



HAL
open science

Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes

Yann Le Coq

► **To cite this version:**

Yann Le Coq. Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes. Physique Atomique [physics.atom-ph].
Université Paris Sud - Paris XI, 2002. Français. NNT : . tel-00002564

HAL Id: tel-00002564

<https://pastel.hal.science/tel-00002564v1>

Submitted on 19 Mar 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT D'OPTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE
LABORATOIRE CHARLES FABRY**

**UNIVERSITÉ PARIS XI
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THÈSE

présentée pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

Yann LE COQ

Sujet :

**CONDENSATS DE BOSE-EINSTEIN
ET LASERS À ATOMES**

Soutenue le 13 décembre 2002 devant la Commission d'examen :

M. F. BIRABEN	Rapporteur
M. E. ROSENCHER	Rapporteur
M. W. PHILLIPS	Examineur
M. C. BORDÉ	Examineur
M. A. DUCASSE	Président
M. A. ASPECT	Directeur de thèse
M. P. BOUYER	Membre invité

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés au Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique. Je remercie son directeur, Pierre CHAVEL, de m'y avoir accueilli. Il a toujours su exprimer son soutien et sa disponibilité avec la gentillesse et l'efficacité qui le caractérise.

Je suis très reconnaissant à Alain ASPECT de m'avoir fait confiance tout au long de ces années. J'ai énormément apprécié l'ambiance, scientifiquement riche et humainement conviviale qui règne dans son équipe. Ses talents de pédagogue, appuyés sur une culture scientifique profonde ont permis d'éclairer nombre de points obscurs tout au long de ces travaux, en particulier dans la phase de relecture du manuscrit.

François BIRABEN et Emmanuel ROSENCHER ont eu la gentillesse d'accepter de rapporter ce mémoire. J'ai beaucoup apprécié leurs remarques et commentaires, et j'ai été touché par leurs marques d'intérêt pour mon travail. Merci également à Christian BORDÉ pour ses éclairages sur les matrices ABCD, ainsi qu'à William PHILLIPS pour ses nombreuses remarques sur le manuscrit et la physique sous-jacente. Tout deux ont accepté de participer à mon jury de thèse, malgré leurs emplois du temps chargés, et je tiens à les en remercier, ainsi que de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. En tant qu'ancien élève de l'École Supérieure d'Optique, j'ai également été très honoré que André DUCASSE accepte de présider le jury.

L'ensemble des travaux relatés ici constitue bien entendu un travail d'équipe. Philippe BOUYER nous a communiqué au jour le jour son enthousiasme et son énergie. Je l'en remercie chaleureusement, ainsi que de la confiance qu'il m'a portée pour la réalisation du second dispositif expérimental. Je retiendrai tout particulièrement du travail à son contact à quel point, en physique expérimentale, il vaut souvent mieux trancher le noeud gordien que de tergiverser sans fin. Je le remercie également pour ses relectures du manuscrit.

Sadiqali RANGWALLA a, par sa bonne humeur, son énergie et son immense curiosité pour la physique, su rendre passionnantes les journées de débogage et les longues nuits d'acquisitions. J'ai également beaucoup aimé travailler au contact de Joseph THYWISSEN, dont le recul et le sens physique aigu ont souvent été déterminants. Ses corrections au présent mémoire ont permis de clarifier pour moi de nombreux points, et je l'en remercie vivement.

Mes premiers pas en solitaire sur le dispositif expérimental ont été guidés

par Stuart MURDOCH, qui a vérifié avec bienveillance que je ne faisais pas de trop grosses bêtises, tout en me laissant expérimenter à loisir. Guillaume DELANNOY a partagé avec moi pendant plusieurs semestres les moments de découragements dus aux caprices de la manip, ainsi que les moments de joies devant nos premiers signaux de lasers à atomes. J'ai beaucoup apprécié la patience dont il a fait preuve pour expliquer, au béotien que j'étais, les arcanes de la physique atomique et des atomes froids.

Simon RICHARD et Fabrice GERBIER m'ont rejoint vers la fin des expériences sur les lasers atomiques. Nous avons partagé ensemble les moments intenses et riches en discussions qu'une manip qui se met enfin à fonctionner peut produire. Ils ont, depuis, repris brillamment le flambeau sur le dispositif expérimental et je leurs souhaite toutes les réussites possibles, ainsi qu'à celles et ceux qui leur succéderont. Un grand merci également à Fabrice pour ses relectures sans concessions du manuscrit, qui ont fait beaucoup pour en améliorer la rigueur et la lisibilité.

Lors de ma dernière année de thèse, j'ai eu le plaisir de travailler à la construction d'un second dispositif expérimental en compagnie de Marie FAUQUEMBERGUE. Sa jovialité et son courage face à la tâche à accomplir sauront, j'en suis sûr, mener le dispositif à maturité et à de belles expériences. Je remercie également Effrossini TSOUCHNIKA, qui a participé aux premières phases de conception et de montage de l'optique avec talent et enthousiasme.

J'ai eu le privilège au cours de ces années de travailler avec André VILLING et Frédéric MORON, nos talentueux électroniciens. Ils ont conçu et réalisé (souvent en des temps records) les nombreux systèmes électroniques nécessaires au fonctionnement des manips. Je les remercie chaleureusement pour leur efficacité, leur compétence et leur disponibilité. Ils ont toujours su donner de bons conseils et répondre à nos attentes avec bonne humeur, gentillesse et sans jamais ménager ni leurs temps ni leurs peines.

Les électro-aimants que nous utilisons pour le piégeage magnétique sont réalisés en collaboration avec Michel LÉCRIVAIN du L.É.SI.R., que je remercie pour sa créativité et sa remarquable efficacité.

De nombreuses personnes à l'Institut d'Optique ont aidé à l'aboutissement de ces travaux. Je remercie particulièrement les TPs de l'École Supérieure d'Optique, qui nous ont si souvent prêté du matériel, en dépit de notre peu d'entraîn à leur rendre à temps. Merci au service entretien, et en particulier à Jean-Louis DUCHEMIN et à Jacky ROGER pour leurs interventions rapides et leurs prêts de matériel. Merci également à l'atelier mécanique, ainsi qu'à Alain AIDE. Je remercie également Christine AVIGNON-VÉRITÉ pour avoir supporté avec patience et compréhension nos demandes d'achats urgentes aux moments les plus incongrus.

J'ai eu énormément de plaisir à discuter (et pas seulement de physique)

avec l'ensemble des membres du groupe d'Optique Atomique que j'ai pu côtoyer au cours de ces années. Merci donc à Antoine, Julie, Alice, Stephan, Olivier, José, Denis, Rodolphe, Chris, Nathalie, Mathilde, Isabelle, David, Jérôme, Christine, Thorsten, Jean-Félix et tous les autres. Je les remercie de m'avoir offert leur amitié et leur confiance.

Enfin, je souhaite remercier ma famille et en particulier mes parents, pour leur soutien et leur patience au long de toutes ces années d'étude. Pour terminer j'embrasse Signe, et je la remercie profondément pour le soutien, la compréhension et les bons conseils qu'elle m'a apporté.

Table des matières

Introduction	9
1 Le condensat de Bose-Einstein	13
1.1 La cohérence en optique	14
1.1.1 Cohérence spatiale et temporelle : volume de cohérence	14
1.1.2 Lien entre le volume de cohérence et la mécanique quantique	17
1.1.3 Cohérence et expériences d'interférence : paramètre de dégénérescence	18
1.1.4 Remarques sur la cohérence en cavité	19
1.2 Cohérence d'un gaz d'atomes	20
1.2.1 Largeur de la distribution en impulsions des atomes . .	21
1.2.2 Volume de cohérence pour la matière	22
1.2.3 Paramètre de dégénérescence et condensation de Bose- Einstein	23
1.3 Moyens de description théoriques	24
1.3.1 Équation de Schrödinger d'un ensemble de particules en interactions	25
1.3.2 Approximation de Hartree-Fock	25
1.3.3 Équation de Gross-Pitaevskii	26
1.3.4 Les approximations à l'équation de Gross-Pitaevskii . .	27
1.3.4.1 Équation sans interactions : équation de Schrö- dinger	27
1.3.4.2 Équation sans terme d'énergie cinétique, régime de Thomas-Fermi	27
1.3.4.3 Fonction d'onde de Thomas-Fermi dans un potentiel harmonique	28
1.3.5 Remarque sur les conventions de normalisations	29
2 De l'atome chaud à la fonction d'onde macroscopique	31
2.1 Un aperçu du chemin à parcourir	32
2.2 Le vide	33
2.2.1 Le premier dispositif de vide	34
2.2.2 Dispositif de deuxième génération	35

2.3	La lumière : réalisation d'un banc de refroidissement laser . . .	37
2.3.1	Les diodes laser du nouveau dispositif	37
2.3.1.1	Diodes maîtres	38
2.3.1.2	Montage de spectroscopie d'absorption saturée / asservissement	39
2.3.1.3	Diodes esclaves	40
2.3.2	Banc de refroidissement	42
2.4	Ralentissement, piégeage et refroidissement d'atomes par laser	44
2.4.1	Le four, caractérisation du jet atomique	44
2.4.2	Ralentisseur Zeeman	46
2.4.3	Piège Magnéto-Optique, Dark-SPOT, Ultra Dark-SPOT et mélasse optique	47
2.5	Les deux générations de piège magnétique	53
2.5.1	Piège de Ioffé-Pritchard	54
2.5.2	Électroaimant de 2 ^e génération	55
2.5.2.1	Description	55
2.5.2.2	Performances statiques	56
2.5.2.3	Performances dynamiques	57
2.5.2.4	Problème des compensations de l'hystérésis, champs rémanents	60
2.5.3	Électro-aimant hybride de nouvelle génération	62
2.5.3.1	Description	62
2.5.3.2	Principe de la compensation du biais magnétique	63
2.5.3.3	Circuit de commande	64
2.5.3.4	Performances statiques	67
2.5.3.5	Performances dynamiques	68
2.6	Transfert en piège magnétique et compression adiabatique . .	68
2.7	Évaporation radio-fréquence	70
2.7.1	Principe de l'évaporation	70
2.7.2	Évaporation forcée, régime d'emballement	71
2.8	Systèmes d'imageries	72
2.9	Condensation de Bose-Einstein	74
3	Les lasers à atomes	77
3.1	Les différents types de lasers à atomes, revue rapide	78
3.1.1	Le lâcher simple	78
3.1.2	Lasers pulsés à fortes cadences de répétition	78
3.1.3	Lasers quasi-continus	78
3.1.4	Lasers continus en régime stationnaire	80
3.2	Le laser atomique, description simple	80
3.2.1	Principe	80

3.2.2	Description théorique	81
3.2.2.1	Équations de Gross-Pitaevskii couplées	81
3.2.2.2	Approximations	83
3.2.2.3	Fonctions d'ondes du continuum	84
3.2.2.4	Intégrales de recouvrement : éléments de ma- trice du couplage	89
3.2.3	Propriétés	89
3.2.3.1	Condition de résonance, position de la zone de couplage	89
3.2.3.2	Largeur spectrale du laser à atomes	91
3.2.3.3	Taux de couplage	93
3.3	Réalisation pratique	93
3.3.1	Stabilité des champs magnétiques	93
3.3.1.1	Précautions expérimentales	94
3.3.1.2	Stabilisation de l'alimentation	94
3.3.2	Effets de la puissance du coupleur sur l'état interne de sortie	96
3.3.3	Courbes de couplage	98
3.4	Quelques expériences	100
3.4.1	Couplage dans une cavité gravito-magnétique	100
3.4.1.1	Mesure de la fréquence d'oscillation dans la cavité	102
3.4.1.2	Couplage continu	103
3.4.2	Longueur du faisceau laser	103
3.5	Conclusion	104
4	Divergence d'un laser à atomes	105
4.1	Le laser à atome : description tri-dimensionnelle	106
4.2	Expériences : divergence d'un laser à atomes	107
4.2.1	Paramètres et résultats expérimentaux	107
4.2.2	Effets attendus de la diffraction	108
4.2.3	Effets de la traversée du condensat, rôle des interac- tions et de l'effet Zeeman quadratique	111
4.3	Un outil pour la propagation d'un laser : les matrices ABCD .	111
4.3.1	Rappel sur les matrices ABCD en optique photonique .	112
4.3.1.1	Matrices ABCD et optique géométrique . . .	112
4.3.1.2	Utilisation dans le cadre des faisceaux Gaus- siens	114
4.3.2	Adaptation à l'étude de la propagation d'un laser ato- mique	117
4.3.3	Quelques matrices ABCD utiles	123
4.3.3.1	Propagation Libre	123

4.3.3.2	Potentiel quadratique constant	124
4.3.3.3	Lentille mince	124
4.4	Analyse de la divergence d'un laser atomique	127
4.4.1	Séquence expérimentale	127
4.4.2	Processus d'analyse des données	128
4.4.3	Matrices ABCD et angle de divergence	129
4.4.4	Comparaison avec les données expérimentales	130
4.5	Conclusions et perspectives	132
5	Lasers mode-bloqués et interférences atomiques	135
5.1	Traitement 1D : modélisation	136
5.1.1	Un modèle simple du mode longitudinal d'un laser atomique	136
5.1.2	Quelques raffinements possibles du modèle	137
5.1.2.1	Prise en compte de l'effet Zeeman quadratique	137
5.1.2.2	Prise en compte de la coupure du champ magnétique avant la prise de l'image	138
5.1.2.3	Prise en compte des interactions	140
5.1.3	Addition de lasers quasi-continus : interférences	142
5.1.4	Approximations de Fresnel et de Fraunhofer	142
5.2	Les différents régimes expérimentaux mis en évidence	145
5.2.1	Cas d'un nuage condensé	146
5.2.2	Cas d'un nuage thermique	148
5.2.3	Modulation de fréquence / modulation d'amplitude	148
5.2.4	Effet des interactions	153
5.2.5	Recouvrement des paquets d'ondes : laser quasi-continu large bande	156
5.3	Structure transverses : traitement 3D	157
5.4	Conclusion et perspectives	159
	Conclusion	161
	A L'atome de Rubidium	163
	B Quelques calculs d'intégrales	165
	C Articles	169
	Bibliographie	189

Introduction

La condensation de Bose-Einstein

En 1924, en s'appuyant sur les travaux de Satyendranath Bose [1], Albert Einstein prédit que des bosons sans interactions, à haute densité et à très basse température, subissent une transition de phase [2, 3] : une fraction macroscopique des bosons vient s'accumuler dans un seul état quantique du système : c'est la condensation de Bose-Einstein.

Bien plus tard, les prédictions d'Einstein furent utilisées en physique de la matière condensée pour expliquer la superfluidité de l'hélium à très basse température (London 1937) et la supraconductivité (John Bardeen, Leon Cooper et John Schrieffer 1957). Ce phénomène pourrait également s'appliquer au comportement de la matière nucléaire au coeur des étoiles denses. Pendant longtemps, l'hélium superfluide et les supraconducteurs restèrent les seuls systèmes exploitables pour l'étude de la condensation de Bose-Einstein. On peut également signaler les travaux sur la condensation des excitons, dont l'interprétation reste sujette à discussions. Cependant, dans toutes ces situations, les interactions entre particules jouent un rôle considérable, qui complique considérablement la compréhension des phénomènes.

L'effet laser est quant à lui un peu différent, car il s'agit d'un phénomène hors de l'équilibre thermodynamique, créé par une inversion de population du milieu amplificateur. Il se rattache néanmoins par son principe même (grand nombre de photons dans le même état quantique) à la condensation de Bose-Einstein. Il est désormais très bien compris et maîtrisé, et l'avènement des lasers a été, au cours des quarante dernières années, à l'origine d'un renouveau spectaculaire de la science optique. Les deux principales caractéristiques du rayonnement laser qui sont utilisées dans les très nombreuses applications sont la cohérence du rayonnement et sa forte luminosité.

Pour ces raisons, les physiciens ont cherché à atteindre la condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'atomes dilués, où les interactions entre atomes s'avèrent suffisamment faibles pour être décrites par une théorie de champ moyen. À l'issue de 15 années de progrès en matière de techniques de piégeage et de refroidissement d'atomes, ce phénomène fut observé pour la première fois en 1995 [4, 5, 6, 7], 70 ans après la prédiction originelle d'Einstein. Cet achèvement expérimental fut récompensé par le prix Nobel 2001 décerné à

Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle et Carl E. Wieman « pour la réalisation de la condensation de Bose-Einstein dans des nuages gazeux d'atomes alcalins, ainsi que pour leurs études pionnières fondamentales sur les propriétés du condensat ».

Les lasers à atomes

Les atomes dans un condensat de Bose-Einstein en phase gazeuse constituent un analogue pour l'optique atomique à des photons piégés dans une cavité laser. Les condensats peuvent donc constituer des sources cohérentes et de grande luminance spectrique pour l'optique atomique, et l'on peut s'attendre à de forts bouleversement dans ce domaine analogues à ceux que l'introduction des lasers amena dans celui de l'optique photonique.

Afin d'utiliser cette source cohérente, on va vouloir extraire les atomes de la cavité où ils sont confinés, l'idéal étant de disposer (comme en optique des lasers) d'un flux continu et cohérent d'atomes condensés. Plusieurs solutions ont été et sont encore étudiées de par le monde. Nous avons, pour notre part, réalisé des lasers à atomes quasi-continus par couplage radio-fréquence et extraction gravitationnelle, dans le prolongement des travaux du groupe de Munich, pionnier en ce domaine.

Plusieurs études ont été menées, que nous rapportons dans ce mémoire. Nous nous sommes tout particulièrement intéressés aux propriétés de propagation des lasers à atomes ainsi produits, ainsi qu'à l'obtention de phénomènes d'interférences à partir de ceux-ci. Un point particulièrement important de ce travail est la mesure de la divergence d'un laser à atomes, et sa modélisation par une méthode de matrices ABCD. Cette dernière méthode constituant un analogue à celle utilisée pour l'étude de la propagation des lasers optiques.

Plan de la thèse

Le présent manuscrit se divise en cinq chapitres.

Le premier chapitre présente le phénomène de la condensation de Bose-Einstein. Dans la mesure du possible, il a été tenté d'amener ici un éclairage d'opticien sur ce phénomène, afin de montrer le parallèle fort qu'il existe entre les condensats de Bose et les champs électro-magnétiques de grande cohérence (tels que, en particulier, les rayonnements lasers) en optique. On poursuit ensuite par l'exposé des quelques éléments théoriques de base des condensats sur lesquels repose la compréhension des expériences décrites dans ce mémoire.

Dans le second chapitre, il est procédé à la description détaillée des deux dispositifs expérimentaux sur lesquels se sont déroulés les travaux de thèse. La plupart des résultats expérimentaux originaux obtenus au cours de ces trois années de thèse l'ont été sur le plus ancien des deux dispositifs. Ce dernier a d'ores et déjà été décrit en détail dans les thèses de mes prédécesseurs. Il a donc semblé logique de mettre plus particulièrement l'accent sur le plus récent des dispositifs expérimentaux, dont la conception et la construction ont été entamées durant la dernière année de mes études doctorales.

Le troisième chapitre s'attache à décrire théoriquement et expérimentalement les lasers à atomes. Les principes de fonctionnement des lasers atomiques quasi-continus à coupleur de sortie radio-fréquence et les propriétés qui en découlent sont présentés. Ces types de lasers constituent le point central des travaux de thèse rapportés ici. On se contente dans cette partie d'exposer les propriétés « longitudinales » de nos lasers, c'est-à-dire celles que l'on peut décrire, au moins qualitativement, dans l'approximation unidimensionnelle.

L'étude des propriétés transverses des lasers à atomes est, quand à elle, présentée dans le quatrième chapitre. Nous avons expérimentalement observé et mesuré les propriétés de divergence des faisceaux cohérents atomiques produits sur notre dispositif. Un modèle simple de la propagation d'un laser atomique dans le cadre de l'approximation paraxiale est présenté et utilisé avec succès pour interpréter les données obtenues. Celui-ci constitue un analogue à la théorie des matrices ABCD, habituelle en optique lorsque l'on veut décrire la propagation d'un faisceau laser de profil transverse gaussien.

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, nous présentons des résultats d'expériences préliminaires qui ont eut lieu dans notre laboratoire concernant l'obtention de phénomènes d'interférences entre différents lasers à atomes issus d'un même condensat. Les données obtenues sont interprétées qualitativement à l'aide d'un modèle simple, dont les principes de base se rapprochent de ceux de la théorie de l'optique de Fourier cohérente.

CHAPITRE 1

Le condensat de Bose-Einstein

Et je vis au dessus de ma tête un point noir.
Et ce point noir semblait une mouche dans l'ombre.

Victor Hugo¹

Le but de ce chapitre introductif préalable est d'exposer les notions fondamentales liées aux condensats de Bose-Einstein et, partant, aux lasers atomiques, qui constituent l'objet principal de ces travaux de thèse.

Le principe de la condensation de Bose-Einstein est largement discuté dans de nombreux livres de mécanique statistique, auquel le lecteur pourra aisément se référer pour une compréhension approfondie du phénomène. Ces références se basent en général sur un point de vue de thermodynamicien qui a l'avantage de permettre d'effectuer des calculs de façon efficace [9]. Nous essayons ici d'amener, essentiellement par le moyen d'une analogie avec les lasers optiques, une vision du phénomène basée sur la notion de cohérence, adaptée de la théorie des sources lumineuses en optique (sans chercher particulièrement la rigueur). Nous commençons donc par exposer quelques notions de base sur les concepts de cohérence en optique, en essayant de montrer le lien profond qu'il y a entre la notion « classique » de cohérence et la notion quantique de cellule élémentaire de l'espace des phases. Une fois ces quelques rappels effectués, nous transposons ces notions dans le cadre général d'un nuage d'atomes bosoniques piégés, ce qui nous amène à décrire le phénomène de condensation de Bose-Einstein.

Nous poursuivons par l'exposé de quelques éléments théoriques sur les condensats de Bose-Einstein (équation de Gross-Pitaevskii, régime de Thomas-Fermi,...) qui se révèlent utiles pour la compréhension des expériences décrites dans le présent manuscrit. Le lecteur désireux d'approfondir ces notions pourra se reporter à la littérature abondante existant sur le sujet, en particulier [9, 10, 11].

¹*in* « Dieu »[8]

1.1 La cohérence en optique

Le concept de cohérence, en physique en général et en optique en particulier, est intrinsèquement lié à la notion de *taille minimale* possible que peut avoir un système dans l'espace des phases. L'idée de base est que, si deux éléments *a priori distinct* d'un système (par exemple deux photons dans une cavité) se trouvent dans la même cellule élémentaire de l'espace des phases, ceux-ci se comporteront toujours de façon totalement indiscernable.

Nous développons ici les concepts liés à la cohérence d'un champ en optique ondulatoire pour finalement montrer le lien entre ces notions (« classiques ») et la notion (« quantique ») de cellule élémentaire de l'espace des phases. Nous négligeons dans toute la suite de l'exposé les effets de polarisation de la lumière, afin de simplifier les raisonnements (approximation scalaire).

1.1.1 Cohérence spatiale et temporelle : volume de cohérence

En optique ondulatoire, la lumière est décrite en terme de champ, que l'on considère ici scalaire. Soit une source (S), centrée autour d'un point O dans l'espace physique émettant un champ électro-magnétique (scalaire). On suppose que celui-ci a une fréquence centrée autour de $\bar{\nu}$ et de largeur $\Delta\nu$. Notons que chaque point de la source émet *a priori* de façon indépendante des autres. On ne fait donc aucune hypothèse sur la cohérence de la source.

Cohérence temporelle

En vertu du théorème de Wiener-Khintchine [12], le temps de cohérence de la source est $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$, et la *longueur de cohérence* $l \sim c\Delta t$ de cette source est donc :

$$l = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (1.1)$$

Cette longueur correspond, par exemple, à la différence de marche maximale entre les deux bras d'un interféromètre de Michelson au delà de laquelle on ne pourra plus voir de franges d'interférences.

Cohérence spatiale

On suppose momentanément que la source (de longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda} = c/\bar{\nu}$) est suffisamment monochromatique pour que toutes les différences de marches considérées soient petites devant la longueur de cohérence ². On

²Noter que, dans une source *parfaitement monochromatique* au sens strict, tous les points émettent avec une relation de phase constante, et la source est donc parfaitement

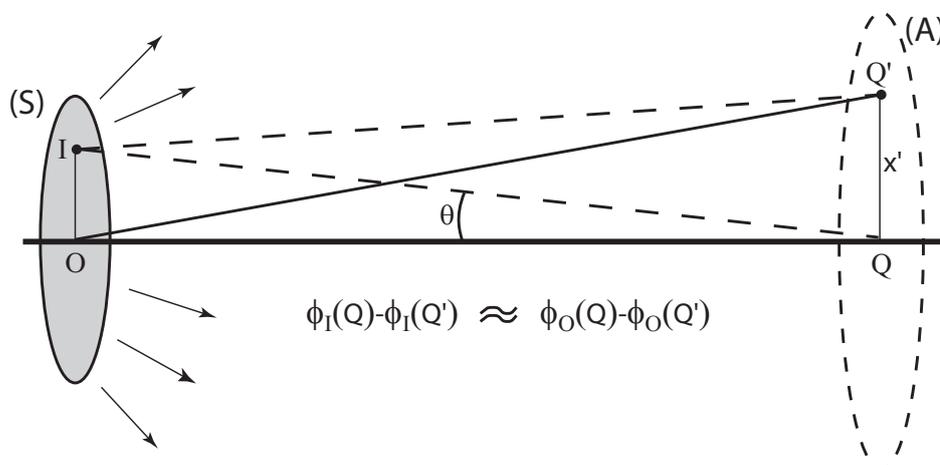


FIG. 1.1 – Définition de la surface de cohérence d'un champ créé par une source (S). Deux points Q et Q' sont cohérents si leur différence de phase est à peu près la même pour tous les points I de la source (S).

se place au voisinage d'un point Q de l'espace extérieur à la source, et suffisamment éloigné de celle-ci. Un point Q' , voisin de ce dernier sera dit en cohérence spatiale avec Q à la condition que l'ensemble des points I de la source (S) émettent des ondes qui arrivent en Q et en Q' avec des différences de phases voisines (voir figure 1.1). Plus précisément, puisque le déphasage le long d'un rayon de longueur L vaut $\phi = 2\pi L/\bar{\lambda}$, on doit avoir la condition :

$$\forall I \in (S), \quad (IQ - IQ') - (OQ - OQ') \lesssim \bar{\lambda} \quad (1.2)$$

Cette condition conduit immédiatement à la relation :

$$QQ' \lesssim \frac{\bar{\lambda}}{\theta} \quad (1.3)$$

où θ est l'angle entre I et O vu depuis le point Q . L'ensemble des points Q' en cohérence avec Q délimite une surface (A) appelée *surface de cohérence*. En généralisant à 2 dimensions la relation 1.3, on a alors l'expression de la surface de cohérence :

$$A = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Omega} \quad (1.4)$$

où Ω est l'angle solide sous lequel est vu la source (S) depuis le point Q .

Cette surface de cohérence correspond, par exemple, à la surface à l'intérieur de laquelle, si l'on place deux trous d'Young, on pourra observer des franges d'interférences sur un écran placé derrière les trous, en dépit du fait que tous les points de la source (S) émettent de façon mutuellement incohérente.

cohérente. On sort alors du cadre où nous nous sommes placés ici.

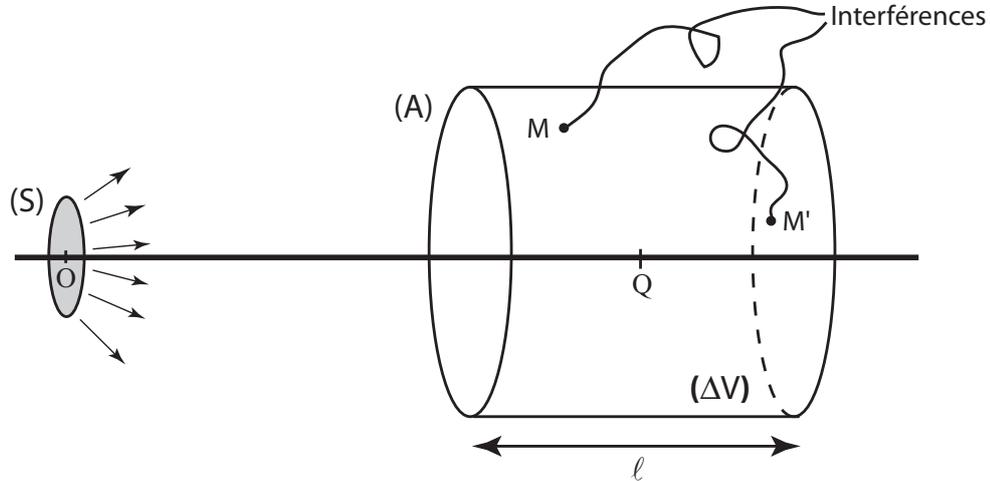


FIG. 1.2 – Le volume de cohérence est la combinaison de la surface de cohérence (cohérence spatiale) et de la longueur de cohérence (cohérence temporelle). On peut observer des phénomènes d'interférences entre les sorties de deux fibres optiques (de même longueur) venant prélever une partie du champ en deux points différents du volume de cohérence. Ces phénomènes d'interférences sont observables bien que la source (S) soit incohérente (mais de taille et d'étendue spectrale finies).

Volume de cohérence

Le *volume de cohérence* du champ au voisinage du point Q est le volume défini par la surface de cohérence extrudée le long de la longueur de cohérence. En utilisant 1.1 et 1.4, on obtient facilement l'expression du volume de cohérence du champ :

$$\Delta V = A \cdot l = \frac{c^3}{\bar{\nu}^2 \Delta \nu \Omega} \quad (1.5)$$

Si l'on imagine une expérience de pensée (voir figure 1.2) où deux fibres optiques monomodes *de même longueur* viennent prélever le champ en un point M et en un point M' de l'espace, le volume de cohérence va correspondre au volume à l'intérieur duquel les deux points M et M' doivent se trouver pour que, en combinant les sorties des deux fibres optiques, on puisse observer des phénomènes d'interférences³.

³La définition exacte de la cohérence d'un champ électromagnétique $U(x, y, z, t)$ (considéré comme scalaire) fait intervenir le coefficient de corrélation $\gamma_{\text{cohérence}} = \langle U(M) \cdot U^*(M') \rangle$ du champ entre un point M et un point M' . Le volume de cohérence correspondra alors, *stricto sensu* au volume à l'intérieur duquel deux points M et M' auront entre eux un coefficient de corrélation non nul.

1.1.2 Lien entre le volume de cohérence et la mécanique quantique

En termes corpusculaires, la lumière est interprétée comme composée de particules appelées photons. En mécanique quantique, on sait qu'il existe une limite fondamentale avec laquelle on peut mesurer simultanément la position et l'impulsion d'une particule. Les indéterminations en positions δx , δy , et δz , sont liées aux indéterminations en impulsions δp_x , δp_y , δp_z par la relation bien connue de Heisenberg :

$$\delta x \cdot \delta p_x \geq \hbar/2, \quad \delta y \cdot \delta p_y \geq \hbar/2, \quad \delta z \cdot \delta p_z \geq \hbar/2 \quad (1.6)$$

Il est alors assez naturel d'imaginer que l'espace des phases des photons soit divisé en cellules de dimensions⁴ :

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \alpha h^3 \quad (1.7)$$

où α est une constante de l'ordre de l'unité que nous allons déterminer. Puisque l'on néglige les effets de polarisation de la lumière, plusieurs photons faisant partie de la même cellule de l'espace des phases seront donc intrinsèquement indiscernables.

Évaluons le produit $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ pour un photon détecté en un point Q de l'espace suffisamment loin de la source (S). Les incertitudes Δp_x et Δp_y proviennent essentiellement du fait que l'on ne sait pas depuis quel point de la source le photon a été émis. En utilisant l'expression $\vec{p} = h\nu/c \cdot \vec{s}$, où \vec{s} est un vecteur unitaire caractérisant la direction de propagation du photon, il vient donc :

$$\Delta p_x \Delta p_y = \frac{h^2 \bar{\nu}^2}{c^2} \Omega \quad (1.8)$$

L'incertitude Δp_z provient, quand à elle, essentiellement de l'incertitude sur la fréquence de la source $\Delta\nu$. On obtient donc, toujours en utilisant $p_z = h\nu/c$:

$$\Delta p_z = \frac{h}{c} \Delta\nu \quad (1.9)$$

ce qui permet d'exprimer le produit $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$, et donc le volume *physique* $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\alpha h^3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} = \alpha \frac{c^3}{\bar{\nu}^2 \Delta\nu \Omega} \quad (1.10)$$

⁴voir à ce propos la référence [13]. Le passage de l'utilisation de la constante \hbar dans 1.6 à h dans 1.7 correspond au fait que la relation de Heisenberg relie les valeurs quadratiques moyennes des indéterminations en position et en impulsion. Pour la cellule de l'espace des phases, on utilise plutôt les largeurs « totales », plus grandes que les valeurs quadratiques moyennes

On retrouve alors l'expression classique du volume de cohérence à condition de prendre la constante α égale à 1. Le volume de cohérence introduit précédemment pour le champ lumineux classique se trouve donc correspondre parfaitement au volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ de l'espace physique obtenu à partir de l'expression 1.7, où le produit $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ est imposé par les propriétés physiques et spectrales de la source lumineuse [14], et la constante α est prise égale à l'unité. Autrement dit, *le volume de cohérence du champ classique est la région de l'espace où les photons (quantiques) composant le champ (classique) sont intrinsèquement indiscernables les uns des autres*. Cette propriété remarquable permet de faire le lien entre le concept de cohérence au sens classique et le concept quantique d'indiscernabilité, lié à la taille d'une cellule minimale dans l'espace des phases.

Il est à noter que le lien entre les deux notions apparaît clairement lorsque l'on considère la correspondance qui existe, entre les concepts ondulatoires de pulsation ω et de vecteur d'onde k , et les concepts corpusculaires d'énergie E et d'impulsion \vec{p} associés aux particules qui composent le champ. La correspondance est introduite par la mécanique quantique à l'aide de la constante de Planck h . Le volume de cohérence du champ correspond alors au *paquet d'onde minimal* émit par la source (S).

1.1.3 Cohérence et expériences d'interférence : paramètre de dégénérescence

Expérimentalement, pour observer facilement des phénomènes d'interférences, choisir les deux points sources M et M' à l'intérieur d'un même volume de cohérence dans l'expérience de pensée précédente ne suffit pas. Il faut également que l'énergie disponible dans ce volume soit suffisamment importante pour permettre d'activer le détecteur de lumière qui sert à observer le phénomène d'interférence. Si l'énergie disponible est très faible, il sera nécessaire d'intégrer pendant un temps long, ce qui implique de fortes difficultés expérimentales (stabilité, rapport signal à bruit, etc.).

S'il est difficile ou impossible d'augmenter les temps d'intégrations il faut donc essayer d'augmenter l'énergie disponible. En termes corpusculaires, cela correspond à disposer d'un grand nombre de photons dans le volume de cohérence. Le nombre moyen de photons dans un volume de cohérence (ou, ce qui est équivalent, le nombre moyen de photons par cellule élémentaire de l'espace des phases), s'appelle le *paramètre de dégénérescence* [15] du champ. Si ce paramètre est grand devant 1, il devient même possible d'observer des phénomènes d'interférences avec un temps d'intégration tendant vers 0. Le rayonnement lumineux possède alors une très grande cohérence. Un paramètre de dégénérescence élevé facilite également l'étude des corrélations d'ordres supérieurs du champ électromagnétique.

Dans un laser monomode, par exemple, objet cohérent par excellence, la quasi-totalité des photons présents dans la cavité se trouvent dans le même mode. Pour un laser Helium-Neon monomode de 1 mW, émettant un faisceau de 1 mm^2 , le paramètre de dégénérescence δ est de l'ordre de $3 \cdot 10^9$. Par opposition, la lumière naturelle émise par un corps noir à 3000 K présente un paramètre de dégénérescence de l'ordre de $3 \cdot 10^{-4}$ dans le domaine visible [16]. De même, pour des sources à vapeurs atomiques basses pressions de laboratoires usuelles, δ dépasse difficilement 10^{-2} [15].

1.1.4 Remarques sur la cohérence en cavité

Les notions précédentes ont été développées dans le cadre de l'optique paraxiale, ce qui permet de séparer les notions de cohérence temporelle et spatiale. Quand on sort de ce cadre (rayonnement thermique isotrope par exemple), les cohérences spatiales et temporelles ne sont plus indépendantes.

Les notions de cellules élémentaires de l'espace des phases et de paramètre de dégénérescence sont cependant aisées à comprendre dans le cas idéal du champ électro-magnétique confiné dans une cavité de dimensions finies. Puisque l'on ne tient pas compte de la polarisation des champs électro-magnétiques, l'espace des phases du champ se ramène à un espace à trois dimensions, où la donnée d'un ensemble (pondéré) de vecteurs d'ondes k_x , k_y , et k_z selon les trois directions de l'espace suffit à caractériser entièrement le champ dans la cavité. Puisque l'on impose au champ d'être confiné dans une boîte parallélépipédique de dimensions L_x , L_y et L_z , la condition d'annulation sur les parois impose les conditions de quantification habituelles sur les vecteurs d'ondes :

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i} \text{ avec } i \in \{x, y, z\} \text{ et } n_i \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

Les états $\{k_x, k_y, k_z\}$ possibles du champ forment donc un réseau discret de périodicités $2\pi/L_i$ selon les trois directions de l'espace. Chaque mode du champ est donc inscrit dans un petit volume $2\pi/L_x \times 2\pi/L_y \times 2\pi/L_z$: c'est la cellule élémentaire de l'espace des phases pour le champ électro-magnétique.

Si l'on décrit la lumière en termes corpusculaires, c'est à dire que l'on quantifie le champ électro-magnétique, l'énergie totale du champ devient quantifiée. Les quantas d'énergie, ou photons, se répartissent alors sur les différents modes $\{k_x, k_y, k_z\}$ de façon discrète. Si plusieurs photons se trouvent dans le même mode, ceux-ci sont alors totalement indiscernables, et se comportent de manière toujours identique : la cohérence apparaît. Le nombre moyen de photons par mode est le paramètre de dégénérescence, également appelé densité réduite dans l'espace des phases.

Volume de cohérence dans une cavité

Considérons que le rayonnement dans la cavité est centré autour de la fréquence $\bar{\nu}$ avec une largeur de raie $\Delta\nu$. On peut alors exprimer, comme on l'a fait pour l'optique paraxiale, le volume de cohérence du champ en se basant sur le volume élémentaire de l'espace des phases. Utilisant la règle de quantification 1.11 et ne tenant toujours aucun compte de la polarisation, on trouve facilement que le nombre de modes de fréquence $\nu = kc/2\pi = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \cdot c/2\pi$ comprise dans un intervalle de largeur $\Delta\nu$ autour de la fréquence $\bar{\nu}$ est :

$$N(\bar{\nu}, \Delta\nu) = \frac{4\pi k^2 dk}{2\pi/L_x \cdot 2\pi/L_y \cdot 2\pi/L_z} \quad (1.12)$$

$$= \frac{4\pi\bar{\nu}^2 \Delta\nu}{c^3} \cdot L_x L_y L_z \quad (1.13)$$

La densité volumique de modes dans la cavité ρ est donc égale à $4\pi\bar{\nu}^2 \Delta\nu / c^3$.

Soit alors un paquet d'onde à l'intérieur de la cavité, caractérisé par son volume $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$. Ce paquet d'onde sera minimal à la condition que $\rho \cdot \Delta V = 1$, soit :

$$\Delta V = \frac{c^3}{4\pi\bar{\nu}^2 \Delta\nu} \quad (1.14)$$

Deux photons *détectés* à l'intérieur de ce petit volume ΔV seront alors indiscernables (c'est à dire cohérents) : ΔV est le volume de cohérence du rayonnement à l'intérieur de la cavité. Notons que, si le rayonnement est suffisamment monochromatique ($\Delta\nu$ inférieur à l'écart entre deux modes consécutifs du champ), le volume de cohérence ΔV correspond alors au volume entier de la cavité (cas d'un laser monomode par exemple).

On retrouve bien une expression équivalente à ce que l'on avait obtenu précédemment, à condition de considérer que les parois de la cavité constituent la source du rayonnement de fréquence moyenne $\bar{\nu}$. Celles-ci sont en effet vues depuis l'intérieur de la cavité selon un angle solide de 4π stéradians.

1.2 Cohérence d'un gaz d'atomes

Guidé par l'analogie avec l'optique, on peut également chercher à définir un volume de cohérence ΔV dans le cas d'un nuage d'atomes bosoniques en équilibre thermodynamique à température T .

La différence principale entre les raisonnements optiques et atomiques est d'origine historique. La lumière est considérée classiquement comme un champ. On a vu dans le paragraphe précédent comment on pouvait définir

pour ce champ un volume de cohérence ΔV par des considérations d'optique ondulatoire. L'introduction de la mécanique quantique permet (par la quantification du champ) de considérer la lumière de manière corpusculaire. Elle est alors composée de particules appelées photons. On a montré en 1.1.2 comment le concept de volume de cohérence se rattachait alors naturellement à celui de cellule élémentaire de l'espace des phases des photons.

Inversement, la matière est considérée, classiquement, comme composée de particules (les atomes). Après quelques considérations préalables sur la distribution en impulsion dans un gaz d'atomes à l'équilibre thermodynamique, nous allons, de manière analogue à 1.1.2, introduire l'équivalent du volume de cohérence pour la matière⁵ à l'aide de la mécanique quantique.

1.2.1 Largeur de la distribution en impulsions des atomes

Pour un gaz d'atomes identiques, de masses m et bosoniques, en équilibre thermodynamique à température T , la largeur de la distribution en énergie est de l'ordre de quelques $k_B T$.

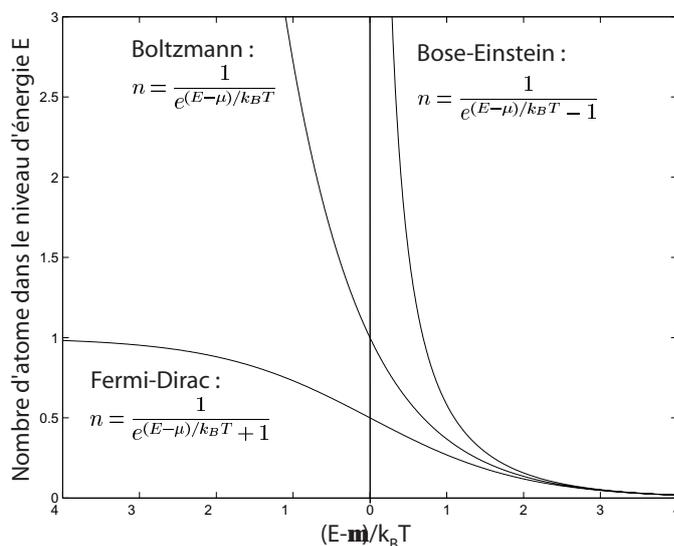


FIG. 1.3 – Comparaison des statistiques de Bose, Fermi, et Boltzmann pour un ensemble de N particules. Le nombre n est la population des états d'énergie E , et μ est le potentiel chimique. A hautes températures μ est grand en valeurs négatives, et les trois distributions tendent vers la même limite classique.

⁵Il est à noter que l'introduction de la théorie quantique des champs permet, de manière totalement analogue à l'optique, de considérer directement la matière (i.e. le gaz d'atomes froids ici) comme un champ, qu'il s'agit de quantifier pour faire apparaître la notion de particules (c'est à dire d'atomes ici).

Pour une distribution de Boltzmann (valable en principe pour des particules *discernables*), le pourcentage d'atomes d'énergie supérieure à $\eta k_B T$ est :

$$\frac{\int_{\eta k_B T}^{\infty} e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/k_B T} dE} = e^{-\eta} \quad (1.15)$$

soit environ 2 % pour $\eta \sim 4$. Pour une valeur η de cet ordre, $\eta k_B T$ correspond donc à la largeur caractéristique de la distribution en énergie.

Pour une statistique de Bose (qui s'applique dans notre cas, où l'on considère un gaz de *bosons indiscernables*) à basse température, on sait que les états de basses énergies vont avoir tendance à être plus peuplés que pour une statistique de Boltzmann (comme on peut le voir sur la figure 1.3)⁶.

Par conséquent, dans notre cas, les états d'impulsion accessibles pour une particule sont compris entre 0 et une valeur maximale déterminée par :

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \lesssim \eta k_B T \quad (1.16)$$

Si l'on suppose une répartition égale de l'énergie cinétique entre les différentes directions de l'espace, on a donc :

$$\forall i \in \{x, y, z\}, \quad 0 \leq |p_i| \lesssim \sqrt{\frac{2m\eta k_B T}{3}} \quad (1.17)$$

où η est de l'ordre de 4. Partant de ces considérations statistiques, on peut définir un volume de cohérence pour le gaz d'atomes en procédant de manière analogue à 1.1.2.

1.2.2 Volume de cohérence pour la matière

Comme vu dans le cas de l'optique, une cellule élémentaire de l'espace des phases sera considérée comme ayant un volume $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$.

Évaluons à présent le produit $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ pour un atome détecté en un point Q de l'espace⁷. Les incertitudes sur les impulsions proviennent ici du

⁶Pour une statistique de Fermi, au contraire, à très basses températures, les états de basses énergies sont moins peuplés que pour une statistique de Boltzmann (du fait du principe d'exclusion de Pauli, qui interdit pour les fermions d'avoir plus d'une particule par état quantique). À température suffisamment basse, on ne peut donc plus considérer que la largeur caractéristique de la distribution d'énergies est $\eta k_B T$ avec η de l'ordre de 4.

⁷On suppose que la connaissance de la position du point Q n'apporte aucune restriction sur la distribution de vitesses au voisinage de celui-ci. Ceci n'est vrai rigoureusement que pour un gaz de Boltzons, et devient faux pour des bosons au voisinage de la dégénérescence (sauf dans un piège en forme de boîte).

fait que l'on ne sait pas à quelle partie de la distribution de vitesse appartenait l'atome détecté. La largeur de la distribution des vitesses donnée par la relation 1.17 donne donc :

$$\forall i \in \{x, y, z\}, \quad \Delta p_i \simeq \sqrt{\frac{2m\eta k_B T}{3}} \quad (1.18)$$

Définissant l'indétermination sur le volume ΔV par :

$$\Delta V = \frac{h^3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} \quad (1.19)$$

on obtient immédiatement :

$$\Delta V = \frac{h^3}{\sqrt{\frac{2m\eta k_B T}{3}}^3} \triangleq \Lambda_\eta^3 \quad (1.20)$$

où Λ_η est homogène à une longueur. On appelle cette quantité la longueur de cohérence du système. Celle-ci est ici définie à la donnée du paramètre η près. Si l'on prend $\eta = 4\pi/3 \simeq 4$ (on a vu que pour une valeur de cet ordre, $\eta k_B T$ correspondait à la largeur de la distribution en énergie), on retrouve alors pour Λ_η la longueur d'onde de de Broglie thermique habituelle :

$$\Lambda_{4\pi/3} = \Lambda_{\text{dBTh}} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T} \quad (1.21)$$

Le volume élémentaire ΔV représente le volume de cohérence du nuage d'atomes. Par analogie avec les sources de photons en optique, il est lié à la possibilité d'observer des interférences en combinant les « champs de matière » de deux points contenus dans ce volume (analogie avec la figure 1.2). Il est à noter que des expériences assez semblables à l'expérience de pensée de la figure 1.2 ont d'ores et déjà été réalisées avec des atomes (voir la référence [17]).

1.2.3 Paramètre de dégénérescence et condensation de Bose-Einstein

Tout comme un champ laser se caractérisait par un grand nombre de photons dans un même volume de cohérence, la condensation de Bose-Einstein se caractérisera par un grand nombre d'atomes dans un même volume de cohérence, ou, ce qui est équivalent, par un grand nombre d'atomes par cellule de l'espace des phases.

Lorsque la taille du volume de cohérence augmente (quand on abaisse la température), deux étapes vont avoir une importance cruciale. Si ΔV devient assez grand pour englober plusieurs particules du nuage ($n\Delta V \gtrsim 1$), avec n

la densité spatiale), des effets de cohérences vont pouvoir apparaître. En pratique, les particules commencent à s'accumuler toutes dans le même état quantique : c'est le phénomène de condensation de Bose-Einstein, équivalent à ce qui se passe en optique pour un laser au voisinage du seuil (accumulation de photons dans le mode du laser). Remarquons que les expressions 1.21 et 1.20, valables pour des particules obéissant à une statistique de Boltzmann, perdent alors de leurs sens. Pour un gaz de bosons proche de la dégénérescence, quand on abaisse la température, le volume et la longueur de cohérence augmentent beaucoup plus vite que pour un gaz de boltzons.

Si l'on continue à augmenter ΔV celui-ci va devenir aussi grand que le nuage lui-même : c'est ce que l'on appelle un condensat pur, pour lequel tous les atomes sont « cohérents entre eux », c'est à dire dans la même cellule de l'espace des phases. Cette limite ne s'obtient rigoureusement qu'à température nulle⁸. Cependant, le fait que la distribution de Bose présente une asymptote au voisinage de l'origine (figure 1.3) permet d'en obtenir une excellente approximation même à température finie. Il s'agit alors de l'équivalent d'un laser très au dessus du seuil, où le phénomène de saturation donne une limite au nombre maximum de photons dans le mode du laser.

Le paramètre $n\Lambda_{dB_{Th}}^3$ est le paramètre de dégénérescence. On peut montrer [9] que le seuil de condensation se produit exactement pour $n\Lambda_{dB_{Th}}^3 = 2,612$. Pour un nuage dans un potentiel harmonique, soit n_0 la densité au centre du piège. Comme le potentiel est minimal au centre du piège, la densité spatiale y est maximale. Le phénomène de condensation commence donc à se produire au centre lorsqu'on a atteint le fameux critère

$$n_0\Lambda_{dB_{Th}}^3 = 2,612 \quad (1.22)$$

La valeur $n_0\Lambda_{dB_{Th}}^3$ est également appelée densité dans l'espace des phases réduite, car elle correspond au nombre moyen de particules dans une cellule élémentaire de l'espace des phases. Un condensat de Bose-Einstein possède donc des similarités avec les lasers optiques car dans les deux cas, on observe une accumulation macroscopique de particules (photons ou atomes) dans la même cellule élémentaire de l'espace des phases.

1.3 Moyens de description théoriques

Les condensats de Bose-Einstein, ainsi que les objets qui en sont issus (lasers à atomes en particulier) sont des objets à plusieurs particules en inter-

⁸En réalité, du fait des interactions entre atomes, même à température rigoureusement nulle, les effets dits de déplétion quantique vont empêcher les atomes d'être strictement tous dans la même cellule de l'espace des phases.

actions. La description exacte de tels systèmes en termes quantiques⁹ devient très rapidement inextricable dès que le nombre de particules dépasse quelques unes (deux particules est, en pratique, un maximum au delà duquel il devient nécessaire de procéder à des approximations). L'utilisation des condensats de Bose permet de ramener le problème, sous certaines approximations, à un problème quantique à une seule particule, beaucoup plus facile à traiter. C'est ce type de traitement que nous allons maintenant présenter. Nous nous contentons ici de reprendre succinctement les idées générales de la référence [18] auquel on pourra se reporter pour de plus amples précisions.

1.3.1 Équation de Schrödinger d'un ensemble de particules en interactions

Soit la fonction d'onde symétrique $\Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ d'un ensemble de N particules bosoniques identiques en interaction (potentiel d'interaction binaire V), soumis à un potentiel extérieur $V_{\text{ext}}(\vec{r})$. L'équation de Schrödinger vérifiée par ce système est :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \Delta_i \Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \\ &+ \sum_{i=1}^N V_{\text{ext}}(\vec{r}_i, t) \Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le premier terme du hamiltonien correspond aux énergies cinétiques des particules. Le deuxième terme est lié à leurs énergies potentielles, dues au potentiel de piégeage V_{ext} . Le troisième et dernier terme est dû aux interactions qu'elles ont entre elles.

1.3.2 Approximation de Hartree-Fock

Dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein, à température suffisamment basse, on considère que l'ensemble des atomes se trouve dans une même fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$, qu'il est commode de normaliser à $\langle \Psi | \Psi \rangle = N$ (approximation de Hartree-Fock)¹⁰. On a alors, à un facteur de normalisation près :

⁹ou même en termes classiques d'ailleurs

¹⁰En procédant par analogie avec l'optique, la fonction d'onde à plusieurs particules Ψ est l'équivalente du champ électromagnétique (dans l'approximation scalaire) de l'optique ondulatoire.

$$\Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \Psi(\vec{r}_1, t)\Psi(\vec{r}_2, t) \cdots \Psi(\vec{r}_N, t) \quad (1.24)$$

On peut alors montrer (voir [18]), en utilisant le principe de moindre action, que la fonction d'onde Ψ doit vérifier l'équation :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) \\ &+ V_{\text{ext}}(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) \\ &+ \frac{N-1}{N} \left[\int d^3\vec{r}' V(\vec{r} - \vec{r}') |\Psi(\vec{r}', t)|^2 . d\vec{r}' \right] \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Cette équation décrit le mouvement de chaque particule dans le potentiel dû au potentiel extérieur et au *champ moyen* créé par les $(N-1)$ autres.

1.3.3 Équation de Gross-Pitaevskii

Le potentiel d'interaction réel V entre deux atomes est assez complexe. Pour de faibles énergies d'interactions, la diffusion lors de la collision entre deux particules se fait uniquement dans l'onde s , et une solution simple et élégante consiste à remplacer le véritable potentiel d'interaction par un pseudo-potentiel qui en reproduit les propriétés de diffusion à basse énergie. La forme la plus simple a été introduite par Enrico Fermi [19] et consiste à prendre :

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = g\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.26)$$

où a est la longueur de diffusion¹¹. En utilisant cette expression du potentiel d'interaction, et en faisant l'approximation $(N-1) \simeq N$ pour N grand, on obtient alors l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.27)$$

L'effet de champ moyen créé par les interactions entre les particules est alors simplement proportionnel à la densité locale de particules $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$. On peut voir l'équation de Gross-Pitaevskii comme une équation de Schrödinger possédant un terme non linéaire, celui-ci provenant des effets des interactions entre les atomes. Remarquons que l'étude de l'équation de Gross-Pitaevskii se rapproche alors de l'optique non linéaire, où les équations de Schrödinger non linéaires sont introduites formellement depuis longtemps [20] dans l'étude des solitons optiques.

¹¹Le véritable pseudo-potentiel qu'il convient en réalité de prendre est l'opérateur défini par $V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = g\delta(\vec{r} - \vec{r}')\partial_r[r.\Psi(\vec{r})]$. L'opérateur de régularisation permettant de s'affranchir de divergences inopportunes aux grandes énergies collisionelles. Dans le cadre qui nous préoccupe cependant, le pseudo-potentiel donné permet d'arriver simplement à un résultat juste.

1.3.4 Les approximations à l'équation de Gross-Pitaevskii

1.3.4.1 Équation sans interactions : équation de Schrödinger

Dans le cas où le nuage condensé est suffisamment dilué pour que l'on puisse négliger, dans l'équation de Gross-Pitaevskii, le dernier terme (terme non linéaire dû aux interactions atomiques), on retrouve pour Ψ une équation de Schrödinger standard.

En mécanique quantique « traditionnelle », un système est décrit par une fonction d'onde à une seule particule, obéissant à une équation de Schrödinger. La réalisation d'une *mesure* effectue alors la projection du paquet d'onde sur l'état quantique effectivement mesuré. Si l'on veut réellement connaître le paquet d'onde (ou tout au moins sa norme) avant la mesure, il faut répéter l'expérience un grand nombre de fois, et effectuer des statistiques sur les résultats obtenus. Le sens physique de la fonction d'onde est une simple *probabilité de présence* de la particule.

Dans notre cas, par contre, une différence importante apparaît : la fonction d'onde Ψ décrit ici *plusieurs particules en même temps*, avec *a priori* un grand nombre de particules. Une conséquence très intéressante expérimentalement est que, si l'on effectue une *mesure* du système, on a accès en *une seule réalisation expérimentale* à l'ensemble de la fonction d'onde Ψ (à tout le moins sa norme). Précisons que l'on entend ici le terme de « mesure du système » non pas comme la détection d'une particule unique (comme on le faisait précédemment), mais comme la détection de *toutes* les particules qui composent la fonction d'onde macroscopique.

Ici, le sens physique de la fonction d'onde est donc assez différent du cas précédent à une seule particule : elle représente directement la *densité atomique*, quantité immédiatement mesurable. Si l'on est intéressé par la connaissance de la fonction d'onde, on voit bien l'avantage considérable que cela peut représenter d'un point de vue expérimental puisque une seule réalisation expérimentale est nécessaire (gain de temps, moins de nécessité de stabilité, etc.)

1.3.4.2 Équation sans terme d'énergie cinétique, régime de Thomas-Fermi

Dans le cas où le potentiel de piégeage $V_{\text{ext}}(\vec{r})$ ne varie pas dans le temps, on écrit l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps :

$$E_{\text{CBE}} \cdot \Psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) + g |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.28)$$

Dans le régime de forte densité atomique, plus exactement pour $Na/\sigma \gg 1$ où σ est l'extension spatiale du condensat, on peut négliger le terme ci-

nétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii (terme dit de « pression quantique »). Il s'agit de l'approximation de Thomas-Fermi. Elle conduit à :

$$E_{\text{CBE}} \cdot \Psi_{\text{TF}}(\vec{r}) = V_{\text{ext}}(\vec{r}) \Psi_{\text{TF}}(\vec{r}) + g |\Psi_{\text{TF}}(\vec{r})|^2 \Psi_{\text{TF}}(\vec{r}) \quad (1.29)$$

En utilisant la fonction de Bose $n(E) = N / (\exp[(E - \mu) / k_B T] - 1)$ donnant le nombre d'atomes $n(E)$ dans l'état d'énergie E , et en disant que presque tous les atomes sont dans la fonction d'onde du condensat (d'énergie E_{CBE}), on se convainc facilement que $E_{\text{CBE}} = \mu$. L'énergie du condensat de Bose correspond donc à son potentiel chimique μ .

On obtient finalement, dans le régime de Thomas-Fermi :

$$\Psi_{\text{TF}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})}{g}} \quad (1.30)$$

et la fonction d'onde Ψ du condensat dans un piège statique s'écrit donc :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_{\text{TF}}(\vec{r}) \cdot e^{-i\mu t/\hbar} \quad (1.31)$$

1.3.4.3 Fonction d'onde de Thomas-Fermi dans un potentiel harmonique

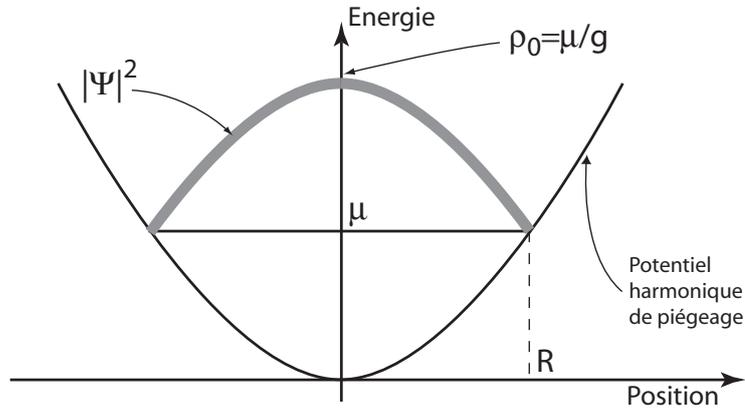


FIG. 1.4 – Fonction d'onde de Thomas-Fermi dans un potentiel de piégeage harmonique. La densité spatiale a une forme de parabole inversée, caractérisée par les rayons de Thomas Fermi R et la densité au centre du piège ρ_0 .

Expérimentalement, les condensats de Bose-Einstein s'obtiennent généralement dans des potentiels de piégeage harmoniques. Pour ce type de pièges, on écrit donc :

$$V_{\text{ext}}(x, y, z) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (1.32)$$

où les ω_i sont les fréquences d'oscillations du piège (il s'agit en fait des *pulsations* d'oscillations, mais on utilisera abusivement et sauf indication contraire le terme fréquence d'oscillations pour ces quantités dans la suite du mémoire). En utilisant le fait que la fonction d'onde de Thomas-Fermi est normalisée à N , on a :

$$\int |\Psi_{\text{TF}}(\vec{r})|^2 d\vec{r} = N \quad (1.33)$$

Insérant les expressions 1.30 et 1.32, on tire la valeur du potentiel chimique :

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na}{\bar{\sigma}} \right)^{2/5} \quad (1.34)$$

où $\bar{\sigma} = (\hbar/m\bar{\omega})^{1/2}$, et $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x\omega_y\omega_z}$.

La norme de la fonction d'onde de Thomas-Fermi (i.e. la densité atomique) dans un potentiel harmonique a une forme de parabole inversée. On l'écrit sous la forme :

$$|\Psi_{\text{TF}}(x, y, z)|^2 = \rho_0 \cdot \max \left[0; 1 - \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z}{R_z} \right)^2 \right] \quad (1.35)$$

avec ρ_0 la densité atomique au centre du piège, et R_i les rayons de Thomas-Fermi dans les trois directions de l'espace (voir figure 1.4) :

$$\rho_0 = \mu/g \quad (1.36)$$

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_x^2}} \quad (1.37)$$

1.3.5 Remarque sur les conventions de normalisations

Il est à noter que l'on peut également choisir de normaliser la fonction d'onde à plusieurs particules à $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Ceci présente l'avantage que $\Psi(\vec{r}, t)$ est directement égal à la fonction d'onde à une particule d'un atome du gaz. L'inconvénient en est que $|\Psi|^2$ ne représente plus directement la densité atomique. Avec cette convention, l'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit :

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) + gN|\Psi(\vec{r}, t)|^2\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.38)$$

et la fonction d'onde de Thomas-Fermi est égale à :

$$\Psi_{\text{TF}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})}{gN}} \quad (1.39)$$

De l'atome chaud à la fonction d'onde macroscopique : deux générations de dispositifs pour la condensation Bose-Einstein

Il n'abusera pas de la lumière des lampes,
il abusera plutôt de la nuit.

H. Michaux¹

Ce chapitre, s'attache à la description des deux dispositifs expérimentaux sur lesquels s'est effectué le travail de thèse.

Le plus ancien des deux dispositifs a été largement décrit et discuté ailleurs [22, 23, 24, 25, 26]. C'est sur celui-ci que j'ai passé la première partie de mon travail doctoral, et sur lequel la plupart des résultats expérimentaux présentés dans les chapitres suivants a été obtenus. Le second dispositif, dont la conception, la réalisation et la mise en place ont occupé une bonne partie de cette dernière année est assez analogue au premier dans ses principes généraux. Il présente cependant certaines différences notables qu'il m'a semblé utile de préciser ici. C'est donc essentiellement sur les nouveautés apportées par le second dispositif que l'accent sera mis.

La plupart des modifications apportées par rapport au dispositif expérimental original ont été motivées par des soucis de gain en simplicité, en stabilité, et surtout en compacité. Par ailleurs, l'un des objectifs du nouveau dispositif est la réalisation d'une pince optique pour transférer les atomes condensés dans une « chambre de science » versatile. La géométrie du système se devait donc d'être adaptée à cet objectif. Ces considérations expliquent en partie les quelques modifications que nous avons apportées entre les deux générations de dispositifs expérimentaux.

¹*in* « Un barbare en Asie »[21]

2.1 Un aperçu du chemin à parcourir

Le fait que la condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'atomes piégés n'ait pas été observée avant 1995 est dû à la très grande distance qui sépare la matière « normale » du régime de dégénérescence quantique. En effet, une vapeur de Rubidium en équilibre thermodynamique avec une phase liquide à une température de 130 °C a une densité d'environ $2 \times 10^{13} \text{ at.cm}^{-3}$ [27]. Le paramètre de dégénérescence correspondant est de 10^{-14} . On est donc à 14 ordres de grandeurs de la condensation² !

Les techniques de refroidissement laser, dont on trouvera un historique détaillé dans [28, 29, 30], permettent fort heureusement de gagner énormément en densité dans l'espace des phases. Un gaz de Rubidium piégé dans un piège magnéto-optique (PMO) peut atteindre des nombres d'atomes jusqu'à quelques 10^{10} dans quelques millimètres cubes, à des températures de l'ordre de quelques dizaines de micro Kelvin, soit un paramètre de dégénérescence de l'ordre de 10^{-5} . Malheureusement, si il est possible de descendre encore en température par des mécanismes plus complexes que le simple piège magnéto-optique (Mélasses Sysiphe, VSCPT,...), les exigences de densités spatiales sont, en pratique, contradictoires avec les températures extrêmement basses. Les meilleurs paramètres de dégénérescence obtenus à l'heure actuelle pour des refroidissement laser *sans évaporation* restent de l'ordre de 1/10 [31].

