



**HAL**  
open science

# Spectroscopie en impulsion des fluctuations de phase dans des condensats de Bose-Einstein très allongés

Simon Richard

► **To cite this version:**

Simon Richard. Spectroscopie en impulsion des fluctuations de phase dans des condensats de Bose-Einstein très allongés. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2003. Français. NNT: . tel-00004396v1

**HAL Id: tel-00004396**

**<https://pastel.hal.science/tel-00004396v1>**

Submitted on 29 Jan 2004 (v1), last revised 3 Jul 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous décrivons une expérience de mesure des fluctuations de phase dans des condensats de Bose-Einstein très allongés. Les condensats de Bose-Einstein sont habituellement décrits comme des objets totalement cohérents. Cela est valable dans le cas de condensats peu anisotropes. En revanche, cela n'est plus exact dans des cas très anisotropes, en particulier pour des condensats très allongés dont les états excités de basse énergie sont 1D, et peuvent donc être très peuplés thermiquement même à basse température. Cette population d'excitations de faible énergie résulte en des fluctuations de la phase, et donc en une réduction de la longueur de cohérence du condensat dans la direction allongée, tandis que son profil de densité n'est pas perturbé. On parle alors de quasi-condensat.

Pour mesurer les fluctuations de phase, nous utilisons la spectroscopie de Bragg. Cette méthode donne accès à la distribution en impulsion des atomes du quasi-condensat, et donc par transformée de Fourier, à sa fonction de corrélation. On peut ainsi en déduire sa longueur de cohérence. Nos mesures montrent une distribution en impulsion lorentzienne, dont la largeur augmente avec la température. Cela signifie que nous observons une perte de cohérence, à mesure que la température augmente, en accord quantitatif avec les prédictions théoriques. Nous étudions également le profil de densité des quasi-condensats. Aucune différence avec le cas de condensats cohérents n'a pu être mesurée, ce qui confirme l'absence de fluctuations de densité importantes dans les quasi-condensats.

## ABSTRACT

In this thesis, we present an experiment that measures phase fluctuations in very elongated Bose-Einstein condensates. Bose-Einstein condensates are usually described as fully coherent objects. This is true for condensates with a moderate anisotropy. It is not correct, however, for very elongated condensates, whose low energy excited states are 1D, and thus may be strongly thermally populated even at low temperature. The large population of low energy excitations results in fluctuations of the phase and thus in a reduced coherence length of the condensate along its long direction, while its density profile is not affected. Such a phase fluctuating condensate is called a quasi-condensate.

We use Bragg spectroscopy to measure phase fluctuations. This method allows us to measure the momentum distribution of atoms in the quasi-condensate. The Fourier transform of the momentum distribution then gives the correlation function whose characteristic decay length is the coherence length of the quasi-condensate. Our measurements show a lorentzian momentum distribution, whose width increases with temperature. This is evidence for a loss of coherence as temperature increases, in quantitative agreement with theoretical predictions. We also study the density profile of quasi-condensates. No deviation from a true condensate density profile could be measured, confirming the suppression of density fluctuations in quasi-condensates.

## MOTS CLES

Atomes froids - Piégeage magnétique - Condensation de Bose-Einstein - Quasi-condensats - Fluctuations de phase - Distribution en impulsion - Régime 1D - Spectroscopie de Bragg - Transitions à 2 photons.





- [65] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. P. Rosenband, D. E. Pritchard, et W. Ketterle, "Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- [66] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Exploring phase coherence in a 2D lattice of Bose-Einstein condensates", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [67] N. J. van Druten et W. Ketterle, "Two-step condensation of the ideal Bose gas in highly anisotropic traps", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 549 (1997).
- [68] D. S. Petrov, *Bose-Einstein condensation in low-dimensional trapped gases*, PhD thesis, AMOLF, (Pays-Bas), 2003.
- [69] E. Zaremba, "Sound propagation in a cylindrical Bose-condensed gas", *Phys. Rev. A* **57**, 518 (1998).
- [70] K. Moler, D. S. Weiss, M. Kasevich, et S. Chu, "Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions", *Phys. Rev. A* **45**, 342 (1992).
- [71] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions/Editions du CNRS, 1988).
- [72] D. M. Giltner, R. W. McGowan, et S. A. Lee, "Theoretical and experimental study of the Bragg scattering of atoms from a standing light wave", *Phys. Rev. A* **52**, 3966 (1995).
- [73] P. B. Blakie, R. J. Ballagh, et C. Gardiner, "Theory of coherent Bragg spectroscopy of a trapped Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. A* **65**, 033602 (2002).
- [74] F. Zambelli, L. Pitaevskii, D. M. Stamper-Kurn, et S. Stringari, "Dynamic structure factor and momentum distribution of a trapped Bose gas", *Phys. Rev. A* **61**, 063608 (2000).
- [75] D. A. Steck, <http://george.ph.utexas.edu/dsteck/alkalidata/rubidium87numbers.pdf> (non publié).
- [76] M. Fleischauer, "Optical pumping into dense atomic media : limitation due to reabsorption of spontaneously emitted photons", *Europhys. Lett.* **45**, 659 (1999).

- [48] S. Stringari, “Dynamics of Bose-Einstein condensed gas in highly deformed traps”, *Phys. Rev. A* **58**, 2385 (1998).
- [49] P. O. Fedichev, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, “Damping of low-energy excitations of a trapped Bose-Einstein condensate at finite temperature”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2269 (1998).
- [50] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, “Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas”, *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).
- [51] M. Naraschewski et D. M. Stamper-Kurn, “Analytical description of a trapped semi-ideal Bose gas at finite temperature”, *Phys. Rev. A* **58**, R2423 (1998).
- [52] C. Menotti et S. Stringari, “Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas”, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).
- [53] A. L. Zubarev et Y. E. Kim, “Approximation for nonlinear dynamics of trapped Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **65**, 035601 (2002).
- [54] F. Dalfovo et S. Stringari, “Bosons in anisotropic traps : ground state and vortices”, *Phys. Rev. A* **53**, 2477 (1996).
- [55] F. Gerbier, *Condensats de Bose-Einstein dans un piège très anisotrope*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.
- [56] D. Hellweg, S. Dettmer, P. Ryyty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, et M. Lewenstein, “Phase-fluctuations in Bose-Einstein condensates”, *Appl. Phys. B* **73**, 781 (2001).
- [57] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. Miklich, et D. E. Pritchard, “Bragg scattering of atoms from a standing light wave”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 515 (1988).
- [58] J. Steinhauer, N. Katz, R. Ozery, et N. Davidson, “Excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060404 (2003).
- [59] J. Steinhauer, N. Katz, R. Ozery, N. Davidson, C. Tozzo, et F. Dalfovo, “Bragg spectroscopy of the multibranch Bogoliubov spectrum of elongated Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060404 (2003).
- [60] R. Geursen, N. R. Thomas, et A. C. Wilson, “Bragg spectroscopy with an accelerating Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **68**, 043611 (2003).
- [61] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, “Coherent splitting of Bose-Einstein condensed atoms with optically induced Bragg diffraction”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999).
- [62] D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, et J. J. Arlt, “Measurement of the spatial correlation function of phase fluctuating Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).
- [63] V. Dunjko, V. Lorent, et M. Olshanii, “Bosons in cigar-shaped traps : Thomas-Fermi regime, Tonks-Girardeau regime, and in between”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5413 (2001).
- [64] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, et C. Salomon, “Quasipure Bose-Einstein condensate immersed in a Fermi sea”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).

- [32] J. M. Vogels, K. Xu, C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, et W. Ketterle, “Experimental observation of the Bogoliubov transformation for a Bose-Einstein condensed gas”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 060402 (2002).
- [33] W. Ketterle, D. S. Durfee, et D. M. Stamper-Kurn, dans *Bose-Einstein condensation in atomic gases* (edited by M. Inguscio, S. Stringari and C. E. Wieman, 1999), Chap. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates.
- [34] J. J. Tollett, C. C. Bradley, C. A. Sackett, et R. G. Hulet, “Permanent magnet trap for cold atoms”, *Phys. Rev. A* **51**, R22 (1995).
- [35] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, et E. A. Cornell, “Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).
- [36] A. Browaeys, *Piégeage magnétique d’un gaz d’Hélium métastable : vers la condensation de Bose-Einstein*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2000.
- [37] R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, et C. Henkel, “Microscopic atom optics : from wires to an atom chip”, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 263 (2002).
- [38] C. Aussibal, *Réalisation d’un condensat de Bose-Einstein sur une microstructure*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2003.
- [39] T. Esslinger, I. Bloch, et T. W. Hänsch, “Bose-Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap”, *Phys. Rev. A* **58**, R2664 (1998).
- [40] V. Vuletic, T. Fischer, M. Praeger, T. W. Hänsch, et C. Zimmermann, “Microscopic magnetic quadrupole trap for neutral atoms with extreme adiabatic compression”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1634 (1998).
- [41] T. Walker, D. Sesko, et C. Wieman, “Collective behavior of optically trapped neutral atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 408 (1990).
- [42] W. Ketterle, K. B. Davis, M. A. Joffe, A. Martin, et D. E. Pritchard, “High densities of cold atoms in a dark spontaneous-force optical trap”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993).
- [43] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, “Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
- [44] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. Kurn, C. G. T. D. S. Durfee, et W. Ketterle, “Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).
- [45] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, “Temperature-dependent damping and frequency shifts in collective excitations of a dilute Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 764 (1997).
- [46] D. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, et W. Ketterle, “Collective and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 500 (1998).
- [47] D. W. Snoke et J. P. Wolfe, “Population dynamics of a Bose gas near saturation”, *Phys. Rev. B* **39**, 4030 (1989).

- 
- [12] P. Nozières et D. Pines, *The theory of quantum fluids* (Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1999).
- [13] W. Ketterle et N. J. van Druten, “Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions”, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
- [14] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, et S. Stringari, “Theory of trapped Bose-condensed gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [15] V. Bagnato, D. E. Pritchard, et D. Kleppner, “Bose-Einstein condensation in an external potential”, *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1987).
- [16] B. Desruelle, *Évaporation par radio-fréquence et condensation de Bose-Einstein d’un gaz d’alcalins en régime de champ fort*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 1999.
- [17] V. Boyer, *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans les champs magnétiques intenses*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2000.
- [18] G. Delannoy, *Étude des techniques de production de condensats de Bose-Einstein : évaporation multi-fréquence et refroidissement sympathique*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.
- [19] Y. L. Coq, *Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2002.
- [20] C. Cohen-Tannoudji, “Manipulating atoms with photons”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707 (1998).
- [21] W. D. Phillips et H. Metcalf, “Laser deceleration of an atomic beam”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 596 (1982).
- [22] J. Dalibard et C. Cohen-Tannoudji, “Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).
- [23] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis, et S. Chu, “Optical molasses and multilevel atoms : theory”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058 (1989).
- [24] H. F. Hess, “Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen”, *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).
- [25] A. Roth, *Vacuum technology* (North Holland, 1979).
- [26] C. Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France, 1998-1999.
- [27] Y. Castin et R. Dum, “Bose-Einstein condensates in time dependent traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [28] Y. Kagan, E. L. Surkov, et G. V. Shlyapnikov, “Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps”, *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).
- [29] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, “Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas”, *J. Low Temp. Phys.* **109**, 309 (1997).
- [30] C. J. Pethick et H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases* (Cambridge University Press, 2002).
- [31] A. Griffin, “Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures”, *Phys. Rev. B* **53**, 9341 (1996).



## Bibliographie

---

- [1] M. H. Anderson, J. R. E. end M. R. Matthews, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor", *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, et W. Ketterle, "Bose-Einstein condensation in a gas of Sodium atoms", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, et R. G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995), *ibid.* **79** 1170 (1997).
- [4] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. B. Band, M. Edwards, M. Doery, P. S. Julienne, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, "Measurement of the coherence of a Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999).
- [5] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, et W. Ketterle, "Bragg spectroscopy of a Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999), erratum : *idem*, **84**, 2283 (2000).
- [6] I. Bloch, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition", *Nature* **403**, 166 (2000).
- [7] I. Schvachuck, C. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemman, T. G. Tiecke, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Bose-Einstein condensation into nonequilibrium states studied by condensate focusing", *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270404 (2002).
- [8] V. Bagnato et D. Kleppner, "Bose-Einstein condensation in low dimensional traps", *Phys. Rev. A* **44**, 7439 (1991).
- [9] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Regimes of quantum degeneracy in trapped 1D gases", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).
- [10] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Phase-fluctuating 3D condensates in elongated traps", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).
- [11] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryyty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, et M. Lewenstein, "Observation of Phase-fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).



# Annexe C

---

## Articles

### Atom Laser Divergence

Y. Le Coq, J. H. Thywissen, S. A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).

### Momentum distribution and correlation function of quasicondensates in elongated traps

F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer and A. Aspect, *Phys. Rev. A* **67**, 051602 (2003).

### Momentum spectroscopy of 1D phase fluctuations in Bose-Einstein condensates

S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003).

Une étude quantitative de l'influence de la diffusion multiple sur l'efficacité de dépolarisation serait très utile. Nous retiendrons simplement ici que pour un nuage optiquement dense de symétrie sphérique, l'effet global semble être nul. Notons que cette contrainte n'est pas très difficile à réaliser pour un condensat anisotrope, puisque son ellipticité s'inverse au cours de son expansion (voir section 1.3.2). Il passe donc par une forme sphérique.

### Conclusion

Nous avons proposé une méthode d'imagerie par absorption permettant, sous certaines conditions, de mesurer l'épaisseur optique absolue d'un nuage d'atomes, sans calibration indépendante. Elle pourrait être utile, dans la mesure où les calibrations du nombre d'atomes par la mesure de la température critique de condensation, proportionnelle à  $N_{\text{tot}}^{1/3}$ , ou par la mesure du potentiel chimique d'un condensat, proportionnel à  $N_0^{2/5}$ , ne sont pas très sensibles, et dépendent de la capacité à bien mesurer  $T_c$  ou  $\mu$ .

Cette technique peut s'appliquer lorsque l'on ne connaît pas le champ magnétique local, mais peut également être intéressante, et d'application plus facile, lorsqu'il est connu. Dans tous les cas le calcul présenté suppose que l'amplitude du champ est petite, de sorte que le décalage des niveaux par effet Zeeman est très petit devant la largeur du niveau excité. Bien que la méthode telle qu'elle est proposée soit un peu lourde à appliquer (plus qu'elle ne le semblait à première vue), elle est réaliste, et vraisemblablement perfectible.

rapidement (ce qui entraîne un élargissement de Fourier de leur spectre etc).

L'usage comme sonde d'un des dépolariseurs présente un autre avantage : cela réduit la sensibilité de la section efficace moyenne des atomes  $\bar{\sigma}$  vis à vis d'un déséquilibre entre les intensités des lasers.

Pour montrer cela, considérons des dépolariseurs d'intensités  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  (la lettre en indice représentant la direction de polarisation). La projection de leur champ électrique sur la base des polarisations propres donnée par les équations (B.11) et (B.12) donne les intensités résultantes  $I_{\sigma^+}$ ,  $I_{\sigma^-}$  et  $I_\pi$ . Les dépolariseurs sont allumés par intermittence. De plus, nous choisissons comme sonde le laser polarisé selon  $Ox$ . On peut alors définir une section efficace d'absorption moyenne vis-à-vis du faisceau sonde,  $\bar{\sigma}$ , qui s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{3} \left( N_1 \frac{I_{\sigma^+x}}{I_x} + N_2 \frac{I_{\pi x}}{I_x} + N_3 \frac{I_{\sigma^-x}}{I_x} \right), \quad (\text{B.13})$$

où  $I_{\sigma^+x} = I_{\sigma^-x} = I_x(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta)/2$  et  $I_{\pi x} = I_x \cos^2 \phi \sin^2 \theta$  viennent de la décomposition du seul champ  $E_x$  sur les polarisations propres, et les populations sont données par les équations (B.6) à (B.8).

Pour  $I_x = I_y = I_z$ , on a  $N_i = 1/3$  et, par conséquent,  $\bar{\sigma} = \sigma_0/9$ . Mais prenons par exemple le cas d'un petit déséquilibre d'intensité des faisceaux, tel que  $I_x = I_0 + dI$  et  $I_y = I_z = I_0$ . Alors la section efficace moyenne d'absorption du lasers sonde dépend a priori de la direction du champ magnétique, ce que l'on exprime par  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\theta, \phi)$ . Pour estimer la dépendance de la section efficace moyenne vis à vis de  $dI/I_0$ , on peut calculer l'écart maximum de  $\bar{\sigma}(\theta, \phi)$  à  $\sigma_0/9$  en fonction de  $dI/I_0$ . On trouve que l'écart entre  $\bar{\sigma}(\theta, \phi)$  et  $\sigma_0/9$  est maximum pour  $(\theta = \pi/2, \phi = 0 (\pi))$ , ce qui donne :

$$\frac{\bar{\sigma}(\frac{\pi}{2}, 0) - \sigma_0/9}{\sigma_0/9} \simeq 1 + \frac{2 dI}{3 I_0}. \quad (\text{B.14})$$

Sachant qu'il n'est pas difficile d'égaliser des intensités de lasers à mieux que 10 %, l'erreur sur la section efficace moyenne due au déséquilibre des intensités des dépolariseurs peut raisonnablement être réduite à moins de 5 %.

### Problème de la diffusion multiple

La diffusion multiple est un problème important du pompage optique dans un milieu optiquement dense [76]. Les atomes absorbent des photons émis spontanément par leurs voisins. Ces photons n'ont pas, a priori, la polarisation correcte pour le pompage. Pour la répartition des atomes dans tous les sous-niveaux de  $F = 1$  selon le schéma que nous discutons, les contraintes ne sont pas les mêmes que pour du pompage optique dont l'objectif est de transférer tous les atomes dans un même sous-niveau. En effet, les atomes émettant à proportions égales des photons de polarisation  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  et  $\pi$ , ces photons seront réabsorbés en quantités égales dans un nuage de symétrie sphérique. La dépolarisation ne semble donc pas affectée globalement dans ce cas. Elle peut l'être localement, mais nous n'entrerons pas dans ce degré de complexité. Dans un nuage qui n'a pas la symétrie sphérique, la réabsorption déséquilibre la dépolarisation, puisque l'absence de symétrie introduit une corrélation entre direction de propagation du photon réémis et probabilité de réabsorption, et donc entre la polarisation, qui est orthogonale à la direction de propagation, et la probabilité de réabsorption.

moyenne échangé par atome. On voit que 0.5 photon échangé par atome par impulsion suffit à entraîner une oscillation de  $N_1$  d'environ 30 % crête à crête, due à la relaxation partielle des populations à chaque impulsion laser. Pour minimiser cette oscillation à intensité égale, il faut alterner les lasers plus rapidement. Les impulsions pour la courbe en trait continu sont de  $0.54 \mu\text{s}$ , ou 0.05 photon échangé. L'amplitude d'oscillation de  $N_1$  résiduelle est alors environ 10 fois plus faible.

Au total le nombre de photons échangés par atome est de l'ordre de 15 pour équilibrer les 3 populations à environ 3 % près. Pour ces deux cas, la population de  $N_1$  oscille autour d'une exponentielle décroissante, dont la constante de temps est donnée par  $\tilde{\tau} = 3\tau$ , où  $\tau$  est le temps d'amortissement des populations dans les équations (B.4) et (B.5). Cette différence d'un facteur trois est justifiée par le fait que le taux de diffusion moyen par atome est trois fois plus faible dans le cas où les 3 lasers sont alternés.

La courbe en tirets montre le même calcul mais dans le cas idéal, avec tous les lasers présents en même temps sans interférences, pour une même intensité dans chaque polarisation. La constante de temps de dépolarisation est alors donnée par  $\tau$ .

En pratique, pour un champ magnétique quelconque, l'alternance des lasers n'est pas directement une alternance des polarisations (chaque laser contenant plusieurs polarisations propres), mais le résultat ne doit pas changer, que ce soit en terme de temps de dépolarisation et de nombre de photons échangés nécessaire. Ce sont les caractéristiques précises des oscillations des populations liées à l'alternance des lasers qui sera affectée, mais non le temps de relaxation des populations.

Cette technique pour annuler les termes croisés des équations (B.11) et (B.12) ne pose pas de problème de réalisation, mais nécessite un interrupteur rapide sur chaque faisceau comme par exemple un modulateur acousto-optique.

### Deuxième cas pratique : champ magnétique connu

Cette méthode d'imagerie pourrait également être utile dans une situation où le champ magnétique est connu. En effet, dans le cas d'un nuage d'atomes optiquement dense, le pompage optique vers un sous-niveau choisi, avant d'en prendre l'image par absorption, n'est pas très efficace du fait des diffusions multiples. La dépolarisation pourrait donc le remplacer avantageusement, si l'on veut connaître la section efficace d'absorption des atomes du nuage a priori. Nous discutons qualitativement dans la suite l'effet des diffusions multiples sur l'efficacité de la dépolarisation.

La connaissance de la direction du champ magnétique simplifie notablement l'égale répartition des atomes dans les sous-niveaux fondamentaux, car en choisissant  $\theta = 0$  on annule les termes croisés des équations (B.11) et (B.12) sans avoir à alterner les faisceaux lasers.

### Choix du faisceau sonde

Afin de ne pas perturber les populations  $N_i$ , le plus simple est d'utiliser l'un des faisceaux de dépolarisation comme sonde, et d'acquérir l'image, tout en continuant les cycles de dépolarisation. Ajouter un laser sonde indépendant ne semble pas facile, car son intensité doit être très faible devant celle des dépolariseurs, qui doit elle-même être faible, dans le cas où le champ magnétique est inconnu, pour ne pas avoir à commuter les lasers trop

On trouve donc effectivement que pour des champs de même amplitude  $E_0$ , mais présents un par un en alternance, de sorte que les termes croisés  $E_i E_j$  soient nuls si  $i \neq j$ , on a  $|E_{\sigma^+}|^2 = |E_{\sigma^-}|^2 = |E_\pi|^2 = |E_0|^2$  pour tout couple  $(\theta, \phi)$ , et donc  $I_{\sigma^+} = I_{\sigma^-} = I_\pi$ . Ce résultat est en fait classique : lorsque la matrice  $\{E_i E_j\}$  est diagonale et proportionnelle à la matrice identité dans la base définie par les polarisations des lasers, elle est invariante dans toute rotation de cette base.

Notons que si  $\theta = 0(\pi)$ , les termes croisés sont toujours nuls. Il n'est alors pas nécessaire d'allumer les lasers alternativement.

Nous allons voir à présent dans quelle mesure l'alternance des faisceaux modifie la dynamique de la dépolarisation décrite par les équations (B.4) et (B.5).

### Premier cas pratique : champ magnétique inconnu

Pour annuler les termes croisés dans l'expression des champs  $\sigma^\pm$  et  $\pi$ , on dispose d'au moins une solution, déjà évoquée. Il s'agit de n'éclairer les atomes qu'avec un laser à la fois, et d'alterner rapidement les faisceaux. De cette façon, les termes croisés sont strictement nuls. Cependant, chaque impulsion d'un laser doit correspondre à beaucoup moins de 1 photon échangé par atome en moyenne. Ainsi les populations des sous-niveaux n'atteignent pas l'équilibre pour chaque impulsion laser mais pour l'éclairage moyen, résultant de la permutation des lasers. La FIG. B.3 montre l'évolution de  $N_1$ , la population de l'état  $m_F = -1$ , pour une dépolarisation alternant les polarisations  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  et  $\pi$ , pour deux constantes de temps d'alternance. Les intensités des lasers sont  $0.015 I_{\text{sat}}$  pour les deux

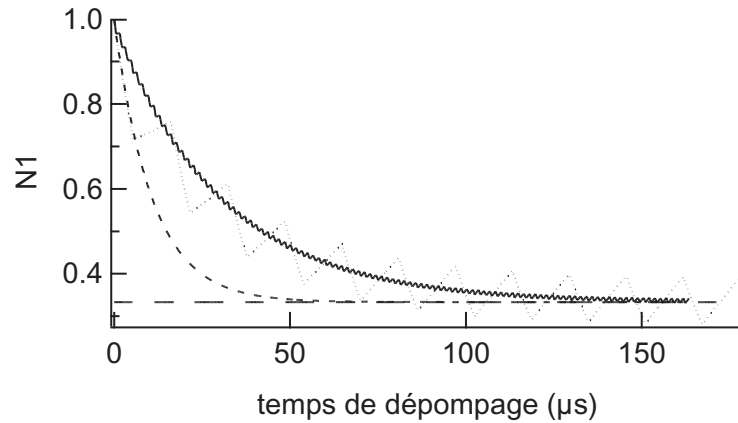


FIG. B.3: Calcul numérique de l'évolution de la population  $N_1$  de l'état initial des atomes piégés ( $m_F = -1$ ), pour différentes séquences de dépolarisation. Pour toutes courbes,  $I_{\sigma^+} = I_{\sigma^-} = I_\pi = 0.015 I_{\text{sat}}$ . (Tirets) cas idéal, tous les lasers dépolarsient simultanément. (Ligne continue) les polarisations alternent toutes les  $0.54 \mu\text{s}$  ( $0.05$  photon échangé par atome en moyenne par impulsion de chaque polarisation). (Pointillés) idem mais avec un temps d'alternance de  $5.4 \mu\text{s}$  ( $0.5$  photon échangé en moyenne). La courbe horizontale  $N_1 = 1/3$  est la limite pour un temps infini de dépolarisation. Pour égaliser les populations dans les sous niveaux fondamentaux à mieux que 3% près (moyenne sur une permutation des polarisations), 15 photons échangés par atome sont nécessaires.

courbes. La courbe en pointillé correspond à des impulsions de  $5.4 \mu\text{s}$  soit 0.5 photon en

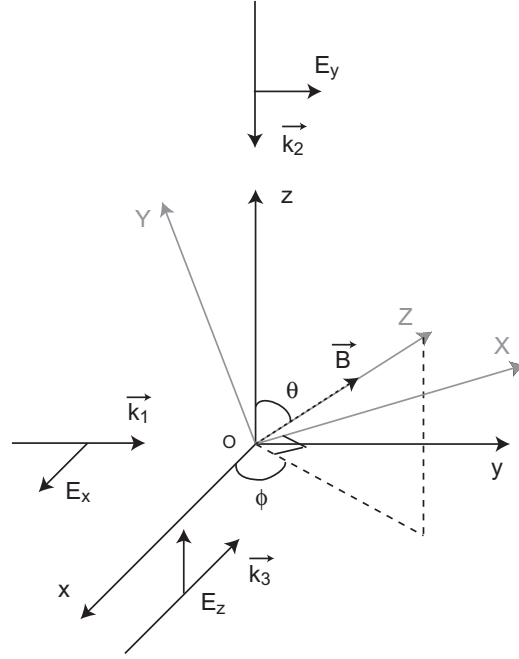


FIG. B.2: Configuration des lasers et du champ magnétique. On dispose trois lasers de façon à avoir trois champs électriques de polarisations orthogonales deux à deux, définissant le trièdre  $(Ox, Oy, Oz)$ . Leurs vecteurs d'onde sont indiqués par  $\vec{k}_i$  et n'ont pas d'importance particulière. Le champ magnétique  $\vec{B}$  de direction définie par  $(\theta, \phi)$  est représenté en pointillés, et son repère associé  $(OX, OY, OZ)$  en gris.

En projetant le champ électrique sur cette base, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 2 \times |E_{\sigma\pm}|^2 &= E_x^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi) & (B.11) \\
 &+ E_y^2(\cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi) \\
 &+ E_z^2 \sin^2 \theta \\
 &- 2E_x E_y \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\
 &- 2E_x E_z \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\
 &- 2E_y E_z \cos \theta \sin \theta \sin \phi,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |E_{\pi}|^2 &= E_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi & (B.12) \\
 &+ E_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\
 &+ E_z^2 \cos^2 \theta \\
 &+ 2E_x E_y \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\
 &+ 2E_x E_z \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\
 &+ 2E_y E_z \cos \theta \sin \theta \sin \phi.
 \end{aligned}$$



$N_3(0) = 0$  et pour  $I_{\sigma^+} = I_{\sigma^-} = I_\pi$  est :

$$N_1(t) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2e^{-t/\tau} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{1}{3} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right), \quad (\text{B.5})$$

avec le temps d'amortissement des population égal à l'inverse du taux de diffusion, soit  $\tau = \frac{3}{I/I_{\text{sat}}} \frac{2}{\Gamma}$ . Et la solution stationnaire pour des intensités quelconques est donnée par :

$$N_1 = \frac{I_{\sigma^-} I_\pi}{I_{\sigma^+} I_\pi + I_{\sigma^-} I_\pi + I_{\sigma^+} I_{\sigma^-}} \quad (\text{B.6})$$

$$N_2 = \frac{I_{\sigma^+} I_{\sigma^-}}{I_{\sigma^+} I_\pi + I_{\sigma^-} I_\pi + I_{\sigma^+} I_{\sigma^-}} \quad (\text{B.7})$$

$$N_3 = \frac{I_{\sigma^+} I_\pi}{I_{\sigma^+} I_\pi + I_{\sigma^-} I_\pi + I_{\sigma^+} I_{\sigma^-}}. \quad (\text{B.8})$$

On retrouve bien que  $N_i = 1/3$  lorsque les intensités de chaque polarisation sont égales. Il faut donc trouver une configuration de lasers de dépolarisation telle que quel que soit le champ magnétique, on ait  $I_{\sigma^+} = I_{\sigma^-} = I_\pi$ .

### Configuration des lasers de dépolarisation

La somme de trois champs de polarisations linéaires, d'égales intensités, permet d'obtenir  $I_{\sigma^+} = I_{\sigma^-} = I_\pi$  quelle que soit la direction du champ magnétique, moyennant deux conditions : polarisations deux à deux orthogonales, et un seul champ éclairant les atomes à la fois. Pour montrer cela, considérons trois lasers polarisés selon 3 directions orthogonales  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . Les champs électriques correspondant sont notés  $E_x \vec{u}_x$ ,  $E_y \vec{u}_y$  et  $E_z \vec{u}_z$ . L'axe de quantification pour les niveaux atomiques est l'axe du champ magnétique résiduel  $\vec{B}$ , de direction quelconque définie par les angles  $(\theta, \phi)$  en coordonnées sphériques (voir FIG. B.2). On construit un second trièdre direct  $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ , tel que  $\vec{B} = B\vec{u}_Z$ , et qui se projette sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ainsi :

$$\vec{u}_X = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_Y = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_Z = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Comme  $\vec{u}_{\sigma^\pm} = (\vec{u}_X \pm i \vec{u}_Y)/\sqrt{2}$  et  $\vec{u}_\pi = \vec{u}_Z$ , les vecteurs propres de polarisation s'écrivent, dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , :

$$\vec{u}_{\sigma^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \phi \mp i \cos \theta \cos \phi \\ \cos \phi \mp i \cos \theta \sin \phi \\ \pm i \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_\pi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

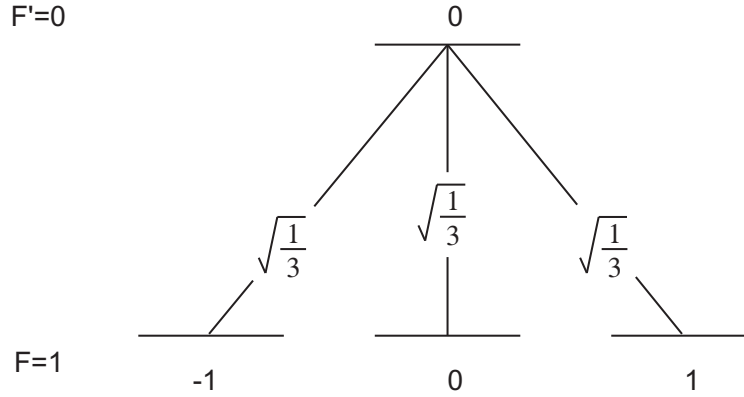


FIG. B.1: Coefficients de Clebsch-Gordan des transitions entre les états  $|5S_{1/2} F=1 m_F=0, \pm 1\rangle$  et  $|5P_{3/2} F'=0\rangle$ .

notre expérience, mais la densité optique des condensats et des nuages d'atomes juste au dessus du seuil de condensation est assez grande pour que cela ne soit pas réhibitoire. Toute la difficulté est donc de répartir uniformément les atomes dans ces sous-niveaux, avant et pendant l'absorption du laser sonde, sachant que le nuage est initialement dans l'état  $m_F = -1$ . C'est ce que nous appelons la "dépolariation optique".

### Dépolariation optique

Calculons tout d'abord l'état stationnaire d'un ensemble de  $N_{\text{tot}}$  atomes soumis à un champ laser contenant les polarisations  $\sigma^\pm$  et  $\pi$ , dont nous notons les intensités associées  $I_{\sigma^\pm, \pi}$ . Ces intensités sont supposées très faibles devant l'intensité de saturation. En négligeant les cohérences (les sous-niveaux sont couplés par émission spontanée), et en éliminant adiabatiquement la population du niveau excité, les équations dynamiques pour les populations s'écrivent :

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{\Gamma}{2} \left( -\frac{2}{3} \frac{N_1 I_{\sigma^+}}{3I_{\text{sat}}} + \frac{1}{3} \frac{N_2 I_{\pi}}{3I_{\text{sat}}} + \frac{1}{3} \frac{N_3 I_{\sigma^-}}{3I_{\text{sat}}} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{\Gamma}{2} \left( -\frac{2}{3} \frac{N_2 I_{\pi}}{3I_{\text{sat}}} + \frac{1}{3} \frac{N_1 I_{\sigma^+}}{3I_{\text{sat}}} + \frac{1}{3} \frac{N_3 I_{\sigma^-}}{3I_{\text{sat}}} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{\Gamma}{2} \left( -\frac{2}{3} \frac{N_3 I_{\sigma^-}}{3I_{\text{sat}}} + \frac{1}{3} \frac{N_1 I_{\sigma^+}}{3I_{\text{sat}}} + \frac{1}{3} \frac{N_2 I_{\pi}}{3I_{\text{sat}}} \right), \quad (\text{B.3})$$

où  $N_1, N_2, N_3$  sont respectivement les populations des sous-niveaux  $m_F = -1, 0, +1$ , normalisées par  $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ , la population du niveau excité étant négligée. On établit ce système à partir du taux de diffusion pour chaque transition égal à  $\frac{\Gamma}{2} I_{\text{polar}} / (3I_{\text{sat}})$ , le facteur  $1/3$  étant le coefficient de Clebsch-Gordan des transitions, et en utilisant le fait que la desexcitation par émission spontanée vers les 3 sous-niveaux fondamentaux est équiprobable.

La solution transitoire de ce système, avec les conditions initiales  $N_1(0) = 1, N_2(0) =$

## Annexe B

---

# Proposition d'un autre schéma d'imagerie par absorption

Il serait possible, moyennant une configuration de lasers un peu plus lourde qu'un simple laser sonde, de réaliser des images d'absorption avec une section efficace connue alors que la direction du champ magnétique est inconnue. Nous proposons ici cette méthode sans l'avoir testée, car l'idée en est apparue pendant la rédaction de ce manuscrit. Elle est réaliste, mais contraignante. Bien que l'idée de base soit simple, son étude plus précise mène à des restrictions aux nuages à symétrie sphérique et à l'utilisation de "flashes" de lasers de l'ordre de  $1 \mu s$ .

Cette méthode pourrait également être utilisée plus simplement en présence d'un champ directeur connu, mais faible, comme alternative au pompage optique, qui est peu efficace pour des nuages atomiques optiquement denses [76, 17].

### Choix de la transition

L'idée à la base de cette méthode est d'utiliser une transition entre les états  $|5S_{1/2}, F = 1, m_F = 0, \pm 1\rangle$  et  $|5P_{3/2}, F' = 0\rangle$ . Toutes les transitions entre ces états ont un coefficient de Clebsch-Gordan de  $1/\sqrt{3}$ , comme indiqué sur la FIG. B.1. De plus, c'est un système fermé, puisque l'état  $|5P_{3/2}, F' = 0\rangle$  n'est pas couplé à l'état fondamental  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$  par transition dipolaire électrique et que, de plus, le taux de transition hors résonance vers l'état  $F' = 1$  est environ 1000 fois plus faible que le taux de transition vers  $F' = 0$  à résonance (sans saturation).

Pour des populations égales dans les trois sous-niveaux fondamentaux, et pour un décalage Zeeman négligeable de ces sous-niveaux, on comprend, et nous allons le montrer, que la section efficace de diffusion moyenne ne dépend pas de la polarisation du laser sonde incident. Nous verrons que la section efficace moyenne à résonance est alors donnée par  $\bar{\sigma} = \sigma_0/9$ . Cette valeur de section efficace est petite, la moitié de ce que l'on mesure sur

- Caractéristiques de la raie  $D_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = 2\pi \times 6.06 \text{ MHz} \\ \nu = 384.22 \text{ THz} \\ \lambda_{\text{vide}} = 780.24 \text{ nm} \\ \lambda_{\text{air}} = 780.03 \text{ nm} \\ I_{\text{sat}} = 1,6 \text{ mW/cm}^2 \\ k_{\text{L}} = 8.05(1) \times 10^6 \text{ rad/m} \\ v_{\text{rec}} = 5.88(1) \text{ mm/s} \\ k_{\text{L}}v_{\text{rec}} = 2\pi \times 7.53(3) \text{ kHz} \\ \omega_{\text{rec}} = 2\pi \times 3.7710(5) \text{ kHz} \end{array} \right.$$

- Longueur de diffusion :  $a = 5.31(1) \text{ nm}$

On trouvera un grand nombre de données numériques sur les propriétés physiques et optique du Rubidium dans [75].

## Annexe A

---

### Données sur l'atome de $^{87}\text{Rb}$

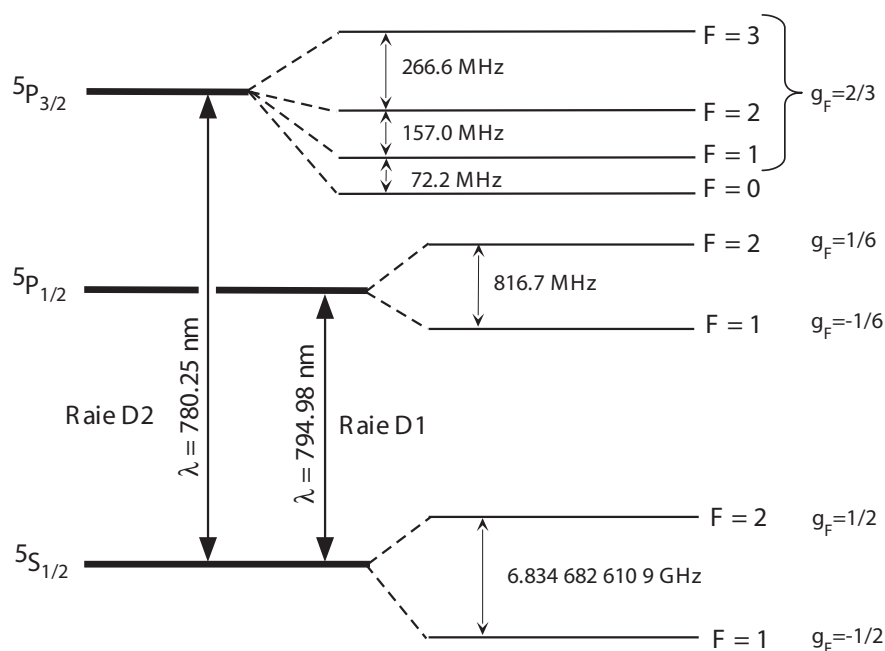


FIG. A.1: Niveaux atomiques des raies  $D_1$  et  $D_2$  du  $^{87}\text{Rb}$ . Les longueurs d'onde sont données dans le vide.

- Isotopes principaux :  $^{85}\text{Rb}$  (72 %),  $^{87}\text{Rb}$  (28 %)
- Masse d'un atome de  $^{87}\text{Rb}$  :  $m = 1.44316 \times 10^{-25}\text{ kg}$

En effet, l'interférométrie permet de mesurer la fonction de corrélation entre deux copies d'un quasi-condensat par le contraste de leurs interférences. Or ce contraste, qui est le signal expérimental, est d'autant plus grand que la cohérence est grande. On comprend ainsi que cette technique est complémentaire de la spectroscopie, dont le signal est la largeur spectrale, d'autant plus faible que la cohérence est grande. Une telle expérience, à la transition entre cohérence complète et partielle, a été menée à la suite de l'expérience décrite dans ce manuscrit. Elle est en cours d'analyse.

Une autre suite envisagée, actuellement initiée, est l'application de la spectroscopie de Bragg à un condensat en formation. Les études présentées dans [7] suggèrent qu'à la fois le profil de densité et la phase de la fraction condensée passent par un régime transitoire, lors de la relaxation d'un nuage thermique, mis hors d'équilibre, vers un nuage partiellement condensé. On observe, avant l'état d'équilibre, des oscillations de la densité, comme celles que nous avons mesurées et discutées au chapitre 3, ainsi que des fluctuations de la phase [7]. Nous pensons que la spectroscopie de Bragg peut permettre de suivre l'évolution des fluctuations de phase dans ces conditions, et ainsi de mieux comprendre et caractériser la formation des condensats.

## Conclusion

---

Ce mémoire présente une mesure par spectroscopie de Bragg des fluctuations de phase dans des condensats très allongés.

Pour obtenir un résultat quantitatif, une grande attention a été portée au montage expérimental, qui a permis d'obtenir une résolution spectrale de moins de 200 Hz, ce qui revient à une résolution en vitesse de  $80 \mu\text{m/s}$ . Les échelles de temps mises en jeu dans cette expérience sont multiples : la diffraction dure 2 ms, l'écart entre deux diffractions, limité par le temps de production d'un condensat, est de l'ordre de 40 s, la durée d'acquisition d'un spectre est d'une heure, et l'acquisition de tous les spectres s'est étalée sur une semaine. Nous avons dû trouver une procédure d'acquisition des spectres et d'analyse qui permette de tenir compte correctement des fluctuations de l'expérience à toutes ces échelles de temps.

Nos mesures confirment de façon quantitative la perte de cohérence dans les condensats très allongés, en accord avec le modèle théorique de D. S. Petrov *et al.* [10]. Ces résultats sont également en accord avec ceux du groupe de W. Ertmer, obtenus par une méthode de corrélations d'intensité [62]. De plus, les profils de densité des quasi-condensats observés et discutés dans ce manuscrit sont compatibles, aux incertitudes de la mesure près, avec ce que l'on attendrait pour des condensats sans fluctuations de phase comportant le même nombre d'atomes. Cela signifie que la présence d'importantes fluctuations de phase ne semble pas affecter le profil de densité des quasi-condensats. Cette observation est également prévue par la description théorique des quasi-condensats.

En ce qui concerne le profil de densité des condensats très allongés, nous avons également discuté des difficultés pratiques, pour l'analyse des images par absorption, que pose le régime intermédiaire entre le régime de Thomas-Fermi, et le régime 1D, en présence d'un nuage thermique important. En effet, dans ces conditions, on ne dispose pas d'un traitement théorique de l'expansion, qui donnerait les profils de densité du condensat et du nuage thermique au moment où l'on prend l'image. Ce problème reste ouvert.

Les suites possibles de ce travail sont multiples.

Nous avons vu que la limite de résolution de la spectroscopie de Bragg sur notre expérience ne permettait pas de mesurer des longueurs de cohérence supérieures à environ  $30 \mu\text{m}$ , soit environ  $1/8$  de la longueur totale du quasi-condensat [FIG. 5.22]. Mais il serait très intéressant de pouvoir mesurer des longueurs de cohérence plus grandes, jusqu'à la longueur du quasi-condensat, et d'étudier ainsi la transition entre quasi-condensat et condensat. Pour réaliser cela, l'interférométrie semble plus adaptée que la spectroscopie.

suppose la validité de notre méthode d'analyse des images, qui est la méthode standard actuelle. Or nous avons indiqué, au chapitre 3, que certaines des hypothèses qu'elle nécessite ne sont pas bien vérifiées dans le régime particulier de nos expériences. Dans le cas de sa remise en cause, il conviendrait de réinterpréter nos données à la lumière d'une nouvelle méthode.

### Conclusion

Les résultats de cette analyse des données sont en accord avec les prédictions du chapitre 4. En effet, la forme lorentzienne de la distribution en vitesse longitudinale a été mise en évidence expérimentalement. De plus, nous avons également mesuré une largeur de la distribution en vitesse proportionnelle à  $\alpha/L_\phi$ , où la valeur mesurée de  $\alpha$  est égale à la valeur attendue, aux 20 % d'incertitude de la mesure près. Toutefois, une valeur de  $\alpha$  autour de 1 n'est pas totalement exclue par nos mesures, dans le cas précis où une erreur importante serait commise lors de la mesure de la fraction condensée.

Pour finir ajoutons que ces résultats sont également concordant avec ceux qui ont été obtenus simultanément par le groupe de W. Ertmer, à Hannovre, en mesurant la fonction de corrélation par une méthode très différente de la notre, interférométrique, basée sur des corrélations d'intensité [62].



### Effets systématiques

Nous avons vu, avec les relations (5.15) et (5.16) que  $\Delta\nu_\phi$  était proportionnel à  $1/L_\phi$  et donc à  $T/n_{1D}(0)$ . Or, notre procédure de fit des profils des quasi-condensats, discutée au chapitre 3, utilise un profil parabolique. La densité 1D au centre du nuage est donc déterminée par le nombre d’atomes condensés  $N_0$  et la demi-longueur  $L$  du quasi-condensat, selon la relation  $n_{1D}(0) = 15N_0/16L$ . Les incertitudes systématiques sur  $n_{1D}(0)$  proviennent donc des incertitudes sur  $N_0$  et  $L$ .

Par conséquent, les incertitudes systématiques sur la détermination de  $T$ ,  $N_0$  et  $L$ , qui affectent  $\Delta\nu_\phi$ , doivent être prises en compte dans la détermination de  $\alpha$  et  $w_G$ . Ces incertitudes sont de deux ordres.

Il y a les incertitudes sur  $T$ ,  $N_0$ , et  $L$  qui proviennent des incertitudes sur la calibration du grandissement du système d’imagerie ( $\pm 2\%$ ) et de la mesure du nombre d’atomes ( $\pm 20\%$ ). Au total, ces incertitudes aboutissent à une incertitude systématique sur l’échelle des  $\Delta\nu_\phi$  de  $^{+20\%}_{-12\%}$ . En dilatant  $\Delta\nu_\phi$  sur cette plage d’erreur, puis en effectuant le fit représenté sur la FIG. 5.21, on obtient une incertitude systématique de  $16\%$  sur  $\alpha$ . Finalement, en reportant également les incertitudes statistiques évaluées par le fit, on a :

$$\alpha = 0.64(5)(10). \quad (5.20)$$

Quant à  $w_G$ , il n’est pas affecté par ces incertitudes de calibrations.

Il y a également les incertitudes liées à la validité de notre procédure de fit, discutée au chapitre 3. Elles sont beaucoup plus difficiles à estimer. Rappelons que la question est de savoir si le fit que nous utilisons sépare correctement les densités du nuage thermique et du quasi-condensat, et donc donne la bonne fraction condensée  $F_c$ . En particulier, pour les différentes profondeurs de piège auxquelles nous avons effectuée la spectroscopie de Bragg, les ensembles de paramètres mesurés ( $N_{\text{tot}}, T, F_c$ ) n’étaient pas en accord avec les résultats issus de la résolution numérique des équations couplées (1.40) pour le condensat et le nuage thermique.

Un moyen d’évaluer la marge d’erreur que cela entraîne pour  $\Delta\nu_\phi$ , est de redéterminer  $\alpha$ , en recalculant  $\Delta\nu_\phi$  pour les valeurs de  $N_0$ ,  $T$  et  $L$  données par la simulation numérique dans deux cas possibles. Le cas où l’on fixe aux valeurs mesurées  $N_{\text{tot}}$  et  $T$ , et le cas où l’on fixe, également aux valeurs mesurées,  $N_{\text{tot}}$  et  $F_c$ . Fixer  $T$  et  $F_c$  n’est pas un bon choix puisque c’est la mesure de  $N_{\text{tot}}$  qui est la plus fiable.

Dans le cas où l’on fixe dans la simulation numérique  $N_{\text{tot}}$  et  $T$  aux valeurs mesurées, la fraction condensée donnée par la simulation diffère de  $30\%$  à  $50\%$  de la fraction condensée mesurée (voir TAB. 3.5). Un tel écart pourrait être expliqué par une densité du nuage thermique qui aurait encore le “souvenir” du condensat en son centre dans le piège, contrairement à ce que suppose notre procédure d’ajustement des images. Les nouvelles valeurs de  $\Delta\nu_\phi$ , avec les densités 1D données par la simulation, conduisent à  $\alpha = 1.00(8)$ . Cette valeur est assez différente de ce que l’on a déterminé précédemment. Cet écart est principalement dû à la différence entre les fractions condensées calculées et mesurées. En revanche si l’on fixe  $N_{\text{tot}}$  et  $F_c$ , en supposant donc que l’on mesure mal la température, on retrouve une valeur nettement plus proche  $\alpha = 0.67(5)$ .

Ces valeurs de  $\alpha$  représentent une estimation de l’erreur que l’on peut commettre, du fait de l’inconnue sur la dynamique de l’expansion du nuage après la coupure du piège. Sans se substituer au résultat (5.20), ils en précisent les conditions de validité : ce résultat

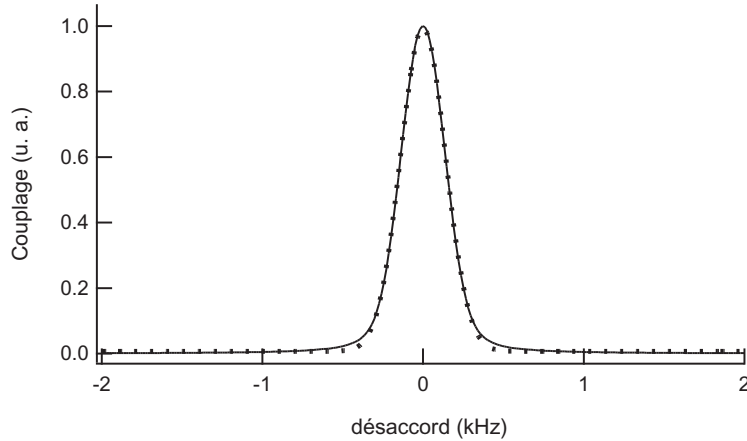


FIG. 5.24: Exemple de fonction d'appareil possible. En trait continu, fonction d'appareil calculée par la convolution du spectre des battements entre lasers de Bragg, limité par transformé de Fourier, de la distribution en vitesse associée à l'expansion et d'une gaussienne représentant les bruits de mesure. En pointillés, fit gaussien de cette fonction, d'une demi-largeur à mi-hauteur de 170 Hz. On a choisi une largeur de 115 Hz pour la gaussienne symbolisant les bruits de mesure pour que la largeur de ce fit soit proche de  $w_G$ .

### Discussion de l'hypothèse d'une fonction d'appareil gaussienne

La discussion peut-être poussée un peu plus loin. Est-il vraisemblable que la fonction d'appareil soit gaussienne ?

Bien que nous ne la connaissions pas complètement, nous en connaissons quelques éléments. Elle comprend la contribution en sinus cardinal d'une demi-largeur à mi-hauteur de 115 Hz due à la durée finie, de 2 ms, de l'application des faisceaux Bragg. On connaît également le profil associé à la distribution en impulsion due à l'expansion, d'une largeur d'environ 60 Hz. Cette largeur ne varie que d'environ 15 Hz sur l'ensemble des spectres, à cause de la variation du nombre d'atomes condensés. Pour la composante inconnue, associée aux bruits de mesure, nous supposons une gaussienne.

La fonction d'appareil est la convolution de ces trois fonctions. Le choix d'une demi-largeur à mi-hauteur de 115 Hz pour la gaussienne associée au bruit, permet de retrouver une fonction d'appareil d'une largeur de 170 Hz, équivalente à  $w_G$ . Elle est représentée sur la FIG. 5.24, ainsi que son fit gaussien. Ce graphique montre que la fonction d'appareil que nous avons modélisée est bien reproduite par une gaussienne.

Ceci n'est bien sûr pas une démonstration que la fonction d'appareil réelle est gaussienne, mais que les contributions que l'on connaît ne sont pas incompatibles avec cette hypothèse.

Pour finir, précisons qu'en toute rigueur la distribution en vitesse d'un quasi-condensat en expansion, n'est pas la convolution des distributions en vitesse dues à l'expansion et aux fluctuations de phase. La combinaison correcte de ces deux distributions est donnée par les équations (4.32) et (4.33). Cependant, en présence des autres contributions spectrales, cela ne change pas le résultat.

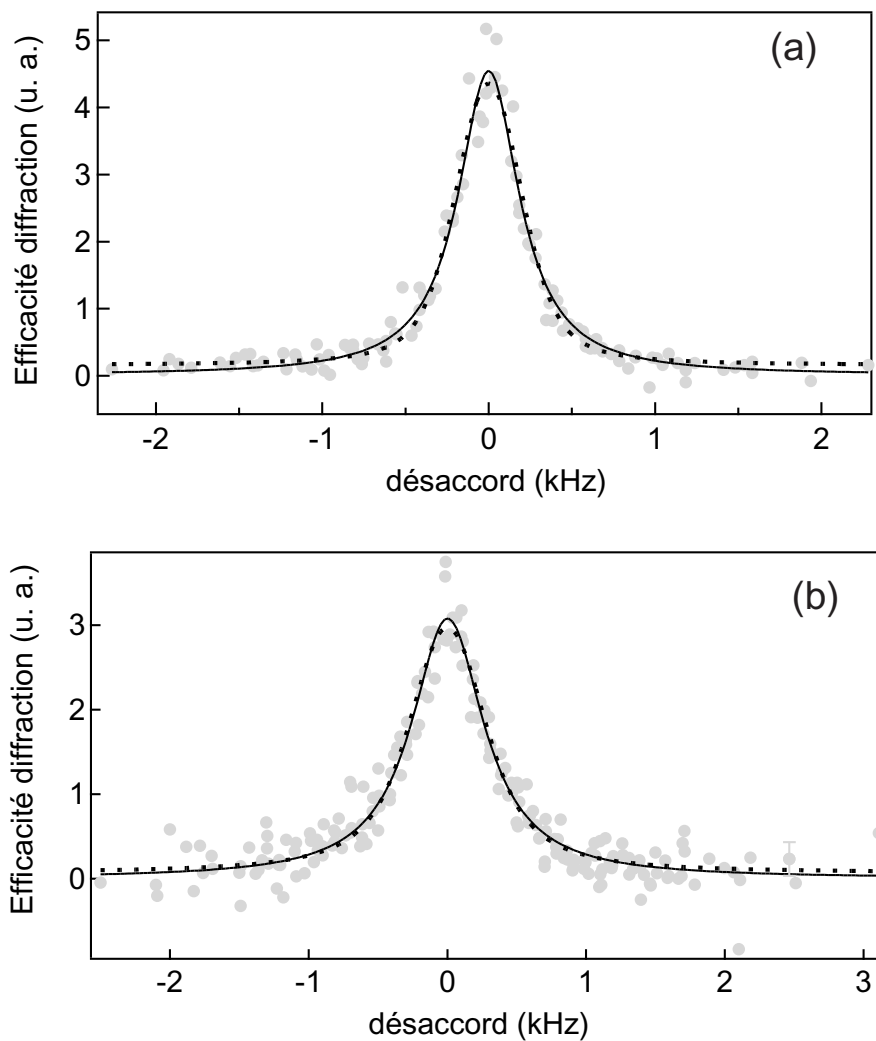


FIG. 5.23: Spectres expérimentaux aux profondeurs de piège de 30 kHz (a) et 60 kHz (b). Les lignes continues sont des fits lorentziens. Les lignes pointillés sont des fits par un profil de Voigt, dont la largeur de la contribution gaussienne est fixée à 176 Hz, selon le résultat du fit des données de la FIG. 5.21. Pour le spectre (a), la largeur de la contribution lorentzienne au profil de Voigt est de 105(8) Hz, et pour le spectre (b), 235(12) Hz.

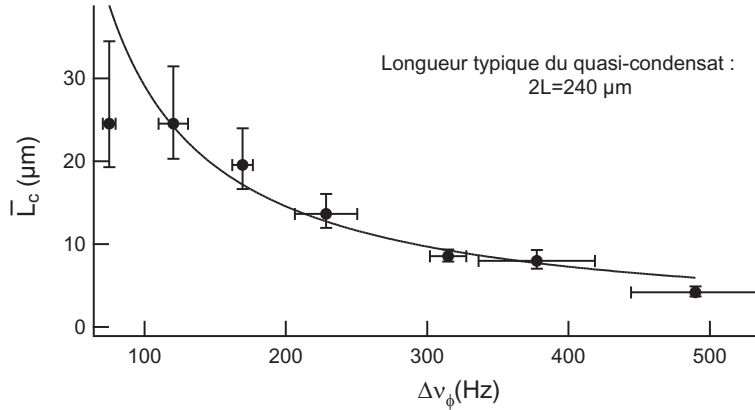


FIG. 5.22: Longueur de cohérence en fonction de  $\Delta\nu_\phi$ . Les points avec les barres d'erreur représentent la longueur de cohérence  $\bar{L}_c^{\text{mes}}$  déduite des données expérimentales. Les barres d'erreur verticales proviennent de l'incertitude sur la mesure de la largeur des spectres, et sur la détermination de  $w_G$ , tandis que les barres d'erreur horizontales représentent la dispersion des mesures de  $\Delta\nu_\phi$ . La ligne continue est la courbe théorique  $L_c/\alpha$ . Rappelons que ces mesures correspondent à un rapport  $6 < T/T_\phi < 28$ .

plus de 100 % de la valeur moyenne, et ne permet donc pas d'en déduire une fonction d'appareil gaussienne.

Cependant, on peut effectuer un ajustement par un profil de Voigt en fixant la largeur de la contribution gaussienne à la valeur déterminée par l'analyse du graphe de la FIG. 5.21. Le résultat est reporté sur la FIG. 5.23, où sont tracés les spectres expérimentaux mesurés à des profondeurs de piège de 30 kHz et 60 kHz. Ce sont deux spectres de largeurs très différentes, et assez peu bruités. Ce graphe montre les ajustements de ces spectres par une lorentzienne, et par le profil de Voigt dont on a fixé la contribution gaussienne à  $w_G = 176$  Hz, qui est la valeur déterminée précédemment. Pour le spectre (a), la largeur de la contribution lorentzienne au profil de Voigt est de 105(8) Hz, donc moins large que la contribution gaussienne, et pour le spectre (b), 235(12) Hz. Or pour chacun des spectres les deux types de fonction reproduisent bien le profil, le  $\chi^2$  du fit ne variant pas de plus de 5 % entre les 2 types de fonction de fit. Une telle variation de  $\chi^2$ , pour un fit lorentzien de ces données, correspond à une variation de la largeur du spectre de 1 à 2 déviations standard.

Ajoutons également que l'hypothèse d'une fonction d'appareil identique pour chaque spectre est cruciale pour l'analyse. Nous n'avons pas imaginé, ou identifié, de mécanisme dépendant de la température ou du nombre d'atomes condensés qui invaliderait cette hypothèse a priori. Nous venons de vérifier que cette hypothèse n'était pas non plus invalidée a posteriori par la forme du profil des spectres.

L'hypothèse d'un profil de Voigt, dont la contribution gaussienne est de largeur 176 Hz pour tous les spectres est donc tout à fait compatible avec les spectres expérimentaux.

$$\gamma = p_\phi/p_{\text{exp}}.$$

prof (kHz)	$T$ (nK)	$F_c$ (%)	$T/T_\phi$	$\gamma$
20	90	71	6	0.66
30	124	58	9	1.1
40	177	44	12	1.6
50	216	31	15	2.2
60	261	21	20	3.2
70	286	14	23	4.1
80	347	10	28	5.5

TABLE 5.2: Paramètres caractéristiques des quasi-condensats étudiés : profondeur du piège (kHz), température (nK), fraction condensée (%), rapports  $T/T_\phi$  et  $\gamma = p_\phi/p_{\text{exp}}$ .

### Longueur de cohérence

Nous avons défini, au chapitre 4, la longueur de cohérence  $\bar{L}_c$  des quasi-condensats par  $\bar{L}_c = L_\phi/\alpha$ . Cette définition peut également se mettre sous la forme  $\bar{L}_c = \hbar/\Delta p$ .

Grâce à la connaissance de  $w_G$ , on peut effectuer une déconvolution des spectres expérimentaux, pour obtenir la largeur de la contribution des fluctuations de phase, lorentzienne. On obtient alors une mesure, indirecte, de la longueur de cohérence  $\bar{L}_c^{\text{mes}} = \hbar/\Delta p^{\text{mes}}$  associée à chaque spectre :

$$\bar{L}_c^{\text{mes}} = \frac{2\hbar k_L}{2\pi m \Delta \nu_{\text{Lor}}^{\text{mes}}}, \quad (5.18)$$

où la largeur de la contribution lorentzienne  $\Delta \nu_{\text{Lor}}^{\text{mes}}$  aux spectres expérimentaux est donnée par inversion de la formule 5.17 :

$$\Delta \nu_{\text{Lor}}^{\text{mes}} = \frac{\Delta \nu_M^2 - w_G^2}{\Delta \nu_M}. \quad (5.19)$$

La longueur de cohérence ainsi obtenue a été tracée en fonction de  $\Delta \nu_\phi$  sur la FIG. 5.22, ainsi que la courbe théorique  $\bar{L}_c = L_\phi/\alpha$ . Ce graphe montre que la limite de résolution spectrale à 176 Hz correspond, à une longueur de cohérence de l'ordre de  $30 \mu\text{m}$ . Pour des longueurs de cohérence plus grandes, il semble plus avantageux d'utiliser une méthode interférométrique.

