



HAL
open science

Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions

Bruno Sudret

► **To cite this version:**

Bruno Sudret. Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole des Ponts ParisTech, 1999. Français. NNT : . tel-00005671

HAL Id: tel-00005671

<https://pastel.hal.science/tel-00005671>

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité: Structures et Matériaux

par

BRUNO SUDRET

Sujet de la thèse :

MODÉLISATION MULTIPHASIQUE
DES
OUVRAGES RENFORCÉS PAR INCLUSIONS

soutenue à Champs-sur-Marne le 6 Octobre 1999

devant le jury composé de :

B. Halphen	<i>Président</i>
J.-B. Leblond	<i>Rapporteur</i>
I. Shahrour	<i>Rapporteur</i>
O. Coussy	<i>Examineur</i>
J. Pastor	<i>Examineur</i>
F. Schlosser	<i>Examineur</i>
P. de Buhan	<i>Directeur de thèse</i>

Remerciements

La réalisation d'un travail de recherche dans le cadre d'une thèse est une aventure. Celle-ci commence par le choix d'un sujet dans lequel chaque mot ou presque est une énigme. Elle se poursuit par une succession de périodes d'enthousiasme ravageur et de doutes profonds. Elle se conclut enfin par la rédaction du mémoire, qui constitue sans doute la véritable épreuve. Mais cet exercice est au final passionnant, et il n'aurait pas été possible sans le soutien de quelques personnes à qui je souhaite exprimer ici ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Bernard Halphen de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Messieurs Jean-Baptiste Leblond et Isam Shahrour ont accepté la lourde tâche de rapporteur de ce mémoire, et je leur exprime ici toute ma gratitude. Je remercie également Messieurs Olivier Coussy, Joseph Pastor et François Schlosser d'avoir participé à l'évaluation de ce travail en tant qu'examineurs.

Je voudrais témoigner ensuite ma gratitude envers Patrick de Buhan, directeur du CERMMO, pour m'avoir proposé un sujet de recherche ouvert, qui n'a cessé de s'enrichir tout au long de ces trois années. Sa disponibilité et son enthousiasme ont été sans failles, mais il a su également me laisser une grande liberté de manœuvre pour explorer mes propres idées, ce dont je lui sais particulièrement gré. La clarté de ses raisonnements scientifiques et ses qualités pédagogiques ont été pour moi très riches d'enseignement.

L'ambiance de travail au CERMMO, à la fois studieuse et détendue, a contribué aux conditions de travail excellentes dont j'ai pu bénéficier. Je souhaite donc associer à ces remerciements tous mes collègues immédiats pour les échanges que nous avons eus au cours de ces trois années, finalement assez courtes. Un clin d'œil tout particulier à Emmanuel Bourgeois et Samir Maghous, avec qui j'ai passé de longues heures à discuter d'analyse numérique, de programmation ... et des folies que l'on peut arriver à concevoir avec quelques lignes de code. Leurs conseils et encouragements m'ont été précieux.

Mon goût pour la recherche est sans doute lié à la curiosité et à la quête insatiable de savoir qui m'anime depuis longtemps. J'ai donc aujourd'hui une pensée très affectueuse pour Madame Monique Berland, institutrice, qui a révélé ce penchant naturel alors qu'elle m'apprenait à lire.

Je souhaite également adresser une pensée amicale à Monsieur Michel Lino, directeur d'ISL-Bureau d'Ingénieurs Conseils chez qui j'ai eu le plaisir d'effectuer un stage professionnel il y a quelques années. J'ai appris à son contact que l'on pouvait concilier expertise technique et rigueur scientifique. Il me revient souvent à l'esprit son souci du détail et sa recherche de la perfection, notamment dans ses écrits. Si comme je l'espère, la présentation de ce mémoire et son contenu sont agréables au lecteur, c'est sans doute un peu grâce à ses enseignements.

Pour terminer, je voudrais remercier du fond du cœur mes parents de m'avoir encouragé tout au long de mes études à donner le meilleur de moi-même, à aller toujours plus loin, à ne jamais me contenter de ce qui est acquis. Merci d'avoir eu confiance en moi. Soyez rassurés, je ne suis plus désormais « étudiant à vie »!

Enfin, c'est à Anne, ma femme, que sont dédiées ces dernières lignes. Qu'elle sache combien j'ai apprécié ses encouragements dans les moments difficiles, sa patience pendant la phase finale de rédaction ... et son souci du détail lorsqu'elle a relu ce mémoire pourtant si abscons à ses yeux.

Paris, le 13 Octobre 1999.

A mes parents, à Anne, à Elle ...

Je vais vous décrire la Nature; mais si cela ne vous plaît pas, vous allez avoir du mal à comprendre. C'est un problème que les physiciens ont plus d'une fois rencontré. A la longue, ils ont compris que le fait qu'une théorie leur plaise ou pas n'avait pas à entrer en ligne de compte. Ce qui est important, c'est que la théorie en question permette des prédictions qui soient en accord avec l'expérience.

Richard Feynman - Lumière et Matière

Résumé

L'emploi d'*inclusions de renforcement* pour la construction d'ouvrages de géotechnique s'est largement diversifié depuis une trentaine d'années. On s'intéresse principalement dans ce mémoire aux *tunnels boulonnés* (radialement et en front de taille) et aux *fondations profondes* (groupes et radiers de pieux, réseaux de micropieux). Si des méthodes de dimensionnement à la rupture ont été proposées pour ces différents types d'ouvrages, les *calculs en déplacement* sont aujourd'hui encore peu abordés. L'approche numérique classique par éléments finis s'avère en effet inadaptée : le nombre d'inclusions employées et leurs dimensions caractéristiques très petites vis à vis de celles de la structure entière conduisent à des problèmes numériques de taille rédhibitoire.

Le *modèle multiphasique de matériau renforcé* développé dans ce travail est une approche alternative de type « milieu équivalent ». Il s'agit d'un modèle purement macroscopique, dans lequel on considère *superposées en chaque point* une particule de matrice (sol ou roche) et autant de particules de renforcement qu'il y a de directions de renforcement.

Après une introduction bibliographique, les équations du mouvement du modèle sont construites dans le deuxième chapitre par la méthode des puissances virtuelles (seuls les efforts de traction-compression sont pris en compte dans les inclusions). Utilisant un cadre thermodynamique, les lois de comportement sont obtenues dans le domaine élasto-plastique. Le lien avec les méthodes classiques d'homogénéisation permet de donner un contenu mécanique précis aux différentes variables de description. Le *modèle adhérent* est introduit comme cas particulier.

Le troisième chapitre est consacré à la définition puis à la *résolution analytique* de problèmes multiphasiques. Le quatrième décrit la mise en œuvre par éléments finis. Après l'introduction des outils classiques nécessaires à la résolution numérique en élasto-plasticité, on étend le formalisme au cas multiphasique adhérent, puis général. Le modèle adhérent est implémenté dans un code de calcul nouveau baptisé CASTOR.

Le cinquième chapitre présente la validation du code CASTOR par comparaison à des solutions analytiques, à d'autres modèles numériques, à des résultats expérimentaux et à des mesures sur ouvrage réel. Les analyses montrent à la fois la pertinence du modèle multiphasique pour les problèmes traités et les gains considérables en temps de calcul permis par CASTOR.

Le dernier chapitre présente enfin deux extensions du modèle adhérent. D'une part, le choix de cinématiques distinctes par phase (modèle général) permet de rendre compte d'*effets d'échelle* dans la structure. D'autre part, la prise en compte d'*efforts de flexion* dans les inclusions est possible. Des comparaisons avec des calculs directs par éléments finis montrent la pertinence de ces modèles et leur aptitude à rendre compte de phénomènes hors de portée de l'homogénéisation classique.

Multiphase Model for Reinforced Materials - Application to Geotechnical Problems

The use of *reinforcement techniques* has been widely developed in the domain of geotechnical engineering in the last three decades. This work mainly concerns *rock-bolted tunnels* and *deep foundations* (pile groups, pile-raft foundations and micropile networks). If failure design methods are available for these structures, *displacement computations* have been hardly dealt with so far. Standard finite element methods actually fail due to the number and slenderness of the inclusions, which lead to untractable numerical problems.

The *multiphase model for reinforced materials* is an alternative, « equivalent medium » approach. This purely macroscopic model considers in each point the superposition of one matrix particle (for soil or rock) and as many reinforcement particles as given reinforcement directions.

Chapter 1 draws an introduction to the problem. Chapter 2 presents the construction of the model using the virtual work method (only tensile-compressive forces are taken into account for the reinforcement description). Using a thermodynamical framework, elastoplastic constitutive laws are derived. The whole model is connected to the classical homogenization methods, allowing a clear interpretation of the variables used. A so-called *perfect bonding* model is derived as a particular case.

Chapter 3 is devoted to the definition and the *analytical resolution* of multiphase problems. Chapter 4 describes the finite element implementation of the model. Standard procedures for solving elasto-plastic problems are first introduced. The formalism is then extended to perfect bonding and general multiphase case. The former is implemented in a new computer code called CASTOR.

Chapter 5 is devoted to the validation of the code CASTOR by comparing its results with analytical solutions, other numerical approaches and experimental results. A case history is also addressed. All these analyses show the relevance of the multiphase model. The computer processing time is always dramatically reduced.

Chapter 6 finally presents extensions of the model. On the one hand *scale effects* are shown to be taken into account by the general model, including different kinematics for each phase. On the other hand *bending effects* in the inclusions can be straightforwardly included in the formulation. Comparisons with standard finite element computations show the ability of these approaches to describe phenomena unreachable by classical homogenization techniques.

Chapitre 1

Introduction bibliographique

L'usage d'inclusions de renforcement dans les ouvrages de géotechnique s'est diversifié au cours des trois dernières décennies. Cependant, compte tenu de la complexité de ces ouvrages, les méthodes rationnelles de dimensionnement et de calcul en déplacement relèvent encore du domaine de la recherche. Ce travail de thèse constitue une contribution sur le sujet.

Pour situer le contexte, la première partie de cette introduction s'attache à décrire les aspects technologiques du renforcement par inclusions. On s'intéresse particulièrement au boulonnage des tunnels, au renforcement des sols et aux fondations profondes.

On passe ensuite en revue les méthodes de calcul couramment utilisées par les ingénieurs ou faisant l'objet de recherches actuelles. On montre en particulier les points d'achoppement de certaines approches. On relève par ailleurs un certain nombre de points communs ou notions apparaissant de façon récurrente dans la littérature.

On propose en conclusion le développement d'un modèle multiphasique de matériau renforcé unifiant un certain nombre des résultats présentés.

Sommaire

1	Introduction	5
2	Les techniques actuelles de renforcement par inclusions	7
2.1	Le boulonnage des tunnels	7
2.2	Le renforcement des sols	9
2.2.1	Terre armée	9
2.2.2	Clouage des sols	9
2.2.3	Stabilisation des pentes	11
2.3	Les fondations profondes	11
2.3.1	Réseaux de micropieux	12
2.3.2	Radiers de pieux	13
2.4	Les données expérimentales	15
2.4.1	Tunnels	15
2.4.2	Sols renforcés	16
2.4.3	Réseaux de pieux	17
2.5	Premières conclusions	18
3	Les méthodes de dimensionnement et de calcul	19
3.1	Introduction	19
3.2	Les tunnels	19
3.2.1	Rappel historique	19
3.2.2	La méthode convergence-confinement	20
3.2.2.1	Présentation simplifiée	20
3.2.2.2	Cas général	21
3.2.3	Approches récentes	22
3.2.4	Conclusion	23
3.3	Les sols renforcés	23
3.3.1	Méthodes classiques de dimensionnement	23
3.3.2	Calculs en déplacement	24
3.4	Les fondations profondes	25
3.4.1	Remarques préalables	25
3.4.2	Méthodes de dimensionnement	26
3.4.3	Méthodes de calcul de tassement	26
3.4.4	Conclusion	28
3.5	Conclusion	28
4	Les modèles de matériau équivalent	30
4.1	Modèles élastiques	30
4.1.1	Terre armée	30
4.1.2	Tunnels boulonnés	31

4.1.3	Fondations profondes	31
4.1.4	Conclusion	32
4.2	Critère de rupture	33
4.3	Modèles élasto-plastiques	33
4.3.1	Homogénéisation	33
4.3.2	Modèles rhéologiques	34
4.3.3	Conclusion	35
4.4	Les matériaux composites industriels	35
4.4.1	Caractéristiques élastiques	35
4.4.2	Caractéristiques élasto-plastiques	36
4.4.3	Conclusion	36
4.5	Les modèles multiphasiques	36
5	Conclusion	39
5.1	Récapitulatif	39
5.2	Objectifs du présent travail	40

1 Introduction

Le métier de l'ingénieur consiste à développer des techniques innovantes permettant de repousser sans cesse la limite du constructible. Dans le passé, celui-ci a cherché à bâtir plus haut (gratte-ciels), à franchir des coupures plus larges (pont de Normandie, tunnel sous la Manche) ou dans des conditions toujours plus difficiles : dans des sols réputés de mauvaise qualité (tunnel de Toulon), sur des terrains gagnés sur la mer (aéroport de Singapour), dans des environnements hostiles (grands barrages de montagne).

Le recours à des *inclusions de renforcement* pour améliorer les matériaux de construction est, dans cette optique, très ancien. Ainsi la basilique Saint-Marc à Venise est-elle construite, à l'instar d'un grand nombre de bâtiments situés au bord de la lagune, sur des pieux en bois destinés à améliorer la capacité portante du sol.

Dans un passé plus récent, on pense bien sûr à l'invention du *béton armé* au siècle dernier, pour lequel la présence des armatures permet de pallier la mauvaise résistance en traction du matériau initial. Depuis les années 60, le développement spectaculaire des *matériaux composites*, notamment à fibres n'est rien d'autre que l'application, à une échelle d'espace très petite, de la même idée de renforcement par inclusions.

Dans le domaine de la géotechnique qui nous intéresse ici, et au delà d'exemples historiques, l'usage industriel de techniques de renforcement est également assez récent. L'innovation technologique, notamment en France, a surtout été marquée depuis les années 70. Cependant, on peut constater que la compréhension rationnelle des ouvrages renforcés, et par conséquent les méthodes de calcul n'ont pas suivi cette évolution. Ici les préoccupations du chercheur rejoignent celles de l'ingénieur : mieux comprendre pour mieux construire.

Comme nous allons le voir tout au long de ce chapitre introductif, les méthodes de conception actuelles sont encore très empreintes de connaissances empiriques. A l'opposé, la formulation théorique des problèmes posés à l'ingénieur touche à des sujets de recherche en mécanique très actuels. Un des objectifs de ce travail de thèse est de montrer qu'une approche rationnelle de ces problèmes, à travers le développement de *modèles mécaniques cohérents*, peut apporter des réponses inaccessibles au seul *art de l'ingénieur*.

Ce premier chapitre est organisé de la façon suivante :

- Afin de familiariser le lecteur avec les *ouvrages renforcés par inclusions* qui font l'objet du présent travail de recherche, on présente tout d'abord un aperçu des technologies actuelles dans trois domaines distincts : les *tunnels*, les *ouvrages en sol renforcé* et les *fondations profondes*. Au delà de l'aspect culturel, cette étude bibliographique nous permet de dégager un certain nombre de *points communs* entre ces types d'ouvrages, et laisse penser qu'une approche unifiée de leur calcul est possible.
- On présente ensuite une analyse critique des méthodes de calcul d'utilisation courante propres à chaque domaine. On montre en particulier leurs limites ou insuffisances. Sans

dévoiler le développement, il apparaît qu'un point d'achoppement récurrent est le *nombre* important d'inclusions utilisées, de même que leurs dimensions en général très petites devant la taille de l'ouvrage.

- Le contournement de cette difficulté apparaît possible en renonçant à la modélisation exacte du renforcement, et en adoptant une approche dite de « matériau équivalent ». L'objet de la section suivante est de passer en revue différents modèles entrant dans cette catégorie, ayant été proposés pour rendre compte du comportement de l'un ou l'autre de ces types d'ouvrages.
- L'analyse des points communs ou notions apparaissant de façon récurrente dans ces modèles nous conduit à proposer la formulation d'un *modèle multiphasique de matériau renforcé* général, qui doit permettre de retrouver comme cas particulier une grande partie des résultats mentionnés.
- A partir de cet objectif, le plan général du mémoire est enfin détaillé.

Du point de vue de la forme, ce chapitre constitue une *revue bibliographique* du sujet principal (les ouvrages renforcés), mais aussi d'un certain nombre de thèmes parfois adjacents, parfois plus lointains. La liste des références est donc volontairement loin d'être exhaustive dans chaque domaine. Nous espérons cependant donner suffisamment d'éclairages pour expliquer le cheminement qui nous a conduit à la formulation du modèle multiphasique de matériau renforcé.

2 Les techniques actuelles de renforcement par inclusions

2.1 Le boulonnage des tunnels

Historiquement, le soutènement dans les ouvrages souterrains était assuré par des structures en bois (cadres) puis en acier (cintres) et enfin en béton (voûtes, voussoirs), disposées à l'intérieur de la galerie excavée. On peut qualifier ces soutènements de *passif* dans la mesure où ils agissent en limitant les mouvements du massif sans chercher à modifier sa capacité d'autoportance. A l'opposé, on appelle soutènement *actif* ou *confinement* tout procédé visant à améliorer les *caractéristiques intrinsèques* du massif (Lunardi, 1997).

Les inclusions de renforcement utilisées à cette fin sont de type varié. Greuell (1993) cite l'exemple historique des ardoisières d'Angers dans lesquelles on peut voir des broches en châtaignier, posées il y a plusieurs siècles pour renforcer les puits d'exploitation. L'utilisation industrielle massive des renforcements (boulons) ne s'est pourtant développée qu'au début des années 50 dans l'industrie minière aux Etats-Unis. Rapidement introduit en France dans les mines de fer de Lorraine, le premier procédé de boulonnage est à *ancrage ponctuel*. L'inclusion n'est solidaire du terrain qu'à ses extrémités, d'une part au fond du forage (ancrage par expansion du boulon dans la roche), d'autre part à la paroi par l'intermédiaire d'une plaque d'appui.

Le manque d'efficacité de cette technique dans certains terrains de mauvaise qualité a conduit à l'introduction de l'*ancrage réparti* sur toute la longueur du boulon. Cet ancrage peut être obtenu par frottement (boulons Split Set ou Swellex) ou par scellement. Dans le domaine du génie civil, ce type de disposition constructive s'est développé sous la forme de la *Nouvelle Méthode Autrichienne* (Rabcewicz, 1964) introduite en France dans les années 70. Cette méthode combine l'utilisation du boulonnage radial de la paroi et d'une voûte en béton projeté. Par ailleurs, l'instrumentation de l'ouvrage permet d'adapter le dimensionnement du boulonnage à l'avancement du creusement en fonction de la réponse du massif. Dans ce cadre, le boulonnage contribue à la diminution des déplacements de la paroi (*convergence*) et à la stabilité définitive de l'ouvrage (figure 1.1).

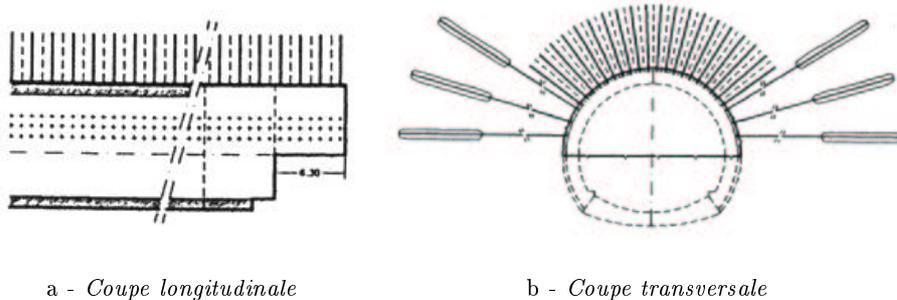


FIG. 1.1: Boulonnage de la paroi du tunnel - Tunnel de San Vitale (Italie) - d'après Lunardi (1998)

C'est la nécessité de creuser dans des massifs difficiles des galeries de grande dimension qui a conduit les ingénieurs à renforcer également le *front de taille* du tunnel pour assurer la stabilité temporaire de l'ouvrage en phase d'excavation. A cet égard, le tunnel du Mont-Blanc creusé dans les années 60 est précurseur. Depuis le milieu des années 80, le creusement de tunnels en terrain meuble sous de faibles couvertures de sol a généralisé l'emploi du boulonnage de front de taille, notamment en milieu urbain où le contrôle des déplacements du massif est primordial. Les « boulons » sont de grande longueur (de 18 m à 24 m), et sont constitués de plaquettes en fibre de verre disposées autour d'un tube central servant à l'injection du coulis de scellement (figures 1.2-1.3).

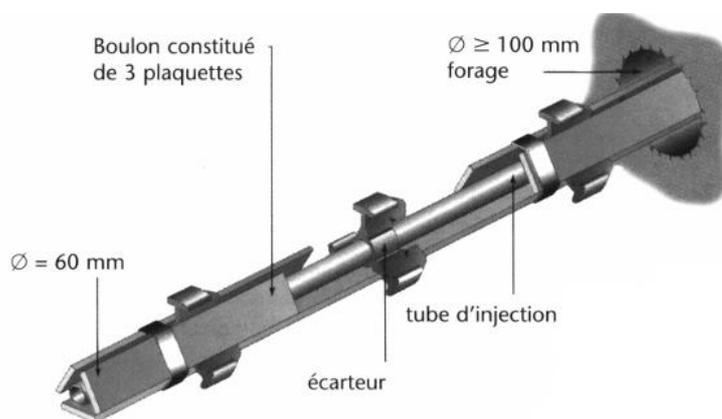
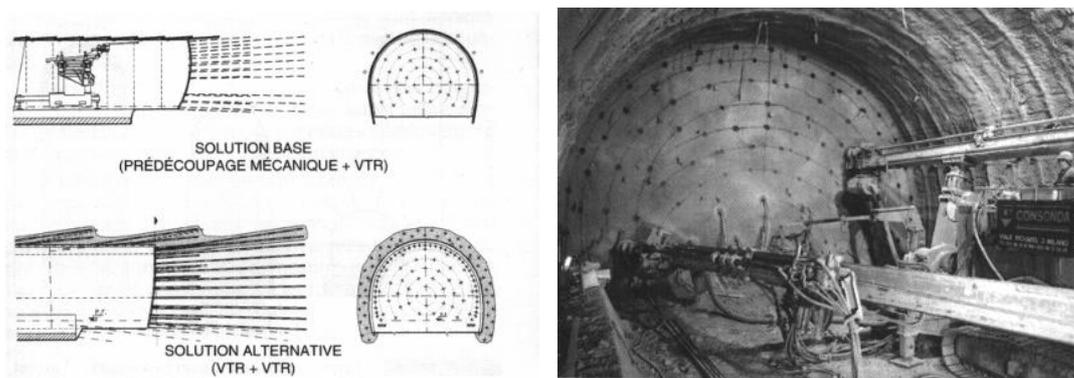


FIG. 1.2: Mise en place du boulonnage - d'après Centre d'Etudes des Tunnels (1998)



a - Schéma de boulonnage

b - Procédé de mise en place

FIG. 1.3: Boulonnage du front de taille - Tunnel de San Vitale (Italie) - d'après Lunardi (1998)

D'autres techniques de renforcement du massif par injection ou jet-grouting sont utilisées pour réaliser des *voûtes parapluies* sur le pourtour de la section du tunnel à l'avancement. Cette méthode assure à la fois un confinement du massif en phase de creusement et un soutènement de la paroi en service (Centre d'Etudes des Tunnels (1998)).

De façon générale, l'emploi d'inclusions en vue d'améliorer l'ouvrabilité du terrain s'avère être une méthode économique et très efficace, et est donc appelée à être appliquée de plus en plus couramment.

2.2 Le renforcement des sols

L'invention de la *terre armée* par Vidal (1966) a ouvert un nouveau chapitre dans les techniques de construction modernes. L'idée originale consiste à créer, à partir d'un sol donné et d'éléments de renforcement un véritable *matériau composite*. Les propriétés mécaniques ainsi améliorées permettent d'envisager de nouveaux types d'ouvrages (murs de soutènements verticaux, remblais renforcés, etc). A l'échelle de ces ouvrages, la terre armée peut être considérée comme un matériau *homogène* ayant des propriétés anisotropes du fait de la direction privilégiée des armatures de renforcement. Depuis 30 ans, les techniques de renforcement des sols se sont diversifiées, utilisant des matériaux et des formes d'inclusions de plus en plus variés. Schlosser et Unterreiner (1994) font un récapitulatif des procédés industriels les plus utilisés actuellement.

2.2.1 Terre armée

Des armatures métalliques sont disposées en lits parallèles entre des couches de sol au fur et à mesure de la construction du remblai (figure 1.4). Un parement doit être mis en place pour éviter la rupture locale du sol entre les armatures. Ce procédé a été largement utilisé pour réaliser des talus et des plateformes dans le domaine autoroutier (la première utilisation remonte à 1968, pour l'autoroute Roquebrune-Menton). Le procédé Freyssisol est un dérivé dans lequel le renforcement est une bande continue en synthétique (Paraweb) disposée en zigzag (figure 1.5). Quelle que soit la technique, le renforcement travaille uniquement en *traction*.

2.2.2 Clouage des sols

Contrairement aux précédents, ce procédé est utilisé sur un sol en place, pour réaliser des talus ou des fouilles de grande hauteur en déblai. La construction s'effectue par phases, comprenant chacune (CLOUTERRE, 1991) :

- l'excavation du terrain sur une hauteur de 1 à 2 m, selon la nature du sol en place,
- la mise en place des clous légèrement inclinés en dessous de l'horizontale, soit par battage (méthode hurpinoise), soit par scellement au coulis dans un forage préalable,
- la réalisation d'un parement en béton projeté sur un treillis soudé.

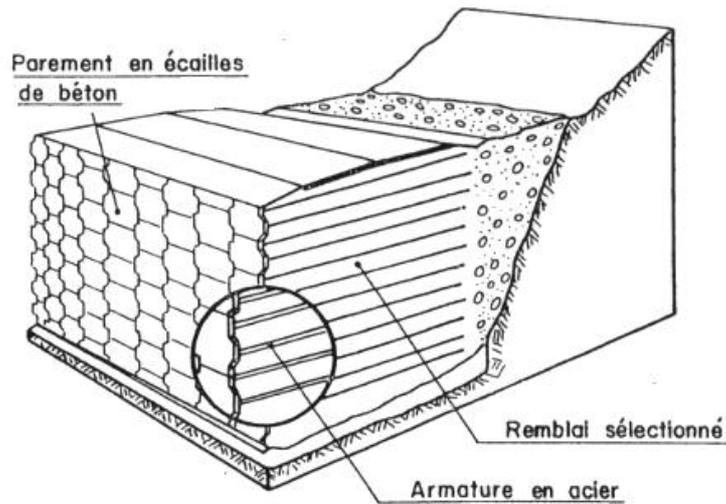


FIG. 1.4: Remblai en terre armée - d'après Schlosser (1983)

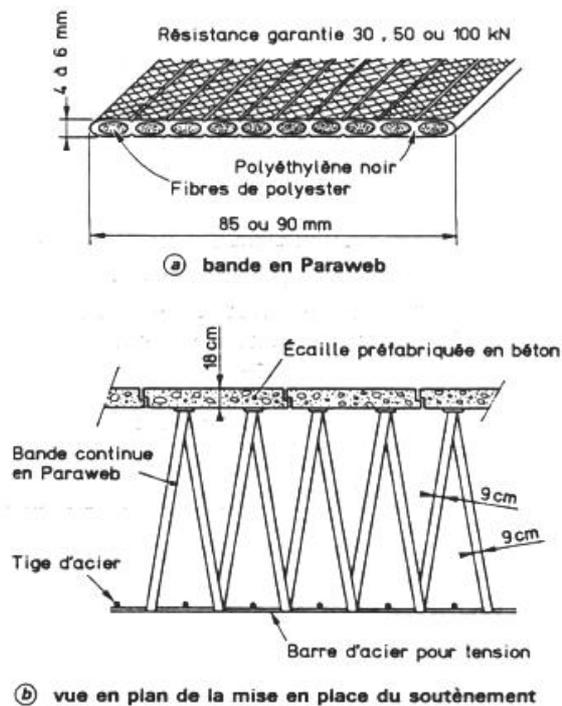


FIG. 1.5: Procédé Freyssisol - d'après Schlosser et Unterreiner (1994)

Le schéma de principe de la construction est donné sur la figure 1.6. Depuis la réalisation du premier mur en 1974 à Versailles pour un élargissement des voies SNCF, la technologie (des parements, des clous, de leur mise en place) et la taille des ouvrages a beaucoup progressé. Une hauteur de 28 m a été atteinte pour un mur situé sur le trajet de contournement de Lyon par le TGV en 1990 (figure 1.7).

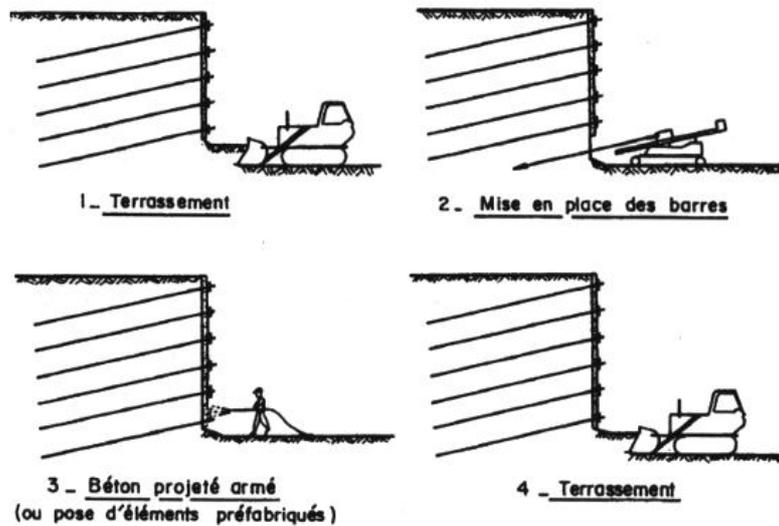


FIG. 1.6: Phases d'exécution d'un mur en sol cloué - d'après les recommandations CLOUTERRE (1991)

Dans tous ces ouvrages, les clous sont sollicités essentiellement en traction, mais les résistances au cisaillement et à la flexion peuvent être considérées, notamment vis à vis de la rupture.

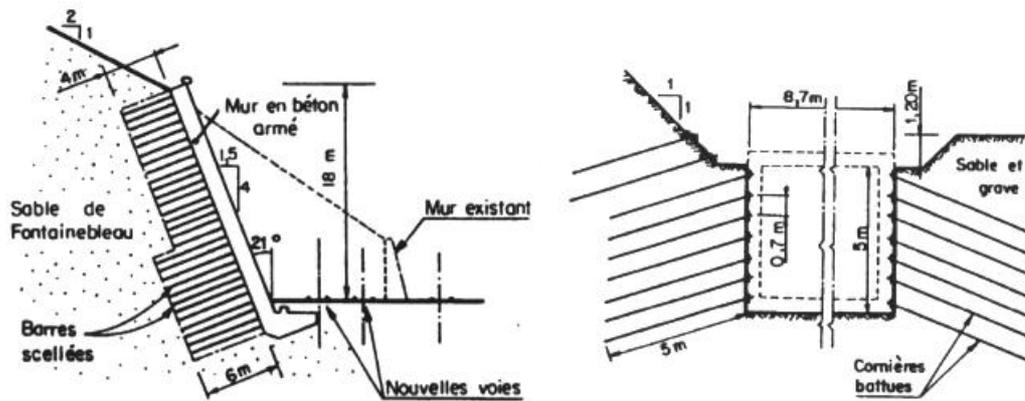
2.2.3 Stabilisation des pentes

Il s'agit ici de clouer des masses de sol ou de roche instables sur un substratum de meilleure qualité. On utilise à cet effet des *micropieux* de 20 à 40 mm de diamètre, des palplanches, voire des pieux de plus gros diamètre, disposés en une ou plusieurs rangées (Schlosser et Unterreiner, 1994). Dans ce type d'ouvrages, les inclusions sont essentiellement sollicitées en flexion par le mouvement latéral du sol.

2.3 Les fondations profondes

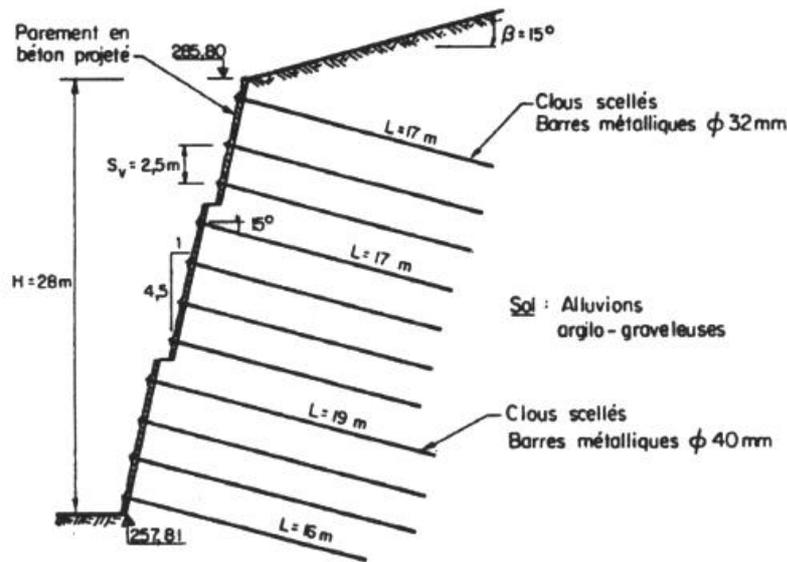
Les ingénieurs du XX^{ème} siècle ont pris l'habitude de distinguer les *fondations profondes* des techniques de renforcement de sols présentées jusqu'ici. Si celles-ci se sont développées essentiellement depuis 30 ans, celles-là ont un long passé. L'île Feydeau, banc de sable situé sur la Loire, à Nantes, a par exemple été entièrement stabilisée par des pieux en bois dans les années 1720 pour permettre la construction d'un nouveau quartier.

De façon classique, les fondations profondes consistent en la mise en place de pieux verticaux transmettant le poids de l'ouvrage qu'ils supportent aux couches profondes du massif de construction. La longueur des pieux est souvent, mais pas nécessairement, calculée de façon à atteindre un substratum rigide. Le poids de l'ouvrage est transmis au sol par *frottement latéral* le long du fût et par la *pointe* du pieu. Frank (1995) présente les techniques actuelles



a - *Elargissement des voies SNCF - Versailles (1974)*

b - *Métro de Lyon (1986)*



c - *Tête sud du tunnel de Dombes - ligne TGV Rhône-Alpes (1990)*

FIG. 1.7: *Exemples de murs en sol cloué - d'après les recommandations CLOUTERRE (1991)*

de réalisation des pieux. On distingue notamment les pieux métalliques *battus* ou *foncés*, des pieux *forés* en béton armé coulés en place après excavation. Dans chaque catégorie, nombre de variantes existent, souvent propres à l'entreprise qui réalise les travaux.

2.3.1 Réseaux de micropieux

L'utilisation de micropieux disposés en réseau est une technique datant des années 50 (Lizzi et Carnavale, 1979). Il s'agit de pieux forés de faible diamètre (<250 mm) équipés d'une armature scellée au coulis ou au mortier. Actuellement, les micropieux sont souvent *injectés* à

forte pression par l'intermédiaire d'un tube à manchettes, ce qui permet de créer une adhérence parfaite avec le massif (figure 1.8).

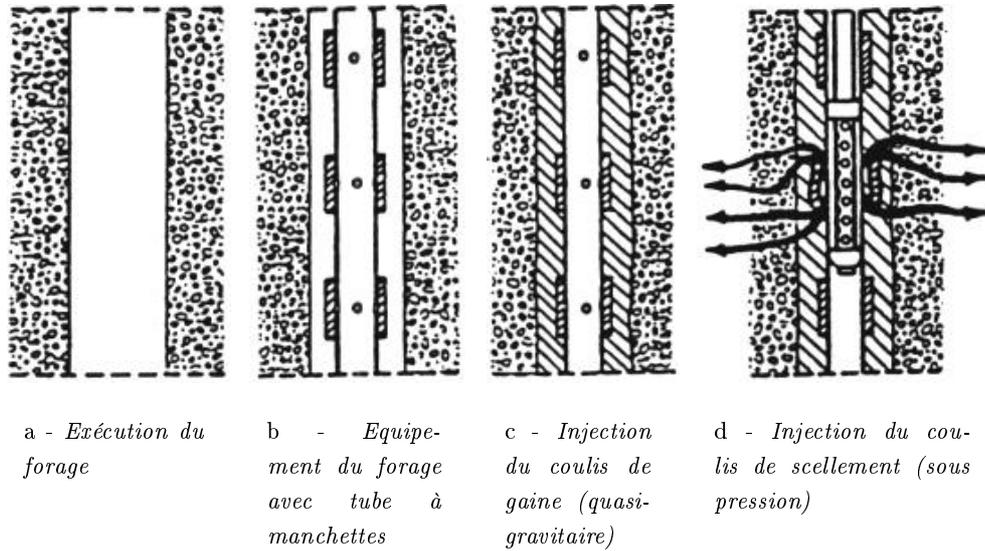


FIG. 1.8: Injection d'un micropieu - d'après Amar (1993)

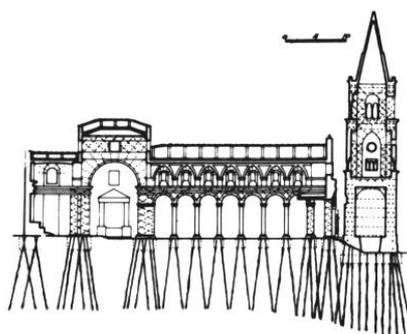
L'utilisation classique des micropieux est la reprise d'ouvrages en sous-œuvre. Lizzi (1982) fait une revue de l'utilisation de cette technique depuis les années 60. L'auteur présente notamment la reprise des fondations de la cathédrale de Nicosie en Sicile (construite en zone sismique) et la stabilisation de tours de grande hauteur (figure 1.9).

Dans tous les cas, l'objectif est de créer un réseau dense d'inclusions formant de véritables « racines » sous l'ouvrage (le terme italien utilisé par Lizzi est en effet *pali radice*). L'utilisation des micropieux comme principe de fondation d'un ouvrage est encore peu développée. En France, le peu de réalisations nouvelles tient sans doute au manque de compréhension des interactions en jeu, et en particulier de modèles mécaniques permettant un dimensionnement rationnel. Le projet national FOREVER engagé en 1993 a pour vocation d'améliorer la connaissance de ce type de structures et d'en élargir les domaines d'utilisation.

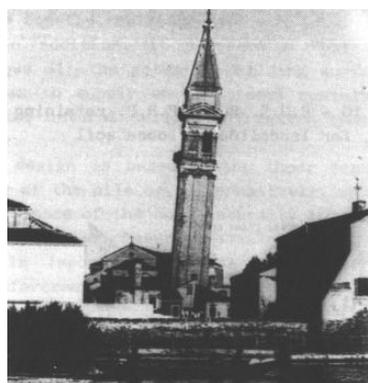
2.3.2 Radiers de pieux

Dans l'approche classique des fondations, le poids d'un ouvrage est transmis au massif, soit par une *semelle superficielle*, soit par un *ensemble de pieux* solidarités par un *chevêtre* qui, n'ayant pas de contact avec le massif, ne participe pas à la reprise des charges. Le choix de l'une ou l'autre des solutions est dicté simplement par la qualité du sol, plus précisément sa capacité portante.

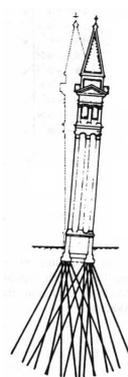
Cependant, dans certaines conditions, il est possible que la capacité portante d'une semelle soit convenable, mais que les tassements subis en service soient inacceptables. Burland *et al.* (1977) ont proposé dans ce cas l'utilisation couplée d'une semelle et de pieux en faible nombre



a - Cathédrale de Nicosie (Sicile)



b - Eglise de Burano (Venise)



c - Schéma du renforcement

FIG. 1.9: Exemples d'utilisation des réseaux de micropieux - d'après Lizzi (1982)

utilisés comme *réducteurs de tassement*: ce sont les *radiers de pieux* ou *fondations mixtes*. Par rapport à une approche classique, le dimensionnement de l'ouvrage doit permettre de calculer la répartition des charges entre ses deux composantes structurales.

Cette technique s'avère particulièrement efficace pour fonder des ouvrages de grande taille sur une couche argileuse molle de grande profondeur. Ceci explique leur emploi systématique à Londres et à Francfort depuis une vingtaine d'années. Le tableau 1.1 donne les dimensions caractéristiques de quelques ouvrages typiques construits dans ces deux villes, dont certains sont représentés sur la figure 1.10.

En France, il n'y a pas d'ouvrages conçus précisément comme des radiers de pieux, car la réglementation ne le prévoit pas. Du fait de nouvelles méthodes de calcul développées depuis une dizaine d'années spécifiquement pour ce type de fondations (voir section 3.4.3), on peut espérer que leur emploi se généralise dans le futur.

Date	Désignation	Hauteur (m)	Epaisseur du radier (m)	Pieux
1967	Tour <i>Cavalry Barracks</i> , Londres (Hooper, 1979)	90	1,5	51 pieux $d = 0,9 \text{ m}$, $L = 25 \text{ m}$
1975	Immeuble <i>Stonebridge Park</i> , Londres (Cooke <i>et al.</i> , 1981)	-	0,9	351 pieux $d = 0,45 \text{ m}$, $L = 13 \text{ m}$
1990	<i>Messturm</i> , Francfort (Sommer <i>et al.</i> , 1991)	256	3 - 6	64 pieux $d = 1,3 \text{ m}$, $L = 27 - 35 \text{ m}$
1997	Tour de la <i>Kommerzbank</i> , Francfort (Katzenbach, 1997)	299	2,5 - 4,5	111 pieux $d = 1,5 - 1,8 \text{ m}$, $L = 37,5 - 45,5 \text{ m}$

TAB. 1.1: Caractéristiques d'ouvrages sur radiers de pieux

2.4 Les données expérimentales

Les différentes techniques que l'on vient de passer en revue ont pour point commun de créer des structures renforcées au sein desquelles les interactions mécaniques sont complexes.

Afin de mieux les appréhender, une approche expérimentale a été développée depuis une quinzaine d'années, soit sur ouvrage en vraie grandeur, soit sur modèle réduit. Il nous a paru important d'en donner ici un aperçu.

2.4.1 Tunnels

A la fin des années 70, une expérimentation en vraie grandeur a été menée sur le tunnel de Kielder. Différents types de soutènement ont été comparés dans un massif rocheux homogène (Freeman, 1978). A cette époque, aucun modèle mécanique ne permettait de rendre compte du boulonnage. Ces résultats sont réutilisés depuis peu pour valider les nouveaux modèles (voir section 3.2.3).

Indraratna et Kaiser (1990a,b) reportent des essais sur modèles réduits dans lequel la pression géostatique dans le massif est imposée de façon croissante. Le protocole expérimental ne reproduit donc pas les conditions réelles (contraintes initiales présentes dans le massif) mais les résultats permettent aux auteurs de valider leur modèle de calcul (voir également

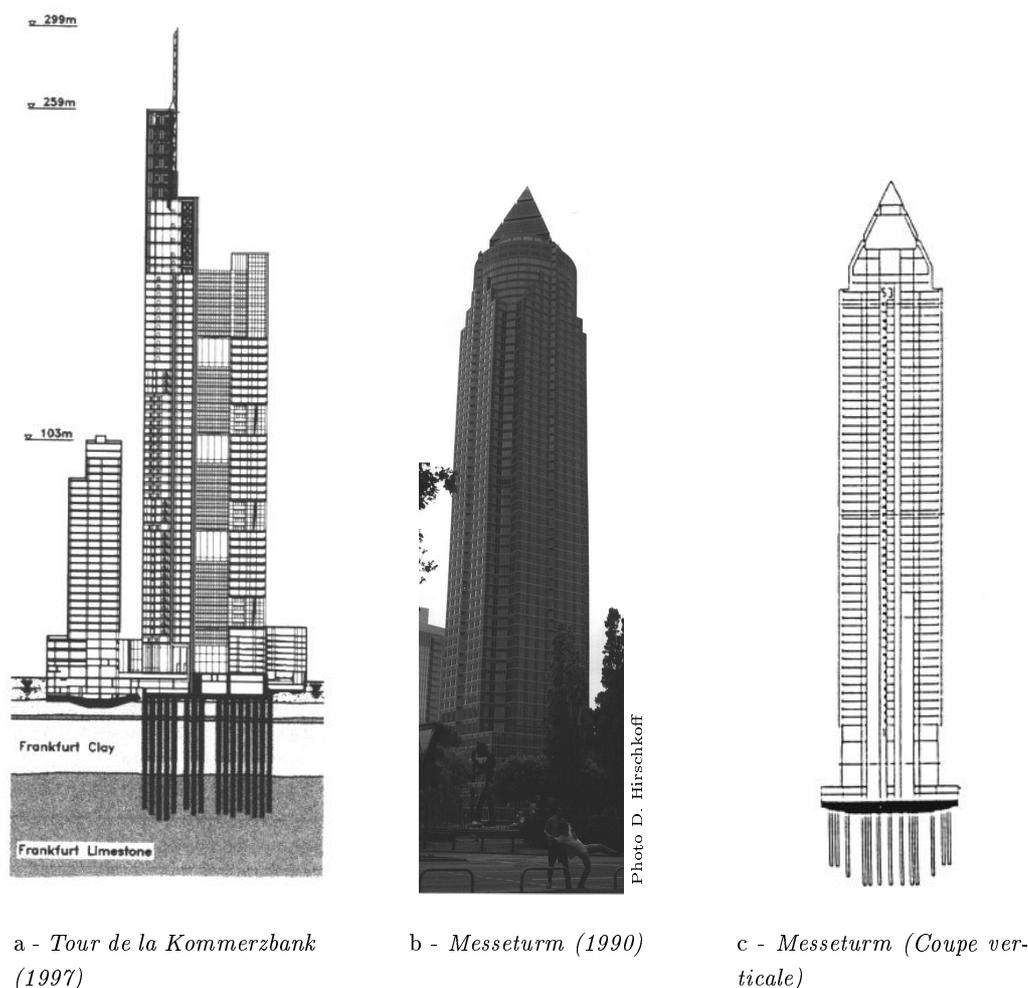


FIG. 1.10: Exemples d'ouvrages sur radiers de pieux

section 3.2.3).

Al Hallak (1999) a effectué tout récemment des essais en centrifugeuse sur un tunnel de surface pour étudier l'influence du boulonnage de front de taille sur sa stabilité. Le creusement, impossible en vol, a été simulé par une pression fictive décroissante appliquée au front de taille (voir la méthode convergence-confinement, section 3.2.2). Les résultats ont été comparés à des calculs tridimensionnels par éléments finis effectués avec le code CESAR-LCPC.

2.4.2 Sols renforcés

Le comportement de la terre armée en tant que matériau composite a été étudié notamment par Schlosser et Long (1973) et Long et Ursat (1977). Il s'agit d'expériences au triaxial sur des éprouvettes en sable renforcé par des disques d'inclinaison variable.

En ce qui concerne le clouage des sols, trois murs expérimentaux en vraie grandeur ont été réalisés par le Centre d'Etudes Techniques du Bâtiment et des Travaux Publics (CEBTP) dans

le cadre du Projet National CLOUTERRE. Les résultats ont permis de dégager des conclusions générales sur le fonctionnement des ouvrages (CLOUTERRE, 1991), mais également de valider de nouveaux modèles de calcul (Benhamida, 1998; Sellali, 1999).

2.4.3 Réseaux de pieux

Dans le domaine des micropieux, des essais en vraie grandeur ont été réalisés à Saint-Rémy les Chevreuse (Plumelle, 1984, 1985), reprises récemment dans le cadre du Projet National FOREVER.

De nombreuses expériences en centrifugeuse ont été menées sur des groupes de pieux, on peut citer notamment celles de Traher et Jessberger (1991a,b). Celles-ci comprennent en particulier un modèle réduit du radier de pieux supportant la *Messturm* de Francfort, ce qui a permis des comparaisons concluantes avec les résultats observés en vraie grandeur. Pour le reste, compte-tenu du petit nombre d'expériences, seules des tendances qualitatives sont dégagées par les auteurs. Cependant, leurs résultats ont été abondamment utilisés pour la validation de modèles analytiques.

Horikoshi et Randolph (1996) ont étudié l'influence de la taille réduite d'un ensemble de pieux regroupés au centre du radier. Les résultats sont exploités ensuite sous forme de règles simples de conception. Dans le cadre du Projet National FOREVER, Dubreucq (1998) a étudié le chargement de réseaux verticaux. Cependant, la réalisation de plusieurs essais dans le même conteneur, de même que la non distinction entre fonçage des pieux et chargement de la fondation mixte rend les interprétations délicates. Citons enfin les travaux originaux de Lee *et al.* (1997), qui ont étudié l'inclinaison optimale de *micropieux réticulés* (voir figure 1.11).

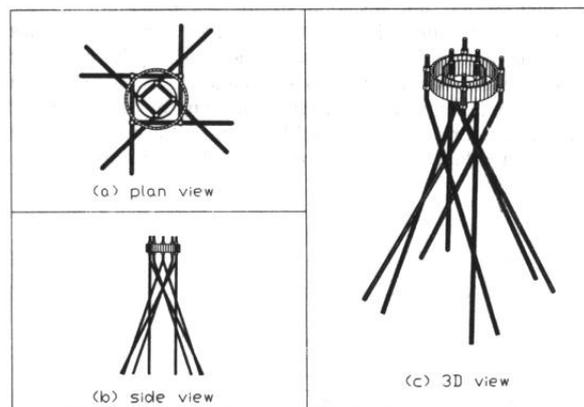


FIG. 1.11: *Micropieux réticulés* - d'après Lee et al. (1997)

De façon générale, les caractéristiques mécaniques du massif et des inclusions de renforcement à introduire dans un code de calcul pour valider un modèle ne sont pas toujours données, et doivent souvent être déterminées par une analyse à rebours toujours discutable. De plus, les expériences, notamment françaises sont souvent menées pour elles-mêmes, c'est à dire pour

obtenir des conclusions qualitatives, ou parfois quantitatives par des corrélations empiriques. La validation de modèles mécaniques à partir de ce type de résultats est alors difficile.

2.5 Premières conclusions

Dans tous les types d'ouvrages que l'on vient de passer en revue, on trouve un certain nombre de similitudes :

- Les inclusions de renforcement sont *en grand nombre*. Si les talus en sol cloué comportent en général une dizaine de lits de clous, les groupes de pieux (associés ou non à un radier) comprennent facilement de 50 à plusieurs centaines d'éléments. Dans un tunnel de plusieurs kilomètres, l'utilisation conjointe du boulonnage radial et de front de taille nécessite des milliers de boulons.
- Les inclusions sont souvent disposées *périodiquement*, sur un plan à maille carrée ou triangulaire pour les clous ou les pieux, à équidistance angulaire pour les boulons radiaux.
- Leurs caractéristiques mécaniques sont *très supérieures* à celles du massif environnant. On donne dans le tableau 1.2 quelques ordres de grandeur courants.

Type	Module d'Young (MPa)	Résistance (MPa)
Argile	1 - 10	0,05 - 0,5 (Cohésion)
Sable	20 - 200	-
Roche	100 - 10000	0,1 - 5
Géotextile (/m)	1 - 5	0,01 - 0,5
Béton	10 000 - 40 000	20 - 80 (Compression)
Acier	200 000	400 - 1 000 (Traction)

TAB. 1.2: *Caractéristiques mécaniques des géomatériaux courants et des inclusions de renforcement*

- La proportion volumique des inclusions est très petite devant l'unité. Une densité d'un boulon de diamètre 20 mm par m² en front de taille correspond à une valeur de $3 \cdot 10^{-4}$. Pour un radier de pieux de diamètre d espacés de $5d$, la valeur est de 3%. Dans tous les cas courants, la fraction volumique ne dépasse jamais 10%.

3 Les méthodes de dimensionnement et de calcul

3.1 Introduction

Si les structures présentées à la section 2 possèdent des caractéristiques communes, les méthodes de dimensionnement d'une part, de calcul en déplacement d'autre part, sont encore aujourd'hui très spécifiques. En effet, l'art de l'ingénieur a progressé de façon indépendante dans le domaine des tunnels, des sols renforcés et des fondations profondes. Des règles de construction empiriques utilisées jusqu'au milieu du siècle, on est passé à des *modèles mécaniques* d'abord simplistes qui se sont petit à petit raffinés¹.

Si l'utilisation d'inclusions de renforcement s'est généralisée au cours des trois dernières décennies, les recherches visant à améliorer la compréhension du fonctionnement mécanique des ouvrages et notamment les interactions complexes entre inclusions et milieu environnant restent encore très cloisonnées. A cet égard, l'invention du terme générique *géotechnique* il y a seulement 30 ans est significative.

Dans chaque domaine, la prise en compte des inclusions de renforcement s'est souvent faite par extension de modèles de calculs préexistants. Seul le recours à la méthode des éléments finis, qui s'est généralisé dans toutes les branches du génie civil depuis 20 ans semble aujourd'hui un dénominateur commun. Là encore, l'utilisation de cet outil est plus ou moins courante selon le type d'ouvrages renforcés considéré (fréquemment pour les tunnels, rarement pour les fondations profondes).

Dans cette section, on s'intéresse aux méthodes de dimensionnement et de calcul en déplacement relatives aux trois types d'ouvrages considérés. Dans les deux premiers cas, pour lesquels l'usage du renforcement relève de techniques récentes, on met en lumière les difficultés qu'ont les méthodes classiques à s'adapter à la prise en compte des inclusions. Dans le troisième, pour lequel les inclusions font *ab initio* partie de l'ouvrage, on montre les difficultés qui apparaissent lorsque le nombre d'inclusions devient important et/ou que l'interaction avec d'autres parties de l'ouvrage est complexe (radiers de pieux, réseaux de micropieux).

3.2 Les tunnels

3.2.1 Rappel historique

La conception d'un tunnel consistait il y a une cinquantaine d'années en la détermination du soutènement le mieux adapté pour supporter le poids du *terrain décomprimé* par le creusement. La forme et la taille de la zone décomprimée sont données par des formules empiriques tirées de l'observation de l'existant (Formules de Terzaghi ou Protodiakonov, citées par Bouvard-Lecoanet *et al.* (1988)).

1. On verra dans le développement de cette section que le niveau de technicité des modèles utilisés est très variable d'un domaine à l'autre.

Le choix et le dimensionnement du soutènement dépendent de l'appréciation *qualitative* des caractéristiques du massif et de la taille de la section du tunnel. Il faut attendre les années 70 pour une classification chiffrée plus rationnelle des roches. Bienawski (1973) introduit l'indice *RMR* (*Rock Mass Rating*) dépendant notamment de la résistance à la compression de la roche saine, de la fracturation, des venues d'eau. Barton (1974) propose l'indice de qualité *Q* dépendant également de facteurs géologiques, tectoniques et du comportement des joints.

A partir de l'analyse d'ouvrages existants, ces auteurs proposent différents types de soutènement efficaces en fonction de la note attribuée. Ces classifications permettent toujours aujourd'hui de choisir rapidement un type de soutènement et de le dimensionner. Cependant, l'*optimisation* du choix, de même que les estimations des déplacements du massif ne peuvent être menée qu'à partir de modèles de calcul analytiques ou numériques, prenant effectivement en compte l'interaction entre le massif et le(s) soutènement(s).

3.2.2 La méthode convergence-confinement

Depuis 25 ans, des modèles mécaniques rationnels se sont développés, qui permettent de répondre à ces questions. La méthode la plus utilisée aujourd'hui porte le nom de *convergence-confinement*. Elle a été développée vers le milieu des années 70. On en trouve une présentation exhaustive dans Panet (1995).

3.2.2.1 Présentation simplifiée Pour clarifier l'exposé, on se limite tout d'abord au cas d'un tunnel profond axisymétrique creusé dans un massif soumis à des contraintes initiales isotropes (pression P_o). La méthode consiste à remplacer le problème tridimensionnel complexe du creusement par un problème en déformation plane. Dans une section donnée, l'influence du front de taille est modélisée par une *pression fictive* P_i appliquée sur la paroi circulaire. Quand on s'éloigne du front de taille actuel, cette pression décroît de P_o à zéro². On désigne par λ le *taux de déconfinement* vérifiant $P_i = (1 - \lambda) P_o$. La relation entre λ et la distance de la section courante au front de taille est une fonction calée à partir de calculs tridimensionnels (Corbetta, 1990; Panet, 1995).

Dans le cadre axisymétrique, la méthode donne lieu à des calculs analytiques, la seule variable caractérisant la géométrie étant la distance radiale r . De façon classique, on établit le lien entre la pression de déconfinement P_i et la convergence u de la paroi, *séparément* pour le massif et pour le soutènement. Ces relations sont représentées sous la forme d'une courbe de *convergence du massif* et d'une *courbe de confinement* du soutènement (Figure 1.12).

Cette dernière a pour origine l'abscisse u_d correspondant à la convergence du massif au moment où le soutènement est mis en place. En effet, pour des raisons techniques, il y a toujours une certaine distance entre le front de taille actuel et le dernier soutènement posé. L'intersection des courbes donne le point d'équilibre du système, et donc les efforts en chaque point. On peut ainsi rapidement faire un prédimensionnement aisé.

2. Une présentation plus détaillée est donnée au chapitre 3, section 4.

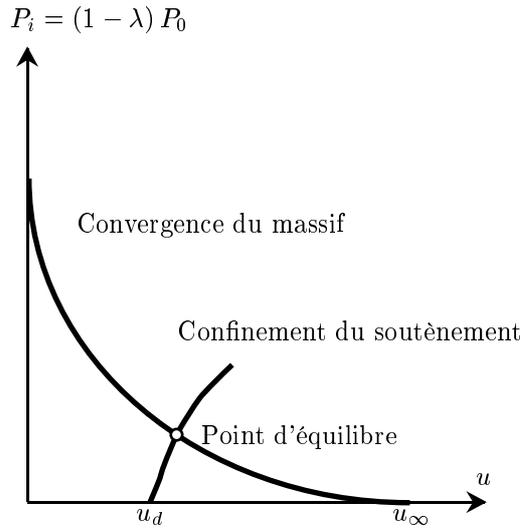


FIG. 1.12: Méthode convergence-confinement

Panet (1995, Chap. 2) présente successivement le calcul analytique des courbes de confinement pour les soutènements par voûte en béton, par cintre métallique et boulonnage à ancrage ponctuel (solution de Hoek et Brown (1980)). En ce qui concerne le massif, un récapitulatif de solutions utilisant une loi de comportement élasto-plastique parfaite (critères de Tresca et Mohr-Coulomb) est donné dans Corbetta (1990, Chap. 2). Le cas de l'écroissage isotrope linéaire est traité par Bernaud (1991). Panet (1995, Chap. 4-6) cite également un certain nombre de travaux de Nguyen Minh et Berest pour des comportements de massifs *radoucissants*.

Dans le cas du renforcement par boulonnage à ancrage réparti, la distinction explicite entre massif et soutènement n'est plus possible. Jusqu'au milieu des années 80, aucune méthode ne permettait d'appliquer proprement la méthode (Bouvard-Lecoanet *et al.*, 1988, Chap. 4). Depuis une dizaine d'années différents modèles ont été proposés, qui tentent de prendre en compte l'interaction des boulons sur le massif dans les équations constitutives (voir section 3.2.3). A la lumière de la classification de Lunardi, il est clair que le confinement apporté par le boulonnage doit être traité en considérant les caractéristiques mécaniques *équivalentes* du massif renforcé.

3.2.2.2 Cas général Le cas axisymétrique correspond bien en pratique aux excavations par tunnelier. Pour des galeries de forme quelconque, seuls des calculs numériques utilisant par exemple les éléments finis permettent d'appliquer la méthode. Le déconfinement est appliqué sous la forme d'un vecteur contrainte $\underline{T} = (1 - \lambda) \underline{\sigma}_o \cdot \underline{n}$, où $\underline{\sigma}_o$ désigne l'état de contraintes initiales dans le massif (quelconque, il peut être connu par un premier calcul aux éléments finis) et \underline{n} la normale à la paroi au point considéré. Dans le cas de creusement par demi-section, ou pour des calculs tridimensionnels, le phasage des travaux est simulé par la méthode d'*activation/désactivation*: partant d'un maillage complet du massif, la rigidité des éléments excavés est annulée à chaque pas du processus, tandis que celle du soutènement est activée.

L'application d'une telle méthode au calcul des tunnels boulonnés, pour lesquels les boulons sont discrétisés séparément est encore plus lourde que dans le cas non renforcé et conduit à des temps de calcul énormes (Al Hallak, 1999), notamment à cause de la finesse nécessaire du maillage. Par ailleurs, l'hétérogénéité des caractéristiques mécaniques (les boulons sont beaucoup plus raides que la roche) conduit à un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité du système, qui obère la précision des résultats, notamment dans le cas de calculs itératifs non linéaires. On peut également citer les travaux de Peila (1994) et Lee et Rowe (1990) utilisant ce type d'approche.

Des méthodes *itératives* de résolution adaptées aux systèmes comportant à la fois un très grand nombre de degrés de liberté, et qui sont *a priori* mal conditionnés ont été proposées. La méthode du *gradient conjugué* avec préconditionnement s'avère très efficace pour les résoudre (Shahrour et Mroueh, 1997; Mroueh et Shahrour, 1998).

3.2.3 Approches récentes

Indraratna et Kaiser (1990a,b) prennent en compte l'influence du boulonnage en incluant un effort volumique radial dans l'équation d'équilibre du massif. Utilisant un critère de plasticité de Mohr-Coulomb pour la roche, les auteurs résolvent le problème de convergence en axisymétrie. Ils font apparaître une cohésion et un angle de frottement *équivalents* pour le massif renforcé, ce qui permet d'utiliser les solutions analytiques connues (voir section 3.2.2). La densité d'efforts appliqués par les boulons est évaluée en fonction de la contrainte orthoradiale dans le massif et d'un coefficient de frottement roche/boulon scellé. De plus, les boulons n'apparaissent pas dans le comportement élastique. Les auteurs comparent néanmoins avec succès leur approche avec des résultats d'essais sur modèle réduit.

Oreste et Peila (1996) adoptent une démarche similaire en modifiant le critère de Hoek et Brown pour la roche pour tenir compte du boulonnage, le comportement élastique de la zone boulonnée étant supposé inchangé. Des comparaisons avec des mesures effectuées sur le tunnel expérimental de Kielder (Freeman (1978)) sont données.

Dans ces deux approches, on suppose l'adhérence parfaite entre le boulon scellé et la roche. De plus l'influence du boulonnage est prise en compte uniquement en phase plastique. Le mode de calcul des efforts appliqués par les boulons (en fonction de la contrainte orthoradiale) est discutable : c'est en fait un effort maximal avant glissement qui est pris en compte de cette façon. Rien ne dit que cet effort soit effectivement mobilisé. L'introduction d'une cohésion et d'un angle de frottement équivalents est également discutable puisque le matériau équivalent est anisotrope.

Dans une autre optique, Hyett *et al.* (1996) étudient le comportement d'un boulon scellé unique sollicité par le mouvement du massif supposé *connu*. Les auteurs retrouvent par le calcul des tendances observées dans les tunnels expérimentaux. Cependant, aucun couplage avec le massif n'est proposé pour obtenir un modèle global.

3.2.4 Conclusion

La prise en compte du confinement, c'est à dire de l'amélioration des caractéristiques mécaniques d'un massif par la mise en place d'inclusions nous conduit de façon incontournable à étudier les propriétés du matériau « roche renforcée » considéré comme un tout.

3.3 Les sols renforcés

3.3.1 Méthodes classiques de dimensionnement

Historiquement, l'analyse des pentes, talus et remblais se place sous l'angle de la *stabilité*. On se borne à déterminer un *coefficient de sécurité* vis à vis de la rupture de l'ouvrage. Pour cela, on étudie l'*équilibre limite* d'une partie du massif délimité par une surface de rupture potentielle (en général un cercle ou une spirale). En décomposant le problème par « tranches » verticales, et en introduisant une hypothèse supplémentaire sur les efforts intérieurs pour boucler le calcul (hypothèse de Fellenius ou de Bishop), on obtient un coefficient de sécurité vis à vis de la mobilisation du cisaillement le long de la surface de rupture. L'analyse menée pour différentes surfaces de rupture potentielles permet de déterminer la plus *critique*. Quoique les hypothèses introduites puissent être discutables du point de vue mécanique, cette méthode est la plus couramment utilisée actuellement, parce qu'elle a été validée par l'expérience de nombreux ouvrages réels.

Dans un cadre mécanique plus rigoureux (c'est à dire sans recours à l'introduction d'une hypothèse *ad hoc*), le calcul à la rupture permet de définir un *facteur de confiance* vis à vis de la stabilité. Sève (1998) a mené une comparaison exhaustive des deux méthodes et conclu à l'équivalence des résultats pour les ouvrages courants.

Les premiers dimensionnements prenant en compte des renforcements ont été effectués pour la terre armée. On peut citer notamment la méthode de l'*équilibre limite* (Schlosser, 1972) et de la *spirale* (Juran, 1977). Ces méthodes reposent sur des hypothèses *a priori* de répartition des contraintes dans le massif et le long des armatures. Analysant ces méthodes vis à vis du calcul à la rupture, de Buhan (1986) a montré que les facteurs de stabilité ainsi obtenus ne sont pas forcément du côté de la sécurité.

Pour les talus en sol cloué, l'extension de la méthode des tranches pour tenir compte des inclusions est implantée dans le programme TALREN, développé par la société Terrasol (Schlosser, 1983; Blondeau *et al.*, 1984). Le calcul de stabilité relève d'une *analyse multicritère* prenant en compte :

- la rupture du clou par traction-cisaillement,
- la rupture du sol en cisaillement (critère de Mohr-Coulomb),
- le défaut d'ancrage du clou par mobilisation complète du frottement sol/clou sur la longueur située à l'extérieur de la surface de rupture,

- la plastification du sol due à l'interaction normale sol/clou.

Le programme PROSPER développé au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées par Delmas *et al.* (1986) combine le calcul à la rupture avec une approche en déplacement. Cette approche est plus précisément adaptée au clouage de pentes instables.