Le bond final dans l'espace des phases est obtenu par technique de refroidissement évaporatif dans un piège. Le principe consiste à supprimer les atomes de vitesses les plus élevées. Les atomes restant vont alors thermaliser à une température plus faible que la température précédente, cela au prix d'une perte d'atomes. Sous certaines conditions, le résultat net de l'opération est un accroissement du paramètre de dégénérescence. On peut ainsi obtenir en fin d'évaporation des condensats de, en pratique, quelques milliers à quelques millions d'atomes (selon l'espèce atomique choisie).

La technique de prérefroidissement laser que nous avons employée consiste à partir d'un jet de ^{87}Rb gazeux à 130 °C environ. Les atomes de ce jet sont alors ralentis et refroidis par technique de refroidissement Zeeman, afin de charger un PMO de quelques 10^9 atomes. Quelques techniques de refroidissement laser avancées (« Dark SPOT », mélasse optique) permettent alors de gagner quelque peu en densité et en température avant de charger un piège

²On notera pour mémoire que, pour un *solide cristallin* de Rubidium, la densité est de l'ordre de $10^{22} \text{ at.cm}^{-3}$. Il semblerait donc *a priori* que la phase solide soit un bien meilleur candidat comme point de départ de la condensation que la phase gazeuse. Cependant, dans un solide, les interactions empêchent tout recouvrement des fonctions d'ondes atomiques, et la longueur d'onde de de Broglie reste de l'ordre de grandeur de la maille cristalline (quelques Å) à toutes températures. En fait, la notion de fonction d'onde atomique perd beaucoup de son sens dans un solide, où il convient de traiter séparément le comportement des noyaux et des électrons (approximation de Born-Oppenheimer non valable).

magnétique. Un refroidissement évaporatif radio fréquence permet alors de condenser environ 5×10^5 atomes au bout de quelques dizaines de secondes de processus complet.

La figure 2.1 montre un diagramme du cheminement dans l'espace des phases obtenu au cours de notre processus.

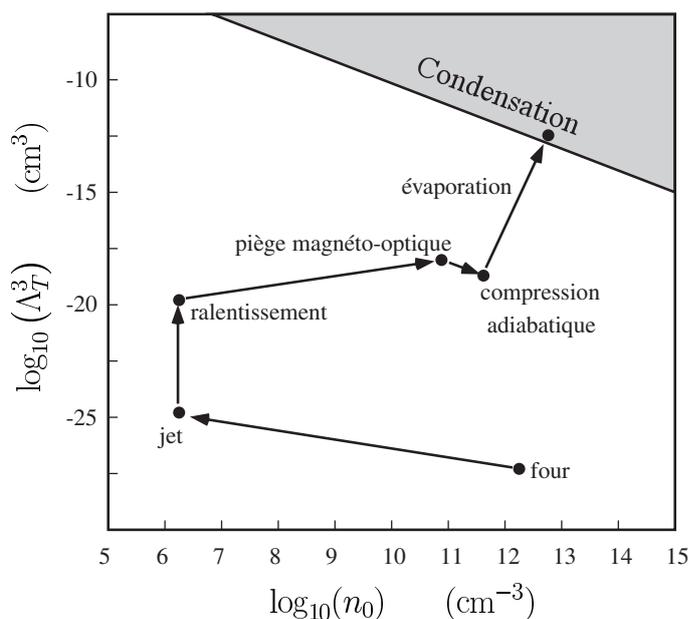


FIG. 2.1 – Cheminement à travers l'espace des phases, de la vapeur thermique au condensat de Bose-Einstein. Au total, la densité spatiale n_0 n'a pratiquement pas changée mais la température T est passée de 400 K à quelques centaines de nano-kelvin.

Le reste du chapitre décrit en détail les différentes étapes qui nous permettent d'atteindre le régime de dégénérescence quantique.

2.2 Le vide

Les techniques usuelles de condensation de Bose-Einstein nécessitent en premier lieu un excellent vide. En effet, l'une des conditions *sine qua non* de la condensation est que les pertes par collisions avec les particules du gaz résiduel soient suffisamment peu importantes pour ne pas empêcher, pendant l'évaporation, l'accroissement de densité dans l'espace des phases dû au refroidissement.

Typiquement, aux densités initiales (avant évaporation) accessibles par les dispositifs actuels de prérefroidissement laser et de piégeage magnétique, les

phases de refroidissement évaporatif durent quelques dizaines de secondes³. Il est donc nécessaire d'avoir des durées de vie des atomes piégés de l'ordre de la minute ou plus.

Pour faire un rapide calcul d'ordre de grandeur pour la pression P , on considère que la section efficace de collision atome piégé / particule de gaz résiduel σ est donnée par les rayons atomiques pour des potentiels d'interactions types « sphères dures » (collisions chaudes « classiques », puisque le gaz résiduel est en équilibre avec les parois, donc à température ambiante). Le taux de collision avec le gaz résiduel Γ doit être de l'ordre de $1/60 \text{ s}^{-1}$ pour une durée de vie de l'ordre de la minute. On sait que $\Gamma = n \cdot \sigma \cdot v$, avec $n = P/k_B T$ la densité du gaz résiduel, et $v = \sqrt{8k_B T/\pi m}$ sa vitesse moyenne. Le gaz résiduel est considéré comme composé essentiellement d'hydrogène, ce qui, au pire, nous amène à sous estimer la pression (il n'y a rien de plus léger que l'hydrogène atomique). Les rayons typiques des interactions entre les particules sont données dans la littérature de l'ordre de quelques 10^{-10} m , soit $\sigma = 4\pi(r_1 + r_2)^2 \sim 2 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$. Connaissant la masse de l'hydrogène $m \sim 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, on trouve alors qu'un vide de l'ordre de 10^{-10} mbar au moins est nécessaire.

2.2.1 Le premier dispositif de vide

La figure 2.2 montre un schéma de la première génération de dispositif expérimental.

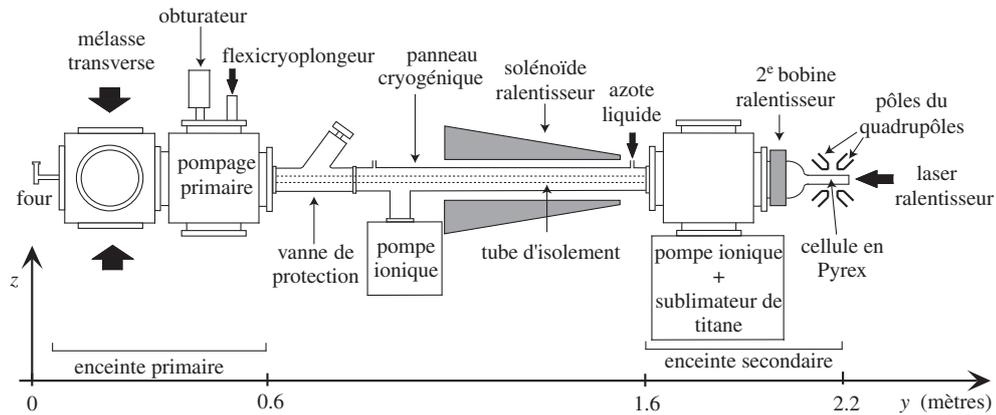


FIG. 2.2 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental.

Pour cette géométrie de système à vide, l'inconvénient principal qui ap-

³Un critère quantitatif de bon fonctionnement du refroidissement évaporatif existe. Il requiert que le produit du taux de collisions élastique initial par la durée de vie du piège soit au moins supérieur à 300 [32]. Ceci permet d'obtenir le régime d'emballage (voir 2.7.2)

paraît à l'usage est que la cellule n'est pas débouchante. Les atomes éjectés par le four en fonctionnement vont donc s'accumuler dans la cellule en verre finale où ils sont difficilement pompés. Ces atomes sont, de fait, en nombre beaucoup plus important que les atomes réellement « utiles » (*i.e.* les atomes de ^{87}Rb effectivement ralentis et piégés). En effet il sort du four en majorité des atomes de ^{85}Rb non utilisés, et tous les atomes de ^{87}Rb éjectés ne sont pas forcément efficacement ralentis et piégés. En pratique, nous avons observés qu'après quelques mois de fonctionnement normal, les parois de la cellule se trouvent saturées en Rubidium au point de commencer à s'opacifier. Le fonctionnement des dispositifs de refroidissement laser s'en trouve alors perturbé, et la présence d'un gaz résiduel de Rubidium dans la cellule finit par entraver, à la longue, le bon déroulement de l'évaporation forcée. Empiriquement, nous avons observé qu'il devient très difficile de condenser à partir du moment où il devient possible de charger un petit PMO de quelques 10^5 atomes de ^{87}Rb à partir de la seule pression de vapeur résiduelle. Ceci nous oblige à procéder régulièrement à des réétuvages du système à vide, procédure complexe car elle nous oblige à démonter l'électro-aimant, ainsi qu'une partie du système optique, et à immobiliser *de facto* l'expérience pendant plusieurs semaines.

En revanche, ce type de dispositif à cellule non débouchante présente l'avantage de permettre la mise en place aisée de n'importe quel type d'électro-aimant pour le piégeage magnétique. En particulier, ceci nous a été très utile pour nous permettre de tester facilement les diverses générations d'électro-aimants, les premières versions n'étant pas en pratique suffisamment démontables pour être installées autour d'une cellule non débouchante. Néanmoins, les progrès que nous avons réalisés dans la compréhension et la réalisation des électro-aimants à pôles ferromagnétiques pour le piégeage d'atomes neutres nous a permis de disposer pour le nouveau dispositif expérimental d'un électro-aimant facilement démontable (voir 2.5.3). Celui-ci peut donc facilement être implémenté autour d'une cellule du type de celle du nouveau dispositif expérimental, décrit dans le paragraphe suivant.

2.2.2 Dispositif de deuxième génération

La figure 2.3 présente un schéma d'ensemble du nouveau dispositif expérimental.

La première différence qui apparaît par rapport au montage précédent est que nous avons ici réalisé un montage de cellule débouchante. Ceci n'est possible que grâce à l'emploi d'un soufflet orientable qui permet un montage rigide mais ajustable entre deux pièces d'un système à vide.

Une autre différence importante est l'absence de mélasse transverse, celle-ci nous ayant semblé apporter un gain trop faible par rapport à la complication qu'elle apporte (un petit facteur 3 sur la vitesse de chargement, pour des

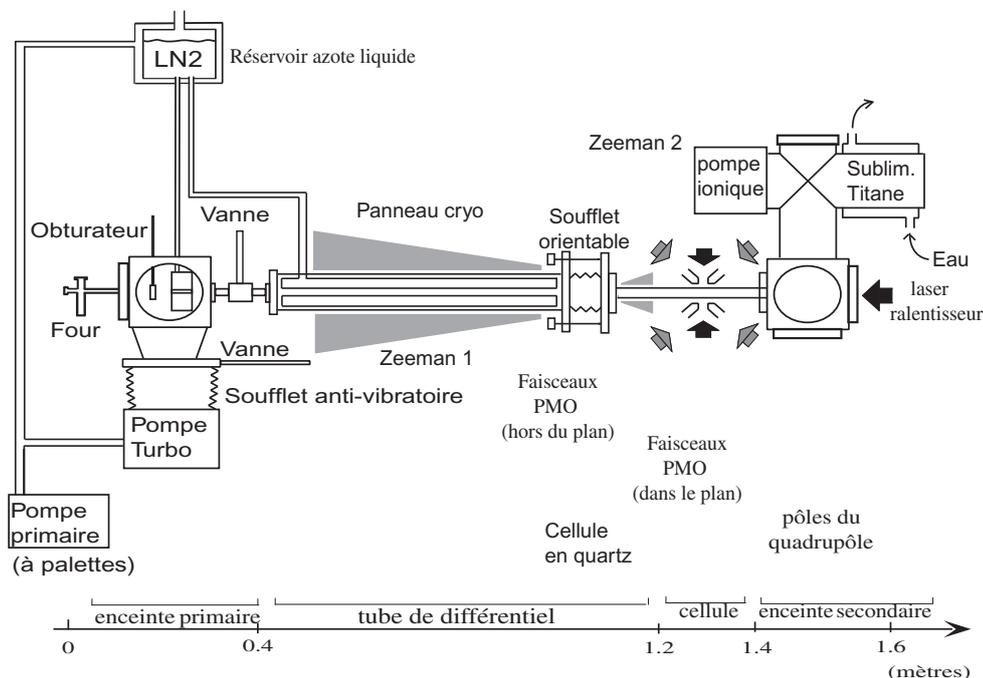


FIG. 2.3 – Vue d'ensemble du nouveau dispositif expérimental.

réglages pouvant prendre une journée entière). Évidemment, nous ne disposons plus alors de moyen d'orienter le jet atomique sortant du four. Il est donc essentiel d'assurer un parfait centrage de la direction d'émission du jet sur le reste du système à vide. Cela est réalisé lors du montage grâce au petit hublot CF16 sur le four qui permet de vérifier que l'axe de collimation du jet défini par le four coïncide parfaitement avec les axes des autres éléments du système à vide (vanne de protection, panneau cryo et cellule en quartz)⁴.

On peut noter également l'utilisation du réservoir d'azote liquide à double paroi sous vide. Ceci permet de maintenir dans les éléments cryogéniques du système ultravide une température basse constante sans avoir à recharger trop fréquemment en azote liquide (deux fois par jour environ). Par ailleurs, il permet de gagner un bon ordre de grandeur sur le vide de refoulement, et donc aussi de gagner un peu sur le vide de l'enceinte.

Dans l'ensemble, nous avons donc gagné un peu en compacité, en efficacité, et en facilité d'utilisation en régime de fonctionnement normal. Néanmoins, le fait d'utiliser une cellule débouchante interdit d'utiliser les premières générations d'électro-aimant, celui-ci devant être spécifiquement étudié pour

⁴En pratique, nous avons observé que les tolérances de fabrication et de mise en position nécessitaient, pour un ajustement optimal, de légères corrections sur les positionnements des différents éléments, obtenues aisément par légères déformations sous contrainte des ensembles mécaniques.

pouvoir être monté sur notre système. Par ailleurs, un point qui doit être noté est que, comme l'ensemble du système est rigidement fixé, les dilatations consécutives aux phases d'étuvages initiales (typiquement 300 °C pendant 2 semaines) peuvent avoir des conséquences catastrophiques si l'on n'y prend pas garde. En particulier il faut, au fur et à mesure de la montée ou de la baisse en température, adapter la longueur du soufflet orientable (à l'aide de ses trois vis de réglage) si l'on ne veut pas casser la cellule en verre/quartz du fait des fortes contraintes qui s'exercent lors des dilatations thermiques.

2.3 La lumière : réalisation d'un banc de refroidissement laser

La technique la plus généralement utilisée pour obtenir le régime de dégénérescence quantique en phase gazeuse, à savoir le refroidissement évaporatif, nécessite, pour fonctionner convenablement, une température initiale très basse. Typiquement, nous commençons cette phase à partir d'un nuage de quelques 3×10^8 atomes à environ $100 \mu\text{K}$ pour une densité de l'ordre de $10^{11} \text{at}\cdot\text{cm}^{-3}$. Ce type de régime peut être atteint sans difficultés majeures pour les métaux alcalins à partir des techniques désormais classiques du refroidissement et du piégeage par lasers.

Ces techniques se basent toutes sur des utilisations de l'interaction matière-rayonnement, dont l'un des paramètres essentiels est la largeur de la transition atomique utilisée, à savoir 5,9 MHz pour la raie D2 à 780 nm du ^{87}Rb dans notre cas. L'emploi des techniques de refroidissement et de piégeage laser présuppose donc la création de divers faisceaux lasers de fréquences absolues contrôlées avec une précision de l'ordre ou supérieure à cette largeur de raie, soit une précision absolue de l'ordre de $\Delta f/f \sim 10^{-8}$ ou mieux. Cette section décrit brièvement l'ensemble du dispositif conçu et réalisé pour le « banc de refroidissement » du nouveau dispositif expérimental.

2.3.1 Les diodes laser du nouveau dispositif

Le fait d'utiliser l'atome de ^{87}Rb nous permet de disposer commercialement de sources lasers extrêmement compactes et relativement bon marché : nous utilisons des diodes lasers Laser Graphics à 780 nm, de puissance nominale 70 mW, et de largeur de raie 20 MHz. Malheureusement, au moment de la réalisation de notre dispositif, nous ne disposions pas de sources compactes affinées en fréquence (comme des diodes DBR ou DFB) disponibles précédemment, mais dont la commercialisation a été stoppée.

2.3.1.1 Diodes maîtres

Afin de disposer de sources lasers de largeur de raie inférieure à la largeur de la transition atomique utilisée, nous avons réalisé des montages de diodes sur réseau (que nous appelons « lasers maîtres ») compacts et performants en adaptant et modifiant quelque peu le modèle type Hinds [33], qui avait déjà été employé et partiellement modifié par une autre équipe de notre groupe⁵. La figure 2.4 montre une photographie de notre montage.

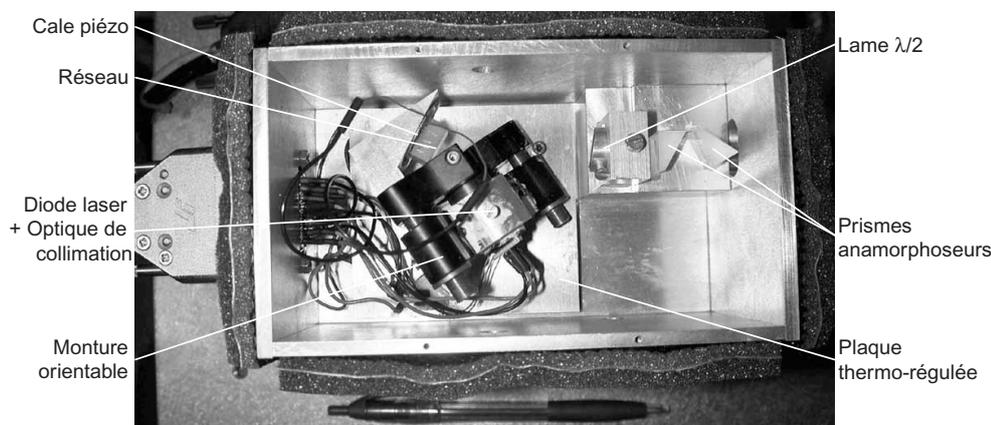


FIG. 2.4 – Photo légendée d'un montage de diode sur réseau

Le montage de diode sur réseau est asservi en température à l'aide d'un élément thermo-électrique à mieux que le dixième de degré près, avec un temps de réponse de l'ordre de 20 secondes. Le réseau, monté sur céramique piézo-électrique⁶ sert à l'asservissement « lent » de la diode. Il a une bande passante plate entre 0 et 1,5 kHz.

Pour des raisons de stabilité aux chocs accidentels sur la table optique, nous avons posé les diodes sur réseau sur un empilement d'une couche de sorbotane faiblement autocollante de 1,5 mm suivie d'un bloc de laiton parallélépipédique (lourd) d'1 cm d'épaisseur et d'une autre couche de sorbotane identique à la première. Les diodes ainsi isolées des vibrations sont extrêmement robustes vis à vis de toute perturbation sur la table optique, jusqu'à des fréquences très basses (de l'ordre de quelques dizaines de Herz).

Nous disposons finalement en sortie, avec un montage très stable et robuste, de environ 15 mW de puissance dans un faisceau circulaire, collimaté, et de largeur de raie⁷ mesurée à 600 kHz, ce qui est bien inférieur au 5,9 MHz

⁵Il s'agit de l'expérience de condensation sur micro-puces.

⁶Il s'agit en fait d'un simple « buzzer » extrêmement bon marché qui, alimenté sous 0-15 V, présente un déplacement de 2λ environ

⁷mesurée par battement optique entre deux diodes sur réseaux équivalentes asservies indépendamment en fréquence sur une raie d'absorption saturée du ^{87}Rb . La largeur de

de largeur de raie naturelle du ^{87}Rb .

2.3.1.2 Montage de spectroscopie d'absorption saturée / asservissement

Il est évidemment nécessaire pour le refroidissement laser de disposer de lasers à faible largeur de raie, mais surtout à des fréquences définies par rapport à une référence absolue (à savoir la fréquence de la transition atomique utilisée). Nous réalisons cela par asservissement en fréquence des diodes lasers maîtres sur raies d'absorption saturée du ^{87}Rb modulées par effets Zeeman. Nous avons réalisé un montage compact, représenté sur la figure 2.5.

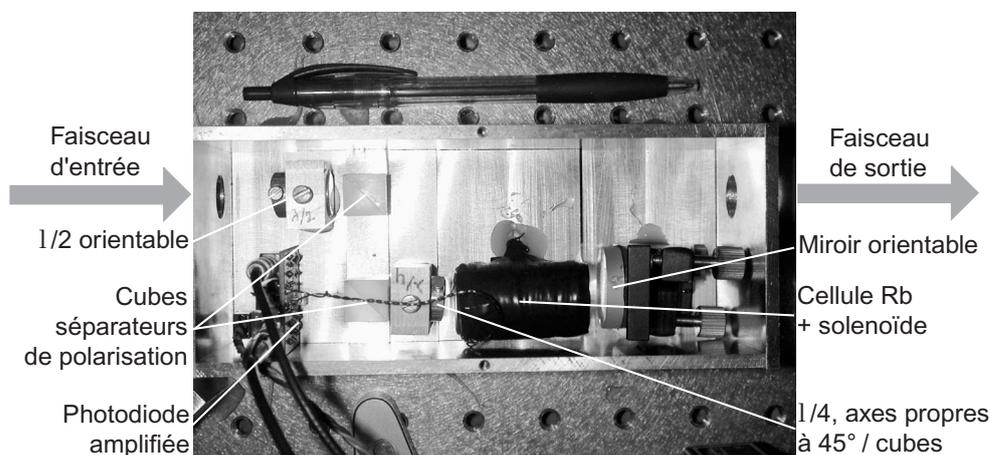


FIG. 2.5 – Photo légendée d'un montage d'absorption saturée. La position des raies d'absorption du ^{87}Rb est modulée par application d'un champ magnétique sinusoïdal en fonction du temps sur la cellule spectroscopique, de direction parallèle au faisceau laser.

Le système de bouclage de l'asservissement est relativement complexe, puisqu'il utilise deux moyens différents d'effectuer la rétroaction. La modulation du champ magnétique sur la cellule de Rubidium se fait à 60 kHz, cette valeur étant le maximum qu'il nous a été possible d'obtenir avec des composants électroniques relativement « standards » pour les circuits de modulation/démodulation synchrones. Nous n'avons pas voulu effectuer la modulation/démodulation à des fréquences radiofréquences afin d'éviter tout parasitage lors de la phase d'évaporation RF qui conduit à l'obtention du condensat de Bose. Le signal d'erreur est rétroactionné directement sur la modulation en courant de la diode laser par l'intermédiaire d'un correcteur

raie est alors constante pour des temps d'intégrations de l'ordre ou supérieur à la seconde (la mesure a été effectuée jusqu'à des temps d'intégrations de 1 minute).

proportionnel. Cette partie de l'électronique d'asservissement présente une bande passante de 10 kHz. Elle permet d'effectuer la correction des bruits de fréquence « rapides ». L'écart d'un facteur 6 entre la fréquence de coupure de la partie rapide de l'asservissement et la fréquence de modulation nécessaire à l'obtention du signal d'erreur est en pratique suffisant pour rejeter la quasi-totalité du signal de modulation de la rétroaction. La bande passante à 10 kHz permet de s'affranchir de la plupart de bruits types « acoustiques » qui constituent la majeure partie des perturbations de fréquence qui apparaissent sur un dispositif du type diode sur réseau (vibrations mécaniques de la cavité laser étendue).

Par ailleurs on sait qu'un système d'asservissement à correction simplement proportionnelle présente, en boucle fermée, un décalage résiduel systématique. Celui-ci est dû au fait qu'on n'est jamais à signal d'erreur strictement nul lors de la fermeture de la boucle de rétroaction. Plus grave, ce décalage va même varier lentement au cours du temps si les conditions environnementales changent (température de la salle,...). Pour s'affranchir de ce défaut, il suffit d'ajouter une correction intégrale afin de le compenser. Celle-ci est réalisée par l'intermédiaire d'un circuit intégrateur analogique sur la commande de la céramique piézo-électrique de la diode sur réseau. En effet, celle-ci présente une dynamique plus grande (~ 1 GHz entre deux sauts de modes) que la modulation en courant de la diode laser (~ 200 MHz). On a cependant une bande passante nettement plus faible (1 kHz), ce qui est sans importance pour une correction intégrale dont le but est de corriger uniquement le continu (dérive lente). Notons cependant que, en tout état de cause, un intégrateur à gain DC infini n'est jamais réalisable en pratique. Il y aura donc, au sens strict, toujours un petit offset résiduel présent en boucle fermée dans le système. Cependant, le gain DC de la partie intégrateur pourra être plusieurs ordres de grandeurs plus grand que celui de la partie proportionnelle. L'offset résiduel pourra alors être nettement plus petit que le bruit résiduel, et, pour le genre d'expérience que nous réalisons, tout se passe comme si il était nul. Le schéma 2.6 présente une vue synthétique du système d'asservissement.

En pratique, les montages sont suffisamment stables et efficaces pour rester asservis pendant une journée complète sans problème. De plus, mis à part quelques erreurs de manipulations dans les premiers temps, il n'a été nécessaire de retoucher ni les réglages des diodes ni ceux des asservissements durant plusieurs mois.

2.3.1.3 Diodes esclaves

Les diodes sur réseaux que nous avons réalisées ne disposent pas, en sortie, d'une puissance suffisante pour réaliser dans de bonnes conditions le refroidis-

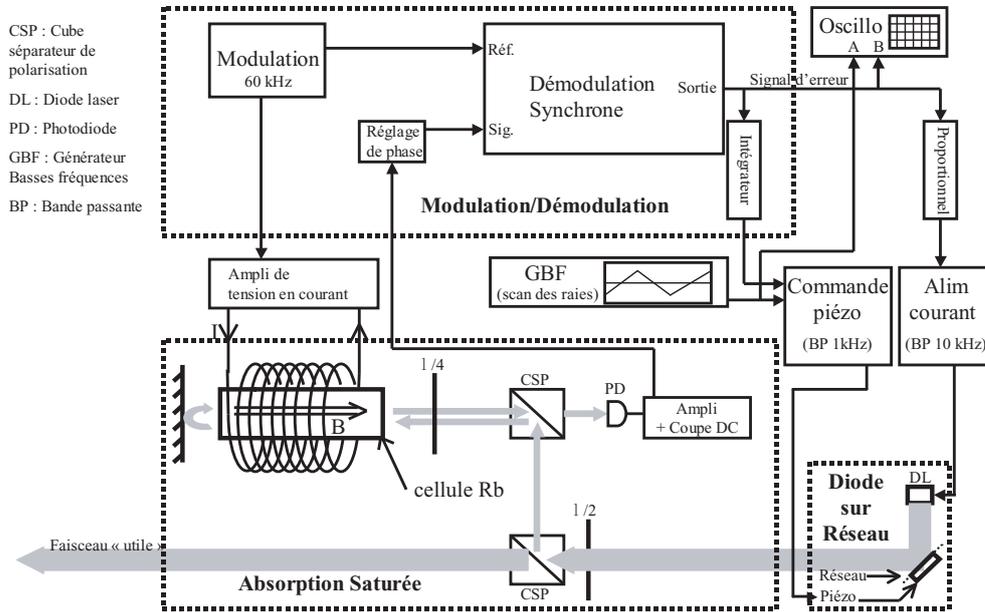


FIG. 2.6 – Schéma synthétique du circuit d'asservissement des diodes sur réseau sur raies d'absorption saturée du ^{87}Rb .

sement et le piégeage d'atomes par laser. Une première solution consisterait à multiplier les diodes sur réseau afin de disposer, en cumulé, de la puissance optique nécessaire. Heureusement, on peut aussi utiliser la technique de l'injection laser [34] afin d'imposer les excellentes propriétés spectrales de nos diodes sur réseau à des diodes « libres ». En effet, si l'on injecte une petite puissance laser d'origine extérieure à l'intérieur d'une cavité laser, celle-ci va préférentiellement laser sur le mode imposé par cette source extérieure. En pratique, après décalage en fréquences *ad hoc*, du faisceau provenant de nos diodes sur réseau, nous injectons des diodes esclaves par l'intermédiaire de leurs isolateurs optiques. La figure 2.7 présente une photo légendée de nos montages de diode esclave. Ceux ci sont - bien entendu - eux aussi thermo-régulés à mieux que le dixième de degré, avec cette fois ci, un temps de réponse caractéristique de 5 secondes environ.

Grâce à la technique de l'injection laser, nous disposons alors de typiquement 70 mW de puissance optique possédant les mêmes propriétés spectrales que nos diodes sur réseau. En modifiant la fréquence du faisceau injecteur (à l'aide, par exemple d'un modulateur acousto-optique), il est même possible de faire changer en conséquence la fréquence des diodes esclaves. On dispose alors de sources relativement puissantes (~ 70 mW), de faible largeur de raie (~ 600 kHz), accordables dynamiquement en fréquence à grande vitesse

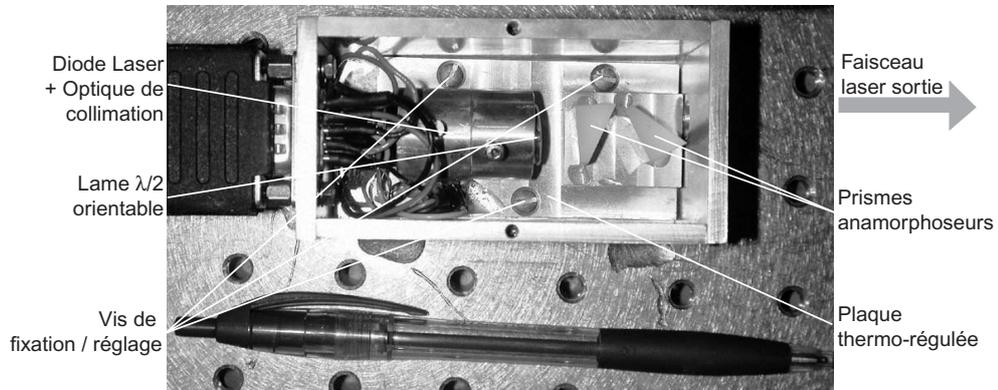


FIG. 2.7 – Photo légendée d'un montage de diode laser. La lame $\lambda/2$ réglable permet d'ajuster la polarisation avant d'entrer dans les prismes anamorphoseurs afin de minimiser les pertes par réflexion partielles dans ceux ci. Les trois vis de fixation / réglage permettent de maintenir la plaque thermo-régulée contre l'élément thermo-électrique de régulation, ainsi que d'ajuster l'orientation générale du faisceau de sortie de sorte qu'il soit aussi parfaitement horizontal que possible.

(temps d'accrochage inférieur à la milliseconde) et sur une grande plage⁸.

2.3.2 Banc de refroidissement

Nous avons jusqu'ici décrit les « briques » élémentaires nécessaires à la réalisation d'un système laser complet de refroidissement pour le ^{87}Rb . Il est temps à présent de passer à une vue plus globale des choses, et de mettre ensemble ces différents éléments afin d'obtenir un système complet fonctionnel et relativement compact. La séquence de refroidissement laser retenue - qui sera détaillée plus loin - nécessite 6 faisceaux lasers contrôlés qui seront directement appliqués sur les atomes. Le tableau la figure 2.8 présente ces 6 lasers, ainsi que ceux nécessaires à leur réalisation.

Le schéma optique global de notre « banc de refroidissement » est présenté sur la figure 2.9.

Par comparaison avec l'ancien dispositif expérimental, nous avons gagné un bon facteur 4 sur l'encombrement en surface du système⁹. Par ailleurs, le

⁸En pratique, nos montages - une fois bien réglés - sont limités en plage de fréquence uniquement par la bande passante des acousto-optiques (de l'ordre de 40 MHz par passage pour un acousto-optique centré à 80 MHz). Par ailleurs, nous avons, en balayant plus largement la fréquence du faisceau injecteur, constaté une plage maximale d'accordabilité de l'ordre de 600 MHz pour quelques milliwatts de puissance dans le faisceau injecteur.

⁹l'ensemble du dispositif étant situé en hauteur beaucoup plus près de la table optique, on peut même parler d'un facteur 16 sur l'encombrement *volumique*

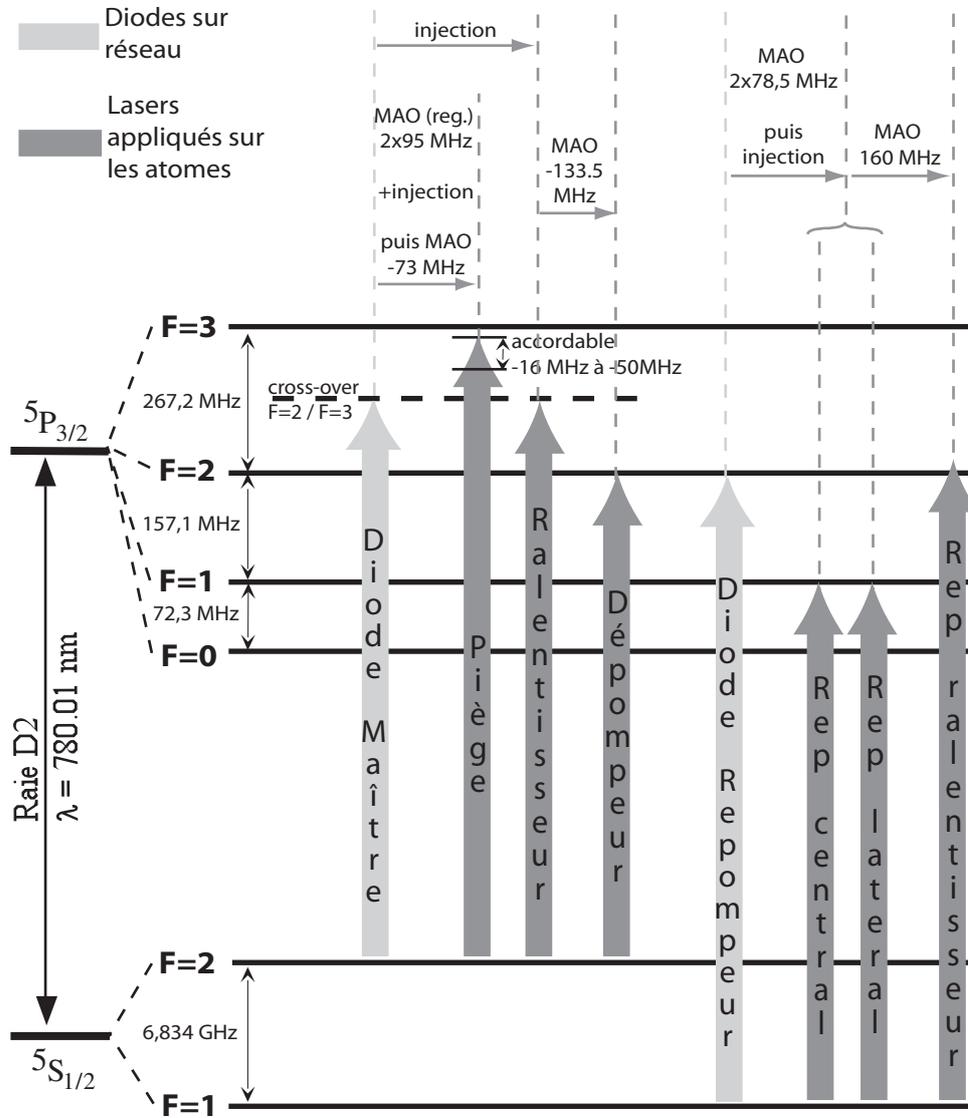


FIG. 2.8 – Schéma synthétique des lasers utilisés pour le banc de refroidissement, référencés par rapport aux niveaux atomiques. Le laser piège est ajustable entre -16 MHz et -50 MHz en commandant analogiquement le VCO qui pilote le modulateur acousto-optique situé sur le faisceau injecteur.

nouveau système, entièrement collé sur la table optique, avec une hauteur de faisceau de 2,5 cm, gagne aussi énormément en stabilité mécanique.

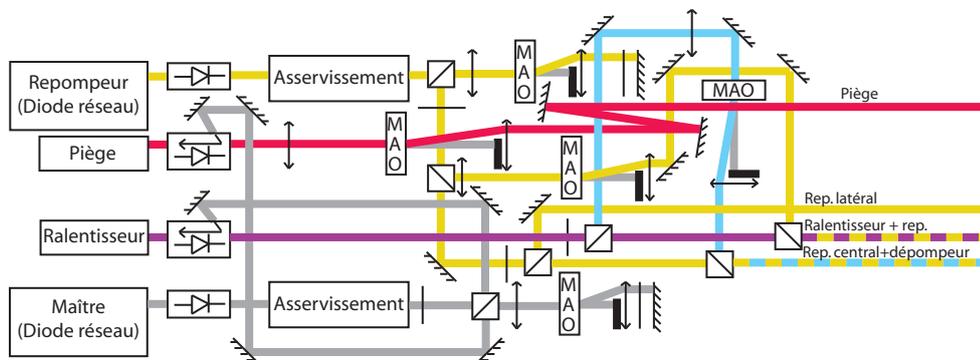


FIG. 2.9 – Schéma du banc de refroidissement. Rouge : faisceau piège ; Jaune : les différents faisceaux repompeurs ; Bleu : faisceau dépompeur ; Violet : faisceau ralentisseur.

2.4 Ralentissement, piégeage et refroidissement d'atomes par laser

La séquence de refroidissement laser retenue pour notre dispositif expérimental débute par le chargement d'un piège magnéto-optique (PMO) à l'aide d'un ralentisseur Zeeman. À l'issue du chargement de quelques 10^{10} atomes dans le PMO, quelques étapes supplémentaires (Dark-SPOT, Ultra-Dark-SPOT, mélasse optique) permettent de gagner un peu en densité dans l'espace des phases et de charger convenablement le piège magnétique. L'ensemble de ces processus sont détaillés dans [22, 23] pour le cas du premier dispositif expérimental. Cependant, l'implémentation pratique de ces processus n'est pas identique entre les deux dispositifs expérimentaux. On se contente ici d'exposer les spécificités et les principaux résultats obtenus pour le nouveau dispositif expérimental.

2.4.1 Le four, caractérisation du jet atomique

La source d'atomes utilisée consiste essentiellement en une vapeur de Rubidium à $120\text{ }^\circ\text{C}$ environ, dans un dispositif hors d'équilibre dont la géométrie permet de forts flux d'atomes, avec une bonne directivité. Nous utilisons un four à recirculation similaire à celui utilisé dans le groupe de R. Hulet. La figure 2.10 présente un schéma de notre source.

Le hublot CF16 permet, lors de la phase de montage, de s'assurer du bon alignement du dispositif. En régime de fonctionnement, le réservoir est chauffé aux environs de $120\text{ }^\circ\text{C}$, alors que l'extrémité du tube de collimation reste à température ambiante. Le gradient thermique qui s'établit alors favorise la migration des atomes de Rubidium le long de la grille vers le réservoir

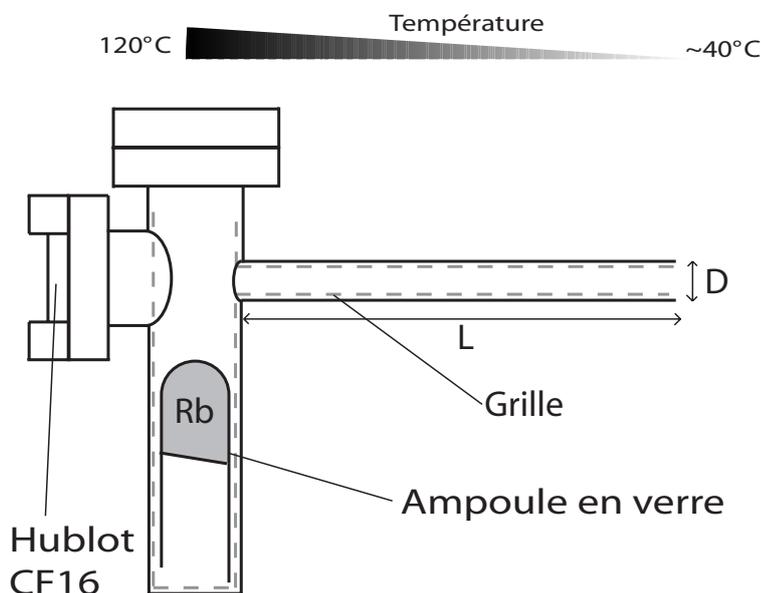


FIG. 2.10 – Schéma de principe du four à Rubidium utilisé.

par effet de capillarité (effet « mèche »). Le four se recharge en cassant le vide sous azote. On refroidit à l'azote liquide une ampoule de Rubidium que l'on brise à l'air libre et que l'on met en place rapidement dans le réservoir, ouverture vers le bas. La charge de 2 g de Rubidium métallique ainsi mise en place permet un fonctionnement normal pendant plus d'une année sans difficultés.

Des considérations géométriques sur le tube de collimation permettent d'estimer la divergence du jet atomique produit à la sortie du four :

$$\theta \gtrsim \frac{D}{L} \simeq 0,05 \text{ rad} \quad (2.1)$$

Cependant, avant d'arriver dans la cellule de quartz, le jet subit plusieurs autres diaphragmations qui limitent sa divergence « utile » à :

$$\theta = \frac{D'}{L'} = \frac{15 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \simeq 0,015 \text{ rad} \quad (2.2)$$

où D' est le diamètre du plus petit diaphragme (en terme d'angle solide) présent sur le trajet du jet atomique, et L' sa distance à la sortie du four.

Expérimentalement, la largeur de la distribution de vitesses transverses se mesure par fluorescence du jet atomique au niveau de la cellule avec un faisceau laser sonde orthogonal au jet dont on balaye la fréquence autour de la résonance atomique $5S_{1/2}F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}F = 3$ du ^{87}Rb (seuls atomes « utiles » dans le jet, dont on rappelle que 75 % des atomes sont du ^{85}Rb

inutile pour nos expériences). Le résultat expérimental est présenté sur la figure 2.11. On mesure une largeur à mi-hauteur de 4,9 m/s (en pensant à déconvoluer par la lorentzienne due à la largeur de raie naturelle de la transition sondée).

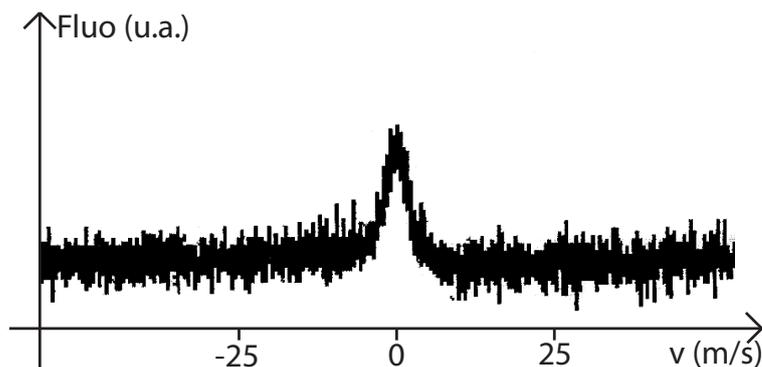


FIG. 2.11 – Fluorescence du jet atomique sondé par un laser transverse non saturant dont on fait varier la fréquence aux environs de la résonance atomique.

En ajoutant un angle sur la direction de la sonde par rapport au jet atomique, on peut également sonder la distribution de vitesse longitudinale (voir figure 2.12). Le sommet du pic d'absorption (vitesse la plus probable) se déplace alors par effet Doppler, et le pic s'élargit par effet de convolution entre le distribution transverse et la distribution longitudinale. Nous avons ainsi mesuré une vitesse la plus probable des atomes du jet de l'ordre de 290 m/s pour un four à 120 °C. On notera que l'angle de divergence du jet correspondant à ces mesures vaut :

$$\theta_{\text{mesuré}} = \frac{\Delta v_{\text{transverse}}}{v_{\text{longitudinal}}} \simeq 0,014 \text{ rad} \quad (2.3)$$

ce qui est en bon accord avec l'ordre de grandeur prédit théoriquement (Eq. 2.2).

2.4.2 Ralentisseur Zeeman

En appliquant un faisceau laser saturant contrapropageant avec la direction du jet atomique, les atomes en résonance subissent une force de recul qui les fait ralentir. L'application d'un champ magnétique décroissant au fur et à mesure de la propagation des atomes permet, grâce à l'effet Zeeman, de conserver ceux-ci atomes à résonance avec le laser (dit « laser ralentisseur »). On peut ainsi contracter la distribution des vitesses longitudinale, et la ramener au voisinage d'une valeur plus faible qu'à la sortie du four (vitesse de l'ordre de 30 m.s⁻¹).

Dans nos expériences, les atomes cyclent sur la transition $|5S^{1/2}, F = 2, m_F = +2 \rangle \rightarrow |5P^{3/2}, F = 3, m_F = +3 \rangle$, à 780 nm, seule transition fermée facilement accessible du ^{87}Rb . La fréquence du laser ralentisseur a été choisie désaccordée de -133,6 MHz par rapport à cette transition. Il est en effet nécessaire d'être suffisamment désaccordé pour ne pas perturber le PMO avec le faisceau ralentisseur. La valeur exacte du désaccord a été choisie par raison de commodité : elle permet d'asservir le laser ralentisseur directement sur la raie de cross-over d'absorption saturée entre $|5S^{1/2}, F = 2 \rangle \rightarrow |5P^{3/2}, F = 3 \rangle$ et $|5S^{1/2}, F = 2 \rangle \rightarrow |5P^{3/2}, F = 2 \rangle$, ce qui simplifie le montage optique (voir schéma 2.9)¹⁰. Nous superposons au faisceau ralentisseur un faisceau repompeur, à peu près à résonance avec la transition $|5S^{1/2}, F = 1 \rangle \rightarrow |5P^{3/2}, F = 2 \rangle$ (la fréquence exacte est non critique). Sans celui-ci, les atomes sont rapidement dépompés et donc perdus pour le ralentissement (probablement dans la zone de champ magnétique nul entre les deux parties du ralentisseur, voir [23]).

Avec un champ magnétique décroissant (entre l'entrée du ralentisseur et la sortie) de 160 G à -50 G, on peut ralentir les atomes de 280 m.s^{-1} à 50 m.s^{-1} . On rappelle à toutes fins utiles les relations pratiques usuelles de décalage Zeeman et Dopler pour la transition à 780 nm utilisée :

$$\begin{aligned} v(\text{m.s}^{-1}) &= 0,78 \cdot \Delta\nu(\text{MHz}) && \text{(effet Dopler)} \\ \Delta\nu(\text{MHz}) &= 1,4 \cdot B(\text{Gauss}) && \text{(effet Zeeman)} \end{aligned}$$

L'effet du ralentisseur Zeeman est de prendre les atomes du jet entre 50 et 280 m.s^{-1} et de les amener tous autour de 50 m.s^{-1} à la sortie. La vitesse de décroissance du champ est bien sûr optimisée en tout point pour permettre de réduire autant que possible la longueur du ralentisseur, sans provoquer de décrochage des atomes (le temps d'absorption / réémission fini de la transition atomique utilisée donne un maximum de l'accélération permise par l'interaction matière-rayonnement). On a cependant pris un facteur de sécurité de l'ordre de 10% (par rapport au cas d'une saturation infinie de la transition) pour tenir compte des irrégularités du champs magnétique, etc.

2.4.3 Piège Magnéto-Optique, Dark-SPOT, Ultra Dark-SPOT et mélasse optique

Une fois les atomes ralentis suffisamment par le ralentisseur Zeeman, il est possible de les capturer dans un piège magnéto-optique. Celui-ci est composé de 3 paires de faisceaux contrapropageants et de polarisations circulaires

¹⁰En réalité, le laser ralentisseur lui-même n'est pas asservi directement sur la raie de cross-over, c'est le laser maître qui l'est. Cependant, celui-ci injecte directement le laser ralentisseur, sans avoir à utiliser d'acousto-optique pour décaler la fréquence.

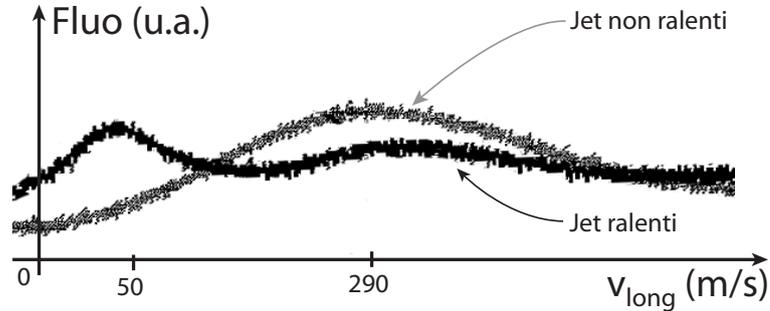


FIG. 2.12 – Fluorescence du jet atomique sondé par un laser faisant un angle de 5 degrés avec le jet. En gris : jet non ralenti, en noir, jet + ralentisseur Zeeman (positionnement vertical des deux courbes non identiques). Noter que, comme l'angle est faible, la distribution de vitesses transverse n'est pas négligeable, et les graphes correspondent à la convolution de la distribution de vitesse longitudinale par la distribution de vitesse transverse. Notons également que la petite taille de la sonde utilisée fait que l'on détecte mieux les atomes non-ralentis que les atomes ralentis, car ces derniers ont une plus grande dispersion spatiale (transverse). Le pic ralenti est donc moins marqué sur le graphique que dans les faits.

bien choisies, légèrement décalés en fréquence vers le rouge de la transition atomique (-16 MHz), combinés avec un champ magnétique statique quadrupolaire sphérique.

Comme pour le ralentissement, nous utilisons la transition $|5S_{1/2}, F = 2 \rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3 \rangle$ à 780 nm du ^{87}Rb . À cause de la proximité entre les niveaux $F'=2$ et $F'=3$ du ^{87}Rb , les atomes sont rapidement dépompés dans $F=1$ au bout de quelques milliers de cycles de fluorescence. En effet, le laser piège peut exciter de façon non résonnante (donc assez rarement) la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$. Or, les atomes une fois dans $F' = 2$ peuvent se désexciter spontanément vers $F = 1$ où ils sont alors perdus pour le piégeage. Il est donc nécessaire de les recycler avec un repompeur. Nous avons choisi celui-ci à résonance avec la transition $|5S_{1/2}, F = 1 \rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 1 \rangle$. En effet, les atomes une fois repompés dans $F' = 1$ auront une chance non négligeable de se désexciter vers $F = 2$ (probabilité 1/2 environ), ce qui suffit à assurer leur recyclage. Le choix de la meilleure efficacité de repompage aurait dû conduire à utiliser la transition $|5S_{1/2}, F = 1 \rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 2 \rangle$, mais la plus grande simplicité du montage optique nous a conduit à lui préférer la transition $|5S_{1/2}, F = 1 \rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 1 \rangle$.

Nous pouvons ainsi charger typiquement 3×10^9 atomes en moins de 3 secondes, avec une densité au centre de $2 \times 10^{10} \text{ at.cm}^{-3}$. La densité atomique est alors limitée par la diffusion multiple de photons qui crée une

force répulsive à longue portée entre les atomes. Le nuage d'atomes présente alors une taille relativement importante (environ 5 mm de diamètre) et une température de l'ordre de 1 mK (mesurée par temps de vol)

Afin d'optimiser le futur transfert dans le piège magnétique, il est alors souhaitable de diminuer la température de l'échantillon, ainsi que sa taille. Pour ce faire nous appliquons alors une étape de Dark-SPOT (pendant quelques dizaines de millisecondes). Celle-ci consiste à supprimer le repompage au centre du PMO. Les atomes au centre du piège tombent alors dans un état noir et leur densité n'est plus limitée par la diffusion multiple (fig. 2.13). Dans le cas du Rubidium, l'efficacité de dépompage « naturel » n'est pas très bonne et il est utile d'ajouter un faisceau dépompeur (à résonance avec la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$) au centre du piège pour aider les atomes à tomber plus vite dans l'état noir (les atomes pompés dans l'état $F' = 2$ peuvent se désexciter dans l'état $F=1$ qui est noir avec une probabilité de l'ordre de $1/2$). On parle d'« ultra-Dark-SPOT ». Nous obtenons ainsi environ 8×10^8 atomes dans l'ultra-Dark-SPOT, pour une densité au centre de $2 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, et une température d'environ $120 \mu\text{K}$. Pour un Dark-SPOT seul, nous obtenons 10^9 atomes, $8 \times 10^{10} \text{ at.cm}^{-3}$, à environ $200 \mu\text{K}$.

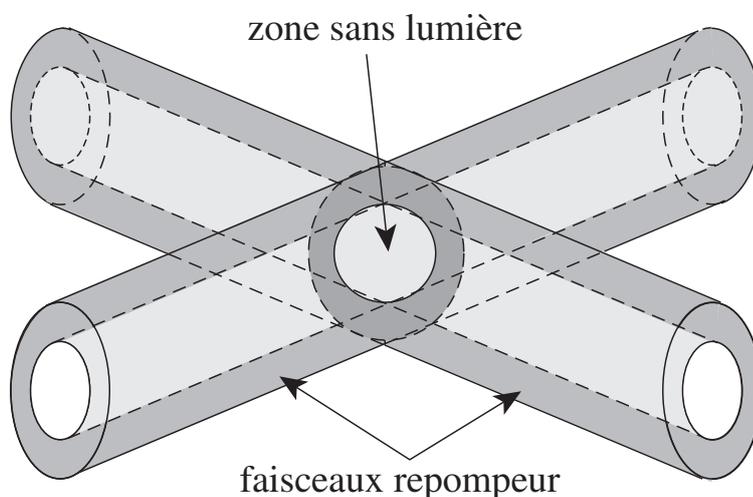


FIG. 2.13 – Principe de fonctionnement d'un Dark-SPOT : la zone sans repompeur au centre du piège permet de faire tomber les atomes dans un état noir tout en conservant un effet de piégeage. La densité atomique n'est alors plus limitée par la diffusion multiple de photons.

En pratique, les faisceaux nécessaires à la réalisation du PMO et des phases de Dark et ultra-Dark SPOT sont décomposés en 4 faisceaux horizontaux et 2 faisceaux verticaux. Les faisceaux horizontaux sont le résultat d'un mixage entre faisceau piège et faisceau repompeur latéral, ce dernier possédant un « trou » en son centre (Dark-SPOT). Les faisceaux verticaux sont

le résultat d'un mixage entre faisceau piège et faisceau repompeur central. La dimension du repompeur central est adaptée de façon à correspondre à la taille du « trou » au centre du repompeur latéral. Ainsi, lorsque à la fois le repompeur latéral et le repompeur central sont allumés, le repompeur central vient « boucher le trou » du repompeur latéral, et l'on a un PMO standard. Si l'on éteint le repompeur central, le « trou » du repompeur latéral n'est plus « bouché » et l'on est en présence d'un Dark-SPOT. Si l'on remplace le repompeur central par un faisceau ayant les mêmes propriétés géométriques mais dont la fréquence correspond à celle d'un faisceau dépompeur, on est alors en présence d'un Ultra-Dark-SPOT, le faisceau dépompeur venant en quelque sorte « accentuer » le « trou » du repompeur latéral.

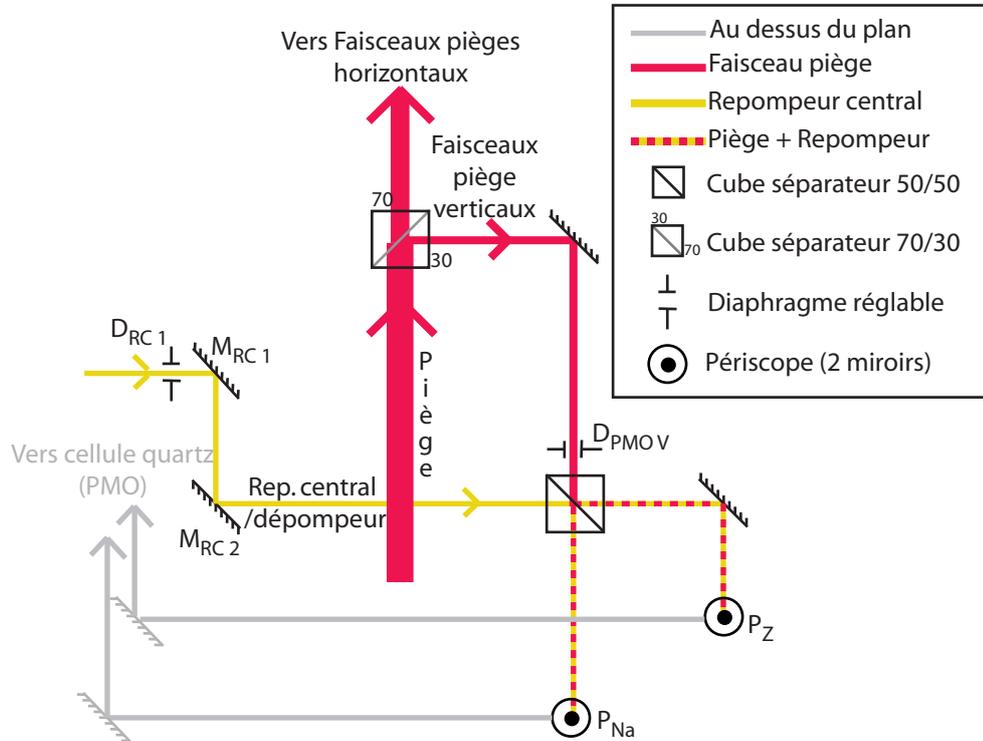


FIG. 2.14 – Schéma du mode de séparation entre faisceaux verticaux (i.e. faisceaux pièges, repompeur central et dépompeur) et faisceaux horizontaux (i.e. faisceaux pièges et repompeur latéral). On pourra se reporter à la figure 2.9 pour le détail du mixage entre le faisceau repompeur central et le faisceau dépompeur.

On a vu dans la partie 2.3.2 comment étaient produits les faisceaux lasers nécessaires. Après passage dans des télescopes permettant d'adapter la taille de chacun des faisceaux produit sur la figure 2.9, les faisceaux sont séparés entre faisceaux verticaux et horizontaux, comme indiqué sur la figure 2.14. Les

faisceaux horizontaux (piège et repompeur latéral) sont alors mixés, séparés en 4, et envoyés vers la cellule en quartz comme indiqué sur la figure 2.15. On notera que le « trou » sans lumière au milieu du repompeur latéral est créé sur les quatre faisceaux horizontaux par imagerie d'un seul cache opaque de façon à ce que son image se trouve exactement à la position du PMO, quel que soit le faisceau considéré. Il est donc important de s'assurer que le trajet optique soit le même pour les quatre faisceaux entre le moment où ils se séparent les uns des autres et le moment où ils se croisent dans la cellule en quartz au niveau du PMO. Ceci est bien assuré sur notre montage par symétrie, à condition que le PMO se trouve à la verticale de l'arrête commune aux trois cubes de séparation présentés sur la figure 2.15. Cette condition n'est cependant pas extrêmement critique, puisqu'il suffit de s'assurer que les éventuelles différences de trajet optique restent négligeables devant la distance optique entre la lentille L_2 (qui assure la conjugaison entre le cache opaque et le PMO) et la position du PMO. Cette condition est très largement réalisée dans notre cas, puisque l'on a moins de 1 cm de différence entre les différents trajets optiques, alors que la distance entre L_2 et le PMO est de l'ordre de 1 m.

Procédure d'alignement :

Le fonctionnement optimal de l'ensemble du dispositif suppose un alignement soigné de tous les faisceaux lasers, ce qui n'est pas forcément trivial à réaliser du fait du grand nombre de faisceaux différents, ainsi que de leurs relativement petits diamètres. Nous indiquons donc ici la procédure simple que nous avons développée et employée tout au long de ces travaux de thèse, et qui a l'avantage de converger extrêmement rapidement vers une position optimale. Celle-ci se base sur l'utilisation conjuguée du diaphragme réglable D_{PMO} , qui diminue la taille de tous les faisceaux PMO, et des diaphragmes D_N , D_E et D_Z , qui chacun diminuent la taille d'un seul des 6 faisceaux. Tous ces diaphragmes, en position fermée ne laissent passer qu'un fin pinceau lumineux, qui permet de définir avec précision le centre du faisceau une fois le diaphragme réouvert. L'idée de base est de s'assurer que le « trou » dans le repompeur latéral est parfaitement symétrique autour des faisceaux PMO horizontaux et que le repompeur central est parfaitement centré sur les faisceaux PMO verticaux. Puis, on assure un parfait centrage des 6 faisceaux PMO par rapport au centre du champ magnétique. Le Dark et l'Ultra-Dark-SPOT sont alors parfaitement bien centrés.

1. Centrage faisceaux PMO sur les diaphragmes de réglage : ajuster au besoin à l'aide des miroirs M_1^{PMO} et M_2^{PMO} .
2. Alignement repompeur latéral sur faisceau PMO : fermer le diaphragme D_{RL} aux limites des dimensions du cache opaque C , Fermer D_{PMO} . Ajuster au besoin M_1^{RL} et M_2^{RL} pour une bonne superposition.

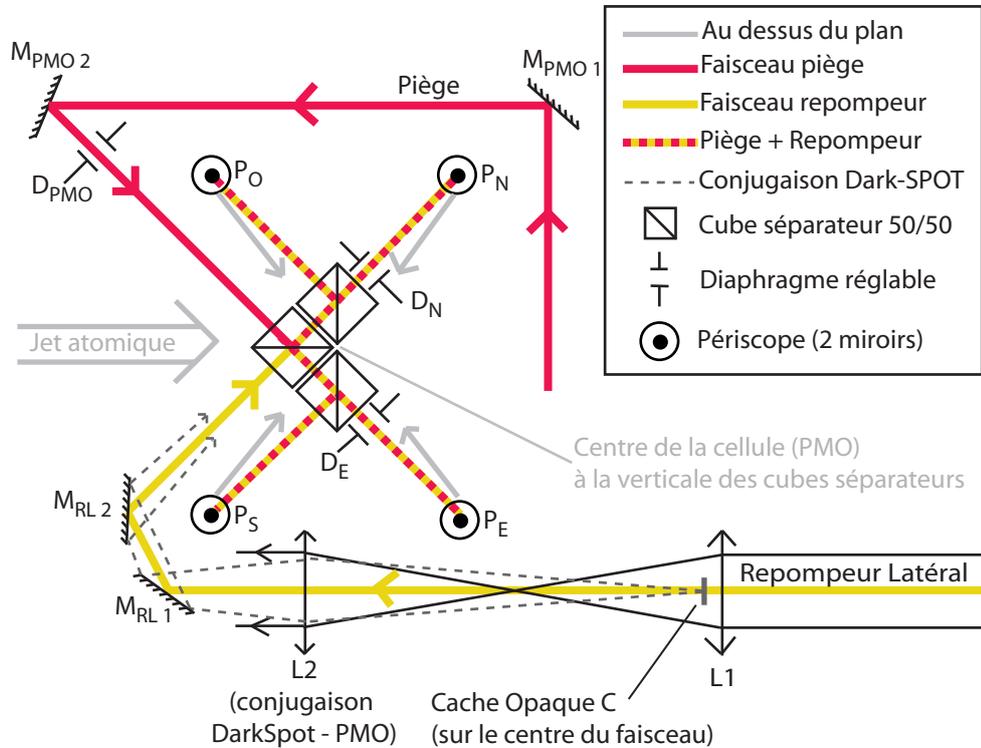


FIG. 2.15 – Schéma de synthèse du cheminement des faisceaux PMO horizontaux. Le système des trois cubes séparateurs 50/50 permet à la fois le mixage entre le faisceau piège et le faisceau repompeur latéral, ainsi que la séparation en 4 faisceaux nécessaires pour le PMO. La lentille L_2 assure la conjugaison entre le dark-spot (cache opaque au centre du faisceau repompeur latéral) et le centre du PMO. On notera que le montage assure, par symétrie, que les trajets optiques sont identiques pour les 4 faisceaux du montage. La lentille L_1 permet de compenser l'effet de la lentille L_2 sur le faisceau repompeur latéral. En effet, l'ensemble $L_1 + L_2$ est monté comme un système afocal. Le faisceau repompeur ressort donc bien parallèle de la lentille L_2 .