### Discussion de l'hypothèse du profil de Voigt

Puisque l'on fait l'hypothèse d'un profil de Voigt pour l'interprétation du graphe de la FIG. 5.21, pourquoi ne pas l'utiliser directement pour ajuster les spectres expérimentaux ? La difficulté est que ce profil devient rapidement proche d'une lorentzienne lorsque la largeur de la composant lorentzienne n'est pas très petite devant la largeur de la composante gaussienne du profil de Voigt. Le rapport signal à bruit des spectres ne permet pas, dans ces conditions de distinguer un profil lorentzien pur d'un profil de Voigt. En pratique, pour les 4 spectres les plus larges, le fit par un profil de Voigt ne fonctionne pas, donnant sur chacun des paramètres caractérisant la largeur de la fonction une déviation standard de

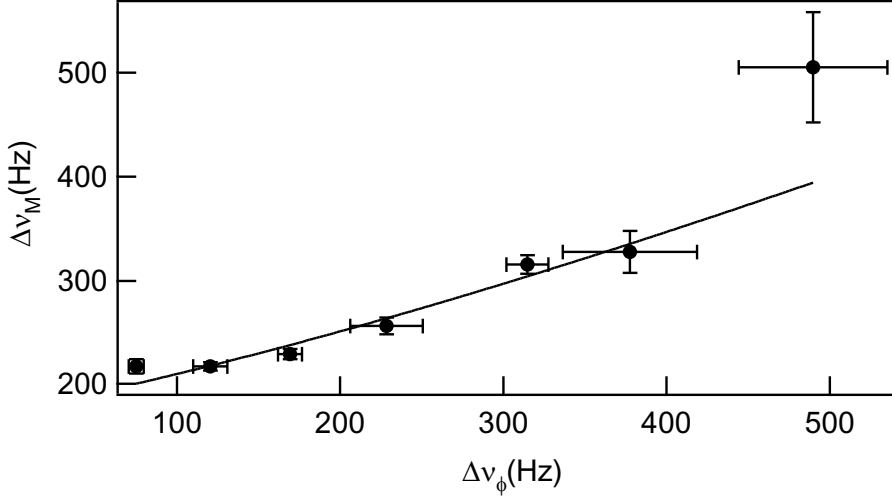


FIG. 5.21: Demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu_M$  des spectres expérimentaux en fonction de  $\Delta\nu_\phi$ . Les barres d'erreur verticales représentent la déviation standard de la largeur donnée par le fit lorentzien des spectres, tandis que les barres d'erreur horizontales représentent la déviation standard de la dispersion des valeurs de  $\Delta\nu_\phi$ . La ligne continue est un ajustement qui suppose un profil de Voigt pour les spectres, dont la composante gaussienne est identique d'un spectre à l'autre.

200 Hz pour les faibles valeurs de  $\Delta\nu_\phi$ . Cette largeur peut être interprétée comme une conséquence de la limite de résolution de notre mesure. L'élargissement de Fourier dû aux 2 ms d'application des lasers de Bragg est à lui seul de 114 Hz, auquel il faut ajouter les autres sources d'élargissement et de bruit déjà discutées, telles que les oscillations résiduelles possibles de la longueur et du centre de masse des quasi-condensats.

Nous modélisons l'ensemble de ces effets par une fonction d'appareil gaussienne, de demi-largeur à mi-hauteur  $w_G$ . La convolution de cette fonction avec un spectre lorentzien de largeur  $\alpha\Delta\nu_\phi$ , donne un profil de Voigt, que nous discutons dans la suite, de demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu_V$  :

$$\Delta\nu_V = \frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2} + \sqrt{w_G^2 + \left(\frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2}\right)^2}. \quad (5.17)$$

Un ajustement des données de la FIG. 5.21 par cette fonction, en gardant  $w_G$  et  $\alpha$  comme paramètres libres donne  $w_G = 176(6)$  Hz et  $\alpha = 0.64(5)$ , les incertitudes étant la déviation standard du fit. La courbe en trait continu, sur la FIG. 5.21 montre cet ajustement. L'accord avec les points expérimentaux est bon, à l'exception du point de plus grande largeur, nettement au dessus de la courbe de l'ajustement. La raison de cet écart est peut être une qualité plus faible du spectre correspondant. En effet, on peut voir sur la FIG. 5.19 que le rapport signal/bruit sur le spectre le plus large, correspondant à ce point, est significativement plus petit que sur les autres spectres. Nous avons vérifié qu'exclure ce point de l'analyse ne change pas les résultats sur  $\alpha$  et  $w_G$ .

Pour bien situer dans quel régime de fluctuations de phase les mesures ont été effectuées, nous avons reporté dans le TAB. 5.2 les paramètres caractéristiques des quasi-condensats étudiés : la température  $T$ , la fraction condensée  $F_c$ , le rapport  $T/T_\phi$  et le coefficient

### 5.3.1 Profil des spectres

La présence d'ailes sur les spectres de la FIG. 5.19 suggère qu'ils n'ont pas un profil de type gaussien, mais plutôt lorentzien. Pour montrer cela, nous avons tracé les résidus d'un ajustement, par chacune de ces fonctions, du spectre mesuré à la profondeur de piège de 60 kHz.

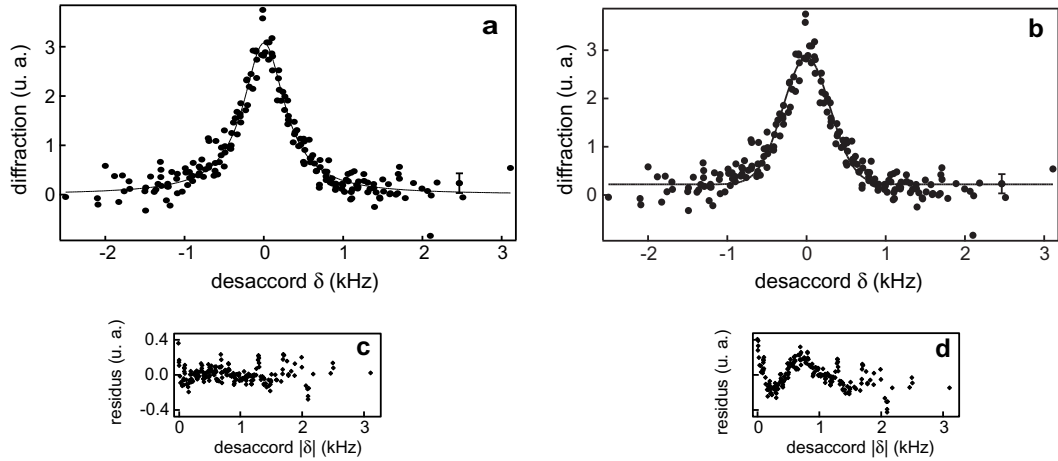


FIG. 5.20: Spectre (profondeur de piège de 60 kHz), ajusté par une lorentzienne (a), et par une gaussienne (b). (c) Résidus du fit lorentzien. (d) Résidus du fit gaussien. Les résidus sont “repliés” autour du désaccord nul, et lissés par une moyenne glissante de 6 points.

Ce graphe montre sans ambiguïté que le profil des spectres est bien reproduit par une lorentzienne et non par une gaussienne. Ce résultat est en accord avec les prédictions du chapitre 4. Dans ce chapitre, nous avons montré que la forme du spectre dépendait du paramètre  $\gamma = p_\phi/p_{\text{exp}}$ , où  $p_\phi = \hbar/L_\phi$  est l'impulsion typique associée aux fluctuations de phase et  $p_{\text{exp}}$  est l'impulsion typique associée à l'expansion. On peut voir dans le TAB. 5.2 que le coefficient  $\gamma$  varie entre 0.66 et 5.5 pour l'ensemble des spectres. Or la distribution en impulsion d'un quasi-condensat en expansion, donnée par les équations (4.32), et (4.33), est indiscernable d'une lorentzienne pour toute cette gamme de valeurs de  $\gamma$ . Et ceci est vrai bien que le largeur de cette lorentzienne dépende de  $\gamma$  lorsque  $\gamma < 3$ . Pour  $\gamma > 3$ , la distribution en impulsion du quasi-condensat en expansion est indiscernable de la distribution dans le piège. C'est à dire que l'expansion du condensat, lorsqu'elle n'est pas totalement négligeable, à pour effet principal de changer la largeur de la distribution en vitesse des fluctuations de phase, sans changer la forme du profil. Il n'est donc pas surprenant que tous les spectres mesurés présentent un profil lorentzien.

### 5.3.2 Largeur des spectres

Sur la FIG. 5.21 nous avons tracé la demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu_M$  des spectres expérimentaux en fonction de  $\Delta\nu_\phi$ . Pour chaque profondeur de piège associée à un spectre,  $\Delta\nu_\phi$  est calculé à partir de la mesure de  $n_{1D}(0)$  et de  $T$  sur des images de condensats. La dépendance de  $\Delta\nu_M$  vis-à-vis de  $\Delta\nu_\phi$  n'est clairement pas bien reproduite par une fonction de la forme  $\alpha\Delta\nu_\phi$ . On voit en effet que la largeur des spectres semble limitée autour de

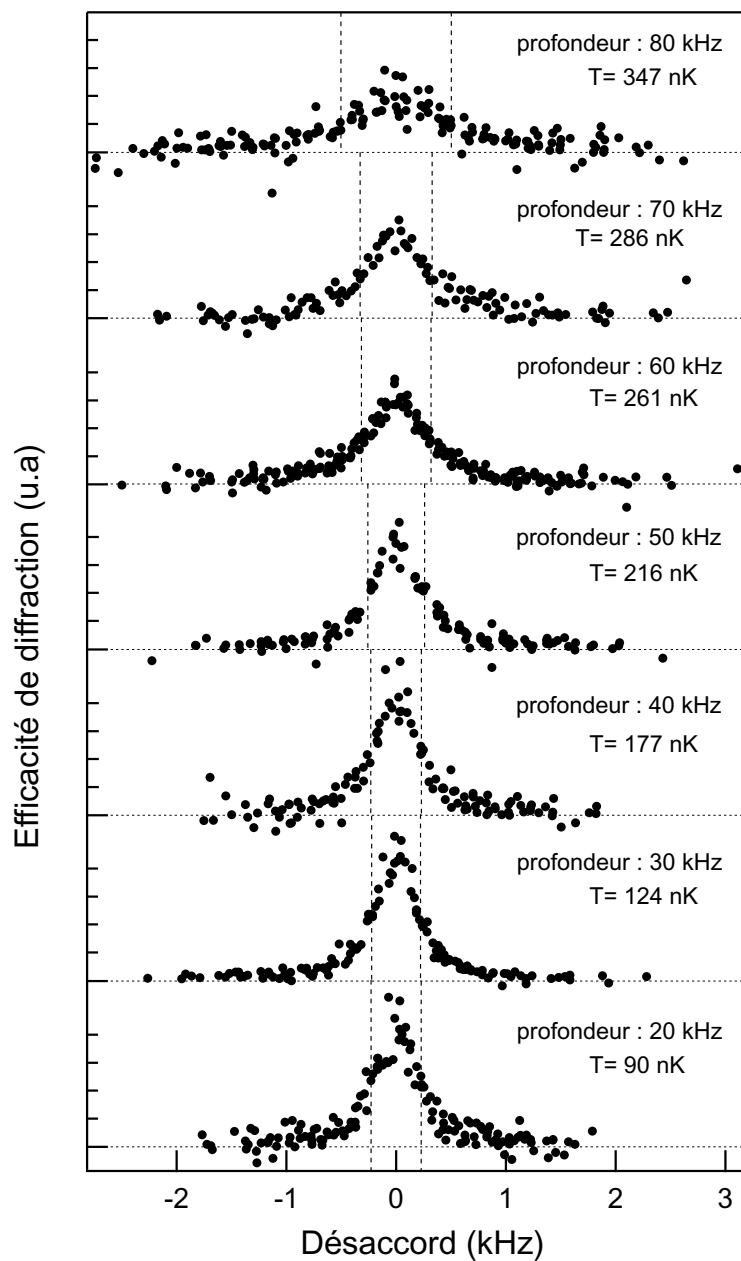


FIG. 5.19: Ensemble des spectres moyens, résultant, pour chaque profondeur de piège, de la superposition de 8 à 12 spectres élémentaires. Les températures sont également indiquées. Tous les spectres de cette figure ont la même aire, pour faciliter la comparaison. Les lignes pointillées indiquent la largeur à mi-hauteur de chaque spectre. On constate clairement un élargissement des spectres avec la température.



Toute cette analyse a permis d'évaluer l'influence, sur la mesure des spectres, des différents mouvements des quasi-condensats et de leurs variations à long terme. Cependant cela ne donne aucune information sur leurs fluctuations sur l'échelle de temps d'acquisition d'un spectre élémentaire. Ces résultats n'excluent donc en aucun cas un élargissement des spectres expérimentaux dû à ces fluctuations rapides, mais ils signifient que les éventuelles variations de cet élargissement d'un spectre à l'autre sont trop petites pour que nous puissions les mesurer.

### Ensemble des spectres finaux

L'ensemble des spectres finaux, mesurés à différentes profondeurs de pièges, est représenté sur la FIG. 5.19. Ce graphe met en évidence une augmentation de leur largeur avec la profondeur finale du piège, c'est-à-dire entre autre avec la température. Nous analysons maintenant ce comportement, ainsi que le profil de ces spectres.

## 5.3 Analyse des spectres

Tous nos efforts nous ont menés à des spectres présentant un bon rapport signal à bruit. Mais malgré cela, on ne peut interpréter les spectres mesurés indépendamment de toute théorie pour deux raisons. La première est qu'en variant la profondeur de piège, on fait varier en même temps la température du nuage, le nombre d'atomes et la fraction condensée. On ne peut donc isoler l'effet sur les spectres de chacun de ces paramètres, ou de paramètres élémentaires tels que la densité... La seconde raison est que l'on ne connaît pas la fonction d'appareil avec laquelle on mesure les spectres. On ne sait donc pas en déduire directement la distribution en vitesse des quasi-condensats étudiés.

Nous allons donc analyser ces données selon une procédure suggérée par la théorie présentée au chapitre 4. Rappelons pour cela les résultats qui nous intéressent ici.

Pour des quasi-condensats dont la distribution en vitesse est dominée par les fluctuations de phase, on attend une distribution lorentzienne, de demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta p$  :

$$\Delta p = \alpha \frac{\hbar}{L_\phi}, \quad (5.14)$$

où  $L_\phi$  est la demi-longueur de cohérence au centre du piège, donnée par :

$$L_\phi = \frac{\hbar^2 n_{1D}(0)}{mk_B T}, \quad (5.15)$$

avec  $n_{1D}(0)$  la densité 1D longitudinale au centre du quasi-condensat.  $L_\phi$  est liée à la température de phase  $T_\phi$  par  $L_\phi = LT_\phi/T$ . Le paramètre  $\alpha$  dans l'expression de  $\Delta p$  dépend de la forme de  $n_{1D}(z)$ , mais très mollement. Dans le régime de Thomas-Fermi 3D, habituel,  $\alpha = 0.64$ , tandis que dans le cas 1D,  $\alpha = 0.62$ . Dans le cas d'une mesure idéal, les spectres de Bragg correspondant à une telle distribution en vitesse doivent donc avoir une largeur  $\alpha\Delta\nu_\phi$ , avec :

$$\Delta\nu_\phi = \frac{2\hbar k_L}{2\pi m L_\phi}. \quad (5.16)$$

Rappelons que pour un condensat sans fluctuations de phase, on attend une distribution en vitesse sans ailes, dominée par le champ de vitesse d'expansion.

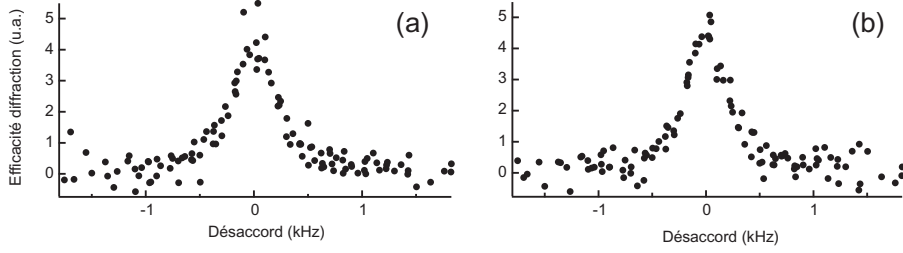


FIG. 5.18: Comparaison du spectre expérimental (a), et du spectre “simulé” (b) (voir texte). Un fit lorentzien de ces deux spectres donne les mêmes paramètres à mieux que 5 % près, et le même  $\chi^2$  à 6 % près.

le spectre expérimental, et qu’un bruit constant, estimé par le  $\chi^2$  est une reproduction qualitativement correcte du bruit expérimental.

Ensuite, on sépare le spectre “simulé” en 8 spectres élémentaires  $S(\{\delta_n\}_i)$ , où  $\{\delta_n\}_i$  est l’ensemble des désaccords du spectre expérimental élémentaire n°  $i$ . Ainsi on reproduit un ensemble de spectres élémentaires d’un échantillonnage en fréquence équivalent à celui des spectres expérimentaux. Enfin chaque spectre élémentaire simulé est ajusté par une lorentzienne, et l’on compare la dispersion des largeurs et des centres obtenus, avec la dispersion des largeurs et des centres des spectres mesurés.

La largeur des spectres simulés varie entre 160(33) et 258(41) Hz, tandis que celle des spectres mesurés se situe entre 155(41) et 282(35) Hz. Ces amplitudes de variation sont bien comparables. Il en est de même pour la précision des largeurs données par les fits, qui est de l’ordre de 35 Hz aussi bien pour les spectres simulés qu’expérimentaux. On trouve aussi que l’écart-type des largeurs des spectres élémentaires simulés  $\sigma_{\text{simul.}} = 28$  Hz, est de l’ordre de grandeur de l’écart-type des spectres mesurés  $\sigma_{\text{mes.}} = 40$  Hz. Le bruit de mesure indépendant du désaccord que l’on observe sur le “spectre moyen” suffit donc à expliquer les fluctuations des largeurs données par les fits des spectres élémentaires.

Ainsi, on peut dire que le fait de mesurer des spectres à plusieurs temps d’attente dans le piège présente a priori deux intérêts : moyenniser des fluctuations de la largeurs des spectres dues à des oscillations de la longueurs des quasi-condensats et mesurer un grand nombre de spectres afin d’améliorer le rapport signal/bruit. La comparaison qui vient d’être faite entre spectres expérimentaux et spectres simulés montre que l’apport majeur de ce choix de prise de données est le grand nombre de spectres, d’où un bon rapport signal/bruit sur les spectres finaux.

Quant aux centres des spectres simulés et mesurés, la précision donnée par le fit pour chaque courbe est comparable, de l’ordre de 20 Hz. En revanche, la dispersion des centres pour les spectres simulés est caractérisée par un écart-type de 20 Hz, qui est donc en accord avec les erreurs de fit, tandis que pour les spectres mesurés, cet écart-type est nettement supérieur puisqu’il est de 90 Hz. Ceci indique que contrairement aux largeurs des spectres, les fluctuations des centres mesurés ne sont pas seulement dues aux imprécisions des fits, mais correspondent bien à de réelles fluctuations à long terme, d’un spectre élémentaire à l’autre, des centres des spectres, dues à la variation de la vitesse du centre de masse des quasi-condensats.

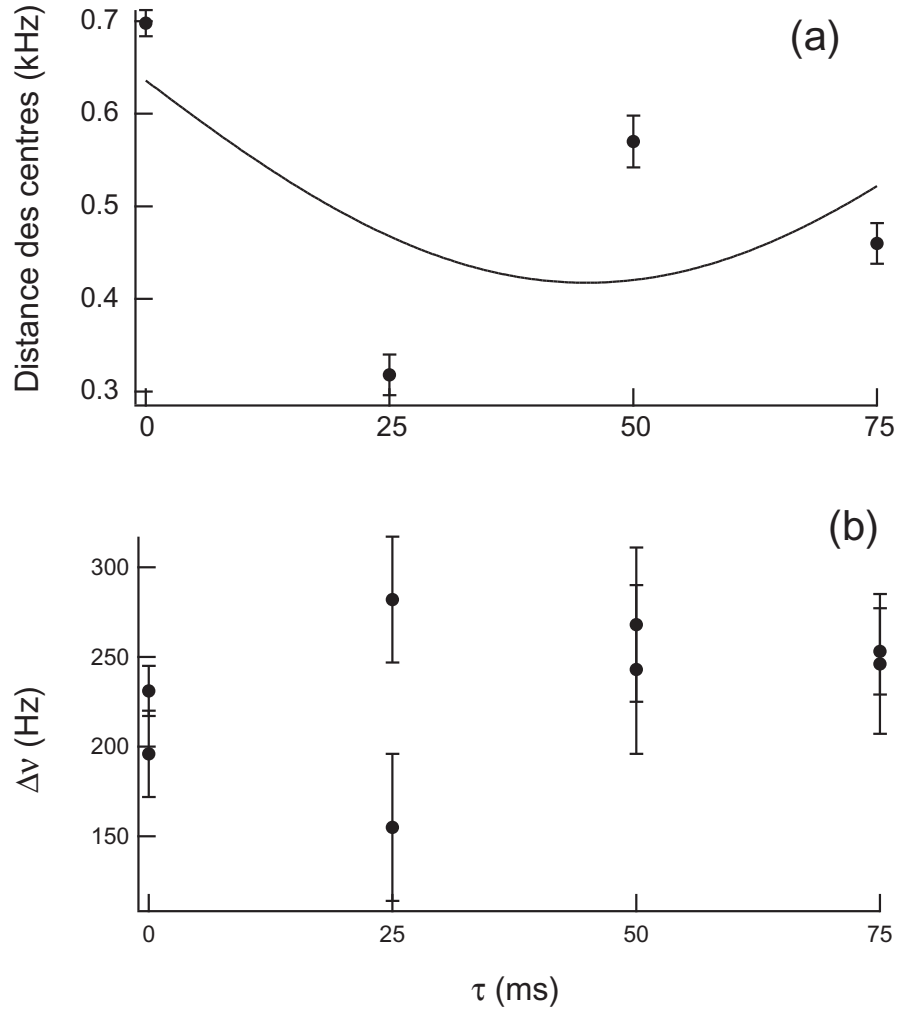


FIG. 5.17: **(a)** Distance des centres des spectres  $\nu_0^+ - \nu_0^-$ , en fonction du temps d'attente dans le piège  $\tau$ . Les barres d'erreur proviennent des déviations standards sur la détermination des centres des spectres par le fit lorentzien. La ligne continue est un fit sinusoidal, dont la fréquence est fixée à la valeur que l'on attendrait dans le cas d'une oscillation du centre de masse, c'est-à-dire la fréquence axiale du piège, 5 Hz. **(b)** Largeur des spectres en fonction de  $\tau$ . Compte tenu des barres d'erreur, représentant la déviation standard donnée par le fit, ces mesures sont compatibles avec une largeur constante.

$\tau$ (ms)	$y_0$ (%)		$A$ (%)		$\nu_0$ (kHz)		$\Delta\nu$ (Hz)	
	+	-	+	-	+	-	+	-
0	1.0(5)	1.4(3)	18(1)	17.4(6)	30.27(1)	29.57(1)	196(24)	231(14)
25	2.0(3)	0.8(2)	12(2)	7.5(5)	30.09(1)	29.77(2)	155(41)	282(35)
50	2.3(4)	1.5(3)	10(1)	8.5(7)	30.14(2)	29.57(2)	243(47)	268(43)
75	3.1(7)	1.6(4)	15(2)	15.2(8)	30.10(2)	29.64(1)	246(39)	253(24)

TAB. 5.1: Résultats de l'ajustement des spectres mesurés pour une profondeur de piège de 40 kHz par une lorentzienne de la forme  $y_0 + A/[(\nu - \nu_0)^2/\Delta\nu^2 + 1]$ . Le temps d'attente dans le piège  $\tau$  est compté après une thermalisation de 6.5 s. Les mesures à 0 et 75 ms sont du même jour, et les mesures à 25 et 50 ms ont été effectuées 5 jours plus tard. Les spectres dont les paramètres sont notés “+” correspondent à l'un des sens de diffraction, et les spectres de paramètres notés “-”, à l'autre sens. Les chiffres entre parenthèses indiquent les déviations standards données par le fit pour chaque paramètre.  $y_0$  et  $A$  sont donnés en pourcentage du nombre d'atomes dans le condensat.

d'oscillations de la longueur des nuages, se comporte comme (voir chapitre 3, section 3.2)  $\Delta\nu(t) = \Delta\nu_0 + A|\cos(\Omega t + \phi)|$ , avec  $\Omega \simeq 1.58\omega_z$ , soit  $\Omega \simeq 2\pi \times 7.9$  Hz.

Les graphes (a) et (b) de la FIG. 5.17 montrent respectivement les centres et les largeurs de spectres en fonction du temps  $\tau$  d'attente dans le piège avant son ouverture. On ne peut affirmer mesurer l'une ou l'autre des oscillations possibles, à la vue de ces graphes. En effet, on ne peut se convaincre que  $\nu_0^+(t) - \nu_0^-(t)$  présente un comportement oscillant à une fréquence de 5 Hz. Cependant, la différence des centres des spectres varie nettement plus que la précision avec laquelle le fit l'évalue. Ceci peut être expliqué par une oscillation, dont la phase n'est pas conservée sur les 5 jours séparant l'acquisition des spectres à  $\tau = 0$  et 75 ms des spectres à  $\tau = 25$  et 50 ms.

Quant aux largeurs des spectres,  $\Delta\nu^+$  et  $\Delta\nu^-$ , aucune dépendance particulière en fonction du temps n'est visible. Mais une indication est importante : l'écart typique entre les largeurs de deux spectres mesurés simultanément est comparable à l'écart typique entre deux spectres quelconques de l'ensemble des spectres élémentaires, c'est-à-dire de l'ordre de 30 Hz. Or deux spectres mesurés simultanément devraient être affectés de la même façon par des oscillations de la longueur des quasi-condensats. De plus la dispersion des largeurs mesurées est de l'ordre de la précision de la mesure de chaque largeur, qui est en moyenne de 33 Hz.

En accord avec cette observation, la dispersion des largeurs peut être expliquée simplement par le niveau de bruit de la mesure. Pour tester cela qualitativement, on a “simulé” une mesure. Avec l'ensemble  $\{\delta_n\}$  des désaccords du “spectre moyen” on reconstruit un spectre  $S(\delta_n)$ , somme d'une lorentzienne et d'un bruit constant :

$$S(\delta_n) = \frac{A}{\frac{\delta_n^2}{\Delta^2} + 1} + f(\delta_n), \quad (5.13)$$

où l'amplitude  $A$  du spectre, et sa largeur  $\Delta$  sont choisis égaux aux paramètres donnés par un fit du “spectre moyen”.  $f(\delta_n)$  est le bruit constant, généré par la fonction *randn* du logiciel Matlab, de moyenne nulle, et dont la variance est choisie de sorte qu'un ajustement lorentzien du spectre  $S(\delta_n)$  donne le même  $\chi^2$  que le fit du spectre expérimental. On peut vérifier qualitativement, sur la FIG.5.18, que le spectre obtenu a le même aspect que

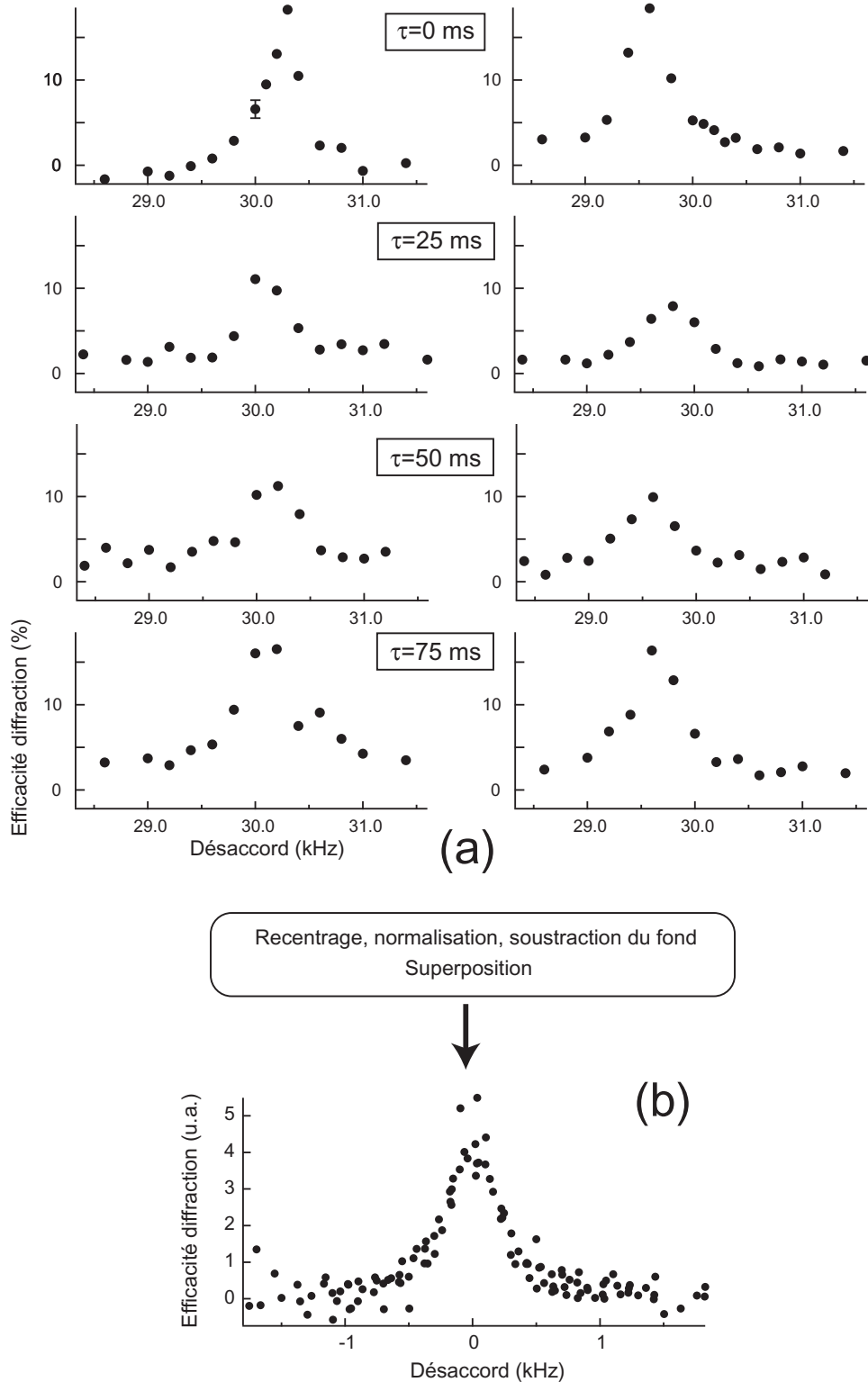


FIG. 5.16: **(a)** Ensemble des spectres élémentaires mesurés à une profondeur de piège de 40 kHz. L'efficacité de diffraction est donnée en pourcentage du nombre d'atomes dans le quasi-condensat. Les spectres mesurés simultanément (grâce aux deux réseaux de Bragg) sont placés côte-à-côte. Le temps  $\tau$  relatif à ces paires de spectres indique le temps de maintien du quasi-condensat dans le piège en plus des 6.5 s de thermalisation. Une barre d'erreur typique est reportée sur la première courbe, indiquant la dispersion des 7 mesures (environ) effectuées pour chaque désaccord. **(b)** Spectre résultant de la superposition de l'ensemble de ces données, après recentrage, normalisation à une même aire et soustraction du fond. La forme du profil apparaît alors plus clairement. Un fit lorentzien donne une demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu = 231(14)$  Hz.

atomes pour une fraction condensée de 44.5(8) %. Ces valeurs sont des moyennes pour un ensemble d'une quarantaine d'images prises dans les mêmes conditions, les incertitudes indiquées étant la déviation standard des mesures.

Huit spectres ont été enregistrés deux par deux (un par réseau de Bragg), à quatre temps d'attente différents dans le piège entre 6500 ms et 6575 ms après la fin de la rampe d'évaporation. Pendant cette attente, un couteau RF est maintenu à la fréquence finale de l'évaporation. Chacun de ces spectres, que nous appelons "élémentaires", est constitué de la mesure de l'efficacité de diffraction pour environ 15 désaccords des faisceaux Bragg. Pour chaque désaccord environ 7 mesures sont effectuées, et moyennées. Ceci donne l'ensemble des spectres de la FIG. 5.16 (a).

### Superposition des spectres

Un des points clé du traitement des données est de superposer l'ensemble de ces spectres "élémentaires", de façon à obtenir un "spectre moyen". Son profil et sa largeur proviennent à la fois de la distribution en impulsion du "quasi-condensat moyen" pour cette profondeur de piège, et des fluctuations à court et long terme de la mesure. Par court terme nous désignons l'échelle de temps d'acquisition d'un spectre, soit environ une heure, et par long terme, l'échelle de temps d'acquisition de l'ensemble des spectres soit quelques jours.

Pour réaliser cette superposition, on recentre chaque spectre, on le normalise à une aire unitaire, on en soustrait le fond. Le recentrage permet de s'affranchir des dérives, d'un spectre à l'autre, de la vitesse du centre de masse des quasi-condensats, qui peuvent être dues à un déphasage de l'oscillation du centre de masse et à une modification de l'accélération du nuage à l'ouverture du piège. La normalisation de l'aire permet de compenser les dérives d'intensité des lasers de Bragg. Enfin, la soustraction du fond de chaque spectre corrige d'une erreur systématique sur la mesure de la fraction diffractée. Cette erreur est due au nuage thermique qui se trouve sous le nuage diffracté, et que l'on soustrait imparfaitement.

Le centre, l'aire et le fond des spectres sont déterminés par un ajustement lorentzien, à quatre paramètres (centre, hauteur, fond, largeur). Ce choix de fonction est justifié dans la suite.

### Résultat

La FIG. 5.16 montre les 8 spectres mesurés pour une profondeur de piège de 40 kHz, et leur superposition. Malgré l'allure disparate des spectres élémentaires, la superposition donne un spectre d'un profil régulier.

### Analyse des spectres élémentaires *a posteriori*

Les spectres élémentaires de la FIG. 5.16(a) ont des formes et des largeurs variées. Leurs caractéristiques sont réunies dans le TAB. 5.1. Il est légitime de se demander si les variations des centres des spectres et de leur largeur sont bien dues respectivement à des dérives de la vitesse du centre de masse des quasi-condensats, et à des oscillations de la longueur des quasi-condensats.

Rappelons que la vitesse  $v_0$  du centre de masse du condensat est reliée aux centres  $\nu_0^\pm$  des couples de spectres par  $\nu_0^+ - \nu_0^- = 4k_L v_0 / 2\pi$  et que la largeur des spectres, en présence

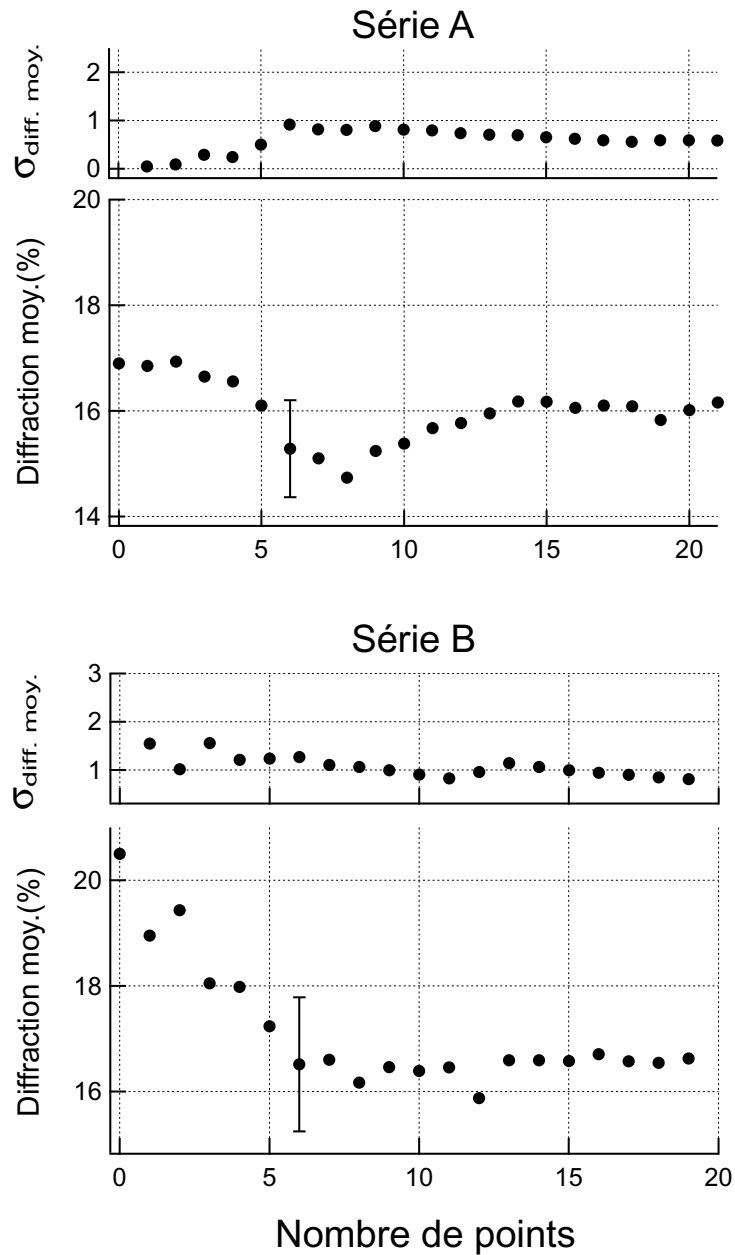


FIG. 5.15: Estimation du nombre de mesures d'efficacité de diffraction à effectuer pour obtenir une moyenne significative. Deux séries de mesure identiques sont comparées, leurs acquisitions étant séparées d'environ 1 heure. Pour chaque série on mesure de l'efficacité de diffraction pour un désaccord entre faisceaux Bragg identique, proche du centre de la résonance. Au dessus du graphe de la valeur moyenne de l'efficacité, son écart-type est indiqué. Il est également reporté comme barre d'erreurs de la valeur moyenne pour un point. On voit sur ces graphes qu'à partir d'environ 7 points, la moyenne et son écart-type sont assez stationnaires. Cela semble donc un bon compromis entre précision et durée d'acquisition. Enfin, bien que la série A soit plus bruitée, la comparaison des deux séries permet de vérifier que les valeurs moyennes et les barres d'erreurs forment un ensemble de mesures compatibles.

Pour évaluer le nombre optimum de mesures identiques par spectre élémentaire, nous considérons une série de mesures d'efficacité de diffraction pour des paramètres expérimentaux constants (y compris le désaccord des lasers). Nous calculons ensuite la valeur moyenne de l'efficacité en fonction du nombre  $N$  de points, ainsi que son intervalle de confiance  $\sigma_N$ , que l'on définit comme :

$$\sigma_N = \left[ \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.12)$$

où  $X_i$  est la valeur de la  $i^{\text{ème}}$  mesure, et  $\bar{X}_N$  la diffraction moyenne des  $N$  points considérés. Nous avons tracé sur la FIG. 5.15 le résultat de ce traitement pour deux séries d'environ 20 mesures. Ces deux séries ont été prises à une heure d'intervalle, et dans les mêmes conditions expérimentales. Elle sont donc comparables quantitativement. On conclut de ces courbes, et d'autres courbes non représentées ici, qu'à partir d'environ 7 mesures la valeur moyenne  $\bar{X}_N$  et son écart-type  $\sigma_N$  sont assez stationnaires. Il semble donc que 7 mesures soit un bon compromis entre précision et temps d'acquisition. On ne peut en effet se permettre un nombre très élevé de mesures pour chaque désaccord d'un spectre, car chaque mesure prend 40 s, et l'on échantillonne environ 13 désaccords. Cela représente donc déjà presque une centaine de mesures par spectre, en un temps d'environ une heure. Pour les séries A et B, on obtient respectivement, au bout de 7 mesures, une diffraction de 15.3(9) % et 16.5(1.3) %. Ces valeurs sont bien compatibles, et leur précision relative entre 6 et 8 % nous semble suffisante pour obtenir des spectres représentatifs.

Comme lors de la mesure d'un spectre élémentaire, nous mesurons en réalité environ 7 spectres à la suite, que nous moyennons, la procédure permet de moyennner à la fois les fluctuations de la mesure d'un coup sur l'autre et les fluctuations sur l'échelle de temps d'acquisition d'un spectre élémentaire.

### Moyennage sur l'échelle de temps d'acquisition de tous les spectres

Nous avons choisi de mesurer la distribution en vitesse de condensats pour 7 ensembles des 3 paramètres (température, fraction condensée, nombre d'atome total) fixés par 7 valeurs finales de la profondeur du piège magnétique, entre 20 et 80 kHz (écart en énergie entre le couteau RF et le fond du piège). Pour chaque profondeur de piège, nous acquérons un spectre à plusieurs temps d'attente dans le piège pour échantillonner l'oscillation du centre de masse et la possible oscillation de longueur résiduelle (cf. 5.2.7). La mesure de l'ensemble des spectres s'effectuant sur plusieurs jours, les différents spectres pour une même fin de rampe ne sont pas pris le même jours. Nous les avons répartis sur des jours différents pour moyennner, pour chaque fin de rampe, les fluctuations de la mesure à l'échelle des quelques jours<sup>3</sup>.

#### 5.2.9 Données finales

Pour expliquer la procédure aboutissant à un spectre final, prenons l'exemple d'une profondeur de piège particulière, par exemple 40 kHz. Avec cette profondeur de piège, la température du nuage est de  $T = 177(5)$  nK, le quasi-condensat contient  $4.80(22) \times 10^4$

<sup>3</sup>Mais chaque spectre est bien constitué de diffractions consécutives.



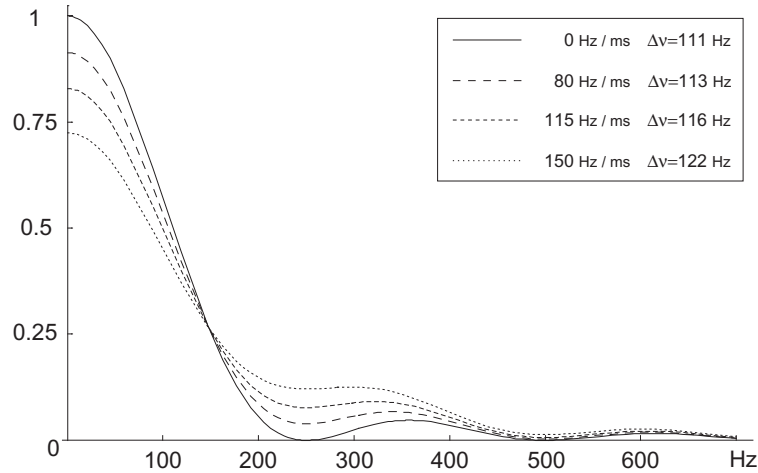


FIG. 5.14: Spectre d'un battement de 2 ms, avec différentes dérivées linéaires de fréquence, entre 0 et 150 Hz/ms.

La vitesse des atomes est supposée constante, ce qui signifie que pour  $C = 0$ , c'est-à-dire pour un désaccord constant entre les faisceaux Bragg, on retrouve un spectre qui est le carré d'un sinus cardinal. Rappelons que ce spectre représente la "fonction d'appareil" de la spectroscopie de Bragg, considérant une distribution en vitesse des atomes infiniment étroite. Naturellement, on obtient exactement les mêmes spectres dans le cas où les atomes sont accélérés (dérive de l'effet Doppler  $C$ ) et où le désaccord des lasers est constant. Cela permet donc d'évaluer l'importance de la déformation du spectre lorsque l'on ne compense pas l'accélération. On constate sur ce graphe que le pic central s'élargit assez peu dans cette gamme de rampes, de 9 % au maximum.

### 5.2.8 Moyennage nécessaire

Nous venons d'identifier plusieurs sources possibles de bruit de mesure. Nous n'avons pu cependant étudier quantitativement pour chacune d'elle la contribution à l'élargissement spectral. Nous allons donc adopter une procédure permettant de moyennner les bruits éventuels, dont les effets seront ensuite pris en compte dans une fonction d'appareil lors de l'analyse des spectres.

En pratique, la nécessité de moyennner les mesures est mise en évidence par les spectres de Bragg présentés jusqu'ici, FIG. 5.9 et FIG. 5.13, qui montrent la dispersion des points expérimentaux. Nous présentons ici les différents types de moyennage à envisager.

#### Moyennage sur l'échelle de temps d'acquisition d'un spectre

Le premier moyennage s'effectue lors de l'acquisition d'un spectre. Pour chaque désaccord entre les faisceaux Bragg plusieurs mesures doivent être effectuées. Pour cela nous allons en fait acquérir plusieurs spectres à la suite, et les moyennner. Le spectre moyen obtenu est appelé dans la suite "spectre élémentaire" [FIG. 5.1], car nous verrons qu'il est l'objet d'autres moyennages.

ajustement sinusoïdal, 5 Hz, est bien la fréquence du piège, déterminée par ailleurs sur des oscillations spatiales de grande amplitude, détectables en imagerie.

Les fluctuations de la phase, ou de l'amplitude, de cette oscillation du condensat dans le piège, d'une diffraction à l'autre, sont une cause potentielle d'élargissement des spectres de Bragg. La mise en évidence de l'oscillation montre que sa phase et son amplitude ne sont pas aléatoires d'une réalisation d'un condensat à l'autre. Dans le cas d'une phase aléatoire d'un coup à l'autre, chaque spectre ne serait pas décentré, mais seulement élargi. Cependant cette mesure ne permet pas de conclure quant à un élargissement, qui reste possible malgré une phase et une amplitude moyenne des oscillations bien définies. En particulier, aucune dépendance systématique de la largeur du spectre en fonction du temps d'attente n'est trouvée.

Cette dernière constatation doit aussi être reliée au problème des oscillations de la longueur du condensat, discuté à la section 3.2. Cela montre qu'elles ont été suffisamment amorties pour ne plus être mesurables. En effet, ce type d'oscillation est caractérisé par un champ de vitesse de la forme  $v_z(z) \propto z \cos(\omega t)$ , avec  $z$  la coordonnée longitudinale et  $\omega$  la pulsation de l'oscillation (voir section 3.2). On attendrait donc, en sa présence une variation temporelle de la largeur des spectres de Bragg, similaire à celle qui est étudiée au chapitre 3. Cependant l'impossibilité d'en mesurer l'amplitude n'élimine pas la possibilité d'une contribution, plus ou moins fluctuante, à la largeur des spectres de Bragg.

### Accélération pendant et après l'ouverture du piège

Venons en à la valeur centrale de l'oscillation de la vitesse du condensat, qui est non nulle, et plus précisément de  $96 \mu\text{m/s}$ . Nous l'attribuons à une brève accélération du condensat pendant la coupure du piège, que nous appelons "kick" magnétique, et qui dure de l'ordre de  $100 \mu\text{s}$ , ainsi qu'à une accélération plus faible due aux champs magnétiques résiduels, qui est ressentie pendant tout le temps de vol précédant la diffraction, soit plusieurs millisecondes.

Cette faible accélération peut être déterminée en mesurant la variation du centre des spectres en fonction du temps de vol avant la diffraction (et pour un temps d'attente dans le piège fixé). On peut compenser cet effet, en supposant l'accélération constante, par une variation linéaire du désaccord des lasers de Bragg, égale et opposée à la dérive de l'effet Doppler du centre du spectre. Cela revient à placer les lasers dans le référentiel accéléré des atomes. Nous avons testé cette méthode, en appliquant une rampe linéaire à la fréquence de l'un des modulateurs acousto-optiques, par l'entrée de modulation analogique du synthétiseur qui le pilote. Les vitesses de rampe qui permettaient de compenser l'accélération étaient typiquement de  $100 \text{ Hz/ms}$ , ce qui ne changeait pas la largeur mesurée des spectres.

C'est pourquoi nous n'avons finalement pas utilisé ce procédé de compensation de l'accélération. La correction apportée nous semblait trop petite pour la complexité ajoutée. La qualité des données finales validera ce choix a posteriori.

Sur la FIG. 5.14 nous avons tracé le spectre théorique de la résonance à 4 photons (cf 4.4.2) pour différentes vitesses de rampe notées  $C$ . Le désaccord des lasers est alors donné par  $\nu(t) = \nu + Ct$ , et le spectre des battements :

$$P(\nu) \propto \left| \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2[2\pi(\nu+Ct)t]} dt \right|^2, \quad (5.11)$$

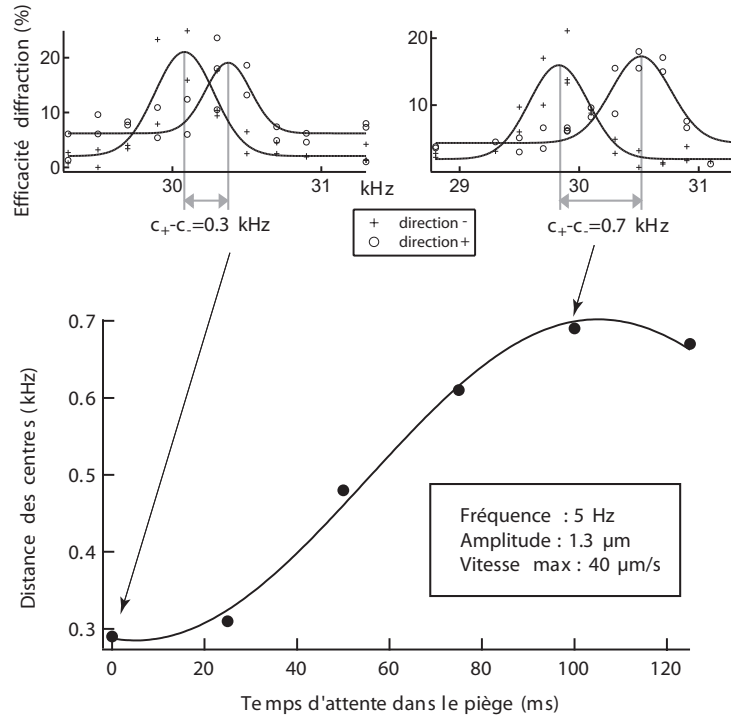


FIG. 5.13: Mesure des oscillations du centre de masse du condensat. L'écart entre les centres  $c_+$  et  $c_-$  des spectres oscille à la fréquence longitudinale du piège, c'est-à-dire 5 Hz.

lesquelles nous effectuons la spectroscopie de Bragg ont été choisies de façon à minimiser autant que possible ce type d'excitation des quasi-condensats. Le seuil de condensation est franchi lentement, et un temps de d'attente de 6.5 s de relaxation des excitations, en présence d'un couteau RF fixe, précède l'ouverture du piège.

Nous discutons ici de l'influence d'éventuelles oscillations résiduelles de ces 2 types sur les spectres que nous mesurons.

### Oscillations dans le piège

Le condensat n'est pas totalement au repos dans le piège. La relation (5.9) permet de calculer la vitesse  $v_0$  du centre de masse du condensat en fonction des centres des spectres dans chaque direction  $c_+$  et  $c_-$  (en Hz),

$$v_0 = 2\pi \frac{c_+ - c_-}{4k_L}. \quad (5.10)$$

En mesurant de cette façon  $v_0$  pour différents temps d'attente dans le piège, on trouve une oscillation du centre de masse. C'est ce qui est représenté sur la FIG. 5.13. La courbe principale de cette figure représente l'oscillation de la vitesse du condensat. Notons que la vitesse maximum de cette oscillation est de  $40 \mu\text{m/s}$ , ce qui correspond à un déplacement maximum de  $1 \mu\text{m}$  pendant le temps de vol de 24 ms. Cette oscillation est donc très difficile à mesurer par imagerie, et en dessous de notre sensibilité. La fréquence mesurée par un

il faut réaliser un grand nombre de diffractions, sur une période de l'ordre d'une heure. Il est donc utile d'évaluer la stabilité des battements sur cette échelle de temps. Sur la FIG. 5.12, on a tracé la moyenne de 10 spectres de battements de 2 ms, dont la mesure avait été étalée sur environ une heure. Le résultat est encore très proche de la limite de Fourier, avec une demi-largeur à mi-hauteur de  $228(1)$  Hz.

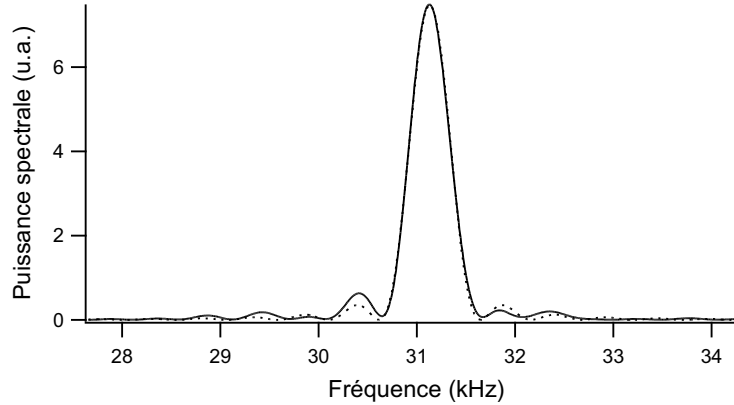


FIG. 5.12: Moyenne de 10 spectres battements de 2 ms, mesurés sur environ une heure. Le spectre moyen est très proche de la limite de Fourier (en pointillés).

### 5.2.6 Conclusion sur la stabilité des lasers

En conclusion, nous pouvons dire que pour des temps de diffraction de 2 ms, la contribution des vibrations mécaniques à l'élargissement de la résonance de diffraction est négligeable. La limite de Fourier, pour la spectroscopie à 4 photons sera alors de 114 Hz (la moitié de ce que l'on mesure sur les spectres des battements, voir paragraphe 4.4.3). Les lasers ne devraient donc pas apporter de bruit significatif aux mesures, mais plutôt un élargissement systématique.

Il reste à évaluer les fluctuations parasites (i.e. autres que les fluctuations de phase) éventuelles de la distribution de vitesse des condensats qui vont elles aussi élargir les spectres de Bragg.

### 5.2.7 Oscillations résiduelles des quasi-condensats

Nous allons voir que l'on mesure une oscillation résiduelle du centre de masse des quasi-condensats dans le piège. Les fluctuations de la vitesse du centre de masse des quasi-condensats d'une diffraction à l'autre sont naturellement une source de bruit potentielle lors de la mesure de leur distribution de vitesse longitudinale. En effet, dans le référentiel du nuage atomique, cela correspond à des fluctuations du désaccord apparent des lasers de Bragg.

Rappelons également ce que nous avons vu au chapitre 3 : au franchissement du seuil de condensation des oscillations de la longueur des quasi-condensats peuvent se développer. Ce type d'oscillation se traduit par une oscillation de la largeur du spectre de Bragg en fonction de l'instant où le quasi-condensat est relâché du piège. Les conditions dans

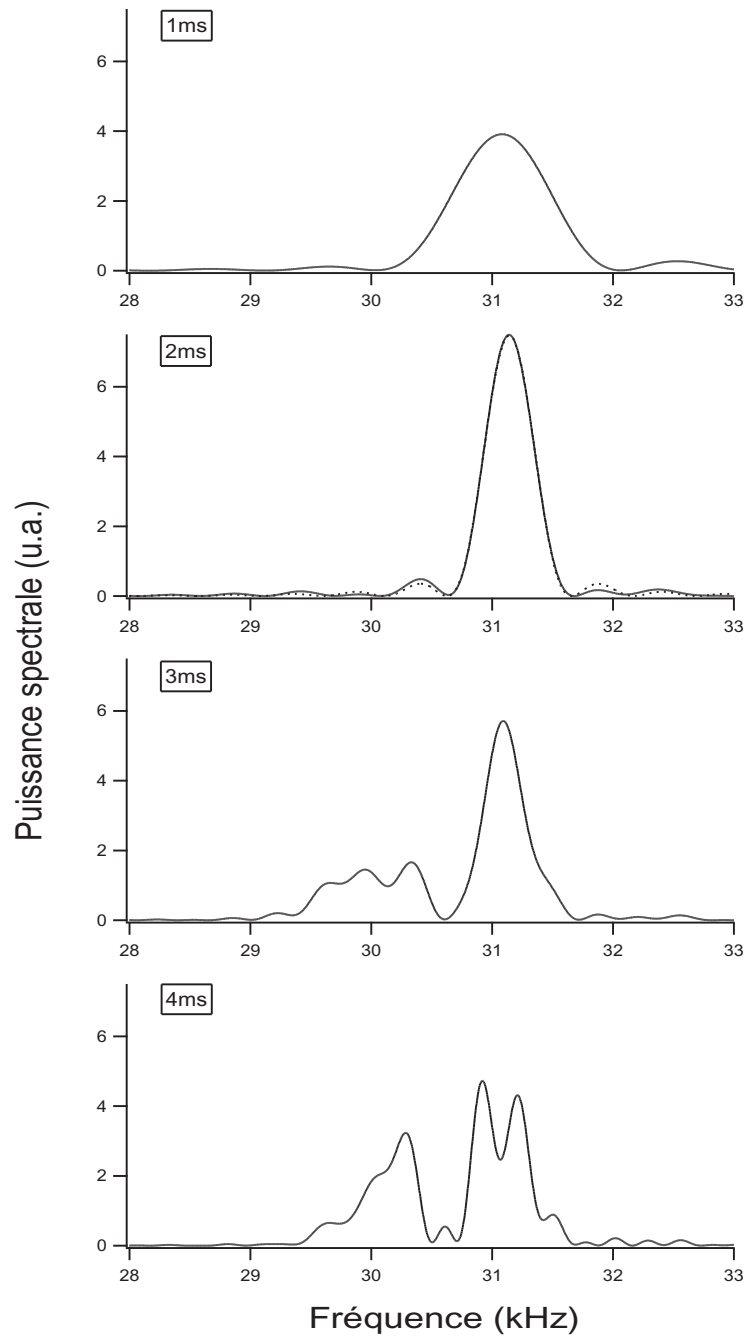


FIG. 5.11: Spectres de battements entre lasers de Bragg de durées comprises entre 1 et 4 ms (il s'agit d'un seul interférogramme, tronqué à 1 ms puis 2 ms etc.). On voit qu'à 2 ms, le spectre est encore très proche de la limite de Fourier (pointillés). Ensuite, une bande latérale apparaît, due à une lente modulation de fréquence (voir FIG. 5.10). On choisira donc une durée d'application des lasers de 2 ms pour la spectroscopie de Bragg.

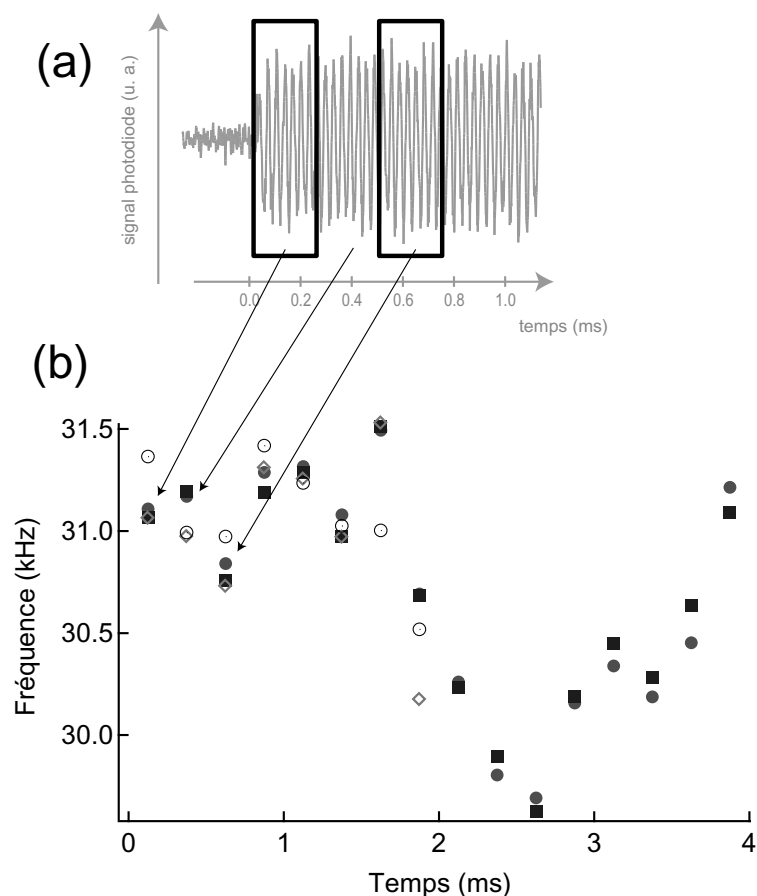


FIG. 5.10: (a) Battements entre lasers de Bragg. (b) Fréquence “instantanée” des battements entre lasers de Bragg. Chaque point correspond à la fréquence des battements par plage de  $250 \mu\text{s}$ . Les différents symboles correspondent à différents battements mesurés dans des conditions identiques.

Ainsi, la FIG. 5.11 montre le spectre de fréquence des battements pour différentes durées. Tous sont calculés à partir d'une seule acquisition de 4 ms (correspondant aux cercles pleins de la FIG. 5.10), mais tronquée suivant la durée voulue. Tous ces spectres sont normalisés à une même aire. On observe sur ces graphes une brusque transition entre les spectres d'un battement de 2 ms et de 3 ms. En effet, pour 2 ms on est très proche de la limite de Fourier : l'ajustement par le carré d'un sinus cardinal donne une demi-largeur à mi-hauteur expérimentale de  $228(1) \text{ Hz}$ , soit 3 % de plus que la largeur de Fourier ( $221 \text{ Hz}$ ). En revanche, pour les temps plus longs un deuxième pic se forme nettement autour de 30 kHz soit environ 1 kHz plus bas que la fréquence initiale.

