



ETUDE THEORIQUE DE LA DYNAMIQUE NON LINEAIRE D'ATOMES FROIDS DANS UN RESEAU OPTIQUE DISSIPATIF : TRANSPORT SPONTANE ET TRANSPORT STIMULE

Laurent Sanchez-Palencia

► To cite this version:

Laurent Sanchez-Palencia. ETUDE THEORIQUE DE LA DYNAMIQUE NON LINEAIRE D'ATOMES FROIDS DANS UN RESEAU OPTIQUE DISSIPATIF : TRANSPORT SPONTANE ET TRANSPORT STIMULE. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Ecole Polytechnique X, 2003. Français. NNT : . tel-00003425v2

HAL Id: tel-00003425

<https://pastel.hal.science/tel-00003425v2>

Submitted on 16 Oct 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Kastler-Brossel
Département de Physique
Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond,
F-75231 Paris cedex 05, France



Ecole Polytechnique,
F-91128 Palaiseau cedex, France



THÈSE DE DOCTORAT DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

spécialité : Physique Quantique

présentée par
Laurent SANCHEZ-PALENCIA

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Ecole Polytechnique

Sujet de la thèse :
**ETUDE THEORIQUE DE LA DYNAMIQUE NON LINEAIRE
D'ATOMES FROIDS DANS UN RESEAU OPTIQUE DISSIPATIF :
TRANSPORT SPONTANE ET TRANSPORT STIMULE**

Soutenue le 19 septembre 2003 devant le jury composé de :

M. Pierre Pillet	Président
M. Alain Aspect	Rapporteur
M. Robin Kaiser	Rapporteur
M. Anders Kastberg	Rapporteur
M. Jean-Yves Courtois	Examineur
M. Jean Dalibard	Directeur de thèse

Version en ligne sur le site du Centre pour la Communication Scientifique Directe (CCSD)
http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/34/25/index_fr.html

En memoria de mis abuelos
Angeles e Indalecio Sanchez-Palencia

“Le savant n’étudie pas la nature parce que c’est utile,
il l’étudie parce qu’il y prend plaisir et il y prend plaisir
parce qu’elle est belle. Si la nature n’était pas belle, elle
ne vaudrait pas la peine d’être connue, la vie ne vaudrait
pas la peine d’être vécue.”

Henri Poincaré, *Science et Méthode* (1908)

In Memoriam

L'achèvement de la rédaction d'un manuscrit de thèse est traditionnellement l'occasion de remercier son directeur de recherche. La vie en ayant décidé autrement, je n'en aurai pas l'occasion. Gilbert Grynberg, qui a dirigé les travaux présentés dans le manuscrit, a été emporté par la maladie à la fin janvier 2003.

Je n'entends pas retracer ici la carrière ou les travaux de Gilbert. D'autres l'ont fait mieux que je ne saurais le faire à l'occasion d'hommages publics. Je voudrais seulement exprimer l'admiration profonde que j'avais pour lui, moi qui ai eu la chance de connaître le professeur, le chercheur et l'homme.

J'ai d'abord connu Gilbert comme professeur à l'Ecole Polytechnique où il enseignait l'Optique Quantique en deuxième année. Qui jette un œil aux premières pages d'un cours d'électrodynamique quantique y découvre de longs et fastidieux développements nécessaires à la présentation du formalisme. Et pourtant, suivre le cours de Gilbert était passionnant. J'admirai alors la clarté, la précision et la remarquable richesse de son exposé. Mais il y avait plus. Son cours était captivant, si facile à suivre et à comprendre et pourtant si dense et subtil. Gilbert avait l'art de présenter les choses de telle manière que l'on croyait tout comprendre sans effort. Bien sûr, à y réfléchir après coup, les choses paraissaient moins triviales, mais le cours écrit finissait d'estomper les derniers nuages. La période où enseignait Gilbert a été celle où se lever

le lundi matin pour rejoindre l'amphithéâtre Fresnel a été le plus agréable. Bien que mon intérêt pour la physique soit ancien et mon intérêt pour la recherche plus ancien encore, l'enseignement de Gilbert, faisant écho aux cours remarquables de Jean-Louis Basdevant et



Jean Dalibard et d'Alain Aspect, a suscité en moi une passion pour la physique atomique et l'optique quantique qui a évidemment beaucoup pesé dans mon orientation à la sortie de l'Ecole.

L'année suivante, en DEA de Physique Quantique, j'étais à la recherche d'un stage. En feuilletant le cahier où étaient regroupées toutes les propositions, je suis tombé sur une courte note émanant du groupe de Gilbert. Le sujet du stage semblait assez vague et je n'y comprenais pas grand chose mais le thème des réseaux optiques était attirant et stimulant. J'ai rencontré Gilbert qui m'a présenté le sujet et son laboratoire. Gilbert m'a laissé le choix entre théorie et expérience. J'ai dit timidement "théorie" et il m'a répondu "c'est toi qui vois, tu dois faire ce qui te plaît et te motive". C'est ainsi que j'ai commencé à travailler avec Gilbert sur la diffusion spatiale en janvier 2000. Par la suite, le sujet a évolué mais en fin de compte tout mon travail à tourné autour de cela. Gilbert dirigeait son équipe avec entrain, exigence et rigueur, ses idées foisonnantes et son enthousiasme communicatif ont été les guides précieux de mes premiers pas de chercheur. Parallèlement, j'ai le sentiment qu'il m'a laissé beaucoup de liberté pour explorer des pistes qui semblaient compliquées et pas forcément très prometteuses au premier abord. Exigeant pour lui même, Gilbert l'était aussi pour ses élèves et il était rarement satisfait de mes "premiers brouillons". J'en étais bien sûr un peu vexé au début mais au fil des mois, j'ai compris qu'à force de reprendre un problème par les différents angles de vue qu'il me suggérait, on pouvait mieux faire. Gilbert a toujours été très disponible et à l'écoute de mes questions, de mes remarques et a toujours considéré avec intérêt mon point de vue. Nos discussions m'ont souvent permis de recentrer mon travail et m'ont toujours amené à considérer de nouveaux développements. J'admirais sa grande culture scientifique, la vivacité de son esprit et sa capacité à dégager des images physiques simples et fécondes. Je crois qu'il faut du courage et beaucoup de talent pour réussir à établir cette fine adéquation entre liberté et dirigisme qui fait l'encadrement d'un étudiant. De toute évidence, Gilbert ne manquait ni de l'un, ni de l'autre. Par delà tout ce qu'il m'a appris en physique, c'est certainement la première leçon que je m'efforcerai de retenir dans l'avenir.

Ces trois années passées à travailler dans l'équipe de Gilbert m'ont fait découvrir un "homme qui n'était pas ordinaire". J'admire le courage exemplaire avec lequel il a fait face à la maladie qui l'a finalement emporté à l'âge de 54 ans. Je ne saurais exprimer toute l'admiration que j'ai pour le fait que, se sachant condamné, il a encadré ses étudiants jusqu'au dernier moment sans jamais penser à lui-même. Gilbert a encadré mon travail et je lui dois mon doctorat. J'ai une pensée émue à me souvenir qu'il était au laboratoire encore quelques semaines avant son décès. Il me reste le souvenir d'un homme très cultivé et passionné par un grand nombre de sujets qu'il aimait évoquer avec ses étudiants. Il se laissait volontiers aller à la dérision et à une certaine provocation avec un plaisir à peine dissimulé. Je garderai un agréable souvenir de sa convivialité, de son humour habile et de sa générosité.

Remerciements

La thèse qui fait l'objet de ce mémoire a été réalisée au laboratoire Kastler-Brossel du département de physique de l'Ecole Normale Supérieure. L'ambiance à la fois studieuse et amicale ainsi que le niveau international du laboratoire offre un cadre très stimulant pour un jeune chercheur. Je remercie les directeurs successifs du laboratoire, Elisabeth Giacobino et Franck Laloë, de m'y avoir accueilli. Je suis particulièrement reconnaissant à Franck Laloë de son soutien continu et de l'intérêt constant qu'il n'a cessé de manifester à l'égard des travaux de notre équipe.

Je suis très reconnaissant à Jean Dalibard d'avoir accepté, malgré ses nombreuses activités, d'encadrer la fin de ma thèse après le décès de Gilbert. Lorsque j'ai sollicité son aide, sa réponse (positive) a été immédiate ce qui a été un soutien déterminant dans une période très délicate pour moi. Jean m'a ainsi permis de terminer mon travail, notamment la rédaction du manuscrit et la préparation de la soutenance, dans d'excellentes conditions. Je le remercie de l'intérêt qu'il a porté à mon travail et du temps qu'il a consacré à relire et corriger le manuscrit. J'ai été très impressionné par la pertinence de ses remarques, questions et suggestions qui m'ont fait souvent prendre conscience d'un certain nombre d'aspects de mon travail que je n'avais pas su voir. Je remercie enfin Jean de ses nombreux conseils et de son aide pour mon orientation future.

Je remercie respectueusement Alain Aspect, Jean-Yves Courtois, Robin Kaiser, Anders Kastberg et Pierre Pillet de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse malgré leurs emplois du temps très chargés. Je remercie en particulier Anders, Robin et Alain d'avoir accepté les charges de rapporteurs. Je suis enfin très reconnaissant à Alain Aspect d'avoir pris le temps de discuter avec moi et de me conseiller dans mon choix d'un stage post-doctoral.

J'ai partagé mes années de préparation de thèse avec François-Régis Carminati, Michele Schiavoni et Ferruccio Renzoni qui ont assuré le volet expérimental du travail de l'équipe. Les résultats que nous avons obtenus et leur interprétation sont le fruit d'une étroite collaboration entre expérience et théorie. Je les remercie pour ce travail en commun.

La souplesse de mon travail de théoricien m'a ouvert l'opportunité de collaborations variées en France et en Europe. Ceci a été pour moi une grande satisfaction tant sont déterminantes les collaborations scientifiques pour l'unité et la richesse de l'Union Européenne.

Nous avons réalisé l'étude de la diffusion spatiale en collaboration avec Peter Horak, alors à l'Université de Innsbrück (Autriche). Lors de mon stage de DEA de Physique Quantique, il m'a initié aux simulations de Monte-Carlo semi-classiques avec efficacité et patience. Nos rapports se sont malheureusement trop souvent limités au courrier électronique et à quelques rencontres trop brèves mais riches en enseignements pour moi. Je garde un excellent souvenir tant sur le plan personnel que scientifique de ses visites à Paris et du voyage que nous avons fait avec Gilbert à Innsbrück.

Le travail concernant la température cinétique a été réalisé en collaboration avec le groupe d'Anders Kastberg, alors à l'Université de Stockholm (Suède) et avec Robin Kaiser du laboratoire Ondes et Désordre de Nice (France). Je remercie vivement Anders de m'avoir invité à Stockholm à deux reprises ce qui a ouvert la voie à une collaboration fructueuse. Travailler dans son groupe m'a permis d'aborder des questions d'un autre point de vue et de m'intéresser en particulier aux simulations de Monte-Carlo quantiques. La sympathie de son accueil et nos discussions scientifiques sont pour moi un excellent souvenir. J'ai beaucoup appris des travaux communs que nous avons réalisés avec les membres de son groupe, notamment Johan Jersblad et Harald Ellmann qui sont devenus des amis. Travailler avec Robin a été un très grand plaisir. J'admire beaucoup sa façon de travailler, très vive et précise. C'est sa bonne humeur et de son enthousiasme communicatif qui nous a fait parfois élaborer des plans de travail au restaurant ou au milieu d'un escalier.

Yvan Castin, Samuel Guibal et Cécile Robilliard ont relu certains chapitres de mon mémoire de thèse. Celui-ci doit beaucoup à la quantité, la qualité et à la pertinence de leurs remarques. Je les remercie tous trois de ce travail que je sais long et fastidieux.

Le travail d'un laboratoire de recherche ne serait pas aussi efficace sans le soutien des personnels non chercheurs. Merci aux membres de l'équipe informatique, Thierry Besançon, Zaïre Dissi, Christophe Barrache, Daniel Lemoal, Alain Launay et Jean-François Rabasse, qui n'ont jamais ménagé leurs efforts pour maintenir les ordinateurs si précieux à mon travail et lutter contre les attaques de virus. Je remercie les secrétaires du laboratoire Geneviève Piard, Zohra Ouassyyoun, Corinne Palescandolo, Christelle Sansa, Linda Krikorian et Vera da Costa pour leur efficacité, leur patience et leur dévouement en toute circonstance. Merci enfin aux bibliothécaires du département Monique Brouat, Jean-Paul Auquier, Anne Condamine, Dominique Giafferi et Annick Moissenet.

J'ai eu la chance de pouvoir enseigner comme moniteur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) pendant les trois années de préparation de ma thèse. Je remercie Hélène Zanni de m'avoir accueilli à la section SCM12 dont elle est responsable. C'est un réel plaisir de travailler dans l'équipe enseignante d'Hélène qui sait donner les impulsions et être à l'écoute des chargés de TD. Je lui suis très reconnaissant du temps qu'elle n'a jamais ménagé pour m'expliquer un peu des subtilités et des secrets de l'enseignement supérieur. Je garde un excellent souvenir de l'équipe enseignante, Christophe Bellin, Michel Cassien, Frédéric Decremps, Adriana Gheorghiu, Brahim Lamine, Bernard Mangin et Marie-Françoise Quinton avec qui j'ai eu grand plaisir à échanger nos expériences, nos idées et auprès de qui j'ai tout simplement appris à enseigner.

Pour finir, je remercie mes parents de leur soutien constant depuis bien des années. Leur estime du travail scientifique, du savoir autant que de la découverte, auquel ils ont eux-mêmes consacré leur vie professionnelle, a toujours été un exemple pour moi et n'a pu que guider mon choix de m'engager dans cette voie et je les en remercie du fond du cœur. Merci enfin à Aurélie et C. de leur amour et de leur bonne humeur sans lesquels la transition quotidienne "journée atomes froids"- "soirée reposante" n'aurait pas été si immédiate. Merci Aurélie de ton soutien dans les moments difficiles et de m'avoir permis de penser à autre chose. Merci enfin d'avoir toujours exigé que je t'explique "en français" ce qui se fait au LKB.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	15
------------------------------	-----------

Partie I: REFROIDISSEMENT SISYPHE ET METHODES D'ETUDE THEORIQUES	25
---	-----------

1 Refroidissement Sisyphé et réseaux optiques dissipatifs	27
1.1 Description de l'interaction lumière-matière adaptée au refroidissement laser à basse intensité	28
1.1.1 Equations de Bloch optiques	28
1.1.2 L'approximation dite séculaire ou du champ tournant.	31
1.1.3 Elimination adiabatique de l'état excité	33
1.1.4 Déplacements lumineux et pompage optique	34
1.2 Refroidissement Sisyphé à basse intensité	35
1.2.1 Potentiels optiques et pompage optique	36
1.2.2 Configurations à polarisations linéaires croisées ($\text{lin} \perp \text{lin}$)	37
1.2.3 Image physique du refroidissement Sisyphé	41
1.2.4 Eléments de dynamique atomique dans un réseau tridimensionnel	47
1.3 Zoologie non exhaustive des réseaux optiques dissipatifs tridimensionnels	48
1.3.1 Configurations à six faisceaux	48
1.3.2 Autres réseaux optiques	50
1.3.3 Quelques configurations exotiques	51
2 Approches quantique et semi-classique. Simulations de Monte-Carlo	55
2.1 Méthodes théoriques d'investigation du refroidissement Sisyphé	56
2.1.1 L'approche quantique	56
2.1.2 L'approche classique	57
2.2 Simulations de Monte-Carlo quantiques	59
2.2.1 De l'équation maîtresse quantique sous la forme de Lindblad aux fonctions d'onde stochastiques	59
2.2.2 Application au refroidissement laser sub-Doppler	62
2.2.3 Les simulations de Monte-Carlo quantiques en pratique	64
2.3 Simulations de Monte-Carlo semi-classiques	66
2.3.1 Justification de l'approximation semi-classique	66
2.3.2 L'approximation semi-classique	67

2.3.3	De l'équation de Fokker-Planck aux équations de Langevin couplées	75
2.3.4	Les simulations de Monte-Carlo semi-classiques en pratique	78

Partie II: L'EFFET SISYPHE REVISITE: TEMPERATURE CINETIQUE ET DIFFUSION SPATIALE 83

1	Propriétés de la température cinétique et des distributions de vitesse	85
1.1	Comportement anisotrope de la température cinétique dans un réseau en configuration 3D-lin $\perp$ lin	87
1.1.1	Etude pour la transition théorique $1/2 \rightarrow 3/2$	88
1.1.2	Etude pour la transition $4 \rightarrow 5$ du césium 133 (^{133}Cs)	91
1.1.3	Régime de décrochage en température cinétique	93
1.1.4	Discussion des résultats	94
1.2	Des distributions de vitesse non gaussiennes	96
1.2.1	Fonctions d'essai et motivations	96
1.2.2	Etude dans un réseau monodimensionnel	99
1.2.3	Discussion	106
2	Etude de la diffusion spatiale dans un réseau optique dissipatif	109
2.1	Description théorique de la diffusion spatiale dans un réseau optique dissipatif	110
2.1.1	Echappement des sites de piégeage et diffusion spatiale	110
2.1.2	Description de la dynamique en termes de mouvement brownien : prise en compte de la localisation spatiale	114
2.1.3	Résultats numériques	118
2.1.4	Au crible de l'expérience	121
2.2	La dynamique atomique peut-elle être décrite en termes de mouvement brownien ?	123
2.2.1	Coefficient de friction et relation d'Einstein	123
2.2.2	Etude du taux de relaxation de l'énergie cinétique (thermalisation). Discussion de la validité du modèle brownien	126

Partie III: TRANSPORT DIRIGE STIMULE DANS UN RE-SEAU OPTIQUE DISSIPATIF 133

1	Modes de propagation dans les réseaux optiques	135
1.1	Mécanisme de propagation des atomes dans un réseau optique	136
1.1.1	Propagation régulière des atomes	136
1.1.2	Excitation de modes de propagation	138
1.1.3	Détection directe des modes de propagation	141
1.2	Analyse monodimensionnelle	143
1.2.1	Modes de propagation dans les directions transverses	143
1.2.2	Modes de propagation dans la direction longitudinale	154
1.3	Modes de propagation dans un réseau multidimensionnel	158

2 Synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs. Résonance stochastique	163
2.1 Introduction à la résonance stochastique	164
2.1.1 Un modèle générique	164
2.1.2 Exemples de systèmes réalisant une résonance stochastique	169
2.2 Cadre général de notre étude	169
2.2.1 Mouvement hamiltonien et processus dissipatifs dans un réseau optique	170
2.2.2 Conditions de l'étude	171
2.3 Manifestation macroscopique de la résonance stochastique	172
2.3.1 Accroissement résonant de la diffusion spatiale	172
2.3.2 Caractérisation de la résonance stochastique	173
2.4 Dynamique microscopique et résonance stochastique	177
2.4.1 Agglutinement atomique dans un référentiel en mouvement	177
2.4.2 Spectroscopie Brillouin	180
3 Rochet atomique temporel dans un réseau optique 1D-lin$\perp$lin	187
3.1 Rochet spatial et rochet temporel	188
3.1.1 Brisures de symétrie et mouvement dirigé	188
3.1.2 Réalisation d'un rochet spatial dans un système d'atomes froids	190
3.2 Réalisation d'un rochet temporel dans un réseau 1D-lin $\perp$ lin	191
3.2.1 Induction d'un mouvement dirigé dans un potentiel optique 1D-lin $\perp$ lin, spatialement périodique et symétrique à l'aide d'une force asymétrique en temps	191
3.2.2 Contrôle du mouvement dirigé à l'aide de la phase relative des harmoniques de force de parités différentes	195
CONCLUSION GENERALE	199
ANNEXES	205
A Notations	207
B Quelques brèves notions sur des aspects expérimentaux	213
B.1 Les atomes employés et leurs transitions	213
B.2 Eléments de dynamique dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin pour une transition réelle $J_g \rightarrow J_e = J_g + 1$	216
B.2.1 Caractéristiques du réseau 3D-lin $\perp$ lin	216
B.2.2 Mécanisme Sisyphe dans l'approximation adiabatique	217
B.3 Méthodes expérimentales d'étude des réseaux optiques	219

C	Articles complémentaires	223
C.1	Rayleigh scattering and atomic dynamics in dissipative optical lattices . .	225
C.2	Dark propagation modes in optical lattices	231
C.3	Stochastic resonance in periodic potentials : realization in a dissipative optical lattice	237
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		 245
 INDEX		 261

INTRODUCTION GENERALE

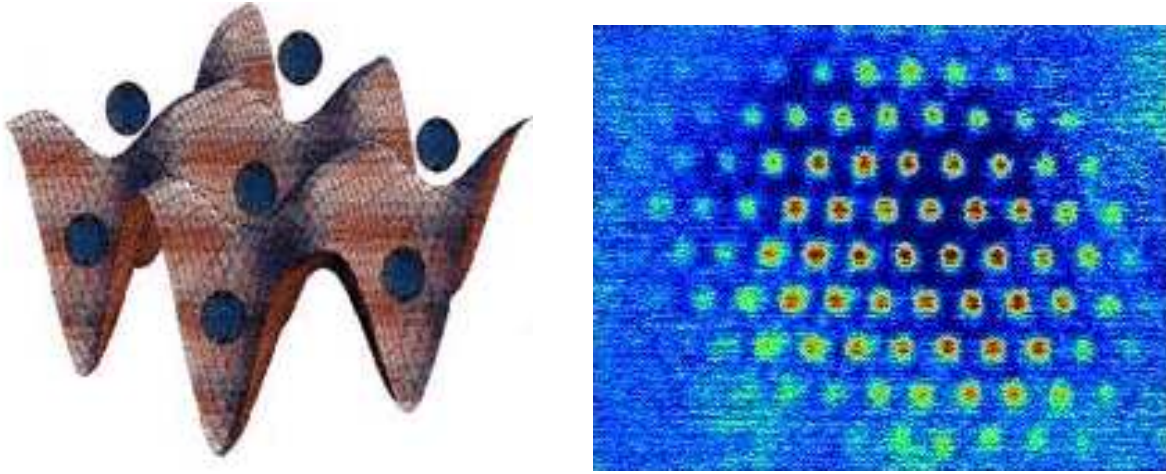
Manipuler des atomes par la lumière

L'étude des propriétés fondamentales de la matière et notamment d'atomes individuels est l'un des domaines chers à la physique, qui a occupé de nombreuses générations de savants depuis la Grèce Antique jusqu'à nos jours. Et nul doute que le futur témoignera de nouveaux progrès. La principale difficulté inhérente à l'étude des particules atomiques vient de ce que le physicien aimerait les voir à la fois indépendantes (donc isolées les unes des autres) et immobiles (donc plus facilement observables). Or un tel état de la matière ne se rencontre pas couramment dans la nature. Ainsi, dans l'état gazeux dilué, les atomes ont des interactions généralement négligeables mais l'agitation thermique à température ambiante les fait bouger de manière complètement erratique à des vitesses qui peuvent être de l'ordre de 1000 m.s^{-1} , rendant difficile toute observation ou manipulation. Au contraire, dans l'état solide, les atomes sont bien rangés et quasi-immobiles mais la cohésion cristalline est assurée par les fortes interactions mutuelles des atomes de sorte que ceux-ci perdent leur individualité. Ainsi le comportement du solide ne renseigne pas sur les propriétés individuelles de ses atomes constitutifs mais sur leurs propriétés collectives. Les réseaux optiques, que nous étudions abondamment dans ce mémoire, permettent de concilier les avantages de ces deux états.

C'est Alfred Kastler qui eut l'idée dans les années 1950 d'utiliser l'action de la lumière sur la matière pour manipuler des particules neutres. Il proposa ainsi de *refroidir*, c'est-à-dire d'immobiliser, des particules atomiques dans l'état gazeux par *effet lumino-frigorique* [1]. L'avènement du *laser* dans les années 1960 [2, 3] a rendu réaliste sa méthode. Au cours des années 1970-1980 un nombre impressionnant de résultats originaux sur l'interaction entre lumière et matière, destinés notamment à refroidir toujours plus, a pu être obtenu dans de nombreux groupes en Europe et aux Etats-Unis. Ainsi, la physique des *atomes froids* a connu un essor spectaculaire au cours des trois dernières décennies, couronné en 1997 par le prix Nobel de Physique, attribué conjointement à Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji et William D. Phillips. Les différentes techniques permises par les progrès simultanément théoriques et expérimentaux et que nous ne résumerons pas ici (voir pour cela les références [4, 5]) permettent d'accéder à des températures de quelques milliardièmes de degrés au dessus du zéro absolu (nK) mais aussi de piéger les particules dans des potentiels de confinement magnétiques et/ou optiques.

L'une des méthodes de piégeage particulièrement étudiée dans la première moitié des années 1990 consiste à utiliser la figure d'interférence de plusieurs faisceaux lasers proches de résonance avec une transition atomique particulière pour former une modulation de potentiel optique spatialement périodique. Ce potentiel, que l'on peut se représenter comme un paysage auvergnat formé de vallées et de collines sur lequel les atomes voyagent, est constitué

de puits régulièrement espacés. Lorsque l'énergie cinétique des atomes est inférieure à la profondeur du potentiel, les puits sont autant de sites de piégeage pour les atomes [6-8]. Les réseaux optiques sont ainsi formés d'atomes régulièrement disposés dans l'espace comme le montrent les figures ci-dessous. Ces réseaux concilient alors les avantages mentionnés ci-



dessus des états gazeux et cristallin en contournant leurs inconvénients. En effet, les atomes, refroidis et piégés dans des sites bien précis, sont régulièrement répartis dans l'espace mais ce n'est plus ici l'interaction entre atomes qui assure la cohésion de l'édifice mais l'interaction des atomes avec la lumière laser. Comme les sites de piégeage sont séparés par une distance de l'ordre de la longueur d'onde laser (soit typiquement du μm , à comparer aux quelques Å qui séparent les mailles d'un solide cristallin), le nuage d'atomes reste gazeux. Dans le passé, de nombreuses études, dont certaines ont intensivement exploité l'analogie entre réseaux optiques et réseaux cristallins, ont conduit à un grand nombre de résultats originaux concernant notamment les propriétés de la température, de la dynamique et de la localisation des atomes dans les réseaux optiques.

Aujourd'hui, les techniques de refroidissement et de piégeage des particules neutres permettent de former des nuages atomiques de grande densité dans l'espace des phases, ce qui suscite un retour à l'étude des propriétés collectives des atomes. L'étude des gaz dégénérés de bosons [9, 10] attire l'attention de la plus grande partie de la communauté des atomes froids notamment pour leurs propriétés de cohérence quantique et de superfluidité. La réalisation spectaculaire des premiers condensats de Bose-Einstein en 1995 a ainsi été récompensée par le prix Nobel de Physique 2001 décerné à Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle et Carl E. Wieman [11]. Corrélativement, de très actives recherches sont menées dans les systèmes de fermions dégénérés [9, 12-14] où de telles propriétés de cohérence quantique et de superfluidité sont attendues en deçà du seuil de la transition de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [15]. On note par ailleurs un regain d'intérêt manifeste pour les réseaux optiques notamment lié aux efforts faits dans le domaine de l'information quantique. On sait en effet maintenant créer un réseau optique formé de exactement n (où n est un petit nombre entier : 1, 2, 3 ...) atome(s) par site de piégeage [16]. Or un tel état du nuage dans le réseau optique formé d'atomes bien rangés en des sites précis et manipulables par laser forme une mémoire naturelle pour un ordinateur quantique. Du chemin reste à faire mais les perspectives ouvertes sont fascinantes.

Cadre de notre étude

Dans le travail que nous rapportons dans ce mémoire, nous avons exploré une autre voie consistant à utiliser les atomes froids d'un réseau optique pour étudier des effets de dynamique non linéaire et plus particulièrement, des effets liés aux phénomènes de transport dans des systèmes périodiques. Des particules piégées dans des structures spatialement périodiques et en présence de bruit constituent des système-modèles pour différentes situations physiques. La physique statistique a ainsi proposé un grand nombre de modèles de transport dirigé dans des structures périodiques. Ces modèles ont été introduits pour expliquer des comportements, si non inhabituels, du moins peu intuitifs dans des systèmes très variés, comme le climat terrestre, le système nerveux d'organismes simples, le cerveau humain, des systèmes électroniques ou les moteurs moléculaires.

En particulier, le bruit joue un rôle tout à fait non trivial et fascinant dans les systèmes non linéaires. Jusque dans les années 1960, le bruit était exclusivement perçu comme une nuisance dont la conséquence bien connue est la réduction du rapport signal-sur-bruit des résultats de mesure. Au laboratoire, ceci se traduit par la limitation de la précision des mesures des observables et dans la vie courante par la qualité parfois médiocre de la réception des ondes hertziennes par exemple. La prise de conscience que le bruit peut aussi jouer un rôle constructif n'est intervenue que dans les années 1970 [17]. Ainsi, alors que les forces fluctuantes dans le modèle du mouvement brownien d'Einstein[23] induisent des trajectoires aléatoires et par là même, la diffusion spatiale du nuage de particules dans toutes les directions, on a découvert que l'énergie de ces fluctuations peut être rectifiée en un mouvement dirigé. Ceci peut être obtenu en brisant la symétrie spatio-temporelle du système non linéaire (effet *roue à rochet*, [18, 19]). Par ailleurs, on s'est aussi rendu compte que, paradoxalement, l'augmentation du niveau de bruit dans un système peut induire une amplification de la réponse d'un système à une excitation de faible amplitude (phénomène de *résonance stochastique*, [20]). Un tel phénomène permet par exemple la détection d'un faible signal périodique dans un environnement très bruyé.

Malheureusement, la réalisation concrète et l'étude expérimentale détaillée de tels modèles s'avère difficile, en particulier parce qu'il est généralement impossible de contrôler précisément les paramètres du problème. Or les progrès des techniques expérimentales dans le domaine de la physique atomique de ces quinze dernières années permet de pallier cet inconvénient crucial. En effet, les physiciens maîtrisent aujourd'hui très bien les techniques de manipulation des atomes par laser (contrôle des paramètres dynamiques, de l'état du nuage, etc ...) et disposent de méthodes de mesure très précises et variées (imagerie, spectroscopie, vélocimétrie, etc ...). Ceci permet d'envisager l'étude détaillée de ces modèles de transport avec l'avantage de pouvoir faire varier les paramètres dynamiques du système dans des domaines assez vastes.

Notre travail s'inscrit dans l'espace ouvert par cette idée. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au transport de particules induit par le bruit dans des réseaux optiques. Pour cela nous nous sommes placés dans le régime dissipatif correspondant au cas où les faisceaux lasers sont très proches de résonance [8] et plus précisément dans des configurations où agit le mécanisme de *refroidissement Sisyphé* [21, 22]. En effet, dans ce cas, l'image d'atomes piégés au fond des puits de potentiel optique n'est pas suffisante pour

décrire toute la dynamique du réseau car le confinement des atomes est imparfait. Dans l'approche courante du refroidissement Sisyphe, les fluctuations des forces dipolaires et de pression de radiation introduisent naturellement une friction et du bruit dans le système. Ce bruit se traduit par une diffusion en impulsion semblable à ce qui se passe dans la théorie du mouvement brownien [23, 24]. Or la plupart des modèles de transport atomique induit par le bruit dans des structures périodiques considère des particules browniennes dans un réseau périodique. Ceci suggère qu'un réseau optique dissipatif est un bon candidat à l'observation de tels phénomènes. Par exemple, un rochet atomique dans un réseau optique asymétrique a été réalisé dans notre équipe en 1999 [25].

Pourtant, l'image d'un mouvement brownien usuel, caractérisé par une force de friction et de la diffusion en impulsion dans un potentiel périodique n'est que très approximative dans un réseau optique dissipatif et une description plus précise est souvent nécessaire à la compréhension de son comportement dynamique. Les atomes voient en fait un potentiel optique qui dépend de leur état interne et la lumière induit des cycles de pompage optique qui donnent lieu à des transitions d'état interne dont résulte en particulier l'effet de refroidissement. Un travail théorique était donc nécessaire pour appliquer les modèles de transport étudiés en physique statistique aux réseaux optiques dissipatifs. C'est principalement le travail que nous rapportons ici.

Approche théorique employée

Notre approche des problèmes soulevés ci-dessus est donc théorique. Plusieurs méthodes ont été proposées et mises en place dans le passé pour l'étude des réseaux optiques dissipatifs. Leur nature peut être séparée en deux classes : analytique ou numérique d'une part et semi-classique ou entièrement quantique d'autre part.

Du fait de la dynamique complexe des atomes dans un réseau optique dissipatif, les calculs analytiques *ab initio* sont souvent difficiles à mener, notamment lorsqu'on s'intéresse à des systèmes en dimension supérieure à un comme c'est notre cas. Par ailleurs, ces méthodes sont souvent des cas limites valables dans des domaines de paramètres trop restreints pour notre étude. Enfin, du fait de leur grande difficulté, peu de calculs analytiques ont été réalisés pour le transport dirigé de particules browniennes dans un potentiel périodique. Or notre système est, comme nous l'avons vu précédemment, sensiblement plus complexe. Toutes ces raisons nous ont conduits à employer souvent des *approches numériques*.

Nous avons utilisé des méthodes numériques de Monte-Carlo (semi-classiques ou quantiques selon les cas) qui donnent des résultats à la fois précis et rigoureux. Néanmoins, nous avons voulu privilégier les méthodes semi-classiques car d'une part elles sont significativement plus légères d'un point de vue numérique et d'autre part elles permettent des interprétations physiques directes plus simples que les méthodes quantiques. Les calculs quantiques ont été réservés aux cas où l'approche semi-classique n'est pas valable, c'est-à-dire essentiellement au voisinage du *décrochage* du réseau.

Le travail théorique que nous présentons dans ce mémoire a été réalisé en étroite collaboration avec les expériences réalisées principalement dans notre groupe à Paris [26, 27] mais aussi dans le groupe de Anders Kastberg à Stockholm [28, 29]. Une grande partie de nos résultats correspond à un système modèle pour une transition atomique simplifiée

$1/2 \rightarrow 3/2$. Ce modèle est connu pour très bien reproduire les observations expérimentales correspondant à des transitions réelles $J_g \rightarrow J_e = J_g + 1$. Dès lors, le crible de l'expérience a été non seulement stimulant mais aussi déterminant. Notre but a été principalement d'expliquer ou de prédire des résultats d'expériences au moyen de modèles physiques à la fois simples, précis et rigoureux.

Principaux résultats présentés dans le mémoire

Les descriptions aujourd'hui bien connues du refroidissement Sisyphe permettent de distinguer deux régimes de paramètres (*régime sautant* et *régime oscillant*) pour lesquels les comportements dynamiques des atomes sont très différents [30]. Chacun de ces cas limites a fait l'objet d'études théoriques très détaillées qui ont permis de dégager les phénomènes physiques dominants. Un travail théorique approfondi manquait néanmoins pour éclairer les zones d'ombre qui subsistent dans la description du refroidissement laser correspondant au régime intermédiaire. Or ce régime est particulièrement intéressant car c'est là que peuvent émerger les phénomènes de transport assistés par le bruit que nous avons mentionnés précédemment.

Nous avons réalisé la première étude théorique systématique du comportement macroscopique des atomes refroidis et piégés dans un réseau optique en configuration 3D-lin $\perp$ lin dans un large domaine de paramètres allant du régime sautant au régime oscillant. Ceci nous a permis de dégager le comportement de la *température cinétique* et de la *diffusion spatiale* du nuage qui en sont les caractéristiques principales. La température cinétique a un comportement très simple : elle dépend essentiellement de la profondeur du potentiel optique et très peu du désaccord des faisceaux lasers ou de la géométrie (angle) du réseau optique. Une propriété plus surprenante que nous avons mise en évidence est l'anisotropie de la température du réseau 3D-lin $\perp$ lin (avec $T_{x,y} > T_z$) que nous avons expliquée simplement en remarquant que la profondeur des puits de potentiel est elle-même anisotrope. La diffusion spatiale a, quant à elle, un comportement radicalement différent dans les régimes sautant et oscillant. Nous avons compris ce comportement, d'une part à l'aide de considérations très générales sur la nature des régimes sautant et oscillant et d'autre part, à l'aide d'un modèle analytique reposant sur une description en termes de mouvement brownien généralisé. Nous insistons sur le fait que ce modèle est unique et s'applique pour l'ensemble du domaine de paramètres considéré. Les prédictions de ce modèle montrent un accord remarquable avec les résultats de nos simulations numériques.

Nous nous sommes par ailleurs intéressés au comportement microscopique des atomes dans le réseau. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence de deux classes de vitesse : un *mode froid* constitué des atomes de faible énergie et piégés dans les puits de potentiel et un *mode chaud* formés d'atomes plus énergétiques et pouvant voyager sur le paysage de potentiel optique. Nous avons montré que le comportement du nuage d'atomes est intimement lié à l'existence de ces deux modes. Ainsi avons-nous montré que la largeur des distributions de vitesse correspondant à chacun des deux modes décroît toujours avec la profondeur du potentiel, même lorsque le réseau commence à décrocher. Le *décrochage* s'explique par un transfert d'atomes depuis le mode froid vers le mode chaud, jusqu'à ce que l'"équilibre" soit rompu. Par ailleurs, seuls les atomes suffisamment énergétiques pour voyager au dessus

des collines de potentiel contribuent à la diffusion spatiale, les autres restant piégés. Cette propriété est cruciale dans notre modèle de mouvement brownien amélioré.

Forts de ce travail, nous nous sommes tournés vers l'étude des phénomènes de transport induits par le bruit pour lesquels le domaine intéressant correspond précisément au régime intermédiaire où les temps typiques du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs sont du même ordre de grandeur. Nous avons ainsi identifié et caractérisé des *modes de propagation Brillouin* qui correspondent au transport collectif des atomes sur des distances égales à plusieurs puits de potentiel optique. Nous avons identifié deux mécanismes d'excitation de ces modes, tous deux induits par une modulation en mouvement du potentiel optique. Ces mécanismes impliquent une subtile imbrication de phases de mouvement hamiltonien sur les courbes de potentiel et de processus dissipatifs liés au pompage optique. L'étude de l'influence de ces processus dissipatifs à potentiel optique inchangé nous a permis de mettre en évidence le phénomène de *résonance stochastique*. Celui-ci correspond à l'excitation résonante des modes Brillouin lorsque le mouvement hamiltonien et les processus dissipatifs sont précisément "synchronisés". Cette propriété a été démontrée à l'aide d'une étude des comportements macroscopiques et microscopiques des atomes dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin. Nous avons finalement commencé l'étude d'un *rochet temporel*, équivalent dans le domaine temporel du fameux rochet de Feynman. Nous avons ainsi mis en évidence l'induction d'un mouvement dirigé des atomes dans le réseau optique par la brisure de la symétrie temporelle du système.

Ces études des processus de transport induits par le bruit (phénomènes dissipatifs) font le lien entre la physique atomique et la physique statistique non linéaire. Nous pensons que l'emploi de systèmes d'atomes froids, et plus particulièrement de réseaux optiques, pour l'étude détaillée de ces phénomènes a un grand avenir. Ceci parce que, contrairement à ce qui se passe dans de nombreux systèmes considérés généralement dans les modèles de physique non linéaire, les physiciens atomistes disposent de techniques expérimentales de manipulation et de mesure des nuages d'atomes à un degré de précision inégalé.

Organisation du mémoire

Le manuscrit est divisé en trois parties essentiellement indépendantes abordant des aspects différents de la dynamique des atomes dans un réseau optique dissipatif.

Dans la partie I, nous présentons le refroidissement Sisyphe à l'œuvre dans les réseaux optiques dissipatifs et nous décrivons les méthodes d'étude théorique de ces réseaux. Le chapitre I.1 est consacré à la présentation de l'interaction lumière-matière dans le cadre du refroidissement laser des particules neutres. Nous introduisons le mécanisme de refroidissement Sisyphe et décrivons les réseaux optiques dissipatifs usuels. Nous portons une attention particulière au réseau 3D-lin $\perp$ lin auquel il sera beaucoup fait référence dans la suite du manuscrit. Dans le chapitre I.2, nous présentons les méthodes d'étude théoriques avec un intérêt particulier pour les méthodes de Monte-Carlo quantique et semi-classique dont nous avons fait grand usage dans notre travail.

Dans la partie II, nous étudions la dynamique des atomes dans un réseau optique dissipatif en configuration lin $\perp$ lin avec un intérêt particulier pour les conséquences de l'anisotropie du réseau. Le domaine des paramètres de réseau étudié fait le lien entre les

régimes sautant et oscillant. Le chapitre II.1 présente une étude détaillée de la température cinétique et des distributions de vitesses des atomes et en particulier des conséquences de l'aspect non thermodynamique de la température dans le refroidissement Sisyphe. Nous étudions au chapitre II.2 les phénomènes de *transport spontanés* dans le réseau. Ceux-ci consistent en une diffusion spatiale dont nous décrivons les caractéristiques dans divers régimes de paramètres. Nous discutons notamment la possibilité de décrire la dynamique des atomes en termes de mouvement brownien.

L'étude du *transport stimulé dirigé* dans un réseau optique dissipatif fait l'objet de la partie III. Nous y présentons en particulier l'étude des effets non linéaires de transport induits par le bruit que nous avons introduits ci-dessus. Le chapitre III.1 est consacré à l'analyse des mécanismes donnant naissance aux modes de propagation dans le réseau optique. Ceux-ci consistent en un mouvement collectif des atomes à travers le réseau. Nous montrons au chapitre III.2 que le mécanisme d'excitation de ces modes présente un caractère résonant en fonction du niveau de bruit (phénomène de résonance stochastique). Enfin, nous montrons au chapitre III.3 que la brisure de la symétrie spatio-temporelle dans un réseau 1D-lin $\perp$ lin permet la rectification du bruit en un mouvement dirigé déterministe (effet rochet atomique).

Avertissement

Le manuscrit traite des phénomènes de transport dans les réseaux optiques dissipatifs et forme un tout indivisible. Il présente néanmoins divers aspects qui correspondent aux différents chapitres. Partant du constat qu'une thèse est rarement lue d'un trait, nous avons essayé autant que possible de rendre les chapitres indépendants les uns des autres. Afin de faciliter une lecture non linéaire du manuscrit, nous avons introduit une liste des notations en annexe ainsi qu'un index des principales notions à la fin du manuscrit.

Chaque chapitre s'achève par une conclusion où nous résumons les principaux résultats présentés plus en détails dans le chapitre en question. Notre ambition est qu'une lecture des seules introduction et conclusion de chaque chapitre donne une vision générale du contenu. Il est néanmoins bien entendu que la lecture du chapitre entier donnera les informations nécessaires à la compréhension des résultats obtenus¹.

Les références suivent le code suivant : [n] désigne une référence dont la liste se trouve page 247; [II.2.1.2] désigne une partie, un chapitre, un paragraphe, etc ...; (I.2.3) désigne la troisième formule du chapitre 2 de la partie I; III.3.5 désigne la cinquième figure du chapitre 3 de la partie III.

¹Il n'est donc pas interdit de lire le chapitre entier !

Partie I:

**REFROIDISSEMENT SISYPHE ET
METHODES D'ETUDE
THEORIQUES**

Chapitre 1

Refroidissement Sisyphe et réseaux optiques dissipatifs

Nous introduisons dans ce chapitre le mécanisme de refroidissement Sisyphe [21, 22] ainsi que les réseaux optiques dissipatifs [31, 7, 8] qui en résultent et qui se trouvent au cœur des études rapportées dans le présent mémoire. Nous nous attachons dans ce chapitre à présenter une description physique du mécanisme de refroidissement adaptée aux réseaux optiques multidimensionnels à l'aide d'idées aussi simples que possible. Une description plus technique et plus complète, adaptée notamment à des simulations numériques rigoureuses, sera présentée au chapitre suivant.

Nous décrivons tout d'abord au paragraphe I.1.1 le formalisme de l'interaction entre lumière (champ laser et modes du vide) et matière (atome à deux niveaux dégénérés) adapté à l'étude du refroidissement laser [32-35]. Un certain nombre d'approximations successives permet une description pratique et fructueuse des mécanismes de base résultant de cette interaction [30]. *In fine*, la dynamique est essentiellement gouvernée par des déplacements lumineux, différents pour chaque état atomique interne et associés à des énergies potentielles différentes, ainsi que par des mécanismes de pompage optique induisant des transitions entre ces niveaux [30]. Nous décrivons ensuite au paragraphe I.1.2 le mécanisme Sisyphe proprement dit dans la version monodimensionnelle 1D-lin⊥lin introduite pour la première fois en 1989 par Jean Dalibard et Claude Cohen-Tannoudji [21] d'une part et par l'équipe de Steven Chu [22] d'autre part. Ce mécanisme résulte, dans une configuration adéquate des faisceaux lasers de refroidissement, de l'imbrication de la modulation spatiale des potentiels lumineux et des probabilités de pompage optique, conduisant à la fois au refroidissement et au piégeage des atomes dans des structures spatialement périodiques (réseaux optiques). Dans ce même paragraphe, nous présentons la généralisation de la configuration monodimensionnelle à la configuration multidimensionnelle 3D-lin⊥lin [36] et rappelons les caractéristiques essentielles des structures ainsi obtenues : les réseaux optiques dissipatifs. Enfin, nous survolons au paragraphe I.1.3 des structures voisines des réseaux optiques traditionnels qui, en particulier, illustrent la flexibilité et la généralité du mécanisme de refroidissement Sisyphe [8].

Dans le but de ne pas alourdir inutilement ce chapitre, nous n'aborderons pas ici les méthodes d'investigation des réseaux optiques. Les méthodes d'étude théorique sont décrites

au chapitre I.2 et les méthodes expérimentales sont introduites succinctement à l'annexe B. Nous renvoyons le lecteur aux références [37, 38] pour une description des techniques expérimentales.

1.1 Description de l'interaction lumière-matière adaptée au refroidissement laser à basse intensité

1.1.1 Equations de Bloch optiques

Nous considérons ici un ensemble d'atomes décrits comme possédant deux niveaux électroniques $|g\rangle$ (fondamental) et $|e\rangle$ (excité) pourvus d'une structure Zeeman et sans interactions mutuelles. Les atomes sont placés dans un champ lumineux modulé spatialement et temporellement $\vec{E}_L(\vec{r}, t)$. La validité de ce modèle d'atome à deux niveaux repose sur deux hypothèses. D'une part la fréquence du champ lumineux doit être proche de la fréquence de Bohr de la transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ et éloignée des autres transitions, de manière à ce que $|g\rangle$ et $|e\rangle$ ne soient couplés quasiment qu'entre eux par l'interaction avec la lumière. D'autre part la désexcitation radiative de l'état excité doit se produire dans l'état fondamental, c'est à dire que l'interaction avec le vide ne couple encore $|g\rangle$ et $|e\rangle$ qu'entre eux¹.

Le système quantique que nous étudions est ainsi formé de deux parties en interaction : l'atome d'une part et le champ de rayonnement d'autre part. Il s'agit d'un système fermé donc son évolution est hamiltonienne. Le hamiltonien est formé de trois parties correspondant au hamiltonien propre de chaque sous-système et au hamiltonien d'interaction. Nous décrivons à présent chaque partie.

- Le hamiltonien propre à l'atome est formé de l'opérateur énergie cinétique du centre de masse atomique et du hamiltonien atomique interne rendant compte de l'interaction de ses constituants (noyau et électrons) [39] :

$$\mathbf{H}_{\text{at}} = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \hbar\omega_{\text{at}} \sum_{|m| \leq J_e} |e, m\rangle \langle e, m| \quad (\text{I.1.1})$$

où $\vec{p}$, M et ω_{at} sont respectivement l'opérateur impulsion de l'atome, sa masse et la pulsation de Bohr de la transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$. Les états $(|g, m\rangle)_{-J_g \leq m \leq J_g}$ et $(|e, m\rangle)_{-J_e \leq m \leq J_e}$ sont les sous-niveaux Zeeman, respectivement de l'état fondamental et de l'état excité.

- Le hamiltonien propre au rayonnement est quant à lui formé de la somme des hamiltoniens indépendants de ses modes photoniques [32] :

$$\mathbf{H}_{\text{R}} = \sum_l \hbar\omega_l \left\{ \mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{a}_l + \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{I.1.2})$$

¹Dans la pratique, la première condition est réalisable alors que la seconde réduit considérablement la gamme des atomes utilisables. Dans ce cas on utilise un repompeur qui compense les pertes radiatives vers les autres états atomiques (voir l'annexe B).

où $\mathbf{a}_l$ et $\mathbf{a}_l^\dagger$ sont les opérateurs annihilation et création d'un photon du mode l (de pulsation ω_l).

- L'interaction de l'atome avec le champ de rayonnement peut être décrite dans l'approximation dipolaire électrique [32]². Celle-ci peut alors être décomposée en une interaction avec le champ lumineux, macroscopique en termes de nombres de photons et non quantifié, ($V_{AL} = -\vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_L$ où $\vec{\mathbf{D}}$ est l'opérateur dipôle électrique) et une interaction avec les modes du vide ($V_{AV} = -\vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_\perp$ où $\vec{\mathbf{E}}_\perp$ est le champ électrique transverse quantifié correspondant à l'expansion des modes du vide). Le champ de rayonnement est alors décrit comme vide $|R: 0\rangle$ [35] :

$$V_{AR} = V_{AL} + V_{AV} . \quad (\text{I.1.3})$$

Notons que le terme V_{AL} est un terme hamiltonien pour le sous-système {atome} qui peut être inclus dans l'expression de $\mathbf{H}_{at}$ (équation (I.1.1)) alors que le terme V_{AV} induit un couplage entre les sous-systèmes {atome} et {champ du vide}, responsable des phénomènes d'émission spontanée.

Le diagramme de la figure I.1.1 résume les interactions du système {atome-champ}.

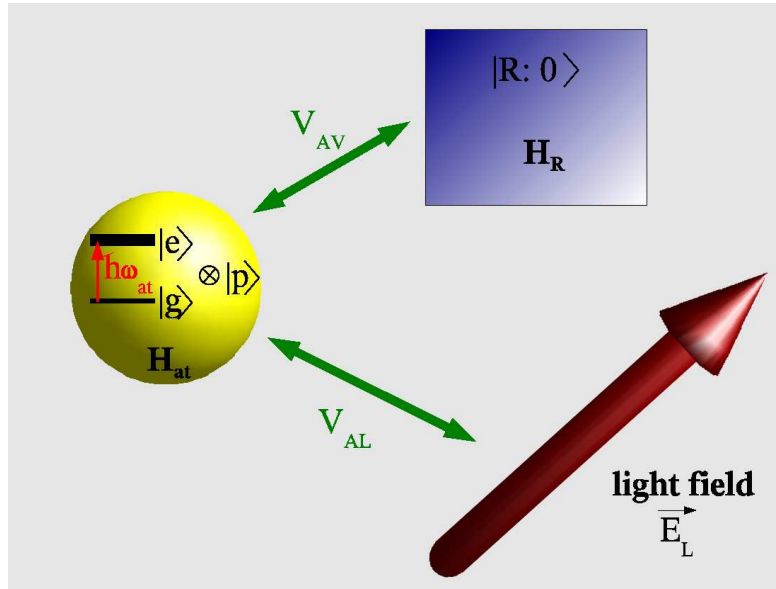


Figure I.1.1: Diagramme des interactions du système {atome-champ du vide}.

L'opérateur dipôle électrique agit dans l'espace des états atomiques internes et ne couple un état excité qu'avec un état fondamental (et réciproquement) de sorte qu'il peut être écrit sous la forme [30] :

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}}^+ + \vec{\mathbf{D}}^- \quad (\text{I.1.4})$$

²Cette approximation est justifiée par le fait que le mouvement relatif de l'électron par rapport au noyau atomique a une extension faible devant la longueur d'onde optique du champ lumineux.

où $\vec{D}^+$ (partie montante de l'opérateur dipôle) et $\vec{D}^-$ (partie descendante) sont des opérateurs hermitiques conjugués agissant du sous-espace $|g\rangle$ vers le sous-espace $|e\rangle$ pour ce qui concerne $\vec{D}^+$ et de $|e\rangle$ vers $|g\rangle$ pour $\vec{D}^-$. De plus, $\vec{D}$ a la symétrie vectorielle, de sorte que, comme l'indique le théorème de Wigner-Eckart [40, 41], l'interaction de l'atome avec un photon polarisé σ^+ ($q = 1$), π ($q = 0$) ou σ^- ($q = -1$) s'écrit simplement en fonction des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle J_e, m' | J_g, 1, m, q \rangle$:

$$\langle J_e, m' | \vec{e}_q \cdot \vec{D}^+ | J_g, m \rangle = \mathcal{D} \langle J_e, m' | J_g, 1, m, q \rangle \quad (\text{I.1.5})$$

où $\mathcal{D}$ est le moment dipolaire réduit et

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\pm} &= \frac{\mp \vec{e}_x - i \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_0 &= \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{I.1.6})$$

est la base sphérique des vecteurs élémentaires de polarisation. Nous poserons pour la suite

$$cg_q(m) = \langle J_e, m + q | J_g, 1, m, q \rangle \quad \forall q \in \{0, \pm 1\} \quad (\text{I.1.7})$$

(voir la figure I.1.2).

Les champs de lumière $\vec{E}_L$ et du vide $\vec{E}_{\perp}$ peuvent alors être décomposés dans cette base. Il s'ensuit que les coefficients de Clebsch-Gordan, spécifiques des moments angulaires de la transition atomique, suffisent à décrire les forces relatives des couplages de l'atome avec le champ de rayonnement *via* ses composantes σ^+ , π et σ^- .

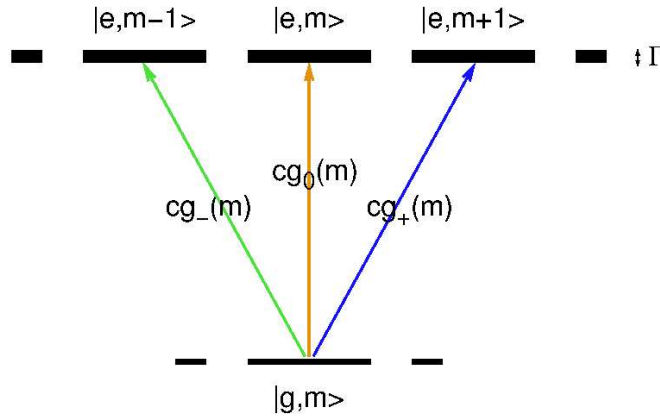


Figure I.1.2: Modèle de l'atome à deux niveaux avec structure Zeeman. Les flèches indiquent les couplages par les différentes composantes du champ lumineux ($\nearrow$: σ^+ , $\uparrow$: π , $\nwarrow$: σ^-); les nombres représentent les coefficients de Clebsch-Gordan relatifs aux couplages correspondants.

A ce stade, seule l'évolution du sous-système {atome} nous intéresse. Nous décrivons alors

celle-ci dans le formalisme général d'un système quantique couplé à un réservoir (formé ici par les modes du champ électromagnétique du vide) [33]. L'évolution de la matrice densité ρ de l'atome est régie par les équations de Bloch optiques (OBE) généralisées [33, 42] :

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{g,g}}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \rho_{g,g} \right] + \frac{i\mathcal{D}\vec{E}_L(\vec{r}, t)}{\hbar} \cdot \left[\vec{d}^- \rho_{e,g} - \rho_{g,e} \vec{d}^+ \right] + \\
&\quad + \frac{3\Gamma}{8} \int_{|\vec{\kappa}|=\frac{\omega_{\text{at}}}{c}} \frac{d^2\vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|^2} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{\kappa}} \left(\vec{\epsilon}^* \cdot \vec{d}^- \right) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \rho_{e,e} e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \left(\vec{\epsilon} \cdot \vec{d}^+ \right) \\
\frac{d\rho_{e,e}}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \rho_{e,e} \right] + \frac{i\mathcal{D}\vec{E}_L(\vec{r}, t)}{\hbar} \left[\vec{d}^+ \rho_{g,e} - \rho_{e,g} \vec{d}^- \right] + \\
&\quad - \Gamma \rho_{e,e} \\
\frac{d\rho_{e,g}}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \rho_{e,g} \right] - i\omega_{\text{at}} \rho_{e,g} + \frac{i\mathcal{D}\vec{E}_L(\vec{r}, t)}{\hbar} \left[\vec{d}^+ \rho_{g,g} - \rho_{e,e} \vec{d}^+ \right] + \\
&\quad - \frac{\Gamma}{2} \rho_{e,g}
\end{aligned} \tag{I.1.8}$$

où $\rho_{\mu,\nu} = \langle \mu | \rho | \nu \rangle$, $\vec{d}^\pm = \vec{D}^\pm / \mathcal{D}$ sont les parties montante et descendante du moment dipolaire réduit, Γ est le taux d'émission spontanée et $\vec{r}$ est l'opérateur position de l'atome. L'évolution de la matrice densité atomique est ainsi composée de deux parties :

- une partie hamiltonienne (première ligne de chaque égalité) formée de l'énergie cinétique, l'énergie de la transition atomique et l'interaction {atome-champ lumineux} par le biais de l'absorption et l'émission induite de photons du champ lumineux.
- une partie non hamiltonienne (deuxième ligne de chaque égalité) qui décrit l'interaction {atome-champ du vide}. Celle-ci correspond à un terme de relaxation homogène (sur tous les sous-niveaux Zeeman) de l'état excité au taux Γ et des cohérences au taux $\Gamma/2$, et à un remplissage inhomogène de l'état fondamental depuis l'état excité par le biais d'émission spontanée de photons de vecteur d'onde $\vec{\kappa}$ et de polarisation $\vec{\epsilon}$.

1.1.2 L'approximation dite séculaire ou du champ tournant.

Dans les cas usuels d'expériences de refroidissement laser, le champ lumineux est formé de l'interférence de faisceaux lasers de même pulsation ω_L proche de la pulsation de Bohr atomique ω_{at} (voir les paragraphes suivants). Dans ce cas, il est commode d'écrire le champ lumineux (que nous appellerons dorénavant champ laser) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\vec{E}_L(\vec{r}, t) &= \frac{E_0}{2} \left\{ \vec{\xi}^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \vec{\xi}^-(\vec{r}) e^{i\omega_L t} \right\} \\
\text{avec} \quad \vec{\xi}^+(\vec{r}) &= \xi_-(\vec{r}) \vec{e}_- + \xi_0(\vec{r}) \vec{e}_0 + \xi_+(\vec{r}) \vec{e}_+
\end{aligned} \tag{I.1.9}$$

où $E_0|\vec{\xi}^\pm|$ est l'amplitude locale et $\vec{\xi}^+ / |\vec{\xi}^+|$ est le vecteur polarisation locale du champ laser³. En reportant cette expression dans les OBE (I.1.8), on fait apparaître des termes oscillant aux pulsations $\pm\omega_L$. Comme les cohérences $\rho_{e,g}$ et $\rho_{g,e}$ oscillent typiquement aux pulsations $-\omega_{at}$ et $+\omega_{at}$ respectivement, dans le cas de lasers proches de résonance où

$$\begin{aligned}\Delta &= \omega_L - \omega_{at} \\ &\ll \omega_{at}, \omega_L,\end{aligned}\tag{I.1.10}$$

des termes quasi-résonants et des termes anti-résonants apparaissent dans les équations (I.1.8). En ne conservant que les premiers (approximation dite *séculaire* ou du *champ tournant*), on aboutit finalement à une forme simplifiée des OBE qui ne font plus intervenir de dépendance explicite en temps :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{g,g}}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \rho_{g,g} \right] - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{V}_{AL}^-(\vec{r}) \tilde{\rho}_{e,g} - \tilde{\rho}_{e,g} \mathbf{V}_{AL}^+(\vec{r})] + \\ &\quad + \frac{3\Gamma}{8} \int_{|\vec{\kappa}|=\frac{\omega_{at}}{c}} \frac{d^2\vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|^2} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{\kappa}} (\vec{\epsilon}^* \cdot \vec{d}^-) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \rho_{e,e} e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{d}^+) \\ \frac{d\rho_{e,e}}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \rho_{e,e} \right] - i [\mathbf{V}_{AL}^+(\vec{r}) \tilde{\rho}_{g,e} - \tilde{\rho}_{g,e} \mathbf{V}_{AL}^-(\vec{r})] - \Gamma \rho_{e,e} \\ \frac{d\tilde{\rho}_{e,g}}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \tilde{\rho}_{e,g} \right] - i [\mathbf{V}_{AL}^+ \rho_{g,g} - \rho_{e,e} \mathbf{V}_{AL}^+] - \left(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta \right) \tilde{\rho}_{e,g}.\end{aligned}\tag{I.1.11}$$

Dans cette expression, nous avons posé

$$\tilde{\rho}_{e,g} = \rho_{e,g} e^{i\omega_L t} \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}_{g,e} = \rho_{g,e} e^{-i\omega_L t}\tag{I.1.12}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AL}^\pm(\vec{r}) &= \frac{\hbar\Omega_0}{2} \vec{\xi}^\pm \cdot \vec{d}^\pm(\vec{r}) \\ \text{où } \Omega_0 &= -\mathcal{D}E_0/\hbar.\end{aligned}\tag{I.1.13}$$

Ω_0 est la pulsation de Rabi pour un atome dans un champ électrique monochromatique polarisé d'amplitude E_0 , à résonance et pour un coefficient de Clebsch-Gordan égal à 1. Notons que dans le cadre de l'approximation séculaire, $\mathbf{V}_{AL} = \mathbf{V}_{AL}^+ + \mathbf{V}_{AL}^-$, $\mathbf{V}_{AL}^+$ et $\mathbf{V}_{AL}^-$ représentent respectivement les parties montante et descendante de l'interaction atome-champ laser.

³Il existe évidemment une infinité de façons de définir E_0 et $\vec{\xi}^\pm$. En pratique nous prendrons $|\vec{\xi}^\pm| \sim 1$ de manière à ce que E_0 représente l'amplitude typique du champ laser.

1.1.3 Elimination adiabatique de l'état excité

Nous nous limitons à présent au régime de faible saturation (faible intensité ou grand désaccord du champ laser) :

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{\Omega_0^2/2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \\ &\ll 1 \end{aligned} \quad (\text{I.1.14})$$

pour lequel l'état excité va être faiblement peuplé. Nous nous intéressons par ailleurs à des mécanismes de refroidissement sub-Doppler pour lesquels l'énergie cinétique des atomes reste faible :

$$\frac{\langle \vec{p}^2 \rangle}{2M} \ll \hbar \Gamma . \quad (\text{I.1.15})$$

Dans ce cas, le terme d'énergie cinétique est négligeable devant le terme de relaxation dû à l'émission spontanée dans les équations d'évolution de l'état excité $\rho_{e,e}$ et des cohérences réduites $\tilde{\rho}_{e,g}$ et $\tilde{\rho}_{g,e}$ (deux dernières égalités de l'équation (I.1.11))⁴. Dans le régime de faible saturation (équation (I.1.14)), l'état fondamental évolue lentement par rapport à l'état excité et aux cohérences qui relaxent au taux typique Γ . Ainsi, c'est $\rho_{g,g}$ qui impose le temps typique d'évolution (grand devant $1/\Gamma$) alors que $\rho_{e,e}$ et $\tilde{\rho}_{e,g}$ suivent en s'adaptant adiabatiquement à la valeur instantanée de $\rho_{g,g}$ de sorte que

$$d\rho_{e,e}/dt \ll \Gamma \rho_{e,e} \quad \text{et} \quad d\tilde{\rho}_{e,g}/dt \ll \Gamma \tilde{\rho}_{e,g} . \quad (\text{I.1.16})$$

L'intégration de l'équation d'évolution de l'état excité et des cohérences est alors immédiate :

$$\begin{aligned} \rho_{e,e} &= \frac{V_{\text{AL}}^+ (\vec{r}) \rho_{g,g} V_{\text{AL}}^- (\vec{r})}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \\ \tilde{\rho}_{e,g} &= \frac{V_{\text{AL}}^+ (\vec{r}) \rho_{g,g}}{\Delta + i\Gamma/2} . \end{aligned} \quad (\text{I.1.17})$$

Enfin, en substituant $\rho_{e,e}$ et $\tilde{\rho}_{e,g}$ par leurs valeurs stationnaires (I.1.17) dans la première égalité des OBE simplifiées (I.1.11) et en posant $\sigma = \rho_{g,g}$, il reste pour la dynamique de l'état fondamental

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{-i}{\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M} + \hbar \Delta'_0 \Lambda (\vec{r}), \sigma \right] - \frac{\Gamma'_0}{2} \left\{ \Lambda (\vec{r}), \sigma \right\} + \\ &+ \frac{3\Gamma'_0}{8\pi} \int_{|\vec{\kappa}|=\frac{\omega_{\text{at}}}{c}} \frac{d^2 \vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|^2} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{\kappa}} \Pi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}} (\vec{r}) \sigma \Pi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}} (\vec{r})^\dagger \end{aligned} \quad (\text{I.1.18})$$

⁴Le terme d'énergie cinétique dans l'évolution de l'état fondamental n'est pas, quant à lui, nécessairement négligeable car le terme de remplissage depuis l'état excité faiblement peuplé, d'ordre $\Gamma \rho_{e,e}$, est faible devant $\Gamma \rho_{g,g}$.

où

$$\Delta'_0 = \Delta \frac{s_0}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma'_0 = \Gamma \frac{s_0}{2} \quad (\text{I.1.19})$$

sont respectivement les déplacement lumineux et taux de pompage optique pour un atome dans un champ électrique monochromatique polarisé d'amplitude E_0 et pour un coefficient de Clebsch-Gordan égal à 1 [33], et

$$\mathbf{\Lambda} = \left[\vec{\xi}^- \cdot \vec{d}^- \right] \cdot \left[\vec{\xi}^+ \cdot \vec{d}^+ \right] \quad (\text{I.1.20})$$

$$\mathbf{\Pi}_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}} = \left[e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon}^* \cdot \vec{d}^- \right] \cdot \left[\vec{\xi}^+ \cdot \vec{d}^+ \right] \quad (\text{I.1.21})$$

sont des opérateurs de redistribution de photons par l'atome : absorption d'un photon laser suivie de, respectivement, l'émission d'un photon induit (opérateur $\mathbf{\Lambda}$) ou d'un photon spontané de vecteur d'onde $\vec{\kappa}$ et de polarisation $\vec{\epsilon}$ (opérateur $\mathbf{\Pi}_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}$).

L'équation maîtresse (I.1.18) confirme l'évolution lente de σ à l'échelle de $1/\Gamma$ si la condition (I.1.14) est vérifiée.

1.1.4 Déplacements lumineux et pompage optique

L'élimination des variables rapides du problème (état excité et cohérences) conduit comme nous l'avons vu au paragraphe précédent à la réduction de la dynamique atomique à l'état fondamental, ce qui a deux conséquences essentielles. D'une part, la simplification importante du modèle physique permet une interprétation raisonnablement facile et particulièrement fructueuse des équations de la dynamique. D'autre part, les temps typiques d'évolution des variables internes ne sont plus de l'ordre de $1/\Gamma$ mais beaucoup plus grands, ce qui conduit à un gain de temps de calcul considérable dans les simulations numériques [I.2.3, I.2.2]. L'équation maîtresse de la dynamique atomique réduite à l'état fondamental (I.1.18) suffit donc à décrire le comportement des atomes dans le champ laser. Son importance est capitale dans toute la suite et nous en analysons maintenant le sens physique.

Potentils optiques - L'équation maîtresse (I.1.18) fait tout d'abord intervenir un terme hamiltonien contenant l'énergie cinétique et une énergie potentielle qui dépend uniquement de l'opérateur position et qui correspond à la partie réactive de l'interaction {atome-champ de rayonnement}. $\hbar\Delta'_0\mathbf{\Lambda}$ est donc un opérateur de déplacement (lumineux) des sous-niveaux Zeeman du fondamental [33]. Notons que cet opérateur induit des déplacements dépendant de la position de l'atome et du sous-niveau Zeeman⁵. Ainsi les atomes évoluent-ils dans un potentiel effectif $\hbar\Delta'_0\mathbf{\Lambda}(\vec{r})$ lié à la redistribution de photons lasers. La topologie du potentiel traduit la figure d'interférence des faisceaux lasers via les vecteurs $\vec{\xi}^\pm$ alors que la profondeur du potentiel est proportionnelle à l'intensité du champ laser E_0^2 . On appelle potentiels optiques les éléments diagonaux de l'opérateur local $\hbar\Delta'_0\mathbf{\Lambda}(\vec{r})$ (associés à des états externes parfaitement localisés spatialement) écrit dans une base appropriée (éventuellement locale) du sous-espace des degrés de liberté internes de l'atome⁶.

⁵Voir [I.1.2.2] pour des exemples explicites de potentiels optiques.

⁶Nous verrons plus en détail comment choisir cette base dans le cadre de l'approximation semi-classique au chapitre I.2.

Pompage optique - Les deux derniers termes de l'équation (I.1.18) décrivent la partie dissipative de l'interaction {atome-champ de rayonnement} et correspondent aux processus de pompage optique entre les sous-niveaux Zeeman du fondamental [1, 44]. Ces processus couplent les différents sous-niveaux du fondamental par l'intermédiaire de cycles d'absorption et réémission de photons. Il s'ensuit des transferts de population entre ces sous-niveaux. L'opérateur des déplacements lumineux $\mathbf{\Lambda}$ étant hermitique positif, il est clair que l'anti-commutateur est un terme de vidage de l'état fondamental. Plus précisément, l'état interne $|\phi(\vec{r})\rangle$ localement propre pour $\mathbf{\Lambda}(\vec{r})$ relaxe au taux $\Gamma'_0 \langle \phi | \mathbf{\Lambda} | \phi \rangle$. Le terme d'intégration sur les photons spontanés correspond quant à lui à un remplissage au taux $\frac{3\Gamma'_0}{8\pi} \int \frac{d^2\vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|} \sum_{\vec{\epsilon}} |\langle \phi | \mathbf{\Pi}_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}} | \phi' \rangle|^2$ depuis les sous-niveaux internes $|\phi'\rangle$. Notons enfin que la relation de fermeture

$$\frac{3}{8\pi} \int_{|\vec{\kappa}|=\frac{\omega_{\text{at}}}{c}} \frac{d^2\vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|^2} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{\kappa}} [\vec{\epsilon} \cdot \vec{d}^+] \cdot [\vec{\epsilon}^* \cdot \vec{d}^-] = 1 \quad (\text{I.1.22})$$

assure la conservation de la probabilité ($\text{tr}_{\text{ext,int}}(\sigma) = \text{cte} = 1 - \text{tr}_{\text{ext,int}}(\rho_{e,e}) \simeq 1$).

Ici, comme $|\vec{\xi}^\pm|$ et les coefficients de Clebsch-Gordan sont de l'ordre de 1, Δ'_0 et Γ'_0 représentent respectivement les valeurs typiques des potentiels optiques et des taux de pompage optique.

Il convient enfin d'indiquer que la description quantique ci-dessus tient naturellement compte du recul subi par l'atome lors de l'absorption ou de l'émission de photons et donc de la pression de radiation des lasers. Le terme explicite correspondant à l'émission de photons spontanés apparaît directement dans l'opérateur $\mathbf{\Pi}_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}$ sous la forme d'un opérateur $e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}$ correspondant à la translation de vecteur $\hbar\vec{\kappa}$ dans l'espace des impulsions. Le terme correspondant à l'absorption et à l'émission induite de photons apparaît quant à lui implicitement dans la décomposition de Fourier spatiale des vecteurs $\vec{\xi}^\pm(\vec{r})$.

1.2 Refroidissement Sisyphe à basse intensité

Nous décrivons ici le mécanisme sub-Doppler le plus courant (refroidissement Sisyphe) dans les configurations à polarisations linéaires croisées monodimensionnelles (1D) et tridimensionnelles (3D)⁷. Par soucis de clarté et de concision, nous n'abordons pas ici le cas de l'autre mécanisme de refroidissement sub-Doppler : le refroidissement $\sigma^+ - \sigma^-$. Nous renvoyons le lecteur aux références [21, 30, 43] pour une description plus complète de ce mécanisme.

Le cas du refroidissement Sisyphe 1D est particulièrement simple et permet de cerner les phénomènes essentiels qui induisent le mécanisme Sisyphe. Comme nous le verrons, celui-ci consiste en une imbrication du mouvement hamiltonien sur les courbes de potentiel optique et des processus dissipatifs liés au pompage optique. Nous verrons comment les atomes sont à la fois refroidis et piégés dans des structures spatiales périodiques. Néanmoins, en pratique,

⁷D'autres configurations sont brièvement évoquées au paragraphe 1.3. Pour une revue complète des méthodes de refroidissement laser, voir les références [4, 45].

l'emploi de cette configuration est rendu difficile par les pertes dans les directions transverses le long desquelles il n'y a ni refroidissement, ni piégeage des atomes. Nous présentons alors la généralisation de cette configuration en dimension trois. Celle-ci est plus utile dans la pratique car le refroidissement et le piégeage ont lieu dans les trois directions de l'espace ce qui élimine les pertes transverses de la configuration 1D. D'autres configurations sont décrites au paragraphe I.1.3 et dans les références [36, 31, 8].

1.2.1 Potentiels optiques et pompage optique

Comme nous l'avons vu [I.1.1.4], la dynamique des atomes est décrite par le déplacement lumineux des sous-niveaux Zeeman et les taux de pompage optique entre ceux-ci. Nous les déterminons ici dans le cas des configurations où le champ lumineux ne possède pas de composante de polarisation π et pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ ⁸.

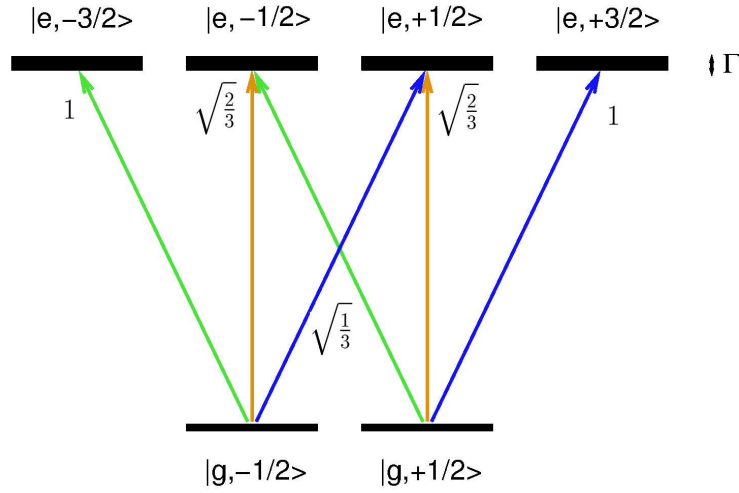


Figure I.1.3: Transition $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$ et forces relatives des couplages correspondants (coefficients de Clebsch-Gordan).

Potentils optiques - Dans un tel système (transition $1/2 \rightarrow 3/2$ dans un champ lumineux sans polarisation π : $\vec{\xi}^+ \cdot \vec{e}_0 = 0$), il n'y a pas de chemin (absorption puis émission induite) d'un sous-niveau Zeeman du fondamental à l'autre (voir la figure I.1.3), de sorte que l'opérateur des déplacements lumineux $\mathbf{\Lambda}$ ne couple pas $|g, +\rangle$ et $|g, -\rangle$. Par ailleurs, le chemin de $|g, \pm\rangle$ à lui-même se fait par l'intermédiaire de cycles de fluorescence faisant intervenir soit des photons polarisés $\sigma^\pm$ avec un coefficient de Clebsch-Gordan égal à 1, soit des photons polarisés $\sigma^\mp$ avec un coefficient de Clebsch-Gordan de $\sqrt{1/3}$ (voir la figure I.1.3).

⁸Cette configuration est très utilisée dans les descriptions théoriques car elle permet des calculs analytiques raisonnablement simples.

L'expression de $\mathbf{\Lambda}$ en découle immédiatement :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{array}{c} |+\rangle \\ |-\rangle \end{array} \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c} |+\rangle \\ |-\rangle \end{array} & \begin{array}{c} |+\rangle \\ |-\rangle \end{array} \\ I_+ + \frac{1}{3}I_- & 0 \\ 0 & I_- + \frac{1}{3}I_+ \end{array} \right] \quad (\text{I.1.23})$$

où $I_q = \left| \vec{\xi}^+ \cdot \vec{e}_q \right|^2$ est l'intensité réduite du champ de polarisation q . Nous en déduisons les potentiels optiques

$$U_{\pm} = \hbar \Delta'_0 \left(I_{\pm} + \frac{1}{3}I_{\mp} \right). \quad (\text{I.1.24})$$

Pompage optique - Le pompage optique de $|g, \pm\rangle$ vers $|g, \mp\rangle$ s'effectue uniquement par l'intermédiaire de l'absorption d'un photon $\sigma^{\mp}$ avec un coefficient de Clebsch-Gordan égal à $\sqrt{1/3}$ suivi de l'émission spontanée d'un photon π avec un coefficient de Clebsch-Gordan égal à $\sqrt{2/3}$ (voir la figure I.1.3). Le taux de pompage optique de $|g, \pm\rangle$ vers $|g, \mp\rangle$ s'écrit donc simplement

$$\gamma_{\pm, \mp}(\vec{r}) = \frac{2\Gamma'_0}{9} I_{\mp}(\vec{r}). \quad (\text{I.1.25})$$

Ainsi, le pompage optique est modulé spatialement et peuple l'état $|g, \pm\rangle$ correspondant à la composante de lumière de polarisation $\sigma^{\pm}$ de poids maximal.

1.2.2 Configurations à polarisations linéaires croisées (lin $\perp$ lin)

Nous introduisons à présent les configurations “à polarisations linéaires croisées” les plus courantes propres à induire un effet de refroidissement de type Sisyphe.

La configuration 1D-lin $\perp$ lin

Pour la configuration 1D-lin $\perp$ lin, on éclaire un atome par deux faisceaux lasers contre-propageants de longueur d'onde λ , de polarisations linéaires orthogonales et de fréquence proche de la transition atomique (voir la figure I.1.4).

Moyennant un changement de l'origine spatiale et temporelle, les champs électriques associés aux faisceaux lasers peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_2 &= -E_0 \vec{e}_y \sin(kz + \omega t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.26})$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde des lasers, ce qui conduit, d'après l'équation (I.1.9) à

$$\vec{\xi}^+(z) = \sqrt{2} [\{-i \sin(kz)\} \vec{e}_+ + \{\cos(kz)\} \vec{e}_-]. \quad (\text{I.1.27})$$

Le champ laser présente donc une intensité lumineuse $\left| E_0 \vec{\xi}^+ \right|^2$ constante mais une polarisation le long de l'axe (Oz) variable, alternativement circulaire σ^- , linéaire, circulaire σ^+ , linéaire et ainsi de suite, comme indiqué sur la figure I.1.4. Ce gradient de polarisation joue

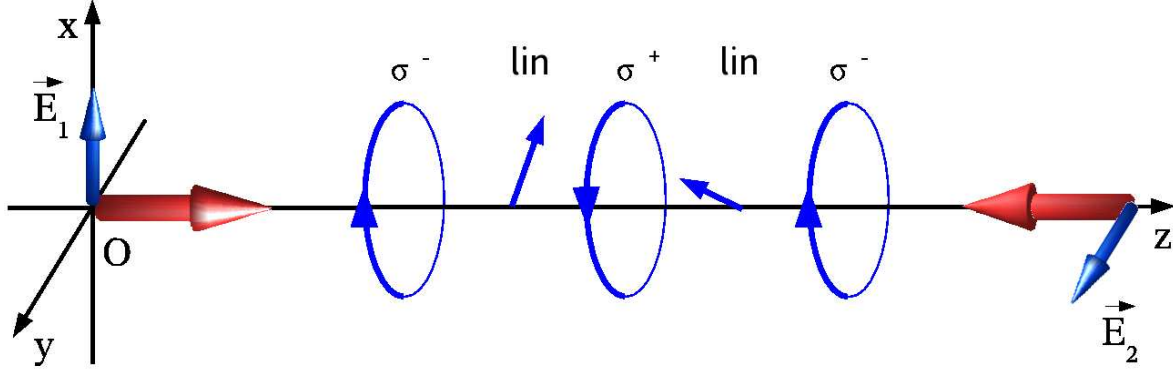


Figure I.1.4: Configuration 1D-lin⊥lin : deux faisceaux lasers contre-propageants de polarisations linéaires orthogonales créent un gradient de polarisation de la lumière alternativement circulaire σ^- , linéaire, circulaire σ^+ , linéaire, etc ...

un rôle essentiel dans le mécanisme de refroidissement Sisyphe, comme nous le verrons au paragraphe I.1.2.3.

Dans cette configuration 1D-lin⊥lin, nous obtenons facilement les potentiels optiques et les taux de pompage optique :

$$U_{\pm} = -\mathcal{U} \left[1 \mp \frac{\cos(2kz)}{2} \right]$$

$$\gamma_{\pm, \mp} = \frac{2\Gamma'_0}{9} [1 \pm \cos(2kz)] \quad (\text{I.1.28})$$

où $\mathcal{U} = 4\hbar |\Delta'_0|/3$ représente la profondeur des puits de potentiel. Ainsi, U_+ et U_- sont sinusoidaux, de période spatiale $\lambda/2$ et en opposition de phase. Le potentiel optique de l'atome est formé de puits de potentiel périodiquement espacés et polarisés alternativement σ^+ et σ^- . Enfin, une caractéristique importante des potentiels optiques est la fréquence de vibration $\Omega_v/2\pi$ au fond des puits [I.1.2.3]. Ici, en développant les formules (I.1.28) à l'ordre deux au voisinage du fond des puits, on trouve

$$\Omega_v = \sqrt{\frac{8\hbar k^2 |\Delta'_0|}{3M}}. \quad (\text{I.1.29})$$

Configuration à quatre faisceaux 3D-lin⊥lin

Plusieurs généralisations tridimensionnelles de la configuration 1D-lin⊥lin ont été proposées et étudiées. La plus naturelle consiste à réaliser une configuration 1D-lin⊥lin dans chaque direction de l'espace. Néanmoins, dans ce cas, la topologie du réseau dépend des phases relatives des faisceaux lasers qui doivent être contrôlées [I.1.3]. Une solution particulièrement élégante consistant à scinder chaque faisceau de la configuration 1D-lin⊥lin en deux faisceaux dans des directions orthogonales à leurs polarisations, a été proposée en

1992 par Gilbert Grynberg⁹. Cette configuration a été réalisée expérimentalement pour la première fois en 1993 (configuration 2D, [46]) et 1994 (configuration 3D, [47]) et est couramment utilisée dans de nombreux laboratoires en particulier dans les équipes de William D. Phillips à Gaithersburg et de Anders Kastberg à Stockholm.

La configuration 3D-lin $\perp$ lin (voir la figure I.1.5) consiste donc en deux paires de faisceaux lasers contre-propageants dans les plans (Oxz) et (Oyz) respectivement et polarisées selon y et x respectivement. Les faisceaux de chaque paire sont disposés de façon symétrique par rapport à l'axe (Oz) et leurs directions font des angles θ_x et θ_y respectivement avec (Oz) ; ils sont polarisés linéairement et parallèlement entre eux. Notons que la pression de radiation dans les directions x et y est automatiquement compensée pour des faisceaux de même intensité du fait de la symétrie du système en $\{x \leftrightarrow -x\}$ et $\{y \leftrightarrow -y\}$ mais qu'elle ne l'est dans la direction z que pour des angles θ_x et θ_y égaux.

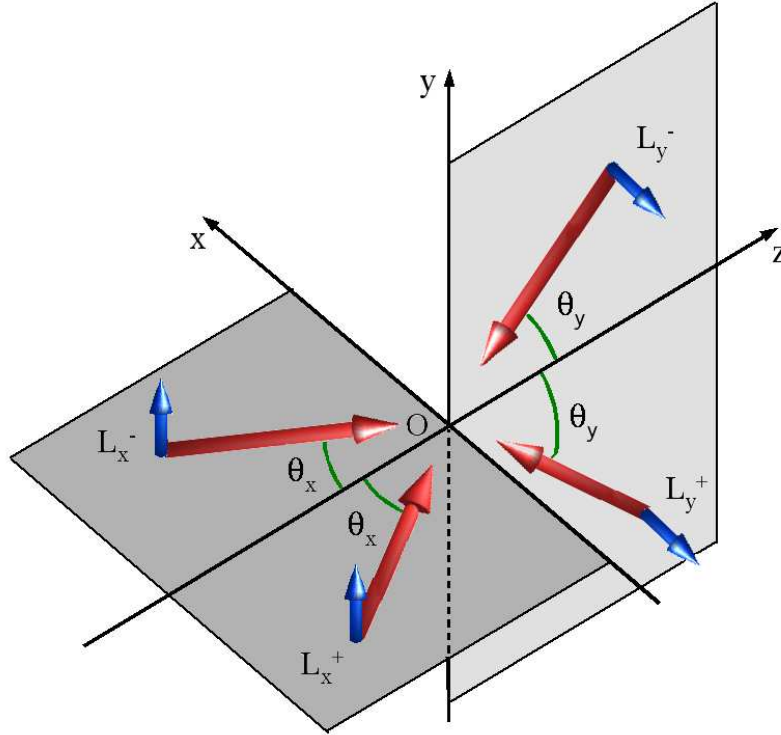


Figure I.1.5: Configuration 3D à quatre faisceaux lasers (3D-lin $\perp$ lin). Contrairement aux configurations à six faisceaux (figures I.1.9), la topologie du réseau dans cette configuration est indépendante des phases relatives des faisceaux lasers.

En posant

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta_x \\ k_y &= k \sin \theta_y \\ k_z &= k (\cos \theta_x + \cos \theta_y) \end{aligned} \quad k_{\pm} = k \frac{\cos \theta_x \pm \cos \theta_y}{2}, \quad (\text{I.1.30})$$

⁹La légende raconte que cette configuration fut découverte pendant l'été 1992, en dessinant sur le sable d'une plage dont l'histoire ne trahit pas le lieu [31].

les champs lasers s'écrivent

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_{\pm}^{(x)}} &= E_0 \overrightarrow{e_y} \sin [\pm k_x x + (k_+ + k_-) z - \omega t + \phi_{\pm x}] \\ \overrightarrow{E_{\pm}^{(y)}} &= E_0 \overrightarrow{e_x} \cos [\pm k_y y - (k_+ - k_-) z - \omega t + \phi_{\pm y}] .\end{aligned}\quad (\text{I.1.31})$$

La réduction du nombre de faisceaux à quatre en dimension trois permet alors, moyennant un changement de l'origine spatiale et temporelle du référentiel, de se ramener au cas des phases nulles¹⁰

$$\phi_{+x} = \phi_{-x} = \phi_{+y} = \phi_{-y} = 0, \quad (\text{I.1.32})$$

ce qui conduit, d'après l'équation (I.1.9), à

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\xi}^+ (\overrightarrow{r}) &= \sqrt{2} e^{ik_- z} \left[\left\{ \cos(k_x x) e^{ik_+ z} - \cos(k_y y) e^{-ik_+ z} \right\} \overrightarrow{e_+} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \cos(k_x x) e^{ik_+ z} + \cos(k_y y) e^{-ik_+ z} \right\} \overrightarrow{e_-} \right] .\end{aligned}\quad (\text{I.1.33})$$

Dans le cas où $\theta_x = \theta_y$ (i.e. $k_- = 0$), la symétrie $\{(x, z) \leftrightarrow (-y, -z)\}$ est claire sur la figure I.1.5 et les équations (I.1.31), ce qui induit une dynamique identique pour les directions x et y ¹¹. Par contre, la direction z est différente, ce qui peut conduire à une dynamique différente comme nous le verrons notamment dans la partie II de ce mémoire.

La détermination des potentiels optiques et des taux de pompage optique donnés par les équations (I.1.24) et (I.1.25) est alors immédiate :

$$\begin{aligned}U_{\pm} &= \frac{8\hbar\Delta'_0}{3} [\cos(k_x x)^2 + \cos(k_y y)^2 \mp \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z)] \\ \gamma_{\pm, \mp} &= \frac{4\Gamma'_0}{9} [\cos(k_x x)^2 + \cos(k_y y)^2 \pm 2 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z)] .\end{aligned}\quad (\text{I.1.34})$$

Des coupes de ces potentiels sont représentées sur la figure I.1.6.

Il apparaît clairement que les potentiels sont modulés périodiquement dans les trois directions de l'espace, avec des périodes anisotropes :

$$\lambda_{\mu} = 2\pi/k_{\mu} \quad \mu \in \{x, y, z\} . \quad (\text{I.1.35})$$

¹⁰Cette transformation est effectivement possible, car la matrice

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & k_+ + k_- & -k \\ -k_x & 0 & k_+ + k_- & -k \\ 0 & k_y & -(k_+ - k_-) & -k \\ 0 & -k_y & -(k_+ - k_-) & -k \end{bmatrix}$$

de déterminant $8kk_x k_y k_z$ est inversible pour des configurations effectivement tridimensionnelles ($\theta_{x,y} \neq 0, \pi/2$). D'une manière générale, cette transformation est possible si l'on utilise au plus $d+1$ faisceaux lasers en dimension d . Il y a alors $d+1$ phases que l'on peut rattraper par d degrés de liberté d'espace et 1 degré de liberté de temps [36].

¹¹Par la suite, nous ferons un grand usage de cette propriété, en particulier lorsque nous réduirons la dynamique atomique à deux dimensions d'espace.

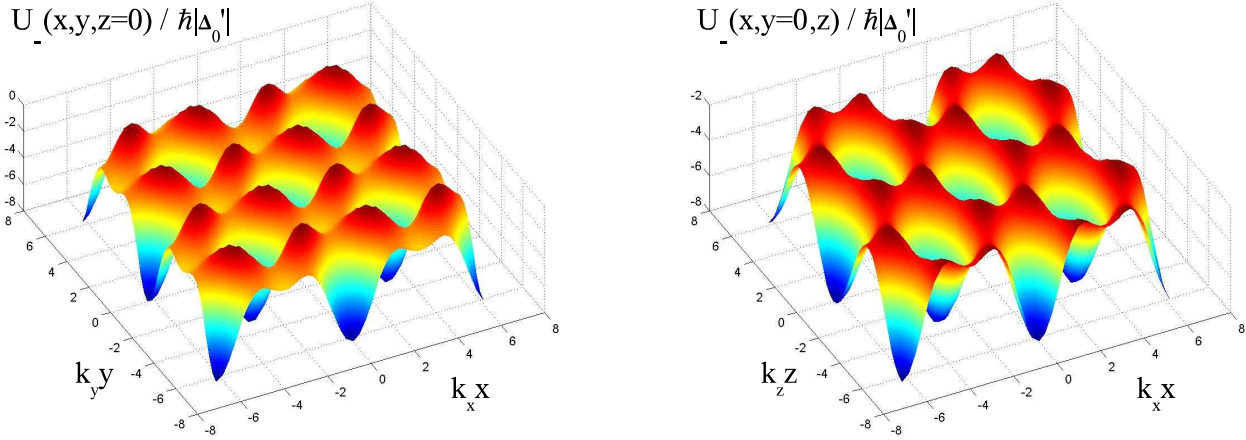


Figure I.1.6: Potentiels optiques dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin. Gauche : Coupe du potentiel U_- dans le plan $z = 0$; Droite : Coupe du potentiel U_- dans le plan $y = 0$. Le potentiel U_+ s'obtient en décalant U_- d'une demi-période selon x ou y ou z .

Par ailleurs, en développant les potentiels (I.1.34) au second ordre en $\vec{r}$, on trouve sans difficulté que les directions propres d'oscillation au voisinage du fond d'un puits de potentiel correspondent aux axes de coordonnées x , y et z avec des fréquences $\Omega_\mu/2\pi$ ici encore anisotropes :

$$\Omega_{x,y} = 4\sqrt{|\Delta'_0|\omega_r}\frac{k_{x,y}}{k} \quad \text{et} \quad \Omega_z = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{|\Delta'_0|\omega_r}\frac{k_z}{k}. \quad (\text{I.1.36})$$

Notons pour finir que les anisotropies dans les directions x, y et z ne se limitent pas aux périodes spatiales différentes, mais aussi à la forme de la modulation des potentiels optiques (I.1.34a) et des taux de pompage optique (I.1.34b). Cette remarque est importante pour la suite, comme nous le verrons au chapitre II.1.

1.2.3 Image physique du refroidissement Sisyphe

Nous décrivons à présent le mécanisme de refroidissement Sisyphe proprement dit dans une image semi-classique où seuls les degrés de liberté internes sont traités quantiquement [21]. Nous en donnons ici une image physique monodimensionnelle et montrons que celle-ci conduit naturellement à une description de la dynamique atomique en termes de mouvement brownien.

Mécanisme de refroidissement

Remarquons tout d'abord que l'expression des taux de pompage optique (I.1.25) montre que les atomes ont tendance à peupler l'état $|\pm\rangle$ correspondant à la composante de polarisation ($\sigma^\pm$) la plus intense ($I_\pm > I_\mp$). Par ailleurs, d'après la formule (I.1.24), dans le cas d'un désaccord négatif,

$$\Delta < 0, \quad (\text{I.1.37})$$

le potentiel optique $U_{\pm}$ est plus profond que le potentiel $U_{\mp}$ lorsque la composante de lumière polarisée $\sigma^{\pm}$ est plus importante que la composante polarisée $\sigma^{\mp}$. Il s'ensuit que le pompage optique tend à peupler la nappe de potentiel la plus basse.

Considérons à présent un atome de vitesse définie v dans la direction $+z$ (voir la figure I.1.7). Du fait de l'existence du gradient de polarisation, il passe au cours de son mouvement dans des zones de polarisations différentes. Supposons qu'il soit dans l'état $|-\rangle$ en un point de polarisation σ^- (point 1 sur la figure I.1.7). Au cours de son mouvement hamiltonien sur la courbe de potentiel lumineux U_- son énergie totale reste constante. Alors qu'il s'approche du site de polarisation σ^+ suivant (point 2), la probabilité de pompage optique vers l'état $|+\rangle$ augmente jusqu'à atteindre un maximum au sommet de la colline de la courbe de potentiel U_- . Lors du processus dissipatif de pompage optique (point 3), l'énergie potentielle diminue brutalement alors que l'énergie cinétique varie peu (de l'ordre de grandeur de deux énergies de recul $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$). L'atome voit ainsi son énergie diminuer au profit du champ de rayonnement : l'énergie perdue par l'atome est emmenée par les photons diffusés¹². La répétition de ce cycle élémentaire au cours duquel l'atome perd de l'énergie en montant dynamiquement des collines de potentiel sans jamais les descendre de façon dynamique, conduit à un mécanisme de refroidissement des atomes appelé Sisyphes¹³. Le mécanisme se poursuit jusqu'à ce que l'atome n'ait plus suffisamment d'énergie pour monter une colline de potentiel, ce qui conduit à une énergie cinétique stationnaire environ égale à la profondeur des puits de potentiel. Les atomes sont ainsi refroidis, mais également piégés, dans les puits de potentiel [51].

