



Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine

Jean-Marc Cardona

► To cite this version:

Jean-Marc Cardona. Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000. Français. NNT: . tel-00005643

HAL Id: tel-00005643

<https://pastel.hal.science/tel-00005643>

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ECOLE DES MINES
DE PARIS

Collège doctoral

N° attribué par la bibliothèque
/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_

THESE

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Spécialité Sciences et Génie des Matériaux

présentée et soutenue publiquement par

Jean-Marc CARDONA

le 20 Décembre 2000

**Comportement et durée de vie des pièces multiperforées :
application aux aubes de turbine.**

*Directeurs de thèse : Georges CAILLETAUD
Samuel FOREST*

Jury

M. E. ANDRIEU	Président	E.N.S.C.T.
M. C. TEODOSIU	Rapporteur	Université Paris 13
M. K. SAB	Rapporteur	L.C.P.C.
M. P. GILORMINI	Examineur	ENS Cachan
M. F. GALLERNEAU	Examineur	ONERA
M. F. CARUEL	Examineur	SNECMA
M. L. LALAQUE	Examineur	TURBOMECA
M. G. CAILLETAUD	Examineur	Ecole des Mines de Paris
M. S. FOREST	Examineur	Ecole des Mines de Paris

**Centre des Matériaux P.M. FOURT de l'Ecole des Mines de Paris,
B.P. 87, 91003 EVRY Cedex**

Table des matières

Introduction	xi
.1 Présentation du sujet	xii
.2 Refroidissement interne de l'aube	xiii
.3 Sollicitations subies par l'aube	xiv
.4 Objectif de l'étude	xv
 Partie A Comportement thermoélastique	 1
I Détermination d'un milieu homogène de substitution	3
I.1 Les différentes méthodes possibles	4
I.2 L'élasticité des matériaux hétérogènes	5
I.2.1 Représentation du matériau hétérogène	6
I.2.2 Etape de localisation	7
I.2.3 Homogénéisation	9
I.3 Obtention d'un milieu homogène de substitution	10
I.3.1 Représentation du matériau hétérogène	10
I.3.2 Détermination du comportement homogène équivalent	10
I.3.3 Application au cas d'une structure périodique	15
I.4 Principe de la méthode de concentration	18
I.4.1 Méthode basée sur les relations de concentration	19
I.4.2 Méthode basée sur des relations de moyenne au bord du volume élémentaire représentatif	20
I.4.3 Application au cas de la plaque trouée	21
I.5 L'aube de turbine	23
I.5.1 Calcul de structure	23
I.5.2 Calcul de référence	26
I.5.3 Calcul avec le milieu homogène de substitution	28
I.5.4 Concentration de contraintes au niveau des trous du bord d'attaque	30
 II Champs moyens lentement variables	 33
II.1 Homogénéisation et milieu du second gradient	34
II.1.1 Mise en défaut des méthodes d'homogénéisation classiques	34
II.1.2 Améliorations possibles de la méthode proposée	36
II.2 Analyse asymptotique en isotherme	39
II.2.1 Equations de champs à l'échelle locale	39
II.2.2 Analyse dimensionnelle et développements asymptotiques aux or- dres supérieurs	40

	II.2.3	Etablissement des équations d'équilibre et des lois de comportement effectives	41
	II.2.4	Lien avec la théorie du second gradient	44
II.3		Thermoélasticité du second gradient	45
	II.3.1	Principe des puissances virtuelles	45
	II.3.2	Premier principe de la thermodynamique	49
	II.3.3	Deuxième principe de la thermodynamique	49
	II.3.4	L'équation de la chaleur	51
	II.3.5	Formulations alternatives	51
	II.3.6	Thermoélasticité du second gradient linéarisée	54
II.4		Analyse asymptotique en anisotherme	57
	II.4.1	Equations de champs à l'échelle locale	57
	II.4.2	Analyse dimensionnelle et développements asymptotiques aux ordres supérieurs	58
	II.4.3	Etablissement des équations d'équilibre et des lois de comportement effectives	59
	II.4.4	Résultats classiques en homogénéisation périodique en thermoélasticité	61
	II.4.5	Lien avec la théorie du second gradient	63

Partie B Comportement non linéaire 67

III Comportement viscoplastique isotrope 69

III.1		Présentation du modèle	70
	III.1.1	Lois de comportement non linéaires en mécanique des solides	70
	III.1.2	Le modèle de l'étude	71
III.2		Obtention d'un milieu homogène équivalent	73
	III.2.1	Les différentes possibilités	73
	III.2.2	La méthode utilisée	73
	III.2.3	Identification du modèle	79
III.3		Applications	86
	III.3.1	Calcul d'une plaque perforée	86
	III.3.2	Calcul de l'aube de turbine	89

IV Comportement monocristallin 93

IV.1		Présentation du matériau	93
	IV.1.1	Solidification d'une aube monocristalline	94
	IV.1.2	Déformation du superalliage monocristallin AM1	97
IV.2		Le modèle monocristallin	99
IV.3		Détermination d'un modèle homogène équivalent	104
	IV.3.1	Présentation du modèle	104
	IV.3.2	Identification du modèle	105
IV.4		Applications	111
	IV.4.1	Plaque perforée	111
	IV.4.2	Aube de turbine HP	114

Partie C	Prévision de durée de vie	117
V	Influence de la perforation sur le comportement	119
V.1	Les différentes études menées sur le superalliage monocristallin AM1	120
V.2	Les moyens techniques utilisés	122
V.2.1	Le montage ONERA	122
V.2.2	Présentation de l'éprouvette	123
V.2.3	Réglages des paramètres de sollicitation	127
V.3	Présentation des essais thermo-mécaniques	129
V.3.1	Les essais réalisés	129
V.3.2	Les différentes simulations réalisées	131
V.3.3	Présentation des résultats	132
V.4	Utilisation du modèle homogène de substitution	140
VI	Influence de la perforation sur la durée de vie	145
VI.1	Les différents modes d'endommagement	146
VI.1.1	Les mécanismes de rupture ductile et par clivage	146
VI.1.2	L'endommagement de fatigue	146
VI.1.3	L'endommagement de fluage	147
VI.1.4	Effet de l'environnement	147
VI.2	Les différents mécanismes d'endommagement observés sur l'AM1 revêtu C1A	148
VI.2.1	Le rôle du monocristal	148
VI.2.2	Le rôle du revêtement C1A	148
VI.2.3	L'AM1 revêtu C1A	149
VI.3	Les différents modèles de prévision de durée de vie	150
VI.3.1	Loi d'endommagement de fluage	150
VI.3.2	Loi d'endommagement de fatigue	151
VI.3.3	Effet de l'oxydation	152
VI.3.4	Critère tridimensionnel	153
VI.3.5	Notion de cumul des dommages	154
VI.3.6	Le modèle utilisé au cours de l'étude	155
VI.4	Corrélation calcul de structure / expérience	158
VII	Conclusion - Perspectives	167
Partie D	Annexes	181
A	Notations	183
B	Les différentes méthodes d'homogénéisation	185
B.0.1	Théorie des modules effectifs	185
B.0.2	Bornes de Voigt et Reuss	187
B.0.3	Homogénéisation périodique	187
C	Coefficient de dilatation thermique effectif	191

D	Théorie du second gradient	193
D.1	Introduction	193
D.2	Principe des puissances virtuelles	195
D.2.1	La puissance des efforts intérieurs, $\mathcal{P}^{(i)}$	196
D.2.2	La puissance des efforts extérieurs à distance, $\mathcal{P}^{(d)}$	197
D.2.3	La puissance des efforts extérieurs de contact, $\mathcal{P}^{(c)}$	198
D.2.4	Application du principe des puissances virtuelles	199
D.3	Enoncés fondamentaux de la thermodynamique	199
D.3.1	Premier principe de la thermodynamique	200
D.3.2	Deuxième principe de la thermodynamique	201
D.4	Variables d'état	202
D.5	Potentiel thermodynamique et lois d'état	202
D.6	L'équation de la chaleur	203
E	Le problème thermomécanique couplé	205
F	Implantation et Simulation avec un milieu du second gradient	209
F.1	Elasticité linéaire d'un milieu du second gradient	209
F.2	Implantation dans le code de calcul éléments finis ZéBuLoN	211
F.3	Deux exemples simples	211
F.3.1	Test d'extension	212
F.3.2	Cisaillement simple	212
F.3.3	Comparaison calcul analytique / simulation numérique	212
F.4	Comparaison avec la théorie des poutres de Bernoulli	212
G	Calcul des coefficients homogènes équivalent du second gradient	215

Liste des figures

.1	Moteur M88-2	xi
.2	Vue intérieure du turboréacteur	xii
.3	Aube de turbine HP du moteur M88-2	xiii
.4	Tranche d'aube	xv
.5	Maillage de l'aube entière	xvi
.6	Maillage de l'aube perforée	xvii
.7	Les perforations sur le bord d'attaque de l'aube	xvii
I.1	Méthodologie de l'homogénéisation	6
I.2	Cellule de base représentant le VER	11
I.3	Essais permettant de déterminer les coefficients homogènes équivalents	12
I.4	Dilatation d'un matériau perforé	15
I.5	Maillages d'une plaque trouée et d'une plaque homogénéisée	15
I.6	Comparaison du champ de déplacement u_y suite à un glissement simple	16
I.7	Déplacement sur une ligne horizontale dans les 3 cas	17
I.8	Cellule de base choisie pour la comparaison des tenseurs de contraintes et de déformations locaux	18
I.9	Champ de contrainte local au centre de la structure (contrainte équivalente au sens de von Mises en MPa)	18
I.10	Principe de concentration de l'état de contrainte autour d'une singularité géométrique	19
I.11	Méthode approchée permettant de relocaliser l'état de contrainte autour d'une singularité géométrique	20
I.12	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène équivalent	22
I.13	Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)	22
I.14	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement élastique	23
I.15	Découpage de l'aube en 8 sous-domaines	25
I.16	Mission de vol	26
I.17	Champ thermique de l'aube	27
I.18	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 250 de la mission	27
I.19	Maillage de l'aube sans les trous	28
I.20	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 250 de la mission sur le maillage homogénéisé	29
I.21	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 250 de la mission sur la partie intérieure du maillage homogénéisé	29

I.22	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée a été remplacée par un matériau homogène de substitution	30
I.23	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée n'est pas prise en compte	31
II.1	Plaque perforée soumise à des chargements thermiques	34
II.2	Plaque homogénéisée soumise aux mêmes chargements	35
II.3	Comparaison entre le déplacement de la plaque perforée et celle de la plaque homogénéisée sur une ligne verticale traversant la quatrième rangée de trous	35
II.4	Conditions aux limites	36
II.5	Isovaleurs du déplacement sur les déformées	37
III.1	Cellule de base représentant le VER	74
III.2	Affaiblissement des propriétés mécaniques	75
III.3	Surface de charge	75
III.4	Critères élémentaires, avec et sans influence de la pression hydrostatique	76
III.5	Influence de la plasticité dilatante	77
III.6	La géométrie de la cellule de base rend le comportement anisotrope	78
III.7	Influence du trou sur l'anisotropie du matériau effectif	78
III.8	Influence du trou sur le comportement cyclique	79
III.9	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de traction	81
III.10	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de cisaillement	82
III.11	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de dilatation hydrostatique	82
III.12	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais d'extension	83
III.13	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de relaxation	83
III.14	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais cycliques	84
III.15	Changement de volume suite à un essai de traction	84
III.16	Déplacement sur la ligne horizontale située au centre de la structure	86
III.17	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène de substitution suite à un essai de glissement	87
III.18	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène de substitution suite à un essai de traction	88
III.19	Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)	88
III.20	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission	89
III.21	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission sur le maillage homogénéisé	90
III.22	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée a été remplacée par un matériau homogène de substitution	91
III.23	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée est modélisée avec la loi de comportement du matériau massif	91
IV.1	Schéma d'un moule placé dans un four de solidification dirigée	94

IV.2	Structure Cubique à Faces Centrées, $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ (Bourdias et Monceau, 1994)	95
IV.3	AM1 brut de coulée. Hétérogénéité de composition	96
IV.4	Microstructure des précipités à coeur de dentrite après traitements (Gallerneau, 1995).	97
IV.5	Réseau tridimensionnel de motif cubique. Les aubes représentent les précipités de la phase γ' (Poubanne, 1989).	97
IV.6	Les différentes étapes d'un modèle cristallographique phénoménologique .	101
IV.7	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de traction	106
IV.8	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de cisaillement	107
IV.9	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de dilatation hydrostatique	107
IV.10	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais d'extension	108
IV.11	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais de relaxation	108
IV.12	Comparaison "expérience" - calcul sur des essais cycliques	109
IV.13	Changement de volume suite à un essai de traction	109
IV.14	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène équivalent	112
IV.15	Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)	112
IV.16	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant le comportement monocristallin massif	113
IV.17	Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)	113
IV.18	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission	114
IV.19	Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission sur le maillage homogénéisé	115
IV.20	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée a été remplacée par un matériau homogène équivalent	115
IV.21	Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée n'est pas prise en compte	116
V.1	Le cycle "4 pentes" pour bord d'attaque	121
V.2	Le cycle "W" pour l'intrados à proximité du bord de fuite	122
V.3	Le montage ONERA	123
V.4	Schéma du système de "chauffage-refroidissement" de l'éprouvette	124
V.5	Schéma de l'éprouvette	124
V.6	Les deux motifs de perçage	125
V.7	Aspect du revêtement thermochimique C_1A (Gallerneau, 1995)	125
V.8	Coupe longitudinale d'une éprouvette en AM1 revêtue C_1A (Gallerneau, 1995)	126
V.9	Gradient circonférentiel pour différents niveaux de température	127
V.10	Gradient visualisé par caméra infrarouge	128
V.11	Champ thermique obtenu par les thermiciens sur les deux maillages	128
V.12	Gradient longitudinal relevé sur l'éprouvette	129
V.13	Faciès de rupture d'une éprouvette 21 trous	130
V.14	Maillage de l'éprouvette de fatigue thermo-mécanique	131
V.15	La méthode utilisée pour définir les essais	132

V.16	Champ thermique sur l'éprouvette (en °C)	133
V.17	Chargement mécanique du premier essai	133
V.18	Comparaison de l'essai thermo-mécanique avec la simulation axisymétrique	134
V.19	Corrélation "expérience / numérique " du déplacement global de l'éprouvette	135
V.20	Cycle type 2 et 4	135
V.21	Le nouveau cycle (type 3)	136
V.22	Mise en place d'un extensomètre	136
V.23	Chargement du quatrième essai	137
V.24	Corrélation "expérience / numérique " de l'état contrainte / déformation au niveau de l'inducteur pour le quatrième essai	137
V.25	Chargement du cinquième essai	138
V.26	Chargement du septième essai	138
V.27	Chargement du huitième essai	139
V.28	Corrélation "expérience / numérique " de l'état contrainte / déformation au niveau de l'inducteur pour le septième essai	139
V.29	Corrélation "expérience / numérique " de l'état contrainte / déformation au niveau de l'inducteur pour le huitième essai	140
V.30	Maillages d'une partie de l'éprouvette 11 trous et de l'éprouvette ho- mogénéisée	141
V.31	Application de la méthode d'homogénéisation sur l'éprouvette perforée 11 trous	142
V.32	Evolution de la contrainte en fonction du temps	143
V.33	Boucle stabilisée	143
VI.1	Structure hexagonale ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$) des oxydes M_2O_3 (Bourdias et Monceau, 1994)	149
VI.2	Relaxation des contraintes (au niveau des trous du haut)	158
VI.3	Isovaleurs de durée de vie (en nombre de cycles) pour l'essai 1	159
VI.4	Evolution de la contrainte réduite en fonction de la température au niveau du trou du bas (où a lieu la rupture numériquement)	160
VI.5	Evolution de la contrainte réduite en fonction de la température au niveau du trou du haut (où a lieu la rupture expérimentalement)	160
VI.6	Isovaleurs de durée de vie (en nombre de cycles) pour l'essai 4	161
VI.7	Isovaleurs de durée de vie (en nombre de cycles) pour les essais 7 et 8 . . .	162
VI.8	Courbe de Woehler	162
VI.9	Vue globale du réseau de perforation	163
VI.10	Amorçage de nombreuses fissures au niveau des trous	163
VI.11	Fissuration du revêtement	164
VI.12	Découpe de l'éprouvette par électro-érosion	164
VI.13	Vue du revêtement au niveau d'un trou	165
VI.14	Fissures dans le revêtement	165
F.1	Déplacement (gauche) et déformation (droite) pour l'extension ou le glisse- ment simple pour un milieu continu du second gradient dans le cas bi- dimensionnel : résultats analytiques et numériques.	213
F.2	Comparaison du déplacement et de la déformation	214
G.1	Conditions homogènes au contour	216
G.2	Conditions de périodicité	216

Liste des tableaux

I.1	Coefficients élastiques isotropes	11
I.2	Coefficients élastiques cubiques	11
I.3	Coefficients homogènes équivalents en élasticité isotrope	13
I.4	Coefficients homogènes équivalents en élasticité cubique	13
I.5	Estimation de la taille mémoire nécessaire en fonction du nombre de sous-domaines	25
II.1	Les différentes procédures d'homogénéisation	38
III.1	Coefficients de la loi viscoplastique correspondant à un superalliage base nickel polycristallin à 950°C	73
III.2	Coefficients concernant l'anisotropie du modèle	85
III.3	Coefficients concernant l'écrouissage du modèle	85
IV.1	Tableau indiquant les compositions chimiques de l'AM1 (en pourcentage massique).	98
IV.2	Coefficients du modèle cristallographique entre 20°C et 950°C	102
IV.3	Coefficients du modèle cristallographique entre 1000°C et 1150°C	103
IV.4	Coefficients du glissement octaédrique du modèle cristallographique phénoménologique de substitution	110
IV.5	Coefficients du glissement cubique du modèle cristallographique phénoménologique de substitution	110
IV.6	Coefficients du premier système de dilatation du modèle cristallographique phénoménologique de substitution	110
IV.7	Coefficients du second système de dilatation du modèle cristallographique phénoménologique de substitution	110
V.1	Récapitulatif des essais thermo-mécaniques	130

Introduction

Notre travail porte sur l'étude des turboréacteurs de moteurs d'avions. La figure (.1) montre une vue externe du moteur M88-2 qui équipe le Rafale.



Figure .1 : Moteur M88-2

Un turboréacteur de moteur d'avion comporte un ou plusieurs étages de compresseur, une chambre de combustion et une turbine.

Le compresseur est constitué de plusieurs disques tournants, portant chacun un ensemble d'aubes (ou ailettes) insérées dans de grands anneaux d'ailettes fixes (redresseurs). Il aspire l'air, le comprime et l'injecte dans la chambre de combustion. Le combustible est alors pulvérisé dans cet air à haute pression puis enflammé. La détente des gaz d'échappement s'effectue à travers la turbine, constituée comme le compresseur d'ailettes mobiles et fixes. La turbine rentre alors en rotation, ce qui permet de transmettre au compresseur l'énergie nécessaire pour l'aspiration et la compression de l'air par l'intermédiaire d'arbres de transmission. L'avion est de ce fait propulsé vers l'avant par réaction des gaz éjectés, à très grande vitesse, vers l'arrière du moteur.

Les pièces des différentes parties du moteur et notamment celles situées en sortie de la chambre de combustion, doivent être particulièrement résistantes.

De ce fait de nombreuses études ont été réalisées en collaboration avec les deux motoristes français que sont SNECMA et TURBOMECA. Les différentes équipes de recherche ont pu repousser sans cesse les limites d'utilisation des pièces composant les zones les plus chaudes des moteurs. Pour cela les procédés de fabrication, la métallurgie des alliages, la géométrie des pièces et les traitements thermiques se sont avérés être autant d'axes pour augmenter la température d'entrée du gaz dans la turbine.

Toutes ces études ont conduit les deux motoristes français à introduire dans les turbomachines des superalliages à base de nickel en raison de leurs excellentes performances à haute température et des alliages de titane en raison de leur bonne résistance et de leur basse densité. Mais l'effort économique qu'impose la réalisation de ces pièces est rentabilisé par l'amélioration des performances et du rendement des moteurs.

.1 Présentation du sujet

La turbine Haute Pression est placée juste après le distributeur, lui-même placé après la chambre de combustion (figure .2).

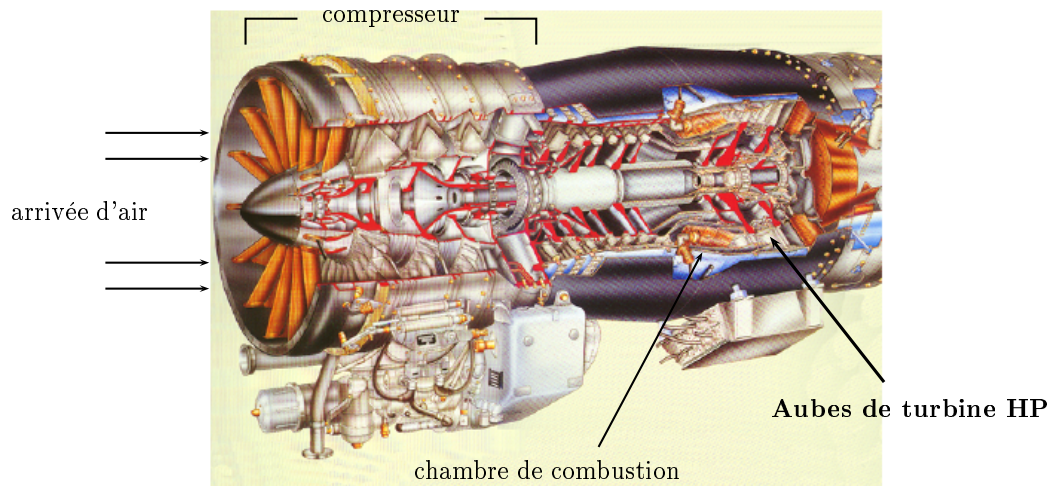


Figure .2 : Vue intérieure du turboréacteur

Les aubes de turbine HP sont soumises à des contraintes d'origine thermiques (les pièces étant en contact avec des gaz brûlés dont la température dépasse la température de fusion de l'alliage) et mécaniques très fortes. Ces conditions de fonctionnement, sévères mais également variables dans le temps au cours de la mission du moteur, exigent donc un niveau élevé des propriétés mécaniques (fatigue-fluage) et une stabilité vis-à-vis de l'environnement (tenue à l'oxydation, la corrosion). La complexité de ces pièces a nécessité une parfaite intégration entre la conception, les matériaux et les techniques de fabrication.

Les aubes sont par conséquent constituées d'un superalliage monocristallin AM1 revêtu C1A et refroidies par un circuit complexe de microcanalisations. Il existe en particulier un réseau de perforations en bord d'attaque et près du bord de fuite qui, du fait de la sévérité du chargement thermomécanique local, peuvent constituer des sites privilégiés d'endommagement. Il est donc indispensable de prendre en compte la présence de la mul-

tiperforation dans le dimensionnement des aubes de turbines (figure .3).



Figure .3 : Aube de turbine HP du moteur M88-2

Le sujet comporte donc un volet expérimental pour déterminer l'influence de la multiperforation sur le comportement et la durée de vie des pièces multiperforées, et un volet numérique consistant à développer une méthode simplifiée de calcul d'aube de turbine prenant en compte les effets essentiels liés à la multiperforation en vue du dimensionnement de la structure industrielle.

Les partenaires de cette étude sont SNECMA, l'ONERA et l'ENSMP.

.2 Refroidissement interne de l'aube

Les matériaux monocristallins permettent maintenant d'acquérir une meilleure résistance au fluage et à la fatigue thermique et de supporter des températures et des contraintes plus élevées par l'utilisation d'alliages à haut point de fusion et riches en éléments durcissants. Cette solution n'est toutefois pas suffisante. Il faut également utiliser des technologies de refroidissement interne de plus en plus complexes afin de réduire la température de l'aube. L'air arrive par le pied de l'aube, circule à l'intérieur grâce à un système de cloisons puis s'évacue par les fentes en bord de fuite et les trous en bord d'attaque. La circulation du

fluide crée un effet de pompage de l'énergie thermique du matériau vers le fluide. De plus l'inclinaison de certains trous de refroidissement engendre la formation d'un film sur la paroi externe de l'aube, ce qui permet de la maintenir à une température moins chaude grâce à la formation d'une couche limite.

Le refroidissement interne de l'aube permet ainsi l'abaissement de la température moyenne du métal mais est par ailleurs à l'origine d'un gradient thermique important. Il crée également une faiblesse mécanique dans la structure de l'aube. Des concentrations de contraintes sont alors présentes autour des trous et peuvent être à l'origine de l'amorçage de fissures. Il faut donc prendre en compte très précisément le chargement thermomécanique pour bien connaître la répartition des contraintes autour des trous et être en mesure d'évaluer la durée de vie de la structure.

.3 Sollicitations subies par l'aube

L'aube de turbine a pour finalité de récupérer l'énergie des gaz sortant de la chambre de combustion, afin d'actionner le compresseur, tout en permettant aux gaz de se détendre correctement pour provoquer une forte poussée.

Elle a par conséquent un rôle essentiellement aérodynamique et subit de fortes sollicitations, de différentes origines :

1. mécanique

- forces aérodynamiques, dues au passage des gaz chauds à grande vitesse.
- force centrifuge, due à une très grande vitesse de rotation de la turbine (on atteint, pour exemple, plus de 28000 tr/min sur certains moteurs militaires), et qui est à l'origine d'un effort de traction très important (accélération centrifuge $80000g$) (Lautridou, 2000).
- phénomènes vibratoires dont les conséquences sont très importantes pour l'endommagement des matériaux.

2. thermique

- gradient longitudinal du pied (600°C) vers l'extrémité de l'aube ($600^\circ\text{C} - 1100^\circ\text{C}$)
- gradient de paroi, l'aube étant au contact des gaz chauds issus de la chambre de combustion et refroidis intérieurement par un flux d'air ($\simeq 200^\circ\text{C}$)

3. chimique

- phénomènes d'oxydation
- phénomènes de corrosion

Les niveaux de contraintes sont d'autant plus sévères pour l'aube de turbine qu'ils sont variables dans le temps. En effet, au cours de la mission d'un moteur, celui-ci passe sous différents régimes critiques aussi bien en régime stationnaire (plein gaz), qu'en régime transitoire (décollage, reverse).

De ce fait les pièces subissent un phénomène de fluage, mais en même temps un phénomène de fatigue. La combinaison des deux est délicate à prendre en compte en termes de durée de vie. Cette maîtrise est cependant importante car elle conditionne les performances du moteur : augmenter la température d'entrée de turbine, le taux de compression et par conséquent la vitesse de rotation de la turbine, le rapport poussée sur masse. . . , qui sont nécessaires pour l'amélioration du rendement général.

.4 Objectif de l'étude

Afin de représenter correctement le comportement non linéaire des contraintes et des déformations sur une structure complexe, on a recours au calcul de structure par éléments finis en 3D. Jusqu'à ce jour un calcul de structure avec une géométrie réaliste et un nombre suffisant de cycles successifs n'a jamais été effectué, au vu des moyens informatiques.

Il y a une dizaine d'années, les premiers calculs de structures étaient réalisés sur des tranches d'aubes (figure .4). Ces calculs comportaient 3500 degrés de liberté (Méric, 1991).

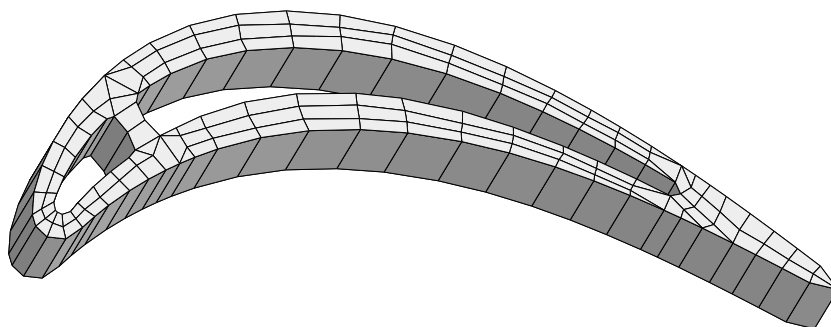


Figure .4 : Tranche d'aube

Il y a trois ans, les moyens informatiques augmentant, la première aube entière (figure .5) a été calculée en élastoviscoplasticité avec un maillage de 44000 degrés de liberté. Afin de déterminer la durée de vie de ces pièces, les ingénieurs ne prennent toujours pas les microcanalisations en considération mais simulent leur présence en introduisant un "facteur de concentration de contrainte".

Dans ce travail nous prenons en considération les singularités géométriques. Nous allons étudier l'influence de cette multiperforation sur le comportement et la durée de vie des pièces.

a) Partie expérimentale de l'étude

Des essais de fatigue thermomécanique seront réalisés à l'ONERA sur des tubes multiperforés constitués du même matériau que l'aube de turbine (matériau AM1 protégé C1A percé au laser). Il s'agit d'essais sur des tubes multiperforés refroidis donnant lieu à des gradients thermiques importants et sollicités mécaniquement à l'aide de vérins hydrauliques. La géométrie et les sollicitations retenues sont assez proches d'une aube réelle et assez simples pour que les essais instrumentés soient réalisés sur une machine thermomécanique

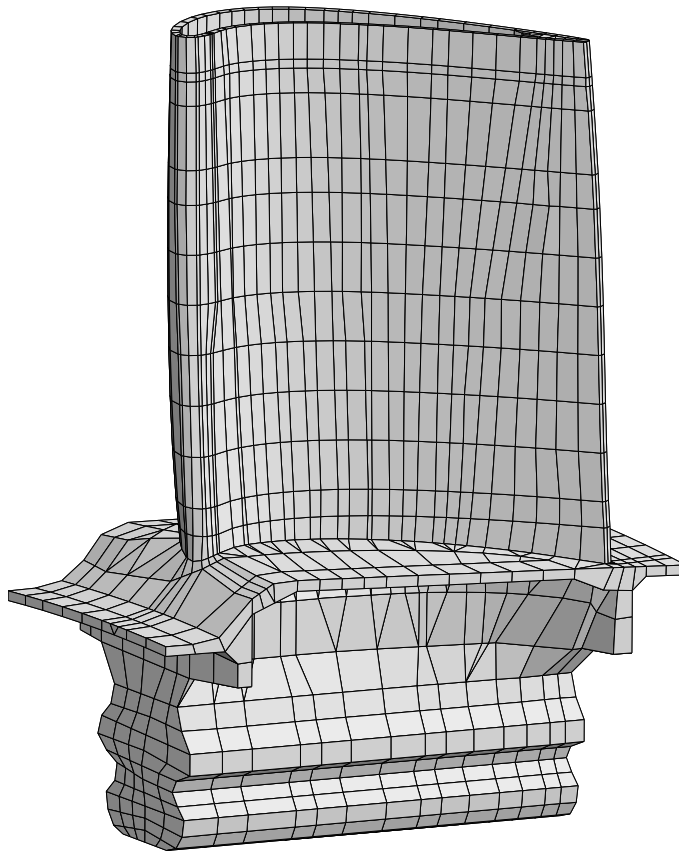


Figure .5 : Maillage de l'aube entière

classique.

Les résultats permettront d'obtenir des données expérimentales sur l'influence de la multiperforation sur le comportement et la durée de vie à partir de chargements thermomécaniques cycliques complexes.

b) Partie numérique de l'étude

Nous effectuerons différents calculs de référence prenant en compte une partie des trous. Ces calculs seront réalisés en élasticité puis en viscoplasticité isotrope et anisotrope sur un maillage possédant environ 500000 degrés de liberté (figures .6 et .7). Pour réaliser de tels calculs nous aurons recours au calcul parallèle.

Dans un deuxième temps, les essais réalisés expérimentalement seront simulés par la méthode des éléments finis en élastoviscoplasticité anisotrope (modèle du monocristal) et seront comparés aux résultats expérimentaux.

De nos jours, pour une utilisation quotidienne dans un bureau d'étude, de tels calculs ne sont pas souhaitables. C'est pour cette raison que nous allons développer une méthode simplifiée qui permet un calcul plus rapide et qui prend en compte l'affaiblissement local.

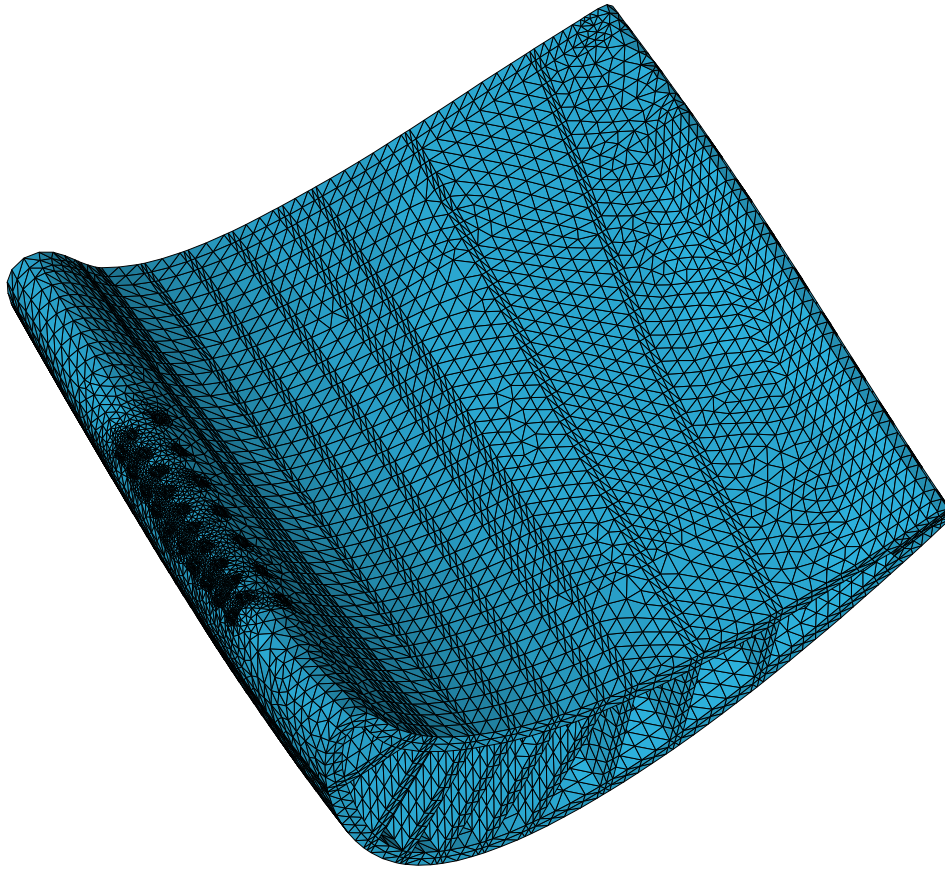


Figure .6 : Maillage de l'aube perforée

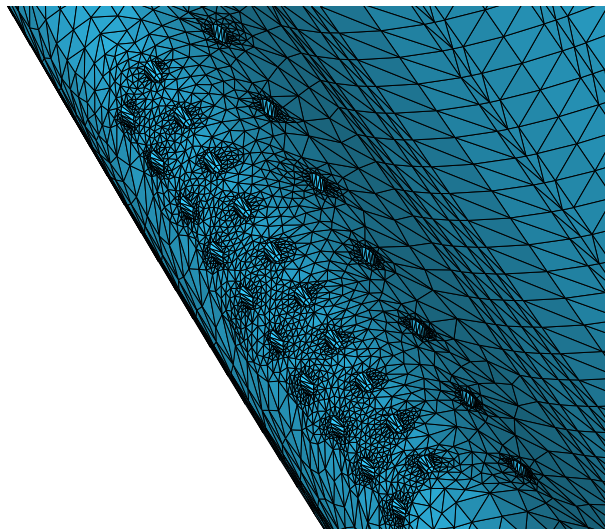


Figure .7 : Les perforations sur le bord d'attaque de l'aube

Ce mémoire va se décomposer en trois parties :

- Dans la première partie nous n'étudierons que le comportement thermoélastique de la pièce. C'est la base du dimensionnement actuel de ces pièces.
- Dans un deuxième temps nous étudierons la partie non linéaire. Afin de bien comprendre certains phénomènes, la pièce aura dans un premier temps un comportement viscoplastique isotrope et dans un deuxième temps nous travaillerons sur le monocristal.
- Dans la troisième partie, nous présenterons les différents essais réalisés et tenterons de faire une corrélation avec la simulation. Puis nous appliquerons un modèle d'endommagement afin de prévoir l'amorçage de fissure.

Partie A

Comportement thermoélastique

Chapitre -I-

Détermination d'un milieu homogène de substitution

Sommaire

I.1	Les différentes méthodes possibles	4
I.2	L'élasticité des matériaux hétérogènes	5
I.2.1	Représentation du matériau hétérogène	6
I.2.2	Etape de localisation	7
I.2.3	Homogénéisation	9
I.3	Obtention d'un milieu homogène de substitution	10
I.3.1	Représentation du matériau hétérogène	10
I.3.2	Détermination du comportement homogène équivalent	10
I.3.3	Application au cas d'une structure périodique	15
I.4	Principe de la méthode de concentration	18
I.4.1	Méthode basée sur les relations de concentration	19
I.4.2	Méthode basée sur des relations de moyenne au bord du volume élémentaire représentatif	20
I.4.3	Application au cas de la plaque trouée	21
I.5	L'aube de turbine	23
I.5.1	Calcul de structure	23
I.5.2	Calcul de référence	26
I.5.3	Calcul avec le milieu homogène de substitution	28
I.5.4	Concentration de contraintes au niveau des trous du bord d'attaque	30

Lorsque nous effectuons un calcul de structure sur une pièce réelle tridimensionnelle de géométrie complexe (trous au niveau du bord d'attaque), les méthodes numériques actuelles connaissent toujours certaines limites. Les calculs sont longs malgré l'évolution de la puissance de calcul et des méthodes d'intégration. Donc, pour contourner cette difficulté, nous cherchons à remplacer le réseau de perforation par un milieu homogène de substitution

décrit par une loi de comportement réaliste, pratique et physiquement fondée par la modélisation.

Nous avons deux types de modélisation possibles :

- une modélisation de nature phénoménologique et inductive.
Cette approche est basée sur l'expérimentation macroscopique. On effectue des mesures sur une éprouvette en réponse à des sollicitations données.
- une modélisation de nature déductive.
Elle vise à réaliser un passage du microscopique au macroscopique. On définit le comportement effectif (à l'échelle macroscopique ou globale) grâce aux informations que l'on a sur le matériau à une échelle inférieure (microscopique ou locale).

Dans cette première partie, nous utiliserons la deuxième voie appelée homogénéisation qui est plus lourde mais qui permet une meilleure compréhension du comportement du matériau ou de la structure.

I.1 Les différentes méthodes possibles

Le calcul de l'aube de turbine prenant en compte une partie du réseau de refroidissement a été réalisé (section I.5). De tels calculs, nécessitant un maillage fin au niveau des trous, sont actuellement réalisables grâce au calcul parallèle. Mais ils ne sont pas compatibles avec une utilisation quotidienne dans un bureau d'étude. Nous cherchons donc à développer une méthode de calcul simplifiée (calcul séquentiel avec des temps de calcul raisonnables).

L'idée principale est d'essayer de prendre en compte l'influence de la perforation sans avoir à mailler individuellement chacun des trous.

Différentes approches peuvent être utilisées :

1. Remplacement de la perforation par un coefficient de concentration de contrainte.
Dans ce cas, la première étape est un calcul sur une géométrie sans singularité géométrique afin d'obtenir l'état de contrainte et de déformation en tout point de la structure. On modifie alors la contrainte au niveau des perforations à l'aide d'un K_t élastique défini précédemment sur une géométrie semblable, puis on applique un modèle de durée de vie. Mais il a été montré (Dethune, 1997) que la prise en compte des zones à K_t dans la chaîne de calcul 1D des aubes de turbine HP ne donne pas de bons résultats vis-à-vis de l'expérience accumulée sur éprouvettes et sur aubes.
2. Zoom structural ou sous-structuration
Cette deuxième méthode correspond à un enchaînement de deux calculs. On effectue un premier calcul en ne considérant pas de singularité géométrique. Puis, dans un deuxième temps, le maillage est raffiné sur une certaine zone (dans le cas de l'aube de turbine HP on maille les trous en bord d'attaque, ou les fentes en bord de fuite). Et on effectue un deuxième calcul en appliquant aux nœuds d'interface de la zone remaillée la rigidité globale de la structure issue du premier calcul. On obtient alors un résultat sur une géométrie réelle et on peut ensuite appliquer un modèle de durée de vie.

L'inconvénient de cette méthode vient du fait que la rigidité globale imposée comme

conditions aux limites ne prend pas en compte l'affaiblissement de la structure lié au réseau de perforation.

3. Méthode d'homogénéisation

Cette méthode consiste à remplacer la zone multiperforée par un matériau homogène de substitution ayant des propriétés effectives grâce aux méthodes d'homogénéisation.

Le calcul se fait toujours sur une structure sans singularité géométrique mais la pièce est composée de différents "matériaux" : un matériau réel massif et un matériau dont les propriétés sont affaiblies en raison de la perforation. Une fois le calcul réalisé, la méthode comporte une étape de relocalisation permettant d'utiliser les informations du calcul simplifié pour appliquer les conditions aux limites adaptées sur une cellule représentative comportant un trou de refroidissement. C'est cette connaissance de l'état local qui alimente les modèles afin de déterminer la durée de vie de la structure.

Nous choisissons la dernière méthode car elle possède plusieurs avantages :

- Nous obtenons au final un état de contrainte et de déformation sur la structure réelle en 3D.
- Nous diminuons le temps de calcul, le second calcul s'effectuant sur une partie plus réduite du maillage. Ce dernier point peut paraître moins important dans le cas de l'aube de turbine où le réseau de perforation est localisé sur une partie du maillage mais apparaîtra prépondérant dans le calcul d'une chambre de combustion par exemple.
- Cette méthode prend en compte l'affaiblissement lié aux singularités géométriques dès la réalisation du calcul simplifié.

Les inconvénients seront mentionnés en I.3.

I.2 L'élasticité des matériaux hétérogènes

L'objectif des méthodes d'homogénéisation est de contruire, par des méthodes déductives, le comportement observé à l'échelle usuelle en partant des mécanismes à une échelle suffisamment fine et de données sur la microstructure (Sanchez-Palencia et Zaoui, 1985). On obtient ainsi une estimation des propriétés du matériau hétérogène à partir des propriétés des différentes phases.

De nombreux travaux sur les conditions et les méthodes d'homogénéisation (François et al., 1995; Sanchez-Palencia, 1974; Auriault et Caillerie, 1989; Suquet, 1982; Huet, 1980; Sab, 1992) ont été réalisés.

L'homogénéisation consiste à définir un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau hétérogène, assemblage complexe et encore flou de nombreux éléments de petites tailles de caractéristiques mécaniques et géométriques variables. L'objectif est de définir un milieu homogène équivalent (MHE) qui, soumis aux mêmes sollicitations que le VER,

aurait une “réponse globale” identique.

La détermination du comportement homogénéisé passe successivement par trois étapes (figure I.1) :

- représentation
- localisation
- homogénéisation

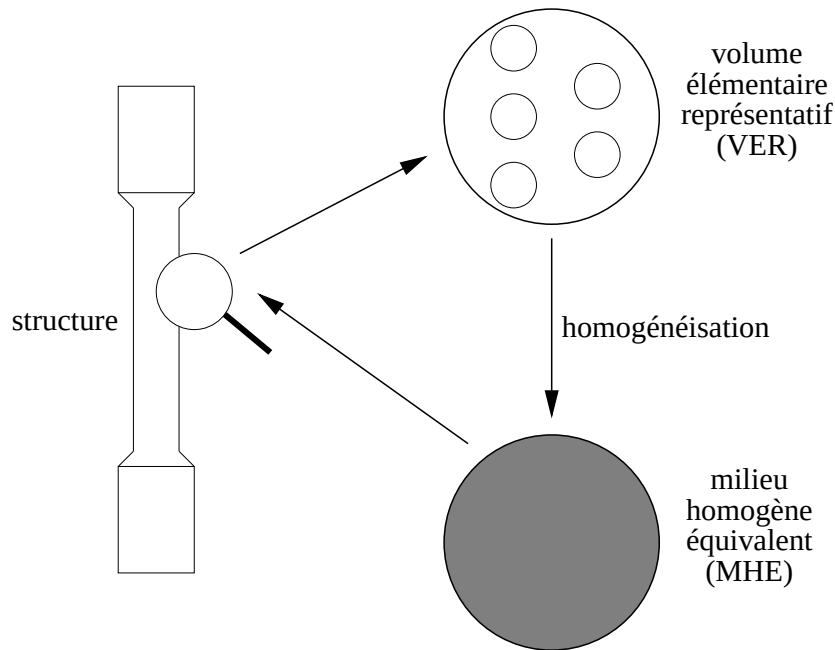


Figure I.1 : Méthodologie de l'homogénéisation

I.2.1 Représentation du matériau hétérogène

Une condition nécessaire pour que l'homogénéisation soit performante est une bonne séparation des échelles.

- une échelle macroscopique où le matériau apparaît comme homogène
- une échelle microscopique où on met en évidence les hétérogénéités.

Afin de définir le VER, il nous faut tout d'abord déterminer la “taille caractéristique” des hétérogénéités prises en compte - soit d - en s'assurant qu'à l'échelle retenue les outils d'analyse disponibles (pour nous, ceux de la mécanique des milieux continus) sont encore pertinents. Car on veut pouvoir calculer les champs de contraintes et de déformations sur la géométrie macroscopique choisie, soumise à des sollicitations déterminées et constituée du matériau considéré.

Cette structure a également une dimension “caractéristique” - soit L -.

Donc en conservant cette optique, l'élément de volume de taille l doit être proportionné par rapport tant à d qu'à L de telle manière qu'il respecte la double condition :

- $l \ll L$: c'est la condition pour que l'on puisse traiter la structure comme un milieu continu homogène
- $l \gg d$: c'est une condition nécessaire pour avoir une représentation statistique suffisante de la distribution des phases.

Pour l'instant nous avons considéré les composantes “matériau” et “géométrie”. Il reste encore à envisager encore les sollicitations qui, elles aussi, peuvent se voir attacher une longueur caractéristique de fluctuation - soit L_w -. Cette longueur pourrait être la longueur d'onde typique (voir minimale) du “spectre spatial” de sollicitation. Il est clair en effet que la notion de VER perdrait toute efficacité pour le traitement d'un problème de structure soumise à des sollicitations fluctuant avec une longueur d'onde L_w inférieur à la taille l de ce VER (Beran et Mc Coy, 1970). Nous aurons même à nous limiter à des conditions homogènes de sollicitation du VER : ceci nécessitera de n'envisager que des situations où soit vérifiée la condition : $L_w \gg l$.

Donc pour résumer, nous pouvons garder à l'esprit que la taille du VER doit séparer les échelles en présence.

$$\begin{array}{ccccccc}
 d_0 & & \ll & & d & & \ll & & l & & \ll & & \left\{ \begin{array}{l} L \\ L_w \end{array} \right. \\
 \text{échelle} & & & & \text{hétérogénéité} & & & & \text{VER} & & & & \text{structure} \\
 \text{atomique} & & & & & & & & & & & & \text{longueur d'onde} \\
 & & & & & & & & & & & & \text{du chargement}
 \end{array}$$

Dans un deuxième temps, une fois le VER défini, il s'agit de décrire le système à considérer. Son contenu doit être représentatif des informations disponibles telles que la nature des constituants, leur comportement mécanique, leurs caractéristiques géométriques et leur distribution spatiale.

I.2.2 Etape de localisation

Une fois le VER défini par un ensemble de caractéristiques mécanique et géométrique, on procède à son analyse mécanique.

La localisation consiste à relier les grandeurs locales aux grandeurs globales en utilisant les équations de la mécanique.

Au niveau des notations :

- $\underline{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}$ représentent respectivement le tenseur du deuxième ordre symétrique des contraintes et le tenseur du deuxième ordre symétrique des déformations locales du matériau hétérogène.
- $\underline{\Sigma}$ et $\underline{E}$ les tenseurs symétriques (du deuxième ordre) des contraintes et des déformations macroscopiques du matériau homogène.
- $\alpha = 1$ à N sont les différentes phases du matériau hétérogène.

- $\langle f \rangle_\alpha = \frac{1}{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\alpha} f(x) dx$ la moyenne de $f(x)$ sur le domaine Ω .

Dans le cas des problèmes d'élasticité linéaire, il y a correspondance entre la donnée et la solution de ces problèmes.

$$\underline{\sigma}(\underline{y}_\alpha) = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^\alpha : \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\underline{y}_\alpha) \quad (\text{I.1})$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\underline{y}_\alpha) = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}^\alpha : \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}(\underline{y}_\alpha) \quad (\text{I.2})$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^\alpha$: tenseur d'élasticité (d'ordre 4) de la phase α

et $\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}^\alpha$: tenseur de souplesse (d'ordre 4) de la phase α

et

$$\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}^\alpha = (\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}^\alpha)^{-1}$$

Notre but est d'assimiler le VER à une particule macroscopique dont il exprime la microstructure. On peut considérer que les sollicitations auxquelles est soumis le VER sont déterminées par les valeurs prises, au point macroscopique considéré au sein de la pièce étudiée, par les variables mécaniques macroscopiques (contraintes ou déformations...).

Entre ces variables macroscopiques et les champs de variables locales qu'il s'agit de déterminer ne peuvent être établies que des relations de moyennes. On aurait donc à résoudre des problèmes sans véritables conditions aux limites, mais soumis à des "sollicitations" s'exprimant comme des conditions de moyennes sur telles ou telles variables locales. Afin de transformer cela en un problème aux limites bien posé on peut par exemple formuler le problème en contraintes ou en déformations homogènes au contour.

- conditions homogènes en contrainte

$$\sigma_{ij} n_j = \Sigma_{ij} n_j, \forall \underline{y} \in \partial\Omega \quad (\text{I.3})$$

- conditions homogènes en déformation

$$u_i = E_{ij} y_j, \forall \underline{y} \in \partial\Omega \quad (\text{I.4})$$

On peut ainsi montrer facilement, en appliquant, le théorème de Gauss, que les conditions aux limites homogènes imposent à la moyenne du champ des contraintes d'être égale à $\underline{\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}}^*$ (cas (I.3)) et à la moyenne du champ des déformations d'être égale à $\underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^*$ (cas (I.4)).

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}}^* = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \rangle_\alpha \quad (\text{I.5})$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^* = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}} \rangle_\alpha \quad (\text{I.6})$$

Dans le cas de matériaux périodiques (voir annexe B), nous ne pouvons plus imposer des conditions aux limites de types $\underline{u}(\underline{y}) = \underline{E} \cdot \underline{y}$ ou $\underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{y})$ au bord de l'élément de volume. Dans le milieu hétérogène périodique, la géométrie étant invariante par translation le long des vecteurs de périodicité, les champs locaux $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\sigma}$ sont également oscillants et fluctuent autour de leurs valeurs moyennes en $\underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}^*$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}}^*$. C'est cette périodicité locale des déformations et des contraintes qui fournit les conditions aux limites (Michel et al., 1998).

- conditions périodiques en contrainte

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j & \text{opposés ou anti-périodique sur côtés opposés de } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

- conditions périodiques en déformation

$$u_i = E_{ij} y_j + v_i \quad \text{avec } v_i \text{ périodique.} \quad (\text{I.8})$$

Des chargements mixtes sont également possibles.

I.2.3 Homogénéisation

L'analyse qui précède débouche donc sur deux types de relations très différentes entre grandeurs locales et globales.

- des relations directes de moyenne, de validité très générale.
- des relations de localisation découlant d'une modélisation spécifique.

Cette dernière étape, visant à estimer le comportement effectif homogénéisé, résulte d'une combinaison de ces deux séries de relations.

La combinaison des relations de moyenne, de localisation et de comportement local nous permet d'aboutir à des relations de type

$$\underline{\Sigma} = \mathcal{R}^{hom} : \underline{E} \quad (\text{I.9})$$

$$\underline{E} = \mathcal{F}^{hom} : \underline{\Sigma} \quad (\text{I.10})$$

où le résultat obtenu, à travers les fonctionnelles homogénéisées $\mathcal{R}^{hom}$ et $\mathcal{F}^{hom}$, dépend du type de conditions au contour considérées.

Afin de tester si ces deux fonctionnelles locales sont inverses l'une de l'autre, ce qui est essentiel pour toute approche d'homogénéisation, comme pour mettre en place des bornes encadrant les caractéristiques effectives, on a recours au lemme suivant (qui pourrait également être formulé en puissance, plutôt qu'en travail de déformation) :

Lemme de Hill :

Soient $\underline{\sigma}^*$ et $\underline{\varepsilon}'$ deux champs respectivement de contraintes équilibrées ($\text{div } \underline{\sigma}^* = 0$ dans Ω) et de déformations compatibles ($\underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon}'(\underline{\xi}')$), non nécessairement associés. Alors, si $\underline{\sigma}^*$ vérifie des conditions de contraintes homogènes au contour $\partial\Omega$ ou si $\underline{\varepsilon}'$ vérifie des conditions de déformation homogène sur $\partial\Omega$, on a

$$\langle \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}'(\underline{\xi}') \rangle = \langle \underline{\sigma}^* \rangle : \langle \underline{\varepsilon}'(\underline{\xi}') \rangle \quad (\text{I.11})$$

Ce résultat assure, en conditions homogènes (mais aussi en homogénéisation périodique), l'égalité du travail "macroscopique" ($\underline{\Sigma} : \underline{E}$) et de la moyenne spatiale du travail microscopique ($\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$).

I.3 Obtention d'un milieu homogène de substitution

Nous désirons étudier l'influence de la multiperforation sur le comportement et la durée de vie des aubes de turbines. Le caractère hétérogène n'est pas dû au fait qu'il existe différentes phases dans notre matériau, car nous ne prenons pas en compte le caractère biphasé à cette échelle. Ce sont tout simplement les microcanalisations du refroidissement interne qui rendent le comportement de l'aube complexe. Nous assimilerons, par conséquent, l'aube à un matériau biphasé : matière et trou.

Les méthodes d'homogénéisation vont nous permettre de remplacer les perforations du bord d'attaque (figure .7) par un matériau homogène équivalent ayant un comportement effectif. Mais au vu des différentes hypothèses nécessaires pour appliquer ces méthodes, plusieurs problèmes se présentent à nous :

- Il y a un nombre fini de cellules. Comme on peut l'observer, le réseau de perforations est localisé sur une partie limitée de la pièce.
- En raison de la sévérité du chargement, l'aube subit des gradients de sollicitations thermomécaniques dont la "longueur d'onde" de chargement est du même ordre que la taille des trous.

Dans ce premier chapitre, nous allons chercher à déterminer le comportement homogénéisé d'une structure perforée en utilisant les méthodes d'homogénéisation (Cardona et al., 1999a). Nous évaluerons les limites de validité de cette approche dans le cas d'un faible nombre de trous.

C'est seulement dans le deuxième chapitre que nous tenterons de quantifier l'erreur liée à l'utilisation des méthodes d'homogénéisation classique, d'en définir les limites et de proposer des améliorations possibles.

I.3.1 Représentation du matériau hétérogène

Afin de déterminer le volume élémentaire représentatif (VER), nous faisons plusieurs hypothèses :

- l'hétérogénéité est le trou de refroidissement,
- nous assimilons le réseau à un réseau périodique le long des deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{z}$,
- nous ne prenons pas en compte l'inclinaison des trous.

De ce fait le volume élémentaire représentatif est représenté par la cellule de base (figure I.2) ci-dessous où :

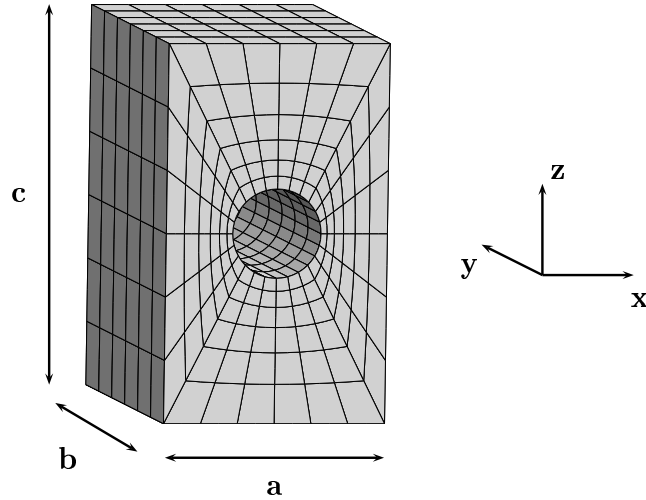
$$a = 1mm \quad , \quad b = 2mm \quad , \quad c = 1.7mm$$

et le trou a un diamètre de $0.4mm$.

I.3.2 Détermination du comportement homogène équivalent

a) Les modules d'élasticité

Nous calculons les coefficients effectifs, c'est-à-dire les propriétés du milieu homogène équivalent (MHE), de la partie perforée de l'aube. Le matériau de base sera considéré comme :

**Figure I.2** : Cellule de base représentant le VER

- isotrope dans un premier temps (tableau I.1)

Température (°C)	20	700	800	900	950	1000	1050	1100	1150	1200
E (GPa)	129	107	102	93	90	85	86	76	64	62
ν	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Tableau I.1 : Coefficients élastiques isotropes

- puis cubique dans un deuxième temps (tableau I.2)

Température (°C)	20	650	800	850	900	950	1000	1050	1100
C_{11} (GPa)	296	244	242	272	254	261	258	250	320
C_{12} (GPa)	204	170	173	204	189	198	198	192	264
C_{44} (GPa)	125	104	99	99	95	93	90	88	86

Tableau I.2 : Coefficients élastiques cubiques

Au niveau de notations indicielles nous rappelons que :

$$C_{11} = C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}$$

$$C_{12} = C_{1122} = C_{1133} = C_{2233}$$

$$C_{44} = C_{1212} = C_{2323} = C_{3131}$$

Afin de respecter les hypothèses émises pour la détermination du VER, nous appliquons des conditions aux limites mixtes : périodiques et homogènes au contour (Cartraud, 1994). Le problème à résoudre peut se mettre sous la forme suivante (annexe B) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(x) \cdot \underline{\nabla} = 0 \\ \underline{\sigma}(x) = \underline{c}(x) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}(x)) \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{u}(x) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{v} \quad \text{avec } \underline{v} \quad x-z \text{ périodique.} \\ \underline{u}(x) = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \text{ou } \underline{t} = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} \quad \text{sur l'intérieur et l'extrados (y)} \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad x-z \text{ anti-périodique} \\ \langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} \text{ ou } \langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E} \end{array} \right. \quad (\text{I.12})$$

- Nous supposons que la cellule présente une périodicité suivant les vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{z}$.
- Par contre nous imposons des conditions homogènes au contour dans la troisième direction $\underline{y}$ (sur l'intérieur et l'extrados de l'aube) correspondant à l'épaisseur de la pièce ($y = \pm h$).

Les coefficients élastiques effectifs sont déterminés numériquement. Sur la figure (I.3) nous pouvons observer la déformée de la cellule avec des conditions aux limites de type extension et cisaillement simple.

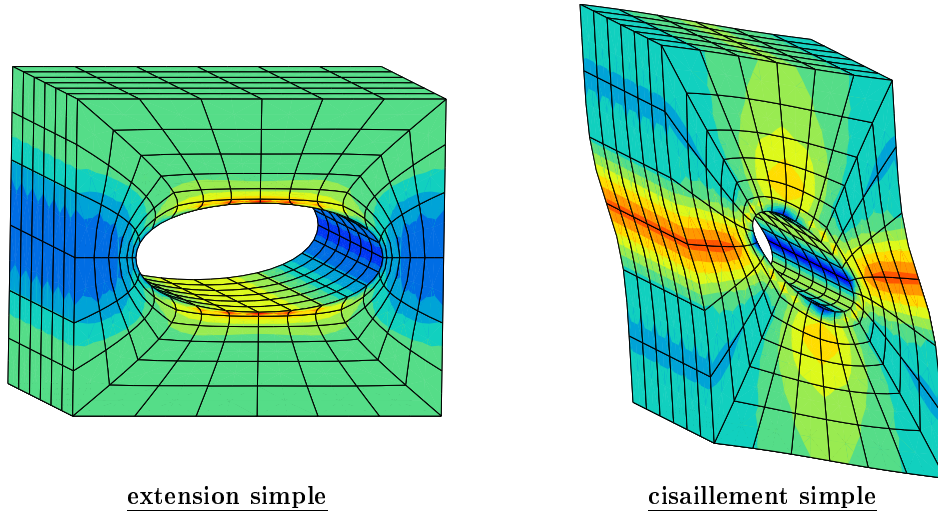


Figure I.3 : Essais permettant de déterminer les coefficients homogènes équivalents

Nous remarquons la périodicité de la déformée, et nous retrouvons également, comme expliqué en annexe B, la périodicité des grandeurs locales (sur la figure I.3 nous traçons la contrainte équivalente au sens de von Mises).

Le comportement homogène équivalent obtenu est orthotrope. Le tenseur des rigidités effectives s'exprime dans le repère cristallographique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{array} \right\}$$

Température (°C)	20	700	800	900	950	1000	1050	1100	1150	1200
C_{1111} (GPa)	140	116	111	101	98	92	94	83	70	67
C_{2222} (GPa)	154	128	122	111	108	102	103	91	76	74
C_{3333} (GPa)	137	113	108	98	95	90	91	80	68	66
C_{1122} (GPa)	59	49	46	42	41	39	39	34	29	28
C_{1133} (GPa)	55	46	44	40	38	36	37	32	27	26
C_{2233} (GPa)	57	48	45	41	40	38	38	34	28	28
C_{2323} (GPa)	42	35	33	30	29	28	28	25	21	20
C_{3131} (GPa)	39	32	31	28	27	26	26	23	19	19
C_{1212} (GPa)	43	36	34	31	30	28	29	25	21	20

Tableau I.3 : Coefficients homogènes équivalents en élasticité isotrope

Température (°C)	20	650	800	850	900	950	1000	1050	1100
C_{1111} (GPa)	224	184	180	195	184	186	182	177	208
C_{2222} (GPa)	241	198	194	211	198	201	197	191	224
C_{3333} (GPa)	222	182	179	194	183	185	181	176	207
C_{1122} (GPa)	149	124	124	142	132	136	135	131	165
C_{1133} (GPa)	142	118	119	135	126	130	129	125	158
C_{2233} (GPa)	149	123	124	141	132	136	135	131	165
C_{2323} (GPa)	107	89	85	83	81	79	77	75	73
C_{3131} (GPa)	93	77	73	73	70	69	67	66	65
C_{1212} (GPa)	109	90	86	84	82	81	78	77	75

Tableau I.4 : Coefficients homogènes équivalents en élasticité cubique

et les résultats obtenus sont donnés dans le tableau (I.3) dans le cas isotrope et dans le tableau (I.4) dans le cas cubique.

- Nous remarquons que le trou, orienté suivant la direction $\underline{y}$, a la même influence dans les deux directions $\underline{x}$ et $\underline{z}$.

$$C_{1111} \simeq C_{3333}$$

$$C_{1122} \simeq C_{2233}$$

$$C_{2323} \simeq C_{1212}$$

Une légère différence subsiste à cause de la forme de la cellule (figure I.2).

- Le module dans la direction $\underline{y}$ est, quant à lui, égal au module initial “corrigé” du trou. Si nous calculons le module de Young E dans la direction 2 pour le matériau isotrope et cubique

$$E = \frac{C_{11}^2 + C_{11}C_{12} - 2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}$$

et que nous le comparons au module de Young E dans la même direction pour le matériau orthotrope

$$E = \frac{C_{1111}C_{2222}C_{3333} - C_{1111}C_{2233}^2 - C_{1122}^2C_{3333} + 2C_{1122}C_{1133}C_{2233} - C_{1133}^2C_{2222}}{C_{1111}C_{3333} - C_{1133}^2}$$

alors nous obtenons bien un affaiblissement de 8% correspondant à la fraction volumique du trou.

- Nous observons également que le trou a très peu d'influence sur les symétries du matériau en élastique.

Le milieu homogène de substitution obtenu est un milieu orthotrope dont nous calculons le coefficient d'anisotropie (en élastique) par :

$$a_i = \frac{(S_{iiii} - S_{iijj}) + (S_{iiii} - S_{iikk})}{S_{jkjk}}$$

Nous remarquons que dans le premier cas le milieu reste globalement isotrope.

Et dans le deuxième cas, l'anisotropie du matériau cubique

$$a = \frac{2(S_{11} - S_{12})}{S_{44}}$$

n'est quasiment pas modifiée (seulement de 5%).

b) Coefficient de dilatation thermique effectif

Comme nous avons pu nous en rendre compte dans l'introduction, la pièce subit, en plus des chargements mécaniques, des sollicitations thermiques non négligeables. Donc il nous faut également déterminer un coefficient de dilatation thermique effectif.

Si nous considérons le cas d'un matériau hétérogène thermoélastique linéaire pris dans différents états d'équilibre thermique où la température peut-être considérée comme uniforme alors chaque phase peut être caractérisée par un comportement dilatométrique.

$$\tilde{\varepsilon}^{th} = \tilde{\alpha} \Delta T \quad (I.13)$$

où $\tilde{\varepsilon}^{th}$ est la déformation thermique
 $\tilde{\alpha}$ un tenseur symétrique du second ordre
 et ΔT une variation de température.

Dans notre étude, le volume élémentaire représentatif étant assimilé à un matériau perforé, il suffit de comparer la dilatation thermique d'un matériau massif et d'un matériau perforée (figure I.4).

Comme nous le montrons rigoureusement en annexe C, le coefficient de dilatation thermique d'un matériau troué est le même que celui du matériau massif.

$$\tilde{\alpha}^{hom} = \tilde{\alpha} \quad (I.14)$$

Ce résultat est prévisible, dans la mesure où la variation de volume du matériau massif étant uniforme, nous pouvons sans rien modifier à l'extérieur enlever une inclusion de matière. Le vide ne va ni favoriser, ni freiner, la dilatation thermique du matériau.

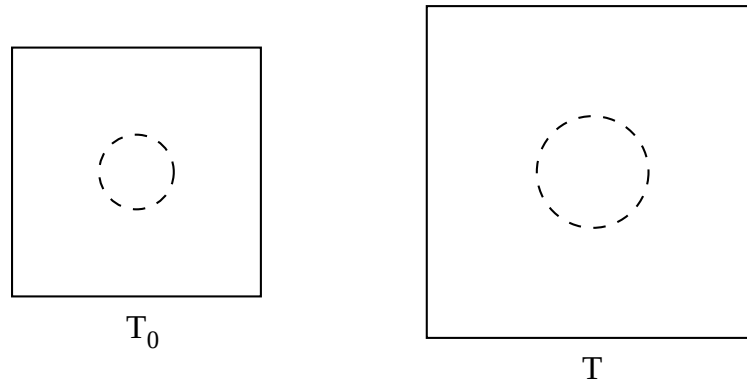


Figure I.4 : Dilatation d'un matériau perforé

I.3.3 Application au cas d'une structure périodique

Le comportement homogène équivalent déterminé, nous appliquons la méthode sur des calculs de structure. Dans un premier temps, nous tenterons de valider le modèle sur une structure périodique puis nous appliquerons la méthode au cas de l'aube de turbine.

Considérons une plaque perforée périodiquement en deux dimensions et une structure maillée plus grossièrement sans singularité géométrique (figure I.5).

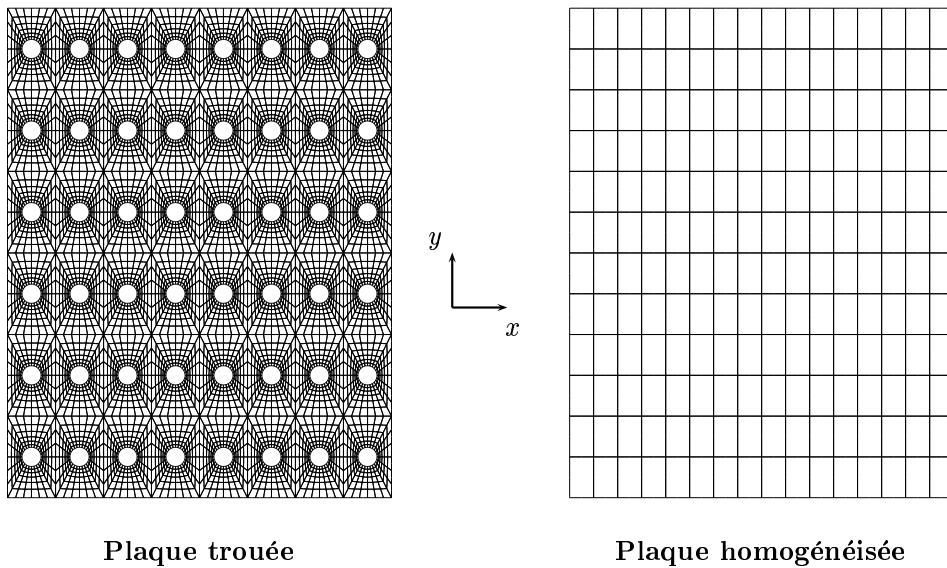


Figure I.5 : Maillages d'une plaque trouée et d'une plaque homogénéisée

Nous appliquons sur ces deux structures le même chargement mécanique : le bas de la structure est bloqué suivant les deux directions et nous imposons au haut de la structure un déplacement u_x non nul. Les calculs sont réalisés en déformations planes.

Même si, dans ce cas, le calcul sur la structure ne nécessite pas de gros moyens de calcul, il y a quand même un rapport 30 en termes de nombre de degrés de liberté et un rapport 100

en termes de temps de calcul.

Pour valider la méthode, nous allons comparer les résultats obtenus sur la structure réelle à ceux obtenus sur le maillage homogénéisé.

- Nous comparons l'allongement de la structure.

Dans le cas du problème industriel, un allongement trop important entraînerait l'“usinage” du carter extérieur par l'aube en rotation.

La figure (I.6) représente la déformée des deux structures.

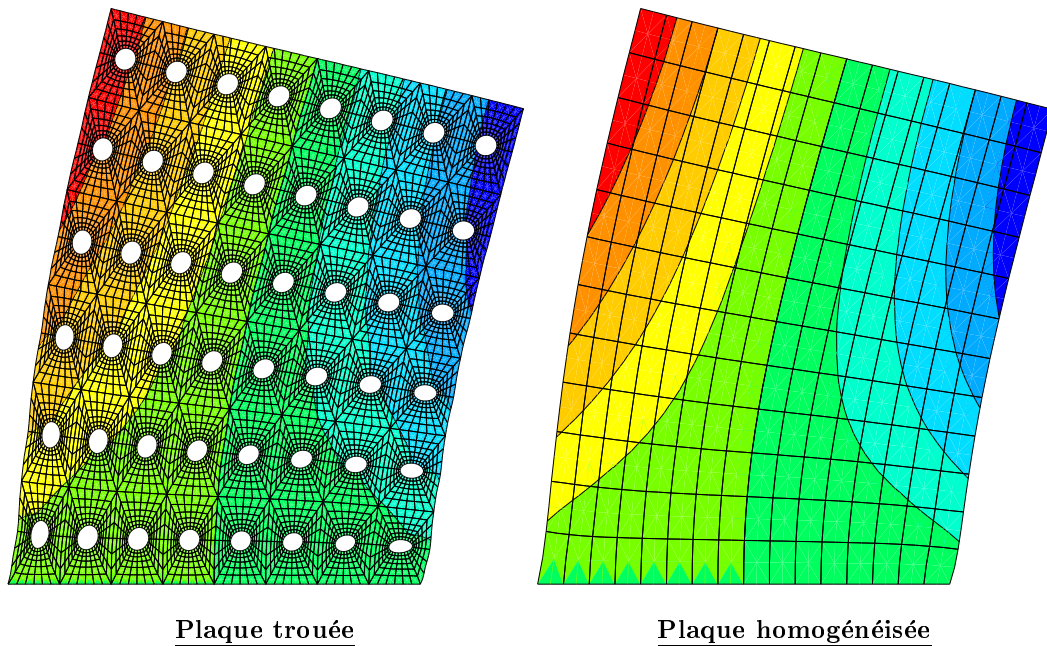


Figure I.6 : Comparaison du champ de déplacement u_y suite à un glissement simple

Sur la figure (I.7) nous avons tracé le déplacement u_x . Nous comparons le déplacement entre :

- la structure réelle,
- la plaque maillée grossièrement ayant un comportement effectif,
- et une plaque sans trou

le long de la ligne horizontale, au centre de la structure, ne traversant pas les trous (figure I.5).

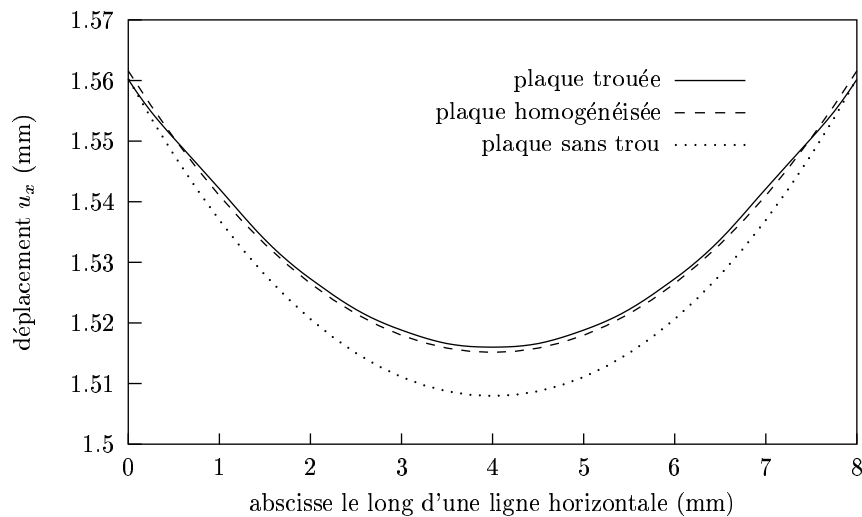


Figure I.7 : Déplacement sur une ligne horizontale dans les 3 cas

L'intérêt d'utiliser un milieu homogène apparaît clairement sur chacune de ces figures.

- Nous comparons les champs locaux.

La connaissance des contraintes-déformations au voisinage des singularités géométriques, lieu privilégié pour l'amorçage de fissure, nous permettra par la suite d'appliquer des modèles afin de déterminer la durée de vie de la structure.

Pour pallier tout effet de bord dû aux conditions aux limites dont nous n'avons pas essayé de rendre compte (Dumontet, 1990), nous comparons les résultats au voisinage d'une perforation située au centre de la structure comme illustré sur la figure (I.8).

Sur la géométrie réelle nous connaissons l'état local. Sur la figure (I.9) nous traçons la contrainte équivalente au sens de von Mises autour de la perforation choisie (figure I.8).

Par contre, au niveau de la plaque sans singularité géométrique, les contraintes sont homogènes.

L'homogénéisation n'est qu'une étape pour la détermination de la durée de vie de la structure. Une fois les caractéristiques effectives du matériau déterminées et le calcul sur la géométrie homogénéisée réalisée, il nous faut revenir au problème de localisation, par une démarche de relocalisation, afin d'analyser les champs locaux.

