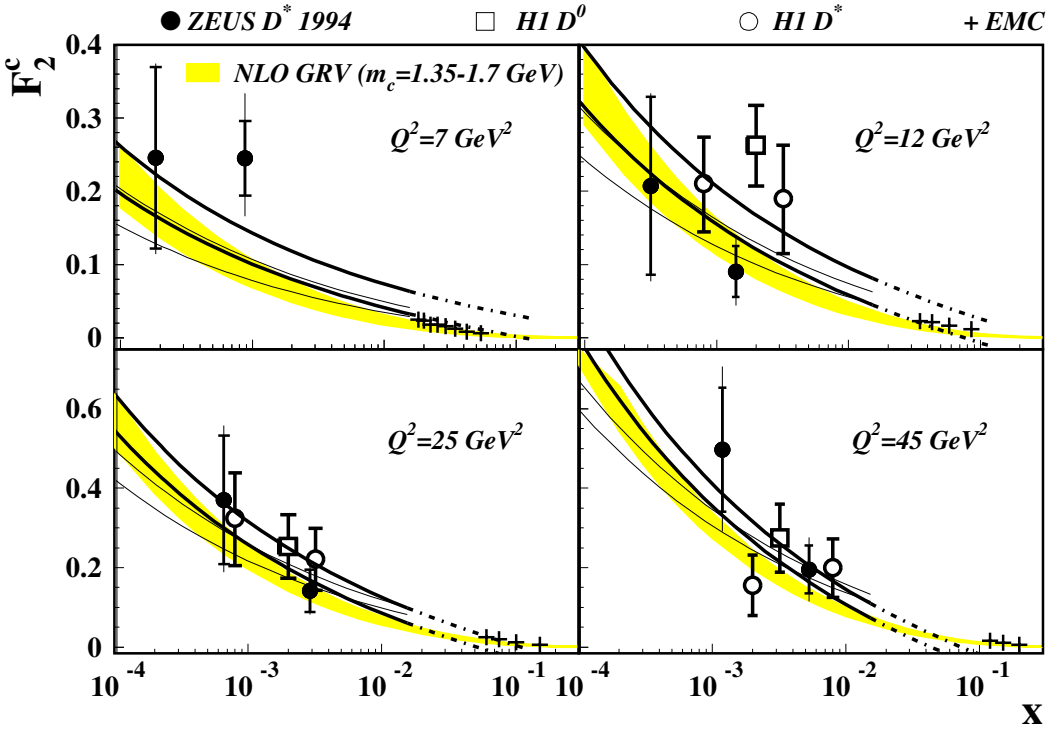


Figure 4-b



## Article II



# Hard diffraction at HERA in the dipole model of BFKL dynamics

S. Munier, R. Peschanski (SPhT)  
Ch. Royon (DAPNIA/SPP)  
Commissariat à l'Énergie Atomique, Saclay,  
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex  
France

## Abstract

Using the QCD dipole picture of the hard BFKL pomeron, we derive the general expressions of the elastic and inelastic components of the proton diffractive structure functions. We obtain a good 7 parameter fit (including a secondary reggeon contribution) to data taken at HERA by the H1 and ZEUS collaborations. The main characteristic features of the model in reproducing the data are discussed, namely the effective pomeron intercept, the scaling violations and the beta dependence. A difference obtained in the separate H1 and ZEUS fits leads us to analyse directly the differences between both measurements. Predictions on  $R$ , the ratio of longitudinal to transverse photon cross sections are performed and lead to very large values at high beta and large virtuality  $Q$  which may lead to a discrimination between models.

## 1 Introduction

The HERA data for deep-inelastic scattering at high energy and high  $Q^2$  contain a sizeable fraction of events in which one observes a large rapidity gap in the forward region [1, 2]. These events result from a colour-singlet exchange between the diffractively dissociated virtual photon and the proton. Since this phenomenon is present even for high virtuality of the photon, it is called hard diffraction, at variance with soft diffractive phenomena. Several theoretical formulations have been proposed [3]. Among the most popular models, the one based on a pointlike structure of the pomeron [4] has been studied quantitatively using a non-perturbative input supplemented by a DGLAP evolution [1]. In this formulation, it is assumed that the exchanged object, the pomeron, is a colour-singlet quasi-particle whose structure is probed in deep-inelastic scattering.

There exists a different approach [5, 6] in which the cross sections are determined by the interaction between colour dipole states [7] describing the photon and the proton. Indeed, it is well-known that the photon can be analyzed in terms of  $q\bar{q}$  configurations [8] while it has been shown [9] that the small- $x$  structure function of the proton can be described by a collection of primordial dipoles with subsequent perturbative QCD evolution. More specifically [6], the combination of the dipole description of perturbative QCD at high energy and the Good-Walker mechanism [10] leads to a unified description of the proton total and diffractive structure functions [11]. However, a quantitative description of the data following [6] was still lacking. The aim of the present paper is to provide a simple and quantitative formulation fitting the experimental data.



In the dipole approach, two components are shown to contribute to the diffractive structure function (see fig.1). First, an elastic component (fig.1-a) corresponds to the elastic interaction of two dipole configurations. It is expected to be dominant in the finite  $\beta$  region, i.e. for small relative masses of the diffractive system. Second, there is an inelastic component (fig.1-b) where the initial photon dipole configuration is diffractively dissociated in multi-dipole states by the target. This process is expected to be important at small  $\beta$  (large masses). Note that both components are obtained in ref. [6] through perturbative QCD resummation corresponding to the BFKL approach [12]. In these respects, it is based on a “hard pomeron” approach at variance with e.g. a non perturbative pomeron input evolved using DGLAP evolution [1].

We present here fits of the published diffractive data [1,2] based on a simple with 7 free parameters and analytic parametrization for the diffractive structure functions in the QCD dipole model. Both fits are successful showing that this approach is a good candidate for an understanding of hard diffraction. The main input of the calculation is a formulation of the elastic QCD amplitude  $T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}})$  for the diffusion of a dipole of size  $r$  on a dipole of size  $\rho$  with rapidity gap  $\log 1/x_{\mathbb{P}}$  at fixed *impact parameter*  $b$ . This  $b$ -dependent input allows one to factorize the different integrals involved in the perturbative calculation of the diffractive components. The dipole model for the proton [9] is used to provide predictions for the HERA data. We also include a phenomenological secondary Regge trajectory which is known to play a rôle in the limited domain of large mass and small rapidity gap [1].

The outline of the paper is as follows : in section 2, we introduce the dipole formalism and in particular the input elastic dipole-dipole amplitude  $T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}})$  following the requirements of the BFKL dynamics. Using this amplitude, we derive the general expressions for the elastic (9, 10), and inelastic (15) diffractive components for both transverse and longitudinal polarizations of the photon. In section 3 we obtain an analytical form of the proton diffractive amplitudes used to fit the HERA data. In section 4, the resulting fit is displayed. The simple form of the amplitudes makes transparent the discussion of the model properties e.g. the relative contribution of the two components, the effective exponent for the rapidity gap dependence, the origin of the scaling violations, and the  $\beta$  dependence. Conclusions and outlook are given in the final section 5.

## 2 The QCD dipole formalism

As mentioned in the introduction, the main input of our approach to the structure functions is the interaction amplitude  $T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}})$  for a dipole of size  $\rho$  with a dipole of size  $r$ , at impact parameter  $b$  where  $\log 1/x_{\mathbb{P}}$  is the rapidity gap. The knowledge of the amplitude as a function of  $b$  is essential for the calculation of the two components of hard diffraction [6]. It is thus compulsory to start with a correct BFKL amplitude in the whole impact parameter space which goes beyond the commonly used expression for the forward elastic amplitude  $T^{(forward)} = \int d^2b T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}})$ . For this sake, one uses the conformal invariance of the BFKL kernel in transverse coordinates [13]. We shall propose such a  $b$ -dependent amplitude by asking for the two following requirements :

- (i) The integral over impact parameter space boils down to the known exact expression for the forward amplitude  $T^{(forward)}$  [12, 13].
- (ii) It has the correct high impact parameter approximation [7] including the modification by a scale factor which has been deduced from conformal invariance [13].

Using the inverse-Mellin transform which appears in the solution of the BFKL equations

[12], the amplitude reads :

$$T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}}) = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 r^2}{b^4} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} (1 - 2\gamma) d(\gamma) \left( \frac{16b^2}{r\rho} \right)^{2\gamma} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)}, \quad (1)$$

where the factor 16 is the scale factor determined by conformal invariance.

$$\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(\gamma); \quad \chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \quad (2)$$

is the  $\gamma$ -dependent QCD pomeron intercept [12], and

$$d(\gamma) = \frac{\alpha_s^2}{16\gamma^2(1 - \gamma)^2} \quad (3)$$

is the two-gluon exchange elementary dipole-dipole cross section. As already mentioned, the amplitude meets the abovementioned requirements, since :

(i) the integration over  $b$  leads to the known expression for the forward amplitude (for  $r > \rho$ ) :

$$\int_{r/4}^{+\infty} \int_{r/4}^{+\infty} 2\pi b db T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}}) = 8\pi\rho^2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} d(\gamma) \left( \frac{r}{\rho} \right)^{2\gamma} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)} \equiv T^{(forward)}. \quad (4)$$

Note that the lower integration bound  $r/4$  on  $b$  is required to recover the correct expression for the forward amplitude. In the absence of an exact conformal invariant solution for all impact parameter [14], this cutoff will play an important role in the determination of the hard diffraction components.

(ii) A saddle point approximation of the integral over  $\gamma$  in formula (1) gives the approximate expressions in the large  $b$  approximation used in ref. [6,7], up to the scale factor 16. This factor is strictly speaking not present in the large  $b$  approximation, but appears when one takes into account the global conformal invariance of the BFKL kernel [13]. This scale factor leads to a much more central impact parameter distribution than the approximate expressions used in ref. [6,7], and plays a major rôle in diffraction, as we shall see in the following.

Using formula (1) as an input leads to an analytic formulation of the diffractive amplitudes. In this section, we shall first consider hard diffraction on a dipole of given size  $r$ . It will be shown in the next section how, starting from this case, it is possible to derive phenomenological expressions for hard diffraction on a proton. One has the following identities for the diffractive structure functions [6] :

$$F_{T,L}^D(Q^2, x_{\mathbb{P}}, M^2) = \frac{Q^4}{4\pi^2 \alpha_{em}} \frac{1}{\beta x_{\mathbb{P}}} \frac{d\sigma_{T,L}}{dM^2} = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \frac{1}{x_{\mathbb{P}}} \beta \frac{d\sigma_{T,L}}{d\beta}, \quad (5)$$

where  $d\sigma_T$  (resp.  $d\sigma_L$ ) is the differential cross section for the scattering of a virtual photon with transverse (resp. longitudinal) polarization, on a dipole.

### a) Elastic component

Using the QCD dipole model for the elastic component (see fig. 1.a), one writes

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{(el)}}{dM^2} = \frac{N_c \alpha_{em} e^2}{2\pi} Q^2 \int_{r/4}^{\infty} d^2b \int_0^1 dz f_{T,L}(z) |\mathbb{T}_{T,L}(b; x_{\mathbb{P}})|^2 \quad (6)$$

where

$$\mathbb{T}_{T,L}(b; x_{\mathbb{P}}) = \int_0^{4b} d\rho \rho T(r, \rho, b; x_{\mathbb{P}}) K_{1,0}(\hat{Q}\rho) J_{1,0}(\hat{M}\rho) \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned} f_T(z) &\equiv z^2(1-z)^2(z^2 + (1-z)^2) \\ f_L(z) &\equiv 4z^3(1-z)^3. \end{aligned} \quad (8)$$

The notation “ $\hat{X}$ ” is defined by  $\hat{X} = (z(1-z))^{1/2} X$ .

Following ref. [6], the formulae (6–8) describe the interaction of a  $q\bar{q}$  configuration of transverse size  $\rho$  of the virtual photon with a dipole of size  $r$ . The input elastic amplitude is taken from (1). The photon wave function in terms of  $q\bar{q}$  configurations is projected on its transverse ( $T$ ) and longitudinal ( $L$ ) polarization states which differ only by the factors  $f_{T,L}(z)$  and by the order of the Bessel functions [15] involved :  $K_1, J_1$  are associated to the transverse component, and  $K_0, J_0$  to the longitudinal one.  $z$  (resp.  $(1-z)$ ) is the longitudinal momentum fraction carried by the antiquark (resp. quark). Note that interference effects are present [6] which explain the product of Bessel functions of different kinds ( $K$  and  $J$ ). The cutoff in impact parameter space appears twice in formulae (6) and in (7), first by the upper bound  $4b$  on  $\rho$  and second by a lower bound  $r/4$  on the impact parameter  $b$ . In practice, we will release the first bound, which will greatly simplify the calculations and allow to find an analytical form for the diffractive amplitude. This approximation is expected to change only the normalisations.

Inserting expression (1) for the dipole-dipole amplitude in eq. (6, 7), one obtains the results for  $F_{T,L}^D$  (5) involving integrals over the impact parameter  $b$ , the momentum fraction  $z$  and the  $q\bar{q}$ -pair size  $\rho$ . Interestingly enough, these integrations can be factorized and exactly computed using in particular the change of variable  $\rho \rightarrow \hat{\rho} = (z(1-z))^{1/2}\rho$ . After a tedious but straightforward calculation using well-known identities [15], the successive integrations give

$$\begin{aligned} F_T^{D(el)} &= \frac{16^3 N_c e^2}{2x_{\mathbb{P}} \pi^2} \beta^2 (1-\beta) \left(\frac{Q_0}{Q}\right)^2 \int \prod_{j=1,2} \left[ \frac{d\gamma_j}{2i\pi} \left(\frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}}\right)^{2\gamma_j} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma_j)} \right] \\ &\quad \times \prod_{j=1,2} \{(1-2\gamma_j)d(\gamma_j)\Gamma(2-\gamma_j)\Gamma(3-\gamma_j) {}_2F_1(2-\gamma_j, -1+\gamma_j; 2; 1-\beta)\} \\ &\quad \times \frac{\gamma_1+\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2-1)(3-2(\gamma_1+\gamma_2))} B(\gamma_1+\gamma_2, 1/2), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_L^{D(el)} &= \frac{16^3 N_c e^2}{x_{\mathbb{P}} \pi^2} \beta^3 \left(\frac{Q_0}{Q}\right)^2 \int \prod_{j=1,2} \left[ \frac{d\gamma_j}{2i\pi} \left(\frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}}\right)^{2\gamma_j} x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma_j)} \right] \\ &\quad \times \prod_{j=1,2} \{(1-2\gamma_j)d(\gamma_j)\Gamma^2(2-\gamma_j) {}_2F_1(2-\gamma_j, -1+\gamma_j; 1; 1-\beta)\} \\ &\quad \times \frac{1}{3-2(\gamma_1+\gamma_2)} B(\gamma_1+\gamma_2, 1/2), \quad (10) \end{aligned}$$

where we have introduced the scale  $Q_0 \equiv 2/r$ . Note that these expressions involve two coupled inverse-Mellin transforms in  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ , each corresponding to one elastic dipole interaction, (see fig.1-a).

### b) Inelastic component

As shown in fig. 1.b, the inelastic component stems from the following process : the initial  $q\bar{q}$  state of the virtual photon develops a set of colour dipoles through cascading [7] and the diffractive component is due to the interactions of two of the produced dipoles with a target

dipole, each of these being described by the amplitude (1). The cross section can be expressed as [6] :

$$\beta \frac{d\sigma_{T,L}^{(in)}}{d\beta} = 16^3 \alpha_{em} e^2 \alpha_s^5 N_c^2 \frac{1}{Q^2} \int_{r/4}^{\infty} \frac{d^2 b}{b^2} \langle \varrho^2 \rangle^2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{bQ}{2} \right)^{2\gamma} (1-\gamma)^3 H_{T,L}(\gamma) \beta^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)}, \quad (11)$$

where

$$\langle \varrho^2 \rangle = \int_0^{4b} \frac{d\varrho}{\varrho} \varrho^2 \frac{T(r, \varrho, b; x_{\mathbb{P}})}{4\pi\alpha_s^2 \varrho^2} \quad (12)$$

and

$$H_T(\gamma) = \frac{V(\gamma)}{16\gamma^2(1-\gamma)^4} \frac{\Gamma(3-\gamma)\Gamma^3(2-\gamma)\Gamma(2+\gamma)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)}$$

$$H_L(\gamma) = \frac{V(\gamma)}{8\gamma(1-\gamma)^3(1+\gamma)(2-\gamma)} \frac{\Gamma(3-\gamma)\Gamma^3(2-\gamma)\Gamma(2+\gamma)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)\Gamma(2+2\gamma)} \quad (13)$$

with

$$V(\gamma) = {}_3F_2(1-\gamma, 1-\gamma; 1, 3/2; 1). \quad (14)$$

The dipole-dipole interaction is represented by formula (12) which can be interpreted as the average squared transverse sizes of the dipoles seen at the impact parameter  $b$ . Indeed, the quantity  $T(r, \varrho, b; x_{\mathbb{P}})/4\pi\alpha_s^2 \varrho^2$  is nothing else than the density of dipoles of size  $\varrho$  emitted from a dipole of size  $r$  at impact parameter  $b$  [7, 13]. The inverse Mellin-transform and its integrand factor  $V(\gamma)$  (14) comes from the calculation of the  $1 \rightarrow 2$  dipole branching at the virtual photon vertex [6]. The different prefactors appearing in  $H_T$  and  $H_L$  in formula (13) come from the transverse and longitudinal wave-functions of the virtual photon, respectively.

Inserting the expression (12) into eq. (11) and integrating over the impact parameter  $b$ , one gets :

$$F_{T,L}^{D(in)} = \frac{1}{x_{\mathbb{P}}} \frac{16^5}{\pi^3} e^2 \alpha_s N_c^2 \int \prod_{j=1,2} \left\{ \frac{d\gamma_j}{2i\pi} \frac{1-2\gamma_j}{2-2\gamma_j} d(\gamma_j) x_{\mathbb{P}}^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma_j)} \right\}$$

$$\times \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left( \frac{Q}{4Q_0} \right)^{2\gamma} \beta^{-\Delta_{\mathbb{P}}(\gamma)} (1-\gamma)^3 H_{T,L}(\gamma) \frac{1}{2-\gamma-\gamma_1-\gamma_2}. \quad (15)$$

The formulae (9, 10, 15) condense in an analytical form the perturbative QCD predictions for the diffractive structure functions of a dipole of size  $2/Q_0$ .

### 3 Proton diffractive structure functions in the dipole model

In the previous section, we have obtained the expressions for the diffractive structure functions, when the target is a single dipole of size  $r = 2/Q_0$ . Our aim in this section is to use these formulae to obtain the diffractive structure functions of the proton. We have thus to implement a model for the proton which could describe it as a collection of primordial dipoles.

#### a) Elastic component

Applying the steepest-descent method, the saddle-point is determined by the usual BFKL-type integrand (between the square brackets in (9, 10)). It reads :

$$\gamma_{sp} = \frac{1}{2} \left( 1 - a(x_{\mathbb{P}}) \log \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} \right). \quad (16)$$

where  $a(x) = \pi/(\zeta(3)\alpha_s N_c \log 1/x)$  is the  $k_\perp$ -diffusion coefficient coming from the BFKL evolution [12, 16]. We have to use a special treatment for the pole at  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  in formula (9), since it contributes for the asymptotic saddle points at  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$  when  $x_{\mathbb{P}} \rightarrow 0$ . All the other singularities are not relevant, since they are far from the saddle points.

Noting that in the kinematical domain of interest,  $1 - 2\gamma_{sp} = a(x_{\mathbb{P}}) \log Q/2Q_0\sqrt{\beta} \ll 1$ , and working at lowest order, the results are :

$$F_T^{D(el)} = 12 \frac{N_c e^2 \alpha_s^4}{\pi} x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}}) \log^3 \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} e^{-a(x_{\mathbb{P}}) \log^2 \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}}} \times \beta(1-\beta) \left[ {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1-\beta \right) \right]^2, \quad (17)$$

$$F_L^{D(el)} = 16 \frac{N_c e^2 \alpha_s^4}{\pi} x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}}) \log^2 \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}} e^{-a(x_{\mathbb{P}}) \log^2 \frac{Q}{2Q_0\sqrt{\beta}}} \times \beta^2 \left[ {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; 1-\beta \right) \right]^2, \quad (18)$$

with

$$\alpha_{\mathbb{P}} \equiv 1 + \Delta_{\mathbb{P}} \left( \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{\alpha_s N_c}{\pi} 4 \log 2. \quad (19)$$

The pole at  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  in  $F_T^{D(el)}$  results in an extra  $\log Q/2Q_0\sqrt{\beta}$  which may be large.

The formulae (17, 18) give an explicit expression for the elastic components of diffraction in the QCD dipole model. The  $x_{\mathbb{P}}$ -dependent prefactor  $x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}})$  plays the role of the (hard) pomeron flux factor already discussed in references [6, 11]. Revealing new features of the model, the present explicit calculation shows that the relevant scale factor responsible for the scaling violations is  $2Q_0\sqrt{\beta}$  where  $Q_0$  is the scale of the proton-dipole amplitude. The  $\beta$ -dependence is found to be non polynomial.

### b) Inelastic component

Using again the steepest-descent method for evaluating the three integrals in  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  of formula (15), we find saddle-points at

$$\gamma_{sp} = \frac{1}{2} \left( 1 - a(\beta) \log \frac{Q}{4Q_0} \right), \quad \gamma_{j,sp} = \frac{1}{2} (1 - a(x_{\mathbb{P}})). \quad (20)$$

Note that there is no coupling of the integrals at the saddle points; however, one should take into account the prefactor zeros at  $\gamma_j = 1/2$ , see eq. (15). All in all, the result reads :

$$F_{T,L}^{D(in)} = 2^9 \sqrt{\frac{2}{\pi}} H_{T,L} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{N_c e^2 \alpha_s^5}{\pi^4} x_{\mathbb{P}}^{-2\alpha_{\mathbb{P}}+1} a^3(x_{\mathbb{P}}) \frac{Q}{Q_0} e^{-\frac{a(\beta)}{2} \log^2 \frac{Q}{4Q_0}} a^{\frac{1}{2}}(\beta) \beta^{-\Delta_{\mathbb{P}}}. \quad (21)$$

Comparing our expression (21) with the original result (formula (11) in the second paper of ref. [6]), we find identical results but for the scale of the transverse momentum in the BFKL evolution :  $4Q_0$  instead of  $Q_0$ . This change comes from the scale factor determined by conformal invariance (see 2.1) and was not considered in the previous approximation [6]. This modified scale factor has an important phenomenological effect.

In the QCD dipole model, there is a tight connection between the total and diffractive structure functions. In refs. [9, 11], the QCD dipole model has been successfully applied to the proton *total* structure function in the small- $x$  kinematical domain. A model for the primordial

dipole configurations in the proton has been introduced through a distribution with average size and the non perturbative features of the proton target manifest themselves only through this scale and the global normalization constant related to the density of primordial dipoles (for a more complete discussion, see ref. [9]). We thus use this representation of the nucleon target in formulae (17, 18, 21) to derive the model for the proton diffractive structure functions. In this context, the scale parameter is reinterpreted as  $Q_0 = 2/\langle r \rangle$  and we introduce the arbitrary normalizations  $N_T^{(el)}$ ,  $N_L^{(el)}$ ,  $N^{(in)}$  for  $F_{T,L}^{D(el)}$  and  $F_{T,L}^{D(in)}$  multiplying formulae (17, 18, 21) respectively. These unknown normalizations reflect the non-perturbative primordial dipole configurations contributing to the various proton structure functions.

With this model, we are ready to write a full parametrization adequate for the description of the data. The free parameters of the dipole model are  $\alpha_{\mathbb{P}}$ , which is related to the fixed coupling constant  $\alpha_s$  in the BFKL scheme at leading order (see eq. (19)),  $Q_0$ , corresponding to a non-perturbative scale for the proton, and the three normalizations  $N_T^{(el)}$ ,  $N_L^{(el)}$ ,  $N^{(in)}$ . As is now well-known, a secondary trajectory based on reggeon exchange is added in order to take into account the large-mass and small rapidity gap domain. Reggeon exchange can here be simply parametrized in the following way :

$$F_2^{D(R)}(x_P, \beta, Q^2) = f^{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{P}}) F_2^{\mathbb{R}}(\beta, Q^2), \quad (22)$$

where the reggeon flux  $f^{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{P}})$  is assumed to follow a Regge behaviour with a linear trajectory  $\alpha_{\mathbb{R}}(t) = \alpha_{\mathbb{R}}(0) + \alpha'_{\mathbb{R}} t$  :

$$f^{\mathbb{R}}(x_{\mathbb{P}}) = \int_{t_{cut}}^{t_{min}} dt \frac{e^{B^{\mathbb{R}} t}}{x_{\mathbb{P}}^{2\alpha_{\mathbb{R}}(t)-1}}, \quad (23)$$

where  $|t_{min}|$  is the minimum kinematically allowed value of  $|t|$  and  $t_{cut} = -1 \text{ GeV}^2$  is the limit of the measurement. The values of  $B^{\mathbb{R}}$  and  $\alpha'_{\mathbb{R}}$  are fixed with data from hadron-hadron collisions [1]. The reggeon structure function is assumed to be the pion structure function [17]. The free parameters for this component are the reggeon normalisation  $N^{\mathbb{R}}$  and exponent  $\alpha_{\mathbb{R}}$ . The final parametrization used for the fit is the sum of the three contributions detailed above (17, 18, 21, 22), namely :

$$F_2^{D(3)} = \frac{1}{N_C e^2} \left( N^{in} (F_T^{D(in)} + F_L^{D(in)}) + N_T^{el} F_T^{D(el)} + N_L^{el} F_L^{D(el)} + N_R F_2^{\mathbb{R}} \right). \quad (24)$$

Only one parameter ( $N^{in}$ ) is used for the normalisation of the inelastic component since  $F_L^{D(in)}/F_T^{D(in)} = 2/9$ .

## 4 Phenomenology

### 4.1 Fits to the H1 and ZEUS data

A fit to the recently published H1 [1] and ZEUS [2] diffractive structure function data is performed separately. The result of both fits is shown in Figure 2 for H1 and Figure 3 for ZEUS, and their parameters are given in Table 1. Let us comment the interesting features of the fits. The fit to the H1 data leads to a very good  $\chi^2$  (1.17 per degree of freedom with statistical errors only). The value of  $\alpha_{\mathbb{R}}$  is consistent with the usual values found for secondary reggeon contributions if interference effects are taken into account [1]. The value of  $\alpha_{\mathbb{P}}$  is found to be consistent with the expected intercept for a hard BFKL pomeron [12]. This intercept is higher than the value obtained from the fit to the structure function  $F_2$  [9].  $Q_0$  is a typical non perturbative scale for the proton and very close to the value obtained in the proton

structure function fit. It should be noted that the scale  $Q_0$  appears in a quite non trivial way as the virtuality in the inelastic component ( $Q/4Q_0$ ), and in the elastic one ( $Q/2\sqrt{\beta}Q_0$ ). The validity of these results can be checked by starting with two different values of  $Q_0$  for each component and the result of the fit leads to same values within errors, with the same  $\chi^2$ . Furthermore, imposing a constant scale for the elastic component, i.e.  $Q/2\sqrt{\beta}Q_0 \rightarrow Q/Q_0$ , leads to a very bad quality fit. The other features of this description will be discussed further on.

The fit to the ZEUS data leads to a worse  $\chi^2$  ( $\chi^2/dof = 1.95$  with statistical errors only). The result is shown in Figure 3 in continuous line, and by comparison, the dashed curve corresponds to the parameters obtained in the H1 fit. It can be noticed that a difference is clearly seen both in the low  $Q^2$ , low  $\beta$  and the high  $Q^2$ , high  $\beta$  bins, in opposite way, the H1 fit going from below to above the Zeus fit.

