



**HAL**  
open science

# Equations aux dérivées partielles, Evolutions de courbes et de surfaces et espaces d'échelle: Applications à la vision par ordinateur

Renaud Keriven

► **To cite this version:**

Renaud Keriven. Equations aux dérivées partielles, Evolutions de courbes et de surfaces et espaces d'échelle: Applications à la vision par ordinateur. Interface homme-machine [cs.HC]. Ecole des Ponts ParisTech, 1997. Français. NNT: . tel-00005617

**HAL Id: tel-00005617**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005617>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR**

**DE**

**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

**Spécialité: Informatique**

**présentée par:**

**Renaud KERIVEN**

**Sujet de la thèse:**

**Equations aux Dérivées Partielles, Evolutions de  
Courbes et de Surfaces et Espaces d'Echelle:  
Applications à la Vision par Ordinateur**

Soutenu à Champs sur Marne, le 19 décembre 1997  
devant le jury composé de:

Président:	<b>Michel BARLAUD</b>
Rapporteurs:	<b>Luis ALVAREZ</b> <b>Jan-Olof EKLUNDH</b>
Directeur de thèse:	<b>Olivier FAUGERAS</b>
Examineurs:	<b>Gilles AUBERT</b> <b>Rachid DERICHE</b> <b>Bernard LARROUTUROU</b> <b>Jean-Michel MOREL</b>



*A mes parents,  
à ma femme,  
à Nicolas, Thibault et Quentin.*



# Remerciements

Je tiens à remercier les membres du CERMICS et plus particulièrement l'équipe informatique dont Thierry Salset, René Lalement et Daniel Hirschhoff, ainsi que Benoit Mathieu et Imahd Eddine Sraïri pour la part active qu'ils ont prise dans l'émergence finale des méthodes de stéréovision et de leur visualisation, Claude Le Bris pour avoir toujours fait l'effort de comprendre les questions mathématiques qui se cachent derrière des formulations d'informaticien et pour avoir toujours pu y répondre en des termes compréhensibles par ce même informaticien, et enfin Bernard Lapeyre pour ses encouragements et son soutien.

Je remercie également les membres du projet ROBOTVIS, notamment Hervé Mathieu pour son visage, José Gomes pour la saisie des images, Théo Papadopoulo pour ses travaux et son expertise dans l'utilisation des bibliothèques du projet, Frédéric Devernay pour ses conseils et Luc Robert pour son aide et sa disponibilité.

Je suis reconnaissant envers Gilles Aubert, Michel Barlaud, Rachid Deriche et Jean-Michel Morel pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer à mon jury de thèse et spécialement Luis Alvarez et Jan-Olof Eklundh pour l'attention toute particulière dont ils ont fait preuve en voulant bien être les rapporteurs de ces travaux.

Je n'oublie pas Bernard Larrouturou pour m'avoir accueilli au CERMICS et surtout m'avoir permis de prendre cette orientation que je pense fructueuse dans mes travaux de recherche et aussi pour me faire l'honneur et l'amitié de venir d'être présent lors de ma soutenance.

Enfin Olivier Faugeras pour ses idées, pour m'avoir fait découvrir ce domaine il y a déjà un certain temps, pour la confiance dont il a toujours témoigné à mon égard, pour son enthousiasme et pour les fortes impulsions qu'il sait si bien donner! Je mesure la chance que j'ai d'être un de ses élèves, à quel point je lui suis redevable et combien il est omniprésent derrière mes travaux.

Et bien évidemment, ma famille pour la patience dont elle a toujours fait preuve...



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et généralités</b>	<b>19</b>
1.1	Contexte . . . . .	19
1.2	Axiomatisation de l'analyse multi-échelle . . . . .	20
1.3	Démarche . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Méthodes d'ensembles de niveau</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Méthode naïve . . . . .	41
2.3	Méthode d'Ensembles de Niveau . . . . .	42
2.4	Calcul de la vitesse normale . . . . .	45
2.5	Schémas numériques . . . . .	45
2.5.1	Hamiltonien convexe . . . . .	46
2.5.2	Hamiltonien non convexe . . . . .	47
2.5.3	Autres quantités . . . . .	48
2.6	Amélioration de la vitesse . . . . .	48
2.6.1	Méthode à bandes . . . . .	48
2.6.2	Méthodes à progression rapide . . . . .	49
2.7	Fonction distance . . . . .	53
2.7.1	Calcul rapide de la distance . . . . .	53
2.7.2	Restauration de la distance . . . . .	55
2.8	Conclusion . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Stéréovision et EDP</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction et préliminaires . . . . .	60
3.2	Un modèle avec objets et critère simples . . . . .	65
3.3	Un meilleur critère de mise en correspondance . . . . .	67
3.3.1	Fonctionnelle de corrélation fronto-parallèle . . . . .	67
3.3.2	Prise en compte du plan tangent aux objets . . . . .	69
3.4	Un modèle plus raffiné . . . . .	75
3.5	Le cas bidimensionnel . . . . .	79
3.5.1	Implémentation . . . . .	79
3.5.2	Résultats . . . . .	81
3.6	Algorithme tridimensionnel . . . . .	83

3.6.1	Implémentation . . . . .	83
3.6.2	Recherche d'efficacité . . . . .	85
3.6.3	Résultats . . . . .	86
3.7	Conclusion . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Flots géométriques invariants</b>	<b>97</b>
4.1	Invariants différentiels . . . . .	99
4.1.1	Définitions . . . . .	99
4.1.2	Remarque . . . . .	103
4.1.3	Liens entre les invariants . . . . .	103
4.1.4	Interprétation géométrique . . . . .	105
4.1.5	Courbes à courbure constante . . . . .	111
4.2	Flots géométriques invariants . . . . .	116
4.2.1	Définition . . . . .	116
4.2.2	Vitesse normale . . . . .	118
4.2.3	Justification . . . . .	119
4.3	Flots euclidien et affine . . . . .	120
4.3.1	Équations d'évolution . . . . .	120
4.3.2	Vitesse normale . . . . .	121
4.3.3	Propriétés . . . . .	122
4.3.4	Courbes particulières . . . . .	122
4.3.5	Schémas numériques . . . . .	127
4.4	Autres flots invariants . . . . .	128
4.5	Flot géométrique euclidien des courbes 3D . . . . .	131
4.5.1	Invariants différentiels . . . . .	131
4.5.2	Valeurs analytiques . . . . .	131
4.5.3	Courbes à courbure et torsion constantes . . . . .	133
4.5.4	Équations d'évolution . . . . .	133
4.5.5	Vitesse normale . . . . .	137
4.5.6	Courbes particulières . . . . .	137
4.6	Flot géométrique affine des courbes 3D . . . . .	139
4.6.1	Formules analytiques . . . . .	139
4.6.2	Liaison avec les invariants euclidiens . . . . .	140
4.6.3	Équation d'évolution . . . . .	141
4.6.4	Vitesse normale . . . . .	144
4.6.5	Courbes particulières. Discussion . . . . .	148
4.7	Conclusion . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Équation projective de la chaleur</b>	<b>151</b>
5.1	Introduction . . . . .	151
5.2	Les flots intrinsèques invariants projectifs . . . . .	152
5.3	L'équation de la chaleur projective . . . . .	156
5.4	Retour dans $\mathbf{R}^2$ . . . . .	156
5.5	Courbes à courbure projective constante . . . . .	159

5.6	Conclusion . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Espaces d'échelle et courbure affine</b>	<b>163</b>
6.1	Introduction . . . . .	163
6.2	Une propriété intéressante de l'espace d'échelle affine . . . . .	164
6.3	Calcul de la courbure affine . . . . .	165
6.3.1	Le problème . . . . .	165
6.3.2	Solution . . . . .	166
6.4	Résultats expérimentaux . . . . .	169
6.4.1	Schéma pratique . . . . .	169
6.4.2	Polynômes de Chebyshev . . . . .	169
6.4.3	Résultats . . . . .	175
6.4.4	Application . . . . .	177
6.5	Conclusion et remarques . . . . .	178
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>181</b>
<b>A</b>	<b>Stéréovision: preuves et calculs</b>	<b>183</b>
A.1	Preuve des lemmes 2 et 3 . . . . .	183
A.2	Preuve du théorème 5 . . . . .	185
A.3	Calcul de dérivées $\Phi_S$ , $\Phi_N$ , $\Phi_{SN}$ et $\Phi_{NN}$ . . . . .	190
A.4	Géométrie différentielle des surfaces . . . . .	192



# Table des figures

1.1	La simulation numérique de la propagation d'une courbe $\mathcal{C}(p, t)$ se résout de manière efficace et élégante en faisant évoluer une surface $z = \phi(x, y, t)$ dont $\mathcal{C}$ est l'ensemble de niveau zéro . . .	25
1.2	Regarder, c'est projeter... . . . . .	26
1.3	Regarder avec deux yeux, c'est voir en relief... . . . . .	26
1.4	Après extraction de segments, les méthodes classiques reconstruisent la position 3D des segments en question . . . . .	27
1.5	Stéréovision trinoculaire [9]. Trois images d'une même pièce. . .	27
1.6	Stéréovision trinoculaire [9]. Reconstruction des segments dans l'espace à partir des images prises par les trois caméras. Deux vues sous des angles différents. . . . .	28
1.7	Stéréovision "dense" [90, 23]. Deux images d'un même visage . . .	29
1.8	Stéréovision "dense" [90, 23]. Reconstruction de la surface $z = f(x, y)$ à partir des deux images. De haut en bas et de gauche à droite: triangulation de la surface, mise en couleur avec lissage, reprojection des images sur la surface. . . . .	30
1.9	Les méthodes d'évolution de surfaces par EDP nous ont permis de reconstruire des objets complets et multiples . . . . .	30
1.10	Stéréovision et EDP: reconstruction d'objets de synthèse à partir plusieurs prises de vues. En haut à gauche: quatre de la trentaine de prises de vues utilisées. Les trois autres images montrent la convergence d'une surface initiale vers la surface des objets observés . . . . .	31
1.11	Stéréovision et EDP: reconstruction d'un objet réel à partir plusieurs prises de vues. En haut à gauche: quatre de la trentaine de prises de vues utilisées. Les trois autres images montrent la convergence d'une surface initiale vers la surface des objets observés . . . . .	32
1.12	Les différentes méthodes de stéréovision. De haut en bas et de gauche à droite: appariement de primitives, stéréovision "dense" et évolution de surfaces par EDP . . . . .	33
1.13	Flot euclidien d'une courbe plane: $\mathcal{C}_t = \kappa \mathbf{n}$ . A gauche l'évolution d'origine. A droite, l'évolution après une rotation. Il y a bien invariance . . . . .	34

1.14	Flot affine d'une courbe plane: $\mathcal{C}_t = \kappa^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$ . A gauche l'évolution d'origine. A droite, l'évolution après une transformation affine (spéciale). Il y a bien invariance . . . . .	34
1.15	Évolution d'une courbe gauche à courbure et torsion constantes suivant le flot euclidien invariant $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{vv} = \kappa \mathbf{n}$ . . . . .	35
1.16	Évolution des courbes à courbure projective constante suivant l'équation de la chaleur projective $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$ . . . . .	36
1.17	Image d'une ellipse réelle et calcul de sa courbure affine: la courbure théorique (constante), celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode. . . . .	37
2.1	La courbe $\mathcal{C}(p, t)$ évolue suivant l'EDP $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) = \mathcal{V}$ : chaque point avance à la vitesse $\mathcal{V}$ . . . . .	40
2.2	Évolution d'une courbe (ici $\beta = -1$ ). Des changements de topologie peuvent apparaître. La courbe initiale (à l'extérieur) se coupe en trois composantes connexes avant de disparaître. . . . .	41
2.3	Cas des courbes. La fonction $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ évolue de telle sorte que le niveau zéro de la surface $z = \phi(x, y, t)$ se propage suivant l'équation désirée $\mathcal{C}_t = \beta \mathbf{n}$ . . . . .	42
2.4	Changement de topologie. Le niveau 0 peut se casser, fusionner ou former des angles. Aucun traitement particulier n'est requis. . . . .	44
2.5	A un certain $t_0$ , la bande extérieure et la bande intérieure sont initialisées aux distances $d_1$ et $d_2$ . A la suite de quoi, le niveau 0 évolue librement, par mise à jour dans la bande seulement, jusqu'à heurter la bande intérieure. Les bandes sont alors réinitialisées. . . . .	49
2.6	Méthode à progression rapide. En chaque point, on veut calculer le temps de passage du front. Certains points ont un temps de passage définitivement calculé, certains, déjà rencontrés, un temps estimé et d'autres, qui n'ont pas encore été approché, un temps de passage inconnu. . . . .	50
2.7	Structure de <i>min-heap</i> . L'arbre, initialement cohérent, voit la valeur d'un de ses noeuds substituée par une valeur moindre. La remontée de cette valeur en $O(\log n)$ suffit à rendre l'arbre à nouveau cohérent . . . . .	51
2.8	Structure de <i>min-heap</i> . L'arbre, initialement cohérent, voit sa racine détruite. Une descente avec remontée des valeurs en $O(\log n)$ suffit à rendre l'arbre à nouveau cohérent . . . . .	52
2.9	Structure de <i>min-heap</i> . L'arbre, initialement cohérent, voit une nouvelle valeur insérée au niveau d'une feuille. La remontée de cette valeur en $O(\log n)$ suffit à rendre l'arbre à nouveau cohérent . . . . .	53

2.10	Les 3 étapes du calcul de distance: initialisation, première passe de haut en bas, deuxième passe de bas en haut. Le dernier tableau donne les distances effectivement calculées . . . .	58
3.1	Le problème de la stéréovision multcaméra est, pour un pixel donné $m_1$ de l'image 1, de trouver le pixel $m_2$ correspondant dans l'image 2, . . . , le pixel $m_n$ correspondant dans l'image $n$ , c'est-à-dire ceux qui sont les images du même point 3D $M$ . Une fois qu'une telle correspondance est établie, le point $M$ peut être reconstruit en intersectant les rayons optiques $\langle m_i, C_i \rangle$ , $i = 1, \dots, n$ . . . . .	61
3.2	Le plan focal $(x, y)$ est parallèle au plan rétinien $(x_1, y_1)$ à une distance 1 de celui-ci. . . . .	62
3.3	Pour un point $m_1$ donné de l'image 1, le point correspondant de l'image 2 ne peut qu'être situé sur l'épipolaire $e(m_1)$ . . .	63
3.4	La fenêtre rectangulaire $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ dans la première image est projetée sur le plan tangent $\mathbf{T}_S$ à l'objet $S$ au point $M$ et re-projetée sur le plan rétinien de la seconde caméra où elle n'est en général plus rectangulaire. La distorsion entre $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ et $(a_2 b_2 c_2 d_2)$ peut être décrite par une transformation projective fonction de $M$ et de la normale $\mathbf{N}$ à la surface de l'objet. . . .	69
3.5	Les points de l'image 1 et leurs correspondants de l'image 2, images de points 3D situés dans un même plan (dans notre cas le plan tangent), sont reliés par une homographie $K$ . . .	70
3.6	Implémentation du cas 2D de l'algorithme. Visibilité et occlusion. . . . .	79
3.7	Cas 2D – Détection d'un objet non convexe. . . . .	81
3.8	Cas 2D – Détection de deux objets circulaires. . . . .	82
3.9	Cas 2D – Détection de deux carrés. . . . .	83
3.10	Cas 2D – Détection du contour d'un visage humain dans un plan épipolaire. . . . .	84
3.11	Détection de deux sphères. Prises de vue. . . . .	86
3.12	Détection de deux sphères. Reconstruction. . . . .	87
3.13	Détection de deux sphères. Reconstruction avec images re-projetées. . . . .	88
3.14	Détection d'un tore. Prises de vue. . . . .	89
3.15	Détection d'un tore. Reconstruction. . . . .	90
3.16	Détection d'un tore. Reconstruction avec images reprojctées. . .	90
3.17	Détection de deux tores. Prises de vue. . . . .	91
3.18	Détection de deux tores. Reconstruction. . . . .	91
3.19	Détection de deux tores. Reconstruction avec images reprojctées. .	92
3.20	Détection partielle d'une sphère. Prises de vue. . . . .	92
3.21	Détection partielle d'une sphère. Reconstruction. . . . .	93

3.22	Détection partielle d'une sphère. Reconstruction avec images reprojctées. . . . .	93
3.23	Détection d'un visage. Prises de vue. . . . .	94
3.24	Détection d'un visage. Reconstruction. . . . .	94
3.25	Détection d'un visage. Reconstruction avec images reprojctées. . . . .	95
3.26	Détection d'un objet réel complet. Prises de vue. . . . .	95
3.27	Détection d'un objet réel complet. Reconstruction. . . . .	96
3.28	Détection d'un objet réel complet. Reconstruction avec images reprojctées. . . . .	96
4.1	Le plan projectif $\mathcal{P}^2$ , ensemble des droites de $\mathbf{R}^3$ passant par l'origine, peut être vu comme le plan affine $z = 1$ complété des directions de $\mathbf{R}^2$ . . . . .	102
4.2	Entre deux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ infiniment proches, la variation d'abscisse curviligne euclidienne est la distance $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ . . . . .	105
4.3	Entre deux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ infiniment proches, la variation d'abscisse curviligne affine est le double de la racine cubique de l'élément d'aire du triangle $(\mathbf{ACB})$ . . . . .	106
4.4	La relation $\mathcal{A}(\mathbf{ADB})^{1/3} + \mathcal{A}(\mathbf{BFC})^{1/3} = \mathcal{A}(\mathbf{AEC})^{1/3}$ assure l'additivité de l'abscisse curviligne affine . . . . .	106
4.5	Le bi-rapport des droites $(L_1, L_2, L_3, L_4)$ est défini comme étant celui des quatre points $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ . . . . .	106
4.6	Abscisse curviligne projective (voir texte). . . . .	107
4.7	En un point $\mathbf{M}$ , la courbure euclidienne $\kappa$ est l'inverse du rayon de cercle osculateur . . . . .	107
4.8	En un point $\mathbf{M}$ , la courbure affine $\mu$ est nulle si la conique osculatrice est une parabole, l'inverse de la racine cubique du carré du produit des deux paramètres de la conique osculatrice sinon, en prenant l'opposé si la conique est une ellipse. . . . .	107
4.9	En un point $\mathbf{M}$ , la tangente affine $\mathbf{e}_1$ est portée par la tangente à la courbe. Le support de la normale affine $\mathbf{e}_2$ est la limite quand $\mathbf{M}_1$ tend vers $\mathbf{M}$ de la droite reliant $\mathbf{M}$ au milieu $\mathbf{P}$ de la corde $[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2]$ parallèle à la tangente. . . . .	108
4.10	Tangente, normale et courbure projective (voir texte). . . . .	108
4.11	Courbes à courbure constante. En haut, courbure euclidienne constante: le cercle. Au milieu, courbure affine constante: les coniques. En bas, courbure projective constante: puissances, exponentielles et spirales logarithmiques . . . . .	112
4.12	Flot euclidien d'une courbe plane fermée. En haut la courbe d'origine et son évolution. En bas la même courbe après rotation et son évolution. La rotation et l'évolution commutent. La courbe devient convexe puis disparaît en un temps fini en convergeant vers un point cercle. . . . .	123

4.13 Flot affine d'une courbe plane fermée. En haut la courbe d'origine et son évolution. En bas la même courbe après une transformation affine spéciale ( $[A] = 1$ ) et son évolution. La transformation affine et l'évolution commutent. La courbe devient convexe puis disparaît en un temps fini en convergeant vers un point ellipse. . . . . 124

4.14 Lissage d'une courbe bruitée. En haut par le flot invariant euclidien. En bas, par le flot invariant affine . . . . . 125

4.15 Les courbes fermées évoluent vers des courbes convexes puis disparaissent en un temps fini en convergeant en un certain sens vers un "point cercle" (cas euclidien, à gauche) ou un "point ellipse" (cas affine, à droite). . . . . 126

4.16 A gauche: un cercle de rayon initial  $R_0 = 50$  disparaît à  $T = \frac{1}{2}R_0^2 = 1250$ . A droite: un ellipse de rayons initiaux  $a_0 = 50, b_0 = 64$  disparaît à  $T_0 = \frac{3}{4}(a_0b_0)^{\frac{2}{3}} \approx 258$  . . . . . 126

4.17 Comparaison du flot euclidien classique (en haut) avec le flot euclidien préservant l'aire [96] (en bas). Le phénomène de rétrécissement à disparu . . . . . 129

4.18 Cas euclidien – Courbe à courbure et torsion constantes. . . . 138

4.19 Cas affine – Courbes à courbure et torsion constantes. . . . . 147

5.1 Évolution des courbes à courbure projective constante. En gras, la courbe initiale . . . . . 161

6.1 La composante normale de la vitesse est  $\beta \mathbf{n}$  avec  $\beta = \kappa^{1/3}$  . . 166

6.2 L'abscisse curviligne euclidienne est choisie constante le long de  $(\Omega)$  . . . . . 167

6.3 La dérivée de Lie  $L_{\mathbf{n}_\beta} f(M)$  de  $f$  dans la direction  $\mathbf{n}_\beta$  du plan tangent à la surface spatio-échelle  $\Sigma(p, t)$  est la limite quand  $t$  tend vers 0 de  $\frac{f(M+\mathbf{n}_\beta dt)-f(M)}{dt}$  . . . . . 168

6.4 Une ellipse synthétique et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode. . . . . 170

6.5 Une ellipse extraite d'une image réelle et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode. 171

6.6 Une courbes synthétique ( $\mathcal{C} = [a \cos(p)(1 + \epsilon \sin(2p)), b \sin(p)(1 + \epsilon \cos(2p))]$ ) et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode . . . . . 172

6.7 Une courbes synthétique ( $\mathcal{C} = [a \cos(p)(1 + \epsilon \sin^2(2p)), b \sin(p)(1 + \epsilon \sin^2(2p))]$  ) et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode . . . . . 173

6.8	Quatre courbes planes. Quelques unes des différentes vues utilisées dans notre expérience de reconnaissance. Au centre, la vue de face. . . . .	176
6.9	Les courbures affines obtenues pour les quatre courbes vues sous différents angles. En gras, la courbure de la vue de face. . . . .	179
6.10	Les résultats de la classification. Les points $[0, 0]$ , $[1, 0]$ , $[0, 1]$ et $[1, 1]$ représentent les quatre courbes de la vue de face. Toutes les courbes sont reconnues. . . . .	180

# Conventions, symboles et notations

Nous adopterons les conventions, symboles et notations suivantes, que nous essaierons de respecter au maximum:

- .  $v \rightarrow$  abscisse curviligne euclidienne
- .  $g \rightarrow$  métrique de groupe euclidienne
- .  $\kappa \rightarrow$  courbure euclidienne
- .  $\rho \rightarrow$  torsion euclidienne
- .  $(\mathcal{C}, \mathbf{t}, \mathbf{n})$  et  $(\mathcal{C}, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \rightarrow$  repère de Frenet euclidien d'une courbe (respectivement 2D et 3D)
- .  $s \rightarrow$  abscisse curviligne affine
- .  $\gamma \rightarrow$  métrique de groupe affine
- .  $\mu \rightarrow$  courbure affine
- .  $\tau \rightarrow$  torsion affine
- .  $(\mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et  $(\mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \rightarrow$  repère de Frenet affine d'une courbe (respectivement 2D et 3D)
- .  $\sigma \rightarrow$  abscisse curviligne projective
- .  $\pi \rightarrow$  métrique de groupe projective
- .  $k \rightarrow$  courbure projective
- .  $\mathbf{A}$  et  $\lambda \rightarrow$  point et facteur de Cartan
- .  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}) \rightarrow$  repère de Cartan projectif plan d'une courbe.
- .  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \rightarrow$  produit scalaire
- .  $\|\mathbf{i}\|$  ou  $|\mathbf{i}| \rightarrow$  norme du vecteur  $\mathbf{i}$
- .  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \rightarrow$  produit vectoriel
- .  $[A] \rightarrow$  déterminant
- .  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$  ou  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \rightarrow$  par extension, déterminant de la matrice formée des vecteurs colonnes  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ou  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
- .  $\nabla\phi \rightarrow$  gradient
- .  $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial v}] \rightarrow$  crochet de Lie  $(\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial v \partial t})$
- .  $v_p, v_{pp}$  ou  $v_{p^2}, v_{ppp}$  ou  $v_{p^3}, \dots \rightarrow$  dérivées successives par rapport à  $p$ .

- .  $\mathbf{R}^N \rightarrow$  espace réel de dimension  $N$
- .  $S$  ou  $S^1$ : le cercle unité.
- .  $\mathcal{P}^2 \rightarrow$  plan projectif
- .  $\{D_1, D_2; D_3, D_4\} \rightarrow$  bi-rapport de quatre points, droites ou coniques.
- .  $\mathcal{I}mg(\mathcal{C})$ : image de la fonction  $\mathcal{C}$ , plus particulièrement ici l'ensemble des points de la courbe  $\mathcal{C}$ . On notera abusivement parfois  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}(t)$  au lieu respectivement de  $\mathcal{I}mg(\mathcal{C}_0)$  et de  $\mathcal{I}mg(\mathcal{C}(\cdot, t))$
- .  $D_{ij}^x f = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$  différence finie centrée
- .  $D_{ij}^{+x} f = \frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta x}$  différence finie à droite
- .  $D_{ij}^{-x} f = \frac{f_{ij} - f_{i-1,j}}{\Delta x}$  différence finie à gauche

# Chapitre 1

## Introduction et généralités

### 1.1 Contexte

Nous assistons vraisemblablement depuis ces dernières années à un regain d'intérêt pour le traitement d'image et un certain nombre de sujets qui lui sont liés. La part croissante des images vidéo dans notre vie quotidienne et de leurs applications n'y est certainement pas étrangère: robotique mobile, imageries satellite et médicale, réalité virtuelle, effets spéciaux, télé-surveillance et autres. Il est vrai aussi que les images et les séquences vidéo, longtemps synonymes de temps calcul et du coût de stockage prohibitifs, sont aujourd'hui à la portée de la puissance de nos ordinateurs personnels. Mais sur le plan académique, c'est surtout l'effort accru de formalisation mathématique du traitement d'image et de la vision par ordinateur qui semble être à l'origine du phénomène... à moins qu'à l'inverse ce ne soit l'intérêt grandissant pour ces domaines qui ait poussé les théoriciens à se pencher sur le sujet!

En tout état de cause, l'utilisation en traitement d'image et en vision par ordinateur des équations différentielles partielles (EDP), de la théorie des évolutions de courbes et de surfaces et de l'analyse multi-échelle est devenue ces dernières années un sujet de recherche majeur (voir [92]) débouchant sur des applications en débruitage et déflouage d'image [93], en lissage sélectif et en détection de contours [3, 86], en accentuation du contraste [95] et en segmentation des formes [13]. Citons aussi des travaux plus récents sur l'application des EDP à la restauration d'image [67, 66, 8] ainsi que l'utilisation des méthodes d'ensembles de niveau, méthodes initialement utilisées pour la simulation numérique des évolutions de courbes par EDP (voir [103] et chapitre 2), pour l'extraction de contours et le suivi d'objets [83, 84, 85]. Nous utiliserons aussi ces méthodes pour résoudre le problème de stéréovision (chapitre 3).

Les approches à base d'EDP ont l'avantage de permettre d'obtenir dans de nombreux cas des résultats d'existence et d'unicité à des problèmes classiques pour les spécialistes du domaine. Elles apportent aussi de puissants

schémas numériques déjà éprouvés en mécanique des fluides. Enfin, elles formalisent dans un cadre unificateur des méthodes et des problèmes abordés jusque là de manière indépendante.

La théorie de l'évolution des courbes planes a été considérée dans un grand nombre de domaines tels que la géométrie différentielle, l'analyse numérique, la vision par ordinateur et plus récemment dans le domaine du traitement d'image. Développée jusqu'alors de manière indépendante et parallèle, la théorie de la déformation des courbes planes sous l'effet d'une équation de la chaleur intrinsèque peut être aujourd'hui comprise sous l'angle de l'application des EDP au traitement d'image.

L'analyse multi-échelle d'une image a elle aussi été récemment formalisée et une équipe de Ceremade [5] en a proposée une axiomatique, tout en rapprochant le sujet de l'utilisation des EDP et de la théorie de l'évolution de courbes. Nous décrirons en détail cette axiomatique dans la section suivante. Mais il existe d'autres approches et d'autres axiomatiques. L'idée même d'espace d'échelle est ancienne. Comme le fait remarquer Weickert dans des articles récents [111, 112, 40], si la première référence à la notion d'espace d'échelle est en général attribuée à un article de Witkin datant de 1983 [114], c'est à tort et par ignorance de toute une série de travaux d'Iijima au Japon entre 1959 et 1981 (voir [112] pour les références à ces nombreux travaux dont certains sont traduits en anglais).

Pour de plus amples développements de ces considérations, nous renvoyons le lecteur à l'état de l'art dressé dans [20].

## 1.2 Axiomatisation de l'analyse multi-échelle

Nous reprenons ici les grandes lignes de l'approche de l'analyse multi-échelle par Alvarez, Guichard, Lions et Morel, dont on trouvera une synthèse complète dans [6].

Une image numérique étant modélisée par  $u_0(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^N$ , l'analyse multi-échelle associée à  $u(0) = u_0$  est une suite d'images simplifiées (c'est-à-dire lissées)  $u(t, x)$  dépendant d'un paramètre  $t$ , l'échelle. De très nombreuses théories s'attachent à ce problème, que ce soit en terme d'analyse multi-échelle d'images, de formes ou même de textures: *raw primal sketch* par Hildreth et Marr [73], *scale-space* par Witkin [114] et Koenderink [64], *intrinsic heat equation* par Gage et Hamilton [45] et Grayson [47], *motion by mean curvature* par Osher et Sethian [78] et Evans et Spruck [27], *entropy scale-space* par Kima, Tannenbaum et Zucker [61], *dynamic shape* par Koenderink et Van Doorn [65], *curvature primal sketch* par Mackworth et Mokhtarian [71, 72] et Asada et Brady [7], *morphologie mathématique* par Serra [102], *anisotropic diffusion* par Perona et Malik [87], *affine scale-space of curves* par Sapiro et Tannenbaum [98] et enfin *affine morphological scale-space* par Alvarez, Guichard, Lions et Morel [5].

L'axiomatisation de l'équipe du Ceremade et sa formalisation à l'aide d'EDP ont permis d'unifier un grand nombre des théories précédentes. L'analyse multi-échelle  $y$  est définie comme l'application d'un ensemble d'opérateurs  $T_t$  qui, appliqués à l'image initiale définissent un continuum d'images  $u(x, t) = T_t(u_0)(x)$ . Le choix de l'opérateur  $T_t$  est guidé par un certain nombre d'axiomes que doit respecter l'analyse. Les axiomes principaux sont les suivants:

– **Axiome de la structure pyramidale:**

L'image à une échelle  $t + h$  ( $t, h > 0$ ) peut être obtenue à partir de la version à l'échelle précédente  $t$  sans passer par l'image initiale. Cet axiome, connu aussi sous le nom d'axiome de causalité, s'énonce alors formellement par:

*Étant donnés  $t, h \geq 0$ , il existe un opérateur de transition noté  $T_{t,t+h}$  tel que pour toute image  $u$  on ait:*

$$T_{t+h}(u) = T_{t,t+h} \circ T_t(u)$$

*avec  $T_0 = Id$  et  $T_{t,t} = Id$ .*

– **Axiome de comparaison locale:**

L'analyse ne doit pas introduire dans les images lissées des détails qui n'y étaient aux échelles précédentes. Ceci se traduit par la préservation locale de la valeur relative des niveaux de gris, et l'énoncé de l'axiome suivant:

*Si  $u(x) \geq v(x)$  pour les points  $x$  d'un voisinage de  $x_0$  alors on doit avoir pour tout  $t \geq 0$  et  $h$  assez petit*

$$T_{t,t+h}(u)(x_0) \geq T_{t,t+h}(v)(x_0)$$

– **Axiome de régularité:**

Si  $u$  est une forme quadratique au voisinage de  $x_0$ , c'est-à-dire si  $u(x) = a + p^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0)$  pour  $|x - x_0| < \epsilon$ , alors quand  $h$  tend vers 0, la valeur de  $T_{t,t+h}(u)(x_0)$  ne doit dépendre que des valeurs de  $a, p$  et  $A$ . Cet axiome s'exprime par:

*Si  $u(x) = a + p^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0)$ , il existe une fonction  $F(A, p, a, x_0, t)$  continue par rapport à  $A$ , non décroissante, telle que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T_{t,t+h}(u) - u)(x_0)}{h} = F(A, p, x_0, t)$$

– **Invariance morphologique:**

L'analyse doit commuter avec toute redistribution croissante  $g()$  des niveaux de gris. Ceci traduit le fait que seule la notion d'isophote est

importante pour cette analyse, d'où la référence à la morphologie mathématique.

*Soit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction croissante, alors pour tout  $u$  on doit avoir:*

$$T_{t,t+h}(g \circ u) = g \circ T_{t,t+h}(u)$$

Cette invariance morphologique est dite *forte* si cet axiome est respecté pour toute fonction croissante ou décroissante.

– **Invariance euclidienne:**

L'analyse doit être invariante pour toute déplacement  $G : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  définie par  $G(x) = Ax + b$  où  $A$  est une matrice orthonormale.

*Pour tout  $u$ , on a :*

$$T_{t,t+h}(u) \circ G = T_{t,t+h}(u \circ G)$$

– **Invariance affine:**

L'analyse doit être invariante, à un changement d'échelle près, pour toute transformation affine  $G : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  définie par  $G(x) = Ax + b$  où  $A$  est une matrice non singulière.

*Pour tout  $u$ , on a :*

$$T_{t'(t,G),t'(t,G)+h'(t,G)}(u) \circ G = T_{t,t+h}(u \circ G)$$

La présence de  $t'$  et de  $h'$ , dont le choix ne dépend pas de  $u$ , traduit le fait que les invariants différentiels affines usuels sont des invariants relatifs pour les transformations affines propres et ne sont invariants absolus que pour les transformations affines spéciales ( $[A]=1$ ) (voir plus loin section 4.1.1 du chapitre 4).

– **Linéarité:**

L'opérateur  $T$  est linéaire:

$$T_{t,t+h}(au + bv) = aT_{t,t+h}(u) + bT_{t,t+h}(v)$$

Parmi les résultats les plus remarquables, on peut noter les théorèmes suivants dont on trouvera les démonstrations dans [5]:

**Théorème 1** *Si une analyse multi-échelle  $T_t(u)$  satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale et de régularité, alors la solution  $u(x, t) = T_t(u)(x)$  est une solution de viscosité de l'EDP suivante:*

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= F(H(u), \nabla u, u, x, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $H(u)$  et  $\nabla u$  sont respectivement le Hessien et le gradient de  $u$  et où la fonction  $F(H(u), \nabla u, u, x, t)$  est la celle définie dans le principe de régularité.

D'autre part, si  $u(x, t)$  est une solution de viscosité de l'équation (1.1) alors l'analyse multi-échelle  $T_t(u)$  définie par  $T_t(u)(x) = u(x, t)$  satisfait les trois axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale et de régularité.

Ce théorème est fondamental et permet de montrer le lien profond qui existe entre l'analyse multi-échelle et les EDP. Selon les axiomes considérés, d'autres théorèmes peuvent être établis permettant de relier un certain nombre de travaux développés de manière indépendante par différents auteurs. Ainsi, nous avons les théorèmes suivants:

**Théorème 2** *Si une analyse multi-échelle  $T_t(u)$  satisfait aux axiomes de linéarité, d'invariance euclidienne, de structure pyramidale et de comparaison locale, alors la solution  $u(x, t) = T_t(u)(x)$  est une solution de l'EDP suivante:*

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u(x, t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Cette équation est plus connue sous le nom d'équation de la chaleur. La solution de cette EDP s'obtient par convolution de l'image initiale avec l'opérateur Gaussien et correspond au modèle étudié par Marr et Hildreth [73], utilisé par Witkin [114] et dont Koenderink [64] remarqua le lien entre équation de la chaleur et convolution avec une Gaussienne.

**Théorème 3** *Soit  $N = 2$ . Si une analyse multi-échelle  $T_t(u)$  satisfait aux axiomes d'invariances euclidienne et morphologique, de structure pyramidale et de comparaison locale et de régularité, alors la solution  $u(x, t) = T_t(u)(x)$  est une solution de viscosité de l'EDP suivante:*

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| G(\operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}), t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

où  $G(s, t)$  est une fonction non décroissante par rapport à la variable réelle  $s$ .

Le cas particulier où  $G$  est constante et égale à +1 ou -1 correspond aux opérations élémentaires de morphologie mathématique de dilatation et d'érosion avec une boule comme élément structurant. Autre cas important: celui où  $G(s, t) = s.t$ :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= t|\nabla u| \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

qui correspond à une diffusion anisotrope dans la direction des courbes de niveaux de l'image et est identique à celle proposée par Osher et Sethian [78]

dans leur reformulation du problème d'évolution de courbes étudié par Gage et Hamilton[45]. Elle est aussi très proche de l'équation proposée par Perona et Malik:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) \\ &\text{avec } c \text{ décroissante, par exemple} \\ c(\alpha) &= e^{-(\alpha/k)^2} \text{ ou } c(\alpha) = \frac{1}{1 + (\alpha/k)^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

et de l'équation de restauration de Rudin, Osher et Fatemi [94].

Enfin, si on remplace l'axiome d'invariance euclidienne dans le théorème précédent par celui d'invariance affine, on obtient alors le théorème fondamental suivant:

**Théorème 4** *Soit  $N = 2$ . Il n'y a qu'une seule analyse multi-échelle  $T_t(u)$  satisfaisant aux axiomes d'invariances affine et morphologique, de structure pyramidale et de comparaison locale et de régularité. Cette analyse est effectuée par l'EDP suivante:*

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| \left( t \cdot \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Cette équation est utilisée pour faire évoluer de manière invariante affine les courbes de niveau dans les images [99]. La racine cubique qui apparaît vient de la composante de la normale affine le long de la normale euclidienne (voir section 4.2.2). De manière plus générale, il existe un parallèle entre l'approche consistant à faire évoluer les niveaux de gris d'une image et celle qui s'attache à faire évoluer une courbe. Ce parallèle repose sur l'évolution des isophotes de l'image (ensemble des points de même niveau de gris). Nous aborderons plus en détail au chapitre 4 l'approche "déformation de courbes".

### 1.3 Démarche

Nous avons tenté durant ce travail de thèse d'appliquer ces idées émergentes à la vision par ordinateur. Ce faisant, nous avons poursuivi deux directions bien distinctes:

- Premièrement, nous avons reformulé le problème de la stéréovision dans le cadre des EDP. Nous avons pu ainsi formuler mathématiquement le processus mis en jeu. Et surtout, nous avons dépassé de loin les possibilités des méthodes existantes.
- Deuxièmement, nous nous sommes lancés à la recherche des invariances dont la vision par ordinateur a besoin. Partant des équations de la chaleur des courbes planes invariantes pour les déplacements (géométrie

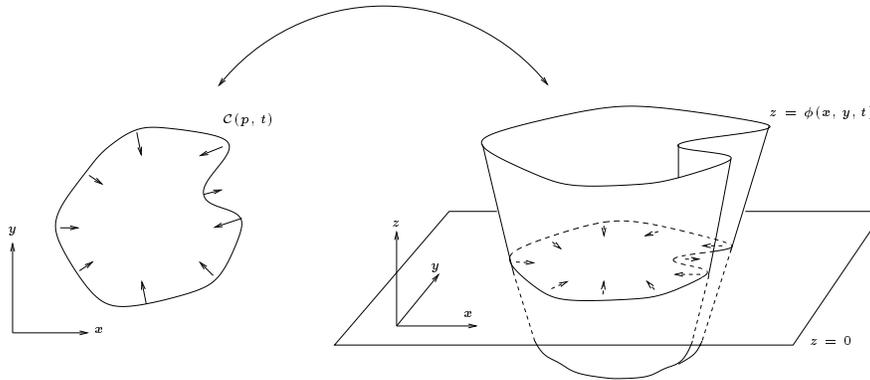


FIG. 1.1 – La simulation numérique de la propagation d’une courbe  $\mathcal{C}(p, t)$  se résout de manière efficace et élégante en faisant évoluer une surface  $z = \phi(x, y, t)$  dont  $\mathcal{C}$  est l’ensemble de niveau zéro

euclidienne) ou pour les transformations affines (géométrie affine), nous avons cherché à étendre ces résultats au cas de la géométrie projective d’une part et au cas des courbes gauches d’autre part. Enfin, nous avons découvert un moyen de calculer un invariant différentiel affine local, la courbure affine, utile en vision mais dont le trop grand ordre de dérivation interdisait jusqu’ici le calcul.

Notre exposé suivra le plan suivant:

**Chapitre 2** Nous aurons besoin pour commencer d’un outil indispensable: la maîtrise des méthodes numériques mises en jeu et de leur implémentation. Le chapitre 2 se penchera donc sur les méthodes à ensembles de niveau (*Level Sets Methods*) introduites par Osher et Sethian [78]. La simulation de la propagation à la vitesse normale  $\beta$  d’une hypersurface  $\mathcal{C}(\mathbf{p}, t)$  se résout de manière efficace et élégante en faisant évoluer suivant l’EDP  $\phi_t = -\beta|\nabla\phi|$  une fonction  $\phi(\mathbf{x}, t)$  dont  $\mathcal{C}$  sera l’ensemble de niveau zéro (figure 1.1).

**Chapitre 3** La stéréovision consiste à reconstruire les objets dans l’espace à partir de simples images planes de ceux-ci. Etape essentielle en vision par ordinateur, elle l’est aussi en vision naturelle et tenter de résoudre ce problème, c’est vouloir imiter un outil central de la vision animale, avec à la clé des applications qui dépassent le cadre de la robotique.

Le principe de base en est simple. Regarder un objet c’est en projeter une image sur un plan (figure 1.2). En conséquence de quoi, si un objet est vu de deux endroits différents alors sa position exacte est connue (figure 1.3).

Les méthodes classiques extraient des segments ou d’autres primitives (lignes brisées, b-splines, etc.) des images et les replacent dans l’espace (figure 1.4). Rapides et bien maîtrisées, ces méthodes reconstruisent malheu-

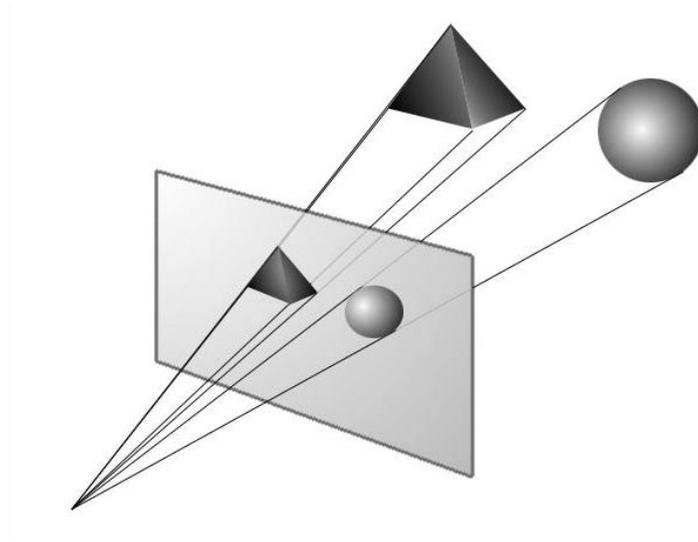


FIG. 1.2 – *Regarder, c'est projeter...*

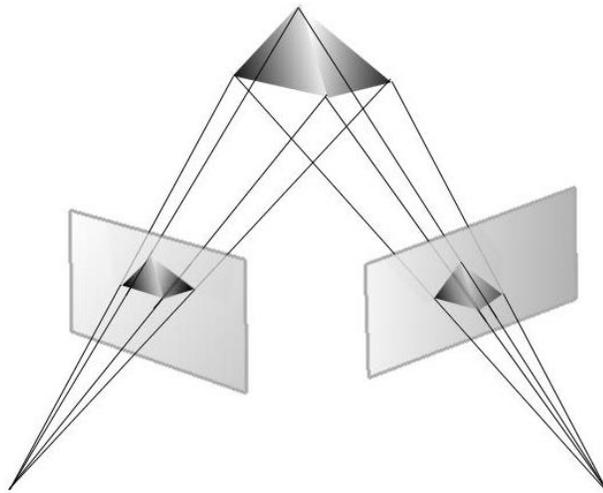


FIG. 1.3 – *Regarder avec deux yeux, c'est voir en relief...*

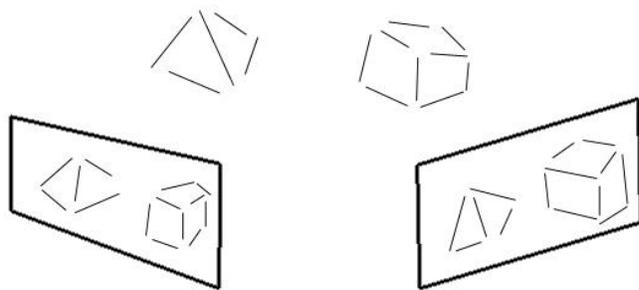


FIG. 1.4 – *Après extraction de segments, les méthodes classiques reconstruisent la position 3D des segments en question*

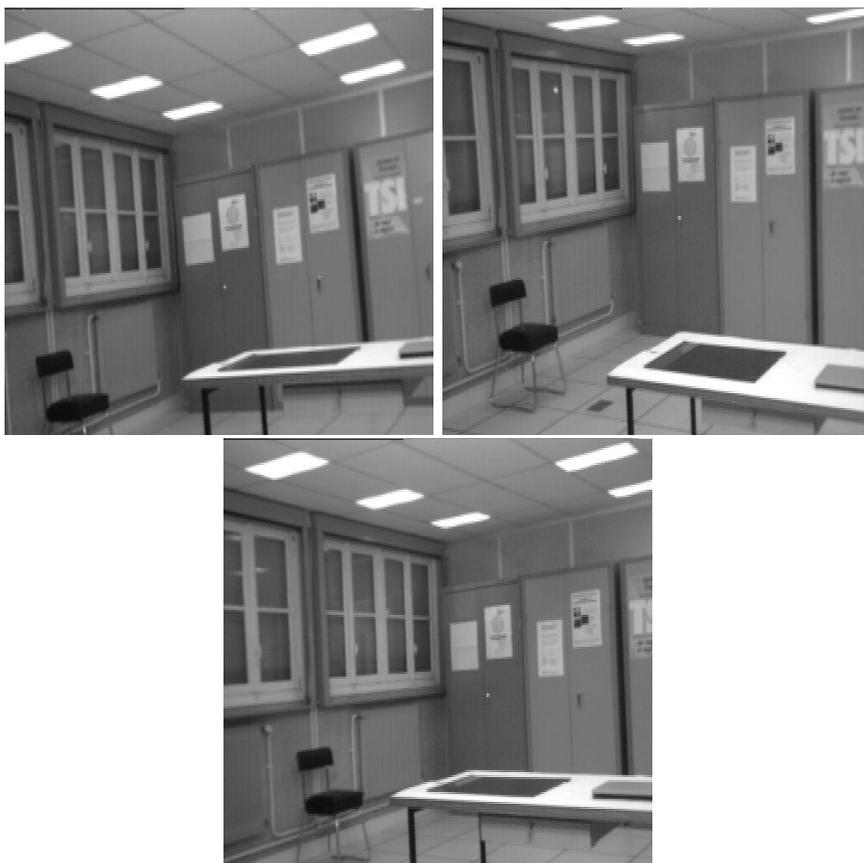


FIG. 1.5 – *Stéréovision trinoculaire [9]. Trois images d'une même pièce.*

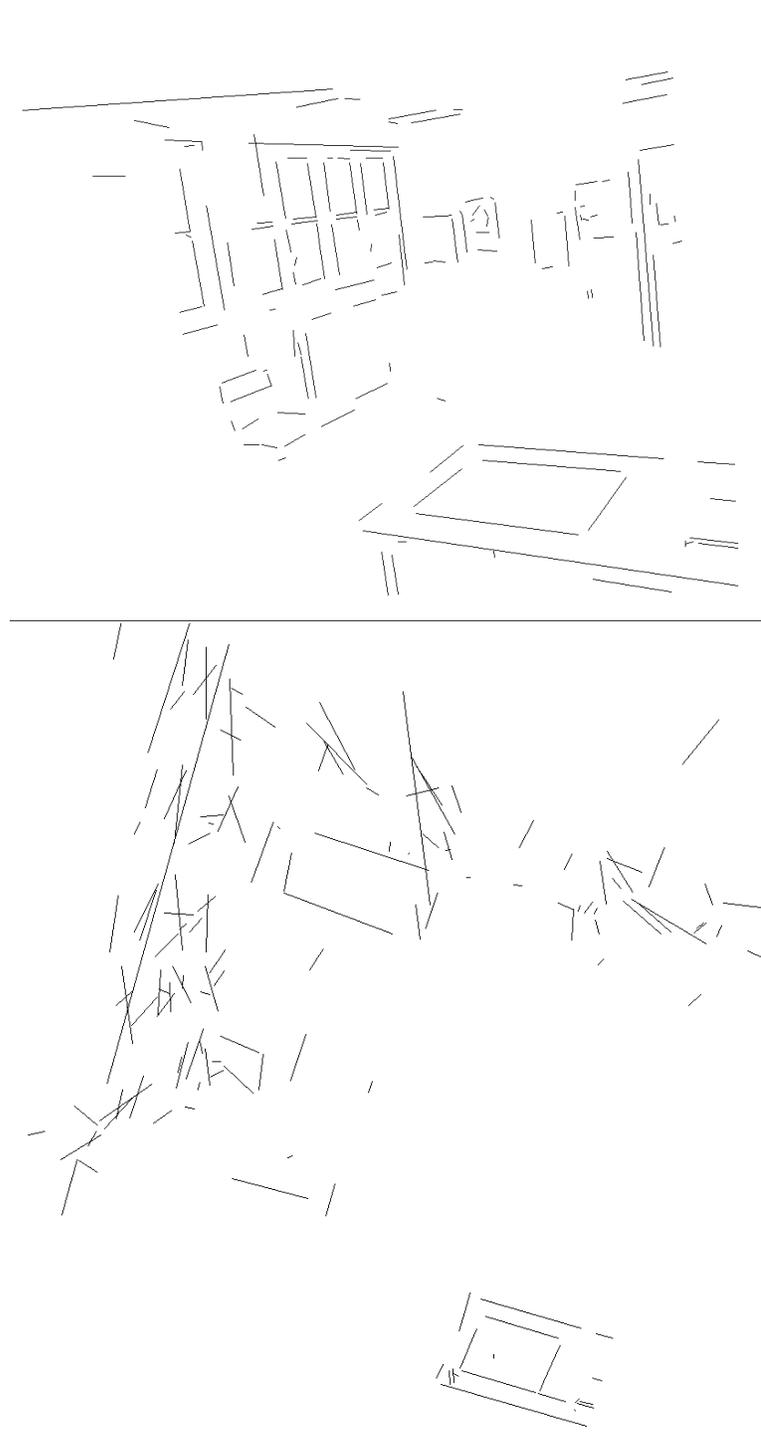


FIG. 1.6 – *Stéréovision trinoculaire [9]. Reconstruction des segments dans l'espace à partir des images prises par les trois caméras. Deux vues sous des angles différents.*



FIG. 1.7 – Stéréovision “dense” [90, 23]. Deux images d’un même visage

reusement un ensemble épars de primitives. Les figures 1.5 et 1.6 montrent les résultats d’une reconstruction par une méthode de stéréoscopie trinoculaire [9]. Trois images d’une même scène et non deux sont acquises afin de fiabiliser le processus.

Des méthodes plus récentes [90, 23] réalisent une reconstruction “dense” de la surface d’un objet sous la forme d’une surface  $z = f(x, y)$ . Moins rapides que les méthodes précédentes, ces dernières fournissent une information plus riche de la scène observée (figures 1.7 et 1.8). Elles sont toutefois limitées par le modèle même appliqué aux objets reconstruits: le graphe d’une fonction régulière  $f(x, y)$  ne permet de modéliser ni un objet complet ni plusieurs objets espacés les uns des autres.

A notre grande satisfaction, nous avons appliqué avec réussite [36] la théorie de l’évolution des surfaces au problème de la stéréovision. Comme le lecteur le découvrira au chapitre 3, les résultats sont bien plus qu’encourageants et vont au delà de nos espérances. Ils ouvrent vraisemblablement la voie à de nombreuses applications. A partir d’un nombre quelconque d’images réalisant une observation partielle ou complète de plusieurs objets, notre méthode laisse évoluer une surface qui va se casser et se coller aux objets en tenant compte au passage du problème jusque là difficile de la visibilité et des occlusions (figure 1.9). Bien que ce ne soit évidemment qu’un début, nous avons testé avec succès notre méthode sur des images synthétiques (figure 1.10) et réelles (figure 1.11).

La figure 1.12 montre de manière synthétique les différentes méthodes de stéréovision et situe notre méthode par rapport aux autres.

**Chapitre 4** Revenant à des considérations plus théoriques, mais avec des visées pratiques, nous nous penchons au chapitre 4 sur les évolutions invariantes des courbes planes et tridimensionnelles. Nous commençons par des

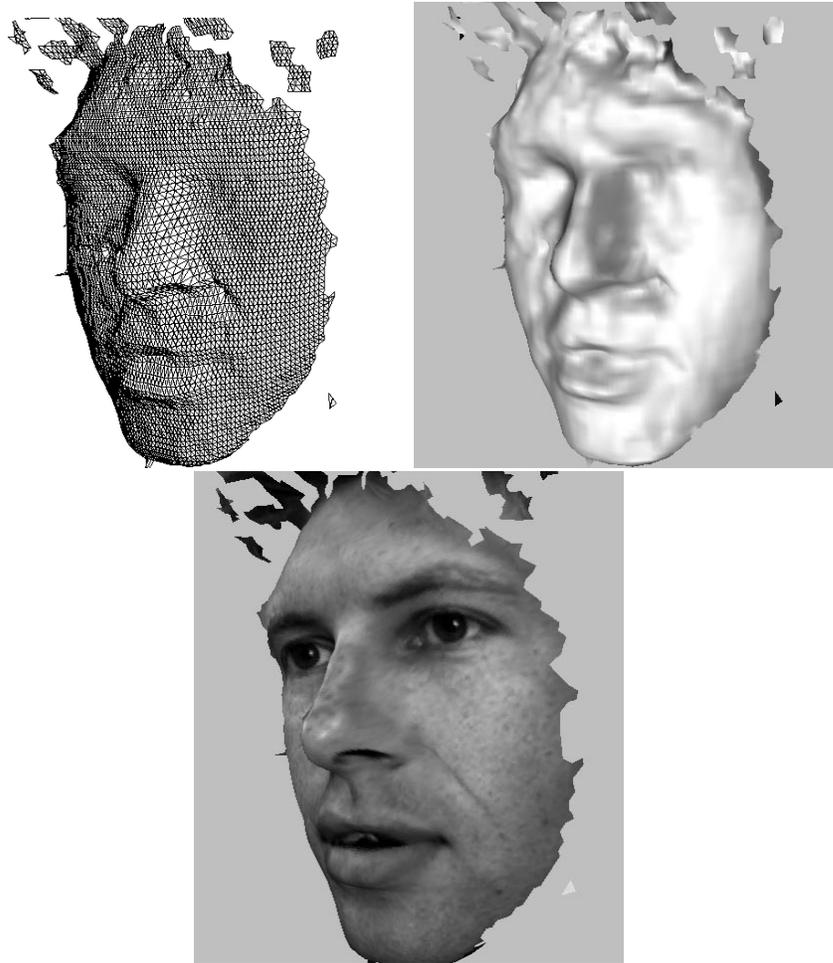


FIG. 1.8 – Stéréovision “dense” [90, 23]. Reconstruction de la surface  $z = f(x, y)$  à partir des deux images. De haut en bas et de gauche à droite: triangulation de la surface, mise en couleur avec lissage, reprojection des images sur la surface.

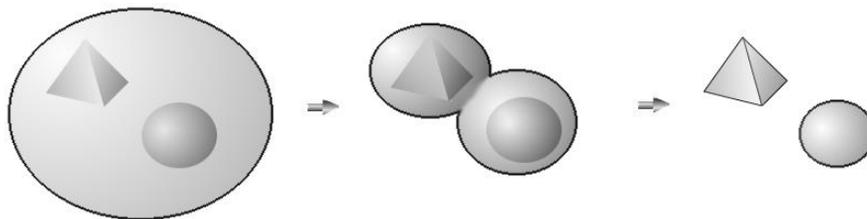


FIG. 1.9 – Les méthodes d’évolution de surfaces par EDP nous ont permis de reconstruire des objets complets et multiples

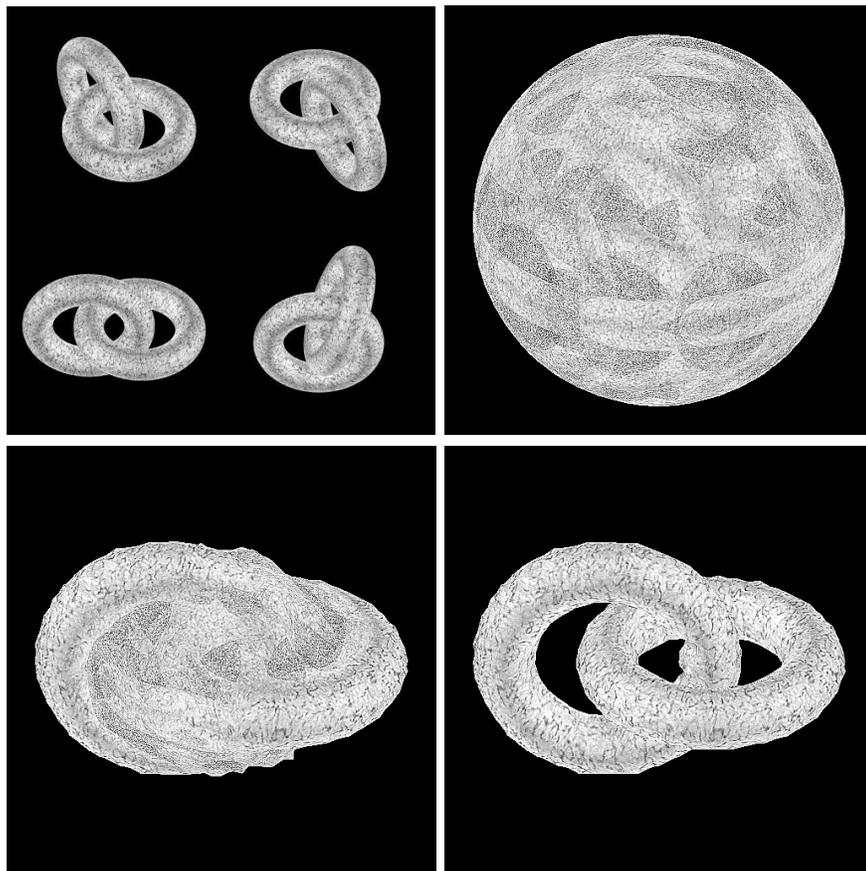


FIG. 1.10 – Stéréovision et EDP: reconstruction d'objets de synthèse à partir plusieurs prises de vues. En haut à gauche: quatre de la trentaine de prises de vues utilisées. Les trois autres images montrent la convergence d'une surface initiale vers la surface des objets observés

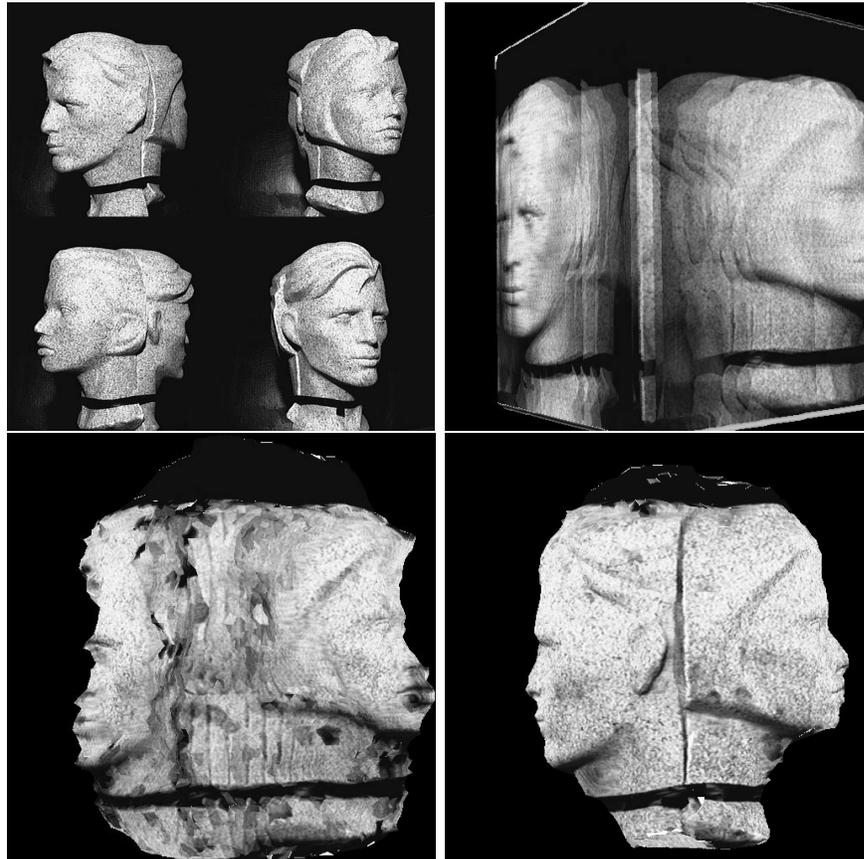


FIG. 1.11 – *Stéréovision et EDP: reconstruction d'un objet réel à partir plusieurs prises de vues. En haut à gauche: quatre de la trentaine de prises de vues utilisées. Les trois autres images montrent la convergence d'une surface initiale vers la surface des objets observés*

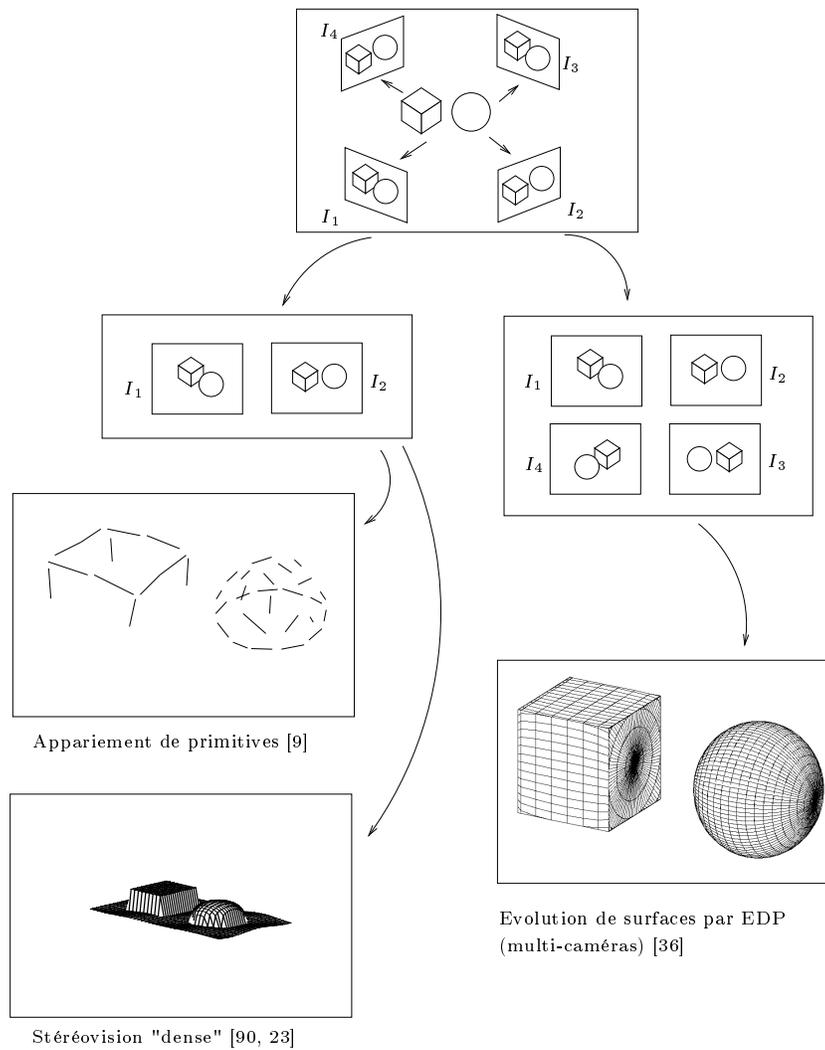


FIG. 1.12 – Les différentes méthodes de stéréovision. De haut en bas et de gauche à droite: appariement de primitives, stéréovision "dense" et évolution de surfaces par EDP

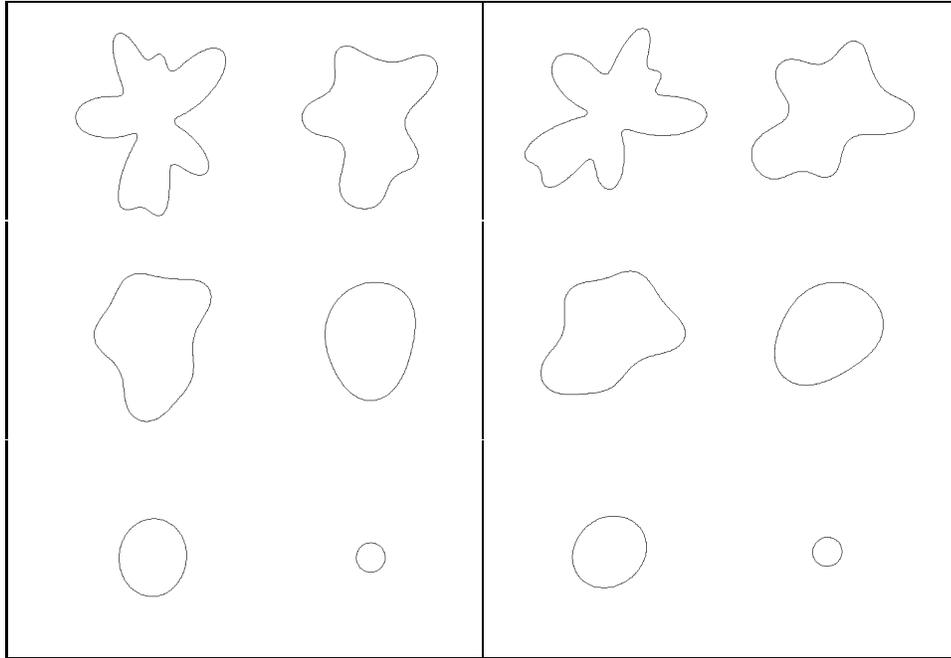


FIG. 1.13 – Flot euclidien d'une courbe plane:  $C_t = \kappa \mathbf{n}$ . A gauche l'évolution d'origine. A droite, l'évolution après une rotation. Il y a bien invariance

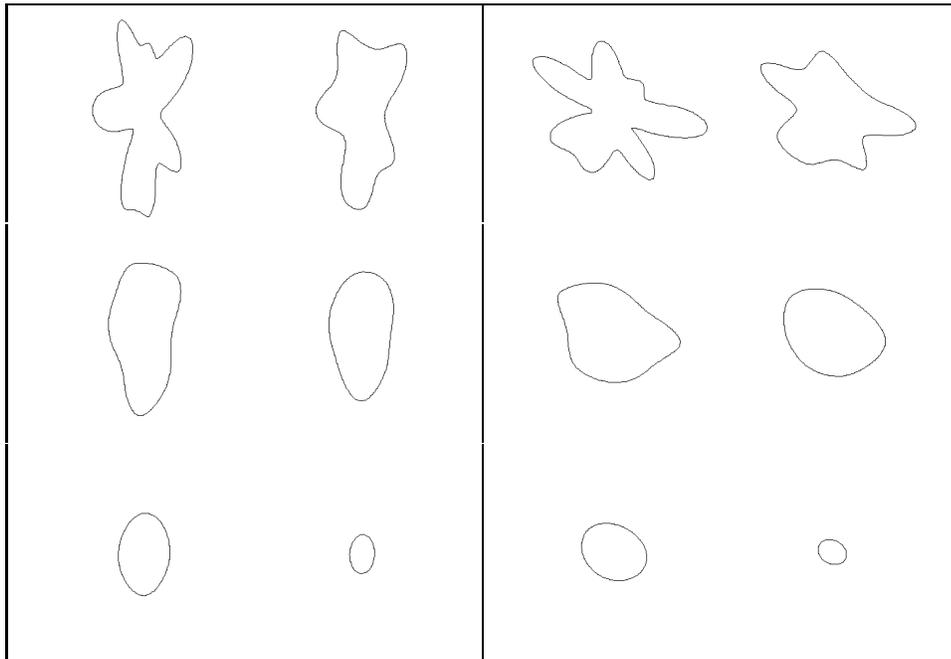


FIG. 1.14 – Flot affine d'une courbe plane:  $C_t = \kappa^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$ . A gauche l'évolution d'origine. A droite, l'évolution après une transformation affine (spéciale). Il y a bien invariance

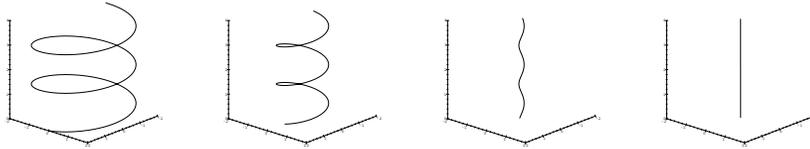


FIG. 1.15 – Évolution d'une courbe gauche à courbure et torsion constantes suivant le flot euclidien invariant  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{vv} = \kappa \mathbf{n}$

rappels de géométrie différentielle: abscisse curviligne, courbure, etc. en géométrie euclidienne, affine ou projective. Nous rassemblons ensuite les résultats connus sur l'étude des équations de la chaleur intrinsèques en géométrie plane euclidienne [44, 48] et affine [100]: pour une courbe plane  $\mathcal{C}(p, t = 0)$  de paramètre  $p$ , il s'agit d'étudier le flot euclidien, c'est-à-dire la famille de courbes  $\mathcal{C}(p, t)$  définie par:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial v^2}(p, t) = \kappa \mathbf{n}$$

( $v$ ,  $\kappa$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement l'abscisse curviligne, la courbure et la normale euclidiennes), flot qui est invariant par un déplacement (figure 1.13). En géométrie affine, le flot équivalent, invariant par transformation affine (figure 1.14), est défini par:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2}(p, t)$$

( $s$  est l'abscisse curviligne affine – voir section 4.1.1). Ce flot peut aussi être obtenu par l'équation plus simple:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) = \kappa^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$$

Nous tentons alors quelques pas dans le sens de leur extension au cas des courbes tridimensionnelles. Sans toutefois clore ce difficile sujet... Nous parvenons en effet à déterminer les équations d'évolution des invariants des courbes 3D soumises aux flots intrinsèques euclidien et affine ainsi que l'évolution de quelques courbes particulières (figure 1.15), mais nous butons sur la mise en évidence de propriétés fondamentales.