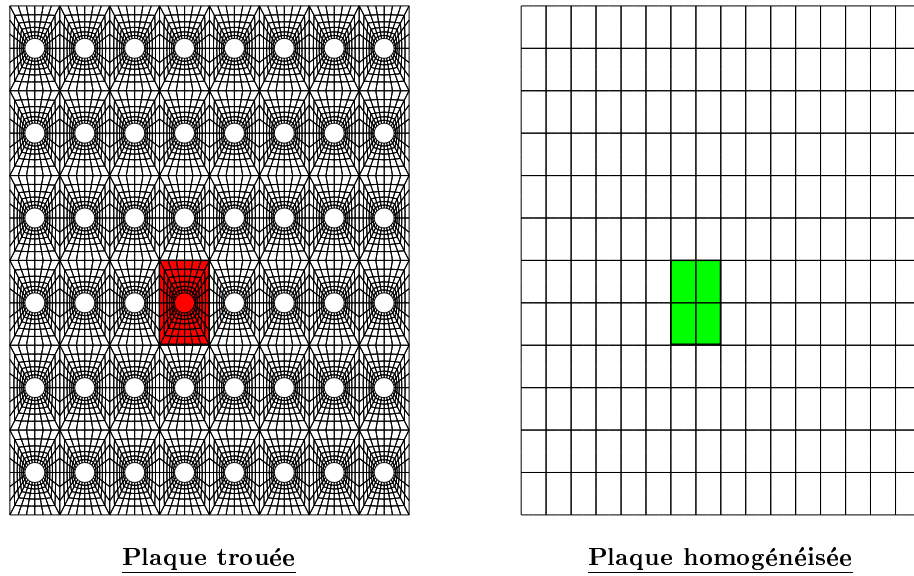


Figure I.8 : Cellule de base choisie pour la comparaison des tenseurs de contraintes et de déformations locaux

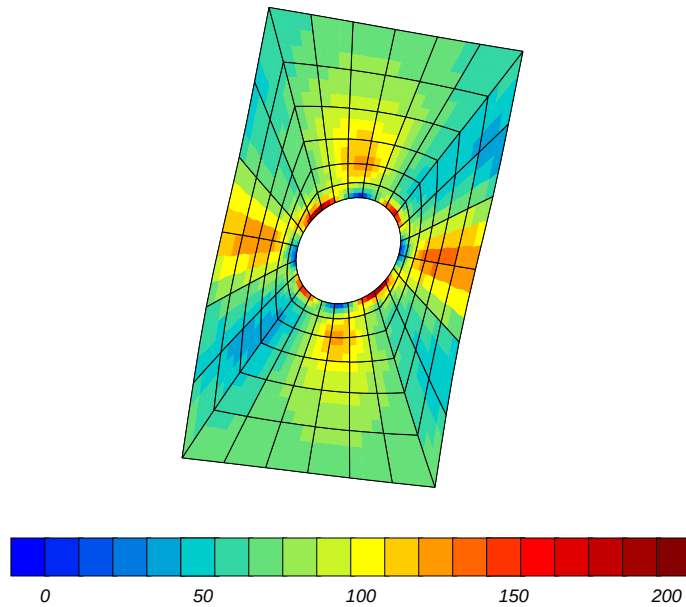


Figure I.9 : Champ de contrainte local au centre de la structure (contrainte équivalente au sens de von Mises en MPa)

I.4 Principe de la méthode de concentration

Une fois le comportement effectif déterminé, il nous est possible de déterminer les champs de contrainte et de déformation à l'échelle microscopique connaissant l'état macroscopique.

I.4.1 Méthode basée sur les relations de concentration

Cette méthode est basée sur les techniques d'homogénéisation et de localisation présentées au paragraphe I.2.2 et est illustrée sur la figure (I.10) (Kruch et Forest, 1998).

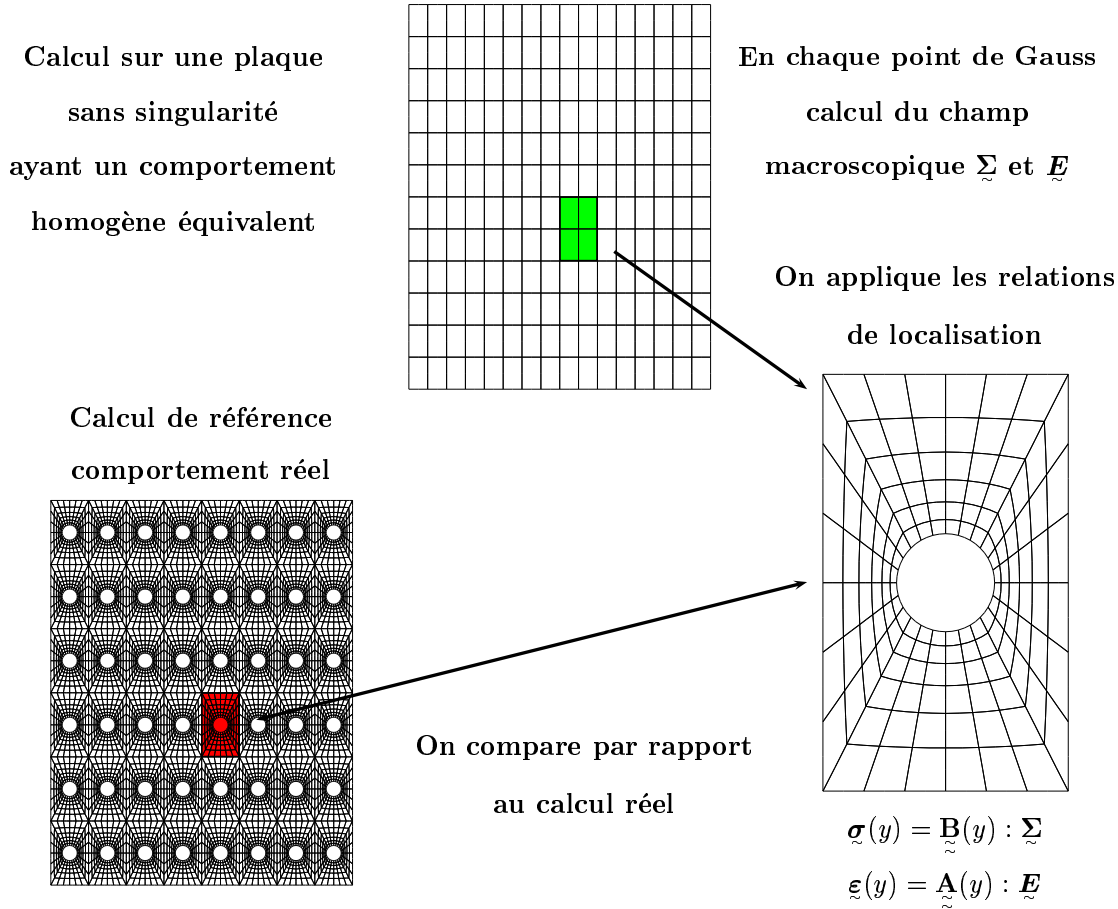


Figure I.10 : Principe de concentration de l'état de contrainte autour d'une singularité géométrique

Afin de calculer par la méthode des éléments finis la structure macroscopique nous utilisons la loi de comportement macroscopique

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{c}^{hom} : \tilde{E}$$

où

$$\tilde{c}^{hom} = \langle \tilde{c}(y) : \tilde{A}(y) \rangle$$

A partir de ce calcul nous connaissons, en chaque point de Gauss, le champ macroscopique $(\tilde{\Sigma}, \tilde{E})$ que l'on conserve. Puis, en utilisant les relations de concentration, nous déterminons l'état de contrainte autour des singularités géométriques.

$$\tilde{\varepsilon}(y) = \tilde{A}(y) : \tilde{E}(y)$$

$$\underline{\sigma}(y) = \underline{\tilde{B}}(y) : \underline{\tilde{\Sigma}}(y)$$

De cette manière, à partir d'un seul calcul macroscopique, il est possible de connaître l'état de contraintes locales comme si chaque trou avait été maillé.

I.4.2 Méthode basée sur des relations de moyenne au bord du volume élémentaire représentatif

Afin de déterminer l'état local, nous n'utilisons plus les tenseurs de concentration, mais nous résolvons un nouveau problème aux limites sur le volume élémentaire représentatif avec des conditions aux limites qui prennent en compte la variation du champ macroscopique.

La figure (I.11) représente les différentes étapes de la méthode pour connaître l'état local.

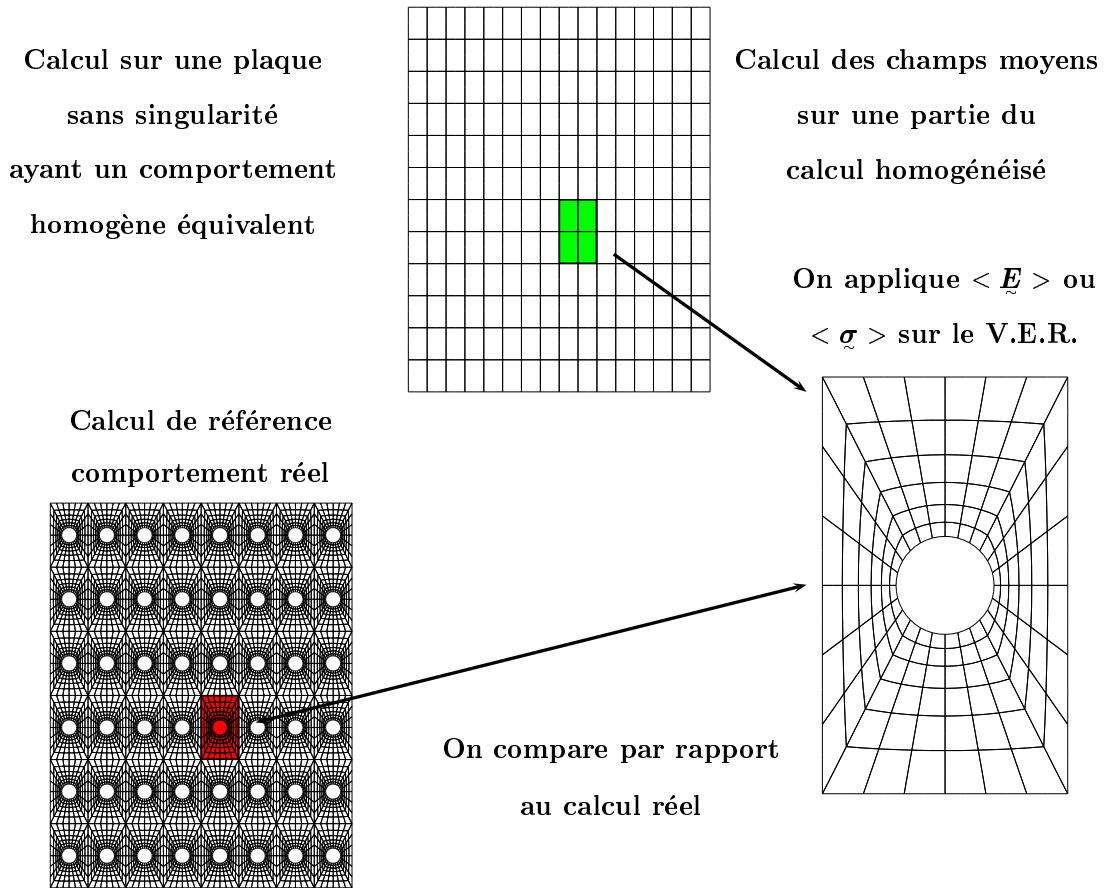


Figure I.11 : Méthode approchée permettant de relocaliser l'état de contrainte autour d'une singularité géométrique

- Nous effectuons le calcul macroscopique en utilisant la même loi de comportement que précédemment

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{c}}^{hom} : \underline{\underline{E}}$$

où $\underline{\underline{c}}^{hom}$ est déterminé numériquement.

- A partir du calcul macroscopique nous déterminons le champ de déformation ou de contrainte moyen sur la cellule de base que nous désirons étudier.
- Nous résolvons un nouveau problème sur le volume élémentaire représentatif avec des conditions aux limites soit en déformation soit en contrainte

$$\underline{u}(\underline{y}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{y} + \underline{v}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{y})$$

- Nous comparons l'état de contrainte obtenu avec celui déterminé à partir du calcul réel sur la géométrie complète.

Cette méthode est plus facile à mettre en œuvre et nécessite des moyens numériques moins importants. Dans la première méthode il faut stocker tous les champs macroscopiques à chaque point de Gauss. Par contre la première méthode est plus précise et assure la continuité des champs locaux d'une cellule élémentaire à l'autre.

I.4.3 Application au cas de la plaque trouée

Nous allons à présent appliquer cette étape de relocalisation au niveau de la plaque perforée suite à un essai de glissement simple (figure I.6).

Les deux méthodes ont été testées et ont donné de bons résultats. Donc, pour des raisons numériques, la première méthode nécessitant des moyens de calcul plus importants (stockant en mémoire des tenseurs de concentrations), nous utiliserons la deuxième méthode.

Une fois le calcul sur la géométrie homogénéisée réalisé, nous relocalisons l'état de contrainte au niveau de la cellule de base. Les résultats obtenus sont comparés à ceux issus du calcul de référence (figure I.12).

Nous remarquons que les résultats obtenus sont satisfaisants :

- la déformée de la cellule élémentaire est semblable,
- la contrainte équivalente maximale obtenue au point de Gauss est de même intensité dans les deux cas ($\sigma_{mises} = 197MPa$ au niveau du calcul réel et nous calculons $198MPa$ sur la cellule élémentaire).
- la localisation et l'intensité des contraintes sont vérifiées autour du trou.
Sur la figure (I.13) nous comparons la contrainte équivalente au sens de von Mises sur la ligne définissant le contour du trou. L'écart maximal obtenu est inférieur à 5%.

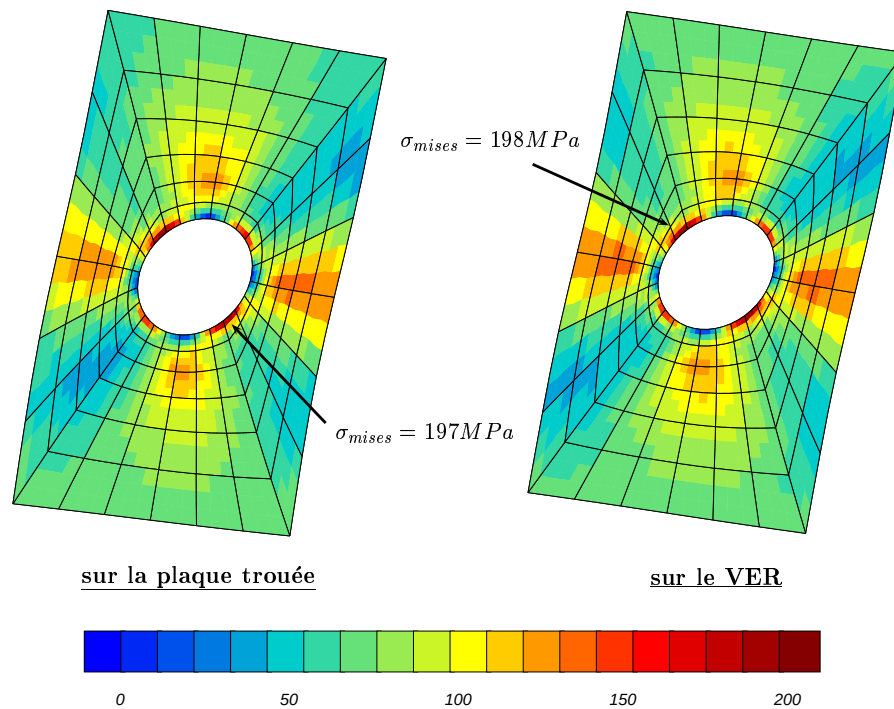


Figure I.12 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène équivalent

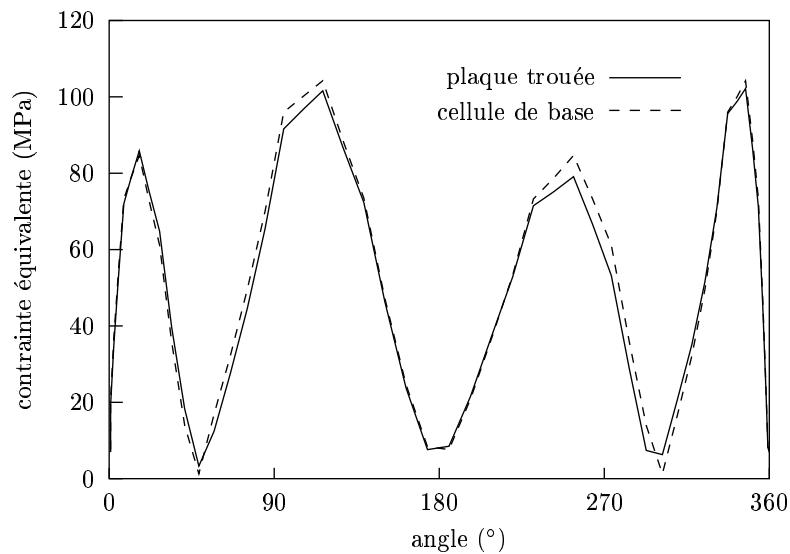


Figure I.13 : Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)

En parallèle nous effectuons la “méthode du zoom structural”. Par conséquent nous effectuons le même calcul, avec les mêmes conditions aux limites et le même chargement sur une plaque démunie de toute perforation et sans prendre en compte l'affaiblissement du comportement (même comportement linéaire que dans le cas de la plaque perforée). Nous remarquons que, comme dans le cas du déplacement (figure I.7), lorsque nous relo-

calisons l'état de contrainte (figure I.14), nous sous-estimons la contrainte. Ceci aura pour effet de surévaluer la durée de vie de la structure.

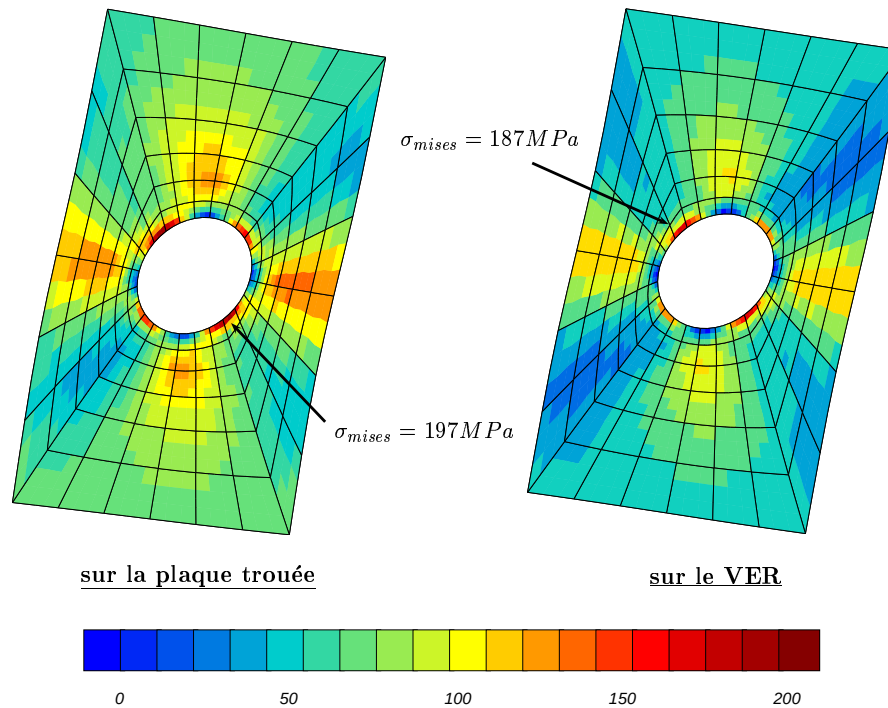


Figure I.14 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement élastique

I.5 L'aube de turbine

I.5.1 Calcul de structure

Comme nous avons pu le voir en introduction, le calcul de l'aube de turbine multiperforée n'est actuellement possible qu'en raison de l'évolution des moyens informatiques.

La puissance des ordinateurs augmente de façon continue depuis une cinquantaine d'années. Après avoir utilisé les générations successives de processeurs, il semble que les constructeurs misent maintenant sur le parallélisme pour accroître encore les capacités de traitement des machines.

Après de premiers prototypes difficiles à utiliser, on trouve maintenant des machines d'accès relativement facile qui, à l'origine, se rattachent à deux grandes familles, les machines à mémoire distribuée (chaque processeur a sa mémoire privée) et les machines à mémoire partagée (une grande quantité de mémoire est partagée par tous les processeurs). La première catégorie appelle une programmation parallèle "à gros grains", avec une quantité importante de calcul sur chaque processeur, et des échanges réduits. La seconde catégorie autorise un parallélisme plus fin, au niveau des boucles par exemple, et permet dans une certaine mesure, une parallélisation automatique. Cependant le nombre de processeurs efficacement utilisables reste faible (moins de 10) dans ces conditions. La tendance actuelle est

à des machines mixtes, avec des grappes de nœuds multiprocesseurs, mais surtout aux clusters de PC, qui vont probablement faire progresser considérablement le rapport performance / coût en calcul parallèle. La solution choisie pour le code ZéBuLon (Kruch et al., 1997) (Feyel, 1998) est un parallélisme explicite avec une bibliothèque de passage de messages et des échanges entre processeurs programmés par le développeur, ce qui permet l'utilisation du code aussi bien en mémoire distribuée qu'en mémoire partagée.

a) Calcul par éléments finis et parallélisation

De façon générale, la méthode des éléments finis comporte deux étapes principales :

- l'étape globale, dans laquelle on se préoccupe de la construction de la matrice de rigidité globale $\{\underline{K}\}$ et de la résolution du système linéaire de type $\{\underline{K}\}\{\underline{u}\} = \{\underline{F}\}$, où $\{\underline{u}\}$ renferme les inconnues nodales et $\{\underline{F}\}$ correspond aux efforts extérieurs.
- l'étape locale, qui concerne l'intégration de la loi de comportement en chaque point d'intégration de l'élément.

L'étape d'évaluation de la loi de comportement nécessite l'utilisation d'une boucle sur les éléments et les points d'intégration, dans laquelle le calcul de la loi de comportement d'un élément de volume A est indépendant de celle d'un élément B. Cette étape est donc naturellement parallèle. En revanche, pour la résolution du système linéaire global (très coûteuse en temps CPU), il est nécessaire de développer des algorithmes spécifiques.

b) Décomposition en sous-domaines

Les calculs par éléments finis sont aujourd'hui limités par les moyens informatiques et notamment par la quantité de données qu'ils doivent stocker en mémoire (et donc, par conséquence par le temps de résolution des deux étapes citées plus haut). Si l'on note par N le nombre de degrés de liberté et par F la largeur de bande, le temps de résolution du système linéaire $\{\underline{K}\}\{\underline{u}\} = \{\underline{F}\}$, (prépondérant dans les calculs tridimensionnels) est de l'ordre de NF^2 . Une solution performante pour la résolution efficace du système linéaire est la parallélisation par décomposition en sous-domaines. C'est la méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnection) (Fahrat et Roux, 1994) qui a été choisie dans le code ZéBuLon. Chaque processeur prend en charge un ou plusieurs sous-domaines. On obtient une multitude de calculs séquentiels de taille raisonnable qu'il faut ensuite rassembler pour construire la solution finale. Les calculs ont été réalisés sur une machine parallèle IBM SP2 à huit processeurs P2SC à 133 MHz. Chaque processeur dispose de 256 Moctets de mémoire vive. Le maillage représenté en figure (I.15) montre la décomposition de l'aube en huit sous-domaines. L'algorithme de découpage cherche à fabriquer des domaines compacts, dans lesquels le rapport entre le nombre de nœuds en surface et le nombre de nœuds en volume est minimum (utilisation du programme Splitmesh, ONERA).

Malgré l'utilisation du calculateur parallèle IBM SP2, nous n'avons pas pu réaliser le calcul avec un maillage quadratique (469536 degrés de liberté) car la place mémoire nécessaire était insuffisante. Ce calcul est maintenant possible au Centre des Matériaux sur le nouveau cluster de PC.

Dans le tableau (I.5) ci-dessous, nous avons relevé la taille des matrices pour les différents sous-domaines en faisant varier le nombre de découpages :

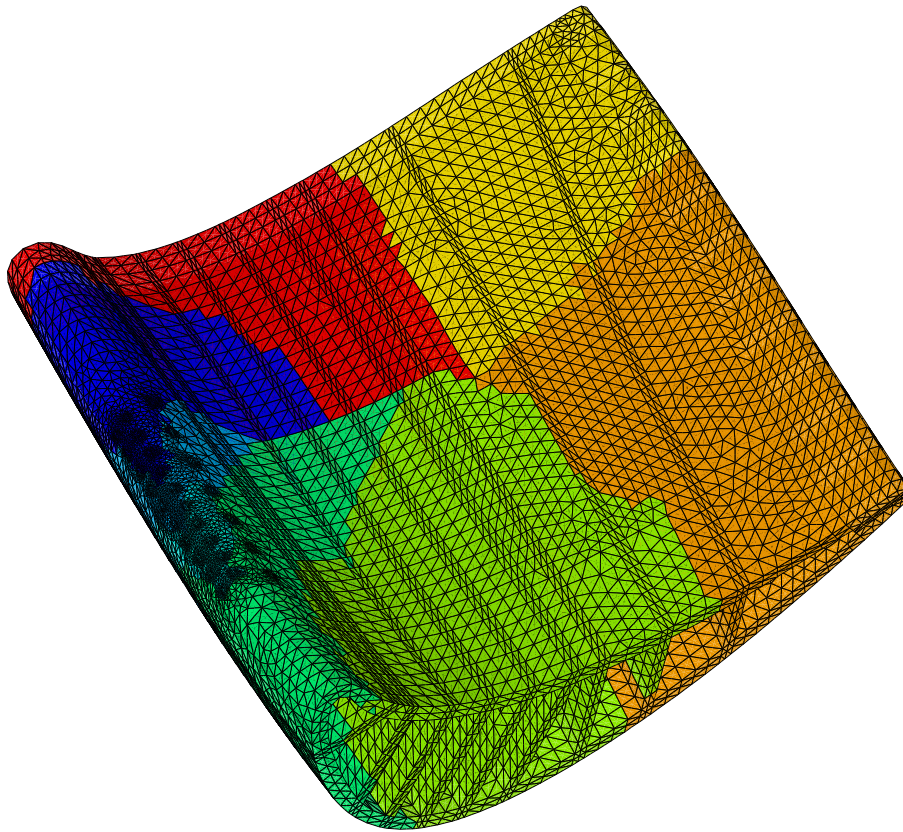


Figure I.15 : Découpage de l'aube en 8 sous-domaines

nombre de sous-domaines	taille des pb élémentaires	taille totale du problème
8	166 - 363 Mo	2200 Mo
16	61 - 98 Mo	1280 Mo
32	18 - 40 Mo	960 Mo
64	3 - 20 Mo	640 Mo
128	—	—

Tableau I.5 : Estimation de la taille mémoire nécessaire en fonction du nombre de sous-domaines

De ce fait, si nous découpons notre structure en huit sous-domaines, il faudrait $8 * 363Mo \simeq 3Go$ de mémoire sur un processeur.

Par contre si nous découpons en 64 sous-domaines, la place nécessaire pour l'ensemble du calcul élastique est de $10Mo * 64 * 8 \simeq 5.12Go$ de mémoire globale mais la place sur un processeur n'est plus que de $10Mo * 8 = 80Mo$.

I.5.2 Calcul de référence

Dans un premier temps nous calculons la pièce réelle sur le SP2 de l'Ecole des Mines de Paris en découpant notre structure en huit sous-domaines maillés avec des éléments linéaires (73080 degrés de libertés).

Les conditions de chargement pour le calcul éléments finis essaient d'être le plus réaliste possible :

- nous bloquons la face inférieure suivant les trois directions simulant la fixation du pied de l'aube sur le disque,
- nous imposons une force centrifuge simulant une mission de vol (figure I.16) (l'amplitude représente un coefficient multiplicatif de l'accélération maximale)

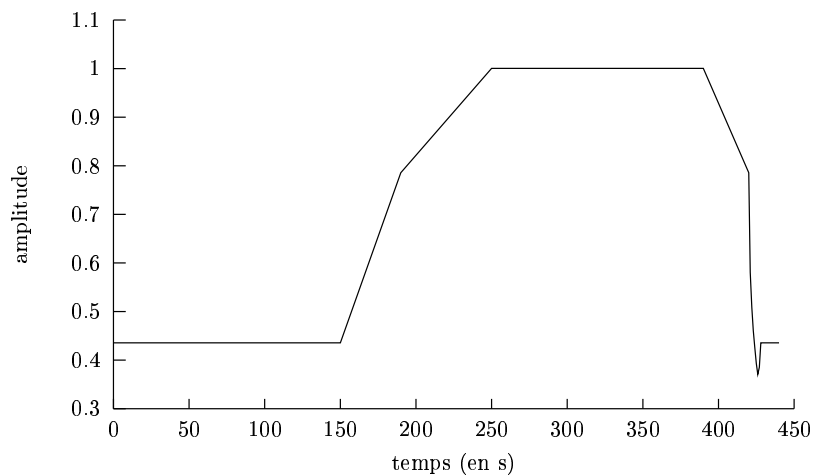


Figure I.16 : Mission de vol

- nous appliquons un champ thermique calculé par les thermiciens de SNECMA (figure I.17).

Nous retrouvons le gradient longitudinal du pied de l'aube vers la baignoire où la température peut être supérieure à 1100°C. De plus la température varie au cours de la mission (même mission que pour la force centrifuge).

Sur le graphe (I.18) nous avons tracé la contrainte équivalente au sens de von Mises au temps 250, lorsque la force centrifuge est maximale.

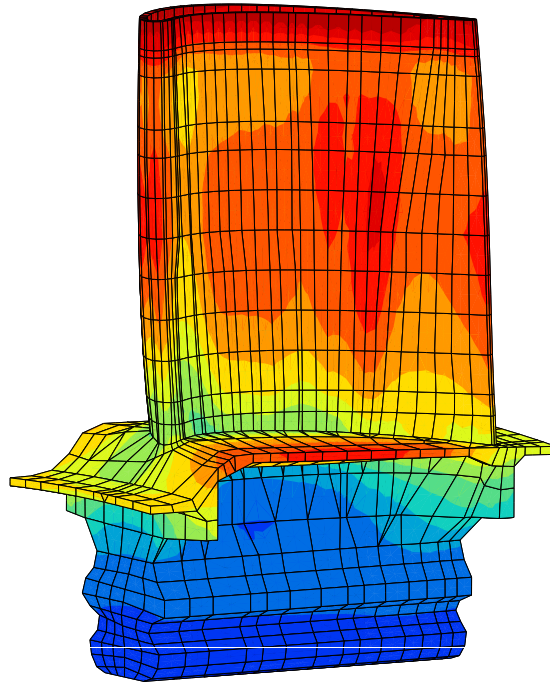


Figure I.17 : Champ thermique de l'aube

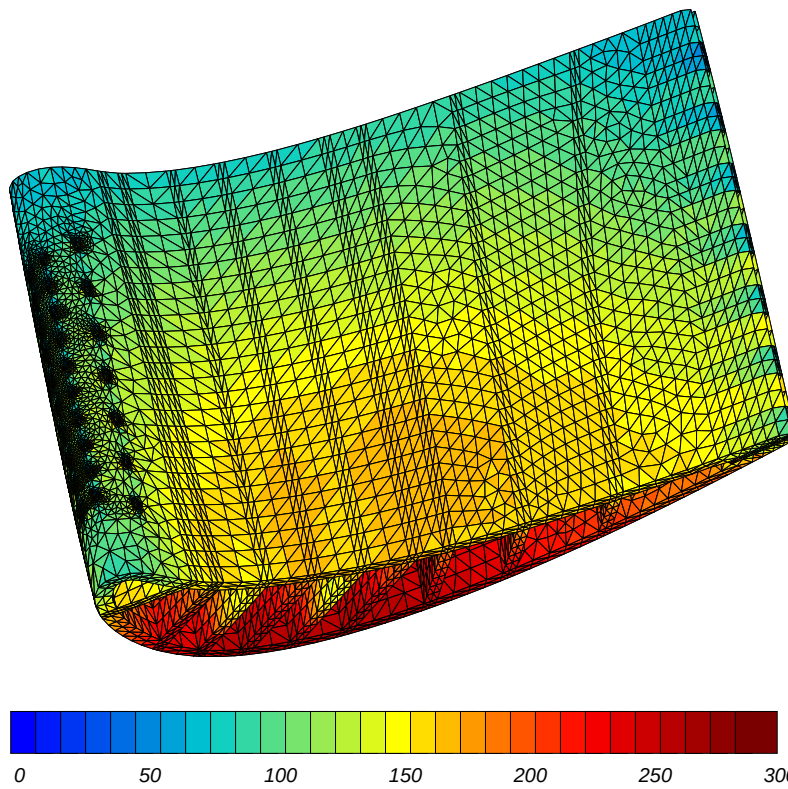


Figure I.18 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 250 de la mission

I.5.3 Calcul avec le milieu homogène de substitution

Dans un deuxième temps, comme dans l'étude de la plaque perforée, nous allons réaliser le même calcul, avec les mêmes conditions aux limites et le même chargement, sur une structure maillée plus grossièrement (figure I.19). La zone perforée (en jaune sur la figure) aura un comportement homogène équivalent et l'autre partie aura le comportement de la structure réelle.

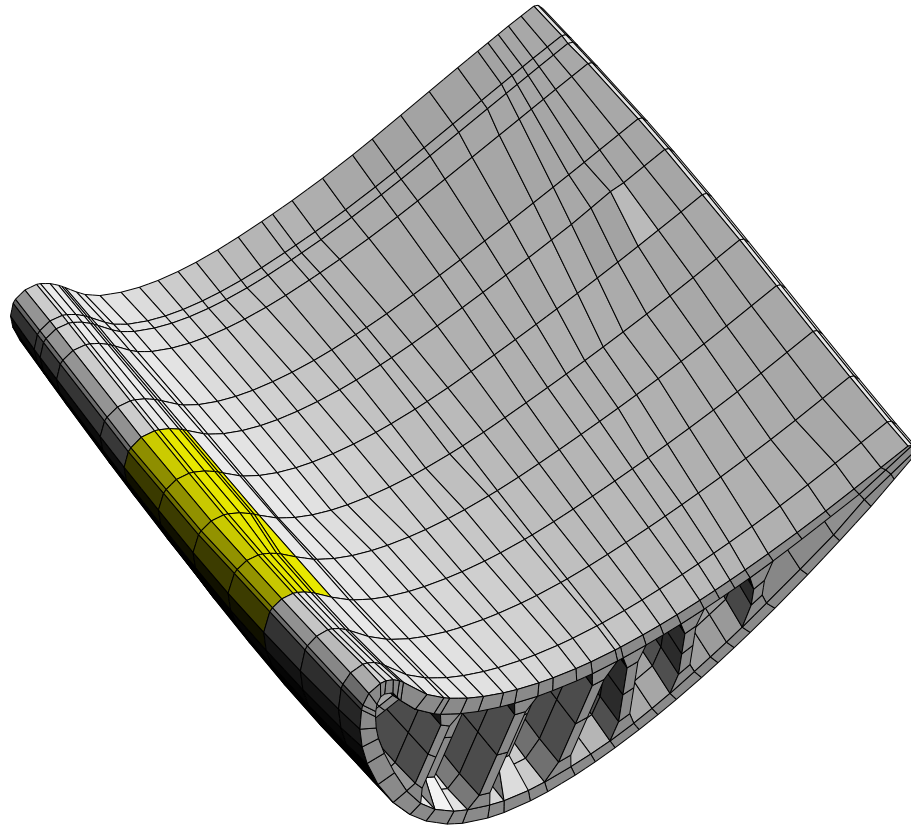


Figure I.19 : Maillage de l'aube sans les trous

Les deux maillages, fournis par SNECMA, n'ont pas exactement la même géométrie extérieure ni les mêmes congés de raccordement. De ce fait, la masse volumique a été corrigée afin d'effectuer un effort semblable dans les deux calculs.

Les résultats obtenus sur l'aube homogénéisée (figure I.20) sont semblables à ceux observés sur l'aube perforée (figure I.18).

Nous remarquons également sur la figure (I.21) que seulement six cloisons transmettent l'effort centrifuge, les trois autres ne servant qu'à la circulation de l'air.

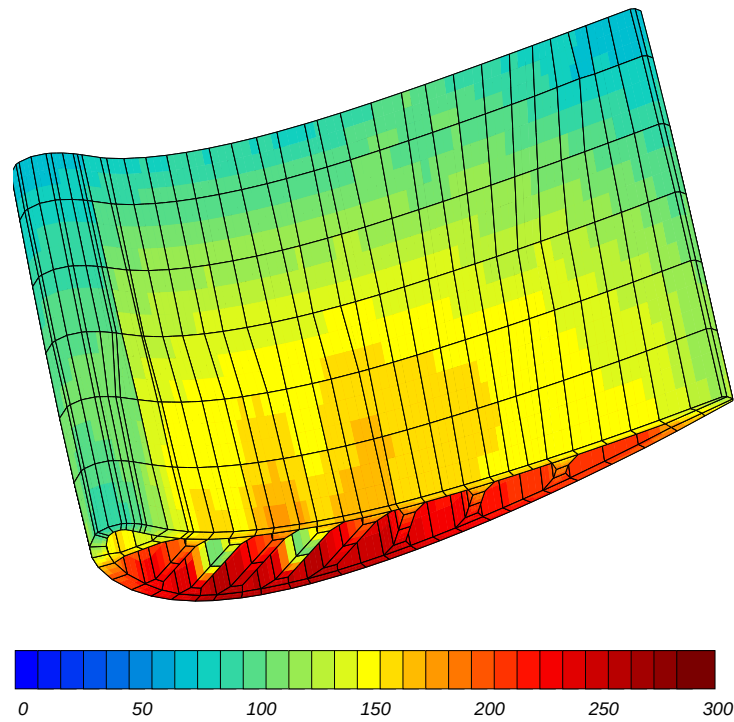


Figure I.20 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 250 de la mission sur le maillage homogénéisé

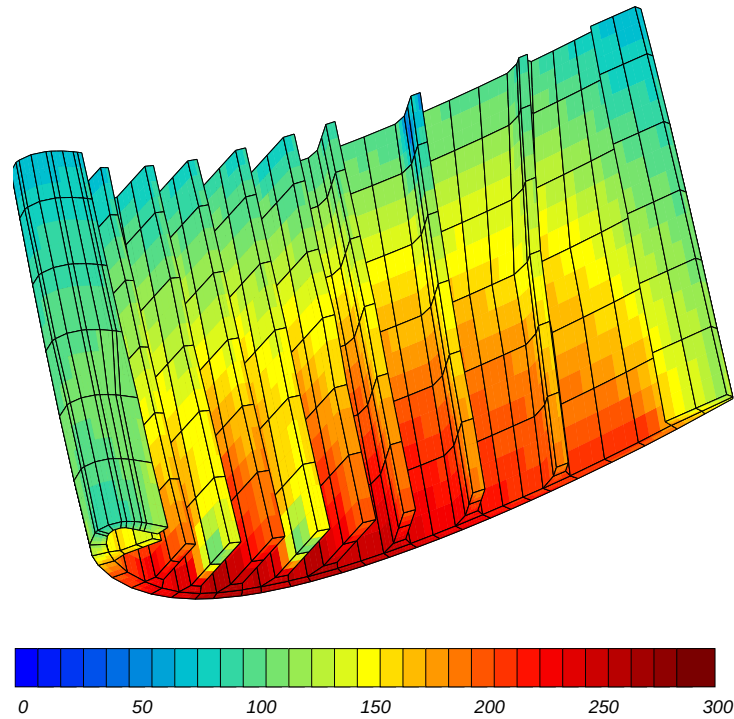


Figure I.21 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 250 de la mission sur la partie intérieure du maillage homogénéisé

I.5.4 Concentration de contraintes au niveau des trous du bord d'attaque

Nous voulons à présent obtenir l'état de contrainte au niveau des trous du bord d'attaque. Le calcul de référence nous donne l'état de contraintes-déformations autour des trous et nous allons évaluer la prédiction donnée par la méthode de relocalisation.

Pour ce faire, nous utilisons la méthode simplifiée présentée précédemment dans le cas de la zone perforée. A partir du calcul réalisé sur la géométrie maillée grossièrement, nous déterminons le tenseur des déformations moyenné sur l'emplacement théorique du trou que nous imposons à la cellule de base où l'inclinaison du trou est prise en considération.

Dans ce cas de chargement centrifuge (figure I.22), les résultats sont cohérents avec ceux calculés sur la géométrie réelle.

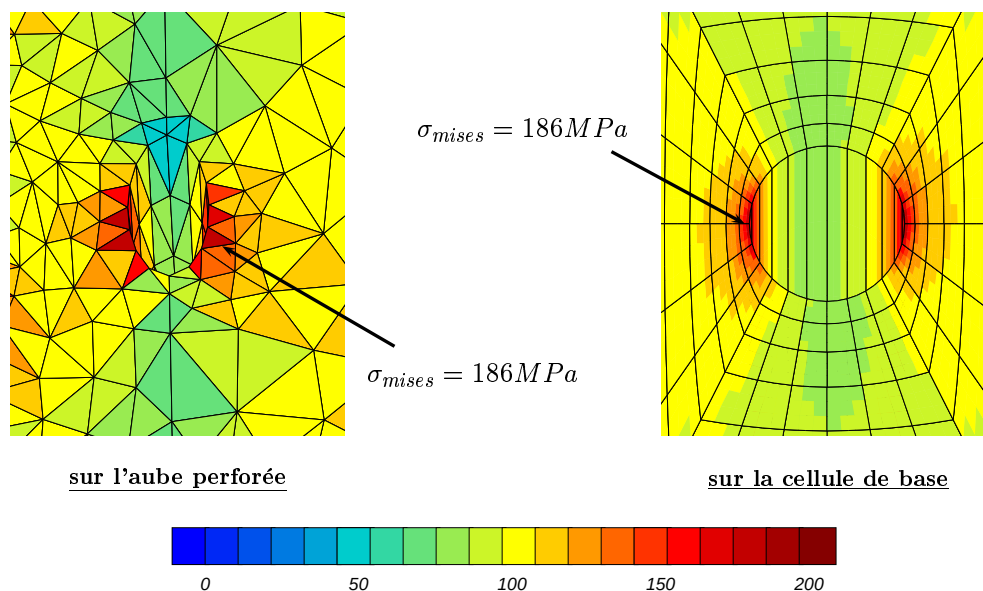


Figure I.22 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée a été remplacée par un matériau homogène de substitution

Vu la grande différence entre les deux maillages, l'état de contrainte local est difficilement comparable. Toutefois, la contrainte équivalente de von Mises obtenue après relocalisation sur la cellule de base est similaire à celle du calcul de référence. La localisation de cette contrainte maximale est également difficilement comparable car la géométrie du bord d'attaque de l'aube n'est pas prise en compte au niveau de la cellule élémentaire. Pour des raisons aérodynamiques, l'aube de turbine possède une géométrie 3D complexe. Donc, en plus de la courbure du bord d'attaque qui n'est pas prise en compte, nous ne maîtrisons pas l'orientation du trou.

Nous apprécions tout de même l'amélioration qu'apporte le fait de remplacer la zone perforée par un matériau homogène de substitution par rapport au calcul où la zone perforée n'est pas prise en compte (figure I.23).

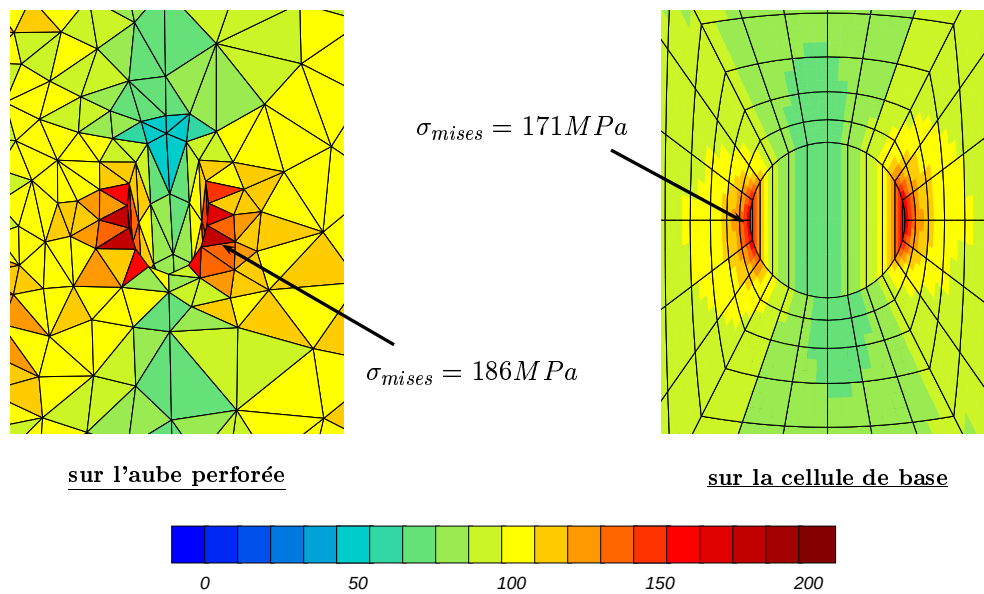


Figure I.23 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée n'est pas prise en compte

Chapitre -II-

Champs moyens lentement variables

Sommaire

II.1	Homogénéisation et milieu du second gradient	34
II.1.1	Mise en défaut des méthodes d'homogénéisation classiques . .	34
II.1.2	Améliorations possibles de la méthode proposée	36
II.2	Analyse asymptotique en isotherme	39
II.2.1	Equations de champs à l'échelle locale	39
II.2.2	Analyse dimensionnelle et développements asymptotiques aux ordres supérieurs	40
II.2.3	Etablissement des équations d'équilibre et des lois de comportement effectives	41
II.2.4	Lien avec la théorie du second gradient	44
II.3	Thermoélasticité du second gradient	45
II.3.1	Principe des puissances virtuelles	45
II.3.2	Premier principe de la thermodynamique	49
II.3.3	Deuxième principe de la thermodynamique	49
II.3.4	L'équation de la chaleur	51
II.3.5	Formulations alternatives	51
II.3.6	Thermoélasticité du second gradient linéarisée	54
II.4	Analyse asymptotique en anisotherme	57
II.4.1	Equations de champs à l'échelle locale	57
II.4.2	Analyse dimensionnelle et développements asymptotiques aux ordres supérieurs	58
II.4.3	Etablissement des équations d'équilibre et des lois de comportement effectives	59
II.4.4	Résultats classiques en homogénéisation périodique en thermoélasticité	61
II.4.5	Lien avec la théorie du second gradient	63

Nous venons de comprendre l'intérêt de remplacer le matériau hétérogène par un matériau homogène équivalent ayant un comportement effectif (propriétés affaiblies) et de montrer l'effet prédictif des méthodes d'homogénéisation (chapitre I) dans le précédent chapitre.

Mais, dans certains cas, si nous ne respectons plus la théorie classique des méthodes d'homogénéisation (Sanchez-Palencia et Zaoui, 1985) basée sur le fait que les champs de sollicitations sont constants d'une cellule à l'autre (Beran et Mc Coy, 1970) ($d < L_w$ chapitre I), c'est-à-dire si le matériau hétérogène est soumis à des forts gradients de déformation, alors le milieu homogène équivalent peut être approché par un milieu continu généralisé (Forest, 1999; Forest, 1998; Pradel et Sab, 1998). Et, plus particulièrement, il peut être décrit par un milieu du second gradient proposé par (Gologanu et al., 1996; Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996) qui conseillent l'utilisation du premier et du second gradient du champ de déplacement $\underline{u}$ (Mindlin et Eshel, 1968; Germain, 1973).

II.1 Homogénéisation et milieu du second gradient

II.1.1 Mise en défaut des méthodes d'homogénéisation classiques

Nous considérons une plaque perforée périodique (figure II.1), nous bloquons le bas de la structure et nous soumettons la plaque à des chargements thermomécaniques en déformation plane.

Dans le premier cas, nous appliquons un champ de température linéaire

$$T(x) = |x/L|.200 \text{ } ^\circ\text{C}$$

où L est la taille de la cellule et a pour dimension $L = 200\text{mm}$.

Dans le deuxième cas, la structure est sollicitée par un chargement sinusoïdal

$$T(x) = 600 + \left[\sin \frac{2x}{L} + \cos \frac{2y}{L} \right].200 \text{ } ^\circ\text{C}$$

avec une période de $T = 3L$.

Sur la figure (II.1) nous pouvons observer la variation de la déformée d'une cellule à l'autre.

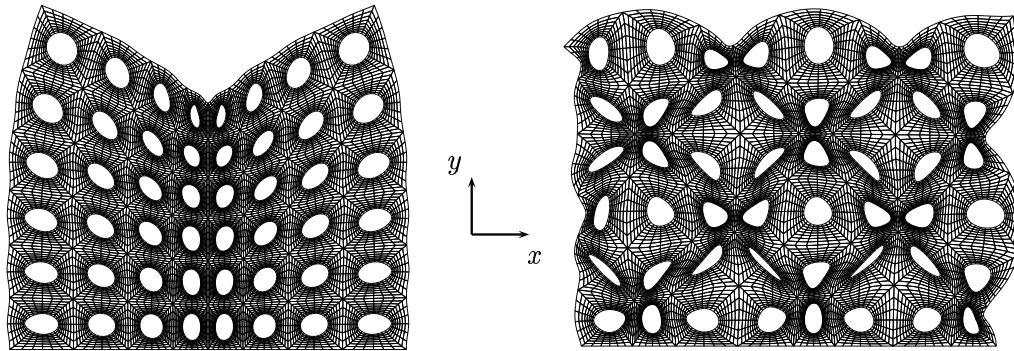


Figure II.1 : Plaque perforée soumise à des chargements thermiques

Sur la figure (II.2) nous avons réalisé le même calcul (même géométrie, même chargement) sur une plaque maillée plus grossièrement sans singularité géométrique et possédant un milieu effectif.

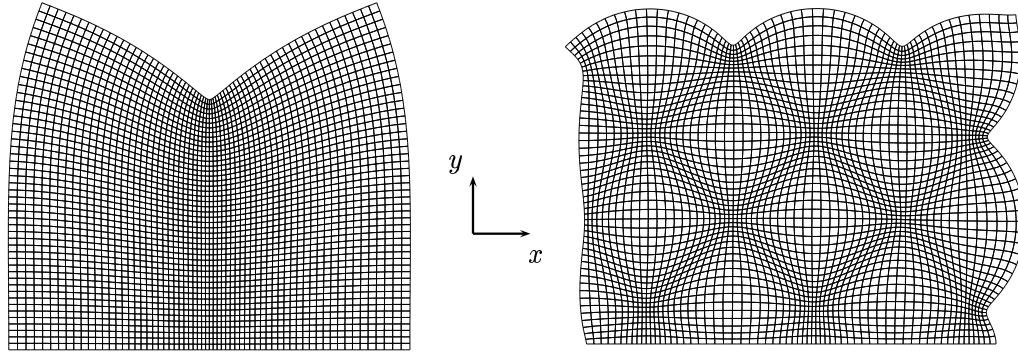


Figure II.2 : Plaque homogénéisée soumise aux mêmes chargements

Sur la figure (II.3) nous remarquons que les méthodes d'homogénéisation classiques peuvent être mises en défaut dans le cas de forts gradients (figure II.1). La plaque homogénéisée, possédant des propriétés effectives déterminées à partir des méthodes d'homogénéisation classique, reproduit correctement la réponse de la plaque perforée dans le cas du chargement thermique linéaire (figure II.3a) mais pas dans le cas du chargement sinusoïdal (figure II.3b).

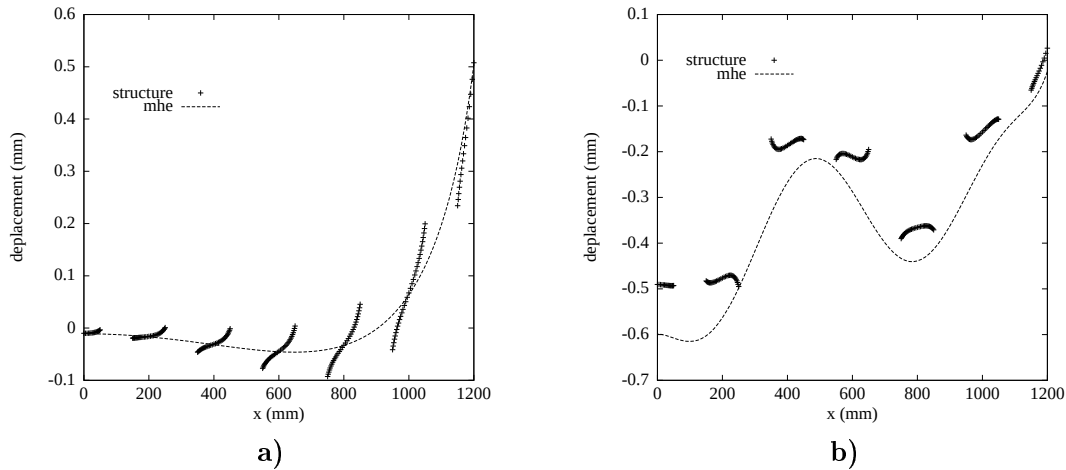


Figure II.3 : Comparaison entre le déplacement de la plaque perforée et celle de la plaque homogénéisée sur une ligne verticale traversant la quatrième rangée de trous

Si la longueur d'onde du chargement thermique n'est plus très supérieure à la taille caractéristique de la structure, ici la taille de la cellule, alors la température à l'intérieur de l'élément représentatif ne peut pas être considérée comme constante. Ceci veut dire que l'énergie de déformation s'accumule à l'intérieur du milieu homogène en raison du gradient de température. Ce qui, comme nous allons le voir par la suite, va nous amener à utiliser un milieu homogène thermoélastique du second gradient.

II.1.2 Améliorations possibles de la méthode proposée

Après s'être rendu compte que nous pouvions rencontrer certains problèmes si notre structure subissait des gradients thermiques et puisque cela peut être le cas de l'aube de turbine multiperforée, nous allons essayer d'apporter des améliorations pour le cas où le chargement mettrait en défaut l'approche du chapitre I.

Tout d'abord, nous allons essayer de comprendre les raisons du problème en étudiant un cas simple.

Nous appliquons, sur cette cellule de base constituée d'un matériau classique (matériellement simple) qui n'incorpore que le premier gradient des déplacements, un champ de température qui varie linéairement en fonction de la variable $\underline{x}$

$$\underline{\xi}^{th} = \alpha \frac{\Delta T}{L} \underline{x} \underline{1} = \alpha \theta \underline{x} \underline{1} = \begin{bmatrix} \alpha \theta \underline{x} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \theta \underline{x} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \theta \underline{x} \end{bmatrix}$$

et des conditions aux limites différentes.

- Dans le premier cas, l'élément n'est soumis à aucune force extérieure.
- Dans le deuxième cas, nous bloquons le déplacement suivant les directions $\underline{y}$ et $\underline{z}$ ce qui provoque l'apparition de contraintes.

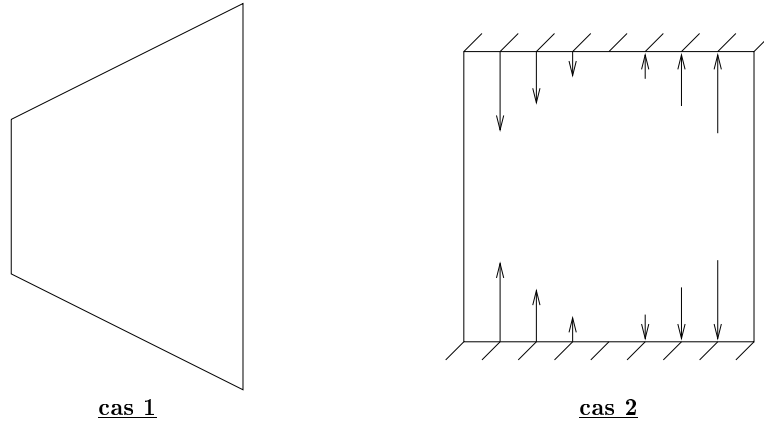


Figure II.4 : Conditions aux limites

Dans le premier cas, en raison de l'absence des conditions aux limites, la déformation thermique est un champ compatible alors que dans le deuxième cas la déformation élastique est à prendre en compte.

cas 1

$$\underline{\xi}^{tot} = \underline{\xi}^{th}$$

cas 2

$$\underline{\xi}^{tot} = \underline{\xi}^e + \underline{\xi}^{th}$$

Nous calculons ensuite le champ de déplacement par intégration du champ de déformation (figure II.5), pour un matériau élastique homogène isotrope.

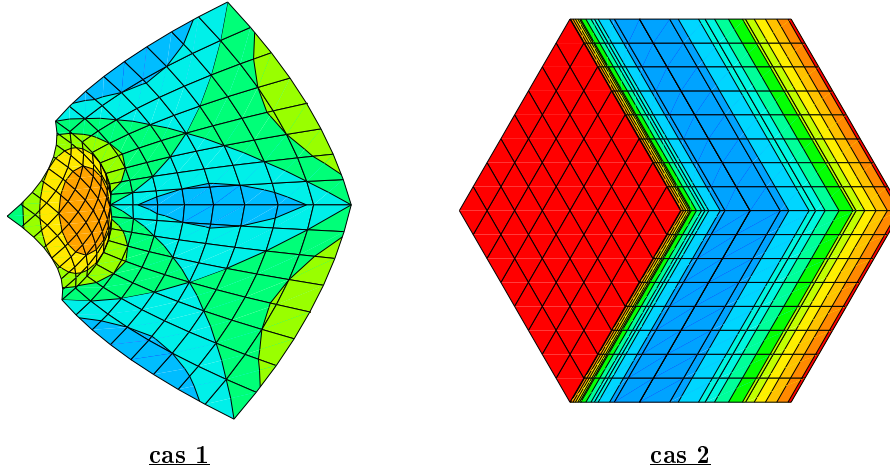


Figure II.5 : Isovaleurs du déplacement sur les déformées

cas 1

$$u_x = \frac{1}{2} \alpha \theta (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$u_y = \alpha \theta x y + C^e$$

$$u_z = \alpha \theta x z + C^e$$

cas 2

$$u_x = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha \theta x^2$$

$$u_y = 0$$

$$u_z = 0$$

Maintenant si nous calculons les grandeurs effectives après un choix approprié du repère, nous obtenons (pour les notations, voir annexe A).

cas 1

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = 0, \langle \underline{\sigma} \rangle = 0, \langle \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \rangle = \alpha \theta, \langle \underline{\sigma}^{\{\otimes\}} \underline{x} \rangle = 0 \quad (\text{II.1})$$

cas 2

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = 0, \langle \underline{\sigma} \rangle = 0, \langle \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \rangle = 0, \langle \underline{\sigma}^{\{\otimes\}} \underline{x} \rangle \neq 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\text{et plus précisément } \langle \sigma_{22} x_1 \rangle = \langle \sigma_{33} x_1 \rangle = -\frac{1}{6} \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \alpha \theta L^2.$$

Au vu des équations (II.1) et (II.2), ces deux situations sont indiscernables d'un point de vue de l'homogénéisation classique. Ceci s'explique par le fait que la théorie d'homogénéisation classique ne prend en compte que le premier moment des contraintes et des déformations, à savoir la moyenne.

Par contre, si le milieu homogène de substitution est considéré comme étant un milieu du second gradient, les deux situations sont distinctes grâce à la prise en compte du second

moment.

Donc, d'après le schéma présenté par (Gologanu et al., 1996; Forest, 1999), les situations 1 et 2 pourraient respectivement être représentées à l'échelle macroscopique par

$$\underline{\tilde{E}} = 0, \underline{\tilde{\Sigma}} = 0, \underline{\tilde{K}} = \underline{\alpha} \otimes \underline{\nabla} T, \underline{\tilde{S}} = 0 \quad (\text{II.3})$$

et

$$\underline{\tilde{E}} = 0, \underline{\tilde{\Sigma}} = 0, \underline{\tilde{K}} = 0, \underline{\tilde{S}} \neq 0 \quad (\text{II.4})$$

où $\underline{\tilde{E}}$, $\underline{\tilde{\Sigma}}$, $\underline{\tilde{K}}$ et $\underline{\tilde{S}}$ sont respectivement le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes, le tenseur du gradient des déformations ($\underline{\tilde{K}} = \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla}$) (où second gradient des déplacements) et le tenseur des hypercontraintes.

Les situations précédentes sont compatibles avec une loi de comportement de la forme :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\tilde{C}} : (\underline{\tilde{\varepsilon}} - \underline{\tilde{\varepsilon}}^{th}) \text{ avec } \underline{\tilde{\varepsilon}}^{th} = \Delta T \underline{\alpha} \quad (\text{II.5})$$

et

$$\underline{\tilde{S}} = \underline{\tilde{A}} : (\underline{\tilde{K}} - \underline{\tilde{K}}^{th}) \text{ avec } \underline{\tilde{K}}^{th} = \underline{\alpha} \otimes (T \underline{\nabla}) \quad (\text{II.6})$$

où $\underline{\tilde{C}}$ et $\underline{\tilde{A}}$ sont respectivement le tenseur classique des modules d'élasticité et le tenseur des modules d'ordre supérieur. La déformation thermique $\underline{\tilde{\varepsilon}}^{th}$ et le gradient de la déformation thermique $\underline{\tilde{K}}^{th}$ sont considérés comme étant la déformation libre et le gradient de la déformation libre.

La formulation générale de ces lois de comportement va être traitée à travers les principes de la mécanique et de la thermodynamique.

Résumé

L'utilisation de l'hypothèse classique des méthodes d'homogénéisation considérant la taille de l'hétérogénéité très petite devant la longueur d'onde de sollicitation conduit à l'utilisation d'un milieu de Cauchy pour modéliser le milieu homogène équivalent. Par contre dès que les champs moyens ne sont plus lentement variables, le milieu homogène équivalent doit être considéré comme un milieu continu généralisé (Pideri et Seppecher, 1997), (Forest, 1998) (tableau II.1).

constituants	taille du VER	milieu macroscopique (MHE)
Cauchy	$l \ll L_w$	Cauchy
Cauchy	$l \lesssim L_w$	généralisé
généralisé	$l \lesssim L_w$	généralisé

Tableau II.1 : Les différentes procédures d'homogénéisation

Il y a deux classes principales de tels milieux : les milieux de degré n qui font intervenir les gradients jusqu'à l'ordre n du champ de déplacement macroscopique $\underline{U}(\underline{x})$, tandis que les milieux d'ordre n introduisent des degrés de liberté supplémentaires en plus de $\underline{U}(\underline{x})$.

L'avantage de ces milieux de degré ou d'ordre supérieurs, par rapport à l'utilisation de loi non locale sous forme intégrale, est que les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les lois de comportement linéaires associées sont bien connues.

II.2 Analyse asymptotique en isotherme

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les relations supplémentaires associées à l'introduction du gradient de déformation et du gradient de la température de manière phénoménologique dans la section précédente, peuvent se déduire de l'analyse du comportement effectif d'un matériau hétérogène soumis à un champ de déformation lentement variable. Pour simplifier, nous considérons un matériau classique hétérogène périodique dans le cas statique.

Le cas des matériaux à microstructure périodique a été abordé plus tardivement et les méthodes utilisées font appel aux développements asymptotiques à des ordres plus élevés que dans le cas classique (Suquet, 1980). (Gambin et Kröner, 1989) puis (Boutin, 1996) ont d'abord mis en évidence des contributions non locales à additionner au résultat classique d'homogénéisation périodique. Le lien avec la théorie du second gradient apparaît enfin dans (Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996) et est utilisé pour plusieurs applications (Schraad et Triantafyllidis, 1997).

II.2.1 Equations de champs à l'échelle locale

Nous considérons, comme matériau de départ, un matériau hétérogène classique dont les propriétés sont déterminées à partir d'un milieu de Cauchy.

L'objectif est de déduire les propriétés globales du milieu homogène équivalent à partir des propriétés locales.

Les variables locales et globales (ou effectives) doivent être distinguées :

$$\text{variables locales} : \quad \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{variables globales} : \quad \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{\Sigma}} \quad (\text{II.8})$$

Les équations du problème $\mathcal{P}$ à résoudre sur le matériau hétérogène sont :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{c}} : \underline{\varepsilon} \quad (\text{II.9})$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.10})$$

les conditions aux limites n'étant pas mentionnées par simplicité.

Le problème est défini sur un domaine infini et l'inconnue du problème est le champ local de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$.

II.2.2 Analyse dimensionnelle et développements asymptotiques aux ordres supérieurs

Pour simplifier, nous supposons que le matériau hétérogène admet une microstructure périodique qui peut être décrite par une cellule élémentaire Y^l de taille caractéristique l . L'échelle macroscopique est caractérisée par une longueur caractéristique L_ω qui n'est autre que la longueur de variation de sollicitation qui doit normalement être du même ordre de grandeur que la taille de la structure L (hypothèses présentées en annexe B).

L'analyse dimensionnelle, effectuée ci-dessous, détermine les paramètres impliqués dans le problème à prendre en compte dans la procédure d'homogénéisation (Pradel, 1998). Nous déterminons un espace sans dimension sur les coordonnées, les déplacements et sur des relations d'équilibre :

$$\underline{x}^* = \underline{x}/L_\omega, \quad \underline{u}^* = \underline{u}/L_\omega \quad (\text{II.11})$$

$$e(\underline{u}) = e^*(\underline{u}^*), \quad \nabla^* = L_\omega \nabla, \quad \underline{\zeta} = \bar{\zeta} \underline{\zeta}^* \quad (\text{II.12})$$

A présent nous ramenons le problème réel $\mathcal{P}$ posé sur un solide infini, au moyen de l'analyse dimensionnelle, à un problème $\mathcal{P}^*$ exprimé sur une cellule élémentaire sans dimension Y^* .

$$\underline{\sigma}^* \cdot \underline{\nabla}^* + \underline{f}^* = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma}/\bar{\zeta} = \underline{\zeta}^* : e^*(\underline{u}^*), \quad \underline{f}^* = \frac{L_\omega}{\bar{\zeta}} \underline{f} \quad (\text{II.13})$$

La grandeur caractéristique du problème est :

$$\varepsilon = \frac{l}{L_\omega} \quad (\text{II.14})$$

Par conséquent, nous définissons une série de petits problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur Y

$$Y = \{\underline{y} | \underline{y} = \underline{x}/\varepsilon, \underline{x} \in Y^l\} \quad (\text{II.15})$$

utilisant les méthodes asymptotiques utilisées en homogénéisation périodique (Suquet, 1980; Sanchez-Palencia et Zaoui, 1985).

Les équations de $\mathcal{P}_\varepsilon$ à résoudre sont les équations (II.9) et (II.10) dans lesquelles déplacement et contraintes ont été remplacés par $\underline{u}^\varepsilon$ et $\underline{\sigma}^\varepsilon$

$$\underline{\sigma}^\varepsilon = \underline{\zeta}^\varepsilon : e(\underline{u}^\varepsilon) \quad (\text{II.16})$$

$$\underline{\sigma}^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.17})$$

où le rapport ε apparaît comme un indice dans les équations et on prend

$$a^\varepsilon(\underline{y}) = a(\varepsilon \underline{y}) \quad (\text{II.18})$$

Les équations d'équilibre et les lois de comportement du milieu homogène équivalent sont obtenues dans le cas limite où ε tend vers 0 (Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992).

Le milieu étant εY périodique, nous faisons l'hypothèse que toutes les grandeurs dépendent de leur position macroscopique $\underline{x}$ et de leur position microscopique $\underline{y}$ dans Y^l . De plus le paramètre ε , étant supposé petit, nous développons chaque grandeur comme suit :

$$\underline{u}^\varepsilon(\underline{x}) = \underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon \underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^2 \underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^3 \underline{u}_3(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \quad (\text{II.19})$$

$$\underline{\sigma}^\varepsilon(\underline{x}) = \underline{\sigma}_0(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon \underline{\sigma}_1(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^2 \underline{\sigma}_2(\underline{x}, \underline{y}) + \varepsilon^3 \underline{\sigma}_3(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \quad (\text{II.20})$$

où les fonctions introduites $\underline{u}_i(\underline{x}, \underline{y})$ et $\underline{\sigma}_i(\underline{x}, \underline{y})$ sont supposées avoir des ordres de grandeurs voisins et être périodiques par rapport à la variable $\underline{y}$.

II.2.3 Etablissement des équations d'équilibre et des lois de comportement effectives

A une fonction $f^\varepsilon(\underline{x})$ nous associons la fonction $f(\underline{x}, \underline{y})$ dont nous calculons la dérivée par rapport à $\underline{x}$ de la manière suivante :

$$f^\varepsilon(\underline{x}) = f(\underline{x}, \underline{y}); \quad \frac{d}{d\underline{x}} f^\varepsilon = f \cdot \underline{\nabla}_x + 1/\varepsilon f \cdot \underline{\nabla}_y \quad (\text{II.21})$$

avec des notations évidentes.

Il en résulte que le tenseur des déformations associé est :

$$\begin{aligned} e(\underline{u}^\varepsilon) = & \varepsilon^{-1} e_y(\underline{u}_0) + e_x(\underline{u}_0) + e_y(\underline{u}_1) + \varepsilon(e_x(\underline{u}_1) + e_y(\underline{u}_2)) \\ & + \varepsilon^2(e_x(\underline{u}_2) + e_y(\underline{u}_3)) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Le calcul de la divergence des contraintes donne de même :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} = & \varepsilon^{-1} \underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_y + \underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_y + \varepsilon(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_y) \\ & + \varepsilon^2(\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_3 \cdot \underline{\nabla}_y) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

L'identification des termes de même ordre dans les équations précédentes conduit aux équations suivantes :

ordre -1

$$e_y(\underline{u}_0) = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.25})$$

ordre 0

$$\underline{\sigma}_0 = \underline{\xi}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_0) + e_y(\underline{u}_1)) \quad (\text{II.26})$$

$$\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_y + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.27})$$

ordre 1

$$\underline{\sigma}_1 = \underline{\xi}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_1) + e_y(\underline{u}_2)) \quad (\text{II.28})$$

$$\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.29})$$

ordre 2

$$\underline{\sigma}_2 = \underline{\xi}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_2) + e_y(\underline{u}_3)) \quad (\text{II.30})$$

$$\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_3 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.31})$$

L'équation (II.24) implique que, les champs étant périodiques en $\underline{y}$:

$$\underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_0(\underline{x}) \quad (\text{II.32})$$

Nous considérons alors les problèmes auxiliaires suivants sur la cellule élémentaire :

problème $\mathcal{A}_0$

$$e_y(\underline{u}_0) = 0 \quad (\text{II.33})$$

problème $\mathcal{A}_1$

$$\underline{\sigma}_0 = \underline{\xi}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_0) + e_y(\underline{u}_1)) \quad (\text{II.34})$$

$$\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.35})$$

problème $\mathcal{A}_2$

$$\underline{\sigma}_1 = \underline{\zeta}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_1) + e_y(\underline{u}_2)) \quad (\text{II.36})$$

$$\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_y + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.37})$$

problème $\mathcal{A}_3$

$$\underline{\sigma}_2 = \underline{\zeta}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_2) + e_y(\underline{u}_3)) \quad (\text{II.38})$$

$$\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.39})$$

Les solutions des problèmes $\mathcal{A}_i$ sont le champ de déplacement $\underline{u}_i$ et le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}_{i-1}$ pour $i > 0$.

problème $\mathcal{A}_1$

Le problème $\mathcal{A}_1$ est classique et dépend linéairement de $e_x(\underline{U}_0)$ de sorte qu'il existe un tenseur de localisation pris de moyenne nulle et une translation $\underline{U}_1(\underline{x})$ telle que :

$$\underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_1(\underline{x}) + \underline{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) \quad (\text{II.40})$$

La solution est telle que $\langle e_y(\underline{u}_1) \rangle = 0$.

Connaissant le champ de déplacement nous calculons les champs locaux

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_0 &= \underline{\zeta}^\varepsilon : \left(e_x(\underline{U}_0) + \underline{\hat{X}} : e_x(\underline{U}_0) \right) \\ &= \underline{\zeta}^\varepsilon : \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}} \right) : e_x(\underline{U}_0) \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

où $\underline{\hat{X}} = \underline{X}(\underline{y}) \cdot \underline{\nabla}_y^s$ avec $\underline{\nabla}_y^s$ désignant le gradient symétrisé.

Le champ de contrainte effective est déterminé en effectuant la moyenne de la contrainte locale sur la cellule élémentaire.

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \underline{\sigma}^\varepsilon \rangle_y = \langle \underline{\sigma}_0 \rangle \\ &= \langle \underline{\zeta} : \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}} \right) : e_x(\underline{U}_0) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

où le terme $\langle . \rangle$ signifie la moyenne sur la cellule élémentaire.

Nous retrouvons les résultats classiques en homogénéisation périodiques.

A présent nous supposons que les champs macroscopiques ne sont plus constants mais lentement variables. De ce fait, nous allons prendre en compte les termes correctifs en résolvant les problèmes d'ordre supérieur.

problème $\mathcal{A}_2$

La résolution du problème $\mathcal{A}_2$ se fait en deux étapes (Boutin, 1996). Nous considérons le cas particulier pour lequel les forces de volume ont la forme :

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = \rho(\underline{y}) \underline{f}_0(\underline{x}) \quad (\text{II.43})$$

Nous calculons alors la moyenne volumique sur la cellule de base de l'équation (II.27) :

$$\langle \underline{\sigma}_0 \rangle_y \cdot \underline{\nabla}_x + \langle \underline{f} \rangle_y = 0 \quad (\text{II.44})$$

de sorte que nous pouvons éliminer $\underline{f}_0$:

$$\langle \rho \rangle \underline{f}_0 = -(\underline{C}_0 : e_x(\underline{U}_0)) \cdot \underline{\nabla}_x \quad \text{avec} \quad \underline{C}_0 = \langle \underline{\xi} : \hat{\underline{X}} \rangle_y \quad (\text{II.45})$$

Nous substituons alors $\underline{f}_0$ et $\underline{u}_1$ dans (II.27), ce qui se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\xi} : e_y(\underline{u}_2) \right) \cdot \underline{\nabla}_y + \left(\underline{\xi} : e_x(\underline{X} : e_x(\underline{U}_0)) \right) \cdot \underline{\nabla}_y + \left(\underline{\xi} : e_x(\underline{U}_1) \right) \cdot \underline{\nabla}_y \\ & = - \left(\underline{\xi} : e_x(\underline{U}_0) \right) \cdot \underline{\nabla}_x + \beta \left(\underline{C}_0 : e_x(\underline{U}_0) \right) \cdot \underline{\nabla}_x \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

où $\beta = \rho / \langle \rho \rangle_y$.

Le problème se ramène donc à un problème d'élasticité hétérogène périodique avec des forces fictives. Seul le champ de déplacement $\underline{u}$ est inconnu. Nous remarquons qu'il est linéaire en $e_x(\underline{U}_0)$ et en $e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x$. Lorsque $e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x$ est nul, l'équation restante est la même que pour le problème $\mathcal{A}_1$.

De ce fait la solution peut se mettre sous la forme :

$$\underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_2(\underline{x}) + \underline{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_1) + \underline{Y}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) \quad (\text{II.47})$$

problème $\mathcal{A}_3$

Le problème $\mathcal{A}_3$ se résout de manière analogue et nous obtenons :

$$\underline{u}_3(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_3(\underline{x}) + \underline{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_2) + \underline{Y}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_1) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{Z}(\underline{y}) :: (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \quad (\text{II.48})$$

Les tenseurs de localisation sont pris à moyenne nulle. En fixant les translations telles que $\langle \underline{u}^e(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_y = \underline{U}_0(\underline{x}) + \varepsilon \underline{U}_1(\underline{x}) + \varepsilon^2 \underline{U}_2(\underline{x}) + \dots$, la solution se simplifie en :

$$\underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_0(\underline{x}) + \underline{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{Y}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{Z}(\underline{y}) :: (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \quad (\text{II.49})$$

Nous remarquons que les contributions non locales font intervenir les premier et second gradient des déformations globales.

forme de la loi de comportement effective

Nous pouvons maintenant calculer la déformation du milieu :

$$\begin{aligned} \underline{e}(\underline{u}^e) &= e_x(\underline{U}_0) + \hat{\underline{X}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) \\ &+ \varepsilon \left(\underline{X}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \hat{\underline{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\underline{Y}(\underline{y}) :: (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \hat{\underline{Z}}(\underline{y}) :: (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Nous remarquons en passant que

$$\langle e(\underline{u}) \rangle_y = e_x(\underline{U}^0) \quad (\text{II.51})$$

c'est-à-dire que la moyenne des déformations locales est égale à la déformation associée au déplacement moyen. Nous voyons alors que la loi de comportement (II.9) conduit à une loi de comportement effective de la forme :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_y = \underline{C}^0 : \underline{e}_x(\underline{U}_0) + \varepsilon \underline{C}^1 : (\underline{e}_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \varepsilon^2 \underline{C}^2 :: (\underline{e}_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \dots \quad (\text{II.52})$$

où

$$\underline{C}^1 = \langle \underline{c} : \underline{X} + \underline{c} : \underline{\hat{Y}} \rangle_y, \quad \underline{C}^2 = \langle \underline{c} : \underline{Y} + \underline{c} : \underline{\hat{Z}} \rangle_y$$

A noter que les différents tenseurs $\underline{C}^0$, $\underline{C}^1$ et $\varepsilon^2 \underline{C}^2$ se calculent indépendamment de ε .

forme de l'équation d'équilibre globale

Nous remarquons que, en passant à la moyenne :

$$\langle \underline{\sigma}^0 \rangle_y \cdot \underline{\nabla}_x + \langle \underline{f} \rangle = 0, \quad \langle \underline{\sigma}^1 \rangle \cdot \underline{\nabla}_x = 0, \quad \langle \underline{\sigma}^2 \rangle \cdot \underline{\nabla}_x = 0 \quad (\text{II.53})$$

où l'équation (II.31) a finalement été utilisée.

Il s'ensuit que

$$\underline{\tau} \cdot \underline{\nabla} + \langle \underline{f} \rangle_y = 0, \quad \text{avec} \quad \underline{\tau}(\underline{x}) = \langle \underline{\sigma}^0 + \varepsilon \underline{\sigma}^1 + \varepsilon^2 \underline{\sigma}^2 \rangle_y. \quad (\text{II.54})$$

II.2.4 Lien avec la théorie du second gradient

Les éléments de mécanique des milieux continus de degré 2 présentés dans (Germain, 1973) sont introduits en annexe D.