In order to investigate the origin of these differences, a direct comparison between ZEUS and H1 data has been performed [18]. The H1 data have been interpolated to the ZEUS closest bins in  $\beta$  and  $Q^2$  using the dipole model fit. This interpolation is weakly sensitive to the model used as the interpolation in the kinematical variables is very small. It was checked that the use of the model by Bartels et al. [19] gives a similar result. The result of this comparison is displayed in Figure 4. The striking feature is that the main difference between both fits noticed in Figure 3 comes from the region where the data are most different. The differences occur both at small and high  $\beta$  (i.e. small and high masses) and the solution of this puzzle cannot be due only to the difference in selecting diffractive events - either the rapidity gap selection [1] or the  $M_X$  subtraction method [2] - in both experiments. In fact, only high-mass events could be affected by these different selections. A global shift of ZEUS data of about 15% would be possible as they do not correct for proton dissociation but the difference between H1 and ZEUS data is not only due to normalisation effects. Indeed, it is clear in Figure 4 that, depending on the values of  $Q^2$  and  $\beta$ , H1 points lie either higher or lower than ZEUS data. The analysis of new accumulated data in this kinematical region would help solving the experimental puzzle and would be of great interest.

## 4.2 Effective pomeron intercept

Let us now study the dependence on  $x_{\mathbb{P}}$  which is directly related to the rapidity gap dependence. One can define an effective pomeron intercept in the following way :

$$\alpha_{\mathbb{P}}^{eff} = \frac{1}{2} \left( \frac{d \ln F_2^D}{d \ln 1/x_{\mathbb{P}}} + 1 \right) \quad (25)$$

where the  $t$  dependence is integrated out (the data are mainly at  $t \sim 0$ ). This effective exponent can also be determined for the inelastic and elastic components separately as a function of  $x_{\mathbb{P}}$  (Figure 5) or  $Q^2$  (Figure 6).

In Figure 5, The effective intercepts of both components and their sums have been compared to the soft pomeron intercept [20] (dashed line) and to the bare hard BFKL pomeron obtained in the fit ( $\alpha_{\mathbb{P}} = 1.395$ , cf. Table 1). The range of obtained values sits essentially between these two limits except in the large  $x_{\mathbb{P}}$  region ( $x_{\mathbb{P}} \geq 10^{-2}$ ). It is clearly not consistent with the soft pomeron value (1.08). It is as well much lower than the bare pomeron intercept [6, 11]. This can be explained by the large logarithmic corrections induced by the  $a^3(x_{\mathbb{P}})$  term, proportional to  $\log^3(1/x_{\mathbb{P}})$ , present in both diffractive components (see formulae 17, 18, 21). The effect of this logarithmic term induces also an  $x_{\mathbb{P}}$  dependence of the intercept. Moreover, in Figure 5, it can be seen that the  $x_{\mathbb{P}}$  dependence of the intercept is different between the elastic and the inelastic components. This induces a breaking of factorisation directly for the diffractive components of this model, which comes in addition to the known

factorisation breaking due to secondary trajectories. In addition, the elastic component itself does not factorise, as it can be seen in Figure 5 for different  $Q^2$  values. This comes from the mixing of the  $x_{\mathbb{P}}$  and  $Q^2$  dependence in formula 17, 18.

As seen in Figure 6, the  $Q^2$  dependence of the pomeron intercept (taken for instance at  $x_{\mathbb{P}}=0.001$  where the reggeon contribution is negligible) is weak. It is in good agreement with the H1 determination ( $\alpha_{\mathbb{P}} = 1.204 \pm .02$ ) indicated in Figure 6. It is thus intermediate between the soft and hard pomeron lines but inconsistent with both of them. In our model, this softening of the bare pomeron comes from the large logarithmic corrections which cannot be neglected in perturbative calculations as was mentioned in the last paragraph.

### 4.3 Scaling violations

One striking feature of the diffractive proton structure functions was the  $Q^2$  dependence at fixed  $x_{\mathbb{P}}$  as a function of  $\beta$  as was pointed out experimentally by the H1 collaboration [1] (see Figure 7) and confirmed at lower  $Q^2$  [21]. The structure functions are increasing with  $Q^2$  even at very high  $\beta$  (see Figure 7) at variance with the behaviour of the total proton structure function as a function of  $x$ . In the QCD dipole model, this experimental feature is described by a non trivial interplay between the two diffractive components. In Figure 7, the dipole fit is compared with the H1 result showing the contribution of each component : at small  $\beta$ , the inelastic component dominated and vary quasi linearly in  $\log Q^2$ , and at high  $\beta$ , this component is depressed similarly to the total structure function, but is progressively substituted by the elastic component. Note that the enhancement present in the data at high  $\beta$  and low  $Q^2$  which is probably due to vector meson production is partially reproduced by the model. It is expected that including the specific vector meson contributions in addition to the elastic  $q\bar{q}$  component will even improve the result of the model in this kinematical range. It is striking that it is possible to describe the observed scaling violations in a very different framework as the one given by the DGLAP evolution as was performed by the H1 collaboration [1].

### 4.4 $\beta$ -dependence

In Figure 8 is displayed the  $\beta$  dependence of the proton diffractive structure function for a fixed value of  $x_{\mathbb{P}} = 0.003$  for different values of  $Q^2$ . The  $\beta$  dependence is quite weak in all  $Q^2$  bins and correctly reproduced by the interplay of the two components of the QCD dipole model. While at low  $Q^2$ , this effect is essentially due to the inelastic component, at high  $Q^2$  the interplay between both components is required to describe the observed  $\beta$ -dependence.

The interplay of the different components can be analysed in more details in Figure 9 where the elastic, inelastic, reggeon components and their sum are displayed for three different values of  $x_{\mathbb{P}}$  and four different values of  $Q^2$  as a function of  $\beta$ . The reggeon component is only important at high value of  $x_{\mathbb{P}}$  as expected and dominates at low  $\beta$ . It disappears at smaller  $x_{\mathbb{P}}$ . At low  $Q^2$ , the inelastic component dominates in almost the full  $\beta$  range, while at higher  $Q^2$ , it is only important at low  $\beta$  and replaced at low masses by the inelastic component.

### 4.5 Longitudinal contribution to the diffractive structure function

In Figure 10 are displayed as a function of  $\beta$  in different  $Q^2$ ,  $x_{\mathbb{P}}$  bins the longitudinal and transverse components of the proton diffractive structure functions. Note that the  $x_{\mathbb{P}}$  values are chosen a bit smaller than in the previous figure to depress the reggeon contribution. Note also that we did not separate the longitudinal and the transverse contributions for the inelastic component as they are directly proportional by a factor  $H_L(1/2)/H_T(1/2) = 2/9$  (see formula 21). In addition to the already mentioned dominance of the inelastic component



at small  $Q^2$ , the longitudinal elastic component is found to be high at high  $\beta$  and crosses over the transverse component near  $\beta \sim 0.8$ . It is thus expected to obtain high values of the ratio  $R$  of the longitudinal to the transverse components at high values of  $\beta$ . The result of our fit prediction is displayed in Figure 11. We note that the  $R$  ratio remains small ( $\sim 0.2$ ) in almost the full kinematical plane except notably at high  $\beta$  where it may reach high values such as 2. Note that this value is in the range of the measured  $R$  ratio with vector meson production [3]. A measurement of  $R$  in diffraction would thus be of great interest and would be a good test of the model. The question arises whether such high values of  $R$  would not modify the  $F_2^D$  measurement itself as it was assumed to be 0 [1]. We have checked that the parameters and the quality of the fit are not much influenced if only data points with  $y < 0.3$ , where the influence of  $R$  is small, are taken.

It is instructive to notice that another model of diffraction based on selecting  $q\bar{q}$  and  $q\bar{q}g$  components of the photon [19] also leads to a large contribution of the longitudinal  $q\bar{q}$  contribution at high  $\beta$ . However, a distinct feature of the dipole model is the above mentioned difference between the high and low  $Q^2$  behaviour where at low  $Q^2$ , the inelastic component dominates and induces a small value of  $R$ . We thus expect that a measurement of  $R$  in diffraction at low  $Q^2$  would be a way to distinguish both models.

## 5 Conclusion and outlook

Let us summarize the results we have obtained. First of all, the colour dipole model has provided us with an interesting theoretical and phenomenological framework to study hard diffraction. On the theoretical ground, it enables to interpret hard diffraction in terms of BFKL dynamics of (resummed) perturbative QCD, which allows one to make theoretical estimates. On the other hand, the success of the phenomenological fit using analytical amplitudes allow a discussion of the various interesting and intriguing aspects of the data.

The model predicts two contributions : an elastic one for which the final state consists in the hadronization of a quark-antiquark pair, and an inelastic one, including soft gluon radiation reproduced in terms of a cascading process involving colour dipoles. Both contribute in quite different kinematical domains since they are characterized by different mass distributions (different  $\beta$ ) and for different photon polarization. In this paper, we have obtained a suitable parametrization and a satisfactory fit to the H1 data along these lines. The fit to Zeus data is less satisfactory and with different parameter values. By a model-independent analysis of both data, we could identify the reason of the discrepancy in a genuine difference between data sets when interpolating in the same bins. This point deserves a detailed experimental study in the near future, since it may be of importance to discriminate between models. In particular the confirmation of the trend of present H1 data would be in favor of the dipole model.

On the theoretical ground, we have computed amplitudes obeying some of the requirements of BFKL dynamics for diffractive amplitudes (on a dipole). However, exact calculations of these rather complicated amplitudes are still under way [22] and we hope in the near future obtain definite predictions with all requirements of BFKL dynamics. The evaluation of next-leading BFKL effects would also be welcome since they already play a rôle for the total structure functions.

Finally, as emphasized in ref. [11] the colour dipole model formalism calls for a unified description of the diffractive and total deep-inelastic scattering events, e.g. including events with no rapidity gap. We showed that within the precision of the current data, there are quite a few indications (similar scale  $Q_0$ , softening of the hard Pomeron by logarithmic factors in diffraction, etc...) of such a common theoretical ground. However, further tests of the model are deserving. The first one would be a confrontation of the predicted  $R$  ratio with the data

if available : indeed, the various models should predict quite different contributions from the two polarization states of the photon. Other useful tests concern the final states. For instance one can compute the predictions for diffractive vector meson production and confront them to the recent data. Such tests might help distinguish between the few different models for hard diffraction which are able to describe the data. definitely, the QCD dipole model of BFKL dynamics is one of them.

## 6 Acknowledgements

A fruitful collaboration with Andrzej Bialas and Henri Navelet which has much inspired the present paper is acknowledged. We also thank them for very useful physical and technical remarks and suggestions during the elaboration of the paper.

## References

- [1] C. Adloff et al., H1 coll., *Z.Phys.* **C76** (1997) 613.
- [2] J. Breitweg, ZEUS coll., *Eur. Phys. J.* **C1** (1998) 81.
- [3] For a recent review, see : Proceedings of the DIS98 workshop, 4-8 April 1998, Brussels
- [4] G. Ingelman, P. Schlein, *Phys. Lett.* **B152** (1985) 256.
- [5] For a related approach, see N. N. Nikolaev, B. G. Zakharov, *Z. Phys.* **C49** (1991) 607 ; *Z. Phys.* **C53** (1992) 331.
- [6] *Elastic component* : A. Bialas, R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 405. *Inelastic component* : A. Bialas, R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B378** (1996) 302.
- [7] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 373 ;  
A. H. Mueller, B. Patel, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 471 ;  
A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 107.
- [8] J. D. Bjorken, J. Kogut, D. Soper, *Phys. Rev.* **D3** (1971) 1382.
- [9] H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, S. Wallon, *Phys. Lett.* **B385** (1996) 357.  
S. Munier, R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B524** (1998) 377.
- [10] M. L. Good, W. D. Walker, *Phys. Rev.* **120** (1960) 1857.
- [11] A. Bialas, R. Peschanski, Ch. Royon, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 6899.
- [12] V. S. Fadin, E.A. Kuraev and L.N. Lipatov, *Phys. Lett.* **B60** (1975) 50 ;  
I. I. Balitsky and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.
- [13] G. Salam, *Nucl. Phys.* **B461** (1995) 512.  
H. Navelet, R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B507** (1997) 353.  
H. Navelet, S. Wallon, *Nucl. Phys.* **B522** (1998) 237.
- [14] S. Munier, H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, L. Schoeffel, A. Van Haecke, *in preparation*.
- [15] P.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of integrals series and products, (*Academic Press*, New York and London, 1965).  
A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, Integrals and Series (vol. 3), *Gordon and Breach science publishers*, 1986.
- [16] J. Bartels, H. Lötter, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 400.
- [17] M.Glück, E.Reya, A.Vogt, *Z.Phys.* **C53** (1992) 651.
- [18] C.Royon, Contribution to the Zeuthen workshop on low-x physics, 3-6 June 1998, Berlin.

- [19] J. Bartels, J. Ellis, H. Kowalski, M. Wüsthoff, hep-ph/9803497.// J.Bartels, C.Royon, in preparation.
- [20] A.Donnachie, P.V.Landshoff, *Phys. Lett.* **B296** (1992) 227.
- [21] C. Adloff et al., H1 coll., Contributed paper to the ICHEP 98 conference, 23-30 July 1998, Vancouver.
- [22] A. Bialas, H. Navelet, R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B427** (1998) 147, and *in progress*.

## TABLE CAPTION

Table I

*Parameters obtained for the  $F_2^D$  fit.*

The fit has been performed with statistical errors only. The first error quoted is the statistical one and the second the systematic one.

	H1	ZEUS
$\alpha_P$	$1.395 \pm 0.005 \pm 0.003$	$1.327 \pm 0.001 \pm 0.016$
$\alpha_R$	$0.682 \pm 0.046 \pm 0.049$	—
$Q_0$	$0.428 \pm 0.011 \pm 0.001$	$0.241 \pm 0.002 \pm 0.014$
$N^{in}$	$0.00244 \pm 0.00028 \pm 0.00033$	$0.00374 \pm 0.00015 \pm 0.00076$
$N_T^{el}$	$40.0 \pm 1.6 \pm 3.6$	$126.9 \pm 0.5 \pm 37.6$
$N_L^{el}$	$12.8 \pm 1.2 \pm 1.1$	$24.43 \pm 0.51 \pm 8.12$
$N_R$	$7.44 \pm 1.84 \pm 3.50$	$0 \pm 58 \pm 0$
$\chi^2$	255.4 for 226 pts 1.17/d.o.f.	89.6 for 53 pts 1.95/d.o.f.

Table I

## FIGURE CAPTIONS

**Figure 1** *Schematic description of the QCD dipole model of diffraction.* 1-a : elastic component, 1-b : inelastic component

**Figure 2** *Result of the  $F_2^D$  fit to the H1 data [1].* The data are displayed by triangles (with statistical and systematic errors added in quadrature) as a function of  $x_{\mathbb{P}}$  in  $\beta$  and  $Q^2$  bins. The fit has been performed with statistical errors only and is displayed in full line (see text).

**Figure 3** *Result of the  $F_2^D$  fit to the ZEUS data [2].* The data are displayed by triangles with statistical and systematic errors added in quadrature as a function of  $x_{\mathbb{P}}$  in  $\beta$  and  $Q^2$  bins. The fit has been performed with statistical errors only and is displayed in full line (see text). For comparison, the result of the fit of the H1  $F_2^D$  data is displayed in dashed line.

**Figure 4** *Direct comparison between H1 (squares) and ZEUS (triangles) data.* The H1 data have been interpolated to the ZEUS bins by using the dipole parametrisation. Both data are found compatible within error bars. Note however that sensitive differences are seen in particular in three different  $\beta$  and  $Q^2$  bins ( $Q^2=8$  GeV<sup>2</sup> for  $\beta=0.2$ ,  $Q^2=60$  GeV<sup>2</sup>, for  $\beta=0.7$  and  $0.9$ ) (see text).

**Figure 5** *Effective pomeron intercept as a function of  $x_{\mathbb{P}}$ .* The dependence of the effective pomeron intercept  $\alpha_{\mathbb{P}}$  on  $x_{\mathbb{P}}$  is shown for the inelastic component (independent of  $Q^2$ ; continuous line) and for the elastic one for 3 different values of  $Q^2$ . The value of  $\beta$  is fixed at 0.3. The straight lines at  $\alpha_{\mathbb{P}}=1.395$  and  $\alpha_{\mathbb{P}}=1.08$  correspond respectively to the bare BFKL intercept as found by the fit (see table 1), and the soft Donnachie Landshoff prediction [20].

**Figure 6** *Effective pomeron intercept as a function of  $Q^2$ .* The effective pomeron intercept of the model is displayed : elastic component (dashed curve), inelastic component (dotted curve), total (full curve). The value of  $\beta$  and  $x_{\mathbb{P}}$  are fixed for reference at ( $\beta = 0.3$  and  $x_{\mathbb{P}} = 10^{-3}$ ). The bare and soft pomeron intercepts are given by dotted-dashed straight lines. The H1 determination [1] lies in the region between the two dashed straight lines.

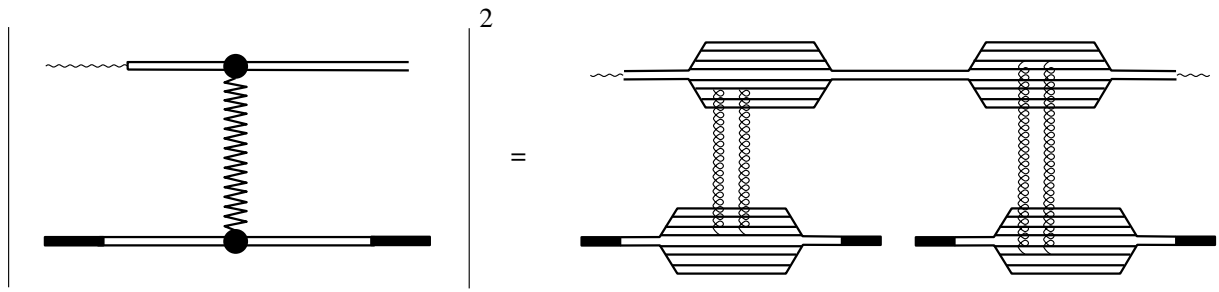
**Figure 7** *Scaling violations.* The dependence of  $x_{\mathbb{P}}F_2^D$  on  $Q^2$  for different values of  $\beta$  at fixed  $x_{\mathbb{P}}$  ( $3 \cdot 10^{-3}$ ) is shown together with the dipole model fit. Dotted line : elastic component, dashed line : inelastic component, full line : total.

**Figure 8** *Beta dependence.* The dependence of  $x_{\mathbb{P}}F_2^D$  on  $\beta$  for different values of  $Q^2$  at fixed  $x_{\mathbb{P}}$  ( $3 \cdot 10^{-3}$ ) is shown together with the dipole model fit. Dotted line : elastic component, dashed line : inelastic component, full line : total.

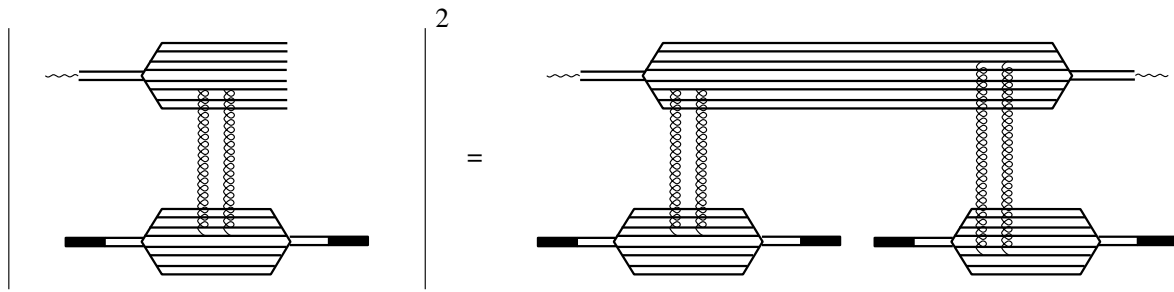
**Figure 9** *Different components of the H1  $F_2^D$  fit.* Dotted line : elastic component, dashed line : inelastic component, dashed-dotted line : secondary reggeon component, full line : sum of all components.

**Figure 10** *Different components of the H1  $F_2^D$  fit.* Longitudinal versus transverse. Dotted line : transverse elastic component, dotted-dashed line : longitudinal elastic component, dashed line : total ( $F_T + F_L$  with  $F_L/F_T = 2/9$ , see text) inelastic component, full line : result of the fit.

**Figure 11** *Prediction for  $R$ , the ratio of the longitudinal to the transverse cross section.* Note the different scale for the high  $\beta$  bins.



a.



b.