Remarque: Le piégeage atomique dans les puits de potentiel est néanmoins très imparfait du fait que les cycles de pompage optique peuvent pomper un atome d'un état piégeant sur une courbe de potentiel vers un état non piégeant sur une autre courbe [52]. Ceci induit une diffusion spatiale importante, notamment si les lasers sont proches de résonance (voir [II.2] et [52, 53]).

Dynamique atomique brownienne

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'un examen un peu plus précis du mécanisme ci-dessus conduit à la description de la dynamique en termes de mouvement brownien [54, 23] : la particule est alors soumise d'une part à une force de friction et d'autre part à des forces aléatoires, de moyenne temporelle nulle mais de variance non nulle. Pour ce faire,

¹²Bien sûr, le cycle de pompage optique peut avoir lieu avant le croisement des potentiels (point 4) ce qui augmente l'énergie totale de l'atome mais cet événement est moins probable qu'un pompage optique après le croisement puisque, comme nous l'avons vu, le pompage optique tend à peupler la courbe de potentiel la plus basse.

¹³Le nom d'effet Sisyphes initialement introduit dans le cadre du refroidissement laser à haute intensité [48, 49] fait référence au mythe grec [50] dans lequel Sisyphes, roi de Corinthe, fut condamné par les Dieux à faire rouler sans fin sur la pente d'une montagne un rocher qui redescendait inexorablement avant d'avoir atteint le sommet. La similitude avec le mécanisme décrit dans le texte est frappante.

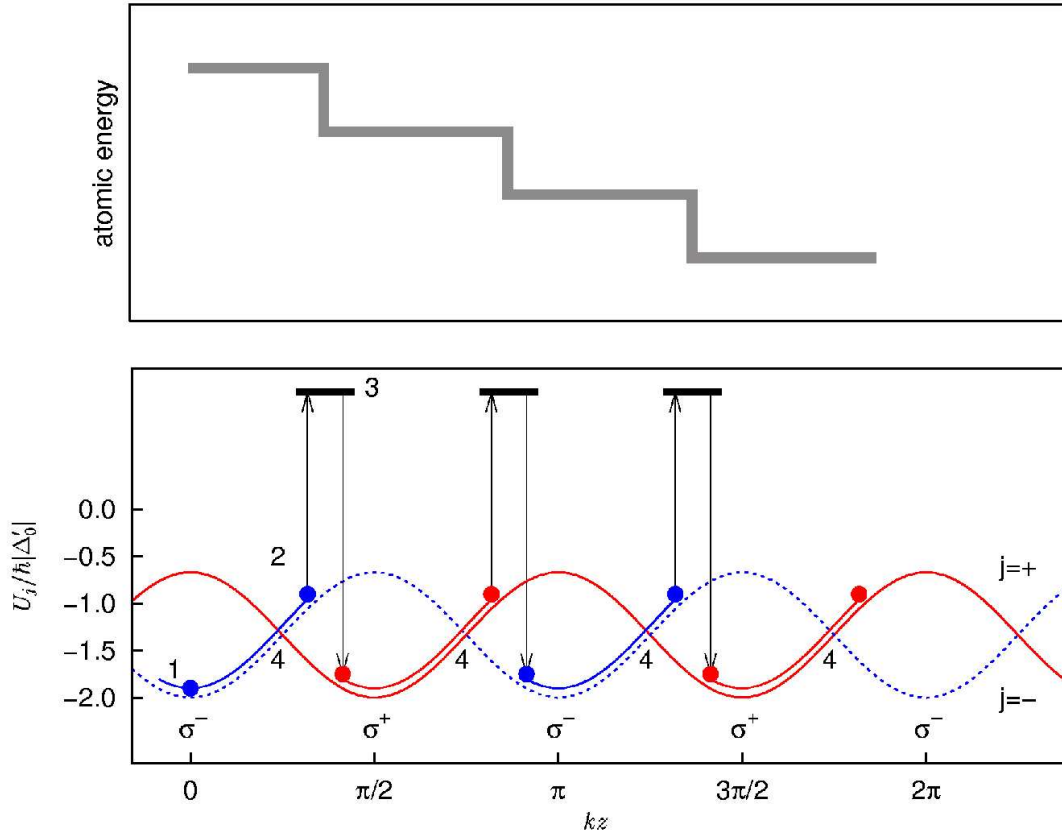


Figure I.1.7: Mécanisme de refroidissement Sisyphe par lequel un atome monte des collines de potentiel de façon hamiltonienne sans jamais les redescendre de façon hamiltonienne. C'est un processus de pompage optique qui induit la transition d'une nappe de potentiel à une autre, généralement de la plus haute vers la plus basse (voir le texte).

nous nous limitons ici à un régime de paramètres pour lequel, d'une part l'atome considéré est non piégé :

$$v > v_0 \quad (\text{I.1.38})$$

où v_0 est la vitesse limite des atomes piégés, telle que $\frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathcal{U}$, et, d'autre part le déplacement de l'atome entre deux cycles de pompage optique est faible à l'échelle de la longueur d'onde optique : $kv\tau'_0 < 1$ où τ'_0 est le temps moyen de pompage optique, *i.e.* l'inverse du taux moyen de pompage optique. D'après les formules (I.1.25) et (I.1.27),

$$\tau'_0 = \frac{9}{2\Gamma'_0} , \quad (\text{I.1.39})$$

de sorte que nous nous restreignons à

$$v < v_c \quad (\text{I.1.40})$$

où $v_c = 2\Gamma'_0/9k$ est la vitesse dite de capture du réseau [I.2.1.2]. Une description plus précise sera exposée au paragraphe I.2.1.2 de sorte que nous ne présentons ici qu'un calcul simple

(“à la main”) qui permet néanmoins d’obtenir les coefficients de friction et de diffusion en impulsion avec une précision tout à fait satisfaisante¹⁴.

Force de friction - Considérons un atome se déplaçant à la vitesse v dans les potentiels $U_{\pm}$ (voir la figure I.1.7). Du fait du pompage optique, il a tendance à se trouver dans l’état correspondant à la courbe d’énergie potentielle la plus basse, comme nous l’avons vu précédemment. Néanmoins, le pompage optique est un processus quantique et donc intrinsèquement aléatoire d’un point de vue classique de sorte que la transition entre les états $|\pm\rangle$ et $|\mp\rangle$ ne se produit pas exactement au niveau du point de croisement des potentiels lumineux (point 4 de la figure I.1.7) mais avec un retard typique de l’ordre de τ'_0 . La transition d’état se produit donc en moyenne à une distance de l’ordre de $v\tau'_0$ au delà du point de croisement des potentiels. Par suite, moyennant une linéarisation des potentiels (I.1.28) au voisinage de ce point ($2kz \equiv \pi/2 [\pi]$), on trouve sans difficulté que la perte d’énergie potentielle associée à la transition d’état est de l’ordre de $\Delta E \simeq 12\hbar k \frac{\Delta}{\Gamma} v$. Or, l’atome se déplaçant à la vitesse v , un tel cycle de pompage optique se produit régulièrement lorsque l’atome atteint un point de croisement des potentiels, donc tous les $\Delta t = \lambda/2v$. On en déduit que la variation d’énergie atomique est gouvernée par l’équation $\frac{dE}{dt} \simeq \frac{24}{\pi} \frac{\hbar k^2}{M} \frac{\Delta}{\Gamma} E$. Une telle perte d’énergie (pour $\Delta < 0$) proportionnelle à l’énergie s’interprète comme résultant d’une force de friction $-\alpha_0 v$ avec

$$\alpha_0 \simeq -\frac{12\hbar k^2}{\pi} \frac{\Delta}{\Gamma} . \quad (\text{I.1.41})$$

La valeur α_0 donnée par notre calcul “à la main” (équation (I.1.41)) fournit une valeur approchée raisonnable (à 30 % près) du coefficient de friction donné par un calcul plus précis (voir la formule (I.2.6)).

Diffusion en impulsion - En fait, l’interaction entre le champ laser et l’atome résulte de phénomènes d’absorption et d’émission induite ou spontanée de photons. Ces processus sont eux aussi quantiques, donc intrinsèquement aléatoires d’un point de vue classique. Ici, c’est l’instant où a lieu l’absorption ou l’émission qui est aléatoire, ainsi que la direction des photons émis pour ce qui concerne l’émission spontanée. Ainsi, en plus de la force moyenne induite par la modulation spatiale des potentiels optiques et les cycles de pompage optique réguliers, l’atome est soumis à une force aléatoire correspondant aux reculs qu’il subit à chaque absorption ou émission d’un photon. Les cycles de fluorescence absorption-émission induite ne donnent lieu à aucune diffusion en impulsion car il s’agit d’un processus déterministe où une superposition cohérente de photons est absorbée puis réémise de sorte que les fluctuations du recul total sont nulles pour chaque processus. Au contraire, les cycles de fluorescence absorption-émission spontanée s’accompagnent d’un recul total aléatoire dû au fait que la direction le photon spontané n’a rien de commun à la superposition cohérente de photons absorbée à chaque processus. Par ailleurs, les cycles de pompage optique qui transfèrent l’atome d’un niveau à l’autre interviennent à des instants aléatoires. La force

¹⁴Le domaine de paramètres du réseau répondant aux conditions (I.1.38) et (I.1.40) est assez restreint mais correspond néanmoins à des conditions raisonnables pour les situations expérimentales réelles. La description théorique explicitée au paragraphe I.2.1.2 est quant à elle valide dans un domaine plus large de paramètres.

dipolaire a donc des fluctuations liées aux durées de résidence aléatoires dans chaque état interne.

Nous nous proposons ici d'évaluer le coefficient de diffusion en impulsion correspondant à ces forces aléatoires F :

$$D_p = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \overline{F(t) F(t+\tau)} - \overline{F}^2 \right\} \quad (\text{I.1.42})$$

où $\overline{(\cdot)}$ représente la moyenne portant sur les réalisations statistiques. D_p a trois contributions :

$$D_p = D_p^{(\text{abs})} + D_p^{(\text{sp})} + D_p^{(\text{dip})}. \quad (\text{I.1.43})$$

Fluctuations liées à l'absorption - Pour ce qui concerne $D_p^{(\text{abs})}$, si l'on néglige les effets d'interférence entre les faisceaux lasers, la force

$$\overrightarrow{F^{(\text{abs})}} = \sum_j \hbar \overrightarrow{k_{L1}} \delta(t - t_j) + \sum_j \hbar \overrightarrow{k_{L2}} \delta(t - t'_j) \quad (\text{I.1.44})$$

correspond aux sauts en impulsion induits par l'absorption de photons du laser 1 (de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_{L1}} = k\overrightarrow{e_z}$) aux instants aléatoires $t_1, t_2, \dots$ ou du laser 2 (de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_{L2}} = -k\overrightarrow{e_z}$) aux instants aléatoires $t'_1, t'_2, \dots$. Un calcul élémentaire conduit à

$$D_p^{(\text{abs})} \simeq \hbar^2 k^2 \Gamma'_0. \quad (\text{I.1.45})$$

Fluctuations liées à l'émission spontanée - De même, la contribution $D_p^{(\text{sp})}$ résulte de la force

$$\overrightarrow{F^{(\text{sp})}} = \sum_j \hbar \overrightarrow{k_{\text{sp}}^{(j)}} \delta(t - t''_j) \quad (\text{I.1.46})$$

qui correspond aux émissions spontanées de photons (de vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_{\text{sp}}^{(j)}}$ de norme k) aux instants aléatoires $t''_1, t''_2, \dots$ et on trouve par un calcul similaire au précédent

$$D_p^{(\text{sp})} \simeq \hbar^2 k^2 \Gamma'_0. \quad (\text{I.1.47})$$

Fluctuations de la force dipolaire - Enfin, les fluctuations de la force dipolaire résultent du fait que les processus de pompage optique se produisent à des instants aléatoires. Ainsi, pour déterminer la contribution $D_p^{(\text{dip})}$, considérons l'impulsion accumulée par l'atome du fait de cette force pendant un temps t grand devant le temps de pompage optique τ'_0 , $P(t) = \sum_{1 \leq j \leq t/\tau'_0} (-\partial_z U_{\epsilon_j}) \tau'_0$ où ϵ_j vaut aléatoirement $+$ ou $-$. La diffusion en impulsion associée est alors $D_p^{(\text{dip})} \simeq \frac{1}{2} \overline{(-\partial_z U)^2} \tau'_0$, et finalement

$$D_p^{(\text{dip})} \simeq 2\hbar^2 k^2 \frac{\Delta}{\Gamma} \Delta'_0. \quad (\text{I.1.48})$$

Mouvement brownien - Dans les conditions expérimentales usuelles, le désaccord Δ est grand devant la largeur de l'état excité Γ de sorte que la contribution de la force dipolaire aux fluctuations est prépondérante. En utilisant la relation d'Einstein valable pour une particule brownienne $k_B T = D_p/\alpha$ [23], on déduit sans peine que la température cinétique du nuage atomique est de l'ordre de grandeur de la profondeur des puits de potentiel, en accord avec l'image physique exposée au paragraphe précédent :

$$k_B T \sim \frac{1}{2} \hbar |\Delta'_0| . \quad (\text{I.1.49})$$

Nous traçons le comportement de la température en fonction du déplacement lumineux par onde dans un réseau 1D-lin $\perp$ lin et pour une transition théorique $1/2 \rightarrow 3/2$ sur la figure I.1.8. Pour des profondeurs de potentiel suffisamment grandes, un très bon accord entre les résultats des simulations et la formule (I.1.49) est obtenu. On observe de surcroît le phénomène de *décrochage* qui se produit aux faibles profondeurs de potentiel, typiquement ici pour $\mathcal{U} \lesssim 100 E_R$. Lorsque la température cinétique donnée par la formule (I.1.49) devient inférieure à quelques dizaines d'énergies de recul, l'importance de l'énergie accumulée par l'atome à la suite de quelques reculs dus à l'absorption et l'émission de photons devient importante et ne peut être négligée comme on le fait dans le traitement classique ci-dessus. En fait, le bruit sur la trajectoire d'un atome a une échelle d'énergie de l'ordre de la profondeur des puits, de sorte que le mécanisme de refroidissement Sisyphes [I.1.2.3] n'est plus efficace et la température augmente rapidement lorsque la profondeur du potentiel diminue [43].

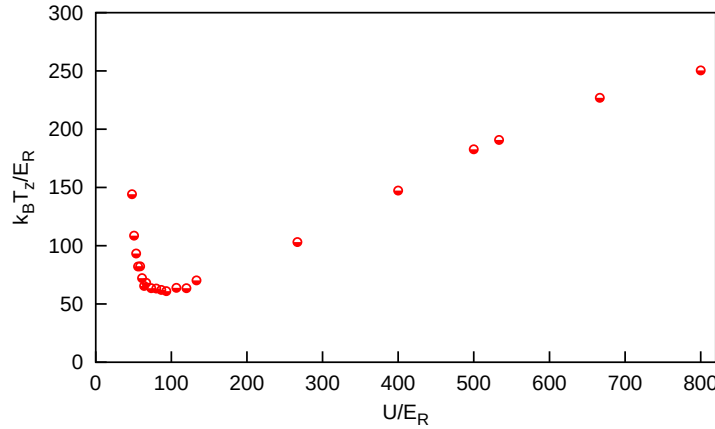


Figure I.1.8: Température cinétique en fonction du déplacement lumineux par onde dans un réseau en configuration 1D-lin $\perp$ lin. Les points sont obtenus par simulations numériques Monte-Carlo quantiques [I.2.2], pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$.

Une fois refroidis jusqu'à une énergie cinétique inférieure à $\mathcal{U}$, les atomes sont piégés dans des puits de potentiel [51]. Les cycles de refroidissement s'arrêtent et la dynamique d'un atome est très différente de ce qu'elle est au cours du refroidissement : l'atome oscille maintenant au fond d'un puits. La dynamique est donc caractérisée en première approximation (limite des oscillations de faible amplitude) par les fréquences de vibration $\Omega_v/2\pi$ au fond

des puits de potentiel, données par les formules (I.1.29) pour la configuration 1D-lin $\perp$ lin et (I.1.36) pour la configuration 3D-lin $\perp$ lin.

Régimes sautant et oscillant

L'image du refroidissement Sisyphe, telle que nous l'avons présentée, fait implicitement l'hypothèse d'une évolution de l'état interne atomique plus rapide que celle de l'état externe. En fait, cette hypothèse n'est pas systématiquement vérifiée pour les paramètres expérimentaux usuels. En effet, pour des atomes ayant une énergie de l'ordre de la profondeur des puits de potentiel (qui est l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique moyenne des atomes dans l'état stationnaire suivant le refroidissement), le temps typique du mouvement des atomes correspond à la fréquence d'oscillation $\Omega_v/2\pi$ au fond d'un puits de potentiel alors que le temps typique des mécanismes de pompage optique vaut τ'_0 (voir l'équation (I.1.39)). Il convient donc de distinguer deux régimes pour la dynamique atomique :

- régime sautant : $\Omega_v\tau'_0 \ll 1$. Ici, la dynamique est dominée par les effets dissipatifs (pompage optique), un atome n'a pas le temps d'effectuer une oscillation complète entre deux cycles de pompage optique.
- régime oscillant : $\Omega_v\tau'_0 \gg 1$. Ici, la dynamique est dominée par les oscillations des atomes au fond des puits de potentiel, et les cycles de pompage optique sont rares à l'échelle d'une oscillation.

Dans le régime sautant, les cycles de pompage optique sont si fréquents qu'il permettent à l'état interne de l'atome en mouvement de suivre (avec un faible retard) sa valeur locale stationnaire. L'état interne est alors une variable esclave de la position atomique de sorte qu'il est possible de l'éliminer adiabatiquement des équations de la dynamique comme cela est fait implicitement dans les paragraphes précédents et comme nous le verrons plus en détail au paragraphe I.2.1.2.

Dans le régime oscillant, une telle élimination adiabatique de l'état interne n'est plus justifiée. En fait, dans cette situation, comme l'atome effectue plusieurs oscillations hamiltoniennes dans un puits avant de subir un cycle de pompage optique, c'est l'énergie totale qui est une variable lente devant la variable de position. En paramétrant la trajectoire par les variables énergie et position et en effectuant un développement perturbatif des équations semi-classiques du mouvement d'un atome, Castin *et al.* ont établi une équation pour la probabilité qu'un atome ait une énergie donnée dans un état interne donné [43, 55], [I.2.1.2]. Il en résulte une équation intégral-différentielle que les auteurs ont résolue numériquement.

1.2.4 Eléments de dynamique atomique dans un réseau tridimensionnel

La dynamique d'un atome dans un réseau optique tridimensionnel est essentiellement la même que dans la configuration 1D-lin $\perp$ lin : l'atome évolue sur la surface de potentiel optique correspondant à son état interne et subit des cycles de pompage optique qui le

transfèrent d'un potentiel à l'autre, préférentiellement vers le plus bas, ce qui s'accompagne d'une perte d'énergie. En fait, l'atome subit essentiellement une force de friction [II.2.2.1].

Dans la configuration 1D, il n'y a pas de gradient d'intensité lumineuse car les deux faisceaux ont des polarisations orthogonales. Au contraire, dans les configurations 3D, les figures d'interférence des divers faisceaux de même polarisation donnent généralement lieu à un gradient de l'intensité lumineuse. Ainsi, la modulation spatiale des potentiels et des taux de pompage optiques ne résulte pas seulement du gradient de polarisation, mais aussi du gradient d'intensité. De plus, la pression de radiation, bien que généralement compensée en moyenne sur tout l'espace, n'est pas nulle localement. En particulier, Hemmerich et Hänsch ont montré dans une configuration 2D formée de deux ondes stationnaires orthogonales, de polarisation perpendiculaire au plan des faisceaux, qu'il existe un réseau de vortex de pression de radiation qui peut agir contre la localisation spatiale, en fournissant des trajectoires atomiques stables le long desquelles la pression de radiation est rectifiée [56, 57].

Les atomes, une fois refroidis, viennent se piéger dans le fond des puits de potentiel qui, dans le cas d'un réseau, sont régulièrement répartis dans les trois directions de l'espace et forment eux-même un réseau. En fait, le taux de remplissage (nombre d'atomes par site de piégeage) d'un réseau optique dissipatif est le plus souvent très faible, de l'ordre de $1/10$ voire $1/100$ [53, 58]. Ainsi la distance interatomique typique est-elle de l'ordre de quelques micromètres, de sorte que les interactions atomiques sont généralement négligeables¹⁵.

1.3 Zoologie non exhaustive des réseaux optiques dissipatifs tridimensionnels

La réalisation de conditions favorables au mécanisme de refroidissement Sisyphe dans un champ lumineux impose certaines contraintes. Il faut en effet utiliser des faisceaux lasers désaccordés sur le rouge d'une transition $J \rightarrow J + 1$ ¹⁶ et créer par interférence de ces faisceaux, un gradient de polarisation de la lumière. Sous de telles contraintes, on peut produire une grande variété de topographies de potentiels, donc de réseaux optiques en modifiant le nombre, la disposition géométrique ou la polarisation des faisceaux lasers, comme l'illustrent les exemples suivants.

1.3.1 Configurations à six faisceaux

Configuration (1D-lin $\perp$ lin)³ - La généralisation la plus directe de la configuration monodimensionnelle 1D-lin $\perp$ lin en dimension trois consiste naturellement en un système formé de deux faisceaux contre-propageants à polarisations linéaires croisées dans chaque direction de l'espace (figure I.1.9a). Cette configuration a été étudiée expérimentalement

¹⁵Les interactions moléculaires à grande distance dans un réseau optique avec un grand facteur de remplissage ont néanmoins été étudiées dans la référence [59].

¹⁶Un refroidissement de type Sisyphe est aussi possible dans des configurations à faisceaux lasers désaccordés sur le bleu d'une transition $J \rightarrow J$ ou $J \rightarrow J - 1$ [60-62], éventuellement en présence d'un champ magnétique [63]. Néanmoins, le mécanisme est un peu différent de celui que nous avons présenté et sort du cadre de ce mémoire.

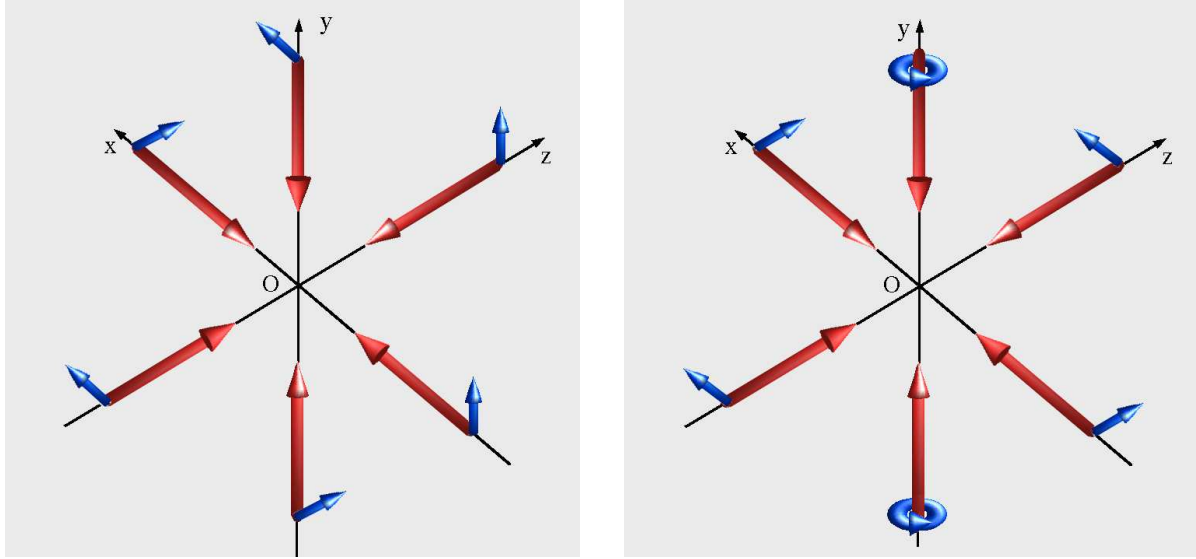


Figure I.1.9: Configurations tridimensionnelles à six faisceaux lasers. Gauche : configuration formée de trois 1D-lin $\perp$ lin orthogonales. Droite : configuration formée de trois ondes stationnaires lin $\parallel$ lin de polarisations respectives, linéaire selon y , linéaire selon x et circulaire gauche σ^+ .

[64, 65] mais aussi théoriquement à l'aide de simulations numériques Monte-Carlo [66]. Contrairement à la configuration 1D-lin $\perp$ lin, cette version tridimensionnelle conduit à une figure d'interférence qui dépend des phases relatives des six faisceaux lasers, et cette dépendance ne peut pas être absorbée dans une redéfinition de l'origine spatio-temporelle comme on le fait pour les configurations 1D-lin $\perp$ lin et 3D-lin $\perp$ lin [I.1.2.2]¹⁷. Il en résulte que la topographie des surfaces de potentiel dépend du choix de ces phases. Ainsi, dans la pratique, comme les phases des différents faisceaux varient aléatoirement du fait des fluctuations thermiques du chemin optique de chacun des faisceaux, les résultats des expériences résultent de moyennes sur les différentes configurations. On obtient ainsi non plus un réseau mais une mélasse optique. En fait, dans la plupart des situations (correspondant à un choix de phase donné), la figure d'interférence des faisceaux produit effectivement une modulation spatiale des potentiels et des taux de pompage optiques et donne lieu à un mécanisme de refroidissement Sisyphe [67, 68]. De plus, bien qu'il n'y ait en général pas formation de sites alternés σ^+ et σ^- , on obtient une localisation des atomes au voisinage de sites spatialement périodiques [66].

Configuration à ondes stationnaires - Une autre configuration consiste à utiliser des ondes stationnaires dans les trois directions de l'espace (figure I.1.9b). Une telle configuration à deux ou trois dimensions a été étudiée expérimentalement dans le groupe de Theodor Hänsch à Munich [69-71] et théoriquement dans le groupe de Jean Dalibard à Paris [72, 73].

¹⁷En effet, la possibilité de redéfinir l'origine spatio-temporelle offre quatre degrés de liberté alors qu'il en faudrait deux de plus pour éliminer les six phases des faisceaux.

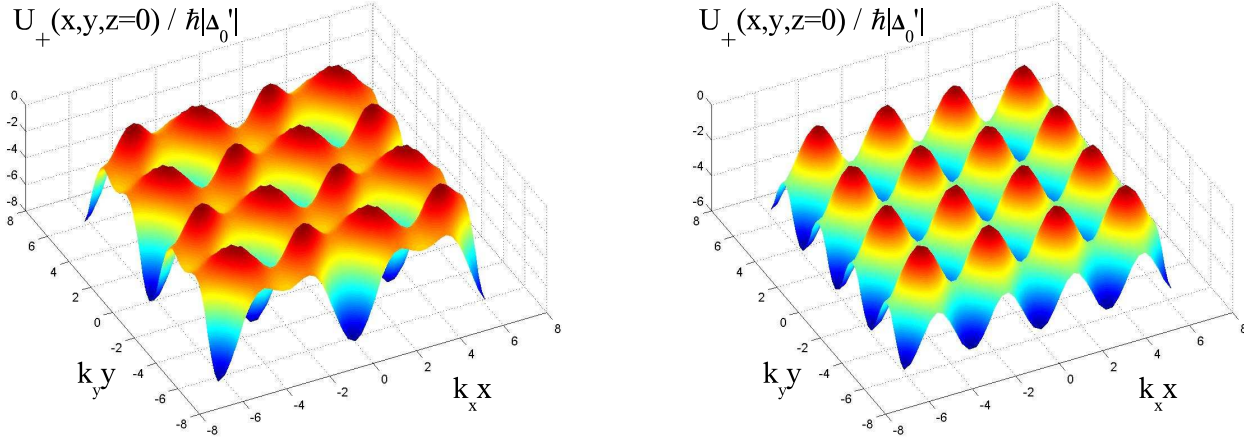


Figure I.1.10: Deux potentiels U_+ dans la configuration à trois paires de faisceaux lasers stationnaires correspondant à la figure I.1.9b, soit en 2D (c'est à dire sans les faisceaux σ^+) soit dans le plan $z = 0$ (Noter que dans ces conditions, le potentiel U_- se déduit du potentiel U_+ par une simple translation de long de x ou y de π/k , soit une demi longueur d'onde). Gauche : $\Phi_x - \Phi_y = 0$. Droite : $\Phi_x - \Phi_y = \pi/2$.

L'équation (I.1.24) donne alors, pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$:

$$\begin{aligned}
 U_{\pm} = & \frac{8\hbar\Delta'_0}{3} \left[\cos(kx)^2 + \cos(ky)^2 + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \sin(kz)^2 + \right. \\
 & \left. \pm \cos(\Phi_y - \Phi_x) \cos(kx) \cos(ky) + \right. \\
 & \left. - \sqrt{2} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \{ \cos(\Phi_x) \cos(kx) + \cos(\Phi_y) \cos(ky) \} \sin(kz) \right]
 \end{aligned} \tag{I.1.50}$$

où Φ_x et Φ_y sont deux phases relatives des faisceaux. L'équation (I.1.50) et la figure I.1.10 montrent ici la dépendance de la topographie du potentiel optique en fonction de la phase des faisceaux lasers. Afin d'obtenir un réseau optique et non plus seulement une mélasse, le groupe de Munich utilise un asservissement des phases. Ce dispositif est assez lourd mais permet de créer une grande variété de formes de potentiel.

1.3.2 Autres réseaux optiques

Réseaux Talbot - Au cours de sa thèse, Cécile Mennerat-Robilliard a montré expérimentalement qu'il est possible de réaliser des réseaux optiques tridimensionnels à l'aide de seulement deux faisceaux lasers en configuration 1D-lin $\perp$ lin [38]. Dans ce cas, la modulation transverse du potentiel et des taux de pompage optique est obtenue en intercalant un réseau de phase ou d'amplitude sur le trajet de l'un des faisceaux lasers : on obtient alors par effet Talbot une image du réseau reproduite périodiquement le long de l'axe des faisceaux. Des réseaux Talbot dissipatifs [74] mais aussi désaccordés [75] ont été produits et l'efficacité du refroidissement et du piégeage a été démontrée.

Super-réseaux optiques - En utilisant plus que quatre faisceaux dans une configuration telle que les composantes des différences des vecteurs d'onde $\vec{k}_j - \vec{k}_1$ soient commensurables, on crée un super-réseau [76, 77]. Il s'agit d'une structure périodique : les potentiels optiques sont formés de la superposition de deux fonctions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre rationnel. Une autre manière de former des super-réseaux consiste à superposer des ondes lumineuses de fréquences suffisamment différentes pour que les battements ne soient pas perçus par les atomes. Dans ce cas, les potentiels correspondant aux deux réseaux s'additionnent [78-80]. De telles structures sont intéressantes par exemple si l'on veut localiser des atomes dans des sites de piégeage espacés mais de raideur importante : les sites de piégeage correspondent aux minima du potentiel séparés par la grande période, alors que la forme locale du piège correspond à la petite longueur d'onde [81].

1.3.3 Quelques configurations exotiques

Réseaux quasi-périodiques - Philippe Verkerk et Gilbert Grynberg ont réalisé l'analogie optique de quasi-cristaux bien connus en physique des solides. Dans le cas général des configurations du type employé pour les super-cristaux optiques (lorsque les composantes des $\vec{k}_j - \vec{k}_1$ sont incommensurables), on obtient des structures ordonnées à grande distance mais non-périodiques [82]. L'efficacité du refroidissement ainsi que la localisation spatiale ont été démontrées par Guidoni *et al.* dans [83]. Les propriétés de la diffusion spatiale dans des structures à symétrie pentagonale en 2D et 3D sont présentées dans [84].

Réseaux tavelés - Lorsque le masque interposé sur le trajet de l'un des faisceaux de la configuration 1D-lin $\perp$ lin a une modulation transverse de phase non plus périodique mais aléatoire, on crée un potentiel optique désordonné formé de puits irréguliers et disposés aléatoirement dans l'espace [75, 85]. De tels réseaux tavelés ont été réalisés expérimentalement [38]. Les auteurs ont démontré l'efficacité du refroidissement [86] et ont décrit les propriétés de la diffusion spatiale [87]. Dans ces structures, la dynamique atomique est très semblable à ce qui se passe dans un réseau périodique : les atomes sont refroidis et confinés dans les puits de potentiel.

Résumé et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit le mécanisme de refroidissement Sisyphe [21, 22, 30] à basse intensité ainsi que les réseaux optiques dissipatifs. Le principe à la base du mécanisme Sisyphe consiste à faire évoluer une particule sur plusieurs nappes de potentiel et à induire des transitions de la particule entre ces nappes. Si l'on parvient à produire une imbrication du mouvement hamiltonien (particule évoluant sur une courbe de potentiel) et des processus dissipatifs (transitions de la particule entre les nappes de potentiel) de manière à ce que la particule monte des collines de potentiel au cours de son mouvement hamiltonien (perte d'énergie cinétique) et les descende lors de processus dissipatifs (qui modifient peu l'énergie cinétique), on induit un refroidissement de la particule, c'est à dire une diminution de son énergie cinétique moyenne.

En pratique on peut mettre en œuvre ce mécanisme à l'aide de faisceaux lasers légèrement décalés vers le rouge d'une transition atomique $J \rightarrow J + 1$ et dans une configuration géométrique mono- ou multidimensionnelle induisant une modulation de la polarisation (et éventuellement de l'intensité) de la lumière laser. Les potentiels spatialement modulés résultent des déplacements lumineux des différents sous-niveaux Zeeman du fondamental de la transition atomique alors que les couplages entre ces niveaux proviennent de mécanismes de pompage optique. Il s'ensuit non seulement un refroidissement atomique, mais aussi un piégeage des atomes dans les puits de potentiel, les atomes ralentis n'ayant plus suffisamment d'énergie pour s'extraire des puits. On obtient ainsi couramment des températures de l'ordre du microkelvin (μK) [88, 58, 53]. Les atomes sont répartis dans le fond de ces sites de piégeage (puits de potentiel), de sorte que leur distribution spatiale est périodique (avec une période de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière laser) et dépend de la configuration géométrique des lasers. La distribution spatiale des atomes reflète ainsi la modulation du potentiel, formant un réseau optique. Notons que les réseaux optiques dissipatifs décrits ici, sont brillants car ils diffusent les photons lasers quasi-résonants avec une de leurs transitions atomiques¹⁸. Le mécanisme de refroidissement Sisyphe est très général et s'applique à une grande variété de systèmes, périodiques, quasi-périodiques ou désordonnés.

Dans ce chapitre, nous avons décrit la dynamique atomique dans la configuration modèle 1D-lin $\perp$ lin, pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. L'image physique du refroidissement introduite par Jean Dalibard et Claude Cohen-Tannoudji permet d'identifier facilement les processus élémentaires en jeu et montre comment une description simple en termes de mouvement brownien émerge. La température cinétique finale du nuage d'atomes résulte ainsi de la compétition d'une force de friction et des fluctuations de la force dipolaire. Les atomes une fois refroidis oscillent au fond des puits de potentiel. La dynamique atomique fait alors apparaître deux régimes selon que les processus dissipatifs dominent (*régime sautant*) ou sont dominés par le mouvement hamiltonien (*régime oscillant*).

Cependant cette description analytique simple est limitée : ainsi ces prédictions restent qualitatives. En outre, les configurations multidimensionnelles sont généralement trop complexes pour être décrites dans ce cadre. Il apparaît donc nécessaire de développer des approches plus précises de ces systèmes, qui feront largement appel au calcul numérique. Le chapitre II.2 présente deux de ces méthodes que nous utiliserons largement pour étudier de manière approfondie la dynamique des atomes dans un réseau optique à trois dimensions dans les parties II et III.

De fait, les réseaux optiques, constitués d'atomes régulièrement disposés dans l'espace et liés par la lumière, présentent une analogie très intéressante avec les solides cristallins. En fait cette analogie semble être une source intarissable de travaux sur les réseaux optiques. Citons en particulier l'étude des quasi-cristaux optiques dans l'équipe de Gilbert Grynberg [83, 84], l'observation des oscillations de Bloch dans l'équipe de Christophe Salomon [91-93], l'étude des échelles de Wannier-Stark dans l'équipe de Mark Raizen [94, 95] à Austin, ou encore la description de la dynamique atomique dans le formalisme des bandes d'énergie par

¹⁸Au contraire, il existe des réseaux sombres pour lesquels les lasers sont très désaccordés par rapport à toute transition de sorte que les atomes ne diffusent que très peu la lumière [89, 90]. Dans ces réseaux, un mécanisme de refroidissement externe est nécessaire car les processus dissipatifs indispensables au refroidissement sont absents.

Jean Dalibard et Yvan Castin [96, 43, 73]. Nous verrons dans la partie III que les réseaux optiques dissipatifs permettent aussi de modéliser des situations connues en physique statistique. Nous y étudierons en particulier le phénomène de résonance stochastique [97-99] et la réalisation de rochets atomiques [100].

Chapitre 2

Approches quantique et semi-classique. Simulations de Monte-Carlo

Nous consacrons ce chapitre à la présentation des méthodes théoriques quantiques et semi-classiques pour l'étude des réseaux optiques dissipatifs. Celles-ci sont de deux types : les méthodes directes et les méthodes de Monte Carlo.

Les méthodes quantiques directes consistent à résoudre les OBE (I.1.8) ou l'équation maîtresse (I.1.18) et peuvent être mise en œuvre numériquement [55, 96]. Elles permettent l'étude de transitions réelles et dans certains cas ne sont pas limitées à l'un ou l'autre des régimes sautant et oscillant. Leur limitation vient de ce qu'elles ne sont valides qu'en basse dimension 1D [96] ou 2D [73] pour des raisons fondamentales et/ou de capacités numériques. Une méthode plus générale et numériquement plus efficace doit donc être mise en place pour l'étude des cas multidimensionnels.

L'approche semi-classique directe [30] dans un régime où l'état interne évolue rapidement par rapport à l'état externe est très élégante et donne une image physique des refroidissements Doppler [101-104], Sisyphe [21, 22] et $\sigma^+ - \sigma^-$ [21]. Elle permet en particulier de bien comprendre le comportement de la température cinétique en fonction des paramètres du réseau. Elle est néanmoins insuffisante car limitée au régime sautant, en 1D et pour des transitions simples. Malgré une généralisation au régime oscillant [43, 55], une description semi-classique plus générale est nécessaire, notamment dans le but d'accéder au régime intermédiaire.

Les méthodes plus générales qui permettent d'étendre les domaines accessibles aux formulations quantiques et semi-classiques directes consistent en des intégrations de type Monte-Carlo de l'équation maîtresse (I.1.18), soit quantique, soit semi-classique. Les méthodes de Monte-Carlo sont très usuelles en physique mathématique [105-108]. Il en existe plusieurs sortes mais elles ont toutes en commun d'utiliser des nombres aléatoires pour simuler la dynamique complexe du système [109-113]. Ces méthodes sont très efficaces numériquement en particulier parce qu'elles remplacent des problèmes multidimensionnels en des problèmes à trajectoires aléatoires multiples ce qui permet d'un point de vue mathématique de réduire la dimension du problème. Par ailleurs, la production de

trajectoires atomiques, soit quantiques, soit classiques, donne de la dynamique une image physique adaptée à des interprétations plus parlantes qu'une intégration directe de la dynamique.

Après avoir décrit brièvement au paragraphe I.2.1 les méthodes directes quantiques et semi-classiques, nous introduisons les méthodes de Monte-Carlo d'intégration de l'équation maîtresse (I.1.18) de la dynamique atomique adaptées au refroidissement sub-Doppler dans le cas quantique au paragraphe I.2.2 et dans le cas semi-classique au paragraphe I.2.3. Nous verrons enfin que dans le cas du refroidissement sub-Doppler, elles permettent de remédier aux insuffisances des méthodes directes et donnent notamment accès aux cas où les échelles temporelles d'évolution des états interne et externe sont du même ordre de grandeur.

2.1 Méthodes théoriques d'investigation du refroidissement Sisyphe

Nous évoquons brièvement dans ce paragraphe les méthodes théoriques directes d'étude du refroidissement Sisyphe en distinguant les méthodes quantiques [I.2.1.1] des semi-classiques [I.2.1.2]. Le but n'est pas ici d'en faire une description complète mais plutôt d'en donner les points forts et les limites. La mise en place détaillée des méthodes de Monte-Carlo quantique et semi-classique, appliquées aux réseaux optiques dissipatifs fait l'objet des paragraphes suivants [I.2.2, I.2.3].

2.1.1 L'approche quantique

Le modèle des bandes

Tirant parti de l'analogie entre réseau optique et réseau cristallin, Yvan Castin et Jean Dalibard ont montré que l'on peut décomposer les fonctions d'onde atomiques dans la base des états de Bloch $|n, q, m\rangle$ (où n désigne la bande d'énergie, q , la quasi-impulsion et $m = \pm 1/2$, le sous-niveau Zeeman) [96]. Dans le régime oscillant [I.1.2.3] (page 47), on peut négliger les cohérences entre les différents états de Bloch de sorte que la partie dissipative de l'équation maîtresse (I.1.18) se réduit à des équations de taux de transition entre les populations de ces états de la forme :

$$\frac{d \Pi_{n,q,m}}{dt} = -\gamma_{n,q,m} \Pi_{n,q,m} + \sum_{n',q',m'} \gamma(n',q',m' \rightarrow n,q,m) \Pi_{n',q',m'} . \quad (\text{I.2.1})$$

Les équations (I.2.1) sont numériquement solubles et fournissent les populations stationnaires ($\dot{\Pi}_{n,q,m} = 0$) des différentes bandes d'énergie dont on déduit les propriétés de température cinétique. La méthode a été mise en œuvre en 1D [96] mais sa validité aux dimensions supérieures est très restreinte du fait de la plus grande quasi-dégénérescence des bandes.

Intégration de l'équation maîtresse quantique

Il est aussi possible d'effectuer une intégration directe, soit des équations de Bloch optiques (I.1.8) ou (I.1.11) sur la matrice densité complète ρ , soit de l'équation maîtresse (I.1.18)

sur la matrice densité réduite σ . On décompose ρ ou σ dans une base $(|m, \vec{p}\rangle)_{m, \vec{p}}$ où $\vec{p}$ prend des valeurs discrètes sur une grille prédéfinie à N_{grid} mailles. Ainsi, le nombre de calculs croît à J_g fixé comme $(N_{\text{grid}})^{2d}$ où d est la dimension du réseau optique considéré. La méthode fonctionne bien en 1D ou 2D [55, 73] mais est impraticable en 3D du fait de la limitation actuelle des capacités informatiques.

Les méthodes quantiques ci-dessus sont donc numériquement efficaces en 1D mais très limitées en dimensions supérieures. Pour pallier ces inconvénients, on a recours à une intégration de l'équation maîtresse (I.1.18) par une méthode de Monte-Carlo quantique [I.2.2]. L'un des avantages particuliers de cette méthode est d'être valable dans un domaine de paramètres du réseau couvrant les régimes sautant et oscillant.

2.1.2 L'approche classique

Régime sautant

La description originelle du refroidissement Sisyphé correspond au modèle semi-classique pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ dans la configuration 1D-lin $\perp$ lin que nous avons décrit "à la main" au paragraphe I.1.2.3. Dans une formulation plus rigoureuse [21, 30, 55], on déduit de (I.1.18), l'équation du pompage optique :

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = -\frac{2}{\tau_0'} [\mathcal{M} + \cos(2kz)] . \quad (\text{I.2.2})$$

où $\mathcal{M} = \Pi_+ - \Pi_-$. Par ailleurs, de l'expression de l'opérateur force $\vec{F} = -\vec{\partial} \mathbf{V}_{\text{AL}} - \vec{\partial} \mathbf{V}_{\text{AV}}$, on déduit la force subie par un atome

$$\vec{F}_{\text{react}} = \mathcal{U} k \vec{e}_z \mathcal{M}(z) \sin(2kz) . \quad (\text{I.2.3})$$

A présent, dans le régime sautant [I.1.2.3], l'état atomique suit la valeur stationnaire avec un faible retard [I.1.2.3] ce qui permet de résoudre (I.2.2) indépendamment de (I.2.3). On trouve

$$\mathcal{M} = -\frac{\cos(2kz) + (v/v_c) \sin(2kz)}{1 + (v/v_c)^2} \quad (\text{I.2.4})$$

où

$$v_c = 2\Gamma_0'/9k \quad (\text{I.2.5})$$

est la vitesse dite de capture. En fait, v_c représente la vitesse critique au dessus de laquelle, l'atome parcourt une distance supérieure à la période spatiale du potentiel en un temps de l'ordre de τ_0' (c'est à dire qu'il a une vitesse de $\pi v_c/2$), le temps typique d'évolution de l'état externe est du même ordre que celui de l'état interne et l'image physique du refroidissement n'est plus valable. L'état interne forcé de l'atome est déterminé par une moyenne de l'effet de champ sur plusieurs périodes spatiales ce qui conduit à une polarisation atomique qui s'écarte significativement de ce qu'elle serait pour un atome au repos ¹.

¹En effet, la solution (I.2.4) montre que lorsque v n'est plus faible devant v_c , $\mathcal{M}$ s'écarte fortement de la valeur stationnaire $\cos(2kz)$ et finit par tendre vers 0 pour $v \gg v_c$. Dans ce cas, $\Pi_+ = \Pi_-$ en tout point et l'état interne est complètement décorrélé de l'état externe.

En réintégrant (I.2.4) dans (I.2.3), on élimine adiabatiquement l'état interne et on trouve²

$$\vec{F} = -\frac{\alpha_0 \vec{v}}{1 + (v/v_c)^2} \quad (\text{I.2.6})$$

$$\text{où } \alpha_0 = 3\hbar k^2 \left| \frac{\Delta}{\Gamma} \right|$$

qui correspond à une force de friction généralisée.

Les forces aléatoires dues d'une part aux reculs subis par l'atome lors de l'absorption ou l'émission d'un photon et d'autre part aux fluctuations de la force dipolaire sont caractérisées par un coefficient de diffusion en impulsion que l'on obtient en évaluant (I.1.42) au moyen d'un calcul similaire à celui qui est présenté dans la référence [48]. On trouve [55, 114]²

$$D_p = \frac{D_{\text{dip}}}{1 + (v/v_c)^2} + D_{\text{abs,sp}} \quad (\text{I.2.7})$$

$$\text{où } D_{\text{abs,sp}} = 2\hbar^2 k^2 \Gamma'_0$$

$$D_{\text{dip}} = \frac{3}{2} \hbar^2 k^2 \frac{\Delta}{\Gamma} \Delta'_0 .$$

Enfin, en utilisant les formules (I.2.6) et (I.2.7) dans la relation d'Einstein $k_B T = D_p / \alpha_0$ [23] et en négligeant la contribution de $D_{\text{abs,sp}}$, nous obtenons²

$$k_B T = \frac{1}{2} \hbar |\Delta'_0| \quad (\text{I.2.8})$$

dont nous avons discuté la signification physique au paragraphe I.1.2.3.

Cette méthode décrit la dynamique en termes browniens très parlants mais est limitée au régime sautant et n'est analytique qu'en 1D. Notons que Klaus Mølmer a néanmoins généralisé la méthode à des cas multidimensionnels [115].

Régime oscillant

Dans le régime oscillant, l'élimination adiabatique de l'état interne dont le temps typique d'évolution n'est plus faible devant celui de l'état externe n'est plus possible telle que nous l'avons vu ci-dessus. Afin d'obtenir une formulation semi-classique dans le régime oscillant, Castin *et al.* [55, 43] ont paramétré le mouvement par les variables z (position) et E (énergie). Comme dans ce régime l'énergie E varie lentement (le mouvement étant hamiltonien sur une échelle de temps grande devant le temps de pompage optique), on peut éliminer formellement la position z . A l'ordre 0 en $\Omega_v \tau'_0$, on obtient une équation intégral-différentielle de la forme

$$0 = - \int \frac{dz}{v} \gamma_+(z) \Phi[E] + \int \frac{dz}{v} \gamma_-(z) \Phi[E - U_+(z) + U_-(z)] +$$

$$+ \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'_0}{9} \frac{\partial}{\partial E} \int dz v ([10 - \cos(2kz)] \Phi'[E] + \Phi'[E - U_+(z) + U_-(z)]) \quad (\text{I.2.9})$$

²Notons que cette valeur du coefficient de friction α_0 est en bon accord avec le modèle simple développé au paragraphe I.1.2.3.

où $\Phi[E] = \Pi_+(z, v)$ et $\Phi[E - U_+(z) + U_-(z)] = \Pi_-(z, v)$. L'intégrale dans (I.2.9) porte soit sur une période d'oscillation (cas de particules piégées $E < \mathcal{U}$), soit sur une période spatiale du réseau (cas de particules non piégées $E > \mathcal{U}$).

En résolvant numériquement l'équation (I.2.9), Castin *et al.* ont obtenu des résultats en excellent accord avec ceux d'un traitement entièrement quantique [55] dans le régime oscillant.

Il est donc possible d'effectuer des traitements semi-classiques de la dynamique atomique dans un réseau optique dissipatif, soit dans le régime sautant, soit dans le régime oscillant. Néanmoins, les méthodes présentées ci-dessus sont essentiellement limitées à des cas 1D et à la transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Par ailleurs, le régime intermédiaire entre régime sautant et régime oscillant n'est pas accessible. Afin de contourner ces limitations, on utilise des méthodes de Monte-Carlo semi-classiques [I.2.3] d'intégration de l'équation maîtresse (I.1.18).

2.2 Simulations de Monte-Carlo quantiques

Nous nous intéressons à présent à la méthode de Monte-Carlo d'intégration de l'équation maîtresse entièrement quantique (I.1.18). Nous décrivons tout d'abord la méthode dans le cadre général d'une équation sous une forme particulière, dite de Lindblad, puis nous montrons comment elle s'applique au cas du refroidissement sub-Doppler. Nous décrivons enfin les aspects pratiques de la méthode et montrons notamment comment elle donne accès à des grandeurs physiques pertinentes.

2.2.1 De l'équation maîtresse quantique sous la forme de Lindblad aux fonctions d'onde stochastiques

Nous considérons ici un système quantique quelconque dans un potentiel extérieur et couplé à un réservoir. D'une manière générale, l'évolution de sa matrice densité est décrite par une équation maîtresse formée d'une partie hamiltonienne et d'une partie dissipative [33]. C'est le cas par exemple (I.1.18) d'un atome en interaction avec le champ de rayonnement [I.1.1]. Des considérations mathématiques et physiques très générales montrent que l'équation maîtresse peut être mise sous la forme de Lindblad [116]. Nous présentons dans ce paragraphe la méthode de Monte-Carlo d'intégration d'une équation maîtresse quantique de cette forme à l'aide de fonctions d'onde stochastiques.

Notons qu'il existe des situations pour lesquelles la dynamique est représentée par une équation maîtresse d'une forme différente de celle de Lindblad. En effet, la dérivation d'une équation maîtresse nécessite plusieurs hypothèses dont celle que le processus est markovien [33]. On effectue en effet des moyennes à gros grains ce qui suppose que le temps typique des fluctuations du réservoir est très faible devant le temps typique d'évolution du système. Les corrélations réservoir-système s'évanouissent alors rapidement et l'évolution du système ne dépend que de son état présent et pas de son passé (processus de Markov). Ces hypothèses peuvent ne pas être vérifiées et il faut alors introduire des corrélations à temps multiples dont il résulte une équation maîtresse déviant de la forme de Lindblad. Par

ailleurs, lorsque le système possède un grand nombre de degrés de liberté, il convient de faire des approximations afin de pouvoir intégrer sa dynamique dont il peut encore résulter une équation maîtresse d'une forme autre que celle de Lindblad. Nous ne considérerons pas ces cas dans la suite et renvoyons le lecteur à la référence [117] pour une description de méthodes générales d'intégration par la méthode de Monte-Carlo.

Forme de Lindblad et traitement par une méthode de Monte-Carlo

Nous considérons donc ici une équation maîtresse de la forme de Lindblad[116] :

$$i\hbar \frac{d\sigma}{dt} = [\mathbf{H}, \sigma] + \mathcal{L}_{\text{relax}}(\sigma) \quad (\text{I.2.10})$$

$$\text{où } \mathcal{L}_{\text{relax}}(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_j \{C_j^\dagger C_j, \sigma\} + \sum_j C_j \sigma C_j^\dagger.$$

Dans cette équation, les C_j sont des opérateurs linéaires quelconques. Le commutateur représente l'interaction hamiltonienne du système avec un potentiel extérieur³. L'anti-commutateur (premier terme dans $\mathcal{L}_{\text{relax}}$) correspond lui à un terme de vidage (diminution de $\text{tr}(\sigma)$) alors que la seconde somme dans $\mathcal{L}_{\text{relax}}$ correspond à des termes de remplissage (augmentation de $\text{tr}(\sigma)$). On vérifie sans difficulté que la forme générale (I.2.10) assure la conservation de la probabilité ($\text{tr}(\sigma(t)) = \text{cte}$). Notons enfin que l'équation maîtresse (I.1.18) qui nous intéresse plus particulièrement dans ce mémoire rentre bien dans le cadre général de la forme de Lindblad (I.2.10) avec $C_j = \sqrt{\Gamma_0} \Pi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}$ et en remplaçant la somme discrète $\sum_j$ par la somme continue $\frac{3}{8\pi} \int_{|\vec{\kappa}|=\frac{\omega_{\text{at}}}{c}} \frac{d^2 \vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|^2} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{\kappa}}$. En effet, on montre facilement à l'aide de (I.1.22) que $\Lambda = \frac{3}{8\pi} \int_{|\vec{\kappa}|=\frac{\omega_{\text{at}}}{c}} \frac{d^2 \vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|^2} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{\kappa}} \Pi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}^\dagger \Pi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}$.

L'équation (I.2.10) peut être mise sous la forme simplifiée

$$i\hbar \frac{d\sigma}{dt} = \mathbf{H}_{\text{eff}} \sigma - \sigma \mathbf{H}_{\text{eff}} + \sum_j C_j \sigma C_j^\dagger \quad (\text{I.2.11})$$

$$\text{où } \mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H} - \frac{i\hbar}{2} \sum_j C_j^\dagger C_j.$$

A ce stade, la méthode de Monte-Carlo consiste à remplacer la matrice densité σ par un jeu de fonctions d'onde $\{|\psi\rangle\}$. On sait qu'un système quantique décrit par une fonction d'onde évolue selon l'équation de Schrödinger et, de façon équivalente, peut être aussi décrit par une matrice densité. Bien que cela ne soit pas possible dans le cas général, nous cherchons ici à effectuer la procédure inverse. En fait, une telle procédure ne permet de prendre en compte que l'évolution pseudo-hamiltonienne du système liée à l'opérateur $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ (hamiltonien effectif). La contribution de la partie non pseudo-hamiltonienne $\sum_j C_j \sigma C_j^\dagger$ sera prise en compte quant à elle dans des sauts quantiques aléatoires. C'est de ces processus aléatoires qu'émane le caractère stochastique des fonctions d'onde $|\psi\rangle$. Voyons cela plus en détail.

³Dans le cas qui nous intéresse plus particulièrement dans la suite (interaction d'un atome avec un champ de rayonnement), $\mathbf{H}$ contient le hamiltonien atomique libre, les déplacements lumineux associés au couplage avec les modes électromagnétiques et un éventuel potentiel extérieur.

Evolution pseudo-hamiltonienne - Considérons une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ normalisée à l'instant t . La première étape consiste à faire évoluer $|\psi\rangle$ de façon pseudo-hamiltonienne pendant le temps élémentaire dt :

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi^H(t+dt)\rangle = \left(1 + \frac{\mathbf{H}_{\text{eff}} dt}{i\hbar}\right) |\psi(t)\rangle . \quad (\text{I.2.12})$$

Du fait du caractère non-hermitique du hamiltonien effectif $\mathbf{H}_{\text{eff}}$, $|\psi^H(t+dt)\rangle$ est en fait non normalisé bien que $|\psi(t)\rangle$ le soit. On montre facilement que

$$||\psi^H(t+dt)\rangle|^2 = 1 - \sum_j p_j \quad (\text{I.2.13})$$

$$\text{où } p_j = \langle \psi(t) | \mathbf{C}_j^\dagger \mathbf{C}_j | \psi(t) \rangle dt . \quad (\text{I.2.14})$$

Ainsi, $||\psi^H(t+dt)\rangle|^2 < ||\psi(t)\rangle|^2$ ce qui se comprend aisément en se rappelant que le seul terme de $\mathcal{L}_{\text{relax}}$ pris en compte dans l'évolution pseudo-hamiltonienne est l'anti-commutateur qui correspond aux termes de vidage (diminution de $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$).

Sauts quantiques - On interprète alors $1 - \sum_j p_j$ comme la probabilité que l'évolution soit pseudo-hamiltonienne, de la forme de (I.2.12) ⁴, et p_j comme la probabilité que la fonction d'onde subisse un saut quantique de $|\psi(t)\rangle$ à $\mathbf{C}_j |\psi(t)\rangle$ ⁴ entre les instants t et $t+dt$. En pratique, on choisit un nombre aléatoire r uniformément réparti dans $[0, 1[$ et

– si $r > \sum_j p_j$, l'évolution de $|\psi\rangle$ correspond à

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t+dt)\rangle = \frac{|\psi^H(t+dt)\rangle}{||\psi^H(t+dt)\rangle|} \quad (\text{I.2.15})$$

– si $\sum_{l \leq j-1} p_l < r \leq \sum_{l \leq j} p_l$, l'évolution de $|\psi\rangle$ correspond à

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t+dt)\rangle = \frac{\mathbf{C}_j |\psi(t)\rangle}{|\mathbf{C}_j |\psi(t)\rangle|} . \quad (\text{I.2.16})$$

On impose ainsi une renormalisation de l'état quantique à chaque pas de temps. La dynamique d'une fonction d'onde $|\psi\rangle$ est finalement caractérisée par des phases d'évolution pseudo-hamiltoniennes interrompues par des sauts quantiques instantanés. De l'intégration temporelle (I.2.15)-(I.2.16), on déduit une “trajectoire quantique” dans l'espace des états correspondant à une histoire possible de la fonction d'onde d'un atome [118-121]. En répétant la procédure indépendamment un grand nombre de fois et en effectuant des moyennes, on obtient l'évolution du nuage atomique dont on peut déduire les propriétés d'ensemble (voir le paragraphe I.2.2.3).

⁴moyennant renormalisation

Equivalence entre l'équation maîtresse et les fonctions d'onde stochastiques

Le paragraphe précédent nous a permis de décrire une méthode d'intégration de type Monte-Carlo dont l'interprétation physique est claire. Pour être parfaitement rigoureux, il nous faut encore montrer que la méthode de Monte-Carlo (I.2.15)-(I.2.16) est équivalente à l'intégration directe de l'équation maîtresse (I.2.10). Nous suivons pour cela la méthode décrite dans la référence [122]. La matrice densité associée aux fonctions d'onde stochastiques s'écrit naturellement

$$\overline{\sigma} = \overline{|\psi\rangle\langle\psi|} \quad (\text{I.2.17})$$

où $\overline{(\cdot)}$ représente la moyenne statistique. Pour déterminer l'évolution de $\overline{\sigma}$ nous tenons compte des évolutions (I.2.15) et (I.2.16) et de leurs probabilités respectives. Ceci conduit alors à

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(t+dt) = & \left(1 - \sum_j p_j\right) \frac{|\psi^H(t+dt)\rangle\langle\psi^H(t+dt)|}{\langle\psi^H(t+dt)|\psi^H(t+dt)\rangle} + \\ & + \sum_j p_j \frac{C_j |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| C_j^\dagger}{\langle\psi(t)|C_j^\dagger C_j |\psi(t)\rangle}, \end{aligned} \quad (\text{I.2.18})$$

dont on déduit sans difficulté que

$$\overline{\sigma}(t+dt) = \overline{\sigma}(t) + \frac{H_{\text{eff}} dt}{i\hbar} \overline{\sigma}(t) - \overline{\sigma}(t) \frac{H_{\text{eff}}^\dagger dt}{i\hbar} + \sum_j C_j \overline{\sigma}(t) C_j^\dagger. \quad (\text{I.2.19})$$

Nous avons ainsi montré que l'équation d'évolution (I.2.19) de $\overline{\sigma}$ est exactement la même que l'équation maîtresse de Lindblad (I.2.11). Il s'ensuit qu'en prenant des valeurs initiales égales⁵ pour σ et $\overline{\sigma}$, on obtient à tout instant $\sigma = \overline{\sigma}$ ce qui démontre l'équivalence des deux méthodes (Monte-Carlo et intégration directe). Finalement, $\overline{\sigma}$ aussi bien que σ contient toute l'information du système à un instant quelconque t . En particulier, la valeur moyenne de n'importe quelle observable $\mathcal{O}$ du système se déduit simplement de notre jeu de fonctions d'onde stochastiques :

$$\overline{\langle\psi(t)|\mathcal{O}|\psi(t)\rangle} = \text{tr}(\mathcal{O}\sigma(t)). \quad (\text{I.2.20})$$

L'intégration (I.2.15)-(I.2.16) est alors répétée un grand nombre N_{rep} de fois de manières indépendantes et avec des nombres aléatoires distincts afin de minimiser l'erreur statistique dans (I.2.20). D'après la loi des grands nombres [123], la moyenne statistique $\overline{\langle\mathcal{O}\rangle}$ suit une loi normale et l'erreur statistique $\delta\langle\mathcal{O}\rangle$ varie alors comme $1/\sqrt{N_{\text{rep}}}$.

2.2.2 Application au refroidissement laser sub-Doppler

Nous appliquons à présent la méthode de Monte-Carlo à l'intégration de la dynamique atomique dans le cas de l'interaction lumière-matière et dans le cadre du paragraphe I.1.1. Comme nous l'avons vu ceci est possible car l'équation maîtresse (I.1.18) est de la forme de Lindblad [I.2.2.1]. Les méthodes de Monte-Carlo quantiques ont été mises en place pour

⁵Dans le cadre du refroidissement laser, cette valeur initiale n'a en fait pas d'importance car σ relaxe vers une valeur stationnaire indépendante de l'état initial.

la première fois dans ce contexte en 1992 indépendamment par Dalibard *et al.* [118] et par Dum *et al.* [124]. Dans la procédure ci-dessus qui s'applique directement, l'état excité n'apparaît pas car il a été éliminé adiabatiquement en amont de la dérivation de l'équation maîtresse [I.1.1.3]. Néanmoins, comme le couplage de l'état fondamental avec le champ de rayonnement (champ laser et modes du vide) se fait par l'intermédiaire de l'état excité, il est commode de réintroduire ce dernier, notamment à des fins de clarté. La procédure consiste alors à chaque pas de temps à :

- Effectuer une évolution pseudo-hamiltonienne entre les instants t et $t + dt$ correspondant à

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\psi_g\rangle}{dt} &= \frac{\vec{p}^2}{2M} |\psi_g\rangle + \mathbf{V}_{\text{AL}}^- |\psi_e\rangle \\ i\hbar \frac{d|\psi_e\rangle}{dt} &= \left(\frac{\vec{p}^2}{2M} - \hbar\Delta - i\hbar \frac{\Gamma}{2} \right) |\psi_e\rangle + \mathbf{V}_{\text{AL}}^+ |\psi_g\rangle . \end{aligned} \quad (\text{I.2.21})$$

Pour obtenir ces équations, on écrit la fonction d'onde sous la forme $|\psi\rangle = |\psi_g\rangle + |\psi_e\rangle$ où $|\psi_g\rangle$ et $|\psi_e\rangle$ agissent respectivement dans les sous-espaces de l'état fondamental et de l'état excité. On trouve alors que la forme qui colle le mieux aux équations de Bloch (I.1.8) correspond au système de deux équations linéaires couplées (I.2.21). En fait, les équations (I.2.21) reproduisent exactement (I.1.8) hormis le terme d'intégration sur les photons spontanés. Ceci est bien ce que l'on cherche pour mettre en place la méthode de Monte-Carlo [I.2.2.1].

Dans les équations (I.2.21), $|\psi_e\rangle$ peut en fait être déterminé directement grâce à la procédure d'élimination adiabatique de l'état excité. Pour ce faire, on prend $d|\psi_e\rangle/dt \simeq 0$ dans l'équation (I.2.21b) et on néglige l'énergie cinétique (voir la condition (I.1.15)) : on obtient alors⁶

$$|\psi_e\rangle \simeq \frac{\mathbf{V}_{\text{AL}}^+ |\psi_g\rangle}{\hbar(\Delta + i\Gamma/2)} . \quad (\text{I.2.22})$$

- Lors d'un processus d'émission spontanée (dont l'occurrence est déterminée par la décroissance de $||\psi_g\rangle||$, voir page 63), le ket représentant l'état {atome, champ de rayonnement} est transformé instantanément en $\mathbf{V}_{\text{AV}}^- (|\psi_e\rangle \otimes |R : 0\rangle)$. Il s'agit d'un état intriqué. Afin d'obtenir un état du système seul, on fait une mesure fictive du photon émis qui projette le ket sur la composante de l'état correspondant au photon obtenu effectivement lors de la mesure, par exemple de vecteur d'onde $\vec{\kappa}$ et de polarisation $\vec{\epsilon} : |1_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}\rangle$. Il s'ensuit que l'état atomique est projeté instantanément sur

$$\begin{aligned} |\psi_g\rangle &\rightarrow |\psi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}\rangle \propto \langle 1_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}} | \mathbf{V}_{\text{AV}}^- (|\psi_e\rangle \otimes |R : 0\rangle) \\ &\propto \left(\vec{d}^- \cdot \vec{\epsilon}^* \right) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} |\psi_e\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.2.23})$$

avec les probabilités relatives $||\psi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}\rangle||^2$. Ainsi la prise en compte des sauts quantiques induit-elle la réduction du paquet d'onde atomique. Ceci correspond à effectuer une

⁶En fait, on peut aussi se servir des formules (I.1.17) pour obtenir (I.2.22).

mesure systématique des photons émis spontanément [125, 121]. La projection du ket atomique dépend en fait de la forme des opérateurs $\mathbf{C}_j$ qui ne sont pas uniques dans la forme de Lindblad. Ainsi, les “trajectoires quantiques” elles-mêmes dépendent du choix des $\mathbf{C}_j$ [126]. Néanmoins, du fait de la formule (I.2.20), les moyennes d’ensemble sont indépendantes de ce choix.

2.2.3 Les simulations de Monte-Carlo quantiques en pratique

Implémentation numérique

Dans les configurations usuelles de refroidissement laser sub-Doppler [I.1.2.2, I.1.3.1], le champ lumineux s’écrit sous la forme

$$\vec{\xi}^+(\vec{r}) = \sum_j \vec{\epsilon}_j e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} + \Phi_j)} \quad (\text{I.2.24})$$

où en général, pour un quelconque $\mu \in \{x, y, z\}$, chaque $\vec{k}_j \cdot \vec{e}_\mu$ est un multiple entier d’une valeur k_μ . Ceci a des conséquences intéressantes sur les couplages des différents états quantiques accessibles comme nous le montrons maintenant.

Partie pseudo-hamiltonienne - L’action de $\mathbf{V}_{\text{AL}}$ dans le sous-espace des degrés de liberté externes induit une translation en impulsion de vecteurs $\hbar \vec{k}_j$. Il est par conséquent commode d’exprimer la partie externe de $|\psi_{g,e}\rangle$ dans une base d’états locaux en impulsion $(\vec{p})$. Notons par ailleurs que dans ce cadre, l’action de l’opérateur énergie cinétique $\frac{\vec{p}^2}{2M}$ est triviale. Ainsi, au niveau des degrés de liberté externes, les couplages par $\mathbf{V}_{\text{AL}}$ sont de type $|\vec{p}\rangle \longleftrightarrow |\vec{p} + \hbar \sum_\mu n_\mu k_\mu \vec{e}_\mu\rangle$ où les n_μ sont des entiers relatifs.

Pour ce qui concerne les degrés de liberté internes, on peut se ramener à ce que les $\vec{e}_j$ soient des vecteurs de la base circulaire $(\vec{e}_-, \vec{e}_0, \vec{e}_+)$. Dans ce cas, les couplages entre états internes sont de la forme $|g/e, m\rangle \longleftrightarrow |e/g, m + \epsilon\rangle$ où $\epsilon = 0, \pm 1$.

Il est donc commode de décomposer l’état interne dans la base des sous-niveaux Zeeman et l’état externe sur une grille de pas k_μ dans chaque direction μ :

$$|\psi_{g/e}\rangle = \sum_{\vec{n}} \sum_{|m| \leq J_{g/e}} a_{g/e, m, \vec{n}} |g/e, m, \hbar \sum_\mu n_\mu k_\mu \vec{e}_\mu\rangle. \quad (\text{I.2.25})$$

Cycles d’émission spontanée - Pour ce qui concerne les sauts quantiques, il est possible de prendre en compte le diagramme complet d’émission spontanée [118, 124, 122]. On peut néanmoins supposer que les photons spontanés sont émis exclusivement le long des axes de coordonnées $\mu \in \{x, y, z\}$. Une telle hypothèse est valable car dans le cadre du refroidissement sub-Doppler, la distribution d’impulsion est plus large que l’impulsion de recul $\hbar k$ [73, 66]. Au niveau des degrés de liberté internes, les couplages dus à $\mathbf{V}_{\text{AV}}$ sont même type que pour $\mathbf{V}_{\text{AL}}$ de sorte que la description ci-dessus est commode aussi pour les cycles d’émission spontanée. Pour ce qui concerne les degrés de liberté externes, les reculs dus à l’émission spontanée sont de norme $\hbar k$ et deux cas de figure se présentent.

- Si la configuration est telle que $k_\mu = k$, comme c'est le cas des configurations à faisceaux alignés sur les axes de coordonnées [I.1.3.1], les couplages dus à l'émission spontanée sont encore du même type que pour $\mathbf{V}_{\text{AL}}$ de sorte que la description ci-dessus est toujours bien adaptée.
- Si au contraire les k_μ sont différents de k , comme c'est le cas de la configuration 3D-lin $\perp$ lin [I.1.2.2], la situation se complique un peu car les couplages dus à $\mathbf{V}_{\text{AV}}$ induisent des translations en impulsion qui font sortir l'état atomique des mailles de la grille de pas k_μ dans chaque direction μ . En fait, comme cette translation se fait en bloc sur toutes les composantes de l'état atomique, on peut tenir compte du recul par une modification de l'origine de la grille $\vec{p}_0$ où $\forall \mu, |\vec{p}_0 \cdot \vec{e}_\mu| < \hbar k_\mu$.

Mesures de grandeurs physiques pertinentes

Comme nous l'avons vu [I.2.2.1], la méthode de Monte-Carlo quantique permet de simuler la matrice densité et donc d'obtenir toute l'information sur le nuage atomique (voir l'équation (I.2.20)). Dans la pratique, la grille en impulsion est finie mais on peut (au moins en principe) la prendre aussi grande que l'on veut. Comme les effets de refroidissement induisent des distributions d'impulsion de largeur de l'ordre de quelques dizaines de $\hbar k$, ceci ne pose pas de problème particulier. Dans ce paragraphe, nous décrivons très brièvement comment obtenir les valeurs d'un certain nombre d'observables pertinentes.

Température cinétique - Dans les simulations, l'état atomique $|\psi_g\rangle$ est écrit dans la base $(|\vec{p}\rangle)$ (I.2.25) de sorte que la somme des carrés des composantes de $|\psi_g\rangle$, $\sum_{-J_g \leq m \leq J_g} |a_{g,m,\vec{p}}|^2$ fournit directement la probabilité qu'un atome ait une impulsion donnée. Il est donc facile de déterminer l'énergie cinétique moyenne du nuage atomique dans chaque direction de l'espace comme l'ont fait Castin et Mølmer [66, 117]. Plus généralement, on peut déterminer la distribution d'impulsion du nuage [127], [II.1.2].

Localisation atomique - La détermination des distributions de position est plus délicate. On peut néanmoins la déterminer en utilisant la propriété que $|\vec{r}\rangle$ et $|\vec{p}\rangle$ sont des opérateurs quantiquement conjugués [66] :

$$\langle \vec{r} | \psi_g \rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{grid}}}} \sum \langle \vec{p} | \psi_g \rangle e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I.2.26})$$

où N_{grid} est le nombre de points sur la grille d'impulsion. Il faut faire attention néanmoins que la grille d'impulsion a un pas $\hbar k_\mu$ dans la direction μ de sorte que la distribution de position est limitée supérieurement à l'extension $2\pi/k_\mu$. Ainsi, cette méthode permet-elle de déterminer la distribution de position dans un puits de potentiel (de taille $2\pi/k_\mu$) mais pas la distribution de position à grande échelle. En particulier, on ne peut pas étudier ainsi la diffusion spatiale du nuage.

Diffusion spatiale - Pour étudier la diffusion spatiale, on peut tracer des trajectoires atomiques classiques. Pour cela, on détermine à chaque pas de temps l'impulsion moyenne du paquet d'onde $\langle \vec{p} \rangle$ qui se déduit immédiatement des composantes du ket $|\psi_g\rangle$. Il est alors

trivial d'intégrer cette impulsion pour tracer la position d'un atome en fonction du temps. Cette approche est justifiée lorsque les sauts quantiques induisent la localisation spatiale du paquet d'onde. Pour ce faire Holland *et al.* [126] ont utilisé le fait que les opérateurs C_j ne sont pas uniques dans la forme de Lindblad (I.2.10) et peuvent être choisis pour réaliser cette localisation à chaque processus d'émission spontanée. Il est alors facile de déduire d'un jeu de trajectoires simulées, la diffusion spatiale du nuage atomique. Cette technique a été utilisée par Marksteiner *et al.* [128] dans un réseau bidimensionnel. Marte *et al.* ont par ailleurs étudié des spectres de fluorescence par cette méthode [129-131].

2.3 Simulations de Monte-Carlo semi-classiques

Nous nous intéressons à présent à la mise en place de méthodes de Monte-Carlo dans le cadre de l'approximation semi-classique pour laquelle les degrés de liberté externes sont traités comme des variables classiques. L'état interne est quant à lui traité de façon semi-classique, c'est à dire que sa structure à plusieurs sous-niveaux Zeeman est prise en compte mais les corrélations de ces états sont négligées.

Les raisons pour lesquelles on utilise abondamment des simulations semi-classiques pour l'étude du refroidissement sub-Doppler sont multiples. Tout d'abord, une raison purement pragmatique : ces méthodes donnent d'excellents résultats qualitatifs et quantitatifs pour la plupart des problèmes abordés et sont beaucoup moins coûteuses d'un point de vue numérique ce qui est indiscutablement particulièrement appréciable. Ensuite, l'approche semi-classique donne directement accès à des observables physiques très variées (température, diffusion spatiale, vitesse du nuage, distributions d'atomes, spectres pompe-sonde). Le suivi de trajectoires atomiques sur le paysage des potentiels optiques donne par ailleurs des renseignements précieux sur la dynamique microscopique des atomes. Enfin, comme nous allons le voir, la forme des équations du traitement semi-classique (I.2.37) permet d'exhiber de manière séparée différentes contributions à la dynamique (mouvement hamiltonien sur les potentiels optiques, transitions d'état interne, diffusion en impulsion, ...) alors que le traitement quantique intègre (presque) directement l'équation maîtresse (I.1.18) qui reste assez opaque aux interprétations physiques. Dans la suite du mémoire, nous ferons une abondante exploitation de ces particularités propres à l'approche semi-classique.

Dans ce paragraphe, nous justifions tout d'abord l'approche semi-classique dans le cadre du refroidissement laser puis nous introduisons la description semi-classique de la dynamique obtenue par le biais d'une transformation de Weyl de l'équation quantique maîtresse (I.1.18). A ce point, pousser plus avant des calculs analytiques présente une difficulté réelle de sorte que l'on a recours à des méthodes numériques. Nous transformons alors l'équation de Fokker-Planck en équations de Langevin couplées, adaptées aux simulations de type Monte-Carlo puis nous décrivons les aspects pratiques des simulations.

2.3.1 Justification de l'approximation semi-classique

Nous nous proposons dans ce paragraphe de justifier brièvement l'emploi d'une méthode semi-classique pour la description du refroidissement laser. Dans cette description, les atomes sont traités comme des paquets d'onde localisés dans l'espace des phases, c'est à

dire à la fois en position et en impulsion. Plus précisément, il faut que des états $|\vec{r}\rangle$ et $|\vec{r}'\rangle$ ou $|\vec{p}\rangle$ et $|\vec{p}'\rangle$ soient corrélés sur des échelles suffisamment faibles. Introduisons les “longueurs” de corrélation en position ξ_R et en impulsion ξ_P définies comme

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \rho_{\text{ext}} | \vec{r} \rangle &\ll 1 \quad \text{pour} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| \gg \xi_R \\ \langle \vec{p}' | \rho_{\text{ext}} | \vec{p} \rangle &\ll 1 \quad \text{pour} \quad |\vec{p} - \vec{p}'| \gg \xi_P \end{aligned} \quad (\text{I.2.27})$$

où $\rho_{\text{ext}} = \text{tr}_{\text{int}}(\rho)$ est la matrice densité réduite aux degrés de liberté externes.

Dans un champ laser, le traitement semi-classique est manifestement correct lorsque d’une part, l’échelle spatiale des corrélations quantiques est bien inférieure à la longueur d’onde optique et d’autre part, les corrélations quantiques existent sur des échelles d’impulsion sur lesquelles le décalage Doppler est faible devant l’inverse des temps typiques d’évolution de l’état interne. Finalement, les conditions de l’approximation semi-classique se résument à

$$\begin{aligned} k_L \xi_R &\ll 1 \\ \frac{k_L \xi_P}{M} &\ll \Gamma, \Delta. \end{aligned} \quad (\text{I.2.28})$$

Dans le cadre du refroidissement laser à présent, des phénomènes de friction et de diffusion en impulsion s’équilibrent pour donner lieu à une température finie de l’ordre [30] de $\hbar\Gamma$ (refroidissement Doppler) ou $\hbar|\Delta'_0|$ (refroidissements Sisyphe et $\sigma^+ - \sigma^-$). Ainsi, $\frac{\Delta P^2}{M} \lesssim \hbar\Gamma$ dont nous déduisons que

$$\frac{k_L \Delta P}{M} < \sqrt{2\omega_R \Gamma}. \quad (\text{I.2.29})$$

Dans les cas usuels $|\Delta| \gtrsim \Gamma$ et $\Gamma \gg \omega_R$, de sorte que l’équation (I.2.29) valide⁷ la condition (I.2.28b). Par ailleurs, les atomes diffusent en permanence des photons lasers ce qui détruit la cohérence spatiale du nuage. En fait, on peut montrer [132] que dans ce cadre, la longueur de cohérence ξ_R est très inférieure à la longueur d’onde des photons diffusés de sorte que la condition (I.2.28a) est vérifiée.

2.3.2 L’approximation semi-classique

Dans le cadre du refroidissement laser (Doppler, Sisyphe ou $\sigma^+ - \sigma^-$), nous pouvons légitimement employer une approche semi-classique [I.2.3.1]. Nous décrivons dans la suite la mise en place d’une telle approche et montrons son intérêt pratique, lié notamment au fait qu’elle simplifie les interprétations physiques.

Des équations de Bloch optiques à l’équation de Fokker-Planck pour la fonction de Wigner par le biais de la transformation de Weyl

La difficulté fondamentale inhérente à l’obtention d’une formulation classique du mouvement de l’atome est liée au principe de Heisenberg qui, en particulier, interdit la définition

⁷Ceci résulte du fait que $\Delta P > \xi_P$. Pour autant, la condition (I.2.28b) ne doit être lue en remplaçant ξ_P par ΔP car on peut imaginer un nuage de paquets d’onde étroits mais dont les vitesses sont très éparpillées ($\Delta P \gg \xi_P$) comme c’est le cas dans les jets atomiques.

d'une base de l'espace des phases $\mathcal{E}_H$ formée d'états localisés à la fois en $|\vec{r}\rangle$ et en $|\vec{p}\rangle$ et rend de ce fait caduque la notion classique de trajectoire. Afin de contourner ce problème, on peut exprimer un opérateur $\mathbf{A}$ dans une base d'états localisés en $|\vec{r}\rangle$ en fonction de ses composantes dans une base d'états localisés en $|\vec{p}\rangle$ en introduisant les relations de fermetures $\int d^3r |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|$ et $\int d^3p |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|$ [133]. Une telle procédure conduit naturellement à la définition de la fonction

$$\mathbf{a}(\vec{R}, \vec{P}) = \int d^3r \left\langle \vec{R} + \vec{r}/2 \left| \mathbf{A} \right| \vec{R} - \vec{r}/2 \right\rangle \exp\left(-i\vec{P} \cdot \vec{r}/\hbar\right), \quad (\text{I.2.30})$$

dite transformée de Weyl de l'opérateur $\mathbf{A}$. On montre alors [133] que $\mathbf{a}$ possède toutes les propriétés d'une forme classique pour l'observable associée à l'opérateur $\mathbf{A}$, en particulier que $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \int d^3R d^3P \mathbf{a}(\vec{R}, \vec{P}) \mathbf{b}(\vec{R}, \vec{P})$. La distribution de Wigner $\mathbf{W}$ qui correspond à la transformée de Weyl de l'opérateur densité σ , normalisée à $\int d^3R d^3P \mathbf{W}(\vec{R}, \vec{P}, t) = 1$ s'écrit donc

$$\mathbf{W}(\vec{R}, \vec{P}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \left\langle \vec{R} + \vec{r}/2 \left| \sigma(t) \right| \vec{R} - \vec{r}/2 \right\rangle \exp\left(-i\vec{P} \cdot \vec{r}/\hbar\right). \quad (\text{I.2.31})$$

$\mathbf{W}$ est ici une matrice $(2J_g + 1) \times (2J_g + 1)$ agissant dans l'espace des sous-niveaux Zeeman du fondamental et dépendant de la position de l'atome $\vec{R}$, de son impulsion $\vec{P}$ et du temps t . On montre facilement que la représentation de Wigner ainsi obtenue est équivalente à la formulation quantique standard [133] mais qu'elle présente l'avantage de fournir une interprétation classique simple : $\mathbf{W}$ représente la quasi-distribution de probabilité de position et d'impulsion du nuage atomique [134]. En fait, $\mathbf{W}$ n'est pas exactement une distribution de probabilité car, à cause d'effets purement quantiques, elle peut prendre des valeurs négatives sur des échelles de l'ordre de $\hbar$ dans l'espace des phases.

Le point de départ du traitement est ici encore l'équation maîtresse de la dynamique atomique réduite à l'état fondamental (I.1.18) [I.1.1.3]. Pour faire apparaître la fonction $\mathbf{W}$, nous appliquons donc la transformation de Weyl à (I.1.18). Nous épargnerons ici au lecteur les longs et fastidieux calculs qui en résultent. Notons simplement que cette transformation conduit naturellement à un développement de $\mathbf{W}$ par rapport à la variable d'impulsion en puissances de l'impulsion de recul correspondant aux différents lasers $\hbar\vec{k}_j$ et aux photons spontanés. Dans le cadre du mécanisme de refroidissement Sisyphe, la distribution d'impulsion a typiquement une largeur $\vec{P}$ beaucoup plus grande que l'impulsion de recul $\hbar\vec{k}$ (voir l'équation (I.2.8)) de sorte que l'on peut limiter ce développement en puissances de $\hbar\vec{k}/\vec{P}$ aux ordres les plus bas. À l'ordre 2, on obtient ainsi une équation de Fokker-Planck (FPE) pour la matrice $\mathbf{W}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}} - \frac{\hbar \Delta'_0}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \vec{R}}, \frac{\partial}{\partial \vec{P}} \right\} \right) \mathbf{W} = \\
& -i\Delta'_0 [\mathbf{\Lambda}, \mathbf{W}] - \frac{\Gamma'_0}{2} \{ \mathbf{\Lambda}, \mathbf{W} \} + \Gamma'_0 \sum_{q=0,\pm} \mathbf{B}_q^\dagger \mathbf{W} \mathbf{B}_q + \\
& -i\frac{\hbar \Gamma'_0}{4} \left[\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \vec{R}}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \vec{P}} \right] - i\frac{\hbar \Gamma'_0}{2} \sum_{q=0,\pm} \left(\mathbf{B}_q^\dagger \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \vec{P}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_q}{\partial \vec{R}} - h.c. \right) + \\
& + i\frac{\hbar^2 \Delta'_0}{8} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{\Lambda}}{\partial \vec{R}^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \vec{P}^2} \right] + \frac{\hbar^2 \Gamma'_0}{16} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{\Lambda}}{\partial \vec{R}^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \vec{P}^2} \right\} + \\
& - \frac{\hbar^2 \Gamma'_0}{8} \sum_{q=0,\pm} \left(\mathbf{B}_q^\dagger \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \vec{P}^2} : \frac{\partial^2 \mathbf{B}_q}{\partial \vec{R}^2} + h.c. \right) + \\
& + \frac{\hbar^2 \Gamma'_0}{4} \sum_{q=0,\pm} \frac{\partial \mathbf{B}_q^\dagger}{\partial \vec{R}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \vec{P}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_q}{\partial \vec{R}} + \\
& + \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'_0}{20} \sum_{\mu, \nu \in \{x, y, z\}} \sum_{q, q'=0,\pm} \eta_{q, q'}^{\mu, \nu} \mathbf{B}_q^\dagger \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial P_\mu \partial P_\nu} \mathbf{B}_{q'}
\end{aligned} \tag{I.2.32}$$

où η s'écrit dans la base, $(\vec{e}_-, \vec{e}_0, \vec{e}_+)$, sous la forme

$$\begin{aligned}
\eta_{q, q'}^{x, x} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \eta_{q, q'}^{y, y} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \eta_{q, q'}^{z, z} &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
\eta_{q, q'}^{x, y} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \eta_{q, q'}^{x, z} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} & \eta_{q, q'}^{y, z} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{I.2.33}$$

η est un tenseur d'ordre 4 qui résulte d'une moyenne sur les états des photons spontanés; deux composantes (q, q') concernent la polarisation et deux (μ, ν) concernent la direction des photons spontanés.

Nous avons encore posé

$$\mathbf{B}_q = \left[\vec{\xi}^- \cdot \vec{d}^- \right] \cdot \left[\vec{e}_q \cdot \vec{d}^+ \right] . \tag{I.2.34}$$

$\mathbf{B}_q$ est l'équivalent de l'opérateur $\mathbf{\Pi}_{\vec{\kappa}, \vec{e}_q}^\dagger$ sans le terme de recul $e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}$ (voir l'équation (I.1.21)).

En fait, dans un contexte classique où la position $\vec{R}$ n'est pas quantifiée, ce terme de recul

commute avec l'opérateur densité réduite σ et s'élimine avec le terme $e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}$ apparaissant dans $\Pi_{\vec{\kappa}, \vec{e}_q}$ dans l'équation (I.1.18).

Remarque: Pour simplifier le tenseur η , on peut supposer ici encore que les photons spontanés sont émis exclusivement le long des axes de coordonnées comme nous l'avons fait pour la formulation entièrement quantique [I.2.2]. Dans ce cadre, la dernière ligne de l'équation (I.2.32) doit être remplacée par :

$$\dots + \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'_0}{4} \sum_{\mu \in \{x, y, z\}} \sum_{q \in \mu^\perp} B_q^\dagger \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial P_\mu^2} B_q \quad (\text{I.2.35})$$

où

$$\begin{cases} x^\perp = \{y, z\} \\ y^\perp = \{z, x\} \\ z^\perp = \{x, y\} \end{cases} . \quad (\text{I.2.36})$$

Projection de l'équation de Fokker-Planck sur une base de l'état atomique interne

L'équation (I.2.32) est équivalente à l'équation maîtresse (I.1.18) à l'ordre 2 du développement de Taylor de $\mathbf{W}$ en puissances de $\hbar k / \bar{P}$ et contient donc l'ensemble de la dynamique atomique. Toutefois, (I.2.32) n'est pas très parlante et doit de toute façon être projetée sur une base de l'espace atomique interne fondamental ($|g, \Psi_j\rangle$) pour pouvoir effectuer un traitement numérique. L'opérateur $\mathbf{W}(\vec{R}, \vec{P})$ est formé d'une diagonale représentant les populations des cellules d'espace des phases centrées sur $(\vec{R}, \vec{P})$ et de termes non-diagonaux qui correspondent aux cohérences locales en $(\vec{R}, \vec{P})$ entre les sous niveaux $|g, \Psi_j\rangle$. Or ces termes de cohérences empêchent de simuler le problème par une méthode entièrement classique de sorte que nous les négligeons dans la suite⁸. La difficulté consiste naturellement à déterminer une base ($|\Psi_j\rangle$) telle que cette approximation soit valide et nous laissons ce problème pour le paragraphe suivant. Ici, nous nous contentons de projeter la FPE (I.2.32) sur une telle base.

Notons que le fait de négliger les termes de cohérences permet d'éliminer tous les commutateurs et de remplacer les anti-commutateurs par le double du produit des termes. Le reste du calcul s'effectue sans difficulté. Pour une base quelconque ($|\Psi_j(\vec{R})\rangle$) ne dépendant

⁸La simulation complète tenant compte des cohérences peut être effectuée mais est significativement plus lourde d'un point de vue numérique.

que de la position atomique $\vec{R}$, nous obtenons alors un ensemble de $(J_g + 1)$ FPE couplées :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \vec{F}_{j,j}^H \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{P}} \right) \Pi_j = & -\gamma_j \Pi_j + \sum_{l \neq j} \gamma_{l,j} \Pi_l + \\ & -\vec{F}_{j,j}^R \frac{\partial \Pi_j}{\partial \vec{P}} - \sum_{l \neq j} \vec{F}_{l,j}^R \cdot \frac{\partial \Pi_l}{\partial \vec{P}} + \\ & + \vec{D}_{j,j} : \frac{\partial^2 \Pi_j}{\partial \vec{P}^2} + \sum_{l \neq j} \vec{D}_{l,j} : \frac{\partial^2 \Pi_l}{\partial \vec{P}^2} \end{aligned} \quad (\text{I.2.37})$$

où

$$\begin{aligned} \bullet \quad \gamma_j &= \Gamma'_0 \left[\langle \Psi_j | \Lambda | \Psi_j \rangle - \sum_{q=0,\pm} |\langle \Psi_j | \mathbf{B}_q | \Psi_j \rangle|^2 \right] \\ \gamma_{l,j} &= \Gamma'_0 \sum_{q=0,\pm} |\langle \Psi_l | \mathbf{B}_q | \Psi_j \rangle|^2, \quad \forall l \neq j \end{aligned} \quad (\text{I.2.38})$$

$$\bullet \quad \vec{F}_{j,j}^H = -\hbar \Delta'_0 \langle \Psi_j | \frac{\partial \Lambda}{\partial \vec{R}} | \Psi_j \rangle \quad (\text{I.2.39})$$

$$\vec{F}_{l,j}^R = \hbar \Gamma'_0 \Im \left(\sum_{q=0,\pm} \langle \Psi_l | \mathbf{B}_q | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \frac{\partial \mathbf{B}_q^\dagger}{\partial \vec{R}} | \Psi_l \rangle \right), \quad \forall l \quad (\text{I.2.40})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{D}_{l,j} &= \frac{\hbar^2 \Gamma'_0}{8} \left(\langle \Psi_j | \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \vec{R}^2} | \Psi_j \rangle \right) \delta_{j,l} + \\ & - \frac{\hbar^2 \Gamma'_0}{4} \sum_{q=0,\pm} \Re \left(\langle \Psi_l | \mathbf{B}_q | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \frac{\partial^2 \mathbf{B}_q^\dagger}{\partial \vec{R}^2} | \Psi_l \rangle - \right. \\ & \quad \left. - \langle \Psi_l | \frac{\partial \mathbf{B}_q}{\partial \vec{R}} | \Psi_j \rangle \otimes \langle \Psi_j | \frac{\partial \mathbf{B}_q^\dagger}{\partial \vec{R}} | \Psi_l \rangle \right) \\ & + \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'_0}{20} \sum_{q,q'=0,\pm} \vec{\eta}_{q,q'} \langle \Psi_l | \mathbf{B}_{q'} | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \mathbf{B}_q^\dagger | \Psi_l \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.2.41})$$

Emploi de diverses bases locales pour la description de l'état quantique interne

Le paragraphe précédent nous a fourni les formules générales pour les différents termes de la FPE décrivant la dynamique des atomes dans un champ laser. Ces formules ont été obtenues par projection de l'équation (I.2.32) sur une base locale de l'état fondamental mais nous n'avons pas discuté la manière de choisir habilement une telle base. Comme nous l'avons vu la projection conduit à des équations couplées faisant intervenir à la fois les populations et les cohérences des sous-niveaux du fondamental. Dans le cadre de l'approximation semi-classique, on néglige alors les termes de cohérence. Toute la difficulté dans le choix

d'une base du fondamental consiste donc à rendre cette approximation aussi valable que possible. Dans ce paragraphe, nous explicitons différentes bases locales adaptées à cette projection et décrivons les limites de validité de l'approximation semi-classique.