La relation II.54 implique que le tenseur des contraintes effectives $\underline{\sigma}$ n'est pas défini comme un tenseur des contraintes de Cauchy mais plutôt comme le tenseur des contraintes $\underline{\tau}$ d'un milieu du second gradient défini par l'équation (D.16).

Les lois d'élasticité pour un milieu du second gradient s'écrivent :

$$\underline{\sigma} = \underline{c} : \underline{\varepsilon} + \underline{c}' : \underline{\underline{K}} \quad (\text{II.55})$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{c}'^T : \underline{\varepsilon} + \underline{C} : \underline{\underline{K}} \quad (\text{II.56})$$

où $\underline{\underline{K}}$ désigne le gradient de $\underline{\varepsilon}$.

$$\underline{\underline{K}} = \underline{E} \otimes \underline{\nabla} \quad (\text{II.57})$$

Nous pouvons aussi exprimer la loi de comportement comme une relation liant les contraintes effectives $\underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\nabla}$ (équation D.16) aux déformations et à leurs gradients. On voit qu'elle est de la forme :

$$\underline{\tau} = \underline{c} : \underline{\varepsilon} + \underline{c}'' : \underline{\underline{K}} + \underline{C}'' :: (\underline{\underline{K}} \otimes \underline{\nabla}) \quad (\text{II.58})$$

en supposant l'élasticité homogène.

Nous reconnaissons la forme (II.52) obtenue par analyse asymptotique. Il apparaît donc que la méthode d'homogénéisation précédente ne permet pas de distinguer les hypercontraintes

des force-contraintes. Cette distinction joue un rôle essentiel lors de l'application des conditions aux limites sur une structure constituée d'un matériau du second gradient. Il est clair que l'approche d'homogénéisation proposée s'intéresse avant tout au solide infini. La prise en compte des effets de bords est un problème délicat (Dumontet, 1990).

Remarque

Lorsque le groupe des symétries du milieu du second gradient contient la symétrie centrale, le terme de couplage $\underline{\underline{c}}'$ est nul, et c'est la formulation de l'élasticité sans couplage qui est la plus communément utilisée. De même, (Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996) montrent que le tenseur correspondant $\underline{\underline{C}}^1$ est nul dès que la cellule admet un centre de symétrie tel que

$$\underline{\underline{c}}(\underline{y}) = \underline{\underline{c}}(-\underline{y}) \quad (\text{II.59})$$

Nous vérifions en effet qu'alors :

$$\underline{\underline{X}}(\underline{y}) = -\underline{\underline{X}}(-\underline{y}), \quad \underline{\underline{Y}}(\underline{y}) = \underline{\underline{Y}}(-\underline{y}), \quad \underline{\underline{Z}}(\underline{y}) = -\underline{\underline{Z}}(-\underline{y}). \quad (\text{II.60})$$

II.3 Thermoélasticité du second gradient

Nous venons de voir que lorsque les champs ne sont plus constants mais lentement variables, la loi de comportement effective est définie par un milieu du second gradient. Dans notre étude le chargement est anisotherme et afin de connaître la forme d'une loi thermoélastique du second gradient nous appliquons successivement la méthode des puissances virtuelles, le premier et le second principe de la thermodynamique dans le cas d'un solide thermoélastique du second gradient. Une telle formulation ne semble pas avoir été proposée antérieurement à (Cardona et al., 1999b).

II.3.1 Principe des puissances virtuelles

La méthode des puissances virtuelles est un outil qui permet de dériver les lois d'équilibre et les conditions aux limites que tout champ inconnu doit remplir sur un domaine Ω (annexe D). La frontière $\partial\Omega$ est supposée au moins deux fois continûment dérivable, ce qui permet qu'en chaque point il y ait une normale $\underline{n}$ et une courbure moyenne R . La présence d'arêtes et de coins devra être traitée comme dans (Germain, 1973).

D'après (Maugin, 1980), la première étape consiste à définir l'espace des mouvements virtuels nécessaire pour la description du milieu Ω . Les degrés de liberté pour un milieu thermoélastique du second gradient sont le déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t)$ et la température $T(\underline{x}, t)$. De ce fait nous avons comme espace des mouvements virtuels

$$\mathfrak{v}^\circ = \{\underline{\dot{u}}, \dot{T}\} \quad (\text{II.61})$$

La variation de température est ajoutée aux variables de vitesses habituelles afin de généraliser la loi et parce que nous voulons également considérer la variable transitoire $\dot{T}$ comme un degré de liberté. De ce fait nous étendons l'espace des mouvements virtuels à

$$\mathfrak{v} = \{\underline{\dot{u}}, \underline{\dot{u}} \otimes \underline{\nabla}, \underline{\dot{u}} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}, \dot{T}, \dot{T} \underline{\nabla}\} \quad (\text{II.62})$$

où les vitesses virtuelles sont supposées être continues et au moins deux fois continûment dérivables et la variation de température continue et continûment dérivable.

Remarque

L'espace des mouvements virtuels a seulement été complété par la paire $\{\dot{T}, \dot{T}\underline{\nabla}\}$ par rapport à la théorie du second gradient introduite par (Germain, 1973) (annexe D).

a) La puissance des efforts intérieurs, $\mathcal{P}^{(i)}$

La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs s'exprime à l'aide d'une forme linéaire dans l'espace des mouvements virtuels $\mathfrak{D}$ (Cardona et al., 1999b).

$$p^{(i)} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\xi}} + \underline{S} : \underline{\dot{K}} + a^{(i)} \dot{T} + \underline{b}^{(i)} \cdot (\dot{T} \underline{\nabla}) \quad (\text{II.63})$$

Et l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\mathcal{P}^{(i)}$ s'exprime à l'aide d'une intégrale de volume sur le domaine $\mathcal{D} \subset \Omega$

$$\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} [\underline{\sigma} : \underline{\dot{\xi}} + \underline{S} : \underline{\dot{K}} + a^{(i)} \dot{T} + \underline{b}^{(i)} \cdot T \underline{\nabla}] dV \quad (\text{II.64})$$

où $\underline{\dot{\xi}}$ est la partie symétrique du gradient des vitesses et $\underline{K} = \underline{\xi} \otimes \underline{\nabla}$ (annexe D).

Dans l'expression (II.64), nous avons déjà considéré l'axiome des puissances virtuelles des efforts intérieurs. Les quantités duales du champ de déformation et du gradient du champ de déformation sont la partie symétrique du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et le tenseur des hypercontraintes $\underline{S}$ ($S_{ijk} = S_{jik}$).

Deux nouvelles quantités duales ont également été introduites $d^{(i)}$ et $\underline{b}^{(i)}$. La pure partie mécanique de la densité des efforts intérieurs a été complétée par une contribution thermique représentant la partie dissipative (en opposition à la partie calorifique) du travail.

Maintenant nous allons utiliser, toujours comme dans le cas de la théorie du second gradient en annexe D, le théorème de Gauss sur l'expression (II.64) afin d'écrire $\mathcal{P}^{(i)}$ sous une forme canonique adéquate pour pouvoir appliquer le principe des puissances virtuelles.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)}(\underline{\dot{u}}, \dot{T}) &= \int_{\mathcal{D}} \left(- \left((\underline{\sigma} - \underline{S} \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla} \right) \cdot \underline{\dot{u}} + (a^{(i)} - \underline{b}^{(i)} \cdot \underline{\nabla}) \dot{T} \right) dV \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\left((\underline{\sigma} - \underline{S} \underline{\nabla}) \cdot \underline{n} \right) \cdot \underline{\dot{u}} + (\underline{S} \cdot \underline{n}) : (\underline{\dot{u}} \otimes \underline{\nabla}) + \underline{b}^{(i)} \cdot \underline{n} \dot{T} \right) dS \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{(i)} &= + \int_{\mathcal{D}} [(\sigma_{ij,j} - S_{ijk,kj}) \dot{u}_i - (a^{(i)} - b_{i,i}^i) \dot{T}] dV \\ &+ \int_{\partial \mathcal{D}} [(-\sigma_{ij} + S_{ijk,k}) n_j \dot{u}_i - S_{ijk} n_k \dot{u}_{i,j} - b_i^i n_i \dot{T}] dS) \end{aligned}$$

Et en appliquant le théorème de la divergence pour la surface au niveau du dernier terme nous obtenons l'expression finale (annexe D) :

$$\mathcal{P}^{(i)}(\underline{\dot{u}}, \dot{T}) = \int_{\mathcal{D}} \left(- \left((\underline{\sigma} - \underline{S} \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla} \right) \cdot \underline{\dot{u}} + (a^{(i)} - \underline{b}^{(i)} \cdot \underline{\nabla}) \dot{T} \right) dV$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\partial\mathcal{D}} \left(\left((\underline{\sigma} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{n} + 2R\underline{\underline{S}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - D_t (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{n}) \right) \cdot \underline{\dot{u}} \right. \\
& \left. + \left(\underline{\underline{S}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \right) \cdot D_n \underline{\dot{u}} + \underline{b}^{(i)} \cdot \underline{n} \dot{T} \right) dS
\end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

où D_n et D_t représentent respectivement l'opérateur de dérivation normale et l'opérateur de dérivation tangentielle (II.67).

$$\underline{u} \otimes \underline{\nabla} = D_n \underline{u} + D_t \underline{u} \quad \text{avec} \quad D_n \underline{u} = (\underline{u} \otimes \underline{\nabla}) \cdot \underline{n} \quad (\text{II.67})$$

b) La puissance des efforts extérieurs à distance, $\mathcal{P}^{(d)}$

Dans sa forme la plus générale, la puissance virtuelle des efforts extérieurs à distance $\mathcal{P}^{(d)}$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{D}$.

$$\mathcal{P}^{(d)} = \int_{\mathcal{D}} [\underline{f} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{\underline{C}} : \underline{\dot{\omega}} + \underline{F} : \underline{\dot{\xi}} + \underline{\underline{L}} : \underline{\dot{K}} + a^{(d)} \dot{T} + \underline{b}^{(d)} \cdot T \underline{\nabla}] dV \quad (\text{II.68})$$

où $\underline{\omega}$ est la partie anti-symétrique du tenseur des déformations.

Nous introduisons à ce niveau de nouvelles quantités duales telles que :

- un champ de forces volumiques défini par la densité $\underline{f}$ (vecteur)
- un champ de doubles couples volumiques défini par la densité $\underline{\underline{C}}$ (tenseur antisymétrique $C_{ij} = -C_{ji}$)
- un champ de doubles forces volumiques défini par la densité $\underline{F}$ (tenseur symétrique $F_{ij} = F_{ji}$)
- un champ de triples forces volumiques défini par la densité $\underline{\underline{L}}$ (tenseur symétrique $L_{ijk} = L_{jik}$) qui peut être ajouté pour un milieu du second gradient
- et les quantités $a^{(d)}$ et $\underline{b}^{(d)}$.

Puis, en effectuant les mêmes intégrations et les mêmes hypothèses, nous transformons l'équation (II.68) en une intégrale de volume et une intégrale de surface comme dans l'équation (II.66).

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(d)} &= \int_{\mathcal{D}} \left(- \left((\underline{f} - \underline{\underline{C}} - \underline{F} + \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla} \right) \cdot \underline{\dot{u}} + (a^{(d)} - \underline{b}^{(d)} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \dot{T} \right) dV \\
&+ \int_{\partial\mathcal{D}} \left(\left((\underline{\underline{C}} + \underline{F} - \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{n} + 2R\underline{\underline{L}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - D_t (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{n}) \right) \cdot \underline{\dot{u}} \right. \\
&\left. + \left(\underline{\underline{L}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \right) \cdot D_n \underline{\dot{u}} + \underline{b}^{(d)} \cdot \underline{n} \dot{T} \right) dS
\end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

c) La puissance des efforts extérieurs de contact, $\mathcal{P}^{(c)}$

La forme appropriée pour la puissance virtuelle des forces de contact est dictée par l'observation des termes apparaissant dans l'intégrale de volume des équations (II.66) ou (II.69).

$$\mathcal{P}^{(c)} = \int_{\partial\mathcal{D}} [\underline{T} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{M} : D_n \underline{\dot{u}} + a^{(c)} \dot{T}] dS \quad (\text{II.70})$$

Les efforts extérieurs de contact $\mathcal{P}^{(c)}$ sont représentés à l'aide :

- d'une densité surfacique de forces $\underline{T}$ (vecteur contrainte en tout point de $\partial\mathcal{D}$ et normal à $\partial\mathcal{D}$)
- d'une densité scalaire de doubles forces surfaciques normales $\underline{M}$
- de la quantité duale de $\dot{T}$, le scalaire $a^{(c)}$.

d) Application du principe des puissances virtuelles

Nous appliquons maintenant le principe des puissances virtuelles, établi en annexe D (D.1), en tenant compte de (II.66), (II.69) et (II.70) et nous obtenons, dans le cas statique, l'équation suivante :

$$\mathcal{P}^{(d)} + \mathcal{P}^{(c)} + \mathcal{P}^{(i)} = 0$$

Nous en déduisons les équations d'équilibre suivantes :

$$\underline{f} + \underline{\tau} \cdot \underline{\nabla} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{C} - \underline{F} - \underline{S} \cdot \underline{\nabla} + \underline{L} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.71})$$

$$(f_i + \tau_{ij,j} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - C_{ij} - F_{ij} - S_{ijk,k} + L_{ijk,k})$$

$$\underline{b} \cdot \underline{\nabla} - a = 0 \quad \text{avec} \quad a = a^{(i)} - a^{(e)} \quad \text{et} \quad \underline{b} = \underline{b}^{(i)} - \underline{b}^{(e)} \quad (\text{II.72})$$

$$(b_{i,i} - a = 0 \quad \text{avec} \quad a = a^{(i)} - a^{(e)} \quad \text{et} \quad b_i = b_i^{(i)} - b_i^{(e)})$$

Les conditions aux limites associées sont aussi obtenues :

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \underline{\tau} \cdot \underline{n} + 2R(\underline{S} - \underline{L}) : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - D_t((\underline{S} - \underline{L}) \cdot \underline{n}) \\ T_i &= \tau_{ij} n_j + 2R(S_{ijk} - L_{ijk}) n_j n_k - D_j(S_{ijk} - L_{ijk}) n_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{M} &= (\underline{S} - \underline{L}) : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ M_i &= (S_{ijk} - L_{ijk}) n_j n_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{(c)} &= \underline{b} \cdot \underline{n} \\ a_i^{(c)} &= b_i \cdot n_i \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

On peut noter que, dans le cas classique, $\underline{S}$ et $\underline{b}^{(i)}$ ne sont pas introduits (Maugin et Muschik, 1994). Dans le principe, le terme $a^{(i)} \dot{T}$ pourrait être introduit dans la densité des puissances virtuelles des efforts intérieurs, mais les quantités $a^{(e)}$ et $\underline{b}^{(e)}$ n'étant normalement pas introduites dans le cas classique, le terme $a^{(i)}$ ne serait pas contrebalancé lors de l'écriture du principe des puissances virtuelles. Et de cette façon, nous retrouvons la forme classique. Ces résultats préconisent la plausible introduction du gradient de température $\dot{T}$ comme un mouvement virtuel généralisé, même dans le cas classique, afin d'établir une expression anisotherme généralisée du principe des puissances virtuelles.

De la même manière, les énoncés fondamentaux de la thermodynamique vont prendre une forme généralisée. Dans la section suivante nous verrons différentes formulations possibles définissant les lois de la thermoélasticité.

II.3.2 Premier principe de la thermodynamique

Nous avons montré en annexe D que l'énergie pouvait s'exprimer en fonction de la puissance virtuelle des efforts intérieurs et de la chaleur reçue.

$$\frac{d}{dt}E = -\mathcal{P}^{(i)} + Q$$

avec E l'énergie interne.

Ici nous avons pris comme hypothèse de conserver la puissance virtuelle des efforts intérieurs comme étant une forme linéaire sur $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire de toutes ses variables d'état ($\underline{\varepsilon}$, $\underline{\nabla}$, T , $T\underline{\nabla}$).

$$\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} [\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{K}}} + a^{(i)} \dot{T} + \underline{b}^{(i)} \cdot \dot{T\underline{\nabla}}] dV$$

De ce fait, nous obtenons la forme locale de la loi de conservation de l'énergie

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{K}}} + a^{(i)} \dot{T} + \underline{b}^{(i)} \cdot \dot{T\underline{\nabla}} + r - \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.74})$$

$$\left(\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk} + a^{(i)} \dot{T} + b_i^{(i)} \dot{T}_{,i} + r - q_{i,i} \right)$$

avec e l'énergie interne spécifique

$\underline{q}$ le vecteur flux de chaleur

r la densité de production interne de chaleur.

II.3.3 Deuxième principe de la thermodynamique

Le second principe postule que le taux de production d'entropie S est toujours supérieur ou égal au flux total de chaleur N :

$$\dot{S} \geq N$$

Nous introduisons la densité d'énergie spécifique η ($\underline{\varepsilon}$, $\underline{\underline{K}}$, T , $T\underline{\nabla}$) et nous supposons que :

$$S = \int_{\Omega} \rho \eta dV \text{ et } N = - \int_{\partial\Omega} \underline{\Phi} \cdot \underline{n} dS + \int_{\Omega} \frac{r}{T} dV \quad (\text{II.75})$$

Le vecteur flux d'entropie $\underline{\Phi}$ est pris tel que $\underline{\Phi} = \frac{\underline{q}}{T}$.

De cette manière, nous écrivons la forme locale du deuxième principe de la thermodynamique sous la forme (annexe D) :

$$\rho \dot{\eta} + \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) \cdot \underline{\nabla} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (\text{II.76})$$

Puis, en combinant les équations (II.74) et (II.76), nous obtenons l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\rho (T \dot{\eta} - \dot{e}) + \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{K}}} + a^{(i)} \dot{T} + \underline{b}^{(i)} \cdot (\dot{T\underline{\nabla}}) - \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) \cdot (T\underline{\nabla}) \geq 0 \quad (\text{II.77})$$

$$\left(\rho (T \dot{\eta} - \dot{e}) + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk} + a^{(i)} \dot{T} + b_i^{(i)} \dot{T}_{,i} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \geq 0 \right)$$

Maintenant nous introduisons l'énergie libre spécifique $\psi = e - T\eta$ et nous obtenons :

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{K}}} - \rho \dot{\psi} + (a^{(i)} - \rho \eta) \dot{T} + \underline{b}^{(i)} \cdot \dot{T} \underline{\nabla} - \frac{q}{T} \cdot T \underline{\nabla} \geq 0 \quad (\text{II.78})$$

Nous retrouvons une équation similaire à celle obtenue en annexe D avec des termes en plus dus à $\dot{T}$.

Afin de déterminer les lois d'état, nous supposons que le potentiel thermodynamique dépend des variables d'état donc dans ce cas l'énergie libre est fonction de quatre variables $(\underline{\varepsilon}, \underline{\underline{K}}, T, T \underline{\nabla})$.

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\underline{K}}, T, T \underline{\nabla}) \quad (\text{II.79})$$

donc

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}} : \dot{\underline{\underline{K}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial T \underline{\nabla}} \cdot \dot{T} \underline{\nabla}$$

et l'inégalité de Clausius peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} (\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}) : \dot{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{S}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}}) : \dot{\underline{\underline{K}}} + (a^{(i)} - \rho \eta - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \\ + (\underline{b}^{(i)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T \underline{\nabla}}) \cdot \dot{T} \underline{\nabla} - \frac{q}{T} \cdot T \underline{\nabla} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

$$\begin{aligned} ((\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}}) \dot{u}_{i,j} + (S_{ijk} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,jk}}) \dot{u}_{i,jk} + (a^{(i)} - \rho \eta - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \\ + (b_i^{(i)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T_i}) \cdot \dot{T}_i - \frac{q_i}{T} T_i \geq 0) \end{aligned}$$

Cette formulation peut être décomposée en une dissipation thermique

$$D_{th} = \frac{q}{T} \cdot T \underline{\nabla} \quad (\text{II.81})$$

et une dissipation intrinsèque :

$$\begin{aligned} D = (\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}) : \dot{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{S}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}}) : \dot{\underline{\underline{K}}} \\ + (a^{(i)} - \rho \eta - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} + (\underline{b}^{(i)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T \underline{\nabla}}) \cdot \dot{T} \underline{\nabla} \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

Les variables $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\underline{K}}$, T et $T \underline{\nabla}$ étant indépendantes et en supposant une régularité suffisante des quantités introduites, nous obtenons les lois d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}}) \\ \underline{\underline{S}} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}} \quad (S_{ijk} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,jk}}) \\ \underline{b}^{(i)} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial T \underline{\nabla}} \quad (b_i^{(i)} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial T_i}) \\ \rho \eta &= - \frac{\partial \psi}{\partial T} + a^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

Les énoncés fondamentaux de la thermodynamique conduisent à l'écriture des lois de comportement d'un milieu thermoélastique du second gradient. Si nous comparons cette formulation à la formulation classique développée par (Mindlin et Eshel, 1968) et (Germain, 1973), nous remarquons que l'introduction de $T\underline{\nabla}$ permet de généraliser le modèle.

L'expression classique de l'entropie (II.83) est modifiée par le terme $d^{(i)}$ qui, d'après les équations d'équilibre (II.72), n'est rien d'autre que la divergence de la force thermodynamique généralisée $\underline{b}$ associée au gradient de température.

II.3.4 L'équation de la chaleur

L'objectif de cette section est de montrer que le type et l'ordre de l'équation aux dérivées partielles en T , aussi appelée équation de la chaleur, ne sont pas modifiés par les précédents résultats.

Si nous prenons en compte les lois d'état (II.83), alors la loi de conservation de l'énergie (II.74) peut se mettre sous la même forme que dans la théorie classique (annexe D) :

$$-\underline{q} \cdot \underline{\nabla} + r = \rho T \dot{\eta} \quad (\text{II.84})$$

dans laquelle nous substituons la relation

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} + \frac{1}{\rho} a^{(i)} \quad (\text{II.85})$$

L'expression étendue de l'équation de la chaleur peut alors se lire :

$$\begin{aligned} -\underline{q} \cdot \underline{\nabla} + r = & \rho \left(-T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial a^{(i)}}{\partial T} \right) \dot{T} + \left(-T \frac{\partial \underline{b}^{(i)}}{\partial T} + T \frac{\partial a^{(i)}}{\partial (T\underline{\nabla})} \right) \cdot \dot{T} \underline{\nabla} \\ & + T \left(-\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} + \frac{\partial a^{(i)}}{\partial \underline{\varepsilon}} \right) : \dot{\underline{\varepsilon}} + T \left(-\frac{\partial \underline{S}}{\partial T} + \frac{\partial a^{(i)}}{\partial \underline{K}} \right) : \dot{\underline{K}} \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

où la chaleur spécifique généralisée est définie par :

$$C = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + \frac{T}{\rho} \frac{\partial a^{(i)}}{\partial T} \quad (\text{II.87})$$

La loi de Fourier $\underline{q} = -\underline{\kappa} \cdot T\underline{\nabla}$ peut encore être appliquée. De cette manière, l'inégalité de dissipation est identiquement satisfaite. Et il reste une équation différentielle partielle d'ordre 2 avec un nouveau terme en $\dot{T} \underline{\nabla}$.

II.3.5 Formulations alternatives

Nous pouvons formuler autrement la thermodynamique de la thermoélasticité d'un milieu du second gradient. Le point commun de ces méthodes est d'éviter l'introduction de termes additionnels dans la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs (équation II.63) et donc de leur donner une signification différente.

a) Un concept basé sur le “travail interstitiel”

La formulation thermodynamique, proposée par (Dunn et Serrin, 1985), a été invoquée afin d'introduire des gradients d'ordre supérieurs dans les lois de comportement sans faire référence aux travaux de (Mindlin et Eshel, 1968) et de (Germain, 1973). Ces auteurs (Dunn et Serrin, 1985) modifient la loi de conservation de l'énergie.

La faiblesse de cette méthode, en comparaison à (Mindlin et Eshel, 1968), (Germain, 1973), (Dell'isola et Seppecher, 1995) ou (Trostel, 1985), est qu'elle ne conduit pas explicitement à la formulation de conditions aux limites. En réalité, l'objectif de cette formulation est de conserver un problème avec des conditions aux limites classiques et des travaux récents suivent cette voie (Faciou, 1998).

De notre point de vue, une telle formulation n'est déjà pas appropriée dans le cas d'un milieu du second gradient isotherme. Mais nous allons appliquer cette technique pour introduire $T \nabla$, ce qui n'a pas été fait dans (Dunn et Serrin, 1985).

La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs est définie cette fois-ci par :

$$p^{(i)} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} \quad (\text{II.88})$$

Comme dans (Dunn et Serrin, 1985), nous ajoutons un terme $\underline{w}$ au niveau de la loi de conservation de l'énergie. De cette manière, la forme locale peut se mettre sous la forme :

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} + r - \underline{q} \cdot \underline{\nabla} + \underline{w} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.89})$$

Et si nous prenons $\underline{w} = \dot{T} \underline{b}$, nous obtenons

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} + \dot{T} \underline{b} \cdot \underline{\nabla} + \underline{b} \cdot \dot{T} \underline{\nabla} + r - \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.90})$$

ce qui correspond exactement à l'expression (II.74) où il est rappelé que $d^{(i)} = \underline{b} \cdot \underline{\nabla}$ (relation (II.72) obtenue lors de l'application du principe des puissances virtuelles).

Apparemment cette formulation conduit aux mêmes résultats que la théorie que nous proposons. Cependant trois différences peuvent être notées : le choix de $\underline{w} = \dot{T} \underline{b}$ n'est pas clair, la nouvelle condition aux limites ne dérive pas explicitement et la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs reste inchangée.

b) T , degré de liberté ou variable interne ?

(Maugin, 1990) propose un formalisme général pour l'introduction de variables internes et de leurs gradients dans le formalisme de la thermodynamique. Dans cette section nous suivons le schéma proposé et considérons T comme une variable interne.

Nous conservons la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs inchangée :

$$p^{(i)} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} \quad (\text{II.91})$$

La modification intervient au niveau du second principe de la thermodynamique. Il s'exprime toujours de la même manière

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} \rho \eta \, dV \quad \text{et} \quad N = - \int_{\partial\Omega} \underline{\Phi} \cdot \underline{n} \, dS + \int_{\Omega} \frac{r}{T} \, dV \quad (\text{II.92})$$

mais la relation existant entre le vecteur flux d'entropie $\underline{\Phi}$ et le vecteur flux de chaleur $\underline{q}$ est considérée comme une relation constitutive (Müller, 1985) de la forme

$$\underline{\Phi} = \frac{\underline{q}}{T} + \underline{k} \quad (\text{II.93})$$

où $\underline{k}$ est un flux d'entropie supplémentaire à déterminer.

A ce niveau là, l'entropie est introduite de manière automatique et, par conséquent, sans réelle caractérisation par rapport au flux initial ($\underline{q}/T$ est connu mais pas $\underline{k}$).

La forme locale du second principe peut s'écrire :

$$\rho \dot{\eta} + \underline{\Phi} \cdot \underline{\nabla} \geq 0 \quad (\text{II.94})$$

La conservation de l'énergie restant inchangée avec une énergie libre définie maintenant par une entropie non clairement identifiée, l'inégalité de Clausius-Duhem devient

$$-\rho (\dot{\psi} + \eta \dot{T}) + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} + \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{K}} + (\underline{k}T) \cdot \underline{\nabla} - \underline{\Phi} \cdot (T \underline{\nabla}) \geq 0 \quad (\text{II.95})$$

Et supposant que l'énergie libre soit toujours fonction de $(\underline{\varepsilon}, \underline{K}, T, T \underline{\nabla})$, sa forme dérivée peut se mettre sous la forme

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} : \underline{\dot{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}} : \underline{\dot{K}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial (T \underline{\nabla})} \cdot \underline{\nabla} \right) \dot{T} + \left(\dot{T} \frac{\partial \psi}{\partial (T \underline{\nabla})} \right) \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.96})$$

donnant la relation

$$\begin{aligned} (\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}) : \underline{\dot{\varepsilon}} &+ (\underline{\underline{S}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}}) : \underline{\dot{K}} + (\underline{b} \cdot \underline{\nabla} - \rho \eta - \rho \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \\ &+ (\underline{k}T - \dot{T} \underline{b}) \cdot \underline{\nabla} - \underline{\Phi} \cdot (T \underline{\nabla}) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

où $\underline{b} = \rho \partial \psi / \partial (T \underline{\nabla})$.

A ce niveau, nous choisissons le flux d'entropie supplémentaire $\underline{k}$

$$\underline{k} = \frac{\dot{T}}{T} \underline{b} \quad (\text{II.98})$$

et nous déterminons les lois d'état

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} ; \underline{\underline{S}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}} ; \rho \eta = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial T} + \underline{b} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.99})$$

qui sont identiques à celles obtenues précédemment (égalités II.83).

L'équation de la chaleur prend alors la forme

$$-\underline{q} \cdot \underline{\nabla} = (\dot{T} \underline{b}) \cdot \underline{\nabla} + \rho T \dot{\eta} \quad \text{i.e.} \quad -(T \underline{\Phi}) \cdot \underline{\nabla} = \rho T \dot{\eta} \quad (\text{II.100})$$

et afin de satisfaire la nouvelle inégalité nous définissons une loi de Fourier généralisée

$$\underline{\Phi} = -\frac{1}{T} \underline{\kappa} \cdot (T \underline{\nabla}) \quad (\text{II.101})$$

qui permet de laisser l'équation de la chaleur inchangée : $(\underline{\kappa} T \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla} = \rho T \dot{\eta}$.

c) Quelques remarques

Dans toutes ces formulations, le sens physique des termes additionnels associés au $\dot{T}$ et $T\underline{\nabla}$ demeure peu clair. En particulier, nous pouvons nous interroger sur la pertinence d'introduire un flux supplémentaire d'entropie $\underline{k}$ (II.98).

II.3.6 Thermoélasticité du second gradient linéarisée

La précédente formulation va être explicitée dans le cas de la thermoélasticité linéarisée dans le cas statique. Les lois d'état associées seront dérivées. Les termes additionnels apparaissant dans l'équation de la chaleur seront alors discutés.

a) Lois de comportement linéarisées

Un état de référence thermodynamique ($\underline{E}_0 = 0, \underline{K}_0 = 0, T_0, (T\underline{\nabla})_0 = 0$) est considéré et nous linéarisons les équations d'équilibre et les lois d'état. Le fait de travailler dans le cas de petites perturbations nous assure une faible variation de la déformation, du gradient de la déformation, de la température et du gradient de la température. Les variables peuvent alors se mettre sous cette forme (Forest et al., 2000) :

$$\underline{\tilde{E}} = e(\underline{U}), \quad \underline{\tilde{K}} = \underline{\tilde{E}} \otimes \underline{\nabla}, \quad \Delta = T - T_0, \quad T\underline{\nabla} \quad (\text{II.102})$$

où la partie symétrique de l'opérateur gradient e signifie $e(\underline{U}) = (U_{i,j} + U_{j,i})/2 \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.

L'énergie libre est une forme quadratique de toutes ces variables :

$$\begin{aligned} \rho \Psi &= \frac{1}{2} \underline{\tilde{E}} : \underline{\tilde{C}} : \underline{\tilde{E}} - \underline{\tilde{E}} : (\underline{\tilde{C}} : \underline{\alpha}) \Delta - \frac{1}{2} \beta \Delta^2 + \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}} : \underline{\tilde{A}} : \underline{\tilde{K}} + \underline{\tilde{E}} : \underline{\tilde{M}} : \underline{\tilde{K}} + \underline{\tilde{K}} : \underline{\tilde{H}} \Delta \\ &+ \frac{1}{2} T\underline{\nabla} \cdot \underline{\tilde{B}} \cdot T\underline{\nabla} + \Delta \underline{\tilde{F}} \cdot T\underline{\nabla} - \underline{\tilde{K}} : (\underline{\tilde{A}} : \underline{\tilde{P}}) \cdot T\underline{\nabla} + \underline{\tilde{E}} : \underline{\tilde{N}} \cdot T\underline{\nabla} \end{aligned} \quad (\text{II.103})$$

Et d'après les relations (II.83) nous obtenons les lois d'état suivantes

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\Sigma}} &= \underline{\tilde{C}} : (\underline{\tilde{E}} - \underline{\alpha} \Delta) + \underline{\tilde{M}} : \underline{\tilde{K}} + \underline{\tilde{N}} \cdot T\underline{\nabla} \\ \underline{\tilde{S}} &= \underline{\tilde{A}} : (\underline{\tilde{K}} - \underline{\tilde{P}} \otimes T\underline{\nabla}) + \underline{\tilde{M}} : \underline{\tilde{E}} + \underline{\tilde{H}} \Delta \\ \underline{\tilde{b}}^{(i)} &= \underline{\tilde{N}} : \underline{\tilde{E}} - (\underline{\tilde{A}} : \underline{\tilde{P}}) : \underline{\tilde{K}} + \underline{\tilde{F}} \Delta + \underline{\tilde{B}} \cdot T\underline{\nabla} \\ \rho s &= (\underline{\tilde{C}} : \underline{\alpha}) : \underline{\tilde{E}} - \underline{\tilde{H}} : \underline{\tilde{K}} + \beta \Delta - \underline{\tilde{F}} \cdot T\underline{\nabla} + a^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

dans lesquelles nous reconnaissons facilement les termes classiques et des termes additionnels. En particulier, nous retrouvons la déformation libre (déformation thermique) $\underline{\alpha} \Delta$ et le gradient de déformation libre $\underline{\tilde{P}} \otimes T\underline{\nabla}$ ("eigenstrain gradient") introduit précédemment.

b) Equation de comportement linéarisée

L'équation d'équilibre conserve une forme classique (équation du mouvement d'un milieu du second gradient D.18).

$$\underline{\tau} \cdot \underline{\nabla} + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.105})$$

où le tenseur des contraintes effectives s'exprime en fonction du tenseur de Cauchy et du gradient des hypercontraintes.

$$\underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\nabla}$$

Or

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{P}} \otimes T \underline{\underline{\nabla}}) + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{H}} \Delta$$

$$\begin{aligned} S_{ijk} &= A_{ijklmn} (K_{lmn} - P_{lm} T_{,n}) + M_{ijklm} E_{lm} + H_{ijk} \Delta \\ S_{ijk,k} &= A_{ijklmn} (K_{lmn,k} - P_{lm} T_{,nk}) + M_{ijklm} E_{lm,k} + H_{ijk} \Delta_{,k} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_{lm,k} &= K_{lmk} \\ M_{ijklm} K_{lmk}^* &= M_{ijmkl}^* K_{klm} \\ M_{ijmkl}^* &= M_{ijklm} \end{aligned}$$

Donc l'équation d'équilibre apparaît comme étant une relation entre le tenseur des contraintes effectives $\underline{\tau}$ et des gradients de déformation et de température du premier et du second ordre.

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\alpha}} \Delta) + (\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M}}^*) : \underline{\underline{K}} + (\underline{\underline{N}} - \underline{\underline{H}}) \cdot T \underline{\underline{\nabla}} \\ &\quad - \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{K}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} - \underline{\underline{P}} \otimes (T \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}})) \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

c) Equation de la chaleur linéarisée

L'équation de la chaleur est déduite de l'équation d'énergie et prend la forme :

$$- \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} = \rho T \dot{s} - r \quad (\text{II.107})$$

En substituant dans l'expression (II.107) les lois d'état linéarisées

$$T \rho \dot{s} = T (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\dot{E}}} - T \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{K}}} + T \underline{\underline{\beta}} \dot{\Delta} - T \underline{\underline{F}} \cdot \dot{T} \underline{\underline{\nabla}} + T a^{(i)}$$

et en considérant le fait que $a^{(i)}$ n'est rien d'autre que $\underline{\underline{b}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{\nabla}}$ et que $a^{(e)} = b^{(e)} = 0$ où

$$\begin{aligned} \underline{\underline{b}}^{(i)} &= \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} - (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{P}}) : \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{F}} \Delta + \underline{\underline{B}} \cdot T \underline{\underline{\nabla}} \\ \underline{\underline{b}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{\nabla}} &= \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{K}} - (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{P}}) :: (\underline{\underline{K}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}) + \underline{\underline{F}} \cdot T \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{B}} : (T \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}) \end{aligned}$$

alors l'équation de la chaleur linéarisée peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} T \underline{\underline{\beta}} \dot{\Delta} &= r - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} - T (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\dot{E}}} + T (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{P}}) :: (\underline{\underline{\dot{K}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}) \\ &\quad - T \underline{\underline{B}} : (\dot{T} \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}) - T (\underline{\underline{N}} - \underline{\underline{H}}) : \underline{\underline{\dot{K}}} \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

d) Cas isotrope

Dans le cas isotrope, en raison de symétries, certains termes vont disparaître.

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{E}} = 0$$

Lois d'état

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\zeta}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}} \Delta) \\ \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{P}} \otimes T \underline{\underline{\nabla}}) \\ \underline{\underline{b}}^{(i)} &= -(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{P}}) : \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{B}} \cdot T \underline{\underline{\nabla}} \\ \rho s &= (\underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} + \beta \Delta + a^{(i)}\end{aligned}\quad (\text{II.109})$$

Equation d'équilibre

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\zeta}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\alpha}} \Delta) - \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{K}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} - \underline{\underline{P}} \otimes (T \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}})) \quad (\text{II.110})$$

Equation de la chaleur

$$\begin{aligned}T \beta \dot{\Delta} &= r - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} - T (\underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}}) : \dot{\underline{\underline{E}}} + T (\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{P}}) :: (\dot{\underline{\underline{K}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}) \\ &\quad - T \underline{\underline{B}} : (\dot{T} \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{\nabla}})\end{aligned}\quad (\text{II.111})$$

Cette approche linéarisée introduit un nouveau terme de couplage thermomécanique $(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{P}}) :: (\dot{\underline{\underline{K}}} \otimes \underline{\underline{\nabla}})$ en plus du terme classique $\underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}} : \dot{\underline{\underline{E}}}$.

Nous pouvons également noter que la positivité de la chaleur spécifique généralisée définie précédemment (équation II.87) est au moins préservée dans le cas linéaire.

Le terme $a^{(i)}$ ne dépendant pas de la température (équation II.109), l'équation de la chaleur spécifique retrouve une forme classique.

Dans le cas purement thermique, l'équation de la chaleur peut aussi être modifiée comme indiqué ci-dessous.

Introduisant une relation linéaire entre le vecteur flux de chaleur et le gradient de température,

$$\underline{\underline{Q}} = -\underline{\underline{\kappa}} \cdot T \underline{\underline{\nabla}} \quad (\text{II.112})$$

nous assurons la positivité de la dissipation thermique. Dans ce cas et dans le cas isotrope, la partie thermique pure de l'équation de la chaleur est réduite à

$$\beta \dot{\Delta} = \underline{\underline{\kappa}} T \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} - \underline{\underline{B}} \dot{T} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \quad (\text{II.113})$$

où $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}$ est l'opérateur laplacien. Il est intéressant de noter que cette équation est identique à la première équation de Cattaneo basée sur une modification de la loi de Fourier et présentée par exemple par (Müller et Ruggeri, 1993).

$$\underline{\underline{Q}} = -\underline{\underline{\kappa}} T \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{B}} \dot{T} \underline{\underline{\nabla}} \quad (\text{II.114})$$

L'équation de la chaleur généralisée (équation II.111) comparée à l'équation de la chaleur effective d'un problème thermoélastique couplé (équation E.13) laisse supposer que la formulation choisie n'est pas assez étendue. A ce niveau là, nous prévoyons l'apparition des termes $\underline{\dot{K}} \otimes \underline{\nabla}$ et $\underline{\dot{T}} \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}$ mais pas des termes tels que $\underline{\dot{K}}, \nabla \underline{\dot{T}}, \underline{\dot{E}}$ et $\underline{\dot{T}}$ qui paraissent être nécessaires.

Ces résultats indiquent que le choix d'une formulation introduisant ensemble $T \underline{\nabla}$ et $\underline{\dot{T}}$ devrait être considérée.

II.4 Analyse asymptotique en anisotherme

Dans cette section nous allons esquisser ce que serait une analyse asymptotique en anisotherme (Forest et al., 2000).

Dans un premier temps, nous traitons le cas où le champ de température local est supposé parfaitement connu (problème d'évolution). Et, dans un deuxième temps, nous traiterons le problème thermomécanique couplé (annexe E).

Nous considérons un matériau classique hétérogène périodique dans le cas statique dont les propriétés sont déterminées à partir d'un milieu de Cauchy. Et l'objectif est de déduire les propriétés globales du milieu homogène équivalent à partir des propriétés locales.

II.4.1 Equations de champs à l'échelle locale

Le problème étant anisotherme, les variables locales et globales (ou effectives) sont l'énergie de déformation, la déformation, les contraintes, la température, la variation de température, l'entropie spécifique et le flux de chaleur :

$$\text{variables locales} : \quad \Psi, \quad \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma}, \quad \theta, \quad \delta = \theta - \theta_{ref}, \quad \eta, \quad \underline{q} \quad (\text{II.115})$$

$$\text{variables globales} : \quad \Psi, \quad \underline{E}, \quad \underline{\Sigma}, \quad T, \quad \Delta = T - T_0, \quad s, \quad \underline{Q} \quad (\text{II.116})$$

Le matériau hétérogène est décrit localement par la forme linéarisée de l'énergie libre suivante

$$\rho \psi(\underline{\varepsilon}, \theta) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon} : (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\alpha}) \delta - \frac{1}{2} \beta \delta^2 \quad (\text{II.117})$$

où les variables sont indépendantes de la température (forme linéarisée).

Nous définissons la chaleur spécifique C_ε par le paramètre β par

$$\rho C_\varepsilon = \theta \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)_{\underline{\varepsilon}} = \theta \beta = - \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (\text{II.118})$$

Et les différentes équations du problème thermomécanique couplé $\mathcal{P}$ à résoudre sur le matériau hétérogène (Meissonnier, 1996; Peyroux et Licht, 1993; Peyroux et Chrysochoos, 1997) sont :

- la loi de Hooke

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{\varepsilon} - \delta \underline{\alpha}) \quad (\text{II.119})$$

- l'équation d'équilibre

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.120})$$

- la loi de Fourier

$$\underline{q} = -\underline{\lambda} \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.121})$$

- et l'équation de la chaleur

$$\beta \dot{\theta} = -\underline{q} \cdot \underline{\nabla} - \underline{\zeta} : \underline{\alpha} : \underline{\dot{\varepsilon}} + r \quad (\text{II.122})$$

où $\underline{q}$ est mis pour $\underline{q}/\theta^{ref}$, r pour r/θ^{ref} et $\underline{\lambda}$ le tenseur de conduction de chaleur dans la loi de Fourier divisé par la température de référence.

Les inconnues du problème sont les champs locaux de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ et de température $\theta(\underline{x})$. Nous définissons à présent un problème défini sur un domaine infini en initialisant les champs inconnus. Nous obtiendrons ainsi un problème $\mathcal{P}$ bien posé.

II.4.2 Analyse dimensionnelle et développements asymptotiques aux ordres supérieurs

De la même manière qu'au paragraphe II.2.2, nous effectuons une analyse dimensionnelle afin de déterminer les paramètres impliqués dans le problème thermodynamique à prendre en compte dans la procédure d'homogénéisation (Pradel, 1998).

Nous déterminons un espace sans dimension sur les coordonnées, les déplacements, le temps, la température, différents opérateurs et sur des relations d'équilibre :

$$\underline{x}^* = \underline{x}/L_\omega, \quad \underline{u}^* = \underline{u}/L_\omega, \quad t^* = t/\bar{t}, \quad \theta^* = \theta/\theta_{ref} \quad (\text{II.123})$$

$$e(\underline{u}) = e^*(\underline{u}^*), \quad \nabla^* = L_\omega \nabla, \quad \theta \nabla = \frac{\theta_{ref}}{L_\omega} \theta^* \nabla^* \quad (\text{II.124})$$

$$\underline{\zeta} = \bar{c} \underline{\zeta}^*, \quad \underline{\alpha} = \bar{\alpha} \underline{\alpha}^*, \quad \underline{\lambda} = \frac{\bar{c} \bar{\alpha}}{\theta_{ref} \bar{t}} l_\lambda^2 \underline{\lambda}^*, \quad \beta = \frac{\bar{c} \bar{\alpha}}{\theta_{ref}} \left(\frac{l_\lambda}{L_\omega} \right)^2 \frac{t_\beta}{\bar{t}} \beta^* \quad (\text{II.125})$$

où trois nouvelles variables ont été introduites : $\bar{t}$ le temps de référence, β un temps caractéristique et une longueur l_λ .

A présent nous ramenons le problème réel $\mathcal{P}$ posé sur un solide infini, au moyen de l'analyse dimensionnelle, à un problème $\mathcal{P}^*$ exprimé sur une cellule élémentaire sans dimension Y^* .

$$\underline{\sigma}^* \cdot \underline{\nabla}^* + \underline{f}^* = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma}/\bar{c} = \underline{\zeta}^* : (e^*(\underline{u}^*) - \bar{\alpha} \theta_{ref} \delta^* \underline{\alpha}^*), \quad \underline{f}^* = \frac{L_\omega}{\bar{c}} \underline{f} \quad (\text{II.126})$$

$$-\underline{q}^* \cdot \underline{\nabla}^* - \frac{\partial e^*(\underline{u}^*)}{\partial t^*} : \underline{\zeta}^* : \underline{\alpha}^* = \varepsilon_\beta \varepsilon_\lambda^2 \beta^* \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*}, \quad \text{avec} \quad \underline{q}^* = \frac{\bar{c} \bar{\alpha} L_\omega}{\bar{t}} \underline{q} \quad (\text{II.127})$$

Les grandeurs caractéristiques du problème thermomécanique sont :

$$\varepsilon = \frac{l}{L_\omega}, \quad \varepsilon_\lambda = \frac{l_\lambda}{L_\omega}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{t_\beta}{\bar{t}} \quad (\text{II.128})$$

Nous considérons un problème d'évolution avec des conditions initiales.

Dans la suite de l'étude, seul le paramètre ε est supposé être prépondérant dans la procédure d'homogénéisation. Les deux autres paramètres ε_λ et ε_β sont considérés constants et indépendants de ε .

Une fois le petit paramètre ε choisi en fonction du problème sans dimension $\mathcal{P}^*$ posé, nous sommes en mesure de déterminer chaque problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ sur Y .

$$Y = \{\underline{y} | \underline{y} = \underline{x}/\varepsilon, \underline{x} \in Y^l\} \quad (\text{II.129})$$

Les équations de $\mathcal{P}_\varepsilon$ à résoudre sont les équations (II.119), (II.120), (II.121) et (II.122) dans lesquelles déplacement, température, contraintes et flux de chaleur ont été remplacés par $\underline{u}^\varepsilon, \theta^\varepsilon, \underline{\sigma}^\varepsilon$ et $\underline{q}^\varepsilon$

$$\underline{\sigma}^\varepsilon = \underline{\underline{\sigma}}^\varepsilon : (\underline{e}(\underline{u}^\varepsilon) - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta^\varepsilon) \quad (\text{II.130})$$

$$\underline{q}^\varepsilon = -\lambda^\varepsilon \theta^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{II.131})$$

$$\underline{\sigma}^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.132})$$

$$-\underline{q}^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} - \underline{\underline{\sigma}}^\varepsilon : \underline{\alpha}^\varepsilon : \underline{e}(\underline{u}^\varepsilon) + r^\varepsilon = \beta^\varepsilon \dot{\theta} \quad (\text{II.133})$$

Le milieu étant εY périodique, nous supposons que toutes les grandeurs dépendent de leur position macroscopique $\underline{x}$ et de leur position microscopique $\underline{y}$ dans Y^l . De plus le paramètre ε , étant supposé petit, nous développons chaque grandeur comme suit :

$$\underline{u}^\varepsilon(\underline{x}) = \underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon \underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^2 \underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^3 \underline{u}_3(\underline{x}, \underline{y}, t) + \dots \quad (\text{II.134})$$

$$\theta^\varepsilon(\underline{x}) = \theta_0(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon \theta_1(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^2 \theta_2(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^3 \theta_3(\underline{x}, \underline{y}, t) + \dots \quad (\text{II.135})$$

$$\underline{\sigma}^\varepsilon(\underline{x}) = \underline{\sigma}_0(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon \underline{\sigma}_1(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^2 \underline{\sigma}_2(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^3 \underline{\sigma}_3(\underline{x}, \underline{y}, t) + \dots \quad (\text{II.136})$$

$$\underline{q}^\varepsilon(\underline{x}) = \underline{q}_0(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon \underline{q}_1(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^2 \underline{q}_2(\underline{x}, \underline{y}, t) + \varepsilon^3 \underline{q}_3(\underline{x}, \underline{y}, t) + \dots \quad (\text{II.137})$$

où les termes $\underline{u}_i(\underline{x}, \underline{y}, t)$, $\theta_i(\underline{x}, \underline{y}, t)$, $\underline{\sigma}_i(\underline{x}, \underline{y}, t)$ et $\underline{q}_i(\underline{x}, \underline{y}, t)$ sont périodiques par rapport à la variable $\underline{y}$ et où nous posons $\underline{y} = \underline{x}/\varepsilon$.

II.4.3 Etablissement des équations d'équilibre et des lois de comportement effectives

Nous définissons l'opérateur gradient

$$\underline{\nabla} = \underline{\nabla}_x + \frac{1}{\varepsilon} \underline{\nabla}_y, \quad e(\cdot) = e_x(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon} e_y(\cdot) \quad (\text{II.138})$$

découpé en dérivées partielles par rapport à $\underline{x}$ et à $\underline{y}$ qui nous permet de dériver les expressions (II.134) à (II.137) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e(\underline{u}^\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} e_y(\underline{u}_0) + e_x(\underline{u}_0) + e_y(\underline{u}_1) + \varepsilon(e_x(\underline{u}_1) + e_y(\underline{u}_2)) \\ &\quad + \varepsilon^2(e_x(\underline{u}_2) + e_y(\underline{u}_3)) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.139})$$

$$\begin{aligned} \underline{g}^\varepsilon = \theta^\varepsilon \underline{\nabla} &= \varepsilon^{-1} \theta_0 \underline{\nabla}_y + \theta_0 \underline{\nabla}_x + \theta_1 \underline{\nabla}_y + \varepsilon(\theta_1 \underline{\nabla}_x + \theta_2 \underline{\nabla}_y) \\ &\quad + \varepsilon^2(\theta_2 \underline{\nabla}_x + \theta_3 \underline{\nabla}_y) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.140})$$

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} &= \varepsilon^{-1} \underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_y + \underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_y + \varepsilon(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_y) \\ &+ \varepsilon^2(\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_3 \cdot \underline{\nabla}_y) + \dots\end{aligned}\quad (\text{II.141})$$

$$\begin{aligned}\underline{q}^\varepsilon \cdot \underline{\nabla} &= \varepsilon^{-1} \underline{q}_0 \cdot \underline{\nabla}_y + \underline{q}_0 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{q}_1 \cdot \underline{\nabla}_y + \varepsilon(\underline{q}_1 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{q}_2 \cdot \underline{\nabla}_y) \\ &+ \varepsilon^2(\underline{q}_2 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{q}_3 \cdot \underline{\nabla}_y) + \dots\end{aligned}\quad (\text{II.142})$$

Les expressions du tenseur des contraintes et du flux de chaleur sont introduites dans l'équation d'équilibre et dans l'équation de la chaleur. Ordonnant dans un premier temps les termes en respectant les puissances de ε et en identifiant par la suite les termes de même ordre, les différentes contributions des expressions (II.134) à (II.137) sont solutions des problèmes auxiliaires suivant sur la cellule élémentaire Y^l :

problème $\mathcal{A}_0$

$$e_y(\underline{u}_0) = 0 \quad (\text{II.143})$$

$$\theta_0 \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.144})$$

problème $\mathcal{A}_1$

$$\underline{\sigma}_0 = \underline{\zeta}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_0) + e_y(\underline{u}_1) - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta_0) \quad (\text{II.145})$$

$$\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.146})$$

$$\underline{q}_0 = -\lambda^\varepsilon (\theta_0 \underline{\nabla}_x + \theta_1 \underline{\nabla}_y) \quad (\text{II.147})$$

$$\underline{q}_0 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.148})$$

problème $\mathcal{A}_2$

$$\underline{\sigma}_1 = \underline{\zeta}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_1) + e_y(\underline{u}_2) - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta_1) \quad (\text{II.149})$$

$$\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_y + \underline{f} = 0 \quad (\text{II.150})$$

$$\underline{q}_1 = -\lambda^\varepsilon (\theta_1 \underline{\nabla}_x + \theta_2 \underline{\nabla}_y) \quad (\text{II.151})$$

$$-\underline{q}_0 \cdot \underline{\nabla}_x - \underline{q}_1 \cdot \underline{\nabla}_y - \underline{\zeta}^\varepsilon : \underline{\alpha}^\varepsilon : (e_x(\underline{\dot{u}}_0) + e_y(\underline{\dot{u}}_1)) + r^\varepsilon = \beta^\varepsilon \dot{\theta}_0 \quad (\text{II.152})$$

problème $\mathcal{A}_3$

$$\underline{\sigma}_2 = \underline{\zeta}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_2) + e_y(\underline{u}_3) - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta_2) \quad (\text{II.153})$$

$$\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_x + \underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_y = 0 \quad (\text{II.154})$$

$$\underline{q}_2 = -\lambda^\varepsilon (\theta_2 \underline{\nabla}_x + \theta_3 \underline{\nabla}_y) \quad (\text{II.155})$$

$$-\underline{q}_1 \cdot \underline{\nabla}_x - \underline{q}_2 \cdot \underline{\nabla}_y - \underline{\zeta}^\varepsilon : \underline{\alpha}^\varepsilon : (e_x(\underline{\dot{u}}_1) + e_y(\underline{\dot{u}}_2)) = \beta^\varepsilon \dot{\theta}_1 \quad (\text{II.156})$$

Les solutions des problèmes $\mathcal{A}_i$ sont le champ de déplacement $\underline{u}_i$, le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}_{i-1}$, la température θ_i et le flux de chaleur $\underline{q}_{i-1}$ pour $i > 0$.

II.4.4 Résultats classiques en homogénéisation périodique en thermoélasticité

Les équations d'équilibre et les lois de comportement du milieu homogène équivalent sont obtenues dans le cas limite où ε tend vers 0 (Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992).

La résolution des deux premiers problèmes $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ correspond aux résultats de l'homogénéisation classique appliquée à un problème thermoélastique couplé (Francfort, 1983) et (Brahin-Ostmane et al., 1992).

La résolution du problème $\mathcal{A}_0$ nous permet de déterminer $\underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y})$ et $\theta_0(\underline{x}, \underline{y})$ et à partir du problème $\mathcal{A}_1$ nous obtenons $\underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y})$ et $\theta_1(\underline{x}, \underline{y})$.

problème $\mathcal{A}_0$

$$\underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_0(\underline{x}) \quad (\text{II.157})$$

$$\theta_0(\underline{x}, \underline{y}) = \Theta_0(\underline{x}) \quad (\text{II.158})$$

problème $\mathcal{A}_1$

Le problème $\mathcal{A}_1$ est classique et dépend linéairement de $e_x(\underline{U}_0)$ et de δ_0 de sorte qu'il existe des tenseurs de localisation $\underline{\hat{X}}(\underline{y})$, $\underline{\hat{X}}'(\underline{y})$ et $\underline{\hat{X}}''(\underline{y})$ pris de moyenne nulle et dont l'existence est assurée par la linéarité du problème. L'intégration du problème introduit également une translation $\underline{U}_1(\underline{x})$ et une température $\Theta_1(\underline{x})$ telles que :

$$\underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_1(\underline{x}) + \underline{\hat{X}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{\hat{X}}'(\underline{y}) \delta_0 \quad (\text{II.159})$$

$$\theta_1(\underline{x}, \underline{y}) = \Theta_1(\underline{x}) + \underline{\hat{X}}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \nabla_x \quad (\text{II.160})$$

La solution est telle que $\langle e_y(\underline{u}_1) \rangle = 0$.

Ces expressions sont maintenant utilisées pour calculer les champs locaux afin d'en déduire les lois de comportement effectives.

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_0 &= \underline{\hat{\zeta}}^\varepsilon : \left(e_x(\underline{U}_0) + \underline{\hat{X}} : e_x(\underline{U}_0) + \underline{\hat{X}}' \delta_0 - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta_0 \right) \\ &= \underline{\hat{\zeta}}^\varepsilon : \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}} \right) : e_x(\underline{U}_0) - \underline{\hat{\zeta}}^\varepsilon : \left(\underline{\alpha}^\varepsilon - \underline{\hat{X}}' \right) \delta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{q}_0 &= -\lambda^\varepsilon \left(\theta_0 \nabla_x + \underline{\hat{X}}'' \cdot \theta_0 \nabla_x \right) = -\lambda^\varepsilon \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}}'' \right) \cdot \theta_0 \nabla_x \\ &= -\lambda^\varepsilon \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}}'' \right) \cdot \underline{G}_0 \end{aligned}$$

Le champ de contrainte effective et le flux de chaleur effectif sont déterminés en effectuant la moyenne de la contrainte locale (ou du flux de chaleur local) sur la cellule élémentaire.

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \underline{\sigma}^\varepsilon \rangle_y = \langle \underline{\sigma}_0 \rangle \\ &= \langle \underline{\hat{\zeta}} : \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}} \right) : e_x(\underline{U}_0) - \underline{\hat{\zeta}} : \left(\underline{\alpha} - \underline{\hat{X}}' \right) \delta_0 \rangle \\ &= \langle \underline{\hat{\zeta}} : \underline{\hat{X}} : e_x(\underline{U}_0) - \underline{\hat{\zeta}} : \left(\underline{\alpha} - \underline{\hat{X}}' \right) \delta_0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.161})$$

où le terme $\langle . \rangle$ représente la moyenne sur la cellule élémentaire.

$$\underline{Q} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \underline{q}^\varepsilon \rangle_y = \langle \underline{q}_0 \rangle = \langle -\lambda \left(\underline{1} + \underline{\hat{X}}'' \right) \cdot \underline{G}_0 \rangle \quad (\text{II.162})$$

avec

$$\begin{aligned}\langle \underline{\underline{X}} \rangle &= \langle \underline{\underline{X}}' \rangle = 0 \\ \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{X}} \\ \langle \underline{\underline{X}} \rangle &= I\end{aligned}$$

Ces relations ne fournissent rien d'autre que les lois de comportement effectives d'un problème d'homogénéisation classique.

Nous pouvons également montrer que l'équation d'équilibre a la forme classique.

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x + \underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{\underline{\nabla}}_y + \underline{\underline{f}} \rangle_y = 0$$

Or

$$\langle X \rangle_y = 0 \quad \text{car} \quad \int_Y X dV = \int_{\partial Y} X n dS = 0 \quad (\text{pour } X \text{ périodique})$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle \underline{\underline{\sigma}}_0 \rangle_y \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x + \langle \underline{\underline{f}} \rangle &= 0 \\ \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x + \langle \underline{\underline{f}} \rangle &= 0\end{aligned} \quad (\text{II.163})$$

De manière similaire, nous pouvons écrire l'équation de la chaleur effective.

$$\begin{aligned}-\underline{\underline{q}}_0 \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x - \underline{\underline{q}}_1 \cdot \underline{\underline{\nabla}}_y - \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon : (e_x(\underline{\underline{u}}_0) + e_y(\underline{\underline{u}}_1)) &= \beta^\varepsilon \dot{\theta}_0 \\ -\underline{\underline{q}}_0 \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x - \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon : \left(e_x(\underline{\underline{U}}_0) + \hat{\underline{\underline{X}}}(y) : e_x(\underline{\underline{U}}_0) + \hat{\underline{\underline{X}}}'(y) \dot{\delta}_0 \right) &= \beta^\varepsilon \dot{\theta}_0 \\ -\underline{\underline{q}}_0 \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x - \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon : \left(\underline{\underline{1}} + \hat{\underline{\underline{X}}} \right) : e_x(\underline{\underline{U}}_0) &= \left(\beta^\varepsilon + \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon : \hat{\underline{\underline{X}}}' \right) \dot{\theta}_0\end{aligned}$$

Donc

$$-\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x - \langle \underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}} : \hat{\underline{\underline{X}}} \rangle : e_x(\underline{\underline{U}}_0) = \langle \beta + \underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}} : \hat{\underline{\underline{X}}}' \rangle \dot{\theta}_0 \quad (\text{II.164})$$

Remarque

Nous remarquons que les formes locales de départ et les formes globales sont identiques.

En local

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^\varepsilon = \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}^\varepsilon) - \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon \delta^\varepsilon \\ -\underline{\underline{q}}^\varepsilon \cdot \underline{\underline{\nabla}} - \underline{\underline{\zeta}}^\varepsilon : \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}^\varepsilon) = \beta^\varepsilon \dot{\theta} \end{cases}$$

En global

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\zeta}} : \hat{\underline{\underline{X}}} \rangle : e_x(\underline{\underline{U}}_0) - \langle \underline{\underline{\zeta}} : (\underline{\underline{\alpha}} - \hat{\underline{\underline{X}}}') \rangle > \delta_0 \\ -\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_x - \langle \underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}} : \hat{\underline{\underline{X}}} \rangle : e_x(\underline{\underline{U}}_0) = \langle \beta + \underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\alpha}} : \hat{\underline{\underline{X}}}' \rangle \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

Au niveau de la forme locale, le terme devant δ^ε dans la loi de Hooke et le terme en facteur de $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}^\varepsilon)$ sont identiques, ce qui ne semble pas être le cas au niveau de la forme globale.

Mais grâce au lemme de Hill-Mandel (annexe B, équation I.11) appliqué à $\hat{\underline{\underline{X}}}^t$ et $\hat{\underline{\underline{X}}}^t$ qui sont compatibles et $\underline{\underline{\zeta}} : (\underline{\underline{\alpha}} - \hat{\underline{\underline{X}}}')$, $\hat{\underline{\underline{X}}}^t : \underline{\underline{\zeta}}$ qui sont autoéquilibrés, nous montrons que ces deux formes sont équivalentes :

$$\langle \underset{\sim}{\mathcal{C}} : (\underline{\alpha} - \hat{\underline{X}}') \rangle = \langle \underset{\sim}{\mathcal{C}} : \underline{\alpha} : \hat{\underline{X}} \rangle \quad (\text{II.165})$$

car

$$\begin{aligned} \langle \underset{\sim}{\mathcal{C}} : (\underline{\alpha} - \hat{\underline{X}}') \rangle &= \langle \hat{\underline{X}}^t \rangle : \langle \underset{\sim}{\mathcal{C}} : (\underline{\alpha} - \hat{\underline{X}}') \rangle \\ &= \langle \hat{\underline{X}}^t : \underset{\sim}{\mathcal{C}} : (\underline{\alpha} - \hat{\underline{X}}') \rangle \\ &= \langle \hat{\underline{X}}^t : \underset{\sim}{\mathcal{C}} : \underline{\alpha} \rangle - \langle \hat{\underline{X}}^t : \underset{\sim}{\mathcal{C}} : \hat{\underline{X}}' \rangle \\ &= \langle \hat{\underline{X}}^t : \underset{\sim}{\mathcal{C}} : \underline{\alpha} \rangle - \langle \hat{\underline{X}}^t : \underset{\sim}{\mathcal{C}} \rangle : \langle \hat{\underline{X}}' \rangle \\ &= \langle \hat{\underline{X}}^t : \underset{\sim}{\mathcal{C}} : \underline{\alpha} \rangle \\ &= \langle \underset{\sim}{\mathcal{C}} : \underline{\alpha} : \hat{\underline{X}} \rangle \end{aligned}$$

Les équations de comportement et de la chaleur sont donc conservées au premier ordre par changement d'échelle.

II.4.5 Lien avec la théorie du second gradient

Dans cette section, on simplifie l'étude en supposant le champ de température donné $\theta^\varepsilon(x) = \Theta_0(x)$ indépendant du temps (régime stationnaire).

Ayant résolu les problèmes $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ nous cherchons à résoudre le problème $\mathcal{A}_2$ de la même manière qu'au paragraphe II.2.3.

$$\underline{\sigma}_1 = \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : (e_x(\underline{u}_1) + e_y(\underline{u}_2) - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta_1)$$

donc

$$\underline{\sigma}_1 = \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : e_x \left(\underline{U}_1(x) + \underline{X}(y) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{X}'(y) \delta_0 \right) + \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : e_y(\underline{u}_2)$$

De plus, en faisant l'hypothèse que $f = 0$

$$\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_y = -\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{\nabla}_x$$

nous pouvons mettre le problème $\mathcal{A}_2$ sous la forme

$$\begin{aligned} & \left(\underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : e_y(\underline{u}_2) \right) \cdot \underline{\nabla}_y + \left(\underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : e_x \left(\underline{U}_1(x) + \underline{X}(y) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{X}'(y) \delta_0 \right) \right) \cdot \underline{\nabla}_y \\ &= - \left(\underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : \left(e_x(\underline{U}_0) + \hat{\underline{X}} : e_x(\underline{U}_0) + \hat{\underline{X}}' \delta_0 - \underline{\alpha}^\varepsilon \delta_0 \right) \right) \cdot \underline{\nabla}_x \\ &= - \left(\underset{\sim}{\mathcal{C}}^\varepsilon : \hat{\underline{X}} : e_x(\underline{U}_0) + \left(\hat{\underline{X}}' - \underline{\alpha}^\varepsilon \right) \delta_0 \right) \cdot \underline{\nabla}_x \end{aligned}$$

Nous obtenons alors un problème d'élasticité en $\underline{u}_2(x, y)$ avec forces fictives, linéaires en $e_x(\underline{U}_1)$, $e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x$ et $\theta_0 \underline{\nabla}_x$.

Et nous avons donc un champ de déplacement $\underline{u}_2(x, y)$ qui peut se mettre sous la forme :

$$\underline{u}_2(x, y) = \underline{U}_2(x) + \underline{X}(y) : e_x(\underline{U}_1) + \underline{Y}(y) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{Y}'(y) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x \quad (\text{II.166})$$

où $\underline{Y}(y)$ et $\underline{Y}'(y)$ sont deux nouveaux tenseurs de localisation.

De la même manière le problème $\mathcal{A}_3$ est interprété comme étant un problème élastique en $\underline{u}_3(\underline{x}, \underline{y})$ avec des forces fictives, linéaires en $e_x(\underline{U}_2)$, $e_x(\underline{U}_1) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x$ et $\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x$ et nous déterminons :

$$\begin{aligned} \underline{u}_3(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}_3(\underline{x}) + \underline{\hat{X}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_2) + \underline{\hat{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_1) \otimes \underline{\nabla}_x) \\ &+ \underline{\hat{Z}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Z}}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \end{aligned} \quad (\text{II.167})$$

Ainsi, en choisissant les tenseurs de localisation de moyenne nulle sur la cellule élémentaire représentative et fixant les translations telles que $\langle \underline{u}^{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_{\underline{y}} = \underline{U}_0(\underline{x}) + \varepsilon \underline{U}_1(\underline{x}) + \varepsilon^2 \underline{U}_2(\underline{x}) + \dots$, le champ de déplacement local (équation II.134) prend la forme :

$$\begin{aligned} \underline{u}^{\varepsilon}(\underline{x}) &= \underline{U}_0(\underline{x}) + \varepsilon \underline{\hat{X}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \varepsilon^2 \underline{\hat{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0)) \otimes \underline{\nabla}_x \\ &+ \varepsilon^3 \underline{\hat{Z}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0)) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \dots \\ &+ \varepsilon \underline{\hat{X}}'(\underline{y}) \cdot \delta_0 + \varepsilon^2 \underline{\hat{Y}}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x + \varepsilon^3 \underline{\hat{Z}}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.168})$$

où les termes de translation ont été regroupés dans le premier terme $\underline{U}_0$ afin de simplifier l'écriture.

On voit que les contributions non locales font intervenir les premier et second gradients des déformations globales.

Ces expressions sont alors utilisées pour obtenir le champ de déformation local.

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^{\varepsilon}) &= e_x(\underline{U}_0) + \underline{\hat{X}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{\hat{X}}'(\underline{y}) \cdot \delta_0 - \alpha^{\varepsilon} \delta_0 \\ &+ \varepsilon \left(\underline{\hat{X}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \\ &+ \varepsilon \left(\underline{\hat{X}}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x + \underline{\hat{Y}}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\underline{\hat{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Z}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\underline{\hat{Y}}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Z}}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.169})$$

où les tenseurs de concentrations ont été introduits.

La contrainte effective est obtenue en effectuant la moyenne de la contrainte locale sur la cellule élémentaire :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^{\varepsilon} &= \underline{\zeta}^{\varepsilon} : (\underline{\varepsilon}(\underline{u}^{\varepsilon}) - \alpha^{\varepsilon} \delta^{\varepsilon}) \\ &= \underline{\zeta}^{\varepsilon} : \left(\underline{\hat{X}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \left(\underline{\hat{X}}'(\underline{y}) - \alpha^{\varepsilon} \right) \delta_0 \right) \\ &+ \varepsilon \underline{\zeta}^{\varepsilon} : \left(\underline{\hat{X}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \\ &+ \varepsilon \underline{\zeta}^{\varepsilon} : \left(\underline{\hat{X}}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x + \underline{\hat{Y}}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x \right) \\ &+ \varepsilon^2 \underline{\zeta}^{\varepsilon} : \left(\underline{\hat{Y}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Z}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \underline{\zeta}^{\varepsilon} : \left(\underline{\hat{Y}}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\hat{Z}}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\underline{\sigma}}^\varepsilon \rangle &= \underline{\underline{C}}^0 : (\underline{e}_x(\underline{U}_0) - \delta_0 \underline{\underline{\alpha}}^0) \\
&+ \varepsilon \underline{\underline{C}}^1 : (\underline{e}_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\underline{V}}_x - \underline{\underline{\alpha}}^1 \cdot \theta_0 \underline{\underline{V}}_x) \\
&+ \varepsilon^2 \underline{\underline{C}}^2 : (\underline{e}_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\underline{V}}_x \otimes \underline{\underline{V}}_x - \underline{\underline{\alpha}}^2 : \theta_0 \underline{\underline{V}}_x \otimes \underline{\underline{V}}_x) + \dots \quad (\text{II.170})
\end{aligned}$$

Cette relation peut être interprétée comme une loi de comportement effective pour un problème d'homogénéisation d'ordre 3.

Les tenseurs introduits dans les lois sont fonction des différents tenseurs de localisation

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{C}}^0 &= \langle \underline{\underline{C}}^\varepsilon :: \hat{\underline{\underline{X}}}(\underline{y}) \rangle \\
\underline{\underline{C}}^0 : \underline{\underline{\alpha}}^0 &= \langle \underline{\underline{C}}^\varepsilon : (\hat{\underline{\underline{X}}}(\underline{y}) - \underline{\underline{\alpha}}^\varepsilon) \rangle \\
\underline{\underline{C}}^1 &= \langle \underline{\underline{C}}^\varepsilon : (\underline{\underline{X}}(\underline{y}) + \hat{\underline{\underline{Y}}}(\underline{y})) \rangle ; \dots \quad (\text{II.171})
\end{aligned}$$

et se calculent indépendamment de ε .

On s'aperçoit donc que l'ensemble des lois de comportement est formé de gradients d'ordre supérieur tel que le gradient du champ de déplacement et de la température ce qui confirme la formulation proposée II.3.

La loi de comportement effective obtenu à partir des développements asymptotiques (équation II.170) est équivalente à l'équation du comportement linéarisée obtenue dans le cas de la thermoélasticité linéarisée (équation II.106).

Le problème thermomécanique couplé est traité en annexe E.

Partie B

Comportement non linéaire

Chapitre -III-

Comportement viscoplastique isotrope

Sommaire

III.1	Présentation du modèle	70
III.1.1	Lois de comportement non linéaires en mécanique des solides	70
III.1.2	Le modèle de l'étude	71
III.2	Obtention d'un milieu homogène équivalent	73
III.2.1	Les différentes possibilités	73
III.2.2	La méthode utilisée	73
III.2.3	Identification du modèle	79
III.3	Applications	86
III.3.1	Calcul d'une plaque perforée	86
III.3.2	Calcul de l'aube de turbine	89

Dans la première partie de l'étude, nous avons étudié le comportement linéaire. Dans cette partie, nous allons considérer une matrice ayant un comportement viscoplastique.

Dans un premier temps nous travaillerons sur un matériau isotrope, utilisé pour la fabrication des aubes de turbine de génération précédente (par exemple IN100), afin de comprendre l'influence du trou sur le comportement. Le monocristal, utilisé pour la fabrication des aubes de turbine nouvelle génération, sera envisagé dans un deuxième temps (chapitre IV).

Afin de modéliser le comportement homogène de substitution nous utilisons une approche phénoménologique. Nous considérons le matériau à une échelle macroscopique sans chercher à discerner les mécanismes de déformation à l'œuvre. L'observation porte alors sur le résultat d'essais mécaniques sur éprouvettes macroscopiques. Les variables microstructurales seront décrites au travers de variables globales justifiées par les aspects thermodynamiques des milieux continus.

III.1 Présentation du modèle

III.1.1 Lois de comportement non linéaires en mécanique des solides

La formulation des lois de comportement non linéaires n'est pas unique par comparaison au cas de l'élasticité linéaire où les contraintes sont reliées aux déformations par la seule loi de Hooke $\underline{\sigma} = \underline{\zeta} : \underline{\varepsilon}$. Mais dans tous les cas, il est important de respecter certains principes physiques fondamentaux (les aspects thermodynamiques des milieux continus) qui guident le choix des variables utilisées.

Comme nous l'avons exposé en annexe D, la mécanique des milieux continus est essentiellement basée sur la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de la masse et la conservation de l'énergie.

Ces trois lois de conservation doivent être complétées par l'inégalité

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \rho (\dot{\psi} + \eta \dot{T}) - \frac{q}{T} \cdot T \underline{\nabla} \geq 0 \quad (\text{III.1})$$

qui représente le second principe de la thermodynamique et fait le bilan du travail et de la chaleur dépensée dans un élément de volume.

Dans cette inégalité nous distinguons la dissipation thermique

$$D_{th} = - \frac{q}{T} \cdot T \underline{\nabla} \quad (\text{III.2})$$

dont la positivité est assurée par la loi de Fourier et la dissipation intrinsèque

$$D_i = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \rho (\dot{\psi} + \eta \dot{T}) \quad (\text{III.3})$$

qui doit être positive pour que l'évolution thermodynamique soit admissible.

L'état thermodynamique d'un milieu continu en un point sera caractérisé à un instant donné par la connaissance d'un certain nombre de variables internes au point considéré. L'idée de base est que, malgré l'évolution du système en mouvement, l'évolution peut être considérée comme une succession d'états d'équilibre (hypothèse de l'équilibre thermodynamique local ou état local) (Germain et Müller, 1995), (Germain et al., 1983).

Le point commun de la plupart des modèles développés dans ce cadre tient en l'utilisation d'un potentiel viscoplastique. L'énergie libre est fonction de variables (observables et internes) dont le nombre influe sur la finesse de la description de la dissipation. Dans le cadre de l'élastoviscoplasticité, les variables observables découlent directement du formalisme mécanique introduit plus haut. Nous utilisons les trois variables observables que sont la température T , la déformation $\underline{\varepsilon}$ et la contrainte $\underline{\sigma}$. Nous introduisons également des variables internes afin de décrire les phénomènes dissipatifs avec lesquels l'état actuel dépend de l'histoire passé (Germain et al., 1983), (Lemaitre et Chaboche, 1985).

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}, T, \underline{V}_k) \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas de la plasticité et de la viscoplasticité, nous utilisons les hypothèses suivantes :

- décomposition des déformations en une partie élastique et une partie inélastique

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$$

- découplage dans le potentiel thermodynamique entre la partie élastique et viscoplastique. Nous supposons de ce fait que l'écoulement viscoplastique n'a aucune influence sur le comportement élastique.

Le potentiel viscoplastique peut se mettre sous la forme

$$\psi(\xi^e, V_k, T) = \psi_e(\xi^e, T) + \psi_p(V_k, T) \quad (\text{III.5})$$

Ainsi nous avons

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} : \dot{\xi} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} : \dot{V}_k \quad (\text{III.6})$$

et l'inégalité de Clausius-Duhem devient

$$(\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi^e}) : \dot{\xi}^e + \underline{\sigma} : \dot{\xi}^p - \rho (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} : \dot{V}_k - \frac{q}{T} \cdot T \nabla \geq 0 \quad (\text{III.7})$$

Et, suivant la même méthodologie (Coleman, 1964) que pour la théorie du second gradient, nous obtenons les lois d'état

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad ; \quad \rho \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (\text{III.8})$$

La contrainte est la variable associée à la déformation élastique et l'entropie est associée à la température. Et par analogie nous définissons une variable force thermodynamique associée aux variables internes.

