



HAL
open science

Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion

Olivier Thomas

► **To cite this version:**

Olivier Thomas. Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion. Mécanique [physics.med-ph]. Télécom ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00005656v1

HAL Id: tel-00005656

<https://pastel.hal.science/tel-00005656v1>

Submitted on 5 Apr 2004 (v1), last revised 18 Jul 2012 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité :

Mécanique – Acoustique

présenté par

Olivier THOMAS

pour obtenir le grade de DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

**Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de
milieux minces élastiques**

—

Application aux instruments de percussion

Soutenue de 26 Octobre 2001,

devant le jury composé de :

Olivier ALLIX	<i>Rapporteur</i>
José ANTUNÈS	<i>Rapporteur</i>
Denis AUBRY	<i>Examineur</i>
Xavier BOUTILLON	<i>Examineur</i>
Antoine CHAIGNE	<i>Directeur de thèse</i>
Jean-Baptiste LEBLOND	<i>Président du jury</i>
Christophe PIERRE	<i>Examineur</i>

[...] L'orchestre se compose d'un percussionniste, d'un frappeur de cymbales, d'un chanteur-prieur et de deux souffleurs de trompe. Il est possible d'évoquer les percussions, les heurts de cymbales, la méloppée du chanteur. Depuis Stravinsky et après les apports du jazz et de la musique concrète, notre oreille est à même de saisir les timbres marqués, les attaques abruptes du son, la prévalence du rythme, ou de la polyrythmie sur la ligne mélodique. Cependant, dans le concert des instruments bouddhistes, les trompes échappent à notre entendement. Les basses qui surgissent n'ont aucun équivalent en quelques musiques que l'Occident ait conçues ou adoptées.

Le basson, le tuba, le saxophone baryton, la clarinette basse... rien ne peut suggérer de telles vibrations. [...]

Le bouquet des basses tibétaines se brise aussitôt émis. C'est un son fractal. Ou plutôt, ses contours se fractionnent ipso facto. Ils sont soufflés en puissance, en volume, en timbre, et cependant se brisent dès l'émission. Se pulvérisant, ils gardent néanmoins toute leur puissance et leur ampleur. [...]

Ces basses comme de gros coussins de terre cuite et de vent. Un saxophone baryton, ayant avalé au préalable un tuba, explose amoureusement à vos pieds, en vous, tout autour. [...]

Pierre Sterckx,

[107], chap. "Images écrites au Tibet", pp. 153-154.

Sommaire

Remerciements	6
----------------------	----------

I GONGS ET CYMBALES

1 Introduction	15
1.1 Les cymbales et les gongs	15
1.1.1 Géométrie, utilisation	15
1.1.2 Fabrication	19
1.2 Cadre de la présente étude	19
1.2.1 Acoustique instrumentale et modèles physiques	19
1.2.2 Vibrations non-linéaires de cymbales et de gongs	20
1.2.3 Modélisation	22
1.2.4 Organisation du manuscrit	22
2 Analyse des vibrations d'un gong	23
2.1 Le gong	23
2.2 Analyse modale expérimentale	24
2.3 Analyse en régime libre	32
2.4 Analyse en régime forcé	35
2.4.1 Détails expérimentaux	35
2.4.2 Vibrations unimodale	35
2.4.3 Route vers le chaos	41
2.4.4 Examen de quelques couplages	43
2.5 Conclusion	53

II PLAQUES CIRCULAIRES

3 Vers les équations de Von-Kàrmàn	57
3.1 Introduction	58
3.2 Établissement des équations non-linéaires de plaque	60
3.2.1 Notations	60
3.2.2 La transformation	60
3.2.3 Les déformations	63
3.2.4 Les contraintes	64
3.2.5 Forces de membrane et moments de flexion	67

3.2.6	Application du principe des travaux virtuels	68
3.2.7	Analyse dimensionnelle des équations et simplifications	72
3.2.8	Effort tranchant	73
3.3	Formulation non-linéaire du problème de vibration de plaque	75
3.3.1	Récapitulatif : formulation en efforts	75
3.3.2	Formulation en déplacement	76
3.3.3	Fonction de force et conditions de compatibilité	77
3.3.4	Formulation mixte	78
3.3.5	Conditions aux limites	80
3.4	Discussion	80
3.4.1	Non-linéarités et domaine de validité	80
3.4.2	Validation mathématique des hypothèses	81
3.4.3	Modèles d'ordre supérieur	82
	Récapitulatif des notations	85
4	Projection modale	87
4.1	Introduction	87
4.1.1	Projection sur les modes propres linéaires	87
4.1.2	Modes normaux non-linéaires	88
4.2	Formulation du problème	89
4.2.1	Amortissement	89
4.2.2	Formulation adimensionnée des équations	89
4.3	Modes de vibration	91
4.3.1	Fréquences et déformées	91
4.3.2	Orthogonalité	97
4.4	Projection modale	99
4.4.1	Fonction de force	100
4.4.2	Déplacement transversal	101
4.4.3	Discussion	102
5	Réduction à un mode	105
5.1	Introduction	105
5.1.1	Relations de résonances	106
5.1.2	Cadre de notre étude	106
5.2	Vibrations de flexion axisymétriques	108
5.2.1	Solution perturbative en régime forcé	108
5.2.2	Solution perturbative en régime libre conservatif	112
5.3	Vibrations de flexion asymétriques	114
5.3.1	Influence de légères imperfections de la plaque	115
5.3.2	Couplage non-linéaire entre les deux configurations préférentielles	116
5.3.3	Influence des paramètres	120
5.3.4	Solution générale - Ondes progressives	120
5.4	Effets non-linéaires de membrane	122
5.4.1	Mode axisymétrique	122
5.4.2	Mode asymétrique	126
5.4.3	Vibrations de membrane en régime couplé	131
5.5	Conclusion	131
6	Validations expérimentales	133
6.1	Détails expérimentaux	133
6.2	Mode axisymétrique	135
6.3	Couplage non-linéaire entre les deux configurations préférentielles	137
6.3.1	Configurations préférentielles	137
6.3.2	Observations expérimentales	139

6.3.3	Modèle théorique avec Q_2 non nul	141
6.3.4	Recalage du modèle	146
6.4	Cas d'un désaccord négatif entre les pulsations propres	146
6.4.1	Un peu de théorie	146
6.4.2	Observations expérimentales	147
6.5	Discussion	147
6.5.1	Symétrie du système	147
6.5.2	Ordre de grandeur du déplacement	149
6.5.3	Effet du second ordre	149
6.6	Conclusion	151

III DES SYSTÈMES DISCRETS À 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ

7	Non-linéarités géométriques	155
7.1	Une barre isolée	155
7.1.1	Effort normal	155
7.1.2	Domaine de validité	156
7.2	Système "plat"	158
7.2.1	Force de rappel	158
7.2.2	Force de rappel avec comportement linéaire des barres	159
7.2.3	Discussion	159
7.3	Système avec inclinaison initiale	161
7.3.1	Force de rappel	161
7.3.2	Influence de la courbure	162
7.4	Systèmes avec raideur en flexion	163
7.4.1	Équations d'équilibre	164
7.4.2	Cas des extrémités fixes : influence de l'épaisseur	166
7.4.3	Cas des extrémités mobiles : retour sur les équations de Von Kàrmàn	168
7.5	Conclusion	169
8	Oscillations non-linéaires	171
8.1	Le pendule	171
8.2	Effet raidissant ou assouplissant	175
8.2.1	Solution analytique perturbative de l'équation du mouvement	175
8.2.2	Influence de l'inclinaison et de l'épaisseur	177
8.2.3	Les gongs d'opéra chinois	179
8.2.4	Les modes du tam-tam	179
8.3	Distorsion dissymétrique des oscillations	181
8.3.1	Effets de la courbure	181
8.3.2	Interprétation géométrique des effets raidissant et assouplissant	184
8.4	Vibrations de grande amplitude	185
8.4.1	Système sans raideur en flexion	185
8.4.2	Influence de l'épaisseur	187
9	Conclusion générale et perspectives	191
9.1	Non-linéarités géométriques dans les milieux minces	192
9.2	Vers un modèle continu de cymbales et de gongs	193
9.3	Dans le futur...	197