3. Alignement repompeur central sur faisceau PMO : fermer le diaphragme D_{RC} , Fermer D_{PMO} . Ajuster au besoin M_1^{RC} et M_2^{RC} pour une bonne superposition.
4. Alignement des faisceaux PMO (ouvrir au préalable les diaphragmes des faisceaux repompeurs) :
 - Ouvrir D_{PMO} , fermer progressivement D_N en jouant sur le miroir du haut du périscope P_N pour maximiser le signal du PMO observé à la caméra. Ceci permet d'assurer la mise en place du faisceau N sur le centre du champ magnétique du PMO).
 - Ouvrir D_N , fermer D_{PMO} , et ajuster les miroirs du périscope P_S pour

assurer la parfaite superposition des faisceaux N et S.

- Procéder de même pour les 2 autres paires de faisceaux.

À l'issue de la phase d'Ultra-Dark-SPOT, nous éteignons le champ magnétique quadrupolaire, ainsi que le dépompeur, et nous allumons tous les repompeurs. Nous désaccordons également le faisceau piège vers le rouge de -46 MHz (par rapport à la transition atomique). Nous obtenons alors une phase de mélasse tri-dimensionnelle qui permet de faire rapidement chuter la température de l'échantillon d'atomes, au prix d'un étalement du nuage atomique. En pratique, la durée optimale de la phase de mélasse est trouvée empiriquement en maximisant le taux de transfert dans le piège magnétique. Notre optimum s'établit à 2 ms environ, ce qui fait tomber la température de l'échantillon à $60 \mu\text{K}$ (mesuré par temps de vol).

2.5 Les deux générations de piège magnétique

Afin de procéder à la phase finale d'évaporation, nous transférons alors les atomes dans un piège magnétique type Ioffe-Pritchard. La spécificité propre de nos montages expérimentaux consiste en l'utilisation de dispositifs à base de ferromagnétiques pour la génération des champs piègeants. L'emploi de ferromagnétiques nous permet de créer des potentiels magnétiques très confinants, tout en n'utilisant qu'une puissance électrique minimale. Ceci permet de s'affranchir des contraintes liées aux courants élevés. Parmi celles-ci, on citera en particulier la plus grande difficulté à stabiliser les sources électriques, ainsi que les problèmes posés par l'évacuation de la chaleur produite par effet Joule (refroidissement à eau pressurisé,...).

Le premier dispositif expérimental (sur lequel l'ensemble des résultats des chapitres suivants a été obtenu) utilisait un électro-aimant « tout ferromagnétique » à biais non-compensé, dit « électro-aimant de deuxième génération ». Pour le nouveau dispositif expérimental, nous avons développé en collaboration avec M. Lécivain du L.é.S.I.R un électro-aimant hybride dit de « quatrième génération » à dipôle non ferromagnétique mais à biais compensé¹¹.

Après l'exposition des notions essentielles sur les pièges de Ioffé-Pritchard, nous exposons dans les paragraphes qui suivent les principales caractéristiques de chacune des deux générations d'électro-aimants sur lesquelles nous avons travaillé.

¹¹Un dispositif de troisième génération a été également développé. Celui-ci est un dispositif « tout ferromagnétique » à biais compensé, qui est utilisé, à l'heure où ces lignes sont écrites, sur le premier dispositif expérimental pour des expériences de condensation en régime très anisotrope. La description de cet électro-aimant, ainsi que des régimes de fonctionnement qu'il permet d'explorer sort du domaine du présent mémoire. On trouvera dans [23] plus d'informations sur ce dispositif.

2.5.1 Piège de Ioffé-Pritchard

Le but est de réaliser une configuration magnétique capable de générer un minimum local *non nul* du module du champ magnétique [35]. L'idée de base est de superposer un champ quadrupolaire linéaire, assurant le confinement radial (suivant x et z), à un champ dipolaire responsable du confinement longitudinal (suivant y) :

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{quad}} + \vec{B}_{\text{dip}} = b' \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \frac{b''}{2} \begin{bmatrix} -xy \\ y^2 - \frac{x^2+z^2}{2} \\ -yz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Le champ quadrupolaire est caractérisé par son gradient b' , et le champ dipolaire par sa courbure b'' et son champ longitudinal B_0 . Le module du champ qui résulte de cette superposition est « semi-linéaire » dans le plan $x = 0$, et harmonique le long de l'axe x (fig. 2.16). Lorsque $b'' \cdot i/2 \ll b'$, où $i \in \{x, y, z\}$ (ce qui est toujours vérifié en pratique pour nos expériences), le module du champ se simplifie en :

$$B(x, y, z) = \sqrt{\left(B_0 + \frac{b''}{2}y^2\right)^2 + \left(b'^2 - \frac{b''}{2}B_0\right)(x^2 + z^2)} \quad (2.5)$$

Autour de l'origine, il vaut, à l'ordre 2 :

$$B = B_0 + b''\frac{y^2}{2} + \left(\frac{b'^2}{B_0} - \frac{b''}{2}\right)\frac{x^2 + z^2}{2} \quad (2.6)$$

Cette expression est valable tant que la taille du nuage reste inférieure à B_0/b' . Au-delà de cette taille, les atomes les plus énergétiques commencent à explorer la partie linéaire du potentiel (fig. 2.16a).

Définition des fréquences d'oscillations

Le potentiel de piégeage U qui s'applique sur les atomes est dû à l'effet Zeeman. En négligeant les termes non linéaires de l'effet Zeeman, il s'écrit donc :

$$U(\vec{r}) = g_F m_F \mu_B B(\vec{r}) \quad (2.7)$$

Dans la partie harmonique du piège, on définit les fréquences d'oscillations selon les trois directions de l'espace :

$$\omega_y = \sqrt{g_F m_F \frac{\mu_B}{m} b''} \quad (2.8)$$

$$\omega_{x,z} = \sqrt{g_F m_F \frac{\mu_B}{m} \left(\frac{b'^2}{B_0} - \frac{b''}{2}\right)} \quad (2.9)$$

On appelle également le *rapport d'anisotropie*, ou *rapport d'aspect* du piège la quantité $\lambda = \omega_y/\omega_{x,z}$. Celui-ci varie comme $\sqrt{b''/(b'^2/B_0 - b''/2)}$.

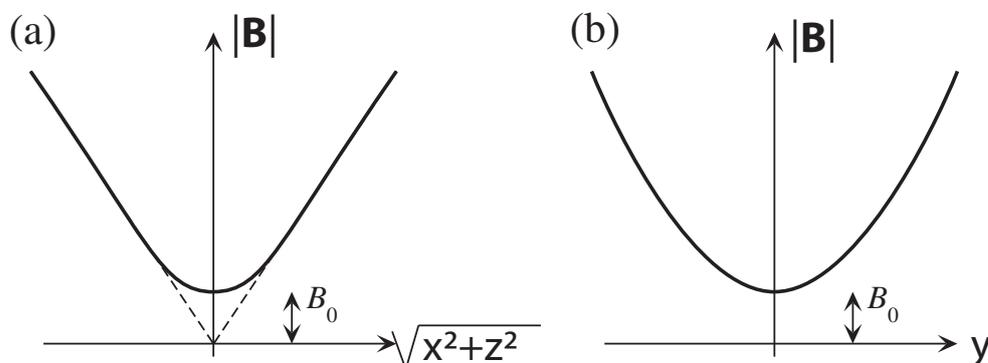


FIG. 2.16 – Potentiel magnétique créé par la superposition d'un gradient linéaire et d'un champ dipolaire. En (a), selon un axe radial du plan $y = 0$, et en (b), selon l'axe du dipôle.

2.5.2 Électroaimant de 2^e génération

2.5.2.1 Description

Concrètement, l'électroaimant de 2^e génération, représenté figure 2.18, est constitué de six pôles de 2 cm de diamètre, chacun excité par une bobine. Ils sont maintenus par une culasse formée de deux tores de 40 cm de diamètre environ, et se croisant à 90° sur l'axe du dipôle. Afin d'éviter l'apparition de courants de Foucault lors de l'établissement et de la coupure du champ, il est nécessaire d'utiliser des matériaux feuilletés. Ainsi, les pôles sont réalisés à partir d'un assemblage de plaques de fer pur de 1 mm d'épaisseur, collées ensemble, alors que la culasse est faite d'un enroulement d'une bande de fer-silicium de 50 μ m d'épaisseur. Les pôles du quadropôle sont biseautés afin d'occuper au mieux l'espace disponible sans réduire pour autant l'accès optique (fig. 2.17). Les pointes en vis-à-vis sont distantes de 2 cm, ce qui permet de laisser la place à la cellule de 1,2 cm d'épaisseur. Les pôles du dipôle sont quant à eux séparés par 3 cm, pour une largeur de cellule de 2,2 cm. Ils sont légèrement tronconiques à leur extrémité pour ménager un passage plus important aux faisceaux du PMO, et sont percés en leur centre d'un trou de 5 mm de diamètre afin de faire passer d'éventuels faisceaux de pompage optique (inutilisé dans toutes les expériences décrites dans ce mémoire).

Les bobines d'excitation consistent en $N = 400$ tours de fil de cuivre de 1,25 mm de diamètre. Elles ont une résistance de 1 Ω chacune, et sont insérées dans un carter en plastique permettant le passage d'un fluide caloporteur. Étant donné la faiblesse de la puissance dissipée — 100 W par bobine au maximum —, nous avons utilisé un simple flux d'air. Les bobines du quadropôle sont alimentées indépendamment de celles du dipôle, afin de

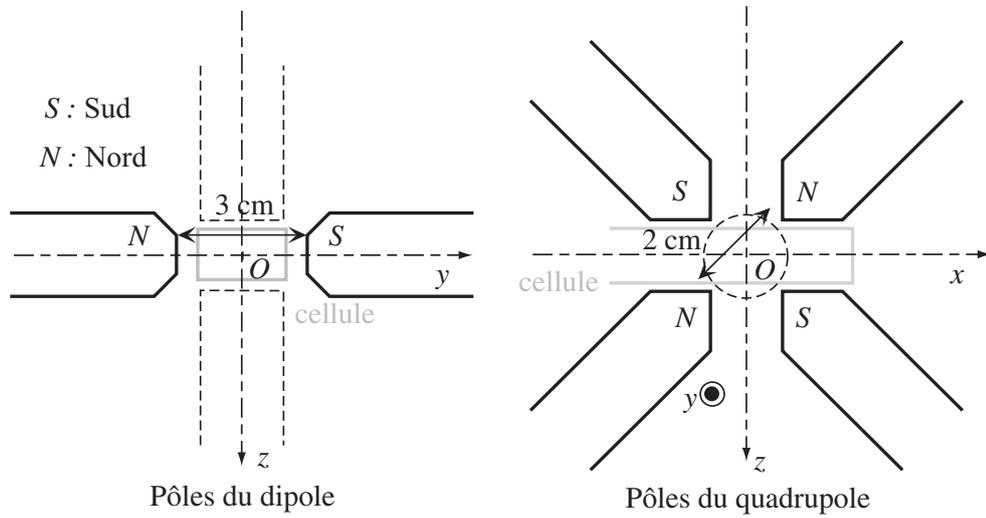


FIG. 2.17 – Géométrie des pôles réalisant une configuration magnétique de type Ioffe-Pritchard pour l'électro-aimant de 2^e génération. Les bobines et la culasse ne sont pas représentées.

pouvoir contrôler séparément la courbure radiale et la courbure longitudinale du potentiel magnétique.

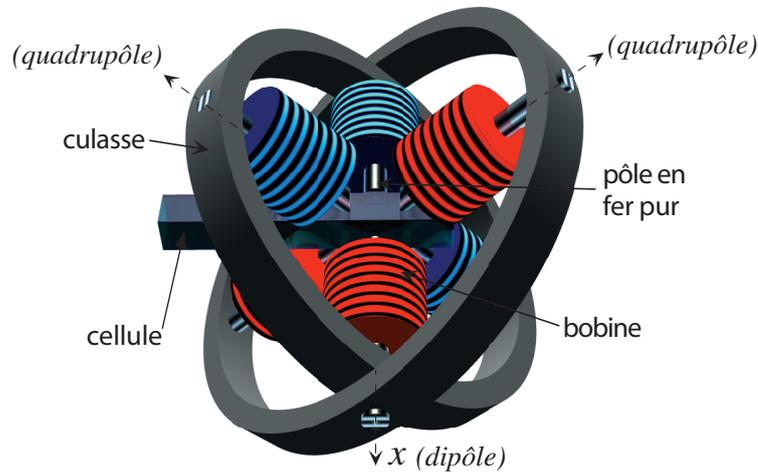


FIG. 2.18 – Vue de l'électroaimant. Seules les bobines principales sont représentées. Les tores de la culasse font environ 40 cm de diamètre.

2.5.2.2 Performances statiques

La valeur maximale (mesurée) du gradient est $1,4 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-1}$, obtenue pour un courant de 15 A. Au delà, le matériau ferromagnétique est saturé, et l'on

ne gagne presque rien à augmenter les courants d'excitations. En pratique, toutes les expériences présentées dans ce mémoire ont été effectuées avec un gradient de $1,2 \text{ kG.cm}^{-1}$ pour un courant quadrupôle de 12 A.

La courbure maximale obtenue dans notre groupe pour cet électroaimant dans la direction dipôle est de 550 G.cm^{-2} , pour un courant de 7 A. Cette valeur correspond à un biais magnétique de 220 G. En effet, il est impossible d'ajuster séparément le biais et la courbure : la courbure b'' et le biais B_0 sont liés par la relation $b''/B_0 = 2 \text{ cm}^{-2}$ (relation imposée par la géométrie des pôles du dipôle). Travailler à fort biais magnétique présente — entre autres — comme inconvénient de rendre encore plus difficile l'obtention d'un biais stable, et d'être moins confinant dans la direction du quadrupôle. Nous nous sommes donc contenté d'une courbure de 108 G.cm^{-2} , lors de la phase d'évaporation, ce qui donne un biais de 54 G pour l'ensemble des expériences décrites dans le présent mémoire. Les fréquences d'oscillations radiales et axiale correspondantes sont respectivement $\omega_{x,z} = 2\pi \times 144 \text{ Hz}$ et $\omega_y = 2\pi \times 9 \text{ Hz}$.

2.5.2.3 Performances dynamiques

Le chargement du piège magnétique s'effectue en libérant les atomes du PMO et en les transférant sur place dans le potentiel magnétique [36]. Il est donc nécessaire de pouvoir commuter rapidement le champ magnétique, avant que le nuage atomique n'ait le temps de s'étendre et de tomber. À la fin de la séquence de refroidissement par laser, décrite précédemment, le nuage fait 2 mm de côté et la vitesse moyenne des atomes est de l'ordre de 10 cm.s^{-1} . Il est donc impératif de les recapturer en 1 ms environ. Le problème de commutation rapide se pose également à la coupure du piège. En effet, il est plus facile d'imager les atomes en champ nul, car les niveaux d'énergie ne sont pas soumis à l'effet Zeeman. Afin de ne pas perturber les atomes durant la coupure, il faut que celle-ci soit soudaine, c'est-à-dire rapide devant la plus petite des périodes d'oscillation des atomes dans le piège. Dans notre expérience, les fréquences ne dépassent pas 100 Hz, donc un temps de coupure de 1 ms convient également.

Le premier pas vers ces temps de commutation courts est l'utilisation de matériaux feuilletés. Ils empêchent les courants de Foucault de se développer dans la masse du matériaux. Ces courants sont particulièrement néfastes, car une fois établis, ils s'amortissent exponentiellement, avec une constante de temps de plusieurs dizaines de millisecondes dans le cas d'un matériau massif.

Il est possible de prédire par le calcul l'ordre de grandeur de la constante de temps de l'évolution des champs magnétiques dus aux courants de Foucault pour un matériaux feuilleté. L'idée de base est que des *variations* du champ magnétique \vec{B} présent sur un matériau conducteur vont créer des

champs électriques \vec{E} . Ceux-ci induisent des déplacements des porteurs de charges ce qui produit des courants électriques. Ces courants électriques (courants de Foucault) vont alors eux même induire des champs magnétiques, qui s'opposent aux variations du champ \vec{B} qui les a provoqués. Du fait de l'équation de Maxwell $\text{rot}(\vec{E}) = -\partial\vec{B}/\partial t$, on sait que, si l'on suppose un champ magnétique homogène dans le matériau ferromagnétique, les courants de Foucault vont s'établir sur des petites spires élémentaires *de forme circulaire*, dont la taille maximale est limitée par les dimensions du feuilletage du matériau (fig. 2.19a). C'est cette *limitation de la taille des spires élémentaires* dans un matériau feuilleté qui permet de diminuer l'effet des courants de Foucault.

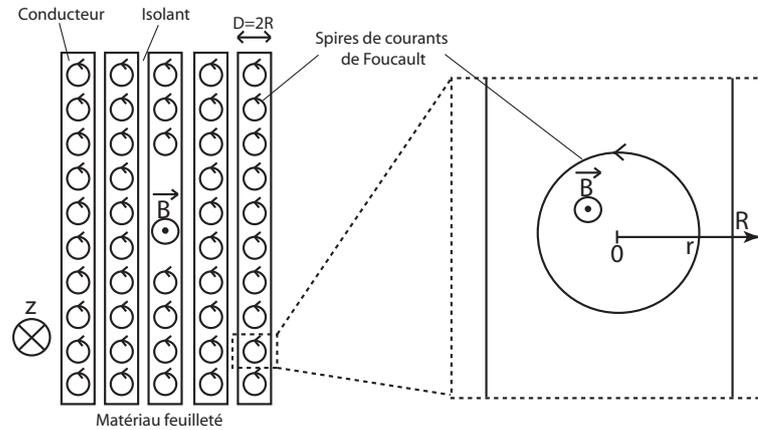


FIG. 2.19 – Représentation schématique des courants de Foucault dans un matériau feuilleté. La taille maximale des spires de courants élémentaires est limitée par l'épaisseur du feuilletage. Les différentes spires de courants de Foucaults induits créent un champ magnétique qui s'oppose à ses variations. Le champ magnétique est supposé homogène dans toute l'épaisseur du matériau.

Pour une spire élémentaire perpendiculaire au champ magnétique \vec{B} , de rayon r , et de section $dr \times dz$, dans un matériau de perméabilité magnétique μ et de résistivité ρ (fig. 2.19b), le courant électrique est :

$$I(r) = -\frac{dz \cdot dr \cdot r}{\rho} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.10)$$

L'ensemble des spires élémentaires, si le rayon maximal possible est noté R , crée donc un champ magnétique :

$$B = \int_0^R \mu \cdot \frac{1}{dz} \cdot I(r) \quad (2.11)$$

$$= -\frac{\mu}{2\rho} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{dB}{dt} \quad (2.12)$$

On obtient donc une constante de temps pour les courants de Foucault dans un matériau de perméabilité magnétique μ et de résistivité ρ , feuilleté avec une épaisseur $D = 2R$:

$$\tau = \frac{\mu D^2}{16\rho} \quad (2.13)$$

La relation 2.13 ne donne en pratique qu'une indication de l'ordre de grandeur de la vitesse de décroissance des courants de Foucault. En effet la perméabilité magnétique va dépendre en réalité de l'excitation magnétique, et va en fait décroître pour un champ magnétique décroissant. Le temps d'amortissement des courants de Foucault va donc accélérer sur la fin d'une coupure des champs magnétiques, et ralentir sur la fin d'une montée des champs magnétiques. En pratique, dans toute la suite on a utilisé les valeurs maximales disponibles dans la littérature, c'est à dire celle obtenue proche de la saturation du matériau. Ceci conduit à surévaluer les temps de commutations des courants de Foucault.

Pour les pôles de l'électro-aimant de 2^e génération, on obtient ainsi ~ 1 ms, et pour la culasse $\sim 8 \mu\text{s}$ (les pôles de l'électro-aimant sont clairement ici le facteur limitant).

La deuxième étape consiste à réaliser la commutation rapide du courant. L'inductance L des circuits dipôle et quadrupôle est très grande¹² (plusieurs dixièmes de Henry), pour une résistance R faible (quelques Ohms). La réponse à un échelon de tension est une variation exponentielle du courant, de constante de temps $L/R \simeq 100$ ms, beaucoup trop longue pour notre application. Nous utilisons donc un dispositif électrique décrit figure 2.20, et basé sur une conversion de l'énergie inductive en énergie capacitive, ou réciproquement. Par exemple pour la montée, on charge une capacité C_1 pendant la phase de remplissage du PMO, puis on la décharge dans les bobines d'inductance L . En un quart de période d'oscillation LC_1 , c'est-à-dire en $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC_1}$, le courant atteint sa valeur maximale, et l'alimentation prend le relais. Le même principe est appliqué à la coupure¹³ : l'énergie magnétostatique est convertie en énergie électrostatique en chargeant une capacité C_2 placée en parallèle avec l'interrupteur. Une diode montée en série empêche le courant de s'inverser. Ici aussi, le temps de coupure représente un quart de période d'oscillation LC_2 . La capacité est déchargée après coup dans une résistance de puissance.

Par cette méthode, et à l'aide de capacités de 0,5 à 1 μF , nous avons obtenu des temps de montée et de coupure de 1 ms. La figure 2.21 représente

¹²En réalité, les phénomènes de saturations des matériaux ferromagnétiques rendent problématique la définition d'une inductance pour ces circuits. On se contente ici de donner la valeur mesurée dans le régime linéaire.

¹³Il est impossible de couper le courant directement sans produire une surtension susceptible de détruire le composant semiconducteur chargé de l'interruption.

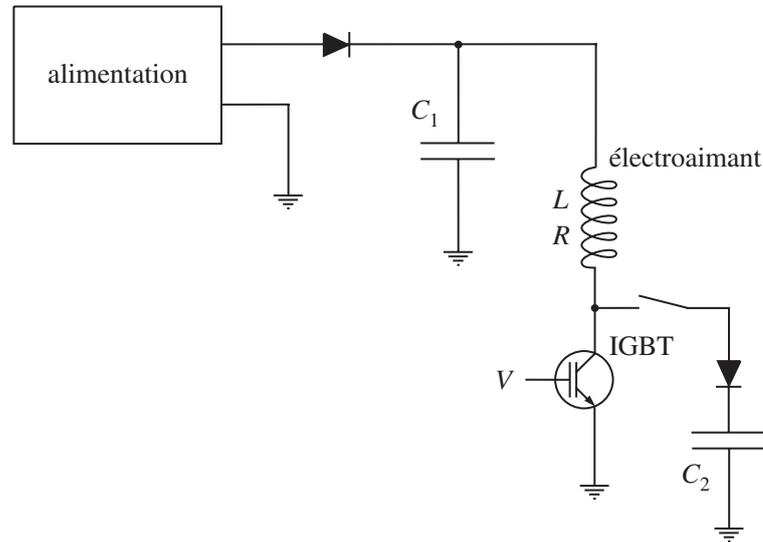


FIG. 2.20 – Circuit d'alimentation de l'électroaimant. Il existe en deux exemplaires, un pour les bobines du dipôle, et un pour celles du quadrupôle. Les capacités C_1 et C_2 servent respectivement à la montée et à la coupure du courant. L'ouverture et la fermeture du circuit se fait grâce au transistor IGBT, piloté par la tension de commande V . La séquence expérimentale est la suivante : on charge la capacité C_1 (avec un dispositif non représenté) jusqu'à ce qu'elle contienne l'énergie $\frac{1}{2}LI^2$, I étant le courant d'alimentation réalisant l'adaptation durant le transfert ; puis on ferme l'IGBT au moment du transfert. En $1/4$ d'oscillation LC_1 , la capacité se décharge dans la bobine L jusqu'à ce que le courant atteigne la valeur I . L'alimentation prend alors le relais. Pour couper le courant, on branche la capacité C_2 sur le circuit, puis on ouvre l'IGBT. Le courant chute en $1/4$ d'oscillation LC_2 , et la diode l'empêche de s'inverser. Puis la capacité est déchargée dans un circuit annexe non représenté.

le profil temporel du champ du dipôle seul, à la coupure. L'approximation de coupure brutale est bien vérifiée. Cependant, il nous est interdit de faire une analyse fiable du nuage durant les 4 premières millisecondes de vol libre, car l'effet Zeeman résiduel change localement le désaccord du laser sonde avec la transition atomique.

2.5.2.4 Problème des compensations de l'hystérésis, champs rémanents

L'un des inconvénients inhérents à l'emploi de matériaux ferromagnétiques est l'existence d'un phénomène d'hystérésis : l'état de magnétisation pour une excitation donnée dépend de l'histoire magnétique du matériau.

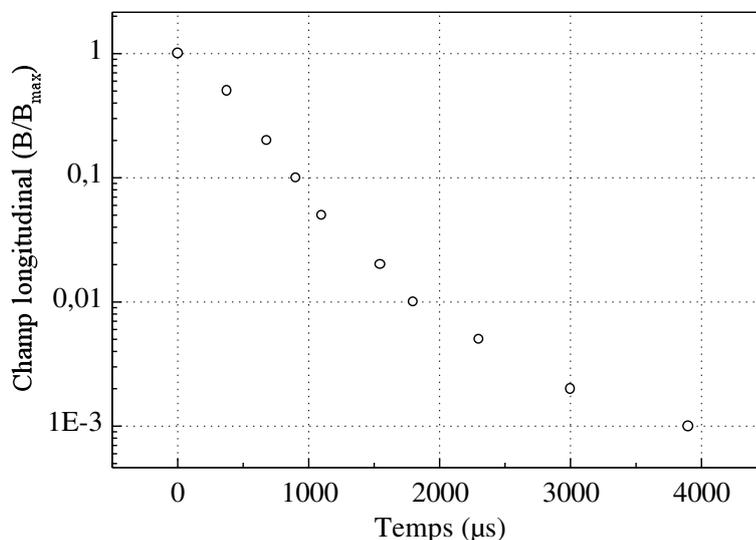


FIG. 2.21 – Profil temporel du champ dipolaire à la coupure. Le champ, mesuré en fraction du champ avant la coupure, est mesuré à l’aide d’une sonde à effet Hall. Le temps est compté à partir de l’ouverture du circuit d’alimentation.

Pour atteindre un niveau de reproductibilité convenable, il est nécessaire de générer régulièrement la même séquence d’excitation, afin de rester sur un cycle d’hystérésis bien défini. Le contrôle de l’expérience par ordinateur permet de satisfaire à ces exigences de régularité. En pratique, une fois que les réglages sont effectués, il faut faire cycloper l’expérience deux ou trois fois pour être certain de se trouver sur un cycle stable.

Par ailleurs, certaines étapes de la production d’un condensat de Bose-Einstein requièrent un champ magnétique quasi-nul. Par exemple, la phase de mélasse optique ne fonctionne qu’en présence d’un champ nettement inférieur à 100 mG. De même, pour une interprétation quantitative des images, il faut que le décalage Zeeman des transitions atomiques dû au champ résiduel soit petit devant la largeur naturelle, ce qui conduit à une condition similaire.

L’annulation du champ rémanent se fait par une excitation *négative* par rapport à l’excitation principale. Nous utilisons de petites bobines supplémentaires, de 10 à 40 tours chacune, appelées “bobines de compensation”, et qui sont parcourues *en permanence* par un courant opposé au courant principal (*i.e* celui qui génère le potentiel de piégeage). En fait, il est nécessaire de compenser également les champs parasites d’origines extérieures, à commencer par le champ magnétique terrestre. Chaque paire de pôles est donc dotée de deux paires de bobines de compensation, l’une en configuration de courant Helmholtz, agissant sur la composante constante du champ parasite, et l’autre en configuration anti-Helmholtz, agissant sur les gradients résiduels.

Le réglage des courants se fait en contrôlant l'expansion du nuage d'atomes dans une phase de mélasse optique. Tant qu'il reste un champ rémanent dans la zone de piégeage, l'expansion n'est pas régulière et isotrope. Cette méthode permet d'annuler les champs résiduels à bien mieux que 100 mG.

2.5.3 Électro-aimant hybride de nouvelle génération

Le nouveau dispositif expérimental utilise un dispositif de génération des champs magnétiques de piégeage quelque peu différent de celui décrit au dessus. Ce dispositif, dit de « 4^e génération » est « hybride » en ce sens qu'il utilise des ferromagnétiques pour la génération du champ quadrupolaire, mais qu'il se contente de simples bobines pour générer le champ magnétique dipolaire.

2.5.3.1 Description

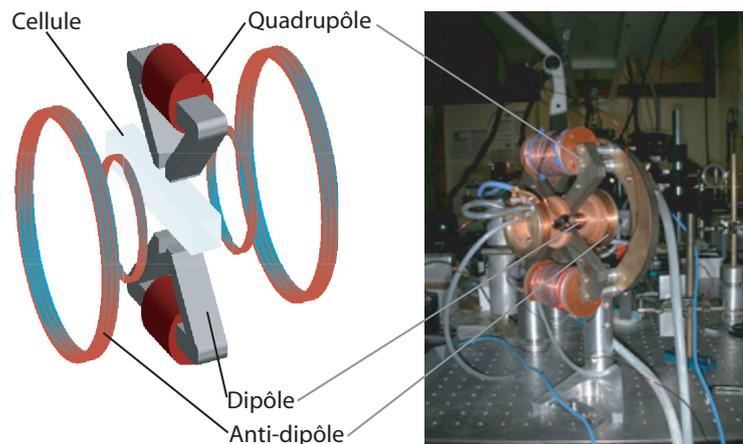


FIG. 2.22 – Schéma et photo de l'électro-aimant de 4^e génération. Le champ dipolaire est créé par de simples bobines, alors que le champ quadrupolaire est créé à l'aide de pôles ferromagnétiques. Le biais magnétique est compensable à l'aide des deux bobines en configuration Helmholtz dites « bobines anti-dipôles ». Les bobines de compensations des champs rémanents sont superposées avec les bobines d'excitation quadrupolaires.

Concrètement, l'électroaimant de 4^e génération est représenté figure 2.22. Il est constitué de deux éléments ferromagnétiques en vis-à-vis créant les 4 pôles du quadrupôle 2 cm de diamètre. Chacun est excité par une bobine de cuivre principale en tube creux de 5 mm de diamètre refroidi à l'eau, plus une bobine secondaire utilisée pour la compensation des champs rémanents. Afin d'éviter l'apparition de courants de Foucault lors de l'établissement et

de la coupure du champ, les pôles ferromagnétiques sont réalisés à partir d'un assemblage de plaques de fer-silicium $100\ \mu\text{m}$ d'épaisseur, découpées au laser puis collées ensemble. Les pôles du quadrupôle sont (comme pour l'électroaimant de 2^e génération) biseautés afin de ne pas réduire l'accès optique. Les pointes en vis-à-vis sont distantes de 2 cm, ce qui permet de laisser la place à la cellule de 1,2 cm d'épaisseur. Les bobines dipôle sont quant à elles de formes coniques (pour gagner en accès optique), et en configuration anti-Helmoltz. Elles sont distantes de 3 cm l'une de l'autre. Une paire de bobines — plus grandes — dites « anti-dipôle » permet la compensation du biais magnétique B_0 . Les bobines dipôles et anti-dipôles sont assemblées solidaires en deux parties symétriques (1 bobine dipôle + 1 bobine anti-dipôle) montées dans un bâti en macor et laiton refroidis à l'eau. Ces deux parties sont maintenues en vis-à-vis et solidaires des pôles quadrupôles à l'aide de 4 vis facilement démontables, ce qui permet de venir monter l'électroaimant directement autour de la cellule en quartz. Par comparaison, l'électroaimant de 2^e génération formait un tout monolithique impossible à monter directement autour de la cellule, ce qui le rendait impossible à utiliser avec une cellule débouchante. L'ensemble des bobines dipôle + anti-dipôle possède en son centre une ouverture circulaire de 1 cm de diamètre qui permet de faire passer des faisceaux sondes pour l'imagerie du nuage d'atome.

2.5.3.2 Principe de la compensation du biais magnétique

Outre la technologie, la différence essentielle apportée par l'électroaimant de 4^e génération est la possibilité de compenser le biais magnétique B_0 , grâce à l'emploi des bobines « anti-dipôle ». Cette technique permet de gagner en pouvoir de confinement du piège, ainsi que d'augmenter les fréquences d'oscillation dans les directions quadrupolaires. On rappelle la formule 2.6 donnant le module du champ magnétique en fonction de la position au voisinage du centre d'un piège de Ioffé-Pritchard :

$$|\vec{B}| = B_0 + \left(\frac{b'^2}{2B_0} - \frac{b''}{2} \right) (y^2 + z^2) + \frac{b''}{2} x^2. \quad (2.14)$$

Il découle immédiatement de 2.14 que la diminution de B_0 — *les autres paramètres restant inchangés* — va augmenter les fréquences radiales ω_y et ω_z , donc le pouvoir de confinement du piège. Cependant, la limite de validité de l'approximation harmonique diminue également quand B_0 diminue, et en pratique, si l'on abaisse trop le biais pour une température donnée, les atomes explorent essentiellement le potentiel semi-linéaire dans les directions radiales, et il devient alors inutile de baisser le biais pour augmenter le pouvoir de confinement du piège.

Le biais B_0 du champ Ioffé est la résultante de deux excitations : le champ des bobines dipôle (qui crée une courbure plus un biais B_0^{Dip} au voisinage

du centre), et les bobines anti-dipôles, qui créent essentiellement un biais opposé B_0^{AD} . Afin d'obtenir une stabilité optimum du biais magnétique total résultant $B_0 = B_0^{\text{Dip}} - B_0^{\text{AD}}$, on aura tout intérêt à alimenter ces deux paires de bobines à partir de *la même alimentation* de courant. En effet, les fluctuations du courant de la source produisent alors des effets opposés sur les fluctuations des deux composantes du biais, qui s'annulent donc presque (« réjection de mode commun »). Plus précisément, si l'on dispose de sources de courant I possédant des fluctuations δI et que l'on alimente les circuits dipôle et anti-dipôle séparément avec deux de ces sources ($I_{\text{Dip}}, \delta I_{\text{Dip}}$) et ($I_{\text{AD}}, \delta I_{\text{AD}}$), on obtient des fluctuations du biais de :

$$\delta B_0 = B_0^{\text{Dip}} \cdot \frac{\delta I_{\text{Dip}}}{I_{\text{Dip}}} + B_0^{\text{AD}} \cdot \frac{\delta I_{\text{AD}}}{I_{\text{AD}}} \quad (2.15)$$

$$\sim \left(B_0^{\text{Dip}} + B_0^{\text{AD}} \right) \frac{\delta I}{I} \quad (2.16)$$

Par contre, si l'on utilise la même source ($I, \delta I$) pour alimenter les deux paires de bobines, on a :

$$\delta B_0 = (B_0^{\text{Dip}} - B_0^{\text{AD}}) \cdot \frac{\delta I}{I} \quad (2.17)$$

et l'on gagne alors un facteur pouvant dépasser deux ordres de grandeur en stabilité en abaissant le biais $B_0 = B_0^{\text{Dip}} - B_0^{\text{AD}}$.

2.5.3.3 Circuit de commande

Le circuit de commande de l'électro-aimant de 4^e génération doit donc répondre à plusieurs impératifs :

- montée rapide des champs magnétiques
- coupure rapide des champs magnétiques sans destruction des semi-conducteurs du circuit de contrôle
- alimentation du dipôle et de l'antidipôle par une *source unique* pour assurer la réjection de mode commun
- passage adiabatique (*i.e.* suffisamment lent) de la configuration de champ qui assure le meilleur transfert des atomes dans le piège magnétique vers celle qui donne les conditions optimales pour l'évaporation

Par ailleurs, nous nous sommes aperçus que l'eau de refroidissement des bobines d'excitations quadripôles provoquait un léger couplage résistif entre celles-ci et la terre. Il nous a donc fallu en tenir compte lors de la conception du circuit de commande. Ceci est un point qui n'était pas apparu lors de la conception des électro-aimants précédents car ceux-ci n'étaient refroidis qu'avec un flux d'air non conducteur. Le circuit de commande doit donc être conçu de façon à pouvoir s'accommoder d'un couplage résistif entre les bobines d'excitation quadripôle et la terre, léger certes, mais bien réel, et

qui plus est variable dans le temps. En effet, nous avons observé que la conductivité de l'eau pouvait varier considérablement en fonction des périodes de l'année. La solution utilisée nécessite une commande flottante de l'IGBT de commutation, ce qui est réalisé grâce à un circuit à base d'optocoupleur.

Le schéma du circuit de montage des champs pour le quadripôle est présenté figure 2.23 La séquence expérimentale est la suivante :

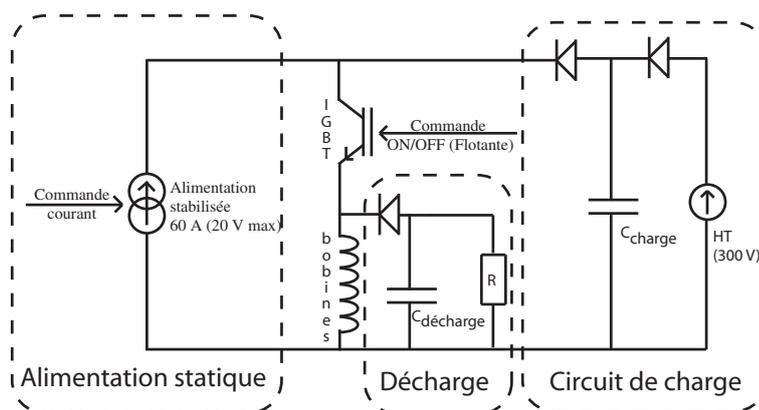


FIG. 2.23 – Circuit d'alimentation du quadripôle de l'électroaimant de 4^e génération. Les capacités C_{charge} et $C_{\text{décharge}}$ servent respectivement à la montée et à la coupure du courant. L'ouverture et la fermeture du circuit se fait grâce au transistor IGBT, piloté en flottant par l'intermédiaire d'un optocoupleur. Cette même commande désactive l'alimentation HT lorsque l'IGBT est passant.

1. L'électro-aimant étant éteint, la capacité C_{charge} est chargée avec la tension HT réglable.
2. Le signal de commutation est envoyé, l'IGBT devient passant et l'alimentation HT est désactivée (tension nulle à ses bornes). La capacité C_{charge} se décharge dans les bobines quadripôles en 1/4 de période. La diode empêche de continuer l'oscillation au delà d'un quart de période.
3. Une fois le courant établi, l'alimentation de courant stabilisée statique prend le relais. L'ajustement optimal du circuit de montée consiste à régler la tension HT de charge de la capacité C_{charge} de sorte qu'elle emmagasine une énergie électro-statique égale à l'énergie magnétostatique des bobines quadripôles parcourues par un courant I statique après la montée des champs
4. Éventuellement, on peut alors modifier lentement le courant dans les bobines quadripôles en jouant sur la commande courant de l'alimentation statique.

5. Pour la coupure, l'IGBT est ouvert. L'énergie magnétostatique emmagasinée dans les bobines quadrupôles se transfère alors en $1/4$ de période dans la capacité $C_{\text{décharge}}$. La diode empêche de continuer l'oscillation au delà de $1/4$ de période.
6. La capacité $C_{\text{décharge}}$ se décharge alors lentement dans la résistance R (perte d'énergie par effet Joule). En parallèle, l'alimentation HT est réactivée (tension de environ 300 V à ses bornes) et recharge (lentement) la capacité C_{charge} pour un nouveau cycle.

Le circuit de commande des bobines dipôles est un peu plus compliqué, car on veut pouvoir ajuster le biais magnétique entre une valeur donnée pour le chargement et une autre valeur pour l'évaporation (voir plus loin) tout en n'utilisant qu'une seule alimentation de courant (réjection de mode commun). En pratique, on effectue le chargement sans alimenter les bobines anti-dipôles, puis on met progressivement en série les bobines dipôles et les bobines anti-dipôles. Le schéma du circuit de montée des champs pour le quadrupôle est présenté figure 2.24 La séquence expérimentale est la suivante :

1. L'électro-aimant étant éteint, la capacité C_{charge} est chargée avec la tension HT réglable.
2. Le signal de commutation est envoyé, l'IGBT devient passant et l'alimentation HT devient inopérante. La capacité C_{charge} se décharge dans les bobines dipôles.
3. Une fois le courant établi, l'alimentation de courant stabilisée statique prend le relais, et le relais D commute le circuit de commande automatiquement sur le circuit de compensation du biais. Celui-ci est initialement dans la configuration MOSFET 1 passant et MOSFET 2 bloquant. La commutation ne change donc rien au courant dans les bobines.
4. Éventuellement, on peut alors modifier lentement le courant dans les bobines en jouant sur la commande courant de l'alimentation statique.
5. La compensation du biais (alimentation des bobines anti-dipôle) se fait alors en appliquant une rampe de tension sur une entrée dédiée du circuit. Cette rampe, par l'intermédiaire d'un circuit de contrôle non représenté, provoque le passage progressif de la position MOSFET 1 ouvert, MOSFET 2 fermé à la position MOSFET 1 fermé, MOSFET 2 ouvert. Les bobines anti-dipôles sont donc mises progressivement en série avec les bobines dipôles (même courant d'alimentation \rightarrow réjection de mode commun). Si l'on ne désire pas utiliser la compensation dipôle, il suffit de mettre les bobines anti-dipôles en court-circuit.
6. Une fois la mise en série des bobines dipôles et anti-dipôles effectuée, le relais D est commuté, et l'électro-aimant est alors prêt à être déchargé.

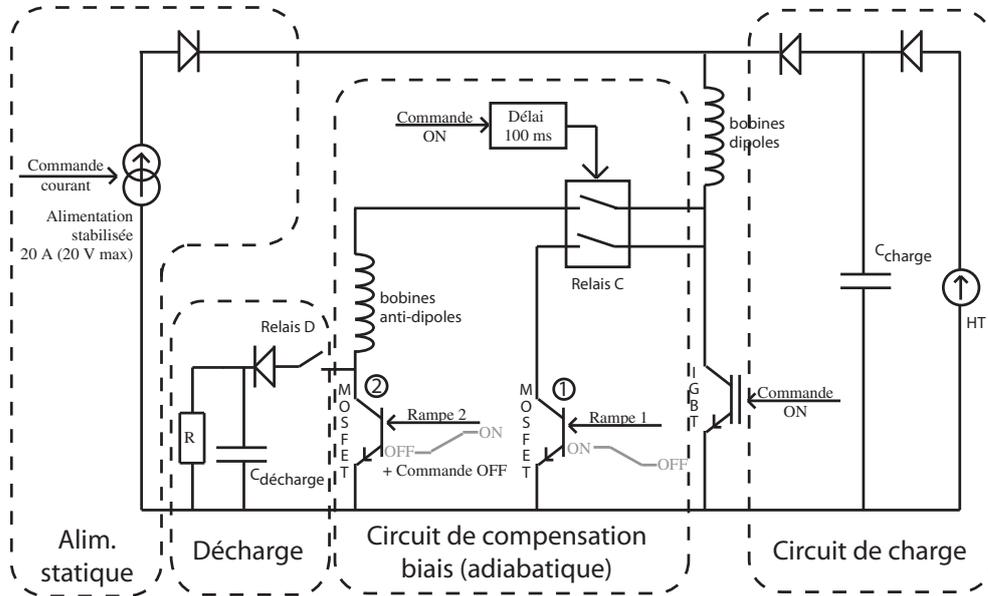


FIG. 2.24 – Circuit d'alimentation du dipôle + anti-dipôle de l'électroaimant de 4^e génération. Les capacités C_{charge} et $C_{\text{décharge}}$ servent respectivement à la montée et à la coupure du courant. L'ouverture se fait grâce au transistor IGBT. Après temporisation de 100 ms, on passe ensuite automatiquement sur le circuit de compensation biais par l'intermédiaire du relais C. L'application d'une rampe de contrôle lente sur le circuit provoque le passage progressif du courant dans les bobines anti-dipôles. La décharge est initiée par le blocage brutal du transistor MOSFET 2, après commutation du relais de décharge D.

7. La décharge du circuit s'effectue en bloquant le MOSFET 2. L'énergie magnétique se transvase alors dans la capacité $C_{\text{décharge}}$, puis est éliminée par effet Joule dans la résistance R .

2.5.3.4 Performances statiques

Le gradient maximal obtenu en statique pour le quadrupôle pour un courant saturant de 60 A est de 900 G/cm. La courbure maximale du dipôle (limitée par l'efficacité d'évacuation de la chaleur produite par effet Joule) est de 100 G/cm², pour un biais compensé de 7 G (pour 15 A dans les bobines dipôles et anti-dipôles). Les fréquences d'oscillations maximales correspondantes au centre du piège sont de 55 Hz et 1,8 kHz pour les directions respectivement axiale et transverses. L'ensemble de ces valeurs a été mesuré à l'aide d'une sonde à effet Hall calibrée et montée sur platines de translation (selon les trois directions de l'espace).

2.5.3.5 Performances dynamiques

Les pôles ferromagnétiques de l'électroaimant de 4^e génération sont feuilletés avec des lamelles de $100 \mu\text{m}$ d'épaisseur en fer-silicium. La constante de temps des courants de Foucault calculée à l'aide de la relation 2.13 est alors de $\sim 30 \mu\text{s}$. Les courants de Foucault ne sont donc plus un facteur limitant pour les temps de commutation de cette génération d'électro-aimant.

Avec des capacités de charge et de décharge de $1 \mu\text{F}$ pour le dipôle et le quadrupôle, et des tensions de charges de 300V , nous obtenons des temps de commutations (mesurés) inférieurs à $150 \mu\text{s}$. On pourrait imaginer aller plus loin en utilisant des composants différents pour les électroniques de commande, mais cela ne nous a pas semblé nécessaire au vu des performances obtenues, qui sont déjà largement suffisantes pour nos applications.

2.6 Transfert en piège magnétique et compression adiabatique

Le transfert de l'échantillon froid et dense d'atomes dans l'un ou l'autre des pièges magnétiques s'effectue par recapture rapide. Autrement dit, on coupe tous les lasers de la phase finale de mélasse optique, et on allume le piège magnétique aussi vite que possible afin de capturer le maximum d'atomes. Notons que l'ensemble des expériences présentées dans ce mémoire utilise des atomes dans l'état $|5S^{1/2}, F = 1 \rangle$ dans le piège magnétique. On envoie donc un pulse de laser dépompeur (cf. figure 2.14) juste avant le chargement du piège magnétique pour s'assurer que les atomes sont bien dans le bon état hyperfin.

Afin d'adapter au mieux la forme du piège magnétique à l'échantillon d'atomes à piéger, on utilise un piège harmonique dans les trois directions de l'espace (en particulier, pas de compensation du biais lors du chargement pour l'électro-aimant de 4^e génération). Les courbures du piège sont adaptées afin que les largeurs quadratiques moyennes (RMS) du nuage avant et après transfert soient conservées pour les trois directions de l'espace.

Par ailleurs, le paramètre le plus critique en pratique pour une bonne qualité de transfert est la bonne adaptation en *position* entre le centre du piège magnétique et celui de l'échantillon d'atomes à recapter. Ceci est dû au fait qu'un défaut d'adaptation des centres a pour résultat, après transfert en piège magnétique, une énergie potentielle non nulle du nuage dans le piège (puisque le centre de masse du nuage n'est pas au centre du piège). Cette énergie « globale » est ensuite redistribuée entre les atomes ce qui provoque un chauffage dramatique. En pratique, on procède par essais successifs en observant les positions centrales des nuages d'atomes avant et après transfert

dans les trois directions de l'espace. Le cas échéant, on ajuste les positions des bobines PMO pour recentrer celui-ci sur le piège magnétique. Nous devons ajuster les positions des centres respectifs à mieux que $20\ \mu\text{m}$ près, soit 1 % de la largeur RMS des nuages atomiques pour une bonne efficacité de transfert¹⁴.

Il est à noter que nous n'utilisons pas d'étape de pompage optique Zeeman pour polariser l'échantillon d'atomes à piéger. En effet, ce processus assez délicat à mettre en oeuvre est relativement peu efficace quand on l'applique à un échantillon optiquement épais (voir [23]). On peut donc au mieux espérer une probabilité de transfert de l'ordre de 30 %. En réalité, nous n'avons jamais réussis à transférer plus de 20 % des atomes dans le piège magnétique. Ceci nous conduit à environ 5.10^8 atomes dans le piège magnétique après transfert. Cette valeur est néanmoins largement suffisante pour aboutir en fin d'évaporation à la condensation de Bose-Einstein.

Les caractéristiques du piège étaient jusqu'ici optimisées pour maximiser le transfert des atomes. Cependant, il est souhaitable de modifier ses caractéristiques avant la phase d'évaporation afin d'optimiser son efficacité. L'idée de base consiste à augmenter le pouvoir de confinement du piège pour augmenter les densités atomiques et donc le taux de collisions élastiques. Ceci permet de diminuer le temps nécessaire à la thermalisation des atomes, donc d'évaporer plus rapidement. En pratique, nous obtenons après transfert un taux de collisions élastiques de l'ordre de $4\ \text{s}^{-1}$ (au centre du piège). La durée de vie (limitée par le gaz résiduel) mesurée est de 200 secondes. Une étude détaillée des conditions de bon fonctionnement de l'évaporation est effectuée dans [24]. Le critère essentiel de bon fonctionnement de l'évaporation est que le produit de la durée de vie par le taux de collisions élastiques au début de l'évaporation soit supérieur à 300. Ceci est vérifié dans notre cas. Cependant, on veut diminuer le temps d'évaporation au maximum (on ne veut pas se contenter d'évaporer en un temps du même ordre de grandeur que la durée de vie...). On procède donc à une compression adiabatique du piège. Ceci se fait avec l'électro-aimant de 2^e génération en augmentant le gradient quadrupôle au maximum, et en diminuant quelque peu l'excitation des bobines dipôles. Ceci diminue la courbure dipôle (ce qui n'est pas favorable pour la compression), mais abaisse également le biais, ce qui accroît le pouvoir de compression dans les directions quadrupôles (voir encore [24] pour le fonctionnement détaillé de la compression adiabatique). Nous obtenons alors classiquement un taux de collisions élastiques de l'ordre de $30\ \text{s}^{-1}$, suffisant

¹⁴La procédure d'ajustement des positions est assez laborieuse, car elle nécessite en principe de rectifier les centrages des faisceaux PMO et surtout repompeurs central et latéral à chaque itération (centrage du Dark-Spot). En pratique quand les corrections de positions sont petites (<10 % de la taille du nuage), on peut se contenter de ne retoucher les réglages du Dark-SPOT qu'à la fin de la procédure

pour évaporer en quelques dizaines de secondes.

Pour la 4^e génération d'électro-aimant, on augmente également le quadripôle au maximum. Pour la direction dipôle, on dispose de la possibilité de découpler le biais de courbure. On peut donc augmenter la courbure au maximum, tout en utilisant les bobines anti-dipôle pour diminuer le biais et ainsi continuer à gagner sur tous les plans (voir 2.5.3).

2.7 Évaporation radio-fréquence

La dernière étape pour obtenir la condensation de Bose-Einstein est celle de l'évaporation radio-fréquence. Une étude systématique poussée de ce processus est effectuée dans [24] auquel le lecteur se reportera pour de plus amples informations. On se contente ici de rappeler les idées générales.

2.7.1 Principe de l'évaporation

L'idée de base du refroidissement évaporatif est d'effectuer une sélection en énergie des atomes les plus chauds, et de les enlever du piège. Les atomes restant se rethermalisent par le truchement des collisions élastiques, et la température finale est alors plus faible que la température initiale. Le processus d'évaporation permet donc de refroidir l'échantillon au prix d'une perte d'atomes.

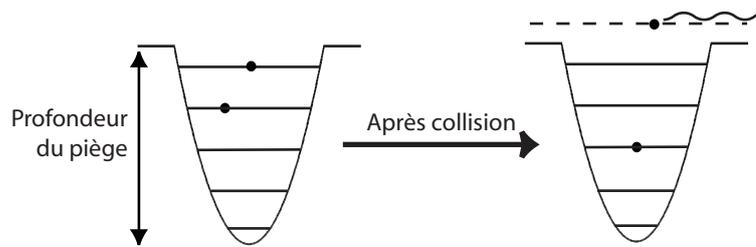


FIG. 2.25 – Principe de l'évaporation dans un piège tronqué. Après une collision élastique, un des atomes acquiert une énergie suffisante pour quitter le piège. L'autre reste piégé avec une énergie plus faible. Après rethermalisation, la température globale s'est abaissée au cours du processus, au prix d'une perte d'atomes.

La sélection des atomes les plus chauds se fait par troncature du potentiel de piégeage à une hauteur supérieure à l'énergie moyenne $3/2 k_B T$ des atomes de l'échantillon. Au cours d'une collision élastique entre deux atomes piégés dans le piège tronqué, il peut arriver que l'un des atomes acquière une énergie supérieure à la hauteur de la troncature. Il est alors éjecté du piège. Par conservation de l'énergie, l'autre atome voit son énergie diminuer fortement,

et l'énergie moyenne par atome piégé s'est abaissée au cours du processus (fig. 2.25). En pratique, la troncature du potentiel se fait par application d'un champ radio-fréquence de pulsation ω_{RF} provoquant un couplage entre l'état piégé et un état anti-piégé, éventuellement par l'intermédiaire d'états relais (voir fig. 2.26 pour le schéma d'évaporation utilisé dans toutes les expériences décrites dans ce mémoire). Le potentiel de piégeage est alors tronqué à la position de résonance de l'onde radio-fréquence si l'amplitude de l'onde RF est suffisante pour assurer une probabilité de transition proche de 1.

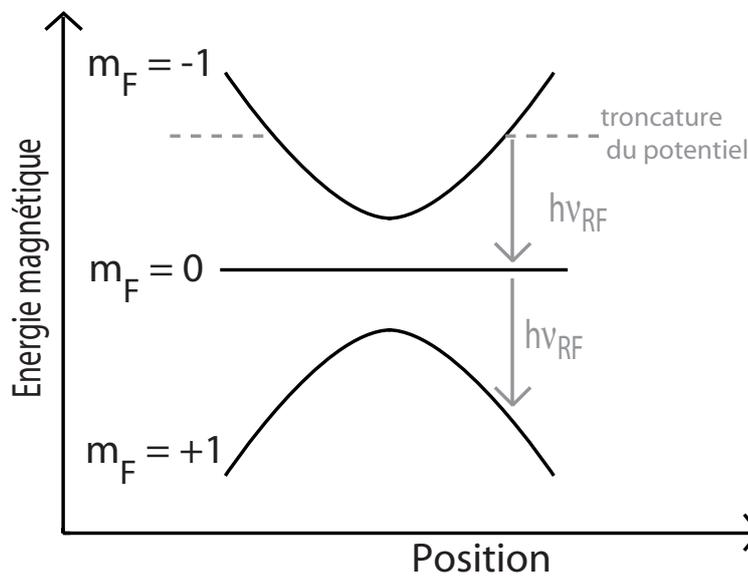


FIG. 2.26 – Évaporation radio-fréquence dans un piège magnétique. L'onde RF appliquée couple les atomes piégés dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ vers l'état $|F = 1, m_F = +1\rangle$ qui est anti-piégeant, par l'intermédiaire de l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$. Si l'intensité de l'onde RF est assez forte pour assurer une probabilité de transition proche de 1, le potentiel de piégeage est alors tronqué à la position de résonance de l'onde radio-fréquence. Dans les faits, la partie non linéaire de l'effet Zeeman perturbe ce schéma d'évaporation. Ceci empêche en particulier de le généraliser à l'état $|F = 2\rangle$ (voir les références [24, 23, 37, 22, 26] à ce sujet).

2.7.2 Évaporation forcée, régime d'emballement

Les conditions de fonctionnement de l'évaporation vont grandement dépendre de la hauteur de la troncature du potentiel par rapport à l'énergie moyenne des atomes piégés $3k_{\text{B}}T$. On définit le paramètre η tel que la troncature se trouve à une hauteur $\eta k_{\text{B}}T$. Intuitivement, il est clair que plus η sera grand, plus les atomes évaporés emporteront une énergie grande, et donc

plus le refroidissement sera efficace. Par contre, la probabilité d'évaporation sera d'autant plus faible, et l'évaporation sera donc plus lente. Comme on ne dispose que d'une durée de vie finie des atomes dans le piège, on doit donc trouver un compromis sur η entre vitesse et efficacité. Par ailleurs, la température diminuant au cours de l'évaporation, la fréquence de l'onde radio-fréquence devra être diminuée au fur et à mesure afin de conserver η au voisinage de ce compromis. On parle alors d'*évaporation forcée*.

Pour η suffisamment grand ($\eta > 4$), on peut montrer que, au cours de l'évaporation, la température diminue plus vite que le nombre d'atomes. Dans cette gamme de régime, le paramètre de dégénérescence augmente donc, et on peut espérer atteindre la condensation de Bose-Einstein.

On peut également montrer que, pour $\eta > 6$, non seulement le paramètre de dégénérescence augmente, mais le taux de collisions élastiques aussi. C'est le *régime d'emballlement*, qui se traduit par une amélioration des performances de l'évaporation au fur et à mesure du refroidissement. C'est ce régime seul qui permet en pratique d'obtenir les très basses températures nécessaires à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein avec un grand nombre d'atomes [32].

2.8 Systèmes d'imageries

Un dernier point expérimental qui mérite d'être abordé ici est la technique permettant d'imager les phénomènes physiques obtenus. Nous procédons par simple imagerie d'absorption après extinction du piège magnétique et temps de vol. Lors de la phase d'imagerie, les atomes ne sont donc plus soumis à des champs magnétiques.

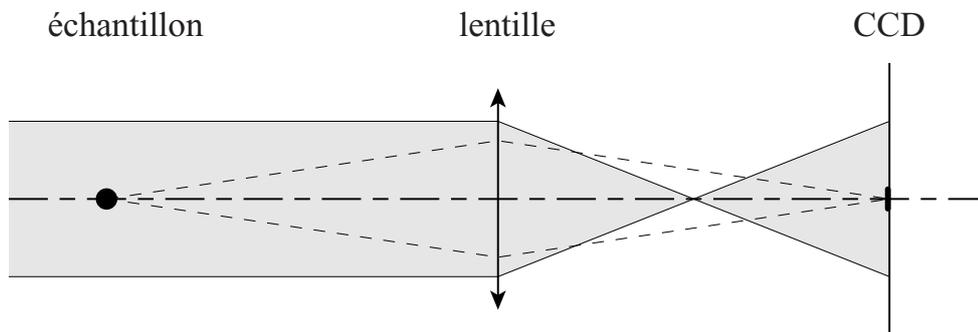


FIG. 2.27 – *Principe de l'imagerie par absorption.*

Le principe de l'imagerie par absorption, illustré sur la figure 2.27, est très simple : l'image du nuage éclairé par un laser proche de résonance est réalisée sur une matrice CCD. Nous observons l'image de « l'ombre » des atomes :

l'intensité de la sonde en un point est réduite d'un facteur qui dépend de la densité du nuage traversé par la sonde.

La variation d'intensité dI de la sonde à la traversée d'une tranche d'épaisseur dl de densité $n(z)$ est donnée par une loi de type Beer-Lambert $I = -I(z) \cdot n(z) \sigma dl$ où σ est la section efficace de diffusion. Le laser sonde est désaccordé d'une valeur ajustable δ par rapport à la transition ($F = 2 \rightarrow F' = 3$). Pour une sonde non-saturante nous avons :

$$\sigma(\delta) = C \times \frac{3\lambda^2}{2\pi} \times \frac{1}{1 + (2\delta/\Gamma)^2} \quad (2.18)$$

où $\lambda = 780$ nm est la longueur d'onde, $\Gamma = 5,9$ MHz est la largeur naturelle et C est une constante liée à la polarisation et aux effets de pompage [38]. Ce dernier coefficient n'est pas parfaitement maîtrisé, dans le PMO comme dans le piège magnétique. Nous l'estimons *a priori* à environ 1/2.

Notons cependant que, pour le cas d'un condensat de Bose-Einstein, il est possible d'obtenir une calibration absolue du nombre d'atome en utilisant l'approximation de Thomas-Fermi et la connaissance des courbures du piège [39].

Afin de pouvoir échanger plusieurs photons de sonde par atome (ce qui permet d'améliorer le rapport signal à bruit), nous sondons sur la transition fermée $F = 2 \rightarrow F' = 3$. En revanche, pour imager les atomes qui sont dans $F = 1$, il faut d'abord les repomper dans $F = 2$ avant de prendre l'image. Pour chaque réalisation expérimentale, nous prenons deux images. La première avec les atomes, correspondant au phénomène à observer, la deuxième quelques centaines de millisecondes plus tard (quand les atomes ont eu le temps de sortir du champ), correspondant au « fond blanc ». La division de ces deux images permet d'obtenir directement l'absorption du nuage d'atomes, en supprimant les effets d'inhomogénéité de l'éclairement.

Sur le premier dispositif expérimental, nous avons installé deux systèmes optiques. Le premier sonde verticalement, avec un léger angle de parallaxe. Il permet d'observer un plan horizontal. Le second est horizontal. Il est employé pour les phénomènes où la gravité joue un rôle (ce qui est en particulier le cas pour les lasers à atomes étudiés dans ce mémoire). Le manque d'accès optique nous a obligé pour ce dernier à utiliser des astuces pour faire passer le faisceau sonde au même endroit que l'un des faisceaux PMO horizontaux. Dans une première tentative, nous avons utilisé un miroir escamotable motorisé NewFocus©. Malheureusement, le grand nombre de commutations de ce « flipper » lors d'une journée d'expérimentation s'est révélé rapidement fatal au dispositif de motorisation. Nous avons finalement utilisé un mixage de type optique jouant sur les polarisations des faisceaux, à l'aide de cubes séparateurs de polarisations (fig 2.28). Le fait d'utiliser un cube de verre de 2,5 cm d'épaisseur au milieu du trajet optique introduit un léger résidu

d'aberration sphérique (sur les faisceaux diffractés formant l'image) que nous n'avons pas corrigé. Ceci produit une taille de la réponse percussive du système d'imagerie de l'ordre de $7\ \mu\text{m}$, à comparer aux $2\ \mu\text{m}$ pour la limite de diffraction. La résolution du système n'est alors pas optimum, mais elle est en pratique suffisante pour les images de laser à atomes. En effet, pour ces images, on désire un champ relativement grand donc un grandissement faible. Pour nos valeurs expérimentales, la taille de la tache d'aberration sphérique est alors de l'ordre ou inférieure à l'écart entre deux pixels de la caméra utilisée.

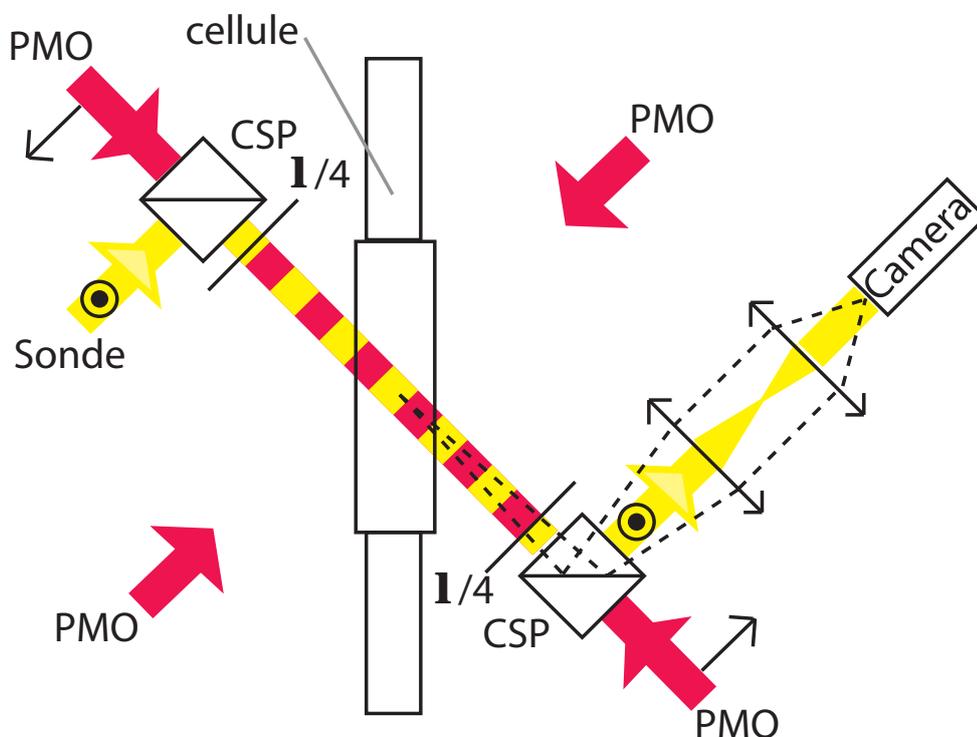


FIG. 2.28 – Principe du mixage entre un faisceau PMO et le faisceau d'imagerie horizontale. Les CSP sont des cubes séparateurs de polarisation.