Approximation adiabatique - La façon la plus simple de choisir une base locale consiste à prendre la base des sous-niveaux Zeeman ($|m\rangle$) du fondamental. Cette base ne dépend pas de la position de l'atome et est particulièrement adaptée aux calculs analytiques car l'opérateur $\mathbf{d}_q^+$ ne couple $|m\rangle$ qu'à $|m+q\rangle$ de sorte que les opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}_q$ s'écrivent très simplement dans cette base à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan $cg_q(m)$ correspondant à la transition considérée (voir les équations (I.1.5) et (I.1.7) et la figure I.1.2). Finalement, nous obtenons

$$\bullet \quad U_m(\vec{R}) = \hbar\Delta'_0 \sum_{q=0,\pm} cg_q(m)^2 |\xi_q|^2 \quad (\text{I.2.42})$$

$$\bullet \quad \gamma_m(\vec{R}) = \Gamma'_0 \sum_{q=0,\pm} cg_q(m)^2 (1 - cg_q(m)^2) |\xi_q|^2 \quad (\text{I.2.43})$$

$$\gamma_{m,m'}(\vec{R}) = \Gamma'_0 \sum_{q,q'=0,\pm} \delta_{m+q',m'+q} (cg_q(m')cg_{q'}(m))^2 |\xi_{q'}|^2$$

$$\bullet \quad \vec{F}_{m,m'}^R(\vec{R}) = \hbar\Gamma'_0 \Im \left[\sum_{q,q'=0,\pm} \delta_{m+q',m'+q} (cg_q(m')cg_{q'}(m))^2 \xi_{q'}^* \frac{\partial \xi_{q'}}{\partial \vec{R}} \right] \quad (\text{I.2.44})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{D}_{m,m'}(\vec{R}) = & \frac{\hbar^2\Gamma'_0}{8} \Re \left[\delta_{m,m'} \sum_{q=0,\pm} cg_q(m)^2 \frac{\partial^2 |\xi_q|^2}{\partial \vec{R}^2} + \right. \\ & - 2 \sum_{q,q'=0,\pm} \delta_{m+q',m'+q} (cg_{q'}(m)cg_q(m'))^2 \left(\xi_{q'}^* \frac{\partial^2 \xi_{q'}}{\partial \vec{R}^2} - \frac{\partial \xi_{q'}^*}{\partial \vec{R}} \cdot \frac{\partial \xi_{q'}}{\partial \vec{R}} \right) \Big] + \\ & + \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'_0}{20} \sum_{q_1,q_2=0,\pm} \vec{\eta}_{q_1,q_2} cg_{q_2}(m')cg_{m'-m+q_1}(m)cg_{q_1}(m')cg_{m'-m+q_2}(m)\xi_{m'-m+q_2}^* \xi_{m'-m+q_1} \end{aligned} \quad (\text{I.2.45})$$

Remarque: Dans le cadre de la simplification du diagramme d'émission spontanée (voir la remarque de la page 70), la dernière ligne de l'équation (I.2.45) doit être remplacée par

$$\begin{aligned} \dots + \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'_0}{4} \mathbf{1} \left[\sum_{q,q'=0,\pm} \kappa_q^\mu \delta_{m+q',m'+q} |\xi_{q'}|^2 (cg_{q'}(m)cg_q(m'))^2 \right. \\ \left. + 2\gamma_\mu \delta_{m,m'} \Re(\xi_+^* \xi_-) (cg_+(m)cg_-(m))^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.2.46})$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice unité dans l'espace de position (x, y, z) et avec

$$\begin{aligned} \kappa_0^{x,y} &= 1 & \kappa_\pm^{x,y} &= 1/2 \\ \kappa_0^z &= 0 & \kappa_\pm^z &= 1 \\ \gamma^x &= 1/2 & \gamma^y &= -1/2 & \gamma^z &= 0. \end{aligned}$$

En fait, l'approximation adiabatique est un peu brutale et sa validité est en général très restreinte sauf pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ dans un champ laser sans composante de polarisation π . Dans ce cas, l'opérateur des déplacements lumineux $\mathbf{\Lambda}$ ne couple pas des états Zeeman différents et est donc diagonal dans la base $(|+\rangle, |-\rangle)$ [I.1.2]. Ainsi, lors de la projection de l'équation (I.2.32) sur l'état $|\pm\rangle$, les termes faisant intervenir $\mathbf{\Lambda}$ ne donnent que la population $\Pi_{\pm}$ de cet état. D'autre part, en dehors du tout dernier terme de (I.2.32), tous les autres termes sont de la forme $\left(\partial_{\vec{R}}^{\alpha} \mathbf{B}_q^{\dagger}\right) \left(\partial_{\vec{P}}^{\alpha+\beta} \mathbf{W}\right) \left(\partial_{\vec{R}}^{\beta} \mathbf{B}_q\right)$ et comme l'opérateur $\mathbf{B}_q$ ne couple un sous-niveau Zeeman qu'à un seul autre, la projection de ces termes ne fait intervenir que les populations des états $|\pm\rangle$ et $|\mp\rangle$ et non les cohérences. Reste la dernière ligne de l'équation (I.2.32) qui, elle, fait intervenir les cohérences. Néanmoins, comme les termes diagonaux des matrices $\vec{\eta}$ dans les formules (I.2.33) sont généralement plus grands que les termes non-diagonaux, on peut s'attendre à ce que l'approximation soit justifiée. Par ailleurs, ce terme correspond à une diffusion en impulsion due uniquement à l'émission spontanée et comme nous l'avons vu [I.1.2.3], cette contribution à la diffusion en impulsion reste faible.

Approximation adiabatique - Dans la pratique, la plupart des transitions atomiques utilisées présentent une dégénérescence Zeeman $(2J_g + 1)$ supérieure à 2 (transition $4 \rightarrow 5$ dans le césium ^{133}Cs , $3 \rightarrow 4$ dans le rubidium ^{85}Rb , $2 \rightarrow 3$ dans le rubidium ^{87}Rb , voir l'annexe B). Afin d'obtenir un traitement plus précis que l'approximation adiabatique, il convient de prendre en compte le fait que l'opérateur des déplacements lumineux $\mathbf{\Lambda}$ n'est pas uniformément diagonal dans la base des sous-niveaux Zeeman du fondamental $(|m\rangle)_{m \in [-J_g \dots J_g]}$. Il faut en fait diagonaliser localement $\mathbf{\Lambda}(\vec{R})$ ce qui fournit les niveaux $j \in [0..2J_g]$ associés aux potentiels⁹ $U_j(\vec{R})$ et aux états propres⁹ $|\Phi_j(\vec{R})\rangle$. La dynamique atomique est alors décrite par l'équation (I.2.37) avec les paramètres (I.2.38)-(I.2.41) où nous remplaçons $|\Psi_j\rangle$ par $|\Phi_j\rangle$. Les potentiels U_j sont représentés sur la figure I.2.1 pour une configuration 3D-lin $\perp$ lin et une transition $4 \rightarrow 5$. Nous obtenons ainsi $2J_g + 1$ nappes de potentiel spatialement modulées, périodiques et formées de puits dont on vérifie qu'ils sont polarisées alternativement σ^+ et σ^- [135].

Pour ce qui concerne la dynamique hamiltonienne, nous supposons que les états atomiques internes des atomes suivent adiabatiquement leur niveau d'origine (j). Une telle hypothèse est valable lorsque la condition de suivi adiabatique [136, 137] est valide :

$$\frac{\hbar \langle \Phi_j | \hbar \Delta'_0 \frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} | \Phi_l \rangle}{(\langle \Phi_j | \hbar \Delta'_0 \mathbf{\Lambda} | \Phi_j \rangle - \langle \Phi_l | \hbar \Delta'_0 \mathbf{\Lambda} | \Phi_l \rangle)^2} \ll 1 \quad \forall l \neq j. \quad (\text{I.2.47})$$

Ici, $\frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \vec{R}} \cdot \frac{\vec{P}}{M}$ de sorte que les couplages non-adiabatiques sont de type motionnel. En développant (I.2.47), nous obtenons que la condition de suivi adiabatique se réduit à

$$\frac{\langle \Phi_j | \mathbf{\Lambda} | \Phi_l \rangle}{(\Lambda_j - \Lambda_l)^2} \ll \sqrt{|\Delta'_0|/\omega_R} \quad (\text{I.2.48})$$

⁹dits adiabatiques

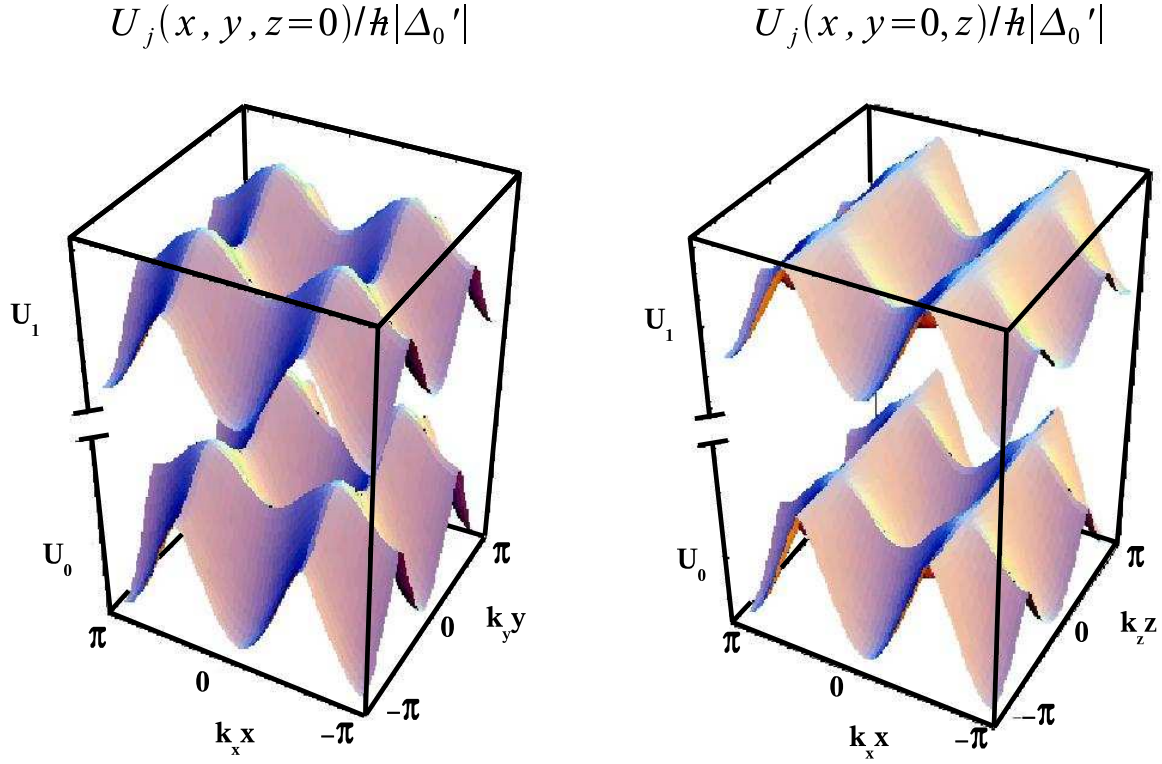


Figure I.2.1: Coupes des potentiels optiques U_0 et U_1 dans les plans (Oxy) (Gauche) et (Oxz) (Droite) dans l'approximation adiabatique pour une transition $4 \rightarrow 5$ et dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin.

où $\Lambda_l = \langle \Phi_l | \mathbf{A} | \Phi_l \rangle$. Cette condition, en général très drastique, est à l'origine de la limite de validité de l'approximation adiabatique à des potentiels suffisamment profonds, notamment en 3D [135, 138].

Le pompage optique induit quant à lui des transitions entre les états adiabatiques $|\Phi_j(\vec{R})\rangle$ qui ne sont clairement pas négligeables dans le cadre du refroidissement Sisyphe. Plus précisément, il y a, d'après l'équation maîtresse (I.1.18), des couplages entre les populations et les cohérences de la matrice densité σ . A l'aide d'une approximation séculaire, les cohérences peuvent être négligées lorsque le taux de pompage optique est faible devant l'écart d'énergie entre les niveaux adiabatiques, c'est à dire sous la condition

$$\Gamma'_0 \ll \frac{1}{\hbar}(U_j - U_l) . \quad (\text{I.2.49})$$

Une telle condition est en général vérifiée pour des désaccords de réseau suffisamment grands, typiquement lorsque

$$\frac{\Gamma}{\Delta} \ll \Lambda_j - \Lambda_l . \quad (\text{I.2.50})$$

Ainsi, les conditions de validité (I.2.48) et (I.2.50) de l'approximation adiabatique se réduisent à un écart entre niveaux suffisamment grand. C'est donc au niveau des points

d'anti-croisement ($\mu = \lambda_\mu/4 [\lambda_\mu/2]$) qu'elles sont le plus contraignantes. Néanmoins, en général, les atomes sont bien localisés au fond des puits de potentiel [I.1.2.3] et n'explorent que rarement les zones d'anti-croisement. Ainsi, l'approximation adiabatique est-elle bien adaptée à l'étude des phénomènes localisés comme la valeur de la température ou les propriétés de magnétisation [139-141, 135]. En revanche, la validité de l'approximation adiabatique est plus discutable pour l'étude de phénomènes délocalisés comme la diffusion spatiale. Pourtant une étude menée par Gupta *et al.* [142] a montré que malgré l'existence de couplages non-adiabatiques, la dynamique est bien décrite dans le cadre de cette approximation.

2.3.3 De l'équation de Fokker-Planck aux équations de Langevin couplées

Les FPE sont bien connues en physique théorique ce qui permet une interprétation simple du comportement semi-classique d'un atome dans un réseau optique. Il s'agit néanmoins de $(2J_g + 1)$ équations aux dérivées partielles de sorte que la résolution est numériquement très lourde notamment en dimension supérieure à 1. Dans l'optique d'un traitement numérique, il est plus pratique d'utiliser la propriété qu'une FPE est généralement équivalente à un ensemble stochastique d'équations dites de Langevin et dont la résolution numérique est élémentaire. Le but de ce paragraphe est de dériver une telle équation.

Interprétation physique des différents termes de l'équation de Fokker-Planck

Dans ce paragraphe, nous interprétons physiquement les différents termes intervenant dans la FPE (I.2.37) afin d'être en mesure de déterminer simplement l'équation de Langevin qui lui est associée.

Dérivée particulière - Dans l'équation (I.2.37), les populations des sous-niveaux $|\Psi_j\rangle$ du fondamental sont décrites en termes de champs $\Pi_j(\vec{R}, \vec{P}, t)$ de l'espace des phases et leur évolution est décrite dans une formulation de Euler [143]. Le terme de dérivation (terme de gauche, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}} - \frac{\partial U_j}{\partial \vec{R}} \frac{\partial}{\partial \vec{P}}$) est donc la dérivée particulière de Π_j dans l'espace des phases. Celle-ci intervient naturellement dans toutes les équations dynamiques pour la formulation de Euler et correspond à la dérivée temporelle d'une particule passant en $(\vec{R}, \vec{P})$ à l'instant t et soumise à la force $-\partial U_j / \partial \vec{R}$. Notons que comme nous allons l'indiquer tout de suite, la particule subit aussi une force supplémentaire que nous n'introduisons pas dans la dérivée particulière car elle fait intervenir la population des sous-états du fondamental autres que $|\Psi_j\rangle$.

Ordre 0 - Taux de transition d'état interne - Les termes d'ordre zéro en dérivée par rapport à $\vec{P}$, γ_j et $\gamma_{i,j}$, décrivent le pompage optique entre les différents sous-états du fondamental. $\gamma_{i,j}$ décrit le taux de transition de $|\Psi_i\rangle$ vers $|\Psi_j\rangle$, donc le remplissage de Π_j depuis les autres états, alors que le terme γ_j assure la conservation de la probabilité ($\sum_j \Pi_j = 1$). Ces termes sont caractéristiques des équations maîtresses en physique statistique.

Ainsi, à l'ordre zéro, la FPE décrit des transitions de l'état interne d'une particule libre en mouvement. L'impulsion n'apparaît alors plus comme une variable mais comme un paramètre intervenant dans la dérivée particulaire en position. Il s'agit d'une équation maîtresse élémentaire.

Ordre 1 - Forces - Les termes d'ordre un introduisent les forces subies par l'atome. Nous distinguons en particulier le gradient de potentiel optique $-\partial U_j / \partial \vec{R}$ qui correspond à la force hamiltonienne due à la modulation spatiale des déplacements lumineux. Ici, la situation présente cela de particulier pour une FPE que le potentiel en jeu dépend de l'état interne de l'atome. Les termes $\vec{F}_{l,j}^R$ décrivent quant à eux la pression de radiation induite par les faisceaux lasers. Notons que cette force dépend non seulement de l'état interne considéré ($|\Psi_j\rangle$) mais aussi de l'état ($|\Psi_l\rangle$) duquel provient l'atome lors d'un changement d'état interne.

La correction au premier ordre introduit donc la dynamique déterministe de l'atome. La dérivée particulaire agit dans l'espace des phases et non plus simplement dans l'espace des positions.

Ordre 2 - Diffusion en impulsion - Les termes d'ordre deux $\overleftrightarrow{D}_{l,j}$ représentent des coefficients de diffusion en impulsion. Celle-ci résulte des reculs aléatoires subis par l'atome lors de l'absorption de photons lasers et l'émission de photons spontanés ainsi que des fluctuations de la force dipolaire. A cela s'ajoutent des termes purement quantiques difficiles à interpréter en termes simples. Ceux-ci contribuent avec un signe négatif à $\overleftrightarrow{D}_{l,j}$ et peuvent dominer en certains points de l'espace les termes positifs [73]. Il en résulte qu'en ces points, des valeurs propres de $\overleftrightarrow{D}_{l,j}$ peuvent être négatives ce qui n'est pas simulable par des méthodes stochastiques. Heureusement, les zones posant problème sont réduites et localisées en des endroits où les atomes passent peu de temps (typiquement, loin des puits du potentiel optique) et peuvent donc être négligés¹⁰. Ici encore, le coefficient de diffusion en impulsion dépend de l'état interne considéré ($|\Psi_j\rangle$) mais aussi de l'état interne dont provient l'atome ($|\Psi_l\rangle$).

Ainsi, la correction d'ordre deux introduit les processus dynamiques stochastiques dus aux phénomènes aléatoires. Les nouveaux termes induisent un chauffage du nuage atomique qui contrarie les effets de refroidissement.

Finalement, la FPE (I.2.37) décrit un mouvement brownien généralisé dans l'espace des phases pour une particule dans un potentiel dépendant de son état interne. La particule est donc soumise à des forces déterministes (l'une dérivant des potentiels optiques et l'autre due à la pression de radiation des lasers) ainsi qu'à des fluctuations aléatoires correspondant aux termes de diffusion en impulsion. De plus, (I.2.37) décrit les transitions aléatoires de cet état interne induites par le pompage optique.

¹⁰En pratique, nous annulerons dans les simulations numériques les coefficients de diffusion en impulsion négatifs.

Intégration des équations de la dynamique par l'intermédiaire d'une équation de Langevin

Il est bien connu qu'une dynamique brownienne est aussi bien décrite par une équation de Langevin, c'est à dire une équation de type Newton $M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{f}$ où $\vec{F}$ est une force déterministe et $\vec{f}$ est une force aléatoire de moyenne nulle et de variance égale à deux fois la diffusion en impulsion [144-146]. Ici, $\vec{f}$ simule la diffusion en impulsion. Or les équations de Langevin sont particulièrement adaptées à une intégration numérique au moyen d'une méthode de Monte-Carlo [112, 113]. Il est donc tentant de chercher une équation de Langevin généralisée (GLE) équivalente à la FPE (I.2.37). La difficulté tient ici essentiellement à introduire les transitions d'état interne. Pour cela, nous suivons la méthode générale de dérivation d'une FPE pour un processus de Markov [145, 146] en nous servant de l'interprétation physique des termes de (I.2.37) discutée au paragraphe précédent.

Intuitivement, nous écrivons la probabilité de transition de $(\vec{R}, \vec{P})$ dans l'état interne $|\Psi_l\rangle$ à l'instant t vers $(\vec{R} + d\vec{R}, \vec{P} + d\vec{P})$ dans l'état interne $|\Psi_j\rangle$ à l'instant $t + dt$ sous la forme

$$P(\vec{R} + d\vec{R}, \vec{P} + d\vec{P}, t + dt | \vec{R}, \vec{P}, t) = \quad (I.2.51)$$

$$\left(1 - \sum_j \gamma_{j,l} dt\right) \delta\left(d\vec{R} - \frac{\vec{P}}{M} dt\right) \delta\left(d\vec{P} + \frac{\partial U_j}{\partial \vec{R}} dt - \vec{F}_{j,j}^R dt - \vec{f}_{j,j} dt\right) +$$

$$+ \sum_{l \neq j} \gamma_{l,j} dt \delta\left(d\vec{R} - \frac{\vec{P}}{M} dt\right) \delta\left(d\vec{P} + \frac{\partial U_j}{\partial \vec{R}} dt - \vec{F}_{l,j}^R dt - \vec{\delta} p_{l,j}\right)$$

où $\vec{f}_{j,j}$ et $\vec{\delta} p_{l,j}/dt$ sont des forces aléatoires de moyennes nulles et de variances à déterminer en fonction des coefficients de diffusion en impulsion $\vec{\vec{D}}_{j,j}$ et $\vec{\vec{D}}_{l,j}$. L'interprétation physique de l'équation (I.2.51) est très claire : l'état $(\vec{R}, \vec{P}, |\Psi_j\rangle)$ est peuplé pendant l'intervalle de temps dt par les populations des états translatés de $(\vec{R}, \vec{P})$ du fait de la vitesse et de la force (aléatoire) dans les états internes $|\Psi_l\rangle$ avec des poids correspondant aux probabilités de pompage optique entre $|\Psi_j\rangle$ et $|\Psi_l\rangle$.

En développant la FPE pour les populations Π_j associée à (I.2.51), nous retrouvons aisément l'équation (I.2.37) à la condition que

$$\langle \vec{f}_{j,j} \rangle = \vec{0} \quad \text{et} \quad \langle \vec{f}_{j,j} \otimes \vec{f}_{j,j} \rangle = \frac{2\vec{\vec{D}}_{j,j}}{dt}$$

$$\langle \vec{\delta} p_{l,j} \rangle = \vec{0} \quad \text{et} \quad \langle \vec{\delta} p_{l,j} \otimes \vec{\delta} p_{l,j} \rangle = \frac{2\vec{\vec{D}}_{l,j}}{\gamma_{l,j}}. \quad (I.2.52)$$

Ici, la force aléatoire $f_{j,j}$ représente les fluctuations stochastiques lorsqu'il n'y a pas de changement d'état. Il s'agit bien d'une force, son action est continue pendant les intervalles

de temps séparant deux transitions d'état interne. Au contraire la force aléatoire $\vec{\delta p}_{l,j}/dt$ apparaît plus volontiers sous la forme d'un saut en impulsion $\vec{\delta p}_{l,j}$ associé aux changements d'états qui sont instantanés.

2.3.4 Les simulations de Monte-Carlo semi-classiques en pratique

Méthode d'intégration

Nous avons déterminé au paragraphe I.2.3.3 la force aléatoire intervenant dans la GLE selon qu'il y ait ou non un changement d'état interne pendant l'intervalle de temps dt . Par ailleurs, les probabilités d'un tel changement d'état sont fournies par les équations (I.2.38). Nous sommes donc à présent en mesure de résoudre numériquement l'équation du mouvement. Celle-ci consiste en une intégration classique de la GLE correspondant à l'état interne courant et à l'occurrence ou non d'une transition d'état entre t et $t + dt$, interrompue par des sauts quantiques correspondant à un changement d'état interne. Nous décrivons maintenant les différentes étapes.

Détermination de l'état atomique interne - Considérons un atome dans l'état initial $|\Psi_l\rangle$. Les sauts quantiques sont pris en compte en générant numériquement à chaque pas de temps un nombre pseudo-aléatoire r équiréparti dans l'intervalle $[0, 1[$. Nous comparons alors r à la probabilité de transition $\gamma_{l,j}dt$ de $|\Psi_l\rangle$ vers $|\Psi_j\rangle$ (avec $l \neq j$) pendant le pas de temps dt : lorsque $r > \sum_{l \neq j} \gamma_{l,j}dt$, il n'y a pas de saut quantique; sinon, nous changeons l'état interne de $|\Psi_l\rangle$ à $|\Psi_j\rangle$ où l est tel que $\sum_{j' < j, j' \neq l} \gamma_{l,j'}dt < r \leq \sum_{j' \leq j, j' \neq l} \gamma_{l,j'}dt$ (voir la figure I.2.2).

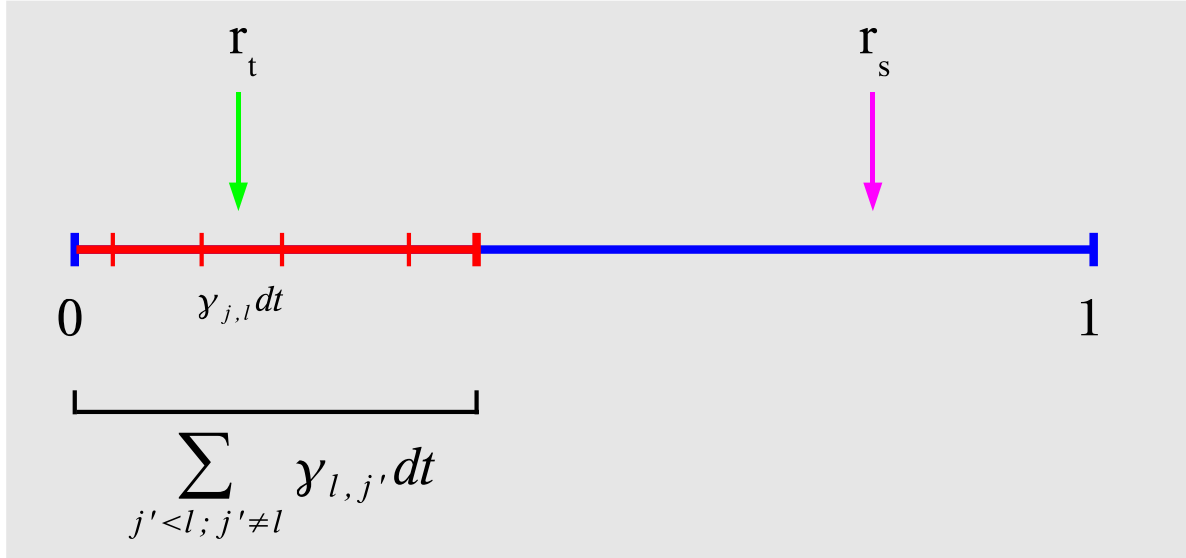


Figure I.2.2: Les $\gamma_{l,j'}dt$ pour $l \neq j'$ sont portés les uns à la suite des autres sur le segment $[0, 1]$. Si par exemple $r = r_t$, il y a une transition d'état interne de $|\Psi_l\rangle$ à $|\Psi_j\rangle$, si $r = r_s$, l'état interne est inchangé $|\Psi_l\rangle$.

Dans la suite, nous poserons $r_{l,j}$ égal à 1 si un saut quantique a lieu de $|\Psi_l\rangle$ vers $|\Psi_j\rangle$ et égal à 0 dans le cas contraire. Notons qu'il y a au plus un seul l tel que $r_{l,j} \neq 0$.

Dynamique de l'atome - Entre deux sauts quantiques, les équations du mouvement atomique sont élémentaires :

$$\vec{R}(t + dt) = \vec{R}(t) + \frac{\vec{P}(t)}{M} dt \quad (\text{I.2.53})$$

$$\begin{aligned} \vec{P}(t + dt) = \vec{P}(t) - \frac{\partial U_j}{\partial \vec{R}} dt + \\ + \sum_{n \neq j} \left[r_{n,j} \right] \left(\vec{\delta p}_{n,j} + \vec{F}_{n,j}^R dt \right) + \left[1 - \sum_{n \neq j} r_{n,j} \right] \left(\vec{f}_j + \vec{F}_{j,j}^R \right) dt, \end{aligned} \quad (\text{I.2.54})$$

où $|\Psi_j\rangle$ est l'état interne courant et $\vec{R}(t)$ et $\vec{P}(t)$ sont respectivement les positions et impulsions courantes de l'atome¹¹. Les forces aléatoires $\vec{\delta p}_{l,j}/dt$ et $\vec{f}_{j,j}$ sont déterminées dans des bases où respectivement $\vec{\vec{D}}_{l,j}$ et $\vec{\vec{D}}_{j,j}$ sont diagonaux. Nous générons alors des nombres pseudo-aléatoires dont la statistique respecte les deux premiers moments (I.2.52) de respectivement chaque $D_{l,j}^{\mu,\mu}$ et chaque $D_{j,j}^{\mu,\mu}$ puis nous réécrivons respectivement $\vec{\delta p}_{l,j}/dt$ et $\vec{f}_{j,j}$ dans la base (x, y, z) . L'intégration des équations couplées (I.2.53)-(I.2.54) est alors réalisée à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta à l'ordre 2 [147, 148].

Répétition stochastique - L'intégration des équations (I.2.53)-(I.2.54) fournit ainsi la trajectoire classique d'un atome qui dépend du choix des différents nombres aléatoires intervenant dans la procédure. Afin de réaliser un ensemble stochastique de trajectoires atomiques, nous répétons l'intégration ci-dessus un certain nombre de fois de manière absolument indépendantes avec un jeu de nombres aléatoires à chaque fois différent¹². Par le biais de moyennes adéquates, il est alors trivial de déterminer les grandeurs observables dans l'expérience¹³ comme la température cinétique du nuage atomique [II.1], sa diffusion spatiale [II.2] ou son comportement en spectroscopie non linéaire.

En fait, la méthode d'intégration permet d'aller bien au delà en déterminant des grandeurs difficilement accessibles à l'expérimentateur comme la localisation atomique dans le réseau [II.2.1] ou dans des référentiels en mouvement [III.1, III.2]. Par ailleurs, on peut discriminer des atomes plus ou moins énergétiques ou les atomes piégés des atomes non piégés [II.1, II.2], [149] et identifier ainsi les classes d'atomes responsables de tel ou tel phénomène. Enfin, le suivi de trajectoires atomiques particulières est un outil très utile qui renseigne sur le comportement individuel des atomes [I.2.1].

¹¹Noter que dans l'équation (I.2.54), s'il n'y a pas de changement d'état, tous les termes de la première somme s'annulent et le terme [] devant la seconde somme vaut 1, alors que s'il y a un changement d'état de $|\Psi_l\rangle$ vers $|\Psi_j\rangle$, parmi les $r_{n,j}$, seul le terme $r_{l,j}$ est non nul (et vaut 1) et le terme [] devant la seconde somme est nul.

¹²Le nombre de répétitions stochastiques dépend fortement de ce que l'on cherche effectivement à mesurer. Ainsi, il faut généralement peu d'atomes (quelques centaines) pour des calculs de température alors qu'il en faut beaucoup plus (plusieurs milliers) pour des calculs de diffusion spatiale ou de localisation atomique.

¹³voir l'annexe B.

Cas particulier de simulations dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin en deux dimensions

Les calculs complets dans un réseau tridimensionnel 3D-lin $\perp$ lin sont en général très lourds notamment à cause du calcul des forces aléatoires $\vec{f}_{j,j}$ et $\vec{\delta p}_{l,j}/dt$ qui fait intervenir la diagonalisation d'une matrice 3×3 . En 2D, cette diagonalisation peut aisément être effectuée analytiquement ce qui réduit considérablement les temps de calcul. Par ailleurs, les interprétations physiques sont plus simples en 2D dans la mesure où l'on peut visualiser simplement des trajectoires atomiques sur les potentiels optiques (voir par exemple les figures II.2.1). Il est donc tentant de chercher à réduire la dynamique à deux dimensions.

Comme nous l'avons vu précédemment [I.1.2.2], les directions x et y sont équivalentes mais la direction z est différente. Il est donc naturel d'effectuer des simulations 2D du réseau 3D-lin $\perp$ lin dans un plan $y = cte$. Or comme une grande partie des atomes est localisée au fond des puits de potentiel, nous choisissons le plan (Oxz) dans lequel se trouvent les puits. Un inconvénient majeur est que la pression de radiation moyenne n'est pas compensée dans la direction z dans ce plan du fait que les faisceaux $\vec{E}_+^x$ et $\vec{E}_-^x$ d'une part et $\vec{E}_+^y$ et $\vec{E}_-^y$ d'autre part donnent des figures d'interférence différentes. Il faut donc négliger la pression de radiation dans les simulations 2D. Cette approximation est raisonnable pour des désaccords suffisants dans la mesure où le rapport des forces hamiltonienne et de pression de radiation se comporte comme $\frac{\Delta}{\Gamma}$.

Des comparaisons de modèles 1D et 3D montrent que le comportement général des grandeurs dynamiques sont similaires à des facteurs numériques près [114]. Nous nous attendons donc à ce que les simulations 2D fournissent les comportements du nuage atomique dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin à des facteurs numériques près. Nous verrons en effet dans les parties II et III que les calculs 2D permettent de simuler correctement la dynamique atomique dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin. Les facteurs numériques sont de l'ordre de quelques unités dans une large gamme de paramètres. Il convient néanmoins d'être prudent pour ce qui concerne l'étude des phénomènes de décrochage. En effet, dans ce cas, la localisation atomique dans les puits de potentiel est moins importante et l'approximation 2D devient douteuse¹⁴.

Résumé et conclusion du chapitre

Nous avons introduit dans ce chapitre les méthodes de Monte-Carlo quantique et semi-classique. Celles-ci consistent à remplacer les équations sur les distributions de probabilité (matrice densité¹⁵ ou densité dans l'espace des phases¹⁶) par un jeu de trajectoires stochastiques dans l'espace des états¹⁵ ou dans l'espace des phases¹⁶. Nous avons vu que ces méthodes peuvent être mises en place efficacement sur le plan numérique et qu'elles permettent l'étude des réseaux optiques dans des plages de paramètres contenant les deux régimes sautant et oscillant. Les méthodes de Monte-Carlo sont formellement équivalentes à l'intégration de l'équation maîtresse de la dynamique atomique (I.1.18) quantique ou semi-classique et donnent accès aux grandeurs physiques pertinentes (distributions de vitesse ou de position, diffusion spatiale, propriétés spectroscopiques, etc ...).

¹⁴Voir par exemple le paragraphe II.1.1.3.

¹⁵ dans le cas quantique

¹⁶ dans le cas semi-classique

La méthode de Monte-Carlo quantique est valable dans le cadre du paragraphe I.1.1.3 et ne rencontre de limites que numériques. Les calculs numériques deviennent en effet rapidement important, notamment pour les configurations 3D. La méthode semi-classique quant à elle est valable pour des profondeurs de potentiel suffisantes pour pouvoir négliger le couplage tunnel ce qui est généralement vérifié dans le cadre des mécanismes de refroidissement sub-Doppler. Le domaine d'application de l'approximation adiabatique est de plus limité aux régimes où les couplages motionnels sont négligeables ce qui est plus restrictif notamment en 2D et 3D. Les calculs semi-classiques sont beaucoup plus rapides que les calculs quantiques et donnent un accès direct à des observables physiques variées ainsi qu'à la dynamique microscopique.

Partie II:

L'EFFET SISYPHE REVISITE: TEMPERATURE CINETIQUE ET DIFFUSION SPATIALE

Chapitre 1

Propriétés de la température cinétique et des distributions de vitesse

Dès les premiers travaux sur la manipulation d’atomes par laser [1, 101, 102, 64, 65], les efforts ont porté sur l’obtention de nuages de particules quasi-immobiles, *i.e.* de nuages dont l’énergie cinétique moyenne est aussi faible que possible. Les premiers modèles (Doppler, [101, 104] et Sisyphé, [21, 22, 30]) font état d’un mouvement brownien pour les atomes dans un espace libre¹. Cette dynamique est très connue en physique statistique et est analogue à celle d’une particule soumise à des collisions avec les particules d’un bain thermique [145, 150]. On sait que dans ce cas l’énergie cinétique moyenne est proportionnelle à la température et que les distributions de vitesse du nuage atomique suivent une statistique gaussienne [144, 145]. L’habitude a donc été prise de caractériser l’énergie cinétique du nuage d’atomes par sa température cinétique, définie par l’une des formules² :

$$T_{\mu}^{(e)} = \frac{\sigma_{p,\mu}^2}{Mk_B} \qquad T_{\mu}^{(r.m.s)} = \frac{\overline{p_{\mu}^2}}{Mk_B} \qquad (\text{II.1.1})$$

où $\sigma_{p,\mu}$ est la demi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution de vitesse dans la direction μ ³.

Naturellement, de nombreuses études de la température cinétique dans les réseaux optiques dissipatifs multidimensionnels ont été réalisées, par exemple dans notre groupe [141], dans le groupe de Phillips au National Institute of Standards and Technology (NIST) [88], dans le groupe de Kastberg, à Stockholm [58, 153] ou sur le plan théorique par Castin *et al.* [73, 66]. Un résultat très robuste commun à tous ces travaux est que, pour des potentiels suffisamment profonds, la température a un comportement linéaire en fonction de l’intensité laser divisée par le désaccord, *i.e.* en fonction de la profondeur $\mathcal{U}$ du potentiel optique. Pour

¹Bien que le potentiel optique induit par l’interaction lumière-matière [I.1.1] joue un rôle fondamental dans le calcul du coefficient de friction, il n’intervient pas explicitement dans la dynamique atomique dans le modèle Sisyphé standard [I.2.1.2].

²Les deux valeurs $T_{\mu}^{(e)}$ et $T_{\mu}^{(r.m.s)}$ sont rigoureusement égales dans le cas d’une distribution gaussienne.

³Notons que, dans le cadre des études sur le paramagnétisme des réseaux optiques, on peut aussi définir une “température de spin” dont on montre qu’elle est proche de la température cinétique [139, 151, 152].

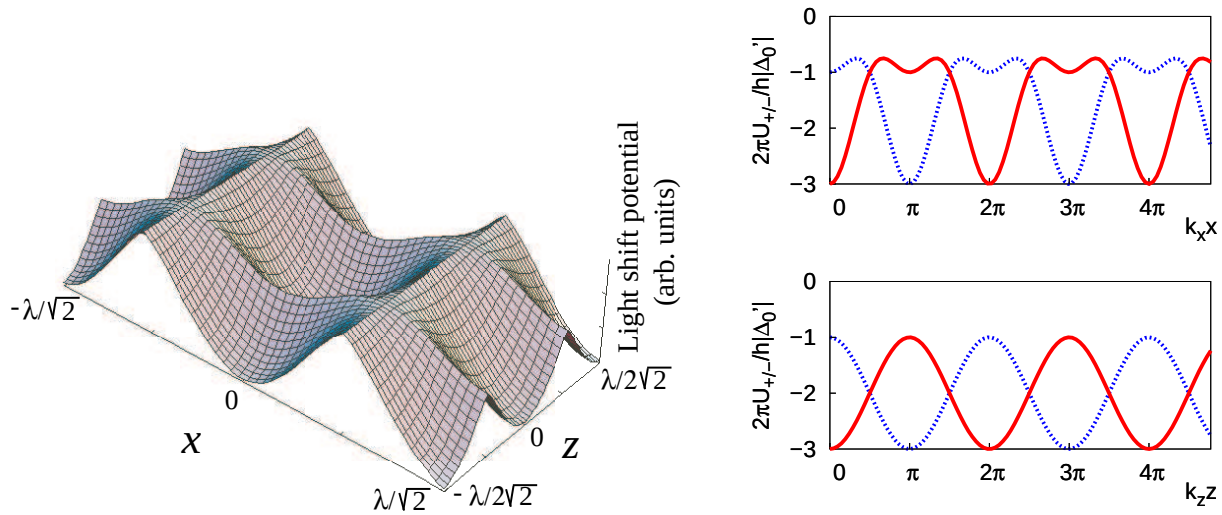
des potentiels peu profonds ($\mathcal{U}$ de l'ordre de grandeur de quelques énergies de recul), il y a au contraire une augmentation très rapide de la température lorsque $\mathcal{U}$ diminue (phénomène de décrochage en température [43, 55], [I.1.2.3]). Globalement, ces résultats sont en accord avec les prédictions théoriques du modèle 1D [21], [I.1.2.3, I.2.1.2].

Malgré tout, un certain nombre de zones d'ombre demeurent. Comme le nuage est très peu dense, il n'y a que très peu de collisions interatomiques susceptibles de thermaliser le système. Ainsi, *stricto sensu*, le système d'atomes refroidis et piégés dans un réseau optique n'est pas à l'équilibre thermodynamique. La "température" du nuage obtenue par effet Sisyphe résulte directement de l'interaction lumière-matière et peut donner lieu à des comportements de la température déviant de celui d'un équilibre thermodynamique classique. Afin d'apporter un éclairage nouveau au sens même de température dans un réseau optique dissipatif, on peut imaginer un certain nombre d'expériences. On peut se demander par exemple si la mesure de l'énergie cinétique moyenne donne les mêmes résultats dans des directions orthogonales non équivalentes (par exemple, les directions x et z de la configuration 3D-lin $\perp$ lin [I.1.2.2]) et tester ainsi le principe d'équipartition de l'énergie [154]. Dans le même ordre d'idée, il est intéressant de déterminer le comportement de la température cinétique en fonction de l'angle θ du réseau, ce qui correspond à modifier l'anisotropie du réseau en changeant les périodes spatiales dans les directions transverses et longitudinale. Enfin, comme l'hypothèse d'une distribution de vitesse gaussienne n'est justifiée a priori que dans le régime sautant, il est légitime d'explorer le comportement de ces distributions de vitesse dans le régime oscillant et plus particulièrement dans un domaine de paramètres proche du décrochage. On peut s'attendre ici à ce que les distributions présentent de longues ailes correspondant à des atomes énergétiques faiblement piégés.

L'étude de ces questions fait l'objet de ce chapitre. Nous examinons tout d'abord au paragraphe II.1.1.1 le comportement de la température cinétique en fonction des paramètres du réseau 3D-lin $\perp$ lin à l'aide de simulations de Monte-Carlo semi-classiques pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Nous montrons alors notamment que la température cinétique est indépendante de l'angle du réseau et surtout qu'elle présente un comportement anisotrope [52]. Afin de comprendre ce comportement plus en détail, nous présentons au paragraphe II.1.1.2 le même type d'étude réalisé dans l'approximation semi-classique pour la transition $4 \rightarrow 5$ du ^{133}Cs en étroite collaboration avec les travaux expérimentaux du groupe de Kastberg [138]. Nous montrons ensuite au paragraphe II.1.1.3 que le décrochage en température est lui aussi anisotrope et se produit dans la direction z pour une valeur de $\mathcal{U}$ plus importante que selon x . Enfin, nous analysons au paragraphe II.1.2 la forme des distributions de vitesse dans le réseau 1D et notamment au niveau du décrochage. Nous montrons que celle-ci est non gaussienne et que ce comportement peut être compris en séparant les contributions d'un nuage d'atomes piégés dans les puits de potentiel et d'un nuage non-piégré d'atomes plus énergétiques [127]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec le groupe de Anders Kastberg et avec Robin Kaiser.

1.1 Comportement anisotrope de la température cinétique dans un réseau en configuration 3D-lin $\perp$ lin

Dans la plupart des études expérimentales des réseaux optiques, la température cinétique est mesurée dans une direction particulière et son comportement est bien décrit par les modèles théoriques monodimensionnels [21, 30]. Pourtant, comme le réseau 3D-lin $\perp$ lin est anisotrope [I.1.2.2], il ne peut être réduit à trois configurations monodimensionnelles indépendantes de sorte que la géométrie particulière du réseau doit être prise en compte. Les éléments anisotropes ne se limitent pas simplement à des échelles différentes dans les directions transverses et longitudinale ($\lambda_{x,y} \neq \lambda_z$) mais aussi à des formes de modulations du champ laser (et donc des potentiels optiques et des taux de pompage optique) différentes. L'asymétrie des directions x, y et z est par exemple clairement visible sur les graphes des potentiels portés sur la figure II.1.1 (voir aussi la figure I.1.6). On voit notamment que les modulations spatiales mais aussi les barrières⁴ de potentiel sont différentes dans les directions x, y et z aussi bien pour la transition $4 \rightarrow 5$ que pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Par ailleurs, les fréquences d'oscillation au fond des puits de potentiel sont différentes selon x, y et selon z comme l'illustrent les formules (I.1.36) et (B.7).



Ces particularités peuvent induire des dynamiques différentes dans différentes directions

⁴Noter que la barrière de potentiel qui s'oppose à l'échappement d'un puits par un atome correspond à la différence d'énergie entre le minimum de potentiel et la valeur du potentiel au niveau du croisement de U_+ et U_- puisque le pompage optique a tendance à peupler le niveau atomique interne de plus faible énergie potentielle.

[52] comme nous le montrons dans les paragraphes suivants⁵. Nous étudions dans les paragraphes suivants l'énergie cinétique moyenne indépendamment dans les directions axiales (x , y et z) dans un réseau 3D-lin⊥lin. Notons que la connaissance de E_{cx} , E_{cy} et E_{cz} suffit à déterminer l'énergie cinétique dans toute direction $\vec{u}$, $E_{cu} = E_{cx}u_x^2 + E_{cy}u_y^2 + E_{cz}u_z^2$, car le réseau est invariant par renversement d'espace de l'une quelconque des directions axiales $\mu \in \{x, y, z\}$ [I.1.2.2], de sorte que $\overline{p_\mu \cdot p_\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu \in \{x, y, z\}$.

1.1.1 Etude pour la transition théorique $1/2 \rightarrow 3/2$

Nous avons effectué une étude systématique de la température cinétique en fonction des paramètres du réseau en explorant un large domaine contenant à la fois les régimes sautant et oscillant. Nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo dans un réseau 3D-lin⊥lin avec $\theta = \theta_x = \theta_z$ et précisément, les paramètres considérés sont :

θ	$15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$
Δ/Γ	$-2, -3, -5, -10, -15, -20, -25, -30$
Δ'_0/ω_R	$-150, -300, -450, -600, -750$

Les simulations sont réalisées dans l'approximation semi-classique [I.2.3] pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Afin de simplifier les choses et pour gagner en temps de calcul, nous limitons la dynamique atomique en 2D [I.2.3.4]. Toutes nos discussions et conclusions concernent l'ensemble des données correspondant aux paramètres ci-dessus bien que, pour des raisons de clarté, les figures n'en présentent généralement qu'une petite partie.

Nous avons calculé à chaque pas de temps des simulations les températures cinétiques dans les deux directions orthogonales x et z . Après un temps de thermalisation généralement compris entre $50/\Gamma'_0$ et $100/\Gamma'_0$, les températures cinétiques atteignent un état stationnaire dont nous déterminons ci-après le comportement en fonction des paramètres du réseau⁶. Nous avons employé les deux méthodes correspondant aux deux équations (II.1.1), *i.e.* par un calcul direct de l'énergie cinétique moyenne des atomes ou par des ajustements des distributions de vitesse par des fonctions gaussiennes. Pour les paramètres ci-dessus, nous trouvons que ces distributions sont raisonnablement compatibles avec des gaussiennes et les résultats des deux méthodes sont sensiblement les mêmes aux erreurs numériques près. Ceci n'est valable que dans le cas particulier que nous étudions ici où le décrochage n'est pas atteint⁷.

Les températures cinétiques dans les directions transverse et longitudinale sont représentées sur la figure II.1.2 en fonction du désaccord laser pour un angle de réseau fixé et plusieurs profondeurs de potentiel optique.

⁵Voir aussi le caractère anisotrope de la diffusion spatiale au chapitre I.2.1.

⁶Pour un angle de réseau de $\theta = 15^\circ$, le temps de thermalisation atteint des valeurs de l'ordre de $400/\Gamma'_0$ dans la direction transverse. Ceci s'explique par le fait que la période spatiale transverse λ_x est grande de sorte qu'un atome doit voyager longtemps entre deux cycles Sisyphe successifs [I.1.2.3]. Un tel accroissement du temps de thermalisation est aussi observé dans la direction longitudinale pour de grands angles de réseau mais il reste moins important car la période spatiale longitudinale λ_z n'atteint jamais des valeurs aussi grandes que la période spatiale transverse λ_x .

⁷Nous discutons en détail la forme des distributions de vitesse au paragraphe II.1.2, notamment dans le régime où apparaît le décrochage.

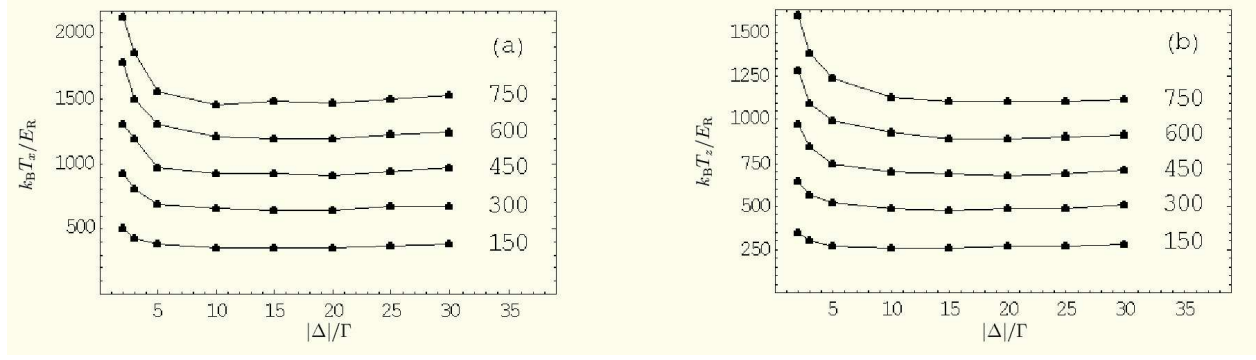


Figure II.1.2: Températures cinétiques transverse (a) et longitudinale (b) dans l'état stationnaire en fonction du désaccord laser Δ pour un angle de réseau fixé, $\theta = 45^\circ$, et pour plusieurs déplacements lumineux par faisceau (les valeurs de $|\Delta'_0|/\omega_R$ sont portées à droite des courbes correspondantes).

Nous distinguons deux domaines où les températures présentent des comportements différents. Pour des désaccords faibles ($|\Delta| \lesssim 5\Gamma$), nous trouvons que la température cinétique décroît rapidement lorsque $|\Delta|$ augmente, alors qu'aux grands désaccords ($|\Delta| \gtrsim 5\Gamma$), la température est indépendante de $|\Delta|$ mais augmente à peu près linéairement avec Δ'_0 . Ceci s'accorde avec la forme générale⁸

$$k_B T_\mu = \left[A_\mu + B_\mu \left(\frac{\lambda_\mu}{\lambda} \right)^2 \right] \left(\frac{\Gamma}{|\Delta|} \right)^2 \hbar |\Delta'_0| + C_\mu \hbar |\Delta'_0| + D_\mu \hbar \omega_R, \quad (\text{II.1.2})$$

où A_μ , B_μ , C_μ et D_μ ($\mu = x, z$) sont des coefficients numériques qui, par exemple, ont été déterminés dans des réseaux tavelés [85]. Le premier terme ($[A_\mu + B_\mu (\lambda_\mu/\lambda)^2] \left(\frac{\Gamma}{|\Delta|} \right)^2 \hbar |\Delta'_0|$) de l'équation (II.1.2) correspond aux termes d'absorption et d'émission spontanée dans la diffusion en impulsion que l'on néglige souvent dans les traitements classiques [I.1.2.3, I.2.1.2]. Nous vérifions plus précisément cette formule dans les paragraphes suivants.

Régime de grand désaccord laser

Intéressons nous d'abord au régime de grand désaccord $|\Delta| \gg \Gamma$. Nous avons porté sur la figure II.1.3 les températures en fonction des périodes spatiales dans les directions correspondantes pour différents désaccords et déplacements lumineux dans ce régime. Nous trouvons que la température dépend très peu de l'angle, *i.e.* des périodes spatiales, du réseau. La température est donc strictement linéaire en profondeur du potentiel et indépendante de tout autre paramètre du réseau. Ce résultat peut être compris très simplement à l'aide de la description classique du refroidissement Sisyphe. En effet, en reprenant l'un des modèles semi-classiques développés aux paragraphes I.1.2.3 et I.2.1.2, nous voyons clairement que

⁸Dans cette formule, le terme $D_\mu \hbar \omega_R$ a été ajouté "à la main" pour tenir compte du fait que dans un régime où la profondeur du potentiel n'est pas infinie, les effets liés au décrochage ne sont pas complètement négligeables.

le coefficient de diffusion en impulsion lié aux fluctuations statistiques de la force dipolaire varie comme k_μ^2 tout comme le coefficient de friction. Ainsi, en appliquant la relation d'Einstein, nous obtenons que les termes géométriques k_μ s'éliminent dans la température qui en résulte indépendante de l'angle du réseau. Une telle propriété a été confirmée par des expériences réalisées dans notre groupe par François-Régis Carminati et Michele Schiavoni [53, 26].

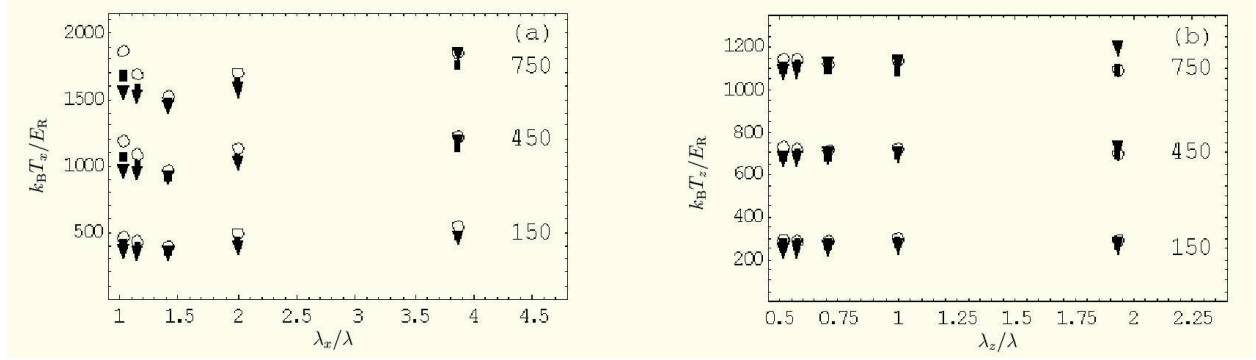


Figure II.1.3: Températures transverse (a) et longitudinale (b) en fonction de la période spatiale dans la direction correspondante pour diverses valeurs du désaccord (triangles : $\Delta = -10\Gamma$, carrés : $\Delta = -20\Gamma$, cercles : $\Delta = -30\Gamma$) et différents déplacements lumineux par faisceau (les valeurs de $|\Delta'_0|/\omega_R$ sont portées à droite des courbes correspondantes).

Un ajustement des données numériques par des formes linéaires en Δ'_0 donne

$$\begin{aligned} k_B T_x &\simeq 2,00\hbar|\Delta'_0| + 123,3\hbar\omega_R \\ k_B T_z &\simeq 1,43\hbar|\Delta'_0| + 62,6\hbar\omega_R. \end{aligned} \quad (\text{II.1.3})$$

Ce résultat est en accord avec le modèle de mouvement brownien prenant en compte la localisation spatiale des atomes que nous développons au paragraphe II.2.1.2 dans le cadre de l'étude de la diffusion spatiale. Notons en particulier que ce modèle fournit une température (II.2.21) en bon accord avec les formules (II.1.3).

Les équations (II.1.3) montrent que la température cinétique est clairement anisotrope ($T_x > T_z$) ce qui est en accord avec les résultats du groupe de Kastberg (voir le paragraphe II.1.1.2)⁹. Ici, le facteur d'anisotropie est de l'ordre de 1,4. Cette propriété est en fait une conséquence de l'asymétrie des directions transverses et longitudinale de la configuration 3D-lin $\perp$ lin. Nous discutons ce point en détail au paragraphe II.1.1.4.

Divergence en température (régime de faible désaccord)

Nous nous intéressons à présent au régime de faible désaccord, soit typiquement $|\Delta| \lesssim 5\Gamma$.

Nous observons un comportement très différent de la température cinétique. Ceci est une conséquence de la contribution relative de plus en plus importante de l'absorption et

⁹L'anisotropie de la température n'est néanmoins pas fournie par le modèle du paragraphe II.2.1.2.

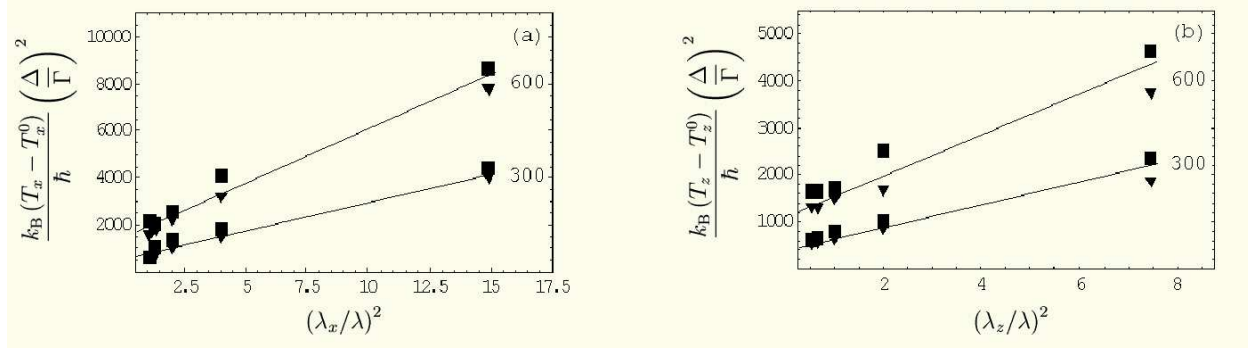


Figure II.1.4: Températures transverse (a) et longitudinale (b) en fonction des périodes spatiales pour de faibles désaccords. T_μ^0 désigne la température dans le domaine de grand désaccords ($|\Delta| \gg \Gamma$). Les données correspondent aux désaccords $\Delta/\Gamma = -2$ (triangles), $\Delta/\Gamma = -3$ (carrés), et aux déplacements lumineux $|\Delta'_0|/\omega_R = 300$ et $|\Delta'_0|/\omega_R = 600$. Les droites sont des ajustements linéaires de la forme de l'équation (II.1.2) où A_μ , B_μ , C_μ et D_μ sont les paramètres libres.

de l'émission spontanée sur la force fluctuante et donc sur la diffusion en impulsion comme nous l'avons décrit dans [53]. Physiquement, un atome encaisse de nombreux reculs dus aux photons absorbés et émis et est donc plus susceptible de s'échapper d'un puits de potentiel. Ainsi, le nuage d'atomes peut atteindre une température cinétique stationnaire supérieure à la profondeur des puits.

Nous traçons sur la figure II.1.4 l'augmentation de température par rapport à sa valeur T_μ^0 (donnée par les formules (II.1.3)) dans le régime $|\Delta| \gg \Gamma$ en fonction de la période du réseau λ_μ . Nous obtenons un comportement en excellent accord avec la formule (II.1.2).

Récapitulation

Nous déduisons finalement des deux paragraphes précédents que la formule générique (II.1.2) est valable dans le réseau avec les coefficients suivants.

	A_μ	B_μ	C_μ	D_μ
$\mu = x$	2,31	0,69	2,00	123,3
$\mu = z$	1,22	0,87	1,43	62,6

1.1.2 Etude pour la transition $4 \rightarrow 5$ du césium 133 (^{133}Cs)

Nous examinons à présent le comportement anisotrope de la température cinétique dans le cas d'une transition réelle. Cette étude est motivée d'une part par notre étude théorique [52], [II.1.1.1], et d'autre part par le constat que les températures mesurées dans des directions différentes (selon x dans [88] et selon z dans [153]), mais dans deux expériences distinctes, ont toutes deux donné des comportements de la température linéaires en $\mathcal{U}$ mais avec des coefficients de proportionnalité sensiblement différents ($k_B T_x \simeq 24 \mathcal{U}/E_R$ [nK] dans

[88] et $k_B T_z \simeq 12 \mathcal{U}/E_R$ [nK] dans [153]). Le travail que nous rapportons ici a été réalisé en étroite collaboration avec Johan Jersblad et Harald Ellmann du groupe expérimental de Anders Kastberg [138]. Notons que les résultats du paragraphe précédent sont un guide mais leur application stricte est discutable car, dans le cas d’une transition réelle, il convient de prendre en compte l’existence d’un refroidissement local [I.B.2.2] qui induit une température stationnaire très inférieure à la profondeur des puits de potentiel et qui pourrait modifier, voire supprimer, l’anisotropie de la température cinétique observée dans les simulations correspondant à une transition $1/2 \rightarrow 3/2$.

Nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo dans l’approximation semi-classique adiabatique [I.2.3.2] et en trois dimensions d’espace. Nous considérons une transition $4 \rightarrow 5$ et utilisons un ensemble typique de 300 atomes indépendants. Pour les paramètres considérés ici, l’énergie cinétique moyenne atteint un état stationnaire en un temps approximatif de $4000/\Gamma'_0$ au cours duquel nous déterminons la température dans les directions x , y et z . Les simulations sont réalisées pour trois désaccords différents ($\Delta = -10\Gamma, -20\Gamma, -30\Gamma$) et pour six profondeurs de potentiel différentes. Notons que ces profondeurs sont bien plus importantes que dans les expériences parce que de grandes profondeurs de potentiel sont requises afin de pouvoir légitimement négliger les couplages motionnels non-adiabatiques entre les sous-niveaux adiabatiques [135] comme nous le faisons dans les simulations [I.2.3]. De plus, le temps de thermalisation augmente aux faibles profondeurs de potentiel. Néanmoins, nous nous attendons à trouver une température cinétique linéaire en $\mathcal{U}$ avec notamment les mêmes coefficients que dans les expériences.

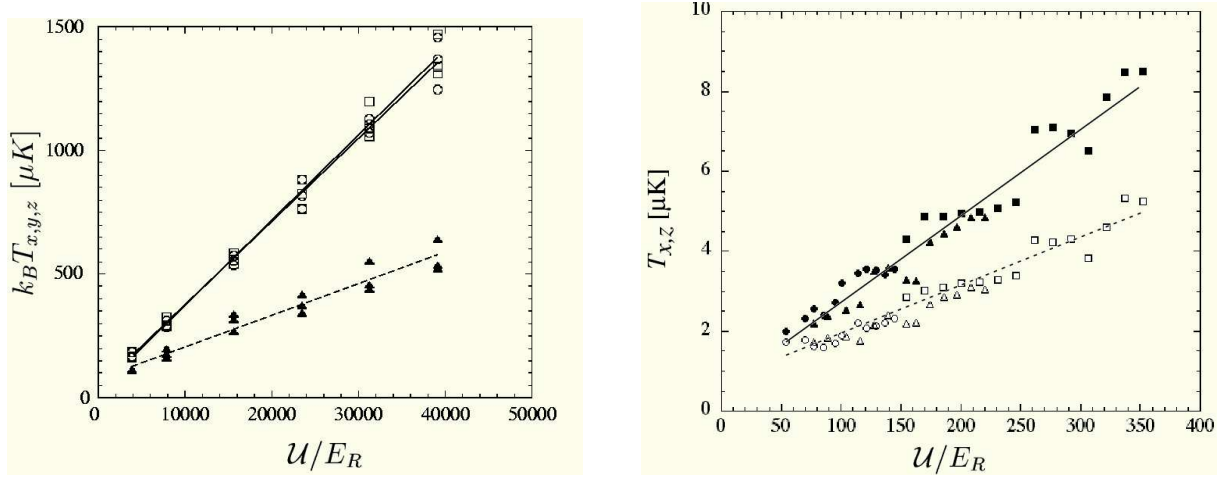


Figure II.1.5: Gauche : température cinétique dans les directions x (cercles), y (carrés) et z (triangles pleins) en fonction de la profondeur du potentiel $\mathcal{U}$, pour trois valeurs du désaccord ($\Delta = -10\Gamma, -20\Gamma, -30\Gamma$). Droite : résultats expérimentaux tirés de [138]. Les droites représentent les ajustements linéaires correspondant aux équations (II.1.4) pour ce qui concerne les résultats numériques et les ajustements linéaires correspondant aux valeurs données dans le tableau du paragraphe II.1.1.4 pour ce qui concerne les résultats expérimentaux.

Les résultats des simulations numériques pour T_x , T_y et T_z en fonction de $\mathcal{U}$ et pour les trois désaccords considérés sont présentés sur la figure II.1.5Gauche. Nous avons aussi porté

sur la figure des ajustements linéaires. Ceux-ci sont en excellent accord avec les données numériques :

$$\begin{aligned} T_x &= 35 (\mathcal{U}/E_R) \text{ nK} \\ T_y &= 35 (\mathcal{U}/E_R) \text{ nK} \\ T_z &= 13 (\mathcal{U}/E_R) \text{ nK} . \end{aligned} \tag{II.1.4}$$

Comme dans le cas d'une transition théorique $1/2 \rightarrow 3/2$, les simulations mettent en évidence un comportement anisotrope de la température cinétique, les températures transverses (selon x et y) étant plus grandes que la température longitudinale (selon z) par un facteur 2,7. Ces résultats sont en accord qualitatif avec les données expérimentales de [138] (voir la figure II.1.5Droite). En particulier, Johan Jersblad et Harald Ellmann ont montré que les températures cinétiques dans les directions x et z sont linéaires avec $\mathcal{U}$, indépendantes de Δ et nettement anisotropes [28, 29] avec un facteur d'anisotropie proche de celui que nous trouvons dans les simulations (voir le paragraphe II.1.1.4).

1.1.3 Régime de décrochage en température cinétique

Nous étudions ici le comportement de la température cinétique au voisinage du décrochage obtenu aux faibles valeurs de $\mathcal{U}$. Nous avons réalisé pour cela des simulations de Monte-Carlo semi-classiques pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Les calculs sont effectués en 3D, ceci afin de prendre en compte le fait que le confinement des atomes dans les puits de potentiel est moins important au niveau du décrochage de sorte que fixer $y = 0$ peut induire une dynamique non pertinente pour un réseau 3D [I.2.3.4]. Une comparaison directe des résultats 2D et 3D montre en effet que la température cinétique n'est pas perturbée par la restriction à 2D lorsque $\mathcal{U}$ est suffisamment grand et nous obtenons des résultats 3D en accord avec les formules (II.1.3). En revanche, en 2D, le décrochage a lieu pour un potentiel plus profond qu'en 3D. Ceci montre que la restriction à 2D n'est pas correcte au niveau du décrochage.

Les résultats des simulations pour les températures cinétiques $T_{x,y,z}$ sont portés sur la figure II.1.6 en fonction du déplacement lumineux par onde Δ'_0 . Nous trouvons que le décrochage a lieu pour des valeurs différentes de Δ'_0 dans les directions transverses d'une part ($\Delta'_0 \simeq -140\omega_R$) et longitudinale d'autre part ($\Delta'_0 \simeq -80\omega_R$). En fait, lorsque $|\Delta'_0|$ diminue de $140\omega_R$ à $80\omega_R$, T_z augmente rapidement alors que $T_{x,y}$ continue de diminuer environ linéairement avec Δ'_0 .

La mise évidence expérimentale d'un tel phénomène semble difficile du fait que les mesures de température sont délicates au voisinage du décrochage notamment parce que la diffusion spatiale devient très importante. Pour l'heure, les données expérimentales rapportées dans [138] mettent en évidence qu'un peu au dessus du point de décrochage, l'anisotropie des températures semble diminuer. Ceci pourrait être dû au fait que T_z commence à augmenter alors que T_x et T_y ne décrochent pas encore. Soulignons néanmoins que cette interprétation reste très spéculative et des mesures expérimentales pour des profondeurs de potentiel en deçà du point de décrochage sont nécessaires pour conclure définitivement.

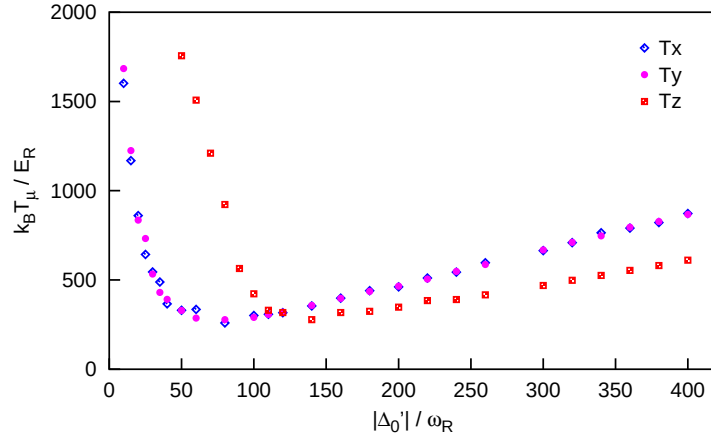


Figure II.1.6: Variations de la température cinétique dans les directions x , y et z en fonction du déplacement lumineux par onde Δ'_0 dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin. Les résultats sont obtenus par simulations de Monte-Carlo semi-classiques pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Les paramètres de la simulation sont $\Delta = -7\Gamma$ et $\theta = 30^\circ$.

1.1.4 Discussion des résultats

Nous discutons à présent nos résultats en les confrontant avec les données expérimentales. Les coefficients directeurs ξ_μ apparaissant dans les formules ($k_B T_\mu = cte + \xi_\mu \mathcal{U}$) et correspondant à différents travaux sont rassemblés dans le tableau ci-après avec leurs erreurs statistiques respectives.

	Gaithersburg [88] (exp)	Stockholm [153] (exp)	Stockholm [138] (exp)	Ici et Ref. [52] (scmc $1/2 \rightarrow 3/2$)	Ici et Ref. [138] (scmc $4 \rightarrow 5$)
ξ_x	0,024(2,4)	-	0,022(3,5)	0,025	0,035(1,2)
ξ_y	-	-	-	-	0,035(1,2)
ξ_z	-	0,012(1,2)	0,012(2,5)	0,018	0,013(1)

La comparaison de ces résultats montre un accord raisonnable entre l'expérience et les simulations. En particulier, la température cinétique apparaît clairement anisotrope, avec $T_x > T_z$ par un facteur 1,8 (expériences), 1,4 (simulations sur la transition $1/2 \rightarrow 3/2$) ou 2,7 (simulations sur la transition $4 \rightarrow 5$). En fait, le désaccord entre les expériences et les simulations semi-classiques pour la transition $4 \rightarrow 5$ pourrait être lié au fait que le domaine de paramètres est très différent. Comme dans les simulations la profondeur du potentiel est très importante, les atomes sont très confinés de sorte que les corrélations des directions orthogonales x , y et z sont très faibles. Ceci explique que le facteur d'anisotropie $\xi_{x,y}/\xi_z$ soit plus important dans les simulations que dans les expériences. Des simulations entièrement quantiques réalisées dans les mêmes conditions que les expériences seraient nécessaires pour apporter une justification définitive à cette hypothèse.

Le processus de refroidissement dans un réseau optique dissipatif est le refroidissement Sisyphe. Dans l'image physique de ce mécanisme [21, 22, 30], [I.1.2.3], les cycles de refroidissement s'arrêtent lorsque l'atome est piégé dans un puits de potentiel unique. Ainsi la température cinétique est-elle de l'ordre de grandeur de la barrière de potentiel du puits,

i.e. de la hauteur du point de croisement des potentiels U_- et U_+ dans le cas d’une transition $1/2 \rightarrow 3/2$, et ne fait intervenir aucune autre anisotropie du potentiel comme la période spatiale du réseau. Comme nous l’avons fait remarquer précédemment, cette barrière est supérieure d’un facteur 2 selon x, y que selon z . Nous nous attendons donc à ce que la température soit supérieure selon x, y que selon z d’un facteur de l’ordre de 2. Les résultats des simulations sont en bon accord avec cette prévision. Nous trouvons en fait un facteur d’anisotropie de 1,4 dans le cas d’une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Nous attribuons la différence entre les facteurs théorique (2) et numérique (1,4) au fait que les directions x, y et z ne sont pas strictement indépendantes et les corrélations entre celles-ci tendent à équilibrer les énergies cinétiques moyennes dans les directions orthogonales.

Néanmoins, le cas d’une transition théorique $1/2 \rightarrow 3/2$ ne fait pas intervenir le refroidissement local [155, 135], [I.B.2.2], qui pourrait abaisser encore l’énergie cinétique du nuage alors que les atomes sont piégés dans les puits de potentiel. Nous trouvons en effet que l’énergie cinétique moyenne du nuage est $E_K \sim \mathcal{U}/10$ et donc que les atomes sont très bien localisés dans les puits de potentiel en accord avec des résultats expérimentaux [88] et théoriques [66] antérieurs. Dans le cas d’une transition réelle, la température reste anisotrope et cette propriété est reliée à l’anisotropie des modulations des grandeurs (potentiels optiques et pompage optique) qui déterminent l’équilibre entre processus dissipatifs et processus de refroidissement et donc l’énergie cinétique moyenne. Cette conclusion n’est pas incompatible avec nos résultats montrant que la température cinétique est indépendante des périodes spatiales du réseau [53]. En effet, les anisotropies du réseau 3D- $\text{lin} \perp \text{lin}$ ne se limitent pas à des facteurs d’échelle anisotropes (voir les formules (I.1.30)) dans les formules du champ laser, c’est-à-dire à ces périodes spatiales, mais interviennent aussi dans la forme des modulations du champ laser (voir la formule (I.1.33)) et donc des potentiels optiques et du pompage optique comme l’illustre la figure II.1.1.

En fait, l’anisotropie de la température cinétique n’est pas paradoxale et ne doit pas nous intriguer particulièrement. La “température cinétique” que l’on utilise couramment en physique des atomes froids n’est ici qu’une caractéristique simple des distributions de vitesse *définie* par l’une des formules (II.1.1) et n’a rien à voir avec une “température au sens thermodynamique”. Ceci parce que dans le mécanisme de refroidissement Sisyphe, la route vers un état stationnaire d’énergie cinétique ne correspond pas à une thermalisation assurée par des collisions inter-atomiques mais à une interaction atome-photons. En fait, nos résultats montrent qu’il est impossible de définir une température thermodynamique pour le refroidissement Sisyphe à cause de la violation du théorème d’équipartition de l’énergie [154] qu’elle induirait.

Nous avons montré par ailleurs que le décrochage en température a lieu pour des valeurs différentes de la profondeur du potentiel dans les directions orthogonales x, y d’une part et z d’autre part. Ce résultat est assez surprenant car on pourrait s’attendre à ce que le couplage des directions orthogonales soit augmenté du fait du moindre confinement atomique au voisinage du fond des puits de potentiel. On pourrait ainsi penser que l’augmentation rapide de l’énergie cinétique moyenne dans la direction z déstabilise complètement le réseau et que l’énergie cinétique dans les directions x et y se mette à augmenter rapidement aussi. Il n’en est rien et les directions x, y et z apparaissent plus indépendantes qu’on aurait pu le croire, du moins pour ce qui concerne la température cinétique.

1.2 Des distributions de vitesse non gaussiennes

Nous étudions dans ce paragraphe la forme des distributions de vitesse du nuage atomique dans un réseau optique dissipatif. On peut en effet s'attendre dans le régime oscillant à des déviations à la distribution gaussienne qui n'est justifiée que dans le régime sautant. En particulier le comportement de ces distributions pour des profondeurs de potentiel très faibles pourrait donner un éclairage nouveau sur le processus qui conduit au phénomène de décrochage.

Après avoir justifié la forme des fonctions d'ajustement pour les distributions de vitesse [II.1.2.1], nous présentons les résultats des simulations numériques [II.1.2.2], puis nous discutons nos résultats en les comparant notamment aux résultats expérimentaux de l'équipe de Stockholm [II.1.2.3].

1.2.1 Fonctions d'essai et motivations

Le but principal de cette étude est de caractériser plus en détail les distributions de vitesse des nuages atomiques refroidis et piégés dans des réseaux optiques où la théorie du refroidissement Sisyphe s'applique. Un pas supplémentaire consiste à fournir une fonction qui donne une bonne approximation de la distribution de vitesse. Le choix de fonctions d'ajustement est rendu difficile par la dynamique complexe des atomes dans le réseau. En effet, bien que la théorie décrite par Dalibard et Cohen-Tannoudji dans [21] donne de très intéressants renseignements sur le comportement dynamique des atomes, elle n'est pas toujours suffisante dans des régimes pertinents typiques des expériences, où l'intercombinaison d'un mouvement hamiltonien sur les surfaces de potentiel et les cycles de pompage optique, de même temps typiques, rend difficile les calculs analytiques [55]. Cette étude des distributions de vitesse dans un réseau optique a été réalisée en collaboration avec Robin Kaiser et le groupe de Anders Kastberg [127]. Dans les lignes qui suivent, nous donnons des justifications *a priori* du choix de trois fonctions d'ajustement (gaussienne, fonction de Tsallis et double gaussienne) que nous avons utilisées pour approcher les distributions de vitesse. Comme nous le verrons, ces choix reposent sur des considérations simples sur des généralisations bien connues du modèle décrit dans [21].

Fonctions d'essai

Gaussienne - Dans la formulation standard du refroidissement Sisyphe mondimensionnel [21, 22, 30], l'état atomique interne est éliminé adiabatiquement [I.2.1.2] de telle manière que la dynamique atomique est décrite en termes simples d'une force de friction généralisée $F(v)$ et de forces fluctuantes de coefficient de diffusion en vitesse $D_v(v)$ ($= D_p/M^2$). $F(v)$ résulte des cycles Sisyphe assistés par le pompage optique alors que $D_v(v)$ correspond aux fluctuations de la force dipolaire et aux reculs aléatoires des photons absorbés et réémis spontanément. La distribution de vitesse $W(v)$ est alors régie par l'équation de Fokker-Planck (FPE) [145, 156] :

$$\partial_t W = -\frac{1}{M} \partial_v (F(v) W) + \partial_v (D_v(v) \partial_v W). \quad (\text{II.1.5})$$

Dans le régime linéaire pour la vitesse atomique, nous obtenons [30], [I.2.1.2] :

$$\begin{aligned} F(v) &= -\alpha_0 v \\ D_v &= D_v^{(1)} + D_v^{(2)} . \end{aligned} \quad (\text{II.1.6})$$

Dans ce contexte, α_0 et D_v dépendent des paramètres du réseau et sont indépendants de la vitesse. $D_v^{(1)}$ correspond aux reculs aléatoires liés aux photons absorbés et réémis alors que $D_v^{(2)}$ représente les fluctuations de la force dipolaire [30]. La solution d'état stationnaire de la FPE (II.1.5) avec un courant de probabilité nul ($-F(v)W + MD_v(v)\partial_v W = 0$) est donc une fonction *gaussienne* de largeur à $1/\sqrt{e}$ égale à $\sigma_v = 2\sqrt{MD_v/\alpha_0}$:

$$W(v) = W_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0 v^2}{2MD_v}\right) . \quad (\text{II.1.7})$$

Fonction de Tsallis - Au delà du régime linéaire en vitesse de l'atome, la force de friction et le coefficient de diffusion en vitesse doivent être affinés en [55, 114], [I.2.1.2] :

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{-\alpha_0 v}{1 + (v/v_c)^2} \\ D_v(v) &= D_v^{(1)} + \frac{D_v^{(2)}}{1 + (v/v_c)^2} , \end{aligned} \quad (\text{II.1.8})$$

où v_c est la vitesse de capture qui correspond à la vitesse typique au dessus de laquelle le mécanisme Sisyphe perd son efficacité. Il est à présent facile de montrer que la solution d'état stationnaire de la FPE (II.1.5) avec un courant de probabilité nul s'écrit [157]

$$W(v) = W_0 [1 - \beta(1 - q)v^2]^{\frac{1}{1-q}} \quad (\text{II.1.9})$$

$$\text{où } q = 1 + \frac{2MD_v^{(1)}}{\alpha_0 v_c^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\alpha_0/2M}{D_v^{(1)} + D_v^{(2)}} .$$

La fonction dans l'équation (II.1.9) est appelée *fonction de Tsallis* et est en fait très générale. Elle fournit en particulier une grande classe de fonctions d'ajustement contenant les fonctions gaussiennes ($q = 1$), les fonctions lorentziennes ($q = 2$) et les paraboles inversées ($q = 0$). Il est intéressant de noter à ce stade que la fonction de Tsallis a été initialement introduite dans le contexte des théories non extensives de la thermodynamique [158, 159]. La vaste littérature sur le sujet offre de nombreux papiers rapportant des études de problèmes abordés par le passé dans le domaine du refroidissement laser, comme la diffusion anormale en présence de forces extérieures [160-162], les problèmes de bruit multiplicatif et la relation avec l'émergence de phénomènes chaotiques dans l'espace des phases [163, 164]. Il est en effet connu que le refroidissement Sisyphe peut donner lieu à une diffusion anormale [128, 165], en particulier aux faibles profondeurs de potentiel optique, pour lesquelles les atomes peuvent voyager sur des longueurs correspondant à plusieurs périodes spatiales de réseau avant d'être piégés à nouveau dans un puits de potentiel. Le lien entre diffusion anormale et statistique de Tsallis offre une seconde justification à la recherche de

distributions de vitesse de la forme de la fonction de Tsallis (II.1.9). Notons que la fonction de Tsallis est aussi appelée la “distribution de l’étudiant” et intervient dans des problèmes de statistique sur des échantillons de cardinal faible.

Double Gaussienne - Comme du refroidissement Sisyphe résulte une situation où l’énergie cinétique moyenne des atomes est de l’ordre de grandeur de la profondeur du potentiel, on ne peut négliger ni les atomes d’énergie inférieure (“piégés” dans les puits de potentiel), ni les atomes d’énergie supérieure (“non piégés”). Cette remarque inspire une description en termes de *dynamique bimodale*. Une telle description se révèle en particulier très efficace pour la prévision des propriétés de diffusion spatiale dans un réseau optique [52], [II.2.1.2]. L’équation cinétique des atomes énergétiques peut alors être très bien décrite par des coefficients de friction et de diffusion en impulsion moyennés dans l’espace dont il résulte une distribution de vitesse gaussienne comme nous l’avons vu précédemment. Les atomes peu énergétiques sont piégés et soumis à une équation cinétique différente. Nous supposons qu’il en résulte encore une distribution gaussienne. Notre fonction d’essai sera alors la somme de deux gaussiennes de largeurs différentes (*double gaussienne*), chacune correspondant respectivement aux atomes piégés (indice “c” pour “cold”) et aux atomes énergétiques (indice “h” pour “hot”) :

$$W(v) = W_c \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_c^2}\right) + W_h \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_h^2}\right). \quad (\text{II.1.10})$$

Simulations numériques

Dans le but d’analyser les résultats des expériences du groupe de Stockholm, réalisées dans une configuration 3D-lin⊥lin [I.1.2.2], nous avons effectué des simulations de Monte-Carlo quantiques [I.2.2]. Sauf mention explicite contraire, les résultats présentés ci-après ont été obtenus pour une transition $4 \rightarrow 5$ correspondant au ^{133}Cs utilisé dans les expériences. Nous n’utilisons pas ici des simulations semi-classiques [I.2.3] car, comme nous allons le montrer (voir la figure II.1.8 et le texte, page 100), le comportement des distributions de vitesse sont radicalement différentes pour les transitions $1/2 \rightarrow 3/2$ et $4 \rightarrow 5$, or comme nous l’avons déjà montré, l’approximation semi-classique pour une transition $J_g \rightarrow J_g + 1$, avec $J_g > 1/2$ est mise en échec lorsqu’on atteint le décrochage et celui-ci correspond au domaine de paramètres qui nous intéresse plus particulièrement ici¹⁰.

Après la phase de thermalisation, nous enregistrons la distribution de vitesse à chaque pas de temps puis nous moyennons les distributions obtenues dans la phase de température stationnaire. Les simulations sont réalisées pour différents paramètres du réseau (désaccord et profondeur de potentiel) en représentation $|p\rangle$. Pour les paramètres considérés, les distributions de vitesse ont typiquement une largeur inférieure à $20\hbar k$ ce qui permet de limiter la fenêtre des états $|p = n\hbar k\rangle$ utilisée dans les simulations.

¹⁰Notons que la méthode de simulation de Monte-Carlo semi-classique est néanmoins valable pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ au voisinage du décrochage ce qui valide son emploi dans l’étude du décrochage anisotrope en température [II.1.1.3].

1.2.2 Etude dans un réseau monodimensionnel

Dans le but de simplifier notre analyse, nous travaillons avec une configuration monodimensionnelle 1D-lin $\perp$ lin [21, 22], [I.1.2.2] qui correspond en fait à la direction z de la configuration tridimensionnelle expérimentale 3D-lin $\perp$ lin mais avec une période spatiale différente [I.1.2.2]. Cette restriction de la dynamique est légitime pour deux raisons : d'une part, parce que la température cinétique est indépendante de la période spatiale du réseau [52, 53], [II.1.1], et d'autre part parce que les températures cinétiques sont très semblables dans les configurations 1D et 3D comme le montre la comparaison des résultats de nos simulations 1D et des expériences 3D portée sur la figure II.1.7.

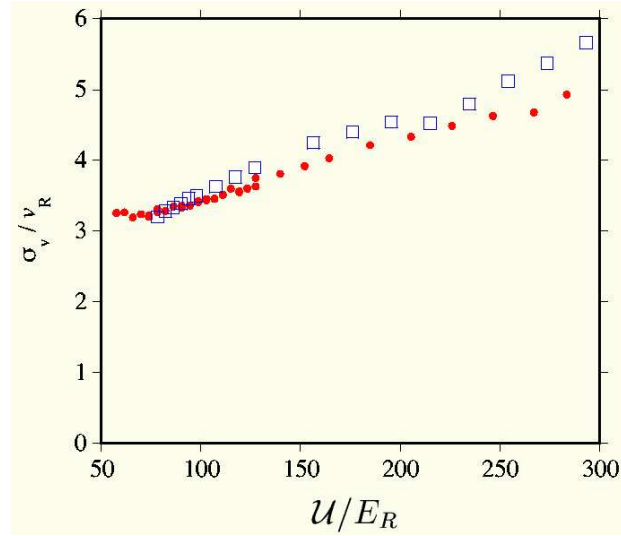


Figure II.1.7: Largeurs à $1/\sqrt{e}$ des distributions de vitesse mesurées dans les expériences 3D (cercles pleins) et calculées dans les simulations 1D (carrées vides) en fonction de la profondeur du potentiel.

Ici, les simulations sont réalisées avec typiquement 200 fonctions d'ondes stochastiques et dans une fenêtre d'états impulsion $|p\rangle$ restreinte à $|p| \leq 100\hbar k$.

Comportement non-gaussien des distributions de vitesse

Dans le but de déterminer si les distributions de vitesse sont compatibles avec des fonctions gaussiennes ou non, nous comparons tout d'abord les vitesses v_{rms} et v_e associées au nuage atomique. Ici, v_{rms} est la vitesse rms, définie par $E_K = Mv_{\text{rms}}^2/2$ où E_K est l'énergie cinétique moyenne du nuage et v_e est la demi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution de vitesse stationnaire. Rappelons que pour une distribution gaussienne ces deux grandeurs sont égales. Nous portons sur la figure II.1.8Gauche les résultats des simulations pour v_{rms} et v_e en fonction de la profondeur du potentiel $\mathcal{U}$ pour différents désaccords Δ .

Nous trouvons que v_{rms} et v_e sont indépendantes de Δ aux erreurs numériques près. Notons que d'autres simulations ont été effectuées pour des valeurs plus faibles de $\mathcal{U}$ mais nous avons trouvé qu'alors le nuage ne thermalise pas ce qui indique que nous atteignons le décrochage.

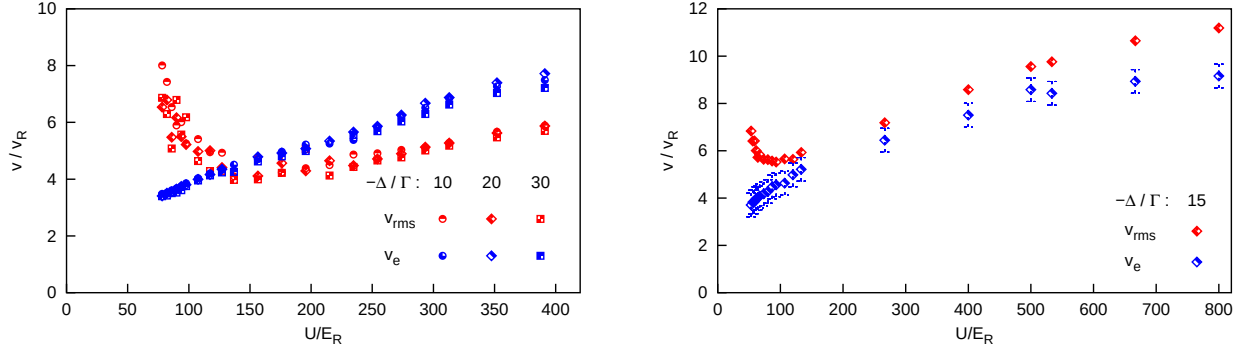


Figure II.1.8: Comparaison de la vitesse rms et de la largeur à $1/\sqrt{e}$ des distributions de vitesse en fonction de la profondeur du potentiel $\mathcal{U}$ pour différents désaccords Δ dans un réseau 1D-lin $\perp$ lin. Gauche : cas d’une transition $4 \rightarrow 5$. Droite : cas d’une transition $1/2 \rightarrow 3/2$.

La figure II.1.8Gauche montre clairement que les comportements de v_{rms} et v_e en fonction de $\mathcal{U}$ diffèrent radicalement. En effet, v_{rms} reproduit le comportement bien connu de l’énergie cinétique moyenne en fonction de $\mathcal{U}$: v_{rms} se comporte comme $\sqrt{cte. + \mathcal{U}}$ aux grandes valeurs de $\mathcal{U}$ et augmente rapidement aux faibles valeurs de $\mathcal{U}$, typiquement à partir de $150E_R$ (point de décrochage). Nous obtenons une valeur minimale pour v_{rms} d’environ $(v_{\text{rms}})_{\text{min}} \simeq 4,1\hbar k/M$. Au contraire, v_e décroît de façon monotone avec $\mathcal{U}$ aux grandes comme aux petites valeurs de $\mathcal{U}$. La valeur minimale de v_e correspond à la valeur minimale de $\mathcal{U}$ pour laquelle une distribution de vitesse stationnaire est obtenue ($\mathcal{U} \gtrsim 78E_R$) et vaut environ $(v_e)_{\text{min}} \simeq 3,4\hbar k/M$. Deux régimes doivent alors être distingués :

- Pour $\mathcal{U}$ au dessus du décrochage ($\mathcal{U} \gtrsim 150E_R$), v_e et v_{rms} augmentent tout deux avec $\mathcal{U}$ et v_e est légèrement supérieur à v_{rms} , c’est à dire que la distribution de vitesse est un peu plus large que la distribution gaussienne de même v_{rms} .
- Pour $\mathcal{U}$ en deçà du décrochage ($\mathcal{U} \lesssim 150E_R$), v_e décroît alors que v_{rms} augmente rapidement lorsque $\mathcal{U}$ décroît; la distribution de vitesse devient plus fine qu’une fonction gaussienne et possède des ailes larges.

Ces caractéristiques différentes des distributions de vitesse sont illustrées sur la figure II.1.9 où nous avons représenté des distributions de vitesse avec un ajustement gaussien dans les deux régimes $\mathcal{U} \lesssim 150E_R$ et $\mathcal{U} \gtrsim 150E_R$.

Remarquons que le comportement des vitesses v_{rms} et v_e est différent pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ [55]. En effet, nous trouvons dans ce cas que v_e est systématiquement inférieur à v_{rms} ce qui indique que la distribution de vitesse est toujours plus étroite qu’une gaussienne comme le montrent les résultats portés sur la figure II.1.8Droite. Nous en déduisons que le moment angulaire de la transition considéré est déterminant pour la forme des distributions de vitesse. Dans la suite, nous ne nous intéressons plus qu’au cas correspondant aux expériences de Stockholm (transition $4 \rightarrow 5$ du ^{133}Cs).

Nous concluons finalement de ce paragraphe que la distribution de vitesse d’un nuage atomique refroidi par effet Sisyphe diffère significativement d’une distribution gaussienne.

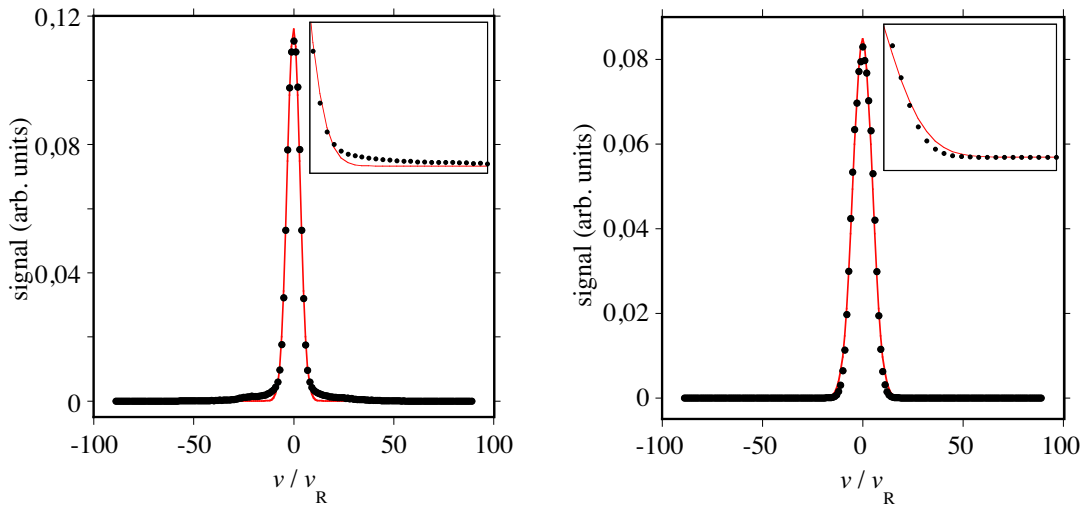


Figure II.1.9: Distributions de vitesse numériques avec leurs ajustements gaussiens. Pour la figure de gauche, la profondeur du potentiel est $\mathcal{U} = 78E_R$; pour la figure de droite, $\mathcal{U} = 235E_R$. Les figures incrustées montrent des agrandissements des ailes des distributions.

De plus, nous trouvons que le décrochage pour v_{rms} aux faibles valeurs de $\mathcal{U}$ ne concerne pas v_e .

Analyse détaillée des distributions de vitesse

Nous nous tournons à présent vers l'analyse détaillée des distributions de vitesse.

Fonction de Tsallis - Nous testons tout d'abord les ajustements de ces distributions par des fonctions de Tsallis (II.1.9) où W_0 , β et q sont les paramètres libres. Nous portons q en fonction de $\mathcal{U}$ sur la figure II.1.10.

Nous obtenons que q décroît linéairement en fonction de $\mathcal{U}$. Pour toutes les données numériques, q ne diffère de 1 que de moins de 5 % et est inférieur à 1. De plus, nous trouvons que q tend vers 1 pour les potentiels très peu profonds ce qui indique que le meilleur ajustement par des fonctions de Tsallis est proche d'une fonction gaussienne. Ce résultat est surprenant et semble paradoxal, notamment à la lumière de ce que nous avons vu des ajustements gaussiens des distributions de vitesse dans le réseau (voir page 99 et les suivantes). En effet, qualitativement, les fonctions de Tsallis exhibent de longues ailes (pour $q > 1$) de sorte que l'on aurait espéré qu'elles rendent compte des distributions de vitesse dans le réseau. Pourtant, les résultats des simulations numériques montrent que, quantitativement, les fonctions de Tsallis ne fournissent pas un bon ajustement des distributions de vitesse, du moins dans le domaine de paramètres considéré ici.