L'optimum se situe donc à 2 ms.

### Stabilité à plus long terme

Nous avons jusqu'ici principalement évoqué la stabilité des battements sur l'échelle de temps de la diffraction d'un condensat. Pour obtenir la distribution des vitesses complète,

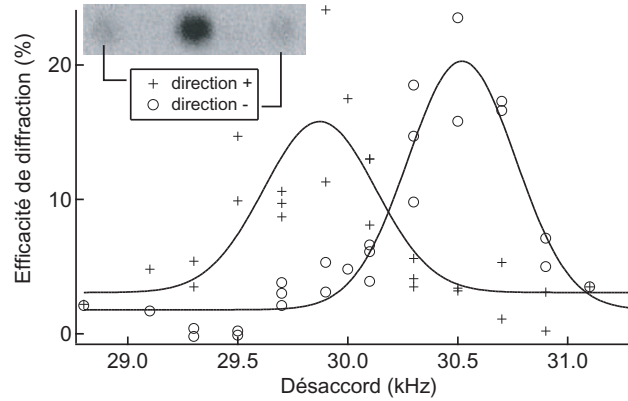


FIG. 5.9: Exemple de spectre “brut”. L’efficacité de diffraction dans chaque sens est tracée en fonction du désaccord des lasers  $(\omega_a - \omega_b)/2\pi$ . Les courbes en trait continu sont des ajustements gaussiens de ces spectres, pour guider l’œil.

### Analyse temporelle des battements

La procédure d’analyse est la suivante. Lors d’une séquence expérimentale complète, c’est-à-dire telle qu’elle sera réalisée lors de la diffraction de condensats, on enregistre les battements entre les lasers de Bragg sur des durées entre 2 et 4 ms, à l’instant de la diffraction<sup>2</sup> [FIG. 5.10 (a)]. Puis on découpe ces battements en sections de  $250 \mu\text{s}$ . En mesurant la fréquence centrale du spectre de Fourier de ces sections, on peut tracer la fréquence “instantanée” des battements en fonction du temps. C’est ce qui est représenté sur la FIG. 5.10 (b). On voit tout d’abord, sur ce graphe, que les fluctuations de fréquence sont remarquablement reproductibles, l’acquisition des différentes séries de données étant étalée sur un quinzaine de minutes. On remarque ensuite que la fréquence est beaucoup plus stable pendant les deux premières millisecondes que pendant les deux suivantes.

En répétant l’expérience sans brancher le piège magnétique, nous avons constaté que ces fluctuations de fréquence étaient déclenchées par des vibrations de l’électroaimant lors de la coupure du champ (qui a lieu 2 ms avant l’origine des temps sur la FIG. 5.10). En effet lors de la phase de piégeage magnétique, les pôles ferromagnétiques s’attirent ou se repoussent. Cela déforme légèrement l’armature de l’électroaimant, qui revient brutalement à sa position au repos lors de l’ouverture du piège. La reproductibilité des fluctuations peut donc être expliquée par le déclenchement systématique de vibrations mécaniques, et par le fait qu’elles constituent la source principale de bruit.

### Analyse spectrale des battements

L’analyse temporelle donne une image simple des fluctuations lentes de la fréquence des battements. Intuitivement on en déduit qu’au delà d’une certaine durée, la largeur spectrale n’est plus limitée par transformée de Fourier. L’analyse spectrale permet de déterminer la durée optimum.

<sup>2</sup>Mais on ne peut pas simultanément diffracter réellement le condensat car le chemin optique des faisceaux Bragg est modifié pour observer les battements (voir FIG. 5.4).

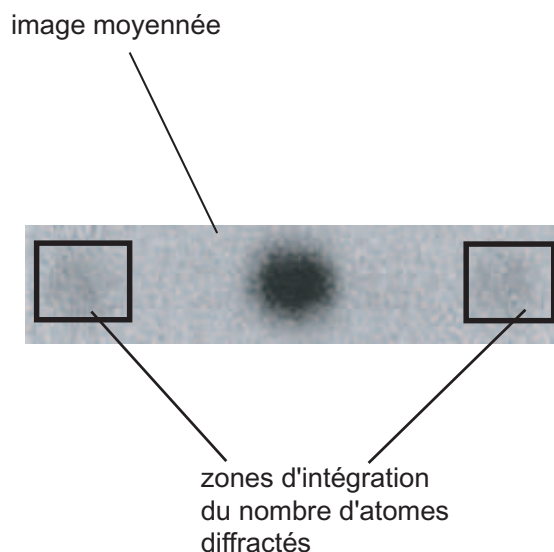


FIG. 5.8: Principe de la mesure de l'efficacité de diffraction. Le nombre d'atomes diffractés est obtenu par intégration de l'épaisseur optique à l'intérieur des boîtes. Le nombre d'atomes restant dans le condensat est déterminé par un fit à double structure, qui tient donc compte du nuage thermique. L'efficacité de diffraction est alors le nombre d'atomes diffractés divisé par la somme du nombre d'atomes diffractés et du nombre d'atomes restant dans le condensat.

qu'au delà de 2 ms ce problème était supprimé. Ensuite, le temps de vol après diffraction doit être le plus grand possible afin de bien séparer les nuages, surtout dans le cas de grandes fractions thermiques.

Le choix de 2 ms satisfait ces deux critères. Il permet, compte tenu de la hauteur de chute limitée à environ 5 mm, un temps de séparation de 22 ms, soit un peu plus de  $510 \mu\text{m}$ . La longueur totale du condensat étant de l'ordre de  $250 \mu\text{m}$  le nuage diffracté en est largement séparé, mais dans le cas d'une importante fraction thermique une telle séparation est dans notre cas le minimum requis. En effet, pour la température maximale à laquelle on envisage de faire la spectroscopie, soit environ 350 nK, le nuage thermique après expansion mesure environ  $330 \mu\text{m}$  de demi-longueur. Donc à cette température, même après 22 ms de séparation, le nuage diffracté et le nuage thermique ne sont pas parfaitement séparés, ce qui complique, sans être rédhibitoire, la mesure sur les images de l'efficacité de diffraction. En effet, dans ce cas il est plus difficile de mesurer précisément le petit nombre d'atomes diffractés superposés à un nuage thermique dense.

### 5.2.5 Optimisation de la durée d'application des lasers de Bragg

L'analyse du bruit, ou des fluctuations de fréquence, des battements entre les lasers de Bragg peut être menée selon deux points de vue complémentaires : évolution temporelle et analyse spectrale.



## 5.2 Acquisition et Optimisation des spectres

### 5.2.1 Séquence d'acquisition

Rappelons la séquence d'acquisition d'un spectre de Bragg (voir 4.5.1). A chaque cycle de l'expérience, un condensat est formé, puis :

1. Ouverture du piège.
2. Temps d'expansion (quelques ms), afin de diminuer la densité du nuage
3. Diffraction de Bragg (quelques ms) par les 2 réseaux de vitesses opposées.
4. Temps de séparation des nuages diffractés (environ 20 ms).
5. Image par absorption.
6. Analyse : mesure de la fraction d'atomes diffractés.
7. On recommence pour un autre désaccord, avec un nouveau condensat etc...

Nous avons, au vu de ce protocole, deux paramètres à optimiser, afin d'obtenir du dispositif expérimental une résolution maximum : le temps d'expansion avant la diffraction, et le temps d'application des lasers de Bragg. Nous expliquons dans la suite les choix qui ont été faits.

Nous verrons également les différents types de bruits intervenant dans les spectres, et les moyennages qu'ils imposent.

### 5.2.2 Mesure de l'efficacité de diffraction

Sur chaque image de diffraction il faut déterminer le mieux possible la fraction d'atomes diffractés. Le principe, schématisé sur la FIG.5.8, est le suivant.

On moyenne un ensemble d'images du spectre que l'on traite. Les 2 zones où se situent les atomes diffractés sont alors clairement visibles, et l'on peut les délimiter au plus près par deux cadres rectangulaires.

Le nombre d'atomes dans chaque cadre est intégré.

Le nombre d'atomes diffractés est ensuite rapporté au nombre d'atomes condensés, c'est-à-dire au nombre d'atomes dans le condensat restant plus le nombre d'atomes diffractés.

### 5.2.3 Exemple de spectre

Afin de fixer les idées, nous présentons dès maintenant, FIG. 5.9, un spectre "brut", sans aucun moyennage, ni optimisation particulière. A côté est également montrée une image après diffraction, à partir de laquelle toutes les informations sont tirées.

Sur ce graphe, les spectres correspondant à chaque réseau de diffraction n'ont pas le même centre car le condensat a une vitesse non nulle, que nous expliquons dans la suite. Chaque spectre est donc centré sur  $8\omega_R \pm 2k_L v_0$ ,  $v_0$  étant la vitesse du condensat.

### 5.2.4 Choix de l'instant de la diffraction

Deux contraintes principales guident le choix du temps de vol avant la diffraction. Tout d'abord la densité du nuage doit être assez faible pour que les collisions entre atomes diffractés et atomes du nuage initial soient négligeables. Nous avons vu à la section 4.5.3

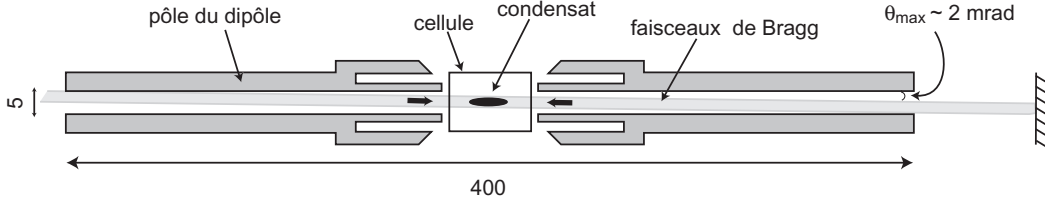


FIG. 5.6: Contraintes pratiques sur l'alignement des faisceaux Bragg sur l'axe du dipôle. Les cotes sont en millimètres. Le diamètre visible des faisceaux est d'environ 3 mm. Ce qui permet d'estimer la précision de l'alignement à environ  $\theta_{\max} = 2$  mrad.

### 5.1.6 Rétro-réflexion : deux sens de diffraction

Le schéma avec faisceaux rétro-réfléchis crée deux ondes stationnaires mouvantes, de vitesses opposées<sup>1</sup>. Un condensat sera donc diffracté dans deux sens opposés [FIG. 5.7], avec une condition de résonance pour chaque sens, qui s'exprime :

$$\omega_a - \omega_b = 8\omega_R \pm 2k_L v. \quad (5.9)$$

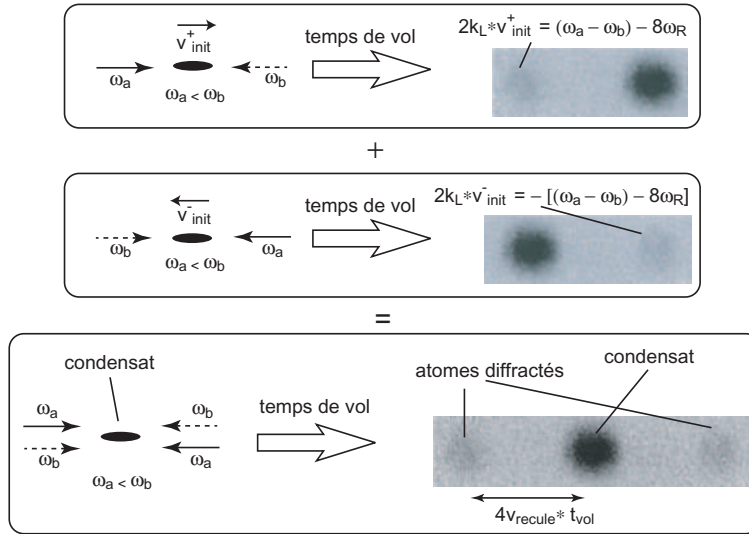


FIG. 5.7: Analyse d'une image par absorption d'un condensat diffracté. Les deux ondes stationnaires mouvantes diffractent des classes de vitesse  $v_{\text{init}}$  différentes, dans des sens opposés. Le temps de vol après diffraction de l'image reproduite, qui est la moyenne de plusieurs images, est de 22 ms. Le condensat et les nuages diffractés sont donc séparés d'environ  $510 \mu\text{m}$ .

Notons dès à présent que si le condensat a une vitesse du centre de masse non nulle  $v_0$ , la résonance de diffraction dans chaque sens est donnée par  $\omega_{\text{res}} = 8\omega_R \pm 2k_L v_0$ . Dans ce cas les spectres correspondant à chaque sens ne sont donc pas superposés.

<sup>1</sup>Il y a quatre couples de faisceaux contre-propageant, mais seuls deux sont proches de la condition de diffraction

vu que ces transitions avaient la même sensibilité à l'effet Doppler (voir les conditions de résonance (4.43) et (4.51)).

### Variante

Au lieu d'utiliser deux acousto-optiques pour obtenir deux faisceaux de fréquences différentes, on peut n'en utiliser qu'un seul, pourvu qu'il soit alimenté par un champ radio-fréquence qui contienne les deux fréquences désirées. L'intérêt principal d'un tel montage est qu'à aucun moment les deux fréquences ne sont séparées spatialement, ce qui simplifie les réglages et augmente la stabilité.

Cependant, nous n'avons pas retenu cette solution pour plusieurs raisons. Les différents composants des circuits RF, tels que switches, amplificateurs, et combineur de fréquences dont nous disposons ne généraient pas une somme très pure, produisant des harmoniques à  $\omega_a \pm n(\omega_b - \omega_a)$ , à -20 dB pour  $n = 2$ , par exemple. Comme nous avons vu que le montage à deux acousto-optiques était suffisamment stable, nous n'avons pas choisie cette variante très compacte mais un peu plus incertaine.

#### 5.1.5 Défaut d'alignement

Il est important que les lasers de Bragg soient bien parallèles à l'axe longitudinal des quasi-condensats, pour mesurer effectivement la distribution en vitesse longitudinale. Nous évaluons ici les conséquences d'un défaut d'alignement.

D'une façon générale, le terme Doppler dans la condition de résonance à 4 photons, pour des vecteurs d'ondes  $\vec{k}_a$  et  $\vec{k}_b$  s'écrit  $2(\vec{k}_a - \vec{k}_b) \cdot \vec{v}$ . Dans le cas idéal, les lasers sont parfaitement alignés sur l'axe longitudinal du condensat,  $\vec{u}_z$ , et la distribution de vitesse radiale du condensat ne contribue pas au spectre.

Plaçons-nous dans la situation où l'on a un petit défaut d'alignement tel que  $(\vec{k}_a - \vec{k}_b) \cdot \vec{u}_z \simeq 2k_L \cos \alpha$  et  $(\vec{k}_a - \vec{k}_b) \cdot \vec{u}_x \simeq 2k_L \sin \alpha$ . Alors le décalage Doppler de la résonance (en Hz) devient  $2k_L(v_z \cos \alpha + v_x \sin \alpha)/2\pi$ , et l'élargissement Doppler du spectre (en Hz)  $2k_L(\Delta v_z \cos \alpha + \Delta v_x \sin \alpha)/2\pi$  pour des distributions de vitesse longitudinales et selon  $\vec{u}_x$  de largeurs  $\Delta v_z$  et  $\Delta v_x$ .

Or la spectroscopie a lieu après ouverture du piège magnétique, sur un condensat en expansion. La distribution en vitesse sur un axe radial est caractérisée par une demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta v_x \simeq 0.54 \omega_\perp R_0$ , où  $R_0$  est le rayon de Thomas-Fermi du condensat dans le piège (voir section 1.3.2). Ainsi, pour  $\omega_\perp = 2\pi \times 760$  Hz et  $R_0 \simeq 0.8 \mu\text{m}$ , on obtient un élargissement Doppler du spectre de l'ordre de 5 Hz/mrad, dans la limite des petits angles.

En pratique l'alignement des faisceaux sur l'axe du dipôle est automatiquement assuré, comme le montre la FIG. 5.6. Les trous aux extrémités externes des pôles du dipôle ont un diamètre de 5 mm, et sont distants de 400 mm. De plus, le diamètre des faisceaux visible à l'oeil, ou au viseur infrarouge, est de l'ordre de 3 mm. On estime donc que l'on peut centrer les faisceaux sur l'axe central du dipôle à mieux que 1 mm. On est donc en mesure d'obtenir un angle entre les faisceaux Bragg et l'axe du dipôle inférieur ou égal à 2 mrad. Par conséquent la contribution de la distribution en vitesse radiale au spectre est de l'ordre de 10 Hz. Cette source d'élargissement est négligeable devant l'élargissement de 115 Hz dû à la durée finie d'application des lasers de Bragg (2 ms).

de la FIG. 5.4(b). Le spectre FIG. 5.5 (a) a été mesuré avec un support de miroir cylindrique, de 40 cm de haut pour environ 5 cm de diamètre. On observe sur ce spectre une structure de 5 pics, signe de l'instabilité de la fréquence des battements. Le spectre FIG. 5.5 (b) a été mesuré avec des plaques de Dural comme supports de miroir. Il ne reste sur ce spectre qu'une seule fréquence de battement dominante, avec deux petite bandes latérales. L'amélioration de la stabilité des miroirs est donc notable.

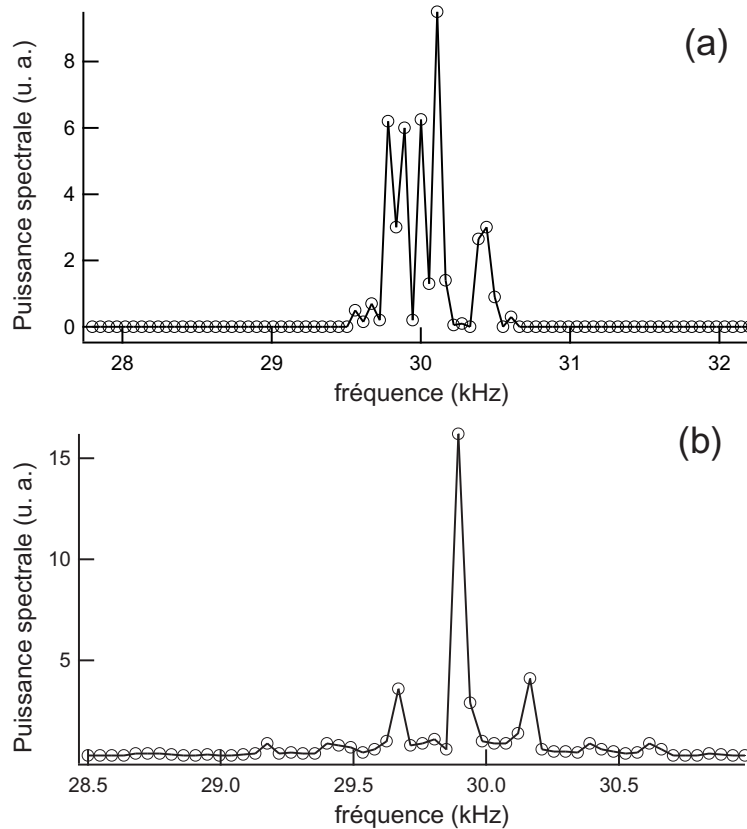


FIG. 5.5: Spectres de battements d'une durée de 15 ms, entre lasers de Bragg. (a) Les supports des miroirs ( $M1$ ) et ( $M2$ ), sont des cylindres de 40 cm de haut pour 5 cm de diamètre. (b) Les supports de ( $M1$ ) et ( $M2$ ) sont une version préliminaire moins massive des plaques de Dural de la FIG. 5.4.

Dans les conditions réelles de diffraction de Bragg des atomes des vibrations de la table optique supplémentaires dues à l'électroaimant vont s'ajouter aux vibrations permanentes. Des spectres des battements finalement obtenus dans les conditions expérimentales de la spectroscopie de Bragg sont présentés FIG. 5.11, et discutés à la section 5.2.5. Nous verrons qu'ils sont limités par transformée de Fourier jusqu'à des durées de 2 ms, ce qui correspond à une largeur de résonance à 4 photons de 115 Hz.

### Remarque sur l'élargissement de la fonction d'appareil

Contrairement à l'élargissement par la durée finie d'application des lasers, l'élargissement de la fonction d'appareil dû aux vibrations des miroirs (ou d'une manière générale au bruit sur  $\Delta\omega$ ) est le même pour les transitions à 2 et 4 photons. En effet, nous avons déjà

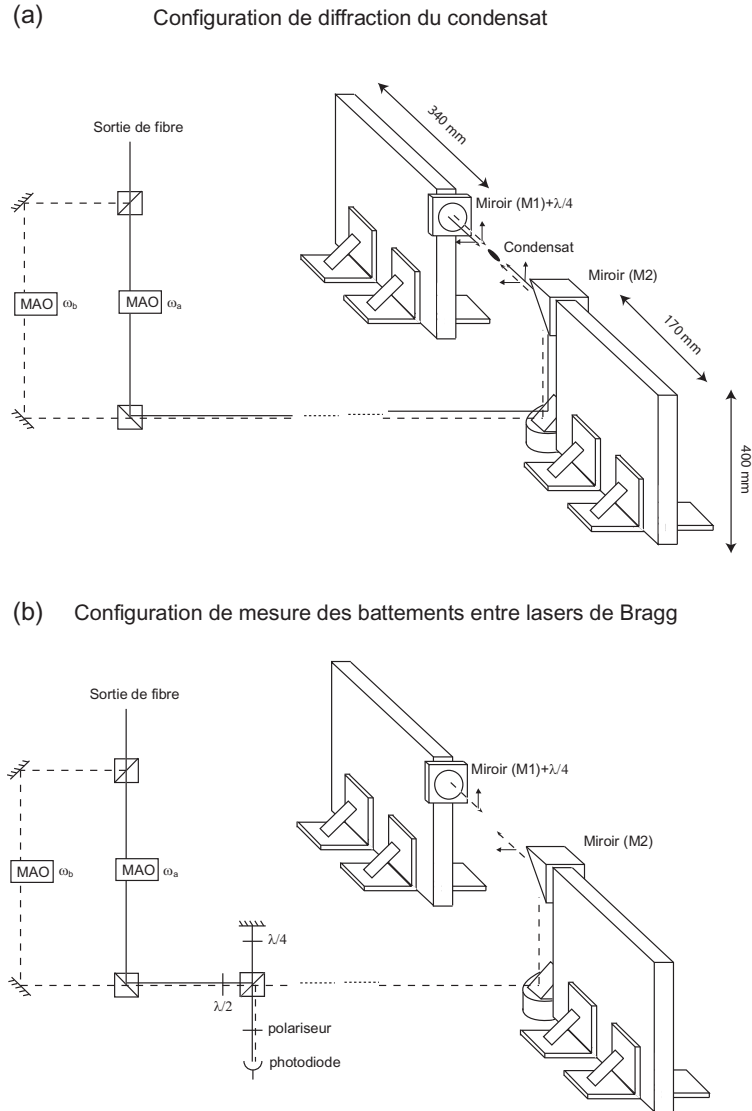


FIG. 5.4: Dessin du montage des faisceaux. Les miroirs sur les chemins des acousto-optiques (MAO) sont à quelques centimètres de la table optique, sur des pieds en laiton massif, et vibrent peu. Les miroirs (M1) et (M2) à 35 cm de hauteur nécessitent des supports particuliers, très rigides longitudinalement, d'où le choix de plaques de Dural. Ces plaques sont un peu isolées de la table par une fine épaisseur de sorbothane (non représentée). **(a)** Montage utilisé lors de la diffraction du condensat. Dans cette configuration le miroir critique est le miroir de rétro-réflexion (M1). La lame  $\lambda/4$  devant (M1) sert à régler les polarisations relatives des faisceaux contre-propageant. **(b)** Montage utilisé pour la mesure et l'optimisation des battements entre les lasers de Bragg. Avec ce montage, le miroir (M2) est aussi critique que (M1), ce qui explique la nécessité de stabiliser également son support, afin que la mesure des battements ne reflète pas uniquement les vibrations de (M2).

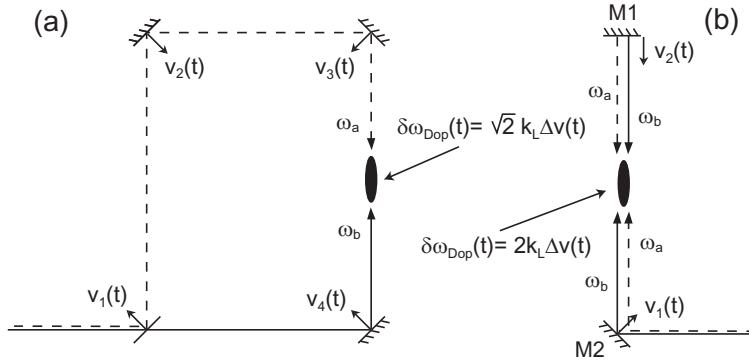


FIG. 5.3: Exemples de schémas optiques de faisceaux contre-propageant. (a) Le désaccord des lasers  $\Delta\omega$  vu par les atomes est sensible aux vibrations des 3 miroirs et de la séparatrice,  $\Delta v(t) = -v_1 + v_2 + v_3 - v_4$  (chaque vitesse est prise positive dans le sens de la flèche). (b) Dans cette configuration beaucoup plus robuste seul le miroir de rétro-réflexion (M1) est une source de bruit pour  $\Delta\omega$  car  $\Delta v(t) = v_2$ .

Expérimentalement, nous avons constaté que les miroirs sur des montures Radiant Dyes fixées à des pieds en laiton massif, à environ 10 cm de hauteur par rapport à la table optique vibraient de façon négligeable. Ils permettent d'obtenir des battements entre deux lasers de quelques dizaines de Hertz de large, à la limite de la résolution de l'analyseur de spectre utilisé. Mais le condensat est 35 cm au dessus de la table optique et il est difficile d'éliminer les vibrations de supports aussi hauts. Nous avons donc dû fixer les miroirs en hauteur sur des plaques de métal (Dural), comme dessiné sur la FIG. 5.4. La longueur des plaques assure une grande rigidité selon l'axe des faisceaux et minimise ainsi les vibrations. Nous avons fixé ces plaques à la table optique en intercalant une fine épaisseur de sorbothane.

Il faut préciser qu'a priori seule la plaque supportant le miroir de rétro-réflexion est utile pour l'expérience, comme le montre le schéma de la FIG. 5.3(b). L'autre plaque a été installée pour le processus d'optimisation du montage, et la recherche des sources de bruit. En effet, nous avons cherché à minimiser la largeur du spectre du signal de battement entre un faisceau sorti des AOM et un faisceau passé par l'emplacement du condensat. Ce schéma, présenté sur la FIG. 5.4(b), donne un signal sensible aux deux miroirs en hauteur (M1) et (M2), et particulièrement au miroir (M2) puisque le faisceau s'y réfléchit deux fois. Mais le signal doit refléter le comportement du miroir de rétro-réflexion (M1) et non uniquement celui du miroir (M2) non critique pour la diffraction de Bragg. Il faut donc éviter que le miroir (M2) ne vibre trop, et masque toute contribution de (M1) à l'élargissement du spectre des battements.

Un grand soin a également été apporté à l'isolation de la table optique des sources de vibrations. Par exemple, la pompe primaire de la pompe turbo-moléculaire, sous la table optique, a été placée sur des sacs de sable, pour éviter de transmettre par le sol des vibration à la table optique. Cela a permis de supprimer des bandes latérales à 25 Hz sur le spectre des battements.

Pour illustrer l'utilité des plaques de Dural comme supports de miroir, nous avons représenté sur la FIG. 5.5 des spectres de battements de 15 ms, mesurés dans la configuration

dont l'amplitude est maximum lorsque les lasers sont de même polarisation.

### 5.1.4 Stabilité du désaccord : un enjeu crucial

En pratique, et en plus de l'élargissement spectral par la limite de Fourier, le bruit sur le désaccord relatif des faisceaux contre-propageant se traduit directement par un élargissement de la résonance de diffraction.

La faible différence de fréquences nécessaire entre les faisceaux permet de les créer à partir d'une source laser unique. L'avantage énorme de cette situation est que les deux faisceaux sont alors intrinsèquement cohérents en phase. Et donc le désaccord relatif est immune à tout bruit sur la fréquence de la source (par réjection de mode commun). En pilotant des modulateurs acousto-optiques (un pour chaque faisceau) avec des synthétiseurs radio-fréquence on peut choisir ce désaccord relatif avec une finesse, et une stabilité sur l'échelle d'une journée, meilleures que 1 Hz.

### Montage optique

En revanche, il faut parvenir à garder une cohérence de phase suffisante entre les faisceaux au cours de la propagation jusqu'aux atomes. Pour des faisceaux de désaccord parfaitement défini, les fluctuations de phase relative vues par les atomes ne peuvent venir que de variations de la différence des chemins optiques respectifs. Ces variations de chemin optique sont essentiellement dues aux vibrations des miroirs, qui déplacent de façon apparente la source par rapport au point où se trouvent les atomes. Ainsi, un miroir vibrant, de vitesse  $v(t)$ , décale par effet Doppler la fréquence vue par un observateur fixe par rapport à la source de  $\delta\omega_{\text{Dop}} \propto k_L v(t)$  (voir FIG. 5.2). Il est donc

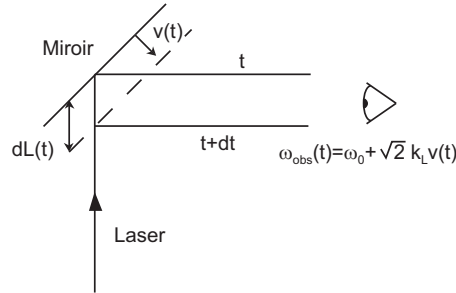


FIG. 5.2: Effet Doppler induit par la vibration d'un miroir. Le chemin optique entre la source laser et l'observateur varie à la vitesse  $dL/dt = \sqrt{2}v(t)$ . L'effet Doppler sur la fréquence mesurée vaut alors  $\delta\omega_{\text{Dop}}(t) = \sqrt{2}k_L v(t)$ .

important de choisir soigneusement le type de montage optique des faisceaux contre-propageant. La FIG. 5.3 montre les deux montages de base possibles. Pour le montage (a), le désaccord des lasers de fréquences  $\omega_a$  et  $\omega_b$  vu par les atomes, est donné par  $\Delta\omega(t) = \omega_a - \omega_b + \sqrt{2}k_L(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4)$ . Le schéma (b) montre un montage rétro-réfléchi beaucoup plus robuste puisqu'ici  $\Delta\omega_{\pm}(t) = \pm(\omega_a - \omega_b) + 2k_L v_2$  où les deux expressions “+” et “-” de  $\Delta\omega(t)$  proviennent des deux paires de faisceaux contre-propageant de désaccord non nul créées par la rétro-réflexion (on ne considère pas les paires formées d'un faisceau et de sa propre réflexion).

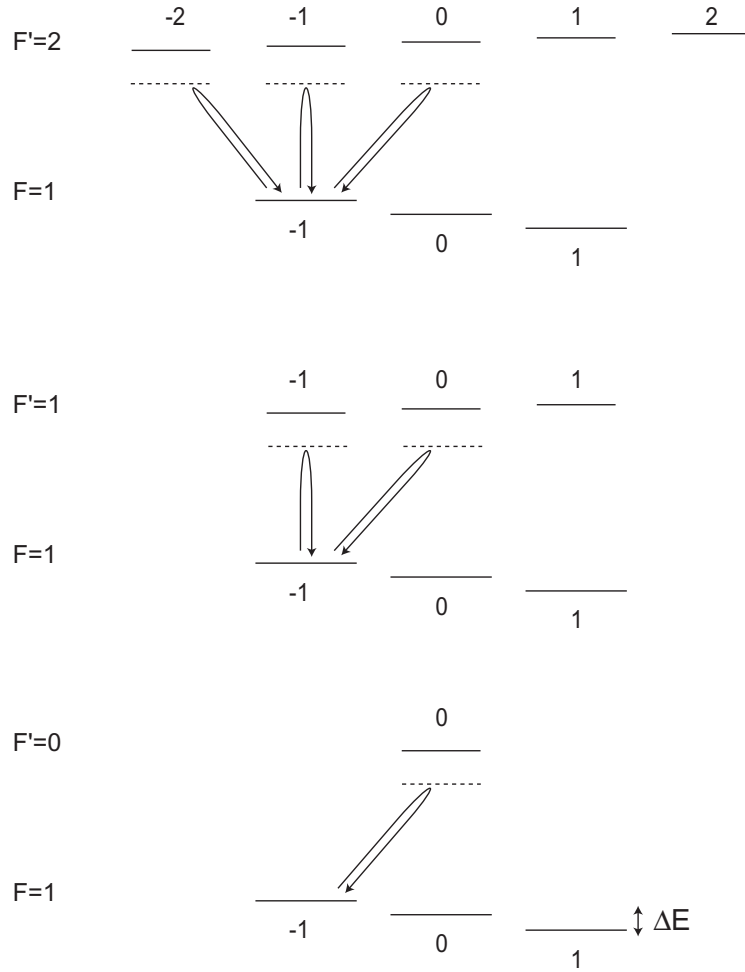


FIG. 5.1: Transitions mises en jeu lors de la diffraction de Bragg. Pour plus de clarté on a représenté les transitions à 2 photons que l'on peut considérer comme briques élémentaires des transitions à 4 photons. Les transitions à 4 photons possibles sont données par l'ensemble des combinaisons de 2 transitions à 2 photons représentées. Toutes ces transitions conservent l'état interne de l'atome. Les transitions avec changement d'état sont décalées de  $\Delta E > 30 \text{ kHz}$  par effet Zeeman des transitions représentées, soit de beaucoup plus que la largeur d'un spectre de Bragg (qqes centaines de Hz), et sont donc loin de résonance.

$\omega_a - \omega_b - 8\omega_R \ll 2\pi\Delta E/2$ , seules les transitions insensibles à l'effet Zeeman (i.e  $\Delta m_F = 0$ ) sont résonnantes. Elles sont représentées sur la FIG. 5.1.

En pratique, les polarisations des lasers contre-propageants ont été choisies linéaires. Le maximum de diffraction était alors obtenu lorsqu'elles étaient parallèles. Cela peut s'expliquer qualitativement en considérant que pour une transition à deux photons de type Bragg, il n'y a pas de transfert de moment cinétique aux atomes. On attend donc un maximum de diffraction lorsque la polarisation du laser dans lequel les photons sont absorbés est identique à la polarisation du laser dans lequel les photons sont émis. Une autre façon de le comprendre est que la diffraction de Bragg se fait sur un réseau d'intensité,



### Pulsation de Rabi

La pulsation de Rabi effective à 4 photons est donnée par (4.50) :

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^4}{2^5 \Delta^2 \omega_R}, \quad (5.6)$$

avec  $\omega_R = \hbar k_L^2 / 2m$ . Or, dans le régime de faible couplage, où l'on considère la population de l'état initial constante, la pulsation de Rabi représente en fait le taux de transitions à 4 photons (voir (4.40) et (4.41)). Donc le rapport  $\bar{\Omega} / \gamma_{sp}$  doit être grand pour que le système ne soit pas perturbé l'émission spontanée pendant la diffraction.

### Rapport transitions à 4 photons / émission spontanée

Le rapport des taux de transition à 4 photons et d'émission spontanée, en fonction de l'intensité des lasers s'écrit :

$$\frac{\bar{\Omega}}{\gamma_{sp}^{tot}} = \frac{\Gamma}{8\omega_R} \frac{I}{I_{sat}}. \quad (5.7)$$

Pour un rapport  $I / I_{sat} = 1$ , ce qui est l'ordre de grandeur de ce que l'on détermine empiriquement pour diffracter à résonance environ 20 % du condensat, on trouve  $\bar{\Omega} / \gamma_{sp}^{tot} \simeq 200$ . On s'attend donc dans ces conditions à pouvoir négliger l'émission spontanée.

### Vérification expérimentale

En pratique nous n'observons pas de pertes d'atomes dans le condensat lorsqu'il est soumis aux lasers de Bragg hors de la résonance à 4 photons. L'émission spontanée n'est donc pas un problème pour l'expérience.

#### 5.1.3 Transitions mises en jeu

Même si l'on ne peut connaître leur poids relatif dans le processus de diffraction, il est intéressant de préciser les différentes transitions autorisées. En particulier, il n'est pas évident a priori que l'état interne final des transitions à 4 photons soit identique à l'état initial. En effet, la polarisation quelconque des lasers par rapport au champ magnétique résiduel autorise a priori tous les types de transition,  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  et  $\pi$ .

En revanche, ces transitions ne sont pas dégénérées, à cause de l'effet Zeeman. Nous pouvons estimer une borne inférieure de leur écart en énergie, en considérant que le champ résiduel n'est très vraisemblablement pas compensé à mieux que 50 mG. Le décalage Zeeman entre les sous-niveaux de l'état fondamental  $F = 1$  est donc au moins de l'ordre de  $\pm 30$  kHz puisqu'il est donné par  $\Delta E = g_F m_F \mu_B B$ , avec  $g_F = -1/2$  et  $\mu_B = h \times 1.4$  MHz/G. On obtient donc 3 conditions de résonance

$$\omega_a - \omega_b = 8\omega_R + \frac{2k_L p}{m} + \epsilon \frac{2\pi \Delta E}{2}, \quad (5.8)$$

où  $\epsilon = 0, +1, +2$  suivant que la transition correspond à  $\Delta m_F = 0, +1, +2$ . Or la largeur attendue des spectres est de l'ordre de quelques centaines de Hz, soit beaucoup moins que l'écart entre les transitions ; par conséquent en mesurant un spectre avec la condition

### 5.1.2 Fréquence absolue, puissance des lasers

Le processus de diffraction utilisé pour la spectroscopie de Bragg est en compétition avec la diffusion de photons par émission spontanée. Il faut choisir le désaccord par rapport à la résonance de la transition atomique et l'intensité des lasers de façon à favoriser largement les processus stimulés à 4 photons.

Nous avons à disposition sur l'expérience des lasers accordés sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  de la raie D<sub>2</sub> du rubidium ( $\lambda \simeq 780$  nm), dont nous pouvons prélever une partie pour les faisceaux de Bragg. Cela nous permet, en étant désaccordé d'environ 7 GHz en dessous des transitions  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 0, 1, 2\rangle$ , de limiter l'émission spontanée.

Pour évaluer rigoureusement le taux d'émission spontanée et de diffraction il serait nécessaire de tenir compte des différents niveaux excités. Mais la direction du champ résiduel présent à l'instant de la diffraction étant indéterminée, il est difficile d'évaluer précisément les taux d'émission spontanée et de diffraction attendus, puisqu'un grand nombre de transitions sont permises (voir FIG. 5.1).

Nous calculons donc ici les ordres de grandeurs typiques des deux processus, dans le cas d'un système à deux niveaux. Nous vérifierons ensuite expérimentalement que l'émission spontanée est bien négligeable.

On se place dans le système à deux niveaux étudié à la section 4.4. On suppose de plus que les deux lasers ont la même intensité, ce qui se traduit par  $\Omega_a = \Omega_b \equiv \Omega$ .

#### Taux d'émission spontanée

Le taux d'émission spontanée induit par chaque laser s'écrit :

$$\gamma_{sp} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}, \quad (5.1)$$

où le paramètre de saturation  $s$  est défini par :

$$s = \frac{\Omega^2/2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4}, \quad (5.2)$$

ou, de façon équivalente,

$$s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + \frac{4\Delta^2}{\Gamma^2}}, \quad (5.3)$$

car la fréquence de Rabi est liée à l'intensité du laser par :

$$2\frac{\Omega^2}{\Gamma^2} = \frac{I}{I_{\text{sat}}}. \quad (5.4)$$

Comme  $\Delta \simeq 7$  GHz et  $\Gamma = 5.9$  MHz, alors  $\Delta \gg \Gamma$ , et  $\gamma_{sp}$  se met sous la forme simplifiée :

$$\gamma_{sp} \simeq \frac{\Gamma\Omega^2}{4\Delta^2}. \quad (5.5)$$

Le taux total, tenant compte des deux lasers vaut  $\gamma_{sp}^{\text{tot}} = 2\gamma_{sp}$ .

## Chapitre 5

---

# Mesure de la distribution des vitesses d'un quasi-condensat par spectroscopie de Bragg

Dans ce chapitre nous présentons la réalisation de la mesure de la distribution de vitesse longitudinale d'un quasi-condensat. Nous décrivons tout d'abord le montage des lasers de Bragg, et les choix qui ont été faits pour obtenir la meilleure stabilité possible de leur désaccord relatif, la résolution spectrale nécessaire étant de l'ordre de 100 Hz. Ensuite, nous détaillons la séquence expérimentale d'acquisition d'un spectre et les paramètres à choisir pour optimiser la résolution. En particulier, nous discutons des différentes sources de bruit à considérer, et du moyennage qu'elles impliquent. Enfin, nous analysons les résultats obtenus, et les confrontons à la théorie exposée au chapitre 4.

### 5.1 Dispositif et caractéristiques des lasers de Bragg

#### 5.1.1 Donnée préalable : état interne des atomes

Le condensat est produit dans l'état  $|F = 1, M_F = -1\rangle$  et reste dans cet état lors de la coupure du piège car le moment cinétique des atomes suit adiabatiquement le champ magnétique résiduel. Nous savons ceci par expérience : lorsque l'on transfère par radio-fréquence une fraction du condensat dans les états  $|F = 1, M_F = 0\rangle$  et  $|F = 1, M_F = 1\rangle$  juste avant d'ouvrir le piège, trois nuages distincts sont obtenus après temps de vol. En l'absence de transfert radio-fréquence avant l'ouverture on n'observe qu'un seul nuage, signe du suivi adiabatique du champ.

En revanche, on ne connaît pas la direction du champ magnétique local après l'ouverture du piège et donc on ne connaît pas l'axe de quantification associé à l'état  $|F = 1, M_F = -1\rangle$ .

### Distribution des vitesses

Dans le piège, la distribution des vitesses est directement liée aux fluctuations de phase. La largeur caractéristique correspondante est donnée au paragraphe suivant.

Le piège étant très anisotrope, la distribution des vitesses longitudinales est peu affectée par l'expansion, car l'essentiel de l'énergie de champ moyen est libéré dans les directions radiales. À partir du modèle d'expansion de Y. Castin et R. Dum [27] (voir les rappels théoriques section 1.3.2), on peut déterminer la distribution des vitesses longitudinales après la coupure du piège. Dans le cas de l'ouverture instantanée du piège, une fois atteint le régime asymptotique  $t \gg 1/\omega_\perp$ , on obtient alors la distribution de vitesse longitudinale normalisée  $D(v_z) = (15/16V_{\text{exp}})[1 - (v_z/V_{\text{exp}})^2]^2$ , de demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta v_z = V_{\text{exp}}(1 - 1/\sqrt{2})^{1/2}$ , avec la vitesse caractéristique d'expansion  $V_{\text{exp}} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_z}{\omega_\perp} L_0 \omega_z$ . L'élargissement Doppler résultant est :

$$\Delta \nu_{\text{Dop}}^{\text{exp}} \simeq \frac{2k_L}{2\pi} \Delta v_z \simeq 60 \text{ Hz}.$$

### Fluctuations de phase

On veut mesurer la distribution de vitesse longitudinale associée aux fluctuations de phase dans le piège. Nous avons vu à la section 4.2.6 que le temps caractéristique de leur évolution hors du piège était très grand devant tous les temps d'évolution accessibles à notre expérience : le temps de chute maximum autorisé est de l'ordre de 27 ms. Nous avons également estimé l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence qui leur est associée  $L_\phi \simeq L_0/10$ , pour nos paramètres. Nous en déduisons l'ordre de grandeur de l'élargissement du spectre :

$$\Delta \nu_{\text{fluct}} \simeq \frac{2k_L}{2\pi} \frac{\hbar}{mL_\phi} \simeq 150 \text{ Hz}.$$

D'après les calculs d'ordre de grandeur des autres effets, celui-ci est dominant.

### Conclusion

D'après ce comparatif, il n'y a pas d'inconvénient à effectuer la spectroscopie sur le condensat en expansion, puisqu'à la fois les fluctuations de phase ne doivent pas évoluer pendant ce temps de vol nécessaire, et leur signature spectrale ne devrait pas être noyée par l'élargissement dû à l'expansion longitudinale. On évite ainsi le problème des collisions entre atomes diffractés et atomes du condensat.

Notons néanmoins que l'élargissement spectral dû à l'expansion du nuage hors du piège, ainsi que l'élargissement de Fourier, ne sont pas négligeables devant la contribution des fluctuations de phase. Nous en tiendrons compte dans une fonction d'appareil, qui inclura d'autres sources d'élargissement provenant des imperfections de la mesure, que nous allons voir dans le prochain chapitre. Ce dernier chapitre décrit la procédure d'acquisition des spectres, et leur analyse.

### Le problème des collisions

Les atomes diffractés ayant une vitesse supérieure à la vitesse critique pour la superfluidité, ils subissent des collisions avec les atomes du condensat. Ces collisions non seulement dispersent les atomes diffractés en un halo, ce qui rend leur comptage difficile, mais en plus diffusent des atomes du condensat, mélangeant ainsi atomes diffractés et atomes simplement diffusés comme le montre la FIG. 4.8. On estime le nombre moyen de collisions  $N_{\text{coll}}$  pour un atome diffracté traversant tout le condensat suivant son axe longitudinal par  $N_{\text{coll}} \equiv \sigma \int n(0, 0, z) dz \simeq 0.4N_0\sigma/R^2$ , où  $n(x, y, z)$  est la densité spatiale du condensat :

- dans le piège :  $N_{\text{coll}} \simeq 18$ ,
- après expansion :  $N_{\text{coll}} \simeq 0.18$ .

Le condensat piégé, en son centre, est donc collisionnellement épais, au contraire du cas après expansion, où la densité est réduite de deux ordres de grandeur en 2 ms. C'est la principale raison pour effectuer la spectroscopie hors du piège.

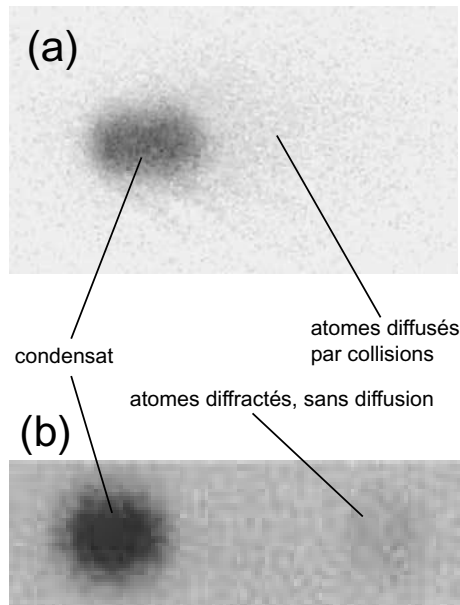


FIG. 4.8: **(a)** Image résultant de la diffraction d'un condensat dans le piège. Les atomes diffractés ont subi des collisions avec les atomes du condensat, ce qui produit le halo diffus. **(b)** Diffraction après 2 ms d'expansion, le nuage diffracté est bien visible, et non diffus. Les collisions sont négligeables.

### Énergie de champ moyen

Elle est principalement source d'un élargissement du spectre (cf Eq. (4.59)), noté  $\Delta\nu_{\text{int}}$ , proportionnellement à la densité atomique.

- Dans le piège :  $\Delta\nu_{\text{int}} \simeq 300$  Hz
- Après expansion :  $\Delta\nu_{\text{int}} \simeq 3$  Hz

des contributions de chaque élément de densité  $n$  données par l'Eq. (4.55), soit :

$$N_{\text{diff}}(\omega_{ab}) = \int_0^{n_0} N_{\text{diff}}(\omega_{ab}, n) N(n) dn, \quad (4.56)$$

où  $N(n) = (15n/4n_0)\sqrt{1 - n/n_0}$  est la distribution de densité normalisée, pour un profil de Thomas-Fermi [5], avec  $n_0$  la densité au centre. En faisant l'approximation  $16\omega_{\text{R}}/\omega_{\text{q}}^{\text{B}}(n) = 1$ , on obtient l'expression explicite :

$$N_{\text{diff}}(\omega_{ab}) \propto \frac{2\hbar(\omega_{ab} - 8\omega_{\text{R}})}{gn_0} \sqrt{1 - \frac{2\hbar(\omega_{ab} - 8\omega_{\text{R}})}{gn_0}}. \quad (4.57)$$

On remarque que l'efficacité de diffraction est nulle à la fréquence de résonance  $8\omega_{\text{R}}$  que l'on aurait en l'absence de champ moyen. Cela s'explique par le fait que tous les atomes diffractés voient un champ moyen non nul. En d'autres termes, là où le champ moyen est nul, il n'y a pas d'atomes à diffracter.

On déduit de cette expression le désaccord moyen du spectre  $\langle\omega_{ab}\rangle$ , et sa demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta\omega$ , tous deux linéaires vis-à-vis de la densité :

$$\langle\omega_{ab}\rangle_{\text{int}} = \frac{2gn_0}{7\hbar} \quad (4.58)$$

$$\Delta\omega_{\text{int}} \simeq 0.37 \frac{gn_0}{\hbar} \quad (4.59)$$

Pour finir, rappelons que ces valeurs sont calculées dans le cas de transitions à 4 photons, et sont à multiplier par 2 dans le cas transitions à 2 photons.

En pratique, nous nous placerons dans une situation où la densité atomique sera faible, et où les effets sur les spectres des interactions de champ moyen seront négligeables.

### 4.5.3 Comparaison de la spectroscopie dans le piège et hors du piège

Comme nous allons le voir, les collisions entre le condensat et le nuage diffracté rendent difficile la spectroscopie dans le piège. Une solution est de couper le piège et de laisser la densité décroître avant d'appliquer les lasers de Bragg. Nous comparons ici les différentes contributions aux spectres dans les deux situations, dans nos conditions expérimentales typiques. Les paramètres sont les suivants :

- fréquence radiale du piège :  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 760$  Hz
- fréquence longitudinale du piège :  $\omega_z = 2\pi \times 5$  Hz
- nombre d'atomes condensés :  $N_0 = 5 \times 10^4$
- longueur de diffusion :  $a \simeq 5.31$  nm
- section efficace de collision :  $\sigma = 8\pi a^2$
- temps d'expansion éventuel :  $\tau_{\text{exp}} = 2$  ms
- demi-longueur du condensat dans le piège :  $L_0 \simeq 130$   $\mu\text{m}$
- rayon du condensat dans le piège :  $R_0 \simeq 0.8$   $\mu\text{m}$
- demi-longueur du condensat après expansion :  $L_{\text{exp}} = L_0$
- rayon du condensat après expansion :  $R_{\text{exp}} \simeq 8$   $\mu\text{m}$

### Effet de l'interaction de champ moyen sur le spectre de Bragg

L'effet du potentiel de champ moyen, dû aux interactions entre atomes, est d'une nature fondamentalement différente de celle du potentiel magnétique. Cette différence vient du fait qu'une particule dans le mode du condensat voit un potentiel de champ moyen deux fois plus faible qu'une particule hors du mode du condensat, comme un atome diffracté par exemple. Nous présentons ici les changements qualitatifs qui en découlent.

L'étude théorique de la diffraction de Bragg d'un condensat piégé a été menée dans [73]. Nous adaptons ici les résultats de cette référence à la spectroscopie à 4 photons quasi-résonnante, avec une durée infinie de l'impulsion laser pour s'affranchir de l'élargissement du spectre par transformée de Fourier.

**Condensat homogène** – On considère tout d'abord la spectroscopie d'un condensat homogène de densité  $n$ . En se plaçant dans le cadre de la théorie de Bogoliubov [14] pour un condensat homogène, la diffraction de Bragg transfère une partie de la population du mode du condensat vers les états excités d'énergies  $\hbar\omega_q^B$ , dont la relation de dispersion est donnée par :

$$\hbar\omega_p^B = \sqrt{\frac{q^2}{2m} \left[ \frac{q^2}{2m} + 2gn \right]}, \quad (4.54)$$

où  $q$  est l'impulsion de l'excitation et  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ,  $a$  étant la longueur de diffusion. En pratique, l'énergie des excitations créées est dominée par le terme  $q^2/2m$ , à cause de la grande impulsion des photons optiques. Dans cette limite on a par conséquent  $\hbar\omega_q^B = q^2/2m + gn$ , ce qui suggère l'appellation "excitations de type particule". La fraction de la population du condensat diffractée vers le mode d'impulsion  $q = 4\hbar k_L$  vaut [73] :

$$N_{\text{diff}}(\omega_{ab}, n) = \frac{16\omega_R}{\omega_q^B(n)} \frac{\bar{\Omega}^2 \pi T}{4} \delta\left(\omega_{ab} - \frac{\omega_q^B(n)}{2}\right), \quad (4.55)$$

avec  $\hbar\omega_q^B(n) = 16\hbar\omega_R + gn$ . On peut tout d'abord vérifier que l'on retrouve bien le résultat de l'Eq. (4.52) avec  $T \rightarrow \infty$  dans la limite  $g = 0$  et  $p = 0$  (le condensat est ici immobile). On voit ensuite que les interactions modifient à la fois l'amplitude de couplage et le centre de la résonance. On peut retrouver la condition de résonance par la conservation de l'impulsion et de l'énergie, en tenant compte du fait que les excitations ont une énergie de champ moyen deux fois plus grande que les atomes du condensat, l'écart devant être apporté par les photons en plus de l'énergie de recul. La modification de l'amplitude du couplage par les interactions provient quant à elle de l'expression de l'amplitude des modes excités [73].

**Condensat inhomogène, approximation de densité locale** – L'application du résultat précédent pour déterminer le spectre d'un condensat avec un profil de Thomas-Fermi est simple dans le cadre d'une approximation de densité locale [74]. Ce traitement est valable tant que la longueur d'onde des excitations est très petite devant la longueur du condensat, ce qui est largement vérifié dans notre cas. Chaque volume élémentaire de densité  $n$  du condensat se comporte, dans cette approximation comme un condensat homogène de même densité. La fraction diffractée est alors la somme

Une fraction de la population de la classe d'impulsion résonnante  $p$  du condensat<sup>4</sup> est diffractée dans un état d'impulsion  $p + 4\hbar k_L$ . Ce mode est initialement vide car  $\hbar k_L$  est très grand devant la largeur en impulsion du condensat.

**Séparation spatiale** – Une fois le piège coupé, le mode de grande impulsion se sépare spatialement du condensat, pendant un temps d'évolution libre.

**Image, Mesure** – On prend une image par absorption, qui montre les deux nuages d'atomes séparés. On mesure la fraction d'atomes qui a été diffractée.

**On recommence** – On recommence la séquence, avec un nouveau condensat, pour d'autres valeurs du désaccord des lasers, et on trace finalement la fraction d'atomes couplés en fonction de  $\omega_{ab}$ .

## 4.5.2 Les différentes contributions au spectre de Bragg

Nous présentons ici les différents facteurs élargissements d'un spectre de Bragg. Pour éviter les confusions, toutes les largeurs mentionnées sont des demi-largeurs à mi-hauteur. Nous les noterons par leur acronyme anglais HWHM (pour Half-Width at Half-Maximum). Ce choix a l'avantage d'être applicable à n'importe quel profil, alors qu'une largeur quadratique moyenne, par exemple, n'est pas définie pour une lorentzienne.

### Limite de Fourier

La durée  $T$  d'application des lasers impose une limite fondamentale à la largeur des spectres mesurés, qui varie comme  $1/T$ .

### Effet Doppler

Comme nous l'avons montré pour la diffraction d'atomes libres, la distribution des vitesses selon l'axe des lasers est imprimée dans le spectre de Bragg par l'intermédiaire du terme d'effet Doppler dans la condition de résonance. Pour une distribution de largeur  $\Delta v$ , la contribution au spectre est de largeur  $\Delta\omega_{\text{Dop}} = 2k_L\Delta v$ . C'est cette contribution spectrale que nous voulons mesurer.

### (Absence d')Effet du champ magnétique sur le spectre de Bragg

Un potentiel extérieur, de type potentiel magnétique, ne change pas la condition de résonance des transitions à 4 photons car les états internes finaux et initiaux des atomes sont les mêmes. Une conséquence importante de cela est l'immunité de l'efficacité de diffraction vis-à-vis des variations temporelles et spatiales du champ magnétique. Cependant, un champ magnétique inhomogène peut accélérer les atomes ce qui se répercute par effet Doppler sur le spectre.

---

<sup>4</sup>De même qu'au début du chapitre on ne considère que la composante de l'impulsion des atomes parallèle aux lasers, sans perte de généralité, car elle seule intervient dans les conditions de résonance. La composante orthogonale peut être quelconque.



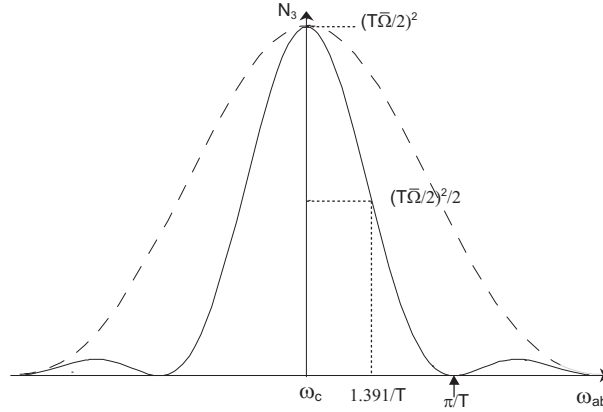


FIG. 4.7: Résonance d'une transition à 4 photons. La largeur est divisée par 2, pour une même durée d'impulsion crête  $T$ , par rapport à la transition à 2 photons (courbe en tirets). La fréquence centrale est  $\omega_c = 8\omega_R + \frac{2k_L p}{m}$ .

#### 4.4.5 Pourquoi l'appellation "diffraction de Bragg"

On appelle souvent ces transitions multiphotoniques avec transfert d'impulsion "diffraction" d'atomes par la lumière. En effet, un atome dans le champ de deux lasers contre-propageant voit un potentiel périodique, qui diffracte l'onde de de Broglie associée à l'atome. Cette analogie optique permet de trouver les conditions de diffraction, qui sont identiques aux conditions de résonance des transitions à  $n$  photons.

Pour des calculs explicites, quantitatifs, la description en termes de transitions multiphotoniques est cependant beaucoup plus pratique.

### 4.5 Application à la mesure de la distribution des vitesses longitudinales d'un condensat de Bose-Einstein

Nous discutons dans ce paragraphe des conditions générales de l'application des transitions à 4 photons à la mesure de la distribution des vitesses longitudinales d'un condensat. Après avoir décrit la séquence expérimentale "type", nous présentons les conséquences sur les spectres des interactions atomiques. Nous motivons en particulier le choix d'effectuer la spectroscopie du condensat hors du piège.

#### 4.5.1 Protocole

Très brièvement, la mesure de la distribution des vitesses se fait selon la séquence suivante :

**Impulsion lasers** – Une fois le condensat obtenu, on applique, soit avant, soit après ouverture du piège (voir implications plus loin), une impulsion de deux lasers contre-propageant, de vecteurs d'ondes  $\pm k_L$  désaccordés l'un par rapport à l'autre de  $\omega_{ab}$ .

On a choisi  $\Omega_{a,b}$  réelles. Dans le cas présent, l'expression devient :

$$\bar{\Omega} = \frac{(\Omega_a \Omega_b)^2}{2^5 \Delta^2 \omega_R}, \quad (4.50)$$

où l'on a utilisé  $\Delta_3 \simeq \Delta_1 \equiv \Delta \gg \omega_R$ , et  $\Delta_2 = 4\omega_R$ .

#### 4.4.2 Condition de résonance et amplitude de couplage

La condition de résonance s'écrit comme auparavant  $\delta = 0$ . Mais le désaccord vis-à-vis de la résonance est ici donné par :

$$\delta = 2(\omega_a - \omega_b) - 16\omega_R - \frac{4k_L p}{m}, \quad (4.51)$$

Avec cette expression de  $\delta$ , l'équation (4.44) est toujours valide ce qui donne comme population de l'état d'impulsion  $4\hbar k_L$ , pour une "impulsion créneau" de durée  $T$  :

$$|C_3(\omega_{ab}; p)|^2 = \left( \frac{T\bar{\Omega}}{2} \right)^2 \left[ \frac{\sin T(\omega_{ab} - \omega_c)}{T(\omega_{ab} - \omega_c)} \right]^2, \quad (4.52)$$

où  $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$  est comme auparavant le désaccord entre les lasers et  $\omega_c = 8\omega_R + \frac{2k_L p}{m}$  est la fréquence de résonance à 4 photons.

#### 4.4.3 Comparaison des spectres à 2 et 4 photons

Il est intéressant de comparer l'Eq. (4.52) à son analogue (4.45) sur 2 points :

1. Tout d'abord, on voit que l'argument du sinus cardinal varie avec le désaccord des lasers comme  $T\omega_{ab}$  et non plus  $T\omega_{ab}/2$ . Cela a comme conséquence importante que l'élargissement du spectre par la durée finie du créneau est divisé par deux (voir FIG. 4.7). On peut relier cela au pouvoir séparateur d'un réseau en optique, qui est deux fois meilleur pour une diffraction au second ordre.
2. En revanche, la dépendance de  $\omega_c$  en  $p$  est identique, ce qui signifie que la sensibilité de la mesure à  $p$  n'a pas changé. En particulier, dans le cas d'une impulsion de durée infinie, on retrouve exactement la relation (4.48).

Le spectre obtenu par transitions à quatre photons (pour une distribution d'impulsion de la forme  $\delta(p)$ ) est donc de forme semblable à celle du spectre représenté sur la FIG. 4.5, mais son centre est décalé de  $4\omega_R$  et sa largeur est divisée par deux.