**Chapitre 5** Retournant au cas bidimensionnel, et toujours dans l'optique de la vision par ordinateur, c'est l'équation de la chaleur intrinsèque en géométrie plane projective que nous traquons au chapitre 5. La géométrie projective joue en effet un rôle fondamental en vision par ordinateur puisque

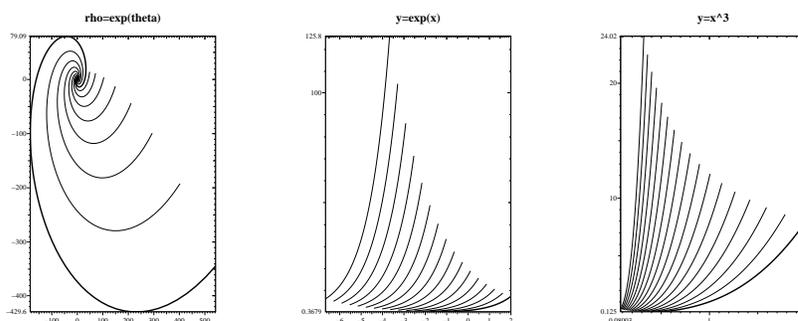


FIG. 1.16 – Évolution des courbes à courbure projective constante suivant l'équation de la chaleur projective  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$

c'est elle, nous l'avons vu plus haut, qui sous-tend la prise d'image. Acquérir l'image d'une face plane d'un objet tridimensionnel est par exemple un processus projectivement invariant.

Cette fois-ci nos efforts aboutissent. Non seulement nous déterminons les équations d'évolution des invariants et l'évolution exacte de certaines courbes (figure 1.16), mais encore nous parvenons à une unification des différents flots proposés jusqu'ici de manière un peu rapide et montrons la nécessité du choix de ces flots: il y a équivalence entre le flot

$$\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma} \quad (\sigma \text{ abscisse curviligne projective})$$

dans le plan réel  $\mathbf{R}^2$ , proposé par Olver, Sapiro et Tannenbaum [76], le flot du point de Cartan

$$\mathbf{A}_t = \alpha \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)}$$

dans le plan projectif  $\mathcal{P}^2$ , proposé par Faugeras [31] à un terme correctif près et les flots

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$$

dans  $\mathcal{P}^2$  pour un vecteur coordonnées initial quelconque.

Bien que nous ne dégagions pas ici non plus de propriété fondamentale, nous obtenons des résultats définitifs et un point de départ solide pour une étude complémentaire.

**Chapitre 6** Enfin, nous penchant sur des applications plus directes, nous proposons au chapitre 6 un produit dérivé de l'espace d'échelle affine. Nous utilisons cet espace d'échelle pour calculer la courbure affine, invariant aux utilisations nombreuses en vision par ordinateur mais dont le grand ordre de

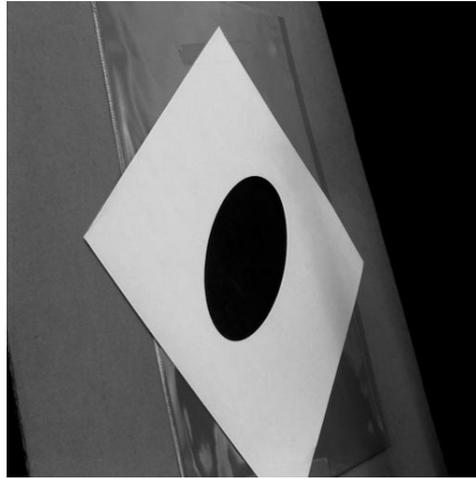
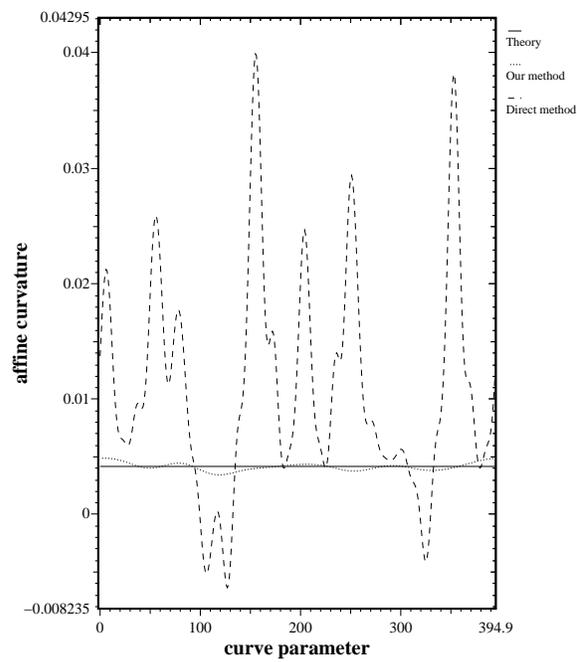
**Ellipse – real image**

FIG. 1.17 – Image d'une ellipse réelle et calcul de sa courbure affine: la courbure théorique (constante), celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode.

dérivation interdisait jusque là l'évaluation. La méthode que nous présentons permet le gain d'un ordre de dérivation dans le calcul de la courbure affine, rendant ainsi possible sa détermination avec une précision déjà suffisante pour un certain nombre d'applications (figure 1.17).

Basée sur la loi d'évolution de la courbure euclidienne au cours de l'évolution affine d'une courbe plane

$$\frac{\partial \kappa(p, t)}{\partial t} = -\mu \kappa$$

( $\kappa$  courbure euclidienne,  $\mu$  courbure affine), nous calculons la courbure affine d'un contour extrait d'une image à travers l'espace d'échelle affine.

Nous présentons un exemple d'application simple de reconnaissance des formes basée sur la courbure affine.

## Chapitre 2

# Méthodes d'ensembles de niveau

---

### Résumé

---

*Nous présentons dans ce chapitre les méthodes numériques que nous avons utilisées pour la simulation de l'évolution des courbes planes et des surfaces soumises à une équation de propagation. Il s'agit des Level Sets Methods [103], ce que nous traduirons tant bien que mal par Méthodes d'Ensembles de Niveau.*

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthode naïve</b>	<b>41</b>
<b>2.3</b>	<b>Méthode d'Ensembles de Niveau</b>	<b>42</b>
<b>2.4</b>	<b>Calcul de la vitesse normale</b>	<b>45</b>
<b>2.5</b>	<b>Schémas numériques</b>	<b>45</b>
2.5.1	Hamiltonien convexe	46
2.5.2	Hamiltonien non convexe	47
2.5.3	Autres quantités	48
<b>2.6</b>	<b>Amélioration de la vitesse</b>	<b>48</b>
2.6.1	Méthode à bandes	48
2.6.2	Méthodes à progression rapide	49
<b>2.7</b>	<b>Fonction distance</b>	<b>53</b>
2.7.1	Calcul rapide de la distance	53
2.7.2	Restauration de la distance	55
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>

---

## 2.1 Introduction

Considérons une courbe plane fermée se propageant à une certaine vitesse  $\mathcal{V}$ . Plus précisément, étant donnée une courbe initiale  $\mathcal{C}_0(p) : S \rightarrow \mathbf{R}^2$  et une

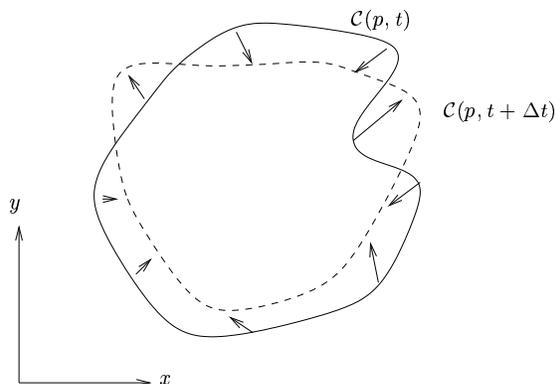


FIG. 2.1 – La courbe  $\mathcal{C}(p, t)$  évolue suivant l'EDP  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) = \mathcal{V}$ : chaque point avance à la vitesse  $\mathcal{V}$

vitesse  $\mathcal{V}(p, t)$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , nous nous intéressons à la famille de courbes  $\mathcal{C}(p, t) : S \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p, 0) &= \mathcal{C}_0(p) \\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) &= \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$p$  sera le paramètre d'espace et  $t$  le paramètre de temps (figure 2.1). Nous ne considérons que le cas où la composante normale de la vitesse est intrinsèque, c'est-à-dire ne dépend pas de la paramétrisation  $p$  de la courbe. En pratique, cette composante normale ne dépendra de la courbe que par le point considéré  $\mathcal{C}(p, t)$  et par la géométrie de celle-ci, locale (courbure, etc.) ou globale (périmètre, surface, etc.). Nous avons alors la propriété suivante [26, 99]:

**Lemme 1** *Si  $\beta$  est intrinsèque, c'est-à-dire ne dépend pas de la façon de paramétrer la courbe en espace, alors les familles de courbes engendrées par  $\alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n}$  et  $\bar{\alpha} \mathbf{t} + \beta \mathbf{n}$  sont les mêmes à une reparamétrisation en espace près. ( $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la tangente et la normale euclidienne). Plus précisément, pour une courbe  $\mathcal{C}_0(p) : S \rightarrow \mathbf{R}^2$  donnée, si  $\mathcal{C}(p, t)$  et  $\bar{\mathcal{C}}(p, t)$  sont solutions respectives de:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{C}(p, t)}{\partial t} = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} \\ \mathcal{C}(p, 0) = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

et de:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}(p, t)}{\partial t} = \bar{\alpha} \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} \\ \bar{\mathcal{C}}(p, 0) = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

alors on a:

$$\forall t, \text{Img}(\mathcal{C}(\cdot, t)) = \text{Img}(\bar{\mathcal{C}}(\cdot, t))$$

**Preuve:** Voir la preuve de la proposition 1 au chapitre 4 qui est similaire.

□

Ceci nous permet de ne considérer que la composante normale de la vitesse et donc les évolutions de courbes soumises à une équation de la forme:

$$\mathcal{C}_t = \beta \mathbf{n} \quad (2.2)$$

où la vitesse normale  $\beta$  est intrinsèque.

## 2.2 Méthode naïve

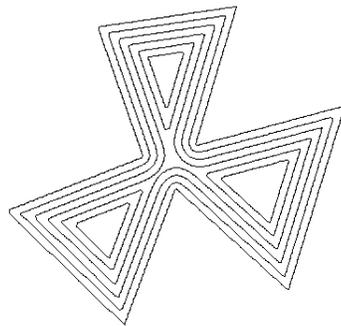


FIG. 2.2 – Évolution d'une courbe (ici  $\beta = -1$ ). Des changements de topologie peuvent apparaître. La courbe initiale (à l'extérieur) se coupe en trois composantes connexes avant de disparaître.

Une implémentation naïve de cette évolution pourrait consister à échantillonner la courbe en un nombre suffisamment élevé de points et à faire évoluer ces points suivant un schéma numérique approprié: on suit les particules. Une telle méthode a de nombreux désavantages, parmi lesquels:

- Le manque de précision et de stabilité.
- L'obligation de gérer spécifiquement la topologie de la courbe. Rien en effet n'impose aux  $\mathcal{C}(p, t)$  de rester connexes, à supposer que  $\mathcal{C}_0$  le soit. Par exemple, le cas de la vitesse constante négative  $\beta = -1$  génère naturellement des changements de topologie (figure 2.2). Il faudrait donc que le schéma soit capable de se rendre compte que la courbe se coupe en plusieurs composantes connexes, ce qui n'est pas aisé.

### 2.3 Méthode d'Ensembles de Niveau

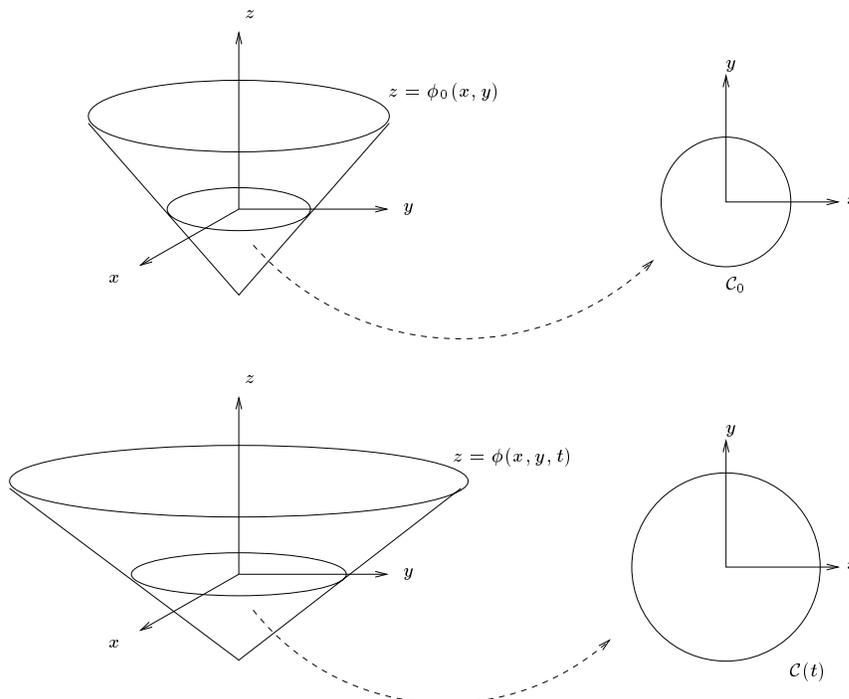


FIG. 2.3 – Cas des courbes. La fonction  $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  évolue de telle sorte que le niveau zéro de la surface  $z = \phi(x, y, t)$  se propage suivant l'équation désirée  $\mathcal{C}_t = \beta \mathbf{n}$

Étant donnée une hypersurface fermée  $\mathcal{C}_0$  de dimension  $N - 1$ , l'idée de base de la méthode des *Level Sets* proposée par Osher et Sethian [78] consiste à utiliser une formulation *Eulerienne* de l'évolution de l'hypersurface  $\mathcal{C}(t)$  initialement en  $\mathcal{C}_0$  et se propageant avec une vitesse normale  $\beta$ . Pour cela, on décide de considérer l'hypersurface comme l'ensemble de niveau 0 d'une fonction  $\phi$  de dimension supérieure:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{x \in \mathbf{R}^N \mid \phi_0(x) = 0\} \\ \mathcal{C}(t) &= \{x \in \mathbf{R}^N \mid \phi(x, t) = 0\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le but est alors de trouver une équation d'évolution pour  $\phi$  telle que le niveau 0 de  $\phi(x, t)$  suive l'évolution originelle  $\mathcal{C}_t = \beta \mathbf{n}$  (figure 2.3). Il ne restera alors qu'à trouver une fonction  $\phi_0$  suffisamment régulière dont le niveau 0 est  $\mathcal{C}_0$ . On choisit communément la distance algébrique à l'hypersurface, positive à l'extérieur de  $\mathcal{C}_0$ , négative à l'intérieur. Il est facile de montrer [78] que, pour

ce choix de signe, l'équation:

$$\phi_t = -\beta|\nabla\phi| \quad (2.4)$$

convient. Considérons en effet un point initial  $x(t=0)$  et sa trajectoire  $x(t)$ . On a évidemment:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \beta$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale au front en  $x(t)$ . Dire que la fonction  $\phi$  respecte l'évolution de son niveau zéro, c'est écrire:

$$\phi(x(t), t) = 0$$

ce qui amène, en dérivant par rapport au temps:

$$\phi_t + \nabla\phi(x(t), t) \cdot x_t(t) = 0$$

La normale extérieure à une courbe de niveau valant, avec la convention de signe adoptée ( $\phi$  négative à l'intérieur):

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

il vient l'équation (2.4) annoncée:

$$0 = \phi_t + |\nabla\phi|\mathbf{n} \cdot x_t(t) = \phi_t - \beta|\nabla\phi|$$

Le choix de la fonction distance pour initialiser  $\phi$  n'est pas obligatoire mais sera en général retenu pour sa simplicité et la relative régularité de la fonction obtenue (elle est continue, mais non dérivable!). Il convient de bien voir que  $\phi$  ne reste pas la fonction distance à son niveau zéro, ce qui en soit n'est pas gênant. Toutefois,  $\phi$  ne reste pas toujours très régulière et, en pratique, il convient de réinitialiser  $\phi$  périodiquement à une fonction régulière de même niveau zéro, ce que l'on fait en recalculant la fonction distance au niveau zéro courant (voir section 2.7.2).

D'un point de vue effectif, la méthode est donc la suivante:

- Choisir un domaine de définition pour  $\phi$  et un maillage  $x_{i_1 \dots i_N}$ , en général régulier, de discrétisation spatiale de ce domaine. Choisir aussi un pas de temps  $\Delta t$ . Au noeud  $x_{i_1 \dots i_N}$  à l'instant  $n\Delta t$ , nous noterons classiquement la valeur de  $\phi$  par  $\phi_{i_1 \dots i_N}^n$ .
- A partir de l'hypersurface  $\mathcal{C}_0$ , calculer la distance à  $\mathcal{C}_0$  en chacun des points du maillage, positive à l'extérieur, négative à l'intérieur. Initialiser  $\phi$  avec cette distance algébrique.

$$\phi_{i_1 \dots i_N}^0 = d(x_{i_1 \dots i_N}, \mathcal{C}_0)$$

- A chaque pas de temps, faire évoluer la valeur de  $\phi$  suivant un schéma numérique adapté à l'équation (2.4), par exemple:

$$\phi_{i_1 \dots i_N}^{n+1} = \phi_{i_1 \dots i_N}^n - \beta_{i_1 \dots i_N}^n |\nabla_{i_1 \dots i_N} \phi_{i_1 \dots i_N}^n|$$

- A tout pas de temps,  $\mathcal{C}(t)$  peut s'obtenir en extrayant le niveau 0 de  $\phi(x, t)$ .
- Tous les  $P$  pas de temps, ou quand on constate par un moyen ou un autre que  $\phi$  devient trop irrégulière en un certain sens, réinitialiser  $\phi$  (voir section 2.7.2)

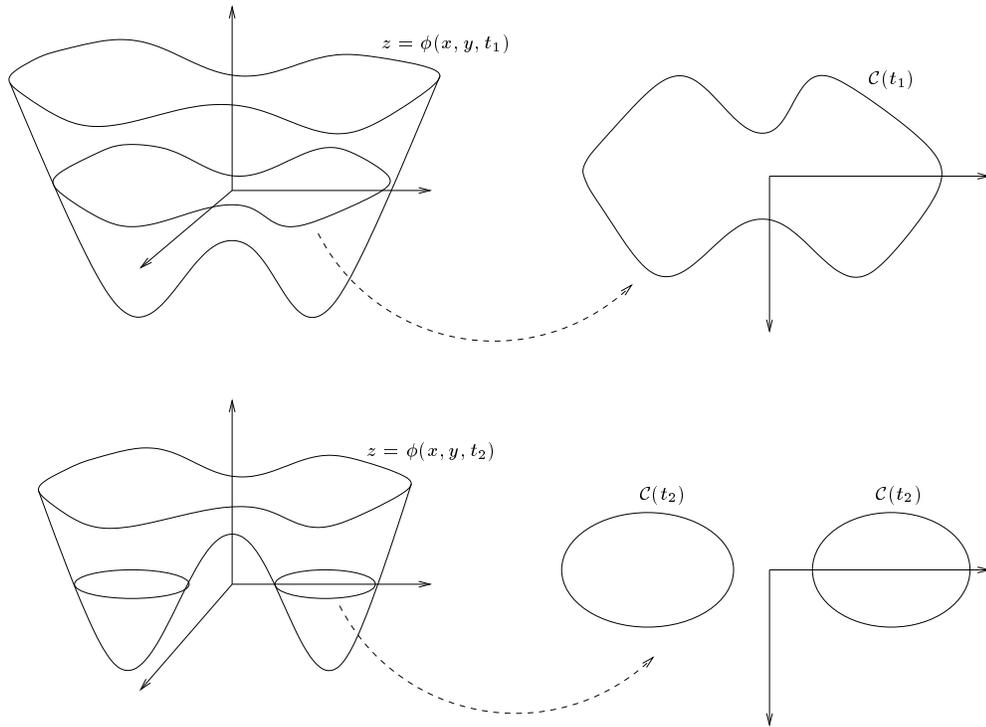


FIG. 2.4 – *Changement de topologie. Le niveau 0 peut se casser, fusionner ou former des angles. Aucun traitement particulier n'est requis.*

Les avantages sont multiples:

- Tout d'abord, les changements de topologie sont pris en compte sans effort particulier: le niveau 0 peut se casser, fusionner ou former des angles sans traitement spécifique (figure 2.4).
- Le schéma numérique d'évolution de  $\phi$  peut être étudié rigoureusement et adapté au  $\beta$  et à la précision requise.
- La méthode s'applique à l'évolution des surfaces et même aux dimensions supérieures.

## 2.4 Calcul de la vitesse normale

Le caractère intrinsèque de  $\beta$  nous assure qu'il est calculable à partir de  $\phi$ . Toutefois, nous avons implicitement étendu son domaine de définition à celui de  $\phi$  et non à la simple hypersurface de niveau 0.

En pratique, les termes géométriques s'étendent simplement en considérant qu'ils sont ceux définis sur les hypersurfaces de niveau  $\phi = \text{cte}$ . Par exemple, la normale à l'ensemble de niveau passant par un point donné est  $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  et la courbure  $\kappa$  vaut  $\nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  pour une courbe,  $H = \frac{1}{2} \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  pour la courbure moyenne d'une surface, etc.

Lorsque  $\beta$  fait intervenir des termes ne dépendant pas de la géométrie de l'hypersurface mais des quantités plus spécifiques n'ayant un sens que sur l'hypersurface (voir le cas de la stéréovision au chapitre 3), il convient de trouver un moyen adéquat d'étendre leur définition à tout l'espace, par exemple en prenant comme valeur en un point celle du point de l'hypersurface le plus proche. Comme nous le verrons plus loin section 2.7.1, un calcul rapide du point le plus proche peut être réalisé avec une adaptation immédiate de la méthode de calcul rapide de la distance à un ensemble de points [18].

## 2.5 Schémas numériques

Comment faire évoluer  $\phi$ ? Pour un rappel des principes de base de la résolution numérique des équations différentielles de propagation et pour la justification des schémas numériques dans le cas des méthodes par ensembles de niveau, nous renvoyons le lecteur livre de Sethian [103], dont il pourra aussi utiliser le très pratique chapitre 5 comme un "livre de recettes" fournissant les différents schémas adaptés aux cas les plus courants et à la précision désirée. Il y trouvera un schéma du premier ordre et un du second ordre pour le cas où le Hamiltonien  $H(\nabla\phi) = \beta|\nabla\phi|$  est convexe, et deux autres pour le cas non convexe. En outre, des schémas à utiliser pour la courbure et pour une détermination stable de la normale sont donnés ainsi qu'un schéma spécifique à un cas fréquemment rencontré et enfin des informations sur les conditions aux limites à adopter. A toutes fins utiles, nous résumons ici les points principaux.

Plaçons nous dans  $\mathbf{R}^3$  pour fixer les notations. Dans de nombreux cas, la vitesse normale  $\beta$  peut s'écrire comme une fonction du gradient de  $\phi$  et de ses dérivées. On considère alors le Hamiltonien  $H$  et l'on reformule l'équation d'évolution sous la forme:

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = 0$$

Nous distinguons alors plusieurs cas suivant la convexité du Hamiltonien et la précision requise:

### 2.5.1 Hamiltonien convexe

#### Schéma du premier ordre en espace

Notons de manière abrégée les différences finies de  $\phi$  par:

$$\begin{aligned} D_{ijk}^x &= D_{ijk}^x \phi = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2\Delta x}, \\ D_{ijk}^{+x} &= D_{ijk}^{+x} \phi = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{ijk}}{\Delta x}, \\ D_{ijk}^{-x} &= D_{ijk}^{-x} \phi = \frac{\phi_{ijk} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x} \end{aligned}$$

et les notations équivalentes dans les deux autres dimensions. Dans le cas d'un Hamiltonien convexe, alors le schéma suivant est une approximation du premier ordre en espace de l'équation (2.4) [78]:

$$\phi_{ijk}^{n+1} = \phi_{ijk}^n - \Delta t [\max(\beta_{ijk}, 0) \nabla^+ + \min(\beta_{ijk}, 0) \nabla^-]$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= [\max(D_{ijk}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{ijk}^{+x}, 0)^2 \\ &\quad + \max(D_{ijk}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{ijk}^{+y}, 0)^2 \\ &\quad + \max(D_{ijk}^{-z}, 0)^2 + \min(D_{ijk}^{+z}, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \nabla^- &= [\max(D_{ijk}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{ijk}^{-x}, 0)^2 \\ &\quad + \max(D_{ijk}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{ijk}^{-y}, 0)^2 \\ &\quad + \max(D_{ijk}^{+z}, 0)^2 + \min(D_{ijk}^{-z}, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

#### Schéma du second ordre en espace

Toujours dans le cas du Hamiltonien convexe, le schéma suivant est du second ordre en espace [52]:

$$\phi_{ijk}^{n+1} = \phi_{ijk}^n - \Delta t [\max(\beta_{ijk}, 0) \nabla^+ + \min(\beta_{ijk}, 0) \nabla^-]$$

avec cette fois:

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= [\max(A, 0)^2 + \min(B, 0)^2 \\ &\quad + \max(C, 0)^2 + \min(D, 0)^2 \\ &\quad + \max(E, 0)^2 + \min(F, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \nabla^- &= [\max(B, 0)^2 + \min(A, 0)^2 \\ &\quad + \max(D, 0)^2 + \min(C, 0)^2 \\ &\quad + \max(F, 0)^2 + \min(E, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où, avec des notations évidentes pour les différences finies du second ordre de  $\phi$ :

$$\begin{aligned}
A &= D_{ijk}^{-x} + \frac{\Delta x}{2} m(D_{ijk}^{-x-x}, D_{ijk}^{+x-x}) \\
B &= D_{ijk}^{+x} - \frac{\Delta x}{2} m(D_{ijk}^{+x+x}, D_{ijk}^{+x-x}) \\
C &= D_{ijk}^{-y} + \frac{\Delta y}{2} m(D_{ijk}^{-y-y}, D_{ijk}^{+y-y}) \\
D &= D_{ijk}^{+y} - \frac{\Delta y}{2} m(D_{ijk}^{+y+y}, D_{ijk}^{+y-y}) \\
E &= D_{ijk}^{-z} + \frac{\Delta z}{2} m(D_{ijk}^{-z-z}, D_{ijk}^{+z-z}) \\
F &= D_{ijk}^{+z} - \frac{\Delta z}{2} m(D_{ijk}^{+z+z}, D_{ijk}^{+z-z})
\end{aligned}$$

et la fonction de choix  $m()$  définie par:

$$m(x, y) = \begin{cases} 0 & (xy < 0) \\ x & (xy \geq 0, |x| \leq |y|) \\ y & (xy \geq 0, |x| > |y|) \end{cases}$$

### 2.5.2 Hamiltonien non convexe

#### Schéma du premier ordre en espace

Dans le cas d'un Hamiltonien non convexe, alors le schéma suivant est du premier ordre en espace [80]:

$$\begin{aligned}
\phi_{ijk}^{n+1} &= \phi_{ijk}^n - \Delta t [H(D_{ijk}^x, D_{ijk}^y, D_{ijk}^z) \\
&\quad - \frac{1}{2} \alpha_u (D_{ijk}^{+x} - D_{ijk}^{-x}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \alpha_v (D_{ijk}^{+y} - D_{ijk}^{-y}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \alpha_w (D_{ijk}^{+z} - D_{ijk}^{-z})]
\end{aligned}$$

où  $\alpha_u$  ( $\alpha_v, \alpha_w$ ) est une borne de la dérivée partielle du Hamiltonien par rapport à sa première (resp. deuxième, troisième) variable.

#### Schéma du second ordre en espace

Dans le cas d'un Hamiltonien non convexe, alors le schéma suivant est du second ordre en espace [80]:

$$\begin{aligned}
\phi_{ijk}^{n+1} &= \phi_{ijk}^n - \Delta t [H\left(\frac{A+B}{2}, \frac{C+D}{2}, \frac{E+F}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \alpha_u (B - A) - \frac{1}{2} \alpha_v (D - C) - \frac{1}{2} \alpha_w (F - E)]
\end{aligned}$$

où  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont ceux définis plus haut.

### 2.5.3 Autres quantités

Les courbures peuvent être calculées directement avec des différences finies centrées suivant les formules suivantes:

$$\kappa = \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pour la courbure d'une ligne de niveau,

$$\kappa_M = \frac{1}{2} \frac{\left[ \begin{array}{c} (\phi_{yy} + \phi_{zz})\phi_x^2 + (\phi_{xx} + \phi_{zz})\phi_y^2 + (\phi_{xx} + \phi_{yy})\phi_z^2 \\ - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} - 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} - 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} \end{array} \right]}{(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pour la courbure moyenne d'une surface de niveau et

$$\kappa_G = \frac{\left[ \begin{array}{c} \phi_x^2(\phi_{yy}\phi_{zz} - \phi_{yz}^2) + \phi_y^2(\phi_{xx}\phi_{zz} - \phi_{xz}^2) + \phi_z^2(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2) \\ + 2[\phi_x\phi_y(\phi_{xz}\phi_{yz} - \phi_{xy}\phi_{zz}) + \phi_y\phi_z(\phi_{xy}\phi_{xz} - \phi_{yz}\phi_{xx}) \\ + \phi_x\phi_z(\phi_{xy}\phi_{yz} - \phi_{xz}\phi_{yy})] \end{array} \right]}{(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)^2}$$

pour la courbure de Gauss d'une surface de niveau.

Enfin, lorsque la normale elle-même est nécessaire, on la calcule par les différences finies non centrées dans toutes les directions possibles et on fait la moyenne. Ce qui donne, pour  $N = 2$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_{ij} = & \frac{(D_{ij}^{+x}, D_{ij}^{+y})}{[(D_{ij}^{+x})^2 + (D_{ij}^{+y})^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(D_{ij}^{-x}, D_{ij}^{+y})}{[(D_{ij}^{-x})^2 + (D_{ij}^{+y})^2]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{(D_{ij}^{-x}, D_{ij}^{-y})}{[(D_{ij}^{-x})^2 + (D_{ij}^{-y})^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(D_{ij}^{+x}, D_{ij}^{-y})}{[(D_{ij}^{+x})^2 + (D_{ij}^{-y})^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

expression dans laquelle on ne considère pas les éventuels termes pour lesquels  $(D_{ij}^{+x})^2 + (D_{ij}^{-y})^2$  est nul. Puis on normalise:

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_{ij}}{|\bar{\mathbf{n}}_{ij}|}$$

## 2.6 Amélioration de la vitesse

### 2.6.1 Méthode à bandes

Adalsteinsson et Sethian [2] proposent d'améliorer considérablement la vitesse de l'algorithme en ne mettant pas tous les points du maillage à jour, mais seulement ceux compris entre deux ensembles de niveau entourant le niveau 0. On gère en fait deux ensembles de points: une "bande extérieure"  $B_1$

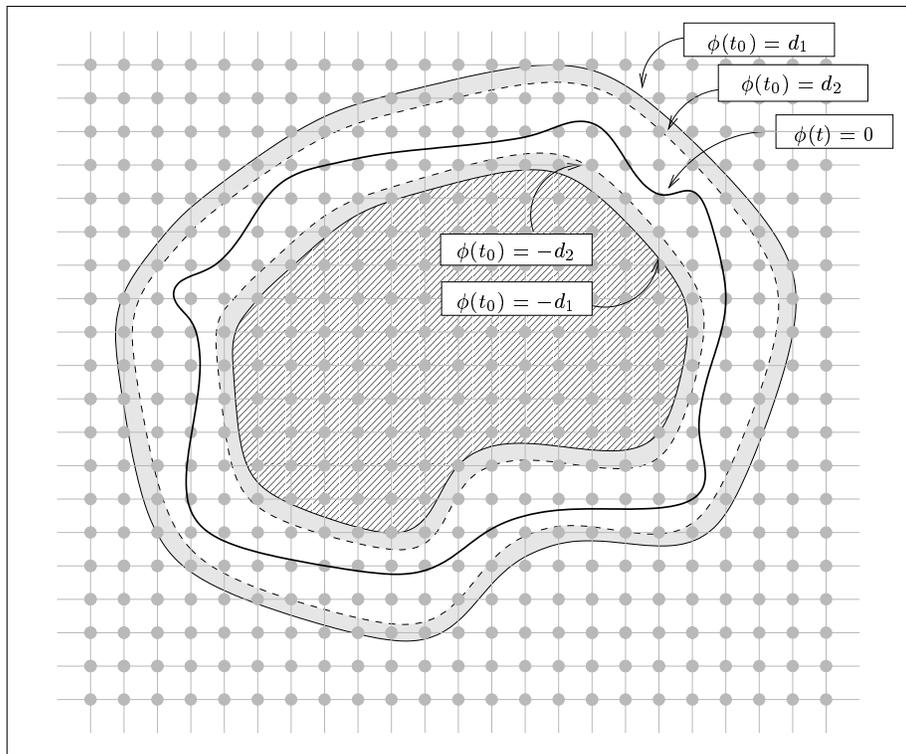


FIG. 2.5 – A un certain  $t_0$ , la bande extérieure et la bande intérieure sont initialisées aux distances  $d_1$  et  $d_2$ . A la suite de quoi, le niveau 0 évolue librement, par mise à jour dans la bande seulement, jusqu'à heurter la bande intérieure. Les bandes sont alors réinitialisées.

constituée des points dont la distance au niveau 0 initial de  $\phi_0$  est inférieure à une certaine distance  $d_1$  et une "bande intérieure"  $B_2$  située à une distance  $d_2$  ( $d_2 < d_1$ ). A chaque pas de temps, on ne met à jour que les points de  $B_1$ , ce qui fait gagner un ordre de puissance dans le nombre de points à modifier (figure 2.5). Lorsque le niveau 0 courant de  $\phi(\cdot, t)$  sort de  $B_2$ , ce qui se détecte quand  $\phi$  change de signe en un point de  $B_1 \setminus B_2$ , alors on décide que le niveau 0 se rapproche trop de la frontière de  $B_1$  et les bandes sont réinitialisées à partir de la distance au niveau 0 courant.

### 2.6.2 Méthodes à progression rapide

Mentionnons aussi les *méthodes à progression rapide* (voir [103]) considérablement plus efficaces, qui s'appliquent sous certaines conditions quand le front ne repasse jamais deux fois par le même point (par exemple  $\beta = 1$  ou  $\beta = -1$ ). L'approche consiste à calculer de proche en proche en chaque point du maillage le temps de passage du front, ce qui a un sens. Les points

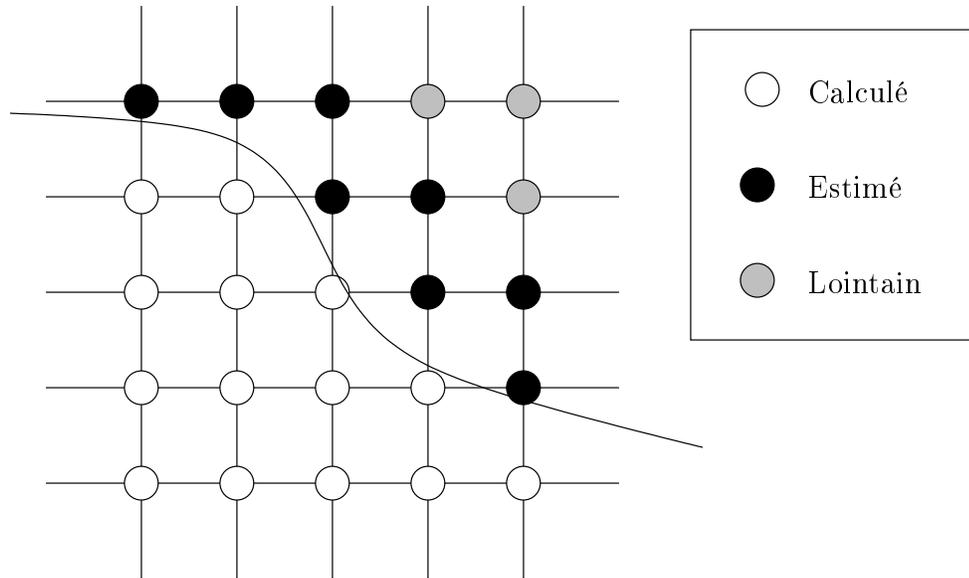


FIG. 2.6 – *Méthode à progression rapide.* En chaque point, on veut calculer le temps de passage du front. Certains points ont un temps de passage définitivement calculé, certains, déjà rencontrés, un temps estimé et d'autres, qui n'ont pas encore été approché, un temps de passage inconnu.

ne sont alors examinés qu'une seule fois! Cette méthode peut en particulier être utilisée pour réinitialiser la fonction distance (voir section suivante).

Dans le cas où  $\beta$  est toujours positif (ou négatif), on peut montrer que le temps de passage  $T$  du front en chaque point est gouverné par l'équation:

$$|\nabla T| \beta = 1$$

Nous nous intéressons au cas particulier de l'équation d'Eikonal [69] dans lequel  $\beta$  ne dépend que de la position:

$$|\nabla T| \beta(x) = 1$$

L'algorithme est le suivant (figure 2.6):

1. Les points de la grille sont de trois sorte:
  - (a) Ceux dont le temps de passage est définitivement connu: le front les a déjà dépassé.
  - (b) Ceux dont le temps de passage a déjà été estimé lors des itérations précédentes.
  - (c) Des points *lointains* qui n'ont pas encore été pris en compte et dont le temps de passage est inconnu et fixé arbitrairement à  $+\infty$ .

2. La position du front à  $t = 0$  est initialisée par la donnée d'un nombre suffisant de temps de passage définitifs négatifs et des temps de passage estimés positifs pour leurs voisins. **Attention!** *Il doit bien s'agir des temps de passage pour l'EDP que l'on veut résoudre et non seulement une fonction distance respectant la position du niveau zéro.*
3. Celui des points dont le temps de passage estimé est le plus petit est définitivement mis à jour avec l'équation (écrite ici en dimension 2):

$$\beta_{ij}^2 = \max(D_{ij}^{-x}T, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}T, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}T, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}T, 0)^2$$

et incorporé dans l'ensemble des points franchis par le front. Le temps de passage de ses voisins, dont certains étaient des points lointains, est lui aussi mis à jour.

4. On répète l'étape 3 jusqu'à ce que tous les points soient franchis par le front.

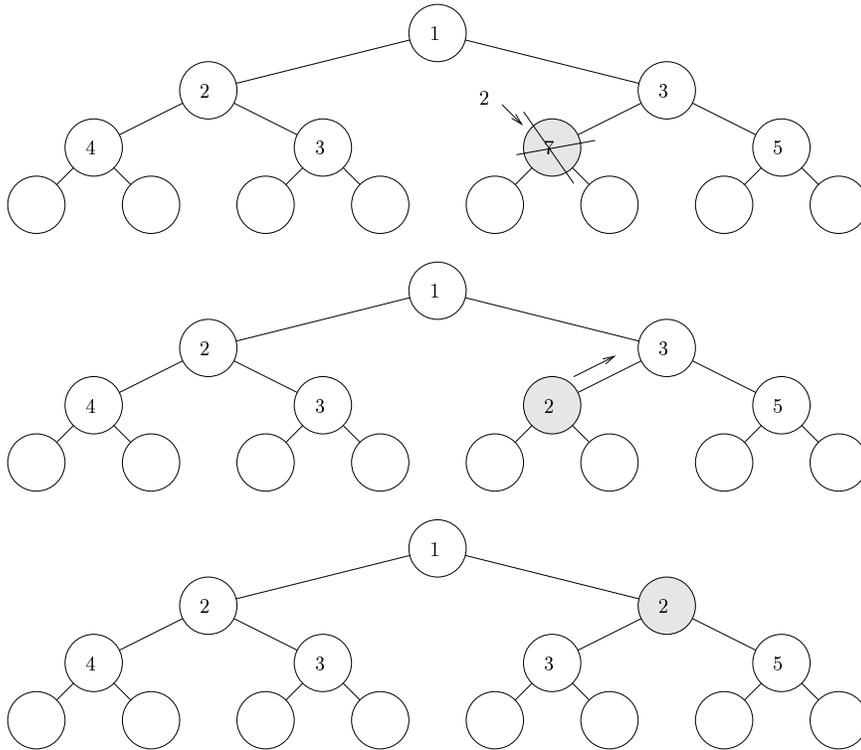


FIG. 2.7 – *Structure de min-heap. L'arbre, initialement cohérent, voit la valeur d'un de ses noeuds substituée par une valeur moindre. La remontée de cette valeur en  $O(\log n)$  suffit à rendre l'arbre à nouveau cohérent*

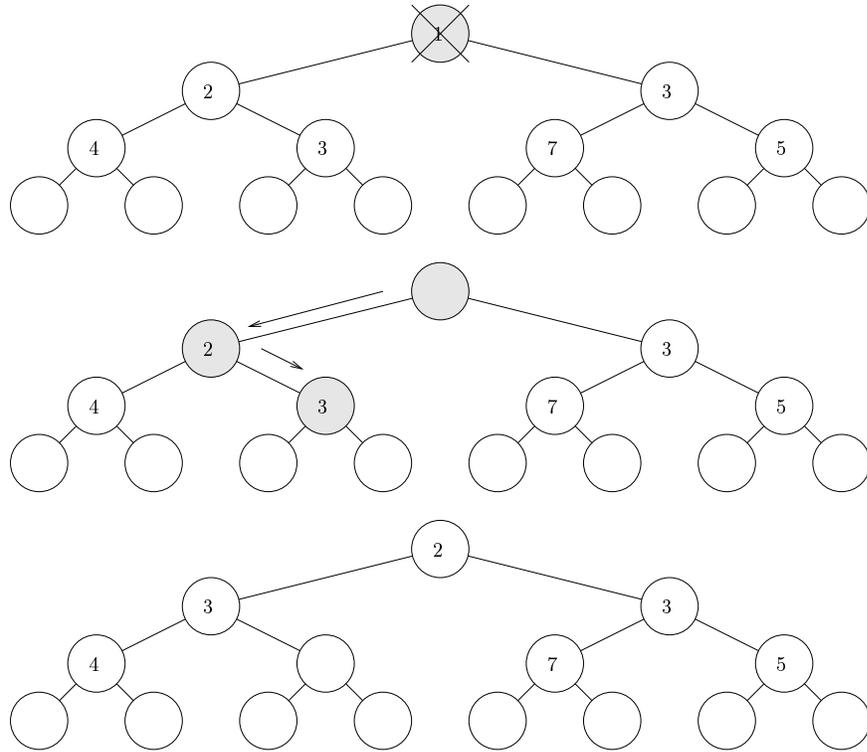


FIG. 2.8 – *Structure de min-heap. L'arbre, initialement cohérent, voit sa racine détruite. Une descente avec remontée des valeurs en  $O(\log n)$  suffit à rendre l'arbre à nouveau cohérent*

La seule opération encore coûteuse est la détermination du point dont le temps de passage estimé est minimum. L'utilisation d'une structure de pile à minimum (*min-heap* [101]) permet une gestion rapide du problème. Il s'agit de maintenir un arbre binaire étiqueté dont les valeurs en chaque noeud sont inférieures aux valeurs des noeuds fils. Pour  $n$  noeud, le coût des opérations est réduit en moyenne à (pour un arbre équilibré):

- Détermination du plus petit:  $O(1)$  (simple extraction de la racine de l'arbre)
- Mise à jour d'une valeur (figure 2.7):  $O(\log n)$  (une remontée vers la racine suffit car l'algorithme assure qu'une valeur est mise à jour par une valeur plus petite [103])
- Destruction d'une valeur (figure 2.8):  $O(\log n)$  (suppression de la racine et descente)
- Insertion d'une valeur (figure 2.9):  $O(\log n)$  (ajout d'une feuille et remontée)

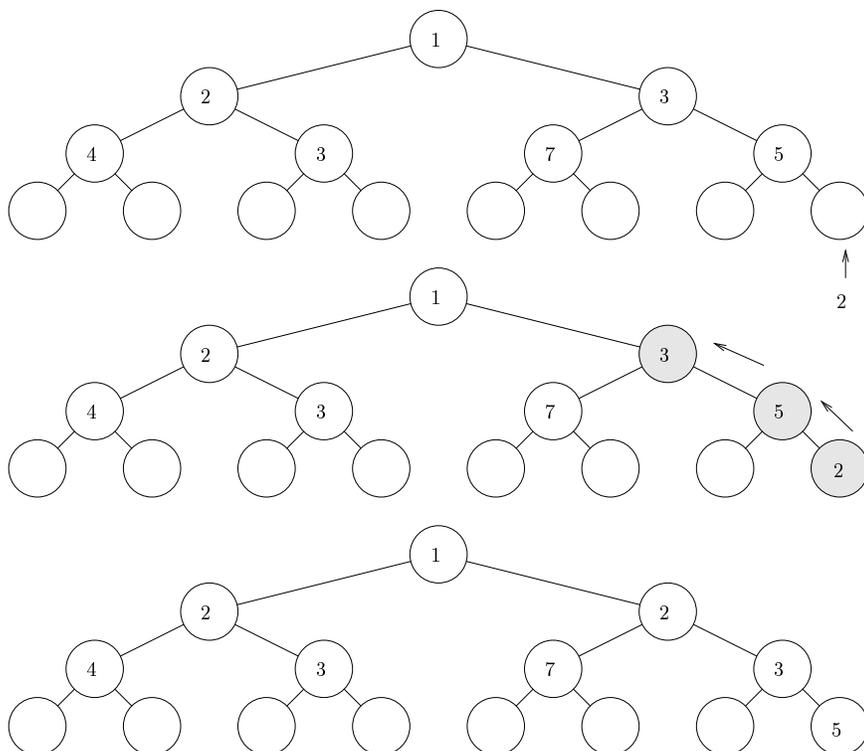


FIG. 2.9 – *Structure de min-heap. L'arbre, initialement cohérent, voit une nouvelle valeur insérée au niveau d'une feuille. La remontée de cette valeur en  $O(\log n)$  suffit à rendre l'arbre à nouveau cohérent*

## 2.7 Fonction distance

### 2.7.1 Calcul rapide de la distance

Lorsqu'un ensemble de pixels est marqué sur une image, le calcul de la distance euclidienne de tous les autres pixels à cet ensemble peut se faire de manière rapide [18]. L'algorithme en question peut s'adapter facilement à notre problème, être étendu au cas tridimensionnel et même être ajusté pour donner une distance précise dans le cas où le niveau 0 n'est pas situé exactement à des noeuds du maillage mais entre des noeuds. Il peut aussi fournir un lien vers les points du niveau 0 les plus proches d'un point donné, ce qui peut, comme nous l'avons vu, être utile pour étendre le calcul de  $\beta$  à tous les points du domaine. Il reste ensuite à savoir si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur du niveau 0.

La méthode proposée par Danielsson [18] est basée sur l'idée suivante: ne pas mémoriser en chaque point la distance à l'ensemble mais la distance horizontale et la distance verticale à l'ensemble.

Précisons les notations. Soit un ensemble  $I$  de pixels  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq M - 1$ ,  $0 \leq j \leq N - 1$ , et  $S$  un sous ensemble de  $I$ , typiquement un contour. On veut en chaque point de  $I$  calculer la distance euclidienne au point de  $S$  le plus proche. On munit les couples de la norme euclidienne:  $|(i, j)| = \sqrt{i^2 + j^2}$ . Une façon naïve consisterait, pour chaque point de  $I \setminus S$ , à parcourir tout  $S$  pour trouver le point le plus proche. Cette méthode a un coût en  $O(n^3)$  si  $M$ ,  $N$  et  $|S|$  sont de l'ordre de  $n$ . Danielsson procède en trois étapes seulement, une initialisation et deux balayages de l'image, soit un coût en  $O(n^2)$  seulement:

1. **Initialisation:** On mémorise les distances verticales et horizontales à  $S$  dans un tableau  $L(i, j)$ . Initialement:

$$\begin{aligned} L(i, j) &= (0, 0) \text{ pour } (i, j) \in S \\ L(i, j) &= (+\infty, +\infty) \text{ pour } (i, j) \notin S \end{aligned}$$

2. **Premier balayage:**

$$\begin{aligned} &(j = 1 \rightarrow N - 1) \\ &\quad (i = 0 \rightarrow M - 1) \\ &\quad L(i, j) = \min \begin{cases} L(i, j) \\ L(i - 1, j - 1) + (1, 1) \text{ (si } i > 0) \\ L(i, j - 1) + (0, 1) \\ L(i + 1, j - 1) + (1, 1) \text{ (si } i < M - 1) \end{cases} \\ &(i = 1 \rightarrow M - 1) \\ &\quad L(i, j) = \min \begin{cases} L(i, j) \\ L(i - 1, j) + (1, 0) \end{cases} \\ &(i = M - 2 \rightarrow 0) \\ &\quad L(i, j) = \min \begin{cases} L(i, j) \\ L(i + 1, j) + (1, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

3. **Deuxième balayage:**

$$\begin{aligned} &(j = N - 2 \rightarrow 0) \\ &\quad (i = 0 \rightarrow M - 1) \\ &\quad L(i, j) = \min \begin{cases} L(i, j) \\ L(i - 1, j + 1) + (1, 1) \text{ (si } i > 0) \\ L(i, j + 1) + (0, 1) \\ L(i + 1, j + 1) + (1, 1) \text{ (si } i < M - 1) \end{cases} \\ &(i = 1 \rightarrow M - 1) \\ &\quad L(i, j) = \min \begin{cases} L(i, j) \\ L(i - 1, j) + (1, 0) \end{cases} \\ &(i = M - 2 \rightarrow 0) \\ &\quad L(i, j) = \min \begin{cases} L(i, j) \\ L(i + 1, j) + (1, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

(Nous désignons ici par  $\min(L_1, \dots, L_n)$  celui des couples  $L_i$  dont la norme est minimale.) Après ces deux balayages, en chaque point  $(i, j)$  la distance à  $S$  est  $|L(i, j)|$ . La figure 2.10 donne un exemple d'application de l'algorithme.

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons adapté l'algorithme ainsi:

- **Extension tridimensionnelle:** Il suffit de faire deux passes dans la troisième dimension en calculant à chaque étape des deux passes la distance dans le plan correspondant par la méthode 2D. Au total  $O(n^3)$  opérations au lieu de  $O(n^5)$ !
- **Pointeur vers le point le plus proche:** on mémorise en plus de  $L(i, j)$  un  $P(i, j)$  à valeur dans  $\mathbf{Z}^2$  correspondant aux distances horizontale et verticale signées. Par exemple si  $L(i-1, j+1) + (1, 1)$  a été retenu comme nouvelle valeur de  $L(i, j)$  alors  $P(i, j)$  devient  $P(i-1, j+1) + (-1, 1)$ . Au final, le point de  $S$  le plus proche de  $(i, j)$  sera  $(i, j) + P(i, j)$ . Ce pointeur permet:
  - De calculer une distance “sub-voxelique” (voir point suivant)
  - De calculer dans certains cas  $\beta$  en des points où il n'a pas de sens (voir section 2.4)
- **Calcul d'une distance sub-voxelique:** le niveau zéro de  $\phi$  n'est pas situé aux pixels  $(i, j)$  eux-mêmes. En pratique il est extrait par une méthode comme les *Marching Cubes* [70] et, en plus de l'ensemble  $S$  des voxels dans lesquels  $\phi$  s'annule, on obtient, pour chaque  $(i, j, k) \in S$  un triangle  $T_{ijk}$  approximant au mieux le niveau 0. Disposant d'un pointeur vers le point le plus proche, il suffit d'approximer en  $(i, j, k)$  la distance au niveau 0 par celle au triangle pointé:

$$d((i, j, k), S) \approx d((i, j, k), T_{(i,j,k)+P(i,j,k)})$$

### 2.7.2 Restauration de la distance

Mais en réalité le vrai problème n'est pas là. Pour réinitialiser les bandes, il nous faut recalculer la distance au niveau zéro courant. D'autre part, nous avons déjà mentionné que la fonction  $\phi$  se dégradait au cours des itérations et qu'il est régulièrement nécessaire de la restaurer avant de poursuivre le processus. Le plus simple est évidemment de la réinitialiser à une fonction distance. Nous sommes donc ramenés exactement au problème suivant:

*Comment calculer la fonction distance à un ensemble défini comme étant le niveau 0 d'une fonction  $\phi$ , et ce de manière suffisamment précise pour que le niveau 0 de cette fonction distance reste cet ensemble?*

On peut évidemment extraire le niveau 0 avec une précision supérieure au pas du maillage, ce qui n'est d'ailleurs pas si facile, en 2D comme en 3D, car il faut reconstituer une information de contour ou de surface et pas seulement un ensemble brut de points. La méthode des *marching cubes* [70]

est ici toute indiquée. Puis il faudrait calculer la distance à cet ensemble de manière rapide [18] (voir section 2.7.1). C'est possible mais il y a beaucoup mieux à faire: il suffit de suivre les auteurs de [108] et d'appliquer l'EDP

$$\phi_t = \text{signe}(\phi)(1 - |\nabla\phi|)$$

à la fonction  $\phi$  à restaurer. En effet, cette EDP converge vers la fonction distance désirée.

Malheureusement, cette façon de faire déplace légèrement la position du niveau 0 à cause des imprécisions de la fonction signe. Une technique plus efficace [105] consiste à laisser évoluer  $\phi$  avec une vitesse normale  $\beta = 1$  et à noter les temps de passage aux noeuds, temps de passage qui ne sont autres que la distance au niveau 0, puis à recommencer avec  $\beta = -1$  pour obtenir les distances des points intérieurs. Cette dernière idée est très avantageuse:

- Elle ne déplace pas le niveau 0
- On peut utiliser les méthodes à progression rapide (section 2.6.2) qui, en outre, fournissent directement les temps de passage du front.
- On peut s'arrêter facilement à  $t = d_1$  dans le cas de l'algorithme à bandes.

**Remarque** C'est cette méthode que nous avons utilisée dans nos implémentations. Son application n'est pas complètement immédiate: pour enclencher l'algorithme à progression rapide, il faut connaître suffisamment de temps de passage passés ( $T \leq 0$ ) ainsi que les temps de passage de leurs voisins (voir section 2.6.2). Dans notre cas, les temps de passage ne sont autres que la fonction distance. Conclusion: *pour initialiser la restauration de la fonction distance par une méthode à progression rapide, il faut connaître la valeur de cette fonction distance à proximité du niveau zéro.* Nous avons donc décidé de résoudre le problème comme suit: nous restaurons la fonction distance en quatre phases:

1. Résolution par une méthode d'ensembles de niveau standard (à bande) de l'EDP  $\phi_t = -|\nabla\phi|$  jusqu'à avoir progressé d'au moins un voxel, c'est-à-dire en fait jusqu'à  $t = \sqrt{3}$ . Les temps de franchissement des points du maillage donnent les premières valeurs positives de la fonction distance.
2. Résolution par une méthode d'ensembles de niveau standard (à bande) de l'EDP  $\phi_t = |\nabla\phi|$  jusqu'à  $t = \sqrt{3}$ . Les opposés des temps de franchissement des points du maillage donnent les premières valeurs négatives de la fonction distance.
3. Résolution par une méthode à progression rapide initialisée par les valeurs précédentes de l'EDP  $\phi_t = -|\nabla\phi|$  jusqu'à avoir franchi tous les points positifs de la bande. Les temps de franchissement des points du maillage donnent les valeurs positives manquantes de la fonction distance.

4. Résolution par une méthode à progression rapide initialisée par les valeurs précédentes de l'EDP  $\phi_t = |\nabla\phi|$  jusqu'à avoir franchi tous les points négatifs de la bande. Les opposés des temps de franchissement des points du maillage donnent les valeurs négatives manquantes de la fonction distance.

**Autre méthodes** Citons enfin les travaux dans [107] dans lesquels on trouvera des extensions d'ordre supérieur de ces méthodes, extensions que l'on pourra utiliser si une très grande précision est nécessaire.

## 2.8 Conclusion

Nous venons de faire un tour d'horizon des méthodes numériques utilisées dans les chapitres suivants, essentiellement aux chapitres 3 et 6. Nous pouvons désormais nous tourner vers une application de ces méthodes d'ensembles de niveau à un problème central de la vision par ordinateur: la stéréovision.