Figure 1

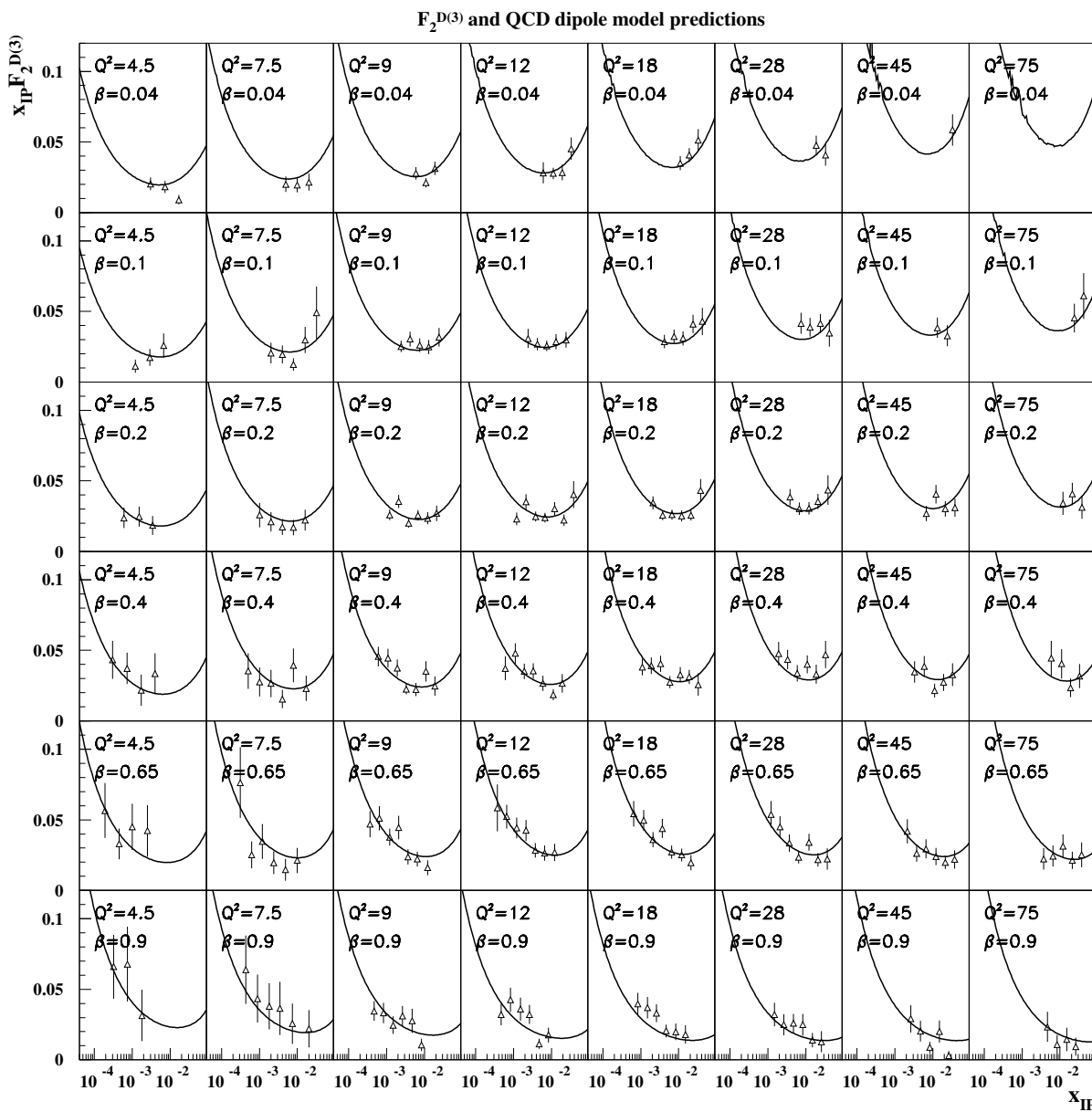


Figure 2



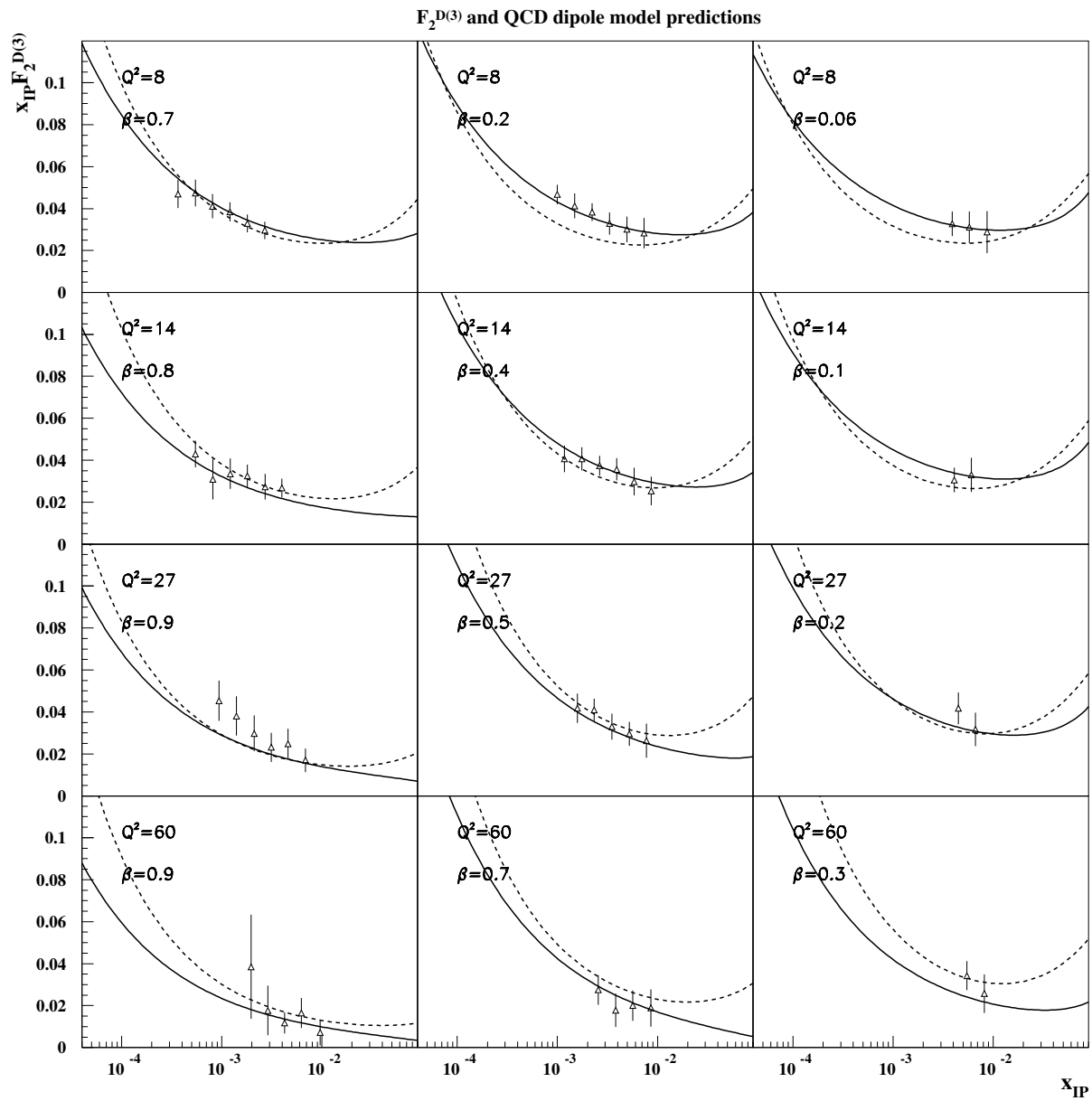


Figure 3

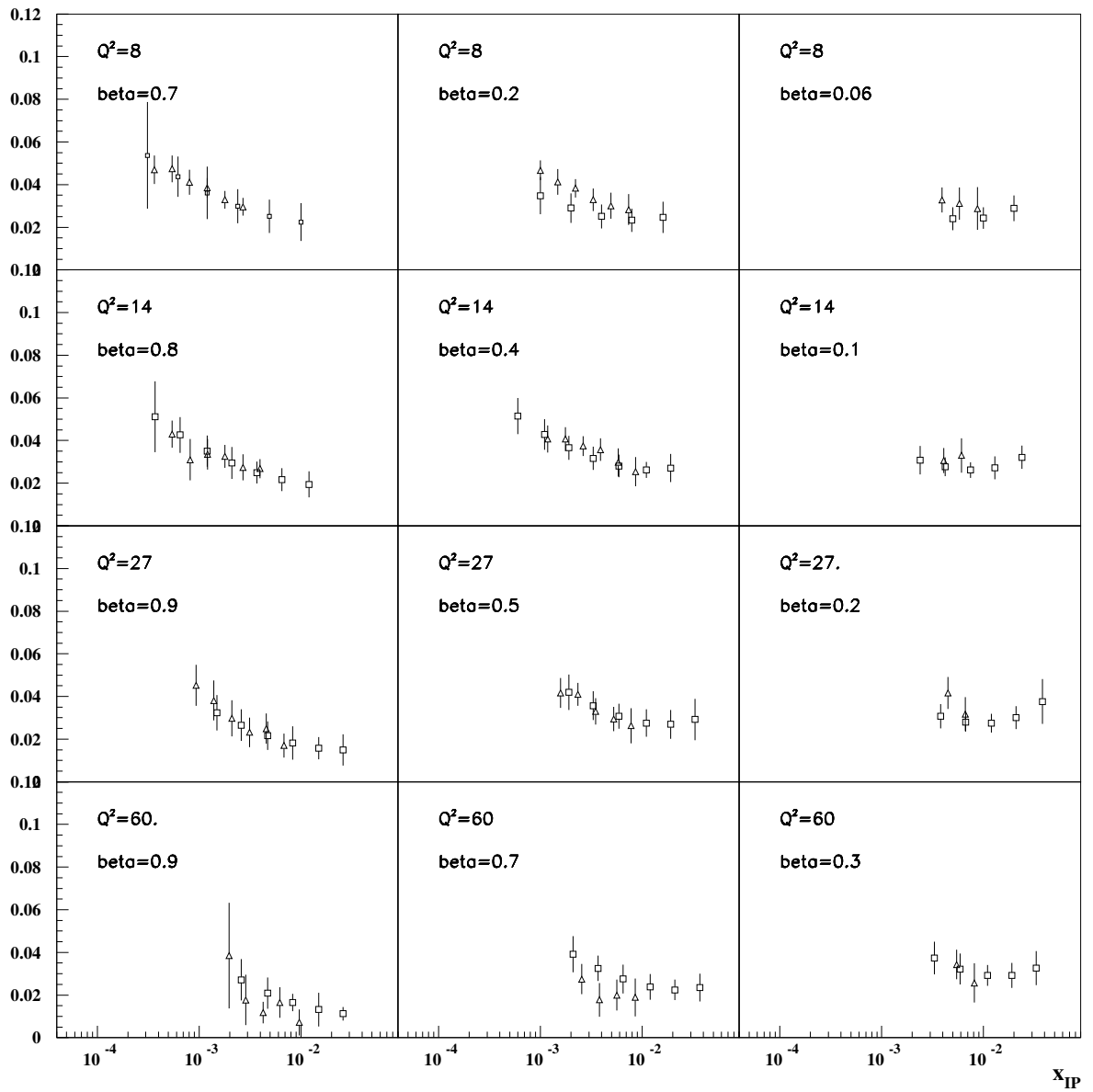


Figure 4

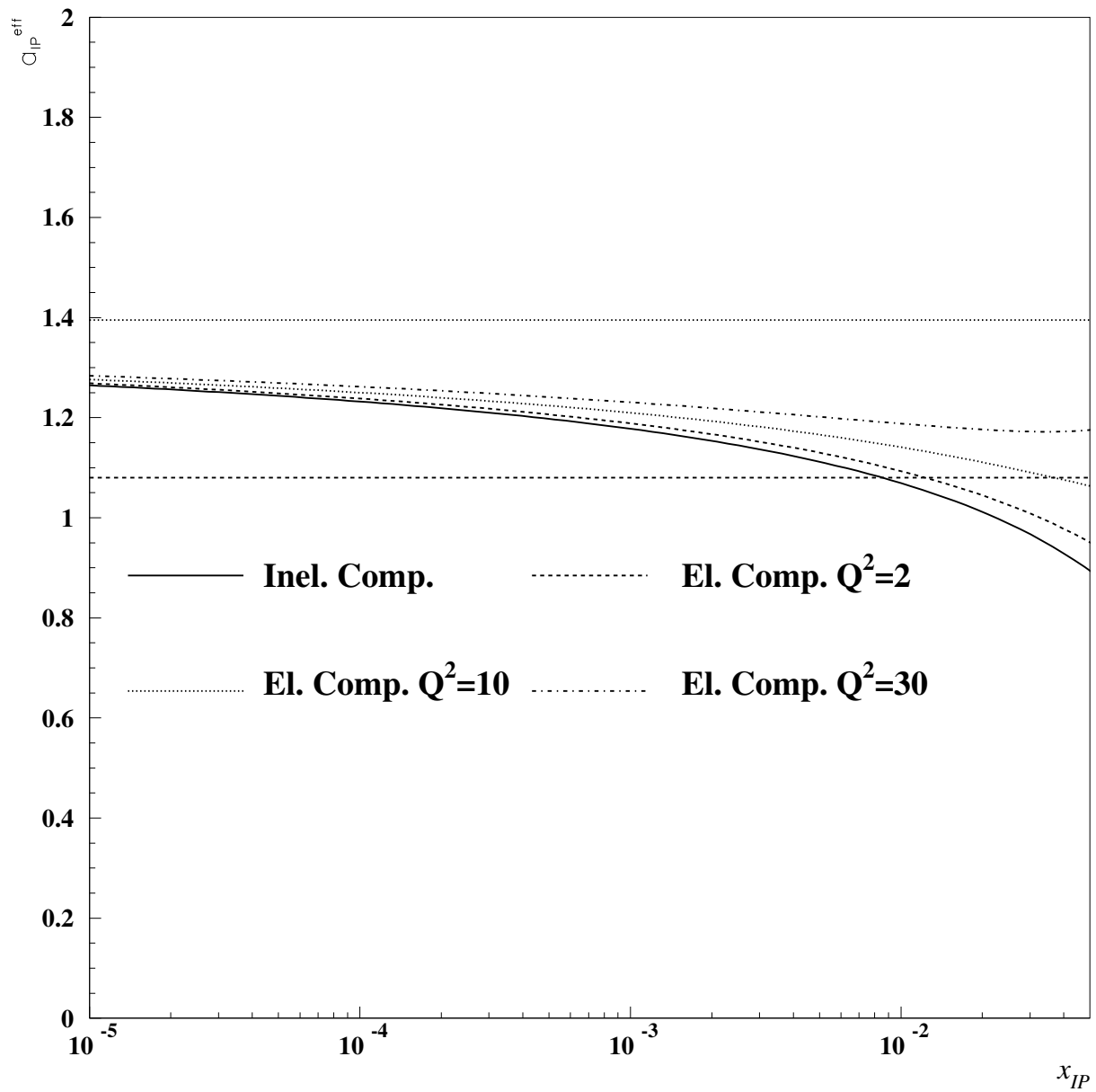


Figure 5

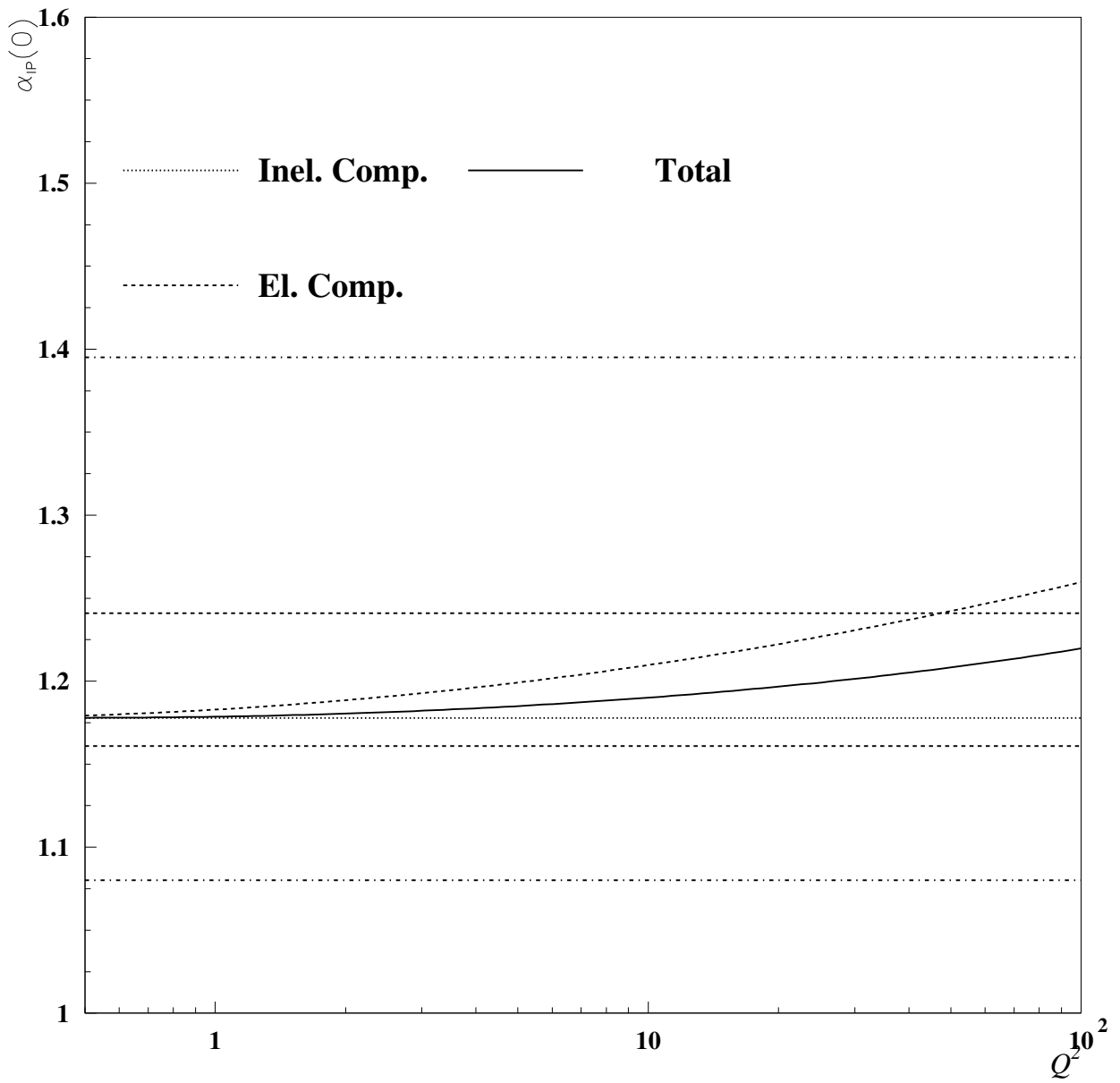


Figure 6

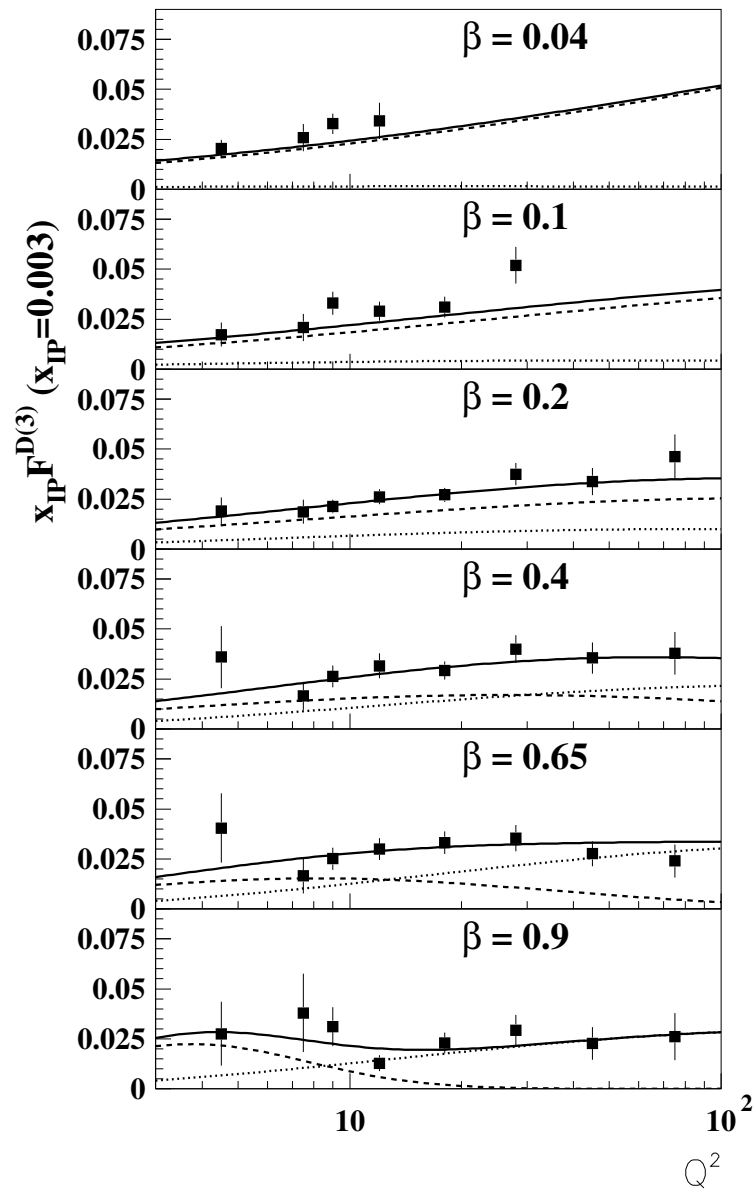


Figure 7

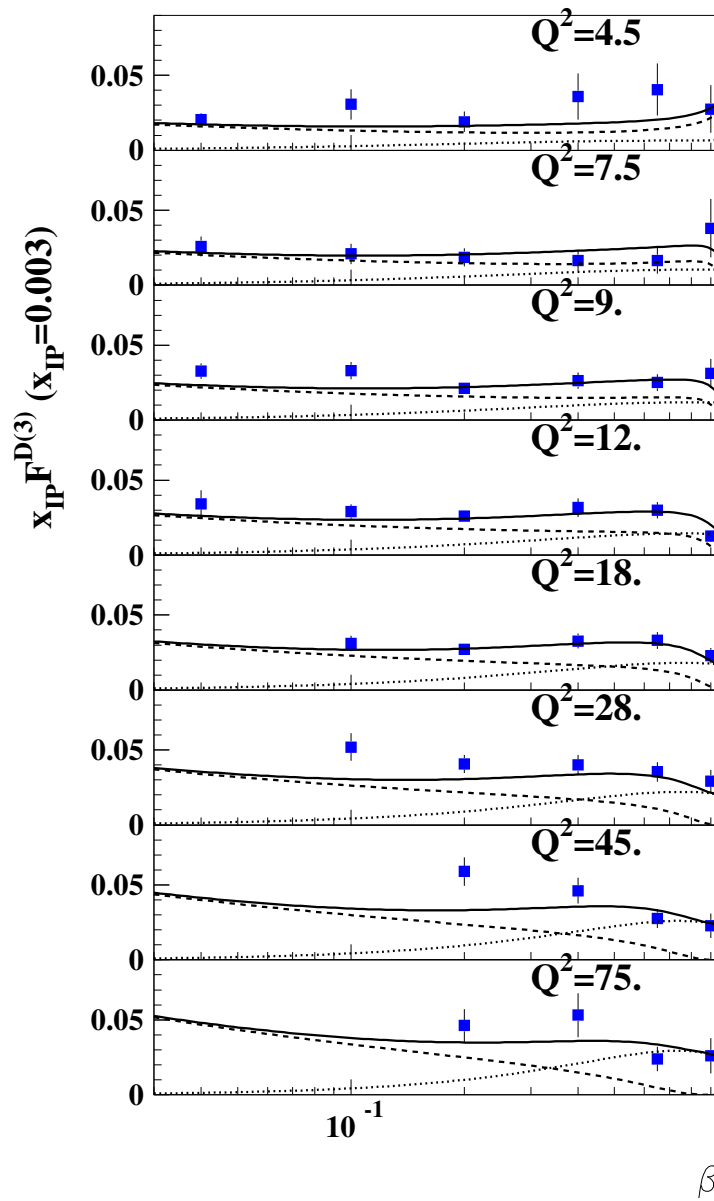


Figure 8

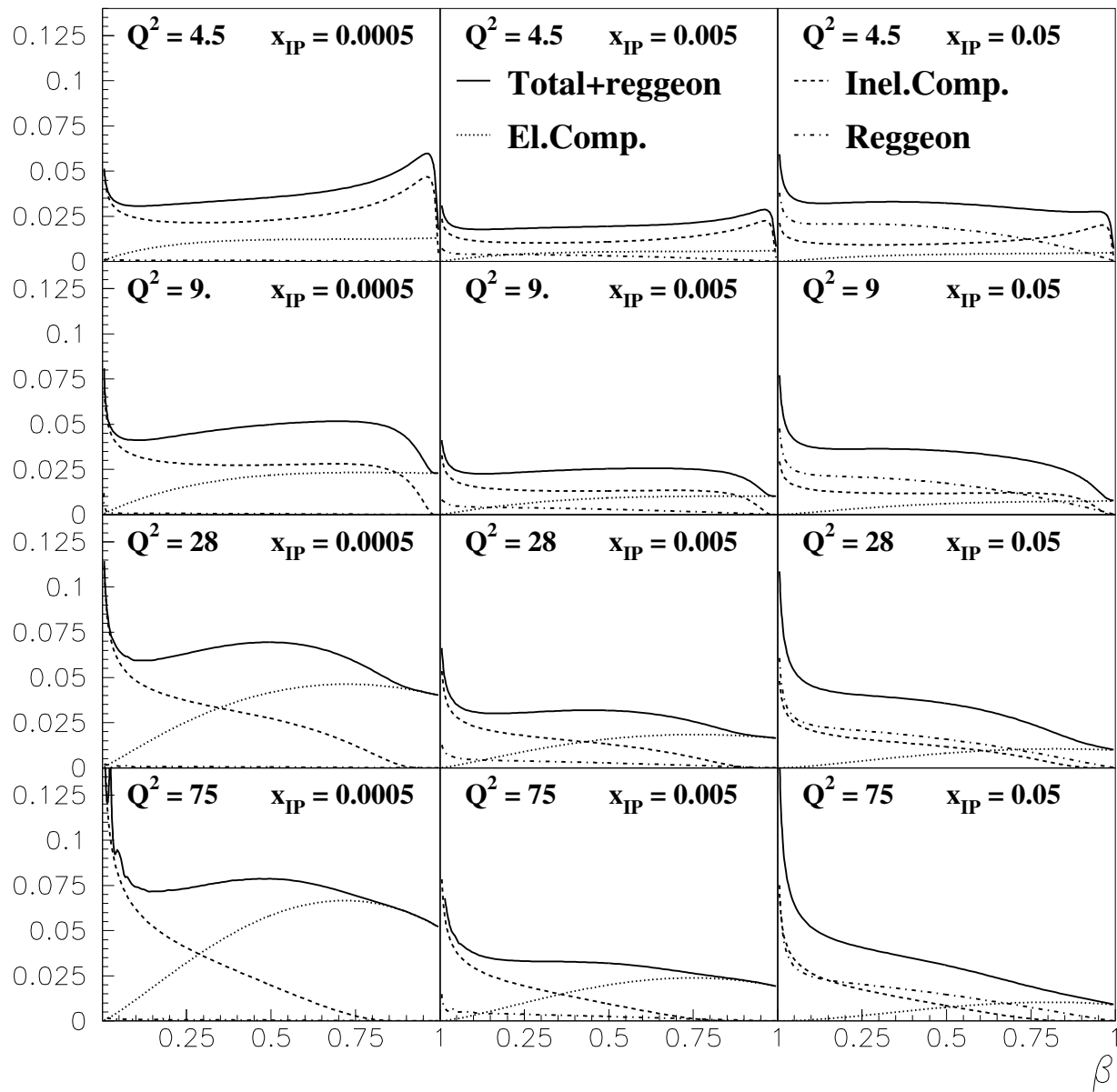


Figure 9

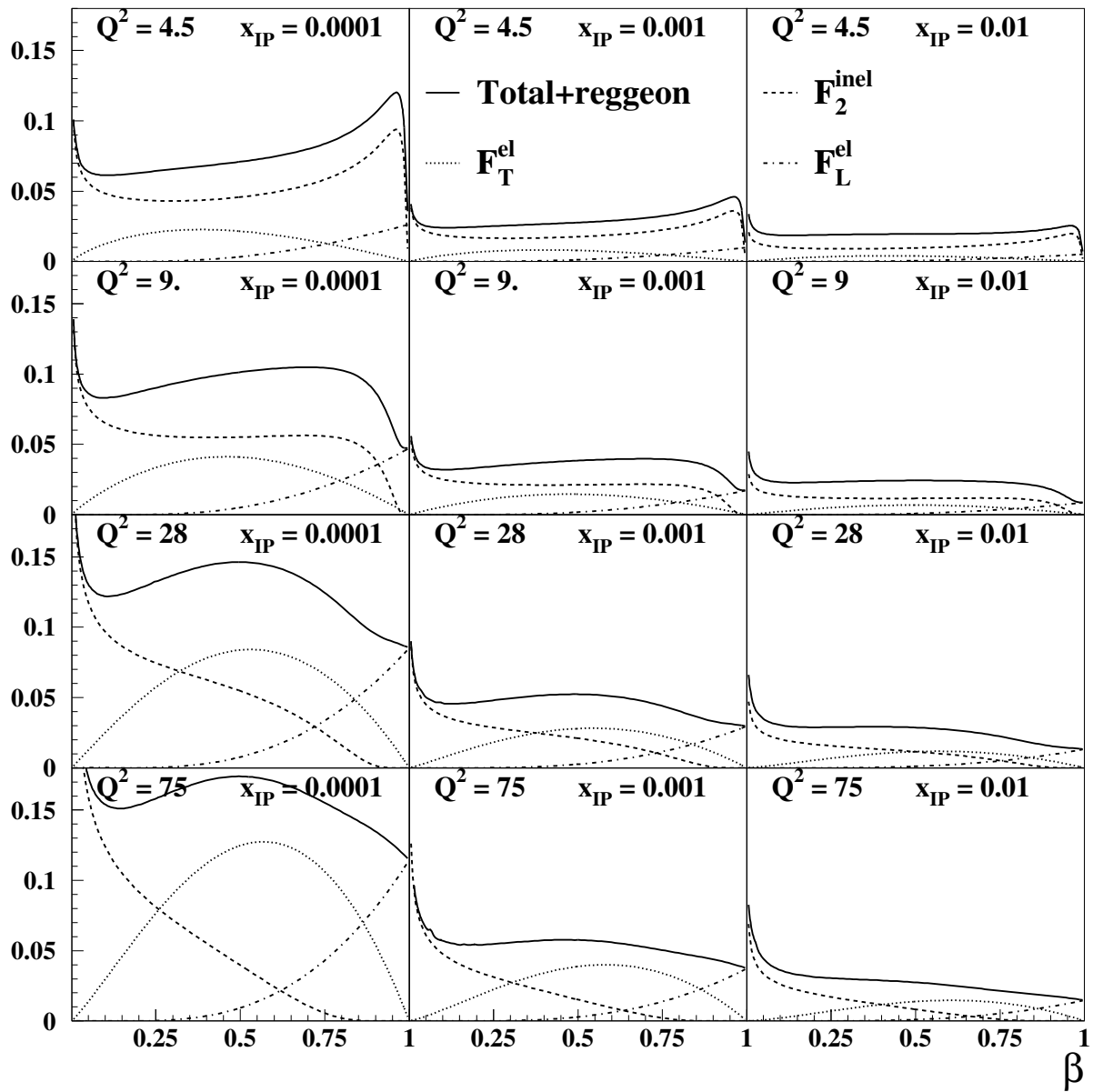


Figure 10



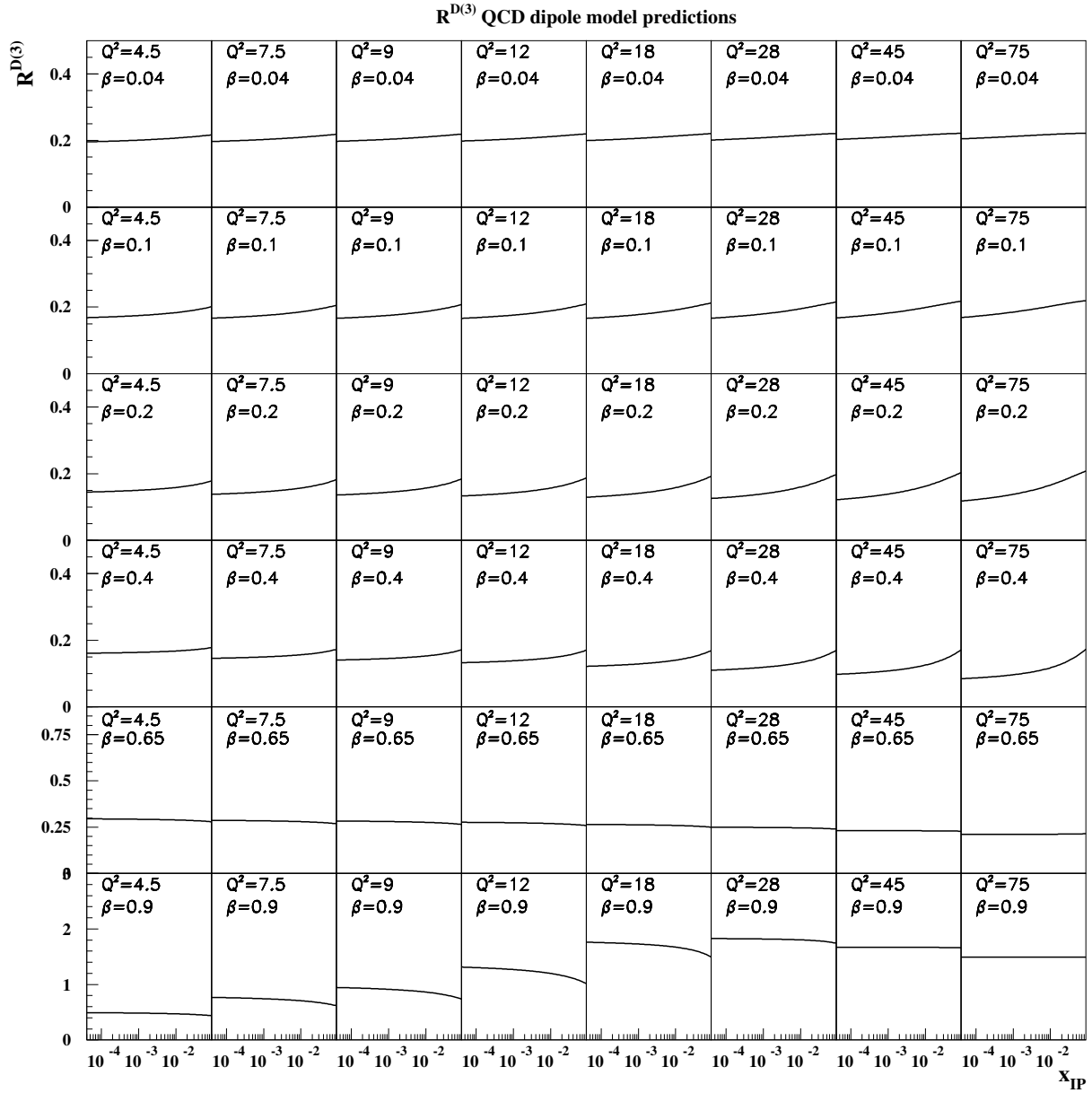


Figure 11

## Article III



# QCD, conformal invariance and the two Pomerons

S. Munier and R. Peschanski  
 CEA, Service de Physique Theorique CE-Saclay  
 F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

## Abstract

Using the solution of the BFKL equation including the leading and subleading conformal spin components, we show how the conformal invariance underlying the leading  $\log(1/x)$  expansion of perturbative QCD leads to elastic amplitudes described by two effective Pomeron singularities. One Pomeron is the well-known "hard" BFKL leading singularity while the new one appears from a shift of the higher conformal spin BFKL singularities from subleading to leading position. This new effective singularity is compatible with the "soft" Pomeron and thus, together with the "hard" Pomeron, meets at large  $Q^2$  the "double Pomeron" solution which has been recently conjectured by Donnachie and Landshoff.