ANNEXES

A	Étude et calibration d'un excitateur électromagnétique	201
A.1	Description	201
A.2	Modélisation du comportement magnéto-dynamique	201
A.2.1	Champ magnétique créé par la bobine	201
A.2.2	Force exercée sur l'aimant	203
A.3	Mesures de la force exercée sur la structure	205
A.3.1	Montage expérimental	205
A.3.2	Étude mécanique du système tête d'impédance-aimant	205
A.3.3	Force en fonction de la position	206
A.3.4	Force en fonction de l'intensité du courant	206
A.4	Conclusions	209
B	Quelques analyses modale	211
B.1	Déformées modales non-identifiées du gong.	211
B.2	Analyses modales par la méthode des Éléments Finis.	211
C	Travaux virtuels dans le cas de la plaque	213
C.1	Travail virtuel des efforts intérieurs	213
C.2	Travail virtuel des efforts extérieurs	215
C.3	Travail virtuel des quantités d'accélération	216
D	Calcul des coefficients de couplage dans les plaques	219
D.1	Coefficients $\Gamma_{pq\alpha u}$	219
D.1.1	Cas des vibrations axisymétriques	219
D.1.2	Cas des vibrations asymétriques	220
D.2	Coefficients G_{pqb}	224
D.2.1	Cas d'un mode axisymétrique	224
D.2.2	Cas d'un mode asymétrique	224
	Bibliographie	225

PARTIE I

Gongs et cymbales

Voici le gong, infiniment plus brutal [...]. Bref, le gong, même comparé en pensée ou par la mémoire à d'autres gongs, déchire le système de l'orchestre, et il faut l'aimable hospitalité du laxisme contemporain pour jouir de ce pavé dans la mare, de cette énorme faute d'orthographe, et pour orner aussitôt cette idole de guirlandes...Ce gong nous vient d'ailleurs. Il émerge, objet sonore solitaire. On n'entend que lui. [...]

*Pierre Schaeffer,
[104], §18.7, Diabolus in musica*

Introduction

Le travail de thèse exposé dans ce manuscrit s’inscrit dans le cadre général de recherches sur des modèles physiques d’instruments de musique dirigées par Antoine Chaigne ; il fait suite au travail de thèse de Cyril Touzé [122], et correspond ainsi à la deuxième étude sur les instruments de percussions dits “non-linéaires” menée au département Traitement du Signal et des Images de l’École Nationale Supérieure des Télécommunications. La présente étude a pour objectif de contribuer à l’élaboration d’un modèle physique de comportement, en situation de jeu, des instruments de percussion du type cymbales et gongs. Avant toute chose, il convient de présenter brièvement les objets de cette étude.

1.1 Les cymbales et les gongs

Dans la classification utilisée usuellement en occident¹, les cymbales et les gongs font partie de la famille des instruments de percussion, et plus particulièrement de celle des idiophones (“le son de l’instrument est produit par la matière même, sans qu’on ait recours à la tension de membranes ou de cordes”, [126]). Ces instruments sont parfois qualifiés de “non-linéaires” [122], du fait que les mécanismes de production de leur son ne peuvent pas être prédits par des modèles mathématiques linéarisés. Par abus de langage, les phénomènes particuliers associés à des modèles non-linéaires seront simplement qualifiés de “non-linéaires” dans la suite. Une photographie représentée sur la figure 1.1 représente certains de ces instruments.

1.1.1 Géométrie, utilisation

Les gongs

Les gongs sont des instruments originaire d’Asie du sud-est, les premiers modèles tels que nous le connaissons aujourd’hui ayant fait leur apparition en Chine au VI^e siècle. Ils sont en général fabriqués en bronze (alliage de cuivre et d’étain). Leur géométrie est celle de coques circulaires axi-symétriques, plus ou moins bombées. Ils possèdent tous des bords recourbés vers l’intérieur, en une paroi latérale. Selon l’importance des phénomènes non-linéaires mis en jeu, on peut classer ces instruments en trois familles.

¹La classification utilisée ici est celle de Hornbostel/Sachs, qui distingue les *idiophones*, les *membranophones*, les *cordophones* et les *aérophones*, avec les deux premiers couramment regroupés dans les instruments de percussion. Les chinois utilisent une classification en huit classes (métal, pierre, terre, bois, bambou,alebasse, peau, soie), fondée sur la matière principale dont l’instrument est fabriqué [126].



FIG. 1.1 – Quelques gongs et cymbales. De gauche à droite : cymbale “crash”, cymbale “splash”, cymbales charleston, gong viet-namiens (du type des “kempuls” indorésiens), tam-tam chinois.

- La première famille comprend les gongs de forte épaisseur par rapport à leur diamètre (4 mm environ pour un diamètre extérieure de 600 mm, par exemple). Ils possèdent en général une protubérance arrondie en leur centre, appelée *dôme* ou *bulbe*, sur laquelle l’instrumentiste frappe avec une mailloche en feutre. Le dôme, la large paroi latérale et la forte épaisseur confèrent à la structure un forte rigidité en flexion, qui limite l’amplitude des vibrations en conditions normales de jeu. Ces instruments présentent des effets non-linéaires très faibles, qui se manifestent par un enrichissement du spectre au bout de quelques secondes de son, tout en gardant une hauteur tonale² précise et fixe au cours du temps [94]. En Asie du sud-est, et en particulier en Indonésie, les gongs sont déclinés en plusieurs tailles, correspondant à des notes précises, et rassemblés en carillons par familles de profils, formant ainsi des instruments mélodiques. Dans le Gamelan javanais, les gongs de plus fort diamètre (et de notes les plus graves), de 400 mm à 1 m de diamètre environ, sont suspendus verticalement par des cordes (cf. Figure 1.2(a)), formant un carillon nommé *kempul*. Des gongs de plus petit diamètre (de 150 mm à 400 mm environ) sont disposés horizontalement sur des cordes tendues, et forment ainsi une sorte de clavier de gongs. Cet ensemble est appelé *kenong* pour le plus grave et *bonang* pour le plus aigu (cf. Figure 1.2(b)).
- La deuxième famille regroupe les gongs utilisés traditionnellement dans l’opéra chinois. Ils sont d’épaisseur plus fine que les gongs de la famille précédente, ne possèdent pas de dôme central, et ont leur paroi latérale peu larges (cf. Figure 1.2(c)). Leur taille varie, de l’aigu au grave, de

²La hauteur tonale est la valeur de la note de musique associée à la fréquence fondamentale perçue par l’auditeur, si elle existe. Le musicien parlera de “hauteurs”, le physicien de “fréquences”.