Basé sur l'approche cinématique du calcul à la rupture, le logiciel STARS (Anthoine, 1990; de Buhan *et al.*, 1993) détermine le facteur de confiance de l'ouvrage en utilisant des spirales logarithmiques comme surfaces de rupture.

La présentation des méthodes d'analyse de stabilité est loin d'être exhaustive. En ce qui concerne la terre armée, Sawicki (1998) donne un état de l'art très complet, à la fois des connaissances empiriques acquises au cours d'une trentaine d'années d'observation et d'expérimentation, et de nombreux modèles analytiques développés depuis les années 80.

Même si la connaissance des sols renforcés est encore très imparfaite, la validation des méthodes simplifiées de dimensionnement sur de nombreux ouvrages réels permet de penser que les calculs de stabilité sont aujourd'hui maîtrisés de façon assez satisfaisante.

3.3.2 Calculs en déplacement

Dans l'approche moderne réglementaire du dimensionnement, ces calculs de stabilité relèvent d'une justification aux *états limites ultimes*. Cependant, la réglementation européenne impose aujourd'hui une justification systématique aux *états limites de service*, qui porte sur les déplacements admissibles de l'ouvrage.

Pour les ouvrages en sols renforcés, il n'existe pas à ce jour de méthode de calcul en déplacement raisonnable systématiquement employée (Schlosser et Unterreiner, 1994). Au mieux, des formules empiriques basées sur l'expérimentation et l'observation d'ouvrages réels permettent-elles une estimation des déplacements maximaux. Pour les sols cloués, on trouve ces règles dans les recommandations CLOUTERRE (1991).

L'utilisation de la méthode des éléments finis, qui pourrait apporter une réponse, est encore peu développée dans le domaine. Les difficultés d'application tiennent :

- à la taille des inclusions vis à vis de la taille de l'ouvrage, nécessitant un maillage très fin localement,
- au nombre important d'inclusions utilisées conduisant à des systèmes linéaires à résoudre de taille rédhibitoire,
- à la modélisation de l'interface sol/inclusion,
- au contraste des propriétés des matériaux constituant le massif et l'inclusion,

- au caractère *non linéaire* du sol qui doit forcément être pris en compte pour des calculs réalistes,
- à la gestion du phasage des travaux (voir figure 1.6) alourdissant le traitement des données.

A l'occasion d'une revue bibliographique sur les calculs tridimensionnels par éléments finis en géotechnique, Mestat (1998) note que l'application aux sols renforcés reste aujourd'hui du domaine de la recherche. On peut notamment citer les études bidimensionnelles de Chaoui (1992), Unterreiner (1994) et Benhamida (1998) (voir également Mestat (1998) pour des références complémentaires). Notons enfin que le Projet National CLOUTERRE II achevé en 1998 a conduit à la publication d'un rapport de synthèse, dont les conclusions sur le calcul en déplacement sont de nature très générale et laissent une grande place à de nouveaux développements. La modélisation préconisée pour les clous est une plaque équivalente bidimensionnelle, ce qui n'est qu'un pis-aller.

Compte tenu des points cités à l'instant, il est clair que l'utilisation actuelle des éléments finis n'est pas une réponse raisonnable à la question des déplacements des ouvrages en sol renforcé. En effet, même si la puissance des ordinateurs continue d'augmenter régulièrement, les phases de pré- et post-traitement des données, notamment la création des maillages restent très lourdes. Une nouvelle approche est donc nécessaire.

3.4 Les fondations profondes

3.4.1 Remarques préalables

Les règles générales de dimensionnement des fondations relèvent en France de l'application du Fascicule n° 62, titre V (1993). Une présentation des méthodes spécifiques aux fondations profondes est également donnée dans Frank (1995). A la lecture de ces documents, il apparaît que la pratique actuelle du dimensionnement de ces ouvrages est de nature essentiellement *empirique*.

Pour comprendre cet état de fait, il faut rappeler l'invention en 1956 du *pressiomètre* par Ménard, qui a bouleversé les techniques de reconnaissance des sols *in situ*. Cet appareil permet en effet de mesurer simplement les caractéristiques de déformation (*module pressiométrique* E_M) et de résistance (*pression limite* p_ℓ) du sol. Un protocole de mesures strict rend ce procédé très fiable, notamment par rapport aux caractéristiques déterminées en laboratoire à partir d'échantillons de sols, qui sont souvent remaniés du fait du prélèvement.

A partir de nombreuses expériences menées dans les années 60, Ménard et ses collaborateurs ont établi des formules empiriques permettant de dimensionner les ouvrages et de calculer les tassements directement à partir des quantités E_M et p_ℓ . L'utilisation de cette *méthode pressiométrique* est toujours d'actualité, car elle a été validée avec succès sur des ouvrages réels proches de ceux étudiés par Ménard.

Cependant, ce type d'approche montre ses limites lorsqu'il s'agit de concevoir et développer de nouveaux types d'ouvrages, tels que les groupes de pieux denses, les réseaux de micropieux, les radiers de pieux, etc. L'extension des formules semi-empiriques s'avère impossible, sauf à mener de nouvelles campagnes d'essais exhaustives, donc très coûteuses.

Par ailleurs, l'utilisation de la méthode pressiométrique ou des approches empiriques en général a occulté la compréhension des phénomènes mécaniques complexes dont ces structures sont le siège. Ainsi s'explique en partie le décalage systématique que l'on constate entre l'avènement de nouvelles technologies et leur modélisation. Un argument souvent avancé pour créditer l'emploi des méthodes « de coin de table » est que la connaissance très imparfaite des paramètres physiques à rentrer dans les modèles de calcul rend vaine leur utilisation, et par extension tout développement théorique nouveau. Il faut en effet remarquer que l'obtention des paramètres mécaniques (module d'Young, cohésion) à partir des essais pressiométriques est donnée par des corrélations peu précises, ce qui biaise souvent les prédictions faites par les modèles les utilisant.

Il nous semble pourtant que l'innovation en matière de procédés de construction ne pourra se passer du développement de modèles mécaniques cohérents. A cet égard, le peu de réalisations françaises utilisant des radiers de pieux ou des réseaux (par comparaison à la Grande Bretagne, l'Allemagne ou le Japon) nous paraît clairement lié au retard de la recherche et de la réglementation sur ces sujets. On peut remarquer de même depuis une dizaine d'années une sous représentation de la France dans la littérature internationale, qui contraste curieusement avec le rôle important qu'elle a tenu dans les années 70 et 80 en terme d'innovation technique.

3.4.2 Méthodes de dimensionnement

Frank (1995) présente le calcul de charge limite pour un *pieu isolé*, en distinguant classiquement la contribution du frottement latéral et de la pointe. Différentes formules sont données selon le type de reconnaissances géotechniques effectuées (pressiomètre, pénétromètre, etc).

Le dimensionnement d'un *groupe* de pieux utilise un *coefficient d'efficacité*. Celui-ci est défini comme le rapport de la charge limite du groupe au produit du nombre de pieux par la charge limite d'un pieu isolé. Il peut être estimé par différentes formules empiriques.

On peut citer également le modèle simplifié proposé par Combarieu (1987, 1990) pour le calcul de la capacité portante de sols renforcés par inclusions rigides verticales.

3.4.3 Méthodes de calcul de tassement

On passe maintenant en revue quelques méthodes faisant référence pour le calcul en déplacement des groupes de pieux et radiers de pieux. Les articles de Poulos (1989) et Randolph (1994) présentent un *état de l'art* sur le sujet.

De façon générale, on peut distinguer quatre catégories d'approches :

- les méthodes *empiriques* ou *semi-empiriques*, pour lesquelles on pourra se reporter à Maleki (1995), qui les aborde entre autres dans sa bibliographie.
- les méthodes dites *rigoureuses* de calcul par éléments finis, dont la portée est limitée à des ouvrages comprenant un petit nombre de pieux compte tenu des temps de calcul. On peut citer cependant les travaux d'Ottaviani (1975), qui considère un comportement élastique linéaire, sans déplacement relatif à l'interface sol/pieu et Muqtadir et Desai (1986) qui prennent en compte le comportement d'interface.

Plus récemment, Smith et Wang (1998) appliquent un algorithme de gradient conjugué avec pré-conditionnement permettant de traiter la résolution de grands systèmes, et parallélisent l'algorithme. Ils considèrent deux modèles tridimensionnels de radiers de pieux et étudient notamment la répartition des charges entre les pieux et leur influence sur le moment fléchissant dans la semelle. Ils arrivent à des temps de calcul raisonnables, mais en utilisant jusqu'à 512 processeurs en parallèle!

Les radiers de pieux servant de fondation à la *Messeturm* et à la tour de la *Kommerzbank* construites à Francfort ont fait l'objet de calculs tridimensionnels non linéaires (Katzenbach *et al.*, 1994; Vetter, 1998).

De façon générale, cette méthode n'est appliquée que pour des ouvrages exceptionnels, et dans le cas où les caractéristiques du massif de fondation sont suffisamment homogènes et bien connues, ce qui est le cas de l'argile de Francfort.

- La méthode des *éléments de frontière*, également considérée comme rigoureuse. Elle utilise la solution de Mindlin (1936) donnant le champ de déplacement d'un demi-espace (élastique homogène isotrope) sous charge ponctuelle. Elle a été mise en œuvre notamment par Poulos (1968), Butterfield et Banerjee (1971) et Kuwabara (1989). Les résultats obtenus pour de petits groupes de pieux peuvent être utilisés sous forme d'abaques. Ils servent également de tests pour les méthodes approximatives.
- les méthodes intermédiaires, qui reposent sur des modèles mécaniques cohérents, mais qui font usage d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. On peut en particulier citer les méthodes dites « hybrides » qui se sont développées depuis 10 ans. Elles combinent l'utilisation de *courbes de mobilisation* du frottement le long des pieux (courbes *t-z*, ou *load transfer curves* en anglais) qui donnent l'effort tangent sur le fût du pieu en fonction du déplacement vertical. Celles-ci peuvent être obtenues de façon analytique approchée (Randolph et Wroth, 1978; Kraft *et al.*, 1981), à partir d'un calcul « exact » aux éléments de frontière (Mandolini et Viggiani, 1997), ou à partir d'essais (Frank, 1982).

La solution de Mindlin est utilisée pour modéliser l'interaction entre les pieux, soit par une prise en compte directe dans le calcul de la rigidité d'ensemble de la structure (Chow, 1986), soit par modification itérative des courbes *t-z* (Maleki, 1995, Programme GOUPEG).

La méthode hybride a été étendue au calcul des radiers de pieux par Griffiths *et al.* (1991), Clancy et Randolph (1993). Horikoshi et Randolph (1998) l'utilisent pour optimiser la répartition des pieux en vue de réduire les tassements différentiels. Récemment, des raffinements ont été proposés pour traiter efficacement et plus rapidement de grands groupes de pieux (Hong *et al.*, 1999). On reviendra sur cette méthode plus en détail au chapitre 5, section 2.1.

3.4.4 Conclusion

Les méthodes hybrides sont basées sur le principe de superposition, donc valables *a priori* seulement dans le domaine élastique linéaire. Certaines prennent cependant en compte des non linéarités en modifiant les caractéristiques du sol au cours du chargement, ou en faisant dépendre les termes d'interaction du niveau de chargement des pieux (pourcentage de la charge limite). Dans le cas d'un massif stratifié, d'autres approximations sont nécessaires pour déterminer la solution fondamentale de Mindlin. Malgré tout, les résultats en déplacement obtenus par ces méthodes sont cohérents et validés par un certain nombre de comparaisons (Mandolini et Viggiani, 1997).

Les dernières tendances montrent un souci d'étendre les méthodes validées pour de petits groupes de pieux à des groupes plus grands pour des temps de calcul raisonnables. Le calcul de réseaux de micropieux inclinés est encore très rare. On peut citer les travaux de Perlo *et al.* (1998) qui ont étendu le logiciel GOUPEG présenté plus haut. Cependant, la méthode utilisée (modification des courbes de mobilisation) est discutable, puisque plusieurs coefficients empiriques sont introduits jusqu'à concordance avec des résultats expérimentaux en vraie grandeur. De plus, ce calage est fait sur des groupes de 3 ou 4 micropieux, ce qui n'est pas significatif de l'effet de groupe.

3.5 Conclusion

Pour les trois domaines de la géotechnique que nous avons brièvement passés en revue, un constat s'impose : les méthodes de calcul n'ont pas suivi l'évolution foisonnante des techniques observée depuis une vingtaine d'années en matière de renforcement par inclusions.

Compte tenu notamment de la méconnaissance partielle des caractéristiques mécaniques des sols, nombre d'ingénieurs et de chercheurs préfèrent souvent utiliser des méthodes semi-empiriques à des modèles mécaniques cohérents relayés par les techniques modernes de calcul numérique. Cette confusion entre la pertinence d'un modèle et les mauvais résultats qu'il peut produire si les paramètres introduits ne reflètent pas la réalité est très préjudiciable au développement de la compréhension des ouvrages.

Bien que l'objectif du renforcement soit clairement présenté comme la création d'un matériau composite (Lizzi et Carnavale, 1979; Schlosser et Unterreiner, 1994; Lunardi, 1997), il est stupéfiant de constater que peu de recherches ont été menées dans cette direction.

Nous allons maintenant passer en revue quelques modèles de ce type, appelés de façon générique *modèles de matériau équivalent*, pour dégager les principes d'élaboration d'un modèle de matériau renforcé par inclusions.

4 Les modèles de matériau équivalent

On s'intéresse dans cette section aux travaux ayant pour principe de considérer le matériau renforcé comme un *composite homogène* à l'échelle de l'ouvrage. On aborde successivement ceux consacrés au comportement élastique, puis ceux dédiés à l'établissement et l'utilisation d'un critère de rupture et on présente enfin des modèles non linéaires. Les applications visées relèvent indifféremment des trois catégories d'ouvrages présentées jusqu'ici.

4.1 Modèles élastiques

4.1.1 Terre armée

Sans doute pour des raisons historiques, c'est pour la terre armée qu'on trouve la première modélisation de type matériau équivalent. Harrison et Gerrard (1972) considèrent un *matériau multicouche* dans lequel les armatures sont rigides tandis que le sol est déformable. Par une méthode d'homogénéisation, ils obtiennent les modules élastiques du matériau « terre armée ».

Romstad *et al.* (1976), s'inspirant des travaux de Pagano sur les composites, proposent une méthode d'homogénéisation sur une cellule de base contenant une armature. A partir d'hypothèses heuristiques simples sur les déformations et contraintes dans chaque constituant, les auteurs obtiennent un comportement élastique *isotrope transverse* autour de la direction de renforcement. Ils mettent clairement en évidence le fait que seul l'effort normal dans les armatures est pertinent pour comprendre le comportement de la terre armée.

Implémentant cette loi de comportement dans un code de calcul aux éléments finis, les auteurs comparent avec un modèle dans lequel les armatures sont discrétisées (éléments de poutres) et trouvent une bonne adéquation des résultats. Shen *et al.* (1976) poursuivent la validation en comparant des simulations à des mesures sur ouvrage réel.

Herrmann et Al-Yassin (1978) étendent la modélisation précédente pour tenir compte du *glissement* potentiel des armatures par rapport au sol. Pour cela, ils introduisent dans le modèle aux éléments finis un degré de liberté supplémentaire par nœud, correspondant au mouvement relatif dans la direction de renforcement des inclusions par rapport au sol. Ce mouvement est couplé à celui du sol par l'intermédiaire de ressorts non linéaires (de type élastique parfaitement plastique, la limite élastique correspondant au frottement maximal mobilisable à l'interface sol/inclusion).

Dans ces deux modèles, la non linéarité du sol est prise en compte par une élasticité non linéaire (modèle de Duncan), les calculs sont faits pas à pas. Modifiant le modèle de Harrison et Gerrard (1972), Gerrard (1982) retrouve les résultats de Romstad *et al.* (1976), et les étend au renforcement multidirectionnel.

Plus récemment, Jommi *et al.* (1995) traitent par homogénéisation un multicouche sol/géotextile. Négligeant le glissement d'interface, ils établissent en déformation plane des relations

de continuité entre les deux couches pour certaines composantes des tenseurs de contraintes et de déformations. Identifiant la puissance de déformation macroscopique, ils obtiennent le comportement élastique *tangent* du milieu équivalent. Ils comparent numériquement les résultats obtenus par le modèle avec ceux obtenus par une approche directe dans laquelle les nappes de géotextile et le sol sont discrétisés séparément, et concluent à un bon accord.

L'ensemble de ces modèles pêche par la prise en compte discutable des non linéarités du sol. Les auteurs font souvent référence à la nécessité d'introduire un comportement élasto-plastique, pour éviter notamment l'apparition de traction en certains points du massif. Nous n'avons pas trouvé de références développant cette idée. Il semble par ailleurs que ces modèles n'aient eu aucune portée en France.

4.1.2 Tunnels boulonnés

Dans le domaine des tunnels, Wullschläger et Natau (1983) déterminent par voie expérimentale le comportement élastique du matériau « roche boulonnée », de même que la cohésion et l'angle de frottement apparent. Ces caractéristiques sont ensuite introduites dans un code de calcul aux éléments finis en élasto-plasticité. L'analyse de leurs résultats (Greuell, 1993) est tout à fait concordante, dans le domaine élastique, avec les modèles de terre armée.

De manière indépendante, des modèles *rhéologiques* ont été proposés pour les massifs fracturés (Gerrard et Pande, 1985) puis étendu à la prise en compte du boulonnage (Sharma et Pande, 1988; Chen et Egger, 1999). Le matériau « roche+joints+boulons » est modélisé par un ensemble de ressorts, patins et amortisseurs. Le tenseur des contraintes se décompose additivement entre la roche fracturée et les boulons à proportion des fractions volumiques respectives (systèmes rhéologiques en *parallèle*). La roche et les joints sont modélisés par deux systèmes placés en *série*, c'est à dire subissant la même contrainte pour des déformations différentes. Le comportement de la roche seule est élasto-viscoplastique. Les expressions scalaires déduites de l'analyse du modèle rhéologique sont transposées tensoriellement au cas tridimensionnel. Le modèle est implémenté dans un code de calcul aux éléments finis.

S'il est séduisant par sa généralité, ce modèle est postulé sans aucune autre justification que sa maniabilité. De plus, l'identification des paramètres à introduire peut être délicate. Cependant, il conduit à une décomposition *additive* du tenseur des contraintes entre la roche et les boulons, propriété que l'on retrouve dans les modèles obtenus par homogénéisation discutés ci-après (section 4.3).

4.1.3 Fondations profondes

Les travaux utilisant une approche « matériau composite » pour modéliser la zone d'implantation des pieux sont assez limités. Le concept de pieu équivalent (*equivalent pier* en anglais) à l'ensemble du groupe de pieux est cependant assez ancien (Poulos et Davis, 1980). Le module

d'Young équivalent est simplement donné par la loi des mélanges. La taille de ce pieu est celle du cylindre équivalent à la zone renforcée.

Deux types d'applications sont alors possibles : on peut utiliser simplement les résultats analytiques concernant un *pieu isolé* avec ces caractéristiques équivalentes (Randolph, 1994). Dans cette optique, seule une estimation du tassement moyen du groupe de pieux est accessible (selon la longueur des pieux, un avatar de cette méthode est la définition d'un *radier équivalent*, en vue d'utiliser les résultats disponibles pour les fondations superficielles). On peut également utiliser ce raisonnement pour remplacer un grand groupe de pieux par un nombre plus petit de pieux équivalents avant d'appliquer une méthode hybride (Clancy et Randolph, 1996).

En dehors de ces cas, l'utilisation des propriétés de matériau équivalent dans un calcul aux éléments finis est extrêmement rare. Citons Hooper (1979), qui présente un calcul axisymétrique dans lequel il étudie l'influence du nombre de pieux et de la rigidité pieu/sol sur le tassement.

Borsetto *et al.* (1991) ont fait des calculs de tassements d'aéroréfrigérants des centrales nucléaires de la vallée du Pô. Les pieux sont modélisés soit par des anneaux concentriques équivalents, soit par un milieu élastique équivalent (module d'Young longitudinal calculé par la loi des mélanges). Le code de calcul inclue le traitement de la consolidation par la théorie de Biot.

Blondeau *et al.* (1987) rapportent la simulation des tassements d'un bâtiment de centrale nucléaire fondé en partie sur une faille. L'objectif est de dimensionner le renforcement de la faille de sorte que ses caractéristiques équivalentes conduisent à un tassement uniforme de l'ouvrage. Des calculs aux éléments finis de l'ouvrage dans lequel le « bouchon renforcé » est modélisé par un matériau anisotrope permettent de déterminer les modules de déformation nécessaires. Un calcul simple permet de remonter à partir de ces modules à la densité et à la taille des micropieux.

Ces exemples typiques de l'efficacité de l'utilisation d'un matériau équivalent dans un calcul numérique restent encore à notre connaissance isolés par rapport aux méthodes simplifiées.

4.1.4 Conclusion

La lecture des travaux précédents permet de dégager les point communs suivants :

- La présence des inclusions n'intervient que sur le module d'Young longitudinal du comportement global. De façon duale, seuls les efforts normaux dans les inclusions sont pris en compte.
- C'est le produit de la fraction volumique des renforcements par le module d'Young du matériau renforçant qui intervient dans le comportement global. Celui-ci est très

supérieur au module d'Young du sol, alors que celle-là est très petite devant 1. Leur produit est donc en général de l'ordre de grandeur des modules élastiques du sol.

- L'interprétation du modèle de Jommi *et al.* (1995) est à souligner : pour les auteurs, l'homogénéisation correspond à la *dilution* du renforcement dans tout le volume de sol. Ainsi coexistent en chaque point deux particules qui interagissent par les équations d'équilibre et de continuité. Ils soulignent l'analogie avec l'approche classique des milieux poreux selon la théorie de Biot.

4.2 Critère de rupture

Dans le cadre de l'*homogénéisation des milieux périodiques*, de Buhan (1986) établit le critère de rupture d'un matériau multicouche, et l'applique au calcul de stabilité d'un talus renforcé et de la capacité portante d'une fondation sur un demi-espace renforcé. Ces travaux sont poursuivis sous forme analytique par Siad (1987) et de Buhan et Salençon (1987), et dans un cadre numérique par Abdi (1992); Abdi *et al.* (1994). Verzura (1993) a étendu le calcul du critère à deux directions de renforcement orthogonales pour modéliser le matériau TexSol.

Dans ces travaux, les auteurs font des comparaisons avec des expériences sur le matériau terre armée (notamment celles de Schlosser (1972), Long et Ursat (1977)) et sur la rupture de modèles réduits d'ouvrages (Legeay, 1978). Les valeurs calculées diffèrent de moins de 10% des résultats expérimentaux.

Dans la même optique, de Buhan et Talercio (1991) ont déterminé un critère de rupture pour les composites à fibres longues. Leurs résultats sont similaires à ceux obtenus dans le cadre de l'analyse limite en contrainte plane par McLaughlin et Batterman (1970); Majumdar et McLaughlin (1975). Ils font ressortir en particulier la décomposition *additive* du tenseur des contraintes macroscopiques en un terme associé à la matrice et un terme uniaxial associé aux fibres.

La formulation du critère de rupture fait ainsi ressortir les composantes uniaxiales de traction dans les inclusions (armature ou fil). Compte tenu des diverses validations, ce point apparaît central dans toute modélisation de matériau renforcé.

4.3 Modèles élasto-plastiques

4.3.1 Homogénéisation

Dès le début des années 80, Sawicki (1981, 1983a) propose un modèle élasto-plastique de matériau multicouche. L'auteur postule la décomposition du tenseur des contraintes macroscopiques en somme des contraintes microscopiques associées à chaque constituant, pondérées par les fractions volumiques respectives. Il détermine le domaine d'élasticité initiale, puis décrit l'écroutissement du comportement macroscopique en faisant intervenir les contraintes résiduelles.

Sawicki (1983b) s'intéresse plus particulièrement à la terre armée, et particularise le tenseur des contraintes associé au renforcement à une contribution *uniaxiale*. Par un modèle rigide-plastique, il obtient une évaluation de la capacité portante d'un massif renforcé. Des extensions de ce modèle et de nombreuses applications ont été données par l'auteur dans les années suivantes, on peut en trouver une revue dans Sawicki (1998). Il est à noter que les résultats recourent souvent ceux donnés par l'homogénéisation en calcul à la rupture mentionnés ci-dessus.

Dans la lignée des travaux de Le Nizerhy (1976), des modèles élasto-plastiques obtenus par homogénéisation périodique d'un multicouche sont également donnés par El Omri et Sidoroff (1991); El Omri (1992); Pruchnicki (1991); Pruchnicki et Shahrour (1994). Ces derniers appliquent le modèle au renforcement de massifs par colonnes ballastées (voir également Pruchnicki et Shahrour (1991)).

Ces modèles multicouches ne traduisent pas correctement l'aspect uniaxial des inclusions de renforcement. Par ailleurs, leur formulation complète n'est possible que pour des critères de plasticité simples (Von Mises ou Drucker-Prager), et n'est pas adaptable à des lois plus complexes d'usage désormais courant en géotechnique (par exemple les modèles de type CamClay). La prise en compte d'une loi d'écoulement plastique *non associée* pour le sol est délicate. Enfin, l'extension à plusieurs directions de renforcement semble inextricable.

Dans le domaine des tunnels, Greuell (1993) reprend le critère de rupture de la roche boulonnée établi par de Buhan (1986) et Siad (1987) en fonction des caractéristiques de la roche et des boulons. Il construit une loi de comportement élasto-plastique en utilisant l'élasticité donnée par Gerrard (1982) et le critère de rupture précédent relu comme *critère de plasticité parfaite* avec règle d'écoulement associée. Utilisant ce modèle, Greuell applique la méthode convergence-confinement analytiquement, et effectue une étude paramétrique poussée de l'influence du boulonnage. Bernaud *et al.* (1995) introduisent le critère de plasticité homogénéisé dans le code de calcul aux éléments finis GEOMECA (Bernaud, 1991) et corroborent les résultats obtenus par Greuell. Des calculs axisymétriques avec activation/désactivation des éléments sont également effectués pour simuler le processus d'excavation. L'approximation principale de ce modèle est qu'il ne tient pas compte de l'écrouissage dans le matériau renforcé induit par la plastification *non simultanée* des inclusions et de la matrice. Une prise en compte de l'écrouissage a été proposée par Jassionnesse (1998) dans le cas particulier d'un critère de Mohr-Coulomb pour le massif.

4.3.2 Modèles rhéologiques

Il est bon de mentionner une approche de type « matériau équivalent » complètement indépendante basée sur des modèles rhéologiques. On a déjà noté leur utilisation pour la modélisation des massifs fracturés boulonnés (voir section 4.1.2). La modélisation du renforcement par colonnes ballastées a été également abordée sous cet angle par Gerrard *et al.* (1984) and Lee et Pande (1998).

Ces modèles mécaniquement cohérents permettent d'incorporer toutes les caractéristiques qui font défaut aux approches par homogénéisation citées plus haut. Il n'y a notamment aucune restriction sur les lois de comportement associées à chaque constituant. Cependant, aucun garde-fou autre que la validation par des expériences ne garantit leur traduction de la réalité, et les exemples traités sont rares.

4.3.3 Conclusion

L'analyse des méthodes de calcul courantes nous a montré qu'elles étaient soit inadaptées (méthodes semi-empiriques) soit impraticables (éléments finis) dans le cas de structures renforcées par un grand nombre d'inclusions. Par contre, les approches de type « matériau équivalent » semblent donner des résultats prometteurs, même si elles ont été appliquées de façon très parcellaire dans différents domaines. C'est dans cette direction que s'oriente désormais ce travail.

4.4 Les matériaux composites industriels

Adoptant un point de vue « matériau équivalent », il semble naturel de s'intéresser aux travaux concernant les composites industriels. Nous abordons ici très brièvement ce domaine, qui possède ses techniques propres et n'est pas à proprement parler au cœur de notre sujet. On y trouve cependant des concepts éclairant la compréhension des *géocomposites*.

4.4.1 Caractéristiques élastiques

La détermination des propriétés élastiques des matériaux composites à fibres longues à partir de celles de leurs constituants a fait l'objet de nombreux travaux de recherche dès le début des années 60, lorsque l'emploi de ceux-ci s'est fortement développé dans l'industrie. Dès cette époque, on trouve trois types d'approche :

- une approche variationnelle (Hashin et Shtrikman, 1963; Hill, 1964) fournissant un *encadrement* des propriétés équivalentes du composite (bornes),
- des modèles simplifiés donnant des *estimations* de ces propriétés, tels que le modèle CCA (*Composite Cylinder Assemblage*), (Hashin et Rosen, 1964). Dans ce modèle, en supposant que les fibres sont de taille variable, mais occupant une fraction volumique constante dans tout volume élémentaire représentatif, on montre que les propriétés équivalentes sont celles d'un *seul* cylindre composite pour lequel on possède une solution analytique.
- des *méthodes d'estimation* en micromécanique (Zaoui, 1998). Le schéma autocohérent a été appliqué d'abord par Hill (1965) (fibre incluse dans le milieu équivalent) puis dans une version enrichie par Hermans (1967); Christensen et Lo (1979) (cylindre composite

inclus dans le milieu équivalent). On peut citer également les travaux de Tandon et Weng (1984).

Ces approches, bien qu'inspirées de considérations mécaniques très différentes, fournissent des résultats très proches, comme le signale Hashin (1983) dans une revue très complète de la littérature. Ainsi a-t-on par exemple identité des expressions des modules obtenus par le modèle CCA avec les bornes inférieures d'Hashin-Shtrikman (Rammerstorfer et Böhm, 1994).

4.4.2 Caractéristiques élasto-plastiques

Les composites à fibres ayant un comportement isotrope transverse, de nombreux travaux ont pour objet de déterminer un critère de plasticité anisotrope à partir des invariants du tenseur des contraintes. Spencer (1984, 1992) passe en revue un certain nombre de modèles basés sur ce principe.

Une autre approche suivie de façon extensive depuis les années 80 consiste à estimer les modules *sécants* du composite par les méthodes d'estimation mentionnées ci-dessus (Zhao et Weng, 1990). Différents modèles ont également été proposés par Dvorak et Bahei-El-Din (1979, 1982, 1987) donnant le domaine d'élasticité initial et son évolution.

4.4.3 Conclusion

De façon générale, ces modèles considèrent toujours un critère de Von Mises pour la matrice, qui est adapté pour les composites industriels, mais pas pour les géomatériaux. Les fibres sont souvent supposées élastiques. Enfin, les résultats ne sont jamais présentés sous une forme analytique, ce qui rend leur implémentation dans un code de calcul délicate.

Ce type d'approche est donc inadapté au sujet qui nous préoccupe. Cependant, il peut être intéressant d'effectuer *a posteriori* des comparaisons d'un nouveau modèle avec les nombreux résultats expérimentaux disponibles dans cette littérature.

4.5 Les modèles multiphasiques

On appelle classiquement *théorie des mélanges* les modélisations de milieux continus à plusieurs phases. Ces théories associent en chaque point autant de particules de matière qu'il y a de constituants dans le mélange. Le premier modèle général a été proposé par Truesdell et Toupin (1960). La question des lois de comportement a suscité de nombreux travaux dans les années 60. Par ailleurs, les auteurs ont enrichi la modélisation en prenant en compte des modèles microstructuraux pour les différentes particules. Bedford et Drumheller (1983) font une revue historique remarquable des différentes théories et de leur domaine d'application.

Ils constatent que nombre de travaux très techniques aboutissant à des équations constitutives très complexes (et requérant en particulier la détermination d'un nombre important de paramètres) sont restés sans applications.

Cependant, la dernière partie de leur revue est consacrée à l'élaboration d'un *modèle biphasique* pour les matériaux composites (Bedford et Stern, 1971). Les applications visées sont la *propagation des ondes* dans les composites à fibres ou stratifiés, qui est très mal modélisée par un milieu continu monophasique ayant les propriétés statiques équivalentes (voir section précédente). Les auteurs attribuent à Postma le premier modèle de matériau composite biphasique, modèle qui utilise une cinématique unique pour les deux phases.

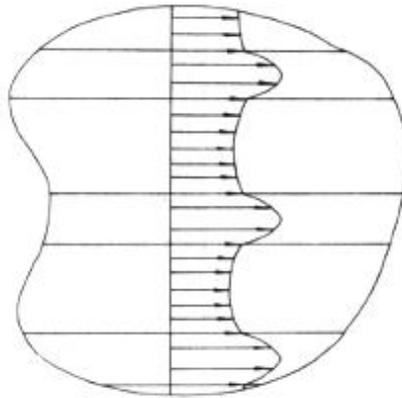


FIG. 1.13: *Propagation d'ondes longitudinales dans un stratifié - d'après Bedford et Stern (1972)*

Observant un stratifié dans lequel se propage une onde longitudinale, Bedford et Stern (1972) constatent que, si le déplacement longitudinal est bien continu, la *valeur moyenne* dans chaque phase peut être très contrastée (voir figure 1.13). Ils introduisent alors un *modèle biphasique* dans lequel les cinématiques sont *distinctes*. Les équations d'équilibre sont obtenues de façon classique, les auteurs utilisent ensuite un cadre thermodynamique pour construire les lois de comportement. Les hypothèses principales qui distinguent ce modèle de la théorie classique des mélanges sont les suivantes :

- l'interaction entre les deux phases est limitée aux particules *congruentes*, c'est à dire occupant la même position géométrique dans la configuration initiale (dans la théorie classique des mélanges, l'interaction relie les particules ayant la même position dans la configuration *actuelle*). Ce point est dicté par l'hypothèse d'adhérence parfaite entre les couches du stratifié (absence de délaminage).
- L'énergie interne dans chaque phase ne dépend que des variables de déformation de cette phase et de la température. Cette hypothèse est liée au fait que les constituants ne sont pas aléatoirement mélangés comme c'est le cas dans les mélanges de fluides immiscibles ou dans les théories de fluides à bulles.

Les résultats pour la propagation des ondes, comparés à une approche exacte, sont remarquables. Ils sont d'autant meilleurs que les caractéristiques élastiques des constituants sont *contrastées*. Le modèle initial a été étendu dans les années 70 par les auteurs, mais toujours dans l'optique d'une application à la propagation des ondes. On peut remarquer cependant que les travaux de Sawicki cités à la section 4.3 s'appuient de façon implicite sur une théorie des mélanges.

La *mécanique des milieux poreux* présentée par Coussy (1991), basée sur les travaux précurseurs de Biot (1941, 1955) s'apparente également à une théorie des mélanges. Il s'agit d'une approche purement *macroscopique*, qui suppose la superposition en chaque point matériel de deux particules, respectivement de *squelette* et de *fluide*. Les deux particules sont animées de cinématiques distinctes, et on adopte de façon naturelle une description *lagrangienne* pour les mouvements du squelette, *eulérienne* pour les mouvements du fluide.

Récemment, un modèle multiphasique dit de *matériau multicouche* (M4) a été proposé par Caron (1993); Chabot (1997) pour les composites stratifiés. Le nombre de couches du stratifié détermine le nombre de particules superposées en chaque point. Plusieurs variantes existent selon la précision de la description des efforts intérieurs dans chaque couche.

La théorie des mélanges conduit aux mêmes décompositions additives des contraintes que les modèles rhéologiques, et dans une certaine mesure les approches par homogénéisation. Ces remarques sont à la base de la genèse du modèle multiphasique de matériau renforcé présenté dans ce mémoire.

5 Conclusion

5.1 Récapitulatif

Les aperçus bibliographiques présentés dans les sections précédentes ont permis de tirer différentes conclusions, que l'on reprend ici de façon synthétique.

- Du point de vue pratique, l'usage d'inclusions de renforcement s'est développé de façon considérable dans différents domaines de la géotechnique depuis une vingtaine d'années, en particulier dans l'ingénierie tunnelière et les travaux de fondations.
- Les méthodes de dimensionnement classiques ont souvent du mal à traiter, soit la présence même des inclusions, soit leur utilisation en grand nombre. Malgré les similitudes dans les caractéristiques du renforcement (voir section 2.5), les méthodes de calcul restent très spécifiques à chaque domaine.
- Le dimensionnement à la rupture des ouvrages est en général obtenu par des méthodes semi-empiriques ou des modèles mécaniques simples, utilisant parfois des hypothèses heuristiques *ad hoc*. L'expérimentation et l'observation de l'existant ont permis de valider ces méthodes : c'est le fameux *art de l'ingénieur*. Ainsi s'explique le fait qu'elles soient employées aujourd'hui couramment au détriment de modèles mécaniques plus rigoureux (calcul à la rupture, homogénéisation), qui bien qu'ayant fait leurs preuves, restent souvent cantonnées au domaine de la recherche (à la décharge des ingénieurs doit être mentionné le fait que le caractère incontournable du Règlement – français ou européen – limite l'application immédiate de méthodes nouvelles).
- Si le dimensionnement à la rupture est globalement maîtrisé, malgré les réserves évoquées à l'instant, il n'en va pas de même pour les *calculs en déplacement* : calculs de convergence, de tassements, d'inclinaisons de parement. La méthode des éléments finis s'applique en effet assez mal de façon directe aux ouvrages considérés, pour les raisons évoquées à la section 3.3.2.
- Bien que l'objectif de créer par le renforcement un véritable matériau composite soit affiché, les méthodes de calcul des ouvrages n'ont pas évolué dans ce sens. En particulier, les liens avec les acquis de la mécanique des composites industriels sont quasi-inexistants.
- Des approches de type « matériau équivalent » ont été utilisées avec succès de façon heuristique (en élasticité) ou plus rigoureuse (en calcul à la rupture) pour résoudre un certain nombre de problèmes. Par ailleurs, des exemples de modélisation *multiphasique* ont apporté des réponses intéressantes dans des domaines très variés (milieux poreux, propagation d'ondes ou calcul des efforts d'interface dans les composites stratifiés). Des similitudes dans la forme des équations constitutives de différents modèles ont été relevées.

5.2 Objectifs du présent travail

Au vu de ces différentes conclusions, il est permis de penser qu'une *formulation unifiée* du comportement des matériaux renforcés par inclusions utilisés dans le génie civil est possible. Elle doit être compatible avec les résultats obtenus par les différents modèles de matériau équivalent présentés jusqu'à présent.

Le premier objectif de ce travail est donc la formulation complète d'un *modèle multiphasique de matériau renforcé*. Sa construction par la *méthode des puissances virtuelles* fait l'objet du chapitre 2. Des lois de comportement sont construites en utilisant le cadre classique de la thermodynamique, et une première validation est donnée.

Au chapitre 3, on s'intéresse à la manipulation analytique du modèle. Après avoir posé proprement les problèmes aux limites dits *multiphasiques*, on donne différentes solutions analytiques pour des géométries simples.

L'utilisation du modèle multiphasique pour des problèmes réels intéressant l'ingénieur exige que celui-ci soit applicable pour des géométries quelconques. Le recours à des méthodes numériques de résolution est alors indispensable. Le chapitre 4 présente la mise en œuvre par éléments finis du modèle dans le cadre élasto-plastique. Un code de calcul entièrement nouveau, baptisé CASTOR (CALcul des STRUCTures et des Ouvrages Renforcés) a été développé spécifiquement pour exploiter les spécificités du modèle multiphasique.

Le chapitre 5 se compose de deux parties. La première traite de la *validation* du code CASTOR par des solutions analytiques, pour des problèmes classiques de mécanique des milieux continus et pour des problèmes multiphasiques. La deuxième présente une série de comparaisons avec d'autres méthodes publiées dans la littérature pour plusieurs types d'ouvrages.

Le chapitre 6 présente deux pistes de recherche prometteuses permettant d'enrichir le modèle multiphasique. D'une part, une extension du modèle lui-même est proposée, incluant une modélisation plus fine des efforts intérieurs dans les inclusions. D'autre part, la capacité du modèle à rendre compte d'*effets d'échelle* est justifiée par comparaison à des calculs directs aux éléments finis de structures renforcées simples.

Chapitre 2

Modèle multiphasique de matériau renforcé par inclusions linéaires

Ce chapitre est consacré à la présentation exhaustive du modèle multiphasique de matériau renforcé. Le modèle est purement macroscopique, c'est à dire qu'il se réfère à une échelle de description où on ne distingue plus les inclusions de renforcement de la matrice environnante.

La modélisation est abordée par la méthode des puissances virtuelles. Après en avoir rappelé les principes, et introduit le formalisme multiphasique, on l'applique pas à pas pour obtenir les équations du mouvement.

On s'intéresse ensuite aux lois de comportement. Se plaçant dans un cadre thermodynamique, on développe tout d'abord le comportement élastique. On traite ensuite de l'élasto-plasticité et du critère de rupture du milieu multiphasique.

Dans chaque cas, on particularise le modèle multiphasique dans le cas de l'adhérence parfaite entre les phases.

Pour finir, on apporte une première validation du modèle en le comparant avec les résultats d'homogénéisation des milieux périodiques, en élasticité d'une part, en calcul à la rupture d'autre part.

Sommaire

1	Construction du modèle multiphasique	45
1.1	Méthode des puissances virtuelles	45
1.2	Description géométrique du milieu multiphasique	45
1.3	Mouvements virtuels	47
1.4	Postulat des expressions des puissances virtuelles	47
1.4.1	Efforts intérieurs	48
1.4.1.1	Phase matrice	48
1.4.1.2	Phase renforcement	48
1.4.1.3	Interaction	49
1.4.1.4	Expression globale	49
1.4.2	Efforts extérieurs	49
1.4.3	Quantités d'accélération	50
1.5	Mise en œuvre du P.P.V	50
1.5.1	Premier énoncé	50
1.5.2	Second énoncé	52
1.6	Interprétation mécanique du modèle. Lien avec l'échelle microscopique	53
1.7	Equations globales d'équilibre	55
1.8	Nécessité des lois de comportement du matériau renforcé	55
2	Elasticité du milieu multiphasique	57
2.1	Hypothèse des petites perturbations	57
2.2	Déformations du milieu multiphasique	57
2.3	Elasticité des phases	58
2.3.1	Postulats thermodynamiques	58
2.3.2	Ecriture du comportement élastique	60
2.3.3	Lien entre matériau renforcé et milieu multiphasique	61
2.4	Comportement élastique adhérent	61
2.4.1	Adhérence parfaite et non glissement	61
2.4.2	Condition de compatibilité des déformations	62
2.4.3	Equations de comportement global : état initial naturel	62
2.4.4	Cas de déformations anélastiques imposées	64
3	Elasto-plasticité du milieu multiphasique	67
3.1	Elasto-plasticité de chacune des phases	67
3.1.1	Matrice	67
3.1.2	Renforcement	69
3.1.3	Interaction	70
3.2	Comportement élasto-plastique adhérent	70
3.2.1	Décomposition de la déformation totale	70

3.2.2	Critère de plasticité et écoulement	72
3.2.3	Energie bloquée et dissipation plastique	72
3.2.4	Vers un modèle élasto-plastique standard généralisé	74
3.2.5	Conclusion et généralisation	75
3.3	Critère de rupture du milieu multiphasique adhérent	76
4	Validation du modèle en élasticité et calcul à la rupture	78
4.1	Validation en élasticité	78
4.1.1	Modules élastiques du milieu biphasique adhérent à matrice isotrope	78
4.1.1.1	Généralités	78
4.1.1.2	Notations matricielles	78
4.1.1.3	Identification du comportement élastique	79
4.1.2	Confrontation des résultats	80
4.1.2.1	Rappel des modules élastiques équivalents	80
4.1.2.2	Principe de la comparaison	81
4.1.2.3	Résultats complémentaires	82
4.1.2.4	Conclusion	83
4.2	Validation en calcul à la rupture	83
4.2.1	Homogénéisation en calcul à la rupture	83
4.2.2	Critère de résistance pour les composites à fibres	84
4.2.3	Validation du modèle multiphasique	85
5	Conclusion	88

1 Construction du modèle multiphasique de matériau renforcé (Sudret et de Buhan, 1999a)

1.1 Méthode des puissances virtuelles

Les équations du mouvement d'un système mécanique sont obtenues de façon classique à partir du *principe fondamental de la dynamique*. En référentiel galiléen, celui-ci exprime l'égalité des efforts appliqués au système et des quantités d'accélération. S'il est d'application immédiate pour traiter des problèmes de corps rigides, il nécessite l'introduction d'*efforts intérieurs* au système dans le cadre de la mécanique des corps déformables. Cette modélisation des efforts intérieurs doit refléter la perception heuristique que l'on a du milieu. Elle constitue l'approche classique de la *mécanique des milieux continus* telle que la présente Cauchy dès 1822.

La *méthode des puissances virtuelles* est une approche alternative qui fait appel à l'intuition au niveau de la cinématique du système étudié. On en trouve une présentation générale, et son application à la modélisation du milieu continu dans Germain (1986) et Salençon (1996a, Chap. 4). Elle s'articule en plusieurs étapes que nous allons présenter brièvement.

- On définit tout d'abord le système mécanique étudié \mathcal{S} et ses sous-systèmes \mathcal{S}' .
- On définit l'espace vectoriel \mathcal{U} des mouvements virtuels (m.v) notés $\hat{\mathcal{U}}$ et celui des mouvements virtuels rigidifiants (m.v.r). Les mouvements réels du système doivent être contenus dans \mathcal{U} .
- On postule les expressions de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\mathcal{P}'_{(i)}$ et extérieurs $\mathcal{P}'_{(e)}$, ainsi que celle des quantités d'accélération \mathcal{A}' pour tout sous-système \mathcal{S}' .

Le *principe des puissances virtuelles* s'énonce alors de la façon suivante :

$$(2.1-a) \quad \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad \forall \hat{\mathcal{U}} \text{ m.v.r} \quad , \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathcal{U}}) = 0$$

$$(2.1-b) \quad \text{En référentiel galiléen,} \quad \forall \hat{\mathcal{U}} \text{ m.v} \quad , \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathcal{U}}) + \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathcal{U}}) = \mathcal{A}'(\hat{\mathcal{U}})$$

L'application successive des deux énoncés permet de préciser la forme des efforts intérieurs, puis conduit aux équations du mouvement et aux conditions aux limites. Nous allons maintenant appliquer la méthode à la modélisation du matériau renforcé.

1.2 Description géométrique du milieu multiphasique

On s'intéresse à un matériau composite constitué d'un milieu continu au sein duquel on vient disposer des inclusions de renforcement linéaires orientées selon N directions différentes. On considère un système \mathcal{S} de volume Ω constitué de ce matériau. Ce système est plongé dans

l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Chaque direction de renforcement est repérée par le vecteur unitaire \underline{e}_r , $r = 1, \dots, N$, et l'abscisse curviligne le long de cette direction est notée s_r . La figure 2.1 résume ces notations.

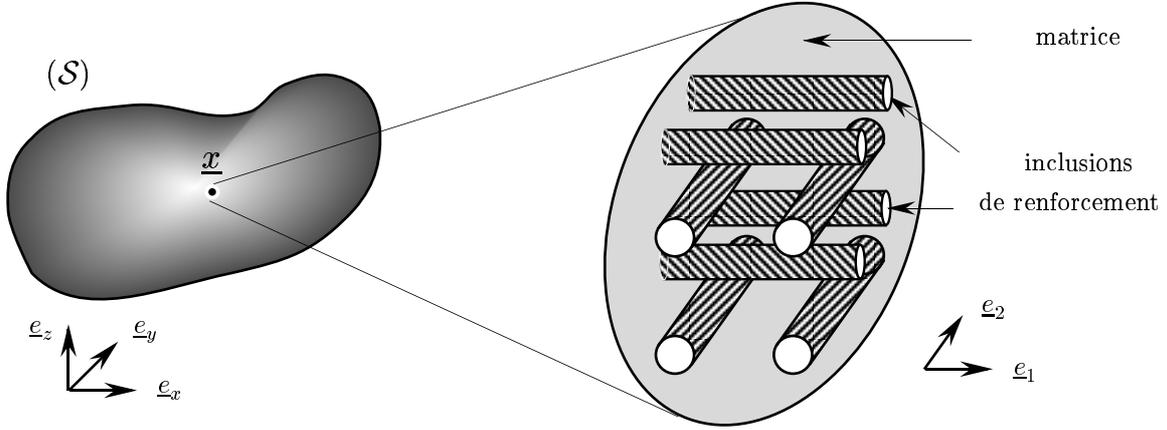


FIG. 2.1: Description géométrique du matériau renforcé (échelle microscopique)

La modélisation multiphasique se formule alors de la façon suivante : à tout point matériel de Ω , on associe une particule de matrice et N particules de renforcement caractérisées par leur position géométrique commune \underline{x} (figure 2.2). Ces $(N + 1)$ particules *superposées* forment la particule de milieu multiphasique. On note :

$$(2.2) \quad d\Omega(\underline{x}) = d\Omega^m(\underline{x}) \cup_{r=1, \dots, N} d\Omega^r(\underline{x})$$

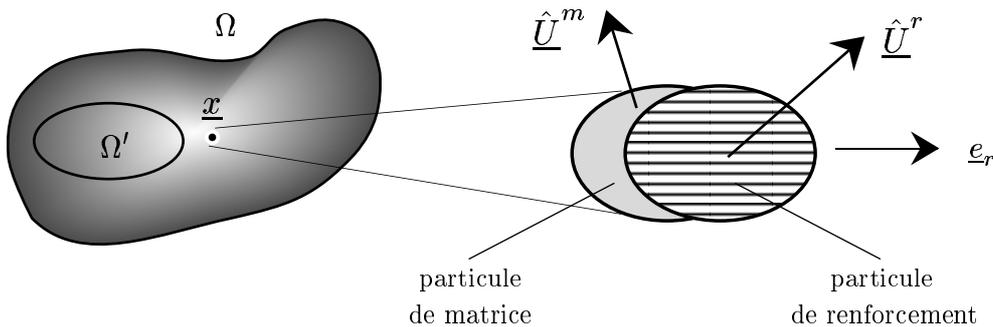


FIG. 2.2: Description du milieu multiphasique (une phase de renforcement)

Précisons la terminologie qui va être utilisée tout au long du mémoire : l'expression *matériau renforcé* désigne le matériau hétérogène à l'échelle microscopique, constitué d'une *matrice* et d'*inclusions* de renforcements occupant des domaines géométriques *distincts*. L'expression *milieu multiphasique* correspond au modèle de milieu équivalent devant reproduire le comportement mécanique du matériau réel. On parle, pour désigner ses constituants, de particules

de *matrice* et de particules de *renforcement*. On adopte de plus les définitions suivantes :

- On appelle *phase* l'ensemble des particules d'un même type. On utilisera donc les expressions « phase matrice » et « phase(s) renforcement ». Toutes les quantités relatives à une phase seront désignées par une lettre minuscule et l'exposant m ou r selon le cas.
- Un sous-système \mathcal{S}^j occupant un volume Ω' est dit *monophasique* s'il est constitué des seules particules de la phase $j \in \{m; r = 1, \dots, N\}$ contenues dans Ω' .
- Un sous-système \mathcal{S}' est dit *multiphasique* s'il est constitué de toutes les particules de toutes les phases contenues dans Ω' .

Dans le développement qui suit, on se place constamment sur la *configuration actuelle* du système, à l'instant t . Par souci de simplicité, on omet la dépendance en temps des différentes grandeurs.

1.3 Mouvements virtuels

Pour le milieu multiphasique, un mouvement virtuel est défini par la donnée de $(N+1)$ champs de vitesse $\hat{\underline{U}}^m$ et $\hat{\underline{U}}^r$, $\{r = 1, \dots, N\}$ associés respectivement à chaque phase. On les suppose indépendants, continus et continûment différentiables sur Ω . On note :

$$(2.3) \quad \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \left\{ \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \ ; \ \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}), \ r = 1, \dots, N \right\}$$

L'ensemble de ces mouvements virtuels forment un espace vectoriel \mathcal{U} , qui contient notamment les mouvements réels du système.

Les mouvements virtuels rigidifiant un sous-système monophasique \mathcal{S}^j sont donnés par:

$$(2.4) \quad \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \hat{\underline{U}}^j(\underline{x}), \underline{0}, \dots \right\}$$

où $\hat{\underline{U}}^j(\underline{x})$ est un champ de vitesse de translation ou de rotation.

Les mouvements virtuels rigidifiant un sous-système multiphasique \mathcal{S}' sont donnés par:

$$(2.5) \quad \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \left\{ \hat{\underline{U}}(\underline{x}), \dots, \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \right\}$$

où $\hat{\underline{U}}(\underline{x})$ est un champ de vitesse de translation ou de rotation.

1.4 Postulat des expressions des puissances virtuelles

La construction d'un modèle par la méthode des puissances virtuelles passe par le choix des différentes quantités intervenant dans l'expression du P.P.V. Ces choix sont dictés par les caractéristiques mécaniques dont on souhaite rendre compte. Le modèle sera d'autant

plus riche que les expressions retenues seront complexes et dépendantes de paramètres plus nombreux.

La description des efforts intérieurs est, de ce point de vue, centrale. Nous détaillons pour chaque phase du milieu multiphasique les hypothèses retenues et les expressions correspondantes.

1.4.1 Efforts intérieurs

On fait l'hypothèse que la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'obtient par intégration d'une densité volumique sur tout sous-système occupant un volume Ω' . Cette densité comprend les termes associés à chacune des phases, ainsi que les termes d'interaction entre chaque phase de renforcement et la matrice.

1.4.1.1 Phase matrice Comme on l'a vu dans le chapitre introductif, les matériaux renforcés utilisés en géotechnique ont la particularité suivante : les inclusions de renforcement sont en très faible proportion, leur fraction volumique n'excédant pas quelques pourcents.

La matrice du matériau renforcé est donc clairement un *milieu continu*. La modélisation de la phase matrice doit être celle d'un milieu continu de Cauchy. On postule donc classiquement que la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs dépend linéairement du champ de vitesse et de ses dérivées premières en \underline{x} , soit :

$$(2.6) \quad p'_{(i)}{}^m(\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})) = - \left(\underline{\underline{A}}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \underline{\underline{B}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right)$$

1.4.1.2 Phase renforcement Les inclusions utilisées usuellement sont linéaires et très élancées. Généralement disposées parallèlement à la direction principale des sollicitations (radialement dans les tunnels boulonnés, verticalement pour les sols renforcés), elles vont exprimer leur capacité de renforcement essentiellement dans la direction longitudinale. Dans la première partie de ce mémoire, on ne prend donc en compte que les efforts de traction-compression supposés prépondérants. On néglige ainsi les effets de flexion et de cisaillement. L'extension à un modèle les prenant en compte sera développée au chapitre 6, section 2.

Les efforts de traction-compression ne travaillant que dans la déformation axiale, on postule pour densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs une forme linéaire du champ de vitesse et de sa dérivée *le long de la direction de renforcement* \underline{e}_r , soit :

$$(2.7) \quad p'_{(i)}{}^r(\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})) = - \left(\underline{\underline{A}}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) + \underline{\underline{B}}^r(\underline{x}) \cdot \frac{d\hat{\underline{U}}^r(\underline{x})}{ds^r} \right)$$

On note que le second terme de (2.7) peut s'écrire $(\underline{e}^r \otimes \underline{\underline{B}}^r(\underline{x})) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^r(\underline{x})$, ce qui permet d'avoir une expression de $p'_{(i)}{}^r$ homologue de celle de $p'_{(i)}{}^m$.

1.4.1.3 Interaction On suppose enfin que l'interaction entre chaque phase renforcement et la phase matrice est *ponctuelle*, c'est à dire qu'elle provient simplement de la superposition de plusieurs particules au même point \underline{x} . On postule donc l'expression :

$$(2.8) \quad p'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = - \left(\underline{\mathbf{I}}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{\mathbf{I}}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x}) \right)$$

On néglige toute interaction entre deux phases renforcement distinctes. Cette hypothèse est cohérente avec la disposition des inclusions dans le matériau renforcé : deux inclusions orientées selon deux directions distinctes n'ont en effet pas de liaison mécanique.

1.4.1.4 Expression globale L'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un sous-système \mathcal{S}' va dépendre de son caractère mono- ou multiphasique. Dans le premier cas, pour un sous-système \mathcal{S}'^j occupant un volume géométrique Ω' , on intègre simplement la densité de puissance virtuelle correspondante, soit :

$$(2.9) \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} p'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega'$$

Dans le second, on somme les contributions de chaque phase et les termes d'interaction pour obtenir la forme générale :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\mathbf{A}}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x}) + \underline{\mathbf{B}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \left\{ \underline{\mathbf{A}}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x}) + (\underline{\mathbf{e}}^r \otimes \underline{\mathbf{B}}^r(\underline{x})) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\mathbf{I}}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{\mathbf{I}}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x}) \right\} d\Omega' \end{aligned}$$

1.4.2 Efforts extérieurs

Pour tout sous-système *monophasique* \mathcal{S}'^j occupant un domaine géométrique Ω' , les efforts extérieurs pris en compte dans le modèle sont de trois types :

- Des forces de volume correspondant à l'action à distance exercée par l'extérieur du système multiphasique complet \mathcal{S} , caractérisées par une densité volumique $\rho^j(\underline{x}) \underline{\mathbf{F}}^j(\underline{x})$ indépendante du sous-système considéré.
- Des efforts de contact définis sur le pourtour $\partial\Omega'$ par une densité surfacique $\underline{\mathbf{T}}_{\Omega'}^j(\underline{x})$. Ils correspondent aux actions exercées sur \mathcal{S}'^j par les particules de la phase j extérieures à \mathcal{S}'^j .
- Des efforts d'interaction appliqués par les autres phases $\underline{\mathbf{I}}^j(\underline{x})$:

La puissance virtuelle des efforts extérieurs à tout sous-système *monophasique* \mathcal{S}^{ij} s'écrit donc :

$$(2.11) \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = \int_{\Omega'} \rho^j(\underline{x}) \underline{F}^j(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^j(\underline{x}) d\Omega' + \int_{\partial\Omega'} \underline{T}_{\Omega'}^j(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^j(\underline{x}) dS' \\ + \int_{\Omega'} \underline{\mathcal{I}}^j(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^j(\underline{x}) d\Omega'$$

Dans le cas d'un sous-système *multiphasique*, les efforts d'interaction mentionnés ci-dessus ont le statut d'efforts intérieurs, dont l'expression de la puissance virtuelle est donnée par (2.8). De façon à être cohérent avec cette équation, on doit donc faire l'identification suivante :

$$(2.12) \quad \underline{\mathcal{I}}^j(\underline{x}) = \begin{cases} -\underline{I}^r(\underline{x}) & \text{si } j = r \\ -\underline{I}^m(\underline{x}) & \text{si } j = m \end{cases}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs à tout sous-système *multiphasique* se réduit alors à :

$$(2.13) \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = \int_{\Omega'} \left(\rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right) d\Omega' \\ + \int_{\partial\Omega'} \left(\underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right) dS'$$

1.4.3 Quantités d'accélération

Il faut enfin définir la puissance virtuelle des quantités d'accélération sur tout sous-système. On l'exprime classiquement comme intégrale de la forme linéaire suivante :

$$(2.14) \quad \mathcal{A}'(\hat{\mathbb{U}}) = \int_{\Omega'} \left(\rho^m(\underline{x}) \underline{\gamma}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \rho^r(\underline{x}) \underline{\gamma}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right) d\Omega'$$

où $\underline{\gamma}^j(\underline{x})$ désigne l'accélération de la particule de la phase j située au point \underline{x} .

1.5 Mise en œuvre du P.P.V

1.5.1 Premier énoncé

Le premier énoncé du principe des puissances virtuelles exprime la nullité de la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans tout mouvement virtuel rigidifiant un système ou un sous-système quelconque (Eq.(2.1-a)). Considérant un sous-système monophasique \mathcal{S}^{ij} animé d'un mouvement de translation :

$$(2.15) \quad \hat{\mathbb{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \hat{\underline{U}}^j(\underline{x}) = \hat{\underline{U}}_0, \underline{0}, \dots \right\}$$

on obtient compte-tenu de (2.6) et (2.7) :

$$(2.16) \quad \forall \Omega' \subset \Omega, \forall \hat{\underline{U}}_0, \quad \int_{\Omega'} \underline{A}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}_0 \, d\Omega' = \int_{\Omega'} \underline{A}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}_0 \, d\Omega' = 0$$

Par un argument classique de continuité, il en résulte que :

$$(2.17) \quad \underline{A}^m(\underline{x}) = \underline{0} \quad , \quad \underline{A}^r(\underline{x}) = \underline{0} \quad , \quad r = 1, \dots, N$$

Considérant maintenant un mouvement virtuel de rotation défini par :

$$(2.18) \quad \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \left\{ \underline{0}, \dots, \hat{\underline{U}}^j(\underline{x}) = \hat{\underline{\Omega}}_0 \wedge \underline{x}, \underline{0}, \dots \right\}$$

pour lequel $\underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}} = \hat{\underline{\Omega}}_0$ est un tenseur antisymétrique du second ordre, on obtient en reportant cette expression dans (2.6) et (2.7) :

$$(2.19) \quad \forall \Omega' \subset \Omega, \forall \hat{\underline{\Omega}}_0, \quad \int_{\Omega'} \underline{B}^m(\underline{x}) : \hat{\underline{\Omega}}_0 \, d\Omega' = \int_{\Omega'} (\underline{e}^r \otimes \underline{B}^r(\underline{x})) : \hat{\underline{\Omega}}_0 \, d\Omega' = 0$$

Il en résulte d'une part la symétrie du tenseur $\underline{B}^m(\underline{x})$, que nous rebaptisons $\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})$, d'autre part celle de $(\underline{e}^r \otimes \underline{B}^r(\underline{x}))$. Cette condition permet d'écrire :

$$(2.20) \quad \underline{B}^r(\underline{x}) = \sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \quad , \quad r = 1, \dots, N$$

Considérant finalement un sous-système multiphasique \mathcal{S}' animé d'un mouvement virtuel de translation :

$$(2.21) \quad \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \left\{ \hat{\underline{U}}_0, \dots, \hat{\underline{U}}_0 \right\}$$

il résulte de (2.10) :

$$(2.22) \quad \forall \Omega' \subset \Omega, \forall \hat{\underline{U}}_0, \quad \int_{\Omega'} \left\{ \underline{I}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \right\} \cdot \hat{\underline{U}}_0 \, d\Omega' = 0$$

ce qui permet de réécrire (2.8) sous la forme :

$$(2.23) \quad p'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = - \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot \left(\hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) - \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right)$$

où l'on voit apparaître les vitesses relatives des phases renforcement par rapport à la phase matrice. Compte-tenu des équations (2.17), (2.20), (2.23), l'expression (2.10) se simplifie finalement en :

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_i(\hat{\underline{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \left(\sum_{r=1}^N \sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \right) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right\} \, d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \cdot \left(\hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) - \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right) \, d\Omega' \end{aligned}$$

1.5.2 Second énoncé

On applique maintenant le second énoncé du principe des puissances virtuelles à des mouvements virtuels quelconques, donnés par (2.3). En reportant (2.13), (2.14) et (2.24) dans (2.1-b), et en regroupant les cofacteurs des différents champs de vitesse virtuelle $\hat{\underline{U}}^j(\underline{x})$, il vient :

$$(2.25) \quad \int_{\Omega'} \left\{ -\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) + \left[\rho^m(\underline{x}) (\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \right] \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ + \sum_{r=1}^N \int_{\Omega'} \left\{ [-\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r] : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) + [\rho^r(\underline{x}) (\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x})] \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) \right\} d\Omega' \\ + \int_{\partial\Omega'} \underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) dS' + \sum_{r=1}^N \int_{\partial\Omega'} \underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) dS' = 0$$

L'introduction dans (2.25) de l'identité :

$$(2.26) \quad -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \cdot \text{div} {}^t \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) - \text{div} (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}))$$

et l'application du théorème de la divergence ($\underline{n}(\underline{x})$ désignant la normale à $\partial\Omega'$ au point \underline{x}) :

$$(2.27) \quad \int_{\Omega'} \text{div} \underline{T}(\underline{x}) d\Omega' = \int_{\partial\Omega'} \underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS'$$

donnent alors :

$$(2.28) \quad \forall S' \subset \mathcal{S}, \forall \hat{\underline{U}} \in \mathcal{U}, \\ \int_{\Omega'} \left\{ \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) (\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) \right\} \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) d\Omega' \\ + \sum_{r=1}^N \int_{\Omega'} \left\{ \text{div} (\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) (\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x}) \right\} \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) d\Omega' \\ + \int_{\partial\Omega'} [\underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) - \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})] \cdot \hat{\underline{U}}^m(\underline{x}) dS' \\ + \sum_{r=1}^N \int_{\partial\Omega'} [\underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) - \sigma^r(\underline{x}) (\underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r] \cdot \hat{\underline{U}}^r(\underline{x}) dS' = 0$$

Le raisonnement permettant d'obtenir les équations du mouvement et les conditions aux limites est alors classique. Compte-tenu de l'indépendance des champs de vitesse constituant un mouvement virtuel $\hat{\underline{U}}$, on peut annuler séparément les termes associés à chaque phase. Pour une phase donnée j , en considérant tout d'abord des champs de vitesse nuls sur la frontière $\partial\Omega'$, on obtient la nullité en tout point de l'intégrande associé à l'intégrale volumique, ce qui donne l'équation du mouvement de la phase j . La nullité de l'intégrale de surface pour des champs quelconques fournit ensuite les conditions aux limites.

On obtient donc les **équations du mouvement** pour le modèle multiphasique de matériau renforcé :

$$\forall \Omega' \subset \Omega \quad , \quad \forall \underline{x} \in \Omega'$$

$$(2.29\text{-a}) \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) (\underline{F}^m(\underline{x}) - \underline{\gamma}^m(\underline{x})) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) = \underline{0}$$

$$(2.29\text{-b}) \quad \operatorname{div} (\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) (\underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{\gamma}^r(\underline{x})) - \underline{I}^r(\underline{x}) = \underline{0}, \quad r = 1, \dots, N$$

ainsi que les **conditions aux limites** :

$$\forall \Omega' \subset \Omega \quad , \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega'$$

$$(2.30\text{-a}) \quad \underline{T}_{\Omega'}^m(\underline{x}) = \underline{T}^m(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

$$(2.30\text{-b}) \quad \underline{T}_{\Omega'}^r(\underline{x}) = \underline{T}^r(\underline{x}) = \sigma^r(\underline{x}) (\underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r, \quad r = 1, \dots, N$$

1.6 Interprétation mécanique du modèle. Lien avec l'échelle microscopique

On constate que chacune des équations du mouvement (2.29) a la forme de celles obtenues pour un milieu continu classique de Cauchy. Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^m$ représente les efforts intérieurs dans la phase matrice. Il apparaît en particulier sur l'équation (2.30-a) que le vecteur contrainte appliqué à la frontière de Ω' ne dépend que de la normale à $\partial\Omega'$ au point considéré. Par ailleurs, les efforts intérieurs d'interaction entre les phases jouent le rôle de *forces volumiques*.