#### 4.4.4 Généralisation à un atome à plusieurs niveaux

Dans le cas d'un atome à plusieurs niveaux excités, la fréquence de Rabi généralisée pour les transitions à 4 photons est la somme des fréquences de Rabi

$$\bar{\Omega} = \sum_i^n \sum_j^n \frac{\Omega_{1i}^* \Omega_{2i} \Omega_{2j}^* \Omega_{3j}}{2^5 \Delta_i \Delta_j \omega_R}, \quad (4.53)$$

où  $i$  et  $j$  sont deux états excités transitoires parmi  $n$  possibles, et où les fréquences de Rabi sont définies par  $\Omega_{ij}^* = -\langle i | \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_a | j \rangle / \hbar$  et  $\Omega_{ij} = -\langle j | \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_b | i \rangle / \hbar$ . Les désaccords  $\Delta_i$  sont définis quant à eux par  $\hbar \Delta_i = E_i - \hbar \omega_a$ .

Pour une impulsion de durée infinie la fonction d'appareil est infiniment fine et le spectre de Bragg reproduit la distribution d'impulsion. On obtient  $N_3(\omega_{ab}) \propto |f[\frac{m}{2k_L}(\omega_{ab} - \omega_c)]|^2$ , en utilisant (4.46). De là découle le résultat, par ailleurs intuitif, reliant la largeur du spectre  $\Delta\omega$  et la largeur  $\Delta p$  de  $|f(p)|^2$  :

$$\Delta\omega = \frac{2k_L}{m}\Delta p \quad (4.48)$$

#### 4.4 Extension aux transitions à 4 photons

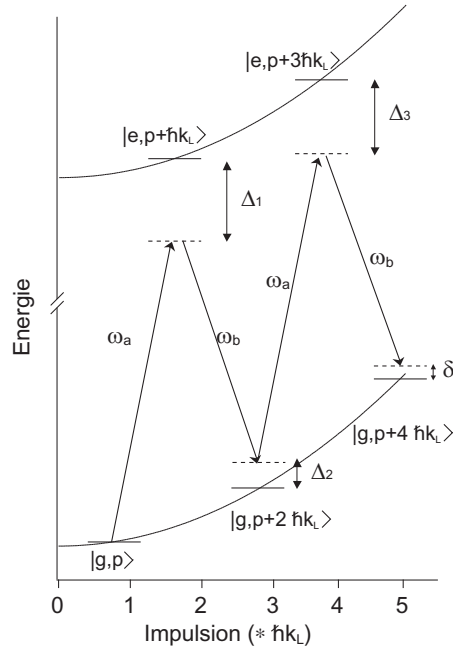


FIG. 4.6: Diagramme d'une transition à 4 photons.

En pratique nous utilisons des transitions à 4 photons (voir FIG. 4.6). L'avantage de ces transitions est de communiquer une impulsion de  $4\hbar k_L$  aux atomes, et donc de mieux séparer spatialement, après un temps d'évolution libre donné, les deux nuages d'atomes (dans les états  $|g,p\rangle$  et  $|g,p+4\hbar k_L\rangle$ ). De plus, comme nous allons le voir, ce processus divise par deux l'élargissement du spectre dû au temps d'interaction fini. Par un calcul similaire à celui qui vient d'être développé, on peut se ramener à un système à deux niveaux.

##### 4.4.1 Fréquence de Rabi

La fréquence de Rabi effective se déduit de l'expression générale pour les transitions à  $2n$  photons [72] :

$$\bar{\Omega} = \frac{(\Omega_a \Omega_b)^n}{2^{2n-1} \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{2n-1}}. \quad (4.49)$$

La courbe de résonance est tracée sur la FIG. 4.5. La résolution d'une mesure effectuée dans ces conditions peut être définie par la largeur de cette courbe, naturellement proportionnelle à  $1/T$ .

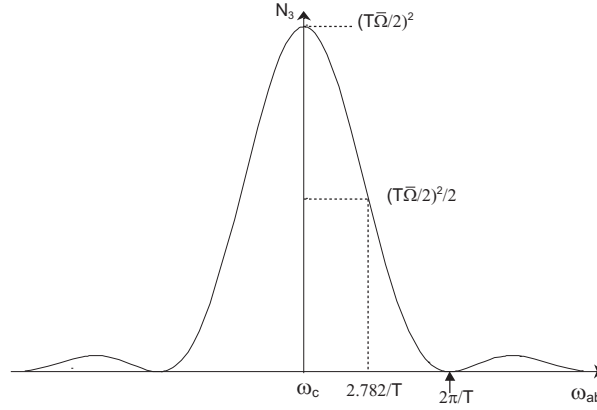


FIG. 4.5: Résonance de la transition à 2 photons pour une impulsion de durée  $T$ , de fréquence de Rabi effective  $\bar{\Omega}$ , avec  $\omega_c = 4\omega_R + 2k_L p/m$ , où  $p$  est l'impulsion initiale de l'atome. La largeur à mi-hauteur est donnée par  $2.782/T$ , et la fréquence centrale  $\omega_c = 4\omega_R + \frac{2k_L p}{m}$ .

### Créneau de durée infinie

Il est utile pour la suite de considérer la limite  $T \rightarrow \infty$  : dans cette limite  $(1/T\pi)[\sin(Tx)/x]^2 \rightarrow \delta(x)$ , avec  $\delta(x)$  la fonction delta de Dirac. L'Eq. (4.45) prend alors la forme :

$$N_3(\omega_{ab}; p) = \frac{\bar{\Omega}^2 \pi T}{2} \delta(\omega_{ab} - \omega_c). \quad (4.46)$$

Ce résultat signifie simplement que pour un couplage de durée infinie, la sélection en énergie est infiniment fine (et la conservation de l'énergie exactement respectée).

### Spectre de Bragg d'un paquet d'onde

Les résultats précédents donnent les spectres de Bragg obtenus pour une onde de de Broglie plane, c'est à dire d'impulsion parfaitement définie. La généralisation à un paquet d'onde est immédiate [70]. Le paquet d'onde  $|\psi(t)\rangle$  se décompose sur les états  $|\psi_p(t)\rangle$  définis par les Eq. (4.36) (et évoluant indépendamment les uns des autres), selon  $|\psi(t)\rangle = \int f(p) |\psi_p(t)\rangle dp$  où la distribution dans l'espace des impulsion  $|f(p)|^2$  est normalisée. Le spectre de Bragg prend alors la forme :

$$N_3(\omega_{ab}) = \int |f(p)|^2 N_3(\omega_{ab}; p) dp, \quad (4.47)$$

ce qui s'interprète comme la convolution de la distribution des impulsions  $|f(p)|^2$  par la "fonction d'appareil" de la mesure  $N_3(\omega_{ab}; p)$ . La largeur du spectre dépend alors à la fois de la largeur de la distribution d'impulsion et de la largeur de la "fonction d'appareil", les contributions respectives dépendant de la forme de chacune des fonctions.

obtient finalement les équations d'évolutions équivalentes à un système à deux niveaux :

$$\frac{d\tilde{C}_1}{dt} = i\frac{\bar{\Omega}}{2}e^{i(\frac{|\Omega_b|^2-|\Omega_a|^2}{4\Delta}+\delta)t}\tilde{C}_3 \quad (4.40)$$

$$\frac{d\tilde{C}_3}{dt} = i\frac{\bar{\Omega}^*}{2}e^{-i(\frac{|\Omega_b|^2-|\Omega_a|^2}{4\Delta}+\delta)t}\tilde{C}_1, \quad (4.41)$$

avec  $\tilde{C}_1 = C_1 e^{-i|\Omega_a|^2 t/4\Delta}$ ,  $\tilde{C}_3 = C_3 e^{-i|\Omega_b|^2 t/4\Delta}$  et la fréquence de Rabi effective pour ce système à deux niveaux :

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega_a^* \Omega_b}{2\Delta}. \quad (4.42)$$

### Condition de résonance et faible couplage

On déduit des équations (4.40) et (4.41) la condition de résonance  $\delta + \frac{|\Omega_b|^2-|\Omega_a|^2}{4\Delta} = 0$ , où les termes  $|\Omega_{a,b}|^2/4\Delta$  représentent les déplacements lumineux des états  $|1\rangle$  et  $|3\rangle$  respectivement.

Dans la limite de faible couplage, utile pour la spectroscopie de Bragg, on peut négliger les déplacements lumineux. La condition de résonance est alors donnée par :

$$\omega_a - \omega_b = 4\omega_R + \frac{2k_L p}{m}, \quad (4.43)$$

avec  $\omega_R = \hbar k_L^2/2m$ . Le deuxième terme de cette équation est le terme crucial pour la spectroscopie de Bragg, puisqu'il contient, sous forme d'effet Doppler, la dépendance en vitesse de l'atome. Notons enfin que l'on retrouve la condition de résonance en écrivant simplement la conservation de l'impulsion et de l'énergie pour la transition à deux photons.

Toujours dans la limites de faible couplage, on peut résoudre perturbativement les équations (4.40) et (4.41) pour le système initialement dans l'état  $|1\rangle$ , soumis à une impulsion laser de durée finie. Cela consiste à garder constante la population de l'état initial. La variation temporelle de l'intensité des lasers est introduite dans la fréquence de Rabi effective  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(t)$ , que l'on choisit réelle pour simplifier les notations. La population  $N_3 = |C_3|^2$  de l'état  $|3\rangle$  s'écrit simplement :

$$N_3(\delta) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\Omega}(t)}{2} e^{-i\delta t} dt \right|^2. \quad (4.44)$$

La population transférée dans l'état  $|3\rangle$  est donc proportionnelle à la densité spectrale de puissance de  $\bar{\Omega}(t)$  à la fréquence  $\delta$ .

### Spectre de Bragg associé à une "impulsion créneau"

Pour une impulsion en forme de créneau de durée  $T$  et d'amplitude  $\bar{\Omega}$  on obtient un sinus cardinal :

$$N_3(\omega_{ab}; p) = \left( \frac{T\bar{\Omega}}{2} \right)^2 \left[ \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega_{ab} - \omega_c)}{\frac{T}{2}(\omega_{ab} - \omega_c)} \right]^2. \quad (4.45)$$

On a posé  $\delta = \omega_{ab} - \omega_c$  avec  $\omega_c = 4\omega_R + 2k_L p/m$ . La condition de validité de cette solution perturbative est  $T\bar{\Omega}/2 \ll 1$ .

### Hamiltonien atomique

Dans cette base d'états, l'hamiltonien atomique  $H_A$  s'écrit :

$$H_A = \frac{p^2}{2m} |1\rangle\langle 1| + \left[ \frac{(p + \hbar k_L)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \right] |2\rangle\langle 2| + \frac{(p + 2\hbar k_L)^2}{2m} |3\rangle\langle 3| \quad (4.37)$$

### Hamiltonien d'interaction

L'hamiltonien d'interaction dipolaire électrique est égal à  $H_I = -\vec{d} \cdot (\vec{E}_a + \vec{E}_b)$  [71], où  $\vec{d}$  est le moment dipolaire électrique de l'atome. On considère que  $\vec{E}_a$  ne couple que les états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  et  $\vec{E}_b$  les états  $|2\rangle$  et  $|3\rangle$ , ce qui est justifié lorsque  $\hbar\delta \ll E_1 - E_3$ . En faisant l'approximation quasi-résonnante (ou approximation du champ tournant), on peut alors écrire :

$$H_I = \hbar \frac{\Omega_a}{2} e^{-i\omega_a t} |2\rangle\langle 1| + \hbar \frac{\Omega_b}{2} e^{-i\omega_b t} |2\rangle\langle 3| + h.c. \quad (4.38)$$

Les fréquences de Rabi  $\Omega_{a,b}$  sont définies par  $\Omega_{a,b} = -\langle e | \frac{\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{a,b}}{\hbar} | g \rangle$ . Noter de plus que la règle de sélection sur les impulsions des états couplés par  $H_I$  est déjà prise en compte dans l'Eq. (4.38). Le facteur  $e^{\pm ik_L z} = \int |p\rangle\langle p \pm \hbar k_L| dp$  de l'expression des champs électriques, qui induit cette règle de sélection, n'apparaît donc pas dans (4.38).

### Équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger dépendante du temps donne alors les équations d'évolution des coefficients  $C_i(p, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= -i \frac{\Omega_a^*}{2} e^{-i\Delta t} C_2 \\ \frac{dC_2}{dt} &= -i \frac{\Omega_a}{2} e^{i\Delta t} C_1 - i \frac{\Omega_b}{2} e^{i(\Delta+\delta)t} C_3 \\ \frac{dC_3}{dt} &= -i \frac{\Omega_b^*}{2} e^{-i(\Delta+\delta)t} C_2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

où  $\Delta = \frac{\hbar k_L^2}{2m} + \frac{k_L p}{2m} + \omega_0 - \omega_a$  représente le désaccord de  $\omega_a$  à la transition  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ , et  $\delta = -\frac{2\hbar k_L^2}{m} - \frac{2k_L p}{m} + \omega_a - \omega_b$  le désaccord de  $\omega_{ab}$  à la transition  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ .

#### 4.3.3 Solution : système à deux niveaux équivalent

##### Système à deux niveaux équivalent

Dans le cas qui nous intéresse, où  $\Delta \gg |\Omega_a|, |\Omega_b|, \delta$ , on peut éliminer adiabatiquement le niveau intermédiaire  $|2\rangle$  en supposant que l'évolution de  $C_2$  est très rapide devant celle de  $C_1$  et  $C_3$  et donc en négligeant la dépendance temporelle de ces coefficients dans l'Eq. (4.39). On néglige ensuite, dans l'expression de  $C_2$  obtenue, les termes oscillant rapidement aux fréquences  $\Delta$  et  $\Delta + \delta$ , dont la contribution à l'évolution de  $C_1$  et  $C_3$  se moyenne à 0. On

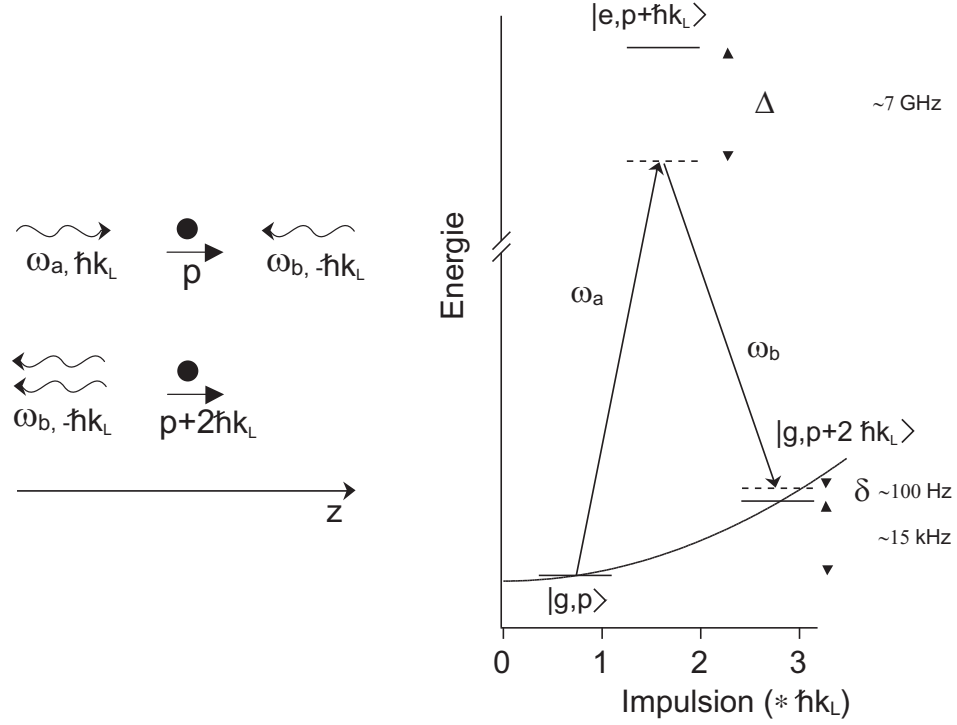


FIG. 4.4: **À gauche**, représentation symbolique de la diffusion stimulée à 2 photons : le photon de pulsation  $\omega_a$  est absorbé, et un photon de pulsation  $\omega_b$  est émis de façon stimulée. **À droite**, diagramme des états atomiques couplés. Les ordres de grandeur des fréquences mises en jeu sont indiqués.

les transitions Raman couplent 2 niveaux fondamentaux internes de l'atome. Le formalisme est cependant identique.

### 4.3.2 Équation de Schrödinger

Considérons un atome dans les champs  $\vec{E}_a$  et  $\vec{E}_b$  des lasers  $a$  et  $b$  :

$$\vec{E}_a(z, t) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_a}{2} \left[ e^{-i(\omega_a t - k_L z)} + c.c. \right] \quad (4.34)$$

$$\vec{E}_b(z, t) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_b}{2} \left[ e^{-i(\omega_b t + k_L z)} + c.c. \right]. \quad (4.35)$$

On écrit l'état  $\psi_p$  de l'atome sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle 1 | \psi_p \rangle &= C_1(p, t) e^{-i \frac{p^2}{2m\hbar} t} \\ \langle 2 | \psi_p \rangle &= C_2(p, t) e^{-i \left( \frac{(p+\hbar k_L)^2}{2m\hbar} + \omega_0 \right) t} \\ \langle 3 | \psi_p \rangle &= C_3(p, t) e^{-i \frac{(p+2\hbar k_L)^2}{2m\hbar} t}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec la condition de normalisation  $\langle \psi_{p'} | \psi_p \rangle = \delta(p - p')$ .

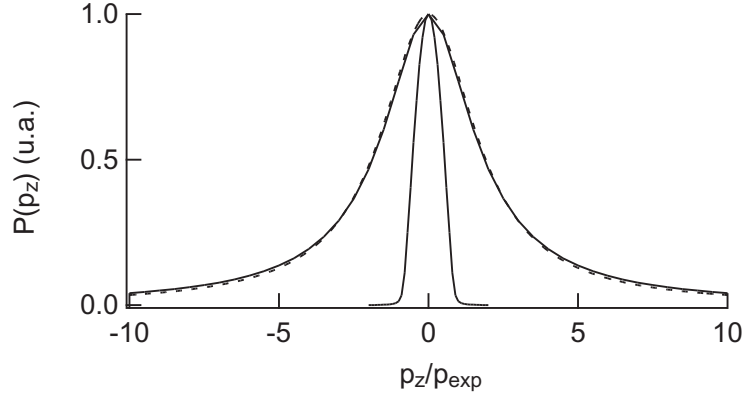


FIG. 4.3: Distributions en impulsion longitudinale d'un quasi-condensat en expansion pour deux valeurs du paramètre  $\gamma = p_\phi/p_{\text{exp}}$ . Pour la comparaison, elles sont normalisées à 1 en  $p_z = 0$ . La courbe avec  $\gamma = 0$  (la plus étroite) correspond à un condensat sans fluctuations de phase. La courbe à  $\gamma = 3$  montre une distribution dominée par les fluctuations de phase. Elle est quasiment indiscernable de la lorentzienne (pointillés) de largeur  $0.64p_\phi$  et donc quasiment identique à la distribution dans le piège.

### 4.3 Diffraction de Bragg, transition à 2 photons sélective en vitesse

Dans cette partie, nous exposons le principe de la sélection en vitesse des atomes. L'interprétation en terme de diffusion stimulée à 2 photons est tout d'abord présentée, permettant une approche quantitative.

#### 4.3.1 Principe

Le principe est le suivant : un atome est éclairé par deux lasers  $a$  et  $b$  de vecteurs d'ondes  $k_L \vec{u}_z$  et  $-k_L \vec{u}_z$  et de pulsations associées  $\omega_a$  et  $\omega_b$ . On note  $p$  la projection de l'impulsion initiale de l'atome sur l'axe des lasers. L'impulsion orthogonale aux lasers est une constante du mouvement, quelconque. Chacun des lasers est quasi-résonnant avec la transition atomique de pulsation  $\omega_0$ . Le diagramme de la FIG. 4.4 montre les niveaux d'énergie de l'atome et leur couplage. Il apparaît sur ce schéma que l'on peut choisir les désaccords  $\Delta \simeq \omega_0 - \omega_a$  et  $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$  de sorte que l'absorption d'un photon du laser  $a$  et l'émission stimulée d'un photon dans le mode du laser  $b$  soit un processus résonnant. On peut donc écrire l'équation de Schrödinger de l'atome dans le champ des lasers, en considérant le système à trois niveaux de la FIG. 4.4. On néglige alors l'émission spontanée, ce qui requiert  $\Delta \gg \Gamma$ , où  $\Gamma$  est la largeur naturelle du niveau excité. Les trois niveaux couplés, nommés  $|g, p\rangle$ ,  $|e, p + \hbar k_L\rangle$  et  $|g, p + 2\hbar k_L\rangle$  sur le schéma, sont caractérisés par l'état interne de l'atome ( $|g\rangle$  étant l'état fondamental et  $|e\rangle$  l'état excité) et son impulsion, mais pour plus de simplicité ils seront respectivement désignés dans la suite par  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  et  $|3\rangle$  et leur énergie par  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .

L'étude quantitative des transitions à 2 photons présentée maintenant est détaillée dans [70], à propos de transitions Raman. Contrairement aux transitions "de Bragg" traitées ici,



d'un champ de vitesse longitudinal qui se développe en un temps de l'ordre de  $\omega_{\perp}^{-1}$ . On peut écrire, tant que l'expansion longitudinale est négligeable :

$$v_z(z) = V_z \frac{z}{L} \quad (4.30)$$

où  $L$  est la demi-longueur du quasi condensat et  $V_z = \frac{\pi}{2}\epsilon^2\omega_{\perp}L$  (voir section 1.3.2), avec  $\epsilon = \omega_z/\omega_{\perp}$ .

Or, nous avons vu, notamment avec l'équation (4.27), que la distribution en impulsion totale du quasi condensat était la somme de distributions en impulsion "locales" de demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta p(z) = \hbar/2L_{\phi}(z)$ , découlant de la longueur de cohérence locale  $L_{\phi}(z)$ , pondérées par la densité 1D  $n_{1D}(z)$ . L'effet du champ de vitesse d'expansion est alors simplement de centrer la distribution en vitesse locale autour de la vitesse d'expansion locale  $v_z(z)$ . La distribution en impulsion totale devient donc la somme de lorentziennes de largeurs et de centres dépendant de  $z$ . On aboutit donc à :

$$P(p_z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz n_{1D}(z) \int ds \exp\left(-\frac{s}{2L_{\phi}(z)}\right) e^{-i[p_z - p_{\text{exp}}(z)]s/\hbar}, \quad (4.31)$$

où  $p_{\text{exp}}(z) = mv_z(z)$ . Ce qui peut se mettre sous une forme directement comparable à (4.28) :

$$P(p_z) \simeq \frac{n_{1D}(0)}{2\pi p_{\phi}} \int dz \frac{\left[\frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}\right]^2}{\left[\frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}\right]^2 \left[\frac{p_z - p_{\text{exp}}(z)}{p_{\phi}}\right]^2 + \frac{1}{4}}. \quad (4.32)$$

Une autre formulation,

$$P(p_z) = \frac{n_{1D}(0)\gamma}{2\pi p_{\text{exp}}} \int dz \frac{\left[\frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}\right]^2}{\left[\frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}\right]^2 \left(\frac{p_z}{p_{\text{exp}}} - \frac{z}{L}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (4.33)$$

permet d'exprimer  $P(p_z)$  en fonction de  $\gamma = p_{\phi}/p_{\text{exp}}$ , avec  $p_{\text{exp}} = mV_z$ .

Le paramètre  $\gamma$  détermine la prédominance, dans la distribution en impulsion, de l'impulsion de l'expansion due au champ moyen ou de celle des fluctuations de phase. Pour  $\gamma \rightarrow 0$ , on retrouve la distribution en impulsion à  $T = 0$  (1.20). En revanche, pour  $\gamma > 3$ , la distribution initiale n'est quasiment pas affectée par l'expansion, sa largeur ne changeant pas de plus de quelques pourcents pendant l'expansion [FIG.. 4.3].

### 4.2.7 Conclusion

Cette étude montre que la distribution en impulsion est une très bonne observable pour caractériser les quasi-condensats, même pour un quasi-condensat en expansion. De plus, comme nous allons le voir, la méthode de spectroscopie de Bragg est très bien adaptée à cette mesure, et donne directement accès à la quantité physique que l'on veut mesurer. Autrement dit, la difficulté essentielle de cette méthode est d'obtenir la distribution en vitesse avec peu d'erreurs systématiques (ou des erreurs bien maîtrisées) et peu de bruit. Mais ensuite l'interprétation des signaux sera simple.

Voici à présent la description théorique de la mesure de la distribution en vitesse par spectroscopie de Bragg.

lorentzienne, de demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta p \simeq 1.8\hbar/L$  [5], dans le cas Thomas-Fermi 3D. Par conséquent, les fluctuations de phase non seulement élargissent la distribution par un facteur de l'ordre de  $L/4L_\phi$ , mais changent également la forme de son profil.

#### 4.2.6 Fluctuations de phase d'un quasi-condensat en expansion

Pour des raisons pratiques, la mesure de la distribution en impulsion doit se faire après avoir relâché le quasi-condensat du piège (voir la discussion à la fin du chapitre). Il est donc nécessaire d'estimer l'évolution des fluctuations de phase pendant le temps d'expansion précédant la mesure. Il faut également estimer la modification de la distribution en impulsion du fait de l'expansion.

##### Évolution des fluctuations de phase

L'évolution des fluctuations de densité pendant l'expansion libre du quasi-condensat a été étudiée par Petrov et le groupe de Hannovre dans [11] et [56]. C'est en établissant le lien entre fluctuations de densité après expansion et fluctuations de phase initiales qu'ils ont pu mettre en évidence expérimentalement l'existence de quasi-condensats pour la première fois.

Pour notre part, nous devons estimer l'échelle de temps d'évolution des fluctuations de phase hors du piège. Pour cela, on se place dans l'approximation de densité locale, et l'on décompose les excitations de basse énergie sur la base des ondes planes. La densité du quasi-condensat évolue selon la loi d'échelle décrite à la section 1.3.2, soit  $n_0(r_\perp, t) = n_0(r_\perp/\lambda_\perp, 0)/\lambda_\perp^2$ , avec  $\lambda_\perp = \sqrt{1 + \tau^2}$ , où  $\tau = \omega_\perp t$ . On se place dans la limite  $t \ll \omega_\perp/\omega_z^2$ , où l'expansion axiale est négligeable. La relation de dispersion des excitations est la loi de Bogoliubov habituelle  $\omega_k^B(t) = \sqrt{\omega_k(\omega_k + \mu/\lambda_\perp)}$ , où  $\mu$  est le potentiel chimique initial du condensat. À partir de l'évolution des fluctuations de densité, en utilisant l'équation de continuité, on obtient pour l'évolution de la phase du mode de vecteur d'onde  $k$  :

$$\phi_k(z, \tau) \simeq \phi_k(z, 0)\tau^{-(\omega_k^B/\omega_\perp)^2} \cos(\omega_k t). \quad (4.29)$$

Pour la plus grande partie des excitations axiales 1D  $\omega_k^B/\omega_\perp \ll 1$ . La variation de la phase est donc dominée par le cosinus. Nous verrons que nous effectuons les mesures sur les nuages après environ 3 ms de temps d'expansion. Les modes "gelés", tels que  $\omega_k t \ll 1$  ont alors des longueurs d'onde grandes devant  $1 \mu\text{m}$ . Nous pourrions vérifier a posteriori que les longueurs de cohérence mesurées sont nettement supérieures à cette limite. Par conséquent les fluctuations de phase, dans nos conditions, pourront être considérées comme gelées à l'ouverture du piège.

Pour plus de détails sur ce calcul, et sur la conversion des fluctuations de phase en fluctuations de densité, voir [56] et [55].

##### Distribution en impulsion d'un quasi condensat en expansion

Nous venons de voir que les fluctuations de phase étaient gelées dans les premiers temps de l'expansion. Cependant, une partie de l'énergie d'interaction dans le piège est convertie en énergie cinétique longitudinale (voir section 1.3.2). Cette conversion se fait sous la forme

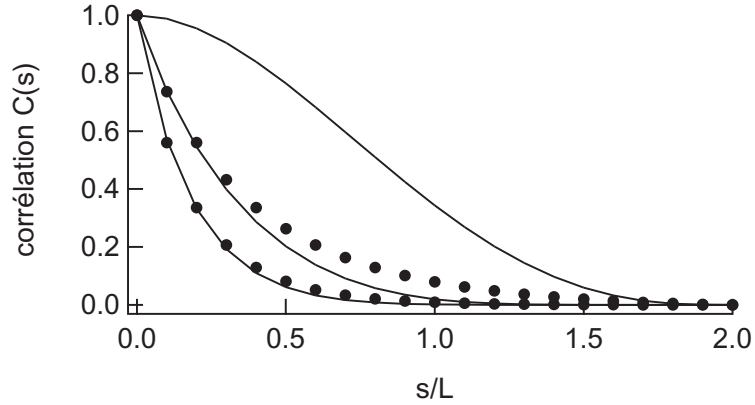


FIG. 4.2: Fonction de corrélation moyenne  $C(s)$ , en fonction de  $s$  en unité de  $L$ , demi-longueur du quasi-condensat. En trait continu, calcul exact avec (4.19). Les points correspondent à l'approximation de densité locale (4.26). Le paramètre  $T/T_\phi$  vaut 0, 4 et 8 par longueur de cohérence décroissante.

Ce résultat dépend peu de  $n_{1D}(z)$ . On peut faire de même un fit exponentiel de la courbe donnée par (4.26) dans le cas où le quasi-condensat est 1D, c'est à dire que radialement son mode est le mode fondamental du piège. Sa densité 1D est alors de la forme [63, 52]  $n_{1D}(z) = \frac{3N_0}{2L}(1 - \frac{z^2}{L^2})$ . On trouve alors  $\bar{L}_c \simeq L_\phi/0.62$ . Le fait déjà évoqué, qu'en pratique, les quasi-condensats que nous étudions sont dans un régime entre de Thomas-Fermi 3D et 1D ne doit donc pas avoir d'effet important sur leur fonction de corrélation.

### Distribution en impulsion

Cette décroissance exponentielle de la fonction de corrélation moyenne  $C(s)$  présente un grand intérêt pratique : cela implique que la distribution en impulsion longitudinale  $P(p_z)$  est bien approximée par une lorentzienne, de mi-largeur à mi-hauteur  $\Delta p_\phi = 0.64p_\phi$ , avec  $p_\phi = \hbar/L_\phi$ .

Quant à la transformée de Fourier de (4.26), approximée par cette lorentzienne, on peut la simplifier analytiquement. Elle se met sous la forme :

$$P(p_z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz n_{1D}(z) \int ds \exp\left(-\frac{s}{2L_\phi(z)}\right) e^{-ip_z s/\hbar}, \quad (4.27)$$

qui est la moyenne, pondérée par  $n_{1D}(z)$ , des distributions en impulsion correspondant aux longueurs de cohérence locales  $L_\phi(z)$ . Ces distributions sont des lorentzienne de mi-largeur à mi-hauteur  $\Delta p = \hbar/2L_\phi(z)$ . Cela donne :

$$P(p_z) \simeq \frac{n_{1D}(0)}{2\pi p_\phi} \int dz \frac{\left[\frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}\right]^2}{\left[\frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}\right]^2 \left(\frac{p_z}{p_\phi}\right)^2 + \frac{1}{4}}. \quad (4.28)$$

Il est intéressant de noter que pour un condensat sans fluctuations de phases, la distribution en impulsion longitudinale est une courbe en cloche sans ailes, très différente d'une

### Généralisation à un profil quelconque (non Thomas-Fermi 3D)

Le calcul de  $L_\phi(z)$  dans l'approximation de densité locale permet également de montrer que la dépendance en  $n_{1D}(z)$  n'est pas seulement valable dans le cas du régime de Thomas-Fermi 3D, mais quel que soit le profil radial, tant que les excitations considérées sont 1D. Autrement dit, et cela a déjà été utilisé dans [52], [48] et [69], les modes d'excitations 1D peuvent être calculés à partir d'équations hydrodynamiques 1D, ne faisant intervenir que  $\omega_z$  et  $n_{1D}(z)$ , l'influence du profil radial étant entièrement contenue dans la densité 1D.

Ce point est important, puisqu'il implique que l'on peut calculer  $T_\phi$  et  $L_\phi$ , pour des données expérimentales, à partir de la densité 1D du quasi-condensat. Or les quasi-condensats que nous produisons sont dans le régime intermédiaire entre Thomas-Fermi et le régime 1D "champ moyen" (voir section 3.4). Dans ces conditions, c'est la densité 1D que l'on mesure avec le moins d'erreur systématique due à l'imperfection de la fonction de fit utilisée (cette discussion a été développée dans la section 3.4).

### Fonction de corrélation

Dans l'approximation de densité locale, la fonction de corrélation moyenne  $C(s)$ , s'écrit donc, en utilisant (4.12), (4.13) et (4.24) :

$$C(s) = \int dz \sqrt{n_{1D}(z + s/2)n_{1D}(z - s/2)} \exp\left(-\frac{s}{2L_\phi(z)}\right). \quad (4.25)$$

Le terme sous la racine carré est la contribution de l'enveloppe de densité à la décroissance de la fonction de corrélation. Plus  $T$  est grande devant  $T_\phi$ , plus la dépendance en  $s$  de ce terme est négligeable devant la vitesse de décroissance de l'exponentielle, et il peut être remplacé par  $n_{1D}(z)$  lorsque  $T \gg T_\phi$ . Cela donne, en remplaçant également  $L_\phi(z)$  par son expression en fonction de  $T/T_\phi$  :

$$C(s) = \int dz n_{1D}(z) \exp\left(-\frac{T n_{1D}(0) s}{2T_\phi n_{1D}(z) L}\right). \quad (4.26)$$

La FIG. 4.2 compare ce résultat et la fonction de corrélation exacte calculée à partir de l'équation (4.19). Les courbes pour  $T = 0$ ,  $T/T_\phi = 4$  et  $T/T_\phi = 8$  sont représentées dans le cas d'un profil de Thomas-Fermi 3D, c'est à dire pour  $n_{1D}(z) = \frac{15N_0}{16L}(1 - \frac{z^2}{L^2})^2$ . Pour  $T = 0$ , la fonction de corrélation ne dépend que de la densité du condensat, et est exactement donnée par (4.25). On voit ensuite que l'accord entre le calcul exact et l'approximation de densité locale est très bon dès  $T/T_\phi = 8$ .

De plus, nous avons constaté qu'un ajustement de la forme  $\exp(-\alpha s/L_\phi)$  reproduisait très bien l'approximation (4.26) lorsque  $T/T_\phi > 8$ , donnant un coefficient  $\alpha = 0.64(3)$ , variant très peu avec  $T/T_\phi$ . L'erreur indiquée sur la valeur de  $\alpha$  correspond à son amplitude de variation sur des ajustements de courbes tracées pour  $8 < T/T_\phi < 30$ . Le même ajustement sur la fonction de corrélation exacte est aussi bon et donne un facteur  $\alpha$  identique à mieux que 5% lorsque  $T/T_\phi > 8$ .

Ce résultat signifie que la moyenne des exponentielles décroissantes qu'exprime l'équation (4.26) est elle-même semblable à une exponentielle décroissante, correspondant à la longueur de cohérence<sup>3</sup>  $\bar{L}_c = L_\phi/0.64$ .

<sup>3</sup>Rappelons que  $L_\phi$  est la demi-longueur de cohérence au centre du nuage.

### Comportement au centre du piège

Au centre du piège, c'est à dire pour  $z, z' \ll L$ , les fluctuations de phase ont un comportement linéaire<sup>2</sup> [9] :

$$\Delta\phi^2(z, z') \simeq \frac{T}{T_\phi} |z - z'|/L, \quad (4.20)$$

où  $k_B T_\phi = 15N_0(\hbar\omega_z)^2/32\mu$ . La fonction de corrélation  $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$  au centre du piège est donc une fonction exponentiellement décroissante de  $|z - z'|$ , lorsque  $T \gg T_\phi$ . En effet, sous cette condition, la fonction de corrélation s'annule quasiment sur la zone de validité de (4.20), et a donc un comportement essentiellement exponentiel, dominé par les fluctuations de phase. Tout se passe comme si la densité était constante sur l'échelle de distance de l'annulation de la fonction de corrélation au centre du piège. On définit la longueur de cohérence locale  $2 \times L_\phi$  comme la longueur de décroissance à  $1/e$  de la fonction de corrélation. Ce qui donne  $L_\phi = LT_\phi/T$ . Il est intéressant de noter que l'on peut exprimer  $L_\phi$  sous une autre forme, ne dépendant que de la densité 1D au centre du quasi-condensat et de sa température :

$$L_\phi = \frac{\hbar^2 n_{1D}(0)}{mk_B T} \quad (4.21)$$

où la densité 1D est définie par  $n_{1D}(z) = \int dx dy n_0(\vec{r})$ .

### Approximation de densité locale

Pour  $T \gg T_\phi$ , le calcul menant à la définition de  $L_\phi$  peut être généralisé à toute position longitudinale  $z$  le long du quasi-condensat. On trouve ainsi une longueur de cohérence locale, qui ne dépend que de la densité locale  $n_{1D}(z)$  et de  $T$ . Ce résultat peut également être retrouvé par une approximation de densité locale, associant aux modes d'excitation avec  $j \gg 1$  (qui prennent une importance croissante lorsque  $T$  augmente) une amplitude et un vecteur d'onde locaux, ne dépendant que des mêmes grandeurs,  $n_{1D}$  et  $T$ . Ce calcul est développé dans la thèse de Fabrice Gerbier [55].

Le résultat important est donc que l'on généralise la notion de longueur de cohérence locale à l'ensemble du quasi-condensat, en remplaçant simplement  $n_{1D}(0)$ , dans (4.21), par  $n_{1D}(z)$ . On obtient ainsi la demi-longueur de cohérence locale  $L_\phi(z)$  :

$$L_\phi(z) = \frac{\hbar^2 n_{1D}(z)}{mk_B T}, \quad (4.22)$$

ou bien encore,

$$L_\phi(z) = L_\phi \frac{n_{1D}(z)}{n_{1D}(0)}. \quad (4.23)$$

Avec (4.22) et (4.23) l'équation (4.20) se généralise à l'ensemble du condensat (sauf très près des bords, où la densité varie vite), et donne :

$$\Delta^2\phi(z + s/2, z - s/2) = \frac{s}{L_\phi(z)}. \quad (4.24)$$

On pourra vérifier sur la FIG. 4.2 que l'approximation de densité locale est effectivement très valable dès  $T/T_\phi \gtrsim 8$ .

---

<sup>2</sup>Ce résultat s'obtient en prenant la forme asymptotique des polynômes de Jacobi  $P_j^{(1,1)}$  avec  $j \gg 1$ . Il n'est pas forcément aussi immédiat que ce qui est dit dans [9].

De là, on tire la distribution en impulsion longitudinale  $P(p_z)$ , intégrée sur les impulsions radiales  $p_x$  et  $p_y$  :

$$\begin{aligned}
P(p_z) &= \int dp_x dp_y P(\vec{p}), \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int dp_x dp_y \int d^3q C(\vec{q}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{q}/\hbar}, \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^3q C(\vec{q}) \delta(q_x) \delta(q_y) e^{-ip_z s/\hbar}, \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int ds C(s) e^{-ip_z s/\hbar}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

La fonction de corrélation moyenne  $C(s)$  est donc simplement reliée à la distribution en impulsion longitudinale  $P(p_z)$  par transformée de Fourier. Nous allons utiliser cette propriété pour mesurer les fluctuations de phase de condensats anisotropes. La spectroscopie de Bragg, dont le principe est décrit dans la seconde partie de ce chapitre, permet de mesurer directement la distribution en impulsion longitudinale des quasi-condensats. Il est donc nécessaire, pour interpréter les résultats, de calculer la distribution en impulsion d'un quasi-condensat.

#### 4.2.4 Analogie avec un laser

L'analogie est simple : un quasi-condensat peut être considéré comme l'analogue d'une impulsion laser dont les fluctuations de phase sont telles que sa largeur spectrale est supérieure à la limite de Fourier. Au contraire, un condensat est l'analogue d'une impulsion laser à la limite de Fourier.

#### 4.2.5 Fluctuations de phase dans le piège

Commençons par le cas d'un condensat dans le régime de Thomas-Fermi 3D, dans un piège harmonique. Le spectre des excitations de basse énergie a été calculé dans [48], et vaut  $\epsilon_j = \hbar\omega_z \sqrt{j(j+3)}/4$ . Quant aux fonctions d'onde de ces modes, elles s'écrivent [10] :

$$f_j^\pm(\vec{r}) = \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)}{(j+1)8\pi R^2 L}} \left(\frac{2gn_0(\vec{r})}{\epsilon_j}\right)^{\pm 1/2} P_j^{(1,1)}(z/L), \tag{4.18}$$

où les  $P_j^{(1,1)}$  sont des polynômes de Jacobi, et  $L$  la demi-longueur du quasi-condensat. Les fluctuations de phase  $\Delta^2\phi(z, z')$  sont alors données par (voir définition à l'équation (4.12)) :

$$\Delta^2\phi(z, z') = \sum_j \frac{\mu(j+2)(2j+3)}{15(j+1)\epsilon_j N_0} \left[ P_j^{(1,1)}(z/L) - P_j^{(1,1)}(z'/L) \right]^2 N_j, \tag{4.19}$$

avec  $N_j$  la population thermique du mode  $j$ . On peut en bonne approximation prendre  $N_j = k_B T / \epsilon_j$ , puisque l'on a  $k_B T \gg \hbar\omega_\perp$  et donc  $k_B T \gg \epsilon_j$ . En effet, la somme sur  $j$  doit être limitée aux modes à caractère 1D, c'est à dire approximativement aux modes d'énergie  $\epsilon_j < \hbar\omega_\perp$ . Cette expression est cependant difficile à manipuler, et en particulier, ne permet pas d'obtenir des formules analytiques pour  $C(s)$  et  $P(p_z)$ .

Mais nous allons voir qu'il est possible par une approximation de densité locale de résoudre ce problème.

fluctuations de phase [10][55]. Comme dans le cas d'un condensat peu anisotrope habituel, les excitations 3D du nuage thermique ne détruisent pas la cohérence du condensat. Ce sont les excitations de basse énergie, dont la longueur d'onde est plus grande que le rayon du condensat, qui impriment les fluctuations de phase. Ces excitations sont purement 1D [9], ce qui explique que cette perte de cohérence du condensat, d'abord prévue pour les systèmes 1D, se produise également dans un système 3D, mais très anisotrope et donc avec beaucoup de modes d'excitation 1D.

### 4.2.3 Fonction de corrélation et distribution en impulsion

Comme en optique, les fluctuations de phase affectent directement les corrélations d'amplitude du champ. En effet, la matrice densité à un corps  $\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle$ , encore appelée fonction de corrélation du premier ordre, peut se mettre sous la forme [10] :

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}') = \sqrt{n_0(r_\perp, z) n_0(r'_\perp, z')} e^{\frac{-\Delta^2 \phi(z, z')}{2}}, \quad (4.12)$$

où  $\Delta^2 \phi(z, z') = \langle [\phi(z) - \phi(z')]^2 \rangle$  ne dépend que de  $z$  et  $z'$  puisque les fluctuations de phase résultent d'excitations 1D.

#### Fonction de corrélation moyenne

À partir de la matrice densité à un corps, on définit la fonction de corrélation spatiale moyenne  $C(\vec{s})$  comme :

$$C(s) = \int d^3r \rho\left(\vec{r} + \frac{s\vec{u}_z}{2}, \vec{r}' - \frac{s\vec{u}_z}{2}\right). \quad (4.13)$$

#### Distribution en impulsion

À partir de l'opérateur champ dans l'espace des impulsions

$$\hat{\Psi}(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \int d^3r \hat{\Psi}(\vec{r}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}, \quad (4.14)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \int d^3r \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}, \quad (4.15)$$

on obtient immédiatement le lien entre la distribution en impulsion  $P(\vec{p}) = \langle \hat{\Psi}(\vec{p})^\dagger \hat{\Psi}(\vec{p}) \rangle$  et la fonction de corrélation  $C(\vec{q})$ , avec  $\vec{q} = q_x \vec{u}_x + q_y \vec{u}_y + s \vec{u}_z$ , définie en (4.13) dans le cas particulier  $\vec{q} = s \vec{u}_z$  :

$$P(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3q C(\vec{q}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{q}/\hbar}. \quad (4.16)$$

est  $[\hat{n}(\vec{r}), \hat{\phi}(\vec{r}')] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ . L'équation de Heisenberg (1.21) de l'opérateur champ se transforme en un couple d'équations de type hydrodynamique :

$$\hbar \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \hat{\phi} \hat{n}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\hbar \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\hat{n}}}{\sqrt{\hat{n}}} + V(\vec{r}) + g\hat{n} = 0. \quad (4.4)$$

Dans le cas de faibles fluctuations, on peut développer l'opérateur densité en  $\hat{n} = n_0 + \delta\hat{n}$  et linéariser les équations ci-dessus autour de la solution stationnaire  $\hat{n} = n_0$  et  $\vec{\nabla} \hat{\phi} = \vec{0}$ . À l'ordre zéro, on obtient simplement l'équation de Gross-Pitaevskii pour  $n_0(\vec{r})$ . Au premier ordre, on trouve :

$$\hbar \frac{\partial(\delta\hat{n}/\sqrt{n_0})}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + gn_0 - \mu\right)(2\sqrt{n_0}\hat{\phi}), \quad (4.5)$$

$$-\hbar \frac{\partial(2\sqrt{n_0}\hat{\phi})}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + 3gn_0 - \mu\right)(\delta\hat{n}/\sqrt{n_0}). \quad (4.6)$$

Enfin en décomposant ces opérateurs sur la base d'excitations élémentaires  $f_\nu^\pm$ , d'énergie  $\epsilon_\nu$ , soit :

$$\delta\hat{n}(\vec{r}) = n_0(\vec{r})^{1/2} \sum_\nu i f_\nu^-(\vec{r}) e^{-i\epsilon_\nu t/\hbar} \hat{a}_\nu + \text{h.c.}, \quad (4.7)$$

$$\hat{\phi}(\vec{r}) = [4n_0(\vec{r})]^{-1/2} \sum_\nu f_\nu^+(\vec{r}) e^{-i\epsilon_\nu t/\hbar} \hat{a}_\nu + \text{h.c.}, \quad (4.8)$$

il ne reste qu'à résoudre les équations couplées pour les amplitudes  $f_\nu^+$  et  $f_\nu^-$  :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + gn_0 - \mu\right) f_\nu^+ = \epsilon_\nu f_\nu^-, \quad (4.9)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + 3gn_0 - \mu\right) f_\nu^- = \epsilon_\nu f_\nu^+. \quad (4.10)$$

Remarquons que ce calcul des fluctuations de phase et de densité est équivalent aux équations de Bogoliubov (1.26), mais dans la base des fonctions d'onde  $f_\nu^\pm = u_\nu \pm v_\nu$  au lieu de la base des excitations de type "particule"  $u_\nu$  et "trou"  $v_\nu$ .

### 4.2.2 Rôles des excitations 3D et 1D

Les excitations 3D et 1D jouent des rôles qualitativement différents, que nous précisons brièvement ici.

Les fluctuations de densité sont principalement dues aux excitations d'énergie de l'ordre de  $\mu$  [10]. Comme  $\mu > \hbar\omega_\perp$  ces excitations sont 3D, et sont rapidement supprimées en dessous de  $T_c$ . Nous pouvons donc les négliger lorsque  $T \ll T_c$ . L'opérateur champ s'écrit donc, dans ces conditions.

$$\hat{\Psi} = \sqrt{n_0} e^{i\hat{\phi}} \quad (4.11)$$

Concernant les fluctuations de phase, il faut également distinguer les contributions des excitations 1D ( $\epsilon_\nu < \hbar\omega_\perp$ ) et 3D ( $\epsilon_\nu > \hbar\omega_\perp$ ). Ces dernières ne participent que peu aux



### Description qualitative du régime 1D

Contrairement à ce que nous avons vu pour le gaz idéal 1D, la transition entre distribution thermique classique et condensat de Bose-Einstein n'est pas brutale en présence d'interactions. Il s'agit plutôt d'un passage continu de l'un à l'autre à mesure que la température diminue.

Cette transition se fait en deux temps : en dessous d'une température  $T_d \simeq N\hbar\omega_z$ , les fluctuations de densité sont progressivement supprimées. Cela signifie que localement le nuage peut être décrit par une fonction d'onde macroscopique. Le nuage obtenu possède alors les mêmes propriétés de densité qu'un condensat de Bose-Einstein. Cependant la phase du nuage n'est pas encore uniforme. Pour cette raison, il est appelé quasi-condensat. On montre qu'il faut atteindre une température plus basse,  $T_{ph} \simeq T_d\hbar\omega_z/\mu$ , pour que les fluctuations de phase soient à leur tour supprimées [9].

### Régime 3D dans un piège allongé

La présence des interactions change également le déroulement de la transition entre régime 3D et 1D. Lorsque l'anisotropie du piège est suffisante (pour un nombre d'atomes donné), le gaz idéal passe par une phase de condensation en deux étapes, radiale puis longitudinale. Le gaz de particules en interaction dans un piège très allongé, en revanche se comporte qualitativement comme le gaz 1D. Au lieu d'avoir une température de condensation radiale  $T_{3D}$ , et une longitudinale  $T_{1D}$ , il a une température de suppression des fluctuations de densité  $T_c \simeq T_{3D}$ , et une température, plus basse, de suppression des fluctuations de phase  $T_\phi$ . La similitude du comportement entre régime 3D anisotrope et 1D vient de ce que les excitations collectives du nuage qui gouvernent ce comportement, comme nous allons le voir, sont les excitations de basses énergies, de nature 1D même lorsque le condensat est 3D.

C'est précisément ce régime que nous étudierons expérimentalement dans le dernier chapitre, après avoir exposé plus en détail l'origine des fluctuations de phase, et une méthode pour les mesurer.

## 4.2 Les quasi-condensats : origine et diagnostic des fluctuations de phase

En nous basant sur la thèse de D. S. Petrov [68] et sur [10], nous présentons le calcul des fluctuations de phases, ainsi que leur influence sur la fonction de corrélation et la longueur de cohérence des quasi-condensats dans le régime 3D. Nous avons tenté d'en faire une présentation simple, en insistant sur les arguments physiques qui orientent la démarche. On trouvera ces résultats développés, et justifiés de façon plus rigoureuse dans la thèse de F. Gerbier [55].

### 4.2.1 Opérateurs de fluctuation de phase et de densité

On peut décomposer l'opérateur champ  $\hat{\Psi}$  en opérateurs de densité et de phase, soit  $\hat{\Psi} = e^{i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{n}}$  et  $\hat{\Psi}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}e^{-i\hat{\phi}}$  [68, 10]. Ces opérateurs sont réels et leur relation de commutation

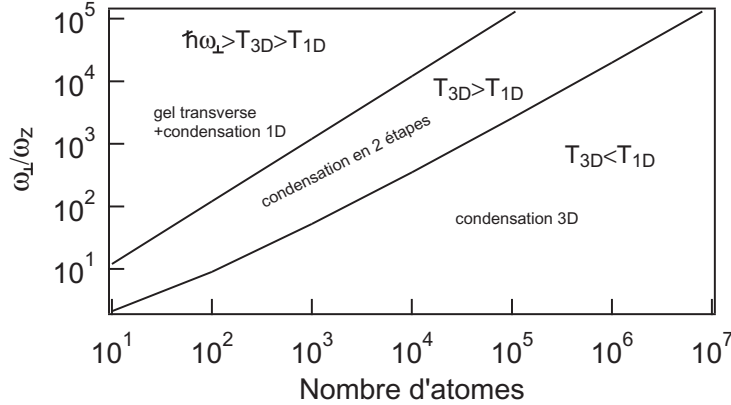


FIG. 4.1: Domaines des différents régimes de condensation d'un gaz idéal dans un piège harmonique anisotrope. Ce graphe est tiré de [67].

Dans le second cas on franchit  $T_{3D}$  avant  $T_{1D}$ . Pour  $\hbar\omega_{\perp} < k_B T_{3D}$ , il se passe alors une condensation en 2 étapes, d'abord des degrés de liberté transverses seuls, puis des degrés de liberté longitudinaux. Si en revanche  $\hbar\omega_{\perp} > k_B T_{3D}$ , les degrés de liberté transverses commencent à geler, lorsque  $k_B T < \hbar\omega_{\perp}$ , sans qu'il y ait condensation, puis le nuage condense longitudinalement à  $T_{1D}$ .

L'observation de ce phénomène est difficile pour deux raisons. La première, essentiellement technologique, est qu'il est difficile de prendre des images exploitables de nuages contenant moins de  $10^4$  atomes, car la densité optique de tels nuages est faible lorsque leurs dimensions permettent de les résoudre correctement<sup>1</sup>. Un tel nombre d'atome nécessite une anisotropie  $\omega_{\perp}/\omega_z$  supérieure à 300 pour être dans les conditions de condensation en 2 étapes [FIG.. 4.1]. Cette anisotropie est à l'extrême limite des possibilités de notre piège magnétique. En pratique, nous sommes parvenu à  $\omega_{\perp}/\omega_z \simeq 200$ , sans rechercher la limite. Mais cette gamme d'anisotropie, voire des anisotropies supérieures, pourrait être plus facilement atteinte par des pièges de micro-fils [37], et dans des réseaux optiques [66]. La seconde raison est que les interactions entre atomes modifient notablement le comportement des gaz 1D à basse température, ainsi que la transition entre régimes 3D et 1D.

### 4.1.3 Gaz en interaction

L'étude théorique du régime 1D-thermodynamique des gaz piégés en interaction est faite en détail dans la référence [9]. Ces résultats ont été généralisés au cas d'un gaz 3D dans un piège très allongé [10]. Nous nous contenterons ici de considérer le cas de faibles interactions, bien que le régime de Tonks (fortes interactions) soit également discuté dans [9].

<sup>1</sup>Pour un nuage gaussien isotrope de  $50 \mu\text{m}$  de rayon, et de  $5 \times 10^3$  atomes, l'épaisseur optique maximum est de 0.2. Avec notre système d'imagerie, le rapport signal/bruit est alors au maximum de l'ordre de 2 à 4.

excitations collectives sont également modifiées par le caractère 1D du condensat, notamment en termes de fréquence. On peut qualifier ce régime de “1D-champ-moyen”. Il est indépendant des caractéristiques du nuage thermique.

Ce régime a été récemment étudié théoriquement, notamment dans les références [63, 52], et expérimentalement dans les références [64, 65, 66]. C’est ce sens qui est généralement employé dans ce manuscrit, puisque les condensats de nos expériences sont dans un régime intermédiaire entre le régime de Thomas-Fermi 3D et le régime 1D.

### 4.1.2 Gaz idéal

Bien que les conditions expérimentales habituelles soient assez loin de pouvoir reproduire les propriétés d’un gaz idéal, il est intéressant de présenter quelques propriétés de la condensation d’un gaz idéal 1D.

#### Condensation 1D

Il est usuel de dire la condensation de Bose-Einstein d’un gaz idéal n’est pas possible dans un piège harmonique à 1D. Ceci est vrai à la limite thermodynamique, mais W. Ketterle et N. J. van Druten ont montré que pour un système comportant un nombre fini de particules on observait un phénomène semblable à la condensation [13], avec une accumulation d’un nombre macroscopique de particules dans l’état fondamental du piège en dessous d’une certaine température. Ce phénomène n’est cependant pas une transition de phase au sens strict du terme, puisqu’il disparaît à la limite thermodynamique.

Leur approche pour montrer cela consiste à partir de l’équation (1.4), valable quelles que soient les fréquences du piège considéré, et à se placer dans les limites  $k_B T \ll \hbar \omega_{x,y}$  et  $k_B T \gg \hbar \omega_z$ . Ces conditions signifient que les degrés de liberté transverses sont gelés, mais pas le mouvement longitudinal. On obtient alors :

$$N = \frac{k_B T_{1D}}{\hbar \omega_z} \ln\left(\frac{2k_B T_{1D}}{\hbar \omega_z}\right), \quad (4.1)$$

où  $T_{1D}$  est la température caractéristique de la condensation. On peut vérifier ici que la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$  avec  $N\omega_z = \text{cste}$  donne bien  $T_{1D} \rightarrow 0$ . Cette expression peut aussi s’inverser de façon approchée pour exprimer  $T_{1D}(N)$  :

$$k_B T_{1D} \simeq N \hbar \omega_z / \ln(2N). \quad (4.2)$$

#### Condensation en 2 étapes

Pour un piège anisotrope donné, les températures de condensation à 1D et 3D varient différemment avec  $N$ . En effet  $T_{1D} \sim N / \ln(2N)$  et  $T_{3D} \sim N^{1/3}$  (voir Eq. (1.6), où  $T_{3D}$  est notée  $T_c$ ). Une conséquence de cela est que l’on peut avoir soit  $T_{3D} < T_{1D}$ , soit  $T_{3D} > T_{1D}$  [67]. Sur la FIG. 4.1, un graphe extrait de [67] résume les différents scénarios possibles, détaillés ci-dessous. Ce graphe montre que d’une façon générale, les effets de basse dimensions interviennent à faible nombre d’atomes, et à grand rapport d’aspect.

Le premier scénario est le cas usuel des pièges peu anisotropes. La température de condensation 1D est franchie alors que le nuage thermique est toujours 3D. Il ne se passe donc rien à cette température et la condensation se fait à  $T_{3D}$ , selon le schéma classique.

lumineux, qui fut d’abord étudiée sur des jets d’atomes thermiques [57].

L’étude par spectroscopie de Bragg est l’objet principal de ce manuscrit. Cette technique a déjà été utilisée par plusieurs groupes pour différentes mesures. Elle a permis de réaliser la spectroscopie de condensats dans un piège et en expansion [5], mais aussi d’étudier le spectre des excitations d’un condensat [58, 59, 32], le mouvement microscopique des atomes d’un condensat dans un piège “TOP” (pour “time-averaged orbiting potential”)[60]...

Quant à l’interférométrie, qui utilise la diffraction en tant que séparatrice cohérente [61], elle a été mise en oeuvre à Hanovre [62], apportant des résultats en accord avec ceux que nous présentons ici.

Nous commençons ce chapitre en rappelant rapidement les diverses prédictions concernant la condensation de Bose-Einstein dans les systèmes 1D, et la transition entre systèmes 3D et 1D. Il ressort de cela que les interactions ont un rôle primordial, et sont à l’origine de l’existence des quasi-condensats. Nous poursuivons par l’étude théorique des quasi-condensats, basée sur la référence [10], et en particulier par le calcul de la distribution en impulsion, auquel seront confrontés les résultats expérimentaux du dernier chapitre. Enfin, nous exposons les aspects théoriques de la mesure de la distribution en impulsion par spectroscopie de Bragg, et discutons des différents effets systématiques à prendre en compte et, éventuellement, à éviter.

## 4.1 Les différents scénarios de la transition vers le régime 1D

### 4.1.1 Qu’appelle-t-on limite 1D ?

La notion de 1D est employée parfois pour un condensat, parfois pour un gaz thermique. On parle également de régime 1D. Précisons ce que l’on entend par 1D dans ces différents cas.

#### Aspect thermodynamique

Pour un gaz idéal piégé, il n’y a pas d’ambiguïté. Il est dans le régime 1D lorsque les degrés de liberté transverses sont gelés, mais pas les degrés de liberté longitudinaux. C’est le cas lorsque  $k_B T_c \ll \hbar \omega_\perp$  et  $k_B T_c \gg \hbar \omega_z$ . Les particules du gaz sont alors toutes dans le mode fondamental transverse du piège, mais distribuées sur beaucoup de niveaux excités longitudinaux. Ce type de régime 1D peut être qualifié de “1D-thermodynamique”.

#### Aspect statique/dynamique du condensat

Cette appellation peut également être appliquée, le cas échéant, à un gaz de particules en interactions. Mais un autre sens est souvent donné au terme condensat 1D de particules en interactions. Il s’agit alors d’un condensat dont, malgré les interactions, le mode transverse est le fondamental du piège. Contrairement au régime de Thomas-Fermi (voir 1.3.1), les degrés de liberté axiaux et longitudinaux sont alors découplés. Ceci se produit lorsque l’énergie d’interaction typique dans le condensat, de l’ordre de  $\mu$ , est nettement inférieure à l’énergie du premier état excité transverse d’énergie  $\hbar \omega_\perp$ . Le profil de densité du condensat est alors modifié par rapport au régime de Thomas-Fermi habituel (3D). Les

## Chapitre 4

---

# Quasi-condensats et principe de la mesure des fluctuations de phase

Les condensats de Bose-Einstein sont habituellement considérés comme des objets cohérents, tous les atomes condensés étant en première approximation dans la même fonction d'onde à une particule. La fonction d'onde macroscopique décrivant le condensat possède alors une phase uniforme. Cette cohérence a été montrée expérimentalement à très basse température [5, 4], ainsi qu'en présence d'un nuage thermique non négligeable [6]. A l'opposé, les quasi-condensats sont des condensats dont la phase n'est pas uniforme, et fluctuante. Mais leur densité est sans fluctuations, comme celle des vrais condensats, contrairement à la densité d'un nuage thermique. Dans [9], Petrov, Shlyapnikov et Walraven ont prévu que des quasi-condensats se formaient avant de devenir de vrais condensats à plus basse température, dans les systèmes 1D avec de faibles interactions. Ce phénomène découle d'une large population des modes d'excitations de basse énergie, même en dessous de la température de dégénérescence où les fluctuations de densité disparaissent. Les mêmes auteurs ont ensuite montré que cela pouvait également se produire pour des systèmes 3D très allongés [10]. En effet, les excitations de plus basse énergie de ces systèmes sont 1D, et c'est ce type d'excitation qui est à l'origine des fluctuations de la phase.