## 1 Introduction : two Pomerons ?

In a recent paper [1] the conjecture was made that not one, but two Pomerons could coexist. This proposal is based on a description of data for the proton singlet structure function  $F(x, Q^2)$  in a wide range of  $x$  ( $< 0.7$ ) and all available  $Q^2$  values (including also the charm structure function and elastic photoproduction of  $J/\Psi$  on the proton). The singlet structure function reads

$$F(x, Q^2) = \sum_{i=0}^2 F_i(x, Q^2) = \sum_{i=0}^2 f_i(Q^2) x^{-\epsilon_i}, \quad (1)$$

corresponding [1,2] to the sum of three contributions, namely a "hard" Pomeron contribution with a fitted intercept  $\epsilon_0 = .435$ , a "soft" Pomeron exchange, as seen in soft hadronic cross-sections with a fixed intercept  $\epsilon_1 = 0.0808$ , and a secondary Reggeon singularity necessary to describe the larger  $x$  region with intercept fixed at  $\epsilon_2 = -.4525$ . The "hard" Pomeron is in particular needed to describe the strong rise of  $F$  at small  $x$  observed at HERA [3]. The key observation of Ref.[1] is that the agreement with data can be obtained by assuming an opposite  $Q^2$ -behaviour for the two Pomeron contributions in formula (1). Indeed, for  $Q^2 > 10 \text{ GeV}^2$ ,  $f_0(Q^2)$  is increasing and  $f_1(Q^2)$  decreasing (the precise parametrizations [2] are given in a Regge theory framework).

This picture is suggestive of a situation where the "soft" and "hard" Pomerons are not one and the same object but two separate Regge singularities with rather different intercept and  $Q^2$  behaviour. The "hard" Pomeron may be expected to be governed by perturbative QCD evolution equations. Indeed, at small  $x$ , a Regge singularity is expected to occur as a solution of the BFKL equation [4] corresponding to the resummation of the leading  $(\bar{\alpha} \ln 1/x)^n$  terms in the QCD perturbative expansion, where  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha N_c}{\pi}$  is the (small) value of the coupling constant of QCD. The intercept value is predicted to be  $\epsilon_0 = 4\bar{\alpha} \ln 2$ . It is interesting to note that the phenomenological fit for the hard Pomeron in Ref. [1] corresponds to a reasonable value for

$\bar{\alpha}$  ( $\approx .15$ ). The goal of the present paper is to show that the global conformal invariance of the BFKL equation [5] leads to a natural mechanism generating both the “hard” and “soft” Pomeron singularities.

The plan of the paper is as follows : in Section 2, using the BFKL equation and the set of its conformal-invariant components, we exhibit the phenomenon generating sliding singularities. In Section 3, we explicitly describe the two-Pomeron configuration obtained from the “sliding” mechanism. In section 4 we confront the resulting effective singularities with the parametrization of [1] and discuss some expectations from non-perturbative corrections at small  $Q^2$ . Finally, in section 5, we discuss some phenomenological and theoretical implications of our QCD two-Pomeron mechanism.

## 2 The “sliding” phenomenon

Let us start with the solution of the BFKL equation expressed in terms of an expansion over the whole set of conformal spin components [5]. For structure functions, one may write (using the notation  $Y = \ln 1/x$ ) :

$$F(Y, Q^2) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p(Y, Q^2) = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} d\gamma \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}\chi_p(\gamma)Y} f_p(\gamma), \quad (2)$$

with

$$\chi_p(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(p+1-\gamma) - \Psi(p+\gamma) \quad (3)$$

and  $Q_0$ , being some scale characteristic of the target (onium, proton, etc...).  $\chi_p(\gamma)$  is the BFKL kernel eigenvalue corresponding to the  $SL(2, \mathcal{C})$  unitary representation [5] labelled by the conformal spin  $p$ . It is to be noted that the  $p=0$  component corresponds to the dominant “hard” BFKL Pomeron. Usually the  $p \neq 0$  components, required by conformal invariance<sup>1</sup> but subleading by powers of the energy, are omitted with respect to the leading logs QCD resummation. They are commonly neglected in the phenomenological discussions. We shall see that they may play an important rôle, however.

The couplings of the BFKL components to external sources are taken into account by the weights  $f_p(\gamma)$  in formula (2). Little is known about these functions and we shall treat them as much as possible in a model independent way. For instance, they should obey some general constraints, such as a behaviour when  $\gamma \rightarrow \infty$  ensuring the convergence of the integral in (2). We will see that some extra analyticity constraints will appear in the context of the two Pomeron problem<sup>2</sup>.

The key observation leading to the sliding phenomenon starts by considering the successive

---

<sup>1</sup>In the following, we will stick to integer values of  $p$  since half-integer spin components exist but do not contribute to elastic cross-sections [6].

<sup>2</sup>Note that a general constraint on the coupling of the BFKL kernel to external particles is coming from gauge invariance [5]. We checked that this constraint is rather weak in our case, and not relevant to the discussion.

derivatives of the kernels  $\chi_p(\gamma)$ . One considers the following suitable form :

$$\begin{aligned} \chi_p(\gamma) &\equiv \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p+\gamma+\kappa} + \frac{1}{p+1-\gamma+\kappa} - \frac{2}{\kappa+1} \right\} \\ \chi'_p(\gamma) &\equiv -\sum_{\kappa} \left\{ \frac{1}{(p+\gamma+\kappa)^2} - \frac{1}{(p+1-\gamma+\kappa)^2} \right\} \\ \chi''_p(\gamma) &\equiv 2\sum_{\kappa} \left\{ \frac{1}{(p+\gamma+\kappa)^3} + \frac{1}{(p+1-\gamma+\kappa)^3} \right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

As obvious from (4), the symmetry  $\gamma \iff 1-\gamma$  leads to a maximum at  $\gamma = 1/2$  for all  $p$ , and thus to a saddle-point of expression (2) at  $\Re e(\gamma) = 1/2$  for ultra asymptotic values of  $Y$ . The saddle-point approximation gives

$$F(x, Q^2) |_{Y \rightarrow \infty} \approx \left(\frac{Q}{Q_0}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f_p\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \bar{\alpha} \chi''_p\left(\frac{1}{2}\right) Y}} e^{\bar{\alpha} \chi_p\left(\frac{1}{2}\right) Y}. \tag{5}$$

The  $Q$ -dependent factor corresponds to a common anomalous dimension  $\frac{1}{2}$  for all  $p$ . Note that the known  $Q$ -dependent “ $k_T$ -diffusion” factor is absent in this ultra-asymptotic limit.

The series of functions of  $Y$  is such that only the first term has intercept  $\bar{\alpha} \chi_p\left(\frac{1}{2}\right)$  larger than 0. Indeed,

$$\begin{aligned} \chi_0\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \ln 2 \approx 2.77 \\ \chi_1\left(\frac{1}{2}\right) &= \chi_0\left(\frac{1}{2}\right) - 4 \approx -1.23 \\ \chi_{p+1}\left(\frac{1}{2}\right) &< \chi_p\left(\frac{1}{2}\right) < \dots < 0, \quad p \geq 1. \end{aligned} \tag{6}$$

This ultra asymptotic result is the reason why the conformal spin components with  $p > 0$  are generally neglected or implicitly taken into account by ordinary secondary Regge singularities with intercept less than 0. However, at large enough values of  $Q^2$  and even for very large  $Y$ , a sliding phenomenon moves away the singularities corresponding to these conformal spin components, leading to a very different behaviour from (5). Indeed, the sliding mechanism is already known [7,8] to generate the diffusion factor of the leading  $p = 0$  component. However it has an even more important effect on the higher spin components as we shall discuss now.

The sliding mechanism is based on the fact that  $\chi''_p\left(\frac{1}{2}\right)$ , the second derivative of the kernels at the asymptotic saddle-point value, becomes in absolute value very small when  $p \geq 1$ , in such a way that the real saddle-points governing the integrals of formula (2) are considerably displaced from  $\gamma = 1/2$ . Indeed, considering the expansions (4), one has :

$$\begin{aligned} \chi''_0\left(\frac{1}{2}\right) &= 28\zeta(3) \approx 33.6 \\ \chi''_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 28\zeta(3) - 32 \approx 1.66 \\ 1.66 &> \dots > \chi''_p\left(\frac{1}{2}\right) > \chi''_{p+1}\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad p \geq 2. \end{aligned} \tag{7}$$

For the  $p = 0$  component, the corresponding integral in (2) can be evaluated by a saddle-point in the vicinity of  $\gamma = \frac{1}{2}$ , and gives the diffusion factor  $\exp\left(-\log^2(Q/Q_0)^2/2\bar{\alpha}Y\chi''_0\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ .

Considering the rapid decrease by a factor 20 of the modulus of the second derivative for  $p = 1$ , it is easy to realize that, for components  $p \geq 1$ , it is no more justified to evaluate the integrals in the vicinity of  $\gamma = \frac{1}{2}$ , the real saddle-point being away from this value. We shall make the correct evaluation in the next section.

### 3 The “sliding” mechanism

Let us consider the  $F_p$  component of the summation (2) in the following way : For each value of  $(Y, \ln \frac{Q^2}{Q_0^2})$ , we compute the *effective intercept* (in units of  $\bar{\alpha}$ )  $\frac{\partial \ln F_p}{\bar{\alpha} \partial Y}$  displayed as a function of the *effective anomalous dimension*  $\frac{\partial \ln F_p}{\partial \ln Q^2} = \gamma_c$ . Our observation is that, for any weight  $f_p(\gamma)$  in formula (2), the resulting set of points accumulates near the curve  $\chi_p(\gamma)$ . This result is valid provided a saddle-point dominates the integral.

The proof comes as follows : If a saddle point  $\gamma_c$  dominates the integral (2) for  $F_p(Y, Q^2)$ , the saddle-point equation

$$\frac{\partial \ln F_p}{\partial \gamma_c} = 2 \ln(Q/Q_0)^2 + \bar{\alpha} Y \chi_p'(\gamma_c) + [\ln f_p(\gamma_c)]' = 0 \quad (8)$$

is verified and the resulting integral is approximated by

$$F_p(Y, Q^2) \approx \frac{(Q/Q_0)^{2\gamma_c} e^{\bar{\alpha} \chi_p(\gamma_c) Y} f_p(\gamma_c)}{\{2\pi (\bar{\alpha} Y \chi_p''(\gamma_c) + [\ln f_p(\gamma_c)]'')\}^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

Neglecting in (9) derivatives of the slowly varying saddle-point prefactor  $\{\dots\}^{-\frac{1}{2}}$ , one may write

$$\begin{aligned} \frac{d \ln F_p}{\bar{\alpha} dY} &= \frac{\partial \ln F_p}{\partial \gamma_c} \times \frac{d\gamma_c}{\bar{\alpha} dY} + \frac{\partial \ln F_p}{\bar{\alpha} \partial Y} = \frac{\partial \ln F_p}{\bar{\alpha} \partial Y} \equiv \chi_p(\gamma_c) \\ \frac{d \ln F_p}{d \ln Q^2} &= \frac{\partial \ln F_p}{\partial \gamma_c} \times \frac{d\gamma_c}{d \ln Q^2} + \frac{\partial \ln F_p}{\partial \ln Q^2} = \frac{\partial \ln F_p}{\partial \ln Q^2} \equiv \gamma_c, \end{aligned} \quad (10)$$

where one uses the saddle-point equation (8) to eliminate the contributions due to the implicit dependence  $\gamma_c(Y, Q^2)$ . This proves our statement.

Interestingly enough, the property (10) is valid for any weight  $f_p(\gamma)$ , and thus can be used to characterize the generic behaviour of the expression (2). The only condition is the validity of a saddle-point approximation which is realized whenever  $Q^2$  or  $Y$  is large enough.

Let us discuss some relevant example. In Figs.1,2 we have plotted the result of the numerical integration in expression (2) for  $p = 0, 1, 2$ , choosing  $f_p(\gamma) \equiv \frac{1}{\cos \frac{\pi \gamma}{4}}$ . This weight is chosen in such a way that the convergence properties of the integrands are ensured and no extra singularity is generated for  $|\gamma| < 2$ . Other weights with the same properties were checked to give the same results. For comparison we also display the functions  $\chi_0(\gamma)$ ,  $\chi_1(\gamma)$  and  $\chi_2(\gamma)$ . Note that we have also included for the discussion the auxiliary branches of  $\chi_0(\gamma)$  for the intervals  $-1 < \gamma < 0$  and  $-2 < \gamma < -1$ .

The results both for  $p = 0$  (white circles) and  $p = 1, 2$  (black circles) are displayed in Fig.1 for a fixed large value of total rapidity  $Y = 10$  and various values of  $\ln Q^2/Q_0^2$ , while in Fig.2 they are shown for a fixed value of  $\ln Q^2/Q_0^2 = 4$  and various  $Y$ . Indeed, it is seen on these plots that the saddle-point property (10) is verified, even for the auxiliary branches<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>In the case of the two auxiliary branches considered in Figs.1,2, we have considered an integration contour shifted by one and two units to the left in order to separate the appropriate contributions from the leading ones.

The observed small systematic shift of the numerical results w.r.t. the theoretical curves  $\chi(\gamma)$  is well under control. It is related to the saddle-point prefactor in formula (9).

By various verifications, we checked that the results shown in Figs.1,2 are generic if the following three conditions are realized :

- i)  $Y$  or  $\ln Q^2/Q_0^2$  are to be large enough ( $\geq 2, 3$ ) to allow for a saddle-point method.
- ii)  $f_p(\gamma)$  is constrained to ensure the convergence and positivity of the integrals of expression (2) in the complex plane.
- iii)  $f_p(\gamma)$  has no singularity for  $\Re(\gamma) > -p$ .

The striking feature of the results displayed in Figs.1,2 is that, while remaining in vicinity of the curve  $\chi_p(\gamma_c)$ ,  $\frac{d \ln F_p}{\bar{\alpha} dY}$  and  $\frac{d \ln F_p}{d \ln Q^2}$  are shifted away from the ultra asymptotic saddle-point point at  $\gamma = 1/2$ . Moreover, the shift is larger if the conformal spin  $p$  is higher.

Let us make a particular comment on the analyticity constraint iii). Obviously, the presence of a singularity at  $\Re \gamma > -p$  would prevent the existence of a shift. Indeed, in Fig.3, we show the result for  $f_p(\gamma) = (\gamma \cos \pi\gamma/4)^{-1}$  where we have explicitly violated the constraint iii) by a pole at  $\gamma = 0$ . As a result, the components  $F_1$  and  $F_2$ , remain still very close to their reference curves  $\chi_1(\gamma)$  and  $\chi_2(\gamma)$ , but they appear “sticked” at the singularity point  $\gamma = 0$ . Thus the relation (10) remains verified, but the sliding mechanism is “frozen” by the singularity, as expected from analyticity properties.

The main consequence of the sliding mechanism is to substantially modify the evaluation of the sum (2) with respect to the ultra asymptotic expectation (5). Indeed<sup>4</sup> the situation seen on Figs.1,2 is general : the first contribution  $F_0$  is subject to a rather small shift from  $\gamma = 1/2$ , while the  $p = 1$  component  $F_1$  remains at values where  $\frac{d \ln F_1}{\bar{\alpha} dY}$  is slightly above 1 and  $\frac{d \ln F_1}{d \ln Q^2}$  is below  $-1/2$ . The higher components  $F_2$  and a fortiori  $F_{p>2}$  lie in regions with negative effective intercept and lower and lower values of the effective anomalous dimension.

It is instructive to compare the results of Figs.1,2 for the  $p = 1$  component with those obtained for the auxiliary branches of the  $p = 0$  one. Though being situated in the same range of effective anomalous dimension  $\gamma$  as the  $p = 1$  component, the first auxiliary branch gives sensibly lower (and almost all negative) values of the effective intercept in the considered kinematical range. Thus, the corresponding contributions to the  $p = 0$  amplitude are subdominant in energy with respect to the spin 1 amplitude. The same property holds for the second auxiliary branch which stays subdominant with respect to the  $p = 2$  component which, in any case is itself subdominant with respect to  $p = 1$ .

Thus, the mechanism we suggest for the two-Pomeron scenario is the following : the rôle of the “hard” Pomeron is played (as it should be) by the component  $F_0$ , while the rôle of the “soft” Pomeron is played by the other components, principally the component with unit conformal spin  $F_1$ . Here this mechanism is realized in a range  $(Y, \ln Q^2/Q_0^2)$  where perturbative QCD (with resummation) is valid. Extrapolation to the non-perturbative domain will be discussed in the next section.

## 4 Physical expectations

It is now worth discussing our results, obtained from QCD and conformal symmetry, in the context of the phenomenological analysis of paper [1]. Our goal is not to identify the two approaches since the theoretical conformal spin expansion (2) is only valid in the perturbative QCD region at large  $Y$  and  $Q^2$ , while the approach of paper [1] takes into account data in the

<sup>4</sup>Using various examples we found this result to be generic provided constraints i) – iii) are verified.



whole range of  $Q^2$ . Nevertheless it is interesting to confront our resulting effective parameters with those obtained from the description of paper [1].

In Fig.4 we show a plot comparing our results with those obtained from the two Pomeron components of [1] in terms of the effective parameters as previously. In the case of the parametrization of paper [1], the effective intercept and anomalous dimension are easily identified as, respectively,  $\epsilon_i$  and  $d \ln f_i(Q^2) / d \ln Q^2$ , see expression (1). In order to make contact with phenomenology, we have fixed  $\bar{\alpha} = .15$ , and  $Q_0 = 135$  MeV. This last value is somewhat arbitrary but corresponds to rather high values of  $\ln(Q/Q_0)^2$  in the physical range, justifying the existence of a significant saddle-point. In practice, in Fig.4, we have considered  $Y = 10$  and  $\ln(Q/Q_0)^2 = (4, 6, 8, 10)$ . The crosses in Fig.4 correspond to the effective parameters extracted from the parametrization [1] and the black dots to our numerical results of the integrals (2) for the same values of the kinematical variables. We performed the calculation with  $f_p(\gamma) \propto 1/\cos \frac{\pi\gamma}{4}$ , but checked the validity of the results for other weights (with similar analyticity properties, cf. section 3.)

The main thing to be noticed is the reasonable agreement between both results for large values of  $Q^2$  corresponding to the direction of the arrows on the figure. A few remarks are in order :

i) The leading “hard Pomeron” singularity obtained by our results is of the type used e.g. in the phenomenological description of proton structure functions in the dipole model of BFKL dynamics [8]. However the value of the coupling constant, chosen here to match with the determination of the hard component by [1], is larger than in one-Pomeron fits [8] and in better agreement with the original BFKL framework.

ii) The nonleading singularity is obtained in the correct range fixed by [1] to be given by the “soft” Pomeron [9]. It is to be remarked that, while the “hard” Pomeron singularity is mainly fixed by the choice of  $\bar{\alpha}$ , the nonleading one is a result of the sliding mechanism. We thus find this feature to be model independent and related to the asymptotic conformal invariance of the input amplitudes.

iii) As also seen in the figure, the agreement is not quantitative, especially at lower  $Q^2$ , since the results obtained from our formula (2) appear as *moving* effective singularities while those from paper [1] are, by definition, *fixed* Regge singularities.

Let us comment further on this important difference. In perturbative QCD, submitted to obey a renormalization group property, one expects in rather general conditions a scale-dependent evolution, different from the Regge-type of singularities, at least for the singlet channel [10]<sup>5</sup>. It is thus not surprising that the various components obtained from our approach show this characteristic feature, see Figs.1-4. On contrary, pure Regge singularities will correspond to fixed intercepts as shown in Fig.4 by the horizontal lines.

We feel that moving effective singularities will remain a typical feature of the “hard” singularity at high  $Q^2$ , at least if perturbative QCD is relevant in this case. The situation is obviously different for the “soft” singularity which intercept is fixed at the known “universal” value for soft interactions [9]. The behaviour of the “soft” singularity when  $Q^2$  becomes small is not determined in our perturbative approach. It only predicts that it will become dominant when  $Q^2$  will approach and decrease below  $Q_0^2$ , as indicated by the effective anomalous dimension. Non-perturbative QCD effects could thus be expected to stabilize the perturbative soft singularity at the known location of the phenomenological soft Pomeron<sup>6</sup>. Moreover, one would have to consider also the other higher conformal spin components.

Some qualitative arguments can be added in favour of specific non perturbative effects for conformal spin components. Indeed, the same reason leading to the sliding mechanism,

<sup>5</sup>Note, however, the different perturbative approach of [11].

<sup>6</sup>Another possibility [12] could be a pole in the weight  $f_p(\gamma)$  at a suitable position, but it would not be easily justified by a physical property like e.g. conformal invariance.

namely the smallness of  $\chi_p''(\gamma)$  in the vicinity of  $\gamma = 1/2$ , implies a large “ $k_T$ -diffusion” phenomenon [7]. One typically expects a range of “ $k_T$ -diffusion” for the gluon virtuality scales building the spin component  $F_p$  depending on  $p$  as  $(\chi_p''(\frac{1}{2}))^{-1}$ . Thus, while the contamination of non-perturbative unitarization effects could be limited for  $F_0$ , it is expected to be strong for  $F_1$  and the higher spin components  $F_{p>1}$ . All in all, it is a consistent picture that the softer components obtained in a perturbative QCD framework at high  $Q^2$  are precisely those for which stronger “ $k_T$ -diffusion” corrections are expected. To go further would require a study of the low- $Q^2$  region, in particular of higher-twist contributions, which are outside the scope of our present paper <sup>7</sup>.

Concerning the physical meaning of the analyticity constraints imposed on the integrand factors  $f_p(\gamma)$ , they amount to discuss the conformal coupling of the BFKL components to, say, the virtual photon and the proton (or, more generally other projectiles/targets). Leaving for future work the complete derivation of the conformal couplings to different conformal spins [14, 15], let us assume that the coupling is spin independent. Interestingly enough an eikonal coupling to a  $q\bar{q}$  pair [16] then appears to be forbidden, since it has a pole at  $\gamma = 0$ , corresponding to the presence of the gluon coupling in the impact factor [17]. However, considering the direct coupling through the probability distribution of a virtual photon in terms of  $q\bar{q}$  pair configurations [18], we remark, following the derivation of [17], that the pole due to the gluon coupling is cancelled with no other singularity at  $\gamma = 0$ . We explicitly checked that we obtain very similar results to those displayed in Figs.1–3 within this framework. Note that such a model ensures the positivity of the conformal spin contributions.

In our derivation, which follows from the conformal invariance of the BFKL equation, we have stuck to the case of a fixed coupling constant. It has been proposed [5, 19, 20] that the solution of the BFKL equation, once modified in order to take into account a running coupling constant, leads to two, or more probably, a series of Regge poles instead of the  $j$ -plane cut obtained originally at fixed  $\bar{\alpha}$ . However, this solution with more than one Pomeron singularity does not ensure the specific  $Q^2$  behaviour required by the analysis of [1] and obtained by the sliding mechanism. The running of the coupling constant, and more generally the results of the next-leading BFKL corrections [21], modify the singularity structure could preserve the sliding mechanism. Further study is needed in this respect.

## 5 Conclusion and outlook

To summarize our results, using the full content of solutions of the BFKL equation in a perturbative QCD framework, and in particular their conformal invariance, we have looked for the physical consequences of the higher conformal spin components of the conformal expansion on the problem of the Pomeron singularities. We have found, under rather general conditions, that the obtained pattern of effective singularities leads to two Pomeron contributions, one “hard”, corresponding to the ordinary conformal spin 0 component and one “soft”, corresponding to higher spin contributions, mainly spin 1. This situation meets, at least in the large  $Q^2$  domain, the empirical observation of Ref. [1] leading to a “hard” Pomeron with leading-twist behaviour and a “soft” Pomeron with higher-twist behaviour. It is interesting to note that the higher-twist behaviour we obtain corresponding to the  $p = 1$  component is of higher effective intercept than the one which may be associated with the auxiliary branches of the “hard” component  $p = 0$ . Thus, there is no doubt that the  $p = 1$  component behaviour is emerging from the other secondary BFKL contributions. However, its order of magnitude remains to be discussed [15].

---

<sup>7</sup>The known studies on higher-twists effects at low  $x$  [13] seems to show a different behaviour from the one obtained from the sliding mechanism of higher conformal spin components. This feature certainly deserves further study.

It is important to note that the higher spin components rely on the existence of an asymptotic global conformal invariance. This invariance has been proved to exist in the leading-log approximation. In the next-leading log BFKL calculations, It has been recently advocated [22] to be preserved, at least approximately. If this result is confirmed, and if the characteristics of the kernels are similar, the rôle of the modified higher conformal spin components is expected to be the same. Further tests of our conjecture also imply a study of the specific couplings of the higher spin components to the initial states and an extension of the predictions to the non-forward diffractive scattering. Indeed, it has been recently shown [23] that the photoproduction of  $J/\Psi$  gives evidence for no shrinkage of the Pomeron trajectory. Thus the two-Pomeron conjecture could also be borne out by considering non-forward processes.

If confirmed in the future, the two-Pomeron conjecture leads to further interesting questions, for instance :

- Can we built an Operator Product Expansion for the structure functions, and thus higher-twist contributions, incorporating the conformal invariance structure ?

- Can we get some theoretical information on the physical “soft” Pomeron by considering high- $Q^2$  indications given by perturbative QCD indications ?

- Can we see some remnants of the specific conformal spin structure associated with the two Pomerons ?

- The sliding mechanism appears as a kind of a spontaneous violation of asymptotic conformal invariance : can we put this analogy in a more formal way ?

One interesting conclusion to be drawn from our study is that the matching of hard and soft singularities could be very different from expectation. Usually, it is expected that a smooth evolution is obtained from the hard to the soft region thanks to the increase of the unitarity corrections to some “bare” Pomeron. By contrast, in the empirical approach of [1] and in the theoretical sliding mechanism discussed in the present paper, the “hard” and “soft” regions are essentially dominated by distinct singularities, with only small overlap. Clearly, this alternative deserves further phenomenological and theoretical studies. In particular, it has been suggested [12] to extend the study to (virtual) photon-photon reactions where the perturbative singularities and their specific coupling are expected to be theoretically well-defined. For instance, if the eikonal coupling is confirmed as a characteristic feature of the (virtual) photon coupling to the BFKL kernel, the sliding mechanism should not work for the spin 1 component and thus the would-be “soft” Pomeron is expected to be absent from these reactions. Another case study is the Pomeron in hard diffractive reactions where the sliding mechanism, if present, could be different than for total structure functions, and thus leading to a different balance of hard and soft singularities.

### ACKNOWLEDGEMENTS

We want to thank the participants of the Zeuthen Workshop on DIS at small  $x$ , (“Royon meeting”, june 1998) for fruitful discussions, among whom Jeff Forshaw, Douglas Ross for stimulating remarks and particularly Peter Landshoff for provoking us with his and Donnachie’s conjecture. We are also indebted to Andrzej Bialas and Henri Navelet for interesting suggestions and comments.