Les efforts intérieurs dans chaque phase de renforcement sont représentés par un tenseur uniaxial, argumenté par la contrainte *scalaires* σ^r . Pour comprendre la signification mécanique de cette variable, calculons la résultante des efforts appliqués sur une facette dS de normale \underline{n} pour la seule phase de renforcement r (Figure 2.3).

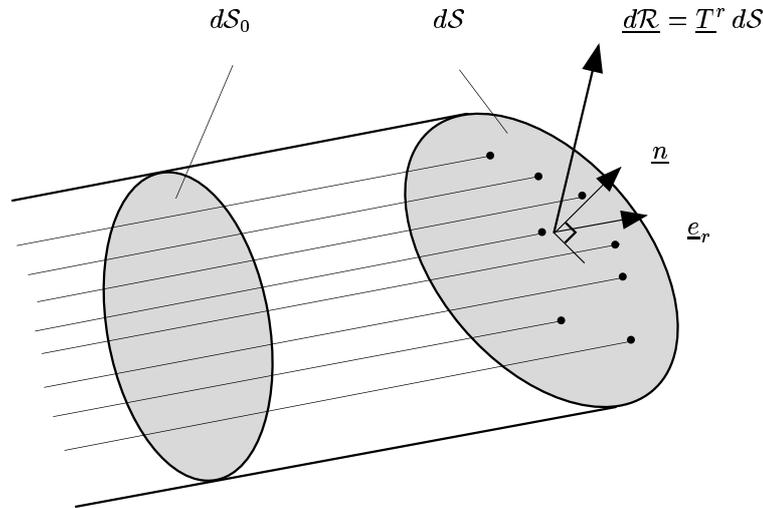


FIG. 2.3: *Interprétation des efforts intérieurs dans une phase renforcement*

D'après (2.30-b), cette résultante vaut :

$$(2.31) \quad \underline{d\mathcal{R}} = \underline{T}^r d\mathcal{S} = \sigma^r (\underline{n} \cdot \underline{e}_r) d\mathcal{S} \underline{e}_r$$

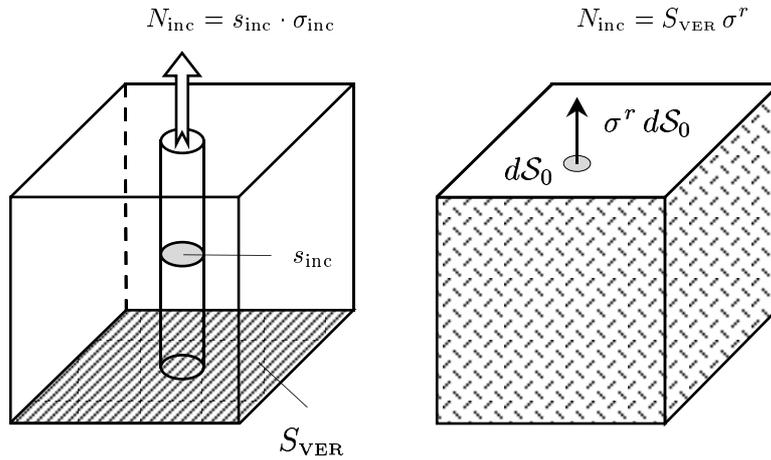
Soit $d\mathcal{S}_0 = (\underline{n} \cdot \underline{e}_r) d\mathcal{S}$ la projection de $d\mathcal{S}$ sur un plan perpendiculaire à la direction de renforcement \underline{e}_r . Il vient :

$$(2.32) \quad \frac{d\mathcal{R}}{d\mathcal{S}_0} = \sigma^r \underline{e}_r$$

La contrainte scalaire σ^r s'interprète donc comme la résultante des efforts de traction-compression dans la phase r *par unité de surface perpendiculaire* à \underline{e}_r . Du point de vue du matériau réel, σ^r correspond donc à la somme des efforts normaux dans les inclusions traversant $d\mathcal{S}$ rapportée à la surface normale équivalente $d\mathcal{S}_0$.

Supposant connu le champ macroscopique σ^r obtenu par résolution d'un problème multiphasique, on peut réciproquement évaluer pour chaque inclusion prise individuellement l'effort normal N_{inc} et la contrainte normale moyenne σ_{inc} dans celle-ci. Il suffit de considérer un volume élémentaire représentatif (VER) du pavage par les inclusions (figure 2.4-a), et de calculer l'effort normal appliqué sur sa face supérieure à l'inclusion. s_{inc} désignant la section de l'inclusion, on a simplement :

$$(2.33) \quad N_{\text{inc}} = s_{\text{inc}} \cdot \sigma_{\text{inc}}$$



a - Inclusion dans un VER

b - Phase renforcement

FIG. 2.4: Calcul de l'effort normal dans les inclusions

Considérant maintenant le volume homologue du VER dans la phase renforcement du milieu multiphasique (figure 2.4-b), on obtient comme résultante sur la face supérieure :

$$(2.34) \quad N_{\text{inc}} = S_{\text{VER}} \cdot \sigma^r$$

ou S_{VER} désigne la section transverse du VER. Notant que $\eta^r = \frac{s_{\text{inc}}}{S_{\text{VER}}}$ est la fraction volumique des inclusions dans la direction \underline{e}_r , on déduit :

$$(2.35) \quad \sigma_{\text{inc}} = \frac{N_{\text{inc}}}{s_{\text{inc}}} = \frac{\sigma^r}{\eta^r}$$

Ainsi la contrainte microscopique normale dans une inclusion (du matériau renforcé) et la contrainte macroscopique partielle dans la phase r (du milieu multiphasique) sont liées par la fraction volumique η^r . La modélisation multiphasique a en quelque sorte « dilué » les contraintes des inclusions discrètes dans un continuum.

1.7 Equations globales d'équilibre

Les équations (2.29) et (2.30) décrivent *séparément* le mouvement de chacune des phases du milieu considéré. Il est possible d'obtenir un système d'équations globales par sommation terme à terme des précédentes. Définissant successivement pour tout point \underline{x} :

$$(2.36) \quad \rho \underline{F} = \sum_j \rho^j \underline{F}^j \quad , \quad \underline{T} = \sum_j \underline{T}^j \quad , \quad \rho \underline{\gamma} = \sum_j \rho^j \underline{\gamma}^j$$

et

$$(2.37) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{r=1}^N \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$$

il vient :

$$(2.38) \quad \forall \Omega' \subset \Omega, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) + \rho(\underline{x}) (\underline{F}(\underline{x}) - \underline{\gamma}(\underline{x})) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega' \\ \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega' \end{array} \right.$$

On reconnaît dans (2.38) les équations du mouvement et conditions aux limites obtenues pour un milieu continu de Cauchy classique. Le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}$ défini par (2.37) représente pour le milieu multiphasique le tenseur des contraintes *totales*, tandis que $\underline{\underline{\sigma}}^m$ et σ^r désignent les contraintes *partielles* respectivement dans la matrice et dans chaque phase renforcement. On observera notamment que les termes d'interaction entre phases n'apparaissent plus dans ces équations.

L'intérêt de l'agrégation des équations d'équilibre réside pour l'instant seulement dans le fait de pouvoir retrouver, au moins formellement, les équations régissant un milieu continu de Cauchy. L'utilité de cette approche apparaîtra plus clairement lors de la formulation du comportement, traité dans la section suivante.

1.8 Nécessité des lois de comportement du matériau renforcé

En appliquant la méthode des puissances virtuelles, nous avons pu déterminer les équations du mouvement du milieu multiphasique ainsi que les conditions aux limites. Nous avons distingué l'approche *par phase* (Eqs.(2.29)- (2.30)) de l'approche *globale* (Eqs.(2.38)).

Comme dans le cas des milieux continus de Cauchy, les seules équations du mouvement ne permettent pas de résoudre des problèmes aux limites. Il est donc nécessaire de leur adjoindre des *lois de comportement* reliant les variables d'efforts aux variables de déformation. Nous allons nous y attacher dans la section suivante.

2 Elasticité du milieu multiphasique

2.1 Hypothèse des petites perturbations

Les problèmes de géotechnique auxquels on souhaite appliquer le modèle multiphasique de matériau renforcé peuvent être traités convenablement dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Ces hypothèses, regroupées sous le sigle (HPP) sont définies par le fait qu'on puisse identifier les configurations *initiale* et *actuelle* du système (Salençon, 1996b, Chap. 8), ce qui permet de formuler les différentes équations d'équilibre sur la géométrie initiale. Elles impliquent, pour chaque phase $j \in \{m; r = 1, \dots, N\}$, les conditions suivantes :

- les déplacements sont petits devant une longueur caractéristique L du système, ce qui s'écrit $\|\underline{\xi}^j(\underline{x})\| \ll L$.
- les transformations sont infinitésimales, soit $\|\underline{\text{grad}} \underline{\xi}^j(\underline{x})\| \ll 1$.
- les déplacements relatifs par rapport à la phase matrice ($\underline{\xi}^r(\underline{x}) - \underline{\xi}^m(\underline{x})$) sont petits devant une longueur caractéristique de l'échelle microscopique de description, par exemple une dimension du volume élémentaire représentatif dans le cas d'un renforcement périodique.

2.2 Déformations du milieu multiphasique

La cinématique du milieu multiphasique est définie par la donnée d'un champ de déplacement pour chacune des phases. On note $\underline{\xi}^m(\underline{x})$ (resp. $\underline{\xi}^r(\underline{x})$) celui de la phase matrice (resp. phase renforcement r).

Dans le cadre HPP défini plus haut, les variables de déformations pertinentes sont celles qui apparaissent en dualité des variables décrivant les efforts intérieurs dans l'expression du travail de déformation du système. Celui-ci s'obtient, au signe près, en substituant dans l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (2.24) les déplacements $\underline{\xi}^j(\underline{x})$ aux vitesses virtuelles $\underline{\hat{U}}^j(\underline{x})$, soit¹ :

$$(2.39) \quad \mathcal{W}'_{\text{def}}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) = \int_{\Omega'} \left\{ \underline{\sigma}^m : \underline{\text{grad}} \underline{\xi}^m + \left(\sum_{r=1}^N \sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \right) : \underline{\text{grad}} \underline{\xi}^r \right\} d\Omega' \\ + \int_{\Omega'} \left\{ \sum_{r=1}^N \underline{I}^r \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \right\} d\Omega'$$

En définissant :

$$(2.40\text{-a}) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2} \left(\underline{\text{grad}} \underline{\xi}^m + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{\xi}^m \right)$$

$$(2.40\text{-b}) \quad \varepsilon^r = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\text{grad}} \underline{\xi}^r = \frac{\partial(\underline{\xi}^r \cdot \underline{e}_r)}{\partial s^r}$$

1. On omet dorénavant la dépendance en \underline{x} des champs de façon à alléger les notations.

et compte-tenu de la symétrie du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^m$, il vient :

$$(2.41) \quad \mathcal{W}'_{\text{d\'ef}}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) = \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m d\Omega' + \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \sigma^r \varepsilon^r d\Omega' + \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \underline{I}^r \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) d\Omega'$$

Les variables de déformation du modèle sont donc le *tenseur des déformations* $\underline{\underline{\varepsilon}}^m$ pour la phase matrice, la *déformation axiale* ε^r pour chaque phase de renforcement, et le *déplacement relatif* $\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m$ pour l'interaction de chaque phase de renforcement avec la matrice.

2.3 Elasticité des phases

On adopte ici le cadre de la thermodynamique des milieux continus pour obtenir le comportement élastique du milieu multiphasique, dont on peut trouver une présentation complète dans Salençon (1996b, Chap. 7). On se limite dans la suite aux problèmes *isothermes*.

2.3.1 Postulats thermodynamiques

Le *premier principe* de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction E de l'état du système appelée *énergie interne*, qui vérifie à chaque instant et pour tout sous-système $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, l'équation :

$$(2.42) \quad \dot{E} + \dot{K} = \mathcal{P}'_{(e)}(\mathbb{U}) + \dot{Q}$$

où K désigne l'*énergie cinétique totale* du sous-système, $\mathcal{P}'_{(e)}(\mathbb{U})$ la puissance des efforts extérieurs exercés sur le sous-système dans son mouvement réel, \dot{Q} le *taux de chaleur reçue*, et $(\dot{\cdot})$ la dérivation par rapport au temps.

Dans toute cette section, nous considérons uniquement des sous-systèmes Ω' *multiphasiques*. L'énergie cinétique totale, grandeur extensive, se calcule donc comme somme des énergies cinétiques de chaque phase, soit :

$$(2.43) \quad K = \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \rho^m(\underline{x}) (\underline{U}^m(\underline{x}))^2 d\Omega' + \sum_{r=1}^N \int_{\Omega'} \frac{1}{2} \rho^r(\underline{x}) (\underline{U}^r(\underline{x}))^2 d\Omega'$$

où $\underline{U}^j(\underline{x})$ désigne le champ de vitesse réelle de la phase $j \in \{m; r = 1, \dots, N\}$. Sa dérivée temporelle vaut donc :

$$(2.44) \quad \dot{K} = \int_{\Omega'} \rho^m(\underline{x}) \underline{U}^m(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^m(\underline{x}) d\Omega' + \sum_{r=1}^N \int_{\Omega'} \rho^r(\underline{x}) \underline{U}^r(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}^r(\underline{x}) d\Omega'$$

Cette expression n'est autre que la puissance des quantités d'accélération dans le mouvement réel (voir Eq.(2.14)), soit :

$$(2.45) \quad \dot{K} = \mathcal{A}'(\mathbb{U})$$

D'autre part, si l'on note $\mathcal{P}'_{\text{déf}}$ la *puissance de déformation*, c'est à dire l'opposé de la puissance des efforts intérieurs dans le mouvement réel, le principe des puissances virtuelles (2.1-b) appliqué au mouvement réel donne :

$$(2.46) \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\mathbb{U}) = \mathcal{A}'(\mathbb{U}) + \mathcal{P}'_{\text{déf}} = \dot{K} + \mathcal{P}'_{\text{déf}}$$

En comparant les équations (2.42) et (2.46), on obtient finalement :

$$(2.47) \quad \dot{E} = \mathcal{P}'_{\text{déf}} + \dot{Q}$$

La taux de variation d'énergie interne du système s'identifie donc à la puissance de déformation du système augmentée du taux de chaleur reçue.

Le *second principe* de la thermodynamique postule l'existence d'une *température absolue* du système T , et d'une fonction d'état S appelée *entropie* vérifiant :

$$(2.48) \quad \dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T}$$

Introduisons les densités volumiques lagrangiennes *totales* d'énergie interne e , d'entropie s , et d'énergie libre $\Psi = e - T s$, obtenues par sommation de leur valeur sur chaque phase. Avec ces notations, l'équation (2.47) se réécrit, pour tout sous-système multiphasique occupant un volume Ω' dans le cas isotherme ($T = cte$) :

$$(2.49) \quad \int_{\Omega'} (\dot{\Psi} + T \dot{s}) d\Omega' = \mathcal{P}'_{\text{déf}} + \dot{Q}$$

ou encore :

$$(2.50) \quad \mathcal{P}'_{\text{déf}} - \int_{\Omega'} \dot{\Psi} d\Omega' = T \int_{\Omega'} \dot{s} d\Omega' - \dot{Q}$$

En utilisant maintenant (2.48), il vient :

$$(2.51) \quad \mathcal{P}'_{\text{déf}} - \int_{\Omega'} \dot{\Psi} d\Omega' \geq 0$$

Cette dernière équation, combinaison des deux principes, constitue l'*inégalité de Clausius-Duhem* et traduit la non-négativité de la *dissipation intrinsèque* définie par le membre de gauche.

Il convient de préciser maintenant la forme de la densité d'énergie libre et la puissance de déformation pour le milieu multiphasique. Compte tenu du cadre HPP, celle-ci s'obtient simplement en substituant les vitesses aux déplacements dans (2.41), soit :

$$(2.52) \quad \mathcal{P}'_{\text{déf}} = \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m d\Omega' + \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \sigma^r \varepsilon^r d\Omega' + \int_{\Omega'} \sum_{r=1}^N \underline{\underline{I}}^r \cdot (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^r - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^m) d\Omega'$$

Remarque Par souci de simplicité, et conformément aux applications visées, on n'a pas développé le formalisme lié aux échanges de chaleur entre les phases. Pour une présentation thermodynamique générale de la théorie des mélanges, on pourra se reporter à Truesdell et Toupin (1960) et Bedford et Stern (1972).

2.3.2 Ecriture du comportement élastique

Pour expliciter le comportement élastique, on suppose que la densité d'énergie libre est argumentée par les *seules* variables de déformations définies plus haut et qu'elle se décompose *additivement* sur les différentes phases du système, soit :

$$(2.53) \quad \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^m, \varepsilon^r, \underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) = \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \sum_{r=1}^N \psi^r(\varepsilon^r) + \sum_{r=1}^N \psi^{I,r}(\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (2.51), valable pour tout sous-système multiphasique occupant un volume Ω' s'écrit alors, compte tenu de (2.52), sous la forme locale :

$$(2.54) \quad \forall (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m, \dot{\varepsilon}^r, \underline{\underline{\dot{\xi}}}^r - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^m), \quad \left(\underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m + \sum_{r=1}^N \left(\sigma^r - \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r} \right) \cdot \dot{\varepsilon}^r \\ + \sum_{r=1}^N \left(\underline{\underline{I}}^r - \frac{\partial \psi^{I,r}}{\partial (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m)} \right) \cdot (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^r - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^m) \geq 0$$

Le comportement *élastique* du milieu multiphasique se traduit par la *réversibilité* de ses évolutions, c'est à dire la nullité du taux de dissipation intrinsèque volumique. Considérant successivement des évolutions pour lesquelles les « taux de déformation » $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m, \dot{\varepsilon}^r, \underline{\underline{\dot{\xi}}}^r - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^m)$ sont tous nuls sauf un, il vient :

$$(2.55\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m}$$

$$(2.55\text{-b}) \quad \sigma^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r} \quad r = 1, \dots, N$$

$$(2.55\text{-c}) \quad \underline{\underline{I}}^r = \frac{\partial \psi^{I,r}}{\partial (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m)}$$

Se plaçant maintenant dans le cadre de l'élasticité linéaire, on adopte une expression quadratique pour chaque densité d'énergie libre. On en déduit alors les lois de comportement suivantes, pour un état naturel initial de chaque phase :

- **phase matrice :**

$$(2.56) \quad \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{\underline{a}}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\underline{a}}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m$$

- **phase renforcement r :**

$$(2.57) \quad \psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} a^r (\varepsilon^r)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^r = a^r \varepsilon^r$$

- **interaction matrice/renforcement :**

$$(2.58) \quad \psi^{I,r}(\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}^{I,r} \cdot (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{I}}^r = \underline{\underline{\underline{C}}}^{I,r} \cdot (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m)$$

Le comportement élastique linéaire du milieu multiphasique est donc complètement déterminé par la donnée des comportements élastiques des phases le constituant et de leur interaction, soit un *tenseur des modules élastiques* $\underline{\underline{\underline{a}}}^m$ pour la matrice, une *raideur scalaire* pour chaque phase de renforcement a^r , et des *tenseurs d'interaction* $\underline{\underline{\underline{C}}}^{I,r}$.

2.3.3 Lien entre matériau renforcé et milieu multiphasique

Il convient d'insister sur la différence de nature entre le comportement d'une phase du milieu multiphasique, et le comportement des matériaux constitutifs, de la même façon que l'on a distingué à la section 1.6 la contrainte normale dans une inclusion de la contrainte partielle dans la phase renforcement correspondante.

Pour les applications usuelles de géotechnique, la fraction volumique de renforcements η^r étant très faible ($< 1\%$), on *identifie* les propriétés mécaniques de la phase matrice (c'est à dire $\underline{\underline{a}}^m$) à celles de son matériau constitutif noté $\underline{\underline{\tilde{a}}}^m$.

Pour chaque phase renforcement, reprenant le schéma de la figure 2.4, il est naturel d'identifier la déformation axiale ε de l'inclusion (dans un modèle « barre ») avec celle de la phase renforcement ε^r . Les comportements élastiques respectifs s'écrivent alors :

$$(2.59\text{-a}) \quad N_{\text{inc}} = E^{\text{inc}} s_{\text{inc}} \varepsilon$$

$$(2.59\text{-b}) \quad \sigma^r = a^r \varepsilon^r$$

ou E^{inc} désigne le module d'Young du matériau constitutif de l'inclusion. En reportant ces valeurs dans (2.34), il vient :

$$(2.60) \quad a^r = \eta^r \cdot E^{\text{inc}}$$

Pour conclure, remarquons que la pertinence du modèle multiphasique pour des fractions volumiques η^r intermédiaires (typiquement 10-20%) est mise en cause de deux façons. D'une part, la représentation des efforts dans les inclusions par un modèle uniaxial devient très approximative. D'autre part, le choix du comportement de la phase matrice devient problématique. La limite d'application du modèle ne pourra être déterminée que par comparaison avec des approches directes. On donne à la section 4.1 de ce chapitre quelques résultats d'élasticité précisant ce point.

2.4 Comportement élastique adhérent

2.4.1 Adhérence parfaite et non glissement

Nous avons présenté jusqu'ici le modèle multiphasique dans un cadre général. Dans cette section, nous particularisons le modèle en introduisant une hypothèse cinématique forte, dite *hypothèse d'adhérence parfaite*. Elle se traduit par l'égalité des champs de déplacements de toutes les phases du milieu, soit :

$$(2.61) \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad \forall j \in \{m; r = 1, \dots, N\}, \quad \underline{\xi}^j(\underline{x}) = \underline{\xi}(\underline{x})$$

Le modèle *adhérent* ainsi constitué va permettre de traiter notamment des problèmes de matériau renforcé pour lesquels on suppose qu'il n'y a *pas de glissement* à l'interface entre la matrice et les inclusions.

Insistons ici encore sur la terminologie : l'hypothèse d'*adhérence parfaite* est de nature cinématique et se réfère au milieu multiphasique à l'échelle *macroscopique*. Le *non glissement* est une hypothèse sur le comportement de l'interface matrice/inclusion dans le matériau décrit à l'échelle *microscopique*. Il n'y a pas d'équivalence entre ces deux hypothèses : contre toute attente, on pourra traiter par exemple, en première approximation, le cas d'un matériau subissant des décohésions d'interface avec le modèle adhérent. A l'inverse, on pourra également utiliser le modèle général dans le cas d'un matériau renforcé sans glissement d'interface pour rendre compte d'*effets d'échelle* (voir Chap. 6, section 1).

2.4.2 Condition de compatibilité des déformations

Compte-tenu de l'hypothèse d'adhérence (2.61), on introduit sans ambiguïté le *tenseur des déformations totales* :

$$(2.62) \quad \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\text{grad}}}} \xi + {}^t \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}} \xi \right)$$

Les variables de déformations associées à chaque phase sont alors :

$$(2.63) \quad \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^m = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$$

et

$$(2.64) \quad \varepsilon^r = \frac{\partial(\underline{\underline{\underline{\xi}}} \cdot \underline{\underline{\underline{e}}}_r)}{\partial s^r} = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} : (\underline{\underline{\underline{e}}}_r \otimes \underline{\underline{\underline{e}}}_r) \equiv \epsilon_{rr}$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite se traduit donc par des relations de dépendance entre les $(N + 6)$ composantes de la déformation « généralisée » du milieu renforcé $(\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^m ; \varepsilon^r, r = 1, \dots, N)$, et correspond donc en ce sens à l'existence de *liaisons internes* du « matériau multiphasique ». L'équation (2.64) traduisant en termes de déformations la liaison cinématique (2.61) est appelée *condition de compatibilité* des déformations des différentes phases.

2.4.3 Equations de comportement global : état initial naturel

L'hypothèse d'adhérence parfaite implique la nullité des déplacements relatifs entre renforcements et matrice. L'équation (2.58) implique alors de façon duale que les tenseurs d'interaction $\underline{\underline{\underline{C}}}^{I,r}$ prennent une valeur infinie, la valeur des efforts d'interaction eux-mêmes restant indéterminée. Il est alors pertinent de décrire le mouvement du système par les équations d'équilibre global (2.38), qui font intervenir le tenseur des contraintes totales $\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}$. Pour pouvoir résoudre des problèmes aux limites formulés en contraintes totales, on va donc chercher à exprimer le comportement du milieu multiphasique adhérent sous forme d'une relation entre $\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$.

Les équations (2.56) et (2.57) se réécrivent, compte-tenu de (2.64) :

$$(2.65\text{-a}) \quad \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^m = \underline{\underline{\underline{a}}}^m : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}^m = \underline{\underline{\underline{a}}}^m : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$$

$$(2.65\text{-b}) \quad \sigma^r = a^r \varepsilon^r = (a^r \underline{\underline{\underline{e}}}_r \otimes \underline{\underline{\underline{e}}}_r) : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}, \quad r = 1, \dots, N$$

Introduisant ces relations dans (2.37), on obtient finalement :

$$(2.66) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\epsilon}}$$

avec :

$$(2.67) \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{a}}^m + \sum_{r=1}^N a^r \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r$$

$\underline{\underline{A}}$ désigne le *tenseur des modules élastiques total* du milieu multiphasique. Il se décompose additivement en une contribution de la phase matrice et de chaque phase renforcement. Il apparaît clairement que les directions $\underline{\underline{e}}_r$ sont privilégiées, ce qui traduit le caractère *anisotrope* du comportement.

Connaissant l'état de contraintes totales $\underline{\underline{\Sigma}}$, on peut calculer directement les contraintes partielles par application d'*opérateurs de localisation* :

$$(2.68\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}}$$

$$(2.68\text{-b}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}}$$

Les expressions de ces opérateurs s'obtiennent en introduisant le *tenseur des complaisances totales* vérifiant :

$$(2.69) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad , \quad \underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}} \right)^{-1}$$

On a en effet d'après (2.65) :

$$(2.70) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{a}}^m : \left(\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} \right) \quad \implies \quad \underline{\underline{L}}^m = \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{C}}$$

$$(2.71) \quad \underline{\underline{\sigma}}^r = (a^r \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \left(\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} \right) \quad \implies \quad \underline{\underline{L}}^r = (a^r \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \underline{\underline{C}}$$

Ces opérateurs vont notamment nous permettre d'explicitier simplement le comportement élasto-plastique dans la section 3.

Du point de vue énergétique, l'absence de mouvement relatif des phases supprime les termes d'interaction dans l'expression (2.53) de la densité d'énergie libre. D'après (2.56) et (2.57), elle devient simplement :

$$(2.72) \quad \Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}}^m : \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\epsilon}}^m + \sum_{r=1}^N \frac{1}{2} a^r (\epsilon^r)^2$$

ce qui s'écrit également, compte-tenu de (2.64) et (2.67) :

$$(2.73) \quad \Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}}$$

On retrouve donc ici, exprimée en variables *totales*, la forme classique de la densité d'énergie libre d'un milieu continu élastique.

2.4.4 Cas de déformations anélastiques imposées

L'expression d'une loi de comportement globale de type (2.66) suppose que les constituants soient pris séparément à l'état initial naturel.

Dans le cas où des déformations anélastiques $(\underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m, \varepsilon_{\text{an}}^r)$ (de type thermique, plastique, etc..) sont imposées indépendamment à chaque phase, il faut, pour les prendre en compte, remplacer les variables de déformation dans (2.65) par leur homologue *élastique*, soit :

$$(2.74\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m = \underline{\underline{a}}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m)$$

$$(2.74\text{-b}) \quad \sigma^r = a^r \varepsilon_e^r = a^r (\varepsilon^r - \varepsilon_{\text{an}}^r)$$

La compatibilité géométrique des déformations *totales* (2.64) n'impose pas *séparément* celle des déformations élastiques et anélastiques. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer par exemple le réchauffement uniforme d'un matériau renforcé, dont les constituants ont des coefficients de dilatation thermique différents. Les déformations thermiques dans chaque phase seront alors de façon générale incompatibles.

Pour comprendre plus finement ces mécanismes, nous allons étudier l'équilibre local d'un système soumis uniquement à des déformations anélastiques $(\underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m, \varepsilon_{\text{an}}^r)$ incompatibles au sens de (2.64). La compatibilité géométrique des déformations totales implique l'apparition de contraintes partielles que nous notons $(\underline{\underline{\rho}}^m, \rho^r, r = 1, \dots, N)$. L'équilibre global (2.37) s'écrit ici :

$$(2.75) \quad \underline{\underline{\rho}}^m + \sum_{r=1}^N \rho^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r = \underline{\underline{0}}$$

ce qui permet d'exprimer l'état de contraintes dans la matrice par :

$$(2.76) \quad \underline{\underline{\rho}}^m = - \sum_{r=1}^N \rho^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$$

En introduisant les *complaisances élastiques* des matériaux constitutifs, soit $\underline{\underline{c}}^m = \left(\underline{\underline{a}}^m\right)^{-1}$ et $c^r = 1/a^r$, on peut réécrire (2.74-a) sous la forme :

$$(2.77\text{-a}) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\rho}}^m + \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m$$

$$(2.77\text{-b}) \quad \varepsilon^r = c^r \rho^r + \varepsilon_{\text{an}}^r$$

La substitution des équations précédentes dans la condition de compatibilité géométrique (2.64) donne pour chaque phase r , compte-tenu de (2.75) et (2.76) :

$$(2.78) \quad c^r \rho^r + \varepsilon_{\text{an}}^r = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{\varepsilon}}^m = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{c}}^m : \left(- \sum_{s=1}^N \rho^s \underline{e}_s \otimes \underline{e}_s \right) + (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m$$

Notant C_{rs}^m le produit $(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) : \underline{c}^m : (\underline{e}_s \otimes \underline{e}_s)$, et δ_{rs} le symbole de Kroneker, on obtient alors un système linéaire de la forme :

$$(2.79) \quad \forall r = 1, \dots, N, \quad \sum_{s=1}^N [(C_{rs}^m + c^r \delta_{rs}) \rho^s] = \varepsilon_{\text{an},rr}^m - \varepsilon_{\text{an}}^r$$

dont la solution $\{\rho^r, r = 1, \dots, N\}$ fournit l'état de contrainte du système.

Nous allons illustrer ce résultat sur l'exemple du réchauffement d'un matériau renforcé dans une seule direction, modélisé par un milieu biphasique, et ce dans un formalisme unidimensionnel (Figure 2.5).

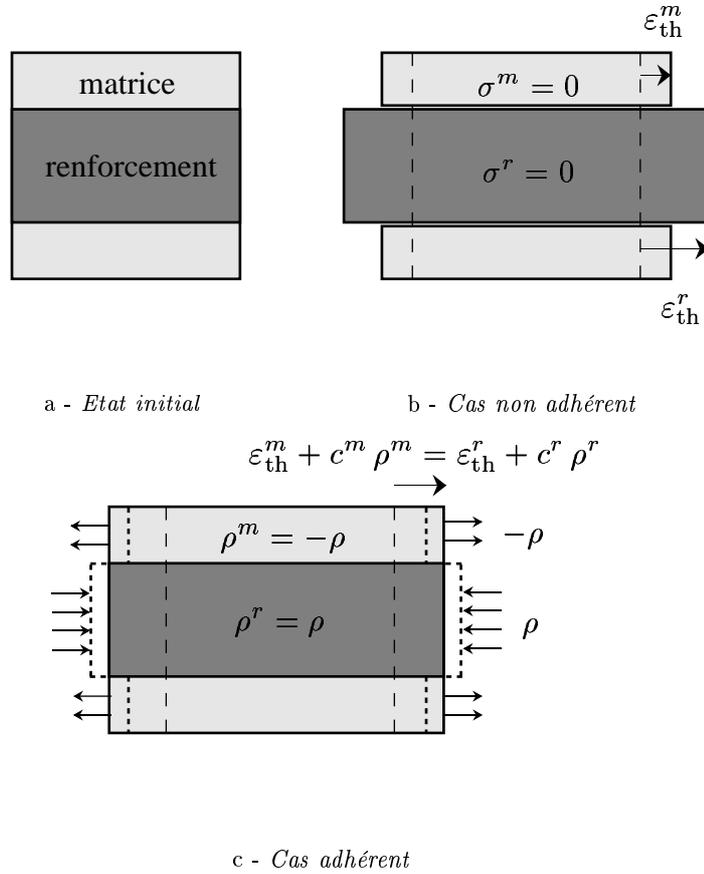


FIG. 2.5: Réchauffement d'un milieu biphasique

Partant d'un état initial non chargé, l'accroissement de température produit une dilatation thermique différente dans les deux phases. En l'absence d'adhérence, chaque phase reste libre de contrainte (Figure 2.5-b). Si l'on requiert l'adhérence parfaite, des contraintes autoéquilibrées $\rho^m = -\rho^r$ se développent de façon à rétablir l'égalité des déformations totales. La solution du système (2.79) lorsque $N = 1$ est triviale et vaut :

$$(2.80) \quad \rho^r = \frac{\varepsilon_{\text{an},rr}^m - \varepsilon_{\text{an}}^r}{c_{rrrr}^m + c^r}$$

En particulier, on remarque que ρ^r est non nul si et seulement si les déformations thermiques sont incompatibles.

Cette étude a permis de mettre en évidence la notion d'*état de contraintes autoéquilibrées*, qui apparaissent pour rétablir la compatibilité géométrique des déformations totales lorsque les déformations anélastiques sont incompatibles. Ces résultats sont valables en particulier pour les déformations d'origine plastique, et vont être exploités pour identifier le comportement élasto-plastique adhérent.

3 Elasto-plasticité du milieu multiphasique

L'approche thermodynamique nous a permis de réduire l'expression du comportement élastique d'un milieu multiphasique à la donnée successive des comportements de la phase matrice, des phases renforcement ainsi que des interactions. Ce découplage provient fondamentalement de l'hypothèse de *décomposition additive* de la densité d'énergie libre (2.53).

Si nous nous intéressons maintenant à la modélisation d'un comportement non linéaire pour le milieu multiphasique, la même approche va conduire au même découplage des comportements non linéaires pour chacune des phases. On va donc aborder directement les notions nécessaires à l'écriture du comportement élasto-plastique pour chaque phase. Cette présentation classique permet essentiellement de préciser les notations utilisées par la suite.

L'apport principal de cette section se situe dans la formulation d'un *comportement élasto-plastique adhérent* au sens de l'hypothèse d'adhérence parfaite définie à la section 2.4.1. On trouve une présentation détaillée de ce résultat dans de Buhan et Sudret (1999c).

3.1 Elasto-plasticité de chacune des phases

Le comportement élastique présenté dans la section précédente est intimement lié à la notion de réversibilité des processus mécaniques. Il est clair que la plupart des matériaux rencontrés en géotechnique ne vérifient pas cette propriété. Le schéma *élasto-plastique* permet de rendre compte des évolutions irréversibles, lorsque celles-ci sont indépendantes du paramètre temporel. Initialement développé pour la modélisation des métaux, il est appliqué aujourd'hui couramment à la modélisation des géomatériaux.

Nous présentons tout d'abord la théorie tridimensionnelle dans un paragraphe consacré à la phase matrice, puis le cas unidimensionnel pertinent pour les renforcements, et enfin le cas de l'interaction matrice/renforcement. Le formalisme adopté reprend celui de Salençon (1994) et de de Buhan et Dormieux (1996).

3.1.1 Matrice

On définit tout d'abord le *domaine d'élasticité* \mathcal{C}^m comme l'ensemble des états de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^m$ à l'intérieur duquel les évolutions sont réversibles. On introduit pour ce faire une *fonction de charge* $f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m)$, que l'on supposera convexe de ses arguments et ne présentant pas de points singuliers, telle que :

$$(2.81) \quad \begin{cases} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) < 0 & \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ à l'intérieur de } \mathcal{C}^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 & \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^m \in \partial\mathcal{C}^m \\ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) > 0 & \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^m \text{ à l'extérieur} \end{cases}$$

On appelle *critère de plasticité* la condition $f^m = 0$. Le domaine élastique est supposé ici fixe, c'est à dire *indépendant* de l'histoire du chargement du matériau. On parle alors de *plasticité parfaite*.

Après avoir précisé à quel moment on quitte le domaine élastique, il convient de définir l'évolution des déformations irréversibles. On décompose classiquement le tenseur des déformations en une partie élastique et une partie plastique :

$$(2.82) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m + \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m$$

Les déformations élastiques sont reliées aux contraintes par le tenseur des complaisances élastiques, soit :

$$(2.83) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_e^m = \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\sigma}}^m$$

ou inversement :

$$(2.84) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{a}}^m : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m \right)$$

Les déformations plastiques se calculent de façon incrémentale. A partir d'un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^m$ situé à la frontière de \mathcal{C}^m , et pour un taux d'accroissement $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m$, deux situations peuvent se présenter :

- il y a *décharge* si :

$$(2.85) \quad \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m < 0$$

Dans ce cas, le taux de déformation associée à $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m$ est purement élastique et l'on a donc $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \underline{\underline{0}}$

- il y a *charge* si :

$$(2.86) \quad \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m \geq 0$$

Dans le cas de la plasticité parfaite, il ne peut y avoir qu'égalité dans l'équation (2.86) du fait de l'invariance du domaine d'élasticité. Cette égalité prend le nom de *condition de cohérence*. La déformation plastique associée s'écrit alors :

$$(2.87) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}$$

Cette équation est dite *règle de normalité* ou *règle d'écoulement associée* au sens où la direction de la déformation plastique est normale au domaine d'élasticité \mathcal{C}^m . Le *multiplicateur plastique* $\dot{\lambda}^m$ doit être *positif ou nul*.

La règle de normalité est une conséquence du *principe du travail plastique maximal* énoncé par Hill (1950). Ce principe n'est pas valable pour certains géomatériaux, en particulier les sables. On introduit dans ce cas un *potentiel plastique* $g^m(\underline{\underline{\sigma}}^m)$ et une règle d'écoulement dite *non associée* qui remplace (2.87) et s'écrit :

$$(2.88) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad , \quad \dot{\lambda}^m \geq 0$$

Pour résumer, les équations régissant une évolution élasto-plastique peuvent s'écrire sous forme condensée :

$$(2.89\text{-a}) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m = \underline{\underline{a}}^m : \left(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^m - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m \right)$$

$$(2.89\text{-b}) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}$$

$$(2.89\text{-c}) \quad \dot{\lambda}^m \geq 0 \quad , \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}^m f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0$$

L'équation (2.89-c), qui apparaît dans les problèmes d'optimisation convexe, porte le nom de *conditions de Kuhn-Tucker* (Faure, 1991, Chap. 2).

Les fonctions de charge et potentiels plastiques couramment utilisés dépendent du matériau constitutif de la matrice. On aura l'occasion de revenir sur ce point dans les applications.

3.1.2 Renforcement

Les efforts intérieurs pour une phase renforcement r sont représentés par une contrainte *scalaire* σ^r . Dans le cas où le comportement des renforcements est parfaitement plastique, le domaine d'élasticité \mathcal{C}^r correspondant est donc de la forme :

$$(2.90) \quad \sigma^r \in \mathcal{C}^r \Leftrightarrow -\sigma_-^r \leq \sigma^r \leq \sigma_+^r$$

Dans cette expression, σ_+^r désigne la résistance à la traction des renforcements, et $-\sigma_-^r$ la résistance à la compression. On peut définir une fonction de charge associée à \mathcal{C}^r par :

$$(2.91) \quad f^r(\sigma^r) = \max(-\sigma_-^r - \sigma^r, \sigma^r - \sigma_+^r)$$

La déformation totale est décomposée additivement en une partie élastique et une partie plastique sous la forme :

$$(2.92) \quad \varepsilon^r = \varepsilon_e^r + \varepsilon_p^r$$

où l'on a de façon équivalente :

$$(2.93) \quad \varepsilon_e^r = c^r \sigma^r \quad , \quad \sigma^r = a^r (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r)$$

L'évolution des déformations plastiques s'écrit alors très simplement. Pour un état de contrainte vérifiant le critère de plasticité, on a forcément $\sigma^r = -\sigma_-^r$ ou $\sigma^r = \sigma_+^r$. La dérivée du critère f^r valant alors ± 1 , il vient :

$$(2.94) \quad \dot{\sigma}^r = 0 \quad , \quad \dot{\varepsilon}_p^r = \varepsilon^r$$

3.1.3 Interaction

Les efforts d'interaction appliqués par une phase renforcement r sur la phase matrice sont représentés par une densité volumique \underline{I}^r . La variable cinématique duale est le *déplacement relatif* de la phase renforcement par rapport à la phase matrice, que l'on note pour simplifier :

$$(2.95) \quad \underline{\delta}^r(\underline{x}) = \underline{\xi}^r(\underline{x}) - \underline{\xi}^m(\underline{x})$$

Formellement, l'interaction se traite comme un comportement d'interface entre deux solides. Pour chaque phase r , on définit donc le domaine d'élasticité d'interaction par :

$$(2.96) \quad \underline{I}^r \in \mathcal{C}^{I,r} \quad \Leftrightarrow \quad f^{I,r}(\underline{I}^r) \leq 0$$

Le déplacement relatif est décomposé en une partie réversible $\underline{\delta}_e^r$ et une partie irréversible $\underline{\delta}_p^r$. D'après (2.58), la première est reliée linéairement à \underline{I}^r par :

$$(2.97) \quad \underline{I}^r = \underline{\underline{C}}^{I,r} \cdot \underline{\delta}_e^r$$

tandis que la seconde s'obtient par :

$$(2.98) \quad \underline{\delta}_p^r = \dot{\lambda}^{I,r} \frac{\partial f^{I,r}}{\partial \underline{I}^r}$$

3.2 Comportement élasto-plastique adhérent

Nous plaçant dans l'hypothèse de l'*adhérence parfaite*, nous nous intéressons ici à la formulation d'une loi de comportement élasto-plastique globale pour le milieu multiphasique à partir de la donnée des lois de chaque phase. Pour simplifier la présentation, on se limite dans cette section à une seule direction de renforcement \underline{e}_r ($N = 1$).

3.2.1 Décomposition de la déformation totale

Considérons l'évolution élasto-plastique d'un système \mathcal{S} soumis à un chargement $\underline{\underline{\Sigma}}$, de sorte que l'état d'équilibre soit caractérisé par les contraintes partielles ($\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r$) et les déformations plastiques ($\underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, \varepsilon_p^r$).

Du point de vue de l'état final, l'évolution du système peut être décomposée en une étape *purement élastique* sous chargement $\underline{\underline{\Sigma}}$ suivie de l'application des seules déformations plastiques ($\underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, \varepsilon_p^r$) (Figure 2.6). Les contraintes partielles dans chaque phase sont donc obtenues par *superposition* des résultats d'un calcul élastique à partir d'un état initial naturel, relevant de la section 2.4.3, et d'un calcul à déformations imposées relevant de la section 2.4.4, soit :

$$(2.99\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{el}^m + \underline{\underline{\rho}}^m$$

$$(2.99\text{-b}) \quad \sigma^r = \sigma_{el}^r + \rho^r$$

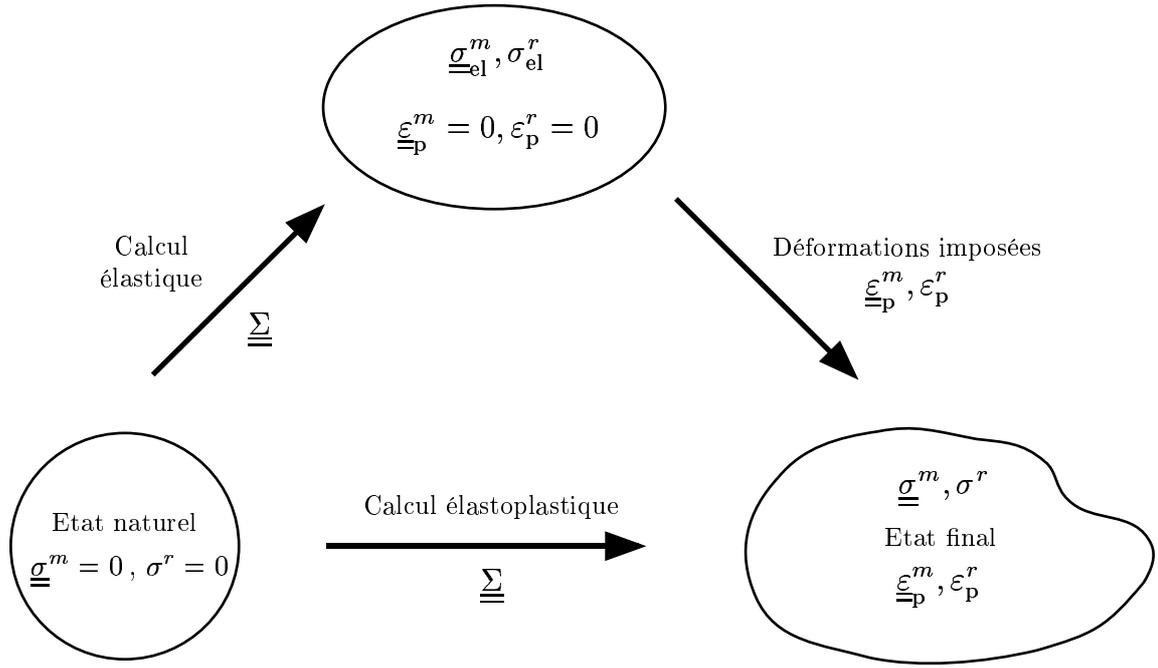


FIG. 2.6: Décomposition locale de l'évolution élasto-plastique

Reprenant le formalisme des opérateurs de localisation, on a d'après (2.68) :

$$(2.100\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{el}^m = \underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}}$$

$$(2.100\text{-b}) \quad \sigma_{el}^r = \underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}}$$

La déformation totale $\underline{\underline{\epsilon}}$ s'écrit alors :

$$(2.101) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\epsilon}}^m = \underline{\underline{c}}_{el}^m : \underline{\underline{\sigma}}_{el}^m + \underline{\underline{\epsilon}}_p^m \\ &= \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\rho}}^m + \underline{\underline{\epsilon}}_p^m \\ &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\rho}}^m + \underline{\underline{\epsilon}}_p^m \end{aligned}$$

On peut donc décomposer additivement la déformation totale en une partie réversible $\underline{\underline{\epsilon}}_e$, linéaire en $\underline{\underline{\Sigma}}$ et qui s'annule lorsqu'on effectue une décharge ($\underline{\underline{\Sigma}} \rightarrow 0$), et une partie *irréversible* $\underline{\underline{\epsilon}}_p$ qui vaut :

$$(2.102) \quad \underline{\underline{\epsilon}}_p = \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\rho}}^m + \underline{\underline{\epsilon}}_p^m$$

Cette déformation plastique totale est la somme de la déformation plastique dans la matrice et de la déformation élastique associée à $\underline{\underline{\rho}}^m$. Les efforts intérieurs ($\underline{\underline{\rho}}^m, \rho^r$) sont par ailleurs autoéquilibrés (Eq.(2.75)). Ils ont ici le statut de *contraintes résiduelles*, puisqu'ils représentent les efforts dans le système après décharge ($\underline{\underline{\sigma}}_{el}^m = \underline{\underline{0}}, \sigma_{el}^r = 0$). On peut poser :

$$(2.103\text{-a}) \quad \rho^r = \rho$$

$$(2.103\text{-b}) \quad \underline{\underline{\rho}}^m = -\rho \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r$$

ou l'on a d'après (2.80) :

$$(2.104) \quad \rho = \frac{\varepsilon_{p,rr}^m - \varepsilon_p^r}{c_{rrr}^m + c^r}$$

Ces contraintes résiduelles permettent d'assurer la compatibilité géométrique des déformations totales lorsque les déformations plastiques de chaque phase sont incompatibles, notamment lorsqu'il y a plasticité dans une seule des phases.

Compte tenu de (2.99), (2.100) et (2.103), l'expression de la localisation des contraintes s'écrit finalement dans le cas élasto-plastique :

$$(2.105\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) = \underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}} - \rho \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$$

$$(2.105\text{-b}) \quad \sigma^r(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) = \underline{L}^r : \underline{\underline{\Sigma}} + \rho$$

3.2.2 Critère de plasticité et écrouissage

Forts de ces préliminaires, nous allons pouvoir définir maintenant un *critère de plasticité global*. Pour une valeur donnée du paramètre ρ , qui contrôle l'état de contraintes résiduelles, le domaine d'élasticité est défini par l'ensemble des états de contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$, tels que les contraintes partielles associées par (2.105) vérifient respectivement leur critère de plasticité propre (voir Eqs.(2.81),(2.91)).

On adopte donc la définition suivante pour le *critère de plasticité global* du matériau renforcé adhérent :

$$(2.106) \quad F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) = \text{Max} \left\{ f^m \left(\underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}} - \rho \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \right) ; f^r \left(\underline{L}^r : \underline{\underline{\Sigma}} + \rho \right) \right\}$$

On voit sur cette expression que le *domaine d'élasticité actuel* défini par $F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) \leq 0$ est piloté par ρ , que l'on identifie donc comme *paramètre d'écrouissage*. La figure 2.7 donne une représentation du domaine Γ associé au critère F dans l'espace des contraintes généralisées $\{\underline{\underline{\Sigma}}\} \times \{\rho\} = \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$. Le domaine d'élasticité *initial* (resp. *actuel*) est la section de Γ par l'hyperplan d'équation $\rho = 0$ (resp. $\rho = \rho_0$).

3.2.3 Energie bloquée et dissipation plastique

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats liés à l'analyse thermodynamique du comportement élasto-plastique adhérent. Le lecteur se reportera à l'Annexe B pour le détail des raisonnements.

On montre que la densité d'énergie libre totale Ψ , somme des contributions de la phase matrice et de la phase renforcement, peut s'exprimer en variables totales sous la forme :

$$(2.107) \quad \Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} + U(\rho)$$

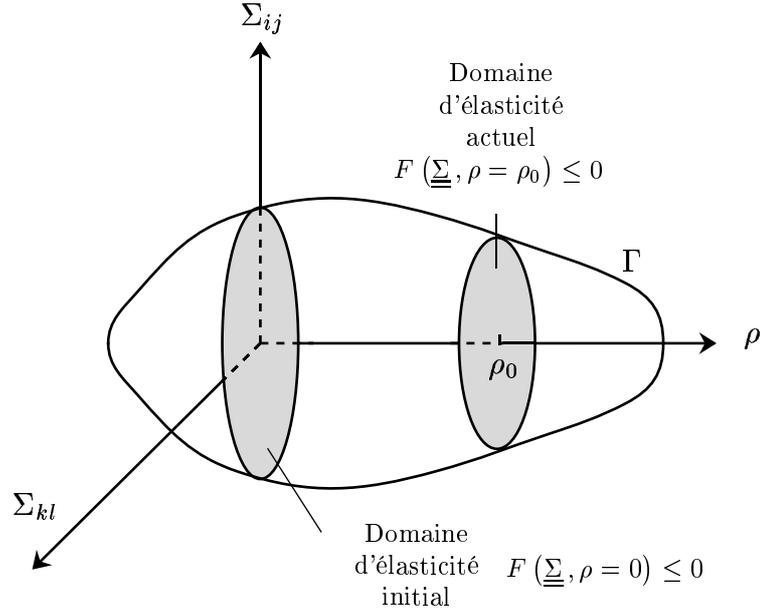


FIG. 2.7: *Domaine d'élasticité généralisé Γ dans l'espace $\{\underline{\Sigma}\} \times \{\rho\}$*

Elle est donc la somme d'un terme dépendant uniquement de $\underline{\Sigma}$, récupérable au cours d'une décharge, et d'un terme $U(\rho)$, quadratique en ρ , appelé *énergie bloquée*. Ce terme correspond à l'énergie élastique associée aux contraintes résiduelles dans les phases matrice et renforcement. Il est non récupérable au cours d'une décharge et traduit l'*écrouissage* du matériau.

Reprenant l'inégalité de Clausius-Duhem, on montre que le taux de dissipation intrinsèque volumique \mathcal{D} se met sous la forme :

$$(2.108) \quad \mathcal{D} = \underline{\Sigma} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \dot{\Psi} = \underline{\Sigma} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p + \rho \dot{\alpha}$$

ou α s'interprète comme la *variable d'écrouissage* associée au paramètre ρ , et vaut :

$$(2.109) \quad \alpha = \varepsilon_p^r - \varepsilon_{p,rr}^m$$

c'est à dire la différence entre la déformation plastique de la phase renforcement et celle de la matrice selon la direction \underline{e}_r .

On établit enfin une équivalence, du point de vue dissipatif, entre l'approche par phase et l'approche *globale* du matériau renforcé sous la forme :

$$(2.110) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}}^m : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p^m + \sigma^r \dot{\varepsilon}_p^r = \underline{\Sigma} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p + \rho \dot{\alpha}$$

Le membre de gauche représente la dissipation plastique des deux phases, qui sont séparément *parfaitement plastiques*, alors que le membre de droite montre au niveau global un terme d'écrouissage régi par le couple (ρ, α) des force et variable d'écrouissage.

3.2.4 Vers un modèle élasto-plastique standard généralisé

Nous avons jusqu'ici défini le critère global de plasticité pour le milieu multiphasique adhérent et mis en évidence son caractère écrouissable. Il convient de préciser maintenant la forme de la règle d'écoulement.

Pour cela, on exprime tout d'abord le *principe du travail plastique maximal* en contraintes totales. Etant donnés deux états de contraintes généralisés $(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$ et $(\underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho^*)$ appartenant au domaine Γ et un couple de déformations généralisées $(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p, \dot{\alpha})$ associées à un taux de contraintes $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$, on montre (Annexe B, section 2) :

$$(2.111) \quad \forall (\underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho^*) \in \Gamma, \quad (\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p + (\rho - \rho^*) \dot{\alpha} \geq 0$$

Le premier membre s'interprète comme le produit scalaire des deux vecteurs $(\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho - \rho^*)$ et $(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p, \dot{\alpha})$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$ de dimension 7.

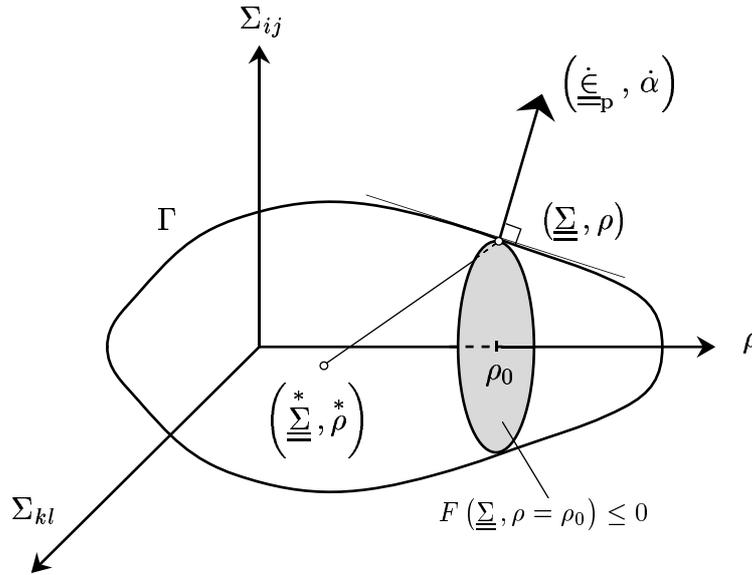


FIG. 2.8: Représentation schématique du principe du travail plastique maximal généralisé

La positivité de ce produit scalaire permet alors le raisonnement suivant :

- Si $(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$ est intérieur au domaine Γ , c'est à dire vérifie $F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) < 0$, le vecteur $(\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho - \rho^*)$ peut avoir une orientation quelconque. Il en résulte que le vecteur $(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p, \dot{\alpha})$ est nul. L'évolution est donc purement élastique, ce qui est cohérent avec la définition de la fonction de charge F .
- Si $(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$ se situe sur la frontière $\partial\Gamma$, les orientations admissibles pour $(\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho - \rho^*)$ sont situées en deçà de l'hyperplan tangent à Γ en $(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$, comme le montre la figure 2.8. Il s'ensuit que le vecteur $(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p, \dot{\alpha})$ a pour direction la *normale extérieure* à $\partial\Gamma$ au point considéré.

Ces deux situations se résument de la façon suivante :

$$(2.112) \quad (\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p, \dot{\alpha}) = \dot{\Lambda} \frac{\partial F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)}{\partial (\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)} \text{ avec } \begin{cases} \dot{\Lambda} = 0 & \text{si } F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) < 0 \\ \dot{\Lambda} > 0 & \text{si } F = \dot{F} = 0 \end{cases}$$

Cette règle de normalité généralisée permet à la fois le calcul du taux de déformation plastique et de la loi d'écrouissage. La loi de comportement globale du milieu multiphasique est donc de type *standard généralisé* (Halphen et Nguyen, 1975).

Il est possible de préciser l'expression du multiplicateur plastique $\dot{\Lambda}$ dans le cas où il est non nul, c'est à dire lorsqu'il y a charge. Partant d'un état de contraintes généralisé $(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$ situé sur la frontière du domaine Γ , le critère $F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) = 0$ doit être vérifié continûment, ce qui s'exprime par la condition de cohérence :

$$(2.113) \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \dot{\rho} = 0$$

La loi d'évolution de l'écrouissage s'écrit par ailleurs d'après (2.112) :

$$(2.114) \quad \dot{\alpha} = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \rho}$$

Définissant le *module d'écrouissage* $M = (c_{rrrr}^m + c^r)^{-1}$, on déduit alors de (2.104) et (2.109) :

$$(2.115) \quad \dot{\rho} = -M\dot{\alpha} = -\dot{\Lambda}M \frac{\partial F}{\partial \rho}$$

Le multiplicateur plastique $\dot{\Lambda}$ s'obtient alors en combinant (2.113) et (2.115) :

$$(2.116) \quad \dot{\Lambda} = \frac{1}{M} \frac{\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)^2}$$

Il dépend donc linéairement du chargement (taux de contraintes $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}$) et des dérivées partielles du critère F .

La détermination du multiplicateur plastique achève la description du comportement élasto-plastique adhérent.

3.2.5 Conclusion et généralisation

Partant d'un comportement élastique parfaitement plastique pour les deux phases, nous avons obtenu une loi de comportement globale de type standard généralisé à un paramètre d'écrouissage.

La loi d'écrouissage est déduite directement du calcul et n'a donc pas à être introduite *ex nihilo*. Comme le montrera l'étude analytique d'un exemple (annexe E au chapitre 3), cette

loi n'est ni de type isotrope, ni de type cinématique. On voit donc tout l'intérêt de l'approche multiphasique.

Les raisonnements ayant permis de définir la loi élasto-plastique adhérente dans le cas d'un renforcement unidirectionnel se généralisent aisément à un nombre quelconque N de directions. On obtient un comportement standard généralisé à N paramètres d'écoulement ($\rho_r, r = 1, \dots, N$). Ceux-ci se calculent à chaque instant en résolvant un système linéaire de type (2.79), où le second membre contient les déformations plastiques des différentes phases.

3.3 Critère de rupture du milieu multiphasique adhérent

Ayant déterminé le comportement élasto-plastique global, il est naturel de s'intéresser à la rupture du milieu multiphasique. On définit le *critère de rupture global* \mathcal{S}_{rup} par l'ensemble des états de contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$ pour lesquels se produit un *écoulement plastique libre*, c'est à dire une déformation plastique non nulle sous charge constante, soit :

$$(2.117) \quad \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_p = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \neq 0 \text{ et } \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = 0$$

Se limitant à une seule direction de renforcement, on montre dans l'annexe C que deux mécanismes de rupture par écoulement plastique sont possibles. On résume ici les principaux résultats (figure 2.9).

- Soit la *phase matrice seule* plastifie, tandis que la phase renforcement reste élastique. Le sous-ensemble $\mathcal{S}_{\text{rup}}^m$ de \mathcal{S}_{rup} associé à ce mécanisme est, dans l'espace à six dimensions des contraintes $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}$, un *cylindre* de génératrices parallèles à $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$, de longueur $\sigma_+^r + \sigma_-^r$, s'appuyant sur la courbe \mathcal{C}^0 définie comme suit : \mathcal{C}^m désignant le domaine d'élasticité de la phase matrice, \mathcal{C}^0 est l'ensemble des points de la frontière $\partial\mathcal{C}^m$ pour lesquels la normale extérieure est perpendiculaire à la direction $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$, c'est à dire tels que $\partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m = 0$.
- Soit les *deux phases* sont plastifiées. La contrainte dans la phase renforcement vaut alors σ_+^r ou $-\sigma_-^r$. Les sous-ensembles de \mathcal{S}_{rup} associés à ce mécanisme sont respectivement définis par :

$$(2.118) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}}^+ = \{ \underline{\underline{\Sigma}}; \quad f^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_+^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = 0 \quad , \quad \partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m > 0 \}$$

si la phase renforcement plastifie en traction, et :

$$(2.119) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}}^- = \{ \underline{\underline{\Sigma}}; \quad f^m(\underline{\underline{\Sigma}} + \sigma_-^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = 0 \quad , \quad \partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m < 0 \}$$

si la phase renforcement plastifie en compression.

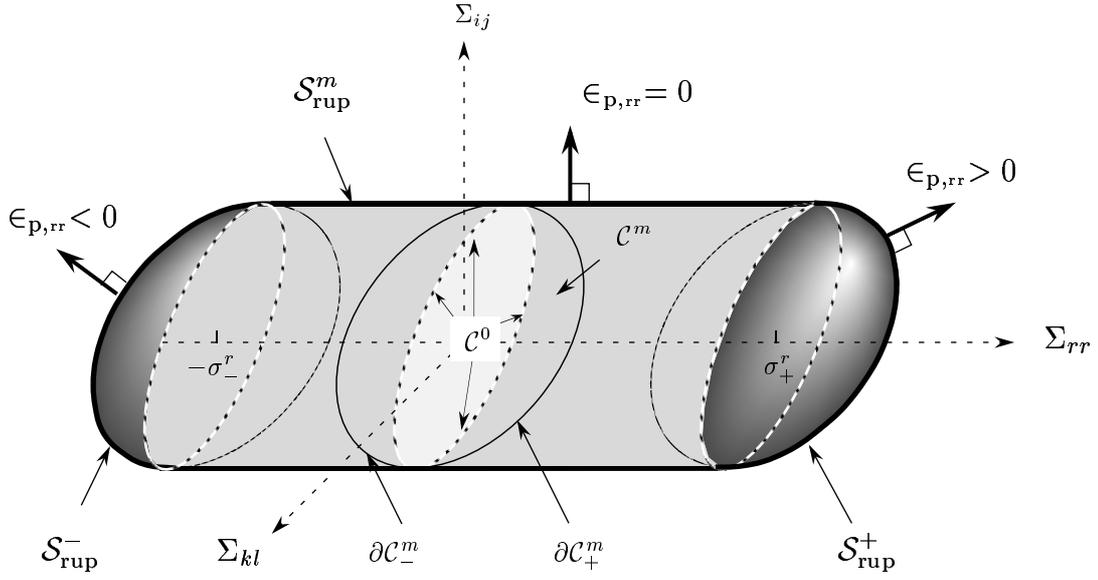


FIG. 2.9: Critère de rupture du milieu multiphasique dans l'espace des contraintes $\{\underline{\Sigma}\}$

On montre qu'il n'est pas possible d'avoir une rupture par écoulement plastique de la phase renforcement seule. Finalement, le domaine de rupture \mathcal{S}_{rup} représenté sur la figure 2.9 est donné par la réunion :

$$(2.120) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}} = \mathcal{S}_{\text{rup}}^m \cup \mathcal{S}_{\text{rup}}^+ \cup \mathcal{S}_{\text{rup}}^-$$

Il peut être interprété comme la frontière de l'enveloppe des domaines translatés du domaine \mathcal{C}^m le long de la direction $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ d'une quantité $\sigma \in [-\sigma_-^r, \sigma_+^r]$. Il peut donc être redéfini, dans l'espace des contraintes totales $\underline{\Sigma}$ par :

$$(2.121) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}} = \partial \mathcal{C}_{\text{rup}}$$

avec :

$$(2.122) \quad \mathcal{C}_{\text{rup}} = \{ \underline{\Sigma} / \exists \sigma \in [-\sigma_-^r, \sigma_+^r] \text{ , } f^m(\underline{\Sigma} - \sigma \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \leq 0 \}$$

On montre alors immédiatement que le critère de rupture $F^{\text{rup}}(\underline{\Sigma})$ défini par :

$$(2.123) \quad \underline{\Sigma} \in \mathcal{C}_{\text{rup}} \iff F^{\text{rup}}(\underline{\Sigma}) \leq 0$$

peut se mettre sous la forme :

$$(2.124) \quad F^{\text{rup}}(\underline{\Sigma}) = \min_{-\sigma_-^r \leq \sigma \leq \sigma_+^r} f^m(\underline{\Sigma} - \sigma \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$$

4 Validation du modèle en élasticité et calcul à la rupture

Comme on l'a souligné à plusieurs reprises, le modèle multiphasique est de nature purement *macroscopique*. On a fait un premier lien avec l'échelle microscopique en interprétant les contraintes partielles qui apparaissent naturellement dans le modèle (section 1.6). On a eu recours à un raisonnement du même type pour relier la rigidité de la phase renforcement au module d'Young de son matériau constitutif (section 2.3.3).

Dans la présente section, on confronte plus précisément le modèle avec les résultats obtenus par des méthodes de changement d'échelle micro/macro. On s'appuie sur l'exemple de l'élasticité des composites à fibres, puis sur les travaux d'homogénéisation en calcul à la rupture.

4.1 Validation en élasticité

Les composites à fibres longues, dont l'étude du comportement élastique a fait l'objet de nombreux travaux, correspondent à une seule direction de renforcement. Ils vont donc être représentés dans notre modélisation par un milieu *biphasique* adhérent. Avant d'effectuer des comparaisons avec la littérature, on commence par expliciter le comportement élastique de ce milieu, dans le cas d'un comportement *isotrope* de la phase matrice.