Notons que la dépendance de q en fonction de $\mathcal{U}$ est différente de celle que l'on obtient dans les expériences [127]. Cet écart qualitatif pourrait être dû aux dimensionnalités différentes considérées dans les simulations (1D) d'une part et dans les expériences (3D) d'autre part.

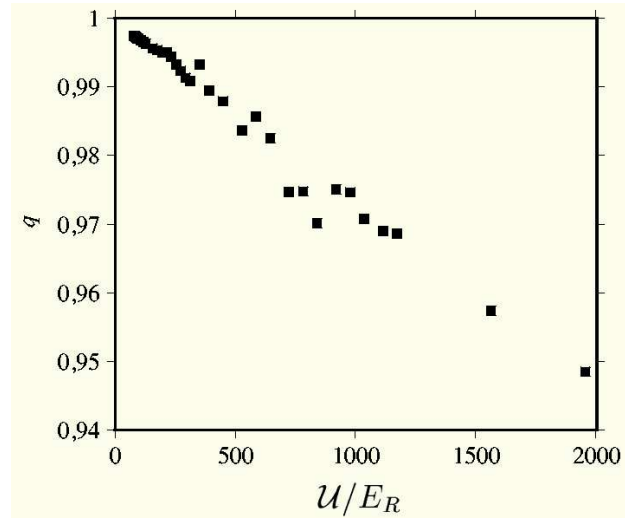


Figure II.1.10: Paramètre de Tsallis q en fonction de la profondeur du potentiel obtenu par ajustements avec des fonctions de Tsallis (II.1.9).

Fonction gaussienne double - Nous nous intéressons à présent à des ajustements par des fonctions gaussiennes doubles. Nous traçons sur la figure II.1.11 deux distributions de vitesse en échelle semi-logarithmique pour des profondeurs de potentiel dans les deux régimes correspondant respectivement à des potentiels peu profonds et à des potentiels très profonds avec leurs ajustements en gaussiennes doubles.

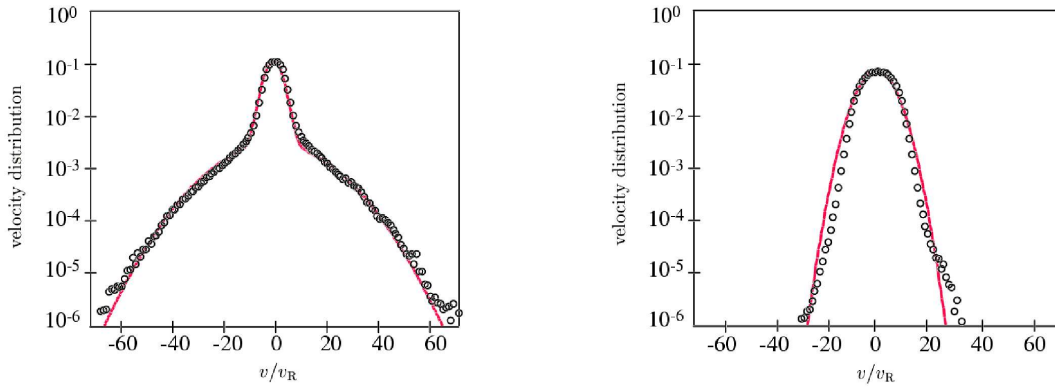


Figure II.1.11: Distributions de vitesse aux profondeurs de potentiel $\mathcal{U} = 78E_R$ (Gauche) et $\mathcal{U} = 293E_R$ (Droite). Des ajustements avec des fonctions gaussiennes doubles sont aussi portés sur la figure.

- Pour le potentiel profond ($\mathcal{U} = 293E_R$), le profil est essentiellement parabolique et est donc raisonnablement bien ajusté par une distribution gaussienne simple.
- Pour le potentiel peu profond ($\mathcal{U} = 78E_R$), nous pouvons clairement identifier deux contributions : en plus d'un profil étroit parabolique (correspondant aux atomes peu

énergétiques), un autre plus large (correspondant aux atomes très énergétiques) apparaît.

Ce résultat va dans le sens de l'interprétation du comportement des atomes sous la forme d'une dynamique bimodale, un mode correspondant aux "atomes piégés" (mode froid) et l'autre aux "atomes non piégés" (mode chaud). Les distributions de vitesse obtenues sont bien ajustées par des fonctions gaussiennes doubles comme le montrent les figures II.1.11.

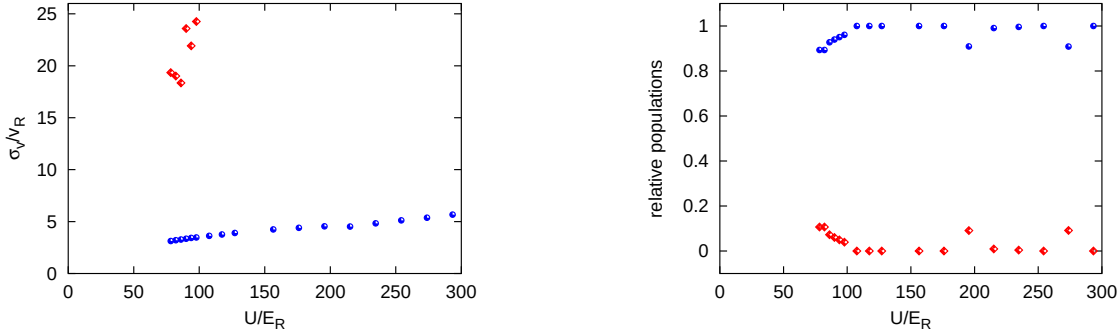


Figure II.1.12: Gauche : Largeurs des deux gaussiennes (mode froid : cercles pleins, mode chaud : cercles vides) obtenues par ajustement des distributions de vitesse à l'aide de fonctions gaussiennes doubles en fonction de la profondeur du potentiel. Droite : Populations relatives des deux modes des distributions correspondant aux aires sous les deux gaussiennes. Le mode froid correspond à la fraction la plus importante alors que le mode chaud correspond à la fraction peu importante.

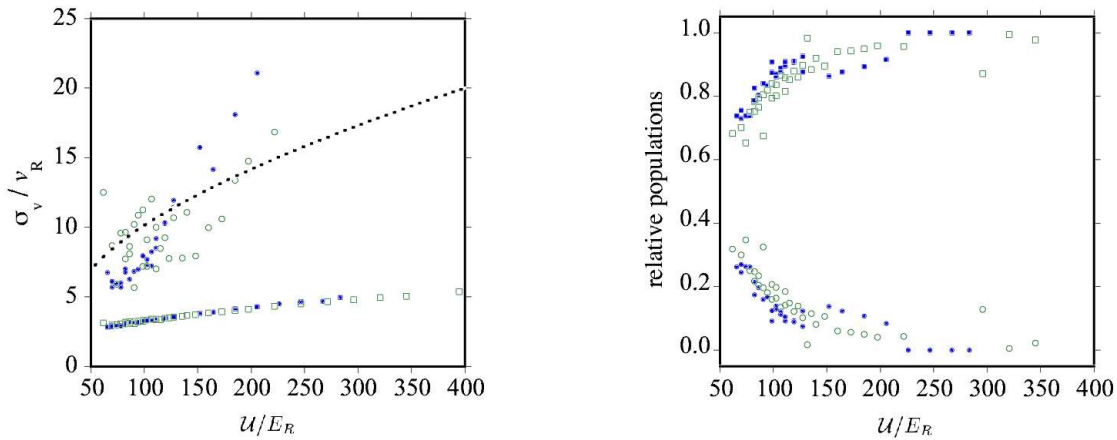


Figure II.1.13: *Idem* que la figure II.1.12 mais pour des valeurs expérimentales correspondant à une configuration 3D-lin $\perp$ lin. Résultats tirés de Jersblad *et al.* [138].

Nous nous intéressons maintenant aux caractéristiques (largeur et poids) des deux composantes gaussiennes de ces distributions. Sur la figure II.1.12Gauche, sont tracées les

largeurs des deux modes en fonction de $\mathcal{U}$. Nous trouvons que les largeurs σ_c et σ_h diminuent avec la profondeur du potentiel $\mathcal{U}$ même en deçà du point de décrochage. Ainsi, le phénomène de décrochage n'est pas lié à une augmentation rapide de σ_c ou σ_h , ce qui est en accord avec l'observation faite sur les figures II.1.8.

Dès lors, l'approche du décrochage peut être interprétée comme résultant d'un transfert de population du mode froid vers le mode chaud. Afin d'étayer cette hypothèse, nous avons étudié les poids respectifs des deux composantes gaussiennes. Ceux-ci correspondent à l'aire sous chaque gaussienne, *i.e.* $\sqrt{2\pi}\sigma_j W_j$ où $j \in \{c, h\}$. Nous traçons ces valeurs sur la figure II.1.12 Droite. Pour $\mathcal{U}$ grand, seul le mode froid est significativement peuplé. Par contre, lorsque $\mathcal{U}$ diminue, le mode chaud commence à se peupler au détriment du mode froid. Ceci conforte notre interprétation que la route vers le décrochage correspond au transfert de population entre les modes jusqu'à ce que l'importance du mode chaud brise l'équilibre du réseau. Nous trouvons en fait que le mode froid est largement dominant même pour les très faibles profondeurs de potentiel et le décrochage a lieu alors que le mode chaud ne représente qu'environ 10 % du nuage atomique dans les simulations 1D.

Comparaison des différents ajustements - Pour être complet, nous comparons les degrés de finesse des ajustements par des gaussiennes, des fonctions de Tsallis et des gaussiennes doubles au moyen du test du χ^2 . Nous traçons les coefficients χ^2 en fonction de la profondeur du potentiel pour ces trois fonctions sur la figure II.1.14.

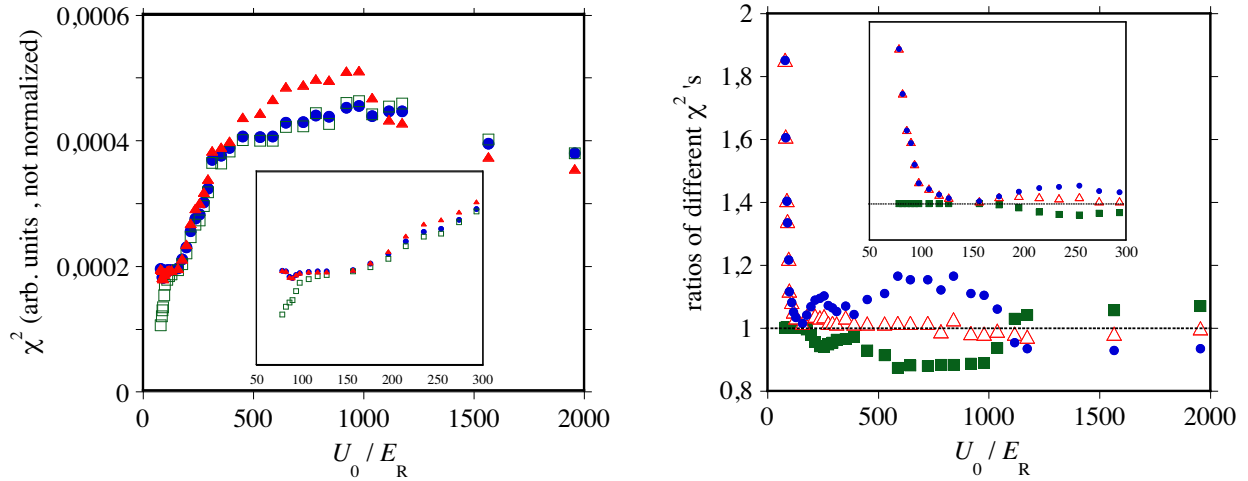


Figure II.1.14: Comparaisons des différentes fonctions d'ajustement pour les distributions de vitesse. Gauche : les coefficients χ^2 (non normalisés) correspondant aux ajustements par des gaussiennes simples (disques), par des fonctions de Tsallis (triangles) et par des gaussiennes doubles (carrés vides) respectivement, sont tracés en fonction de la profondeur du potentiel. Droite : rapports des coefficients χ^2 pour les différentes fonctions d'ajustement; $\chi_{1\text{gauss}}^2/\chi_{\text{Tsallis}}^2$ (carrés pleins), $\chi_{1\text{gauss}}^2/\chi_{2\text{gauss}}^2$ (triangles) et $\chi_{\text{Tsallis}}^2/\chi_{2\text{gauss}}^2$ (cercles pleins). Des agrandissements de la région correspondant aux faibles profondeurs de potentiel sont aussi tracés sur le graphe.

Dans l'ensemble, les ajustements sont assez bons et ne montrent pas de différences significatives. En particulier, les fonctions gaussiennes simples et les fonctions de Tsallis fournissent des précisions tout à fait similaires. Au dessus du point de décrochage, le mode chaud est très faiblement peuplé (voir la figure II.1.12Droite) de sorte que les gaussiennes simples et doubles fournissent essentiellement les mêmes distributions. Néanmoins, dans la région de faible profondeur de potentiel, en deçà du point de décrochage ($\mathcal{U} \simeq 150E_R$), les fonctions gaussiennes doubles fournissent de bien meilleurs ajustements que les gaussiennes simples ou les fonctions de Tsallis.

Comparaison avec les résultats expérimentaux - Nous comparons finalement les données expérimentales obtenues par Johan Jersblad et Harald Ellmann [29] et nos résultats théoriques [127]. Une comparaison directe n'est pas adéquate dans la mesure où les simulations sont réalisées en une dimension. Pourtant, les données expérimentales sont en excellent accord qualitatif avec les résultats ci-dessus. Les ajustements par des fonctions gaussiennes simples sont bons aux grandes profondeurs de potentiel mais mauvais aux faibles profondeurs de potentiel. Les fonctions de Tsallis ne fournissent pas de meilleurs ajustements que les gaussiennes simples. Enfin, les fonctions gaussiennes doubles fournissent les meilleurs ajustements, surtout aux très faibles profondeurs de potentiel. Les expériences comme les simulations montrent l'existence de deux modes, l'un correspondant aux atomes peu énergétiques et piégés dans les puits de potentiel (mode froid), l'autre correspondant aux atomes énergétiques et non piégés (mode chaud). Ceci soutient l'idée d'une dynamique bimodale. En particulier, les courbes correspondant aux résultats expérimentaux pour la largeur et la population des deux modes (figure II.1.13) sont en bon accord qualitatif avec celles correspondant aux résultats numériques (figure II.1.12). On notera que dans les expériences 3D, le décrochage intervient alors que 30 % des atomes peuplent le mode chaud alors que nous trouvons seulement 10 % dans les simulations 1D. Ceci s'explique simplement par les dimensionnalités différentes des expériences et des simulations. En effet, on peut déterminer la fraction d'atomes liés dans une situation dD à l'aide de la formule

$$n_{\text{liés}}^{(dD)} = \alpha \sum_{\vec{j}} p_{dD}(E_{\vec{j}}) \prod_{1 < \mu < d} \mathbf{1}_{E_{j\mu} < E_{\text{max}\mu}} \quad (\text{II.1.11})$$

où $p_{dD}(E_{\vec{j}})$ représente la probabilité de peuplement de l'état d'énergie $E_{\vec{j}}$, α est un facteur de normalisation et $E_{\text{max}\mu}$ est l'énergie maximale des états liés dans les puits de potentiel dans la direction μ ($E_{\text{max}\mu}$ est de l'ordre de grandeur de la profondeur du potentiel). A présent, si les différentes directions sont séparables (ce qui est le cas dans l'approximation harmonique que l'on peut supposer correcte pour ce qui concerne les états liés)

$$n_{\text{liés}}^{(dD)} = \prod_{1 < \mu < d} \alpha_{\mu} \underbrace{\sum_j p_{1D}(E_{j\mu}) \mathbf{1}_{E_{j\mu} < E_{\text{max}\mu}}}_{n_{\text{liés}}^{(1D)}} \quad (\text{II.1.12})$$

Ainsi, la fraction d'atomes dans les états non liés peut s'écrire

$$n_{\text{non liés}}^{(dD)} = 1 - \prod_{1 < \mu < d} \left(1 - n_{\text{non liés}}^{(1D\mu)} \right) \sim d n_{\text{non liés}}^{(1D)} \quad (\text{II.1.13})$$

en supposant que les trois directions x , y et z donnent des contributions du même ordre de grandeur.

1.2.3 Discussion

Nous avons tout d'abord montré que les distributions de vitesse sont incompatibles avec des fonctions gaussiennes et ce d'autant plus que les paramètres du réseau sont proches du décrochage en profondeur de potentiel. Nous avons par exemple montré que $v_{\text{rms}} \neq v_e$. En fait, qualitativement, les comportements de v_{rms} et v_e en fonction de $\mathcal{U}$ dépendent fortement de la transition atomique considérée. Ceci montre que le comportement non gaussien des distributions de vitesse dans un réseau optique dissipatif est certainement un effet non trivial du refroidissement Sisyphé.

Il est clair que les déviations par rapport aux distributions gaussiennes deviennent de plus en plus prononcées lorsque $\mathcal{U}$ diminue et s'approche de la divergence de température. Un meilleur ajustement (correspondant à un χ^2 plus faible) est obtenu avec des fonctions gaussiennes doubles. Dans les simulations numériques, le paramètre de Tsallis q reste proche de 1 ce qui correspond à une correction très faible par rapport au cas gaussien et ne fournit donc pas de meilleur ajustement des distributions. Les résultats expérimentaux de Stockholm sont en excellent accord avec ces conclusions [127].

Les ajustements des distributions par des fonctions gaussiennes doubles donnent de meilleurs résultats que les fonctions de Tsallis. Dans un sens, il n'est pas étonnant qu'une procédure d'ajustement à plus de paramètres libres donne de meilleurs résultats. En fait, les tracés des distributions de vitesse en échelle semi-logarithmique (figure II.1.11) montrent l'existence de deux composantes de largeurs très différentes et ceci soutient fortement l'hypothèse de distributions de vitesse bimodales. Une interprétation est qu'une partie importante des atomes est liée dans les puits de potentiel alors qu'une faible partie a suffisamment d'énergie pour voyager par dessus des collines de potentiel. Pour de faibles valeurs de la profondeur du potentiel optique, nous trouvons que la portion d'atomes dans les bandes de conduction devient plus importante comme le montrent les figures II.1.12. Ces atomes subissent une force de friction correspondant au modèle Sisyphé classique. La dynamique de refroidissement pour les états liés est moins claire. Une hypothèse pourrait être que les états liés sont alimentés par la bande de conduction : un atome dans un état non lié est susceptible de voyager sur plusieurs périodes spatiales du réseau et peut subir un cycle de pompage optique qui le transfère vers un état lié. Nous ne nous attendons alors pas particulièrement à obtenir une distribution gaussienne bien qu'une telle distribution soit compatible avec nos résultats. Par ailleurs, dans une telle hypothèse, nous pouvons nous attendre à ce que le taux de refroidissement dépende linéairement de l'intensité du champ laser, or cette prévision est en excellent accord avec nos résultats présentés dans [166] ainsi qu'au paragraphe II.2.2.2, voir aussi [167]. On trouve en effet dans ces travaux des taux de relaxation de l'énergie cinétique proportionnels au taux de pompage optique Γ'_0 .

Résumé et conclusion du chapitre

Nous avons étudié dans ce chapitre les propriétés de la température cinétique et des distributions de vitesse dans un réseau optique dissipatif. Nous avons plus particulièrement effectué une comparaison des températures cinétiques dans les différentes directions du réseau et une étude de la forme des distributions de vitesse, notamment aux très faibles profondeurs de potentiel.

Une température cinétique anisotrope

Nous avons effectué une étude systématique de la dépendance de l'énergie cinétique moyenne en fonction des paramètres (profondeur du potentiel, désaccord des faisceaux, angle de réseau) du réseau 3D-lin $\perp$ lin en distinguant les directions orthogonales (x , y et z) au moyen de simulations de Monte-Carlo semi-classiques pour des transitions $1/2 \rightarrow 3/2$ [52] et $4 \rightarrow 5$ [138]. Nous avons trouvé que, loin du décrochage, la température cinétique est strictement proportionnelle à la profondeur du potentiel et ne dépend ni de l'angle du réseau, ni du désaccord des faisceaux, en accord avec les résultats expérimentaux [53] et avec les modèles 1D [21, 22, 30].

Nous avons de plus mis en évidence une anisotropie de la température dans le réseau avec $T_{x,y} > T_z$. Cette propriété se comprend bien dans le cadre de l'image physique du refroidissement Sisyphe [I.1.2.3] correspondant à la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ car la barrière de potentiel pour s'échapper d'un puits est plus grande dans les directions transverses (x et y) que dans la direction longitudinale (z). Notons que le résultat persiste avec une transition réelle $4 \rightarrow 5$ pour laquelle il existe de plus un mécanisme de refroidissement local [138]. Cette anisotropie de la température confirme le caractère non thermodynamique de la température dans le cadre du refroidissement Sisyphe.

Enfin, nous avons montré que le décrochage du réseau (aux faibles profondeurs de potentiel) est lui aussi anisotrope. Il intervient en effet à des profondeurs de potentiel différentes dans les directions transverses et longitudinale : il existe un domaine de $\mathcal{U}$ pour lequel T_z augmente rapidement alors que $T_{x,y}$ continue de diminuer lorsque $\mathcal{U}$ décroît.

Des distributions de vitesse non gaussiennes

Nous avons étudié la forme des distributions de vitesse dans un réseau optique 1D-lin $\perp$ lin au moyen de simulations de Monte-Carlo quantiques [127]. Nous avons montré une nette déviation par rapport à des distributions gaussiennes, notamment au voisinage du décrochage. En particulier, nous avons montré que $v_{\text{rms}} \neq v_e$. Pour une transition $4 \rightarrow 5$, au dessus du point de décrochage, $v_{\text{rms}} < v_e$ et la distribution est plus large qu'une gaussienne de même v_{rms} alors qu'en deçà du point de décrochage, $v_{\text{rms}} > v_e$, ce qui se traduit par de longues ailes de la distribution de vitesse. Notons que pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$, $v_{\text{rms}} > v_e$ pour n'importe quelle profondeur du potentiel.

Nous avons ajusté les distributions de vitesse obtenues au moyen de fonctions de Tsallis et de fonctions double-gaussiennes (somme de deux gaussiennes). La fonction de Tsallis ne donne par de meilleur ajustement que la gaussienne simple. Par contre, la fonction double-gaussienne permet de mieux reproduire les distributions. Ce résultat est interprété

en termes d’une dynamique bimodale : le nuage atomique est formé d’une “composante froide” (atomes peu énergétiques et piégés dans les puits de potentiel) et d’une “composante chaude” (atomes plus énergétiques et quasi-libres). Pour des potentiels profonds, la composante chaude est difficile à distinguer mais son poids augmente rapidement lorsqu’on s’approche du décrochage. Ainsi, la marche vers le décrochage peut être interprétée comme un transfert de population du mode froid vers le mode chaud jusqu’à déstabilisation du réseau (décrochage). Ces résultats sont en accord avec les observations expérimentales [127]. Par ailleurs, nous verrons des effets de cette dynamique bimodale au chapitre I.2.1. Ces résultats donnent une nouvelle vision de la dynamique atomique dans un réseau optique dissipatif.

Chapitre 2

Etude de la diffusion spatiale dans un réseau optique dissipatif

L'effet Sisyphe dans les réseaux optiques a été étudié dans une grande variété de systèmes et de configurations de champ laser. Ainsi, un grand nombre de résultats a été obtenu sur la température, la localisation atomique ou l'ordre spatial [8] et un excellent accord entre les observations expérimentales et les prévisions théoriques a été obtenu. Par contre, beaucoup moins de travaux ont été réalisés sur la diffusion spatiale dans les réseaux optiques, mais pour les résultats disponibles, un accord raisonnable a été trouvé entre les modèles [114, 126, 128, 168] et les expériences [169, 165, 170]. Néanmoins, aucune étude détaillée de la dépendance de la diffusion spatiale en fonction par exemple des différentes directions dans le réseau anisotrope 3D-lin $\perp$ lin ou en fonction de la période spatiale et de la forme des puits du réseau n'a été entreprise jusqu'ici. C'est le but de ce chapitre de remédier à ce manque. Très récemment, le transport atomique au sein des réseaux optiques a suscité un regain d'intérêt avec l'étude du chaos [171] et la réalisation de condensats de Bose-Einstein par des procédés entièrement optiques [172].

La dynamique atomique dans les schémas de refroidissement Sisyphe monodimensionnels est bien comprise. Dans le régime sautant [I.1.2.3] où un atome subit plusieurs cycles de pompage optique au cours de la traversée d'une seule période spatiale du réseau, le mouvement d'un atome peut être décrit par un modèle de mouvement brownien [21, 22, 30]. Dans ce régime, les coefficients de friction α_0 et de diffusion en impulsion D_p sont moyennés uniformément dans l'espace [I.2.1.2] et on montre que la première relation d'Einstein est valide :

$$k_B T = \frac{D_p}{\alpha_0} \quad (\text{II.2.1})$$

où k_B est la constante de Boltzmann. Dans un modèle brownien, le coefficient de diffusion spatiale D_s doit alors être donné par la seconde relation d'Einstein :

$$D_s = \frac{k_B T}{\alpha_0} . \quad (\text{II.2.2})$$

Par contre, dans le régime oscillant [I.1.2.3] où un atome voyage sur plusieurs périodes de réseau avant d'être pompé optiquement dans un nouvel état interne, la force de friction

dépend de la vitesse [21, 22, 30] sous la forme

$$F(v) = \frac{-\alpha_0 v}{1 + (v/v_c)^2} \quad (\text{II.2.3})$$

où v_c est la vitesse de capture du refroidissement Sisyphé [I.2.1.2]. Dans cette situation, le calcul analytique d'un coefficient de diffusion spatiale a encore pu être réalisé [114] mais une interprétation en termes de mouvement brownien ne fonctionne plus. En particulier, les auteurs de la référence [114] montrent que le comportement du coefficient de diffusion spatiale en fonction des paramètres de l'interaction atome-champ (intensité et désaccord des lasers) est complètement différent dans le régime oscillant comparé au régime sautant.

Dans des configurations en dimension supérieure, on s'attend aussi à trouver une telle différence de comportement dans les régimes sautant et oscillant. De plus, la grande différence de libre parcours moyen des atomes diffusant dans ces régimes pourrait conduire à une dépendance marquée du comportement du coefficient de diffusion spatiale en fonction des périodes spatiales du réseau. Ce sont les principales questions auxquelles nous nous intéressons ici. Nous chercherons par ailleurs à déterminer si la description usuelle de la dynamique des atomes en termes de mouvement brownien est correcte et en particulier à savoir si les deux relations d'Einstein (II.2.1) et (II.2.2) sont valides.

Le plan du chapitre est le suivant. Nous établissons tout d'abord au paragraphe II.2.1 des modèles théoriques pour la diffusion spatiale dans un réseau dissipatif. Ceux-ci correspondent d'une part à un modèle de marche aléatoire sur un réseau cubique de points correspondant aux puits des potentiels optiques [II.2.1.1] et d'autre part à un modèle de mouvement brownien dans lequel la particule est soumise à une force de frottement fluide généralisée et à des forces aléatoires de moyenne nulle [II.2.1.2]. Ces modèles fournissent des prédictions identiques. Nous présentons alors au paragraphe II.2.1.3, les résultats des simulations semi-classiques effectuées dans la configuration 3D-lin⊥lin. Ceux-ci sont en bon accord avec les modèles théoriques développés dans les paragraphes précédents. Nous étudions ensuite au paragraphe II.2.2 dans quelle mesure la dynamique peut être décrite en termes de mouvement brownien en étudiant la validité des formules d'Einstein (II.2.1) et (II.2.2) dans le réseau multidimensionnel. Pour cela, nous étudions en particulier le comportement du coefficient de friction et du taux de relaxation de l'énergie cinétique en fonction des paramètres du réseau.

2.1 Description théorique de la diffusion spatiale dans un réseau optique dissipatif

2.1.1 Echappement des sites de piégeage et diffusion spatiale

Régime sautant et régime oscillant

Nous avons discuté les différences de comportement des atomes dans les deux régimes sautant et oscillant au paragraphe I.1.2.3. Nous ne la reprenons donc pas ici mais en soulignons des aspects particuliers dans la configuration 3D-lin⊥lin considérée ici. Dans

cette configuration, le fond des puits de potentiel est harmonique en première approximation, les directions propres d'oscillation étant les axes x , y et z avec des fréquences d'oscillations anisotropes $\Omega_\mu/2\pi$ données par l'équation (I.1.36). Le temps typique de pompage optique est quant à lui de l'ordre de $\tau_p = \frac{9}{8\Gamma_0}$ (voir les équations (I.1.25) et (I.1.33)). Le régime sautant correspond à $\Omega_\mu \ll 1/\tau_p$ et le régime oscillant à $\Omega_\mu \gg 1/\tau_p$ [I.1.2.3]. La frontière entre les régimes sautant et oscillant s'écrit alors :

$$\sqrt{\frac{\omega_R}{|\Delta'_0|}} \frac{|\Delta|}{\Gamma} \sim \frac{\lambda_\mu}{\lambda}. \quad (\text{II.2.4})$$

Notons que dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin, les régimes dynamiques peuvent être différents dans différentes directions à cause de la dépendance géométrique de la frontière entre ces régimes.

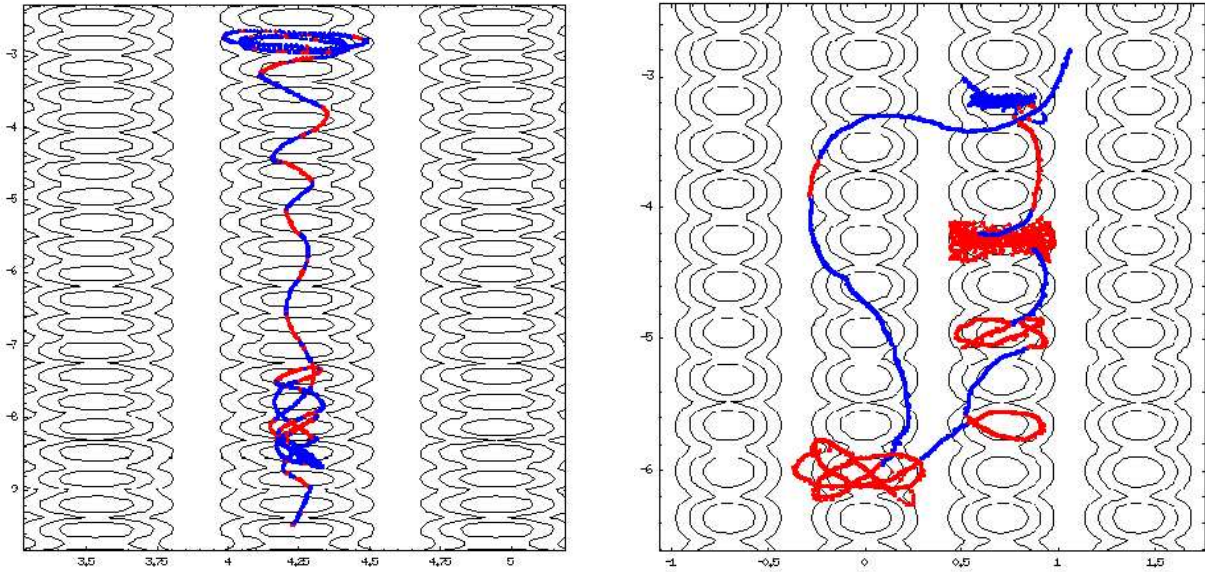


Figure II.2.1: Trajectoires typiques en régime sautant (Gauche) et en régime oscillant (Droite) dans un réseau optique 3D-lin $\perp$ lin. Les deux types de trait sur la figure distinguent les états atomiques internes courants $|+\rangle$ et $|-\rangle$. Le fond des figures représentent la trace des puits de potentiel optique.

Nous avons porté sur la figure II.2.1 deux trajectoires typiques en régime sautant et en régime oscillant afin d'illustrer la différence de comportement des atomes dans ces deux régimes, qui, comme nous le montrons dans le paragraphe suivant, est essentielle pour comprendre les dépendances du coefficient de diffusion spatiale en fonction des paramètres du réseau. Nous voyons clairement que :

- en régime sautant, les périodes de mouvement purement hamiltonien (entre deux cycles successifs de pompage optique) sont faites d'un petit nombre d'oscillations dans un puits de potentiel (voir moins d'une seule oscillation) et l'état atomique interne $|\pm\rangle$ est imposé par la polarisation du puits $\sigma^\pm$ dans lequel l'atome se trouve;

- en régime oscillant, nous observons que l'atome peut osciller un grand nombre de fois dans un puits de potentiel avant de subir un cycle de pompage optique et qu'après un tel cycle, l'atome peut effectuer un long trajet entre des sites de piégeage éloignés. Au cours de ces trajets, l'état interne est complètement décorrélié de la polarisation du puits visité.

Du piégeage atomique à la diffusion spatiale

La description classique des réseaux optiques nous apprend que les atomes, une fois refroidis, sont piégés dans le fond des puits de potentiel et donc régulièrement disposés dans l'espace [I.1.2.3]. Pourtant, dans un réseau optique brillant (dissipatif), le confinement des atomes est très imparfait du fait de la forte interaction avec les champs lasers. Deux processus différents produisent des déplacements des atomes entre les sites de piégeage, ce qui conduit à la diffusion spatiale du nuage d'atomes (voir la figure II.2.2). Dans un but de clarté, nous décrivons ici ces processus en une dimension mais nous insistons sur le fait qu'ils ont aussi bien lieu dans les configurations multidimensionnelles.

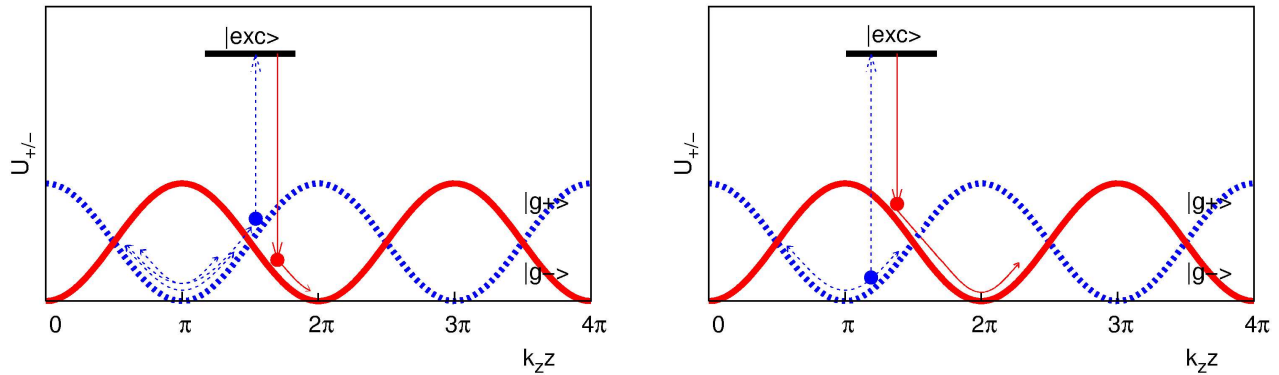


Figure II.2.2: Processus de diffusion spatiale dans un réseau optique. Gauche : processus dû au chauffage. Droite : processus dû au pompage optique.

- Premier processus (voir la figure II.2.2Gauche) : Un atome piégé subit toujours des cycles de fluorescence et prend des reculs dus à l'absorption et la réémission de photons. Le mouvement d'oscillation de l'atome s'en trouve ainsi perturbé. En particulier, l'atome peut explorer des régions où son énergie potentielle ($U_{\pm}$ si l'état atomique interne est $|\pm\rangle$) n'est pas minimale ($U_{\pm} > U_{\mp}$). Dans de telles régions, les cycles de pompage optique transfèrent l'atome préférentiellement dans l'état interne correspondant à l'énergie potentielle minimale et l'atome est refroidi et piégé dans le puits de potentiel adjacent (il s'agit ici d'un processus Sisyphé élémentaire). Ce processus induit le transfert d'un atome d'un site à son voisin sur l'autre courbe de potentiel.
- Second processus (voir la figure II.2.2Droite) : Lorsqu'un atome piégé oscille dans le puits de potentiel, il a une probabilité, certes faible mais non nulle, d'être pompé optiquement dans l'état interne correspondant à la courbe de potentiel la plus haute.

Dans le régime sautant, l'atome est immédiatement repompé vers le site de piégeage initial. Ce processus induit donc un échauffement et conduit à une trajectoire atomique oscillante bruitée ce qui mène indirectement à de la diffusion spatiale par le biais de transferts entre sites de piégeage voisins. Au contraire, dans le régime oscillant, l'atome n'est pas immédiatement repompé et voyage sur plusieurs puits de potentiel avant de subir un nouveau processus de refroidissement Sisyphe élémentaire qui le piège dans un autre puits de potentiel.

Le processus de diffusion spatiale lié au pompage optique est en fait beaucoup plus efficace que celui qui est dû aux reculs sauf pour les désaccords de lasers très faibles [30]. Nous nous focaliserons donc sur le second processus pour décrire la diffusion spatiale dans les réseaux optiques périodiques multidimensionnels. Nous verrons que les différences de description de ce processus dans les régimes sautant et oscillant que nous avons soulignées ci-dessus induisent des comportements de la diffusion spatiale radicalement différents.

Modèle de marche aléatoire

Dans un modèle simple, nous pouvons décrire le comportement diffusif du nuage atomique comme des marches aléatoires des atomes entre les sites de piégeage périodiques [150]. Supposons qu'un atome soit piégé dans un puits de potentiel particulier et saute après un temps τ vers un autre puits. Le coefficient de diffusion spatiale dans la direction $\mu \in \{x, y, z\}$ vaut alors

$$D_{s\mu} = \frac{d_\mu^2}{2\tau} \quad (\text{II.2.5})$$

où d_μ est le libre parcours moyen (*i.e.* la distance parcourue lors d'un saut) dans la direction μ .

- Dans le régime sautant, comme nous l'avons discuté précédemment, un atome est essentiellement transféré d'un site de piégeage vers un site voisin de sorte que $d_\mu \sim \lambda_\mu$. Le temps de vie d'un état externe oscillant est en moyenne de l'ordre de $1/\Gamma'_0$ [173], indépendamment de λ_μ . Ainsi, $\tau \sim 1/\Gamma'_0$ et

$$D_{s\mu} \sim \lambda_\mu^2 \Gamma'_0 . \quad (\text{II.2.6})$$

- Dans le régime oscillant, un atome voyage sur plusieurs sites du réseau avant d'être piégé de nouveau. Ici, $d \sim \bar{v}\tau_f$ où $\bar{v} \simeq \sqrt{2E_K/M}$ est la vitesse moyenne, E_K étant l'énergie cinétique moyenne du nuage atomique et τ_f le temps moyen d'un vol. Comme nous l'avons vu [II.1], E_K est proportionnel à $\hbar|\Delta'_0|$ indépendamment de Δ et de θ . τ_f est à nouveau de l'ordre de $1/\Gamma'_0$ [173]. Ainsi,

$$D_s \sim \frac{\hbar}{M} \frac{|\Delta|}{\Gamma} . \quad (\text{II.2.7})$$

Notons que nous avons implicitement supposé des vols en ligne droite et nous n'avons pas pris en compte les effets anisotropes. Bien sûr, à cause de la forme du potentiel et de son anisotropie, il conviendrait d'inclure une dépendance de $D_{s\mu}$ en λ_x , λ_y et λ_z

dans la formule (II.2.7) mais notre modèle simple n'en permet pas la détermination. Néanmoins, dans le cas d'une forte anisotropie ($\lambda_\mu \ll \lambda_\nu$), le système est à peu près monodimensionnel dans la direction μ de sorte que nous nous attendons à ce que $D_{s\mu}$ ne dépende pas de λ_μ . En effet, à une échelle spatiale grande, la longueur d'un vol de la particule de durée τ dans un potentiel 1D est indépendante de la période spatiale.

Nous souhaitons avant de clore ce paragraphe noter que ces discussions ne sont valables que pour des paramètres du réseau loin du domaine de *décrochage* en diffusion spatiale [114]. Pour des profondeurs de potentiel très petites, des vols très longs mais rares dominent la diffusion spatiale qui devient anormale [126, 168].

2.1.2 Description de la dynamique en termes de mouvement brownien : prise en compte de la localisation spatiale

Avant de passer à une description détaillée des résultats numériques, nous allons dans ce paragraphe développer un modèle théorique analytique simple qui nous aidera à comprendre les caractéristiques essentielles du schéma de diffusion spatiale. L'idée à la source de ce modèle consiste à décrire la dynamique atomique comme un mouvement brownien, comme cela a été fait dans le cas du refroidissement Doppler [30] et en une dimension pour le refroidissement Sisyphe dans le régime sautant [21, 22, 30] mais en prenant en compte les propriétés de localisation spatiale des atomes [88, 174, 175]. Les ingrédients fondamentaux en sont par conséquent la dérivation d'une force de friction moyenne et d'un coefficient de diffusion en impulsion moyen.

Considérons un atome à la position $\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$ et de vitesse $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_z\vec{e}_z$. Dans ce cas, la FPE (I.2.37), écrite pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ [I.2.3.2]), se réduit à

$$\begin{aligned} (\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\Pi_\pm &= -\gamma_\pm \Pi_\pm + \gamma_\mp \Pi_\mp \\ &= -(\gamma_- + \gamma_+)\Pi_\pm + \gamma_\mp \end{aligned} \quad (\text{II.2.8})$$

où nous avons utilisé la condition de conservation de la probabilité $\Pi_+ + \Pi_- = 1$. Les taux de sauts quantiques sont ici donnés par l'équation (I.1.34b). En développant les populations des états internes $|\pm\rangle$ en puissance de la vitesse $\vec{v}$ sous la forme $\Pi_\pm = \sum_n \Pi_\pm^{(n)}$ et en insérant cette formule dans l'équation (II.2.8), nous obtenons les solutions stationnaires

$$\begin{aligned} \Pi_\pm^{(0)} &= \frac{\gamma_\mp}{\gamma_- + \gamma_+} \\ \Pi_\pm^{(n)} &= Q^n \Pi_\pm^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{II.2.9})$$

où l'opérateur Q s'écrit

$$Q = -\frac{1}{\gamma_- + \gamma_+} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{II.2.10})$$

Formellement, les populations dépendant de la position et de la vitesse de l'atome peuvent donc s'écrire

$$\Pi_\pm = \frac{1}{1 - Q} \Pi_\pm^{(0)}. \quad (\text{II.2.11})$$

La force totale, moyennée sur les états atomiques internes, est donnée par

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) = - \left(\Pi_+ \vec{\nabla} U_+ + \Pi_- \vec{\nabla} U_- \right) . \quad (\text{II.2.12})$$

Afin d'obtenir une force de friction moyennée sur la position et la vitesse de la forme $\vec{F} = -(v_x \alpha_x \vec{e}_x + v_z \alpha_z \vec{e}_z)$, nous devons faire un certain nombre d'hypothèses sur la distribution spatiale stationnaire des atomes.

Dans une description monodimensionnelle du refroidissement Sisyphe, on suppose généralement que la distribution spatiale des atomes est uniforme dans le réseau. Néanmoins, comme nous l'avons vu aux paragraphes I.1.2.2 et II.1.1, la forme du potentiel optique est très différentes dans les directions orthogonales x et z . En particulier, la barrière de potentiel séparant deux puits adjacents est plus importante dans la direction transverse x que dans la direction longitudinale z . A partir de l'équation (I.1.34a) et de la figure I.1.6, nous voyons que cette barrière est de l'ordre de $16\hbar|\Delta'_0|/3$ selon x alors que d'après la formule (II.1.3), la température T_x est de l'ordre de $2\hbar|\Delta'_0|$. Nous nous attendons donc à une forte localisation dans la direction x . Au contraire, dans la direction z , la barrière de potentiel est de l'ordre de $8\hbar|\Delta'_0|/3$ et les atomes sont moins localisés dans cette direction. Au lieu d'une distribution atomique plate, nous supposons donc une distribution thermique :

$$P(\vec{r}) \propto \exp \left[-\frac{\gamma_- U_+ + \gamma_+ U_-}{k_B T (\gamma_+ + \gamma_-)} \right] \quad (\text{II.2.13})$$

correspondant au potentiel optique moyenné sur l'état atomique interne et à une température T que nous supposons non connue ici¹. En fait, la validité d'une telle distribution spatiale thermique est discutable pour un nuage d'atomes froids dans un réseau optique notamment du fait du caractère non thermodynamique de la température cinétique discuté en détail au chapitre II.1 et dans la référence [138]. Par ailleurs, des déviations significatives par rapport à la distribution thermique ont été observées précédemment [68, 176]. Nos simulations fournissent des distributions spatiales en bon accord qualitatif avec l'équation (II.2.13) mais montrent aussi des différences quantitatives significatives par rapport à ce comportement simple. Bien que non idéale, la distribution (II.2.13) permet de tenir compte de la localisation spatiale dans les puits de potentiel et comme nous le verrons par la suite, les prévisions de notre modèle pour ce qui concerne la diffusion spatiale et la force de friction sont en très bon accord qualitatif et quantitatif avec le résultat des simulations numériques.

Du fait des parités de $U_\pm$, de $\Pi_\pm^0$ et de $P(\vec{r})$, seuls les termes contenant une puissance impaire de $\Pi_\pm$ contribuent à la force moyenne. Nous pouvons donc nous limiter à

$$\Pi_\pm^{\text{odd}} = \sum_n \Pi_\pm^{(2n+1)} = \frac{1}{1 - Q^2} \Pi_\pm^{(1)} . \quad (\text{II.2.14})$$

Nous pouvons encore simplifier le problème en moyennant sur la vitesse, donc en remplaçant

¹Il faut noter que notre modèle ne tient pas ici compte du caractère anisotrope de la température dans le réseau [II.1.1].

Q par²

$$\overline{Q^2} = -\frac{2\omega_R k_B T / \hbar}{(\gamma_- + \gamma_+)^2} \left[\left(\frac{k_x}{k} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right] \quad (\text{II.2.15})$$

où $\overline{(\cdot)}$ désigne la moyenne spatiale de pondération $P(\vec{r})$. L'équation (II.2.15) est obtenue en remplaçant $v_\mu \rightarrow 0$, $v_\mu^2 \rightarrow k_B T / M$, $\partial_\mu^2 \rightarrow -k_\mu^2$ ($i \in \{x, z\}$). De cette procédure, nous obtenons finalement les coefficients de friction

$$\alpha_\mu = -\frac{6 \frac{\Delta}{\Gamma} \hbar k_\mu^2 C_\mu}{1 - \overline{Q^2}} \quad (\text{II.2.16})$$

où

$$\begin{aligned} C_x &= \overline{\left(\frac{\sin^4(k_x x) \cos^2(k_z z)}{[1 + \cos^2(k_x x)]^3} \right)}, \\ C_z &= \overline{\left(\frac{\cos^2(k_x x) \sin^2(k_z z)}{[1 + \cos^2(k_x x)]^2} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.17})$$

En suivant la procédure décrite dans [48] et en utilisant les mêmes approximations que lors du calcul des coefficients de friction (II.2.16), nous obtenons les coefficients de diffusion en impulsion

$$D_{p\mu} = \frac{8 \frac{\Delta}{\Gamma} \Delta'_0 \hbar^2 k_\mu^2 C'_\mu}{1 - \overline{Q^2}} \quad (\text{II.2.18})$$

où

$$\begin{aligned} C'_x &= \overline{4 \Pi_+^{(0)} \Pi_-^{(0)} \frac{\sin^2(k_x x) \cos^2(k_z z)}{1 + \cos^2(k_x x)}}, \\ C'_z &= \overline{4 \Pi_+^{(0)} \Pi_-^{(0)} \frac{\cos^2(k_x x) \sin^2(k_z z)}{1 + \cos^2(k_x x)}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.19})$$

Afin de ne pas alourdir les formules (II.2.19), nous avons omis d'écrire des termes du coefficient de diffusion en impulsion qui correspondent aux reculs aléatoires des photons absorbés et émis spontanément (terme $D_p^{(\text{abs})}$ et $D_p^{(\text{sp})}$ introduits au paragraphe I.1.2.3). Ces termes sont proportionnels à Γ'_0 et peuvent être négligés devant les termes conservés dans l'équation (II.2.18) aux grands désaccords ($|\Delta| > \Gamma$) [30].

Dans un modèle de mouvement brownien, la température stationnaire suit alors l'équation d'Einstein (II.2.1) moyennée sur les variables d'espace x et z :

$$k_B T = \frac{1}{2} \left(\frac{D_{px}}{\alpha_x} + \frac{D_{pz}}{\alpha_z} \right), \quad (\text{II.2.20})$$

²Bien qu'apparaissant en dénominateur dans cette expression, cette procédure est valide. En effet, nous verrons dans la suite que le terme $1 - \overline{Q^2}$ apparaît finalement en numérateur dans les formules donnant les coefficients de diffusion spatiale. Dès lors, les coefficients de friction sont de nature phénoménologique et la moyenne doit être effectuée comme nous le faisons ici.

Le terme de droite est naturellement obtenu à partir des équations (II.2.16) et (II.2.18) qui dépendent elles-mêmes de la température T par le biais de la distribution spatiale (II.2.13). Ainsi, la formule (II.2.20) fournit-elle une équation implicite pour $k_B T / \hbar |\Delta'_0|$ que nous résolvons numériquement en itérant les équations (II.2.13)-(II.2.20) à l'aide d'une méthode récursive. Remarquons qu'aucun paramètre du réseau comme l'angle entre les faisceaux quasi-copropageants θ ou le désaccord des lasers Δ n'apparaît dans cette équation. T est donc strictement proportionnel à $\hbar |\Delta'_0|$ et indépendant de θ et Δ . Nous obtenons

$$k_B T = 1,545 \hbar |\Delta'_0|, \quad (\text{II.2.21})$$

ce qui constitue une estimation tout à fait valable de la température cinétique du nuage atomique (voir les valeurs obtenues dans les simulations [II.1.1.1], équations (II.1.3)). La valeur (II.2.21) peut alors être utilisée pour déterminer les valeurs des coefficients numériques qui apparaissent dans les formules des coefficients de friction (II.2.16) et de diffusion en impulsion (II.2.18) :

$$\begin{aligned} C_x &= 0,0356, & C_z &= 0,0747, \\ C'_x &= 0,0409, & C'_z &= 0,0874, \end{aligned} \quad (\text{II.2.22})$$

et

$$\overline{(\gamma_- + \gamma_+)^2} = 2,55 \Gamma_0'^2. \quad (\text{II.2.23})$$

Il nous reste finalement à déterminer une formule appropriée pour les coefficients de diffusion spatiale. Dans ce but, nous devons à nouveau tenir compte de la localisation des atomes. Alors que l'équation (II.2.1) donnant la relation entre la température, le coefficient de diffusion en impulsion et le coefficient de friction est approximativement valable pour les atomes piégés comme pour les atomes non-piégés, l'équation correspondante pour la diffusion spatiale (II.2.2) n'est valable que pour les atomes non-piégés. En effet, un nuage d'atomes strictement piégés a une distribution spatiale stationnaire et n'est donc le siège d'aucune diffusion spatiale. Pour ce qui concerne les atomes non-piégés, nous ferons l'hypothèse qu'ils ne ressentent que faiblement le potentiel optique de sorte que leur dynamique doit vérifier la formule (II.2.2).

Nous séparons maintenant les contributions des deux composantes du nuage d'atomes dans le calcul explicite du coefficient de diffusion spatiale. Nous avons donc³ :

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{2N_{\text{atomes}}} \left(\frac{d \sum_{\text{non piégés}} x^2}{dt} + \frac{d \sum_{\text{piégés}} x^2}{dt} \right) \\ &= \frac{N_{\text{non piégés}}}{N_{\text{atomes}}} \underbrace{\frac{d\langle x^2 \rangle_{\text{non piégés}}}{2dt}}_{D_s^{(\text{non piégés})}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.24})$$

Déterminons enfin $N_{\text{non piégés}}/N_{\text{atomes}}$ d'une part et $D_s^{(\text{non piégés})}$ d'autre part. Pour cela nous faisons les choses suivantes.

³Afin d'alléger l'écriture des équations, nous nous limitons à une notation 1D mais tout se passe pareil dans des situations multidimensionnelles.

- En utilisant l'équation (II.2.21) et sous l'hypothèse d'une distribution thermique de position et d'impulsion⁴, nous obtenons numériquement qu'une fraction de 55,6% de tous les atomes a une énergie supérieure à la profondeur des puits de potentiel dans la direction z alors qu'une fraction de 15,3% a une énergie supérieure à la profondeur des puits de potentiel dans la direction x ⁵. Notons que ces valeurs sont en bon accord avec la prévision d'un meilleur piégeage dans la direction transverse x que dans la direction longitudinale z .
- Nous calculons alors $D_s^{(\text{non piégés})}$ par l'équation d'Einstein (II.2.2), à l'aide des formules (II.2.18) et (II.2.16) et avec les coefficients (II.2.22).

Finalement, nous obtenons les coefficients de diffusion spatiale effectifs qui doivent correspondre selon notre modèle à ceux que l'on observe dans les simulations numériques comme dans les expériences :

$$\begin{aligned} D_{sx} &= 0,554 \frac{\hbar}{M} \left(\frac{k}{k_x} \right)^2 \times \left\{ \frac{|\Delta'_0|}{\omega_R} \frac{\Gamma}{|\Delta|} + 1,21 \frac{|\Delta|}{\Gamma} \left[\left(\frac{k_x}{k} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right] \right\}, \\ D_{sz} &= 0,956 \frac{\hbar}{M} \left(\frac{k}{k_z} \right)^2 \times \left\{ \frac{|\Delta'_0|}{\omega_R} \frac{\Gamma}{|\Delta|} + 1,21 \frac{|\Delta|}{\Gamma} \left[\left(\frac{k_z}{k} \right)^2 + \left(\frac{k_x}{k} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.25})$$

Ces expressions sont en bon accord qualitatif avec notre discussion physique [II.2.1.1] aussi bien dans le régime sautant que dans le régime oscillant. Nous discuterons ce point plus en détail au paragraphe suivant.

2.1.3 Résultats numériques

Nous présentons à présent les résultats des simulations numériques pour la diffusion spatiale du nuage atomique. Nous avons utilisé des simulations de Monte-Carlo semi-classiques pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ en restreignant la dynamique au plan (Oxz) comme au paragraphe II.1.1. Ceci nous permettra de dégager des images physiques parlantes et de comparer directement les résultats numériques aux calculs analytiques décrits ci-dessus. Une étude plus quantitative qui permettrait une comparaison directe à des résultats expérimentaux devra faire appel à des simulations quantiques pour une transition de moment angulaire quelconque $J_g \rightarrow J_g + 1$.

Ici, nous avons déterminé la moyenne du carré de la position des atomes dans le nuage dans chaque direction en fonction du temps $\overline{r_\mu^2(t)}$. Dans la période de thermalisation, les atomes chauds ont des trajectoires à peu près balistiques de sorte que le nuage est en expansion rapide. Pour des temps plus grands, l'expansion du nuage atteint un régime de diffusion normale où

$$\overline{r_\mu^2(t)} = 2D_{s\mu}t + \Delta r_{\mu,0}^2. \quad (\text{II.2.26})$$

⁴Il s'agit donc d'une distribution gaussienne. Pour ce qui concerne la partie liée à l'impulsion, ceci est justifié dans le domaine de paramètres que nous considérons ici, situé loin du décrochage (voir le paragraphe II.1.2 pour plus de détails).

⁵Ces valeurs sont pratiquement indépendants des paramètres du réseau dans le domaine considéré ici.

Ici $\Delta r_{i,0}^2$ est une constante qui dépend des conditions initiales pour la distribution de position et d'impulsion. Notons que $D_{s\mu}$ ne dépend pas de cette distribution initiale comme nous l'avons vérifié dans les simulations.

Nous avons représenté sur la figure II.2.3 les coefficients de diffusion spatiale en fonction du désaccord pour différentes valeurs du déplacement lumineux et pour un angle de réseau fixé. Celle-ci permet de distinguer clairement deux régions où le coefficient de diffusion spatiale a des comportements très différents en fonction de Δ . Aux désaccords faibles, $D_{s\mu}$ décroît rapidement lorsque $|\Delta|$ augmente et augmente avec $|\Delta'_0|$, alors qu'aux grands désaccords, $D_{s\mu}$ croît avec $|\Delta|$ et ne dépend pas de $|\Delta'_0|$ sauf pour $\Delta'_0 = -150\omega_R$. Ce dernier cas correspond à une profondeur de puits relativement faible et le système est proche de la transition vers une diffusion anormale [114, 126, 168, 53].

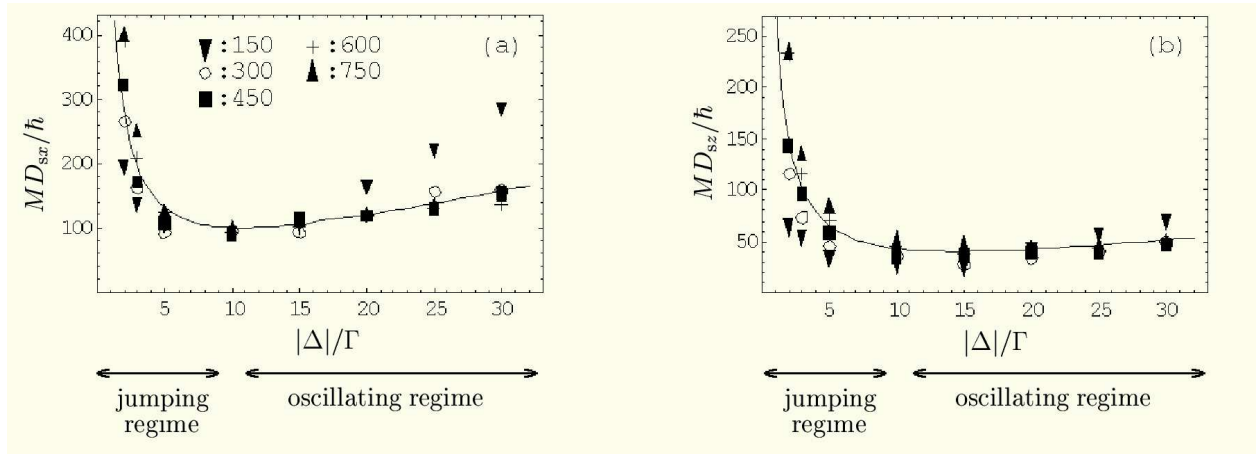


Figure II.2.3: Coefficients de diffusion spatiale transverse (a) et longitudinale (b) en fonction de Δ pour différents Δ'_0 (les valeurs de $|\Delta'_0|/\omega_R$ sont portées sur les graphes) et pour $\theta = 45^\circ$. La courbe continue correspond à un ajustement numérique par une équation de la forme (II.2.27), pour $\Delta'_0 = -450\omega_R$.

Nous avons effectué des ajustements numériques des résultats des simulations par des formules de la forme (II.2.25) et avons obtenu :

$$D_{sx} = 0,5 \frac{\hbar}{M} \left(\frac{k}{k_x} \right)^2 \times \left\{ \frac{|\Delta'_0|}{\omega_R} \frac{\Gamma}{|\Delta|} + 1,73 \frac{|\Delta|}{\Gamma} \left[1,16 \left(\frac{k_x}{k} \right)^2 + 0,83 \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right] \right\},$$

$$D_{sz} = 1,3 \frac{\hbar}{M} \left(\frac{k}{k_z} \right)^2 \times \left\{ \frac{|\Delta'_0|}{\omega_R} \frac{\Gamma}{|\Delta|} + 1,00 \frac{|\Delta|}{\Gamma} \left[0,83 \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 + 1,16 \left(\frac{k_x}{k} \right)^2 \right] \right\}.$$

(II.2.27)

La figure II.2.3 montre que les formules (II.2.27) fournissent un excellent ajustement des données numériques. Les coefficients de l'ajustement sont en bon accord quantitatif avec le résultat de notre modèle analytique (II.2.25). La principale différence est dans le facteur 1,4 ($= 1,16/0,83$) qui rend compte du caractère anisotrope de la température cinétique

[II.1]. De la formule (II.2.4) donnant la frontière entre les régimes dynamiques et des équations (II.2.25)-(II.2.27), nous observons que les deux domaines où le coefficient de diffusion spatiale a des comportements différents correspondent aux régimes sautant et oscillant.

Régime sautant - A partir des équations (II.2.27), nous obtenons les coefficients de diffusion spatiale dans le régime sautant :

$$\begin{aligned} D_{sx} &= 0,025 \lambda_x^2 \Gamma'_0, \\ D_{sz} &= 0,066 \lambda_z^2 \Gamma'_0, \end{aligned} \quad (\text{II.2.28})$$

en bon accord avec notre discussion physique du paragraphe II.2.1.1 (équation (II.2.6)). En particulier, $D_{s\mu}$ est environ proportionnel à λ_μ^2 comme le confirme la figure II.2.4 et proportionnel au taux de pompage optique Γ'_0 . Les valeurs différentes des coefficients numériques dans les deux équations (II.2.28) indiquent que le piégeage est plus fort dans la direction transverse x que dans la direction longitudinale z en accord avec notre discussion du paragraphe II.2.1.2.

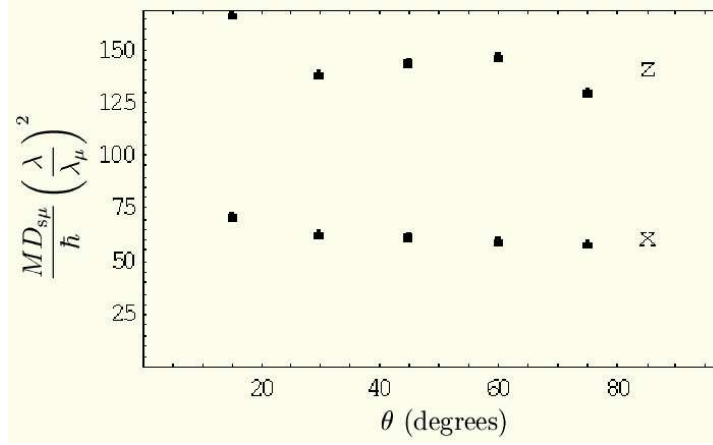


Figure II.2.4: Coefficients de diffusion spatiale $D_{s\mu}$ transverse (x) et longitudinal (z) divisés par le carré de la période spatiale correspondante (λ_μ^2) en fonction de θ pour $\Delta'_0 = -750\omega_R$ et $\Delta = -3\Gamma$ (régime sautant).

Régime oscillant - Au contraire, dans le régime oscillant, nous trouvons à partir des formules (II.2.27) :

$$\begin{aligned} D_{sx} &= 1,00 \frac{\hbar}{M} \left[1 + 0,72 \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right)^2 \right] \frac{|\Delta|}{\Gamma} \\ D_{sz} &= 1,08 \frac{\hbar}{M} \left[1 + 1,39 \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_x} \right)^2 \right] \frac{|\Delta|}{\Gamma} . \end{aligned} \quad (\text{II.2.29})$$

Dans ce régime, D_s est proportionnel à Δ comme nous l'attendions de la formule (II.2.7) et la dépendance en angle est qualitativement reproduite par la formule (II.2.25) issue de

notre modèle analytique. Nous présentons sur la figure II.2.5 cette dépendance en angle du réseau dans le régime oscillant. Ici, les directions transverse et longitudinale ne sont pas indépendantes car la forme des puits de potentiel dévie de manière significative les trajectoires des atomes en vol sur de longues distances. La dépendance de $D_{s\mu}$ en θ contient donc à la fois les périodes spatiales transverse λ_x et longitudinale λ_z . Ceci est complètement différent de la situation correspondant au régime sautant où les atomes transitent uniquement entre puits adjacents. L'équation (II.2.29) confirme aussi que pour $\lambda_\mu \ll \lambda_\nu$, $D_{s\mu}$ ne dépend pas de λ_μ comme le prévoit le modèle de marche aléatoire [II.2.1.1].

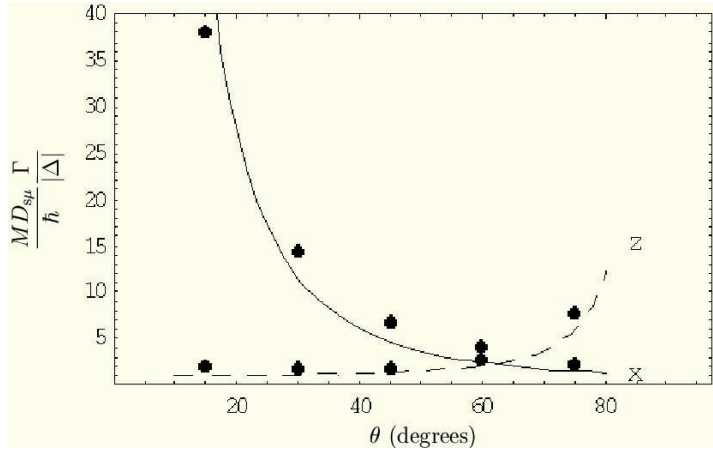


Figure II.2.5: Coefficients de diffusion spatiale transverse (x) and longitudinale (z) divisés par $|\Delta|$ en fonction de θ pour $\Delta = -30\Gamma$ et $\Delta'_0 = -300\omega_R$. Les points correspondent aux simulations numériques et les courbes continues correspondent aux équations (II.2.29) (régime oscillant).

2.1.4 Au crible de l'expérience

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats du modèle que nous avons développé ci-dessus avec les résultats expérimentaux pour la diffusion spatiale obtenus dans l'équipe de William D. Phillips au NIST [114]. Ces résultats correspondent à une configuration de mélasse optique à six faisceaux. Comme nous l'avons vu au paragraphe [I.1.3.1], un mécanisme de refroidissement Sisyphé est à l'œuvre dans ce cas aussi, de sorte que notre modèle doit être valable⁶.

Nous traçons sur la figure II.2.6, deux courbes extraites du travail de Hodapp *et al.* [114] qui donnent le coefficient de diffusion spatiale en fonction de l'intensité des faisceaux lasers pour différentes valeurs du désaccord laser.

En bref, hormis le phénomène de décrochage à faible intensité, nous observons les comportements suivants pour la diffusion spatiale.

⁶Notre modèle ayant été établi pour la configuration 3D-lin $\perp$ lin, de géométrie différente de la configuration expérimentale du NIST, la dépendance de la diffusion spatiale en fonction des paramètres géométriques ne peut pas être testée ici. Notons néanmoins que notre modèle est aisément généralisable à d'autres configurations, par exemple à la configuration à ondes stationnaires (voir la figure I.1.9Droite) ce qui permettrait une comparaison directe avec les valeurs expérimentales du NIST.

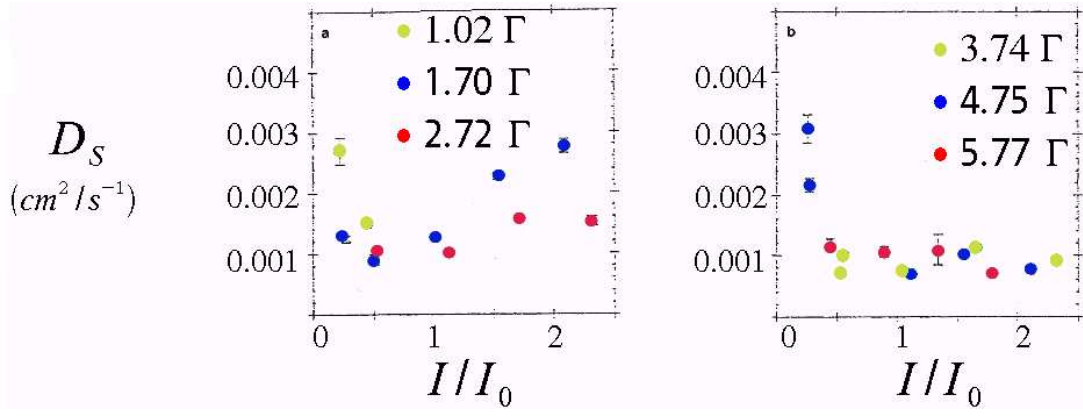


Figure II.2.6: Résultats expérimentaux tirés de la référence [114] pour les coefficients de diffusion spatiale en fonction de l'intensité des faisceaux lasers pour différentes valeurs du désaccord laser. La courbe de gauche correspond à des désaccords faibles (régime sautant) alors que la courbe de droite correspond à des désaccords plus importants (régime oscillant).

Régime sautant (Δ petit) - La courbe de gauche nous indique qu'en régime sautant, le coefficient de diffusion spatiale est proportionnel à l'intensité laser I et décroît lorsque le désaccord laser Δ augmente. Un tel comportement est en accord avec la prédiction de notre modèle qui fournit un coefficient de diffusion spatiale proportionnel au taux de pompage optique $\Gamma'_0 \propto I/\Delta^2$ dans le régime sautant (voir la formule (II.2.28)).

Régime oscillant (Δ grand) - La courbe de droite révèle un comportement radicalement différent dans le régime oscillant. Nous voyons que dans ce cas, le coefficient de diffusion spatiale est indépendant de l'intensité laser I et dépend légèrement du désaccord laser Δ . La dépendance du coefficient de diffusion spatiale avec le désaccord n'est pas très claire sur ces résultats. L'ensemble des données expérimentales fournies par Hodapp *et al.* [114] semble néanmoins indiquer une légère augmentation de la diffusion spatiale avec le désaccord. Ces résultats sont encore en accord avec la prédiction de notre modèle qui donne un coefficient de diffusion spatiale proportionnel au désaccord Δ et indépendant de l'intensité I dans le régime oscillant (voir la formule (II.2.29)).

Notre modèle reproduit donc bien les observations expérimentales du groupe de William D. Phillips. On pourra de plus vérifier que les coefficients de diffusion spatiale calculés sont du même ordre de grandeur que les coefficients de diffusion expérimentaux. Ainsi, le modèle fournit une bonne description des phénomènes de diffusion spatiale dans un réseau optique dissipatif dans un régime faisant le pont entre les régimes sautant et oscillant, non seulement qualitativement mais aussi semi-quantitativement. Notons pour finir que la dépendance géométrique prédite par notre modèle est en accord avec les résultats expérimentaux pour la diffusion spatiale obtenus dans notre équipe pour la configuration 3D-lin $\perp$ lin dans le régime sautant [26, 53].

2.2 La dynamique atomique peut-elle être décrite en termes de mouvement brownien ?

Le modèle théorique du paragraphe II.2.1.1 repose sur l'hypothèse que la dynamique atomique est correctement décrite par une marche aléatoire (ou mouvement brownien). Dans ce paragraphe, nous examinons en détail la validité d'une telle hypothèse en testant des caractéristiques fondamentales du mouvement brownien sur les résultats des simulations numériques. Nous réalisons en particulier une mesure directe du coefficient de friction α et vérifions la validité de la relation d'Einstein (II.2.2), valable pour des particules browniennes. Nous présentons ensuite une étude du taux de relaxation Γ_T de l'énergie cinétique dans le réseau qui doit être liée au coefficient de friction par la relation $\Gamma_T = 2\alpha/M$. Nous verrons en fait que ces deux quantités ont des comportements très différents en fonction des paramètres du réseau et discutons alors la validité de la description de la dynamique atomique en termes de mouvement brownien.

2.2.1 Coefficient de friction et relation d'Einstein

Relation d'Einstein - Dans le but de sonder la dynamique des atomes, nous soumettons ceux-ci à une force uniforme et permanente arbitraire en plus des forces dues à l'interaction atome-champ du réseau. Dans une expérience, une telle force pourrait correspondre par exemple à la gravité, à la pression de radiation d'un laser de faible intensité ajouté au dispositif ou encore à la force inertielle liée au mouvement que l'on peut imposer au réseau dans le référentiel du laboratoire⁷. Dans une théorie de mouvement brownien, une telle force constante $\vec{F}^{(c)} = F_x^{(c)}\vec{e}_x + F_z^{(c)}\vec{e}_z$ met le nuage atomique en mouvement d'ensemble à la vitesse moyenne $\vec{v} = \vec{v}_x\vec{e}_x + \vec{v}_z\vec{e}_z$ donnée par

$$\overline{v}_\mu = \frac{F_\mu^{(c)}}{\alpha_{0\mu}} . \quad (\text{II.2.30})$$

Par ailleurs, à cause de la linéarité des équations du mouvement brownien, la température et les coefficients de diffusion spatiale sont inchangés par l'introduction de la force $\vec{F}^{(c)}$.

En ajoutant dans les codes numériques une telle force dans la direction μ , nous avons observé un déplacement du nuage atomique à vitesse constante. Dans un cas idéal de mouvement brownien, on peut utiliser une amplitude quelconque de la force $\vec{F}^{(c)}$, mais dans le cas du refroidissement Sisyphe, le coefficient de friction dépend de la vitesse. Ainsi, pour obtenir une vitesse de déplacement $\overline{v}_\mu$ proportionnelle à la force $\vec{F}^{(c)}$, il est essentiel d'utiliser une force suffisamment faible pour induire un mouvement d'ensemble plus faible que la vitesse de capture. Sous cette condition, nous avons trouvé que la température et les coefficients de diffusion spatiale ne dépendent pas de la force $\vec{F}^{(c)}$ et l'équation (II.2.30) peut être utilisée pour déterminer numériquement les coefficients de friction phénoménologiques β_μ à partir de la mesure de la vitesse moyenne du nuage atomique $\overline{v}_\mu$:

$$\beta_\mu = \frac{F_\mu^{(c)}}{\overline{v}_\mu} . \quad (\text{II.2.31})$$

⁷Cette méthode a été employée à des fins très différentes dans [91, 92] et [100], voir aussi [III.3].

Nous comparons alors ces résultats avec le coefficient de friction obtenu par l'intermédiaire de la relation d'Einstein (II.2.2) en utilisant les valeurs de la température et des coefficients de diffusion spatiale obtenues aux paragraphes II.1.1.1 et II.2.1.3 respectivement. Nous avons tracé le rapport de ces deux coefficients de friction sur la figure II.2.7 et obtenons un écart entre ces valeurs de l'ordre de 15%. Nous en déduisons que la dynamique macroscopique du nuage atomique dans le réseau optique est en accord raisonnable avec un modèle de mouvement brownien bidimensionnel. Notons que les directions propres du mouvement sont les axes de coordonnées x et z en accord avec le modèle théorique.

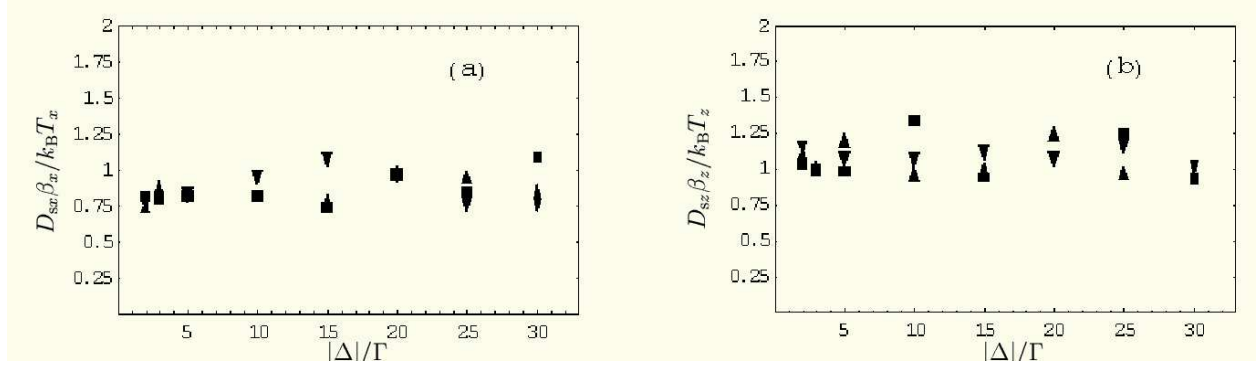


Figure II.2.7: Rapport des coefficients de friction calculés avec les équations (II.2.31) et (II.2.2) pour différents Δ et pour $|\Delta'_0|/\omega_R = 150, 300, 450$. La figure de gauche correspond à la direction transverse (x) et celle de droite à la direction longitudinale (z).

Revenons à présent au modèle développé au paragraphe II.2.1.2. Comme nous l'avons vu précédemment [II.2.1.3], les coefficients de diffusion spatiale obtenus dans les simulations (II.2.27) sont en accord avec les résultats analytiques (II.2.25). Le calcul de ces derniers a été effectué en supposant que le nuage d'atomes peut être séparé en deux catégories : les atomes piégés qui contribuent à l'expansion du nuage et les atomes non-piégés qui n'y participent pas. Dès lors, les coefficients de friction phénoménologiques obtenus à partir des résultats numériques pour la température cinétique et la diffusion spatiale ($\beta_\mu = k_B T_\mu / D_{s\mu}$) par le biais de l'équation d'Einstein (II.2.2) ne prennent en compte que les atomes non-piégés pour l'expansion du nuage. Il ne s'agit donc pas du coefficient de friction ($\alpha_\mu^{\text{analytique}}$) que l'on calcule en substituant les coefficients C_μ de (II.2.22) et $\overline{Q}$ de (II.2.15) dans la formule (II.2.16). Les coefficients C_μ de (II.2.22) doivent en fait être divisés par la fraction d'atomes non piégés pour obtenir une bonne approximation des coefficients de friction phénoménologiques ($\beta_\mu = k_B T_\mu / D_{s\mu}$) obtenus dans les simulations.

Que se passe-t-il à présent lorsqu'on ajoute la force constante faible $F_\mu^{(c)}$? Les atomes piégés restent localisés dans leur puits de potentiel initial, de sorte que la fraction d'atomes piégés ne contribue pas à la mise en mouvement du nuage atomique $\overline{v}$ de même que ce qui

se passe pour l'expansion du nuage en l'absence de force ajoutée :

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{N_{\text{atomes}}} \left(\frac{d \sum_{\text{non piégés}} x}{dt} + \frac{d \sum_{\text{piégés}} x}{dt} \right) \\ &= \frac{N_{\text{non piégés}}}{N_{\text{atomes}}} \underbrace{\frac{d\langle x \rangle_{\text{non piégés}}}{dt}}_{F^{(c)}/\alpha_\mu}.\end{aligned}\tag{II.2.32}$$

Ainsi, le coefficient de friction obtenu dans les simulations par la formule (II.2.31) est lui aussi phénoménologique et on comprend donc que les valeurs obtenues d'une part par la relation d'Einstein (II.2.2) et par la formule (II.2.31) coïncident et que donc la relation d'Einstein est correcte.

Dépendance du coefficient de friction en fonction des paramètres du réseau -

Par suite, nous obtenons un ajustement analytique du coefficient de friction mesuré en insérant les équations (II.1.3) et (II.2.27) dans (II.2.2). Nous trouvons

$$\begin{aligned}\beta_x &\simeq \frac{2,00 \hbar k_x^2 \frac{|\Delta|}{\Gamma}}{1 + 1,0 (k_x^2 + 0,72 k_z^2) \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} \frac{\hbar}{M|\Delta'_0|}} \\ \beta_z &\simeq \frac{0,55 \hbar k_z^2 \frac{|\Delta|}{\Gamma}}{1 + 0,4 (k_z^2 + 1,39 k_x^2) \frac{\Delta^2}{\Gamma^2} \frac{\hbar}{M|\Delta'_0|}}.\end{aligned}\tag{II.2.33}$$

Ces expressions approchées sont comparées aux valeurs des coefficients de friction obtenus numériquement et portés sur la figure II.2.8. Nous voyons que l'accord est excellent sur les plans qualitatif et quantitatif.

Le comportement de β_μ est ici encore différent dans les régimes sautant et oscillant.

- Dans le régime sautant, β_μ est proportionnel à $|\Delta|/\Gamma$ et est approximativement indépendant de Δ'_0 . [21, 30] :

$$\begin{aligned}\beta_x &= 2,00 \hbar k_x^2 \frac{|\Delta|}{\Gamma} \\ \beta_z &= 0,55 \hbar k_z^2 \frac{|\Delta|}{\Gamma}.\end{aligned}\tag{II.2.34}$$

Ces résultats sont en excellent accord avec la théorie 1D de Dalibard et Cohen-Tannoudji [21] qui prévoit une indépendance de β_0 en fonction de Δ'_0 . Néanmoins, la figure II.2.8 montre une faible dépendance de β_μ en fonction de Δ'_0 dans le régime sautant. Ceci s'explique par le fait que la température cinétique n'est pas strictement proportionnelle à Δ'_0 , mais montre une dépendance affine en Δ'_0 . Il s'ensuit une légère dépendance de la distribution spatiale P (II.2.13) en Δ'_0 . Les coefficients C_μ (voir la formule (II.2.16)) dépendent donc de Δ'_0 .

- Dans le régime oscillant, β_μ est proportionnel à $\Gamma'_0 = \Gamma \Delta'_0 / \Delta$ et dépend à la fois de λ_x et de λ_z comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1.3 :

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{2,00M}{1 + 0,72k_z^2/k_x^2} \frac{\Gamma \Delta'_0}{\Delta} \\ \beta_z &= \frac{1,38M}{1 + 1,39k_x^2/k_z^2} \frac{\Gamma \Delta'_0}{\Delta}.\end{aligned}\quad (\text{II.2.35})$$

Les expressions trouvées dans les simulations (II.2.33) sont en bon accord qualitatif avec les expressions établies dans notre modèle théorique aux équations (II.2.15)-(II.2.17). Notons néanmoins que les coefficients C_μ ne sont pas donnés par les formules (II.2.22) mais doivent être divisés par la fraction des atomes non-piégés qui, seuls, contribuent à la diffusion spatiale (*i.e.* à l'expansion du nuage).

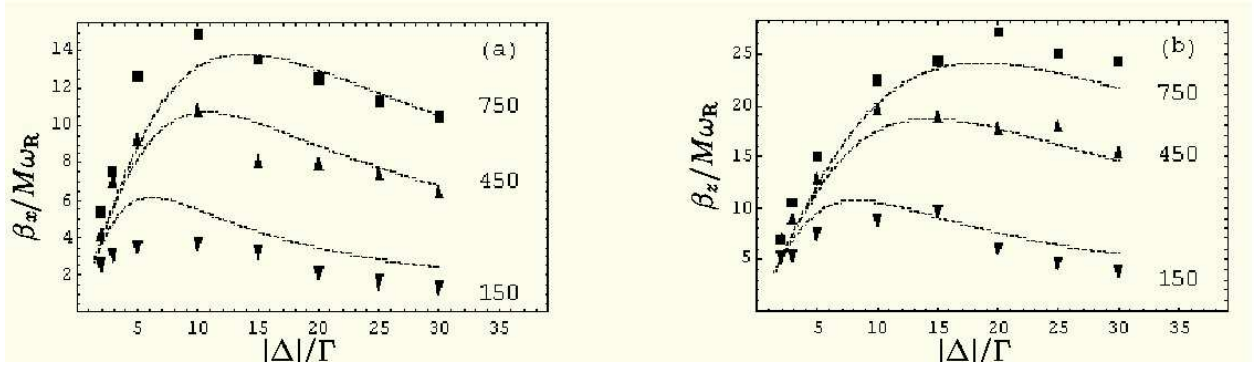


Figure II.2.8: Coefficients de friction transverse (a) et longitudinal (b) en fonction de Δ (points) et courbes correspondant aux équations (II.2.33) pour $\theta = 45^\circ$ et pour $\Delta'_0/\omega_R = -150, -450, -750$.

2.2.2 Etude du taux de relaxation de l'énergie cinétique (thermalisation). Discussion de la validité du modèle brownien

Depuis les premiers travaux sur le refroidissement sub-Doppler [21, 22], les propriétés de l'état stationnaire de la température cinétique résultant de l'effet Sisyphe a été intensivement étudiées en fonction des paramètres du réseau [II.1]. Pourtant, très peu d'études ont été menées sur la dynamique même du refroidissement et sur la relaxation de l'énergie cinétique moyenne du nuage. Jusqu'ici, seules des mesures indirectes du taux de refroidissement des atomes ont été présentées [167]. Dans ce travail, les taux de refroidissement sont estimés à partir des taux de localisation atomiques mesurés à l'aide d'expériences utilisant la diffraction de Bragg comme sonde.

Nous présentons ici une étude des processus menant à la relaxation de la vitesse atomique dans le refroidissement Sisyphe [166]. Les motivations de ce travail sont multiples. Tout d'abord, la comparaison des taux de relaxation et des coefficients de friction fournit un nouveau test du caractère brownien de dynamique atomique dans un réseau optique. Ensuite,

comme nous l'avons vu rapidement dans la discussion du paragraphe II.1.2, nous pouvons nous attendre à trouver un taux de relaxation de l'énergie cinétique proportionnel au taux de pompage optique Γ'_0 . Enfin, cette investigation est motivée par une étude parallèle des réseaux optiques par spectroscopie pompe-sonde [51, 69, 177, 152]. La connaissance des taux de relaxation des différentes observables atomiques (densité atomique, vitesse atomique, magnétisation, etc ...) est nécessaire à la compréhension de l'origine physique de la résonance Rayleigh qui apparaît au centre des spectres de transmission [178].

Relaxation exponentielle de l'énergie cinétique

A l'aide de simulations de Monte-Carlo semi-classiques restreintes à deux dimensions spatiales dans le plan (Oxz) et pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$, nous avons mesuré l'énergie cinétique moyenne du nuage atomique en fonction du temps dans la phase de thermalisation. Nous avons ainsi un accès direct à sa relaxation. Le cadre des simulations numériques est le même que dans les paragraphes précédents ce qui permettra une comparaison directe avec les coefficients de friction. Les simulations de ce paragraphe sont réalisées sur un ensemble d'environ 5000 atomes.

Nous avons utilisé deux cas correspondant à des états initiaux différents pour déterminer la relaxation de l'énergie cinétique. Dans le premier, l'énergie cinétique initiale est très faible (de l'ordre de $E_K \simeq 8E_R$). Dans ce cas, après une phase de variation rapide de l'énergie cinétique⁸, celle-ci augmente régulièrement pour atteindre son état stationnaire. Dans le second cas, nous partons d'un état initial thermalisé dans un réseau de très grande profondeur, puis nous diminuons instantanément cette profondeur et étudions la thermalisation à partir de cet instant. Nous obtenons une diminution régulière de l'énergie cinétique comme le montre la figure II.2.9.

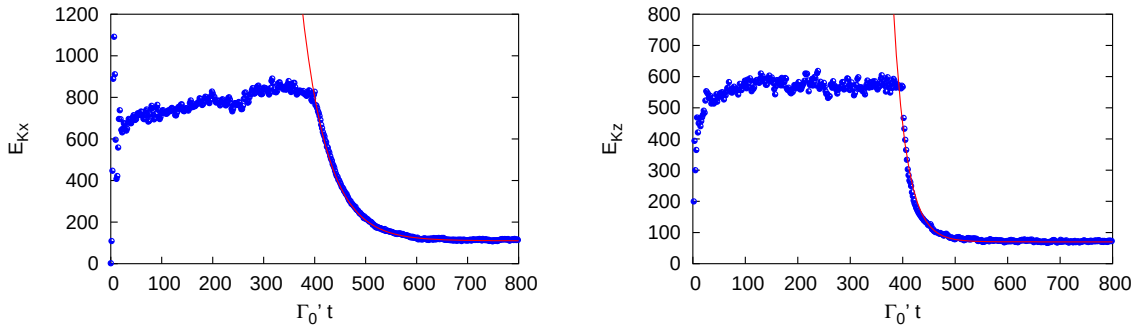


Figure II.2.9: Relaxation de l'énergie cinétique pour $\theta = 30^\circ$, $\Delta = -5\Gamma$ et $\Delta'_0 = -75\omega_R$ dans les directions x (Gauche) et z (Droite). Des ajustements par des fonctions de la forme (II.2.36) sont aussi représentés.

Nous avons effectué un ajustement numérique des courbes du type des figures II.2.9 par

⁸Cette période "étrange" est liée au fait que dans les simulations, telles que nous les avons réalisées, l'état initial du nuage ne tient aucun compte des potentiels optiques. En particulier, l'état interne des atomes n'est absolument pas corrélé à la polarisation du champ laser.

des fonctions de la forme

$$E_{K_\mu}(t) = E_{K_\mu}^{\text{stat}} - \Delta E_{K_\mu} \exp(-\Gamma_{T_\mu} t) . \quad (\text{II.2.36})$$

Dans les deux cas, les ajustements sont bons ce qui indique que la relaxation de l'énergie cinétique est environ exponentielle dans chaque direction de l'espace $\mu = x, z$.

Comportement de la relaxation de l'énergie cinétique en fonction des paramètres du réseau

Les ajustements des courbes de relaxation de l'énergie cinétique par la fonction (II.2.36) fournissent notamment les taux de relaxation de l'énergie cinétique Γ_{T_μ} dans chaque direction μ . Notons que les taux trouvés sont similaires pour les deux cas d'état initial du nuage atomique. Nous traçons sur la figure II.2.10, les taux de relaxation de l'énergie cinétique Γ_{T_μ} en fonction des paramètres du réseau. Les colonnes de gauche et de droite correspondent essentiellement aux mêmes données numériques mais tracées différemment.

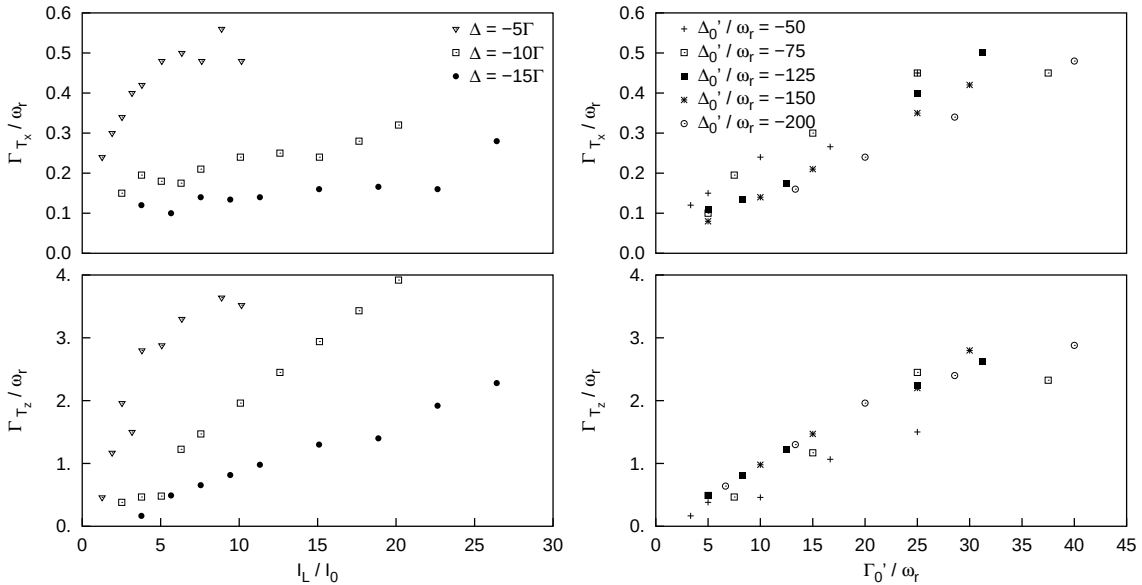


Figure II.2.10: Résultats numériques pour les taux de relaxation de l'énergie cinétique dans les directions x et z . Colonne de gauche : les taux de relaxation sont tracés en fonction de l'intensité d'un faisceau laser I_L pour différentes valeurs du désaccord Δ . Ici, I_0 est l'intensité de saturation et Γ est la largeur de l'état excité. Colonne de droite : les taux de relaxation sont tracés en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 pour différentes valeurs du déplacement lumineux par faisceau Δ'_0 . Pour ces courbes, les valeurs des paramètres du réseau correspondant à un régime oscillant.

Remarquons tout d'abord que les taux de relaxation sont très différents dans les deux directions orthogonales, Γ_{T_x} étant typiquement environ un ordre de grandeur plus faible que Γ_{T_z} . Cette propriété est certainement liée aux fortes anisotropies du champ laser et donc du potentiel optique et des taux de pompage optique dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin [I.1.2.2, II.1.1].

Comme nous l'avons vu [II.1.1,II.2.1.3], des travaux précédents ont mis en évidence d'autres effets anisotropes sur la température [52, 138] ou sur la diffusion spatiale [52, 53].

Les graphes de la colonne de gauche de la figure II.2.10 donnent les résultats des taux de relaxation Γ_{T_μ} en fonction de l'intensité d'un faisceau laser I_L pour différentes valeurs du désaccord Δ . Ces résultats peuvent être comparés directement à des données expérimentales. Nous trouvons que Γ_{T_μ} est une fonction croissante de l'intensité du réseau et une fonction décroissante du désaccord des lasers en excellent accord qualitatif avec les données expérimentales [26, 166].

Sur la colonne de droite de la figure II.2.10, les mêmes résultats pour Γ_{T_μ} sont tracés en fonctions du taux de pompage optique par faisceau Γ'_0 pour différentes valeurs du déplacement lumineux par faisceau Δ'_0 . Ceci permet une analyse plus parlante de nos résultats. En effet, aux erreurs numériques près d'environ 10 %, les taux de relaxation sont clairement proportionnels au taux de pompage optique et indépendants du déplacement lumineux dans un large domaine de paramètres. Ces résultats sont en accord avec les données expérimentales [26, 166] et avec les taux de localisation obtenus par Raithel *et al* [167].

Comparaison de la relaxation de l'énergie cinétique et de la friction

Les paragraphes II.2.1.2 et II.2.2.1 nous ont appris que la dynamique des atomes dans le réseau optique pouvait être décrite en termes d'un mouvement brownien. En particulier, nous avons vu que les relations d'Einstein (II.2.1) et (II.2.2) sont valides à condition d'utiliser le coefficient de friction α_μ dans (II.2.1) et le coefficient de friction phénoménologique β_μ dans (II.2.2). Il est dès lors intéressant de comparer les taux de relaxation de l'énergie cinétique Γ_{T_μ} aux coefficients de friction α_μ et β_μ ⁹. En effet, dans le modèle du mouvement brownien [23, 150], ces grandeurs sont reliées par $\Gamma_{T_\mu} = 2\alpha_{0\mu}/M$. Nous avons déterminé les coefficients de friction dans la même zone de paramètres du réseau qu'à la figure II.2.10 par les deux méthodes décrites en détail au paragraphe II.2.2.1 et correspondant à l'utilisation de la relation d'Einstein d'une part et à l'ajout d'une force arbitraire d'autre part¹⁰.