Le groupe de Hanovre a démontré en 2001 l'existence des quasi-condensats [11, 56]. Ces résultats montrent également la dépendance des fluctuations de phases vis-à-vis de la température, du nombre d'atome dans le système et de l'anisotropie du piège. Cette expérience est basée sur la conversion des fluctuations de phase en modulation de densité au cours de l'expansion du nuage après la coupure du piège.

Les fluctuations de phase affectent la fonction de corrélation et la distribution en impulsion des quasi-condensats. Cela suggère d'autres méthodes pour les étudier : l'interférométrie, qui donne accès à la fonction de corrélation, et la spectroscopie de Bragg, qui donne directement accès à la distribution en impulsion.

Ces deux méthodes sont basées sur la diffraction de Bragg d'atomes sur un réseau



que la forme de la densité linéique est semblable dans le régime de Thomas-Fermi et dans le régime intermédiaire où nous nous trouvons, dans la transition vers le régime 1D. De plus, nous avons mis en évidence le fait que l'approximation de Zubarev et Kim donne une densité 1D en très bon accord avec celle issue du calcul numérique.

Cependant, la densité du nuage thermique est fortement modifiée par la présence du condensat, par rapport à sa densité pour un gaz idéal. Cela reste un problème majeur pour l'analyse précise d'images prises après un court temps de vol, tant que l'on n'image pas la distribution en vitesse dans toutes les directions. Pour cette raison, la comparaison des résultats des calculs et de l'analyse des images n'est pas immédiate et demanderait une procédure de fit plus évoluée que celle dont nous disposons, afin de tenir compte correctement de la modification de la densité du nuage thermique par le condensat, dans le piège. Malgré l'absence de solution définitive à ce problème, la confrontation de nos mesures avec les résultats de calculs numériques nous donne une idée de l'erreur que nous sommes susceptibles de commettre sur la mesure de la fraction condensée ou de la température. Il faudra tenir compte de ces incertitudes lors l'analyse de la mesure des fluctuations de phases, au chapitre 5, puisque celles-ci dépendent de la densité et de la température du nuage [10].

Une solution pour connaître sans ambiguïté les profils respectifs du condensat et du nuage thermique peut être de les séparer par diffraction de Bragg avant d'en prendre l'image.

Pour finir, rappelons que les écarts entre les calculs que nous avons effectués, supposant la suppression des fluctuations de densité, et les analyses des données expérimentales, sont de l'ordre de 10 %, en ce qui concerne la longueur du profil 1D, c'est à dire le paramètre  $L$  de l'équation (3.32). Ces résultats sont donc, quoi qu'il en soit, compatibles avec une forte suppression des fluctuations de densité, même en présence de fluctuations de phase importantes. C'est une caractéristique importante des quasi-condensats.

Les prochains chapitres présentent les aspects théoriques et pratiques de la mesure de leurs fluctuations de phase.

### Limites de ce modèle simple

Ce calcul un peu rudimentaire ne prétend pas être d'une validité générale, et mérite d'être testé pour diverses configurations de piège, de nombre d'atomes etc... Nous avons vérifié que pour un piège un peu différent, de  $8 \times 500 \times 500 \text{ Hz}^3$ , avec  $3 \times 10^5$  atomes à 200 ou 300 nK, ses prédictions de  $L$  étaient à 1 % près égales à celles du calcul numérique. De même que pour l'approximation de Zubarev-Kim pour les condensats purs, il n'est pas évident de justifier physiquement un tel accord.

Notons cependant que les prédictions sur le rayon transverse ne sont pas aussi justes. Nous avons vu que sans nuage thermique l'approximation de Zubarev-Kim donnait le bon rayon quadratique moyen. Notre méthode pour prendre en compte le nuage thermique ne permet pas de conserver cette propriété (voir FIG. 3.16). Car dans le cas du calcul nu-

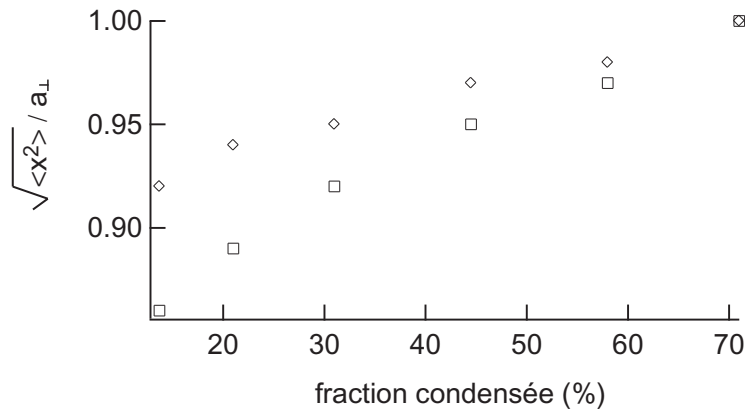


FIG. 3.16: Comparaison des rayons quadratiques moyens donnés par le calcul numérique (◇), et par l'approximation de Zubarev-Kim modifiée pour tenir compte du nuage thermique (□). En comparant ce graphique à celui de la FIG. 3.12, on voit que le rayon quadratique moyen du calcul numérique n'est pas modifié par la présence du nuage thermique.

mérique, le rayon quadratique moyen est très peu changé avec ou sans nuage thermique. Ceci peut être expliqué par la compétition entre pression quantique et compression par le nuage thermique. Or le calcul analytique que nous avons exposé suppose une compression isotrope. Nous n'avons pas trouvé de méthode permettant de corriger cela. Les tentatives de recalculer  $\gamma_{\perp}$  en tenant compte de la compression due au nuage thermique (par exemple en prenant des fréquences de piège effectives reproduisant cet effet), reconvergeaient systématiquement vers les résultats de la méthode présentée ici, avec une compression isotrope.

### 3.4.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons soulevé quelques difficultés dans l'analyse des images de condensats très anisotropes, dans le régime intermédiaire entre Thomas-Fermi 3D et 1D, et en présence de nuage thermique.

Nous avons montré que la densité 1D longitudinale du condensat calculée numériquement était bien reproduite par une fonction de la forme donnée à l'équation (3.32) aussi bien en présence de nuage thermique que dans le cas de condensats purs. Ce qui signifie



En écrivant cette équation en  $\vec{r} = \vec{0}$  et  $\vec{r} = L \vec{u}_z$ ,  $L$  étant la demi-longueur du condensat (que l'on cherche), et en égalant les deux expressions de  $\tilde{\mu}_{\text{TF}}$  ainsi obtenues, on parvient à :

$$L^2 = \frac{2g}{m\omega_z^2} \{n_0(0) + 2[n_{\text{th}}(L) - n_{\text{th}}(0)]\}. \quad (3.35)$$

En utilisant de plus l'expression de la densité du nuage thermique (1.39), déterminée dans l'approximation de Hartree-Fock, (3.35) devient :

$$L^2 = \frac{2g}{m\omega_z^2} \left\{ n_0(0) + \frac{2}{\lambda_{\text{T}}^3} [g_{3/2}(e^{-gn_0(0)/k_{\text{B}}T}) - g_{3/2}(1)] \right\}. \quad (3.36)$$

Il suffit alors déterminer numériquement la demi-longueur  $L$  solution de cette équation, en utilisant pour  $n_0(0)$  l'expression qui convient à un condensat parabolique de rapport d'aspect fixé  $\epsilon = \sqrt{1 - \gamma_{\perp}} \omega_{\perp}/\omega_z$ , soit  $n_0(0) = \frac{15N_0\epsilon^2}{8\pi L^3}$ . On peut de façon équivalente calculer le rayon du condensat et en déduire la longueur.

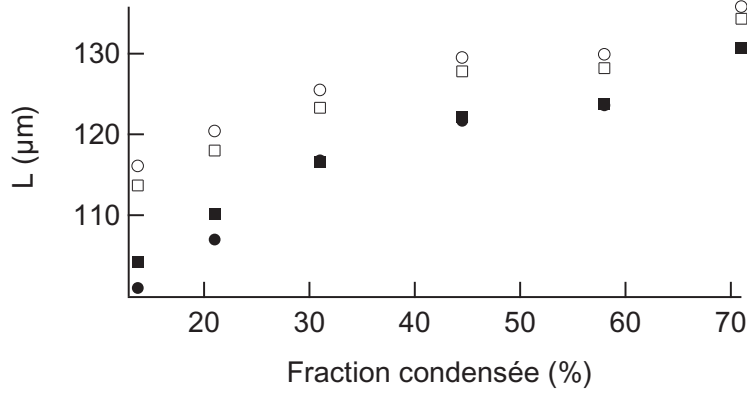


FIG. 3.15: Comparaison de la demi-longueur  $L$  de  $n_{1D}(z)$  (densité 1D axiale du condensat) en présence de nuage thermique, calculée numériquement (■) et par une méthode utilisant l'approximation de Zubarev-Kim complétée par l'approximation de Hartree-Fock pour le nuage thermique (●). Pour comparaison on a également reporté la même grandeur  $L$  en l'absence de nuage thermique, issue du calcul numérique (□) et du calcul de Zubarev-Kim (○).

Les résultats de ce calcul sont comparés, dans la FIG. 3.15, aux résultats du calcul numérique. De la même façon que lors de l'étude des effets de l'énergie cinétique radiale sur le profil du condensat, la demi-longueur  $L$  associée au calcul numérique est issue de l'ajustement de  $n_{1D}(z)$  par la fonction (3.32). D'après ce graphe, la densité 1D axiale déduite de ce modèle approché est une très bonne approximation de la densité 1D calculée numériquement. Afin de comparer ces calculs au cas de condensats purs, mais de même nombres d'atomes, les couples  $(N_{\text{tot}}, N_0)$  utilisés sont ceux donnés dans le TAB. 3.3. La température a donc été choisie en conséquence (ces trois paramètres ne sont pas libres dans la simulation), et diffère des valeurs de ce tableau. Par ordre de fraction condensée décroissante, les températures correspondantes sont (143, 167, 207, 246, 279, 319) nK. Le graphe montre aussi que l'effet de compression du condensat par le nuage thermique est notable, puisqu'il réduit la longueur de la densité 1D de 4 à 15 %, pour des fractions condensées allant de 70 à 14 %.

transféré, par transition à 2 photons sélective en vitesse, dans un état d'impulsion  $2\hbar k_L$ , où  $\hbar k_L$  est l'impulsion des photons. La technique est proche de la spectroscopie de Bragg, mais avec un couplage assez large et intense pour couvrir toute la distribution des vitesses du condensat. Le nuage thermique n'est en revanche que peu couplé, puisque sa distribution en vitesse est de 2 à 3 ordres de grandeur plus large. Dans le cas de condensats moins anisotropes, la comparaison de la méthode standard de mesure de la fraction condensée par un ajustement à double structure, et de cette technique de séparation des 2 fractions, semble indiquer que la méthode habituelle de l'ajustement à double structure a tendance à sous estimer la fraction condensée pour  $T \lesssim 0.5T_c$ . Pour plus de détails, se reporter à la thèse de F. Gerbier [55].

Ajoutons encore que l'écart entre la fraction condensée issue de la simulation numérique et la fraction condensée mesurée peut être également expliqué par une erreur de l'ordre de 15 % sur la température pour les points tels que  $F_c \leq 60\%$ . Une telle erreur est plausible, bien que la température soit mesurée sur les bords du nuage thermique, peu affectés par le présence du condensat.

Pour conclure sur ce point, nous avons ici soulevé plus de questions que nous n'en avons résolues. Mais la situation expérimentale est en dehors de tous les cas limites où l'on dispose d'expressions analytiques pour la densité du nuage, dans le piège ou après expansion. Il est vraisemblable que notre choix des fonctions d'ajustement introduise un biais dans les mesures que l'on extrait des images, mais nous ne disposons pas d'alternative objectivement meilleure, pour le moment. Ne perdons pas de vue non plus que les résultats de la simulation ne sont pas les "vrais valeurs" que l'on doit retrouver par une analyse correcte des images. En particulier, les calculs sont menés pour des températures mesurées, potentiellement sujettes elles aussi à des erreurs systématiques. Mais ils ont le mérite d'inciter à chercher une méthode plus fine de traitement de données.

Nous pouvons tout de même exploiter davantage la simulation numérique. En particulier, elle permet de tester une extension simple de l'approximation de Zubarev-Kim, qui prend en compte la modification de la densité du condensat par le nuage thermique. C'est ce que nous allons voir à présent.

### Compression du condensat par le nuage thermique

Nous avons vu que l'approximation de Zubarev-Kim permettait, entre autre, de bien reproduire la densité 1D axiale  $n_{1D}(z)$  du condensat calculée numériquement, en l'absence de nuage thermique. Nous présentons ici un modèle simple de prise en compte du nuage thermique en complément de l'approximation de Zubarev-Kim.

Nous considérons donc un système dont le nombre d'atomes, la température et la fraction condensée sont fixés. On calcule tout d'abord le rapport d'aspect du condensat donné par Zubarev-Kim en négligeant le nuage thermique, en résolvant l'équation (3.31). On suppose pour la suite que le nuage thermique comprime isotropiquement le condensat, ne modifiant pas le coefficient  $\gamma_\perp$ . La suite du calcul consiste à déterminer, pour le rapport d'aspect tenant compte de  $\gamma_\perp$ , la longueur modifiée par le nuage thermique. Pour cela, on introduit simplement le terme d'interaction entre condensat et nuage thermique dans l'équation de Gross-Pitaevskii, avec le hamiltonien de Zubarev-Kim (3.25). On obtient, avec les notations employées pour les équations (3.26) à (3.29) :

$$\tilde{V}(\vec{r}) + g [n_0(\vec{r}) + 2n_{\text{th}}(\vec{r})] = \tilde{\mu}_{\text{TF}}. \quad (3.34)$$

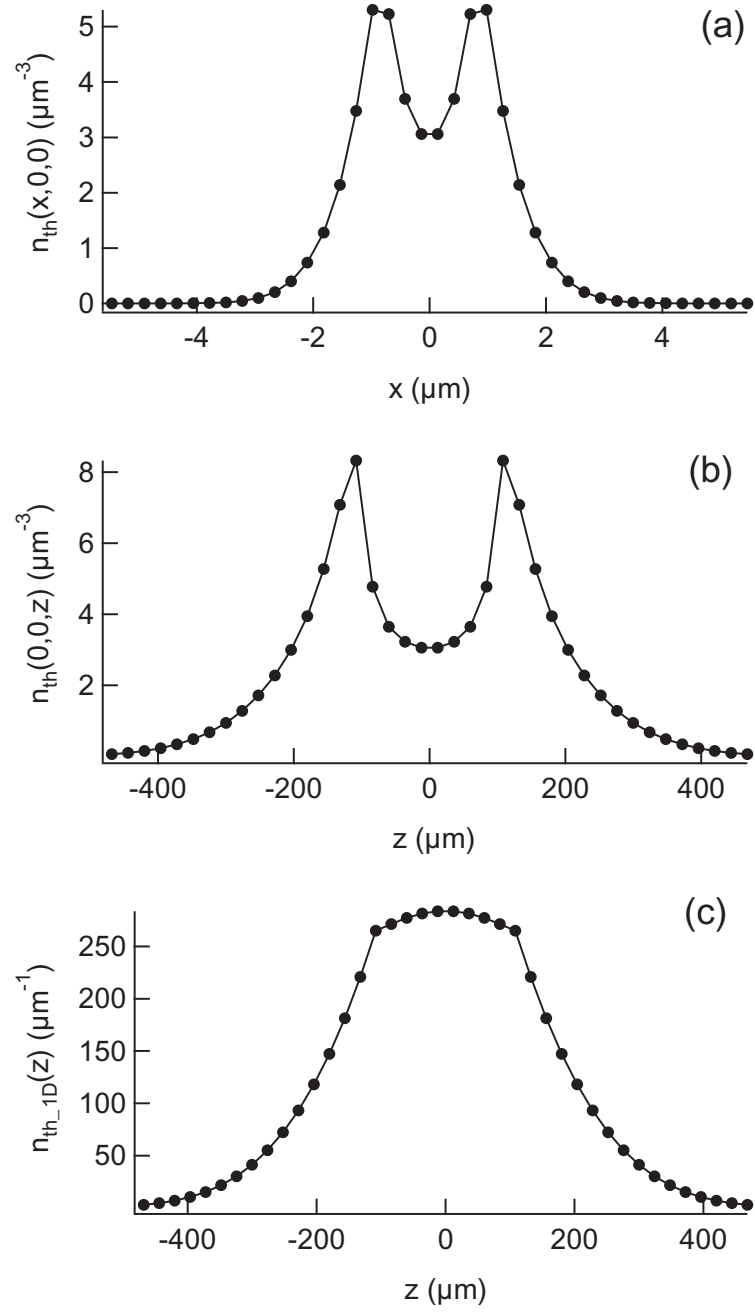


FIG. 3.14: Densité du nuage thermique calculée numériquement, à  $T = 261$  nK et avec  $N_{\text{tot}} = 16.6 \times 10^4$ , ce qui entraîne  $F_c = 32\%$ . (a) Coupe de la densité volumique selon un axe radial. (b) Coupe axiale de la densité volumique. (c) Densité 1D axiale.

$N_{\text{tot}} \times 10^4$	$T$ (nK)	$\mu^{\text{num}}/\hbar\omega_{\perp}$	$F_c^{\text{num}}$ (%)	$F_c^{\text{mes}}$	$F_c^{\text{analyt.}}$
8.3	90	3.4	90	71	91
8.4	124	3.3	79	58	80
10.8	177	3.5	61	44	62
13.4	216	3.6	48	31	49
16.6	261	3.6	32	21	32
22	286	4.1	32	14	32
28.5	347	3.9	16	10	14

TAB. 3.5: Résultats des calculs numériques des densités du condensat et du nuage thermique pour les couples  $(N_{\text{tot}}, T)$  déterminés expérimentalement. On a reporté le potentiel chimique  $\mu^{\text{num}}$  et la fraction condensée  $F_c^{\text{num}}$ , ainsi que la fraction condensée donnée par la formule (3.33). On a également rappelé, pour comparaison, la fraction condensée mesurée  $F_c^{\text{mes}}$ .

n'est pas surprenant, même si les effets de taille finie [13, 14] sont pris en compte par la simulation mais pas par l'équation (3.33). Sans interactions, les effets de taille finie ne seraient pas négligeables, et entraîneraient une baisse de l'ordre de 10 % de la fraction condensée par rapport à la limite thermodynamique. Mais il semble que les interactions aient tendance à supprimer les effets de taille finie [29], dans la limite où elles gouvernent la densité et le potentiel chimique du condensat. Et bien que les résultats de la simulation montrent des déviations par rapport à la limite de Thomas-Fermi, ils sont loin, en termes de potentiel chimique et de densité, de ce que l'on attend pour un gaz idéal.

En revanche, la fraction condensée calculée est nettement plus élevée que la fraction condensée mesurée. Plusieurs raisons sont possibles.

Tout d'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, et comme nous pouvons le vérifier a posteriori sur les résultats de la simulation, la condition  $k_B T \gg \mu$  justifiant l'approximation de Hartree-Fock n'est pas très bien vérifiée, puisque l'on a  $0.7 < k_B T/\mu < 2.8$ . Mais effectuer le calcul sans cette approximation est beaucoup plus lourd, et sort des objectifs de cette étude.

Le point sans doute le plus important concerne le profil de densité du nuage thermique, et son évolution pendant le temps d'expansion avant de prendre l'image. Dans le piège sa densité volumique présente un "trou" au centre, comme on le voit sur la FIG. 3.14. Or, l'analyse des images est faite par un ajustement supposant une fonction de Bose standard (voir section 1.4.2). Ce traitement semble justifié pour des grands temps d'expansion, tels que l'on visualise sur l'image la distribution des vitesses. La condition pour être dans ce régime est simplement  $t_{\text{exp}} \gg \omega_{z,\perp}^{-1}$ . Dans nos conditions, nous avons bien  $\omega_{\perp} t_{\text{exp}} = 116$ , mais en revanche  $\omega_z t_{\text{exp}} = 0.8$ . Le temps d'expansion est donc assez long pour visualiser la distribution de vitesses radiales, mais trop court pour la distribution de vitesses axiales. Mais d'autre part, comme  $\omega_z t_{\text{exp}} \simeq 1$ , on ne peut pas non plus considérer que la densité 1D axiale n'a pas évolué. À ceci il faut ajouter, comme inconnue dans l'expansion, l'effet des interactions entre le nuage thermique et le condensat.

Des expériences pour contourner ces difficultés ont été entreprises. Le principe est de séparer spatialement le nuage thermique et le condensat après l'ouverture du piège, pour mesurer sans ambiguïté leur densité respective. Pour cela, le condensat est entièrement

### 3.4.5 Densité du condensat : effets du nuage thermique

La présence d'un nuage thermique autour du condensat complique beaucoup l'interprétation des images. D'une part le nuage thermique et le condensat se recouvrent spatialement. Le premier problème consiste donc à faire la part, dans la zone centrale, des contributions de chaque composante du nuage global, ce qui n'est possible par un fit que s'il l'on connaît leur "forme" a priori. Dans le cas d'un gaz sans interactions, les densités théoriques dans le piège et en expansion sont bien connues. Mais les interactions, dans les conditions expérimentales réelles, ne peuvent être négligées. Ainsi la densité du nuage thermique est affectée par la présence du condensat et réciproquement. Dans le piège, un calcul numérique des densités ne pose pas de grosse difficulté, mais leur évolution en temps de vol est nettement plus compliquée, et hors de la portée de notre étude.

#### Résolution numérique des équations couplées

Pour calculer numériquement la densité du nuage atomique, nous utilisons la méthode décrite dans [29] et [54]. Il s'agit donc de résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii, et l'équation pour le nuage thermique, de manière auto-consistante (voir Eq. (1.40) et toute la section 1.3.3), en prenant en compte dans chacune des équations les interactions de champ moyen entre le condensat et le nuage thermique. Il est possible de résoudre le système en fixant soit le nombre d'atomes condensés  $N_0$  et la température  $T$ , soit le nombre total d'atomes  $N_{\text{tot}}$  et  $T$ . Rappelons que ce calcul contient les approximations suivantes :

- approximation semi-classique qui requiert  $k_B T \gg \hbar \omega_{z,\perp}$ . Pour la direction axiale, cette condition est assez bien vérifiée dans le jeu de données du TAB. 3.3, mais radialement la condition n'est pas très largement remplie car  $2.5\hbar\omega_{\perp} < k_B T < 10\hbar\omega_{\perp}$ . D'après [14] elle n'est cependant pas très restrictive.
- approximation de Hartree-Fock, valable lorsque  $k_B T \gg \mu$ . Cette condition n'est pas non plus très largement remplie (car typiquement,  $\mu = 3\hbar\omega_{\perp}$ ), mais pour les mêmes raisons que l'approximation semi-classique, elle n'est pas non plus très restrictive.

#### Résultats

Le nombre total d'atomes est a priori mesuré de façon plus sûre que le nombre d'atomes condensés, puisqu'il résulte d'une simple intégration spatiale de l'épaisseur optique d'une image, en tenant compte de la calibration de la section efficace d'absorption. Il est donc naturel, pour comparer les résultats des calculs aux données, de calculer les densités du condensat et du nuage thermique en fixant les valeurs de  $N_{\text{tot}}$  et  $T$  aux valeurs données dans le TAB. 3.3. Les résultats, en termes de fraction condensée et de potentiel chimique sont reportés dans le TAB. 3.5.

La fraction condensée calculée numériquement est quasi égale à la fraction condensée donnée par [14], calculée dans l'approximation semi-classique et dans le régime de Thomas-Fermi :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - t^3 - 2.15 \left( \frac{a}{a_{\text{oh}}} \right)^{2/5} N^{1/15} t^2 (1 - t^3)^{2/5}, \quad (3.33)$$

avec  $t = T/T_c^0$ , où  $T_c^0/k_B = 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3}$ ,  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ ,  $a$  est la longueur de diffusion, et  $a_{\text{oh}} = (\hbar/m\bar{\omega})^{1/2}$ . Cet accord entre le calcul numérique et cette expression analytique

Pour préciser l'accord entre les 2 calculs, évident sur la FIG. 3.13, nous avons ajusté les densités 1D numériques pour différents nombres d'atomes condensés (voir TAB. 3.3) par cette fonction, en laissant  $N_0$  et  $L$  comme paramètres libres. Les valeurs de  $N_0$  extraites du fit ne diffèrent pas de plus de 3 % des valeurs employées pour le calcul, et les longueurs  $L$  sont aussi égales aux valeurs données par Zubarev-Kim, à mieux que 3 % près.

En revanche, l'approximation de Thomas-Fermi donne une densité axiale 1D proche de celle du calcul numérique pour  $N_0 = 58900$ , mais pas pour  $N_0 = 27000$ . Sa validité semble donc plus étendue ici que pour les profils de densité 3D de la FIG. 3.11, mais elle ne couvre cependant pas tout le domaine de nos données. Quant aux densités 1D "mesurées", elles sont en très bon accord avec le calcul numérique et l'approximation de Zubarev-Kim. Il faut cependant relativiser cet accord. Nous allons voir dans la prochaine section que l'étude prenant en compte le nuage thermique est moins convaincante.

## Conclusion

Cette première partie de l'étude de la densité du condensat dans le régime intermédiaire entre Thomas-Fermi 3D et unidimensionnel met en lumière plusieurs difficultés dans l'analyse de données expérimentales, même en l'absence de nuage thermique. L'absence d'expression analytique de la densité empêche de déduire des images la densité volumique du condensat, car l'imagerie par absorption ne donne qu'une densité colonne, égale à la densité volumique intégrée sur la direction du laser sonde. Cependant nous avons montré que pour nos paramètres expérimentaux, l'approximation de Zubarev-Kim permet de retrouver de façon analytique, avec une très bonne précision, la densité linéique axiale calculée numériquement. Cela complète son applicabilité déjà démontrée [53] pour le calcul du potentiel chimique et des tailles quadratiques moyennes, mais infirmée ici en ce qui concerne la densité volumique (voir FIG. 3.11).

Nous verrons dans le prochain chapitre que la densité linéique axiale est précisément, avec la température, la grandeur pertinente dans les phénomènes de fluctuation de phase de condensats anisotropes. Cette utilisation de l'approximation de Zubarev-Kim, tout en étant assez restrictive, présente donc un réel intérêt pratique.

L'autre difficulté majeure de ce régime intermédiaire vient de l'absence d'un modèle d'expansion. Car s'il est toujours possible de calculer approximativement les largeurs quadratiques moyennes du condensat attendues après temps de vol, par conservation de l'énergie et conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique, comment déterminer l'évolution de la densité ? Par conséquent, comment comparer la densité dans le piège à la densité mesurée après expansion ? Les solutions restent à trouver. En ce qui concerne les données que nous analysons, la difficulté est en partie contournée car les images ont été prises après un temps d'expansion trop court pour que la densité évolue axialement, grâce au grand rapport d'aspect du piège. On peut donc estimer correctement la densité 1D axiale du condensat dans le piège à partir des images, par intégration sur les directions radiales.

Cependant, pour une compréhension complète des images expérimentales, et conclure sur l'interprétation de nos données, il est nécessaire de tenir également compte des divers effets du nuage thermique.

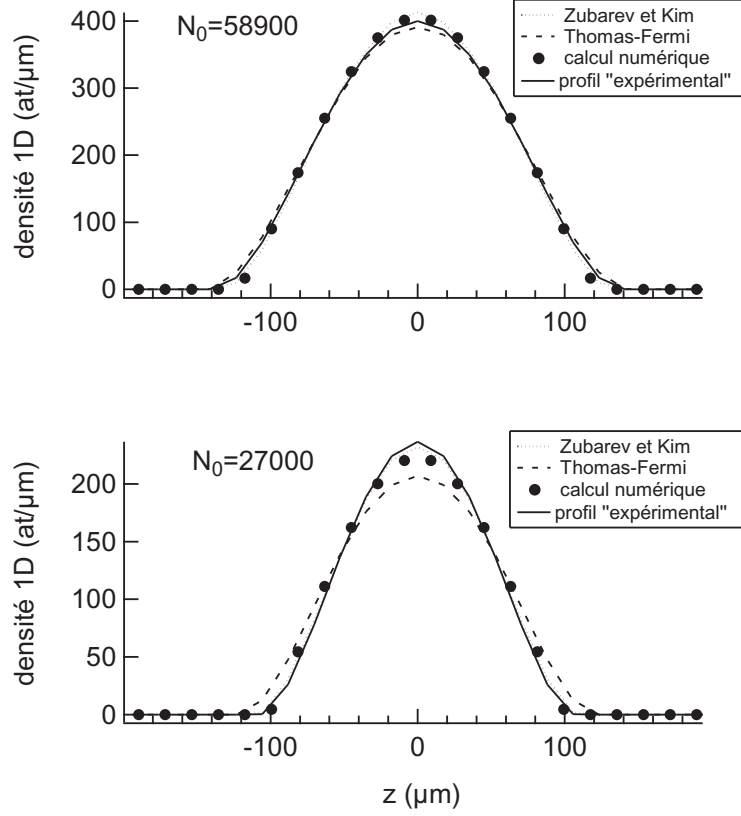


FIG. 3.13: Comparaison des densités 1D axiales  $n_{1D}(z)$  mesurées après expansion et calculées dans le piège. Les deux valeurs extrêmes du nombre d'atomes condensés  $N_0$  du TAB. 3.3 sont considérées. Pour les calculs on considère des condensats purs. Ce que l'on appelle profil "expérimental" est le profil 1D obtenu par intégration radiale de l'ajustement d'images d'absorption. Ce passage par un fit est nécessaire du fait de la présence de nuage thermique. Le bon accord entre calculs et mesures est surprenant, car on ne tient pas compte du nuage thermique dans les calculs (voir texte). On note un très bon accord entre les 2 méthodes de calcul Zubarev-Kim et numérique.

La FIG. 3.13, montre  $n_{1D}(z)$  mesurée par l'intermédiaire d'un fit, et calculée numériquement et dans les approximations de Thomas-Fermi et Zubarev-Kim, pour les deux valeurs extrêmes du nombre d'atomes condensés  $N_0$  du TAB. 3.3, soit  $N_0 = 58900$  et  $N_0 = 27000$ .

On trouve à nouveau un accord excellent entre le calcul numérique et l'approximation de Zubarev-Kim. Ce résultat est très intéressant d'un point de vue pratique, puisqu'il étend la validité de cette approximation à une quantité supplémentaire locale, la densité linéique  $n_{1D}(z)$ , et non plus moyennée sur l'ensemble du nuage comme dans le cas des tailles quadratiques moyennes et du potentiel chimique. Une conséquence de la validité de l'approximation de Zubarev-Kim pour reproduire la densité 1D est que l'on dispose d'une expression analytique de la densité linéique axiale qui s'exprime simplement (normalisée à  $N_0$ ) :

$$n_{1D}(z) = \frac{15N_0}{16L} \left(1 - \frac{z^2}{L^2}\right)^2. \quad (3.32)$$

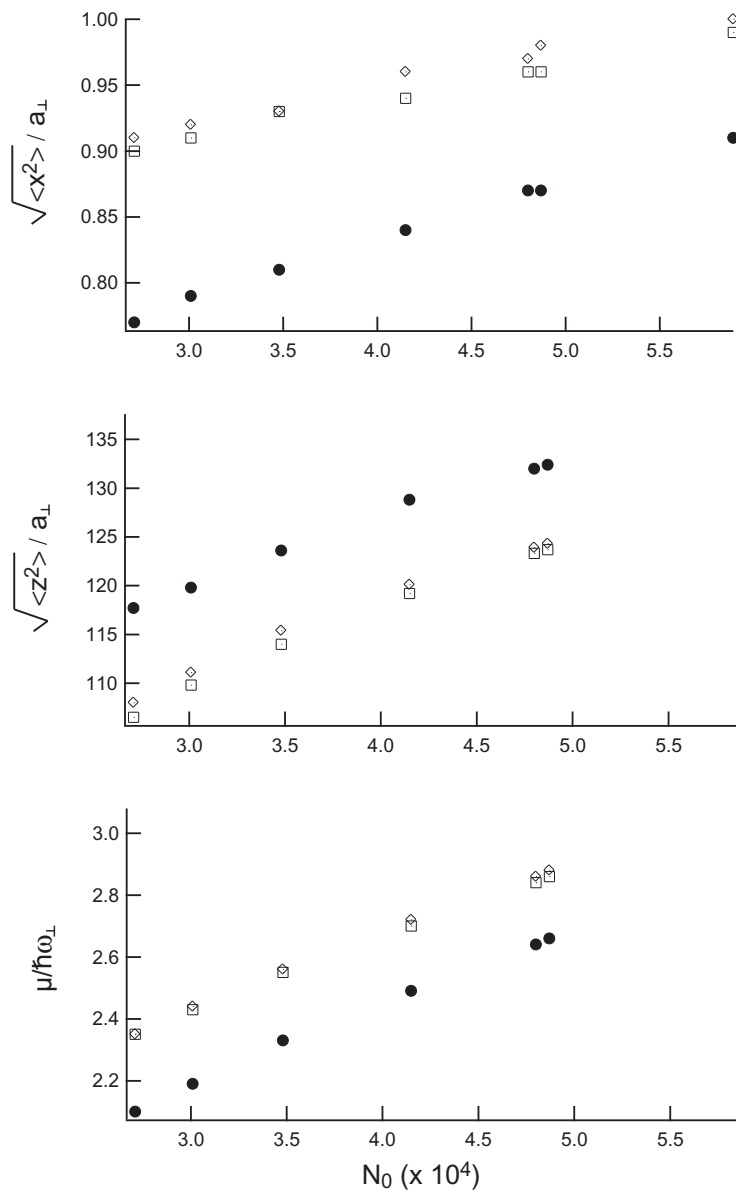


FIG. 3.12: Comparaison des approximations de Thomas-Fermi ( $\bullet$ ) et Zubarev-Kim ( $\square$ ) et du calcul numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii 3D ( $\diamond$ ), pour le condensat dans le piège. Les tailles quadratiques moyennes axiales  $\sqrt{\langle z^2 \rangle}$  et selon un axe radial  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  sont données en unité de  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ . Le potentiel chimique  $\mu$  est rapporté à  $\hbar\omega_{\perp}$ . Les calculs ont été effectués pour les nombres d'atomes condensés  $N_0$  expérimentaux du TAB. 3.3.



gaussienne.

Quant au profil issu de l'approximation de Zubarev et Kim, il reproduit assez mal le profil exact. En particulier, la densité au centre est trop faible. La raison semble être que l'hypothèse d'une densité parabolique dans toutes les directions est peu satisfaisante, puisque le premier effet de la pression quantique est de former des "ailes" sur le profil radial. En revanche, cette approximation permet de retrouver avec une précision remarquable le potentiel chimique et les tailles quadratiques moyennes calculées numériquement. Ceci est mis en évidence sur la FIG. 3.12, où l'on a tracé, pour chaque nombre d'atomes condensés des données du TAB. 3.3, les tailles quadratiques moyennes axiales  $\sqrt{\langle z^2 \rangle} = (\int z^2 n(\vec{r}) d^3r)^{1/2}$  et selon un axe radial  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = (\int x^2 n(\vec{r}) d^3r)^{1/2}$ , ainsi que le potentiel chimique, calculés numériquement, et dans les approximations de Zubarev-Kim et Thomas-Fermi. Pour ces grandeurs, l'approximation de Zubarev-Kim est en accord à seulement quelques pourcents près avec le calcul numérique, ce qui est également la précision du calcul numérique lui-même. En revanche, l'approximation de Thomas-Fermi donne des résultats différents de 10 à 20 %.

### Comparaison de ces calculs aux données

Pour comparer ces calculs aux données de façon cohérente, il est nécessaire de choisir la grandeur physique adéquate. Les images expérimentales donnent accès à la densité colonne du condensat, par intégration de la densité volumique sur la trajectoire du laser sonde, qui est selon un axe radial. Comme nous ne connaissons pas d'expression analytique pour le profil radial, on ne peut espérer remonter sans erreur à la densité volumique. Plus précisément, on mesure  $n_{2D}(y, z) = \int n(\vec{r}) dx$  et on ne peut en déduire  $n(\vec{r})$  sans hypothèse sur la forme fonctionnelle de  $n(\vec{r})$ .

A cela il faut ajouter que les images sont prises après expansion du condensat, et que nous ne disposons pas d'un modèle d'expansion dans le régime entre Thomas-Fermi et 1D. Nous ne pouvons donc pas relier  $n_{2D}(y, z)$ , calculé dans le piège, à ce que l'on attend après temps de vol, pour le comparer aux images.

Le seul moyen de s'affranchir des inconnues sur la dépendance radiale de  $n(\vec{r})$ , et sur l'expansion, est de considérer la densité 1D longitudinale  $n_{1D}(z) = \int n(\vec{r}) dx dy$ . Puisque l'expansion n'est que radiale, on a  $\int n(\vec{r}, t_{\text{exp}}) dx dy = \int n(\vec{r}, 0) dx dy$ . En effet, bien que l'on ne connaisse pas le détail du déroulement de l'expansion en dehors du régime de Thomas-Fermi 3D, le très grand rapport d'aspect du condensat est conservé, dans nos conditions, ce qui assure une expansion longitudinale négligeable. Cette propriété a été vérifiée expérimentalement.

Nous choisissons donc de comparer les densités linéiques  $n_{1D}(z)$  mesurée et calculée. En raison de la présence d'un nuage thermique sur les images, il est nécessaire d'effectuer un fit pour déterminer  $n_{2D}(y, z)$ . Pour cela, on utilise un ajustement à double structure, selon la méthode décrite dans la section 1.4.2. Le nuage thermique est ajusté sur ses ailes par une fonction de Bose, pour ne pas être gêné par le condensat, qui est ajusté par un profil parabolique de type Thomas-Fermi. Mais le fait ici de présupposer la forme de  $n_{2D}$  ne pose pas le problème de principe évoqué plus haut, car on va en déduire  $n_{1D}(z)$ , et non  $n(\vec{r})$ . Il suffit de vérifier que l'ajustement reproduit bien la courbe expérimentale pour avoir une bonne estimation de  $n_{1D}$ . La prise en compte correcte du nuage thermique par notre procédure de fit est une autre difficulté, que nous verrons à la prochaine section.

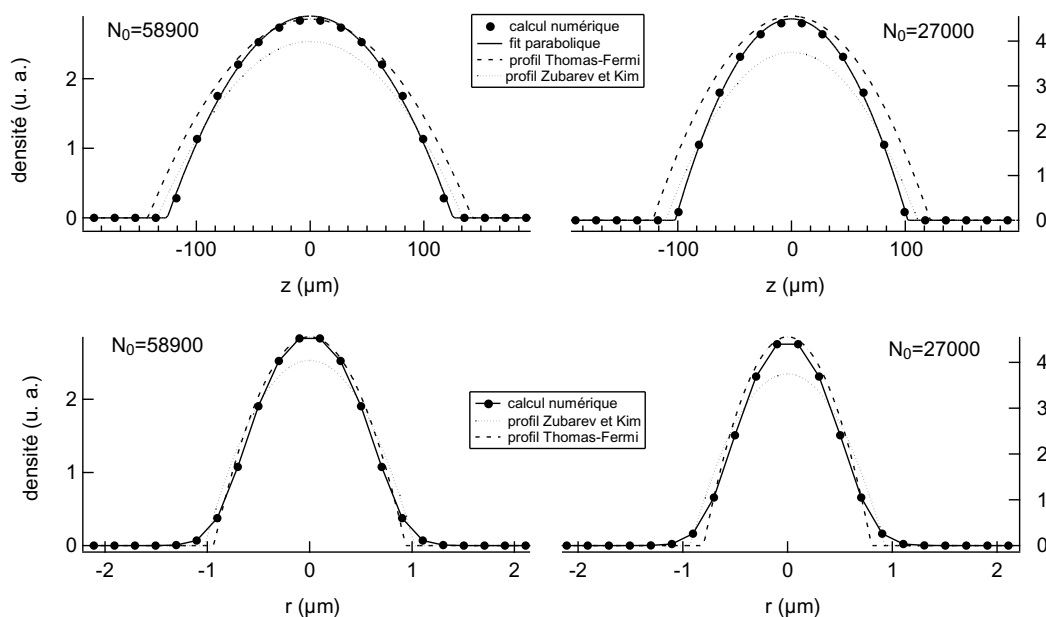


FIG. 3.11: Comparaison des profils de densité pour les deux nombres d’atomes condensés extrêmes des données analysées, soit  $N_0 = 5.89 \times 10^4$  et  $N_0 = 2.7 \times 10^4$ . Ces profils sont calculés dans l’approximation de Thomas-Fermi (tirets), de Zubarev et Kim (pointillés) et par la résolution numérique de l’équation de Gross-Pitaevskii en 3D ( $\bullet$ ). Sur les profils longitudinaux, le trait continu est un ajustement du résultat du calcul numérique par une parabole, et sur les profils radiaux c’est un guide pour l’œil. Bien que l’aire sous les différents profils comparés ne soit pas la même, l’intégration volumique des densités correspondantes donne le même nombre d’atomes total (soit  $5.89 \times 10^4$ , soit  $2.7 \times 10^4$ ).

### Résultats, comparaison avec un calcul exact

Comparons la densité spatiale du condensat obtenue avec ce modèle et la densité de Thomas-Fermi et les résultats exacts, que nous avons obtenus par la résolution numérique de l’équation de Gross-Pitaevskii en 3D [54]. Pour cela nous avons tracé (FIG. 3.11) les profils longitudinaux et radiaux du condensat donnés respectivement par  $n(r = 0, z)$  et  $n(r, z = 0)$ , les densités étant normalisées à  $1/a_{\perp}^3$ , avec  $a_{\perp} = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}$ . Ces graphes mettent qualitativement en évidence plusieurs caractères importants des profils obtenus par un calcul exact, et dans l’approximation de Zubarev et Kim.

Tout d’abord, pour le résultat du calcul numérique, il est intéressant de noter que la densité atomique au centre du condensat est très proche de la densité au centre donnée par Thomas-Fermi. Cela n’est pas évident a priori, puisque l’énergie cinétique radiale tendant à augmenter le rayon du condensat, on pourrait s’attendre à un “aplatissement” du profil pour conserver le nombre d’atomes. De plus on remarque que le profil longitudinal issu du calcul numérique est relativement bien reproduit par une parabole, mais que sa longueur est plus courte que dans le régime de Thomas-Fermi. Cela peut être vu comme la conséquence de la diminution de l’énergie d’interaction locale due à l’élargissement du profil radial. Sur le profil radial, on observe bien l’apparition “d’ailes”, signe de la transition vers une forme

### Solution

Par analogie avec le hamiltonien dans l'approximation de Thomas-Fermi, la minimisation de l'énergie du système avec  $\tilde{H}$  donne :

$$\mu = \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar\omega_i}{2} \sqrt{\gamma_i} + \tilde{\mu}_{\text{TF}}, \quad (3.26)$$

$$E = N \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar\omega_i}{2} \sqrt{\gamma_i} + \tilde{E}_{\text{TF}}, \quad (3.27)$$

$$n(\vec{r}) = \tilde{n}_{\text{TF}}(\vec{r}), \quad (3.28)$$

et

$$\tilde{R}_i^{\text{TF}} = \frac{2\tilde{\mu}_{\text{TF}}}{m\tilde{\omega}_i^2}. \quad (3.29)$$

On a noté  $\sqrt{1-\gamma_i}\omega_i = \tilde{\omega}_i$ , et  $X_{\text{TF}}(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z) = \tilde{X}_{\text{TF}}$ ,  $X$  représentant  $\mu$ ,  $n$ ,  $E$ , etc.

Le profil de densité (3.28) est donc semblable au profil de Thomas-Fermi (3.23), mais avec des fréquences de piégeage effectives  $\tilde{\omega}_i$ .

### Nature de l'approximation

On remarque que le hamiltonien  $\tilde{H}$  introduit sous-estime systématiquement l'énergie du système. En effet, comme

$$H_i - \tilde{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 \gamma_i x_i^2 - \frac{\hbar\omega_i}{2} \sqrt{\gamma_i}, \quad (3.30)$$

on a toujours,  $\forall \psi$ ,  $\langle \psi | H_i - \tilde{H}_i | \psi \rangle \geq 0$  puisque 0 est la valeur propre du mode fondamental de  $H_i - \tilde{H}_i$ . Par conséquent, on détermine les paramètres  $\gamma_i$  optimum en maximisant la valeur approchée de  $E$ , ou de façon équivalente, de  $E/N$  :

$$\left( \frac{E}{N} \right)_{\text{app.}} = \max_{\{\gamma_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar\omega_i}{2} \sqrt{\gamma_i} + \frac{15}{4} \left( \frac{15}{4\pi} g N m^{3/2} \prod_{i=1}^3 \sqrt{1-\gamma_i} \omega_i \right)^{2/5} \right\} \quad (3.31)$$

Pour les nombres d'atomes condensés des données présentées dans le TAB. 3.3, on trouve  $\gamma_z = 0$  et pour les  $\gamma_{\perp}$  :

$N_0 (\times 10^4)$	5.9	4.9	4.8	4.1	3.5	3.0	2.7
$\gamma_{\perp}$	0.26	0.29	0.29	0.31	0.34	0.37	0.39

TAB. 3.4: Valeurs des coefficients  $\gamma_{\perp}$  pour chaque nombre d'atomes condensés moyen  $N_0$  du TAB. 3.3.

### Énergie fonctionnelle, hamiltonien exact

On peut déterminer la fonction d'onde du condensat, dans l'approximation de champ moyen, par la minimisation de l'énergie du système :

$$E = \langle \psi | \sum_{i=1}^3 H_i | \psi \rangle + \frac{g}{2} \int |\psi|^4 d^3r, \quad (3.19)$$

où  $\psi$  est la fonction d'onde du condensat, telle que  $\int |\psi|^2 d^3r = N$ , avec  $N$  le nombre d'atomes condensés, et

$$H_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2, \quad (3.20)$$

la notation  $x_i$  désignant  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

### Hamiltonien approché, régime de Thomas-Fermi

Dans le régime de Thomas-Fermi, on peut minimiser l'énergie donnée par l'Eq. (3.19) en négligeant le premier terme du hamiltonien  $H$ . On obtient alors les expressions habituelles :

$$\mu_{\text{TF}}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{1}{2} \left( \frac{15}{4\pi} \omega_x \omega_y \omega_z m^{3/2} g N \right)^{2/5}, \quad (3.21)$$

$$E_{\text{TF}}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{5}{14} N \left( \frac{15}{4\pi} \omega_x \omega_y \omega_z m^{3/2} g N \right)^{2/5} \quad (3.22)$$

$$n_{\text{TF}}(\omega_x, \omega_y, \omega_z; \vec{r}) = \max \left\{ \frac{\mu_{\text{TF}}}{g} \left[ 1 - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{x_i}{R_i^{\text{TF}}} \right)^2 \right], 0 \right\}, \quad (3.23)$$

et

$$R_i^{\text{TF}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{TF}}}{m\omega_i^2}} \quad (3.24)$$

### Hamiltonien approché de Zubarev et Kim

Ici, nous introduisons le hamiltonien de la forme :

$$\tilde{H}_i = \frac{\hbar\omega_i}{2} \sqrt{\gamma_i} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 (1 - \gamma_i) x_i^2. \quad (3.25)$$

Le premier terme vise à rendre compte de l'énergie cinétique, et le second, à prendre en compte le fait que la pression quantique s'oppose au confinement radial du condensat. Les paramètres  $\gamma_i$ , tels que  $0 \leq \gamma_i < 1$ , sont égaux à 0 dans la limite de Thomas-fermi. Avant de voir comment les déterminer, voyons la solution de l'Eq. (3.25).

non seulement trop petit, mais il varie avec le nombre d'atomes et la fraction condensée, contrairement à ce que prédit le calcul. Plusieurs explications sont possibles. Tout d'abord, le potentiel chimique calculé avec cette théorie varie entre  $2\hbar\omega_{\perp}$  et  $3\hbar\omega_{\perp}$ . La limite  $\mu \gg \hbar\omega_{\perp}$ , nécessaire pour pouvoir négliger l'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii, n'est donc pas largement remplie, et l'approximation de Thomas-Fermi n'est peut être pas valable.

Pour quantifier cela, on peut utiliser le critère défini par C. Menotti et S. Stringari [52]. Ils montrent que la localisation d'un système dans la transition entre le régime 3D et 1D est définie par le paramètre  $\chi = N\lambda a/a_{\perp}$ , avec  $N$  le nombre d'atomes condensés,  $a$  la longueur de diffusion,  $a_{\perp}$  la taille radial du mode fondamental radial du piège harmonique et  $\lambda$  le rapport d'aspect du piège. Pour  $\chi \gg 1$  le condensat est dans le régime 3D, tandis que pour  $\chi \ll 1$  il est dans le régime 1D. Dans nos conditions expérimentales, nous avons  $\chi$  de l'ordre de 1. Nous sommes donc bien, a priori, dans le régime intermédiaire entre 3D et 1D.

Ensuite, la fraction condensée est inférieure à 50 % sur 5 des 7 points du graphe. Négliger les interactions avec le nuage thermique lors du calcul du profil du condensat peut donc conduire à des erreurs. Le nuage thermique est aussi susceptible de modifier l'expansion radiale.

Nous allons voir, dans les paragraphes qui suivent, grâce à des calculs numériques, les corrections apportées au profil de Thomas-Fermi par la prise en compte de l'énergie cinétique radiale et du nuage thermique. Nous discutons également de la validité d'une approximation analytique proposée par A. L. Zubarev et Y. E. Kim [53], pour modifier l'équation de Thomas-Fermi de façon à tenir compte de l'énergie cinétique radiale, tout en conservant une équation soluble analytiquement.

#### 3.4.4 Densité du condensat : effets de l'énergie cinétique radiale

Dans cette partie nous négligeons le nuage thermique. Il est important de noter, avant tout, que la prise en compte de l'énergie cinétique radiale dans le calcul de la densité du condensat, de façon exacte ou approchée, modifie le profil longitudinal. En effet, que ce soit dans l'équation de Thomas-Fermi (1.11), ou dans l'équation de Gross-Pitaevskii (1.9), les degrés de liberté radiaux et longitudinaux sont couplés.

Une théorie analytique approchée a été formulée par A. L. Zubarev et Y. E. Kim [53] pour décrire le profil de densité d'un condensat à température nulle, entre le régime de Thomas-Fermi et le régime 1D. Dans le régime de Thomas-Fermi l'énergie cinétique est négligeable selon tous les axes du piège. Ce que nous appelons ici régime 1D correspond au cas où l'énergie d'interaction est négligeable devant l'énergie du mode fondamental de l'oscillateur harmonique transverse (appelé parfois mode d'oscillation de point zéro). Entre ces deux régimes il faut tenir compte, en principe, et de l'énergie cinétique transverse et de l'énergie d'interaction.

L'idée de base de Zubarev et Kim est d'introduire "à la main" un terme représentant l'énergie cinétique dans l'équation de Thomas-Fermi, tout en lui conservant son caractère algébrique, avec une solution analytique.

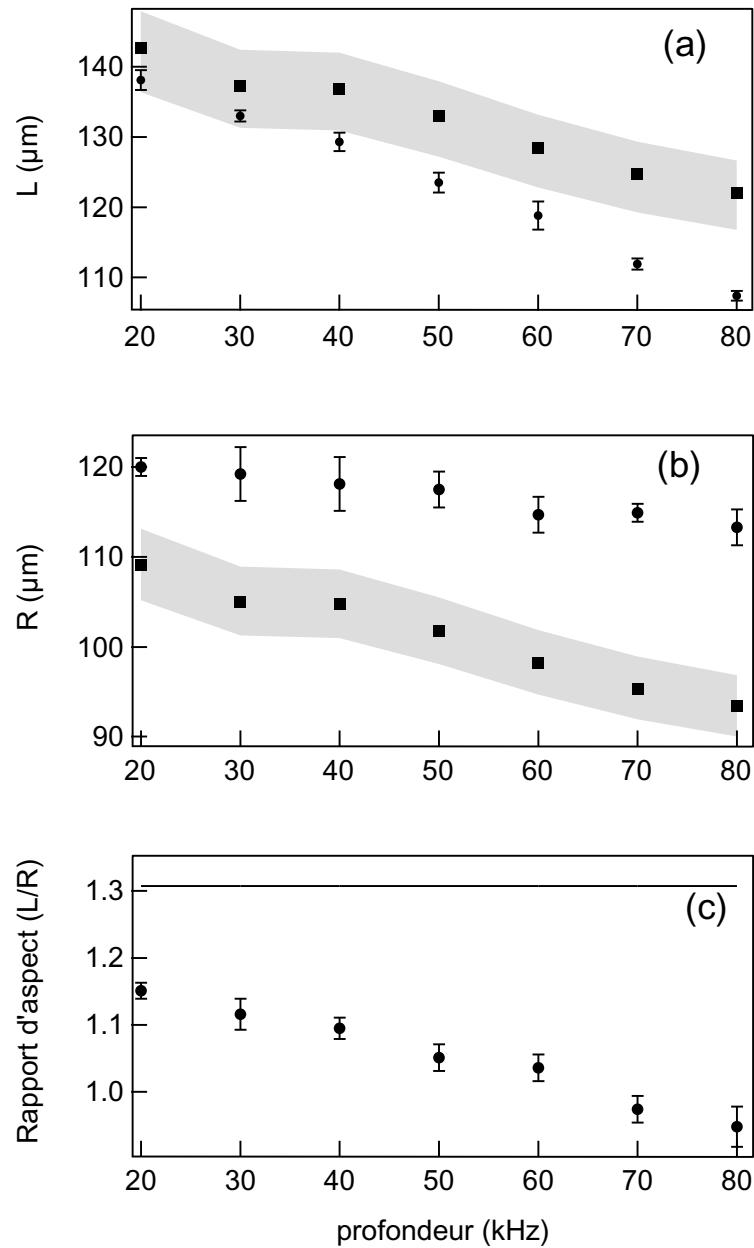


FIG. 3.10: **(a)** : Demi-longueur mesurée du condensat ( $\bullet$ ) avec barres d'erreurs pour indiquer la dispersion de la mesure), et demi-longueur calculée dans l'approximation de Thomas-Fermi ( $\blacksquare$ ). La zone grisée représente l'incertitude systématique du calcul, due aux 20 % d'incertitude sur la calibration du nombre d'atomes. **(b)** : idem mais pour le rayon du condensat. **(c)** : Rapport d'aspect  $L/R$  mesuré ( $\bullet$ ) (avec barres d'erreurs pour indiquer la dispersion de la mesure), et calculé ( $-$ ). Les incertitudes systématiques sur le calcul de  $R$  et  $L$  se compensent.

condensée variant entre 70 % et 10 %. Pour une fin de rampe plus haute, la fraction condensée est très faible ( $< 10\%$ ), difficile à distinguer du nuage thermique. Pour les fins de rampe plus basses le nuage thermique n'est plus mesurable car il contient peu d'atomes (moins de  $2.5 \times 10^4$ ), et il est principalement situé sous le condensat, puisque l'on a alors  $k_B T \simeq \mu$ . De plus le couteau radio-fréquence commence, dans ces conditions, à "évaporer" des atomes du condensat. Ce dernier n'est donc plus à l'équilibre.

Ainsi, sept profondeurs différentes ont été utilisées, stabilisées par la méthode décrite à la section 3.3.3. Pour chacune d'elle nous avons procédé de la façon suivante :

- Acquisition d'une dizaine d'images, aléatoirement réparties sur environ une heure.
- Ces images sont moyennées, puis l'image résultante est ajustée par la fonction mentionnée en 1.4.2. On en extrait toutes les grandeurs physiques désirées (température, fraction condensée etc.).
- On recommence quelques heures plus tard, ou un autre jour...

Finalement, pour chaque profondeur de piège on dispose d'entre 4 et 6 images moyennées. Leurs caractéristiques sont réunies dans le TAB.3.3.

prof. (kHz)	prof. (nK)	$T$ (nK)	$N_0$ ( $\times 10^4$ )	$F_c$ (%)	$L$ ( $\mu\text{m}$ )	$R$ ( $\mu\text{m}$ )
20	960	90 (6)	5.9(1)	71(1)	138(1)	120(1)
30	1440	124(8)	4.9(4)	58(1)	133(1)	119(3)
40	1920	177(5)	4.8(2)	44(1)	129(1)	118(3)
50	2400	216(9)	4.1(3)	31(1)	123(1)	117(2)
60	2880	261(10)	3.5(2)	21(1)	119(2)	115(2)
70	3360	286(3)	3.(3)	13.7(9)	112(1)	115(1)
80	3840	347(9)	2.7(2)	9.5(3)	107(1)	113(2)

TAB. 3.3: Caractéristiques des nuages dégénérés pour différentes profondeurs de piège, après 24 ms de temps de vol.  $N_0$  et  $F_c$  sont respectivement le nombre et la fraction d'atomes condensés,  $L$  la demi-longueur du condensat et  $R$  son rayon après expansion. Toutes ces données sont sous la forme "moyenne(écart-type)" de 4 à 6 valeurs.

### 3.4.3 Profil du condensat : comparaison avec Thomas-Fermi

Nous montrons sur la FIG. 3.10 la demi-longueur  $L$ , le rayon  $R$  et le rapport d'aspect  $L/R$  mesurés, comparés aux prédictions dans le régime Thomas-Fermi "standard" (voir section 1.3.1, Eq. (1.13)). Pour tenir compte de l'expansion du condensat pendant le temps de vol, on complète le calcul de Thomas-Fermi par le modèle d'expansion de Castin et Dum [27]. Pour nos fréquences de piégeage et notre temps de vol, les paramètres d'échelle longitudinaux et radiaux sont  $\lambda_z = 1.00(1)$  et  $\lambda_\perp = 116(1)$ , c'est à dire

$$\begin{aligned}
 L(t = 24 \text{ ms}) &\simeq L(t = 0) \\
 R(t = 24 \text{ ms}) &\simeq 116 \times R(t = 0).
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Ce graphe montre clairement que la théorie de Thomas-Fermi à température nulle ne décrit pas précisément le profil de densité du condensat dans nos conditions expérimentales. La longueur mesurée est trop petite, le rayon trop grand, et le rapport d'aspect est

### Stabilité du nombre d’atomes

La stabilisation du nombre d’atomes à la fin d’une rampe d’évaporation donnée a consisté... à stabiliser la fréquence du laser sonde au moment de l’image.

En effet, lors de l’ouverture du piège magnétique, la force magnétique entre les pôles de l’électroaimant chute brutalement. Le retour au “repos” de la structure de l’électroaimant communique des vibrations à l’ensemble de la table optique. Ces vibrations, ajoutées à celles dues à différents obturateurs mécaniques (de type “clic-clac”), perturbaient facilement le laser sonde, par une réflexion provenant de l’isolateur optique. La solution a consisté à plaquer solidement l’isolateur sur la table par une sorte d’étai.

Une fois ce problème résolu, la déviation standard du nombre d’atomes dans un nuage condensé ou proche du seuil, sur environ 20 images, est de 5 à 10 %, suivant les jours.

## 3.4 Étude du profil de densité

Nous analysons ici le profil de densité de condensats à différentes hauteurs de fin de rampe d’évaporation. En faisant varier ce paramètre, on change à la fois la température, le nombre d’atomes piégés, et la fraction condensée.

L’étude présentée ici n’est pas une étude systématique du profil de densité pour un nuage en dessous de  $T_c$  dans un potentiel très anisotrope. Le but est de comprendre, au moins en partie, la distribution spatiale des nuages dont on mesure la distribution des vitesses dans les prochains chapitres. En particulier, la densité 1D longitudinale des condensats est un paramètre très important dans l’étude des fluctuations de phase. Nous devons donc vérifier que nous sommes capable de la mesurer correctement sur les images d’absorption. Précisons que les données exploitées ici n’ont pas été acquises spécifiquement pour cette étude. Ce sont les images obtenues lors des expériences de spectroscopie de Bragg et les conditions d’acquisitions ont été dictées par les besoins de la spectroscopie de Bragg.

Le point clé du problème est que les approximations usuelles de Thomas-Fermi, et d’un gaz semi-idéal [51](condensat non perturbé par le nuage thermique), ne sont pas valides, à cause du rapport d’aspect extrême de notre piège magnétique (150) et des relativement faibles nombres d’atomes condensés.

### 3.4.1 Conditions expérimentales

Le piège utilisé ici, de pulsations  $\omega_z = 2\pi \times 5.00(5)$  Hz et  $\omega_\perp = 2\pi \times 760(10)$  Hz, est le résultat du compromis entre grande anisotropie et minimisation des oscillations déclenchées au franchissement du seuil de condensation (voir 3.2.1).

Le temps d’expansion du nuage avant l’imagerie est de 24 ms. C’est le temps de vol maximum autorisé par la hauteur de chute d’environ 5 mm. L’optimisation de la spectroscopie de Bragg, comme on le verra plus tard, a motivé ce choix.