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (\text{III.9})$$

Maintenant il nous faut définir l'incrément de déformation plastique à l'aide de la règle de normalité. Pour ce faire, nous introduisons le potentiel de dissipation $\Omega = \Omega(\underline{\sigma}, A_k; T)$ représentant l'expression des surfaces équipotentielles et les hypothèses de normalité des matériaux standards généralisés (Halphen et Nguyen, 1975). Nous obtenons alors les lois d'écoulement viscoplastiques :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^p &= \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} \\ -\dot{V}_k &= \frac{\partial \Omega}{\partial A_k} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Ce formalisme conduit à l'expression suivante de la dissipation :

$$\phi = \underline{\sigma} : \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} + A_k : \frac{\partial \Omega}{\partial A_k} \quad (\text{III.11})$$

Et si la fonction Ω est convexe, positive et nulle à l'origine alors la dissipation est automatiquement positive ou nulle : $\phi \geq 0$.

III.1.2 Le modèle de l'étude

Le modèle utilisé est un modèle viscoplastique.

L'énergie libre s'écrit en fonction de la déformation élastique, des variables internes d'écrouissage cinématique et de la température

$$\rho \psi(\xi^e, \alpha, T) = \frac{1}{2} \xi^e : \underline{\underline{c}} : \xi^e + \frac{1}{3} C \alpha : \alpha \quad (\text{III.12})$$

et en appliquant les équations (III.8) et (III.9) nous obtenons

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \underline{\underline{c}} : \underline{\varepsilon}^e \\ \underline{X} &= \frac{2}{3} C \underline{\alpha}\end{aligned}\quad (\text{III.13})$$

où $\underline{X}$ est la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage cinématique.

Nous choisissons également un potentiel de dissipation viscoplastique sous la forme (Chaboche, 1983)

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^{n+1} \quad (\text{III.14})$$

avec la fonction de charge $f = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R_0$ fonction de la contrainte équivalente de von Mises $J_2(\underline{A}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{A}^d : \underline{A}^d}$ où $\underline{A}^d$ est la partie déviatorique du tenseur $\underline{A}$.

Puis en posant

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R_0}{K} \right\rangle^n \quad \text{et} \quad \underline{\dot{n}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^d - \underline{X}^d}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})} \quad (\text{III.15})$$

l'écoulement s'exprime par

$$\underline{\varepsilon}^p = \dot{p} \underline{n} \quad (\text{III.16})$$

L'évolution des variables internes s'inscrit dans un cadre standard non généralisé

$$\dot{\underline{\alpha}} = \underline{\varepsilon}^p - \frac{3D}{2C} \underline{X} \dot{p} \quad (\text{III.17})$$

En résumé, le modèle est construit en associant une ou plusieurs variables macroscopiques à un phénomène mécanique donné, si bien qu'il se présente comme un ensemble d'équations différentielles (Lemaitre et Chaboche, 1985).

Equations du modèle

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \underline{\underline{c}} : \underline{\varepsilon}^e \\ \underline{X} &= \frac{2}{3} C \underline{\alpha} \\ R &= R_0 \\ f &= \sqrt{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})} - R\end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Lois d'évolution

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\alpha}} &= \underline{\varepsilon}^p - D \underline{\alpha} \dot{p} \\ \dot{p} &= \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n\end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

avec

E (GPa)	ν	$K(MPa, s)$	n	$C(MPa)$	D	$R_0(MPa)$
90	0.3	1000	5	162000	600	170

Tableau III.1 : Coefficients de la loi viscoplastique correspondant à un superalliage base nickel polycristallin à 950°C

III.2 Obtention d'un milieu homogène équivalent

III.2.1 Les différentes possibilités

De nombreux travaux concernant les matériaux linéaires ont été menés, permettant parfois d'aboutir à une solution analytique du comportement macroscopique. Par contre, en plasticité et en viscoplasticité, les résultats sont moins nombreux.

(Berveiller et Zaoui, 1980) généralisent la solution du problème général de l'inclusion ellipsoïdale dans une matrice infinie, l'élasticité étant isotrope et hétérogène et la déformation plastique étant uniforme dans l'inclusion comme dans la matrice.

D'autres travaux, (Marigo et al., 1987), cherchent à décrire une méthode de calcul du domaine de plasticité macroscopique ou domaine de plasticité du matériau homogénéisé. Le seul renseignement utilisé est le domaine de plasticité microscopique (la limite σ_f dans la courbe contrainte déformation des constituants) et ils cherchent à déterminer le domaine de plasticité macroscopique du milieu hétérogène, défini comme l'ensemble des états de contraintes macroscopiques que le matériau peut supporter.

D'autres méthodes d'homogénéisation ont été développées à l'ONERA (Dvorak, 1992; Dvorak, 1994). Ces méthodes donnent une loi homogénéisée explicite approchée sur la cellule de base.

Notre choix se base sur une méthode pragmatique (Cardona et al., 2000a). Nous utilisons des modèles phénoménologiques pour leur efficacité (Lemaitre et Chaboche, 1985) et la simplicité de leur implémentation dans les codes de calcul par éléments finis industriel (Besson et al., 1998; Foerch et al., 1999).

III.2.2 La méthode utilisée

Dans notre étude, nous cherchons à modéliser la phase d'écrouissage du matériau homogénéisé, ce qui n'est pas le cas dans les études présentées précédemment. Pour ce faire la connaissance complète de la loi de comportement macroscopique est indispensable.

La loi de comportement se détermine sur un volume élémentaire représentatif qui joue le rôle du classique "élément de volume" de la mécanique des milieux continus.

Nous allons simuler différents chargements sur la cellule élémentaire (figure III.1) afin d'obtenir "une base d'identification numérique" à partir de laquelle nous identifierons un modèle de plasticité de manière phénoménologique. Cette approche nous permettra de rendre compte des phénomènes expérimentaux avec un nombre de variables relativement

restreint.

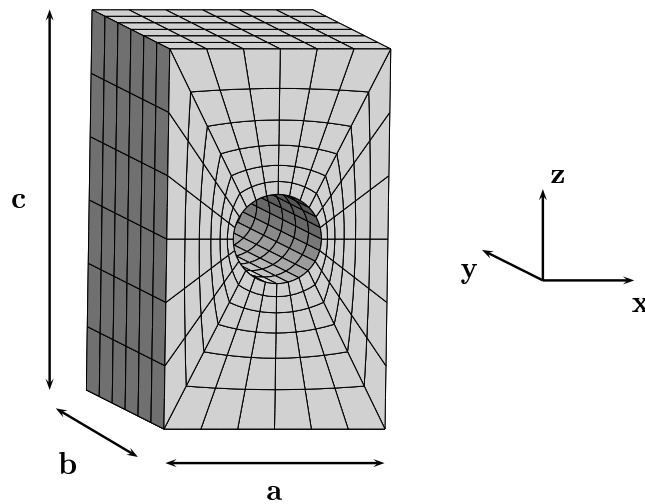


Figure III.1 : Cellule de base représentant le VER

L'avantage de "simuler nos essais" est de pouvoir générer une large base d'identification permettant d'obtenir un modèle utilisable dans de nombreuses conditions de chargement. Nous avons réalisé :

- des essais de traction dans les trois directions et à deux vitesses de sollicitations
- des essais de cisaillement dans les trois plans et à deux vitesses de sollicitations
- des essais d'extension dans les trois directions et à deux vitesses de sollicitations
- deux essais de dilatation hydrostatique à différentes vitesses
- des essais cycliques dans la direction $\underline{x}$, $\underline{z}$ et dans le plan $[\underline{xz}]$ où la perforation influence le comportement à deux vitesses de sollicitations
- et un essai de relaxation dans la direction $\underline{x}$

pour une température de fonctionnement de 950°C .

Pour réaliser ces essais nous avons appliqué les mêmes conditions aux limites mixtes que celles présentées lors du chapitre I.

Dès à présent, au vu de la figure (III.2), nous observons un affaiblissement d'environ 20% provoqué par la présence du trou alors que la fraction volumique de ce dernier n'est que de 8%.

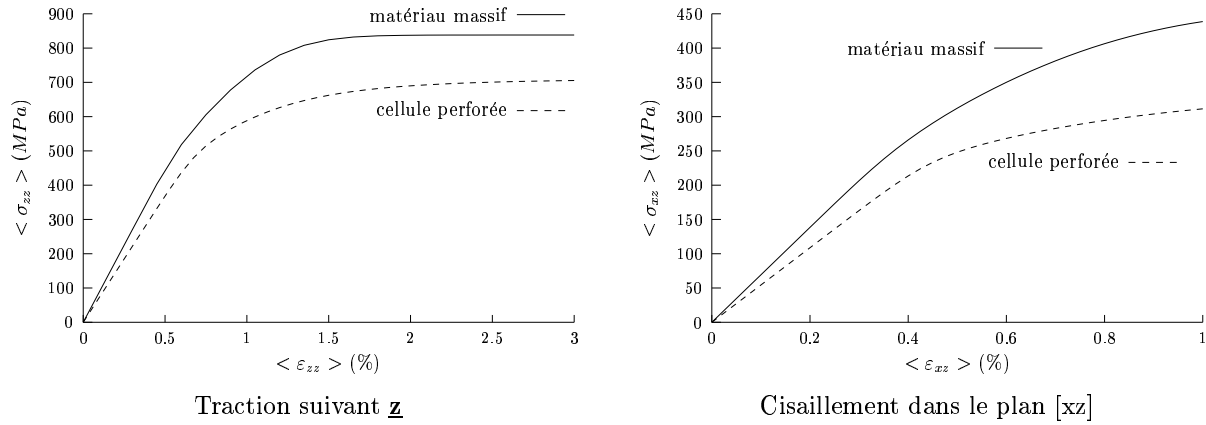


Figure III.2 : Affaiblissement des propriétés mécaniques

Dans la suite, nous présenterons de manière chronologique le raisonnement qui nous a permis d'identifier un modèle avec des propriétés effectives.

a) La surface de charge

La première étape a consisté à évaluer la surface de charge du modèle de plasticité homogène équivalent.

Pour ce faire, nous avons effectué différents trajets de chargement dans le plan $I_1(\boldsymbol{\sigma}), J_2(\boldsymbol{\sigma})$ en conservant une vitesse de déformation de 10^{-2}s^{-1} et tracé les lignes équipotentielles correspondant à des déformations équivalentes cumulées, au sens de von Mises, de 0.02% et 0.2% (figure III.3).

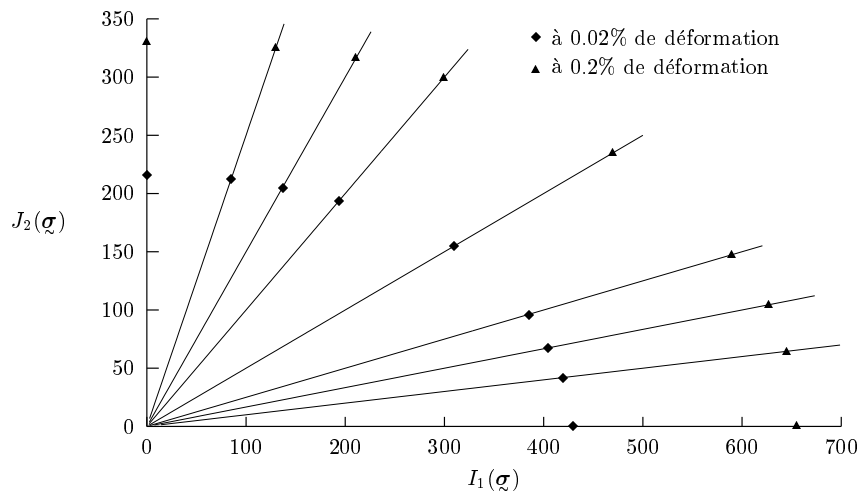


Figure III.3 : Surface de charge

La déformation équivalente est calculée au sens de von Mises alors que le critère évalué ne correspond plus à un critère de von Mises. L'objectif étant de se faire une idée sur la forme de la surface de charge du modèle homogène équivalent, l'erreur générée au cours de cette approximation est acceptable.

Dans le cas particulier d'un critère isotrope, la surface de charge est symétrique par rapport aux axes $I_1(\boldsymbol{\sigma})$ et $J_2(\boldsymbol{\sigma})$.

La présence du trou rend le matériau effectif compressible donc il va falloir utiliser un critère dont la direction d'écoulement possède une composante hydrostatique.

b) Le choix du critère

Le matériau formant la matrice suit un critère isotrope de von Mises. Dans ce cas là, (figure III.4), la surface de charge est une droite et la direction d'écoulement est définie par le déviateur des contraintes. Le matériau homogène équivalent est, quant à lui, nécessairement compressible.

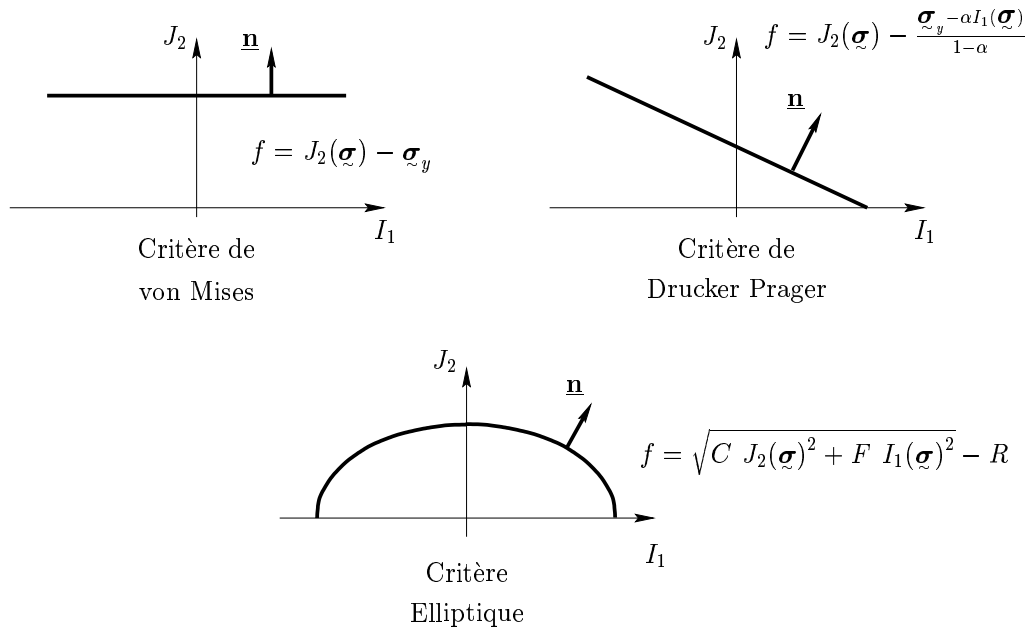


Figure III.4 : Critères élémentaires, avec et sans influence de la pression hydrostatique

Dans une étude portant sur une structure périodique perforée parfaitement plastique, (Reinhardt, 2000) utilise des fonctions de charge d'ordres supérieurs en contraintes (tenseurs d'ordre supérieur à deux) pour simuler les différentes symétries et la compressibilité de la cellule.

La fonction de charge F , considérée pour représenter les propriétés homogénéisées du matériau homogène équivalent, est fonction de polynômes (ϕ et ψ) des composantes du tenseur des contraintes.

$$F = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(2i\phi + \psi_i) + b_i \sin(2i\phi + \psi_i))$$

La loi d'écoulement associée est obtenue en dérivant cette fonction de charge F qui peut, dans le cas général, ne pas être convexe.

Dans notre étude, nous choisissons d'utiliser un critère elliptique, critère communément utilisé dans les milieux poreux, où la surface de charge est semblable à celle obtenue sur la cellule perforée et où la composante sphérique ne reste pas constante (figure III.4).

De plus, pour bien comprendre le rôle de la compressibilité dans le modèle, nous avons tracé le changement de volume de la cellule de base suite à un essai de traction dans la direction x (figure III.5). Nous observons, dans le cas du critère isotrope, une augmentation de volume en élasticité mais, dès que la plasticité prend le dessus sur l'élasticité, la courbe atteint une asymptote alors qu'elle continue à croître lorsque nous effectuons le même chargement sur la cellule perforée.

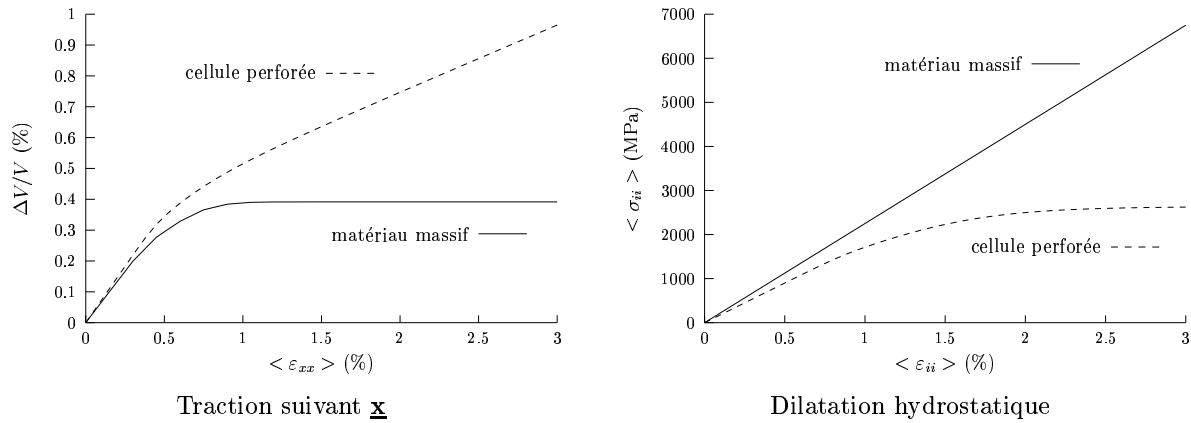


Figure III.5 : Influence de la plasticité dilatante

De la même manière, si nous réalisons une dilatation hydrostatique sur le matériau homogène avec le critère de von Mises (ou tout critère incompressible isotrope) il n'apparaît pas de plasticité alors que, dans le cas de la cellule perforée, la déformation se localise autour du trou (figure III.5).

c) L'anisotropie du modèle

Sur la figure (III.6), nous avons effectué des essais de traction et de cisaillement dans toutes les directions à une vitesse de déformation de $10^{-2} s^{-1}$ et nous nous apercevons que pour des raisons géométriques (la cellule de base est un parallélépipède rectangle perforé), notre modèle devra également être anisotrope.

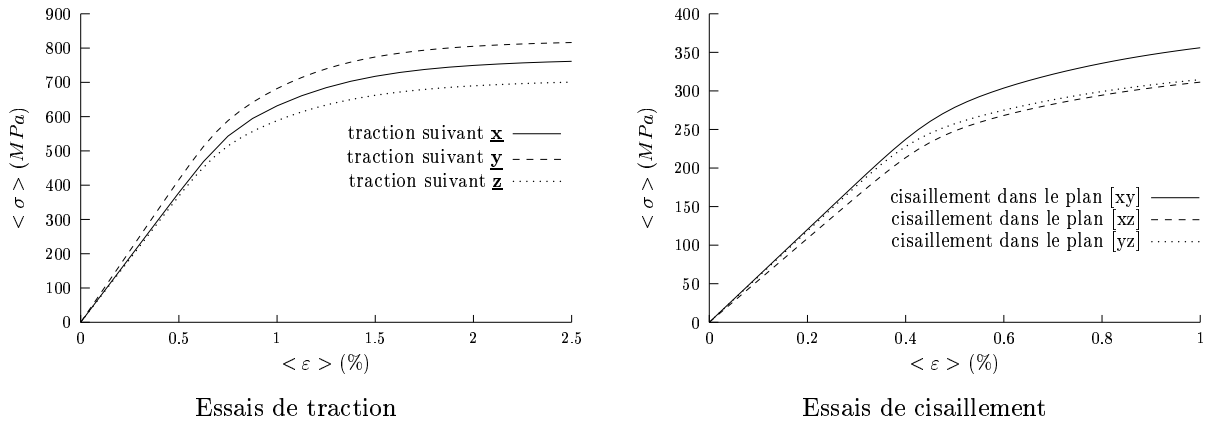


Figure III.6 : La géométrie de la cellule de base rend le comportement anisotrope

Par contre, en ne prenant pas en compte l'inclinaison du trou (trou orienté suivant la direction $\langle 010 \rangle$), nous n'observons aucune différence entre le matériau massif et la cellule de base dans la direction $\underline{y}$. Il faudra de ce fait supprimer l'influence du terme permettant la compressibilité du critère dans cette direction.

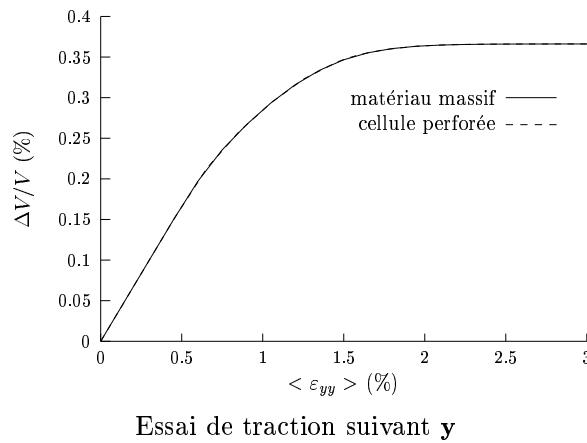
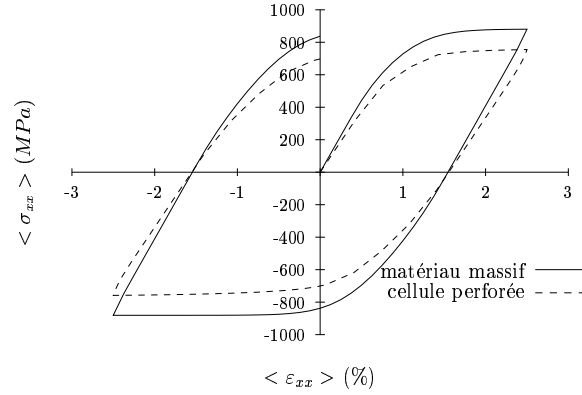


Figure III.7 : Influence du trou sur l'anisotropie du matériau effectif

d) Comportement cyclique

L'influence du trou sur le comportement cyclique n'est pas prépondérante.

Le matériau reste fortement viscoplastique avec un effet Bauschinger important et le trou affaiblit toujours les propriétés mécaniques du matériau massif d'environ 20% (fig.III.8).



Essai cyclique suivant $\underline{x}$

Figure III.8 : Influence du trou sur le comportement cyclique

III.2.3 Identification du modèle

a) Présentation du modèle

Au vu des premières analyses que nous avons effectuées, nous identifions le modèle homogène équivalent suivant (Cardona et al., 2000b) :

Equation du modèle

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \\
 \underline{\underline{X}}_1 &= \frac{2}{3} C_1 \underline{\underline{\alpha}}_1 \\
 \underline{\underline{X}}_2 &= \frac{2}{3} C_2 \underline{\underline{\alpha}}_2 \\
 \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{X}}_1 + \underline{\underline{X}}_2 \\
 R &= R_0 + Q(1 - e^{-b p}) \\
 f &= \sqrt{C J_H(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) + F I_H(\underline{\underline{\sigma}}) - R} \quad (III.20)
 \end{aligned}$$

avec

$$J_H(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^d : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{A}}^d$$

$$I_H(\underline{\underline{A}}) = tr(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}})$$

avec

$$\underline{\underline{A}}^d = \underline{\underline{S}} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{31} \\ S_{12} \end{Bmatrix}$$

Lois d'évolution

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_1 &= \dot{\xi}^p - D_1 \alpha_1 \dot{p} \\
 \dot{\alpha}_2 &= \dot{\xi}^p - D_2 \alpha_2 \dot{p} \\
 \dot{p} &= \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n
 \end{aligned} \tag{III.21}$$

Nous choisissons un double écrouissage cinématique et un écrouissage isotrope qui est cette fois-ci pris non linéaire.

De plus, afin de prendre en compte le caractère anisotrope de la cellule perforée nous introduisons, au niveau du critère elliptique, le tenseur de Hill $\tilde{H}$ (six coefficients : a, b, c, d, e et f) et un tenseur $\tilde{P}$ (trois coefficients : p, q, r).

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} ; \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Le tenseur $\tilde{P}$ permet que la déformation plastique évaluée avec le critère ne soit pas accompagnée d'une augmentation de volume lorsque le chargement est appliqué dans la direction $\underline{y}$ (l'axe du trou) (figure III.7). Par contre lorsque nous exerçons un effort de traction dans la direction $\underline{z}$, le modèle permet bien une dilatation dans la direction $\underline{x}$.

b) Résultat de l'identification

Le modèle elliptique anisotrope proposé permet de rendre compte des “essais numériques” réalisés sur la cellule de base de manière satisfaisante.

Sur les figures (III.9) à (III.14) nous pouvons observer différentes comparaisons “expérience” - calcul entre les résultats sur la cellule perforée et le modèle homogénéisé.

Le modèle a pu être identifié à l'aide d'un outil de simulation et d'optimisation (Besson et al., 1998; Leriche, 1998) utilisant des algorithmes de type simplex, levenberg-marquardt ou sqp (Z-set, 1996).

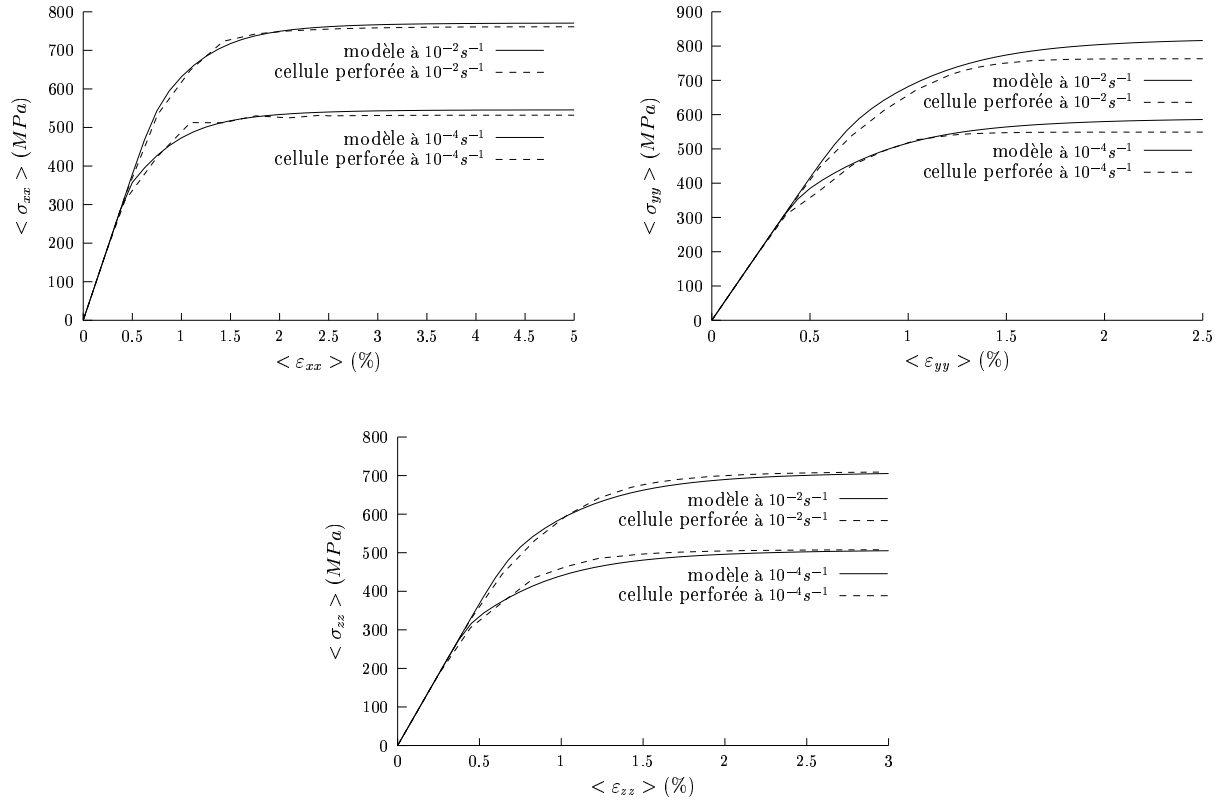


Figure III.9 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de traction

Nous observons bien un comportement viscoplastique car les courbes d’écrouissage sont sensibles à la vitesse de déformation : plus la vitesse est élevée, plus la contrainte est grande pour la même déformation.

Les trois essais de traction (figure III.9) et les trois essais de cisaillement simple (figure III.10) ont permis de déterminer les six paramètres scalaires du critère de Hill qui caractérisent l’état d’écrouissage anisotrope.

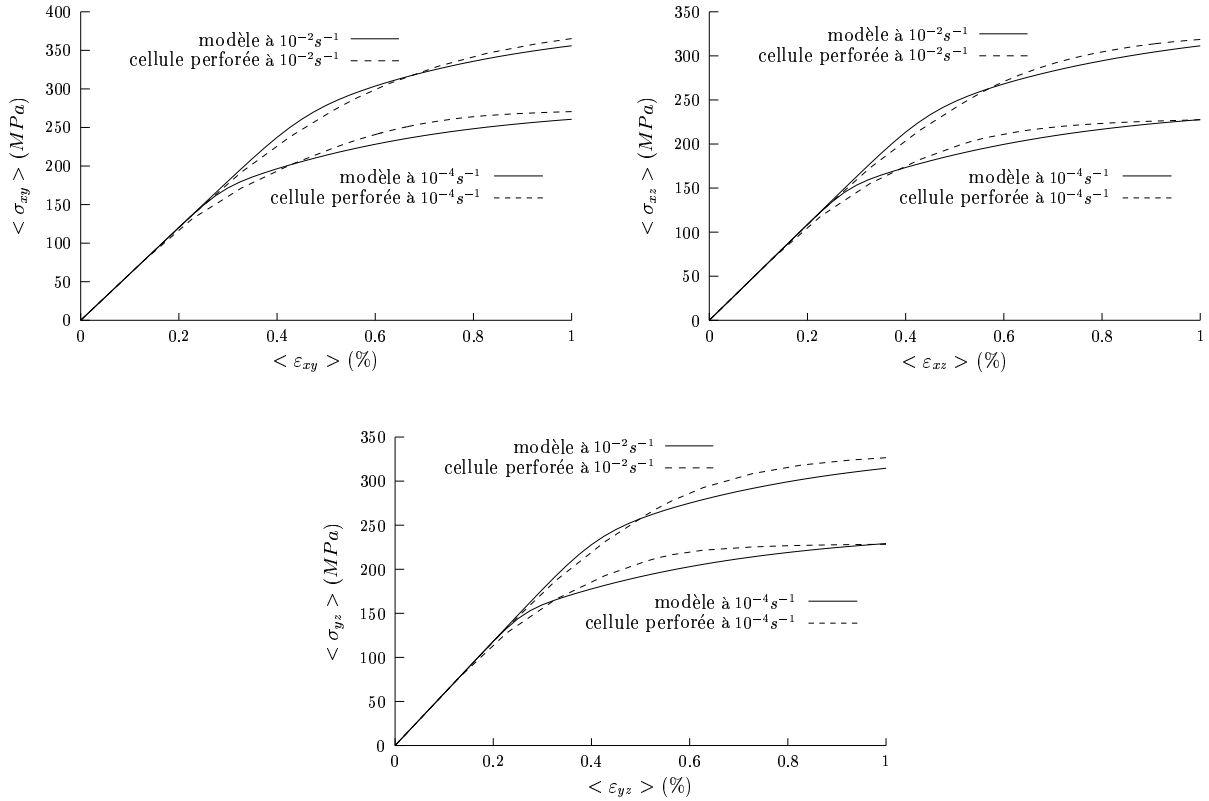


Figure III.10 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de cisaillement

Dans un deuxième temps, des essais sollicitant la partie compressible du modèle tels que des essais de dilatation hydrostatique (figure III.11) ou des essais d’extension (figure III.12) ont été effectués et ont permis de déterminer le rapport C/F .

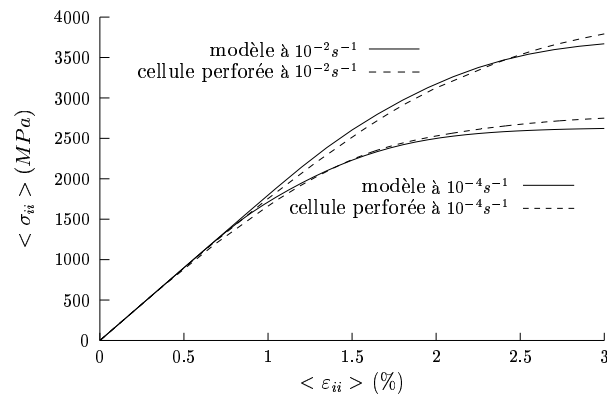


Figure III.11 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de dilatation hydrostatique

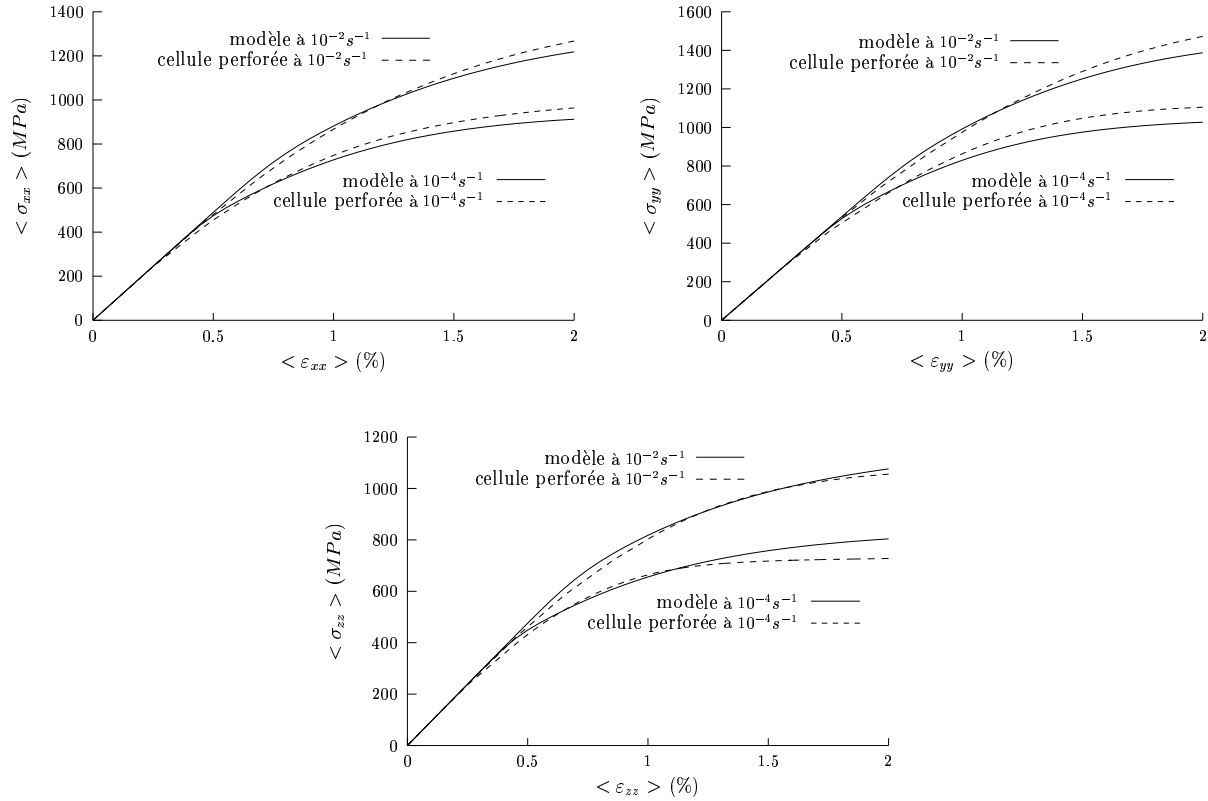


Figure III.12 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais d’extension

Les essais de relaxation (figure III.13), mettant en évidence la diminution de contrainte au cours du maintien à déformation constante, caractérisent la viscosité et permettent de déterminer la relation qui existe entre la contrainte et la vitesse de déformation viscoplastique.

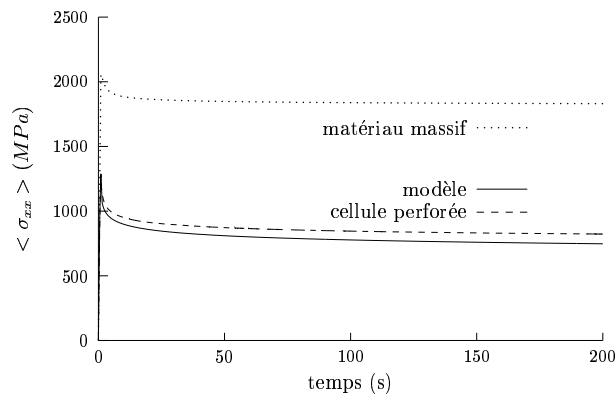


Figure III.13 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de relaxation

Les essais cycliques (figure III.14) mettent également en évidence des phénomènes de durcissement et d'adoucissement cycliques.

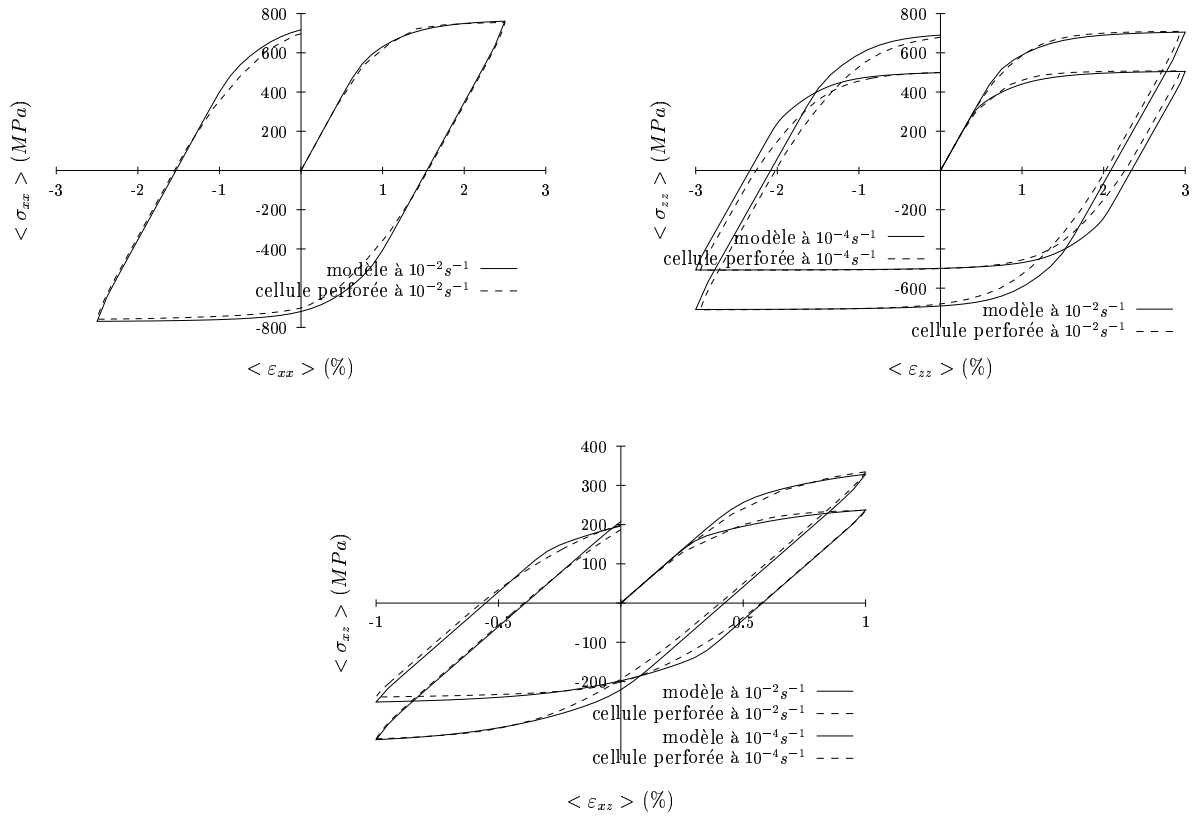


Figure III.14 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais cycliques

Le modèle reproduit bien l'effet Bauschinger grâce au double écrouissage cinématique et l'anisotropie est prise en compte à travers le critère de Hill.

Et nous vérifions également, qu'avec ce nouveau modèle, nous reproduisons bien le changement de volume suite à un essai de traction dans les directions $\underline{x}$ et $\underline{z}$ (figure III.15).

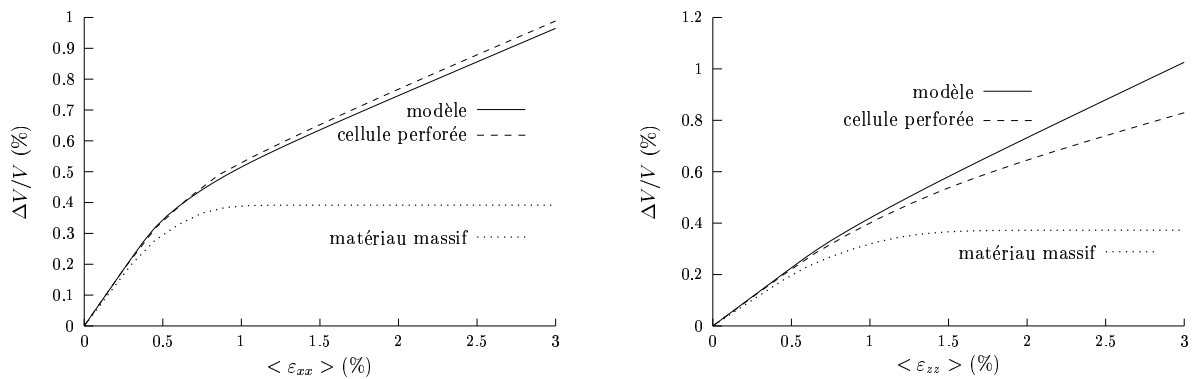


Figure III.15 : Changement de volume suite à un essai de traction

Les coefficients ont été déterminés pour une température de fonctionnement de 950°C et sont donnés dans les tableaux (III.2) et (III.3).

C	F	p	q	r	a	b	c	d	e	f
1	0.4	1	0	2.4	11	7.5	8.8	11.3	14.3	14.3

Tableau III.2 : Coefficients concernant l'anisotropie du modèle

$K(MPa, s)$	n	$R_0(MPa)$	Q	b	$C_1(MPa)$	D_1	$C_2(MPa)$	D_2
3200	7.5	310	200	660	420000	1500	49000	425

Tableau III.3 : Coefficients concernant l'écrouissage du modèle

Si nous comparons les coefficients de la loi de comportement du milieu homogène équivalent orthotrope avec les coefficients de la loi viscoplastique de départ alors nous nous apercevons que le seuil de plasticité est supérieur. Ce résultat s'explique par le fait qu'au niveau du critère elliptique différents coefficients rentrent en jeu.

Si nous effectuons un essai de traction suivant une direction alors la surface du critère de von Mises s'exprime par

$$f = \sigma - R$$

alors que la surface du critère elliptique s'écrit

$$f = A \sigma - R'$$

où A dépend de C , de F et des coefficients d'anisotropie du tenseur de Hill $\tilde{H}$ et du tenseur $\tilde{P}$.

Le coefficient A prend des formes différentes suivant la direction de traction :

- suivant $\underline{x}$ alors $A = \sqrt{\frac{1}{6}C(4a + b + c) + Fp} = 3.23$
- suivant $\underline{y}$ alors $A = \sqrt{\frac{1}{6}C(a + 4b + c) + Fq} = 2.88$
- suivant $\underline{z}$ alors $A = \sqrt{\frac{1}{6}C(a + b + 4c) + Fr} = 3.15$

Les résultats obtenus sont semblables à ceux mis en évidence au niveau du milieu homogène équivalent élastique :

- Le trou a une influence similaire dans les directions $\underline{x}$ et $\underline{z}$: il entraîne un affaiblissement d'environ 20% sur les propriétés mécaniques.
- Dans la direction $\underline{y}$, le seuil de plasticité est affaibli de 8% ce qui correspond à la fraction volumique du trou.

Ce type d'approche peut poser un problème dès qu'il s'agit d'effectuer des prévisions hors du domaine d'identification. Dans notre cas la base d'identification numérique est relativement riche mais le modèle est étroitement lié à la forme de la cellule de base. Cependant, nous allons voir que ce type de modèle est bien adapté au calcul de structure et permet d'obtenir des résultats très satisfaisants.

III.3 Applications

III.3.1 Calcul d'une plaque perforée

Avant de tester le modèle effectif anisotrope compressible sur l'aube de turbine, nous allons le valider en comparant la réponse du matériau viscoplastique avec un critère de von Mises à celle du critère elliptique sur une plaque perforée périodiquement en trois dimensions afin de bien prendre en compte le caractère anisotrope.

La géométrie est identique à celle de la plaque perforée en 2D (figure I.5).

Le chargement est lui aussi identique à celui présenté au chapitre I. Nous appliquons sur deux structures (une géométrie perforée et une géométrie homogénéisée) un chargement simple.

La géométrie sans singularité géométrique sera simulée d'une part avec la loi de comportement de la structure réelle (critère de von Mises), et d'autre part avec le critère elliptique.

Dans un premier temps nous comparons le déplacement global de la structure dans les trois cas (figure III.16).

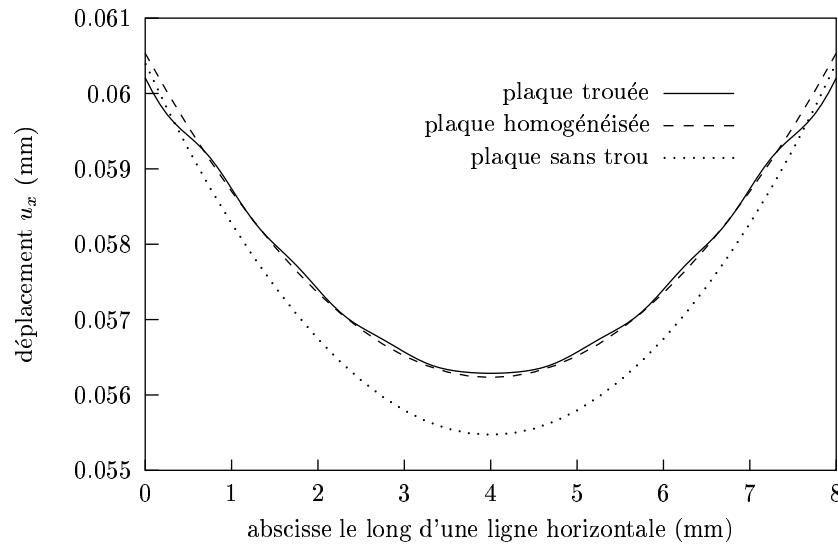
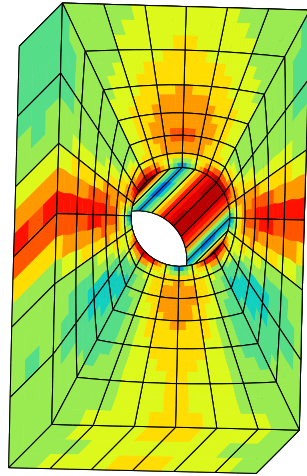


Figure III.16 : Déplacement sur la ligne horizontale située au centre de la structure

Nous apprécions le rôle du milieu homogène de substitution par rapport au comportement viscoplastique isotrope. L'affaiblissement lié à la perforation est bien pris en compte.

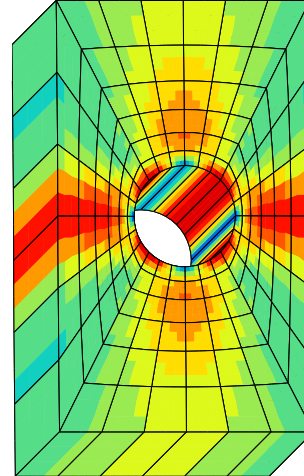
Dans un deuxième temps nous comparons l'état local au voisinage des perforations. Pour ce faire, nous appliquons la méthode basée sur des relations de moyenne au bord du volume élémentaire représentatif.

Sur la figure (III.17) nous comparons la contrainte équivalente au sens de von Mises entre les résultats obtenus sur la plaque trouée et ceux calculés après relocalisation sur le volume élémentaire représentatif. Nous observons que les valeurs calculées au point de Gauss sont semblables d'un calcul à l'autre.



$$66MPa \leq \sigma_{mises} \leq 660MPa$$

sur la plaque trouée



$$88MPa \leq \sigma_{mises} \leq 665MPa$$

sur le VER

Figure III.17 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène de substitution suite à un essai de glissement

L'essai de glissement simple sur un nombre fini de cellules est un essai servant à la validation du modèle mais peut paraître un peu éloigné des conditions de sollicitation de la pièce industrielle que nous désirons étudier.

En effet, le chargement mécanique que subit l'aube de turbine HP est une accélération centrifuge sur une structure tridimensionnelle. Donc, afin de valider le modèle sur le style de chargement qui nous intéresse et de vérifier l'anisotropie du modèle, nous allons simuler un essai de traction suivant la direction $\langle 001 \rangle$ toujours sur la plaque perforée en trois dimensions.

Ces deux essais (glissement ou traction) font partis de la base d'identification. De ce fait, la réponse globale de la structure constituée d'un nombre fini de cellules donnera la même réponse que le modèle sur la cellule de base.

La validation porte donc principalement sur la relocalisation de l'état de contrainte au voisinage de la perforation.

Sur la figure (III.18) nous pouvons apprécier la bonne corrélation des résultats issus de la plaque perforée "complète" et du calcul sur la plaque homogénéisée suivie d'une relocalisation sur la cellule de base.

La figure (III.18) nous donne la contrainte équivalente au point de Gauss sur la cellule de base. Nous comparons cette contrainte avec les résultats obtenus au niveau du trou situé au centre de la structure perforée périodiquement.

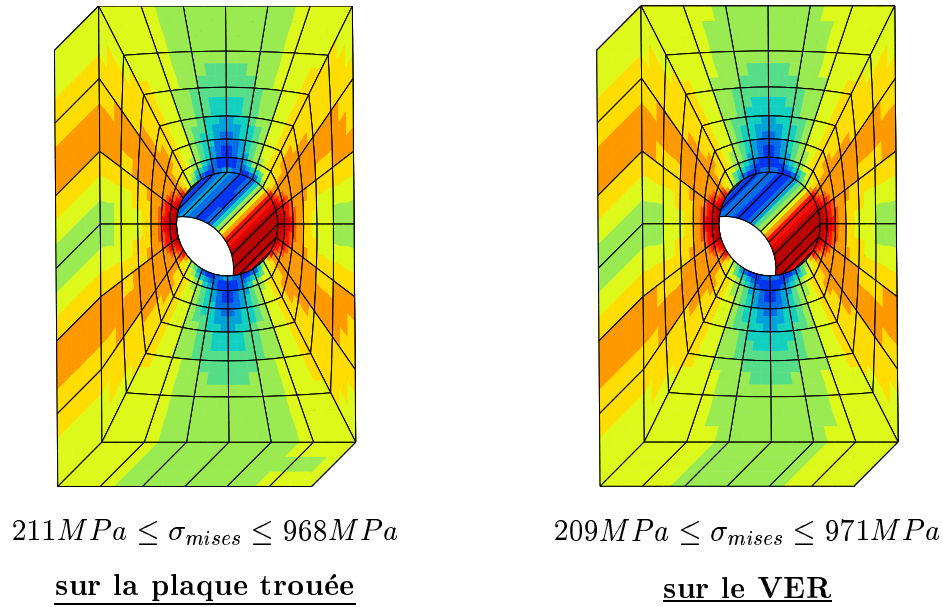


Figure III.18 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène de substitution suite à un essai de traction

Dans un deuxième temps, afin de vérifier la localisation et l'intensité des champs locaux, nous comparons le tenseur des contraintes le long d'une ligne définissant le contour du trou. Sur la figure (III.19), nous avons tracé les contraintes équivalentes obtenues respectivement sur la cellule de base et sur la géométrie réelle. Et nous remarquons qu'elles sont identiques (écart inférieur à 5%).

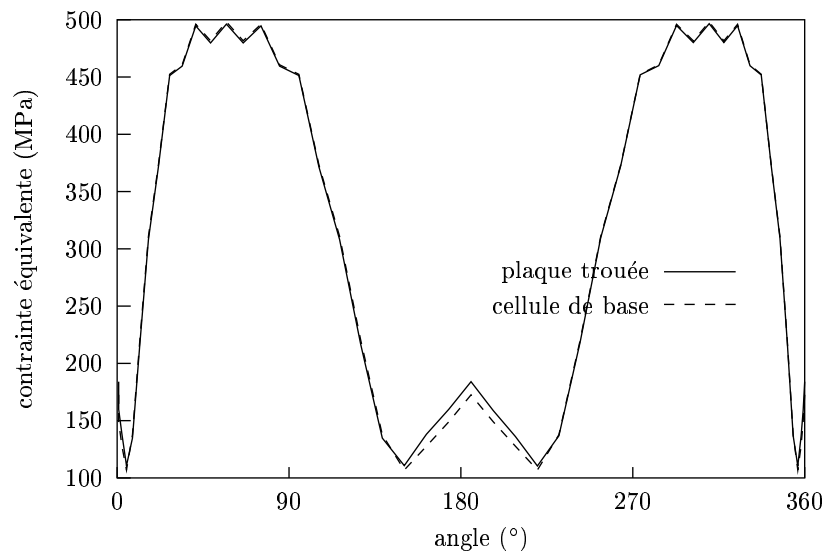


Figure III.19 : Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)

III.3.2 Calcul de l'aube de turbine

Dans ce paragraphe nous allons mettre en évidence le fait que le modèle elliptique anisotrope est suffisant pour reproduire ce qui se passe localement sur l'aube de turbine subissant le chargement défini par la mission I.16.

Pour cela nous effectuons le calcul sur l'aube perforée (figure III.20) et un calcul, identique au niveau des conditions aux limites, sur le maillage homogénéisé (figure III.21) où la zone perforée est remplacée par le milieu homogène équivalent.

Les isovaleurs représentent la contrainte équivalente au temps 390, après un temps de maintien de 150 secondes, afin de prendre en compte le caractère visqueux du modèle.

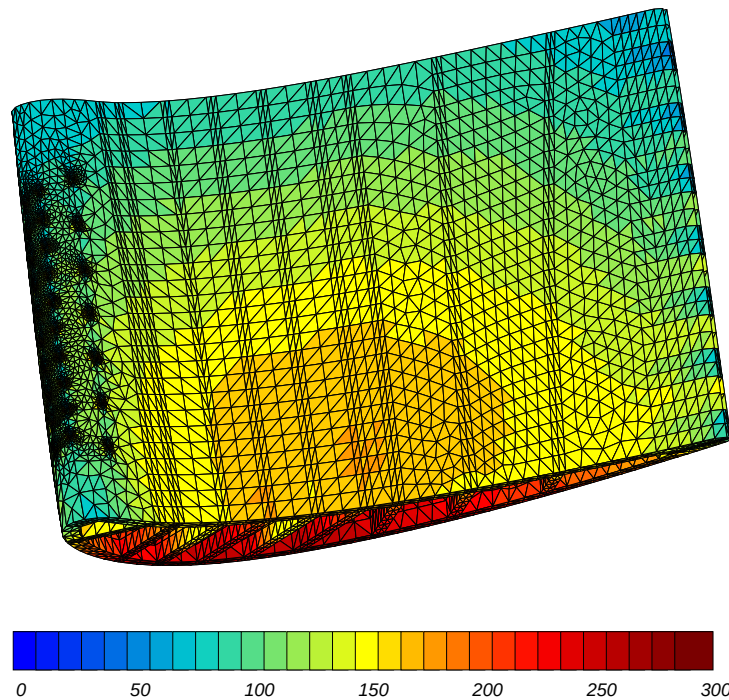


Figure III.20 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission

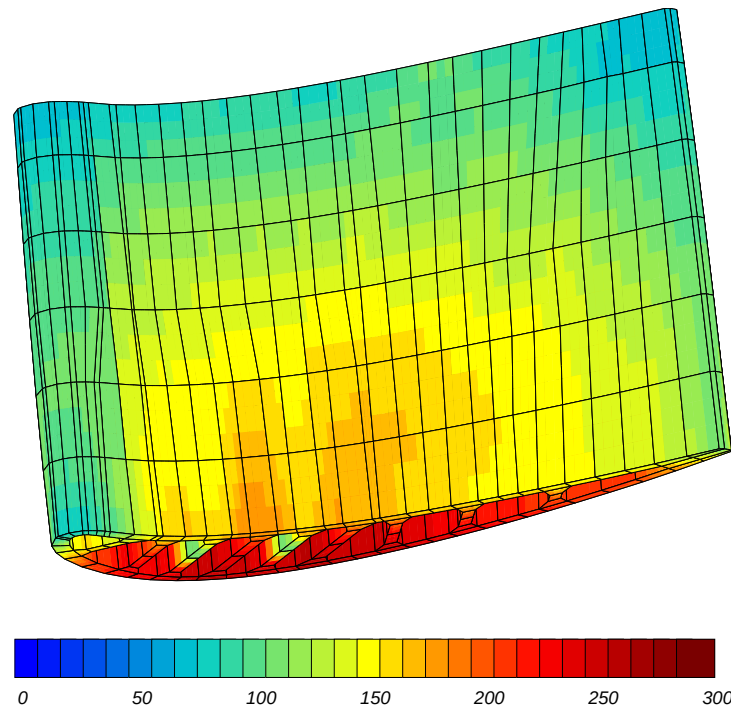


Figure III.21 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission sur le maillage homogénéisé

Nous cherchons à présent à déterminer l'état de contrainte au niveau des trous du bord d'attaque.

La méthode est similaire à celle exposée au chapitre I. Du fait du comportement non linéaire, nous moyennons le tenseur du champ de déformation obtenu sur le calcul homogénéisé au niveau du trou en fonction du temps. Puis nous imposons ce champ de déformation à la cellule de base.

De cette manière nous obtenons l'état de contrainte au cours de la mission du moteur que l'on peut comparer au résultat de référence obtenu grâce au calculateur parallèle (figure III.22).

La contrainte équivalente obtenue au point de Gauss est identique mais la localisation ne semble pas correspondre (centrée au niveau de la cellule de base et décalée vers le bas sur le maillage perforée).

Pour les mêmes raisons que celles énoncées au chapitre I.5.4, liées à la géométrie de la pièce, les résultats sont difficilement comparables.

Nous pouvons tout de même mettre en évidence l'intérêt d'utiliser un milieu homogène équivalent également dans l'étude de l'aube perforée.

Si nous effectuons la même démarche suite à un calcul sur une aube sans singularité et ayant un comportement viscoplastique isotrope, et en ne prenant pas en compte la perforation, (figure III.23) alors le résultat obtenu sous-estime la réalité et surestimera la durée de vie de la structure.

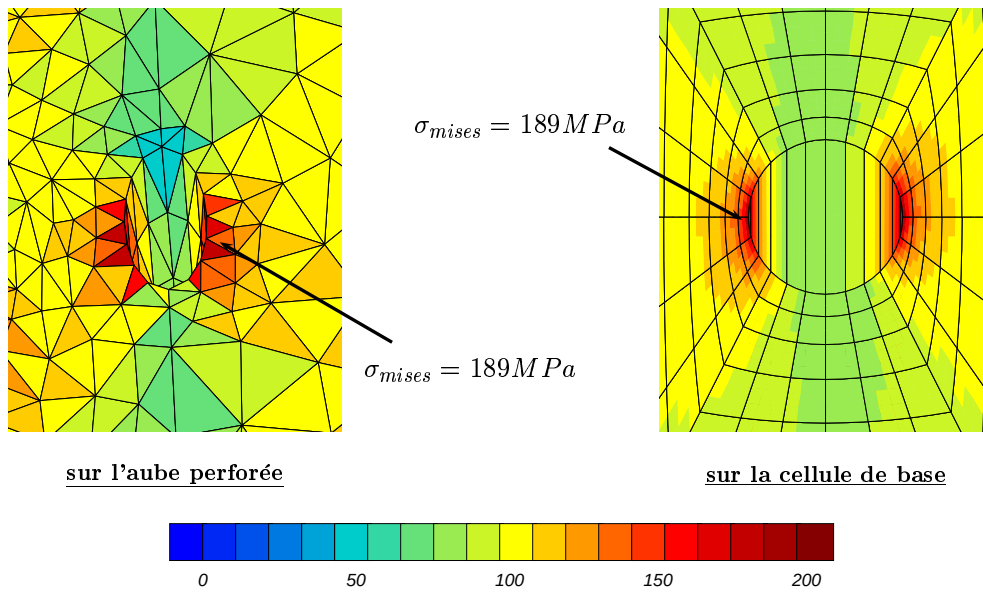


Figure III.22 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée a été remplacée par un matériau homogène de substitution

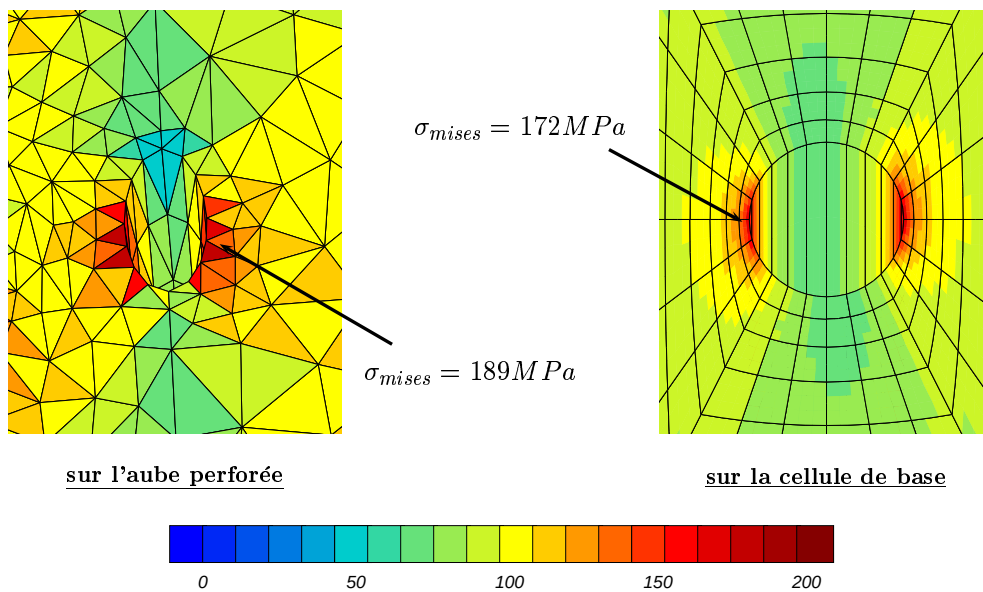


Figure III.23 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée est modélisée avec la loi de comportement du matériau massif

Chapitre -IV-

Comportement monocristallin

Sommaire

IV.1	Présentation du matériau	93
IV.1.1	Solidification d'une aube monocristalline	94
IV.1.2	Déformation du superalliage monocristallin AM1	97
IV.2	Le modèle monocristallin	99
IV.3	Détermination d'un modèle homogène équivalent	104
IV.3.1	Présentation du modèle	104
IV.3.2	Identification du modèle	105
IV.4	Applications	111
IV.4.1	Plaque perforée	111
IV.4.2	Aube de turbine HP	114

IV.1 Présentation du matériau

L'aube de turbine étudiée est une aube monocristalline AM1 revêtu C1A (figure .3).

L'AM1 est un superalliage à base de nickel qui a été défini pour la fabrication de pièces composant les zones les plus chaudes des moteurs. Il a été conçu par la SNECMA en association avec IMPHY S.A., le centre des matériaux de l'Ecole des Mines de Paris et l'ONERA pour la fabrication des pièces monocristallines.

L'étude de ses propriétés mécaniques fait l'objet de nombreuses thèses (Defresne, 1989; Poubanne, 1989; Méric, 1991; Fleury, 1991; Grosdidier, 1992; Hanriot, 1993; Fleurentin, 1996).

IV.1.1 Solidification d'une aube monocristalline

Vu la complexité des pièces à réaliser, les pièces monocristallines sont obtenues en solidification dirigée (procédé Bridgman) selon la technique de coulée à cire perdue.

La solidification a lieu sous vide secondaire dans un four cylindrique constitué de deux parties (cf figure IV.1) :

- une partie chaude, en haut du four, chauffée grâce à deux résistors cylindriques en graphite dont les consignes de pilotage sont ajustées séparément. Un gradient de température dans le moule peut être imposé en régulant ces deux éléments à des températures différentes.
- une partie froide, en bas du four, constituée d'un refroidisseur composé d'un serpentin en cuivre refroidi par circulation d'eau.

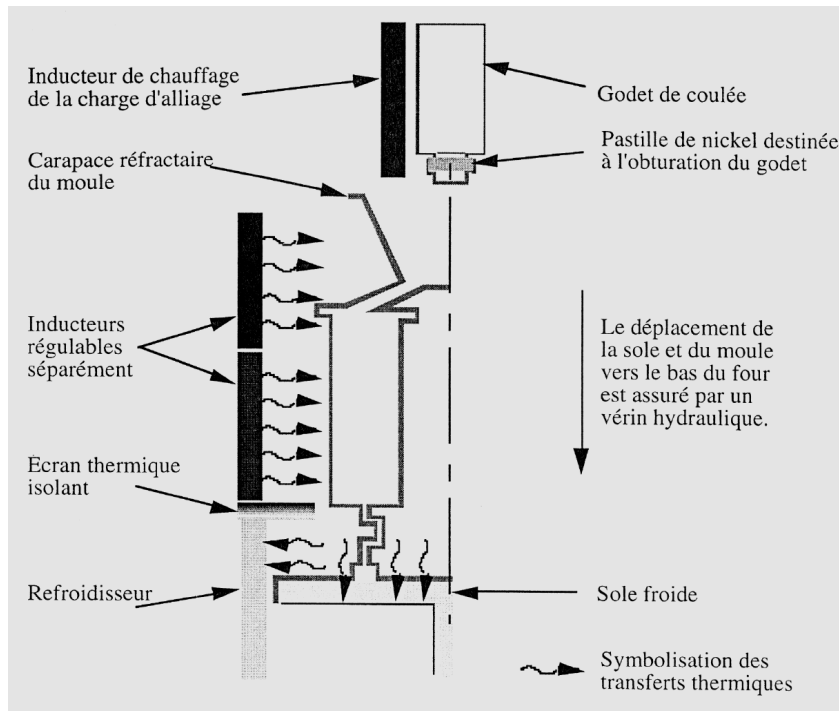


Figure IV.1 : Schéma d'un moule placé dans un four de solidification dirigée

Les deux parties sont séparées par un écran thermique qui limite les échanges afin de conserver un gradient de température longitudinal (suivant l'axe vertical du four) le plus élevé possible.

Le moule est placé sur la sole en cuivre refroidie par circulation d'eau. La charge d'AM1 est placée dans un godet obturé par une pastille de nickel dont l'épaisseur a été choisie pour qu'elle soit entièrement fondue lorsque la température de l'alliage est portée à 1500°C , d'où l'appellation d'ouverture automatique. L'enceinte du four est fermée pour être mise sous vide secondaire, et pour aider au dégazage de la carapace du moule des éléments réfractaires on chauffe le moule à 600°C . Le vide voulu est atteint en 2 heures environ.

La solidification est initialisée par la germination d'un grand nombre de grains sur le refroidisseur. Cette étape nécessite que le métal liquide ait été amené dans un état de surfusion élevée, probablement plusieurs dizaines de degrés Celsius. Après un temps d'attente de deux minutes, nécessaire à l'homogénéisation des températures du bain liquide et du moule, l'ensemble moule-métal-sole est tiré vers le bas, de la zone chaude vers la zone froide du four. La vitesse de tirage est imposée par l'opérateur sur un pupitre de commande et peut être modifiée en cours de solidification. La vitesse est choisie afin d'obtenir une solidification dendritique. Au cours des premiers instants suivant la germination, la vitesse de croissance est bien plus grande que la vitesse de tirage, ceci tant que la température du front de solidification n'a pas rejoint l'isotherme liquidus.

La distribution des orientations des axes dendritiques primaires solidifiés dans les premiers instants après la coulée est aléatoire. De ce fait, il est placé un sélecteur de grains entre le plot et le moule. Le principe de fonctionnement des sélecteurs de grain est basé sur la compétition entre les dendrites. Constitué d'une chicane, le sélecteur impose des extensions latérales successives et favorise la croissance d'un grain dont l'axe cristallographique $\langle 001 \rangle$ est le plus proche des lignes de flux thermique. Ce grain va se propager dans tout le moule. A la sortie du sélecteur, la dendrite s'étend latéralement par un bras secondaire qui donne naissance à des bras tertiaires dont un grand nombre disparaît rapidement pour ne laisser subsister que les axes primaires.

L'intervalle de solidification de l'AM1 est de 54°C . La solidification commence à 1364°C en phase γ (température de liquidus). La phase γ est cubique faces centrées (cf figure IV.2) et la direction de croissance des dendrites de métaux cfc est une direction cubique (direction parallèle à une direction cristallographique $\langle 001 \rangle$) du réseau cristallin. Et elle se termine

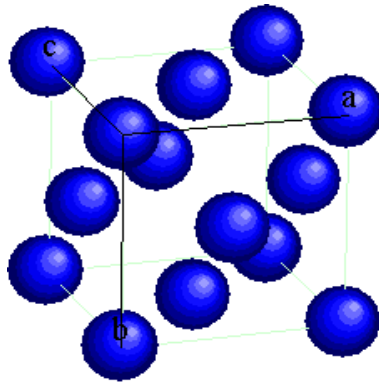


Figure IV.2 : Structure Cubique à Faces Centrées, $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ (Bourdias et Monceau, 1994)

par un dépôt eutectique $\gamma - \gamma'$ à 1310°C , dont la fraction volumique peut atteindre $4.5 \pm 1\%$ sur les pièces brutes de solidification, en raison d'un rejet continu de soluté à la pointe de la dendrite pendant la solidification (figure IV.3) (Gallerneau, 1995). De ce fait, à l'issue de la solidification dirigée, les espaces interdendritiques contiennent des amas eutectiques $\gamma - \gamma'$ et on observe souvent une taille de phase γ' secondaire plus grossière dans les espaces interdendritiques. On se trouve en présence d'un matériau inhomogène, auquel s'ajoute la présence de micropores inhérents au procédé de fabrication. Il convient d'effectuer un traitement de remise en solution de la phase γ' afin d'homogénéiser la structure de cette phase. Le traitement d'homogénéisation se situe dans un domaine de température où la

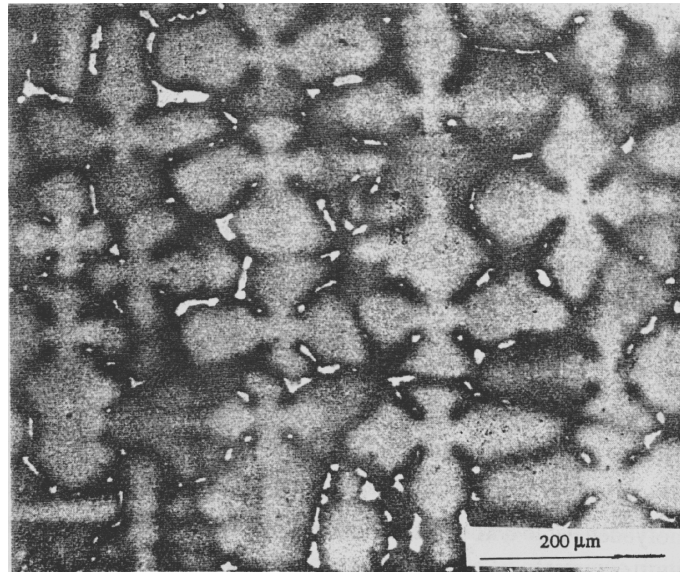


Figure IV.3 : AM1 brut de coulée. Hétérogénéité de composition

phase γ' n'est plus stable (typiquement vers 1300°C). Ceci a deux effets principaux :

- la remise en solution de la phase γ' primaire, qui permettra d'augmenter le taux de phase durcissante disponible
- la réduction des hétérogénéités de composition liées à la structure dendritique.

Ce traitement d'homogénéisation est interrompu par un refroidissement suffisamment rapide pour éviter un grossissement trop important des précipités γ' qui vont se former. Puis il est suivi d'un second revenu effectué aux alentours de 850°C dans les alliages à forte fraction volumique de phase γ' . Il induit un complément de précipitation et la coalescence des précipités issus de la trempe après le premier revenu (figure IV.4).

Ces traitements conduisent à une population de précipités cuboïdaux de la phase γ' avec une fraction volumique d'environ 70 % formant un réseau périodique selon les directions du cube noyé dans une matrice de phase γ (figure IV.5). La taille des précipités avoisine les $0.4\text{-}0.5\ \mu\text{m}$ alors que la largeur des couloirs de phase γ est comprise entre 0.05 et $0.1\ \mu\text{m}$. Mais, malgré ces traitements d'homogénéisation, le matériau présente toujours une porosité importante : micro-retassures de 20 à $50\ \mu\text{m}$ situées dans les espaces interdendritiques s'alignant suivant la direction $\langle 001 \rangle$ de croissance du monocristal.

Les deux phases γ et γ' ont la même structure cristalline CFC avec un écart paramétrique relatif $\delta = (a_{\gamma'} - a_{\gamma})/a_{\gamma}$ positif à température ambiante et inférieur à 0.5%.

La composition de l'AM1 est donnée dans le tableau IV.1 et sa masse volumique est de $8600\ \text{kg m}^{-3}$.

L'aluminium durcit le matériau en tant que constituant principal de la phase γ' . Il apporte, avec le chrome, une protection à haute température contre l'oxydation. Le titane et le tantale durcissent les précipités. Le molybdène et le tungstène favorisent un durcissement de la phase solide. Et le cobalt a pour rôle principal de diminuer la solubilité des éléments dans la phase γ , favorisant ainsi la précipitation.

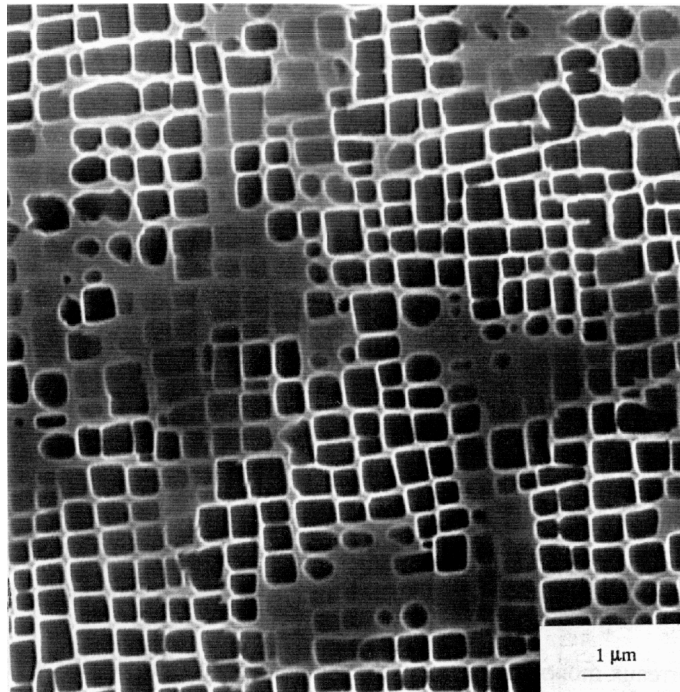


Figure IV.4 : Microstructure des précipités à coeur de dendrite après traitements (Gallerneau, 1995).

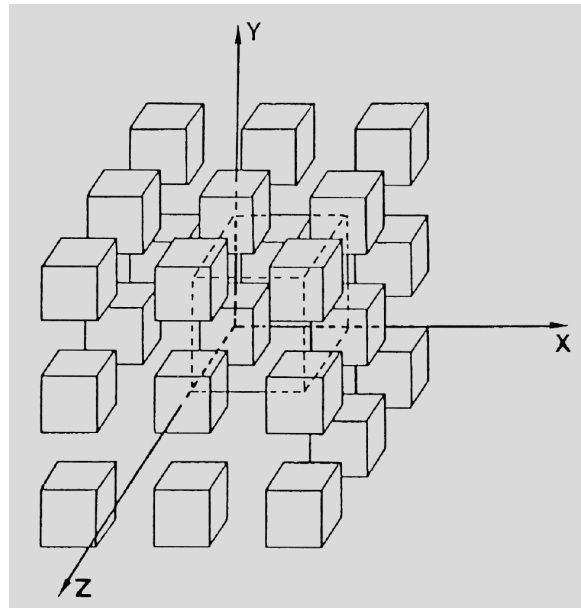


Figure IV.5 : Réseau tridimensionnel de motif cubique. Les aubes représentent les précipités de la phase γ (Poubanne, 1989).