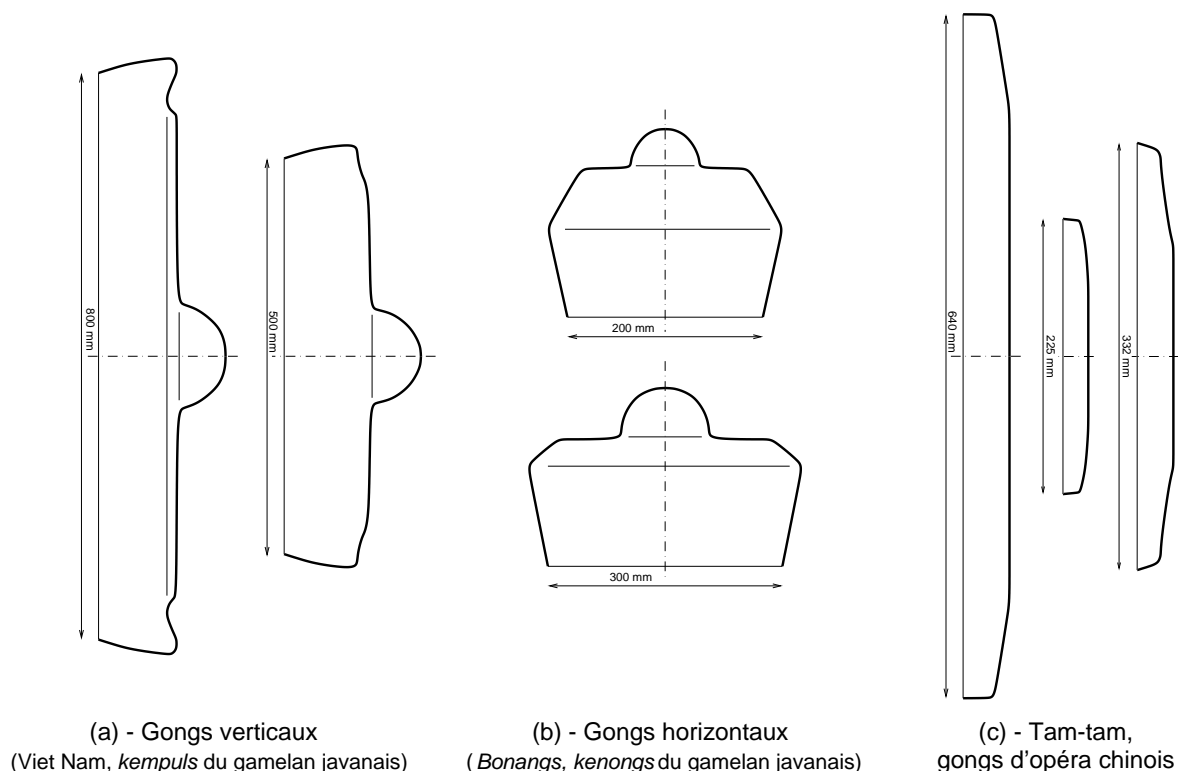


FIG. 1.2 – Profils de quelques gongs typiques (les dimensions spécifiées sont des ordres de grandeur). Les ‘tam-tams’ et les gongs d’opéra chinois (c) ne possèdent pas de dôme, sont d’épaisseur plus fine et n’ont pas de hauteur harmonique spécifique. Les autres (en particulier en Indonésie et au Viet-Nam, (a) et (b)) possèdent un dôme, sont plus épais et sont accordés à une hauteur spécifique. Des gongs de ce type, de différentes tailles, et donc de différentes hauteurs, sont souvent rassemblés en carillons, constituant ainsi un instrument mélodique.

100 mm de diamètre pour les plus petits, jusqu’à 500 mm. Ils sont suspendus en général par un cordage, soit à l’intérieur d’un cadre, soit tenus par l’instrumentiste, et sont frappés en leur centre au moyen d’une mailloche de taille adaptée au diamètre de l’instrument. Ces gongs, à diamètre égal, ont une rigidité inférieure à celle des gongs de la première famille. Leur son très particulier a une hauteur tonale perceptible, mais qui varie au cours du temps, en un *glissando* typique. De plus, selon leur géométrie plus ou moins galbée, le glissando peut être montant, ou descendant [37]. Ce phénomène de dépendance de la fréquence en fonction de l’amplitude des oscillations de la structure est typique d’effets de non-linéarités faibles.

- La troisième famille est constituée des *tam-tams* (à ne pas confondre avec les tambours africains du même nom). Ils sont originaires de Chine, et sont les gongs les plus utilisés dans l’orchestre symphonique occidental. Ils ont en général un profil similaire aux gongs d’opéra chinois, mais sont de taille beaucoup plus importante, de 500 mm de diamètre jusqu’à 1.2 m parfois (cf. Figure 1.2(c)). Ils sont suspendus en général à l’intérieur d’un cadre monté sur pieds, et sont frappés en leur centre au moyen d’une mailloche. Les tam-tams, à diamètre égal, ont une rigidité inférieure à celle des gongs des deux premières familles. Leur caractéristique principale est que pour des conditions analogues d’excitation, le timbre d’un tam-tam n’a pas de hauteur tonale précise. Son contenu spectral est variable au cours du temps : lorsque l’instrument est frappé en son centre, le support spectral se confine au basses fréquences pendant un court ins-

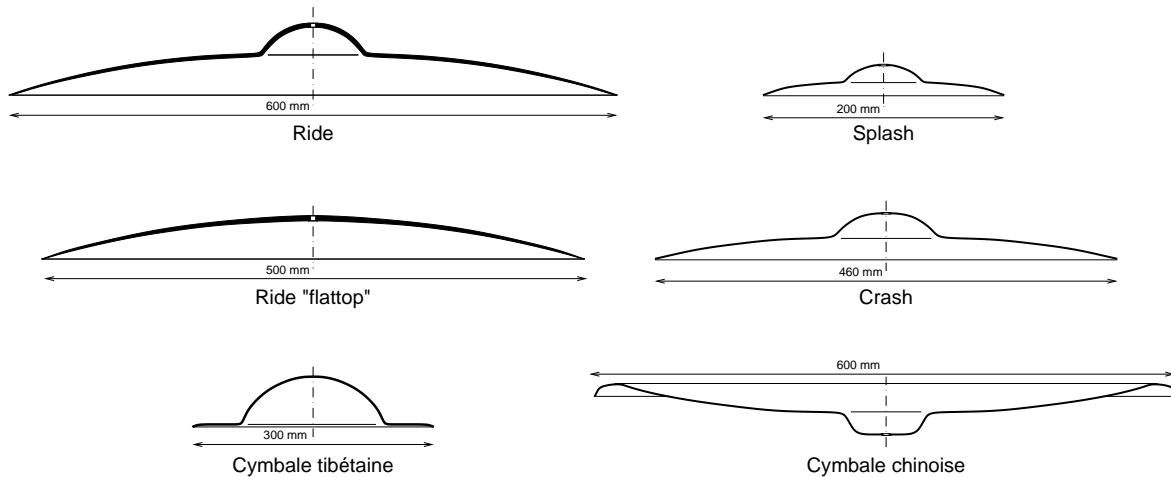


FIG. 1.3 – Profils de quelques cymbales typiques (les dimensions spécifiées sont des ordres de grandeur).

tant, pour glisser vers les hautes fréquences ensuite ; le son devient alors plus brillant et éclatant, avant de s'éteindre lentement. Ces effets, on le verra, sont typiques de fortes non-linéarités, menant dans ce cas à des oscillations chaotiques de la structure [56, 123]. Principalement utilisé comme bruitage en musique occidentale avant le XX^e siècle³ ou dans les bandes son de films, il trouve un emploi plus fréquent en musique contemporain⁴.

Les cymbales

Les cymbales ont aussi une origine asiatique, et ont été utilisées traditionnellement sous diverses formes en musique militaire et religieuse dans de nombreuses cultures. Rapportées d'orient par les croisés, elles occupent aujourd'hui une place de choix dans les orchestres symphoniques, les fanfares et les formations de jazz. Comme les gongs, les cymbales sont fabriquées généralement en bronze. Leur géométrie est aussi celle d'une coque axisymétrique, de courbure plus continue que celle d'un gong, ce qui lui confère une forme comparable à celle d'une soucoupe. Elles possèdent presque toutes un dôme central, et n'ont pas de bordure latérale (cf. Figure 1.3). Les cymbales possèdent un trou central qui permet de les fixer horizontalement sur un support, et dans ce cas d'en jouer en les frappant avec divers accessoires : une baguette de bois, une mailloche, des "balais"⁵ de batteur, une tringle de triangle... La zone de frappe est choisie en fonction du timbre désiré : directement sur le bord, avec le plat de la baguette, l'amplitude de vibration de la cymbale est la plus importante, et le timbre est le plus chargé en harmoniques ; sur le dessus du plateau, le son est plus coloré, et plus vers le centre, sur le dôme, le choc est plus brillant. L'orifice central peut aussi servir à nouer une lanière au moyen de laquelle l'instrumentiste frappe deux cymbales l'une contre l'autre. Cela est utilisé dans les fanfares populaires et en musique traditionnelle tibétaine. Enfin, une utilisation moins courante consiste à mettre en vibration la cymbale en la frottant, soit sur le bord avec un archet de violon, soit avec un bâton de bois, en un mouvement rotatif, de façon similaire à l'utilisation d'un bol chantant tibétain. Les batteurs de jazz utilisent des onomatopées issues de l'anglais pour qualifier les cymbales, dont les principales sont *ride*, *crash* et *splash*. Deux familles de cymbales peuvent être dégagées, selon

³“[le tam-tam] ne s'emploie que dans les compositions funèbres et les scènes dramatiques où l'horreur est portée à son comble”, selon Berlioz ([126], p. 55)

⁴cf. la citation de P. Schaeffer, p. 13.