$\infty$											
$\infty$											
$\infty$											
$\infty$	0,0										
0,0	$\infty$	0,0	$\infty$								
$\infty$	0,0	$\infty$	0,0	$\infty$							
$\infty$	$\infty$	0,0	0,0	0,0	$\infty$	0,0	0,0	0,0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0,0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$											
$\infty$											
$\infty$											
$\infty$											
2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0
2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,1	12,1	13,1
2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7,2	8,2	9,2	10,2	11,2	12,2	13,2
1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0
0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	1,0
1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0	1,0	1,1
1,1	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,1	2,1
2,1	1,1	0,1	0,1	1,0	0,0	1,0	0,1	0,1	1,1	2,1	2,2
2,2	1,2	0,2	0,2	1,1	0,1	1,1	0,2	0,2	1,2	2,2	3,2
2,3	1,3	0,3	2,2	1,2	0,2	1,2	2,2	0,3	1,3	2,3	3,3
2,0	3,0	4,0	5,0	4,4	1,6	4,4	4,3	3,3	2,3	1,3	0,3
2,1	2,2	3,2	3,3	4,3	1,5	4,3	3,3	3,2	2,2	1,2	0,2
1,1	2,1	2,2	3,2	0,4	1,4	0,4	3,2	2,2	2,1	1,1	0,1
1,0	1,1	2,1	2,2	0,3	1,3	0,3	2,2	2,1	1,1	1,0	0,0
0,0	1,0	1,1	0,2	0,2	1,2	0,2	0,2	1,1	1,0	0,0	1,0
1,0	0,0	1,0	0,1	0,1	1,1	0,1	0,1	1,0	0,0	1,0	1,1
1,1	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,1	2,1
2,1	1,1	0,1	0,1	1,0	0,0	1,0	0,1	0,1	1,1	2,1	2,2
2,2	1,2	0,2	0,2	1,1	0,1	1,1	0,2	0,2	1,2	2,2	3,2
2,3	1,3	0,3	2,2	1,2	0,2	1,2	2,2	0,3	1,3	2,3	3,3
2.00	3.00	4.00	5.00	5.66	6.08	5.66	5.00	4.24	3.61	3.16	3.00
2.24	2.83	3.61	4.24	5.00	5.10	5.00	4.24	3.61	2.83	2.24	2.00
1.41	2.24	2.83	3.61	4.00	4.12	4.00	3.61	2.83	2.24	1.41	1.00
1.00	1.41	2.24	2.83	3.00	3.16	3.00	2.83	2.24	1.41	1.00	0.00
0.00	1.00	1.41	2.00	2.00	2.24	2.00	2.00	1.41	1.00	0.00	1.00
1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.41	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.41
1.41	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.41	2.24
2.24	1.41	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.41	2.24	2.83
2.83	2.24	2.00	2.00	1.41	1.00	1.41	2.00	2.00	2.24	2.83	3.61
3.61	3.16	3.00	2.83	2.24	2.00	2.24	2.83	3.00	3.16	3.61	4.24

FIG. 2.10 – Les 3 étapes du calcul de distance: initialisation, première passe de haut en bas, deuxième passe de bas en haut. Le dernier tableau donne les distances effectivement calculées

## Chapitre 3

# Stéréovision et EDP

---

### Résumé

---

*Ce chapitre expose une nouvelle méthode géométrique de résolution du problème de la stéréoscopie à partir d'un nombre quelconque d'images (plus grand ou égal à deux). Elle est basée sur un principe variationnel que doivent satisfaire les surfaces des objets de la scène ainsi que leurs images. Les équations d'Euler-Lagrange déduites de ce principe variationnel fournissent un ensemble d'EDP's qu'on utilise pour déformer un ensemble de surfaces initiales qui vont alors se déplacer vers les objets à détecter. La résolution de ce système d'EDP par des méthodes d'iso-surfaces permet potentiellement de réaliser de manière efficace et robuste le processus d'évolution des surfaces tout en prenant en compte automatiquement les problèmes de changement de topologie durant la déformation ce qui permet de traiter le cas d'objets multiples. La surface initiale n'a pas besoin d'être proche des objets. Le problème des occlusions est pris en compte. Les résultats d'une implémentation de notre théorie sont présentés sur des images synthétiques et réelles. Ils sont consultables à l'adresse:*

`http://cermics.enpc.fr/~keriven/stereo.html`

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction et préliminaires</b>	<b>60</b>
<b>3.2</b>	<b>Un modèle avec objets et critère simples</b>	<b>65</b>
<b>3.3</b>	<b>Un meilleur critère de mise en correspondance</b>	<b>67</b>
3.3.1	Fonctionnelle de corrélation fronto-parallèle	67
3.3.2	Prise en compte du plan tangent aux objets	69
<b>3.4</b>	<b>Un modèle plus raffiné</b>	<b>75</b>
<b>3.5</b>	<b>Le cas bidimensionnel</b>	<b>79</b>
3.5.1	Implémentation	79
3.5.2	Résultats	81
<b>3.6</b>	<b>Algorithme tridimensionnel</b>	<b>83</b>

3.6.1	Implémentation . . . . .	83
3.6.2	Recherche d'efficacité . . . . .	85
3.6.3	Résultats . . . . .	86
<b>3.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>88</b>

---

### 3.1 Introduction et préliminaires

L'idée qui est développée dans ce chapitre est que les méthodes d'évolution de courbes et de surfaces qui ont été introduites en vision artificielle sous le nom de *snakes* [58], puis reformulées par Caselles, Kimmel et Sapiro [14] et Kichenassamy et al. [60] dans le contexte des courbes évoluant selon des EDP et dont nous venons d'étudier les méthodes de simulation numériques, peuvent être efficacement utilisées pour résoudre des problèmes de vision tridimensionnelle tels que la stéréo et l'analyse du mouvement.

Nous présentons ici une analyse mathématique du problème de la stéréovision dans ce contexte, ainsi qu'une implémentation. Ces travaux ont été publiés dans [36] et [37].

Le problème des évolutions de courbes régies par des EDP a été récemment étudié, tant du point de vue théorique [45, 47, 98] que du point de vue numérique [78, 104, 106] avec le développement des méthodes d'ensembles de niveau présentée au chapitre 2, robustes et efficaces. Sethian [103] propose un bon exposé de ces méthodes et ainsi que de bon nombre de leurs applications.

Le problème des évolutions de surfaces a reçu moins d'attention, même si quelques résultats préliminaires ont été obtenus [106, 15].

L'approche que nous suivrons pour nous attaquer au problème de la stéréo sous cet angle est, bien évidemment, variationnelle. En bref, nous décrivons le problème de la stéréo (qui sera défini plus précisément dans la suite) comme la minimisation d'une fonctionnelle (nous explorerons plusieurs de ces fonctionnelles) par rapport à certains paramètres (décrivant la géométrie de la scène); nous calculerons les équations de Euler-Lagrange de cette fonctionnelle, obtenant ainsi un ensemble de conditions nécessaires, en pratique un ensemble d'équations différentielles, que nous résoudrons comme un problème d'évolution par une méthode d'ensembles de niveau.

La stéréovision est un problème qui a reçu une attention considérable depuis des dizaines d'années en psychophysique, en neuropsychologie et, plus récemment, en vision par ordinateur. Il est impossible de citer ici tous les travaux publiés sur le sujet et nous indiquerons simplement au lecteur quelques livres de base [57, 50, 53, 54, 32]. Pour expliquer le problème d'un point de vue informatique, nous nous référerons à la figure 3.1. Deux images ou plus du monde réel sont prises simultanément. Étant données ces images, le problème est de retrouver la géométrie de la scène observée. En supposant, ce que nous ferons ici, que sont connus les positions et les orientations relatives

des caméras ainsi que leurs paramètres internes (on dit que les caméras sont calibrées [32]), le problème revient essentiellement (mais pas seulement) à établir les correspondances entre les vues: on parle du problème de mise en correspondance. Ce problème est habituellement résolu en définissant une fonctionnelle de mise en correspondance dont on essaie de trouver les extrema. Une fois qu'un pixel de la vue  $i$  a été identifié comme étant l'image du même point 3D qu'un autre pixel de la vue  $j$ , le point 3D peut être reconstruit en intersectant les rayons optiques correspondants (revoir figure 3.1).

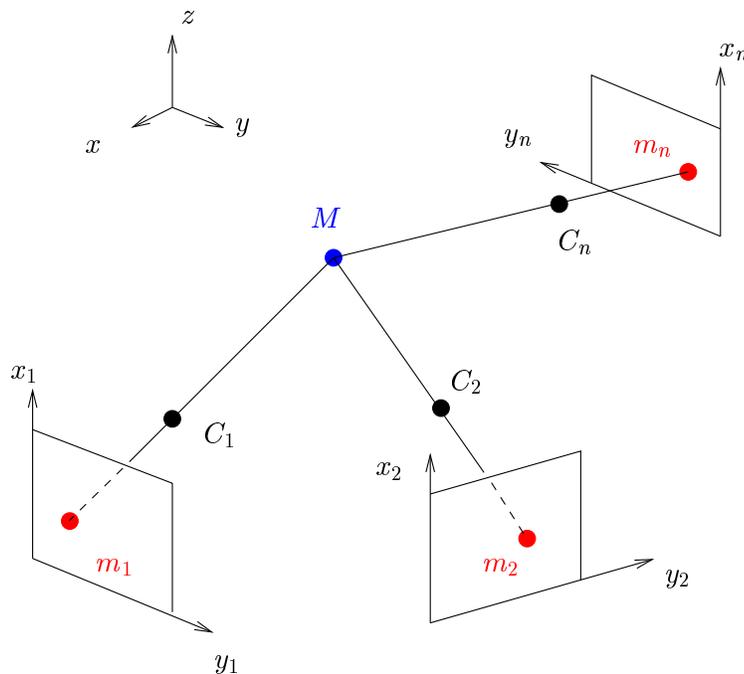


FIG. 3.1 – Le problème de la stéréovision multicaaméra est, pour un pixel donné  $m_1$  de l'image 1, de trouver le pixel  $m_2$  correspondant dans l'image 2,  $\dots$ , le pixel  $m_n$  correspondant dans l'image  $n$ , c'est-à-dire ceux qui sont les images du même point 3D  $M$ . Une fois qu'une telle correspondance est établie, le point  $M$  peut être reconstruit en intersectant les rayons optiques  $\langle m_i, C_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Avant d'aller plus loin, nous devons être plus précis sur la façon dont les images sont formées. Nous assumerons ici que les caméras réalisent une projection perspective du monde 3D sur un plan rétinien comme il est montré figure 3.2. Le centre optique, noté  $C$  sur la figure, est le centre de la projection et l'image du point 3D  $M$  est le pixel  $m$ , intersection du rayon optique  $\langle C, m \rangle$  et du plan rétinien  $\mathcal{R}$ . Comme il est indiqué dans de nombreux papiers récents en vision par ordinateur, cette opération peut être

décrite élégamment par une opération matricielle en géométrie projective. Les coordonnées projectives du pixel  $m$  (un vecteur  $3 \times 1$ ) sont obtenues multipliant une matrice  $3 \times 4$   $\mathbf{P}_1$  par les coordonnées projectives du point 3D  $M$  (un vecteur  $4 \times 1$ ). Si nous écrivons la matrice  $\mathbf{P}_1$  dans le système de coordonnées  $(C, x, y, z)$  montré figure 3.2, elle prend la forme très simple suivante:

$$\mathbf{P}_1 = [\mathbf{I}_3 \mathbf{0}]$$

où  $\mathbf{I}_3$  est la matrice identité  $3 \times 3$ . Si nous déplaçons maintenant la caméra d'un mouvement rigide décrit par une rotation de matrice  $\mathbf{R}$  et une translation de vecteur  $\mathbf{t}$ , l'expression de la matrice  $\mathbf{P}$  devient:

$$\mathbf{P}_2 = [\mathbf{R}^T - \mathbf{R}^T \mathbf{t}]$$

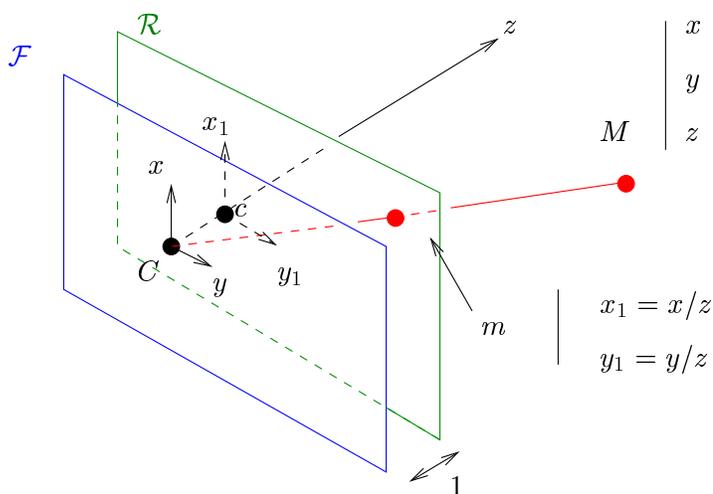


FIG. 3.2 – Le plan focal  $(x, y)$  est parallèle au plan rétinien  $(x_1, y_1)$  à une distance 1 de celui-ci.

Il est aisé de s'apercevoir que pour un point donné  $m_1$  de l'image 1, le point correspondant  $m_2$  dans l'image 2 est nécessairement situé sur une droite  $e(m_1)$  appelée, *droite épipolaire*, qui est l'intersection du plan rétinien de l'image 2 avec le plan défini par  $m_1$  et les deux centres optiques  $C_1$  et  $C_2$  (voir figure 3.3). Cette contrainte géométrique, la *contrainte épipolaire* est à la base de méthodes classiques [9] de résolution du problème de stéréovision dont l'idée est d'extraire des primitives (points, coins, segments, contours, etc.) des images et de les mettre en correspondance. Pour une primitive donnée de l'image 1, seules certaines primitives de l'image 2 peuvent lui correspondre: celles situées (ou proches) de la droite épipolaire associée à cette première primitive. Une fois les correspondances établies, il n'y a plus qu'à reconstruire

les primitives 3D dont elles sont les images. Un des inconvénients de ces méthodes est de ne pas obtenir une carte 3D dense des objets mais seulement un ensemble de points ou de segments dans l'espace qu'il faut alors regrouper et interpréter [68] (voir les figures 1.5 et 1.6 du chapitre 1).

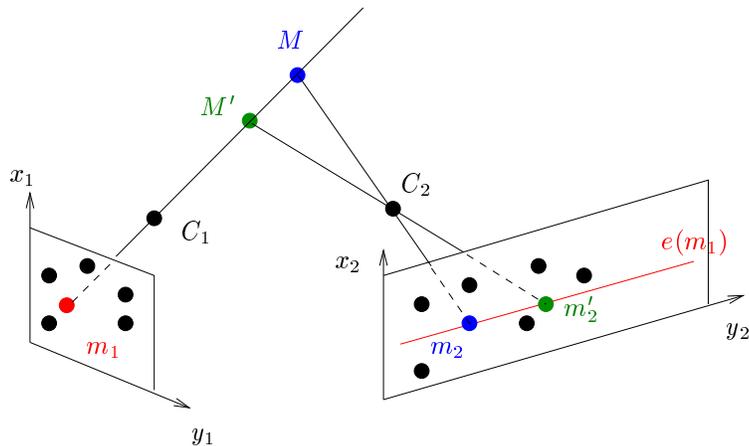


FIG. 3.3 – Pour un point  $m_1$  donné de l'image 1, le point correspondant de l'image 2 ne peut qu'être situé sur l'épipolaire  $e(m_1)$

Ces préliminaires à l'esprit, nous sommes désormais prêts pour notre programme qui se fera en progressant suivant deux axes dépendants. Le premier axe est celui de la complexité de l'objet, le second celui de la complexité de la fonctionnelle de mise en correspondance. Ces deux axes sont dépendants dans le sens que progresser suivant un des axes imposera généralement une progression l'autre.

Dans les deux premières sections, nous considérerons un modèle d'objet simple qui est en fait bien adapté au cas de la stéréovision binoculaire pour lequel il est naturel que les objets de la scène soient considérés mathématiquement comme formant le graphe d'une fonction lisse inconnue (la *fonction de profondeur*, dans le langage de la vision par ordinateur). Section 3.2, nous considérerons un critère de mise en correspondance extrêmement simplifié qui nous permettra de donner au lecteur une approche des idées que nous essayons de développer ici. Nous continuerons section 3.3 avec un critère classique et plus raffiné de mise en correspondance qui est au coeur des techniques connues en vision par ordinateur sous le terme de méthodes par *corrélation*. Dans le cadre de ce modèle, nous étudierons deux modèles d'objets. Le premier modèle suppose qu'en chaque point de la scène, le plan tangent à l'objet est parallèle au plan tangent d'une des caméras (il s'agit de l'hypothèse dite *fronto-parallèle*). Le second modèle relaxe cette hypothèse en introduisant un plan tangent quelconque en chaque point.

Section 3.4, nous introduirons un modèle de forme plus général, dans le-

quel nous ne supposerons plus que les objets sont le graphe d'une fonction mais modéliserons ceux-ci comme un ensemble de surfaces lisses tridimensionnelles. Le dernier pas serait de relaxer cette hypothèse de régularité mais nous garderons cette étape pour des travaux futurs.

Précisons maintenant quelques définitions et quelques notations. Les images sont notées  $I_k$ ,  $k$  étant un entier indiquant la caméra avec laquelle l'image a été acquise. Elles sont supposées suffisamment régulières (c'est-à-dire  $C^2$ , deux fois continûment différentiables) en tant que fonctions des pixels  $m_k$  dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé  $(x_k, y_k)$  supposé connu. Nous notons  $I_k(m_k)$  ou  $I_k(x_k, y_k)$  la valeur de l'intensité de l'image  $k$  au pixel  $m_k$ . Nous utiliserons les première et deuxième dérivées de ces fonctions, c'est-à-dire le gradient  $\nabla I_k$ , un vecteur  $2 \times 1$  égal à  $[\frac{\partial I_k}{\partial x_k}, \frac{\partial I_k}{\partial y_k}]^T$ , et le Hessien  $\mathbf{H}_k$ , une matrice symétrique  $2 \times 2$ .

Les pixels des images sont considérés comme des fonctions de la géométrie 3D de la scène, c'est-à-dire d'un point 3D  $M$  à la surface d'un objet de la scène, et du vecteur normal unitaire  $\mathbf{N}$  à cette surface.

Les vecteurs et les matrices seront généralement indiqués en gras (par exemple  $\mathbf{x}$ ). Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sera noté  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ . Le produit vectoriel de deux vecteurs  $3 \times 1$   $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sera noté  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  ou  $[\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{y}$ , où  $[\mathbf{x}]_{\times}$  est une matrice antisymétrique.

Nous ferons un usage extensif du calcul différentiel et de la règle de chaîne pour calculer les dérivées de la composition de fonctions. Nous rappelons au lecteur que la dérivée d'un scalaire par rapport à un vecteur  $n \times 1$  est un vecteur  $1 \times n$ , c'est-à-dire une forme linéaire sur  $\mathbf{R}^n$ , que la dérivée seconde d'un scalaire par rapport à ce vecteur est aussi appelée son Hessien et que c'est une forme bilinéaire symétrique représentée par une matrice symétrique  $n \times n$ . La dérivée d'un vecteur  $n \times 1$  par rapport à un vecteur  $p \times 1$  est une matrice  $n \times p$ . Nous aurons aussi besoin des dérivées d'une matrice par rapport à des vecteurs et à des matrices qui sont des tenseurs mais nous pourrons éviter l'usage du calcul tensoriel. Les dérivées partielles seront indiquées soit par le symbole  $\partial$ , par exemple  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ , soit par un indice, par exemple  $f_{\mathbf{x}}$ .

Notre approche est une extension de travaux précédents par Robert et al. et Robert et Deriche, [90, 89], où l'idée d'utiliser une approche variationnelle pour résoudre le problème de la stéréo avait été proposée, d'abord dans le cadre de la régularisation classique de Tikhonov et ensuite par l'utilisation de fonctions plus adaptées à la préservation des discontinuités. Nous nous différencions de ces travaux par les points suivants:

- nous ne supposons pas que les objets sont le graphe d'une fonction de profondeur définie dans le plan focal de la première caméra ce qui nous permet de prendre en compte un nombre quelconque de caméras
- nous prenons en compte la déformation projective due à l'orientation du plan tangent à l'objet, comme dans [23]
- nous utilisons une approche à base de surface déformable avec mesure

d'un critère intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de la paramétrisation des objets, qui peut de ce fait traiter automatiquement les discontinuités telles que les objets multiples et même le problème de la visibilité et des occultations.

Notre travail peut être vu comme une extension de l'approche proposée dans [21] dans laquelle les auteurs se limitent au cas binoculaire, recherchent les coupes d'un objet avec un plan fixe et ne prennent en compte ni l'orientation du plan tangent ni les occultations.

### 3.2 Un modèle avec objets et critère simples

Cette section introduit par le biais d'un modèle simple quelques idées de bases de notre travail. Nous supposons, et il s'agit de la première hypothèse importante, que les objets, qui sont observés par un système de stéréo binoculaire, sont modélisés par le graphe d'une fonction régulière inconnue  $z = f(x, y)$  définie dans le plan rétinien de la première caméra et que nous cherchons à estimer. Un point  $M$  de coordonnées  $[x, y, f(x, y)]^T$  est vu comme deux pixels  $m_1$  et  $m_2$  dont les coordonnées  $(g_i(x, y), h_i(x, y))$ ,  $i = 1, 2$  peuvent être aisément calculées comme fonctions de  $x, y, f(x, y)$  et des coefficients des matrices de projection  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ . Soient  $I_1$  et  $I_2$  les intensités des deux images. Supposons, et c'est là la deuxième hypothèse importante, que les objets sont parfaitement lambertiens, c'est-à-dire qu'ils réémettent la même quantité de lumière dans toutes les directions, alors nous devons avoir  $I_1(m_1) = I_2(m_2)$  pour tous les pixels  $m_1$  et  $m_2$  en correspondance, c'est-à-dire les pixels qui sont images d'un même point 3D.

Ce raisonnement conduit naturellement au problème variationnel consistant à trouver une fonction  $f$  convenable, définie, pour être rigoureux, sur un sous ensemble ouvert du plan focal de la première caméra, et qui minimise l'intégrale suivante:

$$\begin{aligned} C_1(f) &= \int \int (I_1(m_1(x, y)) - I_2(m_2(x, y)))^2 dx dy \\ &= \int \int {}_1\Phi(f, x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (3.1)$$

calculée sur l'ouvert précédent. Notre premier problème variationnel est donc de trouver une fonction  $f$  dans un espace fonctionnel adéquat qui minimise la mesure d'erreur  $C_1(f)$ . L'équation d'Euler-Lagrange correspondante s'obtient directement:

$$(I_1 - I_2)(\nabla I_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} - \nabla I_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f}) = 0 \quad (3.2)$$

Les quantités  $\frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f}$  et  $\frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f}$  sont des fonctions de  $f$  qui se calculent aisément. Les termes qui font intervenir  $I_1$  et  $I_2$  sont calculés à partir des images. Pour résoudre (3.2) nous pouvons adopter un certain nombre de stratégies.

Une stratégie standard consiste à considérer la fonction  $f$  comme dépendant aussi du temps ( $f(x, y, t)$ ) et à résoudre l'EDP suivante:

$$f_t = \varphi(f)$$

où  $\varphi(f)$  est le terme de gauche de l'équation (3.2), sous certaines conditions initiales  $f(x, y, 0) = f_0(x, y)$ .

Nous voyons donc apparaître pour la première fois l'idée que la forme des objets de la scène, décrite ici par la fonction  $f$ , est obtenue en laissant évoluer dans le temps une surface, ici  $z = f(x, y, t)$ , en partant d'une configuration initiale,  $z = f(x, y, 0)$ , l'évolution suivant une EDP, pour converger finalement vers la forme réelle des objets quand le temps tend vers l'infini. Cette convergence est déterminée par les données, c'est-à-dire les images, suivant le critère d'erreur (3.1) ou le terme d'Euler-Lagrange  $\varphi(f)$ . Il est connu que sans précaution supplémentaire, par exemple en rajoutant un terme régularisant à (3.1), la solution  $f$  ne sera probablement pas lisse et par conséquent que tout bruit dans les images peut rendre la solution très différente de la forme réelle des objets. C'est plus ou moins l'approche adoptée dans [90, 89]. Nous différencierons la solution à ce problème jusqu'à la section 3.4 où nous le résoudrons en fait d'une façon autre qu'en rajoutant un terme de régularisation à  $C_1(f)$ , bien qu'équivalente.

Une autre stratégie consiste à appliquer l'idée des ensembles de niveau introduite par Osher et Sethian [78, 103]. Considérons une famille de surfaces  $S$  définie par  $\mathbf{S}(x, y, t) = [x, y, f(x, y, t)]^T$ .  $x$  et  $y$  servent à paramétrer la surface,  $t$  est le temps. La normale unitaire à cette surface est le vecteur  $\mathbf{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}[\nabla f^T, 1]^T$ , le vecteur vitesse est  $\mathbf{S}_t = [0, 0, f_t]^T$  et donc l'évolution de la surface peut s'écrire

$$\mathbf{S}_t = \frac{\varphi(f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\mathbf{N} \quad (3.3)$$

Cette expression de l'évolution de la surface conduit à une application directe des méthodes par ensembles de niveau. Considérons une fonction  $u(x, y, z, t)$  dont le niveau zéro est la surface  $S$ , c'est-à-dire qu'à chaque instant  $t$ , l'ensemble des points  $(x, y, z)$  tels que  $u(x, y, z, t) = 0$  est exactement la surface  $S$ . Notez que la fonction  $u$  peut être considérée comme une séquence temporelle d'images volumétriques. La question est alors: sachant que l'évolution temporelle de  $S$  est donnée par (3.3), quelle doit être l'évolution de  $u$ ? Nous avons vu au chapitre 2 que la réponse à cette question, donnée dans [78], est:

$$u_t = \frac{\varphi(f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} |\nabla u|$$

expression dans laquelle  $\nabla u$  est le gradient de  $u$  par rapport à ses trois premières variables. (Le lecteur attentif aura remarqué la disparition du signe

moins par rapport à l'équation (2.4). Nous avons choisi pour ce chapitre une fonction  $u$  *négative à l'extérieur*.

Il y a ici quelques points délicats. Le premier est que les méthodes par ensembles de niveau ont été conçues pour des variétés fermées (courbes ou surfaces par exemple) et qu'ici la surface  $S$ , définie par un graphe, n'est en général pas fermée. Ce problème peut être résolu, comme par exemple dans [17, 103]. Le second point est que le coefficient du terme  $|\nabla u|$  dans l'équation précédente est seulement défini sur la surface  $S$  et non dans tout le volume  $(x, y, z)$ . Or, ce terme est nécessaire en tout point pour calculer l'évolution de  $u$ .

Nous ne nous étendrons pas sur ce dernier sujet car il sera résolu quand nous progresserons vers des modèles plus avancés.

### 3.3 Un meilleur critère de mise en correspondance

Il est clair que la mesure d'erreur (3.1) est trop simpliste pour les applications réelles. Nous pouvons étendre ceci d'au moins deux manières. La première consiste à remplacer la différence des intensités comme mesure d'erreur par une mesure de corrélation sous l'hypothèse que la scène est faite de plans fronto-parallèles. La deuxième consiste à relaxer cette dernière hypothèse en prenant en compte l'orientation du plan tangent à la surface des objets en chaque point. Dans le premier cas, nous progressons suivant l'axe de complexité du critère de mise en correspondance, dans le deuxième cas suivant les deux axes de complexité de forme des objets et du critère de mise en correspondance.

Nous explorons ces voies dans les deux sections suivantes.

#### 3.3.1 Fonctionnelle de corrélation fronto-parallèle

A chaque paire de valeurs  $(x, y)$ , correspond un point tridimensionnel  $M$ ,  $\mathbf{M} = [x, y, f(x, y)]^T$  qui définit deux points sur les images  $m_1$  et  $m_2$  comme dans la section précédente. Nous pouvons alors définir classiquement la corrélation non normalisée entre les images  $I_1$  et  $I_2$  aux points  $m_1$  et  $m_2$ . Nous notons cette corrélation  $\langle I_1, I_2 \rangle(f, x, y)$  pour marquer son analogie avec un produit scalaire et le fait qu'elle dépend de  $M$ :

$$\langle I_1, I_2 \rangle(f, x, y) = \frac{1}{4pq} \int_{-p}^{+p} \int_{-q}^{+q} (I_1(m_1 + m) - \overline{I_1}(m_1)) (I_2(m_2 + m) - \overline{I_2}(m_2)) dm, \quad (3.4)$$

équation dans laquelle les moyennes  $\overline{I_1}$  et  $\overline{I_2}$  sont définies naturellement par:

$$\overline{I_k}(m_k) = \frac{1}{4pq} \int_{-p}^{+p} \int_{-q}^{+q} I_k(m_k + m') dm' \quad k = 1, 2 \quad (3.5)$$

Enfin, nous notons  $|I|^2$  la quantité  $\langle I, I \rangle$ .

L'utilisation d'un critère de corrélation possède entre autres l'avantage sur une simple mesure d'erreur, telle que la mesure précédente, d'être insensible à un changement d'échelle de l'intensité des images. Il n'est donc pas pénalisé par l'utilisation de caméras aux courbes de réponse différentes, ou par un changement d'éclairage ambiant entre deux prises de vues dans le cas de prises de vues non simultanées.

On remarquera que  $\langle I_1, I_2 \rangle = \langle I_2, I_1 \rangle$ .

Pour simplifier les notations, nous écrirons  $\int^*$  à la place de  $\frac{1}{4pq} \int_{-p}^{+p} \int_{-q}^{+q}$ . Nous définissons alors une fonctionnelle de mise en correspondance comme l'intégrale par rapport à  $x$  et  $y$  de l'opposé du score de corrélation croisée normalisé  $-\frac{\langle I_1, I_2 \rangle}{|I_1| \cdot |I_2|}$ :

$$C_2(f) = - \int \int \frac{\langle I_1, I_2 \rangle}{|I_1| \cdot |I_2|} dx dy = \int \int {}_2\Phi(f, x, y) dx dy \quad (3.6)$$

l'intégrale étant calculée, comme dans la section précédente, sur un sous ensemble ouvert du plan focal de la première caméra. La nouvelle fonctionnelle  ${}_2\Phi = -\frac{\langle I_1, I_2 \rangle}{|I_1| \cdot |I_2|}(f, x, y)$  est une quantité comprise entre -1 et 1, -1 indiquant un maximum de corrélation. Nous devons calculer sa dérivée par rapport à  $f$  pour obtenir l'équation d'Euler-Lagrange du problème. Les calculs sont simples mais quelque peu fastidieux. On peut d'abord voir que  ${}_2\Phi_f$  est la somme de deux termes:

$$\frac{(|I_1| \cdot |I_2|)_f}{|I_1|^2 \cdot |I_2|^2} \langle I_1, I_2 \rangle - \frac{1}{|I_1| \cdot |I_2|} \langle I_1, I_2 \rangle_f$$

Les résultats nécessaires au calcul de  $\langle I_1, I_2 \rangle_f$  et de  $(|I_1| \cdot |I_2|)_f$  sont résumés dans le lemme suivant, prouvé dans l'annexe A.1.

**Lemme 2** *Les dérivées partielles  $\langle I_1, I_2 \rangle_f$  et  $|I_k|_f$   $k = 1, 2$  sont données par les formules:*

$$\langle I_1, I_2 \rangle_f = \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_1, I_2 \rangle + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \langle I_1, \nabla I_2 \rangle \quad (3.7)$$

$$|I_k| \cdot |I_k|_f = \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_k, I_k \rangle \quad k = 1, 2 \quad (3.8)$$

où les expressions complètes des quantités  $\langle \nabla I_1, I_2 \rangle$ ,  $\langle I_1, \nabla I_2 \rangle$  et  $\langle \nabla I_k, I_k \rangle$  peuvent être trouvées dans l'annexe A.1.

Nous pourrions alors procéder à la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange comme décrit dans la section précédente. Nous ne poursuivrons toutefois pas cette tâche ici et allons plutôt explorer une meilleure fonctionnelle.

### 3.3.2 Prise en compte du plan tangent aux objets

Nous allons maintenant prendre en compte le fait que la fenêtre de corrélation centrée en  $m_2$  n'est pas rectangulaire mais est l'image dans la deuxième vue de la reprojektion sur le plan tangent à l'objet au point  $M = (x, y, f(x, y))$  de la fenêtre de corrélation rectangulaire centrée en  $m_1$  (voir figure 3.4). L'idée est ici que nous approximations l'objet  $S$  au voisinage de  $M$  par son plan tangent sans supposer comme précédemment que ce plan est fronto-parallèle ni que les plans rétiniens des deux caméras sont identiques.

Étudions tout d'abord la correspondance induite entre ces deux images par ce plan tangent :

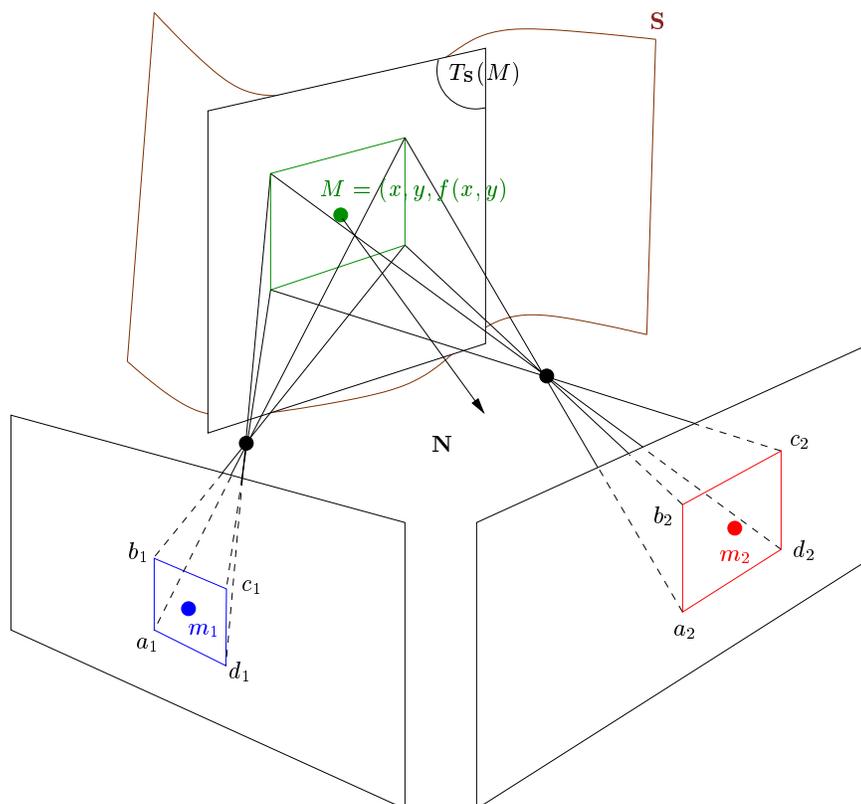


FIG. 3.4 – La fenêtre rectangulaire  $(a_1b_1c_1d_1)$  dans la première image est projetée sur le plan tangent  $\mathbf{T}_S$  à l'objet  $S$  au point  $M$  et reprojétée sur le plan rétinien de la seconde caméra où elle n'est en général plus rectangulaire. La distorsion entre  $(a_1b_1c_1d_1)$  et  $(a_2b_2c_2d_2)$  peut être décrite par une transformation projective fonction de  $M$  et de la normale  $\mathbf{N}$  à la surface de l'objet.

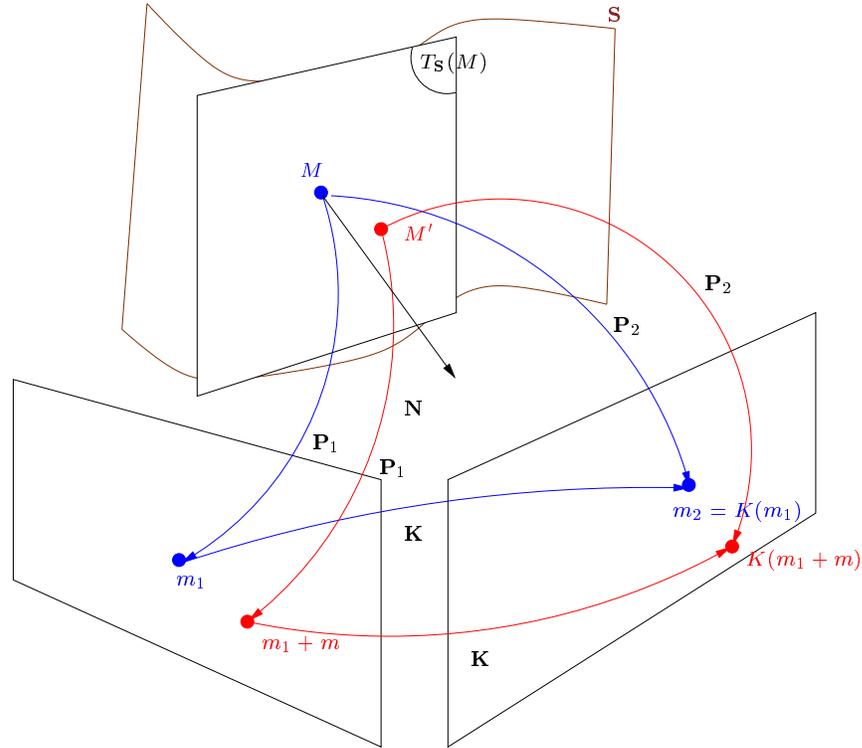


FIG. 3.5 – Les points de l'image 1 et leurs correspondants de l'image 2, images de points 3D situés dans un même plan (dans notre cas le plan tangent), sont reliés par une homographie  $K$

### Correspondance entre deux images induite par un plan

Considérons un plan d'équation  $\mathbf{N}^T \mathbf{M} - d = 0$  dans le système de coordonnées de la première caméra.  $d$  est la distance algébrique entre l'origine des coordonnées et ce plan et  $\mathbf{N}$  est le vecteur unitaire normal au plan. Ce plan induit une transformation projective entre les deux images. Cette correspondance joue un rôle essentiel dans la suite.

Pour voir pourquoi nous obtenons une transformation projective, prenons  $M$  un point 3D de ce plan. Soient  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  les deux vecteurs 3D représentant ce point dans les systèmes de coordonnées attachés respectivement aux deux caméras. Ces deux vecteurs  $3 \times 1$  sont en fait les vecteurs coordonnées des deux pixels  $m_1$  et  $m_2$  en tant que points projectifs (voir section 3.1). D'autre part, ils sont liés par l'expression

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{R}^T (\mathbf{M}_1 - \mathbf{t})$$

Puisque  $M$  appartient au plan  $\mathbf{N}^T \mathbf{M}_1 = d$ , nous avons donc :

$$\mathbf{M}_2 = \left( \mathbf{R}^T - \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{t} \mathbf{N}^T}{d} \right) \mathbf{M}_1$$

ce qui exprime précisément le fait que les deux pixels  $m_1$  et  $m_2$  sont liés par une homographie, ou transformation projective  $K$ . Ceci n'a rien d'étonnant puisque c'est une propriété connue qu'un objet tridimensionnel plan se projette sur deux caméras différentes en deux images reliées par une homographie (figure 3.5). Nous utiliserons d'ailleurs cette propriété, ou plus exactement son approximation affine, dans une expérience de classification d'objets section 6.4.4. La matrice  $3 \times 3$  représentant cette homographie est  $(\mathbf{R}^T - \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{t} \mathbf{N}^T}{d})$ . Cette transformation est bijective sauf lorsque le plan passe par l'un des centres optiques auquel cas elle devient dégénérée. Nous supposons que ce n'est pas le cas. Par ailleurs, puisque la matrice  $K$  n'est définie qu'à un facteur multiplicatif près, nous pouvons aussi bien la choisir égale à :

$$\mathbf{K} = d\mathbf{R}^T - \mathbf{R}^T \mathbf{t} \mathbf{N}^T \quad (3.9)$$

### Le nouveau critère et son équation d'Euler-Lagrange

Nous venons de voir que le plan tangent induisait une homographie entre les deux plans rétinien. C'est la base de la méthode proposée dans [21] bien que pour un but tout à fait différent. La fenêtre à laquelle nous faisons allusion dans l'introduction de cette section est bien évidemment l'image par cette transformation de la fenêtre rectangulaire de l'image 1. Cette homographie est fonction du point  $M$  et de la normale à l'objet en  $M$ . Elle est donc fonction de  $f$  et de  $\nabla f$ , ce que nous marquerons en écrivant  $K = K(f, \nabla f)$ . Elle satisfait la condition  $K(m_1) = m_2$ . Nous devons désormais modifier le produit scalaire (3.4) comme suit :

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle (f, \nabla f, x, y) = & \int^* (I_1(m_1 + m) - \overline{I_1}(m_1)) \\ & (I_2(K(m_1 + m)) - \overline{I_2}(m_2)) dm, \end{aligned} \quad (3.10)$$

On remarquera que la définition de  $\langle I_1, I_2 \rangle$  n'est plus symétrique, à cause de  $K$ . Pour la rendre à nouveau symétrique, nous devrions le définir par :

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle (f, \nabla f, x, y) = & \\ & \int^* (I_1(m_1 + m) - \overline{I_1}(m_1))(I_2(K(m_1 + m)) - \overline{I_2}(m_2)) dm \\ & + \int^* (I_1(K^{-1}(m_2 + m')) - \overline{I_1}(m_1))(I_2(m_2 + m') - \overline{I_2}(m_2)) dm' \end{aligned} \quad (3.11)$$

La définition (3.5) de  $\overline{I}_1$  (resp. de  $\overline{I}_2$ ) n'est pas modifiée dans la première (resp. dans la seconde) intégrale du membre de droite, alors que celle de  $\overline{I}_2$  (resp. de  $\overline{I}_1$ ), dans ces mêmes intégrales, doivent être modifiées comme suit:

$$\begin{aligned}\overline{I}_2(m_2) &= \int^* I_2(K(m_1 + p)) dp \\ \overline{I}_1(m_1) &= \int^* I_1(K^{-1}(m_2 + p')) dp'\end{aligned}\tag{3.12}$$

Dans la mesure où cette nouvelle définition ne modifie pas de façon fondamentale les idées exposées ici mais rendent les calculs et les notations plus complexes, nous supposons par la suite que c'est la définition (3.10) qui est utilisée, tout en gardant à l'esprit qu'en pratique c'est (3.11) qui devrait l'être.

Nous voulons maintenant minimiser la mesure d'anti-corrélation suivante:

$$\begin{aligned}C_3(f, \nabla f) &= - \int \int \frac{\langle I_1, I_2 \rangle}{|I_1| \cdot |I_2|} (f, \nabla f, x, y) dx dy \\ &= \int \int {}_3\Phi(f, \nabla f, x, y) dx dy\end{aligned}\tag{3.13}$$

Puisque la fonctionnelle  ${}_3\Phi$  dépend désormais de  $f$  et de  $\nabla f$ , ses équations d'Euler-Lagrange équations s'écrivent  ${}_3\Phi_f - \text{div}({}_3\Phi_{\nabla f}) = 0$ . Nous devons alors recalculer  ${}_3\Phi_f$  pour prendre en compte la nouvelle dépendance de  $K$  en  $f$  et calculer  ${}_3\Phi_{\nabla f}$ .

Pour simplifier les calculs, nous supposons que l'homographie  $K$  peut être approximée de manière satisfaisante par une transformation affine. Du fait de la relation  $K(m_1) = m_2$ , cette transformation affine s'écrit:

$$(m_1 + m) \approx m_2 + \mathbf{A}m$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $2 \times 2$  dépendant de  $f$  et de  $\nabla f$ .

En pratique, cette approximation est souvent suffisante et nous la supposons valide dans la suite.

Sous cette hypothèse,  $|I_1|_f$  n'est pas modifié mais  $\langle I_1, I_2 \rangle_f$ , et  $|I_2|_f$  le sont, à cause de la dépendance en  $\mathbf{A}$ . Les résultats des calculs sont résumés dans le lemme suivant dont on trouvera une démonstration dans l'annexe A.1:

**Lemme 3** *Les dérivées partielles  $\langle I_1, I_2 \rangle_f$  and  $|I_2|_f$  sont données par les formules suivantes:*

$$\begin{aligned}\langle I_1, I_2 \rangle_f &= \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_1, I_2 \rangle + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \langle I_1, \nabla I_2 \rangle \\ &+ \int^* (I_1(m_1 + m) - \overline{I}_1(m_1)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}m)^T \mathbf{A}_f m dm\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 |I_2| \cdot |I_2|_f &= \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_2, I_2 \rangle \\
 &+ \int^* (I_2(m_2 + \mathbf{A}m) - \bar{I}_2(m_2)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}m)^T \mathbf{A}_f \mathbf{m} dm
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

dans lesquelles les valeurs des quantités  $\langle \nabla I_1, I_2 \rangle$ ,  $\langle I_1, \nabla I_2 \rangle$  et  $\langle \nabla I_2, I_2 \rangle$  sont données en annexe A.1.

On remarquera que, comme nous pouvions nous y attendre, les équations (3.14) et (3.15) sont similaires à (3.7) et à (3.8) avec des termes de correction dont la présence est due à la complexité plus grande de la fonctionnelle de mise en correspondance.

Ceci nous permet de calculer la première partie des équation d'Euler-Lagrange,  $\Phi_f$ . L'expression de  $\mathbf{A}_f$  se trouve à la section suivante.

Pour ce qui est de la seconde partie, nous avons  $|I_1|_{\nabla f}^2 = 0$  puisque  $I_1$  n'est pas fonction de  $\nabla f$ . Pour le reste, le lemme suivant apporte les résultats nécessaires:

**Lemme 4** *Les dérivées partielles  $\langle I_1, I_2 \rangle_{\nabla f}$  et  $|I_2|_{\nabla f}$  sont données par les formules suivantes:*

$$\langle I_1, I_2 \rangle_{\nabla f} = \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}m)^T (\mathbf{A}m)_{\nabla f} dm,$$

et,

$$|I_2| \cdot |I_2|_{\nabla f} = \int^* (I_2(m_2 + \mathbf{A}m) - \bar{I}_2(m_2)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}m)^T (\mathbf{A}m)_{\nabla f} dm,$$

expressions dans lesquelles la quantité  $(\mathbf{A}m)_{\nabla f}$  dénote la matrice  $2 \times 2$  définie par  $[\mathbf{A}_{(\nabla f)_x} \mathbf{m}, \mathbf{A}_{(\nabla f)_y} \mathbf{m}]$ .

La preuve est similaire à celles données en annexe A.1.

Ces expressions nous permettront de calculer la deuxième partie  $div({}_3\Phi_{\nabla f})$  des équations d'Euler-Lagrange aussitôt que nous aurons rendu explicites les relations entre  $\mathbf{A}$ ,  $f$  et  $\nabla f$ , ce qui est l'objet de la section suivante.

### La matrice $\mathbf{A}$ et ses dérivées

Nous devons calculer les dérivées de la matrice  $\mathbf{A}$  par rapport à  $f$  et à  $\nabla f$ . Pour ce, nous utiliserons une approche mixte, à la fois affine et projective, pour calculer la matrice  $\mathbf{K}$  de la transformation  $K$ .

Soit  $(x_1, y_1)$  les coordonnées (affines) de l'image  $m_1$  et  $(x, y)$  celles de  $m$ . Nous noterons  $m_1 + m$  le point de coordonnées affines  $(x_1 + x, y_1 + y)$  ou de coordonnées projectives  $(x_1 + x, y_1 + y, 1)$ . Soit  $\mathbf{K}$  la matrice  $3 \times 3$  de l'homographie  $K$  et  $\mathbf{k}_i, i = 1, 2, 3$  ses vecteurs colonnes. Les coordonnées affines du point  $K(m_1 + m)$  sont égales à:

$$X_2 = \frac{\mathbf{k}_1(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m})}{\mathbf{k}_3(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m})} \quad Y_2 = \frac{\mathbf{k}_2(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m})}{\mathbf{k}_3(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m})} \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{m}_1$  est le vecteur de coordonnées projectives  $(x_1, y_1, 1)$  et  $\mathbf{m}$  le vecteur de coordonnées  $(x, y, 0)$ .

D'après la section 3.3.2, nous savons que la matrice  $\mathbf{K}$  peut s'écrire:

$$\mathbf{K} = d\mathbf{R}^T - \mathbf{T}\mathbf{N}^T$$

avec

$$\begin{cases} d = xf_x + yf_y + f \\ \mathbf{T} = \mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{N}^T = (f_x, f_y, 1) \end{cases} \quad (3.17)$$

Nous avons utilisé le fait que  $\mathbf{K}$  est définie à un facteur multiplicatif près pour nous débarrasser du terme  $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$ . Ainsi, nous avons établi la dépendance entre l'homographie  $K$  et  $f$  et  $\nabla f$ . Il est facile d'en déduire que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial f} = \mathbf{R}^T \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial f_x} = x\mathbf{R}^T - [\mathbf{T} \mathbf{0} \mathbf{0}] \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial f_y} = y\mathbf{R}^T - [\mathbf{0} \mathbf{T} \mathbf{0}] \end{cases} \quad (3.18)$$

Penchons nous maintenant sur l'approximation affine. Nous pouvons supposer que le point  $m_2$ , image de  $m_1$  par  $K$ , n'est pas à l'infini. En divisant le numérateur et le dénominateur de  $X_2$  et de  $Y_2$  dans l'équation (3.16) par  $\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1$  et en introduisant les coordonnées affines  $x_2$  et  $y_2$  de  $m_2$ , nous obtenons:

$$X_2 = \frac{x_2 + \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1}}{1 + \frac{\mathbf{k}_3\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1}} \quad Y_2 = \frac{y_2 + \frac{\mathbf{k}_2\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1}}{1 + \frac{\mathbf{k}_3\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1}}$$

L'approximation affine apparaît en supposant que  $\frac{\mathbf{k}_3\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1} \ll 1$ , que  $\frac{\mathbf{k}_1\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1} \ll x_2$  et que  $\frac{\mathbf{k}_2\mathbf{m}}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1} \ll y_2$ . En développant  $X_2$  et  $Y_2$  jusqu'au premier ordre par rapport à ces quantités, nous aboutissons à l'expression suivante pour la matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\mathbf{k}_3\mathbf{m}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Cette expression, combinée avec (3.18) nous permet de calculer les dérivées partielles de  $\mathbf{A}$  par rapport à  $f$  et à  $\nabla f$  et, finalement,  $\text{div}({}_3\Phi_{\nabla f})$ . Nous ne poursuivrons toutefois pas ici ces calculs puisque nous allons présenter section 3.4 un modèle plus élaboré pour lequel nous effectuerons les calculs correspondants.

### 3.4 Un modèle plus raffiné

Dans cette section, nous considérons le cas dans lequel les objets de la scène ne sont plus définis comme le graphe d'une fonction de  $x$  et  $y$  comme ils l'étaient dans les sections précédentes, mais comme l'ensemble de niveau zéro d'une fonction  $\hat{u} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  que nous supposons suffisamment régulière, c'est-à-dire  $C^2$ . Les coordonnées  $(x, y, z)$  des points de la scène qui sont à la surface des objets présents sont donc définis par l'équation  $\hat{u}(x, y, z) = 0$ . Cette approche possède au moins deux avantages. Premièrement, en relaxant l'hypothèse de graphe, il est potentiellement permis de considérer un nombre quelconque de caméras. Deuxièmement, nous sommes conduits à une implémentation très naturelle de l'évolution des surfaces par la méthode des ensembles de niveau.

Un point intéressant de l'utilisation des méthodes d'ensembles de niveau pour la résolution de l'équation (3.20) est que nous pourrions désormais traiter les scènes composées de plusieurs objets puisque les changements de topologie tels que le changement du nombre de composantes connexes sont traités automatiquement.

Soit donc une famille de surfaces régulières  $S : (v, w, t) \rightarrow \mathbf{S}(v, w, t)$  où  $(v, w)$  paramétrise la surface et  $t$  le temps. Il n'est en général pas possible de trouver une paramétrisation de  $S$  de  $\mathbf{R}^2$  vers  $\mathbf{R}^3$  qui décrive l'intégralité des surfaces des objets (pensez à une sphère par exemple pour laquelle au moins deux paramétrisations sont nécessaires) mais nous pouvons raisonner sur une telle paramétrisation sans perte de généralité puisque nous verrons que les résultats sont indépendants du choix des paramètres. Les objets de la scène correspondent à une surface  $\hat{\mathbf{S}}(v, w)$  et notre but est, partant d'une surface initiale  $\mathbf{S}_0(v, w)$ , de trouver une EDP

$$\mathbf{S}_t = \beta \mathbf{N}, \quad (3.20)$$

où  $\mathbf{N}$  est la normale unitaire à la surface, dont la résolution avec les conditions initiales  $\mathbf{S}(v, w, 0) = \mathbf{S}_0(v, w)$  nous conduit à une solution qui approxime convenablement  $\hat{\mathbf{S}}(v, w)$ . La fonction  $\beta$  sera déterminée par la fonctionnelle de mise en correspondance que nous minimiserons pour résoudre le problème stéréo. Nous définissons une telle fonctionnelle au prochain paragraphe.

Dans le détail, les surfaces  $\mathbf{S}$  sont à chaque instant les niveaux zéro d'une fonction  $u : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$u(\mathbf{S}, t) = 0$$

En dérivant par rapport à  $u, v, t$  et en remarquant que  $\mathbf{N}$  peut être choisit tel que  $\mathbf{N} = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ , où  $\nabla$  est l'opérateur pour les trois premières coordonnées de  $u$ , nous trouvons facilement que l'évolution de  $u$  s'écrit (voir chapitre 2):

$$u_t = \beta |\nabla u| \quad (3.21)$$

En nous basant sur les mêmes idées que celles de la section 3.3.2, nous pouvons définir la mesure d'anti-corrélation suivante:

$$\begin{aligned} C_4(\mathbf{S}, \mathbf{N}) &= - \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \int \int \frac{1}{|I_i| \cdot |I_j|} \langle I_i, I_j \rangle d\sigma \\ &= \int \int {}_4\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{N}, v, w) d\sigma \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dans cette équation, les indices  $i$  et  $j$  varient entre 1 et  $n$ , le nombre d'images. En pratique, on ne considérera pas toutes les paires d'images, mais cela ne changera pas notre analyse du problème. On notera que dans l'équation (3.22), l'intégrale se fait par rapport à l'élément d'aire  $d\sigma$  sur la surface  $S$ . En conservant les notations précédentes, nous obtenons:

$$d\sigma = | \mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w | \, dv dw$$

$d\sigma$  joue le rôle qu'avait  $dx dy$  dans notre analyse précédente,  $\mathbf{S}$  celui de  $f$ , et  $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w}{|\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w|}$ , normale unitaire à la surface  $S$ , celui de  $\nabla f$ .

Il faut ici noter un pas significatif par rapport à ce que nous avons précédemment du fait de la multiplication de notre score de corrélation croisée normalisé précédent par le terme  $| \mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w |$ . Cela a en effet deux conséquences fondamentales:

1. Cela régularise le problème variationnel comme dans l'approche des contours actifs géodésiques [14]
2. Cela rend le problème intrinsèque, c'est-à-dire indépendant de la paramétrisation des objets de la scène.

Un autre point essentiel est que nous pouvons déterminer quelles sont les parties des surfaces qui sont vues ou cachées pour telle ou telle caméra. Dès lors, il est naturel de ne calculer chaque intégrale apparaissant dans (3.22) que pour ceux des points de la surface  $S$  qui sont visibles par les deux caméras concernées. Ainsi, les problèmes de *visibilité et d'occlusion* sont modélisés et traités dans notre approche (voir section 3.5 pour plus de détails).

Le reste est très similaire bien que techniquement plus compliqué que précédemment: calcul des dérivées, écriture des équations d'Euler-Lagrange du problème variationnel (3.22), détermination de leur composante  $\beta$  le long de la normale à la surface, définition de l'équation d'évolution des surfaces (3.20) et implémentation par une méthode d'ensembles de niveau. Tout ceci est relativement sans difficulté majeure mis à part le résultat déjà annoncé que la valeur de  $\beta$  est *intrinsèque* et ne dépend pas de la paramétrisation des surfaces  $S$ .

Nous allons en fait prouver un résultat un peu plus général. Soit une fonction  $\Phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , régulière, de classe au moins  $C^2$ , définie sur la surface  $S$  et dépendant du point  $\mathbf{S}(v, w)$  et de la normale unitaire  $\mathbf{N}(v, w)$

en ce point, que nous noterons par  $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Considérons la mesure d'erreur suivante:

$$C(\mathbf{S}, \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_w) = \int \int \Phi(\mathbf{S}(v, w), \mathbf{N}(v, w)) h(v, w) dv dw \quad (3.23)$$

dans laquelle l'intégrale est effectuée sur toute la surface  $S$  et où l'on a posé comme élément d'aire  $h(v, w) = |\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w|$ . Nous prouvons en annexe A.2 le théorème suivant:

**Théorème 5** *Sous les condition de régularité faites pour la fonction  $\Phi$  et pour la surface  $S$ , la composante des équations d'Euler-Lagrange du critère (3.23) le long de la normale à la surface est le produit de  $h$  par une quantité intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de la paramétrisation  $(v, w)$ . En outre, cette composante est égale à:*

$$h(\Phi_{\mathbf{X}}\mathbf{N} - 2H(\Phi - \Phi_{\mathbf{Y}}\mathbf{N}) + \text{Trace}((\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}})_{T_S} + d\mathbf{N} \circ (\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}})_{T_S})) \quad (3.24)$$

où toutes les quantité sont évaluées au point  $\mathbf{S}$  de la surface, de normale  $\mathbf{N}$ .  $T_S$  est le plan tangent à la surface au point  $\mathbf{S}$ .  $d\mathbf{N}$  est la différentielle de la carte de Gauss de la surface,  $H$  sa courbure moyenne,  $\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$  et  $\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  les dérivées d'ordre deux de  $\Phi$ ,  $(\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}})_{T_S}$  et  $(\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}})_{T_S}$  leur restrictions au plan tangent  $T_S$ .

On notera que le critère d'erreur (3.22) est de la forme (3.23) si nous prenons pour  $\Phi$

$$- \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{1}{|I_i| \cdot |I_j|} \langle I_i, I_j \rangle$$

D'après le théorème 5, pour calculer la vitesse normale d'évolution  $\beta$  pour les équations (3.20) ou (3.21), il suffit de calculer  $\Phi_{\mathbf{S}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{N}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{S}\mathbf{N}}$  et  $\Phi_{\mathbf{N}\mathbf{N}}$  ainsi que les propriétés différentielles intrinsèques d'ordre deux de la surface  $S$ .

Puisque la fonction  $\Phi$  est la somme de fonctions  $\Phi_{ij} = -\frac{1}{|I_i| \cdot |I_j|} \langle I_i, I_j \rangle$ , le problème se décompose en celui du calcul des dérivées des  $\Phi_{ij}$ 's, qui, pour les dérivées d'ordre 1 est très similaire à celui que nous avons effectué section 3.3.2. Les calculs sont développés en annexe A.3.

En se qui concerne l'implémentation par les ensembles de niveau, il nous faut faire quelques remarques.

La première est d'expliquer comment nous calculons  $\beta$  dans l'équation (3.21) en chaque point  $(x, y, z)$  plutôt que sur la surface  $S$ . Il est clair qu'aucun problème ne se pose pour calculer la normale  $\mathbf{N} = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ , la courbure moyenne  $H = \frac{1}{2} \text{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$  et  $d\mathbf{N}$  la différentielle de la carte de Gauss de l'iso-surface passant par le point  $(x, y, z)$ . Les vecteurs  $\Phi_{\mathbf{X}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{Y}}$  et les matrices  $\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  sont, eux, calculés comme expliqué en annexe A.3.

La deuxième remarque est que nous pouvons maintenant écrire l'équation (3.21) comme ceci:

$$u_t = |\nabla u| \operatorname{div}\left(\Phi \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) - \Phi_{\mathbf{N}}(D\mathbf{N} + \operatorname{trace}(D\mathbf{N})\mathbf{I}_3)\nabla u - \operatorname{Trace}((\Phi_{\mathbf{XN}})_{T_S} + d\mathbf{N} \circ (\Phi_{\mathbf{NN}})_{T_S}) |\nabla u| \quad (3.25)$$

où  $D\mathbf{N}$  est la matrice  $3 \times 3$  des dérivées de la normale par rapport aux coordonnées spatiales,  $\mathbf{I}_3$  la matrice identité, et où, en chaque point  $(x, y, z)$ , le plan tangent  $T_S$  est celui de l'iso-surface  $u = \text{constante}$  passant par ce point. Notez que l'on a:

$$\operatorname{trace}(D\mathbf{N}) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

Le premier terme  $|\nabla u| \operatorname{div}\left(\Phi \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  est identique à celui que l'on retrouve dans les travaux de Caselles, Kimmel, Sapiro et Sbert [15] sur l'utilisation des surface minimales ou contours actifs géodésiques pour la segmentation des images volumétriques.

Nos autres termes viennent du procédé particulier que nous modélisons, c'est-à-dire la stéréo. Étant donné que ces termes ne mettent en jeu que des dérivées du deuxième ordre, nous sommes tentés de faire la conjecture suivante, que nous espérons pouvoir prouver dans un futur proche.

**Conjecture 1** *Sous des hypothèses raisonnables de régularité des fonctions intensité des images, l'équation (3.25) admet une unique solution de viscosité stable dans  $C(\mathbf{R}^3 \times [0, \infty]) \cap L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\mathbf{R}^3))$  pour tout  $T < \infty$ .  $W^{1, \infty}$  est l'espace des fonctions Lipschitziennes bornées de  $\mathbf{R}^3$ .*

Comme premiers pas dans cette direction, nous mentionnons ici quelques points essentiels:

1. À proximité de la solution,  $\Phi$  est proche de -1 (nous normalisons  $\Phi$  par rapport au nombre de paires de caméras utilisées). Ce qui fait que le terme  $|\nabla u| \operatorname{div}\left(\Phi \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  devient anti-diffusif! En conséquence de quoi, nous utilisons comme nouvelle mesure d'anti-corrélation  $\Phi' = \Phi + 1$  à la place de  $\Phi$ , qui prend ses valeurs entre 0 et +2. Ceci rajoute le terme  $|\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$  à  $u_t$ , c'est-à-dire  $2H$  à la vitesse normale  $\beta$ . C'est donc équivalent à introduire dans le critère un terme de régularisation qui tend à minimiser la surface totale des objets.
2. En ce qui concerne la régularité des intensités des images, une corrélation modulée par des gaussiennes peut être utilisée [42]. En pratique, nous utilisons une implémentation récursive [19] des filtres gaussiens pour le calcul des intensités des images et de leur dérivées premières et secondes.
3. Pour ce qui est de la visibilité et de l'occlusion, il faut remarquer que la mesure totale  $\Phi_4$  suppose certains choix de paires de caméras. Nous ne

rentrerons pas dans les détails ici et préciserons simplement que, dans notre implémentation, ces choix sont modulés de sorte que  $\Phi_4$  reste au moins continue par rapport à  $\mathbf{S}$ .

## 3.5 Le cas bidimensionnel

### 3.5.1 Implémentation

Plutôt que d'aborder directement les problèmes techniques soulevés par une implémentation des idées exposées plus haut, nous présentons maintenant une implémentation du cas bidimensionnel de la théorie précédemment décrite. Cette implémentation nous a effectivement servi pour la mise au point et la validation de nos méthodes avant une réalisation du cas tridimensionnel que nous décrirons dans la prochaine section.

La situation est celle décrite par la figure 3.5.1 qui représente un objet plan  $S$ , ici avec deux composantes connexes. Cet objet est observé par cinq caméras, numérotées de 1 à 5, et la courbe de niveau correspondant à un point  $M$  a été dessinée pour illustrer comment la condition de visibilité est prise en compte en résolvant l'équation (3.25): le point  $M$  de la courbe de niveau est vu par les caméras 3 à 5 et ne l'est pas par les caméras 1 et 2.

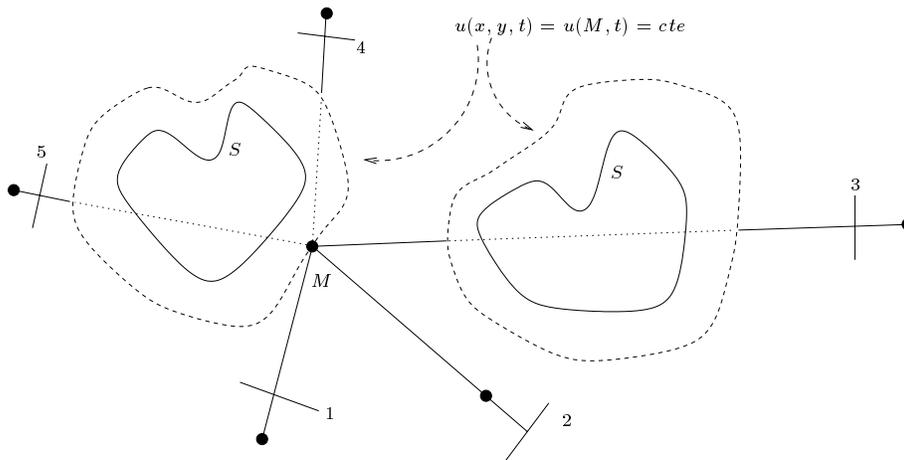


FIG. 3.6 – Implémentation du cas 2D de l'algorithme. Visibilité et occlusion.