2.9 Condensation de Bose-Einstein

Et je vis au dessus de ma tête un point noir
Il semblait comme une mouche dans la pénombre

Victor Hugo¹⁵

¹⁵in « Dieu »

Après des séquences d'évaporation forcée de l'ordre de quelques dizaines de secondes, on finit par arriver à obtenir un paramètre de dégénérescence de l'ordre de 1. Le phénomène de condensation de Bose se produit alors. Il se traduit par l'apparition d'une double structure (fig. 2.29). La structure plus dense au centre correspond aux atomes condensés. Les atomes thermiques sont situés à la périphérie du condensat dans les images en temps de vol, puisqu'ils subissent une expansion balistique plus importante. En continuant l'évaporation après l'apparition de la double structure, on finit par faire quasiment totalement disparaître les atomes du nuage thermiques au profit du condensat de Bose-Einstein. On parle alors de *condensats purs*. Nous obtenons typiquement des condensats purs de jusqu'à $5 \cdot 10^5$ atomes à l'issue de l'ensemble des techniques expérimentales développés dans ce qui précède.

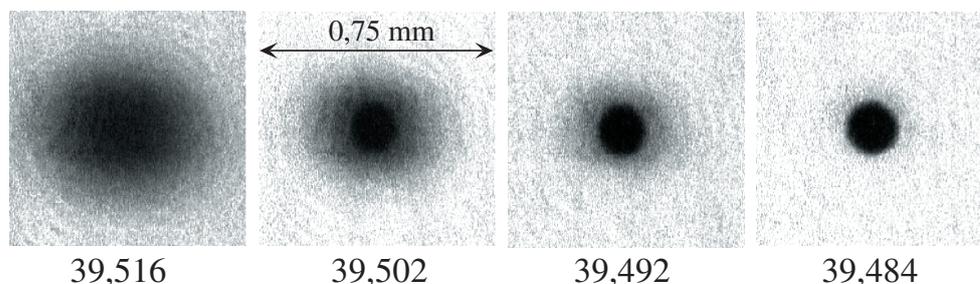


FIG. 2.29 – Images du nuage d'atomes après un temps de vol de 22 ms, en fonction de la fréquence de fin de rampe d'évaporation (en MHz). La condensation se traduit par l'apparition d'une double structure. La première image est celle d'un nuage thermique, la dernière montre un condensat presque pur.

Les lasers à atomes : revue, description théorique et réalisation pratique

Le laser est une merveilleuse solution à la recherche d'un problème à résoudre

origine incertaine, attribuée à Arthur L. Schawlow

Les atomes dans un piège magnétique constituent un analogue au confinement des photons dans une cavité en optique. Le phénomène de condensation, caractérisé par une population macroscopique d'atomes dans le même état quantique, s'apparente par bien des aspects à l'effet laser optique. Dans celui-ci, un milieu de gain oblige (par amplification bosonique) une population macroscopique de photons à se placer dans le même mode de la cavité. Pour le condensat, c'est la statistique de Bose à basse température qui va encourager les atomes à se placer spontanément dans le même état quantique.

Tout comme en optique, afin d'utiliser les lasers, on va vouloir faire sortir les particules de la cavité où elles sont confinées. Plusieurs solutions technologiques sont possibles et ont été réalisées, tout comme en optique photonique. Ce chapitre se consacre à l'étude de tels « lasers à atomes », où les atomes du condensat sont couplés hors de la cavité qui leur a donné naissance. Il est plus particulièrement tourné vers les lasers « quasi-continu à extraction gravitationnelle » qui constituent le point central des résultats expérimentaux exposés dans ce mémoire.

Le parti-pris de ce chapitre a été d'exposer essentiellement les propriétés « longitudinales » des lasers produits, c'est à dire celles que l'on peut décrire, au moins qualitativement, dans l'approximation unidimensionnelle. L'étude des propriétés transverses sera quand à elle effectuée dans le chapitre 4.

On commence par exposer rapidement les différents modes de productions de lasers à atomes réalisés à ce jour dans le monde. Une description des lasers atomiques quasi-continus à extraction gravitationnelle est ensuite faite, ainsi qu'un exposé des moyens expérimentaux mis en oeuvre au cours de cette thèse pour les réaliser dans de bonnes conditions. Pour finir, nous présentons quelques résultats obtenus pour différents types de couplages.

3.1 Les différents types de lasers à atomes, revue rapide

3.1.1 Le lâcher simple

La première technique utilisée a simplement consisté à couper le piège magnétique et à laisser tomber les atomes du condensat sous l'effet de la gravité. Cette technique d'extraction est analogue au « cavity dumping », où tous les photons sont extraits de la cavité en une seule fois.

En lâchant ainsi un condensat de Bose-Einstein, nous obtenons un laser pulsé à très faible cadence de répétition (inférieure à 0,1 Hz). Par exemple, pour le plus anciens des dispositifs expérimentaux décrits dans le chapitre 2, le cycle de production d'un condensat est typiquement de 60 s.

3.1.2 Lasers pulsés à fortes cadences de répétition

L'étape suivante a consisté à coupler des atomes vers un état non piégé tout en conservant un nuage condensé dans le piège. Le premier coupleur de sortie a été réalisé au MIT [40]. Dans cette expérience, un pulse radio-fréquence bref (quelques micro-secondes) et intense ($\Omega_{\text{RF}} > 10$ kHz) transfère de façon cohérente une partie importante du condensat vers un état non piégé (fig. 3.1 a).

À Yale [41], un condensat a été chargé dans un réseau lumineux vertical. Les atomes s'échappent des puits de potentiel optique par un effet tunnel induit par la gravité. Cette technique réalise un couplage continu vers plusieurs modes. De plus, ces modes sont verrouillés en phase. Les atomes sortent alors par pulses, comme le font les photons d'un laser mode-bloqués (fig. 3.1 b).

3.1.3 Lasers quasi-continus

Des lasers ont finalement été réalisés où le flux d'atomes n'est plus pulsé mais réellement continu. On parle alors de lasers quasi-continus car on peut alors extraire continûment des atomes jusqu'à vidage total de la cavité. Ceci rappelle les lasers « self-terminated » en optique.

L'équipe du NIST [42] a réalisé l'extraction des atomes du condensat grâce à une succession d'impulsions Raman très brèves, synchronisées avec un piège TOP. Cette méthode ressemble aux précédentes dans son principe (succession de pulses d'extraction). Cependant, elle permet aux paquets d'ondes de chaque pulse de se recouvrir, et donc d'obtenir un faisceau pratiquement continu lorsque la fréquence des impulsions Raman est suffisamment élevée. De plus, elle permet également de transmettre une impulsion aux atomes extraits, de sorte qu'ils ne se propagent pas nécessairement suivant la gravité.

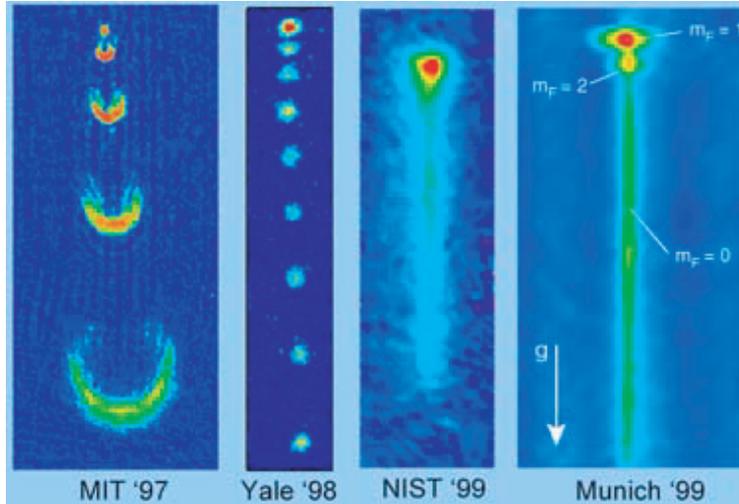


FIG. 3.1 – Différents lasers atomiques produits dans des laboratoires à travers le monde. **a)** Au MIT, des pulses RF intenses envoient une partie des atomes dans un état non piégé. Ils tombent alors sous l'effet de la gravité. **b)** À Yale, le condensat est chargé dans un réseau optique. L'effet tunnel entre les puits de potentiels, sous l'effet de la gravité, produit des pulses cohérents d'atomes. **c)** au NIST, des pulses Raman très fréquents expulsent les atomes dans une direction contrôlée. Quand les pulses se recouvrent les uns avec les autres, on a un laser quasi-continu. **d)** à Munich, un coupleur radio-fréquence continu et de faible puissance extrait un flux continu d'atomes jusqu'à épuisement des atomes du condensat.

Nous avons nous même également réalisé un tel laser quasi-continu par application d'un coupleur RF modulé en fréquence (voir chapitre 5). Cette technique permet de générer des pulses d'atomes extraits de façon cohérente. Quand la fréquence de modulation est assez importante, les pulses se recouvrent les uns avec les autres, et l'on obtient un flux continu d'atomes jusqu'à vidage du condensat (voir chapitre 5).

Finalement, le groupe de Munich [43] a réalisé et utilisé un laser atomique quasi-continu avec un coupleur de sortie radio-fréquence de faible puissance ($\Omega_{\text{RF}} < 100$ Hz). L'extraction a alors lieu continûment jusqu'au vidage complet de la cavité (fig. 3.1 c). C'est sur la réalisation et l'étude de ce type de laser qu'à portée la majeure partie des travaux de cette thèse, et en particulier les résultats du chapitre 4.

3.1.4 Lasers continus en régime stationnaire

L'aboutissement actuel consiste à réaliser un laser véritablement continu. En effet, aucun des mécanisme exposés ci-dessus ne permet d'atteindre un véritable régime stationnaire car il n'existait pas de mécanisme pour alimenter en continu le condensat source. Le condensat est formé par refroidissement évaporatif, puis est couplé vers l'extérieur, et, lorsque le piège est vide, il faut recommencer un cycle complet de production.

De nombreuses propositions théoriques (voir par exemple l'article de revue [44] et ses références), ainsi que quelques réalisations expérimentales tentent d'aboutir à un tel mécanisme. Très récemment¹, une des équipes du MIT [45] est parvenue à réaliser un rechargement régulier d'un condensat de Bose-Einstein à l'aide d'une pince optique [46]. Les atomes une fois condensés sont amenés dans une chambre de science où ils sont à nouveau piégés. En recommençant le processus assez fréquemment, le « réservoir » reste toujours plein, les atomes amenés à chaque cycle compensant les pertes par collisions avec le gaz résiduel dans le réservoir. Le nouveau dispositif expérimental présenté dans le chapitre 2 peut également se fixer pour objectif la réalisation d'un dispositif semblable à termes. On pourra également citer les travaux d'une équipe de l'ENS qui compte refroidir directement un jet continu d'atomes thermiques par refroidissement laser puis évaporatif afin d'obtenir un régime de dégénérescence quantique [47, 48].

3.2 Le laser atomique à extraction gravitationnelle (type Munich), description simple

Le type de laser à atomes que nous avons réalisé et étudié au cours de ces travaux de thèse sont les lasers à atomes quasi-continus à extraction gravitationnelle. Ceux-ci ont été réalisés originellement dans le groupe de Munich [43] à partir d'un piège « QUIC » [49]. Nous sommes parvenus à en appliquer le principe pour notre piège ferromagnétique, et à en étudier certaines propriétés.

3.2.1 Principe

Le principe de base est assez proche de celui utilisé pour l'évaporation : un champ radio fréquence contrôlé induit un changement du moment magnétique de certains atomes piégés. Ceux-ci arrivent alors dans un état interne non piégé magnétiquement (ou au moins très faiblement piégé) et tombent sous l'effet de la gravité. À la différence de l'évaporation, l'amplitude de l'onde

¹Au cours de la rédaction du présent manuscrit

radio-fréquence doit être choisie faible, de façon à ce que les atomes à résonance aient une probabilité de transfert petite devant 1 pour assurer que le condensat source se trouve dans un état proche de l'équilibre en permanence, et donc qu'il se vide continûment². Par ailleurs, la fréquence de l'onde RF de couplage est choisie proche de la résonance des atomes, alors qu'elle était très au dessus de l'énergie moyenne de ceux-ci dans le cas de l'évaporation.

Par analogie avec les lasers optiques, l'onde radiofréquence s'appelle le coupleur de sortie. Dans un laser optique, un miroir partiellement réfléchissant permet de transférer les photons d'une cavité vers l'extérieur, avec un faible taux de couplage. De façon similaire, dans le cas du laser à atomes, le rôle de coupleur de sortie est joué par l'onde RF, qui induit un changement d'état interne (« spin flip ») permettant d'extraire une partie des atomes de la cavité. Nous verrons dans la suite comment le couplage du condensat vers le laser s'effectue de façon très localisé dans la cavité atomique, le choix de la fréquence de l'onde RF permettant de contrôler la position d'extraction du laser. Une analogie optique de ce processus pourrait être une cavité laser fermée dans laquelle une lame partiellement réfléchissante à 45°, et ajustable en position, permettrait d'extraire le faisceau laser.

Pour les lasers à atomes à couplage radio-fréquence, une représentation très utile est celle de la figure 3.2. Dans cette image, on représente sur un diagramme énergie / position les différents niveaux atomiques mis en jeu. Ce type de représentation n'est bien sûr utile que pour les phénomènes « longitudinaux » (1D), puisque l'on n'y représente pas les degrés de libertés transverses. Dans cette image, la fonction d'onde du condensat piégé est couplée *via* le champ radiofréquence au continuum des états non piégés. La localisation de la résonance correspond à la position pour laquelle l'énergie séparant les deux niveaux couplés correspond à l'énergie des photons radio-fréquence de couplage. Nous utiliserons essentiellement ce type de représentation énergie/position dans le présent chapitre, puisque son objet est l'étude des propriétés longitudinales des lasers à atomes.

3.2.2 Description théorique

3.2.2.1 Équations de Gross-Pitaevskii couplées

Dans notre cas, le condensat de Bose est formé dans l'état $|F = 1, m_F = -1 \rangle$. L'application d'un champ magnétique radiofréquence transverse $B_{\text{RF}} = B_{\text{RF}}^0 \cdot \cos(\omega_{\text{RF}} t)$ va induire des transitions entre les états $|F = 1, m_F = -1 \rangle$ (piégé), $|F = 1, m_F = 0 \rangle$ (non piégé) et $|F = 1, m_F = +1 \rangle$ (anti-piégé).

²En termes équivalents, ceci revient à imposer que la période des oscillations de Rabi induites par le champ RF soit grande devant le temps que mettent les atomes non piégés à sortir de la zone de couplage

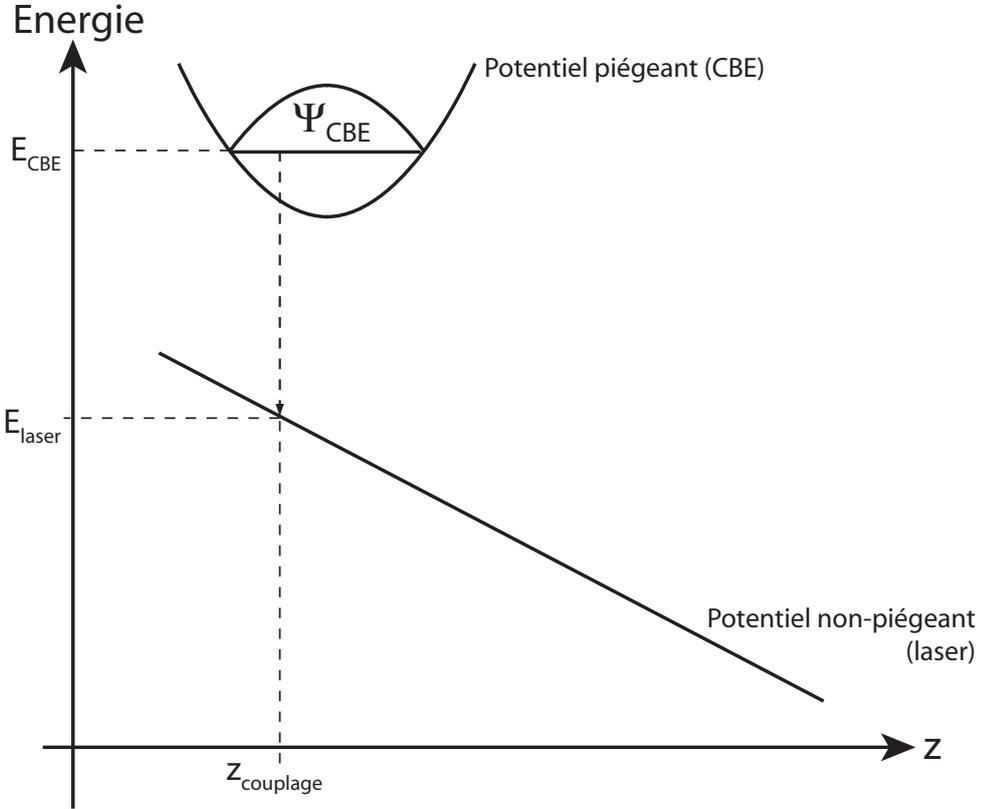


FIG. 3.2 – Diagramme énergie/position utilisé dans la description (1D) d'un laser à atomes.

Sur la base des états internes, l'hamiltonien de couplage $\hat{W} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}_{\text{RF}}$ (avec $\hat{\vec{\mu}}$ l'opérateur moment magnétique atomique) s'écrit :

$$\hat{W} = \frac{\hbar \Omega_{\text{RF}}}{2} (e^{i\omega_{\text{RF}}t} + e^{-i\omega_{\text{RF}}t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

avec :

$$\Omega_{\text{RF}} = \frac{g_F \mu_B B_{\text{RF}}^0}{2\sqrt{2}\hbar} \quad (3.2)$$

la fréquence de Rabi du champ radio-fréquence.

En faisant l'approximation de champ tournant, la fonction d'onde globale du système obéit à un système de 3 équations de Gross-Pitaevskii couplées (une pour chaque état interne). En régime de faible couplage, la population dans l'état $|F = 1, m_F = +1\rangle$ est négligeable. On appelle alors $|\Psi_{\text{CBE}}\rangle$ la fonction d'onde du condensat (correspondant à l'état interne $|F = 1, m_F = -1\rangle$), et $|\Psi_{\text{laser}}\rangle$ celle du laser atomique (correspondant à l'état interne

$|F = 1, m_F = 0 \rangle$, non piégé). Le système d'équations de Gross-Pitaevskii couplées se ramène alors à :

$$i\hbar\partial_t\Psi_{\text{CBE}} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{-1} + g_{-1,-1}|\Psi_{\text{CBE}}|^2 + g_{-1,0}|\Psi_{\text{laser}}|^2 \right] \Psi_{\text{CBE}} + W_{-1,0} \cdot \Psi_{\text{laser}} \quad (3.3)$$

$$i\hbar\partial_t\Psi_{\text{laser}} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0 + g_{-1,0}|\Psi_{\text{CBE}}|^2 + g_{0,0}|\Psi_{\text{laser}}|^2 \right] \Psi_{\text{laser}} + W_{0,-1} \cdot \Psi_{\text{CBE}} \quad (3.4)$$

V_{-1} est le potentiel extérieur (de piégeage) vu par les atomes du condensat (dans l'état interne $|F = 1, m_F = -1 \rangle$); V_0 est le potentiel extérieur vu par les atomes du laser (dans l'état interne $|F = 1, m_F = 0 \rangle$); $g_{i,j} = 4\pi\hbar^2 a_{i,j}/m$ correspond aux interactions entre atomes des niveaux $m_F = i$ et $m_F = j$ ($a_{i,j}$ sont les longueurs de diffusion correspondantes, approximativement toutes égales dans notre cas).

3.2.2.2 Approximations

Il est utile de procéder à certaines approximations afin de décrire facilement le fonctionnement d'un laser à atome. La première est de considérer que le taux de couplage entre le laser et le condensat est suffisamment faible pour que, à tout moment, le condensat de Bose puisse être considéré comme dans un état stationnaire (approximation quasi-statique). Le condensat est alors bien décrit par une fonction d'onde de Thomas-Fermi à tout moment du couplage.

La seconde est que les interactions entre atomes du laser à atomes sont négligeables, de sorte que la fonction d'onde du laser est bien décrite par une équation de Schrödinger sans termes non linéaires. On peut alors décomposer la fonction d'onde du laser $|\Psi_{\text{laser}}\rangle$ sur la base des états propres du continuum correspondant :

$$|\Psi_{\text{laser}}\rangle = \int_E \gamma_E(t) \cdot |\Psi_E\rangle \cdot e^{-iEt/\hbar} \quad (3.5)$$

où les $|\Psi_E\rangle$ vérifient l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$E \cdot |\Psi_E\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0 + g_{-1,0}|\Psi_{\text{CBE}}|^2 \right] \Psi_E \quad (3.6)$$

Une dernière approximation, très utile en pratique, est de considérer que le taux de couplage est non seulement assez faible pour avoir un condensat dans un état quasi-statique, mais également pour que le nombre d'atomes dans le condensat ne varie pas significativement au cours du couplage (produit du taux de couplage par temps de couplage très inférieur à 1). Comme la forme

de la fonction d'onde du condensat de Bose dépend du nombre d'atomes dans l'approximation de Thomas-Fermi, cette approximation permet de négliger les modifications de la fonction d'onde du condensat au cours de l'extraction. Elle est bien vérifiée pour les expériences décrites dans ce mémoire où le nombre d'atomes du condensat diminue au plus de 20 % au cours du couplage (on rappelle que la largeur de la fonction d'onde de Thomas-Fermi évoluant en $N^{1/5}$, celle-ci ne diminue alors au plus que de 4 % environ).

Soit $|\Psi(t)\rangle$ la fonction d'onde globale du système. Elle s'exprime (sous les approximations précédentes) sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_{\text{TF}}\rangle \cdot e^{-i\mu t/\hbar} + \int_E \gamma_E(t) \cdot |\Psi_E\rangle \cdot e^{-iEt/\hbar} \quad (3.7)$$

où $|\Psi_{\text{TF}}\rangle$ est la fonction d'onde de Thomas Fermi (stationnaire) du condensat. Les éléments de matrice du couplage \hat{W} sont alors :

$$\langle \Psi_{\text{TF}} | \hat{W} | \Psi_E \rangle = \frac{\hbar\Omega_{\text{RF}}}{2} \cdot \int \Psi_{\text{TF}}(z) \cdot \Psi_E(z) \cdot dz \quad (3.8)$$

qui ne sont non nuls que sur une bande d'énergie de taille finie (voir 3.2.2.4).

Moyennant les approximations précédentes, la théorie sous-jacente à celle des lasers à atomes est donc celle du couplage entre un niveau discret, à savoir la fonction d'onde du condensat, et un continuum de largeur finie, à savoir l'ensemble des états stationnaires $|\Psi_E\rangle$ accessibles dans l'état non-piégé (ou très faiblement piégé) du laser à atomes. Une introduction à ce type de problème, très suffisante pour l'ensemble des problèmes exposés ici, pourra être trouvée dans [50]. Les coefficients de couplage dépendant ici des intégrales de recouvrement entre la fonction d'onde du condensat et les fonctions d'ondes du continuum, il est nécessaire de connaître ces dernières afin de caractériser le couplage.

3.2.2.3 Fonctions d'ondes du continuum

Cas simple du potentiel gravitationnel seul

Pour une particule soumise uniquement à la gravité, les fonctions d'ondes stationnaires du continuum sont bien connues, et exposées dans les livres de mécanique quantique (voir par exemple [51]).

L'équation de Schrödinger stationnaire pour un potentiel gravitationnel seul (axe vertical z orienté selon \vec{g}) est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 \Psi(z) - mgz \Psi(z) = E \cdot \Psi(z) \quad (3.9)$$

qui se met sous la forme :

$$l^3 \partial_z^2 \Psi(z) = -(z - z_E) \Psi(z) \quad (3.10)$$

avec :

$$z_E = -\frac{E}{mg} \quad (3.11)$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m^2g}} \simeq 0,3 \mu\text{m} \quad (3.12)$$

La solution de cette équation différentielle fait intervenir les fonctions d'Airy, fonctions spéciales qui, par définition, vérifient l'équation différentielle :

$$f''(\xi) = \xi \cdot f(\xi) \quad (3.13)$$

Cette équation admet deux solutions linéairement indépendantes, dont une seule, notée $Ai(\xi)$, ne diverge pas pour $\xi \geq 0$ [52]. Utilisant la fonction d'Airy Ai , on obtient la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\Psi_E(z) = \frac{a}{\sqrt{l}} \cdot Ai\left(-\frac{z - z_E}{l}\right) \quad (3.14)$$

où a est une constante de normalisation sans dimension. Ces fonctions sont paramétrées par E , qui peut prendre n'importe quelle valeur, et elles forment donc bien un continuum. Pour le problème physique réel, on ne conserve de cette solution que la partie propagative vers les z croissants (condition d'onde sortante en $z \rightarrow \infty$).

Effets correctifs

Plusieurs effets vont modifier la forme du potentiel du continuum par rapport à l'effet de la seule gravité. Pour commencer, l'effet de champ moyen du condensat (potentiel répulsif proportionnel à la densité atomique $|\Psi_{\text{TF}}|^2$) s'applique aussi bien sur le condensat lui-même (c'est lui qui est responsable du profil de Thomas-Fermi) que sur le laser à atomes. Celui-ci modifie donc la forme du potentiel par rapport au cas où l'on ne considère que la seule gravité.

Par ailleurs, les atomes du laser, quoique dans un état $m_F = 0$ qui n'est pas sensible a priori aux champs magnétiques, peuvent malgré tout ressentir un léger effet dû aux très forts champs magnétiques utilisés pour le confinement. Pour un atome tel que le notre, possédant une structure hyperfine, le décalage Zeeman n'est en effet pas simplement proportionnel au produit du champ magnétique B par le moment magnétique m_F . Le décalage Zeeman réel est donné par la formule de Breit-Rabi [53] :

$$E_{F,m_F}^{\text{BR}}(B) = E_F + m_F g_I \mu_n B + \frac{\hbar \omega_{\text{HF}}}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + m_F \xi + \xi^2} - 1 \right) \quad (3.15)$$

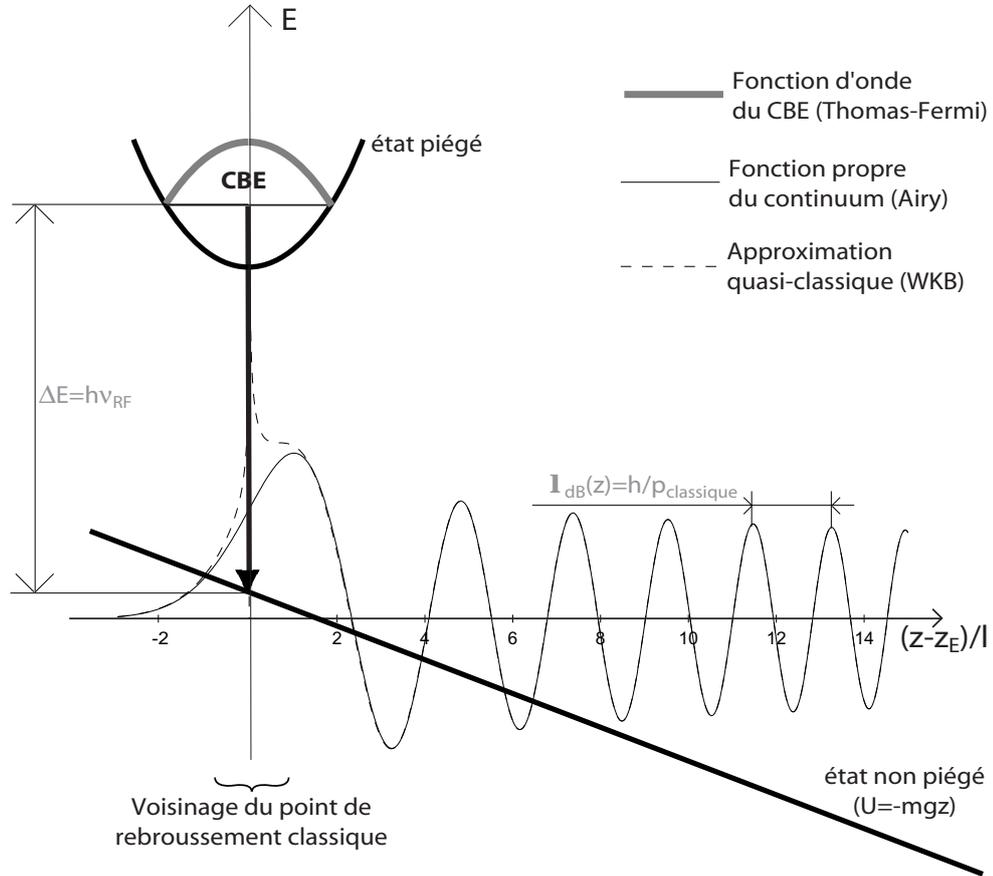


FIG. 3.3 – Couplage d'un condensat de Bose vers un continuum (potentiel uniforme). L'approximation quasi-classique est valable en tout point sauf autour du point de rebroussement classique ($(z - z_E)/l \leq 1$). Dans la région $z > z_E$, la pseudo-période est la longueur d'onde de de Broglie $\lambda_{dB} = h/p$ où l'impulsion p est donnée par les équations classiques du mouvement. Le paramètre $l = \sqrt[3]{\hbar^2/2m.U'(z_E)}$ donne l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la première arche de la fonction du continuum vers laquelle le couplage s'effectue. Note : L'extension spatiale du condensat de Bose a été volontairement très fortement réduite par rapport au cas réel par souci de clarté.

où

$$\xi = \frac{g_S \mu_B + g_I \mu_n}{\hbar \omega_{HF}} B \quad (3.16)$$

avec $g_s \simeq 2,002$ and $g_I \simeq 1$ respectivement les facteurs de Landé pour l'électron et le noyau, μ_B et μ_n respectivement les magnétons de Bohr et nucléaire, et $\omega_{HF} \simeq 2\pi \cdot 6,8347$ GHz le décalage hyperfin pour le ^{87}Rb . Dans notre cas, nous utilisons des atomes de ^{87}Rb dans le niveau fondamental ($5S^{1/2}$) entre l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ pour le condensat et $|F = 1, m_F = 0\rangle$

pour le laser. En développant à l'ordre 2 (premier ordre non nul pour $m_F = 0$), on trouve un potentiel magnétique dû à l'effet Zeeman « quadratique » pour les atomes dans le laser (pour lesquels on a $m_F = 0$)[26] :

$$U(B) \simeq g_F m_F \mu_B B + \left(1 - \frac{m_F^2}{4}\right) \frac{\mu_B^2 B^2}{\hbar \omega_{\text{HF}}} \quad (3.17)$$

Cet effet est responsable d'une courbure du potentiel le long de z qui va modifier les fonctions propres du continuum.

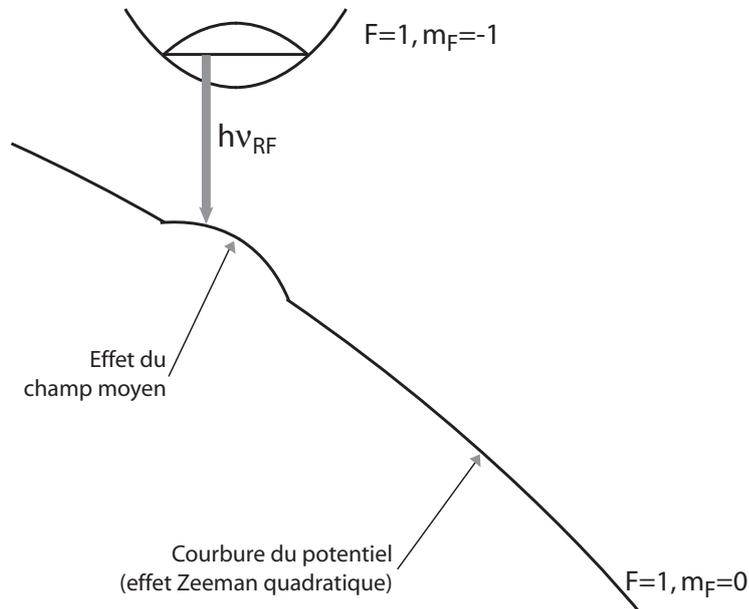


FIG. 3.4 – Potentiels réels subis par les atomes du laser atomique. L'effet de champ moyen ainsi que les termes non linéaires de l'effet Zeeman modifie le potentiel vu par les atomes par rapport au cas où seule la gravité intervient.

En tenant compte de ces deux effets (voir figure 3.4), l'équation de Schrödinger stationnaire est alors :

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 - mgz + U(z) + g_{-1,0} |\Psi_{\text{CBE}}|^2 \right] \Psi_E(z) = E \cdot \Psi_E(z) \quad (3.18)$$

Il est difficile de donner une solution analytique générale pour un potentiel complexe de cette sorte. En pratique, on se contente de faire l'approximation WKB, qui donne avec une très bonne précision les fonctions propres du potentiel du continuum en dehors du voisinage du point de rebroussement classique, à partir de la connaissance de l'impulsion $p(z) = \sqrt{2m(E - U(z))}$ pour le mouvement classique.

Le point de rebroussement classique $z = z_E$ correspond par définition à la position où $p(z_E) = 0$. On notera que $p(z)$ admet une valeur imaginaire pure pour la région classiquement interdite $z < z_E$, et une valeur réelle pour la région classiquement autorisée $z > z_E$. On est ainsi conduit à [54] :

$$\Psi_E(z) = \begin{cases} \frac{C}{2\sqrt{|p(z)|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left| \int_{z_E}^z p(z) \cdot dz \right| \right) & \text{si } z < z_E \\ & \text{(région classiquement interdite)} \\ \frac{C \cdot e^{-i\pi/4}}{\sqrt{|p(z)|}} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left| \int_{z_E}^z p(z) \cdot dz \right| \right) & \text{si } z > z_E \\ & \text{(région classiquement autorisée)} \end{cases} \quad (3.19)$$

où C est une constante de normalisation. A noter que $\Psi_E(z)$ tend très rapidement vers 0 dans la zone classiquement interdite, et oscille très vite dans la zone classiquement autorisée (voir figure 3.3). La résolution approchée des fonctions d'ondes du continuum dans l'approximation WKB pour le potentiel réel est effectué au chapitre 5. Pour le cas d'atomes soumis au seul potentiel gravitationnel (cas précédent), la solution WKB obtenue de cette manière est très proche de la solution exacte à base de fonctions d'Airy, à l'exception notable du voisinage du point de rebroussement classique $z = z_E$.

Pour le voisinage des points de rebroussement classiques $z \sim z_E$, on pourra utiliser, si nécessaire, l'approximation suivante, valable à la condition que le potentiel $U(z)$ n'évolue pas trop vite au voisinage de z_E :

$$\Psi(z) \simeq \frac{a}{\sqrt{l_{z_E}}} \cdot Ai\left(-\frac{z-z_E}{l_{z_E}}\right) \quad \text{si } z \sim z_E \quad (3.20)$$

(voisinage du point de rebroussement classique)

où l_{z_E} est défini par la pente locale du potentiel $dU/dz(z_E)$:

$$l_{z_E} = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m \cdot dU/dz(z_E)}} \quad (3.21)$$

et a est une constante sans dimension, que l'on définit en fonction de C à partir du développement asymptotique de $Ai(-\xi)$ pour $\xi > 0$ [52], que l'on connecte à la solution WKB pour la région classiquement interdite proche du point de rebroussement classique³ :

$$Ai(-\xi) \underset{\xi \ll 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (-\xi)^{-1/4} \cdot \exp\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \quad (3.22)$$

³Le traitement exposé ici présente certaines faiblesses théoriques. En effet, on a conservé dans la solution WKB pour la partie classiquement autorisée $z > z_E$ uniquement la partie de la solution propagative vers les z croissants, ce qui correspond à nos expériences, où les atomes ne « remontent jamais » (plus rigoureusement, cela correspond à imposer une condition d'onde sortante à la solution WKB). Par contre, pour les cas $z \sim z_E$ et $z < z_E$, on a conservé les deux « parties » montante et descendante de la fonction d'onde, car c'est

d'où la relation liant C et a :

$$C = \frac{\sqrt{\hbar}}{l_{z_E}} \cdot \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \quad (3.23)$$

3.2.2.4 Intégrales de recouvrement : éléments de matrice du couplage

Typiquement le paramètre l est, dans tout les cas, de l'ordre de $0,2 \mu\text{m}$, ce qui est petit devant les extensions spatiales typiques des condensats obtenus expérimentalement. Dans la partie classiquement autorisée, les fonctions d'ondes du continuum oscillent donc autour de zéro beaucoup plus vite que l'évolution de Ψ_{TF} . Par ailleurs, elles tendent très rapidement vers zéro dans la partie classiquement interdite. Elles ne peuvent donc apporter de contribution non nulle à l'intégrale de recouvrement $\int \Psi_{\text{TF}}(z) \cdot \Psi_E(z) \cdot dz$ que au voisinage du point de rebroussement classique $z = z_E$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int \Psi_{\text{TF}}(z) \cdot \Psi_E(z) \cdot dz &\propto \int \Psi_{\text{TF}}(z) \cdot \delta(z - z_E) \cdot dz \\ &\propto \Psi_{\text{TF}}(z_E) \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.3 Propriétés

Ayant ainsi déterminé les conditions du couplage, on peut donner quelques propriétés des lasers à atomes, à l'aide de la théorie du couplage d'un niveau discret vers un continuum.

3.2.3.1 Condition de résonance, position de la zone de couplage

La condition de résonance en énergie pour le couplage entre le condensat (pris dans l'approximation de Thomas-Fermi), et une fonction d'onde d'énergie E_l du continuum (possédant un point de rebroussement classique en z_{E_l}), par un champ radio-fréquence de pulsation ω_{RF} est :

$$E_{\text{CBE}} - \hbar\omega_{\text{RF}} = E_l \quad (3.25)$$

En tenant compte des potentiels dus à la gravité, à la non-linéarité de l'effet Zeeman et à la répulsion de champ moyen du condensat, elle s'écrit donc en

la seule façon d'obtenir une expression analytique simple et utilisable. Les deux parties ne sont donc pas à proprement parler « connectables », mais on a ajouté « à la main » un facteur $1/2$ dans les deux expressions $z \sim z_E$ et $z < z_E$ pour tenir compte de cela. En réalité, les expressions pour $z \sim z_E$ et $z < z_E$ n'ont de réelles utilités que pour le calcul des intégrales de recouvrement, où l'introduction des facteurs $1/2$ permet d'obtenir les résultats justes. On trouvera des développements plus rigoureux dans les références [55, 56]

pratique :

$$E_{1,-1}^{\text{BR}}(B_c) + \mu - \hbar\omega_{\text{RF}} = \frac{a_{10}}{a_{11}}\mu(1 - E_{1,-1}^{\text{BR}}(B(z_{E_l})) - mgz_{E_l} + E_{1,0}^{\text{BR}}(B(z_{E_l})) \quad (3.26)$$

où les effets Zeeman E_{F,m_F}^{BR} sont donnés par la formule de Breit-Rabi 3.15, les $a_{i,j}$ sont les longueurs de diffusions entre atomes dans $F = 1$, $m_F = i, j$, et B_c est le champ magnétique au centre du condensat ($z = 0$). Celui-ci est égal au biais magnétique du piège B_0 , au décalage g/ω_z^2 dû à la gravité près :

$$B_c = B_0 + \left(\frac{b^2}{B_0} - \frac{b''}{2} \right) \cdot \frac{g^2}{2\omega_z^4} = B_0 + \frac{mg^2}{\mu_B\omega_z^2} \quad (3.27)$$

(avec les notations de 2.6)

Pour une fréquence du coupleur donné, on fait ainsi correspondre, par la condition de résonance en énergie, une fonction d'onde Ψ_{E_l} du continuum, d'énergie E_l . Le point de rebroussement classique $z = z_{E_l}$ de cette dernière correspond alors à la position d'extraction du laser. Ceci s'interprète facilement en termes classiques en faisant intervenir la conservation de l'impulsion pour les atomes. En effet, dans le condensat, les atomes possèdent une impulsion nulle (on néglige le terme en $p^2/2m$ dans l'approximation de Thomas-Fermi). Les photons RF du coupleur radiofréquence possèdent également une impulsion négligeable (longueur d'onde RF très grande). La conservation de l'impulsion des atomes impose alors que ceux-ci, lors du transfert du condensat vers le laser, conservent une vitesse nulle. Ils sont donc couplés vers la zone de rebroussement classique $z = z_{E_l}$ de la fonction d'onde Ψ_{E_l} où, par définition on a $p(z_{E_l}) = 0$ pour le mouvement classique.

La relation 3.26 montre que la zone de couplage entre le condensat et le laser ($z = z_{E_l}$) est déterminée spatialement par la fréquence ω_{RF} du coupleur radiofréquence. En modifiant cette dernière, on va donc modifier la position d'extraction du laser.

La fréquence ω_{RF}^0 du coupleur qui assure un couplage au centre du condensat $z = 0$ s'obtient à partir de 3.26 :

$$E_{1,-1}^{\text{BR}}(B_c) + \mu - \hbar\omega_{\text{RF}}^0 = \frac{a_{-1,0}}{a_{-1,-1}}\mu + E_{1,0}^{\text{BR}}(B_c) \quad (3.28)$$

On a approximativement :

$$\hbar\omega_{\text{RF}}^0 \simeq \frac{\mu_B B_0}{2} + \frac{mg^2}{2\omega_z^2} \quad (3.29)$$

Le premier terme $\mu_B \cdot B_0/2$ est le facteur dominant pour les expériences présentées dans ce mémoire où l'on travaille à $B_0 \simeq 54 G$.

Si le condensat possède une extension spatiale dans la direction verticale R_z (rayon de Thomas-Fermi), la position z_{E_l} de la zone de couplage pour une fréquence de coupleur ω_{RF} est définie par la relation :

$$\delta_{\text{RF}} = \Delta \frac{z_{E_l}}{R_z} - \frac{a_{-1,0}}{a_{-1,-1}} \frac{\mu}{\hbar} \left(1 - \frac{z_{E_l}^2}{R_z^2} \right) \quad (3.30)$$

où Δ est la demi-largeur spectrale du condensat, définie par :

$$\Delta = \frac{mgR_z}{\hbar} \quad (3.31)$$

et δ_{RF} est le désaccord du coupleur par rapport à la fréquence qui assure un couplage au centre du condensat ($z = 0$). Le deuxième terme de l'équation 3.30 provient du fait que l'effet de champ moyen du condensat courbe le potentiel des atomes dans le laser au voisinage du condensat (fig. 3.4 et 3.5). Le premier terme provient de la gravité seule. L'effet Zeeman quadratique est négligeable au voisinage du condensat (très proche du centre du piège magnétique). Pour nos paramètres expérimentaux, on peut se contenter, dans la plupart des cas, d'utiliser l'approximation :

$$z_{E_l} \simeq \frac{\hbar \delta_{\text{RF}}}{mg} \quad (3.32)$$

3.2.3.2 Largeur spectrale du laser à atomes

La partie du continuum qui va être peuplée au cours du processus sera donc centrée autour de $E_l = E_{\text{CBE}} - \hbar \omega_{\text{RF}}$ (condition de résonance). Elle aura de plus une largeur ΔE , imposée par les conditions de couplage.

Dans le cas où $\Delta E \ll \hbar \Delta$ (où Δ est la largeur spectrale du condensat définie au paragraphe précédent), la largeur en énergie du faisceau d'atomes extrait est donnée par les caractéristiques du couplage *et pas* par celles du condensat. Nous appelons ce type de laser « à haute finesse ». Sauf indication contraire, c'est dans ce régime que l'on se place pour toute la suite de ce mémoire. Dans ce cas, ΔE est donné par la règle d'or de Fermi :

$$\Delta E_{\text{idéal}} \sim 2\pi |\langle \Psi_{\text{CBE}} | \hat{W} | \Psi_{E_l} \rangle|^2 \rho(E_l) \quad (3.33)$$

avec $\rho(E_l)$ la densité d'état du continuum au voisinage de la zone de couplage.

Pour une expérience réelle, il faut bien sûr prendre en compte la durée finie du couplage, qui élargit le spectre du coupleur, donc la largeur de la zone du continuum peuplée. En général, la largeur spectrale réelle est donné par la durée de couplage. Cependant, si l'on essaye de coupler le laser pendant un temps supérieur à $t_{\text{couplage}}^{\text{max}} = \hbar / \Delta E_{\text{idéal}}$, on ne peut pas y parvenir. En effet, la règle d'or de Fermi implique que pour $t > t_{\text{couplage}}^{\text{max}}$, tous les atomes

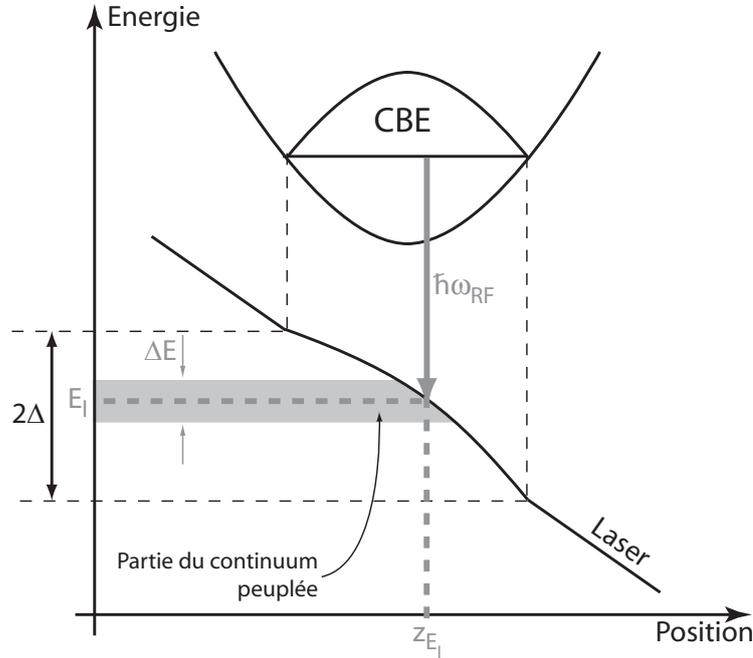


FIG. 3.5 – Condition de résonance et largeur spectrale du laser à atomes

du condensat ont déjà été transférés dans le laser : le laser s'arrête donc de lui même après un temps égal à $t_{\text{couplage}}^{\text{max}}$. La largeur spectrale du laser est donc finalement donnée par⁴ :

$$\Delta E_{\text{couplage}}^{\text{réel}} \sim \max [\Delta E_{\text{idéal}} ; \hbar/t_{\text{couplage}}] \quad (3.34)$$

La largeur en énergie du laser à atomes produit est donc d'autant plus fine que l'amplitude du coupleur sera faible et la durée de couplage longue. En principe, on peut imaginer obtenir une largeur énergétique infiniment faible pour un couplage très long et de très faible intensité. En fait, les fluctuations en nombre d'atomes du condensat de Bose vont produire de très légères fluctuations de son énergie. Par conséquent ceci va également imposer une limite à la finesse spectrale du laser à atome produit : les lasers à atomes créés n'auront jamais une finesse en énergie plus grande que celle du condensat qui lui donne naissance. Ce dernier point est l'équivalent pour les lasers atomiques de la limite Schallow-Townes des lasers photoniques, qui impose un minimum à la largeur spectrale du fait de l'existence d'émission spontanée dans la cavité (effet de diffusion de la phase).

⁴Les grandeurs données ici ne sont que des ordres de grandeurs. Pour connaître précisément l'élargissement dû à la durée finie du couplage, il faudrait connaître précisément la forme du pulse de couplage (simple fonction rectangle? ; profil optimisé pour diminuer la largeur spectrale? ; ...)

Notons cependant que le taux de couplage dépendra également de l'amplitude du coupleur RF (voir le paragraphe suivant). Il est donc clair qu'un laser à atome très fin spectralement sera également très peu dense en terme de nombre d'atomes extraits par seconde, ce qui rend son observation problématique.

3.2.3.3 Taux de couplage

Le calcul effectif du taux de couplage entre le condensat de Bose-Einstein et le laser à atomes sort quelque peu du cadre du présent mémoire. Une théorie à 3 dimensions a été développée dans notre groupe [55, 56]. Nous l'utiliserons sans détails supplémentaires dans la suite de l'exposé dans les rares cas où l'on s'intéresse au nombre d'atomes réellement couplés par unité de temps. On se contente ici de donner les éléments permettant de connaître les évolutions du taux de couplage en fonction des paramètres expérimentaux pertinents.

Pour les lasers à haute finesse définis au dessus, le taux de couplage est donné par l'application de la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma = \Delta E / \hbar = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_{\text{CBE}} | \hat{W} | \Psi_{E_l} \rangle|^2 \rho(E_l) \quad (3.35)$$

où $\rho(E_l)$ est la densité d'états du continuum au voisinage de l'énergie E_l . Utilisant l'expression des intégrales de recouvrement calculée précédemment, on obtient finalement :

$$\Gamma \propto \Omega_{\text{RF}}^2 \cdot |\Psi_{\text{CBE}}(z)|^2 \quad (3.36)$$

Le taux de couplage dépend donc de la densité atomique locale, ainsi que du carré de la fréquence de Rabi Ω_{RF} du coupleur de sortie.

3.3 Réalisation pratique

La réalisation d'un laser à atome quasi-continu à extraction gravitationnelle ne va pas tout à fait de soi d'un point de vue expérimental. En effet, les exigences de stabilité, tant à court qu'à long terme du dispositif expérimental sont beaucoup plus fortes que pour la simple réalisation de condensats de Bose-Einstein.

3.3.1 Stabilité des champs magnétiques

Le point essentiel est que le biais magnétique B_0 du piège de Ioffé doit être extrêmement stable. En effet, si celui-ci bouge, la condition de résonance change, et le couplage se fait à un endroit différent du condensat. Si

les fluctuations sont trop importantes (supérieures à la largeur spectrale du condensat 2Δ), la condition de résonance implique même un couplage en dehors du condensat, c'est à dire pas de couplage du tout.

Le niveau des fluctuations de $\mu_B B_0/\hbar$ doit être négligeable devant la largeur spectrale 2Δ du condensat. Les condensats que nous réalisons ($F = 1, m_F = -1$) présentent une extension verticale typique de l'ordre de $8 \mu\text{m}$, soit une largeur spectrale pour le couplage vers le continuum $F = 1, m_F = 0$ de l'ordre de 17kHz . Les fluctuations de champs magnétiques doivent donc être faibles devant 25mG . Comme nous travaillons à fort biais magnétique $B_0 \simeq 54 \text{G}$, nous devons donc stabiliser celui-ci à mieux que 10^{-4} près. Ceci nécessite de nombreuses précautions expérimentales.

3.3.1.1 Précautions expérimentales

La température de l'électro-aimant doit être suffisamment stable pour que ses fluctuations n'induisent pas de modification du magnétisme de celui-ci. Ceci nécessite un refroidissement des bobines d'excitation, ainsi qu'un cyclage régulier de l'expérience. Comme nous n'utilisons que quelques 100W de puissance pour alimenter le dispositif, un flux d'air en continu dans les carters en plastiques entourant l'électro-aimant de 2^e génération suffit à aboutir à des propriétés stables sur le long terme (environ 1/2 journée) de l'électro-aimant de 2^e génération, après moins d'une heure de « chauffe ».

La stabilité du courant d'alimentation de l'électro-aimant est bien entendu alors primordiale. Ceci oblige à utiliser des fils torsadés blindés (pour éviter le « pick-up » de rayonnements parasites) pour transporter le courant entre les alimentations et le dispositifs (ils sont distants de plusieurs mètres), ainsi qu'à utiliser une connectique de qualité. Une fois ceci effectué, nous avons toujours constaté des fluctuations du biais supérieures à 10^{-3} , surtout à courts termes (fréquences caractéristiques supérieures à 100Hz) que nous avons identifiées comme des fluctuations de l'alimentation du dipôle elle-même.

3.3.1.2 Stabilisation de l'alimentation

Les alimentations utilisées pour alimenter le dispositif de piégeage magnétique sont des « BOP » (bipolar operational power supply), qui présentent l'avantage d'être facilement commandables en courant, mais dont nous avons constaté que les performances en termes de stabilité *sur charge inductive* étaient somme toute médiocres.

Nous avons utilisé ces alimentations (commandables en courant) pour le processus de charge. Lors de la compression adiabatique, on commute en même temps l'alimentation du dipôle seul vers une source ultra-stable. En fin d'évaporation, nous pouvons ainsi obtenir des condensats dans un piège à biais très stable permettant l'étude des lasers à atomes.

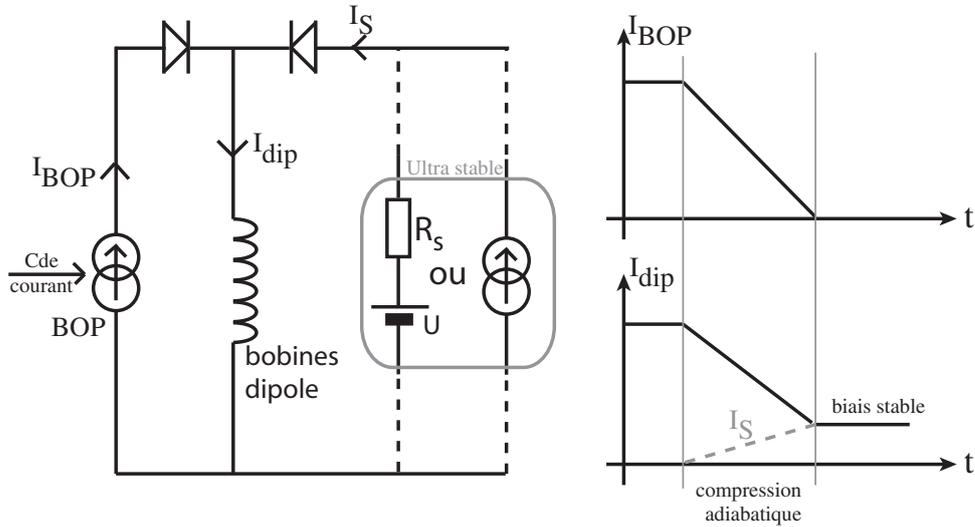


FIG. 3.6 – Passage d’une alimentation dipôle commandable mais peu stable à une alimentation ultra-stable mais non commandable lors de la phase de compression adiabatique. La commande de la BOP est progressivement éteinte. l’alimentation ultra-stable prend alors progressivement le relais pour garder le courant dipôle à une valeur minimale fixe et ultra-stable.

Nous avons commencé par utiliser une batterie électro-chimique standard (batterie de voiture 12 V) comme alimentation ultra-stable. On sait en effet que les accumulateurs électro-chimiques présentent d’excellentes performances en terme de stabilité à court terme, et ce à moindre coût. Pour notre type d’utilisation, en revanche, plusieurs inconvénients apparaissent.

Tout d’abord, une batterie n’est pas une source de courant mais une source de tension, les fluctuations de la résistance de charge (dues par exemple aux légères fluctuations de température) vont donc provoquer des modifications (lentes) du courant fourni. Par ailleurs, la tension délivrée U est fixée par le type de batterie utilisé, et n’est pas en principe facilement ajustable. Nous nous sommes affranchis de ces deux problèmes en ajoutant en série avec la batterie une résistance ultra-stable R_s de quelques Ohms. Le courant délivré I est alors $I = U / (R_{bobines} + R_s)$. En pratique, on a par exemple $I=1,2\text{ A}$, $U=12,4\text{ V}$, $R_{bobines} = 0,5\ \Omega$, $R_s = 10\ \Omega$. Comme la résistance R_s est nettement supérieure à celle des bobines, et qu’elle est ultra-stable, le courant fourni ne dépend plus que très peu des fluctuations de la résistance $R_{bobines}$ (qui sont de toutes façons très faibles quand le dispositif est correctement refroidi et atteint une température d’équilibre grâce à un cyclage régulier).

Le dernier point qui nous a posé problème est le fait qu’une batterie électro-chimique ne délivre pas une tension constante au cours du temps. Plus précisément, pour un niveau de charge diminuant au cours du temps, la

tension délivrée va également baisser. Ceci nous a obligé, pour obtenir une bonne stabilité à long terme (plus de quelques dizaines de cycles) à recharger régulièrement l'accumulateur. En pratique, nous utilisons une alimentation de courant commerciale délivrant un courant I_c réglable que nous utilisons pour recharger la batterie pendant un temps contrôlé t_c . À chaque cycle (pendant la phase de chargement du PMO, où la batterie n'est pas utilisée), nous rechargeons donc l'accumulateur en lui fournissant à chaque fois *la même charge* $Q_c = I_c.t_c$. Au bout de quelques cycles, il s'établit naturellement un équilibre entre la charge et la décharge de la batterie, qui fait que le courant fourni est très répétable pour deux cycles successifs. Notons que l'utilisation d'une batterie électrochimique standard n'est possible dans notre cas que grâce à l'emploi des ferromagnétiques, qui permet de n'utiliser qu'un courant relativement faible (~ 1 A) pour alimenter le dispositif de piégeage. Si l'on utilisait de forts courants (quelques centaines d'ampères), comme cela se pratique généralement pour les dispositifs sans ferromagnétiques, la batterie se déchargerait beaucoup trop vite, ce qui rendrait son utilisation impossible.

Ayant constaté les très bons résultats en terme de stabilité obtenus à l'aide de ce dispositif, nous avons finalement fait l'acquisition d'une alimentation commerciale très stable⁵ *y compris sur charge fortement inductive*. Celle-ci remplace la batterie et la résistance R_s dans tout ce qui précède. On s'affranchit ainsi des contraintes liées à la nécessité d'une recharge régulière de l'accumulateur (fonctionnement régulier plus rapide à établir, meilleure reproductibilité du biais d'un jour sur l'autre, etc.)

Nous sommes ainsi parvenus à stabiliser le biais magnétique, et donc les lasers à atomes produits dans des proportions suffisantes pour permettre les études systématiques des lasers atomiques. Nous n'avons pas effectué d'études permettant de quantifier les bruits résiduels sur le biais magnétique, la stabilité des lasers obtenus montrant simplement qu'ils sont faibles devant 25 mG.

3.3.2 Effets de la puissance du coupleur sur l'état interne de sortie

La figure 3.7 représente les potentiels suivant la verticale (magnétique + gravitationnel) vus par les atomes dans les trois sous-niveaux Zeeman de $F = 1$, calculés exactement avec les paramètres de notre piège magnétique. L'effet Zeeman non-linéaire entraîne que la transition entre $m_F = 0$ et $m_F = +1$ n'a pas lieu au même point que la transition entre $m_F = -1$ et $m_F = 0$. Pour une fréquence rf donnée, les atomes passent de $m_F = -1$ à $m_F = 0$ où ils commencent à tomber sous l'effet de la gravité, puis ils rencontrent la surface de couplage entre $m_F = 0$ et $m_F = +1$ et peuvent éventuellement subir une

⁵Rohde & Schwarz NGPV 20/5

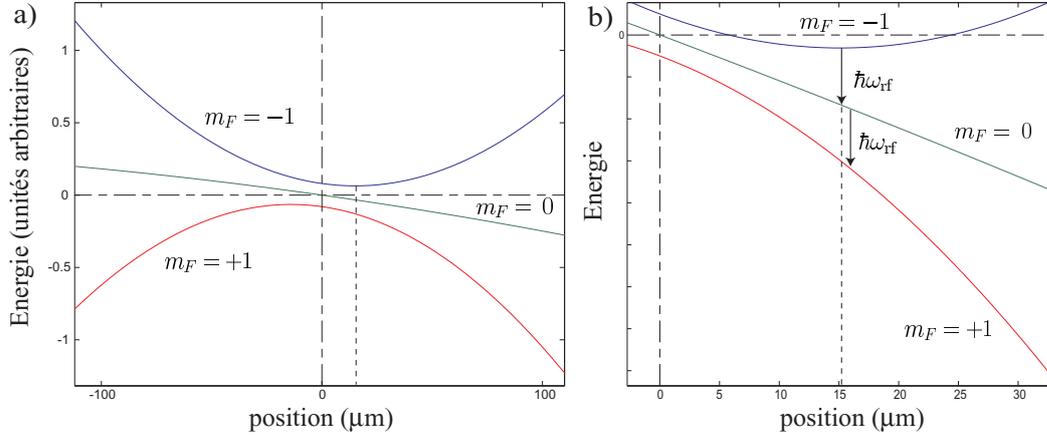


FIG. 3.7 – Potentiels dans les trois sous-niveaux-Zeeman de $F = 1$ en fonction de la coordonnée verticale. L'énergie de $m_F = -1$ a été abaissée par une constante, celle de $m_F = +1$ a au contraire été augmentée par cette même constante pour clarification. La figure **b** est un agrandissement de la figure **a** autour du centre du potentiel vu par les atomes dans l'état $m_F = -1$. Pour une fréquence rf ω_{rf} donnée, la transition entre $m_F = 0$ et $m_F = +1$ n'a pas lieu au même point que celle entre $m_F = -1$ et $m_F = 0$.

seconde transition. La puissance rf utilisée va nous permettre de choisir l'état interne dans lequel les atomes sortent de la zone de couplage.

Les images de la figure 3.8 représentent des faisceaux issus de nuages condensés pour différentes puissances de la radio-fréquence. À faible puissance rf, les atomes sortent tous dans l'état $m_F = 0$ (figure 3.8). En augmentant la puissance rf, il est possible de contrôler la proportion d'atomes qui se retrouvent dans $m_F = +1$. À la limite des fortes puissances, tous les atomes terminent dans $m_F = +1$, il reste cependant une zone où les atomes sont dans $m_F = 0$ car ils n'ont pas encore atteint la deuxième surface de couplage.

Dans toutes les autres expériences que nous avons faites, la puissance radio-fréquence est faible de sorte que les atomes ne sortent que dans l'état $m_F = 0$. Si le temps de couplage est assez long, on observe alors un faisceau atomique allongé. Les figures 3.8.a et 3.9, montrent deux images de faisceaux d'atomes obtenues pour un temps de couplage de 10 ms, les longueurs des deux faisceaux apparaissent différentes car les systèmes d'imagerie utilisés sont différents. Pour 3.9, le faisceau laser sonde est perpendiculairement à la gravité. Pour 3.8.a, il fait un petit angle avec la gravité, et l'effet de parallaxe diminue la taille apparente du faisceau.

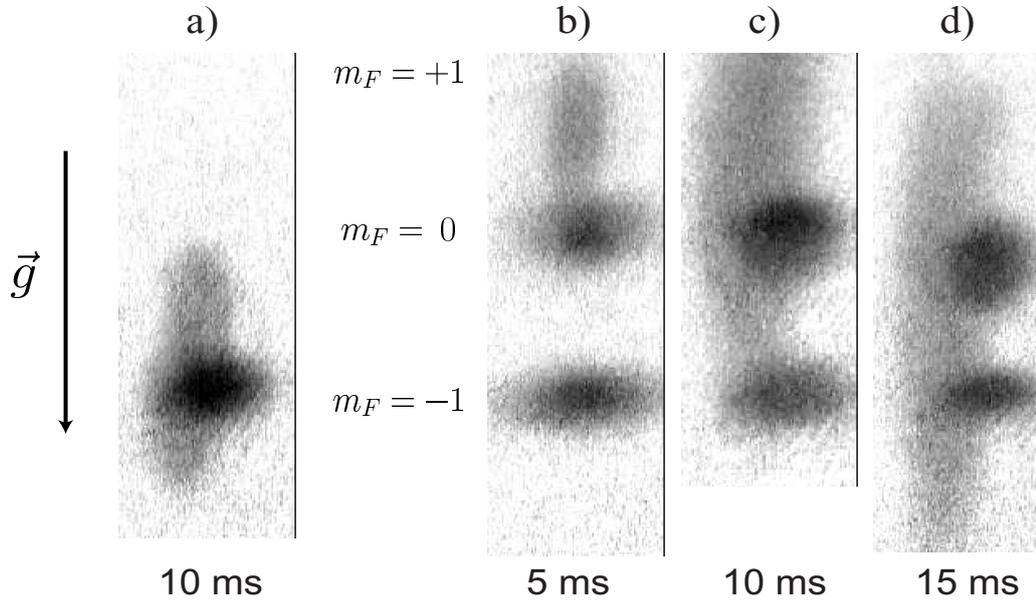


FIG. 3.8 – Images de lasers à atomes obtenus pour différentes puissances RF et différents temps de couplage. Les sous-niveaux Zeeman sont séparés par un effet Stern et Gerlach à la coupure du champ magnétique (temps de vol 6 ms après coupure). La direction de la sonde fait un petit angle avec la verticale, de sorte que la longueur des faisceaux apparaît beaucoup plus petite qu'elle ne l'est en réalité (parallaxe). **a)** Faible puissance RF : les atomes sortent dans l'état $m_F = 0$. Le temps de couplage est de 10 ms. Sur les images suivantes, la puissance RF est forte, de sorte que les atomes sortent de la zone de couplage dans l'état $m_F = 1$. Temps de couplage : **b)** 5 ms ; **c)** 10 ms ; **d)** 15 ms. On note que la longueur et la largeur du faisceau sont plus grandes à temps de couplage identique pour $m_F = 1$ que pour $m_F = 0$. Ceci est dû au fait que le potentiel magnétique dans $m_F = 1$ accélère les atomes (potentiel répulsif dans les trois directions de l'espace).