## References

- [1] A.Donnachie and P.V.Landshoff, *Phys. Lett.* **B457** (1998) 408, hep-ph/9806344.
- [2] The parametrization of Ref.[1] is the following
- $$f_0(Q^2) = A_0 \left( \frac{Q^2}{Q^2 + a_0} \right)^{1+\epsilon_0} \left( 1 + X \log \left( 1 + \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) \right)$$
- $$f_1(Q^2) = A_1 \left( \frac{Q^2}{Q^2 + a_1} \right)^{1+\epsilon_1} \frac{1}{1 + \sqrt{Q^2/Q_1^2}},$$
- $$f_2(Q^2) = A_2 \left( \frac{Q^2}{Q^2 + a_2} \right)^{1+\epsilon_2},$$
- |                      |                      |                        |
|----------------------|----------------------|------------------------|
| $\epsilon_0 = 0.418$ | $\epsilon_1 = .0808$ | $\epsilon_2 = -0.4525$ |
| $A_0 = 0.0410$       | $A_1 = .387$         | $A_2 = .0504$          |
| $a_0 = 7.13$         | $a_1 = 0.684$        | $a_2 = .00291$         |
| $Q_0^2 = 10.6$       | $Q_1^2 = 48.0$       |                        |
| $X = 0.485$          |                      |                        |
- [3]  $H_1$  : C.Adloff et al. *Nucl. Phys.* **B497** (1997) 3.  
ZEUS : D.Breitweg et al. *Phys. Lett.* **B407** (1997) 432.
- [4] L.N.Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (1976) 642; V.S.Fadin, E.A.Kuraev and L.N.Lipatov, *Phys. Lett.* **B60** (1975) 50; E.A.Kuraev, L.N.Lipatov and V.S.Fadin, *Sov.Phys.JETP* **44** (1976) 45, **45** (1977) 199; I.I.Balitsky and L.N.Lipatov, *Sov.J.Nucl.Phys.* **28** (1978) 822.
- [5] L.N.Lipatov, *Zh. EKsp. Teor. Fiz.* **90** (1986) 1536 [*Sov. Phys. JETP* **63** (1986) 904].
- [6] H.Navelet, S.Wallon, *Nucl. Phys.* **B522** (1998) 237.
- [7] J.Bartels and H.Lotter, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 400.
- [8] H.Navelet, R.Peschanski, Ch.Royon, S.Wallon *Phys. Lett.* **B385** (1996) 357.
- [9] A.Donnachie and P.V.Landshoff, *Phys. Lett.* **B296** (1992) 227.
- [10] A.de Rújula et al., *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1649.
- [11] C.Lopez, F.Barreiro, F.J.Yndurain, *Zeit. für Phys.* **C72** (1996) 561, and references therein.
- [12] A.Bialas, private communication.
- [13] J.Bartels, *Nucl. Phys. (Proc.Suppl.)* **B71** (1999) 47, section 3, (Proceedings of Multiparticle Dynamics 1997, Frascati, G.Capon, V.A.Khoze, G.Pancheri and A.Sansoni, eds.) and references therein.
- [14] H. Navelet, R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B515** (1998) 269.
- [15] N.Marchal and R. Peschanski, to appear.
- [16] A.H.Mueller and W.-K.Tang, *Phys. Lett.* **B284** (1992) 123; J.Bartels et al. *Phys. Lett.* **B348** (1995) 589.
- [17] S. Munier and R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B524** (1998) 377.
- [18] N.N. Nikolaev, B.G. Zakharov, *Zeit. für Phys.* **C49** (1991) 607.
- [19] M. Braun, G.P. Vacca and G. Venturi, *Phys. Lett.* **B388** (1996) 823.
- [20] N.N. Nikolaev, B.G. Zakharov, V.R. Zoller, *JETP Lett.* (1997) 138; *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **66** (1997) 134.
- [21] V.S. Fadin and L. Lipatov, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 127.  
G. Camici, M. Ciataloni, *Phys. Lett.* **B430** (1998) 349.
- [22] S.J. Brodsky, V.S. Fadin, V.T. Kim, L.N. Lipatov and G.B. Pivovarov, hep-ph/9901229.
- [23] A. Levy, *Phys. Lett.* **B424** (1998) 191.

## FIGURE CAPTIONS

Fig.1. *Plot of effective intercept vs. effective dimension at fixed  $Y$*

The effective intercept  $\partial \ln F_p / \bar{\alpha} \partial Y$  plotted vs. the effective anomalous dimension  $\partial \ln F_p / \partial \ln Q^2$  is compared to the  $\chi_p(\gamma)$  functions for the 3 first conformal spin components ( $p = 0, 1, 2$ ). They are computed for a fixed value of  $Y = 10$  and 4 values of  $\ln Q^2/Q_0^2 = \{4, 6, 8, 10\}$ . The chosen weight in the integrals (2), see text, is  $f_p(\gamma) = 1/(\cos \pi\gamma/4)$ .

Black circles : numerical results for  $p = 1, 2$  components ; White circles : numerical results for the  $p = 0$  component computed for 3 different integration contours for  $\Re\gamma = .5, -.5, -1.5$ ; White dots : ultra asymptotic saddle points at  $\gamma = 1/2$ ; Full lines : the functions  $\chi_p(\gamma)$  for (1, 2) ; Dashed lines, the function  $\chi_0(\gamma)$  including two auxiliary branches. Arrows indicate the direction of increasing  $Q$ .

Fig.2. *Plot of effective intercept vs. effective dimension at fixed  $Q^2$*

The same as in Fig.1 but now for fixed  $\ln Q^2/Q_0^2 = 4$ . The results are computed for  $Y = \{4, 6, 8, 10\}$ . The arrows describe increasing  $Y$ .

Fig.3. *Plot of effective intercept vs. effective dimension for a singular weight*

The plot is the same as Fig.1 with a weight  $f_p(\gamma) \propto 1/(\gamma \cos \pi\gamma/4)$ , i.e. singular at  $\gamma = 0$ . Note the accumulation of black circles near the singularity at  $\Re\gamma = 0$  for  $p = 1, 2$ .

Fig.4. *Comparison with [1]*

The plot is similar to Fig.1, except for a rescaling of the vertical coordinate  $Y \rightarrow \bar{\alpha}Y$ , with  $\bar{\alpha} = .15$ . The curves denoted  $\epsilon_{0,1}$  correspond to the same rescaling of  $\chi_{0,1}(\gamma)$ . The black circles correspond to our calculations at fixed  $Y = 10$  and  $\ln Q^2/Q_0^2 = (4, 6, 8, 10)$ . The results for paper [1] corresponding to the same values of  $Y$  and  $\ln Q^2/Q_0^2$  are given by crosses. The arrows indicate the direction of increasing  $Q^2$ .

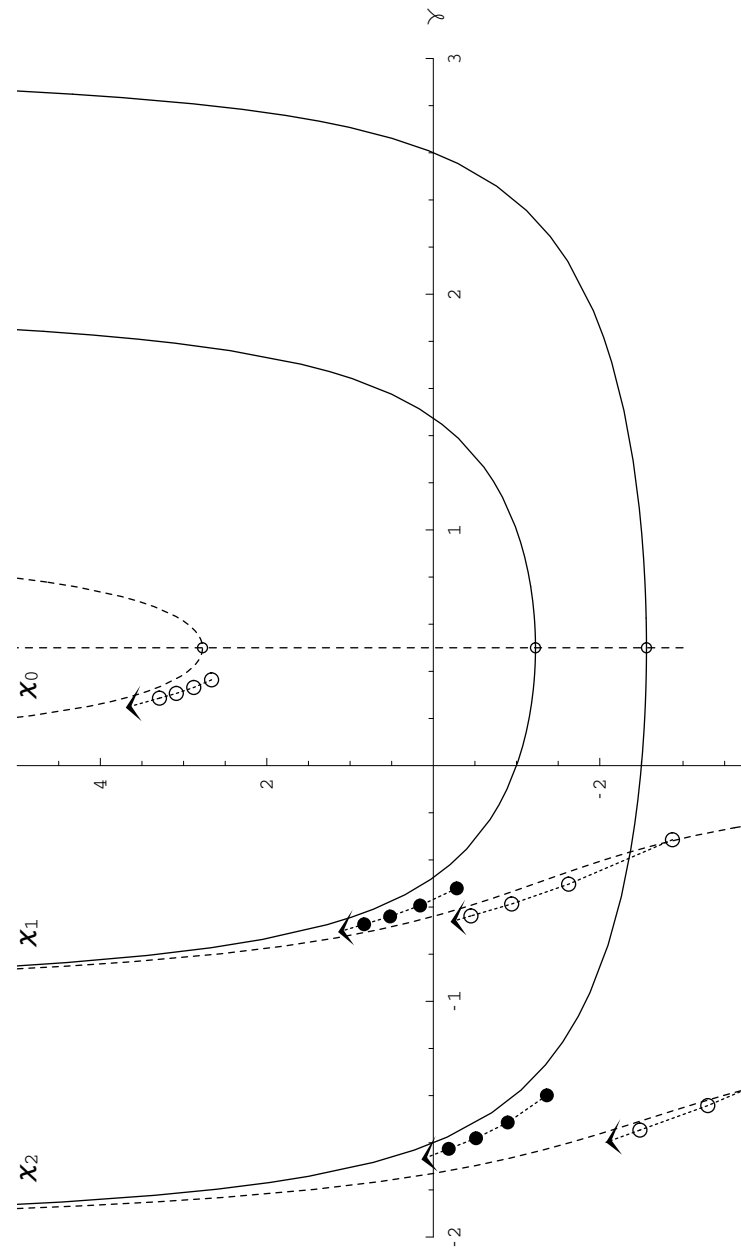


Figure 1

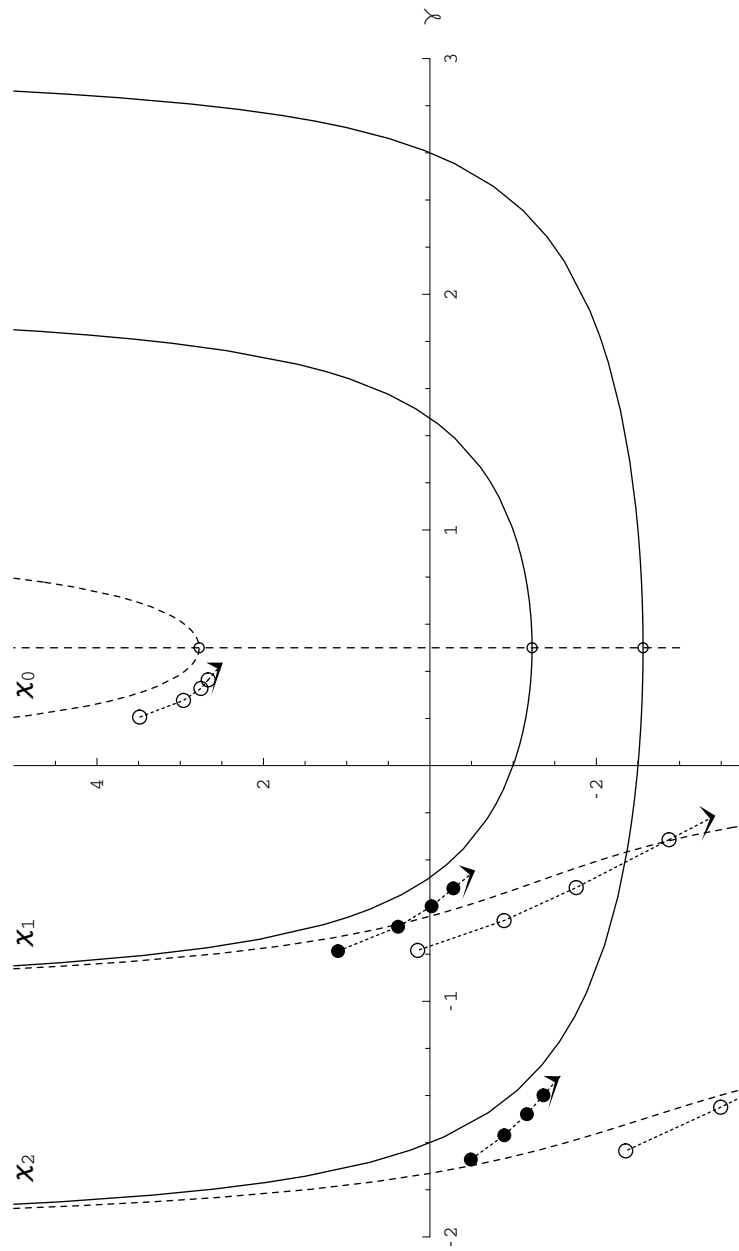


Figure 2

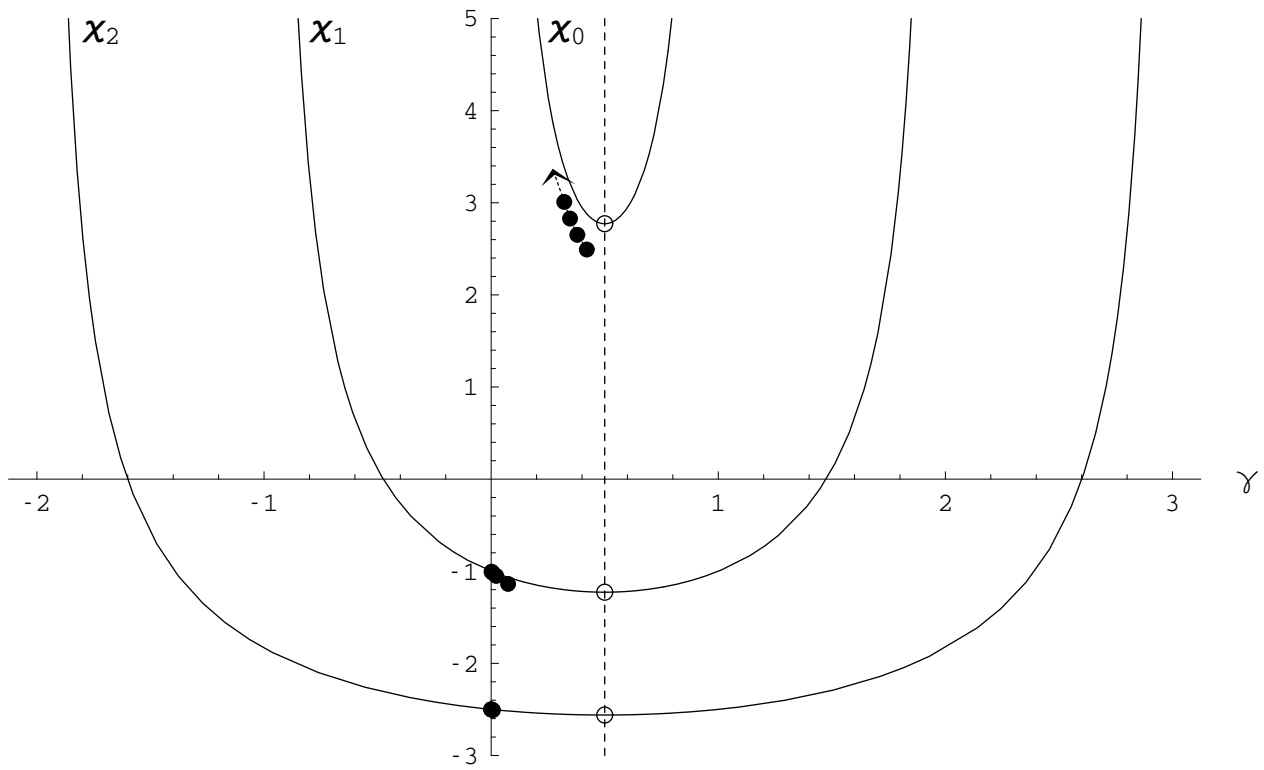


Figure 3



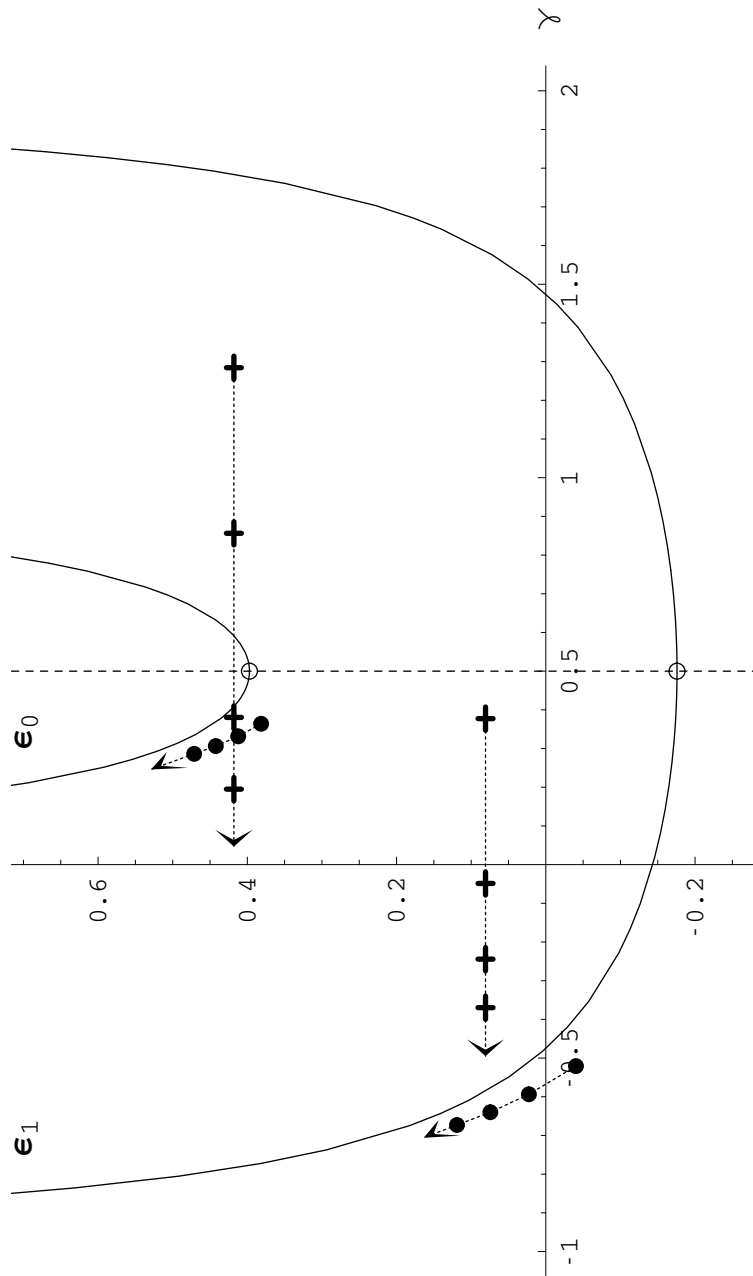


Figure 4

## Article IV



# The (BFKL) Pomeron- $\gamma^*$ - $\gamma$ vertex for any conformal spin

S. Munier, H. Navelet  
*Service de Physique Théorique*  
*CEA/Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex*  
*France*

## Abstract

To study diffractive photon production at HERA, we compute the projection of the  $\gamma^*\gamma$  impact-factor on the BFKL leading-order eigenfunctions  $E^{n,\nu}$  for non-zero transfer. This calculation supplements former ones performed for  $n = 0$ . We provide an expression for  $n = \pm 2$  and check that all the other components are zero.

## 1 Introduction.

The BFKL equation has been widely used to study the inclusive or semi-inclusive observables measured at HERA (structure functions, diffractive structure functions) in the small- $x$  (large  $s$ ) kinematical region [1]. It is an evolution equation for the gluon density and was written and solved at leading-log( $1/x$ ) level (LLx) [2–4] and at next-to-leading accuracy (NLLx) [5, 6].

In the following, we will be concerned with the LLx kernel, which exhibits an interesting property : in the space of the transverse positions  $\rho_1$  and  $\rho_2$  of the evolved gluons, it was shown to be invariant under the global conformal transformations [7]. Hence the general solution of the BFKL equation can be written as a sum over the kernel eigenfunctions corresponding to the irreducible representations of the symmetry group  $SL(2, \mathbb{C})$ . The latter are indexed by two indices, one of them being the (discrete) conformal spin  $n$ , the other one the (continuous) real parameter  $\nu$ . The dominant energy behaviour is a power-like rise of the amplitude  $s^{\Delta_{\mathbb{P}}}$ , where the intercept value  $\Delta_{\mathbb{P}} \approx 0.3 - 0.5$  usually quoted is given by the  $n = 0$  component.

However, the phenomenological relevance of the higher-spin components ( $n \neq 0$ ) was suggested in ref. [8]. In that paper, it is shown that the  $n = \pm 2$  components appearing through the BFKL resummation can mimic the *soft pomeron*. Indeed, this component exhibits effectively the right energy dependence of the soft pomeron and reproduces well its “higher-twist” behaviour at moderate and large  $Q^2$  pointed out by Donnachie and Landshoff [9]. Nevertheless, a number of points of the conjecture were left untested. In particular, only a phenomenological expression for the coupling of the photon impact-factor to the higher-spin components was used. Moreover, the non-forward behaviour was not considered for lack of a precise knowledge of the relevant coupling at the photon vertex.

Recently, much efforts have been devoted to the study of the photon impact-factor in the transition  $\gamma^* \rightarrow \gamma$  [10,11]. Its coupling to the LLx BFKL pomeron was computed but only for  $n = 0$ . We propose in this paper to extend these calculations to  $n = \pm 2$ . The odd components are automatically zero by symmetry. Furthermore, we have checked that the  $|n| > 2$  ones are zero. As we will see later, this is due to the fact that the coupling of two spin-1 photons selects

conformal spins smaller or equal to 2. We provide the explicit expressions for  $n=0$  and  $n=\pm 2$  (see eq.(29) and subsequent equations).

The general framework of our calculation is presented in section 2. The calculation appears in some details in section 3. To keep it readable, the most technical point are outlined in the five appendices **A-E** where we show in particular the evaluation of a generalized hypergeometric  ${}_3F_2$  function. Finally, we draw our conclusions and suggest outlooks.

## 2 Definition of the scattering process.

We consider the scattering of the two objects 1 and 1' into 2 and 2' (see fig.1). The functions  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  (resp.  $\phi'$ ) are their impact factors and depend on the bidimensional variables  $\rho_1, \rho_2$  which are conjugate to the transverse momenta  $\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}$  of the exchanged gluons. We deal with an impact factor involving a virtual photon in the initial state and a real one in the final state. If furthermore the object 1' is a proton, this process models diffractive photon production at HERA with a large rapidity gap generated by the BFKL resummation. If 1' is also a photon, we have access to  $\gamma^*\gamma^*$  physics. We should not enter into these details in this paper, and we will only stick to the  $\gamma^* \rightarrow \gamma$  impact-factor.

In the BFKL framework, the most general expression for the scattering amplitude of two objects 1 and 1' reads [7] :

$$A(s, t) = \frac{i s G}{(2\pi)^{10}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\nu \frac{\nu^2 + \frac{n^2}{4}}{\left(\nu^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right) \left(\nu^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)} e^{\bar{\alpha} \log(s/s_0) \chi_n(\nu)} I^{n,\nu} \bar{I}^{m,\nu}, \quad (1)$$

where  $G$  is the appropriate colour factor corresponding to the process under consideration,  $\bar{\alpha} \equiv \alpha_s N_c / \pi$  and  $\chi_n(\nu)$  is the well-known eigenvalue of the leading-order BFKL kernel :

$$\chi_n(\nu) = 2 \Psi(1) - 2 \operatorname{Re} \Psi \left( \frac{1+|n|}{2} + i\nu \right). \quad (2)$$

The scale  $s_0$  is undetermined at LLx. The functions  $I^{n,\nu}$  and  $\bar{I}^{m,\nu}$  are the ‘‘vertex functions’’, i.e. the impact factors  $\phi$  projected on the corresponding eigenfunctions  $E^{n,\nu}$  of the BFKL kernel :

$$I^{n,\nu} = -\frac{1}{4} \int d\rho_1 d\bar{\rho}_1 \int d\rho_2 d\bar{\rho}_2 \phi(\rho_1, \rho_2) E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2), \quad (3)$$

where  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  is the impact-factor, and

$$E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2) = (-1)^n \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right)^a \left( \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2} \right)^{\tilde{a}}. \quad (4)$$

The convenient notations  $a = \frac{1-n}{2} + i\nu$  and  $\tilde{a} = \frac{1+n}{2} + i\nu$  have been introduced in the previous equation. We work with complexified transverse vectors  $\rho = \rho_x + i\rho_y$  and  $\bar{\rho} = \rho_x - i\rho_y$ .

The amplitude  $A$  is invariant by rotation. The BFKL pomeron factorizes into two independent pieces depending respectively on the transverse variables of the upper vertex ( $E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$ ) and the lower vertex ( $\bar{E}^{n,\nu}(\rho'_1, \rho'_2)$ ). This implies that each of the projected vertex functions  $I^{n,\nu}$  and  $\bar{I}^{n,\nu}$  must be invariant under the rotations in this transverse plane. On one hand, the impact factor  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  couples two external spin-1 particles. This means that in the momentum space, it writes  $\tilde{\phi}_{h_1 h_2}(k_1^\perp, k_2^\perp) = \epsilon_{h_1}^\mu T_{\mu\nu}(k_1^\perp, k_2^\perp) \epsilon_{h_2}^\nu$ , where  $\epsilon_{h_i}$  are the polarization vectors of the external photons and  $T_{\mu\nu}$  is a tensor. From Lorentz-covariance and parity-conservation arguments, one finds that  $T_{\mu\nu} = t_1(k_1^\perp, k_2^\perp) g_{\mu\nu} + t_2(k_1^\perp, k_2^\perp) (k_{1,\mu}^\perp k_{2,\nu}^\perp - k_{2,\mu}^\perp k_{1,\nu}^\perp)$ , where  $t_1$  and  $t_2$  are two scalar functions. This means that  $\phi(\rho_1, \rho_2)$  can be written as the

sum of a term transforming as a scalar, i.e. invariant under the rotations  $\rho_{1,2} \rightarrow e^{i\varphi} \rho_{1,2}$ , and another term transforming as a tensor, i.e. which picks up a factor  $e^{\pm 2i\varphi}$  under the same rotation. On the other hand,  $E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$  are the eigenfunctions of the Casimir operators of the conformal algebra, so they pick a factor  $e^{in\varphi} E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$ . For  $I^{n,\nu}$  to be invariant, one sees that the only values for  $n$  are  $|n|=0, 2$ .

This impact-factor  $\phi$  was computed in ref. [10] by evaluating the relevant Feynman graphs (one of these graphs is depicted in fig.2). Two cases were distinguished. Either the initial off-shell photon scatters into a real photon of same helicity, or the helicity undergoes a flip. It was argued that the longitudinal polarization of the virtual photon does not contribute at LLx. Let us recast the obtained expressions in the following form :

$$\begin{aligned} \phi(\rho_1, \rho_2) = & -4\pi^2 \alpha_e \alpha_s e^2 \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \int dr_1 d\bar{r}_1 \int dr_2 d\bar{r}_2 \times \\ & \times e^{i\alpha \text{Re}(\bar{q}r_1)} e^{i(1-\alpha)\text{Re}(\bar{q}r_2)} \frac{(r_1 - r_2)^\delta (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^{\tilde{\delta}}}{|r_1 - r_2|^2} \hat{Q} K_1(|r_1 - r_2| \hat{Q}) \times \\ & \times (\delta^2(r_1 - \rho_1) - \delta^2(r_2 - \rho_1)) (\delta^2(r_1 - \rho_2) - \delta^2(r_2 - \rho_2)) , \quad (5) \end{aligned}$$

where  $\hat{Q} = \sqrt{\alpha(1-\alpha)} Q$ ,  $e^2 = \sum_q e_q^2$  and  $\delta = (1-\Delta)/2$ ,  $\tilde{\delta} = (1+\Delta)/2$ . The expressions for the function  $f(\alpha)$  and the exponent  $\Delta$  depend on the helicity. For the helicity-conserving processes ( $+$   $\rightarrow$   $+$ ) and ( $-$   $\rightarrow$   $-$ ),  $f(\alpha) = \alpha^2 + (1-\alpha)^2$  and  $\Delta = 0$ . In the helicity-flip case,  $f(\alpha) = 2\alpha(1-\alpha)$ ,  $\Delta = -2$  for the ( $+$   $\rightarrow$   $-$ ) transition and  $\Delta = +2$  for ( $-$   $\rightarrow$   $+$ ). The “+” and “-” refer to the helicity of the initial state (resp. final state) photon with respect to the standard basis :

$$\epsilon_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i) . \quad (6)$$

The computation of  $I^{n,\nu}$  is done in the next section.