Les objets plans sont vus par des caméras linéaires. Les pixels et les images sont fonction d'une seule variable. Le produit scalaire (3.10) est:

$$\langle I_i, I_j \rangle(\mathbf{S}, \mathbf{N}) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p (I_i(m_i + m) - \bar{I}_i(m_i)) \\ (I_j(K_{ij}(m_i + m)) - \bar{I}_j(m_j)) dm$$

Nous utilisons l'approximation affine:  $K_{ij}(m_i + m) = m_j + \alpha_{ij}m$ . La surface  $\mathbf{S}(v, w)$  est une courbe plane  $\mathbf{S}(v)$  et la mesure d'anti-corrélation est:

$$\int \Phi(\mathbf{S}(v), \mathbf{N}(v))h(v)dv$$

avec  $h(v) = |\mathbf{S}_v|$  et  $\Phi$  toujours égale à  $-\sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{1}{|I_i| \cdot |I_j|} \langle I_i, I_j \rangle$ .

Soit  $\sigma$  l'abscisse curviligne de  $\mathbf{S}$  ( $d\sigma = h(v)dv$ ),  $\mathbf{T}$  sa tangente unitaire et  $\kappa$  sa courbure, la composante normale  $\beta$  des équation d'Euler-Lagrange se simplifie en la quantité intrinsèque suivante:

$$\beta = \kappa\Phi + [\Phi_{\mathbf{S}} + \kappa(\mathbf{T}\mathbf{T}^T - \mathbf{N}\mathbf{N}^T)\Phi_{\mathbf{N}}^T] \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T}^T(\Phi_{\mathbf{S}\mathbf{N}} + \kappa\Phi_{\mathbf{N}\mathbf{N}})\mathbf{T}$$

En pratique, l'implémentation de l'équation d'évolution (3.21) de  $u(x, y, t)$  requiert les étapes suivantes pour le calcul de  $\beta$  au point  $\mathbf{M} = (x, y)$  au temps  $t$ :

- Considérant la courbe de niveau  $\mathbf{S}(v)$  de  $u$  passant par le point  $\mathbf{M}$ , déterminer depuis quelles caméras  $\mathbf{M}$  est visible en supposant que la courbe de niveau passant par  $M$  est opaque.
- Calculer la normale  $\mathbf{N}$  et la courbure  $\kappa$  de  $\mathbf{S}$  en  $\mathbf{M}$ .
- Pour chaque paire de caméra utilisable, calculer  $m_i$ ,  $\frac{\partial m_i}{\partial \mathbf{S}}$  et  $\frac{d}{d\sigma}m_i$ .
- Pour chaque paire de caméras utilisable, calculer  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij\mathbf{S}}$ ,  $\alpha_{ij\mathbf{N}}$ ,  $\frac{d}{d\sigma}\alpha_{ij}$ , et  $\frac{d}{d\sigma}\alpha_{ij\mathbf{N}}$ .
- Calculer  $\langle I_i, I_j \rangle$ ,  $\langle I_i, I_j \rangle_{\mathbf{S}}$ ,  $\langle I_i, I_j \rangle_{\mathbf{N}}$ ,  $\frac{d}{d\sigma}\langle I_i, I_j \rangle$  et  $\frac{d}{d\sigma}\langle I_i, I_j \rangle_{\mathbf{N}}$ . Le calcul des intensités des images et de leur dérivées premières et secondes nécessaires est modulé par des gaussiennes. Des filtres récursifs sont utilisés [19].
- Calculer enfin  $\Phi$ ,  $\Phi_{\mathbf{S}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{N}}$  et  $\frac{d}{d\sigma}\Phi_{\mathbf{N}}$ . D'où  $\beta$ .

Apportons ici deux précisions:

1. Nous ne donnons pas le même poids à toutes les paires de caméras dans le calcul de  $\Phi$ . Les caméras voyant la courbe de niveau "de face", c'est-à-dire dont le centre optique est proche de la normale à l'objet, sont privilégiées par rapport à celles qui verraient l'objet trop "de profil" pour lesquelles la précision de ce qui est vu est moindre du fait de la discrétisation des images en espace. Ceci nous permet en outre:
  - De moduler la taille de la fenêtre de corrélation: moins la caméra est "face à l'objet", moins grande sera la fenêtre de corrélation. Cela correspond à l'idée que les point 2D observés doivent rester proche du plan tangent. Notez qu'on pourrait utiliser la courbure pour affiner la prise en compte de cette idée.
  - Les poids affectés aux paires de caméras sont modulés pour assurer la continuité de  $\Phi$  le long de la courbe de niveau.

- En pratique, résoudre le problème de visibilité pour toutes les courbes de niveau utilisées se révèle ne rien apporter. Le résoudre pour le seul niveau zéro, qui est rappelons-le le lieu de la courbe dont nous réalisons l'évolution, suffit et apportera un gain de temps appréciable dans le cas 3D. Pour les points qui ne sont pas sur le niveau zéro, la gestion des caméras est copiée sur le point du niveau zéro le plus proche. Une détermination efficace du point le plus proche est réalisée à l'aide de l'algorithme de calcul rapide de la distance euclidienne à une courbe décrit dans [18], algorithme que nous avons légèrement adapté pour que le point le plus proche soit mémorisé (voir section 2.7.1)

Le calcul de la vitesse normale  $\beta$  effectué, il ne reste plus qu'à implémenter l'évolution de la courbe par une méthode d'ensembles de niveau [103] dont nous avons décrit les grandes lignes au chapitre 2. Nous utilisons un algorithme rapide "à bande" avec réinitialisation de la fonction distance par une EDP, elle-même implémentée par une méthode à *progression rapide* (cf section 2.6.2).

Nous avons testé notre schéma sur des images synthétiques bruitées et sur quelques images réelles.

### 3.5.2 Résultats

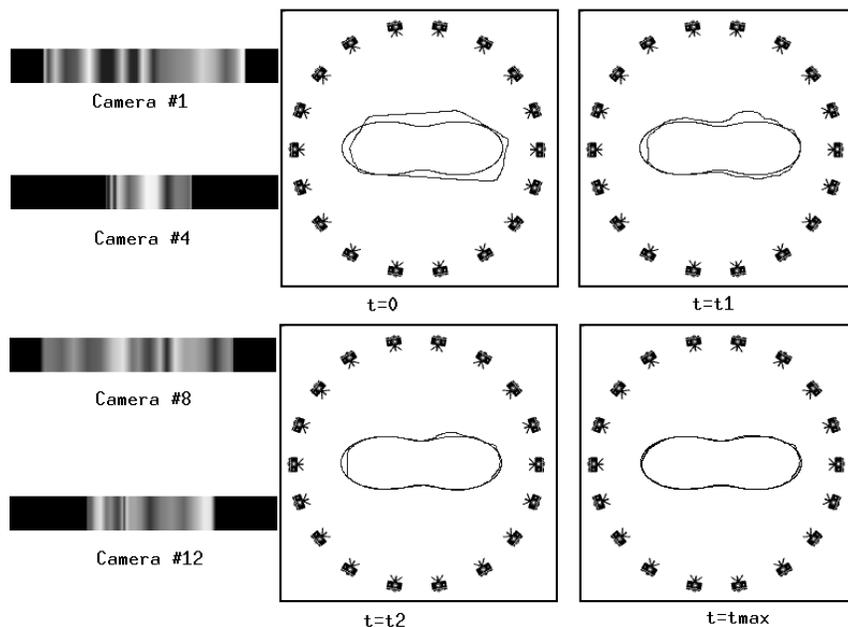


FIG. 3.7 – Cas 2D – Détection d'un objet non convexe.

Nous présentons d'abord les résultats obtenus sur trois objets synthétiques, chaque exemple servant à tester un des aspects de l'algorithme. Tous

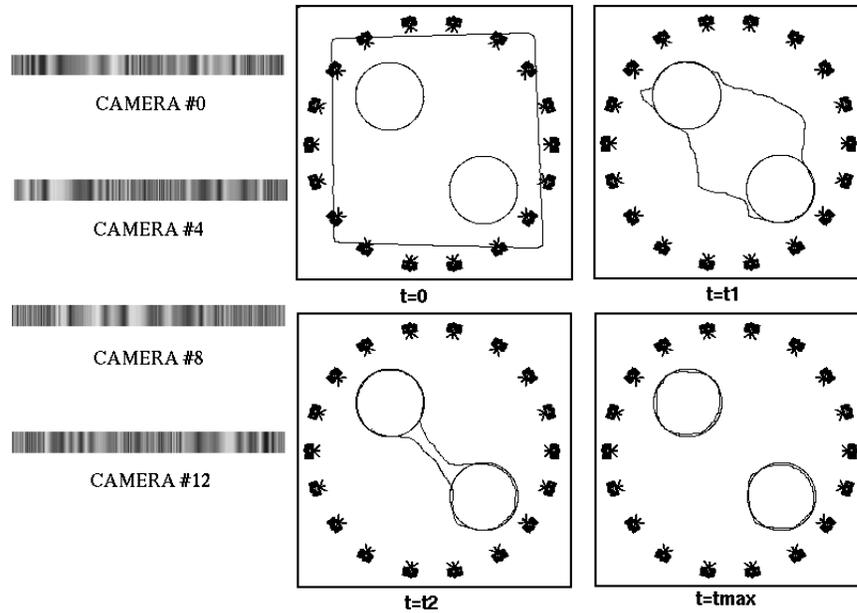


FIG. 3.8 – Cas 2D – Détection de deux objets circulaires.

ces résultats sont obtenus avec 18 caméras observant une scène et sont présentés de manière homogène: du côté gauche de la figure nous montrons quelques-unes des 18 images (monodimensionnelles!), du côté droit nous montrons la convergence de la courbe initiale vers les objets.

Nous commençons par la figure 3.7 qui illustre le fait que l'algorithme marche pour des objets non convexes. Remarquez le fond noir sur les images.

La figure 3.8 montre le processus de reconstruction pour deux cercles placés sur un fond aléatoire. Nous voyons que l'algorithme peut traiter les objets multiples (notez le changement de topologie au temps  $t_2$ ) et qu'il n'est pas trompé par un fond texturé.

La figure 3.9 donne les résultats pour deux carrés. Cet exemple montre que notre modèle peut d'une certaine manière traiter les objets non lisses.

Enfin, la figure 3.10 montre un exemple réel dans le cas de deux caméras. Une paire d'images d'un visage humain se trouve sur la partie gauche de la figure. La trace d'un plan passant par les deux centres optiques (un *plan épipolaire*) sur les deux plans rétiniens y est dessinée en blanc, de sorte que les deux images monodimensionnelles constituées par ces deux lignes se correspondent. Sur la partie droite de la figure, nous montrons l'évolution du contour à quatre instants. Le contour du visage servant de référence est le résultat de l'algorithme de corrélation décrit dans [23]. Nous voyons que le contour initial converge vers lui de manière satisfaisante.

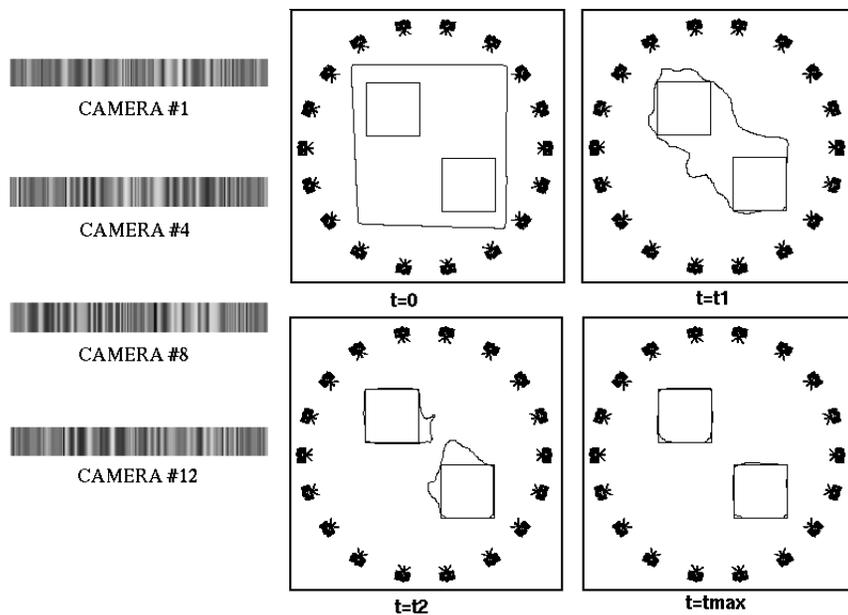


FIG. 3.9 – Cas 2D – Détection de deux carrés.

## 3.6 Algorithme tridimensionnel

Après avoir eu à travers le cas 2D un aperçu des techniques mises en jeu pour l'implémentation de notre méthode, nous pouvons passer au cas tridimensionnel.

### 3.6.1 Implémentation

L'implémentation tridimensionnelle est similaire à celle du cas 2D. Certaines techniques utilisées s'étendent directement, d'autres doivent être adaptées ou remplacées. Sans rentrer dans des détails fastidieux, nous fournissons les clés suivantes:

- **Méthodes par ensembles de niveau:** elles se généralisent directement. C'est toutefois dans le cas 3D que prend toute son importance l'efficacité de la méthode "avec bande" et de la réinitialisation de la fonction distance par EDP.
- **Extraction du niveau zéro:** un simple *zéro crossing* naïf ne suffit plus. Il faut avoir recours à une méthode telle que les *marching cubes* [70], méthode qui aurait d'ailleurs pu être utilisée en 2D (*marching squares*), fournissant une triangulation d'une iso-surface.
- **Traitement des occultations:** utilisation d'un *z-buffer* [16] par caméra pour projeter le niveau zéro triangulé précédemment sur le plan rétinien de chaque caméra. C'est en fait ce que nous faisons déjà sans l'avoir

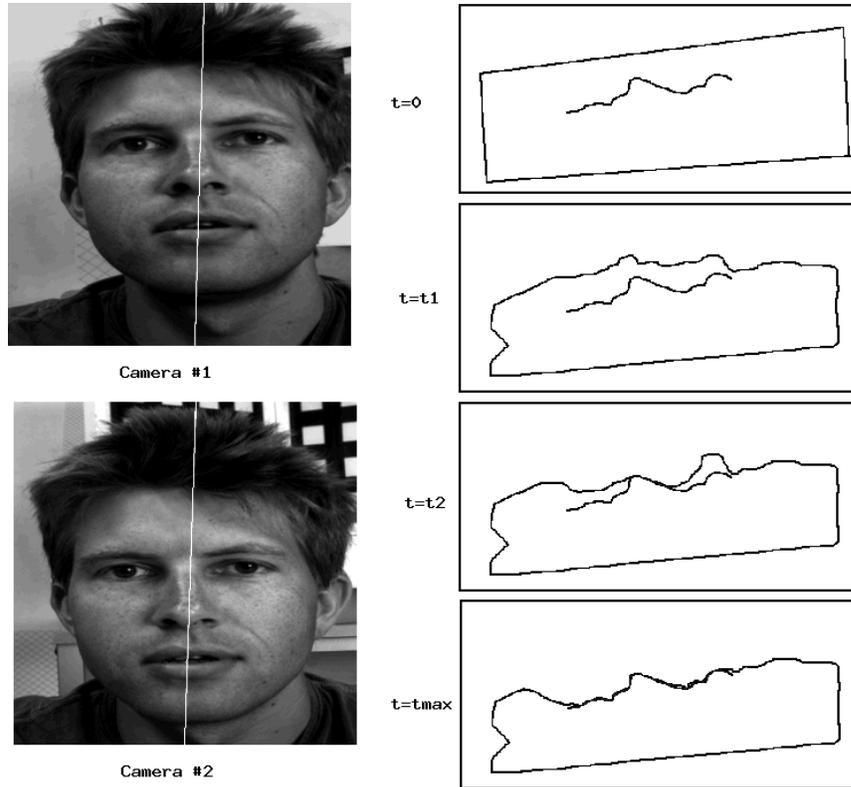


FIG. 3.10 – Cas 2D – Détection du contour d'un visage humain dans un plan épipolaire.

mentionner dans le cas 2D. On comprend maintenant que traiter les occlusions pour toutes les iso-surfaces serait trop coûteux.

- **Lien vers le point de niveau zéro le plus proche:** bien que [18] ne décrive le calcul rapide de la distance Euclidienne que dans le cas 2D, l'extension au cas 3D ne pose pas de problème (section 2.7.1).
- **Modulation de la fenêtre de corrélation:** tout comme dans le cas 2D, la taille de la fenêtre de corrélation dépend de l'orientation du plan tangent. Elle peut en fait maintenant être choisie rectangulaire et non plus carrée pour donner moins d'importance à l'une des deux directions de corrélation quand l'objet est vu de profil.
- **Choix des paires de caméras:** la gestion des coefficients affectant les scores de corrélation de chaque paire de caméras de façon à ce que le critère total reste au minimum continu est maintenant basée sur la triangulation issue des *marching cubes*.

### 3.6.2 Recherche d'efficacité

Comme il fallait s'y attendre, le calcul du critère en un point du maillage est très coûteux. Dans certains cas de figure et pour des résolutions élevées ( $128 \times 128 \times 128$  ou  $256 \times 256 \times 256$ ), il nous a fallu parfois plus d'une heure pour atteindre la convergence. Parmi les moyens d'accélérer le processus, nous avons appliqué les idées suivantes:

- Nous utilisons évidemment un algorithme à bandes (section 2.6.1) et une restauration de la distance par EDP et méthode à progression rapide (section 2.6.2).
- Dans un premier temps, nous n'utilisons pas toutes les paires de caméras valides mais seulement un minimum de paires et modulons leurs corrélations grâce à la triangulation de la surface de façon à rendre continue la corrélation totale. Mis à part quelques cas extrêmes, nous avons ensuite constaté que ne prendre que la meilleure paire de caméra suffisait: la continuité du critère est assurée par le nombre suffisant de caméras, ce qui garantit un choix régulier des meilleures caméras, et par la normalisation de la corrélation.
- Nous ne traitons les occlusions et la gestion du choix des paires de caméras que sur le niveau zéro. Les autres points de la bande sont traités comme le point du niveau zéro le plus proche.
- Cette gestion n'est pas revue à chaque pas de temps mais de façon régulière avec une fréquence du même ordre de grandeur que la restauration de la fonction distance et que la réinitialisation de la bande.
- Tous les termes de l'équation (3.21) ne semblent pas de même importance. Nous obtenons nos résultats en tronquant simplement l'équation aux termes de premier ordre en  $\Phi$  et prenons:

$$u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \Phi \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \Phi_{\mathbf{N}} (D\mathbf{N} + \operatorname{trace}(D\mathbf{N})\mathbf{I}_3) \nabla u$$

ce qui revient en fait à bien tenir compte de l'orientation du plan tangent pour le calcul du critère sans toutefois essayer, en un point donné, d'optimiser cette orientation pour minimiser le critère.

Parmi les améliorations encore possibles sur lesquelles nous travaillons, nous pensons surtout devoir adopter une approche pyramidale et raffiner le pas du maillage au fur et à mesure de la convergence. Nous devrions y gagner en vitesse et aussi en précision du résultat final. Il n'est pas impossible non plus qu'une telle approche supprime d'éventuels problèmes d'optima locaux. Jusqu'à présent, nous n'avons utilisé que des images de qualité d'objets texturés et avons pu faire converger une surface initiale éloignée de la solution sans qu'elle soit stoppée par de tels optima locaux.

Le lecteur intéressé pourra trouver de plus amples précisions dans le rapport de recherche [38].

### 3.6.3 Résultats

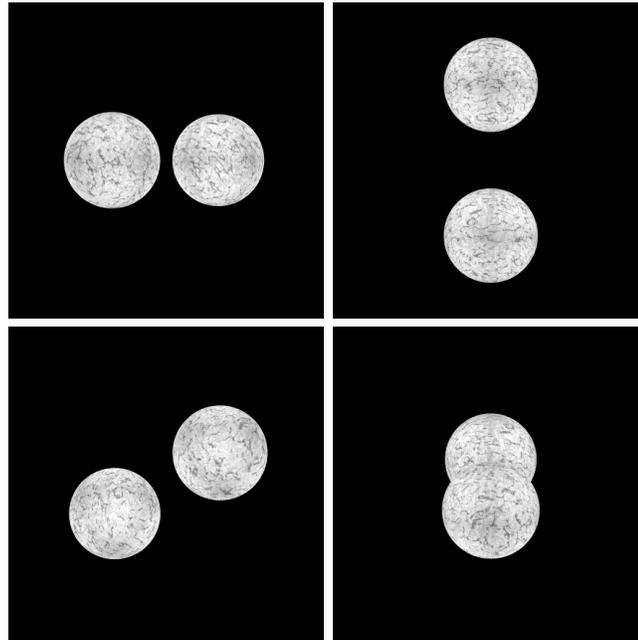


FIG. 3.11 – *Détection de deux sphères. Prises de vue.*

Nous l'avons déjà mentionné: bien qu'il ne s'agisse vraisemblablement pour l'instant que d'une première étape dans la compréhension des mécanismes mis en jeu et dans la mise au point des méthodes, nous pensons que les résultats que nous obtenons sont très prometteurs et à la hauteur de nos espoirs. Les images et les animations sont consultables à l'adresse:

<http://cermics.enpc.fr/~keriven/stereo.html>

Nous commençons par trois scènes synthétiques composées d'un ou de plusieurs objets texturés. Dans chaque cas, les objets sont observés par trente caméras situées tout autour de sorte que chaque point de la surface des objets soit vu par au moins deux caméras. Ainsi, l'intégralité des objets est potentiellement détectable.

Pour chaque exemple, nous montrons quelques-unes des images observées, puis le processus de reconstruction, tout d'abord avec les surfaces brutes, ensuite en reprojétant sur les surfaces en évolution les images observées redonnant de cette façon leur apparence extérieure aux objets.

La figure 3.11 présente quatre des trente images prises de deux sphères. La reconstruction à partir d'une surface englobant les deux sphères est montrée figure 3.12 avec les surfaces brutes et figure 3.13 avec les images reprojétées. La détection des deux sphères s'effectue avec succès et le changement de topologie semble ne poser aucun problème. Nous constatons aussi que la surface initiale n'a pas besoin d'être proche de la solution.

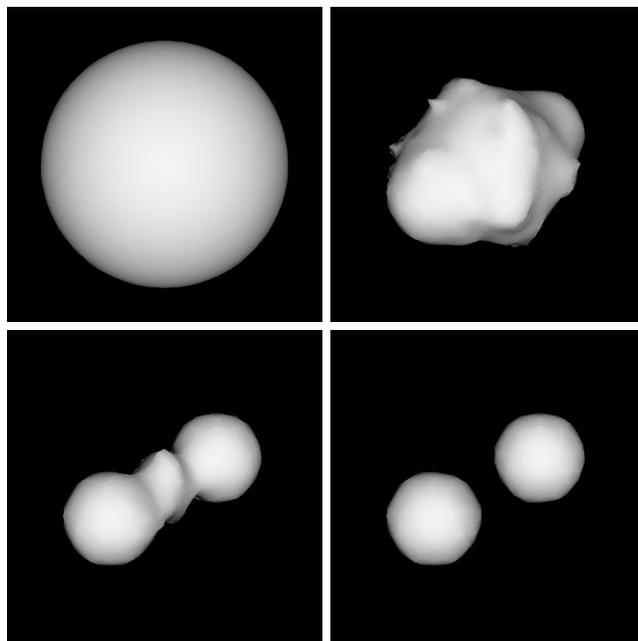


FIG. 3.12 – *Détection de deux sphères. Reconstruction.*

Un autre changement de topologie est illustré par les figures 3.14 à 3.16 représentant les résultats obtenus pour un tore. Dès lors que l'intérieur du tore commence à se creuser, le traitement des occlusions entraîne un choix convenable des caméras et une convergence vers la position finale.

Plus complexe encore est le traitement de la visibilité dans le cas de deux tores imbriqués. L'algorithme révèle pourtant capable de détecter ces objets, comme nous pouvons le constater figures 3.17 à 3.19.

Si une certaine zone d'un objet n'est pas observée ou ne l'est que par une seule caméra, elle ne peut être replacée dans l'espace. Afin de pouvoir traiter le cas d'un objet partiellement observé, nous décidons de définir comme nulle la vitesse d'évolution de la surface dans de telles zones. La figure 3.20 montre le cas d'une sphère qui n'est observée que par trois caméras: une vue de face, une légère élévation de 20 degrés et une vue surbaissée de 20 degrés. Les figures 3.21 et 3.22 montrent bien que les parties observées par au moins deux caméras sont convenablement reconstruites alors que le reste de la surface initiale ne bouge pas.

Forts de ce nouveau détail de comportement, nous pouvons nous lancer dans la reconstitution à partir d'images réelles. Reprenant le visage exploité dans la section 3.5, nous réalisons sa reconstruction tridimensionnelle figures 3.23 à 3.25. En plaçant sur un plateau tournant deux visages de mannequins, nous en faisons l'acquisition comme si c'était la caméra qui tournait autour (figure 3.26). La reconstruction est très satisfaisante (figures 3.27 et 3.28).

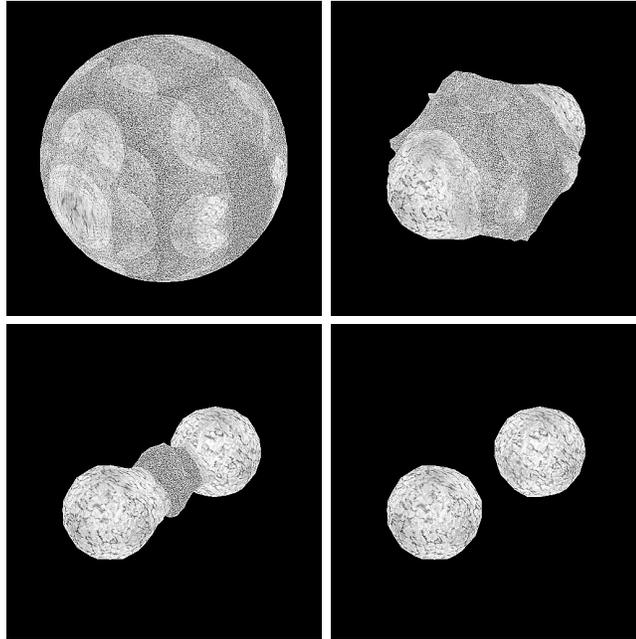


FIG. 3.13 – *Détection de deux sphères. Reconstruction avec images reprojctées.*

Notez que le changement d'éclairage d'une image à l'autre vient ici compliquer le processus, sans apparemment toutefois le gêner. L'utilisation d'un critère de corrélation et non d'une simple mesure d'erreur est ici essentielle. Le haut et le bas des objets, non photographiés, ne sont évidemment pas reconstruits...

A l'heure où nous écrivons ces lignes, nous sommes en train de saisir plusieurs objets réels de manière exhaustive de façon à pouvoir en réaliser une reconstruction totale.

### 3.7 Conclusion

Nous avons présenté une approche géométrique nouvelle pour résoudre le problème de la stéréovision pour un nombre quelconque de vues. Elle est basée sur l'écriture d'un principe variationnel qui doit être satisfait par les surfaces des objets à détecter. La conception de ce principe variationnel nous permet progressivement de manière propre et claire les hypothèses faites sur les objets et sur les correspondances entre les images. Notre approche modélise les objets comme un ensemble de surfaces fermées et non plus seulement comme le graphe d'une fonction  $z = f(x, y)$ . Nous prenons en compte l'orientation locale des surfaces et traitons aussi les occlusions. La surface initiale n'a pas besoin d'être proche de la solution finale.

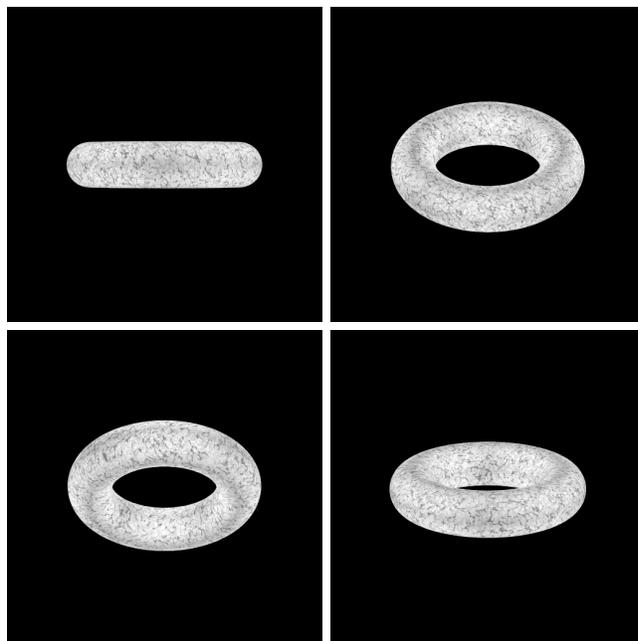


FIG. 3.14 – *Détection d'un tore. Prises de vue.*

Les équations d'Euler-Lagrange déduites du principe variationnel fournissent un ensemble d'EDP qui sont utilisées pour déformer un ensemble initial qui tend vers les objets à détecter.

Une implémentation par les ensembles de niveau des ces EDP nous fournit un moyen robuste et efficace d'obtenir l'évolution d'une surface et de traiter automatiquement les changements de topologie pendant la déformation.

Notre méthode, initialement testée sur des modèles 2D, s'est révélée à la hauteur de nos espérances en 3D aussi bien sur des images synthétiques que sur les images réelles que nous lui avons soumises jusqu'ici.

La principale amélioration sur laquelle nous travaillons actuellement est une approche pyramidale qui apportera, nous l'espérons, rapidité, précision et possibilité de traiter des images de faible qualité ou des objets peu texturés.

En ce qui concerne la théorie, nous émettons la conjecture que les EDP considérées admettent sous certaines conditions techniques de régularité, une solution unique au sens de la viscosité. Les problèmes de stabilité et de correction des solutions devraient aussi être étudiés.

Enfin, il nous faudra certainement nous demander ce qu'il est encore possible de faire dans le cas de caméras non calibrées, problème essentiel si l'on veut pouvoir travailler sur des images quelconques.

Penchons nous maintenant sur un autre pan de la vision par ordinateur: la question de l'invariance par certaines transformations géométriques des traitements effectués sur les images, les courbes ou les surfaces...

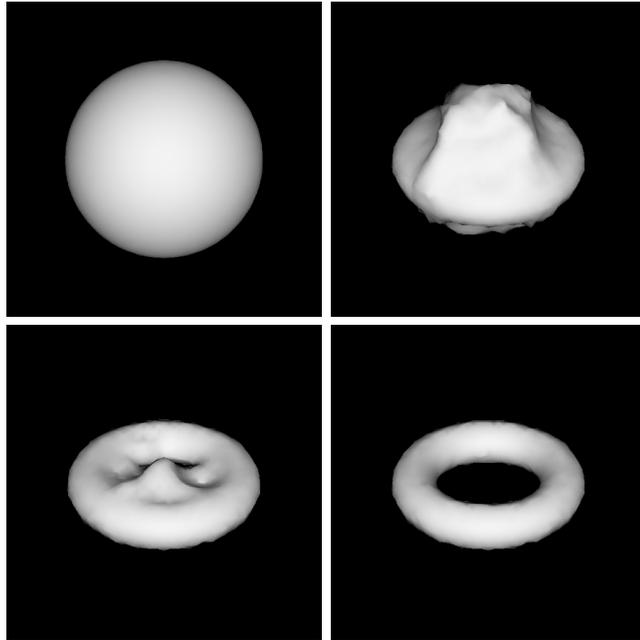


FIG. 3.15 – *Détection d'un tore. Reconstruction.*

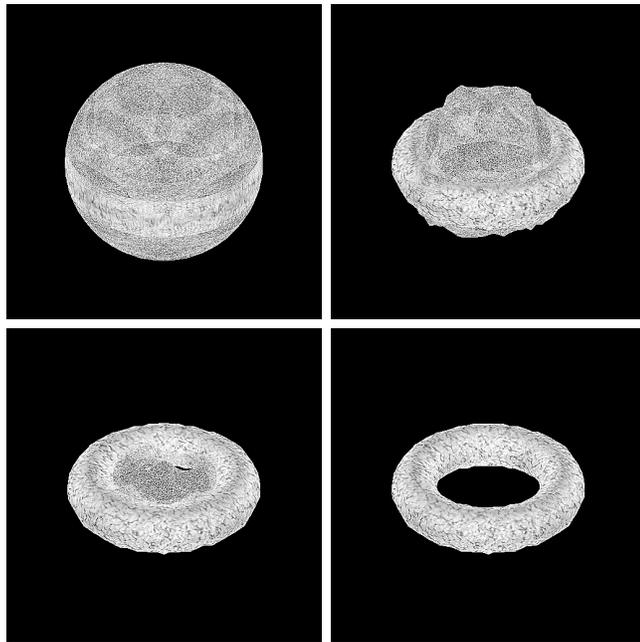
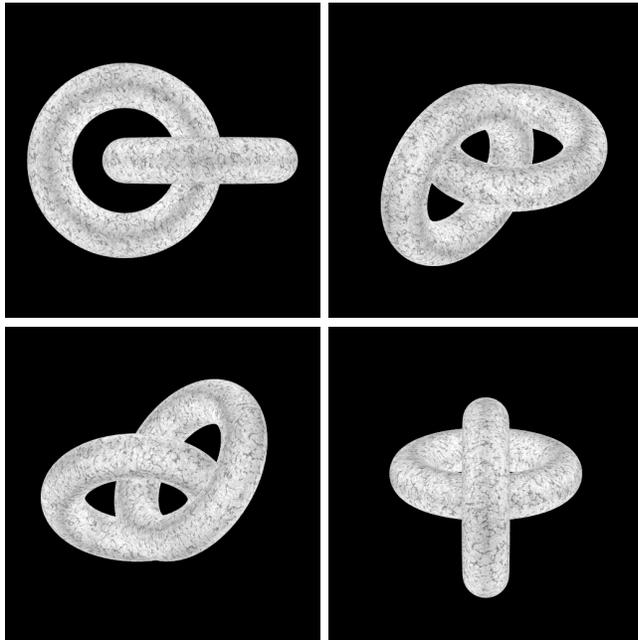
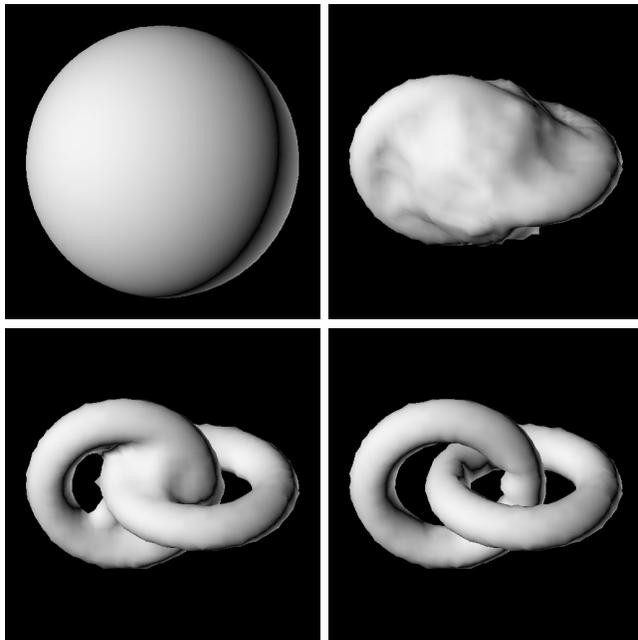


FIG. 3.16 – *Détection d'un tore. Reconstruction avec images reprojctées.*

FIG. 3.17 – *Détection de deux tores. Prises de vue.*FIG. 3.18 – *Détection de deux tores. Reconstruction.*

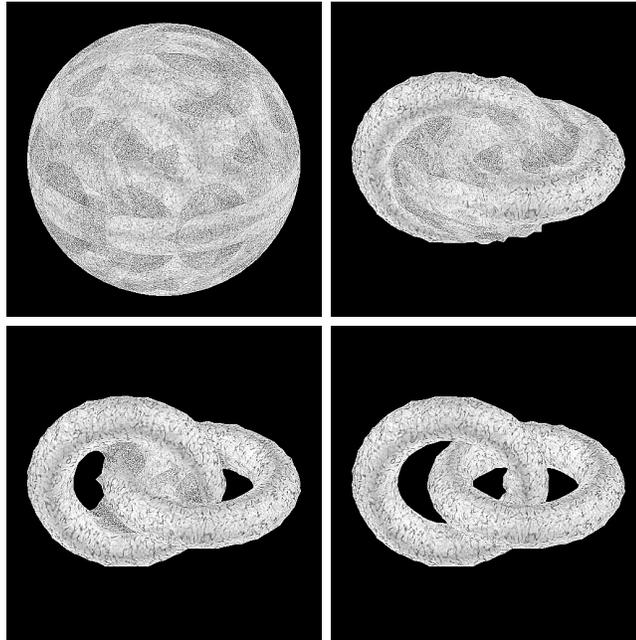


FIG. 3.19 – *Détection de deux tores. Reconstruction avec images reprojctées.*

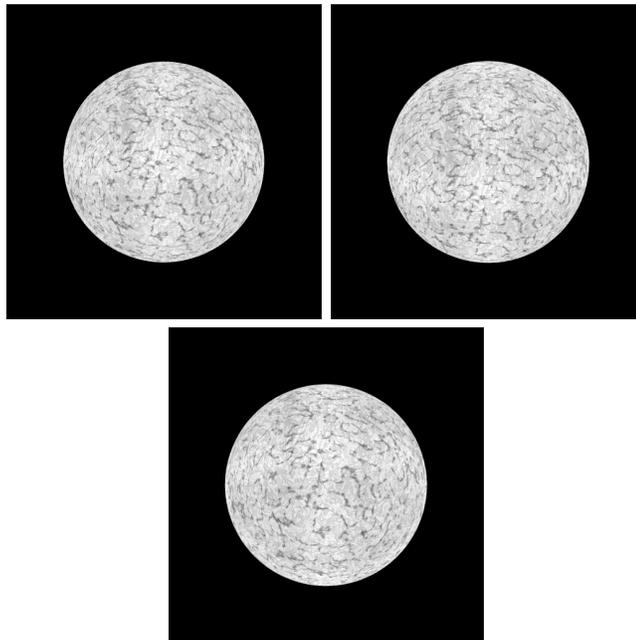


FIG. 3.20 – *Détection partielle d'une sphère. Prises de vue.*

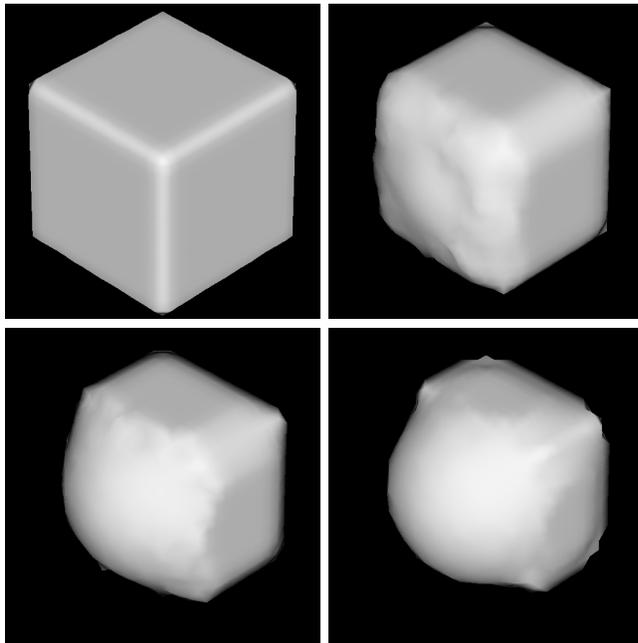


FIG. 3.21 – *Détection partielle d'une sphère. Reconstruction.*

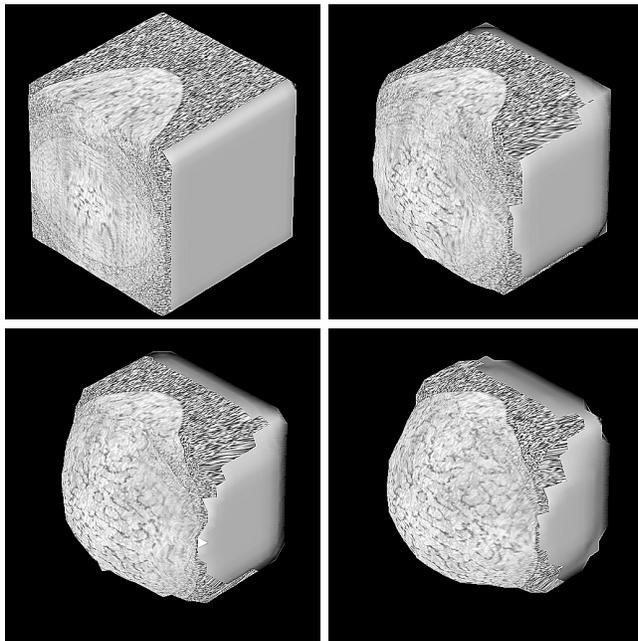


FIG. 3.22 – *Détection partielle d'une sphère. Reconstruction avec images reprojctées.*



FIG. 3.23 – *Détection d'un visage. Prises de vue.*

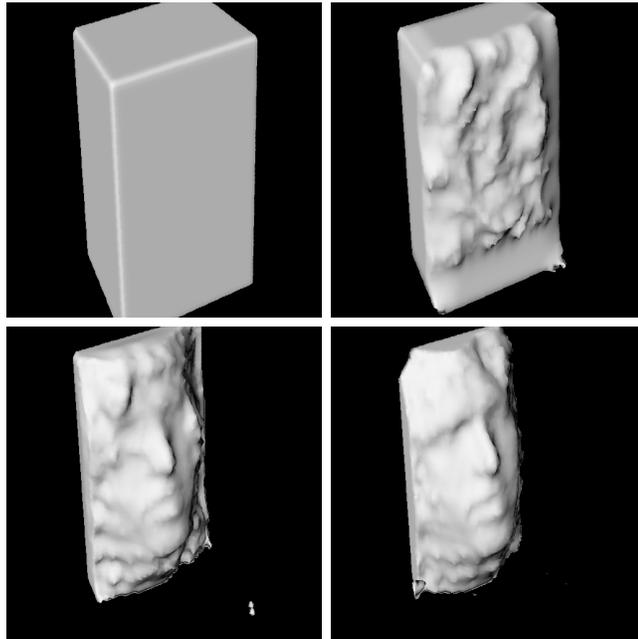


FIG. 3.24 – *Détection d'un visage. Reconstruction.*

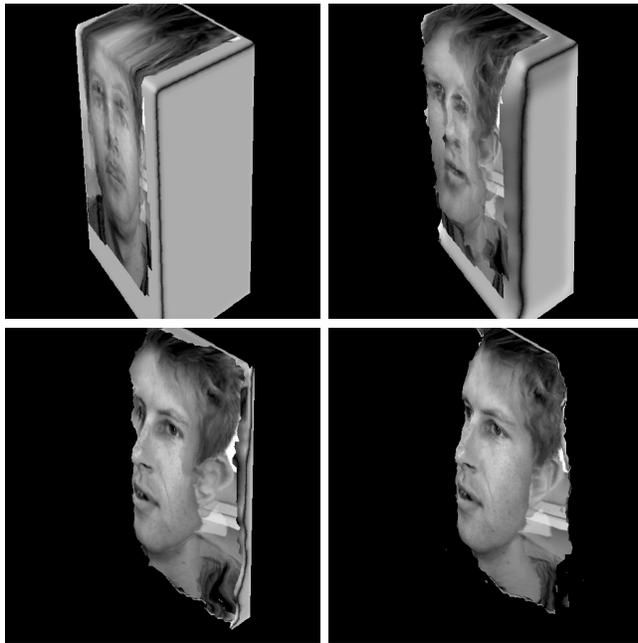


FIG. 3.25 – Détection d'un visage. Reconstruction avec images reprojettées.

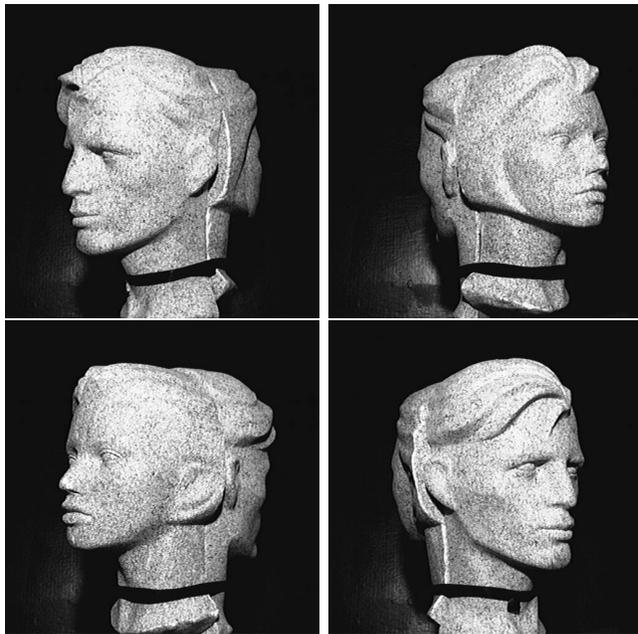


FIG. 3.26 – Détection d'un objet réel complet. Prises de vue.

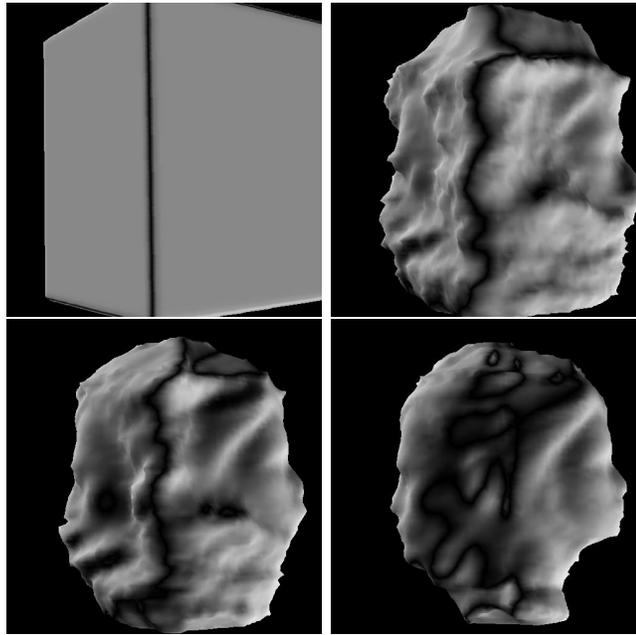


FIG. 3.27 – *Détection d'un objet réel complet. Reconstruction.*

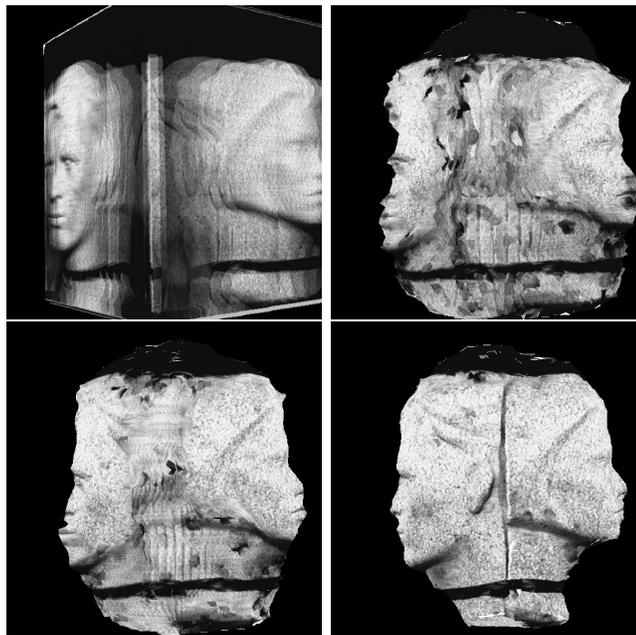


FIG. 3.28 – *Détection d'un objet réel complet. Reconstruction avec images reprojctées.*

## Chapitre 4

# Flots géométriques invariants

---

### Résumé

---

*Nous avons vu au chapitre 1 l'axiomatisation de l'analyse multi-échelle telle qu'elle a été proposée par Alvarez, Guichard, Lions et Morel [5]. Nous présentons ici les espaces d'échelle particuliers que sont ceux engendrés par les flots géométriques invariants en adoptant comme Olver, Sapiro et Tannenbaum [76] l'angle des évolutions de courbes et de surfaces. Après un rappel des invariants différentiels en géométrie euclidienne, affine ou projective et après une synthèse des propriétés connues des flots bidimensionnels euclidien et affine, nous nous intéressons à l'étude de l'évolution des courbes des espaces tridimensionnels euclidien et affine. Les résultats que nous présentons sur l'évolution sur ces flots invariants des courbes gauches sont des résultats originaux qui n'ont pas encore été publiés. Nous réservons le cas de la géométrie projective au chapitre suivant.*

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Invariants différentiels</b>	<b>99</b>
4.1.1	Définitions	99
4.1.2	Remarque	103
4.1.3	Liens entre les invariants	103
4.1.4	Interprétation géométrique	105
4.1.5	Courbes à courbure constante	111
<b>4.2</b>	<b>Flots géométriques invariants</b>	<b>116</b>
4.2.1	Définition	116
4.2.2	Vitesse normale	118
4.2.3	Justification	119
<b>4.3</b>	<b>Flots euclidien et affine</b>	<b>120</b>
4.3.1	Équations d'évolution	120

4.3.2	Vitesse normale . . . . .	121
4.3.3	Propriétés . . . . .	122
4.3.4	Courbes particulières . . . . .	122
4.3.5	Schémas numériques . . . . .	127
<b>4.4</b>	<b>Autres flots invariants . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>4.5</b>	<b>Flot géométrique euclidien des courbes 3D . . .</b>	<b>131</b>
4.5.1	Invariants différentiels . . . . .	131
4.5.2	Valeurs analytiques . . . . .	131
4.5.3	Courbes à courbure et torsion constantes . . . . .	133
4.5.4	Équations d'évolution . . . . .	133
4.5.5	Vitesse normale . . . . .	137
4.5.6	Courbes particulières . . . . .	137
<b>4.6</b>	<b>Flot géométrique affine des courbes 3D . . . . .</b>	<b>139</b>
4.6.1	Formules analytiques . . . . .	139
4.6.2	Liaison avec les invariants euclidiens . . . . .	140
4.6.3	Équation d'évolution . . . . .	141
4.6.4	Vitesse normale . . . . .	144
4.6.5	Courbes particulières. Discussion . . . . .	148
<b>4.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>149</b>

---

La vision par ordinateur passe par la compréhension d'une image à différentes échelles. Se livrer à une observation physique telle que regarder un objet suppose que l'on mesure une certaine quantité physique par l'intermédiaire d'un appareil réglé à une certaine ouverture. Si l'on désire obtenir des détails fins, il faut utiliser une petite ouverture donc enregistrer une petite portion de la quantité physique. A l'opposé, avec une grande ouverture nous obtenons une réponse plus importante mais des détails plus grossiers. Puisque nous ne pouvons pas connaître a-priori l'ouverture appropriée, l'idée de la notion d'espace d'échelle est de traiter l'*échelle* comme un paramètre réglable à volonté, et même de pouvoir disposer simultanément de toutes les observations faites aux différentes échelles. Cette représentation multi-échelle des données a pris ces dernières années une place grandissante en vision par ordinateur, comme en témoigne la création d'une conférence internationale consacrée à ce sujet [110].

Liée à cette idée est celle de la théorie des évolution de courbes et de surfaces [44, 48, 99, 49, 56] et l'introduction des EDP en traitement d'images [5, 4]. La notion d'invariant différentiel ou semi-différentiel [74] et d'évolution invariante [75] est fondamentale en reconnaissance des formes et en vision par ordinateur. Récemment, des applications ont vu le jour sur des problèmes habituellement posés à la communauté des chercheurs en vision artificielle: les flots géométriques invariants [62, 99, 75] possèdent de très bonnes propriétés de lissage géométrique et permettent le calcul d'invariants différentiels locaux (voir [33] et chapitre 6). Nous nous intéresserons donc ici à ces flots et à leur extension au cas des courbes tridimensionnelles, cas pour lequel nous établissons des résultats originaux. Nous reportons le lecteur à ces différents

travaux pour l'axiomatisation des espaces d'échelle, les fondements exacts de la notion de flot invariant, la dualité de l'évolution des niveaux de gris d'une image avec celle des ses courbes isophotes, les propriétés exactes des espaces d'échelle euclidien et affine et le côté fondamental de l'espace d'échelle affine. Nous nous contenterons dans la section suivante de fixer les notations et de rappeler les résultats qui nous seront utiles pour la suite.

## 4.1 Invariants différentiels

### 4.1.1 Définitions

Soit  $\mathcal{L}$  un groupe de Lie opérant sur certains objets. Une quantité  $q$  dépendant de ces objets est appelée *invariant* de  $\mathcal{L}$  si, pour toute transformation  $L \in \mathcal{L}$  changeant  $q$  en  $q'$ , on a  $q' = \alpha(L)q$ , avec  $\alpha$  fonction de  $L$  seulement, c'est-à-dire ne dépendant pas de l'objet transformé. Si  $\alpha \equiv 1$ , alors  $q$  est appelée *invariant absolu*.

Les *invariants différentiels* sont des invariants spéciaux basé sur les transformations locales (voir [51]). Nous allons nous intéresser aux invariants différentiels euclidiens, affines et projectifs des courbes planes et euclidiens et affines des courbes gauches. Nous les caractériserons à chaque fois par les formules de Frenet associées. L'étude de ces invariants peut être abordée par la méthode du repère mobile (voir les travaux d'Elie Cartan [11]), méthode dont on trouvera un exposé dans les notes de cours de Faugeras [28] ainsi qu'une application aux évolutions de courbes dans des articles du même auteur [29, 30].

### Cas euclidien plan

Soit  $\mathcal{C} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  une courbe plane de paramètre  $p$ . Les premier et deuxième invariants différentiels pour le groupe des déplacements engendré par les rotations et les translations sont les habituelles abscisse curviligne et courbure euclidiennes  $v$  et  $\kappa$  caractérisées par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_v &= \mathbf{t} \\ (\mathbf{t}, \mathbf{n}) &\text{ orthonormé direct} \end{aligned} \tag{4.1}$$

et par les équations de Frenet:

$$(\mathbf{t}_v, \mathbf{n}_v) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

où  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la tangente et la normale euclidiennes. Dans cette dernière formule,  $(\mathbf{t}_v, \mathbf{n}_v)$  est la matrice  $2 \times 2$  formées des vecteurs colonnes  $\mathbf{t}_v$  et  $\mathbf{n}_v$  dans le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ . Ce qui se lit  $\mathbf{t}_v = \kappa \mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}_v = -\kappa \mathbf{t}$ . Nous garderons cette convention matricielle par vecteurs colonnes tout le chapitre

par commodité et aussi parce que la matrice ainsi écrite est utilisable telle quelle pour les calculs de dérivation (voir par exemple les calculs effectués pour les équations (4.35) dans la preuve du lemme 23). En effet, si un vecteur  $\mathbf{u}$  s'écrit  $\mathbf{u} = [a, b]^T$  dans le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  alors sa dérivée par rapport à  $v$  sera simplement:

$$\mathbf{u}_v = \begin{pmatrix} a_v \\ b_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Les invariants euclidiens sont préservés par les rotations et les translations. Ils définissent la courbe à un déplacement près.

Ils sont calculables de manière analytique par des formules que nous donnons sous la forme d'un petit lemme:

**Lemme 5** *L'abscisse curviligne  $v$  et la courbure  $\kappa$  euclidiennes d'une courbe plane paramétrée par  $p$  vérifient les égalités suivantes:*

$$\begin{aligned} g &= \frac{dv}{dp} = \|\mathcal{C}_p\| \\ \kappa &= \|\mathcal{C}_{vv}\| \end{aligned} \tag{4.3}$$

$g$  est appelée *métrique de groupe euclidienne*.

**Preuve** Nous avons:  $\mathcal{C}_v = \frac{dp}{dv}\mathcal{C}_p$  soit encore  $\mathbf{t} = \frac{1}{g}\mathcal{C}_p$ . Le vecteur tangent étant normé, nous en déduisons facilement  $g = \|\mathcal{C}_p\|$ . D'autre part,  $\mathcal{C}_{vv} = \kappa\mathbf{n}$  et donc  $\kappa = \|\mathcal{C}_{vv}\|$  puisque  $\mathbf{n}$  est normé.

□

### Cas affine plan

Les invariants différentiels associés au groupe des transformations affines propres  $\{m \mapsto Am + B \mid [A] > 0, B \in \mathbf{R}^2\}$  sont les abscisse curviligne  $s$  et courbure affines  $\mu$  caractérisées par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_s &= \mathbf{e}_1 \\ [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] &= 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

et par les équations de Frenet affines:

$$(\mathbf{e}_{1s}, \mathbf{e}_{2s}) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  étant la tangente et la normale affines. Ici encore,  $(\mathbf{e}_{1s}, \mathbf{e}_{2s})$  est la matrice  $2 \times 2$  formées des vecteurs colonnes correspondants dans le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  est le déterminant des coordonnées des deux vecteurs.

$s$  et  $\mu$  sont des invariants pour les transformations affines propres, et invariants absolus pour les transformations affines spéciales ( $\{m \mapsto Am + B \mid$

$[A] = 1, B \in \mathbf{R}^2\}$  ). Ils définissent la courbe à une transformation affine spéciale près.

Nous donnons ici encore les formules analytiques sous forme d'une lemme:

**Lemme 6** *L'abscisse curviligne  $s$  et la courbure  $\mu$  affines d'une courbe plane paramétrée par  $p$  vérifient les égalités suivantes:*

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{ds}{dp} = [C_p, C_{pp}]^{\frac{1}{3}} \\ \mu &= [C_{sss}, C_{ss}]\end{aligned}\tag{4.6}$$

$\gamma$  est appelée métrique de groupe affine.

**Preuve:** Les règles de dérivations donnent ici:

$$\begin{aligned}C_s &= \frac{1}{\gamma}C_p \\ C_{ss} &= \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{\gamma_p}{\gamma^2}C_p + \frac{1}{\gamma}C_{pp}\right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

De  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 1$  nous tirons:

$$1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = [C_s, C_{ss}] = \left[\frac{1}{\gamma}C_p, -\frac{\gamma_p}{\gamma^3}C_p + \frac{1}{\gamma^2}C_{pp}\right] = \frac{1}{\gamma^3}[C_p, C_{pp}]\tag{4.8}$$

d'où  $\gamma = [C_p, C_{pp}]^{\frac{1}{3}}$ . D'autre part, les formules de Frenet nous donnent  $C_{sss} = \mu\mathbf{e}_1$  et donc:

$$[C_{sss}, C_{ss}] = [\mu\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mu\tag{4.9}$$

□

### Cas projectif plan

Bien qu'il ne sera question d'invariance projective qu'au chapitre suivant, nous introduisons dès maintenant par soucis de cohérence l'abscisse curviligne projective  $\sigma$  et la courbure projective  $k$  qui sont les deux premiers invariants différentiels pour le groupe des transformations projectives (homographies):

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{dx + ey + f}, \frac{a_2x + b_2y + c_2}{dx + ey + f}\right)$$

Le plan réel n'est pas le bon espace pour définir correctement les invariants différentiels projectifs. Il nous faut nous placer dans le plan projectif réel  $\mathcal{P}^2$ . On peut imaginer  $\mathcal{P}^2$  comme l'ensemble des droites de  $\mathbf{R}^3$  passant par l'origine. Un élément de  $\mathcal{P}^2$  est représenté par ses coordonnées homogènes

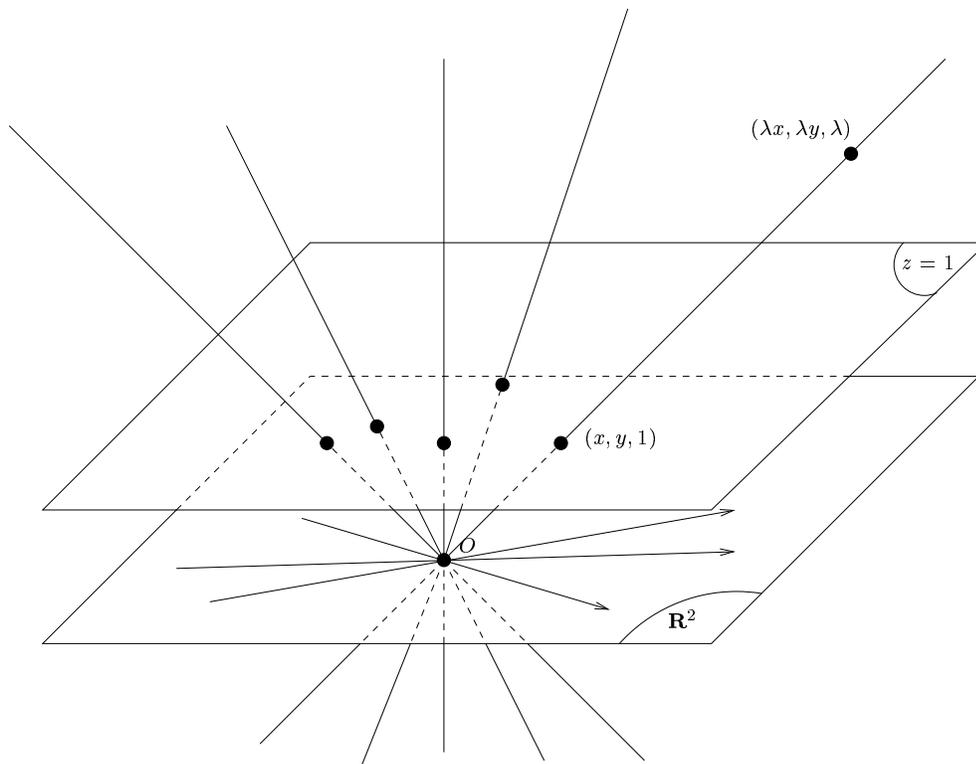


FIG. 4.1 – Le plan projectif  $\mathcal{P}^2$ , ensemble des droites de  $\mathbf{R}^3$  passant par l'origine, peut être vu comme le plan affine  $z = 1$  complété des directions de  $\mathbf{R}^2$

$(x, y, z)$ .  $(x, y, z)$  et  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ,  $(\lambda \neq 0)$  sont deux “vecteurs coordonnés” du même point projectif. On plonge  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathcal{P}^2$  par la fonction  $(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$ . On peut du coup imaginer  $\mathcal{P}^2$  comme le plan affine  $z = 1$  complété des directions de  $\mathbf{R}^2$  qui sont souvent désignées comme “points à l’infini” (figure 4.1). Soit  $\mathbf{B}(p) : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{P}^2$  la courbe du plan projectif associée à  $\mathcal{C}(p)$ . Suivant les résultats standards de la géométrie différentielle projective [11], nous changeons  $\mathbf{B}(p)$  d’un facteur d’échelle  $\lambda(p)$  et caractérisons son abscisse curviligne projective  $\sigma$  et sa courbure  $k$  en introduisant le point de Cartan  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B}$ , et le repère de Cartan  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)})$ , le tout satisfaisant la condition:

$$|\mathbf{A} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)}| = 1 \quad (4.10)$$

et les équations de Frenet projectives:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{A}^{(1)}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{A}^{(2)}}{\partial \sigma} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -k & -1 \\ 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Notez que  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  sont deux vecteurs coordonnées du même point projectif. Le point  $\mathbf{A}^{(1)}$  est sur la tangente à la courbe en  $\mathbf{A}$  et la droite  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A}^{(2)} \rangle$  est la normale projective. Les fonctions  $k$  et  $\sigma$  sont invariantes sous l'action du groupe projectif et définissent la courbe à une transformation projective près.

Leur détermination analytique à partir de  $\mathcal{C}(p)$  est possible mais complexe. La démonstration dont on trouvera les détails dans les notes de cours [28] fait intervenir la méthode du repère mobile. Au final, on trouve:

**Lemme 7** *L'abscisse curviligne  $\sigma$  et la courbure  $k$  projectives d'une courbe plane paramétrée par  $p$  vérifient les égalités suivantes:*

$$\begin{aligned} P &= \frac{[\mathcal{C}_{ppp}, \mathcal{C}_p]}{[\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{pp}]}, & Q &= \frac{[\mathcal{C}_{pp}, \mathcal{C}_{ppp}]}{[\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{pp}]} \\ H &= -\frac{PQ}{3} + \frac{2P^3}{27} - \frac{Q_p}{2} + \frac{PP_p}{3} + \frac{P_{pp}}{6} \\ \pi &= \frac{d\sigma}{dp} = H^{\frac{1}{3}} \\ k &= H^{-\frac{2}{3}} \left( -\frac{P_p}{2} - \frac{P^2}{6} + \frac{Q}{2} - \frac{H_{pp}}{3H} + \frac{7H_p^2}{18H^2} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\pi$  est la métrique de groupe projective.