3.3.3 Courbes de couplage

En modifiant la fréquence du coupleur de sortie, et en observant le nombre d'atomes effectivement couplés après un temps suffisamment court pour ne pas modifier significativement le nombre d'atomes dans le condensat, on peut également vérifier que l'efficacité de transfert est bien liée à la densité atomique du condensat au point de couplage. Lorsque δ_{RF} est supérieur à Δ , le coupleur est en dehors du condensat, et l'efficacité de couplage est nulle (les intégrales de recouvrement avec les fonctions d'ondes du continuum sont toutes nulles sur la largeur du couplage). Lorsque le coupleur se trouve à l'intérieur du condensat (position $z = z_{E_i}$), l'efficacité de couplage croît quand

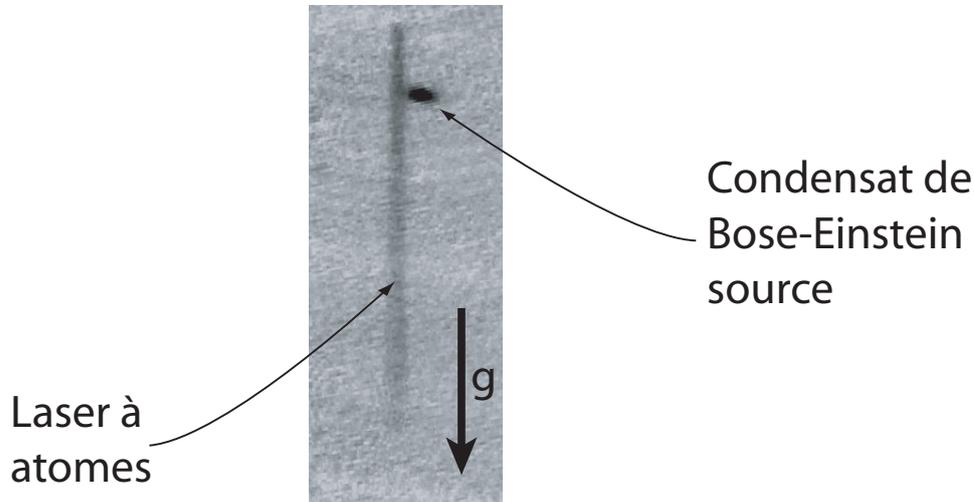


FIG. 3.9 – Image en absorption typique d’un laser à atome obtenu sur notre dispositif expérimental. Le condensat de Bose-Einstein source est décalé par rapport au sommet du laser atomique lors de la coupure des champs magnétiques avant la prise de l’image qui crée un effet Stern-Gerlach

la densité du condensat augmente (eq. 3.36 et références [55, 56]) La figure 3.10 présente le résultat d’une telle étude.

L’intérêt de ce type de courbe est double. Tout d’abord, il permet de trouver empiriquement la position du coupleur correspondant au centre du condensat de Bose-Einstein (minima de la courbe). En pratique en effet, on ne connaît pas bien *a priori* tous les paramètres nécessaires au calcul de la condition de résonance optimale donnée par 3.26 avec une précision suffisante. Le biais magnétique B_0 en particulier ne peut être mesuré précisément que *ex-situ*, et peut évoluer légèrement au cours du temps (même pour une excitation identique) entre le moment de la mesure et celui de la réalisation du laser⁶. La réalisation d’une courbe de ce type permet donc une calibration précise des champs magnétiques au voisinage du condensat.

Le second intérêt est que la largeur de la courbe, jointe à une mesure du nombre d’atomes par imagerie d’absorption (afin d’évaluer le potentiel chimique μ) et de la fréquence d’oscillation verticale du piège, permet d’obtenir des indications sur le niveau de stabilité des champs magnétiques. En effet, si la largeur observée est supérieure à 2Δ , cet élargissement ne peut provenir

⁶La mise en place de l’électro-aimant nécessite un démontage partiel qui interdit d’envisager de faire une calibration très précise et fiable des champs magnétiques *ex-situ*. Qui plus est, la compensation des champs magnétiques résiduels se fait en observant l’explosion d’une mélasse, donc *in situ*. Celle-ci va également modifier légèrement la configuration magnétique par rapport aux mesures *ex situ*. La méthode empirique présentée est donc un bon moyen d’obtenir une calibration fiable et précise du biais magnétique.

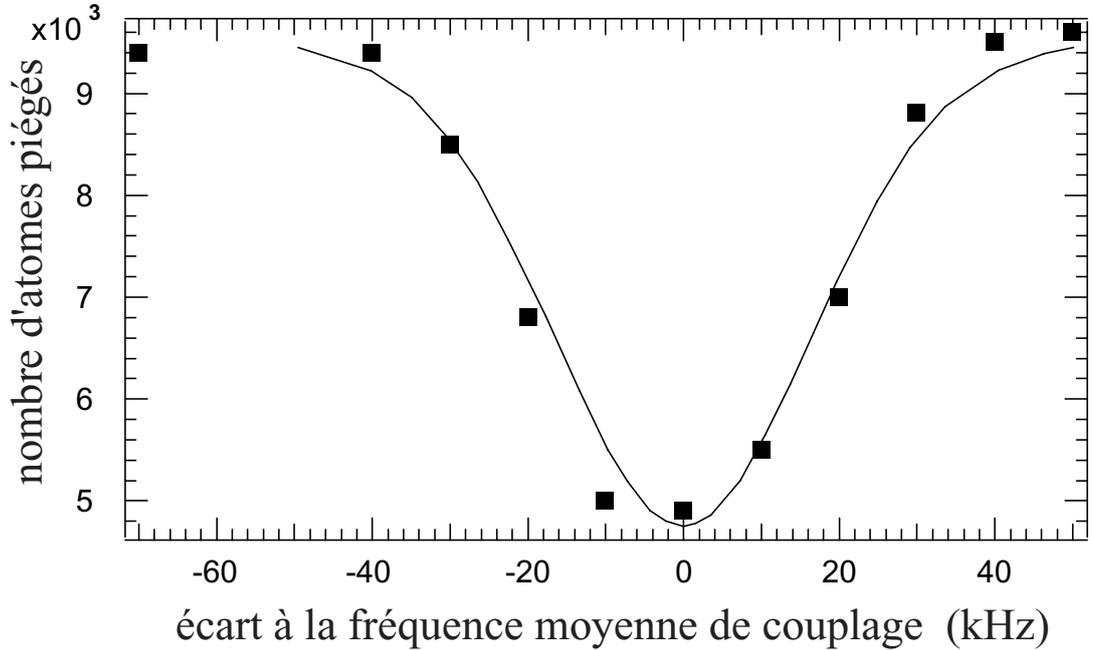


FIG. 3.10 – Efficacité de couplage en fonction de la fréquence RF du coupleur de sortie (faible puissance) : nombre d'atomes restant dans le condensat après un temps de couplage de 10 ms à puissance RF faible.

que de fluctuations de la condition de résonance au cours du couplage. Dans le cas présenté sur la figure 3.10, la courbe en traits plein correspond à la convolution du profil de densité du condensat (voir [55]) par une distribution normale de largeur à un sigma de 15 kHz représentant les fluctuations du biais magnétique (courbe prise avant la mise en place des systèmes de stabilisations du biais). Après mise en place des alimentations à hautes stabilités, nous avons obtenus des courbes de largeurs inférieures à 20 kHz.

3.4 Quelques expériences

3.4.1 Couplage dans une cavité gravito-magnétique

On a vu que le niveau $|F = 1, m_F = 0\rangle$ utilisé jusqu'ici pour les couplages de lasers à atomes était non piégeant. En fait l'effet Zeeman quadratique courbait même quelque peu ce niveau magnétique pour le rendre légèrement répulsif par rapport au centre du piège magnétique. Le niveau magnétique « conjugué » de celui-ci, au sens de la contamination entre niveau hyperfins provoquant la non linéarité de l'effet Zeeman, est le niveau $|F = 2, m_F = 0\rangle$. Celui-ci est donc légèrement piégeant, car il présente une

courbure opposée à celle du niveau $|F = 1, m_F = 0 \rangle$.

La figure 3.11 présente les niveaux énergétiques en question. On notera l'effet de la gravité qui décale les centres des potentiels harmoniques du piège et de la cavité l'un par rapport à l'autre.

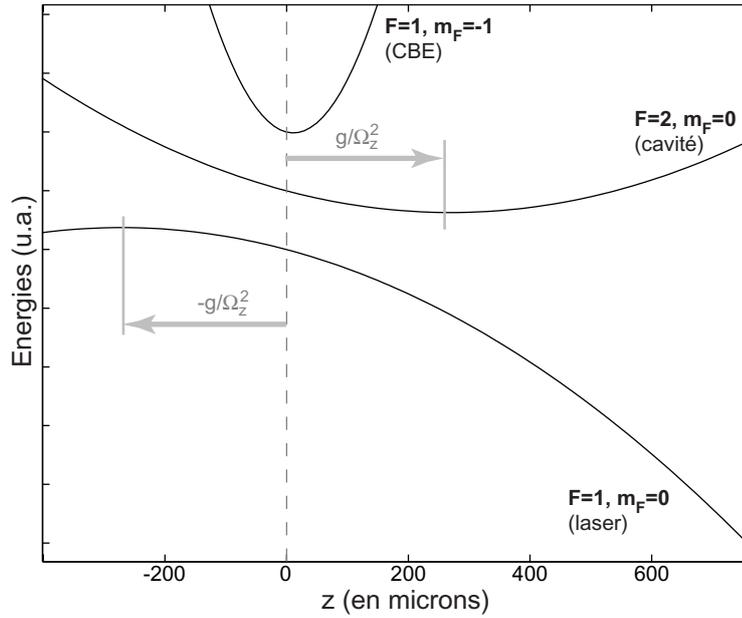


FIG. 3.11 – Potentiel vu par les atomes dans différents états internes. Le condensat est créé dans le niveau $|F = 1, m_F = -1 \rangle$ (piège). Les atomes dans le niveau $|F = 1, m_F = 0 \rangle$ voient un potentiel répulsif. Ceux dans le niveau $|F = 2, m_F = 0 \rangle$ voient un potentiel attractif (cavité atomique). L'effet de la gravité est de décaler les centres des différents potentiels les uns par rapport aux autres. Note : les positions verticales relatives des différentes courbes ont été modifiées pour faciliter la lecture.

Utilisant un synthétiseur hyperfréquence à environ 6,8 GHz, on peut créer un couplage entre le niveau $|F = 1, m_F = -1 \rangle$ et le niveau $|F = 2, m_F = 0 \rangle$. Ce dernier constitue une cavité atomique par l'effet combiné de la gravité et de l'effet Zeeman quadratique [57, 58]. Les états propres dans cette cavité atomique sont les habituelles fonctions propres de l'oscillateur harmonique (pulsation Ω_z). On ne couple plus alors le condensat de Bose vers un continuum comme précédemment. Cependant la séparation $\hbar\Omega_z$ entre deux niveaux consécutifs de l'oscillateur harmonique correspondant à $|F = 2, m_F = 0 \rangle$ est négligeable devant la largeur en énergie du couplage⁷ $\hbar\Gamma$. Tout se

⁷Tout comme pour le laser à atome dans un continuum réel décrit précédemment, on peut envisager d'être aussi sélectif que l'on veut sur la largeur spectrale du « laser » dans

passé donc à peu près comme si l'on couplait vers un véritable continuum comme précédemment (quasi-continuum).

3.4.1.1 Mesure de la fréquence d'oscillation dans la cavité

En appliquant un couplage hyperfréquence assez fort pendant un temps négligeable devant la période d'oscillation dans la cavité $2\pi/\Omega_z$, on obtient un « pulse » d'atomes dans la cavité, dont le centre de masse oscille à la fréquence Ω_z (fig. 3.12). En ajustant la position du centre de masse par une sinusoïde, on obtient une mesure assez précise de la fréquence d'oscillation $\Omega_z/2\pi$ (fig. 3.13).

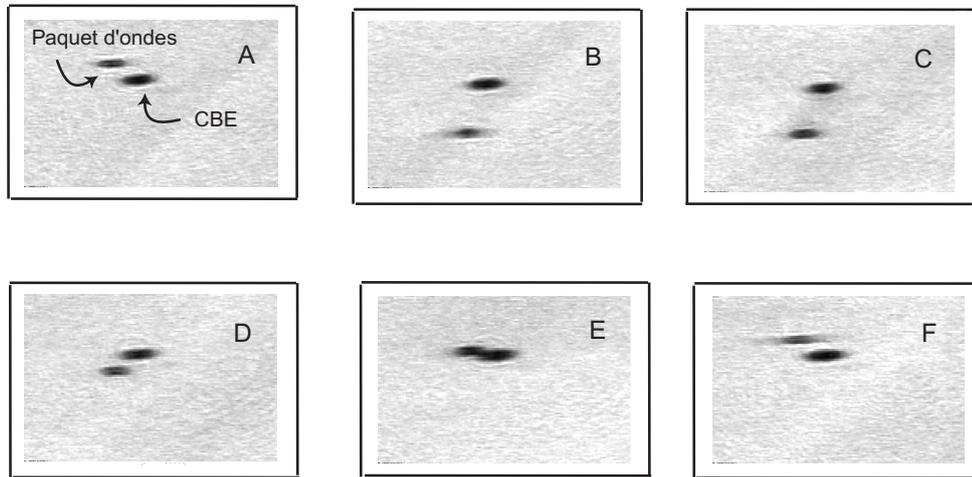


FIG. 3.12 – Oscillation d'un « pulse » d'atomes dans la cavité pour un couplage court et intense depuis le condensat de Bose-Einstein. Les images sont prises après : A : 12 ms ; B : 25 ms ; C : 30 ms ; D : 36 ms ; E : 39 ms ; F : 42 ms. La durée du couplage est de 2 ms.

L'un des intérêts de ce type d'expérience est que la fréquence d'oscillation dans la cavité Ω_z est la même que celle du potentiel harmonique *répulsif* existant sur le niveau $F = 1, m_F = 0$ du laser atomique (Ω_{ZQ}). La connaissance de cette dernière étant nécessaire pour l'analyse des données obtenues sur le laser à atomes, la mesure de la fréquence d'oscillation dans la cavité atomique présente un préalable utile à l'étude des propriétés des lasers à atomes.

La cavité. En diminuant la puissance du coupleur HF à une valeur suffisamment basse pour avoir $\Gamma \ll \hbar\Omega_z$, on ne couplerait que vers un seul niveau de la cavité atomique. Cependant, le taux de couplage serait alors trop faible pour envisager voir des atomes dans la cavité en un temps raisonnable compatible avec les nécessités expérimentales. En pratique bien entendu, on serait également rapidement limité par les fluctuations résiduelles du biais magnétique.

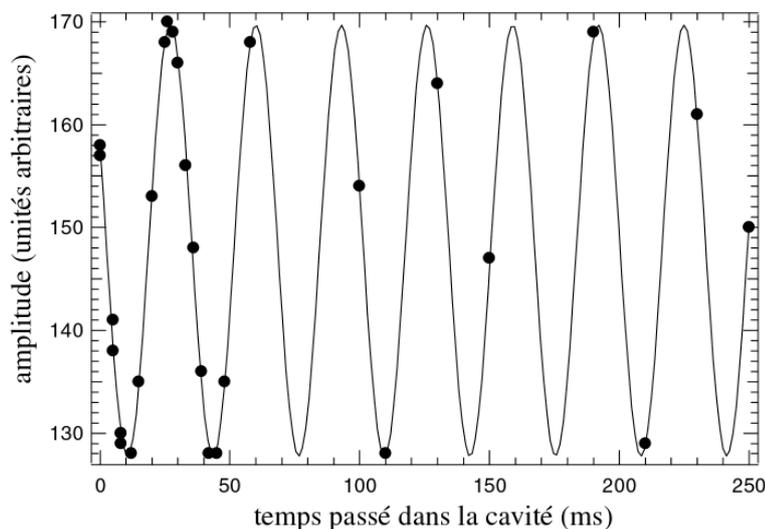


FIG. 3.13 – *Position en fonction du temps du centre de masse d'un nuage d'atomes condensés couplés dans la cavité constituée par le niveau piégeant $|F = 2, m_F = 0\rangle$ soumis à l'effet Zeeman quadratique. Un ajustement avec une fonction sinusoïdale donne une fréquence de 30,3 Hz.*

3.4.1.2 Couplage continu

Lorsqu'on applique un couplage faible pendant un temps plus long, on obtient un front d'onde qui se propage continûment (fig. 3.14). Arrivé au point de rebroussement classique opposé à celui correspondant à la zone de couplage, il fait demi-tour et continue à se propager. Il y a alors interférence entre les parties du laser dans la cavité se propageant vers le bas et celles se propageant en sens inverse. Dans notre cas néanmoins, la résolution de l'imagerie ne permet pas de mettre en évidence ces phénomènes d'interférences. L'analyse de ce type de phénomène par une méthode indirecte a cependant permis au groupe de Munich [59] de démontrer les propriétés de cohérence temporelle des lasers à atomes.

3.4.2 Longueur du faisceau laser

L'étude du couplage hyperfréquence dans le niveau $|F = 2, m_F = 0\rangle$ a permis de mesurer la courbure du potentiel dû à l'effet Zeeman quadratique. Réciproquement, lorsque l'on couple par radiofréquence vers $|F = 1, m_F = 0\rangle$, tant que le champ magnétique est présent, le potentiel magnétique accélère la chute des atomes. Nous avons mesuré la longueur du faisceau obtenu pour un temps de couplage de 10 ms. Après ces 10 ms, le champ magnétique est coupé et les atomes se propagent sous l'effet de la gravité seule pendant 6 ms, puis l'image est prise. La longueur mesurée est de $1,84 \pm 0,09$ mm en

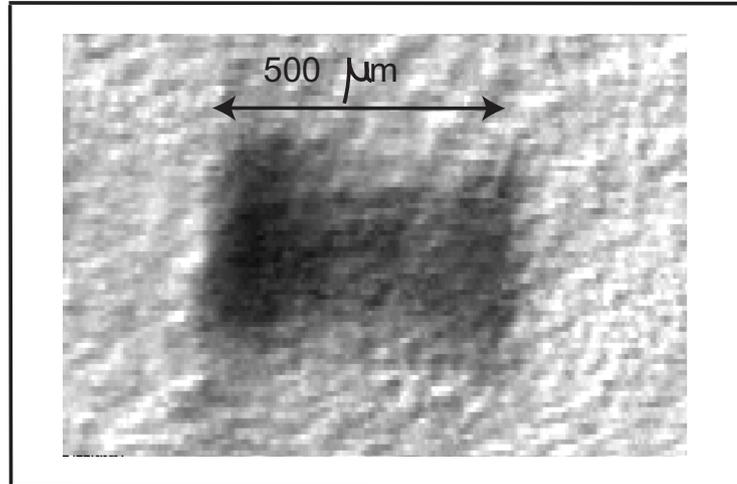


FIG. 3.14 – Cavité atomique après 35 ms de couplage en continu. La fréquence de Rabi correspondante à l'intensité du coupleur hyperfréquence est ici de l'ordre de 100 Hz.

bon accord avec un calcul des trajectoires classiques correspondantes pour la propagation dans un potentiel harmonique répulsif, de courbure mesurée en 3.4.1.1 (On trouvera ce calcul de trajectoire classique plus loin dans le mémoire).

Si le faisceau s'était propagé sous l'effet de la gravité uniquement, sa longueur aurait été de 1,08 mm. Il est donc important de tenir compte de l'effet du potentiel magnétique pour l'analyse des images.

3.5 Conclusion

Les quelques expériences qui ont été présentées ont permis de montrer qu'il était possible de réaliser des lasers atomiques stables de façon répétitive à l'aide de notre dispositif expérimental. L'importance des termes non linéaires de l'effet Zeeman (en particulier l'effet Zeeman quadratique) a été mise en évidence. Une mesure de la courbure du potentiel vu par les atomes du laser a été effectuée. Ces résultats permettent d'aborder des études plus approfondies sur les lasers atomiques, effectuées dans les chapitres suivants.

Étude expérimentale et analyse théorique de la divergence d'un laser à atomes

Une fois que nous sommes parvenus à obtenir des lasers à atomes quasi-continus de bonne qualité, et de façon répétable, nous avons essayé de caractériser le faisceau produit de manière quantitative. En particulier, nous sommes intéressés à la dépendance de nos lasers à atomes avec la fréquence du coupleur de sortie employé. Les courbes de couplage comme celles de la figure 3.10 nous donnaient d'ores et déjà des informations sur le flux atomique produit : les lasers sont d'autant moins « lumineux » que le coupleur de sortie est désaccordé par rapport au centre du piège magnétique. Cependant, l'examen attentif des images de lasers obtenues nous a montré que la forme du mode transverse présentait également une dépendance avec la fréquence du coupleur. C'est cette dépendance que nous étudions dans le chapitre qui suit.

Nous avons constaté expérimentalement une divergence bien réelle des faisceaux atomiques produits. Par ailleurs cette divergence dépendait de la fréquence du coupleur de sortie que nous utilisions. Après avoir brièvement exposé le type de données expérimentales que nous avons obtenues, nous développons un modèle théorique complet de la propagation transverse d'un laser à atome. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur l'analogie avec l'optique, où les problèmes de propagation des modes transverses des lasers peuvent être traités relativement simplement à l'aide du formalisme des matrices ABCD. Nous adaptons donc ce type de formalisme au cas des lasers à atomes. Finalement, nous montrons que ce formalisme permet d'expliquer tant qualitativement que quantitativement les effets observés.

4.1 Le laser à atome : description tri-dimensionnelle

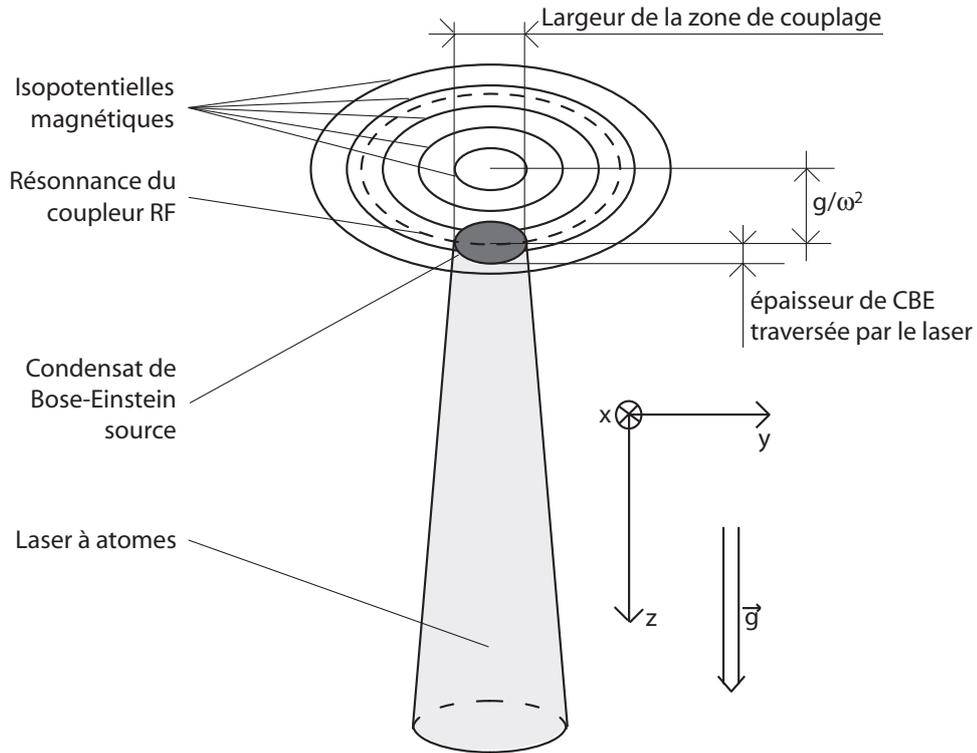


FIG. 4.1 – Principe de fonctionnement d'un laser atomique.

Si l'on s'intéresse maintenant aux aspects tridimensionnels du laser à atome, on voit que la zone de couplage de l'onde RF va correspondre approximativement à une section horizontale du condensat de Bose-Einstein. En effet, la force de pesanteur écarte le condensat du centre du piège magnétique. Celui-ci est ainsi amené dans une zone où les surfaces équipotentielles magnétiques, qui sont les surfaces résonnantes de l'onde RF de couplage du laser, sont approximativement des plans horizontaux (comparés à la taille du condensat) (fig. 4.1).

Ce déplacement avait été négligé dans le cas de l'évaporation car, pendant la plupart de cette phase de refroidissement, la taille du nuage est nettement plus grande que ce décalage vertical $z_0 = g/\omega_z^2$. Pour les paramètres de notre piège, la température à laquelle le nuage d'atomes devient plus petit que le décalage gravitationnel est de $1,4 \mu\text{K}$. Pour les nuages condensés que l'on va coupler, la température est nettement plus faible que cette valeur, et la surface de couplage est bien approximativement plane.

4.2 Expériences : divergence d'un laser à atomes

4.2.1 Paramètres et résultats expérimentaux

On a vu dans le chapitre 3 comment le choix d'une fréquence RF pour le coupleur de sortie de notre laser à atomes sélectionnait la position verticale d'extraction du condensat selon la formule :

$$\delta_{\text{RF}} = \Delta \frac{z_E}{R_z} - \frac{\mu}{\hbar} \left(1 - \frac{z_E^2}{R_z^2} \right) \quad (4.1)$$

où Δ est la demi-largeur spectrale du condensat, définie par :

$$\Delta = \frac{mgR_z}{\hbar} \quad (4.2)$$

Pour nos paramètres expérimentaux, on se ramène à :

$$z_E \simeq \frac{\hbar \delta_{\text{RF}}}{mg} \quad (4.3)$$

On voit sur la figure 4.1 que le choix de la hauteur de la zone de couplage aura deux effets principaux. Tout d'abord, la largeur à l'origine du faisceau laser produit est d'autant plus faible que le coupleur de sortie s'éloigne du centre du condensat. Plus quantitativement, si $\Phi(x, y, z)$ est la fonction d'onde du condensat, on note :

$$|\Phi(x, y, z)|^2 = \frac{\mu}{g_{\text{int}}} \cdot \max \left[0 ; 1 - \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{R_z} \right)^2 \right] \quad (4.4)$$

On fait l'approximation que la zone de couplage est un plan horizontal. Les largeurs suivant les directions x et y de cette zone (intersection entre le condensat et le plan d'altitude z_E) sont alors :

$$\Delta x = R_x \sqrt{1 - \left(\frac{z_E - z_0}{R_z} \right)^2} \quad (4.5)$$

$$\Delta y = R_y \sqrt{1 - \left(\frac{z_E - z_0}{R_z} \right)^2} \quad (4.6)$$

qui décroissent rapidement quand on se rapproche des limites haute et basse du condensat. Cet effet de modification de la taille du faisceau laser émis va, par analogie avec les lasers optiques, pouvoir modifier les propriétés du faisceau laser atomique produit (diffraction).

Par ailleurs, on observe également que le faisceau atomique, une fois émis, va traverser une partie d'autant plus importante du condensat de Bose-Einstein que la zone de couplage se trouve à une altitude élevée. On peut s'interroger sur les effets que vont avoir ces différences sur la forme des faisceaux émis, en particulier du fait de l'*effet d'indice* dû aux interactions entre atomes du laser et atomes du condensat qui perturbe la propagation.

Nous avons réalisé divers lasers à atomes, pour des positions de la zone de couplage différentes. Quelques résultats typiques sont présentés sur la figure 4.2. On peut constater un phénomène de divergence du faisceau laser atomique produit. Celui-ci dépend de la fréquence du coupleur utilisé, qui, on l'a vu, est reliée à la position verticale d'extraction du condensat.

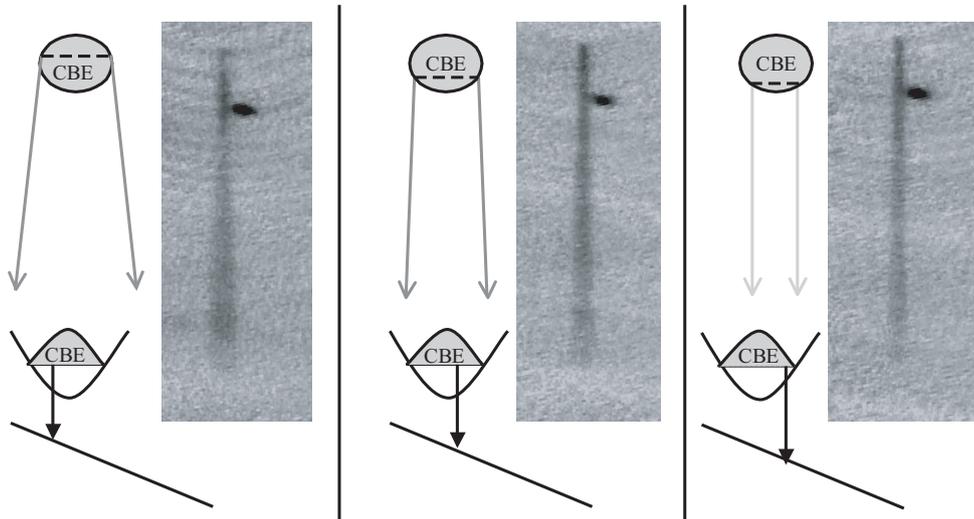


FIG. 4.2 – Diverses images de lasers atomiques pour différentes fréquences du coupleur de sortie. De gauche à droite : 38,557 MHz, 38,555 kHz et 38,553 MHz

4.2.2 Effets attendus de la diffraction

Par analogie avec les lasers optiques, la première cause envisageable pour expliquer la divergence d'un faisceau est la diffraction. On sait qu'en optique photonique, plus le col d'un faisceau laser est étroit, plus celui-ci va diverger rapidement. On rappelle que, pour un faisceau laser gaussien, on définit une longueur de Rayleigh Z_R au bout de laquelle le faisceau cesse tout à fait d'être un faisceau parallèle, et devient essentiellement caractérisé par son angle de divergence θ [60]. Si w_0 est la largeur du col du faisceau (définie comme le rayon à $1/e^2$ de l'éclairement dans le plan du col, ou bien, ce qui

est équivalent, comme le *rayon* à $1/e$ de l'amplitude du champ électrique), on a les relations bien connues :

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4.7)$$

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (4.8)$$

De la même façon, on sait qu'en mécanique quantique, pour un paquet d'ondes gaussien, l'effet dit d'*étalement du paquet d'onde*¹ [61] va avoir tendance à élargir la taille du paquet au cours du temps, et ce d'autant plus fortement que le paquet d'onde est petit à l'instant initial. Cet effet, équivalent à la diffraction en optique, va avoir tendance à élargir le faisceau laser atomique au cours de sa propagation.

Plus quantitativement, on peut chercher la solution stationnaire $\Psi(x, y, z)$ du problème très simplifié suivant : soit un laser atomique extrait continûment (sans vitesse initiale) par la seule gravité depuis le plan $z = z_E$ (\vec{z} est orienté selon la gravité). On néglige tout effet des interactions atomiques entre le laser et le condensat, ainsi qu'à l'intérieur du laser. On suppose enfin, pour simplifier les calculs, une forme gaussienne de la fonction d'onde $\Psi(x, y, z)$ dans le plan d'extraction $z = z_E$:

$$\Psi(x, y, z = z_E) = e^{-\left(\frac{x}{w_{0x}}\right)^2 - \left(\frac{y}{w_{0y}}\right)^2} \quad (4.9)$$

où w_{0x} et w_{0y} sont les rayons à $1/e^2$ de la densité de probabilité $|\Psi|^2$.

On va chercher alors la largeur du laser atomique en fonction de la position verticale. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit, pour le problème considéré :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + mgz - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z) \quad (4.10)$$

Pour les ordres de grandeurs auxquels nous accédons expérimentalement, les termes en x et y dans le hamiltonien sont négligeables devant les termes en z . En effet, pour une largeur de $\Psi(x, y, z = 0)$ de l'ordre de $10 \mu\text{m}$, on a $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \sim 3 \cdot 10^{-32} \text{ m} \ll mgz$ pour $z - E/mg \gg 0,02 \mu\text{m}$. On peut alors faire l'approximation paraxiale, qui consiste à supposer que les degrés de libertés à évolutions rapides (z) sont découplés des degrés de liberté à évolution lente (x et y). On sépare donc le mouvement selon l'axe (Oz) de la fonction d'onde :

$$\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z) \cdot \Psi_E(z) \quad (4.11)$$

¹également appelé effet de « pression quantique » par certains auteurs

avec

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + mgz \right] \Psi_E(z) = E \Psi_E(z) \quad (4.12)$$

où on pose $E = -mgz_E$. On suppose que $\Phi(x, y, z)$ varie lentement en fonction de z par rapport à la longueur d'onde atomique. L'équation 4.10 donne alors :

$$i\hbar v_z \partial_z \Phi = -\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi \quad (4.13)$$

où la vitesse v_z est liée à la position verticale z par $v_z = \sqrt{2g(z - z_E)}$. Cette équation différentielle se résout aisément en passant à la transformée de Fourier par rapport à x et y (résolution équivalente au problème de l'étalement temporel d'un paquet d'onde gaussien, traité par exemple dans [61]). On trouve finalement pour le mode transverse du laser :

$$\Phi(x, y, z) = A(z - z_E) \cdot e^{-\frac{x^2}{w_{0x}^2 - \frac{2i\hbar(z-z_E)}{mv_z}} - \frac{y^2}{w_{0y}^2 - \frac{2i\hbar(z-z_E)}{mv_z}}} \quad (4.14)$$

où $A(z - z_E)$ est un simple facteur de normalisation et de phase globale. Ainsi, on constate une largeur transverse croissante en fonction de z . En définissant $w_x(z)$ et $w_y(z)$ comme les rayons à $1/e^2$ de $|\Phi(x, y, z)|^2$ aux plans d'altitudes z , on trouve :

$$w_x(z) = w_{0x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_E}{\pi w_{0x}^2 / \lambda_{dB}(z)} \right)^2} \quad (4.15)$$

où $\lambda_{dB}(z)$ est la longueur d'onde de de Broglie² au point z définie par $\lambda_{dB}(z) = h/mv_z$.

On retrouve bien là un comportement très semblable à ceux des lasers optiques, la différence principale venant de la dépendance en z de la longueur d'onde de de Broglie $\lambda_{dB}(z)$, due à l'accélération gravitationnelle. Ceci empêche de définir, comme en optique une longueur de Rayleigh caractéristique, ainsi qu'un angle de divergence à longue distance (asymptotiquement, la propagation transverse d'un laser atomique à extraction gravitationnelle est de forme parabolique, et non conique comme pour les lasers optiques). Cependant, en faisant le changement de variable $t_z = \sqrt{2(z - z_E)/g}$ (ce qui correspond à paramétrer la propagation longitudinale en fonction du temps de chute pour le mouvement classique, au lieu de la position), on trouve :

$$w_x(t_z) = w_{0x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{t_z}{mw_{0x}^2/\hbar} \right)^2} \quad (4.16)$$

ce qui permet de définir un « temps de Rayleigh » T_R pour la propagation du laser atomique, qui caractérise le temps de propagation typique au bout

²différente de la longueur d'onde de de Broglie *thermique* définie au chapitre 1

duquel les effets de diffractions deviennent très importants :

$$T_R = mw_{0x}^2/\hbar \quad (4.17)$$

Pour une largeur en z_E de l'ordre de $4\ \mu\text{m}$, on a $T_R \sim 20\ \text{ms}$. Les temps caractéristiques de l'expérience effectués sont de l'ordre de la dizaine de millisecondes, ce qui est inférieur au temps de Rayleigh calculé. Par ailleurs, la diffraction est d'autant plus importante que le plan d'extraction est petit. On devrait donc observer une diffraction plus importante aux limites de la zone de couplage qu'au centre. Expérimentalement, on observe plutôt une diminution de la divergence avec l'abaissement de la zone de couplage, ce qui n'est pas en accord qualitatif avec les effets attendus de la diffraction. Les effets observés ont donc d'autres causes principales, que nous étudions dans les paragraphes suivants.

4.2.3 Effets de la traversée du condensat, rôle des interactions et de l'effet Zeeman quadratique

Au contraire des photons, l'on sait que les atomes présentent des interactions entre eux. Les densités atomiques dans le laser restent très faible, et l'on peut sans problème négliger les effets des interactions entre les atomes de celui-ci. Cependant, le laser traverse une partie du condensat original avant d'être expulsé, et ce milieu possède lui une forte densité. Il est donc nécessaire de tenir compte des effets des interactions entre les atomes du laser et ceux du condensat. Comme on le montrera ultérieurement, ceci a pour effet d'accroître la divergence du laser atomique.

Par ailleurs, les forts gradients produits par notre dispositif de piégeage magnétique font que les atomes expulsés dans le laser (dans l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$) vont voir un léger potentiel magnétique dû à l'effet Zeeman quadratique. Cet effet magnétique résiduel (défocalisant) va également légèrement modifier les trajectoires des atomes par rapport au cas idéal où ils ne seraient sensible qu'à la force de gravité, et donc élargir la taille du laser atomique au cours de sa propagation.

4.3 Un outil pour la propagation d'un laser : les matrices ABCD

Afin de traiter à la fois les effets dus à la diffraction, et ceux dus aux effets de potentiels que subissent les atomes, on aimerait disposer d'un formalisme combinant ces deux types bien distincts d'effets.

Un tel formalisme existe pour les lasers photoniques, il s'agit de la méthode des matrices ABCD. Celui-ci a d'ores et déjà été étendu de façon

très générale au cas des ondes de matières dans le cadre de l'interférométrie atomique [62]. Il semble donc naturel d'essayer d'adapter la méthode des matrices ABCD à l'étude de la propagation de notre laser à atomes. Nous développons ici un modèle simple de matrices ABCD dans l'approximation paraxiale, dérivé du formalisme de l'optique, et adapté à l'étude de la propagation d'un laser atomique. Une approche plus générale de ce type de méthode peut être trouvée dans [63].

4.3.1 Rappel sur les matrices ABCD en optique photonique

On rappelle ici pour mémoire quelques résultats utiles sur l'utilisation des matrices ABCD en optique. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet trouvera dans la référence [60] (par exemple), de quoi assouvir plus avant sa curiosité. Quand au lecteur déjà familiarisé avec ces notions, il pourra passer sans difficultés directement à la suite du mémoire. Les paragraphes qui vont suivre mettent l'accent sur les points qui nous seront plus particulièrement utiles pour construire l'analogie entre les lasers optiques et les lasers à atomes.

4.3.1.1 Matrices ABCD et optique géométrique

Dans le cadre de l'optique géométrique, on décrit un rayon lumineux dans un plan d'origine (P) par la donnée d'un point $M(x, y)$ et d'un vecteur \vec{V} , défini par ses angles directeurs (τ, θ) . Dans la suite, on se ramène au cas 2D par souci de simplification. On peut alors définir un rayon par le vecteur colonne $[y, \theta]_{(P)}$. Ce rayon se propage à travers un système optique (SO) pour arriver en un plan (P'), où il est défini de même par un autre vecteur colonne $[y', \theta']_{(P')}$.

On suppose que l'on ne considère que des systèmes optiques ayant des propriétés ne dépendant de la distance à l'axe optique que de manière linéaire ou quadratique. Dans le cadre de l'*approximation paraxiale*, on suppose également les angles d'incidences des rayons lumineux suffisamment faibles pour pouvoir faire l'approximation $\theta \simeq \sin(\theta) \simeq \tan(\theta)$. Il est alors possible de montrer que tout système optique (SO) se caractérise entièrement par la donnée d'une unique matrice de passage \mathfrak{M}_{SO} entre le plan (P) et le plan (P'). On a alors, pour tout rayon *paraxial* :

$$\begin{bmatrix} y' \\ \theta' \end{bmatrix}_{(P')} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_{(P)} \quad (4.18)$$

On rappelle dans les quelques paragraphes qui suivent les matrices correspondant à quelques cas particuliers de systèmes optiques « classiques » :

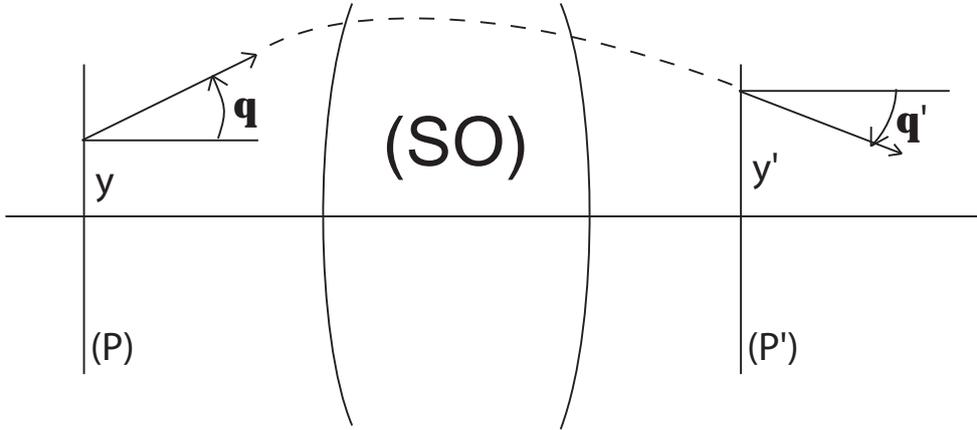


FIG. 4.3 – Propagation d'un rayon à travers un système optique en optique géométrique.

Propagation libre (ou dans un milieu d'indice constant n)

Pour un rayon optique se propageant dans un milieu d'indice constant n entre deux plans (P) et (P') distants de L , la lumière se propage en ligne droite. On a donc comme matrice de passage entre (P) et (P') :

$$\mathfrak{M}_{\text{Libre}}(L) = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Lentille mince

Dans l'approximation de la lentille mince, on néglige le déplacement du rayon lumineux lors de la traversée de la lentille. La traversée d'une lentille mince équivaut donc à modifier la direction θ du rayon optique, sans modification de sa position transverse y . On définit alors les plans (P) et (P') confondus avec le plan de la lentille, et on a :

$$\mathfrak{M}_{\text{LM}}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

où C est la *puissance* de la lentille mince, égale à l'inverse de sa focale :

$$C = \frac{1}{f'} \quad (4.21)$$

Généralisation aux systèmes lenticulaires

Dans ce cas, on considère la propagation à travers un milieu *a priori* épais, dont l'indice n dépend de la position. Plus spécifiquement, on définit

un système lenticulaire comme un milieu où l'indice ne dépend de la position transverse x et y que quadratiquement. Comme le milieu est épais, il n'est plus possible de négliger les modifications de la position transverse du faisceau lors de la propagation. Aucun des éléments de la matrice ABCD n'est alors trivial en général, contrairement aux cas précédents. Dans ce type de système, on trouve la matrice de passage équivalente en résolvant analytiquement les équations de propagations des rayons lumineux si cela est possible.

Par exemple, pour une lentille épaisse à gradient d'indice parabolique, caractérisée par un indice $n(y) = n_0(1 + \omega^2.y^2/2)$, la trajectoire $y(z)$ d'un faisceau lumineux s'écrit :

$$y(z) = y_0 \cdot \cos(\omega z) + \frac{\theta_0}{\omega} \cdot \sin(\omega z) \quad (4.22)$$

et la matrice ABCD correspondant à la propagation sur une distance L est donc :

$$\mathfrak{M}_{\text{LEP}}(C) = \begin{bmatrix} \cos(\omega L) & -\sin(\omega L)/\omega \\ \omega \sin(\omega L) & \cos(\omega L) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Si le profil d'indice parabolique est inversé ($n(y) = n_0(1 - \omega^2.y^2/2)$), les expressions obtenues sont les mêmes que précédemment, mais en remplaçant les sinus et cosinus par leurs équivalents hyperboliques.

Pour des systèmes plus complexes (si ω dépend de z dans les expressions précédentes), on ne sait pas forcément trouver de solution analytique. Il est cependant possible numériquement de trouver une solution acceptable en décomposant l'élément épais en une alternance d'éléments minces et de propagations en milieux homogènes infinitésimaux.

Combinaison de systèmes optiques

L'un des gros avantages des matrices ABCD est que la mise en série de plusieurs systèmes optiques successifs se traite de manière très simple : la matrice de passage du système complet est égale au produit des matrices correspondants aux différents éléments qui le composent. On a donc, pour N éléments constitutifs d'un système complexe (SO) :

$$\mathfrak{M}_{\text{SO}} = \prod_{i=1}^N \mathfrak{M}_{\text{SO}_i} \quad (4.24)$$

4.3.1.2 Utilisation dans le cadre des faisceaux Gaussiens

Partant de l'équation de propagation des ondes optiques :

$$\Delta \vec{E} + k^2(\vec{r}) \vec{E} = \vec{0}, \quad (4.25)$$

on pose, dans le cadre de l'approximation paraxiale et de l'approximation scalaire, qui néglige les effets dus à la polarisation de la lumière [60] :

$$E = \Phi(x, y, z) \cdot e^{-ik_{1D}(z)z} \quad (4.26)$$

$$k^2(\vec{r}) = k_{1D}^2(z) + 2k_{1D}(z) \cdot k_{\text{Trans}}(x, y, z) \quad (4.27)$$

L'équation 4.25 donne alors :

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi(x, y, z) + 2k_{1D}k_{\text{Trans}}(x, y, z)\Phi(x, y, z) - 2ik_{1D}(z)\partial_z\Phi = 0 \quad (4.28)$$

Cette équation différentielle trouve une solution pratique et élégante dans le cadre des faisceaux optiques gaussiens pour les systèmes optiques lenticulaires. En effet, si l'on suppose pour Φ la forme :

$$\Phi(x, y, z) = e^{\alpha(z)} \cdot \exp \left\{ -i \left[k_{1D} \frac{x^2}{2q_x(z)} + k_{1D} \frac{y^2}{2q_y(z)} \right] \right\} \quad (4.29)$$

avec $(q_x(z), q_y(z)) \in \mathbb{C}^2$ les rayons de courbures complexes, et que l'on pose :

$$k_{\text{Trans}} = k_x^{(2)} \frac{x^2}{2} + k_y^{(2)} \frac{y^2}{2} \quad (4.30)$$

l'équation 4.28 se ramène à :

$$q'_x(z) = 1 - \frac{k_x^{(2)}}{k_{1D}} q_x^2(z) \quad (4.31)$$

$$q'_y(z) = 1 - \frac{k_y^{(2)}}{k_{1D}} q_y^2(z) \quad (4.32)$$

$$\alpha'(z) = -\frac{1}{2q_x(z)} - \frac{1}{2q_y(z)} \quad (4.33)$$

Dans le cas particulier où $(q_x, q_y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient les mêmes équations pour les ondes sphériques, où les $q(z)$ sont remplacés par $R_x(z)$ et $R_y(z)$ les rayons de courbure réels de l'onde sphérique au point z . Or, l'emploi des matrices ABCD permet de décrire facilement la propagation des ondes sphériques. En effet, soit une onde sphérique provenant d'un point A_1 avec un rayon de courbure R_1 à l'entrée d'un système optique de matrice \mathfrak{M}_{SO} , et convergent en A_2 avec un rayon de courbure R_2 à la sortie. On particularise un rayon de cette onde sphérique, comme montré sur la figure 4.4

En utilisant les conventions de la figure 4.4, ainsi que 4.18, on obtient la loi ABCD :

$$R' = \frac{AR + B}{CR + D} \quad (4.34)$$

Les rayons de courbures réels des ondes sphériques, et les rayons de courbures complexes des ondes gaussiennes obéissant aux mêmes équations différentielles 4.31, 4.32, et 4.33, le traitement par matrices ABCD des ondes

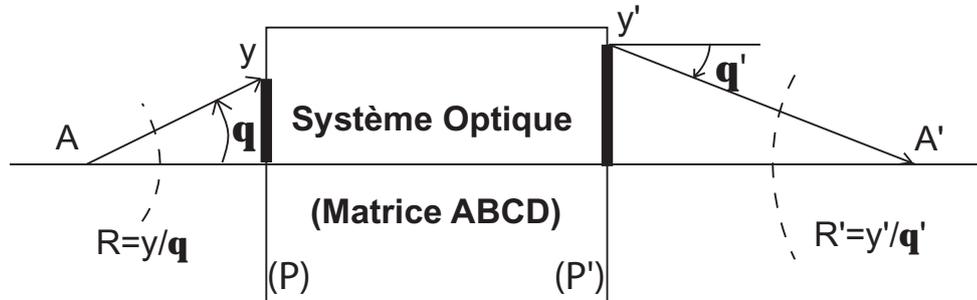


FIG. 4.4 – Traitement des ondes sphériques par les matrices ABCD. On particularise l'un des rayons composant l'onde sphérique et l'on applique le traitement par matrice ABCD à celui-ci. On obtient ainsi la loi ABCD pour les ondes sphériques

sphériques que nous venons de faire se généralise sans problème au cas des ondes gaussiennes, et l'on obtient la loi ABCD habituelle :

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (4.35)$$

L'immense intérêt de l'utilisation des matrices ABCD en optique photonique tient en ce que, en utilisant un outil du type purement optique géométrique, on parvient à traiter, dans le cas des faisceaux gaussiens, à la fois les phénomènes de diffraction, et ceux dus à la réfraction. Ceci est fondamentalement dû au fait que le faisceau gaussien conserve sa nature gaussienne lors de la propagation dans l'espace libre (diffraction), ainsi que lors de l'interaction avec des éléments optiques de type lenticulaires, *dans l'approximation paraxiale*. On veut donc essayer d'adapter ce type de méthode au cas des faisceaux lasers atomiques. Ceci permettrait de traiter facilement à la fois les phénomènes compréhensibles « classiquement » (c'est à dire dans un modèle où les atomes sont représentés par des points massiques obéissant aux équations du mouvement classique, comme dans 4.2.3), et ceux de nature diffractive (effets de la pression quantique par exemple, comme dans 4.2.2). En terme d'analogie avec l'optique photonique, les phénomènes qualifiés de « classiques » sont ceux équivalents à un traitement d'optique géométrique traditionnelle, alors que ceux qualifiés de « exclusivement quantiques » sont ceux qui nécessitent pour être traités de prendre en compte la nature ondulatoire de la lumière.

4.3.2 Adaptation à l'étude de la propagation d'un laser atomique

Mise en équation, approximations nécessaires

Lorsque l'on veut adapter le formalisme des matrices ABCD au cas des lasers à atomes, une première objection vient à l'esprit : le cas des ondes de matière est très différent de celui des ondes lumineuses, car, si la relation de dispersion pour l'optique est linéaire ($E = \hbar ck$), celle de l'optique atomique est quadratique ($E = \hbar^2 k^2 / 2m$). On voit donc mal comment un formalisme prenant en compte la diffraction pourrait fonctionner de manière analogue pour l'optique des photons et celle des atomes. Cependant, dans notre cas particulier, on peut aisément contourner cette objection. En effet, en optique des matrices ABCD, il est nécessaire de se placer dans le cadre de *l'approximation paraxiale*. On sépare donc le vecteur d'onde \vec{k} en sa composante transverse k_{\perp} et sa composante longitudinale k_{\parallel} . En terme de relation de dispersion pour les ondes optiques, l'approximation paraxiale revient alors à faire le développement limité suivant :

$$k = |\vec{k}| \simeq k_{\parallel} + \frac{k_{\perp}^2}{2k_{\parallel}} \quad (4.36)$$

$$E(k) \simeq \hbar ck_{\parallel} + \frac{\hbar c}{2k_{\parallel}} k_{\perp}^2 \quad (4.37)$$

On trouve alors une relation quadratique avec k_{\perp} , ce qui est fondamentalement la condition nécessaire pour employer des théories à base de matrices ABCD [63]. En fait, l'emploi d'une théorie de ce type pour des ondes gaussiennes n'est valable que dans le cadre de l'approximation paraxiale en optique, alors qu'elle reste valable en dehors de cette approximation pour les ondes de matières [63].

Une autre difficulté qui peut surgir est le fait que, dans le traitement optique traditionnel, on se base sur des solutions *stationnaires* des équations de propagations. En effet, habituellement, en optique, les potentiels d'interactions agissant sur les photons ne dépendent pas du temps. Ce type de traitement est souvent justifié pour les ondes électromagnétiques : la vitesse de propagation très élevée de la lumière rend les variations temporelles des systèmes optiques au cours de la propagation difficiles, et en tout cas assez pathologiques (lasers pulsés, modulateurs, ...). Dans le cas du laser à atomes, au contraire, les vitesses de propagations sont au maximum de l'ordre de 1 ms^{-1} , ce qui rend les changements de potentiels d'interaction au cours du temps très facile à réaliser. De fait on a vu que, en pratique, avant de faire l'imagerie par absorption nous avons coupé le piège magnétique et attendu quelques millisecondes. Cela correspond donc à une modification du potentiel

d'interaction entre le laser à atome et le monde extérieur, qui rend impossible l'utilisation de solution stationnaire des équations de propagation, puisque le hamiltonien dépend du temps.

Procédons à une mise en équation du problème envisagé afin de voir comment on peut contourner ce problème. Soit la fonction d'onde du laser à atome $\Psi(x, y, z, t)$. Comme on l'a vu au chapitre 3, dans la limite considérée, et en faisant abstraction des termes de source, Ψ obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t\Psi(x, y, z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + V(x, y, z, t) \right] \cdot \Psi(x, y, z, t) \quad (4.38)$$

Comme on découple le degré de liberté à évolution rapide (direction verticale) de ceux à évolutions lentes (directions transverses), on pose :

$$\Psi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) \cdot \Psi_{1D}(z, t) \quad (4.39)$$

$$V(x, y, z, t) = V_{1D}(z, t) + V_{\text{trans}}(x, y, z, t) \quad (4.40)$$

où,

$$V_{1D}(z, t) = V(x=0, y=0, z, t) \quad (4.41)$$

et $\Psi_{1D}(z, t)$ vérifie l'équation d'évolution 1D du problème :

$$i\hbar\partial_t\Psi_{1D}(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + V_{1D}(z, t) \right] \Psi_{1D}(z, t) \quad (4.42)$$

En posant

$$\Psi_{1D}(z, t) = e^{\frac{i}{\hbar}\sigma(z, t)} \quad (4.43)$$

$$v(z, t) = \frac{1}{m}\partial_z\sigma(z, t) \quad (4.44)$$

on obtient, à partir des équations 4.42 et 4.38,

$$-\partial_t\sigma(z, t) = -\frac{i\hbar}{2m}\partial_z^2\sigma(z, t) + \frac{(\partial_z\sigma)^2}{2m} + V_{1D}(z, t) \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} i\hbar(v(z, t)\partial_z\Phi + \partial_t\Phi) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\Phi + V_{\text{trans}}(x, y, z, t)\Phi \\ &\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2\Phi \end{aligned} \quad (4.46)$$

La résolution du problème physique consiste donc à résoudre l'équation différentielle 4.46 avec la condition aux limites imposée par le couplage radio-fréquence :

$$\Phi(x, y, z = z_E, t) = \gamma(t)\sqrt{l_{z_E}}\Psi_{\text{CBE}}(x, y, z_E, t) \quad (4.47)$$

où $\gamma(t) \sim \hbar\Omega_{\text{RF}}(t)/2mgl \ll 1$ est lié au calcul du taux de couplage (eq. 3.36) et l_{zE} est défini en 3.21. On trouvera dans [55] et [56] plus d'informations au sujet du calcul du coefficient de couplage $\gamma(t)$ ³.

Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles 4.46, il convient de l'intégrer selon un chemin bien choisi dans l'espace (x, y, z, t) .

Soit alors une fonction $t \mapsto \mathcal{Z}(t)$ définissant un tel chemin dans l'espace (x, y, z, t) . On choisit cette fonction de façon à ce qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\mathcal{Z}'(t) = v(\mathcal{Z}(t), t) \quad (4.48)$$

ainsi qu'une condition aux limites

$$Z(t_i) = z_i \quad (4.49)$$

dont le sens sera expliqué ultérieurement.

On pose alors, à la condition que $\mathcal{Z}(t)$ soit réel,

$$\Phi_{\text{SC}}(x, y, t) = \Phi(x, y, \mathcal{Z}(t), t) \quad (4.50)$$

$$V_{\text{SC}}^{\text{trans}}(x, y, t) = V_{\text{trans}}(x, y, \mathcal{Z}(t), t) \quad (4.51)$$

En utilisant la formule de dérivation partielle (« règle de chaîne ») :

$$\partial_t \Phi_{\text{SC}}(x, y, t) = \frac{\Phi(x, y, \mathcal{Z}(t+dt), t+dt) - \Phi(x, y, \mathcal{Z}(t), t)}{dt} \quad (4.52)$$

$$= \frac{\partial_t \Phi \cdot dt + \partial_z \Phi \cdot d\mathcal{Z}}{dt} \quad (4.53)$$

$$= \partial_t \Phi + v(\mathcal{Z}(t), t) \partial_z \Phi(x, y, \mathcal{Z}(t), t) \quad (4.54)$$

ainsi que l'équation 4.46, on obtient alors, pour Φ_{SC} , l'équation aux dérivées partielles :

$$i\hbar \partial_t \Phi_{\text{SC}}(x, y, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi_{\text{SC}} + V_{\text{SC trans}}(x, y, t) \Phi_{\text{SC}} - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 \Phi(x, y, \mathcal{Z}(t), t) \quad (4.55)$$

Dans l'*approximation paraxiale*, le dernier terme de l'équation transverse 4.46 est négligeable devant les autres. En effet, on considère que $\Phi(x, y, z, t)$ varie lentement en fonction de z devant la longueur d'onde de de Broglie atomique $\lambda_{\text{dB}} = h/mv(z, t)$, cela permet de négliger dans 4.46 le terme en $\partial_z^2 \Phi$. Finalement, on obtient pour Φ_{SC} l'équation :

$$i\hbar \partial_{t_{\text{sc}}} \Phi_{\text{SC}} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) + V_{\text{SC}}^{\text{trans}}(x, y, t_{\text{sc}}) \Phi_{\text{SC}} \quad (4.56)$$

³Pour établir l'expression 4.47, il suffit d'identifier le mode 3D du laser atomique « idéal » de la référence [55] avec l'expression 4.39, où le mode longitudinal est donné par $\Psi_{\text{1D}} = a/\sqrt{l} \cdot Ai[(z - z_E)/l_{zE}]$ (voir 3.2.2.3), cette dernière expression devant être développée asymptotiquement dans la zone classiquement autorisée.

L'équation différentielle 4.56 est parfaitement analogue à celle du problème optique exposé en 4.3.1. En effet, en posant formellement

$$k_{1D} = \frac{m}{\hbar} \quad (4.57)$$

on peut la réécrire sous la forme :

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi - 2k_{1D} \frac{V_{\text{Trans}}}{\hbar} + 2ik_{1D} \partial_z \Phi = 0 \quad (4.58)$$

qui est équivalente à quelques détails près⁴ à l'équation optique 4.28. Or, on a vu que l'on pouvait résoudre ce type d'équation facilement, dans le cas d'une condition aux limites gaussiennes, à l'aide de la méthode des matrices ABCD. On doit donc pouvoir procéder de même pour le cas des lasers à atomes.

On notera que le remplacement de $\Phi(x, y, z, t)$ par $\Phi_{\text{SC}}(x, y, t)$ dans le problème n'est valable qu'à la condition de $\mathcal{Z}(t)$ soit réel, ce qui impose $v(\mathcal{Z}(t), t)$ également réel. Ceci correspond à ne considérer le problème qu'aux endroits où l'approximation semi-classique pour $\Phi_{1D}(z, t)$ est valable (d'où le nom de Φ_{SC}), c'est à dire suffisamment loin de la zone de couplage. C'est ce changement de variable qui nous permet ici d'appliquer la méthode des matrices ABCD à un problème dépendant du temps.

Physiquement on ne sera intéressé par la fonction d'onde du laser $\Psi(x, y, z, t)$, ainsi qu'à sa partie transverse $\Phi(x, y, z, t)$ qu'au moment $t = t_i$ où l'on effectue la prise de l'image. On pourra alors remonter à la densité atomique locale dans le laser $|\Phi(x_i, y_i, z_i, t_i)|^2$ à partir de la résolution de 4.56 par la relation $\Phi(x_i, y_i, z_i, t_i) = \Phi_{\text{SC}}(x_i, y_i, t_i)$, qui est valable à la condition que l'on ait bien posé la condition initiale $\mathcal{Z}(t_i) = z_i$ pour le chemin d'intégration.

Le sens physique du traitement mathématique précédent peut être expliqué comme suit : dans la zone d'extraction du laser, on découpe une tranche fine de condensat dans un plan orthogonal à la gravité à une hauteur z_E (condition aux limites de 4.47). Cette tranche va se déplacer verticalement (tomber) sous l'effet de la gravité et des autres potentiels (éventuellement dépendants du temps) présents dans le système (équation 4.42). Lors de ce déplacement, la tranche va se déformer latéralement sous l'effet de plusieurs paramètres tels que pression quantique et potentiels d'interactions inhomogènes (équation 4.46). L'approximation paraxiale permet de ne considérer comme cause de ces déformations que ceux présents dans le seul plan où se situe la tranche en question (équation 4.56). Finalement, au moment de la prise de l'image, elle a atteint une position verticale z_i , où sa forme transversale est donné par l'intégration de l'équation transverse 4.56 le long du

⁴On peut noter des différences de signes entre le traitement de l'optique habituel et celui de l'optique atomique. Celles-ci sont essentiellement liées au fait que les conventions habituelles de l'optique préconisent de prendre pour les ondes planes la notation $\exp[i(\omega t - kz)]$, alors que, en mécanique quantique, on prend $\exp[i(kz - \omega t)]$

mouvement vertical $\mathcal{Z}(t)$, à laquelle on a imposé la condition limite 4.49. Cette dernière correspondant simplement à dire que la tranche que l'on suit lors du déplacement $\mathcal{Z}(t)$ doit arriver en z_i au moment de la prise de l'image.

Finalement, la dernière approximation qu'il nous a fallu faire pour permettre un traitement simple du problème consiste à supposer une condition aux limites gaussienne. Ceci n'est pas tout à fait exact, puisque l'on sait que, dans l'approximation de Thomas-Fermi, le condensat présente une densité atomique à section de type parabole inversée. On a donc une condition aux limites dont le module carré est également de forme parabole inversée. Cependant, en première approximation, nous avons assimilé la forme de parabole inversée à la gaussienne qui donne la même largeur quadratique moyenne.