⁵sorte de fagot de fils métallique ou de nylon, rassemblés au bout d'une poignée, que les batteurs de jazz utilisent parfois comme baguette pour produire des sons plus doux.

l'importance des phénomènes non-linéaires mis en jeu, comme dans le cas des gongs.

- La première famille correspond à des cymbales de forte épaisseur par rapport au diamètre (par exemple 2 à 3 mm pour un diamètre extérieur de 600 mm). Elles sont en général frappées sur le dessus, et un son tintant et précis est obtenu, comparable à celui d'une cloche, sans toutefois avoir une hauteur tonale définissable. Le contenu spectral est alors discret, et varie très peu au cours du temps. Cela permet aux batteurs de les utiliser pour marquer le rythme, en particulier avec les cymbales "ride", de grand diamètre (de 450 à 600 mm), et les cymbales "charleston", de diamètre plus faible (de 325 à 350 mm), utilisées par paire : soit en les heurtant l'une contre l'autre au moyen d'une pédale, soit en frappant la cymbale supérieure au moyen d'accessoires. On peut aussi classer dans cette famille des cymbales à dôme central de grand diamètre tenues en mains et heurtées ou frottées l'une contre l'autre lors des rituels religieux tibétains.
- La deuxième famille regroupe des cymbales d'épaisseur plus fine, qui produisent des sons plus bruyants. Leur spectre s'apparente à celui des tam-tams, puisqu'il est bruité, à large bande et continu, avec un contenu fonction de la force de frappe, et variable au cours du temps. Elles sont en générales utilisées ponctuellement, comme bruitage, pour ponctuer ou marquer des changements dans musique. Parmi les éléments d'une batterie, on trouve les "crash", de diamètre variable (de 300 à 450 mm) et les "splash", plus petites (de 150 à 300 mm), de profil similaire. Les cymbales "chinoises", qui peuvent atteindre de très grande taille (de 300 à 800 mm), ont leurs bords légèrement recourbés, et produisent un son très caractéristique. Ces cymbales sont jouées principalement avec des baguettes, sur le bord, ou au moyen de mailloche de feutre en coup unique ou en roulement. En particulier, on retrouve le phénomène d'enrichissement spectral des tam-tams décrit précédemment lorsque une cymbale crash, par exemple, est frappée avec une mailloche.

1.1.2 Fabrication

La fabrication des cymbales est majoritairement industrielle, vue leur utilisation très répandue en jazz et musique de variété, alors que celle des gongs est principalement artisanale. Elle est la conjugaison de laminage, repoussage, martelage et traitements thermiques diverses, dont les détails précis, parfois ancestraux, sont souvent gardés secrets par les fabricants/artisans, surtout dans le cas des gongs. On peut trouver dans [111] une description assez complète de la fabrication des cymbales.

1.2 Cadre de la présente étude

1.2.1 Acoustique instrumentale et modèles physiques

Le rôle premier de l'acoustique instrumentale est de comprendre et d'expliquer en détail des mécanismes de production du son dans les instruments de musique. Elle ne veut remplacer en aucun cas la connaissance des facteurs, qui comprennent mieux que quiconque le fonctionnement des instruments qu'ils fabriquent et améliorent. En revanche, elle permet d'offrir de nouvelles explications, fondées sur les outils et le langage de la physique et des mathématiques. Les études ont porté sur une grande variété d'instruments, essentiellement depuis ces cinquante dernières années. On peut citer en premier lieu les ouvrages de la fin du dix-neuvième siècle de J. W. S. Rayleigh [84, 85], puis ceux du début du vingtième siècle de H. Bouasse [14, 15, 17, 16], probablement les premières publications sur les instruments de musique écrites par des physiciens. Ensuite, les travaux de É. Leipp [57], pionnier de l'acoustique musicale en France, et ceux recensés par N. Fletcher et T. Rossing [39] offrent une vue exhaustive et homogène de la connaissance actuelle en physique des instruments de musique.

Les instruments de musique sont conçus dans le but de produire des sons qui vont être écoutés par l'oreille, un "capteur" extrêmement fin et précis. Ils sont en général le fruit de plusieurs siècles de modifications et d'améliorations. Leur fonctionnement est en ce sens souvent subtil et compliqué et il est impératif de prendre en compte dans un modèle de comportement des phénomènes souvent négligeables en terme d'énergie (comme des non-linéarités faibles, par exemple), mais dont les effets sonores sont prépondérants. Une des applications principales de ces travaux est la mise au point d'outils de simulation numérique de ces modèles, appliqués à la synthèse sonore. Leur but premier est bien évidemment la "synthèse de son par modèle physique" pouvant être utilisée par des musiciens. Elle peut donner des résultats particulièrement intéressants, tout d'abord en terme de timbres extrêmement réalistes ; mais aussi parce qu'un modèle donné offre une palette de sons de synthèse très variés, et facilement réglables intuitivement, puisque les paramètres du son sont ici des paramètres "physiques" comme le diamètre, la courbure, le matériau de la mailloche etc. . .

Ces outils de simulation peuvent aussi être d'un grand intérêt pour le physicien, car ils offrent un moyen puissant de mise au point et de validation de modèles physiques, en profitant des grandes capacités d'analyse et de discernement de l'oreille. Ils peuvent permettre en particulier d'identifier des correspondances entre des phénomènes perceptifs et la physique des systèmes étudiés, par la méthode la plus naturelle et habituelle qui soit : l'écoute⁶. La portée de ces techniques dépasse ainsi l'acoustique musicale, car elles offrent :

- une connaissance fine du comportement vibro-acoustique, linéaire et non-linéaire, de constituants classiques que sont les tuyaux, les barres, les cordes et dans la présente étude les plaques et les coques ;
- des modèles pouvant être appliqués à la synthèse sonore, qui en plus de son intérêt musical peut s'avérer être un outil d'analyse et de validation particulièrement efficace.

1.2.2 Vibrations non-linéaires de cymbales et de gongs

Parmi tous les instruments présentés au paragraphe 1.1, certains présentent en conditions normales de jeu des amplitudes de vibration grandes devant l'épaisseur moyenne de l'instrument. Cela conduit d'un point de vue mathématique à ne plus pouvoir négliger les termes non-linéaires dans les équations pour obtenir un modèle de comportement valable.

Les études antérieures ne proposent que des ébauches d'explications. Les instruments de percussion du type gongs et cymbales ont été étudiés principalement par N. Fletcher et T. Rossing ces 20 dernières années. Ils ont proposé différents bilans de leurs études [93, 36, 38, 39], et se sont intéressés aux comportements :

- des gongs d'opéra chinois, faiblement non-linéaires, dont le timbre présente une hauteur tonale glissante et dépendante de l'amplitude de vibration de la structure [92, 37] ;
- non-linéaire et chaotique de tam-tam chinois [91, 56] ;
- non-linéaire et chaotique de cymbales [95, 105, 124, 123].