#### 4.1.2 Remarque

Nous utiliserons plus loin le fait que les groupes de transformations considérés jusqu'ici sont sous-groupes les uns des autres: le groupe des déplacements est sous-groupe du groupe des transformations affines spéciales ( $[A] = 1$ ), lui-même sous-groupe du groupe des transformations affines propres ( $[A] > 0$ ), à son tour sous-groupe du groupe affine complet ( $[A] \neq 0$ ) que nous rencontrerons section 4.4, sous-groupe enfin du groupe des transformations projectives. Nous citerons aussi section 4.4 un autre sous-groupe du groupe affine propre: celui des similitudes, engendré par les déplacement et les homothéties.

#### 4.1.3 Liens entre les invariants

Les relations utiles suivantes aident à la compréhension des invariants euclidiens, affines et projectifs.

**Lemme 8** *Les invariants différentiels affines et euclidiens d'une courbe plane sont liées par les relations:*

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{ds}{dv} = \kappa^{\frac{1}{3}} \\ \mu &= -\kappa^{4/3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \kappa^{-2/3}}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

**Preuve:** Il s'agit d'une simple application des formules analytiques (4.6) dans le cas où  $p$  est l'abscisse curviligne euclidienne  $v$ . On a :

$$\gamma = [\mathcal{C}_v, \mathcal{C}_{vv}]^{\frac{1}{3}} = [\mathbf{t}, \kappa \mathbf{n}]^{\frac{1}{3}} = \kappa^{\frac{1}{3}}$$

Pour la courbure, il nous faut exprimer  $\mathcal{C}_s$  et  $\mathcal{C}_{sss}$  en fonction des dérivées par rapport à  $v$ , plus précisément dans  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_s &= \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_v = \kappa^{-\frac{1}{3}} \mathbf{t} \\ \mathcal{C}_{ss} &= \frac{1}{\gamma} ([\kappa^{-\frac{1}{3}}]_v \mathbf{t} + \kappa^{-\frac{1}{3}} \mathbf{t}_v) \\ &= \frac{1}{2} [\kappa^{-\frac{2}{3}}]_v \mathbf{t} + \kappa^{\frac{1}{3}} \mathbf{n} \\ \mathcal{C}_{sss} &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{2} [\kappa^{-\frac{2}{3}}]_{vv} \mathbf{t} + \frac{1}{2} [\kappa^{-\frac{2}{3}}]_v \kappa \mathbf{n} + [\kappa^{\frac{1}{3}}]_v \mathbf{n} - \kappa^{\frac{4}{3}} \mathbf{t} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} \kappa^{-\frac{1}{3}} [\kappa^{-\frac{2}{3}}]_{vv} - \kappa \right) \mathbf{t} \end{aligned}$$

d'où la valeur de la courbure:

$$\mu = [\mathcal{C}_{sss}, \mathcal{C}_s] = -\kappa^{4/3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \kappa^{-2/3}}{\partial v^2}$$

□

**Lemme 9** *Les invariants différentiels projectifs et affines d'une courbe plane sont liés par les relations:*

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{d\sigma}{ds} = \left( \frac{\mu_s}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ k &= \left( \frac{\mu_s}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left[ -\frac{\mu}{2} - \frac{1}{3} \frac{\mu_s^3}{\mu_s} + \frac{7}{18} \left( \frac{\mu_{ss}}{\mu_s} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Preuve:** Reprenons les formules analytiques (4.12) des invariants différentiels projectifs dans le cas où le paramètre  $p$  est l'abscisse curviligne affine  $s$ . Avec  $\mathcal{C}_s = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathcal{C}_{ss} = \mathbf{e}_2$  et  $\mathcal{C}_{sss} = \mu \mathbf{e}_1$ , on trouve successivement:

$$\begin{aligned} P &= 0, \quad Q = -\mu, \quad H = \frac{\mu_s}{2} \\ \pi &= \left( \frac{\mu_s}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ k &= \left( \frac{\mu_s}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \left[ -\frac{\mu}{2} - \frac{1}{3} \frac{\mu_s^3}{\mu_s} + \frac{7}{18} \left( \frac{\mu_{ss}}{\mu_s} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

□

### 4.1.4 Interprétation géométrique

Il ne nous paraît pas inutile de donner l'interprétation géométrique des invariants affines et projectifs et de rappeler leurs homologues euclidiens. Nous renvoyons le lecteur à [28] pour les détails.

#### Abscisses curvilignes

Alors que c'est la notion de distance qui sous-tend l'abscisse curviligne (voir figure 4.2):

$$\lim_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} (v_{\mathbf{B}} - v_{\mathbf{A}}) = d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (4.15)$$

c'est une aire qui définit l'abscisse curviligne affine (voir figure 4.3):

$$\lim_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} (s_{\mathbf{B}} - s_{\mathbf{A}}) = 2\mathcal{A}(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B})^{1/3} \quad (4.16)$$

Notez que l'additivité de  $s$  est assurée par la relation (figure 4.4):

$$\mathcal{A}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{B})^{1/3} + \mathcal{A}(\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C})^{1/3} = \mathcal{A}(\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{C})^{1/3} \quad (4.17)$$

relation dont on trouvera la démonstration dans [28].

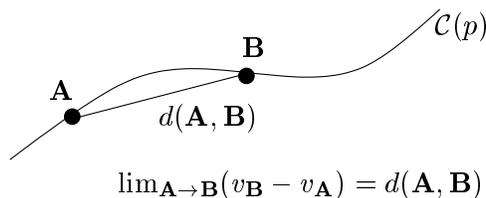
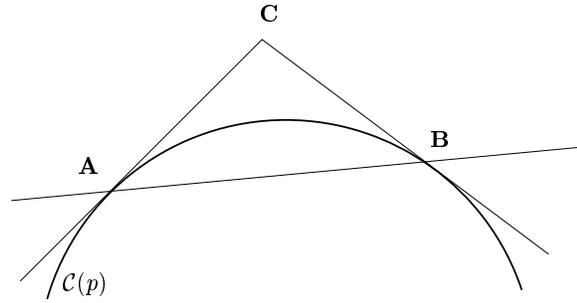


FIG. 4.2 – Entre deux points  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  infiniment proches, la variation d'abscisse curviligne euclidienne est la distance  $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$

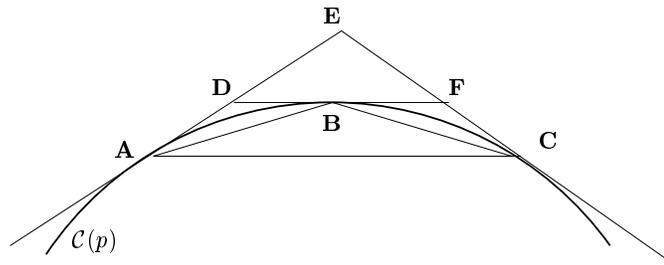
Le cas projectif est moins immédiat. Nous aurons d'abord besoin de la notion de point de contact, notion dont nous pensons utile de rappeler la définition (voir par exemple [10]):

**Définition 1** Deux variétés  $C^\infty$  de dimension  $p$   $V$  et  $W$  de  $\mathbf{R}^N$  ont un contact d'ordre  $n$  ou plus en un point  $M$  s'il existe deux paramétrisations  $(U, f)$  et  $(U, g)$  de  $V$  et de  $W$  respectivement telles que  $0 \in U$ ,  $f(0) = g(0) = M$  et  $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$  pour  $k = 1, \dots, n$ . Les deux variétés ont un contact d'ordre  $n$  exactement si elles ont un contact d'ordre  $n$  au moins et n'ont pas de contact d'ordre  $n + 1$  au moins. Deux variétés  $C^\infty$   $V$  et  $W$  de  $\mathbf{R}^N$  de dimensions respectives  $p$  et  $q$  ( $p \leq q$ ) ont un contact d'ordre  $n$  en  $M$  s'il existe une sous-variété  $W'$  de  $W$  de dimension  $p$  ayant un contact d'ordre  $n$  avec  $V$ .



$$\lim_{A \rightarrow B} (s_B - s_A) = 2\mathcal{A}(\mathbf{ACB})^{1/3}$$

FIG. 4.3 – Entre deux points **A** et **B** infiniment proches, la variation d'abscisse curviligne affine est le double de la racine cubique de l'élément d'aire du triangle (**ACB**)



$$\mathcal{A}(\mathbf{ADB})^{1/3} + \mathcal{A}(\mathbf{BFC})^{1/3} = \mathcal{A}(\mathbf{AEC})^{1/3}$$

FIG. 4.4 – La relation  $\mathcal{A}(\mathbf{ADB})^{1/3} + \mathcal{A}(\mathbf{BFC})^{1/3} = \mathcal{A}(\mathbf{AEC})^{1/3}$  assure l'additivité de l'abscisse curviligne affine

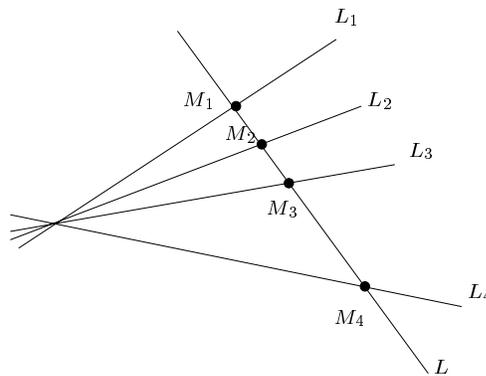


FIG. 4.5 – Le bi-rapport des droites  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  est défini comme étant celui des quatre points  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$

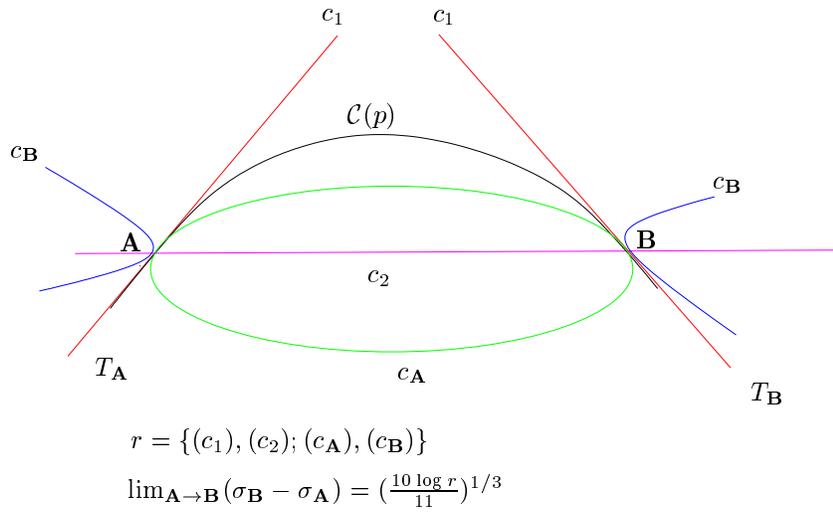


FIG. 4.6 – Abscisse curviligne projective (voir texte).

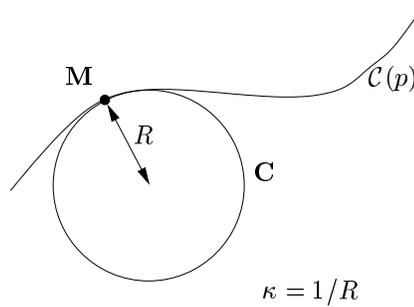


FIG. 4.7 – En un point **M**, la courbure euclidienne  $\kappa$  est l'inverse du rayon de cercle osculateur

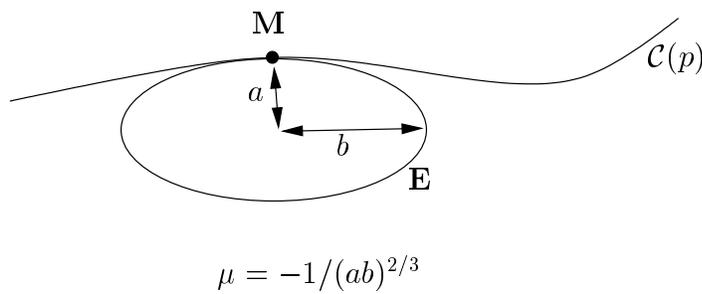


FIG. 4.8 – En un point **M**, la courbure affine  $\mu$  est nulle si la conique osculatrice est une parabole, l'inverse de la racine cubique du carré du produit des deux paramètres de la conique osculatrice sinon, en prenant l'opposé si la conique est une ellipse.

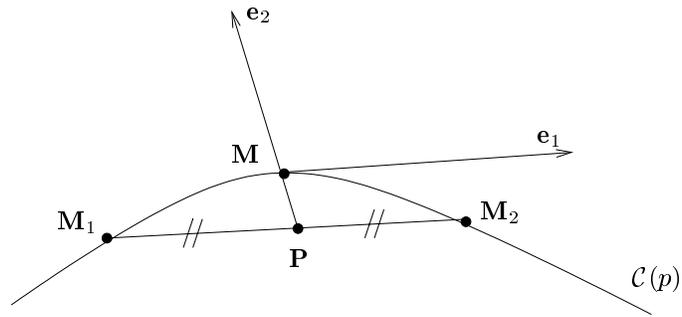


FIG. 4.9 – En un point  $M$ , la tangente affine  $e_1$  est portée par la tangente à la courbe. Le support de la normale affine  $e_2$  est la limite quand  $M_1$  tend vers  $M$  de la droite reliant  $M$  au milieu  $P$  de la corde  $[M_1, M_2]$  parallèle à la tangente.

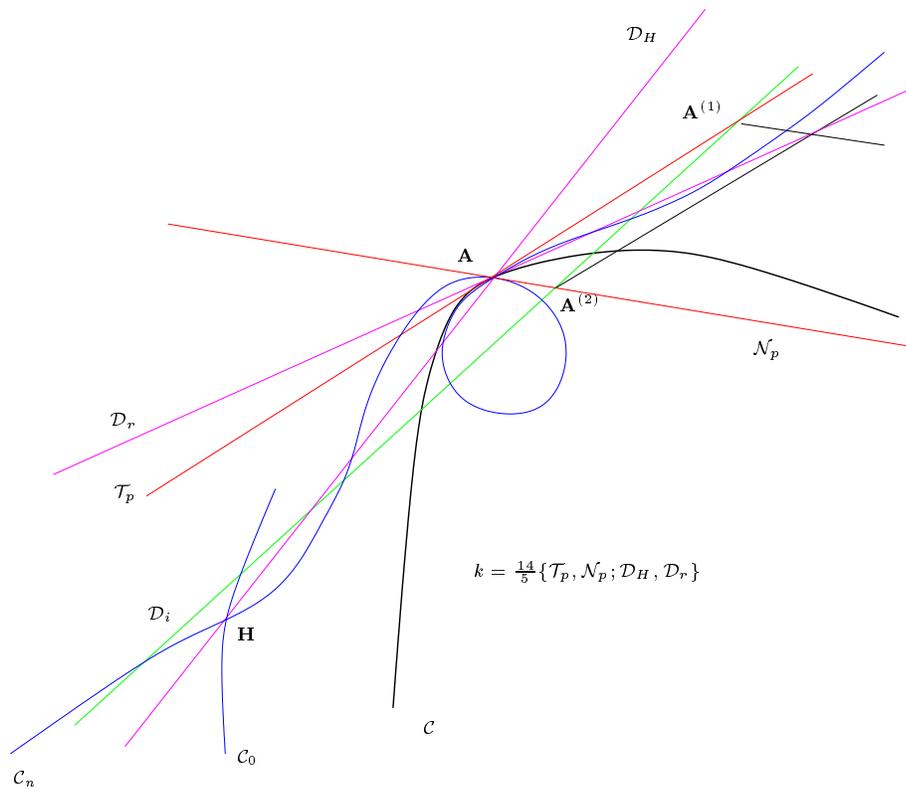


FIG. 4.10 – Tangente, normale et courbure projective (voir texte).

Il nous faut aussi définir le concept de bi-rapport ([28]):

**Définition 2** *Bi-rapport de quatre scalaires.* Soient quatre scalaires  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , on définit comme étant leur bi-rapport la quantité suivante:

$$\{x_1, x_2; x_3, x_4\} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} / \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}$$

*invariante par transformation affine.*

**Définition 3** *Bi-rapport de quatre points sur une droite.* Soient 4 points  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  situés sur une même droite. Soient  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  leurs abscisses respectives dans un certain repère de la droite. Alors la quantité:

$$\{M_1, M_2; M_3, M_4\} = \{x_1, x_2; x_3, x_4\}$$

*ne dépend pas du choix du repère de la droite et est appelée bi-rapport des points  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$*

**Définition 4** *Bi-rapport de quatre droites s'intersectant en un point.* Soient 4 droites  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  ayant un point commun. Soit  $L$  une droite intersectant  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  respectivement en  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  (figure 4.5). Alors la quantité:

$$\{L_1, L_2; L_3, L_4\} = \{M_1, M_2; M_3, M_4\}$$

*ne dépend pas du choix de la droite  $L$  et est appelé bi-rapport des droites  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$ . Cette quantité peut aussi être vue comme le bi-rapport de quatre points d'un espace projectif de dimension supérieure.*

**Définition 5** *Bi-rapport de quatre coniques d'un même faisceau.* Un faisceau de coniques est une famille de coniques d'équations  $\gamma_1 + \lambda\gamma_2 = 0$  où  $\lambda$  est un paramètre et  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux formes quadratiques définissant elles-mêmes deux coniques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  d'équations respectives  $\gamma_1 = 0$  et  $\gamma_2 = 0$ . Ces deux coniques particulières appartiennent au faisceau:  $\Gamma_1$  est obtenue pour  $\lambda = 0$  et  $\Gamma_2$  pour  $\lambda = \infty$ . Deux autres coniques quelconques du faisceau définissent le même faisceau. Soient quatre coniques particulières  $c_i$ , ( $1 \leq i \leq 4$ ) de paramètres respectifs  $\lambda_i$ , alors on appelle bi-rapport des quatre coniques la quantité:

$$\{c_1, c_2; c_3, c_4\} = \{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_3, \lambda_4\}$$

*qui ne dépend pas du choix des deux coniques de définition du faisceau. Cette quantité peut aussi être vue comme le bi-rapport de quatre points d'un espace projectif de dimension supérieure.*

Nous interprétons alors l'abscisse curviligne projective de la manière suivante. Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux points de la courbe. L'ensemble des coniques passant par  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  avec les mêmes tangentes que la courbe forment un faisceau à un paramètre. Si les tangentes  $T_{\mathbf{A}}$  et  $T_{\mathbf{B}}$  en  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont d'équations respectives  $t_{\mathbf{A}} = 0$  et  $t_{\mathbf{B}} = 0$ , et si la droite  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$  est d'équation  $t_{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle} = 0$  alors les coniques du faisceau ont une équation de la forme:

$$t_{\mathbf{A}}t_{\mathbf{B}} + \lambda(t_{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle})^2 = 0 \quad (4.18)$$

Parmi celles-ci, considérons (voir figure 4.6):

- la conique dégénérée  $c_1$  formée des deux tangentes ( $\lambda_1 = 0$ )
- la conique dégénérée  $c_2$  formée de la double droite  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ . ( $\lambda_2 = \infty$ )
- la conique  $c_{\mathbf{A}}$  ayant un point de contact d'ordre 3 à  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{A}$  de paramètre  $\lambda_{\mathbf{A}}$
- la conique  $c_{\mathbf{B}}$  ayant un point de contact d'ordre 3 à  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{B}$  de paramètre  $\lambda_{\mathbf{B}}$

Soit  $r$  le bi-rapport  $r = \{c_1, c_2; c_{\mathbf{A}}, c_{\mathbf{B}}\} = \frac{\lambda_{\mathbf{A}}}{\lambda_{\mathbf{B}}}$ . Alors nous avons:

$$\lim_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} (\sigma_{\mathbf{B}} - \sigma_{\mathbf{A}}) = \left(\frac{10}{11} \log r\right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.19)$$

### Courbures, tangentes et normales

La courbure euclidienne est l'inverse du rayon du cercle osculateur (point de contact d'ordre 2 avec la courbe) appelé rayon de courbure (voir figure 4.7)

$$\kappa = \frac{1}{R} \quad (4.20)$$

La courbure affine se définit à partir de la conique osculatrice (point de contact d'ordre 4 avec la courbe) (figure 4.8):

- Si la conique osculatrice est une parabole, la courbure est nulle
- Si c'est une ellipse d'équation du type  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  la courbure vaut

$$\mu = -1/(ab)^{2/3} \quad (4.21)$$

- Si c'est une hyperbole d'équation du type  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  la courbure vaut

$$\mu = 1/(ab)^{2/3} \quad (4.22)$$

La tangente euclidienne est évidemment le vecteur unitaire porté par la tangente à la courbe dans le sens de parcours et la normale euclidienne le vecteur avec lequel il définit un repère orthonormé. Dans le cas affine,  $\mathbf{e}_1$  est un vecteur tangent et  $\mathbf{e}_2$  un vecteur porté par la droite reliant le point courant au milieu de la corde (figure 4.9).

Le cas projectif nous fournit prétexte à une figure très complexe (fig. 4.10). Considérons en un point  $\mathbf{A}$  de la courbe les cubiques  $\mathcal{C}_n$  ayant un contact d'ordre 8. Elles forment une famille à un paramètre. Parmi ces cubiques, l'une d'entre-elles,  $\mathcal{C}_n$ , admet un noeud en  $\mathbf{A}$ . Les tangentes principale et secondaire à  $\mathcal{C}_n$  en  $\mathbf{A}$  portent respectivement la tangente et la normale projectives  $\mathcal{T}_p$  et  $\mathcal{N}_p$ . Une cubique nodale possède trois points d'inflexion alignés. Notons  $\mathcal{D}_i$  la ligne d'inflexion de  $\mathcal{C}_n$ . Elle coupe  $\mathcal{T}_p$  en  $\mathbf{A}^{(1)}$  et  $\mathcal{N}_p$  en  $\mathbf{A}^{(2)}$ . Appelons droite résiduelle  $\mathcal{D}_r$  la droite  $y = x$  du repère  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)})$ . Ayant huit points en commun (huit fois le point  $\mathbf{A}$ ), les cubiques du faisceau possèdent un neuvième point en commun. Ce point s'appelle le point de Halphen ( $\mathbf{H}$  sur la figure). Pour l'obtenir, il suffit d'intersecter  $\mathcal{C}_n$  avec un autre cubique quelconque  $\mathcal{C}_0$  du faisceau. Notons  $\mathcal{D}_H$  la droite de Halphen  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{H} \rangle$ . Nous avons alors la formule suivante:

$$k = \frac{14}{5} \{ \mathcal{T}_p, \mathcal{N}_p; \mathcal{D}_H, \mathcal{D}_r \} \quad (4.23)$$

où  $\{ \mathcal{T}_p, \mathcal{N}_p; \mathcal{D}_H, \mathcal{D}_r \}$  est le bi-rapport [28] des quatre droites.

#### 4.1.5 Courbes à courbure constante

On peut aussi essayer d'appréhender les invariants au travers de l'étude des courbes à courbure constante. Nous montrons les résultats suivants, dont le premier est bien connu.

**Lemme 10 Cas euclidien** *Les cercles (et les droites) sont les seules courbes à courbure euclidienne  $\kappa$  constante. Les droites ont une courbure nulle et les cercles une courbure inverse de leur rayon. (figure 4.11)*

**Preuve:** Les équations de Frenet euclidiennes deviennent dans le cas où la courbure  $\kappa$  est constante:

$$\mathbf{t}_{vv} = -\kappa \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_{vv} = -\kappa \mathbf{n}$$

Si le repère de Frenet de la courbe est initialement (pour  $v = 0$ )  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ , alors on a par intégration:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \cos(\kappa v) \mathbf{i} + \sin(\kappa v) \mathbf{j} \\ \mathbf{n} &= -\sin(\kappa v) \mathbf{i} + \cos(\kappa v) \mathbf{j} \end{aligned}$$

puis:

$$\mathcal{C}(v) = \frac{1}{\kappa} (\sin(\kappa v) \mathbf{i} + (1 - \cos(\kappa v)) \mathbf{j})$$

si  $\kappa \neq 0$ , ou

$$\mathcal{C}(v) = v \mathbf{i}$$

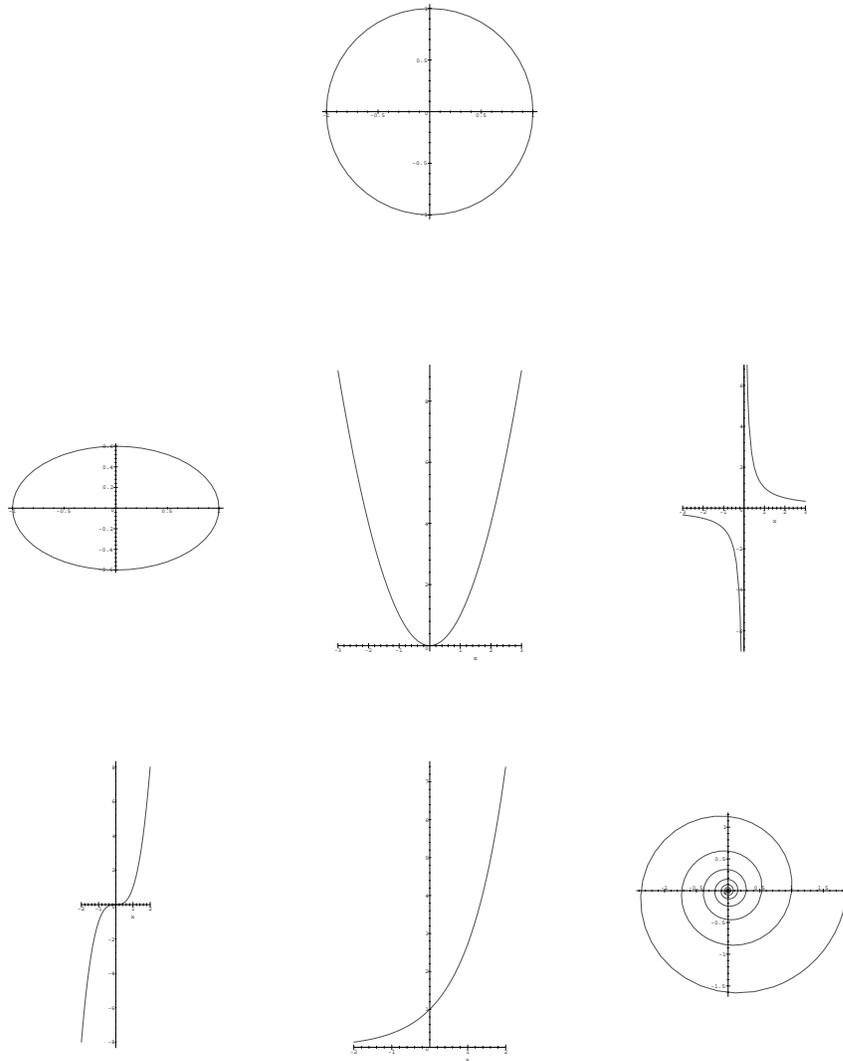


FIG. 4.11 – *Courbes à courbure constante. En haut, courbure euclidienne constante: le cercle. Au milieu, courbure affine constante: les coniques. En bas, courbure projective constante: puissances, exponentielles et spirales logarithmiques*

si  $\kappa = 0$ . Ce qui correspond bien à un cercle de rayon  $\frac{1}{\kappa}$  ( $\kappa \neq 0$ ) ou à une droite ( $\kappa = 0$ )

□

**Lemme 11 Cas affine** *Les coniques sont les seules courbes à courbure affine  $\mu$  constante. Les paraboles ont une courbure nulle, les ellipses une courbure négative et les hyperboles une courbure positive (figure 4.11). Plus précisément, les ellipses d'équation du type  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  sont de courbure  $\mu = -1/(ab)^{2/3}$  et les hyperboles d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  sont de courbure  $\mu = 1/(ab)^{2/3}$*

**Preuve:** Il s'agit d'intégrer le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_s &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{1s} &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2s} &= \mu \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

dans lequel  $\mu$  est maintenant une constante, avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(s=0) &= (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \\ [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] &= 1 \end{aligned}$$

Distinguons trois cas suivant le signe de  $\mu$ :

- $\mu = 0$

Le système précédent s'intègre immédiatement en:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 + s\mathbf{f}_2 \\ \mathcal{C} &= O + s\mathbf{f}_1 + (s^2/2)\mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

La courbe est alors une parabole d'axe parallèle à  $\mathbf{f}_2$ .

- $\mu > 0$

On déduit des équations initiales:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1s^2} &= (\sqrt{\mu})^2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{2s^2} &= (\sqrt{\mu})^2 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

équations qui s'intègrent, compte tenu des conditions initiales, en:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 \cosh(\sqrt{\mu}s) + \frac{\mathbf{f}_2}{\sqrt{\mu}} \sinh(\sqrt{\mu}s) \\ \mathbf{e}_2 &= \sqrt{\mu} \mathbf{f}_1 \sinh(\sqrt{\mu}s) + \mathbf{f}_2 \cosh(\sqrt{\mu}s) \\ \mathcal{C} &= (O - \frac{\mathbf{f}_2}{\mu}) + \frac{\mathbf{f}_1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\sqrt{\mu}s) + \frac{\mathbf{f}_2}{\mu} \cosh(\sqrt{\mu}s) \end{aligned}$$

La courbe est une hyperbole centrée en  $(O - \frac{\mathbf{f}_2}{\mu})$

- $\mu < 0$

On déduit des équations initiales:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1s^2} &= -(\sqrt{-\mu})^2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_{2s^2} &= -(\sqrt{-\mu})^2 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

équations qui s'intègrent, compte tenu des conditions initiales, en:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 \cos(\sqrt{-\mu}s) + \frac{\mathbf{f}_2}{\sqrt{-\mu}} \sin(\sqrt{-\mu}s) \\ \mathbf{e}_2 &= \sqrt{-\mu} \mathbf{f}_1 \sin(\sqrt{-\mu}s) + \mathbf{f}_2 \cos(\sqrt{-\mu}s) \\ \mathcal{C} &= \left(O - \frac{\mathbf{f}_2}{\mu}\right) + \frac{\mathbf{f}_1}{\sqrt{-\mu}} \sin(\sqrt{-\mu}s) + \frac{\mathbf{f}_2}{\mu} \cos(\sqrt{-\mu}s) \end{aligned}$$

La courbe est une ellipse centrée en  $(O - \frac{\mathbf{f}_2}{\mu})$

Enfin, il est facile de calculer la courbure d'une ellipse et d'une hyperbole à partir des formules analytiques (4.6).

□

**Lemme 12 Cas projectif** *Les courbes planes à courbure projective constante sont (figure 4.11):*

- Si  $k = k_0 = -3/32^{1/3}$ : l'exponentielle ( $y = e^{mx}$ ) ( $m \neq 0$ )
- Si  $k < k_0$ : les paraboles généralisées ( $y = x^m$ ,  $m \notin \{2, \frac{1}{2}, 0, 1, -1\}$ ), de courbure

$$k = k_0 \frac{m^2 - m + 1}{[(m-2)(m-\frac{1}{2})(m+1)]^{\frac{2}{3}}}$$

- Si  $k > k_0$ : les spirales logarithmiques ( $\rho = e^{m\theta}$ ,  $m \neq 0$ ) de courbure

$$k = k_0 \frac{m^2 - 3}{[m(m^2 + 9)]^{\frac{2}{3}}}$$

**Preuve:** Plaçons nous dans le plan projectif  $\mathcal{P}^2$ . Des équations de Frenet, nous obtenons, lorsque la courbure est constante:

$$\mathbf{A}_{\sigma^3} + 2k\mathbf{A}_{\sigma} + \mathbf{A} = 0$$

nous considérons donc l'équation différentielle scalaire:

$$\omega''' + 2k\omega' + \omega = 0$$

En posant  $\omega = e^r$ , nous obtenons l'équation caractéristique suivante:

$$r^3 + 2kr + 1 = 0$$

Distinguons différents cas suivant les racines de cette équation. La somme des racines étant nulle, on ne peut avoir trois racine égales. Restent donc les cas suivants:

- **Trois racines réelles distinctes:** Si l'équation caractéristique admet trois racines distinctes  $r_1, r_2, r_3$ , alors elles sont réelles et les solutions de l'équation sont de la forme:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 e^{r_1 \sigma} + \mathbf{A}_2 e^{r_2 \sigma} + \mathbf{A}_3 e^{r_3 \sigma}$$

où  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  sont trois points quelconques. En prenant ces trois points comme repère, les équation de la courbe deviennent:

$$z = e^{r_1 \sigma}, \quad x = e^{r_2 \sigma}, \quad y = e^{r_3 \sigma}$$

soit, en coordonnées non homogènes:

$$y = x^m$$

avec  $m = \frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1}$

- **Une racine réelle et deux racines complexes conjuguées** Si l'équation caractéristique admet un racine réelle  $r_1$  et deux racines complexes conjuguées  $r_2 + ir_3$  et  $r_2 - ir_3$ , alors, dans un certain repère, les équations de la courbe sont:

$$z = e^{r_1 \sigma}, \quad x = e^{r_2 \sigma} \cos(r_3 \sigma), \quad y = e^{r_2 \sigma} \sin(r_3 \sigma)$$

c'est-à-dire en coordonnées polaires:

$$\rho = e^{(r_2 - r_1) \sigma}, \quad \theta = r_3 \sigma$$

ce qui est l'équation d'une spirale logarithmique.

- **Deux racines réelles égales** Si l'équation caractéristique admet trois racines réelles dont deux égales  $r_1 = r_2$ , alors les équations de la courbe sont, dans un certain repère:

$$z = e^{r_1 \sigma}, \quad x = \sigma e^{r_1 \sigma}, \quad y = e^{r_3 \sigma}$$

c'est-à-dire en coordonnées non homogènes:

$$y = e^{mx}$$

avec  $m = r_3 - r_1 \neq 0$

Classons maintenant ces trois cas suivant leur courbure:

- Il est facile de calculer à partir des formules analytiques (4.12) que la courbure projective de la courbe  $y = e^{mx}$  vaut  $k = k_0 = -3/32^{1/3}$

- De même, on trouve pour la spirale logarithmique  $\rho = e^{m\theta}$  une courbure:

$$k = k_0 \frac{m^2 - 3}{[m(m^2 + 9)]^{\frac{2}{3}}}$$

dont on peut montrer facilement qu'elle est toujours supérieure à  $k_0$

- Pour la fonction puissance  $y = x^m$ , on trouve:

$$k = k_0 \frac{m^2 - m + 1}{[(m - 2)(m - \frac{1}{2})(m + 1)]^{\frac{2}{3}}}$$

L'étude de  $k$  montre qu'elle est toujours inférieure à  $k_0$ , sauf en  $m = 0$  et  $m = 1$  ou elle est égale à  $k_0$  et qu'elle est non définie lorsque  $m \in \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$ . Ces 5 valeurs particulières de  $m$  correspondent à des coniques et à des droites, courbes pour lesquelles la géométrie différentielle projective est non définie. Nous les excluons donc.

En résumé, la valeur de  $k$  par rapport à  $k_0$  est bien un moyen de classer les courbes à courbure projective constante.

□

## 4.2 Flots géométriques invariants

Repoussant volontairement le cas projectif au chapitre 5, nous rassemblons ici des résultats connus sur les cas euclidien et affine et mentionnons quelques autres flots étudiés par Olver, Sapiro et Tannenbaum [76].

### 4.2.1 Définition

Soit une courbe plane  $\mathcal{C}_0(p) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Si nous faisons évoluer cette courbe initiale suivant l'équation classique de la chaleur, nous obtenons la famille de courbe définie par:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{C}(p,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}(p,t)}{\partial p^2} \\ \mathcal{C}(p, 0) = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

La solution de cette EDP s'obtient par convolution des coordonnées de la courbe initiale avec un opérateur Gaussien de variance dépendant du temps. Elle correspond au modèle étudié par Marr et Hildreth [73], utilisé par Witkin [114] et dont Koenderink [64] remarqua le lien entre équation de la chaleur et convolution avec une Gaussienne. Cette analyse multi-échelle de la courbe initiale possède des propriétés importantes, de lissage notamment, mais aussi

une propriété indésirable: la famille de courbe obtenue dépend de la paramétrisation de la courbe initiale et non pas seulement de son lieu géométrique:

**Lemme 13** *Soit  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe initiale et  $w(p)$ ,  $\frac{dw}{dp} > 0$  une reparamétrisation de la courbe, alors:*

- Si  $\mathcal{C}(p, t)$  est le flot de la chaleur associé à  $\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t & = \mathcal{C}_{pp} \\ \mathcal{C}(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

- Si  $\mathcal{C}'(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}'_0(p) = \mathcal{C}_0(w(p))$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}'_t & = \mathcal{C}'_{pp} \\ \mathcal{C}'(p, 0) & = \mathcal{C}'_0(p) = \mathcal{C}_0(w(p)) \end{cases}$$

- Alors les flots  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont différents:

$$\text{Img}[\mathcal{C}'(p, t)] \neq \text{Img}[\mathcal{C}(p, t)]$$

Le lissage d'une courbe par ce procédé dépendra donc de la façon dont on paramètrera initialement la courbe.

Donnons nous alors un groupe  $\mathcal{L}$  de transformations géométriques et considérons maintenant, en reprenant les travaux d'Olver, Sapiro et Tannenbaum synthétisés dans [76], le flot géométrique associé à  $\mathcal{C}_0$ . Il s'agit de la famille de courbes  $\mathcal{C}(p, t) : \mathbf{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^2$  évoluant suivant la loi:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{C}(p, t)}{\partial t} & = \frac{\partial^2 \mathcal{C}(p, t)}{\partial r^2} \\ \mathcal{C}(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases} \quad (4.24)$$

où  $r$  est l'abscisse curviligne du groupe  $\mathcal{L}$  ( $v$  pour le flot géométrique euclidien,  $s$  pour le flot affine). Contrairement au flot issu de l'équation de la chaleur classique  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{pp}$ , ce flot est intrinsèque, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la paramétrisation  $p$  de la courbe initiale:

**Lemme 14** *Soit  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe initiale et  $w(p)$ ,  $\frac{dw}{dp} > 0$  une reparamétrisation de la courbe, alors:*

- Si  $\mathcal{C}(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t & = \mathcal{C}_{rr} \\ \mathcal{C}(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

- Si  $\mathcal{C}'(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}'_0(p) = \mathcal{C}_0(w(p))$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}'_t & = \mathcal{C}'_{rr} \\ \mathcal{C}'(p, 0) & = \mathcal{C}'_0(p) = \mathcal{C}_0(w(p)) \end{cases}$$

- Alors les flots  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont les mêmes:

$$\text{Img}[\mathcal{C}'(p, t)] = \text{Img}[\mathcal{C}(p, t)]$$

Il est invariant pour le groupe de transformations considéré, au sens énoncé plus haut section 4.1.1:

**Lemme 15** *Soit  $L \in \mathcal{L}$ , alors il existe  $\alpha(L) \in \mathbf{R}$  tel que pour toute courbe initiale  $\mathcal{C}_0(p)$  on ait:*

– Si  $\mathcal{C}(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t & = \mathcal{C}_{rr} \\ \mathcal{C}(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

– Si  $\mathcal{C}'(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}'_0 = L\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}'_t & = \mathcal{C}'_{rr} \\ \mathcal{C}'(p, 0) & = \mathcal{C}'_0(p) = L\mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

– Alors le flot  $\mathcal{C}'$  est l'image par  $L$  du flot  $\mathcal{C}$  à une reparamétrisation en temps près ne dépendant que de  $L$ :

$$\text{Img}[\mathcal{C}'(p, \alpha(L)t)] = \text{Img}[L\mathcal{C}(p, t)]$$

#### 4.2.2 Vitesse normale

Une propriété importante déjà mentionnée au chapitre 2 est la suivante [99]: les familles de courbes engendrées par  $\mathcal{C}_t = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}$  et par  $\mathcal{C}_t = \beta\mathbf{n}$  sont les mêmes à une reparamétrisation en espace près, à condition que  $\beta$  soit intrinsèque, c'est-à-dire ne dépende pas du choix de paramétrisation  $p$ . Seule la vitesse normale importe.

**Lemme 16** *Soit  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe initiale et  $\beta$  une quantité intrinsèque définie sur les courbes, c'est-à-dire ne dépendant pas de la paramétrisation des courbes, alors, pour toute quantité  $\alpha$ :*

– Si  $\mathcal{C}(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}_t = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n}$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t & = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} \\ \mathcal{C}(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

– Si  $\mathcal{C}'(p, t)$  est le flot associé à  $\mathcal{C}'_t = \beta\mathbf{n}$ :

$$\begin{cases} \mathcal{C}'_t & = \beta\mathbf{n} \\ \mathcal{C}'(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

– Alors les flots  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont les mêmes:

$$\text{Img}[\mathcal{C}'(p, t)] = \text{Img}[\mathcal{C}(p, t)]$$

**Preuve:** La démonstration est faite par Epstein et Gage dans [26]. Nous ne la reprenons pas ici et invitons le lecteur à lire celle que nous donnons pour

le cas des courbes gauches (lemme 1) et qui est en tout point similaire.

□

En pratique, la détermination de la composante normale de  $\mathcal{C}_{rr}$  sera donc essentielle pour la compréhension et l'étude des propriétés d'un flot (tout comme elle le sera pour son implémentation – voir section 4.3.5).

### 4.2.3 Justification

Alors qu'Alvarez, Guichard, Lions et Morel [5] justifient le choix du flot affine comme analyse multi-échelle d'une courbe ou d'une image à travers une axiomatisation des espaces d'échelles, l'approche d'Olver, Sapiro et Tannenbaum repose sur des arguments différentiels. Leurs résultats peuvent se résumer comme suit [76]: pour un sous-groupe du groupe projectif, les évolutions invariantes sont de la forme:

$$\mathcal{C}_t = \Psi(\chi, \chi_r, \chi_{r^2}, \dots, \chi_{r^n})\mathcal{C}_{r^2}$$

où  $\chi$  est la courbure de groupe, et  $\Psi$  une certaine fonction. Les auteurs formalisent ce résultat ainsi:

**Lemme 17** *Si on exprime localement  $\mathcal{C}$  comme le graphe d'une fonction  $y = u(x, t)$ , alors l'évolution du système (4.24) est équivalente à:*

$$u_t = \frac{1}{g^2}u_{xx}$$

expression dans laquelle  $g = \frac{dr}{dx}$  est la métrique de groupe.

**Théorème 6** *Soit  $\mathcal{L}$  un sous-groupe du groupe projectif. Soit  $r$  l'abscisse curviligne de groupe,  $\chi$  la courbure de groupe et  $g = \frac{dr}{dp}$  la métrique. Alors:*

1. *Tout invariant différentiel  $I$  de  $\mathcal{L}$  est une fonction de la courbure et de ses dérivées par rapport à l'abscisse curviligne :*

$$I = I(\chi, \chi_{r^2}, \dots, \chi_{r^n})$$

2. *Toute évolution invariante est de la forme:*

$$u_t = \frac{1}{g^2}u_{xx}I$$

où  $I$  est un invariant différentiel.

En particulier, la justification du choix de (4.24) comme flot géométrique invariant s'exprime à travers le corollaire suivant:

**Corollaire 1** *Si  $\mathcal{L}$  est le groupe des similitudes, le groupe affine spécial ou affine complet ou le groupe projectif, alors, à un facteur constant  $c$  près, il n'y*

a qu'un seul flot invariant dont l'équation d'évolution soit d'ordre minimum. Il s'agit de:

$$u_t = \frac{c}{g^2} u_{xx}$$

corollaire auquel il faut adjoindre les remarques suivantes:

**Remarques:**

1. Seule la deuxième partie du théorème 6 nécessite que  $\mathcal{L}$  soit un sous-groupe du groupe projectif.
2. Dans le cas euclidien, le flot invariant non trivial d'équation d'ordre minimum n'est pas le flot euclidien habituel  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{vv} = \kappa \mathbf{n}$  qui est d'ordre 2 mais le flot de vitesse constante  $\mathcal{C}_t = c\mathbf{n}$ , localement:

$$u_t = c\sqrt{1 + u_x^2}$$

correspondant à l'invariant  $I = \frac{1}{\kappa}$

3. Pour Olver, Sapiro et Tannenbaum, leur approche est plus générale que celle du Ceremade dans le sens qu'un seul critère impose le choix du flot (flot invariant non trivial d'équation d'ordre minimum) par comparaison avec une collection d'axiomes, collection qu'il faut adapter à chaque flot. Au contraire, l'approche du Ceremade rend mieux compte de la notion d'espace d'échelle et de la sémantique recherchée sans vouloir nécessairement la simplicité différentielle, argument qui est mis en défaut par le cas euclidien.

### 4.3 Flots euclidien et affine

Nous étudions maintenant les flots intrinsèques euclidien  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{vv}$  et affine  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{ss}$ .

#### 4.3.1 Équations d'évolution

Pour un groupe donné, une courbe plane est définie, à une transformation du groupe près, par son abscisse curviligne et sa courbure de groupe. Il est donc naturel d'étudier l'évolution de ces deux quantités. Nous avons dans le cas euclidien [44, 48]:

**Lemme 18** *Soit  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe plane fermée et  $\mathcal{C}(p, t)$  le flot intrinsèque euclidien associé défini par:*

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t & = \mathcal{C}_{vv} \\ \mathcal{C}(p, 0) & = \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

Alors l'abscisse curviligne et la courbure euclidiennes évoluent suivant les lois:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} &= -g\kappa^2 \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= -\kappa^3 - \frac{\partial^2 \kappa}{\partial v^2} \end{cases} \quad (4.25)$$

et pour le cas affine [100]:

**Lemme 19** Soit  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe plane fermée et  $\mathcal{C}(p, t)$  le flot intrinsèque affine associé défini par:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_t &= \mathcal{C}_{ss} \\ \mathcal{C}(p, 0) &= \mathcal{C}_0(p) \end{cases}$$

Alors l'abscisse curviligne et la courbure euclidiennes évoluent suivant les lois:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= -2\gamma\mu/3 \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{4}{3}\mu^2 + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} \end{cases} \quad (4.26)$$

### 4.3.2 Vitesse normale

Dans le cas euclidien,  $\mathcal{C}_{vv} = \kappa \mathbf{n}$  est déjà normal. Les points de la courbe avancent avec une vitesse égale à la courbure.

Pour le cas affine, effectuons le petit calcul suivant qui nous donnera la composante normale de  $\mathcal{C}_{ss}$ . Posons  $\gamma = \frac{ds}{dv}$ , nous avons:

$$\mathcal{C}_s = \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_v = \frac{1}{\gamma} \mathbf{t}$$

d'où, par application de formules de Frenet euclidiennes (4.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ss} &= \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{t}_v - \frac{\gamma_v}{\gamma^2} \mathbf{t} \\ &= \frac{1}{\gamma^2} (\kappa \mathbf{n}) - \frac{\gamma_v}{\gamma^2} \mathbf{t} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\gamma$  en utilisant la définition analytique de l'abscisse curviligne affine (4.6) dans le cas  $p = v$ :

$$\frac{ds}{dv} = [\mathcal{C}_v, \mathcal{C}_{vv}]^{\frac{1}{3}} = [\mathbf{t}, \kappa \mathbf{n}]^{\frac{1}{3}} = \kappa^{\frac{1}{3}}$$

formule que nous avons déjà mentionnée en donnant les relations entre l'af-fine et l'euclidien (équations (4.13)).

Ainsi, la composante normale de  $\mathcal{C}_{ss}$  vaut  $\frac{1}{\gamma^2} \kappa = \kappa^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$ . Le flot affine peut donc aussi être défini par:

$$\mathcal{C}_t = \kappa^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$$

ce qui est effectivement utilisé pour sa simulation numérique (voir pourquoi section 4.3.5). Plus encore: le flot affine  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{ss}$  n'est en toute rigueur défini que pour les courbes convexes car la métrique affine n'existe pas en un point d'inflexion. Le flot  $\mathcal{C}_t = \kappa^{\frac{1}{3}}\mathbf{n}$  est lui défini partout: c'est en fait celui-là (ou une prolongation convenable du précédent) qui peut être étudié pour les courbes non convexes et qui possède les propriétés énoncées dans la section qui suit. On gardera toutefois à l'esprit que les équations d'évolution (4.26) sont établies pour  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{ss}$  et non pour  $\mathcal{C}_t = \kappa^{\frac{1}{3}}\mathbf{n}$ . Les dérivées par rapport à  $s$  le sont à  $p$  constant pour le paramètre d'espace  $p$  de l'évolution  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{ss}$ . Nous verrons au chapitre 6 que vouloir utiliser de telles formules n'est de toute façon pas immédiat puisque l'implémentation d'une évolution de courbe par des méthodes d'ensemble de niveau fait perdre le paramètre d'espace: seul le lieu géométrique des courbes est obtenu.

### 4.3.3 Propriétés

Outre leur invariance (voir figures 4.12 et 4.13), les propriétés fondamentales des ces flots, sont au nombre de deux:

1. Ils définissent un espace d'échelle au sens de l'axiomatisation d'Alvarez, Guichard, Lions et Morel [5, 4] (voir section 1.2).
2. Ils possèdent des propriétés de lissage [62, 99] (voir figure 4.14): les courbes fermées évoluent vers des courbes convexes puis disparaissent en un temps fini en convergeant en un certain sens vers un "point cercle" (cas euclidien) ou un "point ellipse" (cas affine) (voir figure 4.15).

### 4.3.4 Courbes particulières

Dans l'étude des espaces d'échelle euclidien et affine plans, le cas des courbes à courbure constante est intéressant à plusieurs égards:

1. Elles évoluent en restant à courbure constante.
2. Elles sont un point de convergence de l'évolution des autres courbes.
3. Il est possible de calculer la solution analytique de leur évolution intrinsèque. En particulier, le calcul de l'instant exact de leur disparition permet de vérifier la précision d'un schéma de simulation numérique (figure 4.16).

Nous rechercherons systématiquement si ces propriétés sont encore vraies pour chacune des évolutions que nous étudierons: courbes tridimensionnelles euclidiennes et affines et courbes planes projectives.

Il est immédiat de calculer l'évolution euclidienne des cercles et l'évolution affine des ellipses, et de vérifier leur disparition en un temps fini:

**Lemme 20** *Évolution exacte des courbes à courbure constante:*

1. *Cas euclidien: un cercle de rayon initial  $R_0$  reste un cercle de même*

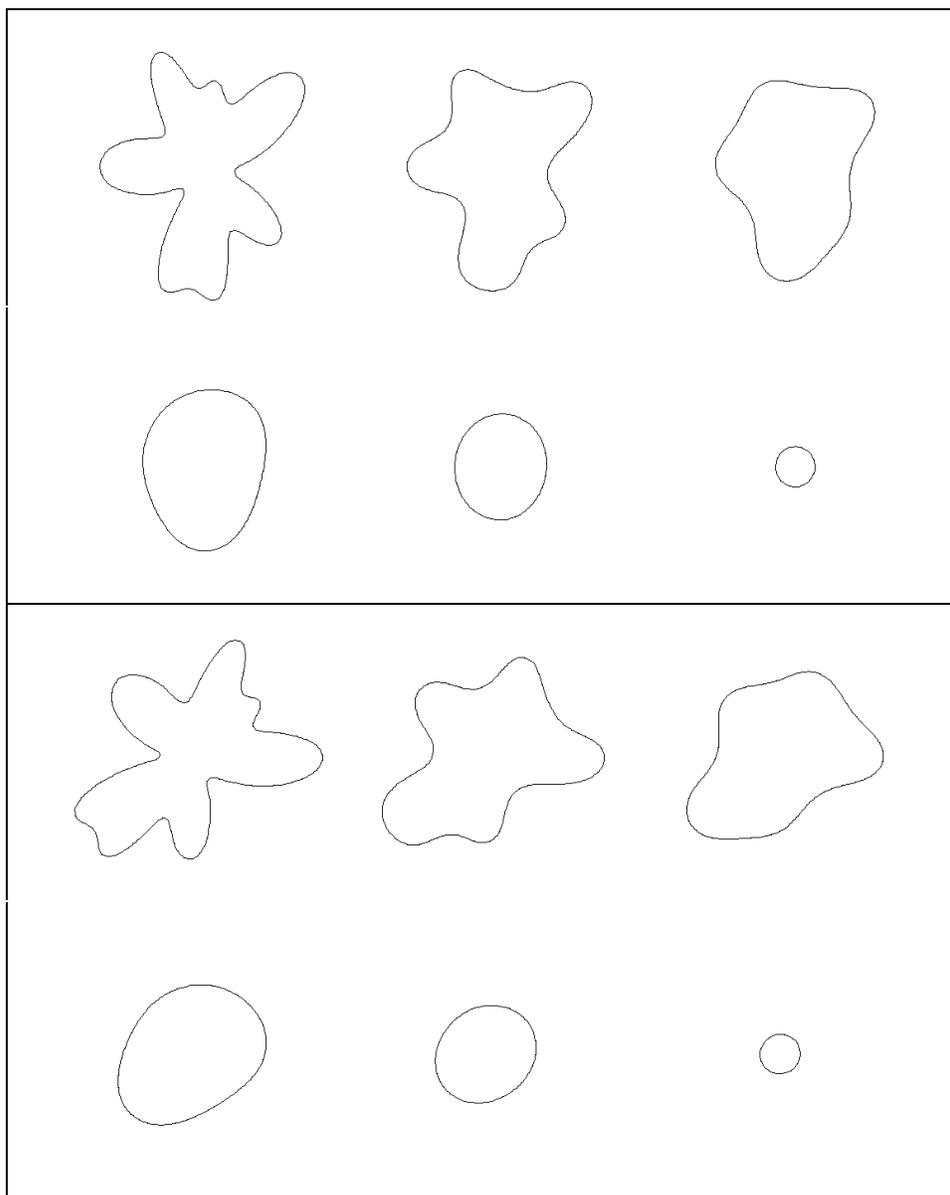


FIG. 4.12 – Flot euclidien d'une courbe plane fermée. En haut la courbe d'origine et son évolution. En bas la même courbe après rotation et son évolution. La rotation et l'évolution commutent. La courbe devient convexe puis disparaît en un temps fini en convergeant vers un point cercle.

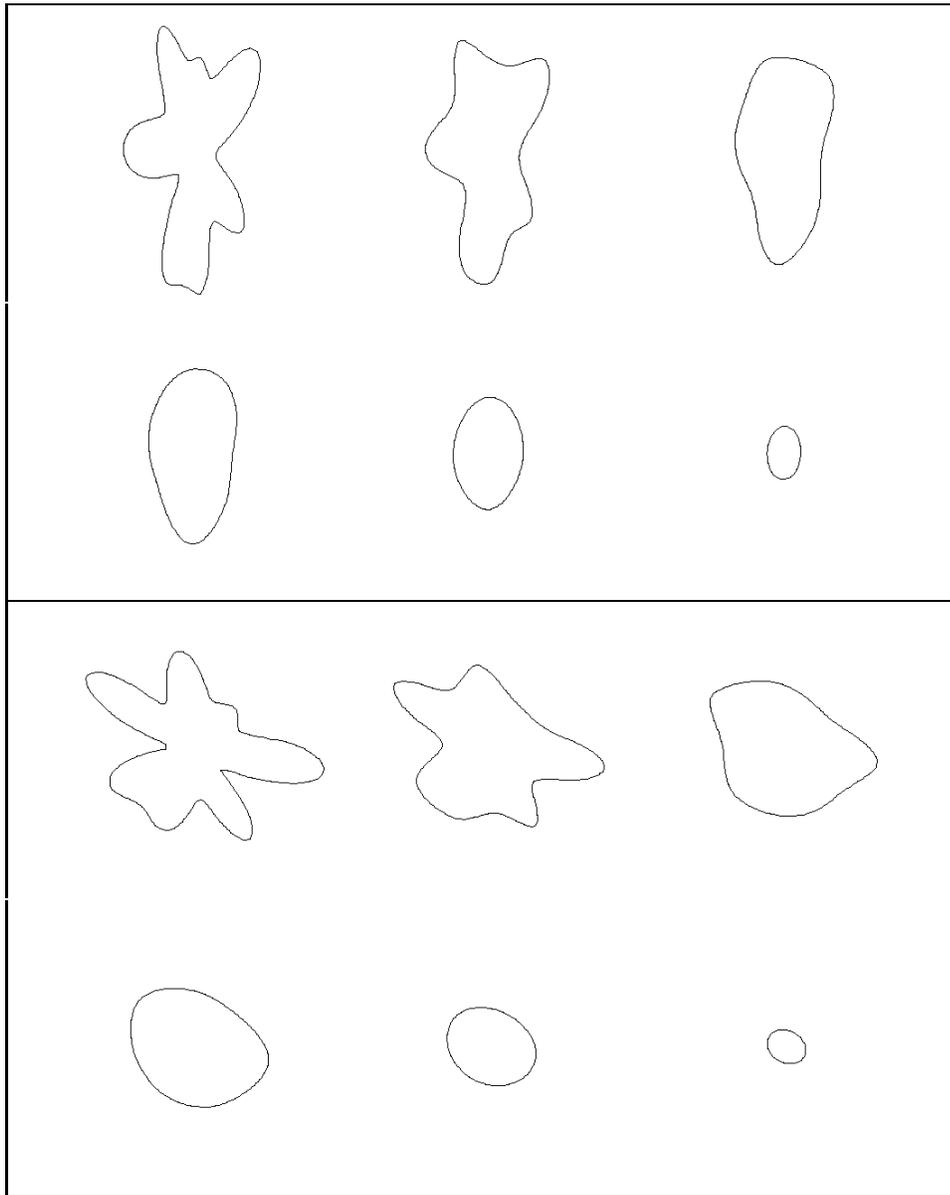


FIG. 4.13 – Flot affine d'une courbe plane fermée. En haut la courbe d'origine et son évolution. En bas la même courbe après une transformation affine spéciale ( $[A] = 1$ ) et son évolution. La transformation affine et l'évolution commutent. La courbe devient convexe puis disparaît en un temps fini en convergeant vers un point ellipse.

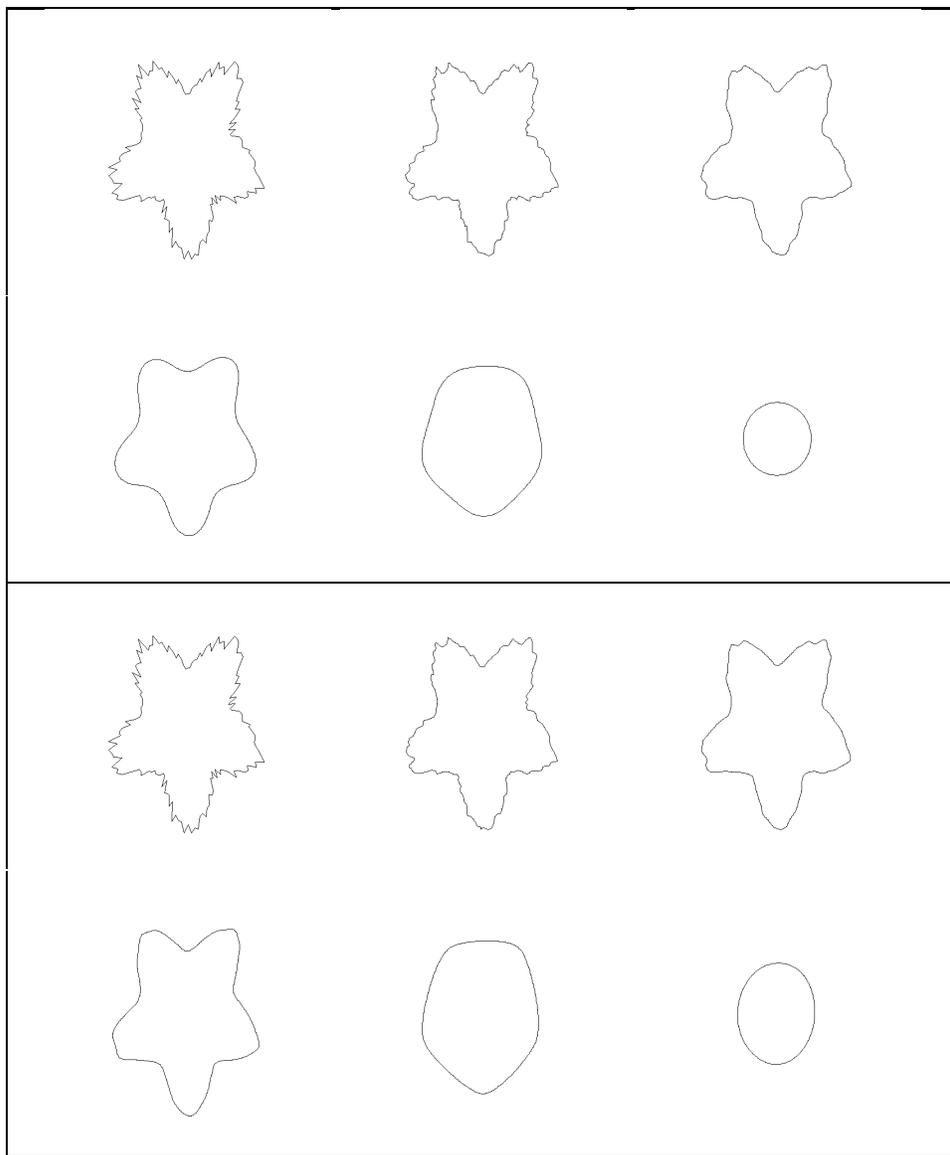


FIG. 4.14 – Lissage d'une courbe bruitée. En haut par le flot invariant euclidien. En bas, par le flot invariant affine

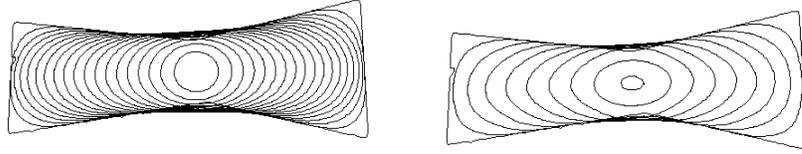


FIG. 4.15 – Les courbes fermées évoluent vers des courbes convexes puis disparaissent en un temps fini en convergeant en un certain sens vers un “point cercle” (cas euclidien, à gauche) ou un “point ellipse” (cas affine, à droite).

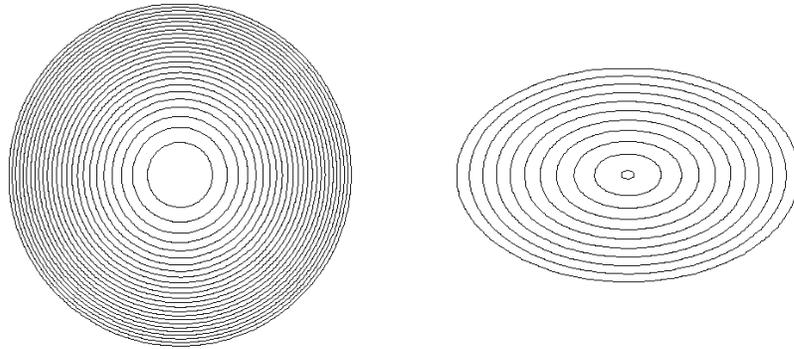


FIG. 4.16 – A gauche: un cercle de rayon initial  $R_0 = 50$  disparaît à  $T = \frac{1}{2}R_0^2 = 1250$ . A droite: un ellipse de rayons initiaux  $a_0 = 50, b_0 = 64$  disparaît à  $T_0 = \frac{3}{4}(a_0b_0)^{\frac{2}{3}} \approx 258$

centre dont le rayon à l'instant  $t$  vaut:

$$R(t) = R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{t}{R_0^2}}$$

et qui disparaît donc à l'instant  $T = \frac{1}{2}R_0^2$

2. **Cas affine:** une ellipse des rayons initiaux  $a_0, b_0$  reste une ellipse de mêmes axes dont les rayons à l'instant  $t$  valent:

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{t}{(a_0 b_0)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$b(t) = b_0 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{t}{(a_0 b_0)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

et qui disparaît donc à l'instant  $T = \frac{3}{4}(a_0 b_0)^{\frac{2}{3}}$ .