### 3.4.2 Données expérimentales

Les données que nous présentons correspondent à quasiment toute la gamme de profondeurs finales de piège exploitables, entre 20 et 80 kHz. Cela correspond à une fraction



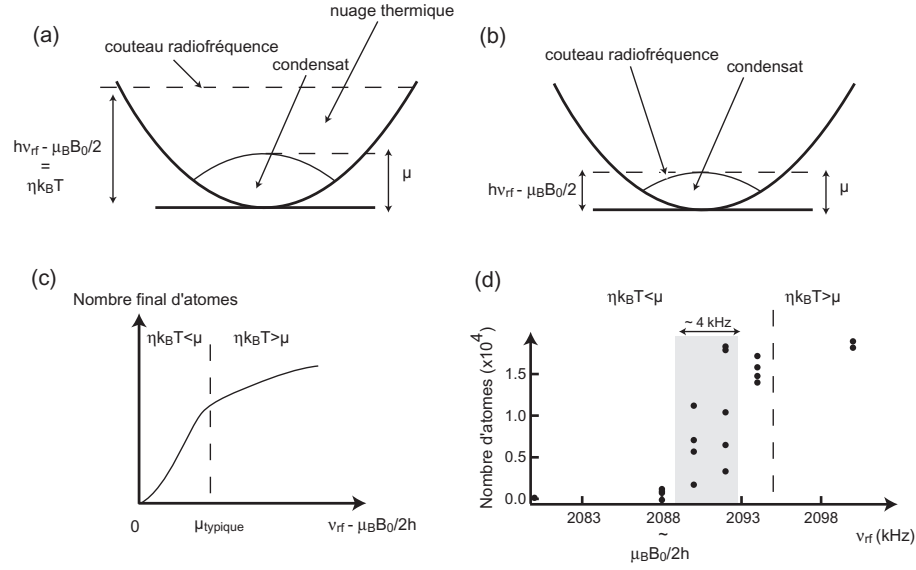


FIG. 3.9: Évaluation de la stabilité du biais. **(a)** Le couteau rf évapore les atomes du nuage thermique car  $\eta k_B T \gg \mu$ . Le nombre d'atomes varie lentement avec la fin de rampe. **(b)** Le couteau rf retire les atomes du condensat, car  $\eta k_B T < \mu$ . Le nombre d'atome tombe alors rapidement à 0 sur une plage de fréquence l'ordre du potentiel chimique typique de nos conditions  $\mu_{\text{typique}} \simeq 3 \text{ kHz}$ . **(c)** Allure attendue de la courbe du nombre d'atomes en fonction de la profondeur du piège  $\nu_{\text{rf}} - \mu_B B_0/2h$ . **(d)** Mesure du nombre d'atomes en fonction de la fréquence finale  $\nu_{\text{rf}}$  de la rampe d'évaporation. La zone grisée représente approximativement l'amplitude des fluctuations de la profondeur du piège pour une valeur de  $\nu_{\text{rf}}$  donnée. Ces fluctuations sont dues aux variations du biais du piège magnétique.

l'autre, soit quasi nul, soit significativement non nul. Sur la courbe expérimentale [FIG. 3.9 (d)], on estime l'ordre de grandeur des fluctuations du biais à 4 kHz. Les fluctuations de température sont en conséquence de l'ordre de 20 nK.

De plus, grâce à ce type de courbe on est capable de localiser le fond du piège à 4 kHz près. On peut ainsi suivre les dérives lentes du biais, afin de conserver une profondeur de piège constante<sup>3</sup>. On peut donc contrôler la température du nuage à 20 nK près.

Enfin, on peut noter que les fluctuations du biais sont de l'ordre de 6 mG (pour un biais  $B_0 \simeq 3 \text{ G}$ ). Le blindage magnétique effectif procuré par l'électroaimant (voir section 2.3.6) est vraisemblablement utile pour atteindre cette stabilité. Un blindage de  $\mu$ -métal a également été installé autour d'une pompe ionique distante d'environ 50 cm du centre du piège, mais nous n'avons pas mesuré précisément les fluctuations éventuelles de son champ magnétique.

<sup>3</sup>Cette méthode pour mesurer le fond du piège, en abaissant progressivement la fin de la rampe, peut introduire une légère erreur systématique sur sa position absolue (due à la largeur du couplage rf par exemple). Cependant, ici, nous recherchons un repère relatif par rapport au fond du piège, et cette méthode convient tout à fait.

Remarquons que cette valeur n'est pas dans l'intervalle estimé à l'équation (1.45), basée sur les valeurs extrêmes des coefficients de Clebsch-Gordan mis en jeu. Ceci peut être expliqué par la largeur spectrale non nulle du laser sonde, qui affecte la mesure de  $\bar{\sigma}$ . La discussion ayant conduit à (1.45) portait sur la section efficace de diffusion à résonance, qui est indépendante du spectre de la sonde. Or le laser sonde a une largeur spectrale  $\Delta$  non nulle, ce qui diminue son absorption à résonance d'un facteur  $(\Delta + \Gamma)/\Gamma$  par rapport au cas  $\Delta = 0$ , en supposant le spectre du laser Lorentzien. Il faut donc multiplier par ce même facteur la section efficace moyenne mesurée en supposant  $\Delta = 0$  pour obtenir la "vraie" section efficace moyenne, ainsi corrigée de l'effet de la largeur spectrale du laser sonde. Une largeur spectrale de la sonde de 2 MHz, ce qui est en accord avec plusieurs mesures de profils d'absorption que nous avons effectuées, peut expliquer l'écart entre le résultat (3.16) et ce que l'on prévoit (1.45), puisque cela corrige la mesure d'un facteur 4/3.

### 3.3.3 Stabilité et reproductibilité des paramètres des condensats

Pour un grand nombre d'expériences, il est important que les condensats soient produits de manière fiable et stable. C'est à dire que pour une profondeur de piège donnée, fixée par la fin de la rampe d'évaporation radio-fréquence, le nombre d'atomes et la température du nuage doivent être constants d'une réalisation à l'autre. Deux facteurs principaux peuvent introduire, a priori, des fluctuations : les caractéristiques du nuage initialement transféré dans le piège magnétique (nombre d'atomes et température), et le biais du piège magnétique. En pratique, ce sont les fluctuations du biais du piège magnétique qui sont le facteur limitant de la stabilité de l'expérience.

#### Stabilité du biais

Entre la fréquence de fin de rampe  $\nu_{\text{rf}}$ , le biais du piège magnétique  $B_0$  et la température du nuage, on a la relation :

$$\eta k_B T = h\nu_{\text{rf}} - g_F m_F \mu_B B_0, \quad (3.17)$$

où  $\eta$ , la profondeur du piège en unité de  $k_B T$ , dépend de la vitesse d'évaporation, et  $g_F m_F = 1/2$  pour  $|F = 1 m_F = -1\rangle$ . À la fin de la rampe, après quelques secondes d'attente à fréquence fixe, nous avons typiquement  $\eta = 10$ . Nous en déduisons les variations de  $T$  en fonction de celles de  $B_0$ ,  $\Delta T/\Delta B_0 \simeq 3.4$  nK/mG, ou encore environ 5 nK/kHz.

Pour évaluer la stabilité coup sur coup du biais magnétique, nous avons mesuré le nombre d'atomes restant dans le piège en diminuant progressivement la fréquence finale de la rampe  $\nu_{\text{rf}}$ . Lorsque l'évaporation ne concerne que les atomes du nuage thermique, le nombre d'atomes restant dans le piège varie lentement avec  $\nu_{\text{rf}}$ . Mais lorsque  $\eta k_B T \lesssim \mu$ , le couteau rf couple hors du piège les atomes du condensat, qui sont tous dans une bande d'énergie potentielle très étroite, dont la largeur est de l'ordre de  $\mu$ , soit quelques kHz. Le nombre d'atomes restant dans le piège varie alors rapidement avec  $\nu_{\text{rf}}$ , et s'annule lorsque  $h\nu_{\text{rf}} \leq \mu_B B_0/2$ . Le principe et la courbe expérimentale de cette mesure sont représentés sur la FIG. 3.9. Dans le cas d'un biais fluctuant de  $\alpha$  kHz crête à crête, le nombre d'atomes mesurés sur la plage  $\nu_{\text{rf}} = \mu_B B_0/2h \pm \alpha/2$  doit varier entre 0 et le nombre d'atomes dans un condensat de potentiel chimique  $\mu = h\nu_{\text{rf}} - (\mu_B B_0/2 - h\alpha/2)$ . Autrement dit, sur une plage de fréquence de l'ordre de  $\alpha$  kHz, le nombre d'atomes sera, d'une mesure sur

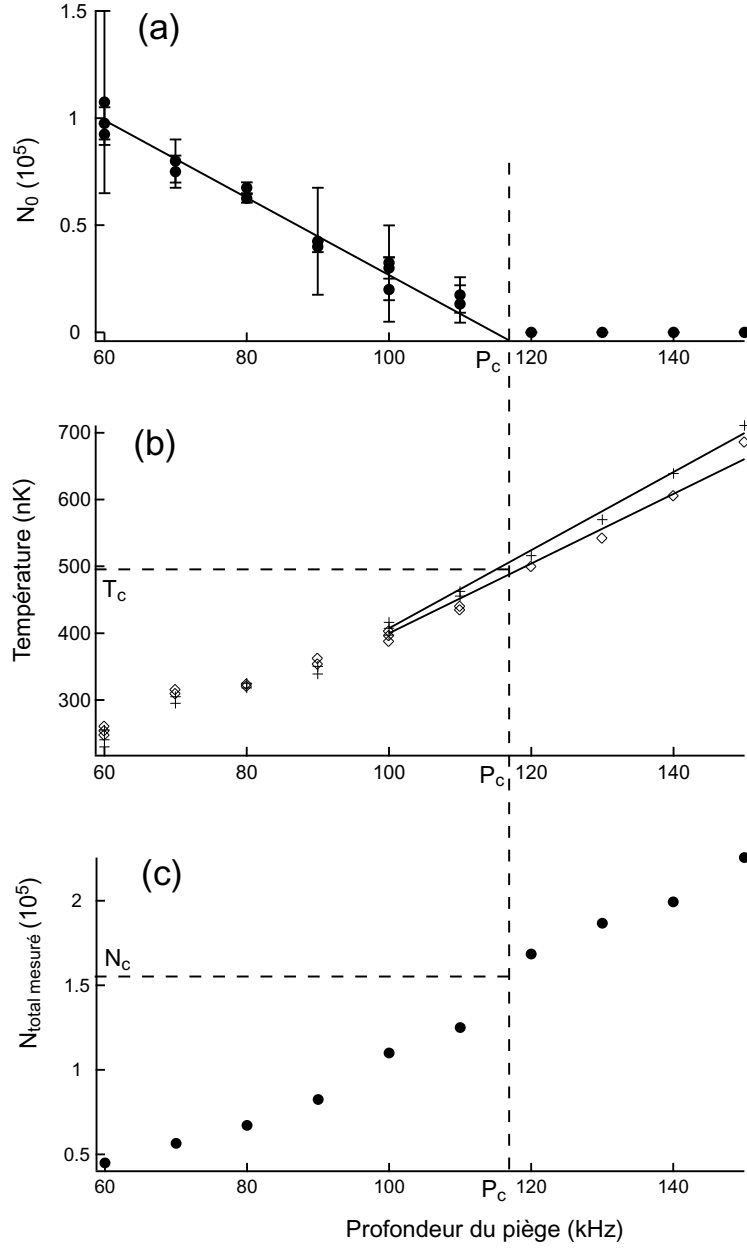


FIG. 3.8: Calibration du nombre d'atomes. **(a)** Nombre d'atomes condensés. Pour chaque profondeur, les différents points, avec les barres d'erreurs, correspondent à des ajustements d'une même image, mais en excluant une plus ou moins grande région centrale pour le fit du nuage thermique. Grâce au fit linéaire (ligne continue), on trouve la profondeur critique  $P_c = 116(2)$  kHz. **(b)** températures radiale (+) et axiale (◊). Les lignes continues sont des fits linéaires, qui donnent la température à laquelle on franchit le seuil de condensation  $T_c = 491(35)$  nK (moyenne sur les deux fits). Cela implique  $N_c^{\text{th}} = 6.2 \cdot 10^5$ . **(c)** Nombre d'atome total du système, mesuré en supposant une section efficace de diffusion égale à  $\sigma_0$ . Le nombre d'atome mesuré au seuil vaut  $N_c = 1.55(5) \cdot 10^5$ . Finalement, on trouve donc une section efficace de diffusion effective  $\bar{\sigma} = \sigma_0/4$ , à 20% près.

d'expansion  $t$  par :

$$\mu = \frac{m}{2} \frac{\omega_{\perp}^2}{1 + \omega_{\perp}^2 t^2} R_{\perp}^2(t). \quad (3.14)$$

On peut donc accéder à  $\mu$ , et donc à  $N_0$  si l'on connaît les fréquences du piège.

Cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter d'être dans le régime de Thomas-Fermi 3D habituel, afin qu'à la fois la relation (3.14) entre  $\mu$  et  $R_{\perp}(t)$  et la relation (1.14) entre  $\mu$  et  $N_0$  soient valables. Ce qui n'est pas notre cas, comme nous le verrons.

Nous avons donc choisi une autre méthode, basée sur la mesure de la température critique  $T_c$ . Au premier ordre,  $T_c \sim N^{1/3}$ , et par conséquent cette méthode de calibration de  $N$  est moins sensible que la mesure de  $\mu$ . Plus précisément, la température critique dépend du nombre  $N$  d'atomes du système comme [50] :

$$T_c = T_c^0 \left( 1 - 0.73 \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} N^{-1/3} - 1.33 \frac{a}{a_{\text{oh}}} N^{1/6} \right). \quad (3.15)$$

avec  $k_B T_c^0 = 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3}$ ,  $\tilde{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ ,  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ ,  $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$  et  $a$  la longueur de diffusion.  $T_c^0$  est la température critique du gaz idéal dans la limite thermodynamique, et les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> termes du membre de droite représentent respectivement la correction due au nombre fini de particules, et la correction due aux interactions de champ moyen. La FIG. 3.8 illustre la procédure de la calibration. Pour différentes profondeurs du piège magnétique autour du seuil de condensation, fixées par la valeur finale de la rampe d'évaporation, on mesure le nombre d'atomes total, le nombre d'atomes condensés et la température du nuage. Ces nombres d'atomes ne sont vrais qu'en valeur relative, puisque le but de la procédure est de connaître leur valeur absolue. En remarquant qu'en dessous du seuil le nombre d'atomes condensés  $N_0$  varie quasiment linéairement avec la profondeur du piège (que l'on note  $P$ ), on peut estimer la profondeur critique, où un condensat apparaît, par une extrapolation linéaire de  $N_0$ . On trouve la profondeur critique  $P_c = 116(2)$  kHz.

De la même façon, la température du nuage, au dessus du seuil, varie linéairement avec la profondeur. On déduit donc, grâce à un ajustement linéaire de  $T(P)$ , la température critique  $T_c = 491(35)$  nK. L'incertitude estimée sur  $T_c$  est la somme des contributions de l'incertitude sur  $P_c$  ( $\sim 2\%$ ), de l'écart entre les températures mesurées sur les directions axiales et radiales du nuage ( $\sim 1\%$ , car on n'impose pas une température identique selon les deux axes dans la fonction d'ajustement) et de l'incertitude sur le grandissement du système d'imagerie ( $\sim 2\%$ , ce qui fait  $4\%$  d'erreur sur la mesure de  $T$ , puisque la température est proportionnelle au carré du rayon du nuage après expansion). Cette valeur de  $T_c$  indique, d'après (3.15), que le nuage contient  $N_c^{\text{th}} = 6.2(1.4) \times 10^5$  atomes.

La dernière étape consiste à estimer le nombre d'atomes du système à  $P_c$ , mesuré en supposant  $\bar{\sigma} = \sigma_0$ . La courbe  $N_{\text{total}}(P)$  présentant une inflexion autour de  $P_c$ , la méthode la plus simple est d'interpoler linéairement  $N_{\text{total}}(P)$  entre les points situés juste au dessus et juste en dessous du seuil. On trouve  $N_c(\bar{\sigma} = \sigma_0) = 1.55(5) \times 10^5$ .

## Discussion et conclusion

On trouve finalement que la section efficace de diffusion effective  $\bar{\sigma} = N_c^{\text{th}}/N_c(\bar{\sigma} = \sigma_0)$  est quatre fois plus petite que  $\sigma_0$ . Plus précisément

$$\frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}} = 4.0(8). \quad (3.16)$$

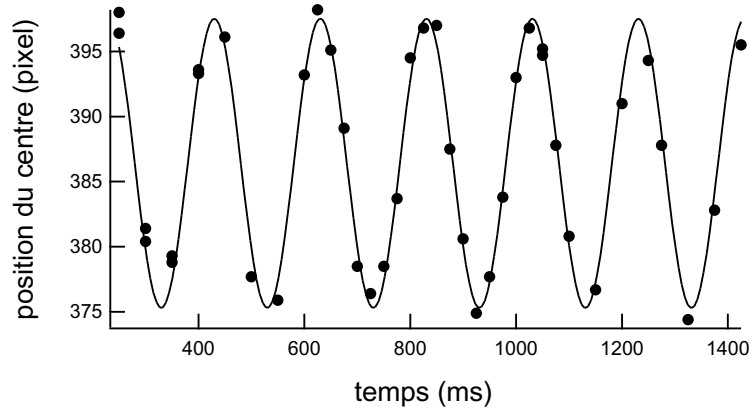


FIG. 3.7: Position du centre du condensat en fonction du temps passé dans le piège. L'oscillation est provoquée par l'application d'un gradient de champ magnétique en plus du champ de piégeage. Grâce à un fit par une sinusoïde on obtient la pulsation  $\omega_z = 2\pi \times 5.00(5)$  Hz.

Nous avons calibré  $\omega_{\perp}(B_0)$ , pour un gradient  $B'$  constant, en mesurant  $\omega_{\perp}$  par chauffage paramétrique [17] pour plusieurs valeurs de  $B_0$ . La mesure de  $B_0$  se fait en abaissant progressivement la fréquence finale de la rampe d'évaporation, jusqu'à ce que tous les atomes soient éjectés du piège. À cette fréquence, on sait que  $\nu_{\text{rf}} = \mu_B B_0/2$  — davantage de détails sur le principe de cette mesure sont fournis dans le paragraphe sur la mesure de la stabilité du biais.

Nous avons obtenu de cette façon :

$$\omega_{\perp} = 2\pi \times \frac{1320(5)}{\sqrt{B_0}} \text{ Hz.} \quad (3.13)$$

Ce résultat implique  $B' = 1461(5)$  G/cm, ce qui est en parfait accord avec la mesure du champ magnétique effectuée avec une sonde à effet Hall lors de la mise au point de l'électroaimant, qui donnait  $B' = 1460$  G/cm, pour les mêmes conditions de fonctionnement, c'est à dire un courant de 30 A dans les bobines du quadrupôle.

Les expériences décrite dans ce manuscrit, sauf mention contraire, sont réalisées à un biais  $B_0 = 3.00(4)$  G, ce qui correspond à une fréquence  $\omega_{\perp} = 760(10)$  Hz.

### 3.3.2 Calibration du nombre d'atomes

La section efficace de diffusion des atomes au moment de l'imagerie n'étant pas précisément connue dans nos conditions expérimentales (voir section 1.4.1), à cause du champ magnétique résiduel lui même de direction inconnue, il est nécessaire de calibrer la mesure du nombre d'atomes par notre système d'imagerie par absorption.

Une méthode pour cela est de mesurer le potentiel chimique d'un condensat, qui est proportionnel à  $N_0^{2/5}$  dans le régime de Thomas-Fermi (voir section 1.3.1). Toujours dans ce régime, et dans un piège allongé, le modèle d'expansion présenté dans [27] montre que le potentiel chimique dans le piège est aussi relié au rayon  $R_{\perp}$  du condensat après un temps

### 3.2.4 Conclusion

Nous avons observé des oscillations de la longueur du condensat, déclenchées lors du franchissement du seuil de condensation. Pour un temps caractéristique de condensation de l'ordre de  $\omega_z^{-1}$ , ou inférieur, les oscillations sont importantes. Pour des rampes d'évaporation plus lentes, les oscillations sont de plus faible amplitude.

Ces oscillations ont été caractérisées par deux méthodes : imagerie du condensat, après temps de vol, et mesure, par spectroscopie de Bragg, de la distribution de vitesse axiale. Les résultats de ces deux expériences sont en bon accord, selon le modèle de la référence [27]. Les fréquences mesurées des oscillations sont en accord avec la prévision  $\sqrt{5/2}\omega_z$ , avec une tendance à être légèrement inférieures, qui nécessiterait des mesures plus approfondies pour être confirmée.

Cette étude nous a permis de choisir de bonnes conditions pour les mesures de la distribution de vitesse des fluctuations de phase. Pour éviter autant que possible une contribution des oscillations au champ de vitesse axiale, nous choisirons le piège (II), présentant un temps d'amortissement nettement plus court que le piège (I). Car la vitesse typique attendue associée aux fluctuations de phase est de  $100 \mu\text{m/s}$ , à comparer aux oscillations de la largeur de la distribution de vitesse observées, d'une amplitude de  $500 \mu\text{m/s}$ . Une rampe finale d'évaporation dix fois plus lente que celle utilisée ici (pour le piège (II)) et un temps de mise à l'équilibre du système de plus de 5 s (avec bouclier RF) permettront, comme nous le verrons au dernier chapitre, de réduire suffisamment l'amplitude de l'excitation.

## 3.3 Calibration et stabilité des paramètres du piège et des condensats

### 3.3.1 Mesure des fréquences du piège

#### Fréquence longitudinale

Pour mesurer la fréquence longitudinale du piège, on provoque une oscillation du centre de masse d'un condensat en branchant pendant quelques millisecondes un gradient de champ magnétique, de quelques G/cm, créé par les bobines du PMO. Une telle oscillation se fait à la fréquence du piège, et n'est pas affectée par les interactions au sein du condensat [48, 30]. On les mesure simplement sur des images d'absorptions prises à un temps de vol fixe, en faisant varier d'une image à l'autre la phase de l'oscillation à laquelle on ouvre le piège. Une telle mesure est représentée sur la FIG. 3.7. On obtient de cette façon  $\omega_z = 2\pi \times 5.00(5) \text{ Hz}$ .

#### Fréquence radiale

Pour un piège de type Ioffe-Pritchard, la fréquence radial dépend du gradient de champ radial  $B'$  et du biais  $B_0$  :

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{\mu_B}{2m}} \frac{B'}{\sqrt{B_0}}. \quad (3.12)$$

Cette expression est un cas particulier de l'équation (2.4), valable pour des atomes dans l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ , et pour  $B'' \ll B'^2/B_0$ .

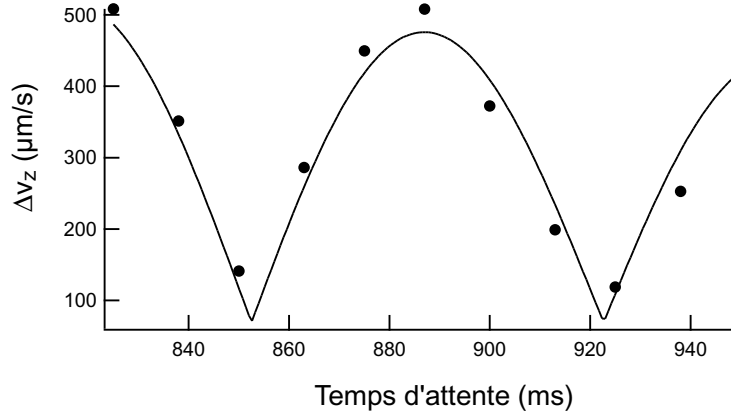


FIG. 3.6: Demi-largeur de la distribution de vitesse axiale en fonction du temps d'attente dans le piège. Le trait continu est un ajustement des points expérimentaux ( $\bullet$ ) par la fonction  $C + 0.54R_z A \Omega |\cos(\Omega t)| \times \exp(-t/\tau)$ . Le temps d'amortissement  $\tau = 735$  ms est fixé, déterminé à partir des oscillations de la longueur du condensat. Le rayon de Thomas-Fermi axial  $R_z = 190$   $\mu\text{m}$  ne tient pas compte de la légère diminution du nombre d'atomes sur l'échelle de ce graphe (quelques %). L'ajustement donne  $A = 0.30(5)$ ,  $\Omega/\omega_z = 1.43(5)$  et  $C = 70(33)$   $\mu\text{m/s}$ .

### Comparaison des résultats des 2 types de mesure

Il est intéressant de comparer les résultats des deux mesures indépendantes effectuées, la première dans l'espace positions mais avec une contribution de la distribution de vitesse du fait du temps de vol, et la seconde dans l'espace des impulsions.

D'après les équations (3.9) et (3.10), l'amplitude des oscillations mesurées par imagerie est dilatée par le temps de vol  $t$ , selon la loi  $A_{\text{tdv}} = A\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ . Le temps de vol introduit également le déphasage  $\phi_{\text{tdv}}$  tel que  $\cos(\phi_{\text{tdv}}) = 1/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ .

En revanche par la distribution des vitesses, qui est gelée lors de l'ouverture du piège<sup>2</sup>, on obtient directement les mesures de l'amplitude  $A$  et de la phase  $\phi$  des oscillations dans le piège. Les valeurs mesurées sont notées  $A_{\text{exp}}$  et  $\phi_{\text{exp}}$ .

On attend donc  $A_{\text{tdv}}/A_{\text{exp}} = \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ , et  $\phi_{\text{tdv}} - \phi_{\text{exp}} = \arccos(1/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2})$ . Les valeurs sont reportées dans le TAB. 3.2. Elles montrent que le modèle simple qui a été exposé permet de faire le lien entre les résultats des 2 expériences, à la fois en ce qui concerne l'amplitude et la phase des oscillations.

$A_{\text{tdv}}/A_{\text{exp}}$	$\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$	$\phi_{\text{tdv}} - \phi_{\text{exp}}$	$\arccos(1/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2})$
1.67(20)	1.57	1.5(1.5) mod $2\pi$	0.88

TAB. 3.2: Comparaison des résultats des 2 mesures avec les prédictions théoriques. On attend  $A_{\text{tdv}}/A_{\text{exp}} = \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ , et  $\phi_{\text{tdv}} - \phi_{\text{exp}} = \arccos(1/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2})$ , et c'est ce que l'on trouve, aux incertitudes près.

<sup>2</sup>Rappelons que ceci n'est vrai que dans la mesure où l'on néglige la vitesse d'expansion due au champ moyen.

### Comparaison des fréquences

Le modèle que l'on vient de décrire prédit  $\Omega/\omega_z = \sqrt{5/2}$ , soit  $\Omega/\omega_z \simeq 1.58$ . Les deux courbes de la FIG. 3.5 sont donc en accord raisonnable, puisqu'elles donnent respectivement  $\Omega/\omega_z = 1.53(1)$  et  $\Omega/\omega_z = 1.56(1)$ . Les expériences rapportées dans [44, 46] avaient déjà confirmé la fréquence du mode collectif que nous avons observé. Mais tous les résultats expérimentaux sont inférieurs de quelques pourcents à la valeur théorique (nos mesures sont cependant trop sommaires pour être catégoriques). Cela est peut être dû à la fraction thermique, qui a tendance à diminuer la fréquence de ce mode [46].

### À propos des temps d'amortissement

Les temps d'amortissement que nous observons, 2.6(7) s et 0.73(10) s, rapportés à la période d'oscillation, sont de l'ordre de grandeur des temps d'amortissement mesurés avec peu de nuage thermique dans [45, 46]. Mais le calcul analytique applicable à ces expériences [49] n'est pas valable dans nos conditions, car il suppose  $k_B T \gg \mu$ , alors que nous avons  $k_B T \simeq \mu$ .

### Mesure de la distribution des vitesses

Nous avons également mesuré par spectroscopie de Bragg la largeur de la distribution des vitesses axiales dans les conditions de l'oscillation de la FIG. 3.5, dans le piège (II). La méthode ne sera pas détaillée ici, faisant l'objet des chapitres suivants.

Mentionnons simplement que cette méthode mesurant  $\Delta v_z(t) \simeq 0.54 R_z A \Omega |\cos(\Omega t)|$  (voir l'équation (3.8)), elle donne un signal en valeur absolue de sinusoïde. Cela est simplement dû au fait que la distribution des vitesses du condensat en phases d'expansion ou de contraction (décalées de  $\pi$ ) est identique, bien que ce ne soit pas vrai pour le champ de vitesse  $v_z(z, t)$ .

La FIG. 3.6 montre cette mesure de l'oscillation dans l'espace des vitesses. Le choix de la fonction d'ajustement de cette courbe est guidé par l'équation (3.8) et par l'observation de l'amortissement exponentiel des oscillations de la FIG. 3.5. La fonction de fit choisie est donc

$$C + 0.54 R_z A_{\text{exp}} \Omega |\cos(\Omega t + \phi_{\text{exp}})| \times \exp(-t/\tau), \quad (3.11)$$

avec  $C$ ,  $A_{\text{exp}}$ ,  $\Omega$  et  $\phi_{\text{exp}}$  comme paramètres libres. Le temps d'amortissement est fixé à la valeur mesurée précédemment (TAB. 3.1)  $\tau = 735$  ms. En revanche on néglige la variation du rayon de Thomas-Fermi sur l'échelle de temps de ce graphe, et on prend sa valeur moyenne  $R_z = 190 \mu\text{m}$ . On trouve ainsi  $C = 70(33) \mu\text{m/s}$ ,  $A_{\text{exp}} = 0.30(5)$ ,  $\Omega/\omega_z = 1.43(5)$  et  $\phi_{\text{exp}} = 5.8(1.3)$ . La fréquence mesurée est donc un peu basse par rapport à la valeur 1.58 que l'on attend. Cet écart est peut être dû aux trois derniers points de la courbe, qui semblent un peu déphasés. Un ajustement sans tenir compte de ces points donne  $\Omega/\omega_z = 1.5(5)$ , plus proche de 1.58. La valeur non nulle de  $C$ , quant à elle, peut être expliquée par la limite de résolution de notre mesure, ainsi que par la largeur de la distribution en vitesse due à l'expansion que nous avons négligée dans la modélisation des oscillations, et que l'on estime à environ  $20 \mu\text{m/s}$ .



Or le mode que l'on observe conserve le profil parabolique du condensat. Il doit donc être comparé au mode  $k = 2$ , tel que  $\Omega = \sqrt{5/2}\omega_z$ . Ce mode peut être décrit par le modèle de Castin et Dum [27] (voir également section 1.3.2) comme une dilatation axiale du nuage, avec un facteur d'échelle  $\lambda_z$  oscillant dans le piège. Ce modèle permet également de calculer la dynamique de l'expansion du nuage oscillant après coupure du piège.

### Oscillations dans le piège

Les oscillations dans le piège peuvent être décrites par un facteur d'échelle  $\lambda_z(t)$  de la forme [27] :

$$\lambda_z(t) = 1 + A \sin(\Omega t + \phi), \quad (3.5)$$

où  $\Omega = \sqrt{5/2}\omega_z$  et  $A$  est l'amplitude de l'oscillation. Ce qui donne la densité du condensat en fonction du temps

$$n(r_\perp, z, t) = n(r_\perp, \frac{z}{\lambda_z(t)}, 0). \quad (3.6)$$

On en déduit que le champ de vitesse axial, donné par  $v_z = z\dot{\lambda}_z(t)/\lambda_z(t)$  [27], s'écrit, pour une faible amplitude d'oscillation,  $v_z(z, t) = zA\Omega \cos(\Omega t + \phi)$ . Cela implique une distribution de vitesse axiale de la forme (voir section 1.3.2)

$$\mathcal{D}(v_z) = C \left( 1 - \frac{v_z^2}{[R_z A \Omega \cos(\Omega t + \phi)]^2} \right)^2, \quad (3.7)$$

de demi-largeur à mi-hauteur

$$\Delta v_z(t) \simeq 0.54 R_z A \Omega |\cos(\Omega t + \phi)|, \quad (3.8)$$

$R_z$  étant la demi-longueur du condensat au repos.

### Expansion libre d'un condensat initialement oscillant

On néglige ici l'expansion axiale due à l'énergie d'interaction, très faible en raison de la grande anisotropie du condensat, ainsi que l'expansion due à sa taille finie. La distribution de vitesse axiale due à l'oscillation est alors gelée à l'ouverture du piège (instant  $t_0$ ), et donc  $\lambda_z(t_0 + t)$  est simplement donné par [27]

$$\lambda_z(t_0 + t) = \lambda_z(t_0) + t \left[ \frac{d}{dt} \lambda_z(t) \right]_{t=t_0}, \quad (3.9)$$

qui se met sous la forme explicite

$$\lambda_z(t_0 + t) = 1 + A \sqrt{1 + \Omega^2 t^2} \sin(\Omega t_0 + \phi + \phi_0), \quad (3.10)$$

avec  $\phi_0$  défini par  $\cos(\phi_0) = 1/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ .

L'oscillation observée après temps de vol est donc déphasée de  $\phi_0$  par rapport à l'oscillation dans le piège, et son amplitude est amplifiée d'un facteur  $\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ .

seuil et l'arrêt de la rampe à une valeur constante est de moins d'une période d'oscillation axiale du piège<sup>1</sup> ( $2\pi/\omega_z$ ). L'interprétation proposée dans [7] est la suivante. Le temps de thermalisation local étant inférieur à  $1/\omega_z$ , on atteint un équilibre thermique local "transitoire", variant selon l'axe  $z$ , et qui relaxe vers un équilibre thermique global en un temps de l'ordre de  $1/\omega_z$ . Ceci a pour conséquence que la température locale  $T(z)$  peut être inférieure à  $T_c(z)$  sur une longueur telle que le condensat qui se forme est beaucoup plus long qu'à sa position d'équilibre. Le condensat relaxe alors vers sa longueur d'équilibre en effectuant les oscillations que l'on observe.

Plus précisément, le taux de collisions  $\gamma$  au centre du nuage thermique au seuil est donné par  $\gamma = n(0)\sigma\overline{v_{\text{rel}}}$ , où  $n(0)$  est la densité au centre du nuage. La vitesse relative moyenne est liée à la vitesse moyenne par  $\overline{v_{\text{rel}}} = \sqrt{2} \times \overline{v}$ , avec  $\overline{v} = \sqrt{8k_B T/\pi m}$ . Avec nos paramètres au seuil  $N = 6 \times 10^5$  et  $T_c = 500$  nK, on trouve  $\gamma = 1000$ , soit  $\gamma/\omega_{\perp} \simeq 0.2$ , et  $\gamma/\omega_z \simeq 30$ . Le temps typique de rethermalisation, de l'ordre de  $4/\gamma$  [47, 36] est par conséquent beaucoup plus court que la période d'oscillation axiale dans le piège. Le nuage est donc hydrodynamique axialement. Il y a donc une certaine gamme de vitesses de rampe (dans laquelle nous sommes) où le refroidissement évaporatif peut être efficace (thermalisation rapide car  $\gamma$  est grand), tout en conduisant à une température locale selon l'axe longitudinal (thermalisation locale car  $\omega_z \ll \gamma$ ).

Des mesures complémentaires allaient aussi dans ce sens, montrant que pour une rampe d'évaporation plus lente ( $< 50$  kHz/s) dans le piège (I), les oscillations n'étaient plus mesurables.

### 3.2.3 Étude quantitative des oscillations

De nombreux travaux théoriques sur les modes d'oscillation des condensats ont été publiés (voir [48] et les références de cet article). Nous avons donc des modèles, que nous exposons ici, à comparer à nos mesures, bien qu'ils ne prennent pas en compte d'amortissement.

#### Modèle théorique

S. Stringari a calculé les modes d'oscillation de basses énergies de condensats dans des pièges très anisotropes avec un modèle hydrodynamique [48]. Selon ce calcul, les modes de fréquence  $\Omega \ll \omega_{\perp}$ , de moment angulaire axial nul, peuvent se mettre sous la forme  $n(\vec{r}) = n_0(\vec{r}) + \delta n(\vec{r})$ , avec

$$\delta n(\vec{r}) = \delta n_0(z) + \epsilon^2 r_{\perp}^2 \delta n_1(z) + \dots, \quad (3.2)$$

où  $r_{\perp}$  est la coordonnée radiale et  $\epsilon = \omega_z/\omega_{\perp}$ . Au premier ordre en  $\epsilon$ , la perturbation de densité est donc indépendante de  $r_{\perp}$ . Pour cette raison, nous ne discutons dans la suite que la dynamique axiale du condensat.

Les amplitudes et fréquences propres de ces modes sont données par

$$\delta n_0^{(k)}(z) = \alpha z^k + \beta z^{k-2} + \dots \quad (3.3)$$

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{k(k+3)}{4}} \omega_z. \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Nous savons cela car nous avons mesuré la fréquence de la rampe qui correspond au seuil de condensation et nous connaissons la vitesse de la rampe.

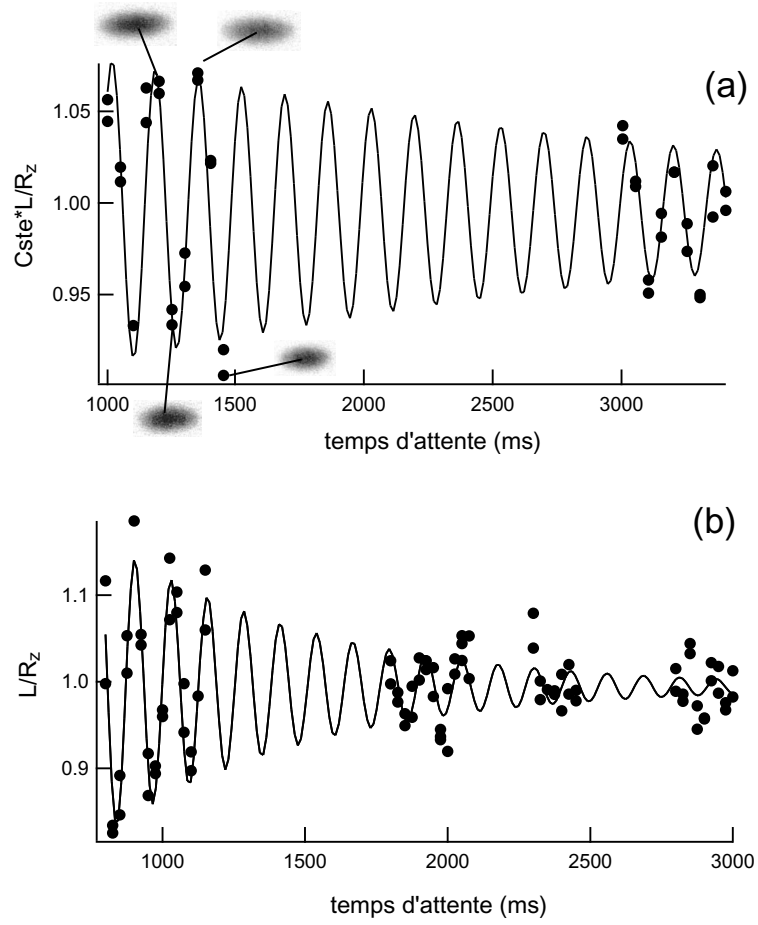


FIG. 3.5: Courbes d'oscillations pour deux pièges différents. La longueur du condensat rapportée au rayon de Thomas-Fermi (voir texte) est tracée en fonction du temps d'attente dans le piège. L'origine du temps correspond à la fin de la rampe d'évaporation. **(a)** Piège (I), où  $\omega_z = 2\pi \times 3.9$  Hz et  $\omega_\perp = 2\pi \times 810$  Hz. Des images du condensat en extension maximale et minimale sont reproduites. **(b)** Oscillations dans le piège (II), où  $\omega_z = 2\pi \times 5$  Hz et  $\omega_\perp = 2\pi \times 760$  Hz. Les traits continus sont des ajustements par une sinusoïde amortie exponentiellement. Les résultats de ces ajustements sont regroupés dans le TAB. 3.1.

Piège	évaporation	temps condensation	$\tau$ (ms)	$\Omega$	$\Omega * \tau$	$A_{tdv}$
(I)	300 kHz/s	$\sim 300$ ms	2650(750)	$1.53 \omega_z$	99	0.12
(II)	850 kHz/s	$\sim 200$ ms	730(100)	$1.56 \omega_z$	35	0.5

TAB. 3.1: Paramètres des oscillations de la FIG. 3.5. La fonction d'ajustement est donnée dans le texte.  $\Omega$  est la fréquence des oscillations. On voit que le temps d'amortissement  $\tau$  est beaucoup plus long dans le piège (I). Le facteur de qualité  $\tau\Omega$  est également bien supérieur dans ce piège. Noter que l'amplitude des oscillations mesurée après temps de vol  $A_{tdv}$  est l'amplitude extrapolée par le fit à  $t = 0$ , (fin de l'évaporation). On a également indiqué le "temps de condensation", c'est-à-dire le temps séparant le franchissement du seuil et la fin de la rampe.

### 3.2.1 Observation des oscillations

La mesure des oscillations est simple à réaliser expérimentalement. On produit un condensat, que l'on laisse osciller dans le piège pendant un temps choisi, après la fin de la rampe d'évaporation. Puis le piège est ouvert, et après 24 ms de temps de vol on prend une image. Cette séquence est répétée pour plusieurs temps d'oscillation dans le piège. L'ensemble des images permet alors de tracer la longueur du condensat en fonction du temps d'oscillation. Ajoutons que pendant l'attente finale dans le piège un bouclier RF est conservé (à la valeur de la fin de rampe), pour éviter un chauffage trop important. De plus, la fin de rampe d'évaporation est choisie de façon à laisser une fraction thermique visible, de l'ordre de 30 %, pour être sûr que le couteau RF est assez haut, et ne perturbe pas le condensat.

### 3.2.2 Étude qualitative des oscillations

Ces oscillations ont été mesurées dans deux pièges d'anisotropies différentes. Le piège de fréquences  $\omega_z = 2\pi \times 3.9 \text{ Hz}$  et  $\omega_\perp = 2\pi \times 810 \text{ Hz}$  sera appelé piège (I) et celui de fréquences  $\omega_z = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$  et  $\omega_\perp = 2\pi \times 760 \text{ Hz}$  sera appelé piège (II).

La FIG. 3.5 montre une courbe d'oscillations pour chacun de ces pièges. Le nombre d'atomes dans le condensat  $N_0$  diminuant significativement au cours de l'attente dans le piège, environ de moitié sur l'échelle des graphes, on n'a pas tracé directement la longueur mesurée  $L(t)$ , mais  $Cste \times L(t)/N_0^{1/5}(t)$ . Le but est de rapporter la longueur mesurée à la longueur de Thomas-Fermi  $R_z$  correspondant à  $N_0(t)$ . Pour le piège (I) nous ne disposons pas de calibration absolue de  $N_0$ , la constante a donc été choisie pour centrer les oscillations sur 1. En revanche, pour le piège (II), la connaissance absolue de  $N_0$  a permis de tracer réellement  $L(t)/R_z(t)$ , qui tend également vers 1, sur la courbe, quand  $t$  augmente.

Le tableau TAB. 3.1 résume les résultats des ajustements de ces courbes par la fonction  $C + A_{\text{tdv}} \sin(\Omega t + \phi_{\text{tdv}}) \times \exp(-t/\tau)$ , représentant des oscillations amorties exponentiellement.

### Interprétation

Nous n'avons pas étudié ces oscillations de façon systématique, cherchant plutôt à les éliminer. Nous ne sommes par conséquent pas en mesure d'en démontrer l'origine. Néanmoins, l'interprétation qualitative de I. Shvachuck *et al.* [7], en termes de condensation hors d'équilibre, peut s'appliquer dans notre cas.

Écartons tout d'abord l'hypothèse d'un bruit technique, d'une instabilité du piège magnétique, ou de l'excitation du nuage lors de la dernière déformation du piège, avant la condensation. En effet, la procédure même de mesure de ces oscillations, chaque point représentant un cycle de condensation complet, montre que leur phase n'est pas aléatoire. De plus, nous avons vérifié que l'amplitude des oscillations était fonction du temps entre le franchissement du seuil et l'ouverture du piège, et non du temps entre la dernière modification du piège magnétique (relâchement du confinement axial et compression radiale) et l'ouverture du piège.

Les oscillations semblent donc liées à la dynamique de la condensation, qui doit être trop rapide pour être en quasi-équilibre. Par exemple, pour chacune des deux courbes, la fraction condensée est de plus de 50 %, alors que le temps séparant le franchissement du

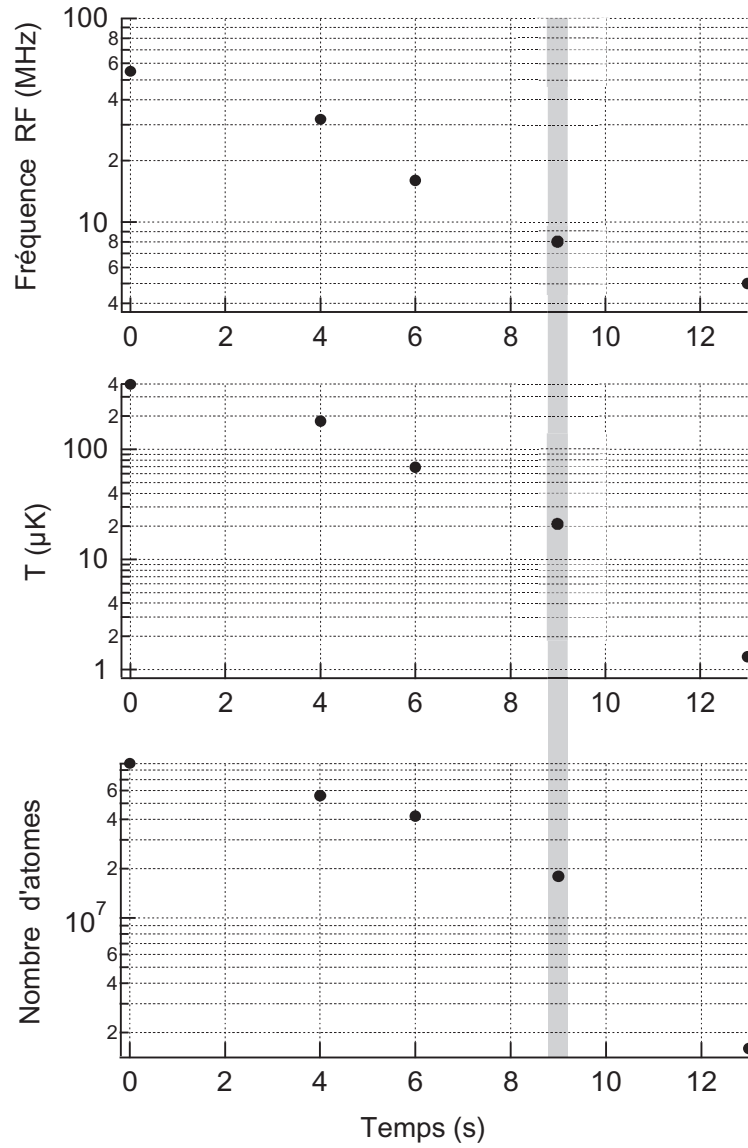


FIG. 3.4: Rampe RF d'évaporation et évolution de la température et du nombre d'atomes dans le nuage au cours du refroidissement. La bande grisée représente l'instant où, éventuellement, on diminue encore le biais et la courbure longitudinale du piège pour obtenir des rapports d'aspects supérieurs à 60. Le dernier point de ce graphe est à environ  $2T_c$ .

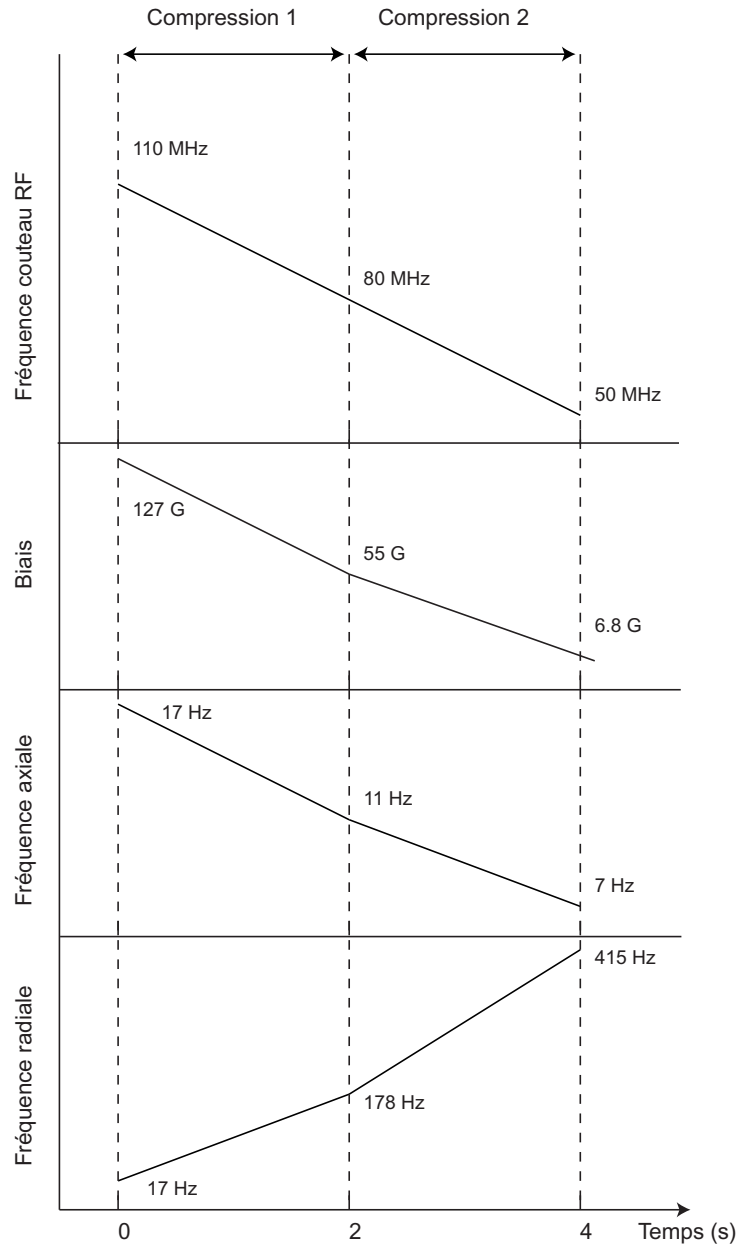


FIG. 3.3: Séquence temporelle de la compression du piège magnétique. Les deux compressions correspondent aux étapes 3 et 4 du cycle détaillé dans la section 2.3.10. La rampe RF est utile pour commencer à refroidir et ainsi limiter la longueur du nuage (sans cela, environ la moitié des atomes du piège sont perdus, peut-être par les collisions avec les parois de la cellule).

### Compression

La séquence de compression est indiquée sur la FIG. 3.3. Elle correspond aux étapes 3 et 4 du cycle détaillé dans la section 2.3.10. Nous avons constaté expérimentalement qu'il est important d'utiliser une rampe radio-fréquence pendant cette étape. En théorie, le chauffage dû à la compression conduit à une longueur de l'ordre de  $1/4$  ou  $1/3$  de la largeur de la cellule. En pratique, en l'absence de rampe RF, une fraction de l'ordre de la moitié des atomes du piège est perdue, peut être par les collisions avec les parois de la cellule. De plus, cette évaporation permet de commencer à refroidir le nuage. Les constantes de temps sont optimisées empiriquement, de façon à obtenir le nuage le plus dense en fin de compression, et ne dépendent pas uniquement de la durée de vie du piège magnétique et du critère d'adiabaticité de la compression [36]. À la fin de la compression, on a  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 415$  Hz et  $\omega_z = 2\pi \times 7$  Hz, ce qui correspond à un rapport d'aspect de 60.

### Évaporation

Cette compression donne les conditions initiales suivantes pour initier le refroidissement évaporatif proprement dit :  $8 \times 10^7$  atomes à  $T = 390$   $\mu$ K, soit un taux de collisions d'environ  $200$   $s^{-1}$ . Le déroulement du refroidissement jusqu'à proximité du seuil de condensation est représenté sur la FIG. 3.4. Le paramètre  $\eta$  de l'évaporation, défini par  $\eta = (h\nu_{RF} - g_F m_F \mu_B B_0) / k_B T$ , varie entre 6 et 7 au cours de la rampe.

### Pièges de grande anisotropie

Pour obtenir des condensats de rapports d'aspect supérieurs à 60, on abaisse la courbure et le biais magnétique après 9 à 10 s d'évaporation, en maintenant la RF constante à 8 MHz. Cette phase dure 2 s. Puis on poursuit l'évaporation jusqu'à la condensation, en 6 s environ. Pour un piège tel que  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 760$  Hz et  $\omega_z = 2\pi \times 5$  Hz, le seuil est atteint autour de 500 nK, avec  $6 \times 10^5$  atomes.

## 3.2 Franchissement du seuil : déclenchement d'oscillations

En recherchant la rampe d'évaporation optimum, nous avons remarqué qu'une évaporation rapide au franchissement de  $T_c$  déclenchait des oscillations de la longueur du condensat. Un tel phénomène a été observé simultanément par le groupe de J. T. M. Walraven [7].

Nous avons mesuré quelques caractéristiques de ces oscillations, et nous avons cherché à les minimiser. En effet, ces observations ont eu lieu lors de la mesure de la distribution de vitesse axiale des fluctuations de phase. Les oscillations étaient une perturbation importante de ces mesures, susceptible soit de masquer totalement le signal, soit d'ajouter des erreurs systématiques.

Signalons que ce type d'excitation collective du condensat a été étudié précédemment en modulant le piège magnétique, à très basse température [43, 44], et en présence de nuage thermique [45, 46].

## Mélasse

À ce stade on peut couper le champ magnétique du PMO et désaccorder davantage le laser piège, jusqu'à -44 MHz de la transition cyclante, pour effectuer du refroidissement sub-Doppler, par mécanisme Sisyphé [22, 23]. En 3 ms la température descend en dessous de 100  $\mu\text{K}$ , et la densité devient de l'ordre de  $10^{11}$  at/cm<sup>3</sup>.

Ces conditions sont suffisantes pour démarrer le refroidissement évaporatif, après transfert dans le piège magnétique et compression.

### 3.1.2 Transfert au piège magnétique

Le transfert de la mélasse vers le piège magnétique est très simple : on coupe les lasers, et on branche les bobines de l'électroaimant très rapidement ( $\simeq 100 \mu\text{s}$ ) pour que le nuage n'ait pas le temps de tomber ni de s'étendre.

Pour charger le piège magnétique avec les atomes dans l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  il faut couper le repompeur 1 (le repompeur 2 est éteint depuis le Dark Spot) juste avant (moins d'une milliseconde) le laser piège. Une partie des atomes est alors dépompée vers l'état  $F = 1$ , puis on applique un pulse de dépompeur qui achève le dépompage, juste avant de brancher le piège magnétique. Aucun champ directeur n'étant appliqué pendant cette phase, les atomes sont a priori uniformément répartis dans les sous-niveaux  $|F = 1, m_F = 0, \pm 1\rangle$ . On estime donc le transfert maximum possible dans l'état piégeant à 30 %. Cependant on ne connaît pas exactement le nombre d'atomes transférés, car le cycle magnétique de l'électroaimant doit comprendre une phase de compression pour que le champ rémanent final soit compensé. Interrompre le cycle à mi-parcours pour observer les atomes juste après le transfert implique que le champ rémanent est très mal compensé. Dans ces conditions la section efficace de diffusions des atomes est différente, et ne permet pas de comparer avec fiabilité les nombres d'atomes mesurés. La mesure du nombre d'atomes après compression donne une borne inférieure au nombre d'atomes transférés de  $8 \times 10^7$  atomes, tandis que dans l'hypothèse où la section efficace n'est pas modifiée, on trouve  $2 \times 10^8$  atomes transférés.

Les fréquences du piège magnétique au moment du transfert sont calculées pour l'adapter à la température et la taille du PMO. Une fréquence  $\omega$  vérifiant

$$\omega = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (3.1)$$

permet de conserver la taille et la température du nuage transféré ( $\sigma$  est le rayon du PMO et  $T$  sa température). Cela correspond à un transfert avec le minimum de pertes de densité dans l'espace des phase (voir [36] pour plus de détails). Avec  $\omega = 2\pi \times 17 \text{ Hz}$ , notre piège est adapté pour un PMO à 80  $\mu\text{K}$  de 0.8 mm de diamètre.

Cette adaptation n'est cependant pas critique dans notre cas et n'a pas été particulièrement optimisée.

### 3.1.3 Séquence de compression et d'évaporation

Une fois le piège magnétique chargé, on le comprime, pour augmenter le taux de collisions afin de refroidir efficacement par évaporation, et pour obtenir finalement un condensat très anisotrope.



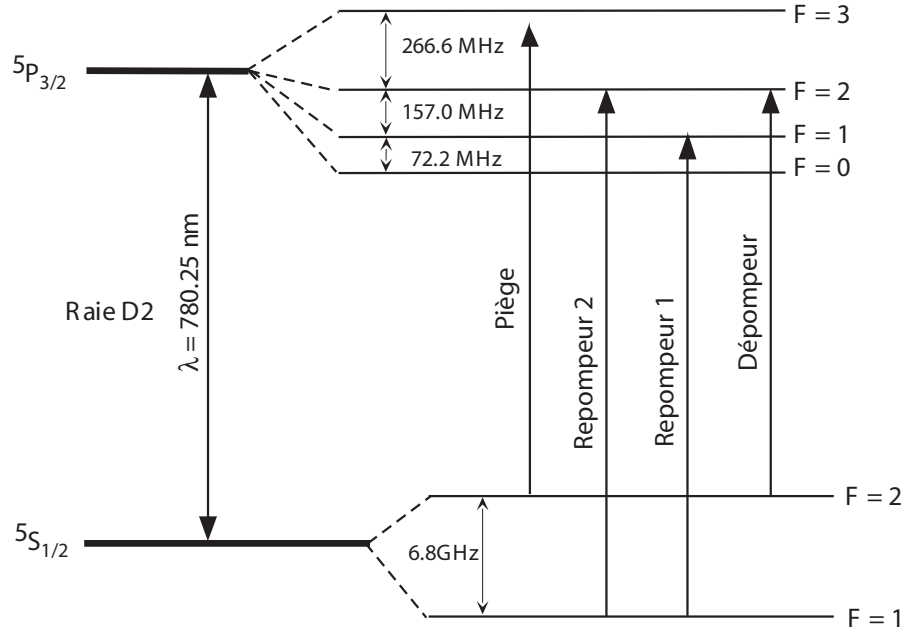


FIG. 3.2: Schéma des transitions sur lesquelles sont accordés les différents lasers utiles au PMO, au Dark Spot et à la mélasse. Les deux repompeurs ne sont pas sur la même transition pour des raisons sans rapport avec l'efficacité de repompage.

Comme la phase de PMO dure quelques secondes, on comprend la nécessité d'utiliser un laser pour repomper les atomes du niveau  $F = 1$  vers  $F = 2$ , en passant par les niveaux excités  $F' = 1$ , ou  $F' = 2$ .

### Dark Spot

Les paramètres de l'étape de pré-refroidissement à optimiser sont le nombre d'atomes, la température, et la densité du nuage. Une forte densité va augmenter l'efficacité initiale du refroidissement évaporatif dans le piège magnétique, grâce à une thermalisation rapide.

Or la densité du PMO est limitée par les phénomènes de diffusion multiple [41], qui résultent en une force répulsive à longue portée. Une méthode pour contourner ce problème est de ne pas repomper les atomes du centre du nuage, qui tombent dans un état non résonnant  $F = 1$ . La densité optique au centre du nuage est donc diminuée, et par conséquent la diffusion multiple également. Cette méthode [42] est appelée Dark Spot, pour "dark spontaneous-force optical trap".

Pour la mettre en oeuvre, on image au centre du PMO un disque noir de 5 mm de diamètre, placé au centre du faisceau repompeur 1 (voir FIG 3.1). Ainsi, lorsque le repompeur 2 est coupé, le centre du nuage n'est plus repompu, et l'on obtient un Dark Spot. Pour être encore plus efficace, on superpose un faisceau dépompeur au centre du repompeur 1. C'est ce que l'on appelle un Ultra Dark Spot. Après cette phase, qui dure en tout environ 120 ms, on obtient une densité d'environ  $5 \times 10^{11}$  at/cm<sup>3</sup> et une température de 100 à 200  $\mu$ K.

### 3.1.1 Les PMO, Dark Spot, mélasse

Le piégeage et le pré-refroidissement des atomes issus du ralentisseur Zeeman avant leur transfert dans le piège magnétique comporte trois phases.

#### Piège Magnéto-Optique (PMO)

Les atomes sont tout d'abord piégés dans un PMO (voir schéma sur la FIG. 3.1), chargé par le flux sortant du ralentisseur Zeeman.

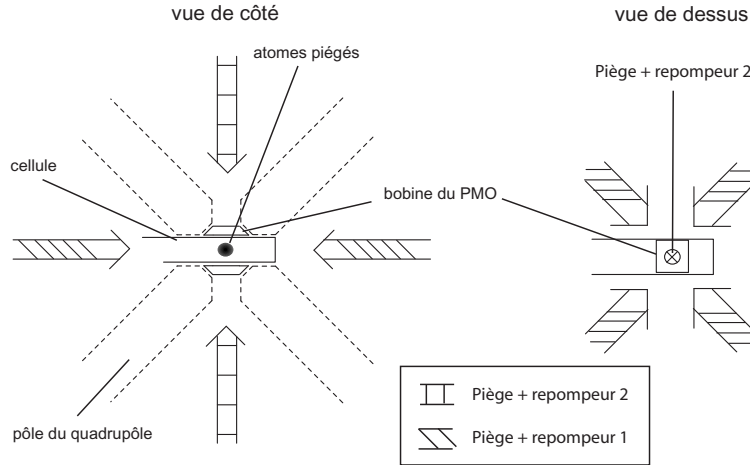


FIG. 3.1: Représentation schématique du dispositif du piège magnéto-optique. La géométrie des lasers piège et des lasers repompeurs est indiquée. L'utilité des deux repompeurs est expliquée dans le paragraphe sur le Dark Spot.

Le champ magnétique quadrupolaire sphérique est créé par deux bobines d'une quinzaine de spires, en configuration anti-Helmoltz, parcourues par un courant de 2 A. Elles créent un gradient axial de 28 G/cm et de 14 G/cm pour la direction radiale.