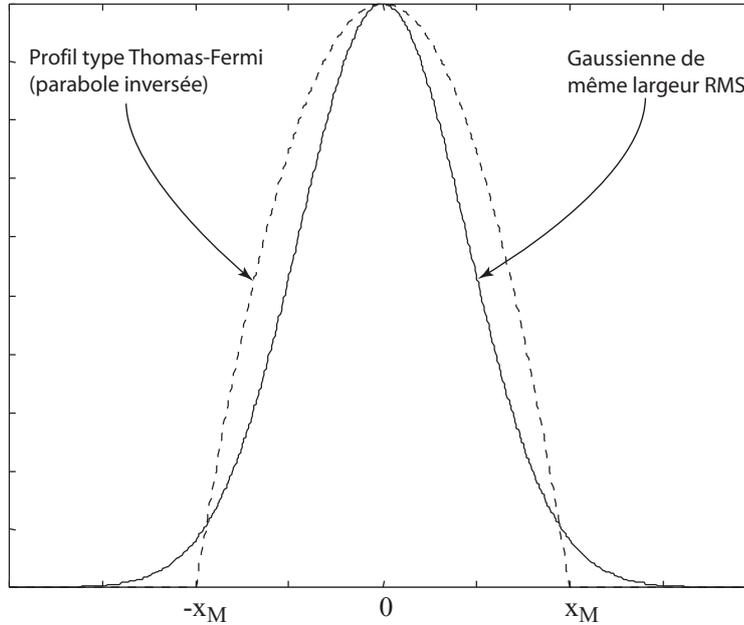


FIG. 4.5 – Fit gaussien d'un profil de type Thomas-Fermi. Les deux profils ont la même largeur quadratique moyenne (RMS).

Pour une parabole inversée $f(x) = \exp(\alpha) \cdot \max[0, 1 - (x/x_M)^2]$, la largeur RMS est $\delta x_{\text{RMS}} = x_M/\sqrt{5}$. Pour une gaussienne $f(x) = \exp(\alpha) \cdot \exp(-2(x/w)^2)$, on obtient $\delta x_{\text{RMS}} = w/2$. Le « meilleur » ajustage gaussien d'une parabole inversée est donc obtenu pour les paramètres :

$$\alpha_{\text{gaussienne}} = \alpha_{\text{parabole}} \quad (4.59)$$

$$w_{\text{gaussienne}} = \frac{2}{\sqrt{5}} x_M \quad (4.60)$$

Résolution pour le cas gaussien

On impose donc une solution gaussienne à l'équation 4.56 de la forme :

$$\Phi(x, y, t) = e^{\alpha(t)} \cdot \exp \left\{ i \left[\frac{x^2}{2q_x(z(t), t)} + \frac{y^2}{2q_y(z(t), t)} \right] \right\} \quad (4.61)$$

et on pose, dans le cas de potentiels lenticulaires (*i.e.* quadratiques) :

$$V_{\text{Trans}}(x, y, z(t), t) = V_x^{(2)}(z(t), t) \frac{x^2}{2} + V_y^{(2)}(z(t), t) \frac{y^2}{2} \quad (4.62)$$

où $V_x^{(2)}(z(t), t)$ et $V_y^{(2)}(z(t), t)$ sont les dérivées secondes sur l'axe par rapport respectivement à x et y du potentiel V_{Trans} . Le sens physique des paramètres complexes q_x et q_y apparaît clairement quand on fait la décomposition en parties réelles et imaginaires :

$$\frac{1}{q_x}(t) = C_x(t) + \frac{2i}{w_x^2(t)} \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{q_y}(t) = C_y(t) + \frac{2i}{w_y^2(t)} \quad (4.64)$$

Les $C(t)$ sont des termes qui donnent la « courbure du front d'onde » de Φ (termes de phases purs), alors que les $w(t)$ donnent les rayons à $1/e$ de Φ (ou les rayons à $1/e^2$ de $|\Phi|^2$, qui correspondent à ce qu'on observe en pratique)

L'équation 4.56 devient alors :

$$\partial_t q_x(z(t), t) = \frac{\hbar}{m} + \frac{V_x^{(2)}}{\hbar} q_x^2 \quad (4.65)$$

$$\partial_t q_y(z(t), t) = \frac{\hbar}{m} + \frac{V_y^{(2)}}{\hbar} q_y^2 \quad (4.66)$$

$$\partial_t \alpha = -\frac{\hbar}{2m} \left(\frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y} \right) \quad (4.67)$$

De manière totalement analogue à l'optique, on résout ces équations différentielles en posant :

$$q_x = \frac{x(t)}{\left[\frac{m}{\hbar} \dot{x}(t) \right]} \quad (4.68)$$

$$q_y = \frac{y(t)}{\left[\frac{m}{\hbar} \dot{y}(t) \right]} \quad (4.69)$$

$$(4.70)$$

ce qui conduit, dans 4.65 à :

$$\ddot{x} + \frac{V_x^{(2)}}{m} x = 0 \quad (4.71)$$

c'est à dire, en utilisant 4.62

$$m\ddot{x} = -\partial_x V_{\text{Trans}} \quad (4.72)$$

c'est là l'équation du mouvement *classique* d'une particule dans un potentiel harmonique. Ainsi, comme pour l'optique, on retrouve bien la loi ABCD :

$$q_{x_2} = \frac{A_x q_{x_1} + B_x}{C_x q_{x_1} + D_x} \quad (4.73)$$

où les coefficients A_x , B_x , C_x et D_x sont ceux de la matrice qui transforme le vecteur-rayon $[x_1, p_1/\hbar]$ en $[x_2, p_2/\hbar]$ par les équations classiques du mouvement (idem pour y).

4.3.3 Quelques matrices ABCD utiles

Détaillons les matrices ABCD des systèmes simples qui nous seront utiles pour l'analyse de nos données. On se contente d'exposer une seule direction de l'espace (par exemple x), on a évidemment la même chose pour la direction perpendiculaire.

4.3.3.1 Propagation Libre

Dans le cas d'une propagation libre, on a $V_{\text{Trans}} = 0$. L'équation 4.56 est alors parfaitement équivalente à 4.13, et l'on retrouve tous les résultats exposés en 4.2.2.

En terme de méthode ABCD, considérons une propagation libre ($V_{\text{Trans}} = 0$) pendant un temps t . La résolution du problème classique donne :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_0 \\ x(t) &= x_0 + \dot{x}_0 t \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} x \\ \frac{m}{\hbar} \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\hbar t}{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{m}{\hbar} \dot{x}_0 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

ce qui donne la formule $q(t) = q_0 + \hbar t/m$. En utilisant la décomposition $1/q(t) = C(t) + 2i/w^2(t)$, et en supposant $C(0) = 0$, on retrouve bien les paramètres clés de la propagation libre déjà exposés dans 4.2.2.

En résumé, on retiendra que, pour la propagation libre pendant un temps t , la matrice de transfert est :

$$\mathfrak{M}_{\text{libre}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\hbar t}{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

4.3.3.2 Potentiel quadratique constant

Si V_x est constant pendant un temps t et $V_x^{(2)} > 0$, on pose $V_x = m\Omega^2 x^2/2$, et on obtient pour le mouvement classique l'expression :

$$x(t) = x(0) \cos(\Omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \quad (4.76)$$

La matrice ABCD est donc dans ce cas là :

$$\mathfrak{M}_{V_x^{(2)}=m\Omega^2 \geq 0}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \frac{\hbar}{m\Omega} \sin(\Omega t) \\ -\frac{m\Omega}{\hbar} \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Si maintenant V_x est constant mais avec $V_x^{(2)} < 0$, on pose $V_x = -m\Omega^2 x^2/2$, et on obtient pour le mouvement classique l'expression :

$$x(t) = x(0) \cosh(\Omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sinh(\Omega t) \quad (4.78)$$

La matrice ABCD est donc dans ce cas là :

$$\mathfrak{M}_{V_x^{(2)}=-m\Omega^2 \leq 0}(t) = \begin{bmatrix} \cosh(\Omega t) & \frac{\hbar}{m\Omega} \sinh(\Omega t) \\ \frac{m\Omega}{\hbar} \sinh(\Omega t) & \cosh(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

On notera également que, dans le cas où $\Omega \rightarrow 0$, en faisant un développement limité au premier ordre, on retrouve bien dans les deux cas l'expression trouvée pour la propagation libre.

4.3.3.3 Lentille mince

Pour une lentille mince, on a par définition $x \simeq \text{cte}$, et la matrice ABCD doit se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{M}_{\text{Lentille Mince}}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Il s'agira donc de trouver au cas par cas la valeur du paramètre C , appelé *puissance* de la lentille mince, en fonction des données du problème.

Le condensat considéré comme lentille mince pour le laser

Considérons la trajectoire classique des particules dans le potentiel vu par les atomes du laser lors de la traversée du condensat. Si l'on référence les positions par rapport au centre du condensat de Bose-Einstein, les différents potentiels agissant sur les atomes sont :

- Le potentiel magnétique dû à l'effet Zeeman quadratique :

$$V_{\text{mag}} = -\frac{m\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{m\omega_y^2}{2}y^2 - \frac{m\omega_z^2}{2}(z + g/\omega_z^2)^2 \quad (4.81)$$

- Le potentiel gravitationnel :

$$V_{\text{grav}} = -mgz \quad (4.82)$$

- Le potentiel dû à l'interaction avec le condensat de Bose (à l'intérieur du condensat) :

$$V_{\text{CBE}} = \underbrace{\frac{g_{10}}{g_{11}}}_{\tilde{\mu}} \mu \left[1 - \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z}{R_z} \right)^2 \right] \quad (4.83)$$

La relation fondamentale de la dynamique $m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}(V_{\text{tot}})$ donne alors les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \left(\frac{2\tilde{\mu}}{mR_x^2} + \omega_x^2 \right) x \\ \ddot{y} &= \left(\frac{2\tilde{\mu}}{mR_y^2} + \omega_y^2 \right) y \\ \ddot{z} &= \left(\frac{2\tilde{\mu}}{mR_z^2} + \omega_z^2 \right) z + g \end{cases} \quad (4.84)$$

Avec les valeurs de notre expérience, $\frac{2\tilde{\mu}}{mR_i^2}$ est supérieur à ω_i^2 par plus de 5 ordres de grandeurs pour $i = x, y, z$. On néglige donc les termes en ω_i^2 dans la suite du traitement. En utilisant les conditions limites $z(0) = z_E$ et $\dot{z}(0) = 0$, ainsi que l'approximation de lentille mince (qui implique $\sqrt{\frac{2\tilde{\mu}}{mR_i^2}} t \ll 1$) on obtient les relations :

$$\dot{x}(t) = \frac{2\tilde{\mu}}{mR_x^2} t \cdot x(0) + \dot{x}(0) \quad (4.85)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{2\tilde{\mu}}{mR_y^2} t \cdot y(0) + \dot{y}(0) \quad (4.86)$$

$$z(t) \simeq z_E + \left(g + z_E \frac{2\tilde{\mu}}{mR_z^2} \right) \frac{t^2}{2} \quad (4.87)$$

$$(4.88)$$

En utilisant 4.85 et 4.86, on obtient les matrices ABCD correspondant au passage à travers le condensat pris dans l'approximation de lentille mince :

$$\mathfrak{M}_{\text{CBE } x,y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\tilde{\mu}}{mR_{x,y}^2} t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

où t est une constante correspondant au temps nécessaire, lors du mouvement classique, pour sortir du condensat. Ce temps t se calcule aisément sur l'axe grâce à 4.87 :

$$z(t) = R_z \iff t = \sqrt{\frac{2(R_z - z_E)}{g + 2\tilde{\mu}/mR_z^2 \cdot z_E}} \quad (4.90)$$

et on obtient finalement les puissances C_x et C_y selon les directions x et y :

$$C_{x,y}(z_{E_l}) = \frac{2\tilde{\mu}}{\hbar R_{x,y}^2} \sqrt{\frac{2(R_z - z_E)}{g + (2\tilde{\mu}/mR_z^2) \cdot z_E}} \quad (4.91)$$

On a ici utilisé des méthodes analogues à celles de l'optique géométrique (trajectoires classiques / suivis de rayons). On peut également choisir de procéder dans l'esprit de l'optique ondulatoire. Le calcul de l'effet de lentille mince dû au condensat de Bose-Einstein admet alors une dérivation intéressante dans le cadre de l'approximation d'objet de phase mince. La phase accumulée à la traversée d'un objet est égale à l'intégrale sur le chemin classique de l'action classique. Pour l'approximation d'objet de phase mince, le chemin classique est ici approximé par la chute verticale sans déviation (objet mince, *c.f.* figure 4.6).

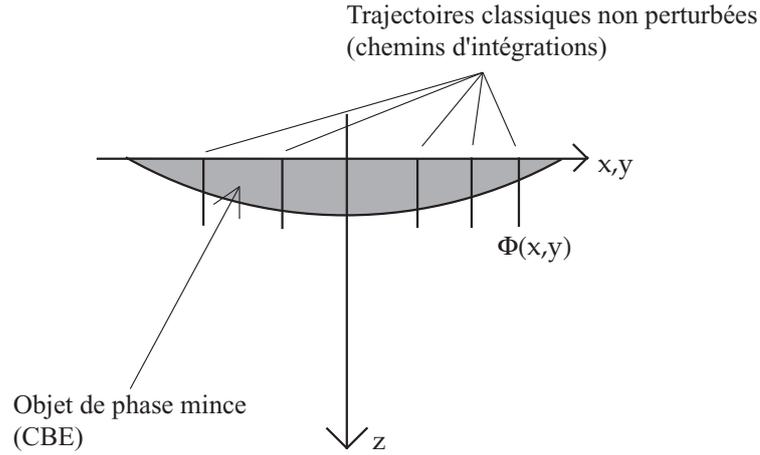


FIG. 4.6 – Principe de l'approximation de l'objet de phase mince : on fait l'intégration de la phase le long des trajectoires classiques non perturbées. Ici, on fait l'intégration le long des trajectoires verticales.

On a donc dans notre cas, *et à un terme de phase constant près*, (toujours en négligeant le potentiel dû à l'effet Zeeman quadratique) :

$$\Phi_{z_E}(x, y) = -\frac{\tilde{\mu}}{\hbar} \int_0^{t_f(x,y)} [1 - (x/R_x)^2 - (y/R_y)^2 - (z(t)/R_z)^2] .dt \quad (4.92)$$

où $z(t)$ est donné par l'équation 4.87, et $t_f(x, y)$ est le temps nécessaire pour sortir du condensat pour le mouvement classique :

$$z(t_f(x, y)) = R_z \sqrt{1 - (x/R_x)^2 - (y/R_y)^2} = z_E + g_E \frac{t_f^2(x, y)}{2} \quad (4.93)$$

où

$$g_E = g + (2\tilde{\mu}/mR_z^2) \cdot z_E \quad (4.94)$$

On en déduit :

$$t_f(x, y) = \sqrt{2 \left[R_z \sqrt{1 - (x/R_x)^2 - (y/R_y)^2} - z_E \right] / g_E} \quad (4.95)$$

En intégrant l'équation 4.92, et en faisant un développement limité en x/R_x et y/R_y , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_{z_E}(x, y) = & \Phi_0(z_E) + C_x(z_E) \frac{x^2}{2} + C_y(z_E) \frac{y^2}{2} \\ & + \text{termes de degrés pairs} > 2 \text{ en } x \text{ et } y \end{aligned} \quad (4.96)$$

On voit ainsi comment un calcul exact redonne les puissances selon x et y de la lentille mince équivalente à la traversée du condensat, à condition de négliger les termes de degrés supérieurs à 2 du développement. On peut interpréter ces termes d'ordres supérieurs comme l'équivalent des aberrations habituelles en optique photonique.

Pour résumer, on a obtenu les matrices ABCD de passage équivalentes à la traversée par le laser à atome du condensat source pour les deux directions transverses x et y :

$$\mathfrak{M}_{\text{CBE } x, y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2m\tilde{\mu}}{\hbar R_{x, y}^2} \sqrt{\frac{2(R_z - z_E)}{g + (2\tilde{\mu}/mR_z^2) \cdot z_E}} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

4.4 Analyse de la divergence d'un laser atomique

La figure 4.2 avait présenté des résultats typiques de la divergence de nos lasers à atomes. Nous pouvons à présent essayer de comprendre ces données à l'aide du formalisme qui a été exposé.

4.4.1 Séquence expérimentale

Notre séquence expérimentale se décompose comme suit : après obtention d'un condensat de Bose dans le piège magnétique, on applique pendant $t_{\text{couplage}} = 10$ ms le coupleur de sortie radio-fréquence. Puis, on arrête le coupleur RF et on coupe le piège magnétique. On attend alors $t_{\text{libre}} = 6$ ms avant de faire une imagerie en absorption, l'image étant prise avec un angle ϕ par rapport à l'axe y défini par le condensat. Le laser à atome va donc être soumis à 3 types d'interactions distincts. Tout d'abord, nous assimilons l'effet

des interactions entre atomes du condensat source et atomes du laser à un effet de lentille mince. Ensuite, le potentiel d'interaction dû à la partie non linéaire de l'effet Zeeman sera réduit à sa composante quadratique, et les atomes verront donc un effet de type « lentille épaisse divergente ». Finalement, après la coupure du champ magnétique, les atomes du laser verront un effet de propagation dans l'espace libre.

4.4.2 Processus d'analyse des données

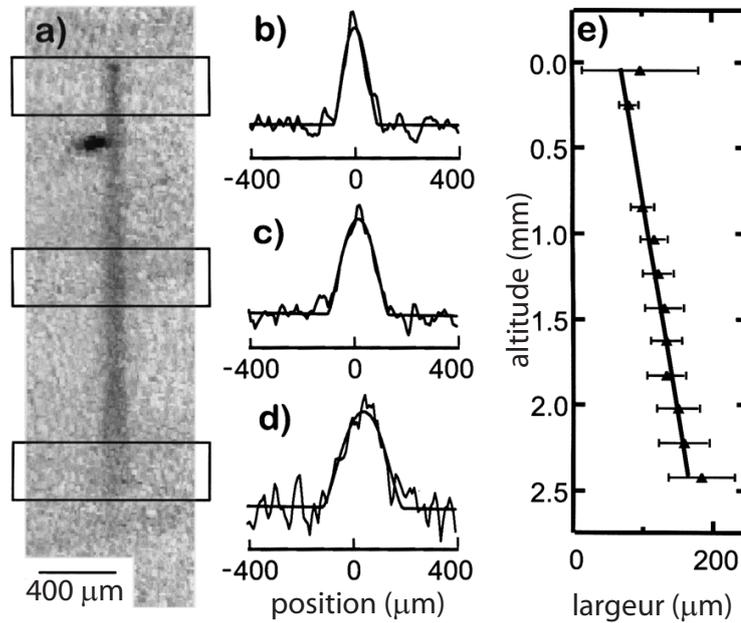


FIG. 4.7 – Méthode d'analyse de la divergence d'un laser atomique. (a) Image en absorption après 10 ms de couplage à 38,557 MHz et 6 ms de temps de vol. On notera le déplacement du condensat (point noir sur l'image) par rapport au début du laser, dû à l'effet Stern-Gerlach de séparation des niveaux magnétiques $m_F = 1$ (condensat) et $m_F = 0$ (laser). (b)-(d) Exemples de profils d'absorptions transverses, correspondants aux trois rectangles de (a). Chacun des profils est ajusté par la fonction $\rho_n(1 - (r/R_n)^2)^{3/2}$ afin d'en trouver sa largeur R_n et sa densité pic ρ_n . (e) l'angle de divergence du laser Θ est trouvé par un fit linéaire de la série des R_n .

La méthode d'analyse de cette divergence est présentée sur la figure 4.7 et peut être résumée comme suit : à chaque position verticale n de l'image, on fait un fit transversal par la fonction $\rho(r) = \rho_n(1 - r^2/R_n^2)^{3/2}$, où r est le paramètre de l'axe horizontal de nos images. Cette fonction d'ajustage correspond au cas d'un laser atomique pour lequel la section transversale reste

bien décrite par densité atomique en forme de parabole inversée pendant toute la propagation. Il s'agit alors de la densité colonne correspondante, puisque l'image obtenue est le résultat de l'intégration de l'absorption le long du trajet de la sonde (voir annexe B). On constate empiriquement que, dans la limite de nos paramètres expérimentaux, ceci semble correct. Finalement, on constate que l'ensemble des R_n en fonction de la position verticale s'ajuste bien par une droite (partie droite de la figure 4.7). On déduit donc de la pente de cette droite un angle de divergence θ pour le laser à atome.

Les points de la figure 4.9 présentent les données expérimentales obtenues en fonction du désaccord du coupleur de sortie. On constate essentiellement une décroissance de la divergence quand le coupleur de sortie « descend » dans le condensat.

4.4.3 Matrices ABCD et angle de divergence

Pour évaluer l'angle de divergence observé sur nos données expérimentales, il suffit de calculer, à l'aide d'un formalisme ABCD la largeur des deux extrémités du faisceau (en tenant compte de l'angle d'observation comme dans l'annexe B) et de diviser par sa longueur (*cf* figure 4.8) :

$$\Theta = \frac{w_2 - w_1}{l_L} \quad (4.98)$$

où w_1 et w_2 sont les largeurs à $1/e^2$ du faisceau laser atomique, vu selon l'angle d'observation ϕ . Ceux-ci sont obtenus par la propagation des paramètres de faisceaux gaussiens $1/q_x = 2i/w_x^2 = 5i/2\Delta x^2$ et $1/q_y = 2i/w_y^2 = 5i/2\Delta y^2$ à travers les matrices ABCD successives (lentille mince, lentille épaisse et propagation libre). Les largeurs à l'origine du faisceau laser Δx et Δy dépendent de la position d'extraction z_E et ont déjà été explicités en 4.5 et 4.6.

En pratique, l'extrémité « avant » du laser subit l'effet de lentille mince pendant un temps t_{LM} , avec :

$$t_{LM} = \sqrt{\frac{2(R_z - z_E)}{g + 2\tilde{\mu}/mR_z^2 \cdot z_E}} \quad (4.99)$$

Puis une propagation dans un milieu type « lentille épaisse » dû à l'effet Zeeman quadratique pendant un temps $t_{\text{couplage}} - t_{LM}$, et enfin une propagation libre pendant t_{libre} .

L'extrémité « arrière » du laser subit quand à elle également l'effet de lentille mince pendant un temps t_{LM} , puis seulement une propagation libre pendant t_{libre} .

La longueur du laser observé l_L pour sa part se calcule aisément à partir des équations classiques 1D du mouvement :

$$l_L \simeq \frac{g}{\Omega^2} \cosh[\Omega t_{\text{couplage}}] - \frac{g}{\Omega^2} + \frac{g}{\Omega} \sinh[\Omega t_{\text{couplage}}] t_{\text{libre}} \quad (4.100)$$

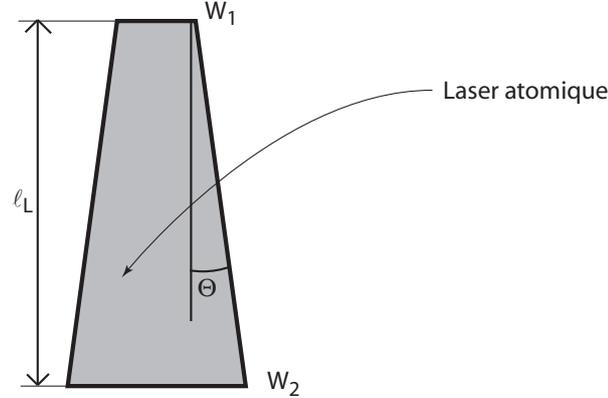


FIG. 4.8 – Principe de la définition d'un angle de divergence. On a $\Theta = (w_2 - w_1)/l_L$.

On notera cependant que cette théorie s'applique pour des faisceaux gaussiens. Or, on a vu que les données expérimentales étaient bien décrites par des profils type paraboles inversées. On n'oubliera donc pas d'utiliser le facteur $2/\sqrt{5}$ qui apparaît lorsque passe d'une forme gaussienne à une forme de type parabole inversée (cf Eq. 4.60).

4.4.4 Comparaison avec les données expérimentales

On présente ici les paramètres expérimentaux concernant notre expérience :

- $R_x = R_z = 4,2 \mu m$
- $R_y = 67,2 \mu m$
- $N_{\text{atomes}} = 4 \cdot 10^5 \longrightarrow \mu = 2\pi\hbar \cdot 1,6 \text{ kHz}$
- $a_{11} \simeq a_{10}$, d'où $\tilde{\mu} \simeq 2\pi\hbar \cdot 1,6 \text{ kHz}$
- $\phi = 0,97 \text{ rad}$ (angle d'observation par rapport à l'axe y)
- $t_{\text{couplage}} = 10 \text{ ms}$
- $t_{\text{libre}} = 6 \text{ ms}$
- Effet Zeeman quadratique : $\Omega_x = \Omega_z = 2\pi \cdot 30,3 \text{ Hz}$; Selon la direction y , l'effet possède une composante quadratique et une composante quartique (en y^4). Il est cependant négligeable devant celui de la direction x . On pose donc $\Omega_y \simeq 0$.

En utilisant ces paramètres dans une théorie de matrices ABCD, on obtient les résultats présentés sur la figure 4.9.

On constate un bon accord de la courbe avec les données expérimentales, dans la mesure où l'on n'a utilisé aucun paramètre ajustable. La principale caractéristique de cette courbe est sa décroissance avec la baisse de la position d'extraction. Cet effet est dû à la traversée du condensat de Bose-

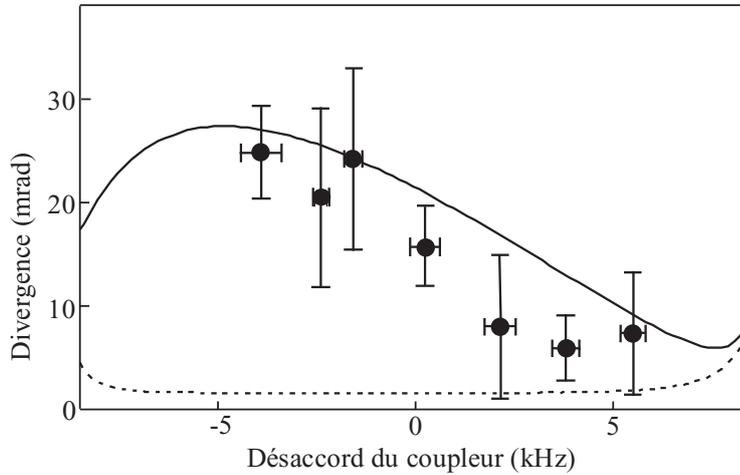


FIG. 4.9 – Angle de divergence en fonction du désaccord du coupleur de sortie. La courbe en trait plein correspond au calcul théorique par la méthode des matrices ABCD. La courbe en pointillés représente le même calcul théorique, mais sans prendre en compte l'effet des interactions entre le laser atomique et le condensat source. La calibration absolue du désaccord du coupleur est effectuée à l'aide de courbes de couplage du type de celle de la figure 3.10, l'extremum de la courbe correspondant à un désaccord nul du coupleur par rapport au centre du condensat.

Einstein, qui agit comme une lentille divergente d'autant plus puissante que l'interaction se produit pendant longtemps. Pour un couplage à une position relativement haute, la portion de condensat à traverser est plus importante que pour un couplage à plus basse altitude, d'où la diminution de la divergence avec l'abaissement de la zone de couplage. En dehors de la zone à laquelle nous pouvions accéder expérimentalement, on constate également deux choses : tout d'abord, lorsque la zone de couplage s'approche fortement des bords du condensat, la divergence augmente rapidement et est dominée par la diffraction. Cela est dû au fait que la largeur de la zone d'extraction tend rapidement vers zéro, d'où un effet de plus en plus fort de la diffraction. Par ailleurs, on constate également pour $\delta_{\text{RF}} < -5$ kHz une diminution de la divergence calculée. Ce dernier effet est dû à la diminution de la largeur du laser à sa source. En effet, l'angle de divergence donné par une lentille mince est proportionnel à la largeur du faisceau incident pour une puissance donnée (voir figure 4.10).

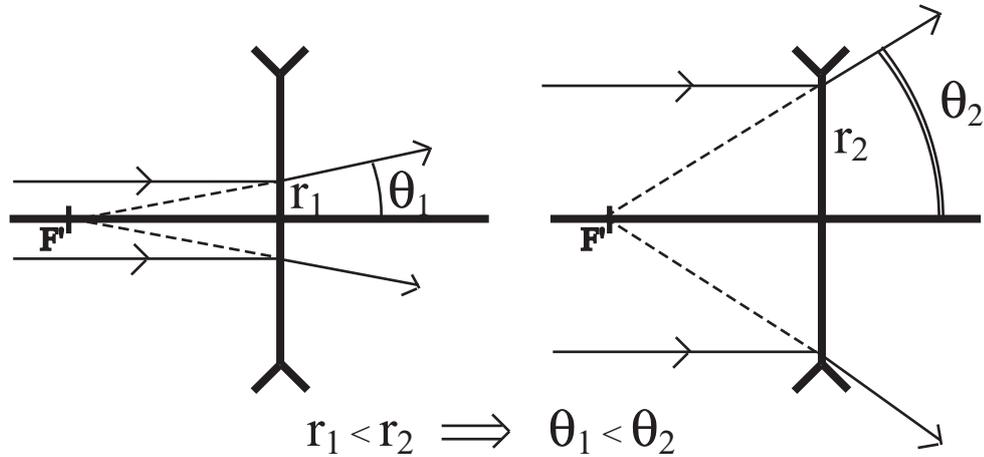


FIG. 4.10 – Schéma de principe montrant la réduction de l'angle de divergence d'un faisceau quand la taille du faisceau diminue (à puissance de la lentille constante).

4.5 Conclusions et perspectives

Les travaux présentés ont permis de mettre en évidence et de mesurer la divergence d'un laser à atome à extraction gravitationnelle. Un modèle dans l'esprit de l'optique des lasers a été exposé et utilisé afin d'expliquer l'origine de ces divergences. Celui-ci démontre la prépondérance des effets d'interactions, qui, contrairement à l'optique, ne peuvent pas être négligés. Le traitement présenté permet d'expliquer qualitativement et quantitativement les résultats expérimentaux. Cependant, il est clair qu'il ne s'agit que d'un modèle relativement grossier (quoique performant) qui risquerait de ne pas être suffisant si la qualité des données expérimentales était meilleure (meilleure résolution et meilleur rapport signal à bruit des images, plus grande stabilité à longs termes du dispositif,...).

Dans le modèle très simple présenté, on n'a pas tenu compte de nombreux effets qui apporteraient des corrections aux premières estimations que nous avons obtenues. Par exemple, on pourrait améliorer le traitement en tenant compte de la courbure de la surface de couplage. En effet, on a jusqu'ici considéré abusivement la surface de couplage comme un simple plan horizontal, alors que rigoureusement, il s'agit d'une ellipsoïde. Il faudrait également prendre en compte les effets d'épaisseur du condensat puisque celui-ci ne peut en fait plus vraiment être considéré comme une lentille mince quand le coupleur de sortie se trouve dans la partie haute du condensat.

On pourrait également vouloir aller au-delà de l'approximation gaussienne du mode transverse du laser, et donc de prendre en compte (en partie) la forme de parabole inversée du laser à sa position d'extraction. Dans ce sens là,

on pourrait même vouloir aller au delà de l'approximation de Thomas-Fermi, et considérer le profil transverse réel donné par l'équation de Gross-Pitaevskii. Une extension possible du formalisme présenté ici serait de décomposer la forme initiale de parabole inversée sur la base des modes hermite-gaussiens. La propagation des différentes composantes à l'aide des matrices ABCD puis leurs resommation permettrait d'obtenir l'évolution du profil du laser au cours de la propagation. À noter qu'une autre approche, basée sur une résolution numérique des équations de propagation est également entamée dans [64].

Enfin, le traitement à l'aide des matrices ABCD ne peut prendre en compte que les parties quadratiques des potentiels d'interactions. On pourrait envisager de traiter les potentiels d'interactions d'ordres supérieurs à l'aide de la théorie des perturbations. Évidemment, plus on voudra des résultats précis, plus il faudra monter à un ordre grand de la théorie des perturbations, ce qui rend rapidement le problème très lourd. On devra donc alors envisager une solution numérique de l'équation de Schrödinger, en particulier si on veut prendre en compte les effets des interactions *intra*-laser totalement négligée jusqu'ici (il s'agit alors d'intégrer numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii, c'est à dire une équation de Schrödinger non linéaire).

Lasers mode-bloqués et interférences atomiques

There be some sports are painful, and their labour delight in them
sets off

William Shakespeare¹

L'une des caractéristiques des lasers en optique est la grande facilité que ceux-ci apportent pour la réalisation de figures d'interférences ou de diffraction (holographie). Ceci est intrinsèquement lié à leurs remarquables propriétés de cohérences, qui permettent l'observation de phénomènes d'interférence là où des sources « classiques » se comportent de façon incohérente dès que l'on s'écarte trop des conditions de visibilité optimales des franges.

De façon analogue, il est intéressant d'essayer d'effectuer des interférences à l'aide de condensats de Bose-Einstein ou de lasers à atomes. La première expérience de ce type a eu lieu au MIT dans l'équipe de W. Ketterle. Deux condensats sont lâchés l'un à côté de l'autre. Dans la zone de recouvrement, il apparaît alors des franges d'interférences [66]. À Munich [17] et à Yale [41], des interférences entre lasers à atomes ont également été produites par deux méthodes très différentes.

Nous nous sommes attachés à réaliser des interférences à plusieurs ondes entre différents lasers atomiques produits à partir d'un même condensat de Bose. Le but de ce chapitre est de présenter les résultats que nous avons obtenus dans ce domaine. Les études présentées doivent cependant être prises pour ce qu'elles sont, c'est à dire des études préliminaires, que les limitations matérielles n'ont pas permis de rendre plus systématiques et exhaustives dans les délais impartis pour cette thèse.

Dans la majeure partie du chapitre, nous nous contentons de l'approximation unidimensionnelle pour les lasers à atomes. Nous présentons les résultats expérimentaux obtenus, ainsi que leurs interprétations qualitatives dans les divers régimes observés. Nous terminons sur des études dans la direction transverse, où nous appliquerons les résultats du chapitre 4.

¹*in* « The tempest » (III, 1) [65]

5.1 Traitement 1D : modélisation

Le moyen que nous avons utilisé pour réaliser des interférences entre lasers à atomes a été d'établir plusieurs coupleurs de sortie radio-fréquence mutuellement cohérents à l'intérieur d'un même condensat de Bose-Einstein². Les différents lasers créés ayant des énergies différentes (dues aux différences de hauteur de couplage), un phénomène analogue au battement optique se produit, et l'on peut observer l'interférogramme résultant en imagerie par absorption. Les expériences réalisées suivent les mêmes types de séquences expérimentales que dans le chapitre précédent : condensation, puis couplage laser, puis arrêt du couplage et extinction du champ magnétique de piégeage, et enfin imagerie en absorption. La différence essentielle tient en ce que l'on ne crée pas un seul laser à atomes, mais plusieurs (à partir du même condensat de Bose-Einstein), qui vont donc pouvoir se recouvrir entre eux et éventuellement donner lieu à des phénomènes d'interférences. Nous nous intéressons ici aux aspects du phénomène qui n'ont pas besoin pour être compris (au moins qualitativement) de la prise en compte des degrés de libertés transverses.

5.1.1 Un modèle simple du mode longitudinal d'un laser atomique

Un moyen d'obtenir un traitement simple du problème, permettant de comprendre qualitativement les différents régimes rencontrés est de considérer le problème comme stationnaire. Dans un premier temps, on omet donc l'effet Zeeman quadratique, ainsi que les interactions entre le laser atomique et le condensat de Bose. Le potentiel extérieur auquel sont soumis les atomes du laser est alors le simple potentiel gravitationnel $V_{\text{ext}}(z) = -mgz + \text{cte}$. On néglige également la largeur en énergie $\hbar\Gamma$ finie d'un laser atomique (due à la puissance finie de la radio-fréquence du coupleur). Dans l'approximation quasi-classique, pour la zone classiquement autorisée, la fonction d'onde 1D d'un laser atomique d'énergie E s'écrit alors (à un facteur de normalisation près) :

$$\Psi_E(z, t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\xi_E^{-1/4}(z)} \cdot e^{i\frac{2}{3}\xi_E^{3/2}(z)} \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad (5.1)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_E(z) = \frac{z-z_E}{l} \\ l = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m^2g}} \\ z_E = -\frac{E}{mg} \end{array} \right.$$

²On entend ici par « mutuellement cohérents » que la relation de phase entre les différentes radio-fréquences est constante sur toute la durée du couplage

que l'on peut, toujours à un coefficient de normalisation près, réécrire sous la forme :

$$\Psi_E(z, t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p(z, E)}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma(z, E) - Et)} \quad (5.2)$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma(z, E) &= \frac{2m}{3} \sqrt{2g(z - z_E)^3} \\ p(z, E) &= m \sqrt{2g(z - z_E)} \end{cases}$$

5.1.2 Quelques raffinements possibles du modèle

5.1.2.1 Prise en compte de l'effet Zeeman quadratique

On a vu que le potentiel vu par les atomes du laser était modifié par l'effet Zeeman quadratique. Cet effet devient relativement fort quand on s'éloigne du centre du piège, comme on l'a vu par exemple en 3.4.2, et il est donc souhaitable d'en tenir compte. Le potentiel réel qui s'exerce sur les atomes du laser avant la coupure du piège s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}}(z) &= -\frac{m\Omega^2}{2} z^2 - mgz \\ &= -\frac{m\Omega^2}{2} \left(z + \frac{g}{\Omega^2} \right)^2 + \frac{mg^2}{2\Omega^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Soit alors la solution classique des équations du mouvement $\mathcal{Z}(t, E)$ pour une particule lâchée sans vitesse initiale en z_E à $t = 0$. La fonction \mathcal{Z} vérifie donc :

$$\ddot{\mathcal{Z}}(t, E) = -\frac{1}{m} V'_{\text{ext}}(\mathcal{Z}(t, E)) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{Z}(0, E) = z_E \quad (5.5)$$

$$\dot{\mathcal{Z}}(0, E) = 0 \quad (5.6)$$

Pour le potentiel 5.3, la solution analytique s'écrit :

$$\mathcal{Z}(t, E) = \left(z_E + \frac{g}{\Omega^2} \right) \cdot \cosh(\Omega t) - \frac{g}{\Omega^2} \quad (5.7)$$

qui s'inverse facilement en :

$$\mathcal{T}(z, E) = \mathcal{Z}^{-1}(z, E) = \frac{1}{\Omega} \cdot \text{acosh} \left(\frac{z + g/\Omega^2}{z_E + g/\Omega^2} \right) \quad (5.8)$$

Dans le cadre de la méthode WKB, le mode longitudinal du laser atomique s'écrit alors sous la forme :

$$\Psi_E(z, t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p(z, E)}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma(z, E) - E \cdot t)} \quad (5.9)$$

avec :

$$\sigma(z, E) = \int_{z_E}^z m \cdot \dot{\mathcal{Z}}(\mathcal{T}(z', E), E) \cdot dz' \quad (5.10)$$

$$= \int_0^{\mathcal{T}(z, E)} m \cdot \dot{\mathcal{Z}}^2(t, E) \cdot dt \quad (5.11)$$

En utilisant les expressions 5.7 et 5.8, on trouve analytiquement :

$$\sigma(z, E) = \frac{m\Omega}{2} \left(z_E + \frac{g}{\Omega^2} \right)^2 \cdot [\sinh(\Omega\mathcal{T}(z, E)) \cdot \cosh(\Omega\mathcal{T}(z, E)) - \Omega\mathcal{T}(z, E)] \quad (5.12)$$

$$p(z, E) = m\Omega(z_E + g/\Omega^2) \cdot \sinh(\Omega\mathcal{T}(z, E)) \quad (5.13)$$

On peut vérifier que cette expression tend bien, pour $\Omega \rightarrow 0$ vers celle du paragraphe précédent.

5.1.2.2 Prise en compte de la coupure du champ magnétique avant la prise de l'image

Une autre chose qu'il faut prendre en compte pour un traitement quantitatif est le fait que l'image est prise quelques milli-secondes après la coupure du piège magnétique. Pendant ces quelques milli-secondes (t_{libre}), les atomes du laser ne sont plus soumis qu'à la gravité, l'effet Zeeman quadratique devenant nul puisque le champ magnétique est nul en tout point. Les atomes sont donc soumis pendant une première partie à un potentiel identique à celui du paragraphe précédent, puis pendant une deuxième partie (de durée t_{libre}) à l'effet de la seule gravité. Il est possible d'étendre le traitement du paragraphe précédent pour prendre en compte ce nouvel effet.

De la même façon que précédemment (en faisant intervenir les équations classiques du mouvement), le mode longitudinal du laser, pour un temps t_{libre} fixé expérimentalement, et à un instant $t > t_{\text{libre}}$ s'écrit sous la forme :

$$\Psi_E(z, t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p(z, E)}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma(z, E) - Et)} \quad (5.14)$$

avec cette fois :

$$\sigma(z, E) = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (5.15)$$

$$p(z, E) = m\Omega \left(z_E + \frac{g}{\Omega^2} \right) \sinh(\Omega\mathcal{T}_1(z, E)) + mgt_{\text{libre}} \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

où :

$$\sigma_1 = \frac{m\Omega}{2} \left(z_E + \frac{g}{\Omega^2} \right)^2 \cdot [\sinh(\Omega\mathcal{T}_1(z, E)) \cosh(\Omega\mathcal{T}_1(z, E)) - \Omega\mathcal{T}_1(z, E)] \quad (5.18)$$

$$\sigma_2 = \frac{m}{g} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{u=\Omega(z_E+g/\Omega^2)\sinh(\Omega\mathcal{T}_1(z, E))}^{u=\Omega(z_E+g/\Omega^2)\sinh(\Omega\mathcal{T}_1(z, E))+gt_{\text{libre}}} \quad (5.19)$$

avec $\mathcal{T}_1(z, E)$ la fonction réciproque des équations du mouvement, qui donne le temps parcouru *dans la première partie* (champ magnétique allumé) par un atome, si il est détecté lors de l'imagerie (donc t_{libre} après coupure du champ magnétique) à une position z . On obtient analytiquement pour \mathcal{T}_1 l'expression :

$$\Omega\mathcal{T}_1(z, E) = \ln \left(\frac{\chi_E(z) + \sqrt{\chi_E^2(z) + \Omega^2 t_{\text{libre}}^2 - 1}}{1 + \Omega t_{\text{libre}}} \right) \quad (5.20)$$

où

$$\chi_E(z) = \frac{z + g/\Omega^2 - gt_{\text{libre}}^2/2}{z_E + g/\Omega^2} \quad (5.21)$$

On notera que σ_1 est de forme équivalente à celle du paragraphe précédent. Elle représente donc la phase accumulée pendant la première partie de la propagation (avant coupure du champ magnétique). La quantité σ_2 quant à elle représente la partie de la phase accumulée après la coupure des champs magnétiques.

Pour un mode longitudinal E donné, σ est donc l'intégrale temporelle selon le mouvement classique du *double de l'énergie cinétique*. On notera que le traitement exposé ici est parfaitement équivalent à l'emploi des *intégrales de chemin de Feynman* [67, 68, 69] dans le cas quasi-classique. En effet dans la théorie des intégrales de chemin semi-classiques, la phase de l'onde de matière est égale à l'intégrale du lagrangien \mathcal{L} selon le chemin classique. Or, utilisant $\mathcal{L} = Ec - Ep$ et $E = Ec + Ep$, où Ec est l'énergie cinétique, Ep l'énergie potentielle, et E l'énergie totale (constante du mouvement), on se ramène à $\mathcal{L} = 2.Ec - E$ et donc à l'expression 5.14. On a préféré exposer les calculs de la façon présentée au dessus afin de conserver la cohérence avec le reste de l'exposé.

On notera qu'une autre manière de procéder pour trouver le mode d'un laser atomique quasi-continu évoluant dans un tel potentiel (quadratique dépendant du temps) est d'appliquer une série de transformations unitaires dans l'esprit de [63] afin de se ramener aux équations de l'espace libre. Ceci présenterait l'avantage de ne pas nécessiter de se placer dans l'approximation quasi-classique, mais impliquerait un fort degré de complication.

Les expressions obtenues sont certes analytiques, mais somme toute assez complexes. On se contentera donc le plus souvent, pour une compréhension *qualitative* des phénomènes, de celles du paragraphe 5.1.1, dans lequel on néglige l'effet du potentiel dû à l'effet Zeeman quadratique.

5.1.2.3 Prise en compte des interactions

Pour finir, on a déjà vu combien les interactions entre le laser atomique et le condensat de Bose-Einstein source pouvait avoir des effets importants sur la propagation dans les directions transverses du laser. On peut donc également s'attendre à devoir prendre celles-ci en compte pour le calcul du mode longitudinal.

Si l'on ne prend pas en compte les interactions, la fonction d'onde Ψ_E d'énergie E du continuum possède, au point de sortie du condensat de Bose-Einstein $z = R_z$ une phase (calculée par la méthode WKB) :

$$\Phi_0 = \frac{1}{\hbar} \int_0^{t_f} m \cdot \dot{\mathcal{Z}}^2(t, E) \cdot dt \quad (5.22)$$

où $\mathcal{Z}(t, E) = z_E^0 + gt^2/2$ est l'équation du mouvement classique (on néglige l'effet Zeeman quadratique sur l'extension spatiale du condensat). Le point de départ z_E^0 est ici égal à $z_E^0 = -E/mg$, et t_f , qui représente le temps nécessaire (pour le mouvement classique) pour sortir du condensat est défini par $\mathcal{Z}(t_f, E) = R_z$. On trouve alors immédiatement :

$$\Phi_0 = \frac{mg^2}{\hbar} \cdot \frac{t_f^3}{3} \quad (5.23)$$

avec

$$t_f = \sqrt{\frac{2(R_z - z_E^0)}{g}} \quad (5.24)$$

Prenons à présent en compte les interactions du laser avec le condensat source (voir Fig. 5.1). Les atomes du laser sont alors soumis, à l'endroit où se trouve le condensat, outre à la gravité, à un potentiel quadratique répulsif (densité atomique dans le condensat) dont la courbure vaut $\omega_z = \sqrt{2\mu/mR_z^2}$. La fonction d'onde Ψ_E d'énergie E du continuum possède alors, toujours au point de sortie du condensat de Bose $z = R_z$ une phase :

$$\Phi_{\text{int}} = \frac{1}{\hbar} \int_0^{t_f^{\text{int}}} m \cdot \dot{\mathcal{Z}}^2(t, E) \cdot dt \quad (5.25)$$

avec maintenant $\mathcal{Z}(t, E) = (z_E^{\text{int}} + g/\omega_z^2) \cosh(\omega_z t) - g/\omega_z^2$ où z_E^{int} est défini à partir de la relation 3.30 par :

$$z_E^{\text{int}} = \frac{mg - \sqrt{m^2g^2 + 4\mu(\mu + E)/R_z^2}}{2\mu/R_z^2} \quad (5.26)$$

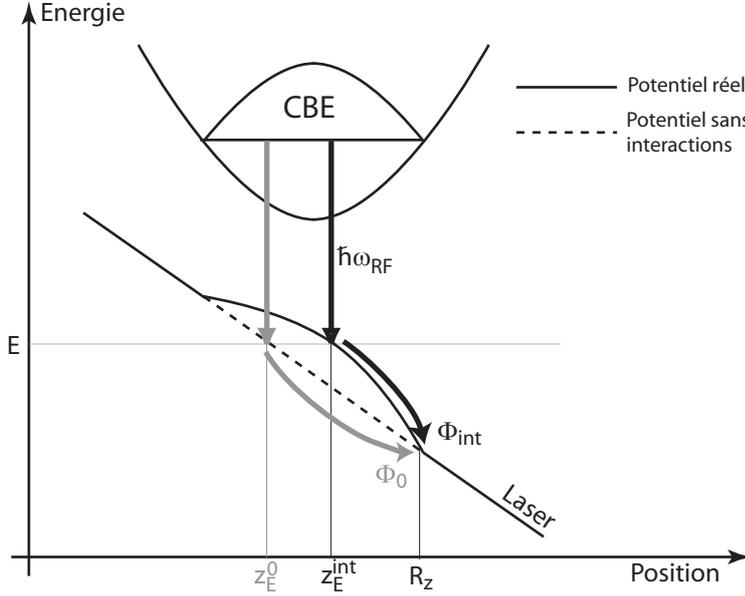


FIG. 5.1 – Méthode de calcul de la différence de phase de la fonction d'onde d'énergie E pour un potentiel avec et sans interactions. La conservation de l'énergie implique que, une fois sorties du condensat, les deux fonctions d'ondes conservent une différence de phase constante $\Delta\Phi(E) = \Phi_{\text{int}} - \Phi_0$.

Le temps de sortie du condensat t_f est quant à lui donné ici par :

$$t_f^{\text{int}} = \frac{1}{\omega_z} \cdot \text{acosh} \left(\frac{R_z + g/\omega_z^2}{z_E^{\text{int}} + g/\omega_z^2} \right) \quad (5.27)$$

On obtient ainsi sans grandes difficultés, et de manière analogue à 5.1.2.1 la phase WKB :

$$\Phi_{\text{int}} = \frac{m\omega_z}{2\hbar} \left(z_E^{\text{int}} + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 \left[\sinh(\omega_z t_f^{\text{int}}) \cdot \cosh(\omega_z t_f^{\text{int}}) - \omega_z t_f^{\text{int}} \right] \quad (5.28)$$

Au point de sortie du condensat $z = R_z$, les énergies potentielles avec et sans interactions sont les mêmes, et restent identiques dans toute la suite de la propagation ($z > R_z$). La différence de phase entre les fonctions d'ondes avec et sans interaction reste donc constante au cours du reste de la propagation. En effet, le mouvement classique partant du point de sortie du condensat a même vitesse initiale que l'on considère le cas avec ou sans interactions. Par conséquent, pour tenir compte des interactions, il suffit de remplacer la fonction d'onde sans interactions Ψ_E d'un laser (calculée dans les paragraphes précédents) par :

$$\Psi_E(z, t) \longrightarrow \Psi_E(z, t) \cdot e^{i\Delta\Phi_{\text{int}}(E)} \quad (5.29)$$

avec :

$$\Delta\Phi_{\text{int}}(E) = \Phi_{\text{int}} - \Phi_0 \quad (5.30)$$

5.1.3 Addition de lasers quasi-continus : interférences

Si l'on ajoute de façon cohérente plusieurs lasers atomiques, un phénomène d'interférence entre leurs diverses fonctions d'ondes intervient, et la densité atomique observée sera alors proportionnelle à :

$$\rho_{1D}(z, t) \propto |\Psi_{\text{tot}}(z, t)|^2 \quad (5.31)$$

où

$$\Psi_{\text{tot}}(z, t) = \int_E f(E) \cdot \Psi_E(z, t) \cdot dE \quad (5.32)$$

$$= \int_E \frac{f(E)}{\sqrt{p(z, E)}} e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma(z, E) - Et)} \cdot dE \quad (5.33)$$

où $f(E)$ est la *distribution d'amplitude* entre les différents modes $\Psi_E(z, t)$, imposée par le couplage entre le condensat et le continuum. Pour un laser unique (monomode) d'énergie E_0 , $f(E)$ s'écrit $f(E) = A \cdot \delta(E - E_0)$.

Si l'on crée par exemple un peigne de fréquences RF en progression arithmétique (raison $\delta\omega_{\text{RF}}$) sur toute l'étendue spectrale du condensat de Bose source, $f(E)$ se met sous la forme :

$$f(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cdot \delta(E - E_0 + n \cdot \hbar\delta\omega_{\text{RF}}) \cdot \Psi_{\text{CBE}}(z_E) \quad (5.34)$$

où les A_n dépendent, en intensité et en phase, de la méthode utilisée pour créer le peigne de fréquences.

Par analogie avec la théorie de la diffraction pour les sources de lumière monochromatique dans l'approximation scalaire en optique [70], on appellera l'expression 5.33 l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld axiale.

5.1.4 Approximations de Fresnel et de Fraunhofer

Approximation de Fresnel

Dans l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld axiale 5.33, les variations de $\sqrt{p(z, E)}$ en fonction de E peuvent être considérées comme faibles sur toute la largeur spectrale du condensat de Bose. On écrit donc :

$$\Psi_{\text{tot}}(z, t) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p(z, 0)}} \cdot \int_E f(E) e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma(z, E) - Et)} \cdot dE \quad (5.35)$$

De même, dans le terme de phase, on fait le développement limité :

$$\sigma(z, E) = \sigma(z, 0) + E \cdot \partial_E \sigma(z, 0) + \frac{E^2}{2} \partial_E^2 \sigma(z, 0) + o(E^2) \quad (5.36)$$

Ces approximations sont les analogues pour 5.33 de l'approximation de Fresnel [71] habituelle en optique paraxiale. On obtient finalement :

$$\Psi_{\text{tot}}(z, t) = \Psi_0(z, t) \cdot \int_E f(E) \cdot e^{\frac{iE^2}{2\hbar} \partial_E^2 \sigma(z, 0)} \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} (t - \partial_E \sigma(z, 0))} \quad (5.37)$$

Il est possible d'évaluer le terme en $\partial_E \sigma(z, 0)$ dans 5.37 afin de lui donner plus de sens physique. Dans le cas d'un potentiel indépendant du temps $V_{\text{ext}}(z)$, on note $\mathcal{Z}(t, E)$ le mouvement classique partant de z_E à $t = 0$ sans vitesse initiale. On note également $\mathcal{T}(z, E)$ la fonction réciproque (à E fixé) de \mathcal{Z} . On a alors :

$$\sigma(z, E) = \int_{z_E}^z \sqrt{2m(E - V_{\text{ext}}(z'))} \cdot dz' \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{z_E}^0 \sqrt{2m(E - V_{\text{ext}}(z'))} \cdot dz' \\ &+ \int_0^z \sqrt{2m(E - V_{\text{ext}}(z'))} \cdot dz' \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} &\underset{E \rightarrow 0}{\simeq} z_E \cdot \sqrt{2m(E - V_{\text{ext}}(z_E))} \\ &+ \sqrt{2m} \cdot \int_0^z \sqrt{0 - V_{\text{ext}}(z')} \cdot \left[1 + \frac{E}{2(0 - V_{\text{ext}}(z'))} \right] \cdot dz' \\ &+ o(E) \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\underset{E \rightarrow 0}{\simeq} 0 + \sigma(z, 0) + E \cdot \int_0^z \sqrt{\frac{m}{2(0 - V_{\text{ext}}(z'))}} \cdot dz' + o(E) \quad (5.41)$$

En utilisant l'expression de la vitesse classique en fonction de la position $\mathcal{V}(z, 0) = \dot{\mathcal{Z}}(\mathcal{T}(z, 0), 0) = \sqrt{2(0 - V_{\text{ext}}(z))}/m$, on obtient donc $\partial_E \sigma(z, 0) = \mathcal{T}(z, 0)$. On admet que ce résultat reste valable pour un potentiel dépendant du temps.

On réécrit donc l'équation 5.37 sous la forme :

$$\Psi_{\text{tot}}(z, t) = \Psi_0(z, t) \cdot \int_E f(E) \cdot e^{\frac{iE^2}{2\hbar} \partial_E^2 \sigma(z, 0)} \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} (t - \mathcal{T}(z, 0))} \cdot dE \quad (5.42)$$

que l'on appelle, toujours par analogie avec l'optique, intégrale de Fresnel axiale (ou transformée de Fresnel axiale). Le terme en $e^{\frac{iE^2}{2\hbar} \partial_E^2 \sigma(z, 0)}$ est appelé *fonction de transfert du potentiel* V_{ext} entre 0 et z , c'est l'analogie de la fonction de transfert d'un système optique pour l'optique diffractive. L'intégrale de Fresnel axiale fait donc intervenir la *transformée de Fourier* de la fonction de couplage $f(E)$ multipliée par la fonction de transfert du potentiel entre 0 et z , évaluée au *temps retardé* $t - \mathcal{T}(z, 0)$.

Validité de l'approximation de Fresnel

On peut donner un critère de validité de l'approximation de Fresnel en évaluant le terme de degré 3 en E qui a été négligé dans le développement du terme de phase. On considère que l'approximation est valable si celui-ci est inférieur à $\pi/2$. Le calcul ne présente aucune difficultés à condition de ne pas tenir compte de l'effet Zeeman quadratique. Pour le potentiel gravitationnel seul, on avait :

$$\sigma(z, E) = \frac{2m}{3} \sqrt{2g} (z - z_E)^{3/2}, \text{ avec } z_E = -E/mg \quad (5.43)$$

ce qui conduit à :

$$\partial_E(z, 0) = \sqrt{2z/g} \quad (5.44)$$

$$\partial_E^2(z, 0) = \frac{1}{mg} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{1}{2} z^{-1/2} \quad (5.45)$$

$$\partial_E^3(z, 0) = \frac{1}{m^2 g^2} \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{-1}{4} z^{-3/2} \quad (5.46)$$

$$(5.47)$$

La condition de validité de l'approximation de Fresnel correspond finalement à :

$$z > \left[\frac{1}{6h} mg (z_E^{\max})^3 \sqrt{\frac{2}{g}} \right]^{2/3} \quad (\text{Fresnel}) \quad (5.48)$$

Expérimentalement, le rayon vertical du condensat est inférieure à $4 \mu m$, d'où une approximation de Fresnel valable au delà de $6 \mu m$. Comme en pratique on prend les images $t_{\text{libre}} = 6 \text{ ms}$ après avoir coupé les coupleurs de sorties ainsi que le piège magnétique, la distance minimale parcourue par les atomes observés est $gt_{\text{libre}}^2/2 \simeq 180 \mu m$. L'approximation de Fresnel est donc toujours valable sur les images que l'on observe.

Approximation de Fraunhofer

Dans le développement du terme de phase, on peut également choisir de ne conserver que les termes de degré 1 en E . Ceci est l'analogue de l'approximation de Fraunhofer [71] dans la théorie de l'optique diffractive. Dans ce cas là, on aboutit à la solution très simple suivante :

$$\Psi_{\text{tot}}(z, t) = \Psi_0(z, t) \cdot \int_E f(E) \cdot e^{-i \cdot \frac{E}{h} (t - \mathcal{T}(z, 0))} \cdot dE \quad (5.49)$$

$$= \Psi_0(z, t) \cdot \tilde{f}(t - \mathcal{T}(z, 0)) \quad (5.50)$$

où \tilde{f} est la transformée de Fourier de la distribution d'amplitude entre les différents modes lasers.

Validité de l'approximation de Fraunhofer

De la même façon que pour l'approximation de Fresnel, on peut, pour commencer, considérer que l'approximation de Fraunhofer sera valable à la condition que le terme en E^2 du développement du terme de phase soit inférieur à $\pi/2$. En ne tenant toujours pas compte de l'effet Zeeman quadratique (pour simplifier les calculs), on trouve alors que l'approximation de Fraunhofer est valable pour :

$$z > \left[\frac{mg(z_E^{\max})^2}{h} \sqrt{\frac{2}{g}} \right]^2 \quad (\text{Fraunhofer}) \quad (5.51)$$

L'application numérique donne une limite de l'approximation de Fraunhofer à $z_{\min} \simeq 280 \mu\text{m}$. Expérimentalement, on a vu que les atomes que l'on observait avaient parcouru depuis leur couplage vers le continuum entre $180 \mu\text{m}$ (partie arrière) et $1,8 \text{ mm}$ (partie avant) pour une durée totale de couplage de 10 ms et un temps de vol avant imagerie de 6 ms . L'approximation de Fraunhofer est donc valable à peu près sur toute l'étendue des interférogrammes réalisés, mis à part les quelques premières centaines de micron correspondant aux atomes couplés le plus tardivement. La figure 5.2 présente une vue synthétique des domaines où les approximations présentés sont utilisables.

Il convient néanmoins de relativiser quelque peu le critère de validité de l'approximation de Fraunhofer que nous avons donné. En effet, le terme en $\partial_E^2 \sigma(z, E)$ négligé a une dépendance en $z^{-1/2}$. Il décroît donc très lentement avec la distance au condensat source. Si l'erreur de phase commise est de $\pi/2$ environ pour $z \simeq 280 \mu\text{m}$, elle reste de l'ordre de $0,8 \text{ rad}$ à 1 mm et $0,6 \text{ rad}$ à 2 mm (toujours en négligeant l'effet Zeeman quadratique). L'approximation de Fraunhofer ne donnera donc qu'une indication grossière dans toute la zone observée expérimentalement.

5.2 Les différents régimes expérimentaux mis en évidence

Les expériences que nous avons réalisées ont mis en évidence plusieurs régimes de fonctionnement différents, qu'il est possible d'expliquer au moyen de la modélisation présentée au dessus. En pratique nous avons créé des peignes de fréquences sur toute la largeur spectrale du condensat par deux méthodes différentes : modulation de fréquence et modulation d'amplitude du champ radio-fréquence de couplage. Dans les deux cas, on sait en effet que le spectre du couplage sera composé de pics régulièrement espacés dans l'espace des énergies, et d'amplitudes (et de phases) variables en fonction des caractéristiques du couplage.

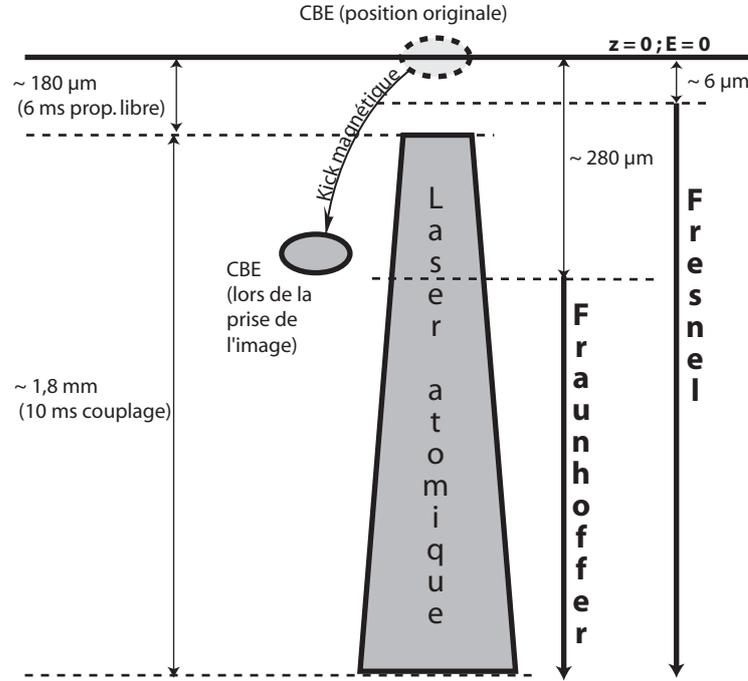


FIG. 5.2 – Schéma de synthèse des approximations réalisables sur différentes parties des figures d'interférences obtenues. On se base sur les paramètres expérimentaux habituels : 10 ms de couplage, puis coupure du piège magnétique et 6 ms de « vol libre » sous l'effet de la seule gravité. A noter que, comme toujours l'effet Stern-Gerlach à la coupure (« kick magnétique ») déplace quelque peu le condensat de Bose-Einstein source par rapport à sa position initiale.

5.2.1 Cas d'un nuage condensé

Dans un premier temps, nous avons appliqué un peigne de fréquences à « dents serrées » sur le condensat de Bose-Einstein. Pour cela nous modulons en fréquence le coupleur RF autour de la fréquence ω_{RF}^0 correspondant à un couplage au centre du condensat, et sur une amplitude de modulation plus grande que la largeur spectrale du condensat. On entend ici par « dents serrées » que le nombre de pic du peigne situés à l'intérieur de la largeur spectrale du condensat (coupleurs « utiles ») est grande devant 1. Pour un coupleur modulé en fréquence autour de la fréquence ν_0 et à une fréquence de modulation $\Delta\nu$, l'amplitude de couplage $f(E)$ s'écrit (en négligeant le temps fini du couplage et l'élargissement dû à la puissance finie du champ RF modulé) :

$$f(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \delta(E = n \cdot h \Delta\nu) \cdot \Psi_{\text{CBE}}(z_E) \quad (5.52)$$

où les A_n sont liés au spectre de la radio-fréquence (pour une modulation sinusoïdale de la fréquence RF par exemple, les A_n sont liés aux fonctions de Bessel de première espèce d'ordre n).