**Preuve:** Une simple vérification à posteriori suffit.

### 4.3.5 Schémas numériques

L'utilisation des méthodes d'ensembles de niveau décrites au chapitre 2 permettent une implémentation simple, efficace et précise des flots géométriques euclidien et affine. On prend donc  $\beta = \kappa$  pour le flot euclidien (puisque  $\mathcal{C}_{vv} = \kappa \mathbf{n}$ ), et  $\beta = \kappa^{\frac{1}{3}}$  pour l'espace affine.

La courbure  $\kappa$  des courbes de niveau se calcule simplement:

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_y\phi_x\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

formule dans laquelle le calcul des dérivées de  $\phi$  avec des différences finies centrées suffit.

Ajoutons quelques remarques:

- C'est le fait de pouvoir n'utiliser que la composante normale de la vitesse qui permet l'implémentation de l'espace d'échelle affine. Calculer la composante tangentielle impliquerait le calcul de quantités d'ordre de dérivation supérieur à 2 ce qui serait trop imprécis. Ne calculer que  $\kappa$ , donc des dérivées secondes seulement, rend le processus possible.
- Pour bien des évolutions de courbes, la vitesse normale  $\beta$  est non seulement plus simple à calculer que la vitesse tangentielle, mais encore et surtout il n'y a qu'elle qui soit intrinsèque, c'est-à-dire qui ne dépende pas de la paramétrisation de la courbe, tandis que la vitesse tangentielle, elle, en dépend. C'était le cas pour l'évolution de surface que nous avons utilisée au chapitre 3 dans le cas de la stéréovision (voir théorème 5). Or, avec la méthode des ensembles de niveau il est impossible de calculer des quantités non intrinsèques puisque le paramètre d'espace  $p$  est perdu: seule l'image de la courbe, niveau zéro de la fonction  $\phi$  de dimension supérieure, est connue.

Notons enfin que si, dans le cas euclidien, on implémente:

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n + \Delta t \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_y\phi_x\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)}$$

(avec des différences centrées), dans le cas affine le calcul de  $\kappa^{\frac{1}{3}}|\nabla\phi|$  élimine le dénominateur de la courbure et il ne reste que

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n + \Delta t(\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_y\phi_x\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2)^{\frac{1}{3}}$$

#### 4.4 Autres flots invariants

D'autres groupes que le groupe des déplacements et celui des transformations affines propres ont été étudiés par Olver, Sapiro et Tannenbaum [76]:

- Le groupe des similitudes engendré par les rotations, translations et homothéties pour lequel l'abscisse curviligne n'est autre que l'angle  $\theta$  de la tangente avec l'horizontale ( $\mathbf{t} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ).

$$\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\theta\theta}$$

ou en composante normale seulement:

$$\mathcal{C}_t = \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$$

Sapiro et Tannenbaum ont montré que ce flot pouvait développer des singularités alors que le flot inverse  $\mathcal{C}_t = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$  faisait tendre les courbes convexes vers des cercles [96].

- Le groupe affine complet  $\{m \mapsto Am + B \mid [A] \neq 0\}$  dont le flot invariant est donné par:

$$\mathcal{C}_t = \frac{\mathcal{C}_{ss}}{\mu}$$

qui développe lui aussi des singularités mais dont le flot inverse  $\mathcal{C}_t = -\frac{\mathcal{C}_{ss}}{\mu}$  fait converger les courbes convexes vers des ellipses [96].

- Des flots pour lesquels les courbes ne rétrécissent pas comme dans le cas euclidien ou affine:

1. Un flot invariant euclidien préservant l'aire [96]:  
soit  $\mathcal{S} = -\mathcal{C} \cdot \mathbf{n}$  la "fonction support", alors l'aire entourée par la courbe est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \oint \mathcal{S} dv$$

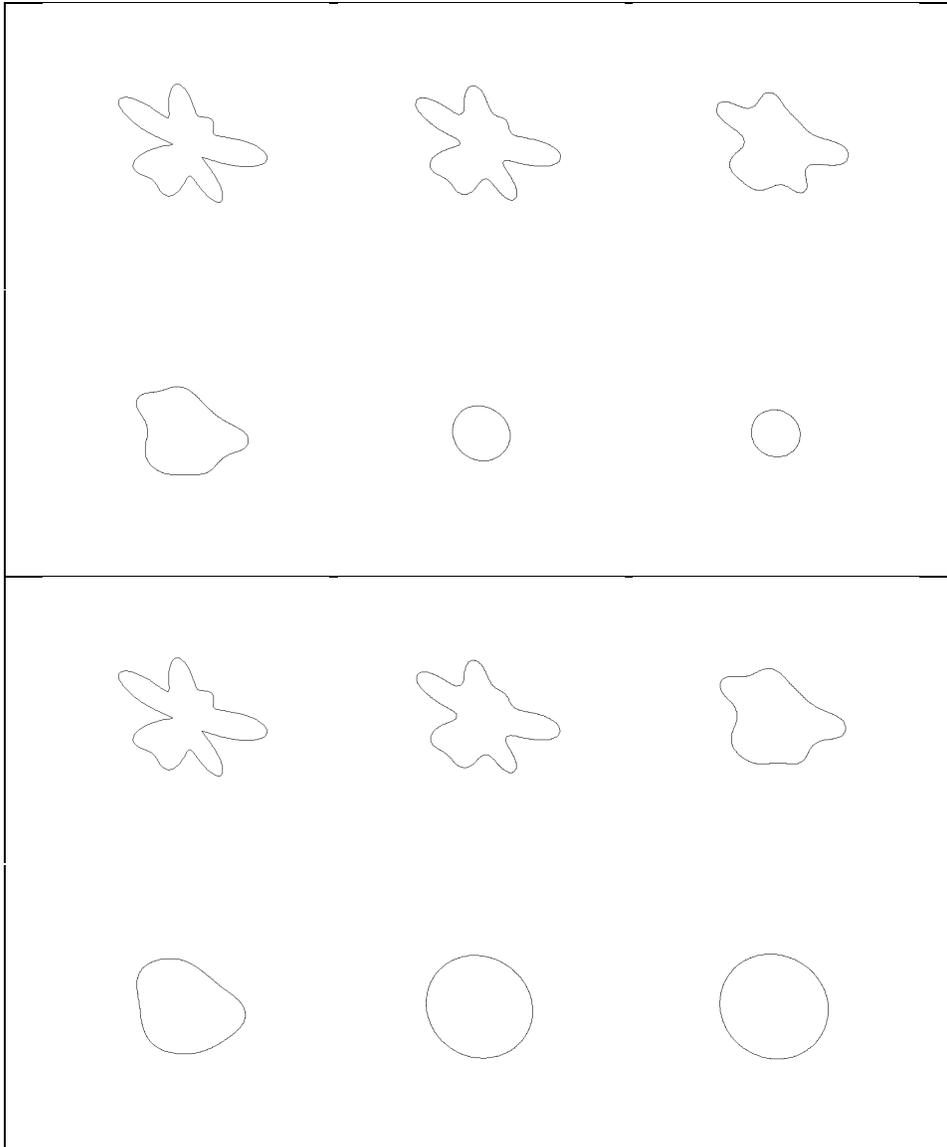


FIG. 4.17 – *Comparaison du flot euclidien classique (en haut) avec le flot euclidien préservant l'aire [96] (en bas). Le phénomène de rétrécissement à disparu*

Le flot défini par

$$\mathcal{C}_t = \left( \kappa - \frac{\pi \mathcal{S}}{\mathcal{A}_0} \right) \mathbf{n}$$

est un flot possédant les mêmes propriétés que le flot intrinsèque euclidien mais qui conserve l'aire de la courbe ( $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0$ ). La figure 4.17 montre un tel flot, comparé au flot euclidien simple.

2. Un flot invariant affine préservant l'aire [96]:  
Soit

$$\mathcal{P}_{aff} = \oint [C_p, C_{pp}]^{\frac{1}{3}} dp$$

le périmètre affine, que l'on peut montrer être aussi égal à:

$$\mathcal{P}_{aff} = \oint \kappa^{\frac{1}{3}} dv$$

Alors le flot définit par:

$$\mathcal{C}_t = \left( \kappa^{\frac{1}{3}} - \frac{\mathcal{S} \mathcal{P}_{aff}}{2\mathcal{A}_0} \right) \mathbf{n}$$

est un flot possédant les mêmes propriétés que le flot intrinsèque affine mais qui conserve l'aire de la courbe ( $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0$ ). Notez qu'ici la vitesse normale  $\beta = \kappa^{\frac{1}{3}} - \frac{\mathcal{S} \mathcal{P}_{aff}}{2\mathcal{A}_0}$ , quoique toujours intrinsèque, nécessite le calcul d'une quantité non locale: le périmètre affine.

3. Des flots conservant la longueur de la courbe [96]:  
On peut montrer que la longueur d'une courbe fermée vaut:

$$\mathcal{P} = \oint \kappa \mathcal{S} dv$$

Sapiro et Tannenbaum obtiennent des flots possédant les mêmes propriétés que des flots habituels mais conservant la longueur de la courbe:

- Un flot invariant euclidien:

$$\mathcal{C}_t = \left( \kappa - \frac{\mathcal{S} \oint \kappa^2}{\mathcal{P}_0} \right) \mathbf{n}$$

- Un flot invariant affine:

$$\mathcal{C}_t = \left( \kappa^{\frac{1}{3}} - \frac{\mathcal{S} \oint \kappa^{\frac{4}{3}}}{\mathcal{P}_0} \right) \mathbf{n}$$

- Un flot invariant pour les similitudes:

$$\mathcal{C}_t = (-\kappa^{-1} + \mathcal{S}) \mathbf{n}$$

- Un flot obtenu à partir du flot constant  $\mathcal{C}_t = \mathbf{n}$ :

$$\mathcal{C}_t = \left( 1 - \frac{2\pi \mathcal{S}}{\mathcal{P}_0} \right) \mathbf{n}$$

## 4.5 Flot géométrique euclidien des courbes 3D

L'extension naturelle tridimensionnelle du flot géométrique des courbes du plan euclidien est le flot géométrique des surfaces de l'espace euclidien (*mean curvature flow*) d'équation  $\mathcal{S}_t = \kappa \mathbf{n}$  dont certaines propriétés ont été étudiées par Huisken et Grayson [49, 56] et dont les méthodes de simulation numérique sont analogues au cas plan [78]. Le comportement de ces flots est plus complexe qu'en 2D: si une surface convexe tend bien vers une sphère, une surface quelconque ne commence pas par devenir convexe. En ce qui concerne le flot affine des surfaces, seul un début d'étude a été publié par Olver, Sapiro et Tannenbaum [77] et par Caselles et Sbert [12]. Son équation est  $\mathcal{S}_t = \kappa^{\frac{1}{4}} \mathbf{n}$ .

Bien différent, car de codimension 2, est le cas des courbes de l'espace tridimensionnel. Il a été très peu abordé. Dans son travail de thèse, Kimmel [63] s'intéresse au cas de l'évolution des courbes sur une surface. Quelques travaux récents en mécanique des fluides mentionne la difficulté de la simulation des évolutions de frontière libre en codimension 2 [55].

Nous établissons dans cette section les équations d'évolution des paramètres intrinsèques d'une courbe de l'espace euclidien tridimensionnel soumise au flot géométrique associé. Nous limitons ensuite l'étude à l'évolution des courbes à courbure et torsion constantes. Ces travaux originaux, ainsi que le cas affine présenté à la section suivante, n'ont pas fait l'objet d'une publication.

### 4.5.1 Invariants différentiels

Soit  $\mathcal{C} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe de  $\mathbf{R}^3$  et  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  son repère de Frenet. Son abscisse curviligne  $v$ , sa courbure  $\kappa$  et sa torsion  $\rho$  sont caractérisées par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_v &= \mathbf{t} \\ (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) &\text{ orthonormé direct} \end{aligned} \quad (4.27)$$

et par les équations de Frenet:

$$(\mathbf{t}_v, \mathbf{n}_v, \mathbf{b}_v) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

égalité dans laquelle  $(\mathbf{t}_v, \mathbf{n}_v, \mathbf{b}_v)$  la matrice  $3 \times 3$  composée des vecteurs colonnes  $\mathbf{t}_v$ ,  $\mathbf{n}_v$  et  $\mathbf{b}_v$  exprimés dans le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ .

### 4.5.2 Valeurs analytiques

Il est utile de savoir calculer analytiquement les invariants différentiels d'une courbe quelconque:

**Lemme 21** Soit  $\mathcal{C}(p)$  une courbe de  $\mathbf{R}^3$ . Les valeurs analytiques suivantes

donnent  $(v, \kappa, \rho)$  à partir de  $\mathcal{C}$  et de ses dérivées:

$$\begin{aligned} v &= \int \|\mathcal{C}_p\| dp \\ \kappa &= \|\mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_{p^2}\| / \|\mathcal{C}_p\|^3 \\ \rho &= [\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{p^2}, \mathcal{C}_{p^3}] / \|\mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_{p^2}\|^2 \end{aligned} \tag{4.29}$$

**Preuve:** Nous avons pour commencer:

$$\mathcal{C}_p = \frac{dv}{dp} \mathbf{C}_v = \frac{dv}{dp} \mathbf{t}$$

et donc  $g = \frac{dv}{dp} = \|\mathcal{C}_p\|$ . Ensuite, nous écrivons:

$$\begin{aligned} \kappa \mathbf{n} = \mathbf{t}_v &= \frac{1}{g^2} \mathcal{C}_{pp} - \frac{g_p}{g^3} \mathcal{C}_p \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{C}_p\|^2} (\mathcal{C}_{pp} - \frac{\mathcal{C}_p \cdot \mathcal{C}_{pp}}{\|\mathcal{C}_p\|^2} \mathcal{C}_p) \end{aligned}$$

Compte tenu de l'identité remarquable suivante:

$$\|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = \left\| -\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}}{\|\mathbf{i}\|} \mathbf{i} + \|\mathbf{i}\| \mathbf{j} \right\|$$

qu'il est facile de vérifier, nous trouvons finalement:

$$\kappa = \|\mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_{p^2}\| / \|\mathcal{C}_p\|^3$$

Pour obtenir la torsion, nous faisons le raisonnement suivant: à partir des équations de Frenet, nous écrivons:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{g} \mathcal{C}_p \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{t}_v = \alpha \mathcal{C}_p + \frac{1}{\kappa g^2} \mathcal{C}_{pp} \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\rho} (\kappa \mathbf{t} + \mathbf{n}_v) = \alpha' \mathcal{C}_p + \beta' \mathcal{C}_{pp} + \frac{1}{\rho \kappa^2 g^3} \mathcal{C}_{ppp} \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles  $(\alpha, \alpha', \beta')$  sont des quantités dont nous ne cherchons pas à connaître la valeur. Dès lors, il ne reste plus qu'à écrire:

$$1 = [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] = \frac{1}{\rho \kappa^2 g^6} [\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{p^2}, \mathcal{C}_{p^3}]$$

pour obtenir, en remplaçant  $\kappa$  par sa valeur précédemment calculée, la valeur de la torsion annoncée.

□

### 4.5.3 Courbes à courbure et torsion constantes

Nous montrons le résultat bien connu suivant:

**Lemme 22** *Courbes à courbure et torsion constantes*: les seules courbes de  $\mathbf{R}^3$  à courbure et torsion euclidiennes constantes sont les hélices, c'est-à-dire les courbes de la forme  $(R \cos p, R \sin p, \alpha p)$ , de courbure  $\kappa = \frac{R}{\alpha^2 + R^2}$  et de torsion  $\rho = \frac{\alpha}{\alpha^2 + R^2}$ .

**Preuve:** Il nous faut intégrer les équations de Frenet dans le cas où  $\kappa$  et  $\rho$  sont des constantes. En dérivant deux fois la normale, nous obtenons:

$$\mathbf{n}_{vv} = -(\kappa^2 + \rho^2)\mathbf{n}$$

d'où le choix de trois vecteurs  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  tels que:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{f}_1 \cos(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) + \mathbf{f}_2 \sin(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) \\ \mathbf{t} &= \mathbf{f}_1 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}} \sin(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) - \mathbf{f}_2 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) + \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\rho} \left[ -\mathbf{f}_1 \frac{\rho^2}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}} \sin(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) + \mathbf{f}_2 \frac{\rho^2}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) + \kappa \mathbf{f}_3 \right]\end{aligned}$$

Puisque  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  est orthonormée, nous avons nécessairement un repère orthonormé  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  dans lequel:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{f}_3 &= \frac{\rho}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}} \mathbf{k}\end{aligned}$$

et finalement:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= O + \mathbf{i} \frac{\kappa}{\kappa^2 + \rho^2} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) + \mathbf{j} \frac{\kappa}{\kappa^2 + \rho^2} \sin(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}v) \\ &\quad + \frac{\rho}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}} v \mathbf{k}\end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation d'une hélice. D'autre part, il est facile de calculer la courbure et la torsion d'une hélice à partir des expressions analytiques. On trouve bien les valeurs du lemme.

□

### 4.5.4 Équations d'évolution

Soit  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe de l'espace tridimensionnel euclidien. Nous nous proposons de définir le flot géométrique euclidien de condition initiale  $\mathcal{C}^0$  comme étant la famille de courbes  $\mathcal{C}(p, t)$  vérifiant:

$$\begin{cases} \mathcal{C}(p, 0) = \mathcal{C}^0(p) \\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial v^2}(p, t) \end{cases} \quad (4.30)$$

et d'en étudier certaines propriétés.

Une courbe étant définie à une transformation rigide près par son abscisse curviligne, sa courbure et sa torsion, il est naturel d'étudier l'évolution des  $\mathcal{C}(p, t)$  à travers celle des leurs paramètres caractéristiques  $(v, \kappa, \rho)$ , ou encore, en posant  $g = \frac{\partial v}{\partial p}$ , à travers  $(g, \kappa, \rho)$ . Nous établissons ci-dessous le résultat suivant que nous rédigeons sous forme d'une lemme.

**Lemme 23** *Les paramètres caractéristiques de la famille de courbes définie par le flot géométrique euclidien (4.30) évoluent suivant les lois suivantes:*

$$\begin{aligned} g_t &= -\kappa^2 g \\ \kappa_t &= \kappa_{v^2} + \kappa^3 - \rho^2 \kappa \\ \rho_t &= 2\rho(\kappa^2 + \frac{\kappa_{v^2}}{\kappa} - 2\frac{\kappa_v^2}{\kappa^2}) + 2\rho_v \kappa_v + \rho_{v^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

De plus, l'évolution du repère de Frenet est donnée par la matrice de vecteurs colonnes exprimés dans  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ :

$$(\mathbf{t}_t, \mathbf{n}_t, \mathbf{b}_t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_v & -\rho\kappa \\ \kappa_v & 0 & -\rho_v - 2\rho\frac{\kappa_v}{\kappa} \\ \rho\kappa & \rho_v + 2\rho\frac{\kappa_v}{\kappa} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

**Preuve:**  $t$  et  $p$  sont des variables indépendantes, mais  $t$  et  $v$  ne le sont pas. Le principe de la démonstration repose sur l'utilisation systématique du crochet de Lie  $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial v}] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial v \partial t}$  et de ceux d'ordre supérieur en  $v$ . En injectant  $g = \frac{\partial v}{\partial p}$  dans  $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial v}]$ , compte tenu que  $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial p}] = 0$ , on obtient aisément pour valeur de ce premier crochet de Lie:

$$\begin{aligned} [\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial v}] &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial v \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial p} \right) - \frac{\partial^2}{g \partial p \partial t} \\ &= \frac{1}{g} [\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial p}] - \frac{g_t}{g^2} \frac{\partial}{\partial p} \\ &= -\frac{g_t}{g} \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

ce que l'on réécrit dans un sens qui nous sera utile:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} = -G_t \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v \partial t} \quad (4.33)$$

en posant  $G_t = \frac{g_t}{g}$ . Aux ordres supérieurs, la même démarche donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t \partial v^2} &= -\frac{\partial G_t}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} - 2G_t \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^3}{\partial v^2 \partial t} \\ \frac{\partial^4}{\partial t \partial v^3} &= -\frac{\partial^2 G_t}{\partial v^2} \frac{\partial}{\partial v} - 3\frac{\partial G_t}{\partial v} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 3G_t \frac{\partial^3}{\partial v^3} + \frac{\partial^4}{\partial v^3 \partial t} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Il nous faut encore nous munir d'une deuxième série de résultats préliminaires en calculant dans le repère de Frenet les dérivées de  $\mathcal{C}$  par rapport à l'abscisse curviligne  $v$ , et ce, nous le verrons, jusqu'au cinquième ordre. Il suffit pour cela d'appliquer directement les équation de Frenet (4.28). Ainsi, nous avons dans  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_v &= \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{C}_{v^2} &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{C}_{v^3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa^2 \\ \kappa_v \\ \rho\kappa \end{pmatrix} \\
\mathcal{C}_{v^4} &= \begin{pmatrix} -2\kappa\kappa_v \\ \kappa_{v^2} \\ \rho_v\kappa + \kappa_v\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa^2 \\ \kappa_v \\ \rho\kappa \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3\kappa\kappa_v \\ \kappa_{v^2} - \kappa^3 - \rho^2\kappa \\ \rho_v\kappa + 2\kappa_v\rho \end{pmatrix} \\
\mathcal{C}_{v^5} &= \begin{pmatrix} (-3\kappa\kappa_v)_v \\ (\kappa_{v^2} - \kappa^3 - \rho^2\kappa)_v \\ (\rho_v\kappa + 2\kappa_v\rho)_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\kappa\kappa_v \\ \kappa_{v^2} - \kappa^3 - \rho^2\kappa \\ \rho_v\kappa + 2\kappa_v\rho \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \kappa^4 - 4\kappa\kappa_{v^2} - 3\kappa_v^2 + \kappa^2\rho^2 \\ \kappa_{v^3} - 6\kappa^2\kappa_v - 3\rho_v\rho\kappa - 3\kappa_v\rho^2 \\ -\rho\kappa^3 - \rho^3\kappa + \rho_{v^2}\kappa + 3\rho_v\kappa_v + 3\rho\kappa_{v^2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Nous nous intéressons ensuite à certaines dérivées temporelles et utilisons systématiquement les crochets de Lie (4.33,4.34), les développements précédents (4.35) et évidemment l'équation d'évolution (4.30):  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{v^2}$ . Pour commencer, nous écrivons, grâce à (4.33):

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} \mathcal{C} = -G_t \mathcal{C}_v + \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{C}_t$$

qui devient avec (4.30):

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} \mathcal{C} = -G_t \mathcal{C}_v + \frac{\partial}{\partial v^3} \mathcal{C}$$

et finalement d'après (4.35):

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -G_t - \kappa^2 \\ \kappa_v \\ \rho\kappa \end{pmatrix}$$

Or,  $\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} \mathcal{C}$  n'est autre que  $\mathbf{t}_t$  dont la première composante est nulle puisque  $\mathbf{t}$ , vecteur normé, admet pour dérivée un vecteur normal à lui-même. D'où la loi d'évolution

$$G_t = -\kappa^2 \quad (4.36)$$

de l'abscisse curviligne et la valeur de la dérivée temporelle de la tangente:

$$\mathbf{t}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_v \\ \rho\kappa \end{pmatrix}$$

Recommençons le même processus en appliquant (4.34) puis (4.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t \partial v^2} \mathcal{C} &= [-G_t]_v \mathcal{C}_v - 2G_t \mathcal{C}_{vv} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathcal{C}_t \\ &= [-G_t]_v \mathcal{C}_v - 2G_t \mathcal{C}_{vv} + \mathcal{C}_{v^4} \end{aligned}$$

Comme d'autre part  $\frac{\partial^3}{\partial t \partial v^2} \mathcal{C} = \frac{\partial \kappa \mathbf{n}}{\partial t} = \kappa_t \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}_t$ , on peut extraire  $\mathbf{n}_t$  de l'équation précédente, en remplaçant en même temps  $\mathcal{C}_{v^2}$  et  $\mathcal{C}_{v^4}$  par leur valeur (équation (4.35)):

$$\mathbf{n}_t = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} -[G_t]_v - 3 - 3\kappa\kappa_v \\ -\kappa_t - 2G_t\kappa + \kappa_{v^2} - \kappa^3 - \rho^2\kappa \\ \rho_v\kappa + 2\kappa_v\rho \end{pmatrix}$$

où il ne reste plus qu'à injecter la valeur de  $G_t$  connue par (4.36) pour trouver:

$$\mathbf{n}_t = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} -\kappa\kappa_v \\ -\kappa_t + \kappa_{v^2} + \kappa^3 - \rho^2\kappa \\ \rho_v\kappa + 2\kappa_v\rho \end{pmatrix}$$

Par le même argument que précédemment, à savoir que  $\mathbf{n}$  est unitaire, donc normal à sa dérivée, nous trouvons la loi d'évolution de la courbure:

$$\kappa_t = \kappa_{vv} + \kappa^3 - \rho^2\kappa \quad (4.37)$$

et de la normale:

$$\mathbf{n}_t = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} -\kappa_v \\ 0 \\ \rho_v + 2\kappa_v\rho/\kappa \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Nous pourrions procéder de la même manière pour obtenir les lois de la torsion et de la bi-normale: d'une part appliquer la dérivée de Lie à l'ordre 3 (4.34) et obtenir la valeur de  $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_{v^3}$ , d'autre part faire apparaître  $\rho_t$  et  $\mathbf{b}_t$  en dérivant  $\mathcal{C}_{v^3}$  par rapport au temps directement à partir de sa valeur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_{v^3} &= \frac{\partial}{\partial t} (-\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa_v \mathbf{n} + \kappa \rho \mathbf{b}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Il apparaît alors malheureusement de termes comme  $\frac{\partial}{\partial t}\kappa_v$  qu'on ne peut calculer qu'en appliquant une fois de plus les crochets de Lie (4.33). Les calculs sont alors sans difficulté mais fort pénibles. Un moyen plus rapide consiste à dériver par rapport au temps l'égalité  $\mathbf{n}_v = -\kappa\mathbf{t} + \rho\mathbf{b}$  ce qui fait venir les dérivées temporelles de  $\rho$  et de  $\mathbf{b}$ , que l'on recherche, de  $\kappa$  et de  $\mathbf{t}$ , déjà connues, et de  $\mathbf{n}_v$ , à laquelle on substitue par un application des crochets de Lie celle de  $\mathbf{n}$ , connue elle aussi. Ce qui donne, tous calculs faits:

$$\mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} -\rho\kappa \\ -\rho_v - 2\rho\frac{\kappa_v}{\kappa} \\ \frac{1}{\rho}(-\rho_t + \rho_v^2 + 2\frac{\rho_v\kappa_c}{\kappa}) + 2\frac{\kappa_v^2}{\kappa} - 2\frac{\kappa_v^2}{\kappa^2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}$  étant unitaire, nous obtenons, comme plus haut, la loi d'évolution de la torsion:

$$\rho_t = 2\rho(\kappa^2 + \frac{\kappa_v^2}{\kappa} - 2\frac{\kappa_v^2}{\kappa^2}) + 2\rho_v\kappa_v + \rho_v^2$$

et de la bi-normale:

$$\mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} -\rho\kappa \\ -\rho_v - 2\rho\frac{\kappa_v}{\kappa} \\ 0 \end{pmatrix}$$

que nous aurions pu aussi obtenir à partir de  $\mathbf{b}_t = \mathbf{t}_t \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}_t$ .

□

#### 4.5.5 Vitesse normale

On notera que  $\mathcal{C}_{vv} = \kappa\mathbf{n}$ , et donc que l'équation considérée s'écrit aussi  $\mathcal{C}_t = \kappa\mathbf{n}$ : tout comme dans le cas 2D, la courbe se déforme avec une vitesse normale égale à sa courbure.

#### 4.5.6 Courbes particulières

Comme dans le cas plan, un premier moyen d'investigation des propriétés du flots nouvellement défini est l'étude des courbes à courbure et torsion constantes, c'est-à-dire ici des hélices.

**Théorème 7** *Une hélice soumise au flot géométrique euclidien tend en un temps infini vers son axe. Plus précisément, l'hélice initiale de coordonnées  $(R^0 \cos \theta, R^0 \sin \theta, a\theta)$  évolue en  $(R(t) \cos \theta, R(t) \sin \theta, a\theta)$  où  $R(t)$  est une fonction décroissante, égale à  $R^0$  quand  $t = 0$  et de limite nulle quand  $t$  tend vers l'infini (figure 4.18).*

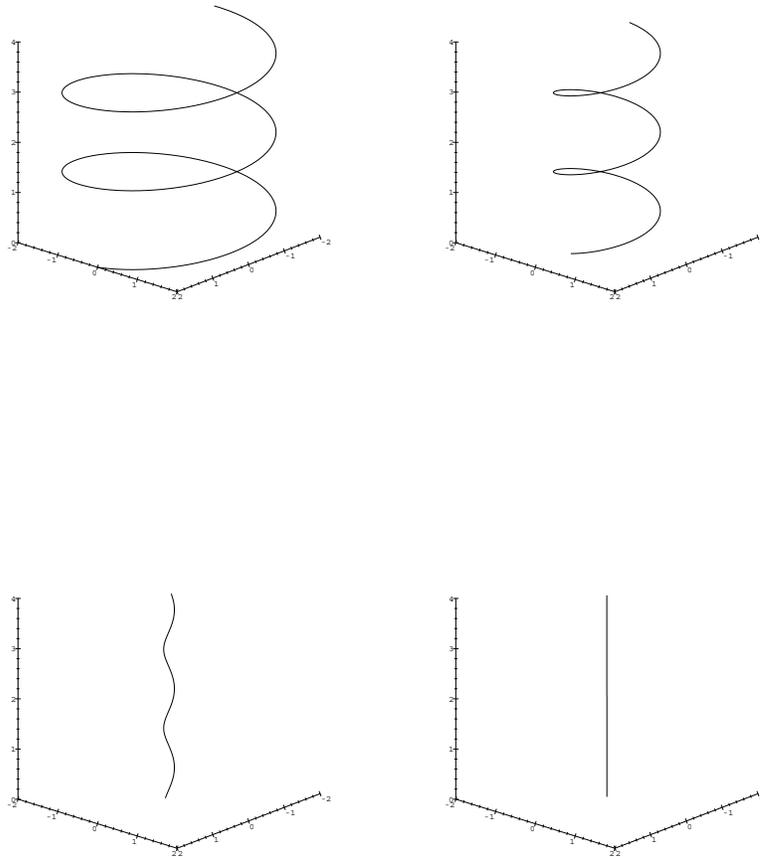


FIG. 4.18 – Cas euclidien – Courbe à courbure et torsion constantes.

**Preuve:** Supposons que l'hélice évolue en restant à courbure et torsion constantes. La recherche d'une solution de l'équation  $\mathcal{C}_t = \kappa \mathbf{n}$  de la forme  $(R(t) \cos \theta, R(t) \sin \theta, a(t)\theta)$  conduit aux équations  $a_t = 0$  et

$$R_t(a^2 + R^2) + R = 0 \quad (4.39)$$

Avec  $a$  constant, cette dernière équation différentielle s'intègre en  $a^2 \log R + R^2/2 + t = cte$  dont la solution  $R(t)$  possède bien les propriétés annoncées. A posteriori, il est immédiat de vérifier que les hélices  $(R(t) \cos \theta, R(t) \sin \theta, a\theta)$  dont le rayon vérifie l'équation (4.39) sont les courbes recherchées.

□

Il n'est pas évident que l'hélice joue un rôle aussi important que le cercle dans le cas plan (rappelons que les courbes planes évoluent vers un "point cercle"). Nous ne pouvons jusqu'ici que constater une première différence: l'hélice ne disparaît pas en un temps fini. Notre étude n'est donc qu'un tout premier pas. D'ailleurs, l'hélice n'est pas une courbe fermée, alors que dans le cas plan, le cercle en était une. Il n'est pas exclu qu'une courbe tridimensionnelle fermée soumise au flot intrinsèque euclidien disparaisse en un temps fini.

## 4.6 Flot géométrique affine des courbes 3D

Nous établissons maintenant les équations d'évolution des paramètres intrinsèques d'une courbe de l'espace affine tridimensionnel soumise au flot géométrique associé. Comme dans le cas euclidien, nous limitons ensuite l'étude à l'évolution des courbes à courbure et torsion affines constantes.

Soit  $\mathbf{A} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  une courbe de  $\mathbf{R}^3$  et  $(\mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  son repère de Frenet affine. Son abscisse curviligne  $s$ , sa courbure  $\mu$  et sa torsion  $\tau$  affines sont caractérisées par

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s &= \mathbf{e}_1 \\ [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= 1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

et par les équations de Frenet affines, exprimées dans  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  avec les mêmes conventions que dans le cas euclidien:

$$(\mathbf{e}_{1s}, \mathbf{e}_{2s}, \mathbf{e}_{3s}) = \begin{pmatrix} 0 & \mu & \tau \\ 1 & 0 & 3\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

### 4.6.1 Formules analytiques

Ici encore, des expressions analytiques peuvent s'obtenir sans trop de difficulté. Leur écriture est moins directe que dans le cas euclidien:

**Lemme 24** *Les abscisse curviligne, courbure et torsions affines d'une courbe*

$\mathbf{A}(p)$  sont données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
s &= \int \gamma dp \quad \text{avec} \quad \gamma = [\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_{p^2}, \mathbf{A}_{p^3}]^{\frac{1}{6}} \\
\mu &= \frac{-1}{4\gamma^4}([\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_{p^3}, \mathbf{A}_{p^4}]/\gamma^4 + 4\gamma\gamma_{p^2} - 15\gamma_p^2) \\
\tau &= \frac{1}{\gamma^6}([\mathbf{A}_{p^2}, \mathbf{A}_{p^3}, \mathbf{A}_{p^4}]/\gamma^3 - \mu_p\gamma^5 - 15\gamma_p^3 + 4\mu\gamma^4\gamma_p + 10\gamma\gamma_p\gamma_{p^2} - \gamma^2\gamma_{p^3})
\end{aligned} \tag{4.42}$$

**Preuve:** Des formules de Frenet, nous tirons facilement, dans  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_p &= \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_{pp} &= \begin{pmatrix} \gamma_p \\ \gamma^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_{p^3} &= \begin{pmatrix} \gamma_{pp} + \mu\gamma^3 \\ 3\gamma_p\gamma \\ \gamma^3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_{p^4} &= \begin{pmatrix} \gamma_{p^3} + \mu_p\gamma^3 + 6\mu\gamma_p\gamma^2 + \tau\gamma^4 \\ 3\gamma_p^2 + 4\gamma\gamma_{pp} + 4\mu\gamma^4 \\ 6\gamma_p\gamma^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer:

$$[\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_{p^2}, \mathbf{A}_{p^3}] = \gamma^6$$

d'où la valeur de  $\gamma$  annoncée. De même, nous obtenons:

$$[\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_{p^3}, \mathbf{A}_{p^4}] = \gamma^4(15\gamma_p^2 - 4\gamma\gamma_{pp} - 4\mu\gamma^4)$$

dont nous extrayons la valeur de  $\mu$ . Et enfin:

$$[\mathbf{A}_{p^2}, \mathbf{A}_{p^3}, \mathbf{A}_{p^4}] = 15\gamma^3\gamma_p^3 - 4\mu\gamma^7\gamma_p - 10\gamma^4\gamma_p\gamma_{pp} + \mu_p\gamma^8 + \gamma^5\gamma_{p^3} + \tau\gamma^9$$

ce qui nous donne  $\tau$ .

□

#### 4.6.2 Liaison avec les invariants euclidiens

Les expressions analytiques peuvent être utilisées pour relier les invariants affines aux invariants euclidiens. En effet, en prenant l'abscisse curviligne euclidienne  $v$  comme valeur particulière de  $p$ , les dérivées de  $\mathbf{A}$  sont données

par les équations de Frenet euclidiennes (4.28). Il est alors aisé d'établir la relation entre les abscisses curvilignes affine et euclidienne dont nous aurons besoin plus loin, ainsi que les expressions reliant  $\mu$  et  $\tau$  à  $\kappa$  et  $\rho$  et à leurs dérivées par rapport à  $v$ . Ces dernières sont toutefois peu utiles et trop longues pour que nous les donnions ici. Nous nous limiterons donc au

**Lemme 25** *Les abscisses curvilignes euclidienne  $v$  et affine  $s$  d'une courbe de  $\mathbf{R}^3$  sont reliées par l'expression*

$$\frac{ds}{dv} = \kappa^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{6}} \quad (4.43)$$

**Preuve:** Les expressions analytiques (4.29) des invariants euclidiens dans le cas  $p = v$ , nous donnent:

$$\rho\kappa^2 = [\mathbf{A}_v, \mathbf{A}_{vv}, \mathbf{A}_{vvv}] / \|\mathbf{A}_v\|^6 = [\mathbf{A}_v, \mathbf{A}_{vv}, \mathbf{A}_{vvv}]$$

d'où, en reportant dans les formules analytiques affines (4.42):

$$\gamma = [\mathbf{A}_v, \mathbf{A}_{vv}, \mathbf{A}_{vvv}]^{\frac{1}{6}} = \kappa^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{6}}$$

□

### 4.6.3 Équation d'évolution

Nous étudions maintenant le flot géométrique affine associé à une courbe initiale  $\mathbf{A}^0(p)$ , c'est-à-dire la famille de courbes  $\mathbf{A}(p, t)$  définie par:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(p, 0) = \mathbf{A}^0(p) \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(p, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial s^2}(p, t) \end{cases} \quad (4.44)$$

Une courbe étant définie à une transformation affine près par son abscisse curviligne, sa courbure et sa torsion affines, nous étudions à nouveau l'évolution des  $\mathbf{A}(p, t)$  à travers celle des leurs paramètres caractéristiques  $(s, \mu, \tau)$ , ou encore, avec  $\gamma = \frac{\partial s}{\partial p}$ , à travers  $(\gamma, \mu, \tau)$ . Nous établissons le résultat suivant:

**Lemme 26** *Les paramètres caractéristiques de la famille de courbes définie par le flot géométrique affine (4.44) évoluent suivant les lois suivantes:*

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \frac{4}{3} \mu \gamma \\ \mu_t &= \frac{1}{6} \mu_s^2 - \frac{8}{3} \mu^2 + \frac{1}{2} \tau_s \\ \tau_t &= -4\mu\tau + 8\mu\mu_s - \frac{1}{2} \mu_s^3 + \frac{1}{2} \tau_s^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

De plus, l'évolution du repère de Frenet affine est donnée par:

$$(\mathbf{e}_{1t}, \mathbf{e}_{2t}, \mathbf{e}_{3t}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\mu & -\frac{1}{3}\mu_s + \tau & 3\mu^2 - \frac{1}{2}\mu_s^2 + \frac{1}{2}\tau_s \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & \mu_s + \tau \\ 1 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

**Preuve:** La méthode est similaire au cas euclidien. Il s'agit d'utiliser les crochets de Lie exprimant la non commutativité des dérivées temporelles et spatiales, les dérivées spatiales de  $\mathbf{A}$  (ici jusqu'à l'ordre 4) exprimées dans le repère de Frenet affine et l'équation d'évolution  $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{s^2}$ .

Les dérivées de  $\mathbf{A}$  jusqu'à l'ordre 3 sont contenues dans les équations de Frenet affine (4.41). Dans  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , nous avons ainsi:

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{s^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{s^3} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

et l'ordre 4 s'obtient sans problème:

$$\mathbf{A}_{s^4} = \frac{\partial \mathbf{A}_{s^3}}{\partial s} = \begin{pmatrix} \mu_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu & \tau \\ 1 & 0 & 3\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_s + \tau \\ 4\mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Tout d'abord, en dérivant  $|\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3| = 1$  par rapport au temps nous sommes ramenés à calculer  $\mathbf{e}_{1t}$ ,  $\mathbf{e}_{2t}$  et  $\mathbf{e}_{3t}$ , calculs un peu fastidieux mais sans difficulté:

$$0 = |\mathbf{e}_{1t} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3| + |\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{2t} \mathbf{e}_3| + |\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{3t}| \quad (4.49)$$

En appliquant les crochets de Lie et l'équation d'évolution:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} = -\frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{A}_s + \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{A}_t \\ &= -\frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{s^3} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_t}{\gamma} + \mu \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Puis:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s} = -\frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{e}_{1s} + \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_{1t} \\ &= -\frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{e}_2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{\gamma_t}{\gamma} + \mu \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu & \tau \\ 1 & 0 & 3\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_t}{\gamma} + \mu \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\left[ \frac{\gamma_t}{\gamma} \right]_s + \mu_s + \tau \\ -2\frac{\gamma_t}{\gamma} + 4\mu \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Et enfin:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{3t} &= \frac{\partial}{\partial t}(-\mu \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{2s}) = -\mu_t \mathbf{e}_1 - \mu \mathbf{e}_{1t} - \frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{e}_{2s} + \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_{2t} \\
&= -\mu_t \mathbf{e}_1 - \mu \mathbf{e}_{1t} - \frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{e}_{2s} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s}(-[\frac{\gamma_t}{\gamma}]_s + \mu_s + \tau) \\ \frac{\partial}{\partial s}(-2\frac{\gamma_t}{\gamma} + 4\mu) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu & \tau \\ 1 & 0 & 3\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -[\frac{\gamma_t}{\gamma}]_s + \mu_s + \tau \\ -2\frac{\gamma_t}{\gamma} + 4\mu \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mu_t + 3\mu^2 - 2\mu\frac{\gamma_t}{\gamma} - [\frac{\gamma_t}{\gamma}]_{ss} + \mu_{ss} + \tau_s \\ -3[\frac{\gamma_t}{\gamma}]_s + 5\mu_s + \tau \\ 3\mu - 3\frac{\gamma_t}{\gamma} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Nous constatons que  $\mathbf{e}_{1t}$  et  $\mathbf{e}_{2t}$  ne contiennent comme dérivées temporelles que des termes en  $\gamma_t$  alors que  $\mathbf{e}_{3t}$ , lui, fait aussi apparaître un terme en  $\mu_t$ . Ce terme, qui se trouve dans la première coordonnée de  $\mathbf{e}_{3t}$ , disparaît heureusement dans le déterminant  $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{3t}|$  et la nullité de  $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|_t$  donne finalement:

$$0 = (\mu - \frac{\gamma_t}{\gamma}) + (4\mu - 2\frac{\gamma_t}{\gamma}) + (3\mu - 3\frac{\gamma_t}{\gamma}) \tag{4.53}$$

d'où la valeur de  $\gamma_t$  annoncée et, en reportant, les valeurs finales de  $\mathbf{e}_{1t}$  et  $\mathbf{e}_{2t}$  et une valeur intermédiaire de  $\mathbf{e}_{3t}$ :

$$\mathbf{e}_{3t} = \begin{pmatrix} -\mu_t + \frac{1}{3}\mu^2 - \mu_{ss}/3 + \tau_s \\ \mu_s + \tau \\ -\mu \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

Il nous reste donc à déterminer  $\mu_t$ , ce qui fournira  $\mathbf{e}_{3t}$ , puis  $\tau_t$ . Nous pouvons par exemple utiliser la dérivée temporelle de l'égalité  $\mathbf{e}_{3s} = \tau \mathbf{e}_1 + 3\mu \mathbf{e}_2$ . D'une part:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\tau \mathbf{e}_1 + 3\mu \mathbf{e}_2) &= \tau_t \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_{1t} + 3\mu_t \mathbf{e}_2 + 3\mu \mathbf{e}_{2t} \\
&= \begin{pmatrix} \tau_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\mu_t \\ 0 \end{pmatrix} + 3\mu \begin{pmatrix} -\frac{\mu_s}{3} + \tau \\ \frac{4}{3}\mu \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\mu\tau - \mu\mu_s + \tau_t \\ 3\mu_t + 4\mu^2 \\ \tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial s} &= -\frac{\gamma_t}{\gamma} \mathbf{e}_{3s} + \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{e}_{3t} \\
&= -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} \tau \\ 3\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} (\frac{8}{3}\mu\tau - \mu\mu_s + \tau_t) \\ \frac{\partial}{\partial s} (3\mu_t + 4\mu^2) \\ \frac{\partial}{\partial s} (\tau) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & \mu & \tau \\ 1 & 0 & 3\mu \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\mu\tau - \mu\mu_s + \tau_t \\ 3\mu_t + 4\mu^2 \\ \tau \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -[\mu_t]_s + \frac{5}{3}\mu\mu_s - \frac{4}{3}\mu\tau + \tau_{ss} - \frac{1}{3}\mu_s^3 \\ -\mu_t + 2\tau_s - \frac{20}{3}\mu^2 + \frac{2}{3}\mu_{ss} \\ \tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

L'égalité des deux vecteurs (4.55) et (4.56) fournit trois égalités scalaires: la troisième est une tautologie, la deuxième donne  $\mu_t$ , que l'on reporte dans la première pour obtenir  $\tau_t$  et dans (4.54) pour obtenir la valeur annoncée de  $\mathbf{e}_{3t}$ .

□

#### 4.6.4 Vitesse normale

Montrons le lemme suivant:

**Lemme 27** *La composante de  $\mathbf{A}_{ss}$  dans le plan normal vaut  $(\kappa/\rho)^{\frac{1}{3}}\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\kappa$  et  $\rho$  étant les normale, courbure et torsion euclidiennes.*

**Preuve:** Posons  $\Gamma = \frac{ds}{dv}$  ( $v$  abscisse curviligne euclidienne) et écrivons successivement:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_v &= \mathbf{t} = \Gamma \mathbf{A}_s \\
\mathbf{A}_{vv} &= \kappa \mathbf{n} = \Gamma \mathbf{A}_s + \Gamma^2 \mathbf{A}_{ss}
\end{aligned}$$

Il vient alors:

$$\mathbf{A}_{ss} = \frac{\kappa}{\Gamma^2} \mathbf{n} - \frac{\Gamma_v}{\Gamma^3} \mathbf{t}$$

Compte tenu de la relation (4.43) donnant  $\Gamma$ , nous obtenons le résultat annoncé.

□

Nous avons vu que dans le cas de l'évolution d'une courbe plane, la vitesse tangentielle ne change pas la famille de courbes obtenue. Montrons

son analogue pour l'évolution des courbes 3D: seule la composante dans le plan normal comptera alors.

**Proposition 1** Soient  $\mathcal{C}_0(p)$  une courbe initiale de  $\mathbf{R}^3$  et  $\mathcal{C}(p, t)$  une famille de courbes solution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} &= \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} \\ \mathcal{C}(p, 0) &= \mathcal{C}_0(p) \end{aligned} \quad (4.57)$$

équation dans laquelle  $\beta$  et  $\gamma$  sont des quantités géométriques intrinsèques, c'est-à-dire ne dépendant pas de la paramétrisation de la courbe, alors, toute solution  $\bar{\mathcal{C}}$  de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}}{\partial t} &= \bar{\alpha} \bar{\mathbf{t}} + \beta \bar{\mathbf{n}} + \gamma \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathcal{C}}(p, 0) &= \mathcal{C}_0(p) \end{aligned}$$

dans laquelle on a changé la composante tangentielle de la vitesse, est composée de la même famille de courbes:

$$\forall t, \text{Img}(\mathcal{C}(\cdot, t)) = \text{Img}(\bar{\mathcal{C}}(\cdot, t))$$

**Preuve:** Nous reprenons le principe de la démonstration de géométrie plane faite par Epstein et Gage [26]. Nous procédons en deux étapes. Dans un premier temps, nous montrons que reparamétriser en espace une famille de courbes solution revient à changer la composante tangentielle de la vitesse. Dans un second temps, nous montrons que pour tout changement de composante tangentielle de la vitesse, il existe une reparamétrisation en espace de la famille initiale qui la rend solution de la nouvelle équation.

Considérons donc une famille  $\mathcal{C}(p, t) : \mathbf{R} \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^3$  solution de 4.57, et une reparamétrisation  $p(\bar{p}, t)$  avec  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial p} > 0$ . Soit donc la famille  $\bar{\mathcal{C}}$  définie par:

$$\bar{\mathcal{C}}(\bar{p}, t) = \mathcal{C}(p(\bar{p}, t), t)$$

Nous calculons que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathcal{C}}}{\partial t}(\bar{p}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{C}(p(\bar{p}, t), t)] \\ &= \frac{\partial p}{\partial t}(\bar{p}, t) \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p}(p, t) + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}(p, t) \\ &= (\alpha(p, t) + \|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p}\| \frac{\partial p}{\partial t}) \mathbf{t}(p, t) + \beta(p, t) \mathbf{n}(p, t) + \gamma(p, t) \mathbf{b}(p, t) \\ &= \bar{\alpha}(\bar{p}, t) \bar{\mathbf{t}}(\bar{p}, t) + \beta(\bar{p}, t) \bar{\mathbf{n}}(\bar{p}, t) + \gamma(\bar{p}, t) \bar{\mathbf{b}}(\bar{p}, t) \end{aligned}$$

compte tenu du fait que  $\beta$  et  $\gamma$  sont intrinsèques. Ainsi  $\bar{\mathcal{C}}$  satisfait une nouvelle équation dans laquelle seule la composante tangentielle de la vitesse a été changée.

Pour voir maintenant que n'importe quelle fonction  $\bar{\alpha}(\bar{p}, t)$  peut être obtenue par un choix approprié de  $p(\bar{p}, t)$ , nous choisissons une paramétrisation initiale arbitraire  $p(\bar{p}, 0)$  de la courbe originale et, à  $\bar{p}$  fixé, nous résolvons l'équation différentielle ordinaire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(\bar{p}, t) &= \frac{1}{\|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p}\|} (\bar{\alpha}(\bar{p}, t) - \alpha(p, t)) \\ &= F(p(\bar{p}, t), t) \end{aligned} \quad (4.58)$$

dans laquelle  $\bar{\alpha}(\bar{p}, t)$  n'est une fonction que du temps.

Il reste à vérifier que la reparamétrisation  $p(\bar{p}, t)$  ainsi obtenue est une paramétrisation correcte à  $t$  fixé. D'une part,  $p(\bar{p}, t)$  sera une fonction régulière de  $\bar{p}$  si les fonctions  $\|\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p}\|$ ,  $\bar{\alpha}$  et  $\alpha$  le sont. D'autre part, il nous faut vérifier  $\frac{\partial p}{\partial \bar{p}} > 0$ . En différentiant l'équation (4.58) par rapport à  $\bar{p}$ , nous voyons, en prenant bien garde que  $\bar{\alpha}(\bar{p}, t)$  n'y est une fonction que du temps, que  $\frac{\partial p}{\partial \bar{p}}$  vérifie une équation différentielle linéaire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial \bar{p}} \right) &= \left[ \frac{-\alpha_p}{\|\mathcal{C}_p\|} - (\bar{\alpha} - \alpha) \frac{\mathcal{C}_p \cdot \mathcal{C}_{pp}}{\|\mathcal{C}_p\|^3} \right] \frac{\partial p}{\partial \bar{p}} \\ &= G \left( \frac{\partial p}{\partial \bar{p}} \right) \end{aligned}$$

avec  $G(0) = 0$ . Puisque  $\frac{\partial p}{\partial \bar{p}}(\bar{p}, 0) > 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \bar{p}}$  reste donc toujours positive.  $\square$

**Remarque:** La preuve ci-dessus est valable pour les courbes ouvertes. Pour les courbes fermées, il faut en toute rigueur vérifier que, si  $\bar{p}$  varie entre 0 et  $a$  et si la paramétrisation initiale  $p(\bar{p}, 0)$  est telle que  $p(0, 0) = 0$  et  $p(a, 0) = b$  où  $\mathcal{C}(\cdot, t)$  est de période  $b$ , alors le paramètre solution de (4.58) obtenu varie lui aussi sur exactement une période:  $p(a, t) - p(0, t) = b$ . La démonstration de cette propriété est faite par Epstein et Gage pour les courbes planes [26] et pourrait être faite de manière similaire ici.

Nous pouvons alors formuler le corollaire suivant:

*Puisque la projection de  $\mathbf{A}_{ss}$  dans le plan normal vaut  $(\kappa/\rho)^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$ , l'équation considérée  $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{ss}$  donne la même famille de courbes à une reparamétrisation près que l'équation  $\mathbf{A}_t = (\kappa/\rho)^{\frac{1}{3}} \mathbf{n}$*

et avancer la remarque inattendue suivante:

*Dans le cas bidimensionnel, le flot géométrique affine correspondait à une déformation de vitesse normale  $\kappa^{\frac{1}{3}}$ , évolution que l'on retrouve de manière surprenante dans le cas tridimensionnel pour une courbe de torsion euclidienne unitaire.*

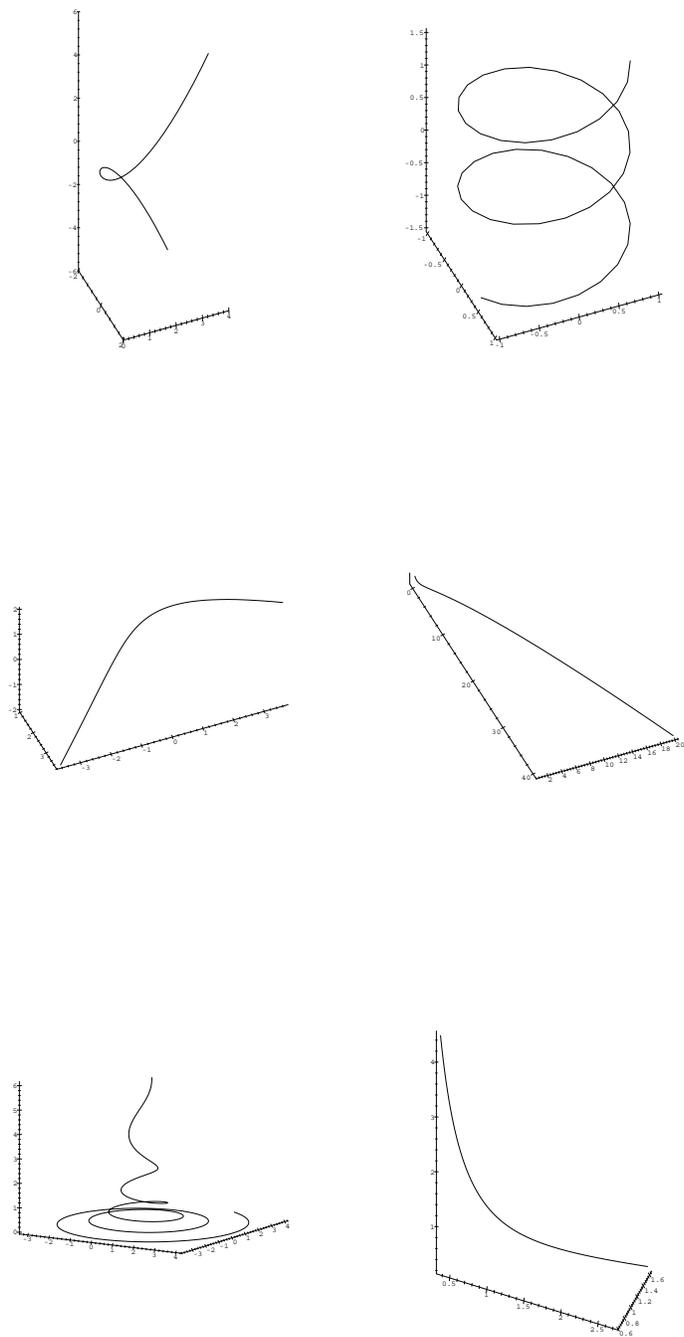


FIG. 4.19 – Cas affine – Courbes à courbure et torsion constantes.

### 4.6.5 Courbes particulières. Discussion

Nous établissons le lemme suivant:

**Lemme 28** *Les courbes à courbure et torsion affine constantes sont de 6 types (voir figure 4.19):*

1.  $(p, p^2, p^3)$  pour  $\tau = 0, \mu = 0$
2.  $(\cos(ap), \sin(ap), p)$  pour  $\tau = 0, \mu < 0$
3.  $(\cosh(ap), \sinh(ap), p)$  pour  $\tau = 0, \mu > 0$
4.  $(pe^{ap}, e^{ap}, e^{-2ap})$  pour  $\tau \neq 0, (\frac{\tau}{16})^2 = (\frac{\mu}{3})^3$
5.  $(e^{ap} \cos(bp), e^{ap} \sin(bp), e^{-2ap})$  pour  $\tau \neq 0, (\frac{\tau}{16})^2 > (\frac{\mu}{3})^3$
6.  $(e^{ap}, e^{bp}, e^{-(a+b)p})$  pour  $\tau \neq 0, (\frac{\tau}{16})^2 < (\frac{\mu}{3})^3$

**Preuve:** Considérer les équations de Frenet dans la cas d'une courbure et d'une torsion affines constantes, nous conduit à l'équation différentielle:

$$x^{(4)} - 4\mu x^{(2)} - \tau x^{(1)} = 0$$

dont il faut discuter des solutions:

- Si  $\tau = 0$ 
  - Si  $\mu = 0$  alors on est ramené à  $x^{(4)} = 0$ , et, dans un certain repère affine, la courbe admet pour équation:

$$(p, p^2, p^3)$$

- Si  $\mu > 0$ , on tombe sur  $x^{(4)} - 4(\sqrt{\mu})^2 x^{(2)} = 0$  et la courbe est de la forme:

$$(\cosh((4\mu^3)p), \sinh((4\mu^3)p), p)$$

- Si  $\mu < 0$ , on tombe sur  $x^{(4)} + 4(\sqrt{-\mu})^2 x^{(2)} = 0$  et la courbe est de la forme:

$$(\cos((-4\mu^3)p), \sin((-4\mu^3)p), p)$$

- Si  $\tau \neq 0$  alors il nous faut discuter des racines du trinôme

$$x^3 - 4kx - l$$

Sans rentrer dans les détails de la résolution exacte de l'équation du troisième degré, nous voyons apparaître trois cas (la somme des solutions étant nulle, on ne peut avoir de solution triple):

- $(\frac{\tau}{16})^2 = (\frac{\mu}{3})^3$ : trois solutions réelles de somme nulle dont une double. La courbe est alors de la forme

$$(pe^{ap}, e^{ap}, e^{-2ap})$$

- $(\frac{\tau}{16})^2 > (\frac{\mu}{3})^3$ : une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées de somme nulle. La courbe est alors de la forme

$$(e^{ap} \cos(bp), e^{ap} \sin(bp), e^{-2ap})$$

- $(\frac{\tau}{16})^2 < (\frac{\mu}{3})^3$ : trois solutions réelles distinctes de somme nulle. La courbe est alors de la forme

$$(e^{ap}, e^{bp}, e^{-(a+b)p})$$

□

On remarque que, tout comme dans le cas euclidien, aucune catégorie ne contient de courbe fermée. Il est facile de calculer la solution exacte de l'évolution affine de chaque type de courbe. Ces calculs sont un peu fastidieux et nous ne donnons ici qu'un résultat qualitatif:

**Lemme 29** *Dans chaque catégorie de courbe à courbure et torsion affines constantes, une courbe soumise au flot géométrique affine évolue en restant dans la même catégorie de courbe à courbure et torsion affines constantes. En fait, elle reste identique à elle-même à une transformation affine près. De plus, tout comme dans le cas euclidien, il n'y a plus disparition de ces courbes en un temps fini comme c'est le cas en géométrie plane des courbes fermées.*

**Preuve:** Il s'agit simplement de mener à terme les calculs donnant l'évolution exacte de chaque courbe en supposant a priori qu'elle reste dans sa catégorie, ce qu'on vérifie a posteriori. Tout comme dans le cas euclidien pour l'hélice, on débouche dans certains cas sur des équations différentielles ordinaires sans solution analytique mais dont le sens de variation et les limites sont démontrables. Nous ne retranscrivons pas ici le détail de ces calculs.

□

Toutefois, il n'est pas exclu qu'une courbe tridimensionnelle fermée soumise au flot intrinsèque affine disparaisse en un temps fini.

## 4.7 Conclusion

Il ne s'agit ici que d'un premier pas. L'étude des propriétés des deux flots tridimensionnel reste un problème ouvert. Il y a fort à parier que l'appréhension de leurs propriétés ne sera possible que par la simulation numérique et l'expérimentation de l'évolution de nombreuses courbes (c'est d'ailleurs la démarche historiquement adoptée pour le cas plan). C'est donc par ce côté qu'il faudra attaquer le problème mais la simulation ne semble pas ici chose aisée. Quelques travaux sur la simulation numérique de l'évolution d'une frontière libre de codimension deux, car c'est bien de cela qu'il s'agit, commencent à être publiés dans le domaine de la mécanique des fluides, bien que dans un cas de figure un peu différent [55].

D'autre part, nous pourrions être tentés d'établir des résultats analogues en géométrie projective qui est la géométrie naturelle en vision par ordinateur. Malheureusement, il s'agit d'un problème plus délicat qu'il n'y paraît du premier abord. Il faudra dans un premier temps nous pencher sur le cas projectif bidimensionnel, sujet déjà défriché dans [31] et que nous traitons au chapitre 5. Comme nous le verrons, c'est la définition même du flot géométrique projectif qui est le point le plus difficile.

En anticipant sur les résultats du chapitre 5, nous pourrions aujourd'hui résumer l'état de l'art de la connaissance et de la simulation des flots géométriques par les trois tableaux suivants (notez que d'autres flots géométriques correspondant à d'autres groupes de transformations [75] ou à d'autres propriétés [96] peuvent être définis – voir section 4.4):

	<b>Euclidien</b>		
	courbes 2D	surfaces 3D	courbes 3D
Définition	Oui[44, 48]	Oui[49, 56]	Oui[59]
Équations d'évolution	Oui[44, 48]	Oui[49, 56]	Oui[59]
Courbes (surfaces) à courbure (et torsion) constante(s)	Oui[44, 48]	Oui[49, 56]	Oui[59]
Étude des propriétés	Oui[44, 48]	Partielle[56]	Non
Simulation numérique	Oui[78]	Oui[49, 56]	Non

	<b>Affine</b>		
	courbes 2D	surfaces 3D	courbes 3D
Définition	Oui[100]	Oui[77, 12]	Oui[59]
Équations d'évolution	Oui[100]	Oui[77, 12]	Oui[59]
Courbes (surfaces) à courbure (et torsion) constante(s)	Oui[100]	Non	Oui[59]
Étude des propriétés	Oui[100]	Non	Non
Simulation Numérique	Oui[100]	Non	Non

	<b>Projectif</b>		
	courbes 2D	surfaces 3D	courbes 3D
Définition	Oui[35]	Non	Non
Équations d'évolution	Oui[35]	Non	Non
Courbes (surfaces) à courbure (et torsion) constante(s)	Oui[35]	Non	Non
Étude des propriétés	Non	Non	Non
Simulation Numérique	Non	Non	Non

Après l'extension aux courbes gauches des cas plans euclidien et affine, tournons nous vers la géométrie qui sous-tend le processus de vision: la géométrie projective.

## Chapitre 5

# Équation projective de la chaleur

---

### Résumé

---

*Dans le présent chapitre, nous étudions les familles de courbes du plan projectif évoluant suivant des équations intrinsèques projectivement invariantes. Cette démarche est motivée par les travaux précédents concernant les cas euclidien [46, 48, 62] et affine [99, 100, 5, 4] ainsi que par les applications possibles en perception des formes 2D. Nous établissons les lois d'évolutions de l'abscisse curviligne et de la courbure projectives. Parmi les équations intrinsèques projectivement invariantes, nous définissons une équation de la chaleur projective [31] et établissons le lien avec l'évolution projectivement invariante des courbes du plan réel  $\mathbf{R}^2$ .*

---

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>151</b>
<b>5.2</b>	<b>Les flots intrinsèques invariants projectifs</b>	<b>152</b>
<b>5.3</b>	<b>L'équation de la chaleur projective</b>	<b>156</b>
<b>5.4</b>	<b>Retour dans <math>\mathbf{R}^2</math></b>	<b>156</b>
<b>5.5</b>	<b>Courbes à courbure projective constante</b>	<b>159</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>160</b>

---

## 5.1 Introduction

Acquérir l'image bidimensionnelle d'un objet de l'espace, c'est lui faire subir une projection. Deux images d'un même objet tridimensionnel plan, par exemple d'un motif situé sur une surface plane, sont identiques à une

transformation projective près. Les invariants projectifs sont conservés d'une image à l'autre. Etc.