### 3 Projection on the conformal eigenfunctions.

Let us now compute the vertex function  $I^{n,\nu}$ . Along the lines of ref. [10], one inserts eq.(5) into eq.(3). The product of  $\delta$ -functions present in the impact-factor (5) can be expanded. Then two of the terms correspond to the coupling of the BFKL pomeron to a single quark line and vanish when projected on the  $E^{n,\nu}$ . Indeed, terms of the form  $\delta^2(r_1 - \rho_1)\delta^2(r_2 - \rho_2)$  can be rearranged to read  $\delta^2(\rho_2 - \rho_1)\delta^2(2r_1 - \rho_1 - \rho_2)$ , and they give a zero contribution since  $E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2) = 0$  for  $\rho_1 = \rho_2$ . Taking into account the symmetry  $\alpha \rightarrow 1-\alpha$  of  $f(\alpha)$ , the two remaining contributions are identical and one obtains :

$$\begin{aligned} I^{n,\nu} = & 8\pi^2 \alpha_e \alpha_s e^2 \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \hat{Q} \int d\rho_1 d\bar{\rho}_1 \int d\rho_2 d\bar{\rho}_2 E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2) K_1(|\rho_1 - \rho_2| \hat{Q}) \times \\ & \times e^{i\alpha \mathcal{R}e(\bar{q}\rho_1)} e^{i(1-\alpha)\mathcal{R}e(\bar{q}\rho_2)} \frac{(\rho_1 - \rho_2)^\delta (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)^{\tilde{\delta}}}{|\rho_1 - \rho_2|^2} . \quad (7) \end{aligned}$$

In the following, the calculation will only be done for positive  $n$ . One inserts the expression for  $E^{n,\nu}$  in eq.(7) and one takes the Mellin representation of the Bessel function :

$$K_1(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{2i\pi} \left( \frac{\mathcal{A}}{2} \right)^{-2s-1} \Gamma(s) \Gamma(1+s) , \quad (8)$$

where the contour of integration is parallel to the  $z$ -axis and  $\mathcal{R}e(s) > 0$ . The changes of variable  $\rho_1 = b(1+t)$  and  $\rho_2 = b(1-t)$  enable to reduce one of the  $\{\text{holomorphic}\} \times \{\text{antiholomorphic}\}$  integrals in eq.(7). Indeed, in these new coordinates, it is possible to factorize and perform the integration over  $b$ . This integral makes sense provided that  $\gamma - \tilde{\gamma}$  is an integer. The result reads :

$$\int db d\bar{b} b^{\gamma-1} \bar{b}^{\tilde{\gamma}-1} e^{\frac{i}{2}(\mathcal{Q}\bar{b} + \bar{\mathcal{Q}}b)} = 2i\pi e^{i\frac{\pi}{2}(\gamma-\tilde{\gamma})} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+\tilde{\gamma}}{2} + \frac{|\gamma-\tilde{\gamma}|}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\gamma+\tilde{\gamma}}{2} + \frac{|\gamma-\tilde{\gamma}|}{2}\right)} \left(\frac{2}{\mathcal{Q}}\right)^\gamma \left(\frac{2}{\bar{\mathcal{Q}}}\right)^{\tilde{\gamma}} \quad (9)$$

$$= 2i\pi e^{i\frac{\pi}{2}(\gamma-\tilde{\gamma})} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\tilde{\gamma})} \left(\frac{2}{\mathcal{Q}}\right)^\gamma \left(\frac{2}{\bar{\mathcal{Q}}}\right)^{\tilde{\gamma}} \quad \text{if } \gamma - \tilde{\gamma} \geq 0, \quad (10)$$

with the parameter values  $\mathcal{Q} = q(1 - (1-2\alpha)t)$ ,  $\gamma = 1/2 - a - s + \delta$ ,  $\tilde{\gamma} = 1/2 - \tilde{a} - \tilde{s} + \tilde{\delta}$ , and the convention  $\tilde{s} = s$ . Next, the integral over  $t$  can be performed. It is of the form :

$$\int dt t^{-\frac{3}{2}+a-s+\delta} (1-t^2)^{-a} (1-(1-2\alpha)t)^{-\frac{1}{2}+a+s-\delta} \times \{\text{a.h.}\}, \quad (11)$$

where we did not write extensively the antiholomorphic part, but it can be obtained by taking the complex conjugate of  $b$  and the ‘‘tilde’’ of the exponents.

The conformal mapping  $t \rightarrow t/(2-t)$  leads, up to an overall factor  $2^{-a-\tilde{a}+2s}$ , to a well-known holomorphic integral<sup>1</sup>. Here again, to make sense, all the differences  $a_i - \tilde{a}_i$ ,  $b_i - \tilde{b}_i$  are integer [12] :

$$\begin{aligned} \int dt t^{a_1-1} (1-t)^{b_1-a_1-1} (1-(1-\alpha)t)^{b_0-a_0-1} \times \{\text{a.h.}\} &= 2i \frac{\mu}{\sin \pi b_1} \frac{\pi^2}{\Gamma(b_1-a_0)\Gamma(b_1-a_1)} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{a}_1)}{\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1)} \frac{\alpha^{b_1-a_0-a_1} \bar{\alpha}^{\tilde{b}_1-\tilde{a}_0-\tilde{a}_1}}{\Gamma(1-a_0)\Gamma(1-a_1)} {}_2G_1(b_1-a_0, b_1-a_1; b_1; 1-\alpha) {}_2G_1(\tilde{b}_1-\tilde{a}_0, \tilde{b}_1-\tilde{a}_1; \tilde{b}_1; 1-\bar{\alpha}) \right. \\ &\quad - \frac{(1-\alpha)^{1-b_1} (1-\bar{\alpha})^{1-\tilde{b}_1}}{\Gamma(1-b_1+a_0)\Gamma(1-b_1+a_1)} {}_2G_1(a_0-b_1+1, a_1-b_1+1; 2-b_1; 1-\alpha) \times \\ &\quad \left. \times {}_2G_1(\tilde{a}_0-\tilde{b}_1+1, \tilde{a}_1-\tilde{b}_1+1; 2-\tilde{b}_1; 1-\bar{\alpha}) \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

where  ${}_2G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; z) \equiv \Gamma(\mathcal{A})\Gamma(\mathcal{B})/\Gamma(\mathcal{C}) \times {}_2F_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; z)$ , and

$$\mu = (-1)^{a_0-\tilde{a}_0} \frac{\Gamma(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1)}{\Gamma(1-b_1+a_1)} \frac{\Gamma(1-\tilde{a}_0)}{\Gamma(a_0)}. \quad (13)$$

In our case, the parameter values are  $a_0 = 1/2 - a - s + \delta$ ,  $a_1 = -1/2 + a - s + \delta$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1/2 - s + \delta$ . One sees that the convergence of the integral (12) imposes to chose the integration contour in  $s$  such that  $\mathcal{R}e(s) < 1/2$ .

At this stage, a comment on the possible values for  $n$  is in order. Thanks to the relation  $a_0 + a_1 = 2b_1 - 1$ , the conformal mapping  $t \rightarrow -t/(t-1)$  applied to eq.(12) leads to the same solution again but for a factor  $(-1)^n$  and the interchange  $1-\alpha \leftrightarrow \alpha$ . As we integrate over  $\alpha$  and as all the other factors depending on  $\alpha$  are symmetric under the exchange  $\alpha \leftrightarrow 1-\alpha$ , we see that the final expression will have a factor  $(1+(-1)^n)/2$ , and thus only the even  $n$  contribute. This is expected since the BFKL pomeron has only even conformal spin-components [13]. Physically, this comes from the fact that the 4-gluon Green’s function which is the BFKL

<sup>1</sup>Note that our calculation differs at this level from the ones in ref. [10,11] but after the integration over  $\alpha$ , we obtain the same result, see eq.(28) and appendix D for the comparison.

kernel is symmetrized with respect to the gluons. This symmetrization corresponds to the exchange  $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$  which changes  $E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$  in  $(-1)^n E^{n,\nu}(\rho_1, \rho_2)$ . Nevertheless, our method applies for any  $n$  and the final result will be a further check of the validity of the whole calculation.

All in all, we arrive at the following intermediate expression (we used  $\delta + \tilde{\delta} = 1$ ) :

$$\begin{aligned}
 I^{n,\nu} = & 32\pi^3 (-1)^{\frac{n}{2} + \frac{\delta - \tilde{\delta}}{2} + \frac{1}{2} + \delta} \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{a + \tilde{a} - 2} \sin \pi a \frac{\Gamma(1 - \tilde{a})}{\Gamma(a)} \int \frac{ds}{2i\pi} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1+s)}{\sin \pi s} \times \\
 & \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} - \delta - a + s)\Gamma(\frac{1}{2} - \delta + a + s)} \left(\frac{q}{Q}\right)^{-\frac{1}{2} + \tilde{a} + s - \tilde{\delta}} \left(\frac{\bar{q}}{Q}\right)^{-\frac{1}{2} + a + s - \delta} \left\{ \Gamma(-\frac{1}{2} + \tilde{\delta} + \tilde{a} - s)\Gamma(\frac{1}{2} + \tilde{\delta} - \tilde{a} - s) \right. \\
 & \times \sin \pi \tilde{a} \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \alpha^s (1 - \alpha)^{-s} {}_2G_1(a, 1 - a; \frac{1}{2} - s + \delta; 1 - \alpha) {}_2G_1(\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; \frac{1}{2} - s + \tilde{\delta}; 1 - \alpha) \\
 & - \Gamma(\frac{3}{2} - \delta - a + s)\Gamma(\frac{1}{2} - \delta + a + s) \sin \pi a \int_0^1 d\alpha f(\alpha) \alpha^{-s} (1 - \alpha)^s \times \\
 & \left. \times {}_2G_1(a, 1 - a; \frac{3}{2} + s - \delta; 1 - \alpha) {}_2G_1(\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; \frac{3}{2} + s - \tilde{\delta}; 1 - \alpha) \right\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

The integrations over  $\alpha$  remain to be performed. We can treat all the cases by computing the following generic integral :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^m(a, c) = & \frac{\sin \pi a}{\pi} \frac{\sin \pi \tilde{c}}{\pi} \Gamma(\tilde{c} - \tilde{a})\Gamma(\tilde{c} + \tilde{a} - 1) \times \\
 & \times \int_0^1 d\alpha \alpha^{m+1-c} (1 - \alpha)^{c-1} {}_2G_1(a, 1 - a; c; 1 - \alpha) {}_2G_1(\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; \tilde{c}; 1 - \alpha), \quad (15)
 \end{aligned}$$

where  $c = 1/2 - s + \delta$  for the first integral and  $c = 3/2 + s - \delta$  for the second one. For simplicity, we consider that when one of the arguments of  $\mathcal{J}$  has a “tilde” it means that we exchange in the formula the corresponding argument with its “tilde” counterpart. This notation can be slightly misleading since the “tilde”-operation is not involutive. The index  $m \in \{0, 1, 2\}$  has been introduced in order to take into account the functions  $f(\alpha)$  which we rewrite  $1 - 2\alpha + 2\alpha^2$  and  $2\alpha(1 - \alpha)$  respectively. Thus the “physical” integrals to compute are :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{++}(a, c) &= \mathcal{J}^0(a, c) - 2\mathcal{J}^1(a, c) + 2\mathcal{J}^2(a, c) \\
 \mathcal{J}_{+-}(a, c) &= 2\mathcal{J}^2(a, c). \quad (16)
 \end{aligned}$$

With these notations, the amplitudes can be written :

$$\begin{aligned}
 I_{h_1 h_2}^{n,\nu} = & 32\pi^4 (-1)^{\frac{n}{2} + \frac{\delta - \tilde{\delta}}{2} + \frac{1}{2} + \delta} \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{a + \tilde{a} - 2} \sin \pi a \frac{\Gamma(1 - \tilde{a})}{\Gamma(a)} \int \frac{ds}{2i\pi} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1+s)}{\sin \pi s} \times \\
 & \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} - \delta - a + s)\Gamma(\frac{1}{2} - \delta + a + s)} \left(\frac{q}{Q}\right)^{-\frac{1}{2} - \tilde{\delta} + \tilde{a} + s} \left(\frac{\bar{q}}{Q}\right)^{-\frac{1}{2} - \delta + a + s} (-1)^n \times \\
 & \times \left\{ \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{1}{2} + \tilde{\delta} - s)} \mathcal{J}_{h_1 h_2}(a, \frac{1}{2} + \delta - s) - \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{3}{2} - \delta + s)} \mathcal{J}_{h_1 h_2}(1 - \tilde{a}, \frac{3}{2} - \tilde{\delta} + s) \right\}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

where  $h_1, h_2 \in \{+, -\}$ .



We can directly integrate eq.(15). The method is to replace one of the  ${}_2G_1(1-\alpha)$  in formula (15) by a sum of  ${}_2G_1(\alpha)$ . A consequence is that the result is invariant under the exchange  $a \leftrightarrow \tilde{a}$ , because of the 2 possible choices for doing this replacement. It leads to  ${}_4G_3$  functions (see appendix **E**), for which the explicit cancellation for  $|n| > 2$  appears. But we have a method which leads directly to the  ${}_3G_2$  functions that we explicitly compute in the appendix. We express  ${}_2G_1(z)$  as a  $G_{22}^{22}(1-z)$  Meijer function, namely :

$$\begin{aligned} {}_2G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{C}; z) &= \frac{1}{\Gamma(\mathcal{C}-\mathcal{A})\Gamma(\mathcal{C}-\mathcal{B})} G_{22}^{22} \left( \begin{matrix} 1-\mathcal{A}, 1-\mathcal{B} \\ \mathcal{C}-\mathcal{A}-\mathcal{B} \end{matrix}; 1-z \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathcal{C}-\mathcal{A})\Gamma(\mathcal{C}-\mathcal{B})} \int \frac{ds'}{2i\pi} (1-z)^{s'} \Gamma(-s') \times \end{aligned} \quad (18)$$

$$\times \Gamma(\mathcal{C}-\mathcal{A}-\mathcal{B}-s')\Gamma(\mathcal{A}+s')\Gamma(\mathcal{B}+s') . \quad (19)$$

Inserting this identity into eq.(15) then performing the integration over  $\alpha$  [14], one obtains :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m(a, c) &= \frac{\sin \pi \tilde{c}}{\pi} \int \frac{ds'}{2i\pi} \Gamma(\tilde{a}+s')\Gamma(1-\tilde{a}+s') \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\Gamma(-s')\Gamma(m+1+s')\Gamma(\tilde{c}-1-s')\Gamma(m+2-c+s')}{\Gamma(m+2-a+s')\Gamma(m+1+a+s')} \right\} . \end{aligned} \quad (20)$$

Next, we transform this integral into a sum of  ${}_3G_2$  functions, which is done by reducing the quotient of  $\Gamma$ -functions between the brackets in the r.h.s. and then constructing the defining series for the  ${}_3G_2$  by picking the poles. This goes as follows. One writes :

$$\begin{aligned} \left\{ \dots \right\} &= \frac{\pi}{\sin \pi(-s')} \frac{\pi}{\sin \pi(\tilde{c}-1-s')} \left[ \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (1+s'+j) \times \Gamma(m+2-c+s')/\Gamma(2-\tilde{c}+s')}{\prod_{j=0}^{k-1} (m+1+a+s'-k+j)(m+2-a+s'-k+j)} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\Gamma(m+1+a+s'-k)\Gamma(m+2-a+s'-k)} . \end{aligned} \quad (21)$$

By simple inspection, we get for any  $m$  :

$$\left\{ \dots \right\} = \frac{\pi}{\sin \pi(-s')} \frac{\pi}{\sin \pi(\tilde{c}-1-s')} \sum_{p,q=0}^m \frac{\mathcal{A}_{pq}(a, c)}{\Gamma(1+a+p+s')\Gamma(2-a+q+s')} , \quad (22)$$

where the  $\mathcal{A}_{pq}$ s do not depend on  $s'$ . The integral defining  $\mathcal{J}$  can then be computed by constructing two series whose coefficients are the residues at the right poles of the two inverse-sines. Each of the series is a  ${}_3G_2$ -function of the type of those computed in appendix **A**. The values for the non-vanishing coefficients  $\mathcal{A}_{pq}$  we have chosen are :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{00} &= 1, \quad \mathcal{A}_{01} = \frac{2}{2a-1} (a(a-1)+c(2-a)+c^2), \quad \mathcal{A}_{10} = \frac{2}{1-2a} (a(a-1)+c(a+1)+c^2), \\ \mathcal{A}_{12} &= \frac{2}{2a-1} (a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1), \quad \mathcal{A}_{21} = \frac{2}{1-2a} a(a+1)(a+c)(a+c-1) \end{aligned} \quad (23)$$

for the helicity-conserving ( $+$   $\rightarrow$   $+$ ) amplitude and

$$\mathcal{A}_{11} = 2, \quad \mathcal{A}_{12} = \frac{2}{2a-1} (a(a-3)+2), \quad \mathcal{A}_{21} = \frac{2}{1-2a} a(a+1) \quad (24)$$

for the helicity-flip ( $+$   $\rightarrow$   $-$ ) one. Let us complete the calculation for the  $\mathcal{J}$ 's.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{h_1 h_2}(a, c) &= \sum_{p,q} \mathcal{A}_{h_1 h_2, pq}(a, c) \left\{ {}_3G_2 \left( \begin{matrix} 1, \tilde{c}+\tilde{a}-1, \tilde{c}-\tilde{a} \\ \tilde{c}+a+p, \tilde{c}-a+1+q \end{matrix}; 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - {}_3G_2 \left( \begin{matrix} 1, \tilde{a}, 1-\tilde{a} \\ 1+a+p, 2-a+q \end{matrix}; 1 \right) \right\} , \end{aligned} \quad (25)$$

where we have been able to factorize and simplify  $\pi/\sin\pi\tilde{c}$  since  $c$  and  $\tilde{c}$  differ by an even integer (0 or 2) in all cases. The differences of  ${}_3G_2$  in the r.h.s. can be computed using the tricks exposed in appendix **A** and **B**. The ones needed for our purpose are explicitly shown in appendix **C**.

However, formula (41) enables us to perform the calculation for general  $n$  (and then take the appropriate limits). It enables us to write the  $\mathcal{J}$ s as a sum of rational fractions in  $a$ ,  $\tilde{a}$  and  $c$ , times a non-rational coefficient which is either  $\sin\pi a/\sin\pi\tilde{a}$  or  $\Gamma(c-\tilde{a})\Gamma(c+\tilde{a}-1)/\Gamma(c-a)\Gamma(c+a-1)$ . The rational fractions are tedious but straightforward to compute using **mathematica**. Inserting eq.(25) after appropriate computation into eq.(17), and recalling that  $a = (1-n)/2+i\nu$  yield for  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{++}\left(\frac{1}{2}+i\nu, 1-s\right) + \mathcal{J}_{++}\left(\frac{1}{2}-i\nu, 1+s\right) &= \frac{\pi}{16i\nu(1+\nu^2)} \frac{\sin^2\pi s \tan\pi i\nu}{\cos\pi(i\nu-s)\cos\pi(i\nu+s)} \times \\ &\quad \times (11+12\nu^2+4s^2) \\ \mathcal{J}_{+-}\left(\frac{1}{2}+i\nu, 2-s\right) + \mathcal{J}_{+-}\left(\frac{1}{2}-i\nu, 2+s\right) &= \frac{\pi}{4i\nu(1+\nu^2)} \frac{\sin^2\pi s \tan\pi i\nu}{\cos\pi(i\nu-s)\cos\pi(i\nu+s)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Those corresponding to  $n = 2$  read :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{++}\left(-\frac{1}{2}+i\nu, 1-s\right) + \mathcal{J}_{++}\left(-\frac{1}{2}-i\nu, 1+s\right) &= -\frac{\pi}{32i\nu(1+\nu^2)} \frac{\sin^2\pi s \tan\pi i\nu}{\cos\pi(i\nu-s)\cos\pi(i\nu+s)} \times \\ &\quad \times (-1+2i\nu-2s)(1+2i\nu-2s) \\ \mathcal{J}_{+-}\left(-\frac{1}{2}+i\nu, 2-s\right) + \mathcal{J}_{+-}\left(-\frac{1}{2}-i\nu, 2+s\right) &= -\frac{\pi}{8i\nu(1+\nu^2)} \frac{\sin^2\pi s \tan\pi i\nu}{\cos\pi(i\nu-s)\cos\pi(i\nu+s)}. \end{aligned} \quad (27)$$

We find that all the other components are zero.

Let us summarize our final results.

We obtain the selection rule that for a virtual photon scattering, only the components  $n = 0$  and  $n = \pm 2$  contribute. We list underneath the expressions for these non-vanishing amplitudes. We introduce the angle  $\phi$  between the plane formed by the initial- and final-state electrons and the initial- and final-state photons respectively, which is the argument of  $q$ . First, the  $n = 0$  components :

$$\begin{aligned} I_{++}^{0,\nu} &= -2\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh\pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ &\quad \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu-s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu-s\right) \times (11+12\nu^2+4s^2) \\ I_{+-}^{0,\nu} &= 8\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh\pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} e^{2i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ &\quad \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu-s\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu-s\right). \end{aligned} \quad (28)$$

We checked that these two expressions agree with ref. [10] but for an overall sign difference.

Second, the  $n = 2$  components :

$$\begin{aligned} I_{++}^{2,\nu} &= -4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh\pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} e^{2i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ &\quad \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu-s\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu-s\right) \end{aligned}$$

$$I_{+-}^{2,\nu} = 4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} e^{4i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu-s\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}-i\nu-s\right). \quad (29)$$

Third, the  $n = -2$  components are deduced from the preceeding ones using an appropriate relation between  $E^{n,\nu}$  and  $E^{-n,\nu}$ . Let us briefly derive this relation. We come back to eq.(7) and note that it factorizes in the following way by performing the change of variable  $\rho_1 = b+\rho/2$  and  $\rho_2 = b-\rho/2$  :

$$I^{n,\nu} = \int_0^1 d\alpha \int d\rho d\bar{\rho} \mathcal{H}(\alpha, \rho) \pi^3 \frac{2^{4i\nu}}{-i\nu+n/2} \frac{\Gamma(-i\nu+(1+n)/2)}{\Gamma(i\nu+(1+n)/2)} \frac{\Gamma(i\nu+n/2)}{\Gamma(-i\nu+n/2)} E_q^{n,\nu}(\rho), \quad (30)$$

where  $E_q^{n,\nu}(\rho)$  is defined in ref. [7]. We put in the function  $\mathcal{H}(\alpha, \rho)$  all the other dependencies, namely :

$$\mathcal{H}(\alpha, \rho) = 8i \alpha_e \alpha_s e^2 f(\alpha) \hat{Q} e^{i(\alpha-1/2)\mathcal{R}e(\bar{q}\rho)} K_1(|\rho|\hat{Q}) \frac{\rho^\delta \bar{\rho}^{\bar{\delta}}}{|\rho|}. \quad (31)$$

Note that this formula shows that  $I^{n,\nu}$  is the projection of the impact factor on  $E_q^{n,\nu}$  [15]. We then notice that for positive  $n$  [7] :

$$E_q^{-n,\nu}(b) = 2^{-12i\nu} \frac{n/2-i\nu}{n/2+i\nu} \frac{\Gamma^2(n/2-i\nu)}{\Gamma^2(n/2+i\nu)} q^{2a-1} \bar{q}^{2\bar{a}-1} E_q^{n,-\nu}(b), \quad (32)$$

and hence we arrive at the relation :

$$I^{-n,\nu} = 2^{-4i\nu} \frac{\Gamma^2(-i\nu+(1+n)/2)}{\Gamma^2(i\nu+(1+n)/2)} q^{2a-1} \bar{q}^{2\bar{a}-1} I^{n,-\nu}. \quad (33)$$

Applying this relation to eq.(29), one obtains :

$$I_{++}^{-2,\nu} = -4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} e^{-2i\phi} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\nu-s\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+i\nu-s\right)$$

$$I_{+-}^{-2,\nu} = 4\pi^6 \alpha_e \alpha_s e^2 \left(\frac{Q}{2}\right)^{-1+2i\nu} \frac{\tanh \pi\nu}{\pi\nu(\nu^2+1)} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i\nu)} \frac{-\frac{1}{2}+i\nu}{+\frac{1}{2}+i\nu} \times \int \frac{ds}{2i\pi} \left(\frac{q^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu+s} \times \\ \times \Gamma(s) \Gamma(1+s) \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu-s\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}+i\nu-s\right). \quad (34)$$

Note that the complex integrals over  $s$  can be expressed with (one or a sum of) Legendre functions. Note also that the helicity-flip component for  $n = 2$  does not vanish at small  $q$ .

The other helicity amplitudes are simply obtained using the relations  $I_{--}^{n,\nu} = I_{++}^{-n,\nu}|_{\phi \rightarrow -\phi}$  and  $I_{+-}^{n,\nu} = I_{+-}^{-n,\nu}|_{\phi \rightarrow -\phi}$ .

## 4 Conclusion.

We have computed the coupling of a  $\gamma^*\gamma$  impact-factor to the LLx BFKL pomeron. We have found that our calculation is consistent with a previous one [10] for the  $n = 0$  component. For the higher-conformal spin components, only the two values  $n = \pm 2$  contribute, as expected from symmetry considerations.

The physical motivation underneath was the precise study of diffractive photon production in the high-energy regime, including the “higher-twist” type components induced by conformal invariance [8]. With the results we obtained in this paper, we are almost ready to study the phenomenology of the higher-spin components of the BFKL pomeron with a realistic impact-factor. It should also be worth to transpose the methods developed here to the computation of other impact factors. We leave these studies for forthcoming papers.

## Acknowledgements

We thank G.Korchemsky for having pointed out the reason why the components  $|n| > 2$  should vanish. We acknowledge helpful comments and a careful reading of the manuscript from R.Peschanski, and useful discussions with S.Wallon.

## A A useful formula involving generalized hypergeometric functions ${}_3F_2$ .

In this appendix, one finds an appropriate summation for the hypergeometric function

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right)$$

for any integer  $n$  and nonnegative integer values of  $p$  and  $q$ . Note that we can stick to nonnegative  $n$  and obtain  $-n$  by interchanging  $b$  and  $c$  and  $p$  and  $q$  respectively. The results are given in eq.(36,39) or eq.(41).

The existence of the  ${}_3F_2$  function is ensured by the strict positivity of the real part of the quantity

$$s \equiv (1+b+p) + (1+c+q) - 1 - (b+n) - (c-n) = 1+p+q .$$

For our purpose, the relevant values for the parameters of the  ${}_3F_2$ -function are any nonnegative integer  $n$  and  $p, q \in \{0, 1, 2\}$ . An elementary method consists in expressing the function as a series of quotients of  $\Gamma$  functions, which reduces to a series of rational fractions due to the particular values of its arguments. The latter are decomposed as a series of terms with minimal denominators (which are first order polynomials in the summation index). One can resum the series and one finally obtains a finite sum whose terms are expressible as ratios of  $\Gamma$  functions and possibly (depending on the relative values of  $p$  and  $n$ )  $\Psi$  functions. However, the number of contributing terms apparently grows as  $n$ , and one cannot easily get by this method a simple expression for general  $n$  and small  $p$  and  $q$ . This remark can be illustrated by applying a transformation formula (see ref. [16], formula (1) page 533) :

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(1+p+q)}{\Gamma(1+n+q)} \frac{\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(1+c+p+q-n)} \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} p-n, b+p, c-n \\ 1+c+p+q-n, 1+b+p \end{matrix}; 1\right) . \end{aligned} \quad (35)$$

One sees that in the case  $n < p$ , the r.h.s. of the preceding equation is an hypergeometric polynomial which has  $n-p$  terms. Thus a more sophisticated method has to be developed.

Let us distinguish the cases (i)  $n > p$  and (ii)  $n \leq p$ .