4.1.1 Modules élastiques du milieu biphasique adhérent à matrice isotrope

4.1.1.1 Généralités On rappelle l'expression du tenseur des modules élastiques global (2.67) dans le cas général :

$$(2.125) \quad \underline{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{\underline{a}}}^m + \sum_{r=1}^N a^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$$

Le comportement *isotrope* de la phase matrice est entièrement défini par ses coefficients de Lamé λ^m et G^m :

$$(2.126) \quad \underline{\underline{\underline{a}}}^m = \lambda^m \underline{\underline{\underline{1}}} \otimes \underline{\underline{\underline{1}}} + 2 G^m \underline{\underline{\underline{1}}}$$

Si la direction de renforcement unique est repérée par le vecteur unitaire \underline{e}_x , on a donc, en notant $E^r \equiv a^r$ la rigidité de la phase renforcement :

$$(2.127) \quad \underline{\underline{\underline{A}}} = \lambda^m \underline{\underline{\underline{1}}} \otimes \underline{\underline{\underline{1}}} + 2 G^m \underline{\underline{\underline{1}}} + E^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

4.1.1.2 Notations matricielles Pour préciser ce comportement global, et suivant Lemaitre et Chaboche (1985), on adopte une notation matricielle. A tout tenseur symétrique d'ordre 2, on associe le vecteur de ses composantes dans un repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Notant $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ les vecteurs colonne et ${}^t \underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ les vecteurs ligne, on pose :

$$(2.128) \quad \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \longleftrightarrow {}^t \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$$

Pour le tenseur des déformations, on choisit la représentation :

$$(2.129) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \longleftrightarrow {}^t \underline{\underline{\varepsilon}} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz}\}$$

On conserve ainsi l'expression de l'énergie sous la forme du produit matriciel (noté \cdot) suivant :

$$(2.130) \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \equiv {}^t \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Dans ce formalisme matriciel, on associe au tenseur des modules élastiques du quatrième ordre $\underline{\underline{\underline{A}}}$ une matrice carrée \mathbf{D} symétrique de dimension 6, appelée par abus de langage *matrice d'élasticité* de sorte que :

$$(2.131) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \longleftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

4.1.1.3 Identification du comportement élastique La matrice d'élasticité déduite de l'expression tensorielle (2.127) s'écrit pour le milieu biphasique :

$$(2.132) \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2G^m + E^r & \lambda^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m + 2G^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2G^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^m \end{bmatrix}$$

Elle ne diffère de celle d'un comportement élastique isotrope que par la présence du terme E^r en position (1,1). Pour caractériser l'orthotropie du milieu biphasique, il est commode de calculer le tenseur des complaisances élastiques $\underline{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\underline{A}}}^{-1}$. Pour écrire sa représentation matricielle \mathbf{D}^{-1} , on introduit le module d'Young E^m et le coefficient de Poisson ν_m de la phase matrice :

$$(2.133) \quad \lambda^m = \frac{\nu_m E^m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \quad G^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu_m)}$$

Il vient alors :

$$(2.134) \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^m + E^r} & -\frac{\nu_m}{E^m + E^r} & -\frac{\nu_m}{E^m + E^r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_m}{E^m + E^r} & \frac{1 + E^r(1 - \nu_m^2)/E^m}{E^m + E^r} & -\frac{\nu_m(1 + E^r(1 + \nu_m)/E^m)}{E^m + E^r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_m}{E^m + E^r} & -\frac{\nu_m(1 + E^r(1 + \nu_m)/E^m)}{E^m + E^r} & \frac{1 + E^r(1 - \nu_m^2)/E^m}{E^m + E^r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_m)}{E^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_m)}{E^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_m)}{E^m} \end{bmatrix}$$

Il apparaît ainsi que le comportement du milieu biphasique à matrice isotrope est *isotrope transverse* autour de l'axe \underline{e}_x . Les cinq coefficients caractérisant classiquement ce comportement ne dépendent ici que des trois paramètres E^m , E^r et ν_m . On identifie les *modules d'Young longitudinal et transverse* :

$$(2.135) \quad E_L = E^m + E^r \quad , \quad E_T = \frac{E^m + E^r}{1 + \frac{E^r}{E^m}(1 - \nu_m^2)}$$

et un module de cisaillement unique (longitudinal et transverse), qui est celui de la phase matrice seule :

$$(2.136) \quad G_L = G_T = G^m = \frac{E^m}{2(1 + \nu_m)}$$

Le *module de compression transverse* noté k est également celui de la matrice seule :

$$(2.137) \quad k = \lambda^m + G^m = k^m$$

et les coefficients de Poisson longitudinal et transverse valent :

$$(2.138) \quad \nu_L = \nu_m \quad , \quad \nu_T = \nu_m \frac{E^m + (1 + \nu_m) E^r}{E^m + (1 - \nu_m^2) E^r}$$

4.1.2 Confrontation des résultats

4.1.2.1 Rappel des modules élastiques équivalents

Comme on l'a noté dans le chapitre introductif, la recherche des propriétés équivalentes des matériaux composites, notamment ceux renforcés par fibres longues a fait l'objet de recherches constantes depuis les années 60. On s'intéresse ici simplement aux modules élastiques équivalents donnés par le modèle CCA (Hashin et Rosen, 1964), voir chapitre 1 section 4.4.1.

Dans la comparaison qui suit, on utilise les expressions sous la forme analytique donnée par Hashin (1983). On reprend, avec nos notations les formules (3.2.6)-(3.2.9), (3.2.13) et (3.2.18) de cet article. Pour chaque quantité, on utilise l'exposant m (resp. f) pour se référer au matériau constitutif de la matrice (resp. de la fibre). On utilise l'exposant * pour désigner le module « équivalent ». Comme précédemment, on note η la fraction volumique de renforcement, $(1 - \eta)$ celle de la matrice, E , les modules d'Young, G , les modules de cisaillement, k les modules de compression transverse, ν , les coefficients de Poisson. Avec ces notations, les

différents modules s'écrivent :

$$(2.139-a) \quad E_L^* = (1 - \eta) E^m + \eta E^f + \frac{4\eta(1 - \eta)(\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{1 - \eta}{k^f} + \frac{\eta}{k^m} + \frac{1}{G^m}}$$

$$(2.139-b) \quad G_L^* = G^m + \frac{\eta}{\frac{1}{G^f - G^m} + \frac{1 - \eta}{2G^m}}$$

$$(2.139-c) \quad G_T^* = G^m + \frac{\eta}{\frac{1}{G^f - G^m} + \frac{1 - \eta}{2G^m} \frac{k^m}{k^m + G^m}}$$

$$(2.139-d) \quad k^* = k^m + \frac{\eta}{\frac{1}{k^f - k^m} + \frac{1 - \eta}{k^m + G^m}}$$

$$(2.139-e) \quad \nu_L^* = (1 - \eta) \nu_m + \eta \nu_f + \frac{\eta(1 - \eta)(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{k^m} - \frac{1}{k^f} \right)}{\frac{1 - \eta}{k^f} + \frac{\eta}{k^m} + \frac{1}{G^m}}$$

On déduit finalement les expressions du module d'Young transverse E_T^* et du coefficient de Poisson transverse ν_T^* par les formules générales valables pour tout matériau isotrope transverse :

$$(2.140-a) \quad \frac{4}{E_T^*} = \frac{1}{G_T^*} + \frac{1}{k^*} + \frac{4\nu_L^{*2}}{E_L^*}$$

$$(2.140-b) \quad \nu_T^* = \frac{E_T^*}{2G_T^*} - 1$$

4.1.2.2 Principe de la comparaison Le modèle multiphasique a été spécialement formulé pour des matériaux composites rencontrés en génie civil, pour lesquels la fraction volumique de renforcement η est très faible tandis que les caractéristiques mécaniques du matériau renforçant sont très grandes devant celles de la matrice (par exemple $E^f \gg E^m$). On se ramène à ce cas extrême en effectuant sur les formules précédentes le passage à la limite :

$$(2.141) \quad \eta \longrightarrow 0 \quad , \quad E^f \longrightarrow \infty \quad , \quad \eta E^f = E^r$$

Pour cela, on substitue E^r/η à E^f dans (2.139) - (2.140), puis on fait un développement limité à l'ordre 1 en η des résultats (Tableau 2.1).

En confrontant les valeurs du tableau à celles obtenues à la section précédente, il apparaît que les modules élastiques du milieu biphasique adhérent sont exactement les termes d'ordre 0 du développement limité des formules d'Hashin-Shtrikman².

Remarque Les termes d'ordre 1 sont non nuls, sauf éventuellement si $\nu_m = \nu_f$. L'erreur commise en utilisant le modèle multiphasique est donc plus faible dans cette hypothèse. Pour étendre le domaine de validité du modèle à des fractions volumiques finies, on peut par ailleurs adopter la stratégie suivante : ayant estimé par exemple les modules E_L^* et G_L^* par les formules

2. On n'a pas explicité les termes d'ordre 1 pour E_T^* et ν_T^* en raison de leur complexité.

Module	Développement limité
E_L^*	$E^m + E^r + \eta \left(\frac{2(\nu_f - \nu_m)^2}{1 + \nu_m} - 1 \right) E^m$
E_T^*	$\frac{E^m + E^r}{1 + \frac{E^r}{E^m}(1 - \nu_m^2)} + O(\eta)$
G_L^*	$G^m (1 + 2\eta)$
G_T^*	$G^m \left(1 + \frac{4\nu_m - 4}{4\nu_m - 3} \eta \right)$
k^*	$k^m (1 + 2(1 - \nu^m)\eta)$
ν_L^*	$\nu^m - 2(1 - \nu^m)(\nu^f - \nu^m)\eta$
ν_T^*	$\nu_m \frac{E^m + (1 + \nu_m)E^r}{E^m + (1 - \nu_m^2)E^r} + O(\eta)$

TAB. 2.1: Modèle CCA (Hashin, 1983) - Modules élastiques à l'ordre 1 en η

d'Hashin-Shtrikman, on déduit successivement les paramètres à introduire dans le modèle multiphasique comme suit :

$$(2.142\text{-a}) \quad E^r = \eta E^f$$

$$(2.142\text{-b}) \quad E^m = E_L^* - E^r$$

$$(2.142\text{-c}) \quad \nu_m = \frac{E^m}{2G_L^*} - 1$$

4.1.2.3 Résultats complémentaires La comparaison précédente s'appuie sur des résultats généraux d'élasticité des matériaux composites. Parallèlement à ces travaux, dans le domaine du renforcement des sols, Gerrard (1982) introduit à partir d'hypothèses heuristiques un comportement macroscopique du matériau « sol renforcé ». Il étudie un sol orthotrope renforcé par des plaques ou des bandes dans une, deux ou trois directions perpendiculaires entre elles, et confondues avec les directions d'orthotropie du sol.

Les modules d'Young longitudinaux dans chaque direction, ainsi que les différents coefficients sont explicités (Equation (13) de l'article). Les valeurs sont *strictement* identiques aux modules obtenus pour un milieu multiphasique renforcé dans trois directions orthogonales. Notant $K_x E^m$, $K_y E^m$, $K_z E^m$ les rigidités de chaque phase de renforcement, on a précisément :

$$(2.143) \quad E^x = E^m \frac{1 + K_x + K_y + K_z + (1 - \nu_m^2)(K_x K_y + K_x K_z + K_y K_z) + (1 - 2\nu_m)(1 + \nu_m)^2 K_x K_y K_z}{1 + (1 - \nu_m^2)(K_y + K_z) + (1 - 2\nu_m)(1 + \nu_m)^2 K_y K_z}$$

ainsi que E^y et E^z par permutation circulaire des indices x , y , z .

Il convient également de rappeler les résultats de Greuell (1993). Utilisant une approche variationnelle sur une cellule de base soumise à une contrainte uniforme, Greuell encadre rigoureusement le module de cisaillement longitudinal macroscopique et montre que les deux

bornes tendent vers la même valeur (celui de la matrice seule) lorsqu'on effectue le passage à la limite (2.141).

4.1.2.4 Conclusion Les comparaisons que l'on vient de passer en revue montrent que le comportement élastique du modèle multiphasique reproduit plusieurs résultats classiques obtenus par différentes méthodes. Elles montrent également que l'approximation faite est du premier ordre en la fraction volumique de renforcement η . Les valeurs habituelles de η étant de l'ordre du pourcent dans les ouvrages de géotechnique, on valide ainsi le modèle multiphasique pour ces applications.

Par ailleurs, le caractère tensoriel du tenseur des modules élastiques global (2.67) fournit un résultat plus général, permettant notamment de traiter de réseaux d'inclusions ayant des caractéristiques différentes dans chaque direction, ce qui conduit à un comportement global totalement anisotrope.

4.2 Validation en calcul à la rupture

Comme on l'a vu dans le chapitre introductif, les idées sous-tendant le modèle multiphasique proviennent pour partie des résultats d'homogénéisation en calcul à la rupture. Dans cette section, nous rappelons tout d'abord les principes de cette approche puis, dans le cas des composites à fibres longues, la forme du critère de rupture homogénéisé. Nous comparons ensuite ce résultat à celui obtenu pour le milieu multiphasique.

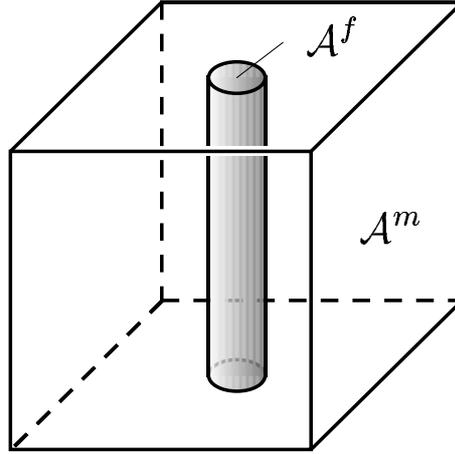
4.2.1 Homogénéisation en calcul à la rupture

L'homogénéisation des milieux à structures périodiques a été initialement abordé dans le cadre non linéaire par Suquet (1982, 1983) et de Buhan (1986), auxquels on se reportera pour une présentation détaillée. Ces auteurs montrent que la détermination du *critère de rupture homogénéisé* se fait par la résolution d'un problème de calcul à la rupture sur une *cellule de base* représentative de la périodicité de la structure. Dans le cas de composites à fibres, une cellule de base \mathcal{A} typique est schématisée sur la figure 2.10, et on note \mathcal{A}^m (resp. \mathcal{A}^f) le volume géométrique occupé par la matrice (resp. la fibre).

On désigne par $\mathcal{G}(\underline{x})$ le *domaine de résistance* du matériau constitutif au point $\underline{x} \in \mathcal{A}$, supposé constant et noté \mathcal{G}^m (resp. \mathcal{G}^f) dans la matrice (resp. la fibre). Le *critère de résistance* de chaque matériau est une fonction scalaire telle que :

$$(2.144) \quad \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{G}^j \iff f^j(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad , \quad j = m, f$$

Avec ces notations, le *domaine de résistance macroscopique* \mathcal{G}^{hom} est défini comme l'ensemble des champs de contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$ qui sont moyenne sur la cellule de base de champs $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ statiquement admissibles et appartenant en tout point au domaine de résistance local, ce que l'on

FIG. 2.10: Cellule de base \mathcal{A} typique pour les composites à fibres

écrit :

$$(2.145) \quad \mathcal{G}^{hom} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\mathcal{A}} \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ antipériodique, } \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \right. \\ \left. \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathcal{G}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{A} \right\}$$

4.2.2 Critère de résistance pour les composites à fibres

La détermination exacte de \mathcal{G}^{hom} étant impossible, on peut l'encadrer en utilisant successivement une approche *statique* et une approche *cinématique* (Salençon, 1983). Choisissons des champs de contrainte constants par morceaux dans la cellule (\underline{e}_f désigne un vecteur unitaire colinéaire à la direction des fibres) :

$$(2.146) \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m & \forall \underline{x} \in \mathcal{A}^m, \\ \underline{\underline{\sigma}}^m + \lambda^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f & \forall \underline{x} \in \mathcal{A}^f \end{cases}$$

de Buhan et Talercio (1988) définissent un minorant $\mathcal{G}_s^{hom} \subset \mathcal{G}^{hom}$ par :

$$(2.147) \quad \mathcal{G}_s^{hom} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\mathcal{A}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \eta \lambda^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}^m \in \mathcal{G}^m \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}^m + \lambda^f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f \in \mathcal{G}^f \right\}$$

Lorsque la fraction volumique de fibre η tend vers 0 et que simultanément le domaine de résistance de la fibre croît :

$$(2.148) \quad \mathcal{G}^f = \frac{1}{\eta} \tilde{\mathcal{G}}^f \quad , \quad \eta \rightarrow 0 \quad , \quad \tilde{\mathcal{G}}^f \text{ constant}$$

de Buhan et Talercio (1991) montrent que :

$$(2.149) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{G}_s^{hom} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{G}^{hom}$$

Cette limite notée \mathcal{G}_o^{hom} s'explique sous la forme :

$$(2.150) \quad \mathcal{G}_o^{hom} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{\underline{e}}_f \otimes \underline{\underline{e}}_f \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}^m \in \mathcal{G}^m \quad , \quad \sigma^f \in [\tilde{\sigma}_-^f, \tilde{\sigma}_+^f] \right\}$$

où $\tilde{\sigma}_+^f$ (resp. $\tilde{\sigma}_-^f$) désigne la résistance en traction (resp. compression) par unité de surface transverse du réseau de fibres. Le critère de résistance associé à ce domaine peut se mettre sous la forme commode :

$$(2.151) \quad F_o^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \min_{\tilde{\sigma}_-^f \leq \sigma^f \leq \tilde{\sigma}_+^f} \left(f^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma^f \underline{\underline{e}}_f \otimes \underline{\underline{e}}_f) \right)$$

Le domaine de résistance \mathcal{G}_o^{hom} ainsi obtenu par passage à la limite est *a priori* valide seulement pour une très faible fraction volumique η . Notant σ_{\pm}^j les résistances en traction et compression simple du matériau constitutif de la phase $j = m, f$, de Buhan et Talercio (1991) montrent que le domaine \mathcal{G}_o défini de façon similaire par :

$$(2.152) \quad \mathcal{G}_o = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f \underline{\underline{e}}_f \otimes \underline{\underline{e}}_f \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}^m \in \mathcal{G}^m \quad , \quad \sigma^f \in [\eta(\sigma_-^f - \sigma_-^m), \eta(\sigma_+^f - \sigma_+^m)] \right\}$$

est une borne statique valable quelle que soit la fraction volumique η .

Il est par ailleurs possible de majorer \mathcal{G}^{hom} par une approche cinématique. On trouvera le détail des calculs dans de Buhan *et al.* (1991) et Taliercio (1992). Exploitant ces résultats généraux sur l'expérience de traction simple hors axe et pour une sollicitation biaxiale en déformation plane, Taliercio montre que les bornes obtenues ci-dessus pour \mathcal{G}^{hom} sont très proches quelle que soit la fraction volumique η , ce qui valide la définition (2.152) comme domaine de résistance du composite.

4.2.3 Validation du modèle multiphasique

Il suffit de comparer le critère de rupture du milieu multiphasique (2.124) avec le critère homogénéisé (2.151) pour voir que leurs expressions sont strictement identiques, les paramètres $\tilde{\sigma}_{\pm}^r$ et σ_{\pm}^r ayant la même interprétation mécanique. Le formalisme multiphasique permet donc de retrouver tous les résultats obtenus par une approche de type homogénéisation, et on identifie \mathcal{C}_{rup} avec \mathcal{G}_o^{hom} . Cette conclusion fondamentale valide le modèle multiphasique en calcul à la rupture.

Pour illustrer ce résultat, on reporte ci-dessous la validation expérimentale du critère de rupture (2.151) effectuée par Siad (1987) à partir d'essais triaxiaux réalisés par Long et Ursat (1977). Les éprouvettes sont constituées de sable de Fontainebleau renforcé par des armatures en aluminium d'inclinaison variable β par rapport à l'horizontale. Le mode de chargement est schématisé sur la figure 2.11-a. Pour Σ_2 fixé par les conditions expérimentales, on augmente Σ_1 et on relève la valeur à la rupture. Le problème homogénéisé équivalent est représenté sur la figure 2.11-b.

On représente sur la figure 2.12 la courbe de rupture théorique donnée par l'homogénéisation (et donc également le modèle multiphasique) dans le plan (Σ_1, Σ_2) , sur laquelle sont

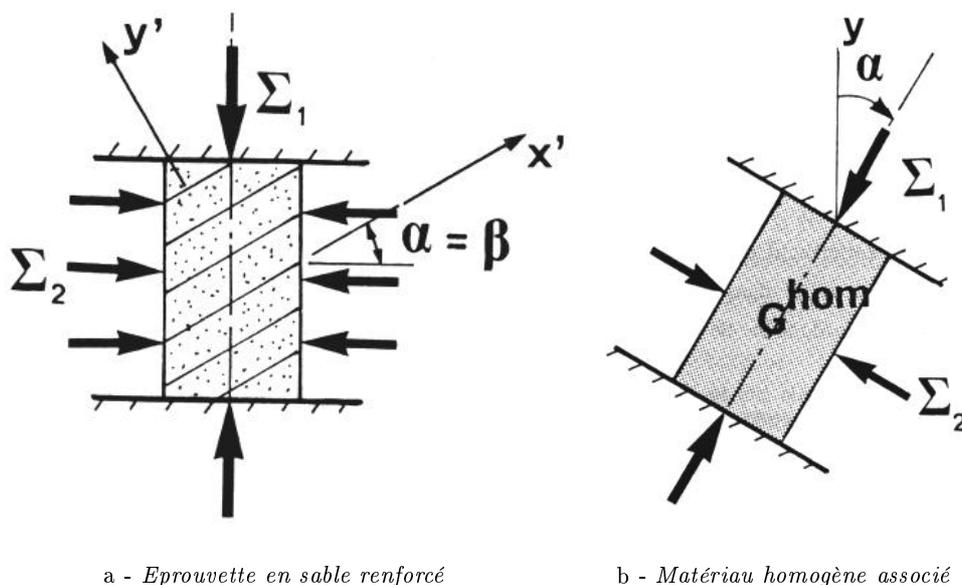


FIG. 2.11: Essais triaxiaux sur des éprouvettes en sable renforcé - Principe de l'expérience (d'après Siad (1987))

superposés les points expérimentaux. On peut constater un très bon accord entre les résultats expérimentaux et le calcul.

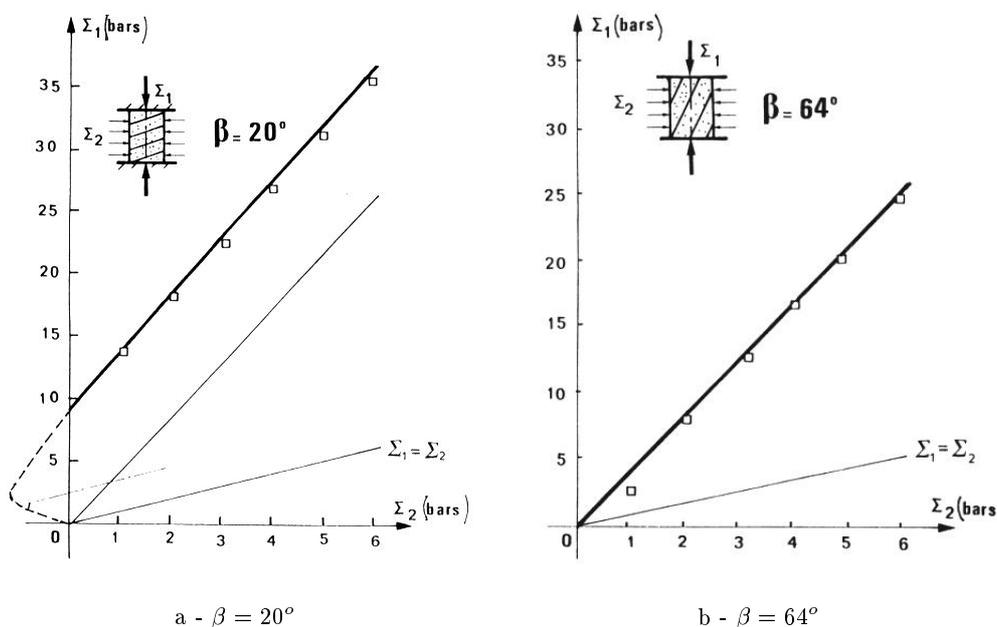
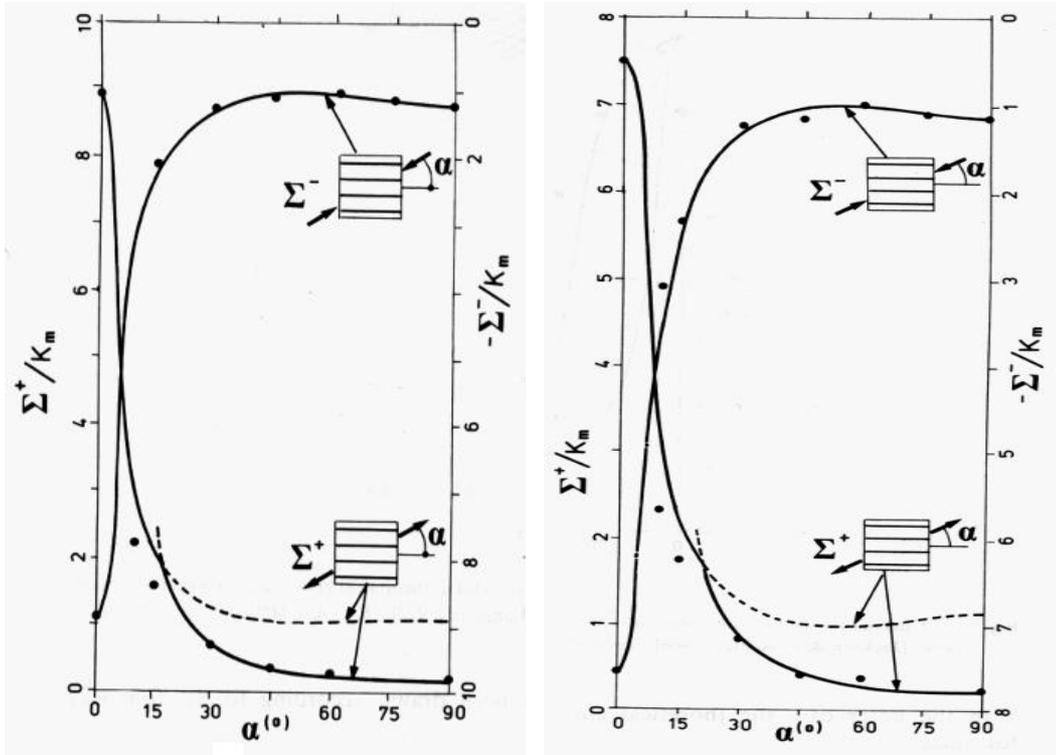


FIG. 2.12: Essais triaxiaux sur des éprouvettes en sable renforcé - Validation du critère de rupture (d'après Siad (1987))

Comme on peut le voir sur ces deux exemples, les résultats sont excellents. Siad a mené la comparaison pour toute une gamme d'angles de renforcement et d'espacement entre les

armatures, et constate un très bon accord dans toutes les configurations.



a - Sollicitation uniaxiale d'un composite verre/epoxy (d'après Tsai (1968))

b - Sollicitation uniaxiale d'un composite graphite/epoxy (d'après Kim (1981))

FIG. 2.13: Validation expérimentale du modèle multiphasique en calcul à la rupture pour les composites à fibres (d'après de Buhari et Talercio (1991))

Le critère de rupture (2.151) a également été validé dans le domaine des composites à fibres par de Buhari et Talercio (1991). La figure 2.13-a concerne une expérience de traction-compression réalisée hors axe sur un composite verre/epoxy (Tsai, 1968). La figure 2.13-b concerne le même essai sur un composite graphite/epoxy (Kim, 1981). Sont représentées les limites en traction et compression uniaxiale en fonction de l'angle α compris entre la direction des fibres et celle de la sollicitation. Le résultat analytique obtenu avec le critère de rupture $\mathcal{C}_{\text{rup}} = \mathcal{G}_o^{\text{hom}3}$ et représenté par les courbes en trait plein reproduit parfaitement les points expérimentaux en compression ($\Sigma^-(\alpha)$).

Remarque On notera que pour obtenir la courbe de traction $\Sigma^+(\alpha)$ correcte (traits pleins), les auteurs sont amenés à introduire un critère d'interface matrice/fibre. Pour arriver à ce résultat dans une approche multiphasique, il faudrait renoncer à l'hypothèse d'adhérence parfaite et se donner un critère de rupture portant sur la force d'interaction entre les phases.

3. le critère de rupture de la matrice étant celui de Von Mises.

5 Conclusion

Arrivés au terme de ce chapitre, nous avons construit un modèle mécanique cohérent en s'appuyant sur la méthode des puissances virtuelles. Utilisant un cadre thermodynamique, nous l'avons complété des nécessaires lois de comportement, élastique puis élasto-plastique. Nous avons enfin précisé le critère de rupture du milieu multiphasique naturellement associé.

Pour situer ce corpus de modélisation par rapport aux travaux antérieurs, nous avons comparé les résultats donnés par le modèle avec ceux fournis par la littérature sur l'élasticité des composites à fibres d'une part, sur leur critère de rupture d'autre part.

Dans le domaine élastique, il semble que la modélisation multiphasique ne donne de bons résultats que pour des proportions volumiques de renforcement faibles ($<10\%$). En calcul à la rupture, le formalisme multiphasique reproduit par contre complètement les résultats obtenus par homogénéisation, qui ont été validés expérimentalement pour des fractions volumiques quelconques.

Espérant avoir convaincu le lecteur du bien-fondé du modèle multiphasique, nous l'invitons maintenant à se familiariser avec son formalisme par l'étude analytique de quelques problèmes.

Chapitre 3

Solutions analytiques de problèmes multiphasiques

Ce chapitre est consacré à la résolution analytique de problèmes pour lesquels le matériau renforcé est représenté par le modèle multiphasique.

On précise d'abord la structure de ces problèmes dans le cadre de l'élasto-plasticité. On discute l'unicité des solutions et les méthodes de résolution adaptées au modèle général d'une part, au modèle adhérent d'autre part.

On résout ensuite successivement trois problèmes :

- *la compression simple en élasto-plasticité. Traité dans le cadre adhérent, ce problème illustre les phénomènes d'écroutissage associés à la plastification progressive des phases d'un système multiphasique.*
- *la compression en déformation plane. Il s'agit de mettre en œuvre le modèle général en élasticité. On introduit la notion d'effet de bord reliée à la densité d'interaction entre les phases.*
- *la convergence d'un tunnel boulonné. On utilise le modèle général en élasticité, et en géométrie cylindrique. On met en évidence notamment la distribution classique des efforts d'ancrage dans les boulons.*

Sommaire

1	Structure générale des problèmes et méthodes de résolution . . .	93
1.1	Introduction	93
1.2	Problème d'élasticité - modèle adhérent	93
1.2.1	Forme des sollicitations	93
1.2.2	Champs de contrainte statiquement admissibles et champs de déplacement cinématiquement admissibles	94
1.2.3	Unicité de la solution	94
1.3	Problème d'élasticité - modèle général	95
1.3.1	Forme des sollicitations	95
1.3.2	Champs de contrainte statiquement admissibles et champs de déplacement cinématiquement admissibles	96
1.3.3	Unicité de la solution	97
1.4	Méthodes de résolution	97
1.4.1	En élasticité	98
1.4.2	En plasticité	98
1.4.3	Conclusion	99
2	Compression simple élasto-plastique d'une éprouvette renforcée	100
2.1	Position du problème	100
2.1.1	Géométrie et matériau	100
2.1.2	Chargement et conditions aux limites	101
2.2	Renforcement longitudinal	101
2.2.1	Evolution élastique	101
2.2.2	Evolution élastoplastique	103
2.2.2.1	Phase renforcement plastifiée	103
2.2.2.2	Phase matrice plastifiée	104
2.2.3	Rupture par écoulement plastique libre	105
2.2.4	Récapitulatif des résultats et interprétation	105
2.3	Renforcement transverse	107
2.3.1	Evolution élastique	107
2.3.2	Evolution élasto-plastique	108
2.3.2.1	Phase renforcement plastifiée	108
2.3.2.2	Phase matrice plastifiée	109
2.3.3	Interprétation des résultats	110
2.3.3.1	Phase renforcement plastifiée	111
2.3.3.2	Phase matrice plastifiée	111
3	Compression en déformation plane	114
3.1	Position du problème	114

3.1.1	Géométrie et matériau	114
3.1.2	Chargement et conditions aux limites	115
3.2	Résolution	115
3.3	Résultats	117
4	Boulonnage des tunnels profonds	119
4.1	Position du problème	119
4.1.1	Géométrie	119
4.1.2	Schéma de renforcement	119
4.1.3	Méthode convergence-confinement	120
4.2	Solution élastique - modèle général	121
4.2.1	Paramètres du modèle biphasique	121
4.2.2	Equations du problème	121
4.2.3	Conditions aux limites	123
4.2.4	Résolution	123
4.2.5	Interprétation des résultats	124
4.3	Solution élastique - modèle adhérent	126
4.3.1	Equations du problème	126
4.3.2	Conditions aux limites	127
4.3.3	Résolution	127
4.4	Remarques complémentaires	127
5	Conclusion	129

1 Structure générale des problèmes et méthodes de résolution

1.1 Introduction

L'objet de la mécanique des milieux continus est de déduire des sollicitations imposées à un système son *évolution* en terme de déplacements, déformations et efforts intérieurs. Si l'évolution est supposée quasi-statique, on se ramène à une succession de *problèmes d'équilibre* dans lesquels sont négligées les forces d'inertie. Dans l'hypothèse des petites perturbations, l'écriture des équations de champ (équilibre local et comportement du matériau) et des conditions aux limites définit un problème *bien posé*.

Pour les systèmes modélisés par un milieu multiphasique, la forme des équations de champ et des conditions aux limites est différente selon qu'on traite le modèle général ou le modèle adhérent.

On présente dans cette section la structure de ces deux types de problèmes en se limitant à l'hypothèse des petites perturbations qui permet de raisonner sur une configuration géométrique fixe donnée. On discute ensuite, dans chaque cas, l'unicité de la solution et les méthodes de résolution adaptées.

1.2 Problème d'élasticité - modèle adhérent

Dans le cadre de l'hypothèse d'adhérence parfaite, toutes les phases ont le même champ de déplacement $\underline{\xi}$. On définit alors les variables de déformation totale $\underline{\underline{\epsilon}}$ et de contrainte totale $\underline{\underline{\Sigma}}$, de façon à pouvoir se ramener formellement aux équations du milieu continu classique (chap. 2, section 1.7).

1.2.1 Forme des sollicitations

L'évolution étant supposée quasi-statique, les sollicitations appliquées à un système \mathcal{S} occupant un volume Ω sont de deux types (Salençon, 1996b, chap. 8) :

- des forces volumiques $\rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x})$ intervenant dans l'équation locale d'équilibre (2.38),
- des conditions aux limites, correspondant à la donnée en chaque point de $\partial\Omega$ de trois composantes orthogonales entre elles dans l'ensemble des six composantes des vecteurs

contrainte \underline{T} et déplacement $\underline{\xi}$:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \text{ sur } S_{T_i} \\ \xi_i(\underline{x}) = \xi_i^d(\underline{x}) \text{ sur } S_{\xi_i} \\ \text{avec } S_{\xi_i} \cup S_{T_i} = \partial\Omega, \quad i = 1, 2, 3 \\ S_{\xi_i} \cap S_{T_i} = \emptyset \end{array} \right.$$

1.2.2 Champs de contrainte statiquement admissibles et champs de déplacement cinématiquement admissibles

La distinction entre les conditions aux limites portant sur les efforts et celles portant sur les déplacements conduit à l'introduction des notions suivantes :

- Un champ de contraintes totales $\underline{\Sigma}$ est dit *statiquement admissible* (S.A) avec les données en effort s'il vérifie :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\Sigma}(\underline{x}) + \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) = \underline{0} & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \Sigma_{ij}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in S_{T_i}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \underline{n}(\underline{x}) \text{ vecteur normal extérieur à } \partial\Omega \text{ en } \underline{x} \end{array} \right.$$

- Un champ de déplacement $\underline{\xi}$ est dit *cinématiquement admissible* (C.A) avec les données en déplacement s'il vérifie :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi(\underline{x}) \text{ continu et continûment différentiable,} \\ \xi_i(\underline{x}) = \xi_i^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i}, \quad i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

1.2.3 Unicité de la solution

La résolution d'un problème multiphasique¹ adhérent consiste en la détermination d'un couple $(\underline{\xi}, \underline{\Sigma})$ tel que :

- $\underline{\Sigma}$ est statiquement admissible au sens de (3.2),
- $\underline{\xi}$ est cinématiquement admissible au sens de (3.3),
- $\underline{\Sigma}$ et la déformation $\underline{\epsilon}$ associée à $\underline{\xi}$ sont reliées par la loi de comportement globale du milieu multiphasique :

$$(3.4) \quad \underline{\Sigma} = \underline{A} : \underline{\epsilon}$$

1. On entend par cette expression tout problème de mécanique comportant une modélisation multiphasique du matériau constitutif du système étudié.

La réponse de chaque phase s'obtient ensuite comme sous-produit en écrivant d'abord la compatibilité géométrique des déformations :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^m &= \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \varepsilon^r &= \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r = \varepsilon_{rr} , \quad r = 1, \dots, N \end{cases}$$

puis le comportement propre de la phase considérée :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m &= \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \\ \sigma^r &= a^r \varepsilon^r , \quad r = 1, \dots, N \end{cases}$$

En appliquant le principe des puissances virtuelles et en utilisant la convexité de la densité d'énergie libre $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ (Eq.2.73), on montre que le champ $\underline{\underline{\xi}}$ solution minimise une fonctionnelle, dite *énergie potentielle* sur l'espace des champs cinématiquement admissibles. La démonstration est formellement identique à celle donnée dans Salençon (1996b, chap. 10) pour le milieu continu de Cauchy. De cette propriété découle l'unicité de la solution du problème multiphasique adhérent en élasticité et en petites perturbations.

1.3 Problème d'élasticité - modèle général

1.3.1 Forme des sollicitations

Dans le modèle multiphasique général, chaque phase a une cinématique distincte, et est régie par des équations d'équilibre propres. Les sollicitations appliquées et les conditions aux limites doivent donc être explicitées *indépendamment* pour chaque phase.

Plus précisément, les sollicitations sont classées comme à la section 1.2.1 pour chaque phase $j \in \{m; r = 1, \dots, N\}$, chaque quantité étant maintenant indicée par j . On distingue donc :

- les forces volumiques $\rho^j(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{F}}^j(\underline{\underline{x}})$ intervenant dans l'équation locale d'équilibre de la phase j ,
- les conditions aux limites, correspondant à la donnée, pour chaque phase j , et en chaque point de $\partial\Omega$ de trois composantes orthogonales entre elles dans l'ensemble des six composantes des vecteurs contrainte $\underline{\underline{T}}^j$ et déplacement $\underline{\underline{\xi}}^j$:

$$(3.7) \quad \begin{cases} T_i^j(\underline{\underline{x}}) &= T_i^{d,j}(\underline{\underline{x}}) \text{ sur } S_{T_i^j} \\ \xi_i^j(\underline{\underline{x}}) &= \xi_i^{d,j}(\underline{\underline{x}}) \text{ sur } S_{\xi_i^j} \\ \text{avec} & S_{\xi_i^j} \cup S_{T_i^j} = \partial\Omega \\ & S_{\xi_i^j} \cap S_{T_i^j} = \emptyset \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j \in \{m; r = 1, \dots, N\}$$

Exemples Nous allons illustrer ces notations de façon à montrer que la complexité apparente de spécification des conditions aux limites n'est pas purement formelle. Il suffit d'imaginer le cas d'une fondation constituée d'un chevêtre très rigide reliant des inclusions de renforcement placées verticalement dans le sol, de sorte qu'il n'y ait pas de contact entre ce chevêtre et le sol (fondation « sur pilotis » schématisée sur la figure 3.1-a). La zone renforcée étant modélisée par un milieu multiphasique, le chargement du système se fait en imposant d'une part un déplacement vertical en tête pour la phase renforcement, et d'autre part un vecteur contrainte nul pour la phase matrice. Si par contre, on considère une semelle rigide reposant sur un volume de sol renforcé par micropieux, et qui est en contact avec le sol (radier de pieux schématisé sur la figure 3.1-b), on imposera un déplacement vertical identique pour les deux phases.

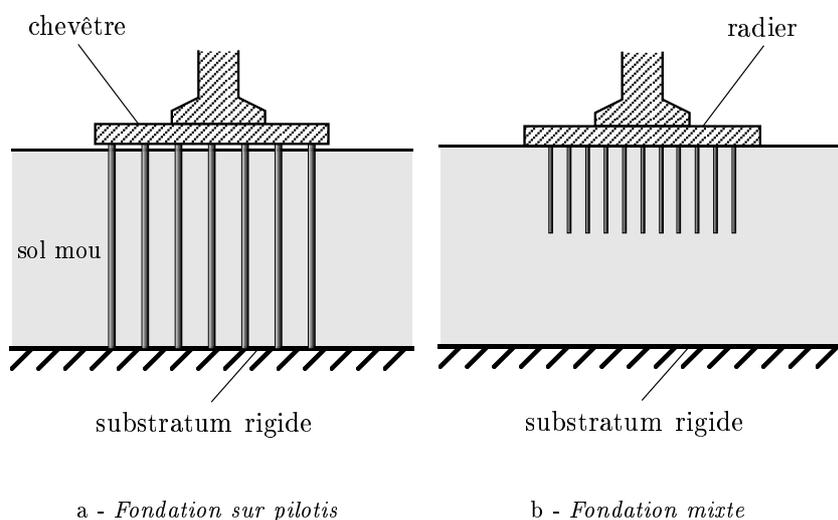


FIG. 3.1: Exemples de fondations sur sol renforcé

1.3.2 Champs de contrainte statiquement admissibles et champs de déplacement cinématiquement admissibles

Compte tenu de la forme de données, nous généralisons maintenant les concepts introduits en 1.2.2 au cas du modèle multiphasique général.

- Un ensemble de champs d'efforts intérieurs ($\underline{\underline{\sigma}}^m ; \sigma^r ; \underline{I}^r$, $r = 1, \dots, N$) est dit *statiquement admissible* avec les données en effort s'il vérifie :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) + \sum_{r=1}^N \underline{I}^r(\underline{x}) = \underline{0} \\ \operatorname{div} (\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r - \underline{I}^r = \underline{0}, \quad r = 1, \dots, N \end{cases}$$

et²

$$(3.9) \quad \begin{cases} \sigma_{ik}^j(\underline{x})n_k(\underline{x}) = T_i^{d,j}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{T_i^j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j \in \{m; r = 1, \dots, N\} \\ \underline{n}(\underline{x}) \text{ vecteur normal extérieur à } \partial\Omega \text{ en } \underline{x} \end{cases}$$

- Un ensemble de champs de déplacement $(\underline{\xi}^j, j \in \{m; r = 1, \dots, N\})$ est dit *cinématiquement admissible* avec les données s'il vérifie :

$$(3.10) \quad \begin{cases} \underline{\xi}^j(\underline{x}) \text{ continu et continûment différentiable,} \\ \xi_i^j(\underline{x}) = \xi_i^{d,j}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i^j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j \in \{m; r = 1, \dots, N\} \end{cases}$$

1.3.3 Unicité de la solution

Ayant défini les déformations de chaque phase par (2.40), la résolution d'un problème multiphasique consiste en la détermination de champs $(\underline{\xi}^j; \underline{\sigma}^m; \sigma^r; \underline{I}^r)$ tels que :

- $(\underline{\sigma}^m; \sigma^r; \underline{I}^r)$ statiquement admissible au sens de (3.8) et (3.9),
- $(\underline{\xi}^j, j \in \{m; r = 1, \dots, N\})$ cinématiquement admissible au sens de (3.10),
- Les champs d'efforts intérieurs soient associés aux champs de déformation par les lois de comportement :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^m &= \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \\ \sigma^r &= a^r \varepsilon^r, \quad r = 1, \dots, N \\ \underline{I}^r &= \underline{\underline{C}}^{I,r} \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m), \quad r = 1, \dots, N \end{aligned}$$

A partir de ce formalisme, il est aisé de montrer que la solution d'un problème multiphasique minimise la fonctionnelle d'énergie potentielle sur l'espace des champs C.A (voir plus loin le chapitre 4, section 4). On en déduit alors l'unicité de la solution.

1.4 Méthodes de résolution

S'inspirant des méthodes directes applicables au milieu continu de Cauchy (Salençon, 1996b, chap. 8), on détaille le processus de résolution des problèmes multiphasiques dans le cadre élastique, puis élasto-plastique.

2. On note $\underline{\underline{\sigma}}^r = \sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ pour $r = 1, \dots, N$.

1.4.1 En élasticité

Que le modèle retenu soit adhérent ou non, la résolution s'articule de la façon suivante :

- On choisit les *inconnues principales* du problème : champ(s) de déplacement C.A (resp. champ(s) de contrainte S.A) avec les données. Ce choix est dicté par l'intuition mécanique, les symétries, la forme des données, etc. Selon le cas, on parle de *méthode des déplacements* ou de *méthode des contraintes*.
- Dans la méthode des déplacements, on calcule à partir du (des) champ(s) $\underline{\xi}^j$ les déformations, puis les contraintes partielles associées par la (les) loi(s) de comportement. On astreint les champs obtenus à vérifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites en effort.
- Dans la méthode des contraintes, on déduit inversement le(s) champ(s) de déformation du (des) champ(s) de contrainte, et par intégration le(s) champ(s) de déplacement. On vérifie les conditions aux limites en déplacement, et dans le modèle général la compatibilité géométrique des déformations entre les différentes phases.

Dans tous les cas, le résultat d'unicité assure qu'on a *la* solution si toutes ces équations sont vérifiées.

1.4.2 En plasticité

Si le modèle adhérent a conduit à une simplification du formalisme dans le cadre de l'élasticité, il n'en va pas de même en élasto-plasticité. Il suffit de se rappeler la forme complexe du critère (2.106) et des lois d'évolution (2.112) pour s'en convaincre. Si l'étude théorique du comportement élasto-plastique global permet de mieux comprendre les phénomènes d'écrasement dans le matériau renforcé, son utilisation directe n'est pas appropriée pour la résolution de problèmes. Aussi va-t-on préférer la stratégie exposée maintenant.

Ayant déterminé les paramètres de chargement du système, on commence par écrire la solution élastique, en utilisant la démarche présentée au paragraphe 1.4.1. On traite ensuite la plasticité de chaque phase *séparément*. Connaissant les contraintes partielles $\underline{\underline{\sigma}}^j$, on peut évaluer chaque critère de plasticité $f^j(\underline{\underline{\sigma}}^j)$. On détermine ainsi la limite élastique du système, et le point de la phase qui plastifie en premier au cours du chargement.

On fait ensuite une hypothèse sur les phases et les domaines géométriques de ces phases qui entrent en plasticité. Sur ces domaines, on écrit les lois d'évolution élasto-plastiques, c'est à dire la règle d'écoulement et la condition de cohérence, et ce dans le formalisme de la phase considérée. Sur les domaines complémentaires, les lois élastiques sont encore valables. On obtient ainsi un système différentiel sur chaque domaine, que l'on résout à l'aide des conditions aux limites et de continuité des solutions entre les domaines. On vérifie *a posteriori*

la validité des hypothèses, notamment en s'assurant de la positivité du (des) multiplicateur(s) plastique(s).

1.4.3 Conclusion

Pour résumer, les méthodes de résolution classiques pour les milieux continus se transposent au milieu multiphasique *sur chaque phase*. Comme on le verra plus loin, cette remarque fondamentale est à l'origine de l'algorithme de résolution numérique en plasticité (chapitre 4, section 3.3.2).

La combinaison des équations conduit ici à des systèmes différentiels couplés, au lieu des équations habituelles de Navier ou Beltrami (Salençon, 1996b, chap. 8).

Il est intéressant de comparer ici une approche par homogénéisation au modèle multiphasique. Utilisant la première, Bernaud *et al.* (1995) déterminent un critère de rupture équivalent pour le matériau renforcé, utilisé ensuite comme critère de plasticité. La difficulté dans la résolution d'un problème aux limites se situe au niveau de l'exploitation de ce critère dont l'expression est en pratique relativement complexe. Par contre, le formalisme et les méthodes de résolution sont ceux du milieu continu. Dans le cadre multiphasique, la difficulté se retrouve non dans le comportement, mais dans le *couplage des équations*. Celles-ci sont par contre plus simples à écrire séparément, puisqu'elles font intervenir un comportement de phase plus facile à expliciter.

Après avoir donné un cadre permettant de *bien poser* les problèmes multiphasiques, nous allons appliquer les méthodes décrites dans cette section à la résolution *analytique* de quelques problèmes. La solution de ces problèmes servira de référence pour la validation des méthodes numériques (chapitre 5). De façon à illustrer les différentes démarches, nous avons retenu des problèmes adhérents ou non, dans le cadre élastique ou élasto-plastique. Chacune des trois sections suivantes est consacrée à un problème type.

2 Comportement élasto-plastique en compression simple d'une éprouvette renforcée

Comme première application du modèle multiphasique, on traite dans cette section le problème de la compression simple. On travaille dans le cadre de l'adhérence parfaite en élasto-plasticité.

2.1 Position du problème

2.1.1 Géométrie et matériau

On considère une éprouvette cylindrique *homogène* de hauteur H reposant *sans frottement* sur le plan horizontal $y = 0$ (surface S_0). Sa face supérieure S_H est en contact sans frottement avec un plateau rigide imposant un déplacement vertical $-\delta(t)$, $\delta(t) \geq 0$ (figure 3.2).

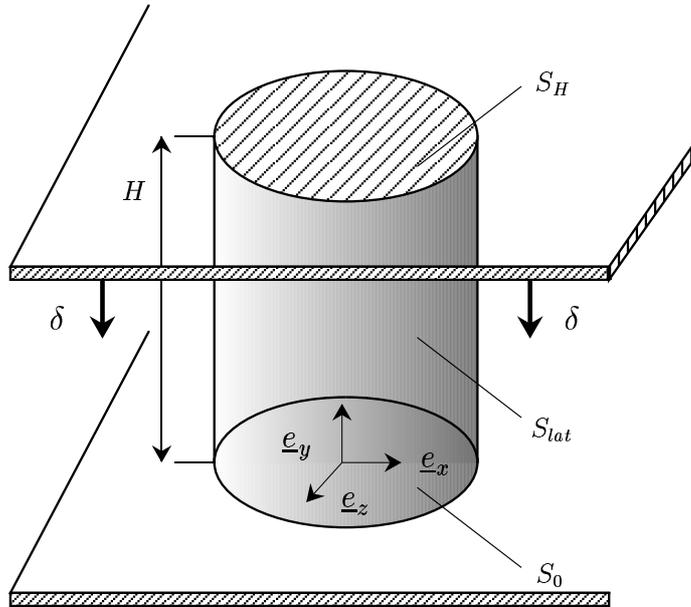


FIG. 3.2: Compression simple d'une éprouvette renforcée

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un composite renforcé dans une seule direction \underline{e}_r , que l'on prendra successivement égale à \underline{e}_y (compression *longitudinale*) puis \underline{e}_x (compression *transverse*). Il est modélisé par un milieu biphasique dont les caractéristiques sont les suivantes :

- la phase matrice est élastique parfaitement plastique. L'élasticité isotrope est représentée par le module d'Young E^m et le coefficient de Poisson ν . Le critère de plasticité retenu est celui de Von Mises. Notant $\underline{\underline{s}}^m$ le déviateur du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^m$ et J_2 le second invariant :

$$(3.12) \quad \underline{\underline{s}}^m = \underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^m \underline{\underline{1}} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}}^m : \underline{\underline{s}}^m = \frac{1}{2} \| \underline{\underline{s}}^m \|^2$$

on écrit le critère sous la forme :

$$(3.13) \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \sqrt{3} J_2 - \sigma_o^m = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^m\| - \sigma_o^m$$

Le paramètre σ_o^m est alors la limite en traction-compression simple de la phase matrice.

- La phase renforcement est élastique parfaitement plastique. Sa rigidité est notée E^r , sa limite en traction compression σ_o^r . On rappelle que ces quantités sont obtenues en multipliant la fraction volumique des inclusions respectivement par le module d'Young et la limite en traction du matériau de renforcement. Le critère de plasticité s'écrit simplement :

$$(3.14) \quad f^r(\sigma^r) = |\sigma^r| - \sigma_o^r$$

2.1.2 Chargement et conditions aux limites

Conformément à la description faite en 1.2.1, les sollicitations sont les suivantes :

- les forces volumiques sont nulles : $\rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$.
- Le contact est sans frottement sur S_0 et S_H . $\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$ désignant le vecteur contrainte sur une facette de normale \underline{n} , ces conditions s'écrivent :

$$(3.15) \quad \underline{T}(y=0) \cdot \underline{e}_x = \underline{T}(y=0) \cdot \underline{e}_z = \underline{T}(y=H) \cdot \underline{e}_x = \underline{T}(y=H) \cdot \underline{e}_z = 0$$

La normale à S_0 et S_H valant respectivement $\pm \underline{e}_y$, il vient :

$$(3.16) \quad \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = 0 \text{ pour } y=0 \text{ et } y=H$$

- La surface S_{lat} est libre de contrainte :

$$(3.17) \quad \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ pour } \underline{x} \in S_{lat}, \underline{n} \in (Oxz)$$

- Les déplacements imposés s'écrivent :

$$(3.18) \quad \xi_y = 0 \text{ sur } S_0 \quad , \quad \xi_y = -\delta \text{ sur } S_H$$

2.2 Renforcement longitudinal

2.2.1 Evolution élastique

Dans cette section, on choisit $\underline{e}_r = \underline{e}_y$. Compte tenu de l'homogénéité de l'éprouvette et du choix des conditions aux limites, on recherche la solution du problème en contrainte totale sous

la forme d'un champ uniaxial *constant* $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ qui est bien statiquement admissible avec (3.16),(3.17). La décomposition sur les phases impose :

$$(3.19) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = (\sigma^m + \sigma^r) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

L'élasticité de la phase matrice donne le tenseur des déformations :

$$(3.20) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^m = \frac{1 + \nu}{E^m} \underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{\nu}{E^m} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^m \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

soit :

$$(3.21) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma - \sigma^r}{E^m} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)]$$

Celle de la phase renforcement donne alors :

$$(3.22) \quad \sigma^r = E^r \epsilon^r = E^r \epsilon_{yy} = \frac{E^r}{E^m} (-\Sigma - \sigma^r)$$

De (3.22) et (3.19), on déduit les contraintes partielles de compression :

$$(3.23\text{-a}) \quad \sigma^m = -\frac{E^m}{E^r + E^m} \Sigma$$

$$(3.23\text{-b}) \quad \sigma^r = -\frac{E^r}{E^r + E^m} \Sigma$$

et de (3.21) le tenseur des déformations :

$$(3.24) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma}{E^m + E^r} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)]$$

Ce champ étant constant, on l'intègre directement, avec les conditions aux limites (3.18) pour obtenir le champ de déplacement :

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \underline{\xi}(\underline{x}) &= \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x} \\ &= \frac{-\Sigma}{E^m + E^r} [y \underline{e}_y - \nu (x \underline{e}_x + z \underline{e}_z)] \end{aligned}$$

Cette dernière équation permet de relier le déplacement du plateau $-\delta$ à la contrainte totale $-\Sigma$:

$$(3.26) \quad \frac{\Sigma}{E^m + E^r} = \frac{\delta}{H} = -\epsilon_{yy}$$

Remarque Les résultats sont similaires à ceux obtenus pour un essai de compression sur matériau non renforcé. On constate de plus ici que les contraintes partielles sont réparties proportionnellement à la rigidité de chaque phase. La courbe de chargement $(\delta/H, \Sigma)$ est linéaire, et on peut identifier le *module d'Young longitudinal* global du matériau renforcé :

$$(3.27) \quad E_L = E^m + E^r$$

2.2.2 Evolution élastoplastique

On doit tout d'abord déterminer la limite d'élasticité du système et la phase qui plastifie en premier³. Pour cela, on évalue le critère de plasticité global (2.106) :

$$(3.28) \quad \begin{aligned} F(\underline{\underline{\Sigma}}) &= \max \{ f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m), f^r(\sigma^r) \} \\ &= \max \left\{ \frac{E^m}{E^m + E^r} \Sigma - \sigma_o^m, \frac{E^r}{E^m + E^r} \Sigma - \sigma_o^r \right\} \end{aligned}$$

La limite d'élasticité est donc :

$$(3.29) \quad \Sigma^{el} = \min \left\{ \sigma_o^m \frac{E^m + E^r}{E^m}, \sigma_o^r \frac{E^m + E^r}{E^r} \right\}$$

Elle est atteinte pour une déformation axiale :

$$(3.30) \quad \frac{\delta}{H} = \min \left\{ \frac{\sigma_o^m}{E^m}, \frac{\sigma_o^r}{E^r} \right\}$$

Selon les valeurs relatives des rapports précédents, c'est la phase renforcement ou la phase matrice qui plastifie d'abord. Le chargement étant poursuivi de façon monotone ($\dot{\delta} > 0$), on suppose que la phase pour laquelle le critère est saturé reste plastique tandis que l'autre reste élastique. On envisage successivement les deux possibilités de première plastification.

2.2.2.1 Phase renforcement plastifiée D'après (3.30), sa limite en compression est atteinte pour $\delta/H = \sigma_o^r/E^r$. Pour $\dot{\delta} > 0$ on a donc :

$$(3.31-a) \quad \sigma^r = -\sigma_o^r$$

$$(3.31-b) \quad \sigma^m = -\Sigma + \sigma_o^r$$

Par ailleurs, la phase matrice reste élastique, d'où :

$$(3.32) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma + \sigma_o^r}{E^m} [\underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y - \nu (\underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z)]$$

Se rappelant que $\epsilon_{yy} = -\delta/H$, cette dernière égalité fournit la courbe de compression sous la forme :

$$(3.33) \quad \Sigma = E^m \frac{\delta}{H} + \sigma_o^r$$

On obtient la déformation plastique en écrivant ensuite le comportement de la phase renforcement :

$$(3.34) \quad \sigma^r = E^r (\epsilon^r - \epsilon_p^r) = -\sigma_o^r \quad \text{avec } \epsilon^r = \epsilon_{yy}$$

soit :

$$(3.35) \quad \epsilon_p^r = \sigma_o^r \left(\frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) - \frac{\Sigma}{E^m}$$

Comme $\dot{\epsilon}_p^r = \dot{\lambda}^r \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r}$ et $\frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} = -1$ dans le cas présent, on vérifie que $\dot{\lambda}^r = \frac{\dot{\Sigma}}{E^m} = \frac{\dot{\delta}}{H}$ est bien positif tant que la compression se poursuit.

³. En toute rigueur, on cherche le premier point $\underline{\underline{x}}$ pour lequel le critère de plasticité est saturé. Ici, l'essai est homogène, donc tous les points de la phase considérée atteignent simultanément la limite d'élasticité.

2.2.2.2 Phase matrice plastifiée Elle atteint sa limite en compression pour $\delta/H = \sigma_o^m/E^m$. L'état mécanique du système à ce stade du chargement est défini par :

$$(3.36\text{-a}) \quad \sigma^m = -\sigma_o^m$$

$$(3.36\text{-b}) \quad \sigma^r = -\frac{E^r}{E^m} \sigma_o^m$$

$$(3.36\text{-c}) \quad \Sigma = \Sigma^{el} = \sigma_o^m \frac{E^m + E^r}{E^m}$$

$$(3.36\text{-d}) \quad \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = -\frac{\sigma_o^m}{E^m} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)]$$

Cet ensemble constitue l'état initial à partir duquel les équations de la plasticité s'écrivent sous forme incrémentale :

$$(3.37) \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}^m = \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_e^m + \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_p^m \quad (\text{Décomposition du taux de déformation})$$

$$(3.38) \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_e^m = \frac{1 + \nu}{E^m} \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^m - \frac{\nu}{E^m} \text{tr} \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^m \underline{\underline{\underline{\mathbf{1}}}} \quad (\text{Comportement élastique})$$

$$(3.39) \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^m = \dot{\lambda}^m \sqrt{3/2} \frac{\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^m}{\|\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^m\|} \quad (\text{Règle d'écoulement})$$

$$(3.40) \quad \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^m : \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^m = 0 \quad (\text{Condition de cohérence})$$

Le caractère uniaxial de $\underline{\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}}$ et donc de $\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^m$, associée à (3.40) implique :

$$(3.41) \quad \dot{\sigma}^m = 0 \quad , \quad \dot{\Sigma} = -\dot{\sigma}^r$$

La contrainte partielle dans la phase matrice reste constante et égale à σ_o^m . Celle de la phase renforcement vaut donc :

$$(3.42) \quad \sigma^r = -\Sigma + \sigma_o^m$$

En terme de déformation, on déduit successivement de (3.38) puis (3.37) :

$$(3.43) \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_e^m = 0 \quad , \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_p^m \quad , \quad \dot{\epsilon}^r = \dot{\epsilon}_{p,yy}^m$$

Compte tenu de la forme (3.13) du critère, la règle d'écoulement (3.39) donne par ailleurs après simplification :

$$(3.44) \quad \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \left(-\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{1}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right)$$

On tire alors de l'élasticité de la phase renforcement, et de (3.43), (3.44) :

$$(3.45) \quad \dot{\Sigma} = -\dot{\sigma}^r = E^r \dot{\lambda}^m$$

On vérifie sur cette équation que le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}^m$ est toujours positif tant que le chargement est croissant ($\dot{\Sigma} > 0$). L'intégration de (3.45) compte tenu des conditions initiales (3.36-c) donne :

$$(3.46) \quad \Sigma = \sigma_o^m \frac{E^m + E^r}{E^m} + E^r \lambda^m$$

ce qui permet d'exprimer le multiplicateur plastique :

$$(3.47) \quad \lambda^m = \frac{\Sigma}{E^r} - \sigma_o^m \left(\frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right)$$

L'intégration de (3.44) avec la condition initiale (3.36-d) donne la déformation après plastification de la matrice :

$$(3.48) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{\sigma_o^m}{E^m} [\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \\ + \left[\frac{\Sigma}{E^r} - \sigma_o^m \left(\frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) \right] \left(-\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{1}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right)$$

De cette dernière égalité découle l'expression de la courbe de chargement :

$$(3.49) \quad \Sigma = E^r \frac{\delta}{H} + \sigma_o^m$$

Remarque Après le début de la plastification de la phase matrice, celle-ci subit une contrainte uniaxiale constante $-\sigma_o^m$. Tout incrément de chargement Σ est repris par la phase renforcement. On reconnaît sur (3.48) la somme de la déformation élastique constante, et de la déformation plastique fonction affine de Σ .

2.2.3 Rupture par écoulement plastique libre

Dans chacun des cas que l'on vient de traiter, la solution est valable tant que la phase supposée élastique le reste effectivement. Si la phase renforcement a plastifié la première, la solution (3.31-b) reste valable tant que $f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0$, soit :

$$(3.50) \quad \Sigma \leq \sigma_o^m + \sigma_o^r$$

Si c'est d'abord la phase matrice, la solution (3.42) reste valable tant que $f^r(\sigma^r) \leq 0$, ce qui conduit au même résultat. On montre alors dans les deux cas qu'il y a écoulement plastique libre des deux phases.

2.2.4 Récapitulatif des résultats et interprétation

La figure 3.3 représente la courbe de compression longitudinale du matériau renforcé dans les deux cas étudiés. Le comportement est d'abord élastique, le module d'Young longitudinal global valant $E^m + E^r$. Pour un écrasement critique $\delta/H = \min \{ \sigma_o^m/E^m, \sigma_o^r/E^r \}$, une des deux phases plastifie en tout point. La courbe de compression s'infléchit, le module d'Young tangent valant celui de la phase restée élastique. Pour $\delta/H = \max \{ \sigma_o^m/E^m, \sigma_o^r/E^r \}$, la deuxième phase plastifie et il y a écoulement plastique libre du composite. La charge limite vaut $\Sigma = \sigma_o^m + \sigma_o^r$, c'est à dire la somme des limites en compression des deux phases.

L'état mécanique du système étant homogène, la courbe de compression peut également s'interpréter comme le *comportement élasto-plastique* du composite en chaque point. Le phénomène d'écroutissage traité de façon théorique au chapitre 2, section 3.2 apparaît ici clairement.

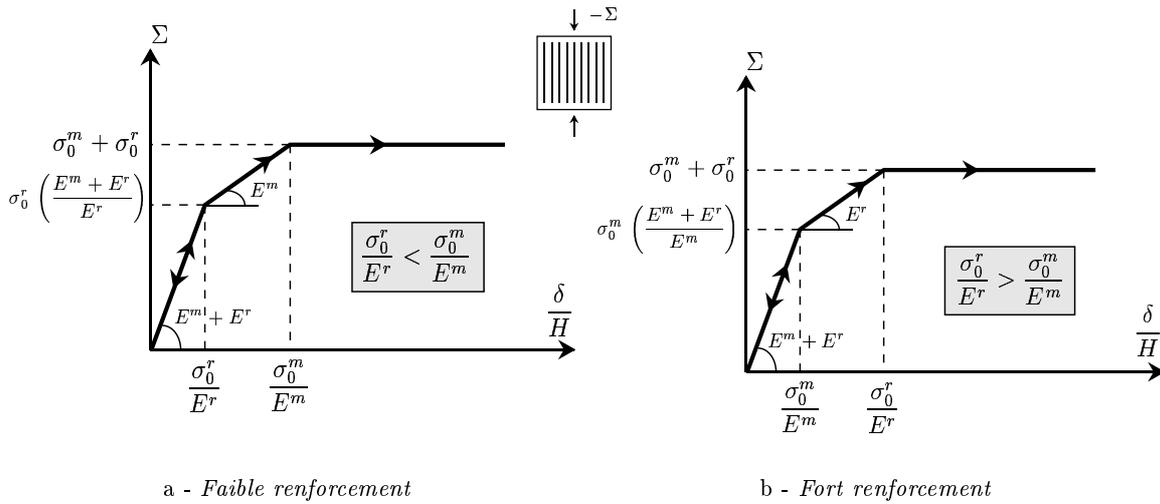


FIG. 3.3: Courbes de compression longitudinale

On a porté sur la figure 3.4 la courbe de compression précédente, et en traits pointillés la courbe de compression obtenue par un modèle parfaitement plastique, pour lequel le critère de rupture global calculé par une méthode d'homogénéisation est ensuite utilisé comme critère de plasticité (Greuell, 1993; Greuell *et al.*, 1994). L'approximation faite dans ce modèle se mesure donc à l'étendue de la surface grisée.