IV.1.2 Déformation du superalliage monocristallin AM1

Avant d'aborder la déformation inélastique du composé biphasé, il est nécessaire de rappeler quelques généralités concernant le comportement des monocristaux de structure cubique à

Element	Co	Cr	Mo	W	Ta	Al	Ti	Fe
Teneur visée	6-7	7-8	1.8-2.2	5-6	7.5-8.5	5.1-5.5	1-1.4	0.2

Tableau IV.1 : Tableau indiquant les compositions chimiques de l'AM1 (en pourcentage massique).

faces centrées.

La déformation plastique est principalement liée au déplacement progressif de défauts linéaires appelés lignes de dislocations. Ces lignes se déplacent sur des plans denses du réseau qui, dans le cas des structures CFC, correspondent aux plans de famille $\{111\}$ (la normale $\underline{n}$ est de type $\langle 111 \rangle$).

Une dislocation peut se mouvoir si la composante suivant la direction de glissement du vecteur contrainte appliqué sur son plan de glissement dépasse une valeur seuil τ_c appelée contrainte critique. La loi d'écoulement (loi de Schmid) s'énonce alors ainsi :

$$\begin{aligned} \tau^s &= \sigma^s : \underline{m}^s = \sigma : \frac{1}{2} (\underline{n}^s \otimes \underline{m}^s + \underline{m}^s \otimes \underline{n}^s) = \tau_c \\ \dot{\gamma}^s &\neq 0 \quad \text{si} \quad |\tau^s| = \tau_c \quad \text{et} \quad |\dot{\tau}^s| = \dot{\tau}_c \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

où $\underline{n}^s$ est la normale au plan de glissement

$\underline{m}^s$ est la direction du glissement dans le plan

$\dot{\gamma}^s$ la vitesse de glissement sur le système s.

De ce fait, dès lors que la contrainte appliquée atteint la valeur critique, le glissement plastique sur le système est possible.

Mais le déplacement d'une dislocation dans son plan de glissement est influencé par les différentes configurations que peuvent former les dislocations entre elles. Ces dernières peuvent entraver (dislocations immobiles de type "arbres de la forêt", formation de dipôles) ou faciliter (annihilation avec d'autres dislocations, mécanisme de production de Frank et Read) le mouvement des dislocations et jouent par conséquent sur les mécanismes du durcissement et la loi d'écrouissage. De ce fait, la contrainte critique τ_c^s , reflétant le degré de facilité de déplacement des obstacles du système (s), doit tenir compte des obstacles entravant le mouvement.

a) Déformation de l'AM1 à 650°C

A 650°C le matériau présente un stade de déformation facile quelle que soit son orientation. Dès que le seuil de microplasticité est atteint, il se forme sur le fût de l'éprouvette une macrobande dans laquelle la déformation se concentre. Le comportement inélastique global semble parfaitement plastique. La déformation, très localisée, se développe dans plusieurs bandes de glissement très denses en dislocation pouvant s'activer simultanément. Seul le système ayant la plus forte cisssion résolue s'active. La sollicitation cyclique intensifie les bandes de glissement dans les systèmes existant et peut, lorsque la cisssion critique est atteinte, provoquer l'activation d'autres systèmes.

En raison de la régularité de la microstructure $\gamma - \gamma'$, il est rare que la déformation inélastique se confine dans une seule direction de glissement pour un plan donné. On observe par

conséquent une forte hétérogénéité de déformation globale favorisée par l'homogénéité de la déformation locale (Poubanne, 1989). On constate également un cisaillement d'ensemble de la matrice de la phase γ et des précipités γ' .

L'anisotropie du comportement inélastique est reliée à la nature du glissement. La contrainte d'écoulement est plus élevée selon $[001]$ que selon $[111]$ en raison de l'intervention du glissement cubique $\{001\} < 110 >$ lors d'un essai de traction dans cette dernière direction.

b) Déformation de l'AM1 à 950°C

A haute température, un des aspects essentiels du comportement est son caractère visqueux : le comportement du monocristal dépend de la vitesse de sollicitation.

A 950°C, il n'y a presque plus de stade d'écoulement facile mais une consolidation du matériau avec la déformation inélastique. Cette dernière est relativement homogène à l'échelle macroscopique et l'étude des systèmes de glissement actifs révèle la présence de systèmes octaédriques et cubiques. A l'échelle microscopique, les dislocations se répartissent systématiquement dans la phase γ ou à l'interface des deux phases $\gamma - \gamma'$ mais pénètrent rarement dans le précipité. La déformation est donc accommodée exclusivement par la matrice γ , soit par 30% du volume du matériau, formant des couloirs très fins tridimensionnels entourant les précipités de phase γ' . Les dislocations doivent ainsi se mouvoir dans un espace très réduit en utilisant le petit nombre de systèmes de glissement disponibles. De plus les précipités jouent le rôle d'ancrage des dislocations.

Tout ceci engendre un fort écrouissage et une déformation homogène à l'échelle macroscopique (pas de localisation de la déformation).

Trois mécanismes de mouvements de dislocations sont envisageables (Poubanne, 1989) : le contournement des obstacles par le mécanisme d'Orowan, le glissement dévié permettant à une dislocation vis d'éviter un précipité et la montée de dislocations, le cisaillement des précipités n'intervenant que pour de très fortes contraintes.

IV.2 Le modèle monocristallin

Le modèle que nous allons utiliser au cours de l'étude pour décrire le comportement de l'alliage monocristallin à base de nickel est un modèle de comportement viscoplastique anisotrope. Mais avant de présenter la formulation qui est utilisée pour cette étude nous présentons brièvement les différentes méthodes capables de décrire le comportement inélastique des monocristaux.

L'approche multicritère (Koiter, 1960) étend la théorie classique de la plasticité (Taylor, 1938) au cas où plusieurs mécanismes d'écoulement indépendants existent. Le domaine de plasticité n'est plus une seule fonction (chapitre III), mais on décrit les surfaces d'écoulement par un nombre fini ou infini de fonctions seuils f^r . Ces fonctions ne dépendent que de l'état de contrainte $\underline{\sigma}$ et du glissement $\underline{\gamma}$ sur le système r .

$$f^r(\underline{\sigma}, \underline{\gamma}) = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Le taux de déformation plastique est déterminé en sommant sur tous les systèmes actifs la contribution de la vitesse de chaque système pondérée par son facteur d'orientation.

L'hypothèse d'indépendance des mécanismes apparaît difficilement acceptable dans le cas d'un cristal où les dislocations produites par un système de glissement constituent des obstacles pour les autres mécanismes. De ce fait une généralisation a été proposée (Mandel, 1965) afin que la déformation inélastique résulte de mécanismes différents. Et, dans ce cas, les fonctions seuils dépendent de l'état de contrainte mais aussi des glissements sur chacun des systèmes.

$$f^r(\sigma, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Ces travaux ont été réalisés pour des solides élastoviscoplastiques soumis à des petites perturbations et ont été étendu au cas viscoplastique pour lequel (Rice, 1970) a montré l'existence d'un potentiel viscoplastique.

$$\Omega = \sum_{s=v_1}^{v_n} \omega^s = \sum_{s=v_1}^{v_n} \int \dot{\gamma}^s(\tau^s, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n) d\tau^s \quad (\text{IV.4})$$

Ces approches sont à la base de toutes les approches cristallographiques qui se sont développées par la suite, approches quasi-physiques ou approches phénoménologiques.

Le premier modèle pour les monocristaux purs de type CFC écrit à partir de considérations physiques sur les dislocations (Zarka, 1972) généralise le cadre proposé par Mandel et Rice. Supposant que seuls les systèmes (111) $\langle 110 \rangle$ peuvent être actifs, il définit un mécanisme de glissement en groupant les six systèmes de glissement de même vecteur de Burgers et montre qu'il existe un potentiel viscoplastique quadratique pour le cristal.

Une autre formulation quasi-physique est basée sur le fait que la déformation du monocristal s'effectue par glissement cristallographique sur des systèmes et que l'écoulement plastique instantané obéit au critère de Schmid (Franciosi, 1985).

$$\tau^r = \sum_{s=v_1}^{v_n} h_{rs} |\dot{\gamma}^s| \quad (\text{IV.5})$$

Ces modèles font intervenir les dislocations et leurs interactions en incluant un certain nombre de processus élémentaires comme le franchissement de dislocation, la création de boucles de Frank-Read, le glissement dévié et la montée de dislocation. Par contre, ils ne prennent pas en compte l'effet Bauschinger, même seuil limite en traction et compression, et restreignent donc les applications aux chargements monotones.

Dans notre étude nous utilisons un modèle cristallographique phénoménologique. Ce type de modèle prend en compte une description minimale de la microstructure (grain, phase, système de glissement) mais reste "phénoménologique" au sens où l'approche ne cherche pas à écrire une loi d'écrouissage dont l'expression ferait directement référence à un mécanisme microscopique (la dislocation "n'existe pas" dans ces modèles).

Ce modèle est fondé sur l'hypothèse que la déformation provient uniquement du glissement de dislocations (le mécanisme de déformation prédominant est le glissement) et c'est la loi de Schmid qui définit directement le seuil de plasticité.

Dans le cas du monocristal, ces modèles comportent trois étapes distinctes qui considèrent

l'aspect cristallographique. Connaissant la contrainte macroscopique, on détermine la cis-sion résolue τ^s sur le système s puis on calcule la vitesse de glissement sur ce même système (loi de comportement) pour obtenir enfin la vitesse de déformation viscoplastique macroscopique. Le schéma de la figure (IV.6) illustre la démarche.

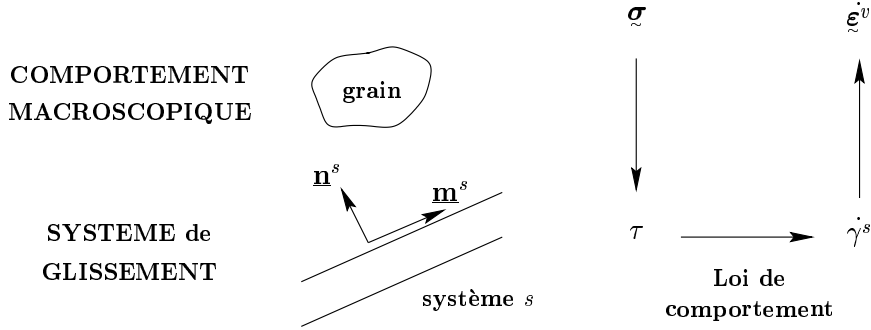


Figure IV.6 : Les différentes étapes d'un modèle cristallographique phénoménologique

Les différents modèles développés suivant ce schéma diffèrent principalement au niveau de la loi de comportement et plus principalement au niveau de l'écrouissage (Cuitino et Ortiz, 1992).

Le modèle utilisé (Caillaud, 1987), (Méric et al., 1991), développé pour le comportement des superalliages monocristallins à base de nickel AM1, suppose que le mécanisme de déformation prédominant est le glissement des dislocations. Et comme nous avons pu le voir au paragraphe précédent, dans les conditions d'utilisation du matériau, le glissement des dislocations a lieu sur douze systèmes octaédriques du monocristal CFC ($\{111\} \langle 011 \rangle$) ainsi que sur six systèmes cubiques de type $\{001\} \langle 011 \rangle$.

Une formulation viscoplastique a été choisie, afin d'éviter les problèmes relatifs à la détermination des systèmes de glissement actifs du modèle. Nous introduisons un seuil de plasticité en traction et en compression sur chaque système de glissement. La densité de dislocation n'intervient pas explicitement. Deux variables sont définies sur chaque système de glissement s , r^s écrouissage isotrope et x^s écrouissage cinématique. Un système est actif si la cis-sion τ^s est supérieure à $x^s + r^s$ ou inférieure à $x^s - r^s$ et le taux de glissement est connu ainsi que les deux variables d'écrouissage. Les variables d'état utilisées pour définir l'évolution de r^s et x^s sont le glissement cumulé v^s pour l'écrouissage isotrope et la variable α^s pour l'écrouissage cinématique.

Connaissant le tenseur des contraintes appliquées $\underline{\sigma}$, la résolution de la contrainte de cisaillement τ^s s'écrit classiquement selon (IV.6), $\underline{n}^s$ et $\underline{m}^s$ étant respectivement, pour chaque système s , la normale au plan de glissement et la direction du glissement dans le plan (figure IV.6). Les variables d'écrouissage r^s et x^s sont exprimées comme une fonction de α^s et v^s (IV.7) et servent à déterminer le taux de glissement viscoplastique $\dot{\gamma}^s$ et le tenseur de déformation viscoplastique $\dot{\underline{\epsilon}}^v$ (IV.8).

Les lois d'écrouissage (IV.9) et (IV.10) s'expriment à l'aide des deux variables d'écrouissage et de deux coefficients K et n modélisant la viscosité du matériau.

$$\tau^s = \underline{\sigma} : \underline{m}^s = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : (\underline{n}^s \otimes \underline{m}^s + \underline{m}^s \otimes \underline{n}^s) \quad (\text{IV.6})$$

$$x^s = c\alpha^s \quad ; \quad r^s = R_0 + Q_1 \sum_r h_{rs} (1 - e^{-b_1 v^r}) + Q_2 (1 - e^{-b_2 v^s}) \quad (\text{IV.7})$$

$$\dot{\gamma}^s = \dot{v}^s \text{sign}(\tau^s - x^s) \quad ; \quad \dot{\xi}^v = \sum_s \dot{\gamma}^s \dot{m}^s \quad (\text{IV.8})$$

$$\dot{v}^s = < \frac{|\tau^s - x^s| - r^s}{K} >^n \text{ avec } < i > = \text{Max}(i, 0) \quad (\text{IV.9})$$

$$\dot{\alpha}^s = \dot{\gamma}^s - d\alpha^s \dot{v}^s \quad (\text{IV.10})$$

La présente formulation permet une saturation de l'écrouissage aussi bien en chargement monotone qu'en chargement cyclique et prend en compte les interactions entre les différents systèmes de glissement à travers la matrice h_{rs} ($h_{rs} = \delta_{ij}$). Neuf coefficients matériaux sont utilisés ($K, n, c, d, R_0, Q_1, b_1, Q_2, b_2$). Ils ont été déterminés à partir d'essais à différentes vitesses de déformation ou de cycles de fatigue-relaxation et à différentes températures sur l'alliage AM1 à l'aide d'un logiciel d'identification automatique (Leriche, 1998). Les valeurs utilisées dans cette étude sont données dans le tableau ci-dessous (Hanriot, 1993) (tableaux IV.2 et IV.3) :

$T^\circ\text{C}$	20	650	800	850	900	950
$C_{11}(\text{GPa})$	296	244	242	272	254	261
$C_{12}(\text{GPa})$	204	170	173	204	189	198
$C_{44}(\text{GPa})$	125	104	99	97	95	93
$n_1 = n_2$	15	15	10	7	5.5	5
$K_1(\text{MPa}, s)$	88	88	367	580	608	517
$R_1(\text{MPa})$	245	204	143	94	82	69
$C_1(\text{MPa})$	734850	3331320	666265	376320	360640	215600
d_1	3266	16330	3266	1960	1960	1960
$K_2(\text{MPa}, s)$	96	96	439	669	653	707
$R_2(\text{MPa})$	377	170	94	71	59	47
$C_2(\text{MPa})$	186780	500555	250280	135760	113120	90480
d_2	566	2121	2121	1697	1414	1131

Tableau IV.2 : Coefficients du modèle cristallographique entre 20°C et 950°C

$T^{\circ}\text{C}$	1000	1050	1100	1150
$C_{11}(\text{GPa})$	258	250	320	/
$C_{12}(\text{GPa})$	198	192	264	/
$C_{44}(\text{GPa})$	90	88	86	/
$n_1 = n_2$	4.5	4.3	4.1	4
$K_1(\text{MPa}, s)$	372	431	490	329
$R_1(\text{MPa})$	61	45	29	12
$C_1(\text{MPa})$	176400	148610	99615	72520
d_1	1960	2123	1633	1960
$K_2(\text{MPa}, s)$	509	307	359	/
$R_2(\text{MPa})$	47	47	47	
$C_2(\text{MPa})$	112002	93324	39900	
d_2	1697	1414	849	/

Tableau IV.3 : Coefficients du modèle cristallographique entre 1000°C et 1150°C

Dans le chapitre V, afin de simuler le comportement d'une éprouvette axisymétrique nous utiliserons un modèle basé sur une approche macroscopique phénoménologique.

Les premières versions de ces modèles macroscopiques phénoménologiques proposaient des critères macroscopiques généralement basés sur les critères quadratiques de type Hill (Nouailhas, 1989; Nouailhas et Culié, 1991). Une telle approche peut s'interpréter comme une moyenne sur les systèmes de glissement. Mais ce type de modèle macroscopique a montré ses faiblesses par rapport à la loi de Schmid. Le modèle cristallographique prévoit, par exemple, la présence de "zones molles" en face des zones $\langle 110 \rangle$ sur un tube d'axe $\langle 001 \rangle$ sollicité en torsion pure, les zones $\langle 100 \rangle$ étant plus difficiles à déformer. Ce résultat a été confirmé par l'observation mais n'apparaît pas avec un critère macroscopique qui prédit exactement les mêmes contraintes d'écoulement pour les deux directions. Ce résultat prouve que tous les modèles basés sur un critère de plasticité quadratique (chapitre III) ne sont plus valides pour décrire le comportement d'un monocristal.

Des critères plus complexes ont donc vu le jour, utilisant des fonctions de charge exprimées en fonction des invariants (Nouailhas et Cailletaud, 1992; Nouailhas et al., 1995). Ces derniers rendent automatiquement la fonction invariante pour le groupe des transformations orthogonales caractérisant les symétries matérielles. Afin de déterminer la base d'intégrité dans les axes du cristal, on utilise un critère qui peut être fonction de neuf invariants.

La loi de comportement est écrite en respectant les axes cristallographiques du cube. Le potentiel viscoplastique a une expression classique (équation IV.11) où f représente l'équation de la surface de charge.

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^{n+1} \quad (\text{IV.11})$$

L'anisotropie initiale est décrite au niveau des équations (IV.12 et IV.13) à l'aide de quatre des neuf invariants déterminant la base d'intégrité.

$$f = \left(\left(\frac{3}{2} (I_2 + 2a_4 I_4)^2 - a_8 I_8 \right)^3 - (a_6 I_6)^4 \right)^{1/12} - R \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } I_2 &= (\sigma'_{11} - X_{11})^2 + (\sigma'_{22} - X_{22})^2 + (\sigma'_{33} - X_{33})^2 \\
I_4 &= (\sigma'_{23} - X_{23})^2 + (\sigma'_{31} - X_{31})^2 + (\sigma'_{12} - X_{12})^2 \\
I_6 &= (\sigma'_{23} - X_{23})(\sigma'_{31} - X_{31})(\sigma'_{12} - X_{12}) \\
I_8 &= (\sigma'_{23} - X_{23})^4 + (\sigma'_{31} - X_{31})^4 + (\sigma'_{12} - X_{12})^4
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

IV.3 Détermination d'un modèle homogène équivalent

IV.3.1 Présentation du modèle

La méthode utilisée est la même que celle mise en place pour la détermination du milieu homogène équivalent dans le cas du comportement viscoplastique isotrope (chapitre III).

Nous avons généré une “base d'identification numérique” en simulant différents charge-ments sur la cellule élémentaire du milieu perforé à partir de laquelle nous cherchons à identifier un modèle homogène de substitution. Ce dernier doit posséder certaines caractéristiques, il doit être :

- cristallographique
- viscoplastique
- anisotrope
- compressible

De ce fait la voie suivie consiste à conserver le modèle cristallographique phénoménologique existant en y ajoutant des “pseudos-systèmes” de dilatation afin de prendre en compte la plasticité dilatante (Cardona et al., 2000b).

La contrainte de cisaillement τ_{gliss}^s (IV.14) se résout toujours selon la loi de Schmid et pour chaque système de glissement. La dilatation est introduite (IV.15) en utilisant la contrainte normale σ_{dil}^n , évaluée au travers du produit contracté $\underline{n}^s \otimes \underline{n}^s$.

Ces nouveaux mécanismes correspondent à la cinétique de montée des dislocations mais ce n'est pas ce phénomène que nous prenons en compte. Nous nous servons de ce critère pour traduire la compressibilité du milieu due à la géométrie.

$$\tau_{gliss}^s = \underline{\sigma} : (\underline{n}^s \otimes \underline{m}^s) \quad \dot{\gamma}^s = < \frac{|\tau_{gliss}^s - x_{gliss}^s| - r_{gliss}^s}{K_{gliss}} >^{n_{gliss}} \text{sign}(\tau_{gliss}^s - x_{gliss}^s) \tag{IV.14}$$

$$\sigma_{dil}^n = \underline{\sigma} : (\underline{n}^s \otimes \underline{n}^s) \quad \dot{\gamma}^s = < \frac{|\sigma_{dil}^n - x_{dil}^s| - r_{dil}^s}{K_{dil}} >^{n_{dil}} \text{sign}(\sigma_{dil}^n - x_{dil}^s) \tag{IV.15}$$

L'origine de cette plasticité dilatante étant liée à la présence du trou (chapitre III), nous ajoutons seulement deux “pseudos-systèmes” de dilatation suivant les directions [100] et [001]. Le raisonnement est identique à celui effectué en viscoplasticité isotrope où l'anisotropie du premier invariant $I_1(\underline{\sigma})$, prise en compte au travers du tenseur $\underline{P}$, est nulle suivant la direction $\underline{y}$.

Nous verrons ultérieurement que ce choix n'aura pas d'influence sur les résultats au moins au niveau des conditions de chargement considérées au cours de l'étude.

La variable d'écrouissage cinématique x_i^s s'évalue simplement en fonction de la variable d'état correspondante α_i^s (IV.16).

$$x_i^s = c\alpha_i^s \quad ; \quad \dot{\alpha}_i^s = \dot{\gamma}_i^s - d\alpha_i^s \dot{\gamma}_i^s \quad (\text{IV.16})$$

La variable isotrope s'écrit en fonction de la déformation viscoplastique cumulée suivant (IV.17) avec une matrice d'interaction h_{rs} ($h_{ij} = \delta_{ij}$ dans ce cas) entre systèmes de glissements.

$$r_i^s = R_0 + Q_1 \sum_r h_{rs} (1 - e^{-b_1 \dot{\gamma}_r^s}) + Q_2 (1 - e^{-b_2 \dot{\gamma}_i^s})$$

avec $\dot{\gamma}_i^s = < \frac{|\tau^s - x_i^s| - r^s}{K} >^n$ avec $< j > = \text{Max}(j, 0)$ (IV.17)

La vitesse de déformation plastique s'obtient, dans le cas du modèle homogène équivalent, en utilisant non seulement le tenseur d'orientation de chaque système de glissement $\tilde{m}$ mais également deux nouveaux systèmes de dilatation projetés sur le tenseur $\tilde{n}$ (IV.18).

$$\dot{\epsilon}^v = \sum_s \dot{\gamma}^s \tilde{m}^s + \sum_s \dot{\delta}^s \tilde{n}^s \quad (\text{IV.18})$$

Ce modèle rentre dans le formalisme des modèles à variables internes multimécanismes. Le système local à considérer sur chaque point de Gauss est constitué par les relations définissant la décomposition élastique-viscoplastique de la déformation et par les lois d'évolution des variables α et v .

Ce type de modèle, comme le modèle phénoménologique déterminé au chapitre III, est actuellement considéré comme ayant un bon rapport "qualité/prix" du point de vue de la simulation numérique.

Nous aurions également pu développer un modèle utilisant un critère unique (équation IV.19).

$$\sqrt{C\tau_{gliss}^2 + F\sigma_{dil}^2} \quad (\text{IV.19})$$

Cette formulation aurait permis un couplage entre les systèmes de glissement et les pseudo-systèmes de dilatation. Mais celle-ci ne s'est pas révélée indispensable.

IV.3.2 Identification du modèle

L'identification du nouveau modèle de comportement homogène équivalent a été réalisée en suivant la méthodologie du chapitre III.

Nous avons réalisé différentes simulations sur la cellule de base :

- des essais de traction dans les trois directions et à deux vitesses de sollicitation (10^{-2}s^{-1} et 10^{-4}s^{-1}) (figure IV.7),
- des essais de cisaillement dans les trois plans et à deux vitesses de sollicitation (10^{-2}s^{-1} et 10^{-4}s^{-1}) (figure IV.8),

- deux essais de dilatation hydrostatique à différentes vitesses ($10^{-2}s^{-1}$ et $10^{-4}s^{-1}$) (figure IV.9),
- des essais d'extension dans les trois directions et à deux vitesses de sollicitation ($10^{-2}s^{-1}$ et $10^{-4}s^{-1}$) (figure IV.10),
- et deux essais de relaxation dans la direction $\underline{x}$ et $\underline{z}$ (figure IV.11)
- des essais cycliques dans la direction $\underline{x}$, $\underline{z}$ et dans le plan $[\underline{xz}]$ où la perforation influence le comportement à deux vitesses de sollicitation ($10^{-2}s^{-1}$ et $10^{-4}s^{-1}$) (figure IV.12)

pour une température de fonctionnement de $950^{\circ}C$.

Notre modèle conserve bien son caractère anisotrope et viscoplastique.

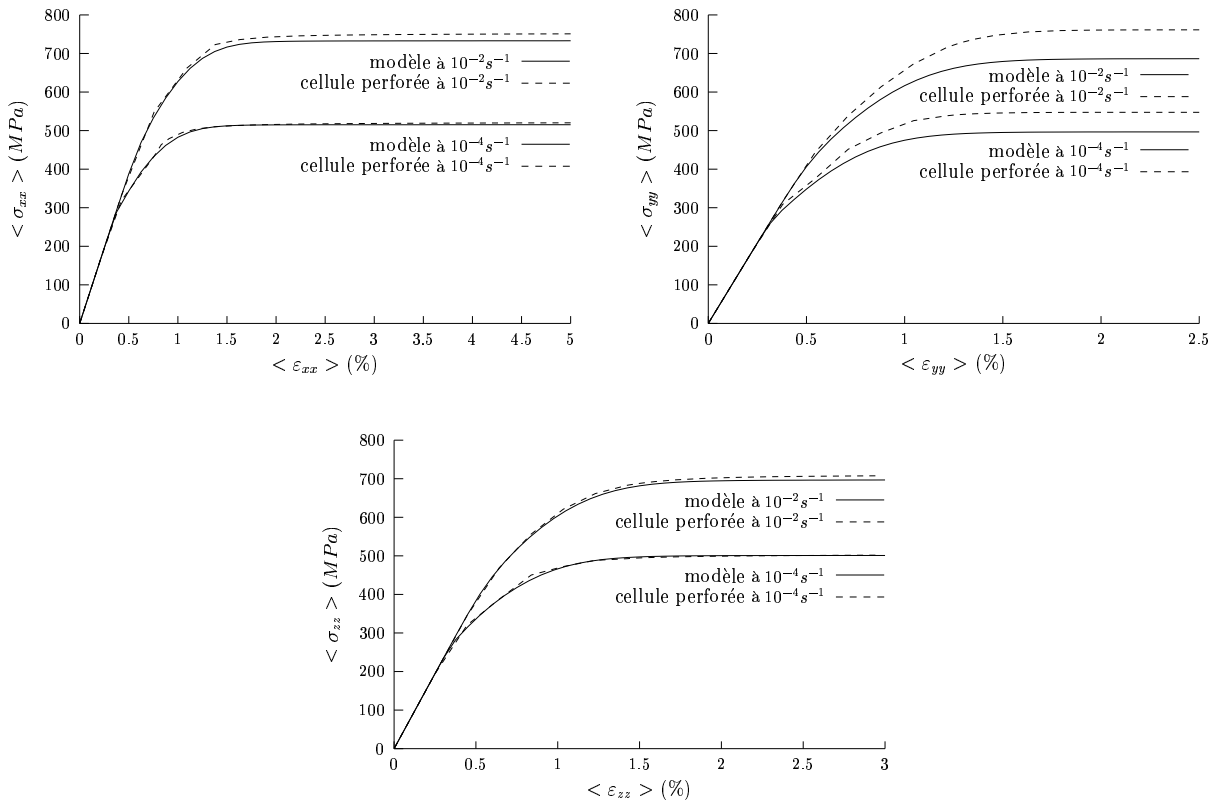


Figure IV.7 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de traction

Nous observons également, à partir des essais de traction (figure IV.7), une bonne corrélation dans les directions $[100](\underline{x})$ et $[001](\underline{z})$ subissant l'influence de la perforation.

Par contre, l'écart obtenu sur les courbes de traction dans la direction $\underline{y}$ provient du fait que le modèle n'est pas modifié dans cette direction (axe du trou) afin de limiter le nombre de variables. De plus, au vu des conditions de chargement subies par l'aube, nous choisissons de privilégier la direction $\underline{z}$ lors de l'identification du modèle.

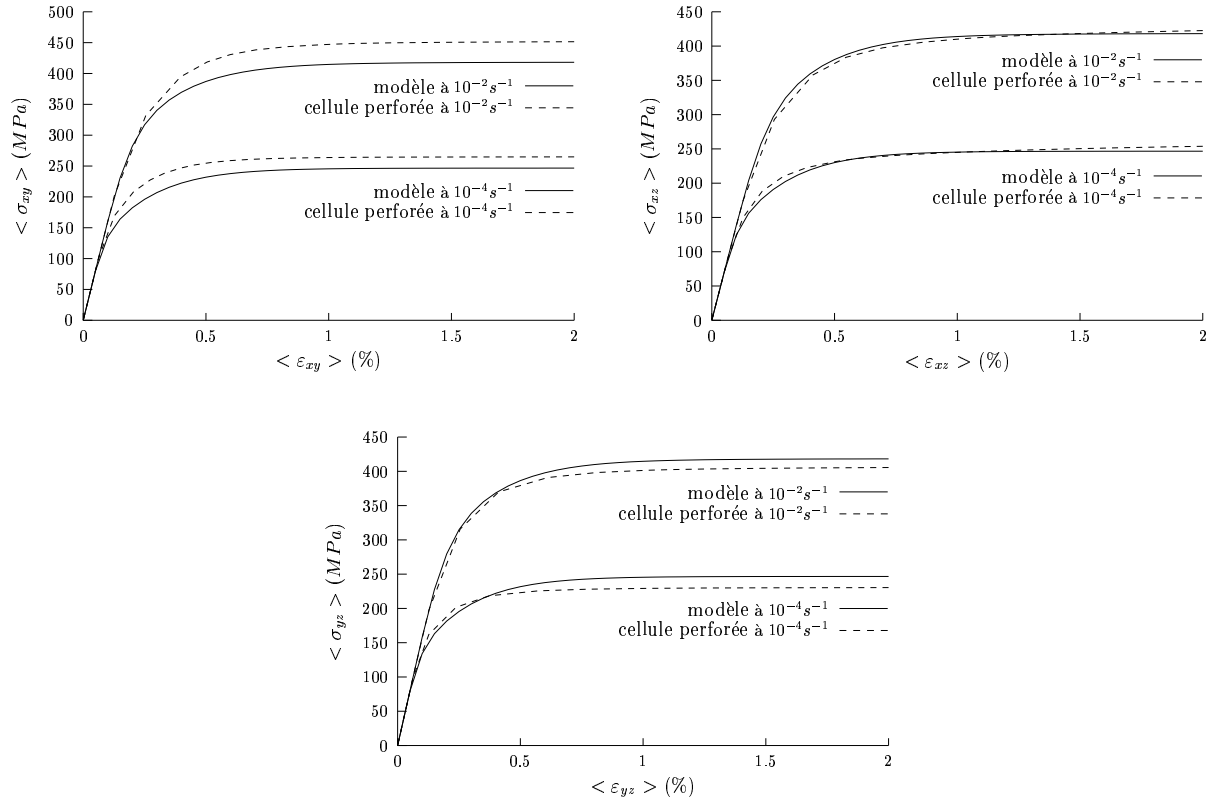


Figure IV.8 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de cisaillement

Après avoir validé le caractère anisotrope (figures IV.7 et IV.8), nous allons ajuster les coefficients des deux nouveaux systèmes de dilatation à partir d’essais sollicitant la partie compressible du modèle.

De ce fait des essais de dilatation hydrostatique (figure IV.9) et des essais d’extension (figure IV.10) sont réalisés.

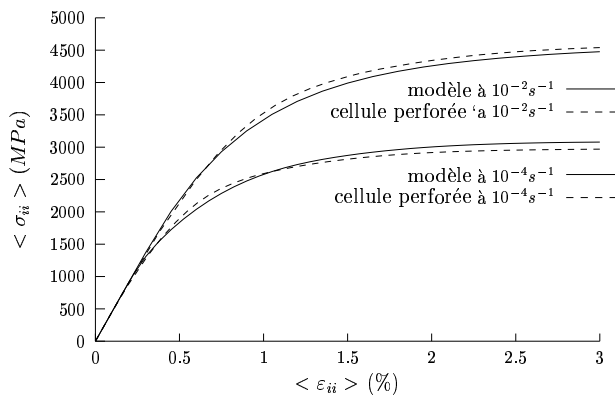


Figure IV.9 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de dilatation hydrostatique

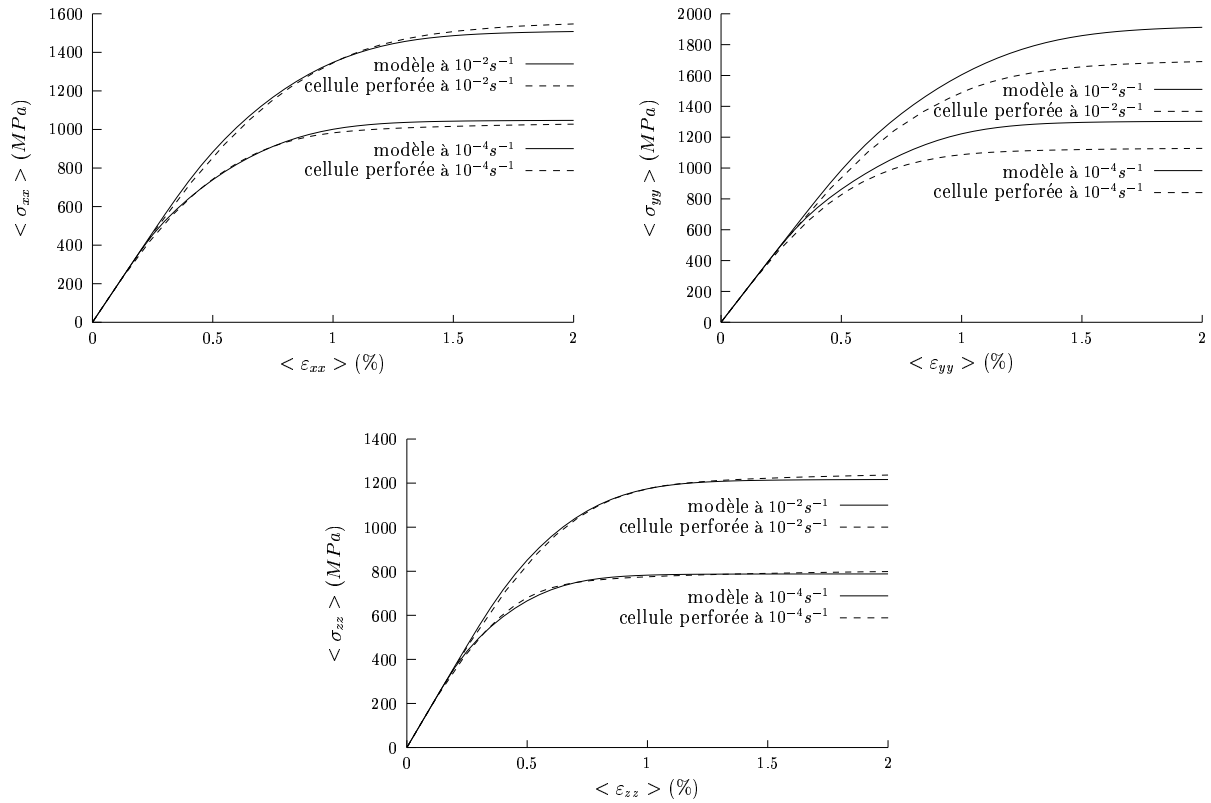


Figure IV.10 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais d’extension

La partie visqueuse du modèle est obtenue en réalisant des essais de relaxation (figure IV.11) et des essais cycliques (figure IV.12).

Nous remarquons également le bon comportement du modèle sous chargement cyclique (effet Bauschinger). Ceci paraît très intéressant sachant que la plupart des pièces aéronautiques sont sollicitées en fatigue thermomécanique.

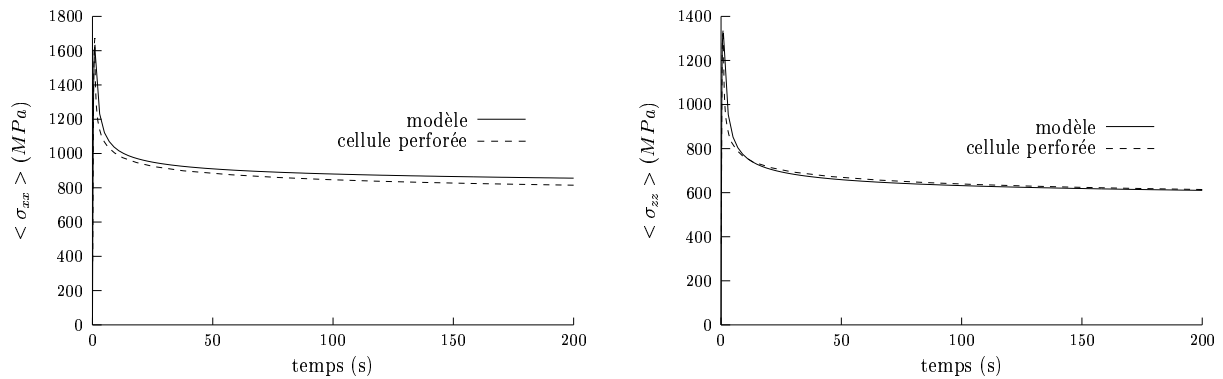


Figure IV.11 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais de relaxation

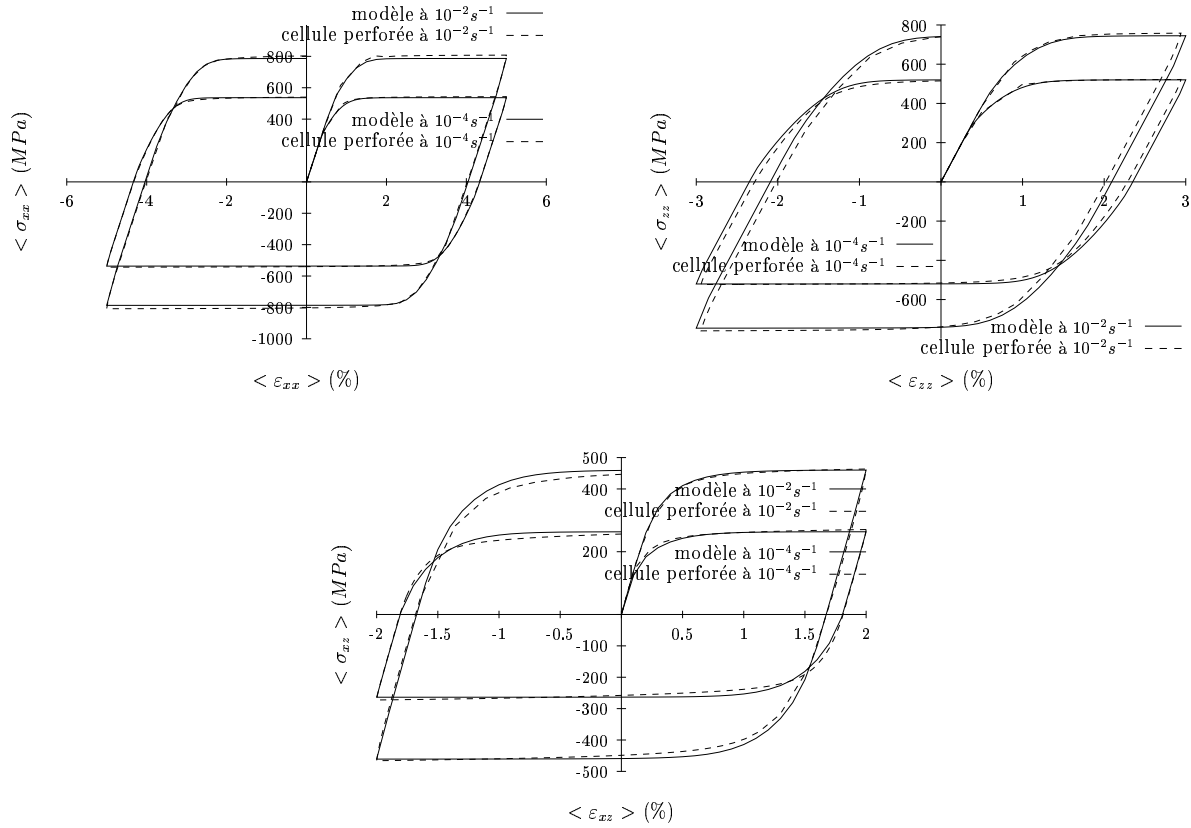


Figure IV.12 : Comparaison “expérience” - calcul sur des essais cycliques

Par contre, si nous nous intéressons à la variation de volume au cours d’un essai de traction nous observons que le modèle prend en compte ce changement de volume mais ne reproduit pas exactement ce qui se produit au niveau de la cellule de base (figure IV.13).

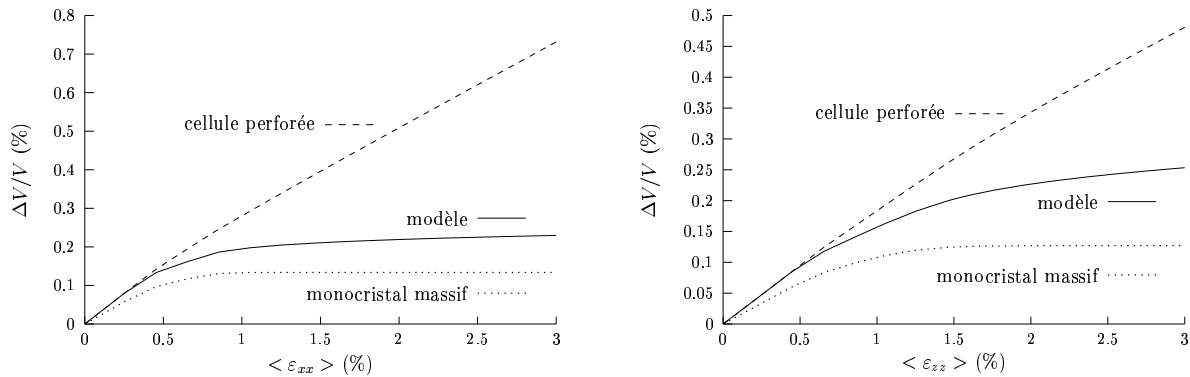


Figure IV.13 : Changement de volume suite à un essai de traction

Ceci peut venir du fait que nous n’avons pas de couplage entre les différents systèmes de glissement (équation IV.19) comme entre les deux invariants dans le critère elliptique.

Les coefficients ont été déterminés uniquement pour une température de fonctionnement de 950°C et sont donnés dans les tableaux (IV.4) à (IV.7) pour les différents systèmes de glissement.

$T^{\circ}C$	n_1	$K_1(MPa, s)$	$R_1(MPa)$	$C_1(MPa)$	d_1
950	5	425	65	160000	1850

Tableau IV.4 : Coefficients du glissement octaédrique du modèle cristallographique phénoménologique de substitution

$T^{\circ}C$	n_2	$K_2(MPa, s)$	$R_2(MPa)$	$C_2(MPa)$	d_2
950	5	545	25	62000	900

Tableau IV.5 : Coefficients du glissement cubique du modèle cristallographique phénoménologique de substitution

$T^{\circ}C$	n_3	$K_3(MPa, s)$	$R_3(MPa)$	$C_3(MPa)$	d_3
950	5	2000	225	500000	982

Tableau IV.6 : Coefficients du premier système de dilatation du modèle cristallographique phénoménologique de substitution

$T^{\circ}C$	n_4	$K_4(MPa, s)$	$R_4(MPa)$	$C_4(MPa)$	d_4
950	5	1800	188	315000	1000

Tableau IV.7 : Coefficients du second système de dilatation du modèle cristallographique phénoménologique de substitution

Si nous regardons l'évolution des coefficients du glissement octaédrique et du glissement cubique, nous remarquons alors une diminution reflétant l'affaiblissement des propriétés mécaniques.

Si nous calculons le rapport cubique/octaédrique pour l'écroutissage isotrope et l'écroutissage cinématique alors nous observons que ce rapport n'est pas conservé.

Au niveau du modèle cristallographique initial nous avons

$$\frac{R_{cub}}{R_{oct}} \simeq \frac{C_{cub}/D_{cub}}{C_{oct}/D_{oct}} \simeq 0.72$$

alors que dans le modèle homogène équivalent identifié nous obtenons

$$\frac{R_{cub}}{R_{oct}} \simeq 0.4 \quad \text{et} \quad \frac{C_{cub}/D_{cub}}{C_{oct}/D_{oct}} \simeq 0.8$$

Mais ces coefficients sont difficilement comparables car ils subissent l'influence des "pseudo-systèmes" de dilatation.

Nous observons également que les coefficients caractérisant les "pseudo-systèmes" de dilatation sont supérieurs. Ceci s'explique par le fait qu'ils agissent directement sur la contrainte normale alors que les autres systèmes agissent sur la cission critique. Si nous corrigeons les coefficients obtenus par le facteur de Schmid alors nous obtenons le même ordre de grandeur que pour les systèmes de glissement cubique.

IV.4 Applications

IV.4.1 Plaque perforée

Comme dans les chapitres précédents (chapitre I et chapitre III), la validation du modèle se fait sur une plaque perforée.

Nous réalisons un essai de traction sur une structure tridimensionnelle :

- perforée périodiquement ayant le comportement cristallographique (calcul de référence),
- sur une plaque homogénéisée ayant le comportement homogène équivalent,
- et sur une plaque homogénéisée ayant le comportement du monocristal massif.

Nous allons comparer l'état de contrainte au voisinage d'une perforation située au centre de la structure, afin de pallier tout effet de bord, entre le calcul de référence et les deux autres calculs après relocalisation sur la cellule de base.

Nous regardons la contrainte au point de Gauss sur la cellule de base tridimensionnelle (figures IV.14 et IV.16). Et nous traçons la contrainte sur la ligne définissant la géométrie du trou afin de comparer la localisation et l'intensité des champs locaux (figures IV.15 et IV.17).

Les figures (IV.14 et IV.15) montrent les résultats obtenus suite à un calcul prenant en compte l'affaiblissement du comportement.

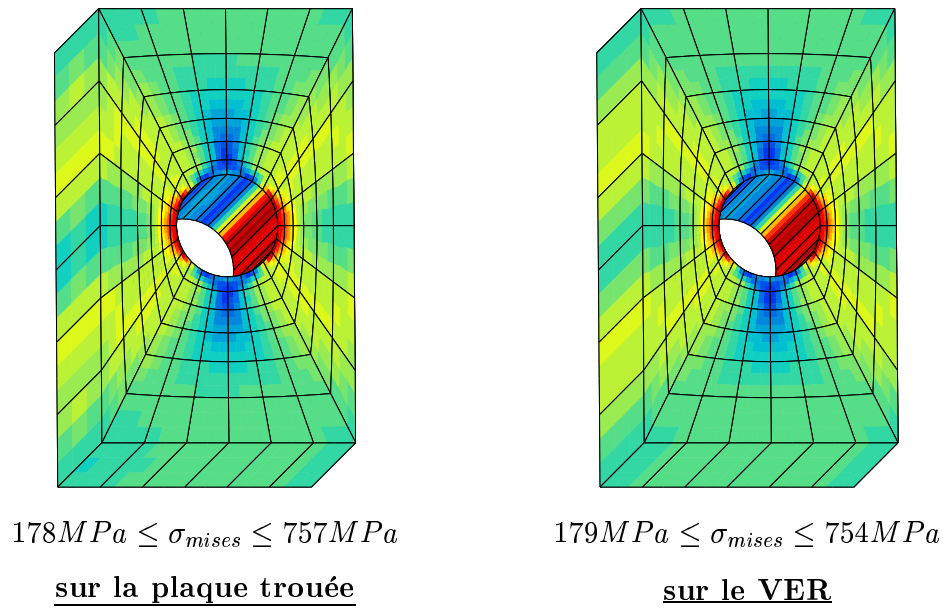


Figure IV.14 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant un comportement homogène équivalent

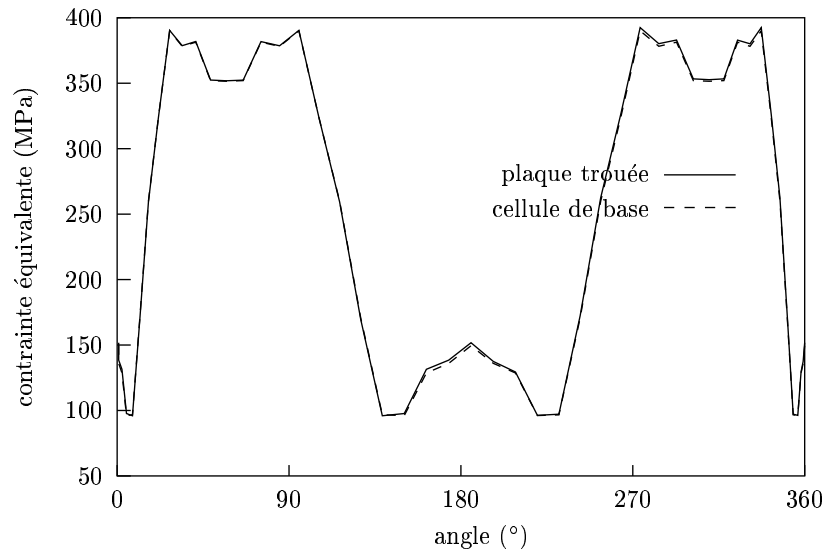


Figure IV.15 : Comparaison de l'état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)

Les figures (IV.16 et IV.17) montrent les limites du “zoom structural” dans le cas d’une structure périodique et l’intérêt d’utiliser un milieu homogène de substitution.

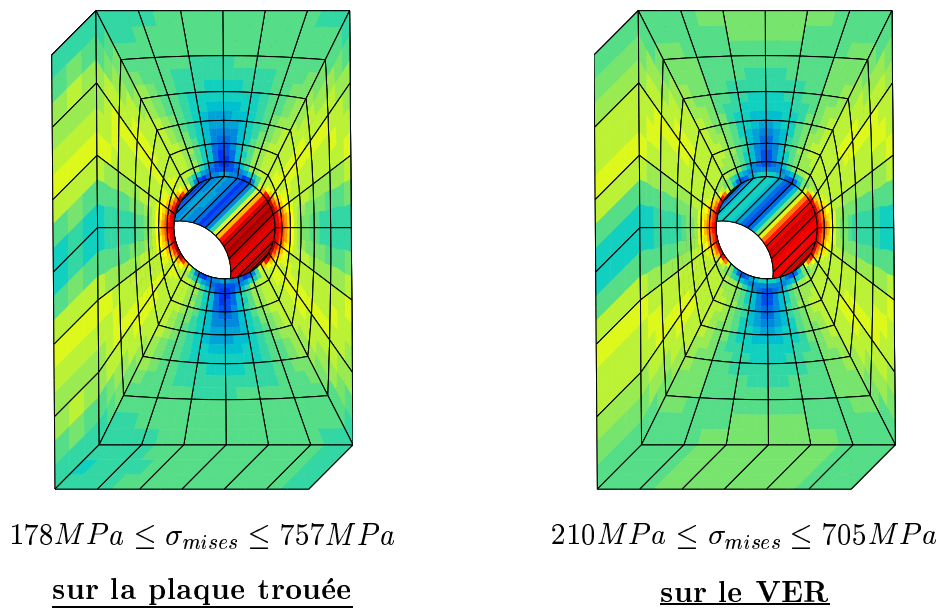


Figure IV.16 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d’un calcul effectué sur une plaque sans trou ayant le comportement monocristallin massif

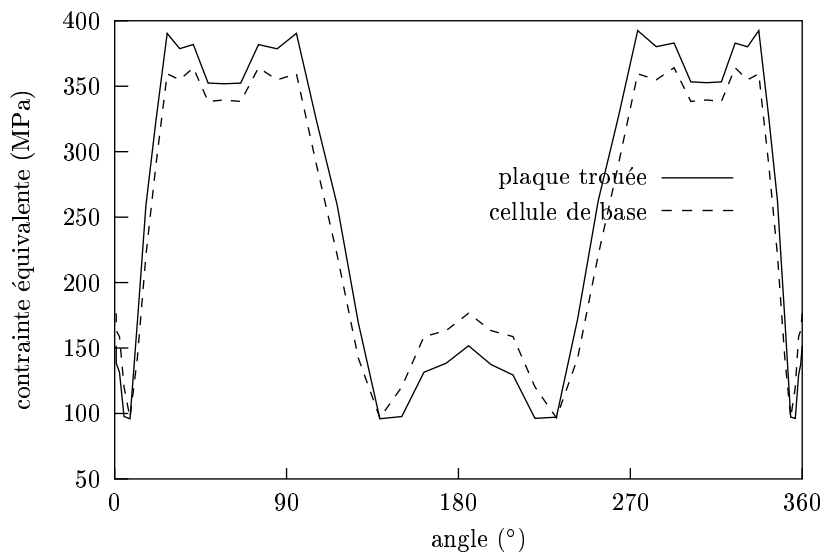


Figure IV.17 : Comparaison de l’état local autour du trou (contrainte équivalente au sens de von Mises)

L’écart mesuré au niveau de la contrainte équivalente autour du trou est de 18% alors qu’il ne dépasse pas 2% avec le milieu homogène équivalent.

IV.4.2 Aube de turbine HP

Nous appliquons maintenant la méthode au calcul de l'aube de turbine.

Nous simulons toujours la même mission typique (figure I.16) en isotherme (à 950°C) sur la structure réelle et sur le maillage homogénéisé.

Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures (IV.18 et IV.19) à la fin du palier de vol pour prendre en compte la viscosité.

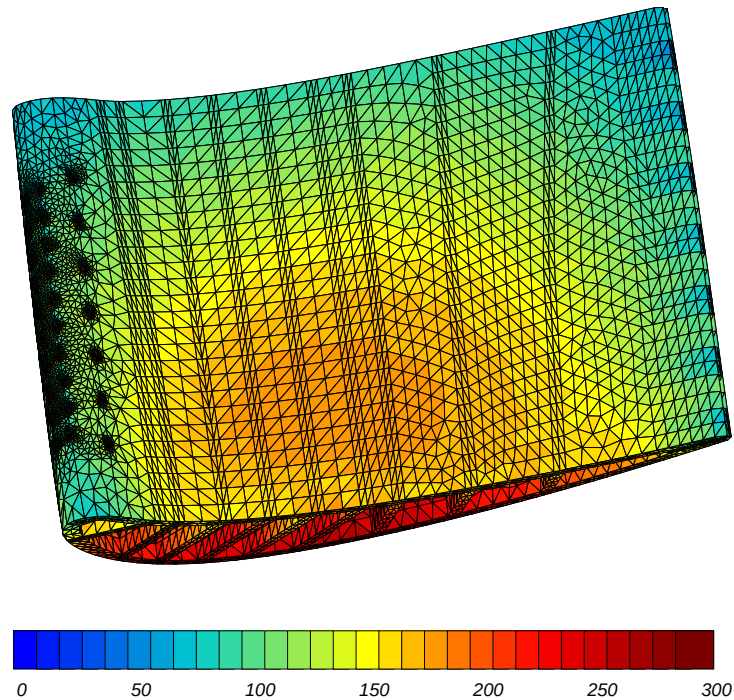


Figure IV.18 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission

La relocalisation des contraintes locales sur la cellule de base comparées aux résultats obtenus sur l'aube perforée montre, une nouvelle fois, l'effet prédictif (figure IV.20) et l'intérêt de modéliser la zone perforée par un milieu effectif (figure IV.21).

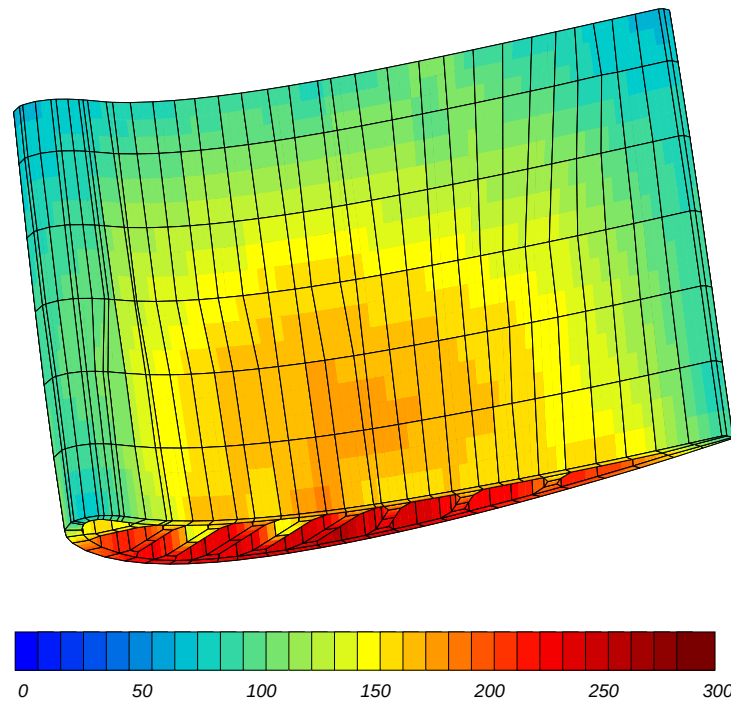


Figure IV.19 : Contraintes de von Mises (MPa) au temps 390 de la mission sur le maillage homogénéisé

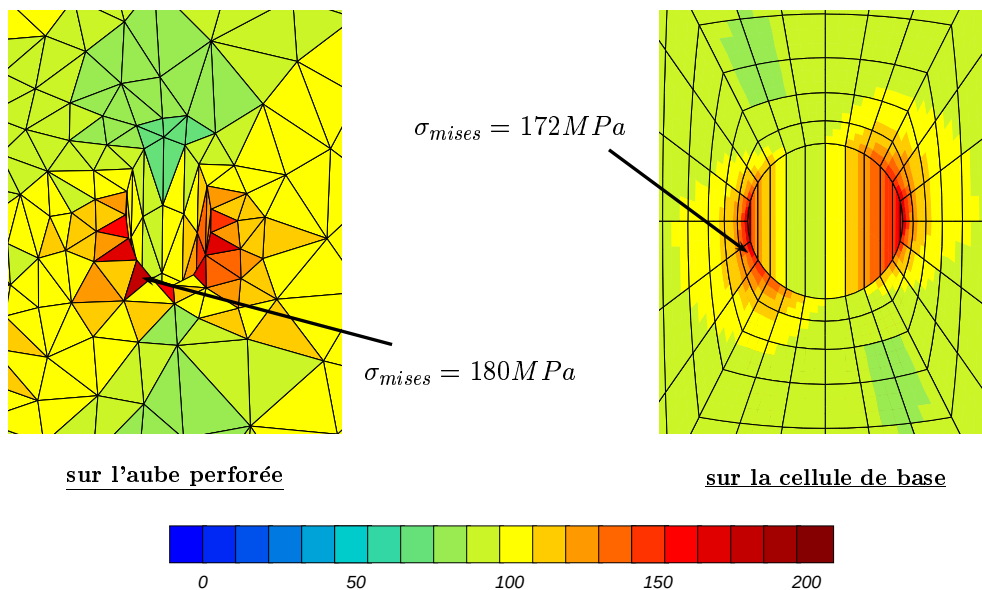


Figure IV.20 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée a été remplacée par un matériau homogène équivalent

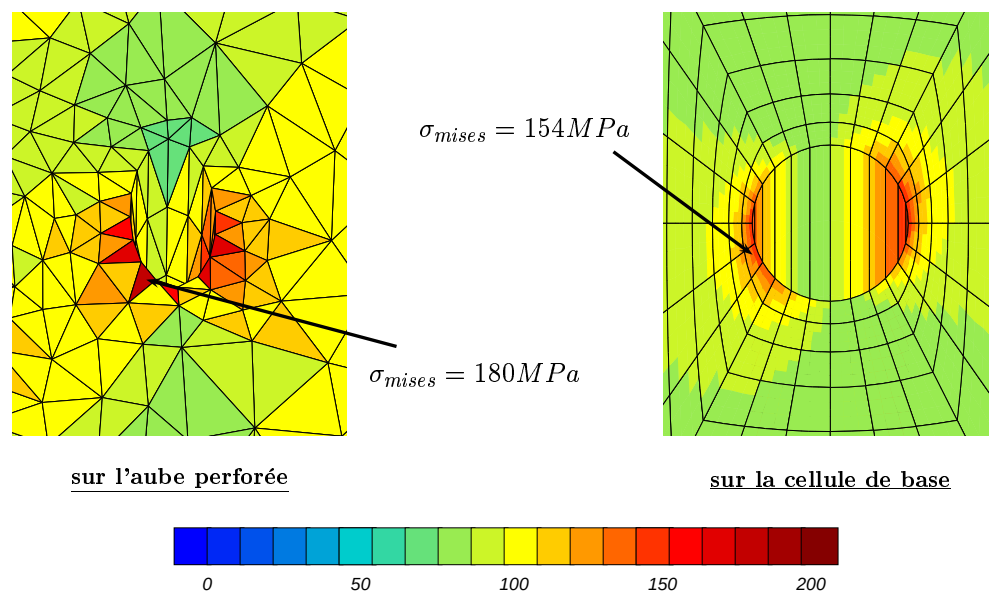


Figure IV.21 : Comparaison de la contrainte de von Mises après relocalisation d'un calcul effectué sur l'aube où la zone perforée n'est pas prise en compte

Partie C

Prévision de durée de vie

Chapitre -V-

Influence de la perforation sur le comportement

Sommaire

V.1	Les différentes études menées sur le superalliage monocristallin AM1	120
V.2	Les moyens techniques utilisés	122
V.2.1	Le montage ONERA	122
V.2.2	Présentation de l'éprouvette	123
V.2.3	Réglages des paramètres de sollicitation	127
V.3	Présentation des essais thermo-mécaniques	129
V.3.1	Les essais réalisés	129
V.3.2	Les différentes simulations réalisées	131
V.3.3	Présentation des résultats	132
V.4	Utilisation du modèle homogène de substitution	140

Les aubes de turbines fixes et mobiles des moteurs actuels sont soumises à des sollicitations de fatigue importantes dans la mesure où le régime moteur peut être amené à fluctuer rapidement notamment dans les missions de moteur militaire. Les variations de température lors de la phase de décollage ou d'atterrissage induisent de forts gradients thermiques au sein de ces pièces, qui génèrent eux-mêmes des contraintes d'origine thermique. Ce processus impose donc aux aubes de turbine un cyclage thermo-mécanique.

Le comportement et l'endommagement peuvent être étudiés sur structure ou sur banc. Mais le coût de tels essais et les difficultés de reproductibilité et d'interprétation ont conduit au développement d'essais technologiques plus simples et moins coûteux.

Dans cette étude les essais ont été réalisés dans le département Mécanique du Solide et de l'Endommagement de l'ONERA par Didier Pacou et Daniel Poirier.

V.1 Les différentes études menées sur le superalliage monocristallin AM1

Les superalliages monocristallins à base de nickel ont fait l'objet de nombreuses thèses (Malpertu, 1987; Defresne, 1989; Méric, 1991; Hanriot, 1993; Gallerneau, 1995; Peruchant, 1997) qui ont permis d'étudier :

- le comportement monotone
- le comportement cyclique
- l'influence de l'orientation cristallographique
- l'endurance ou plus précisément l'endommagement en fatigue
- les mécanismes de fissuration
- l'influence de la température
- l'influence de l'environnement

au travers, pour des raisons de simplification et de coût, d'essais de caractérisation mécanique isotherme.

Mais l'évolution des moteurs exige un dimensionnement de plus en plus précis. Pour ce faire des essais mécaniques en conditions aussi proches que possible de celles réellement rencontrées sur les pièces en service ont été développés. Ainsi, pour tester le comportement d'un élément de volume, et non plus d'une structure, des essais de fatigue anisotherme ou fatigue thermo-mécanique ont été mis au point (Rémy et Reuchet, 1983; Rémy, 1986; Lautridou et al., 1995).

Le principe de ces essais, rendus possibles grâce au développement de l'informatique, consiste à imposer simultanément à l'éprouvette un cycle de chauffage et de refroidissement en évitant la création d'un gradient de température et un cycle de déformation mécanique de manière indépendante. Il est ainsi possible de reproduire sur une éprouvette tubulaire les cycles subis par l'élément de volume critique. La régulation en boucle fermée de la machine d'essai est réalisée de façon autonome. Le micro-ordinateur génère par l'intermédiaire d'une régulation de température, un cycle thermique fonction du temps. Durant une période de précyclage à charge nulle, nécessaire à la stabilisation du cycle de dilatation, le micro-ordinateur enregistre la déformation thermique. Puis la déformation totale est appliquée à l'éprouvette en ajoutant à la dilatation thermique enregistrée la déformation mécanique désirée :

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{mec} \quad (V.1)$$

Ces essais permettent de relever et d'exploiter deux types d'information, dans des conditions proches d'un environnement moteur :

- la qualité en conditions anisothermes des lois de comportement et des modèles de durée de vie établis par le calcul en condition isotherme
- la durée de vie des pièces.

Les aubes de turbine HP du moteur M88 sont réalisées en AM1 et protégées par un revêtement C1A. Plusieurs études (Chataigner et Rémy, 1995; Gallerneau, 1995; Perruchant, 1997) ont permis de calculer le potentiel de cet alliage sollicité en fatigue anisotherme et d'apprécier l'incidence de la protection C1A sur le comportement mécanique.

Les cyclages thermiques et mécaniques sont représentatifs de ceux subis par différentes parties critiques de l'aube (par exemple le bord d'attaque). De nombreuses formes de cycles ont été définies pour l'AM1 mais nous n'en présenterons que deux.

- Le cycle "4 pentes" pour bord d'attaque

Le cycle "4 pentes" doit son nom à son allure dans le diagramme reliant la déformation mécanique ($\varepsilon_{mec} = \varepsilon_{tot} - \varepsilon_{th}$) à la température (figure V.1)

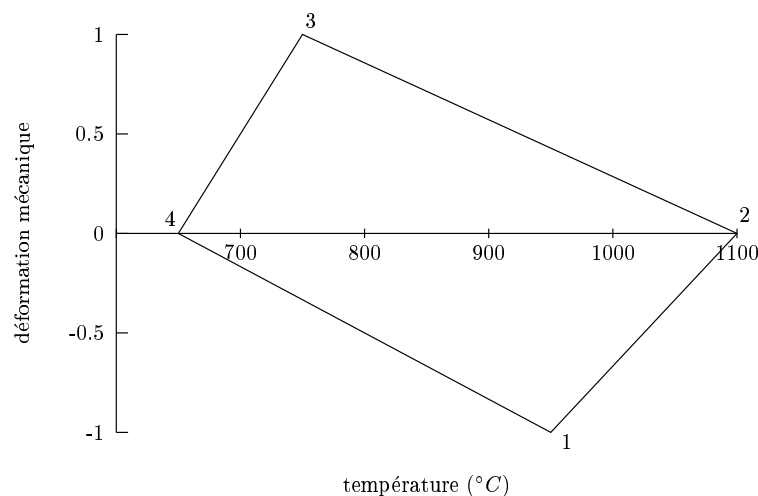


Figure V.1 : Le cycle "4 pentes" pour bord d'attaque

Le cycle de température utilisé est un cycle triangulaire compris entre 650°C et 1100°C avec des vitesses de chauffage et de refroidissement égales.

Le cycle de déformation mécanique imposé à l'éprouvette a été déduit d'un calcul par éléments finis simulant le comportement des aubes de turboréacteur en service (Malpertu, 1987). Il permet de restituer le couplage qui existe entre la déformation mécanique et la déformation thermique observées sur la pièce réelle en décrivant, de façon schématisée, l'évolution de la déformation d'un élément critique du bord d'attaque de l'aube. Dans ce cycle la déformation maximale et la déformation minimale sont imposées à deux températures intermédiaires différentes ; la déformation est minimale en compression à 950°C durant le chauffage et maximale en traction à 750°C pendant le refroidissement.

- Le cycle "W" pour l'intrados à proximité du bord de fuite

De nouveaux calculs réalisés sur aube ont permis de définir un nouveau cycle thermo-mécanique en s'intéressant à la zone critique située sur l'intrados des pales côté bord de fuite. Ce cycle est nommé "W" en raison de son allure dans le diagramme température-déformation mécanique (figure V.2).

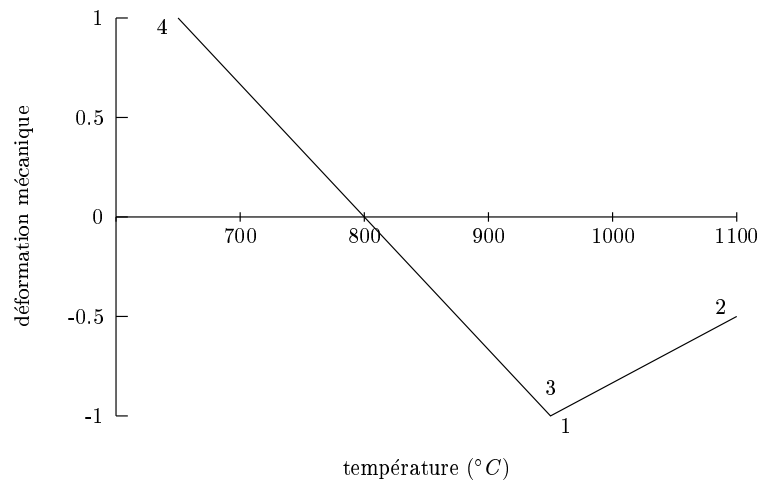


Figure V.2 : Le cycle “W” pour l’intrados à proximité du bord de fuite

Par rapport au cycle de référence (cycle “4 pentes”), la déformation maximale a cette fois-ci lieu à la température minimale, et le refroidissement s’effectue en imposant les mêmes déformations qu’au chauffage.

Tous ces essais ont permis d’analyser le comportement, autrement dit l’évolution des contraintes et des déformations au cours du cycle, et de comparer ces résultats expérimentaux aux simulations obtenues en utilisant les lois de comportement identifiées sur l’AM1. Ces comparaisons ont montré de très bonnes corrélations entre le calcul et l’expérience pour tous les cycles stabilisés (Debussac et al., 1994). L’élévation de la contrainte moyenne en cours d’essai est bien prise en compte mais le modèle prévoit cependant une stabilisation de cette contrainte moyenne plus rapide qu’elle ne l’est en réalité.

Toutefois ces sollicitations sur élément de volume restent uniaxiales et ne permettent pas de simuler des chocs thermiques aussi sévères que ceux obtenus avec des essais de fatigue thermique sur structure plus représentatifs des conditions de fonctionnement.

De ce fait les essais classiques réalisés sur éprouvettes tubulaires minces afin d’obtenir une température uniforme dans l’épaisseur ne sont pas représentatifs des conditions réelles sur pièces travaillant à haute température comme les aubes de turbine refroidies, dans lesquelles subsiste un fort gradient de paroi. Un équipement spécifique a donc été développé à l’ONERA afin de reproduire un gradient thermique dans la paroi de l’éprouvette au cours de l’essai thermo-mécanique (Chaboche et al., 1997).

V.2 Les moyens techniques utilisés

V.2.1 Le montage ONERA

En raison du procédé de refroidissement interne des aubes de turbine HP (voir introduction), les contraintes d’origine thermique deviennent aussi importantes que les contraintes

mécaniques (force centrifuge). Aussi, pour simuler le gradient thermique apparaissant sur la pièce, l'ONERA a développé un système qui permet de refroidir la face intérieure d'une éprouvette de fatigue cylindrique tout en chauffant la surface extérieure. La difficulté est d'obtenir des gradients aussi élevés que ceux calculés sur la pièce réelle avec une bonne distribution de la température sur la section utile de l'éprouvette.

Le chauffage est obtenu avec un inducteur (type solénoïde) relié à une unité de chauffage par induction de 12 kW de puissance. Un des avantages liés à l'utilisation du chauffage par induction (par rapport à un four à lampe par exemple) dans cette application, est de localiser le chauffage sur la surface externe de l'éprouvette. Le gradient thermique est alors généré en refroidissant la surface intérieure en utilisant un flux d'air pulsé à température ambiante comme illustré sur la photo (V.3).

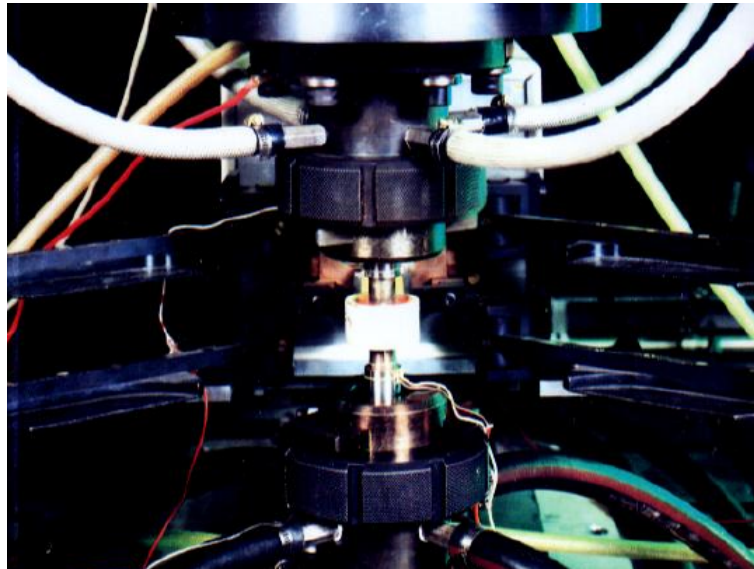


Figure V.3 : Le montage ONERA

Afin d'obtenir une bonne distribution de la température, le flux d'air est soufflé en permanence à l'intérieur du tube et canalisé par une chemise en alumine pour augmenter la convection. La paroi interne est ainsi refroidie créant un gradient de paroi pouvant atteindre jusqu'à 250°C dans la zone la plus chaude (Chaboche et al., 1997) (figure V.4).

Un débitmètre sonique placé en amont et un diaphragme en sortie permettent de mesurer les débits massiques d'air (environ 10 mg d'air par trou pour une pression de 4 bars en entrée) afin d'assurer un débit d'air constant.

V.2.2 Présentation de l'éprouvette

Cette étude fait suite à celle (Chaboche et al., 1997) réalisée sur des éprouvettes cylindriques (le diamètre extérieur est de 14 mm avec une paroi de 2 mm d'épaisseur) (figure V.5) monocristallines AM1 revêtues C1A.

Nous cherchons à simuler le chargement thermique et mécanique existant au niveau du bord d'attaque de l'aube de turbine afin d'étudier l'influence de la multiperforation sur le com-

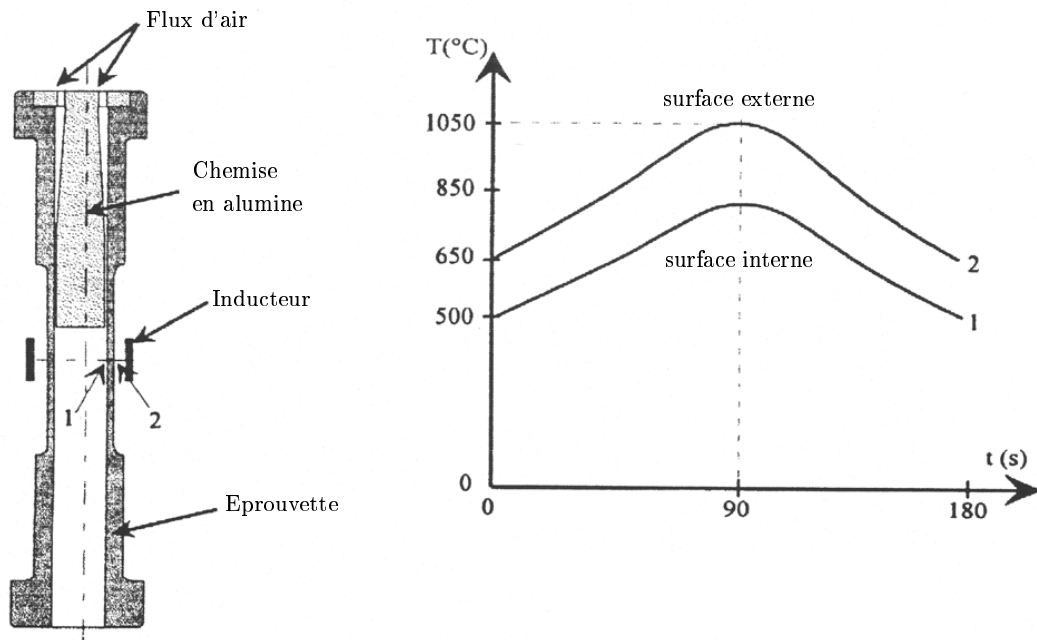


Figure V.4 : Schéma du système de “chauffage-refroidissement” de l’éprouvette

portement et la durée de vie. Par conséquent les éprouvettes ont été percées suivant deux motifs (figure V.6).