C'est donc motivés par l'importance de la géométrie projective en vision par ordinateur qu'il nous a semblé naturel d'étendre les flots géométriques invariants euclidien [62] et affine [99] au cas projectif.

Nous avons vu au chapitre précédent la notion de flot géométrique invariant, que nous appellerons indifféremment *flot intrinsèque invariant*, la définition du groupe projectif et les invariants différentiels induits. Rappelons par clarté les formules suivantes: soit  $\mathbf{B}(p) : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{P}^2$  une courbe plane régulière du plan projectif. Nous changeons  $\mathbf{B}(p)$  d'un facteur d'échelle  $\lambda(p)$  et caractérisons son abscisse curviligne projective  $\sigma$  et sa courbure  $k$  en introduisant le point de Cartan  $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ , et le repère de Cartan  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)})$ , le tout satisfaisant les équations de Frenet projectives:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} &= \mathbf{A}^{(1)} \\ \frac{d\mathbf{A}^{(1)}}{d\sigma} &= -k\mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)} \\ \frac{d\mathbf{A}^{(2)}}{d\sigma} &= -\mathbf{A} - k\mathbf{A}^{(1)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

et la condition:

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}^{(2)}| = 1 \tag{5.2}$$

$\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  sont deux vecteurs coordonnées du même point projectif. Le point  $\mathbf{A}^{(1)}$  est sur la tangente à la courbe en  $\mathbf{A}$  et la droite  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A}^{(2)} \rangle$  est la normale projective. Les fonctions  $k$  et  $\sigma$  sont invariantes sous l'action du groupe projectif et définissent la courbe à une transformation projective près.

## 5.2 Les flots intrinsèques invariants projectifs

La loi  $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{\sigma\sigma}$  étudiée dans Faugeras dans [31] aurait pu être envisagée comme l'extension naturelle des cas euclidien et affine. Malheureusement, cette loi soulève un certain nombre d'impossibilités. Par exemple, d'après l'expression de  $k_t$  donnée dans [31], les courbes de courbure projective constante devraient évoluer en restant à courbure projective constante. En fait, ce n'est pas le cas (voir [34]). Il y a nécessairement une erreur quelque part ...

La propriété que [31] avait omise était que le point de Cartan  $\mathbf{A}(p, t)$  n'est en fait qu'un représentant particulier du point projectif  $\mathbf{B}(p, t)$  et qu'il dépend de la courbe à l'instant  $t$  et de ses dérivées spatiales. En conséquence de quoi, on ne peut s'attendre à ce que la solution d'une équation différentielle arbitraire  $\{\mathbf{A}(p, 0) = \mathbf{A}_0(p); \mathbf{A}_t = f(p, t)\}$  soit telle que  $\mathbf{A}(p, t)$  reste le point

de Cartan de la courbe au temps  $t > 0$ , même si  $\mathbf{A}_0(p)$  l'est pour la courbe initiale.

Nous sommes donc amenés à considérer la loi d'évolution suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(p, 0) &= \mathbf{A}_0(p) \quad (\mathbf{A}_0 \text{ point de Cartan de la courbe initiale}) \\ \mathbf{A}_t(p, t) &= \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}^{(1)} + \gamma \mathbf{A}^{(2)} \end{cases} \quad (5.3)$$

dans laquelle  $f(p, t)$  a été décomposé dans le repère de Cartan, et à trouver quelles conditions sur  $(\alpha, \beta, \gamma)$  assurent que  $\mathbf{A}(p, t)$  reste le point de Cartan.

Nous obtenons le résultat suivant:

**Proposition 2** *L'équation différentielle (5.3) est bien posée (dans le sens que  $\mathbf{A}(p, t)$  est le point de Cartan de la courbe au temps  $t$ ) si et seulement si:*

$$\alpha = \frac{1}{3 + k_\sigma} \left[ -\frac{1}{3}k_{\sigma^3} - \frac{3}{2}k_{\sigma^2}\gamma_\sigma - k_\sigma\left(\frac{7}{3}k\gamma + \frac{17}{6}\gamma_{\sigma^2} + \beta_\sigma\right) - \frac{8}{3}k^2\gamma_\sigma + k\left(\gamma - \frac{5}{3}\gamma_{\sigma^3}\right) + \gamma_{\sigma^2}/2 - \gamma_{\sigma^5}/6 \right] \quad (5.4)$$

Dans ce cas, l'abscisse curviligne et la courbure projectives évoluent suivant:

$$\frac{\pi_t}{\pi} = \alpha + \beta_\sigma - \frac{1}{3}(k\gamma - \gamma_{\sigma^2}) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} k_t &= -\alpha_{\sigma^2} + \frac{3}{2}\gamma_\sigma + \frac{\gamma_{\sigma^4}}{6} + k\left(\frac{2}{3}\gamma_{\sigma^2} - 2\alpha\right) \\ &\quad + k_\sigma\left(\beta + \frac{7}{6}\gamma_\sigma\right) + \frac{\gamma}{3}(k_{\sigma^2} + 2k^2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $\pi = \frac{d\sigma}{dp}$ .

**Preuve:** Nous traçons ici les grandes lignes de la preuve de la proposition ci-dessus.

– **Étape 1:** Établissons tout d'abord quelques propriétés préliminaires. Utilisant l'indépendance des variables  $p$  et  $t$  qui vérifient donc

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial p} = \frac{\partial^2}{\partial p \partial t}$$

nous utilisons à nouveau les crochets de Lie  $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \sigma}]$  et rappelons les formules déjà vues

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \sigma}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \sigma} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial t} = -\frac{\pi_t}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t \partial \sigma^2} = -\left[\frac{\pi_t}{\pi}\right]_\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - 2\frac{\pi_t}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^3}{\partial \sigma^2 \partial t} \quad (5.8)$$

et

$$\frac{\partial^4}{\partial t \partial \sigma^3} = -\left[\frac{\pi_t}{\pi}\right]_{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} - 3\left[\frac{\pi_t}{\pi}\right]_{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - 3\frac{\pi_t}{\pi} \frac{\partial^3}{\partial \sigma^3} + \frac{\partial^4}{\partial \sigma^3 \partial t} \quad (5.9)$$

dont nous aurons besoin plus loin.

- **Étape 2:** Prouvons maintenant que l'équation (5.4) est nécessaire. Nous obtiendrons au passage (5.5) et (5.6). En dérivant l'équation (5.2) par rapport à  $t$  à  $p$  constant, nous avons:

$$0 = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}^{(2)}|_t = |\mathbf{A}_t\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}^{(2)}| + |\mathbf{A}\mathbf{A}_t^{(1)}\mathbf{A}^{(2)}| + |\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}_t^{(2)}| \quad (5.10)$$

Des équations (5.3) et (5.1), il vient  $\alpha$  comme valeur du premier déterminant du membre de droite. De l'équation (5.7), nous tirons

$$\mathbf{A}_t^{(1)} = \mathbf{A}_{t\sigma} = -\frac{\pi_t}{\pi}\mathbf{A}^{(1)} + \frac{\partial\mathbf{A}_t}{\partial\sigma} \quad (5.11)$$

d'où nous obtenons finalement la valeur de  $|\mathbf{A}\mathbf{A}_t^{(1)}\mathbf{A}^{(2)}|$  dans (5.10). D'une manière similaire, nous écrivons

$$\mathbf{A}_t^{(2)} = \frac{\partial(k\mathbf{A} + \mathbf{A}_{\sigma\sigma})}{\partial t} = k_t\mathbf{A} + k\mathbf{A}_{\sigma\sigma} + \mathbf{A}_{t\sigma\sigma} \quad (5.12)$$

dont le dernier terme est donné par l'équation (5.8). D'où la valeur du dernier déterminant du membre de droite de (5.10) et finalement l'équation (5.5). D'autre part, à partir des formules de Frenet (5.1), nous pouvons écrire la relation utile:

$$\mathbf{A}_{\sigma^3} = -2k\mathbf{A}^{(1)} - (1 + k_{\sigma})\mathbf{A} \quad (5.13)$$

Calculons maintenant  $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\sigma^3}$  de deux manières différentes:

1. Utilisant l'équation (5.13), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{A}_{\sigma^3}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(-(1 + k_{\sigma})\mathbf{A} - 2k\mathbf{A}^{(1)}) \\ &= -\frac{\partial k_{\sigma}}{\partial t}\mathbf{A} - (1 + k_{\sigma})\mathbf{A}_t - 2k_t\mathbf{A}^{(1)} - 2k\mathbf{A}_t^{(1)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

où nous connaissons  $\mathbf{A}_t$  et  $\mathbf{A}_t^{(1)}$  grâce à (5.3) et à (5.11).

2. Par ailleurs, nous pouvons utiliser l'équation (5.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{A}_{\sigma^3}}{\partial t} &= -\left[\frac{\pi_t}{\pi}\right]_{\sigma^2}\mathbf{A}_{\sigma} \\ &\quad - 3\left[\frac{\pi_t}{\pi}\right]_{\sigma}\mathbf{A}_{\sigma^2} - 3\frac{\pi_t}{\pi}\mathbf{A}_{\sigma^3} + \frac{\partial^3\mathbf{A}_t}{\partial\sigma^3} \end{aligned} \quad (5.15)$$

où tous les termes du membre de droite sont donnés par (5.5) et (5.1), à l'exception du dernier qui peut être calculé à partir de l'équation (5.3) et des formules de Frenet.

En écrivant (5.14) et (5.15) dans le repère  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)})$  et en égalant leur coordonnées, il vient trois relations: une tautologie, l'équation (5.6) et la condition (5.4).

- **Étape 3:** Il nous reste à prouver que la condition (5.4) est suffisante pour que l'équation (5.3) soit bien posée. Plus précisément, nous allons montrer que si  $\mathbf{B}(p, t)$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(p, 0) = \mathbf{A}_0(p) \quad (\mathbf{A}_0 \text{ point de Cartan de la courbe initiale}) \\ \mathbf{B}_t(p, t) = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}^{(1)} + \gamma \mathbf{A}^{(2)} \\ \quad (\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}) \text{ repere de Cartan de la courbe} \\ \quad \text{au temps } t \end{array} \right. \quad (5.16)$$

avec  $\alpha$  vérifiant (5.4), alors  $\mathbf{B}(p, t)$  reste le point de Cartan, c'est-à-dire  $\mathbf{B}(p, t) = \mathbf{A}(p, t)$ . En suivant la même démarche qu'à l'étape 2 avec  $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\lambda$  dans (5.16), nous aboutissons à trois équations d'évolution:  $\pi_t$ ,  $k_t$  et  $\lambda_t$ . Lorsque  $\alpha$  est donné par (5.4), l'évolution de  $\lambda$  devient  $\lambda_t = 0$ , d'où  $\lambda(p, t) = \lambda(p, 0) = 1$  et  $\mathbf{B}(p, t) = \mathbf{A}(p, t)$ .

□

**Remarque 1:** Une autre façon de réaliser qu'une condition telle que (5.4) est nécessaire est de considérer la surface  $\mathcal{S} = \{\mathbf{A}(p, t) | (p, t)\}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Cette surface est bien définie de manière unique puisqu'il n'y a pas de facteur d'échelle sur  $\mathbf{A}$  bien qu'il représente un point projectif de  $\mathcal{P}^2$ . Pour que l'EDP (5.3) soit bien posée sur  $\mathcal{S}$ , il faut que le vecteur  $\mathbf{A}_t$  appartienne au plan  $T_{\mathcal{S}}$  tangent à  $\mathcal{S}$  en  $A(p, t)$ . Le membre de droite contient le vecteur  $\mathbf{A}^{(1)}$  qui appartient à  $T_{\mathcal{S}}$  mais le vecteur  $\alpha \mathbf{A} + \gamma \mathbf{A}^{(2)}$  n'est en général pas dans  $T_{\mathcal{S}}$  à moins d'une dépendance entre  $\alpha$  et  $\gamma$ . En fait, la condition est encore plus restrictive puisque, non seulement  $\mathbf{A}_t$  doit appartenir à  $T_{\mathcal{S}}$ , mais encore, comme énoncé plus haut,  $\mathbf{A}$  doit rester le point de Cartan.

**Remarque 2:** Notez que  $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{\sigma\sigma}$  est le cas  $(\alpha, \beta, \gamma) = (-k, 0, 1)$ , qui ne vérifie pas la condition (5.4), d'où les contradictions mentionnées plus haut.

Finalement, si  $\beta$  et  $\gamma$  sont des quantités intrinsèques projectivement invariantes, alors  $\alpha$  défini par l'équation (5.4) est lui aussi une quantité intrinsèque projectivement invariante. Ainsi, nous obtenons

**Corollaire 2** *Soient  $\beta$  et  $\gamma$  deux quantités intrinsèques projectivement invariantes. Soit  $\alpha$  la quantité définie par l'équation (5.4). Alors l'équation différentielle (5.3) définit un flot intrinsèque projectivement invariant et les évolutions de l'abscisse curviligne et de la courbure projectives sont données par les équations (5.5 et 5.6).*

### 5.3 L'équation de la chaleur projective

Parmi tous les choix possibles pour  $(\beta, \gamma)$ , il apparaît que le plus simple,  $(0, 1)$ , est en fait le bon choix pour définir une équation de la chaleur projective généralisant les cas euclidien et affine. De manière intuitive, nous pourrions invoquer les justifications suivantes:

- $\beta \mathbf{A}^{(1)}$  est sur la tangente en  $\mathbf{A}$ . Donc, le choix de  $\beta$  est sans importance: changer  $\beta$  ne modifie en rien la famille de courbes obtenue si ce n'est leur paramétrisation  $p$  (voir [99]).
- $(\beta, \gamma) = (0, 1)$  sont les composantes de  $\mathbf{A}_{\sigma\sigma}$  sur  $(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)})$ . La valeur imposée pour  $\alpha$  qui en résulte peut être considérée comme une correction de la composante de  $\mathbf{A}_{\sigma\sigma}$  sur  $\mathbf{A}$ .

Cependant, la vraie et profonde raison de ce choix est qu'il donne le même flot que  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$  dans  $\mathbf{R}^2$  (voir section suivante). En conséquence, nous écrivons en application directe de la proposition 2:

**Proposition 3** *Soit  $\alpha$  défini par:*

$$\alpha = \frac{1}{9 + 3k_\sigma}(3k - 7kk_\sigma - k_{\sigma^3})$$

*Soit  $\mathbf{B}_0(p)$  une courbe de  $\mathcal{P}^2$  et  $\mathbf{A}_0(p)$  son point de Cartan. Nous définissons l'équation projective de la chaleur par:*

$$\begin{cases} \mathbf{A}(p, 0) &= \mathbf{A}_0(p) \\ \mathbf{A}_t(p, t) &= \alpha \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)} \end{cases} \quad (5.17)$$

*Soit  $\pi = \frac{d\sigma}{dp}$ . L'abscisse curviligne et la courbure projectives d'une solution de (5.17) évoluent suivant:*

$$\frac{\pi_t}{\pi} = \frac{-1}{9 + 3k_\sigma}(8kk_\sigma + k_{\sigma^3}) \quad (5.18)$$

$$k_t = \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{3}k_{\sigma^2} - 2\alpha k - \alpha_{\sigma^2} \quad (5.19)$$

### 5.4 Retour dans $\mathbf{R}^2$

Nous allons maintenant justifier le choix précédent, en explorant les liens entre:

- l'équation (5.17) sur le point de Cartan.
- l'équation plus naturelle  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$  portant sur un vecteur coordonnées quelconque  $\mathbf{B}$  dans  $\mathcal{P}^2$ .
- et son analogue du plan réel  $\mathbf{R}^2$ :  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$  déjà citée dans [76].

Pour cela, nous énonçons et prouvons la proposition suivante:

**Proposition 4** *Soit une courbe initiale de  $\mathcal{P}^2$ . Soit  $\mathbf{B}_0(p)$  un choix de vecteur coordonnées de cette courbe suffisamment régulier.*

1. *Le flot défini par*

$$\begin{cases} \mathbf{B}(p, 0) &= \mathbf{B}_0(p) \\ \mathbf{B}_t(p, t) &= \mathbf{B}_{\sigma\sigma} \end{cases} \quad (5.20)$$

*est intrinsèque et ne dépend pas du choix de  $\mathbf{B}_0$  (c'est-à-dire que  $\mathbf{B}_0(p)$  et  $\phi_0(p)\mathbf{B}_0(p)$  donnent la même famille de courbes pour tout choix d'un  $\phi_0$  suffisamment régulier strictement positif ou négatif).*

2. *Ce flot et le flot défini par l'équation (5.17) sont identiques à une re-paramétrisation des courbes près.*
3. *Soit  $\lambda$  le facteur d'échelle de Cartan ( $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ ).  $(\sigma, k, \lambda)$  définissent  $\mathbf{B}$  à une transformation projective près. Leur évolution est donnée par:*

$$\begin{aligned} \frac{\pi_t}{\pi} &= \frac{-1}{9 + 3k_\sigma}(8kk_\sigma + k_\sigma^3 + 18\Lambda_{\sigma^2}) \\ k_t &= \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{3}k_{\sigma^2} - 2Pk - P_{\sigma^2} - 2k_\sigma\Lambda_\sigma \\ \Lambda_t &= \frac{-1}{9 + 3k_\sigma}[k_{\sigma^3} + 3k_\sigma(\Lambda_\sigma^2 - 3\Lambda_{\sigma^2}) + 4k(k_\sigma - 3) + 9(\Lambda_\sigma^2 - \Lambda_{\sigma^2})] \\ &\text{avec } \pi = \frac{d\sigma}{dp}, \Lambda = \log|\lambda|, P = \Lambda_\sigma^2 - \Lambda_{\sigma^2} - k + \Lambda_t \end{aligned} \quad (5.21)$$

**Preuve:** Nous esquissons à nouveau les principaux traits de la preuve.

- **Étape 1:** Soit  $\mathbf{B}(p, t)$ , solution de (5.20) pour un choix de vecteur coordonnées  $\mathbf{B}_0$  suffisamment régulier de la courbe initiale (tel que toute les dérivées nécessaires sont définies). Tout autre vecteur coordonnées suffisamment régulier de la courbe initiale peut s'écrire  $\phi_0(p)\mathbf{B}_0(p)$  avec  $\phi_0(p) \neq 0, \forall p$ . Soit  $\phi(p, t)$  une solution de:

$$\begin{cases} \phi(p, 0) &= \phi_0(p) \\ \phi_t(p, t) &= \phi_{\sigma\sigma} - 2(\phi_\sigma)^2/\phi \end{cases} \quad (5.22)$$

Posons  $\mathbf{B}'(p, t) = \phi\mathbf{B}$ .  $\mathbf{B}(\cdot, t)$  et  $\mathbf{B}'(\cdot, t)$  sont deux vecteurs coordonnées différents pour les mêmes courbes de  $\mathcal{P}^2$  et définissent donc les mêmes abscisses curvilignes projectives:  $\sigma' = \sigma$ . Il est alors immédiat de vérifier que  $\mathbf{B}'$  satisfait l'égalité

$$\mathbf{B}'_t = (-2\phi_{\sigma'}/\phi)\mathbf{B}'_{\sigma'} + \mathbf{B}'_{\sigma'\sigma'}$$

et donne donc les mêmes courbes que  $\mathbf{B}'_t = \mathbf{B}'_{\sigma'\sigma'}$  à une re-paramétrisation près. Les courbes  $\mathbf{B}'$  sont donc les solutions de (5.20) pour la condition initiale  $\phi_0\mathbf{B}_0$ . Finalement, les conditions initiales  $\mathbf{B}_0$  et  $\phi_0\mathbf{B}_0$  engendrent le même flot.

- **Étape 2:** Tout choix de  $\mathbf{B}_0$  donnant les mêmes solutions, nous pouvons choisir  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0$ . Avec  $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$ , l'équation  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$  devient  $\mathbf{A}_t = \alpha_1\mathbf{A} + \beta_1\mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)}$  avec  $(\alpha_1, \beta_1, 1)$  vérifiant la condition (5.4). La composante tangentielle étant indifférente, cette dernière équation donne la même famille de courbes que  $\mathbf{A}_t = \alpha_2\mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)}$  où  $\alpha_2$  est la valeur correcte de  $\alpha$  pour  $(\beta, \gamma) = (0, 1)$ :  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$  engendre donc le même flot que (5.17).
- **Étape 3:** La même démarche qu'à l'étape 2 de la preuve de la proposition 2 appliquée à la loi (5.20) avec  $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B}$  donne les équations (5.21).  $\lambda$  et ses dérivées interviennent maintenant dans les composantes  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathbf{A}_t$  dans le repère  $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)})$ . Précédemment, nous voulions que  $\lambda$  reste constant et égal à 1. D'où la condition (5.4) sur  $\alpha$ . Ici,  $\lambda$  est libre et la même équation qui a donné la condition (5.4) nous conduit maintenant à la loi d'évolution de  $\lambda$ . Notez que la quantité  $P$  utilisée pour obtenir une écriture quelque peu plus courte des équations (5.21) est en réalité la première composante  $\alpha$  de  $\mathbf{A}_t$ .

□

Soit  $\mathcal{C}_0(p) = (x_0, y_0)$  une courbe du plan réel, il est alors facile de prouver que:

**Corollaire 3** *Le flot défini par  $\{\mathcal{C}(p, 0) = \mathcal{C}_0 ; \mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}\}$  est un flot projectivement invariant. Il donne la même famille de courbes à travers la carte  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$  que l'équation de la chaleur projective (5.17) avec la condition initiale  $(x_0, y_0, 1)$ . Soient  $\mathcal{C}(p, t) = (x, y)$  et  $\lambda$  le facteur d'échelle de Cartan de  $(x, y, 1)$ . Les évolutions de l'abscisse curviligne et de la courbure projective de  $\mathcal{C}$  sont données par les équations (5.21).*

**Preuve:** Soit  $\mathbf{B} = (x, y, 1)$ . Si  $\mathcal{C}$  vérifie  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$ , alors  $\mathbf{B}$  suit la loi (5.20) simplement parce que:

1. Son abscisse curviligne projective est la même que celle de  $\mathcal{C}$
2. Ses deux premières composantes sont celles de  $\mathcal{C}$  et la troisième composante est constante.

En conséquence de quoi, les paramètres  $(\sigma, k, \lambda)$  de  $\mathcal{C}$ , qui sont ceux de  $\mathbf{B}$ , évoluent suivant (5.21).

□

Notez que ceci avait déjà été énoncé dans [75]. Toutefois, l'argument donné dans [76] sur la relation entre deux vecteurs coordonnées est incorrect (voir la proposition 4 ci-dessus: d'une part le facteur d'échelle  $\phi$  ne reste pas le facteur initial, et d'autre part les courbes doivent être reparamétrées).

## 5.5 Courbes à courbure projective constante

Une première propriété du flot de la chaleur projectif, commune avec les cas euclidien et affine, est que les courbes à courbure constante évoluent en restant à courbure constante. Plus encore, nous constatons qu'elles conservent leur courbure initiale ( $k_t = 0$ ), se démarquant en cela des flots précédents. Ainsi, elles évoluent en restant identiques à elles mêmes à une homographie près. Il est facile de résoudre totalement l'équation (5.20) dans le cas  $k_0(p) = \text{cte}$  et de voir que que les spirales logarithmiques rétrécissent indéfiniment, que les paraboles généralisées se dilatent ou rétrécissent indéfiniment suivant l'axe  $y$  et que l'exponentielle se dilate indéfiniment suivant l'axe  $y$  (figure 5.1). De manière exacte:

**Lemme 30** *Les courbes à courbure projective constante évoluent suivant le flot projectif invariant de la façon suivante:*

1. L'exponentielle  $y = e^{mx}$  devient

$$y = e^{9t/2^{\frac{2}{3}}} e^{mx}$$

2. La spirale logarithmique  $\rho = e^{m\theta}$  devient

$$\rho = e^{-9t(m^2+1)/[2m(m^2+9)]^{\frac{2}{3}}} e^{m\theta}$$

3. La parabole généralisée  $y = x^m$  devient

$$y = e^{9tm(m-1)/[(m-2)(2m-1)(m+1)]^{\frac{2}{3}}} x^m$$

Plus précisément, n'étant pas assurés de l'unicité de l'équation de la chaleur projective sous quelle forme que ce soit, nous pouvons seulement dire que les courbes précédentes sont des solutions de l'évolution des courbes à courbure constante.

**Preuve:** Les expressions ci-dessus ne sont que les équations des lieux géométriques des évolutions des courbes et non des solutions de l'équation de la chaleur. Nous n'avons d'ailleurs pas précisé de quel flot il s'agissait ( $\mathbf{A}_t = \alpha \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)}$ ,  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$  ou  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$ ). Pour prouver le lemme, nous donnons les solutions exactes du flot  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$  correspondant aux trois familles données ci-dessus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p \\ e^{9t/2^{\frac{2}{3}}} e^{mp} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{9t(m^2-1)/[2m(m^2+9)]^{\frac{2}{3}}} e^{mp} \\ p + e^{-18tm/[2m(m^2+9)]^{\frac{2}{3}}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{9t/[(m-2)(2m-1)(m+1)]^{\frac{2}{3}}} p \\ e^{9tm^2/[(m-2)(2m-1)(m+1)]^{\frac{2}{3}}} p^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

## 5.6 Conclusion

Nous avons établi l'équivalence entre le flot invariant projectif dans  $\mathbf{R}^2$  [76, 75] et celui défini dans  $\mathcal{P}^2$  [31]. Nous avons défini et justifié l'équation de la chaleur projective écrite de trois manières équivalentes:

$$\mathbf{A}_t = \alpha \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)}$$

( $\alpha$  donné par l'équation (5.4)) ou

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\sigma\sigma}$$

dans  $\mathcal{P}^2$ , et

$$\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{\sigma\sigma}$$

dans  $\mathbf{R}^2$ . Comme nous pouvions l'attendre, les liens ne sont pas triviaux mais suffisamment simples. Les avantages de la définition dans  $\mathcal{P}^2$ , esquissée dans [31] et que nous avons modifiée pour la rendre tout à fait correcte, sont que:

- elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi pour représenter  $\mathcal{P}^2$
- elle nous a permis d'établir les loi d'évolution de invariants projectifs caractéristiques: abscisse curviligne et courbure.

Il reste à voir s'il est possible de définir un espace d'échelle analogue aux cas euclidien et affine.

Enfin, il serait particulièrement intéressant de comparer notre approche avec celle de Dibos [24].

Laissant ici les considérations d'invariance dans les évolutions de courbes et donc dans le traitement des images, nous nous intéressons à un autre aspect de l'invariance: l'utilisation d'invariants différentiels pour des tâches telles que la reconnaissance des formes. Coïncidence étrange, c'est justement une évolution invariante, l'espace d'échelle affine, qui va nous permettre de calculer un invariant différentiel, la courbure affine et ce, au travers de l'évolution de son homologue, la courbure euclidienne.

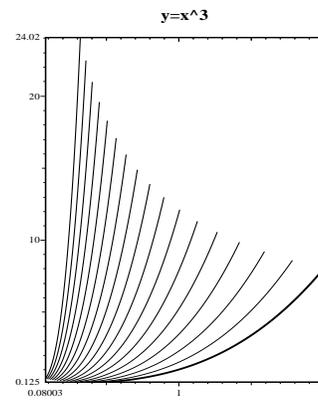
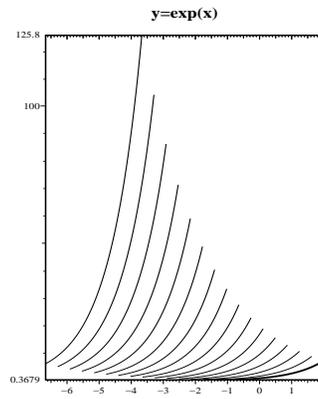
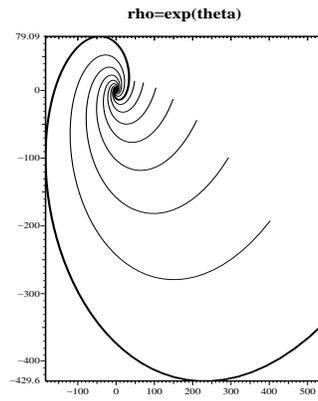


FIG. 5.1 – Évolution des courbes à courbure projective constante. En gras, la courbe initiale



## Chapitre 6

# Espaces d'échelle et courbure affine

---

### Résumé

---

*Nous exposons ici une nouvelle façon de calculer la courbure affine de courbes planes. Nous expliquons comment l'équation de la chaleur affine et l'espace d'échelle résultant peuvent être utilisés pour gagner un ordre de dérivation dans l'approximation numérique de la courbure affine. Nous décrivons notre implémentation et comparons les résultats ainsi obtenus à ceux des méthodes antérieures. Le chapitre se termine sur un exemple d'application simple de reconnaissance des formes basée sur la courbure affine.*

---

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>163</b>
<b>6.2</b>	<b>Une propriété intéressante de l'espace d'échelle affine</b>	<b>164</b>
<b>6.3</b>	<b>Calcul de la courbure affine</b>	<b>165</b>
6.3.1	Le problème	165
6.3.2	Solution	166
<b>6.4</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>169</b>
6.4.1	Schéma pratique	169
6.4.2	Polynômes de Chebyshev	169
6.4.3	Résultats	175
6.4.4	Application	177
<b>6.5</b>	<b>Conclusion et remarques</b>	<b>178</b>

---

## 6.1 Introduction

Si de nombreux travaux en reconnaissance des formes s'intéressent aux invariants semi-différentiels affines ou projectifs [74], les invariants locaux

semblent plus difficile à obtenir du fait des grands ordres de dérivation mis en jeu: la courbure affine est une quantité du quatrième ordre, la courbure projective du septième ordre, ce qui fait que leur calcul effectif tient pour le moins de la gageure.

Parmi les nombreuses applications des espaces d'échelle, ce chapitre en présente une surprenante: on peut utiliser l'espace d'échelle affine pour calculer la courbure affine d'une courbe plane avec trois ordres de dérivation seulement. Ce qui nous permet de présenter une façon d'obtenir la courbure affine avec une précision suffisante pour réaliser par exemple de la reconnaissance de formes.

## 6.2 Une propriété intéressante de l'espace d'échelle affine

Nous avons vu au chapitre 4 la définition des invariants différentiels euclidiens et affines. Rappelons le lien entre les courbures:

$$\mu = -\kappa^{4/3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \kappa^{-2/3}}{\partial v^2} \quad (6.1)$$

Alors que  $\kappa$  est une quantité du second ordre,  $\mu$  en est une du quatrième. C'est pour cela qu'elle n'a pas été très utilisée jusqu'à présent de manière numérique.

Considérons à nouveau une courbe plane fermée  $\mathcal{C}_0(p) : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  et l'espace d'échelle affine associé, c'est-à-dire la famille de courbes fermées  $\mathcal{C}(p, t) : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2$  évoluant suivant la loi suivante (cf [99]):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{C}(p, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}(p, t)}{\partial s^2} \\ \mathcal{C}(p, 0) = \mathcal{C}_0(p) \end{cases} \quad (6.2)$$

Cet espace d'échelle est un invariant affine (absolu pour les transformations affines spéciales). Toute courbe régulière commence par devenir convexe avant de converger vers un point ellipse [99].

Intéressons nous à l'évolution de la courbure euclidienne donnée dans [99]:

$$\frac{\partial \kappa(p, t)}{\partial t} = -\mu \kappa \quad (6.3)$$

et réécrivons-la pour obtenir  $\mu$  à partir de  $\kappa$ :

$$\mu = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa(p, t)}{\partial t} \quad (6.4)$$

L'espace d'échelle affine étant donné, nous voyons que la courbure affine dépend de la courbure euclidienne et de sa dérivée temporelle, d'où un gain

d'un ordre de dérivation (comparer à (6.1)). Nous supposons que le calcul de l'espace d'échelle affine peut être effectué avec suffisamment de précision pour ne pas réintroduire de manière cachée une dérivation supplémentaire. Cette supposition sera confirmée par l'expérience:

- L'équation (6.4) conduit à une bien plus grande précision qu'une méthode directe utilisant des dérivées quatrièmes (cf section 6.4.3).
- L'erreur sur  $\frac{\partial \kappa}{\partial t}$  se révèle être du même ordre de grandeur que celle sur  $\frac{\partial \kappa}{\partial v}$  qui est une autre quantité du troisième ordre de dérivation (voir la suite et l'équation (6.12) pour comprendre pourquoi cette dérivée doit être utilisée).

## 6.3 Calcul de la courbure affine

Dans cette section, nous montrons comment (6.4) peut être utilisée pour calculer  $\mu$ .

### 6.3.1 Le problème

Étant donnée la courbe  $\mathcal{C}_0(p)$ , la première chose à faire est de calculer l'espace d'échelle affine associé. La méthode numérique retenue est celle proposée par Osher et Sethian [79], utilisée par Sapiro et Tannenbaum [97] et à laquelle nous avons consacré le chapitre 2. Précisons que de nombreux schémas [103] permettent d'obtenir une grande précision, ce qui est ici essentiel. Outre sa fiabilité, sa stabilité, sa précision et sa gestion élégante des changements de topologie, cette méthode possède les propriétés suivantes:

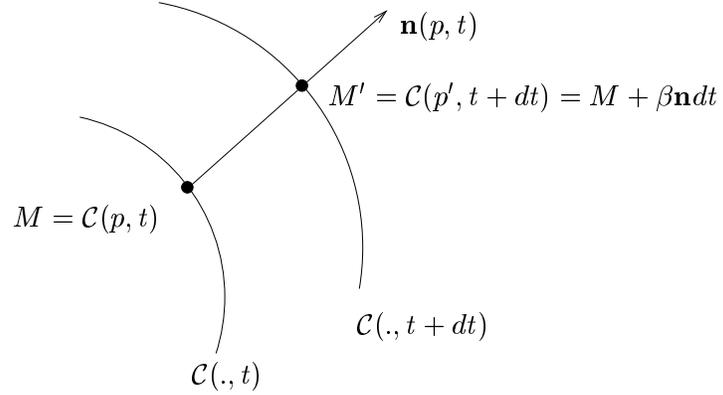
1. *Conservation de l'échelle.* La loi d'évolution utilisée n'est pas exactement (6.2). Seule la composante normale de la vitesse est retenue et (6.2) devient en fait:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{C}(p,t)}{\partial t} = \beta \mathbf{n} = \kappa^{1/3} \mathbf{n} \\ \mathcal{C}(p, 0) = \mathcal{C}_0(p) \end{cases} \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale euclidienne.

Cependant, les courbes géométriques  $\mathcal{C}(\cdot, t)$  obtenues sont les solutions de (6.2). Non seulement la famille de courbes est la même, mais encore le paramètre d'échelle  $t$  est préservé. Aucune renormalisation du temps n'est nécessaire: c'est essentiel pour pouvoir utiliser (6.4).

2. *Perte des trajectoires ponctuelles.* Parce que les courbes sont obtenues par extraction du niveau zéro de surfaces (et de toute façon parce (6.5) est utilisée au lieu de (6.2)), le paramètre  $p$  est perdu: il est impossible de suivre la trajectoire d'un point. Il semble alors a priori impossible d'utiliser (6.4) puisque  $\frac{\partial \kappa(p,t)}{\partial t}$  est une dérivée à  $p$  constant d'une part et pour les solutions de (6.2) d'autre part.


 FIG. 6.1 – La composante normale de la vitesse est  $\beta \mathbf{n}$  avec  $\beta = \kappa^{1/3}$ 

Nous exposons maintenant comment utiliser (6.4) malgré ce dernier problème.

### 6.3.2 Solution

La solution est de considérer la dérivée de  $\kappa$  à  $v$  constant,  $v$  étant l'abscisse curviligne euclidienne. Notons  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y$  la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  à  $y$  constant. Toute fonction  $f(p, t)$  vérifie:  $\frac{\partial f}{\partial t} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_v + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$ . Nous allons développer le terme  $\frac{\partial \kappa}{\partial t}$  dans (6.4) de cette façon:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \left. \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right|_v + \frac{\partial \kappa}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (6.6)$$

Montrons maintenant comment calculer les termes de droite de (6.6). Projétons  $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \left. \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right|_v + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$  sur la tangente euclidienne  $\mathbf{t}$  et utilisons (6.2), nous obtenons:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2}, \mathbf{t} \right\rangle - \left\langle \left. \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right|_v, \mathbf{t} \right\rangle \quad (6.7)$$

Calculons  $\mathcal{C}_{ss}$  en utilisant les formules analytiques des invariants différentiels affines plans (4.6) avec  $p \equiv v$ . Il est quasi immédiat de prouver que:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial s^2} = \kappa^{1/3} \mathbf{n} - \frac{1}{3\kappa^{5/3}} \frac{\partial \kappa}{\partial v} \mathbf{t} \quad (6.8)$$

d'où le premier terme de droite de (6.7)

Soient  $M = \mathcal{C}(p, t)$  et  $M'$  l'intersection de  $\mathcal{C}(., t + dt)$  avec la normale  $[M, \mathbf{n}]$  en  $M$  (figure 6.1). Nous savons par [99] que la vitesse normale de l'espace affine est  $\beta = \kappa^{1/3}$  (ce que nous venons d'ailleurs de faire apparaître

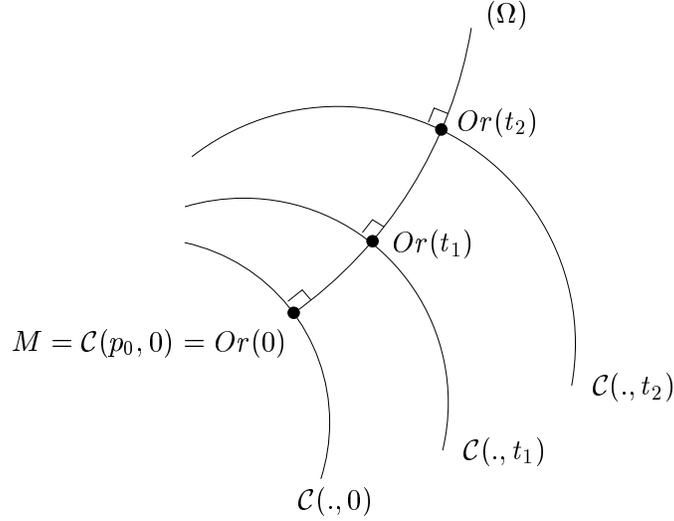


FIG. 6.2 – L'abscisse curviligne euclidienne est choisie constante le long de  $(\Omega)$

dans l'équation précédente (6.8)). Nous savons surtout que seule la vitesse normale détermine la famille de courbes et donc que les équations  $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_{ss}$  et  $\mathcal{C}_t = \kappa^{\frac{1}{3}}$  donnent les mêmes courbes. Nous avons alors

$$M' = M + \beta \mathbf{n} = M + \kappa^{1/3} \mathbf{n}$$

Fixons  $p$  et considérons l'équation (6.4) au point  $\mathcal{C}(p_0, 0)$  dont nous voulons calculer la courbure affine  $\mu$ . A chaque instant  $t$ , l'abscisse curviligne euclidienne  $v(p, t)$  est définie à une origine  $Or(t) \in \mathcal{C}(., t)$  près. Supposant  $\beta \mathbf{n}$  suffisamment régulière, nous choisissons pour  $Or(t)$  l'unique solution dans un voisinage de  $\mathcal{C}(p_0, 0)$  de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dOr}{dt} = \beta \mathbf{n}, \quad Or(0) = \mathcal{C}(p_0, 0)$$

Le long de la trajectoire  $(\Omega)$  de  $Or$  (figure 6.2), en particulier au point  $\mathcal{C}(p_0, 0)$ , les dérivées à  $v$  constant deviennent les dérivées de Lie dans la direction  $\mathbf{n}_\beta = [\beta \mathbf{n}^T, 1]^T$  du plan tangent à la surface spatio-échelle  $\Sigma(p, t) = [\mathcal{C}(p, t)^T, t]^T$  (voir [39] et figure 6.3):

$$\text{sur } (\Omega), \quad \left. \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right|_v = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\kappa(M') - \kappa(M)}{dt} = L_{\mathbf{n}_\beta} \kappa \quad (6.9)$$

$$\text{sur } (\Omega), \quad \left. \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right|_v = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{M' - M}{dt} = L_{\mathbf{n}_\beta} \mathcal{C} \quad (6.10)$$

En conséquence de quoi,  $\left. \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right|_v$  est normal à la courbe, et

$$\left\langle \left. \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} \right|_v, \mathbf{t} \right\rangle = 0 \quad (6.11)$$

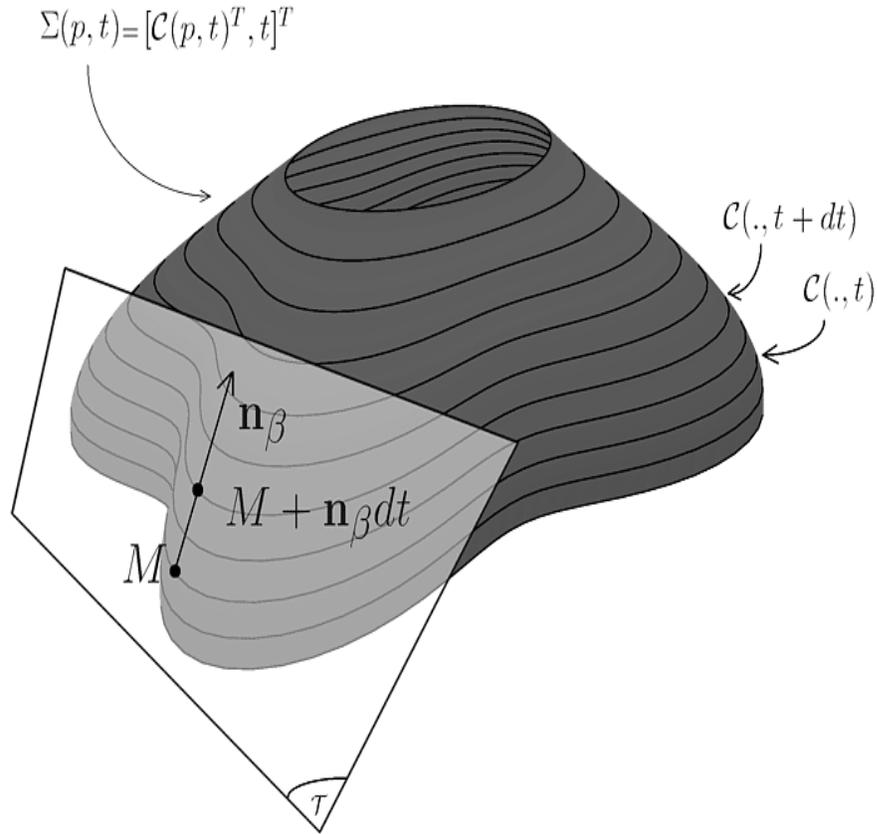


FIG. 6.3 – La dérivée de Lie  $L_{\mathbf{n}_\beta} f(M)$  de  $f$  dans la direction  $\mathbf{n}_\beta$  du plan tangent à la surface spatio-échelle  $\Sigma(p, t)$  est la limite quand  $t$  tend vers 0 de  $\frac{f(M + \mathbf{n}_\beta dt) - f(M)}{dt}$

Ce qui complète l'évaluation de  $\frac{\partial v}{\partial t}$  dans (6.7).

Ce faisant, nous avons aussi obtenu le premier terme de droite de (6.6) dans (6.9). L'équation (6.4) devient la formule finale

$$\mu = \frac{1}{3\kappa^{8/3}} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial v} \right)^2 - \frac{L_{\mathbf{n}_\beta} \kappa}{\kappa} \quad (6.12)$$

Il faut noter que, en dépit de l'apparition de nouveaux termes dues à la perte du paramètre  $p$  dans le processus de calcul de l'espace d'échelle,  $\mu$  ne nécessite toujours que des dérivées du troisième ordre. Le terme  $\frac{\partial \kappa}{\partial v}$  est directement calculé sur la courbe. La dérivée de Lie est obtenue en considérant localement  $\kappa(p, t)$  comme un champ scalaire  $K(x, y)$  défini dans un voisinage de  $\mathcal{C}(p_0, 0)$ :

$$L_{\mathbf{n}_\beta} \kappa = \beta \langle \nabla K, \mathbf{n} \rangle = \kappa^{1/3} \langle \nabla K, \mathbf{n} \rangle \quad (6.13)$$

## 6.4 Résultats expérimentaux

Nous exposons ici la façon dont nous avons utilisé (6.12) pour calculer la courbure affine de courbes planes fermées. Nous présentons des résultats et un exemple d'application de reconnaissance des formes.

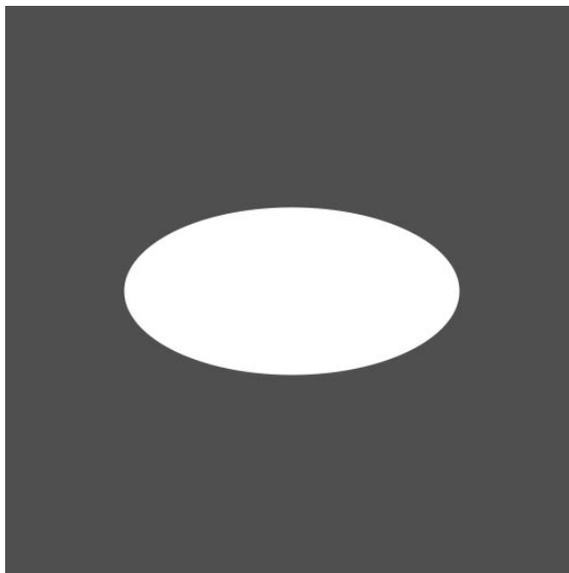
### 6.4.1 Schéma pratique

Notre implémentation procède par étapes de la façon suivante:

1. Extraire la courbe désirée de l'image avec un détecteur de contours de précision sous-pixelique. ([109], [22]).
2. Calculer une courbure euclidienne de manière précise avec une méthode ayant recours aux polynômes de Chebyshev (voir [81]). Avec une méthode analogue, obtenir les abscisses curvilignes euclidienne et affine ainsi que  $\frac{\partial \kappa}{\partial v}$ . (Bien que non indispensable, l'abscisse curviligne affine peut être utilisée pour normaliser la courbure affine – voir section 6.4.4).
3. Calculer l'espace d'échelle affine avec une schéma numérique du deuxième ordre (voir section 2.5).
4. Pour un certain nombre de pas de temps, extraire  $\mathcal{C}(\cdot, t)$  en tant que niveau zéro de la fonction de dimension supérieure  $\phi$  par un algorithme de *Marching Squares* [70]. Calculer aussi la courbure euclidienne à partir de  $\phi$  aux points du maillage et l'interpoler aux points du niveau zéro (tout comme le fait l'algorithme des *Marching Squares* pour la position des points).
5. Pour chaque point de ces courbes, construire le champ scalaire  $K(x, y)$ . L'approximer par une surface régulière avec une méthode d'approximation aux moindres carrés. Calculer  $\nabla K$ .
6. Calculer la courbure affine à partir de (6.12) et de (6.13).

### 6.4.2 Polynômes de Chebyshev

Examinons précisément la méthode détaillée ci-dessus: pendant l'évolution affine de la courbe, la position du niveau zéro et la courbure euclidienne aux points correspondant se fait par interpolation. Ce sont les seules informations nécessaires au calcul de la courbure affine qui sont extraites de l'espace d'échelle affine. Les autres quantités nécessaires sont extraites de la courbe initiale, à savoir la courbure euclidienne, l'abscisse curviligne euclidienne, la dérivée de la courbure euclidienne par rapport à l'abscisse curviligne euclidienne et éventuellement l'abscisse curviligne affine. Ces deux dernières quantités sont du troisième ordre. Afin d'en obtenir une estimation la plus fiable possible, nous reprenons les travaux de thèse de Papadopoulo [82] et approximations la courbe initiale par des polynômes de Chebyshev. Les polynômes de Chebyshev possèdent de nombreuses propriétés intéressantes dont



Synthetic ellipse

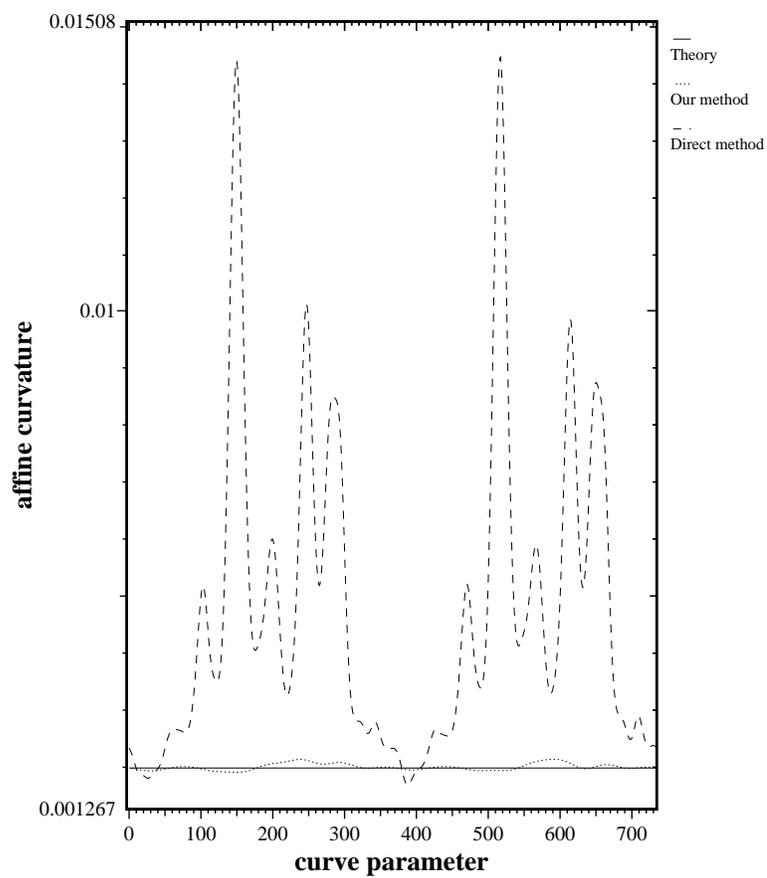
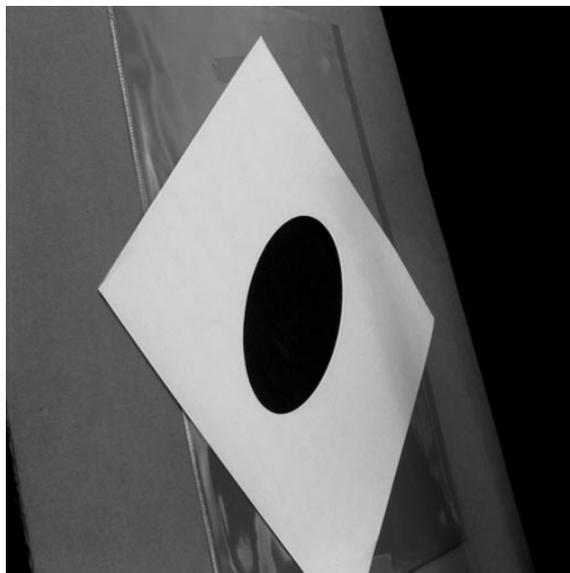


FIG. 6.4 – Une ellipse synthétique et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode.



**Ellipse – real image**

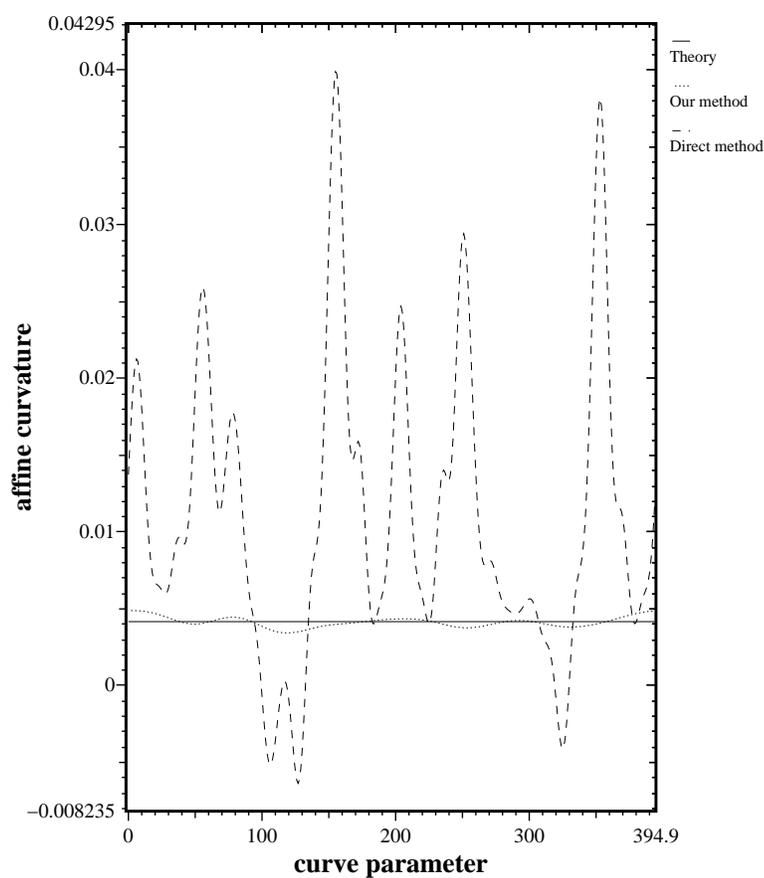
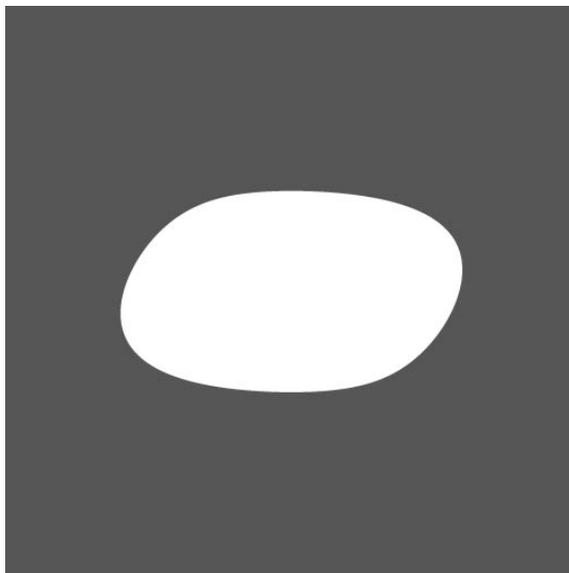


FIG. 6.5 – Une ellipse extraite d'une image réelle et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode.



Curve #1

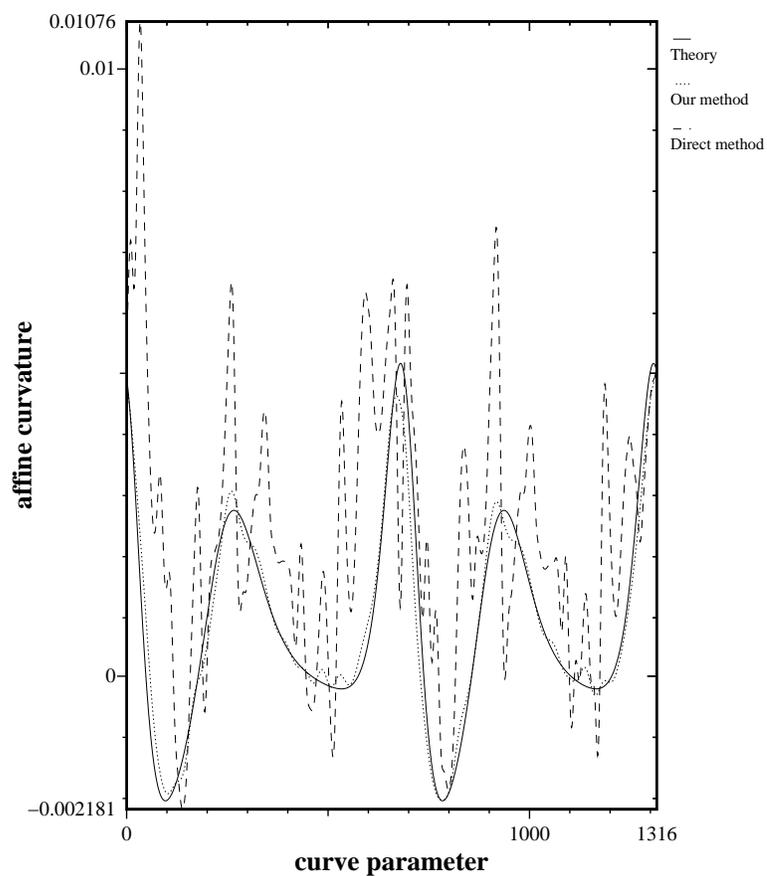


FIG. 6.6 – Une courbes synthétique ( $C = [a \cos(p)(1 + \epsilon \sin(2p)), b \sin(p)(1 + \epsilon \cos(2p))]$ ) et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode

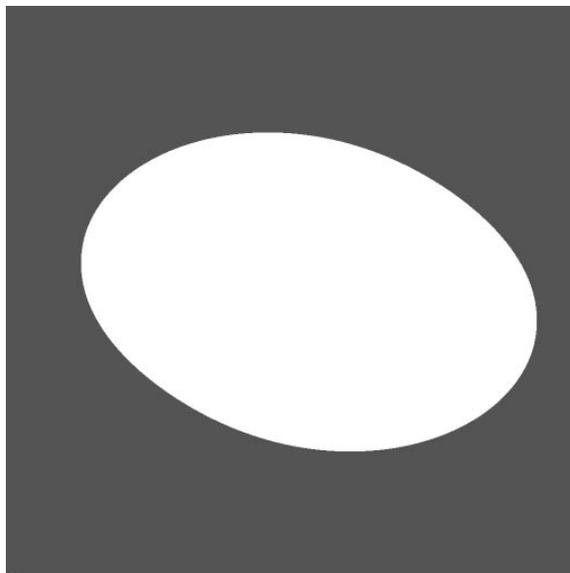
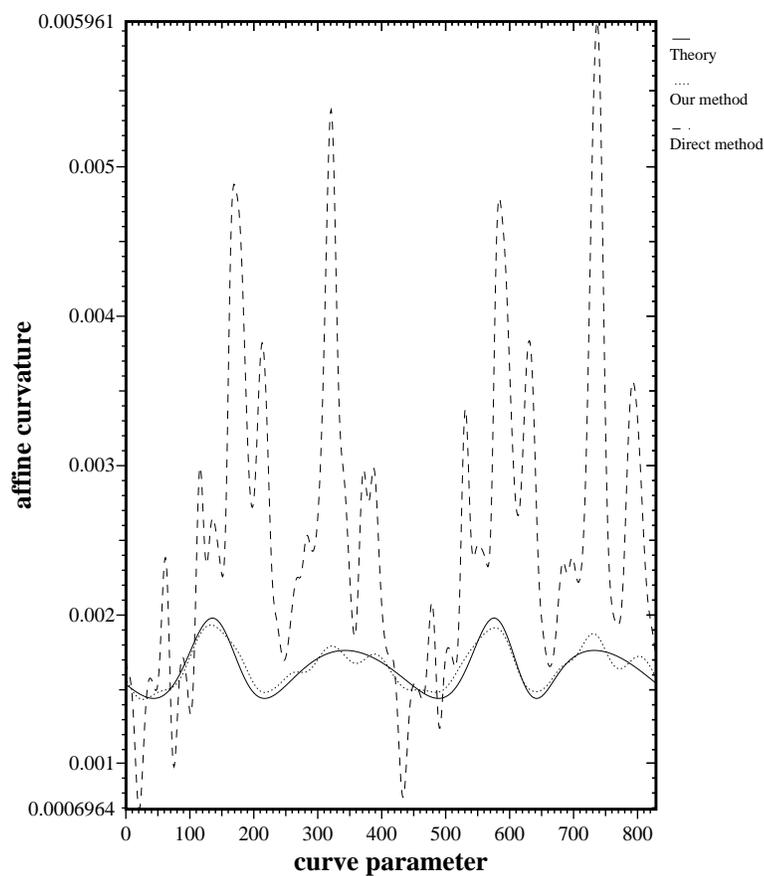
**Curve #2**

FIG. 6.7 – Une courbes synthétique ( $C = [a \cos(p)(1 + \epsilon \sin^2(2p)), b \sin(p)(1 + \epsilon \sin^2(2p))]$ ) et sa courbure affine: la courbure théorique, celle obtenue avec une méthode directe et quatre ordres de dérivation et celle donnée par notre méthode

les détails peuvent être trouvés dans [88] et [43]. Nous reprenons ici les points de la démarche de Papadopoulos [82].

**Définition 6** Les polynômes de Chebyshev constituent une famille de polynômes qui peuvent être indexés par leurs degrés. Le polynôme de Chebyshev de degré  $n$  est noté  $T_n$  et est défini dans l'intervalle  $[-1, 1]$  par la formule :

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$$

En dépit des apparences, cette formule donne bien un polynôme. La famille  $T_n$  peut être définie par les formules de récurrence :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Les polynômes de Chebyshev constituent une base polynomiale orthogonale par rapport au produit scalaire :

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Il y a également une version analogue discrète de ce produit scalaire :

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m/2 & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

où les  $x_k$  ( $k = 1 \dots m$ ) sont les  $m$  zéros du polynôme  $T_m$  ( $x_k = \cos\left(\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{n}\right)$ ). Cette formule conduit au théorème suivant :

**Théorème 8** Soit  $f(x)$  une fonction arbitraire définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . On définit les  $N$  coefficients  $c_i$  ( $i = 0 \dots N-1$ ) par :

$$c_i = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)T_i(x_k)$$

Alors, la formule d'approximation

$$f(x) \simeq -\frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^N c_k T_k(x) \quad (6.15)$$

est exacte pour les  $x$  égaux aux  $N$  zéros de  $T_N(x)$ .

Pour  $N$  fixé, l'équation 6.15 fournit une approximation polynomiale de  $f$ . Une fois que l'on a calculé un tel ensemble de coefficients  $c_i$ , il est facile d'évaluer le polynôme en un point à l'aide de la formule de la récurrence de

Clenshaw[88]. De même, la dérivée de l'approximation peut être obtenue très simplement. Si les  $c'_i$  sont les coefficients de Chebyshev de la dérivée, on a :

$$\begin{aligned} c'_m &= c'_{m-1} = 0 \\ c'_{i-1} &= c'_{i+1} + 2c_i \text{ pour } i = m - 1 \dots 1 \end{aligned}$$

Ce qui rend la méthode d'approximation basée sur le théorème 8 particulièrement attrayante, c'est la possibilité qu'on a de tronquer la somme qui apparaît dans l'équation 6.15 à un ordre  $m \ll N$ . Cette opération donne un polynôme de degré  $m$  qui est très peu différent du polynôme minimax qui approxime les données. Ce polynôme minimax est défini comme le polynôme de degré donné qui minimise l'erreur maximum entre le modèle et les points de données. Cette minimisation de l'erreur maximum est une propriété intéressante car elle ressemble singulièrement à la notion mathématique de convergence uniforme qui présente un grand intérêt lorsqu'il s'agit de dérivation. Il existe un algorithme pour le calcul de ce polynôme minimax (l'algorithme de Remez), mais il est très coûteux. Papadopoulo conserve donc l'approximation rapide basée sur les polynômes de Chebyshev dans la mesure où les résultats obtenus par les deux méthodes sont très similaires. Une autre manière de voir l'opération de troncature est de remarquer qu'il existe une relation très étroite entre les polynômes de Chebyshev et la transformée de Fourier discrète. Garder les coefficients de faible degré (jusqu'à la borne  $m$ ) équivaut à lisser les composantes de haute fréquence.

Ces arguments constituent la raison principale pour laquelle Papadopoulo utilise cette méthode plutôt qu'une autre technique de filtrage standard. Parmi ses autres motivations, qui sont aussi les nôtres, il y a aussi le fait que cette méthode est capable de travailler avec des échantillonnages non uniformes.

En pratique, en chaque point de la courbe, nous calculons un approximation locale basée sur le point en question et sur un certain nombre de points voisins. De là, nous extrayons les dérivées nécessaires.

### 6.4.3 Résultats

Nous avons testé notre méthode sur des images de synthèse de courbes planes ainsi que sur des images réelles de courbes connues. A chaque fois, la courbure affine obtenue est comparée à la courbure théorique et à celle donnée par une méthode directe utilisant les dérivées du quatrième ordre (Plusieurs méthodes ont été testées. La moins imprécise s'est révélée être l'utilisation des polynômes de Chebyshev comme dans [81]).