Les valeurs de β_μ sont portées sur la figure II.2.11 en fonction de Γ'_0 pour différentes valeurs du déplacement lumineux par faisceau laser Δ'_0 . A nouveau, nous trouvons que la friction est fortement anisotrope avec β_x environ 5 fois plus grand que β_z [II.2.2.1]. Les valeurs de β_μ/M sont environ un ordre de grandeur plus grand que Γ_{T_μ} . De plus ces deux grandeurs ont des dépendances très différentes par rapport aux paramètres du réseau. En fait, β_μ dépend faiblement de Γ'_0 mais fortement de Δ'_0 dans le domaine de paramètres considéré. Ce comportement est en complet désaccord avec celui de Γ_{T_μ} dans le même domaine de paramètres.

Ces comportements très différents du taux de relaxation de l'énergie cinétique et du coefficient de friction est plutôt surprenant et montre clairement que toute la dynamique des atomes dans un réseau optique dissipatif ne peut pas être décrite en termes de mouvement brownien. En fait, pour décrire complètement cette dynamique, il convient de tenir compte

⁹Comme nous l'avons vu précédemment, α_μ et β_μ sont proportionnels de sorte qu'il suffit de comparer Γ_{T_μ} à un seul d'entre eux. Dans la suite, nous choisissons β_μ qui est accessible directement dans les simulations numériques ou les expériences.

¹⁰Ces deux méthodes fournissent les mêmes coefficients de friction pour le domaine de paramètres considéré ici comme dans II.2.2.1.

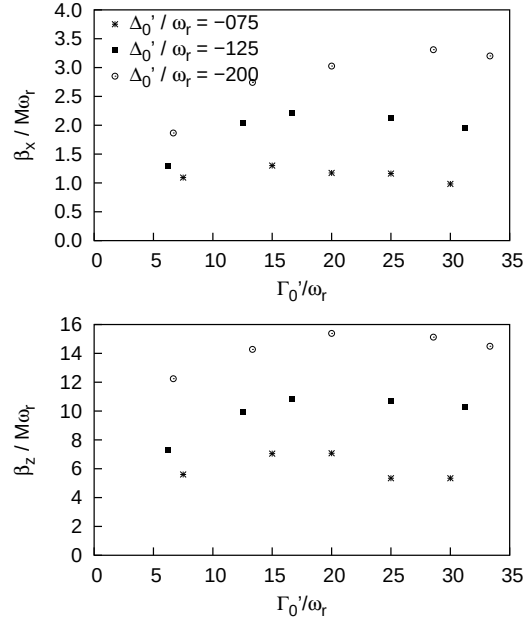


Figure II.2.11: Résultats des coefficients de friction dans les directions x et z en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 pour différentes valeurs du déplacement lumineux par faisceau laser Δ'_0 .

de l'existence de deux types d'atomes selon qu'ils ont une énergie faible ou élevée par rapport à la profondeur des puits de potentiel comme nous l'avons déjà fait au paragraphe II.2.1 et à la référence [52] (voir aussi [II.1.2.3] et [127]).

- Les atomes non piégés, *i.e.* très énergétiques¹¹ (*he*), subissent une dynamique de type Sisyphé [21, 22, 30] donc brownienne et leur dynamique est bien décrite par un coefficient de friction β_μ [52], [II.2.2.1]. Comme la dynamique de ces atomes est brownienne, nous nous attendons à trouver

$$\left(\frac{\beta_\mu}{M}\right)_{\text{he}} \propto \left(\frac{\Gamma_{T_\mu}}{2}\right)_{\text{he}}. \quad (\text{II.2.37})$$

- Les atomes piégés, *i.e.* peu énergétiques¹¹ (*le*), quant à eux sont piégés dans les puits de potentiel et ne subissent pas une dynamique brownienne de sorte qu'un coefficient de friction ne peut pas être défini. En fait, la dynamique du refroidissement pour ces atomes doit se comprendre comme des transferts de population entre les niveaux vibrationnels dans les puits de potentiel. Comme ces transferts se font par l'intermédiaire de cycles de pompage optique, nous pouvons raisonnablement nous attendre à ce que le taux de refroidissement de ces atomes soit proportionnel à Γ'_0 :

$$\left(\frac{\Gamma_{T_\mu}}{2}\right)_{\text{le}} \propto \Gamma'_0. \quad (\text{II.2.38})$$

¹¹*he*, pour “high energy”; *le*, pour “low energy”.

En discriminant les atomes selon que leur énergie cinétique est inférieure ou supérieure à la barrière de potentiel selon x ou z , nous trouvons que la fraction d'atomes piégés est largement prédominante (environ 90 % des atomes¹²). Il s'ensuit que les taux de relaxation de l'énergie cinétique dans le réseau sont donnés par ceux des atomes peu énergétiques. Cette prévision est en très bon accord qualitatif avec les résultats de nos simulations (voir la figure II.2.11). Une telle interprétation suggère que l'on puisse attendre une partie de décroissance non exponentielle de l'énergie cinétique moyenne du nuage lorsque le nuage est encore très énergétique par rapport à la profondeur du potentiel optique (typiquement sur la figure II.2.9 pour $400 < \Gamma'_0 t < 450$, *i.e.* dans la partie de décroissance très rapide). Il est en fait remarquable que nos résultats ne semblent pas révéler un tel phénomène.

Résumé et conclusion du chapitre

Nous avons réalisé une étude systématique de la diffusion spatiale dans un réseau optique 3D-lin $\perp$ lin au moyen de simulations de Monte-Carlo semi-classiques restreintes au plan (Oxz). Nous avons obtenu des comportements très différents dans les régimes sautant ($D_{s\mu} \propto \lambda_\mu^2 \Gamma'_0$) et oscillant ($D_{s\mu} \propto \frac{\hbar}{M} \frac{|\Delta|}{\Gamma}$). Ces comportements peuvent être expliqués simplement à l'aide de modèles simples de marche aléatoire. Nous avons par ailleurs observé une forte anisotropie des coefficients de diffusion spatiale due aux confinements différents dans des directions orthogonales. Nous avons établi un modèle de mouvement brownien dérivé de [21] dans un domaine de paramètres couvrant les régimes sautant et oscillant et tenant compte de la localisation spatiale. Celui-ci nous a permis de retrouver qualitativement et quantitativement les valeurs numériques des coefficients de diffusion spatiale.

Les prédictions de notre modèle théorique sont de plus en excellent accord avec les données expérimentales obtenues sur des configurations de mélasse optique dans le groupe de William D. Phillips au NIST [114]. De plus, la dépendance géométrique des coefficients de diffusion spatiale dans un réseau optique 3D-lin $\perp$ lin a été confirmée dans les expériences réalisées dans notre groupe pour ce qui concerne le régime sautant [53].

Afin notamment de tester la validité de la description de la dynamique atomique dans le réseau en termes de mouvement brownien, nous avons étudié précisément des caractéristiques propres à ce modèle. Nous avons tout d'abord ajouté une force arbitraire constante dans le réseau et avons observé une dérive du nuage atomique à vitesse constante dont nous avons déduit le coefficient de friction Sisyphe effectif. Celui-ci nous a permis de démontrer la validité des relations d'Einstein pour l'ensemble des paramètres de réseau étudiés, moyennant la prise en compte des seuls atomes non-piégés dans la seconde formule :

$$k_B T_\mu = \frac{D_{p\mu}}{\alpha_\mu} \quad (\text{II.2.39})$$

$$D_{s\mu} = \frac{k_B T_\mu}{\beta_\mu} . \quad (\text{II.2.40})$$

Nous avons ensuite déterminé les taux de relaxation de l'énergie cinétique dans le réseau à l'aide d'une méthode directe. Nous avons montré que ceux-ci sont anisotropes et propor-

¹²Notons que cette valeur est en accord avec les résultats de [127] et [II.1.2.3]

tionnels aux taux de pompage optique en total désaccord avec la dépendance des coefficients de friction avec les paramètres du réseau. Le modèle brownien dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin trouve sa limite dans le fait que les comportements des coefficients de friction et des taux de relaxation de l'énergie cinétique sont complètement différents.

En fait, les résultats de ce chapitre mettent en évidence l'existence de deux catégories d'atomes. Les atomes piégés (majoritaires) contribuent à la relaxation de l'énergie cinétique du nuage d'atomes mais pas à la diffusion spatiale ou au coefficient de friction. Au contraire, les atomes non-piégés contribuent à la diffusion spatiale mais peu à la relaxation de l'énergie cinétique. Notons que cet aspect des résultats de ce chapitre fait écho à l'interprétation des distributions de vitesse bimodales que nous avons tirée des résultats du chapitre II.1.

L'étude des taux de relaxation de l'énergie cinétique dans le refroidissement Sisyphe est utile pour comprendre l'origine de la raie Rayleigh qui apparaît dans les spectres pompe-sonde d'atomes refroidis dans un réseau optique dissipatif. En effet, la connaissance des taux de relaxation des différentes observables excitées dans ces expériences est nécessaire à l'analyse de cette raie [179]. Les premiers résultats indiquent que la largeur de la raie est du même ordre de grandeur et a le même comportement que les taux de relaxation trouvés ici [178]. Des études complémentaires sont nécessaires pour apporter une interprétation définitive à l'origine de la raie Rayleigh¹³.

¹³L'étude de la raie Rayleigh que nous avons menée n'est pas présentée dans le corps du manuscrit. Nous avons néanmoins reproduit en annexe C un article que nous avons écrit sur le sujet.

Partie III:

TRANSPORT DIRIGE STIMULE DANS UN RESEAU OPTIQUE DISSIPATIF

Chapitre 1

Modes de propagation dans les réseaux optiques

Du fait de leur faible énergie cinétique d'équilibre, les atomes refroidis par effet Sisyphe dans un réseau optique dissipatif sont rangés dans les puits régulièrement espacés du potentiel optique [I.1.2.3]. Pourtant le confinement des atomes dans ces sites de piégeage est très imparfait à cause de leur couplage à la lumière laser. Celui-ci induit notamment des cycles de pompage optique aléatoires qui peuvent se produire dès qu'un atome s'écarte du fond d'un puits. L'atome peut alors s'échapper de son puits de piégeage initial en changeant d'état interne (et donc de surface de potentiel) [II.2.1] et venir se piéger dans un puits voisin. Ces processus donnent naissance à d'importants phénomènes de transport dont le plus commun est la *diffusion spatiale* que nous avons étudiée en détail au chapitre II.2. La diffusion spatiale correspond à un transport spontané et erratique des atomes dans le réseau optique. Les atomes ont des trajectoires aléatoires, complètement désordonnées et ceci conduit à une expansion de la taille du nuage correspondant à une diffusion normale [52, 53], [II.2.1.3].

Nous nous intéressons dans ce chapitre à des phénomènes de transport stimulés collectifs dans un réseau optique dissipatif. Il s'agit des *modes de propagation Brillouin* qui ont été identifiés pour la première fois en 1996 par Courtois *et al.* [180]. Les modes de propagation Brillouin correspondent au transport d'ensemble d'une fraction du nuage atomique à travers le réseau selon un processus combinant un mouvement hamiltonien sur le potentiel optique et des cycles de pompage optique réguliers. L'atome voyage alors sur le réseau à une vitesse spécifique (dite *vitesse naturelle*) imposée par ce processus. L'excitation des modes Brillouin est induite par l'introduction d'un faisceau laser supplémentaire dans le réseau optique. L'interférence de celui-ci avec les faisceaux du réseau produit des modulations du champ laser total, en mouvement dans des directions et à des vitesses données. Une partie du nuage atomique peut alors être entraîné par ces modulations, un mode de propagation Brillouin étant excité lorsque cet entraînement se fait à la vitesse naturelle de propagation des atomes sur le réseau. Dans la référence [180], l'excitation de tels modes de propagation Brillouin dans un réseau 3D- $\text{lin} \perp \text{lin}$ a été révélée par l'existence de résonances latérales sur les spectres pompe-sonde [152].

Pourtant la détection des modes de propagation par l'intermédiaire des résonances Bril-

lounin n'est pas une méthode générale. Les processus d'excitation sont en fait plus nombreux et plus variés qu'on ne le pensait lors des premiers travaux [149, 180]. En particulier, nous avons imaginé des processus d'excitation qui produisent une modulation de matière en mouvement à une vitesse différente de la modulation de champ lumineux, or cette propriété viole la condition d'accord de phase nécessaire à l'amplification du faisceau sonde induisant un pic Brillouin dans les spectres pompe-sonde comme nous l'avons montré à la référence [181] (voir aussi la référence [27]). Nous présentons dans ce chapitre une étude détaillée des modes de propagation Brillouin dans un réseau optique 3D- $\text{lin} \perp \text{lin}$. Nous décrivons au paragraphe III.1.1 le mécanisme de propagation régulière des atomes sur le réseau ainsi que les mécanismes d'excitation des modes correspondants induits par des modulations de potentiel optique. Nous en faisons ensuite une analyse détaillée au paragraphe III.1.2 à l'aide de simulations de Monte-Carlo semi-classiques. Afin de simplifier la description et de dégager les propriétés fondamentales, cette analyse est faite dans des configurations monodimensionnelles. Enfin, nous présentons au paragraphe III.1.3 les résultats de simulations bidimensionnelles qui valident la description du paragraphe III.1.2 dans les configurations multidimensionnelles.

1.1 Mécanisme de propagation des atomes dans un réseau optique

Comme nous l'avons vu en introduction, les processus de pompage optique subis par un atome limitent le confinement atomique dans les sites de piégeage du réseau. La diffusion spatiale qui résulte de ces processus a été décrite précédemment de la façon suivante [II.2.1.1] : un atome est piégé dans un puits de potentiel puis subit un cycle de pompage optique qui lui permet d'échapper à ce puits et vient se piéger dans un nouveau puits après une phase de mouvement hamiltonien. Il est clair que dans ce mécanisme, le mouvement hamiltonien comme les processus dissipatifs sont essentiels mais ils sont complètement décorrélés au sens où un cycle de pompage optique peut intervenir à n'importe quel moment du mouvement hamiltonien. Ceci induit un mouvement erratique des atomes dans le réseau caractérisé par une diffusion spatiale normale [II.2]. Nous décrivons dans ce paragraphe un mécanisme de transport plus subtil mettant en jeu une combinaison corrélée de cycles de pompage optique et de périodes de mouvement hamiltonien sur les courbes de potentiel optique [III.1.1.1]. Comme dans le réseau brut, ce mécanisme est masqué par la diffusion spatiale et nous montrons d'une part comment le stimuler [III.1.1.2] et d'autre part comment le mettre en évidence [III.1.1.3] dans notre système.

1.1.1 Propagation régulière des atomes

Dans l'image Monte-Carlo, la dynamique d'un atome dans un réseau optique dissipatif est formée de phases de mouvement hamiltonien interrompues par des processus dissipatifs (cycles de pompage optique) qui changent instantanément l'état interne et donc le potentiel courant de l'atome [I.2.2, I.2.3]. Généralement les trajectoires des atomes dans le réseau sont considérées sur des échelles spatiales beaucoup plus grandes que la taille des puits de

potentiel. Ainsi, pour la description de la diffusion spatiale, on peut caractériser la position d'un atome par le puits dans lequel il se trouve. Lorsqu'on s'intéresse à des trajectoires d'atomes à l'échelle de seulement quelques puits, la situation est différente et on peut imaginer des processus plus subtils combinant le mouvement hamiltonien et les processus de pompage optique.

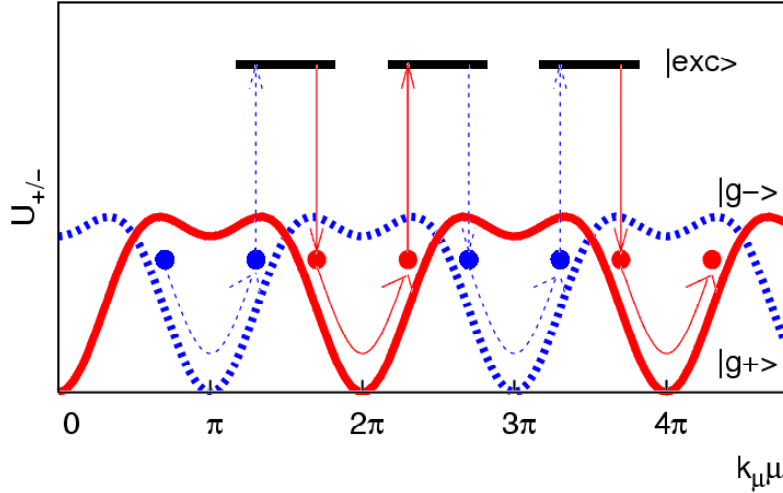


Figure III.1.1: Coupe monodimensionnelle des potentiels optiques dans le cas d'une transition atomique $1/2 \rightarrow 3/2$. Un mode de propagation Brillouin est aussi représenté. Il consiste à effectuer une succession de cycles, chacun constitué d'une demi-oscillation dans un puits de potentiel optique suivie d'un cycle de pompage optique qui permet de franchir la barrière de potentiel vers le puits adjacent. La figure correspond à l'une des directions transverses x ou y mais des modes de propagation similaires existent dans la direction longitudinale z .

Ainsi, Courtois *et al.* ont proposé en 1996 [180] un tel processus conduisant au transport régulier d'un atome sur plusieurs puits du potentiel optique. Nous le décrivons à présent dans le cadre d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Considérons un atome, par exemple dans l'état interne $|+\rangle$, effectuant des oscillations dans un puits du potentiel U_+ . Comme la probabilité qu'un cycle de pompage optique le transfère dans l'état $|-\rangle$ est plus importante au voisinage des points de croisement des courbes de potentiel U_- et U_+ , il peut subir un tel cycle qui lui fait changer de courbe de potentiel au voisinage de l'extrémité de son mouvement oscillant [I.1.2.3]. Une fois sur la courbe de potentiel U_- , il se met à osciller dans le puits adjacent au puits initial, et arrivé à l'extrémité de cette nouvelle oscillation, il peut subir un nouveau cycle de pompage optique qui lui permet de passer au puits suivant. On peut ainsi imaginer un processus de propagation d'un atome sur le bipotentiel optique, régulière et dans une direction donnée (par exemple dans la direction $+x$ sur la figure III.1.1). Ce processus correspond à une succession périodique de cycles, chacun formé de :

- une demi-oscillation dans un puits de potentiel (successivement sur U_+ et sur U_-)
- un cycle de pompage optique qui transfère l'atome d'une courbe de potentiel à l'autre .

Il résulte de ce processus de propagation, un mouvement net des atomes dans une direction particulière μ . Notons que ce courant de particules a une vitesse déterminée par les phases d'oscillation dans les puits de potentiel. Ainsi, dans l'approximation harmonique pour le potentiel optique au fond d'un puits, une demi-période du réseau $\lambda_\mu/2$ est parcourue en une demi-période d'oscillation π/Ω_μ , soit une vitesse moyenne de l'atome de

$$v_{B\mu}^\pm = \pm\Omega_\mu/k_\mu \quad (\text{III.1.1})$$

suivant le sens ($\pm\mu$) du mouvement. Par ailleurs, dans l'approximation harmonique, comme les directions propres d'oscillation dans un puits de potentiel correspondent aux axes de coordonnées x , y et z , un tel processus de propagation peut toujours être décrit comme une superposition de mouvements le long des axes de coordonnées, si bien que l'on peut se contenter de prendre $\mu \in \{x, y, z\}$.

Dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin brut (voir la figure I.1.5), ce processus de propagation est très improbable parce qu'un cycle de pompage optique serait nécessaire à chaque fois que l'atome atteint le voisinage d'un point de croisement des courbes de potentiel. Or rien ne l'assure et les processus de transport dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin se réduisent essentiellement à la diffusion spatiale [II.2]. Par ailleurs, même dans l'hypothèse où de tels processus de propagation seraient nombreux au sein du nuage, les différentes trajectoires atomiques correspondantes seraient complètement décorréliées et rien ne permettrait de distinguer leur comportement régulier de celui, erratique, des atomes subissant une marche aléatoire. Pour renforcer la contribution de ces modes au transport atomique, il est donc nécessaire d'induire dans le réseau un mécanisme d'excitation de ces modes. C'est le problème que nous abordons au paragraphe suivant.

1.1.2 Excitation de modes de propagation

Nous cherchons ici à exciter des modes de propagation, *i.e.* à induire un transport d'ensemble collectif d'atomes à travers le réseau selon le processus décrit au paragraphe précédent. Pour cela, nous ajoutons un faisceau laser P aligné le long de l'axe (Oz) et désaccordé de δ par rapport aux faisceaux $L_x^\pm$ et $L_y^\pm$ du réseau 3D-lin $\perp$ lin (voir la figure III.1.2). Cette configuration correspond à celle de la référence [180].

L'interférence entre le faisceau additionnel P et les différents faisceaux du réseau $L_q^\pm$ induit une modulation du champ laser (donc des modulations des potentiels optiques et des taux de pompage optique) dépendant du temps. Ceci a deux conséquences sur la dynamique des atomes :

- D'une part, la modulation spatiale des potentiels optiques $\delta U_\pm$ tend à accumuler les atomes dans l'état interne $|\pm\rangle$ dans le fond des puits du potentiel $\delta U_\pm$.
- D'autre part, la modulation des taux de pompage optique $\gamma_{\pm,\mp}$ modifie les probabilités de transition d'une surface de potentiel à l'autre.

Ces deux propriétés sont susceptibles de faciliter les transitions régulières qui apparaissent dans le processus de propagation des atomes décrit à la figure III.1.1 comme nous l'étudions en détail aux paragraphes III.1.2 et III.1.3. Nous verrons en particulier que les processus de

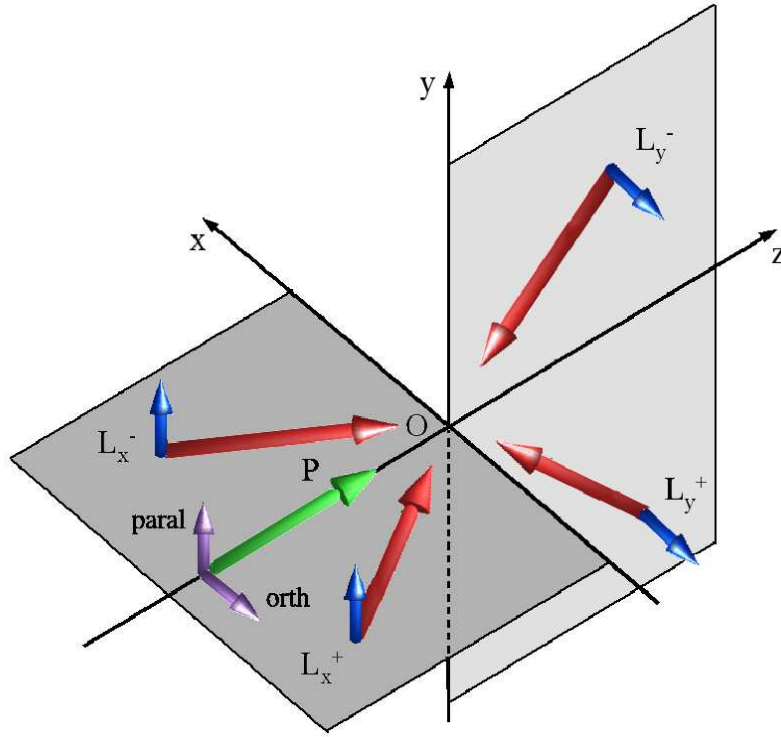


Figure III.1.2: Configuration du réseau optique pour l'excitation des modes de propagation. Quatre faisceaux laser $L_q^\pm$ avec $q = x, y$, d'intensité I_L produisent le réseau optique 3D-lin⊥lin (identique à la configuration de la figure I.1.5). Un faisceau laser P ajouté dans la direction (z), de faible intensité $I_L \ll I_P$ et désaccordé par rapport aux faisceaux $L_q^\pm$ est ajouté pour induire une modulation spatiale et temporelle des potentiels optiques et des taux de pompage optique, susceptible d'exciter les modes de propagation Brillouin. La polarisation du faisceau P est linéaire, soit parallèle (configuration *paral*), soit orthogonale (configuration *orth*) aux polarisations des faisceaux quasi-copropageants $L_x^\pm$.

propagation sont excités sous la forme de modes (dits *modes de propagation Brillouin*), c'est-à-dire que les atomes, entraînés par les modulations du champ laser ont un comportement collectif : une modulation de matière est créée et mise en mouvement.

Afin de n'introduire qu'une faible perturbation par rapport au réseau 3D-lin⊥lin traditionnel, nous supposons que l'intensité (I_P) du faisceau P est faible devant celle (I_L) des faisceaux du réseau, de sorte que

$$\epsilon = \frac{I_P}{I_L} \ll 1. \quad (\text{III.1.2})$$

Dans ce travail, nous considérons les cas où le faisceau P , aligné le long de l'axe (Oz) a une polarisation linéaire, soit le long de l'axe (Oy) (configuration *paral* pour laquelle P a une polarisation parallèle à celle des faisceaux quasi-copropageants), soit le long de l'axe (Ox) (configuration *orth* pour laquelle P a une polarisation orthogonale à celle des faisceaux quasi-copropageants) comme le montre la figure III.1.2. A partir de l'équation (I.1.23), nous déduisons aisément dans le cas d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ et au premier ordre en ϵ ,

la modulation des potentiels optiques $U_{\pm}$ produite par l'interférence de P avec les faisceaux du réseau $L_q^{\pm}$:

$$\begin{aligned} \delta U_{\pm} = & \frac{2\epsilon}{3}\hbar\Delta'_0 \left\{ e^{i(\vec{\Delta k}_p^{\pm} \cdot \vec{r} - \delta \cdot t)} + e^{i(\vec{\Delta k}_{\bar{p}}^{\pm} \cdot \vec{r} - \delta \cdot t)} + h.c. \right\} \\ & \mp \frac{\epsilon}{3}\hbar\Delta'_0 \left\{ e^{i(\vec{\Delta k}_p^{\pm} \cdot \vec{r} - \delta \cdot t)} + e^{i(\vec{\Delta k}_{\bar{p}}^{\pm} \cdot \vec{r} - \delta \cdot t)} + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.1.3})$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \vec{\Delta k}_x^{\pm} &= k \{ \pm \sin \theta \vec{e}_x + (1 - \cos \theta) \vec{e}_z \} \\ \vec{\Delta k}_y^{\pm} &= k \{ \pm \sin \theta \vec{e}_y + (1 + \cos \theta) \vec{e}_z \}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

pour un faisceau P polarisé linéairement le long de l'axe (Op) (avec $p = y$ ou x respectivement dans les configurations *paral* et *orth*). Ici, $\bar{p}$ représente la direction orthogonale à p ($\bar{p} = x$ ou y respectivement).

L'équation (III.1.3) montre que la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}$ est la superposition de quatre ondes propagateantes monochromatiques $\mathcal{M}_{\mu}^{\pm}$ de vecteurs d'onde $\vec{\Delta k}_{\mu}^{\pm}$ (avec $q = x, y$) et de vitesse de phase $\delta/|\vec{\Delta k}_{\mu}^{\pm}|$ correspondant à l'interférence du faisceau P avec chaque faisceau $L_{\mu}^{\pm}$ du réseau¹. Comme les modes de propagation apparaissent dans les directions des axes de coordonnées x , y et z [III.1.1.1], il est commode d'écrire la vitesse de phase des modulations en mouvement le long de ces axes :

$$(v_q^{\pm})_{\mu} = \frac{\delta}{\vec{\Delta k}_q^{\pm} \cdot \vec{e}_{\mu}}. \quad (\text{III.1.5})$$

Nous décrivons à présent quelques propriétés des modulations de potentiel en mouvement qui nous seront très utiles dans la suite pour comprendre les processus d'excitation des modes de propagation.

- (a) La modulation correspondant à l'interférence du faisceau P avec le faisceau du réseau $L_{\mu}^{\pm}$ ne se propage que dans le plan (Oqz) vers $\pm \text{sgn}(\delta)$ dans la direction μ et vers $\text{sgn}(\delta)$ dans la direction z . Il s'ensuit que ce sont des composantes différentes de $\delta U_{\pm}$ qui sont impliquées dans l'excitation des modes de propagation le long de x d'une part et le long de y d'autre part alors que toutes ces modulations peuvent exciter les modes le long de z .
- (b) La période spatiale dans la direction longitudinale z des modulations $\mathcal{M}_x^{\pm}$ est plus petite que celle des modulations $\mathcal{M}_y^{\pm}$. Ceci est dû au fait que le faisceau P est quasi-copropageant par rapport aux faisceaux du réseau $L_x^{\pm}$ mais quasi-contrepropageant par rapport aux faisceaux $L_y^{\pm}$. Comme nous le verrons dans la suite cette propriété peut être la cause d'une différence d'efficacité pour l'excitation des modes de propagation dans le réseau.

¹La diversité des modes étudiés ici nous oblige à utiliser des notations lourdes à plusieurs indices. Néanmoins, pour toutes les modes considérés, les indices correspondent à ceux du faisceau laser $L_{\mu}^{\pm}$ avec lequel le faisceau sonde P interfère pour lui donner naissance. Ainsi est-il utile de se rapporter systématiquement à la figure III.1.2 pour identifier rapidement ce à quoi se rapportent les grandeurs considérées.

- (c) Les modulations correspondant à l'interférence entre le faisceau P , de polarisation p , et les faisceaux du réseau $L_p^\pm$ de même polarisation sont les mêmes pour les états atomiques internes $|+\rangle$ et $|-\rangle$ de sorte que l'atome voit une modulation de potentiel indépendante de son état interne. En d'autres termes, pour ces interférences, les modulations concernent le potentiel optique mais pas la polarisation. Au contraire, les modulations correspondant à l'interférence de P et des faisceaux du réseau $L_p^\pm$ de polarisation orthogonale sont opposées pour les états internes $|+\rangle$ et $|-\rangle$ et la modulation de potentiel vue par l'atome change en fonction de son état interne. Dans ce cas, il y a non seulement une modulation du potentiel optique mais aussi de la polarisation du champ laser. Cette remarque est d'une très grande importance dans ce travail car elle explique l'existence de deux processus d'excitation des modes de propagation radicalement différents et correspondant à ces deux cas.

1.1.3 Détection directe des modes de propagation

Comme nous l'avons vu en introduction, la méthode spectroscopique, employée historiquement pour mettre en évidence les modes de propagation Brillouin dans le réseau, n'est pas générale et ne permet pas de détecter tous les modes. Nous en avons donc utilisé d'autres, directes celles-là, pour caractériser l'excitation de ces modes. Nous les décrivons dans ce paragraphe.

Accroissement de la diffusion spatiale

Comme nous l'avons vu, le nuage atomique dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin en l'absence d'un faisceau ajouté P fait l'objet d'une diffusion spatiale importante [52, 53], [II.2] et celle-ci masque les processus de propagation [III.1.1.2]. Pourtant la diffusion spatiale fournit paradoxalement une méthode de détection de l'excitation des modes de propagation Brillouin. En effet, lorsque l'on excite un mode de propagation, une partie du nuage atomique est emmenée par une modulation de potentiel $\delta U_\pm$ dépendant du temps (voir les processus d'excitation au paragraphe III.1.2). Ceci tend à accroître la taille du nuage atomique de sorte que l'on peut s'attendre à ce que la diffusion spatiale dans la direction spécifique du (ou des) mode(s) excité(s) soit plus grande qu'en l'absence d'excitation.

Notons qu'en dépit de l'induction d'un mouvement dirigé dans la direction du mode de propagation excité, on peut s'attendre à ce que la diffusion spatiale reste normale, comme en l'absence d'excitation. En effet, lorsqu'un atome, initialement piégé, s'engage dans un mode de propagation, il ne parcourt certainement que quelques puits selon le processus de propagation représenté sur la figure III.1.1 car le cycle de pompage optique qui doit avoir lieu à chaque demi-oscillation est un processus aléatoire. Ainsi, chaque atome ne passe que peu de temps dans un mode de propagation avant d'être piégé de nouveau dans un puits de potentiel du réseau (ce point est confirmé par l'examen de trajectoires atomiques dans la configuration de la figure III.1.2). A grande échelle spatiale (celle qui est pertinente dans l'étude de la diffusion spatiale), l'effet de ces processus est d'augmenter la probabilité pour l'atome d'effectuer de longs sauts entre sites de piégeage dans une direction donnée. Ceci correspond toujours à un modèle de marche aléatoire comme dans le cas d'un réseau 3D-lin $\perp$ lin brut et conduit à une diffusion spatiale normale [52, 150], [II.2.1.1].

Cette remarque nous fournit une première méthode de détection directe des modes de propagation : en étudiant le coefficient de diffusion spatiale dans la direction des modes excités en fonction d'un paramètre contrôlant l'excitation des modes (le désaccord δ entre le faisceau P et les faisceaux du réseau $L_\mu^\pm$ [III.1.2]), on doit observer un pic lorsque les modes de propagation sont effectivement excités.

Distribution de vitesse

On peut aussi remarquer que l'excitation du mode de propagation $\mathcal{P}_{B\mu}^\pm$ met un certain nombre d'atomes du réseau en mouvement dans la direction du mode et à la vitesse spécifique $v_{B\mu}^\pm$ (voir l'équation (III.1.1)). On s'attend donc à une surpopulation de cet état de vitesse. Ainsi, la distribution de vitesse du nuage atomique doit permettre de mettre en évidence un pic à la vitesse $v_{B\mu}^\pm$.

Ceci fournit une seconde méthode de détection de l'excitation d'un mode de propagation. Nous verrons, que du fait du faible nombre d'atomes dans les modes de propagation excités, il est généralement nécessaire de tracer la différence des distributions de vitesse avec d'une part un faisceau P excitant les modes et d'autre part en l'absence de faisceau ajouté.

Distribution de matière dans un référentiel en mouvement

Les deux méthodes précédentes présentent l'avantage de pouvoir être mises en œuvre expérimentalement. Elles permettent de dégager les conditions (valeur de δ) pour l'excitation des modes de propagation et de mettre en évidence l'existence d'une fraction d'atomes en mouvement à la vitesse $v_{B\mu}^\pm$. Il est néanmoins impossible par ces méthodes de faire la distinction entre un mouvement désordonné des atomes et l'existence d'un mode de propagation, *i.e.* d'un mouvement collectif d'une partie des atomes du nuage. En fait, expérimentalement, le caractère cohérent des modes de propagation est démontré par l'existence des résonances Brillouin dans les spectres pompe-sonde, mais comme nous l'avons vu plus haut, cette méthode n'est ni directe, ni générale.

Afin de mettre en évidence directement des modulations de matière en mouvement dans le réseau, nous allons déterminer numériquement la distribution de position $N_\mu^\pm$ des atomes dans un référentiel $\mathcal{R}_\mu^\pm$ en mouvement à la vitesse et dans la direction du mode de propagation $\mathcal{P}_{B\mu}^\pm$. Dans ce but, nous déterminons à chaque pas de temps des simulations, la distribution de position des atomes dans le réseau par rapport au référentiel $\mathcal{R}_\mu^\pm$. Nous sommes alors les distributions obtenues aux différents instants ce qui nous permet de dégager la fraction d'atomes en mouvement selon le mode $\mathcal{P}_{B\mu}^\pm$. En effet, on peut distinguer trois contributions à $N_\mu^\pm$ des atomes du nuage. Ces contributions sont de natures différentes. Il est clair que les atomes piégés dans le réseau immobile ou en mouvement erratique ou selon un mode de propagation autre que $\mathcal{P}_{B\mu}^\pm$ sont en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_\mu^\pm$ de sorte que leurs contributions, sommées aux différents instants, est uniforme. En revanche, les atomes en mouvement selon le mode $\mathcal{P}_{B\mu}^\pm$ sont immobiles dans $\mathcal{R}_\mu^\pm$ de sorte que les contributions aux différents instants s'ajoutent révélant une éventuelle modulation de matière en mouvement dans la direction et à la vitesse du mode de propagation concerné.

De plus, comme les modulations du champ laser sont spatialement périodiques (voir l'équation (III.1.3)), nous attendons des modulations de matière généralement périodiques.

Nous pouvons donc limiter la détermination de $N_\mu^\pm(u)$ dans une seule période ($u \in [0, \lambda_\mu^{(\text{mod})}]$). Nous pouvons alors sommer les contributions des différentes périodes de la modulation de matière de telle sorte que

$$N_\mu^\pm(u) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} N_{\mu j}^\pm(u + j\lambda_\mu^{(\text{mod})}) \quad (\text{III.1.6})$$

avec $u \in [0, \lambda_\mu^{(\text{mod})}]$.

Cette procédure permet de remédier au problème du faible taux de remplissage des réseaux optiques dissipatifs en accumulant différentes contributions équivalentes.

1.2 Analyse monodimensionnelle

Nous analysons à présent les processus d'excitation des modes de propagation induits par les modulations de potentiel optique (III.1.3). Afin de simplifier cette analyse et de dégager clairement les caractéristiques fondamentales de ces processus, nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo semi-classiques pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ et dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin mais en gelant les directions orthogonales à la direction du mode de propagation considéré. Nous avons ainsi effectué des simulations 1D correspondant aux directions transverses [III.1.2.1] et longitudinale [III.1.2.2] pour des polarisations *paral* et *orth* du faisceau P . Des simulations multidimensionnelles seront présentées au paragraphe III.1.3.

1.2.1 Modes de propagation dans les directions transverses

Nous nous intéressons ici aux modes de propagation transverses (directions x et y) dans le cas d'une configuration *paral*. Il est en fait superflu d'étudier à ce stade le cas d'une configuration *orth*. En effet, d'une part les directions x et y du réseau 3D-lin $\perp$ lin brut sont équivalentes [I.1.2.2] et d'autre part, dans les configurations monodimensionnelles considérées ici, il est équivalent vis-à-vis des modulations de potentiel $\delta U_\pm$ de changer la polarisation du faisceau P de *paral* à *perp* ou d'échanger les rôles de x et y comme le montrent les équations (III.1.3) et (III.1.4). Ainsi, c'est par souci de clarté que nous nous référons explicitement à la configuration *paral* mais les résultats des deux sous-paragraphe suivants concernent en fait respectivement

- la direction x pour une configuration *paral* ou la direction y pour une configuration *orth*;
- la direction y pour une configuration *paral* ou la direction x pour une configuration *orth*.

Nous proposons dans chacun des deux paragraphes suivants un mécanisme d'excitation des modes de propagation Brillouin et démontrons son efficacité au moyen des méthodes décrites au paragraphe III.1.1.3. Ces deux mécanismes très différents s'appuient sur les deux types de modulation de potentiel optique de natures différentes mis en lumière à la remarque (c) de la page 141.

Direction x , processus d'excitation $E_{||}$

De la formule (III.1.3), nous tirons facilement que, dans le cas d'un mouvement restreint à la direction x , et pour une configuration *paral*, la modulation de potentiel optique s'écrit

$$\begin{aligned}\delta U_{\pm}^{(x)} &= \frac{8\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} \cos(k_x x) \cos(\delta \cdot t) \\ &= \frac{4\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} [e^{i(k_x x - \delta \cdot t)} + e^{i(k_x x + \delta \cdot t)} + h.c.] .\end{aligned}\quad (\text{III.1.7})$$

Ainsi, $\delta U_{\pm}^{(x)}$ est la somme de deux ondes monochromatiques progressives, de directions $\pm x$ opposées et de vitesses $(v_x^{\pm})_x = \pm\delta/k_x$. Chacune de ces modulations de potentiel $\delta U_{\pm}^{(\pm x)}$, en mouvement dans la direction $\pm x$, est formée de puits régulièrement espacés (de $2\pi/k_x$) semblables aux puits de potentiel du réseau immobile de sorte que les atomes ont tendance à venir s'y piéger.

Mécanisme de propagation $E_{||}$ - Afin de simplifier la description du processus d'excitation des modes de propagation dans la direction x , nous séparons dans un premier temps les contributions des deux ondes monochromatiques. Limitons nous par exemple à la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ en mouvement dans la direction $+x$. Comme un certain nombre des atomes du nuage vient se piéger au voisinage du fond des puits de $\delta U_{\pm}^{(+x)}$, une partie du nuage est entraînée par la modulation de potentiel à sa vitesse de propagation $(v_x^+) = \delta/k_x$. Plus précisément, nous nous attendons à former une modulation de matière de période $\lambda_x = 2\pi/k_x$ correspondant à celle de $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ et en mouvement dans le réseau à la vitesse $(v_x^+)_x$ (voir la figure III.1.3Bas). De la même manière nous attendons une modulation de matière de même période λ_x en mouvement à la vitesse opposée $-(v_x^+)_x$.

Il faut néanmoins se souvenir que les modulations $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ et $\delta U_{\pm}^{(-x)}$ sont des perturbations du potentiel $U_{\pm}$ du réseau 3D-lin $\perp$ lin, de faibles amplitudes. Ainsi, le mouvement de $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ et $\delta U_{\pm}^{(-x)}$ se suffit pas à entraîner efficacement les atomes. En effet, la vitesse d'un atome se propageant dans le réseau selon le mécanisme décrit à la figure III.1.1 est imposée par ses demi-oscillations dans les puits de $U_{\pm}$ comme nous l'avons vu au paragraphe III.1.1.1. Dès lors, l'entraînement des atomes par les modulations $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ et $\delta U_{\pm}^{(-x)}$ ne saurait être efficace que lorsque leur vitesse $(v_x^{\pm})_x$ correspond à celle d'un atome propageant, soit $v_{Bx}^{\pm}$.

Selon le mécanisme proposé ci-dessus, c'est ici la simple modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(\pm x)}$ en mouvement par rapport au réseau qui permet d'exciter les modes de propagation Brillouin. Ce processus que nous appellerons dorénavant $E_{||}$ est le plus efficace lorsque les vitesses $(v_x^{\pm})_x$ et $v_{Bx}^{\pm}$ sont égales, ce qui conduit, à partir des équations (III.1.1) et (III.1.5), à la condition de résonance d'excitation (dite *résonance Brillouin*) suivante :

$$\delta = \Omega_x . \quad (\text{III.1.8})$$

A ce stade deux remarques doivent être faites.

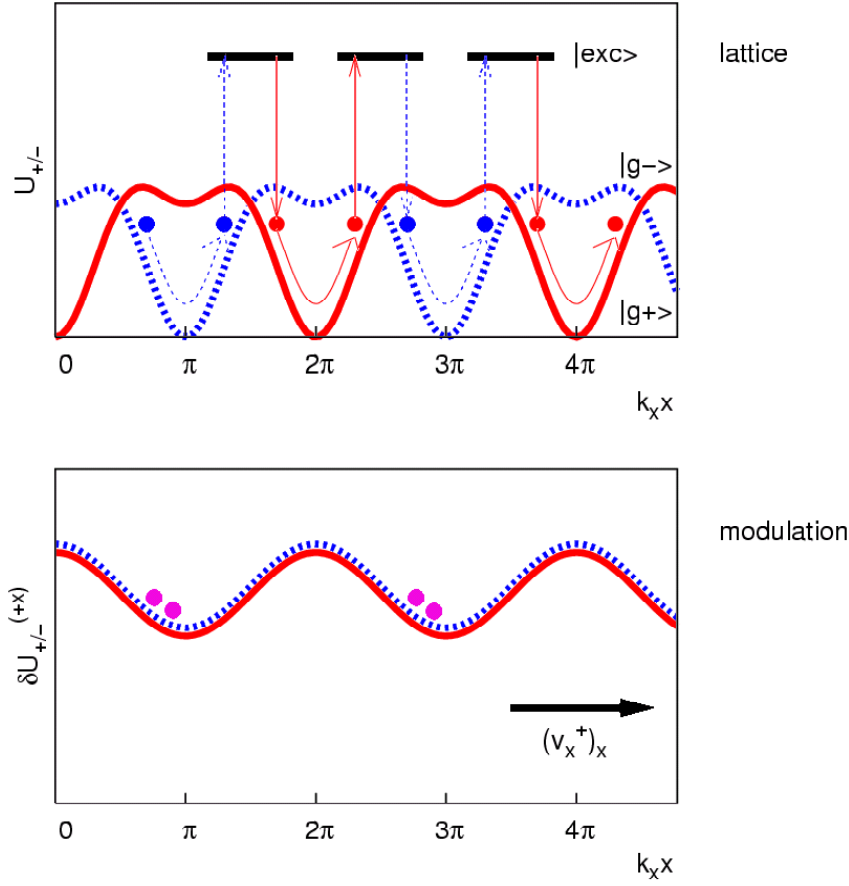


Figure III.1.3: Processus d'excitation $E_{||}$. La figure du haut reproduit le processus de propagation d'un atome dans le réseau optique 3D-lin $\perp$ lin le long de la direction x . La figure du bas représente les atomes emmenés par la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ en mouvement à la vitesse $(v_x^+)_x$. Les atomes du mode $(\mathcal{P}_{By}^+)_x$ se répartissent au voisinage du fond des puits de $\delta U_{\pm}$ et sont immobiles dans le référentiel $\mathcal{R}_x^+$ en mouvement à la vitesse $(v_x^{\pm})_x$ de sorte qu'une modulation de matière en mouvement est formée.

- D'une part, le fonctionnement effectif de ce processus d'excitation de la propagation d'atomes sur le réseau repose de manière essentielle sur le fait que les modulations de potentiel $\delta U_+^{(x)}$ et $\delta U_-^{(x)}$ sont égales². En effet, lors de son mouvement sur le réseau immobile, un atome change régulièrement d'état interne du fait du gradient de polarisation imposé par le réseau (voir la figure III.1.1). Comme nous avons ici $\delta U_+^{(x)} = \delta U_-^{(x)}$, un atome d'état interne $|\pm\rangle$ au fond d'un puits de la modulation $\delta U_{\pm}^{(x)}$ se retrouve à nouveau dans un puits de la modulation $\delta U_{\mp}^{(x)}$ lors de son changement d'état. L'entraînement par la modulation de potentiel n'est donc pas perturbé par le changement d'état interne de l'atome. Il s'ensuit que pour le processus d'excitation

²C'est à dire qu'il y a une modulation d'intensité mais pas de polarisation de la lumière laser.

$E_{||}$, un atome du mode de propagation $\mathcal{P}_{Bx}^{\pm}$ reste à peu près immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_x^{\pm}$.

- D'autre part, on s'attend comme nous l'avons vu à trouver des modulations de matière en mouvement dans le réseau. Ainsi, l'excitation de la propagation des atomes selon chaque modulation s'effectue de façon collective pour tous les atomes impliqués. Nous nous attendons donc à exciter des *modes de propagation* et pas seulement à entraîner des atomes aux vitesses v_{Bx}^+ et v_{Bx}^- de manière désordonnée.

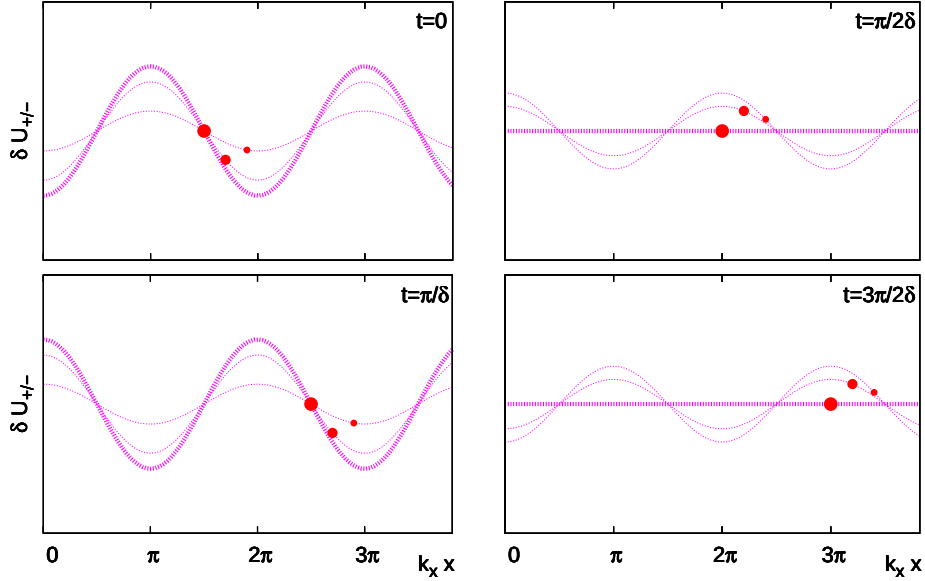


Figure III.1.4: Cycle temporel de la modulation de potentiel optique $\delta U_{\pm}^{(x)}$ dans le référentiel du réseau (immobile) pour quatre instants t différents et trajectoire d'un atome dans le mode de propagation Brillouin $\mathcal{P}_{Bx}^+$. La ligne épaisse et les gros points correspondent à la situation à l'instant t indiqué sur la figure correspondante alors que les lignes plus fines et les points plus petits correspondent à des instants légèrement ultérieurs. Cette figure montre qu'un atome dans le mode de propagation $\mathcal{P}_{Bx}^+$ peut être systématiquement poussé vers la droite par la modulation de potentiel. Il y a donc une force effective qui entretient le mouvement de l'atome vers la droite, spécifiquement à la vitesse $(v_x^{\pm})_x$. Ainsi, lorsque $(v_x^{\pm})_x = v_{Bx}^{\pm}$, le mode Brillouin est excité de façon résonante. Naturellement le processus symétrique (qui pousse l'atome du mode $\mathcal{P}_{Bx}^-$ vers la gauche) est similaire.

On pourrait s'inquiéter de ce que le processus d'excitation $E_{||}$ du mode $\mathcal{P}_{Bx}^{\pm}$ a été décrit en négligeant la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(\mp x)}$ alors qu'elle est de même amplitude que la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(\pm x)}$. Nous avons représenté sur la figure III.1.4 le mouvement d'un atome par rapport au référentiel du réseau (immobile) dans le mode de propagation $\mathcal{P}_{Bx}^{\pm}$ ainsi que la modulation de potentiel totale $\delta U_{\pm}^{(x)}$. Nous voyons que la trajectoire correspond à une situation où la force induite par $\delta U_{\pm}^{(x)}$ pousse systématiquement l'atome vers la droite lorsque l'atome avance précisément à la vitesse $(v_x^{\pm})_x$. L'action de cette

force sert ici à compenser l'effet de ralentissement dû aux cycles Sisyphe qui ont lieu lors du mouvement de l'atome sur une distance correspondant à plusieurs puits de potentiel [I.1.2.3]. Ceci confirme que la modulation temporelle et spatiale du potentiel optique dans la configuration *paral* doit permettre d'exciter les modes de propagation Brillouin dans la direction x lorsque la condition de résonance Brillouin (III.1.8) est vérifiée, *i.e.* que les vitesses $(v_x^\pm)_x$ et $v_{Bx}^\pm$ sont égales.

Mise en évidence de l'excitation des modes de propagation Brillouin - Nous présentons à présent les résultats de nos simulations numériques effectuées dans le cadre d'un mouvement restreint à la direction x dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin avec un faisceau sonde P polarisé parallèlement aux faisceaux quasi co-propageants (configuration *paral*). La figure III.1.5a montre le coefficient de diffusion spatiale dans la direction x en fonction du désaccord δ du faisceau P par rapport aux faisceaux $L_q^\pm$ du réseau. Nous avons vérifié que la diffusion est de type normal dans tout l'intervalle de valeurs de δ considéré conformément à ce que nous attendions [III.1.1.3]. Nous observons un pic marqué pour une valeur de δ_B environ égale à Ω_x . Ceci donne une première preuve directe de l'excitation résonante des modes de propagation $\mathcal{P}_{Bx}^\pm$ dans le réseau. Notons que la vitesse moyenne du centre de masse du nuage d'atomes reste nulle indépendamment de δ ce qui montre que l'amplification résonante de la diffusion spatiale dans la direction x est symétrique. Ce résultat est conforme à ce que nous attendions de l'existence simultanée des deux modes symétriques $\mathcal{P}_{Bx}^+$ et $\mathcal{P}_{Bx}^-$.

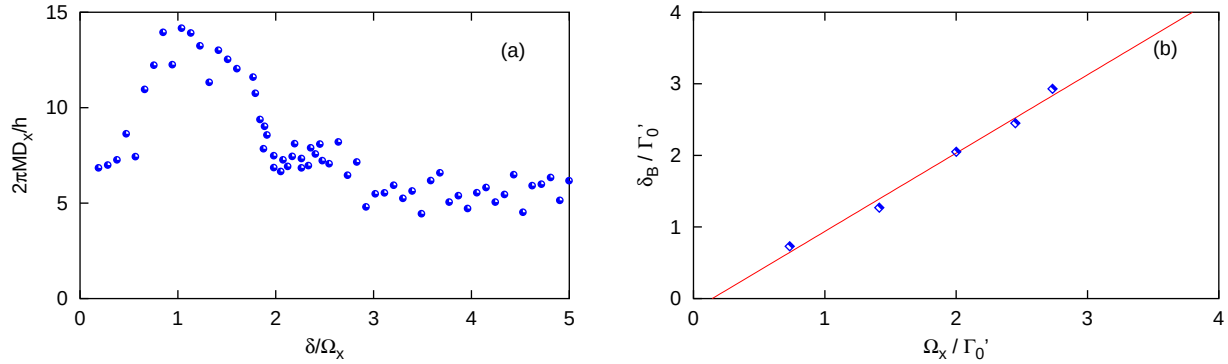


Figure III.1.5: Détection directe des modes de propagation par amplification résonante du coefficient de diffusion spatiale dans la direction x pour la configuration *paral*. (a) : Coefficient de diffusion spatiale dans la direction x en fonction du désaccord δ . Ici $\theta = 30^\circ$. Des résultats symétriques sont obtenus pour $\delta < 0$. (b) : Position de la résonance d'amplification du coefficient de diffusion spatial en fonction de la fréquence d'oscillation Ω_x , obtenue en faisant varier l'angle du réseau θ . Les paramètres du réseau sont $\Delta = -10\Gamma$, $\Delta'_0 = -200\omega_R$ et $\epsilon = 0,3$.

En faisant varier l'angle θ du réseau 3D-lin $\perp$ lin, nous avons reproduit des courbes du type de la figure III.1.5a pour différentes géométries du réseau. Nous avons tracé sur la figure III.1.5b la position δ_B de la résonance observée sur les figures obtenues en fonction de la fréquence d'oscillation Ω_x d'un atome au fond d'un puits de potentiel. Nous obtenons que

la résonance d'excitation δ_B des modes de propagation Brillouin est proportionnelle à Ω_x avec un coefficient de proportionnalité d'environ 1,09 en excellent accord avec la condition de résonance théorique (III.1.8).

Nous examinons maintenant la distribution de vitesse du nuage atomique dans le référentiel immobile du réseau. Nous traçons sur la figure III.1.6a la différence entre la distribution de vitesse en présence du faisceau P pour un désaccord δ_B correspondant à la résonance Brillouin et la distribution en l'absence de P . Nous obtenons deux pics nets correspondant aux vitesses v_{Bx}^+ et v_{Bx}^- . Ceci démontre qu'une partie du nuage d'atomes bouge selon le mode de propagation Brillouin $\mathcal{P}_{Bx}^+$ et une autre selon le mode $\mathcal{P}_{Bx}^-$ comme nous nous y attendions. Les valeurs négatives entre les deux pics indiquent que ce sont des atomes initialement immobiles qui sont mis en mouvement par les modulations de champ $(\mathcal{M}_x^+)_x$ et $(\mathcal{M}_x^-)_x$. et $\delta U_{\pm}^{(-x)}$ ³.

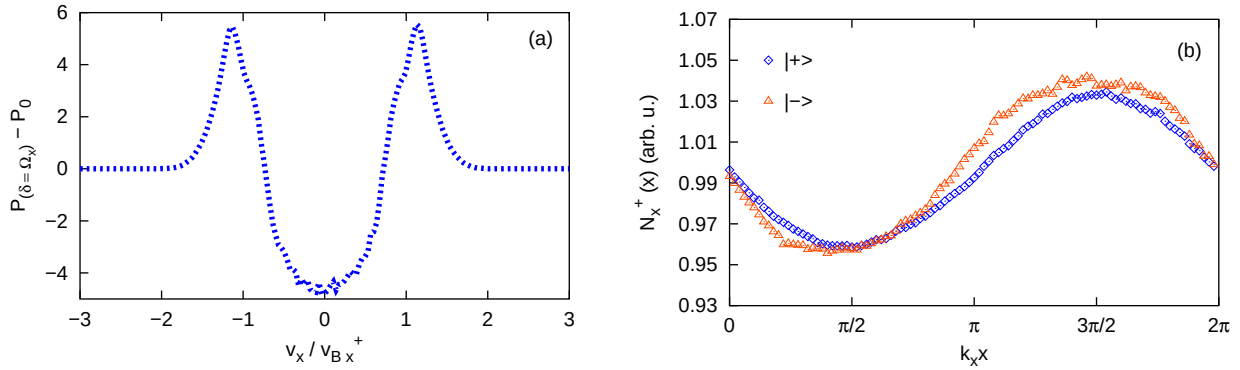


Figure III.1.6: (a) : Différence des distributions de vitesse, d'une part en présence du faisceau P pour un désaccord δ_B et d'autre part en l'absence de P . (b) : Distribution de position des atomes dans le référentiel en mouvement suivant le mode de propagation $\mathcal{P}_{Bx}^+$. Les atomes sont discriminés selon leur état interne $|+\rangle$ ou $|-\rangle$. Les paramètres du réseau sont $\Delta = -10\Gamma$, $\Delta'_0 = -200\omega_R$, $\delta = \delta_B$ et $\epsilon = 0, 3$.

Nous avons enfin déterminé la distribution de position dans les référentiels en mouvement $\mathcal{R}_x^+$ et $\mathcal{R}_x^-$ dont les vitesses correspondent à celles des atomes mis en mouvement selon les modes de propagation $\mathcal{P}_{Bx}^+$ et $\mathcal{P}_{Bx}^-$ par les modulations de potentiel. La figure III.1.6b montre les résultats des simulations dans $\mathcal{R}_x^+$. Nous obtenons une modulation de matière de période spatiale λ_x , identique à celle de la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+x)}$, en mouvement à la vitesse v_{Bx}^+ . Ainsi les modulations de champ en mouvement induisent l'excitation des *modes* de propagation atomique dans le réseau. La modulation de matière n'est ici pas polarisée conformément à ce que nous attendions de l'égalité des modulations des potentiels optiques $\delta U_{\pm}^{(x)}$.

Les résultats des simulations valident le mécanisme $E_{||}$ d'excitation des modes de propagation dans la direction x . Nous avons en effet montré que des atomes sont mis en mou-

³Notons que des distributions de *vitesse macroscopique*, c'est-à-dire obtenues en définissant la vitesse comme la demi-période spatiale du réseau divisé par le temps mis à joindre deux points de croisement successifs des potentiels $U_{\pm}$ dans la direction x donnent des résultats similaires.

vement par les modulations de champ en mouvement à la vitesse correspondant au processus de propagation Brillouin et avons démontré la validité de la condition de résonance d'excitation (III.1.8). Enfin, nous avons montré que l'excitation des modes de propagation correspond à la formation d'une modulation de matière stationnaire dans les modulations de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+x)}$ et $\delta U_{\pm}^{(-x)}$ en mouvement par rapport au réseau.

Direction y , processus d'excitation $E_{\perp}$

Nous nous intéressons à présent au cas d'un mouvement restreint à la direction y , et toujours pour une configuration *paral.* La formule (III.1.3) indique que dans ce cadre, la modulation de potentiel optique s'écrit

$$\begin{aligned}\delta U_{\pm}^{(y)} &= \mp \frac{4\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} \cos(k_y y) \cos(\delta \cdot t) \\ &= \mp \frac{2\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} [e^{i(k_y y - \delta \cdot t)} + e^{i(k_y y + \delta \cdot t)} + h.c.] .\end{aligned}\quad (\text{III.1.9})$$

$\delta U_{\pm}^{(y)}$ est encore la somme de deux ondes monochromatiques progressives, de directions $\pm y$ opposées et de vitesses $(v_y^{\pm}) y = \pm \delta/k_y$. Chacune de ces modulations de potentiel $\delta U_{\pm}^{(\pm y)}$, en mouvement dans la direction $\pm y$, est formée de puits régulièrement espacés (de $2\pi/k_y$) dans lesquels les atomes ont tendance à venir se piéger.

Mécanisme de propagation $E_{\perp}$ - Nous cherchons à décrire le mécanisme d'excitation des modes de propagation dans cette configuration. De même qu'au paragraphe précédent, nous ne considérons dans un premier temps que l'effet de la seule modulation de potentiel en mouvement $\delta U_{\pm}^{(+y)}$. Il convient tout d'abord de faire la remarque essentielle que, contrairement à la modulation de potentiel dans la direction x , $\delta U_{\pm}^{(x)}$, ici, $\delta U_{+}^{(y)} = -\delta U_{-}^{(y)}$ (voir la figure III.1.7Bas) de sorte qu'un mécanisme d'excitation des modes de propagation du type $E_{\parallel}$ n'est pas envisageable car les changements d'état interne de l'atome interdisent un piégeage atomique durable dans le potentiel modulé. Ainsi, pour exciter les modes de propagation $\mathcal{P}_{By}^{\pm}$, l'atome doit bouger par rapport à la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(y)}$. Afin d'obtenir une force effective qui pousse les atomes vers la droite et entretenir ainsi le processus de propagation atomique de la figure III.1.1, un atome dans l'état $|-\rangle$ doit se trouver dans le référentiel attaché à $(\mathcal{M}_y^+)_{\mathbf{y}}$ dans l'un des intervalles $[2n\pi, \pi + 2n\pi]$ alors qu'un atome dans l'état $|+\rangle$ doit se trouver dans l'un des intervalles $[\pi + 2n\pi, 2\pi + 2n\pi]$. Nous pouvons alors nous convaincre facilement que la condition pour que la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+y)}$ pousse systématiquement les atomes vers la droite correspond à la remontée d'une colline de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+y)}$ (voir la figure III.1.3Bas) pendant le temps séparant deux cycles de pompage optique successifs⁴ imposés par le mécanisme de propagation de la figure III.1.1. Ce nouveau processus d'excitation des modes de propagation sera baptisé $E_{\perp}$ dans la suite.

⁴Remarquons que ce mécanisme correspond à effectuer le contraire d'un cycle de refroidissement Sisyphé dans la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(+y)}$.

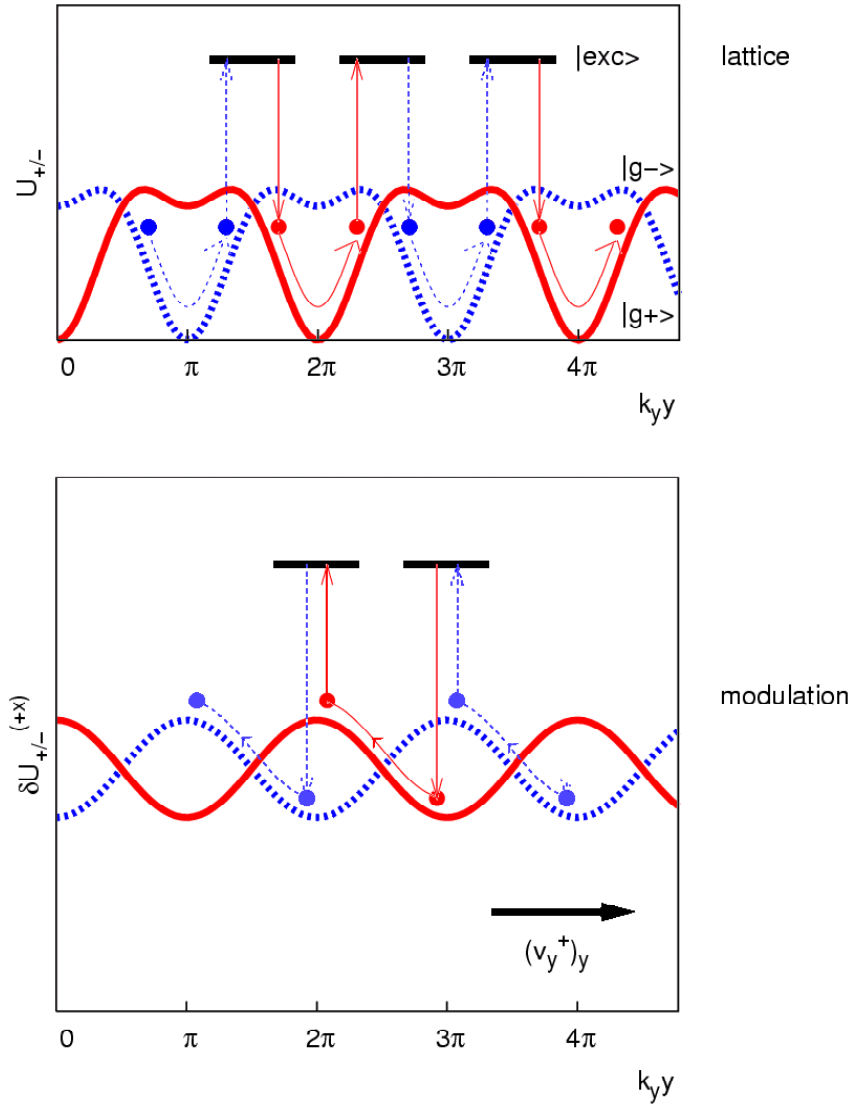


Figure III.1.7: Processus d'excitation $E_{\perp}$. La figure du haut reproduit le processus de propagation d'un atome dans le réseau optique 3D-lin $\perp$ lin le long de la direction y . La figure du bas représente les atomes emmenés par la modulation de potentiel $\delta U_{\pm}^{(y)}$ en mouvement à la vitesse $(v_y^{\pm})_y$. Les atomes sont cette fois en mouvement à la vitesse $-(v_y^{\pm})_y/2$ dans le référentiel $\mathcal{R}_y^+$, lui-même en mouvement à la vitesse $(v_y^{\pm})_y$ dans le référentiel du réseau.

Nous pouvons à présent déterminer simplement la condition de résonance Brillouin dans cette configuration en examinant la vitesse des atomes dans les différents référentiels. Ainsi, un atome dans un mode Brillouin (voir la figure III.1.1) voyage à la vitesse moyenne $v_{By}^{\pm} = \pm\Omega_y/k_y$ dans le référentiel immobile du réseau 3D-lin $\perp$ lin. Par ailleurs, pour être systématiquement poussé vers la droite par la modulation de potentiel $(\mathcal{M}_y^+)_y$, il doit voyager à la vitesse moyenne $-\Omega_y/k_y$ dans le référentiel attaché à $\delta U_+^{(y)}$. Ces deux conditions

ne sont compatibles que si la vitesse de la modulation de potentiel $\delta U_+^{(y)}$ vaut $2\Omega_y/k_y$ dans le référentiel du réseau. Nous déduisons alors de la formule (III.1.5) la condition de *résonance Brillouin* suivante pour les modes de propagation $\mathcal{P}_{By}^\pm$ dans la configuration *paral* :

$$\delta = 2\Omega_y . \quad (\text{III.1.10})$$

Naturellement, le processus symétrique d'excitation du mode $\mathcal{P}_{By}^-$ par la modulation $(\mathcal{M}_y^-)_y$ existe et est sujet à la même condition de résonance (III.1.10).

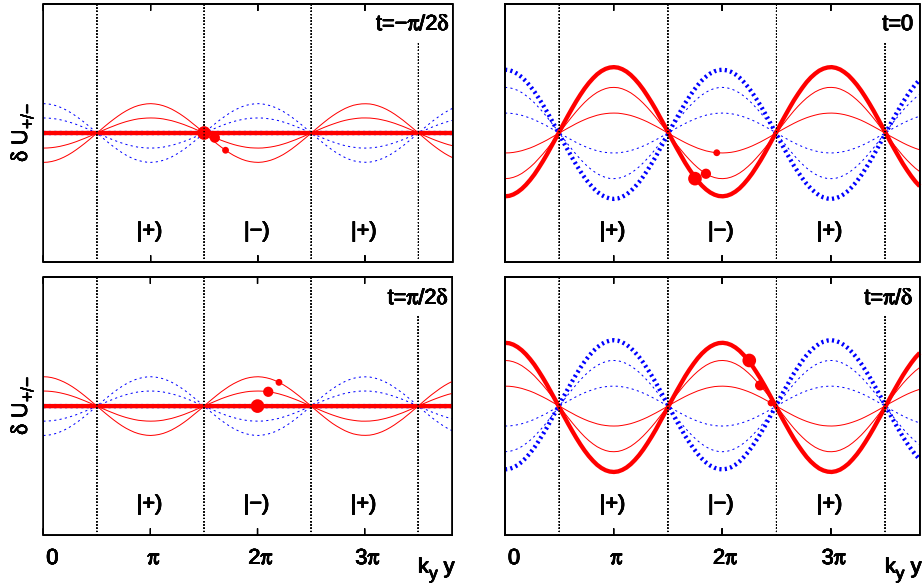


Figure III.1.8: Cycle temporel de la modulation de potentiel optique $\delta U_{\pm}^{(y)}$ dans le référentiel du réseau (immobile) pour quatre instants t différents et trajectoire d'un atome dans le mode de propagation Brillouin $\mathcal{P}_{By}^+$. La ligne épaisse et les gros points correspondent à la situation à l'instant t indiqué sur la figure correspondante alors que les lignes plus fines et les points plus petits correspondent à des instants légèrement ultérieurs. Nous voyons qu'un atome dans le mode de propagation $\mathcal{P}_{By}^+$ peut être systématiquement poussé vers la droite par la modulation de potentiel. Ici encore, une force effective entretient le mouvement de l'atome vers la droite, spécifiquement à la vitesse $(v_y^\pm)_y/2$. Ainsi, lorsque $v_{By}^\pm = (v_y^\pm)_y/2$, le mode Brillouin est excité de façon résonante. Le processus symétrique (qui pousse l'atome du mode $\mathcal{P}_{By}^-$ vers la gauche) est similaire.

Nous décrivons à présent le processus d'excitation $E_\perp$ des modes $\mathcal{P}_{By}^\pm$ en tenant compte des modulations de potentiel $\delta U_\pm^{(+y)}$ et $\delta U_\pm^{(-y)}$. La figure III.1.8 représente le mouvement dans le référentiel du réseau (immobile) d'un atome dans le mode de propagation $\mathcal{P}_{By}^+$ ainsi que la modulation de potentiel totale $\delta U_\pm^{(y)}$. De même que dans le cas du processus d'excitation $E_\parallel$, la trajectoire correspond à une situation où la force induite par $\delta U_\pm^{(y)}$ pousse systématiquement l'atome vers la droite lorsque l'atome avance précisément à la vitesse $(v_y^\pm)_y$. Ainsi, la modulation temporelle et spatiale du potentiel optique dans la

configuration *paral* doit permettre d'exciter les modes de propagation Brillouin dans la direction y lorsque la condition de résonance Brillouin (III.1.10) est vérifiée. De plus, comme le mouvement des atomes que nous attendons est un mouvement d'ensemble (voir la figure III.1.7), nous nous attendons à trouver des modulations de matière en mouvement dans le référentiel du réseau 3D-lin $\perp$ lin aux vitesses $v_{By}^\pm$ du mode $\mathcal{P}_{By}^\pm$. Ces modulations sont de période spatiale λ_y , sont polarisées comme les modulations de potentiel $\delta U_\pm^{(\pm y)}$ mais ne sont pas cohérentes avec $\delta U_\pm^{(\pm y)}$ du fait des vitesses de propagation différentes. Cette dernière propriété est à l'origine du fait que le processus d'excitation $E_\perp$ ne donne pas lieu à des pics Brillouin dans les spectres pompe-sonde du réseau [181].

Mise en évidence de l'excitation des modes de propagation Brillouin - Nous nous tournons à présent vers les résultats des simulations numériques. Celles-ci correspondent à un mouvement restreint à la direction y dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin avec un faisceau sonde P polarisé parallèlement aux faisceaux quasi co-propageants (configuration *paral*). Le coefficient de diffusion spatiale dans la direction y est porté sur la figure III.1.9a en fonction du désaccord δ du faisceau P . Ici encore, la diffusion reste normale pour toutes les valeurs de δ considérées. Un pic clair apparaît sur la figure pour une valeur de δ_B légèrement inférieure à $2\Omega_y$. Ce résultat suggère une excitation résonante des modes de propagation $\mathcal{P}_{By}^\pm$ dans le réseau. A nouveau l'excitation simultanée des modes $\mathcal{P}_{By}^+$ et $\mathcal{P}_{By}^-$ se traduit par une vitesse moyenne nulle du centre de masse du nuage d'atomes pour toutes les valeurs de δ .

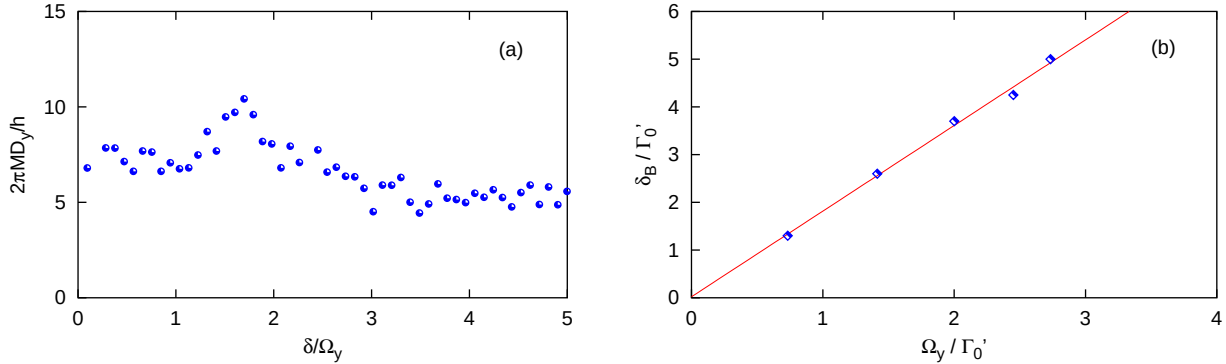


Figure III.1.9: Détection directe des modes de propagation par amplification résonante du coefficient de diffusion spatial dans la direction y pour la configuration *paral*. (a) : Coefficient de diffusion spatiale dans la direction y en fonction du désaccord δ . Ici $\theta = 30^\circ$. Des résultats symétriques sont obtenus pour $\delta < 0$. (b) : Position de la résonance d'amplification du coefficient de diffusion spatial en fonction de la fréquence d'oscillation Ω_y , obtenue en faisant varier l'angle du réseau θ . Les paramètres du réseau sont $\Delta = -10\Gamma$, $\Delta'_0 = -200\omega_R$ et $\epsilon = 0,3$.

Nous avons représenté sur la figure III.1.9b, la dépendance de la position de la résonance d'amplification du coefficient de diffusion spatiale en fonction de la fréquence d'oscillation Ω_y des atomes au fond des puits de potentiel. La courbe III.1.9b est obtenue en faisant

varier l'angle θ du réseau. Nous trouvons que la résonance d'excitation δ_B des modes de propagation Brillouin est proportionnelle à Ω_y avec un coefficient de proportionnalité d'environ 1,81 en accord avec la formule théorique (III.1.10).

La figure III.1.10a représente la différence des distributions de vitesse en présence du faisceau P avec un désaccord δ_B correspondant à l'excitation résonante des modes $\mathcal{P}_{By}^\pm$ et en l'absence de P . Les deux pics correspondant aux vitesses v_{By}^+ et v_{By}^- démontrent la mise en mouvement d'une partie du nuage atomique selon les modes de propagation Brillouin $\mathcal{P}_{By}^\pm$ conformément à ce que nous attendions⁵.

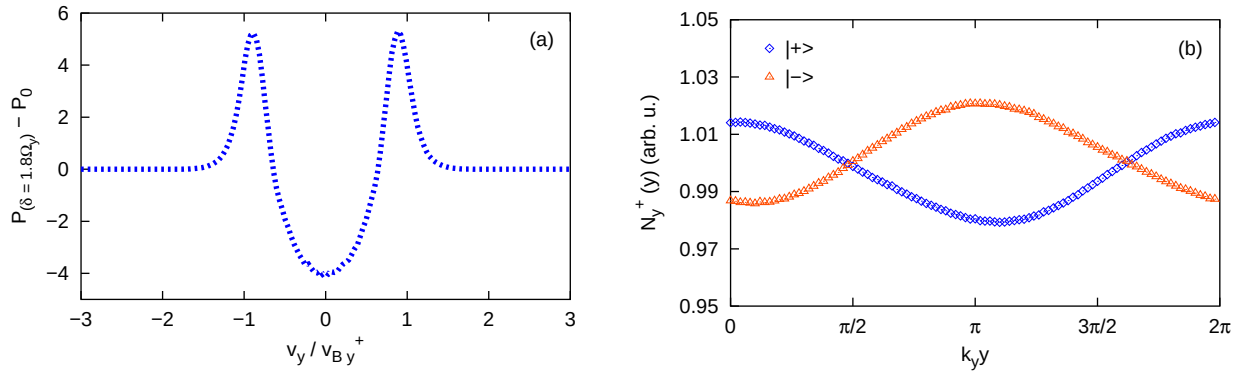


Figure III.1.10: (a) : Différence des distributions de vitesse en présence du faisceau P pour un désaccord δ_B et en l'absence de P . (b) : Distribution de position des atomes dans le référentiel en mouvement suivant le mode de propagation $\mathcal{P}_{By}^+$. Les atomes sont discriminés selon leur état interne $|+\rangle$ ou $|-\rangle$. Les paramètres du réseau sont $\Delta = -10\Gamma$, $\Delta'_0 = -200\omega_R$, $\delta = 1,8\delta_B$ et $\epsilon = 0,3$.

Enfin, nous avons examiné la distribution de position dans les référentiels en mouvement $\mathcal{R}_y^+$ et $\mathcal{R}_y^-$ de vitesses égales à celles des modes de propagation Brillouin dans la direction y ⁶. La figure III.1.10b donne les résultats des simulations dans $\mathcal{R}_y^+$. Ces résultats démontrent la formation d'une modulation de matière de période spatiale λ_y . Le mécanisme $E_\perp$ induit donc l'excitation des modes de propagation atomique dans le réseau optique. Notons que contrairement à ce qui se passe pour le mécanisme $E_\parallel$, ici les modulations de matière dans les états atomiques internes $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont en opposition de phase, ce qui est dû à l'opposition des modulations de potentiel $\delta U_+^{(y)}$ et $\delta U_-^{(y)}$.

Les résultats numériques montrent que le mécanisme $E_\perp$ que nous avons décrit précédemment induit l'excitation résonante des modes de propagation Brillouin dans la direction y . Nous avons en particulier vérifié la validité de la condition de résonance (III.1.10) correspondant et démontré la formation de modulations de matière polarisées en mouvement dans le réseau aux vitesses des modes Brillouin v_{By}^+ et v_{By}^- .

⁵Les distributions de *vitesse macroscopique*, obtenues en définissant la vitesse comme la demi-période spatiale du réseau divisé par le temps mis à joindre deux points de croisement successifs des courbes de potentiel $U_\pm$ donnent des résultats similaires.

⁶Nous rappelons que dans ce cas $\mathcal{R}_y^+$ et $\mathcal{R}_y^-$ ne sont pas attachés aux modulations de potentiel $\delta U_\pm^{(+y)}$ et $\delta U_\pm^{(-y)}$.

La fraction d'atomes dans les modes de propagation peut être estimée à l'aide de l'amplitude du pic de diffusion spatiale ou des modulations de matière en mouvement. Si l'on compare ces valeurs pour les deux mécanismes d'excitation $E_{\parallel}$ et $E_{\perp}$ (figures III.1.5 et III.1.9 d'une part et figures III.1.6 et III.1.10 d'autre part), on constate que dans la configuration étudiée, les modes de propagation dans la direction x sont deux fois plus importants que les modes dans la direction y . En tenant compte du fait que la profondeur de la modulation excitatrice est deux fois plus importante dans la direction x que dans la direction y , on déduit que les deux mécanismes d'excitation des modes de propagation $E_{\parallel}$ et $E_{\perp}$ ont des efficacités tout à fait comparables.

1.2.2 Modes de propagation dans la direction longitudinale

Le paragraphe précédent nous a permis de mettre à jour deux mécanismes d'excitation des modes de propagation Brillouin transverses dans le réseau optique 3D-lin $\perp$ lin. Tous deux reposent sur l'existence d'une modulation des potentiels optiques en mouvement dans la direction des modes excités. Dans un cas (processus d'excitation $E_{\parallel}$), les atomes sont piégés dans les puits de la modulation et sont alors entraînés par son mouvement; dans l'autre cas (processus d'excitation $E_{\perp}$), les atomes sont poussés par la modulation de potentiel mais voyagent à une vitesse différente. Comme de telles modulations de potentiel sont en mouvement dans la direction longitudinale (z), nous nous attendons à pouvoir observer de tels modes dans cette direction aussi. C'est le travail que nous nous proposons de présenter ici. Comme dans les sous-paragraphe précédents, nous nous limitons à des mouvements atomiques restreints à une seule direction (ici z) du réseau 3D-lin $\perp$ lin. Nous considérons simultanément les cas des configurations *para*l et *orth*.

Excitation de modes longitudinaux - D'après les formules (III.1.3) et (III.1.4), la modulation de potentiel dans la direction z s'écrit

- Dans la configuration *para*l,

$$\begin{aligned} \delta U_{\pm}^{(z)} &= \frac{4\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} [e^{i[k(1-\cos(\theta))z-\delta\cdot t]} + h.c.] \\ &\quad \mp \frac{2\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} [e^{i[k(1+\cos(\theta))z-\delta\cdot t]} + h.c.] . \end{aligned} \quad (\text{III.1.11})$$

- Dans la configuration *orth*,

$$\begin{aligned} \delta U_{\pm}^{(z)} &= \frac{4\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} [e^{i[k(1+\cos(\theta))z-\delta\cdot t]} + h.c.] \\ &\quad \mp \frac{2\epsilon\hbar\Delta'_0}{3} [e^{i[k(1-\cos(\theta))z-\delta\cdot t]} + h.c.] . \end{aligned} \quad (\text{III.1.12})$$

Dans les deux configurations, $\delta U_{\pm}^{(z)}$ est formée de la somme de deux modulations planes progressives. L'une (première ligne des équations (III.1.11) et (III.1.12)) correspond à un potentiel indépendant de l'état atomique interne et est donc susceptible d'induire une excitation des modes de propagation dans la direction z du type $E_{\parallel}$. Pour ce qui concerne

l'autre modulation (deuxième ligne des équations (III.1.11) et (III.1.12)), les potentiels correspondant aux états internes $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont opposés de sorte que l'excitation des modes de propagation attendue est de type $E_\perp$. Par ailleurs, nous remarquons que, pour les deux configurations, les modulations de potentiel sont progressives dans la direction $+\text{sgn}(\delta)z$. Il n'y a pas, contrairement à ce qui se passe dans les directions transverses de modulation progressive en sens opposé (selon $-\text{sgn}(\delta)z$). Ainsi, nous nous attendons à ce que les modes de propagation excités soit dirigés dans le sens $+\text{sgn}(\delta)z$. Il doit donc y avoir une dérive du centre de masse du nuage d'atomes dans ce sens. Cette propriété fournit une méthode supplémentaire de détection de l'excitation des modes.

Les conditions de résonance Brillouin correspondant à l'excitation des modes longitudinaux $\mathcal{P}_{Bz}^\pm$ s'obtiennent comme dans les cas transverses par des conditions de vitesse des atomes, d'une part dans le référentiel immobile du réseau et d'autre part dans le référentiel de la modulation de potentiel considérée. Ainsi,

- Pour le processus d'excitation $E_\parallel$, la modulation de potentiel doit se propager à la même vitesse que les atomes dans le réseau car ceux-ci sont piégés dans ses puits de potentiel. La condition de résonance s'écrit alors simplement en égalant ces deux vitesses.
- Pour le processus d'excitation $E_\perp$, la situation est un peu plus compliquée. Les atomes se propageant dans le réseau immobile à la vitesse Brillouin v_{Bz}^+ et dans le référentiel attaché à la modulation de potentiel optique à la vitesse correspondant à reculer d'une demi-période spatiale (voir la figure III.1.7) pendant le temps entre deux cycles de pompage optique (*i.e.* le temps mis par l'atome pour effectuer une demi-oscillation dans un puits du réseau) (voir la figure III.1.1).

L'application de cette recette conduit simplement aux conditions de résonance Brillouin pour les deux mécanismes d'excitation et les deux configurations :

- Configuration *para*

– excitation de type $E_\parallel$

$$\delta_{Bz,para}^\parallel = \Omega_z \frac{1 - \cos(\theta)}{2 \cos(\theta)} \quad (\text{III.1.13})$$

– excitation de type $E_\perp$

$$\delta_{Bz,para}^\perp = \Omega_z \frac{1 + 3 \cos(\theta)}{2 \cos(\theta)} \quad (\text{III.1.14})$$

- Configuration *orth*

– excitation de type $E_\parallel$

$$\delta_{Bz,orth}^\parallel = \Omega_z \frac{1 + \cos(\theta)}{2 \cos(\theta)} \quad (\text{III.1.15})$$

– excitation de type $E_\perp$

$$\delta_{Bz,orth}^\perp = \Omega_z \frac{1 + \cos(\theta)}{2 \cos(\theta)} . \quad (\text{III.1.16})$$

Mise en évidence de l'excitation des modes de propagation Brillouin - Nous présentons à présent les résultats des simulations numériques. Pour une configuration de réseau optique donnée (angle θ , désaccord Δ et déplacement lumineux par onde Δ'_0 fixés), nous faisons varier le désaccord δ du faisceau P et nous mesurons d'une part la diffusion spatiale et d'autre part la vitesse moyenne du nuage d'atomes dans la direction z . Pour toutes les valeurs de δ considérées, nous obtenons une diffusion normale et une dérive à vitesse constante du centre de masse du nuage d'atomes. Nous avons porté sur la figure III.1.11 les valeurs du coefficient de diffusion spatiale et de la vitesse moyenne du centre de masse en fonction de δ pour les deux configurations *paral* et *orth*.

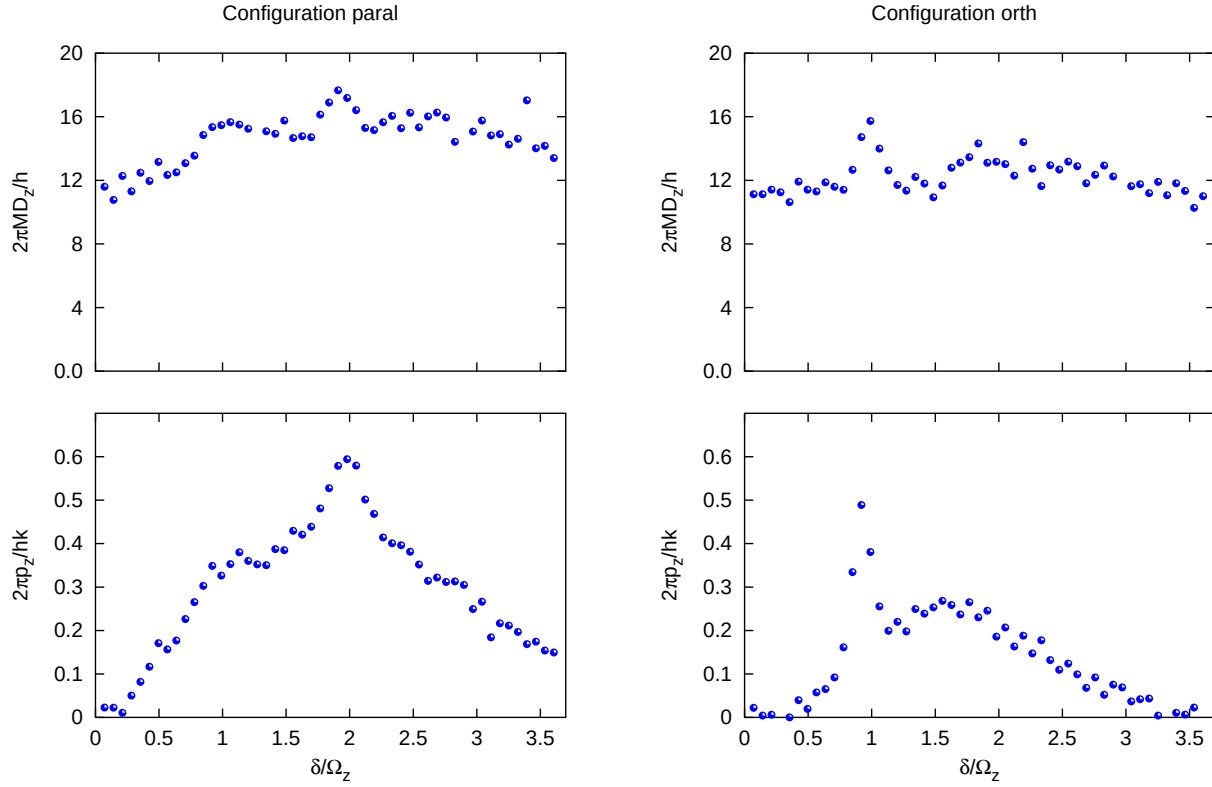


Figure III.1.11: Observation directe des modes de propagation longitudinaux par le biais de la diffusion spatiale et de la vitesse moyenne du centre de masse du nuage d'atomes. Les paramètres du réseau sont $\theta = 30^\circ$, $\Delta = -10\Gamma$ et $\Delta'_0 = -200\omega_R$. Colonne de Gauche : cas de la configuration *paral* pour $\epsilon = 0, 3$. Colonne de Droite : cas de la configuration *orth* pour $\epsilon = 0, 1$.

Les résultats numériques permettent de mettre en évidence l'excitation résonante de modes de propagation longitudinaux pour les deux polarisations du faisceau P considérées. Les pics des courbes de diffusion spatiale d'une part et de vitesse moyenne du nuage d'autre part sont à la même position comme nous pouvions nous y attendre.

- Dans le cas de la configuration *paral*, nous n'observons qu'une résonance Brillouin

lorsque nous en attendions deux. L'étude de la dépendance de cette résonance en fonction de l'angle de réseau θ fournit un bon accord avec la formule (III.1.14) à un facteur 0,9 près comme le montre la figure III.1.12. Nous attribuons la difficulté pour obtenir la résonance (III.1.13) à deux raisons. Rappelons tout d'abord que la longueur d'onde de la modulation de potentiel qui l'induit est plus grande que celle de la modulation qui induit la résonance (III.1.14) comme nous l'avons indiqué à la remarque (b) de la page 140. Ainsi, à profondeurs égales de potentiel, la force induite est plus faible de sorte que nous nous attendons à ce que l'excitation soit moins efficace. Par ailleurs, d'une part, aux faibles angles de réseau, la résonance (III.1.13) est attendue pour une valeur très faible du désaccord de P ($\delta \simeq 0,08\Omega_z$ pour $\theta = 30^\circ$) et d'autre part, aux grands angles, comme $\cos(\theta)$ est faible, les deux résonances attendues ne sont pas très éloignées, ce qui en complique la distinction.

- Pour ce qui concerne la configuration *orth*, nous trouvons une seule résonance Brillouin dont la position est en bon accord avec les formules (III.1.15) et (III.1.16), ici encore à un facteur numérique d'environ 0,9, comme l'illustre la figure III.1.12. Notons que dans cette configuration, il est difficile d'obtenir des résultats aussi peu bruités que ceux de la figure III.1.11. En particulier, nous avons obtenus parfois des pics dédoublés très proches et voisins de la valeur δ_B . Nous attribuons cette caractéristique au fait que les modes de propagation sont excités de façon résonante pour la même valeur de δ par deux mécanismes distincts susceptibles de s'entraver mutuellement.

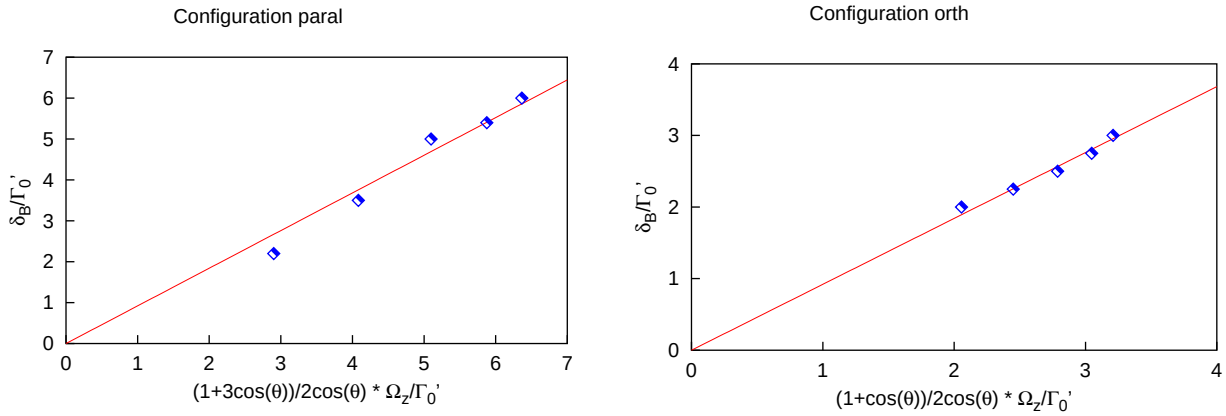


Figure III.1.12: Position de la résonance Brillouin dans la direction longitudinale z . Gauche : cas de la configuration *paral*. Droite : cas de la configuration *orth*. Des résultats symétriques (mais avec $p_z < 0$) sont obtenus pour $\delta < 0$.

1.3 Modes de propagation dans un réseau multidimensionnel

L'étude du paragraphe III.1.2 nous a permis de mettre simplement en évidence les deux processus d'excitation des modes de propagation transverses et longitudinaux dans des simulations où la dynamique était réduite à une seule dimension d'espace. Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de simulations effectuées en deux dimensions, où la dynamique est cette fois réduite au plan (Oxz) tout entier. Le but est ici de déterminer si l'influence des mouvements atomiques orthogonaux à la direction du mode de propagation considéré est déterminant sur les mécanismes d'excitation $E_{||}$ et $E_{\perp}$. Nous étudions simultanément les cas des configurations *paral* et *orth*.

Nous avons porté sur la figure III.1.13, les résultats des simulations numériques pour le coefficient de diffusion spatiale dans la direction transverse x et pour la vitesse du centre de masse du nuage dans la direction longitudinale z en fonction du désaccord δ pour des paramètres fixes du réseau. Les résultats sont semblables à ceux que nous avons obtenus dans les simulations monodimensionnelles. Nous obtenons des pics sur les courbes de diffusion ou de vitesse du nuage pour des valeurs particulières du désaccord δ correspondant à l'excitation résonante des divers modes de propagation. Dans la configuration *paral*, les modes $\mathcal{M}_x^{\pm}$ sont excités par le mécanisme $E_{||}$ et le mode $\mathcal{M}_z^{\pm}$ par le mécanisme $E_{\perp}$. Au contraire, dans la configuration *orth*, les modes $\mathcal{M}_x^{\pm}$ sont excités par le mécanisme $E_{\perp}$ et le mode $\mathcal{M}_z^{\pm}$, simultanément par les mécanismes $E_{||}$ et $E_{\perp}$.