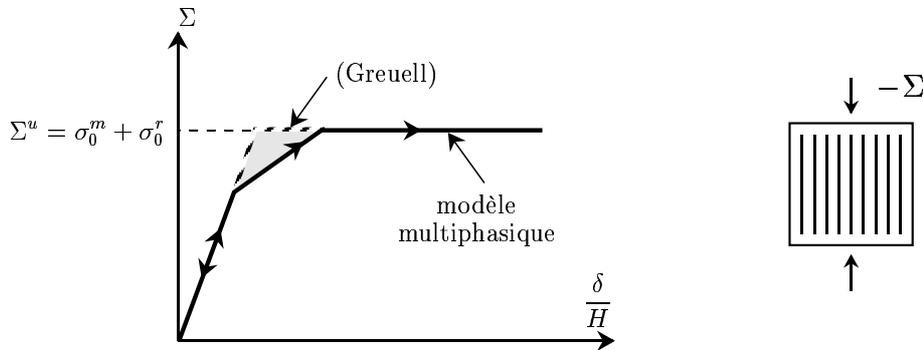


FIG. 3.4: Mise en évidence de l'écroutissage - Compression longitudinale

Remarque Les courbes de la figure 3.3 rappellent celle du problème classique des « trois barres » en élasto-plasticité (Salençon, 1994, Chap. 2). La plastification successive des barres sollicitées en traction, séparément *parfaitement plastiques*, donne également une réponse globale avec écroutissage. C'est bien, dans chaque cas, l'apparition progressive des déformations plastiques géométriquement *incompatibles* qui explique ce résultat.

Pour visualiser de façon complémentaire le phénomène d'écroutissage, on a étudié dans le cas d'une sollicitation biaxiale les domaines d'élasticité initial \mathcal{D}^0 et actuel \mathcal{D}^ρ ainsi que l'évolution du paramètre d'écroutissage ρ . Les résultats sont présentés dans l'annexe E. Il apparaît ainsi que \mathcal{D}^ρ est obtenu par *intersection* d'un domaine \mathcal{E}^ρ relatif à la plastification de la phase matrice, et d'un domaine \mathcal{B}^ρ relatif à la plastification de la phase renforcement. Chacun de ces

domaines évolue de façon indépendante en fonction de ρ . L'écroûissage associé à l'évolution de \mathcal{D}^ρ n'est ainsi ni de type cinématique ni de type isotrope. Pour le cas particulier de la compression longitudinale traitée dans cette section, on observe clairement que le domaine \mathcal{D}^ρ est « entraîné » par le trajet de chargement (Salençon, 1994).

2.3 Renforcement transverse

2.3.1 Evolution élastique

Dans cette section, on choisit $\underline{e}_r = \underline{e}_x$. L'état de contrainte global est toujours uniaxial, de la forme $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$. Le tenseur des contraintes partielles dans la phase matrice s'écrit donc :

$$(3.51) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = -\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

On en déduit la déformation associée par (3.20) :

$$(3.52) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{E^m} \left\{ [-\sigma^r + \nu \Sigma] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\nu \sigma^r - \Sigma] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \nu [\sigma^r + \Sigma] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\}$$

L'élasticité de la phase renforcement s'écrit :

$$(3.53) \quad \sigma^r = E^r \epsilon_{xx} = \frac{E^r}{E^m} (-\sigma^r + \nu \Sigma)$$

En résolvant cette équation, puis en reportant dans (3.52), on obtient successivement :

$$(3.54-a) \quad \sigma^r = \frac{\nu E^r}{E^m + E^r} \Sigma$$

$$(3.54-b) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = -\Sigma \left\{ \frac{\nu E^r}{E^m + E^r} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \right\}$$

et :

$$(3.55) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\Sigma}{E^m + E^r} \left\{ -\nu \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \left[1 + \frac{E^r}{E^m} (1 - \nu^2) \right] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu \left[1 + (1 + \nu) \frac{E^r}{E^m} \right] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\}$$

On constate que par « effet Poisson », la phase renforcement est sollicitée en traction ($\sigma^r > 0$) pour une compression globale $-\Sigma$.

Le champ de déformation étant homogène, il s'intègre trivialement pour donner le champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{x}$. La condition à la limite (3.18) permet d'écrire ici encore :

$$(3.56) \quad \epsilon_{yy} = -\frac{\delta}{H}$$

Retenant le terme $\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ de (3.55), et compte tenu de (3.56), on obtient l'équation de la *courbe de compression transverse* sous la forme :

$$(3.57) \quad \Sigma = E_T \frac{\delta}{H}$$

où le *module d'Young transverse global* E_T vaut :

$$(3.58) \quad E_T = \frac{E^m + E^r}{1 + \frac{E^r}{E^m}(1 - \nu^2)}$$

2.3.2 Evolution élasto-plastique

Pour connaître quelle phase plastifie en premier au cours du chargement, on évalue les critères de plasticité (3.13), (3.14) sur l'état de contrainte (3.54). Il vient :

$$(3.59) \quad \begin{aligned} f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) &= \sqrt{\Sigma^2 + (\sigma^r)^2} - \Sigma \sigma^r - \sigma_o^m \\ &= \frac{\Sigma}{E^m + E^r} \sqrt{(E^m + E^r)^2 + (\nu E^r)^2 - \nu E^r (E^m + E^r)} - \sigma_o^m \end{aligned}$$

et :

$$(3.60) \quad f^r(\sigma^r) = \Sigma \frac{\nu E^r}{E^m + E^r} - \sigma_o^r$$

La limite élastique en compression est donc :

$$(3.61) \quad \Sigma^{el} = \min \left\{ \frac{\sigma_o^m (E^m + E^r)}{\sqrt{(E^m + E^r)^2 + (\nu E^r)^2 - \nu E^r (E^m + E^r)}}, \frac{\sigma_o^r (E^m + E^r)}{\nu E^r} \right\}$$

Pour caractériser l'évolution élasto-plastique, on distingue ensuite deux cas selon la phase qui plastifie en premier.

2.3.2.1 Phase renforcement plastifiée La phase renforcement étant sollicitée en traction, on a pour $\Sigma \geq \Sigma^{el}$:

$$(3.62-a) \quad \sigma^r = \sigma_o^r$$

$$(3.62-b) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = -\sigma_o^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

Le tenseur des déformations a la forme (3.52), où l'on a remplacé σ^r par σ_o^r . On en déduit l'expression de la courbe de compression après plastification de la phase renforcement :

$$(3.63) \quad \Sigma = E^m \frac{\delta}{H} + \nu \sigma_o^r$$

et la déformation plastique dans la phase renforcement :

$$(3.64) \quad \begin{aligned} \varepsilon_p^r &= \varepsilon^r - \frac{\sigma_o^r}{E^r} = \varepsilon_{xx} - \frac{\sigma_o^r}{E^r} \\ &= \frac{\nu \Sigma}{E^m} - \sigma_o^r \left(\frac{1}{E^m} + \frac{1}{E^r} \right) \end{aligned}$$

2.3.2.2 Phase matrice plastifiée A partir du point de première plastification, et pour une compression Σ croissante, le critère $f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m)$ est constamment saturé. En reportant l'état de contrainte (3.51) dans (3.13), on voit que le couple (σ^r, Σ) est astreint à se déplacer sur une ellipse d'équation :

$$(3.65) \quad \Sigma^2 - \Sigma \sigma^r + (\sigma^r)^2 - (\sigma_o^m)^2 = 0$$

On explicite maintenant les équations incrémentales (3.37)-(3.40). Le taux de contrainte s'écrit :

$$(3.66) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m = -\dot{\sigma}^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \dot{\Sigma} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

Le taux de déformation élastique associée vaut (voir (3.52)) :

$$(3.67) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_e^m = \frac{1}{E^m} \left\{ [-\dot{\sigma}^r + \nu \dot{\Sigma}] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\nu \dot{\sigma}^r - \dot{\Sigma}] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \nu [\dot{\sigma}^r + \dot{\Sigma}] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\}$$

Pour calculer le taux de déformation plastique (3.39), on commence par évaluer le déviateur des contraintes :

$$(3.68) \quad \underline{\underline{\dot{s}}}^m = \frac{1}{3} \left\{ [\Sigma - 2\sigma^r] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\sigma^r - 2\Sigma] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + [\sigma^r + \Sigma] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\}$$

Le critère étant constamment saturé, on a de plus :

$$(3.69) \quad \|\underline{\underline{\dot{s}}}^m\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_o^m$$

Le taux de déformation plastique (3.39) vaut donc :

$$(3.70) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \frac{\dot{\lambda}^m}{2\sigma_o^m} \left\{ [\Sigma - 2\sigma^r] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + [\sigma^r - 2\Sigma] \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + [\sigma^r + \Sigma] \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\}$$

On exploite ensuite l'élasticité de la phase renforcement, soit successivement :

$$(3.71) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}^r &= E^r \dot{\varepsilon}_{xx} = E^r \dot{\varepsilon}_{xx}^m = E^r [\dot{\varepsilon}_{e,xx}^m + \dot{\varepsilon}_{p,xx}^m] \\ &= E^r \left[\frac{\nu \dot{\Sigma} - \dot{\sigma}^r}{E^m} + \frac{\dot{\lambda}^m}{2\sigma_o^m} (\Sigma - 2\sigma^r) \right] \end{aligned}$$

On déduit de cette expression la valeur du multiplicateur plastique :

$$(3.72) \quad \frac{\dot{\lambda}^m}{2\sigma_o^m} = \frac{\dot{\sigma}^r (E^m + E^r) - \nu E^r \dot{\Sigma}}{E^m E^r (\Sigma - 2\sigma^r)}$$

On exprime ensuite le taux de déformation dans la direction de compression en additionnant les contributions élastique (3.67) et plastique (3.70), et en utilisant dans cette dernière la valeur de $\dot{\lambda}^m$ précédente. Tous calculs faits, il reste :

$$(3.73) \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\nu \dot{\sigma}^r - \dot{\Sigma}}{E^m} + \frac{\dot{\sigma}^r (E^m + E^r) - \nu E^r \dot{\Sigma}}{E^m E^r (\Sigma - 2\sigma^r)} (\sigma^r - 2\Sigma)$$

A partir du point de limite d'élasticité caractérisé par Σ^{el} (3.61), l'équation de la courbe de compression transverse est donc donnée sous la forme différentielle (3.73), dans laquelle σ^r est implicitement relié à Σ par l'équation de l'ellipse (3.65). Pour résoudre, il faut donc paramétrer l'ellipse. On retient la forme suivante du paramétrage :

$$(3.74\text{-a}) \quad \sigma^r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o^m \sin \theta$$

$$(3.74\text{-b}) \quad \Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o^m \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

En substituant (3.74) dans (3.73), on obtient après simplification :

$$(3.75) \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_o^m}{E^m} \dot{\theta} \left\{ 2\nu \cos \theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \frac{E^m + E^r}{E^r} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta} \right\}$$

L'équation explicite de la courbe de chargement en phase élasto-plastique s'obtient donc en intégrant (3.75) à partir de la limite élastique. En ce point, la déformation vaut $\epsilon_{yy} = \Sigma^{el}/E_T$ et on note θ_0 la valeur correspondante du paramètre. On a finalement en coordonnées paramétriques :

$$(3.76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{yy} = \Sigma^{el} E_T + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_o^m}{E^m} \left[2\nu \sin \theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right. \\ \quad \left. + \frac{E^m + E^r}{E^r} \left\{ \frac{3}{4} \ln \frac{\tan \theta/2 - 2 + \sqrt{3}}{\tan \theta/2 + 2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - \tan \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2} \right\} \right]_{\theta_0}^{\theta} \\ \Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o^m \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{array} \right.$$

On peut vérifier que la condition de cohérence (3.40), qui s'exprime ici sous la forme :

$$(3.77) \quad (\Sigma - 2\sigma^r) \dot{\sigma}^r + (\sigma^r - 2\Sigma) \dot{\Sigma} = 0$$

est trivialement vérifiée pour le paramétrage (3.74). Par ailleurs, le multiplicateur plastique (3.72) s'exprime en fonction du paramétrage sous la forme :

$$(3.78) \quad \dot{\lambda}^m = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_o^m}{E^m} \dot{\theta} \left(-\nu + \frac{E^m + E^r}{E^r} \frac{\cos \theta}{\sin(\frac{\pi}{6} - \theta)} \right)$$

Il est donc toujours positif pour $\dot{\theta} \geq 0$ et $\theta \in [0; \frac{\pi}{6}]$, qui est l'intervalle dans lequel on se place puisque $\Sigma \geq 0$ et $\sigma^r \geq 0$ dans notre essai.

2.3.3 Interprétation des résultats

Pour illustrer les développements analytiques précédents, on représente pour différentes valeurs des paramètres la courbe de compression transverse dans l'espace $(-\epsilon_{yy} = \delta/H, \Sigma)$, et le trajet de chargement dans l'espace (σ^r, Σ) . Reprenant le même plan qu'à la section précédente, on considère deux cas selon la phase qui plastifie la première.

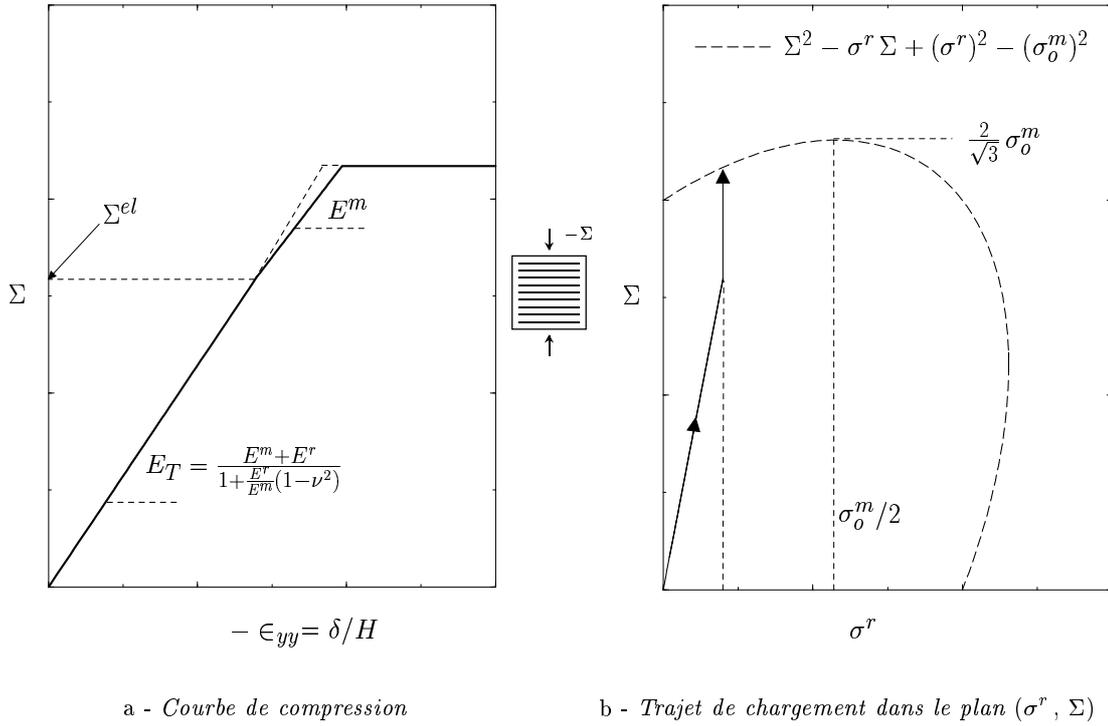


FIG. 3.5: Compression transverse - Plastification de la phase renforcement en premier

2.3.3.1 Phase renforcement plastifiée On constate sur la figure 3.5-a que l'écroutissage est peu marqué. En effet, le module d'Young tangent (voir (3.63)) vaut E^m , qui est très proche du module d'Young transverse initial. Dans l'espace (σ^r, Σ) , la solution élastique (3.54-a) est représentée par une droite. La limite d'élasticité correspond à son intersection avec la droite verticale $\sigma^r = \sigma_o^r$. Lorsque le trajet de chargement atteint la frontière de l'ellipse, il y a écoulement plastique des deux phases. La limite en compression transverse correspond à la valeur de Σ en ce point d'intersection.

2.3.3.2 Phase matrice plastifiée On représente les résultats pour deux valeurs de la résistance en traction de la phase renforcement. Dans les deux cas, la limite élastique en compression correspond à l'intersection de la droite de chargement élastique avec la frontière de l'ellipse dans le plan (σ^r, Σ) . L'écroutissage correspond à un trajet de chargement sur la frontière de l'ellipse, la courbe de compression ayant pour équation (3.76). Il convient de distinguer deux situations selon la valeur relative de σ_o^r par rapport à σ_o^m .

Pour $\sigma_o^r < \sigma_o^m/2$ (figure 3.6), le trajet de chargement le long de l'ellipse est interrompu pour $\sigma^r = \sigma_o^r$. Il y a alors écoulement plastique des deux phases. On remarque que l'on se trouve en deçà du « sommet » de l'ellipse. La courbe de compression 3.6-a montre un point anguleux lorsque se produit l'écoulement plastique libre.

Au contraire, pour $\sigma_o^r > \sigma_o^m/2$ (figure 3.7), la courbe de compression tend asymptotiquement vers la valeur limite. L'abscisse ϵ_{yy} (Eq.(3.76)) tend en effet vers l'infini lorsque θ tend vers

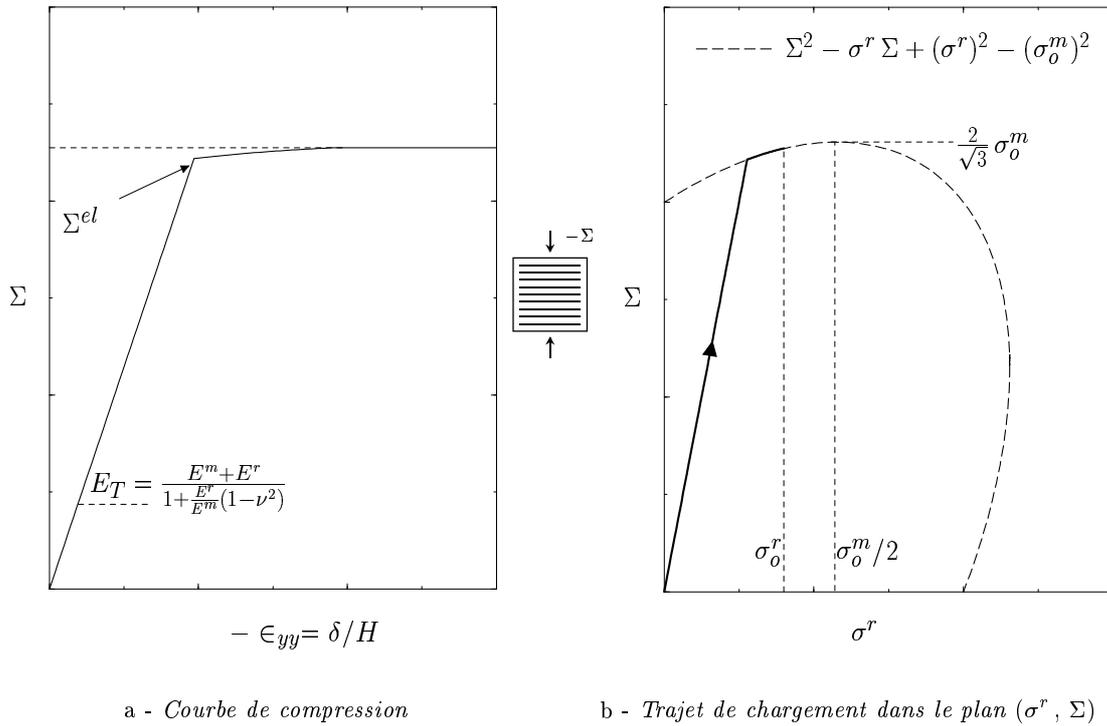
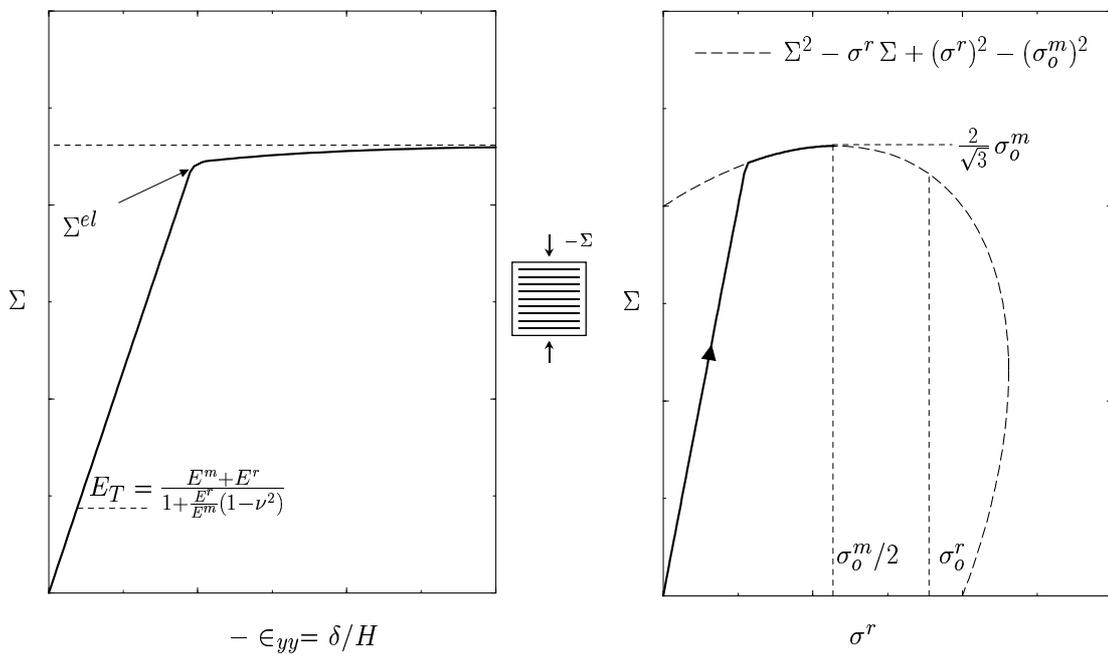


FIG. 3.6: Compression transverse - Plastification de la phase matrice en premier (faible résistance des renforcements ($\sigma_0^r < \sigma_0^m/2$))

$\frac{\pi}{6}$, qui correspond au sommet de l'ellipse. Dans l'espace (σ^r, Σ) , le trajet de chargement ne rencontre jamais la droite $\sigma^r = \sigma_0^r$. Il y a asymptotiquement écoulement plastique de la matrice, tandis que les renforcements restent dans le domaine élastique. On retrouve ainsi sur cet exemple les différents modes de rupture présentés dans un cadre général au chapitre 2, section 3.3.



a - Courbe de compression

b - Trajet de chargement dans le plan (σ^r, Σ)

FIG. 3.7: Compression transverse - Plastification de la phase matrice en premier (forte résistance des renforcements $(\sigma_o^r > \sigma_o^m/2)$)

3 Compression en déformation plane (Modèle biphasique général)

On s'intéresse dans cette section à la résolution du problème de compression en *déformation plane* d'une éprouvette constituée d'un matériau renforcé. On met ici en œuvre la modélisation biphasique générale, et on se limite au comportement élastique.

3.1 Position du problème

3.1.1 Géométrie et matériau

On considère une éprouvette homogène, de forme parallélépipédique, de hauteur H et de largeur $2L$. Elle repose sans frottement sur le plan horizontal $y = 0$, et est soumise à une compression uniaxiale globale de la forme $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ par l'intermédiaire d'un plateau rigide parfaitement lisse imposant un déplacement vertical $-\delta$ (figure 3.8).

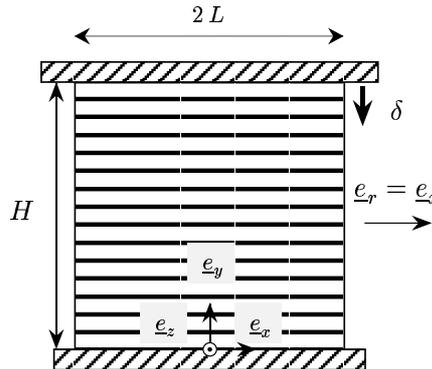


FIG. 3.8: Compression en déformation plane d'une éprouvette renforcée

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un composite renforcé dans la direction \underline{e}_x modélisé par un milieu biphasique. Contrairement à la section précédente, on ne suppose pas l'adhérence parfaite entre les phases. On se restreint ici à la compression transverse (vis à vis de la direction de renforcement).

Les caractéristiques élastiques de chaque phase sont les mêmes qu'à la section précédente (voir page 100). On note λ et μ les coefficients de Lamé de la phase matrice⁴.

On complète la description du comportement en précisant l'interaction entre les deux phases (Eq.(2.58)). En l'absence de forces de volume, l'équation d'équilibre de la phase renforcement (2.29-b) impose que la densité d'interaction \underline{I} soit colinéaire à la direction de renforcement \underline{e}_x . En supposant que \underline{I} ne dépend que du déplacement relatif *dans la direction de renforcement*,

4. On omet l'exposant m pour alléger les notations.

on peut mettre la loi de comportement d'interaction sous la forme :

$$(3.79) \quad \underline{I} = c_I (\xi_x^r - \xi_x^m) \underline{e}_x$$

3.1.2 Chargement et conditions aux limites

Comme on l'a vu à la section 1.3.1, il faut ici préciser les sollicitations par phase :

- Il n'y a pas de forces de volume : $\rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) = \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) = \underline{0}$.
- Le contact sans frottement implique $\sigma_{xy}^m = \sigma_{zy}^m = 0$ pour $y = 0$ et $y = H$.
- La surface latérale est libre de contrainte, *séparément pour chaque phase*, d'où :

$$(3.80) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m(\pm L) \cdot \underline{e}_x = \underline{0} \quad , \quad \sigma^r(\pm L) = 0$$

- Les déplacements imposés à chaque phase s'écrivent :

$$(3.81) \quad \xi_y^m(y=0) = \xi_y^r(y=0) = 0 \quad , \quad \xi_y^m(y=H) = \xi_y^r(y=H) = -\delta$$

3.2 Résolution

On cherche une solution en déplacement sous la forme :

$$(3.82\text{-a}) \quad \underline{\xi}^m = m(x) \underline{e}_x - y \frac{\delta}{H} \underline{e}_y$$

$$(3.82\text{-b}) \quad \underline{\xi}^r = r(x) \underline{e}_x - y \frac{\delta}{H} \underline{e}_y$$

Notant $(.)'$ la dérivation par rapport à x , les déformations associées s'écrivent :

$$(3.83\text{-a}) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = m'(x) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{\delta}{H} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$(3.83\text{-b}) \quad \varepsilon^r = r'(x)$$

On en déduit les efforts intérieurs :

$$(3.84\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda \left[m'(x) - \frac{\delta}{H} \right] \underline{\underline{1}} + 2\mu \left[m'(x) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{\delta}{H} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \right]$$

$$(3.84\text{-b}) \quad \sigma^r = a^r r'(x)$$

$$(3.84\text{-c}) \quad \underline{I} = I \underline{e}_x = c_I (r(x) - m(x)) \underline{e}_x$$

Les équations d'équilibre par phase (2.29) se simplifient ici en :

$$(3.85\text{-a}) \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{I} = \underline{0}$$

$$(3.85\text{-b}) \quad \operatorname{div} (\sigma^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) - \underline{I} = \underline{0}$$

En substituant (3.84) dans (3.85), on aboutit au système différentiel :

$$(3.86) \quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) m'' + c_I (r - m) = 0 \\ a^r r'' - c_I (r - m) = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites (3.80) conduisent à :

$$(3.87\text{-a}) \quad m'(\pm L) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\delta}{H}$$

$$(3.87\text{-b}) \quad r'(\pm L) = 0$$

En sommant les équations (3.86) et en intégrant deux fois, on obtient compte tenu de (3.87) :

$$(3.88) \quad a^r r(x) + (\lambda + 2\mu) m(x) = \lambda \frac{\delta}{H} x$$

On a fixé pour cela la seconde constante d'intégration correspondant à un mouvement rigidifiant de translation horizontale à 0. En exprimant $r(x)$ à partir de cette dernière équation, et en substituant dans (3.86), on se ramène à une seule équation différentielle portant sur $m(x)$. On introduit alors la *longueur caractéristique* :

$$(3.89) \quad \ell = \sqrt{\frac{a^r (\lambda + 2\mu)}{c_I (\lambda + 2\mu + a^r)}}$$

et le paramètre adimensionnel :

$$(3.90) \quad \varpi = \frac{L}{\ell}$$

Tous calculs faits, la solution s'écrit finalement :

$$(3.91\text{-a}) \quad m(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H} \left\{ x + \ell \frac{a^r}{\lambda + 2\mu} \frac{\sinh \varpi x/L}{\cosh \varpi} \right\}$$

$$(3.91\text{-b}) \quad r(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H} \left\{ x - \ell \frac{\sinh \varpi x/L}{\cosh \varpi} \right\}$$

Reportant ces valeurs dans (3.84), on déduit les efforts intérieurs. En particulier, il vient :

$$(3.92) \quad \sigma^r(x) = a^r \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H} \left[1 - \frac{\cosh \varpi x/L}{\cosh \varpi} \right]$$

et :

$$(3.93) \quad I(x) = -c_I \ell \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\delta}{H} \frac{\sinh \varpi x/L}{\cosh \varpi}$$

On vérifie également que $\sigma_{xx}^m(x) = -\sigma^r(x)$. Ainsi, le tenseur des contraintes globales $\underline{\underline{\Sigma}}$ correspond bien à une compression selon \underline{e}_y en déformation plane.

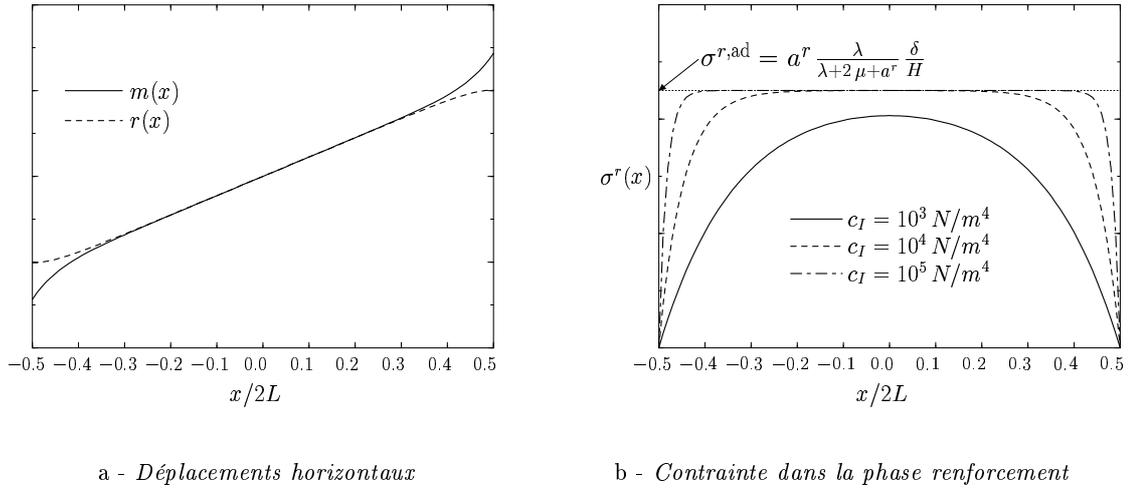


FIG. 3.9: Compression en déformation plane d'une éprouvette renforcée - Résultats

3.3 Résultats

On a représenté sur la figure 3.9 les déplacements horizontaux des deux phases $\{m(x), r(x)\}$ et la contrainte $\sigma^r(x)$ dans la phase renforcement.

Les déplacements des deux phases sont très proches dans le noyau central de l'éprouvette. C'est en effet le terme linéaire en x dans (3.91) qui est prépondérant. Corrélativement, la contrainte σ^r est à peu près constante. Puis les courbes de déplacement s'écartent lorsqu'on approche des bords latéraux ($x = \pm L$), et la contrainte σ^r tend brusquement vers la valeur nulle imposée par la condition de bord libre.

On met ainsi en évidence un *effet de bord* dont la dimension caractéristique est la longueur ℓ définie en (3.89), et donc directement liée à la constante d'interaction c_I . Comme le montre la formule (3.89), cet effet disparaît ($\ell \rightarrow 0$) lorsque $c_I \rightarrow \infty$, qui correspond à l'hypothèse d'adhérence parfaite. En prenant la limite des formules (3.91) lorsque ℓ tend vers 0, on obtient un champ de déplacement noté $\underline{\xi}^{\text{ad}}$, *identique* pour les deux phases :

$$(3.94) \quad \underline{\xi}^{\text{ad}} = -\frac{\delta}{H} \left[-\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} x \underline{e}_x + y \underline{e}_y \right]$$

On retrouve donc ainsi la solution correspondant à l'hypothèse d'adhérence parfaite. Les efforts intérieurs sont dans ce cas :

$$(3.95\text{-a}) \quad \sigma^{r,\text{ad}} = -\sigma_{xx}^m = a^r \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H}$$

$$(3.95\text{-b}) \quad \sigma_{yy}^{m,\text{ad}} = -\frac{\delta}{H} \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu + a^r} \right)$$

$$(3.95\text{-c}) \quad \sigma_{zz}^{m,\text{ad}} = -\frac{\delta}{H} \frac{\lambda(a^r + 2\mu)}{\lambda + 2\mu + a^r}$$

On remarque que si la contrainte totale $\Sigma_{xx} = \sigma_{xx}^m + \sigma^r$ est bien nulle sur la surface latérale de

l'éprouvette, en revanche la condition de bord libre n'est pas vérifiée *séparément* pour chaque phase.

Reprenant les expressions (3.91), on voit que la solution générale est exactement la somme de la solution adhérente (déplacements linéaires, efforts intérieurs constants) et de termes correcteurs relatifs à l'effet de bord.

Pour conclure, il est intéressant de déterminer la *module de compression apparent* défini par :

$$(3.96) \quad E_{D.P} = \frac{1}{2L} \frac{\int_{-L}^L \sigma_{yy}^m(x) dx}{-\delta/H}$$

Introduisant son homologue dans le cas de l'adhérence parfaite (voir (3.95-b)) :

$$(3.97) \quad E_{D.P}^{\text{ad}} = \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu + a^r}$$

on obtient après simplification :

$$(3.98) \quad E_{D.P} = E_{D.P}^{\text{ad}} - 2c_I \ell \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \right)^2 \tanh L/\ell$$

La prise en compte de l'élasticité d'interaction « assouplit » donc le système comme on pouvait s'y attendre.

4 Boulonnage des tunnels profonds (Sudret et de Buhan, 1998b)

Comme on l'a montré dans le chapitre introductif, les tunnels boulonnés font partie des ouvrages de géotechnique pour lesquels une modélisation multiphasique du matériau renforcé constitutif est pertinente. De façon à obtenir des résultats analytiques, nous étudions dans cette section le cas particulier d'un tunnel profond de section circulaire. Nous allons appliquer la méthode dite de *convergence-confinement*, qui permet de se ramener à un problème en déformations planes. En ce qui concerne la modélisation du matériau renforcé « roche + boulons », nous utilisons successivement le modèle multiphasique général, puis le modèle adhérent dans le cadre élastique.

4.1 Position du problème

4.1.1 Géométrie

On considère un tunnel cylindrique d'axe horizontal, de section circulaire de rayon R , creusé dans un massif rocheux homogène. L'axe du tunnel est situé à une profondeur H très grande devant R , de sorte qu'on peut considérer le massif environnant comme infini. L'état de contrainte initial du massif est supposé isotrope de la forme $\underline{\underline{\sigma}}_0 = -P_0 \underline{\underline{1}}$, ce qui revient à négliger la variation de contrainte géostatique entre le haut et le bas de la section. La pression P_0 correspond au poids des terres à la profondeur H . Dans toute cette section, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , où (Oz) est l'axe du tunnel.

4.1.2 Schéma de renforcement

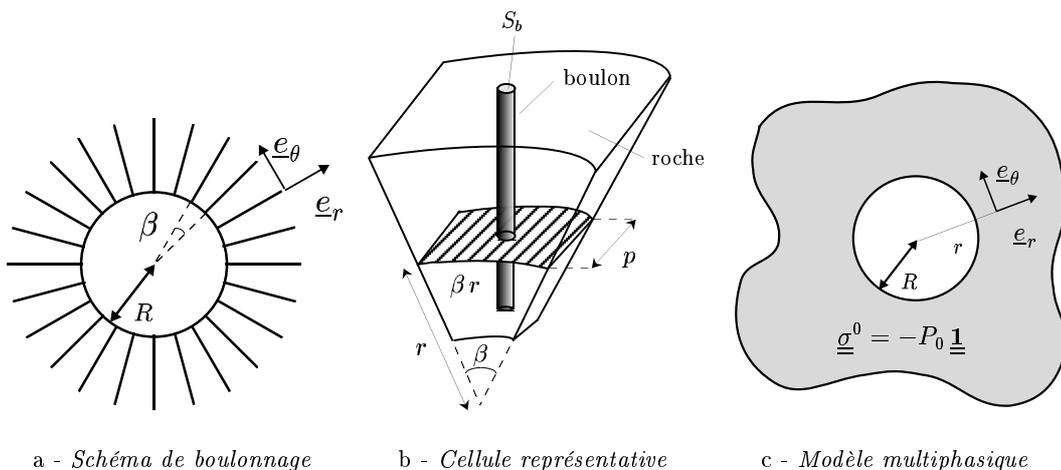


FIG. 3.10: Description géométrique du tunnel

Les boulons sont mis en place de façon périodique dans le massif parallèlement à la direction radiale \underline{e}_r (figure 3.10-a). Notant β l'espacement angulaire entre les boulons dans le plan (r, θ)

et p leur distance mutuelle dans la direction z , on définit la densité de boulons en paroi :

$$(3.99) \quad d_b = \frac{1}{p\beta R}$$

Si l'on considère une cellule de base du pavage périodique (figure 3.10-b), il est clair que la fraction volumique η^r de boulons varie avec la distance radiale r . Précisément, cette quantité η^r s'obtient comme le rapport de la section des boulons S_b supposée constante à la section de la cellule au point considéré, soit :

$$(3.100) \quad \eta^r(r) = \frac{S_b}{p\beta r} = d_b S_b \frac{R}{r}$$

La densité de renforcement décroît donc en $1/r$ avec la distance radiale. Cette remarque justifie l'approximation simplificatrice suivante : on va supposer dans le calcul que les boulons s'étendent à l'infini dans le massif. Cela est cohérent avec les résultats analytiques de Greuell (1993), et ceux numériques de Bernaud *et al.* (1995), qui ont montré que l'influence de la longueur l_b des boulons est négligeable dès lors que $l_b > 2R$.

Par ailleurs, d'un point de vue pratique, le boulonnage ne peut pas être mis en place dans le massif rocheux instantanément après creusement, mais nécessite un certain délai de pose. On néglige ici ce phénomène, ce qui revient à considérer que les boulons sont en place dans le massif dès avant le creusement.

4.1.3 Méthode convergence-confinement

Le passage du problème tridimensionnel incluant le front de taille du tunnel au problème en déformations planes s'effectue à partir du raisonnement suivant (Panet, 1995).

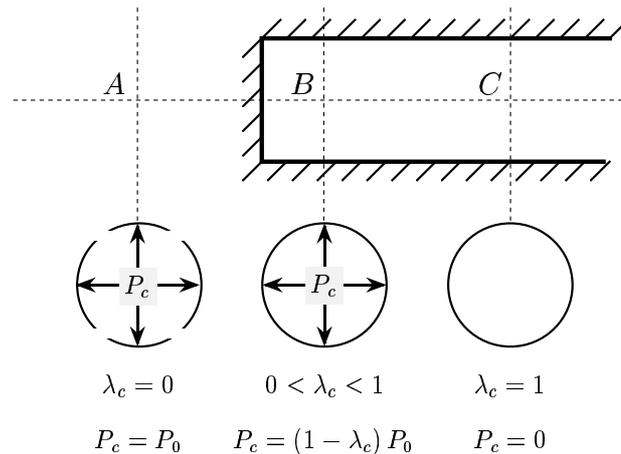


FIG. 3.11: Principe de la méthode convergence-confinement

Considérons un état de l'ouvrage en cours de percement, et plaçons nous très *en amont* du front de taille actuel (figure 3.11, coupe A). L'état de contraintes du massif n'est pas encore perturbé par le creusement, de sorte que la contrainte radiale $\sigma_{rr}(r = R)$ vaut $-P_0$. Plaçons

nous ensuite sur une section très *en aval* (coupe C) : la contrainte radiale à la paroi est nulle. Pour toute section intermédiaire (coupe B), l'effet du front de taille est pris en compte par l'application sur la paroi d'une *pression de soutènement fictive* notée P_c . On note :

$$(3.101) \quad P_c = (1 - \lambda_c) P_0$$

où λ_c désigne le *taux de déconfinement*. Longtemps avant le creusement, on a donc $\lambda_c = 0$. Puis λ_c croît progressivement de 0 à 1 lorsque le front de taille atteint puis dépasse la section considérée et finalement s'en éloigne.

Différents auteurs ont proposé des expressions analytiques semi-empiriques de λ_c en fonction de la distance au front de taille (voir Panet (1995, Chap. 3)), à partir d'un ensemble de calculs numériques tridimensionnels en élasticité ou en élasto-plasticité. Ayant la solution du problème bidimensionnel pour tout λ_c , on peut ainsi obtenir des informations en tout point du massif après creusement.

4.2 Solution élastique - modèle général

On s'intéresse dans cette section à la modélisation du problème par un milieu biphasique général, c'est à dire sans prendre en compte l'hypothèse d'adhérence parfaite.

4.2.1 Paramètres du modèle biphasique

Compte tenu de la faible fraction volumique de renforcement, on affecte à la phase matrice les propriétés élastiques de la roche, repérées par ses coefficients de Lamé λ et μ . Cette hypothèse est raisonnable, puisqu'une densité d'un boulon par m^2 correspond en moyenne à $\eta^r = 10^{-3} \ll 1$.

Conformément à la section 2.3.3 du chapitre 2, l'élasticité de la phase renforcement est donnée par :

$$(3.102) \quad a^r(r) = \eta^r(r) \cdot E_b$$

où E_b désigne le module d'Young du matériau constitutif des boulons. Reportant (3.100) dans (3.102), on obtient :

$$(3.103) \quad a^r(r) = \frac{K_o}{r}, \quad \text{avec } K_o = d_b S_b E_b R$$

4.2.2 Equations du problème

Compte tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe (Oz), les champs de déplacement de chaque phase sont purement radiaux et ne dépendent que de la distance du point courant

au centre du tunnel. On note :

$$(3.104\text{-a}) \quad \underline{\xi}^m(\underline{x}) = M(r) \underline{e}_r$$

$$(3.104\text{-b}) \quad \underline{\xi}^r(\underline{x}) = B(r) \underline{e}_r$$

Les déformations associées s'écrivent⁵:

$$(3.105\text{-a}) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = M'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{M(r)}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$$

$$(3.105\text{-b}) \quad \varepsilon^r = B'(r)$$

L'élasticité isotrope de la phase matrice s'écrit, compte tenu de l'état initial géostatique :

$$(3.106) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = -P_0 \underline{\underline{1}} + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^m) + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^m$$

et pour la phase renforcement, *supposée initialement à l'état naturel* :

$$(3.107) \quad \sigma^r = a^r(r) \varepsilon^r$$

Enfin, la densité des efforts d'interaction entre les phases, linéaire de la différence des champs de déplacement, est également purement radiale, et l'on note :

$$(3.108) \quad \underline{I} = I \underline{e}_r = c_I [B(r) - M(r)] \underline{e}_r$$

Les équations d'équilibre du système biphasique se déduisent des équations générales du mouvement (2.29) en annulant les forces volumiques et les accélérations :

$$(3.109\text{-a}) \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{I} = \underline{0}$$

$$(3.109\text{-b}) \quad \text{div} (\sigma^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) - \underline{I} = \underline{0}$$

ce qui s'explique en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$(3.110\text{-a}) \quad \frac{d\sigma_{rr}^m}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^m - \sigma_{\theta\theta}^m}{r} + I = 0$$

$$(3.110\text{-b}) \quad \frac{d\sigma^r}{dr} + \frac{\sigma^r}{r} - I = 0$$

En reportant (3.105-a) dans (3.106), il vient :

$$(3.111) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}^m &= -P_0 + (\lambda + 2\mu) M'(r) + \lambda \frac{M(r)}{r} \\ \sigma_{\theta\theta}^m &= -P_0 + (\lambda + 2\mu) \frac{M(r)}{r} + \lambda M'(r) \\ \sigma_{zz}^m &= -P_0 + \lambda \left(M'(r) + \frac{M(r)}{r} \right) \end{aligned}$$

5. Les dérivées successives par rapport à r sont notées ', '' , etc.

De même, en reportant (3.103) et (3.105-b) dans (3.107), il vient :

$$(3.112) \quad \sigma^r(r) = \frac{K_o}{r} B'(r)$$

La substitution de (3.111) et (3.112) dans les équations d'équilibre (3.110) fournit finalement, compte tenu de (3.108), le système d'équations différentielles suivant :

$$(3.113) \quad \begin{cases} \frac{K_o}{r} B''(r) - c_I [B(r) - M(r)] = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \left(M'(r) + \frac{M(r)}{r} \right)' + c_I [B(r) - M(r)] = 0 \end{cases}$$

4.2.3 Conditions aux limites

De façon naturelle, on impose que les déplacements à l'infini s'annulent pour les deux phases, soit :

$$(3.114) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} B(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} M(r) = 0$$

Sur la paroi du tunnel ($r = R$) s'applique la pression P_c . Cette pression fictive, sensée modéliser la décompression progressive du massif, *ne s'applique qu'à la phase matrice*, qui seule subit le déconfinement. La condition à la limite s'écrit donc :

$$(3.115) \quad \sigma_{rr}^m(r = R) = (\lambda + 2\mu)M'(R) + \lambda \frac{M(R)}{R} - P_0 = -P_c$$

ou encore :

$$(3.116) \quad (\lambda + 2\mu)M'(R) + \lambda \frac{M(R)}{R} = \lambda_c P_0$$

La phase renforcement est quant à elle supposée libre de contraintes sur la paroi, soit :

$$(3.117) \quad \sigma^r(r = R) = \frac{K_o}{R} B'(R) = 0$$

On constate que la solution ne dépend linéairement que du paramètre de chargement λ_c . On donnera donc les résultats pour la configuration finale, c'est à dire $\lambda_c = 1$.

4.2.4 Résolution

Le système différentiel (3.113) ne peut pas être résolu analytiquement. On va donc se donner un jeu de valeurs pour les paramètres du problème, et effectuer une résolution numérique par la *méthode des différences finies*. Le principe de la méthode est détaillé dans l'annexe D.

Hormis pour c_I , on a choisi le jeu de paramètres utilisé par Bernaud *et al.* (1995). Les valeurs sont reportées dans le tableau ci-dessous. Le rayon du tunnel est $R = 3$ m.

Roche	Module d'Young	$E^m=100$ MPa
	Coefficient de Poisson	$\nu=0,498$
	Coefficients de Lamé	$\lambda = 8311$ MPa
		$\mu = 33,1$ MPa
	Pression géostatique	$P_0=1,2$ MPa
Boulons	Diamètre	$d= 20$ mm
	Densité	$\eta^r=1$ b./m ²
	Rigidité ^a	$K_o=188,5$ MPa
Interaction	Coefficient d'élasticité	$c_I= 10$ MN/m ⁴

TAB. 3.1: Tunnel boulonné - Valeurs numériques des paramètres

^a Le module d'Young de l'acier est pris égal à 200 000 MPa

4.2.5 Interprétation des résultats

Les résultats du calcul numérique sont donnés sur la figure 3.12, où l'on a représenté d'une part les déplacements adimensionnels $|B(r)|/R$, $|M(r)|/R^6$, et l'effort dans la phase renforcement σ^r en fonction de r/R . On a également figuré la différence $(|B(r) - M(r)|/R)$, qui représente, au facteur c_I près, l'intensité de l'interaction entre les phases, c'est à dire du cisaillement d'interface entre la roche et les boulons à l'échelle microscopique.

On peut observer très nettement deux zones dans le massif :

- A proximité de la paroi du tunnel ($R \leq r \lesssim 2R$), la convergence de la phase matrice est plus grande que celle de la phase renforcement ($|M(r)| > |B(r)|$). Les boulons jouent un rôle *actif* en ce sens qu'ils « retiennent » la masse rocheuse. Leur tension, nulle en paroi, croît donc progressivement sous l'effet du mouvement centripète de la roche. Le cisaillement d'interface est dirigé vers l'intérieur du massif.
- Dans le reste du massif ($2R \lesssim r \leq \infty$), le cisaillement d'interface change de signe : les boulons sont maintenant *ancrés* dans la roche, qui les retient. Leur tension décroît progressivement jusqu'à s'annuler à l'infini.

Le calcul élastique avec le modèle biphasique rend donc compte des observations habituelles faites pour les tunnels boulonnés (Oreste et Peila, 1996) : allure des déplacements en paroi, répartition de la tension dans les boulons. On retrouve également les résultats de Hyett *et al.* (1996) qui modélisent séparément la roche et le boulon.

6. Dans le repère choisi, les déplacements radiaux de chaque phase sont de signe négatif (convergence).

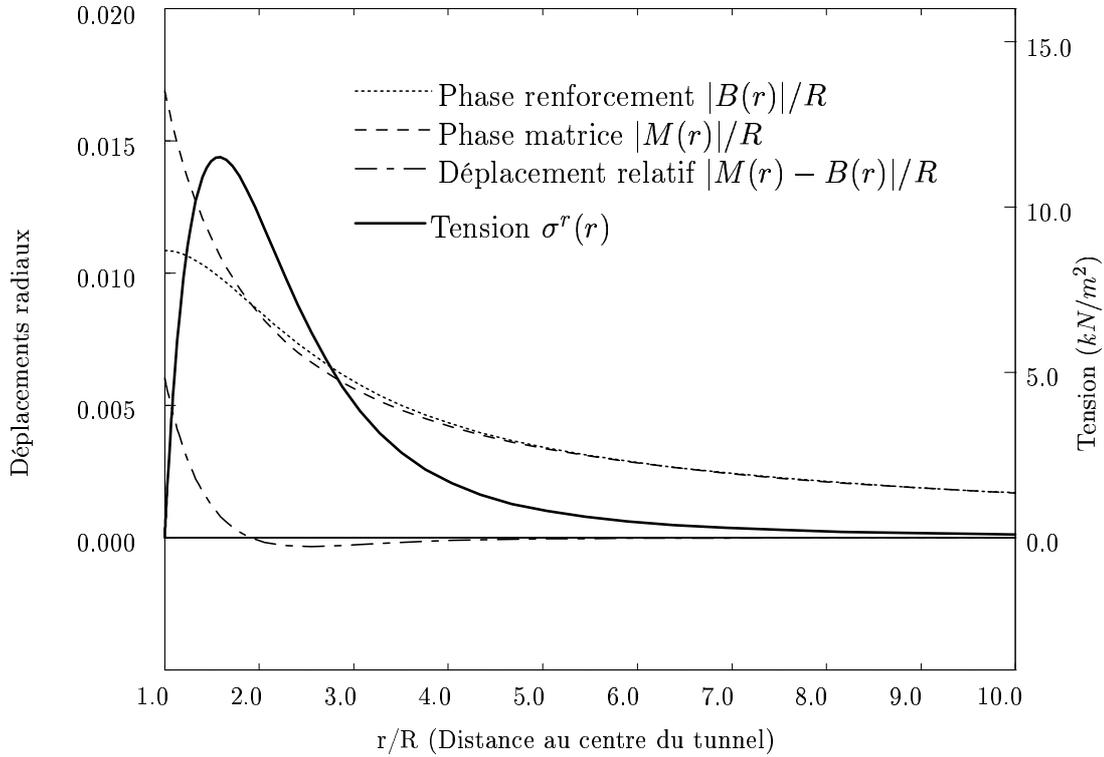
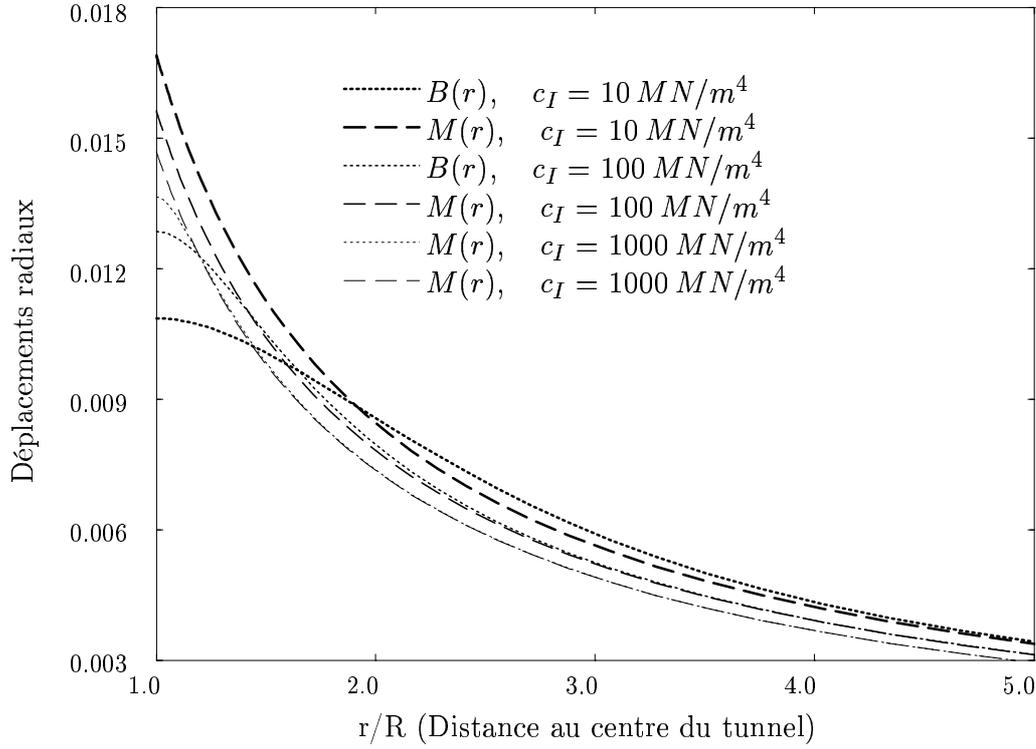


FIG. 3.12: Tunnels profonds - Déplacements radiaux et effort dans les boulons

L'étendue de la zone active dépend de la valeur de la constante d'interaction c_I . On représente sur la figure 3.13 les courbes de déplacement pour différentes valeurs de c_I .

Plus c_I augmente, plus la zone active rétrécit. On retrouve ici le phénomène d'*effet de bord* déjà constaté à la section 3 pour la compression transverse d'un bloc en déformation plane. On montrera au chapitre 6 que la constante c_I peut également être interprétée en terme de *dimension de la cellule représentative* du renforcement, et donc être estimée simplement en fonction de la géométrie de cette cellule.

Lorsque $c_I \rightarrow \infty$, on retrouve le modèle adhérent pour lequel les deux champs de déplacement $B(r)$ et $M(r)$ sont identiques. Ce cas est traité explicitement ci-après.

FIG. 3.13: Tunnels profonds - Influence de la constante d'interaction c_I

4.3 Solution élastique - modèle adhérent

4.3.1 Equations du problème

L'adhérence parfaite conduit à introduire un champ de déplacement unique pour les deux phases, soit $\underline{\xi} = u(r) \underline{e}_r$. Le tenseur des déformations associées s'écrit :

$$(3.118) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = u'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u(r)}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$$

Le comportement élastique global donne le tenseur des contraintes totales :

$$(3.119) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = -P_0 \underline{\underline{1}} + \lambda \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{K_o}{r} \underline{e}_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$$

En reportant (3.118) dans (3.119), et en écrivant l'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{0}}$, il vient :

$$(3.120) \quad \left(1 + \varpi \frac{R}{r}\right) u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = 0$$

où le paramètre adimensionnel ϖ , qui représente la rigidité relative des renforcements par rapport à la matrice, vaut :

$$(3.121) \quad \varpi = \frac{K_o/R}{\lambda + 2\mu}$$

4.3.2 Conditions aux limites

Dans le modèle adhérent, elles doivent être précisées globalement pour l'ensemble des phases. On impose donc d'une part la nullité du déplacement à l'infini :

$$(3.122) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 0$$

et d'autre part la condition de confinement à la paroi du tunnel :

$$(3.123) \quad \Sigma_{rr}(r = R) = (\lambda + 2\mu) u'(R) + \lambda \frac{u(R)}{R} + \frac{K_o}{R} u'(R) - P_0 = -P_c$$

soit :

$$(3.124) \quad (\lambda + 2\mu + \frac{K_o}{R}) u'(R) + \lambda \frac{u(R)}{R} = \lambda_c P_0$$

4.3.3 Résolution

Les équations et les conditions aux limites précédentes sont exactement celles données par Greuell (1993), qui avait postulé la décomposition additive du tenseur des contraintes totales. On retrouve donc sa solution :

$$(3.125) \quad u(r) = \frac{-P_0 R}{(\lambda + 2\mu) \ln(1 + \varpi) - 2(\lambda + \mu)(1 - \ln(1 + \varpi)/\varpi)} \left(1 - \frac{r}{\varpi R} \ln\left(1 + \frac{\varpi R}{r}\right) \right)$$

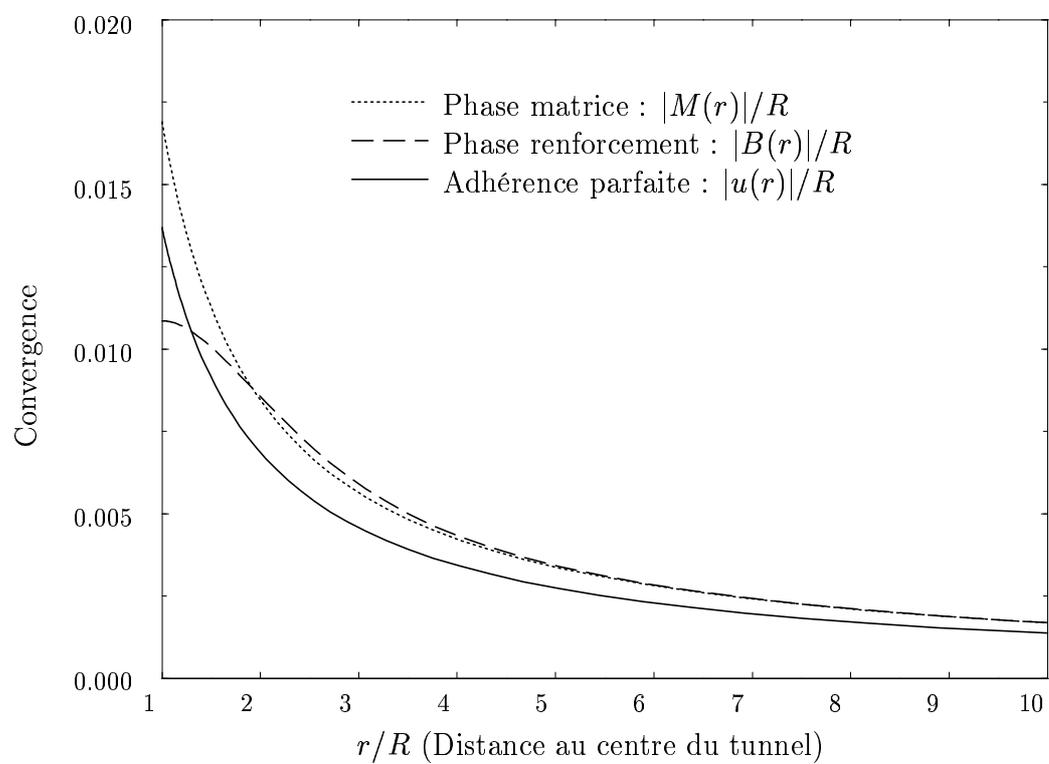
La figure 3.14 représente les courbes de convergence pour les modèles général et adhérent. On constate que la convergence en paroi calculée par le modèle adhérent est comprise entre celle des phases matrice et renforcement dans le modèle général. Les trois courbes sont asymptotiquement identiques quand $r \rightarrow +\infty$.

Greuell (1993, Chap. 4) donne également la solution analytique complète en élasticité dans le cas où la longueur des boulons l_b est *finie*. Cette solution sera utilisée au chapitre 5, section 1.3 pour valider le code de calcul numérique.

4.4 Remarques complémentaires

Le modèle multiphasique général permet de rendre compte d'effets de bord observés dans les tunnels boulonnés. En modifiant légèrement les données du problème, on peut traiter également :

- le cas du boulonnage à *ancrage ponctuel*. Il suffit en effet de choisir $c_I = 0$, et d'imposer des conditions de liaison cinématiques entre les deux phases aux points d'ancrage des boulons, soit $\{M(r = R) = B(r = R); M(r = R + l_b) = B(r = R + l_b)\}$.
- le cas de l'utilisation de *plaques d'ancrage* à la paroi du tunnel en plus de l'ancrage réparti des boulons. Il suffit d'imposer la condition $M(r = R) = B(r = R)$ à la paroi du tunnel à la place des conditions de paroi libre (3.115)-(3.117).

FIG. 3.14: *Tunnels profonds - Comparaison du modèle général et adhérent*

5 Conclusion

Ce troisième chapitre nous a permis de mettre en œuvre le modèle multiphasique de matériau renforcé par la résolution analytique de différents problèmes aux limites. A travers quelques exemples illustratifs, nous avons essayé de balayer l'ensemble des sous-catégories du modèle : comportement élastique ou élasto-plastique des phases, version « générale » ou à « adhérence parfaite ».

Les exemples de la compression simple et de la compression en déformation plane nous ont permis de nous familiariser avec les méthodes de résolution. Malgré leur relative simplicité, ces problèmes mettent en lumière deux aspects de la richesse du modèle multiphasique : l'écroutissement global *intrinsèque* associé au comportement élasto-plastique adhérent; la prise en compte d'effets de bord par le modèle général.

Par ailleurs nous avons résolu le problème plus concret de la convergence d'un tunnel profond boulonné. Les résultats obtenus sont intéressants à deux points de vue. D'une part la méthode proposée a été justifiée dans le cadre mécanique cohérent de la modélisation multiphasique. D'autre part, on a pu déterminer la répartition des efforts dans les boulons et confirmer des résultats expérimentaux ou théoriques.

Enfin, et ce n'est pas le moindre de ses apports, ce chapitre constitue un ensemble de solutions analytiques de référence. Elles vont notamment permettre la validation du code de calcul CASTOR développé spécifiquement pour l'implémentation du modèle multiphasique. Eu égard à ces différentes remarques, nous espérons que le lecteur nous a déjà pardonné le caractère parfois « technique » du contenu de ce chapitre, et nous l'invitons à pénétrer maintenant avec nous dans l'univers du numérique.

Chapitre 4

Mise en œuvre par éléments finis du modèle multiphasique

Pour pouvoir être utilisé en dehors d'un cadre strictement académique, un modèle mécanique doit être implémenté dans un code de calcul directement utilisable par l'ingénieur. Dans cette optique, le modèle multiphasique, extension de la modélisation du milieu continu, se prête naturellement à une telle implantation. L'objet de ce chapitre est de décrire plus particulièrement la mise en œuvre par éléments finis.

On commence par rappeler la démarche qui conduit à la modélisation éléments finis pour le milieu continu en élasticité : principe de minimum de l'énergie potentielle, puis discrétisation des équations.

On aborde ensuite le traitement numérique de l'élasto-plasticité, en insistant sur la méthode des contraintes initiales.

On développe ensuite la formulation par éléments finis du modèle multiphasique, d'abord dans le cadre adhérent en élasto-plasticité, puis dans le cadre général en élasticité. On est amené à introduire dans le premier cas un algorithme de plasticité modifié, dans le second une famille d'éléments multiphasiques à plusieurs champs.

L'implémentation du modèle multiphasique adhérent a été faite dans un nouveau code de calcul baptisé CASTOR. On examine enfin l'architecture de ce code et ses potentialités.

Sommaire

1	La méthode des éléments finis pour le milieu continu élastique monphasique	135
1.1	Introduction	135
1.2	Principe de minimum de l'énergie potentielle	135
1.2.1	Position du problème élastique	135
1.2.2	Dualisation des équations	136
1.3	La technique des éléments finis	137
1.3.1	Maillage de la géométrie	137
1.3.2	Principe de minimum discrétisé	137
1.3.3	Expression discrétisée de l'énergie	139
1.3.4	Formes intégrales élémentaires discrétisées	140
1.3.5	Assemblage	141
1.3.6	Résolution du problème de minimisation	141
1.4	Conclusion	142
2	Les éléments finis en élasto-plasticité	143
2.1	Introduction	143
2.1.1	Position du problème	143
2.1.2	Démarche générale de résolution	143
2.2	Discrétisation temporelle du problème d'évolution	144
2.3	Algorithme de résolution global	144
2.4	Algorithme d'intégration local	146
2.4.1	Introduction	146
2.4.2	Ecriture du problème	146
2.4.3	Généralités sur l'intégration numérique des équations différentielles	146
2.4.4	Application de l'algorithme d'Euler implicite	147
2.4.5	Interprétation en terme d'optimisation	149
2.4.6	Utilisation d'un autre prédicteur	149
2.5	Vérification de la convergence	150
2.6	Autres méthodes de résolution numérique des problèmes de plasticité	152
2.6.1	Méthode de Newton-Raphson	152
2.6.2	Comportement tangent et tangent consistant	154
2.6.3	Méthodes quasi-Newton et accélérateurs de convergence	156
2.7	Récapitulatif	157
2.8	Conclusion	157
3	Implémentation du modèle multiphasique adhérent	161
3.1	Introduction	161

3.2	Traitement de l'élasticité	161
3.2.1	Principe de minimum de l'énergie potentielle	161
3.2.2	Discrétisation du principe de minimum	162
3.3	Traitement de la plasticité	163
3.3.1	Position du problème	163
3.3.2	Algorithme de plasticité modifié	164
3.3.3	Autres méthodes de résolution	166
3.3.4	Récapitulatif	167
3.4	Conclusion	167
4	Implémentation du modèle multiphasique général	169
4.1	Introduction	169
4.2	Principe de minimum de l'énergie potentielle	169
4.2.1	Position du problème d'élasticité biphasique	169
4.2.2	Principe du minimum en déplacement	170
4.3	Formulation éléments finis en déformation plane	172
4.3.1	Discrétisation et interpolation des champs de déplacement	172
4.3.2	Déformations des phases	173
4.3.3	Contraintes partielles	174
4.3.4	Efforts d'interaction	174
4.3.5	Matrice de rigidité et vecteur force élémentaires	175
4.3.6	Résolution	176
4.4	Généralisation et remarques sur l'implémentation	176
4.5	Conclusion	177
5	Le code CASTOR	179
5.1	Motivation	179
5.2	Le pré-processeur prepro	180
5.3	Le code de calcul castor	181
5.3.1	En élasticité	181
5.3.2	En élasto-plasticité	183
5.4	Le post-processeur postpro	183
6	Conclusion	185

1 La méthode des éléments finis pour le milieu continu élastique monophasique

1.1 Introduction

La formulation d'un problème aux limites pour le milieu continu élastique requiert l'écriture des équations d'équilibre, de la loi de comportement ainsi que des conditions aux limites. La résolution du système d'équations aux dérivées partielles ainsi constitué n'est possible *analytiquement* que lorsque la géométrie du problème est suffisamment simple.