Les phénomènes d'origine non-linéaire mis en jeu dans ces instruments se manifestent sous différentes formes. Dans les gongs d'opéra chinois, le *glissando* fréquentiel provient du fait que les fréquences d'oscillations des modes propres dépendent de l'amplitude de vibrations, lorsque celle-ci devient non-négligeable devant l'épaisseur de la structure [74, 37]. Dans les tam-tams et les cymbales, des structures moins rigides en flexion, les amplitudes de vibrations sont plus importantes, et ces systèmes présentent toutes les caractéristiques des systèmes non-linéaires chaotiques, à savoir :

- des signaux de vibration dont le spectre est continu et à large bande,
- un comportement sensible aux conditions initiales,
- des bifurcations menant à un régime de vibration chaotique.

Musicalement et auditivement, ces caractéristiques se manifestent par un timbre qui tient du bruit

⁶Cf. la citation de H. Bouasse, p. 55.

coloré, dont la hauteur est indéfinissable et dont le contenu spectral est dépendant du temps et des conditions d'excitation.

Notre étude vise à compléter nos connaissances sur les mécanismes physiques non-linéaires mis en jeu dans la production des sons de cymbales et de gong. Les phénomènes rencontrés dans ces instruments sont typiques de non-linéarités géométriques, qui se manifestent dès que les déplacements ou les déformations deviennent importants, alors que le comportement du matériau demeure élastique et linéaire. Une deuxième source de non-linéarité pourrait être un comportement non-linéaire du matériau. Dans le cas des métaux, la seule non-linéarité matérielle possible se rencontre à la suite de grandes sollicitations lorsque le matériau sort de son domaine élastique pour entrer dans la zone de plasticité [1, 32]. Si tel était le cas dans le cadre de nos instruments de percussion, des déformations rémanentes subsisteraient après arrêt des sollicitations, ce qui entraînerait des modifications et des dégradations de la structure allant à l'encontre du comportement souhaité ; en particulier, le son ne serait plus reproductible d'une utilisation à l'autre de l'instrument.

Une des difficultés de l'étude de ces instruments est que, en situation normale de jeu, la structure est frappée par une mailloche ou une baguette, si bien qu'un grand nombre de modes de vibrations sont excités simultanément. Par le jeu des couplages non-linéaires internes entre ces modes, les formes d'ondes et les spectres obtenus sont complexes, ce qui rend leur étude difficile. L'idée a donc été d'étudier ces structures soumises à une excitation forcée monofréquentielle. Les avantages sont les suivants :

- peu de modes de vibration sont directement excités en régime permanent,
- les caractéristiques (amplitude, fréquence) du signal d'excitation sont facilement contrôlables, et reproductibles,
- la réponse de la structure devient rapidement permanente, du fait de l'amortissement.

C'est pour ces raisons que la majorité de notre travail a porté sur l'étude de structures en vibrations forcées.

Les analyses expérimentales sur les instruments de percussion ont été menées sur un tam-tam chinois, en régime forcé monofréquentiel, lorsque la fréquence d'excitation est proche d'une des fréquences propres. Plusieurs régimes de vibration ont été mis en évidence, selon la valeur de l'amplitude des vibrations.

- Pour des faibles amplitudes, on observe des réponses *périodiques*, dont l'amplitude et la phase dépendent des conditions initiales. Des classiques courbes de résonances incurvées sont obtenues, caractérisées par des phénomènes de saut et une hystérésis lorsque la fréquence d'excitation est lentement variée. Une distortion harmonique dont l'importance dépend de l'amplitude des vibrations est aussi observée.
- Pour des amplitudes moyennes, des régimes de vibrations *quasi-périodiques* sont obtenus. Ils proviennent de combinaison de résonances qui se manifestent par des échanges d'énergie entre certains modes non-excités directement par le forçage. Des fréquences incommensurables apparaissent alors dans la réponse.
- Des régimes *chaotiques* sont obtenus à plus fortes amplitudes. Ils présentent une grande similitude, à l'écoute, avec le comportement de la structure en situation de jeu, c'est-à-dire lorsque l'excitation est impulsionnelle. Cela offre une validité supplémentaire aux études en régime forcé.

Des comportements analogues ont été mis en évidence dans les cymbales par C. Touzé *et al* dans [124, 123, 122]

1.2.3 Modélisation

L'idée première en terme de modèle mécanique est de représenter les gongs et les cymbales par une coque à symétrie de révolution. Les équations associées à ce genre de systèmes sont assez complexes, et ne possèdent des solutions analytiques que dans les cas de géométrie simple, comme les coques sphériques, cylindriques ou coniques. Ainsi, dans le but de construire un modèle physique de comportement de cymbales et de gongs, l'idée a consisté à simplifier dans un premier temps leur géométrie, pour aller le plus loin possible dans l'étude analytique. Le travail de modélisation a donc été concentré sur des plaques circulaires. Un premier avantage est que les techniques de résolution sont les mêmes que celles associées aux coques, mais appliquées à des équations plus simples. Le deuxième avantage est qu'on observe dans le cas des plaques des comportements vibratoires périodiques, quasi-périodiques et chaotiques similaires à ceux rencontrés dans les gongs et les cymbales et décrits précédemment.

La deuxième tâche de modélisation a consisté à construire des petits modèles de comportement, fondés sur des systèmes de barres élastiques articulées en grand déplacement. L'idée principale de ce travail est de représenter les structures minces telles que les coques et les plaques par un ensemble de fibres superposées, représentées chacune par une barre. On obtient alors des systèmes discrets à un degré de liberté dont le fonctionnement très simple en facilite l'étude. Cela permet en premier lieu de dégager des interprétations physiques des phénomènes non-linéaires observés dans les structures continues. En second lieu, la courbure des coques peut être prise en compte sans grande complication du modèle, ce qui permet d'en étudier les effets principaux, ce qui était impossible avec le modèle de plaque.

1.2.4 Organisation du manuscrit

Ce travail est organisé autour de trois parties. La première a pour objectif, à la suite de la présente introduction, d'exposer différentes observations expérimentales effectuées sur le gong du laboratoire. Cela permet de se familiariser avec les objets de cette étude, les instruments de percussion, et de dégager les phénomènes non-linéaires principaux observés dans ces structures (chap. 2).

La seconde partie est consacrée au développement d'un modèle de vibrations de plaques en grands déplacements et moyennes rotations. Les équations de la mécanique des milieux continus tridimensionnels non-linéaires sont appliquées à la géométrie particulière de la plaque, à partir des hypothèses classiques associées aux milieux minces (chap. 3). Une résolution basée sur un développement de la solution sur les modes propres de la structure est ensuite réalisée (chap. 4). Le système temporel obtenu est alors résolu en régime faiblement non-linéaire dans les cas simples de vibration sur un seul mode, ce qui permet d'expliquer certains des comportements du gong exposés dans la première partie (chap. 5). Enfin, des validations expérimentales des résultats théoriques précédents sont proposées (chap. 6).

La troisième partie présente et étudie les systèmes de barres articulées. Les équations du mouvement sont établies pour différentes configurations des systèmes, ce qui permet de dégager certaines interprétations sur l'origine physique des non-linéarités géométriques (chap. 7). Ensuite, les équations sont résolues, et certains phénomènes oscillants non-linéaires, comme les effets raidissant et assouplissant, sont expliqués et interprétés. L'influence de la courbure est aussi abordée (chap. 8).



Conclusion générale et perspectives

L'objectif principal de ce travail consistait en la compréhension des phénomènes non-linéaires mis en jeu dans les instruments de percussion du type des cymbales et des gongs. Cela s'inscrivait dans la continuité des recherches du laboratoire dans le domaine de la synthèse sonore par modèle physique, et en particulier de la thèse de Cyril Touzé [122]. L'idée était de contribuer aux études préliminaires nécessaires à l'établissement du modèle pour la synthèse sonore, qui nécessite une connaissance approfondie des mécanismes de production du son, et donc du comportement vibratoire des instruments. Dans le cas des cymbales et des gongs, les études existantes étaient assez ponctuelles, et aucun modèle global n'avait été construit (On peut se reporter au paragraphe 1.2.2 pour plus de détail). Le travail de thèse de Cyril Touzé, effectué simultanément, a offert une contribution très complète sur deux aspects :

- Une analyse de signaux vibratoires mesurés sur une cymbale et sur le gong du laboratoire par des méthodes de traitement du signal, est proposée. Cela a permis de mettre en évidence différents régimes de vibrations (périodiques, quasi-périodiques et chaotiques), et de conjecturer un scénario de transition du régime périodique vers le chaos.
- Un début de modélisation des gongs et des cymbales par des plaques circulaires en conditions aux limites libres, en vibrations faiblement non-linéaires, en contribution avec l'auteur.