Nous contrôlons à présent la validité des prédictions théoriques pour la position des excitations résonantes des modes Brillouin correspondant aux formules (III.1.8), (III.1.10), (III.1.14) et (III.1.15)-(III.1.16). Pour cela, nous avons tracé sur la figure III.1.14 la dépendance des positions des résonances Brillouin dans les directions x et z et pour les deux configurations *paral* et *orth* avec des ajustements numériques correspondants aux formules citées ci-dessus. Nous obtenons un bon accord qualitatif avec les prédictions théoriques. Le tableaux ci-dessous récapitule la position des résonances observées dans les simulations 2D.

	configuration <i>paral</i>	configuration <i>orth</i>
direction x	$1, 28 \delta_{Bx,paral}^{ }$	$0, 90 \delta_{Bx,orth}^{\perp}$
direction z	$0, 95 \delta_{Bz,paral}^{\perp}$	$1, 04 \delta_{Bz,orth}^{ }$

Ces résultats montrent que la description des mécanismes d'excitation $E_{||}$ et $E_{\perp}$ des modes de propagation du réseau 3D-lin $\perp$ lin que nous avons faites en une dimension d'espace reste valable dans les cas multidimensionnels. Une étude des distributions de position atomique dans les référentiels en mouvement a été effectuée et montre la formation de modulations de matière en mouvement dans le réseau. De plus amples détails de ce travail sont présentés au paragraphe III.2.4.1 dans le cadre de l'étude de la *résonance stochastique* [III.2].

Finalement, la description des mécanismes d'excitation $E_{||}$ et $E_{\perp}$ des modes de propagation que nous avons faite tout au long de ce chapitre ne considère de la modulation du champ laser que la modulation du potentiel optique et en particulier, ne prend pas en compte celle du pompage optique. Afin de vérifier que cette description est complète et de déterminer l'importance de la modulation du pompage optique, nous avons réalisé des

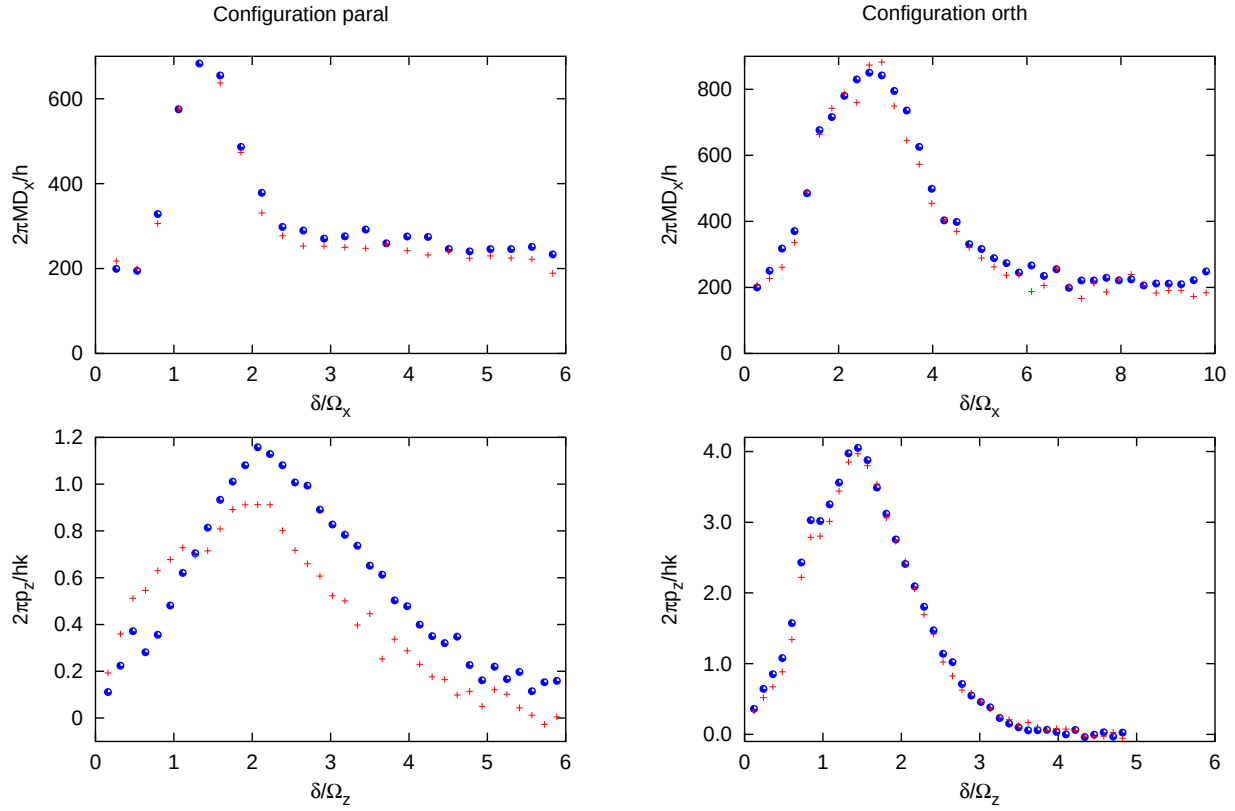


Figure III.1.13: Coefficient de diffusion spatiale (cas de la direction x) vitesse moyenne du nuage atomique (cas de la direction z) en fonction du désaccord δ du faisceau (P). Sur l'ensemble des courbes, les points correspondent aux simulations 2D complètes alors que les croix correspondent à des simulations 2D où seuls les potentiels optiques sont modulés (voir le texte). Les paramètres du réseau sont $\theta = 30^\circ$, $\Delta = -10\Gamma$, $\Delta'_0 = -200\omega_R$ et $\epsilon = 0, 3$. Colonne de Gauche : cas de la configuration *paral*. Colonne de Droite : cas de la configuration *perp*.

simulations numériques identiques aux précédentes mais en ne conservant que la modulation du potentiel optique dans les équations de Langevin que le programme intègre [II.2.3.3]. Les résultats sont portés sur les graphes correspondant de la figure III.1.13. Nous constatons qu'il n'y a pas de différences significatives entre les simulations réalisées avec une modulation complète du champ laser (donc à la fois du potentiel et des taux de pompage optiques) et avec la modulation des seuls potentiels optiques. Nous en déduisons que la modulation des taux de pompage optique n'a qu'un effet très faible sur l'excitation des modes de propagation Brillouin. Nous constatons néanmoins que l'excitation du mode $\mathcal{P}_{Bz}^+$ dans la configuration *paral* est plus efficace lorsque l'on inclut la modulation du pompage optique dans les simulations numériques. Ce résultat s'explique par le fait que pour le processus $E_\perp$ mis en jeu ici, la modulation de champ $\mathcal{M}_z^+$ présente un gradient de polarisation. Or, comme on peut le voir sur la figure III.1.7, celui-ci peut assister les transitions d'état interne

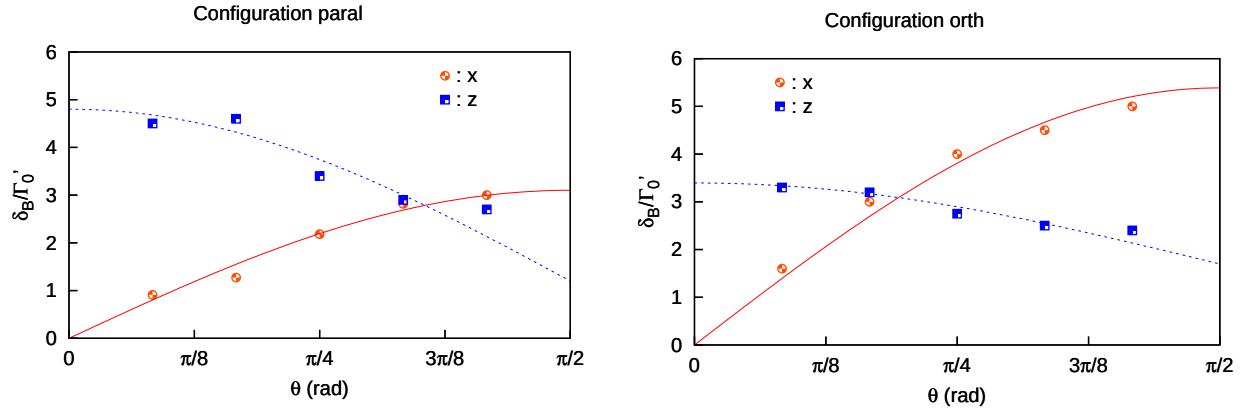


Figure III.1.14: Position des résonances Brillouin dans les directions transverse x et longitudinale z . Gauche : cas de la configuration *paral*. Droite : cas de la configuration *perp*.

régulières consécutives de la propagation de l'atome sur le réseau (voir la figure III.1.1).

Résumé et conclusion du chapitre

Nous avons étudié dans ce chapitre les modes de propagation Brillouin dans un réseau optique dissipatif 3D-lin $\perp$ lin. Ces modes correspondent au transport régulier d'une fraction du nuage d'atomes dans le réseau [III.1.1]. La trajectoire de chaque atome correspond à un processus de propagation qui consiste à effectuer une succession de cycles constitués d'une demi-oscillation dans un puits de potentiel suivie d'un cycle de pompage optique transférant l'atome au puits adjacent (voir la figure III.1.1). L'excitation des modes se fait au moyen d'un faisceau laser P désaccordé de δ par rapport aux faisceaux du réseau et dont l'interférence avec ces derniers induit une modulation de champ laser en mouvement dans le réseau optique [III.1.1.2]. L'excitation résonante des modes de propagation est obtenue lorsque les modulations de champ laser ont une vitesse de phase permettant l'entretien du processus de propagation précédemment décrit. Nous avons identifié deux mécanismes d'excitation des modes de propagation [III.1.2.1] :

- *Mécanisme $E_{||}$* - L'interférence de P avec les faisceaux du réseau de même polarisation induit une modulation de champ laser sans gradient de polarisation de sorte que $\delta U_+ = \delta U_-$. Les atomes viennent se piéger au voisinage des minima de $\delta U_{\pm}$ qui sont en mouvement à une vitesse proportionnelle à δ . Lorsque cette vitesse est égale à la vitesse d'un mode Brillouin, celui-ci est excité.
- *Mécanisme $E_{\perp}$* - L'interférence de P avec les faisceaux du réseau de polarisation orthogonale induit au contraire une modulation de champ laser avec un gradient de polarisation de sorte que $\delta U_+ = -\delta U_-$. Les atomes ne peuvent alors pas être entraînés comme pour le mécanisme $E_{||}$ car les changements réguliers d'état interne

subis par un atome lors du processus de propagation interdisent tout piégeage durable au voisinage des minima de $\delta U_{\pm}$. Le mécanisme $E_{\perp}$ consiste en un mouvement régulier de l'atome dans le référentiel attaché à $\delta U_{\pm}$ de telle manière que la force induite par $\delta U_{\pm}$ entretienne le processus de propagation Brillouin dans le réseau optique. Pour cela la vitesse de la modulation de potentiel optique doit prendre une valeur particulière.

Au moyen de simulations de Monte-Carlo semi-classiques en une [III.1.2] et deux [III.1.3] dimensions d'espace, nous avons démontré l'efficacité des deux processus d'excitation $E_{\parallel}$ et $E_{\perp}$. En étudiant la distribution de matière dans des référentiels en mouvement par rapport au réseau, nous avons ainsi montré que les processus $E_{\parallel}$ et $E_{\perp}$ induisent tous deux la formation de modulations de matière en mouvement selon les modes de propagation du réseau. L'excitation des modes par l'un ou l'autre des mécanismes a par ailleurs été mise en évidence par une méthode directe (observation d'une augmentation de la diffusion spatiale dans la direction du mode ou de la mise en mouvement du centre de masse du nuage atomique). Cette méthode nous a permis de vérifier la condition de résonance Brillouin pour l'excitation des modes éponymes en fonction de δ .

Les modes de propagation présentés et discutés en détail dans ce chapitre ont été observés expérimentalement dans notre équipe [27]. Le lecteur trouvera en annexe C une reproduction d'un article que nous avons publié qui décrit ce travail ainsi que l'analyse théorique correspondante.

Nous ne nous sommes pas intéressés dans ce chapitre à l'influence des processus dissipatifs sur les mécanismes d'excitation des modes Brillouin. Or nous pouvons remarquer que ces derniers correspondent à la *rectification du bruit* dans réseau⁷. En effet, l'existence des cycles de pompage optique (bruit) est indispensable au processus de propagation Brillouin. Nous étudions quantitativement au chapitre suivant l'effet du niveau de bruit sur l'excitation des modes de propagation et montrons qu'il fait l'objet d'une *résonance stochastique*.

⁷C'est à dire que l'énergie du bruit est utilisée pour induire un mouvement déterministe.

Chapitre 2

Synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs. Résonance stochastique

Dans un réseau optique dissipatif où les atomes sont sujets au refroidissement Sisyphé, les temps typiques d'évolution correspondant d'une part au mouvement hamiltonien (sur les potentiels optiques) et d'autre part aux processus dissipatifs (pompage optique) peuvent varier indépendamment avec les paramètres du réseau et sont généralement à peu près du même ordre de grandeur. Ceci conduit, comme nous l'avons déjà signalé, à distinguer deux régimes (sautant et oscillant) [I.1.2.3] et rend les calculs analytiques dans tout le domaine de paramètres accessibles particulièrement difficiles [30]. En contrepartie, le régime intermédiaire offre la possibilité d'étudier des comportements dynamiques inhabituels et contre-intuitifs, combinant mouvement hamiltonien et effets dissipatifs.

Comme nous l'avons vu en introduction générale de ce mémoire, et contrairement à une idée répandue jusque dans les années 1970, le bruit dans un système physique n'est pas toujours une nuisance, propre à affecter le rapport signal-sur-bruit des grandeurs expérimentales mesurées. Il peut être employé tout au contraire pour induire une dynamique déterministe et utilisable dans un système non linéaire. C'est en particulier le cas du phénomène de *résonance stochastique* [20, 182-184] qui correspond à l'excitation résonante, pour un niveau de bruit spécifique, de la réponse d'un système non linéaire à une excitation périodique. Les ingrédients fondamentaux en sont (i) l'existence d'états métastables séparés par une barrière de potentiel, (ii) des phénomènes dissipatifs qui induisent des transitions aléatoires entre les états métastables et (iii) une faible excitation périodique qui tend aussi (mais, en l'absence de bruit, ne suffit pas) à induire de tels sauts mais de manière déterministe (régulière) dans ce cas [185]. La résonance stochastique a lieu lorsque le mouvement hamiltonien (induit par l'excitation périodique) et les sauts aléatoires (induits par les effets dissipatifs) sont synchronisés.

Une situation tout à fait adaptée à l'étude de la résonance stochastique est fournie par l'excitation des modes de propagation dans un réseau optique dissipatif [III.1]. En effet, les états métastables sont formés par les puits de potentiel régulièrement espacés sur le réseau [I.1.2.2], le bruit correspond aux cycles de pompage optique qui induisent des transitions

aléatoires entre les sites de piégeage [II.2.1.1] et la modulation de potentiel en mouvement induite par l'addition d'un faisceau désaccordé entraîne les atomes de façon régulière et collective selon un mode de propagation [III.1.1.2]. Il convient de remarquer que le processus de transport cohérent le long des modes de propagation n'est possible que moyennant l'occurrence d'un cycle de pompage optique à chaque fois que le mouvement hamiltonien dans un puits amène l'atome au voisinage d'un point de croisement des courbes de potentiel (voir le paragraphe III.1.1.1 et la figure III.1.1). Nous pouvons donc raisonnablement attendre un phénomène de résonance stochastique sur l'excitation des modes de propagation Brillouin.

C'est ce problème que nous étudions dans le présent chapitre. Nous introduisons tout d'abord de manière générale le phénomène de résonance stochastique au paragraphe [III.2.1], ainsi que le cadre général de notre étude au paragraphe [III.2.2]. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la mise en évidence de la résonance stochastique dans notre système, à l'aide d'observables macroscopiques au paragraphe [III.2.3] et d'observables microscopiques au paragraphe [III.2.4].

2.1 Introduction à la résonance stochastique

Dans ce paragraphe, nous introduisons le lecteur au phénomène de résonance stochastique. Celui-ci, bien qu'imaginé récemment (au début des années 1980), se révèle être un paradigme très général et a été mis en évidence, ou du moins évoqué, dans des domaines et des systèmes très variés. Nous présentons d'abord un modèle générique de résonance stochastique qui permet de bien comprendre le phénomène, puis nous décrivons rapidement quelques exemples significatifs.

2.1.1 Un modèle générique

Le système modèle

Considérons un système physique pouvant se trouver dans deux états métastables séparés par une barrière de potentiel ΔU . On peut typiquement prendre l'exemple d'une particule dans un potentiel formé de deux puits séparés, adjacents [186, 20] (voir le potentiel du haut sur la figure III.2.1). Nous supposons que la particule subit une force de frottement visqueux (de coefficient de friction α). Dans ce cas, la particule classique finit dans l'un des états métastables et ne subit aucune transition vers l'autre. D'une manière générale, nous caractériserons l'état du système par le puits le plus proche de la particule.

Nous nous intéressons à présent à deux perturbations indépendantes de ce système.

Introduction de bruit - Ajoutons du bruit dans notre système, par exemple en le plongeant dans un bain thermique (à la température T) de petites molécules avec lesquelles notre particule subit des chocs. La particule ne reste alors plus au fond d'un puits mais suit un mouvement aléatoire au cours duquel elle peut subir une transition d'état de l'un des puits vers l'autre, lorsqu'une fluctuation de grande amplitude lui permet de franchir la barrière de potentiel.

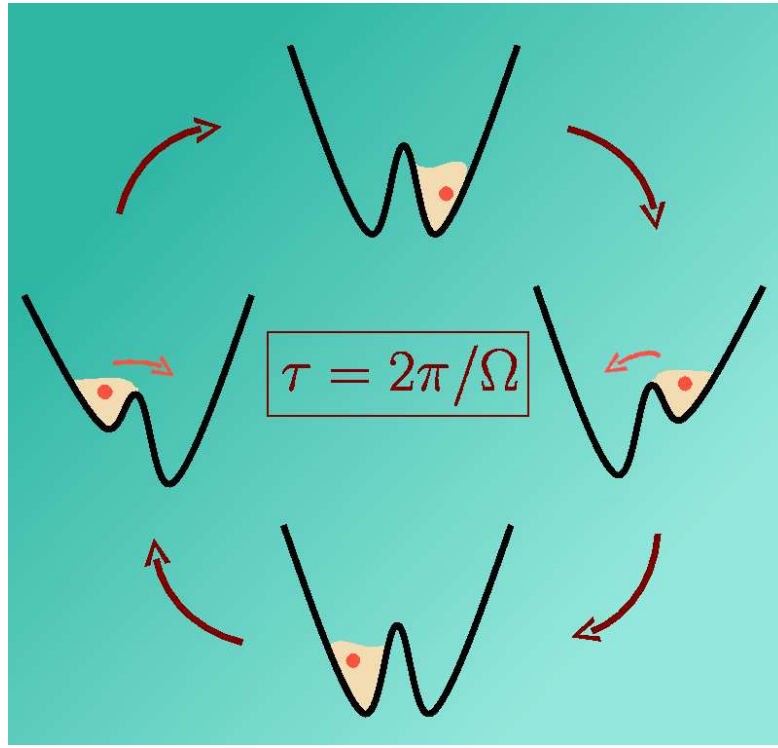


Figure III.2.1: Schéma de principe pour l'observation de la résonance stochastique pour une particule brownienne dans un potentiel formé de deux états métastables.

Dans cette situation, les sauts de la particule entre les puits métastables sont aléatoires et leur taux moyen peut être estimé par la formule de Kramers [187, 145] :

$$r_K = \frac{\Omega_w \Omega_t}{2\pi\alpha} \exp\left(-\frac{\Delta U}{k_B T}\right) \quad (\text{III.2.1})$$

où Ω_w et Ω_t sont les fréquences d'oscillation au fond d'un puits et en haut de la barrière de potentiel respectivement.

Introduction d'une modulation périodique du potentiel - Une autre méthode pour induire des transitions entre les puits de potentiel consiste à diminuer et augmenter, périodiquement dans le temps, la hauteur de la barrière de potentiel. Ceci peut être réalisé en ajoutant un potentiel périodique dans le temps (de période $\tau = 2\pi/\Omega$) qui creuse un puits et relève l'autre alternativement (voir le cycle du potentiel total sur la figure III.2.1).

Dans cette situation, la modulation périodique du potentiel tend à induire une transition de la particule du puits de droite vers le puits de gauche tous les τ et du puits de gauche vers le puits de droite tous les τ . Ainsi le processus induit-il une transition d'état déterministe du système tous les $\tau/2$, donc avec une fréquence

$$r_{\text{mod}} = \Omega/\pi . \quad (\text{III.2.2})$$

Amplification assistée par le bruit de la réponse du système à une excitation périodique

Les deux perturbations introduites ci-avant permettent d'induire des transitions entre les états métastables. Ces transitions sont de natures différentes. En effet, dans le cas du bruit, les transitions ont l'inconvénient de se produire de façon aléatoire mais ont l'avantage d'avoir lieu (en principe) pour un niveau quelconque de bruit car il existe toujours des fluctuations larges (mais éventuellement rares) qui les induisent. Au contraire, dans le cas de la modulation de potentiel périodique, les transitions sont déterministes, mais dans une situation où l'excitation est adiabatique¹ et en l'absence de bruit, les transitions interpuits ne sont effectivement possibles que si la modulation a une amplitude suffisante pour détruire complètement la barrière de potentiel. Nous allons voir maintenant que l'on peut combiner les deux effets pour tirer parti de leurs avantages en minimisant leurs inconvénients.

Nous nous plaçons dans le cadre du potentiel bistable en présence des deux perturbations décrites ci-dessus, dans le cas où l'amplitude de la modulation de potentiel est trop faible pour induire seule des transitions d'état de la particule. Ceci correspond au cycle de la figure III.2.1. En fait, nous nous intéressons ici à la réponse du système (*i.e.* à la fréquence des transitions d'état) à une faible excitation périodique extérieure (modulation du potentiel) en fonction du niveau de bruit. Nous décrivons à présent le comportement du système non linéaire.

Bruit faible - Dans le cas où le bruit est faible, le système ne peut répondre à l'excitation périodique, qui n'induit pas seule des transitions interpuits. En fait, des transitions peuvent avoir lieu essentiellement quand la barrière de potentiel est au plus bas mais celles-ci sont très rares et aléatoires. Les transitions n'ont rien de périodique et en particulier n'ont pas de composante à la fréquence excitatrice.

Bruit fort - Au contraire, dans une situation où le niveau de bruit dans le système est important, les transitions interpuits sont très fréquentes et ici encore complètement aléatoires. Les fluctuations d'énergie de la particule sont si importantes que cette dernière ne perçoit pas la modulation périodique du potentiel de confinement. Il s'ensuit que malgré de nombreuses transitions, la réponse du système à la fréquence de la modulation excitatrice est très faible.

Bruit synchronisé - Dès lors, le cas le plus intéressant est celui d'un bruit intermédiaire. Supposons que les taux de transition indépendants dus, d'une part au bruit et d'autre part à la modulation périodique de potentiel, soient du même ordre de grandeur. Dans ce cas, les deux phénomènes induisant des transitions "travaillent ensemble". Ainsi, à chaque fois que la barrière de potentiel est abaissée (facilitant le passage de la particule d'un puits à l'autre), exactement une fluctuation aléatoire (en moyenne) induit la transition. Dans une image physique simple, on peut dire qu'il y a *synchronisation* des transitions induites d'une part par le bruit et d'autre part par la modulation de potentiel. Une amplification de la réponse du système à l'excitation périodique,

¹C'est à dire que la modulation est très lente devant la période d'oscillation au fond d'un puits et devant le temps de relaxation dû à la friction.

résonante en fonction du niveau de bruit, est alors attendue lorsque la condition de synchronisation²

$$r_K \simeq \Omega/\pi \quad (\text{III.2.3})$$

est vérifiée. Ce phénomène est appelé *résonance stochastique*.

La figure III.2.2 illustre ce phénomène dans les trois régimes que nous avons distingués ci-dessus.

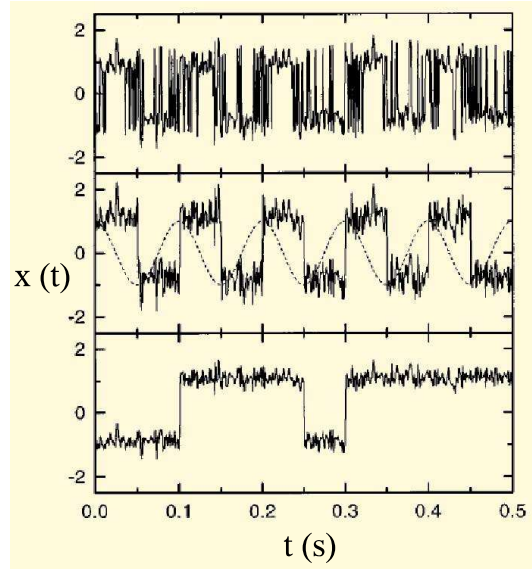


Figure III.2.2: Synchronisation du bruit et de la modulation de potentiel dans le modèle de la particule brownienne dans un potentiel bistable. Les trois figures représentent la position de la particule en fonction du temps dans le système modèle (voir page 164 et figure III.2.1) pour trois niveaux de bruit différents. Haut : bruit fort; les transitions sont fréquentes, aléatoires et totalement désynchronisées de la modulation de potentiel. Milieu : bruit synchronisé; les transitions induites par le bruit sont synchronisées avec la modulation de potentiel (représentée en unités arbitraires par la ligne interrompue). Bas : bruit faible; les transitions sont rares et ne suivent pas la modulation du potentiel. Figure reproduite de Gammaioni *et al.* [20].

Afin de caractériser plus précisément la réponse du système à l'excitation périodique, on a l'habitude de décomposer la trajectoire de la particule en série de Fourier temporelle. L'intensité de la réponse (à la fréquence Ω) est alors la norme de la composante $\bar{x} = |\hat{x}(\Omega)|$ de fréquence Ω dans cette série de Fourier. La figure III.2.3 donne $\bar{x}$ en fonction du niveau de bruit pour trois amplitudes différentes de la modulation de potentiel. On obtient une courbe en cloche caractéristique du phénomène de résonance stochastique. La réponse du système

²Bien sûr, *stricto sensu*, "synchroniser" un phénomène aléatoire à quoi que ce soit (ici une excitation périodique) n'a aucun sens. Dans ce cadre, "synchroniser" signifie que les taux de transition, dus au bruit (r_K) d'une part et à la modulation de potentiel (Ω/π) d'autre part, sont égaux. Ainsi, à la résonance stochastique, ces sauts sont, en moyenne, induits simultanément par les deux phénomènes qui s'amplifient alors.

est très faible pour des niveaux de bruits faibles ou forts et présente un comportement résonant lorsque la condition de synchronisation (III.2.3) est réalisée [20]. Dans ce cas, c'est la présence de bruit (à un niveau optimum) qui induit une amplification résonante de la réponse du système à l'excitation périodique.

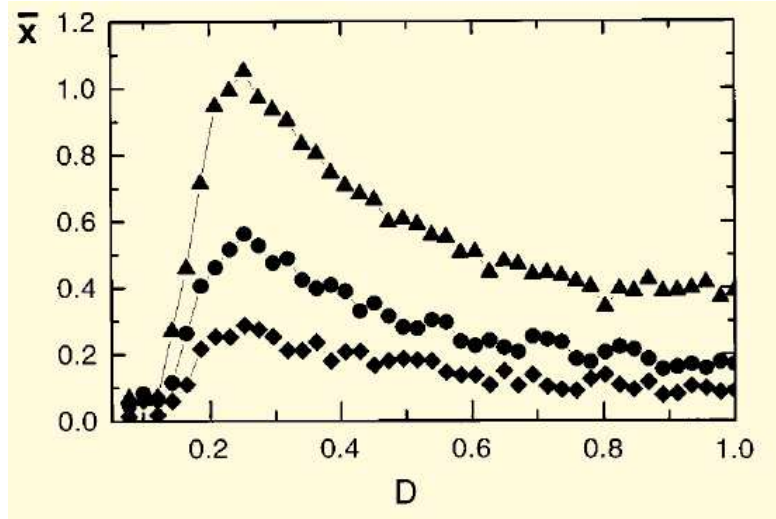


Figure III.2.3: Réponse $\bar{x}$ du système modèle (voir page 164 et figure III.2.1) à une excitation (modulation de potentiel) périodique en fonction du niveau de bruit ($D = k_B T$). Les trois types de points (triangles, cercles, carrés) correspondent à une amplitude décroissante de l'excitation périodique. La courbe en forme de cloche obtenue est caractéristique de la résonance stochastique. Figure reproduite de Gammaitoni *et al.* [20].

Remarque: Dans une étude plus quantitative, Fox et Lu [188] ont montré que la “vraie” condition de synchronisation doit être corrigée par un facteur dépendant du rapport de la hauteur de la barrière de potentiel (ΔU) au niveau de bruit ($k_B T$) :

$$r_K = \frac{\Omega}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\Delta U}{k_B T} - 1 \right)}. \quad (\text{III.2.4})$$

Néanmoins, cette correction n'est pas très pertinente ici, car dans le système que nous avons étudié (réseau optique dissipatif), le mécanisme de refroidissement Sisyphe ne permet pas de contrôler facilement le rapport $\frac{\Delta U}{k_B T}$ qui est fixé et de l'ordre de 1 (I.1.49), ce qui conduit à une correction également de l'ordre de 1.

Le cadre-modèle que nous avons décrit dans ce paragraphe montre clairement que contrairement à ce que l'on pourrait croire, l'existence d'un bruit important dans un système physique non linéaire peut permettre une réponse efficace du système à une excitation périodique extérieure trop faible en l'absence de bruit. Le phénomène de résonance stochastique est très contre-intuitif et frappant. Comme nous l'évoquons dans le paragraphe suivant, ce phénomène a été effectivement observé dans des systèmes très différents, au point qu'il est devenu véritablement un nouveau paradigme en physique non linéaire.

2.1.2 Exemples de systèmes réalisant une résonance stochastique

Le modèle générique du paragraphe précédent permet de modéliser (parfois de façon simpliste) un certain nombre de systèmes physiques. Notons qu'il existe aussi des modèles donnant lieu à un phénomène de résonance stochastique formés par exemple d'un puits unique [189]. D'une manière générale, le système le plus simple consiste en deux états séparés par une barrière de potentiel en présence d'une excitation périodique et de bruit [190]. Nous nous contentons d'évoquer dans ce qui suit quelques exemples de systèmes où la résonance stochastique joue un rôle important.

Paléontoclimatologie - L'idée que l'introduction de bruit peut amplifier la réponse d'un système à une faible excitation périodique fut introduite au début des années 1980, indépendamment par Benzi *et al.* [191, 192] et par C. Nicolis and G. Nicolis [193, 194] pour expliquer les variations abruptes du climat de la Terre et notamment la résurgence périodique des âges glaciaires terrestres. Ceux-ci apparaissent en effet régulièrement avec une période qui ne correspond qu'à celle des très faibles variations des paramètres orbitaux de la Terre. Celles-ci étant trop faibles pour expliquer le phénomène, les auteurs ont pris en compte l'influence du bruit correspondant aux variations de climat quotidiennes et annuelles. Ce modèle, bien qu'encore débattu aujourd'hui [195-198], explique le phénomène par l'implication d'une résonance stochastique.

Neurobiologie - Les neurones récepteurs sont des systèmes tout à fait adaptés à la résonance stochastique car ils fonctionnent sur deux états (repos et fonctionnement) dont l'activation est assurée par l'introduction d'un stimulus au dessus d'un certain seuil [199]. Ce sont par ailleurs des systèmes intrinsèquement bruités [17]. L'activation résonante de neurones en réponse à un stimulus périodique pour un niveau de bruit déterminé a été étudiée dans divers systèmes. Citons en particulier l'appareil mécano-récepteur d'une écrevisse [200] ou la perception d'images par le cerveau humain [201, 202].

Applications technologiques - La résonance stochastique a encore été observée dans des systèmes bistables variés, en électronique dans un Trigger de Schmitt [203] et dans des jonctions de Josephson [204, 205], et en optique dans des lasers bistables [206, 207].

D'une manière générale, un appareil de mesure fonctionne au dessus d'un certain seuil de fonctionnement. L'effort, généralement difficile et coûteux, pour diminuer le bruit et réduire ce seuil pourrait être utilement contourné par une exploitation du phénomène de résonance stochastique [208].

2.2 Cadre général de notre étude

Nous nous tournons à présent vers l'étude de la résonance stochastique dans un réseau optique dissipatif, dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin. Pour cela, nous allons chercher à caractériser l'influence des processus dissipatifs (bruit) sur l'excitation des modes de propagation [III.1]. Comme nous l'avons vu, cette excitation est induite par une modulation

de potentiel et est assistée par les processus dissipatifs. C'est donc un bon candidat à l'observation de la résonance stochastique.

2.2.1 Mouvement hamiltonien et processus dissipatifs dans un réseau optique

Après la phase de refroidissement qui conduit à une température cinétique inférieure à la profondeur du potentiel, les atomes sont piégés dans les puits de potentiel. Nous distinguons alors deux composantes de la dynamique atomique, le mouvement hamiltonien d'une part et les processus dissipatifs d'autre part. Rappelons les brièvement.

- Le mouvement hamiltonien consiste en des oscillations périodiques autour du centre des puits de potentiel. Nous rappelons que dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin, les directions principales d'oscillation coïncident avec les axes de coordonnées et que la fréquence des oscillations dans la direction μ , $\Omega_\mu/2\pi$, est donnée par les formules (.B.7). Dans la direction x et pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$, nous avons [I.1.2.2]

$$\Omega_x = 4 \sin(\theta) \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R} . \quad (\text{III.2.5})$$

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas où $\theta = 30^\circ$.

- Les processus dissipatifs correspondent, quant à eux, à des transitions interpuits aléatoires. En effet, le pompage optique induit des sauts quantiques aléatoires entre les différents états atomiques internes. Ces sauts changent la surface de potentiel vue par l'atome, et donc son énergie totale, de manière instantanée à l'échelle temporelle du mouvement de l'atome. Or pour la transition $1/2 \rightarrow 3/2$, un site de piégeage atomique (par exemple $x = y = z = 0$ pour $|g, -\rangle$) sur l'une des surfaces de potentiel correspond à une colline de potentiel sur l'autre état (voir par exemple les figures II.2.2). Ainsi, $\gamma_{\pm, \mp}$ représente approximativement le taux d'échappement d'un site de piégeage. C'est en effet un processus de pompage optique de $|g, \pm\rangle$ vers $|g, \mp\rangle$ qui induit la diffusion spatiale du nuage atomique [52], comme nous l'avons discuté au paragraphe II.2.1.1³.

Dans les mêmes conditions que pour l'équation (III.2.5) et dans l'approximation semi-classique, le taux de pompage optique de l'état $|g, \pm\rangle$ vers l'état $|g, \mp\rangle$ moyenné sur la position de l'atome s'écrit, d'après la formule (I.2.43b) et la référence [73]

$$\gamma_{\pm, \mp} \simeq \frac{4\Gamma'_0}{9} \left\{ \overline{\cos^2(2\pi\hat{x}) + \cos^2(2\pi\hat{y})} \right\} \quad (\text{III.2.6})$$

où $\hat{\mu} = \mu/\lambda_\mu$, avec $\mu \in \{x, y, z\}$, sont les coordonnées de la position de l'atome en unités de période spatiale du réseau dans la direction correspondante et $\overline{(\cdot)}$ représente la moyenne spatiale uniforme.

³Notons que pour une transition réelle $J_g \rightarrow J_g + 1$ avec $J_g > 1/2$, cette propriété est plus discutable car les sites de piégeage sur les potentiels U_0 et U_1 sont disposés aux mêmes points (voir les figures I.2.1 et .B.3). Néanmoins un site de piégeage fort sur U_0 correspond à un site de piégeage plus faible sur U_1 de sorte que $\gamma_{0,1}$ doit fournir, à un facteur numérique près, un ordre de grandeur assez raisonnable du taux d'échappement d'un puits de potentiel [53].

Comme nous l'avons justifié au chapitre I.1, les échelles de temps relatives de l'évolution hamiltonienne et des effets dissipatifs dépendent des paramètres du réseau. Dans le régime sautant ($\Gamma'_0 \gg \Omega_x$), les effets dissipatifs dominent la dynamique atomique, de sorte qu'un atome subit plusieurs cycles de pompage optique au cours d'une seule oscillation dans un puits de potentiel. Dans le régime oscillant ($\Omega_x \gg \Gamma'_0$), au contraire, la dynamique est dominée par le mouvement hamiltonien et un atome effectue plusieurs oscillations dans un puits de potentiel avant d'être pompé optiquement vers un nouvel état interne. Dans les réseaux optiques de type lin $\perp$ lin [I.1.2.2], $\Delta'_0 \propto I_L/\Delta$ et $\Gamma'_0 \propto I_L/\Delta^2$, où I_L est l'intensité d'un faisceau laser. Ainsi, il est facile de faire varier indépendamment les temps typiques de l'évolution hamiltonienne ($2\pi/\Omega_x$) et des processus dissipatifs ($1/\gamma_{\pm,\mp}$) dans un large domaine de paramètres. Ceci va nous permettre d'étudier précisément l'influence du niveau de bruit sur la dynamique atomique.

2.2.2 Conditions de l'étude

Excitation des modes de propagation

Dans toute la suite de ce chapitre, nous ne considérerons que des situations dans lesquelles les modes de propagation Brillouin dans la direction transverse x , $\mathcal{M}_x^\pm$, sont excités de façon résonante. Plus précisément, nous nous plaçons dans la configuration décrite à la figure III.1.1 avec une sonde parallèle ($E_{||}$) [III.1.2] et avec un désaccord sonde-réseau $\delta = \Omega_x$ [III.1.3]. Rappelons que dans ce cas seuls les modes de la direction x sont excités de façon résonante. Le nuage d'atomes se sépare alors en trois modes. Le premier correspond à des atomes piégés dans les puits de potentiel du réseau immobile et qui ne sont pas sensibles à la modulation de potentiel en mouvement, alors que les deux autres correspondent aux atomes en mouvement le long des modes de propagation à la vitesse v_{Bx} selon respectivement $+x$ et $-x$. Ces modes ne sont pas indépendants. Il y a en effet des transferts de population entre ceux-ci, dus principalement aux forces non-hamiltoniennes subies par les atomes et liés aux cycles de pompage optique et de fluorescence, aléatoires dans le temps.

Simulations numériques

Notre analyse théorique est menée à l'aide de simulations numériques de type Monte-Carlo semi-classiques [I.2.3] comme dans le chapitre III.1. Nous considérons le cas d'une transition théorique $1/2 \rightarrow 3/2$ qui fournit d'excellents résultats qualitatifs et permet d'effectuer des calculs analytiques [21, 30] (notamment pour les déterminations de Ω_x (III.2.5) et de $\gamma_{\pm,\mp}$ (III.2.6)). Par ailleurs, nous restreignons le mouvement des atomes au plan $y = 0$ afin de limiter les temps de calculs [I.2.3.4]. Nous nous attendons à ce que les résultats présentés ci-après restent valables dans les situations expérimentales réalistes (transition $J_g \rightarrow J_g + 1$ avec $J_g > 1/2$ et configuration 3D) avec éventuellement des facteurs multiplicatifs associés, d'une part à la transition atomique et d'autre part à la structure du nuage atomique dans la direction y (voir aussi la discussion à la fin du paragraphe [III.2.3.2]). En effet :

- Dans le cadre général des réseaux optiques en configuration lin $\perp$ lin et pour une transition quelconque [B.2.1], l'expression (III.2.5) de Ω_x reste valable. Par ailleurs, d'après

la formule (I.2.38b), le taux de départ d'un état interne moyenné sur la position reste strictement proportionnel à Γ'_0 , dépend de la transition mais est indépendant des autres paramètres du réseau comme θ et Δ .

- Les calculs 2D permettent de considérer le mouvement le long de x (direction des modes de propagation excités) et aussi selon z , de manière à prendre en compte les échappements éventuels dans une direction orthogonale. Les caractéristiques générales des simulations 2D ont été discutées au paragraphe I.2.3.4.

2.3 Manifestation macroscopique de la résonance stochastique

2.3.1 Accroissement résonant de la diffusion spatiale

Comme nous l'avons précisément décrit au chapitre précédent, l'excitation des modes de propagation peut être décelée par l'étude de la diffusion spatiale. Nous avons en effet montré [III.1.3] que le coefficient de diffusion spatiale D_{sx} dans la direction x présente un maximum piqué en fonction du désaccord sonde-réseau δ pour la valeur correspondant à la résonance Brillouin ($\delta = \Omega_x$). Par contre les coefficients D_{sy} et D_{sz} ne présentent aucun accroissement résonant pour $\delta = \Omega_x$ [97]. Rappelons qu'ici nous nous plaçons à la résonance Brillouin, de sorte que nous optimisons cet accroissement de D_{sx} . Nous avons aussi montré [III.1.1.2] que le mécanisme de propagation implique à la fois le mouvement hamiltonien (une demi-oscillation dans un puits de potentiel) et des processus dissipatifs (un cycle de pompage optique). Il semble donc clair qu'en changeant l'importance de l'un de ces phénomènes par rapport à l'autre, l'efficacité de l'entraînement des atomes le long du mode devrait être modifiée. Nous avons réalisé une étude de la diffusion spatiale du nuage d'atomes dans le réseau en fonction de l'importance du bruit (proportionnel au taux de pompage optique Γ'_0) pour des paramètres du mouvement hamiltonien fixés (déplacement lumineux par onde Δ'_0 et angle θ constants). Dans le domaine de paramètres considéré, nous avons trouvé une diffusion spatiale de type normale (correspondant à un accroissement linéaire de $\overline{r_\mu^2(t)}$, voir l'équation (II.2.26)) et en avons déduit les coefficients de diffusion spatiale. Les résultats pour D_{sx} et D_{sz} sont portés sur la figure III.2.4.

D'une manière générale, $D_{s\mu}$ décroît de façon monotone lorsque Γ'_0 augmente. Ce comportement est en bon accord avec le modèle de marche aléatoire que nous avons décrit en détail au paragraphe II.2.1.1 pour les deux directions x et z . Nous le rappelons brièvement : un atome est piégé dans un puits de potentiel pendant un temps typique égal à l'inverse du taux d'échappement du puits $\tau_{\text{esc}} \sim 1/\Gamma'_0$ et pendant un saut, il voyage à la vitesse typique $\bar{v} = \sqrt{2E_K/M}$ (où E_K est l'énergie cinétique moyenne du nuage, $E_K \sim \hbar|\Delta'_0|$) pendant un temps typique égal au temps moyen de pompage optique, $\tau_{\text{flight}} \sim 1/\Gamma'_0$. Ainsi, le coefficient de diffusion spatial dans le réseau seul (en l'absence de sonde et donc, en l'absence d'excitation des modes de propagation) se comporte comme $D_{s\mu} \sim \frac{\hbar}{M} \frac{|\Delta'_0|}{\Gamma'_0}$ [52].

En plus de ce comportement général de $D_{s\mu}$ en fonction de Γ'_0 , nous trouvons que D_{sx} présente un pic étroit pour une valeur bien définie de Γ'_0 ($\Gamma'_0 \simeq 13\omega_R$ pour les paramètres

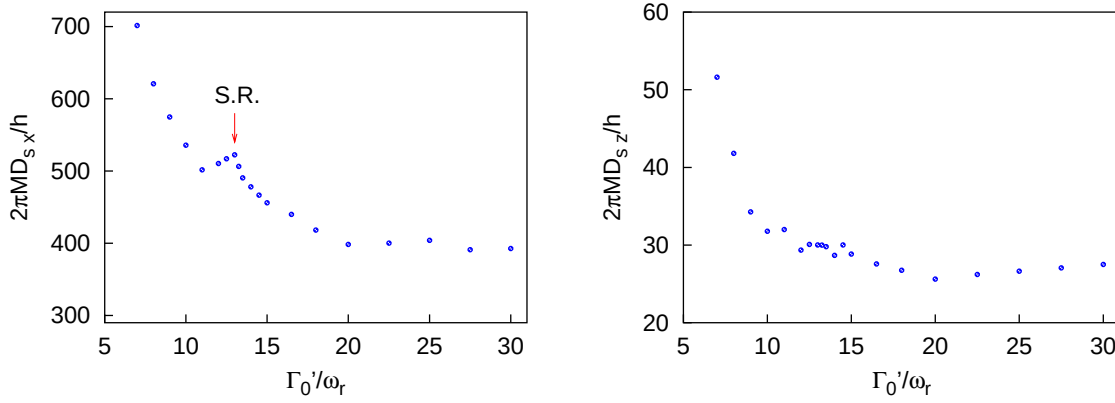


Figure III.2.4: Résultats des simulations numériques pour les coefficients de diffusion spatiale dans les directions x (D_{sx} , Gauche) et z (D_{sz} , Droite) en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 pour un déplacement lumineux par onde fixé $\Delta'_0 = -200\omega_R$ et un angle de $\theta = 30^\circ$. On note la présence d'une résonance sur la figure de gauche, correspondant à la résonance stochastique (S.R.).

correspondant à la figure III.2.4). Notons par contre qu'aucun pic n'est observé sur la courbe de D_{sz} en fonction de Γ'_0 . Cette propriété correspond à un accroissement du coefficient de diffusion spatiale dans la direction où les modes de propagation sont excités. Nous interprétons ce phénomène comme l'excitation résonante des modes de propagation Brillouin dans la direction x par la modulation de potentiel en mouvement induite par l'introduction du faisceau (P) dans le réseau (voir la figure III.1.1). Ceci sera démontré en détail au paragraphe I.2.4.1. Notons que cette nouvelle résonance (en fonction de Γ'_0) n'a rien à voir avec la résonance Brillouin (en fonction de δ) dont la condition (III.1.8) est toujours vérifiée ici. Le point clef est que cet accroissement de D_{sx} est obtenu pour un niveau de bruit particulier, et nous interprétons le phénomène comme la réalisation d'une résonance stochastique [97].

2.3.2 Caractérisation de la résonance stochastique

Nous cherchons dans ce paragraphe à caractériser les propriétés de la résonance de D_{sx} en fonction de Γ'_0 en présence d'une sonde à la résonance Brillouin.

Facteur d'accroissement de la diffusion spatiale en présence d'une sonde

Afin de caractériser l'influence spécifique de l'excitation des modes de propagation sur le pic de diffusion spatiale dans la direction x , nous introduisons le facteur d'accroissement du coefficient de diffusion spatiale le long de x calculé d'une part avec une sonde à la résonance Brillouin ($\delta = \Omega_x$) D_{sx} et d'autre part avec une sonde loin de la résonance Brillouin D_{sx}^0 [97] :

$$\xi = \frac{D_{sx} - D_{sx}^0}{D_{sx}^0} . \quad (\text{III.2.7})$$

Ici, D_{sx}^0 est calculé typiquement pour $\delta \simeq 100\Omega_x$. Nous traçons sur la figure III.2.5 le facteur ξ en fonction du niveau de bruit pour une valeur fixée de la profondeur du potentiel optique et pour différentes profondeurs de la modulation de potentiel en mouvement induite par l'introduction de la sonde.

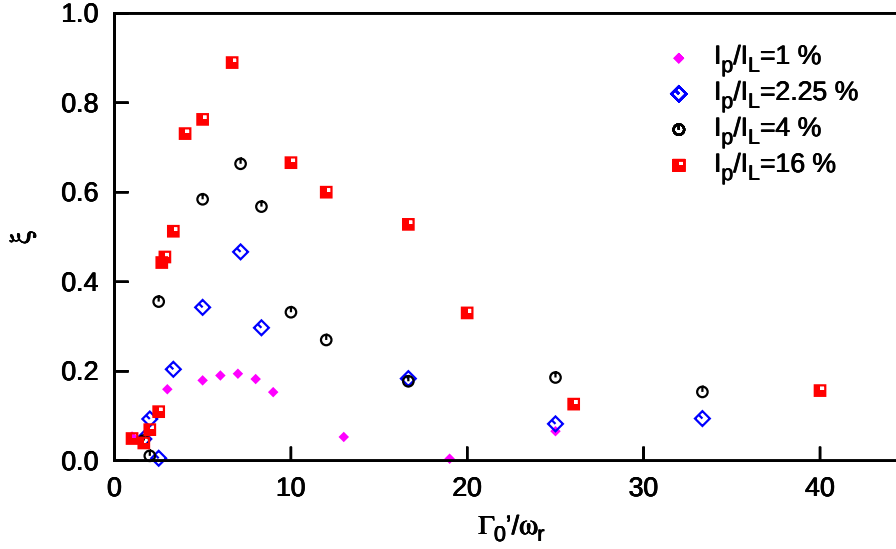


Figure III.2.5: Résultats numériques pour le facteur d'accroissement ξ de la diffusion spatiale dans la direction x , en fonction du taux de pompage optique, pour une valeur fixée de la profondeur du potentiel optique. Les quatre séries de points correspondent à des intensités I_P différentes du faisceau sonde P en unité de l'intensité d'un faisceau du réseau I_L , c'est à dire à des profondeurs différentes de la modulation de potentiel en mouvement. Les paramètres de la simulation sont : $\Delta'_0 = -50\omega_R$ et $\theta = 30^\circ$.

Les résultats de la figure III.2.5 montrent que ξ est une fonction non monotone de la quantité de bruit Γ'_0 dans le réseau. Pour un faible niveau de bruit, ξ est une fonction croissante de Γ'_0 , puis ξ atteint un maximum en $(\Gamma'_0)_{SR}$ et décroît finalement lorsque Γ'_0 augmente aux grandes valeurs du bruit. Ainsi, il y a une valeur spécifique du niveau de bruit pour laquelle l'excitation des modes de propagation Brillouin est résonante. Nous interprétons cette propriété par l'existence d'une résonance stochastique [20], [III.2.1]. Celle-ci correspond à la synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs dans le réseau [99]. Dans notre cas, le taux de pompage optique augmente la réponse (excitation des modes de propagation, diffusion spatiale) du système non linéaire (atomes dans le réseau optique) au faible signal excitateur (modulation de potentiel en mouvement à la résonance Brillouin). Nous vérifions que le pic pour ξ (figure du type III.2.5) correspond précisément au pic observé pour D_{sx} (figure du type III.2.4) et en déduisons que l'accroissement résonant de la diffusion spatiale pour $\Gamma'_0 = (\Gamma'_0)_{SR}$ est dû à l'excitation résonante des modes de propagation pour un niveau de bruit particulier.

La figure III.2.5 montre aussi clairement que l'amplitude de la courbe en forme de cloche de ξ en fonction de Γ'_0 augmente avec la profondeur de la modulation de potentiel en

mouvement (c'est à dire avec I_P/I_L). Cette propriété s'explique simplement par le fait qu'une profondeur plus importante de la modulation de potentiel en mouvement permet d'emmener des atomes initialement moins énergétiques (et donc initialement mieux localisés au fond des puits), de sorte que le nombre d'atomes emmenés par la modulation est plus grand. Nous trouvons par ailleurs que la position de la résonance stochastique, $(\Gamma'_0)_{\text{SR}}$, est indépendante du rapport I_P/I_L . Ceci indique que la condition de résonance ne fait intervenir que les caractéristiques du réseau et non celles de la modulation de potentiel excitatrice. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant. Il convient néanmoins de noter que des calculs effectués avec des rapports I_P/I_L , soit très grands, soit très faibles mettent en évidence une dépendance de $(\Gamma'_0)_{\text{SR}}$ avec I_P/I_L . En fait, pour de faibles valeurs de I_P/I_L , les modes de propagation sont faiblement excités et ne font intervenir que les atomes initialement très énergétiques dans le réseau optique. Il s'ensuit que les paramètres effectifs du réseau sont modifiés. En particulier, les effets d'anharmonicité du potentiel donnent à la fréquence de vibration au fond des puits dans la direction x , $\Omega_x/2\pi$, une valeur plus faible que celle donnée par la formule (III.2.5). Au contraire, pour des valeurs importantes de I_P/I_L , le système d'atomes dans le réseau immobile est très perturbé et les atomes ont une dynamique fortement modifiée à tel point que le mouvement hamiltonien dans la direction x n'est plus caractérisé par la fréquence $\Omega_x/2\pi$.

Pour finir, il convient de remarquer que le système considéré ici présente une particularité importante par rapport au modèle générique considéré dans la plupart des études sur la résonance stochastique [20], [III.2.1.1]. La résonance stochastique est généralement comprise comme l'amplification induite par le bruit d'un faible signal périodique de fréquence bien inférieure aux temps typiques d'évolution (oscillations et éventuelle relaxation) des particules piégées dans des puits adjacents de potentiel. Au contraire dans notre cas, la fréquence d'oscillation dans les puits de potentiel est précisément égale à la fréquence du signal exciteur, de sorte que le bruit est aussi synchronisé avec le mouvement atomique dans un puits. Ce scénario correspond en fait à ce que l'on appelle un phénomène de *résonance stochastique non-conventionnelle* [209].

Condition de synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs

Afin de comprendre plus précisément le phénomène de résonance de l'excitation des modes de propagation en fonction du niveau de bruit dans le réseau optique, reprenons le mécanisme de propagation le long d'un mode Brillouin [III.1.1.2] (voir la figure III.1.1). Un tel processus fonctionne clairement mieux lorsqu'exactly un cycle de pompage optique a lieu à chaque fois que l'atome s'approche du point de croisement des deux courbes de potentiel optique du réseau immobile U_+ et U_- . Si nous prenons à présent en compte la vitesse d'un atome dans un mode Brillouin, $v_{Bx} = \Omega_x/k_x$ (voir l'équation (III.1.1)), un tel cycle de pompage optique doit avoir lieu tous les $\Delta t = \pi/\Omega_x$. Nous savons par ailleurs que le temps moyen séparant deux cycles de pompage optique vaut $1/\gamma_{\pm,\mp}$. Ainsi, nous nous attendons à ce que la résonance stochastique se produise lorsque les deux phénomènes sont synchronisés, c'est à dire lorsque $\pi/\Omega_x \simeq 1/\gamma_{\pm,\mp}$ (condition (III.2.3)). Finalement, en injectant les formules (III.2.5) et (III.2.6) dans la relation précédente, nous obtenons la

condition de synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin :

$$(\Gamma'_0)_{\text{SR}} = \frac{9 \sin(\theta) \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R}}{\pi \left(\cos^2(2\pi\hat{x}) + \cos^2(2\pi\hat{y}) \right)} . \quad (\text{III.2.8})$$

Pour des valeurs du niveau de bruit inférieures à $(\Gamma'_0)_{\text{SR}}$, le taux de pompage optique est trop lent ($\Gamma'_0 \ll (\Gamma'_0)_{\text{SR}}$) pour permettre aux atomes de franchir la barrière de potentiel à chaque fois qu'ils atteignent le point de croisement des potentiels optiques U_+ et U_- . Au contraire, lorsque les phénomènes dissipatifs sont trop importants ($\Gamma'_0 \gg (\Gamma'_0)_{\text{SR}}$) le mouvement hamiltonien est brisé par les nombreux cycles de pompage optique de sorte qu'un atome ne peut pas suivre efficacement la modulation de potentiel en mouvement qui cherche à l'entraîner.

Mise en évidence de la résonance stochastique

Nous cherchons à présent à vérifier la condition de synchronisation (III.2.8) que nous avons établie théoriquement au paragraphe précédent. Pour cela, nous avons déterminé le facteur ξ d'accroissement du coefficient de diffusion spatiale le long de x en fonction du taux de pompage optique pour différentes valeurs de la profondeur du potentiel optique du réseau Δ'_0 . Nous obtenons des résultats semblables à ceux qui sont portés sur la figure III.2.5 dont nous tirons la dépendance de la position de la résonance stochastique, $(\Gamma'_0)_{\text{SR}}$, en fonction de Δ'_0 dans un large domaine de valeurs de Δ'_0 . Les résultats de nos simulations ainsi que le tracé de la prévision théorique (III.2.8) sont rassemblés sur la figure III.2.6. L'équation (III.2.8) est tracée pour le système bidimensionnel correspondant à nos simulations pour lequel $\cos^2(2\pi\hat{x}) + \cos^2(2\pi\hat{y}) = 3/2$. Noter qu'aucun paramètre d'ajustement n'a été introduit.

Nous obtenons un excellent accord qualitatif mais aussi quantitatif entre les résultats des simulations numériques et le calcul théorique du paragraphe précédent. Nous en déduisons que la résonance observée sur les figures III.2.4 et III.2.5 correspond au phénomène de résonance stochastique pour lequel les effets dissipatifs (cycles de pompage optique) et le mouvement hamiltonien (demi-oscillations dans les puits de potentiel) des atomes, en mouvement selon un mode de propagation du réseau 3D-lin $\perp$ lin sont précisément synchronisés.

Des résultats similaires sont attendus dans des configurations entièrement tridimensionnelles ou avec des transitions atomiques de moment angulaire J_g supérieur à 1/2. Dans l'une ou l'autre de ces situations, nous nous attendons néanmoins à ce que le facteur de proportionnalité de $(\Gamma'_0)_{\text{SR}}$ en fonction de $\sqrt{|\Delta'_0| \omega_R}$ apparaissant dans la formule (III.2.8) soit modifié. Dans un cas tridimensionnel, $\hat{y}$ n'est plus fixé à 0, de sorte que la moyenne spatiale du facteur $\cos^2(2\pi\hat{x}) + \cos^2(2\pi\hat{y})$ pourrait être sensiblement différente. Dans la direction x , une moyenne spatiale uniforme est raisonnable car les atomes excités le long des modes de propagation bougent dans cette direction. Par contre la moyenne dans la direction y doit prendre en compte la localisation atomique dans le réseau [52]. En fait, les minima de potentiel correspondent à $\hat{y} \equiv 0 [\pi]$ de sorte que l'on peut supposer légitimement que $\cos^2(2\pi\hat{x}) + \cos^2(2\pi\hat{y})$ ne soit pas si différent de 3/2 dans un réseau 3D. Par contre, l'effet d'une transition $J_g \rightarrow J_g + 1$ pourrait être plus important, mais comme $\Omega_x \sim \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R}$ et

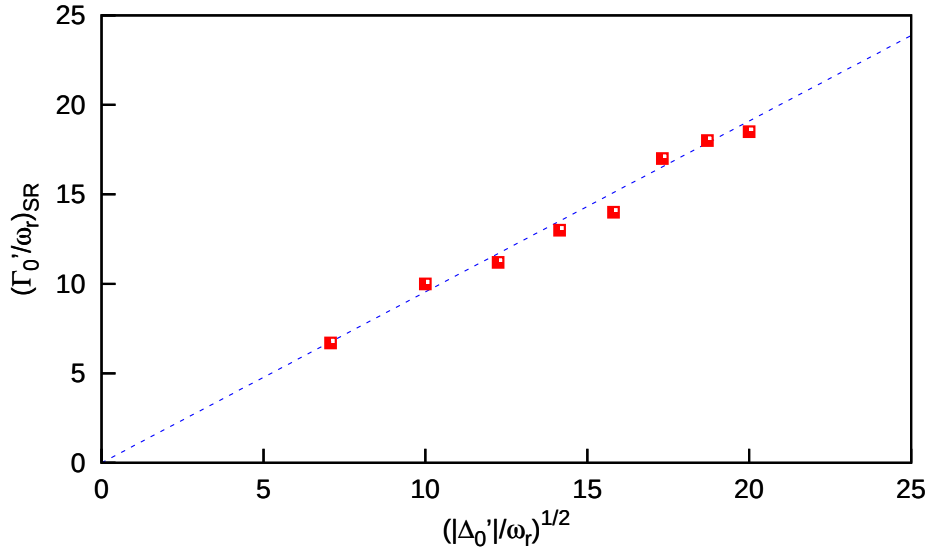


Figure III.2.6: Position de la résonance stochastique en fonction de la racine carrée de la profondeur du potentiel de réseau et comparaison avec la relation de synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs donnée par l'équation (III.2.8). Les paramètres de la simulation sont $\theta = 30^\circ$ et $I_P/I_L = 9\%$.

$\gamma_{j,l} \sim \Gamma'_0$ dans l'approximation adiabatique [I.2.3.2], qualitativement, nos résultats doivent pouvoir s'appliquer directement à des expériences réelles.

2.4 Dynamique microscopique et résonance stochastique

2.4.1 Agglutinement atomique dans un référentiel en mouvement

Nous avons mis en évidence au paragraphe III.2.3 l'implication d'une résonance stochastique dans l'accroissement de la diffusion spatiale dans la direction x correspondant à la direction des modes de propagation excités dans le réseau. Néanmoins, aucune étude détaillée du comportement microscopique des atomes pour un niveau de bruit variable n'a été effectuée jusqu'à présent. En particulier, le problème se pose de savoir si l'on peut donner des preuves directes de l'excitation résonante des modes de propagation pour un niveau de bruit donné. Afin de résoudre cette question, nous allons déterminer la distribution d'atomes dans un mode de propagation en fonction de Γ'_0 . Rappelons que dans la configuration que nous utilisons (configuration $E_{||}$ de la figure III.1.2), deux modulations de potentiel, de période spatiale $\lambda^{(mod)}$ et de vitesse $v^{(mod)}$, emmènent les atomes symétriquement par rapport à l'axe (Oz) dans les directions $\vec{u}^+$ et $\vec{u}^-$. Comme nous l'avons déjà montré au paragraphe III.1.2, la distribution d'atomes est modulée dans chaque modulation de potentiel en mouvement, et en particulier les atomes s'agglutinent autour des minima de potentiel.

Méthode numérique

Nous utilisons ici la même méthode que celle que nous avons décrite en détail au paragraphe III.1.2 pour déterminer la modulation de population atomique $N_x^\pm(u)$ dans un référentiel attaché à un mode de propagation particulier, ici, l'un des modes $\mathcal{M}_x^+$ ou $\mathcal{M}_x^-$. Ici, u est la coordonnée spatiale dans la direction $\vec{u}^\pm$ du mode $\mathcal{M}_x^\pm$. Rappelons brièvement la méthode employée afin de remédier au problème du faible taux de remplissage des réseaux optiques dissipatifs. D'une part, nous intégrons la distribution obtenue dans le temps pour augmenter le nombre effectif d'atomes. Pour cela, le référentiel auquel est attachée la variable de position u est en mouvement solidaire de la modulation de potentiel en mouvement. D'autre part, nous découpons l'espace dans la direction $\vec{u}^\pm$ en cellules élémentaires de longueurs égales à la période spatiale $\lambda^{(\text{mod})}$ de la modulation de potentiel en mouvement, puis nous superposons les contributions de chaque cellule pour obtenir la valeur effective de $N_x^\pm(u)$.

Distribution d'atomes dans le référentiel des modes de propagation

Comme nous l'avons vu précédemment [III.1.2], $N_x^\pm(u)$ résulte de la superposition de trois populations correspondant à des atomes piégés dans le réseau, des atomes en mouvement dans la modulation de potentiel $\vec{u}^\mp$ et aux atomes en mouvement dans la modulation de potentiel $\vec{u}^\pm$. Les deux premières contribuent comme une grandeur uniforme à $N_x^\pm(u)$ car ils sont en mouvement dans le référentiel où $N_x^\pm(u)$ est accumulé. Les atomes du mode $\vec{u}^\pm$, quant à eux, sont approximativement immobiles dans ce référentiel et leur accumulation a pour conséquence d'augmenter l'amplitude de la modulation de $N_x^\pm(u)$. Dans le régime de réponse linéaire du système d'atomes dans le réseau optique, valable pour des profondeurs de modulation de potentiel en mouvement suffisamment faibles (faibles valeurs de I_P/I_L), nous nous attendons à ce que la contribution à $N_x^\pm(u)$ des atomes du mode $\vec{u}^\pm$ soit sinusoïdale comme la modulation de potentiel en mouvement elle-même (voir l'équation (III.1.3)). Nous en déduisons que la distribution d'atomes dans le référentiel en mouvement doit s'écrire :

$$N_x^\pm(u) = C \left[1 + A \sin \left(2\pi \frac{u}{\lambda^{(\text{mod})}} + \varphi \right) \right] . \quad (\text{III.2.9})$$

Ici, l'amplitude A caractérise la fraction d'atomes en mouvement dans le mode de propagation $\vec{u}^\pm$ alors que la phase φ est induite par le retard de la modulation de matière par rapport à la modulation de potentiel d'entraînement. Rappelons que ce retard est lui-même dû au temps de réponse fini des atomes dans un réseau dissipatif, qui induit en particulier le coefficient de friction en régime sautant [I.1.2.3]. Le coefficient $C = \int_0^{\lambda^{(\text{mod})}} \frac{du}{\lambda^{(\text{mod})}} N^\pm(u)$ est déterminé par le nombre total d'atomes utilisé dans les simulations et par la fenêtre temporelle d'intégration. C est donc invariant lorsqu'on ne change que les paramètres du réseau dans les simulations, comme nous l'avons fait pour les résultats présentés ci-après. Nous traçons sur la figure III.2.7 un exemple typique de distribution d'atomes dans le référentiel $\vec{u}^\pm$ ainsi qu'un ajustement de la forme de l'équation (III.2.9) où les paramètres libres sont A et φ . Nous obtenons un excellent accord entre les données numériques et la courbe théorique. Nous trouvons que $\varphi \simeq -2,2$ et dépend peu des paramètres du réseau. Nous reviendrons un peu plus loin sur ce résultat.

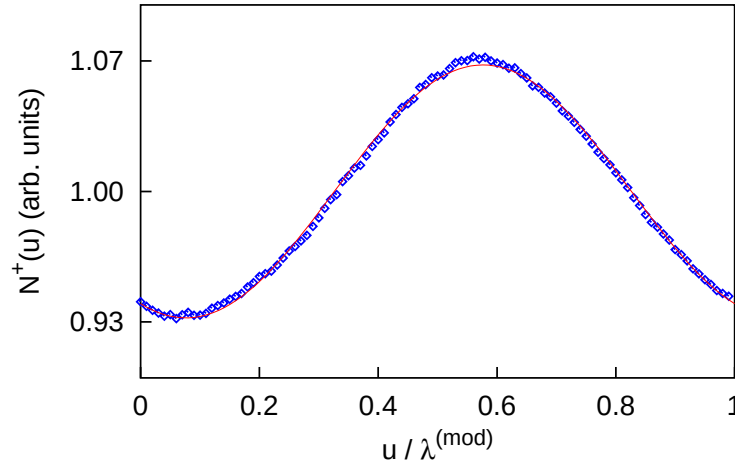


Figure III.2.7: Résultats numériques pour la distribution d'atomes dans le référentiel attaché à la modulation de potentiel en mouvement, et donc au mode de propagation $\mathcal{M}_x^\pm$. Un ajustement numérique de ces données par des équations de la forme (III.2.9) est aussi représenté. Ici, les paramètres de la simulation sont $\Delta'_0 = -50\omega_R$, $\Gamma'_0 = 9\omega_R$, $\theta = 30^\circ$ et $I_P/I_L = 9\%$.

Résonance stochastique sur la fraction d'atomes dans un mode Brillouin

Le résultat du paragraphe précédent va nous être très utile dans la suite car il fournit une méthode directe pour déterminer la fraction d'atomes dans chaque mode de propagation par l'intermédiaire du coefficient A . Nous traçons l'amplitude A de la composante sinusoïdale de $N_x^+(u)$ en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 sur la figure III.2.8.

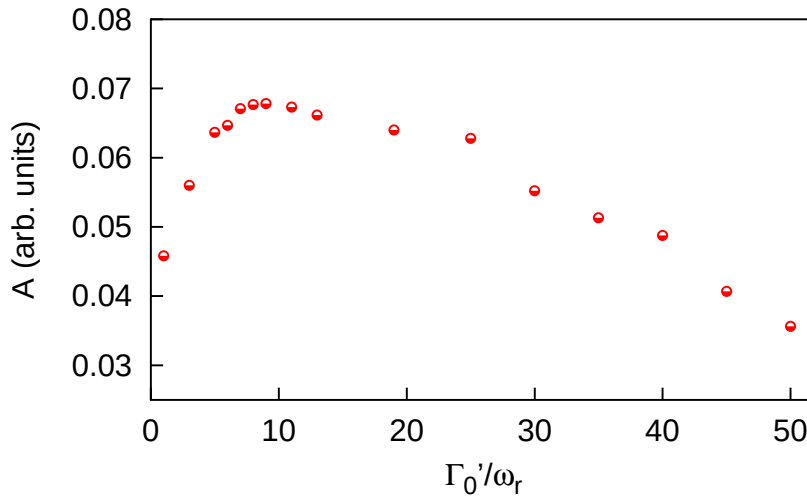


Figure III.2.8: Amplitude de la fraction d'atomes dans un mode de propagation en fonction du taux de pompage optique. Le phénomène de résonance stochastique est clairement visible. Les paramètres de la simulation sont $\Delta'_0 = -50\omega_R$, $\theta = 30^\circ$ et $I_P/I_L = 9\%$.

Nous obtenons une courbe en forme de cloche caractéristique de la résonance stochastique [III.2.1.1]. Ce résultat constitue la première preuve directe sur une grandeur microscopique de l'excitation résonante des modes de propagation Brillouin dans le réseau en fonction du niveau des processus dissipatifs. La position de la résonance $(\Gamma'_0)_{\text{SR}}$ est aussi en bon accord avec les résultats tracés sur la figure III.2.6 et qui correspondent à la résonance observée sur le facteur d'accroissement du coefficient de diffusion spatiale dans la direction x . Ces résultats confirment que l'excitation résonante des modes de propagation Brillouin a lieu lorsque la condition de synchronisation (III.2.8) du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs est vérifiée.

2.4.2 Spectroscopie Brillouin

La méthode spectroscopique

La spectroscopie laser est une méthode générale très puissante et largement utilisée pour sonder les propriétés dynamiques des vapeurs atomiques [210, 211]. Au début des années 1990, plusieurs équipes l'ont adaptée à l'étude de la dynamique microscopique d'atomes froids dans un piège magnéto-optique [212], dans des mélasses optiques [213-215] ou dans des réseaux optiques monodimensionnels [51, 56, 173, 216] puis multidimensionnels [46, 69, 70]. Ces méthodes sont aujourd'hui très bien maîtrisées et sont couramment employées pour l'étude des réseaux optiques dissipatifs dans différentes équipes [217, 180, 31, 218, 219, 88, 178]. En particulier, notre équipe peut justifier d'un long passé d'études très variées [177, 220, 152, 37, 82, 38, 26] menées à l'aide de la méthode de spectroscopie pompe-sonde et sur laquelle nous allons revenir brièvement. Il est dès lors intéressant de se demander si la résonance stochastique peut être observée par l'intermédiaire des spectres pompe-sonde qui semblent plus faciles à exploiter que les mesures directes de diffusion spatiale par exemple.

Nous ne décrivons pas ici le détail des méthodes de spectroscopie pompe-sonde. Nous nous contentons d'en donner les aspects principaux et pertinents pour notre propos et nous renvoyons le lecteur aux références [177, 152] pour de plus amples informations. Pour les réseaux optiques, on utilise les faisceaux du réseau $(L_\mu^\pm)^4$ comme pompe et le faisceau additionnel $(P)^4$ comme sonde. Comme nous l'avons mentionné précédemment [III.1.1.2], l'interférence entre la sonde et les faisceaux de pompe induit une modulation du champ laser en mouvement qui induit à son tour une modulation dépendant du temps de diverses observables du milieu (distribution spatiale, distribution de vitesse, polarisation, etc...). A cause du temps fini de réponse du milieu matériel, ces modulations des observables du milieu ont un retard fini par rapport à la modulation du champ laser. Par suite, la diffraction des faisceaux de pompe sur cette modulation de matière induit une amplification ou une atténuation du faisceau sonde [149]. Les propriétés dynamiques du nuage atomique se retrouvent alors gravées dans la valeur de l'intensité I du faisceau sonde. Il est donc possible de remonter à ces propriétés en analysant le spectre ($I = I(\delta)$) obtenu. On obtient ainsi les modes élémentaires d'excitation du milieu atomique qui apparaissent sous forme de résonances dans $I(\delta)$, dont la position et la largeur sont respectivement liées aux parties réelle et imaginaire de la fréquence propre du mode [221, 222, 179].

⁴Voir la figure III.1.2.

Il est donc clair que l'amplitude des résonances d'excitation dans le spectre dépend à la fois de l'amplitude et de la phase de la modulation des observables en jeu dans les processus de diffusion de la lumière associés à ces résonances. Dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin avec un faisceau sonde aligné le long de l'axe (Oz), le spectre est formé de trois types de résonances :

- les *raies Rayleigh* qui sont reliées aux processus de relaxation pure associés d'une part à la diffusion spatiale et d'autre part à la relaxation de l'énergie cinétique [218, 219, 178, 26].
- les *raies Raman* qui correspondent aux transitions entre les différents niveaux d'oscillation quantifiés dans les puits de potentiel [173].
- les *raies Brillouin* qui sont liées aux modes de propagation discutés dans ce chapitre et le précédent [180].

Dans le cas de la raie Brillouin, l'amplitude de la résonance est donc intimement liée à la distribution d'atomes dans les référentiels en mouvement, que nous avons étudiée au paragraphe III.2.4.1, et particulièrement aux valeurs de A et de φ . En fait, nous avons observé dans les simulations numériques que dans le domaine de paramètres considéré ici, φ ne dépend que faiblement du taux de pompage optique Γ'_0 pour une valeur fixée de Δ'_0 . En effet, l'intervalle $\Delta\varphi$ de valeurs obtenues pour φ ne représente qu'une petite fraction de π ($\Delta\varphi/\pi < 10\%$). Ainsi, l'amplitude de la raie Brillouin caractérise-t-elle essentiellement l'amplitude A de la modulation de matière en mouvement. On s'attend donc à ce que l'amplitude de la résonance Brillouin présente une résonance stochastique [99].

Résultats des simulations

Nous avons réalisé des simulations numériques de spectres pompe-sonde dans le réseau 3D-lin $\perp$ lin pour différentes valeurs du taux de pompage optique Γ'_0 et du déplacement lumineux par onde Δ'_0 , au moyen d'une méthode équivalente à celle que décrit Jean-Yves Courtois dans la référence [149]. Dans le but de déterminer l'amplitude de la résonance Brillouin, nous avons effectué des ajustements des spectres obtenus par des fonctions de la forme

$$I(\delta) = A_e\delta + B_e + A_R \exp \left[-\frac{(\delta - \Omega_R)^2}{2\sigma_R^2} \right] + A_B \exp \left[-\frac{(\delta - \Omega_B)^2}{2\sigma_B^2} \right] \quad (\text{III.2.10})$$

où A_e , B_e , A_R , σ_R , A_B et σ_B sont les paramètres libres. Le terme linéaire $A_e\delta + B_e$ dans l'équation (III.2.10) permet de tenir compte de la très large résonance Rayleigh centrale [178] dans une zone de désaccord δ restreinte au voisinage de la raie Brillouin. Les deux termes gaussiens $\exp \left[-\frac{(\delta - \Omega_\alpha)^2}{2\sigma_\alpha^2} \right]$ décrivent quant à eux les raies Raman (R) et Brillouin (B) centrées respectivement sur les fréquences Ω_R et Ω_B et de demi-largeurs à $1/\sqrt{e}$ respectivement égales à σ_R et σ_B . La justification *ab initio* des formes gaussiennes des raies Raman et Brillouin sort du cadre de cette étude et l'approximation des spectres à l'équation (III.2.10) n'est justifiée que par le fait que les ajustements des résultats numériques sont raisonnablement bons comme le montre l'encart de la figure III.2.9.

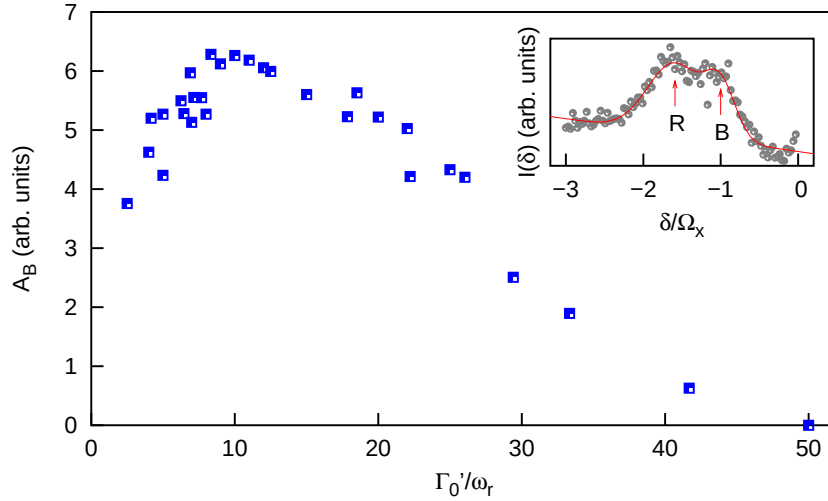


Figure III.2.9: Amplitude de la résonance Brillouin en fonction du taux de pompage optique pour une valeur fixe de la profondeur du potentiel. Les paramètres de la simulation sont les mêmes que pour la figure III.2.8. Encart : Spectre non linéaire pour $\Gamma'_0 = -5.55\omega_R$. Nous avons indiqué par une flèche les positions des résonances Raman (R) et Brillouin (B). Ces résultats sont obtenus par simulations numériques dans un réseau 3D-lin $\perp$ lin dans la configuration de la figure III.1.2.

Nous traçons finalement sur la figure III.2.9 l'amplitude de la résonance Brillouin A_B en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 pour une valeur fixée du déplacement lumineux par onde Δ'_0 . Nous obtenons à nouveau une courbe en forme de cloche caractéristique de la résonance stochastique. Nous obtenons par ailleurs que la position de la résonance, $(\Gamma'_0)_{SR}$, est en bon accord avec la position obtenue d'une part par l'intermédiaire du facteur d'accroissement de la diffusion spatiale [III.2.3.2] et d'autre part par l'intermédiaire des distributions atomiques dans les référentiels en mouvement [III.2.4.1]. Nous en déduisons que les méthodes de spectroscopie pompe-sonde fournissent un nouveau moyen d'observer la résonance stochastique sur les modes de propagation dans un réseau optique dissipatif.

Comparaison des trois méthodes

Nous comparons dans ce paragraphe les courbes en cloche obtenues pour la résonance stochastique par les trois méthodes décrites ci-dessus : diffusion spatiale (figure III.2.5), distribution de position (figure III.2.8), spectroscopie pompe-sonde (figure III.2.9). Comme nous l'avons vu, ces trois méthodes fournissent la même condition de résonance stochastique, correspondant à la formule (III.2.8) et à la figure III.2.6. Les formes des courbes sont néanmoins différentes, notamment en ce qui concerne la décroissance de l'observable en fonction du taux de pompage optique (Γ'_0), au delà du point de résonance $((\Gamma'_0)_{SR})$.

Les courbes correspondant à la distribution de matière (figure III.2.8) d'une part et aux spectres pompe-sonde (figure III.2.9) d'autre part sont très semblables. Ce résultat est naturel car, comme nous l'avons vu précédemment, l'amplitude de la distribution de matière

et l'amplitude de la composante spectrale Brillouin sont essentiellement proportionnelles puisque le déphasage φ de la distribution de matière par rapport à la modulation de champ lumineux induite par l'interférence pompe-sonde ne dépend que très peu de Γ'_0 . Nous attribuons l'observation d'une décroissance légèrement plus rapide sur la courbe de spectroscopie que sur la courbe de distribution de position à deux causes : d'une part à la légère variation du déphasage φ en fonction de Γ'_0 et d'autre part à l'erreur numérique, de plus en plus importante lorsque la composante spectrale Brillouin diminue, lors de l'ajustement des spectres par des formules du type (III.2.10).

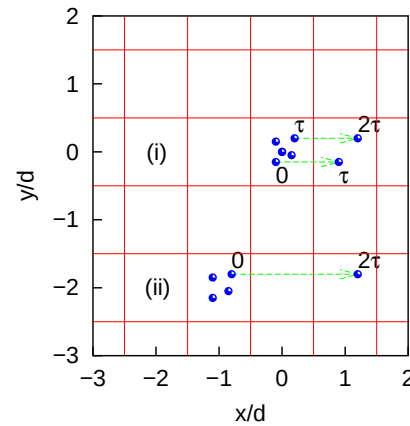
Nous comparons à présent les courbes correspondant à la diffusion spatiale (figure III.2.5) d'une part et à la distribution de matière (figure III.2.8) d'autre part. Nous constatons que cette fois, la décroissance à grand Γ'_0 est nettement plus importante sur la première que sur la deuxième. Cela ne doit pas nous étonner outre mesure car les observables étudiées (facteur d'accroissement ξ et amplitude de la modulation de matière A) sont de natures très différentes. D'une part, ξ mesure l'influence *relative* des modes de propagation sur la diffusion spatiale alors que A est une mesure *absolue* du nombre d'atomes dans un mode de propagation donné. D'autre part, ξ et A sont des *grandeurs macroscopiques* aux comportements différents qui extraient des informations différentes de la *dynamique microscopique*. Pour illustrer ceci, considérons d'un point de vue microscopique, une situation simple : un atome initialement piégé dans un puits du réseau immobile est attrapé par un mode de propagation, fait quelques cycles de propagation, puis se retrouve piégé dans un nouveau puits du réseau. Nous pouvons remarquer qu'alors que la diffusion spatiale est affectée par la distance parcourue par un atome lors de son transit le long d'un mode Brillouin, la contribution à la distribution de position dans le référentiel attaché au mode ne l'est pas elle. Pour l'illustrer, considérons les deux situations suivantes dans le modèle de diffusion sur un réseau [150], [II.2.1.1] :

- (i) Deux atomes effectuent successivement un saut entre sites voisins en un temps τ . Dans ce cas, la contribution à la diffusion spatiale s'écrit

$$\frac{d\Delta x^2}{dt} \simeq \frac{2d^2}{2\tau} = \frac{d^2}{\tau}.$$

- (ii) Un seul atome effectue un seul saut vers le site second voisin en un temps 2τ . La contribution à la diffusion spatiale s'écrit cette fois

$$\frac{d\Delta x^2}{dt} \simeq \frac{(2d)^2}{(2\tau)} = \frac{2d^2}{\tau}.$$



Dans les deux situations ci-dessus la contribution à la diffusion spatiale est différente : les sauts uniques longs contribuent plus que plusieurs sauts courts. Pourtant, il est facile de se convaincre que les contributions à la distribution de position sont identiques car, dans les deux cas, il y a à tout moment exactement un atome en mouvement à la vitesse d/τ (du

mode de propagation). Or il est raisonnable de penser que lorsque la condition de résonance stochastique n'est plus valide, la probabilité des sauts longs décroît plus vite que celle de sauts courts. Ceci explique que la décroissance de la courbe de ξ est plus rapide que celle de A ou de A_B lorsque $\Gamma'_0 > (\Gamma'_0)_{SR}$.

Résumé et conclusion du chapitre

En conclusion, nous avons effectué une étude théorique détaillée de l'influence du bruit lié aux phénomènes dissipatifs (pompage optique) sur l'excitation des modes de propagation Brillouin dans un réseau optique dissipatif en configuration 3D-lin $\perp$ lin. Nos résultats ont été principalement obtenus par des simulations de Monte-Carlo semi-classiques [I.2.3]. Nous avons montré qu'il existe effectivement un niveau de bruit spécifique pour lequel l'excitation des modes est résonante. Ceci correspond au phénomène de résonance stochastique, obtenu lorsque le mouvement hamiltonien de l'atome sur les courbes de potentiel optique et les effets dissipatifs dans le réseau sont précisément synchronisés (c'est-à-dire que les taux moyens d'échappement d'un puits par pompage optique [II.2.1.1] et de sortie des puits par entraînement de la modulation de potentiel [III.1.1.2] sont égaux). Ce résultat peut être compris facilement du fait que le processus d'excitation d'un mode de propagation implique des successions de demi-oscillations dans les puits de potentiel suivies de cycles de pompage optique [III.1.1.1].

Nous avons donné des preuves directes de la résonance stochastique sur ce système au moyen des propriétés d'agglutinement dans des référentiels en mouvement dans la direction et à la même vitesse que les modes de propagation : la quantité d'atomes dans un mode de propagation révèle un maximum pour un niveau de bruit donné, $(\Gamma'_0)_{SR}$. Nous avons aussi donné des preuves indirectes par le biais de l'observation d'une amplification résonante (au niveau de bruit $(\Gamma'_0)_{SR}$) de la diffusion spatiale dans la direction des modes de propagation. Nous avons montré que l'excitation résonante des modes, et donc la résonance stochastique, peut être observée au moyen d'expériences de spectroscopie pompe-sonde, une technique particulièrement bien maîtrisée dans les expériences sur les atomes froids [152, 37, 26]. Les trois méthodes donnent des résultats en bon accord les unes avec les autres pour la dépendance du point de résonance stochastique $((\Gamma'_0)_{SR})$ en fonction des paramètres du réseau. Nous avons finalement établi un modèle analytique simple qui fournit la condition de synchronisation, en excellent accord avec les résultats de nos simulations numériques.

Des expériences ont été réalisées par François-Régis Carminati, Michele Schiavoni et Ferruccio Renzoni dans notre équipe et confirment les résultats théoriques présentés en détail dans ce chapitre [98, 27]. La figure III.2.10 donne la courbe de réponse du système d'atomes froids à l'excitation périodique en fonction du niveau de bruit. La forme en cloche de cette courbe est caractéristique de la résonance stochastique. De plus amples détails sont fournis dans l'article que nous avons publié sur la réalisation expérimentale de la résonance stochastique dans un réseau optique dissipatif et que nous reproduisons en annexe C.

Les systèmes d'atomes froids, et en particulier les réseaux optiques, sont d'excellents candidats pour l'étude de la résonance stochastique, comme l'illustrent les résultats présentés dans ce chapitre et les expériences correspondantes, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ils présentent l'avantage par rapport à de nombreux autres systèmes où la résonance

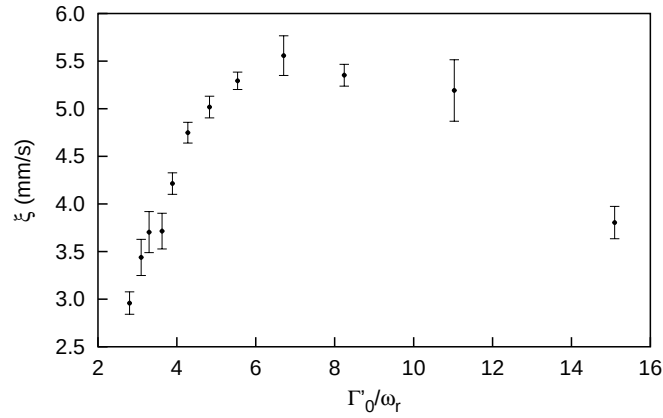


Figure III.2.10: Courbe expérimentale de l'amplitude d'excitation des modes de propagation à résonance Brillouin en fonction du taux de pompe optique.

stochastique a été observée ou seulement invoquée, que les paramètres de la dynamique atomique (mouvement hamiltonien et processus dissipatifs) sont très flexibles et peuvent varier indépendamment dans des gammes assez larges. Ensuite, les méthodes d'investigation de ces systèmes sont très développées [8] et permettent d'accéder à la réponse du système à une excitation externe par diverses voies (diffusion spatiale, déplacement d'ensemble du nuage, spectroscopie pompe-sonde, etc ...). Ces propriétés sont très appréciables et permettent de déterminer expérimentalement le comportement de la réponse du système à une excitation périodique en fonction du niveau de bruit. On peut ainsi tracer directement des courbes caractéristiques de la résonance stochastique. Enfin, notre étude nous a permis de mettre en évidence la résonance stochastique dans un système sensiblement plus complexe que le modèle générique décrit au début de ce chapitre. En effet, comme nous l'avons discuté en détail dans la partie II, la dynamique des atomes est beaucoup plus compliquée et plus riche qu'un simple mouvement brownien. On peut néanmoins bien maîtriser théoriquement les éléments de cette dynamique complexe. En fait, à un niveau très général, les résultats de notre étude participent à montrer que la résonance stochastique est un phénomène très général qui ne se limite pas au cadre strict de particules browniennes. Seuls sont requis quelques éléments indispensables que nous avons dégagés ci-avant, à savoir, l'existence de puits de potentiels séparés par une barrière de potentiel dans lesquels les particules viennent se piéger, l'existence d'une faible modulation de potentiel qui facilite les transitions des particules périodiquement entre les puits de potentiel et l'introduction de bruit induisant des transitions aléatoires des particules.

Au titre d'extensions possibles de notre travail, on peut citer l'étude de la résonance stochastique quantique [223, 224]. Il faudrait alors se placer dans un régime où les effets quantiques, dont l'effet tunnel, sont prédominants, par exemple dans un réseau optique très désaccordé et par exemple en utilisant des condensats de Bose-Einstein. En particulier, une contrepartie quantique du phénomène de résonance stochastique, la destruction cohérente de l'effet tunnel [225], pourrait faire l'objet d'une attention particulière.

Chapitre 3

Rochet atomique temporel dans un réseau optique 1D- $\text{lin} \perp \text{lin}$

Le mouvement brownien a été introduit au début du dix-neuvième siècle par Brown [54] pour expliquer le comportement erratique de grains de pollen dans une solution aqueuse. Il n'a été modélisé et compris qu'environ un siècle plus tard, indépendamment par Einstein [23] et Schmoluchowski [24]. Fondamentalement, les modèles décrivent une particule soumise à une force de friction (qui s'oppose à sa vitesse) et à des forces fluctuantes de moyenne nulle, induites par des chocs aléatoires avec de petites particules constitutives du milieu. Il en résulte une diffusion spatiale (*i.e.* une expansion) du nuage de particules dans toutes les directions de l'espace [150].

Très rapidement, la question s'est posée de savoir s'il était possible d'extraire un travail utile de l'énergie des fluctuations aléatoires dans le mouvement brownien [226, 227]. En d'autres termes, peut-on *rectifier les fluctuations aléatoires* afin d'induire un courant net de particules browniennes dans une direction donnée ? Ce problème général s'apparente à la modélisation de moteurs moléculaires [228] ou de pompes sélectives en direction (importantes en biologie), ou encore à l'élaboration de nouvelles techniques de séparation de constituants chimiques [19]. Le traitement de cette question est lié au principe de Curie, selon lequel *lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance* [229]. Ainsi faut-il briser la symétrie spatio-temporelle du système pour induire un mouvement dirigé, *i.e.* un flux net, de particules dans une direction donnée. De nombreuses études sur le sujet ont été effectuées et montrent qu'en fait, à de rares exceptions près, ce principe peut être généralisé : l'absence de symétrie prohibitive suffit généralement à induire un mouvement dirigé [230]. L'idée générale consiste à ajouter à un système non linéaire décrit par la théorie du mouvement brownien des forces de moyennes spatiale et temporelle nulles mais asymétriques, soit dans le temps, soit dans l'espace. Ceci est généralement assuré par l'existence d'un potentiel statique, périodique mais asymétrique, ou par l'introduction d'une force uniforme, de moyenne temporelle nulle mais à symétrie temporelle brisée [19].

Encore une fois, un nuage d'atomes froids dans un réseau optique dissipatif fournit un système tout à fait adapté à l'étude de ce problème car il est le siège d'un potentiel périodique (déplacements lumineux), d'un refroidissement (assuré par le mécanisme Sisyphé) et de

forces aléatoires de moyennes nulles (dus aux fluctuations de la force dipolaire et aux reculs subis par un atome lors des absorptions et des émissions de photons). Des travaux antérieurs réalisés par Robilliard *et al.* dans le groupe de Gilbert Grynberg [38, 25, 231] ont mis en évidence le phénomène de *rochet spatial* dans un réseau optique gris asymétrique. Dans notre travail, nous étudions la possibilité de réaliser un *rochet temporel* en ajoutant une force uniforme périodique dans le temps mais dont la symétrie temporelle est brisée par l'existence d'harmoniques de parités différentes et déphasées [100].

Ce chapitre présente des résultats obtenus à la fin de notre travail de thèse, c'est pourquoi il est relativement court. Après avoir introduit le lien entre brisure de symétrie spatio-temporelle et mouvement dirigé et avoir évoqué les expériences sur les rochets spatiaux au paragraphe III.3.1, nous décrivons la réalisation d'un rochet temporel au paragraphe III.3.2. Enfin, nous terminons en évoquant les extensions possibles de notre travail.

3.1 Rochet spatial et rochet temporel

Les moulins à vent ou les valves (par exemple des diodes électriques) sont des exemples usuels de systèmes tirant leur énergie de forces fluctuantes non-directionnelles et dans lesquels un mouvement est induit dans une direction particulière. Ces systèmes macroscopiques sont en fait des *rochets de Feynman* [232]. Le mouvement directionnel naît du fait qu'il est libre dans un sens et interdit dans l'autre. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des cas moins triviaux constitués de particules browniennes dans un potentiel périodique, non nécessairement symétrique et soumises éventuellement à une force extérieure non-directionnelle et dépendant du temps.

3.1.1 Brisures de symétrie et mouvement dirigé

Considérons une particule brownienne dans un potentiel statique périodique dans l'espace, $U(z) = U(z + \lambda)$, et soumise à une force extérieure périodique dans le temps, $F(t) = F(t + \tau)$, de moyenne temporelle nulle, $\overline{F} = 0$. L'équation générique de son mouvement s'écrit alors

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -\alpha \frac{dz}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z}(z) + F(t) + \mathcal{F}_L(t) \quad (\text{III.3.1})$$

où α est le coefficient de friction et $\mathcal{F}_L$ est un bruit blanc symétrique¹. Nous nous intéressons ici à la possibilité d'induire un mouvement dans une direction donnée, *i.e.* d'obtenir dans ce système pour lequel aucune force explicite ne pousse dans une direction privilégiée, une vitesse (V), moyennée sur le nuage et dans le temps, non nulle.

Supposons à présent que le système possède la symétrie suivante :

$$U(z_0 - z) = U(z) \quad (\text{III.3.2})$$

$$F(t + \tau/2) = -F(t) . \quad (\text{III.3.3})$$

¹Un bruit blanc correspond à une force $\mathcal{F}_L$ aléatoire qui vérifie les propriétés $\overline{\mathcal{F}_L} = 0$ et $\overline{\mathcal{F}_L(t) \cdot \mathcal{F}_L(t + t')} \propto \delta(t')$. Nous supposons de plus que la distribution de probabilité de $\mathcal{F}_L$ est invariante dans le temps et symétrique, *i.e.* $\mathcal{F}_L$ et $-\mathcal{F}_L$ sont équiprobables.