(i)  $n > p$ .

This case can be obtained by immediate application of formula (6) (*Ibidem*, page 534). The condition of applicability is  $\mathcal{R}e(c+q) > 0$  which is satisfied in the case of interest in the core of the paper. The result reads :

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(1+b+p)}{\Gamma(b+n)} \frac{\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(c-n)} \frac{\Gamma(c-b-n-p)}{\Gamma(1+c-b+q-n)} B(1+p+q, n-p) \\ &- \frac{(b+p)(c+q)}{(n-p)(c-b-n-p)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -p-q, 1-b-p, 1 \\ 1+n-p, 1+c-b-n-p \end{matrix}; 1\right) \end{aligned} \quad (36)$$

Note that the  ${}_3F_2$  in the r.h.s. is a finite sum containing  $p+q$  terms, thanks to the parameter  $-p-q$ .

(ii)  $n \leq p$ .

This case is a bit more tricky. One uses formula (3) (see ref. [16]), but one first needs to regularize by introducing a small parameter  $\epsilon$  such that :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\epsilon, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) .$$

This leads to :

$$\begin{aligned}
 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1 + \epsilon, b + n, c - n \\ 1 + b + p, 1 + c + q \end{matrix}; 1\right) &= \Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)\Gamma(-\epsilon) \times \\
 &\times \left\{ \frac{\Gamma(c-b-2n)}{\Gamma(1+p-n)\Gamma(1+c-b+q-n)\Gamma(b+n-\epsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b+n)_k(b-c+n-q)_k(n-p)_k}{\Gamma(1+k)(b+n-\epsilon)_k(1+b-c+2n)_k} \right. \\
 &\left. + \left[ \begin{matrix} b \leftrightarrow c \\ n \leftrightarrow -n \\ p \leftrightarrow q \end{matrix} \right] \right\}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

where we have employed the classical notation  $(\mathcal{A})_k = \Gamma(\mathcal{A}+k)/\Gamma(\mathcal{A})$ , and the square brackets is a short notation for the term obtained by the indicated exchange of parameters. The next step is to take the limit  $\epsilon \rightarrow 0$ . One uses the fact that  $\Gamma(\mathcal{A}+\epsilon) = \Gamma(\mathcal{A})(1+\epsilon\Psi(\mathcal{A}))+o(\epsilon)$  to obtain :

$$\begin{aligned}
 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b + n, c - n \\ 1 + b + p, 1 + c + q \end{matrix}; 1\right) &= -\frac{\Gamma(1+b+p)}{\Gamma(b+n)} \frac{\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(c-n)} \left\{ \frac{\Gamma(c-b-2n)}{\Gamma(1+p-n)\Gamma(1+c-b+q-n)} \times \right. \\
 &\times \sum_{k=0}^{p-n} \frac{(b-c-q+n)_k(n-p)_k}{\Gamma(1+k)(1+b-c+2n)_k} (\Psi(b+n+k) - \Psi(b+n)) \\
 &\left. + \frac{\Gamma(c-b-2n)}{\Gamma(1+p-n)\Gamma(1+c-b+q-n)} \frac{\Gamma(1+p+q)}{\Gamma(1+n+q)} \frac{\Gamma(1+b-c+2n)}{\Gamma(1+b-c+n+p)} \Psi(b+n) + \left[ \begin{matrix} b \leftrightarrow c \\ n \leftrightarrow -n \\ p \leftrightarrow q \end{matrix} \right] \right\}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

We wrote it in this form in order to isolate the special functions by using the summation formula (45) in appendix B. After a bunch of straightforward manipulations, we are led to the following result :

$$\begin{aligned}
 {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b + n, c - n \\ 1 + b + p, 1 + c + q \end{matrix}; 1\right) &= -\frac{\Gamma(1+b+p)}{\Gamma(b+n)} \frac{\Gamma(1+c+q)}{\Gamma(c-n)} \left\{ (-1)^{p-n} \binom{p+q}{p-n} \times \right. \\
 &\times \frac{\Gamma(c-b-n-p)}{\Gamma(1+c-b+q-n)} (\Psi(b+n) - \Psi(c-n)) + \left[ \frac{\pi}{\sin \pi b} \frac{\Gamma(c-b-p-n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(1+q+n)} \times \right. \\
 &\left. \left. \times \sum_{k=0}^{p-n-1} \frac{1}{n-p+k} \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{\Gamma(1+q+n+k)\Gamma(1-b-p+k)}{\Gamma(1+c-b+q-p+k)} + \left[ \begin{matrix} b \leftrightarrow c \\ n \leftrightarrow -n \\ p \leftrightarrow q \end{matrix} \right] \right] \right\}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

The result has been put in a form which shows that if  $c = 1 - b$ , as it is the case in the core of this paper, the difference of  $\Psi$  reduces to a tangent, through the identity :

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \frac{\pi}{\tan \pi x}. \quad (40)$$

One of the most interesting points in these formulae is that the number of terms is at most equal to  $p + q$ , regardless the value of  $n$ , making them particularly adapted for our purpose.

Note that in the two cases  $n = 0$  and  $\{p, q\} = 0, 1$ , the obtained formula matches with formerly calculated expressions, see for instance ref. [16].

We can obtain a plethora of such formulae by using the relations between the various  ${}_3F_2$

functions. A particularly interesting one is the following :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, b+n, c-n \\ 1+b+p, 1+c+q \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(1+b+p)\Gamma(1+c+q)\Gamma(c-b-n-p)}{\Gamma(b+n)\Gamma(c-n)\Gamma(1+c-b-n+q)} \times \\ \times \sum_{i=0}^{p+q} \frac{(-1)^i}{n-p+i} \binom{p+q}{i} \left(1 - \frac{\Gamma(b+n+i)}{\Gamma(b+p)} \frac{\Gamma(c-n)}{\Gamma(c-p+i)}\right). \quad (41)$$

(We do not reproduce the proof here, but for  $p < n$ , it mainly relies on the use of formula (25) on page 108 in ref. [17]). Note that the formula is trivially analytical for  $n > p$ , but also in the limit  $n \equiv m \leq p$  : all the terms are analytical but for one pole appearing as a denominator  $1/(n-p+i)$  for the appropriate value of  $i$ . However, its residue vanishes and so the expression in the r.h.s is finite. We checked numerically that the obtained expression is correct for the values of  $p, q$  of interest. The property is not trivial since the asymptotic behaviour of the given  ${}_3F_2$  does not satisfy the hypotheses for Carlson's theorem and hence there are infinitely many ways to continue analytically  $n > p$ .

## B A summation formula.

For the needs of appendix A, we simplify the following expression, getting rid of the  $\Psi$ -functions :

$$\sum_{k=0}^l \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{(-l)_k (\alpha)_k}{(\gamma)_k} \{\Psi(\beta+k) - \Psi(\beta)\}.$$

One notes that :

$$\Psi(\beta+k) - \Psi(\beta) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\beta+i},$$

and one defines the function :

$$f(z) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{(-l)_k (\alpha)_k}{(\gamma)_k} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{z^{\beta+i}}{\beta+i} \right\}, \quad (42)$$

$z$  being an arbitrary parameter. The quantity we need to compute is  $f(1)$ . This goes as follows. The derivative of  $f$  can be summed and we obtain the difference of two hypergeometric  ${}_2F_1$  functions :

$$f'(z) = \frac{z^{\beta-1}}{z-1} \{ {}_2F_1(-l, \alpha, \gamma, z) - {}_2F_1(-l, \alpha, \gamma, 1) \}. \quad (43)$$

One uses a well-known transformation [14] for the first term in the r.h.s. of the preceding equation :

$${}_2F_1(-l, \alpha, \gamma, z) = (1-z)^l \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+l)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+l)} {}_2F_1(-l, \gamma-\alpha, 1-l-\alpha, 1/(1-z)). \quad (44)$$

The integration over  $z$  can then be performed safely for  $\text{Re}(\beta) > 0$ . After a few easy manipulations, the result can be written in the following compact form :

$$\sum_{k=0}^l \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{(-l)_k (\alpha)_k}{(\gamma)_k} \{\Psi(\beta+k) - \Psi(\beta)\} = \frac{(\alpha)_l}{(\beta)_l (\gamma)_l} \times \\ \times \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k-l} \frac{\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k)} \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\beta-l)_k}{(1-\alpha-l)_k}. \quad (45)$$

Note the following particular case occuring when  $\alpha \equiv \gamma$  :

$$\sum_{k=0}^l (-1)^{k+1} \binom{l}{k} \Psi(\beta + k) = B(\beta, l) . \tag{46}$$

### C Some particular cases.

In this appendix, we compute the difference of  ${}_3G_2$ -functions in eq.(25), using formulae (36,39) or alternatively formula (41). To fix the notation :

$$\mathcal{G}_{pq}(n) \equiv {}_3G_2 \left( \begin{matrix} 1, \gamma + \alpha - 1 + n, \gamma - \alpha - n \\ \gamma + \alpha + p, \gamma - \alpha + 1 + q \end{matrix} ; 1 \right) - {}_3G_2 \left( \begin{matrix} 1, \alpha + n, 1 - \alpha - n \\ 1 + \alpha + p, 2 - \alpha + q \end{matrix} ; 1 \right) . \tag{47}$$

We recall that  ${}_3G_2$  is related to  ${}_3F_2$  through the relation :

$${}_3G_2 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix} ; z \right) \equiv \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix} ; z \right) . \tag{48}$$

A few of the following expressions can be obtained using ref. [16]. For the others, we use the quoted formulae, with the parameter values  $a \equiv \gamma + \alpha - 1$  and  $b \equiv \gamma - \alpha$  (resp.  $a \equiv \alpha$  and  $b \equiv 1 - \alpha$ ). We only display the result for  $n = 0$  and  $n = 2$  although a general expression can be written.

$$\mathcal{G}_{00}(n = 0) = \frac{1}{2\alpha - 1} \{ \pi \cot \pi\alpha + \Psi(\gamma + \alpha - 1) - \Psi(\gamma - \alpha) \}$$

$$\mathcal{G}_{00}(n = 2) = \frac{\gamma - 1}{(\gamma - \alpha - 1)(\gamma - \alpha - 2)}$$

$$\mathcal{G}_{01}(n = 0) = \frac{(\gamma - 1)}{2(\alpha - 1)^2(\gamma - \alpha)} - \frac{\pi \cot \pi\alpha + \Psi(\gamma + \alpha - 1) - \Psi(\gamma - \alpha)}{2(\alpha - 1)(2\alpha - 1)}$$

$$\mathcal{G}_{01}(n = 2) = \frac{(\gamma - 1)(6\alpha^2 - 3\alpha\gamma + \gamma(\gamma - 2))}{6\alpha(1 - \alpha)(\alpha - \gamma)(1 + \alpha - \gamma)(2 + \alpha - \gamma)}$$

$$\mathcal{G}_{10}(n = 0) = \frac{\gamma - 1}{2\alpha^2(\gamma + \alpha - 1)} + \frac{\pi \cot \pi\alpha + \Psi(\gamma + \alpha - 1) - \Psi(\gamma - \alpha)}{2\alpha(2\alpha - 1)}$$

$$\mathcal{G}_{10}(n = 2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\gamma - \alpha - 1)(\gamma - \alpha - 2)} - \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)} \right\}$$

$$\mathcal{G}_{11}(n = 0) = \frac{\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma - \alpha} + \frac{\alpha - 1}{\gamma + \alpha - 1} - \pi \cot \pi\alpha + \Psi(\gamma - \alpha) - \Psi(\gamma + \alpha)}{2\alpha(\alpha - 1)(2\alpha - 1)}$$

$$\mathcal{G}_{11}(n = 2) = -\frac{1}{6} \left( \frac{2}{\alpha(1 - \alpha^2)} + \frac{1}{\alpha - \gamma} - \frac{2}{1 + \alpha - \gamma} + \frac{1}{2 + \alpha - \gamma} \right)$$



$$\mathcal{G}_{12}(n=0) = -\frac{1}{8\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)(2\alpha-3)} \left\{ 4 - \frac{6}{\alpha} - \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{12\alpha(\gamma-1)}{(1-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \right. \\ \left. + 2\frac{3-2\alpha}{\gamma+\alpha-1} + \frac{(\gamma+\alpha)(\gamma+\alpha+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)} \right\} + \frac{3}{4} \frac{\pi \cot \pi\alpha + \Psi(\gamma+\alpha-1) - \Psi(\gamma-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)(2\alpha-3)}$$

$$\mathcal{G}_{12}(n=2) = -\frac{1}{24} \left\{ \frac{6}{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)} + \frac{3}{\alpha-\gamma} + \frac{1}{2+\alpha-\gamma} + \frac{3}{-1-\alpha+\gamma} + \frac{1}{1-\alpha+\gamma} \right\}$$

$$\mathcal{G}_{21}(n=0) = -\frac{1}{8(-1+\alpha)\alpha(-1+2\alpha)(1+2\alpha)} \left\{ 1 - \frac{6}{\alpha} - \frac{6}{1+\alpha} - \frac{2(2+\alpha)}{-1+\alpha} + \frac{6(1+2\alpha)(-1+\gamma)}{(1+\alpha)(\alpha+\gamma)} - \right. \\ \left. - \frac{(\alpha-1)(\alpha-8)+\gamma(\gamma-2\alpha-15)}{(-1+\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma)} + \frac{2(1+\alpha+\gamma)}{\alpha-\gamma} \right\} - \frac{3}{4} \frac{\pi \cot \pi\alpha - \Psi(-\alpha+\gamma) + \Psi(-1+\alpha+\gamma)}{(-1+\alpha)\alpha(-1+2\alpha)(1+2\alpha)}$$

$$\mathcal{G}_{21}(n=2) = -\frac{(-1+\gamma)(3\alpha^2(1+\alpha)(5+7\alpha)+2\gamma-\alpha(6+\alpha(29+27\alpha))\gamma+(1+2\alpha)(-1+5\alpha)\gamma^2}{12(-1+\alpha)\alpha^2(1+\alpha)^2(1+2\alpha)(\alpha-\gamma)(1+\alpha-\gamma)(2+\alpha-\gamma)} + \\ - \frac{\pi \cot \pi\alpha - \Psi(-2-\alpha+\gamma) + \Psi(1+\alpha+\gamma)}{4\alpha(1+\alpha)(1+2\alpha)(3+2\alpha)}$$

## D Comparison with the calculation of Evanson and Forshaw.

We write here another expression for eq.(12) in order to try to match at this level our calculation with the one of ref. [10]. We perform the following transformation on the (antiholomorphic)  ${}_2G_1$ -functions in formula (12) [14] :

$${}_2G_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\pi}{\sin \pi(\gamma-\alpha-\beta)} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2G_1(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma, 1-z) - \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} {}_2G_1(1-\alpha, 1-\beta, 1-\alpha-\beta+\gamma, 1-z) \right\}. \quad (49)$$

One makes use of the relations :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + 1 &= 2b_1 \\ \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + 1 &= 2\tilde{b}_1. \end{aligned} \quad (50)$$

The result reads :

$$\begin{aligned}
 & -2i\pi \frac{\mu}{\sin \pi b_1} \frac{\sin \pi(b_1 - a_0)}{\sin \pi b_1} \left\{ \alpha^{1-b_1} \bar{\alpha}^{1-\tilde{b}_1} \frac{\sin \pi(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0)}{\Gamma(1-a_0)\Gamma(1-a_1)} {}_2G_1(b_1 - a_0, b_1 - a_1, b_1, 1 - \alpha) \times \right. \\
 & \quad \times {}_2G_1(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0, \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1, 2 - \tilde{b}_1, \bar{\alpha}) + (1 - \alpha)^{1-b_1} (1 - \bar{\alpha})^{1-\tilde{b}_1} \frac{\sin \pi(b_1 - a_0)}{\Gamma(1-\tilde{a}_0)\Gamma(1-\tilde{a}_1)} \times \\
 & \times {}_2G_1(b_1 - a_0, b_1 - a_1, 2 - b_1, 1 - \alpha) {}_2G_1(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0, \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \bar{\alpha}) - \alpha^{1-b_1} (1 - \bar{\alpha})^{1-\tilde{b}_1} \frac{1}{\pi} \sin^2 \pi(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0) \times \\
 & \times \frac{\Gamma(\tilde{a}_0)\Gamma(\tilde{a}_1)}{\Gamma(1-a_0)\Gamma(1-a_1)} {}_2G_1(b_1 - a_0, b_1 - a_1, b_1, 1 - \alpha) {}_2G_1(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0, \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \bar{\alpha}) - (1 - \alpha)^{1-b_1} \bar{\alpha}^{1-\tilde{b}_1} \times \\
 & \left. \times \frac{1}{\pi} \sin \pi(b_1 - a_0) \sin \pi(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0) {}_2G_1(b_1 - a_0, b_1 - a_1, 2 - b_1, 1 - \alpha) {}_2G_1(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_0, \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1, 2 - \tilde{b}_1, \bar{\alpha}) \right\}. \tag{51}
 \end{aligned}$$

In our particular case,  $\alpha$  is real and so  $\bar{\alpha} = \alpha$ .

Furthermore, if one is only interested by the case  $n = 0$  and, say, the non-flip helicity amplitude, then  $a_0 = \tilde{a}_0$ ,  $a_1 = \tilde{a}_1$  and  $b_1 = \tilde{b}_1$ . One will have to integrate this expression over  $\alpha$  after having multiplied it by a symmetric function under the exchange  $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$ .

Hence one sees on the previous formula that the first two terms give similar contributions after integration and are proportional to the one quoted in ref. [10], eq.(3.46). The two other terms do not appear in the latter. So at this stage the intermediate forms differ, but the integrated results are identical. However, we failed to explain why.

### E The vanishing of the $|n| > 2$ components.

In the core of the text, the cancellation of the components  $|n| > 2$  appears as an outcome of a complicated calculation, whose last step is done using `mathematica`. In this appendix, we show more explicitly how this occurs. We demonstrate more generally that for  $f(\alpha) = \alpha^m + (1 - \alpha)^m$ , all the components  $n > m$  vanish after integration over  $\alpha$ . We restrict our calculation to the case  $\delta = \tilde{\delta}$ , which corresponds to the helicity-conserving amplitudes.

Our starting point is eq.(17). We shall prove the vanishing of the factor :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{1}{2} + \delta - s)} \mathcal{J}^m(a, \frac{1}{2} + \delta - s) - \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{3}{2} - \delta + s)} \mathcal{J}^m(1 - \tilde{a}, \frac{3}{2} - \tilde{\delta} + s) \\
 & = \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{1}{2} + \delta - s)} (\mathcal{J}^m(a, c) + \mathcal{J}^m(1 - \tilde{a}, 2 - c)) \quad , \tag{52}
 \end{aligned}$$

which appears in the brackets in eq.(17). For this purpose, we compute the  $\mathcal{J}$ s in terms of  ${}_4G_3$ -functions. The result is straightforward :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{J}^m(a, c) + \mathcal{J}^m(1 - \tilde{a}, 2 - \tilde{c}) = -{}_4G_3 \left( \begin{matrix} \tilde{a}, 1 - \tilde{a}, m + 2 - c, 1 + m \\ 2 - c, m + 1 + a, m + 2 - a \end{matrix} ; 1 \right) \\
 & - {}_4G_3 \left( \begin{matrix} a, 1 - a, m + c, 1 + m \\ c, m + 1 + \tilde{a}, m + 2 - \tilde{a} \end{matrix} ; 1 \right) + {}_4G_3 \left( \begin{matrix} c - \tilde{a}, c + \tilde{a} - 1, m + 1 + c, m + c \\ c, c + a + m, c - a + m + 1 \end{matrix} ; 1 \right) \\
 & + {}_4G_3 \left( \begin{matrix} 2 - c - a, 1 - c + a, m + 3 - c, m + 2 - c \\ 2 - c, 2 - c + \tilde{a} + m, 3 - c - \tilde{a} + m \end{matrix} ; 1 \right) \tag{53}
 \end{aligned}$$

The point is that for  $n > m$ , the two first terms compensate, as we will prove explicitly. The

same is true for the two last terms. Let us use the following identities :

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{2i\pi} \cos \pi s \Gamma(-s) \frac{\prod_{i=0}^3 \Gamma(s+a_i)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma(s+b_j)} &= {}_4G_3(a_i; b_j; 1) \\ \int \frac{ds}{2i\pi} \sin \pi s \Gamma(-s) \frac{\prod_{i=0}^3 \Gamma(s+a_i)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma(s+b_j)} &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

The first one is the Mellin-Barnes representation of the hypergeometric function. The contour is a path in the complex plane for the  $s$  variable, which separates the poles of  $\Gamma(-s)$  and those of the  $\Gamma(s+a_i)$ . Both identities are obtained by closing the contour to the right (the second identity stems from the fact that  $\sin \pi s \Gamma(-s)$  has no pole). One can also close the contour to the left :

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{2i\pi} \cos \pi s \Gamma(-s) \frac{\prod_{i=0}^3 \Gamma(s+a_i)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma(s+b_j)} &= \sum_{i=0}^3 \cos \pi a_i \frac{\prod_{j=1}^3 \sin \pi(a_i - b_j + 1)}{\prod_{j=0 \neq i}^3 \sin \pi(a_i - a_j + 1)} {}_4G_3 \left( \begin{matrix} a_i, a_i - b_j + 1 \\ a_i - a_j + 1 \end{matrix}; 1 \right) \\ \int \frac{ds}{2i\pi} \sin \pi s \Gamma(-s) \frac{\prod_{i=0}^3 \Gamma(s+a_i)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma(s+b_j)} &= \sum_{i=0}^3 \sin \pi a_i \frac{\prod_{j=1}^3 \sin \pi(a_i - b_j + 1)}{\prod_{j=0 \neq i}^3 \sin \pi(a_i - a_j + 1)} {}_4G_3 \left( \begin{matrix} a_i, a_i - b_j + 1 \\ a_i - a_j + 1 \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Identifying these two sets of equalities, we obtain :

$$\begin{aligned} {}_4G_3(a_i; b_j; 1) &= \sum_{i=0}^3 \cos \pi a_i \frac{\prod_{j=1}^3 \sin \pi(a_i - b_j + 1)}{\prod_{j=0 \neq i}^3 \sin \pi(a_i - a_j + 1)} {}_4G_3 \left( \begin{matrix} a_i, a_i - b_j + 1 \\ a_i - a_j + 1 \end{matrix}; 1 \right) \\ 0 &= \sum_{i=0}^3 \sin \pi a_i \frac{\prod_{j=1}^3 \sin \pi(a_i - b_j + 1)}{\prod_{j=0 \neq i}^3 \sin \pi(a_i - a_j + 1)} {}_4G_3 \left( \begin{matrix} a_i, a_i - b_j + 1 \\ a_i - a_j + 1 \end{matrix}; 1 \right). \end{aligned} \quad (56)$$

One sets the parameters as follows :  $(a_i) = (\tilde{a}, 1-\tilde{a}, m+2-c, 1+m)$ ,  $(b_i) = (2-c, m+1+a, m+2-a)$ , so that the equalities (56) become

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \cos \pi \tilde{a} \times \mathcal{F}_1 + \cos \pi(1-\tilde{a}) \times \mathcal{F}_2 \\ &+ \cos \pi(m+1) \frac{\sin \pi(c+m) \sin \pi(1-a) \sin \pi a}{\sin \pi(m+2-\tilde{a}) \sin \pi(m+1+\tilde{a}) \sin \pi c} \times \mathcal{G}_2 + \cos \pi(m+2-c) \times \mathcal{D} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \pi \tilde{a} \times \mathcal{F}_1 + \sin \pi(1-\tilde{a}) \times \mathcal{F}_2 \\ &+ \sin \pi(m+1) \frac{\sin \pi(c+m) \sin \pi(1-a) \sin \pi a}{\sin \pi(m+2-\tilde{a}) \sin \pi(m+1+\tilde{a}) \sin \pi c} \times \mathcal{G}_2 + \sin \pi(m+2-c) \times \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (58)$$

where

$$\mathcal{G}_1 = {}_4G_3 \left( \begin{matrix} \tilde{a}, 1-\tilde{a}, m+2-c, 1+m \\ 2-c, m+1+a, m+2-a \end{matrix}; 1 \right)$$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\boxed{\sin \pi(\tilde{a}-a-m)} \sin \pi(c+\tilde{a}-1) \sin \pi(\tilde{a}+a-m-1)}{\sin \pi(2\tilde{a}) \sin \pi(c+\tilde{a}-m-1) \sin \pi(\tilde{a}-m)} \times \quad (59)$$

$$\times {}_4G_3 \left( \begin{matrix} \boxed{\tilde{a}-a-m}, \tilde{a}+a-m-1, \tilde{a}, c+\tilde{a}-1 \\ 2\tilde{a}, c+\tilde{a}-m-1, \tilde{a}-m \end{matrix}; 1 \right)$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{\boxed{\sin \pi(a-\tilde{a}-m)} \sin \pi(-\tilde{a}-a-m+1) \sin \pi(c-\tilde{a})}{\sin \pi(-2\tilde{a}+2) \sin \pi(c-\tilde{a}-m) \sin \pi(1-m-\tilde{a})} \times \quad (60)$$

$$\times {}_4G_3 \left( \begin{matrix} \boxed{a-\tilde{a}-m}, 1-\tilde{a}, c-\tilde{a}, 1-m-a-\tilde{a} \\ 2-2\tilde{a}, c-\tilde{a}-m, 1-\tilde{a}-m \end{matrix}; 1 \right) \quad (61)$$

$$\mathcal{G}_2 = {}_4G_3 \left( \begin{matrix} m+1, a, 1-a, c+m \\ c, m+1+\tilde{a}, m+2-\tilde{a} \end{matrix}; 1 \right)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\sin \pi(m+1) \sin \pi(2-a-c) \sin \pi(a-c-1)}{\sin \pi(m+3-c-\tilde{a}) \sin \pi(m+2+\tilde{a}-c) \sin \pi(2-c)} \times \quad (62)$$

$$\times {}_4G_3 \left( \begin{matrix} m+2-c, m+1, 2-a-c, a-c-1 \\ m+3-c-\tilde{a}, m+2+\tilde{a}-c, 2-c \end{matrix}; 1 \right)$$

Let us first notice that the coefficient in front of  $\mathcal{G}_2$  in eq.(57) is  $(-1)$ , and is 0 in eq.(58). Moreover, the term  $\mathcal{D}$  is the product of  $\sin \pi(m+1)$  times a regular function, which means that it vanishes. The system then rewrites :

$$\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 = \cos \pi \tilde{a} \times (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) \quad (63)$$

$$\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 = 0 . \quad (64)$$

Let us show that  $\mathcal{F}_1$  is null for  $n > m$ . First note that  $\tilde{a} - a - m = n - m$ . For  $n > m$ , the  ${}_4G_3$ -function in eq.(60) is regular whereas the “boxed” sine in front of it is zero, hence  $\mathcal{F}_1 = 0$  (this is not true for  $n \leq m$  since then the “boxed” argument of the  ${}_4G_3$ -function is a negative integer, so the  ${}_4G_3$ -function is singular). Then eq.(64) implies that  $\mathcal{F}_2$  is also zero, and eq.(63) leads to the identity  $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 = 0$ . Noticing that  $\mathcal{G}_1$  and  $\mathcal{G}_2$  are nothing else than the two first terms in eq.(53), this completes the proof.