Dans le cas général, seules des *solutions approchées* par des techniques d'analyse numérique sont accessibles. La *méthode des éléments finis* développée depuis le début des années 60 est aujourd'hui la plus largement utilisée. Nous allons présenter dans cette section le *principe de minimum de l'énergie potentielle* sur lequel s'appuie cette méthode, puis sa discrétisation.

Il s'agit ici de définir les notations et résumer les concepts clés, qui seront ensuite étendus au milieu multiphasique. Certains points relevant des techniques de programmation sont renvoyés dans l'annexe F. La rédaction de cette section doit beaucoup aux ouvrages désormais classiques de Dhatt et Touzot (1981), Zienkiewicz et Taylor (1994a,b) et Batoz et Dhatt (1995), auquel il sera fait plus précisément référence dans le corps du texte.

1.2 Principe de minimum de l'énergie potentielle

1.2.1 Position du problème élastique

Soit \mathcal{S} un système mécanique occupant un volume géométrique Ω soumis aux sollicitations suivantes :

- des forces de volume $\rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x})$ intervenant dans l'équation d'équilibre local :

$$(4.1) \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$$

- des forces de surface $\underline{T}^d(\underline{x})$ appliquées sur un sous-ensemble S_T de $\partial\Omega$ vérifiant¹ :

$$(4.2) \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_T$$

- des conditions aux limites en déplacement de la forme :

$$(4.3) \quad \underline{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\xi}}^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_\xi \quad , \quad S_\xi \cup S_T = \partial\Omega$$

1. On suppose pour simplifier les notations que les conditions aux limites en efforts et en déplacement sont imposées sur les mêmes domaines S_T et S_ξ pour toutes les composantes. (L'écriture la plus générale des conditions aux limites a été donnée au chapitre 3, voir Eq.(3.1)). Il s'agit simplement d'une facilité d'écriture et non d'une restriction de la généralité du propos, comme on le verra plus loin.

Se plaçant dans le cadre des petites perturbations, on rappelle les définitions suivantes :

- l'espace des champs de contrainte *statiquement admissibles* est l'ensemble des $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifiant (4.1) et (4.2).
- l'espace des champs de déplacement *cinématiquement admissibles*, noté $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\underline{\xi}}^d)$, est l'ensemble des $\underline{\underline{\xi}}$ continus, continûment différentiables par morceaux et vérifiant (4.3).
- la *densité d'énergie libre* $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ permet d'exprimer la loi de comportement sous la forme :

$$(4.4) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

La solution du problème d'élasticité est l'ensemble des champs $(\tilde{\underline{\underline{\xi}}}, \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}})$ tels que $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ soit statiquement admissible, $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$ soit cinématiquement admissible, et $(\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}})$ vérifient (4.4) .

1.2.2 Dualisation des équations

Reprenant le raisonnement de Salençon (1996b, chap. X), on écrit le principe des travaux virtuels sous la forme suivante² :

$$(4.5) \quad \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{\underline{\xi}}^d), \quad \int_{\Omega} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\xi}} \, d\Omega - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\xi}} \, dS - \int_{S_\xi} \underline{\underline{\xi}}^d \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{n}} \, dS = 0$$

Appliquant cette équation au champ solution $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$, et soustrayant membre à membre, il vient :

$$(4.6) \quad \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{\underline{\xi}}^d), \quad \int_{\Omega} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{\xi}} - \tilde{\underline{\underline{\xi}}}) \, d\Omega + \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot (\underline{\underline{\xi}} - \tilde{\underline{\underline{\xi}}}) \, dS$$

D'après (4.4), on a :

$$(4.7) \quad \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}})$$

La stabilité du matériau constitutif implique la convexité de la fonction $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$, ce qui s'écrit :

$$(4.8) \quad \forall (\underline{\underline{\varepsilon}}, \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}), \quad \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \psi(\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \geq \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}})$$

Reportant (4.7) et (4.8) dans (4.6), il vient :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{\underline{\xi}}^d), \quad & \int_{\Omega} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\xi}} \, d\Omega - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\xi}} \, dS \\ & \geq \int_{\Omega} \psi(\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\xi}}} \, d\Omega - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \tilde{\underline{\underline{\xi}}} \, dS \end{aligned}$$

² Pour simplifier, on omet dorénavant la dépendance en $\underline{\underline{x}}$ des différentes grandeurs intervenant dans les intégrales.

Il en résulte que le champ $\underline{\xi}$ solution du problème d'élasticité minimise sur l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d)$ la fonctionnelle *énergie potentielle*, notée $\mathcal{E}(\underline{\xi})$ et définie par :

$$(4.10\text{-a}) \quad \mathcal{E}(\underline{\xi}) = \mathcal{W}(\underline{\xi}) - \Phi(\underline{\xi})$$

$$(4.10\text{-b}) \quad \mathcal{W}(\underline{\xi}) = \int_{\Omega} \psi(\underline{\varepsilon}) \, d\Omega$$

$$(4.10\text{-c}) \quad \Phi(\underline{\xi}) = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{\xi} \, d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} \, dS$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire isotherme, on rappelle que la densité d'énergie libre s'écrit de façon générale :

$$(4.11) \quad \psi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{A}} : \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} : (\underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{A}} : \underline{\varepsilon}_{\text{an}})$$

où $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{\sigma}}_0, \underline{\varepsilon}_{\text{an}}$ désignent respectivement le *tenseur des modules élastiques*, le tenseur des *contraintes initiales* et le tenseur des *déformations d'origine anélastique*.

L'espace affine des champs de déplacement cinématiquement admissibles $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d)$ étant en général de dimension infinie, le principe de minimum de l'énergie potentielle ne permet pas d'obtenir directement la solution du problème élastique. Par contre, en se restreignant à des sous-espaces de dimension finie n , notés \mathbb{C}_n dans la suite, on peut calculer des approximations de la solution exacte. Naturellement, celles-ci seront d'autant meilleures que la dimension n sera grande.

Remarque On montre de façon similaire un principe de minimum en contraintes sur l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles. Par discrétisation de ces principes, on aboutit dans chaque cas à un modèle éléments finis dit « déplacement » ou « contrainte ». On développe maintenant le modèle déplacement, le plus classiquement utilisé.

1.3 La technique des éléments finis

1.3.1 Maillage de la géométrie

La construction d'espaces \mathbb{C}_n appropriés s'appuie sur la discrétisation de la géométrie du système. On appelle *maillage* le recouvrement du volume Ω par N_e *éléments* polyédriques, notés \mathcal{V}_e , qui vérifient la propriété suivante : l'intersection de deux éléments adjacents est un sommet, une arête ou une face *entière*. Si Ω n'est pas polyédrique, le recouvrement n'est qu'approché (figure 4.1).

1.3.2 Principe de minimum discrétisé

On définit les champs de déplacement $\underline{\xi}_n$ à partir de leur valeur aux *nœuds* du maillage. Les nœuds sont les sommets des éléments ainsi qu'éventuellement des points supplémentaires situés sur les côtés et à l'intérieur (figure 4.1) .

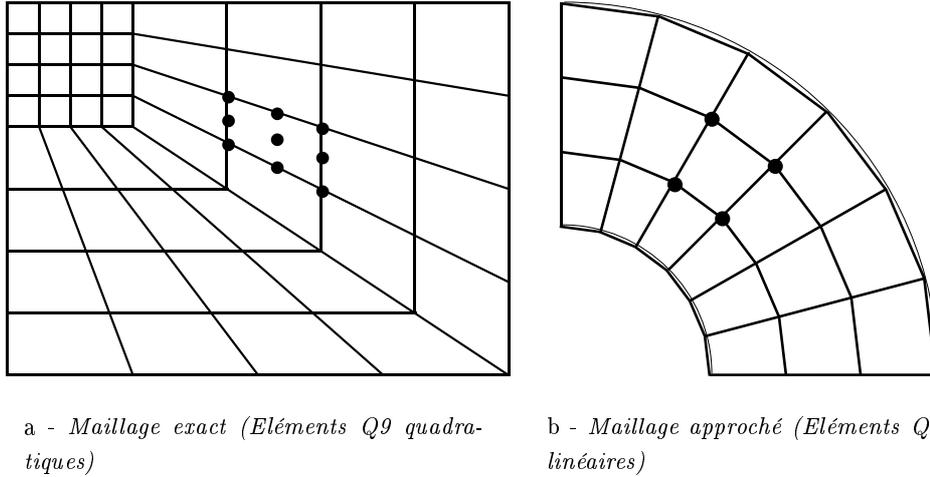


FIG. 4.1: Exemples de maillages

On note \underline{u}_e le vecteur des déplacements nodaux de l'élément e . Sa taille est le produit de la dimension de l'espace dans lequel est plongé Ω par le nombre de noeuds de l'élément. Chaque composante constitue un *degré de liberté* de l'élément. La restriction du champ $\underline{\xi}_n$ à l'élément s'écrit comme l'interpolation suivante :

$$(4.12) \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V}_e, \quad \underline{\xi}_n(\underline{x})|_{\mathcal{V}_e} = \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e$$

où \mathbf{N}_e désigne la matrice des *fonctions de forme* polynômiales en \underline{x} . Selon le degré des polynômes, on parle d'éléments de type linéaire, quadratique, cubique, etc... Le nombre de noeuds nécessaire à la définition (4.12) est lié au degré de l'interpolation choisie.

Tout champ de déplacement $\underline{\xi}_n$ est donc complètement défini par l'ensemble des composantes de déplacement de tous les noeuds du maillage. Soit $\underline{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ ce vecteur. Le caractère cinématiquement admissible de $\underline{\xi}_n$ impose que les composantes associées aux noeuds situés sur S_ξ prennent des valeurs fixées (*i.e* données par $\underline{\xi}^d$). Désignant par $\mathcal{I}(k)$ le numéro du k -ième degré de liberté ainsi « bloqué » ($k = 1, \dots, N_{c.1}$), et par $u_{\mathcal{I}(k)}^d$ sa valeur imposée, on explicite l'espace \mathbb{C}_n sous la forme :

$$(4.13) \quad \mathbb{C}_n = \left\{ \underline{U} \in \mathbb{R}^n, \quad u_{\mathcal{I}(k)} = u_{\mathcal{I}(k)}^d, \quad k = 1, \dots, N_{c.1} \right\}$$

La restriction de la fonctionnelle \mathcal{E} à \mathbb{C}_n devient une fonction définie comme suit :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}|_{\mathbb{C}_n} &\equiv \mathcal{E}_n : \mathbb{C}_n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{U} &\longrightarrow \mathcal{E}_n(\underline{U}) = \mathcal{E}(\underline{\xi}_n(\underline{U})) \end{aligned}$$

La meilleure approximation de la solution du problème élastique dans \mathbb{C}_n est la solution du *problème de minimisation discrétisé* suivant :

$$(4.15) \quad (\mathcal{P}) : \text{Trouver } \underline{\tilde{U}} \equiv \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n\} \text{ tel que } \begin{cases} \underline{\tilde{U}} \in \mathbb{C}_n \\ \mathcal{E}_n(\underline{\tilde{U}}) = \min_{\underline{U} \in \mathbb{C}_n} \mathcal{E}_n(\underline{U}) \end{cases}$$

Dans la pratique, si l'on choisit une densité d'énergie libre quadratique (Eq.(4.11)), la fonction \mathcal{E}_n est également quadratique de ses arguments, et de plus, strictement convexe. La minimisation d'une telle fonction conduit donc à un système d'équations linéaires qui admet une solution unique sur \mathbb{C}_n .

1.3.3 Expression discrétisée de l'énergie

Pour exprimer de façon commode $\mathcal{E}_n(\underline{U})$, on utilise la notation matricielle déjà introduite à la section 4.1.1 du chapitre 2. Rappelons que les tenseurs d'ordre 2 (déformation et contrainte) sont remplacés par les vecteurs de leurs composantes dans une base orthonormée, tandis que ceux d'ordre 4 deviennent des matrices carrées. Pour le détail des notations, on se reportera à la page 78.

Le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ est calculé par dérivation du champ de déplacement. Notant \mathbf{L} la matrice symbolique de différentiation associée à la partie symétrique de l'opérateur gradient, on peut écrire :

$$(4.16) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{L} \cdot \underline{\underline{\xi}}_n$$

Substituant (4.12), on exprime $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sur chaque élément en fonction des déplacements nodaux par :

$$(4.17) \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V}_e, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e = \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_e$$

Notant enfin \mathbf{D} la matrice d'élasticité associée au tenseur des modules élastiques $\underline{\underline{\underline{A}}}$, la densité d'énergie libre (4.11) devient :

$$(4.18) \quad \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} {}^t \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + {}^t \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot [\underline{\underline{\sigma}}_o - \mathbf{D} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{an}]$$

dont on tire la loi de comportement :

$$(4.19) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{an}) + \underline{\underline{\sigma}}_o$$

Pour exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_n(\underline{U})$ (Eqs.(4.10),(4.14)), on décompose les intégrales sur les éléments du maillage, soit :

$$(4.20-a) \quad \mathcal{E}_n(\underline{U}) \equiv \mathcal{W}_{|\mathbb{C}_n}(\underline{U}) - \Phi_{|\mathbb{C}_n}(\underline{U})$$

$$(4.20-b) \quad \mathcal{W}_{|\mathbb{C}_n}(\underline{U}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\mathcal{V}_e} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} w_e(\underline{u}_e)$$

$$(4.20-c) \quad \Phi_{|\mathbb{C}_n}(\underline{U}) = \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\mathcal{V}_e} \rho \underline{F} \cdot \underline{\underline{\xi}}_n d\Omega + \int_{\mathcal{V}_e \cap S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\underline{\xi}}_n dS \right] = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e(\underline{u}_e)$$

1.3.4 Formes intégrales élémentaires discrétisées

Reportant (4.12), (4.17) et (4.18) dans (4.20), on montre que :

$$(4.21\text{-a}) w_e(\underline{u}_e) = \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \left[\int_{\mathcal{V}_e} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e d\Omega \right] \cdot \underline{u}_e - {}^t \underline{u}_e \cdot \int_{\mathcal{V}_e} ({}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{\text{an}} - {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_o) d\Omega$$

$$(4.21\text{-b}) \phi_e(\underline{u}_e) = {}^t \underline{u}_e \cdot \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \rho \underline{F} d\Omega + {}^t \underline{u}_e \cdot \int_{\mathcal{V}_e \cap S_T} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \underline{T}^d dS$$

On introduit alors les notations usuelles suivantes pour :

- la *matrice de rigidité élémentaire* :

$$(4.22) \quad \mathbf{k}_e = \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e d\Omega$$

- le *vecteur force élémentaire* :

$$(4.23) \quad \underline{f}_e = \underline{f}_e^{\text{an}} + \underline{f}_e^{\sigma} + \underline{f}_e^{\Omega} + \underline{f}_e^{S_T}$$

dont la décomposition selon le type de sollicitations s'écrit :

$$(4.24) \quad \underline{f}_e^{\text{an}} = \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{\text{an}} d\Omega \quad (\text{déformations anélastiques imposées})$$

$$(4.25) \quad \underline{f}_e^{\sigma} = \int_{\mathcal{V}_e} -{}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_o d\Omega \quad (\text{contraintes initiales})$$

$$(4.26) \quad \underline{f}_e^{\Omega} = \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \rho \underline{F} d\Omega \quad (\text{forces volumiques sur } \mathcal{V}_e)$$

$$(4.27) \quad \underline{f}_e^{S_T} = \int_{\mathcal{V}_e \cap S_T} {}^t \mathbf{N}_e \cdot \underline{T}^d dS \quad (\text{forces surfaciques sur } \mathcal{V}_e \cap S_T)$$

Reportant ces expressions dans (4.20) et (4.21), on peut mettre finalement l'énergie potentielle $\mathcal{E}_n(\underline{U})$ sous la forme :

$$(4.28) \quad \mathcal{E}_n(\underline{U}) = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \mathbf{k}_e \cdot \underline{u}_e - {}^t \underline{u}_e \cdot \underline{f}_e \right)$$

Remarque Dans le code implémenté sur ordinateur, le calcul des intégrales se fait numériquement par une méthode de quadrature : on approxime les intégrales par une combinaison pondérée d'évaluations de l'intégrande en certains points du domaine d'intégration (points de Gauss ou de Hammer selon la forme de \mathcal{V}_e). Le lecteur se reportera à l'annexe F, section 1 pour les détails. Le formalisme qui y est développé est supposé connu du lecteur dans la suite du mémoire.

1.3.5 Assemblage

Le vecteur global des déplacements \underline{U} a été défini comme l'ensemble des composantes des déplacements élémentaires \underline{u}_e . On a ainsi choisi une numérotation globale des degrés de liberté du système. Pour chaque élément, la correspondance entre numérotation locale et globale des degrés de liberté est définie par une *table de localisation*.

Ayant calculé les quantités élémentaires (4.22)-(4.27), on procède ensuite à l'*assemblage* des matrices et des vecteurs force. Ce processus consiste en l'injection, pour chaque élément, du vecteur \underline{f}_e (resp. de la matrice \mathbf{k}_e) dans le vecteur force global \underline{F} (resp. la matrice de rigidité globale \mathbf{K}) en utilisant la même correspondance de numérotation que celle employée pour ordonner les \underline{u}_e dans \underline{U} . Il vient alors :

$$(4.29) \quad \mathcal{E}_n(\underline{U}) = \frac{1}{2} {}^t \underline{U} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{U} - {}^t \underline{U} \cdot \underline{F}$$

Il suffit maintenant de minimiser cette fonction quadratique sur \mathbb{C}_n .

1.3.6 Résolution du problème de minimisation

Comme on l'a remarqué précédemment, l'espace de minimisation \mathbb{C}_n n'est qu'un sous-espace affine de \mathbb{R}^n (Eq.(4.13)). Le problème (\mathcal{P}) défini en (4.15) peut s'interpréter comme un *programme* de minimisation sur \mathbb{R}^n (Chateau et Dormieux, 1998) sous les contraintes linéaires :

$$(4.30) \quad u_{\mathcal{I}(k)} - u_{\mathcal{I}(k)}^d = 0, \quad k = 1, \dots, N_{c,1}$$

Il se résout par la technique des multiplicateurs de Lagrange. On montre que la minimisation se ramène à la résolution d'un système de type :

$$(4.31) \quad \begin{cases} \mathbf{K} \cdot \tilde{\underline{U}} + \mathfrak{L} \cdot \underline{\Lambda} & = \underline{F} \\ {}^t \mathfrak{L} \cdot \tilde{\underline{U}} & = \underline{U}^d \end{cases}$$

Dans cette équation, \mathfrak{L} est une matrice associant chaque degré de liberté bloqué à la valeur qui lui est imposée, $\underline{\Lambda}$ désigne le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à la prise en compte des conditions (4.30), et \underline{U}^d est le vecteur des déplacements imposés³.

La minimisation sous contrainte conduit à un système linéaire dont la taille est la somme du nombre de degrés de liberté global n et du nombre de degrés de liberté bloqués $N_{c,1}$. Cependant, par une résolution partielle de (4.31), on peut se ramener à un système linéaire modifié, (indices $\cdot_{c,1}$) de taille n , qui s'écrit :

$$(4.32) \quad \mathbf{K}_{c,1} \cdot \tilde{\underline{U}} = \underline{F}_{c,1}$$

3. La prise en compte des conditions aux limites est donc en pratique effectuée successivement pour chaque composante de déplacement imposé. La restriction mentionnée dans la note de la page 135 pour la clarté de l'exposé se lève donc d'elle même.

Cette équation traduit sous forme discrétisée l'équilibre entre les efforts intérieurs et les efforts extérieurs appliqués au système. Par inversion de la matrice $\mathbf{K}_{c,1}$, on obtient $\tilde{\underline{U}}$, dont on peut déduire le champ de déplacement $\underline{\xi}_n$ par (4.12) et les champs de déformation et de contrainte par (4.17) et (4.19).

1.4 Conclusion

La minimisation de l'énergie potentielle du système sur un sous-espace de dimension finie n conduit à un système linéaire, dont les inconnues sont les déplacements nodaux. La résolution du problème élastique étant acquise, on peut aborder maintenant le cas de problèmes non linéaires, pour lesquels le comportement du matériau est élasto-plastique. Comme on va le voir, on effectue en effet dans ce cas une série de calculs élastiques.

Remarque A la discrétisation du principe de minimum de l'énergie est parfois préférée la méthode dite *de Galerkin* (Dhatt et Touzot, 1981; Faure, 1991). La *forme variationnelle* des équations d'équilibre (qui en l'occurrence exprime le principe des travaux virtuels) conduit à exprimer le champ de déplacement $\tilde{\underline{\xi}}$ solution du problème élastique comme la solution du problème suivant⁴:

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \text{Trouver } \tilde{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{0}) = \{ \underline{\xi} \text{ fonctions régulières sur } \Omega \mid \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in S_\xi \} \\ \mathfrak{A}(\underline{\xi}, \tilde{\underline{\xi}}) = \mathfrak{B}(\underline{\xi}) \quad \forall \underline{\xi} \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{0}) \end{aligned}$$

ou l'on a posé :

$$(4.34\text{-a}) \quad \mathfrak{A}(\underline{\xi}, \tilde{\underline{\xi}}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\tilde{\underline{\xi}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) \, d\Omega$$

$$(4.34\text{-b}) \quad \mathfrak{B}(\underline{\xi}) = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \underline{\xi} \, d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} \, dS$$

On montre que ce problème a une solution unique si la forme bilinéaire $\mathfrak{A}(\dots)$ est coercive (Théorème de Lax-Milgram). De plus, la restriction de ce problème à des sous-espaces \mathbb{C}_n de $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{0})$ de dimension finie n est équivalente au système linéaire (4.32).

Cette approche permet de montrer qu'on peut trouver une suite d'approximations $\underline{\xi}_n \in \mathbb{C}_n$ qui converge vers la solution $\tilde{\underline{\xi}}$ en norme dans $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{0})$. Ce résultat important justifie l'utilisation de la méthode des éléments finis. A l'inverse, le principe de minimum de l'énergie permet de « situer » les résultats obtenus (approximation par excès de l'énergie du système).

4. On considère ici que les déplacements imposés sur S_ξ sont nuls.

2 Les éléments finis en élasto-plasticité

2.1 Introduction

2.1.1 Position du problème

Avant d'entrer dans le détail de la résolution numérique, il est bon de se rappeler les équations constitutives d'un problème aux limites d'évolution élasto-plastique. Considérons donc un système mécanique \mathcal{S} de volume Ω , modélisé par un milieu continu de Cauchy, soumis à un chargement $\mathcal{Q}(t)$ (comprenant par exemple des efforts volumiques, surfaciques, des déplacements imposés) sur l'intervalle de temps $[0, T]$. La réponse de ce système est constituée de l'ensemble des champs $\{\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p\}$ définis sur $\Omega \times [0, T]$ vérifiant :

$$(4.35) \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{Equilibre local})$$

$$(4.36) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p) \quad (\text{Comportement élasto-plastique})$$

$$(4.37) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{Règle d'écoulement plastique})$$

$$(4.38) \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad (\text{Conditions de Kuhn-Tucker})$$

et des conditions aux limites de type (4.2)-(4.3).

2.1.2 Démarche générale de résolution

L'observation des équations précédentes fait ressortir deux caractéristiques du problème :

- d'une part la loi de comportement s'exprime de façon *différentielle*. Il va donc falloir discrétiser le processus de chargement dans le temps pour traiter le problème de façon *incrémentale*.
- d'autre part, les équations de la plasticité sont non linéaires. Pour un incrément de chargement, le calcul par éléments finis des déplacements nécessite donc une *résolution itérative*. Typiquement on va considérer les étapes suivantes :

1. A partir de l'équation d'équilibre discrétisée (voir section 1.3), on calcule une estimation des incréments de déplacements nodaux en fonction de l'incrément de chargement et des déformations plastiques accumulées. On en déduit l'incrément de déformation en tout point par (4.17).
2. L'incrément de déformation étant ainsi fixé, on évalue *localement* la réponse élasto-plastique en intégrant les équations (4.36)-(4.38), ce qui conduit à une nouvelle évaluation des déformations plastiques. Si celle-ci diffère de celle obtenue précédemment, l'équilibre est modifié. On itère alors au point 1.

3. Le processus est interrompu lorsqu'un critère de convergence, évalué à chaque itération est satisfait.

Dans la suite, on procède tout d'abord à la discrétisation temporelle du problème (section 2.2). Puis on s'intéresse à la résolution de l'équation d'équilibre discrétisée. On insiste en particulier sur la *méthode des contraintes initiales*, qui est implémentée dans le code CASTOR (section 2.3), mais on donne également un aperçu d'autres méthodes (section 2.6). On explicite ensuite l'algorithme d'intégration local pour un incrément de déformation donné (section 2.4). On discute les critères d'arrêt du processus itératif à la section 2.5. Finalement, un schéma récapitulatif est donné à la section 2.7.

2.2 Discrétisation temporelle du problème d'évolution

On s'intéresse dans ce mémoire à des évolutions quasi-statiques. Dans le cadre de la plasticité classique considérée ici (et à l'opposé de la viscoplasticité), le temps est fictif et n'intervient que comme *paramétrage* du processus de chargement.

Compte tenu de ces remarques, on note ($t_0 = 0, \dots, t_N = T$) les différents « instants » d'application du chargement, et ($\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_N$) les valeurs correspondantes. On note $\Delta \mathcal{Q}_n$ l'incrément de chargement appliqué entre t_n et t_{n+1} :

$$(4.39) \quad \Delta \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{n+1} - \mathcal{Q}_n$$

Le problème d'évolution est donc ramené à une succession de problèmes *incrémentaux*. On suppose connus à l'instant t_n les champs $\{\underline{\sigma}_n, \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^p\}$ équilibrant \mathcal{Q}_n et vérifiant localement la loi de comportement. On cherche à trouver l'état d'équilibre $\{\underline{\sigma}_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^p\}$ résultant de l'application de $\Delta \mathcal{Q}_n$.

Du point de vue des éléments finis, on note \underline{U}_n le champ des déplacements nodaux à l'instant t_n et \underline{Q}_n le *vecteur force* associée aux efforts extérieurs (voir Eqs.(4.25)-(4.27) pour les expressions exactes selon le type de sollicitations). La variation de chacune de ces quantités entre t_n et t_{n+1} est notée :

$$(4.40) \quad \Delta \varkappa_n = \varkappa_{n+1} - \varkappa_n \quad , \quad \varkappa \in \{\underline{U}, \underline{Q}, \underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p\}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, on utilise les notations matricielles « éléments finis » pour l'écriture des équilibres. Par souci de clarté, on continue d'employer la notation tensorielle lorsqu'il est question de quantités évaluées localement.

2.3 Algorithme de résolution global

On entend par *algorithme de résolution global* le processus qui permet d'obtenir le vecteur des déplacements nodaux à chaque itération. On présente dans cette section la *méthode des*

contraintes initiales (Zienkiewicz *et al.*, 1969; Nguyen, 1977), (de Buhan et Dormieux, 1996, Chap. 3), qui est celle implémentée dans CASTOR .

Pour en comprendre le principe, supposons tout d'abord connu le champ des déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^p(\underline{x})$ engendré dans la structure par l'application de $\underline{\Delta Q}_n$. Les interprétant comme des *déformations anélastiques imposées* sur chaque élément, on peut leur associer par (4.24) un vecteur force élémentaire. L'assemblage de ces contributions fournit le vecteur des *forces plastiques* $\underline{\Delta F}_n^p$. On obtient la solution en déplacement en résolvant l'équation d'équilibre incrémentale :

$$(4.41) \quad \mathbf{K} \cdot \underline{\Delta U}_n = \underline{\Delta Q}_n + \underline{\Delta F}_n^p$$

Bien sûr, le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^p(\underline{x})$ et par suite $\underline{\Delta F}_n^p$ sont initialement inconnus. En utilisant des approximations successives, on obtient par une série de *calculs élastiques à déformations imposées* des approximations de $\underline{\Delta U}_n$. Plus précisément :

- On initialise le processus en posant $\underline{\Delta F}_n^{p,0} = 0$ (Itération 1).
- Au début de l'itération i , on suppose connus le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{p,i-1}(\underline{x})$ et par suite le vecteur des forces plastiques $\underline{\Delta F}_n^{p,i-1}$. On résout alors :

$$(4.42) \quad \mathbf{K} \cdot \underline{\Delta U}_n^i = \underline{\Delta Q}_n + \underline{\Delta F}_n^{p,i-1}$$

- A partir de la solution $\underline{\Delta U}_n^i$, on peut déduire le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^i(\underline{x})$. Celui-ci étant considéré comme pilotant localement l'évolution élasto-plastique, on applique l'algorithme d'intégration local de la plasticité (voir section suivante). On obtient ainsi une nouvelle évaluation $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{p,i}$ de la déformation plastique, et par assemblage $\underline{\Delta F}_n^{p,i}$.
- Si le critère de convergence est vérifié, la valeur actuelle $\underline{\Delta U}_n^i$ est réputée être la solution recherchée, sinon on itère au point 2 (Eq.(4.42)) en faisant $i \leftarrow i + 1$.

La méthode des contraintes initiales ainsi schématisée présente l'avantage de requérir l'inversion d'une seule matrice de rigidité, en l'occurrence celle obtenue à partir du comportement élastique du matériau. Par contre la vitesse de convergence de l'algorithme devient très faible lorsqu'on se rapproche de la charge limite du système. Depuis une vingtaine d'années, des algorithmes beaucoup plus performants basés sur la méthode de Newton-Raphson ont été proposés, et constamment raffinés. Un aperçu en est donné à la section 2.6.

Après cette présentation du schéma global de résolution, on s'intéresse maintenant à l'aspect local des lois de comportement.

2.4 Algorithme d'intégration local

2.4.1 Introduction

L'utilisation de techniques d'intégration numérique par quadrature implique l'évaluation des intégrandes en des points particuliers du domaine d'intégration (points de Gauss). Le calcul du vecteur des forces plastiques résultant d'une telle intégration (Eq.(4.24)), c'est donc en chacun de ces points qu'il est nécessaire de calculer les valeurs des champs $\{\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p\}$, donc d'appliquer l'algorithme décrit maintenant.

2.4.2 Ecriture du problème

Après résolution de (4.42) à l'itération i , on dispose du champ incrément de déformation $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^i(\underline{x})$. Pour chaque point de Gauss, partant de l'état d'équilibre $\{\underline{\underline{\sigma}}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p\}$, on applique sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ le taux de déformation *constant* donné :

$$(4.43) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^i / \Delta t_n$$

Pour obtenir la réponse, il faut intégrer sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ les équations différentielles suivantes :

$$(4.44) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} & \text{constant} \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}} & = \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p) \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p & = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \end{cases}$$

avec les conditions de Kuhn-Tucker :

$$(4.45) \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

les conditions initiales s'écrivant :

$$(4.46) \quad \underline{\underline{\sigma}}(t_n) = \underline{\underline{\sigma}}_n \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(t_n) = \underline{\underline{\varepsilon}}_n \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t_n) = \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p$$

2.4.3 Généralités sur l'intégration numérique des équations différentielles

Si l'on oublie pour l'instant (4.45), le système (4.44)-(4.46) s'écrit formellement comme suit :

$$(4.47) \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = F(\boldsymbol{x}(t), t) \\ \boldsymbol{x}(t_n) & = \boldsymbol{x}_n \end{cases}$$

La technique classique d'intégration numérique consiste à approximer la valeur \boldsymbol{x}_{n+1} en t_{n+1} à partir d'une valeur estimée de la dérivée $\dot{\boldsymbol{x}}$ sur l'intervalle. Précisément, on pose :

$$(4.48) \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \Delta t_n F(\boldsymbol{x}_{n+\theta})$$

où l'on a :

$$(4.49) \quad \varkappa_{n+\theta} = \theta \varkappa_{n+1} + (1 - \theta) \varkappa_n$$

Selon la valeur de θ (appelé *paramètre de relaxation*), on reconnaît :

- l'algorithme d'Euler *explicite* pour $\theta = 0$,
- le schéma de Crank-Nicholson pour $\theta = \frac{1}{2}$,
- l'algorithme d'Euler *implicite* pour $\theta = 1$ (appelé *backward Euler* dans la littérature anglo-saxonne)

On montre que le schéma d'intégration est inconditionnellement stable, c'est à dire converge vers la solution quelle que soit la condition initiale, si $\theta \geq \frac{1}{2}$. Dans le cas particulier de la plasticité, où il convient de tenir compte des conditions supplémentaires (4.45), il est aujourd'hui reconnu que l'algorithme implicite $\theta = 1$ permet la meilleure précision (Krieg et Krieg, 1977; Ortiz et Popov, 1985; Ortiz et Simo, 1986). Il va être maintenant développé.

2.4.4 Application de l'algorithme d'Euler implicite

Il s'agit ici de discrétiser (4.44) en appliquant (4.48)-(4.49). Ayant supposé que le problème est localement piloté par l'incrément de déformation, on a successivement⁵ :

$$(4.50) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = \underline{\underline{\varepsilon}}_n + \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n$$

$$(4.51) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p + \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^p \quad , \quad \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^p = \Delta\lambda_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}$$

$$(4.52) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n - \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^p)$$

Les conditions (4.45) prennent la forme discrétisée :

$$(4.53) \quad \Delta\lambda_{n+1} \geq 0 \quad , \quad f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}) \leq 0 \quad , \quad \Delta\lambda_{n+1} f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}) = 0$$

La résolution du système précédant constitue l'algorithme de *retour sur le critère*, en anglais *return mapping* dont l'origine remonte à Wilkins (1964), et dont l'historique et les récentes variantes sont présentées dans Simo et Hughes (1998, Chap. 3).

On introduit à cet effet un état auxiliaire, en anglais *trial state* que nous traduirons ici par *prédicteur*, tout en l'affectant de l'exposant ^{trial} :

$$(4.54) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n$$

5. On abandonne (temporairement) l'exposant i relatif à l'itération courante.

Cet état de contrainte est d'une part directement calculable à partir des données $\{\underline{\sigma}_n, \underline{\Delta\varepsilon}_n\}$, et relie d'autre part les inconnues $\{\underline{\sigma}_{n+1}, \underline{\Delta\varepsilon}_n^p\}$, puisque d'après (4.52) :

$$(4.55) \quad \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \underline{A} : \underline{\Delta\varepsilon}_n^p$$

On montre que sa connaissance permet de décider si l'application de $\underline{\Delta\varepsilon}_n$ correspond, du point de vue de la plasticité, à une charge ou une décharge.

Tout d'abord, il est facile de vérifier que :

$$(4.56) \quad f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) \geq f(\underline{\sigma}_{n+1})$$

En effet, de par la convexité du critère de plasticité $f(\underline{\sigma})$, on a :

$$(4.57) \quad \begin{aligned} f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) - f(\underline{\sigma}_{n+1}) &\geq \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_{n+1}} : (\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \underline{\sigma}_{n+1}) \\ &\geq \Delta\lambda_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_{n+1}} : \underline{A} : \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_{n+1}} \geq 0 \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas selon le signe de $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})$.

- S'il est strictement négatif, il en est de même pour $f(\underline{\sigma}_{n+1})$. De (4.53) puis (4.52), on tire successivement :

$$(4.58) \quad \Delta\lambda_{n+1} = 0 \quad , \quad \underline{\Delta\varepsilon}_n^p = 0 \quad , \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p$$

Dans ce cas, l'évolution est *purement élastique* sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, et le prédicteur $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ est la solution $\underline{\sigma}_{n+1}$.

- Si $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}})$ est positif, le prédicteur viole le critère et n'est donc pas la solution. Alors il vient successivement, d'après (4.53) :

$$(4.59) \quad \Delta\lambda_{n+1} > 0 \quad , \quad f(\underline{\sigma}_{n+1}) = 0$$

Il faut alors résoudre le système :

$$(4.60) \quad \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\lambda_{n+1} \underline{A} : \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_{n+1}} \quad , \quad f(\underline{\sigma}_{n+1}) = 0$$

L'état de contrainte solution $\underline{\sigma}_{n+1}$ est dit *plastiquement admissible* puisque vérifiant le critère. L'incrément de déformation plastique correspondant est :

$$(4.61) \quad \underline{\Delta\varepsilon}_n^p = \Delta\lambda_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}_{n+1}}$$

Dans le cas général, les équations (4.60) sont non linéaires et nécessitent une résolution itérative. Pour les critères usuels tels que ceux de Von Mises et Drucker-Prager, on peut trouver une solution *analytique*. Celle-ci est détaillée en annexe F, section 3.

2.4.5 Interprétation en terme d'optimisation

Il est intéressant de remarquer que la solution de (4.60) est celle d'un *problème d'optimisation sous contrainte* (de Buhan et Dormieux, 1996, Chap. 3), (Simo et Hughes, 1998, pages 118-119). Définissons à cet effet le produit scalaire « élastique », et sa norme associée ($\underline{\underline{A}}$ désigne le tenseur des modules élastiques) :

$$(4.62) \quad \langle \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\sigma'}} \rangle = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma'}} \quad , \quad \| \underline{\underline{\sigma}} \|_{\underline{\underline{A}}^{-1}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\sigma}} \rangle$$

Avec cette notation, la solution $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ de (4.60) *minimise* la fonction $\| \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}} - \underline{\underline{\sigma}} \|_{\underline{\underline{A}}^{-1}}$ sur le domaine d'élasticité convexe \mathcal{C} défini par :

$$(4.63) \quad \mathcal{C} = \{ \underline{\underline{\sigma}}, \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \}$$

Pour le montrer, il suffit d'introduire le lagrangien du problème :

$$(4.64) \quad \mathcal{L}(\underline{\underline{\sigma}}, \Delta\lambda) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}} - \underline{\underline{\sigma}} \right) : \underline{\underline{A}}^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}} - \underline{\underline{\sigma}} \right) + \Delta\lambda f(\underline{\underline{\sigma}})$$

La stationnarité de cette fonction au voisinage du minimum $(\underline{\underline{\sigma}}^*, \Delta\lambda^*)$ s'écrit :

$$(4.65) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}^*} = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{A}}^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}} \right) + \Delta\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}^*} = 0$$

$$(4.66) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Delta\lambda} \right)_{\Delta\lambda^*} = 0 \quad \text{soit} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}^*) = 0$$

En comparant (4.65)-(4.66) à (4.60), on voit que $(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}, \Delta\lambda_{n+1})$ s'identifie à $(\underline{\underline{\sigma}}^*, \Delta\lambda^*)$, solution du problème de minimisation. $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ réalise donc le minimum de la fonction « distance » de $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{C}$ à $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}}$ selon la norme élastique.

Géométriquement, $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ correspond ainsi à la *projection*, selon la norme élastique, du prédicteur $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}}$ sur le domaine d'élasticité (en anglais, *closest point projection*). Ce résultat est schématisé sur la figure 4.2.

2.4.6 Utilisation d'un autre prédicteur

Comme on l'a mentionné plus haut, l'indice i associé à l'itération courante a été omis dans le paragraphe précédent. Cela signifie en particulier que le calcul de $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ dans (4.60) ne dépend que des quantités connues à t_n et pas des résultats de l'itération précédente ($i-1$). Or on dispose pourtant de la déformation plastique $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^{\text{p}, i-1}$.

A partir de cette remarque, on peut imaginer l'utilisation d'un autre prédicteur intégrant cette donnée supplémentaire. On définit à cet effet l'état de contrainte *statiquement admissible* à l'itération i par :

$$(4.67) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{s.a}, i} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{A}} : \left(\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^i - \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n^{\text{p}, i-1} \right)$$

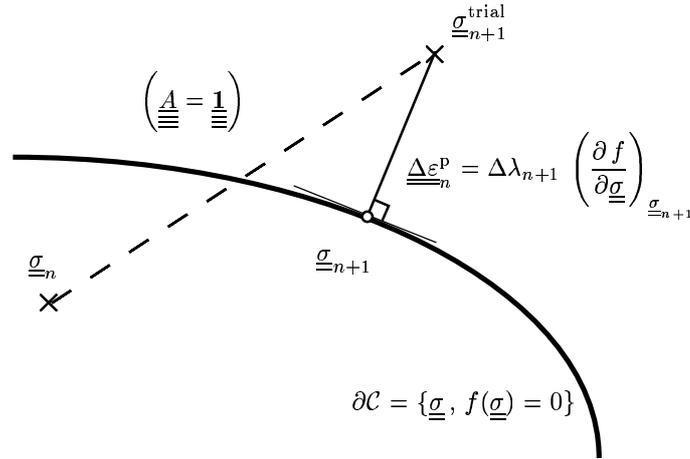


FIG. 4.2: Retour sur le critère par projection selon la norme élastique

La dénomination provient du fait que c'est précisément l'état obtenu à partir du vecteur incrément de déplacement solution de l'équilibre (4.42). La projection de cet état sur le critère fournit $\underline{\sigma}_{n+1}^i$ et l'incrément de déformation plastique $\underline{\delta\varepsilon}_n^{\text{P}, i}$ vérifiant :

$$(4.68) \quad \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{s.a}, i} - \underline{A} : \underline{\delta\varepsilon}_n^{\text{P}, i} \quad , \quad f(\underline{\sigma}_{n+1}^i) = 0$$

d'où l'on déduit :

$$(4.69) \quad \underline{\Delta\varepsilon}_n^{\text{P}, i} = \underline{\Delta\varepsilon}_n^{\text{P}, i-1} + \underline{\delta\varepsilon}_n^{\text{P}, i}$$

Dans ce processus, la déformation plastique associée à l'incrément de chargement ΔQ_n n'est donc pas déterminée par *approximations successives* comme en (4.60) mais obtenue par *cumul*. Les deux processus itératifs sont schématisés sur la figure récapitulative 4.4 page 160.

L'utilisation de ce prédicteur est mentionné par Simo et Hughes (1998, page 125). L'auteur attire l'attention sur le fait que le processus de cumul mentionné à l'instant peut poser problème notamment lorsque des décharges plastiques interviennent au cours des itérations.

Dans le code CASTOR, les deux types de prédicteur (4.54) et (4.68) ont été implémentés. Pour les problèmes traités, aucune différence n'a été constatée sur les résultats. Cependant, la convergence est sensiblement plus rapide lorsque le prédicteur statiquement admissible est utilisé.

2.5 Vérification de la convergence

La section précédente a mis en évidence deux états de contraintes calculés à chaque itération en tout point, respectivement l'état *plastiquement admissible* $\underline{\sigma}_{n+1}^i$ (Eq.(4.60)) et l'état *statiquement admissible* $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{s.a}, i}$ (Eq.(4.67)). En théorie, à la convergence du processus itératif, ces

deux états sont confondus. Cependant, numériquement la convergence n'est vérifiée qu'à une précision donnée.

Dès lors, deux stratégies sont possibles pour mesurer l'erreur commise à l'itération i :

- Calculer l'erreur à partir de l'état statiquement admissible en évaluant le critère de plasticité $f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{s.a, i})$. Ce calcul est local, effectué en tout point de Gauss.

Supposons que le critère de plasticité ait la dimension d'une contrainte et soit défini à l'aide d'une grandeur caractéristique \mathfrak{S} (par exemple la limite en traction simple pour le critère de Von Mises). Se fixant une erreur relative acceptable TOL_f , le critère de *convergence locale* peut s'écrire alors comme suit :

$$(4.70) \quad \max_{\{\text{Points de Gauss}\}} \frac{f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{s.a, i})}{\mathfrak{S}} < \text{TOL}_f$$

Dans le cas où de fortes non linéarités ne permettent pas de vérifier (4.70), on peut limiter tout au moins le nombre de points de Gauss où le critère est violé (*points plastiques non convergés*) (PLAXIS, 1993).

- Calculer l'erreur à partir de l'état plastiquement admissible en mesurant l'écart à l'équilibre (Zienkiewicz et Taylor, 1994b, page 223), (Crisfield, 1991, page 289). Cette quantité est par nature globale. Se rappelant la forme des efforts nodaux associés à un champ de contrainte (Eq.(4.25)), on introduit le *vecteur des résidus* (en anglais, *out-of-balance forces*) :

$$(4.71) \quad \underline{\underline{\Psi}}_{n+1}^i = \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^i d\Omega - \underline{\underline{Q}}_{n+1}$$

Se fixant un déséquilibre relatif acceptable TOL_{Ψ} , on en déduit un *critère global* de convergence :

$$(4.72) \quad \frac{\|\underline{\underline{\Psi}}_{n+1}^i\|}{\|\underline{\underline{Q}}_{n+1}\|} < \text{TOL}_{\Psi}$$

Il est à noter que, si l'on prend soin de conserver à la fin du pas de charge n l'état statiquement admissible $\underline{\underline{\sigma}}_n^{s.a}$, on a évidemment $\underline{\underline{\Psi}}_n = \underline{\underline{0}}$, de sorte que $\underline{\underline{\Psi}}_{n+1}^i = \underline{\underline{\Delta\Psi}}_n^i$. L'estimation de la convergence peut alors se faire uniquement à partir des quantités relatives au pas de charge *courant*. On montre ci-dessous que $\underline{\underline{\Psi}}_{n+1}^i$ est lié à la variation du vecteur des forces plastiques entre deux itérations successives (Eq.(4.81)).

Parallèlement, on peut estimer la convergence *en déplacement*: la variation du vecteur incrément des déplacements nodaux entre deux itérations doit tendre vers 0. Le critère correspondant s'écrit :

$$(4.73) \quad \frac{\|\underline{\underline{\Delta U}}_n^{i+1} - \underline{\underline{\Delta U}}_n^i\|}{\|\underline{\underline{\Delta U}}_n^i\|} < \text{TOL}_U$$

Il est possible d'obtenir une information sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Introduisant le *taux de convergence* q_i défini par :

$$(4.74) \quad q_i = \frac{\|\underline{\Delta U}_n^{i+1} - \underline{\Delta U}_n^i\|}{\|\underline{\Delta U}_n^i - \underline{\Delta U}_n^{i-1}\|}$$

Mestat (1993, page 129) montre qu'il suffit de vérifier que $q_i < 1$ à chaque itération pour affirmer la convergence en déplacement du processus.

Dans tout ce qui précède, on utilise une norme euclidienne sur l'espace vectoriel des degrés de liberté du problème \mathbb{R}^n :

$$(4.75) \quad \|\underline{X}\| = \sqrt{\underline{X} \cdot \underline{X}}$$

Les valeurs usuelles de TOL varient entre 10^{-4} et 10^{-2} .

Tous les indicateurs de convergence que l'on vient de présenter sont implémentés dans le code CASTOR . A l'usage, on a remarqué que les critères (4.72)-(4.73) pouvaient être vérifiés alors qu'en certains points, le critère de plasticité était fortement violé. Le critère local est ainsi plus contraignant, et c'est en général celui qui est décisif pour l'arrêt du processus itératif.

2.6 Autres méthodes de résolution numérique des problèmes de plasticité

Comme annoncé à la section 2.3, on donne ici un aperçu d'autres méthodes de résolution qui ont vu le jour ces vingt dernières années. Le but n'est pas de faire un panorama exhaustif, que l'on peut trouver par ailleurs dans des ouvrages très complets tels que ceux de Crisfield (1991) et de Simo et Hughes (1998). Il s'agit de montrer le principe de ces méthodes, pour voir en quoi elles sont adaptables au modèle multiphasique.

Ces différentes méthodes n'ont pas été introduites dans le code CASTOR . En effet, le traitement numérique n'est pas au coeur de notre sujet, et les développements associés à ces implémentations ont été jugés hors de propos dans le cadre de ce travail.

2.6.1 Méthode de Newton-Raphson

Se rappelant la structure des matrices de rigidité (Eq. (4.22)), on peut mettre l'équation d'équilibre discrétisée (4.32) à l'instant t_n sous la forme suivante :

$$(4.76) \quad \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_n \, d\Omega = \underline{Q}_n$$

L'objectif est de déterminer le champ $\underline{\sigma}_{n+1}$ équilibrant de la même façon \underline{Q}_{n+1} . Cet équilibre n'étant vérifié qu'après convergence d'un processus itératif, on a introduit en (4.71) le *vecteur des résidus* à l'itération i du pas de charge courant $n+1$:

$$(4.77) \quad \underline{\Psi}_{n+1}^i = \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\sigma}_{n+1}^i \, d\Omega - \underline{Q}_{n+1}$$

Dans cette équation, $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^i$ désigne l'état de contrainte obtenu après intégration locale de la plasticité (Eq.(4.60)), c'est à dire l'état de contrainte *plastiquement admissible*. Désignant par \underline{u}_{n+1}^i le vecteur des déplacements nodaux de l'élément contenant le point courant, on a d'après (4.19) :

$$(4.78) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^i = \mathbf{D} \cdot \left[\mathbf{B}_e \cdot \underline{U}_{n+1}^i - \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{p,i} \right] + \underline{\underline{\sigma}}_o$$

L'équilibre (4.42) ayant fourni le vecteur \underline{U}_{n+1}^i peut d'autre part se mettre sous la forme :

$$(4.79) \quad \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{s.a,i} d\Omega - \underline{Q}_{n+1} = 0$$

ou l'état de contrainte *statiquement admissible* vaut :

$$(4.80) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{s.a,i} = \mathbf{D} \cdot \left[\mathbf{B}_e \cdot \underline{U}_{n+1}^i - \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{p,i-1} \right] + \underline{\underline{\sigma}}_o$$

Reportant (4.78)-(4.80) dans (4.77), et soustrayant (4.79), on obtient une nouvelle expression du vecteur des résidus à la fin de l'itération i :

$$(4.81) \quad \underline{\Psi}_{n+1}^i = - \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\delta\varepsilon}}_n^{p,i} d\Omega = - \underline{\delta F}_n^{p,i} \quad , \quad \underline{\underline{\delta\varepsilon}}_n^{p,i} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{p,i} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{p,i-1}$$

A partir de cette valeur, on cherche une nouvelle évaluation du champ de déplacement $\underline{U}_{n+1}^{i+1}$ vérifiant :

$$(4.82) \quad \underline{\Psi}_{n+1}^{i+1} = 0$$

L'application de la méthode de Newton-Raphson à la résolution de l'équation $\underline{\Psi}(\underline{U}) = 0$ conduit à remplacer l'équation précédente par un développement limité au premier ordre :

$$(4.83) \quad \begin{aligned} \underline{\Psi}_{n+1}^{i+1} = 0 &\approx \underline{\Psi}_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial \underline{U}} \right)_{\underline{U}_{n+1}^i} \cdot (\underline{U}_{n+1}^{i+1} - \underline{U}_{n+1}^i) \\ &= \underline{\Psi}_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial \underline{U}} \right)_{\underline{U}_{n+1}^i} \cdot (\underline{\Delta U}_{n+1}^{i+1} - \underline{\Delta U}_{n+1}^i) \end{aligned}$$

Posant :

$$(4.84) \quad \underline{\delta U}_n^i = \underline{\Delta U}_n^{i+1} - \underline{\Delta U}_n^i$$

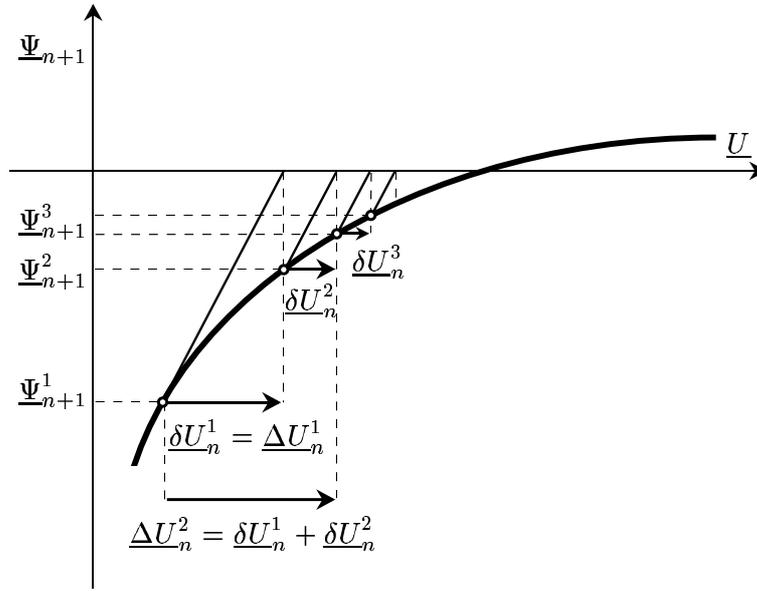
et introduisant la *matrice de rigidité tangente* :

$$(4.85) \quad \mathbf{K}_{n+1}^i = \left(\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial \underline{U}} \right)_{\underline{U}_{n+1}^i}$$

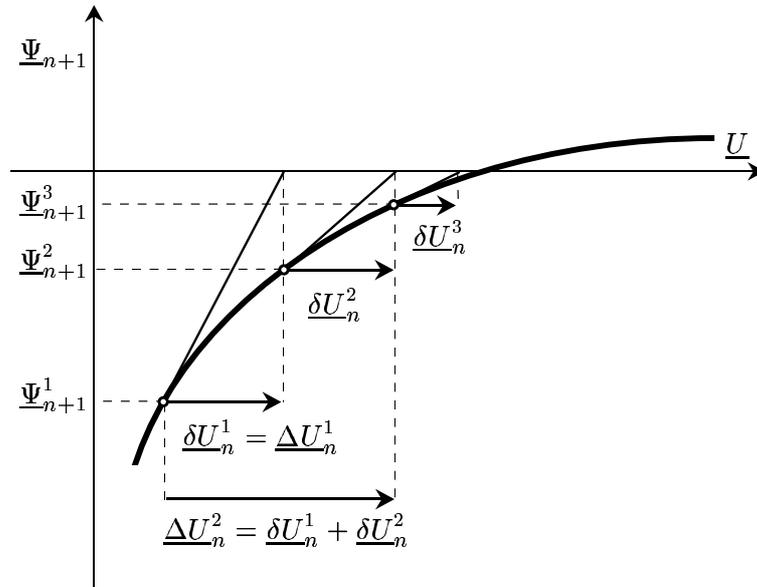
on obtient la nouvelle évaluation du vecteur incrément des déplacements $\underline{\Delta U}_n^{i+1}$ en résolvant :

$$(4.86-a) \quad \underline{\delta U}_n^i = - (\mathbf{K}_{n+1}^i)^{-1} \cdot \underline{\Psi}_{n+1}^i = (\mathbf{K}_{n+1}^i)^{-1} \cdot \underline{\delta F}_n^{p,i}$$

La matrice \mathbf{K}_{n+1}^i joue ainsi, pour la méthode de Newton-Raphson, le rôle de la matrice \mathbf{K} utilisée dans la méthode des contraintes initiales (Eq.(4.41)). On représente graphiquement sur la figure 4.3 les approximations successives de $\underline{\Psi}_{n+1}^i$ par les deux méthodes.



a - Méthode des contraintes initiales



b - Méthode de Newton-Raphson

FIG. 4.3: Processus itératif d'annulation du vecteur résidu

2.6.2 Comportement tangent et tangent consistant

Il reste à déterminer la forme de la matrice de rigidité tangente \mathbf{K}_{n+1}^i . Dérivant (4.77) par rapport au vecteur déplacement, il vient :

$$(4.87) \quad \mathbf{K}_{n+1}^i = \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \left(\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}} \right)_{\underline{\varepsilon}_{n+1}^i} \cdot \left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \underline{U}} \right)_{\underline{U}_{n+1}^i} d\Omega = \int_{\Omega} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D}_{n+1}^i \cdot \mathbf{B}_e d\Omega$$

ou \mathbf{D}_{n+1}^i est la *matrice de comportement tangente*.

Si localement l'incrément de déformation $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n^i$ entraîne une *décharge* du point de vue de la plasticité, le comportement tangent est bien sûr le comportement élastique. Si par contre il y a charge, il faut introduire les équations de la plasticité pour le déterminer.

Certains auteurs, notamment Hinton et Owen (1980) déduisent cette matrice du tenseur des modules élasto-plastiques tangent $\underline{\underline{A}}^{e,p}$ tiré des équations de la plasticité exprimées en taux de variation :

$$(4.88-a) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p})$$

$$(4.88-b) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

$$(4.88-c) \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0$$

Reportant (4.88-a) et (4.88-b) dans (4.88-c), on montre aisément que :

$$(4.89) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{A}}^{e,p} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$$

avec :

$$(4.90) \quad \underline{\underline{A}}^{e,p} = \underline{\underline{A}} - \frac{\left(\underline{\underline{A}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{A}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{A}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}$$

En utilisant la matrice de rigidité tangente $\mathbf{D}^{e,p}$ construite à partir de ce comportement, il a été constaté que la convergence du processus itératif n'est pas de nature quadratique, contrairement à ce que l'on attendait de la méthode de Newton-Raphson.

Pour obtenir effectivement cette convergence, Simo et Taylor (1985) ont introduit le *comportement tangent consistant* avec l'algorithme. Pour l'obtenir, l'opération de dérivation (4.85) est effectuée à partir de l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ comme projection du prédicteur sur le critère :

$$(4.91) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{A}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_n - \Delta \lambda_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}} \right)$$

En différentiant cette expression incrémentale, il vient :

$$(4.92) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}}_{n+1} = \underline{\underline{A}} : \left[\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_n - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}} \right] - \Delta \lambda_{n+1} \overbrace{\underline{\underline{A}} : \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}}^{\cdot}$$

où le dernier terme fait intervenir les dérivées secondes du critère de plasticité :

$$(4.93) \quad \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}}^{\cdot} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} \right) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}_{n+1}$$

Il vient alors :

$$(4.94) \quad \dot{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}_{n+1} = \left[\underline{\underline{\underline{I}}} + \Delta\lambda_{n+1} \underline{\underline{\underline{A}}} : \frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\underline{A}}} : \left[\dot{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}_n - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right)_{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{n+1}} \right]$$

Cette équation ressemble formellement à (4.88-a), à condition d'y remplacer $\underline{\underline{\underline{A}}}$ par :

$$(4.95) \quad \underline{\underline{\underline{A}}} = \left[\underline{\underline{\underline{I}}} + \Delta\lambda_{n+1} \underline{\underline{\underline{A}}} : \frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right]^{-1} : \underline{\underline{\underline{A}}}$$

Résolvant de nouveau les équations (4.88) avec $\underline{\underline{\underline{A}}}$, on obtient le *comportement tangent consistant* :

$$(4.96) \quad \underline{\underline{\underline{A}}}_{t.c}^{e.p} = \underline{\underline{\underline{A}}} - \frac{\left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right) \otimes \left(\underline{\underline{\underline{A}}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} : \underline{\underline{\underline{A}}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}}$$

auquel on peut associer la matrice de comportement tangent $\mathbf{D}_{t.c}^{e.p}$ et calculer (4.87).

Remarques Le calcul de (4.96) prend ainsi en compte le fait que la résolution numérique des équations se fait en utilisant un incrément de taille finie, alors que les équations constitutives sont exprimées en taux. Cela explique la dénomination de « consistant avec l'algorithme ». Le gain réalisé en utilisant cet opérateur par rapport à (4.89) peut être significatif (Simo et Taylor, 1985). Cependant, cette approche nécessite le calcul des dérivées secondes du critère, qui peuvent s'avérer singulières en certains points.

2.6.3 Méthodes quasi-Newton et accélérateurs de convergence

La méthode de Newton-Raphson nécessite comme on l'a vu une inversion de la matrice de rigidité tangente à chaque itération de calcul. Pour des gros systèmes, cette étape peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul. Pour pallier ce problème, certains auteurs ont proposé de remplacer $(\mathbf{K}_{n+1}^i)^{-1}$ par une approximation calculée à partir des $(\mathbf{K}_{n+1}^j)^{-1}$, $j < i$. Les méthodes les plus couramment utilisées sont :

- La méthode DFP (Davidon, Fletcher, Powell) qui fait une actualisation de rang 1, c'est à dire évaluant $(\mathbf{K}_{n+1}^i)^{-1}$ uniquement à partir de $(\mathbf{K}_{n+1}^{i-1})^{-1}$.
- la méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno) qui est une actualisation de rang 2.

La première est rapportée dans Zienkiewicz et Taylor (1994b, page 218) et Mestat (1993). La seconde a été appliquée initialement dans le cadre des éléments finis par Matthies et Strang (1979). On en trouve des variantes dans Crisfield (1991, Chap. 9).

Un autre type d'optimisation des algorithmes consiste en l'utilisation de *schémas d'accélération de convergence*. A l'itération i , à partir d'une valeur du champ de déplacement $\underline{\Delta U}_n^{i+1} = \underline{\Delta U}_n^i + \underline{\delta U}_n^i$, on effectue une actualisation de type :

$$(4.97) \quad \underline{\Delta \hat{U}}_n^{i+1} = \underline{\Delta U}_n^i + \eta_i \underline{\delta U}_n^i$$

Le scalaire η_i est ajusté de façon à minimiser la norme du vecteur résidu associé à $\underline{\Delta \hat{U}}_n^{i+1}$. Ce procédé est connu sous le nom de *line search* dans la littérature, et très souvent associé à l'utilisation de la matrice de rigidité initiale élastique. On trouve différentes variantes dans Nayak et Zienkiewicz (1972); Thomas (1984); Abbo et Sloan (1997) et une discussion détaillée dans Crisfield (1991, pages 254-265).

2.7 Récapitulatif

Les différents ingrédients permettant de traiter numériquement un problème de plasticité ayant été abordés successivement, on propose dans ce paragraphe un récapitulatif de l'ensemble de la procédure sous forme d'organigrammes. Ceux-ci reprennent précisément l'enchaînement des tâches programmées dans le code de calcul CASTOR.

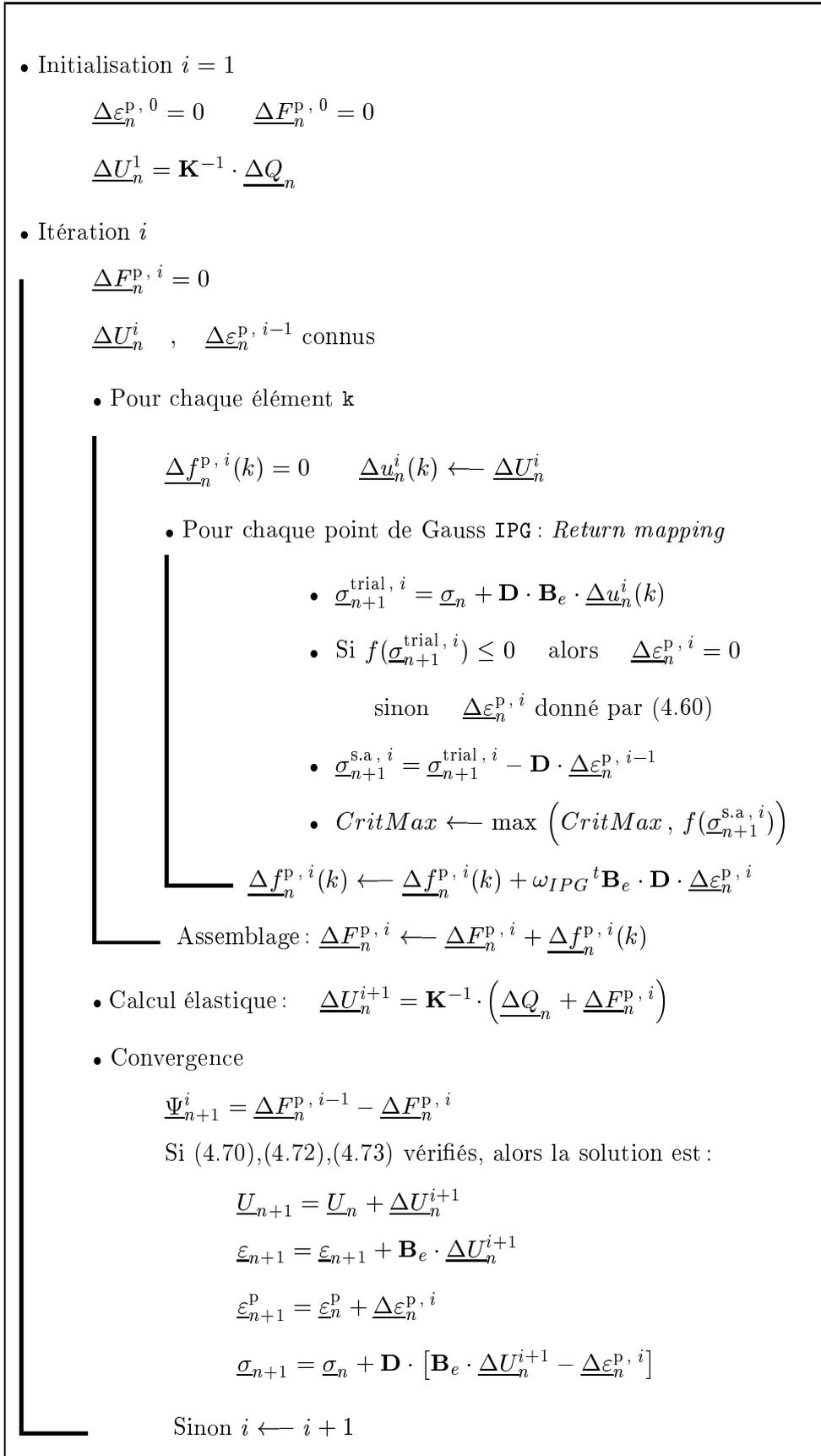
Deux versions de l'algorithme sont présentées :

- dans la première, le prédicteur « élastique » (4.54) est utilisé au niveau local. L'ensemble des opérations est résumé dans l'organigramme 4.1. Les évaluations successives de la déformation plastique sont représentées sur la figure 4.4-a.
- dans la seconde, le prédicteur « statiquement admissible » (4.67) est utilisé. L'ensemble des opérations est résumé dans l'organigramme 4.2. Les évaluations successives de la déformation plastique, maintenant obtenue par cumul au cours des itérations, sont représentées sur la figure 4.4-b.