La condition (III.3.2) correspond à une symétrie spatiale de $U(z)$ de centre z_0 alors que (III.3.3) correspond à l'existence d'une anti-période pour $F(t)$, *i.e.* au fait que la force se retrouve exactement opposée au bout d'un certain temps (qui ne peut être que $\tau/2$). Il est alors clair à partir de l'équation (III.3.1) que si les deux conditions de symétrie spatiale (III.3.2) et de symétrie temporelle (III.3.3) sont vérifiées et si $t \rightarrow z(t)$ est solution de l'équation du mouvement, alors $t \rightarrow z_0 - z(t + \tau/2)$ est aussi solution de l'équation du mouvement. Il en résulte que si les conditions initiales (z_i, v_i) et $(z_0 - z_i, -v_i)$ sont équiprobables, on déduit aisément que $V = 0$, et aucun mouvement dirigé ne peut prendre naissance dans un tel système.

Ainsi, faut-il briser au moins l'une des symétries (III.3.2)-(III.3.3) pour pouvoir induire un mouvement dirigé du nuage de particules [19]. Dans la suite, nous appellerons *rochet spatial* un système dans lequel un mouvement dirigé est induit grâce à la brisure de la symétrie spatiale (III.3.2) et *rochet temporel*, un système pour lequel un mouvement dirigé est induit grâce à la brisure de la symétrie temporelle (III.3.3).

En fait, la brisure de l'une des conditions de symétrie (III.3.2)-(III.3.3) peut ne pas être suffisante pour induire effectivement un mouvement dirigé. Il peut en effet exister des symétries plus subtiles qui imposent la symétrie du mouvement des particules [230]. Ainsi, dans un rochet spatial en l'absence de force extérieure $F(t)$, lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique, la probabilité de transition d'une particule piégée dans un puits de potentiel à l'un de ses voisins est proportionnelle à $\exp(-S_{\pm}/k_B T)$ et comme la barrière de potentiel à franchir vers la gauche (S_-) est la même que la barrière à franchir vers la droite (S_+), aucun mouvement directionnel n'est possible [232, 19, 233]. Dans ce cas, c'est la symétrie des probabilités de saut élémentaire d'un puits à l'un de ses voisins (vers la gauche ou vers la droite) qui induit la symétrie dans le mouvement d'ensemble du nuage de particules. Pour induire un mouvement directionnel [19, 233], on peut inclure une force $F(t)$, de moyenne nulle, périodique mais ne brisant pas nécessairement la symétrie temporelle (III.3.3).

Une autre symétrie importante peut être réalisée dans le système lorsque la friction α est nulle. Il s'agit de la symétrie par renversement du temps [234, 235]:

$$F(t) = F(t_0 - t) . \quad (\text{III.3.4})$$

On voit en effet facilement que si $z(t)$ est solution de l'équation (III.3.1) (avec $\alpha = 0$) et si la condition de symétrie (III.3.4) est vérifiée, alors $z(t_0 - t)$ est aussi solution de (III.3.1). De nouveau, si ces deux solutions sont équiprobables et à condition de pouvoir prendre $t_0 \simeq T_{\text{mes}}$ où $[0, T_{\text{mes}}]$ est l'intervalle temporel de moyennage pour la vitesse, on obtient sans difficulté que $V = 0$ et aucun mouvement dirigé n'est possible². Ainsi, dans le cas d'un système conservatif (sans friction), il faut encore briser la symétrie par renversement temporel (III.3.4) pour obtenir un mouvement dirigé.

²Le cas trivial $F(t) = \text{cte}$ et $U = 0$ induit bien sûr en général un mouvement dirigé or il vérifie la symétrie par renversement du temps (III.3.4). On se convaincra néanmoins que les trajectoires $z(t)$ et $z(t_0 - t)$ ne sont pas équiprobables.

3.1.2 Réalisation d'un rochet spatial dans un système d'atomes froids

Nous décrivons à présent très brièvement un rochet atomique spatial réalisé au cours de la thèse de Cécile Robilliard (voir la référence [38] et les références qui y sont citées pour plus de détails). Le système considéré est un réseau optique monodimensionnel en configuration 1D-lin θ lin (identique au réseau 1D-lin $\perp$ lin mais avec des polarisations de faisceaux contre-propageants faisant un angle θ quelconque et non plus spécifiquement $\pi/2$). La transition atomique utilisée est la $1 \rightarrow 1$ du ^{87}Rb . Un tel système est décrit, après élimination adiabatique de l'état excité, par deux sous-niveaux du fondamental $|C\rangle$ et $|NC\rangle$. Les potentiels V_C et V_{NC} associés aux états couplé $|C\rangle$ et non couplé $|NC\rangle$ sont respectivement sinusoïdal et plat. Si le désaccord Δ choisi est positif, un refroidissement atomique de type Sisyphes bleu induit par les couplages motionnels [37] a lieu. On réalise ainsi un réseau gris pour lequel la population de l'état $|NC\rangle$ est majoritaire.

Afin de former un potentiel asymétrique dans l'espace, Robilliard *et al.* [25, 231] ont ajouté un champ magnétique statique le long de l'axe des faisceaux contre-propageants (z). Les potentiels obtenus V_C et V_{NC} sont représentés sur la figure III.3.1a (noter que $|NC\rangle$ est à présent légèrement couplé à la lumière). Le potentiel V_{NC} peut alors être très asymétrique et l'angle θ joue le rôle du paramètre de contrôle de l'asymétrie. Les conditions sont alors réunies pour réaliser un *rochet stroboscopique* (*flashing ratchet*) : en effet le système comprend

- un potentiel de piégeage asymétrique V_{NC} ;
- des sauts entre les puits de potentiel adjacents de V_{NC} *via* des transitions d'état interne $|NC\rangle \rightarrow |C\rangle \rightarrow |NC\rangle$ (effet stroboscope), elles-mêmes produites par des couplages magnétiques ou Raman;
- un effet de refroidissement (Sisyphes bleu).

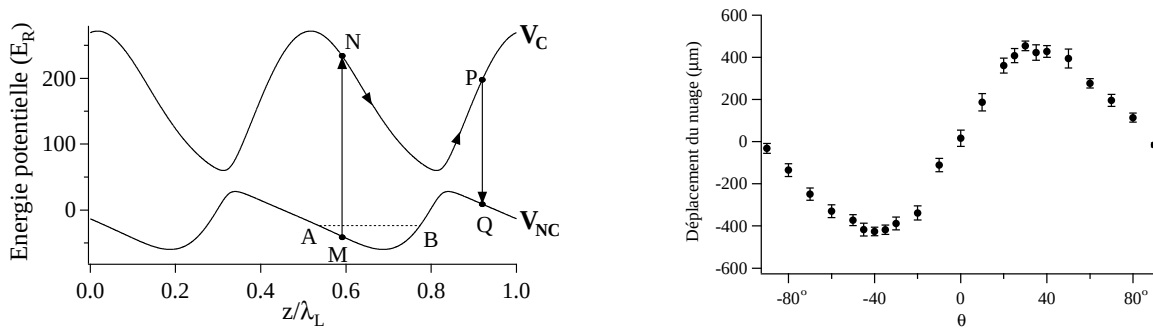


Figure III.3.1: Réalisation d'un rochet stroboscopique spatial. (a) : courbes de potentiels asymétriques V_{NC} et V_C et mécanisme de transition entre puits adjacents de V_{NC} menant à une diffusion dirigée. (b) : Résultats expérimentaux de [25] : déplacement atomique moyen en fonction du paramètre de contrôle de l'asymétrie du potentiel (θ). Figures tirées de la référence [25].

Notons que ce système n'est pas à l'équilibre thermodynamique en ce sens que les populations stationnaires des états $|C\rangle$ et $|NC\rangle$ ne sont pas déterminées par les formules de Boltzmann $\Pi_j \propto (-V_j/k_B T)$. En fait, les transitions entre les états $|C\rangle$ et $|NC\rangle$ sont assurées par des couplages motionnels et magnétiques [25, 231] qui n'obéissent nullement à la formule de Boltzmann.

Le mécanisme menant à une diffusion dirigée (vers les z positifs) est décrit sur la figure III.3.1a :

- un atome dans l'état $|NC\rangle$ oscille dans un puits de potentiel de V_{NC} ;
- une transition magnétique (dont la probabilité est maximale en A) le transfère dans l'état $|C\rangle$: $M \rightarrow N$;
- l'atome dans l'état $|C\rangle$ effectue une oscillation partielle $N \rightarrow P$ dans un puits de V_C ;
- l'atome est finalement transféré par un processus Raman dans l'état $|NC\rangle$: $P \rightarrow Q$. Il peut alors se retrouver piégé dans le puits adjacent vers la droite de son puits de piégeage initial.

Les auteurs de [25, 231] ont observé un déplacement net du nuage d'atomes pour toutes les valeurs de θ ($\neq 0, \pi$) qui brisent effectivement la symétrie du bi-potentiel optique (voir la figure III.3.1b). Ce résultat met en évidence l'effet de rochet spatial dans un réseau asymétrique d'atomes froids.

3.2 Réalisation d'un rochet temporel dans un réseau 1D-lin $\perp$ lin

Nous présentons à présent dans ce paragraphe la réalisation d'un rochet temporel [100]. Nous avons utilisé un réseau optique dissipatif monodimensionnel 1D-lin $\perp$ lin en mouvement de translation oscillante pour induire, dans le référentiel attaché au réseau, une force inertielle homogène, périodique et dissymétrique dans le temps. Nous décrivons d'abord le système puis les résultats de simulations de Monte-Carlo semi-classiques mettant en évidence l'induction d'un courant particulaire.

3.2.1 Induction d'un mouvement dirigé dans un potentiel optique 1D-lin $\perp$ lin, spatialement périodique et symétrique à l'aide d'une force asymétrique en temps

Les ingrédients essentiels pour la réalisation d'un rochet temporel sont (i) un potentiel périodique symétrique, (ii) un effet de dissipation et (iii) une force homogène brisant la symétrie temporelle (III.3.3). Les réseaux optiques dissipatifs fournissent naturellement les deux premiers ingrédients comme nous l'avons discuté précédemment. L'introduction d'une force homogène avec une dépendance temporelle particulière est beaucoup moins simple d'un point de vue expérimental. Nous décrivons dans la suite l'approche que nous avons utilisée pour résoudre ce problème.

Mise en mouvement du réseau 1D-lin $\perp$ lin et introduction d'une force homogène

Nous considérons ici un réseau optique en configuration 1D-lin $\perp$ lin [I.1.2.2], siège du refroidissement Sisyphe. Afin de fixer les idées, nous nous limiterons au cas d'une transition atomique $1/2 \rightarrow 3/2$. Nous introduisons à présent une différence de phase $\alpha(t)$ entre les deux faisceaux de polarisations linéaires croisées. Nous prendrons $\alpha(t)$ dépendant du temps, de telle sorte que les champs électriques s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \vec{e}_x \cos \left[kz - \omega_L t - \frac{\alpha(t)}{2} \right] \\ \vec{E}_2 &= E_0 \vec{e}_y \sin \left[-kz - \omega_L t + \frac{\alpha(t)}{2} \right] .\end{aligned}\quad (\text{III.3.5})$$

En se plaçant dans le référentiel ($\mathcal{R}'$), translaté du référentiel du laboratoire ($\mathcal{R}$) et dont l'origine est définie par $z_{O'} = \alpha(t) / 2k$, on retrouve les conditions exactes de la description du réseau 1D-lin $\perp$ lin que nous avons faite au paragraphe I.1.2.2 (voir la figure III.3.2). En particulier, les formules pour les potentiels optiques et les taux de pompage optique (I.1.28) sont toujours valables et la description du mécanisme de refroidissement Sisyphe reste correcte (voir la figure I.1.7). Ainsi, dans le référentiel ($\mathcal{R}'$), les atomes sont soumis à

- un bi-potential périodique, symétrique induit par la modulation spatiale des déplacements lumineux [I.1.2.2];
- un effet de refroidissement induit par le mécanisme Sisyphe [I.1.2.3];
- des processus de transition des atomes entre puits de potentiel adjacents induits par des mécanismes de pompage optique [II.2.1] .

Comme nous l'avons discuté au chapitre II.2, ce système réunit, du point de vue des propriétés de diffusion, les conditions d'un mouvement brownien dans un potentiel périodique.

Finalement, la seule différence avec la configuration 1D-lin $\perp$ lin usuelle réside dans le fait que le potentiel est statique dans le référentiel ($\mathcal{R}'$) en mouvement (si $\dot{\alpha} \neq 0$), donc non-galiléen (si $\ddot{\alpha} \neq 0$). Ainsi, dans le référentiel ($\mathcal{R}'$), les atomes sont soumis à une force inertielle uniforme et proportionnelle à la dérivée seconde de $z_{O'}$:

$$\vec{F}(t) = \frac{-M\ddot{\alpha}(t)}{2k} \vec{e}_z . \quad (\text{III.3.6})$$

Cette propriété va nous permettre, par un choix judicieux de la dépendance temporelle de la différence de phase $\alpha(t)$, de simuler une force extérieure périodique, de moyenne nulle et brisant la symétrie temporelle, appliquée aux atomes froids du réseau 1D-lin $\perp$ lin.

Introduction d'une force périodique, de moyenne nulle et brisant la symétrie temporelle

L'utilisation de la procédure ci-dessus pour introduire une force inertielle dans le réseau 1D-lin $\perp$ lin a été introduite par Dahan *et al.* [91-93] pour observer les oscillations de Bloch

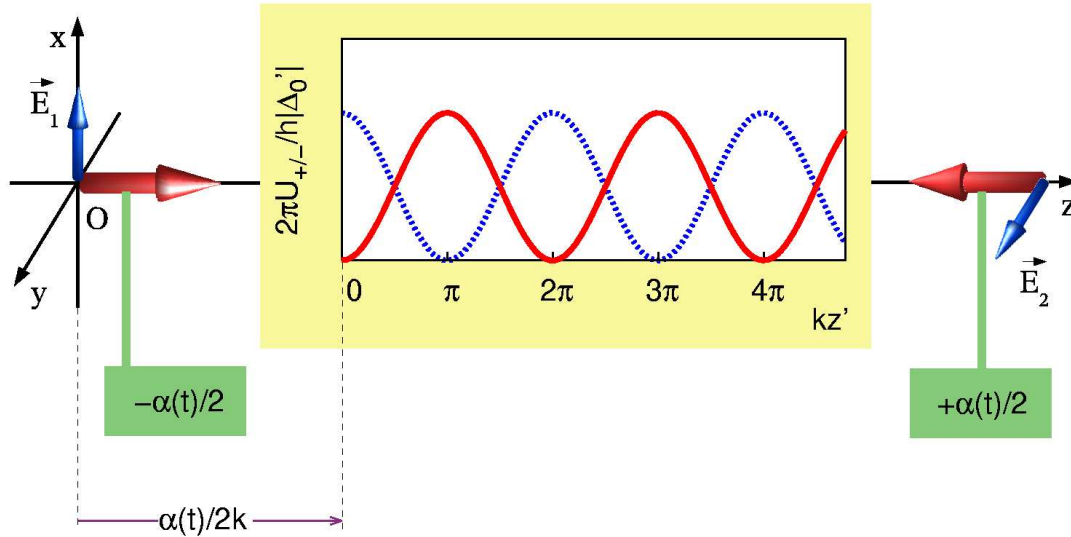


Figure III.3.2: Schéma de principe pour la réalisation d'un rochet temporel dans un réseau optique monodimensionnel 1D-lin⊥lin. On introduit une différence de phase $\alpha(t)$, dépendant du temps, entre les faisceaux lasers de polarisations linéaires croisées. La configuration est la même que celle décrite au paragraphe I.1.2.2 mais dans le référentiel en mouvement d'origine $z_{O'} = \alpha(t) / 2k$.

dans un réseau très désaccordé. Dans le cadre de notre étude, elle présente plusieurs avantages sur l'utilisation, par exemple, d'une modulation de potentiel comme pour exciter les modes de propagation [III.1.1.2] ou de la pression de radiation d'un faisceau proche de résonance. En effet, d'une part, la force $F(t)$ obtenue est rigoureusement homogène, ce qui est agréable pour la description théorique du problème. D'autre part, elle ne souffre pas de problèmes liés à la saturation des atomes, ce qui permet de faire varier l'amplitude de la force sans limite théorique. Enfin, comme on peut contrôler expérimentalement avec une grande précision la dépendance temporelle de la phase $\alpha(t)$ à l'aide de modulateurs acousto-optiques comme l'a montré Michele Schiavoni [27], on peut modéliser aisément la dépendance temporelle de la force $F(t)$.

Nous considérons à présent le cas spécifique d'une modulation de phase de la forme

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[A \cos(\Omega t) + \frac{B}{4} \cos(2\Omega t - \phi) \right] \quad (\text{III.3.7})$$

où A , B et ϕ sont fixés. En introduisant la formule (III.3.7) dans la formule donnant la force inertielle (III.3.6), on obtient la force

$$F(t) = \frac{M\alpha_0\Omega^2}{2k} [A \cos(\Omega t) + B \cos(2\Omega t - \phi)] . \quad (\text{III.3.8})$$

La force ainsi obtenue est formée de deux harmoniques de parités différentes, Ω et 2Ω , et déphasées de ϕ . Il s'ensuit que la force $F(t)$ est de moyenne nulle et dissymétrique en temps

au sens de la formule (III.3.3). Plus précisément, nous pouvons écrire :

$$\overline{(F(t) + F(t + \tau/2))^2} \propto 2B^2\delta_{A,0} \quad (\text{III.3.9})$$

ce qui indique que la symétrie temporelle (III.3.3) est brisée uniformément sur ϕ lorsque A et B sont tous deux non nuls³.

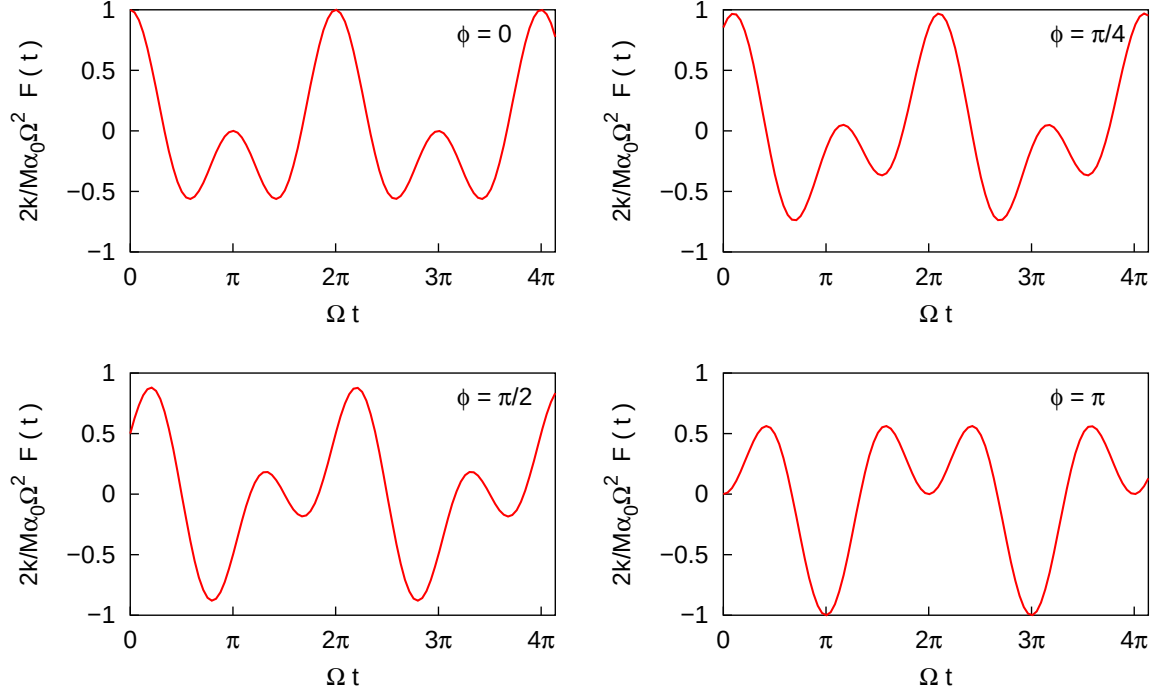


Figure III.3.3: Force $F(t)$ en fonction du temps t correspondant à la formule (III.3.8), pour différentes valeurs de la différence de phase ϕ des harmoniques Ω et 2Ω . Ici, $A = B = 1/2$. Ces figures montrent que la symétrie $F(t) = -F(t + \tau/2)$ est brisée pour toutes les valeurs de ϕ .

Ainsi, dans le référentiel en mouvement ($\mathcal{R}'$), nous avons été en mesure d'introduire une brisure de la symétrie temporelle dans notre système non linéaire. Le système simule une particule brownienne dans un potentiel périodique symétrique et soumise à une force extérieure $F(t)$ asymétrique en temps. Les conditions sont donc réunies pour mettre en évidence le phénomène de rochet temporel.

Dans ce travail, nous considérerons le cas où Ω est du même ordre de grandeur que la fréquence d'oscillation des atomes au fond des puits de potentiel ou que le taux de pompage optique. Nous sommes donc dans un régime non-adiabatique pour l'excitation par la force $F(t)$. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, nous allons voir que la diffusion dirigée n'est pas moyennée dans un tel régime, comme l'ont montré Dykman *et al.* [233].

³Notons que la période temporelle τ de la force F dépend des valeurs de A : $\tau = 2\pi/\Omega$ si $A \neq 0$ et $\tau = \pi/\Omega$ si $A = 0$.

3.2.2 Contrôle du mouvement dirigé à l'aide de la phase relative des harmoniques de force de parités différentes

Nous avons réalisé des simulations numériques du système décrit ci-dessus à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo dans l'approximation semi-classique [I.2.3]. Afin de mettre en évidence un phénomène de diffusion dirigée (courant net de particules dans une direction donnée) révélant l'effet rochet temporel, nous avons étudié une quantité dynamique accessible à l'expérience : la vitesse moyenne du centre de masse du nuage d'atomes dans le référentiel du laboratoire ($\mathcal{R}$).

Bien sûr, les grandeurs dynamiques doivent être déterminées en principe dans le référentiel en mouvement ($\mathcal{R}'$) dans lequel la description en termes de réseau optique statique et de force ajoutée $F(t)$ est valable. Néanmoins, les déplacements du centre de masse du nuage, δz dans le référentiel ($\mathcal{R}$) et $\delta z'$ dans le référentiel ($\mathcal{R}'$), correspondant à une variation $\delta\alpha$ de la différence de phase des faisceaux contre-propageants, sont reliés par la relation

$$\delta z' = \delta z - \frac{\delta\alpha}{2k}. \quad (\text{III.3.10})$$

Or, pour les paramètres des simulations que nous avons réalisées, $\delta z \sim \frac{1000}{\Gamma'_0} \frac{\hbar k}{M} \sim \frac{50}{k}$ et $\frac{\delta\alpha}{2k} \sim \frac{\alpha_0}{2k} \sim \frac{5}{k}$. Ainsi, la correction sur le déplacement dû à la formule de changement de référentiel (III.3.10) peut être négligée, de sorte que le calcul du déplacement moyen du nuage peut aussi bien être effectué dans le référentiel du laboratoire ($\mathcal{R}$). La même propriété s'applique aux expériences réalisées par Michele Schiavoni et Ferruccio Renzoni [27, 100].

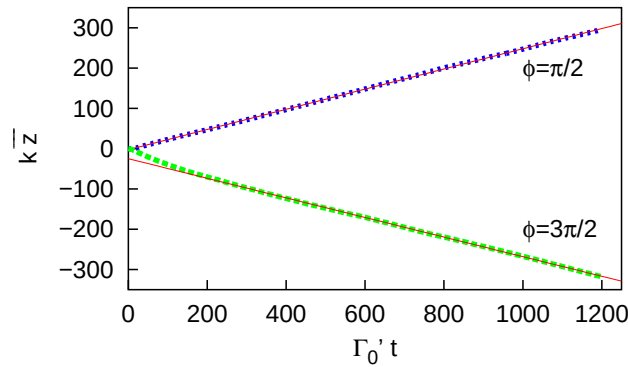


Figure III.3.4: Evolution temporelle du déplacement du nuage $\overline{z(t)}$ dans le référentiel du laboratoire ($\mathcal{R}$). Les paramètres utilisés dans les simulations sont : $\Delta = -5\Gamma$, $\Delta'_0 = -150\omega_R$, $\alpha_0 = 8$, $A = B = 0,5$ et $\phi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Des ajustements linéaires dans la période au delà de la phase de thermalisation ($t > 200/\Gamma'_0$) sont aussi représentés.

Nous traçons sur la figure III.3.4, l'évolution de la position du centre de masse $\overline{z}$ du nuage dans le système de la figure III.3.2. Nous obtenons clairement une mise en mouvement directionnel à vitesse moyenne constante du nuage atomique. Ceci correspond au phénomène de diffusion dirigée et est obtenu grâce à la brisure des symétries temporelles du système

non linéaire (effet rochet temporel). Nous allons décrire les propriétés du mouvement dirigé sous l'angle de vue de la brisure de la symétrie temporelle de la force $F(t)$.

A l'aide d'ajustements linéaires de courbes du type de la figure III.3.4, nous déterminons la vitesse moyenne de déplacement du nuage atomique $v_{\text{CM}} = \frac{d\bar{z}}{dt}$. Nous avons tracé sur la figure III.3.5, v_{CM} en fonction de ϕ , le déphasage entre les composantes de $\alpha(t)$ ou $F(t)$ de pulsations Ω et 2Ω . Les simulations ont été réalisées de deux manières différentes :

série $\alpha(t)$: Nous appliquons une modulation de phase $\pm\alpha(t)/2$, de la forme donnée par l'équation (III.3.7) aux faisceaux du réseau afin d'appliquer une force inertielle aux atomes dans le référentiel du réseau et nous mesurons la vitesse du nuage dans le référentiel du laboratoire (voir texte ci-dessus).

série $F(t)$: Nous appliquons directement une force réelle $F(t)$, de la forme donnée par l'équation (III.3.8) dans un réseau immobile et les mesures sont effectuées aussi dans le référentiel du laboratoire.

Comme nous l'attendions, ces deux méthodes donnent des résultats identiques aux erreurs numériques près. Ceci valide la méthode utilisée dans les expériences. Un résultat expérimental typique est aussi représenté sur la figure III.3.5.

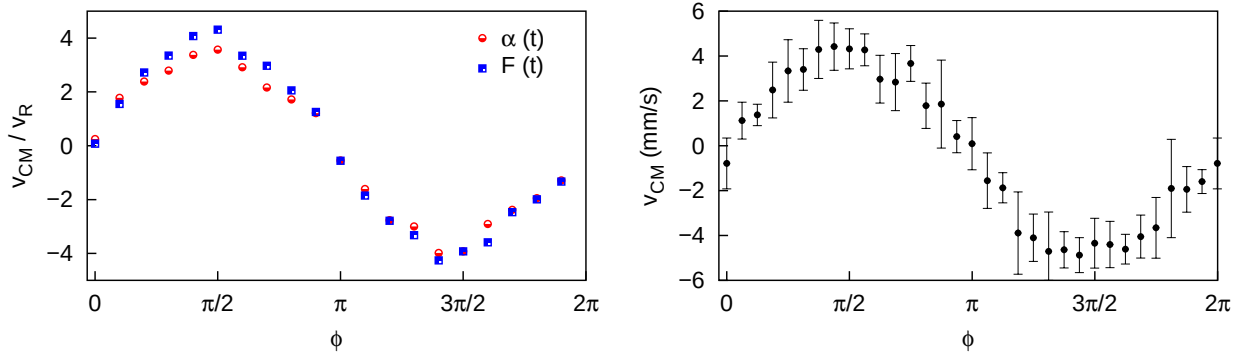


Figure III.3.5: Gauche : vitesse moyenne v_{CM} du centre de masse du nuage atomique en fonction du déphasage ϕ . Les paramètres des simulations sont $\Delta = -5\Gamma$, $\Delta'_0 = -150\omega_R$, $\alpha_0 = 8$ et $A = B = 0,5$. Les deux séries de points sont obtenues : (cercles) en introduisant une modulation de phase dépendant du temps $\alpha(t)$ de la forme (III.3.7) entre les faisceaux lasers du réseau (voir le paragraphe III.3.2.1); (carrés) en ajoutant directement une force $F(t)$ aux atomes dans un réseau optique immobile. Les deux méthodes donnent des résultats identiques aux erreurs numériques près. Droite : résultats expérimentaux correspondants [100].

Nous obtenons bien un mouvement dirigé du nuage atomique pour la plupart des valeurs de ϕ . La figure III.3.5 montre que le sens du mouvement dirigé est opposé pour des valeurs de ϕ décalées de π . En fait, la symétrie $v_{\text{CM}}(\phi + \pi) = -v_{\text{CM}}(\phi)$ découle naturellement de la symétrie de la force $F_{\phi+\pi}(t) = -F_{\phi}(t + \pi/\Omega)$. Ainsi le déphasage ϕ des composantes de

la force $F(t)$ de composantes Ω et 2Ω peut être considéré comme le paramètre de contrôle du mouvement dirigé.

Une autre façon de modifier la brisure de symétrie temporelle dans notre système consiste à faire varier le rapport des amplitudes A et B des composantes de pulsations Ω et 2Ω de la force $F(t)$ (voir la formule (III.3.8)). Nous avons reproduit des courbes de la forme de la figure III.3.5 pour différentes valeurs du paramètre B en gardant la somme des amplitudes des deux harmoniques constantes : $A = 1 - B$ ⁴. L'amplitude de la diffusion dirigée est alors déterminée par la grandeur

$$\sigma = \sqrt{\langle (v_{\text{CM}}(\phi_j) - \langle v_{\text{CM}} \rangle)^2 \rangle}. \quad (\text{III.3.11})$$

où $\langle . \rangle$ désigne la moyenne sur les différentes valeurs de $\phi = \phi_j$ considérées dans le tracé des courbes du type III.3.5. Nos résultats sont présentés sur la figure III.3.6. Nous obtenons un mouvement dirigé pour des valeurs de l'amplitude B de la composante de pulsation 2Ω différentes de 0 ou 1, *i.e.* lorsque la symétrie temporelle (III.3.3) est effectivement brisée. Ceci démontre le rôle essentiel de la brisure de symétrie temporelle pour obtenir une diffusion dirigée dans notre système.

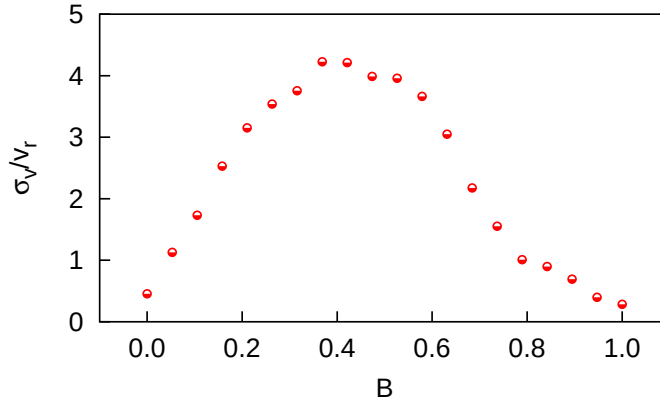


Figure III.3.6: Amplitude σ des courbes de vitesse de la forme (III.3.5) en fonction du paramètre B pour $A + B = 1$. Les paramètres des simulations sont $\Delta = -5\Gamma$, $\Delta'_0 = -150\omega_R$, $\Omega = 0.87\Omega_v$ et $\alpha_0 = 3$.

Résumé et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons examiné la possibilité d'induire un mouvement dirigé de particules browniennes dans un potentiel périodique et symétrique par introduction d'une

⁴L'idéal serait ici de faire varier A et B de manière à conserver la force moyenne totale tout en changeant uniquement la brisure de symétrie temporelle de la force $F(t)$. Il n'est néanmoins pas facile de tirer simplement une telle condition de sorte que nous adoptons la plus simple consistant à conserver l'ordre de grandeur de F , *i.e.* consistant à fixer la somme des amplitudes $A + B$.

force uniforme, de moyenne nulle et dont la symétrie temporelle est brisée. Ceci a été réalisé dans un réseau optique dissipatif en configuration 1D-lin $\perp$ lin [I.1.2.2]. Le refroidissement est fourni par le mécanisme Sisyphe [I.1.2.3] et la diffusion provient des cycles de pompage optique et des cycles de fluorescence subis par les atomes [II.2.1]. En introduisant une modulation temporelle de la phase relative des faisceaux contre-propageants, nous avons induit un déplacement contrôlé du réseau. Il apparaît donc, dans le référentiel accéléré attaché au réseau, une force inertielle uniforme et dépendant du temps qui s'applique aux atomes. Lorsque la modulation de la phase fait apparaître des harmoniques de parités différentes et déphasées, la force inertielle est périodique mais dissymétrique dans le temps. Dans notre cas, la force est composée d'une harmonique à la pulsation Ω et d'une harmonique à la pulsation 2Ω .

Nous avons observé, à l'aide de simulations de Monte-Carlo semi-classiques, un mouvement dirigé du nuage d'atomes froids sur le réseau : les atomes sont mis en mouvement à vitesse constante lorsque la symétrie temporelle est brisée. En faisant varier les amplitudes respectives des deux harmoniques dans la force inertielle, nous avons montré par une méthode directe que c'est bien la brisure de la symétrie temporelle qui induit le mouvement dirigé des atomes. Nos résultats sont en excellent accord avec les résultats des expériences réalisées par Michele Schiavoni et Ferruccio Renzoni dans notre équipe [100].

Comme la période des harmoniques de la force inertielle est du même ordre de grandeur que les temps typiques d'évolution (période des oscillations au fond des puits de potentiel et relaxation de la vitesse) des atomes dans le réseau seul, les simulations et les expériences ont été réalisées dans le régime non-adiabatique. Ceci permet de voir notre système comme un banc d'essai pour la théorie de l'activation résonante des probabilités de transition asymétrique d'un puits de potentiel à l'autre au moyen des susceptibilités logarithmiques [233, 236, 237].

Les résultats de ce chapitre sont préliminaires et plusieurs prolongements intéressants pourraient être développés. Par exemple, un comportement résonant de l'amplitude du mouvement dirigé est attendu pour une fréquence de la force inertielle de l'ordre de la fréquence propre des oscillations dans un puits de potentiel, et on pourrait envisager de mettre en évidence ce phénomène. On pourrait par ailleurs étudier l'influence de l'amplitude de la force inertielle ainsi que celle du niveau de bruit sur l'activation des transitions asymétriques entre les puits de potentiel. Enfin, il serait intéressant de développer un modèle précis du mécanisme d'activation propre à notre système non linéaire.

CONCLUSION GENERALE

Le mémoire a présenté l'étude théorique de la dynamique d'atomes froids dans un réseau optique dissipatif. A côté de travaux sur les propriétés des distributions de vitesse dans le réseau, nous avons principalement étudié les phénomènes de transport spontané et de transport stimulé induits par le bruit. Dans notre système, ce bruit provient des fluctuations des forces liées à l'interaction lumière-matière (force dipolaire et force de pression de radiation). Une grande partie de notre travail a été réalisée à l'aide de simulations numériques de Monte-Carlo aussi bien semi-classiques qu'entièrement quantiques. Ces simulations sont complétées par des calculs analytiques permettant de dégager précisément les processus physiques responsables des phénomènes étudiés. Notre travail a été mené en parallèle d'études expérimentales, principalement sur le rubidium (expériences de Paris) mais aussi sur le césium (expériences de Stockholm). L'interaction avec les expériences a été à la fois un guide et un stimulant pour notre travail.

Afin d'étudier des effets induits par le bruit, nous nous sommes placés dans le *régime dissipatif* (proche de résonance). Les mécanismes élémentaires d'interaction atome-laser induisent, d'une part, des transitions aléatoires des atomes entre les sites de piégeage (puits du potentiel optique) et, d'autre part, un refroidissement intrinsèque (mécanisme Sisyphé). Ces propriétés font des réseaux optiques dissipatifs des systèmes particulièrement adaptés à l'étude des phénomènes de transport dans des structures périodiques, sujet qui a attiré une grande attention des physiciens statisticiens ces dernières années.

Le processus de *transport spontané* qui vient à l'esprit immédiatement est la *diffusion spatiale* du nuage d'atomes dans le réseau. Nous avons en fait montré que l'on peut aussi induire des phénomènes de *transport stimulé* induits, soit par une modulation temporelle et spatiale du potentiel optique, soit par une force ajoutée. Nous avons ainsi étudié les mécanismes d'excitation de *modes de propagation* qui correspondent à un mouvement collectif des atomes sur une échelle spatiale correspondant à plusieurs puits de potentiel optique. Nous avons montré le rôle particulier joué par le bruit dans cette excitation, révélant le phénomène de *résonance stochastique*. Nous avons par ailleurs étudié la diffusion dirigée des atomes dans le réseau, induite par la brisure de la symétrie spatio-temporelle du système et correspondant à la réalisation d'un *rochet atomique*.

Un résumé détaillé des résultats que nous avons obtenus pourra être trouvé à la fin de chaque chapitre du mémoire. Nous nous contentons d'en donner ici une liste synthétique.

Distributions de vitesse [II.1]

- La température cinétique est indépendante de l'angle du réseau et est *anisotrope*. Ces résultats sont en accord avec l'image physique du refroidissement Sisyphé qui prévoit une dépendance linéaire de la température avec la profondeur du potentiel optique

(l'effet anisotrope est dû à l'anisotropie du potentiel optique dans la configuration 3D-lin $\perp$ lin). Les expériences confirment ces propriétés. Nos simulations prévoient une *anisotropie du décrochage* du réseau qu'il serait intéressant d'étudier d'un point de vue expérimental.

- Les distributions de vitesse révèlent l'existence de deux modes correspondant, l'un à des atomes très froids et piégés dans les puits de potentiel, l'autre à des atomes plus chauds et voyageant sur le paysage de potentiel optique. La distribution de vitesse peut être ajustée avec précision par une fonction double gaussienne. Les largeurs des deux gaussiennes croissent avec la profondeur du potentiel. Le phénomène de décrochage s'interprète comme un transfert de population du *mode froid* vers le *mode chaud*. Un travail ultérieur pourrait être consacré à la recherche d'une distribution de vitesse de Tsallis et à l'étude du lien avec la théorie de la physique statistique hors équilibre de Tsallis. En particulier, le lien avec une diffusion anormale et une dynamique chaotique serait intéressante [238].

Diffusion spatiale [II.2]

- Nous avons réalisé une étude systématique de la diffusion spatiale dans un réseau optique 3D-lin $\perp$ lin dans un large domaine de paramètres couvrant le régime sautant et le régime oscillant. Nous avons donné une image physique expliquant les comportements différents des coefficients de diffusion spatiale dans ces deux régimes. Nous avons établi un modèle analytique prenant en compte la localisation des atomes dans les puits de potentiel. Ce modèle reproduit qualitativement et quantitativement les résultats numériques.
- Nous avons enfin discuté de la pertinence de la description de la dynamique des atomes dans le réseau en termes de mouvement brownien. Pour cela, nous avons notamment étudié le comportement de la friction Sisyphe et du taux de relaxation de l'énergie cinétique du nuage d'atomes.

Modes de propagation Brillouin [III.1]

- Nous avons étudié en détail le processus d'excitation des modes de propagation Brillouin proposé par Courtois *et al.* en 1996. Nous avons montré de plusieurs manières directes qu'ils correspondent au transport collectif d'atomes à travers le réseau.
- Nous avons proposé et étudié un nouveau processus d'excitation de ces modes. Nous avons ainsi montré que les modes Brillouin sont nombreux et plus diversifiés qu'on ne le pensait initialement.

Ces modes de propagation Brillouin ont été observés dans les expériences menées dans notre équipe. Les données expérimentales confirment nos résultats.

Résonance stochastique [III.2]

- Le processus d'excitation des modes de propagation Brillouin est une subtile inter-combinaison d'un mouvement hamiltonien (oscillations dans les puits de potentiel) et de processus dissipatifs (cycles de pompage optique). Nous avons étudié l'influence des processus dissipatifs sur les mécanismes d'excitation et avons mis en évidence le phénomène de résonance stochastique qui correspond à l'amplification d'un signal périodique faible par un système non linéaire bruité.
- Ce phénomène a été observé de trois façons différentes correspondant à des propriétés de la dynamique macroscopique (amplification de la diffusion spatiale) ou de la dynamique microscopique (propriétés de l'agglutinement des atomes dans des référentiels en mouvement attachés aux modes de propagation et spectroscopie Brillouin).
- L'intérêt des réseaux optiques pour l'étude de ce phénomène tient dans leur grande flexibilité. Nous avons ainsi pu montrer que le phénomène de résonance stochastique correspond à la synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs dans le réseau.

Des résultats similaires ont été obtenus dans les expériences.

Rochet atomique temporel [III.3]

- Nous avons étudié la possibilité de réaliser un rochet atomique temporel dans un réseau optique en configuration monodimensionnelle 1D-lin $\perp$ lin. Ce phénomène correspond à la diffusion dirigée (mouvement dans une direction particulière) induite par la brisure de la symétrie temporelle du système.
- Ceci a été réalisé en appliquant une force inertielle non directionnelle, de moyenne temporelle nulle et brisant la symétrie temporelle.

Ici encore, nos résultats sont en accord avec les données expérimentales.

Le travail rapporté ici valide les systèmes d'atomes froids dans des réseaux optiques dissipatifs pour la réalisation concrète des modèles de transport dirigé dans des structures périodiques bruitées. De tels systèmes correspondant à l'étude de la résonance stochastique [20] ou des rochets atomiques [230] ont été largement étudiés en physique statistique et se révèlent importants dans de nombreux systèmes biologiques [239], notamment pour comprendre le fonctionnement des moteurs moléculaires [240]. L'intérêt des systèmes d'atomes froids manipulés par laser se trouve dans leur importante flexibilité. Ainsi, la possibilité de modifier la géométrie du potentiel ou de faire varier indépendamment les paramètres dynamiques les distinguent de la plupart des systèmes où ces phénomènes ont été étudiés. En allant vers le régime non dissipatif des réseaux optiques, on peut envisager l'étude des phénomènes de transport quantique et notamment les équivalents quantiques des phénomènes que nous avons abordés [241], comme la résonance stochastique quantique [223], la suppression cohérente de l'effet tunnel [225] ou les rochets quantiques [242].

ANNEXES

Annexe A

Notations

Nous rassemblons dans cette annexe l'ensemble des notations utilisées dans le mémoire et rappelons sommairement leurs définitions. Nous indiquons aussi les formules, paragraphes ou pages où ces grandeurs sont introduites. Les notations sont ordonnées d'abord par genre, ensuite par ordre alphabétique.

Généralités

$\mathcal{O}$	opérateur quantique	
$[\cdot, \cdot]$	commutateur; $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1$	
$\{\cdot, \cdot\}$	anticommutateur; $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2\} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1$	
$(\cdot)$	moyenne statistique, moyenne d'ensemble	
FPE	Equations de Fokker-Planck	eqs. (I.2.32) et (I.2.37)
GLE	Equations de Langevin généralisées	eqs. (I.2.53) et (I.2.54)
OBE	Equations de Bloch optiques	eqs. (I.1.8), (I.1.11) et (I.1.18)
nD	en dimension n	
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	contraction des opérateurs tensoriels $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu} B_{\nu,\mu}$	eq. (I.2.32)

Constantes fondamentales

c	vitesse de la lumière dans le vide	
$h, \hbar = h/2\pi$	constante de Planck	
k_B	constante de Boltzmann	

Atomes et nuages atomiques

$cg_q(m)$	coefficients de Clebsch-Gordan	eq. (I.1.7) et fig. (I.1.2)
$\vec{d}^\pm$	opérateur moment dipolaire réduit, $\vec{d}^\pm = \vec{D}^\pm/\mathcal{D}$	p. 31
$\vec{D}, \vec{D}^+, \vec{D}^-$	opérateurs dipole électrique	[I.1.1.1] et eq. (I.1.4)
$\mathcal{D}$	moment dipolaire réduit	eq. (I.1.5)
$ g\rangle, e\rangle$	états fondamental et excité de l'atome	p. 28
Γ	largeur de l'état excité	
H_{at}	hamiltonien propre de l'atome	eq. (I.1.1)
J_g, J_e	Moments angulaires des niveaux fondamental (g) et excité (e)	p. 28
M	masse d'un atome	
$\vec{r}, \vec{p}$	opérateurs position et impulsion du centre de masse atomique	
ρ	matrice densité du nuage atomique dans l'espace des phases et de l'état interne	p. (1.1.1)
σ	matrice densité du nuage atomique réduite à l'état fondamental, $\sigma = \rho_{g,g} = tr_{ e\rangle}(\rho)$	p. 33
$\bar{\sigma}$	matrice densité associée aux fonctions d'onde stochastiques (méthode de Monte-Carlo quantique)	eq. (I.2.17)
ω_{at}	pulsation ($2\pi * \text{fréquence}$) de Bohr de la transition atomique	eq. (I.1.1)

Champs lumineux

$a_l, a_l^\dagger$	opérateurs annihilation et création d'un photon de mode l	
$\vec{e}_-, \vec{e}_0, \vec{e}_+$	base sphérique des vecteurs élémentaires de polarisation	eq. (I.1.6)
$\vec{E}_L$	champ laser électrique	eq. (I.1.9)
E_0	amplitude du champ laser	eq. (I.1.9)
$\vec{E}_\perp$	champ transverse quantique	
H_R	hamiltonien propre du rayonnement	eq. (I.1.2)
I_q	intensité réduite du champ de polarisation q	p. 37
k, k_L	nombre d'onde de l'onde laser q	p. 37
λ, λ_L	longueur de l'onde laser q	p. 37

ω_L	pulsation ($2\pi * \text{fréquence}$) du champ lumineux	eq. (I.1.9)
$\vec{\xi}^\pm$	modulation spatiale du champ laser	eq. (I.1.9)
ξ_-, ξ_0, ξ_+	composantes de polarisation σ^-, π, σ^+ de $\vec{\xi}^+$	eq. (I.1.9)

Interaction atome-champ lumineux

B_q	opérateur de redistribution de photons	eq. (I.2.34)
Δ	désaccord champ-atome	eq. (I.1.10)
Δ'_0	déplacement lumineux pour un atome dans un champ électrique monochromatique polarisé d'amplitude E_0 et pour un coefficient de Clebsch-Gordan égal à 1	eq. (I.1.19)
p_R, v_R, E_R, ω_R	impulsion, vitesse, énergie de recul; $E_R = \hbar\omega_R = \frac{p_R^2}{2M} = \frac{Mv_R^2}{2}$	p. 42
Γ'_0	taux de pompage optique pour un atome dans un champ électrique monochromatique polarisé d'amplitude E_0 et pour un coefficient de Clebsch-Gordan égal à 1	eq. (I.1.19)
I_0	intensité de saturation	p. II.2.10
I_L	intensité d'un faisceau laser du réseau	p. 139 et fig. III.1.2
I_P	intensité du faisceau sonde	p. 139 et fig. III.1.2
Λ	opérateur de déplacement lumineux	eq. (I.1.20)
$\Pi_{\vec{\kappa}, \vec{\epsilon}}$	opérateur de redistribution de photons	eq. (I.1.21)
s_0	paramètre de saturation	eq. (I.1.14)
V_{AR}, V_{AL}, V_{AV}	interactions atome-champs; $V_{AR} = V_{AL} + V_{AV}$	[I.1.1]
$V_\alpha^\pm$	parties montante et descendante des opérateurs d'interaction atome-champs	eq. (I.1.13)
Ω_0	pulsation de Rabi pour un atome dans un champ électrique monochromatique polarisé d'amplitude E_0 , à résonance et pour un coefficient de Clebsch-Gordan égal à 1	eq. (I.1.13)

Refroidissement laser

α_0	coefficient de friction Sisyphe dans le modèle 1D	p. 44 et 58
α_μ et β_μ	coefficients de friction Sisyphe effectifs dans la direction μ	II.2.2.1 et II.2.1.2

D_p, D_v	coefficients de diffusion en impulsion et en vitesse respectivement	p. 45 et 96
$D_{s\mu}$	coefficient de diffusion spatiale dans la direction μ	eq. (II.2.26)
$E_{K\mu}$	énergie cinétique dans la direction μ	[II.1,II.2]
$\Gamma_{T\mu}$	taux de relaxation de l'énergie cinétique dans la direction μ	eq. (II.2.36)
T_μ	température cinétique dans la direction μ	eq. (II.1.1)
v_c	vitesse de capture	p. 1.2.3 et 2.1.2
v_e	demi-largeur à $1/\sqrt{e}$ de la distribution de vitesse	p. 99
v_{rms}	vitesse rms définie par $E_K = Mv_{rms}^2/2$	p. 99
ξ	facteur d'accroissement de la diffusion spatiale en présence d'une sonde (P)	eq. (III.2.7)

Réseaux optiques

$\gamma_{l,j}$	taux de pompage optique de l'état l vers l'état j	eqs. (I.1.25), (I.2.38) et (I.2.43)
k_μ	nombre d'onde dans la direction μ du réseau 3D-lin $\perp$ lin	eq. (I.1.30)
λ_μ	période spatiale dans la direction μ du réseau 3D-lin $\perp$ lin	eq. (I.1.35)
$\theta_{x,y}$	angles du réseau 3D-lin $\perp$ lin	fig. I.1.5
U_j	Potentiels optiques	eqs. (I.1.24) et (I.2.42) et [I.2.3.2]
$\mathcal{U}$	profondeur du potentiel optique	p. 38, eqs. (.B.1), (.B.3) et (.B.4)
Ω_v, Ω_μ	fréquences d'oscillation dans les puits de potentiel en configurations 1D-lin $\perp$ lin et 3D-lin $\perp$ lin	eqs. (I.1.29), (I.1.36), (.B.6) et (.B.7)

Phénomènes de transport dans les réseaux optiques

$\alpha(t)$	modulation de phase sur l'un des faisceaux de la configuration 1D-lin $\perp$ lin	eq. (III.3.5)
α_0, A et B	amplitude globale et amplitudes des harmoniques de la modulation de phase $\alpha(t)$ et de la force $F(t)$	eqs. (III.3.7) et (III.3.8)

δ	désaccord sonde-réseau	p. 138
δ_B	valeur du désaccord sonde-réseau δ à la résonance Brillouin (dépend de la configuration <i>paral</i> ou <i>orth</i> et du mécanisme d'excitation $E_{ }$ ou $E_{\perp}$)	[III.1]
$\vec{\Delta k}_{\mu}^{\pm}$	vecteur d'onde de la modulation de champ laser $\mathcal{M}_{\mu}^{\pm}$	eq. III.1.4 et [III.1.1.2]
ΔU	barrière de potentiel	p. 164
$\delta U_{\pm}$	modulation du potentiel optique induite par l'interférence du faisceau sonde P et des faisceaux du réseau $L_{\mu}^{\pm}$	eq. III.1.3 et [III.1.1.2]
$E_{ }, E_{\perp}$	mécanismes d'excitation des modes de propagation	[III.1.2.1]
$F(t)$	force dépendant du temps	[III.3.1]
$\mathcal{F}_L$	force de Langevin (bruit blanc)	[III.3.1]
$L_{\mu}^{\pm}$	faisceaux du réseau optique 3D-lin $\perp$ lin	figs. I.1.5 et III.1.2
$\mathcal{M}_{\mu}^{\pm}$	modulation de champ laser induite par l'interférence du faisceau sonde P et du faisceau du réseau $L_{\mu}^{\pm}$	[III.1.1.2]
P	faisceau pompe pour l'excitation des modes de propagation et la spectroscopie pompe-sonde	[III.1.1, III.2.4.2] et fig. III.1.2
$(\Gamma'_0)_{SR}$	niveau du taux de pompage optique pour lequel a lieu la résonance stochastique	[III.2.3.2]
$\hat{\mu}$	coordonnée dans la direction μ de la position de l'atome en unités de période spatiale du réseau dans la direction correspondante; $\hat{\mu} = \mu/\lambda_{\mu}$	p. 170
$N_{\mu}^{\pm}$	distribution de position des atomes dans le référentiel $\mathcal{R}_{\mu}^{\pm}$	[III.1.1.3]
Ω_w, Ω_t	pulsations d'oscillation au fond d'un puits et en haut de la barrière de potentiel respectivement dans le modèle générique pour la résonance stochastique	[III.2.1.1] et p. 165
$\mathcal{P}_{B\mu}^{\pm}$	mode de propagation Brillouin de direction $\mu \in \{x, y, z\}$ et de sens $\pm\mu$	[III.1.1.2]
ϕ	déphasage des harmoniques de $\alpha(t)$ et $F(t)$ de pulsations Ω et 2Ω	eqs. (III.3.7) et (III.3.8)
$(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$	référentiels du laboratoire et en mouvement à vitesse $\dot{\alpha}/2k$ respectivement	p. 192
<i>paral</i> et <i>orth</i>	configuration du faisceau P pour l'excitation des modes de propagation du réseau 3D-lin $\perp$ lin	[III.1.1.2]
$\mathcal{R}_{\mu}^{\pm}$	référentiel attaché au mode de propagation de direction $\mu \in \{x, y, z\}$ et de sens $\pm\mu$	[III.1.1.2]
r_K	taux de transition interpuits dû au bruit dans le modèle générique pour la résonance stochastique	[III.2.1.1] et eq. (III.2.1)

r_{mod}	taux de transition interpuits dû à la modulation de potentiel dans le modèle générique pour la résonance stochastique	[III.2.1.1] et eq. (III.2.2)
τ, Ω	période et pulsation de la modulation de potentiel dans le modèle générique pour la résonance stochastique	[III.2.1.1] et p. 165
$v_p^\pm$	vitesse de phase de l'onde de la modulation de champ laser $\mathcal{M}_p^\pm$	[III.1.1.2]
$v_{B\mu}^\pm$	vitesse des modes Brillouin dans la direction et le sens $\pm\mu$	[III.1.1.2] et eq. (III.1.1)
v_{CM}	la vitesse moyenne de déplacement du nuage atomique	p. 196

Annexe B

Quelques brèves notions sur des aspects expérimentaux

Les travaux théoriques en physique des atomes froids sont en général contemporains et donc intimement liés aux travaux expérimentaux. C'est bien sûr le cas des études présentées dans cette thèse. Il est donc utile pour un théoricien d'avoir quelques notions sur les méthodes expérimentales. Dans cette annexe, nous introduisons très brièvement des notions expérimentales que nous n'avons pas abordées dans le corps du manuscrit. Le but est double. D'une part, nous fournissons des grandeurs typiques des paramètres expérimentaux qui pourront permettre des comparaisons quantitatives des résultats de cette thèse avec des données expérimentales. D'autre part, nous mettons en lumière quelques différences et similitudes utiles à savoir entre les situations expérimentales réelles et le modèle théorique d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$ que nous avons très largement employé dans notre travail. Ces différences sont en général des détails, car, comme nous l'avons vu, le modèle $1/2 \rightarrow 3/2$ permet très souvent de décrire très bien le comportement d'atomes réels dans un réseau optique.

B.1 Les atomes employés et leurs transitions

Le choix d'un atome répond essentiellement à deux impératifs :

- l'atome doit disposer d'une transition qui soit adéquate ($J_g \rightarrow J_e = J_g + 1$ pour le refroidissement Sisyphé) et dont la fréquence de Bohr soit proche de la fréquence d'un laser disponible
- la transition choisie doit être fermée, c'est-à-dire que la désexcitation radiative de l'état excité $|e\rangle$ doit se faire dans l'état fondamental $|g\rangle$ uniquement .

Ces contraintes limitent considérablement les choix possibles. Dans les expériences sur des réseaux optiques dissipatifs contemporaines de notre travail, on utilise le césium ^{133}Cs où le rubidium ^{85}Rb ou ^{87}Rb .

Le césium ^{133}Cs

L'atome de césium ^{133}Cs est un alcalin (il possède un seul électron de valence). Son spin nucléaire vaut $I = 7/2$ de sorte que les niveaux hyperfins sont $F = 3$ et $F = 4$ dans le fondamental et $F = 2$ à $F = 5$ dans l'état excité. Les niveaux du césium ^{133}Cs sont représentés sur la figure .B.1.

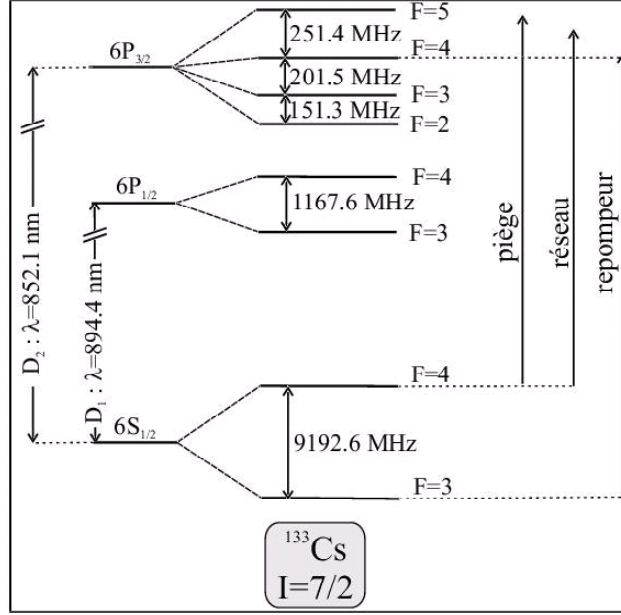


Figure .B.1: Niveaux énergétiques de l'atome de césium ^{133}Cs .

On utilise alors la transition $4 \rightarrow 5$ pour le réseau optique. Des faisceaux lasers sont donc accordés en fréquence au voisinage de la fréquence de Bohr de la $4 \rightarrow 5$. Or cette transition est assez proche de la transition $4 \rightarrow 4$ (écart de seulement 251,4 MHz, soit environ 50Γ), de sorte qu'on ne peut pas négliger brutalement cette dernière. Ceci a deux conséquences. D'une part, il y a des transitions non résonantes sur la $4 \rightarrow 4$ à la suite desquelles, l'atome se désexcite dans le sous-niveau $F = 3$ du fondamental. Il faut alors utiliser un *faisceau repompeur*, résonant sur la $3 \rightarrow 4$ afin de récupérer les atomes ainsi perdus. D'autre part, la gamme de désaccord laser est limitée à $|\Delta| \ll 50\Gamma$, sans quoi l'influence de la transition $4 \rightarrow 4$ devient importante [153]. En pratique, les mesures de températures ne sont pas sensibles à l'influence de la transition $4 \rightarrow 4$ tant que $|\Delta| < 30\Gamma$ [38].

Le rubidium ^{85}Rb ou ^{87}Rb

Le rubidium est stable sous la forme de deux isotopes, ^{85}Rb (72 %) ou ^{87}Rb (28 %).

^{85}Rb : Le spin nucléaire du ^{85}Rb vaut $I = 5/2$, soit des niveaux hyperfins $F = 2$ et $F = 3$ dans le fondamental et $F = 1$ à $F = 4$ dans l'état excité. On utilise la transition $3 \rightarrow 4$ et de la même manière que pour le césium ^{133}Cs , un repompeur résonant sur la transition $2 \rightarrow 3$ doit être introduit dans le dispositif expérimental pour compenser les pertes vers le sous-niveau du fondamental $F = 2$.

^{87}Rb : Le spin nucléaire du ^{87}Rb vaut $I = 3/2$, soit des niveaux hyperfins $F = 1$ et $F = 2$ dans le fondamental et $F = 0$ à $F = 3$ dans l'état excité. On utilise la transition $2 \rightarrow 3$. Un repompeur résonant sur la transition $1 \rightarrow 2$ compense les pertes vers le sous-niveau du fondamental $F = 1$.

Les niveaux du rubidium ^{85}Rb et ^{87}Rb sont représentés sur la figure .B.2.

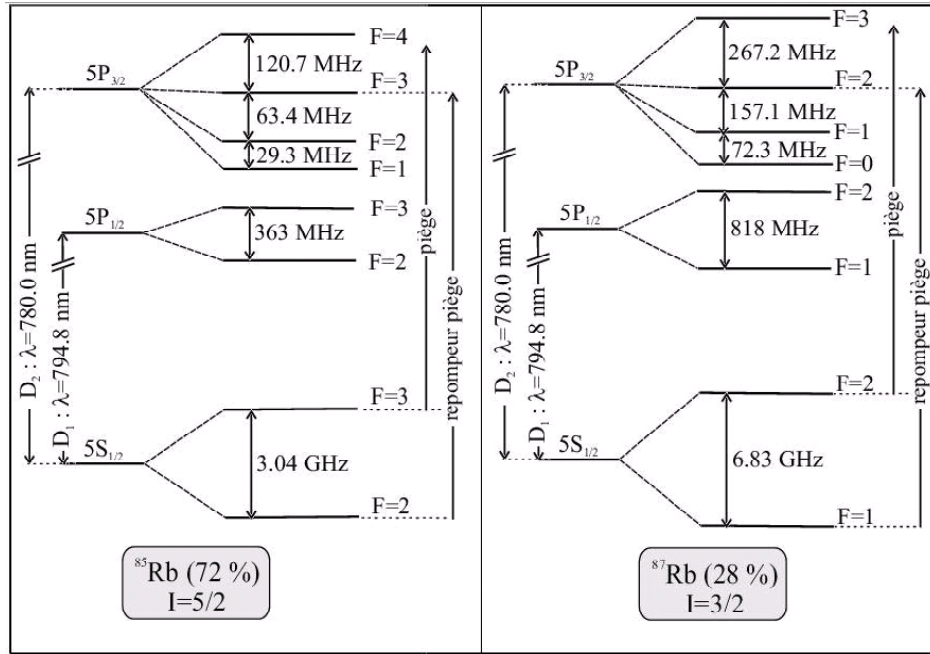


Figure .B.2: Niveaux énergétiques de l'atome de rubidium pour les isotopes ^{85}Rb et ^{87}Rb .

Nous achevons ce paragraphe par un tableau des caractéristiques des atomes de césium et de rubidium.

Nom	Définition	Valeur	
		césium	rubidium
Masse	M	$2,21 \cdot 10^{-25}$ kg	$1,44 \cdot 10^{-25}$ kg
Largeur naturelle	Γ	$2\pi \cdot 5,22$ MHz	$2\pi \cdot 5,89$ MHz
Longueur d'onde	λ_L	852,11 nm	780,02 nm
Intensité de saturation	I_s t.q. $\Omega_0^2 = \Gamma^2/2$	1,1 mW/cm ²	1,9 mW/cm ²
Energie de recul	$E_R = \hbar^2 k^2 / 2M$	$1,37 \cdot 10^{-30}$ J	$2,45 \cdot 10^{-30}$ J
Vitesse de recul	$v_R = \hbar k / M$	3,52 mm/s	5,90 mm/s
Fréquence de recul	$\nu_R = E_R / h = \omega_R / 2\pi$	2,07 kHz	3,70 kHz
Température de recul	$T_R = M v_R^2 / k_B$	198 nK	360 nK

B.2 Eléments de dynamique dans un réseau 3D-lin⊥lin pour une transition réelle $J_g \rightarrow J_e = J_g + 1$

B.2.1 Caractéristiques du réseau 3D-lin⊥lin

Nous décrivons à présent deux caractéristiques essentielles du réseau 3D-lin⊥lin dans le cadre de l'approximation semi-classique pour une transition réelle $J_g \rightarrow J_e = J_g + 1$, à savoir d'une part la profondeur du potentiel et d'autre part les fréquences et directions d'oscillation au voisinage des puits de potentiel.

La profondeur du potentiel est définie comme la différence maximale des valeurs des potentiels optiques :

$$\mathcal{U} = \hbar |\Delta'_0| \left\{ \max_{|\Phi\rangle, \vec{R}} (\langle \Phi | \Lambda | \Phi \rangle) - \min_{|\Phi\rangle, \vec{R}} (\langle \Phi | \Lambda | \Phi \rangle) \right\} . \quad (.B.1)$$

Il est clair, d'après la définition (I.1.20) que

$$0 \leq \langle \Phi | \Lambda | \Phi \rangle \leq \max_{\vec{R}} \left(\left| \vec{\xi}^+ \right|^2 \right) \max_{q,m} (cg_q(m)^2) \quad (.B.2)$$

or les valeurs extrêmes sont atteintes dans le réseau 3D-lin⊥lin, respectivement aux nœuds du champ laser ($\vec{\xi}^+ = 0$, pour $k_\mu \mu \equiv \pi/2 \text{ } [\pi]$, $\forall \mu \in \{x, y\}$ et pour z quelconque) et au fond des puits de potentiel. Ainsi, la profondeur du potentiel s'écrit

$$\mathcal{U} = 8\hbar |\Delta'_0| . \quad (.B.3)$$

Notons que la valeur de $\mathcal{U}$ est la même dans les approximations diabatique et adiabatique car les puits de potentiel étant polarisés $\sigma_\pm$, l'état adiabatique fondamental au fond d'un puits est le sous-niveau Zeeman $|\pm J_g\rangle$.

Remarque: Dans un réseau 1D-lin⊥lin, la valeur minimale de $\langle \Phi | \Lambda | \Phi \rangle$ n'est pas nulle car le champ ne possède pas de nœud. Dans ce cas, le potentiel atteint son minimum pour l'état $|g, \pm J_g\rangle$ aux points de polarisation $\sigma^\mp$ de sorte que

$$\mathcal{U} = 2 \left\{ 1 - cg_\mp(\pm J_g)^2 \right\} \hbar |\Delta'_0| . \quad (.B.4)$$

Les directions propres et les fréquences d'oscillation au fond des puits sont obtenues en développant le potentiel fondamental $U_0(\vec{R})$ au second ordre en $\vec{R}$ et en l'écrivant sous la forme

$$U_0(\vec{R}) = -\mathcal{U} + \sum_{\mu} \frac{M\Omega_{\mu}^2}{2} \mu^2 + O(\vec{R}^2) . \quad (.B.5)$$

- Dans l'approximation diabatique, le calcul est immédiat et montre que les directions propres d'oscillation sont les axes x , y et z avec les fréquences

$$\begin{aligned}\Omega_{x,y} &= 4 \left(\frac{k_{x,y}}{k} \right) \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R} \\ \Omega_z &= 2 \sqrt{2(1 - cg_+(-J_g)^2)} \left(\frac{k_z}{k} \right) \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R} .\end{aligned}\quad (.B.6)$$

- Dans l'approximation adiabatique, le calcul est plus délicat mais peut être effectué analytiquement à l'aide de la théorie des perturbations stationnaires¹ [39, 40]. Nous obtenons alors que les directions propres d'oscillation sont toujours les axes x , y et z avec cette fois les fréquences

$$\begin{aligned}\Omega_{x,y} &= 4 \left(\frac{k_{x,y}}{k} \right) \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R} \\ \Omega_z &= 2 \sqrt{2 \left(1 - \frac{cg_+(-J_g)^2}{1 - cg_-(2 - J_g)^2} \right)} \left(\frac{k_z}{k} \right) \sqrt{|\Delta'_0| \omega_R} .\end{aligned}\quad (.B.7)$$

En fait, les deux approximations donnent généralement des résultats très voisins et notamment, rigoureusement les mêmes fréquences d'oscillation pour les directions transverses x et y . De plus, pour une transition $1/2 \rightarrow 3/2$, $cg_-(2 - J_g) = 0$ de sorte que (.B.6) et (.B.7) sont identiques. Dans le cas de la transition réelle $4 \rightarrow 5$ du césium ^{133}Cs par exemple, la différence est de l'ordre de 4%².

B.2.2 Mécanisme Sisyphe dans l'approximation adiabatique

La description du mécanisme de refroidissement dans le cas d'une transition $J_g \rightarrow J_g + 1$, avec $J_g > 1/2$, est plus délicate que dans celui d'une transition $1/2 \rightarrow 3/2$. Ceci en particulier pour deux raisons :

- L'opérateur des déplacements lumineux $\mathbf{\Lambda}$ induit des couplages entre des sous-niveaux Zeeman différents de sorte que ceux-ci ne sont alors plus états propres de $\mathbf{\Lambda}$ (voir l'équation (I.1.20)). Ainsi, un atome en mouvement suivant adiabatiquement l'état interne le plus déplacé (U_0) a un état interne non constant.
- Il n'y a pas de croisement, mais des anti-croisement entre les différentes courbes de potentiel optique.

On peut néanmoins se convaincre aisément de l'existence d'un mécanisme de refroidissement Sisyphe tout à fait semblable à celui qui a été présenté au paragraphe I.1.2.3 et en particulier à la figure I.1.7.

¹Nous écrivons $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0 + \mathbf{W}$ où $\mathbf{\Lambda}_0$ est la diagonale de $\mathbf{\Lambda}$ dans la base diabatique (des sous-niveaux Zeeman) et nous développons les valeurs propres de $\mathbf{\Lambda}$ à l'ordre 2 en $\mathbf{W}$ et en $\vec{R}$.

²En général, les effets anharmoniques dus à la grande amplitude moyenne des oscillations dans les puits sont supérieurs à ces 4% ce qui limite l'utilité de la formule (.B.7) par rapport à (.B.6).

Notons tout d'abord qu'en traçant les taux de pompage optique entre les différents états adiabatiques ($\gamma_{j,l}$ de l'état $|\Phi_j\rangle$ vers l'état $|\Phi_l\rangle$), on peut voir facilement que, essentiellement, le pompage optique tend à peupler le niveau de potentiel le plus bas sauf au niveau des points d'anti-croisement ($2kz \equiv \pi/2 [\pi]$). Par ailleurs Petsas *et al.* [135] ont montré que les seuls états significativement remplis sont les deux niveaux inférieurs $|\Phi_0\rangle$ et $|\Phi_1\rangle$.

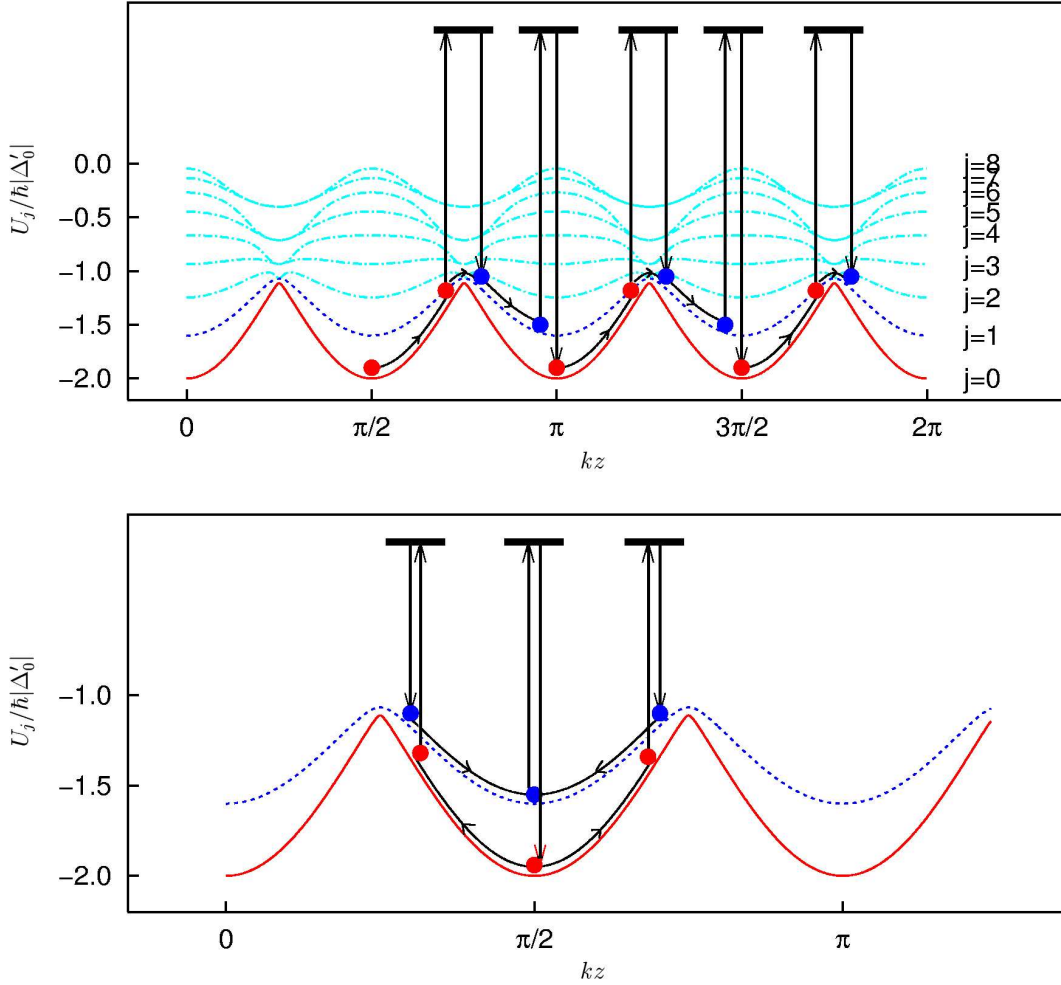


Figure .B.3: Mécanismes de refroidissement Sisyphe dans le cas d'une transition $4 \rightarrow 5$. Haut : processus délocalisé semblable au mécanisme traditionnel décrit à la figure I.1.7. Bas : processus local par lequel un cycle Sisyphe s'effectue au sein d'un seul puits.

Deux mécanismes de refroidissement peuvent alors être dégagés :

Refroidissement Sisyphe - Le mécanisme de refroidissement Sisyphe est clair (voir la figure .B.3Haut). Considérons un atome se déplaçant de la gauche vers la droite. Parti du fond d'un puits de U_0 , il monte une colline de potentiel, une fois en haut, un cycle de pompage optique le transfère préférentiellement sur le potentiel U_1 et enregistre un faible apport d'énergie, puis il redescend la colline de potentiel U_1 dans le puits adjacent jusqu'au fond

où il est pompé optiquement sur le potentiel U_0 et perd cette fois une énergie significative. Au final, l'énergie atomique a diminué du fait de la différence de courbure des potentiels U_0 et U_1 . Il y a donc bien un refroidissement de type Sisyphe qualitativement semblable au mécanisme correspondant à la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ [I.1.2.3].

Refroidissement local - Néanmoins, remarquons que le mécanisme décrit ci-dessus peut avoir lieu au sein même d'un puits de potentiel donnant lieu à un mécanisme de refroidissement local [155, 135] (voir la figure .B.3Bas). Considérons un atome oscillant sur le potentiel U_0 mais trop peu énergétique pour parvenir en haut de la colline de potentiel; arrivé au point culminant de son trajet, il peut être pompé optiquement sur le potentiel U_1 , en gagnant un peu d'énergie, puis rebrousser chemin; une fois dans la vallée, il est repompé sur le potentiel U_0 et perd une énergie importante. Ici encore, c'est la différence de courbure des potentiels U_0 et U_1 qui permet le refroidissement³. L'existence de ce mécanisme de refroidissement local a fait l'objet de peu d'études [155, 135] et reste controversé. Il est en effet difficile de distinguer les mécanismes de refroidissement Sisyphe local et délocalisé dans des expériences ou des simulations déterminantes. Remarquons néanmoins que l'existence (hypothétique) d'un tel mécanisme local pourrait permettre un refroidissement plus efficace. En effet, l'énergie cinétique minimale de l'atome n'est plus limitée inférieurement par la profondeur d'un puits de potentiel [138], [II.1.1.2, II.1.1.4] comme c'est le cas dans le mécanisme correspondant à la transition $1/2 \rightarrow 3/2$ [I.1.2].

B.3 Méthodes expérimentales d'étude des réseaux optiques

Les expérimentateurs disposent de méthodes très puissantes d'investigation des réseaux optiques. Nous nous contentons de les décrire très brièvement ici et renvoyons le lecteur aux références [37, 38] pour des descriptions plus précises.

Mesures de température

Naturellement, toute expérience avec des atomes froids rend nécessaire la mesure d'une température du nuage. Nous décrivons deux méthodes, toutes deux destructives.

Méthode du temps de vol - La méthode la plus utilisée consiste à effectuer un *temps de vol*. Dans cette technique, on coupe les faisceaux du réseau et on laisse tomber le nuage d'atomes dans le champ de pesanteur. Lors de la chute libre, les vitesses horizontales sont figées et le nuage subit une expansion balistique dont les caractéristiques dépendent trivialement de la distribution de vitesse des atomes initialement dans le réseau. À l'aide d'un faisceau sonde placé en dessous du réseau, on réalise une image du nuage expansé dont

³Remarquons que les deux mécanismes (délocalisé et local) de refroidissement Sisyphe sont tout à fait similaires : en reliant tous les puits de potentiel adjacents sur le puits central, les deux représentations sont identiques!

on déduit la distribution spatiale dans les directions horizontales (voir la figure .B.4). Il est alors facile de remonter à la distribution des vitesses horizontales dans le réseau.

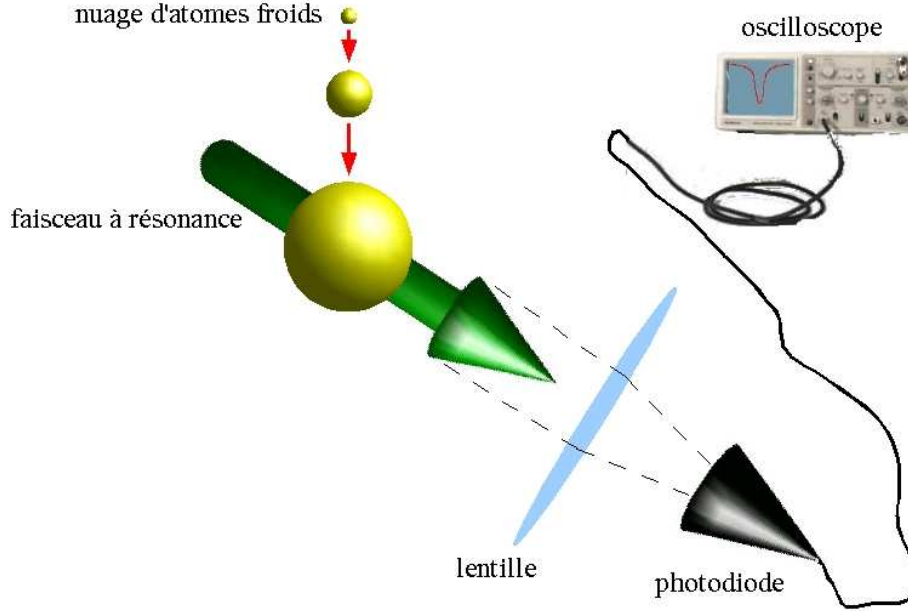


Figure .B.4: Mesure de température par la méthode du temps de vol : les atomes relâchés du réseau tombent dans le champ de pesanteur et croisent un faisceau sonde permettant de mesurer la taille du nuage. Ceci permet de déduire la distribution de vitesse et donc la température du nuage.

Résonances de recul - Une autre méthode consiste à sonder directement la distribution d'impulsion des atomes, là encore libérés du réseau, à l'aide d'un faisceau pompe (de vecteur d'onde k_p) et d'un faisceau sonde (de vecteur d'onde k_s) faisant un angle θ . Un atome subit alors des cycles composés d'une absorption dans l'un des faisceaux et d'une émission stimulée dans l'autre faisceau. Par conservation de l'impulsion totale, l'impulsion de l'atome passe de p à $p + \hbar(k_s - k_p)$ (il y a alors une absorption dans le faisceau sonde) ou à $p - \hbar(k_s - k_p)$ (il y a alors un gain dans le faisceau sonde). On montre alors que le coefficient d'amplification du faisceau sonde en fonction du désaccord δ entre les faisceaux pompe et sonde prend la forme de la dérivée de la distribution d'impulsion [243, 244]. Par une intégration triviale, on obtient alors la distribution de vitesse du nuage d'atomes.

Imagerie et diffusion spatiale

Dans le but d'étudier directement la diffusion spatiale du nuage atomique, on peut utiliser une méthode directe, très simple dans son principe, consistant à prendre des images du nuage à l'aide d'une caméra CCD déclenchable. Cette méthode permet d'extraire d'images successives, la vitesse du centre de masse du nuage ainsi que son expansion et d'en déduire les coefficients de diffusion spatiale dans les différentes directions. Cette méthode a été abondamment utilisée dans des études des réseaux brillants ou gris [114, 53, 181].

Dans le cas d'un réseau brillant, les atomes fluorescent suffisamment pour pouvoir prendre des images au sein même du réseau. Cette mesure est donc non-destructive. Dans le cas d'un réseau gris, les atomes émettent peu de lumière dans le réseau. Il convient alors de les éclairer au moment de la prise d'image par un faisceau résonant. Celui-ci perturbe beaucoup le nuage de sorte que la mesure est dans ce cas destructive.

Spectroscopie pompe-sonde

La méthode de spectroscopie par transmission consiste à ajouter aux faisceaux du réseau un faisceau sonde (P), désaccordé de δ , par exemple dans la configuration de la figure III.1.2. L'interférence de (P) avec les faisceaux du réseau engendre des modulations spatiales et temporelles du champ laser. Pour diverses valeurs de δ , ces modulations induisent des excitations résonantes de modes dynamiques atomiques dans le réseau. Une modulation de matière est créée sur laquelle les faisceaux du réseau peuvent diffracter, induisant un gain (positif ou négatif) pour l'intensité du faisceau sonde [149]. L'excitation des modes dynamiques atomiques est alors gravée sous la forme de résonances dans le spectre pompe-sonde comme le montre la figure .B.5 représentant un spectre expérimental. On distingue trois résonances dont les positions et les largeurs permettent de déduire les propriétés des modes dynamiques [152] :

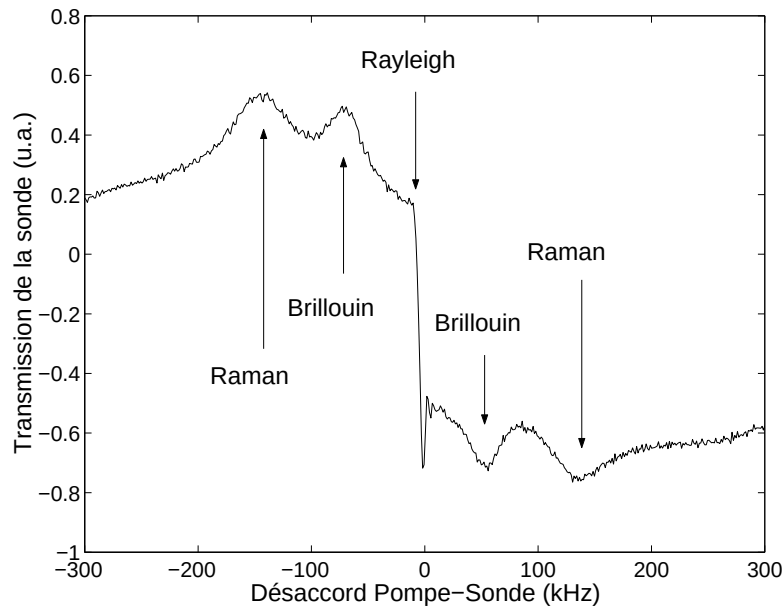


Figure .B.5: Exemple de spectre pompe-sonde dans un réseau 3D-lin_llin. On obtient plusieurs résonances en absorption et en amplification (Raman et Brillouin) ainsi qu'une résonance centrale (Rayleigh).

résonance Rayleigh - La résonance centrale donne accès aux propriétés de diffusion spatiale et de relaxation de la température dans le réseau [178].

résonances Raman - Ces résonances latérales correspondent à l'excitation de transitions Raman couplant des états quantifiés d'oscillation au sein d'un puits de potentiel. Leurs positions fournissent directement la fréquence de l'oscillation des atomes dans les puits.

résonances Brillouin - Celles-ci correspondent à l'excitation résonante des modes délocalisés de propagation Brillouin dans le réseau 3D- $\text{lin} \perp \text{lin}$ [III.1, III.2].

La méthode spectroscopique se révèle un outil très puissant donnant accès à des propriétés très diverses de la dynamique microscopique (dynamique intra-puits) ou macroscopique (dynamique inter-puits) des atomes dans les réseaux optiques dissipatifs [217, 180, 31, 218, 219, 88, 178]. Notre équipe en a fait un large usage dans le passé [177, 220, 152, 37, 82, 38, 26].

Diffraction de Bragg

La méthode de diffraction de Bragg, très connue en physique des solides [245, 246], a été appliquée aux réseaux périodiques [247, 248] et quasi-périodiques [82, 83]. Elle permet, grâce à l'analyse des modulations angulaires de l'amplitude de diffraction, de déterminer la structure spatiale du réseau de matière piégé dans le réseau optique. Notons que Raithel *et al.* l'ont aussi appliquée à l'étude de la dynamique de refroidissement dans un réseau optique [167, 249].

Annexe C

Articles complémentaires

Nous reproduisons dans cette annexe trois articles publiés dans des revues internationales à comité de lecture qui complètent le présent mémoire. Le paragraphe C.1 présente l'étude théorique et expérimentale de la raie Rayleigh obtenue au centre des spectres pompe-sonde des réseaux optiques dissipatifs, un sujet qui n'est pas abordé dans le corps du manuscrit. Les paragraphes C.2 et C.3 complètent les chapitres III.1 et III.2 respectivement. Dans les articles de ces deux parties sont présentées la réalisation expérimentale et l'analyse théorique correspondante des modes de propagation et de la résonance stochastique.

C.1 Rayleigh scattering and atomic dynamics in dissipative optical lattices

F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, M. Schiavoni, F. Renzoni et G. Grynberg
Physical Review Letters **90**, 043901 (2003)

résumé

Nous étudions la diffusion Rayleigh dans des réseaux optiques dissipatifs. En particulier, à la suite de propositions récentes [S. Guibal *et al*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4709 (1997); C. Jurczak *et al*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1727 (1996)], nous étudions si la résonance Rayleigh a pour origine la diffraction sur une modulation de matière, et si elle est alors une sonde pour le transport des atomes dans les réseaux optiques. Il s'avère que ce n'est pas le cas : la raie Rayleigh est en fait une mesure du taux de refroidissement, alors que la diffusion spatiale contribue au spectre de diffusion par une résonance bien plus large.

abstract

We investigate Rayleigh scattering in dissipative optical lattices. In particular, following recent proposals (S. Guibal *et al*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4709 (1997); C. Jurczak *et al*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1727 (1996)), we study whether the Rayleigh resonance originates from the diffraction on a density grating, and is therefore a probe of transport of atoms in optical lattices. It turns out that this is not the case: the Rayleigh line is instead a measure of the cooling rate, while spatial diffusion contributes to the scattering spectrum with a much broader resonance.

Rayleigh Scattering and Atomic Dynamics in Dissipative Optical Lattices

F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, M. Schiavoni, F. Renzoni, and G. Grynberg

Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure,

24 rue Lhomond, 75231, Paris Cedex 05, France

(Received 21 June 2002; revised manuscript received 23 October 2002; published 29 January 2003)

We investigate Rayleigh scattering in dissipative optical lattices. In particular, following recent proposals [S. Guibal *et al.*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4709 (1997); C. Jurczak *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1727 (1996)], we study whether the Rayleigh resonance originates from the diffraction on a density grating and is therefore a probe of transport of atoms in optical lattices. It turns out that this is not the case: the Rayleigh line is instead a measure of the cooling rate, while spatial diffusion contributes to the scattering spectrum with a much broader resonance.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.043901

PACS numbers: 42.65.Es, 32.80.Pj

Light scattering [1], i.e., the scattering of photons resulting from the interaction with a material medium, is a technique widely used to determine the properties of many different types of media. From the position and the width of the scattering resonances it is in fact possible to identify the dynamical modes of the system and derive the rates of relaxation toward equilibrium. This is well exemplified by the Landau-Placzek relation, valid for light scattering originating from the density fluctuations of a medium at thermal equilibrium, which connects the strength of the different components of the scattering spectrum to the specific heats of the medium at constant volume and constant pressure.

Recently light scattering has been extensively used to study the properties of cold atomic samples, and, in particular, it turned out to be an essential tool for the understanding of the basic properties of dissipative optical lattices [2]. The same technique may also apply to far-off-resonance nondissipative optical lattices which are currently investigated by many groups in connection with Bose-Einstein condensation experiments [3]. However to derive the damping rates of the system from light scattering measurements is in general a highly nontrivial task. This is especially true for quasielastic (Rayleigh) scattering [4–6], which gives access to the relaxation rates of nonpropagating material observables. In this work we investigate the mechanism behind the Rayleigh scattering in dissipative optical lattices and identify the relaxation process which determines the width of the Rayleigh resonance in the scattering spectrum.

The starting point of the present study is the previous claim that Rayleigh resonances may originate from the excitation of the atomic density, and consequently the width of the Rayleigh line would provide a measure of the diffusion coefficients of the atoms in an optical lattice [5]. Following a similar approach, Jurczak *et al.* [6] derived values for the diffusion coefficients from polarization-selective intensity correlations.

In our analysis we first assume, along the lines of these previous works, that the material observable excited in the pump-probe spectroscopy is the atomic density and

derive the expected relation between the width of the Rayleigh resonance and the spatial diffusion coefficients. Through experimental and theoretical work we show that this relation is actually *not* satisfied by independent measurements/calculations of the width of the resonance and the diffusion coefficients. Instead, we show that the narrow Rayleigh resonance originates from the atomic velocity damping, i.e., the width of the resonance is a measure of the cooling rate, while spatial diffusion contributes to the scattering spectrum with a much broader resonance.

Consider first the general relation between the width of the Rayleigh line and the relaxation rate of the material observable excited in the optical process. In the basic setup of pump-probe spectroscopy, an atomic sample interacts with two laser fields: a strong pump beam, with frequency ω , and a weak probe beam with frequency $\omega + \delta$. The superimposition of the pump and probe fields results in an interference pattern moving with phase velocity $v = \delta/|\Delta\vec{k}|$, with $\Delta\vec{k}$ the difference between pump and probe wave vectors. The atomic sample tends to follow the interference pattern and a grating of an atomic observable (typically density, magnetization, or temperature) is created. However due to the finite response time of the atomic medium the material grating is phase shifted with respect to the light interference pattern. Therefore the pump beam can be diffracted on the material grating in the direction of the probe, modifying the probe transmission. It is then clear that it should be possible to derive information about the atomic response time from the transmission spectrum. More precisely if we assume that only one atomic observable is excited in the optical process, and that the time evolution of this observable is characterized by a single relaxation rate γ , the probe gain spectrum $g(\delta)$ has then a dispersive line shape

$$g \propto \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \quad (1)$$

with peak-to-peak distance 2γ , as derived in [7].

Consider now the specific configuration with linearly polarized pump and probe beams, the two polarization vectors being parallel. The resulting *intensity* interference pattern gives rise, via the dipole force, to a grating of the atomic density n of the form

$$n = n_0 + n_1 \{ \exp[-i(\delta \cdot t - \Delta \vec{k} \cdot \vec{r})] + \text{c.c.} \}. \quad (2)$$

We assume now, following previous work [5], that the Rayleigh resonance originates from the scattering on this *atomic density* grating. It follows that the width of the Rayleigh line is related to the spatial diffusion coefficients. Indeed the relaxation mechanism of a grating of atomic density is spatial diffusion: atoms have to move to destroy the density grating. More quantitatively, if we assume that the dynamics of the atoms in the optical lattice is well described by Fick's law

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}, \quad (3)$$

where D_i ($i = x, y, z$) is the spatial diffusion coefficient in the i direction, we find substituting the expression (2) for n in (3) that the relaxation rate γ_D of the atomic density, defined by

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\gamma_D n_1, \quad (4)$$

is given by

$$\gamma_D = D_x \Delta k_x^2 + D_y \Delta k_y^2 + D_z \Delta k_z^2. \quad (5)$$

Under the assumption that the Rayleigh resonance originates from the scattering on the atomic density grating, the half-distance peak to peak of the Rayleigh line γ_R is simply equal to the relaxation rate γ_D , and therefore measurement of γ_R allows the determination of the diffusion coefficients, as in Refs. [5,6]. The validity of this approach will be tested by comparing results for the relaxation rate γ_D with measurements of the width of the Rayleigh resonance, as presented below.

In our experiment rubidium atoms are cooled and trapped in a three-dimensional (3D) lin $\perp$ lin near resonant optical lattice [2]. The periodic structure is determined by the interference of four linearly polarized laser beams, arranged as in Fig. 1. The angle 2θ between copropagating lattice beams is equal to 60° . This four-beam configuration is the same, except for the value of the angle θ , as the one considered in the works of Guibal *et al.* [5] and Jurczak *et al.* [6].

To determine *in a direct way* the spatial diffusion coefficients of the atoms in the optical lattice, we observe the atomic cloud expansion by using a charge coupled device camera [8–10]. Since the x and y directions are equivalent in our lattice (see Fig. 1), we chose to take images in the ξOz plane, where ξ is the axis in the xOy plane forming an angle of 45° with the x and y axes. Correspondingly, we determined the diffusion coefficients D_ξ and D_z in the ξ and z directions, with results as in Fig. 2.

These values for the diffusion coefficients are not consistent with the value of about $10 \hbar/M$ determined for the

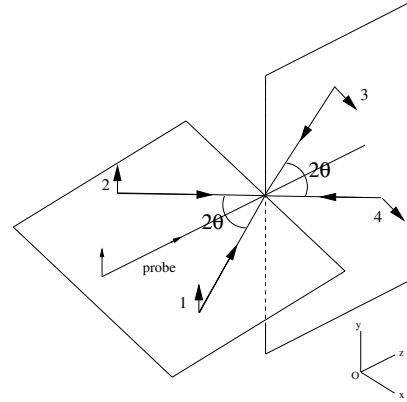


FIG. 1. Sketch of the experimental setup.

same configuration by Jurczak *et al.* [6] by polarization-selective intensity correlations. As we will show in the following, this inconsistency derives from the unreliability of the determination of the diffusion coefficients by light scattering measurements, as this derivation of the diffusion coefficients is based on the assumption that the narrow Rayleigh resonance originates from the diffraction on an atomic density grating.

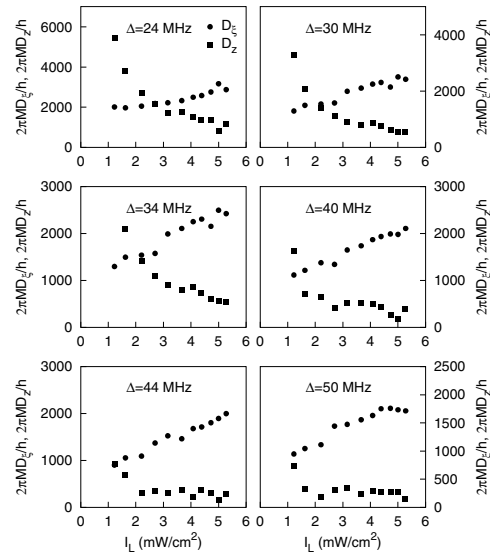


FIG. 2. Experimental results for the spatial diffusion coefficients in the ξ and z directions as functions of the intensity per lattice beam I_L and for different values of the lattice detuning Δ .