L'idée a donc été dans ce travail, de poursuivre les travaux de Cyril dans deux directions. La première avait pour objectif d'établir un modèle de comportement en partant de la mécanique des milieux continus appliquée aux coques de révolution ; la seconde consistait en des analyses expérimentales nécessaires pour valider le modèle.

Devant la relative complexité des modèles non-linéaires de coques, deux directions pour la modélisation ont été choisies.

- La première a consisté à construire et étudier un modèle de comportement de plaques circulaires, en vibrations de grande amplitude et conditions aux limites libres (deuxième partie du document).
- Comme la courbure de la géométrie des gongs et des cymbales n'est pas prise en compte par un modèle de plaque, et aussi dans l'idée de comprendre et d'expliquer les phénomènes non-linéaires principaux mis en jeu dans ces instruments, des petits modèles discrets à un degré de liberté ont été développés en second lieu (troisième partie).

Différentes observations expérimentales, sur le gong du laboratoire (première partie) et sur les plaques circulaires (deuxième partie, chapitre 6) sont venues étayer la démarche de modélisation.

9.1 Non-linéarités géométriques dans les milieux minces

Les systèmes de barres étudiés lors de la troisième partie du manuscrit, bien qu'étant discrets et ne comportant qu'un degré de liberté, sont riches en enseignements sur les principaux phénomènes non-linéaires observés dans les cymbales et les gongs, et plus généralement dans les coques.

Source des non-linéarités

Si on imagine que le milieu continu que constitue la coque, est constitué de fibres superposées¹, lorsque l'amplitude des vibrations est suffisamment importante (on précisera cet ordre de grandeur dans la suite), le comportement *global* de la structure est *non-linéaire*, alors que chacune des fibres a un comportement *linéaire*. Cela montre que les non-linéarités sont simplement créées par une rotation des fibres (qui est négligée dans un modèle linéaire), qui apparaît lors du changement de géométrie du milieu induite par les déformations. La direction des fibres est alors variable en fonction du déplacement transverse, et c'est la projection des efforts normaux dans les fibres (les efforts de membrane) sur la direction transversale qui crée les non-linéarités. Ces conclusions ont été obtenues à la fois à partir des systèmes de barres (chap. 7) et du modèle continu de plaque (chap. 3).

Cela conduit à constater que les effets non-linéaires sont directement liés au chargement de la surface/ligne moyenne de la structure (c'est une droite pour une poutre, une courbe pour une arche, un plan pour une plaque). Deux conséquences en découlent :

- Les conditions aux limites *longitudinales* ont une influence sur l'importance des non-linéarités. Dans le cas des plaques, des conditions aux limites encastées créent un chargement du plan moyen plus important, à déplacement transverse égal, que des conditions aux limites libres. Cela signifie que pour un déplacement w donné, les non-linéarités sont plus fortes dans le cas encasté que dans le cas libre². Dans le cas des poutres, le modèle équivalent à celui de Von Kàrmàn pour les plaques donne des équations linéaires lorsque l'une des extrémités n'est pas immobilisée.
- C'est la structure bidimensionnelle de la plaque qui crée le chargement de son plan moyen, à la source des non-linéarités, lorsque les conditions aux limites sont libres.

Une étude intéressante sur ce sujet consisterait à comparer, pour un déplacement transverse maximum w_m donné, l'importance des non-linéarités dans plusieurs structures minces, associées à plusieurs conditions aux limites (plaques à bord libre et encasté, poutre encastée, encastée/libre, simplement supportée...).

Enfin, notons que le paramètre principal gouvernant l'importance des non-linéarités est l'amplitude maximum w_m du déplacement transverse. En effet, c'est ce dernier qui crée le chargement de la surface moyenne responsable des effets non-linéaires.

Phénomènes non-linéaires

Les oscillations d'un système non-linéaires sont marquées par des phénomènes typiques, qui sont énumérés ci-dessous.

¹Ce serait strictement le cas avec un matériau orthotrope comme du bois ou un matériau composite ayant comme directions d'orthotropie les directions longitudinale et transverse de la plaque ou de la coque.

²En terme d'effet sonore, cela ne veut pas dire pour autant qu'une plaque encastée est "plus non-linéaire" qu'une plaque libre : lorsque elle est frappé par une mailloche, c'est les *effort* qui sont imposés, et non les déplacements. À efforts égaux, les déplacements sont nettement plus faibles dans le cas encasté que dans le cas libre ; on peut donc penser que les effets non-linéaires sont équivalents dans les deux cas, à efforts égaux.

- La fréquence des oscillations en régime libre est dépendante de l’amplitude des oscillations. Deux comportements antagonistes se dégagent, selon si la fréquence est croissante (comportement raidissant) ou décroissante (assouplissant) en fonction de l’amplitude.
- En régime forcé, plusieurs régimes de vibrations coexistent pour une valeur donnée des paramètres de contrôle, ce qui conduit à observer des *phénomènes de saut* entre solutions stables.
- Une distorsion harmonique du signal est observée, en régime forcé ou libre.

Ces trois caractéristiques ont été observées expérimentalement sur le gong au chapitre 2, lorsque sa réponse n’est gouvernée que par un seul mode de vibration. Des comportements analogues ont été mis en évidence à la fois expérimentalement et théoriquement sur les plaques circulaires (chap. 5 et 6).

L’étude des systèmes de barres a permis au chapitre 8 d’étudier l’influence de la courbure d’une coque, non prise en compte dans le modèle de plaque, et a montré en particulier les résultats suivants :

- le comportement raidissant ou assouplissant du système de barres est déterminé par ses caractéristiques géométriques : son épaisseur est responsable d’un comportement raidissant, alors que sa courbure apporte un comportement assouplissant. C’est l’équilibre entre ces deux effets qui détermine le comportement du système.
- un système plat (de courbure nulle) ne possède que des non-linéarités cubiques, ce qui entraîne une distorsion harmonique du signal constituée que d’harmoniques impaires. La courbure apporte un terme quadratique dans les équations, qui est responsable d’une distorsion harmonique complète.

9.2 Vers un modèle continu de cymbales et de gongs

La deuxième partie a permis d’exposer une démarche complète de résolution du problème non-linéaire de plaques, des équations non-linéaires de la mécanique des milieux continus à une solution approchée, donnant le déplacement en tout point de la structure en fonction du temps. Reprenons les résultats principaux, et voyons quelles en sont les extensions possibles vers le cas des gongs et des cymbales.

Le modèle non-linéaire de milieux minces.

Les équations de Von-Kàrmàn établies au chapitre 3 constituent un modèle non-linéaire de plaques permettant de décrire une grande variété de phénomènes non-linéaires. Le domaine de validité de cette théorie a clairement été précisé au chapitre 3 : les équations de Von-Kàrmàn sont valables jusqu’à des amplitudes du déplacement transverse de l’ordre de l’épaisseur h de la plaque, ce qui semble suffisant à la vue des amplitudes de vibration observées expérimentalement sur le gong. Ce modèle permet de décrire des phénomènes non-linéaires liés à des combinaisons de résonances et des comportement quasi-périodiques [46], similaires à ceux rencontrés avec le gong du laboratoire, et exposés au chapitre 2. On peut en outre penser que le domaine de validité de ces équations est plus étendu, pour des amplitudes de l’ordre de plusieurs fois l’épaisseur h , ce qui est alors intéressant dans le cas des cymbales. Cela nécessiterait toutefois d’être vérifié expérimentalement.