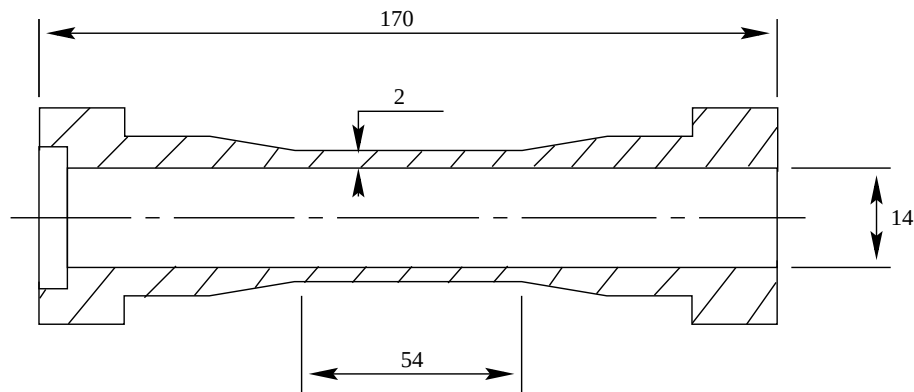


Figure V.5 : Schéma de l’éprouvette

Toutes les éprouvettes sont orientées selon la direction cristallographique $\langle 001 \rangle$ et les perçages, réalisés par laser, sont orientés selon $\langle 010 \rangle$. Le revêtement C1A a été déposé sur la surface externe de l’éprouvette, en suivant la procédure appliquée sur les aubes réelles en raison des conditions de fonctionnement, afin de protéger le matériau contre l’oxydation mais également contre les phénomènes de corrosion et d’érosion.

Le choix des revêtements protecteurs pour aubes de turbine est lié non seulement aux performances intrinsèques, mais également sur la fiabilité et la “réparabilité” de la couche qu’ils constituent.

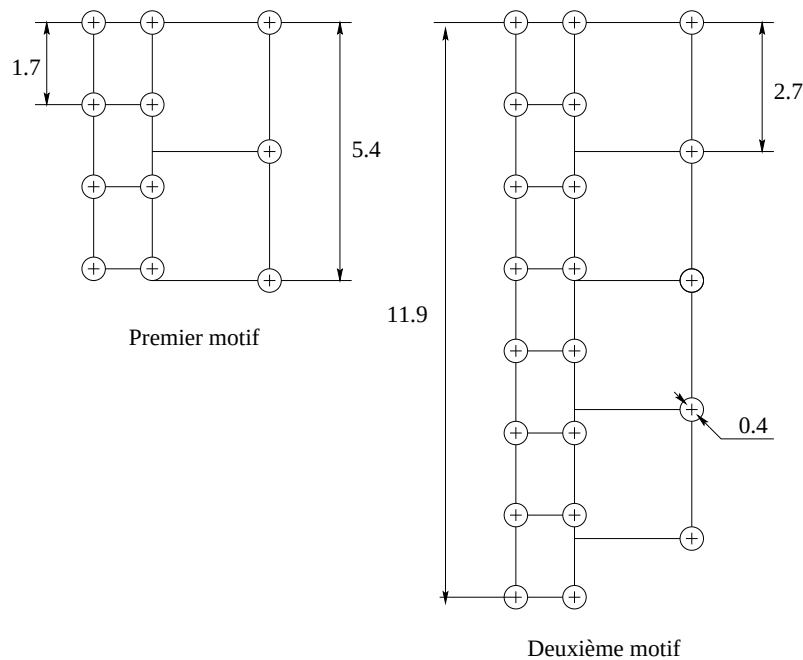


Figure V.6 : Les deux motifs de perçage

Les aubes en superalliage monocristallin AM1 sont revêtues d'un aluminure modifié par le chrome C1A. Ce dépôt thermochimique de chromaluminisation est non directionnel ce qui permet de recouvrir avec une homogénéité satisfaisante des pièces de formes complexes. Le dépôt est effectué à 1500°C lors du premier revenu de remise en solution des précipités eutectique $\gamma - \gamma'$. Il s'agit d'une aluminisation en phase vapeur modifiée par un prédépôt de chrome.

La figure (V.7) montre l'aspect du revêtement, formé de grains polygonaux d'environ $15\mu\text{m}$.

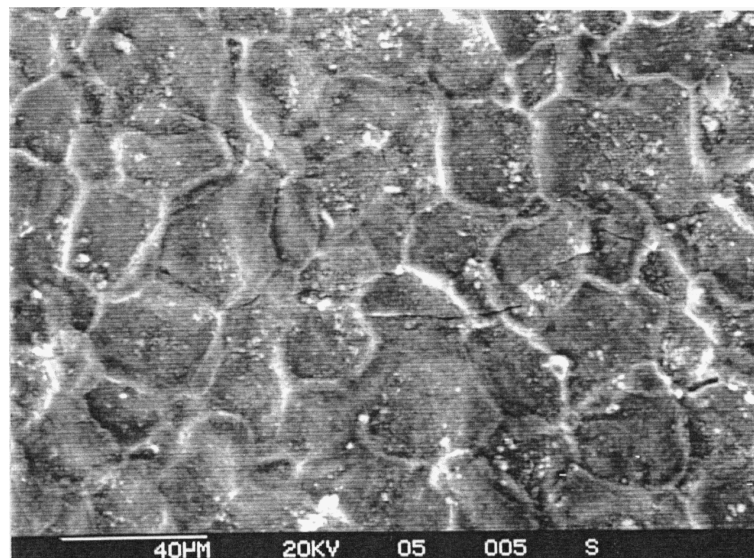


Figure V.7 : Aspect du revêtement thermochimique C_1A (Gallerneau, 1995)

La figure V.8, représentant une coupe longitudinale d'une éprouvette, met en évidence la présence de cinq zones :

- une zone externe monophasée
- une zone interne constituée d'une matrice noyant de nombreux précipités
- une zone intermédiaire entre la protection et le substrat
- une zone de diffusion
- le superalliage

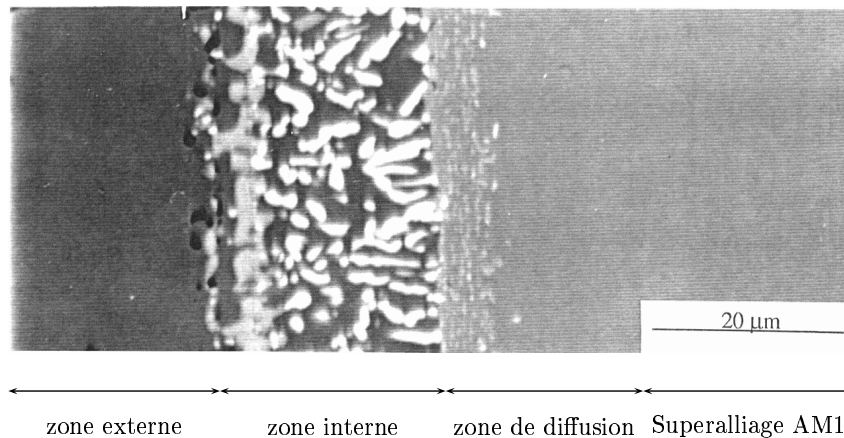


Figure V.8 : Coupe longitudinale d'une éprouvette en AM1 revêtue C1A (Gallerneau, 1995)

Grâce à une analyse X du matériau tous les μm , la concentration des éléments a pu être obtenue de la surface de l'éprouvette jusque dans l'alliage AM1.

- Il existe une forte concentration de chrome entre les zones externe et interne résultant de la première phase de dépôt. Ce cordon de chrome situé sur la surface initiale de l'éprouvette en AM1 s'avère efficace vis-à-vis de la corrosion à chaud.
- La zone externe monophasée est principalement constituée d'aluminure de nickel qui se forme lors de l'aluminisation (seconde phase du dépôt). L'aluminure de nickel $\beta - \text{NiAl}$ est formé grâce à la diffusion du nickel provenant du substrat de base.
- La zone interne a un caractère polyphasé (fortes variations de concentration de nickel, de chrome et d'aluminium). Sa matrice est constituée, comme la zone externe, de l'aluminure $\beta - \text{NiAl}$ surstoechiométrique.
- La zone de diffusion contient de petits précipités plus riche en aluminium qu'en chrome contrairement à l'AM1 qui comprend en moyenne plus de chrome que d'aluminium.

V.2.3 Réglages des paramètres de sollicitation

Des essais préliminaires ont cherché à vérifier la présence de gradients selon les directions circonférentielle, longitudinale et radiale. Ils ont été réalisés sur des éprouvettes quatre trous isolés (4 trous à 90°) pour la mise au point du système d'essai et des mesures locales de gradients.

Les premiers essais ont été effectués avec un inducteur de 28 mm de hauteur (4 spires), centré sur les trous.

Dans un premier temps, l'éprouvette est instrumentée avec des thermocouples (un thermocouple est fixé sur le bord d'un trou) afin de mesurer les différents gradients. Les premiers résultats, ne mettant en évidence aucun gradient circonférentiel autour du trou, une mesure par caméra infrarouge à l'aide d'une caméra (matrice de 260*260 pixels) a été utilisée. Suite à un étalonnage, effectué à différentes températures afin de corriger les variations d'émissivité de la surface de l'échantillon, des gradients de température très localisés au niveau des trous ont été mesurés. La figure (V.9) illustre le champ de température sur une ligne circonférentielle traversant la perforation pour trois niveaux de chauffage et met en évidence l'absence de gradient quel que soit le niveau de température.

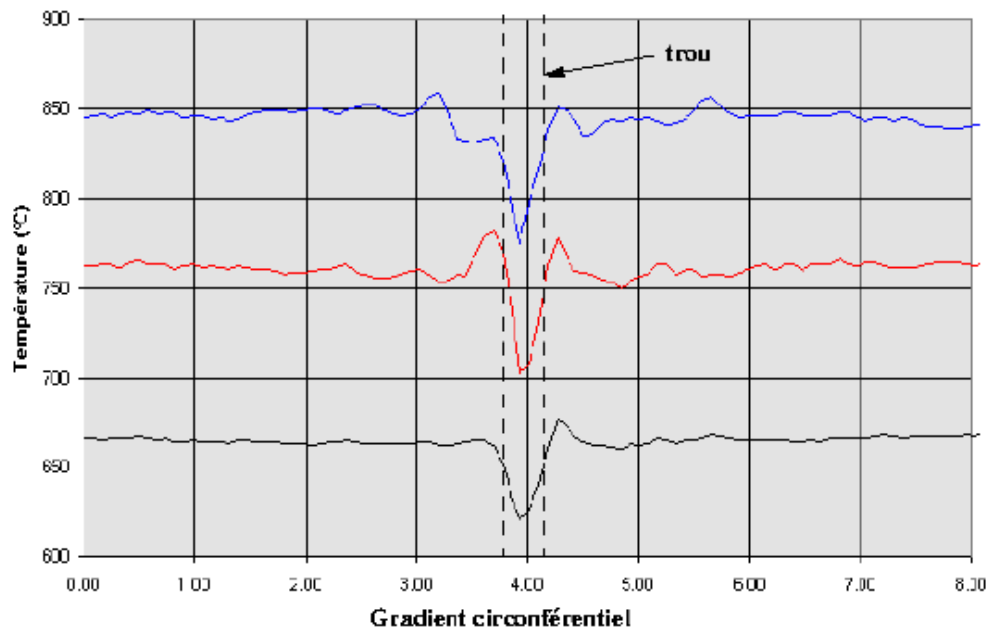


Figure V.9 : Gradient circonférentiel pour différents niveaux de température

Par contre nous observons un gradient longitudinal, d'environ $50^{\circ}\text{C}/\text{mm}$ de part et d'autre de l'inducteur (figure V.10).

Ces résultats ont été confirmés par les thermiciens de SNECMA (figure V.11) qui ne mettent pas en évidence de gradient thermique autour des trous sur un maillage d'aube. Seul un gradient longitudinal du pied de l'aube à la baignoire et un gradient de paroi sont calculés.

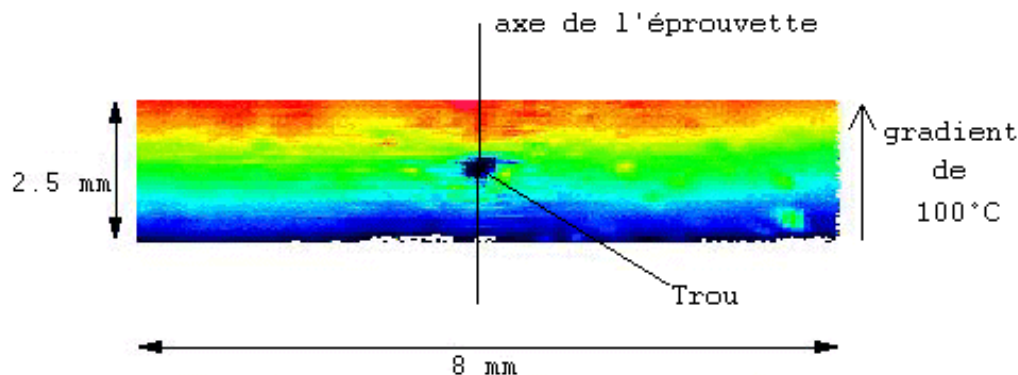


Figure V.10 : Gradient visualisé par caméra infrarouge

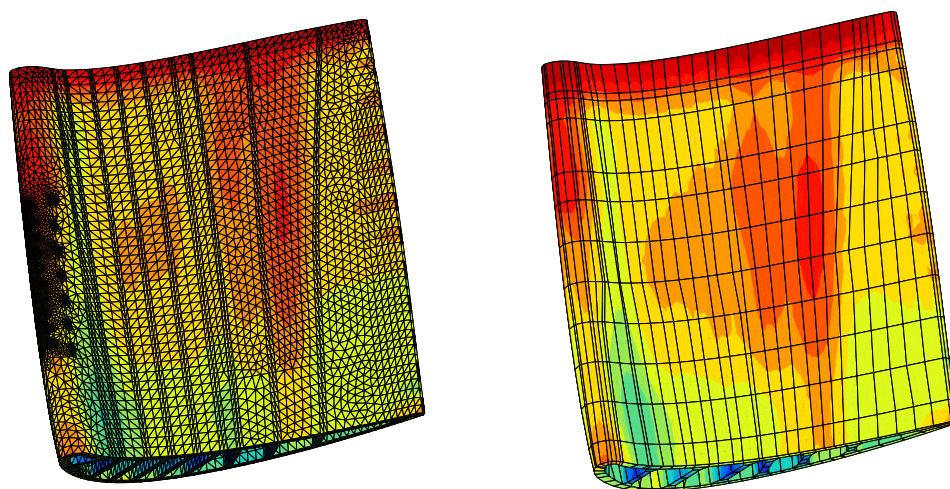


Figure V.11 : Champ thermique obtenu par les thermiciens sur les deux maillages

De ce fait nous avons cherché à créer ces gradients expérimentalement afin de s'approcher au mieux des conditions de fonctionnement de l'aube de turbine au cours d'une mission de vol.

Pour ce faire l'inducteur est décalé et nous mesurons le gradient thermique longitudinal à l'aide de thermocouples. Un trentaine de thermocouples ont été soudés sur la surface externe et interne, de manière longitudinale et circonférentielle afin de mesurer de la manière la plus précise le champ thermique sur la pièce. Des essais de cyclages en température entre 650°C et 1050°C en montée rapide (5 secondes) n'ont pas montré de différence de gradient sur les transitoires. Mais la température obtenue au niveau du trou par rapport à la température maximum de paroi n'étant pas satisfaisante, un nouvel inducteur a été réalisé (2 spires et 12 mm de hauteur).

Les essais suivants ont cherché à optimiser le gradient longitudinal et la température au niveau du trou le plus chaud (1050°C à la température de chauffe et 650°C au moment le plus froid) sur les éprouvettes d'essais (11 trous et 21 trous). Un bon compromis semble

être obtenu en décalant l'inducteur vers l'amont du flux d'air favorisant ainsi un gradient longitudinal et un gradient de paroi d'environ 250°C au niveau de la zone la plus chaude.

Sur la figure (V.12) nous observons le champ thermique relevé par les thermocouples, placés sur la génératrice de l'éprouvette (distants de 5 mm au loin des trous et de 1.7 mm au niveau du réseau de perforation) et celui généré numériquement qui servira de conditions aux limites pour simuler les essais par la méthode des éléments finis.

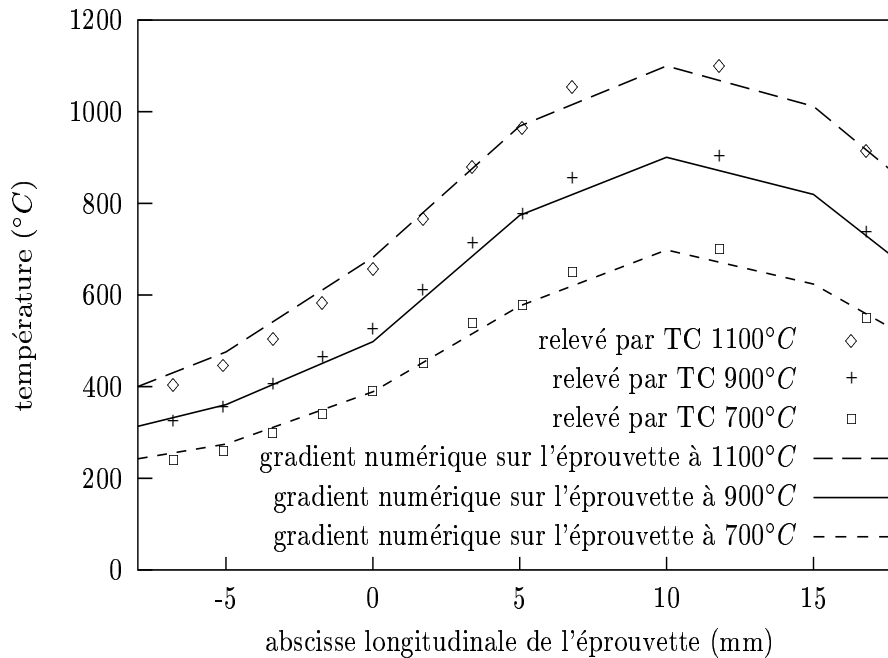


Figure V.12 : Gradient longitudinal relevé sur l'éprouvette

V.3 Présentation des essais thermo-mécaniques

Ces essais thermo-mécaniques vont nous permettre dans un premier temps d'évaluer la qualité des modèles de comportement du superalliage monocristallin AM1. Nous comparerons la réponse "globale" afin de s'assurer que nous simulons correctement l'expérience. Et dans un deuxième temps (chapitre VI), nous testerons la validité des modèles de durée de vie. Ces modèles déterminés en isotherme sur des éléments de volume seront appliqués à un calcul de structure tridimensionnel.

V.3.1 Les essais réalisés

Nous possédons 11 éprouvettes monocristallines AM1 revêtues C1A (5 éprouvettes 21 trous et 6 éprouvettes 11 trous).

Différents cycles thermo-mécaniques de trois minutes ont été réalisés où la contrainte et le

champ de température sont imposés (tableau V.1). Les différents types d'essai seront explicités dans la section V.3.3.

Essai	motif	Type cycle	Contrainte (en MPa)	Cycles à amorçage	Cycles à rupture	Type de rupture
	21 trous	Eprouvette d'étalonnage				
Essai 1	21 trous	Isotherme	± 200	342	412	Zone chaude
Essai 2	21 trous	Type 1	± 200		2250	Zone chaude
Essai 3	21 trous	Type 2	+550 / - 150	760	855	Trous du haut
Essai 4	21 trous	Type 3	± 400	804	1476	Trous du haut
	11 trous	Eprouvette d'étalonnage				
Essai 5	11 trous	Type 4	± 400	1067	1248	Trous du haut
	11 trous	Problème machine				
Essai 6	11 trous	Type 4	± 300	Tête dessoudée à 2031 cycles		
Essai 7	11 trous	Type 3	± 300	4155	4685	Trous du haut
Essai 8	11 trous	Type 3	± 350	1065	2433	Trous du haut

Tableau V.1 : Récapitulatif des essais thermo-mécaniques

Deux éprouvettes ont servi à l'étalonnage du champ thermique et les neuf autres ont été sollicitées jusqu'à rupture (figure V.13).

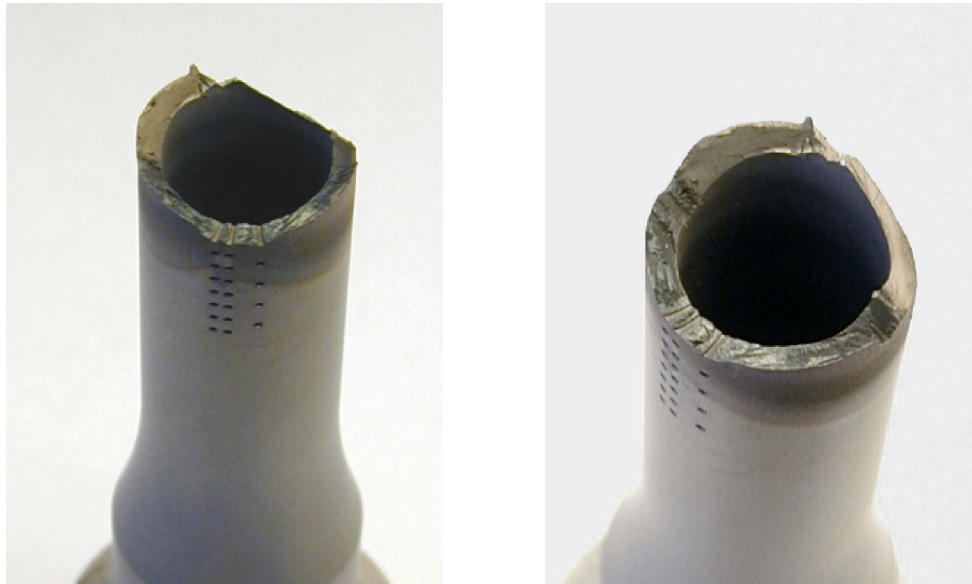


Figure V.13 : Faciès de rupture d'une éprouvette 21 trous

Pour chaque essai, nous relevons le déplacement global de l'éprouvette, le nombre de cycles à amorçage et le nombre de cycle à rupture.

Le nombre de cycles à amorçage définit la durée de vie pour former une fissure macroscopique dans la pièce de 1 à 2 mm. Il est obtenu expérimentalement par une méthode de

mesure de potentiel. La durée de vie à rupture correspond quant à elle à la rupture complète de l'éprouvette.

V.3.2 Les différentes simulations réalisées

Le maillage de l'éprouvette utilisée est représenté sur la figure (V.14). Pour obtenir une caractérisation rapide, le maillage ne possède qu'un élément dans l'épaisseur et la taille des éléments au bord du trou est de l'ordre de 0.2 mm.

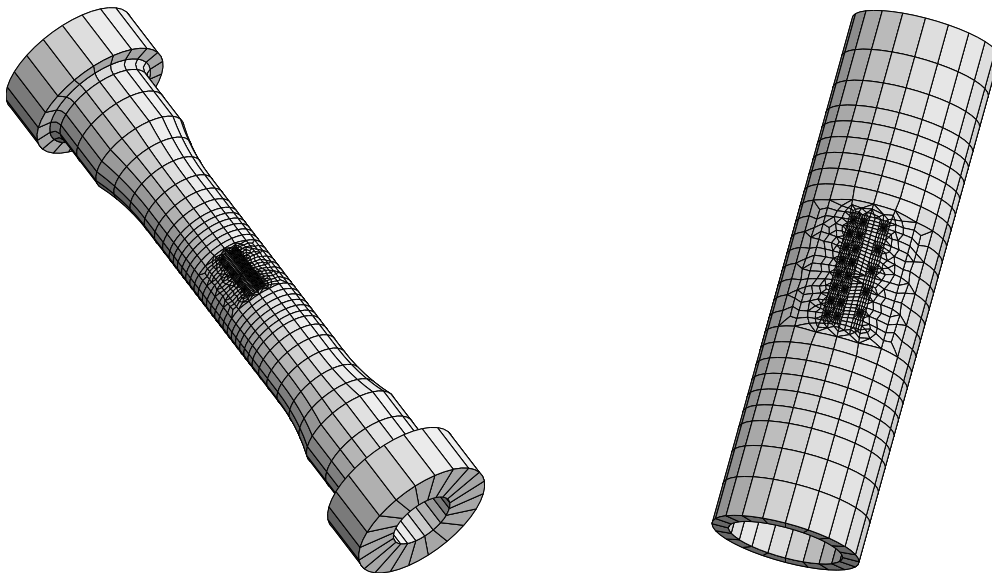


Figure V.14 : Maillage de l'éprouvette de fatigue thermo-mécanique

La méthode utilisée pour établir la corrélation "expérimentale / numérique" est illustrée sur la figure (V.15).

En parallèle de l'essai réalisé à l'ONERA, nous réalisons deux simulations numériques sur deux géométries différentes :

- un calcul sur la géométrie réelle

Toujours pour des raisons de temps de calcul, les pates de fixation ont été supprimées (figure V.14). Les conditions aux limites seront par conséquent appliquées aux extrémités du maillage qui sont suffisamment éloignées du réseau de perforations pour ne pas perturber l'état de contrainte au voisinage des trous. La géométrie est identique à celle utilisée expérimentalement ce qui rend les maillages relativement importants (35000 degrés de liberté pour l'éprouvette 21 trous et 24000 degrés de liberté pour l'éprouvette 11 trous).

Nous utilisons le modèle cristallographique, introduit au chapitre IV, pour simuler le comportement thermo-mécanique de l'éprouvette. Nous représentons ainsi le comportement non linéaire des contraintes et des déformations sur la structure réelle.

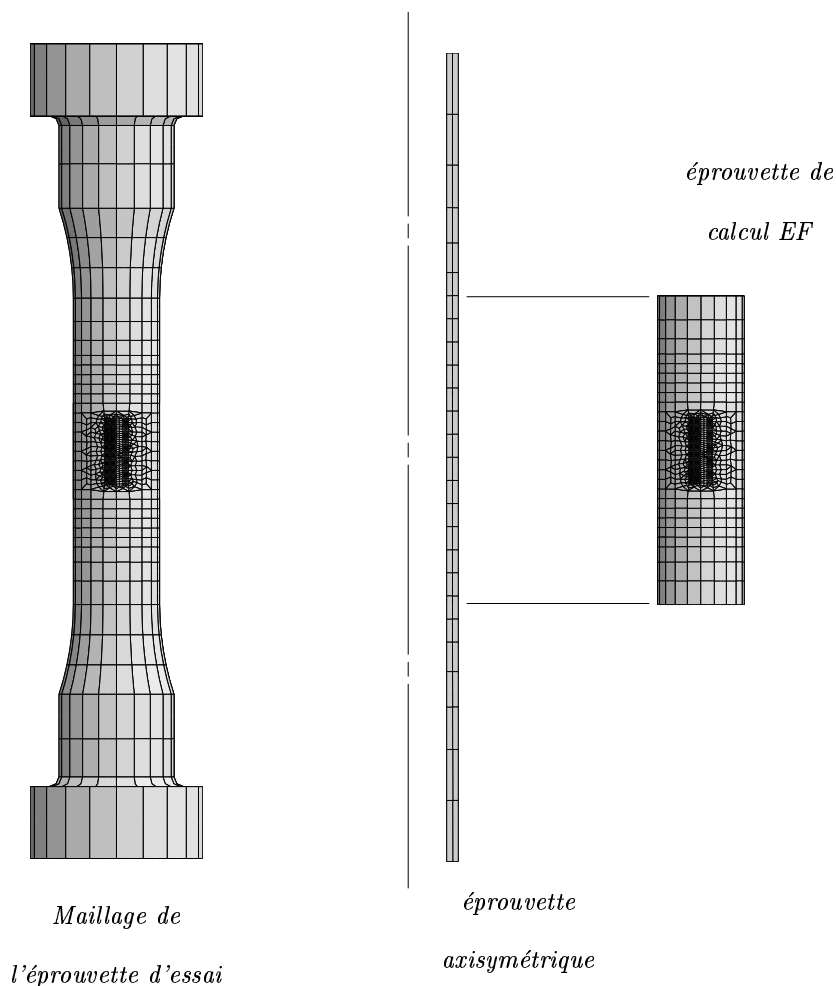


Figure V.15 : La méthode utilisée pour définir les essais

- un calcul sur une éprouvette axisymétrique
Cette simulation effectuée à l'aide d'un modèle basé sur un critère de plasticité quadratique (Nouailhas et Culié, 1991) aidera tout d'abord à la détermination des essais. Il permettra également la réalisation d'un grand nombre de cycles, alors que seulement 30 cycles sont simulés sur la structure réelle en raison de la géométrie complexe.

V.3.3 Présentation des résultats

Dans cette section, nous allons chercher à corréler les essais expérimentaux et les simulations numériques d'un point de vue du comportement.

a) Essai 1

Le premier essai réalisé est un essai à champ de température non uniforme mais constant dans le temps.

Sur la figure (V.16) nous observons le champ de température (gradient longitudinal et de

paroi) appliqué numériquement sur l'éprouvette 21 trous au cours du chauffage (1050°C au niveau du trou le plus chaud). Malgré la présence d'un seul élément quadratique dans l'épaisseur, nous simulons tout de même le gradient de paroi.

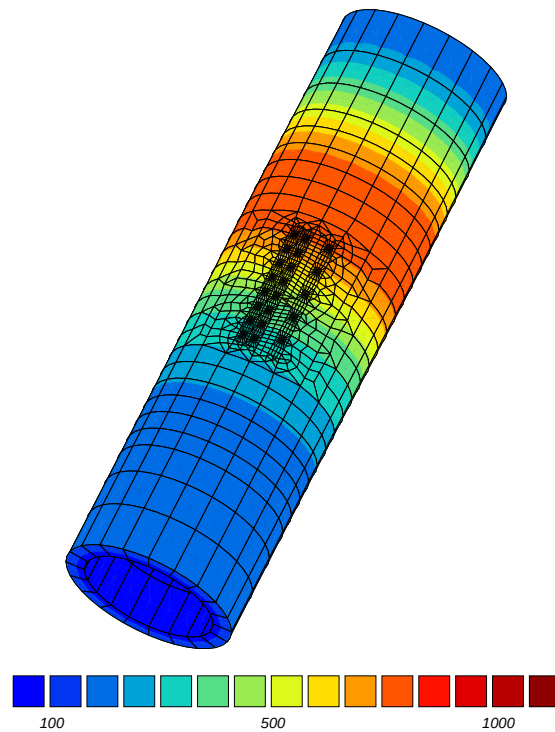


Figure V.16 : Champ thermique sur l'éprouvette (en °C)

Nous appliquons un chargement mécanique de $\pm 200\text{MPa}$ sur une période de 180 secondes (figure V.17).

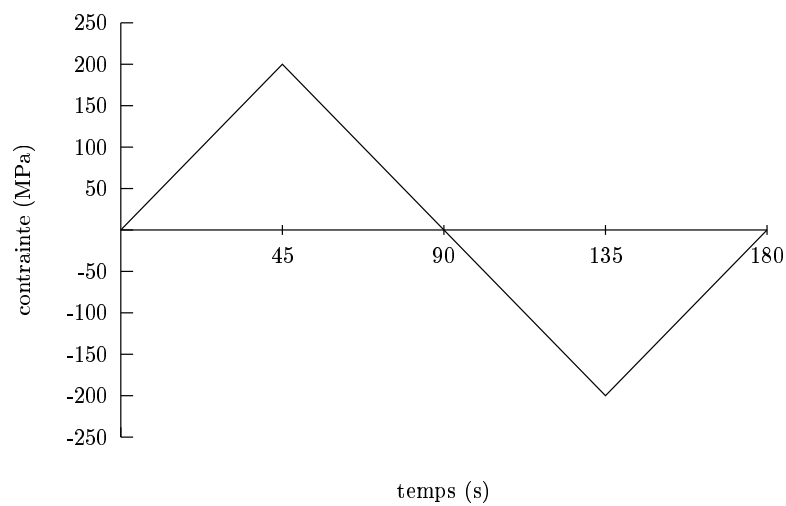


Figure V.17 : Chargement mécanique du premier essai

En parallèle, nous réalisons deux simulations éléments finis : le calcul axisymétrique et le calcul tridimensionnel.

Sur la figure (V.18) nous avons tracé le déplacement global relevé expérimentalement et le résultat obtenu au niveau de la simulation axisymétrique. Le modèle macroscopique phénoménologique reproduit bien l'expérience.

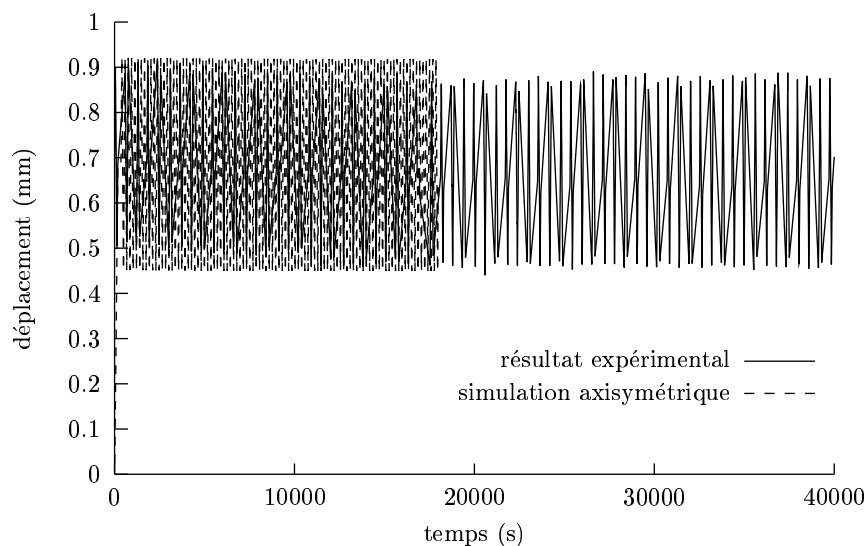


Figure V.18 : Comparaison de l'essai thermo-mécanique avec la simulation axisymétrique

Dans un deuxième temps nous cherchons à vérifier si la simulation effectuée sur la géométrie tridimensionnelle reproduit, elle aussi, correctement l'expérience.

Nous traçons sur la figure (V.19) le déplacement global :

- du résultat expérimental
- de la simulation axisymétrique
- du calcul tridimensionnel (calcul EF)
- du calcul axisymétrique au niveau de la zone de calcul EF (figure V.15)

sur les premiers cycles.

A partir du calcul axisymétrique nous remarquons que les conditions aux limites du calcul sont représentatives des conditions expérimentales. Nous retrouvons la déformation thermique (déplacement de $+0.7\text{mm}$) et l'amplitude de déformation due au chargement mécanique (déplacement de $\pm 0.2\text{mm}$).

Par contre le déplacement global obtenu au niveau du calcul EF n'est pas directement comparable avec l'expérience en raison de la différence de géométrie. Mais si nous rapportons le déplacement du calcul axisymétrique au niveau de la zone de calcul EF alors nous obtenons les mêmes résultats (figure V.19).

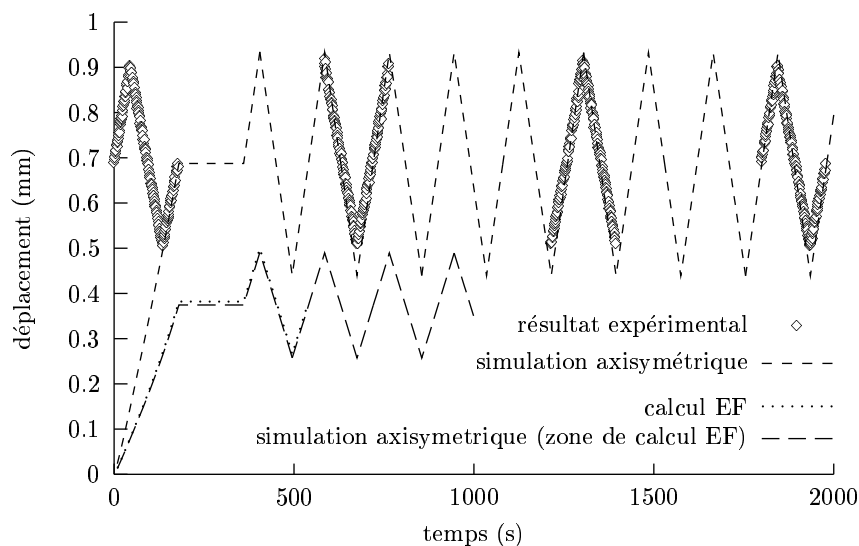


Figure V.19 : Corrélation “expérience / numérique” du déplacement global de l’éprouvette

b) Essai2 et essai 3

Au niveau des essais 2 et 3 nous réalisons un véritable chargement thermo-mécanique. Le cycle de température utilisé est un cycle linéaire compris entre 1100°C et 700°C . La traction s’effectue à froid et la compression à chaud (figure V.20) avec des intensités de contraintes différentes (tableau V.1).

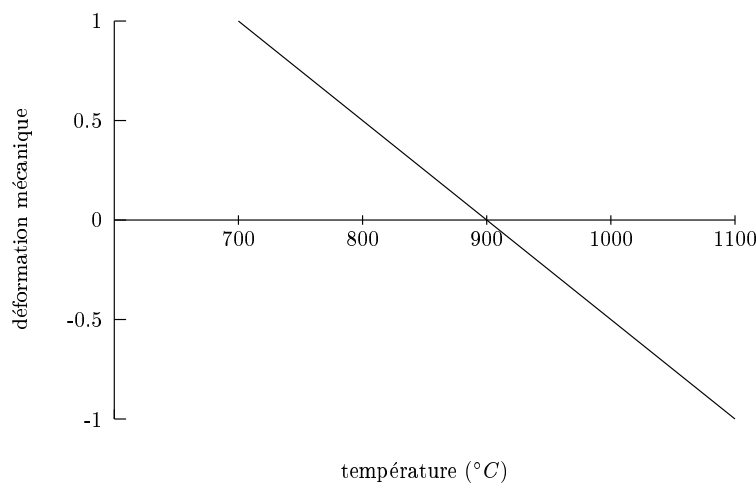


Figure V.20 : Cycle type 2 et 4

L’éprouvette s’est de nouveau rompue dans la zone la plus chaude au niveau de l’inducteur et l’essai 3 a subi une mise en tonneau.

De ce fait nous avons modifié le type de chargement afin d’être moins sévère dans la zone la plus chaude en définissant un nouveau cycle thermo-mécanique de type 3 (figure V.21).

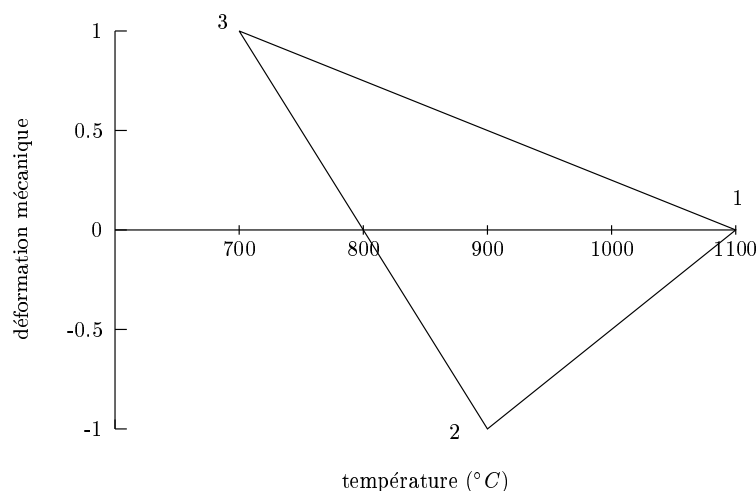


Figure V.21 : Le nouveau cycle (type 3)

Le cycle de température utilisé est un cycle linéaire compris entre 1100°C et 700°C avec des vitesses de chauffage et de refroidissement identiques. Un effort de traction est imposé à froid (à 700°C) et un effort de compression à 900°C . Il n'y a pas d'effort appliqué à chaud (1100°C), afin d'éviter les problèmes de flambement rencontrés précédemment.

Pour les nouveaux essais nous enregistrons toujours le déplacement global de l'éprouvette. La perforation, étant localisée au centre de l'éprouvette, a très peu d'influence sur le comportement global. Un extensomètre a de ce fait été placé de part et d'autre de l'inducteur (20 mm de long) afin de relever la déformation au niveau des singularités. La position basse de l'extensomètre se situe entre le 3^{ème} et le 4^{ème} trou (figure V.22).

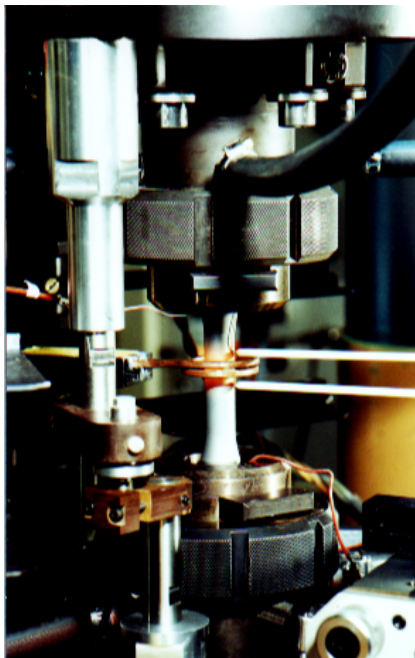


Figure V.22 : Mise en place d'un extensomètre

c) Essai 4 (type 3)

Le cycle thermo-mécanique imposé est illustré sur la figure (V.23).

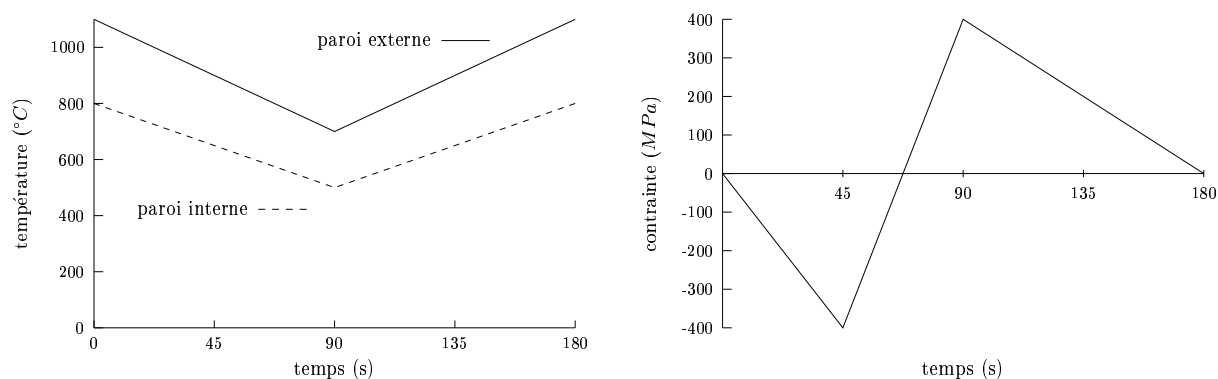


Figure V.23 : Chargement du quatrième essai

Le cycle mécanique oscille entre $\pm 400\text{MPa}$ toujours sur une période de trois minutes.

Les modèles (cristallographique et macroscopique) reproduisent toujours correctement le déplacement global de l'éprouvette. Si nous nous intéressons à la boucle stabilisée contrainte-déformation au niveau de l'inducteur, nous pouvons constater également que le comportement est bien reproduit numériquement (figure V.24).

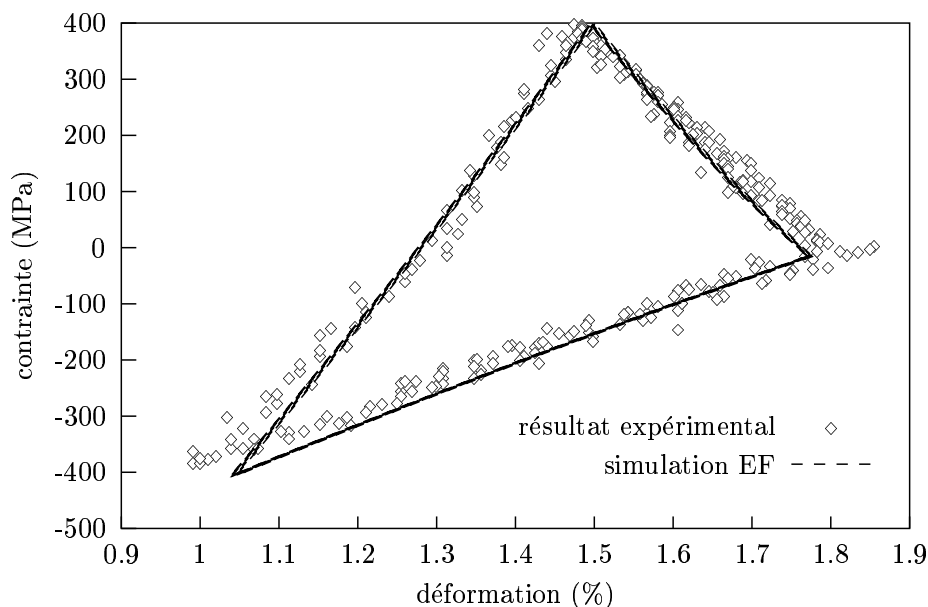


Figure V.24 : Corrélation “expérience / numérique ” de l’état contrainte / déformation au niveau de l’inducteur pour le quatrième essai

d) Essai 5 (type 4)

La différence par rapport à l'essai précédent vient du fait que la traction est effectuée, non plus à froid mais à 800°C (figure V.25) pour éviter le comportement fragile du revêtement (transition ductile-fragile aux environs de 750°C).

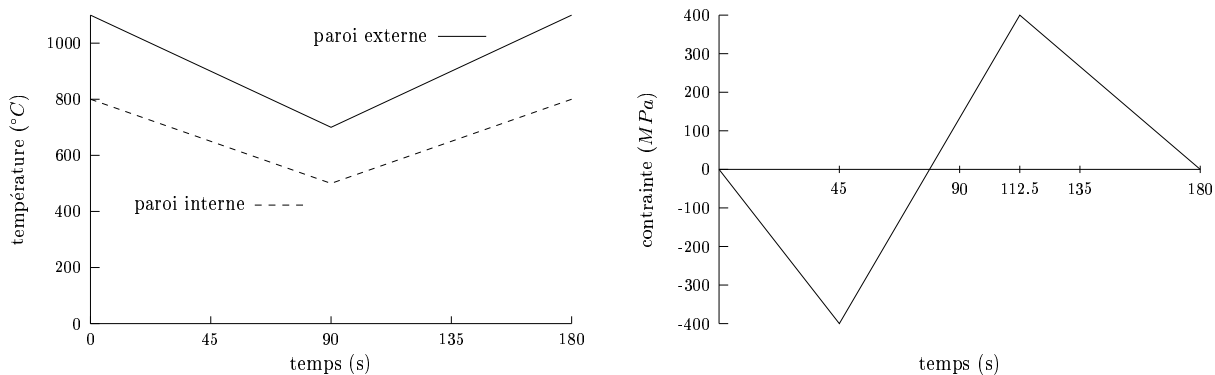


Figure V.25 : Chargement du cinquième essai

Cette modification a eu très peu d'influence sur la durée de vie (tableau V.1) et l'éprouvette s'est mise en tonneau.

De ce fait nous allons conserver le cycle de l'essai 4 (figure V.21) (de type 3) qui permet d'obtenir un cycle stabilisé (figure V.24) et une rupture au niveau des trous. Nous allons à présent, sur les deux essais suivants, faire varier l'amplitude de contrainte afin d'étudier l'influence du chargement sur la durée de vie.

e) Essai 7 - Essai 8 (type 3)

Les cycles thermomécaniques imposés sont illustrés sur les figures (V.26 et V.27).

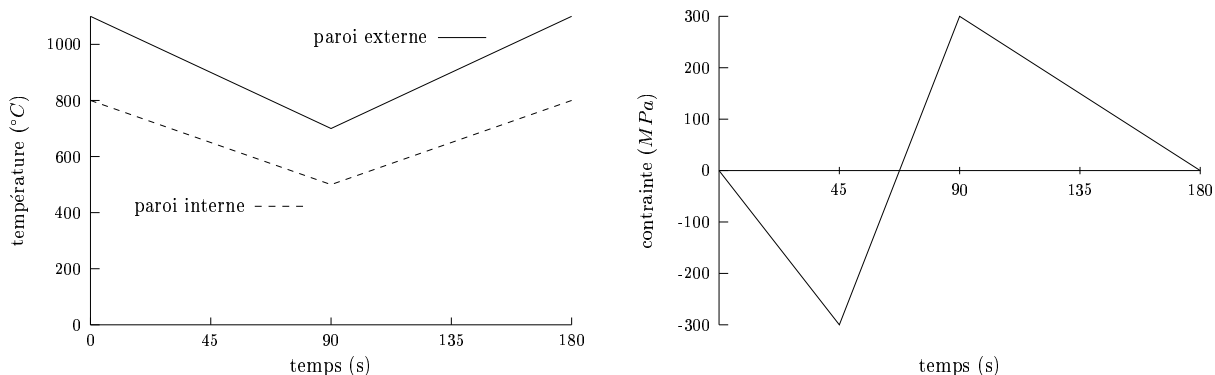


Figure V.26 : Chargement du septième essai

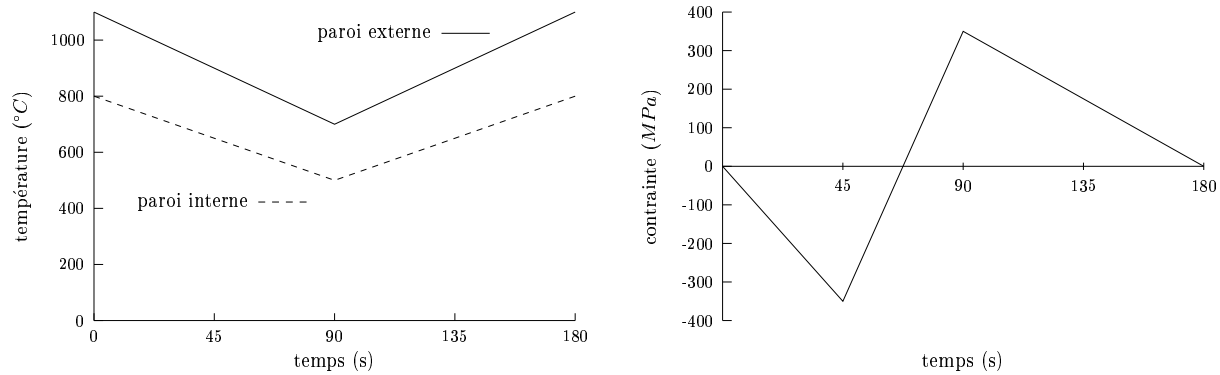


Figure V.27 : Chargement du huitième essai

Sur les figures (V.28 et V.29) nous comparons la déformation relevée au niveau de l'inducteur et celle issue de la simulation numérique. Au vu des résultats nous remarquons que les conditions aux limites imposées et le modèle de comportement reproduisent de manière acceptable les résultats expérimentaux.

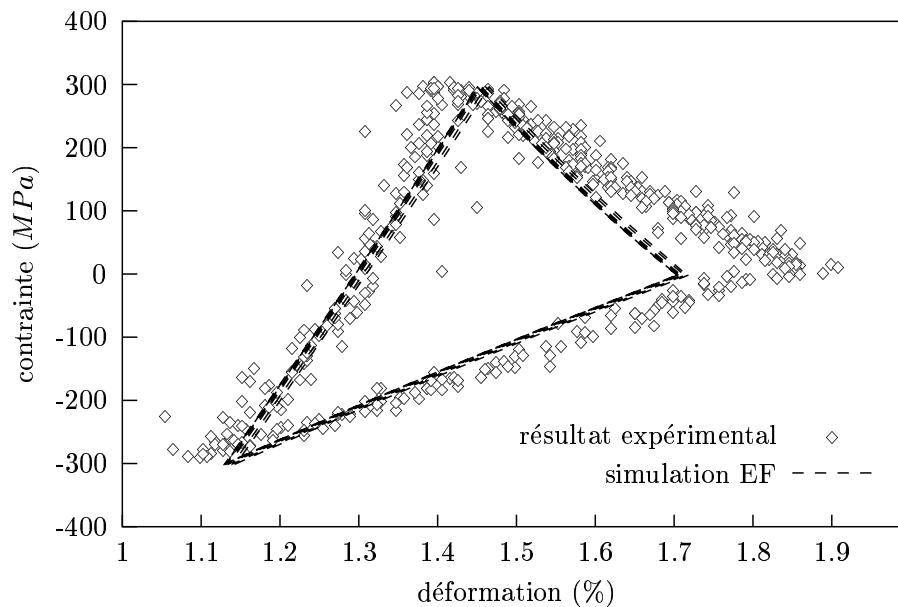


Figure V.28 : Corrélation “expérience / numérique ” de l'état contrainte / déformation au niveau de l'inducteur pour le septième essai

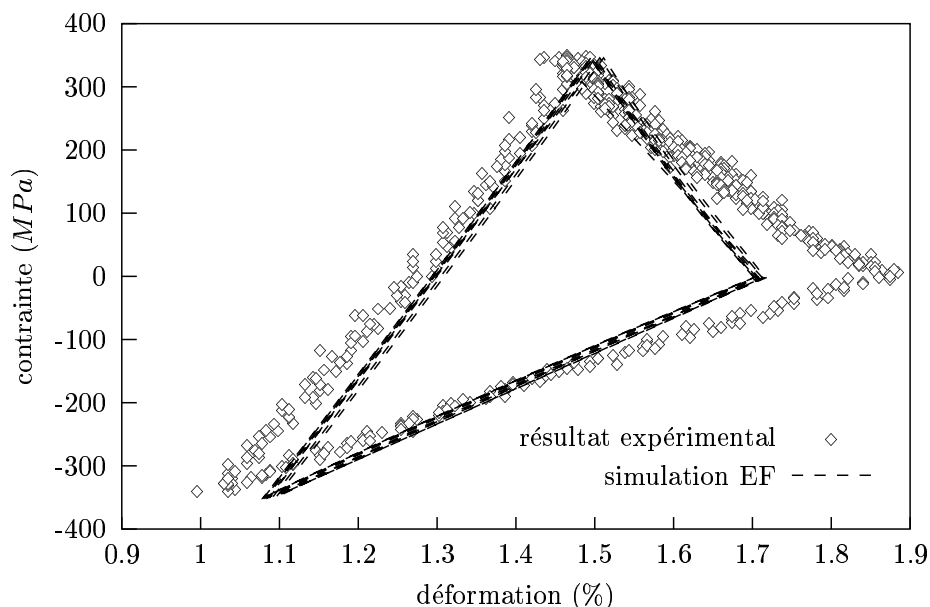


Figure V.29 : Corrélation “expérience / numérique ” de l’état contrainte / déformation au niveau de l’inducteur pour le huitième essai

V.4 Utilisation du modèle homogène de substitution

Dans cette section, nous allons mettre en évidence l’intérêt des outils développés au cours des deux premières parties.

Afin de corréler les résultats expérimentaux avec la simulation numérique, nous venons de voir que nous utilisons un calcul 3D sur une géométrie réelle sur laquelle nous simulons 30 cycles assurant une bonne redistribution des contraintes. Mais, pour simuler un grand nombre de cycles afin de définir des essais, nous utilisons un calcul axisymétrique alors qu’en utilisant un calcul sur un maillage sans singularité un seul calcul, au lieu de deux, permettrait d’établir une comparaison.

La méthode présentée dans les parties précédentes et le modèle homogène de substitution développé au chapitre IV n’ont pu être mis en place car le modèle effectif n’a été identifié que pour une seule température alors que les essais sont anisothermes.

Nous allons tout de même montrer l’intérêt des méthodes d’homogénéisation sur un essai isotherme à 950°C avec le même chargement mécanique que pour le premier essai (figure V.17) sur une éprouvette 11 trous.

Le calcul est réalisé sur la géométrie complète (calcul de référence) et sur un maillage grossier où la zone perforée est remplacée par un milieu effectif (figure V.30).

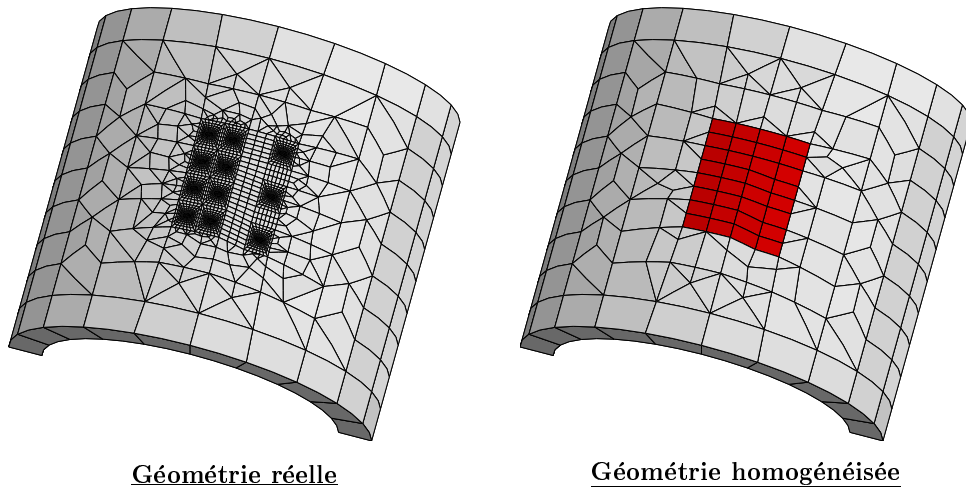


Figure V.30 : Maillages d’une partie de l’éprouvette 11 trous et de l’éprouvette homogénéisée

Ensuite nous appliquons la méthodologie présentée au chapitre I qui est illustrée sur la figure (V.31) :

- nous simulons 30 cycles sur l’éprouvette réelle 11 trous
- nous simulons 30 cycles sur la structure homogénéisée
- nous effectuons l’étape de relocalisation sur la cellule de base en appliquant le chargement complet. Nous appliquons à la cellule de base la déformation moyenne $\bar{\epsilon}$ afin de reproduire l’état local sur 30 cycles.
- nous comparons l’état de “contraintes / déformations” obtenu entre le calcul de référence et celui obtenu sur la cellule de base après relocalisation.

Comme nous l’avons mis en évidence dans le paragraphe précédent le “comportement global” de la structure est reproduit correctement car le réseau de perforation localisé sur une partie de l’éprouvette ne modifie pas la réponse globale mais nous pouvons vérifier l’état local au voisinage d’un trou.

Sur les figures (V.32 et V.33), nous traçons la réponse d’un nœud au bord du trou et on observe que les résultats obtenus sur la cellule de base reproduisent correctement le résultat de référence.

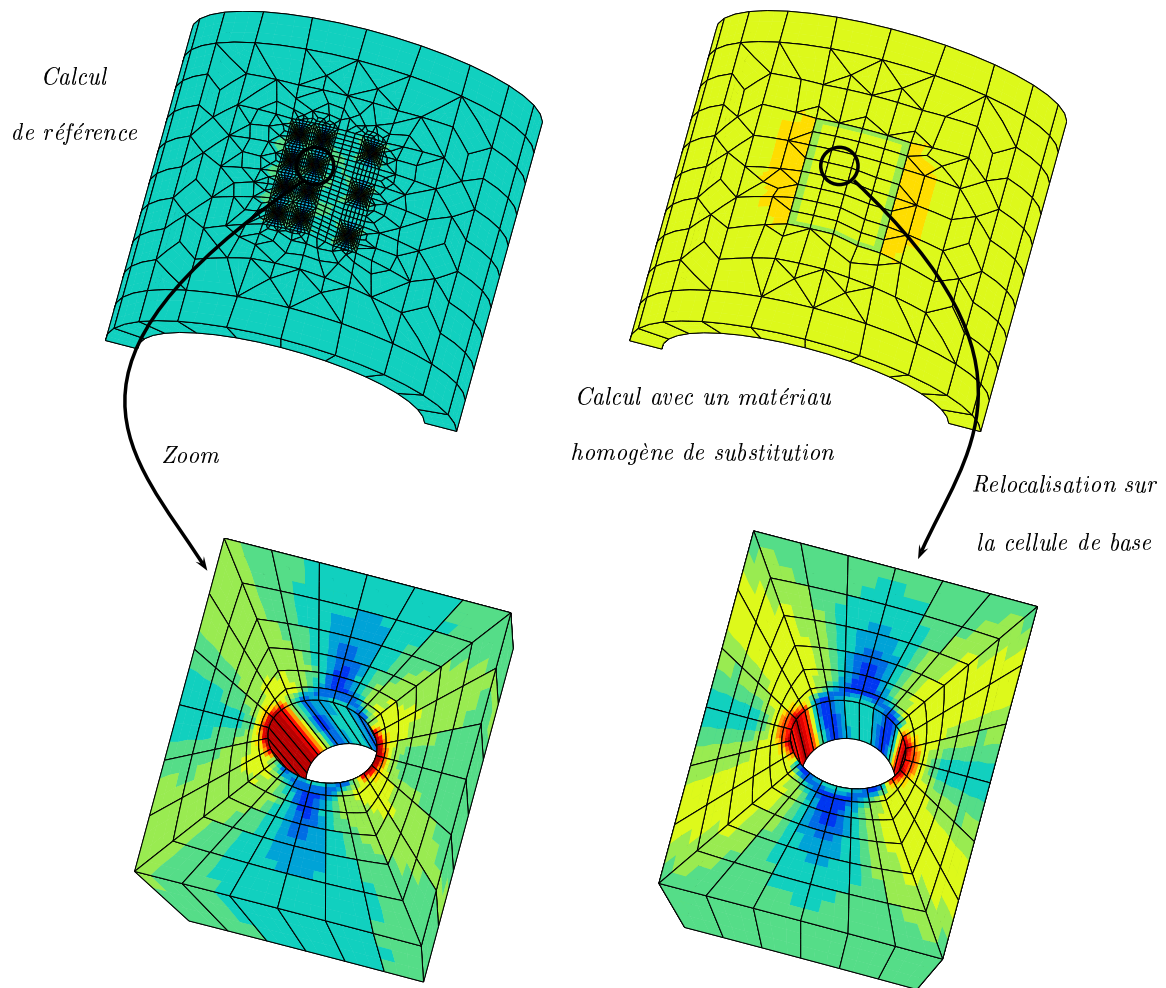


Figure V.31 : Application de la méthode d'homogénéisation sur l'éprouvette perforée 11 trous

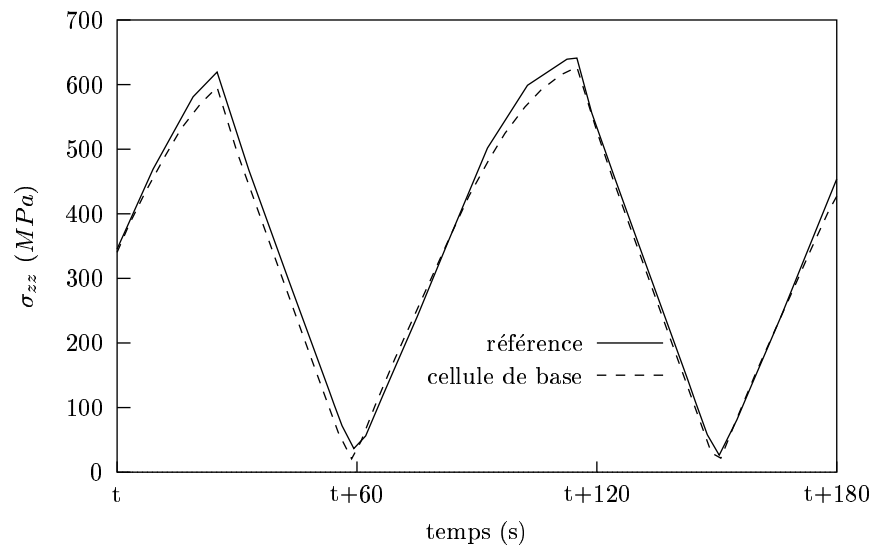


Figure V.32 : Evolution de la contrainte en fonction du temps

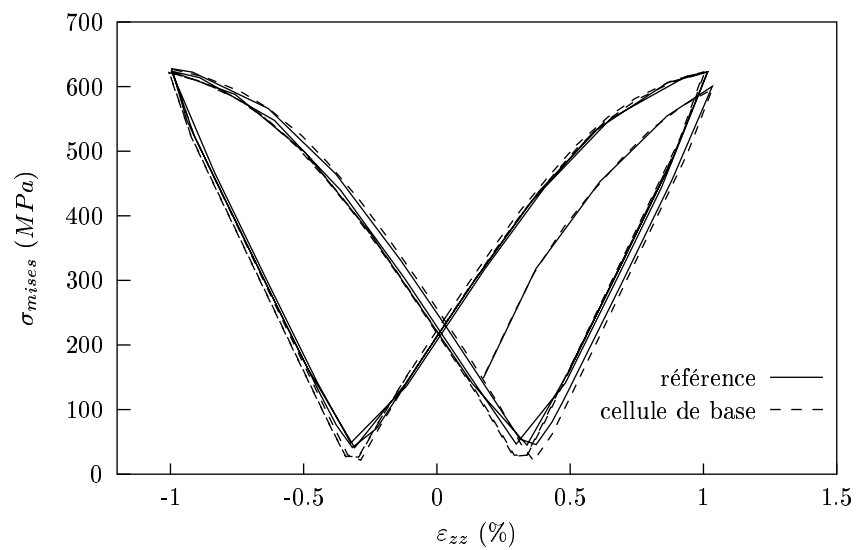


Figure V.33 : Boucle stabilisée

Chapitre -VI-

Influence de la perforation sur la durée de vie

Sommaire

VI.1	Les différents modes d'endommagement	146
VI.1.1	Les mécanismes de rupture ductile et par clivage	146
VI.1.2	L'endommagement de fatigue	146
VI.1.3	L'endommagement de fluage	147
VI.1.4	Effet de l'environnement	147
VI.2	Les différents mécanismes d'endommagement observés sur l'AM1 revêtu C1A	148
VI.2.1	Le rôle du monocristal	148
VI.2.2	Le rôle du revêtement C1A	148
VI.2.3	L'AM1 revêtu C1A	149
VI.3	Les différents modèles de prévision de durée de vie	150
VI.3.1	Loi d'endommagement de fluage	150
VI.3.2	Loi d'endommagement de fatigue	151
VI.3.3	Effet de l'oxydation	152
VI.3.4	Critère tridimensionnel	153
VI.3.5	Notion de cumul des dommages	154
VI.3.6	Le modèle utilisé au cours de l'étude	155
VI.4	Corrélation calcul de structure / expérience	158

Une fois les lois de comportement établies et le calcul des contraintes et des déformations effectué sur la structure à partir d'un chargement évolutif connu il nous faut prévoir la durée de vie des pièces (Swaminathan et al., 1997; Pan et al., 1999; Knop et al., 2000) ou plus précisément l'amorçage des fissures à partir de modèles.

VI.1 Les différents modes d'endommagement

L'endommagement des matériaux est principalement lié à la création de défauts irréversibles. Les déformations plastiques, malgré leur aspect discontinu à l'échelle de la microstructure, respectent la cohésion de la matière alors que l'endommagement conduit à une décohésion. Ceci se traduit par l'apparition de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la matière (microfissures ou microvides) de l'ordre du micron à quelques dizaines de microns.

Les mécanismes de formation de ces défauts dépendent :

- de la microstructure du matériau,
- des sollicitations mécaniques appliquées,
- de la température,
- de l'environnement

et conduisent généralement à la ruine de la pièce de façon brutale ou de manière plus complexe.

La rupture d'un solide sous sollicitation cyclique est le résultat d'une succession de phénomènes complexes : effet purement mécanique dû à la fatigue (endommagement indépendant du temps) auquel viennent se superposer à haute température les effets du temps tels que le fluage et les effets d'environnement (oxydation, corrosion).

VI.1.1 Les mécanismes de rupture ductile et par clivage

Le clivage est un mode de rupture fragile, qui se produit sans déformation plastique appréciable, des liaisons atomiques dans les plans les plus denses et dans une direction perpendiculaire au plan de rupture. Les défauts du réseau cristallin, qui engendrent des concentrations de contraintes locales, jouent un rôle essentiel dans l'amorçage du processus. Le superalliage monocristallin AM1 est peu sensible au clivage car ce sont principalement les cristaux cubiques centrés et les hexagonaux compacts qui se rompent par clivage.

La rupture ductile, à l'inverse, s'accompagne de déformations plastiques importantes. Un premier mécanisme est la croissance de cavités et leur coalescence. Ce mécanisme n'apparaît généralement pas dans le cas des monocristaux en raison de leur pureté (solidification dirigée) et de l'absence d'inclusion et d'interface. La microstructure est principalement déformée par cisaillement déclenché le long d'un plan cristallographique particulier. Ce phénomène est observé dans le cas du zinc (hexagonal compact) où le glissement basal 0001 est actif mais aussi dans les cristaux cubiques centrés et cubiques à faces centrées, où l'existence de plusieurs plans de glissement rend possible la striction. Dans ce cas là, l'éprouvette peut se rompre par striction complète en pointe ou en ciseau.

VI.1.2 L'endommagement de fatigue

La rupture par fatigue sous sollicitations cycliques peut se produire pour des valeurs de contraintes maximales inférieures à la résistance à rupture ou même à la limite d'élasticité du

matériau.

Ce mécanisme d'endommagement se décompose en une partie d'amorçage et une phase de propagation (François et al., 1995).

Phase d'amorçage

Des observations ont montré que l'endommagement est principalement localisé à la surface de l'échantillon. Il se forme, dans un premier temps, des bandes de glissement persistantes et, par la suite, en raison de mouvement de va-et-vient des dislocations, des marches irréversibles. Ces dernières, représentant des sites de concentration de contraintes, amplifient le phénomène et conduisent à l'amorçage de microfissures de surface.

Les inclusions, les microretassures, les joints de grains, l'état de surface, sont également de nombreux sites de concentration de contraintes. Ils favorisent l'apparition de bandes de glissements et réduisent la durée d'amorçage.

Phase de propagation

En avant de la fissure, suivant des plans orientés à 45° de la contrainte principale maximale, on retrouve une zone plastique dans le cas d'un matériau ductile. Cette zone plastique induit un champ de contraintes résiduelles qui provoque un mouvement d'ouverture (durant l'augmentation de la charge) - fermeture (pendant la décharge) qui donne lieu à un faciès strié de la cassure.

VI.1.3 L'endommagement de fluage

Ce mode d'endommagement intervient principalement à haute température et sous un chargement constant. Le matériau se déforme continûment et de façon permanente sous une contrainte faible qui ne provoquerait pas de déformation plastique au cours d'un essai conventionnel de traction ou de compression. Il existe deux mécanismes de fluage (Ashby et Jones, 1982) :

- les atomes diffusent sous l'effet de la contrainte appliquée et libèrent les dislocations qui produisent le fluage : c'est le fluage dislocation,
- et le fluage par diffusion qui intervient à partir du tiers de la température absolue de fusion du métal.

Le superalliage monocristallin possède une excellente tenue en fluage jusqu'à des températures très élevées. Le mécanisme de fluage dislocation est freiné par une fraction volumique élevée en précipités durcissants qui empêchent le mouvement des dislocations. La distance de diffusion mise en jeu lors du fluage diffusionnel est alors très grande et il en résulte une réduction considérable du taux de fluage diffusionnel. L'endommagement de ces superalliages se caractérise par la formation et la croissance de microcavités (initiées sur des microretassures inhérentes au procédé de fabrication) au sein de la matière.

VI.1.4 Effet de l'environnement

Des comparaisons en termes de durée de vie sur des superalliages base nickel (Rémy et Reuchet, 1983; Gabrielli et al., 1989; Chataigner et Rémy, 1995), ont montré que l'environnement a un effet néfaste.

La pièce, évoluant dans un milieu oxydant et corrosif, est le siège de réactions chimiques

qui peuvent donner lieu à la formation de sous-couches, souvent protectrices, à la surface du métal. Ces couches, d'autant plus importantes que la température est élevée, peuvent se rompre sous l'action de sollicitations mécaniques. Ces ruptures successives remettent le métal à nu ce qui a pour effet d'accélérer les cinétiques des réactions chimiques. Ces effets d'environnement peuvent influencer les mécanismes d'endommagement et principalement l'endommagement en fatigue en raison de la localisation préférentielle des défauts en surface dans une région accessible aux agents agressifs.

VI.2 Les différents mécanismes d'endommagement observés sur l'AM1 revêtu C1A

Des essais de fatigue isotherme et anisotherme ont permis la simulation de la fatigue thermique et de mettre en évidence les différents endommagement de l'AM1 et du revêtement.

VI.2.1 Le rôle du monocristal

Le superalliage monocristallin présente une résistance remarquable au fluage par comparaison à un matériau polycristallin. L'endommagement et la rupture par fluage se manifestent par la formation de nombreuses fissures dans la masse du matériau. Ces fissures s'amorcent sur des microretassures situées en sous-couche.

L'oxydation intervient également, surtout à faible amplitude de déformation, et devient le paramètre qui contrôle la durée de vie à haute température. C'est pour limiter ces phénomènes d'oxydation que les pièces sont revêtues.

VI.2.2 Le rôle du revêtement C1A

Le comportement mécanique d'un revêtement de $50\mu m$ est toujours difficile à étudier. Plusieurs études ont permis de mettre en évidence que :

- La protection est sensible à la température et aura un effet bénéfique ou néfaste sur les durées de vie. Les revêtements d'aluminure ont un comportement fragile à basse température et ductile à haute température. La transition fragile-ductile se situe vers $750 - 800^{\circ}C$.
- Le comportement du dépôt dépend de la vitesse de déformation.

Cet alliage (Ni, Al, Cr) favorise, à l'aide de phénomène de diffusion, la formation d'oxyde Al_2O_3 et Cr_2O_3 . Ces oxydes ont une structure hexagonale (cf figure VI.1).

Les cinétiques d'oxydation suivent une loi parabolique en fonction du temps

$$e = k(T) \cdot \sqrt{t} \quad (VI.1)$$

où $k(T)$ est la constante de vitesse en $m.s^{-1/2}$.

Cette constante dépend de l'alliage et de la température. Pour ce qui est de l'AM1 (contenant environ, en pourcentage atomique, 15% de chrome et 10 % d'aluminium) la constante

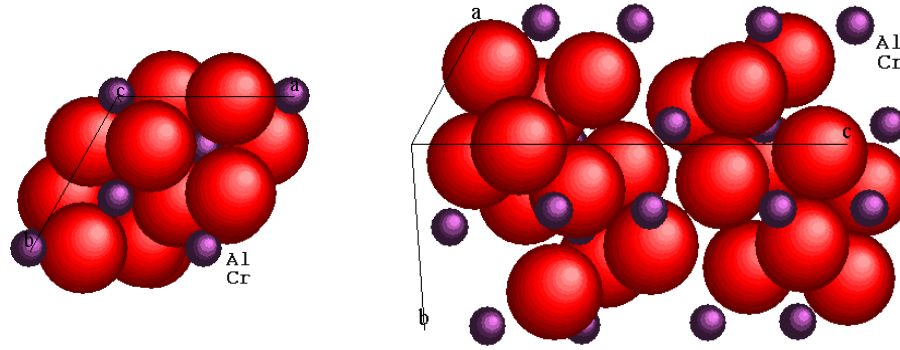


Figure VI.1 : Structure hexagonale ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$) des oxydes M_2O_3 (Bourdias et Monceau, 1994)

d'oxydation de la matrice vaut $2.10^{-8} m.s^{-1/2}$ à $950^\circ C$ et $8.4.10^{-8} m.s^{-1/2}$ à $1100^\circ C$.