Le gain d'un ordre de dérivation est évident: voir figures 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7.

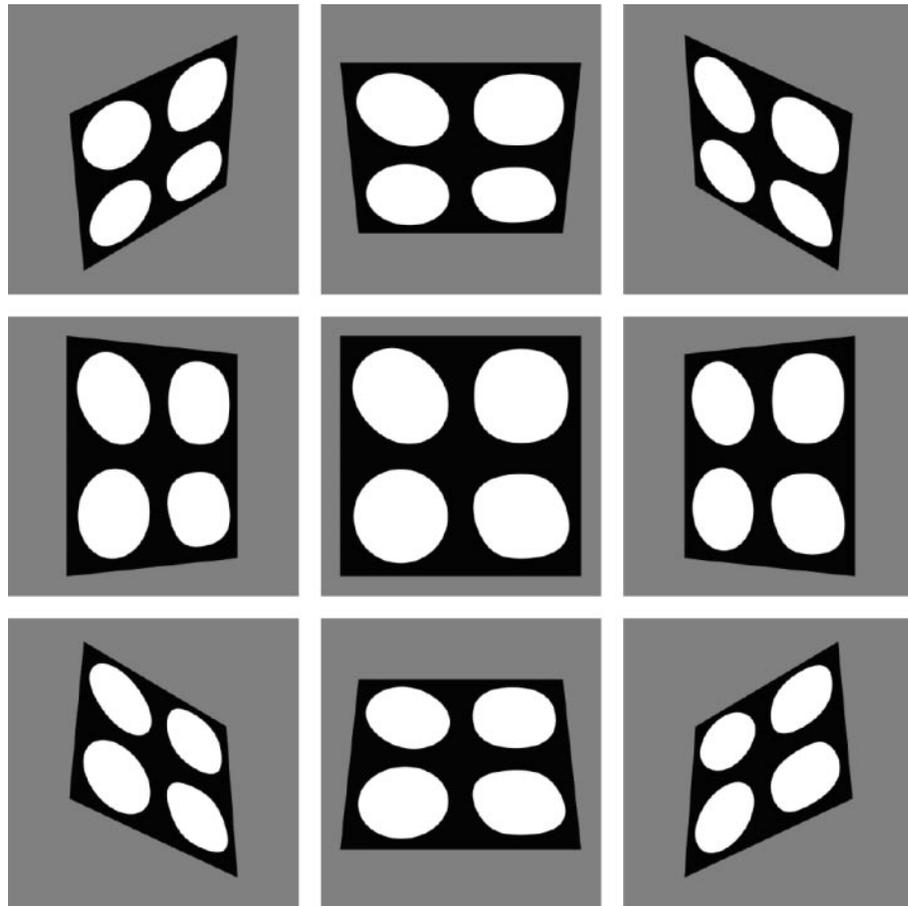


FIG. 6.8 – Quatre courbes planes. Quelques unes des différentes vues utilisées dans notre expérience de reconnaissance. Au centre, la vue de face.

### 6.4.4 Application

Dans cette section, nous étudions une utilisation de la courbure affine à des fins de reconnaissance.

Deux vues différentes d'une courbe plane tridimensionnelle sont reliées par une transformation projective (homographie). Leurs courbures projectives sont donc égales (voir [11]). Toutefois, si les observateurs sont suffisamment loin de la courbe et proches l'un de l'autre, l'homographie peut être approximée par une transformation affine. En conséquence de quoi, les courbures affines sont presque égales. En fait, elles ne sont que presque proportionnelles puisque la courbure n'est qu'un invariant relatif pour le groupe affine propre. Toutefois, ayant remarqué plus haut que le calcul de l'abscisse curviligne affine était possible avec le même ordre de précision, nous pouvons considérer l'invariant absolu obtenu en multipliant la courbure par le carré du périmètre affine  $P_{aff}$ . Nous utilisons donc une courbure affine normalisée  $\tilde{\mu}$ :

$$\tilde{\mu} = P_{aff}^2 \mu \quad \text{avec} \quad P_{aff} = \oint ds$$

Nous avons testé cette idée sur le problème suivant: soient quatre courbes planes fermées et convexes, observées depuis un grand nombre de point de vue différents, pouvons nous utiliser la courbure affine normalisée pour reconnaître ces courbes indépendamment du point de vue?

Un certain nombre de vues des quatre courbes sont générées (voir figure 6.8). Noter que les objets ne sont pas très éloignés et que les points de vue ne sont pas très rapprochés, poussant ainsi à ses limites l'hypothèse d'approximation des homographies par des transformations affines).

Pour une courbe  $\mathcal{C}_i^v$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) sur une vue  $v$ , la courbure affine normalisée  $\tilde{\mu}_i^v$  est calculée en tant que fonction d'une abscisse curviligne affine normalisée  $\tilde{s} = s/P_{aff}$  ( $0 \leq \tilde{s} \leq 1$ ) (figure 6.9). Nous considérons ensuite la distance entre  $\tilde{\mu}_i^v$  et la courbure de chaque courbe  $j$  de la vue de face  $v^f$  en ajustant au mieux les courbures par une translation  $\tilde{s}_0$ :

$$d_{ij}^v = \min_{0 \leq \tilde{s}_0 \leq 1} \left[ \oint (\tilde{\mu}_i^v(\tilde{s} - \tilde{s}_0) - \tilde{\mu}_j^{v^f}(\tilde{s}))^2 d\tilde{s} \right]^{1/2}$$

Soient quatre points  $\{M_j\}$  de  $\mathbf{R}^2$  représentant les quatre courbes (par exemple les quatre coins d'un carré). Le barycentre des  $\{M_j\}$  affectés des coefficients respectifs  $1/d_{ij}^v$  montre de quelle courbe de la vue de face la courbe  $\mathcal{C}_i^v$  est la plus proche selon notre critère de reconnaissance et combien la reconnaissance est fiable.

Cette méthode s'est révélée toujours reconnaître quelle courbe de la vue de face était effectivement observée depuis un autre point de vue (figure 6.10).

## 6.5 Conclusion et remarques

Nous avons montré comment le gain d'un ordre de dérivation dû au recours à l'espace d'échelle affine conduisait à un calcul de la courbure affine suffisamment précis pour effectuer des tâches telles que la reconnaissance des formes. La courbure affine peut aussi être utilisée avantageusement pour aider l'appariement en stéréovision, là où la courbure euclidienne est encore utilisée comme une approximation (médiocre) de la courbure projective (cf [91]).

Nous étudions actuellement l'extension de notre méthode aux courbes non convexes ou non fermées, ce qui ne semble pas poser de problème majeur. La difficulté principale reste entière: comment calculer des invariants projectifs locaux tels que la courbure projective. A partir de l'évolution temporelle de la courbure affine d'une courbe soumise à l'équation de la chaleur projective (que nous ne donnons pas au chapitre 5 mais que le lecteur trouvera dans [31]) et en profitant du gain d'un ordre de dérivation sur le calcul de la courbure affine, nous pourrions envisager un calcul de la courbure projective avec cinq ordres de dérivation au lieu de sept. Mais le défi reste entier: nous ne savons aujourd'hui ni implémenter l'équation de la chaleur projective, ni calculer convenablement la dérivée cinquième d'une quantité géométrique extraite d'une image numérique. L'estimation de dérivées d'ordres supérieur est en effet difficile, même si le problème a déjà été abordé et si un certain nombre de solutions existent déjà. Voir à ce sujet les travaux de Koenderink, Florack et al. (par FFT [41]), Weiss (filtres d'ordre supérieur [113]) et ceux de Deriche (approximation par filtres récursifs [19]).

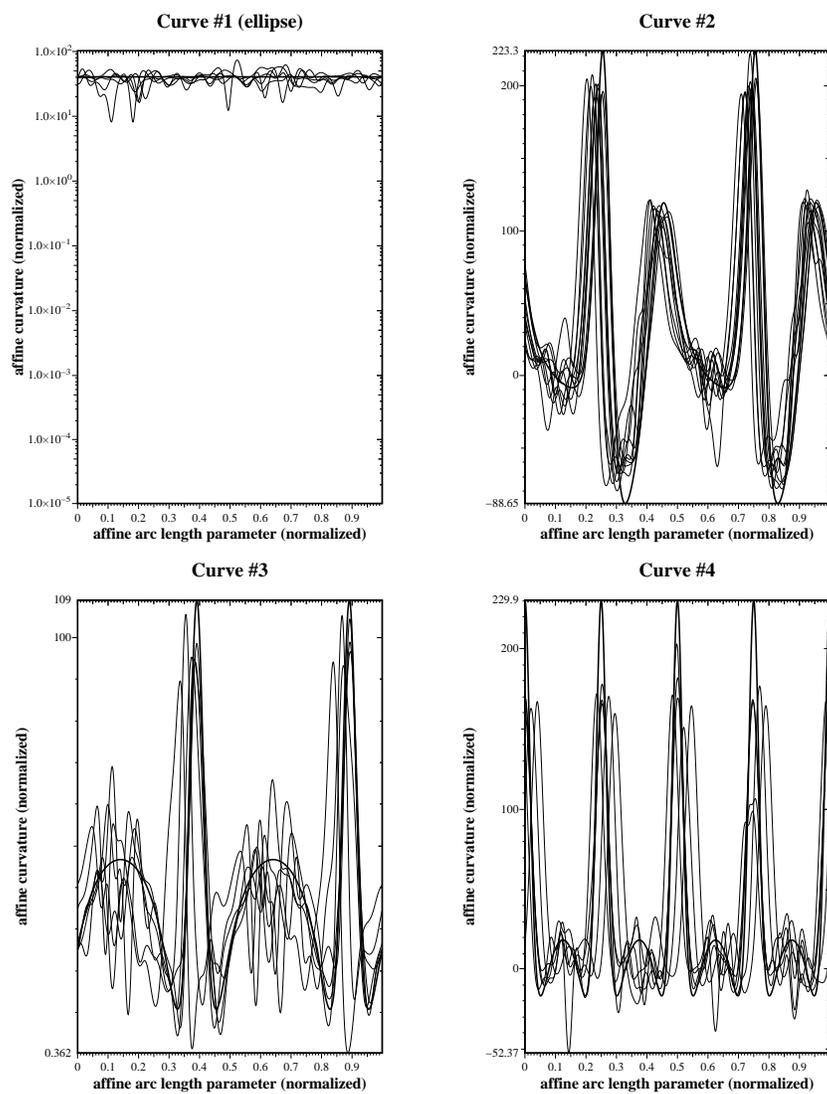


FIG. 6.9 – Les courbures affines obtenues pour les quatre courbes vues sous différents angles. En gras, la courbure de la vue de face.

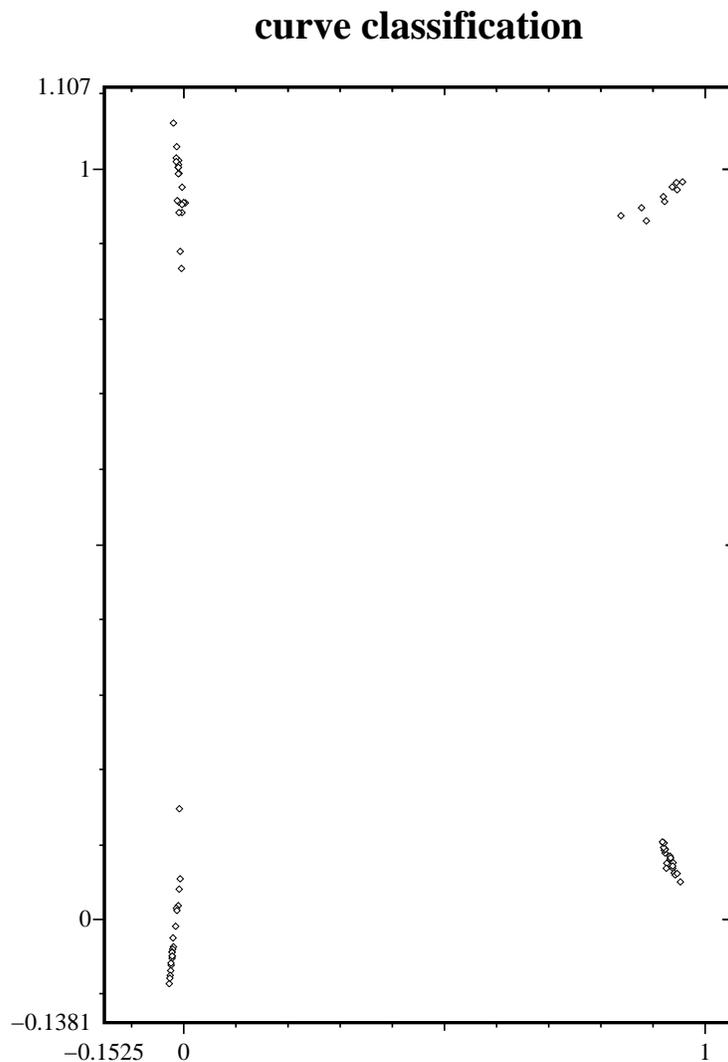


FIG. 6.10 – *Les résultats de la classification. Les points  $[0, 0]$ ,  $[1, 0]$ ,  $[0, 1]$  et  $[1, 1]$  représentent les quatre courbes de la vue de face. Toutes les courbes sont reconnues.*

## Chapitre 7

# Conclusion

Nous arrivons au terme de ces quelques tentatives de l'utilisation en vision par ordinateur des EDP, des évolutions de courbes et de surfaces et des espaces d'échelle. S'il nous fallait retenir quelque chose, ce serait évidemment que l'étude des sujets purs que sont les flots géométriques intrinsèques ne fait que commencer: le cas projectif plan et les cas euclidien, affine et projectif tridimensionnels des courbes et des surfaces sont encore insuffisamment explorés.

Mais il nous faut aussi entrevoir les applications de l'utilisation de la théorie des évolutions de surfaces en stéréovision. Se pencher sur ces applications est très tentant: du fait de l'intérêt des applications en question mais aussi pour confronter notre méthode à des problèmes réels. Les perspectives sont nombreuses...

Parmi les travaux futurs, les voies qui s'ouvrent à nous ou plus simplement les points que nous n'avons pas eu le temps d'éclaircir ou que nous n'avons pas réussi à résoudre, nous citerons donc:

- A propos de la courbure affine:
  - Étendre la méthode aux courbes non fermées.
  - Trouver un moyen direct de calculer la courbure affine d'une courbe plane, sans avoir à procéder en plusieurs phases.
- A propos des évolutions invariantes projective plane et euclidienne, affine ou projective des courbes gauches:
  - Comment les simuler numériquement? Comment surmonter le trop grand ordre de dérivation dans le cas projectif plan et les problèmes de la codimension 2 pour les courbes gauches?
  - Quid de l'existence ou de l'unicité des solutions?
  - Quelles sont leurs propriétés? Disparition des courbes fermées? Lissage?
  - Définissent-elles un espace d'échelle? Quelle serait d'ailleurs l'axiomatique d'un espace d'échelle pour une courbe gauche?

- A propos de la stéréovision par évolution de surface:
  - Comment accélérer le processus de reconstruction? Quelles sont les points de la méthode actuelle qui sont indispensables et ceux qui sont superflus?
  - Que peut donner une implémentation basée sur une approche pyramidale raffinant la précision en espace progressivement et peut être même de façon adaptative aux abords des objets? Outre la rapidité, une telle approche devrait supprimer d'éventuels problèmes d'optima locaux dans le cas d'images dégradées ou d'objets peu texturés.
  - Se confronter davantage au réel.
  - Que peut-on encore dire quand les caméras ne sont pas calibrées? Ce problème essentiel si l'on veut pouvoir travailler sur des images quelconques.

Pour finir sur une considération méthodologique, nous pensons que c'est en travaillant dans cadre mathématiques ou conceptuels aussi bien défini que ceux du calcul variationnel ou de la théorie des EDP, dans lesquels existent les outils nécessaires à la preuve de la correction des algorithmes, que nous serons capables de hisser la vision par ordinateur à un niveau de prédictibilité tel qu'elle pourra être utilisée de façon fiable dans des applications réelles et interfacée avec d'autre composants au sein de systèmes complexes.

Enfin, il n'est pas possible de terminer cette courte conclusion sans souligner le plaisir que m'ont apporté des recherches dans ce domaine, l'enthousiasme que j'ai eu à les mener et combien est passionnant le pari consistant à essayer d'imiter, même partiellement, la vision animale, phénomène non artificiel s'il en est!

## Annexe A

# Stéréovision: preuves et calculs

### A.1 Preuve des lemmes 2 et 3

Nous prouvons d'abord le lemme 2:

**Lemme 2** *Les dérivées partielles  $\langle I_1, I_2 \rangle_f$  et  $|I_k|_f$   $k = 1, 2$  sont données par les formules:*

$$\langle I_1, I_2 \rangle_f = \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_1, I_2 \rangle + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \langle I_1, \nabla I_2 \rangle$$

$$|I_k| \cdot |I_k|_f = \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_k, I_k \rangle \quad k = 1, 2$$

**Preuve:**

A partir de la définition, nous pouvons voir que les dérivées de  $\langle I_1, I_2 \rangle$  sont données par:

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_f &= \int^* (\nabla I_1(m_1 + m) \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} - \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial f}(m_1))(I_2(m_2 + m) - \bar{I}_2(m_2)) dm \\ &+ \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1))(\nabla I_2(m_2 + m) \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} - \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial f}(m_2)) dm, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

tandis que la dérivée de  $|I_k|$   $k = 1, 2$  peut être obtenue facilement à partir de celle de  $|I_k|^2$ :

$$\begin{aligned} |I_k| \cdot |I_k|_f &= \int^* (\nabla I_k(m_k + m) \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial f} - \frac{\partial \bar{I}_k}{\partial f}(m_k)) \\ &(I_k(m_k + m) - \bar{I}_k(m_k)) dm \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées  $\frac{\partial \bar{I}_k}{\partial f}$   $k = 1, 2$  puisque qu'elles s'annulent sous les intégrales. Par exemple:

$$\begin{aligned} \int^* \frac{\partial \bar{I}_k}{\partial f}(m_k)(I_k(m_k + m) - \bar{I}_k(m_k))dm \\ = \frac{\partial \bar{I}_k}{\partial f}(m_k) \int^* (I_k(m_k + m) - \bar{I}_k(m_k))dm = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière remarque nous permet de réécrire (A.1) et (A.2) de façon plus simple:

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_f = \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} \cdot \int^* \nabla I_1(m_1 + m)(I_2(m_2 + m) - \bar{I}_2(m_2))dm \\ + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1))\nabla I_2(m_2 + m)dm \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} |I_k| \cdot |I_k|_f = \frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial f} \cdot \int^* \nabla I_k(m_k + m) \\ (I_k(m_k + m) - \bar{I}_k(m_k))dm \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ce sont les expressions du lemme 2.

□

Nous prouvons maintenant le lemme 3:

**Lemme 3** *Les dérivées partielles  $\langle I_1, I_2 \rangle_f$  and  $|I_2|_f$  sont données par les formules suivantes:*

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_f = \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_1, I_2 \rangle + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \langle I_1, \nabla I_2 \rangle \\ + \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1))\nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}m)^T \mathbf{A}_f \mathbf{m} dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_2| \cdot |I_2|_f = \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} \cdot \langle \nabla I_2, I_2 \rangle \\ + \int^* (I_2(m_2 + \mathbf{A}m) - \bar{I}_2(m_2))\nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}m)^T \mathbf{A}_f \mathbf{m} dm \end{aligned}$$

**Preuve:**

Tout comme pour le lemme 2, il n'est pas nécessaire ce calculer les dérivées de  $\bar{I}_k$ ,  $k = 1, 2$  par rapport à  $f$ .

Un calcul similaire à celui qui a conduit à (A.3) donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle I_1, I_2 \rangle}{\partial f} &= \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial f} \cdot \int^* \nabla I_1(m_1 + m)(I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m}) - \bar{I}_2(m_2)) dm \\ &\quad + \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1)) \\ &\quad \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m})^T \left( \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial f} \mathbf{m} \right) dm \end{aligned}$$

d'où on obtient immédiatement (3.14). Nous avons aussi besoin de:

$$| I_2 | \cdot | I_2 |_f = \int^* (I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m}) - \bar{I}_2(m_2)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m})^T \left( \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial f} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial f} \mathbf{m} \right) dm$$

qui devient (3.15) où nous avons écrit:

$$\langle \nabla I_2, I_2 \rangle = \int^* \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m})(I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m}) - \bar{I}_2(m_2)) dm$$

□

## A.2 Preuve du théorème 5

**Théorème 5** *Sous les condition de régularité faites pour la fonction  $\Phi$  et pour la surface  $S$ , la composante des équations d'Euler-Lagrange du critère (3.23) le long de la normale à la surface est le produit de  $h$  par une quantité intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de la paramétrisation  $(v, w)$ . En outre, cette composante est égale à:*

$$h(\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{N}} - 2H(\Phi - \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{N}}) + \text{Trace}((\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}})_{T_S} + d\mathbf{N} \circ (\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}})_{T_S}))$$

où toutes les quantité sont évaluées au point  $\mathbf{S}$  de la surface, de normale  $\mathbf{N}$ .  $T_S$  est le plan tangent à la surface au point  $\mathbf{S}$ .  $d\mathbf{N}$  est la différentielle de la carte de Gauss de la surface,  $H$  sa courbure moyenne,  $\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$  et  $\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  les dérivées d'ordre deux de  $\Phi$ ,  $(\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}})_{T_S}$  et  $(\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}})_{T_S}$  leur restrictions au plan tangent  $T_S$ .

**Preuve:**

Sans perte de généralité, nous supposons pour simplifier que la paramétrisation de  $S$  est orthogonale, c'est-à-dire que  $\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_w = 0$ .

Écrivons  $\psi(\mathbf{S}, \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_w)$  pour  $h(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_w)\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{N})$  avec

$$\begin{aligned} h(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_w) &= | \mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w | \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w}{h} \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange du critère d'erreur (3.23) peuvent s'écrire

$$\psi_{\mathbf{S}} - \frac{d}{dv}\psi_{\mathbf{S}_v} - \frac{d}{dw}\psi_{\mathbf{S}_w}$$

Puisque  $h$  ne dépend pas de  $\mathbf{S}$ , nous avons  $\psi_{\mathbf{S}} = h\Phi_{\mathbf{S}}$  et

$$\psi_{\mathbf{S}_v} = \Phi h_{\mathbf{S}_v} + h\Phi_{\mathbf{Y}}\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v}$$

ainsi qu'une expression similaire pour  $\psi_{\mathbf{S}_w}$ . Nous prouvons d'abord le lemme intermédiaire suivant:

**Lemme 31** *Les dérivées de  $h$  par rapport à  $\mathbf{S}_v$  et à  $\mathbf{S}_w$  sont données par:*

$$h_{\mathbf{S}_v} = \frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h}\mathbf{S}_v^T \quad h_{\mathbf{S}_w} = \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h}\mathbf{S}_w^T \quad (\text{A.5})$$

**Preuve :** Nous utilisons pour cela le fait que  $h^2 = |\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w|^2$ . Il s'en suit que

$$hh_{\mathbf{S}_v} = (\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)^T (\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)_{\mathbf{S}_v}$$

Il est par ailleurs aisé de vérifier que  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_{\mathbf{x}} = -[\mathbf{y}]_{\times}$  par tous vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Il en découle le résultat suivant:

$$hh_{\mathbf{S}_v} = -(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)^T [\mathbf{S}_w]_{\times}$$

Or, la matrice  $[\mathbf{S}_w]_{\times}$  est antisymétrique, et donc  $-[\mathbf{S}_w]_{\times} = [\mathbf{S}_w]_{\times}^T$ . D'où il vient que:

$$hh_{\mathbf{S}_v} = [[\mathbf{S}_w]_{\times} (\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)]^T$$

Le vecteur entre crochets est:

$$\mathbf{S}_w \times (\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w) = |\mathbf{S}_w|^2 \mathbf{S}_v - (\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_w) \mathbf{S}_w$$

Le résultat final découle de l'hypothèse que la paramétrisation est orthogonale.  $\square$

Attaquons nous maintenant au calcul de  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v}$  et de  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_w}$ . Nous avons le lemme suivant:

**Lemme 32** *Les dérivées de  $\mathbf{N}$  par rapport à  $\mathbf{S}_v$  et à  $\mathbf{S}_w$  sont données par:*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v} = -\frac{1}{h}h_{\mathbf{S}_v}^T \mathbf{N}^N \quad \mathbf{N}_{\mathbf{S}_w} = -\frac{1}{h}h_{\mathbf{S}_w}^T \mathbf{N}^T \quad (\text{A.6})$$

**Preuve :** Par définition, nous avons

$$\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v} = \frac{1}{h}(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)_{\mathbf{S}_v} - \frac{1}{h^2}(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)h_{\mathbf{S}_v}$$

En remplaçant dans cette expression  $(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)_{\mathbf{S}_v}$  et  $h_{\mathbf{S}_v}$  par leurs valeurs, nous obtenons

$$\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v} = -\frac{1}{h}[\mathbf{S}_w]_{\times} - \frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h^3}(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)\mathbf{S}_v^T$$

et de manière similaire pour  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_w}$  :

$$\mathbf{N}_{\mathbf{S}_w} = \frac{1}{h}[\mathbf{S}_v]_{\times} - \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h^3}(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)\mathbf{S}_w^T$$

Par un jeu de réécriture, nous avons:

$$(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)\mathbf{S}_v^T = -([\mathbf{S}_w]_{\times}\mathbf{S}_v)\mathbf{S}_v^T = -[\mathbf{S}_w]_{\times}(\mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^T)$$

De même:

$$(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)\mathbf{S}_w^T = [\mathbf{S}_v]_{\times}(\mathbf{S}_w\mathbf{S}_w^T)$$

En remplaçant dans  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v}$  et dans  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_w}$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v} &= -\frac{1}{h}[\mathbf{S}_w]_{\times}\left(\mathbf{I} - \frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h^2}\mathbf{S}_w\mathbf{S}_w^T\right) \\ \mathbf{N}_{\mathbf{S}_w} &= \frac{1}{h}[\mathbf{S}_v]_{\times}\left(\mathbf{I} - \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h^2}\mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^T\right)\end{aligned}$$

A partir du fait que  $h^2 = |\mathbf{S}_v|^2 + |\mathbf{S}_w|^2$ , le terme  $\mathbf{I} - \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h^2}\mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^T$  peut s'écrire comme

$$-\frac{1}{|\mathbf{S}_v|^2}(\mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^T - |\mathbf{S}_v|^2\mathbf{I})$$

Mais  $\mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^T - |\mathbf{S}_v|^2\mathbf{I}$  est égal à  $[\mathbf{S}_v]_{\times}^2$ , d'où la nouvelle expression pour  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v}$  :

$$\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v} = \frac{1}{h|\mathbf{S}_v|^2}[\mathbf{S}_w]_{\times}[\mathbf{S}_v]_{\times}^2$$

Comme la paramétrisation est orthogonale, nous pouvons trouver une forme plus simple pour  $[\mathbf{S}_w]_{\times}[\mathbf{S}_v]_{\times}^2$ . En effet, nous avons:

$$\mathbf{S}_w \times (\mathbf{S}_v \times (\mathbf{S}_v \times \mathbf{x})) = -(\mathbf{x}, \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_w)\mathbf{S}_v$$

pour tout vecteur  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Et donc

$$[\mathbf{S}_w]_{\times}[\mathbf{S}_v]_{\times}^2 = -\mathbf{S}_v(\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w)^T$$

En combinant ceci avec les équations (A.5), le résultat tombe pour  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_v}$  et des calculs similaires aboutissent au résultat pour  $\mathbf{N}_{\mathbf{S}_w}$ .  $\square$

Revenons à notre but initial: nous avons maintenant découvert que

$$\psi_{\mathbf{S}_v} = \Phi h_{\mathbf{S}_v} - \Phi_{\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_v}^T \mathbf{N}^T$$

et

$$\psi_{\mathbf{S}_w} = \Phi h_{\mathbf{S}_w} - \Phi_{\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_w}^T \mathbf{N}^T$$

expressions dans lesquelles nous encourageons le lecteur à s'assurer qu'il est d'accord avec les dimensions des différentes matrices qui apparaissent dans ces deux expressions.

Nous devons désormais calculer  $\frac{d}{dv}\psi_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}\psi_{\mathbf{S}_w}$ . En appliquant la règle de composition des dérivées, nous obtenons les termes suivants:

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w}\right) \\
& + \Phi_X(\mathbf{S}_v h_{\mathbf{S}_v} + \mathbf{S}_w h_{\mathbf{S}_w}) \\
& + \Phi_Y[\mathbf{N}_v h_{\mathbf{S}_v} + \mathbf{N}_w h_{\mathbf{S}_w} - h_{\mathbf{S}_v}^T \mathbf{N}_v^T - h_{\mathbf{S}_w}^T \mathbf{N}_w^T - \left(\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w}\right)^T \mathbf{N}^T] \\
& - (\mathbf{S}_v^T \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_v}^T + \mathbf{S}_w^T \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_w}^T + \mathbf{N}_v^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_v}^T + \mathbf{N}_w^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_w}^T) \mathbf{N}^T
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Souvenons nous que nous ne sommes intéressés que par les composantes termes suivant la normale  $\mathbf{N}$ . Cela nous permet d'éliminer un certain nombre de termes, grâce au lemme suivant:

**Lemme 33** *Dans l'équation (A.7), le terme suivant appartient au plan tangent et pourra donc être éliminé:*

$$\Phi_X(\mathbf{S}_v h_{\mathbf{S}_v} + \mathbf{S}_w h_{\mathbf{S}_w}) + \Phi_Y[\mathbf{N}_v h_{\mathbf{S}_v} + \mathbf{N}_w h_{\mathbf{S}_w} - h_{\mathbf{S}_v}^T \mathbf{N}_v^T - h_{\mathbf{S}_w}^T \mathbf{N}_w^T]$$

**Preuve :** En effet,  $\Phi_Y \mathbf{N}_v$  et  $\Phi_X \mathbf{S}_v$  (resp.  $\Phi_Y \mathbf{N}_w$  et  $\Phi_X \mathbf{S}_w$ ) sont des scalaires et  $h_{\mathbf{S}_v}$  (resp.  $h_{\mathbf{S}_w}$ ) est dans le plan tangent  $S$  d'après (A.5). De manière similaire  $\Phi_Y h_{\mathbf{S}_v}^T$  (resp.  $\Phi_Y h_{\mathbf{S}_w}^T$ ) est un scalaire et  $\mathbf{N}_v$  (resp.  $\mathbf{N}_w$ ) est la dérivée du vecteur unitaire  $\mathbf{N}$  et est donc orthogonal à  $\mathbf{N}$ , c'est-à-dire dans le plan tangent.  $\square$

Nous étudions maintenant le vecteur  $(\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w})^T$  et montrons qu'il est dirigé le long de la normale  $\mathbf{N}$  à la surface.

**Lemme 34** *Le vecteur  $(\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w})^T$  est dans la direction de la normale  $\mathbf{N}$  à la surface. Sa composante dans cette direction est égale à  $2hH$ , où  $H$  est la courbure moyenne de la surface.*

**Preuve :** Calculons d'abord la composante normale. D'après les équations (A.5), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v}^T &= \frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h} \mathbf{S}_{vv} + \frac{d}{dv} \left( \frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h} \right) \mathbf{S}_v \\
\frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w}^T &= \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h} \mathbf{S}_{ww} + \frac{d}{dw} \left( \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h} \right) \mathbf{S}_w
\end{aligned}$$

En en prenant le produit scalaire avec la normale  $\mathbf{N}$ , et en utilisant le fait que  $h^2 = |\mathbf{S}_v|^2 |\mathbf{S}_w|^2$  nous obtenons:

$$\left(\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w}\right)^T \cdot \mathbf{N} = h \left( \frac{\mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{S}_v|^2} + \frac{\mathbf{S}_{ww} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{S}_w|^2} \right) = 2hH$$

comme montré en annexe A.4.

Considérons la composante de notre vecteur  $(\frac{d}{dv}h_{\mathbf{S}_v} + \frac{d}{dw}h_{\mathbf{S}_w})^T$  dans le plan tangent à la surface. Il est la somme de quatre contributions. Les termes  $\frac{d}{dv}(\frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h})\mathbf{S}_v$ ,  $\frac{d}{dw}(\frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h})\mathbf{S}_w$  et les projections de  $\frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h}\mathbf{S}_{vv}$  et de  $\frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h}\mathbf{S}_{ww}$  sur le plan tangent, qui sont données par, étant donné que  $\mathbf{S}_v$  et  $\mathbf{S}_w$  sont orthogonaux:

$$\frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h} \frac{\mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_v|^2} \mathbf{S}_v + \frac{|\mathbf{S}_w|^2}{h} \frac{\mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{S}_w}{|\mathbf{S}_w|^2} \mathbf{S}_w,$$

et

$$\frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h} \frac{\mathbf{S}_{ww} \cdot \mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_v|^2} \mathbf{S}_v + \frac{|\mathbf{S}_v|^2}{h} \frac{\mathbf{S}_{ww} \cdot \mathbf{S}_w}{|\mathbf{S}_w|^2} \mathbf{S}_w$$

Utilisons les notations de l'annexe (A.4) et posons  $E = |\mathbf{S}_v|^2$  et  $G = |\mathbf{S}_w|^2$ . La composante suivant  $\mathbf{S}_v$  vaut:

$$\left(\left(\frac{G}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right)_v + \frac{G}{E\sqrt{EG}}(\mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{S}_v) + \frac{1}{\sqrt{EG}}(\mathbf{S}_{ww} \cdot \mathbf{S}_v)$$

Or, nous avons  $\mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{S}_v = \frac{1}{2}E_v$  et, parce que  $\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_w = 0$ ,  $\mathbf{S}_{ww} \cdot \mathbf{S}_v = -\mathbf{S}_{vw} \cdot \mathbf{S}_w = -\frac{1}{2}G_v$ . En remplaçant dans l'expression précédente, nous trouvons:

$$\frac{1}{2} \frac{G_v E - G E_v}{E^2} \left(\frac{G}{E}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{G E_v}{E\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \frac{G_v}{\sqrt{EG}} = 0$$

Ceci peut aussi être vérifié pour la composante suivant  $\mathbf{S}_w$ .  $\square$

Considérons maintenant le terme contenant  $\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$  dans l'équation (A.7). Nous prouvons le lemme suivant:

**Lemme 35** *Le terme  $\mathbf{S}_v^T \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_v}^T + \mathbf{S}_w^T \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_w}^T$  est égal au produit de  $h$  par la trace de la restriction à  $T_S$  de la carte linéaire  $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par  $\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ .*

**Preuve :** Remplaçons simplement  $h_{\mathbf{S}_v}$  et  $h_{\mathbf{S}_w}$  par leurs valeurs (A.5). Nous obtenons:

$$\mathbf{S}_v^T \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_v}^T + \mathbf{S}_w^T \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_w}^T = h(\mathbf{t}_1 \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_2)$$

En introduisant les deux vecteurs unitaires  $\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_v|}$  and  $\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{S}_w}{|\mathbf{S}_w|}$  qui forment une base orthonormée de  $T_S$ , nous obtenons le résultat.  $\square$

Regardons ensuite le terme contenant  $\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  dans l'équation (A.7). Nous prouvons la proposition suivante:

**Proposition 1** *L'expression  $\mathbf{N}_v^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_v}^T + \mathbf{N}_w^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} h_{\mathbf{S}_w}^T$  est égale au produit de  $h$  par la trace du produit de composition de la différentielle  $d\mathbf{N}$  de la carte de Gauss de la surface  $S$  par la restriction au plan tangent  $T_S$  à la surface de l'endomorphisme défini par le Hessien  $\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  de  $\Phi$ .*

**Preuve :** Utilisant à nouveau les notations de l'annexe A.4, nous exprimons  $\mathbf{N}_v$  et  $\mathbf{N}_w$ , qui sont dans le plan tangent à  $S$ , comme combinaisons linéaires de  $\mathbf{S}_v$  et  $\mathbf{S}_w$ :

$$\begin{aligned} -\mathbf{N}_v &= \frac{e}{|\mathbf{S}_v|^2} \mathbf{S}_v + \frac{f}{|\mathbf{S}_w|^2} \mathbf{S}_w \\ -\mathbf{N}_w &= \frac{f}{|\mathbf{S}_v|^2} \mathbf{S}_v + \frac{g}{|\mathbf{S}_w|^2} \mathbf{S}_w \end{aligned}$$

En remplaçant  $\mathbf{N}_v$  et  $\mathbf{N}_w$  par ces valeurs et  $h_{\mathbf{S}_v}$  et  $h_{\mathbf{S}_w}$  par leur valeur dans les équations (A.5), et en prenant à nouveau en compte le fait que  $h^2 = |\mathbf{S}_v|^2 |\mathbf{S}_w|^2$ , nous obtenons l'expression suivante:

$$-h \left[ \frac{e}{|\mathbf{S}_v|^4} \mathbf{S}_v^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{S}_v + \frac{2f}{|\mathbf{S}_v|^2 |\mathbf{S}_w|^2} \mathbf{S}_w^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{S}_v + \frac{g}{|\mathbf{S}_w|^4} \mathbf{S}_w^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{S}_w \right]$$

En utilisant les vecteurs  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  définis dans le lemme précédent, nous obtenons le terme entre les crochets:

$$\frac{e}{E} \mathbf{t}_1^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_1 + \frac{2f}{h} \mathbf{t}_2^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_1 + \frac{g}{G} \mathbf{t}_2^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_2$$

En considérant les deux matrices symétriques

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{h} \\ \frac{f}{h} & \frac{g}{G} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_1^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2^T \Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \mathbf{t}_2 \end{bmatrix},$$

nous vérifions que notre expression est la trace du produit  $\mathbf{B}\mathbf{C}$ . La matrice  $\mathbf{C}$  représente la restriction de l'endomorphisme défini par le Hessien  $\Phi_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$  de  $\Phi$  au plan tangent à la surface exprimé dans la base orthonormée  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  de ce plan. La matrice  $\mathbf{B}$  représente la différentielle de la carte de Gauss de la surface  $S$  exprimée dans cette même base.  $\square$

Si nous réunissons les résultats des lemmes 33, 34 et de la proposition 1, nous obtenons la preuve du théorème 5.

### A.3 Calcul de dérivées $\Phi_S, \Phi_N, \Phi_{SN}$ et $\Phi_{NN}$

Nous calculons dans cette annexe les ingrédients nécessaires à l'application du théorème 5 dans notre cas. Comme il l'est montré dans la section 3.4, il suffit de se restreindre au calcul d'un des  $\Phi_{ij}$ , mettons  $\Phi_{12}$  que nous appellerons  $\Phi$ . C'est une fonction du point  $\mathbf{S} = (S^1, S^2, S^3)$  de la surface par l'intermédiaire des pixels correspondants  $m_1$  et  $m_2$  et de la matrice  $\mathbf{A}$  induite par le plan tangent au point  $S$ , et de la normale unitaire  $\mathbf{N}$  à la surface en ce point, par l'intermédiaire de la matrice  $\mathbf{A}$ . En effet, l'équation

(3.9) tient toujours et les équations (3.17) définissant  $\mathbf{K}$  peuvent s'écrire en termes de  $\mathbf{S}$  et de  $\mathbf{N}$ :

$$\begin{aligned} d &= -\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{N} &= (N_1, N_2, N_3) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Les dérivées de  $\mathbf{K}$  par rapport à  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{N}$  sont alors relativement simples:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{S^i} &= d_{S^i} \mathbf{R}^T = -N_i \mathbf{R}^T \\ \mathbf{K}_{N_i} &= d_{N_i} \mathbf{R}^T - \mathbf{T} \mathbf{N}_{N_i}^T = -S^i \mathbf{R}^T - [\mathbf{0} \ \mathbf{T} \ \mathbf{0}] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En utilisant l'expression (3.19) donnant l'approximation affine  $\mathbf{A}$  de l'homographie  $K$ , nous pouvons calculer  $\mathbf{A}_{\mathbf{S}}$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{N}}$  et  $\mathbf{A}_{\mathbf{NN}}$ , quantités nécessaires au calcul de la relation (3.24). Ces entités sont des tenseurs dont nous n'avons en fait pas besoin pour des raisons qui deviendront claires par la suite.

Nous présentons les résultats sous la forme d'une série de lemmes.

**Lemme 36** *Le vecteur ligne  $\Phi_{\mathbf{S}}$  se calcule à partir des quantités suivantes:*

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_{\mathbf{S}} &= \langle \nabla I_1, I_2 \rangle^T \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial \mathbf{S}} + \langle I_1, \nabla I_2 \rangle^T \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial \mathbf{S}} \\ &\quad + \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m})^T (\mathbf{A}\mathbf{m})_{\mathbf{S}} dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_2| \cdot |I_2|_{\mathbf{S}} &= \langle \nabla I_2, I_2 \rangle \frac{\partial \mathbf{m}_2^T}{\partial \mathbf{S}} \\ &\quad + \int^* (I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m}) - \bar{I}_2(m_2)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m})^T (\mathbf{A}\mathbf{m})_{\mathbf{S}} dm \end{aligned}$$

**Preuve :** Il s'agit juste d'appliquer la règle de composition des dérivées aux définitions de  $\langle I_1, I_2 \rangle$  et de  $|I_k|$ ,  $k = 1, 2$ . Notez que  $\frac{\partial \mathbf{m}_k}{\partial \mathbf{S}}$ ,  $k = 1, 2$ , est une matrice  $2 \times 3$  et que  $(\mathbf{A}\mathbf{m})_{\mathbf{S}}$  est la matrice  $2 \times 3$   $[\mathbf{A}_{S^1} \mathbf{m}, \mathbf{A}_{S^2} \mathbf{m}, \mathbf{A}_{S^3} \mathbf{m}]$ .  $\square$

Un résultat similaire est obtenu pour  $\Phi_{\mathbf{N}}$ , ainsi que nous l'écrivons dans le lemme suivant:

**Lemme 37** *Le vecteur ligne  $\Phi_{\mathbf{N}}$  se calcule à partir de la quantité suivante:*

$$\langle I_1, I_2 \rangle_{\mathbf{N}} = \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1)) \nabla I_2(m_2 + \mathbf{A}\mathbf{m})^T (\mathbf{A}\mathbf{m})_{\mathbf{N}} dm$$

**Preuve :** Ici encore, il s'agit simplement d'appliquer la règle de composition de dérivées. Notez aussi que  $(\mathbf{A}\mathbf{m})_{\mathbf{N}}$  est le vecteur  $2 \times 3$   $[\mathbf{A}_{N_1} \mathbf{m}, \mathbf{A}_{N_2} \mathbf{m}, \mathbf{A}_{N_3} \mathbf{m}]$ .  $\square$

Pour la matrice  $\Phi_{\mathbf{SN}}$  ou  $\Phi_{\mathbf{XY}}$ , nous avons le lemme suivant:

**Lemme 38** *La matrice  $\Phi_{\mathbf{SN}}$  se calcule à partir des quantités suivantes:*

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_{\mathbf{SN}} &= \int^* \frac{\partial \mathbf{m}_1^T}{\partial \mathbf{S}} \nabla I_1(m_1 + m) \nabla I_2^T(m_2 + \mathbf{Am})(\mathbf{Am})_{\mathbf{N}} dm \\ &\quad - \frac{\partial \bar{I}_1^T}{\partial \mathbf{S}}(m_1) \int^* \nabla I_2^T(m_2 + \mathbf{Am})(\mathbf{Am})_{\mathbf{N}} dm \\ &\quad + \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1)) \\ &\quad [\mathbf{Am}]_{\mathbf{S}}^T \mathbf{H}_{I_2}(\mathbf{Am})_{\mathbf{N}} + \nabla I_2^T \mathbf{A}_{\mathbf{SN}} \mathbf{m}] dm \\ \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{S}} &= \int^* \nabla I_1^T(m_1 + m') dm' \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial \mathbf{S}} \end{aligned}$$

**Preuve :** Idem. La quantité  $(\mathbf{Am})_{\mathbf{S}}^T \mathbf{H}_{I_2}(\mathbf{Am})_{\mathbf{N}}$  est la matrice  $3 \times 3$  égale à  $[\mathbf{m}^T \mathbf{A}_{S_i}^T \mathbf{H}_{I_2} \mathbf{A}_{N_j} \mathbf{m}]$  et la quantité  $\nabla I_2^T \mathbf{A}_{\mathbf{SN}} \mathbf{m}$ , qui est une matrice  $3 \times 3$ , vaut  $[\nabla I_2^T \mathbf{A}_{S_i N_j} \mathbf{m}]$ . Notez bien que  $\nabla I_2$  et  $\mathbf{H}_{I_2}$  sont évalués au pixel  $m_2 + \mathbf{Am}$ .  $\square$

Enfin, pour le Hessien  $\Phi_{\mathbf{NN}}$  ou  $\Phi_{\mathbf{YY}}$ , nous obtenons le résultat suivant:

**Lemme 39** *La matrice symétrique  $3 \times 3$   $\Phi_{\mathbf{YY}}$  peut être calculée à partir l'expression suivante:*

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_{\mathbf{NN}} &= \int^* (I_1(m_1 + m) - \bar{I}_1(m_1)) \\ &\quad [(\mathbf{Am})_{\mathbf{N}}^T \mathbf{H}_{I_2}(\mathbf{Am})_{\mathbf{N}} + \nabla I_2^T \mathbf{A}_{\mathbf{NN}} \mathbf{m}] dm \end{aligned}$$

**Preuve :** Idem. La quantité  $(\mathbf{A}_{\mathbf{N}} \mathbf{m})^T \mathbf{H}_{I_2}(\mathbf{A}_{\mathbf{N}} \mathbf{m})$  est la matrice symétrique  $3 \times 3$   $[\mathbf{m}^T \mathbf{A}_{N_i}^T \mathbf{H}_{I_2} \mathbf{A}_{N_j} \mathbf{m}]$ . C'est une matrice symétrique parce que si nous transposons sont  $ij^{\text{eme}}$  élément, nous obtenons  $\mathbf{m}^T \mathbf{A}_{N_j}^T \mathbf{H}_{I_2}^T \mathbf{A}_{N_i} \mathbf{m}$  qui, parce que le Hessien  $\mathbf{H}_{I_2}$  est symétrique, est aussi égal au  $ji^{\text{eme}}$  terme. De même,  $\nabla I_2^T \mathbf{A}_{\mathbf{NN}} \mathbf{m}$  est la matrice symétrique  $3 \times 3$  dont le  $ij^{\text{eme}}$  élément est  $\nabla I_2^T \mathbf{A}_{N_i N_j} \mathbf{m}$ . Elle est symétrique à cause de l'égalité de Schwarz ( $\mathbf{A}_{N_i N_j} = \mathbf{A}_{N_j N_i}$ ). Notez aussi que  $\nabla I_2$  et  $\mathbf{H}_{I_2}$  sont évalués au pixel  $m_2 + \mathbf{Am}$ .  $\square$

## A.4 Géométrie différentielle des surfaces

Nous utilisons les notations de [25]. Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{S} : U \rightarrow S$  une paramétrisation de la surface  $S$ . Les vecteurs  $\mathbf{S}_v$  et  $\mathbf{S}_w$  génèrent le plan tangent  $T_M(S)$  au point  $M$  de  $S$ . La *première forme fondamentale* de  $S$  au point  $M$  est la forme quadratique  $I_p$  définie sur  $T_M(S)$  par la matrice symétrique  $2 \times 2$ :

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

La normale unitaire au point  $M$  est  $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w}{|\mathbf{S}_v \times \mathbf{S}_w|}$  et définit une application de  $S$  vers la sphère unité, appelée carte de Gauss. La différentielle de cette application est une application linéaire de  $T_M(S)$  dans le plan tangent à la sphère unité au point  $\mathbf{N}$ . Puisque ce plan est parallèle à  $T_M(S)$  par construction, nous nous représentons cette application linéaire comme de  $T_M(S)$  dans  $T_M(S)$ . Les propriétés intrinsèques de second ordre de la surface au point  $M$ , telle que les directions principales et les courbures principales s'obtiennent à partir de cette application linéaire exprimée dans la base  $\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_w$  de  $T_M(S)$ . La matrice  $2 \times 2$   $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2$  est donnée par les équations de Weingarten:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & b_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ b_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} e &= -\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{S}_v \\ f &= -\mathbf{N}_w \cdot \mathbf{S}_v = -\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{S}_w \\ g &= -\mathbf{N}_w \cdot \mathbf{S}_w \end{aligned}$$

Les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{B}$  et on montre facilement que la courbure moyenne  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  est égale à:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

qui se réduit à  $\frac{1}{2}(\frac{e}{E} + \frac{g}{G})$  quand la paramétrisation est orthogonale, c'est-à-dire  $F = 0$ .



# Bibliographie

- [1] Boston, MA, June 1995. IEEE Computer Society Press.
- [2] D Adalsteinsson and J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal Of Computational Physics*, 120:269–277, 1995.
- [3] L. Alvarez, P-L. Lions, and J-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (II). *SIAM Journal of numerical analysis*, 29:845–866, 1992.
- [4] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Axiomatisation et nouveaux opérateurs de la morphologie mathématique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 265–268, 1992. t. 315, Série I.
- [5] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Axioms and Fundamental Equations of Image Processing. Technical Report 9231, CEREMADE, 1992.
- [6] Luis Alvarez and Jean-Michel Morel. *Morphological Approche to Multiscale Analysis*, pages 229–254. In Romeny [92], 1994.
- [7] H. Asada and M. Brady. The curvature primal sketch. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:2–14, 1986.
- [8] G. Aubert, M. Barlaud, L. Blanc-Feraud, and P. Charbonnier. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Trans. Imag. Process.*, 5(12), February 1997.
- [9] N. Ayache and F. Lustman. Fast and reliable passive trinocular stereovision. In *Proceedings of the 1st International Conference on Computer Vision*, pages 422–427, London, England, June 1987. IEEE Computer Society Press.
- [10] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Number 115 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1988.
- [11] Elie Cartan. *La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géométrie Différentielle traitée par la Méthode du Repère Mobile*. Jacques Gabay, 1992. Original edition, Gauthiers-Villars, 1937.

- [12] V. Caselles and Sbert C. What is the best causal scale space for three-dimensional images? *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 56:1199–1246, 1996.
- [13] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. In *Proc. International Conference on Computer Vision*, Cambridge, June 1995.
- [14] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. In *Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision* [1], pages 694–699.
- [15] V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro, and C. Sbert. 3d active contours. In M-O. Berger, R. Deriche, I. Herlin, J. Jaffre, and J-M. Morel, editors, *Images, Wavelets and PDEs*, volume 219 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 43–49. Springer, June 1996.
- [16] Edwin E. Catmull. *A Subdivision Algorithm for Computer Display of Curved Surfaces*. PhD thesis, Dept. of CS, U. of Utah, Dec. 1974.
- [17] David L. Chopp. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, 106:77–91, 1993.
- [18] P Danielson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [19] R. Deriche. Recursively implementing the gaussian and its derivatives. Technical Report 1893, INRIA, Unité de Recherche Sophia-Antipolis, 1993.
- [20] R. Deriche and O. Faugeras. Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur. Technical report, INRIA, November 1995. A more complete version of this Research Report has been accepted for publication in the French Revue "Traitement du Signal". To appear in 1997.
- [21] Rachid Deriche, Stéphane Bouvin, and Olivier Faugeras. A level-set approach for stereo. In *Fisrt Annual Symposium on Enabling Technologies for Law Enforcement and Security - SPIE Conference 2942: Investigative Image Processing.*, Boston, Massachusetts USA, November 1996.
- [22] Frédéric Devernay. A fast and efficient subpixelic edge detector. unsubmitted, October 1993.
- [23] Frédéric Devernay and Olivier Faugeras. Computing differential properties of 3-D shapes from stereoscopic images without 3-D models. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 208–213, Seattle, WA, June 1994. IEEE.
- [24] Françoise Dibos. Projective multiscale analysis. Technical Report 9533, CEREMADE, 1995.
- [25] M. P. DoCarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

- [26] C.L. Epstein and M. Gage. The curve shortening flow. In A. Chorin and A. Majda, editors, *Wave motion: Theory, Modeling and computation*, pages 15–59, New York, 1987. Springer-Verlag.
- [27] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. *Journal Of Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.
- [28] Olivier Faugeras. *Euclidean, Affine and Projective Differential Geometry for Computer Vision*. Notes de cours de DEA.
- [29] Olivier Faugeras. Cartan’s moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. Technical Report 2053, INRIA, 1993.
- [30] Olivier Faugeras. Cartan’s moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. In J.L. Mundy and A. Zisserman, editors, *Proceedings of the Second European-US Workshop on Invariance*, pages 1–33, Ponta Delgada, Azores, 1993. Also INRIA Technical report number 2053.
- [31] Olivier Faugeras. On the evolution of simple curves of the real projective plane. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Tome 317, Série I*, 0(6):565–570, September 1993. Also INRIA Technical report number 1998.
- [32] Olivier Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint*. MIT Press, 1993.
- [33] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. Scale-spaces and affine curvature. In R. Mohr and C. Wu, editors, *Proc. Europe-China Workshop on Geometrical modelling and Invariants for Computer Vision*, pages 17–24, Xi’an, China, April 1995.
- [34] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. Some recent results on the projective evolution of 2D curves. In *Proc. IEEE International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 13–16, Washington, October 1995.
- [35] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. On projective plane evolution. In M.-O. Berger, R. Deriche, I. Herlin, J. Jaffré, and J.-M. Morel, editors, *ICAOS’96*, volume 219 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 66–73. Springer-Verlag, 1996.
- [36] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. *Level Set methods and the stereo problem*, pages 272–283. In ter Haar Romeny et al. [110], July 1997.
- [37] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. Variational principles, surface evolution, PDEs, level set methods, and the stereo problem. *IEEE Transactions on Image Processing. Special Issue on Geometry Driven Diffusion and PDEs in Image Processing*, March 1998. Accepted.
- [38] Olivier Faugeras, Renaud Keriven, and Imahd Eddine Srairi. A first implementation of a complete dense surface reconstruction from 2d images. Technical report, ENPC-CERMICS, October 1997.

- [39] Olivier D. Faugeras and Théo Papadopoulos. A theory of the motion fields of curves. *The International Journal of Computer Vision*, 10(2):125–156, 1993.
- [40] L. Florack, J. Sporring, M. Nielsen, and Johansen P., editors. *Gaussian scale-space theory*. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [41] L. M. J. Florack, B. M. ter Haar Romeny, J. J. Koenderink, and M. A. Viergever. Scale and the differential structure of images. *Image and Vision Computing*, 10:376–388, July/August 1992.
- [42] L.M.J. Florack. *The syntactical structure of scalar images*. PhD thesis, Utrecht University, 1993.
- [43] L. Fox and I.B. Parker. *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. Oxford University Press, 1968.
- [44] M. Gage. Curve shortening makes convex curves circular. *Invent. Math.*, 76:357–364, 1984.
- [45] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. of Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.
- [46] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. of Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.
- [47] M. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. of Differential Geometry*, 26:285–314, 1987.
- [48] M. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. of Differential Geometry*, 26:285–314, 1987.
- [49] M. Grayson. A short note on the evolution of surfaces via mean curvatures. *Journal Of Differential Geometry*, 58:555, 1989.
- [50] W.E.L. Grimson. *From Images to Surfaces*. MIT Press: Cambridge, 1981.
- [51] W. Guggenheimer, Heinrich. *Differential Geometry*. Dover Publications, New York, 1977.
- [52] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. iii. *Journal Of Computational Physics*, 71(2):231–303, 1987.
- [53] H. L. F. von Helmholtz. *Treatise on Physiological Optics*. New York: Dover, 1925. Translated by J.P. Southall.
- [54] Berthold Klaus Paul Horn. *Robot Vision*. MIT Press, 1986.
- [55] S.D. Howison, J.D. Morgan, and Ockendon J.R. A class of codimension two free boundary problems. *SIAM Review*, 39(2):221–253, 1997.
- [56] G. Huisken. Flow by mean curvatures of convex surfaces into spheres. *Journal Of Differential Geometry*, 20:237, 1984.
- [57] Bela Julesz. *Foundations of Cyclopean perception*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1971.

- [58] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. SNAKES: Active contour models. *The International Journal of Computer Vision*, 1:321–332, January 1988.
- [59] Renaud Keriven. *Equations aux Dérivées Partielles, Evolutions de Courbes et de Surfaces et Espaces d'Echelle: Applications à la Vision par Ordinateur*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Dec. 1997.
- [60] S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, A. Tannenbaum, and A. Yezzi. Gradient flows and geometric active contour models. In *Proc. Fifth International Conference on Computer Vision* [1].
- [61] B. Kimia, A. R. Tannenbaum, and S. W. Zucker. Shapes, shocks and deformations i: The components of two-dimensional shape and the reaction-diffusion space. *ijcv*, 15:189–224, 1995.
- [62] Benjamin B. Kimia, Allen Tannenbaum, and Steven W. Zucker. On the Evolution of Curves via a Function of Curvature. I. The Classical Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 163(2):438–458, 1992.
- [63] Ron. Kimmel. *Curve Evolution on Surfaces*. PhD thesis, Technion Israel Institute of Technology, Haifa, May 1995.
- [64] Koenderinck. The structure of images. *biol. Cybern.*, 50:363–370, 84.
- [65] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn. Dynamic shape. *Biological Cybernetics*, 53:383–396, 1986.
- [66] Pierre Kornprobst, Rachid Deriche, and Gilles Aubert. Image coupling, restoration and enhancement via PDE's. In *Proc. IEEE International Conference on Image Processing*, volume II of III, pages 458–461, Santa-Barbara, California, October 1997.
- [67] Pierre Kornprobst, Rachid Deriche, and Gilles Aubert. Nonlinear operators in image restoration. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 325–331, Puerto-Rico, 1997.
- [68] Elisabeth Lebras-Mehlman, Michel Schmitt, Olivier Faugeras, and Jean-Daniel Boissonnat. How the Delaunay Triangulation can be used for representing Stereo Data. In *Second Conference on Computer Vision*, pages 54–63, Tampa, Florida, dec 1988. IEEE Computer Society.
- [69] P.L. Lions. *Generalized Solution of Hamilton-Jacobi Equations*. Pittman, London, 1982.
- [70] W.E. Lorensen and H.E. Cline. Marching cubes: a high resolution 3d surface construction algorithm. In *Proceedings of the SIGGRAPH '87 Conference*, volume 21, pages 163–170, Anaheim, CA, July 1987.
- [71] A. Mackworth and F. Mokhtarian. Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(1), January 1986.

- [72] A. Mackworth and F. Mokhtarian. A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14:789–805, 1992.
- [73] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. *Proceedings of the Royal Society London, B*, 207:187–217, 1980.
- [74] Joseph L. Mundy and Andrew Zisserman, editors. *Geometric Invariance in Computer Vision*. MIT Press, 1992.
- [75] P. J. Olver, Guillermo Sapiro, and Allen Tannenbaum. Classification and uniqueness of invariant geometric flows. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 319, Série I*, pages 339–344, 1994.
- [76] P. J. Olver, Guillermo Sapiro, and Allen Tannenbaum. *Differential invariant signatures and flows in computer vision: A symmetry group approach*, pages 255–306. In Romeny [92], 1994.
- [77] P.J. Olver, G. Sapiro, and Tannenbaum A. Invariant geometric evolution of surfaces and volumetric smoothing. Technical report, MIT - LIDS, April 1994.
- [78] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [79] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [80] S. Osher and C. Shu. High order non-oscillatory schemes for the hamilton-jacobi equations. *Journal Of Computational Physics*, 28:907–922, 1991.
- [81] Théo Papadopoulo and Olivier Faugeras. Estimation of the Second Order Spatio-temporal Derivatives of Deforming Image Curves. In *Proc. International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 179–184, Jerusalem, October 1994. IEEE Computer Society Press.
- [82] Théodore Papadopoulo. *Analyse du mouvement de courbes rigides 3D à partir de séquences d'images monoculaires*. PhD thesis, Université de Paris-Sud Centre d'Orsay, May 1995. Existe aussi en version anglaise (INRIA RR-2779).
- [83] N. Paragios and R. Deriche. A PDE-based Level Set Approach for Detection and Tracking of Moving Objects. Technical Report 3173, INRIA, France, May 1997. <http://www.inria.fr/rapports/sophia/RR-3173.html>.
- [84] N. Paragios and R. Deriche. A PDE-based Level Set Approach for Detection and Tracking of Moving Objects. In *Proc. International Conference on Computer Vision*, Bombay,India, January 1998.
- [85] Nikolaos Paragios and Rachid Deriche. Detecting multiple moving targets using deformable contours. In *Proc. IEEE International Confe-*

- rence on Image Processing, volume II of III, pages 183–186, Santa-Barbara, California, October 1997.
- [86] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, July 1990.
- [87] Pietro Perona and Jitendra Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, July 1990.
- [88] W. H. Press, B. P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1988.
- [89] L. Robert and R. Deriche. Dense depth map reconstruction: A minimization and regularization approach which preserves discontinuities. In Bernard Buxton, editor, *Proceedings of the 4th European Conference on Computer Vision*, Cambridge, UK, April 1996.
- [90] L. Robert, R. Deriche, and O.D. Faugeras. Dense depth recovery from stereo images. In *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence*, pages 821–823, Vienna, Austria, August 1992.
- [91] Luc Robert and Olivier Faugeras. Curve-Based Stereo: Figural Continuity And Curvature. In *CVPR91*, pages 57–62, Maui, Hawaii, June 1991. IEEE.
- [92] B. Ter Haar Romeny, editor. *Geometry driven diffusion in Computer Vision*. Kluwer, 1994.
- [93] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.
- [94] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.
- [95] Guillermo Sapiro and Vicent Caselles. Histogram modification via pde’s. Technical report, HPL-TR, December 1994.
- [96] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Area and length preserving geometric invariant scale-spaces. In Jan-Olof Eklundh, editor, *Proceedings of the 3rd European Conference on Computer Vision*, pages 449–458, Vol.II, Stockholm, Sweden, 1994. Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science 800-801.
- [97] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine shortening of Non-Convex Plane Curve. Technical Report EE PUB 845, Technion Israel Institute of Technology-Haifa, August 1992.
- [98] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine Invariant Scale Space. *The International Journal of Computer Vision*, 11(1):25–44, August 1993.
- [99] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine Invariant Scale Space. *The International Journal of Computer Vision*, 11(1):25–44, August 1993.

- [100] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. On affine plane curve evolution. *Journal of Functional Analysis*, 119:79–120, 1994.
- [101] R. Sedgewick. *Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1988.
- [102] Jean Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [103] J. A. Sethian. *Level Set Methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [104] J.A. Sethian. Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-jacobi equations and conservation laws. *Journal of Differential Geometry*, 31:131–161, 1990.
- [105] J.A. Sethian. Curvature flow and entropy conditions applied to grid generation. *Journal Of Computational Physics*, 115:440–454, 1994.
- [106] J.A. Sethian. Theory, algorithms, and applications of level set methods for propagating interfaces. Technical Report PAM-651, Center for Pure and Applied Mathematics, University of California, Berkeley, August 1995. To appear *Acta Numerica*.
- [107] M Sussman and E. Fatemi. An efficient, interface preserving level set re-distancing algorithm and its application to interfacial incompressible flow. Technical report, 1995.
- [108] M. Sussman, P. Smereka, and S.J. Osher. A level set method for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal Of Computational Physics*, 114:146–159, 1994.
- [109] Ali J. Tababai and O. Robert Mitchell. Edge location to subpixel values in digital imagery. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(2):188–201, March 1984.
- [110] Bart ter Haar Romeny, Luc Florack, Jan Koenderink, and Max Viergever, editors. *First International Conference, Scale-Space 97: Scale Space Theory in Computer Vision*. Springer - Lecture Notes in Computer Science 1252, July 1997.
- [111] J. Weickert, S. Ishikawa, and Imiya A. *On the history of Gaussian scale-space axiomatics*, pages 45–59. In Florack et al. [40], 1997.
- [112] J. Weickert, S. Ishikawa, and Imiya A. Scale-space has been discovered in japan. Technical Report DIKU-97/18, Dept. of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, 1997.
- [113] Isaac Weiss. High order differentiation filters that work. Technical Report CAR-TR-545, University of Maryland, Computer Vision Laboratory, Center for Automation Research, March 1991.
- [114] A.P. Witkin. Scale-space filtering. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1019–1021, 1983.