Les hypothèses qui conduisent à l’établissement du modèle de Von-Kàrmàn peuvent être appliquées à d’autres milieux minces, comme les poutres, les arches et les coques. On obtient alors des théories analogues [74, 117]. La méthode utilisée au chapitre 3 pour réduire le problème de mécanique tridimensionnel au cas des milieux minces utilise le *Principe des Travaux Virtuels*, associé à des analyses dimensionnelles pour justifier les simplifications. Même si dans le cadre de ce travail, seul le modèle continu de plaques a été étudié, l’approche est générale, et pourrait être appliquée au cas des coques de révolution faiblement courbées³, à profil quelconque. Ce genre de modèle serait alors tout

³“shallow shells” dans la littérature anglo-saxonne.

a fait adapté pour décrire le comportement en situation de jeu des instruments de percussion, tels que les gongs et les cymbales. Un début d'étude dans cette direction a été effectué par M. Fontaine au laboratoire de mécanique de l'ENSTA⁴, dans le cadre d'un stage de DEA [40].

Une méthode de résolution générale

La méthode de résolution utilisée dans ce travail, exposée au chapitre 4, permet de remplacer les *équations aux dérivées partielles* de départ (Eq.4.4a,b), qui régissent le mouvement de la structure, par le problème suivant :

$$w(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \Phi_{\alpha}(\vec{x}) \cdot q_{\alpha}(t), \quad (9.1a)$$

$$\ddot{q}_{\alpha}(t) + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}(t) = \varepsilon \left[- \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \Gamma_{pq\alpha u} q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}(t) + \tilde{Q}_{\alpha}(t) \right], \quad (9.1b)$$

constitué d'une infinité d'*équations différentielles ordinaires*, non-linéaires et couplées. Cette méthode offre plusieurs avantages :

- Aucune approximations supplémentaires ne sont nécessaires, si bien que le problème (9.1a,b) a le même domaine de validité que les équations de Von-Kàrmàn : $w \simeq h$.
- Cette approche fait apparaître clairement les modes de vibration linéaires de la structure, qui sont facilement identifiables expérimentalement, par la mesure des fréquences propres f_{kn} et des déformées modales Φ_{kn} . Cela permet en particulier de simplifier le problème (9.1a,b) en un système à nombre fini d'équations et de vérifier ces approximations expérimentalement. C'est ce qui a été fait aux chapitres 5 et 6 dans les cas simples de vibrations sur un seul mode.

Cas des coques Dans le cas où la structure est courbée, les chapitres 7 et 8, et des études sur des calottes sphériques [136] montrent que des non-linéarités quadratiques apparaissent dans les équations. Un traitement analogue aux développements du chapitre 4 appliqué à des équations non-linéaires de coques donnerait un système analogue aux équations (9.1b), avec des termes quadratiques en plus, ce qui s'écrit :

$$w(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \Phi_{\alpha}(\vec{x}) \cdot q_{\alpha}(t), \quad (9.2a)$$

$$\ddot{q}_{\alpha}(t) + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}(t) = \varepsilon \left[- \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \beta_{pq\alpha} q_p(t) q_q(t) - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \Gamma_{pq\alpha u} q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}(t) + \tilde{Q}_{\alpha}(t) \right]. \quad (9.2b)$$

La décomposition définie par l'équation (9.2a) est validée⁵, dans le cas du gong en régime forcé, par une expérience présentée au chapitre 2, lorsque l'excitation est proche d'une résonance axi-symétrique et qu'il n'y a pas de combinaisons de résonances (Cf. § 2.4.2 et l'équation (2.5), p. 37).

⁴ENSTA-UME, Chemin de la lumière, 91761 Palaiseau Cedex. Responsable : A. Chaigne

⁵L'analyse du paragraphe 2.4.2 est néanmoins *qualitative*. En particulier, les résultats de la figure 2.14 ne permettent pas de déterminer si la géométrie de la déformée de la structure ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, comme c'est en général le cas à forte amplitude, par exemple dans le cas des plaques (Cf. § 6.5.3 et [6]). Si tel était le cas, l'utilisation de modes non-linéaires serait intéressante pour décrire *quantitativement* ce phénomène.

Réduction du nombre de modes impliqués

Les systèmes (9.1b) ou (9.2b) comportant une infinité d'équations, il est nécessaire pour les traiter d'étudier expérimentalement la structure en vue de dégager des comportements simples ne faisant intervenir qu'un nombre faible de modes propres. En régime forcé, la *dynamique* de la structure n'est gouvernée que par les modes directement excités, et ceux en combinaison de résonances, soit N modes propres, pourvu que le système ne s'éloigne pas trop de sa position au repos. Il est alors possible de ne garder dans les systèmes (9.1b) ou (9.2b) qu'un nombre N réduit d'équations. Le traitement des problèmes (9.1a,b) ou (9.2a,b) peut alors être effectué de plusieurs manières :

- L'approche utilisée au chapitre 5 consiste à chercher une solution approchée du problème (9.1a,b) par des méthodes perturbatives, dont la critique suit.
- L'avantage primordial de ces méthodes est qu'elles fournissent une solution approchée *analytique* du problème. Cela permet de caractériser et d'évaluer efficacement le comportement du système. Un deuxième avantage est que les solutions obtenues peuvent servir à valider d'éventuelles méthodes de résolution numérique s'attaquant directement aux équations aux dérivées partielles, ce qui pourrait être intéressant dans le futur pour valider des algorithmes de synthèse sonore.
- L'utilisation de ces méthodes perturbatives va néanmoins de paire avec une réduction du domaine de validité. Dans le cadre des plaques, les calculs sont *mathématiquement* valables jusqu'à des amplitudes transverses w de l'ordre de h^2/R , où R est le rayon de la plaque (ou une dimension transverse caractéristique dans le cas de plaques à géométrie non-circulaire). Les validations expérimentales du chapitre 6 ont montré que la solution analytique, approchée par la méthode des échelles multiples, était en fait valable jusqu'à des amplitudes transverses w plus importantes, de l'ordre de $h/2$. Cela montre que les domaines de validité déterminés mathématiquement peuvent être très restrictif⁶, et qu'il est donc intéressant de les valider par des expériences
- Ces méthodes perturbatives permettent de décrire des solutions quasi-périodiques, obtenues par exemple lorsque la vibration est gouvernée par une combinaison de résonances entre trois modes propres [46]. À la vue des résultats expérimentaux du chapitre 2 sur le gong, où les vibrations de celui-ci ne paraissent être gouvernées que par un nombre réduit de modes propres, l'approche analytique perturbative, appliquée au cas des coques de révolution, serait probablement riche d'enseignements pour comprendre le comportement des instruments de percussion.
- L'inconvénient majeur est que les calculs deviennent très vite complexes. En effet, la méthode des échelles multiples conduit au premier ordre à déterminer deux quantités pour chacun des modes propres Φ_α : l'amplitude a_α et la phase γ_α de ses oscillations. Le problème à N oscillateurs non-linéaires est alors remplacé par un système dynamique de dimension $2N$.
- Pour éviter les limitations sur l'amplitude des vibrations associées aux méthodes perturbatives, une résolution numérique est possible, par exemple par la méthode de Runge-Kutta. Cette approche a été utilisée au chapitre 8 (§8.4) pour évaluer le comportement des systèmes de barres en grande amplitude de vibrations. Cette approche devrait permettre de simuler des régimes fortement non-linéaires et chaotiques, impossible à obtenir par les méthodes perturbatives.