Let us illustrate these cancellation properties by taking the particular case  $c = 1$ . It is of physical interest, since it corresponds to the impact factor for the  $\gamma \rightarrow \gamma$  transition (real photons) which has been studied earlier in ref. [11]. In this case, eq.(53) reduces to  $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2|_{c=1} = 0$ . But we have also we have  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$  since  $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1|_{a \leftrightarrow \tilde{a}}$  and since we showed (see the core of the paper) that the result is invariant by this substitution. Finally, we obtain, for  $n > m$  :

$${}_4G_3 \left( \begin{matrix} \tilde{a}, 1-\tilde{a}, 1+m, 1+m \\ 1, m+1+a, m+2-a \end{matrix}; 1 \right) = 0 .$$

## References

- [1] For a review, see for instance : .J.R. Forshaw and D.A. Ross, Quantum chromodynamics and the pomeron (Cambridge University Press (Cambridge lecture notes in physics. 9), 1997).
- [2] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, Sov. Phys. JETP 44 (1976) 443,
- [3] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 72 (1977) 377,

- [4] I.I. Balitsky and L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 28 (1978) 822,
- [5] M. Ciafaloni and G. Camici, Phys. Lett. B430 (1998) 349, hep-ph/9803389,
- [6] V.S. Fadin and L.N. Lipatov, Phys. Lett. B429 (1998) 127, hep-ph/9802290,
- [7] L.N. Lipatov, Sov. Phys. JETP 63 (1986) 904,
- [8] S. Munier and R. Peschanski, Eur. Phys. J. C9 (1999) 479, hep-ph/9811400.
- [9] A. Donnachie and P.V. Landshoff, Phys. Lett. B437 (1998) 408, hep-ph/9806344,
- [10] N.G. Evanson and J.R. Forshaw, Phys. Rev. D60 (1999) 034016, hep-ph/9902481,
- [11] D. Ivanov and M. Wusthoff, Eur. Phys. J. C8 (1999) 107, hep-ph/9808455.
- [12] J. Geronimo and H. Navelet, to appear.
- [13] H. Navelet and S. Wallon, Nucl. Phys. B522 (1998) 237, hep-ph/9705296,
- [14] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, 1965).
- [15] H. Navelet and R. Peschanski, Nucl. Phys. B515 (1998) 269, hep-ph/9709371,
- [16] A. Prudnikov, Y. Brychkov and O. Marichev, Integrals and Series (Gordon and Breach Science Publishers, 1986).
- [17] Y. Luke, The Special Functions and their Approximations (Academic Press, 1969).

## Figure captions.

**Fig.1** Scattering process.

*1 and 2 label the colliding objects. The wavy lines represent exchanged reggeized gluons which interact through the BFKL kernel. The arrows give the momentum flux.*

---

**Fig.2** Diagram contributing to the impact factor  $\phi_1$ .

*The dashed lines represent (virtual or real) photons which resolve into a quark-antiquark pair. The wavy lines stand for off-shell gluons. Four such diagrams (corresponding to each possible insertion of the two exchanged gluons) have to be taken into account although (see text) only two of them effectively contribute to the amplitude.*

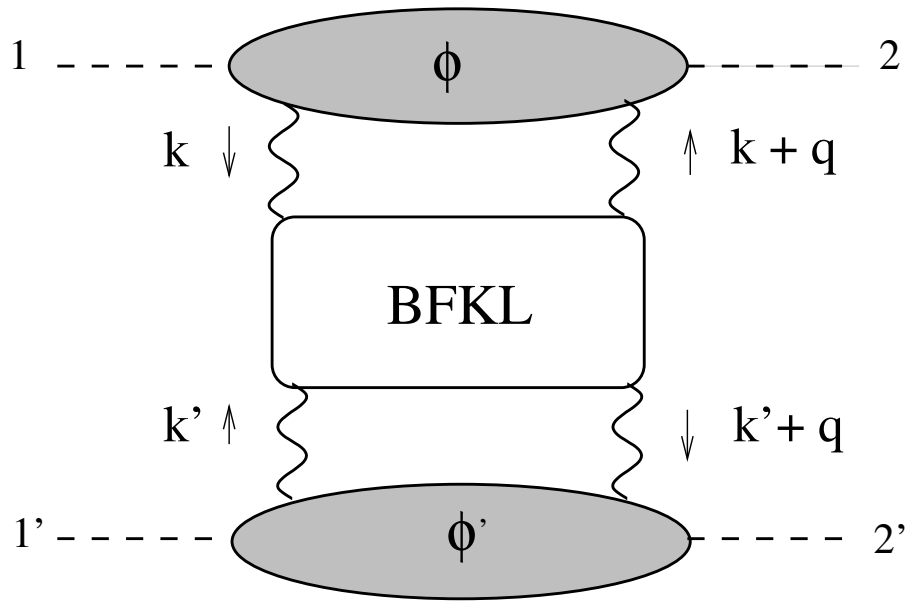


Fig.1

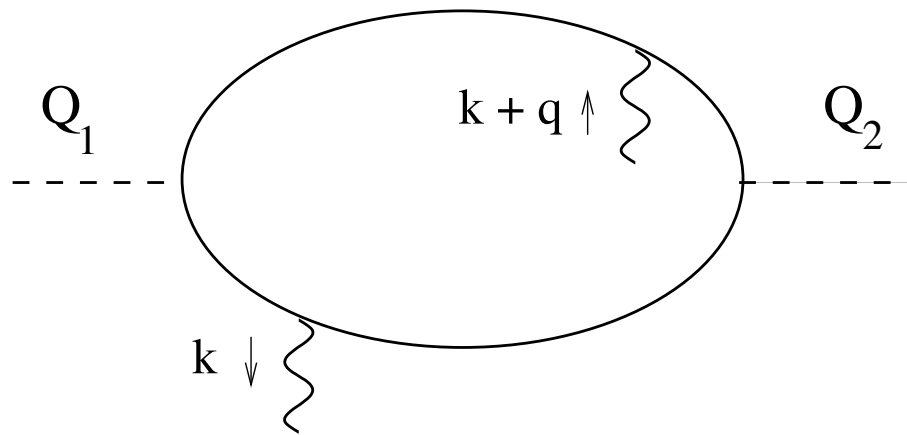


Fig.2

# Article V





# Forward jets in the colour-dipole model

S. Munier

Service de Physique Théorique  
CEA/Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex  
France.

## Abstract

We show that a forward jet with large transverse momentum in an onium-onium collision is a hard probe which can be effectively characterized by a colour-dipole distribution at the time of the interaction. The dipole distribution is computed, and compared to its counterpart for a virtual photon in the initial state. We find that while in the photon case, the tail of large sizes is exponentially cut-off, it contributes sizeably in the forward-jet case, which signs the sensitivity of observables based on such events to the infrared region. Moreover, a direct probabilistic interpretation of the dipole distribution fails since it takes negative values in the large size region.

## 1 Introduction.

The physics at HERA has proved the successes of (resummed) perturbative QCD in describing many observables accurately measured there : inclusive ones like the structure function  $F_2$ , but also more exclusive ones, like the diffractive structure function  $F_2^D$ , or heavy meson production. The justification for relying on a perturbative development is that the deep-inelastic scattering process naturally provides a well-controlled hard scale given by the photon virtuality  $Q^2$ , which makes the effective strong coupling constant  $\alpha_s(Q^2)$  small enough. On the one hand, the physics of these observables is usually well described by the renormalization group evolution [1–3] between a lower scale  $Q_0^2$  at which the proton parton densities are parametrized and the scale  $Q^2$ . On the other hand, the cross-section for the events selected with the requirement that a forward jet of transverse momentum  $\bar{q}^2$  of the order of  $Q^2$  be present in the final state is seemingly not described by a straightforward DGLAP evolution (see ref. [4] and references therein) : as a matter of fact, these Regge-like kinematics are expected to select the BFKL dynamics [5–7].

In  $p - \bar{p}$  collisions at the Tevatron, no hard scale is provided by the initial state. However, it can be generated in the scattering and manifests itself in the final state in the form of a jet with a large transverse momentum. Events of this class are also accessible to a perturbative QCD interpretation.

In this letter, we focus on high-energy onia (massive  $q\bar{q}$  states) collisions, as a model for  $p - \bar{p}$  collisions at high energy when high-mass scales are selected by forward jets. The inclusive cross-sections for onia collisions have been described using a dipole cascade modelling the rapidity evolution of the  $q\bar{q}$  pairs before their interaction [8]. Here we require that at least the first (most forward) gluon which goes to the final state has its transverse momentum larger than a scale  $\mu$ ; this gluon becomes a forward-jet, and we interpret it as an effective colour-dipole distribution present at the time of the scattering.

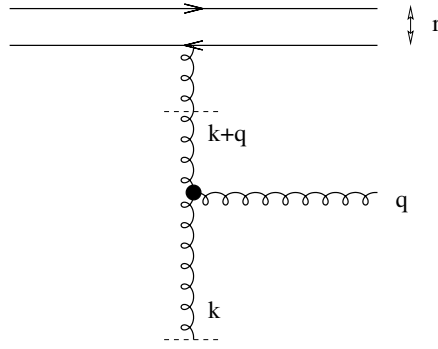


Figure 2 – One of the diagrams contributing to the dipole  $-g^* \rightarrow g(\text{forward}) + \dots$  cross-section. The horizontal dashed lines represent the points where  $k_\perp$ -factorization is applied.

In section 2, we detail the modelisation that we adopt for the forward jet. We show in section 3 how we can extract to double-leading logarithmic (DLL) approximation, the dipole content of such an object. Section 4 contains our conclusions and outlook.

## 2 Emission of a forward gluon in the final state.

The onium-onium forward scattering amplitude involves the exchange of two gluons between the initial onia. At high-energy, one has to take into account the possibility of multiple splittings of these  $t$ -channel gluons. This can be done either by  $(k_\perp)$ factorizing [9] a BFKL-like ladder between the bare onia, or equivalently by computing the two-gluon exchange diagram between the onia dressed by an arbitrary number of soft “sea” gluons. The latter approach inspired the colour-dipole model of ref. [8]. The equivalence between these two methods was shown on different features of both pictures in ref. [10–13].

In this section, we shall derive in a  $t$ -channel picture the gluon density  $f$  which is to be considered in an interacting “onium+forward-jet” system as the starting-point of a BFKL evolution. The next section will be devoted to the interpretation of the obtained density as an effective primordial dipole density inside the forward jet.

We have to compute the “dipole + (virtual)gluon  $\rightarrow \bar{q}q$  + gluon” amplitude, where the initial-state dipole of radius  $\vec{r}$  is part of an onium, and the final-state gluon has a transverse momentum  $\vec{q}$ . The modulus  $q \equiv |\vec{q}|$  is larger than a given scale  $\mu$ . Having in mind the fact that in a physical process the initial-state dipole will be part of a hadron instead of an onium, we will consider in the following that  $\mu \gg 1/r$  whenever needed for technical purpose.

We start with the (virtual)gluon-dipole cross-section  $\hat{\sigma}_{g-d}$  which defines the gluon density inside a dipole at lowest order in  $\bar{\alpha} \equiv \alpha_s N_c / \pi$ . It reads (see ref. [12]) :

$$f^0(\vec{k}^2) = \frac{\hat{\sigma}_{g-d}}{\vec{k}^2} = \frac{\bar{\alpha}}{\vec{k}^2} \left( 2 - e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) . \quad (1)$$

It can be expressed as an inverse Mellin-transform in the transverse plane :

$$f^0(\vec{k}^2) = \frac{4\bar{\alpha}}{\vec{k}^2} \int \frac{d\sigma}{2i\pi} (kr)^{2\sigma} v(\sigma) , \quad (2)$$

where  $v$  is interpreted as the well-known dipole-gluon “vertex” in the Mellin space :

$$v(\sigma) = \frac{2^{-2\sigma-1} \Gamma(1-\sigma)}{\sigma \Gamma(1+\sigma)} . \quad (3)$$

We then factorize the emission of a real gluon. It can be computed directly in the high-energy limit by evaluating the relevant graphs (one of them is pictured in fig.2), but it is also convenient to see it as one step of the BFKL ladder. The initial gluon density  $f^0$  and the density  $f$  after emission of a gluon are related through the formula :

$$f(x, \vec{k}^2) = \bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int \frac{d^2 \vec{q}}{\pi \vec{q}^2} \theta(\vec{q}^2 - \mu^2) f^0(|\vec{k} + \vec{q}|^2), \quad (4)$$

which is the lowest order (in  $\alpha_s$ ) BFKL equation written in an unfolded form (see for instance ref. [14]). The variable  $x$  is proportional to  $|t|/s$ , where  $s$  and  $t$  are the ordinary Mandelstam variables for the reaction. In deep-inelastic scattering,  $x$  would stand for the Bjorken variable.

Let us write the Mellin-transform of eq.(4) :

$$\frac{h(\gamma)}{\gamma} \equiv \int_0^\infty \frac{d^2 \vec{k}}{\pi \vec{k}^2} |\vec{k}|^{2\gamma} f(x, \vec{k}^2) = \bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int \frac{d^2 \vec{q}}{\pi \vec{q}^2} \theta(\vec{q}^2 - \mu^2) \int \frac{d^2 \vec{k}}{\pi \vec{k}^2} |\vec{k}|^{2\gamma} f^0(|\vec{k} + \vec{q}|^2), \quad (5)$$

where we used similar notations as in ref. [9], although we have not performed the Mellin-transform with respect to  $x$ . The variable  $\gamma$  describes a path  $]\gamma_0 - i\infty, \gamma_0 + i\infty[$  in the complex plane, with  $0 < \mathcal{R}e \gamma_0 < 1/2$ . Inserting eqs.(1)-(3) into eq.(5), it follows that :

$$\frac{h(\gamma)}{\gamma} = 4\bar{\alpha}^2 \left( \log \frac{1}{x} \right) \int \frac{d\sigma}{2i\pi} v(\sigma) r^{2\sigma} \int \frac{d^2 \vec{q}}{\pi \vec{q}^2} \theta(\vec{q}^2 - \mu^2) \int \frac{d^2 \vec{k}}{\pi} |\vec{k}|^{2\gamma-2} |\vec{k} - \vec{q}|^{2\sigma-2}. \quad (6)$$

The integration over  $\vec{k}$  can easily be performed switching to complex variables and using the well-known identity (see [15] and references therein) :

$$\int \frac{dz d\bar{z}}{2i} |z|^{2\alpha-2} |1-z|^{2\beta-2} = \pi \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}, \quad (7)$$

valid for  $\mathcal{R}e \alpha, \mathcal{R}e \beta > 0$  and  $\mathcal{R}e(\alpha+\beta) < 2$ . The result reads :

$$\frac{h(\gamma)}{\gamma} = 2\bar{\alpha}^2 \left( \log \frac{1}{x} \right) \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \mu^{2\gamma-2} G_{35}^{40} \left( \begin{matrix} 1, 1, 2-\gamma \\ 0, 0, 1-\gamma, 1-\gamma, 1-\gamma \end{matrix} \middle| \left( \frac{\mu r}{2} \right)^2 \right), \quad (8)$$

where the Meijer-function  $G_{35}^{40}$  (which arguments will be abbreviated in the following) writes :

$$G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\sigma}{2i\pi} \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma-\sigma)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)}, \quad (9)$$

the contour of integration  $\mathcal{C}$  being defined on fig.2. The function  $h(\gamma)/\gamma$  can be seen as the coefficient-function in the sense of ref. [9], for the onium+forward-jet system.

### 3 Interpretation in the colour-dipole model.

In ref. [13], a relation was established between the coefficient-function  $h(\gamma)/\gamma$  of a virtual photon and its corresponding squared wave-function  $\varphi(\gamma)$  on a dipole basis. We shall make use of it in the present context of semi-exclusive factorization to extract the dipole content of the forward jet from the coefficient-function found above, at DLL accuracy. The double-logs should manifest themselves through factors like  $\bar{\alpha} \log(1/x) \log(r/r_0)$ , where  $r_0$  is a characteristic size for the final state. The relationship between the squared wave-function and the coefficient-function reads :

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{h(\gamma)}{\gamma} \frac{1}{v(1-\gamma)}. \quad (10)$$

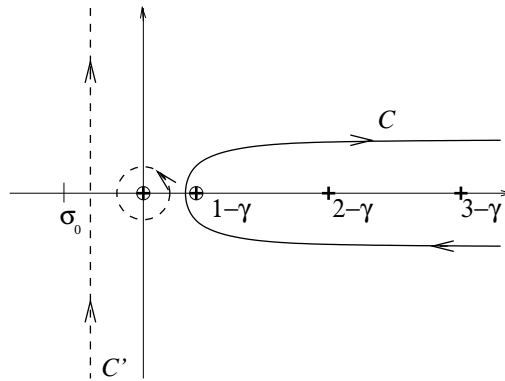


Figure 3 – Contour of integration. *Crosses* : poles of the integrand. *Circles* : double poles. *Dashed line* : contour of integration after deformation.

An intuitive way of understanding this relation could be the following : dividing the coefficient-function pictured in fig.2 by the factor  $v(1-\gamma)$  amounts to getting rid of the vertex of the lowest gluon which in this picture is also a gluon-dipole vertex. Hence one ends up with the dipole content of the scattering object :

$$\varphi(\gamma) = 4\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\mu}{2} \right)^{2\gamma-2} (1-\gamma)^2 \times G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) . \quad (11)$$

Let us explore the limit  $\mu r \gg 1$ , in which the forward jet has a transverse momentum much larger than the characteristic scale of the initial onium. The Meijer-function  $G_{35}^{40}$  can be approximated in a straightforward manner by picking the pole (at  $\sigma=0$ ) which lies on the left of the integration path. Indeed, the contour  $\mathcal{C}$  can be deformed to  $\mathcal{C}'$  (see fig.2) since the integral converges on any path such that  $\mathcal{R}e \sigma > \sigma_0$ , where  $\sigma_0 \equiv -1/2 - \mathcal{R}e \gamma$  :

$$\begin{aligned} G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) &= \int_{\mathcal{C}} \frac{d\sigma}{2i\pi} \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma-\sigma)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \left( \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{1-\gamma-\sigma} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)} \right) + \\ &+ \int_{\mathcal{C}'} \frac{d\sigma}{2i\pi} \left( \frac{\mu r}{2} \right)^{2\sigma} \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma-\sigma)} \frac{\Gamma(1-\gamma-\sigma)}{\Gamma(\gamma+\sigma)} . \end{aligned} \quad (12)$$

The integral taken on the contour  $\mathcal{C}'$  is subdominant by some power of  $2/(\mu r)$  with respect to the contribution of the double-pole at  $\sigma=0$ , and one writes :

$$\begin{aligned} G_{35}^{40}(\gamma, \mu r) &= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(1-\gamma)\Gamma(\gamma)} \left\{ 2 \log \frac{\mu r}{2} - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-\gamma} \right\} + \{ \text{terms suppressed by powers of } 1/(\mu r) \} . \end{aligned} \quad (13)$$

This approximation proves to be very good numerically even for relatively small  $\mu r$ .

Then the squared dipole wave-function reads, in this approximation :

$$\varphi(\gamma) = 4\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\mu}{2} \right)^{2\gamma-2} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \left( 2 \log \frac{\mu r}{2} - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma) + \frac{1}{1-\gamma} \right) . \quad (14)$$

We want to obtain an expression for the distribution of dipoles in the system in coordinate space, i.e. as a function of the transverse size  $\rho$ . It is given by the inverse-Mellin transform of  $\varphi(\gamma)$  :

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \rho^{2\gamma-2} \varphi(\gamma) . \quad (15)$$

We obtain the following result :

$$\varphi(\rho) = 8\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \left( \log \frac{r}{\rho} \right) \frac{\mu}{\rho} J_1(\mu\rho) + \frac{1}{\rho^2} J_0(\mu\rho) \right) . \quad (16)$$

The second term is not relevant in our approximation, since the limit of large  $\mu r$  selects the DLL; the terms beyond this approximation are not under control. Hence the interaction of the system formed by the initial dipole and the forward gluon can be viewed as a dipole-dipole interaction provided the system is described by the following dipole distribution :

$$\varphi_{\text{DLL}}(\rho) = 8\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \left( \log \frac{r}{\rho} \right) \frac{\mu}{\rho} J_1(\mu\rho) . \quad (17)$$

Let us give an interpretation of the various factors in this distribution. First, note that the dependence on the initial dipole size  $r$  only appears in the factor  $\log(r/\rho)$ . This remarkable fact technically results from the combination of the term  $\log(\mu r/2)$  and the inverse-Mellin transform of the  $\psi$  functions in the inverse-Mellin transform of eq.(14). Physically, the overall factor  $2\bar{\alpha} \log(1/x) \log(r/\rho)$  can then be interpreted as the probability of finding a dipole of size  $\rho$  inside a dipole of size  $r$ . Indeed, in the DLL approximation at lowest order in  $\alpha_s$  and assuming an available energy proportional to  $1/x$ , the probability of finding a dipole of size  $|\vec{\rho}|$  between  $|\vec{\rho}|$  and  $|\vec{r}|$  inside a dipole of size  $\vec{r}$  reads [8] :

$$\bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int_{\rho^2}^{r^2} \frac{d^2 \varrho}{\pi} \frac{\vec{r}^2}{\varrho^2 (\vec{r} - \vec{\varrho})^2} \simeq \bar{\alpha} \left( \log \frac{1}{x} \right) \int_{\rho^2}^{r^2} \frac{d^2 \varrho}{\pi \varrho^2} = 2\bar{\alpha} \log \frac{1}{x} \log \frac{r}{\rho} , \quad (18)$$

where the second approximate equality holds when  $\varrho \ll r$ . Dividing out this factor in eq.(17) leads to the universal dipole content of the gluon radiated into the final state. We normalize the first moment of the obtained squared wave-function to unity<sup>1</sup> (i.e.  $\phi(\gamma=1/2) \equiv 1$ ), and so we are led to :

$$\phi(\rho) = \frac{\mu^2}{\rho} J_1(\mu\rho) . \quad (19)$$

Note that this squared wave-function for which we provide a derivation here is exactly the one (integrated over the energy-share variable  $z$  and properly normalized) that was postulated in ref. [16]. To see this, we only need to recall that the Mellin transform of the function  $J_1(\mu\rho)/\rho$  reads :

$$\int_0^\infty \frac{d^2 \vec{\rho}}{\pi} |\vec{\rho}|^{2-2\gamma} \frac{J_1(\mu\rho)}{\rho} = \mu^{2\gamma-3} 2^{2-2\gamma} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} . \quad (20)$$

---

<sup>1</sup>This choice means that  $\phi$  has now the unusual dimension  $[\text{mass}]^3$ , but it enables a comparison to the photon squared wave-function  $\phi^{\gamma*}$ , for which the  $\gamma=0$  moment diverges logarithmically.

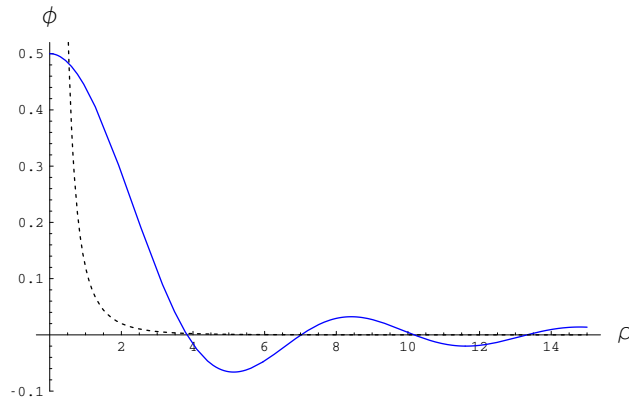


Figure 4 – Dipole density as a function of the transverse size. *The scale  $\mu$  has been set to 1. Continuous line : forward-jet. Dashed line : (transverse) virtual photon.*

The behaviour of  $\phi$  is represented in fig.3. It is compared to the behaviour of the transverse virtual photon squared wave-function in  $q\bar{q}$  pairs, integrated over the fraction of the photon longitudinal momentum  $z$  carried by the quark. This photon wave-function reads :

$$\phi^{\gamma^*}(\rho) = \frac{64\mu}{9\pi^3} \int_0^1 dz \mu^2 z(1-z)(z^2 + (1-z)^2) K_1^2(\mu\rho\sqrt{z(1-z)}) , \quad (21)$$

where the same normalization  $\phi^{\gamma^*}(\gamma=1/2) \equiv 1$  has been enforced.

Some remarks are in order. The squared wave-function  $\phi$  represents the effective distribution of dipoles resulting from a final-state gluon which has its transverse momentum larger than  $\mu$ . We note that it is slowly decreasing with  $\rho$  ( $\sim \rho^{-3/2}$ ), which means that dipoles of large size occur with a non-negligible probability. The width of the distribution is of order  $1/\mu$ , but since its behaviour at infinity is only powerlike,  $\mu$  is not a clean cutoff. It has an oscillatory behaviour, the oscillation length being of the order of  $1/\mu$ . However,  $\phi$  takes also negative values, which indicates that it does not allow for a direct probabilistic interpretation like in the case of the  $q\bar{q}$ -pair distribution  $\phi^{\gamma^*}$  inside the photon.

## 4 Conclusions and outlook.

Using a straightforward model and a QCD calculation in the DLL approximation, we have shown that a gluonic hard probe in the final-state can be characterized by a dipole-distribution  $\phi(\rho)$ . This distribution decreases weakly with  $\rho$  and takes negative values. We confirm the (integrated over  $z$ ) result obtained in ref. [16].

The obtained distribution can now be used to compute processes of several topologies : for instance deep-inelastic scattering on a forward-jet at small- $x$ ,  $p-\bar{p}$  interactions with two jets in the final-state separated by a large rapidity range. In any case, the dipole formulation for these observables is of the type :

$$\mathcal{O} \propto \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{\alpha_s^2}{\gamma^2(1-\gamma)^2} \left(\frac{\mu}{Q_0}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} \int d^2\rho \rho^{2\gamma} \phi(\rho) \int d^2\rho_t \rho_t^{2-2\gamma} \phi_t(\rho_t) , \quad (22)$$

where  $\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma)$  is the eigenvalue of the BFKL kernel, and  $Y$  the rapidity range between the two probes characterized by the dipole distributions  $\phi$  and  $\phi_t$ . Note that the simplest observable one can compute using this formula is the cross-section  $\sigma$  for the

production of dijets of respective transverse momenta larger than  $k_1$  and  $k_2$  in hadronic collisions. It reads :

$$\sigma \propto \frac{\alpha_s^2}{k_1 k_2} \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{2\gamma} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y}, \quad (23)$$

which is the Mueller-Navelet formula [17], modulo some normalization we did not keep precise track of. Hence this little calculation provides a further check of our dipole distribution.

This study may deserve several further investigations and improvements. First of all, we worked only up to terms beyond the DLL approximation. It would be useful to perform a more complete calculation, by computing to leading  $\log-1/x$  precision all the graphs of the type of the one in fig.1 which contribute, to see if the dipole factorization still holds.

On the other hand, it would be nice to supplement our indirect method of extracting the dipole content by a more direct calculation in the framework of the colour-dipole model : this would insure the full control of the leading  $\log-1/x$ , including a correct treatment of the virtual corrections. Although quite straightforward to formulate, the latter calculation exhibits many technical difficulties. Both these proposed improvements deserve more studies.

### Acknowledgements :

I thank R. Peschanski and H. Navelet for many useful suggestions and a careful reading of the manuscript.

### References

- [1] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, *Yad. Fiz.* 15 (1972) 781.
- [2] Y.L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP* 46 (1977) 641.
- [3] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.* B126 (1977) 298.
- [4] B. Pötter, (1999), hep-ph/9909320, talk given at the Ringberg Workshop 'New Trends in HERA Physics 1999'.
- [5] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Sov. Phys. JETP* 44 (1976) 443.
- [6] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 72 (1977) 377.
- [7] I.I. Balitsky and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 28 (1978) 822.
- [8] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* B415 (1994) 373.
- [9] S. Catani, M. Ciafaloni and F. Hautmann, *Nucl. Phys.* B366 (1991) 135.
- [10] Z. Chen and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* B451 (1995) 579.
- [11] H. Navelet and R. Peschanski, *Nucl. Phys.* B507 (1997) 353, hep-ph/9703238.
- [12] H. Navelet and S. Wallon, *Nucl. Phys.* B522 (1998) 237, hep-ph/9705296.
- [13] S. Munier and R. Peschanski, *Nucl. Phys.* B524 (1998) 377, hep-ph/9802230.
- [14] J. Kwiecinski, A.D. Martin and P.J. Sutton, *Phys. Rev.* D52 (1995) 1445, hep-ph/9503266.
- [15] J.S. Geronimo and H. Navelet, (2000), math-ph/0003019, to appear.
- [16] R. Peschanski, (1999), hep-ph/9910377, to appear.
- [17] A.H. Mueller and H. Navelet, *Nucl. Phys.* B282 (1987) 727.