Les faisceaux lasers piège ont un waist d'environ 1 cm, une intensité d'environ  $I_{\text{sat}} = 1.6 \text{ mW/cm}^2$ , et sont désaccordés de  $-14 \text{ MHz}$  par rapport à la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  (voir FIG. 3.2).

Avec ces paramètres, on charge plus de  $10^9$  atomes en typiquement 5s, avec une densité au centre du nuage de l'ordre de  $3 \times 10^{11} \text{ at/cm}^3$  et une température supérieure à  $500 \mu\text{K}$ .

#### Nécessité du repompeur

Le laser piège est désaccordé de la transition cyclante  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de  $-14 \text{ MHz}$ , vers le rouge. Il est donc à  $253 \text{ MHz}$  de la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  [FIG. 3.2]. Or le niveau  $F' = 2$  est aussi couplé par émission spontanée au niveau  $F = 1$  qui est hors résonance vis-à-vis des lasers du PMO, et donc non piégé.

La section efficace d'une transition est proportionnelle à  $1/(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)$ , où  $\delta$  est le désaccord du laser à la transition. Le rapport des sections efficaces de diffusion des deux transitions en question est donc de l'ordre de  $10^{-3}$ , en considérant les facteurs de couplage entre sous-niveaux hyperfins proches de 1. Le taux de diffusion dans le PMO, sur la transition cyclante, étant de l'ordre de  $1 \mu\text{s}^{-1}$ , le taux de dépompement est de l'ordre de  $1 \text{ ms}^{-1}$ .

## Chapitre 3

---

# Réalisation de condensats dans le régime intermédiaire 3D-1D

Grâce au piège magnétique présenté au chapitre précédent, nous avons pu réaliser des condensats de rapports d'aspects (demi-longueur/rayon) extrêmes, c'est-à-dire jusqu'à environ 200. Ce régime permet d'obtenir des quasi-condensats, mais il pose une série de difficultés pratiques, liées à l'anisotropie du piège, que nous allons détailler dans ce chapitre.

Nous allons voir que pour des rampes d'évaporation trop rapides, le condensat se forme hors d'équilibre, et oscille dans le piège, dans un mode de compression. Ce phénomène a également été observé et étudié par le groupe de J. T. M. Walraven [7]. D'autre part, les approximations usuelles, comme l'approximation de Thomas-Fermi par exemple, qui simplifient considérablement l'analyse des images, ne sont plus valables dans nos conditions, qui se situent dans la transition entre le régime de Thomas-Fermi 3D et le régime 1D.

Précisons également que ce que nous appelons "condensats" dans ce chapitre sont en réalité des quasi-condensats, présentant des fluctuations de phase. Cependant, nous ne nous intéressons dans ce chapitre qu'à leurs propriétés de densité, qui sont, en principe, similaires à celles des vrais condensats [10]. La question des fluctuations de la phase, que nous étudierons dans les chapitres suivants est donc a priori découplée des questions que nous abordons ici.

### 3.1 Séquence expérimentale standard

Nous décrivons dans cette section le piégeage et le refroidissement des atomes jusqu'au seuil de condensation dans un piège très anisotrope. Les premières étapes de refroidissement laser ne présentent pas de particularités dues à l'anisotropie recherchée. C'est à l'étape de compression du piège magnétique que quelques précautions sont nécessaires afin que le nuage ne soit pas trop allongé, et qu'il ne touche pas les bords de la cellule.

### 2.3.11 Conclusion

Les effets d'hystérésis et de saturation, de couplage entre les différents pôles ont rendu nécessaire une longue mise au point, et confèrent parfois au piège magnétique un comportement difficilement prévisible. En revanche, son comportement est très reproductible. L'électroaimant à noyau ferromagnétique nous permet d'obtenir des pièges magnétiques avec des rapports d'aspect supérieurs à 100, avec un courant maximum de 30 A. De plus il procure un blindage magnétique non négligeable vis-à-vis des champs extérieurs.

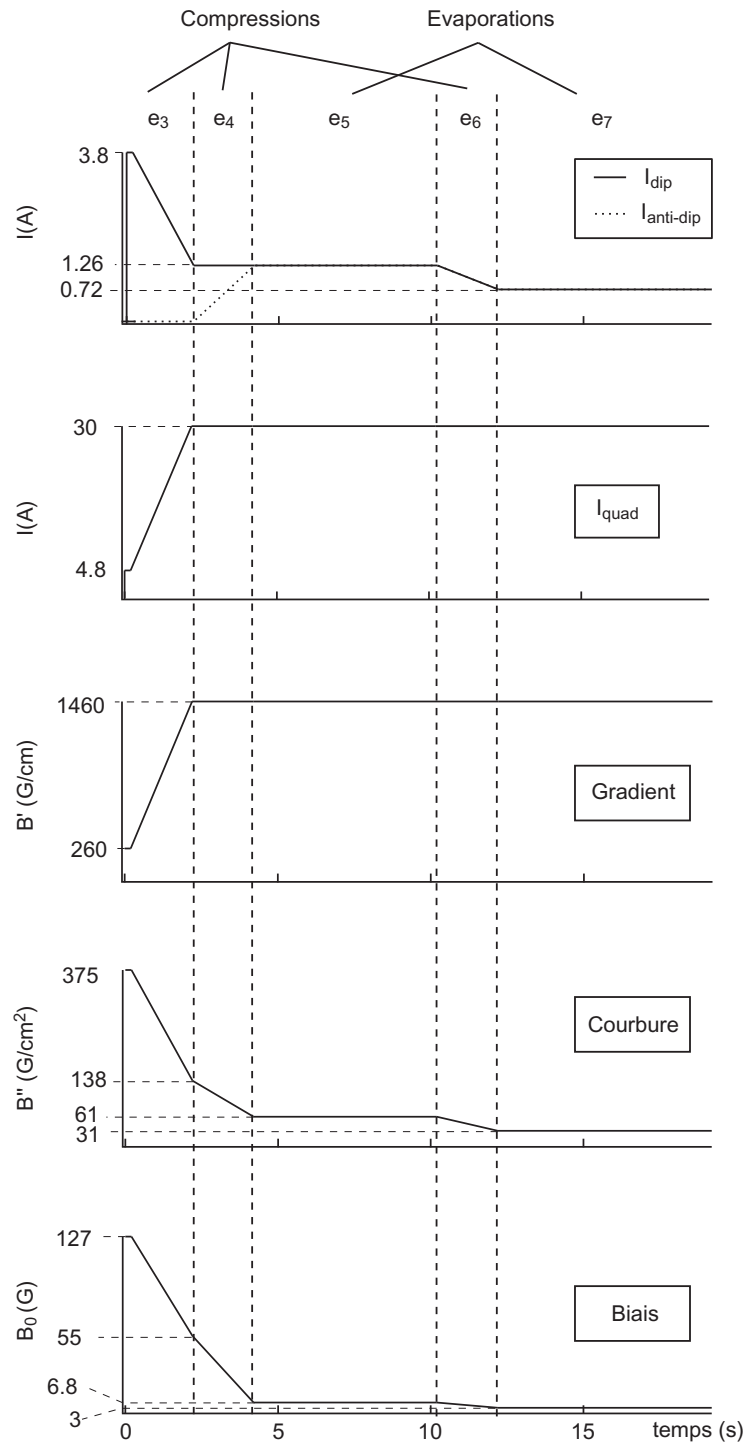


FIG. 2.9: Variations des courants dans les circuits dipôle-anti-dipôle et quadrupôle, et du champ magnétique, lors d'un cycle complet. Les différentes étapes, notées e3 à e7, sont détaillées dans le texte (les étapes 0 à 2 figurent sur ce graphe mais sont trop courtes pour être indiquées).

$$B'' \searrow 138 \text{ G/cm}^2$$

**étape 4****Deuxième compression<sup>1</sup>**

Quadrupôle : 30 A

Dipôle : 1.26 A

Anti-dipôle : ↗ 1.26 A

Trap-tilt : bobine 1 :  $I = 1.04$  A, bobine 2 :  $I = 1.38$  A

piège radial :  $B' \nearrow 1460$  G/cm  $\omega_{\perp} \simeq 2\pi \times 415$  Hz

piège axial :  $B_0 \searrow 6.8$  G  $\omega_z \simeq 2\pi \times 7$  Hz

$$B'' \searrow 61 \text{ G/cm}^2$$

**étape 5****Attente : évaporation etc.**

Quadrupôle : 30 A

Dipôle : 1.26 A

Anti-dipôle : 1.26 A

Trap-tilt : bobine 1 :  $I = 1.04$  A, bobine 2 :  $I = 1.38$  A

piège radial :  $B' \simeq 1460$  G/cm  $\omega_{\perp} \simeq 2\pi \times 415$  Hz

piège axial :  $B_0 \simeq 6.8$  G  $\omega_z \simeq 2\pi \times 7$  Hz

$$B'' \simeq 61 \text{ G/cm}^2$$

**étape 6****Facultatif : relâchement du confinement axial**

Quadrupôle : 30 A

Dipôle :  $\searrow 0.72$  A

Anti-dipôle :  $\searrow 0.72$  A

Trap-tilt : bobine 1 :  $I = 1.04$  A, bobine 2 :  $I = 1.38$  A

piège radial :  $B' \simeq 1460$  G/cm  $\omega_{\perp} \nearrow 2\pi \times 760$  Hz

piège axial :  $B_0 \searrow 3$  G  $\omega_z \searrow 2\pi \times 5$  Hz

$$B'' \searrow 31 \text{ G/cm}^2$$

**étape 7****Facultatif, suite : fin de l'évaporation**

Quadrupôle : 30 A

Dipôle : 0.72 A

Anti-dipôle : 0.72 A

Trap-tilt : bobine 1 :  $I = 1.04$  A, bobine 2 :  $I = 1.38$  A

piège radial :  $B' \simeq 1460$  G/cm  $\omega_{\perp} \simeq 2\pi \times 760$  Hz

piège axial :  $B_0 \simeq 3$  G  $\omega_z \simeq 2\pi \times 5$  Hz

$$B'' \simeq 31 \text{ G/cm}^2$$

**étape 8****coupeure du piège**

Quadrupôle :  $\searrow 0$  A

Dipôle :  $\searrow 0$  A

Anti-dipôle :  $\searrow 0$  A

Trap-tilt : bobine 1 :  $I \searrow 0$  A, bobine 2 :  $I \searrow 0$  A

La coupure des courants est bien contrôlée par les condensateurs de décharge, qui donnent des temps de décroissance d'environ  $100 \mu\text{s}$  pour le quadrupôle et  $200 \mu\text{s}$  pour le dipôle (plus anti-dipôle). Nous avons effectué des mesures du champ magnétique qui ont montré que les courants de Foucault sont négligeables, et que le champ magnétique se coupe avec la même constante de temps typique que les courants. Vis-à-vis des fréquences d'oscillation du piège  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 760 \text{ Hz}$  et  $\omega_z = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$ , la coupure pourra donc être considérée, en bonne approximation, comme instantanée.

### 2.3.10 Exemple de cycle

Voici en détail un cycle magnétique complet. Les fréquences sont déduites des mesures des champs aux étapes 2 et 3, selon les relations (2.4), et inversement aux étapes 5 et 6. Les variations des courants et des champs sont également représentés sur la FIG. 2.9. Rappelons également que "trap tilt" désigne la paire de bobines destinée à compenser le gradient créé par le quadrupôle sur l'axe du dipôle.

#### étape 0 Charge des condensateurs

Quadrupôle	: $U_{\text{Cond}} \simeq 100 \text{ V}$
Dipôle	: $U_{\text{Cond}} \simeq 135 \text{ V}$
Anti-dipôle	: inactif
Trap-tilt	: inactif

#### étape 1 Décharge des condensateurs

Quadrupôle	: courant $0 - 4.8 \text{ A}$ en $\tau \simeq 150 \mu\text{s}$
Dipôle	: courant $0 - 3.8 \text{ A}$ en $\tau = 150 \mu\text{s}$
Anti-dipôle	: inactif
Trap-tilt	: bobine 1 : $I \nearrow 480 \text{ mA}$ , bobine 2 : $I \nearrow 680 \text{ mA}$

#### étape 2 Attente : thermalisation des atomes

Quadrupôle	: $4.8 \text{ A}$
Dipôle	: $3.8 \text{ A}$
Anti-dipôle	: inactif
Trap-tilt	: bobine 1 : $I = 480 \text{ mA}$ , bobine 2 : $I = 680 \text{ mA}$
piège radial	: $B' \simeq 260 \text{ G/cm}$ $\omega_{\perp} \simeq 2\pi \times 17 \text{ Hz}$
piège axial	: $B_0 \simeq 127 \text{ G}$ $\omega_z \simeq 2\pi \times 17 \text{ Hz}$ $B'' \simeq 375 \text{ G/cm}^2$

#### étape 3 Première compression<sup>1</sup>

Quadrupôle	: $\nearrow 30 \text{ A}$
Dipôle	: $\searrow 1.26 \text{ A}$
Anti-dipôle	: inactif
Trap-tilt	: bobine 1 : $I \nearrow 1.04 \text{ A}$ , bobine 2 : $I \nearrow 1.38 \text{ A}$
piège radial	: $B' \nearrow 1460 \text{ G/cm}$ $\omega_{\perp} \simeq 2\pi \times 178 \text{ Hz}$
piège axial	: $B_0 \searrow 55 \text{ G}$ $\omega_z \simeq 2\pi \times 11 \text{ Hz}$

<sup>1</sup>La décomposition de la compression initiale en 2 étapes est rendue nécessaire par les problèmes d'hystérésis entre dipôle et anti-dipôle schématisés sur la FIG. 2.5.

pour éviter une surtension trop importante aux bornes des bobines dans le cas d'une ouverture trop rapide du circuit. Le condensateur se décharge ensuite dans une résistance.

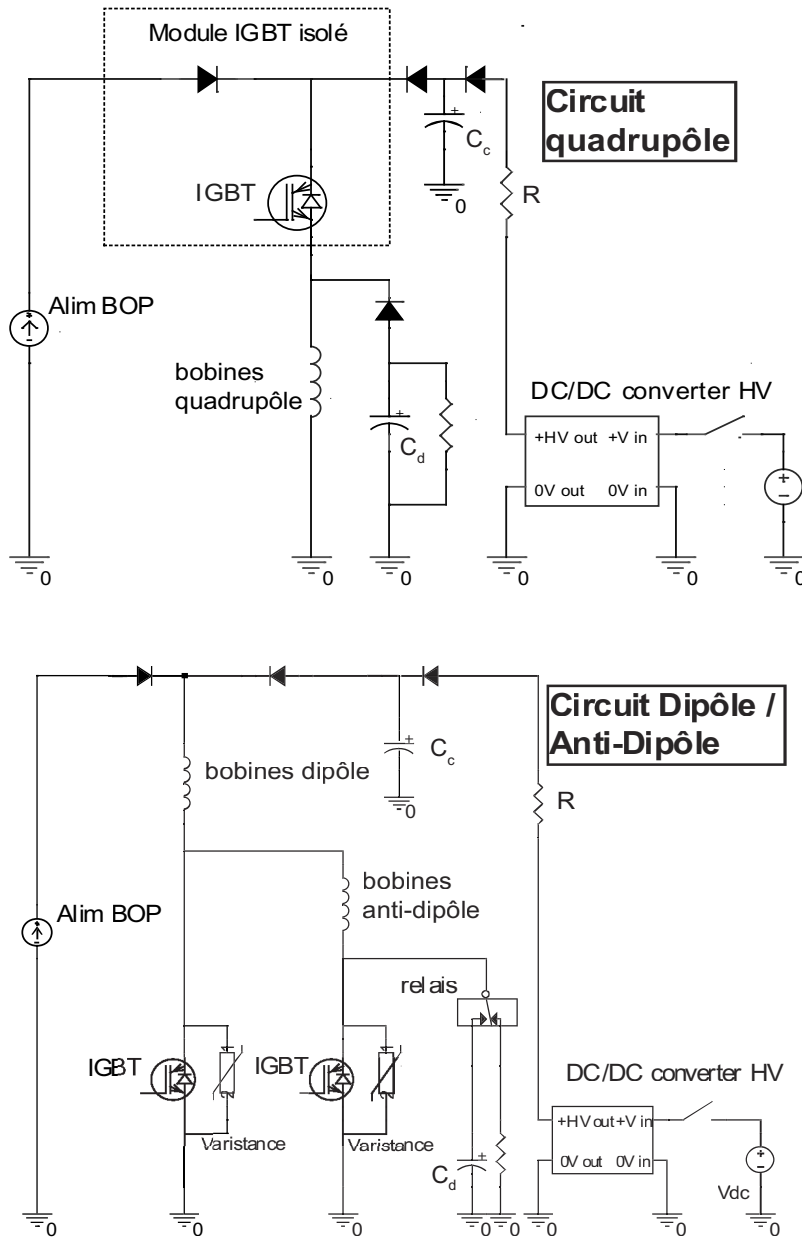


FIG. 2.8: Schéma des circuits de commande des courants des bobines quadripôle et dipôle. Les IGBT ouvrent et ferment les circuits. Ils sont protégés par des varistances dans le circuit Dipôle/Anti-dipôle. Les condensateurs  $C_c$  et  $C_d$  servent respectivement à la montée et à la coupure des courants. Les alimentations sont des sources de courant bipolaires. Pour le quadripôle, deux alimentations de 20 A sont branchées en parallèle.



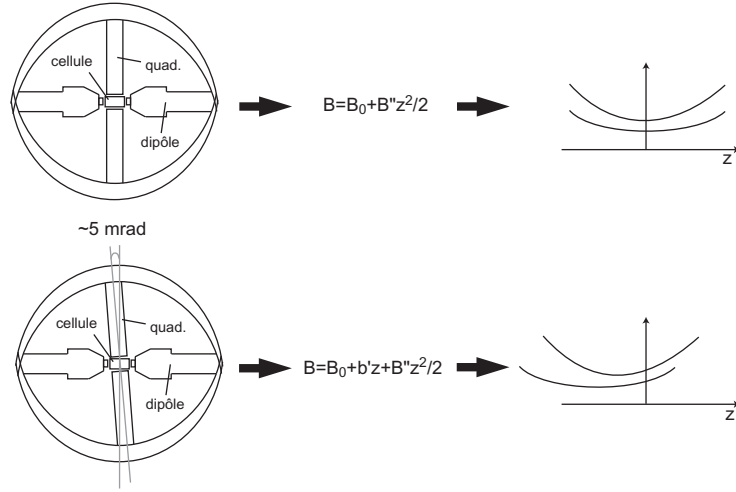


FIG. 2.7: Effet d'un gradient de champ  $b'$ , dû au quadrupôle, sur l'axe du dipôle. La position du centre du piège dépend alors de la courbure. Il se déplace donc lorsque l'on change l'anisotropie du piège. Ce gradient, de  $8 \text{ G/cm}$  pour  $I_{\text{quad}} = 30 \text{ A}$ , peut être expliqué par un angle de  $5 \text{ mrad}$  entre le plan du quadrupôle et le plan normal au dipôle. Des bobines ont été placées sur le dipôle pour compenser ce gradient (voir texte).

lorsque l'on s'approche des pôles (au delà de  $5 \text{ mm}$  du centre environ), donnant un potentiel de piégeage de forme quelconque.

Pour annuler ce gradient parasite, une paire supplémentaire de bobines, appelée "trap-tilt", a été placée sur les pôles du dipôle. Elles sont alimentées en série et en sens opposés, par des courants de l'ordre de  $1.5 \text{ A}$ . Les courants dans chaque bobine sont légèrement différents car le gradient à compenser n'est pas centré en  $z = 0$ . Enfin, pour que la compensation soit valable pendant tout le cycle, leur courant est proportionnel à celui du quadrupôle, puisque  $b' \propto I_{\text{quad}}$ .

### 2.3.9 Circuits de commande des courants

Deux circuits de commande distincts, mais assez semblables, pilotent les bobines du dipôle et du quadrupôle. Ils sont représentés sur la FIG. 2.8. Leurs fonctions sont les suivantes :

- Commuter rapidement le courant dans les bobines en début de cycle. Pour cela un condensateur de  $5 \mu\text{F}$  est chargé aux bornes d'une alimentation haute tension, puis déchargé dans les bobines en un quart de période d'oscillation du circuit  $LC_c$ , soit  $\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{LC_c} \simeq 175 \mu\text{s}$ . La tension de charge  $U$  des condensateurs détermine le courant  $I$  dans les bobines à la fin de la décharge selon la relation  $C_c U^2/2 = LI^2/2$ . On choisit donc  $U$  pour que  $I$  soit le courant désiré en régime stationnaire, lorsque les sources de courant prennent le relais des condensateurs pour alimenter les bobines.
- Fournir un courant stationnaire, ou lentement variable, pendant l'essentiel du cycle.
- Couper rapidement le courant des bobines. La constante de temps est encore déterminée par un condensateur  $C_d$  ( $5 \mu\text{F}$  pour le dipôle et  $2 \mu\text{F}$  pour le quadrupôle),

ordre. Une mesure de la stabilité du biais est décrite à la section 3.3.3.

### 2.3.7 Compensations

Un des inconvénients majeur de l'électroaimant à noyau ferromagnétique est le champ rémanent qui persiste alors qu'aucun courant ne parcourt plus les bobines. Or il existe des phases de l'expérience, surtout le refroidissement laser mais aussi le vol libre du nuage d'atomes avant l'image, qui nécessitent des champs (biais, gradients et courbures) faibles.

La compensation des champs résiduels est faite au moyen de paires de bobines placées sur les pôles, parcourues en permanence par un courant opposé au courant des bobines principales créant le piège. Pour chaque axe du quadropôle, une paire de bobine annule le gradient résiduel, et une paire compense la courbure résiduelle, qui provient de la symétrie imparfaite de l'électroaimant. De même, les pôles du dipôle sont munis d'une paire de bobine pour la compensation du gradient, et de deux paires pour éliminer le champ constant et la courbure (sans pôles composés une seule paire aurait suffi pour le biais et la courbure, puisque c'est la forme du pôle qui fixe alors le rapport des deux).

En pratique, les courants de toutes ces bobines sont ajustés en observant l'explosion d'une mélasse optique peu désaccordée, que l'on évalue à l'oeil, et qui doit être isotrope et pas trop rapide<sup>3</sup>, ou bien en regardant l'évolution du piège magnéto-optique lors de la diminution progressive de son champ magnétique. Il est difficile d'estimer la précision des compensations ainsi obtenues, mais elles permettent d'obtenir des températures de mélasse de l'ordre de 100  $\mu\text{K}$ , et de charger un piège magnétique suffisamment froid et dense pour initier le refroidissement évaporatif.

### 2.3.8 Centrage du piège magnétique

Avant de décrire en détail un cycle magnétique complet, il reste à expliquer une dernière difficulté survenant lors de la réduction de la courbure axiale pour obtenir une grande anisotropie<sup>4</sup>.

Un petit défaut de symétrie dans l'assemblage de l'électroaimant engendre un gradient  $b'$  sur l'axe du dipôle, proportionnel au courant dans le quadropôle. La position du centre du piège est alors déterminée par le rapport  $2b'/B''$  (voir FIG. 2.7).

Pour  $I_{\text{quad}} = 30 \text{ A}$  ce gradient atteint 8 G/cm – il est à noter qu'un tel gradient parasite peut s'expliquer par un angle de seulement 5 mrad entre la normale au plan du quadropôle et l'axe du dipôle. Dans ces conditions, le passage de  $B'' = 100 \text{ G/cm}^2$  à  $B'' = 50 \text{ G/cm}^2$  décale le minimum de champ de 1.6 mm, soit de plusieurs fois la taille typique d'un nuage thermique juste au dessus du seuil de condensation.

Ce déplacement du centre du piège est un problème dans la mesure où il peut déclencher des oscillations du centre de masse du nuage d'atomes, qui s'amortissent lentement lorsque le piège est harmonique et de fréquence basse. De plus, le piège est harmonique près du centre des pôles, mais le champ est dominé par des ordres plus élevés et non contrôlés

<sup>3</sup>Ce critère est très qualitatif, car il dépend des conditions précises (désaccord des faisceaux lasers etc...) dans lesquelles on regarde l'explosion de la mélasse

<sup>4</sup>Ce relâchement du piégeage axial est dû soit au branchement des bobines de compensation du biais, qui diminuent la courbure par un facteur 2 environ, soit à la réduction du courant dans le circuit dipôle-anti-dipôle.

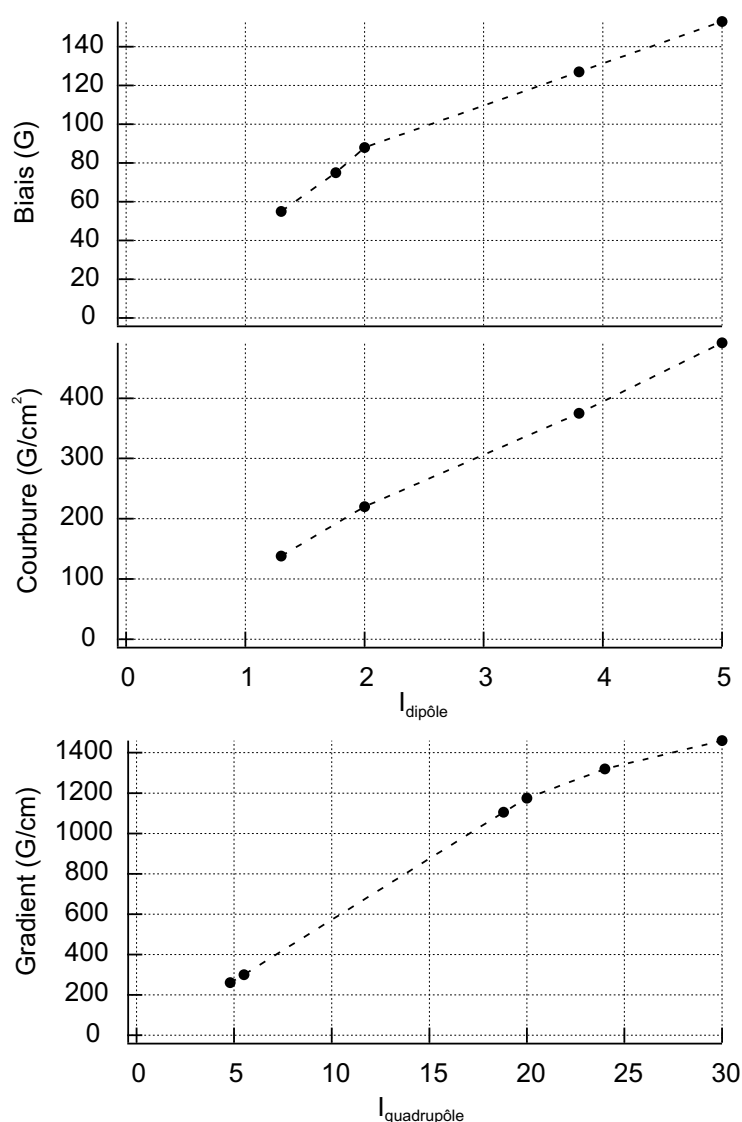


FIG. 2.6: Caractéristiques des champs du dipôle et du quadropole en fonction du courant d'excitation. Sur chaque graphe les mesures ne sont pas consécutives, chaque point est mesuré au sommet d'un cycle où l'hystérésis est nul. Pour plus de précisions sur l'annulation de l'hystérésis, voir le paragraphe sur les compensations.

pour s'affranchir du bruit magnétique ambiant<sup>2</sup>. Ainsi, un champ constant de quelques Gauss, créé par des bobines extérieures est réduit par un facteur 5 lorsqu'il est parallèle au dipôle, et par un facteur 1.7 lorsqu'il est à 45° des axes du quadropole. Le blindage radial est donc le moins fort, mais c'est aussi le moins crucial. En effet, le champ du piège est essentiellement axial, une petite composante radiale ne le perturbe donc qu'au second

<sup>2</sup>D'après de rapides mesures effectuées avec des sondes à effet Hall, d'une sensibilité d'environ 20 mG, aucune fluctuation du champ magnétique ambiant n'a pu être mesurée dans une de nos salles.

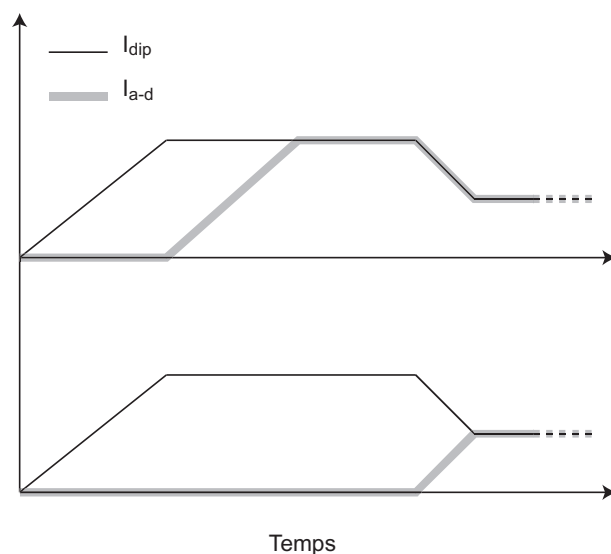


FIG. 2.5: Deux types de cycles de compensation du biais possibles en principe. Le courant circulant dans les bobines du dipôle est noté  $I_{\text{dip}}$ , et dans l'anti-dipôle,  $I_{\text{a-d}}$ . Les phénomènes d'hystérésis font que pour les courants usuels (de  $\sim 1$  à  $4$  A) ces cycles ne sont pas équivalents. C'est le cycle du haut du schéma qui permet, en pratique, de compenser le biais.

### 2.3.5 Gradients et courbures des champ créés

$B'$ (G/cm/A)	$B''$ (G/cm <sup>2</sup> /A)	$B_0$ (G/A)
55	110	44

TAB. 2.1: Caractéristiques des champs quadrupolaires et dipolaires avant saturation.

Nous avons tracé sur la FIG. 2.6 les caractéristiques des champs du dipôle et du quadrupôle en fonction du courant d'excitation. Ces courbes permettent de donner une idée de la saturation des pôles et d'estimer la dépendance du gradient, de la courbure et du biais vis-à-vis du courant dans la zone linéaire. Ces valeurs, pour le régime linéaire, sont regroupées dans le TAB. 2.1. Elles ne sont plus valables au dessus de 20 A pour le gradient et d'environ 2.5 A pour  $B''$  et  $B_0$  du fait de la saturation des pôles mais donnent néanmoins un bon ordre de grandeur.

### 2.3.6 Effet de blindage

Les avantages de l'utilisation de pôles ferromagnétiques ne se limitent pas à la production de gradients et de courbures de champs élevées. Un effet de blindage par l'électroaimant vis-à-vis de champs externes a été constaté, sans avoir été prévu. Une interprétation possible de cela est le guidage du champ externe dans la culasse, ce qui lui fait contourner le centre de l'électroaimant. C'est un atout non négligeable, car cela permet de garantir une bonne stabilité du biais sans avoir à installer un blindage de  $\mu$ -métal supplémentaire

partie extérieure du pôle crée un champ dont le rapport  $B_0/B''$  est différent du rapport  $B_0/B''$  du champ créé par la partie intérieure du pôle. En choisissant correctement le courant de chacune des paires de bobines excitatrices, on peut donc créer un champ de biais quasiment nul, sans toutefois annuler la courbure.

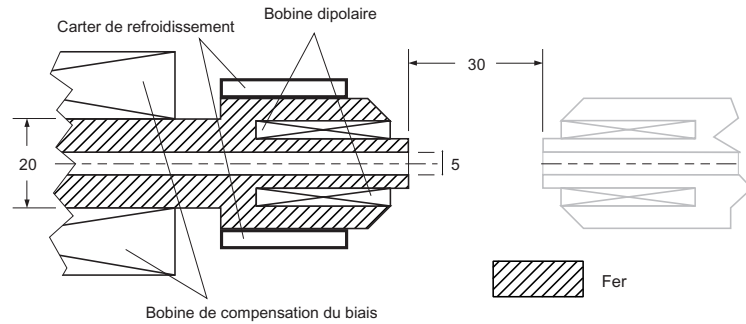


FIG. 2.4: Schéma des pôles du dipôle permettant la compensation du biais. Les cotes sont en mm. Grâce à la géométrie des pôles, les bobines "dipolaires" et les bobines de compensation du biais n'excitent pas le barreau de façon équivalente. On peut ainsi compenser le biais sans annuler la courbure du champ dipolaire.

Remarque importante : le dipôle et l'anti-dipôle sont couplés magnétiquement, leurs saturations ne sont pas indépendantes. On ne peut par conséquent considérer que leurs champs s'ajoutent simplement et les phénomènes d'hystérésis sont compliqués. Il ne suffit donc pas de brancher l'anti-dipôle pour compenser le biais. Il peut avoir une action inverse. Ces effets n'ont pas été étudiés systématiquement dans les conditions expérimentales réelles, il faut donc faire plusieurs tentatives pour obtenir un piège aux caractéristiques voulues. Pour cela il faut se souvenir que les cycles représentés schématiquement sur la FIG. 2.5 ne sont pas équivalents, même pour de faibles courants. Le premier type de cycle (en haut sur le schéma) est celui qui nous a permis d'obtenir les pièges les plus anisotropes.

### 2.3.4 Les bobines

Les bobines du quadropôle sont constituées de 55 tours de fil de cuivre creux, à section circulaire, refroidies par circulation d'eau (sans compresseur). Elles sont conçues pour supporter jusqu'à 40 A, et ont environ 2 mH d'inductance. L'inductance que nous mentionnons est un ordre de grandeur, mesuré en présence du barreau ferromagnétique, hors du régime de saturation. Les bobines du dipôle comportent 120 tours de fil de cuivre de 1 mm de diamètre, pour une inductance de 3 mH. Elles sont refroidies par contact avec le pôle, lui même refroidi par circulation d'eau dans le carter qui entoure son extrémité (voir FIG. 2.4). Leur courant maximum est de 6 A. Les bobines de compensation du biais ont aussi une centaine de tours, et sont également refroidies par le pôle. Ce sont les bobines les plus inductives (5 mH).

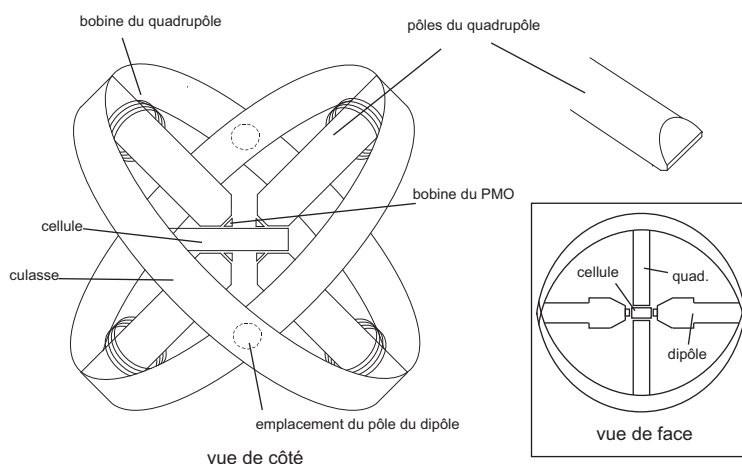


FIG. 2.3: Représentation schématique de l'électroaimant, en fausse perspective. Sur la vue de côté le dipôle n'est pas représenté, pour plus de clarté.

### 2.3.2 Composition des pôles et de la culasse

Les pôles sont constitués de lamelles de fer pur de  $100\ \mu\text{m}$  d'épaisseur et la culasse de feuilles de fer-silicium de  $50\ \mu\text{m}$  d'épaisseur. Le fer pur a été choisi pour sa haute perméabilité magnétique, jusqu'à  $10^4$ , et son fort champ de saturation, environ  $2\ \text{T}$ , soit  $2 \times 10^4\ \text{G}$ . Le feuilletage sert à augmenter la résistivité du matériau pour atténuer les courants de Foucault qui se développent à la coupure du courant dans les bobines. Ces courants parasites transitoires ralentissent la décroissance du champ magnétique [19]. Or, si l'ouverture du piège magnétique contenant les atomes est trop lente pour pouvoir être considérée comme instantanée (voir section 1.3.2), le nuage d'atomes est déformé, et son image est difficilement interprétable.

### 2.3.3 Méthode de compensation du biais

Comme il a été mentionné lors de la description du piège de Ioffe-Pritchard, il est intéressant de pouvoir compenser le biais magnétique du piège sans en annuler la courbure<sup>1</sup>. Sur un piège à bobine classiques nous avons vu que l'on pouvait compenser le biais du champ dipolaire en ajoutant une paire de bobines anti-dipôles. Dans le cas d'un champ guidé par un pôle ferromagnétique on ne peut se contenter d'ajouter une paire de bobines excitatrices sur des pôles simplement cylindriques, puisque la géométrie du champ entre les pôles, qui sont des guides magnétiques, ne dépend que de leur forme et de leur écartement, et non de la forme des bobines. La solution est représentée sur la FIG. 2.4, c'est un pôle composé [40].

La partie extérieure du pôle est excitée par la bobine "de compensation" (que l'on appelle aussi bobine "anti-dipôle"), tandis que la partie intérieure, qui crée la courbure axiale, est excitée à la fois par la bobine de compensation et la bobine "dipôle". De cette façon, la

<sup>1</sup>L'amélioration de la stabilité du biais par sa compensation est ici valable tant que les pôles de l'électroaimant ne saturent pas, ce qui est vérifié en pratique lors de la phase où le biais est compensé.

est d'alimenter les bobines par un fort courant, allant de quelques centaines à un millier d'ampères. Naturellement, de tels courants sont d'utilisation contraignante, en terme de dissipation de chaleur, de commutation [36]... Il est notamment nécessaire de faire circuler de l'eau sous pression à l'intérieur même des bobines. Par exemple sur l'expérience de condensation de l'hélium métastable de notre groupe, les courants maximum utilisés sont d'environ 250 A sous 20 V. Les 5 kW produits par effet Joule sont dissipés par de l'eau sous une pression de 15 bars, circulant dans les bobines (tube de cuivre de 2.5 mm de diamètre intérieur). Le gradient obtenu est de l'ordre de 85 G/cm et la courbure, d'environ 20 G/cm<sup>2</sup>.

### 2.2.7 Les solutions alternatives

Une solution très prometteuse utilise le champ magnétique de micro-fils gravés sur un substrat de type silicium en combinaison avec un champ de bobines externes [37, 38]. Ainsi, pour quelques ampères parcourant les micro-fils et quelques dizaines de Gauss de champ externe, des gradients radiaux de plusieurs kG/cm sont obtenus. Une des difficultés de cette technique est due au petit volume de capture du piège magnéto-optique du fait de la proximité de la surface portant les fils, qui limite le nombre d'atomes dans le piège magnétique à quelques 10<sup>6</sup>. La surface, ou l'inhomogénéité des fils, dans certains cas, déforme également le piège magnétique jusqu'à fragmenter le condensat. D'autres types de pièges ont été inventés pour réduire les courants nécessaires, mais sans chercher de confinement particulièrement élevé, tels que les pièges QUIC [39] qui créent des gradients de 200 G/cm (courbure de 250 G/cm<sup>2</sup>) pour un courant de 25 A.

### 2.2.8 Notre solution

La solution qui a été choisie lors de la construction de notre expérience, est de guider, dans des barreaux de fer, le champ magnétique créé par des bobines jusqu'à proximité des atomes. Le champ d'une volumineuse bobine de plusieurs dizaines de tours de fil creux peut de cette façon être guidé dans un barreau d'un ou deux centimètres de diamètre, ce qui permet à la fois un confinement important et un accès optique très raisonnable.

## 2.3 L'électroaimant à noyau ferromagnétique

Dans cette partie nous présentons rapidement le principe et les caractéristiques importantes de l'électroaimant de notre expérience. On trouvera davantage de détails sur la théorie et l'apport des ferromagnétiques dans la thèse de B. Desruelle [16], et sur le développement de l'électroaimant, en collaboration avec M. Lécrivain du LÉSIR (qui en a également assuré la construction), dans la thèse de V. Boyer [17]. Nous insistons ensuite sur le fonctionnement de l'électroaimant lors d'un cycle réel de production d'un condensat.

### 2.3.1 Géométrie

Le piège est représenté schématiquement sur la FIG. 2.3. Il est constitué du jeu de bobines représentées FIG. 2.1, chacune d'elle entourant un pôle ferromagnétique. Pour que les boucles des lignes de champ soient guidées sur l'essentiel de leur longueur, les pôles qu'elles connectent sont reliés par une culasse ferromagnétique.

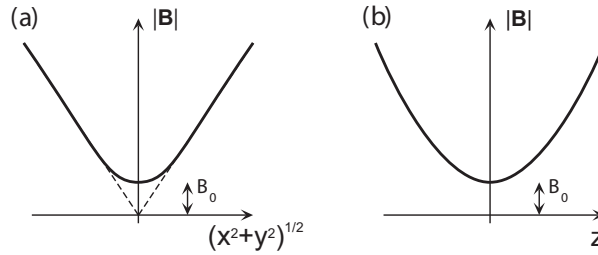


FIG. 2.2: Module du champ magnétique en fonction de la distance au centre du piège, tracé sur une direction radiale (a) et selon l'axe  $z$  (b).

### 2.2.5 Compensation du biais

L'Eq. (2.3) montre une propriété importante des pièges de type Ioffe-Pritchard. La courbure radiale est inversement proportionnelle à  $B_0$ , dans la limite où  $B^2/B_0 \gg B''/2$ . Diminuer le biais offre donc un moyen simple d'augmenter la fréquence radiale du piège et donc le pouvoir confinant du piège, facilitant ainsi le refroidissement évaporatif, et permettant d'obtenir un piège très anisotrope, très allongé.

La technique pour compenser le biais est très simple. Il suffit d'ajouter sur l'axe du dipôle une paire de bobines, appelée "anti-dipôle", parcourues par un courant opposé à celui des bobines créant le piège. Par exemple, en configuration Helmholtz (distance entre bobines égale à leur rayon), le champ créé sur l'axe des bobines est du quatrième ordre, de valeur au centre non nulle : on peut ainsi compenser le biais sans diminuer la courbure axiale.

Un autre intérêt de la compensation du biais est l'amélioration de sa stabilité absolue. En alimentant les bobines du dipôle et de l'anti-dipôle en série, le bruit du biais créé par le dipôle, dominé en pratique par les fluctuations du courant, est en partie compensé par le même bruit sur le champ opposé créé par l'anti-dipôle. En d'autres termes on peut écrire  $B_{\text{dip}} = \alpha I$  et  $B_{\text{anti-dip}} = -\beta I$  avec  $\alpha, \beta > 0$ . Le champ résultant au centre est alors  $B_0 = (\alpha - \beta)I$  et ses fluctuations sont proportionnelles à  $\alpha - \beta \ll \alpha$ , et non à  $\alpha$  comme dans le cas du dipôle seul. La stabilité du biais est très importante lors du refroidissement évaporatif, où l'on a  $\eta k_B T = (\hbar \omega_{\text{RF}} - g_F m_F \mu_B B_0)$ , avec  $T$  la température des atomes,  $\omega_{\text{RF}}$  la radio-fréquence qui force l'évaporation et  $\eta$  une constante qui est en général comprise entre 6 et 10. Pour une fréquence  $\omega_{\text{RF}}$  donnée, les fluctuations absolues de température sont donc proportionnelles aux fluctuations absolues du biais (à condition bien sûr qu'elles soient plus lentes que le temps de thermalisation). La compensation du biais permet donc d'améliorer le contrôle et la stabilité de la température à la fin du refroidissement évaporatif. Pour une estimation quantitative de la stabilité du biais et de la température, voir la section 3.3.3.

### 2.2.6 Limites des pièges à bobines "classiques"

L'accès optique minimum nécessaire à la réalisation d'un piège magnéto-optique oblige à placer des bobines, de dimensions centimétriques, à une distance de quelques centimètres du centre du nuage d'atomes. Il est alors difficile d'obtenir un fort confinement. Une solution



bobines se faisant face et le fait que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , on peut écrire directement le champ sous la forme valable au deuxième ordre en  $x, y, z$  :

$$\vec{B}_{\text{quad}} = \begin{pmatrix} -Gx \\ Gy/2 \\ Gz/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Gx/2 \\ Gy \\ -Gz/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B'x \\ B'y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Le gradient s'exprime comme  $B' = \frac{9}{2}\mu_0NI\frac{R^2D}{(R^2+D^2)^{5/2}}$ , avec  $N$  le nombre de tours par bobine et  $I$  le courant qui les traverse,  $R$  leur rayon et  $2D$  la distance entre bobines se faisant face.

### 2.2.2 Champ dipolaire

Le champ dipolaire est créé par deux bobines (voir FIG. 2.1 (b)), il s'exprime comme :

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \begin{pmatrix} -B''xz/2 \\ -B''yz/2 \\ B_0 + \frac{B''}{2} \left( z^2 - \frac{x^2+y^2}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Le champ au centre  $B_0 = \mu_0NI\frac{r^2}{(r^2+d^2)^{3/2}}$  est appelé le biais (magnétique) du piège ( $r$  et  $d$  sont définis comme dans le cas du quadrupôle). La courbure s'écrit  $B'' = \mu_0NI\frac{3r^2}{(r^2+d^2)^{7/2}}(4d^2 - r^2)$ .

### 2.2.3 Champ total

Comme il a été mentionné précédemment, du fait du suivi adiabatique du champ par le moment magnétique des atomes, l'énergie potentielle est simplement proportionnelle au module de  $\vec{B}$ . Le module de  $\vec{B}$  est tracé sur la FIG. 2.2, dans le plan  $xOy$  et selon l'axe  $z$ . On voit que radialement, le piège est harmonique au centre puis linéaire. En revanche, le long de l'axe  $z$ , il est harmonique. Ce type de piège est dit semi-linéaire.

Par un développement au deuxième ordre de  $B = |\vec{B}_{\text{dip}} + \vec{B}_{\text{quad}}|$  on trouve :

$$B = B_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right) (x^2 + y^2) + \frac{B''}{2} z^2. \quad (2.3)$$

Dans le plan radial, le rayon  $r_0$ , sur lequel l'approximation harmonique est valable, est estimé comme le point où la dérivée de l'Eq. (2.3) est égale à  $B'$ , c'est-à-dire,  $r_0 = B_0/B'$ .

### 2.2.4 Piège magnétique résultant

Les fréquences radiale ( $\omega_{\perp}$ ) et axiale ( $\omega_z$ ) du piège associé à ce champ magnétique sont déterminées en injectant l'Eq. (2.3) dans l'expression de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 &= g_F m_F \mu_B \frac{B''}{2} z^2 \\ \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 \rho^2 &= g_F m_F \mu_B \frac{1}{2} \left( \frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right) \rho^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\rho$  étant la coordonnée cylindrique radiale.

Dans un champ magnétique  $\vec{B}$  l'énergie potentielle de l'atome  $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  s'écrit donc  $E_p = g_F m_F \mu_B B$ , où  $m_F$  est la projection de  $\vec{F}$  sur  $\vec{B}$ . Comme on ne peut créer dans le vide qu'un minimum local de  $B$ , seuls les atomes tels que  $g_F m_F > 0$  pourront être piégés. Ceci à la condition qu'une fois dans le piège, un atome ne change pas de sous niveau  $m_F$  : il doit suivre adiabatiquement le champ magnétique. Pour cela la rotation de  $\vec{B}$  dans le référentiel de l'atome, en mouvement dans le piège, doit être lente devant la pulsation de précession de Larmor de  $\vec{\mu}$  autour de  $\vec{B}$  :  $\omega_{\text{La}} = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}}{\hbar}$ . Lorsque la condition de suivi adiabatique est remplie [35], l'énergie potentielle ne dépend pas de la direction du champ. C'est la variation spatiale de son module qui permet d'obtenir un piège.

Notons que dans le cas du Rubidium dans un état fondamental, la condition  $g_F m_F > 0$  est remplie pour  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  car  $g_{F=1} = -1/2$  et pour  $|F = 2, m_F = 1, 2\rangle$  car  $g_{F=2} = 1/2$ . Il est donc possible de piéger en même temps deux nuages discernables d'atomes et d'obtenir deux condensats à la fois (voir [18]). Les expériences décrites ici, en revanche, ont toutes été réalisées avec des atomes piégés dans l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ .

## 2.2 Piège de Ioffe-Pritchard

Le piège magnétique de notre expérience est de type Ioffe-Pritchard. Il combine un champ quadrupolaire cylindrique, qui assure le confinement radial, et un champ dipolaire axial harmonique. Une caractéristique importante de cette configuration est la valeur non nulle du champ au centre, ce qui permet aux atomes de toujours le suivre adiabatiquement. Le piège est harmonique dans toutes les directions près du centre, mais devient linéaire radialement lorsque l'on s'en éloigne.

### 2.2.1 Champ quadrupolaire

Le champ quadrupolaire est créé par quatre bobines disposées comme indiqué sur la FIG. 2.1 (a). En considérant l'antisymétrie par rapport à l'origine de chaque paire de

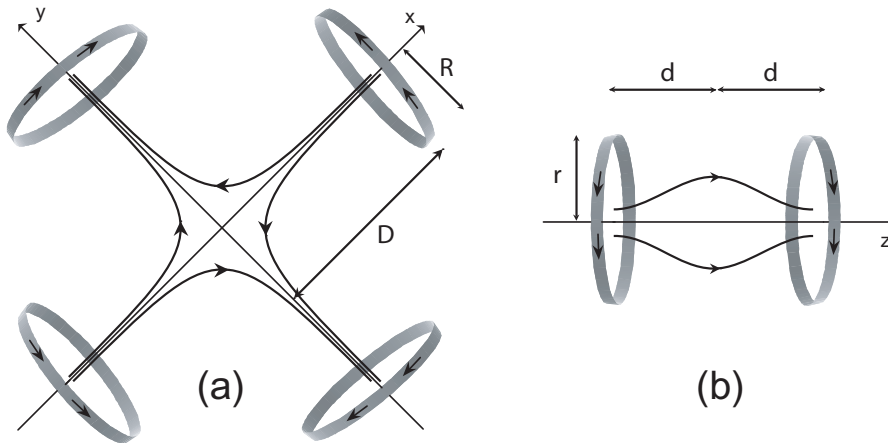


FIG. 2.1: Configuration des bobines et des courants (flèches sur les bobines) pour créer le champ quadrupolaire cylindrique dans le plan  $xOy$  (a), et le champ dipolaire axial (b). Les lignes de champ sont également indiquées.

# Chapitre 2

---

## Le piège magnétique

Un des éléments cruciaux du montage expérimental est le piège magnétique. C'est dans ce piège que se passe la dernière étape de la réalisation d'un condensat, le refroidissement évaporatif, puis éventuellement diverses manipulations du condensat. Le pouvoir confinant du piège est important pour initier le refroidissement dans de bonnes conditions, c'est à dire avec un taux de collisions élevé, pour assurer une thermalisation rapide du nuage atomique [16, 17]. Le piège doit également être très stable, afin de maîtriser le nombre d'atomes et la température du nuage final. De plus, la source du champ magnétique, qui peut être constituée d'aimants permanents [34], ou de bobines, doit préserver au maximum l'accès optique au volume occupé par les atomes. Ceci est important pour collecter beaucoup d'atomes dans le PMO, mais aussi pour pouvoir facilement manipuler le condensat (par exemple faire de la spectroscopie de Bragg), et en prendre des images. Enfin, la forme du condensat obtenu dépend des possibilités du piège.

Notre groupe a choisi d'utiliser un piège magnétique constitué de bobines entourant des pôles ferromagnétiques pour guider le champ jusqu'aux atomes. Ainsi, le piège présente les avantages d'un fort confinement, de relativement faibles courants de fonctionnement, jusqu'à 30 A, et d'un accès optique correct.

Plusieurs générations de ce piège ont été utilisées [16, 19]. Le dispositif développé au cours de la thèse de V. Boyer [17], et que nous avons mis en place sur l'expérience, peut produire un fort confinement dans deux directions, et faible dans la troisième, grâce à la méthode usuelle de compensation du biais (i.e. du champ au centre du piège). Il permet ainsi d'obtenir des condensats très anisotropes, tels que longueur/diamètre  $\sim 200$ . Nous en présentons les principales caractéristiques dans ce chapitre.

### 2.1 Principe du piégeage magnétique

Le piégeage magnétique d'atomes neutres repose sur leur moment dipolaire magnétique permanent  $\vec{\mu} = -g_F \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{F}$ , où  $g_F$  est le facteur de Landé, et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr.

### 1.4.2 Analyse d'une image par absorption

Nous avons vu qu'une image par absorption fournit, après division du fond, un signal proportionnel à la densité colonne  $\int n(x, y, z) dx$ . Or, en général, la densité du nuage est la somme de la densité d'une composante thermique ( $n_{\text{th}}$ ) et d'une composante condensée ( $n_0$ ). Après expansion, ces densités s'expriment [33] :

$$n_{\text{th}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_{3/2} \left[ \exp \left( \frac{\mu}{k_{\text{B}}T} - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{2X_i^2(t)} \right) \right], \quad (1.47)$$

$$n_0(\vec{r}) = \max \left[ n_0(0) \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{R_i^2(t)} \right), 0 \right], \quad (1.48)$$

avec

$$X_i^2(t) = \frac{k_{\text{B}}T}{m} \frac{1 + \omega_i^2 t^2}{\omega_i^2}, \quad (1.49)$$

$$R_{x,y}(t) = R_{x,y}(0) \sqrt{1 + \omega_{x,y}^2 t^2}, \quad (1.50)$$

$$R_z(t) = R_z(0). \quad (1.51)$$

Voir la section 1.3.2 pour les expressions générales de  $R_i(t)$  et les conditions de validité des approximations (1.50) et (1.51). Rappelons également que  $\lambda_{\text{T}} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_{\text{B}}T}$  et  $g_n(x) = \sum_i x^i/i^n$ . En pratique on néglige l'effet des interactions, au sein du nuage thermique, sur sa densité, ce qui revient à poser  $\mu/k_{\text{B}}T = 0$ . Par intégration sur l'axe du laser sonde supposé ici radial, on obtient les fonctions de fit pour les densités colonnes :

$$\tilde{n}_{\text{th}}(y, z) = \tilde{n}_{\text{th}}(0) g_2 \left[ e^{-\frac{y^2}{2Y^2} - \frac{z^2}{2Z^2}} \right] \quad (1.52)$$

$$\tilde{n}_0(y, z) = \max \left[ \tilde{n}_0(0) \left( 1 - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right)^{3/2}, 0 \right]. \quad (1.53)$$

En pratique tous les paramètres de fit sont indépendants, mais on restreint la zone du fit du nuage thermique aux ailes de la distribution, là où il n'y a pas de condensat, pour minimiser les erreurs de séparation entre les deux composantes du nuage total. En utilisant les expressions (1.49) à (1.51), on peut remonter à la densité atomique dans le piège, à la température etc. Le nuage est donc en principe "complètement" caractérisé.

Nous verrons par la suite que les approximations utilisées pour obtenir ces fonctions de fit, telles que l'approximation de Thomas-Fermi, ou le fait de négliger l'effet des interactions dans le piège entre nuage thermique et condensat sur la densité thermique après temps de vol, ne sont pas totalement justifiées dans nos conditions expérimentales. La méthode d'analyse décrite ici donne cependant de très bons ordres de grandeur des quantités mesurées.

Ici  $\delta$  est le désaccord de la sonde par rapport à la résonance (on se place à  $\delta = 0$  en pratique) et  $\Gamma = 5.9$  MHz est la largeur du niveau excité.

Les coefficients de Clebsch-Gordan des transitions mises en jeu sont indiqués sur la FIG. 1.4. On peut encadrer  $\bar{\sigma}$  entre ses valeurs extrêmes pour les transitions  $\pi^4$  :

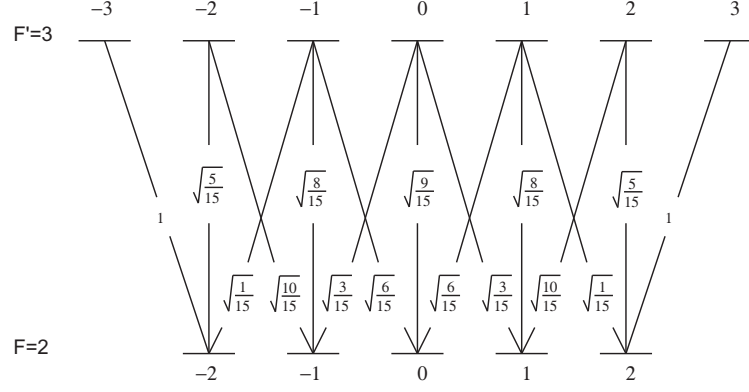


FIG. 1.4: Coefficients de Clebsch-Gordan de la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ .

$$\frac{1}{3} < \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} < \frac{3}{5}. \quad (1.45)$$

En prenant la valeur médiane de l'encadrement (1.45), on peut donc de cette façon estimer la section efficace de diffusion moyenne des atomes :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = 0.45 \pm 0.15. \quad (1.46)$$

En résumé, sous les conditions suivantes :

- laser sonde polarisé linéairement
- effet Zeeman négligeable
- $I \ll I_{\text{sat}}$
- pas de dépompage vers  $F = 1$ ,

on a une estimation sans calibration particulière de la section efficace moyenne, et donc le nombre d'atomes du nuage, à 30 % près, quelle que soit la direction du champ magnétique résiduel, et la répartition des atomes dans les sous-niveaux de  $F = 2$ .

En annexe, nous exposons une proposition de configuration d'imagerie par absorption, où l'on pourrait, en principe, connaître a priori la section efficace de diffusion, sans avoir à connaître la direction du champ magnétique au moment de la prise d'image. Cette méthode est basée sur la symétrie de la transition  $F = 1 \rightarrow F' = 0$ , dont tous les coefficients de Clebsch-Gordan sont égaux. Pour qu'elle fonctionne, le champ magnétique devrait être faible, inférieur au Gauss, pour que le décalage des sous-niveaux fondamentaux par effet Zeeman soit négligeable devant la largeur du niveau excité.

<sup>4</sup>Merci à M. Fauquembergue, J. F. Riou et Y. Le Coq pour m'avoir fait part de cette estimation de  $\bar{\sigma}$ .

faces de la cellule. On en déduit un grandissement constant d'une face à l'autre de la cellule, tel que dans le plan de la CCD l'échelle des longueurs vaut  $5.5(1) \mu\text{m}/\text{pixel}$  aussi bien horizontalement que verticalement. Un pixel est donc à peu près égal à la limite de résolution du système.

### L'imagerie par absorption

L'absorption du laser sonde d'intensité  $I(x, y, z)$ , dirigé sur l'axe  $Ox$ , par le nuage d'atome de densité  $n(x, y, z)$ , suit la loi de Beer-Lambert

$$\frac{dI}{dx} = -n(x, y, z)\sigma I, \quad (1.41)$$

où  $\sigma$  est la section efficace d'absorption des atomes. Pour une intensité faible devant l'intensité de saturation de la transition utilisée,  $\sigma$  ne dépend pas de  $I$ , et l'intégration de cette loi sur l'épaisseur du nuage donne l'intensité transmise  $I_{\text{trans}}$  en fonction de l'intensité incidente  $I_{\text{inc}}$

$$I_{\text{trans}}(y, z) = I_{\text{inc}}(y, z) \exp[-\sigma \int n(x, y, z) dx]. \quad (1.42)$$

En prenant deux images consécutives séparées d'environ 100 ms, l'une avec les atomes, l'autre sans (ce qui permet de mesurer  $I_{\text{inc}}$ ), on a donc accès, après division point par point des deux images, à une quantité ne dépendant que de la densité atomique et de la section efficace d'absorption. En prenant le logarithme de l'image divisée on obtient le signal  $\sigma \int n(x, y, z) dx$ . Dans le cas où  $\sigma$  est connue (utilisation d'une transition fermée avec des atomes polarisés), on mesure alors de façon absolue  $n(x, y, z)$ .

### Section efficace d'absorption

Sur notre dispositif  $\sigma$  n'est pas connu a priori. Notre laser sonde est résonnant avec la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ , et polarisé linéairement. Or la direction du champ magnétique résiduel est inconnue lors de la prise de l'image. Son amplitude, quant à elle, est vraisemblablement au maximum de l'ordre du Gauss, d'après les mesures de compensation du champ rémanent effectuées sur l'électroaimant. En première approximation, l'effet Zeeman peut donc être négligé. De plus les atomes initialement piégés dans l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  ont été repompés pour prendre l'image dans le niveau  $F = 2$ , et a priori dans tous les sous-niveaux  $m_F = \pm 2, \pm 1, 0$ , sans que l'on en connaisse les populations. En prenant l'axe de la polarisation linéaire du laser comme axe de quantification, on peut alors estimer une section efficace moyenne approchée  $\bar{\sigma}$ . Dans cette base, les transitions optiques sont  $\pi$ , et bien que les sous-niveaux Zeeman ne soient pas, a priori, des états stationnaires, on peut leur attribuer une population effective  $p(m_F)$  pendant l'application du laser sonde. On obtient :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \sum_{m_F} p(m_F) c^2(m_F, m_F), \quad (1.43)$$

où les  $c(m_F, m_{F'})$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan des transitions  $|F = 2, m_F\rangle \rightarrow |F' = 3, m_{F'}\rangle$ , et  $\sigma_0$  est la section efficace des transitions fermées  $m_F = \pm 2 \rightarrow m_{F'} = \pm 3$

$$\sigma_0 = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}. \quad (1.44)$$

## Conclusion et méthode de résolution

Pour conclure, l'approximation semi-classique et l'approximation de Hartree-Fock pour les excitations conduisent à décrire le gaz de bosons dégénéré par le système d'équations pour les grandeurs  $\psi_0(\vec{r})$  et  $n_{th}(\vec{r})$  :

$$\left\{ -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) + g[n_0(\vec{r}) + 2n_{th}(\vec{r})] \right\} \psi_0(\vec{r}) = \mu \psi_0(\vec{r}),$$

$$n_{th}(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} [e^{-(V_{eff}(\vec{r}) - \mu)/k_B T}].$$
(1.40)

Rappelons que  $n_0(\vec{r}) = |\psi_0(\vec{r})|^2$  et  $V_{eff}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + 2g[n_0(\vec{r}) + n_{th}(\vec{r})]$ . La méthode standard pour résoudre ces équations est une procédure auto-consistante itérative. Elle consiste à résoudre alternativement les deux équations du système en gardant fixe  $n_{th}$  pour la première et  $n_0$  pour la seconde. La procédure est détaillée par exemple dans [29].