2.8 Conclusion

Nous arrivons au terme de la section la plus technique de ce chapitre. L'ampleur du formalisme utilisé et les diverses références suffisent à montrer que le traitement de la plasticité dans le cadre des éléments finis n'est pas un domaine de recherche clos. Nous espérons avoir donné suffisamment de détails pour montrer la richesse du sujet sans avoir noyé complètement le lecteur.

Les sections qui suivent présentent le travail théorique original de ce chapitre : la mise en œuvre par éléments finis du modèle multiphasique adhérent en élasto-plasticité, puis celle du modèle général en élasticité.



TAB. 4.1: Algorithme de plasticité - Utilisation du prédicteur « élastique » (4.54) - Méthode des contraintes initiales

- Initialisation $i = 1$

$$\underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},0} = 0 \quad \underline{\Delta F}_n^{\text{p},0} = 0$$

$$\underline{\Delta U}_n^1 = \mathbf{K}^{-1} \cdot \underline{\Delta Q}_n$$

- Itération i

$$\underline{\delta F}_n^{\text{p},i} = 0$$

$$\underline{\Delta U}_n^i, \quad \underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},i-1} \text{ connus}$$

- Pour chaque élément k

$$\underline{\delta f}_n^{\text{p},i}(k) = 0 \quad \underline{\Delta u}_n^i(k) \leftarrow \underline{\Delta U}_n^i$$

- Pour chaque point de Gauss IPG: *Return mapping*

$$\bullet \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{s.a},i} = \underline{\sigma}_n + \mathbf{D} \cdot [\mathbf{B}_e \cdot \underline{\Delta u}_n^i(k) - \underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},i-1}]$$

$$\bullet \text{ Si } f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{s.a},i}) \leq 0 \quad \text{alors } \underline{\delta \varepsilon}_n^{\text{p},i} = 0$$

sinon $\underline{\delta \varepsilon}_n^{\text{p},i}$ donné par (4.68)

$$\underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},i} = \underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},i-1} + \underline{\delta \varepsilon}_n^{\text{p},i}$$

$$\bullet \text{ CritMax} \leftarrow \max(\text{CritMax}, f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{s.a},i}))$$

$$\underline{\delta f}_n^{\text{p},i}(k) \leftarrow \underline{\delta f}_n^{\text{p},i}(k) + \omega_{\text{IPG}} {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\delta \varepsilon}_n^{\text{p},i}$$

$$\text{Assemblage} \quad \underline{\delta F}_n^{\text{p},i} \leftarrow \underline{\delta F}_n^{\text{p},i} + \underline{\delta f}_n^{\text{p},i}(k)$$

- Calcul élastique $\underline{\delta U}_n^{i+1} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \underline{\delta F}_n^{\text{p},i}$
 $\underline{\Delta U}_n^{i+1} = \underline{\Delta U}_n^i + \underline{\delta U}_n^{i+1}$

- Convergence

$$\underline{\Psi}_{n+1}^i = -\underline{\delta F}_n^{\text{p},i}$$

Si (4.70),(4.72),(4.73) vérifiés, alors la solution est :

$$\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_n + \underline{\Delta U}_n^{i+1}$$

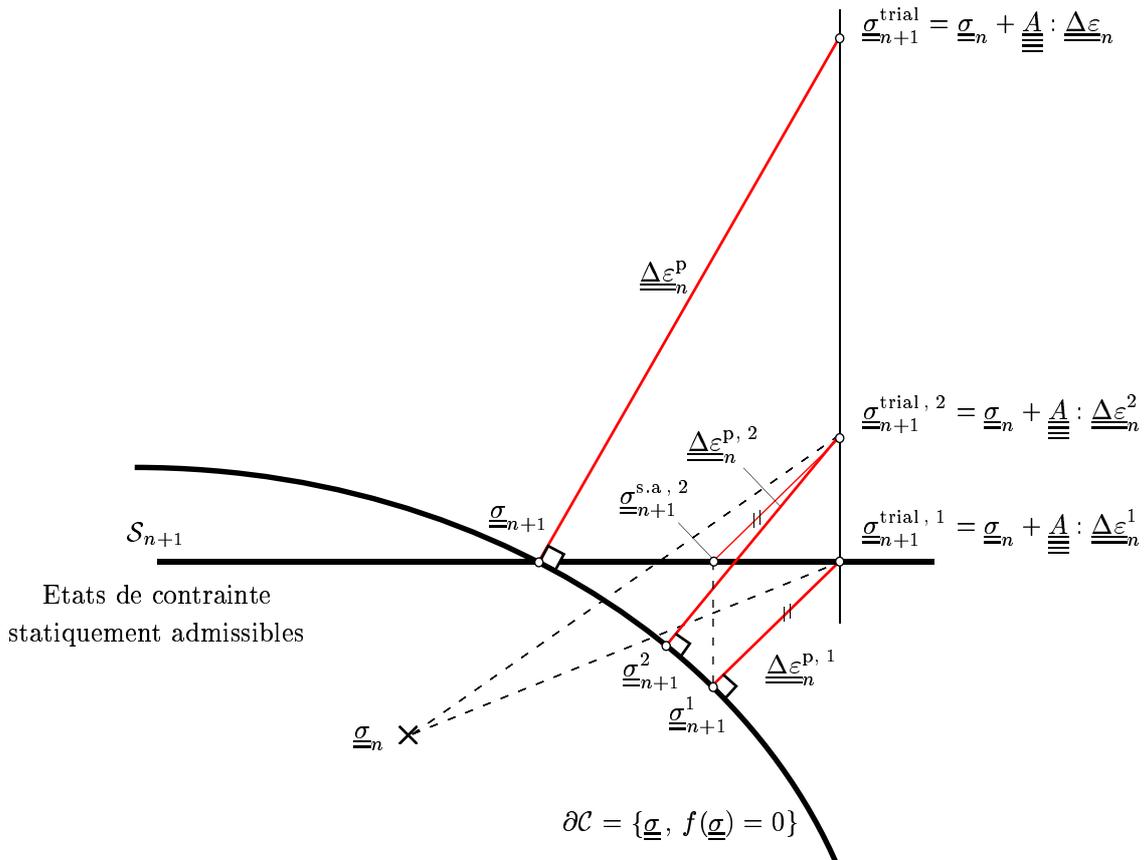
$$\underline{\varepsilon}_{n+1} = \underline{\varepsilon}_n + \mathbf{B}_e \cdot \underline{\Delta U}_n^{i+1}$$

$$\underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{p}} + \underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},i}$$

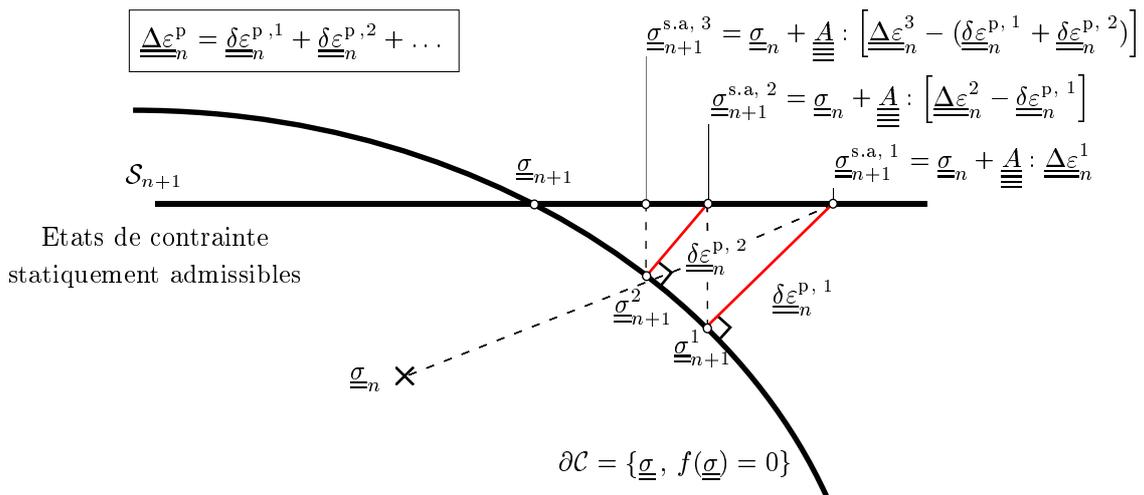
$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \mathbf{D} \cdot [\mathbf{B}_e \cdot \underline{\Delta U}_n^{i+1} - \underline{\Delta \varepsilon}_n^{\text{p},i}]$$

Sinon $i \leftarrow i + 1$

TAB. 4.2: *Algorithme de plasticité - Utilisation du prédicteur « statiquement admissible » (4.67) Méthode des contraintes initiales*



a - Prédicteur « élastique »



b - Prédicteur « statiquement admissible »

FIG. 4.4: Algorithme de projection sur le critère - Visualisation de la déformation plastique au cours des itérations

3 Implémentation du modèle multiphasique adhérent (Sudret et de Buhan, 1999b; Sudret *et al.*, 1999)

3.1 Introduction

Sous l'hypothèse d'adhérence parfaite, le modèle multiphasique se formule à partir d'un champ de déplacement $\underline{\xi}$ *unique* pour toutes les phases. Ainsi, son implémentation dans un code aux éléments finis formulé en déplacement est-elle une extension de la formulation associée au milieu continu classique.

Comme à la section 1, on commence par établir un principe de minimum de l'énergie potentielle en élasticité. La discrétisation de celui-ci fait apparaître des termes liés à la phase matrice et à chaque phase renforcement.

Pour traiter le comportement élasto-plastique, on s'appuie sur la définition première du critère de plasticité (2.106). Celui-ci s'obtenant à partir des valeurs des contraintes *partielles*, on montre que l'algorithme local d'intégration de la plasticité peut s'appliquer *indépendamment* sur chaque phase, l'algorithme itératif global restant quant à lui inchangé.

3.2 Traitement de l'élasticité

3.2.1 Principe de minimum de l'énergie potentielle

Soit \mathcal{S} un système mécanique constitué d'un milieu multiphasique adhérent à N phases renforcement. On a montré à la section 1.7 du chapitre 2 qu'à condition de définir les efforts extérieurs globaux (2.36) et le tenseur des contraintes totales (2.37), les équations d'équilibre et conditions aux limites de ce milieu et celles du milieu continu de Cauchy sont *identiques*.

Reprenant les notations du paragraphe 1.2.2, on note $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d)$ l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles, et $(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}, \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\tilde{\xi}}})$ les champs solutions du problème d'élasticité multiphasique adhérent. Le principe des travaux virtuels s'écrit sous la forme⁶ :

$$(4.98) \quad \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d), \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\xi}} \, d\Omega - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\xi}} \, dS - \int_{S_\xi} \underline{\underline{\xi}}^d \cdot \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} \cdot \underline{\underline{n}} \, dS = 0$$

Le champ de contraintes totales solution du problème élastique s'écrit :

$$(4.99) \quad \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})$$

où $\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$, densité d'énergie libre du milieu multiphasique (voir Eq.(2.53)) se simplifie dans le cas présent en :

$$(4.100) \quad \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \sum_{r=1}^N \psi^r(\varepsilon^r = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r)$$

6. Voir note page 135

La stabilité des matériaux constitutifs de chaque phase implique que chaque fonction $\psi^j(\underline{\varepsilon})$ est strictement convexe. Par conséquent leur somme $\Psi(\underline{\varepsilon})$ l'est également, et on peut appliquer le même raisonnement qu'en 1.2.2. Le champ de déplacement $\underline{\xi}$ solution minimise donc la fonctionnelle énergie potentielle définie en (4.10), dans laquelle on remplace simplement $\psi(\underline{\varepsilon})$ par $\Psi(\underline{\varepsilon})$.

3.2.2 Discrétisation du principe de minimum

Le champ de déplacement $\underline{\xi}$ étant unique pour toutes les phases, on va procéder à une seule discrétisation géométrique de la structure, ce qui revient à choisir les mêmes degrés de liberté et interpolations pour chaque phase. Reprenant les notations du paragraphe (1.3.2), on pose :

$$(4.101\text{-a}) \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{V}_e, \quad \underline{\xi}_n(\underline{x})|_{\mathcal{V}^e} = \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e$$

$$(4.101\text{-b}) \quad \underline{\varepsilon} = \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_e$$

Sur chaque élément $e = 1, \dots, N_e$, le terme $\phi_e(\underline{u}_e)$ (Eq.(4.20-c)) est inchangé pourvu qu'on utilise les efforts extérieurs *globaux* dans son calcul (Eq.(4.21-b)). Par contre, le terme $w_e(\underline{u}_e)$ (Eq.(4.20-b)) est maintenant l'intégrale d'une somme de termes relatifs respectivement à la phase matrice et aux différentes phases renforcement. On écrit sans ambiguïté :

$$(4.102) \quad w_e(\underline{u}_e) = w_e^m(\underline{u}_e) + \sum_{r=1}^N w_e^r(\underline{u}_e)$$

Pour la phase matrice, on reprend simplement l'expression (4.21-a) en remplaçant \mathbf{D} par \mathbf{d}^m , matrice d'élasticité de la phase matrice associée à $\underline{\underline{\underline{a}}}^m$. Pour les phases renforcement, il est nécessaire d'introduire des notations supplémentaires.

L'exploitation de la condition de compatibilité des déformations $\varepsilon^r = \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ nécessite la définition de la représentation matricielle du tenseur $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$. On note :

$$(4.103) \quad \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r$$

de sorte que :

$$(4.104) \quad \varepsilon^r = {}^t \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = {}^t \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r$$

De façon similaire à (4.11), on retient la forme suivante de la densité d'énergie libre d'une phase renforcement :

$$(4.105) \quad \psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} a^r (\varepsilon^r)^2 + \varepsilon^r (\sigma_o^r - a^r \varepsilon_{\text{an}}^r)$$

Dans cette équation, a^r désigne la raideur scalaire, $\varepsilon_{\text{an}}^r$ la déformation d'origine anélastique, et σ_o^r la contrainte initiale. On montre alors que :

$$(4.106) \quad \begin{aligned} w_e^r(\underline{u}_e) &= \int_{\mathcal{V}_e} \psi^r(\varepsilon^r) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \left[\int_{\mathcal{V}_e} a^r {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r \cdot {}^t \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r \cdot \mathbf{B}_e d\Omega \right] \cdot \underline{u}_e - {}^t \underline{u}_e \cdot \int_{\mathcal{V}_e} (a^r \varepsilon_{\text{an}}^r - \sigma_o^r) {}^t \mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_r d\Omega \end{aligned}$$

On identifie ainsi pour chaque phase renforcement :

- la *matrice de rigidité élémentaire* :

$$(4.107) \quad \mathbf{k}_e^r = \int_{\mathcal{V}_e} a^r {}^t\mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r \cdot {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r \cdot \mathbf{B}_e d\Omega$$

- le *vecteur force élémentaire* associée aux déformations anélastiques :

$$(4.108) \quad \underline{\underline{f}}_e^{r, \text{an}} = \int_{\mathcal{V}_e} a^r \varepsilon_{\text{an}}^r {}^t\mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r d\Omega$$

- le *vecteur force élémentaire* associée aux contraintes initiales :

$$(4.109) \quad \underline{\underline{f}}_e^{r, \sigma} = \int_{\mathcal{V}_e} -\sigma_o^r {}^t\mathbf{B}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r d\Omega$$

Lors du processus d'assemblage des matrices de rigidité (resp. vecteurs force) élémentaires, on additionne pour chaque élément les contributions de chaque phase avant d'injecter la somme dans la matrice de rigidité (resp. le vecteur force) global(e).

Remarque La matrice de rigidité \mathbf{d}^r d'une phase renforcement s'identifie au produit $a^r \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r \cdot {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r$. On donne dans l'annexe F, section 3 la forme explicite de cette matrice dans les cas bi- et tridimensionnels en fonction des angles définissant la direction de renforcement.

3.3 Traitement de la plasticité

Reprenant la structure de la section 2, nous allons successivement poser le problème de plasticité multiphasique discrétisé, discuter du processus itératif de résolution, de l'intégration locale des lois de comportement et des critères de convergence. Nous donnons enfin un organigramme récapitulatif. Dans cette section, on se limite pour simplifier la présentation à une phase renforcement. Cependant les processus mis en œuvre étant découplés par phase, la généralisation à N phases est immédiate.

3.3.1 Position du problème

Soit \mathcal{S} un système mécanique de volume Ω modélisé par un milieu biphasique adhérent, soumis à un chargement $\mathcal{Q}(t)$ (décrit par les efforts *globaux* volumiques, surfaciques et les conditions aux limites en déplacement) sur l'intervalle de temps $[0, T]$. L'objectif est de déterminer la réponse du système sous la forme des champs suivants définis sur $\Omega \times [0, T]$:

$$(4.110) \quad \{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^m, \sigma^r, \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p^m, \varepsilon_p^r\}$$

Ces champs vérifient le système d'équations :

$$(4.111) \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\Sigma}} + \rho \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}} \quad , \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^r \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r$$

$$(4.112) \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m = \underline{\underline{a}}^m : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m) \quad , \quad \dot{\sigma}^r = a^r (\dot{\varepsilon}^r - \dot{\varepsilon}_p^r)$$

$$(4.113) \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_p^r = \dot{\lambda}^r \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} = \pm \dot{\lambda}^r$$

$$(4.114) \quad \dot{\lambda}^j \geq 0 \quad , \quad f^j(\underline{\underline{\sigma}}^j) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}^j f^j(\underline{\underline{\sigma}}^j) = 0 \quad j = m, r$$

ainsi que les conditions aux limites de type (4.2).

La discrétisation temporelle s'effectue comme à la section 2.2. Pour toutes les variables (4.110), on note avec l'indice n les valeurs, supposées connues, à l'instant t_n et $\Delta(\cdot)_n$ l'incrément à déterminer comme réponse à $\Delta \mathcal{Q}_n$.

3.3.2 Algorithme de plasticité modifié

Le schéma général de résolution alternant l'écriture d'équilibres globaux et l'intégration locale des lois de comportement reste *inchangé*. Dans le cadre de la méthode des contraintes initiales, la *matrice de rigidité du système* est obtenue par sommation sur toutes les phases des matrices (4.22) et (4.107) puis assemblage de ces contributions élémentaires. Les évaluations successives du vecteur incrément des déplacements nodaux $\underline{\underline{\Delta U}}_n^i$ sont obtenues en l'utilisant dans (4.41).

L'expression du critère de plasticité global (2.106) s'obtient à partir de l'évaluation du critère propre à chaque phase sur les contraintes *partielles* correspondantes. Par ailleurs, les lois d'évolution (4.112)-(4.113) sont également exprimées par phase. Ainsi, l'évolution élasto-plastique pilotée par un incrément de déformation imposé $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n$ est-elle *découplée* par phase.

Le traitement numérique va donc s'appuyer sur cette remarque importante. A partir d'un incrément de déplacement $\underline{\underline{\Delta U}}_n$ calculé à l'itération i , on calcule en tout point de Gauss l'incrément de déformation $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n = \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n^m$. On considère ensuite séparément chaque phase.

Phase matrice On commence par évaluer le prédicteur (4.54) :

$$(4.115) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}, m} = \underline{\underline{\sigma}}_n^m + \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_n$$

On distingue ensuite deux cas selon le signe de $f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}, m})$.

- S'il est strictement négatif, l'évolution est *purement élastique* sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ et l'on a :

$$(4.116) \quad \Delta \lambda_{n+1}^m = 0 \quad , \quad \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}_{p, n}^m = 0 \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{p, n+1}^m = \underline{\underline{\varepsilon}}_{p, n}^m \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}, m}$$

- S'il est positif, on projette le prédicteur sur le critère de la phase matrice selon la norme élastique associée à $\underline{\underline{a}}^m$ en résolvant :

$$(4.117) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{trial}, m} - \Delta\lambda_{n+1}^m \underline{\underline{a}}^m : \left(\frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m}, \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^m) = 0$$

Si l'on utilise le critère de Drucker-Prager pour la phase matrice, la résolution se fait analytiquement, et l'expression de l'incrément de déformation plastique associé est donné par (F.38). Par une intégration de type (4.24), on obtient le vecteur des forces plastiques élémentaire associé.

Pour la phase matrice, on obtient donc formellement le même processus que pour le milieu continu de Cauchy. Par conséquent, la même zone du code de calcul sera utilisée dans les deux situations.

Phase renforcement On procède formellement de la même façon que pour la phase matrice. Les calculs sont cependant plus simples. A partir de l'incrément de déformation $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n$, on obtient par la condition d'adhérence parfaite :

$$(4.118) \quad \Delta\varepsilon_n^r = \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}_n : \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$$

d'où on tire le prédicteur :

$$(4.119) \quad \sigma_{n+1}^{\text{trial}, r} = \sigma_n^r + a^r \Delta\varepsilon_n^r$$

On distingue ensuite les deux cas suivants :

- Si $f^r(\sigma_{n+1}^{\text{trial}, r}) < 0$, l'évolution est purement élastique, et donc :

$$(4.120) \quad \Delta\lambda_{n+1}^r = 0 \quad , \quad \Delta\varepsilon_{p, n}^r = 0 \quad , \quad \varepsilon_{p, n+1}^r = \varepsilon_{p, n}^r \quad , \quad \sigma_{n+1}^r = \sigma_{n+1}^{\text{trial}, r}$$

- Si $f^r(\sigma_{n+1}^{\text{trial}, r}) \geq 0$, on projette le prédicteur sur le critère. Le domaine d'élasticité \mathcal{C}^r de la phase renforcement est défini par un intervalle de \mathbb{R} de la forme :

$$(4.121) \quad \mathcal{C}^r =] -\sigma_-^r , \sigma_+^r [$$

ce qui rend l'opération de projection immédiate :

$$(4.122) \quad \sigma_{n+1}^r = \begin{cases} \sigma_+^r & \text{si } \sigma_{n+1}^{\text{trial}, r} \geq \sigma_+^r \\ -\sigma_-^r & \text{si } \sigma_{n+1}^{\text{trial}, r} \leq -\sigma_-^r \end{cases}$$

L'incrément de déformation plastique correspondant s'écrit :

$$(4.123) \quad \Delta\varepsilon_{p, n+1}^r = \frac{\sigma_{n+1}^{\text{trial}, r} - \sigma_{n+1}^r}{a^r}$$

Par une intégration de type (4.108), on obtient le vecteur des forces plastiques élémentaire associé.

Les vecteurs des forces plastiques élémentaires sont, pour chaque élément, sommés sur toutes les phases, puis assemblés en un vecteur global $\underline{\Delta F}_{p, n+1}$ qui sert au calcul des déplacements à l'itération suivante.

Convergence Les critères de convergence globaux sur le vecteur des résidus (4.72) et sur les déplacements (4.73) restent inchangés, à condition d'inclure la contribution de chaque phase dans le calcul de $\underline{\Psi}_{n+1}^i = -\delta \underline{F}_n^p, i$

Au niveau local, on impose pour la phase matrice un critère d'arrêt de type (4.70) :

$$(4.124) \quad \max_{\{\text{Points de Gauss}\}} \frac{f^m(\underline{\sigma}_{n+1}^{s,a,m,i})}{\mathfrak{G}^m} < \text{TOL}_f$$

Si cette relation est trop contraignante, on limite le nombre de points plastiques non convergés.

Pour la phase renforcement, on rajoute un test sur l'écart au critère \mathcal{C}^r des états de contrainte partielle statiquement admissibles donnés à l'itération i par :

$$(4.125) \quad \sigma_{n+1}^{s,a,r,i} = \sigma_n^r + a^r (\Delta \varepsilon_n^{r,i} - \Delta \varepsilon_p^{r,i-1})$$

en imposant :

$$(4.126) \quad \max_{\{\text{Points de Gauss}\}} \frac{f^r(\sigma_{n+1}^{s,a,r,i})}{\max(\sigma_+^r, \sigma_-^r)} < \text{TOL}_f$$

ou en limitant là aussi le nombre de points plastiques non convergés.

3.3.3 Autres méthodes de résolution

Après avoir détaillé les modifications apportées à la méthode des contraintes initiales pour résoudre les problèmes multiphasiques adhérents en plasticité, on fait ici quelques remarques sur les autres schémas présentés à la section 2.6.

- Pour les méthodes dites *quasi-Newton*, l'actualisation de la matrice de rigidité ne fait pas référence à son contenu mécanique (*i.e* au comportement du matériau dans chaque élément). Son utilisation dans le cadre multiphasique adhérent ne devrait donc pas nécessiter de modifications.
- Pour appliquer la méthode de Newton proprement dite, il est nécessaire de calculer la matrice de comportement tangent consistant. Le découplage des comportements des différentes phases permet d'utiliser l'équation (4.96) pour la phase matrice. Pour chaque phase renforcement, si le comportement est parfaitement plastique, la rigidité tangente est nulle : les phases renforcement n'interviennent donc pas dans le calcul de la rigidité tangente. À noter que dans le cas d'un comportement écrouissable de ces phases, on peut trouver l'opérateur (scalaire) tangent consistant dans Simo et Hughes (1998, page 53).

3.3.4 Récapitulatif

On présente pour conclure l'organigramme récapitulatif de l'algorithme modifié pour le modèle multiphasique. Il s'agit ici d'un schéma de principe. Pour le détail de chaque étape, on se reportera à l'organigramme 4.1. Il est également possible d'adapter au modèle multiphasique l'organigramme 4.2 pour lequel le prédicteur est l'état de contrainte statiquement admissible.

Dans le code CASTOR, on a introduit une loi de comportement parfaitement plastique pour les phases renforcement, et un critère de Drucker-Prager avec loi d'écoulement non associée pour la phase matrice. Il va sans dire que le traitement par phase de la plasticité au niveau local permet l'extension du code à n'importe quel type de comportement.

L'utilisation de lois plus complexes (de type Cam-Clay pour les géomatériaux, Willam-Warnke pour le béton, ...) dans un cadre multiphasique ne présente alors pas plus de difficultés que leur utilisation dans un code monophasique. De même, l'introduction de l'érouissage dans les phases renforcement requiert-elle simplement la résolution du problème local de projection dans le cas unidimensionnel (Simo et Hughes, 1998, Chap .1).

De ce point de vue, l'approche multiphasique est beaucoup plus puissante que l'approche de Greuell (1993); Bernaud *et al.* (1995) qui dérivent un critère de plasticité par homogénéisation pour le matériau renforcé, dont l'expression analytique n'est possible que sous des hypothèses restrictives (Critère de Drucker-Prager pour la matrice, une seule direction de renforcement).

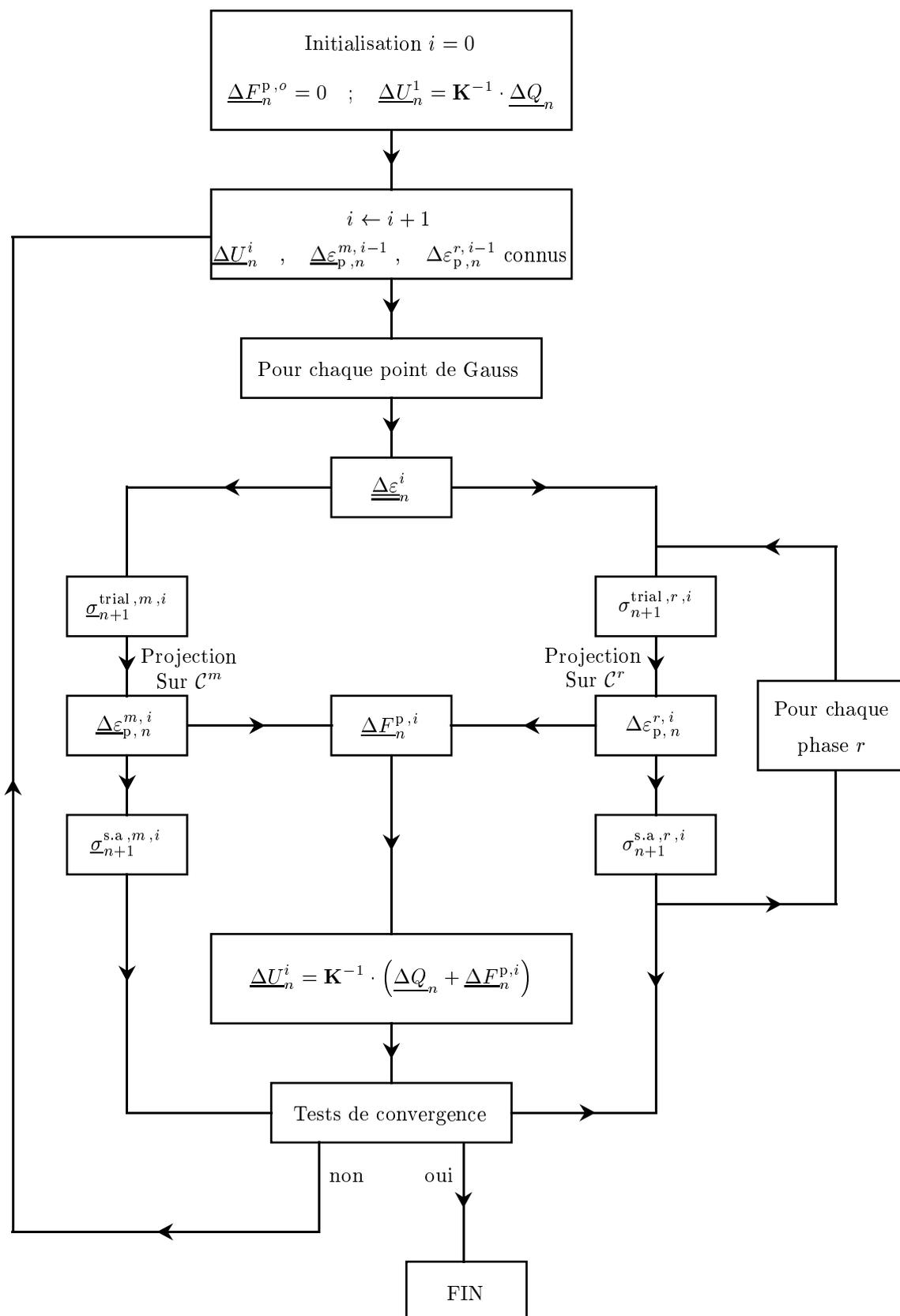
3.4 Conclusion

La mise en œuvre par éléments finis du modèle multiphasique adhérent est une extension du cas classique, puisque l'inconnue principale est un champ de déplacement *unique* pour toutes les phases.

Dans le domaine élastique, la structure d'un programme classique n'est modifiée qu'au niveau de l'évaluation des matrices de rigidité et vecteurs force élémentaires.

Dans le domaine élasto-plastique, la formulation multiphasique permet de *découpler* le traitement des non linéarités par phase. Les techniques numériques applicables pour le milieu continu restent valables si l'on raisonne sur les contraintes partielles dans la phase matrice. Le traitement de la plasticité des phases renforcement ne pose pas de problèmes particuliers.

La théorie développée dans cette section est implémentée dans le code CASTOR, dont le fonctionnement est présenté dans la section 5. Auparavant, on présente les principes de la mise en œuvre par éléments finis du modèle multiphasique général.

FIG. 4.5: *Algorithme de plasticité modifié - Modèle multiphasique adhérent*

4 Implémentation du modèle multiphasique général en élasticité

4.1 Introduction

La construction du modèle multiphasique général repose sur l'existence d'une cinématique *propre* pour chaque phase. Dans une formulation par éléments finis en déplacement, les inconnues principales vont donc être les $(N + 1)$ champs de déplacement associés respectivement à la phase matrice et aux N phases renforcement.

Suivant le plan des sections 1 et 3, on commence par énoncer, en élasticité, un *principe de minimum* de l'énergie potentielle sur l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles. On procède ensuite à la discrétisation de la géométrie. On introduit à cet effet une famille d'*éléments finis multiphasiques*, dont le nombre de degrés de libertés par nœud est proportionnel au nombre de phases. Décomposant l'énergie potentielle sur les éléments, on fait apparaître les expressions des matrices de rigidité et des vecteurs force élémentaires.

Pour simplifier l'exposé, les calculs sont détaillés dans le cadre d'un modèle biphasique (une seule phase renforcement dont la direction est repérée par le vecteur unitaire \underline{e}_r). On commente finalement la généralisation à N phases renforcement en attirant l'attention sur les points critiques de l'implémentation.

4.2 Principe de minimum de l'énergie potentielle

4.2.1 Position du problème d'élasticité biphasique

Soit \mathcal{S} un système biphasique occupant un volume géométrique Ω , soumis à un ensemble de sollicitations comprenant :

- des forces de volume $\rho^j(\underline{x}) \underline{F}^j(\underline{x})$ intervenant dans les équations d'équilibre de chaque phase :

$$(4.127) \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) + \rho^m(\underline{x}) \underline{F}^m(\underline{x}) + \underline{I}(\underline{x}) = \underline{0} \\ \operatorname{div} (\sigma^r(\underline{x}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r(\underline{x}) \underline{F}^r(\underline{x}) - \underline{I}(\underline{x}) = \underline{0} \end{cases}$$

- des forces surfaciques vérifiant les conditions aux limites :

$$(4.128) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \cdot \underline{n} &= \underline{T}^{\underline{d},m}(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in S_{T^m} \\ \sigma^r(\underline{x}) (\underline{n} \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r &= \underline{T}^{\underline{d},r}(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in S_{T^r} \end{aligned}$$

- des conditions aux limites en déplacement ⁷ :

$$(4.129) \quad \underline{\xi}^j(\underline{x}) = \underline{\xi}^{d,j}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi^j} = \partial\Omega \setminus S_{T^j}, \quad j = \{m, r\}$$

On rappelle les définitions suivantes :

- l'espace des champs d'efforts intérieurs statiquement admissibles est l'ensemble des $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r, \underline{I})$ vérifiant (4.127) et (4.128)
- l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles est :

$$(4.130) \quad \mathbb{C}(S_{\xi^j}, \underline{\xi}^{d,j}) = \{(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) \text{ continus, continûment différentiables,} \\ \text{et vérifiant (4.129)}\}$$

On introduit par ailleurs le *champ des déplacement relatifs* :

$$(4.131) \quad \underline{\Delta\xi} = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m$$

4.2.2 Principe du minimum en déplacement

Soit $\{\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \tilde{\varepsilon}^r, \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^m, \tilde{\sigma}^r, \tilde{I}\}$ l'ensemble des champs définissant la solution du problème élastique. Le principe des travaux virtuels appliqué à tout élément de $\mathbb{C}(S_{\xi^j}, \underline{\xi}^{d,j})$ s'écrit :

$$(4.132) \quad \int_{\Omega} [\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \tilde{\sigma}^r \varepsilon^r + \tilde{I} \cdot \underline{\Delta\xi}] d\Omega \\ - \int_{\Omega} [\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r] d\Omega \\ - \int_{S_{T^m}} \underline{T}^{d,m} \cdot \underline{\xi}^m dS - \int_{S_{T^r}} \underline{T}^{d,r} \cdot \underline{\xi}^r dS \\ - \int_{S_{\xi}^m} \underline{\xi}^{d,m} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^m \cdot \underline{n} dS - \int_{S_{\xi}^r} \tilde{\sigma}^r (\underline{n} \cdot \underline{e}_r) \underline{\xi}^{d,r} \cdot \underline{e}_r dS = 0$$

Appliquant l'équation précédente aux champs solutions $\{\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r\}$ et soustrayant membre à membre, il vient :

$$(4.133) \quad \int_{\Omega} [\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \tilde{\varepsilon}^m) + \tilde{\sigma}^r (\varepsilon^r - \tilde{\varepsilon}^r) + \tilde{I} \cdot (\underline{\Delta\xi} - \underline{\Delta\tilde{\xi}})] d\Omega \\ - \int_{\Omega} [\rho^m \underline{F}^m \cdot (\underline{\xi}^m - \tilde{\xi}^m) + \rho^r \underline{F}^r \cdot (\underline{\xi}^r - \tilde{\xi}^r)] d\Omega \\ - \int_{S_{T^m}} \underline{T}^{d,m} \cdot (\underline{\xi}^m - \tilde{\xi}^m) dS - \int_{S_{T^r}} \underline{T}^{d,r} \cdot (\underline{\xi}^r - \tilde{\xi}^r) dS = 0$$

7. On a donné au chapitre 2, section 1.3 ces définitions dans le cadre le plus général. Comme à la section 1, on restreint ici le formalisme pour simplifier la présentation du modèle éléments finis sans diminuer la portée générale de la méthode (Voir note page 135).

Les densités d'énergie libre associées à chacune des phases et à l'interaction (Eq.(2.53)) vérifient :

$$(4.134\text{-a}) \quad \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^m}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^m)$$

$$(4.134\text{-b}) \quad \tilde{\sigma}^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r}(\tilde{\varepsilon}^r)$$

$$(4.134\text{-c}) \quad \underline{\underline{\tilde{I}}} = \frac{\partial \psi^I}{\partial \underline{\underline{\Delta \tilde{\xi}}}}(\underline{\underline{\Delta \tilde{\xi}}})$$

De par la stabilité des matériaux constitutifs des phases, ces densités sont supposées convexes de leur argument. On en déduit respectivement :

$$(4.135\text{-a}) \quad \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) - \psi^m(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^m) \geq \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^m) : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^m)$$

$$(4.135\text{-b}) \quad \psi^r(\varepsilon^r) - \psi^r(\tilde{\varepsilon}^r) \geq \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r}(\tilde{\varepsilon}^r)(\varepsilon^r - \tilde{\varepsilon}^r)$$

$$(4.135\text{-c}) \quad \psi^I(\underline{\underline{\Delta \xi}}) - \psi^I(\underline{\underline{\Delta \tilde{\xi}}}) \geq \frac{\partial \psi^I}{\partial \underline{\underline{\Delta \xi}}}(underline{\underline{\Delta \tilde{\xi}}}) \cdot (\underline{\underline{\Delta \xi}} - \underline{\underline{\Delta \tilde{\xi}}})$$

Substituant (4.134) et reportant ces inégalités dans (4.133), on montre aisément que les champs solutions $\{\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r\}$ minimisent sur $\mathbb{C}(S_{\xi^j}, \underline{\underline{\xi}}^{d,j})$ la fonctionnelle *énergie potentielle* définie par :

$$(4.136\text{-a}) \quad \mathcal{E}(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r) = \mathcal{W}(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r) - \Phi(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r)$$

$$(4.136\text{-b}) \quad \mathcal{W}(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r) = \int_{\Omega} [\psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \psi^r(\varepsilon^r) + \psi^I(\underline{\underline{\Delta \xi}})] d\Omega$$

$$(4.136\text{-c}) \quad \Phi(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r) = \int_{\Omega} [\rho^m \underline{\underline{F}}^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m + \rho^r \underline{\underline{F}}^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r] d\Omega \\ + \int_{S_{T^m}} \underline{\underline{T}}^{d,m} \cdot \underline{\underline{\xi}}^m dS + \int_{S_{T^r}} \underline{\underline{T}}^{d,r} \cdot \underline{\underline{\xi}}^r dS$$

dans lesquels on a implicitement utilisé les équations cinématiques :

$$(4.137) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \xi}}^m + {}^t \underline{\underline{\text{grad } \xi}}^m \right) \quad , \quad \varepsilon^r = (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \underline{\underline{\text{grad } \xi}}^r \quad , \quad \underline{\underline{\Delta \xi}} = \underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m$$

Dans la suite, on suppose un comportement élastique linéaire pour chaque phase. On explicite les densités d'énergie libre sous la forme :

$$(4.138\text{-a}) \quad \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \underline{\underline{\varepsilon}}^m : (\underline{\underline{\sigma}}_o^m - \underline{\underline{a}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{an}}^m)$$

$$(4.138\text{-b}) \quad \psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} a^r (\varepsilon^r)^2 + \varepsilon^r : (\sigma_o^r - a^r \varepsilon_{\text{an}}^r)$$

$$(4.138\text{-c}) \quad \psi^I(\underline{\underline{\Delta \xi}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta \xi}} \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot \underline{\underline{\Delta \xi}} - \underline{\underline{\Delta \xi}} \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot \underline{\underline{\Delta \xi}}_{\text{an}}$$

4.3 Formulation éléments finis en déformation plane

Pour une présentation concrète, on a choisi de se limiter aux problèmes en déformation plane. On donne dans ce cadre les différentes expressions qui interviennent dans la programmation du code aux éléments finis. La généralisation aux problèmes tridimensionnels est abordée à la section suivante.

4.3.1 Discrétisation et interpolation des champs de déplacement

Soit $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ un repère orthonormé de l'espace dans lequel est plongé le système, et (O, x, y) le plan de déformation. On commence par discrétiser la structure en réalisant un maillage *unique* pour les deux phases (comprenant N_e éléments de surface \mathcal{V}_e). Du point de vue géométrique, on considère des éléments de Lagrange à n_e nœuds (en pratique, 3 ou 4 pour des éléments linéaires, 6 ou 9 pour des éléments quadratiques).

Compte tenu du caractère *biphasique bidimensionnel* du problème, chaque nœud possède *quatre* degrés de liberté, respectivement les deux composantes de déplacement de chacune des phases (u^m, v^m, u^r, v^r) . Le vecteur des déplacements nodaux est noté \underline{u}_e :

$$(4.139) \quad {}^t \underline{u}_e = \{u_1^m, v_1^m, u_1^r, v_1^r \dots u_{n_e}^m, v_{n_e}^m, u_{n_e}^r, v_{n_e}^r\}$$

Notant $((u^j, v^j))$ les coordonnées de chaque champ de déplacement $\underline{\xi}^j, \{j = m, r\}$ dans un repère orthonormé, on regroupe les quatre composantes ainsi obtenues dans le *vecteur déplacement généralisé* $\underline{\Xi}$:

$$(4.140) \quad \underline{\Xi}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} u^m(\underline{x}) \\ u^r(\underline{x}) \\ v^m(\underline{x}) \\ v^r(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas monophasique, on discrétise ce champ de déplacement en le définissant, sur chaque élément, par interpolation :

$$(4.141) \quad \underline{\Xi}(\underline{x})|_{\mathcal{V}_e} = \mathbf{N}_e \cdot \underline{u}_e$$

La matrice \mathbf{N}_e est ici définie par n_e blocs accolés de la forme :

$$(4.142) \quad \mathbf{N}_e = \left[\begin{array}{cccc} & & N_i & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & N_i & 0 & 0 \\ \dots & & 0 & 0 & N_i & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & N_i \end{array} \right]$$

Les fonctions de forme $N_i(\underline{x})$, $i = 1, ..n_e$ sont les mêmes que celles utilisées dans le cas du milieu continu classique, ne dépendant que du nombre de noeuds de l'élément.

On a défini de la sorte une famille d'éléments finis de Lagrange *multiphasiques*.

4.3.2 Déformations des phases

On introduit le vecteur déformation généralisé $\underline{\varepsilon}$ à 5 composantes :

$$(4.143) \quad {}^t \underline{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{xx}^m, \varepsilon_{yy}^m, \varepsilon_{zz}^m, 2 \varepsilon_{xy}^m, \varepsilon^r \}$$

On rappelle que la déformation axiale de la phase renforcement s'obtient par :

$$(4.144) \quad \varepsilon^r = \underline{\underline{\text{grad } \xi^r}} : (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$$

Dans le plan (O, x, y) , la direction de renforcement est définie par un seul angle noté α :

$$(4.145) \quad \underline{e}_r = \cos \alpha \underline{e}_x + \sin \alpha \underline{e}_y$$

Reportant (4.145) dans (4.144), on en déduit :

$$(4.146) \quad \varepsilon^r = \cos^2 \alpha \frac{\partial u^r}{\partial x} + \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{\partial u^r}{\partial y} + \frac{\partial v^r}{\partial x} \right) + \sin^2 \alpha \frac{\partial v^r}{\partial y}$$

La matrice de différentiation \mathbf{L} donnant $\underline{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \underline{\Xi}$ s'écrit donc sous la forme :

$$(4.147) \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin^2 \alpha \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Pour exprimer le vecteur déformation en fonction des déplacements nodaux, on introduit la matrice \mathbf{B}_e :

$$(4.148) \quad \underline{\varepsilon} = \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_e \quad , \quad \mathbf{B}_e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_e$$

Elle est donc de taille $(5 \times n_e)$, composée de n_e blocs s'agençant comme suit :

$$(4.149-a) \quad \mathbf{B}_e = \left[\begin{array}{c|c|c} \dots & \mathbf{B}_i & \dots \end{array} \right]$$

$$(4.149-b) \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin^2 \alpha \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Contraintes partielles

Soit \mathbf{d}^m la matrice d'élasticité de la phase matrice associée au tenseur des modules élastiques $\underline{\underline{\mathbf{a}}}^m$ (de taille 4×4 en déformation plane), et a^r la rigidité scalaire de la phase renforcement. On introduit la *matrice d'élasticité généralisée* \mathbf{D} de taille 5×5 construite de la façon suivante :

$$(4.150) \quad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & \mathbf{d}^m & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a^r \end{array} \right]$$

Avec ce formalisme, on vérifie que le *vecteur contrainte généralisé* $\underline{\sigma}$ à 5 composantes :

$$(4.151) \quad {}^t \underline{\sigma} = \{ \sigma_{xx}^m, \sigma_{yy}^m, \sigma_{zz}^m, \sigma_{xy}^m, \sigma^r \}$$

s'obtient simplement en effectuant le produit :

$$(4.152) \quad \underline{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}$$

On peut de même exprimer la densité d'énergie libre (4.138) associée aux deux phases sous la forme :

$$(4.153) \quad \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} {}^t \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon} + {}^t \underline{\varepsilon} \cdot [\underline{\sigma}_o - \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{\text{an}}]$$

ou encore, en substituant (4.148) :

$$(4.154) \quad \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \psi^r(\varepsilon^r) = \frac{1}{2} {}^t \underline{\mathbf{u}}_e \cdot {}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e \cdot \underline{\mathbf{u}}_e + {}^t \underline{\mathbf{u}}_e \cdot {}^t \mathbf{B}_e \cdot [\underline{\sigma}_o - \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{\text{an}}]$$

4.3.4 Efforts d'interaction

Il convient d'exprimer tout d'abord le vecteur des déplacements relatifs en fonctions des déplacements nodaux. Introduisant la matrice \mathbf{T} :

$$(4.155) \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

on montre trivialement que :

$$(4.156) \quad \underline{\underline{\Delta \xi}} = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m = \mathbf{T} \cdot \underline{\underline{\Xi}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e \cdot \underline{\mathbf{u}}_e$$

Par ailleurs, on associe au tenseur d'élasticité d'interface $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^I$ la matrice carrée \mathbf{C}^I , symétrique d'ordre 2 de sorte que :

$$(4.157) \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^I \cdot (\underline{\underline{\Delta \xi}} - \underline{\underline{\Delta \xi}}_{\text{an}}) = \mathbf{C}^I \cdot (\underline{\Delta \xi} - \underline{\Delta \xi}_{\text{an}})$$

Substituant (4.156), il vient :

$$(4.158) \quad \underline{I} = \mathbf{C}^I \cdot \left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e \cdot \underline{u}_e - \underline{\Delta\xi}_{\text{an}} \right)$$

Ainsi la densité d'énergie libre liée aux efforts d'interaction (4.138-c) se met-elle sous la forme :

$$(4.159) \quad \psi^I(\underline{\Delta\xi}) = \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot {}^t \mathbf{N}_e \cdot {}^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e \cdot \underline{u}_e - {}^t \underline{u}_e \cdot {}^t \mathbf{N}_e \cdot {}^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \underline{\Delta\xi}_{\text{an}}$$

4.3.5 Matrice de rigidité et vecteur force élémentaires

L'expression de l'énergie potentielle discrétisée s'obtient en décomposant (4.136) sur chaque élément du maillage. Reprenant les notations de la section 1.3.3, on a :

$$(4.160\text{-a}) \quad w_e(\underline{u}_e) = \int_{\mathcal{V}_e} [\psi^m(\underline{\varepsilon}^m) + \psi^r(\varepsilon^r) + \psi^I(\underline{\Delta\xi})] d\Omega$$

$$(4.160\text{-b}) \quad \phi_e(\underline{u}_e) = \int_{\mathcal{V}_e} [\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r] d\Omega \\ + \int_{\partial\mathcal{V}_e \cap S_{Tm}} \underline{T}^{\text{d},m} \cdot \underline{\xi}^m dS + \int_{\partial\mathcal{V}_e \cap S_{Tr}} \underline{T}^{\text{d},r} \cdot \underline{\xi}^r dS$$

Reportant (4.154) et (4.159), il vient :

$$(4.161) \quad w_e(\underline{u}_e) = \frac{1}{2} {}^t \underline{u}_e \cdot \left[\int_{\mathcal{V}_e} ({}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e + {}^t \mathbf{N}_e \cdot {}^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e) d\Omega \right] \cdot \underline{u}_e \\ - {}^t \underline{u}_e \cdot \int_{\mathcal{V}_e} \left[{}^t \mathbf{B}_e \cdot (\mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{\text{an}} - \underline{\sigma}_o) + {}^t \mathbf{N}_e \cdot {}^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \underline{\Delta\xi}_{\text{an}} \right] d\Omega$$

Sur cette dernière expression, on identifie clairement :

- la *matrice de rigidité élémentaire* :

$$(4.162) \quad \mathbf{k}_e = \int_{\mathcal{V}_e} ({}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e + {}^t \mathbf{N}_e \cdot {}^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e) d\Omega$$

- le *vecteur force élémentaire* associé aux déformations anélastiques :

$$(4.163) \quad \underline{f}_e^{\text{an}} = \int_{\mathcal{V}_e} \left[{}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon}_{\text{an}} + {}^t \mathbf{N}_e \cdot {}^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \underline{\Delta\xi}_{\text{an}} \right] d\Omega$$

- le *vecteur force élémentaire* associé aux contraintes initiales :

$$(4.164) \quad \int_{\mathcal{V}_e} -{}^t \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\sigma}_o d\Omega$$

En ce qui concerne les efforts extérieurs, on associe aux densités volumiques et surfaciques intervenant dans (4.136) les vecteurs $(\underline{\rho\mathcal{F}}, \underline{\mathcal{T}}^m, \underline{\mathcal{T}}^r)$ définis par :

$$(4.165\text{-a}) \quad \underline{\rho\mathcal{F}} = \{ \rho^m F_x^m, \rho^m F_y^m, \rho^r F_x^r, \rho^r F_y^r \}$$

$$(4.165\text{-b}) \quad \underline{\mathcal{T}}^m = \{ T_x^{\text{d},m}, T_y^{\text{d},m}, 0, 0 \}$$

$$(4.165\text{-c}) \quad \underline{\mathcal{T}}^r = \{ 0, 0, T_x^{\text{d},r}, T_y^{\text{d},r} \}$$

La contribution élémentaire $\phi_e(\underline{\mathbf{u}}_e)$ à l'énergie potentielle se met alors sous la forme :

$$(4.166) \quad \phi_e(\underline{\mathbf{u}}_e) = {}^t\underline{\mathbf{u}}_e \cdot \left[\int_{\mathcal{V}_e} {}^t\mathbf{N}_e \cdot \underline{\rho\mathcal{F}} \, d\Omega + \int_{\partial\mathcal{V}_e \cap S_{T^m}} {}^t\mathbf{N}_e \cdot \underline{\mathcal{T}}^m \, dS + \int_{\partial\mathcal{V}_e \cap S_{T^r}} {}^t\mathbf{N}_e \cdot \underline{\mathcal{T}}^r \, dS \right]$$

4.3.6 Résolution

Au vu des expressions (4.161) et (4.166), il est clair que la sommation des contributions élémentaires va donner par assemblage une expression quadratique de l'énergie potentielle. La minimisation de celle-ci conduit donc naturellement à un système linéaire classique :

$$(4.167) \quad \mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}}$$

Les opérations d'assemblage des matrices \mathbf{k}_e dans \mathbf{K} (resp. des vecteurs $\underline{\mathbf{f}}_e$ dans $\underline{\mathbf{F}}$) sont de même nature que dans le cas monophasique, à condition de définir correctement les tables de localisation associant les numérotations locale et globale. La prise en compte des conditions aux limites en déplacement est formellement identique à ce qui a été présenté en 1.3.6.

4.4 Généralisation et remarques sur l'implémentation

Ayant introduit un formalisme vectoriel adapté au milieu biphasique en déformation plane (vecteurs déformation et contrainte généralisés à 5 composantes), on a pu retrouver la structure habituelle des matrices et vecteurs élémentaires (Eqs.(4.162)-(4.164)). La présence d'efforts d'interaction entre les deux phases introduit cependant un terme de rigidité supplémentaire. Ces efforts étant linéaires du déplacement relatif, ce terme se calcule à partir de la matrice \mathbf{N}_e et non pas de \mathbf{B}_e .

On doit tenir compte de cette remarque dans le choix du schéma d'intégration numérique utilisé pour calculer la matrice de rigidité d'interaction. En effet le degré du produit polynomial ${}^t\mathbf{N}_e \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^I \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_e$ est de 2 plus élevé que celui du produit ${}^t\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e$. Pour obtenir une même précision que dans le cas monophasique, il suffit donc d'utiliser un point de Gauss supplémentaire pour chaque variable d'intégration.

La généralisation à N directions de renforcement ne pose pas de problèmes de principe. Chaque élément à n_e nœuds possède alors $2(N+1)n_e$ degrés de liberté. Les vecteurs contenant les déformations et les contraintes par phase ont $(4+N)$ composantes. La matrice d'élasticité généralisée est construite en adjoignant à \mathbf{d}^m une diagonale formée des rigidités scalaires a^r de chaque phase renforcement (voir Eq.(4.150)).

Définissant les matrices \mathbf{T}^r donnant les vecteurs de déplacement relatif $\{\underline{\Delta\xi}^r = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m\}$, et les matrices d'élasticité d'interaction $\mathbf{C}^{I,r}$, on obtient pour matrice de rigidité élémentaire :

$$(4.168) \quad \mathbf{k}_e = \int_{\mathcal{V}_e} \left({}^t\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e + \sum_{r=1}^N {}^t\mathbf{N}_e \cdot {}^t\mathbf{T}^r \cdot \mathbf{C}^{I,r} \cdot \mathbf{T}^r \cdot \mathbf{N}_e \right) d\Omega$$

et des formules similaires pour les vecteurs force.

Il faut enfin faire la remarque importante suivante : l'étude de problèmes réels nécessite l'implémentation dans le *même* code d'éléments finis multiphasiques à nombre de phases variables. En effet, dans les structures intéressant l'ingénieur, on rencontre fréquemment des zones renforcées côtoyant des zones non renforcées, voire un nombre de directions de renforcement variable (comme dans le cas des fondations sur réseaux de micropieux). Le traitement de ces problèmes introduit alors un nombre de degrés de liberté par nœud *variable* selon la position dans le maillage (voir figure 4.6).

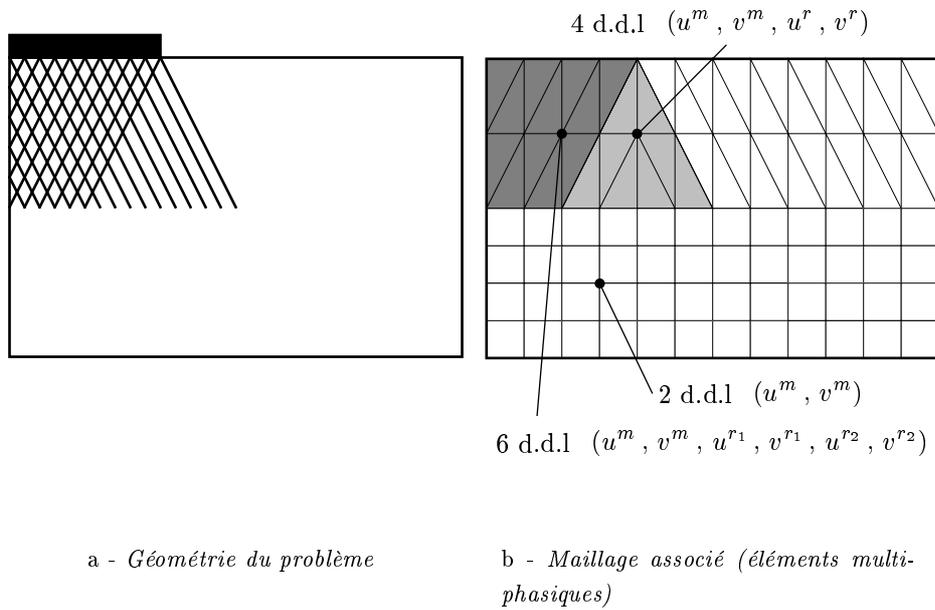


FIG. 4.6: *Problème multiphasique à nombre de phases variable : l'exemple du réseau de micropieux*

4.5 Conclusion

On a introduit dans cette section la notion d'*éléments finis multiphasiques* dérivés des éléments de Lagrange classiques en augmentant le nombre de degrés de liberté par nœud. On a détaillé dans le cas biphasique en déformation plane, le calcul de toutes les quantités intéressantes, puis brièvement évoqué le cas général multiphasique.

Pour être complet, il convient de décrire une variante simplifiée de la présentation précédente. Reprenant une idée de Herrmann et Al-Yassin (1978), on peut considérer que seule la composante du déplacement relatif entre phases *colinéaire à la direction de renforcement* est physiquement pertinente. Les champs de déplacement s'écrivent alors respectivement sous la forme :

$$(4.169) \quad \underline{\xi}^m \equiv \underline{\xi} \quad , \quad \underline{\xi}^r = \underline{\xi} + \Delta \xi^r \underline{e}_r \quad r = 1, \dots, N$$

Dans la formulation discrétisée, les degrés de liberté sont par conséquent au nombre de $(N + 2)$ en chaque nœud. On les note $(u^m, v^m, \Delta u_{//}^1, \dots, \Delta u_{//}^N)$. Dans le cas où l'on néglige les forces de volume dans les phases renforcement, les efforts d'interaction doivent également être colinéaires à la direction de renforcement. Le tenseur d'élasticité d'interaction se réduit alors à une composante uniaxiale de la forme $c_I \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$.

Le détail du formalisme matriciel correspondant à cette approche est donné dans Bennis (1999). Dans le cadre de son stage de DEA, l'auteur a implémenté l'approche biphasique complète et l'approche simplifiée à partir du code CASTOR que nous présentons maintenant.

5 Le code CASTOR

Nous terminons ce chapitre par la programmation proprement dite du code de calcul CASTOR dédié au *modèle multiphasique adhérent*. Après avoir donné les raisons qui nous ont poussé à développer un nouveau code, nous présentons la structure des trois programmes qui le constituent.

5.1 Motivation

Le choix d'un cadre de programmation a été source de nombreuses hésitations. En effet, fallait-il choisir de s'appuyer sur un code de calcul existant pour l'enrichir du modèle multiphasique, ou au contraire était-il pertinent de développer un code nouveau?

La première solution présente des avantages et des inconvénients qu'il convient de passer en revue :

- De nombreux outils sont à la disposition du programmeur : procédures d'intégration numérique, manipulation de matrices, solveur de systèmes linéaires.
- Les pré- et post-traitement des calculs, notamment l'interface graphique sont disponibles.
- A l'opposé, la programmation du modèle multiphasique implique l'introduction de nouvelles données (les propriétés du ou des matériau(x) renforcé(s)) et de nouvelles variables (les contraintes partielles et déformations plastiques de chaque phase). De plus, des modifications de toutes les procédures importantes du code sont à prévoir : calculs des matrices et vecteurs élémentaires, algorithme local d'intégration de la plasticité. Sans compter les nécessaires adaptations des pré- et post-processeurs pour l'acquisition des données et le rendu des résultats spécifiques au modèle multiphasique.
- De telles transformations nécessitent, soit d'avoir accès à l'intégralité des fichiers source du code de calcul retenu, soit d'utiliser un code incluant un langage de programmation externe (comme GIBIANE dans le code CASTEM 2000 (Fleuret, 1996)). Dans ce cas, l'implémentation du modèle multiphasique est une « surcouche » du code existant, et devient un exercice délicat, pour une performance numérique forcément médiocre.

Dans tous les cas, le temps d'apprentissage de l'architecture du code existant (structures de données, enchaînement des procédures) est très important et difficilement chiffrable à l'avance. De plus, compte tenu de la rigidité inévitable du cadre existant, le programmeur peut se retrouver à chaque étape du développement dans une impasse l'obligeant à revoir en amont ses choix d'implémentation.

En ce qui concerne l'autre solution, on peut faire d'emblée les remarques suivantes :

- En partant de rien, il est possible de prévoir *ab initio* toutes les structures de données

adaptées au modèle. Le découpage du programme peut ainsi être conçu de façon à exploiter complètement le caractère multiphasique, c'est à dire la possibilité de traiter à différents niveaux chaque phase de façon *indépendante*.

- La construction de toutes les composantes permet à son auteur de maîtriser chaque ligne de code qu'il écrit. L'assimilation nécessaire de toutes les techniques numériques particulières aux éléments finis (intégration numérique, stockage de matrices creuses, résolution des systèmes linéaires, intégration des équations locales de la plasticité, etc...) est une formation très enrichissante. De plus, la maîtrise de l'ensemble du code source permet d'intégrer très rapidement toute nouvelle fonctionnalité.
- A l'opposé, il est clair qu'une très grande part du code à écrire ne fait que reprendre des choses connues et maîtrisées ailleurs. Il faut remarquer en particulier que l'ensemble des potentialités d'un code aux éléments finis en élasto-plasticité doit préexister à l'implémentation du modèle multiphasique, puisque dans la plupart des structures que l'on souhaite étudier se côtoient des zones renforcées et des zones non renforcées.
- Même si l'on retient la solution d'un nouveau programme pour le calcul proprement dit, il reste encore à décider quel pré- et post-processeur utiliser. Comme on l'a noté, l'utilisation de programmes existants ne donne pas accès à des quantités spécifiques du modèle multiphasique.

Au vu de toutes ces remarques, l'auteur a décidé de s'investir dans le développement d'un code entièrement nouveau, baptisé CASTOR (Calcul Anélastique des Structures et Ouvrages Renforcés). L'objectif était d'avoir, à moindre coût, un code suffisamment général pour pouvoir traiter des problèmes intéressant l'ingénieur. A chaque étape, on a donc essayé de faire la part des choses entre les fonctionnalités *incontournables* (par exemple l'implémentation de la plasticité ou l'affichage des déformées du maillage) et l'*accessoire* (les méthodes de résolution élaborées présentées à la section 2.6 ou les visualisations graphiques complexes). On s'est naturellement restreint aux problèmes bidimensionnels et axisymétriques.

Le code CASTOR comporte trois programmes *distincts*: `prepro`, `castor` et `postpro`, qui sont respectivement le pré-processeur, le programme de calcul et le post-processeur. Le langage de programmation choisi est le FORTRAN 77 (Lignelet, 1991), dans la version disponible sur stations de travail SUN (Sun Microsystems, 1992). L'interface graphique a été réalisée en générant des fichiers graphiques au format PostScript (Adobe Systems Incorporated, 1994) visualisables à l'écran ou directement imprimables.

5.2 Le pré-processeur `prepro`

Le programme `prepro` est un *interpréteur de commandes*. Celles-ci peuvent être tapées *en ligne*, c'est à dire directement à l'écran, ou bien dans un fichier de commandes. Chaque ligne de

commande comporte un *mot-clé* et un certain nombre d'arguments séparés par des virgules. Les commandes disponibles peuvent être regroupées en plusieurs catégories relatives à :

- la définition du type de problème traité : calcul bidimensionnel en déformation plane, contrainte plane ou axisymétrie, en élasticité ou élasto-plasticité⁸.
- la définition des matériaux constitutifs du modèle éléments finis. Pour chacun, les caractéristiques élastiques et le critère de plasticité sont introduits. En fonction du nombre de directions de renforcement (0, 1, 2 directions, ou bien renforcement radial), la raideur et la résistance de chaque phase renforcement est précisée.
- la définition du maillage. Des commandes permettent de générer les noeuds et les éléments dans le cas de géométries simples : il est alors possible de définir à la main sans trop d'efforts des maillages *structurés* ou *réguliers* (Prat, 1995, page 223). Le code CASTOR dispose des éléments de Lagrange linéaires T3, Q4, et quadratiques T6, Q9.
- La définition des conditions aux limites (déplacements imposés) et du chargement (forces de volumes, pressions, forces ponctuelles). Pour ce dernier, des commandes spéciales permettent de définir plusieurs cas de charge qui seront cumulés dans un calcul incrémental.
- Des commandes graphiques sont également disponibles, permettant de visualiser le maillage en cours de réalisation.

Le manuel d'utilisation du pré-processeur détaillant la syntaxe des différentes commandes est donné dans l'annexe G.

Un fichier de commandes typique (permettant le calcul d'une fondation sur réseaux de micro-pieux) est donné en annexe F, section 4. A la fin de l'exécution de `prepro`, toutes les données nécessaires au calcul sont stockées dans des fichiers formatés `file0x.dat`. Ceux-ci peuvent être éventuellement édités pour apporter des corrections mineures avant le lancement du calcul proprement dit.

5.3 Le code de calcul castor

5.3.1 En élasticité

On présente ci-dessous la structure du programme principal de `castor`. Seules les procédures importantes sont mentionnées avec leur contenu.

`CALCGAUSS` Calcule les poids et points d'intégration pour les différents schémas de Gauss et de Hammer (Batoz et Dhatt, 1995, pages 199-200).

8. L'option contrainte plane ne fonctionne qu'en élasticité. En effet, un algorithme spécifique doit être utilisé pour l'intégration locale de la plasticité (Simo et Taylor, 1986).