Les oxydes formés Al_2O_3 et Cr_2O_3 sont très stables et les énergies libres de formation ΔG° sont très élevées (-202 Kcal/mole d' O_2 pour Al_2O_3 et -127 Kcal/mole d' O_2 pour Cr_2O_3) et les cinétiques d'oxydation sont lentes ($k(T)$ petits).

Mais les conditions de croissance se compliquent lorsque notre matériau est dans des conditions de fonctionnement, c'est-à-dire lorsqu'il subit des contraintes d'origine mécanique et d'origine thermique. Les cinétiques d'oxydations sont accélérées car les mécanismes diffusionnels sont facilités et en raison des ruptures répétées des oxydes formés. La couche d'alumine Al_2O_3 est mécaniquement fragile et peu adhérente au substrat qui lui a donné naissance par comparaison à la couche d'oxyde de chrome Cr_2O_3 qui est plus adhérente et donc moins susceptible de se décoller.

De ce fait le revêtement C1A a été préféré à une simple aluminisation car l'aluminure de nickel protège le substrat des phénomènes d'oxydation et le chrome protège de la corrosion à chaud consécutive à la présence de sels corrosifs contenus dans les gaz d'échappement. Dans les conditions d'utilisation qui nous intéressent, la protection C1A apporte un gain de durée de vie qui provient du fait que :

- le matériau résiste mieux à l'oxydation,
- le traitement thermochimique permet d'obtenir un état de surface uniforme, ce qui n'est pas le cas pour le matériau nu, qui peut présenter des microretassures en surface ou en sous-couche (plus néfaste pour la fatigue que celles situées au coeur du matériau).

VI.2.3 L'AM1 revêtu C1A

Les mécanismes d'endommagement du matériau étudié sont sensibles à la température (domaine fragile ou ductile de la protection C1A) et au mode de sollicitation (intensité de la contrainte, fréquence de sollicitation, temps de maintien...).

Les résultats obtenus sur les durées de vie, observés entre un matériau nu et un matériau revêtu, indiquent que l'état de surface influe sur le processus d'amorçage de microfissures

en fatigue.

Lorsque le matériau est sollicité en fatigue pure, il a été constaté que la protection C1A joue un rôle essentiel sur l'amorçage des microfissures. Ces microfissures s'amorcent en raison de la détérioration rapide de la zone externe, traversent ensuite les zones interne et de diffusion pour atteindre l'alliage de base. Il se produit alors une phase de micropropagation de fissures qui conduit à la formation d'une fissure macroscopique. Cette macrofissure se propage ensuite très rapidement dans l'AM1 jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette.

L'endommagement par fluage se manifeste par la formation de nombreuses fissures qui s'amorcent sur les pores au cœur du matériau.

L'oxydation est un processus localisé à la surface de l'alliage. De ce fait les effets de l'environnement sont négligeables sur le dommage en fluage. Mais, par contre, une contrainte de type fluage peut provoquer la rupture répétée des oxydes formés à la surface du matériau ce qui a pour effet d'accélérer la cinétique d'oxydation.

VI.3 Les différents modèles de prévision de durée de vie

La rupture d'un solide sous sollicitations mécaniques et environnementales fait intervenir une succession de phénomènes complexes conduisant à la ruine de la pièce (amorçage puis propagation de la fissure), qui sont décrits de manière plus ou moins physique au travers de modèles.

VI.3.1 Loi d'endommagement de fluage

La loi d'évolution de l'endommagement de fluage, représenté par la variable de dommage D_c , est issue de la proposition faite par (Kachanov, 1958) et (Rabotnov, 1969) :

$$dD_c = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^r (1 - D)^{-k} dt \quad (\text{VI.2})$$

où A , k et r sont des coefficients matériaux, caractéristiques de l'endommagement de fluage, qui dépendent de la température.

L'intégration de (VI.2) entre zéro et un pour la variable D_c et entre zéro et t_c pour le temps donne le temps critique à rupture en "fluage pur" (temps t_c pour $D_c = 1$).

$$t_c = \frac{1}{1+k} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r} \quad (\text{VI.3})$$

Si l'on désire connaître l'état d'endommagement à un instant t , on peut intégrer (VI.2) entre zéro et D_c pour l'endommagement et entre zéro et t pour le temps. On obtient la valeur de l'endommagement en fonction de la fraction de durée de vie t/t_c :

$$D_c = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{1}{k+1}} \quad (\text{VI.4})$$

VI.3.2 Loi d'endommagement de fatigue

L'endommagement de fatigue correspond à la naissance et à la croissance de microfissures, généralement intracristallines dans les métaux, sous l'effet de sollicitations cycliques, jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Le nombre de cycles à amorçage en fatigue peut se faire par des règles semi-empiriques, faisant intervenir des relations paramétriques entre des quantités obtenues au cycle stabilisé :

- amplitude de contrainte ($\Delta\sigma/2$) ou de déformation ($\Delta\varepsilon/2$)
- valeur moyenne (sur un cycle) de contrainte ($\bar{\sigma}$) ou de déformation ($\bar{\varepsilon}$)
- rapport de contrainte ou de déformation

Dans le domaine de la fatigue à faible nombre de cycles, les déformations plastiques deviennent prépondérantes. L'effet du temps ou de la fréquence sont considérés en supposant que l'endommagement par cycle est fonction de l'amplitude de déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$ sous forme d'une fonction puissance.

$$\frac{\delta D}{\delta N} = f(\Delta\varepsilon_p) = \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{C_1} \right)^{\gamma_1} \quad (\text{VI.5})$$

L'intégration de celle-ci dans le cas d'un chargement périodique où le cycle est supposé stabilisé, donne la loi de Manson-Coffin (Manson, 1953), (Coffin, 1954).

$$N_f = \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{C_1} \right)^{-\gamma_1} \quad (\text{VI.6})$$

Les deux paramètres γ_1 et C_1 dépendent du matériau et de la température.

Son domaine d'application est limité aux faibles variations d'amplitude de déformation et aux températures peu élevées (donc avec un faible endommagement en fluage) et ne présente pas d'effet de contrainte moyenne.

La loi de Woehler-Miner, adaptée à la fatigue sous sollicitations périodiques, représente une relation entre le nombre de cycles à rupture, la valeur maximale de la contrainte σ_M et la valeur moyenne $\bar{\sigma}$ (ou le rapport de la contrainte maximale par rapport à la contrainte minimale).

$$\frac{\delta D_f}{\delta N} = f(\sigma_M, \bar{\sigma}) \quad (\text{VI.7})$$

Pour retrouver, après intégration, l'une des nombreuses formes proposées pour traduire les courbes de Woehler on pose :

$$\frac{\delta D_f}{\delta N} = \left\langle \frac{\sigma_M - \sigma_l}{\sigma_u - \sigma_M} \right\rangle \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B_0(1 - b\bar{\sigma})} \right)^\beta \quad (\text{VI.8})$$

où σ_u est la contrainte de rupture statique (ou contrainte ultime),

$\sigma_l = f(\bar{\sigma})$ la limite de fatigue,

et B_0 , b et β les coefficients pour chaque matériau éventuellement fonction de la température.

$\langle \dots \rangle$ représente la fonction d'Heaviside

$$\langle x \rangle = 0 \quad \text{si } x < 1 \quad \text{et} \quad \langle x \rangle = 1 \quad \text{si } x > 1 \quad (\text{VI.9})$$

VI.3.3 Effet de l'oxydation

Ces modèles sont basés sur des observations microscopiques et prennent en compte de façon explicite les effets néfastes du temps sur la durée de vie. Dans ce cas, le dommage dû au fluage ou celui dû à l'oxydation est supposé jouer un rôle dominant sur les mécanismes d'endommagement en fatigue.

Le modèle avec interaction fatigue-oxydation, proposé par (Rémy et Reuchet, 1983), considère que la ruine du matériau est essentiellement due à la propagation de fissure et néglige la phase d'amorçage. Ce modèle a été déterminé à partir d'observations sur un superalliage base cobalt MarM509 sollicité en fatigue oligocyclique. Il suppose que la croissance de la fissure par cycle est la somme d'un terme lié à la fissuration du matériau par fatigue seulement et d'un terme décrivant la rupture d'un film d'oxyde en pointe de fissure :

$$\frac{da}{dN} = \left(\frac{da}{dN} \right)_{fat} + \left(\frac{da}{dN} \right)_{ox} \quad (VI.10)$$

Les effets de l'oxydation sont traduits par une équation tenant compte de l'effet accélérateur de l'amplitude de déformation inélastique sur les cinétiques d'oxydation.

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{ox} = (1 - f_c) \alpha_M (1 + k_M \Delta \epsilon_p) \Delta t^{1/2} + f_c \alpha_c g(\Delta \epsilon_p) \Delta t^{1/4} \quad (VI.11)$$

L'oxydation de la matrice en surface suit une loi parabolique en fonction du temps et l'oxydation préférentielle des carbures présents suit une loi en $t^{1/4}$.

Un autre modèle, utilisé pour la prévision de durée de vie du superalliage monocristallin AM1 en fatigue oligocyclique à faible fréquence (0.05Hz) et en fatigue thermo-mécanique, a été identifié par (Chataigner et Rémy, 1995). C'est l'oxydation préférentielle interdendritique de l'AM1 qui provoque une avancée de fissure par cycle

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{ox} = \Delta l_{ox} = \alpha(\sigma_{max}) \cdot \Delta t^{1/4} \quad (VI.12)$$

où la vitesse d'oxydation α dépend de la contrainte maximale appliquée.

Le terme d'oxydation est obtenu par intégration de la constante d'oxydation sur tout le cycle température-temps. La fatigue pure est quant à elle prise en compte en considérant la contrainte maximale atteinte au cours du cycle thermo-mécanique.

La croissance de l'oxyde en surface du matériau est déterminée par la cinétique des réactions chimiques et l'épaisseur d'oxyde évolue suivant une loi parabolique en fonction du temps. Dans une autre étude (Gallerneau, 1995) définit ainsi une variable globale de dommage dû à l'oxydation D_{ox} en faisant intervenir un paramètre de normalisation $e_0(m)$ et la constante de vitesse $k(ms^{-1/2})$.

$$D_{ox} = \frac{e}{e_0} = \frac{k}{e_0} \sqrt{t} \quad (VI.13)$$

La constante de vitesse k est supposée suivre une loi d'Arrhénius avec la température

$$k = k_0 \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \quad (VI.14)$$

De plus, sous l'effet d'un chargement appliqué au matériau, il fait l'hypothèse que la constante de vitesse est augmentée au-delà d'un seuil de contrainte σ_{lox} . Cet effet intervient sous la forme d'une fonction puissance. De ce fait la vitesse de dommage d'oxydation sous chargement appliqué se met sous la forme suivante :

$$\frac{\delta D_{ox}}{\delta N} = \left(\frac{k_0}{e_0} \exp \left(-\frac{Q}{RT} \right) \left(1 + \frac{\sigma - \sigma_{lox}}{B} \right)^m \right)^2 \quad (VI.15)$$

VI.3.4 Critère tridimensionnel

Dans un calcul de structure, les champs de contraintes ou de déformations sont généralement multiaxiaux et cet aspect doit être pris en compte dans les modèles. Il est donc important d'énoncer une méthode pour définir les amplitudes de contraintes (ou de déformations) sous chargement multiaxial.

Pour caractériser un cycle, il est couramment fait appel à deux variables; en unidimensionnel, on peut utiliser par exemple la contrainte maximale σ_M et la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$. De façon similaire, on utilisera dans le cas tridimensionnel une amplitude et une valeur moyenne représentant respectivement un effet déviatorique et un effet de pression hydrostatique.

a) Notion d'amplitude

La notion d'amplitude utilisée est basée sur la notion de mémorisation progressive issue de la plasticité (Chaboche et al., 1979). Cette méthode ne cherche pas seulement à considérer successivement tous les couples d'instant t_i et t_j du cycle et de calculer l'invariant de la variation de contraintes correspondant :

$$A_{II} = \text{Max}_{t_i} \text{Max}_{t_j} (J_2(\sigma(t_i) - \sigma(t_j))) \quad (VI.16)$$

Elle consiste à suivre le chargement au cours du cycle jusqu'à ce que le trajet soit entièrement contenu dans une sphère (plusieurs parcours si nécessaire). L'algorithme utilisé (Nicouleau-Bourles, 1999) est le suivant :

Soient $\tilde{X}_i$ et R_i le centre et le rayon de la sphère à l'instant i .

A $t = 0$, $\tilde{X}_0 = \sigma_0$ et $R_0 = 0$

On calcule la différence $E = J_2(\sigma_i - \tilde{X}_{i-1}) - R_{i-1}$ (qui représente l'écart du point σ_i considéré au bord du cercle de rayon R_{i-1} ,

- si $E < 0$, le point σ_i appartient à la sphère de rayon R_{i-1} ,
- si $E > 0$, le point σ_i n'appartient pas à la sphère. On va alors déplacer le centre du cercle suivant la normale $\tilde{n} = \frac{\sigma_i - \tilde{X}_{i-1}}{J_2(\sigma_i - \tilde{X}_{i-1})}$ et augmenter le rayon R_i en pondérant les deux opérations à l'aide d'un coefficient α caractérisant la mémorisation ($\alpha = 0$, pas de mémorisation; $\alpha = 1$, mémorisation totale).

$$R_i = \alpha E + R_{i-1}$$

$$\tilde{X}_i = (1 - \alpha) E \tilde{n} + \tilde{X}_{i-1}$$

Le coefficient α a pour rôle de distribuer E sur les deux variables $\tilde{X}$ et R .

b) Critère tridimensionnel

Afin de passer d'une loi unidimensionnelle à une formule tridimensionnelle (Hayhurst, 1972) utilise en fluage un critère construit à partir de trois invariants élémentaires.

$$\chi(\sigma) = \alpha J_0(\sigma) + \beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma) \quad (\text{VI.17})$$

où $J_0(\sigma)$ est la contrainte principale maximale

$$J_1(\sigma) = \sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)$$

$$\text{et } J_2(\sigma) = \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma')^2}.$$

c) Contrainte réduite

D'après (Lemaitre et Chaboche, 1985), lorsque la température évolue lentement d'un cycle à l'autre, il suffit de considérer chaque cycle comme isotherme et de tenir compte de la température dans les coefficients du modèle. Par contre si la température varie fortement au cours de chaque cycle (fatigue thermique) alors le problème peut se résoudre en introduisant une contrainte réduite $\tilde{\sigma}$.

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_u(T)} \quad (\text{VI.18})$$

Elle a pour but de prendre en compte les pertes de propriétés à haute température. Elle conduit à une loi indépendante de la température.

VI.3.5 Notion de cumul des dommages

Jusqu'ici nous avons vu différentes manières de prendre en compte les effets liés à l'endommagement en fatigue, indépendant du temps, et ceux dépendant du temps associés au fluage ou à l'oxydation.

Pour traduire l'interaction entre les différents endommagements on utilise des règles de cumul de dommages. Le cumul peut être linéaire (Robinson, 1952), (Taira, 1962) et consiste à additionner les dommages suivant la relation suivante :

$$\frac{1}{N_R} = \frac{1}{N_i} + \frac{1}{N_j} \quad (\text{VI.19})$$

Le cumul peut également être non linéaire afin de prendre en compte l'interaction des dommages entre eux. Si on considère un endommagement de fatigue-fluage, alors l'accélération de la propagation des microfissures de fatigue est sensible à l'endommagement en fluage et les fissures de fatigue augmentent le taux de croissance des cavités de fluage par concentration de contraintes. On considère ainsi que l'endommagement dans un cycle provient d'une part du fluage (passage d'une valeur d'endommagement D_0 à la valeur D_1) et d'autre part de la fatigue (passage de D_1 à D_2) (Cailletaud et Chaboche, 1982). Le modèle s'écrit de la façon suivante :

$$C = (1 - D_0)^{k+1} - (1 - D_1)^{k+1} = (k+1) \int_{\text{cycle}} \left(\frac{\sigma}{A} \right)^r dt = \frac{1}{N_c} \quad (\text{VI.20})$$

$$F = (1 - (1 - D_1)^{\beta+1})^{1-\alpha} - (1 - (1 - D_2)^{\beta+1})^{1-\alpha} = \frac{1}{N_f} \quad (\text{VI.21})$$

Connaissant N_f et N_c on calcule (VI.20 et VI.21) jusqu'à ce que $D_2 = 1$ (rupture) pour obtenir le nombre de cycle en fatigue-fluage nécessaire pour produire la rupture.

Le cumul utilisé est un cumul non linéaire en considérant le coefficient α comme suit :

$$\alpha = 1 - a * \left(\frac{\Delta\sigma - \sigma_l}{\sigma_u - \sigma_M} \right) \quad (\text{VI.22})$$

VI.3.6 Le modèle utilisé au cours de l'étude

Dans le cas d'une aube de turbine, dont l'épaisseur de paroi peut être inférieure à 2 mm, aucune macrofissure n'est tolérée dans la structure et nous nous limitons à la prévision de la durée de vie à amorçage de cette fissure macroscopique (de quelques dixièmes de millimètres) préjudiciable à l'intégrité de la pièce.

Le modèle utilisé (Gallerneau, 1995) est un modèle phénoménologique qui dissocie les phases de microamorçage et de micropropagation de fissures dans le processus de détérioration du matériau par fatigue.

a) Principe du modèle

La différenciation par le modèle des phases de microamorçage et de micropropagation dans le processus d'endommagement reproduit bien les mécanismes observés sur le substrat et le revêtement.

- La phase de microamorçage correspond en fait à la formation de microfissures qui traversent la protection et la zone de diffusion en raison de l'état de surface du revêtement. Au cours de cette phase on observe une interaction entre la fatigue et l'oxydation.
- La phase de micropropagation correspond à la phase de progression de ces fissures jusqu'à la rupture de l'élément provoquée par une interaction fatigue-fluage.

b) Formulation du modèle

Afin de caractériser le caractère diffus de l'endommagement, observé expérimentalement, le modèle utilise des variables de dommage globales, définies dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement Continu.

Quatre variables scalaires sont introduites dans ce modèle phénoménologique d'interaction fatigue-fluage-oxydation :

- D_A est relative au microamorçage de fissures de surface (d'environ $50\mu\text{m}$ correspondant à l'épaisseur de la protection C1A)
- D_P est relative à la micropropagation (Savalle et Cailletaud, 1982) de ces microfissures dans le superalliage (typiquement de 1 mm). La phase de micropropagation ne peut débuter que si la phase de microamorçage est consommée ($D_A = 1$)
- D_{ox} traduit l'effet d'oxydation sur le microamorçage

- D_c est la variable scalaire de fluage qui peut s'être développée durant la phase de microamorçage mais qui interagit avec la fatigue seulement durant la phase de micropropagation.

Les relations entre les différentes variables de dommages peuvent être résumées de la manière suivante (Gallerneau, 1999).

$$dD_A = F_1(S_{II}, \overline{S_H}, S_{eq}^{max}, D_{ox}) dN \quad (VI.23)$$

$$dD_P = H(D_A - 1) F_2(S_{II}, \overline{S_H}, S_{eq}^{max}, D_P) dN \quad (VI.24)$$

$$dD_{ox} = F_2(\chi_{ox}(X_{ox}), D_{ox}) dt \quad (VI.25)$$

$$dD_c = F_2(\chi_c(X_c), D_c) dt \quad (VI.26)$$

où H représente la fonction d'Heaviside.

De ce fait le nombre de cycles pour l'amorçage macroscopique N_R est alors obtenu par la sommation

$$N_R = N_A + N_P \quad (VI.27)$$

Dans les lois de fluage et d'oxydation, le concept de la contrainte retardée (Lesne et Savalle, 1987) est introduit afin d'éliminer les effets du temps sur l'endommagement de fatigue pour les hautes fréquences de sollicitation. Si ces dernières sont très élevées, pour un chargement alterné, alors la microfissuration sera tellement rapide que le processus d'oxydation fragilisant le matériau n'aura pas le temps de s'installer et d'accélérer l'endommagement. Pour une contrainte non alternée le matériau voit l'effet de la contrainte moyenne. Il en est de même pour le fluage. C'est pour cela qu'il apparaît dans les expressions F_3 et F_4 des contraintes retardées X_{ox} et X_c utilisant des constantes de temps τ_{ox} et τ_c solutions de l'équation différentielle (VI.28).

$$\frac{dX_{ind}^{ij}}{dt} = \frac{\sigma_{ij} - X_{ind}^{ij}}{\tau_{ind}} \quad \text{avec } ind = c, ox \quad (VI.28)$$

Phase de microamorçage. Interaction fatigue - oxydation

La loi de microamorçage, qui donne l'évolution de la variable D_A , s'exprime de la manière suivante :

$$dD_A = \frac{1}{C} \left\langle \frac{S_{II} - S_{Ia}(1 - D_{ox})}{(1 - D_{ox}) - S_{eq}^{max}} \right\rangle^b dN \quad (VI.29)$$

où les effets de l'oxydation sont introduits par la variable macroscopique D_{ox} au travers du concept de la contrainte effective.

C et b sont des paramètres matériaux supposés indépendants de la température. S_{eq}^{max} est la contrainte équivalente réduite maximale; S_{II} est l'amplitude de contrainte réduite; S_{Ia} est la limite de fatigue en amorçage qui dépend de la pression hydrostatique moyenne par la relation

$$S_{Ia} = S_{Ia0} (1 - h_a \overline{S_H}) \quad (VI.30)$$

où S_{Ia0} est la limite de fatigue en amorçage déterminée à la pression hydrostatique moyenne nulle.

La loi d'oxydation est donnée par une seconde équation différentielle qui traduit l'influence du chargement sur la cinétique d'oxydation et dans laquelle la contrainte équivalente $\chi_{ox}(X_{ox})$ a été introduite (VI.31).

$$dD_{ox} = \frac{1}{2} D_{ox}^{-1} \left(\frac{k_0}{e_0} \exp \frac{-Q}{RT} \right)^2 \left(1 - \frac{\chi_{ox}(X_{ox}) - S_{lox}}{B} \right)^{2m} dt \quad (VI.31)$$

avec $S_{lox} = S_{lox0}(1 - h_{ox}\overline{S_H}) + \overline{S_H}$

χ_{ox} est la contrainte équivalente en oxydation qui tient compte des effets de multiaxialité et de l'anisotropie matérielle du monocristal.

B, m, e_0 , k_0 et Q sont des coefficients matériaux.

Phase de micropropagation. Interaction fatigue - fluage

Lorsque les fissures ont atteint le substrat, se développe alors le dommage D_p qui est décrit par l'équation différentielle (VI.32).

$$dD_p = \left[1 - (1 - D_p)^{\beta+1} \right]^{1-a} \left\langle \frac{S_{II} - S_{Ip}(\overline{S_H})}{1 - S_{eq}^{max}} \right\rangle \left(\frac{S_{II}}{M^*(\overline{S_H})(1 - D_p)} \right)^\beta dN \quad (VI.32)$$

Cette expression s'inspire de la loi d'endommagement de fatigue développée par (Chaboche, 1978). Elle donne une évolution fortement non linéaire du dommage de fatigue D_p . On choisit ici l'exposant a indépendant du chargement pour avoir une loi de fatigue à cumul linéaire. Les critères de fatigue et de rupture statique sont alors traduits par le second terme en facteur. Les contraintes sont réduites par rapport à la contrainte ultime de traction du substrat AM1.

L'effet de la pression hydrostatique moyenne sur la limite de fatigue en micropropagation S_{Ip} (nécessairement inférieure ou égale à la limite en microamorçage) et sur le coefficient M^* est donné par les relations linéaires (VI.33 et VI.34).

$$S_{Ip} = S_{Ip}(1 - h_{p1}\overline{S_H}) \quad (VI.33)$$

$$M^* = M_0^*(1 - h_{p2}\overline{S_H}) \quad (VI.34)$$

où h_{p1} et h_{p2} sont constants.

La loi d'évolution de l'endommagement de fluage est exprimée en fonction de la contrainte équivalente $\chi_c(X_c)$

$$dD_c = \left(\frac{\chi_c(X_c(t))}{A(T(t))} \right)^{r(T(t))} (1 - D_c)^{-k(T(t))} dt \quad (VI.35)$$

La variable de dommage D_c est calculée en intégrant sur chaque cycle l'équation (VI.35) à chaque pas de temps en fonction des valeurs de A, r et k qui dépendent de la température.

Ce modèle a été identifié par (Gallerneau, 1995) en uniaxial suivant $\langle 001 \rangle$ et plus récemment suivant les orientations cristallographiques $\langle 110 \rangle$ et $\langle 111 \rangle$ (Gallerneau, 1999).

VI.4 Corrélation calcul de structure / expérience

Nous allons maintenant comparer les résultats expérimentaux avec les résultats numériques pour quatre essais (essai 1 de type 1, essai 4, 7 et 8 de type 3).

Au niveau de la simulation, nous calculons 30 cycles afin d'obtenir un cycle de sollicitation thermomécanique stabilisé. Sur la figure (VI.2) nous traçons la contrainte équivalente au sens de von Mises en fonction de la déformation au bord du trou le plus haut tous les cinq cycles afin de mettre en évidence la relaxation des contraintes en fonction du temps et l'intérêt de simuler un "grand" nombre de cycles.

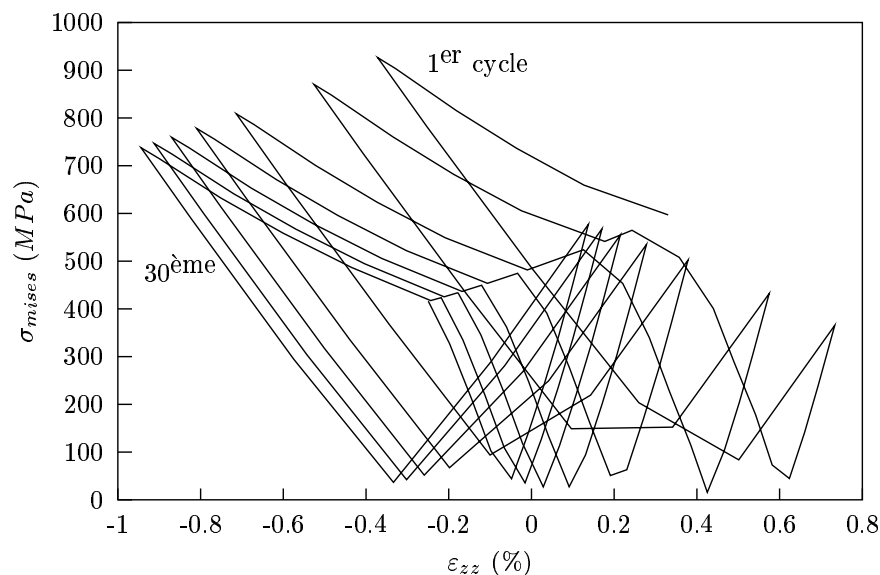


Figure VI.2 : Relaxation des contraintes (au niveau des trous du haut)

Il est donc supposé que les premiers cycles (plus sévères puisque les zones les plus contraintes ne sont pas relaxées (figure VI.2)) participent peu à l'évolution de l'endommagement (Cailletaud et al., 2000).

Le modèle de durée de vie fatigue-fluage-oxydation est appliqué en post-traitement du calcul de structure. Cela revient à supposer que les états de contrainte sans dommage continuent à s'appliquer jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique dans la pièce. Nous ne tenons pas ainsi compte des redistributions de contrainte supplémentaires induites par l'endommagement et la prévision réalisée est dans le sens de la sécurité.

Nous appliquons donc le modèle d'endommagement pour le premier essai. Le résultat obtenu numériquement correspond au nombre de cycles à amorçage relevé expérimentalement (apparition d'une fissure "macroscopique").

Le modèle prévoit une rupture en fluage dans la zone chaude au bout de 503 cycles (figure VI.3), cohérent avec les 342 cycles obtenus expérimentalement.

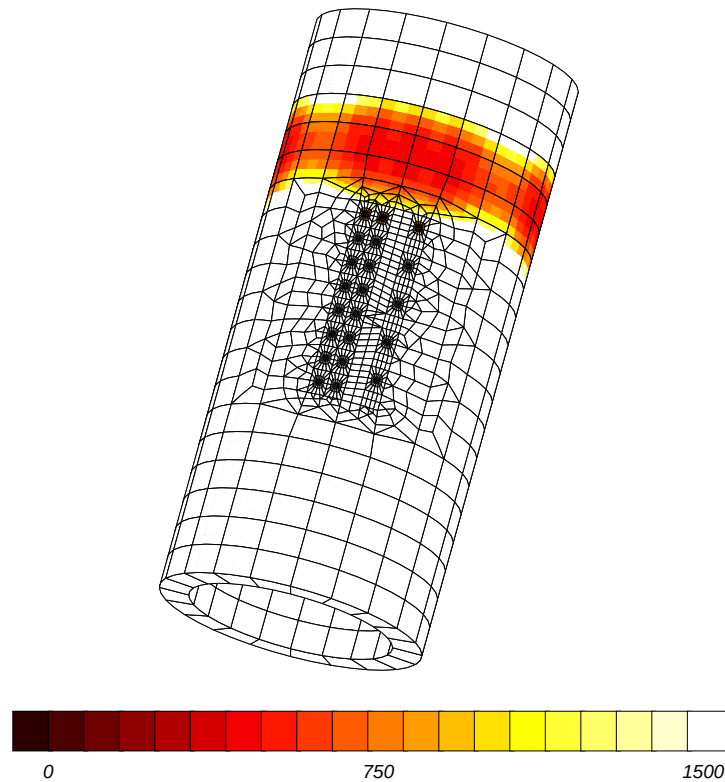


Figure VI.3 : Isovaleurs de durée de vie (en nombre de cycles) pour l'essai 1

Par contre si nous appliquons en post traitement le modèle d'endommagement sur le calcul, correspondant au quatrième essai, par éléments finis jusqu'à stabilisation (le trentième cycle) alors nous prévoyons une durée de vie de 1 cycle. Le modèle calcule une durée de vie à l'amorçage et en propagation de 1 cycle dans les trous du bas ("zone froide").

Pour comprendre ce qui se passe nous traçons la contrainte réduite en fonction de la température au bord du trou du bas (figure VI.4) et au bord du trou du haut (figure VI.5).

Nous remarquons que la contrainte ultime à froid en amorçage et en propagation est trop faible ce qui sous-estime la durée de vie. De ce fait si nous calculons la durée de vie en ne prenant en compte que les trous du haut où la température reste suffisamment élevée alors le modèle prévoit une durée de vie de 524 cycles (au lieu de 804) (figure VI.6).

Ce problème pourrait être évité si le modèle prenait en compte la rupture statique. En fait, le modèle n'a pas été identifié pour de très courtes durées de vie, si bien que la contrainte ultime est sans doute mal ajustée. Une réidentification de cette dernière serait donc utile, sachant qu'une faible variation ne modifiera pas sensiblement les prévisions pour de plus longues durées de vie. Par ailleurs, la figure (VI.4) montre que la valeur élevée de la contrainte équivalente est obtenue en compression. Il faudrait donc aussi réajuster la sensibilité à la valeur moyenne. De ce fait, l'amorçage n'aurait plus lieu dans la zone froide et la durée de vie au niveau des trous du haut serait allongée. Ces remarques vont dans le sens des résultats expérimentaux.

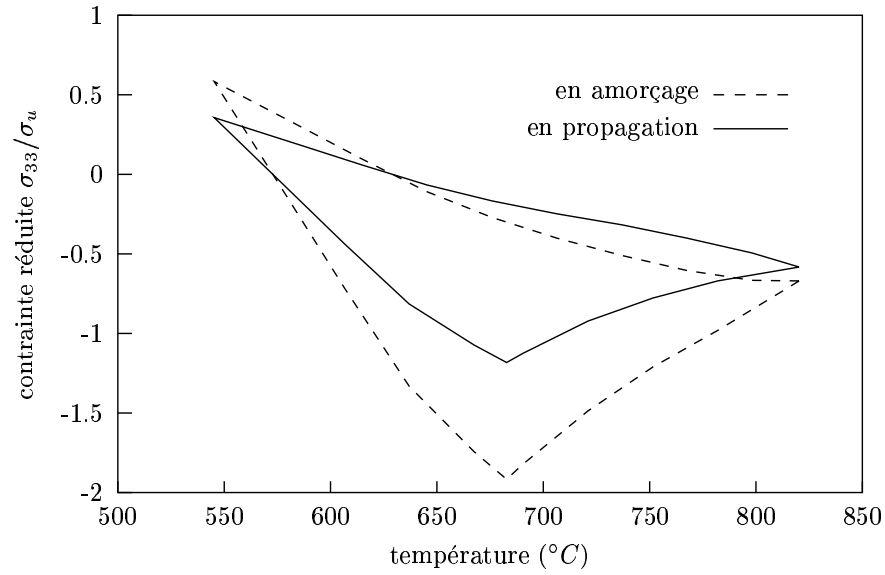


Figure VI.4 : Evolution de la contrainte réduite en fonction de la température au niveau du trou du bas (où a lieu la rupture numériquement)

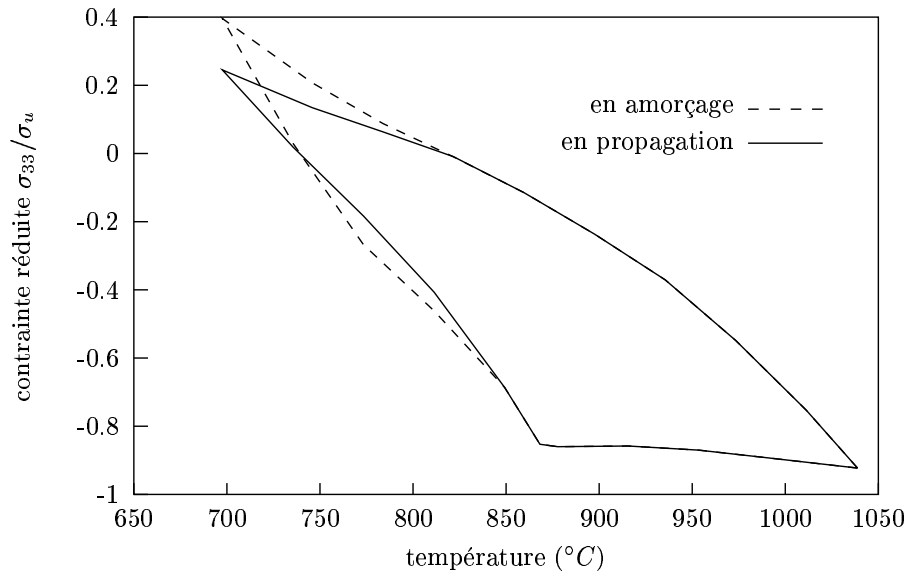


Figure VI.5 : Evolution de la contrainte réduite en fonction de la température au niveau du trou du haut (où a lieu la rupture expérimentalement)

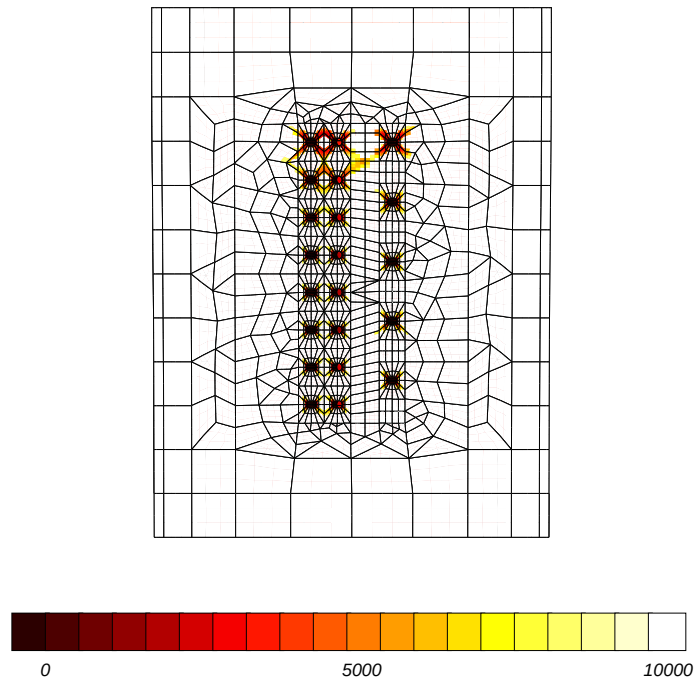


Figure VI.6 : Isovaleurs de durée de vie (en nombre de cycles) pour l'essai 4

Nous avons également calculé la durée de vie en fatigue-fluage-oxydation des deux derniers essais simulés (essai 7 et essai 8). Les résultats obtenus sont semblables à celui obtenu au niveau de l'essai 4. Le modèle prévoit une durée de vie de 1 cycle, et une “fissure macroscopique” localisée dans les trous du bas où la température est inférieure à 700°C . Mais si nous appliquons le modèle uniquement aux trous du haut alors le modèle donne 1600 cycles (au lieu de 4155) pour l'essai 7 et 835 cycles (au lieu de 1065) pour l'essai 8 (figure VI.7).

La figure (VI.8) donne la courbe de Woehler correspondant aux quatrième, septième et huitième essai en ne considérant que la première rangée de trous où la température reste suffisamment élevée.

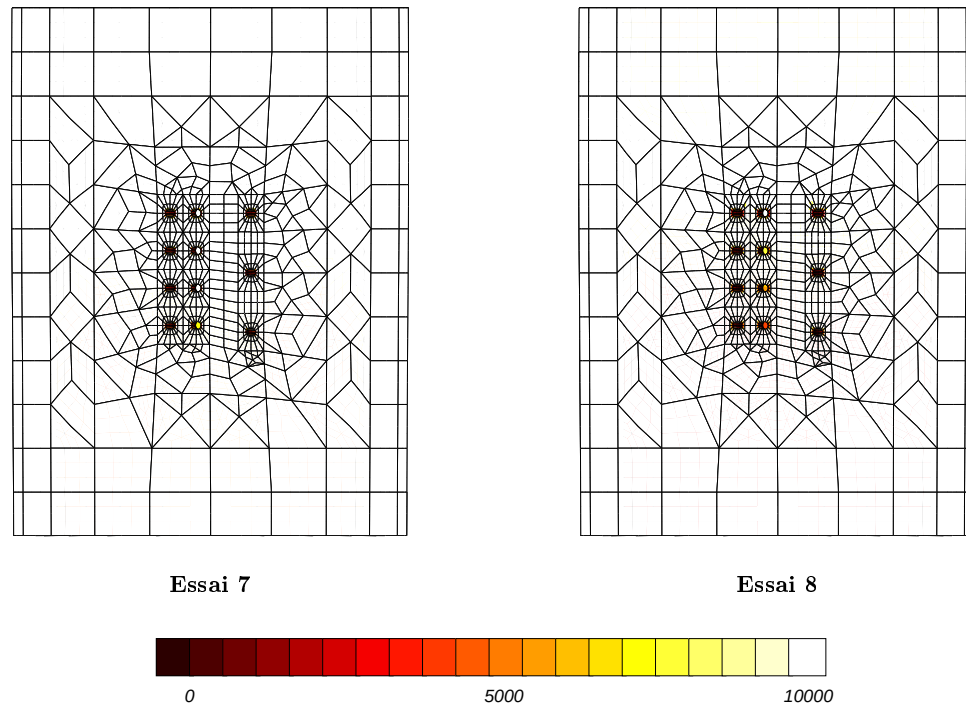


Figure VI.7 : Isovaleurs de durée de vie (en nombre de cycles) pour les essais 7 et 8

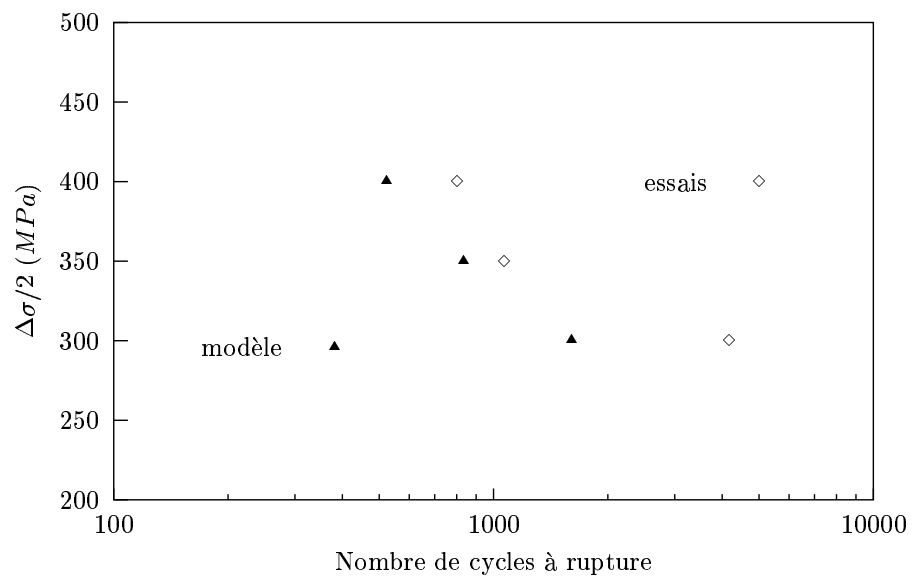


Figure VI.8 : Courbe de Woehler

Des observations ont également été réalisées avec l'aide de Cristiane Béchemin et Adil Alam de l'équipe Comportement Haute Température du CDM. Nous observons dans un premier temps la surface externe de l'éprouvette (figure VI.9) utilisée pour réaliser le quatrième essai.

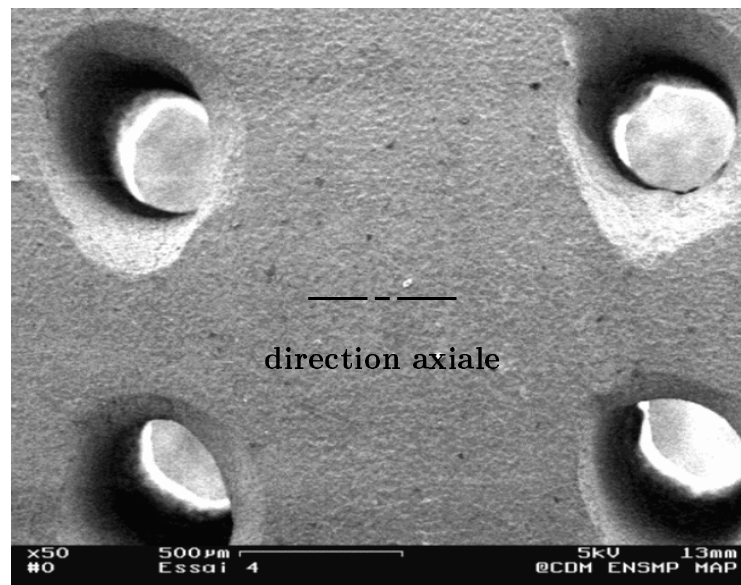


Figure VI.9 : Vue globale du réseau de perforation

Nous n'avons pas observé de fissures entre les trous par contre nous voyons de nombreuses fissures au bord des trous en raison des concentrations de contrainte (figure VI.10).

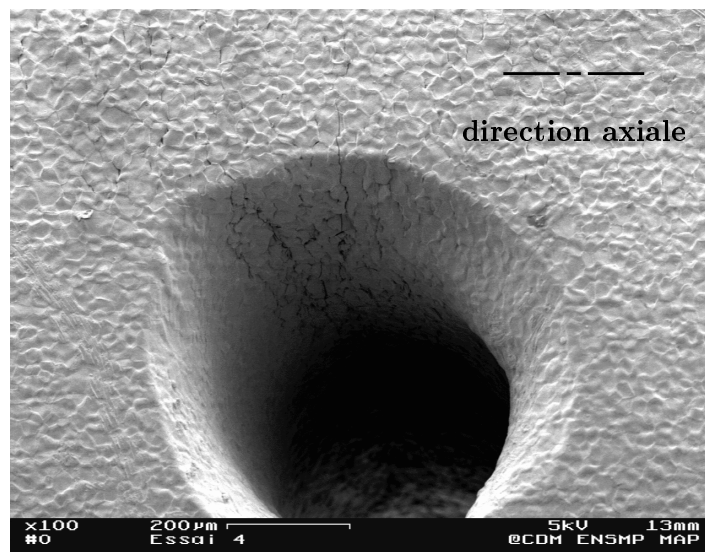


Figure VI.10 : Amorçage de nombreuses fissures au niveau des trous

La figure (VI.11) montre que la fissure se propage dans le revêtement de manière intergranulaire et transgranulaire.

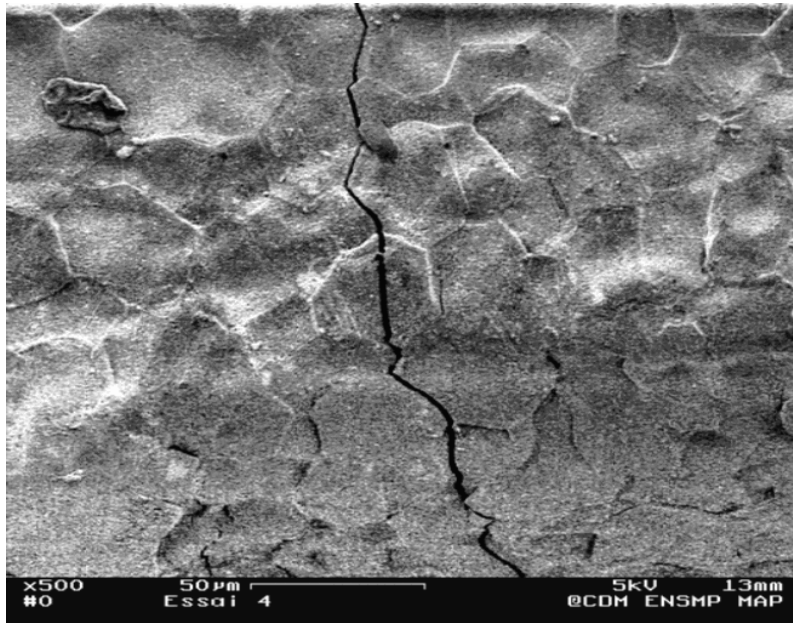


Figure VI.11 : Fissuration du revêtement

Dans un deuxième temps nous avons voulu voir si la fissure que nous observons sur la surface externe traverse la zone interne et le substrat où alors si elle reste seulement dans la zone externe.

Nous avons de ce fait découpé l'éprouvette, utilisée pour réaliser l'essai 7, par électro-érosion de manière longitudinale (figure VI.12).



Figure VI.12 : Découpe de l'éprouvette par électro-érosion

De cette manière nous allons pouvoir observer l'état du revêtement C1A dans le trou.
La figure (VI.13) montre que le procédé non directionnel utilisé permet de réaliser un revêtement uniforme à l'intérieur du trou.

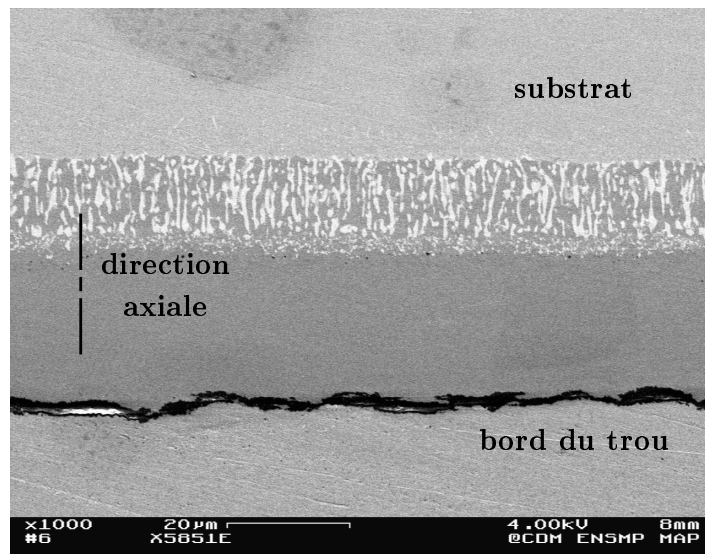


Figure VI.13 : Vue du revêtement au niveau d'un trou

Et les observations effectuées n'ont montré que des fissurations dans le revêtement (figure VI.14) ce qui confirme les calculs de durée de vie.

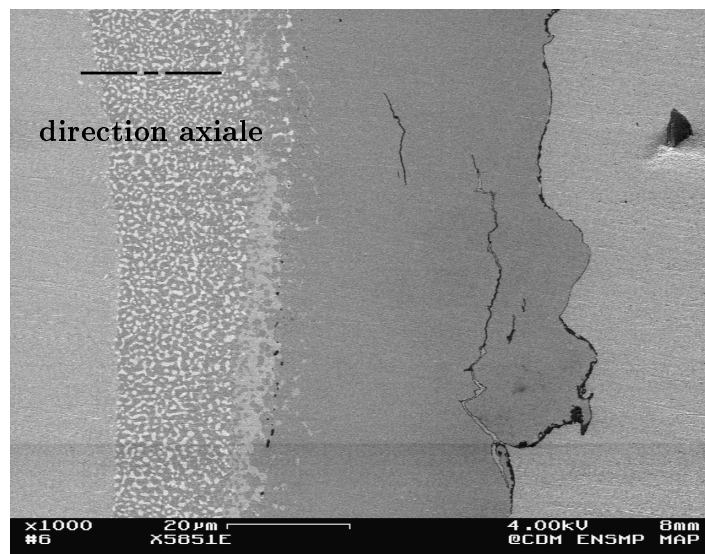


Figure VI.14 : Fissures dans le revêtement

Les résultats présentés précédemment montrent que nous sous-estimons numériquement le nombre de cycles à amorçage.

Ceci peut provenir de différents facteurs :

- le modèle d'endommagement sous-estime la durée de vie à froid. Des amorçages de fissures au niveau du revêtement ont bien été observés mais il n'y a par contre aucune fissuration du substrat;
- le calcul des contraintes et des déformations effectué sur la structure réelle manque peut-être un peu de précision. Tout d'abord nous utilisons un modèle de comportement qui a été identifié à 650°C puis extrapolé jusqu'à l'ambiante. Et le maillage utilisé n'est pas assez fin au niveau des perforations. Actuellement un maillage plus fin pourrait être envisagé en raison de nouveaux algorithmes de calcul et de nouveaux moyens de calcul (cluster de PC);
- la question du volume représentatif sur lequel considérer les contraintes qui entrent dans le modèle n'a pas été étudiée ici. Lorsque nous appliquons le modèle, nous prenons la valeur au point de Gauss mais nous pourrions également considérer la distance à laquelle le premier point de Gauss se trouve de la surface.

Chapitre -VII-

Conclusion - Perspectives

Ce travail se présente comme une contribution à l'amélioration du dimensionnement des aubes de turbine en prenant en compte les singularités géométriques.

Dans un premier temps, nous avons réalisé un calcul de structure tridimensionnel le plus proche possible des conditions de fonctionnement réelles. Le maillage, les conditions aux limites (chargement mécanique et thermique) nous ont été fournis par SNECMA. Le calcul a été réalisé en élasticité, en viscoplasticité isotrope et dans le cas du monocristal grâce au calcul parallèle.

Mais cette approche est, malgré l'augmentation des puissances de calcul, toujours trop longue et pas compatible avec les délais dans un bureau d'étude. De ce fait nous avons développé une méthode de dimensionnement d'aube de turbine pour une utilisation quotidienne. La méthode proposée est basée sur les méthodes d'homogénéisation en mécanique des milieux hétérogènes. Elles permettent de remplacer la zone hétérogène (les trous du bord d'attaque de l'aube dans notre cas) par un milieu homogène équivalent ayant des propriétés effectives.

Les méthodes d'homogénéisation préconisées ont l'intérêt de comporter une étape de relocalisation permettant d'utiliser les informations du calcul simplifié pour appliquer des conditions aux limites adaptées sur une cellule représentative comportant un trou de refroidissement. Etant donné que le calcul de référence donne l'état de contraintes-déformations autour des trous, la prédiction donnée par la méthode de relocalisation pourra être évaluée sans ambiguïté.

En élasticité, le milieu homogène équivalent a été déterminé en utilisant les méthodes d'homogénéisation classiques.

Nous avons également étendu ces méthodes au cas élastoviscoplastique en étudiant un matériau viscoplastique isotrope perforé puis un matériau monocristallin perforé. Etant donné la difficulté de ce problème dans sa généralité, nous préconisons une méthode pragmatique. Elle consiste à identifier les paramètres d'un modèle phénoménologique non-linéaire à partir d'une "base d'identification numérique" aussi large que possible.

La présence du trou, ayant une fraction volumique de 8%, affaiblit les propriétés mécaniques de l'ordre de 20% et rend le matériau compressible. La compressibilité du milieu est prise en compte à partir d'un critère elliptique dans le cas isotrope et en ajoutant des pseudo-systèmes de dilatation aux systèmes de glissement initiaux dans le cas du monocristal. Ces modèles ont été identifiés pour une température de fonctionnement de 950°C et validés sur une structure perforée périodiquement. Ils sont actuellement disponibles dans le code de calcul Eléments Finis ZéBuLoN.

Dans le cas de l'aube de turbine HP, nous avons montré l'effet prédictif des méthodes d'homogénéisation et l'importance de prendre en compte l'affaiblissement lié à la perforation.

Nous avons également mis en évidence les limites d'une telle approche dans le cas de forts gradients de sollicitation. Dans ces conditions de fonctionnement, lorsque les champs moyens ne sont plus lentement variables, les méthodes d'homogénéisation classiques sont mises en défaut. Le milieu homogène équivalent peut être considéré comme un milieu continu généralisé. Une loi de comportement homogénéisée du second degré (théorie du second gradient) a été formulée en thermoélasticité.

Il serait intéressant maintenant de poursuivre le développement de la théorie du second gradient dans le cas non-linéaire afin de mettre en évidence l'amélioration qu'elle apporte aux méthodes classiques.

Une étude expérimentale a également été réalisée à l'ONERA afin d'étudier l'influence de la perforation sur le comportement et la durée de vie.

Un système expérimental a été développé afin de s'approcher au mieux des conditions réelles de fonctionnement. Des chargements thermomécaniques, prenant en compte les gradients thermiques observés sur la structure réelle, ont été réalisés sur des éprouvettes monocristallines revêtues C1A.

En parallèle, ces essais sont simulés numériquement sur une trentaine de cycles afin d'obtenir un cycle de sollicitation thermomécanique stabilisé.

Cette étude nous a permis de tester la validité des modèles non plus lors de sollicitations sur un élément de volume, mais sur un calcul de structure réel.

Nous avons effectué des comparaisons calcul - expérience au niveau du comportement et de la durée de vie des pièces à partir de modèles identifiés en isotherme.

Dans la zone chaude nous remarquons que le modèle de comportement reproduit correctement la réponse de l'éprouvette relevée à partir d'un extensomètre. Et le modèle d'endommagement sous-estime légèrement le nombre de cycles à amorçage.

Par contre, dans la zone froide, le modèle d'endommagement sous-estime nettement la durée de vie de la structure.

Ce travail a permis de proposer une procédure pour le dimensionnement des aubes de turbine HP. Mais plusieurs interrogations subsistent, dont les réponses pourraient enrichir les modèles de comportement et de durée de vie.

La progression des outils de calcul liée au développement du calcul parallèle devrait permettre une meilleure représentation de la géométrie et, par conséquent, une connaissance plus précise des champs de déformations et de contraintes au niveau des pièces.

Il serait également important d'affiner les modèles de comportement et d'endommagement sur une gamme de température plus large et principalement aux plus faibles températures, en cherchant aussi à définir plus rigoureusement le volume de matière sur lequel il faut appliquer le modèle, la réponse à cette question étant d'ailleurs liée à l'approche "milieux continus généralisés".

Le travail effectué ici se termine avec l'étape d'amorçage. Il serait maintenant souhaitable de s'intéresser à l'avancée de fissure dans un milieu fortement hétérogène (gradients de contraintes). L'étude métallurgique débutée doit également être poursuivie afin d'étudier l'endommagement au bord des singularités géométriques.

Une autre extension à envisager est l'application de cette méthode simplifiée à d'autres pièces perforées. Ce qui va être fait très prochainement pour l'étude d'une chambre de combustion multiperforée.

Bibliographie

- ASHBY M.F. ET JONES D.R.H. (1982). *Matériaux 1 : propriétés et applications*. Dunod Paris.
- AURIAULT J.-L. ET CAILLERIE D. (1989). *Quelques remarques sur les méthodes d'homogénéisation*. In : *Revue Française de Géotechnique*, pp 43–50.
- BERAN M. J. ET MC COY J. J. (1970). *Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids*. *Int. J. Solids Structures*, vol. , pp 1035–1054.
- BERVEILLER M. ET ZAOUÏ A. (1980). *Généralisation du problème de l'inclusion et application à quelques problèmes d'élastoplasticité des matériaux hétérogènes*. *Journal de Mécanique*, vol. 19, n° 2, pp 345–361.
- BESSON J., LERICHE R., FOERCH R., ET CAILLETAUD G. (1998). *Object-Oriented Programming Applied to the Finite Element Method. Part II. Application to Material Behaviors*. *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 7 n° 5, pp 567–588.
- BOURDIAS C. ET MONCEAU D. (1989-1994). *Ca.R.Ine Cristallographie 3.0, La cristallographie pour l'enseignement et la recherche*.
- BOUTIN C. (1996). *Microstructural effects in elastic composites*. *Int. J. Solids Structures*, vol. 33, pp 1023–1051.
- BRAHIN-OSTMANE S., FRANCFORT G.A., ET MURAT F. (1992). *Correctors for the homogenization of the wave and heat equation*. *J. Math. Pures Appl.*, vol. , pp 197–231.
- CAILLETAUD G. (1987). *Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- CAILLETAUD G., CARUEL F., GALLERNEAU F., MOUNOURY V., ET PALLOT P. (2000). *Prévision de durée de vie et dimensionnement des aubes de turbines*. *J. Phys. IV*, vol. 10, pp 181–186.
- CAILLETAUD G. ET CHABOCHE J.-L. (1982). *Lifetime prediction in 304 stainless steel by damage approach*. In : *ASME Pressure Vessel and Piping*, Orlando (USA).
- CARDONA J.-M., CAILLETAUD G., ET FOREST S. (Janvier 1999a). *Etude du comportement et de l'amorçage dans les aubes de turbines multiperforées*. Technical Report 940.318K - Lot 9, Centre des Matériaux Ecole des Mines de Paris, Evry. Premier rapport d'avancement.

- CARDONA J.-M., CAILLETAUD G., ET FOREST S. (Janvier 2000a). *Etude du comportement et de l'amorçage dans les aubes de turbines multiperforées*. Technical Report 940 937 H - Lot 8, Centre des Matériaux Ecole des Mines de Paris, Evry. Premier rapport d'avancement.
- CARDONA J.-M. ET FOREST S. (1999). *Analyse par éléments finis de l'élasticité des milieux du second gradient*. In : 14^{ème} congrès français de mécanique, 30 août - 3 septembre, Toulouse.
- CARDONA J.-M. ET FOREST S. (2000). *Construction of a second grade homogeneous equivalent medium for heterogeneous materials submitted to slowly-varying mean fields*. In : 4th euromech Solid Mechanics Conference.
- CARDONA J.-M., FOREST S., CAILLETAUD G., GALLERNEAU F., ET CARUEL F. (2000b). *Anisothermal cyclic viscoplastic computation on multiperforated components*. In : Plasticity 2000 : The Eight International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, pp 35–37.
- CARDONA J.-M., FOREST S., ET SIEVERT R. (1999b). *Towards a theory of second grade thermoelasticity*. Extracta mathematicae, vol. 14, pp 127–140.
- CARTRAUD P. (1994). *Contribution à la modélisation numérique et à l'homogénéisation du comportement élastoplastique d'un joint de culasse*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- CHABOCHE J.-L. (1978). *Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire*. Revue Française de Mécanique, vol. , pp 50–51.
- CHABOCHE J.-L. (1983). *Sur les lois de comportement des matériaux sous sollicitations monotones ou cycliques*. La Recherche Aérospatiale, n°1983-5, vol. n°1985-5, pp 363–375.
- CHABOCHE J.-L., CULIÉ J.-P., GALLERNEAU F., NOUAILHAS D, PACOU D., ET POIRIER D. (1997). *Thin wall thermal gradient : experimental study, F.E. analysis and fatigue life prediction*. In : The 5th International conference on Biaxial/Multi-axial Fatigue and Fracture, pp 149–164.
- CHABOCHE J.-L., DANG VAN K., ET CORDIER G. (1979). *Modelization of Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless steel*. In : SMIRT 5, Section L, pp 79–109.
- CHATAIGNER E. ET RÉMY L. (1995). *Thermomechanical behaviour of coated and bare nickel-base superalloy single crystals*. In : International Symposium, Fatigue under Thermal and Mechanical loading, Petten The Netherlands.
- COFFIN L.F. (1954). *A study of the effects of cyclic thermal stresses in ductile metal*. In : Trans ASME 76.
- COLEMAN B. D. (1964). *Thermodynamics of Materials with Memory*. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 17, pp 1–46.
- CUITINO A.M. ET ORTIZ M. (1992). *Review article : Computational modelling of single crystals*. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., vol. 1 n° 3, pp 225–263.

- DEBUSSAC A., DELAUTRE J., ET LAUTRIDOU J.C. (1994). *Synthèse des propriétés de fatigue anisotherme de l'AM1 nu et protégé C1A*. Technical report, Document SNECMA Direction Technique. Département matériaux et procédés.
- DEFRESNE A. (1989). *Endommagement en fatigue oligocyclique à 650°C de superalliages monocristallins à base de nickel : Influence de l'orientation cristallographique et d'une concentration de contrainte*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- DELL'ISOLA F. ET SEPPECHER P. (1995). *The relationships between edge contact forces and interstitial working allowed by the principal virtual power*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. , pp 303–308.
- DETHUNE D. (1997). *Etude thermomécanique des trous de refroidissement d'aubes de turbine*. Technical report, Document SNECMA Direction Technique. Document SNECMA.
- DUMONTET H. (1990). *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- DUNN J.E. ET SERRIN J. (1985). *On the thermomechanics of interstitial working*. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. , pp 96–133.
- DVORAK G. (1992). *Transformation Field Analysis of Inelastic Composite Materials*. In : Proc. R. Soc. Lond. A 437, pp 311–327.
- DVORAK G. (1994). *Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite materials*. Computational Mechanics, vol. 14, pp 201–228.
- FACIU C. (1998). *A non-local rate-type viscoplastic approach to patterning of deformation*. Acta Mech., vol. 126, pp 71–99.
- FAHRAT C. ET ROUX F.-X. (1994). *Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics*. Computational Mechanics Advances, vol. 2 n° 1.
- FEYEL F. (1998). *Application du calcul parallèle aux modèles à grand nombre de variables internes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- FLEURENTIN P. (1996). *Relations entre conditions de croissance et la qualité cristalline de monograins dentritiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- FLEURY E. (1991). *Endommagement du superalliage monocristallin AM1 en fatigue isotherme et anisotherme*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- FOERCH R., AZZOUZ F., QUILICI S., ET CAILLETAUD G. (1999). *New Tools for a simplified Access to UMAT*. In : Abaqus Users Meeting, pp 213–227.
- FOREST S. (1998). *Mechanics and Generalized Continua : Construction by homogenization*. J. Phys. IV, vol. 8, pp 39–48.

- FOREST S. (1999). *Homogeneisation Methods and the Mechanics of Generalized Continua*. In : Internation Seminar on Geometry, Continuum and Microstructure, éd. Maugin G., pp 35–48. Travaux en Cours No. 60, Hermann.
- FOREST S., CARDONA J.-M., ET SIEVERT R. (2000). *Thermoelasticity of Second-Grade Media*. In : Continuum thermomechanics: The Art and Science of Modelling Material behaviour (Paul Germain's Anniversary Volume), éds. Gérard A. Maugin Raymond Drouot et Sidoroff Francois, pp 163–176. 2000 Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands.
- FRANÇOIS D., PINEAU A., ET ZAOUI A. (1995). *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès.
- FRANCFORT G.A. (1983). *Homogenization and linear thermoelasticity*. SIAM J. Math. Anal., vol. 14, pp 696–708.
- FRANCIOSI P. (1985). *The concepts of latent hardening and strain hardening in metallic single crystals*. Acta Met., vol. 33, pp 1601–1612.
- GABRIELLI F., MARCHIONNI M., ET ONOFRIO G. (1989). *Time dependent effects on high temperature low cycle fatigue and fatigue crack propagation on nickel-base superalloys*. In : Advance in fatigue science and technology, Kluwer Academic Publisher.
- GALLERNEAU F. (1995). *Etude et modélisation de l'endommagement d'un superalliage monocristallin revêtu pour aube de turbine*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- GALLERNEAU F. (1999). *Modelling of anisotropy effects of a single crystal superalloy on its fatigue-creep resistance*. In : ICAF'99.
- GAMBIN B. ET KRÖNER E. (1989). *Higher-Order Terms in the Homogenized Stress-Strain Relation of Periodic Media*. Phys. Stat. Sol., vol. 151, pp 513–519.
- GERMAIN P. (1973). *La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus première partie : théorie du second gradient*. J. de Mécanique, vol. 12, pp 235–274.
- GERMAIN P. ET MÜLLER P. (1995). *Introduction à la mécanique des milieux continus*. 2^{ème} édition, Masson.
- GERMAIN P., NGUYEN Q. S., ET SUQUET P. (1983). *Continuum Thermodynamics*. Journal of Applied Mechanics, vol. 50, pp 1010–1020.
- GILORMINI P. (1998). *Elasticité des matériaux hétérogènes*. DEA Mécanique et Matériaux.
- GOLOGANU M., LEBLOND J.B., ET PERRIN G. (1996). *Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals*. In : in Continuum Micromechanics, ed. by P. Suquet, cours CISM, Udine.
- GROSDIDIER T. (1992). *Etude de la transformation de phase γ/γ' de superalliages monocristallins à base de nickel. Influence de sollicitations mécaniques et d'hétérogénéités chimiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.

- HALPHEN B. ET NGUYEN Q.S. (1975). *Sur les matériaux standard généralisés*. Journal de Mécanique, vol. 14, n° 1, pp 39–63.
- HANRIOT F. (1993). *Comportement du superalliage monocristallin AM1 sous sollicitations cycliques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- HAYHURST D.R. (1972). *Creep Rupture Under Multiaxial State of Stress*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 20, pp 381–390.
- HILL R. (1967). *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 15, pp 79–95.
- HUET C. (1980). *Remarques sur la procédure d'assimilation d'un matériau hétérogène à un milieu continu équivalent*. In : Comportements rhéologiques et structure des matériaux, CR 15^{ème} Coll. GFR., Paris.
- KACHANOV L. M. (1958). *Time of the Rupture Process Under Creep Conditions*. Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd Tekh. Nauk., vol. 8, pp 26–31.
- KNOP M., JONES J., MOLENT L., ET WANG C. (2000). *On the glinka and neuber methods for calculating notch tip strains under cyclic load spectra*. Int. Journal of Fatigue, vol. 22, pp 743–755.
- KOITER W.T. (1960). *General theorems for elastic-plastic solids*. In : Progress in solids mechanics, North Holland Publishing Company, vol.1, pp 165–221.
- KRUCH S. ET FOREST S. (1998). *Computation of coarse grain structures using a homogeneous equivalent medium*. J. Phys. IV, vol. 8, pp 197–205.
- KRUCH S., ROUX F.-X., FEYEL F., ET CAILLETAUD G. (1997). *Application du calcul parallèle aux modèles à grand nombre de variables internes*. In : Colloque National en calcul de structures-Giens.
- LAUTRIDOU J.C. (2000). *Les matériaux dans les turbomachines aéronautiques : problèmes et perspectives*. J. Phys. IV, vol. 10, pp 3–8.
- LAUTRIDOU J.L., GUEDOU J.Y., ET DELAUTRE J. (1995). *Comparison of single crystals superalloys for turbine blades through TMF tests*. In : International Symposium, Fatigue under Thermal and Mechanical loading, Petten The Netherlands.
- LEMAITRE J. ET CHABOCHE J.-L. (1985). *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod.
- LERICHE R. (1998). *Zébulon 7/ Z-Set, Manuel utilisateur, zOptimiser*. In : INSA Rouen, pp 345–369.
- LESNE P.M. ET SAVALLE S. (1987). *A differential damage rule with microinitiation and micropropagation*. La Recherche Aérospatiale, vol. n°2.
- MALPERTU J.L. (1987). *Fatigue mécano-thermique d'un superalliage à base de nickel*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- MANDEL J. (1965). *Généralisation de la théorie de plasticité de W. T. Koiter*. Int. J. Solids Structures, vol. 1, pp 273–295.

- MANDEL J. (1978). *Propriétés mécaniques des matériaux*. Eyrolles.
- MANSON S.S. (1953). *Behavior of materials under conditions of thermal stresses*. In : NACA TN-2933.
- MARIGO J.-J., MIALON P., MICHEL J.-C., ET SUQUET P. (1987). *Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d'une structure hétérogène périodique*. Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 6, n° 1, pp 47–75.
- MAUGIN G.A. (1980). *The method of virtual power in continuum mechanics : Application to coupled fields*. Acta Mech., vol. 126, pp 71–99.
- MAUGIN G.A. (1990). *Internal variables and dissipative structures*. J. Non-Equilib. Thermodyn., vol. 15, pp 173–192.
- MAUGIN G.A. ET MUSCHIK W. (1994). *Thermodynamics with internal variable, Part I. General concepts*. J. Non-Equilib. Thermodyn., vol. 19, pp 217–249.
- MEISSONNIER F. (1996). *Couplages thermomécaniques et homogénéisation*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II.
- MÉRIC L. (1991). *Une modélisation mécanique du comportement des monocristaux*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- MÉRIC L., POUBANNE P., ET CAILLETAUD G. (1991). *Single Crystal Modeling for Structural Calculations. Part 1: Model Presentation*. J. of Engng. Mat. Technol., vol. 113, pp 162–170.
- MICHEL J.-C. (La Londe les Maures, 1998). *Elasticité linéaire - Théorie des modules effectifs - Approximations de Voigt et Reuss*. Méthodes d'homogénéisation en Mécanique des Matériaux, Ecole thématique du CNRS.
- MICHEL J.-C., MOULINEC H., ET SUQUET P. (La Londe les Maures, 1998). *Propriétés linéaires et non linéaires des composites à microstructure périodique*. Méthodes d'homogénéisation en Mécanique des Matériaux, Ecole thématique du CNRS.
- MINDLIN R.D. (1965). *Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity*. Int. J. Solids Structures, vol. 1, pp 417–438.
- MINDLIN R.D. ET ESHEL N.N. (1968). *On First Gradient Theories in Linear Elasticity*. Int. J. Solids Structures, vol. 4, pp 109–124.
- MÜLLER I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman Publishing Limited, London.
- MÜLLER I. ET RUGGERI T. (1993). *Extended thermodynamics*. In : Springer Tracts in Natural Philosophy 37.
- MURDOCH A. I. (1979). *Symmetry considerations for materials of second grade*. I. of Elasticity, vol. 9 n° 1, pp 43–50.
- NICOULEAU-BOURLES E. (1999). *Etude expérimentale et numérique du vieillissement d'un alliage d'aluminium. Application aux culasses automobiles*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

- NOUAILHAS D. (1989). *Un modèle de viscoplasticité cyclique pour matériau anisotropes à symétrie cubique*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. t. 310, Série II, pp 887.
- NOUAILHAS D. ET CAILLETAUD G. (1992). *Comparaison de divers critères anisotropes pour monocristaux cubiques à faces centrées (CFC)*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. t. 315, Série II, pp 1573–1579.
- NOUAILHAS D. ET CULIÉ J.-P. (1991). *Development and application of a model for single crystal superalloys*. In : Freed A. D. and Walker K. P., ed, High Temperature Constitutive Modeling - Theory and Application, ASME, MD-26, ADM-121, pp 151.
- NOUAILHAS D., CULIÉ J.-P., CAILLETAUD G., ET MÉRIC L (1995). *Finite element analysis of the stress-strain behavior of single-crystal tubes*. Eur. J. Mech., A/Solids, vol. 14 n° 1, pp 137–154.
- PAN Y., BISCHOFF-BEIERMANN B., ET SCHULENBERG T. (1999). *Materials testing for fatigue design of heavy-duty gas turbine blading with film cooling*. In : Fatigue Design and Reliability, G. Marquis and J. Solin (Eds), pp 155–162.
- PERRUCHANT P. (1997). *Etude des interactions fatigue-fluage-oxydation à 950°C dans l'endommagement du superalliage monocristallin*. Thèse de doctorat, ENSMA Poitiers.
- PEYROUX R. ET CHRYSOCHOOS A. (1997). *Couplages thermomécaniques et homogénéisation, quelques applications*. In : Couplages Thermomécaniques, 28 mai 1997, Paris.
- PEYROUX R. ET LICHT C. (1993). *Homogenization in thermoelasticity : application to composite materials*. J. Phys. IV, vol. 3, pp 1623–1626.
- PIDERI C. ET SEPPECHER P. (1997). *Un résultat d'homogénéisation pour un matériau élastique renforcé périodiquement par des fibres élastique périodiquement de très grandes rigidité*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. t. 324, Série II, pp 475–481.
- POUBANNE P. (1989). *Etude et modélisation du comportement mécanique d'un superalliage monocristallin pour aube de turbine*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris.
- PRADEL F. (1998). *Homogénéisation des milieux continus et discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées.
- PRADEL F. ET SAB K. (1998). *Homogenization of discrete media*. J. Phys. IV, vol. 8, pp 39–48.
- RABOTNOV Y. N. (1969). *Creep Problems in Structural Members*. North Holland.
- REINHARDT W. D. (2000). *Description of plasticity in a solid containing an ordered array of cylindrical voids*. In : Plasticity 2000 : The Eight International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, pp 95–97.
- RÉMY L. (1986). *Méthodologie de la fatigue thermique*. In : Journées internationales de printemps de la SFM, pp 252–274.

- RÉMY L. ET REUCHET J. (1983). *Fatigue-oxydation interaction in a superalloy - Application to life prediction in high temperature low cycle fatigue*. Met. Trans., vol. 14 A, pp 141.
- RICE J.R. (1970). *On the structure of stress-strain relations for time dependent plastic deformation in metals*. ASME J. Appl. Mech., vol. 37, pp 728–737.
- ROBINSON E.L. (1952). *Effect of Temperature Variation on the Longtime Rupture Strength of Steels*. Trans. ASME, vol. 74, pp 777.
- SAB K. (1992). *On the homogenization and the simulation of random materials*. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 11, pp 505–515.
- SANCHEZ-HUBERT J. ET SANCHEZ-PALENCIA E. (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson.
- SANCHEZ-PALENCIA E. (1974). *Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes*. Int. J. Engng. Sci., vol. 12, pp 331–351.
- SANCHEZ-PALENCIA E. ET ZAOUI A. (1985). *Homogenization techniques for composite media*. Lecture notes in physics, No. 272, Springer-Verlag.
- SAVALLE S ET CAILLETAUD G. (1982). *Microinitiation, micropropagation and damage*. La Recherche Aérospatiale, vol. n°6.
- SCHRAAD M.W. ET TRIANTAFYLIDIS N. (1997). *Scale Effects in Media With Periodic and Nearly Periodic Microstructures, Part I : Macroscopic Properties*. J. of Appl. Mech., vol. 64, pp 751–762.
- SHU J. Y. ET FLECK N. A. (1998). *The prediction of a size effect in microindentation*. Int. J. Solids Structures, vol. 33 n° 13, pp 1363–1383.
- SHU J. Y., KING W. E., ET FLECK N. A. (1999). *Finite elements for materials with strain gradient effects*. Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 44, pp 373–391.
- SUQUET P. (1980). *Méthode d'homogénéisation en mécanique des solides*. In : Comportements rhéologiques et structure des matériaux, CR 15^{ème} Coll. GFR., Paris.
- SUQUET P. (1982). *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- SWAMINATHAN V.P., ALLEN J., ET TOUCHTON G.L. (1997). *Temperature estimation and life prediction blades using post-service oxidation measurements*. Trans. ASME, vol. 119, pp 922–929.
- TAIRA S. (1962). *Lifetime of Structures Subjected to Varying Load and Temperature, Creep in Structures*. N. J. Hoff, vol. Academic Press.
- TAYLOR G. I. (1938). *Plastic Strain in Metals*. J. Inst. Metals, vol. 62, pp 307–324.
- TOUPIN R.A. (1962). *Elastic materials with couple stresses*. Arch. Ration. Mech. Anal., vol. 11, pp 385–414.

- TRIANTAFYLLIDIS N. ET BARDENHAGEN S. (1996). *The influence of the scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 44, pp 1891–1928.
- TROSTEL R. (1985). *Gedanken zur Konstruktion mechanischer Theorien, Beiträge zu den Ingenieurwissenschaften*, ed. by Trostel, Tech. Univ. Berlin, Univ.-Bibl. Abt. Publ., vol. , pp 96–134.
- Z-SET (1996). *Zébulon 7, Manuel utilisateur*. Centre des Matériaux, Ecole des Mines de Paris.
- ZARKA J. (1972). *Généralisation de la théorie du potentiel plastique multiple en viscoplasticité*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 20, pp 179.