We turn now to the measurements of the width of the Rayleigh resonance. The y polarized probe beam is derived from the lattice beams, with the relative detuning controlled with acousto-optical modulators. This probe beam is sent along the z axis through the cold atomic sample (Fig. 1) with its frequency scanned around the lattice-beams' frequency. The probe can interfere with the different lattice beams, which play the role of the pump.

A typical probe transmission spectrum is shown in Fig. 3. The lateral resonances have been characterized in great detail in past investigations [11], and we focus here on the resonance at the center of the spectrum (inset of Fig. 3). To determine whether this Rayleigh resonance can be associated with the relaxation mechanism of spatial diffusion, we made a systematic study of the width of the resonance as a function of the interaction parameters (lattice-field intensity and detuning).

The peak-to-peak distance $2\gamma_R$ of the Rayleigh resonance has been determined by fitting the central part of the probe transmission spectrum with the function

$$f(\delta) = a_1 + a_2\delta + \frac{a_3}{\delta^2 + \gamma_R^2} + \frac{a_4\delta}{\delta^2 + \gamma_R^2}. \quad (6)$$

Here the linear term in detuning describes the wings of the sideband resonances [11]. The Lorentzian resonance arises from the radiation pressure, and has the same width of the dispersive line, as discussed in Ref. [5]. Experimental results for γ_R are reported in Fig. 4 as a function of the lattice beam intensity, for different values of the lattice detuning.

We now describe the determination of γ_D . In the examined configuration the probe beam can interfere simultaneously with all lattice beams. Therefore the situation is slightly more complicated than the one analyzed previously leading to Eq. (5), and to derive the link between the width of the Rayleigh resonance and the diffusion coefficients we have to calculate the interference pattern between the probe and the lattice beams. By using the expression for the lattice-beams electric fields for a 3D

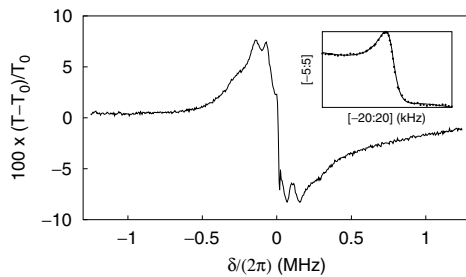


FIG. 3. Probe transmission as a function of the detuning between probe and lattice beams, T and T_0 being the intensity of the transmitted probe beam with and without the atomic cloud. The inset shows a slow scan of the region around zero detuning, together with the fit with the function (6) (solid line).

043901-3

lin $\perp$ lin optical lattice [2], we easily find that the intensity modulation produced by the probe beam is

$$\delta|\tilde{E}|^2 \simeq E_p^* E_0 \cos(Kx) \exp\{i[(K_+ - k)z + \delta \cdot t]\} + \text{c.c.}, \quad (7)$$

with E_0 (E_p) the amplitude of the lattice (probe) field, $K = k \sin\theta$ and $K_+ = k \cos\theta$. Substituting in Fick's law, Eq. (3), the resulting modulation for the atomic density we find that the relaxation rate γ_D , defined via Eq. (4), is in the present case

$$\gamma_D = D_x(k \sin\theta)^2 + D_z k^2(1 - \cos\theta)^2. \quad (8)$$

This equation is consistent with the relation derived in Ref. [5] in the limit of small θ . To determine whether the rate γ_D of relaxation of the atomic density is equal to the width of the Rayleigh resonance, we calculate from the values D_x, D_z of Fig. 2 the relaxation rate γ_D of the atomic density, using Eq. (8), with results as in Fig. 4. For the same range of interaction parameters the relaxation rate γ_D is 4 orders of magnitude larger than the half-distance peak to peak γ_R of the Rayleigh resonance. We therefore conclude that the Rayleigh resonance does not originate from the diffraction on an atomic density grating, and therefore measurements of the width of the Rayleigh line do not allow the determination of the spatial diffusion coefficients.

Our conclusions, based on the presented experimental findings, are supported by numerical calculations. We consider a $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$ atomic transition, as customary in numerical analysis of Sisyphus cooling. Taking advantage of the symmetry between the x and y directions (see Fig. 1), we restricted the atomic dynamics to the xOz plane. Through semiclassical Monte Carlo calculations [12,13], we simulate the dynamics of the atoms in the optical lattice. From the atomic trajectories we determine then the probe transmission spectra and the evolution of the atomic mean square displacements. We calculate the width of the Rayleigh line and the spatial diffusion coefficients. From these diffusion coefficients we then derive through Eq. (8) the relaxation rate of the atomic density. The comparison between the numerically calculated γ_R and γ_D , as shown in Fig. 5, confirms that

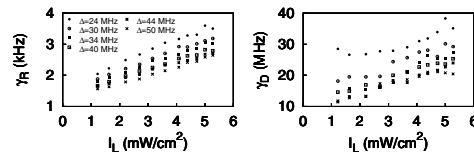


FIG. 4. Left panel: Experimental results for the half of the peak-to-peak distance of the Rayleigh resonance. Right panel: Relaxation rate γ_D of the atomic density, as calculated from the experimental data for D_x and D_z using Eq. (8). Both quantities are plotted as functions of the intensity per lattice beam, for different values of the lattice detuning.

043901-3

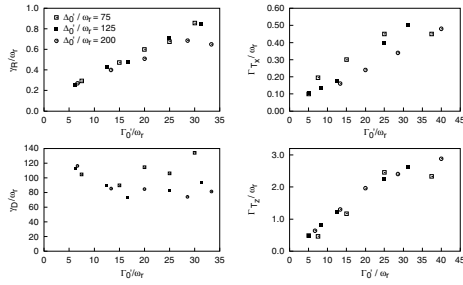


FIG. 5. Numerically calculated relaxation rate of the atomic density γ_D , half-distance peak to peak γ_R of the Rayleigh line and relaxation rates Γ_{T_x} , Γ_{T_z} of the atomic temperature in the x and z directions. All these quantities are reported as functions of the optical pumping rate Γ_0 , for different values of the light shift per beam Δ_0 . Here ω_r is the atomic recoil frequency.

the width of the Rayleigh line does not correspond to the rate of relaxation of the atomic density.

The final step of our analysis consists in identifying the damping process which leads to the phase shift producing the Rayleigh scattering. Inspired by previous studies of stimulated Rayleigh scattering in corkscrew optical molasses [14], we numerically examined the damping process of the atomic velocity in the optical lattice and calculated the relaxation rates Γ_{T_x} , Γ_{T_z} of the atomic temperature in the x and z directions, with results as in Fig. 5. It appears that the damping rates of the atomic temperature not only are of the same order of magnitude of the width of the Rayleigh line, but that they also display the same linear dependence on the optical pumping rate Γ_0 , at fixed light shift per beam Δ_0 , i.e., at fixed depth of the potential wells. More precisely, neglecting Γ_{T_x} as $\Gamma_{T_x} \ll \Gamma_{T_z}$ we find from the data of Fig. 5 that

$$\gamma_R = 0.13(\pm 0.04)\omega_R + 0.25(\pm 0.02)\Gamma_{T_z}. \quad (9)$$

This shows that for an optical lattice the width of the Rayleigh line is a measure of the cooling rate, a behavior already encountered in corkscrew optical molasses. It is then legitimate to investigate the eventual contribution of the light scattering on the density grating to the probe transmission spectrum. By fitting the broad wings of the numerically calculated spectra with a dispersive function, we found that the corresponding width is approximately equal to the relaxation rate γ_D . This shows that the scattering on the density grating contributes to the probe transmission spectrum with a resonance much broader than the narrow line observed at the center of the spectra. In other words, the information on the spatial diffusion coefficients is contained in the broad wings ($\omega \gtrsim 10$ MHz) of the scattering spectrum, and not in the central narrow resonance.

In summary, in this work we investigated the connection between Rayleigh scattering and the atomic dynam-

ics in dissipative optical lattices. In particular, following recent proposals [5,6], we studied whether the Rayleigh resonance originates from the diffraction on a density grating, and is therefore a probe of transport of atoms in optical lattices. It turns out that this is not the case: the Rayleigh line is instead a measure of the cooling rate, while spatial diffusion contributes to the scattering spectrum with a much broader resonance.

We thank David Lucas for comments on the manuscript. This work was supported by Région Ile de France under Contract No. E.1220. Laboratoire Kastler Brossel is an "unité mixte de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie associée au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS)."

- [1] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, New York, 1992).
- [2] G. Grynberg and C. Mennerat-Robilliard, *Phys. Rep.* **355**, 335 (2001).
- [3] For a recent review of experiments on Bose-Einstein condensates in optical lattices, see O. Morsch and E. Arimondo, in *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*, edited by T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, *Lecture Notes in Physics* Vol. 602 (Springer, Berlin, 2002).
- [4] A. Hemmerich, C. Zimmermann, and T.W. Hänsch, *Europhys. Lett.* **22**, 89 (1993).
- [5] S. Guibal, C. Mennerat-Robilliard, D. Larousserie, C. Triché, J.-Y. Courtois, and G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4709 (1997).
- [6] C. Jurczak, B. Desruelle, K. Sengstock, J.-Y. Courtois, C. I. Westbrook, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1727 (1996).
- [7] J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **36**, 87 (1996).
- [8] T.W. Hodapp, C. Gerz, C. Furtlehner, C. I. Westbrook, W.D. Phillips, and J. Dalibard, *Appl. Phys. B* **60**, 135 (1995).
- [9] L. Guidoni, B. Dépret, A. di Stefano, and P. Verkerk, *Phys. Rev. A* **60**, R4233 (1999).
- [10] F.-R. Carminati, M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni, and G. Grynberg, *Eur. Phys. J. D* **17**, 249 (2001).
- [11] See L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, M. Schiavoni, F. Renzoni, and G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 133903 (2002), and references therein.
- [12] K. I. Petsas, G. Grynberg, and J.-Y. Courtois, *Eur. Phys. J. D* **6**, 29 (1999).
- [13] L. Sanchez-Palencia, P. Horak, and G. Grynberg, *Eur. Phys. J. D* **18**, 353 (2002).
- [14] B. Lounis, J.-Y. Courtois, P. Verkerk, C. Salomon, and G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3029 (1992).

C.2 Dark propagation modes in optical lattices

M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, F. Renzoni et G. Grynberg
Physical Review A **66**, 053821 (2002)

résumé

Nous examinons la diffusion stimulée de la lumière sur les modes de propagation d'un réseau optique dissipatif. Nous montrons que deux configurations pompe-sonde différentes peuvent induire l'excitation du même mode *via* des mécanismes différents. Nous trouvons que dans une configuration la diffusion sur le mode de propagation induit une résonance dans le spectre de transmission de la sonde alors que dans l'autre configuration aucune modification du spectre de diffusion n'apparaît, *i.e.* le mode est *sombre*. Une explication théorique de ce phénomène est donnée.

abstract

We examine the stimulated light scattering onto the propagation modes of a dissipative optical lattice. We show that two different pump-probe configurations may lead to the excitation, *via* different mechanisms, of the same mode. We found that in one configuration the scattering on the propagation mode results in a resonance in the probe transmission spectrum while in the other configuration no modification of the scattering spectrum occurs, *i.e.* the mode is *dark*. A theoretical explanation of this behaviour is provided.

Dark propagation modes in optical lattices

M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, F. Renzoni, and G. Grynberg

Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231, Paris Cedex 05, France

(Received 25 July 2002; published 26 November 2002)

We examine the stimulated light scattering onto the propagation modes of a dissipative optical lattice. We show that two different pump-probe configurations may lead to the excitation, via different mechanisms, of the same mode. We found that in one configuration the scattering on the propagation mode results in a resonance in the probe transmission spectrum while in the other configuration no modification of the scattering spectrum occurs, i.e., the mode is *dark*. A theoretical explanation of this behavior is provided.

DOI: 10.1103/PhysRevA.66.053821

PACS number(s): 42.65.Es, 32.80.Pj

I. INTRODUCTION

Brillouin scattering [1,2] is the scattering of light onto a propagating acoustic wave. In spontaneous Brillouin scattering the propagating wave corresponds to thermal, or quantum-noise, fluctuations in the material medium. On the contrary, in stimulated Brillouin scattering (SBS) the density propagating wave originates from the interference pattern between a probe and an additional pump beam. The strong pump beam can then be diffracted onto the density wave in the direction of the probe, modifying in this way the probe transmission. The SBS-scheme permits both the excitation of the propagation modes of a medium, as well as their detection via modification of the probe transmission. It is in this way possible to determine the phonon modes of the medium, and their respective velocity [3–5].

In this work we examine the key features of the SBS process for a nonlinear medium consisting of atoms cooled in a dissipative optical lattice [6]. This system offers significant advantages for the study of basic nonlinear optical phenomena over condensed matter samples. First, the atomic dynamics in an optical lattice is quite well understood, and can be precisely studied through Monte Carlo simulations. Second, the excitation of propagation modes in the system can be directly detected by imaging techniques. Both points are essential for the present study. We show that the *same* propagation mode can be excited by two different pump-probe configurations. In one case the scattering on the propagation mode results in a resonance in the probe transmission spectrum, while in the other case no modification of the spectrum occurs, i.e., the mode is in this case *dark*. We describe the different excitation processes of the propagation mode for the two different configurations examined, and identify the mechanism of generation of the phase mismatch between laser fields and the material grating which inhibits the light scattering on the propagation mode.

II. THE 3D LIN $\perp$ LIN OPTICAL LATTICE

The nonlinear medium consists of ^{85}Rb atoms cooled and trapped in a dissipative optical lattice. These lattices are based on the Sisyphus cooling mechanism [7]. The periodic modulation of the light polarization, produced by the interference of several laser beams, leads to a periodic modulation of the light shifts (optical potentials) of the different

Zeeman sublevels of the ground state of the atom. As a result of the optical pumping between different optical potentials, atoms are cooled and finally trapped at the potential minima.

In this work we use a 3D lin $\perp$ lin dissipative optical lattice [6]. The arrangement of the laser fields is shown in Fig. 1: two x -polarized beams propagate in the yOz plane and make an angle 2θ , and two y -polarized beams propagate in the xOz plane and make the same angle 2θ . The interference pattern of the four beams create an orthorhombic potential with minima associated with pure circular (alternatively σ^+ and σ^-) light polarization. The lattice constants, i.e., the distance between two sites of equal polarization are $\lambda_{x,y} = \lambda/\sin\theta$ and $\lambda_z = \lambda/(2\cos\theta)$, with λ the laser field wavelength. For all the measurements presented in this work the angle 2θ between the lattice beams is kept fixed to 60° .

The procedure to load the atoms in the optical lattice is the standard one used in previous experiments [8]. The Rb atoms are first cooled and trapped in a magneto-optical trap (MOT). Then the MOT magnetic field and laser beams are turned off and the lattice beams are turned on. After 10 ms of thermalization of the atoms in the lattice, two additional laser fields (beams c and p of Fig. 1) are introduced for the excitation of the propagation modes. They are derived from an additional laser, with their relative detuning $\delta = \omega_p - \omega_c$ controlled by acousto-optical modulators. These two additional laser fields are detuned with respect to the lattice beams of some tens of MHz, so that there is no atomic observable which can be excited at the beat frequency. Furthermore, as they are derived from a laser different from the one producing the lattice beams, the effect of the unwanted beat is significantly reduced. The beams c and p cross the atomic sample in the xOz plane, and they are symmetrically displaced with respect to the z axis forming an angle 2φ .

III. PROPAGATION MODES

A. Generalities

The propagation modes in dissipative optical lattices have been identified in Ref. [9] and shown to exhibit interesting nonlinear effects such as stochastic resonance [10,11]. We briefly summarize their main properties. They consist of a sequence in which one half oscillation in a potential well is followed by an optical pumping process to a neighboring well, and so on (Fig. 2). In this way, the atom travels over

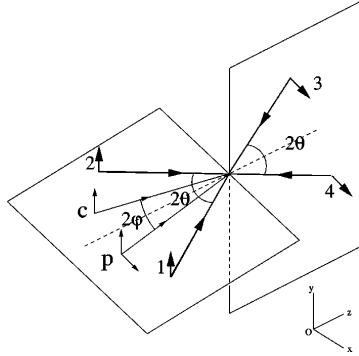
SCHIAVONI *et al.*PHYSICAL REVIEW A **66**, 053821 (2002)

FIG. 1. Sketch of the experimental setup. The laser fields 1–4 generate the static 3D optical potential. Two additional laser beams (*c* and *p*) are introduced to create a moving potential modulation.

several potential wells by regularly changing its internal state (from $|g, +1/2\rangle$ to $|g, -1/2\rangle$ in the case of a $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$ transition, as considered in Fig. 2).

The velocity v of the propagation mode is essentially determined by the intrawell dynamics. A straightforward calculation [9] shows that for a mode in the *x* direction this velocity is

$$v = \frac{\lambda \Omega_x}{2\pi \sin \theta}, \quad (1)$$

where Ω_x is the *x* vibrational frequency at the bottom of a potential well.

B. Excitation mechanisms

The propagation modes can be excited by adding a moving potential modulation. We consider two different configurations for the modulation beams (beams *c* and *p* in Fig. 1). In both configurations the modulation beams have the same amplitude. In the first configuration, hereafter called the $\parallel$ configuration, both beams have *y* linear polarization. The light interference pattern consists of an intensity modulation moving along the *x* axis with phase velocity

$$v_{\text{mod}} = \frac{\delta}{|\Delta \vec{k}|} = \frac{\delta}{2k \sin \varphi}, \quad (2)$$

where $\Delta \vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_c$ is the difference between the wave vectors of the modulation beams ($|\vec{k}_c| \equiv |\vec{k}_p| \equiv k \equiv 2\pi/\lambda$). This configuration has already been considered in previous work [11] and it is reexamined here for comparison with the excitation scheme introduced in the present work. This latter, denoted as $\perp$ configuration, consists of a *y*-polarized beam (beam *c* of Fig. 1) and of a beam with linear polarization in the *xOz* plane (beam *p*). The light interference pattern consists in this case of a polarization modulation moving along the *x* axis with the same phase velocity v_{mod} [Eq. (2)] as in the case of the $\parallel$ configuration.

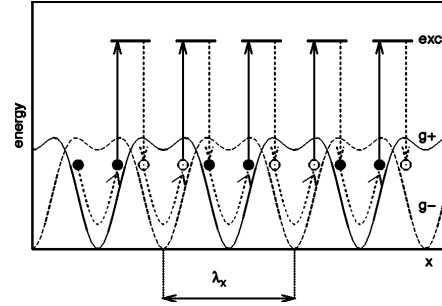


FIG. 2. An atomic trajectory corresponding to a propagation mode in the *x* direction. The shown potential curves (g_+ and g_-) are the section along $y=z=0$ of the optical potential for a $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$ atomic transition and a 3D lin.lin beam configuration.

To determine the effective excitation of the propagation modes we monitor the velocity of the center-of-mass (c.m.) of the atomic cloud as a function of the velocity of the applied potential modulation. This is done by direct imaging of the atomic cloud with a CCD camera. We verify that for a given detuning δ , i.e., for a given velocity v_{mod} of the moving modulation, the motion of the center of mass of the atomic cloud is uniform, and correspondingly determine the c.m. velocity v_{cm} . Experimental results for the *x* component $v_{\text{cm},x}$ of the c.m.-velocity as a function of v_{mod} are reported in Fig. 3 for both the $\parallel$ and the $\perp$ configurations. The observed resonant behavior of $v_{\text{cm},x}$ with v_{mod} is the signature of the excitation of propagation modes in the *x* direction. We therefore conclude that both pump-probe configurations lead to the excitation of a propagation mode in the *x* direction.

To determine the nature of the observed propagation modes, we examine the atomic dynamics in the optical lattice with the help of semiclassical Monte Carlo simulations [12]. The analysis of the numerically calculated atomic trajectories shows that the excited mode is the same for both configurations, and consists of a sequence of a half oscillation in a potential well followed by an optical pumping into the neighboring well, as in Fig. 2.

We turn now to the analysis of the excitation mechanism of the propagation modes for the two pump-probe configuration. To this end, it is useful to examine the dependence of the position of the resonance in the velocity of the c.m. of the atomic cloud [as those in Fig. 3(a)] on the angle 2φ between pump and probe beams. By taking several measurements for different values of the angle 2φ between the modulation beams we determine the position of the resonances as a function of the angle φ , as reported in Fig. 3(b). On the same plot we also reported results of semiclassical Monte Carlo simulations, which are found to be in very good agreement with the experimental findings. The results of Fig. 3 show that the velocity v_{mod} of the light intensity interference pattern ($\parallel$ configuration) required to excite a propagation mode differs from the velocity of the polarization grating ($\perp$ configuration) leading to the excitation of the same mode. The condition for the velocity of the light interference pattern to excite

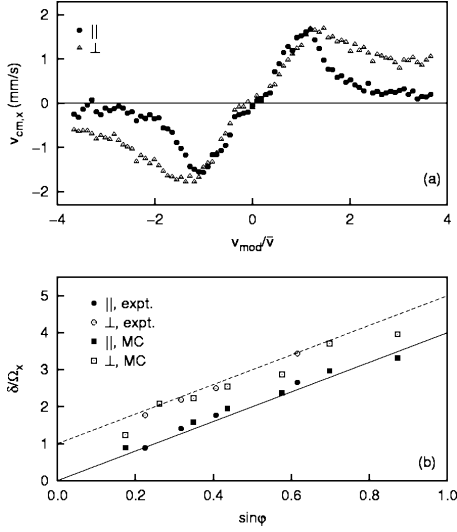


FIG. 3. Top: experimental results for the x component of the velocity of the center-of-mass of the atomic cloud as a function of the velocity v_{mod} of the moving light interference pattern. The angle between pump and probe beams is $2\varphi = 48^\circ$. Bottom: position of the resonances as a function of the sine of the half-angle φ between the pump and the probe beams. The points refer to experimental findings (expt.) and to semiclassical Monte Carlo simulations (MC), the lines to Eqs. (5a) and (5b).

a propagation mode can be obtained by imposing that the atoms following the mode are at all times dragged by the moving potential modulation corresponding to the light interference pattern of the beams c and p . This requires that the light polarization pattern moves at a velocity v_{mod} such that the lattice potential-well actually occupied by the atom gets deeper as a result of the modulation of the optical potential. The resulting conditions on the velocity of the moving modulation, and equivalently on the pump-probe detuning δ , can therefore be derived by examining the effect of the modulation on the optical potentials. Consider first the $\parallel$ configuration. The light interference pattern is a moving *intensity* modulation, therefore all optical potentials are modulated *in phase*: at a given instant and position all potential wells corresponding to the different atomic ground-state Zeeman sublevels get both deeper or shallower as a result of the modulation. Thus to excite the propagation mode the atoms should follow the moving intensity modulation, i.e., the phase velocity v_{mod} of the light interference pattern should be equal to the velocity $\bar{v}$ of the mode:

$$v_{\text{mod}} = \pm \bar{v}. \quad (3)$$

Consider now the $\perp$ configuration. The light interference pattern is in this case a moving *polarization* modulation, with the optical potentials associated with opposite Zeeman sublevels (opposite quantum number m) modulated in phase opposition. It follows that in this configuration a modulation

moving at the mode velocity does not lead to the mode excitation. On the contrary, to excite the propagation mode it is necessary that the modulation moves with respect to the atoms in such a way that following the transfer of an atom from a lattice well of given circular polarization (σ_+ or σ_-) to one of opposite polarization, the modulation changes sign. Quantitatively, consider the time interval Δt in which the atom in the propagation mode makes half an oscillation in a potential well and then is optically pumped into the neighboring well. Then we simply have $v\Delta t = \lambda_x/2$. In the same time interval the modulation polarization should be reversed, i.e., should change from σ_+ to σ_- (or vice versa, depending on which potential well is initially occupied by the atom). Considering that in the time interval Δt the atom moved of $\lambda_x/2$, and that in the moving modulation a maximum of polarization σ_- is spaced of $\lambda_m/2 = \pi/|\Delta k|$ from the following maximum of polarization σ_+ , we find that the light interference pattern should move at the velocity $v_{\text{mod}}\Delta t = \pm(\lambda_m/2 + \lambda_x/2)$. Together with $v\Delta t = \lambda_x/2$, we find then that in the $\perp$ configuration the condition for the excitation of the propagation mode is

$$v_{\text{mod}} = \pm \left(1 + \frac{\sin \theta}{2 \sin \varphi} \right) \bar{v}. \quad (4)$$

The conditions Eqs. (3) and (4) are rewritten in terms of the detuning δ as

$$\delta = \pm \frac{2 \sin \varphi}{\sin \theta} \Omega_x \quad (\parallel \text{ configuration}), \quad (5a)$$

$$\delta = \pm \left(1 + \frac{2 \sin \varphi}{\sin \theta} \right) \Omega_x \quad (\perp \text{ configuration}), \quad (5b)$$

where we used Eqs. (1) and (2). The very good agreement (see Fig. 3) of Eqs. [(5a) and (5b)] with the experimental findings and with the results of semiclassical Monte Carlo simulations demonstrate the validity of our physical picture.

C. Light scattering

So far we considered the effect of the light interference pattern on the atomic sample, with the excitation of propagation modes and their detection by direct imaging of the atomic cloud. The properties of the material medium can also be studied by stimulated light scattering measurements. In fact the pump-probe interference pattern may excite a material grating onto which the pump can be diffracted in the direction of the probe beam, modifying the probe transmission. That is the approach followed now, with a view to compare light scattering measurements with the previous results obtained via direct imaging of the atomic cloud.

We decreased the amplitude of one of the modulation beams (beam p) which plays now the role of the probe beam, while the other beam (beam c) plays the role of the pump (or coupling) beam. We measure the probe transmission as a function of the detuning δ for different angles between the pump and the probe beams, with results as those in Fig. 4. In the case of the $\parallel$ pump-probe configuration, we

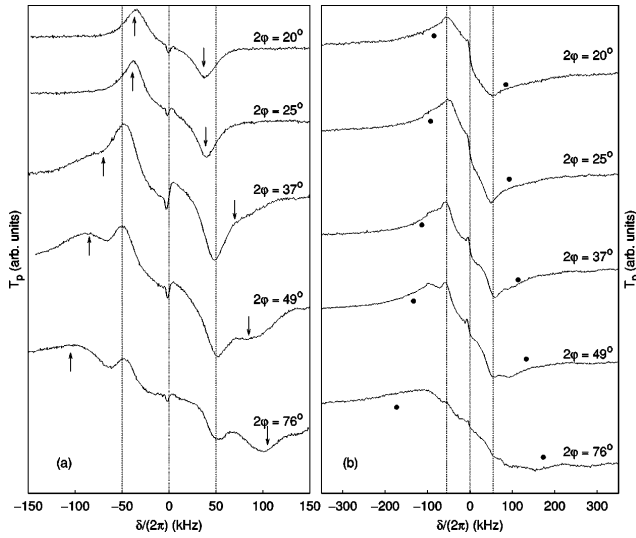
SCHIAVONI *et al.*PHYSICAL REVIEW A **66**, 053821 (2002)

FIG. 4. Transmission of the probe beam as a function of the detuning between pump and probe fields, for different values of the angle 2φ between pump and probe beams. The lattice detuning is $\Delta = -50$ MHz, the intensity per lattice beam $I_L = 5$ mW/cm². These parameters correspond to $\Omega_x \approx 2\pi \times 50$ kHz (vertical dashed lines). The left plot corresponds to the $\parallel$ pump-probe configuration, the right plot to the $\perp$ one.

easily identify in the probe transmission spectrum the Brillouin resonances [the resonances in Fig. 4(a) marked by arrows] corresponding to stimulated light scattering on the propagation modes. We verified that the dependence of the position of these resonances on the angle φ is in complete agreement with Eq. (5a), which confirms that these resonances originate from light scattering on propagation modes. On the contrary, in the case of the $\perp$ pump-probe configuration no resonance is observed around the position corresponding to Eq. (5b) [these positions are marked by filled circles in Fig. 4(b)]. In other words, the propagation mode is dark in the $\perp$ configuration.

The absence of resonances in the scattering spectrum for the propagation mode in the $\perp$ configuration can be explained by examining the phase mismatch between the laser and the material waves. The frequency (energy) and phase-matching (momentum) conditions for the stimulated scattering process read

$$\omega_c = \omega_p \pm \Omega, \quad (6a)$$

$$\vec{k}_c = \vec{k}_p \pm \vec{q}. \quad (6b)$$

Here $\vec{q}$ and Ω are respectively, the wave vector and the frequency of the light-induced material density grating and are related by the phonon-dispersion relation $\Omega = v_{\text{grating}} |\vec{q}|$, with v_{grating} the phase velocity of the moving grating. The frequency Ω has been determined previously for both $\parallel$ and $\perp$ configurations [Eqs. (5a) and (5b)]. As the excited mode is the same for both pump-probe configurations, the phase velocity of the material grating does not depend on the chosen configuration and is equal to the velocity $\bar{v}$ [Eq. (1)]. From these values for Ω and v_{grating} we derive, through the dispersion relation, the momentum of the material grating:

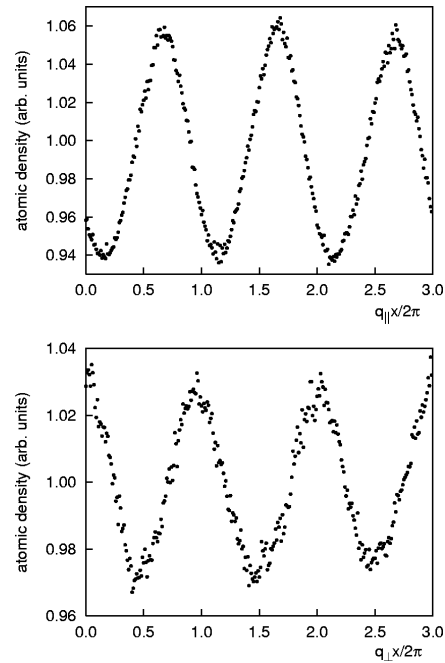


FIG. 5. Numerical results for the atomic density as a function of x for the $\parallel$ (top) and $\perp$ (bottom) pump-probe configurations. The shown density distribution is stationary in a frame moving along x at a velocity v .

$$|\vec{q}_{\parallel}| = |\vec{\Delta k}|, \quad (7a)$$

$$|\vec{q}_{\perp}| = |\vec{\Delta k}| \left(1 + \frac{\sin \theta}{2 \sin \varphi} \right). \quad (7b)$$

It turns out that in the $\parallel$ configuration the momentum $\vec{q}_{\parallel} = \pm |\vec{\Delta k}| \vec{e}_x$ of the material grating fulfills the phase matching condition Eq. [(6b)], and therefore the scattering on the propagation mode results in a resonance line in the probe transmission spectrum. In contrast, in the $\perp$ configuration the momentum $\vec{q}_{\perp} = \pm |\vec{q}_{\parallel}| \vec{e}_x$ results in a phase mismatch between the laser and the material waves. Thus, no resonance is expected in the probe transmission spectrum, in agreement with our experimental findings.

The effective creation of a moving material grating has been confirmed by semiclassical Monte Carlo simulations. The numerical results, as those shown in Fig. 5, correspond to an atomic density grating moving in the x direction with a velocity $\bar{v}$ for both parallel and perpendicular configurations. In the frame moving at the velocity $\bar{v}$ of the propagation mode we find a stationary modulation of the atomic density with different wave vectors for the two pump-probe configurations and in very good agreement with Eqs. (7a) and (7b). This confirms the validity of our analysis.

IV. CONCLUSIONS

In summary, in this work we examined the stimulated light scattering onto the propagation modes of a dissipative

optical lattice. Two different pump-probe configurations have been analyzed: in one the interference pattern is a modulation of the light intensity, while in the other one the pump and probe fields give rise to a modulation of the light polarization. First, we have shown that the *same* propagation mode is excited in the two cases, and described the two different mechanisms of excitation. Then we analyzed the light scattering on the propagation mode. Although the mode excited in the two pump-probe configurations is the same, we found that the probe transmission spectrum is completely different for the two cases. In fact, only in one configuration the mode results in a resonance in the probe transmission spectrum. For the other configuration, no trace of the mode excitation is found in the probe transmission spectrum. This behavior was explained in terms of phase mismatch between the laser fields and the propagating wave.

Light scattering is a powerful technique for the study of a large variety of material media. Particularly, in optical lattices it has allowed the study of local (intrawell) as well as delocalized (inter wells) dynamics. However there is not a one-to-one correspondence between the light scattering spectrum and the atomic dynamics as shown in this work where we observed and described dark propagation modes.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Région Ile de France under Contract No. E.1220. Laboratoire Kastler Brossel is a "unité mixte de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie associée au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS)."

-
- [1] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, New York, 1992).
 - [2] Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley-Interscience, New York, 1984).
 - [3] M.A. Woolf, P.M. Platzman, and M.G. Cohen, Phys. Rev. Lett. **17**, 294 (1966).
 - [4] T. Sonehara and H. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **75**, 4234 (1995).
 - [5] H.J. Fan, M.H. Kuok, S.C. Ng, R. Boukherroub, J.M. Baribeau, J.W. Fraser, and D.J. Lockwood, Phys. Rev. B **65**, 165330 (2002).
 - [6] G. Grynberg and C. Mennerat-Robilliard, Phys. Rep. **355**, 335 (2001).
 - [7] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023 (1989); P.J. Ungar, D.S. Weiss, E. Riis, and S. Chu, *ibid.* **6**, 2058 (1989).
 - [8] F.R. Carminati, M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni, and G. Grynberg, Eur. Phys. J. D **17**, 249 (2001).
 - [9] J.-Y. Courtois, S. Guibal, D.R. Meacher, P. Verkerk, and G. Grynberg, Phys. Rev. Lett. **77**, 40 (1996).
 - [10] L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, M. Schiavoni, F. Renzoni, and G. Grynberg, Phys. Rev. Lett. **88**, 133903 (2002).
 - [11] M. Schiavoni, F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni, and G. Grynberg, Europhys. Lett. **59**, 493 (2002).
 - [12] L. Sanchez-Palencia, P. Horak, and G. Grynberg, Eur. Phys. J. D **18**, 353 (2002).

C.3 Stochastic resonance in periodic potentials : realization in a dissipative optical lattice

M. Schiavoni, F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni et G. Grynberg
Europhysics Letters **59**, 493 (2002)

résumé

Nous avons observé le phénomène de résonance stochastique sur les modes de propagation Brillouin d'un réseau optique dissipatif. Un tel mode a été excité en appliquant une modulation de potentiel en mouvement à une vitesse de phase égale à la vitesse du mode. Son amplitude a été caractérisée par la vitesse du centre de masse (CM) du nuage atomique. Nous avons étudié la vitesse du CM à la résonance Brillouin en fonction du taux de pompage optique (bruit) pour une profondeur fixée des puits de potentiel. Nous avons observé une dépendance résonante pour la vitesse du CM en fonction du taux de pompage optique qui correspond à l'amplitude du bruit. Ceci correspond à l'observation expérimentale d'une résonance stochastique dans un potentiel périodique dans un régime de faible friction.

abstract

We have observed the phenomenon of stochastic resonance on the Brillouin propagation modes of a dissipative optical lattice. Such a mode has been excited by applying a moving potential modulation with phase velocity equal to the velocity of the mode. Its amplitude has been characterized by the center-of-mass (CM) velocity of the atomic cloud. At Brillouin resonance, we studied the CM-velocity as a function of the optical pumping rate at a given depth of the potential wells. We have observed a resonant dependence of the CM velocity on the optical pumping rate, corresponding to the noise strength. This corresponds to the experimental observation of stochastic resonance in a periodic potential in the low-damping regime.

Stochastic resonance in periodic potentials: Realization in a dissipative optical lattice

M. SCHIAVONI, F.-R. CARMINATI, L. SANCHEZ-PALENCIA,
F. RENZONI and G. GRYNBERG

*Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure,
24, rue Lhomond, 75231, Paris Cedex 05, France*

(received 29 January 2002; accepted in final form 23 May 2002)

PACS. 05.45.-a – Nonlinear dynamics and nonlinear dynamical systems.

PACS. 42.65.Es – Stimulated Brillouin and Rayleigh scattering.

PACS. 32.80.Pj – Optical cooling of atoms; trapping.

Abstract. – We have observed the phenomenon of stochastic resonance on the Brillouin propagation modes of a dissipative optical lattice. Such a mode has been excited by applying a moving potential modulation with phase velocity equal to the velocity of the mode. Its amplitude has been characterized by the center-of-mass (CM) velocity of the atomic cloud. At Brillouin resonance, we studied the CM velocity as a function of the optical pumping rate at a given depth of the potential wells. We have observed a resonant dependence of the CM velocity on the optical pumping rate, corresponding to the noise strength. This corresponds to the experimental observation of stochastic resonance in a periodic potential in the low-damping regime.

A particle trapped in a potential well constitutes a model useful for the understanding of a variety of phenomena. The extension to a periodically modulated double-well potential including a stochastic force leads to a complex nonlinear dynamics, and allows to modelize a variety of phenomena ranging from geophysics [1, 2] to bistable ring lasers [3], from neuronal systems [4] to the dithering effect in electronics [5] and so on. Indeed such a system exhibits the phenomenon of *stochastic resonance* (SR [6, 7]): the response of the system to the input signal (the modulation) shows a resonant dependence on the noise level (the amplitude of the stochastic force), so that an increase of the noise strength may lead to a better synchronization between the particle motion and the potential modulation.

The phenomenon of stochastic resonance is not restricted to static double-well potentials driven by a periodic and a stochastic force, and new types of stochastic resonance have been demonstrated in various systems, as systems with a single potential well, bistable systems with periodically modulated noise, and many others [8–14]. In particular much attention has been devoted to the analysis of SR in *periodic potentials* [9–14]. Indeed, many different physical systems are described in terms of periodic structures, and it is by now well established that the noise plays a major role in the mechanisms of transport in periodic structures. For example, the study of the underdamped motion of a particle in a periodic potential showed that it is the interplay between inertial and thermal effects which determines the peculiar mechanical properties of certain metals [15, 16]. This is precisely the regime examined in this

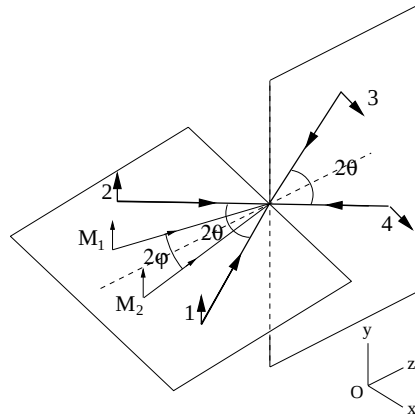


Fig. 1 – Laser fields configuration for the 3D lin⊥lin optical lattice. The beams 1–4 generate the static 3D periodic potential. Two additional laser beams (M_1 and M_2), are introduced to create a moving potential modulation.

work: we study the SR phenomenon by taking as spatially periodic system a dissipative optical lattice [17]. The laser fields create the periodic potential and produce the stochastic process of optical pumping. The friction for atoms well localized in a potential well is very small, so that inertial effects are important (low-damping regime). We report the experimental observation of stochastic resonance on the propagation modes of a dissipative optical lattice and give a complete theoretical account of the experimental findings.

The three-dimensional periodic structure is generated by the interference of four linearly polarized laser beams, arranged in the so-called lin⊥lin configuration (fig. 1) [17]. The resulting optical potential has minima located on an orthorombic lattice and associated with pure circular (alternatively σ^+ and σ^-) polarization. The lattice constants, *i.e.* the distance (along a major axis) between two sites of equal circular polarization, are $\lambda_{x,y} = \lambda / \sin \theta$ and $\lambda_z = \lambda / (2 \cos \theta)$, with λ the laser field wavelength, and 2θ the angle between two copropagating lattice beams.

The Brillouin-like propagation modes in such optical lattices have been first identified

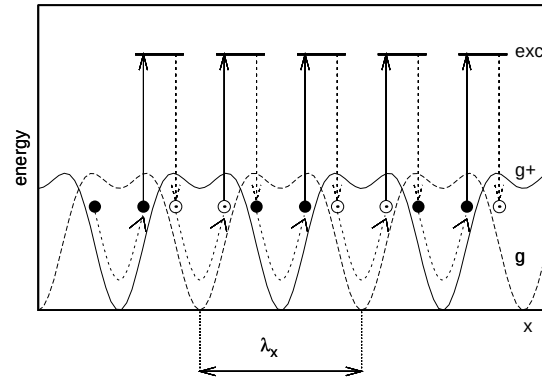


Fig. 2 – Atomic trajectory corresponding to a Brillouin mode in the x -direction. The shown potential curves (g_+ and g_-) are the section along $y = z = 0$ of the optical potential for a $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$ atomic transition and a 3D lin⊥lin beam configuration.

in ref. [18] via semiclassical Monte Carlo simulations [19]. They consist of a sequence in which one half oscillation in a potential well is followed by an optical pumping process to a neighbouring well, and so on (fig. 2). The velocity of the Brillouin mode is easily calculated by neglecting the corrections due to the anharmonicity of the optical potential. The time for an atom to do half an oscillation is then $\tau = \pi/\Omega_x$, where Ω_x is the x -vibrational frequency. This corresponds to an average velocity

$$\bar{v} = \frac{\lambda_x/2}{\tau} = \frac{\lambda\Omega_x}{2\pi \sin \theta} . \quad (1)$$

The direct observation of the Brillouin modes in optical lattices has been recently reported [20]. We note, however, that the detection scheme used in that work was based on the measurement of diffusion coefficients. These measurements require averaging of a large data set, and this makes difficult the exploration of a large interval of interaction parameters, as necessary to evidence the phenomenon of stochastic resonance. The excitation scheme introduced in this work will results instead in significant variations of the atomic-cloud center-of-mass motion, and leads to the observation of stochastic resonance, as described now.

The transport of atoms in optical lattices has been extensively studied [21–24]. In a *dissipative* optical lattice the dominant transport process is spatial diffusion [23, 24], and the Brillouin modes are greatly suppressed. To excite these modes it is necessary to create a potential modulation moving with phase velocity equal to the velocity of the Brillouin mode. This is done by introducing two additional y -polarized laser fields (M_1 and M_2 , see fig. 1). They propagate in the xOz plane, symmetrically displaced with respect to the z -axis, and form an angle equal to 2φ . These two modulation beams are taken to be sufficiently detuned from the lattice fields to neglect the interference between them and the lattice beams on the time scale of the atomic motion. In this way the modulation interference pattern is due only to the two fields M_1 and M_2 , and consists of an intensity modulation moving along the x -axis with phase velocity

$$v_\phi = \frac{\delta_m}{|\Delta \vec{k}|} = \frac{\delta_m}{2k_m \sin \varphi} , \quad (2)$$

where δ_m is the detuning between the fields M_1 and M_2 , and $\Delta \vec{k} = \vec{k}_{M_1} - \vec{k}_{M_2}$ the difference between their wave vectors ($|\vec{k}_{M_j}| \simeq k = 2\pi/\lambda$, $j = 1, 2$). This results in a moving modulation of the optical potential. For a $1/2 \rightarrow 3/2$ atomic transition⁽¹⁾, the modulated potential for the two ground states $|\pm 1/2\rangle$ reads

$$U_\pm(\vec{r}) = U_\pm^0(\vec{r}) + \delta U \cdot \cos[(\Delta k_x x - \delta_m \cdot t)] \quad (3)$$

with $U_\pm^0$ the optical potential of the unperturbed lattice,

$$U_\pm^0(\vec{r}) = \frac{8\hbar\Delta'_0}{3} [\cos^2(k_x x) + \cos^2(k_y y) \mp \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z)] , \quad (4)$$

and $\delta U = 4\hbar\Delta'_{0,m}/3$ the amplitude of the potential modulation. Δ'_0 ($\Delta'_{0,m}$) denotes the light shift per lattice (modulation) field. We expect that for $v_\phi = \bar{v}$, *i.e.* for $\delta_m = \pm\Omega_B$, with

$$\Omega_B \equiv \frac{2 \sin \varphi}{\sin \theta} \Omega_x , \quad (5)$$

the Brillouin mode is excited, with the atoms following the potential modulation. This has been confirmed by Monte Carlo simulations. For a given modulated optical potential $U_\pm$ and

⁽¹⁾It is customary in the analysis of Sisyphus cooling to consider a $1/2 \rightarrow 3/2$ atomic transition [17].

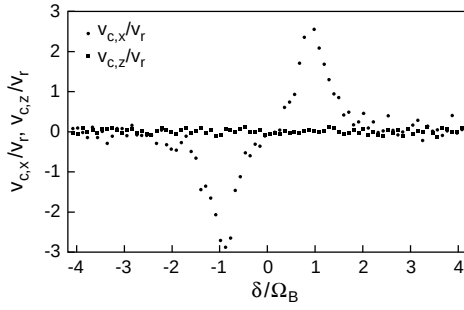


Fig. 3

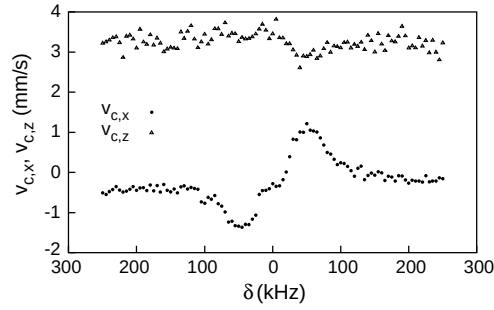


Fig. 4

Fig. 3 – Numerical results for the velocity of the CM of the atomic cloud as a function of the detuning δ_m between the two driving fields. The velocity is in units of recoil atomic velocity v_r . The lattice beam angle is $\theta = 30^\circ$, the lattice detuning from atomic resonance $\Delta = -10\Gamma$ and the light shift per beam $\Delta_0 = -200\omega_r$. Here Γ and ω_r are the width of the excited state and the atomic recoil frequency, respectively. The driving field angle is $\varphi = 10^\circ$, the detuning $\Delta_m = -30\Gamma$ and light shift per beam $\Delta'_{0,m} = -20\omega_r$.

Fig. 4 – Experimental results for the velocity of the CM of the atomic cloud as a function of the detuning δ_m between driving fields. The lattice parameters are: lattice detuning $\Delta/(2\pi) = -45.6$ MHz, intensity per lattice beam $I = 2.3$ mW/cm², lattice angle $\theta = 30^\circ$. These parameters correspond to a vibrational frequency in the x -direction $\Omega_x/(2\pi) \simeq 45$ kHz. The parameters for the moving modulation are: $I_{M1} \simeq I_{M2} \simeq 0.5$ mW/cm², $\Delta_m/(2\pi) = -44$ MHz, $2\varphi = 37^\circ$. From these data we derive through eq. (5) $\Omega_B \simeq 2\pi \cdot 55$ KHz, in excellent agreement with the experimental findings.

a given optical pumping rate Γ'_0 , we calculated the position of the center of mass (CM) of the atomic cloud as a function of the interaction time, for different values of the detuning δ_m between the two driving fields. The application of the moving modulation produces a motion of the CM of the atomic cloud. Its velocity v_c strongly depends on the velocity of the moving modulation, *i.e.* on the detuning δ_m between the driving fields, and shows two resonances centered at $\delta_m = \pm\Omega_B$ (fig. 3). These resonances correspond to the excitation of the propagation mode in the $\pm x$ direction: at $\delta_m = \pm\Omega_B$ the velocity of the moving modulation is equal to the velocity of the Brillouin mode, and the atoms follow the potential modulation. On the contrary, for a velocity of the moving modulation very different from the velocity of the Brillouin mode ($|\delta_m| \gg \Omega_B$ or $|\delta_m| \ll \Omega_B$) the atomic dynamics is left unperturbed, and the CM of the atomic cloud does not move. This analysis shows that the effective excitation of the Brillouin propagation modes can be detected by observing a displacement of the CM of the atomic cloud. This will be the strategy followed in our experiment. We verified that the excitation of the Brillouin modes also leads to a resonant increase of the diffusion coefficient in the x -direction, in agreement with previous results for a different modulation scheme [20].

In our experiment, ⁸⁷Rb atoms are cooled and trapped in a magneto-optical trap. The trapping beams and the magnetic field are then suddenly turned off. Simultaneously the four lattice beams are turned on. After 10 ms of thermalization of the atoms in the lattice the two laser fields for the moving modulation are introduced according to the geometry of fig. 1. The lattice angle is $\theta = 30^\circ$, while the two driving fields form an angle $2\varphi = 37^\circ$. The two driving fields are derived from an additional laser, with their relative detuning controlled by acousto-optical modulators.

The transport of the atoms in the optical lattice is studied by direct imaging of the atomic

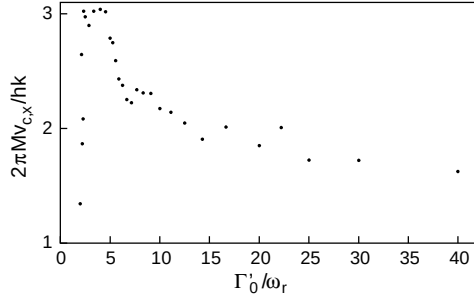


Fig. 5

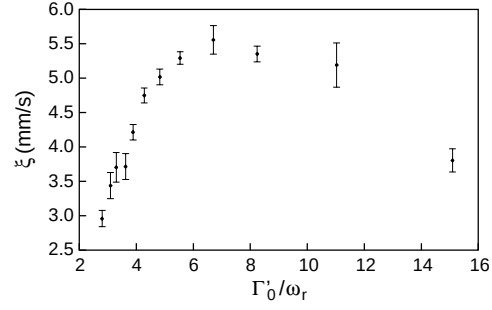


Fig. 6

Fig. 5 – Numerical results for the x -component of the velocity of the center of mass of the atomic cloud as a function of the optical pumping rate, for a given depth of the optical potential wells. Parameters of the calculations are: $\theta = 30^\circ$ and $\Delta'_0 = -100\omega_r$, $\varphi = 10^\circ$, $\Delta_m = -30\Gamma$ and $\Delta'_{0,m} = -10\omega_r$.

Fig. 6 – Experimental results for the peak-to-peak amplitude ξ of the CM velocity curve, as a function of the optical pumping rate Γ'_0 , at a given depth of the potential wells and given amplitude modulation. The light shift per lattice beam is $\Delta'_0 = -37.5\omega_r$. The parameters of the laser fields creating the moving intensity modulation are the same as for fig. 4.

cloud with a CCD camera. We verified that for a given detuning δ_m , *i.e.* for a given velocity of the moving potential modulation, the motion of the center of mass of the atomic cloud is uniform and correspondingly determined the CM velocity v_c . By repeating the measurements for different detunings between driving fields, we obtained the x - and z -component of the CM velocity v_c as a function of δ_m , as reported in fig. 4. The x -component shows a resonant behaviour with the detuning δ_m , with two resonances of opposite sign symmetrically displaced with respect to $\delta_m = 0$. The position of these resonances is in agreement with the value $\Omega_B \simeq 2\pi \cdot 55$ kHz derived from the lattice parameters via eq. (5). In contrast, the data for the z -component $v_{c,z}$, whose offset value corresponds to the radiation pressure of the modulation fields, do not show any resonance. These results are in agreement with our numerical simulations and constitute the direct experimental observation of the Brillouin propagation modes via the detection of the displacement of the CM of the atomic cloud.

The Brillouin propagation modes are determined by the synchronization of the oscillations within a potential well with the hopping from a well to a neighbouring one produced by the optical pumping ⁽²⁾⁽³⁾. We studied the amplitude of the Brillouin mode, here characterized by the velocity of the CM of the atomic cloud $v_c(\delta_m = +\Omega_B)$ (analogous results are obtained for $v_c(\delta_m = -\Omega_B)$), as a function of the optical pumping rate Γ'_0 for a given modulated optical potential. The numerical results display the SR-like nonmonotonic dependence of the amplitude of the Brillouin mode on the noise strength (fig. 5), in agreement with our previous results for a different modulation scheme [20]. This SR scenario has one important peculiarity with respect to the model usually considered in the analysis of stochastic resonance. Stochastic resonance is in general understood as the noise-induced enhancement of a weak periodic signal with a frequency much smaller than the intrawell relaxation frequency within

⁽²⁾The propagation mechanism associated with these modes differs from that encountered in dense fluids or solid media. The atomic density is so low that the interaction between the different atoms is completely negligible, therefore the mechanism for the propagation of atoms cannot be ascribed to any sound-wave-like mechanism.

⁽³⁾A nonzero current in a symmetric periodic potential can also be obtained by modifying, through an external driving field, the activation energies of escape from a well, as described in [25, 26]. However that mechanism of directed diffusion does not correspond to the propagation of atoms at a well-defined velocity, as in our case.

a single metastable state. In contrast, in the present case, the noise synchronizes precisely with the intrawell motion of the atoms.

Although $v_{c,x}(\delta_m = +\Omega_B)$ and $v_{c,x}(\delta_m = -\Omega_B)$ are expected to have the same dependence on the optical pumping rate, experimentally it is more convenient to characterize the amplitude of the propagation mode by the peak-to-peak amplitude ξ

$$\xi = v_{c,x}(\delta_m = +\Omega_B) - v_{c,x}(\delta_m = -\Omega_B) \quad (6)$$

of the CM velocity curve (as the one of fig. 4). By doing so, the eventual uniform drift of the atomic cloud along the x -direction as a result of the radiation pressure deriving from a small difference in the driving fields intensities does not affect our measurements. We studied the ξ parameter at Brillouin resonance as a function of the optical pumping rate Γ'_0 at a given depth of the potential wells. This has been done by varying the lattice intensity I and detuning Δ so as to keep the depth of the potential wells $U_0 \propto I/\Delta$ constant while varying the optical pumping rate $\Gamma'_0 \propto I/\Delta^2$. The intensity and the detuning Δ_m of the modulation fields are instead kept constant. Results of our measurements of ξ as a function of the optical pumping rate at a given depth of the potential wells and given modulation are shown in fig. 6. The typical behaviour of SR is observed: the parameter ξ increases with Γ'_0 at low pumping rates; then a maximum is reached corresponding to the synchronization between the optical pumping from one well to the next one with the oscillation in the potential wells; finally at larger pumping rates this synchronization is lost and ξ decreases.

In conclusion, we reported the observation of stochastic resonance on the Brillouin modes of a dissipative optical lattice. These modes have been excited by applying a moving potential modulation with phase velocity v_ϕ equal to the velocity $\bar{v}$ of the Brillouin mode. This results in a motion of the center of mass of the atomic cloud. The effective excitation of the Brillouin propagation mode has been detected by observing a resonant dependence of the velocity of the atomic cloud CM on the velocity of the moving modulation, with a maximum CM velocity at $v_\phi = \bar{v}$. To observe the phenomenon of stochastic resonance in the optical lattice, we studied the CM velocity at Brillouin resonance as a function of the optical pumping rate at a given depth of the potential wells and a given modulation amplitude. The SR-like nonmonotonic dependence of the CM velocity on the optical pumping rate has been observed.

* * *

We thank Yanko Todorov for useful comments on the manuscript. This work was supported by the CNRS and the Région Ile de France under contract E.1220 *Atomes ultrafroids: vers de nouveaux états de la matière*. Laboratoire Kastler Brossel is an “unité mixte de recherche de l’Ecole Normale Supérieure et de l’Université Pierre et Marie Curie associée au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS)”.

REFERENCES

- [1] BENZI R., SUTERA S. and VULPIANI A., *J. Phys. A*, **14** (1981) L453.
- [2] NICOLIS C., *Tellus*, **34** (1982) 1.
- [3] MCNAMARA B. and WIESENFELD K. and ROY R., *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 2626.
- [4] DOUGLASS J. K., WILKENS L., PANTAZELOU E. and MOSS F., *Nature*, **365** (1993) 337.
- [5] GAMMAITONI L., *Phys. Rev. E*, **52** (1995) 4691.
- [6] WIESENFELD K. and MOSS F., *Nature*, **373** (1995) 33.
- [7] GAMMAITONI L., HÄNGGI P., JUNG P. and MARCHESONI F., *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 223.

- [8] DYKMAN M. I., LUCHINSKY D. G., MANNELLA R., MCCLINTOCK P. V. E., STEIN N. D. and STOCKS N. G., *J. Stat. Phys.*, **70** (1993) 479.
- [9] HU G., *Phys. Lett. A*, **174** (1993) 247.
- [10] FRONZONI L. and MANNELLA R., *J. Stat. Phys.*, **70** (1993) 501.
- [11] MARCHESONI F., *Phys. Lett. A*, **231** (1997) 61.
- [12] KIM Y. W. and SUNG W., *Phys. Rev. E*, **57** (1998) R6237.
- [13] DAN D., MAHATO M. C. and JAYANNAVAR A. M., *Phys. Rev. E*, **60** (1999) 6421.
- [14] BAO J.-D., *Phys. Rev. E*, **62** (2000) 4606.
- [15] ISAAC R. D., SCHWARZ R. B. and GRANATO A. V., *Phys. Rev. B*, **18** (1978) 4143.
- [16] KOLOMEISKY E. B., CURCIC T. and STRALEY J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 1775.
- [17] GRYNBERG G. and MENNERAT-ROBILLIARD C., *Phys. Rep.*, **355** (2001) 335.
- [18] COURTOIS J.-Y., GUIBAL S., MEACHER D. R., VERKERK P. and GRYNBERG G., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 40.
- [19] PETSAS K. I., GRYNBERG G. and COURTOIS J.-Y., *Eur. Phys. J. D*, **6** (1999) 29.
- [20] SANCHEZ-PALENCIA L., CARMINATI F.-R., SCHIAVONI M., RENZONI F. and GRYNBERG G., *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002) 133903.
- [21] NIENHUIS G., *Phys. Scr.*, **T95** (2001) 43.
- [22] VISSER P. M. and NIENHUIS G., *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 3950.
- [23] CARMINATI F.-R., SCHIAVONI M., SANCHEZ-PALENCIA L., RENZONI F. and GRYNBERG G., *Eur. Phys. J. D*, **17** (2001) 249.
- [24] SANCHEZ-PALENCIA L., HORAK P. and GRYNBERG G., *Eur. Phys. J. D*, **18** (2002) 353.
- [25] DYKMAN M. I., RABITZ H., SMELYANSKIY V. N. and VUGMEISTER B. E., *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 1178.
- [26] LUCHINSKY D. G., GREENALL M. J. and MCCLINTOCK P. V. E., *Phys. Lett. A*, **273** (2000) 316.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. Kastler, *Journal de Physique et du Radium* **11**, 255 (1950).
- [2] M. Bertolotti, *Masers and Lasers, An Historical Approach*, Hilger, Vienne (1983).
- [3] J. Hecht, *Laser Pioneers*, Academic Press, New York (1992).
- [4] S. Chu, Nobel Lectures, Review of Modern Physics **70**, 685 (1998); C. Cohen-Tannoudji, Nobel Lectures, *ibid.* **70**, 707 (1998); W. D. Phillips, Nobel Lectures, *ibid.* **70**, 721 (1998).
- [5] A. Aspect and J. Dalibard, *La Recherche* **261**, 30 (1994).
- [6] G. Grynberg, *La Recherche* **256**, 896 (1993).
- [7] J. S. Jessen and I. H. Deutsch, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **37**, 95 (1996).
- [8] G. Grynberg and C. Mennerat-Robilliard, *Physics Reports* **355**, 335 (2001).
- [9] M. R. Andrews, *Nature* **398**, 195 (1999).
- [10] J. R. Anglin and W. Ketterle, *Nature* **416**, 211 (2002).
- [11] E. A. Cornell and C. E. Wieman, Nobel Lectures, Review of Modern Physics **74**, 875 (2002); W. Ketterle, Nobel Lectures, *ibid.* **74**, 1131 (2002).
- [12] B. DeMarco and D. S. Jin, *Science* **285**, 1703 (1999).
- [13] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge and R. G. Hulet, *Science* **291**, 2570 (2001).
- [14] F. Schreck, G. Ferrari, K. L. Corwin, J. Cubizolles, L. Khaykovich, M.-O. Mewes and C. Salomon, *Physical Review A* **64**, 011402 (2001)
- [15] G. Bruun, Y. Castin, R. Dum and K. Burnett, *European Physical Journal D* **7**, 433 (1999).
- [16] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [17] P. V. E. McClintock, *Nature* **401**, 23 (1999).
- [18] J. Rousselet, L. Salome, A. Adjari and J. Prost, *Nature* **370**, 446 (1994).

- [19] A. Adjari, D. Mukamel, L. Peliti and J. Prost, *Journal de Physique I, France* **4**, 1551 (1994).
- [20] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Review of Modern Physics* **70**, 223 (1998).
- [21] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Journal of the Optical Society of America B* **6**, 2023 (1989).
- [22] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis and S. Chu, *Journal of the Optical Society of America B* **6**, 2058 (1989).
- [23] A. Einstein, *Annalen der Physik* **17**, 549 (1905).
- [24] M. Schmoluchowski, *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 577 (1906).
- [25] C. Mennerat-Robilliard, D. Lucas, S. Guibal, J. Tabosa, C. Jurczak, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **82**, 851 (1999).
- [26] F.-R. Carminati, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (2002)
http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/15/56/index_fr.html .
- [27] M. Schiavoni, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau (2003)
http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/31/29/index_fr.html .
- [28] H. Ellmann, Ph-D dissertation, Stockholm University, Stockholm (2002).
- [29] J. Jersblad, Ph-D dissertation, Stockholm University, Stockholm (2002).
- [30] C. Cohen-Tannoudji, Ecole de physique théorique des Houches 1990, Session **LIII**, “Fundamental systems in Quantum Optics”, J. Dalibard, J. M. Raimond et J. Zinn-Justin editeurs, North Holland, Amsterdam, Elsevier Science Publishers B.V. (1991).
- [31] G. Grynberg and C. Triché, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXXXI*, A. Aspect, W. Barletta and R. Bonifacio editors, IOS Press, Amsterdam (1996).
- [32] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Photons et Atomes, Introduction à l'Electrodynamique Quantique*, Interéditions, Editions du CNRS, Paris (1987); C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, New York (1997).
- [33] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'Interaction entre Photons et Atomes*, Interéditions, Editions du CNRS, Paris (1988); C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, Wiley, New York (1998).

- [34] M. O. Scully et M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University press, Cambridge (1997).
- [35] G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre, *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique*, Ellipse, Paris (1999); G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre, *An Introduction to Lasers and Quantum Optics*, Cambridge University press, Cambridge (2004).
- [36] K. I. Petsas, A.B. Coates and G. Grynberg, *Physical Review A* **50**, 5173 (1994).
- [37] C. Triché, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau (1997).
- [38] C. Mennerat-Robilliard, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1999).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique Quantique*, volumes 1 et 2, Hermann, Paris (1973); C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Quantum Mechanics*, volumes 1 and 2, Wiley, New York (1977).
- [40] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, volumes 1 et 2, Dunod, Paris (1964); A. Messiah, *Quantum Mechanics*, volumes 1 et 2, North Holland Publishing, New York (1961).
- [41] F. Laloë, *Les Symétries en Mécanique Quantique*, cours du DEA de Physique Quantique (1982).
- [42] C. Cohen-Tannoudji, Ecole de physique théorique des Houches 1975, Session **XXVII**, "Frontiers in laser spectroscopy", R. Balian, S. Haroche et S. Liberman éditeurs, North Holland, Amsterdam, Elsevier Science Publishers B.V. (1977).
- [43] Y. Castin, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1992).
- [44] C. Cohen-Tannoudji, *Annales de Physique* **7**, 423 (1962).
- [45] H. D. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*, Springer-Verlag, Berlin (1999).
- [46] G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkerk, J.-Y. Courtois and C. Salomon, *Physical Review Letters* **70**, 2249 (1993).
- [47] P. Verkerk, D.R. Meacher, A.B. Coates, J.-Y. Courtois, S. Guibal, C. Salomon and G. Grynberg, *Europhysics Letters* **26**, 171 (1994).
- [48] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Journal of the Optical Society of America B* **2**, 1707 (1985).
- [49] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon and C. Cohen-Tannoudji, *Physical Review Letters* **57**, 1688 (1986).
- [50] Homère, *L'Odyssée*, 8ème siècle avant Jesus Christ.

- [51] P. Verkerk, B. Lounis, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **68**, 3861 (1992).
- [52] L. Sanchez-Palencia, P. Horak, G. Grynberg, *European Physical Journal D* **18**, 353 (2002).
- [53] F.-R. Carminati, M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni and G. Grynberg, *European Physical Journal D* **17**, 249 (2001).
- [54] R. Brown, *The Philosophical Magazine* **4**, 161 (1828).
- [55] Y. Castin, J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions and Molecules*, edited by Moi, Gozzini, Gabbanini, Arimondo and Strumia, ETS Editrice, Pisa (1991).
- [56] A. Hemmerich and T. W. Hänsch, *Physical Review Letters* **68**, 1492 (1992).
- [57] A. Hemmerich, M. Weidemüller and T. W. Hänsch, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi*, Course CXXXI, A. Aspect, W. Barletta and R. Bonifacio editors, IOS Press, Amsterdam (1996).
- [58] J. Jersblad, H. Ellmann and A. Kastberg, *Physical Review A* **62**, 051401(R) (2000).
- [59] C. Boisseau and J. Vigué, *Optics Communications* **127**, 251 (1996).
- [60] M. S. Shahriar, P. R. Hermmer, M. G. Prentiss, P. Marte, J. Mervis, D. P. Katz, N. P. Bigelow and T. Cai, *Physical Review A* **48**, R4035 (1993).
- [61] P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, P. Zoller, M. S. Shahriar and M. G. Prentiss, *Physical Review A* **49**, 4826 (1994).
- [62] M. Weidemüller, T. Esslinger, M. A. Ol'Shanii, A. Hemmerich and T. W. Hänsch, *Europhysics Letters* **27**, 109 (1994).
- [63] B. Sheehy, S.-Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatamian and H. Metcalf, *Physical Review Letters* **64**, 858 (1990).
- [64] S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable and A. Ashkin, *Physical Review Letters* **55**, 48 (1985).
- [65] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould and H. J. Metcalf, *Physical Review Letters* **61**, 169 (1988).
- [66] Y. Castin and K. Mølmer, *Physical Review Letters* **74**, 3772 (1995).
- [67] C. Salomon, J. Dalibard, W. D. Phillips, A. Clairon, S. Guellati, *Europhysics Letters* **1**, 683 (1990).
- [68] C. Gerz, T. W. Hodapp, P. Jessen, K. M. Jones, W. D. Phillips, C. I. Westbrook and K. Mølmer, *Europhysics Letters* **21**, 661 (1993).

- [69] A. Hemmerich and T. W. Hänsch, *Physical Review Letters* **70**, 410 (1993).
- [70] A. Hemmerich, C. Zimmermann and T. W. Hänsch, *Europhysics Letters* **22**, 89 (1993).
- [71] A. Hemmerich, C. Zimmermann and T. W. Hänsch, *Physical Review Letters* **72**, 625 (1994).
- [72] K. Berg-Sørensen, Y. Castin, K. Mølmer and J. Dalibard, *Europhysics Letters* **22**, 663 (1993).
- [73] Y. Castin, K. Berg-Sørensen, J. Dalibard and K. Mølmer, *Physical Review A* **50**, 5092 (1994).
- [74] C. Mennerat-Robilliard, D. Boiron, J.-M. Fournier, A. Aradian, P. Horak and G. Grynberg, *Europhysics Letters* **44**, 442 (1998).
- [75] D. Boiron, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1998).
- [76] L. Guidoni and P. Verkerk, *Physical Review A* **57**, R1501 (1998).
- [77] R. Scheunemann, F. S. Cataloitti, T. W. Hänsch and M. Weitz, *Physical Review A* **62**, 051801(R) (2000).
- [78] R. Grimm, J. Söding and Yu. B. Ovchinnikov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **61**, 367 (1995).
- [79] R. Grimm, G. Wasik, J. Söding and Yu. B. Ovchinnikov, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi*, Course CXXXI, A. Aspect, W. Barletta and R. Bonifacio editors, IOS Press, Amsterdam (1996).
- [80] A. Görlitz, T. Kinoshita, T. W. Hänsch and A. Hemmerich, *Physical Review A* **64**, 011401(R) (2001).
- [81] W. D. Phillips, séminaire donné au Collège de France (2002).
- [82] L. Guidoni, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1998).
- [83] L. Guidoni, C. Triché, P. Verkerk and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **79**, 3363 (1997).
- [84] L. Guidoni, B. Dépret, A. di Stefano and P. Verkerk, *Physical Review A* **60**, R4233 (1999).
- [85] P. Horak, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review A* **58**, 3953 (1998).
- [86] D. Boiron, C. Mennerat-Robilliard, J.-M. Fournier, L. Guidoni, C. Salomon and G. Grynberg, *European Physical Journal D* **7**, 373 (1999).
- [87] G. Grynberg, P. Horak and C. Mennerat-Robilliard, *Europhysics Letters* **49**, 424 (2000).

- [88] M. Gatzke, G. Birkel, P. S. Jessen, A. Kastberg, S. L. Rolston and W. D. Phillips, *Physical Review A* **55**, R3987 (1997).
- [89] P. L. Gould, G. A. Ruff and D. E. Pritchard, *Physical Review Letters* **56**, 827 (1986).
- [90] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. Miklich and D. E. Pritchard, *Physical Review Letters* **60**, 515 (1988).
- [91] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin and C. Salomon, *Physical Review Letters* **76**, 4508 (1996).
- [92] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin and C. Salomon, *Physical Review A* **55**, 2989 (1997).
- [93] M. Ben Dahan, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1997).
- [94] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. Georgakis and M. G. Raizen, *Physical Review Letters* **76**, 4504 (1996).
- [95] S. Wilkinson, C. Bharucha, K. Madison, Q. Niu and M. G. Raizen, *Physical Review Letters* **76**, 4512 (1996).
- [96] Y. Castin and J. Dalibard, *Europhysics Letters* **14**, 761 (1991).
- [97] L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, M. Schiavoni, F. Renzoni and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **88**, 133903 (2002).
- [98] M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, F. Renzoni and G. Grynberg, *Europhysics Letters* **59**, 493 (2002).
- [99] L. Sanchez-Palencia and G. Grynberg, *Physical Review A* **68**, 023404 (2003).
- [100] M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **90**, 094101 (2003).
- [101] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow, *Optics Communications* **13**, 68 (1975).
- [102] D. Wineland and H. Dehmelt, *Bulletin of the American Physical Society* **20**, 637 (1975).
- [103] R. J. Cook, *Physical Review A* **20**, 224 (1979).
- [104] J. P. Gordon and A. Ashkin, *Physical Review A* **21**, 1606 (1980).
- [105] S. E. Koonin, *Computational Physics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park (1986).
- [106] H. Gould and J. Tobochnik, *An Introduction to Computer Simulation Methods*, Addison-Wesley, Reading (1996).
- [107] N. J. Giordano, *Computational Physics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1997).

- [108] J. M. Thijssen, *Computational Physics*, Cambridge University press, Cambridge (1999).
- [109] J. M. Hammersley and D. C. Handscomb, *Monte-Carlo Methods*, Methuen, London (1964).
- [110] M. H. Kalos and P. A. Whitlock, *Monte-Carlo Methods*, John Wiley, New York (1986).
- [111] K. Binder and D. W. Heermann, *Monte-Carlo Simulation in Statistical Physics*, Springer, New York (1988).
- [112] W. Krauth, *Introduction to Monte-Carlo Algorithms*, Notes de cours, Paris (1996); <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/W-Krauth/w-krauth.pdf>.
- [113] B. Lapeyre, E. Pardoux and R. Sentis, *Introduction to Monte-Carlo Methods for Transport and Diffusion Equations*, Oxford University Press, Oxford (2003).
- [114] T. W. Hodapp, C. Gerz, C. Furtlehner, C. I. Westbrook, W. D. Philipps and J. Dalibard, *Applied Physics B* **60**, 135 (1995).
- [115] K. Mølmer, *Physical Review A* **44**, 5820 (1991).
- [116] G. Lindblad, *Communications in Mathematical Physics* **48**, 119 (1976).
- [117] K. Mølmer and Y. Castin, *Quantum and Semiclassical Optics* **8**, 49 (1996).
- [118] J. Dalibard, Y. Castin and K. Mølmer, *Physical Review Letters* **68**, 580 (1992).
- [119] C. W. Gardiner, A. S. Parkins and P. Zoller, *Physical Review A* **46**, 4363 (1992).
- [120] N. Gisin and I. C. Percival, *Journal of Physics A* **24**, 5677 (1992).
- [121] H. J. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer, Berlin (1993).
- [122] K. Mølmer, Y. Castin and J. Dalibard, *Journal of the Optical Society of America B* **10**, 524 (1993).
- [123] J. Neveu, *Introduction aux Probabilités*, cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1996).
- [124] R. Dum, P. Zoller and H. Ritsch, *Physical Review A* **45**, 4879 (1992).
- [125] A. Barchielli and V. P. Belavkin, *Journal of Physics A* **24**, 1495 (1991).
- [126] M. Holland, S. Marksteiner, P. Marte and P. Zoller, *Physical Review Letters* **76**, 3683 (1996).
- [127] J. Jersblad, H. Ellmann, K. Støchkel, A. Kastberg, L. Sanchez-Palencia and R. Kaiser, *submitted*, *Physical Review A* (2003).

- [128] S. Marksteiner, K. Ellinger and P. Zoller, *Physical Review A* **53**, 3409 (1996).
- [129] P. Marte, R. Dum, R. Taïeb and P. Zoller, *Physical Review A* **47**, 1378 (1993).
- [130] R. Taïeb, P. Marte, R. Dum and P. Zoller, *Physical Review A* **47**, 4986 (1993).
- [131] P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, P. D. Lett and P. Zoller, *Physical Review Letters* **71**, 1335 (1993).
- [132] E. Joos and H. D. Zeh, *Zeitschrift für Physik B* **59**, 223 (1985).
- [133] S. de Groot, *La Transformation de Weyl et la Fonction de Wigner: une Forme Alternative de la Mécanique Quantique*, Editions de l'Université de Montréal, Montréal (1975).
- [134] E.P. Wigner, *Physical Review* **40**, 749 (1932).
- [135] K. I. Petsas, G. Grynberg and J.-Y. Courtois, *European Physical Journal D* **6**, 29 (1999).
- [136] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New-York (1949).
- [137] D. Bohm, *Quantum Theory*, Constable and Compagny Ltd, London (1954).
- [138] J. Jersblad, H. Ellmann, L. Sanchez-Palencia and A. Kastberg, *European Physical Journal D* **22**, 333 (2003).
- [139] D. R. Meacher, S. Guibal, C. Mennerat-Robilliard, J.-Y. Courtois, K. I. Petsas and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **78**, 1958 (1994).
- [140] K. I. Petsas, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review A* **53**, 2533 (1996).
- [141] C. Mennerat-Robilliard, L. Guidoni, K. I. Petsas, P. Verkerk, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *European Physical Journal D* **1**, 33 (1998).
- [142] R. Gupta, J. J. McClelland, P. Marte and R. J. Celotta, *Physical Review Letters* **76**, 1788 (1996).
- [143] J. Salençon, *Mécanique des Milieux Continus*, éditions l'Ecole Polytechnique, Ellipse, Palaiseau (1996).
- [144] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, Berlin (1983).
- [145] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer, Berlin (1989).
- [146] H. J. Hilhorst, *Processus Aléatoires et Problèmes de Réaction-Diffusion*, Cours du DEA de Physique Théorique, Paris (2000).
- [147] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*, Seconde Edition, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

- [148] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in FORTRAN: Example Book*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [149] J.-Y. Courtois, Proceedings of the International school of Physics “Enrico Fermi”, course **CXXXI**, A. Aspect, W. Barletta and R. Bonifacio eds., IOS Press, Amsterdam (1996).
- [150] C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Théorie Statistique des Champs*, volumes 1 et 2, Interéditions, Editions du CNRS, Paris (1989); C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, volumes 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [151] K. I. Petsas, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1996).
- [152] S. Guibal, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1997).
- [153] H. Ellmann, J. Jersblad and A. Kastberg, *European Physical Journal D* **13**, 379 (2001).
- [154] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Statistical Physics*, 3rd edition, Pergamon Press, Oxford (1980).
- [155] I. H. deutsch, J. Grondalski and P. M. Alsing, *Physical Review A* **56**, R1705 (1997).
- [156] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier, Amsterdam (1992).
- [157] E. Lutz, cond-mat/0210022.
- [158] C. Tsallis, *Journal of Statistical Physics* **52**, 479 (1988).
- [159] C. Tsallis, R.S. Mendes and A.R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [160] G. Kaniadakis and P. Quarati, *Physica A* **237**, 229 (1997).
- [161] C. Tsallis and D.J. Bukman, *Physical Review E* **54**, R2197 (1996).
- [162] A.R. Plastino and A. Plastino, *Physica A* **222**, 347 (1995).
- [163] M.L. Lyra and C. Tsallis, *Physical Review E* **80**, 53 (1998).
- [164] Y.S. Weinstein, S. Lloyd and C. Tsallis, cond-mat/0206039.
- [165] H. Katori, S. Schlipf and H. Walther, *Physical Review Letters* **79**, 222 (1997).
- [166] L. Sanchez-Palencia, M. Schiavoni, F.-R. Carminati, F. Renzoni and G. Grynberg, “Special issue: laser cooling of matter”, *Journal of the Optical Society of America B* **20**, 925 (2003).

- [167] G. Raithel, G. Birkel, A. Kastberg, W.D. Phillips and S.L. Rolston, *Physical Review Letters* **78**, 630 (1997).
- [168] W. Greenwood, P. Pax and P. Meystre, *Physical Review A* **56**, 2109 (1997).
- [169] C. Jurczak, B. Desruelle, K. Sengstock, J.-Y. Courtois, C. I. Westbrook and A. Aspect, *Physical Review Letters* **77**, 1727 (1997).
- [170] A. G. Truscott, D. Baleva, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, *Optics Communications* **145**, 81 (1998).
- [171] Special issue “Quantum transport of atoms in optical lattices”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 589 (2000), edited by M. Raizen and W. Schleich.
- [172] M. D. Barrett, J. A. Sauer and M. S. Chapman, *Physical Review Letters* **87**, 010404 (2001).
- [173] J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review A* **46**, 7060 (1992).
- [174] A. Görlitz, M. Weidemüller, T. W. Hänsch and A. Hemmerich, *Physical Review Letters* **78**, 2096 (1997).
- [175] M. Weidemüller, A. Görlitz, T. W. Hänsch and A. Hemmerich, *Physical Review A* **58**, 4647 (1998).
- [176] K. Mølmer and C. I. Westbrook, *Laser Physics* **4**, 872 (1994).
- [177] J.-Y. Courtois, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau (1993); J.-Y. Courtois, *Annales de Physique* **21**, 1 (1996).
- [178] F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, M. Schiavoni, F. Renzoni and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **90**, 043901 (2003).
- [179] J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **36**, 87 (1996).
- [180] J.-Y. Courtois, S. Guibal, D. R. Meacher, P. Verkerk and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **77**, 40 (1996).
- [181] M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, F. Renzoni and G. Grynberg, *Physical Review A* **66**, 053821 (2002).
- [182] L. Fronzoni and R. Mannella, *Journal of Statistical Physics* **70**, 501 (1993).
- [183] L. Viola, E. M. Fortunato, S. Lloyd, C.-H. Tseng and D. G. Cory, *Physical Review Letters* **84**, 5466 (2000).
- [184] T. Wellens and A. Buchleitner, *Chemical Physics* **268**, 131 (2001).
- [185] M. I. Dykman, R. Mannella, P. V. E. McClintock and N. G. Stocks, *Physical Review Letters* **65**, 2606 (1990).

- [186] P. Hänggi, P. Talkner and M. Borkovec, *Review of Modern Physics* **62**, 251 (1990).
- [187] H. Kramers, *Physica (Utrecht)* **7**, 284 (1940).
- [188] R. Fox and Y. Lu, *Physical Review E* **48**, 3390 (1993).
- [189] N. G. Stocks, N. D. Stein and P. V. E. McClintock, *Journal of Physics A* **26**, L385 (1993).
- [190] Z. Gingl, L. B. Kiss and F. Moss, *Europhysics Letters* **29**, 191 (1995).
- [191] R. Benzi, A. Sutera and A. Vulpiani, *Journal of Physics A* **14**, L453 (1981).
- [192] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera and A. Vulpiani, *Tellus* **34**, 10 (1982).
- [193] C. Nicolis and G. Nicolis, *Tellus* **33**, 225 (1981).
- [194] C. Nicolis, *Tellus* **34**, 1 (1982).
- [195] G. Matteucci, *Climate Dynamics* **6**, 67 (1991).
- [196] I. J. Winograd, T. B. Coplen, J. M. Landwehr, A. C. Riggs, K. R. Ludwig, B. J. Szabo, P. T. Kolesar and K. M. Revsz, *Science* **258**, 255 (1992).
- [197] J. Imbrie, A. C. Mix and D. G. Martinson, *Nature* **363**, 531 (1993).
- [198] A. Ganopolski and S. Rahmstorf, *Physical Review Letters* **88**, 038501 (2002).
- [199] F. Moss and X. Pei, *Nature* **371**, 211 (2000).
- [200] J. K. Douglass, L. Wilkens, E. Patazelou and F. Moss, *Nature* **365**, 337 (1993).
- [201] M. Riani and E. Simonotto, *Physical Review Letters* **72**, 3120 (1994).
- [202] T. Ditzinger, M. Stadler, D. Strüber and J. A. S. Kelso, *Physical Review E* **62**, 2566 (2000).
- [203] S. Fauve and F. Heslot, *Physics Letters* **97A**, 5 (1983).
- [204] A. D. Hibbs, A. L. Singsaas, E. W. Jacobs, A. R. Bulsara, J. J. Bekkedahl and F. Moss, *Journal of Applied Physics* **77**, 2582 (1995).
- [205] R. Rouse, S. Han and J. E. Lukens, *Applied Physics Letters* **66**, 108 (1995).
- [206] B. McNamara, K. Wiesenfeld and R. Roy, *Physical Review Letters* **60**, 2626 (1998).
- [207] E. C. Gage and L. Mandel, *Physical Review A* **38**, 5166 (1988).
- [208] K. Wiesenfeld and F. Moss, *Nature* **373**, 33 (1995).
- [209] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. D. Stein and N. G. Stocks, *Journal of Statistical Physics* **70**, 479 (1993).

- [210] W. Demtröder, *Laser Spectroscopy. Basic Concepts and Instrumentation*, Springer Verlag, Berlin (1982).
- [211] M. D. Levenson, *Introduction to Nonlinear Laser Spectroscopy*, Academic Press, New York (1992).
- [212] D. Grison, B. Lounis, C. Salomon, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Europhysics Letters* **15**, 149 (1991).
- [213] C. I. Westbrook, R. N. Watts, C. E. Tanner, S. L. Rolston, W. D. Phillips and P. D. Lett, *Physical Review Letters* **65**, 33 (1990).
- [214] B. Lounis, J.-Y. Courtois, P. Verkerk, C. Salomon and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **69**, 3029 (1992).
- [215] J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review A* **48**, 1378 (1993).
- [216] P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett, W. D. Phillips and C. I. Westbrook, *Physical Review Letters* **69**, 49 (1992).
- [217] D. R. Meacher, S. Guibal, C. Mennerat-Robilliard, J.-Y. Courtois K. I. Petsas and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **74**, 1958 (1995).
- [218] C. Jurczak, B. Desruelle, K. Sengstock, J.-Y. Courtois, C. I. Westbrook and A. Aspect, *Physical Review Letters* **77**, 1727 (1996).
- [219] S. Guibal, C. Mennerat-Robilliard, D. Larousserie, C. Triché, J.-Y. Courtois and G. Grynberg, *Physical Review Letters* **78**, 4709 (1997).
- [220] B. Lounis, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris (1993).
- [221] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).
- [222] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, New York (1992).
- [223] R. Löfstedt and S. N. Coppersmith, *Physical Review Letters* **72**, 1947 (1994).
- [224] T. Wellens and A. Buchleitner, *Physical Review Letters* **84**, 5118 (2000).
- [225] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung and P. Hänggi, *Physical Review Letters* **67**, 516 (1991).
- [226] M. Schmoluchowski, *Zeitschrift für Physik* **13**, 1069 (1912).
- [227] L. Brillouin, *Physical Review* **78**, 627 (1950).
- [228] Special issue “Ratchets and brownian motors: basics, experiments and applications”, *Applied Physics A* **75**, 167 (2002), edited by H. Linke.
- [229] P. Curie, *Journal de Physique II, France* **3**, 393 (1894).

- [230] P. Reimann and P. Hänggi, *Applied Physics A* **75**, 169 (2002).
- [231] C. Mennerat-Robilliard, D. Lucas and G. Grynberg, *Applied Physics A* **75**, 213 (2002).
- [232] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lecture Notes on Physics*, Addison-Wesley, Reading (1966).
- [233] M. I. Dykman, H. Rabitz, V. N. Smelyanskiy and B. E. Vugmeister, *Physical Review Letters* **79**, 1178 (1997).
- [234] S. Flach, O. Yevtushenko and Y. Zolotaryuk, *Physical Review Letters* **84**, 2358 (2000).
- [235] S. Denisov, S. Flach, A. A. Ovchinnikov, O. Yevtushenko and Y. Zolotaryuk, *Physical Review E* **66**, 41104 (2002).
- [236] V. N. Smelyanskiy, M. I. Dykman, H. Rabitz and B. E. Vugmeister, *Physical Review Letters* **79**, 3113 (1997).
- [237] D. G. Luchinsky, M. J. Greenall and P. V. E. McClintock, *Physics Letters A* **273**, 316 (2000).
- [238] Y. S. Weinstein, C. Tsallis and S. Lloyd, “Decoherence and Entropy of Complex Systems”, H. T. Elze editeur, Springer (2003); quant-ph/0305086.
- [239] *Chaos and noise in biology and medicine*, Proceedings of the International School of Biophysics Casamiciola 1997, M. Barbi and S. Chillemi eds., World Scientific Publishing, Singapore (1998).
- [240] R. Bartussek, P. Hänggi and J. G. Kissner, *Europhysics Letters* **28**, 459 (1994).
- [241] P. Reimann and P. Hänggi, *Chaos* **8**, 629 (1998).
- [242] P. Reimann, M. Grifoni and P. Hänggi, *Physical Review Letters* **79**, 10 (1997).
- [243] J. Guo, P. R. Berman, B. Dutetsky and G. Grynberg, *Physical Review A* **46**, 1426 (1992)
- [244] J.-Y. Courtois, G. Grynberg, B. Lounis and P. Verkerk, *Physical Review Letters* **72**, 3017 (1994).
- [245] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Wiley and sons, New York (1967).
- [246] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, HRW International Edition, New York (1976).
- [247] G. Birkel, M. Gatzke, I. H. Deutsch, S. L. Rolston and W. D. Philipps, *Physical Review Letters* **75**, 2823 (1995).
- [248] M. Weidemüller, A. Hemmerich, A. Görlitz, T. Esslinger and T. W. Hänsch, *Physical Review Letters* **75**, 4583 (1995).

- [249] G. Raithel, G. Birkel, W.D. Phillips and S.L. Rolston, Physical Review Letters **78**, 2928 (1997).

Index

- adiabatique
 - approximation, 73
 - élimination de l'état excité, 33
- bandes (modèle des), 56
- Bloch optiques (équations de), 28, 31, 33, 67
- Bohr (fréquence de), 28, 31
- Brillouin (mode)
 - détection, 141
 - excitation, 22, 135, 138, 143–155, 158, 159
 - propagation, 22, 135–137, 163, 164, 169, 171, 172, 182
 - résonance, 144, 150, 151, 153, 155, 158, 160, 172
- bownien (mouvement), 19, 20, 41, 42, 46, 58, 114, 123, 126
- bruit, 19, 22, 163, 166, 169
- champ tournant (approximation), 31
- Clebsch-Gordan (coefficient de), 30, 36, 37
- configuration
 - 1D- $\text{lin} \perp \text{lin}$, 37
 - (1D- $\text{lin} \perp \text{lin}$)³, 48
 - 3D- $\text{lin} \perp \text{lin}$, 21
 - à ondes stationnaires, 49
- Curie (principe de), 187
- décrochage, 20, 21, 46, 86, 93, 104
- déplacement lumineux, 27, 34, 36
- diabatique (approximation), 72
- diffusion dirigée, 187–191, 195–197
- diffusion en impulsion, 44
- diffusion spatiale, 21, 23, 109, 113, 135, 136, 138, 141, 172, 182, 187
- dipôle électrique
 - approximation, 29
 - opérateur, 29
- dissipatif (processus), 22, 35, 163, 170, 171, 175, 180
- distribution
 - de vitesse, 85, 96, 107, 142, 148, 153
 - spatiale, 115, 142, 148, 153, 182
- dynamique atomique, 47
 - piégeage, 27
 - refroidissement, 27
- Einstein (relations de), 109, 123
- fluorescence (cycle de), 34
 - absorption, 31, 34
 - émission induite, 31, 34
 - émission spontanée, 29, 31, 33–35
- Fokker-Planck (équations de), 67, 68, 75, 96, 97
- fonctions d'onde stochastiques, 59, 60, 62
- friction (force de), 42, 44, 48, 123, 125, 129
- gaussienne (distribution), 96, 99
- gaussienne double (distribution), 98, 102
- hamiltonien (mouvement), 22, 35, 163, 170, 171, 175, 180
- interaction lumière matière, 28
- Langevin (équations de), 75, 77
- Lindblad (forme de), 59, 60, 62
- lumino-frigorique (effet), 17
- maîtresse (équation), 34, 56, 62
- Markov (processus de), 59, 77
- mélasse optique, 49
- mode de vitesse
 - chaud, 21, 103–105, 130, 132
 - froid, 21, 103–105, 130, 132
- Monte Carlo
 - quantique, 20, 55, 59, 64
 - semi-classique, 20, 55, 66, 78
- oscillation (fréquence d'), 38, 41, 216
- pompage optique, 22, 27, 34, 35, 37, 38, 40, 42, 43

- potentiel optique, 27, 34, 36, 38, 40, 42
- Rabi (pulsation de), 32
- Rayleigh (raie), 127, 132
- rectification (de l'énergie de bruit), 19, 23, 187
- refroidissement, 28
 - $\sigma^+ - \sigma^-$, 35
 - Sisyphé, 19, 20, 27, 35, 41, 217–219
 - sub-Doppler, 33, 35, 62
- régime
 - dissipatif, 19
 - intermédiaire, 21, 22, 163
 - oscillant, 21, 47, 58, 109, 110, 120, 163, 171
 - sautant, 21, 47, 57, 109, 110, 120, 163, 171
- réseau optique, 18, 27
- réseau quasi-périodique, 51
- réseau tavelé, 51
- résonance stochastique, 19, 22, 23, 161, 163–165, 167–169, 173, 174, 182, 184
- rochet (effet), 19, 20, 22, 23, 187–191, 194, 195
- séculaire (approximation), 31
- simulation numérique, 20, 22, 34, 55
- spectroscopie, 180–182
- super-réseau, 51
- symétrie (brisure de), 22, 23, 187–189, 191, 195, 197, 198
- synchronisation (du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs), 22, 163, 166, 167, 174–176, 180
- Talbot (réseau), 50
- température
 - anisotropie (de la), 21, 87, 107
 - cinétique, 21, 23, 46, 85
 - thermodynamique, 86, 95
- thermalisation, 86, 88, 92, 95, 126, 129
- transport
 - dirigé, 22, 23, 135
 - spontané, 23, 135
- Tsallis (distribution de), 97, 101
- vitesse de capture, 43
- Weyl (transformation de), 67
- Wigner (fonction de), 67
- Wigner-Eckart (théorème de), 30

RÉSUMÉ

Nous étudions théoriquement la dynamique non linéaire d'atomes refroidis et piégés dans un réseau optique dissipatif et plus particulièrement les phénomènes de transport spontané et stimulé induits par le bruit.

Nous distinguons deux classes d'atomes, respectivement piégés et non-piégés dans les puits de potentiel, aux comportements très différents. Cette distinction permet de comprendre précisément le comportement des distributions de vitesse ainsi que les propriétés du transport spontané (diffusion spatiale) dans un domaine de paramètres allant du régime sautant au régime oscillant.

Des phénomènes de transport stimulés sont étudiés dans le régime intermédiaire entre les régimes sautant et oscillant où les temps typiques du mouvement hamiltonien et des phénomènes dissipatifs sont comparables. Nous caractérisons les modes de propagation Brillouin ainsi que leurs mécanismes d'excitation. Nous montrons que ceux-ci donnent lieu au phénomène de résonance stochastique qui correspond à la synchronisation du mouvement hamiltonien et des processus dissipatifs. Nous étudions enfin un rochet atomique temporel correspondant à un mouvement dirigé induit par la brisure de la symétrie temporelle.

MOTS CLÉS

réseaux optiques, atomes froids, refroidissement Sisyphe - régimes sautant, oscillant et intermédiaire - méthodes de Monte-Carlo quantique et semi-classique - phénomènes de transport induits par le bruit - potentiels optiques et pompage optique - diffusion spatiale, modes de propagation Brillouin, résonance stochastique, rochets spatial et temporel

ABSTRACT

We theoretically study the nonlinear dynamics of atoms cooled and trapped in a dissipative optical lattice and particularly noise-induced, spontaneous and stimulated transport phenomena.

We separate two differently behaving classes of atoms, respectively trapped and untrapped in the potential wells. This separation allows for the precise understanding of the behavior of the velocity distributions and of the properties of spontaneous transport (spatial diffusion) for parameters ranging from the jumping to the oscillating regimes.

We study stimulated transport phenomena in the intermediate regime between the jumping and oscillating regimes where the typical times for hamiltonian motion and dissipative processes have the same order of magnitude. We characterize the Brillouin propagation modes and the corresponding excitation mechanisms. We demonstrate that these show the phenomenon of stochastic resonance that corresponds to the synchronization of hamiltonian motion and dissipative processes. We finally study an atomic temporal ratchet originating from a temporal symmetry breaking-induced directed motion.

KEY WORDS

optical lattices, cold atoms, Sisyphus cooling - jumping, oscillating and intermediate regimes - quantum and semi-classical Monte-Carlo approaches - noise-induced transport phenomena - optical potential and optical pumping - spatial diffusion, Brillouin propagation modes, stochastic resonance, spatial and temporal ratchets