En régime de Fraunhofer, la densité atomique 1D des atomes dans $m_F = 0$ est alors sous la forme :

$$\rho(z, t) = |\Psi_0(z)|^2 \cdot \left| \tilde{f}(t - T(z, 0)) \right|^2 \quad (5.53)$$

La fonction d'amplitude de couplage 5.52 s'exprimant comme le produit d'un peigne de dirac (dont l'amplitude des dents est modulée par les coefficients A_n) par la fonction d'onde du condensat source Ψ_{CBE} , sa transformée de Fourier sera donc sous la forme (cf. figure 5.3) :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A'_n \cdot \tilde{\Psi}_{\text{CBE}}(t - n \cdot \Delta t) \quad (5.54)$$

où $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$ et $\tilde{\Psi}_{\text{CBE}}(t)$ est la transformée de Fourier (par rapport à la variable E) de la fonction $\Psi_{\text{CBE}}(z_E)$, et les A'_n sont liés aux coefficients A_n du couplage. Notons que, pour une fonction d'onde du condensat en forme de parabole inversée, et en utilisant $z_E = -E/mg$, on obtient analytiquement $\tilde{\Psi}_{\text{CBE}}(t) = \pi\Delta \cdot J_1(t\Delta/\hbar)/(t\Delta/\hbar)$. On observera donc en pratique une suite de pulses tombant les uns après les autres dans le potentiel gravitationnel (plus le potentiel dû à l'effet Zeeman quadratique).

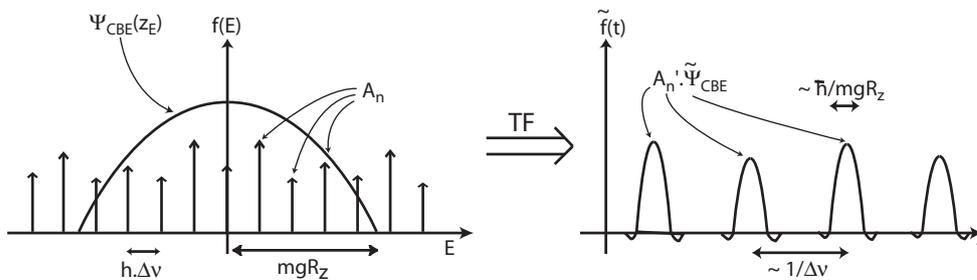


FIG. 5.3 – Transformée de Fourier pour une amplitude de couplage égale au produit d'un peigne de fréquence par la fonction d'onde du condensat de Bose. On obtient une série de pulses dans le temps.

On peut comprendre ce phénomène de la manière suivante : quand le coupleur de sortie (de position spatiale variable dans le temps quand sa fréquence est modulée) se trouve à l'intérieur du condensat de Bose, des atomes sont transférés dans l'état $m_F = 0$ et tombent alors sous l'effet du potentiel $V_{\text{ext}}(z)$. Puis le coupleur de sortie passe en dehors du condensat de Bose, et donc plus aucun atome n'est couplé. On reproduit cette séquence périodiquement. Les atomes sont donc émis par « bouffés » successives (à chaque

fois que le coupleur traverse le condensat) qui se propagent chacune les unes après les autres dans le potentiel $V_{\text{ext}}(z)$.

La figure 5.4 présente, dans sa partie de droite un exemple représentatif du résultat obtenu expérimentalement. On vérifie bien le résultat prédit théoriquement.

5.2.2 Cas d'un nuage thermique

On peut également tenter de réaliser la même expérience, mais cette fois en partant d'un nuage thermique et plus d'un condensat de Bose. La source n'est alors plus une source cohérente comme précédemment, mais une source *partiellement cohérente*. La distance typique sur laquelle deux zones du nuage thermique pourront être considérées comme cohérentes entre elles (et donc donner lieu à un phénomène d'interférence) est la longueur d'onde de de Broglie thermique introduite au chapitre 1 (liée à la température thermodynamique du nuage).

La figure 5.4 présente sur sa partie gauche le résultat expérimental obtenu en partant d'un nuage thermique au lieu d'un condensat de Bose-Einstein pour les mêmes paramètres expérimentaux que précédemment. On constate également que l'on observe des pulses réguliers d'atomes. Cependant, ceux-ci sont beaucoup plus larges qu'avant. La « finesse » de la figure d'interférence (largeur d'un pulse d'atomes rapportée à l'écart entre deux pulses successifs) est beaucoup plus faible que précédemment. Ceci s'explique par le fait que la source d'atomes n'est que partiellement cohérente. Avec les paramètres expérimentaux utilisés, environ 2 « dents » successives du peigne de fréquence se trouvent à une distance inférieure à la longueur d'onde de de Broglie thermique et vont donc pouvoir interférer entre elles (deux dents successives sont séparées de 400 Hz, soit 170 nm, à comparer à $\Lambda_{\text{dB-Th}} = 200$ nm pour $T=800$ nK). En revanche, les dents du peigne non adjacentes produiront des faisceaux atomiques mutuellement incohérents qui s'ajoutent en intensité (c'est à dire en densité atomique) et pas en amplitude : l'interférence est impossible. On est alors en présence d'un phénomène type interférences à 2 ondes alors que précédemment, on était en présence d'interférences à ondes multiples. La figure d'interférence obtenue doit donc être beaucoup moins « piquée » que précédemment, ce qui est bien le résultat observé.

5.2.3 Modulation de fréquence / modulation d'amplitude

Les peignes de fréquences qui avaient été appliqués jusqu'ici étaient générés par modulation de fréquence. On peut s'interroger sur l'effet du mode

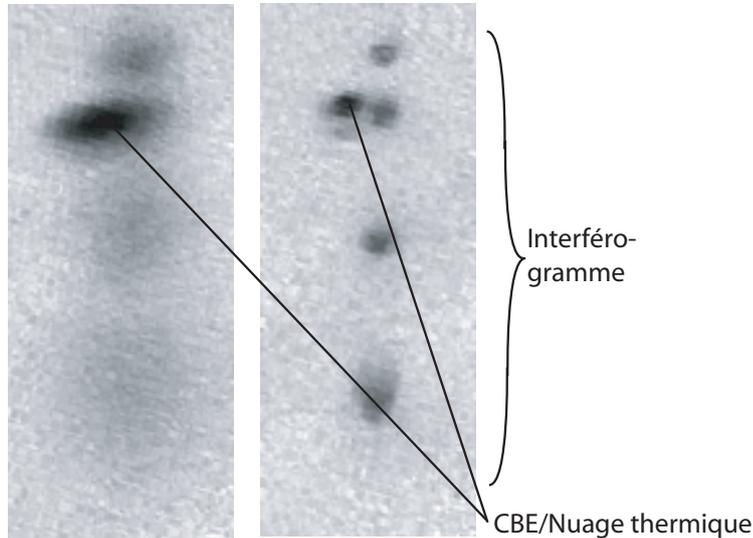


FIG. 5.4 – Couplage à l’aide d’un peigne de fréquence, pour une fréquence entre chaque dent de 400 Hz, soit une distance entre deux coupleurs successifs de l’ordre de 170 nm. À gauche, en partant d’un nuage thermique à $T=800$ nK ($\Lambda_{\text{dB-Th}} = 200$ nm), à droite, condensat de Bose-Einstein quasi pur.

de production du peigne sur la fonction d’amplitude de couplage $f(E)$, et, partant sur les figures d’interférences produites.

Une autre méthode de production de peigne de fréquence que nous avons utilisé est la modulation d’amplitude. En pratique, une série de pulses courts de RF à fréquence fixe (centrée sur le condensat de Bose) est envoyée sur le condensat. La méthode est en fait similaire à celle utilisée initialement au MIT pour les premiers lasers atomiques (voir 3.1). Son interprétation en terme d’interférence entre différents lasers atomiques continus présente cependant d’intéressantes perspectives quand on la compare avec la technique de modulation de fréquence.

La figure 5.5 présente une comparaison entre un peigne généré par modulation de fréquence et un peigne généré par modulation d’amplitude. Par rapport aux images précédentes, on a utilisé un système d’imagerie grossissant afin d’observer avec plus de détail la zone de « champ proche » correspondant aux atomes expulsés les plus tardivement du condensat. La mauvaise qualité des données présentées en modulation d’amplitude est due au fait que les seules expériences que nous avons pu réaliser (faute de temps) en modulation d’amplitude l’ont été en partant de condensats à faibles nombres d’atomes.

En dépit de la qualité médiocre de l’image en modulation d’amplitude, on remarque deux différences essentielles. Tout d’abord, alors que les deux peignes de fréquences ont le même intervalle entre deux dents successives, la

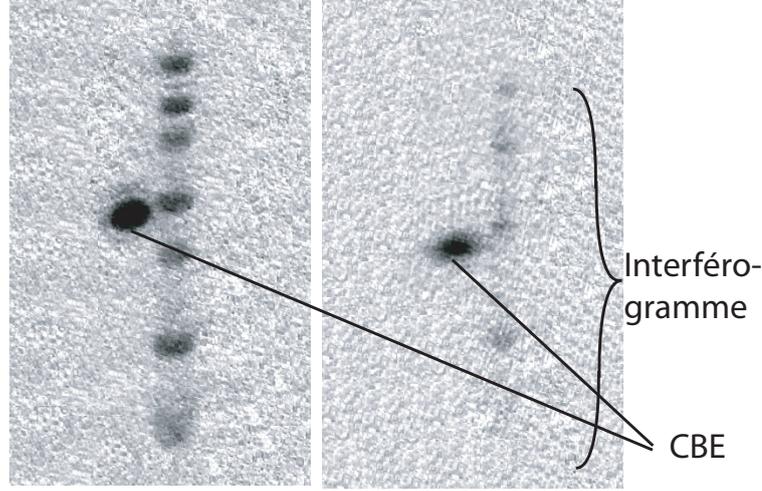


FIG. 5.5 – Deux méthodes pour créer le peigne de fréquences : à gauche, modulation de fréquence, à droite, modulation d'amplitude.

fréquence de production des pulses est doublée en modulation de fréquence par rapport à la modulation d'amplitude. Par ailleurs, les pulses d'atomes obtenus en modulation de fréquence présentent une dissymétrie deux à deux, alors que, en modulation d'amplitude, les pulses sont tous identiques. Ces deux observations sont liées au fait que, dans la fonction de couplage $f(E)$ résultante de l'application d'un peigne de fréquence, la position et l'amplitude des dents du peigne ne sont pas les seules données importantes du problème. Les *phases* relatives entre chacune des dents du peigne de fréquence appliqué jouent également un rôle très important. La phase d'un coupleur de sortie radiofréquence est donc « inscrite » sur la fonction d'onde du laser atomique résultante.

Pour une modulation de fréquence en forme de « triangles » sur une largeur de Δ_{mod} largement supérieure à la largeur spectrale Δ du condensat, à une fréquence (pulsation) Ω_{mod} , les coefficients de l'amplitude de couplage A_n s'écrivent³ (pour ceux situés à l'intérieur du condensat de Bose, donc proches du centre) :

$$A_n \propto \sqrt{\frac{2\hbar\Omega_{\text{mod}}}{\pi\Delta_{\text{mod}}}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta_{\text{mod}}}{\hbar\Omega_{\text{mod}}} - n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{ni\phi} \quad (5.55)$$

Où ϕ est la phase de la modulation de fréquence, définie par rapport à l'origine

³Il est aisé de se convaincre de ce résultat en se rappelant que, pour une modulation de fréquence sinusoïdale, les A_n sont égaux à $J_n(\Delta_{\text{mod}}/\hbar\Omega_{\text{mod}}) \cdot e^{ni\phi}$, et que le développement asymptotique de $J_n(z)$ vaut, pour z grand $J_n(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2/\pi z} \cdot \cos(z - n\pi/2 - \pi/4)$ (cf. [52])

des temps. ($\phi = 0$ si $\omega_{\text{RF}}(t) = \omega_{\text{RF}}^0$ à $t = 0$). On choisit pour simplifier $\phi = 0$ et $\Delta\omega/\Omega - \pi/4 \equiv 0[2\pi]$. Il vient alors : $A_n \propto \cos(n\pi/2)$.

Pour une modulation d'amplitude, on envoie des pulses courts de RF à fréquence Ω et de durée $\delta t \ll 2\pi/\Omega$. Les A_n s'écrivent :

$$A_n \propto \frac{\sin(n.\Omega_{\text{mod}}.\delta t/2)}{n.\Omega_{\text{mod}}} \quad (5.56)$$

que l'on peut approximer par $A_n = \text{cte}$, pour $2\pi\hbar/\delta t \gg \Delta$ (où Δ est la largeur spectrale du condensat).

La figure 5.7 présente une vue synthétique de la transformée de Fourier des fonctions $f(E)$ d'amplitude de couplage dans les deux cas. Il en découle que, dans le régime de Fraunhofer, la principale différence entre les deux cas est le doublement de la fréquence d'émission des pulses d'atomes en modulation de fréquence. Ceci est dû au fait que, en modulation de fréquence, la périodicité du spectre de la RF est modifiée (figure 5.6).

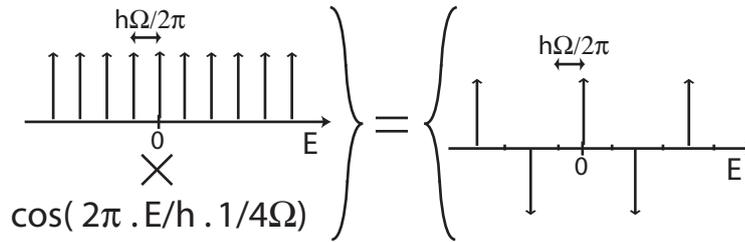


FIG. 5.6 – Modification de la périodicité du spectre d'une modulation de fréquence par rapport à une modulation d'amplitude.

Ceci s'interprète très simplement par le fait que, durant une période, en modulation de fréquence, le coupleur de sortie traverse deux fois le condensat de Bose ($\omega_{\text{RF}}(t) \simeq \omega_{\text{RF}}^0$) : une fois à l'aller puis une fois au retour. Par comparaison, en modulation d'amplitude, il n'y a qu'un seul pulse de radio-fréquence par période. Il y a donc deux pulses d'atomes émis par période en modulation de fréquence et un seul en modulation d'amplitude.

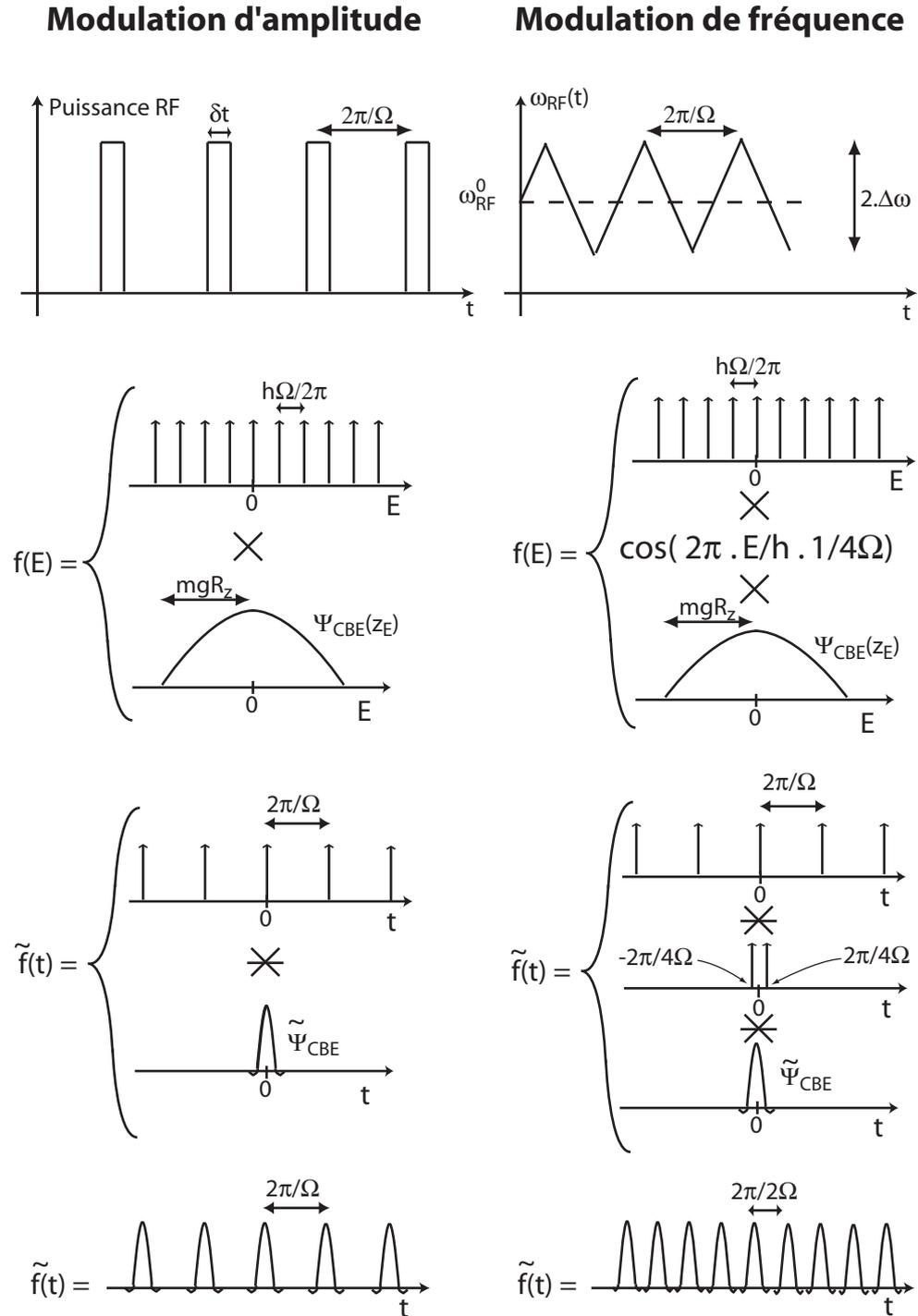


FIG. 5.7 – Schéma synthétique des transformées de Fourier des fonctions d'amplitude de couplage $f(E)$ pour la modulation d'amplitude (à gauche) et pour la modulation de fréquence (à droite). On en conclut que, en régime de Fraunhofer, la fréquence d'émission des pulses atomiques est doublée dans le deuxième cas.

Lorsqu'on s'intéresse au régime de Fresnel pour le cas de la modulation de fréquence, on constate que le résultat de l'ajout du terme en $e^{E^2/\partial_E^2\sigma(z,0)}$ introduit une dissymétrie entre deux pulses successifs. On obtient un pulse plus court et de plus grande amplitude suivi d'un pulse plus long et d'amplitude plus faible. C'est là un comportement qui se distingue fortement du cas de la modulation d'amplitude, pour laquelle aucune dissymétrie n'apparaît.

L'interprétation de la dissymétrie entre deux pulses successifs en modulation de fréquence peut se faire qualitativement de manière relativement simple en considérant les trajectoires classiques des atomes couplés. Considérons un pulse atomique correspondant à la traversée du condensat *de bas en haut* par le coupleur RF. On choisit momentanément l'origine des temps lorsque le coupleur se situe au centre du condensat. Soit $t' > 0$ est le temps nécessaire au coupleur pour passer du centre du condensat ($z_E = 0$) à son extrémité haute ($z_E = -R_z$). On ne considère pour simplifier que le seul effet de la gravité sur les atomes couplés dans $m_F = 0$. Les équations du mouvement classique pour les atomes couplés dans la partie haute ($z_H(t)$) et la partie basse ($z_B(t)$) du condensat sont alors :

$$z_H(t) = -R_z + \frac{g}{2}(t - t')^2 \quad (5.57)$$

$$z_B(t) = R_z + \frac{g}{2}(t + t')^2 \quad (5.58)$$

La largeur du pulse atomique au cours de sa propagation est donc :

$$\Delta z_{B \rightarrow H} = |z_B(t) - z_H(t)| = |2.R_z + 2gtt'| \quad (5.59)$$

Inversement, pour le pulse atomique suivant, correspondant à un passage du coupleur *de haut en bas* dans le condensat, la largeur est égale à :

$$\Delta z_{H \rightarrow B} = |z_B(t) - z_H(t)| = |2.R_z - 2gtt'| \quad (5.60)$$

On obtient donc bien une dissymétrie entre deux pulses successifs en champ « proche ». En champ lointain (c'est à dire pour la région de l'espace où l'approximation de Fraunhofer devient valable), on a $gtt' \gg R_z$, et les deux pulses successifs deviennent progressivement identiques ($\Delta z_{H \rightarrow B} \sim \Delta z_{B \rightarrow H} \sim 2gtt'$).

5.2.4 Effet des interactions

Les interprétations qualitatives des régimes de fonctionnement observés précédemment ne nécessitaient pas l'introduction des interactions entre les atomes des lasers et ceux du condensat. On a vu cependant que celles-ci modifiaient les fonctions d'ondes Ψ_E du continuum en leur ajoutant un terme de

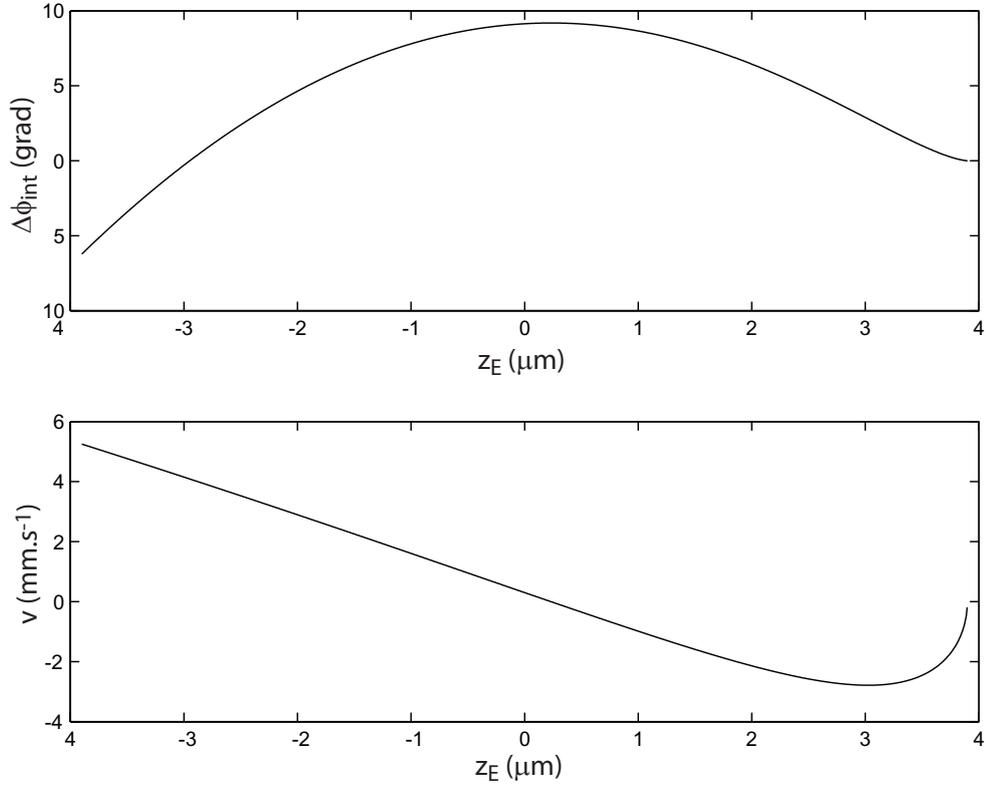


FIG. 5.8 – En haut : Facteur de phase $\Delta\Phi_{\text{int}}(E)$ à ajouter à la fonction d’amplitude de couplage $f(E)$ lorsque l’on tient compte des interactions entre les lasers atomiques couplés vers le continuum et le condensat de Bose-Einstein source. La figure est tracée en fonction de la position de couplage $z_E = -E/mg$. En bas : la vitesse initiale correspondante $v = \hbar/m \cdot d\Delta\Phi_{\text{int}}/dz_E$.

phase $\Phi_0(z_E)$ variable en fonction de leurs points de rebroussement classiques z_E . Il a été montré dans le chapitre 4 combien ces interactions pouvaient avoir des effets importants sur la propagation des lasers à atomes. Ici aussi, il est nécessaire de les introduire pour obtenir des résultats plus quantitatifs.

On choisit ici d’ajouter le terme de phase $\Delta\Phi_{\text{int}}(E)$ sur la fonction $f(E)$ d’amplitude de couplage plutôt que sur les fonctions d’ondes propres Ψ_E du continuum, ce qui est totalement équivalent. La figure 5.8 représente le terme de phase Φ_0 à ajouter à la fonction d’amplitude de couplage $f(E)$ en fonction de z_E .

On observe de fortes variations du terme de phase dû aux interactions $\Delta\Phi_{\text{int}}$ en fonction des énergies E résonnantes dans le condensat (i.e. telles que $-R_z < z_E < R_z$, ou de façon équivalente $-\hbar\Delta < E < \hbar\Delta$). L’ajout de cette dispersion de phase provoque un élargissement des pulses atomiques

produits dans l'interférogramme (voir fig. 5.9).

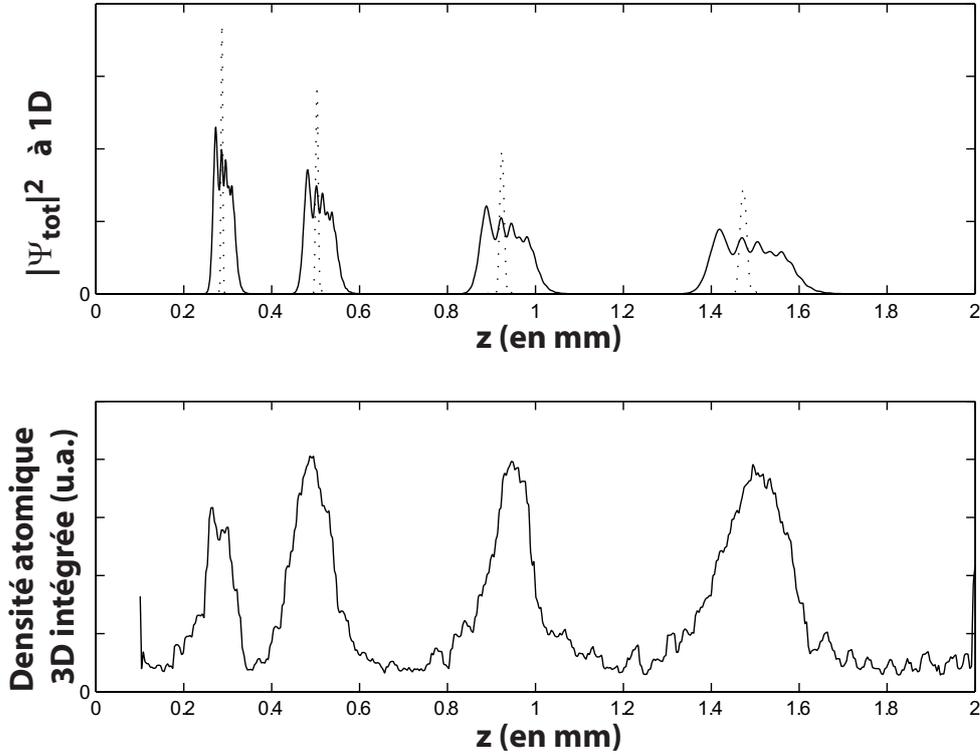


FIG. 5.9 – **En haut** : calcul dans le régime de Fraunhofer de la figure obtenue pour un peigne RF (modulation de fréquence à 200 Hz en « dents de scie »). Le calcul se base sur les solutions analytiques développées dans le chapitre. Temps de couplage 10 ms, image prise 6 ms après coupure des champs magnétiques, rayon du condensat $R_z = 3,9 \mu\text{m}$, potentiel chimique $\mu/h = 1400 \text{ Hz}$. En pointillé : on ne tient pas compte des interactions entre les atomes dans le continuum et ceux du condensat. En trait plein : ajout du terme de phase $\exp[i \cdot \Delta\Phi_{\text{int}}(E)]$ correspondant à l'effet des interactions. La courbe en pointillé a été divisée par 5 selon son ordonnée pour faciliter la lecture. **En bas** : Les données obtenues expérimentalement pour un tel couplage. On a intégré ici selon la direction transverse l'image obtenue).

Une interprétation de ce phénomène en terme de mécanique classique est que la variation de phase initiale ϕ d'un pulse atomique dû à l'ajout des interactions correspond à un champ de vitesse $\vec{v} = \hbar/m \cdot \vec{\nabla}\phi$ (voir fig. 5.8). La dispersion de vitesses correspondantes produit un élargissement du pulse atomique au cours de sa propagation. De la figure 5.8, on tire un ordre de grandeur de la largeur totale de la distribution en vitesse imposée par l'effet des interactions : $\Delta v \sim 6,5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. En ne considérant que le seul effet de la gravité, la largeur $\Delta z(t)$ du pulse après un temps de propagation t sera de

l'ordre de $\Delta z^2(t) = \Delta z^2(0) + \Delta v^2 \cdot t^2$ avec $\Delta z(0) \sim 2.R_z$ la largeur initiale du pulse atomique. Notons que, tout comme pour le mode transverse du laser à atomes étudié au chapitre 4, la courbure du potentiel due à l'effet Zeeman quadratique amplifie encore plus cet effet d'élargissement.

On trouvera un développement plus complet dans [24] de ce modèle simple « classique » où l'on considère l'interférogramme comme une série de pulses gaussiens d'atomes classiques émis à intervalles réguliers. Il est à noter que ce traitement « classique » pourrait être étendu à un traitement quantique plus rigoureux en utilisant la méthode des matrices ABCD ξ [62, 72]. Celle-ci constituant un prolongement de la méthode des matrices ABCD vue au chapitre 4.

5.2.5 Recouvrement des paquets d'ondes : laser quasi-continu large bande

En utilisant le modèle simple précédent de paquets d'atomes classiques, il apparaît un régime particulier le cas où la largeur Δz d'un pulse atomique devient de l'ordre ou supérieure à l'écart entre deux pulses successifs. Dans ce régime, deux pulses atomiques émis successivement se recouvrent, et il y a continuité du flux atomique (dans le traitement classique). Expérimentalement, nous obtenons ce régime pour un peigne de fréquence obtenu par modulation de fréquence à fréquence supérieure à 1 kHz environ (fig. 5.10).

Cependant, dans un traitement quantique rigoureux, quand deux pulses atomiques se chevauchent, il y a interférence dans la zone de recouvrement⁴. La continuité du flux atomique n'est donc plus réalisée. Cependant, les longueurs caractéristiques des figures d'interférences observées alors sont plus petites que la résolution de l'imagerie (fig 5.10). Nous ne pouvons donc pas les observer avec les techniques d'observation dont nous disposons. Une possibilité envisageable serait d'augmenter la distance de chute, ce qui élargit les structures interférencielles. L'inconvénient de cette méthode est quelle diminue également la densité et augmente les vitesses des atomes (il faudrait donc également améliorer la résolution temporelle du système de détection, par exemple en utilisant la méthode de [73]).

Remarquons que le régime présenté ici se rapproche par certains aspects des expériences du NIST [42]. Dans ces expériences, un laser quasi continu est également obtenu par émission rapide de pulses atomiques qui se chevauchent. L'effet des interactions produisant un élargissement des pulses au cours de

⁴Si l'on choisit d'adopter le point de vue de pulses atomiques qui tombent et éventuellement se chevauchent pour donner lieu à un phénomène d'interférences, l'expérience se rapproche alors par son principe à [66]. Dans celle-ci, deux condensats séparés se chevauchent après temps de vol et dans la zone de recouvrement, on assiste à un phénomène d'interférence.

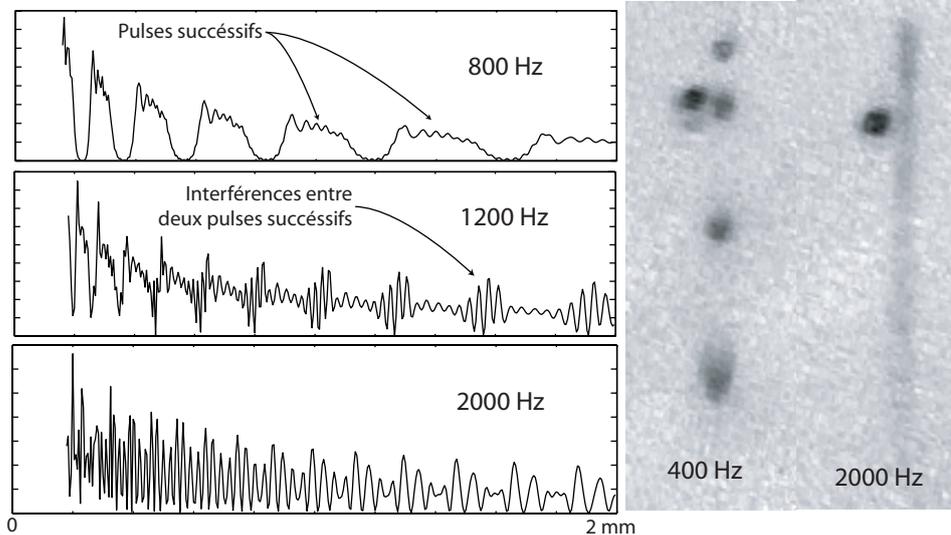


FIG. 5.10 – Calcul numérique 1D (à gauche) et données expérimentales (à droite) pour différents espacements entre les dents du peigne de fréquence. Pour un écart entre deux dents consécutives inférieur à 1 kHz environ, les pulses sont bien séparés. Au delà de 1 kHz environ, les pulses commencent à se recouvrir les uns les autres (voir calcul pour 1200 Hz), jusqu'à devenir indiscernables (voir calcul 2000 Hz). Les interférences entre pulses résultantes ne sont pas résolues expérimentalement. Les conditions pour les calculs numériques comme pour les expériences sont : 10 ms de couplage, puis coupure piège, puis 6 ms de temps de vol libre avant imagerie. Rayon du condensat $R_z = 3,9 \mu\text{m}$, potentiel chimique $\mu/h = 1400 \text{ Hz}$.

la propagation, on peut s'attendre à un phénomène d'interférence du même type, difficile à observer en pratique.

5.3 Structure transverses : traitement 3D

Il a été montré dans 5.1 comment on pouvait calculer, dans le cadre de l'approximation WKB, le mode longitudinal d'un laser atomique d'énergie E pour les paramètres expérimentaux de nos expériences. La combinaison de plusieurs de ces modes d'énergies E différentes donne lieu à un phénomène d'interférence, dont la comparaison avec les données expérimentales permet de valider la modélisation (5.2.4). Le calcul du mode transverse du laser à atomes a quant à lui, été effectué, sous certaines approximation, dans le chapitre 4.

En utilisant à la fois le mode longitudinal calculé en 5.1 et le mode trans-

verse calculé par la méthode des matrices ABCD, on obtient la figure d'interférence entre les différents lasers à atomes, y compris selon les directions transverses. La figure 5.11 présente une application numérique à 2 dimensions, basée sur les calculs analytiques dans la direction verticale (mode longitudinal) et dans la direction radiale.

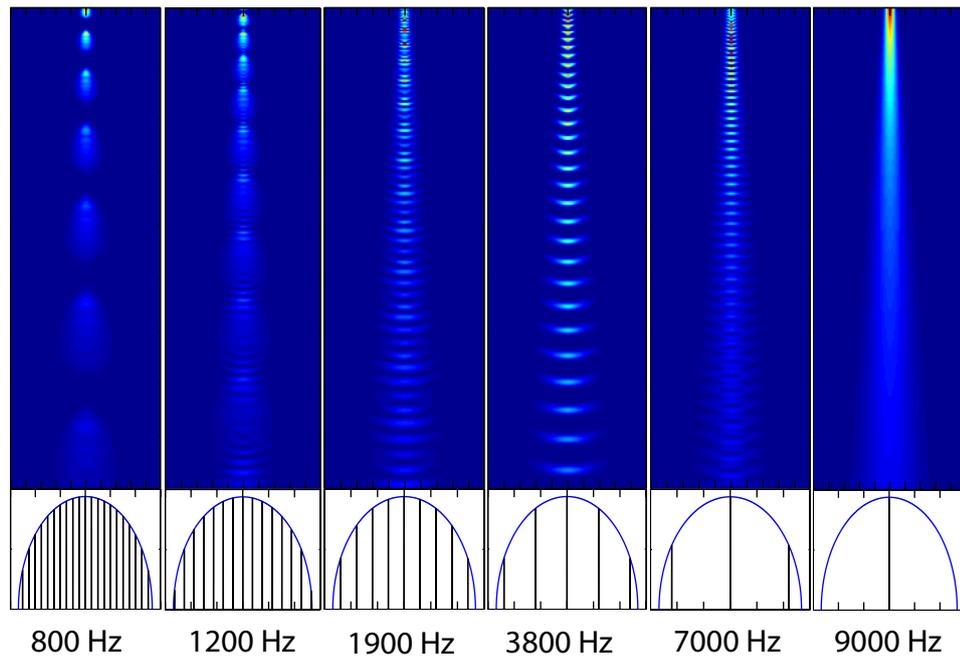


FIG. 5.11 – Calcul numérique de la figure d'interférence obtenue pour la combinaison de plusieurs lasers à atomes dont les énergies sont en progressions arithmétiques. Le mode longitudinal est celui calculé dans le texte. Le mode transverse résulte du calcul analytique à l'aide des matrices ABCD du chapitre 4. Les conditions expérimentales sont : 10 ms de couplage, puis coupure piège, puis 6 ms de temps de vol libre avant imagerie. Rayon du condensat $R_z = 3,9 \mu\text{m}$, potentiel chimique $\mu/h = 1400 \text{ Hz}$. On fait ici un calcul à 2D uniquement, où la direction transverse est celle du quadrupôle (direction radiale). Échelle verticale : 1,8 mm, horizontale : 0,5 mm. On a représenté symboliquement en bas la répartition des différents coupleurs radiofréquence à l'intérieur de la fonction d'onde du condensat.

On constate que, pour une fréquence entre deux dents du peigne inférieure au kilo-Hertz, les pulses atomiques produits sont bien séparés sur toute l'étendue de l'interférogramme. Pour une fréquence supérieure, les pulses commencent à se recouvrir, et donnent lieu à des franges d'interférences. Si les pulses se recouvrent beaucoup, ils deviennent indistinguables les uns des autres, et on obtient une structure interférentielle complexe et variable en

fonction de l'écartement entre les dents du peigne de fréquence. La plupart du temps, les figures d'interférences sont plus petites que la résolution de l'imagerie, et donc difficile à observer. Cependant, dans certains cas (3800 Hz par exemple), il serait envisageable de les observer. La courbure des structures observée est liée aux termes de « courbures du front d'onde » des différents lasers à atomes qui interfèrent (partie réelle du paramètre $1/q$). Nous n'avons cependant pas encore eu l'occasion de mettre en oeuvre les études permettant de mettre ces structures en évidence.

5.4 Conclusion et perspectives

Les expériences préliminaires et les modélisations théoriques présentées dans ce chapitre ont mis en évidence la possibilité qu'offrent les lasers à atomes de réaliser des figures d'interférences. Une modélisation unidimensionnelle qui s'inspire de la théorie de l'optique de Fourier a été présentée, qui permet l'étude qualitative et quantitative des phénomènes obtenus.

Dans certains cas, il est possible d'interpréter les données obtenues en termes plus « classiques », en considérant des pulses d'atomes tombant sous l'effet de la gravité et d'autres potentiels. Ce traitement nécessite d'introduire « à la main » des conditions initiales qui sont données *in fine* par le calcul quantique complet (effet des interactions et de la pression quantique en particulier). Si ce type de traitement peut parfois apparaître plus intuitif, des études complètes et générales nécessitent (on l'a vu) un traitement quantique rigoureux du problème, c'est à dire la connaissance complète du mode longitudinal d'un laser à atome que nous avons présenté.

En combinant notre modélisation unidimensionnelle avec les études transverses du chapitre 4, on obtient un modèle approché à trois dimensions du mode d'un laser à atomes. Une généralisation de ce type de traitement, utilisable dans le cadre de l'interférométrie atomique de haute précision, est effectuée dans [74].

On peut, à la lumière du formalisme présenté, envisager la synthèse de profils longitudinaux arbitraires dans la figure d'interférence, à l'aide d'un contrôle précis du champ radiofréquence de couplage appliqué. Inversement, il serait envisageable de remonter, par l'étude des interférogrammes obtenus à la mesure des phases relatives dans le condensat (ce qui constituerait un développement des travaux que le groupe de Munich a réalisé en ce sens à l'aide de deux coupleurs radiofréquences [17]). Cependant, ce genre d'études très fines se heurtera rapidement aux limites de résolution de l'imagerie, que l'on ne peut que partiellement contourner par l'augmentation des temps de propagations. En effet, si les distances typiques des phénomènes d'interférences augmentent avec les hauteurs de chutes, la densité atomique moyenne

diminue corrélativement. De même, les vitesses atomiques augmentent, et la résolution temporelle doit donc être améliorée. La détection devient donc problématique.

Conclusion

And this weak and idle theme,
no more yielding but a dream,
Gentles, do not reprehend :
If you pardon we will mend.

William Shakespeare⁵

Les travaux de thèse rapportés dans le présent manuscrit se sont axés essentiellement sur la production et l'étude des condensats de Bose-Einstein et des lasers à atomes qui en sont issus. Les problèmes expérimentaux qu'il a fallu résoudre pour produire des lasers atomiques stables de façon répétable ont été exposés. Des solutions technologiques bien adaptées aux spécificités de notre dispositif ont été appliquées avec succès pour les résoudre. Ceci a permis de passer de la simple démonstration de principe, qui caractérisait l'esprit de nos premières expériences, à des études plus systématiques.

Nous avons ainsi pu réaliser les premières études systématiques des modes transverses des lasers à atomes. Il est alors apparu combien les différences entre les lasers atomiques et les lasers optiques pouvaient avoir un rôle important. En particulier, nous avons montré que les interactions entre les atomes du laser et ceux du condensat de Bose-Einstein qui en est la source jouaient un rôle primordial pour la détermination de la largeur transverse du laser au cours de sa propagation.

Malgré ces différences fondamentales, nous avons pu adapter un formalisme d'optique photonique classique à base de matrices ABCD à la propagation de nos lasers à atomes. Un bon accord entre cette théorie et nos données expérimentales a été obtenu, qui permet de valider l'idée utilisée selon laquelle les interactions entre le laser et le condensat équivalent à un simple effet de lentille divergente pour le faisceau atomique.

Des études de phénomènes d'interférences entre lasers à atomes issus d'un même condensat de Bose ont également été présentées. Ces phénomènes peuvent s'apparenter aux lasers impulsionsnels à modes-bloqués désormais classique en optique des lasers. Là aussi, certaines analogies ont permis de développer un formalisme qui s'inspire de la théorie de l'optique de Fourier

⁵*in* « A midsummer night's dream » (V, 1) [75]

pour expliquer et comprendre les phénomènes observés. Dans tous les cas, les travaux présentés dans ce manuscrit ont montré, s'il en était encore besoin, combien l'analogie optique pouvait être fructueuse dans la compréhension et l'analyse des phénomènes d'optiques atomiques

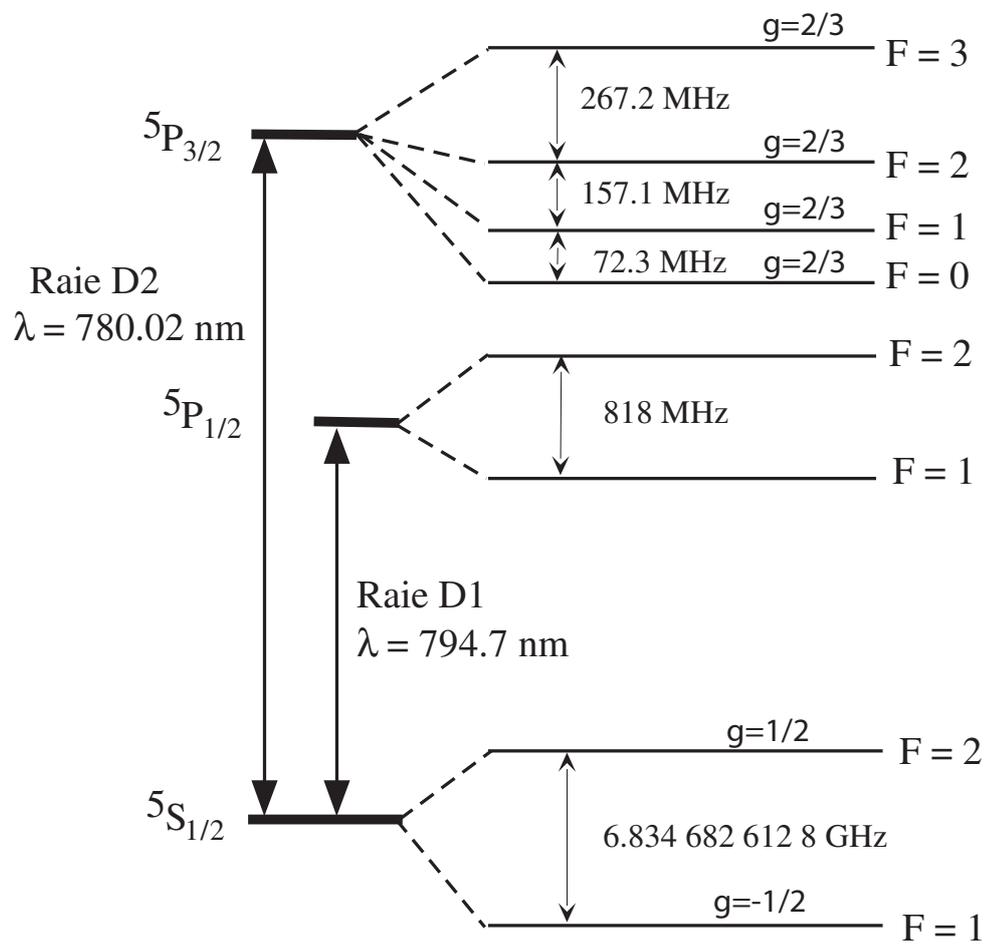
Pour achever ces travaux de thèse, un nouveau dispositif expérimental a été conçu, et monté. L'un des objectifs de ce dispositif, à terme, est la réalisation d'un laser à atomes réellement continu. La technique envisagée est le rechargement du condensat de Bose-Einstein source de façon régulière à l'aide d'un dispositif de pince optique. Ceci permettrait de disposer d'une source cohérente et continue pour l'optique atomique, dont on peut envisager de multiples applications. Entre autres, on peut s'attendre à l'aide de telles sources à des progrès en précision et en exactitude de plusieurs ordres de grandeurs dans le domaine de l'interférométrie atomique ou des horloges atomiques, même si de nombreuses études en ce sens restent à mener.

Informations plus ou moins utiles sur l'atome de Rubidium

- Isotopes principaux : ^{85}Rb (75 %), ^{87}Rb (25 %)
- Températures de changement de phases :
 - Liquéfaction : $38,9\text{ }^\circ\text{C}$
 - Vaporisation : $686\text{ }^\circ\text{C}$
- Masse d'un atome de ^{87}Rb : $m = 1,44432 \cdot 10^{-25}\text{ kg}$
- Niveaux atomiques de la raie du ^{87}Rb :
- Caractéristiques de la raie D_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = 2\pi \cdot 5,9\text{ MHz} \\ I_{\text{sat}} = 1,6\text{ mW/cm}^2 \\ v_{\text{rec}} = 6\text{ mm/s} \end{array} \right.$$

- Longueur de diffusion : $a \simeq 5,7\text{ nm}$



Quelques calculs d'intégrales

On s'intéresse ici au problème de l'intégration des fonctions à symétrie elliptique selon une direction autre qu'un axe propre. Ce problème est lié au calcul de l'épaisseur optique d'un nuage d'atomes à symétrie elliptique (un nuage dans un potentiel harmonique anisotrope par exemple) prise selon une direction quelconque.

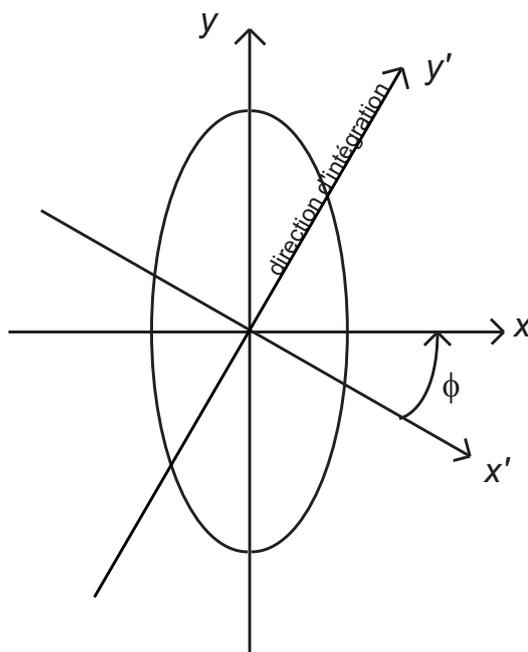


FIG. B.1 – Changement de repère pour une fonction à symétrie elliptique. La direction y' correspond à la direction d'intégration.

Soit donc une fonction à symétrie elliptique $\rho(x, y)$. On peut par définition l'écrire sous la forme :

$$\rho(x, y) = f \left(\left(\frac{x}{R_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 \right) \quad (\text{B.1})$$

On fait alors le changement de variable (voir figure B.1) :

$$\begin{cases} x = \cos(\phi)x' + \sin(\phi)y' \\ y = -\sin(\phi)x' + \cos(\phi)y' \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

qui conduit à :

$$\rho(x', y') = f \left(\left(\frac{x'}{X} \right)^2 + \left(\frac{y'}{Y} \right)^2 + 2\alpha x' y' \right)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{1}{X^2} = \frac{\cos^2(\phi)}{R_x^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{R_y^2} \\ \frac{1}{Y^2} = \frac{\cos^2(\phi)}{R_y^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{R_x^2} \\ \alpha = \sin(\phi) \cos(\phi) \left(\frac{1}{R_x^2} - \frac{1}{R_y^2} \right) \end{cases}$$

d'où on tire immédiatement :

$$\rho(x', y') = f \left(\left(\underbrace{y'/Y + \alpha Y x'}_{\tilde{y}} \right)^2 + x'^2 \underbrace{\left(\frac{1}{X^2} - \alpha^2 Y^2 \right)}_{\aleph} \right)$$

Or, on peut mettre \aleph sous la forme :

$$\begin{aligned} \aleph &= \frac{1/X^2 \cdot 1/Y^2 - \alpha^2}{1/Y^2} \\ &= \frac{\cos^4(\phi) + \sin^4(\phi) + 2\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)}{R_x^2 \cos^2(\phi) + R_y^2 \sin^2(\phi)} \\ &= \frac{1}{R_\phi^2} \end{aligned}$$

En intégrant $\rho(x', y')$ selon la direction y' , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} d(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', y') dy' \\ &= 2Y \int_0^{\infty} f \left(\tilde{y}^2 + \frac{x'^2}{R_\phi^2} \right) d\tilde{y} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En utilisant ce résultat, on va alors tirer les valeurs pour les cas utiles suivants :

Cas 1 : parabole inversée

Pour une fonction de type parabole inversée, on a $f(u) = \rho_0 \cdot \max(0; 1-u)$, ce qui donne bien :

$$\rho(x, y) = \rho_0 \cdot \max \left[0; 1 - \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 \right] \quad (\text{B.4})$$

En utilisant B.3, on obtient alors :

$$\begin{aligned} d(x') &= 2\rho_0 Y \int_0^{\sqrt{1-(x'/R_\phi)^2}} \left[1 - \tilde{y}^2 - \left(\frac{x'}{R_\phi} \right)^2 \right] d\tilde{y} \\ &= \frac{4\rho_0}{3 \cdot 1/Y} \left[1 - \left(\frac{x'}{R_\phi} \right)^2 \right]^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$\begin{cases} 1/Y &= \sqrt{\frac{\cos^2(\phi)}{R_y^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{R_x^2}} \\ R_\phi &= \sqrt{R_x^2 \cos^2(\phi) + R_y^2 \sin^2(\phi)} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Cas 2 : gaussienne

Pour une fonction de type gaussienne, on a $f(u) = \rho_0 \cdot e^{-u}$, ce qui donne bien :

$$\rho(x, y) = \rho_0 \cdot \exp \left(- \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 \right) \quad (\text{B.7})$$

En utilisant B.3, on obtient :

$$d(x') = \frac{2\rho_0 \sqrt{\pi}}{1/Y} e^{-(x'/R_\phi)^2} \quad (\text{B.8})$$

avec toujours :

$$\begin{cases} 1/Y &= \sqrt{\frac{\cos^2(\phi)}{R_y^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{R_x^2}} \\ R_\phi &= \sqrt{R_x^2 \cos^2(\phi) + R_y^2 \sin^2(\phi)} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Articles

Multifrequency evaporative cooling to Bose-Einstein condensation in a high magnetic field

Référence [37]

Experimental study of coupling Bose-Einstein condensates into weakly non-trapping and trapping states

Référence [58]

Atom Laser Divergence

Référence [76]

Production of CW and mode-locked atom lasers

Référence [77]

Multifrequency evaporative cooling to Bose-Einstein condensation in a high magnetic field

V. Boyer, S. Murdoch, Y. Le Coq, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect

Groupe d'Optique Atomique, Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMRA 8501 du CNRS, Bâtiment 503, Campus Universitaire d'Orsay, Boîte Postale 147, F-91403 Orsay Cedex, France

(Received 4 April 2000; published 5 July 2000)

We demonstrate a way to circumvent the interruption of evaporative cooling observed at high bias field for ^{87}Rb atoms trapped in the ($F=2, m=+2$) ground state. Our scheme uses a three-frequency rf knife achieved by mixing two rf frequencies. This compensates part of the nonlinearity of the Zeeman effect, allowing us to achieve Bose-Einstein condensation where the standard one-frequency rf knife evaporation method did not work. We are able to get efficient evaporative cooling, provided that the residual detuning between the transition and the rf frequencies is smaller than the power broadening of the rf transitions at the end of the evaporation ramp.

PACS number(s): 03.75.-b, 32.60.+i, 32.80.Pj, 32.80.Wr

Forced evaporative cooling of atoms [1,2] in a magnetic trap is at the moment the only known way to achieve Bose-Einstein condensation (BEC) [3–5]. Particles with energy significantly larger than the average thermal energy are removed from the trap and the remaining ones thermalize to a lower temperature by elastic collisions. For that, a radio-frequency (rf) magnetic field is used to induce a multiphoton transition from a trapping state to a nontrapping state via all intermediate Zeeman sublevels. Atoms moving in the trap with sufficient energy can reach the resonance point (rf knife) and exit the trap. If the rf frequency is decreased slowly enough, and no other process is hampering the forced evaporation, the increase of the phase-space density obtained by this method eventually leads to Bose-Einstein condensation.

In a previous publication [6], we reported that rf forced evaporative cooling of ^{87}Rb atoms in the ($F=2, m=+2$) ground state in a magnetic trap with a high bias field is hindered and eventually interrupted. Our interpretation of this phenomenon is based on the nonlinear terms of the Zeeman effect that lift the degeneracy of transition frequencies between adjacent Zeeman sublevels. This interpretation is supported by numerical calculations [7]. Interrupted evaporative cooling in a large magnetic field is a serious problem in several situations, which is interesting for practical reasons — like the use of permanent magnets [8] or of an iron core electromagnet such as the one described in [9]. High-magnetic-field evaporation is also important in connection with Feshbach resonances [10–13]. In this paper, we demonstrate that it is possible to achieve efficient evaporative cooling in a high magnetic field by use of a multifrequency rf knife allowing a multiphoton transition to take place across nonequidistant levels. We show that, for our range of magnetic fields, it is possible to use a simple experimental scheme where the three required frequencies are obtained by rf frequency mixing yielding a carrier and two sidebands.

We focus in this paper on ^{87}Rb in the $F=2$ manifold of the electronic ground state. Atoms are initially trapped in the $m=+2$ state. Our high bias field magnetic trap follows the Ioffe-Pritchard scheme. To the second order in position [see Eq. (1) in [6]], the magnetic field modulus B has a three-dimensional quadratic dependence allowing trapping, plus a

bias field B_0 between 50 and 200 G. This is much larger than in most other experiments where B_0 can be independently adjusted, and is set typically at 1 G [14]. In a large magnetic field, the nonlinear terms are not negligible in the Zeeman shifts given by the Breit-Rabi formula

$$E_m(B) = m g_I \mu_n B + \frac{\hbar \omega_{\text{HF}}}{2} (\sqrt{1 + m \xi + \xi^2} - 1), \quad (1)$$

with

$$\xi = \frac{(g_S \mu_B + g_I \mu_n) B}{\hbar \omega_{\text{HF}}}.$$

Here $g_S \approx 2.002$ and $g_I \approx 1$ are, respectively, the Landé factor for the electron and the nucleus, μ_B and μ_n are the Bohr magneton and the nucleus magneton, and ω_{HF} ($2\pi \times 6834.7$ MHz) is the hyperfine splitting.

Compared to the low-magnetic-field case [1,2], the evaporation process changes drastically. At a given magnetic field, the spacings between adjacent sublevels ($|\Delta m|=1$) are not equal and the direct multiphoton transition from trapping to nontrapping states becomes negligible. Evaporation of hot atoms can only happen via a sequence of one-photon transitions of limited efficiency (see Fig. 8 in [15]) that are separated in space. This results in long lasting atoms in the $m=+1$ and $m=0$ states [16] that are responsible for hindered evaporative cooling. Moreover, transitions to nontrapping states are suppressed at the end of the evaporation ramp, leading to an interruption of cooling before BEC is reached.

To overcome these limitations, three distinct rf fields can be used to induce a direct three-photon transition from the $m=+2$ trapping state to the $m=-1$ nontrapping state. At a magnetic field B , the three rf frequencies must match the transition frequencies defined by

$$\begin{aligned} \omega_0 - \delta\omega'_0 &= (E_2 - E_1)/\hbar, \\ \omega_0 &= (E_1 - E_0)/\hbar, \\ \omega_0 + \delta\omega_0 &= (E_0 - E_{-1})/\hbar, \end{aligned} \quad (2)$$

with E_m taken from Eq. (1).

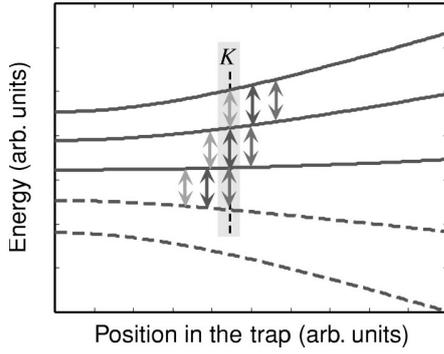


FIG. 1. Implementation of the three-frequency rf knife to evaporate in a high magnetic field. All possible transitions are represented. Evaporation happens at K via a three-photon transition resonant in the intermediate states.

Figure 1 represents all possible transitions induced by these three rf frequencies in the magnetic trap. At position K , each rf field is resonant with a given transition: the smallest rf frequency with the $(m=+2) \rightarrow (m=+1)$ transition, the intermediate frequency with the $(m=+1) \rightarrow (m=0)$ transition, and the largest frequency with the $(m=0) \rightarrow (m=-1)$ transition; this is where the three-photon transition occurs. Because of the ordering of the three rf frequencies, the points where one-photon transitions can be induced from $m=+2$ to $m=+1$ by the two larger frequencies are located beyond K (the multiphoton knife). Consequently, during the evaporation, hot atoms will first encounter the three-photon knife and be expelled from the trap, provided that the rf power is large enough to enable efficient multiphoton adiabatic passage to the nontrapping state $m=-1$.

The discussion above shows that, in principle, the multi-frequency evaporation requires a synchronized nontrivial sweep of three different frequencies in the 100-MHz range, with an accuracy of a few kHz (see below). We have rather implemented a simplified scheme where the three frequencies are obtained by mixing a carrier at frequency ω_{rf} with a smaller frequency $\delta\omega_{\text{rf}}$. We then obtain three equally spaced radio-frequency fields: $\omega_{\text{rf}} - \delta\omega_{\text{rf}}$, ω_{rf} , and $\omega_{\text{rf}} + \delta\omega_{\text{rf}}$, of approximately the same power (as checked with a spectrum analyzer). Since in general $\delta\omega_0$ and $\delta\omega'_0$ are slightly different, the rf frequencies will not exactly match the transition frequencies of Eq. (2). Nonetheless, they compensate the second-order (quadratic) term of the Zeeman shift, and should work under certain conditions discussed below.

At the position where the three-photon transition is resonant, the carrier frequency ω_{rf} will verify

$$3\omega_0 + \delta\omega_0 - \delta\omega'_0 = 3\omega_{\text{rf}}, \quad (3)$$

but there will be a residual detuning for each one-photon step of the multiphoton transition. For example, the optimum $\delta\omega_{\text{rf}}$ that maximizes the multiphoton transition probability will be

$$\delta\omega_{\text{rf}} = \frac{\delta\omega_0 + \delta\omega'_0}{2} \quad (4)$$

and the residual detunings for each intermediate steps of the three photons transition are then both equal to

$$\Delta = \frac{\delta\omega_0 - \delta\omega'_0}{6}. \quad (5)$$

If the Rabi frequency Ω_{rf} associated with each one-photon transition is significantly larger than the residual detuning Δ , the multiphoton transition is quasiresonant in the intermediate levels, leading to an effective Rabi frequency $\Omega_{\text{eff}} \propto \Omega_{\text{rf}}$. If on the other hand Ω_{rf} is smaller than Δ , the effective Rabi frequency is

$$\Omega_{\text{eff}} \propto \frac{\Omega_{\text{rf}}^3}{\Delta^2} \quad (6)$$

and the multiphoton transition is inefficient for evaporation; we are then in the scheme of hindered and interrupted evaporation. We therefore expect that our scheme will be efficient for small enough magnetic field when the residual detuning Δ is smaller than the one-photon Rabi frequency Ω_{rf} .

Table I gives the values of the Zeeman shifts and the difference $\delta\omega_0 - \delta\omega'_0$ for various magnetic fields. For the rf power used in this scheme, the one-photon Rabi frequency Ω_{rf} is of the order of 10 kHz, and the discussion above shows that our simplified three-frequency knife evaporation scheme should work for magnetic fields significantly less than 100 G. This is what we observe: it is impossible to achieve BEC in bias fields of 207 and 110 G, but BEC is obtained in a trap with a bias field of 56 G by using an appropriate sideband splitting $\delta\omega_{\text{rf}}$ that is kept constant while ramping down the carrier frequency ω_{rf} .

Figure 2 shows the effect of the sideband splitting $\delta\omega_{\text{rf}}$ at a bias field value of 56 G. We have plotted the number of condensed atoms as a function of $\delta\omega_{\text{rf}}$, all other parameters being kept unchanged. This is a good indication of the efficiency of the evaporation. The curve shows a maximum at $\delta\omega_{\text{rf}} = 2\pi \times 0.45$ MHz. This value verifies Eq. (4) for a magnetic field of 56.6 G. This magnetic field corresponds to the

TABLE I. Zeeman effect for different magnetic fields, calculated from the Breit-Rabi formula.

B (G)	56	110	207
$(\omega_0 - \delta\omega'_0)/2\pi$ (MHz)	39.058-0.434	76.255-1.621	141.800-5.398
$\omega_0/2\pi$ (MHz)	39.058	76.255	141.800
$(\omega_0 + \delta\omega_0)/2\pi$ (MHz)	39.058+0.449	76.255+1.732	141.800+6.096
$(\delta\omega_0 - \delta\omega'_0)/2\pi$ (kHz)	15	111	698

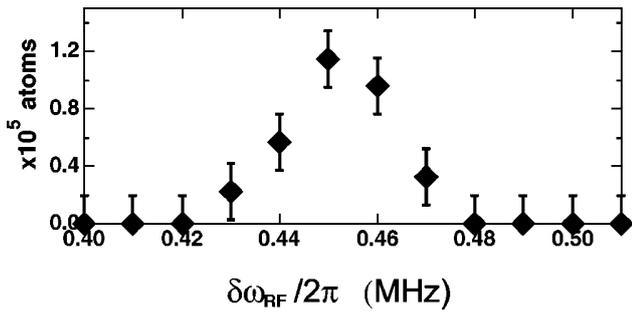


FIG. 2. Bose-Einstein condensation with the three-frequency rf knife: number of atoms in the condensate versus the sideband frequency $\delta\omega_{\text{rf}}$. The width of the curve is of the order of the Rabi frequency of a one-photon rf transition.

position of the rf knife at the end of the ramp. We conclude that frequency matching is mostly important in the last part of the radio-frequency ramp. The width of the curve is about 10 kHz (half width at half maximum), which corresponds to power broadening [17].