Partie D

Annexes

Annexe -A-

Notations

Quelques remarques sur les différentes notations utilisées dans le rapport et exprimées dans un repère euclidien E :

X représente un scalaire

$\underline{X}$ représente un vecteur

$\underline{\underline{X}}$ représente un tenseur d'ordre 2

$\underline{\underline{\underline{X}}}$ représente un tenseur du troisième ordre que l'on contracte avec un vecteur pour donner un tenseur du second ordre

$\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}$ représente un tenseur du troisième ordre que l'on contracte avec un tenseur du second ordre pour donner un vecteur

$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}}$ représente un tenseur du quatrième ordre

$\{ \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}} \}$ représente la partie symétrique de $\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}}$

$\} \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}} \{$ représente la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}}$

$\underline{\nabla}$ représente l'opérateur nabla

$$\underline{\nabla} = ,_i \underline{e}_i$$

$$X \underline{\nabla} = X_{,i} \underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{X}} \otimes \underline{\nabla} = X_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{\underline{\underline{X}}} \cdot \underline{\nabla} = X_{i,i}$$

$$\underline{X}.\underline{\nabla} = X_{ij,j} \underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{X}}.\underline{\nabla} = X_{ijk,k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Annexe -B-

Les différentes méthodes d'homogénéisation

Sommaire

B.0.1	Théorie des modules effectifs	185
B.0.2	Bornes de Voigt et Reuss	187
B.0.3	Homogénéisation périodique	187

Les différentes méthodes d'homogénéisation se distinguent principalement au niveau de la localisation, ce qui est lié au choix et à la modélisation du VER.

B.0.1 Théorie des modules effectifs

Cette théorie, encore appelée méthode de Hill-Mandel (Hill, 1967; Mandel, 1978), apporte une réponse simple à l'absence de conditions aux limites tout en respectant la donnée en moyenne. L'idée consiste à imposer des conditions aux limites homogènes sur la frontière du VER et à déterminer les champs locaux dans Ω (Michel, 1998).

Pour y parvenir, nous disposons du système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(y) \cdot \underline{\tilde{v}} = 0 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(y) = \underline{\tilde{\epsilon}}(y) : \underline{\tilde{\epsilon}}(\underline{u}(y)) \quad \text{dans } \Omega \\ \text{et } \langle \underline{\tilde{\sigma}} \rangle = \underline{\tilde{\Sigma}} \text{ ou } \langle \underline{\tilde{\epsilon}} \rangle = \underline{\tilde{E}} \\ \text{en supposant connu } \underline{\tilde{\Sigma}} \text{ ou } \underline{\tilde{E}}. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Ce système d'équations, sans condition aux limites, ne suffit pas pour assurer l'unicité de la solution. Donc, pour compenser cette absence, tout en restant compatible avec les relations de moyenne, la théorie des modules effectifs envisage des conditions dites :

- de contraintes homogènes au bord $\underline{\tilde{\sigma}}(y) \cdot \underline{n}(y) = \underline{\tilde{\Sigma}} \cdot \underline{n}(y)$ sur $\partial\Omega$
- de déformations homogènes au bord $\underline{u}(y) = \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{y}$ sur $\partial\Omega$

a) Tenseurs de localisation

En élasticité linéaire, il existe une correspondance entre la donnée et la solution de ces problèmes.

$$\underline{\varepsilon}(y) = \underline{\underline{A}}(y) : \underline{E} \quad (\text{B.2})$$

$$\underline{\sigma}(y) = \underline{\underline{B}}(y) : \underline{\Sigma} \quad (\text{B.3})$$

$\underline{\underline{A}}(y)$ est un tenseur du quatrième ordre, dit de localisation des déformations et $\underline{\underline{B}}(y)$ un tenseur de concentration des contraintes.

b) Définition des tenseurs effectifs

Partant des équations locales du comportement et considérant la relation de localisation en déformation nous obtenons

$$\underline{\sigma}(y) = \underline{\underline{c}}(y) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}(y))$$

$$\underline{\sigma}(y) = \underline{\underline{c}}(y) : \underline{\underline{A}}(y) : \underline{E}$$

or

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma}(y) \rangle$$

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\underline{c}}(y) : \underline{\underline{A}}(y) \rangle : \underline{E}$$

donc

$$\underline{\underline{c}}^{hom} = \langle \underline{\underline{c}}(y) : \underline{\underline{A}}(y) \rangle \quad (\text{B.4})$$

Le tenseur des modules effectifs est donc égal dans Ω à la moyenne du tenseur des modules des constituants pondéré par le tenseur de localisation des déformations $\underline{\underline{A}}(y)$.

De la même manière, nous obtenons une relation similaire pour le tenseur des souplesses effectives

$$\underline{\underline{s}}^{hom} = \langle \underline{\underline{s}}(y) : \underline{\underline{B}}(y) \rangle \quad (\text{B.5})$$

c) Définition énergétique du comportement homogène équivalent

L'utilisation du théorème de Hill permet d'établir pour les composantes $\underline{\underline{c}}^{hom}$ et $\underline{\underline{s}}^{hom}$ de nouvelles expressions énergétiques.

Si nous nous plaçons dans l'hypothèse de déformations homogènes au contour

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} : \underline{E} &= \underline{E} : \underline{\underline{c}}^{hom} : \underline{E} \\ &= \langle \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{c}} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle (\underline{\underline{A}} : \underline{\varepsilon}) : \underline{\underline{c}} : (\underline{\underline{A}} : \underline{\varepsilon}) \rangle \\ &= \langle (\underline{\varepsilon} : \underline{\underline{A}}^t) : \underline{\underline{c}} : (\underline{\underline{A}} : \underline{\varepsilon}) \rangle = \underline{E} : \langle \underline{\underline{A}}^t : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle : \underline{E} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nous obtenons la même résolution en contraintes homogènes pour $\underline{\underline{s}}^{hom}$.

Donc, en résumé, en élasticité linéaire avec hypothèse de macrohomogénéité, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \underline{\underline{c}}^{hom} &= \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}^t : \underline{\underline{c}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}^t : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle \\ &= \langle \underline{\underline{B}}^t : \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{B}} \rangle^{-1} = \langle \underline{\underline{B}}^t : \underline{\underline{s}} \rangle^{-1} = \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{B}} \rangle^{-1} = \underline{\underline{s}}^{hom-1} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

d) Propriétés variationnelles

Pour tout chargement $\tilde{\sigma}^*$ à divergence nulle et tout champs $\tilde{\varepsilon}'$ compatible, nous avons :

$$\langle (\tilde{\sigma}^* - \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}') : \tilde{\varepsilon} : (\tilde{\sigma}^* - \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}') \rangle - \langle \tilde{\sigma}^* : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\sigma}^* \rangle - 2 \langle \tilde{\sigma}^* : \tilde{\varepsilon}' \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}' : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}' \rangle \geq 0$$

En se plaçant dans l'hypothèse des contraintes homogènes aux contours, nous avons les deux relations suivantes

- si $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}$ alors $\tilde{\Sigma} : \tilde{E} - 2\tilde{\Sigma} : \langle \tilde{\varepsilon}' \rangle + \langle \tilde{\varepsilon}' : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}' \rangle \geq 0$
- si $\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon}$ alors $\langle \tilde{\sigma}^* : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\sigma}^* \rangle - 2\tilde{\Sigma} : \tilde{E} + \tilde{\Sigma} : \tilde{E} \geq 0$

qui entraînent l'encadrement

$$2\tilde{\Sigma} : \langle \tilde{\varepsilon}' \rangle - \langle \tilde{\varepsilon}' : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}' \rangle \leq \tilde{\Sigma} : \tilde{E} \leq \langle \tilde{\sigma}^* : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\sigma}^* \rangle \quad (\text{B.8})$$

pour tout $\tilde{\sigma}^*$ admissible en contraintes homogènes et tout $\tilde{\varepsilon}'$ compatible.

De même, pour tout $\tilde{\varepsilon}'$ admissible en déformations homogènes aux contours et tout $\tilde{\sigma}^*$ à divergence nulle, nous obtenons

$$2 \langle \tilde{\sigma}^* \rangle : \tilde{E} - \langle \tilde{\sigma}^* : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\sigma}^* \rangle \leq \tilde{\Sigma} : \tilde{E} \leq \langle \tilde{\varepsilon}' : \tilde{\varepsilon} : \tilde{\varepsilon}' \rangle \quad (\text{B.9})$$

B.0.2 Bornes de Voigt et Reuss

Les approximations de Voigt (respectivement Reuss) consistent à supposer que les déformations sont uniformes $\tilde{\varepsilon}' = \tilde{E}$ champ de déformations compatibles (respectivement que les contraintes sont uniformes $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\Sigma}$ champ de contraintes admissibles) (Michel, 1998).

Puis, en utilisant les propriétés variationnelles, nous obtenons les relations (inégalité au sens des formes quadratiques) :

$$\tilde{\varepsilon}^V \leq \langle \tilde{\varepsilon} \rangle \quad (\text{Voigt}) \quad (\text{B.10})$$

$$\tilde{\varepsilon}^R \leq \langle \tilde{\varepsilon} \rangle \quad (\text{Reuss}) \quad (\text{B.11})$$

Le calcul de l'encadrement de Voigt et Reuss ne nécessite que la connaissance des caractéristiques élastiques $\tilde{\varepsilon}$ et $\tilde{\Sigma}$ de chaque phase et de leur fraction volumique. Les tenseurs des modules de Voigt $\tilde{\varepsilon}^V$ (respectivement des souplesses de Reuss $\tilde{\varepsilon}^R$) est une estimation par excès du tenseur des modules effectifs (respectivement des souplesses effectives).

B.0.3 Homogénéisation périodique

Dans cette section, nous considérons un matériau périodique, c'est-à-dire défini par une cellule de base que nous déplaçons par translation le long de trois vecteurs. Dans ce cas, la cellule de base n'est pas définie de manière unique. Par contre, ces propriétés effectives, même calculées sur des cellules différentes, sont déterminées de façon unique. Le choix est souvent dicté par l'exploitation des conditions aux limites de périodicité.

De ce fait nous ne pouvons plus imposer des conditions aux limites de types $\underline{u}(y) = \underline{E}y$ ou $\tilde{\sigma}(y) \cdot \underline{n}(y) = \tilde{\Sigma} \cdot \underline{n}(y)$ au bord de l'élément de volume comme dans la théorie des modules effectifs où l'état de déformation et de contrainte qui en résulte est homogène.

Dans le milieu hétérogène périodique, la géométrie étant invariante par translation le long des vecteurs de périodicité, les champs locaux $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\sigma}$ sont également oscillants et fluctuent autour de leurs valeurs moyennes en $\underline{E}$ et $\underline{\Sigma}$. Et c'est cette périodicité locale des déformations et des contraintes qui fournit les conditions aux limites (Michel et al., 1998).

Le problème à résoudre est toujours

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{\nabla} = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{y}) = \underline{\varepsilon}(\underline{y}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{y})) \quad \text{dans } \Omega \\ \langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma} \text{ ou } \langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E} \\ \text{et une condition de périodicité} \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

Donc le champ local de déformation $\underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{y}))$ est décomposé en un champ moyen $\underline{E}$ qui serait le champ de déformation si le milieu était homogène et une correction fluctuante $\underline{e}(\underline{v}(\underline{y}))$ qui tient compte de la présence des hétérogénéités

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{y})) = \underline{E} + \underline{e}(\underline{v}(\underline{y}))$$

$\underline{E}$ donne la décomposition du réseau tandis que $\underline{e}(\underline{v}(\underline{y}))$ est de moyenne nulle.

Le champ de déplacement admet donc la décomposition suivante :

$$\underline{u}(\underline{y}) = \underline{E} \cdot \underline{y} + \underline{v} \quad \text{avec } \underline{v} \text{ périodique.} \quad (\text{B.13})$$

De cette façon nous conservons la relation

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E}.$$

Le champ de contraintes locales $\underline{\sigma}$ est périodique mais également en équilibre sur l'ensemble du milieu. Il satisfait de ce fait l'équilibre volumique dans Ω ($\underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{\nabla} = 0$) mais également l'équilibre des cellules adjacentes et la périodicité du champ de contrainte qui se traduit par le fait que les vecteurs contraintes sont opposés sur des côtés opposés de $\partial\Omega$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{\nabla} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ opposés ou anti-périodique sur côtés opposés de } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

Le champ des contraintes est toujours défini comme la moyenne du champ local

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\Sigma}.$$

Donc maintenant nous avons toutes les hypothèses pour déterminer les propriétés élastiques effectives du milieu hétérogène. Nous déterminons les champs locaux de contrainte et de déformation induits à l'échelle microscopique par une déformation $\underline{E}$ ou une contrainte $\underline{\Sigma}$ macroscopique en résolvant le problème local suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{\nabla} = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{y}) = \underline{\varepsilon}(\underline{y}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}(\underline{y})) \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{u}(\underline{y}) = \underline{E} \cdot \underline{y} + \underline{v} \quad \text{avec } \underline{v} \text{ périodique.} \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ anti-périodique} \end{array} \right. \quad (\text{B.15})$$

où nous retrouvons la loi de comportement des constituants élastiques (élastiques linéaires), les équations d'équilibre, les conditions de périodicité et la condition de moyenne.

Le problème admet une solution unique à une translation près. Comme dans la théorie des modules effectifs, nous obtenons des solutions élémentaires au problème à $\tilde{E}$ ou $\tilde{\Sigma}$ imposé :

$$\tilde{c}^{hom} = \langle \tilde{c}(y) : \tilde{A}(y) \rangle \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{s}^{hom} = \langle \tilde{s}(y) : \tilde{B}(y) \rangle \quad (\text{B.17})$$

Pour un milieu périodique nous montrons que cette approche est rigoureuse et qu'elle est équivalente à l'approche basée sur les développement asymptotiques (Suquet, 1982) que nous verrons au chapitre II.

Annexe -C-

Coefficient de dilatation thermique effectif

Le comportement dilatométrique homogénéisé, en absence de chargement mécanique, s'écrit :

$$\underline{\underline{E}}^{th} = \underline{\underline{\alpha}}^{hom} \Delta T \quad (C.1)$$

Or nous avons déjà vu qu'en élasticité linéaire, dans le cas de la théorie des modules effectifs en annexe B, il existe une correspondance entre la donnée et la solution du problème (Gilormini, 1998).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}^{th}(\underline{\underline{x}}) &= \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{E}}^{th} \\ \underline{\underline{\alpha}} \cdot \Delta T &= \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{E}}^{th} \\ \underline{\underline{\alpha}}^{hom} &= \langle \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{A}} \rangle \end{aligned} \quad (C.2)$$

Le coefficient de dilatation thermique homogénéisé est égal à la moyenne des coefficients pondéré par le tenseur de localisation des déformations $\underline{\underline{A}}$

Et si nous prenons en considération le chargement thermoélastique dans sa globalité, le comportement thermoélastique homogénéisé est défini par

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{hom} : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\alpha}}^{hom} \Delta T) \quad (C.3)$$

Dans le cas d'un milieu biphasé, le coefficient de dilatation thermique homogénéisé est une combinaison linéaire des fractions volumiques f_1 et f_2 de chaque phase

$$\underline{\underline{\alpha}}^{hom} = f_1 \underline{\underline{\alpha}}^1 : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_1 + f_2 \underline{\underline{\alpha}}^2 : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_2 \quad (C.4)$$

avec

$$f_1 \langle \underline{\underline{A}} \rangle_1 + f_2 \langle \underline{\underline{A}} \rangle_2 = \underline{\underline{I}}$$

Notre milieu est également assimilé à un biphasé (matière et vide) donc nous pouvons écrire

$$\underline{\underline{\alpha}}^{hom} = \frac{(1-f)\underline{\underline{\alpha}}^1 + f\underline{\underline{\alpha}}^2 \underline{\underline{A}}}{1-f+f\underline{\underline{A}}}$$

et en éliminant les tenseurs de localisation

$$\alpha_{\sim}^{hom} = \frac{(1-f) \alpha^1 (1 - \alpha^1 (1 - \kappa_1/\kappa_2)) + f \alpha^2 (\kappa_2/\kappa_1)}{(1-f) (1 - \alpha^1 (1 - \kappa_1/\kappa_2)) + f (\kappa_2/\kappa_1)}$$

Dans notre cas, la phase 2 est le vide ($\kappa_2 = 0$). Donc, en faisant tendre κ_2 vers 0, nous trouvons que le coefficient de dilatation thermique du matériau est le même que celui du matériau du milieu hétérogène.

$$\alpha_{\sim}^{hom} = \alpha^1 \tag{C.5}$$

Annexe -D-

Théorie du second gradient

Sommaire

D.1	Introduction	193
D.2	Principe des puissances virtuelles	195
D.2.1	La puissance des efforts intérieurs, $\mathcal{P}^{(i)}$	196
D.2.2	La puissance des efforts extérieurs à distance, $\mathcal{P}^{(d)}$	197
D.2.3	La puissance des efforts extérieurs de contact, $\mathcal{P}^{(c)}$	198
D.2.4	Application du principe des puissances virtuelles	199
D.3	Enoncés fondamentaux de la thermodynamique	199
D.3.1	Premier principe de la thermodynamique	200
D.3.2	Deuxième principe de la thermodynamique	201
D.4	Variables d'état	202
D.5	Potentiel thermodynamique et lois d'état	202
D.6	L'équation de la chaleur	203

D.1 Introduction

Depuis très longtemps en mécanique, il existe deux manières de schématiser, à l'aide de concepts mathématiques, les efforts s'exerçant à un instant donné t sur un système S .

La première consiste à représenter une force par un vecteur (être mathématique ayant une origine, une direction et une intensité) et d'utiliser la loi fondamentale de la dynamique qui stipule qu' "*il existe au moins un référentiel (repère et chronologie), dit absolu, dans lequel à chaque instant et pour tout système, le torseur des quantités d'accélération est égal au torseur des forces extérieures exercées sur le système*".

La deuxième voie est celle des puissances virtuelles (ou travaux virtuels). Du point de vue mathématique on considère sur S , à un instant t , un champ de vecteur $\underline{v}$ (représentant

des vitesses ou des déplacements élémentaires pendant un temps élémentaire δt) qui définit à cet instant un mouvement virtuel de S . On connaît les efforts pour ce mouvement virtuel V si on connaît leur “puissance virtuelle” $\mathcal{P}$, nombre réel associé à V . De façon précise, on considère un espace vectoriel normé $\mathfrak{V}$ de mouvements virtuels V et on dit que l’on connaît les efforts exercés sur S pour l’espace $\mathfrak{V}$ s’il existe une forme linéaire et continue $\mathcal{L}(V)$ définie sur $\mathfrak{V}$. $\mathcal{L}(V)$ n’est autre que la puissance virtuelle de ces efforts dans le mouvement virtuel défini par V . Cette deuxième voie est basée sur le concept de dualité. Lorsque l’espace vectoriel $\mathfrak{V}$ est fixé, l’ensemble des efforts connus pour $\mathfrak{V}$ forment eux-même un espace vectoriel $\mathfrak{V}^*$ dual de $\mathfrak{V}$. De plus la taille de $\mathfrak{V}$ permettra une description des efforts plus ou moins fine.

Lorsque l’on utilise une description des efforts par les puissances virtuelles, l’énoncé fondamental des lois de la dynamique le plus adapté est le principe des *puissances virtuelles* : “Dans un référentiel absolu, à chaque instant t et pour tout système, la puissance virtuelle de tous les efforts appliqués au système, tant intérieurs qu’extérieurs, est égale à la puissance virtuelle des quantités d’accélération.”

Maintenant nous allons montrer, en considérant un espace $\mathfrak{V}$ des mouvements virtuels, que nous pouvons déterminer une théorie de mécanique des milieux continus et que cet espace fixe en quelque sorte le degré de finesse de la théorie.

Remarques générales sur l’application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus

L’axiome des puissances virtuelles des efforts intérieurs est à la base de la loi fondamentale classique de la mécanique : “La puissance virtuelle des efforts intérieurs à un système S est nulle dans tout mouvement virtuel rigidifiant le système S à l’instant t considéré”.

Si on considère, sur un système S à un moment donné t , un mouvement rigidifiant défini par un distributeur $\{C\}$, alors la puissance virtuelle de tous les efforts appliqués, réduite à celle des efforts extérieurs, s’écrit $[T] \cdot \{C\}$, où $[T]$ est le torseur des efforts extérieurs et doit être nul quel que soit $\{C\}$. On en déduit, par conséquent, l’énoncé de la loi fondamentale de la statique $[T] = 0$.

Les remarques qui vont suivre n’ont pas un caractère obligatoire et général de l’axiome qui vient d’être énoncé mais constituent plutôt des hypothèses de travail ou de notation :

1. Le système S est un domaine connexe tridimensionnel ouvert et borné de l’espace euclidien.
2. La frontière ∂S est deux fois continûment dérivable par morceaux, autrement dit la surface ∂S possède un vecteur normal unité extérieur $\underline{n}$ et un tenseur courbure continu dans un voisinage de P appartenant à ∂S sauf aux points de certaines lignes qui sont les arêtes de ∂S (voir (Germain, 1973) pour le cas général).
3. Le principe des puissances virtuelles s’appliquera soit à S soit à $\mathcal{D}$ un sous-système

de S où nous ferons les mêmes hypothèses.

4. Les frontières choisies pour décrire le mouvement virtuel de $\mathcal{D}$, autrement dit celles qui définissent un élément arbitraire de l'espace vectoriel normé $\mathfrak{V}$, sont continûment dérivables sur la fermeture $\mathcal{D} + \partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$, autant de fois qu'il sera nécessaire.
5. Nous supposons les efforts suffisamment réguliers pour être définis par des densités. Cette simplification est dans la plupart des cas légitime puisqu'il s'agit de notions de mécanique des milieux continus qui schématisent une réalité physique essentiellement discontinue. De ce fait, les formes linéaires qui définissent les puissances virtuelles pourront donc s'écrire à l'aide d'intégrales de volume, de surface, ou de ligne.
6. Nous sommes en petits déplacements et petites déformations.
7. La puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}^{(i)}$ s'exprime sous forme d'une intégrale de volume prise sur l'ouvert $\mathcal{D}$.
8. La puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur le sous-système $\mathcal{D}$ intérieur à S comporte deux types de puissance :
 - la puissance virtuelle des efforts à distance $\mathcal{P}^{(d)}$ qui s'exprime sous forme d'une intégrale de volume prise sur l'ouvert $\mathcal{D}$.
 - la puissance virtuelle des efforts de contact $\mathcal{P}^{(c)}$ qui s'exprime à l'aide d'une intégrale de surface prise sur $\partial\mathcal{D}$.
9. Nous nous limitons au cas de la statique donc le principe des puissances virtuelles se traduit par l'égalité

$$\mathcal{P}^{(d)} + \mathcal{P}^{(c)} + \mathcal{P}^{(i)} = 0 \quad (\text{D.1})$$

qui doit être valable quel que soit le sous domaine $\mathcal{D}$ et quel que soit le mouvement virtuel de $\mathfrak{V}$ considéré.

Les relations nécessaires et suffisantes qui permettent cette égalité constituent l'ensemble des équations de la statique du milieu considéré.

Nous introduisons la théorie de second gradient (Germain, 1973), théorie plus fine que celle du premier gradient, qui est à la base de la mécanique des milieux continus. Cette théorie utilise comme espace $\mathfrak{V}$ des mouvements virtuels celui des champs des déplacements continus et continûment dérivables au moins deux fois dans la fermeture $\mathcal{D} + \partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$.

D.2 Principe des puissances virtuelles

Nous noterons u_i les composantes du déplacement et $u_{i,j}$ leurs dérivées premières. Et nous introduisons la décomposition canonique du gradient des déplacements en partie symétrique et partie antisymétrique.

$$\underline{\dot{u}} \otimes \underline{\nabla} = \underline{\dot{\varepsilon}} + \underline{\dot{\Omega}} \quad (\text{D.2})$$

$$(u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij})$$

avec $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}$ la matrice représentant le tenseur des taux des déformations et $\dot{\Omega}_{ij} = -\dot{\Omega}_{ji}$ la matrice représentant le tenseur des taux de rotation.

En plus des champs de déplacement nous faisons également intervenir le champ des déformations donc il convient de choisir une représentation canonique du tenseur (d'ordre 3) des dérivées secondes de u_i comme nous l'avons déjà fait pour les dérivées premières de u . (Mindlin et Eshel, 1968) proposent trois représentations : le second gradient du déplacement, le gradient de la déformation et le gradient de la rotation. Nous nous contenterons de choisir la seconde représentation

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \quad (D.3)$$

$$\left(K_{ijk} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik}) \right)$$

Le tenseur n'est autre que le gradient de la déformation $K_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$. Il est par conséquent symétrique par rapport aux deux premiers indices.

D.2.1 La puissance des efforts intérieurs, $\mathcal{P}^{(i)}$

Elle devrait contenir cinq termes : le champ de vitesse $\underline{\dot{u}}$, la partie symétrique $\underline{\dot{\varepsilon}}$ et antisymétrique $\underline{\dot{\Omega}}$ du champ du gradient des vitesses et ceux du gradient de déformation. Ces termes sont associés respectivement à un vecteur $\underline{\underline{f}}$, deux tenseurs du second ordre symétrique et antisymétrique et deux tenseurs du troisième ordre symétrique et antisymétrique.

Mais en raison de l'axiome des puissances virtuelles des efforts intérieurs, où dans tout mouvement de solide rigide (translation ou rotation) la puissance $\mathcal{P}^{(i)}$ est nulle, la puissance virtuelle $\mathcal{P}^{(i)}$ ne dépend que de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ et de $\underline{\dot{K}}$.

Donc

$$\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} [\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} + \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{K}}] dV \quad (D.4)$$

$$\left(\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} [\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk}] dV \right)$$

où $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes symétriques
et $\underline{\underline{S}}$ le tenseur des hypercontraintes.

A présent, en supposant que les σ_{ij} et S_{ijk} sont continûment dérivables en x_i , nous appliquons le théorème de la divergence sur l'expression (D.4) afin d'écrire $\mathcal{P}^{(i)}$ sous une forme canonique adéquate pour pouvoir appliquer le principe des puissances virtuelles.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)} = & - \int_{\mathcal{D}} [(\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} + (S_{ijk} \dot{u}_{i,j})_{,k} - \sigma_{ij,j} \dot{u}_i - S_{ijk,k} \dot{u}_{i,j}] dV \\ \mathcal{P}^{(i)} = & - \int_{\mathcal{D}} [(\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} + (S_{ijk} \dot{u}_{i,j})_{,k} - \sigma_{ij,j} \dot{u}_i - (S_{ijk,k} \dot{u}_i)_{,j} + S_{ijk,kj} \dot{u}_i] dV \\ \mathcal{P}^{(i)} = & + \int_{\mathcal{D}} [(\sigma_{ij,j} - S_{ijk,kj}) \dot{u}_i] dV \\ & + \int_{\partial \mathcal{D}} [(-\sigma_{ij} + S_{ijk,k}) n_j \dot{u}_i - S_{ijk} n_k \dot{u}_{i,j}] dS \end{aligned} \quad (D.5)$$

Le gradient $\dot{u}_{i,j}$, apparaissant dans le dernier terme ne dépend pas uniquement de u sur $\partial \mathcal{D}$. Il faut donc encore transformer cette expression.

Tout d'abord nous décomposons le terme $\dot{u}_{i,j}$ en introduisant les opérateurs de dérivation normale et de dérivation tangentielle en chaque point de la surface $\partial\mathcal{D}$.

$$\dot{u}_{i,j} = D_j \dot{u}_i + n_j D\dot{u}_i \quad (\text{D.6})$$

où la dérivée normale est le vecteur $D\dot{u}_i$ avec $Du = u_{,i}n_i$
et la dérivée tangentielle le tenseur $D_j \dot{u}_i$.

Donc

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\mathcal{D}} S_{ijk} n_k \dot{u}_{i,j} dS &= - \int_{\partial\mathcal{D}} S_{ijk} (D_j \dot{u}_i + n_j D\dot{u}_i) n_k dS \\ &= - \int_{\partial\mathcal{D}} S_{ijk} n_j n_k D\dot{u}_i dS \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{D}} S_{ijk} n_k D_j \dot{u}_i dS \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Nous intégrons à nouveau la partie de l'expression où subsiste la dérivée tangentielle du tenseur.

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\mathcal{D}} S_{ijk} n_k D_j \dot{u}_i dS &= - \int_{\partial\mathcal{D}} D_j (S_{ijk} n_k \dot{u}_i) dS \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{D}} D_j (S_{ijk} n_k) \dot{u}_i dS \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

A présent nous supposons que la frontière $\partial\mathcal{D}$ est une surface à courbures continues par morceaux et nous désignons par Γ les "arêtes et les sommets" de $\partial\mathcal{D}$. Nous appliquons alors le théorème de la divergence pour une surface.

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\mathcal{D}} D_j (S_{ijk} \dot{u}_i n_k) dS &= - \int_{\partial\mathcal{D}} (n_j S_{ijk} n_k \dot{u}_i 2R) dS \\ &\quad + \int_{\Gamma} [\dots] dl \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

où $2R$ est le double de la courbure moyenne.

Dans la suite du chapitre, nous supposons que $\partial\mathcal{D}$ n'a ni sommet ni arêtes pour simplifier (voir (Germain, 1973) pour plus de détails).

Donc, en regroupant les égalités (D.5), (D.7), (D.8) et (D.9), nous obtenons la puissance virtuelle des efforts intérieurs sous la forme désirée.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(i)} &= + \int_{\mathcal{D}} \{ [\sigma_{ij,j} - S_{ijk,kj}] \dot{u}_i dV \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{D}} \{ [(-\sigma_{ij} + S_{ijk,k}) n_j + D_j (S_{ijk} n_k) - S_{ijk} n_j n_k 2R] \dot{u}_i \\ &\quad - [S_{ijk} n_j n_k] D\dot{u}_i \} dS \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

D.2.2 La puissance des efforts extérieurs à distance, $\mathcal{P}^{(d)}$

En nous reportant aux hypothèses de travail énoncées au paragraphe précédent, nous pouvons écrire $\mathcal{P}^{(d)}$ à l'aide d'une intégrale de volume ayant également une forme linéaire.

$$\mathcal{P}^{(d)} = \int_{\mathcal{D}} [\underline{f} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{C} : \underline{\dot{\omega}} + \underline{F} : \underline{\dot{\xi}} + \underline{L} : \underline{\dot{K}}] dV \quad (\text{D.11})$$

$$\left(\mathcal{P}^{(d)} = \int_{\mathcal{D}} [f_i \dot{u}_i + C_{ij} \dot{u}_{i,j} + F_{ij} \dot{u}_{i,j} + L_{ijk} \dot{u}_{i,jk}] dV \right)$$

Cette expression implique que les efforts extérieurs à distance peuvent être représentés par :

- un champ de forces volumiques défini par la densité $\underline{f}_i$ (vecteur)
- un champ de double-couples volumiques défini par la densité $\underline{C}$ (tenseur antisymétrique $C_{ij} = -C_{ji}$)
- un champ de double-forces volumiques défini par la densité $\underline{F}$ (tenseur symétrique $F_{ij} = F_{ji}$)
- un champ de triple-forces volumiques défini par la densité $\underline{L}$ (tenseur symétrique $L_{ijk} = L_{jik}$)

Puis en effectuant les mêmes intégrations et les mêmes hypothèses nous arrivons à un résultat similaire.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(d)} = & + \int_{\mathcal{D}} [f_i - C_{ij,j} - F_{ij,j} + L_{ijk,k}] \dot{u}_i dV \\ & + \int_{\partial\mathcal{D}} \{ [(C_{ij} + F_{ij} - L_{ijk,k}) n_j - D_j (L_{ijk} n_k) + L_{ijk} n_j n_k 2R] \dot{u}_i \\ & - [S_{ijk} n_j n_k] D\dot{u}_i \} dS \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

D.2.3 La puissance des efforts extérieurs de contact, $\mathcal{P}^{(c)}$

$\mathcal{P}^{(c)}$ est définie, a priori, par une densité scalaire surfacique qui est toujours une forme linéaire de $\dot{u}_i$ et de ses dérivées.

Seuls les termes qui peuvent être équilibrés par un autre terme analogue dans les expressions de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (D.10) et des efforts extérieurs à distance (D.12) lors de l'écriture du principe des puissances virtuelles sont conservés.

$\mathcal{P}^{(c)}$ prend donc la forme suivante :

$$\mathcal{P}^{(c)} = \int_{\partial\mathcal{D}} [\underline{T} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{M} : \underline{\dot{\xi}}] dS \quad (\text{D.13})$$

$$\left(\mathcal{P}^{(c)} = \int_{\partial\mathcal{D}} [T_i \dot{u}_i + M_{ij} \dot{u}_{i,j}] dS \right)$$

Les efforts extérieurs de contact, $\mathcal{P}^{(c)}$, sont représentés à l'aide :

- d'une densité surfacique de forces $\underline{T}$ (vecteur contrainte en tout point de $\partial\mathcal{D}$ et normal à $\partial\mathcal{D}$).
- et d'une densité surfacique de double force $\underline{M}$

Puis, après intégration, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(c)} = & \int_{\partial\mathcal{D}} [T_i \dot{u}_i + M_{ij} D\dot{u}_i] dS \\ & + \int_{\Gamma} [\dots] dl \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

On remarque encore une fois qu'on prend en compte l'hypothèse simplificatrice considérant l'absence d'arête et de sommet et qu'on utilise seulement la dérivée normale de $\dot{u}$.

D.2.4 Application du principe des puissances virtuelles

Nous appliquons maintenant le principe des puissances virtuelles (D.1) en tenant compte de (D.10), (D.12) et (D.14) et nous obtenons.

$$\mathcal{P}^{(d)} + \mathcal{P}^{(c)} + \mathcal{P}^{(i)} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\mathcal{D}} \{ [f_i + \sigma_{ij,j} - C_{ij,j} - F_{ij,j} - S_{ijk,kj} + L_{ijk,kj}] \dot{u}_i \} dV \\ & + \int_{\partial\mathcal{D}} \{ [T_i - (\sigma_{ij} - C_{ij} - F_{ij} - S_{ijk,k} + L_{ijk,k}) n_j \\ & + D_j (S_{ijk} - L_{ijk}) n_k - 2R (S_{ijk} - L_{ijk}) n_j n_k] \dot{u}_i \\ & + [M_i - (S_{ijk} - L_{ijk}) n_j n_k] D\dot{u}_i \} dS \end{aligned} \quad (D.15)$$

Nous sommes ainsi conduits à définir deux nouvelles variables τ_{ij} , le tenseur des contraintes que nous dirons “effectives”, et τ_{ijk} le tenseur des hypercontraintes.

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - C_{ij} - F_{ij} - S_{ijk,k} + L_{ijk,k} \quad (D.16)$$

$$\tau_{ijk} = S_{ijk} - L_{ijk} \quad (D.17)$$

Puis, en effectuant à chaque fois différentes hypothèses sur le champ des déplacements et des déformations, nous obtenons une série d’identité.

$$\begin{aligned} \underline{f} + \underline{\tau} \cdot \underline{\nabla} &= 0 \\ (f_i + \tau_{ij,j} &= 0) \end{aligned} \quad (D.18)$$

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \underline{\tau} \cdot \underline{n} - D_j \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} + 2R \underline{\tau} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ (T_i &= \tau_{ij} n_j - D_j (S_{ijk} - L_{ijk}) n_k + 2R (S_{ijk} - L_{ijk}) n_j n_k) \end{aligned} \quad (D.19)$$

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{\tau} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ (M_i &= \tau_{ijk} n_j n_k) \end{aligned} \quad (D.20)$$

On peut observer que les égalités sont similaires à celles obtenues dans le cas classique.

D.3 Enoncés fondamentaux de la thermodynamique

La thermodynamique est essentiellement basée sur trois lois de conservation.

- L’équation d’équilibre (D.18) déterminée au paragraphe précédent peut être interprétée comme une loi de conservation de la quantité de mouvement en appliquant le théorème de la divergence

$$\int_{\mathcal{D}} \underline{f} dV = - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{T} dS \quad (D.21)$$

- La deuxième loi est la conservation de la masse. Si on définit ρ comme étant la masse volumique alors elle s'exprime par

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dV = 0 \quad (\text{D.22})$$

- La troisième loi de conservation est celle de l'énergie qui est déterminée par le premier principe de la thermodynamique.

D.3.1 Premier principe de la thermodynamique

Nous considérons, comme pour le principe des puissances virtuelles, un domaine $\mathcal{D}$ de frontière $\partial\mathcal{D}$ intérieur au système S étudié.

Nous allons maintenant introduire trois nouvelles variables :

- l'énergie interne, E

$$E = \int_{\mathcal{D}} \rho e dV \quad (\text{D.23})$$

où e est l'énergie interne spécifique.

- l'énergie cinétique, K

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} dV \quad (\text{D.24})$$

où $\underline{v}$ est le champ des vitesses.

- le taux de chaleur reçue par le domaine $\mathcal{D}$, Q

Il comprend la chaleur créée par les actions extérieures à $\mathcal{D}$ et la chaleur reçue par conduction au travers de la frontière $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$.

$$Q = \int_{\mathcal{D}} r dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{q} \cdot \underline{n} dS \quad (\text{D.25})$$

où r est une densité de production interne de chaleur

$\underline{q}$ est le vecteur flux de chaleur

$\underline{n}$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\mathcal{D}$

Le premier principe s'exprime par

$$\frac{d}{dt}(E + K) = \mathcal{P}^{(d)} + \mathcal{P}^{(c)} + Q \quad (\text{D.26})$$

où $\mathcal{P}^{(d)} + \mathcal{P}^{(c)}$ représente la puissance des efforts extérieurs.

Nous pouvons également exprimer l'énergie seulement en fonction de la puissance des efforts intérieurs et de la chaleur reçue en utilisant le principe des puissances virtuelles (D.1).

$$\frac{d}{dt}E = -\mathcal{P}^{(i)} + Q \quad (\text{D.27})$$

or

$$\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} [\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}}] dV$$

$$\left(\mathcal{P}^{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} [\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk}] dV \right)$$

et en utilisant le théorème de la divergence et le lemme fondamental nous obtenons la forme locale du premier principe :

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} + r - \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{D.28})$$

$$(\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk} + r - q_{i,i})$$

D.3.2 Deuxième principe de la thermodynamique

Dans ce principe nous introduisons deux nouvelles variables qui sont la température et l'entropie.

Nous supposons qu'il est possible de repérer la température par un champ à valeurs scalaires positives à chaque instant et tout point du domaine.

L'entropie S exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. Nous la définissons par une densité d'entropie spécifique η .

$$S = \int_{\mathcal{D}} \rho \eta dV \quad (\text{D.29})$$

Le second principe postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (\text{D.30})$$

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} dV - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} dS$$

que nous écrivons en général en utilisant le théorème de la divergence

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho \frac{d\eta}{dt} + \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} - \frac{r}{T} \right) dV \geq 0 \quad (\text{D.31})$$

Cette inégalité, vérifiée quel que soit le domaine $\mathcal{D}$, entraîne la forme locale

$$\rho \dot{\eta} + \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (\text{D.32})$$

Puis, en remarquant tout d'abord que

$$\frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\nabla} = \frac{\underline{q} \cdot \underline{\nabla}}{T} - \frac{\underline{q}}{T^2} \cdot T \underline{\nabla}$$

et en multipliant tout par T puisque $T > 0$, on en déduit à l'aide du premier principe (D.28) et du second principe (D.32) :

$$T \rho \dot{\eta} + \underline{q} \cdot \underline{\nabla} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot T \underline{\nabla} - r \geq 0 \quad (\text{D.33})$$

$$\left(T \rho \dot{\eta} + q_{i,i} - \frac{q_i}{T} T_{,i} - r \geq 0 \right)$$

Maintenant nous établissons l'inégalité fondamentale à l'aide des équations (D.28) et (D.33).

$$\rho (T \dot{\eta} - \dot{e}) + \underline{\sigma} : \dot{\underline{\xi}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} - \frac{q}{T} T \underline{\nabla} \geq 0 \quad (\text{D.34})$$

$$\left(\rho (T \dot{\eta} - \dot{e}) + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \geq 0 \right)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'obtient en introduisant une nouvelle variable, l'énergie libre spécifique ψ définie par

$$\psi = e - T\eta \quad (\text{D.35})$$

d'où après dérivation

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{T} \eta + T \dot{\eta}$$

il vient

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{\xi}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} - \rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} - \frac{q}{T} T \underline{\nabla} \geq 0 \quad (\text{D.36})$$

$$\left(\sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + S_{ijk} \dot{u}_{i,jk} - \rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \geq 0 \right)$$

Nous retrouvons une équation similaire à celle obtenue dans le cas classique avec des termes en plus dus au gradient de la déformation.

D.4 Variables d'état

L'état thermodynamique d'un milieu continu en un point sera caractérisé à un instant donné par la connaissance d'un certain nombre de variables intrinsèques au point considéré. Le choix de ces variables est guidé par la finesse de la description souhaitée.

Dans le cas de l'élasticité du second gradient, nous utilisons trois variables d'état que sont la déformation $\underline{\xi}$, le gradient de la déformation $\underline{K}$ et la température T . Le gradient de la température $T \underline{\nabla}$ sera introduit au chapitre II.

D.5 Potentiel thermodynamique et lois d'état

Nous choisissons un potentiel thermodynamique, le potentiel d'énergie libre spécifique duquel dérivent les lois d'état. Le potentiel thermodynamique dépend des variables d'état et des variables internes donc dans ce cas l'énergie libre est fonction de trois variables.

$$\psi = \psi(\underline{\xi}, \underline{K}, T) \quad (\text{D.37})$$

$$(\psi = \psi(u_{i,j}, u_{i,jk}, T))$$

Ensuite, dans l'inégalité de Clausius-Duhem (D.36), nous remplaçons $\dot{\psi}$ par sa valeur

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}} : \dot{\underline{\xi}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}} : \dot{\underline{K}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T}$$

et nous obtenons

$$\left(\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}} \right) : \dot{\underline{\xi}} + \left(\underline{S} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}} \right) : \dot{\underline{K}} - \left(\rho \eta + \rho \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{q}{T} T \underline{\nabla} \quad (\text{D.38})$$

$$\left((\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}}) \dot{u}_{i,j} + (S_{ijk} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,jk}}) \dot{u}_{i,jk} - (\rho \eta + \rho \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \frac{q_{,i}}{T} T_{,i} \geq 0 \right)$$

Cette équation peut être décomposée en une dissipation thermique

$$\frac{q}{T} \cdot T \underline{\nabla} \quad (D.39)$$

et une dissipation intrinsèque

$$D = (\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}) : \dot{\underline{\varepsilon}} + (\underline{S} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}}) : \dot{\underline{K}} - (\rho \eta + \rho \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} \quad (D.40)$$

Il faut que la dissipation intrinsèque soit nulle donc en annulant certains termes indépendamment nous définissons les lois de la thermoélasticité.

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} & (\sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}}) \\ \underline{S} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{K}} & (S_{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,jk}}) \\ \rho \eta &= - \frac{\partial \psi}{\partial T} \end{aligned} \quad (D.41)$$

Remarque

Dans le cas de l'élasticité linéaire, le potentiel thermodynamique est une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations.

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}$$

où ρ est la masse volumique
et $\underline{\underline{C}}$ le tenseur d'élasticité du quatrième ordre.

Et, par définition, le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ dérive du potentiel ψ pour donner la loi d'état.

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}$$

Nous verrons au chapitre II que, dans le cas de la thermoélasticité du second gradient, le raisonnement est similaire.

D.6 L'équation de la chaleur

Nous partons de l'équation de conservation de l'énergie (D.28)

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{S} : \dot{\underline{K}} + r - \underline{q} \cdot \underline{\nabla}$$

où nous remplaçons l'énergie interne par son expression tirée de $e = \psi + T \eta$ (D.35).

Puis nous insérons le potentiel d'énergie libre ψ fonction des variables d'état

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}, \underline{K}, T)$$

$$(\psi = \psi(u_{i,j}, u_{i,jk}, T))$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}} : \dot{\underline{\underline{K}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T}$$

Or nous avons démontré précédemment que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{K}} \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -\eta$$

donc il vient

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{K}}} - \eta \dot{T} \quad (\text{D.42})$$

En combinant ces trois équations, nous arrivons à

$$r - \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} = \rho T \dot{\eta} \quad (\text{D.43})$$

Maintenant nous substituons la densité d'entropie par sa valeur

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (\text{D.44})$$

Finalement, en utilisant les équations (D.42), (D.43) et (D.44) nous pouvons écrire

$$- \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} = \rho T \frac{\partial \eta}{\partial T} \dot{T} - r - T \left[\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{K}}} \right] \quad (\text{D.45})$$

et en introduisant la chaleur spécifique $C = T \frac{\partial \eta}{\partial T}$ et la loi de Fourier $\underline{\underline{q}} = -k T \underline{\underline{\nabla}}$ nous obtenons une équation similaire à celle obtenue dans la théorie classique.

$$k \Delta T = \rho C \dot{T} - r - T \left[\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{K}}} \right] \quad (\text{D.46})$$

Le couplage thermomécanique y apparaît clairement.

Ces équations sont généralisées au chapitre II dans le cas où $T \underline{\underline{\nabla}}$ apparaît explicitement dans les lois de comportement.

Annexe -E-

Le problème thermomécanique couplé

La résolution du problème thermomécanique couplé en élasticité est complexe car il s'agit d'un problème aux limites mais aussi un problème d'évolution.

Nous avons déjà écarté l'étude des conditions aux limites en ne considérant que le solide infini. Dans le chapitre II, nous nous sommes contentés de l'étude du cas où le champ de température est donné. Nous esquissons ici le cas général sans toutefois lever les difficultés liées au problème d'évolution et en développant une démarche intuitive (voir (Brahin-Ostmane et al., 1992; Francfort, 1983) pour un traitement plus rigoureux).

La résolution du problème passe par la résolution en cascade des problèmes $\mathcal{A}_0$ à $\mathcal{A}_3$ (équations (II.143) à (II.156) issues de l'analyse asymptotique) afin de définir les champs de déplacement $\underline{u}_i$ et de température θ_i .

Nous pourrions remarquer que, dans chaque cas, les problèmes thermique et mécanique sont découplés.

problème $\mathcal{A}_0$

$$\underline{u}_0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}_0(\underline{x}) \quad (\text{E.1})$$

$$\theta_0(\underline{x}, \underline{y}) = \Theta_0(\underline{x}) \quad (\text{E.2})$$

problème $\mathcal{A}_1$

$$\underline{u}_1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{X}'(\underline{y}) \delta_0 \quad (\text{E.3})$$

$$\theta_1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{X}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x \quad (\text{E.4})$$

problème $\mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\underline{c}}^\varepsilon : e_x \left(\underline{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underline{X}'(\underline{y}) \delta_0 \right) \right) \cdot \underline{\nabla}_y \\ & + \left(\underline{\underline{c}}^\varepsilon : e_y(\underline{u}_2) \right) \cdot \underline{\nabla}_y + \left(\underline{\underline{c}}^\varepsilon : \underline{\alpha}^\varepsilon (\underline{X}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x) \right) \cdot \underline{\nabla}_y \end{aligned}$$

$$= - \left(\underset{\sim}{\zeta}^{\varepsilon} : \underset{\sim}{\hat{\chi}} : e_x(\underline{U}_0) + \left(\underset{\sim}{\hat{\chi}}' - \underset{\sim}{\alpha}^{\varepsilon} \right) \delta_0 \right) \cdot \underline{\nabla}_x$$

La partie mécanique se résout, comme au chapitre II, en résolvant un problème linéaire avec des forces de volumiques fictives.

$$\underline{u}_2(\underline{x}, \underline{y}) = \underset{\sim}{Y}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underset{\sim}{Y}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x$$

Et en ce qui concerne la partie thermique

$$\underline{q}_0 = -\lambda^{\varepsilon} \underset{\sim}{\hat{\chi}}'' \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x \quad (\text{E.5})$$

$$\underline{q}_1 = -\lambda^{\varepsilon} \left((\underset{\sim}{X}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x) \cdot \underline{\nabla}_x + \theta_2 \underline{\nabla}_y \right) \quad (\text{E.6})$$

donc

$$\begin{aligned} & - \left(\lambda^{\varepsilon} \theta_2 \underline{\nabla}_y \right) \cdot \underline{\nabla}_y + \left((\underset{\sim}{X}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x) \cdot \underline{\nabla}_x \right) \cdot \underline{\nabla}_y + \left(\lambda^{\varepsilon} \underset{\sim}{\hat{\chi}}'' \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x \right) \cdot \underline{\nabla}_x \\ & - \underset{\sim}{\zeta}^{\varepsilon} : \underset{\sim}{\alpha}^{\varepsilon} : \left(e_x(\underline{U}_0) + \underset{\sim}{\hat{\chi}}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underset{\sim}{\hat{\chi}}'(\underline{y}) \delta_0 \right) = \beta^{\varepsilon} \dot{\theta}_0 \end{aligned}$$

Cette équation différentielle peut être résolue également en interprétant chaque terme de l'équation de la chaleur comme une source de chaleur fictive linéaire en $\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x$, $e_x(\underline{U}_0)$ et $\dot{\theta}_0$.

Donc nous pourrions écrire que :

$$\theta_2(\underline{x}, \underline{y}) = \underset{\sim}{Y}''(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underset{\sim}{Y}^{(3)}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underset{\sim}{Y}^{(4)}(\underline{y}) \dot{\theta}_0 \quad (\text{E.7})$$

problème $\mathcal{A}_3$

Nous résolvons le problème $\mathcal{A}_3$ en suivant la même méthodologie.

$$\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{\nabla}_y = -\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\nabla}_x$$

où

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_2 &= \underset{\sim}{\zeta}^{\varepsilon} : e_x \left(\underset{\sim}{Y}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underset{\sim}{Y}'(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x + e_y(\underline{u}_3) \right) \\ &+ \underset{\sim}{\zeta}^{\varepsilon} : \underset{\sim}{\alpha}^{\varepsilon} : \left(\underset{\sim}{Y}''(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underset{\sim}{Y}^{(3)}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underset{\sim}{Y}^{(4)}(\underline{y}) \dot{\theta}_0 \right) \\ \underline{\sigma}_1 &= \underset{\sim}{\zeta}^{\varepsilon} : \left(e_x \left(\underset{\sim}{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underset{\sim}{X}'(\underline{y}) \theta_0 \right) + \underset{\sim}{\hat{\chi}}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underset{\sim}{\hat{\chi}}'(\underline{y}) \cdot \delta_0 \underline{\nabla}_x \right) \\ &- \underset{\sim}{\zeta}^{\varepsilon} : \underset{\sim}{\alpha}^{\varepsilon} : (\underset{\sim}{X}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x) \end{aligned}$$

Nous obtenons de nouveau une équation d'équilibre linéaire où les termes de couplage thermomécanique du problème $\mathcal{A}_3$ complètent le précédent résultat (équation II.167) par les termes suivants

$$\begin{aligned} \underline{u}_3(\underline{x}, \underline{y}) &= \underset{\sim}{Z}(\underline{y}) :: (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underset{\sim}{Z}'(\underline{y}) : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \\ &+ \underset{\sim}{Z}''(\underline{y}) : e_x(\underline{U}_0) + \underset{\sim}{Z}^{(3)}(\underline{y}) \dot{\theta}_0 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Si nous nous intéressons à la partie thermique en résolvant l'équation de la chaleur

$$-q_1 \cdot \nabla_x - q_2 \cdot \nabla_y - \tilde{c}^\varepsilon : \alpha^\varepsilon : (e_x(\dot{u}_1) + e_y(\dot{u}_2)) = \beta^\varepsilon \dot{\theta}_1$$

avec

$$\begin{aligned} q_1 &= - \lambda^\varepsilon \left(\tilde{X}''(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x) + \hat{Y}''(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x) \right) \\ &\quad - \lambda^\varepsilon \left(\tilde{Y}^{(3)}(\underline{y}) : e_x(\dot{U}_0) + Y^{(4)}(\underline{y}) \dot{\theta}_0 \right) \\ q_2 &= - \lambda^\varepsilon \left(\left(\tilde{Y}''(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x) \right) \cdot \nabla_x \right) \\ &\quad - \lambda^\varepsilon \left(\left(\tilde{Y}^{(3)}(\underline{y}) : e_x(\dot{U}_0) \right) \cdot \nabla_x + Y^{(4)}(\underline{y}) \dot{\theta}_0 \nabla_x + \theta_3 \nabla_y \right) \\ e_x(\dot{u}_1) &= e_x \left(\tilde{X}(\underline{y}) : e_x(\dot{U}_0) + \tilde{X}'(\underline{y}) \otimes \dot{\theta}_0 \nabla_x \right) \\ e_x(\dot{u}_2) &= e_x \left(\tilde{Y}(\underline{y}) : (e_x(\dot{U}_0) \otimes \nabla_x) + \tilde{Y}'(\underline{y}) \cdot \dot{\theta}_0 \nabla_x \right) \\ &= \hat{Y}(\underline{y}) : (e_x(\dot{U}_0) \otimes \nabla_x) + \hat{Y}'(\underline{y}) \cdot \dot{\theta}_0 \nabla_x \end{aligned}$$

alors nous obtenons de la même manière :

$$\theta_3(\underline{x}, \underline{y}) = \tilde{Z}^{(4)}(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x \otimes \nabla_x) + \tilde{Z}^{(5)}(\underline{y}) : (e_x(\dot{U}_0) \cdot \nabla_x) + \tilde{Z}^{(6)}(\underline{y}) \cdot \dot{\theta}_0 \nabla_x \quad (E.9)$$

Par conséquent, les grandeurs effectives du problème thermoélastique couplé sont complétées par des termes liés au couplage thermomécanique par rapport aux résultats obtenus au chapitre II.

Le champ de déplacement vaut

$$\begin{aligned} \underline{u}^\varepsilon(\underline{x}) &= \underline{U}^0(\underline{x}) + \varepsilon \tilde{X}(\underline{y}) : e_x(\underline{U}^0) + \varepsilon^2 \tilde{Y}(\underline{y}) : (e_x(\underline{U}^0)) \otimes \nabla_x \\ &\quad + \varepsilon^3 \tilde{Z}(\underline{y}) :: (e_x(\underline{U}^0)) \otimes \nabla_x \otimes \nabla_x + \dots \\ &\quad + \varepsilon \tilde{X}'(\underline{y}) \dot{\theta}_0 + \varepsilon^2 \tilde{Y}'(\underline{y}) \cdot \dot{\theta}_0 \nabla_x + \varepsilon^3 \tilde{Z}'(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(\tilde{Z}''(\underline{y}) : e_x(\dot{U}_0) + \tilde{Z}^{(3)} \dot{\theta}_0 \right) + \dots \end{aligned} \quad (E.10)$$

Le champ de température vaut

$$\begin{aligned} \delta^\varepsilon(\underline{x}) &= \delta_0 + \varepsilon \tilde{X}''(\underline{y}) \cdot \theta_0 \nabla_x \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\tilde{Y}''(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x) + Y^{(3)}(\underline{y}) : e_x(\dot{U}_0) + Y^{(4)}(\underline{y}) \dot{\theta}_0 \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(\tilde{Z}^{(4)}(\underline{y}) : (\theta_0 \nabla_x \otimes \nabla_x \otimes \nabla_x) + \tilde{Z}^{(5)}(\underline{y}) : (e_x(\dot{U}_0) \cdot \nabla_x) \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(\tilde{Z}^{(6)}(\underline{y}) \cdot \dot{\theta}_0 \nabla_x \right) + \dots \end{aligned} \quad (E.11)$$

Et la contrainte effective prend la forme

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{\sigma}^e \rangle &= \underline{\underline{C}}^0 : (e_x(\underline{U}_0) - \delta_0 \underline{\alpha}^0) \\
 &+ \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{C}}^1 : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x - \underline{\alpha}^1 \cdot \theta_0 \underline{\nabla}_x) \\
 &+ \underline{\varepsilon}^2 \underline{\underline{C}}^2 : (e_x(\underline{U}_0) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x - \underline{\alpha}^2 : \theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) \\
 &+ \underline{\varepsilon}^2 (\underline{\underline{C}}^{(3)} : e_x(\dot{\underline{U}}_0) + \underline{\underline{C}}^{(4)} \dot{\theta}_0) + \dots
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

Ces derniers termes sont actifs seulement en régime transitoire.

De manière similaire, l'expression du flux de chaleur effectif $\underline{Q}$ peut être déduite :

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{q}^e \rangle &= - \langle \lambda^e : \hat{\chi}' \rangle \theta_0 \underline{\nabla}_x + \underline{\varepsilon} \left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^1 : \theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x + \underline{\underline{\mathcal{A}}}^2 : e_x(\dot{\underline{U}}_0) + \underline{\underline{\mathcal{A}}}^3 \dot{\theta}_0 \right) \\
 &+ \underline{\varepsilon}^2 \left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}^4 : (\theta_0 \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\underline{\mathcal{A}}}^5 : (e_x(\dot{\underline{U}}_0) \otimes \underline{\nabla}_x) + \underline{\underline{\mathcal{A}}}^6 \cdot \dot{\theta}_0 \underline{\nabla}_x \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Les premiers termes montrent, qu'au premier ordre, nous retrouvons la loi de Fourier à l'échelle macroscopique. Mais si nous prenons les termes d'ordre supérieur en considération, nous déterminons une "loi de Fourier généralisée" où apparaissent des gradients de température d'ordre supérieur, et aussi des termes en gradient de vitesse.

Annexe -F-

Implantation et Simulation avec un milieu du second gradient

Sommaire

F.1	Elasticité linéaire d'un milieu du second gradient	209
F.2	Implantation dans le code de calcul éléments finis ZéBuLoN	211
F.3	Deux exemples simples	211
F.3.1	Test d'extension	212
F.3.2	Cisaillement simple	212
F.3.3	Comparaison calcul analytique / simulation numérique	212
F.4	Comparaison avec la théorie des poutres de Bernoulli	212

Dans le cadre de la thermoélasticité d'un matériau hétérogène, nous venons de proposer l'utilisation d'un milieu effectif du second gradient (chapitre II). Mais le succès des milieux d'ordre supérieur dépend étroitement des méthodes numériques mises en oeuvre pour simuler leur comportement mécanique.

F.1 Elasticité linéaire d'un milieu du second gradient

Nous proposons une méthode de résolution numérique de la théorie du second gradient (Cardona et Forest, 1999), présentant un raffinement par rapport à la théorie classique, où le milieu est décrit non seulement à partir du tenseur classique des déformations mais également à l'aide du second gradient du déplacement.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} + \underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{u}}) \quad (\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}))$$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} \quad (K_{ijk} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik}))$$

Les forces duales dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs sont le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur des hypercontraintes $\underline{\underline{S}}$. Dans le cas statique ils doivent remplir les conditions suivantes :

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}$$

Les conditions aux limites et les lois d'état qui en découlent ont été explicitées précédemment.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, en prenant l'énergie libre comme fonction de $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{K}}, T)$, l'inégalité de Clausius-Duhem peut se mettre sous la forme :

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + (\underline{\underline{S}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}}) : \dot{\underline{\underline{K}}} - \rho (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}) \dot{T} - \frac{q}{T} \cdot (T \underline{\underline{\nabla}}) \geq 0 \quad (F.1)$$

Les variables $\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{K}}, T$ pouvant être imposées localement de manière indépendante et en supposant une régularité suffisante des quantités introduites, nous obtenons les lois d'état suivantes (annexe D) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}; \quad \underline{\underline{S}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}}; \quad \rho \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (F.2)$$

Le cas de l'élasticité isotrope linéaire, où la densité d'énergie libre dépend de la déformation et du gradient de la déformation, a été étudié par (Toupin, 1962), (Mindlin, 1965) et le potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + a_1 K_{kii} K_{jjk} + a_2 K_{jji} K_{kki} \\ + a_3 K_{kii} K_{kjj} + a_4 K_{kji} K_{kji} + a_5 K_{kji} K_{ijk} \end{aligned} \quad (F.3)$$

où λ and μ sont les coefficients de Lamé et les a_i sont cinq coefficients supplémentaires de dimension $MPa.L^2$.

A partir de cette expression nous sommes capables de déterminer le tenseur $\underline{\underline{A}}$ (tenseur d'ordre 6) qui relie les hypercontraintes aux courbures en utilisant les lois d'état.

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{K}}}$$

Et en utilisant les différentes symétries du tenseur du second gradient $\underline{\underline{K}}$ (Murdoch, 1979) sur les deux premiers indices, nous obtenons sous forme indicielle :

$$\begin{aligned} S_{ijk} = \frac{1}{2} a_1 (K_{ppk} \delta_{ij} + K_{ppj} \delta_{ik} + 2 K_{ipp} \delta_{jk}) \\ + 2 a_2 K_{ppi} \delta_{jk} + a_3 (K_{kpp} \delta_{ij} + K_{jpp} \delta_{ik}) \\ + 2 a_4 K_{kij} + a_5 (K_{ijk} + K_{jik}) \end{aligned} \quad (F.4)$$

Le tenseur d'élasticité d'ordre 6 qui relie le tenseur des hypercontraintes $\underline{\underline{S}}$ au tenseur du second gradient du déplacement peut s'écrire sous forme matricielle, dans le cas 2D, de la

manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} S_{111} \\ S_{112} \\ S_{221} \\ S_{222} \\ S_{121} \\ S_{122} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & a_1 + 2a_2 & 0 & 0 & a_1 + 2a_3 \\ 0 & 2(a_2 + a_4) & 0 & a_1 + 2a_2 & a_1 + 2a_5 & 0 \\ a_1 + 2a_2 & 0 & 2(a_2 + a_4) & 0 & 0 & a_1 + 2a_5 \\ 0 & a_1 + 2a_2 & 0 & 2a & a_1 + 2a_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_5 & 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_3 & a_{345} & 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + a_3 & 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_5 & 0 & 0 & a_{345} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{111} \\ K_{112} \\ K_{221} \\ K_{222} \\ K_{121} \\ K_{122} \end{Bmatrix}$$

avec $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ et $a_{345} = a_3 + 2a_4 + a_5$.

F.2 Implantation dans le code de calcul éléments finis ZéBuLoN

Pour la programmation dans un code par éléments finis, nous assimilerons le milieu du second gradient à un milieu micromorphe présentant une liaison interne. Un milieu micromorphe est décrit par un vecteur champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ et un champ de déformation non nécessairement compatible $\underline{\chi}(\underline{x})$. Nous considérons seulement la partie symétrique du tenseur $\underline{\chi}^s$. Les gradients associés sont la déformation $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{K} = \underline{\chi}^s$. Dans le cas bidimensionnel, cinq degrés de liberté $U_1, U_2, \chi_{11}^s, \chi_{22}^s$ et χ_{12}^s sont attribués à chaque noeud. Une interpolation quadratique a été retenue pour le champ de déplacement et une interpolation linéaire pour la micro-déformation. Dans la formulation variationnelle du problème, un terme de pénalité est introduit pour imposer la liaison :

$$\underline{\chi}^s \simeq \underline{\varepsilon} \quad (\text{F.5})$$

ce qui a pour effet de faire dégénérer le milieu micromorphe en un milieu du second gradient. Par conséquent, la forme variationnelle à discrétiser est :

$$\int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} + \underline{S} : (\underline{\chi}^s \otimes \underline{\nabla})) dV - \lambda \int_{\Omega} \|\underline{\varepsilon} - \underline{\chi}^s\| dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot \underline{u} + \underline{M} : \underline{\chi}^s) dS = 0 \quad (\text{F.6})$$

où λ est un facteur de pénalité pris aussi grand que nécessaire. Une autre méthode plus efficace serait de traiter λ comme un multiplicateur de Lagrange (Shu et al., 1999) à déterminer au cours du calcul. La programmation proposée est similaire à celle utilisée par (Shu et Fleck, 1998) pour modéliser la théorie de Koiter. Selon cette formulation, toutes les composantes du tenseur de micro-déformation et les réactions duales peuvent être imposées comme conditions aux limites, de sorte qu'un traitement spécial est nécessaire pour n'imposer que les composantes normales du gradient du déplacement et les forces associées (II.73).

F.3 Deux exemples simples

Ayant pour objectif de tester l'implantation du modèle dans un code de calcul éléments finis, nous traiterons deux exemples pour lesquels une solution analytique est disponible. Nous considérons une structure bi-dimensionnelle de hauteur h et infinie dans la direction 1. Le chargement considéré donnera un champ de déplacement fonction seulement de la coordonnée x_2 .

F.3.1 Test d'extension

Nous prenons un champ de déplacement de la forme : $\underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$.

A partir de ce champ de déplacement $\underline{u}$ et des relations exposées au paragraphe précédent nous déterminons les grandeurs caractéristiques non nulles et l'équation d'équilibre qui prend la forme suivante :

$$(\lambda + 2\mu) u''(x_2) - 2a u'''(x_2) = 0 \quad (\text{F.7})$$

où l'exposant prime indique une dérivée par rapport à la coordonnée x_2 .

F.3.2 Cisaillement simple

Dans cet exemple le champ de déplacement est $\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

et il doit vérifier l'équation d'équilibre suivante :

$$\mu u''(x_2) - \frac{1}{2} a_{345} u'''(x_2) = 0 \quad (\text{F.8})$$

F.3.3 Comparaison calcul analytique / simulation numérique

Dans les deux exemples, l'équation différentielle à résoudre a la même forme :

$$\omega^2 u'' - u''' = 0 \quad (\text{F.9})$$

et la solution est

$$u(x_2) = C_1 + C_2 x_2 + C_3 e^{\omega x_2} + C_4 e^{-\omega x_2} \quad (\text{F.10})$$

Les conditions aux limites prises en compte pour déterminer les constantes de la solution précédente sont les suivantes :

$$u(0) = 0 ; u(h) = 1 ; u'(0) = 0 ; u'(h) = -5 \quad (\text{F.11})$$

Dans un deuxième temps, nous effectuons un calcul de structure en imposant les mêmes conditions aux limites, car grâce à la théorie du second gradient, nous pouvons imposer des déplacements mais également les dérivées normales des déplacements.

Une simulation pour $h = 1$ et $\omega = 1$ est donnée sur la figure (F.1) et comparée aux résultats obtenus analytiquement.

F.4 Comparaison avec la théorie des poutres de Bernoulli

La poutre de Bernoulli, où “les sections normales à la fibre neutre restent droites après déformation”, est un exemple uni-dimensionnel d'un milieu du second gradient. Les variables cinématiques essentielles sont le déplacement et la rotation de la fibre moyenne que l'on peut associer à la dérivée du déplacement.

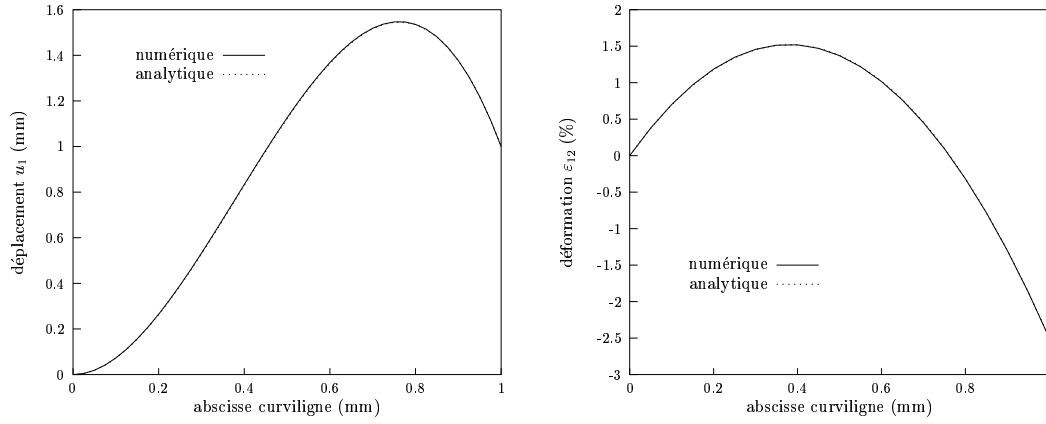


Figure F.1 : Déplacement (gauche) et déformation (droite) pour l'extension ou le glissement simple pour un milieu continu du second gradient dans le cas bi-dimensionnel : résultats analytiques et numériques.

Partant de relations connues en résistance des matériaux

$$\frac{d^2 M}{dx^2}(x) - f(x) = 0 \quad M = E I u''(x)$$

où M est le moment fléchissant

$f(x)$ la force volumique

E le module de Young

et I le moment quadratique,

nous remarquons que le champ de déplacement d'une poutre rectiligne soumise aux conditions (F.11) à ses deux extrémités doit également vérifier l'équation différentielle du quatrième ordre suivante :

$$u'''' = 0 \quad (\text{F.12})$$

dont la solution est

$$u(x_2) = D_1 + D_2 x_2 + D_3 x_2^2 + D_4 x_2^3 \quad (\text{F.13})$$

Les champs de déplacement (F.10) et (F.13) sont différents mais coïncident numériquement sur la longueur de la poutre comme nous pouvons l'observer sur la figure (F.2). Les solutions ont été délibérément extrapolées en dehors de la poutre afin de mettre en évidence la zone pour laquelle les deux théories sont équivalentes.

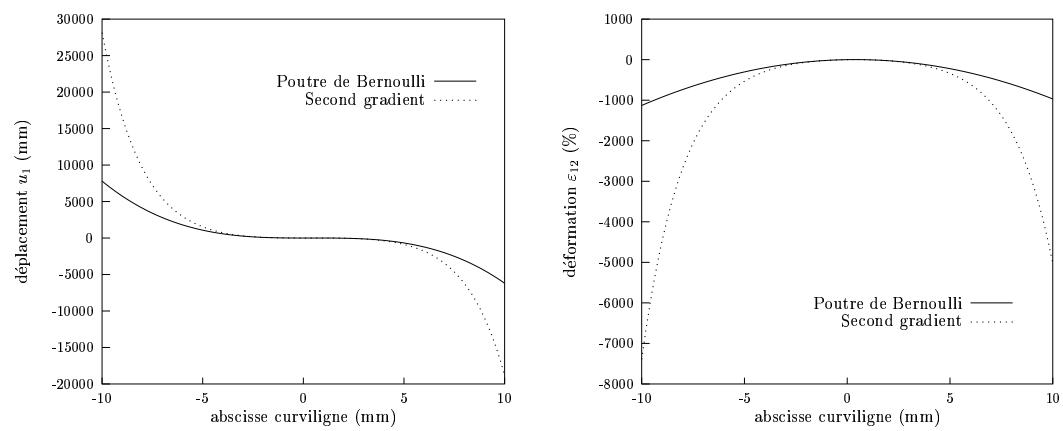


Figure F.2 : Comparaison du déplacement et de la déformation

Annexe -G-

Calcul des coefficients homogènes équivalent du second gradient

Nous avons vu au chapitre II que nous pouvions déterminer les coefficients homogènes équivalents en utilisant les méthodes asymptotiques.

Dans cette annexe, l'objectif est de proposer une autre méthode d'identification des propriétés effectives d'un milieu du second gradient, qui soit simplement utilisable dans le cas de comportement local non linéaire.

Nous proposons ici une extension au cas périodique de la méthode proposée dans (Golganu et al., 1996; Forest, 1999).

Comme au chapitre I, où nous avons déterminé la matrice $\tilde{c}^{hom}$ dans le cas classique, nous cherchons à obtenir la matrice $\tilde{A}^{hom}$ (équation II.6) pour le milieu du second gradient.

Les premiers essais ont été réalisés sur une cellule de base en 2 dimensions (Cardona et Forest, 2000) en appliquant :

- des conditions homogènes au contour (figure G.1)

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\tilde{E}} : \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) \quad (G.1)$$

- des conditions de périodicité (figure G.2)

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\tilde{E}} : \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{v} \text{ avec } \underline{v} \text{ périodique} \quad (G.2)$$

Ces extensions sont compatibles avec une extension du lemme de Hill-Mandel sous le forme :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\Sigma} : \underline{\tilde{E}} + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{K}} \quad (G.3)$$

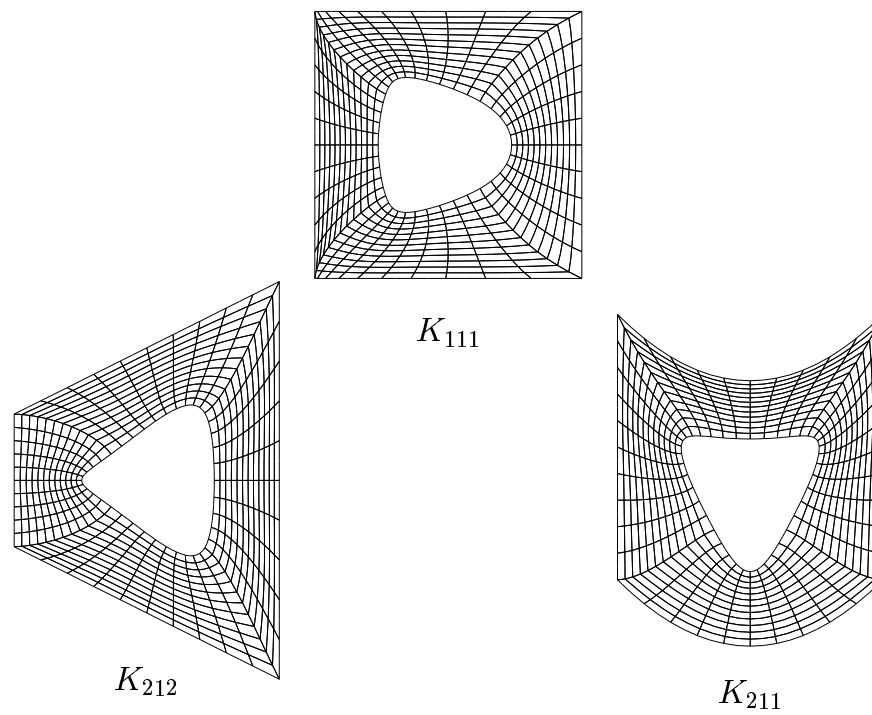


Figure G.1 : Conditions homogènes au contour

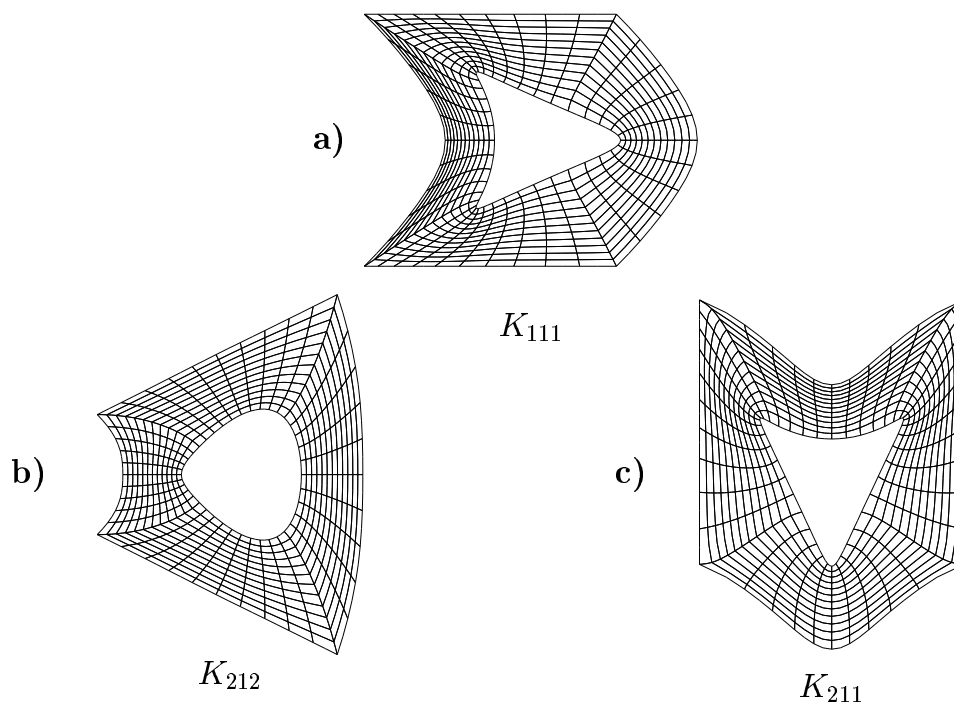


Figure G.2 : Conditions de périodicité

Contrairement au cas classique, les contraintes ne peuvent pas être antipériodiques dans les cas a) et b) en particulier (figure G.2), puisqu'il existe un gradient de contraintes.

Une méthode rigoureuse n'a pas encore pu être développée pour appliquer strictement ces conditions. Il resterait alors à comparer les valeurs des modules effectifs trouvés à ceux issus de l'analyse asymptotique de (Boutin, 1996) pour voir si il s'agit d'une bonne estimation. Ce travail reste à faire ainsi que son application dans le cas non linéaire.