## 1.4 Caractérisation du condensat et du nuage thermique

Sur notre expérience l'observation d'un condensat, et plus généralement d'un nuage de Rubidium dense, se fait par absorption d'un laser. À partir de l'image de "l'ombre" du condensat sur un faisceau sonde à résonance, on est en effet capable de mesurer la densité spatiale du nuage, qui à son tour donne accès à sa température, son nombre d'atomes, etc.

### 1.4.1 Le système d'imagerie

Le système d'imagerie que nous utilisons est un système classique, à transport d'image (FIG. 1.3). Le transport d'image est assuré par 2 doublets, à la limite de diffraction, corrigés

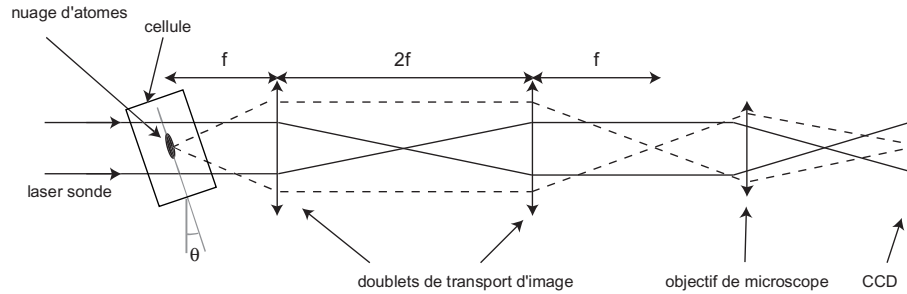


FIG. 1.3: Schéma de principe du montage d'imagerie par absorption. L'angle  $\theta = 11^\circ$  représente le complément de l'angle entre le laser sonde et l'axe long du piège magnétique. La résolution de ce dispositif est de  $6 \mu\text{m}$  limitée par l'ouverture de l'objectif.

des aberrations sphériques du second ordre, de 3.8 cm de diamètre et 15 cm de focale. L'image est ensuite agrandie par un objectif de 5 cm de focale et 8 mm de diamètre. Sa résolution à la limite de diffraction est de  $6 \mu\text{m}$ . Le grandissement du système, fixé par cet objectif, est calibré en faisant l'image d'une mire graduée posée sur la face de la cellule de sortie du laser sonde puis sur la face d'entrée, sans changer la mise au point effectuée sur le nuage d'atomes. On trouve un grandissement identique sur les images des deux

## 2. Limite des “hautes” énergies, approximation de Hartree-Fock

Dans la limite où  $\epsilon \gg \mu$ , le spectre (1.32) prend la forme suivante :

$$\epsilon^{\text{HF}}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r}), \quad (1.36)$$

qui n’est autre que le spectre semi-classique d’une particule dans un potentiel effectif modifié par le champ moyen  $V_{\text{eff}}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r})$ . Cela revient à une approximation de Hartree-fock, associée à l’approximation semi-classique. Cette limite est très utile pour décrire le nuage thermique dans le cas où  $k_{\text{B}}T \gg \mu$ , ce qui correspond très souvent aux situations expérimentales présentant un nuage thermique visible par imagerie standard.

Cette approximation revient également à négliger la composante  $v(\vec{p}, \vec{r})$  des excitations dans les équations de Bogoliubov (1.31). Les amplitudes des excitations (1.33) deviennent donc :

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, \vec{r}) &= 1, \\ v(\vec{p}, \vec{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

La densité du nuage thermique est alors déduite de (1.28) en lui appliquant les approximations semi-classique et de Hartree-Fock, soit :

$$\begin{aligned} n_{\text{th}}(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\vec{p} \langle \hat{\alpha}^\dagger(\vec{p}, \vec{r}) \hat{\alpha}(\vec{p}, \vec{r}) \rangle, \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\vec{p} \left[ \exp(\epsilon^{\text{HF}}(\vec{p}, \vec{r})/k_{\text{B}}T) - 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

On aboutit finalement à l’équation implicite :

$$n_{\text{th}}(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{T}}^3} g_{3/2} \left[ e^{-(V_{\text{eff}}(\vec{r}) - \mu)/k_{\text{B}}T} \right], \quad (1.39)$$

avec la longueur de de Broglie thermique  $\lambda_{\text{T}} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_{\text{B}}T}$  et la fonction<sup>3</sup>  $g_{3/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^{3/2}$ . Cette équation est implicite puisque  $n_{\text{th}}$  intervient dans  $V_{\text{eff}}$ .

### Remarques sur les quasi-particules II

Dans l’approximation de Hartree-Fock, c’est-à-dire, dans le cas de quasi-particules d’énergie grande devant le potentiel chimique du système ( $\epsilon \gg \mu$ ), les quasi-particules s’identifient aux particules. Cela signifie qu’une excitation de haute énergie peut être considérée comme une particule éjectée du condensat. Pour s’en convaincre, il suffit d’écrire le système (1.30) avec  $u = 1$  et  $v = 0$ , ce qui donne  $\hat{\psi} = \hat{\alpha}$ . Il est assez intuitif que les phénomènes collectifs (à l’origine de la distinction entre particules et quasi-particules) deviennent négligeables pour des énergies grandes devant l’énergie typique d’interaction.

<sup>3</sup>Il peut être utile de savoir que cette fonction est un POLYLOGARITHME, notamment pour les calculs avec Mathematica.



le système d'équations (1.26) devient :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r}) \right] u(\vec{p}, \vec{r}) + gn_0(\vec{r}) v(\vec{p}, \vec{r}) &= \epsilon(\vec{p}, \vec{r}) u(\vec{p}, \vec{r}), \\ \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r}) \right] v(\vec{p}, \vec{r}) + gn_0(\vec{r}) u(\vec{p}, \vec{r}) &= -\epsilon(\vec{p}, \vec{r}) v(\vec{p}, \vec{r}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

### Solution des équations de Bogoliubov

La résolution des équations de Bogoliubov dans l'approximation semi-classique (1.31) donne le spectre en énergie des excitations, valable lorsque  $\epsilon \gg \hbar\omega$  :

$$\epsilon(\vec{p}, \vec{r}) = \left\{ \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r}) \right]^2 - g^2 n_0^2(\vec{r}) \right\}^{1/2}. \quad (1.32)$$

Et les amplitudes des quasi-particules se déduisent de :

$$\begin{aligned} u^2(\vec{p}, \vec{r}) &= \frac{1}{2\epsilon(\vec{p}, \vec{r})} \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r}) + \epsilon(\vec{p}, \vec{r}) \right], \\ v^2(\vec{p}, \vec{r}) &= \frac{1}{2\epsilon(\vec{p}, \vec{r})} \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + 2gn_{\text{tot}}(\vec{r}) - \epsilon(\vec{p}, \vec{r}) \right], \\ u(\vec{p}, \vec{r})v(\vec{p}, \vec{r}) &= -\frac{gn_0(\vec{r})}{2\epsilon(\vec{p}, \vec{r})}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Suivant l'énergie des excitations, et le point  $\vec{r}$  où on les considère, des expressions plus explicites, mais moins générales, de leur spectre et de leur amplitude peuvent être écrites. C'est ce que nous allons voir dans les deux cas particuliers suivants.

## 1. Excitations dans le condensat

Pour les excitations à l'intérieur du condensat, dans l'approximation de Thomas-Fermi, en insérant l'expression de  $\mu$  déduite de l'Eq. (1.23) dans (1.32) on obtient le spectre<sup>2</sup> :

$$\epsilon^{\text{interne}}(\vec{p}, \vec{r}) = \sqrt{\frac{p^2}{2m} \left( \frac{p^2}{2m} + 2gn_0(\vec{r}) \right)}. \quad (1.34)$$

On peut remarquer que cette expression ne contient plus la densité du nuage thermique, qui s'élimine entre les équations (1.23) et (1.32). Pour les excitations de faible énergie cinétique (mais respectant toujours la condition  $\epsilon \gg \hbar\omega$ ), on trouve un spectre de type phonon :

$$\epsilon^{\text{phonon}}(\vec{p}, \vec{r}) = c(\vec{r})p \quad (1.35)$$

avec  $c(\vec{r}) = \sqrt{gn_0(\vec{r})/m}$  la vitesse locale du son.

<sup>2</sup>Ce résultat peut également s'obtenir par le calcul du spectre pour un condensat homogène [14], puis l'application de l'approximation de densité locale.

La densité du nuage thermique, déjà définie comme  $n_{\text{th}} = \langle \tilde{\psi}^\dagger(\vec{r})\tilde{\psi}(\vec{r}) \rangle$ , peut maintenant être exprimée dans la base des quasi-particules :

$$n_{\text{th}}(\vec{r}) = \sum_j [|u_j(\vec{r})|^2 + |v_j(\vec{r})|^2] \langle \hat{\alpha}_j^\dagger \hat{\alpha}_j \rangle + |v_j(\vec{r})|^2 \quad (1.28)$$

Dans cette expression de la densité du nuage thermique, le terme  $\sum_j |v_j(\vec{r})|^2$  représente la déplétion quantique (terme non nul à  $T=0$ , mais toujours très faible). Il sera négligé dans la suite du calcul. Le terme  $\langle \hat{\alpha}_j^\dagger \hat{\alpha}_j \rangle$  est la population thermique des excitations d'énergies  $\epsilon_j$ . La statistique de Bose donne  $\langle \hat{\alpha}_j^\dagger \hat{\alpha}_j \rangle = 1/[\exp(\epsilon_j/k_B T) - 1]$ .

### Remarques sur les quasi-particules I

- Les quasi-particules sont les modes propres d'excitation du fluide quantique que nous considérons.
- L'expérience du groupe de W. Ketterle, décrite dans la référence [32], met en évidence expérimentalement la décomposition de  $\hat{\alpha}^\dagger$  sur  $\tilde{\psi}^\dagger$  et  $\tilde{\psi}$ , dans l'espace de Fourier. C'est à dire qu'en créant une excitation (quasi-particule) d'impulsion  $\vec{k}$  (par diffraction de Bragg) de faible énergie, ils observent (par spectroscopie de Bragg) qu'elle est constituée de particules d'impulsion  $\vec{k}$  et  $-\vec{k}$ .

### Approximation semi-classique

Pour résoudre simplement les équations de Bogoliubov (1.26), nous faisons l'approximation semi-classique [29]. C'est à dire que nous attribuons aux quasi-particules une impulsion  $\vec{p}$  bien définie, soit

$$\begin{aligned} u_j(\vec{r}) &\rightarrow u(\vec{p}, \vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})}, \\ v_j(\vec{r}) &\rightarrow v(\vec{p}, \vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})}, \\ \sum_j &\rightarrow \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \end{aligned} \quad (1.29)$$

La phase et l'impulsion sont liées par  $\vec{p} = \hbar \vec{\nabla} \varphi$ . La transformation de Bogoliubov (1.25) devient (en incluant le terme de phase dans  $u$  et  $v$  pour plus de clarté) :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{p}, \vec{r}) &= u(\vec{p}, \vec{r}) \hat{\alpha}(\vec{p}, \vec{r}) + v^*(\vec{p}, \vec{r}) \hat{\alpha}^\dagger(-\vec{p}, \vec{r}), \\ \tilde{\psi}^\dagger(\vec{p}, \vec{r}) &= u^*(\vec{p}, \vec{r}) \hat{\alpha}^\dagger(\vec{p}, \vec{r}) + v(\vec{p}, \vec{r}) \hat{\alpha}(-\vec{p}, \vec{r}), \end{aligned} \quad (1.30)$$

Cette approximation suppose  $p \gg \hbar/a_{HO}$ , où  $a_{HO} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$  est la taille du mode fondamental du piège, et nécessite  $k_B T \gg \hbar\omega$ . On trouvera une discussion plus précise des conditions d'application de cette approximation dans [29] et [14]. Elle revient à considérer le nuage comme localement homogène, et, à ce titre, est justifiée lorsque la longueur d'onde de de Broglie typique des particules est petite devant l'échelle de longueur de variation de la densité du nuage [30]. En négligeant les dérivées premières de  $u$  et  $v$ , et seconde de  $\varphi$ ,

### Approximation de champ moyen, équations du mouvement

En injectant (1.22) dans (1.21), et en appliquant les approximations de Popov et de champ moyen (calcul non trivial, voir [31, 29] pour la nature de ces approximations), on aboutit à l'équation de Gross-Pitaevskii pour le condensat :

$$\left\{ -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r}) + g[n_0(\vec{r}) + 2n_{\text{th}}(\vec{r})] \right\} \psi_0(\vec{r}) = \mu \psi_0(\vec{r}), \quad (1.23)$$

et pour les états excités, à l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \left[ -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + g n_{\text{tot}}(\vec{r}) \right] \tilde{\psi}(\vec{r}, t) + 2g n_0(\vec{r}) \tilde{\psi}^\dagger(\vec{r}, t). \quad (1.24)$$

On a noté la densité du nuage thermique  $n_{\text{th}} = \langle \tilde{\psi}^\dagger(\vec{r}) \tilde{\psi}(\vec{r}) \rangle$ , la densité du condensat  $n_0(\vec{r}) = |\psi_0(\vec{r})|^2$ , et la densité totale  $n_{\text{tot}} = n_0 + n_{\text{th}}$ . La moyenne  $\langle \rangle$  désigne la moyenne statistique, sur l'ensemble des états à  $N$  particules possibles, pour une distribution thermique des excitations. Cette moyenne prend une forme très simple dans la base des excitations propres du système (voir l'équation (1.28)).

Ces deux équations sont couplées, et doivent être résolues ensemble. Mais on voit que (1.24) contient à la fois  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\psi}^\dagger$ . Il convient donc de la résoudre en même temps que sa complexe conjuguée. Dans ce but, on effectue la transformation de Bogoliubov.

### Transformation de Bogoliubov

La transformation de Bogoliubov consiste à écrire  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\psi}^\dagger$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{r}, t) &= \sum_j \left[ u_j(\vec{r}) \hat{\alpha}_j e^{-i\epsilon_j t/\hbar} + v_j^*(\vec{r}) \hat{\alpha}_j^\dagger e^{i\epsilon_j t/\hbar} \right], \\ \tilde{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) &= \sum_j \left[ u_j^*(\vec{r}) \hat{\alpha}_j^\dagger e^{i\epsilon_j t/\hbar} + v_j(\vec{r}) \hat{\alpha}_j e^{-i\epsilon_j t/\hbar} \right], \end{aligned} \quad (1.25)$$

$\hat{\alpha}_j^\dagger$  et  $\hat{\alpha}_j$  étant les opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules d'énergie  $\epsilon_j$ . On leur attribue une relation de commutation de bosons,  $[\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ .  $u_j$  et  $v_j$  sont les fonctions d'onde des modes de quasi-particules. Alors, l'équation (1.24) et sa conjuguée sont satisfaites avec les conditions suivantes, appelées équations de Bogoliubov, sur  $u_j$ ,  $v_j$ , et  $\epsilon_j$  :

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 u_j(\vec{r}) + g n_0(\vec{r}) v_j(\vec{r}) &= \epsilon_j u_j(\vec{r}), \\ \hat{H}_0 v_j(\vec{r}) + g n_0(\vec{r}) u_j(\vec{r}) &= -\epsilon_j v_j(\vec{r}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

où  $\hat{H}_0 = -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r}) + 2g n_{\text{tot}}(\vec{r}) - \mu$ . Les amplitudes  $u_j$  et  $v_j$  obéissent de plus à la condition de normalisation

$$\int d\vec{r} [u_i^*(\vec{r}) u_j(\vec{r}) - v_i^*(\vec{r}) v_j(\vec{r})] = \delta_{ij}. \quad (1.27)$$

autres, les comparer aux prédictions théoriques de l'équation de Gross-Pitaevskii dans l'approximation de Thomas-Fermi, et tester la validité de ce modèle pour la situation expérimentale réelle.

Enfin, pour conclure, nous voyons que plus le piège est anisotrope, plus l'expansion axiale est faible. C'est à dire que la distribution des vitesses axiale dans le piège est peu modifiée pendant l'expansion. C'est une propriété importante pour l'expérience de spectroscopie de Bragg décrite par la suite.

### 1.3.3 Condensat à température non nulle

Pour plusieurs aspects des expériences présentées dans la suite, il est important de présenter également les bases de la description des condensats en présence d'un nuage thermique. On trouvera dans les références [29, 14, 30] une étude détaillée du sujet.

Nous considérons dans cette section un gaz de  $N$  atomes bosoniques piégés dans un potentiel harmonique statique  $V(\vec{r})$ , de pulsation  $\omega$ , en dessous de la température de condensation.

#### Équation de Heisenberg

La description du condensat et des états excités s'établit en parallèle, à partir de l'équation de Heisenberg pour l'opérateur champ  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu + g \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (1.21)$$

Rappelons que  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t)$  et  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  sont les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule au point  $\vec{r}$ . On peut les mettre sous la forme  $\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_j \psi_j(\vec{r}, t) \hat{\beta}_j$ , où les  $\psi_j(\vec{r})$  sont des fonctions d'onde à une particule et les  $\hat{\beta}_j$  les opérateurs d'annihilation associés.

#### Séparation formelle de la fraction condensée

En présence d'une fraction d'atomes condensés, on sépare l'opérateur champ en deux contributions :

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) + \tilde{\psi}(\vec{r}, t), \quad (1.22)$$

où  $\psi_0(\vec{r})$  est le mode du condensat, considéré comme un champ classique de phase et d'amplitude bien définies. C'est ce que nous avons appelé précédemment la "fonction d'onde du condensat". La population des états excités, qui sont représentés par l'opérateur  $\tilde{\psi}(\vec{r}, t)$ , forme le nuage thermique lorsque le condensat est au repos.

L'appellation "nuage thermique" pour parler de l'ensemble des excitations n'est pas rigoureusement correcte, car toutes les excitations ne sont pas d'origine thermique, une certaine part venant de la déplétion quantique. Cependant nous utilisons ce terme car la déplétion quantique est trop faible dans nos conditions expérimentales pour pouvoir être mesurée. Elle sera négligée.

est très petit devant 1. En utilisant de plus la variable  $\tau = \omega_{\perp} t$ , l'évolution des paramètres d'échelle  $\lambda_{\perp}$  et  $\lambda_z$  devient :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \lambda_{\perp}}{d\tau^2} &= \frac{1}{\lambda_{\perp}^3 \lambda_z}, \\ \frac{d^2 \lambda_z}{d\tau^2} &= \frac{\epsilon^2}{\lambda_{\perp}^2 \lambda_z^2}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

La solution à l'ordre 0 en  $\epsilon$  donne

$$\begin{aligned}\lambda_z(\tau) &= 1, \\ \lambda_{\perp}(\tau) &= \sqrt{1 + \tau^2},\end{aligned}\quad (1.18)$$

la solution à l'ordre suivant pour la direction axiale étant  $\lambda_z(\tau) = 1 + \epsilon^2(\tau \arctan(\tau) - \ln \sqrt{1 + \tau^2})$ .

### Distribution des vitesses

Dans le cadre de ce modèle, on peut déterminer simplement la distribution des vitesses longitudinales après la coupure du piège. La dilatation peut s'exprimer de la façon suivante : un volume élémentaire du nuage centré au point  $R(t)$  se déplace sur une trajectoire  $R_i(t) = \lambda_i(t)R_i(0)$ ,  $i \in \{x, y, z\}$ . En dérivant par rapport au temps cette relation on déduit directement le champ de vitesse du nuage  $v_i(\vec{r}, t) = r_i \dot{\lambda}_i(t) / \lambda_i(t)$ . On voit que  $v_i(\vec{r})$  est linéaire en  $r_i$ , et par conséquent que la distribution de vitesse reproduit la distribution spatiale. Dans le cas de l'ouverture instantanée du piège, une fois atteint le régime asymptotique  $t \gg 1/\omega_{\perp}$ , on obtient alors la distribution de vitesse normalisée :

$$\mathcal{D}(v_x, v_y, v_z) = \frac{15}{8\pi V_x V_y V_z} \left( 1 - \frac{v_x^2}{V_x^2} - \frac{v_y^2}{V_y^2} - \frac{v_z^2}{V_z^2} \right), \quad (1.19)$$

avec  $V_x = V_y = \omega_{\perp} R_{\perp}$  et  $V_z = \frac{\pi}{2} \epsilon^2 \omega_{\perp} R_z$ . On en déduit les distributions de vitesse à une dimension

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}(v_i) &= \int \int \mathcal{D}(v_i, v_j, v_k) dv_j dv_k \\ &= \frac{15}{16V_i} \left( 1 - \frac{v_i^2}{V_i^2} \right)^2.\end{aligned}\quad (1.20)$$

La largeur  $\Delta V_i$  de la distribution selon l'axe  $i$  est donc proportionnelle à  $V_i$ . On en déduit que  $\Delta V_z / \Delta V_x \sim \epsilon$ . Par conséquent, plus le piège est anisotrope, plus la fraction d'énergie d'interaction convertie en vitesse longitudinale est faible.

### Conclusion

Ces résultats permettent de remonter des propriétés des condensats imagés après un temps d'expansion libre aux propriétés du condensat dans le piège. On peut ainsi, entre

potentiel harmonique, de pulsations  $\omega_i$ , on peut la mettre sous la forme :

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \max \left[ \frac{\mu}{g} \left( 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), 0 \right], \quad (1.13)$$

où  $R_i = \sqrt{2\mu/m\omega_i^2}$  est le rayon dit de Thomas-Fermi du condensat, c'est à dire le point de chaque axe propre du piège où la densité du condensat s'annule. La condition de normalisation de  $\psi$  donne la relation entre  $\mu$  et  $N_0$  :

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left( 15 \frac{N_0 a}{a_{\text{oh}}} \right)^{2/5}, \quad (1.14)$$

où  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ , et où  $a_{\text{oh}} = (\hbar/m\bar{\omega})^{1/2}$ .

### 1.3.2 Condensat à température nulle : expansion libre

Nous avons jusqu'ici donné les équations permettant de déterminer la densité spatiale du condensat à l'équilibre dans son piège. Pour l'analyse des expériences, il est indispensable de connaître l'évolution de cette densité après la coupure du piège harmonique. En effet, le condensat subit alors une expansion, due principalement à la conversion de l'énergie d'interaction initiale en énergie cinétique. Cette expansion est primordiale pour l'imagerie du condensat puisqu'elle lui permet d'atteindre une taille supérieure à la limite de résolution du système d'imagerie.

Par exemple, dans les expériences décrites dans ce manuscrit, les dimensions dans le piège étaient de l'ordre de  $130 \times 1 \times 1 \mu\text{m}$ , et après le temps de vol typique de 25 ms, de l'ordre de  $130 \times 100 \times 100 \mu\text{m}$ , et la résolution du système d'imagerie de l'ordre de  $6 \mu\text{m}$ , pour une longueur d'onde de 780 nm.

Un modèle d'expansion analytique pour le condensat dans le régime de Thomas-Fermi a été élaboré dans [27] et [28]. Nous en résumons ici les résultats.

#### Distribution spatiale

On peut montrer que l'expansion, pour un condensat initialement dans le régime de Thomas-Fermi, est une dilatation pure, anisotrope. La densité spatiale en fonction du temps s'écrit :

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} |\psi(\frac{r_i}{\lambda_i}, 0)|^2, \quad (1.15)$$

la dépendance temporelle étant contenue dans les coefficients  $\lambda_i$ . Pour une coupure instantanée du piège, c'est à dire en un temps très court devant  $1/\omega_i$ , ces paramètres d'échelle  $\lambda_i$  satisfont le jeu d'équations :

$$\frac{d^2 \lambda_i}{dt^2} = \frac{\omega_i^2}{\lambda_i \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, \quad (1.16)$$

où les  $\omega_i$  sont les pulsations initiales du piège. Nous pouvons réécrire, et résoudre ces équations dans les conditions de notre expérience, où le piège est de symétrie cylindrique et très anisotrope. Les pulsations radiale  $\omega_{\perp}$  et axiale  $\omega_z$  sont telles que le rapport  $\epsilon \equiv \omega_z/\omega_{\perp}$

alors  $\Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N_0}) = \prod_{i=1}^{N_0} \phi(\vec{r}_i)$ . À partir de l'Hamiltonien du système

$$H = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\vec{\nabla}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} V_{\text{int}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (1.10)$$

où  $V_{\text{int}}$  est le potentiel d'interaction entre atomes, on détermine alors la fonction  $\phi$  en minimisant l'énergie du système  $E[\phi] = N_0 \int d\vec{r} \phi^* H \phi$ . La minimisation de l'énergie du système conduit à l'équation de Gross-Pitaevskii. Cette méthode est expliquée en détail dans [26]. Nous nous contenterons ici de mentionner les différentes approximations nécessaires pour parvenir à (1.9). Il est important de remarquer tout d'abord que l'équation de Gross-Pitaevskii (1.9), qui est sous sa forme habituelle, ne porte pas sur la fonction d'onde à une particule  $\phi$  mais sur la fonction d'onde du condensat, qui est reliée à  $\phi$  par  $\psi(\vec{r}) = \sqrt{N_0} \phi(\vec{r})$ .

**Hartree-Fock.** Comme nous l'avons mentionné, tous les atomes sont supposés dans le même état à une particule  $|\phi\rangle$ . L'état du condensat est donc le produit tensoriel  $|\Phi\rangle = |\phi(1) \dots \phi(i) \dots \phi(N_0)\rangle$ . C'est une approximation de type Hartree-Fock, où chaque atome évolue dans un potentiel combinant le potentiel de piégeage et un potentiel de champ moyen dû aux interactions avec les  $N_0 - 1$  autres atomes.

**Déplétion quantique.** En supposant que tous les atomes sont dans le même état à une particule, l'approximation de Hartree-Fock conduit à négliger la déplétion quantique : en réalité, même à température nulle la population des niveaux excités du système n'est pas strictement nulle, par un effet des interactions. Dans nos conditions expérimentales typiques, la déplétion quantique ne devrait pas excéder quelques pourcents [14].

**Pseudo-potentiel de contact.** Le potentiel d'interaction entre atomes est modélisé par un potentiel de contact  $V_{\text{int}} = g\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ . Cette forme est en partie justifiée par la faible énergie cinétique des atomes : les collisions se font dans l'onde  $s$ , caractérisée par une longueur de diffusion  $a$  très petite devant la longueur d'onde de Broglie des atomes proches de la température de condensation. En effet,  $a = 5.32$  nm, pour le  $^{87}\text{Rb}$  dans l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ , et la longueur d'onde de de Broglie typique pour des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  à  $1 \mu\text{K}$  est de 500 nm.

### Approximation de Thomas-Fermi

Très souvent, pour des condensats d'atomes dont les interactions sont répulsives, le terme d'énergie cinétique de l'équation de Gross-Pitaevskii (1.9) est négligeable devant le terme d'interactions. L'approximation de Thomas-Fermi donne alors :

$$V(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r})|^2 = \mu. \quad (1.11)$$

Cette équation est extrêmement pratique, puisque la solution est immédiate :

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{g}[\mu - V(\vec{r})]. \quad (1.12)$$

Cette solution est bien sûr valable partout où  $\mu > V(\vec{r})$ , et  $|\psi(\vec{r})|^2 = 0$  ailleurs. La densité atomique a donc la forme du potentiel de piégeage inversée et tronquée. Dans le cas d'un

des atomes du piège soit nettement plus petit que  $1/30 \text{ s}^{-1}$ . Or le taux de pertes dues aux collisions est de l'ordre du taux de collisions. En effet, par collisions, les molécules du gaz résiduel à 295 K communiquent aux atomes piégés une énergie cinétique nettement plus grande que la profondeur du piège magnétique qui est de quelques mK. Une collision entraîne donc une perte. On calcule que pour obtenir une durée de vie suffisante, le vide doit être inférieur à  $10^{-10}$  mbar [19]. Ce vide est atteint grâce à une pompe turbo-moléculaire (210 l/s) au niveau de l'enceinte primaire, et deux pompes ioniques de 30 l/s (voir FIG. 1.2). Un sublimateur de Titane peut être utilisé en plus, mais n'est pas indispensable.

De plus, le tube séparant les enceintes primaire et secondaire est long de 70 cm, pour un diamètre intérieur de 1 cm. Ceci permet d'établir un vide différentiel entre les deux enceintes [25], de sorte que la pression de l'enceinte secondaire est 100 fois plus faible que celle de l'enceinte primaire. Il est estimé à quelques  $10^{-11}$  mbar.

### 1.3 Éléments théoriques importants pour la description et l'étude des condensats

Nous introduisons dans cette partie des éléments de théories indispensables à l'analyse des expériences présentées dans ce manuscrit. Le but n'est pas de les développer ni de les étudier en profondeur mais de fournir les notions nécessaires à notre travail expérimental. Pour chaque sujet, nous renvoyons à un ou plusieurs articles de référence.

#### 1.3.1 Condensat à température nulle : statique

##### L'équation de Gross-Pitaevskii

Un condensat de  $N_0$  atomes, à température nulle, dans un potentiel de piégeage  $V(\vec{r})$ , peut être décrit par une fonction d'onde appelée parfois fonction d'onde macroscopique ou paramètre d'ordre, qui obéit à une équation de Schrödinger non-linéaire, appelée équation de Gross-Pitaevskii [14] :

$$\left[ -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}) = \mu\psi(\vec{r}). \quad (1.9)$$

Dans cette équation, en plus des termes usuels d'énergie cinétique et potentielle dans une équation de Schrödinger, on trouve un terme non linéaire représentant l'énergie d'interaction, proportionnel à la densité atomique  $|\psi(\vec{r})|^2$ . La constante d'interaction  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  dépend de la longueur de diffusion  $a$  du potentiel d'interaction inter atomique. Du fait de la présence de ce terme non linéaire, le membre de droite de l'équation n'est pas proportionnel à l'énergie par particule mais au potentiel chimique du système  $\mu$ . Le potentiel chimique est lié à l'énergie totale par la relation  $\mu = \partial E_{\text{tot}}/\partial N_0$ . Il est important de noter que dans cette formulation de l'équation de Gross-Pitaevskii, la normalisation choisie de la fonction d'onde est  $\int d\vec{r} |\psi(\vec{r})|^2 = N_0$ .

##### Les approximations de cette équation

Pour parvenir à cette équation, on suppose que tous les atomes du condensat sont dans le même état à une particule  $\phi(\vec{r})$ , normalisé à 1. La fonction d'onde à  $N_0$  corps s'écrit



d'augmenter le flux au centre. En pratique la mélasse transverse permet de diminuer le temps de chargement du piège magnéto-optique (voir ci-dessous) d'un facteur 2.

### Le ralentisseur Zeeman

Grâce à l'interaction résonnante des atomes du jet avec un laser se propageant en sens opposé, le jet est ralenti jusqu'à une vitesse moyenne de quelques dizaines de mètres par seconde. Cette vitesse est assez faible pour être dans la plage de capture d'un piège magnéto-optique (PMO)[20]. Pour que l'interaction atomes-laser soit résonnante tout au long de leur parcours dans le tube de ralentissement, un champ magnétique inhomogène est appliqué le long du tube. Ainsi, la variation de l'effet Doppler due à la décélération est compensée par effet Zeeman [21].

### Le piège magnéto-optique, la mélasse optique

Les atomes ralentis sont collectés, dans une cellule en pyrex, par un piège magnéto-optique (PMO). Ce piège, dissipatif, permet d'obtenir en quelques secondes des échantillons de  $10^8$  à  $10^9$  atomes, à quelques centaines de  $\mu\text{K}$ , pour une densité d'environ  $10^{11}$  at/cm<sup>3</sup>. Le paramètre de dégénérescence est alors de l'ordre de  $10^{-7}$ . La moitié du chemin dans l'espace des phases est donc parcourue à ce stade.

### Le piège magnétique

Les atomes capturés et refroidis par le PMO, après une étape de refroidissement sub-Doppler par une mélasse Sisyphé [20, 22, 23] pour atteindre environ  $100 \mu\text{K}$ , sont transférés dans un piège magnétique créé par un champ magnétique statique. Tous les lasers sont éteints pendant cette phase, pour éviter toute diffusion de photons par les atomes piégés magnétiquement. La diffusion de photons chaufferait le nuage piégé magnétiquement, et transférerait les atomes vers des états internes non piégeants. Le piège magnétique étant conservatif, la dernière phase de refroidissement à effectuer se fait grâce à un champ magnétique radio-fréquence, qui expulse du piège les atomes les plus énergétiques [24]. Les collisions entre les atomes restants permettent la rethermalisation de l'échantillon à une température plus basse. Ce processus, appelé refroidissement évaporatif, permet d'abaisser la température tout en augmentant la densité du nuage, malgré l'éjection continue des atomes de "grande" énergie. On parvient ainsi, avec  $10^6$  atomes,  $10^{13}$  at/cm<sup>3</sup>, à des températures inférieures au  $\mu\text{K}$  (typiquement  $500 \text{ nK}$ ), et l'on obtient un condensat de Bose-Einstein.

### Conditions sur le vide

Toutes ces opérations de piégeage et de refroidissement ne sont possibles que lorsque les collisions entre les atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , froids, et les molécules du gaz résiduel de l'enceinte à vide, à température ambiante, sont "rares". Une fois que le PMO contient le maximum d'atomes possible, le jet est fermé. À partir de ce moment, la durée caractéristique de l'expérience est de  $30 \text{ s}^1$ . Qualitativement, on estime donc nécessaire que le taux de pertes

---

<sup>1</sup>C'est le refroidissement évaporatif, dont la vitesse dépend du taux de collisions élastiques entre atomes piégés, qui fixe cette échelle de temps dans nos conditions.

## 1.2 Principe de la réalisation expérimentale

Pour obtenir un condensat de Bose-Einstein à partir d'un gaz dilué, la condition à réaliser est donnée par l'Eq. (1.6), qui relie la température à atteindre au nombre d'atomes de l'échantillon, ou plus précisément à sa densité. Cette condition peut s'exprimer en fonction d'un seul paramètre, la densité au centre de l'espace des phases, encore appelé paramètre de dégénérescence, qui doit atteindre une valeur critique pour qu'un condensat apparaisse [15] :

$$n(0)\lambda_T^3 = 2.612, \quad (1.8)$$

où  $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$  est la longueur d'onde de de Broglie thermique, et  $n(0)$  la densité au centre du condensat. On comprend, avec ce critère, que l'on doit chercher à refroidir et à densifier un nuage d'atomes, jusqu'à atteindre le paramètre de dégénérescence critique. La démarche pour obtenir un condensat est bien illustrée par le schéma du dispositif expérimental [FIG. 1.2], où l'on peut suivre le parcours des atomes de façon chronologique.

Le dispositif que nous présentons, qui produit des condensats de Rubidium (isotope 87) est décrit en détail dans les thèses [16, 17, 18], auxquelles on pourra se reporter pour plus de précisions.

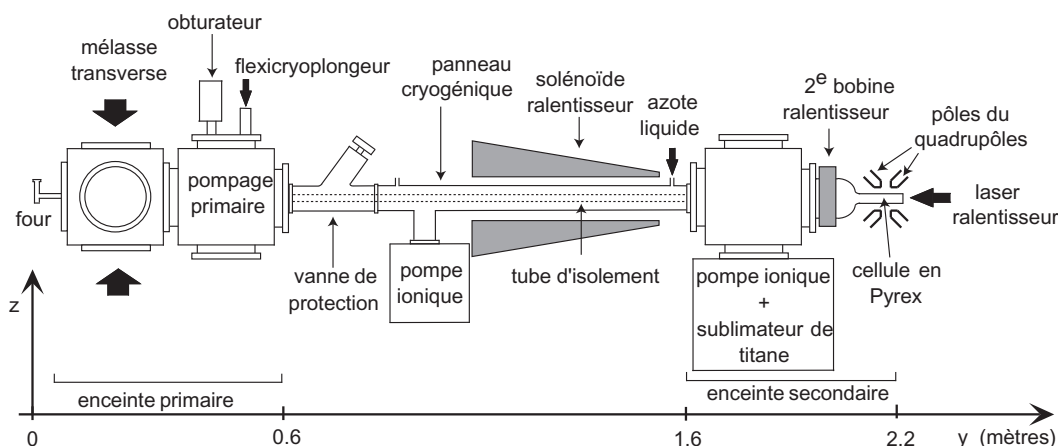


FIG. 1.2: Schéma général du dispositif expérimental.

### La source

La source d'atomes (le four) est une vapeur de Rubidium fournie par du Rubidium liquide à 120 °C. Une fraction des atomes de cette vapeur sort du four par un tube de collimation, sous forme d'un jet thermique d'une vitesse moyenne de 300 m/s. Dans le four la longueur d'onde de de Broglie thermique vaut  $\lambda_T = 10^{-11}$  m, et la loi des gaz parfaits à pression de vapeur saturante donne une densité de l'ordre de  $10^{13}$  at/cm<sup>3</sup> [19]. Cela donne un paramètre de dégénérescence d'environ  $10^{-14}$  (alors que l'on veut atteindre 2.612!).

### La mélasse transverse

À la sortie du four, le jet est refroidi transversalement par laser, par une mélasse Doppler à 2 dimensions, appelée mélasse transverse. Cela permet de mieux collimater le jet, et ainsi

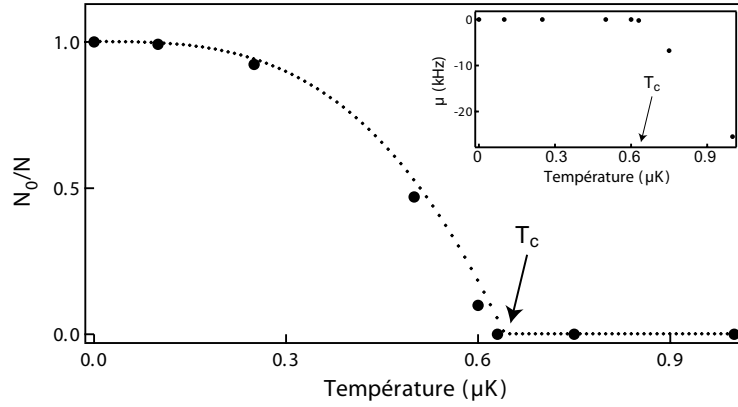


FIG. 1.1: Fraction condensée en fonction de la température, pour un gaz parfait, tel que  $N = 10^6$ ,  $\omega_z = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$  et  $\omega_\perp = 2\pi \times 760 \text{ Hz}$ . La température critique  $T_c$  est d'environ  $640 \text{ nK}$ . Les (●) représentent le calcul exact de  $N_0/N$  à partir de (1.4), et la ligne en pointillés l'approximation (1.7). L'écart entre les (●) et les pointillés représente donc l'influence du nombre fini de particules sur la fraction condensée. Dans l'encadré on a également tracé le potentiel chimique (en kHz)  $\mu/h$  en fonction de la température.

On obtient des expressions analytiques approchées pour  $N_0/N$  et  $T_c$ , en considérant la limite thermodynamique, qui suppose  $N \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow \infty$  tout en conservant  $N\omega^3$  fini, avec  $\omega = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$  [14]. Dans cette limite, en séparant la population de l'état fondamental de la population des états excités dans l'Eq. (1.4), on trouve :

$$N = \frac{z}{1-z} + g_3(z) \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3, \quad (1.5)$$

où  $g_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^p$  est un polylogarithme. On en tire la température critique, en fixant  $N_0 = 0$  et  $z = 1$  :

$$T_c = \frac{\hbar\omega}{k_B} \left[ \frac{N}{g_3(1)} \right]^{1/3}, \quad (1.6)$$

et la fraction condensée, quand  $T < T_c$ ,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (1.7)$$

On peut vérifier sur la FIG. 1.1 le bon accord entre cette expression approchée de la fraction condensée  $N_0/N$  et le calcul à partir de la fugacité, déterminée par l'Eq. (1.4). On pourra se reporter à la référence [13] pour une étude détaillée des effets liés au nombre fini de particules, à 3 et 1 dimensions, qui impose des corrections aux résultats obtenus à la limite thermodynamique.

La prise en compte des interactions entre atomes modifie légèrement ces résultats (voir section 3.3.2), mais n'apporte pas de changement qualitatif au phénomène en ce qui concerne la température critique et la fraction condensée.

### 1.1.1 Aspect “fonction d’onde macroscopique”

Le condensat est un ensemble de bosons piégés, qui sont tous dans le même état quantique. De ce fait c’est un objet essentiellement cohérent. C’est l’analogie du laser, qui est constitué de photons qui sont tous dans le même mode du champ électromagnétique.

En première et en bonne approximation, il peut être décrit comme une fonction d’onde macroscopique (voir la section 1.3.1 pour plus de détails)  $\psi(\vec{r}) = \sqrt{N_0}\phi(\vec{r})$ , où  $N_0$  est la population du mode du condensat, et  $\phi(\vec{r})$  est la fonction d’onde de l’état individuel des atomes (état fondamental du piège si les atomes n’interagissent pas).

Les atomes ayant une structure interne complexe, cet état quantique unique macroscopiquement occupé peut être manipulé par des ondes radio-fréquence, par des lasers, sans perte de cohérence, tant qu’il n’y a pas, en particulier, de phénomène d’émission spontanée. Il peut donc être transformé très facilement en superpositions linéaires d’états externes ou internes différents.

### 1.1.2 Aspect thermodynamique : condensation d’un gaz idéal piégé

Considérons un ensemble de  $N$  bosons identiques, sans interactions, à température  $T$ , piégés dans un potentiel harmonique infini de pulsations  $\omega_i$  avec  $i \in \{x, y, z\}$ . Dans le formalisme grand-canonique, la population  $N(E_{k,l,m})$  d’un état du piège d’énergie  $E_{k,l,m} = \hbar(k\omega_x + l\omega_y + m\omega_z)$  suit une distribution de Bose-Einstein :

$$N(E_{k,l,m}) = \frac{ze^{-\beta E_{k,l,m}}}{1 - ze^{-\beta E_{k,l,m}}}, \quad (1.1)$$

avec  $\beta = 1/k_B T$ , et où  $z = e^{\beta\mu}$  est la fugacité du système. Le potentiel chimique du système  $\mu$  est déterminé en égalant le nombre total d’atomes à la somme des populations de tous les niveaux d’énergie :

$$N = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} N(E_{k,l,m}). \quad (1.2)$$

En effectuant le développement en série

$$N = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} z^p e^{-\beta p E_{k,l,m}}, \quad (1.3)$$

on obtient finalement [13] :

$$N = \frac{\sum_{p=1}^{\infty} z^p}{\prod_{i \in \{x, y, z\}} (1 - e^{-\beta p \hbar \omega_i})}. \quad (1.4)$$

Le phénomène de la condensation peut alors être mis en évidence, en calculant, numériquement, à différentes températures, le potentiel chimique du système et la population du niveau fondamental  $N_0 = z/(1 - z)$ . La FIG. 1.1 montre la population du niveau fondamental et le potentiel chimique en fonction de la température. Tandis que le potentiel chimique tend vers 0 lorsque  $T$  tend vers une température  $T_c$ , appelée température critique, on observe l’accumulation rapide de tous les bosons dans le niveau fondamental en dessous de  $T_c$ .

# Chapitre 1

---

## Condensation de Bose-Einstein : notions générales

Les condensats de Bose-Einstein de gaz dilué présentent la particularité de relever à la fois de la physique atomique et de la physique de la matière condensée (diluée). D'une façon générale les techniques expérimentales employées pour leur réalisation et leur étude, telles que les manipulations par lasers et par champs magnétiques, sont celles de la physique atomique, tandis que les outils théoriques de description des condensats sont davantage issus de la physique de la matière condensée (Hélium superfluide...[12]).

Ce premier chapitre vise à introduire les aspects essentiels de la réalisation et de l'observation des condensats. Après une brève introduction à ce que l'on appelle un condensat de Bose-Einstein, nous présentons le dispositif expérimental dans son ensemble. Sans être l'unique schéma possible, il est assez largement utilisé parmi toutes les expériences de condensation dans le monde. Quelques éléments théoriques "de base", indispensables à l'étude quantitative des condensats sont ensuite introduits. Pour finir, la méthode d'imagerie par absorption est expliquée, et notamment, l'utilisation des résultats des modèles théoriques "de base" pour l'analyse des images.

### 1.1 Le condensat de Bose-Einstein

Le condensat de Bose-Einstein est un objet quantique macroscopique, et donc aux propriétés inhabituelles et riches. C'est le résultat d'un effet thermodynamique non classique, caractéristique de la statistique quantique de Bose-Einstein qui s'applique aux particules de spin entier (les bosons).



---

phase et des transitions multiphotoniques sélectives en vitesse.

- Le dernier chapitre présente la réalisation expérimentale et les résultats de la spectroscopie de Bragg des quasi-condensats.

disparaissent qu'en dessous d'une certaine température caractéristique, appelée température de phase. Ces fluctuations ont pour origine une forte population thermique des modes d'excitation de basse énergie, unidimensionnels, du condensat.

La prédiction de ce phénomène a fait suite aux travaux sur la condensation à 1D (une dimension). Pour un gaz idéal, il a d'abord été montré que la condensation dans un piège harmonique à 1D n'est pas possible à la limite thermodynamique [8]. Puis W. Ketterle et N. J. van Druten ont établi que la condensation était possible, pour un gaz idéal possédant un nombre fini d'atomes. Mais les interactions entre atomes modifient profondément le comportement prévu par ces modèles pour un gaz idéal. Selon D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov et J. T. M. Walraven [9], elles conduisent à une transition en deux temps, à mesure que la température baisse. En dessous d'une température de dégénérescence  $T_d$ , une fraction d'atomes condensés apparaît au centre du nuage, où les fluctuations de densité sont supprimées. Mais ces atomes condensés ne constituent qu'un quasi-condensat, ayant les mêmes propriétés de densité qu'un condensat, mais une phase non uniforme, et fluctuante. À mesure que la température diminue, la phase s'uniformise, et fluctue de moins en moins. Lorsque l'on atteint une autre température caractéristique  $T_{ph}$ , plus basse que  $T_d$ , les fluctuations de phase sont à leur tour supprimées. En dessous de  $T_{ph}$ , appelée température de phase, les atomes condensés constituent donc un vrai condensat, sans fluctuations de phase ni de densité.

Ce comportement a ensuite été étendu par les mêmes auteurs aux condensats 3D, mais très allongés, dont les modes de basse énergie ont un comportement 1D [10]. Les condensats 3D très allongés présentent donc des caractéristiques de systèmes de basse dimension.

Le groupe de W. Ertmer a démontré l'existence des quasi-condensats dans un nuage 3D très allongé [11]. Cette étude était basée sur la conversion en expansion libre des fluctuations de phase en fluctuations de densité. Elle était en accord qualitatif avec les prédictions théoriques, mais présentait un désaccord quantitatif. Une étude supplémentaire des fluctuations de phase semblait alors nécessaire. C'est dans ce but que nous avons réalisé l'expérience de spectroscopie de Bragg présentée dans ce manuscrit. Nous voulions, grâce à cette technique différente de celle employée par le groupe de W. Ertmer, obtenir une mesure quantitative des fluctuations de phase dans des condensats très allongés.

## Plan du mémoire

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous présentons des notions générales sur les condensats de Bose-Einstein de gaz dilués. Après avoir brièvement décrit ce qu'est un condensat, nous présentons le schéma général de l'expérience, puis des éléments théoriques indispensables à l'exploitation des résultats expérimentaux.
- Le second chapitre est consacré à un élément crucial du montage expérimental : l'électroaimant à noyau ferromagnétique qui nous a permis d'obtenir des condensats très allongés.
- Le troisième chapitre présente la réalisation et la caractérisation des condensats que nous étudions. Quelques particularités et difficultés expérimentales liées à l'anisotropie du condensat sont détaillées.
- Le quatrième chapitre aborde la spectroscopie de Bragg des quasi-condensats par ses aspects théoriques. Nous y relayons une description théorique des fluctuations de



# Introduction

---

## Contexte et motivations

Depuis leur première réalisation en 1995 [1, 2, 3], les condensats de Bose-Einstein de gaz dilué ont fait l'objet de très nombreux travaux expérimentaux et théoriques. Fin 2002 plus de 40 expériences ayant obtenu un condensat étaient recensées, avec des alcalins ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^1\text{H}$ ,  $^{85}\text{Rb}$ ,  $^{41}\text{K}$  et  $^{133}\text{Cs}$ ) et un gaz rare dans un état métastable ( $^4\text{He}^*$ ). Le prix Nobel de physique 2001, décerné à E. A. Cornell, W. Ketterle et C. E. Wieman “pour la réalisation de la condensation de Bose-Einstein dans des nuages gazeux d'atomes alcalins, ainsi que pour leurs études pionnières fondamentales sur les propriétés du condensat”, témoigne également de la portée des premiers résultats obtenus dans ce domaine.

Une des raisons du dynamisme de ce domaine est son caractère pluridisciplinaire. Les condensats de gaz d'atomes dilués se situent à la frontière de la physique atomique, de la physique de la matière condensée et de la physique des ondes de matière.

Par exemple, la superfluidité, les vortex, les excitations et la thermodynamique des condensats sont des thèmes reliés au domaine des fluides quantiques. Les propriétés de cohérence des condensats sont davantage rattachées au thème des ondes de matière. Quant aux interactions interatomiques, à la photoassociation, leur étude relève de la physique atomique.

La mesure des fluctuations de phase dans les condensats très allongés s'inscrit dans ce cadre pluridisciplinaire. Il s'agit en effet d'une contribution à l'étude de la condensation dans les systèmes de basse dimension, mais aussi à l'étude des propriétés de cohérence des condensats. Dans la perspective de réaliser des expériences d'optique atomique guidée, telles que l'interférométrie, la cohérence des condensats est un point crucial.

Dans le cas de condensats peu anisotropes, la cohérence du premier ordre, ou cohérence de phase, a été démontrée par interférométrie [4] et par spectroscopie de Bragg [5]. Elle a également été mise en évidence pour des condensats à température finie, c'est-à-dire pour des nuages dont la fraction condensée est faible [6]. Toutes ces expériences ont montré que les condensats à l'équilibre ont habituellement une phase uniforme. D'un autre côté, le groupe de J. T. M. Walraven a mis en évidence des fluctuations de la phase d'un condensat peu anisotrope en formation [7], créé hors d'équilibre par une condensation brutale. Un tel condensat, de phase non uniforme est appelé quasi-condensat.

Le cas des condensats très allongés, du point de vue de la cohérence de phase, est particulier. En effet, même à l'équilibre, ils peuvent présenter des fluctuations de phase, qui ne



4.4.2	Condition de résonance et amplitude de couplage . . . . .	100
4.4.3	Comparaison des spectres à 2 et 4 photons . . . . .	100
4.4.4	Généralisation à un atome à plusieurs niveaux . . . . .	100
4.4.5	Pourquoi l'appellation "diffraction de Bragg" . . . . .	101
4.5	Application à la mesure de la distribution des vitesses longitudinales d'un condensat de Bose-Einstein . . . . .	101
4.5.1	Protocole . . . . .	101
4.5.2	Les différentes contributions au spectre de Bragg . . . . .	102
4.5.3	Comparaison de la spectroscopie dans le piège et hors du piège . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Mesure de la distribution des vitesses d'un quasi-condensat par spectroscopie de Bragg</b>	<b>107</b>
5.1	Dispositif et caractéristiques des lasers de Bragg . . . . .	107
5.1.1	Donnée préalable : état interne des atomes . . . . .	107
5.1.2	Fréquence absolue, puissance des lasers . . . . .	108
5.1.3	Transitions mises en jeu . . . . .	109
5.1.4	Stabilité du désaccord : un enjeu crucial . . . . .	111
5.1.5	Défaut d'alignement . . . . .	115
5.1.6	Rétro-réflexion : deux sens de diffraction . . . . .	116
5.2	Acquisition et Optimisation des spectres . . . . .	117
5.2.1	Séquence d'acquisition . . . . .	117
5.2.2	Mesure de l'efficacité de diffraction . . . . .	117
5.2.3	Exemple de spectre . . . . .	117
5.2.4	Choix de l'instant de la diffraction . . . . .	117
5.2.5	Optimisation de la durée d'application des lasers de Bragg . . . . .	118
5.2.6	Conclusion sur la stabilité des lasers . . . . .	122
5.2.7	Oscillations résiduelles des quasi-condensats . . . . .	122
5.2.8	Moyennage nécessaire . . . . .	125
5.2.9	Données finales . . . . .	126
5.3	Analyse des spectres . . . . .	133
5.3.1	Profil des spectres . . . . .	135
5.3.2	Largeur des spectres . . . . .	135
<b>A</b>	<b>L'atome de Rubidium</b>	<b>145</b>
<b>B</b>	<b>Proposition d'un autre schéma d'imagerie par absorption</b>	<b>147</b>
<b>C</b>	<b>Articles</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>

2.3.8	Centrage du piège magnétique . . . . .	36
2.3.9	Circuits de commande des courants . . . . .	37
2.3.10	Exemple de cycle . . . . .	39
2.3.11	Conclusion . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Réalisation de condensats dans le régime intermédiaire 3D-1D</b>	<b>43</b>
3.1	Séquence expérimentale standard . . . . .	43
3.1.1	Les PMO, Dark Spot, mélasse . . . . .	44
3.1.2	Transfert au piège magnétique . . . . .	46
3.1.3	Séquence de compression et d'évaporation . . . . .	46
3.2	Franchissement du seuil : déclenchement d'oscillations . . . . .	47
3.2.1	Observation des oscillations . . . . .	50
3.2.2	Étude qualitative des oscillations . . . . .	50
3.2.3	Étude quantitative des oscillations . . . . .	52
3.2.4	Conclusion . . . . .	56
3.3	Calibration et stabilité des paramètres du piège et des condensats . . . . .	56
3.3.1	Mesure des fréquences du piège . . . . .	56
3.3.2	Calibration du nombre d'atomes . . . . .	57
3.3.3	Stabilité et reproductibilité des paramètres des condensats . . . . .	60
3.4	Étude du profil de densité . . . . .	62
3.4.1	Conditions expérimentales . . . . .	62
3.4.2	Données expérimentales . . . . .	62
3.4.3	Profil du condensat : comparaison avec Thomas-Fermi . . . . .	63
3.4.4	Densité du condensat : effets de l'énergie cinétique radiale . . . . .	65
3.4.5	Densité du condensat : effets du nuage thermique . . . . .	73
3.4.6	Conclusion . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Quasi-condensats et principe de la mesure des fluctuations de phase</b>	<b>81</b>
4.1	Les différents scénarios de la transition vers le régime 1D . . . . .	82
4.1.1	Qu'appelle-t-on limite 1D ? . . . . .	82
4.1.2	Gaz idéal . . . . .	83
4.1.3	Gaz en interaction . . . . .	84
4.2	Les quasi-condensats : origine et diagnostic des fluctuations de phase . . . . .	85
4.2.1	Opérateurs de fluctuation de phase et de densité . . . . .	85
4.2.2	Rôles des excitations 3D et 1D . . . . .	86
4.2.3	Fonction de corrélation et distribution en impulsion . . . . .	87
4.2.4	Analogie avec un laser . . . . .	88
4.2.5	Fluctuations de phase dans le piège . . . . .	88
4.2.6	Fluctuations de phase d'un quasi-condensat en expansion . . . . .	92
4.2.7	Conclusion . . . . .	93
4.3	Diffraction de Bragg, transition à 2 photons sélective en vitesse . . . . .	94
4.3.1	Principe . . . . .	94
4.3.2	Équation de Schrödinger . . . . .	95
4.3.3	Solution : système à deux niveaux équivalent . . . . .	96
4.4	Extension aux transitions à 4 photons . . . . .	99
4.4.1	Fréquence de Rabi . . . . .	99

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Condensation de Bose-Einstein : notions générales</b>	<b>9</b>
1.1	Le condensat de Bose-Einstein . . . . .	9
1.1.1	Aspect “fonction d’onde macroscopique” . . . . .	10
1.1.2	Aspect thermodynamique : condensation d’un gaz idéal piégé . . . . .	10
1.2	Principe de la réalisation expérimentale . . . . .	12
1.3	Éléments théoriques importants pour la description et l’étude des condensats	14
1.3.1	Condensat à température nulle : statique . . . . .	14
1.3.2	Condensat à température nulle : expansion libre . . . . .	16
1.3.3	Condensat à température non nulle . . . . .	18
1.4	Caractérisation du condensat et du nuage thermique . . . . .	23
1.4.1	Le système d’imagerie . . . . .	23
1.4.2	Analyse d’une image par absorption . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Le piège magnétique</b>	<b>27</b>
2.1	Principe du piégeage magnétique . . . . .	27
2.2	Piège de Ioffe-Pritchard . . . . .	28
2.2.1	Champ quadrupolaire . . . . .	28
2.2.2	Champ dipolaire . . . . .	29
2.2.3	Champ total . . . . .	29
2.2.4	Piège magnétique résultant . . . . .	29
2.2.5	Compensation du biais . . . . .	30
2.2.6	Limites des pièges à bobines “classiques” . . . . .	30
2.2.7	Les solutions alternatives . . . . .	31
2.2.8	Notre solution . . . . .	31
2.3	L’électroaimant à noyau ferromagnétique . . . . .	31
2.3.1	Géométrie . . . . .	31
2.3.2	Composition des pôles et de la culasse . . . . .	32
2.3.3	Méthode de compensation du biais . . . . .	32
2.3.4	Les bobines . . . . .	33
2.3.5	Gradients et courbures des champ créés . . . . .	34
2.3.6	Effet de blindage . . . . .	34
2.3.7	Compensations . . . . .	36

*travail. J'ai été très heureux que Jacques Bauche accepte de faire partie du jury, et je l'en remercie.*

*Franck Delmotte et Lionel Jacobowicz m'ont fait confiance en m'associant à leur enseignement. J'espère avoir été à la hauteur de leurs attentes.*

*Merci aux services généraux de l'Institut d'Optique, qui font de l'Institut un cadre de travail agréable et efficace.*

*Merci à Graça Martins pour le tirage du manuscrit.*

## REMERCIEMENTS

*Cette thèse s'est déroulée au laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique. Je remercie son directeur, Pierre Chavel, de m'y avoir accueilli.*

*Je remercie également Alain Aspect de m'avoir proposé cette thèse, et pour son aide lors de la préparation de la soutenance.*

*Philippe Bouyer a encadré ce travail au jour le jour. J'ai apprécié sa confiance, son enthousiasme, et son soutien devant les difficultés expérimentales rencontrées.*

*Les résultats de ce mémoire sont ceux d'une équipe. Joseph Thywissen et Fabrice Gerbier ont débuté en même temps que moi sur l'expérience. Nous l'avons peu à peu apprivoisée ensemble. J'ai énormément appris en travaillant avec eux. Mathilde Hugbart-Fouchet, son énergie et ses talents d'expérimentatrice nous ont rejoints ensuite, pour la phase finale de l'expérience présentée ici. Je la remercie de sa relecture de mon manuscrit. Je garderai beaucoup de bons souvenirs des heures de manip, de réflexion sur l'interprétation des données, et des pauses-café en leur compagnie.*

*Je souhaite bonne chance et bon courage à Mathilde, Jocelyn Retter et Andrés Varon, qui ont repris en main la manip, ainsi qu'à Joseph et Fabrice dans leurs nouveaux groupes.*

*Rien n'aurait été possible sans Frédéric Moron et André Villing. Ils ont toujours été là pour améliorer — et parfois réparer dans des moments critiques — l'électronique de la manip, et pour prodiguer leurs conseils et leurs explications.*

*Merci également à Michel Lécrivain, du Lésir, qui, après avoir construit avec Vincent Boyer le nouvel électroaimant, élément central de notre expérience, nous a aidé lors de sa mise au point finale.*

*Au début de ma thèse, j'ai travaillé avec Yann Le Coq et Sadiqali Rangwala. Ils m'ont initié aux subtilités du MOT, des compensations des champs magnétiques résiduels, etc. J'ai passé avec eux quelques nuits de manip sur les lasers à atomes, pendant lesquelles les histoires racontées par Sadiq nous tenaient éveillés.*

*Je dois également remercier tous les membres du groupe d'optique atomique, qui créent une excellente ambiance au sein du groupe. Combien de fois m'ont-ils patiemment accueilli lorsque je venais faire un tour dans leur salle de manip, pour savoir comment les choses se passaient.*

*Antoine Browaeys a toujours été disponible pour discuter de physique, du tout début à la toute fin de ma thèse, et a relu très attentivement le manuscrit. Je l'en remercie sincèrement.*

*Je remercie Klaus Sengstock et Christophe Salomon d'avoir accepté de rapporter ce*





N° d'ordre : 7411

**LABORATOIRE CHARLES FABRY  
DE L'INSTITUT D'OPTIQUE**

**UNIVERSITÉ PARIS XI  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THÈSE

présentée pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

**Simon RICHARD**

Sujet :

**Spectroscopie en impulsion des fluctuations de phase de condensats de  
Bose-Einstein très allongés.**

Soutenue le 10 décembre 2003 devant la Commission d'examen :

M. C. Salomon	Rapporteur
M. K. Sengstock	Rapporteur
M. J. Bauche	Examineur
M. P. Bouyer	Examineur
M. A. Aspect	Directeur de thèse