Table II reports experimental data showing quantitatively the efficiency of our simplified three-frequency knife scheme, without which BEC could not be obtained at 56 G. It is interesting to note that, even when the magnetic field is too large to allow our simplified three-frequency knife scheme to reach BEC, it is nevertheless more efficient than a simple one-frequency knife, since it allows us to reach a significantly lower temperature. It is also remarkable that an efficient evaporation was obtained at a bias field of 56 G, since the beginning of the evaporation takes place in a larger magnetic field (of the order of 200 G) where the condition (4) does not hold, and the detuning of the intermediate one-photon transitions is much larger than the Rabi frequency Ω_{rf} . Although it has not been noticed much, a similar situation is encountered in most BEC experiments (using one-frequency knife evaporation): the nonlinear Zeeman effect at the beginning of the evaporation is often much larger than the Rabi frequency, and the evaporation hampering described in [6] is certainly happening then. The success of these experiments as well as of our three-frequency scheme shows that whether the evaporation is hindered or not only matters at the end of the evaporation ramp. To qualitatively understand this observation, we can note that the heating induced by the atoms populating the intermediate levels should not vary drastically with the temperature of the

TABLE II. Experimental results: lowest temperature achievable with and without sideband activated, and highest phase-space density achieved for different bias fields. At a bias field of 56 G, our three-frequency scheme yields BEC, while a single frequency scheme fails because of interrupted evaporative cooling.

B_0 (G)	56	110	207
$T_{1\text{-freq}}$ (μK)	10	50	100
$T_{3\text{-freq}}$ (μK)	0.1	0.5	15
$n\lambda_{3\text{-freq}}^3$	>2.612	0.1	10^{-3}

cooled cloud. At the beginning of the evaporation, i.e., “high” temperatures, the relative heating stays negligible [18]. Close to the end, i.e., “low” temperature, when heating should give rise to hampered evaporative cooling, evaporation is fully efficient and the intermediate levels are completely depleted. This could explain the success of BEC experiments. To verify these assumptions, more theoretical work, for instance in the spirit of [7], is needed.

In conclusion, we have demonstrated a scheme to circumvent the hindrance and interruption of evaporative cooling in the presence of the nonlinear Zeeman effect. We implement a three-frequency evaporative knife by a modulation of the rf field, yielding two sidebands. This scheme allows us to obtain BEC of ^{87}Rb atoms in the ($F=2, m=+2$) ground state in a bias field of 56 G, where the standard one-frequency rf evaporation scheme fails. Our observations also support the physical ideas presented in our previous work to explain the hindrance and interruption of evaporative cooling in a high magnetic field, as well as the qualitative discussions of this paper.

The success of this simplified scheme and the complementary observations reported in this paper indicate that a more sophisticated multifrequency evaporation scheme should work at larger bias field, provided that the resonance in the intermediate steps of the multiphoton transition is achieved within the Rabi frequency of the one-photon transitions, at the end of the evaporative ramp.

The authors thank S. Rangwala for helpful discussions and M. Lécroivain for the elaboration of the iron-core electromagnet. This work is supported by CNRS, MENRT, Région Ile de France, DGA, and the European Community. S.M. acknowledges support from the Ministère des Affaires Étrangères. Y.L.C. acknowledges support from the DGA.

- [1] W. Ketterle and N.J. Druten, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **37**, 181 (1996), and references therein.
 [2] O.J. Luiten, M.W. Reynolds, and J.T.M. Walraven, *Phys. Rev. A* **53**, 381 (1996); J. Walraven, *Quantum Dynamics of Simple Systems*, Proceedings of the 44th Scottish University Summer School in Physics, Stirling, 1996, edited by G-L. Oppo *et al.* (IOP, Bristol, 1996).
 [3] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).

- [4] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995); C.C. Bradley *et al.*, *ibid.* **78**, 985 (1997).
 [5] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
 [6] B. Desruelle, V. Boyer, S.G. Murdoch, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. A* **60**, R1759 (1999).
 [7] O.H. Pakarinen and K.-A. Suominen, e-print physics/9910043

- (1999).
- [8] J.J. Tollett, C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. A* **51**, R22 (1995).
- [9] B. Desruelle, V. Boyer, P. Bouyer, G. Birkl, M. Lécroivain, F. Alves, C.I. Westbrook, and A. Aspect, *Eur. Phys. J. D* **1**, 255 (1998).
- [10] J. Stenger, S. Inouye, M.R. Andrews, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2422 (1999).
- [11] Vladan Vuletic, Andrew J. Kerman, Cheng Chin, and Steven Chu, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1406 (1999).
- [12] Ph. Courteille, R.S. Freeland, D.J. Heinzen, F.A. van Abeelen, and B.J. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).
- [13] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, e-print physics/0004290.
- [14] Note, however, that in time-averaged orbiting potential traps the bias field often exceeds 10 G, and hindered cooling may play a role, specially when the atomic ground-state hyperfine splitting is relatively small, as in sodium, for example.
- [15] P. Bouyer, V. Boyer, S.G. Murdoch, G. Delannoy, Y. Le Coq, A. Aspect, and M. Lécroivain, e-print physics/0003050.
- [16] The $m=0$ state is a trapping state in this manifold because of the nonlinearity of the Zeeman effect.
- [17] This conclusion was corroborated by a calculation of the energies of the dressed states for a given set $\{\Omega_{rf}, \omega_{rf}, \delta\omega_{\pi}\}$. From the calculated energy splitting $C \approx \Omega_{\text{eff}}$ at the ($m = +2, m = -1$) level crossing, we used the two-level Landau-Zener probability that the atoms will follow an adiabatic transition. We verified that for small Rabi frequencies (i.e., small evaporation efficiency), as in our experiment, this three-photon transition is the most probable transition at any sideband detuning $\delta\omega_{rf}$. This numerical calculation can be used to fit the experimental data. We can estimate the one-photon Rabi frequency $\Omega_{rf} = 2\pi \times 8 \pm 4$ kHz.
- [18] Except maybe for the case of destructive energy releasing collisions as in ^{23}Na . See P.S. Julienne, F.H. Mies, E. Tiesinga, and C.J. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1880 (1997).

OPTIQUE ET INTERFÉROMÉTRIE ATOMIQUES
ATOM OPTICS AND INTERFEROMETRY

Experimental study of coupling Bose–Einstein condensates into weakly non-trapping and trapping states

P. BOUYER, S.A. RANGWALA, Y. LE COQ, G. DELANNOY, F. GERBIER, S. SEIDELIN, S. RICHARD, J. THYWISSEN, A. ASPECT

Groupe d'optique atomique, laboratoire Charles-Fabry de l'Institut d'optique, UMRA 8501 du CNRS, Bât. 503, Campus universitaire d'Orsay, BP 147, 91403 Orsay cedex, France

(Reçu le 1^{er} janvier 2001, accepté le 26 mars 2001)

Abstract. We study the production of an atom laser from a Bose–Einstein condensate using radio-frequency out-coupling. Single frequency coupling from the Bose–Einstein condensate leads to unstable production of an atom laser due to the extreme sensitivity of this process to magnetic field fluctuations. The extent of this experimental instability is quantified. Stable, repeatable production of an atom laser is achieved by the frequency modulation of the coupling, which forms a frequency comb across the condensate. Different regimes of modulated coupling are discussed. In addition the coupling of atoms into a weakly trapping state is studied. The oscillation frequency of this state in the vertical direction is measured. Preliminary results indicating qualitative difference between condensate and thermal cloud coupling are presented. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

cold atoms / Bose–Einstein condensate / output coupler / atom laser / quantum coherence

Étude du couplage de sortie d'un condensat vers un niveau libre et vers un niveau faiblement piégeant

Résumé. Nous présentons la réalisation d'un laser à atomes à partir d'un condensat de Bose–Einstein grâce à utilisation d'un coupleur radio-fréquence. Dans le cas d'un laser monomode (un seul coupleur radiofréquence), le couplage de sortie est très sensible aux fluctuations du champ magnétique qui piège le condensat. Une mesure des instabilités du laser permet alors de quantifier les fluctuations du champ magnétiques. Afin de rendre le couplage insensible aux fluctuations, nous avons ensuite utilisé un coupleur radio-fréquence modulé, qui crée de multiples coupleurs de sortie régulièrement espacés. Nous présentons finalement l'étude du couplage des atomes vers un état très faiblement piégé. L'évolution d'un condensat lâché dans une telle cavité a pu être étudiée et a permis de déterminer la fréquence d'oscillation des atomes. Enfin, dans le cas d'un couplage faible (quasi-continu), il est possible de distinguer entre le couplage d'un condensat, intrinsèquement cohérent, et un nuage thermique. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Note présentée par Guy LAVAL.

1. Introduction

Since the creation of the first dilute Bose–Einstein Condensate (BEC) [1] atom lasers sourced from them have been an important topic of study. Pulsed atom lasers have been realized by a variety of techniques, using: intense, pulsed, spin–flip radio frequency (RF) transitions [2], and gravity induced tunneling from an optically trapped condensate [3]. A quasi-continuous laser has been realized using Raman transitions [4] and a continuous atom laser, limited only by the depletion of the condensate, has been achieved by RF coupling under highly stable conditions [5]. These developments illustrate the atom lasers potential to form atomic beams of unprecedented brightness and coherence. There is therefore need to control precisely the production of the laser and to develop tools that characterize the laser. In this proceeding we discuss the stability requirements for the production of a continuous laser and demonstrate the production of a stable laser using a frequency comb. Preliminary results on coupling a fraction of the BEC and cold thermal atoms from the $|1, -1\rangle$ state into a weakly trapping state are also presented.

2. Atom laser

The experimental scheme used is described in detail elsewhere [6]. Briefly, a ^{87}Rb BEC with approximately $5 \cdot 10^5$ atoms is created in the $|1, -1\rangle$ (i.e. $F = 1$, $m_F = -1$) state. The construction of the magnetic trap results in the production of a relatively large bias field as well as a large magnetic gradient in the quadrupole direction (vertical plane). Under these condition the contribution of the quadratic Zeeman effect makes the $|1, 0\rangle$ and $|2, 0\rangle$ states slightly anti-trapping and trapping respectively. We couple the BEC to one or the other state by using either a radio frequency (RF) or a microwave frequency.

Production of a continuous atom laser, as in [5], is done by coupling the atoms from the trapping $|1, -1\rangle$ state to the weakly anti-trapping $|1, 0\rangle$ state. This is implemented using a RF of approximately 40 MHz. The frequency is relatively high due to the high bias field of 56 Gauss in our experiment. The RF power is adjusted such that the approximate estimation of the Rabi frequency for typical coupling parameters is about 1 kHz. The RF coupling is applied for a duration of about 20 ms.

Using a single radio frequency we can successfully couple atoms into the $|1, 0\rangle$ state to produce an atom laser. However, the atom laser exhibits both intra-shot and shot-to-shot instabilities in the density of the out-coupled beam. In a similar experiment, continuous production of the atom laser has been demonstrated by Bloch et al. (1999) [5]. They achieve high stability in the laser output with a combination of magnetic shielding and stable current supply, which ensure magnetic field stability. Our experiment is not stabilized to the same extent and therefore instabilities of the magnetic field can result in the laser density fluctuations.¹

To quantify the fluctuation of the magnetic trapping potential we study the depletion of the condensate versus the RF out-coupling frequency. The total number of atoms in the combined thermal cloud and condensate is approximately $1 \cdot 10^6$ of which the condensate fraction is about 50%. Varying the frequency of the RF coupling, we measure the atoms remaining in $|1, -1\rangle$ state after 10 ms of out-coupling. This measurement does not discriminate between the thermal cloud and the condensate atoms in $|1, -1\rangle$ (*figure 1*). The measured width of the out-coupled atoms in our case is approximately 80 kHz at the threshold. The spectral width for out-coupling a condensate is given by its spatial extent in the vertical direction because of the variation in the gravitational potential energy across it. The frequency width is therefore given by $\Delta\nu = M_{\text{Rb}}g\Delta s/\hbar$, where M_{Rb} is the mass of ^{87}Rb , g the acceleration due to gravity, Δs the spatial extent of the condensate and \hbar the Planck constant. Similar considerations hold for the thermal atoms in the trap. The calculated spectral width for the condensate is approximately 10 kHz and the thermal cloud has a calculated one sigma width of 11 kHz. Thus the observed experimental width of

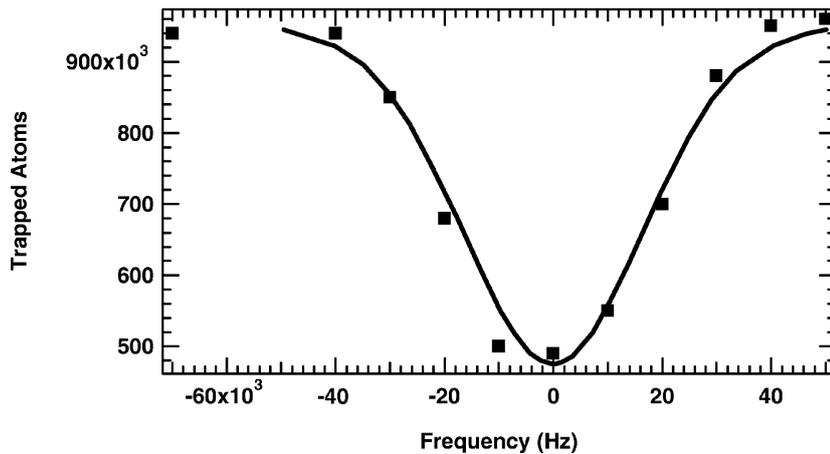


Figure 1. The filled squares represent the depletion of the condensate and thermal atoms from the $|1, -1\rangle$ state as a function of out-coupling frequency. The frequency axis has been centered at the point for maximum out-coupling. The line is the convolution of the atomic density profile in $|1, -1\rangle$ with a normal distribution of one sigma width 15 kHz, representing the fluctuations in the magnetic field bias.

80 kHz is much larger than the expected width due to the condensate and thermal cloud (approximately 30 kHz). The present measurement is therefore a convolution of the condensate and thermal cloud widths, with the experimental instabilities, which has the effect of broadening the depletion profile.

The primary source of instability in our experiment is from fluctuations in the trapping magnetic field, which gives rise to a corresponding change in the resonance condition for optimal output coupling. The efficiency of coupling is sensitive to these instabilities when the amplitude of the magnetic field fluctuations is comparable to or larger than the spectral width of the condensate. In order to estimate the fluctuation in the magnetic trapping field, which corresponds to shift in out-coupling frequency, we assume that it is consistent with a normal distribution. The convolution of a normal distribution with a one sigma value of 15 kHz, with the calculated spectral density profiles of the condensate and thermal cloud gives good agreement with the measured depletion of atoms in $|1, -1\rangle$ (figure 1). At this value we agree well with both the FWHM (40 kHz) of the depletion curve as well as with the lower and upper thresholds for out-coupling (80 kHz). From this we can conclude that the amplitude of the fluctuations have a spectral width (two sigma) of approximately 30 kHz. Such an instability in the amplitude of the trapping magnetic field imposes severe limitations on the ability to produce an atom laser with uniform density distribution, using a single RF, making other means for its production necessary.

To circumvent the instability we produce an atom laser using a frequency comb instead of a single frequency, thus countering the magnetic field fluctuations. The frequency comb is created by frequency modulating the out-coupling RF, about the frequency of maximum output coupling ν_c (carrier frequency). The expression for the modulation is $\nu_{\text{RF}} = \nu_c + \nu_{\text{BW}}f(\nu_{\text{m}}t)$, where ν_{BW} is the frequency bandwidth of the modulation (typical experimental value is 100 kHz) about ν_c and a triangular modulation function $f(\nu_{\text{m}}t)$. The power of the RF comb is adjusted for individual comb elements to be in the weak coupling regime.

In the time domain picture of frequency modulation the frequency of the carrier wave (ν_c) varies across the bandwidth (ν_{BW}) twice every modulation cycle. As the modulation frequency is varied three distinct regimes of output coupling are evident from the experimental data. At low modulation frequencies (i.e. $\nu_{\text{m}} \leq 1000$ Hz), atoms from the condensate are coupled out each time the frequency modulation crosses the instantaneous resonance frequency (twice every cycle). The output coupled atoms are non overlapping and form distinct condensate replicas (figure 2a). On increasing the modulation frequency, the rate of output from the condensate increases, to give a quasi-continuous output (figures 2b and 2c). At still higher modulation frequency we have the overlapping of successively out-coupled atoms from the condensate, over a considerable spatial extent as they fall under the combined influence of the gravitational and weakly non-trapping magnetic potential. In this regime we can see non uniformity of the imaged out-coupled atoms, which may be attributed to the interference between successively out-coupled atoms from the condensate

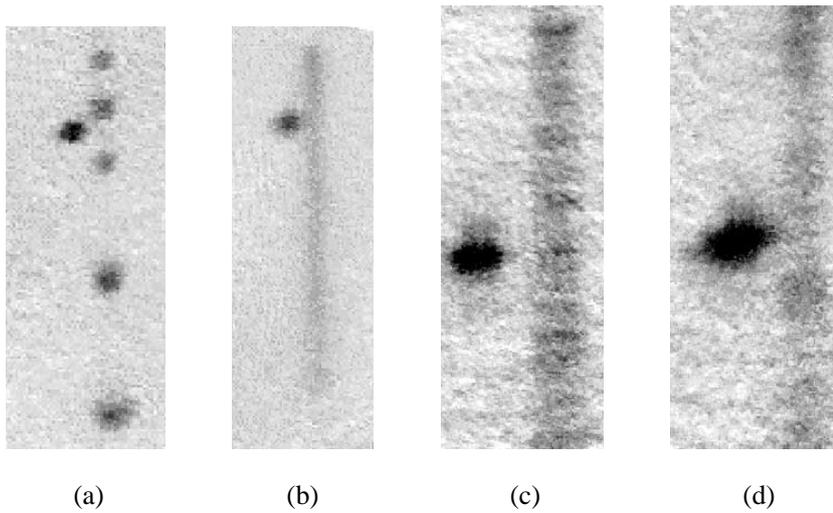


Figure 2. The different regimes of comb coupling. (a) At a small modulation frequency (ν_m) of 230 Hz. (b) Quasi-continuous coupling with $\nu_m = 2000$ Hz. (c) Quasi-continuous coupling with magnified imaging at $\nu_m = 3000$ Hz. (d) Unstable coupling at $\nu_m = 17\,000$ Hz in the magnified imaging system. Cutting the magnetic field just before imaging results in the spatial separation of the condensate and the atom laser.

in the fluctuating magnetic field. In another measurement, on changing the bandwidth of the frequency comb, the out-coupling is seen to be reproducible at and above a ν_{BW} value of approximately 40 kHz, whereas below this value it becomes unstable from shot-to-shot. This is consistent with the full width at half maximum of the stability measurement (*figure 1*) and gives us an independent measure of the magnetic field fluctuations.

In the frequency domain the three regimes of out-coupling can be understood as follows. If the frequency comb is very dense, which is the case at small modulation frequencies (ν_M much less than the condensate spectral width), we can expect to see interference between the matter waves coupled out of different spatial regions of the condensate and this behaviour manifests in the appearance of discrete atom-bunches in time (*figure 2a*). A crude simulation of the time interval between successive atom-bunches can be done by fourier transforming the product of a frequency comb with appropriate phase relations and the Thomas–Fermi condensate shape. Such a simulation is in rough agreement with the observed data. As the modulation frequency increases the temporal spacing between the out-coupled atom bunches decreases and at ν_M approximately few thousand Hz all the discreteness in the out-coupling disappears within the limits of the imaging system and a quasi-continuous beam of out-coupled atoms is seen (*figures 2b* and *2c*). On increasing the comb frequency still further we achieve the condition that one or less comb teeth are available for output coupling and we revert to the situation analogous to single frequency coupling, where the instabilities in the magnetic field start affecting the out coupling (*figure 2d*).

3. Atom ‘cavity’

It is also interesting to study the coupling of a condensate in an weakly trapping state that is much larger in spatial extent than the condensate. Such a state can be considered as an atomic cavity and can be used to study the dynamics of coherent evolution of the atoms from the condensate. In our experiment the $|2, 0\rangle$ state of the $F = 2$ manifold is such a state. Atoms are coupled directly from the $|1, -1\rangle$ condensate state to the cavity using a single microwave frequency of approximately 6.8 GHz.

In our experiment the measured frequency for the BEC state in the vertical direction is $\nu_{\perp, BEC} = 132.5$ Hz, with an experimental uncertainty of ± 0.25 Hz. Using this value to establish the magnetic gradient field of the trap we estimate the trap frequency of the cavity state in the vertical direction as $\nu_{\perp, cav} \approx 29$ Hz, with a few percent accuracy. Gravity shifts the trap centers for the various magnetic sublevels by different amounts. The cavity state sags vertically by $z_{cav} = g/(2\pi\nu_{\perp, cav})^2 \approx 310$ μm . By comparison, the condensate shifts down by $z_{BEC} \approx 15$ μm , giving a relative shift of 300 μm . Since the atoms are coupled from the highly localized condensate in the vertical direction into the cavity state by a microwave photon, they are coupled to a region away from the cavity centre. The atoms are therefore coupled in the high lying energy levels of the cavity state.

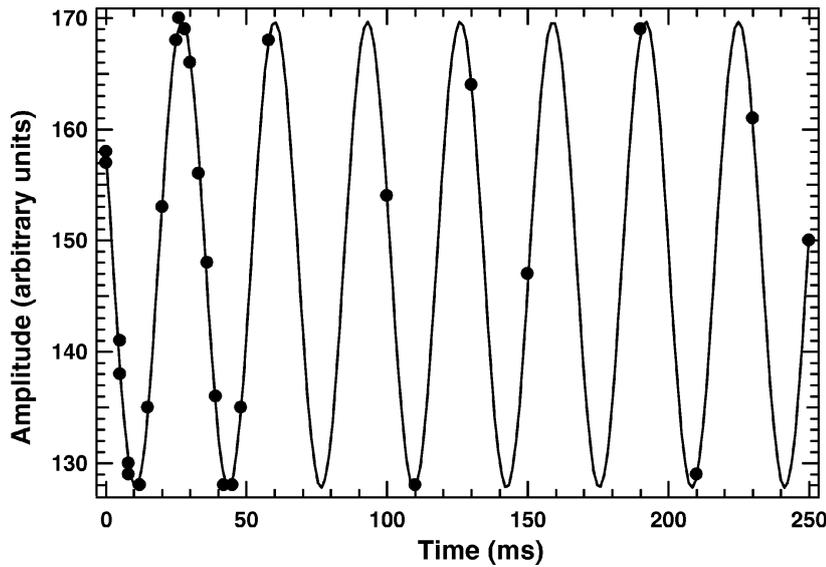


Figure 3. Measurement of the period of oscillation of the atoms coupled into the $|2, 0\rangle$ (cavity) state. The filled circles are the data points while the line through them is a single frequency sinusoidal fit which gives a cavity frequency of 30.3 Hz (period = 33 ms). The statistical error on the measured position of the atoms in the cavity is at most one division along the amplitude axis for each point.

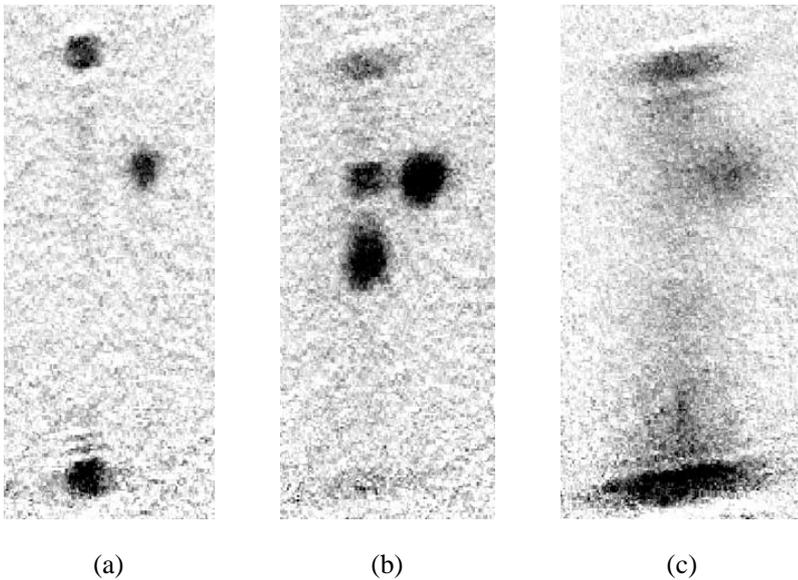


Figure 4. Atoms coupled into the cavity state from the $|1, -1\rangle$ state. (a) An over evaporated condensate coupled into the cavity state. (b) A pure condensate in the cavity state where we see a distinct structures in the spatial density distribution of atoms while (c) is the case of thermal cloud coupling into the cavity state resulting in a uniform spatial distribution of atoms.

To determine the cavity state frequency, the oscillation of atoms coupled into the cavity was measured as a function of time. For this experiment a fraction of the atoms were out-coupled from the condensate into the cavity state by a strong, resonant microwave pulse of short duration (2 ms). The cavity state frequency was measured by studying the position of centre of mass of the atomic cloud as shown in *figure 3*. The fitted value of the oscillation period is found to be 33 ms corresponding to an oscillation frequency of 30.3 Hz. This value agrees with the the estimated trap frequency given above. The goodness of fit for a single frequency sinusoid fit over several periods of oscillation in the cavity indicates that we are in the region of the cavity where deviations from the simple harmonic nature of the oscillations are small, despite its relatively large spatial extent. The one sigma error on the fit value is under 0.1% in frequency.

As we lower the microwave power (i.e. go to weaker coupling intensities) and increase the coupling time of the atoms from the BEC, structures are observed in the cavity state (*figures 4a* and *4b*). These structures represent a non uniform spatial density distribution of atoms in the cavity state. By contrast, coupling from a cold thermal cloud results in a uniform density distribution of atoms in the cavity (*figure 4c*). The above results are preliminary as systematic study is limited by instability in the bias field. Numerical integration of the Gross–Pitaevskii equation yields structures similar to those observed in the cavity state. This suggests

that the structures in the cavity state are signature of the coherence of a BEC, while lack of structure for the thermal cloud is due to its lack of coherence.

4. Conclusions

We have demonstrated a method for continuous output coupling of a condensate into a non trapping state which overcomes the problem of small fluctuations in the trapping magnetic field. The method involves the modulation of the frequency of out-coupling over a bandwidth larger than the bandwidth of the fluctuation. Various regimes of operation for this method have been explored and discussed. In addition certain preliminary results of coupling the atoms into a extended, weakly trapping state have been discussed. Coupling into this state seems to show different behaviour for the condensate as opposed to a thermal cloud.

¹ Since the measurements reported here we have successfully suppressed the fluctuations in the magnetic bias field using a better stabilized power supply, which enables us to produce a continuous atom lasers using single radio frequency.

References

- [1] Anderson M.H. et al., Science 269 (1995) 198;
Bradley C.C. et al., Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 1687;
Davis K.B. et al., Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 3969;
Bradley C.C. et al., Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 985.
- [2] Mewes M.-O. et al., Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 582.
- [3] Anderson B.P., Kasevich M., Science 282 (1998) 1686.
- [4] Hagley E.W. et al., Science 283 (1999) 1706.
- [5] Bloch I. et al., Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 3008.
- [6] Desruelle B. et al., Phys. Rev. A 60 (1999) R1759.

Atom Laser Divergence

Y. Le Coq, J. H. Thywissen, S. A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect
*Laboratoire Charles-Fabry de l'Institut d'Optique, UMRA 8501 du CNRS, 91403 Orsay, France**
 (Received 28 June 2001; published 8 October 2001)

We measure the angular divergence of a quasicontinuous, rf-outcoupled, free-falling atom laser as a function of the outcoupling frequency. The data are compared to a Gaussian-beam model of laser propagation that generalizes the standard formalism of photonic lasers. Our treatment includes diffraction, magnetic lensing, and interaction between the atom laser and the condensate. We find that the dominant source of divergence is the condensate-laser interaction.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.170403

PACS numbers: 03.75.Fi, 05.30.Jp, 32.80.Pj, 04.30.Nk

A dilute gas of atoms condensed in a single quantum state of a magnetic trap [1–6] is the matter-wave analog of photons stored in an optical cavity. A further atomic parallel to photonics is the “atom laser” [7–10], a coherent extraction of atoms from a Bose-Einstein condensate. Atom lasers are of basic interest as a probe of condensate properties [11] and as a coherent source of atoms [12]. Furthermore, just as optical lasers greatly exceeded previous light sources in brightness, atom lasers will be useful in experiments that simultaneously require monochromaticity, collimation, and intensity, such as holographic atom lithography [13], continuous atomic clocks [14], and coupling into atomic waveguides [15].

Initial work on atom lasers has demonstrated several types of coherent, pulsed output couplers [7–9] as well as a coherent narrow-band coupler [10,16], which is the type employed in our work. In this Letter, we address the nature of propagation of an atom laser outcoupled from a condensate. Our experimental data show that the laser beam is well characterized by a divergence angle. We measure this angle versus radio-frequency (rf) outcoupler frequency, which chooses the vertical extraction point of the atom laser from the condensate (see Fig. 1a). In choosing the extraction point, one chooses the thickness of the condensate to be crossed by the extracted atoms, as well as the width of the atom laser beam at the extraction plane. To interpret these data, we use a formalism that generalizes the *ABCD* matrices treatment of photonic lasers [17,18]. This treatment allows us to calculate analytically the divergence of the laser due to diffraction, magnetic lensing, and interactions with the condensate. We find that, for our typical experimental conditions, the divergence of the laser is primarily due to interaction between the atoms in the laser and the atoms remaining in the condensate. We describe this interaction as a thin lens. Note that the existence of such an interactive lensing effect is in stark contrast to a photonic laser, since photons do not interact. Interactions were estimated to be similarly important for pulsed atom lasers [7,9]. In our case, the divergence is also magnified by a thick-lens-like potential due to the quadratic Zeeman effect of the magnetic trapping fields.

The technique we use to obtain Bose-Einstein condensates with ^{87}Rb is described in detail elsewhere [19]. Briefly, a Zeeman-slowed atomic beam loads a magneto-optical trap in a glass cell. Typically 10^8 atoms are transferred to a magnetic trap, which is subsequently compressed to oscillation frequencies of $\omega_x = \omega_z = 2\pi \times 144$ Hz and $\omega_y = 2\pi \times 9$ Hz = $\lambda\omega_z$ in the quadrupole and dipole directions, respectively, where z is vertical. The Ioffe-Pritchard trap is created with an iron-core electromagnet, with a typical quadrupole gradient of $11.7 \text{ T} \cdot \text{m}^{-1}$, and an uncompensated dipole bias field of $B_0 = 5.4$ mT. A 40 s, rf-induced evaporative cooling ramp in the compressed trap results in condensates of typically 5×10^5 atoms, with a 15% rms shot-to-shot variation.

Atom lasers are created by applying a rf field at about 38.6 MHz, to transfer condensate atoms from the trapped $|F, m_F\rangle = |1, -1\rangle$ state to the weakly antitrapped $|1, 0\rangle$ state, which also falls under gravity (see Fig. 1a). The rf field is weak (approximately $0.1 \mu\text{T}$) and applied for a relatively long duration ($t_{\text{oc}} = 10$ ms) [16]. There is no significant coupling to the $|1, +1\rangle$ state because the $F = 1$

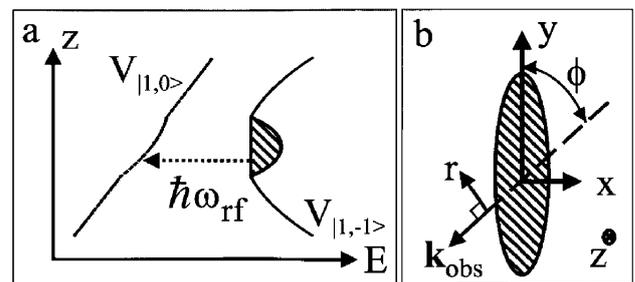


FIG. 1. (a) Schematic representation of outcoupling from the trap potential $V_{|1,-1\rangle}$ to the untrapped $V_{|1,0\rangle}$ potential via an rf photon at ω_{rf} . The vertical direction is z . The curves shown include magnetic, gravitational, and mean-field potentials. (b) The wave vector \mathbf{k}_{obs} for the absorptive imaging light beam at an angle ϕ with respect to the weak axis y of the condensate. The horizontal coordinate in the imaging plane is r . In both images, the condensate is crosshatched.

sublevel transitions are split by 0.8 MHz due to the non-linear part of the Zeeman effect at 5.4 mT. To measure the spatial distribution of the atom laser, we take an absorptive image with a pulse of resonant light 6 ms after the moment when the rf outcoupling ends and the trap is turned off. As depicted in Fig. 1b, the image is taken at a $\phi = 55^\circ$ angle from the weakly confining y axis of the trap. Figure 2a shows a typical image of an atom laser.

The gravitational sag g/ω_z^2 shifts the entire condensate from the center of the magnetic trap to a region where isofield surfaces are planes of approximately constant height z_0 across the condensate [10]. The relation between rf frequency $\omega_0 + \delta_{\text{rf}}$ and coupling height z_0 is

$$\delta_{\text{rf}} = -\Delta \frac{z_0}{R_z} - \frac{\mu}{\hbar} \left(1 - \frac{z_0^2}{R_z^2} \right), \quad (1)$$

where $\Delta = MgR_z/\hbar$ is the spectral half-width of the condensate, M is the mass of the atom, g is gravitational acceleration, and R_z is the Thomas-Fermi (TF) radius [20] of the condensate along z . The radius R_z is $\sqrt{2\mu/M\omega_z^2}$, and μ is the chemical potential $(\hbar\bar{\omega}/2)(15a_{11}N)^{2/5}(M\bar{\omega}/\hbar)^{-1/5}$, where N is the number of atoms in the condensate, $a_{11} = 5.67$ nm is the s -wave scattering length between ^{87}Rb atoms in the $|1, -1\rangle$ state [21], and $\bar{\omega}^3 = \omega_x\omega_y\omega_z$. In Eq. (1), we have chosen ω_0 such that $\delta_{\text{rf}} = \pm\Delta$ when $z_0 = \mp R_z$. For our experimental parameters, $\mu/\hbar \ll \Delta$, so δ_{rf} is roughly linearly dependent on z_0 , with slope $-Mg/\hbar$. Therefore, in choosing the coupling frequency, we choose the height within the condensate at which the laser is sourced.

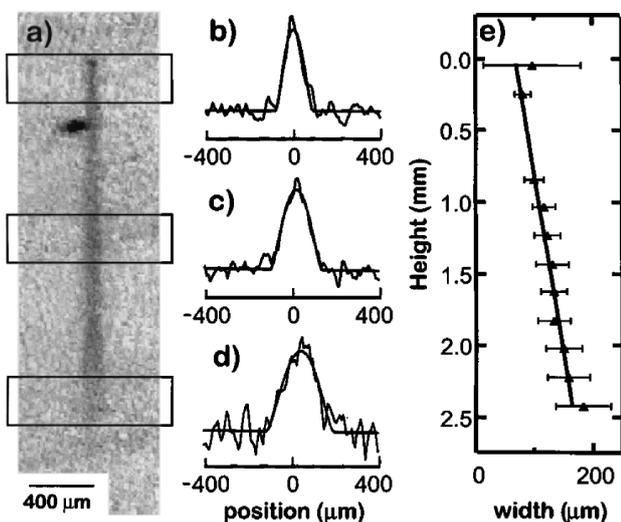


FIG. 2. Typical continuous atom laser output. (a) Absorptive image of laser, after 10 ms of output coupling at 38.557 MHz and 6 ms of free flight. The condensate (the darkest area of image) is displaced from the beginning of the laser because of a magnetic kick separating atoms in the $m_F = -1$ and $m_F = 0$ states. (b)–(d) Examples of absorption profiles of the atom laser, taken from the three regions boxed in (a). Each profile is fit to find a width R_n and density ρ_n . (e) The divergence angle of a single laser is found with a linear fit to the series of measured widths $\{R_n\}$.

Short-term (ms-scale) stability of the bias field is verified by the continuity of flux along the laser (Fig. 2a). We find that the shot-to-shot stability and reproducibility of the bias field, between each 80 s cycle of trapping, cooling, and condensation, is about $\pm 0.4 \mu\text{T}$ or ± 3 kHz. This stability is sufficient to scan through the condensate spectral width of about 20 kHz. In one out of five runs (a run is a set of about 10 cycles), the data were not self-consistent, which we attribute to a larger ($>1 \mu\text{T}$) bias field fluctuation during that run. We could maintain this bias field stability, typically one part in 10^4 [22], by using either a low-noise power supply or a battery, since only 1.3 A is used to energize the dipole coils during evaporation and outcoupling.

We analyze the images (such as Fig. 2a) to measure the flux and divergence of the outcoupled laser. Figures 2b through 2d show the first step in the analysis, a series of fits to the transverse spatial profile of the laser, as measured at several heights z_n , averaging across $\pm 140 \mu\text{m}$. The column density profile is fit at each z_n by $\rho_n(1 - r^2/R_n^2)^{3/2}$, where r is the horizontal coordinate in the image plane (see Fig. 1b), ρ_n is the peak column density, and R_n is the width. This fit function would be the rigorously correct function for an atom laser without divergence [23] or for a free condensate undergoing mean-field expansion [24]; here we observe empirically that the fits are good. From the integral of the column densities at each height, we determine the output flux F with a fit to $F/\sqrt{2g(z - z_0)}$, a form that assumes constant flux, purely gravitational acceleration, and a density that decreases with the inverse of the classical velocity, valid when $|z - z_0| \gg \ell_g$, where $\ell_g = [\hbar^2/(2gM^2)]^{1/3}$ is the gravitational length. Finally, from the series $\{R_n\}$ and $\{z_n\}$, we determine a geometric expansion angle by a linear fit (see Fig. 2e). We will discuss below why one would expect a linear rather than parabolic shape for a laser falling under gravity.

We repeated the above imaging, and analysis for atom lasers coupled at a variety of rf coupling frequencies. Figure 3 shows the averaged half-angle divergence versus outcoupler detuning, from 15 laser images. We see that the divergence clearly decreases at higher δ_{rf} , corresponding to lower initial heights z_0 . These divergence data will be analyzed in more detail below. The inset of Fig. 3 shows laser flux F versus δ_{rf} , and is compared to

$$\frac{F}{F_0} = \left(1 - \frac{z_0^2}{R_z^2} \right)^2 \left[1 - \frac{2\mu}{\hbar\Delta} \frac{z_0}{R_z} + \frac{2\mu^2}{3\hbar^2\Delta^2} \left(1 - \frac{z_0^2}{R_z^2} \right) \right], \quad (2)$$

where F_0 is the peak flux, and Eq. (1) defines the relation between z_0 and δ_{rf} . Equation (2) assumes the laser flux is simply proportional to the linear density of the condensate at the coupling point. For the solid curve shown in the inset of Fig. 3, we have used $N = 4 \times 10^5$ to give $\Delta = 2\pi \times 9.1$ kHz and $R_z = 4.2 \mu\text{m}$. The peak flux is measured to be about $1 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ by the reduction in condensate number, as in [10]. This is in agreement with the theory

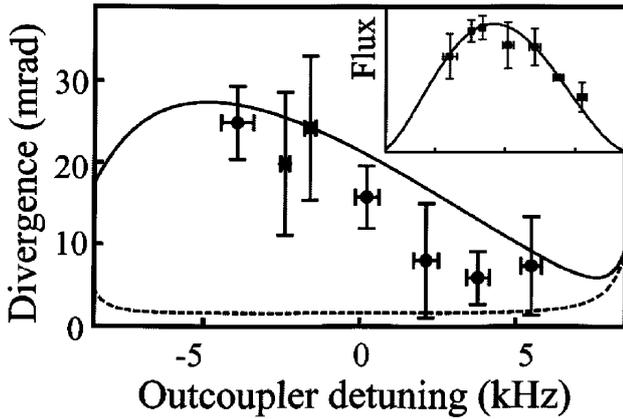


FIG. 3. Divergence (half-angle) versus output coupler detuning from the condensate center. Experimental points are compared with the theoretical calculation (solid line). The dashed line represents the same calculation, but excluding the effects of the condensate-laser interaction. Inset: Output flux (in arbitrary units) versus detuning, with the same frequency scale as the main figure.

of [23], given the applied field strength and uncertainty in the atom number and field polarization [16].

There are several possible sources of divergence of the atom laser, including diffraction, magnetic lensing, and interactions both within the laser and between the laser and the condensate. In order to understand the divergence with a simple analytical model, we make several approximations: (1) that the interactions between atoms *within* the laser are not significant, valid in the low-flux limit; (2) that the roughly parabolic density profile of the atom laser can be approximated by a Gaussian; and (3) that we can use stationary solutions of the Schrödinger equation with a paraxial-type of approximation, in which the fast degrees of freedom [23] are decoupled from the slow evolution of the transverse degrees of freedom, as in [25]. We follow a Gaussian optics treatment similar to that of photonic lasers [17]: the spatial distribution in x and y described by the wave function $\Psi(x, y, t) = \Psi_0 \exp[-iP(t) + ix^2/2q_x(t) + iy^2/2q_y(t)]$, where $P(t)$ describes the overall phase and amplitude, and beam parameters $1/q_{x,y}(t) = i/w_{x,y}^2(t) + c_{x,y}(t)$ describe the widths w_x and w_y and curvatures c_x and c_y of the beam. The observable width is $w(t) = [w_x^2(t) \cos^2(\phi) + w_y^2 \sin^2(\phi)]^{1/2}$, where ϕ is the observation angle (Fig. 1b). The initial widths $w_x^2(0) = 2(R_z^2 - z_0^2)/5$ and $w_y(0) = w_x(0)/\lambda$ give the same rms width as would an initial Thomas-Fermi density profile.

The beam parameters q_x and q_y follow an “ $ABCD$ law” similar to that for a photon laser beam: $q' = (Aq + B)/(Cq + D)$, where the coefficients A , B , C , and D are the four elements in a matrix which transforms ray vectors $\langle x, p/\hbar \rangle$ to $\langle x', p'/\hbar \rangle$ according to classical equations of motion in the same potential. In the following paragraphs, we will calculate the $ABCD$ matrices for interaction with the condensate, propagation with the magnetic trap on, and

free flight after the trap is turned off. Note that even though the ray matrices can be derived using classical equations of motion, their application in the Gaussian beam formalism includes diffraction.

The mean-field interaction potential between an atom in the laser and the condensate is $U_I(\mathbf{r}) = g_{01}\rho_c(\mathbf{r})$, where g_{01} is the s -wave coupling strength $4\pi\hbar^2 a_{01}/M$ between atoms in the $|1, 0\rangle$ state and the trapped $|1, -1\rangle$ state, and $\rho_c(\mathbf{r})$ is the condensate density. Here we use $a_{01} = a_{11}$. We calculate the action of this potential treating it as a lens, and using the thin lens approximation that each trajectory is at its initial transverse position $\langle x_0, y_0 \rangle$. In the Thomas-Fermi limit, the potential $U_I(\mathbf{r})$ is quadratic, and thus gives an impulse $\langle \Delta p_x, \Delta p_y \rangle = [2\mu t_1 \langle x_0, y_0 \rangle / R_z^2] \langle x_0, \lambda^2 y_0 \rangle$ after an interaction time t_1 . The on-axis power of the lens is given for $x_0 \ll R_x$ and $y_0 \ll R_y$, with which assumption we find $t_1^2 \approx 2(R_z + z_0)/g$. This gives the thin lens $ABCD$ matrix for the x direction

$$M_{1x}(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\mu}{\hbar R_z^2} \sqrt{2(R_z + z_0)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

When applied to the beam parameter q_x , the nontrivial term in Eq. (3) is the wave-front curvature added to the beam. A similar ray matrix $M_{1y}(z_0)$ transforms q_y , but with a curvature term multiplied by λ^2 . For both $M_{1x}(z_0)$ and $M_{1y}(z_0)$, the curvature is positive for all z_0 , since the interaction is always repulsive. A positive curvature corresponds to an expanding wave, and thus the condensate with repulsive interactions ($g_{01} > 0$) is always a *diverging* lens.

When the atom laser falls [26], it evolves in the anti-trapping potential due to the quadratic Zeeman effect of the $|1, 0\rangle$ state, $U_{QZE}(\mathbf{r}) = -\mu_B B^2(\mathbf{r})/B_{HF}$, where μ_B is the Bohr magneton, and $B_{HF} = 0.4883$ T is the hyperfine splitting in magnetic units. We can neglect y -dependent and higher-order terms, since they are several orders of magnitude smaller for the fields in our experiment, to get $U_{QZE}(\mathbf{r}) \approx -\mu_B B_0^2/B_{HF} - M\Omega^2(x^2 + z^2)/2$, where $\Omega = 2\pi \times 30.3 \pm 0.1$ Hz. Below, we will return to evolution in y . The classical motion of a particle in an inverted quadratic potential is given by hyperbolic functions. In the vertical direction, an elongation of the laser is evident: we observe a length of 1.84 ± 0.09 mm, while with gravity alone, one would expect a length of 1.33 mm after 10 ms of coupling and 6 ms of free flight. Including $U_{QZE}(\mathbf{r})$ and our measured trap parameters, we calculate 1.87 mm, in agreement with our observations. The ray matrix for the transverse x direction is

$$M_2(t_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\Omega t_2) & \frac{\hbar}{M\Omega} \sinh(\Omega t_2) \\ \frac{M\Omega}{\hbar} \sinh(\Omega t_2) & \cosh(\Omega t_2) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

where t_2 is the time of evolution, ranging between 0 and t_{oc} . This interaction is a *thick* lens, since $\Omega t_{oc} > 1$, and thus there is sufficient time for the laser to change diameter and curvature during its interaction. During the same time, the beam parameter q_y transforms by the free flight matrix

$$M_{\text{FF}}(t_2) = \begin{pmatrix} 1 & \hbar t_2/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

which is the $\Omega \rightarrow 0$ limit of $M_2(t_2)$. Note that it is due to the acceleration in both the z and x directions that make the atom lasers well characterized by an asymptotic expansion angle (see Fig. 2e): if there were no acceleration in x , the laser would have parabolic borders.

The third and final transformation of the laser is free-flight expansion between turning the trap off and observing the laser, described by $M_{\text{FF}}(t_{\text{F}})$, where t_{F} is the time of flight. To find the width of the laser at any position, we evolve the initial beam parameter $q_x(0) = -i w_x(0)^2$ and $q_y(0) = -i w_y(0)^2$ with the elements of the matrix product $M_{\text{FF}}(t_{\text{F}})M_2(t_2)M_{1,x}(z_0)$ and $M_{\text{FF}}(t_2 + t_{\text{F}})M_{1,y}(z_0)$, respectively. The angle is the ratio of the difference between the observed rms beam size at $t_2 = 0$ and $t_2 = t_{\text{oc}}$ to the length of the laser. Note that this theory has no adjustable parameters since the atom number, output flux, trap frequencies, interaction strength, and bias field have all been measured.

Figure 3 shows the calculated angle θ in comparison with the data. The primary feature of this curve is its monotonous decrease with increasing δ_{rf} throughout the range of the data. This trend is due to the condensate lens, as is demonstrated by comparison to θ without the transformation M_1 (dashed line in Fig. 3). Simply put, a laser sourced at lower heights (greater δ_{rf}) interacts for less time with the condensate. The quadratic Zeeman potential U_{QZE} acts to magnify the divergence of the condensate lens, increasing the slope in this region by roughly a factor of 4. Out of the range of our data, there are two more salient features: (1) The angle θ decreases at $\delta_{\text{rf}} < -5$ kHz. This is due to a reduction in initial width of lasers sourced from the very top of the condensate, since divergence angle is proportional to beam radius for a constant focal length. (2) The angle θ increases for $\delta_{\text{rf}} > 5$ kHz due to diffraction. A combination of diffraction and interactions imposes the minimum divergence possible on the atom laser, in our case approximately 6 mrad.

In conclusion, we have measured the divergence of an atom laser. We demonstrate that in our case, interactions are a critical contributor to the observed divergence. The strong parallel between atom and photon laser beams, both fully coherent, propagating waves, is emphasized by the success of a model obtained by generalization of the standard treatment of optical laser beams. The understanding of atom laser propagation provided by our measurements and model provide a basic tool for future experiments with atom lasers.

The authors thank W.D. Phillips, C.I. Westbrook, Ch. J. Bordé, M. Köhl, and S. Seidelin for comments. J.T. acknowledges support from a Chateaubriand Fellowship. This work was supported by the CNRS, Le Ministère de la

Recherche, la Délégation Générale pour l'Armement, and the European Union (Grant No. HPRN-CT-2000-00125).

*Electronic address: <http://atomoptic.iota.u-psud.fr>

- [1] M. H. Anderson *et al.*, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] C. C. Bradley *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995); C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 985 (1997).
- [4] D. G. Fried *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3811 (1998).
- [5] A. Robert *et al.*, *Science* **292**, 461 (2001); F. Pereira Dos Santos *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3459 (2001).
- [6] See also <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html/>
- [7] M.-O. Mewes *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [8] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Science* **282**, 1686 (1998).
- [9] E. W. Hagley *et al.*, *Science* **283**, 1706 (1999).
- [10] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).
- [11] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Nature (London)* **403**, 166 (2000).
- [12] M. Andrews *et al.*, *Science* **275**, 637 (1997).
- [13] J. Fujita *et al.*, *Nature (London)* **380**, 691 (1996); F. Shimizu, *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* **42**, 73 (2000).
- [14] P. T. H. Fisk, *Rep. Prog. Phys.* **60**, 761 (1997).
- [15] J. H. Thywissen, R. M. Westervelt, and M. Prentiss, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3762 (1999); M. Key *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1371 (2000).
- [16] In this work, the coupling width is uncertainty limited at approximately $2\pi \times 100$ Hz with a coupling rate at approximately $2\pi \times 6$ Hz. These widths are small compared to the chemical potential $h \times 1.6$ kHz. We call these atom lasers "narrow-band" because the energetic width of the output mode is limited by the coupling rate and/or the rf pulse length (as in [10]), instead of the spatial size of the condensate (as in [7–9]).
- [17] H. Kogonick, *Appl. Opt.* **4**, 1562 (1965).
- [18] Ch. J. Bordé, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, edited by J. Dalibard, J.-M. Raimond, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1992), p. 291.
- [19] B. Desruelle *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **1**, 255 (1998); B. Desruelle *et al.*, *Phys. Rev. A* **60**, R1759 (1999).
- [20] For a review of Bose-Einstein condensate theory and an explanation of the Thomas-Fermi formulas used here, see F. Dalfovo *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [21] D. S. Hall *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539 (1998).
- [22] We attribute this field stability to the magnetic shielding of the condensate by the iron yoke of the electromagnet.
- [23] F. Gerbier, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4729 (2001).
- [24] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996); Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
- [25] H. Wallis, J. Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji, *Appl. Phys. B* **54**, 407 (1992).
- [26] The potential U_{QZE} also acts within the condensate, but is neglected transversely because $\Omega^2 \ll \omega_x^2$, and longitudinally because $R_z \ll g/\Omega^2$.

Bibliographie

- [1] S. BOSE, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [2] A. EINSTEIN, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gase”, *Sitzungsberg. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* 261 (1924).
- [3] A. EINSTEIN, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gase. Zweite Abhandlung”, *Sitzungsberg. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* 3 (1925).
- [4] M. ANDERSON, J. ENSHER, M. MATTHEWS, C. WIENMAN, ET E. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [5] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Bose-Einstein condensation in a gaz of sodium atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [6] C. BRADLEY, C. SACKETT, J. TOLLET, ET R. HULET, “Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gaz with attractive interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [7] C. BRADLEY, C. SACKETT, J. TOLLET, ET R. HULET, “Bose-Einstein condensation of Lithium : observation of limited condensate number”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 985 (1997).
- [8] V. HUGO, dans *La légende des siècles* (Bibliothèque de la Pléiade, Paris, 1993), p. 1102.
- [9] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, disponible sur <http://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [10] Y. Castin, Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results, Cours de l'école d'été des Houches, 2000, disponible sur <http://www.lkb.ens.fr/cours/notes-de-cours/castin/castin.pdf>.
- [11] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [12] L. MANDEL ET E. WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

- [13] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, ET B. ROULET, *Physique statistique* (Hermann, Éditeur des sciences et des arts, Paris, 1995).
- [14] H. BROWN ET R. TWISS, *Proc. Royal. Soc. A* **242**, 300 (1957).
- [15] L. MANDEL, *J. Opt. Soc. Am.* **51**, 797 (1961).
- [16] dans *La théorie du rayonnement et les quanta*, ÉDITÉ PAR P. LANGEVIN ET L. DE BROGLIE (Gauthiers-Villars, Paris, 1912), pp. 407–435, discussion 436–450.
- [17] I. BLOCH, T. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition”, *Nature* **403**, 166 (2000).
- [18] C. COHEN-TANNOUJDI, Cours au Collège de France, 1998, disponible sur <http://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [19] E. FERMI, *Ricerca Sci.* **7**, 13 (1936).
- [20] A. HASEGAWA ET F. TAPPERT, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973).
- [21] H. MICHAUX, dans *Un barbare en asie* (Gallimard, collection l’imaginaire, Paris, 1967), p. 67.
- [22] B. DESRUELLE, *Évaporation par radio-fréquence et condensation de Bose-Einstein d’un gaz d’alcalins en régime de champ fort*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 1999.
- [23] V. BOYER, *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans les champs magnétiques intenses*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2000.
- [24] G. DELANNOY, *Étude des techniques de production de condensats de Bose-Einstein : évaporation multi-fréquence et refroidissement sympathique*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.
- [25] B. DESRUELLE, V. BOYER, P. BOUYER, G. BIRKL, M. LÉCRIVAIN, F. ALVES, C. I. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “Trapping cold neutral atoms with a iron-core electromagnet”, *Eur. Phys. J. D.* **1**, 255 (1998).
- [26] B. DESRUELLE, V. BOYER, S. G. MURDOCH, G. DELANNOY, P. BOUYER, A. ASPECT, ET M. LÉCRIVAIN, “Interrupted evaporative cooling of ^{87}Rb atoms trapped in a high magnetic field”, *Phys. Rev. A* **60**, R1759 (1999).
- [27] A. ROTH, *Vacuum technology*, 3ème éd. (North-Holland, Amsterdam, 1979).
- [28] C. COHEN-TANNOUJDI, “Manipulating atoms with photons”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707 (1998).
- [29] S. CHU, “The manipulation of neutral particules”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998).

- [30] W. D. PHILLIPS, “Laser cooling and trapping of neutral atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).
- [31] T. IDO, Y. ISOYA, ET H. KATORI, “Optical-dipole trapping of Sr atoms at a high phase-space density”, *Phys. Rev. A* **61**, 061403 (2000).
- [32] C. COHEN-TANNOUJJI, Cours au Collège de France, 1996, disponible sur <http://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [33] A. ARNOLD, J. WILSON, ET M. BOSCHER, “A simple extended-cavity diode laser”, *Rev. Sci. Instrum.* **69**, 1236 (1998).
- [34] J. BOUYER, *Stabilisation par injection optique d'un laser à semi-conducteur*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI Orsay, 1992.
- [35] W. PETRICH, M. HANDERSON, J. ENSCHER, ET E. CORNELL, “Stable tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).
- [36] C. MONROE, W. SWANN, H. ROBINSON, ET C. WIEMAN, “Very cold trapped atoms in a vapor cell”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990).
- [37] V. BOYER, S. MURDOCH, Y. LE COQ, G. DELANNOY, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Multifrequency evaporative cooling to Bose-Einstein condensation in a high magnetic field”, *Phys. Rev. A* **62**, R21601 (2000).
- [38] C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPOND-ROC, ET G. GRYNBERG, *Processus d'interactions entre photons et atomes* (InterÉditions/Éditions du CNRS, Paris, 1988).
- [39] Y. CASTIN ET R. DUM, “Bose-Einstein condensates in time dependent traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [40] M.-O. MEWES, M. ANDREWS, D. KURN, D. DURFEE, C. TOWNSEND, ET W. KETTERLE, “Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [41] B. ANDERSON ET M. KASEVICH, “Macroscopic quantum interferences from atomic tunnel array”, *Science* **282**, 1686 (1998).
- [42] E. HAGLEY, L. DENG, M. KOZUMA, J. WENG, K. HELMERSON, S. ROLSTON, ET W. PHILLIPS, “A well collimated quasi-continuous atom laser”, *Science* **283**, 1706 (1999).
- [43] I. BLOCH, T. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Atom laser with a cw output coupler”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).
- [44] R. BALLACH ET C. SAVAGE, “The theory of atom laser”, *ANU BEC 2000 Physics Summer School Proceeding* (2000), cond-mat/0008070.
- [45] T. GUSTAVSON, A. CHIKKATUR, A. LEANHARDT, A. G. S. GUPTA, D. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Transport of Bose-Einstein condensates with optical tweezers”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 020401 (2002).

- [46] A. CHIKKATUR, Y. SHIN, A. LEANHARDT, D. KIELPINSKY, E. TSUKATA, T. GUSTAVSON, D. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “A continuous source of Bose-Einstein condensed atoms”, *Science* (2002).
- [47] E. MANDONNET, A. MINGUZZI, R. DUM, I. CARUSOTTO, Y. C. Y, ET J. DALIBARD, “Evaporative cooling of an atomic beam”, *Eur. Phys. J. D.* **10**, (2000).
- [48] P. CREN, C. ROOS, A. ACLAN, J. DALIBARD, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Loading of a cold atomic beam into a magnetic guide”, *accepted for publication in EPJD*, cond-mat/0203618.
- [49] T. ESSLINGER, I. BLOCH, ET T. HÄNSCH, “Bose-Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap”, *Phys. Rev. A* **58**, R2664 (1998).
- [50] G. GRYNBERG, A. ASPECT, ET C. FABRE, dans *Introduction aux lasers et à l’optique Quantique* (Ellipse, Paris, 1997), Chap. 1 et compléments.
- [51] L. LANDAU ET E. LIFCHITZ, dans *Physique Théorique, Tome 3 : Mécanique Quantique* (Editions MIR, Moscou, 1975), pp. 93–95.
- [52] M. ABRAMOWITZ ET I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions* (Dover publications, Inc., New York, 1965).
- [53] G. BREIT ET I. RABI, “Measurement of nuclear spin”, *Phys. Rev.* **38**, 2082 (1931).
- [54] L. LANDAU ET E. LIFCHITZ, dans *Physique Théorique, Tome 3 : Mécanique Quantique* (Editions MIR, Moscou, 1975), Chap. 7.
- [55] F. GERBIER, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Quasicontinuous atom laser in the presence of gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4729 (2001).
- [56] F. Gerbier, Laser à atomes quasi-continu, 2000.
- [57] S. SEIDELIN, Master’s thesis, Institut for Fysik og Astronomi, Université de Aarhus, Dannemark, 2000.
- [58] P. BOUYER *et al.*, “Experimental study of coupling Bose-Einstein condensates into weakly non-trapping and trapping states”, *C. R. Acad. Sci. Paris t.2 IV*, 657 (2001).
- [59] M. KOHL, T. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measuring the temporal coherence of an atom laser beam”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160404 (2001).
- [60] A. YARIV, dans *Quantum Electronics*, 3^{ième} éd. (John Wiley & Sons, New York, 1989), pp. 106–123.
- [61] C. COHEN-TANNOUJDI, B. DIU, ET F. LALOË, dans *Mécanique quantique I* (Hermann, Éditeur des sciences et des arts, Paris, 1973).
- [62] C. BORDÉ, “Theoretical tools for atom optics and interferometry”, *C. R. Acad. Sci. Paris t.2, Série IV*, 509 (2001).

- [63] C. BORDÉ, dans *Fundamental systems in quantum optics*, ÉDITÉ PAR J. DALIBARD, J. RAIMOND, ET J. ZINN-JUSTIN (North-Holland, 1992), pp. 291–380, proceeding de l'école d'été des Houches 1990, Session LIII.
- [64] T. BUSCH, M. KOHL, T. ESSLINGER, ET K. MOLMER, “Transverse mode of an atom laser”, *Phys. Rev. A* **65**, 043615 (2002).
- [65] W. Shakespeare, *The tempest*, Acte III, Scène 1, Selected plays, The Franklin Library (Franklin Center, Pennsylvania), 1981, p. 624.
- [66] M. ANDREWS, C. TOWNSEND, H. MIESNER, D. DURFEE, D. KURN, ET W. KETTERLE, “Observation of interference between two Bose condensates”, *Science* **275**, 637 (1997).
- [67] R. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys* **20**, 367 (1948).
- [68] R. FEYNMAN ET A. HIBBS, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw Hill, New York, 1965).
- [69] C. COHEN-TANNOUJI ET P. STOREY, “The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial”, *J. Phys II* **4**, 1999 (1994).
- [70] J. GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd éd. (McGraw-Hill, New York, YEAR).
- [71] M. BORN ET E. WOLF, *Principle of Optics*, 6th éd. (Pergamon, Oxford, 1980).
- [72] J. FILS, *Réalisation et caractérisation d'un gyromètre à ondes de de Broglie*, Thèse de doctorat, Université Paris XI, 2002.
- [73] M. KOHL, T. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measuring the temporal coherence of an atom laser beam”, *Phys. Rev. A* **65**, 021606(R) (2002).
- [74] C. BORDÉ, “Atomic clocks and inertial sensors”, *Metrologia* **39**, (2002).
- [75] W. Shakespeare, *A midsummer night's dream*, Acte III, Scène 1, Selected plays, The Franklin Library (Franklin Center, Pennsylvania), 1981, p. 165.
- [76] Y. LE COQ, J. H. THYWISSEN, S. A. RANGWALA, F. GERBIER, S. RICHARD, G. DELANNOY, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Atom Laser Divergence”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).
- [77] P. BOUYER, S. RANGWALLA, J. THYWISSEN, Y. LE COQ, F. GERBIER, S. RICHARD, G. DELANNOY, ET A. ASPECT, “Production of CW and mode-locked atom lasers”, *J. Phys. IV* **12**, 115 (2002).

RÉSUMÉ

Les condensats de Bose-Einstein d'atomes en phase gazeuse obtenus dans des pièges magnétiques consistent en une accumulation macroscopique d'atomes dans la même fonction d'onde. Ils représentent donc un analogue pour l'optique atomique à des photons piégés dans une cavité laser en optique photonique. Tout comme en optique, afin d'utiliser ceux-ci comme source cohérente, il convient de les faire sortir de la cavité de façon contrôlée.

Nous procédons par application d'un champ radiofréquence de faible amplitude. Les atomes sont alors faiblement couplés vers un état interne non piégé magnétiquement et tombent sous l'effet de la gravité. On obtient ainsi un flux cohérent et continu d'onde de matière jusqu'à épuisement du condensat de Bose-Einstein qui en est la source.

Nous étudions les propriétés transverses des faisceaux atomiques ainsi produits ou « lasers à atomes ». En particulier, nous observons et mesurons la divergence du jet d'atomes pour différents paramètres expérimentaux. Une théorie à base de matrices ABCD analogue à celle de l'optique photonique permet d'obtenir un bon accord avec les données expérimentales. Nous constatons que les effets dominants sont les interactions entre le condensat de Bose-Einstein source et les atomes du laser atomique. Ceci constitue une différence profonde avec le cas des photons.

Nous réalisons finalement des figures d'interférences entre différents lasers atomiques issus d'un même condensat de Bose-Einstein. Les interférogrammes obtenus sont qualitativement et quantitativement bien décrit par une théorie adaptée de celle de l'optique de Fourier cohérente.

ABSTRACT

Bose-Einstein condensates in dilute vapor obtained in magnetic traps consist of a macroscopic accumulation of atoms in the same wavefunction. Hence, they represent a matter wave analog of photons stored in a laser cavity in photonic optics. Just as in optics, we need to extract them from the cavity in a controlled way, so as to use them as a coherent source.

We use a weak radio-frequency electromagnetic field to induce a coupling of the atoms to a magnetically untrapped internal state. The untrapped atoms then fall under the effect of gravity. We thus obtain a coherent and continuous matter wave until the source condensate is exhausted.

We study the transverse properties of such coherent atomic beams. Specifically, we observe and measure the angular divergence of the atomic beam for different experimental parameters. A theory based on ABCD matrices, analogous to that of photon optics, gives good agreement with experimental data. We find that the dominant contribution to the divergence of the atom laser beam is due to interactions between the Bose-Einstein condensate and the atoms in the laser. This is in stark contrast to photonic lasers.

Finally, we interfere different atom laser beams extracted from the same Bose-Einstein condensate. The patterns we observe are qualitatively and quantitatively well-described by a theory adapted from coherent Fourier optics theory.

MOTS-CLÉS

CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN – LASERS À ATOMES – ATOMES FROIDS – REFROIDISSEMENT ÉVAPORATIF – PIÉGEAGE MAGNÉTIQUE – MATRICES ABCD – OPTIQUE DE FOURIER