Lorsque le déplacement transverse devient de l'ordre de 2 fois l'épaisseur de la plaque, on constate que la déformée de la structure devient dépendante de l'amplitude du mouvement. Cela provient du

⁶cela n'est pas étonnant, car les domaines de validité dépendent des puissances de ε , si bien que la discrétisation est très large : avec $\varepsilon = 10^{-2}$, les ordres de grandeurs possibles sont $\varepsilon h = h/100$, h et $h/\varepsilon = 100h$. Ainsi, les ordres de grandeurs $10h$ et $h/10$, qui sont physiquement intéressants, ne sont pas prévus. Un développement en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ pourrait être alors envisageable dans le futur.

fait que même si la *dynamique* du système n'est gouvernée que par les N modes en combinaison de résonance, il est nécessaire de considérer plus de modes (un nombre $P > N$) si on veut décrire *quantitativement* les vibrations du système. Il est alors intéressant d'introduire des *modes non-linéaires*, ce qui n'a pas été abordé dans le présent travail. Une étude sur ce sujet est en cours actuellement au laboratoire, et des références bibliographiques sont proposées au chapitre 4 (§4.1.2) et 6 (§6.5.3).

Vers le chaos

Les chapitres 5 et 6 proposent une étude *complète* du problème de vibration de plaques lorsque celle-ci n'est gouvernée que par un seul mode axisymétrique, ou par deux modes propres asymétriques dégénérés. Ce cas très simple a l'avantage de présenter des solutions analytiques élégantes, et de mettre en évidence un premier cas de couplage entre deux modes propres Φ_1 et Φ_2 , lorsque leurs fréquences sont proches l'une de l'autre ($f_1 \simeq f_2$). Ce modèle analytique est validé par une étude expérimentale, qui permet d'une part d'en effectuer un recalage, et d'autre part d'en évaluer le domaine de validité (l'importance de ce dernier point a été évoquée plus haut). Le modèle obtenu prédit alors quantitativement très précisément le comportement de la structure.

Une même démarche peut être appliquée aux instruments de percussion, qui, du fait de leur symétrie de révolution, possèdent aussi des modes asymétriques dégénérés (Cf. chapitre 2, §2.2).

Néanmoins, le cas précédent d'une combinaison de résonances simple 1 : 1 n'est qu'un début d'étude : il est en particulier impossible d'obtenir un comportement chaotique sans faire intervenir d'autres combinaisons de résonance⁷. Il permet de présenter une démarche générale (exposée au chapitre 5 pour la théorie et au chapitre 6 pour la validation expérimentale), qui peut être appliquée à des cas de résonances internes plus compliquées. Un travail de DEA sur une combinaison de résonance faisant intervenir 3 modes axisymétriques, dans le cas d'une plaque, a été menée au laboratoire de mécanique de l'ENSTA⁸ récemment par P. Lanchantin [53]. Dans le cas des gongs et des cymbales, les expériences du chapitre 2 et les travaux de Cyril Touzé [123, 122] montrent qu'un nombre réduit de mode (entre 3 et 10) est probablement suffisant pour décrire les comportements quasi-périodiques et chaotiques observés en régime forcé.

Oscillations libres – oscillations forcées

Enfin, une question importante persiste : comment traiter le régime de vibrations libre des gongs et des cymbales, qui correspond au comportement naturel de ces structures en condition de jeu ? Les travaux de thèse de Cyril Touzé [122] et les expériences sur le gong (chapitre 2) montrent qu'un grand nombre de modes, de l'ordre de 30, sont impliqués de manière non-négligeable dans le régime de vibrations libre. Ils sont soit directement excités par le choc initial avec la mailloche (ou la baguette), soit indirectement à la suite des couplages internes résultant des non-linéarités. Le système (9.1b) est alors composé d'un grand nombre d'équations, et devient de la sorte impossible à traiter analytiquement, et probablement difficilement résolvable numériquement, dans des temps de calcul envisageables.

En revanche, l'étude en régime libre des systèmes réduits (comportant N oscillateurs, $N = 3, 4, 5, \dots$) obtenus pour les régimes forcés n'est pas à écarter. Même si celle-ci n'est pas réaliste, elle permettrait probablement d'expliquer les mécanismes de couplage entre modes propres qui sont observés en régime libre, et en particulier l'enrichissement spectral caractéristique des gongs et des cymbales.

⁷Des comportements chaotiques ont été mis en évidence pour des valeurs particulières des coefficients $\Gamma_{pq\alpha\omega}$, qui ne sont pas celles associées au cas d'une plaque circulaire [125]. De plus aucun cas de chaos n'est apparu expérimentalement, sans que d'autres modes que ceux en résonance 1 : 1 n'apparaissent.

⁸Cf. note 4, p. 194

9.3 Dans le futur..

Les modèles fondés sur les systèmes de barres articulées présentés dans ce travail ne comportant qu'un seul degré de liberté, leur domaine de description est limité à un seul des modes de vibrations d'une structure continue. Pour s'en approcher, il serait intéressant de développer des modèles analogues, de type treillis, comportant 2 ou 3 degrés de liberté. Malgré la relative complication des développements mathématiques, il serait probablement possible de mieux comprendre les échanges d'énergie entre modes propres qui sont à la source du comportement non-linéaire des instruments de percussion.

De façon plus anecdotique, la présence d'harmonique 2 dans les signaux de mesures obtenues au chapitre 6, dans le cas de plaques en vibration, reste très mystérieuse : tous les modèles théoriques prédisent des non-linéarités cubiques dans les équations, et ainsi seule des harmoniques impaires devraient être observées. Une des causes intuitives principale est un défaut de planéité de la plaque. Les systèmes de barres, avec une inclinaison initiale très faible par rapport à l'épaisseur, peuvent permettre d'étudier l'influence de ce défaut, et fournissent ainsi une piste de recherche.

La démarche générale exposée aux chapitres 3-6 doit pouvoir être étendue au cas des coques de révolution. Pour se rapprocher de la géométrie particulière des cymbales et des gongs, on peut envisager d'appliquer la méthode du chapitre 3 à une coque de révolution faiblement courbé, en gardant son profil quelconque dans les calculs. Des équations analogues aux équations de Von-Kàrmàn seront alors obtenues, qu'il s'agira ensuite de projeter sur la base des modes propres Φ_α de la structure, en vue d'obtenir le système 9.2. Cela permettra de calculer l'expression des coefficients de couplage $\beta_{pq\alpha}$ et $\Gamma_{pq\alpha u}$, en fonction des déformées modales $\Phi_\alpha(\vec{x})$ (expressions analogues à l'équation 4.64, p. 81). Ces déformées étant difficiles à calculer analytiquement, une estimation de ces coefficients pourra être menée à partir de déformées modales calculées numériquement, avec la méthode des éléments finis (EF). Il sera alors aisé d'obtenir le système 9.2 pour *n'importe quel* profil de cymbale ou de gong, associée à des conditions aux limites *quelconques*. Ensuite, en fonction de la valeur des fréquences propres f_α de chacun des modes (issues du calcul EF ou de mesures sur une structure réelle), il sera possible d'étudier des modèles à nombre de mode propres réduits, en fonction des combinaisons de résonances éventuelles. En particulier, les cas de régimes de vibrations observés sur le gong au chapitre 2 (tableau 2.5) pourront être envisagés théoriquement de façon précise. Enfin, des validations expérimentales pourront être menées sur des géométries simples et reproductibles comme les calottes sphériques, ou sur des gongs et des cymbales. Un recalage de modèle pourra être envisageable, en vue d'obtenir un modèle de comportement de ces instruments.

Enfin, l'étude en régime libre des systèmes (9.1b) ou (9.2b), réduits à N équations, peut s'avérer intéressante pour comprendre les phénomènes de transfert d'énergie des fréquences graves vers les fréquences aiguës mises en évidence au chapitre 2 (Fig. 2.9, p. 33). En particulier, les études de système à trois oscillateurs en résonances internes, en régime forcé et dans le cas des plaques, montrent que le transfert d'énergie n'est possible que des hautes fréquences vers les basses fréquences⁹ [46, 53], ce qui est le comportement opposé.



⁹Plus précisément, le cas étudié dans [46, 53] est celui d'une combinaison de résonances du type $\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3$, avec $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Si le système est excité au voisinage de ω_1 ou ω_2 , aucun transfert d'énergie n'est possible vers les deux autres modes. Seul le cas où le mode de pulsation propre ω_3 est excité autorise un transfert d'énergie.