LECTURE	Lit les fichiers <code>file0x.dat</code> et stocke les données dans des tableaux situés dans une zone de mémoire accessible depuis toutes les procédures.
INITSTO	Initialise les tableaux de stockage des résultats (champ de déplacement, déformation, contrainte, déformation plastique) permettant le cumul des cas de charge.
MAKEKLD	Évalue la mémoire nécessaire à l'exécution du calcul, notamment la place prise par la matrice de rigidité. Celle-ci, supposée symétrique, est stockée en <i>ligne de ciel</i> (en anglais <i>skyline storage</i>) (Dhatt et Touzot, 1981, pages 258-261). Les tableaux nécessaires au repérage de la structure de la ligne de ciel sont également créés.
ASSEMBLE	Assemble la matrice de rigidité et les vecteurs associés aux forces de volume et aux contraintes initiales. Les étapes de l'assemblage sont les suivantes :

• Pour chaque élément $k=1, \dots, NELT$	
ELEM_K	Calcule la matrice de rigidité élémentaire (Eqs.(4.22),(4.107)) et le vecteur force associé aux contraintes initiales et forces de volume (Eqs.(4.25),(4.26),(4.109)).
• Pour chaque point de Gauss IPG de l'élément courant	
ELEM_B	Calcule la matrice \mathbf{B}_e au point courant (4.17).
ELASTI	Calcule la matrice d'élasticité \mathbf{D} .
PRODUIT	Calcule le produit ${}^t\mathbf{B}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e$ au point courant.
ADDMAT	Somme sur les points de Gauss pour obtenir (4.22)
LOCALIZ	Calcule la <i>table de localisation</i> établissant la correspondance entre la numérotation locale des nœuds de l'élément et la numérotation globale des degrés de liberté.
ASSEMBELEM	Ajoute la matrice de rigidité (resp. le vecteur force) élémentaire à la matrice de rigidité (resp. le vecteur force) global(e).

ADDFORCE	Calcule le vecteur force associé aux efforts surfaciques (4.27) et forces ponctuelles et le cumule.
----------	---

TERMUNIT	Prend en compte les conditions aux limites pour obtenir le système (4.32) en utilisant la méthode du terme unité sur la diagonale (Batoz et Dhatt, 1995, page 264).
LD_SKY	Effectue la décomposition de Crout $\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \delta \cdot {}^t\mathbf{L}$ dans la ligne de ciel (Batoz et Dhatt, 1995, page 325).
RESOL_SKY	Effectue l'inversion du système $\mathbf{L} \cdot \delta \cdot {}^t\mathbf{L} \cdot \underline{U} = \underline{F}$ pour obtenir le vecteur des déplacements nodaux \underline{U} .
ECRITURE	Ecrit les résultats (déplacement, déformations, contraintes) dans les fichiers <code>file2x.dat</code>

Lorsque l'on considère plusieurs cas de charge, seules les procédures assurant la lecture des données (associées au cas de charge courant), le calcul du vecteur force, la résolution du système et l'écriture des résultats sont exécutées en boucle, la matrice de rigidité étant assemblée et inversée une fois pour toutes.

5.3.2 En élasto-plasticité

Dans le cas de calculs non linéaires, on intercale l'appel de la procédure PLASTICITE entre l'inversion du système (RESOL_SKY) et l'écriture des résultats. Le programme reproduit fidèlement le diagramme représenté sur la figure 3.3.4, en utilisant au choix les organigrammes 4.1 ou 4.2 pour le traitement de la plasticité de la phase matrice.

5.4 Le post-processeur postpro

Le programme `postpro` a une structure semblable à celle de `prepro`. C'est en effet également un interpréteur de commandes en ligne. A son exécution, tous les fichiers de données `file0x.dat` et de résultats `file2x.dat` sont lus et leur contenu placé en mémoire. Le reste du programme consiste essentiellement en un module graphique permettant, à partir du choix d'un cas de charge :

- de représenter le maillage et sa déformée. Des exemples sont donnés dans l'annexe F, section 4.
- de représenter les valeurs par élément d'une composante d'un champ résultat (déformation, contrainte partielle ou totale, déformation plastique).
- de représenter la déformation plastique équivalente accumulée dans chaque phase. On visualise ainsi les « zones plastiques » dans la structure.

- de faire éventuellement un zoom sur une zone intéressante du maillage avant d'afficher un résultat.
- d'extraire d'un champ scalaire les valeurs relatives à un ensemble de noeuds ou d'éléments de façon à pouvoir exploiter les résultats sous forme de courbes.

6 Conclusion

Après avoir présenté la technique classique des éléments finis pour les problèmes d'élasto-plasticité, nous avons étendu les différents concepts utilisés au modèle multiphasique.

Se plaçant tout d'abord dans le cadre adhérent, nous avons montré qu'il est possible d'adapter la structure classique d'un code de façon à exploiter le caractère multiphasique du modèle. Le traitement numérique *local* de la plasticité se décompose en particulier par phase.

Se plaçant dans le cadre général, nous avons introduit le concept d'*éléments finis multiphasiques* formulés à partir de plusieurs champs de déplacement, et développé le formalisme nécessaire à leur implémentation.

Nous avons enfin présenté le code CASTOR dédié aux problèmes multiphasiques adhérents.

Le chapitre qui vient est consacré à la validation de ce code à partir de solutions analytiques dont celles présentées au chapitre 3, et à son utilisation pour la résolution numérique de quelques problèmes de géotechnique.

Chapitre 5

Validation et Utilisation de CASTOR

Le code de calcul CASTOR a été implémenté pour traiter les problèmes multiphasiques adhérents en élasto-plasticité, dans le cadre axisymétrique et en déformation plane.

La validation du code est tout d'abord menée à travers une série d'exemples d'application pour lesquels une solution analytique est connue. Des problèmes monophasiques puis multiphasiques sont successivement abordés.

Le code est ensuite utilisé pour traiter trois types d'ouvrages renforcés par inclusions :

- *les radiers de pieux. L'approche multiphasique est comparée au modèle hybride, à des calculs par éléments finis tridimensionnels et des mesures effectuées sur ouvrage réel (Messeturm de Francfort, Allemagne).*
- *les tunnels boulonnés. Le code est utilisé pour simuler des essais sur modèle réduit.*
- *les réseaux de micropieux. Une étude paramétrique sur l'inclinaison des inclusions permet d'apporter des résultats quantitatifs inaccessibles jusqu'ici.*

Pour toutes les comparaisons, les écarts par rapport à la solution de référence sont en général inférieurs à 10%, ce qui qualifie à la fois le modèle multiphasique adhérent et son implémentation. Par ailleurs, les temps de calcul sont très nettement améliorés.

Sommaire

1	Validation de CASTOR par comparaison à des solutions analytiques	191
1.1	Introduction	191
1.2	Problèmes monophasiques	191
1.2.1	Principe	191
1.2.2	Calculs élastiques	192
1.2.2.1	Solutions homogènes	192
1.2.2.2	Tube sous pression	192
1.2.2.3	Poinçonnement d'un massif	192
1.2.3	Calculs élasto-plastiques	194
1.2.3.1	Solutions homogènes	194
1.2.3.2	Poinçonnement d'un massif	194
1.2.3.3	Tunnel profond non renforcé	195
1.2.4	Conclusion	197
1.3	Problèmes multiphasiques adhérents	200
1.3.1	Introduction	200
1.3.2	Compression simple	200
1.3.3	Tunnel profond boulonné en élasticité	200
1.3.4	Tunnel profond boulonné en plasticité	203
1.3.4.1	Introduction	203
1.3.4.2	Comparaison des approches	203
1.3.5	Charge limite d'un demi-espace renforcé	204
1.3.6	Conclusion	205
2	Calculs en déplacement des radiers de pieux	206
2.1	Approches de référence	206
2.1.1	Modèle hybride (Griffiths <i>et al.</i> , 1991)	206
2.1.2	Modèle simplifié - (Randolph, 1983)	207
2.2	Position du problème	208
2.3	Résultats	211
2.3.1	Tassement moyen et rigidité de l'ouvrage	211
2.3.2	Répartition des efforts	212
2.3.3	Tassements différentiels	212
2.4	Conclusion	213
3	La <i>Messeturm</i> de Francfort	216
3.1	Introduction	216
3.2	Description de la simulation réalisée avec CASTOR	216
3.2.1	Géométrie de la fondation réelle et du modèle CASTOR	216
3.2.1.1	Radier	217

3.2.1.2	Pieux	217
3.2.1.3	Maillage	217
3.2.2	Propriétés mécaniques des matériaux	219
3.2.2.1	Massif	219
3.2.2.2	Radier	220
3.2.2.3	Pieux	220
3.2.3	Chargement	221
3.2.4	Description de l'étude paramétrique	221
3.3	Résultats	221
3.3.1	Etude paramétrique des courbes de tassement	221
3.3.2	Répartition du tassement en fonction de la profondeur	224
3.3.3	Effort normal dans les pieux	225
3.3.4	Résultats complémentaires	227
3.4	Conclusion	227
4	Les tunnels boulonnés	229
4.1	Description du dispositif expérimental	229
4.1.1	Principe	229
4.1.2	Dimensions du modèle	229
4.2	Simulation numérique	229
5	Etude paramétrique des réseaux de micropieux	233
5.1	Introduction	233
5.2	Géométrie du problème	233
5.3	Maillage	233
5.4	Sol purement cohérent	235
5.5	Sol frottant	236
5.6	Conclusion	237
6	Conclusion	240

1 Validation de CASTOR par comparaison à des solutions analytiques

1.1 Introduction

Le code de calcul CASTOR a été développé pour mettre en œuvre le modèle multiphasique *adhérent* de matériau renforcé. Cependant, dans les ouvrages réels intéressant l'ingénieur, les zones dans lesquelles on met en place les inclusions de renforcement sont d'étendue *limitée*. La modélisation complète de l'ouvrage par éléments finis impose donc au code de calcul de pouvoir traiter sur le même maillage des zones renforcées et des zones non renforcées.

Le code CASTOR a donc été développé en premier lieu pour résoudre les problèmes d'élasto-plasticité *monophasique*, et c'est sur des problèmes monophasiques qu'ont ainsi porté les premières validations que l'on présente succinctement ci-après. La validation de l'implémentation du modèle multiphasique s'est faite ensuite à partir de quelques solutions analytiques, dont celles présentées au chapitre 3.

1.2 Problèmes monophasiques

1.2.1 Principe

Le programme `castor` est construit à partir d'un ensemble de procédures dont l'enchaînement a été décrit au chapitre 4, section 5.3. Chacune a fait l'objet d'une première validation séparée au cours du développement, notamment celles permettant le calcul des fonctions de formes, matrices de rigidité et vecteurs force élémentaires (forces de volume, pression, contraintes initiales), l'assemblage, la prise en compte des conditions aux limites, la résolution du système linéaire, l'algorithme de projection en plasticité, etc.

Pour chaque problème traité, les différents types d'éléments T3, T6, Q4, Q9 ont été utilisés dans des maillages différents, de façon à vérifier la cohérence des résultats. Au vu de la précision de ces résultats, seuls les éléments quadratiques T6 et Q9 ont été utilisés dans les calculs ultérieurs.

Au total, on a traité avec CASTOR une large palette de problèmes dont la solution analytique est connue. Les reporter de façon exhaustive dans ce mémoire nous a paru hors de propos. On se contente donc de lister les différentes catégories d'exemples traités, en mentionnant les éventuelles difficultés rencontrées au cours de leur étude.

1.2.2 Calculs élastiques

1.2.2.1 Solutions homogènes Les premiers exemples traités correspondent à des problèmes dont la solution est homogène en effort et déformation : compression simple, essai œdométrique (modélisé en déformation plane et axisymétrie). Le calcul par éléments finis donne une solution exacte pour ces exemples. Par extension, on a également traité un essai oedométrique « généralisé », sous poids propre d'une part, dans le cas d'un module d'Young dépendant linéairement de la profondeur d'autre part. On a également étudié le glissement simple.

1.2.2.2 Tube sous pression Le problème du tube épais sous pression, dont la solution est donnée dans Salençon (1996b, chap. 9) a été traité d'une part avec les extrémités libres (en contrainte plane en coupe, et en axisymétrie), d'autre part avec les extrémités bloquées (en déformation plane et axisymétrie).

1.2.2.3 Poinçonnement d'un massif L'étude du poinçonnement d'une couche de sol en déformation plane a permis de mettre le doigt sur une difficulté concernant le calcul des réactions. En effet, pour ce problème, la variation de la contrainte verticale σ_{yy} sous le poinçon (de largeur $2B$) est (Timoshenko, 1936) :

$$(5.1) \quad \sigma_{yy} = \frac{Q}{\pi\sqrt{B^2 - x^2}}$$

ou Q est la réaction du sol sous le poinçon pour un déplacement vertical δ donné. Cette contrainte est donc singulière au coin du poinçon (Figure 5.1, point A). En raffinant le maillage au voisinage de ce point, on arrive à obtenir la répartition (5.1) sur la quasi-totalité de la longueur du poinçon. Cependant, les valeurs calculées aux points de Gauss des derniers éléments avant le coin A sont systématiquement entâchées d'erreur. Par interpolation, les valeurs calculées sous le poinçon pour ces éléments, et par suite la réaction résultante, peuvent également être assez fausses.

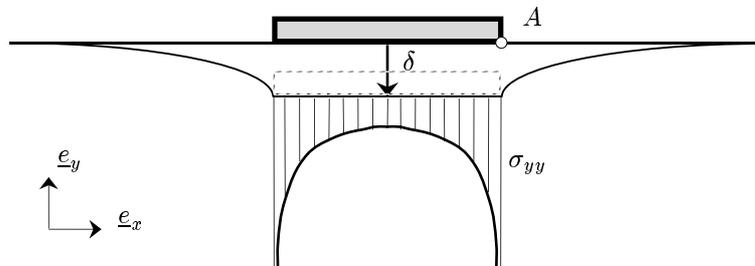


FIG. 5.1: Poinçonnement d'une couche de sol

On a été conduit à mettre au point une autre évaluation de la réaction sous le poinçon basée

sur l'utilisation du principe des travaux virtuels, qui s'écrit pour tout $\hat{\underline{\xi}}^1$:

$$(5.2) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{F}} \cdot \hat{\underline{\underline{\xi}}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \hat{\underline{\underline{\xi}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = 0$$

Soit \mathfrak{P} la portion de la frontière du système sur laquelle s'appuie le poinçon, et $\{i_1, \dots, i_{\mathfrak{P}}\}$ les degrés de liberté associés au mouvement vertical du poinçon. On définit le champ de déplacement virtuel $\hat{\underline{\underline{\xi}}}$ par interpolation du vecteur de déplacements nodaux $\hat{\underline{\underline{\delta}}}$ donné par :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \hat{\delta}_i = \hat{\delta} & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_{\mathfrak{P}}\} \\ \hat{\delta}_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que, pour le problème posé, les efforts surfaciques donnés sont nuls (surface libre de la couche de sol), de même que les déplacements hors \mathfrak{P} . Prenant de plus $\rho \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}}$, l'équation (5.2) se réduit à :

$$(5.4) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega - \hat{\delta} \int_{\mathfrak{P}} \sigma_{yy} dS = 0$$

Notant \mathcal{R} l'intégrale de σ_{yy} sous le poinçon (réaction verticale), il vient :

$$(5.5) \quad \mathcal{R} \hat{\delta} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega$$

Dans le formalisme des éléments finis, le membre de droite de l'équation précédente s'écrit :

$$(5.6) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega \equiv {}^t \hat{\underline{\underline{\delta}}} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{\underline{U}} = {}^t \hat{\underline{\underline{\delta}}} \cdot \underline{\underline{F}} = \hat{\delta} \sum_{j=1}^{i_{\mathfrak{P}}} F_j$$

Pour $\hat{\delta} = 1$, on a donc finalement :

$$(5.7) \quad \mathcal{R} = \sum_{j=1}^{i_{\mathfrak{P}}} F_j$$

ce qui signifie simplement que la réaction totale s'identifie à la somme des réactions nodales sous le poinçon. Il est aisé de voir que cette formule est également vérifiée si $\rho \underline{\underline{F}} \neq \underline{\underline{0}}$, et quelle que soit la loi de comportement. La réaction nodale F_j correspondant au degré de liberté bloqué j se calcule simplement par le produit sommé $\mathbf{K}_{ij} U_i$, où \mathbf{K} est la matrice de rigidité globale du système *avant* prise en compte des conditions aux limites.

L'évaluation (5.7) donne un résultat plus précis que l'intégration directe des contraintes sur \mathfrak{P} car elle n'est pas sensible au fait qu'il y ait des points singuliers en contrainte dans le maillage. Par ailleurs, la proximité ou non des valeurs calculées par les deux méthodes permet de qualifier la qualité du calcul.

1. Le lecteur pourra si nécessaire se reporter à la page 93 pour se remémorer les notations.

1.2.3 Calculs élasto-plastiques

1.2.3.1 Solutions homogènes Les calculs ont été menés en prenant un critère de von Mises ou de Drucker-Prager. Les problèmes de compression simple et de glissement simple, pilotés en déplacement, ont permis de vérifier la stabilité de l'algorithme de plasticité lorsque la charge limite est atteinte. On s'est d'autre part assuré du calcul correct de l'écoulement plastique libre. On a étudié également l'essai œdométrique.

1.2.3.2 Poinçonnement d'un massif Afin de valider le module de plasticité sur des problèmes non triviaux, on s'est intéressé au poinçonnement d'un demi-espace non pesant en élasto-plasticité. En utilisant une loi parfaitement plastique associée, on peut retrouver la charge limite donnée par le mécanisme de Prandtl en calcul à la rupture. Désignant respectivement par C et φ la cohésion et l'angle de frottement du massif, la capacité portante Q_u d'une fondation de largeur B vaut :

$$(5.8) \quad Q_u = B C N_c \quad , \quad N_c = \cotan \varphi \left[e^{\pi \tan \varphi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right]$$

Par symétrie, seule la moitié de la géométrie est discrétisée. Le maillage utilisé comporte 2601 nœuds et 625 éléments quadratiques Q9. Il est représenté sur la figure 5.2. Le coefficient N_c a été calculé pour différentes valeurs des paramètres et comparé à la valeur théorique. Les résultats sont portés dans le tableau 5.1. Les temps de calcul sont importants (de 30 minutes à quelques heures selon la valeur de φ). Cela est dû au fait que la méthode des contraintes initiales est très lente à converger au voisinage de la charge limite. Pour obtenir la charge limite en un temps raisonnable, il serait nécessaire d'implémenter un algorithme plus performant (voir chapitre 4, section 2.6).

Les courbes de chargement donnant la réaction sous le poinçon Q en fonction du tassement normalisé δ/B sont données sur la figure 5.3.

φ (°)	N_c (5.8)	N_c^{EF}	Erreur (%)
0	5,14	5,21	1,4
10	8,34	8,47	1,5
20	14,84	14,99	1,1
30	30,14	30,57	1,4

TAB. 5.1: Charge limite d'un poinçon sur un demi-espace homogène

Les résultats obtenus en terme de charge limite sont excellents, l'erreur commise étant inférieure à 2%. Il faut remarquer que la finesse du maillage au voisinage de l'angle vif joue

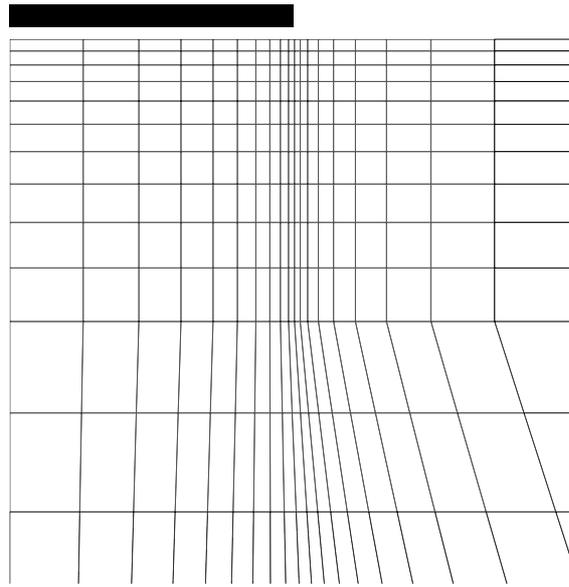


FIG. 5.2: Poinçonnement d'un demi-espace - Zoom sur le maillage au voisinage de la semelle

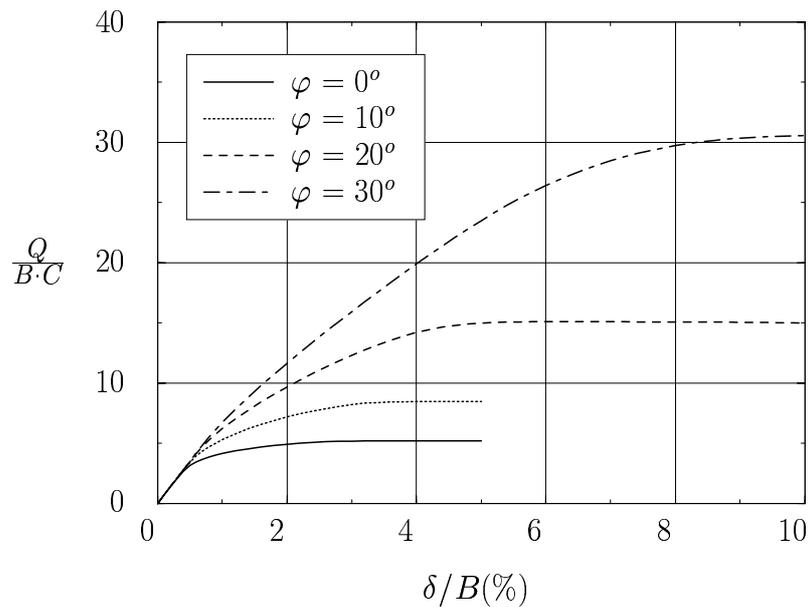


FIG. 5.3: Poinçonnement d'un demi-espace - Courbes de chargement

beaucoup sur le résultat, notamment parce que c'est dans cette zone que se développe la plasticité initiale.

1.2.3.3 Tunnel profond non renforcé Le problème de la convergence d'un tunnel profond axisymétrique dans un milieu élasto-plastique a été abordé analytiquement par Corbetta (1990). L'auteur fournit au chapitre 2 les solutions en déplacement et contrainte pour les

critères de Tresca et Mohr-Coulomb (plasticité parfaite, écoulement associé ou non).

Dans le cas d'un massif élastiquement incompressible en déformation plane, on peut traiter de façon équivalente le problème en utilisant respectivement les critères de Von Mises et Drucker-Prager (voir Annexe F, section 2), les paramètres étant définis par la formule (F.24). On valide ainsi CASTOR pour deux jeux de paramètres, dont les valeurs sont résumées dans le tableau 5.2. Le rayon du tunnel vaut 1 m.

Module d'Young	$E = 100 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,498$
Contraintes initiales (isotropes)	$P_0 = 1,2 \text{ MPa}$
Cohésion	$C = 0,4 \text{ MPa}$
Angle de frottement	$\varphi = 0^\circ \text{ ou } 15^\circ$

TAB. 5.2: Tunnel profond non renforcé - Paramètres de calcul

Compte tenu de la double symétrie, seul un quart de la géométrie est discrétisé. Le maillage utilisé comporte 1261 nœuds et 350 éléments quadratiques Q9 pour une taille de 50 m×50 m. Il est représenté sur la figure 5.4

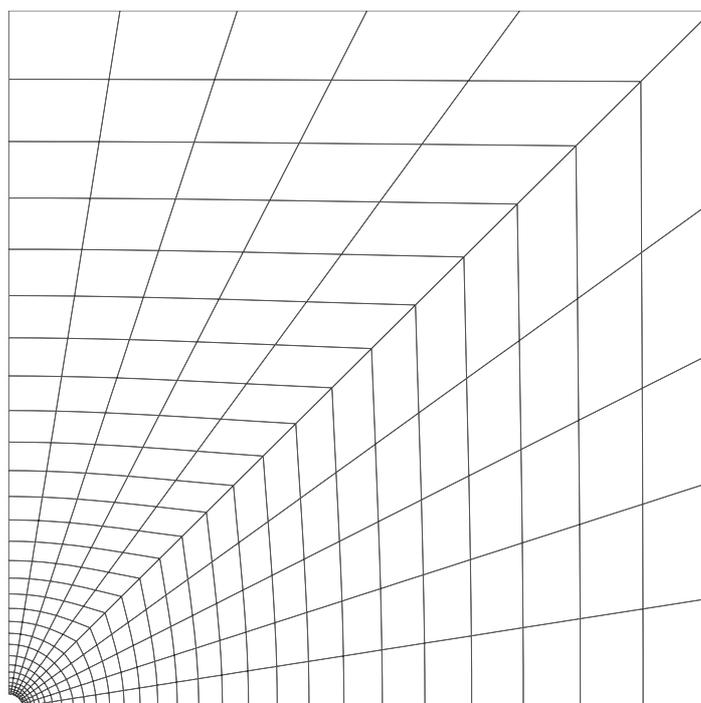


FIG. 5.4: Tunnel profond - Maillage

Les résultats de la comparaison sont résumés dans le tableau 5.3. La zone plastique déterminée

par CASTOR correspond à la couronne pour laquelle la norme de la déformation plastique cumulée est non nulle. Le résultat est donc obtenu à un élément près, ce qui explique l'intervalle donné pour le rayon plastique. La valeur de la convergence en paroi est obtenue avec moins de 1% d'erreur.

Cas	Quantité	Corbetta	CASTOR
$\varphi = 0^\circ$	Convergence paroi (cm)	4,43	4,41
	Rayon plastique (m)	2,71	$R_p \in [2,6; 3,1]$
$\varphi = 15^\circ$	Convergence paroi(cm)	2,71	2,69
	Rayon plastique (m)	1,51	$R_p \in [1,4; 1,6]$

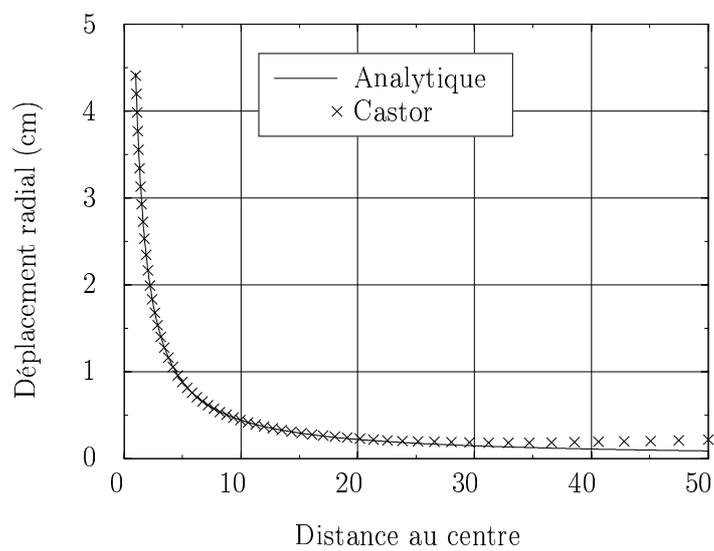
TAB. 5.3: Tunnel profond non renforcé - Résultats

Les courbes de déplacement radial du massif sont données sur la figure 5.5. Les composantes du tenseur des contraintes sont représentées sur la figure 5.6. Dans les deux cas, on a superposé les *points* du calcul CASTOR à la courbe analytique en *trait continu*. Les résultats au voisinage de la paroi du tunnel sont excellents. Par contre, le champ de déplacement calculé par éléments finis ne décroît pas correctement au voisinage de la frontière du maillage. Ceci s'explique par le fait que l'on a imposé la pression géostatique P_0 sur le contour du maillage qui est situé à une distance finie du centre du tunnel, alors que cette valeur n'est rigoureusement atteinte qu'à l'infini. Cet « effet de bord » n'influe cependant pas, comme on l'a vu, sur les résultats à la paroi du tunnel.

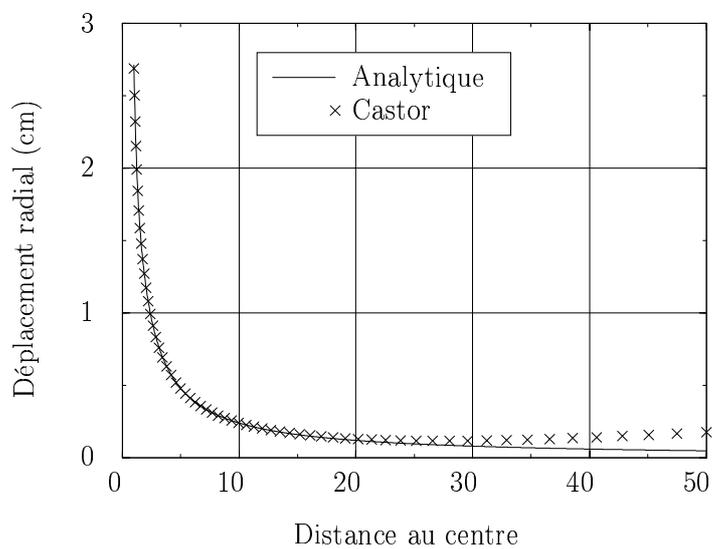
1.2.4 Conclusion

Le travail de validation du code sur des problèmes monophasiques a permis d'appréhender un certain nombre de difficultés liées à la pratique du calcul numérique : raffinement des maillages, choix des tolérances pour les calculs en plasticité, calcul des réactions, etc.

Ce travail aurait pu être évité si l'on avait décidé d'implémenter le modèle multiphasique à partir d'un code existant parfaitement validé pour les problèmes courants d'élasto-plasticité. *A posteriori* le savoir-faire acquis au cours de cette phase de validation nous semble valoir largement le temps passé à la mener.



a - $\varphi = 0^\circ$



b - $\varphi = 15^\circ$

FIG. 5.5: Tunnel profond non renforcé - Convergence

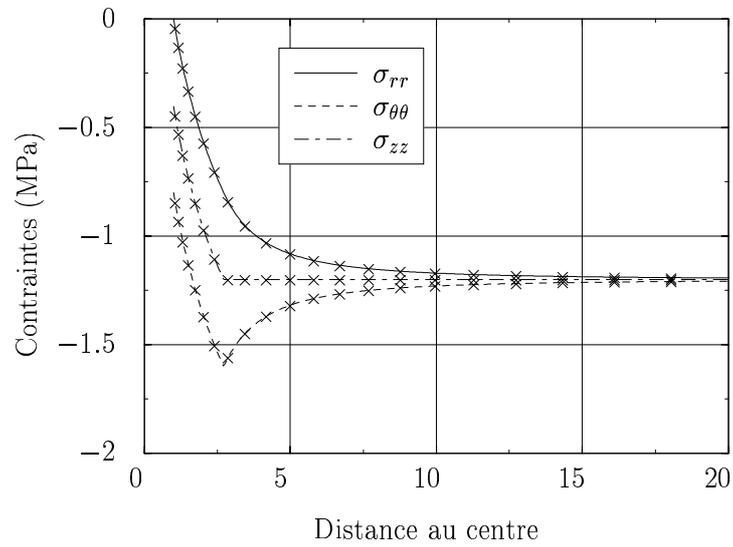
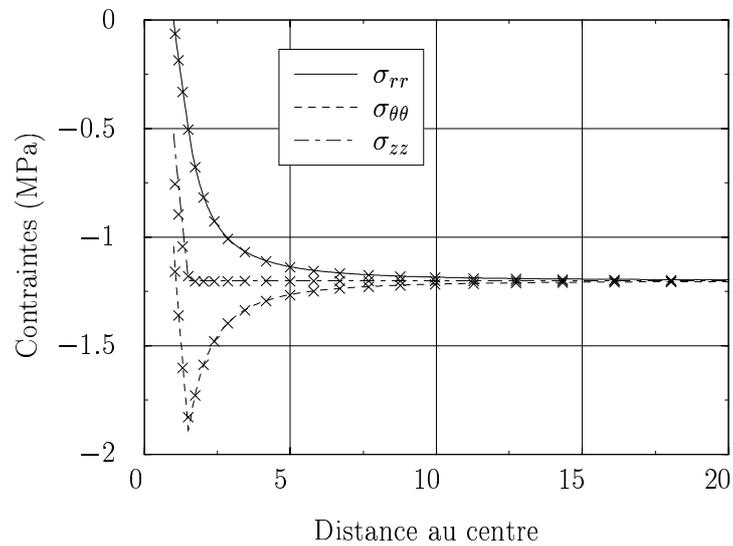
a - $\varphi = 0^\circ$ b - $\varphi = 15^\circ$

FIG. 5.6: Tunnel profond non renforcé - Composantes du tenseur des contraintes (— Analytique, × CASTOR)

1.3 Problèmes multiphasiques adhérents

1.3.1 Introduction

On s'intéresse maintenant à la confrontation des résultats obtenus par CASTOR aux solutions analytiques présentées au chapitre 3. On traite successivement le problème de compression simple en élasto-plasticité puis celui de la convergence du tunnel profond.

1.3.2 Compression simple

On a reproduit l'essai de compression simple résolu analytiquement en élasto-plasticité au chapitre 3, section 2 pour les cas de renforcement transverse et longitudinal. Les valeurs numériques des paramètres sont données dans le tableau 5.4 ci-dessous².

Phase	Paramètre	Compression longitudinale	Compression transverse
Matrice	Module d'Young E^m (MPa)	50	100
	Coefficient de Poisson ν^m	0,3	0
	Limite en traction σ_o^m (MPa)	1	1
Renforcement	Rigidité scalaire a^r (MPa)	200	500
	Limite en traction σ_o^r (MPa)	1	1

TAB. 5.4: *Compression simple - Valeurs des paramètres de calcul*

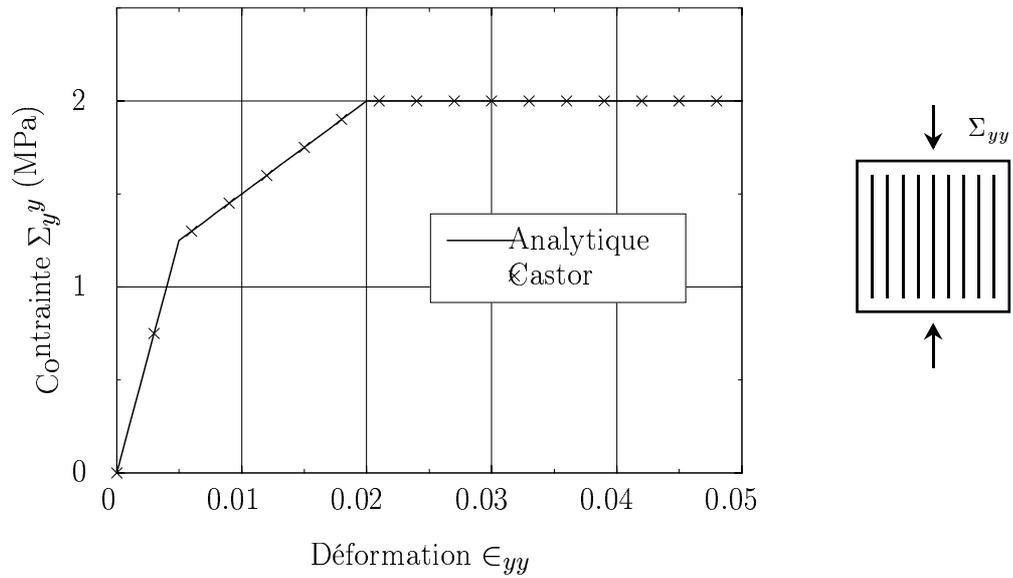
Les courbes de chargement sont données sur la figure 5.7. Comme on peut le constater, les points de calcul sont exactement superposés à la solution analytique. Les charges limites atteintes valent respectivement $\sigma_o^m + \sigma_o^r = 2$ MPa et $2/\sqrt{3}\sigma_o^m = 1,15$ MPa.

Remarque On a traité analytiquement et numériquement d'autres problèmes multiphasiques correspondant à des essais courants: compression simple, en déformation plane ou œdométrique d'une éprouvette renforcée dans deux directions symétriques. Cependant, ces résultats n'ont d'intérêt que pour valider le code de calcul et ne sont donc pas reportés dans le présent mémoire.

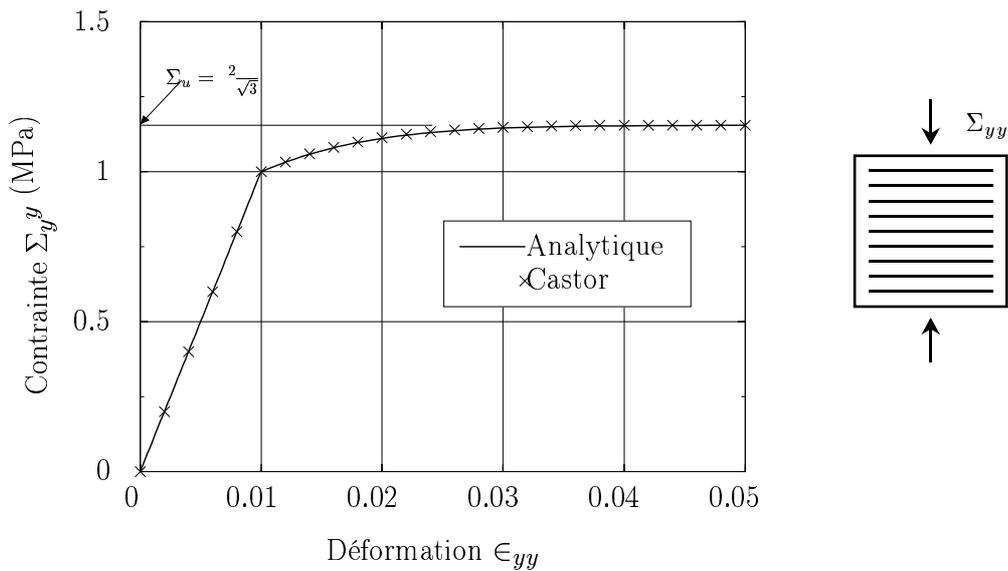
1.3.3 Tunnel profond boulonné en élasticité

Greuell (1993, Chap. 4) a donné dans le cadre élastique, une solution exacte du problème de convergence d'un tunnel profond boulonné, pour lequel les inclusions sont *de longueur finie*. Le

² Les valeurs ont été choisies de façon à obtenir des courbes d'allure équilibrée.



a - Compression longitudinale



b - Compression transverse

FIG. 5.7: Compression simple d'un bloc renforcé

comportement élastique adopté par l'auteur pour le matériau renforcé étant *identique* à celui donné par le modèle multiphasique, ces résultats analytiques sont exploitables directement.

Comme exemple illustratif, on a choisi d'étudier l'incidence de la densité de boulons en paroi sur la convergence du tunnel. Les paramètres utilisés dans le calcul sont résumés dans le tableau 5.5 ci-dessous. Le rayon du tunnel vaut 1 m.

On représente sur la figure 5.8 le déplacement radial pour différentes densités de boulonnage.

Roche	Module d'Young	$E^m=100$ MPa
	Coefficient de Poisson	$\nu=0,25$
	Pression géostatique	$P_0=1,2$ MPa
Boulons	Diamètre	$d=20$ mm
	Longueur	$l_b=1,2$ m
	Module d'Young	$E_b=200\,000$ MPa
	Densité	$d_b=0/1/2$ b./m ²
	Rigidité (pour $d_b=1$)	$K_o=62,8$ MPa

TAB. 5.5: Tunnel profond renforcé en élasticité - Valeurs des paramètres de calcul

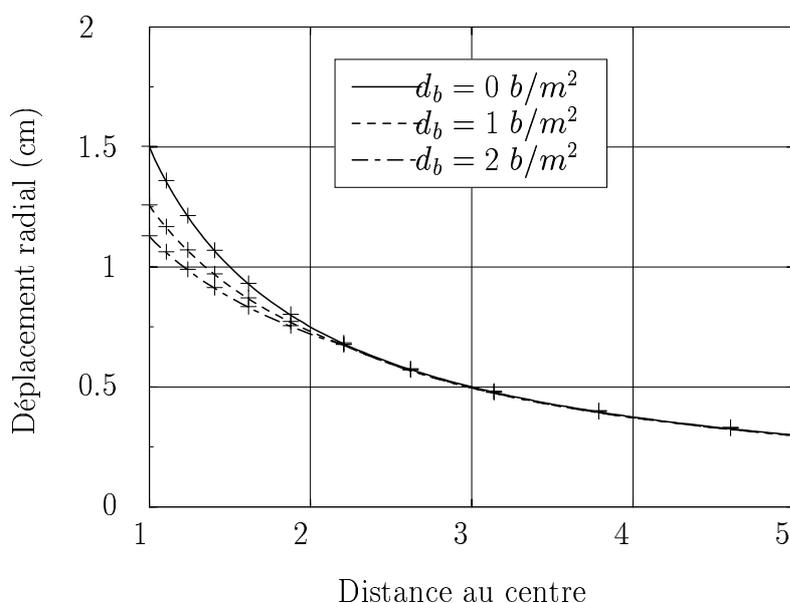


FIG. 5.8: Tunnel profond renforcé en élasticité - Convergence en fonction de la densité de boulonnage (— Analytique, × CASTOR)

Les courbes en trait plein correspondent à la solution analytique, à laquelle on a superposé les points de calcul obtenus par CASTOR. L'accord entre les deux approches est excellent. On vérifie également que les déformations et contraintes données par CASTOR correspondent à la solution analytique.

Greuell (1993) effectue une étude paramétrique en élasticité de l'influence du boulonnage, incluant en particulier un *décalage de pose* entre le creusement et la mise en place des boulons. Il va de soi que ces résultats sont applicables sans restrictions dans le cadre multiphasique,

puisque le comportement élastique adopté est identique dans les deux approches.

1.3.4 Tunnel profond boulonné en plasticité

1.3.4.1 Introduction Greuell (1993) a construit une loi de comportement élasto-plastique pour la roche boulonnée à partir du critère de rupture homogénéisé utilisé de façon heuristique comme *critère de plasticité parfaite*, avec règle d'écoulement associée. L'auteur a ainsi pu résoudre analytiquement le problème de la convergence du tunnel profond en supposant le boulonnage étendu à l'ensemble du massif³ et en utilisant le critère de Tresca pour la roche.

Cette démarche est reprise de façon numérique par Bernaud *et al.* (1995), qui ont implémenté le critère de plasticité obtenu par homogénéisation dans le code de calcul GEOMECH91. Dans cette approche, le critère de rupture de la roche est celui de Von Mises. Le calcul numérique permet de prendre la longueur finie des boulons et le délai de pose.

Enfin, Schmitt (1997) a étendu le calcul analytique de Greuell en utilisant le critère de Mohr-Coulomb pour la roche. La longueur des boulons est supposée infinie, et on ne tient pas compte du délai de pose.

Comme on l'a vu au chapitre 3 page 106, cette approche revient à supposer que la plasticité est atteinte *en même temps* dans la phase matrice et dans la phase renforcement, ou encore à négliger l'écroûissage macroscopique dû à la plastification progressive des constituants au niveau microscopique.

On peut donc prévoir un léger écart entre les résultats analytiques et ceux de CASTOR, ces derniers correspondant à un comportement plus "souple".

1.3.4.2 Comparaison des approches Les résultats de Greuell et Schmitt se rapportent à un tunnel de rayon $R = 3$ m. On a donc considéré un maillage obtenu par une homothétie de rapport 3 du maillage de la figure 5.4. Les paramètres de calcul sont ceux du tableau 5.2 pour la roche, ceux du tableau 5.6 pour les boulons. On a étudié l'influence de l'angle de frottement de la roche sur la convergence du tunnel, pour une cohésion constante $C = 0,4$ MPa.

Dans le cadre élasto-plastique, le calcul de la convergence du tunnel se fait en imposant une pression de confinement en paroi P_c , initialement égale à la pression géostatique P_0 , et décroissant jusqu'à 0 (voir chapitre 3, section 4.1). On rappelle que le *taux de déconfinement* λ_c vérifie $P_c = (1 - \lambda_c) P_0$. On représente sur la figure 5.9 les courbes analytiques de déconfinement obtenues par Schmitt en trait plein, et les points de calcul de CASTOR.

L'accord entre les deux approches est excellent pour $\varphi = 0^\circ$. Cela montre que l'écroûissage du matériau renforcé est négligeable dans ce cas, et justifie pleinement l'approche par homogénéisation de Greuell et Bernaud. Les résultats des études paramétriques menées par ces auteurs

3. Greuell montre que cette hypothèse est peu restrictive, puisque la longueur des boulons n'influe plus sur le résultat dès que $l_b > 2R$.

Diamètre	$d = 20$ mm
Longueur	$l_b = \infty$
Module d'Young	$E_b = 200\,000$ MPa
Résistance	$\bar{\sigma}_b = 650$ MPa
Densité en paroi	0/1/2 b./m ²

TAB. 5.6: Tunnel profond renforcé - Paramètres définissant le boulonnage

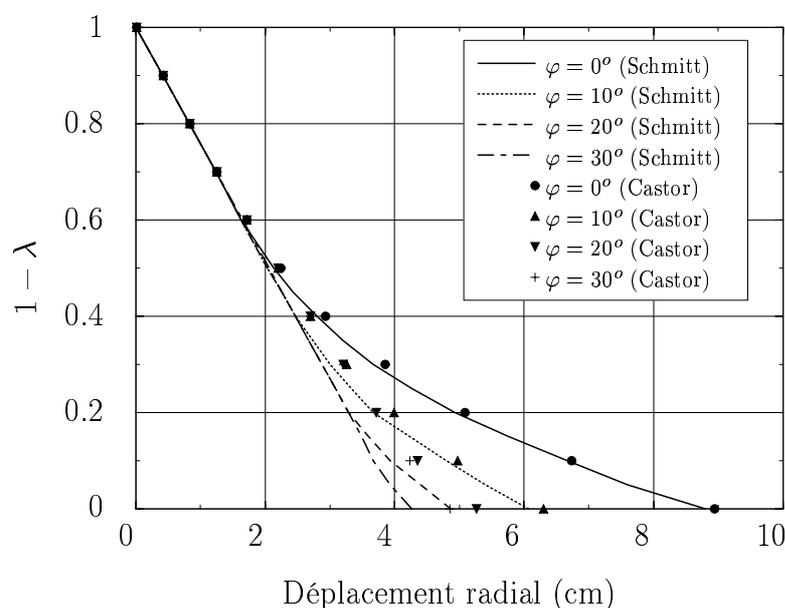


FIG. 5.9: Tunnel profond renforcé en élasto-plasticité - Convergence en fonction de l'angle de frottement du massif (— Analytique, × CASTOR)

(influence de la cohésion, de la longueur des boulons, du délai de pose) sont donc valables dans le cadre multiphasique.

Par contre, l'écart entre les résultats analytiques et numériques augmente avec φ . Une nouvelle étude serait nécessaire pour confirmer ou infirmer dans le cas des roches frottantes les tendances détectées par Greuell et Bernaud.

1.3.5 Charge limite d'un demi-espace renforcé

Pour clore la section consacrée à la validation de CASTOR par comparaison à des solutions analytiques, on considère ici le poinçonnement d'un demi-espace obéissant à un critère de Tresca uniformément renforcé par des inclusions horizontales. La charge limite de ce problème a été déterminée analytiquement par de Buhan (1986) dans le cadre de l'homogénéisation en

calcul à la rupture. Reprenant les notations de la section 1.2.3.2, le facteur de capacité portante N_c vaut ici :

$$(5.9) \quad N_c = \pi + 2 + \frac{2\sigma_o^r}{C}$$

où C désigne la cohésion du massif et σ_o^r la limite en traction de la phase renforcement.

Le calcul aux éléments finis a été mené en utilisant le critère de Von Mises pour la phase matrice, avec les valeurs $C = 50$ kPa et $\sigma_o^r = 0, 50, 100$ kPa. Le maillage utilisé est donné sur la figure 5.2. Les courbes de chargement correspondantes sont données sur la figure 5.10. Dans tous les cas, la charge limite est obtenue avec une précision inférieure à 2%.

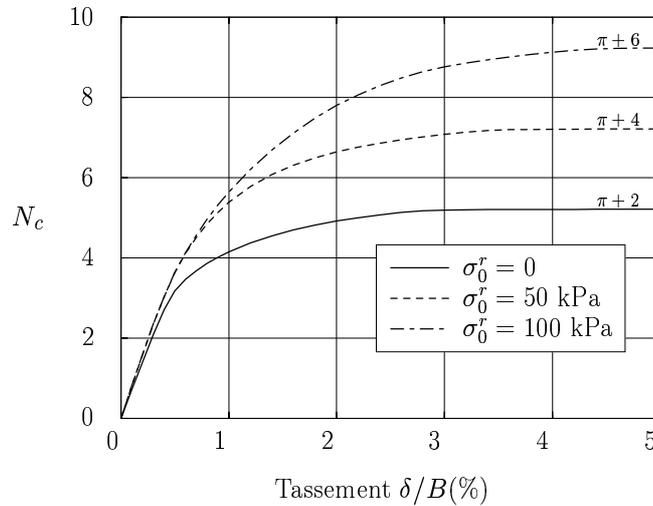


FIG. 5.10: *Poinçonnement d'un demi-espace renforcé - Courbes de chargement*

1.3.6 Conclusion

La validation du code CASTOR sur des problèmes multiphasiques adhérents est tout à fait concluante. D'une part on retrouve parfaitement les solutions analytiques *exactes*, aux éventuels effets de bord près. D'autre part, en comparant avec l'approche de Greuell et Bernaud, on montre les limites de l'hypothèse d'absence d'écroutissage pour le matériau renforcé, notamment dans le cas d'une matrice de type frottant.

La fiabilité du code ayant été démontrée, on peut maintenant l'utiliser pour résoudre différents problèmes plus concrets intéressant l'ingénieur.

2 Calculs en déplacement des radiers de pieux

Comme on l'avait noté dans le chapitre introductif, le calcul des tassements des groupes de pieux ou des radiers de pieux est un sujet de recherche très actuel. On présente dans cette section deux modèles de calcul classiques pris dans la littérature. On compare sur un exemple ces approches avec le modèle multiphasique.

2.1 Approches de référence

2.1.1 Modèle hybride (Griffiths *et al.*, 1991)

La méthode développée par Griffiths *et al.* (1991); Clancy et Randolph (1993) pour le calcul des *radiers de pieux* est une extension de la méthode « hybride » proposée par Chow (1986) pour l'analyse des *groupes de pieux*. On en résume la démarche en s'appuyant sur la figure 5.11.

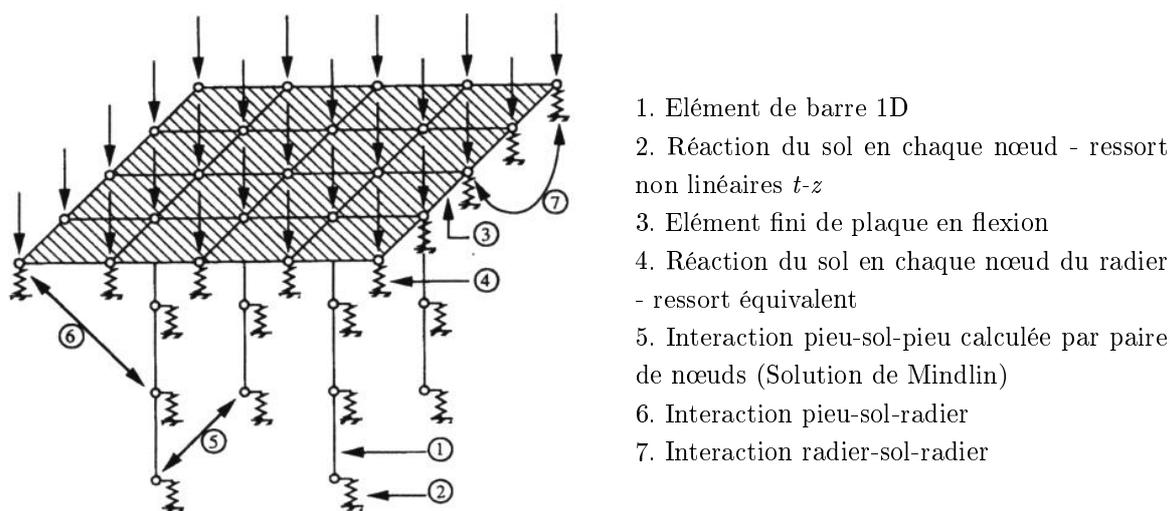


FIG. 5.11: Modèle « hybride » de radier de pieux (d'après Clancy et Randolph (1993))

- Par hypothèse, seuls les déplacements verticaux sont pris en compte, en réponse à un chargement vertical de la structure.
- Les pieux sont modélisés par des éléments finis de barre ne travaillant qu'en traction-compression.
- En chaque nœud, l'interaction avec le massif de sol est prise en compte par l'intermédiaire de ressorts modélisant les efforts de cisaillement de celui-ci (courbes de transfert de charge $(t-z)$, éventuellement non linéaires (Randolph et Wroth, 1978; Kraft *et al.*, 1981)).
- Le radier est modélisé par des éléments finis de plaque mince en flexion.

- La réaction du sol sous le radier est modélisée par des ressorts. Leur raideur est calculée à partir de la solution de Giroud (1968) donnant le déplacement moyen d'un domaine rectangulaire soumis à une pression uniforme à la surface d'un demi-espace.
- Le massif de sol n'étant pas modélisé explicitement, les différents éléments structurels présentés jusqu'ici sont indépendants. En réalité, les pieux et le radier interagissent de façon complexe du fait du caractère continu tridimensionnel du sol dans et sur lequel ils sont disposés. Ces interactions sont prises en compte en utilisant la solution de Mindlin qui donne le champ de déplacement en tout point du massif sous l'action d'une charge ponctuelle.
- Les sous-structures « radier » et « groupe de pieux » sont connectées en identifiant leurs degrés de liberté communs. La matrice de rigidité totale du système peut ainsi être calculée.

2.1.2 Modèle simplifié - (Randolph, 1983)

La méthode hybride décrite précédemment permet une évaluation rigoureuse de la rigidité k_{pr} d'un radier de pieux implanté dans un demi-espace élastique, définie comme le rapport de la résultante P des efforts appliqués au tassement moyen :

$$(5.10) \quad k_{pr} = \frac{P}{w_{\text{moyen}}}$$

Cependant, compte tenu du volume de calculs nécessaire, elle n'est pas applicable en pratique au delà de 50 pieux⁴.

Constatant que des solutions analytiques approchées sont disponibles dans la littérature pour les problèmes de fondation superficielle ou de groupes de pieux pris isolément, Randolph (1983) propose une méthode d'évaluation de la rigidité k_{pr} à partir de celle de chaque composante et de leur interaction.

Pour ce faire, l'auteur définit la rigidité k_r du radier seul par une formule similaire à (5.10). La rigidité k_p du groupe de pieux seul est définie de la même façon en appliquant une pression uniforme en tête des pieux.

Il définit ensuite les coefficients d'interaction pieux/radier α_{rp} et radier/pieux α_{pr} , qui caractérisent le tassement moyen d'une des composantes lorsque l'autre est chargée. Supposant que la charge totale P appliquée à la structure complète se répartit en P_p sur les pieux et P_r sur le radier, et notant w_p et w_r les tassements moyens de la tête des pieux et du radier, on peut

4. Des raffinements de la méthode hybride ont été proposés par Hong *et al.* (1999), permettant de diminuer le temps de calcul pour des groupes de pieux de grande dimension, en utilisant un calcul itératif des termes d'interaction.

écrire par superposition :

$$(5.11) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{k_p} & \frac{\alpha_{pr}}{k_r} \\ \frac{\alpha_{rp}}{k_p} & \frac{1}{k_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_p \\ P_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_p \\ w_r \end{pmatrix}$$

La matrice précédente qualifie la *souplesse* du système. Le théorème de réciprocité impose sa symétrie :

$$(5.12) \quad \frac{\alpha_{pr}}{k_r} = \frac{\alpha_{rp}}{k_p}$$

Par ailleurs, si le radier est suffisamment rigide, on a de façon approchée $w_p = w_r \equiv w$. Avec ces deux propriétés, on peut déduire la répartition de la charge totale en reportant (5.12) dans (5.11) et résolvant le système :

$$(5.13-a) \quad P_p = \frac{1 - \alpha_{rp} k_r/k_p}{1/k_p - k_r (\alpha_{rp}/k_p)^2} w$$

$$(5.13-b) \quad P_r = \frac{(1 - \alpha_{rp}) k_r/k_p}{1/k_p - k_r (\alpha_{rp}/k_p)^2} w$$

d'où l'on tire la rigidité du radier de pieux :

$$(5.14) \quad k_{pr} = \frac{P_p + P_r}{w} = \frac{k_p + k_r (1 - 2 \alpha_{rp})}{1 - \alpha_{rp}^2 k_r/k_p}$$

Réciproquement, si l'on connaît la répartition des charges, le coefficient d'interaction vaut :

$$(5.15) \quad \alpha_{rp} = \frac{P_r k_p - P_p k_r}{k_r (P_r - P_p)}$$

L'avantage de cette approche simplifiée est de pouvoir utiliser directement les résultats publiés dans la littérature pour estimer k_p (Fleming *et al.*, 1992) et k_r (Poulos et Davis, 1974) (cités par Randolph (1994)), à condition de connaître la valeur du coefficient d'interaction α_{rp} . Randolph (1983) propose une expression *analytique* pour α_{rp} dans le cas d'un seul pieu sous une semelle circulaire, puis l'étend à des groupes de pieux. Utilisant le modèle hybride, Clancy et Randolph (1993) tabulent les valeurs de α_{rp} pour un grand nombre de configurations, confirmant approximativement la formule de Randolph.

On s'intéresse maintenant à la comparaison du modèle hybride et du modèle multiphasique sur un exemple traité par Clancy et Randolph (1993). Les résultats de la simulation permettent *a posteriori* d'évaluer la pertinence de la méthode simplifiée.

2.2 Position du problème

On considère un radier carré de côté B , d'épaisseur t surmontant un réseau de 9×9 pieux de diamètre d , de longueur L , d'espacement entre centres s (voir figure 5.12).

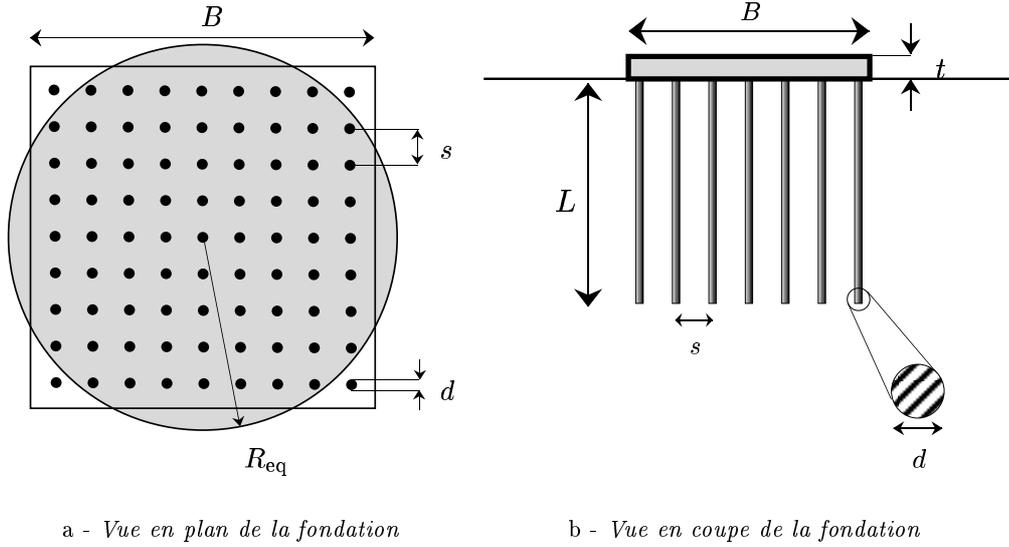


FIG. 5.12: Radier de 9×9 pieux

Le massif de fondation est un demi-espace homogène élastique caractérisé par son module d'Young E_s et son coefficient de Poisson ν_s . Les pieux et le radier sont en béton, de module d'Young respectif E_p et E_r ⁵. On définit par ailleurs le rapport de rigidité des pieux par rapport au sol K_{ps} (resp. du radier par rapport au sol K_{rs}) :

$$(5.16-a) \quad K_{ps} = \frac{E_p}{E_s}$$

$$(5.16-b) \quad K_{rs} = \frac{4}{3\pi} \frac{(1 - \nu_s^2) E_r}{E_s} \left(\frac{t}{B} \right)^3$$

Les valeurs numériques utilisées dans la simulation sont données dans le tableau 5.7.

Massif de sol	Pieux	Radier	Ratios
$E_s = 280$ MPa $\nu_s = 0,4$	$E_p = 35\,000$ MPa $L = 20$ m $d = 0,8$ m $s = 4$ m	$E_r = 35\,000$ MPa $\nu_r = 0,3$ $t = 5$ m $B = 36$ m	$s/d = 5$ $L/d = 25$ $K_{ps} = 125$ $K_{rs} = 0,119$

TAB. 5.7: Caractéristiques du radier de pieux (d'après Clancy et Randolph (1993))

Pour la simulation réalisée avec CASTOR, on représente la fondation précédente par un modèle aux éléments finis *axisymétrique*. Le rayon R_{eq} du radier équivalent (figure 5.12-a) vérifie :

$$(5.17) \quad \pi R_{eq}^2 = B^2$$

5. On reprend dans cette section les notations de l'article de Clancy auquel on se réfère. Celles-ci diffèrent légèrement de celles adoptées dans le reste du mémoire.

soit ici $R_{eq}=20,31$ m. La zone renforcée est donc un rectangle de taille $R_{eq} \times L$ dans le maillage. Compte tenu de la valeur relativement élevée du coefficient de Poisson, on a choisi de mailler une zone de massif assez grande pour éviter les effets de bord. On retient une taille de $30L \times 30L$, représentant la moitié du problème compte tenu de la symétrie.

Le maillage est composé de 7581 nœuds et 1850 éléments isoparamétriques quadratiques Q9, il est représenté sur la figure 5.13. Les conditions aux limites en déplacement sont les suivantes : déplacement horizontal bloqué sur l'axe de symétrie et le côté droit du maillage, déplacement vertical bloqué sur le côté inférieur (frontières « lisses »).

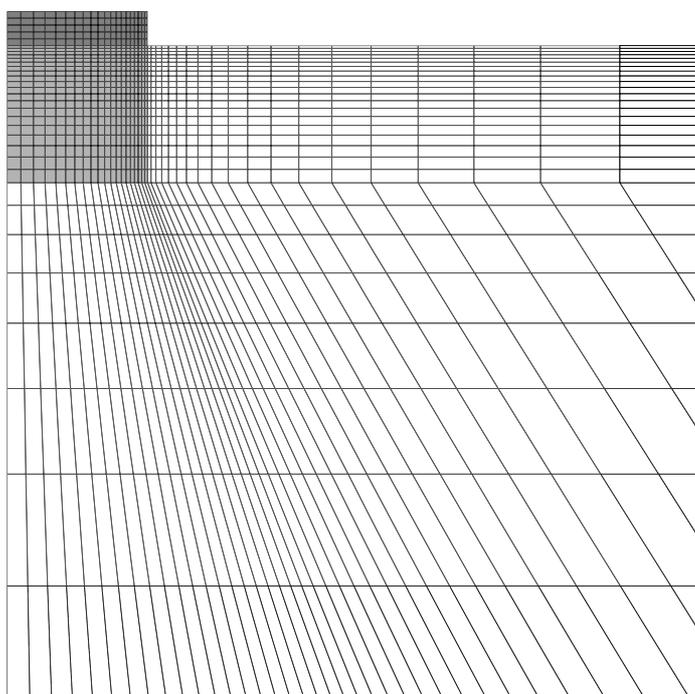


FIG. 5.13: Radier 9×9 pieux - Zoom du maillage utilisé par CASTOR

Compte tenu de la régularité du schéma d'implantation des pieux, la fraction volumique de renforcement s'écrit :

$$(5.18) \quad \eta^r = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{s} \right)^2 = 0,0314$$

La raideur de la phase renforcement $a^r = \eta^r E_p$ vaut donc $a^r = 1\,100$ MPa.

Une pression uniforme de 1 MPa est appliquée sur la fondation, pour un chargement total de $1\,296$ MN.

2.3 Résultats

2.3.1 Tassement moyen et rigidité de l'ouvrage

A partir de la simulation par éléments finis, on obtient le tassement moyen de la fondation directement.

Utilisant le même maillage, le calcul de la rigidité k_r s'effectue en affectant des caractéristiques de sol homogène (non renforcé) à tout le maillage. Le calcul de k_p se fait en supprimant la rigidité du radier ($E_r = 0$), et en appliquant la pression uniforme directement sur le massif. Dans chaque cas, la valeur est obtenue en divisant la charge totale (1296 MN) par le tassement moyen.

On présente dans le tableau 5.8 les résultats obtenus par Clancy avec le modèle hybride, et par CASTOR.

	Clancy	CASTOR	Ecart CASTOR/Clancy (%)
w	84 mm	77 mm	-8,3
P_p	868 MN	839 MN	-3,5
P_r	428 MN	427 MN	-0,2
k_p	14,33 MN	15,53 MN	+8,5
k_r	13,08 MN	13,85 MN	+5,8
k_{pr}	15,42 MN	16,83 MN	+9,1
α_{rp}	0,85	0,856	+0,7
Temps de calcul	15 h	1 min 30 s ^a	-

TAB. 5.8: *Comparaison des résultats numériques*

^aSur station de travail SUN ULTRA 1.

L'accord entre les deux approches est satisfaisant puisque les écarts calculés sont inférieurs à 10% pour les différentes quantités. Le modèle multiphasique apparaît légèrement plus raide. Cela est notamment dû au fait que le modèle aux éléments finis contient des frontières rigides à une distance finie (ici $30L$) alors que le modèle hybride prend en compte implicitement le caractère semi-infini du massif.

Cette difficulté est purement académique. En effet, dans les cas réels intéressant l'ingénieur, le massif de sol est souvent stratifié et repose sur un substratum rigide à une profondeur finie. Dans ce cas de figure, le calcul par éléments finis ne pose pas de difficultés supplémentaires,

alors que le modèle hybride doit avoir recours aux approximations de Steinbrenner pour évaluer la solution fondamentale de Mindlin d'un massif stratifié d'épaisseur finie sous charge concentrée.

Le coefficient d'interaction évalué *à posteriori* par (5.15) vaut 0,856. Ce résultat confirme précisément celui de Clancy et Randolph (1996), qui ont montré numériquement grâce au modèle hybride que α_{rp} tend vers 0,85 pour les groupes de pieux de grande dimension, *quelle que soit la configuration géométrique*.

2.3.2 Répartition des efforts

Pour déterminer la proportion de la charge reprise respectivement par les pieux et le radier, on calcule avec CASTOR la résultante du vecteur contrainte sous le radier *par phase*, soit, en notant y la coordonnée verticale :

$$(5.19\text{-a}) \quad P_r^{\text{EF}} = - \int_{\text{Radier}} \sigma_{yy}^m dS$$

$$(5.19\text{-b}) \quad P_p^{\text{EF}} = - \int_{\text{Radier}} \sigma^r dS$$

La part de la charge reprise par les pieux est évaluée à 66% dans les deux approches.

Le lecteur a pu remarquer dans le tableau 5.8, deuxième colonne, que la somme ($P_r^{\text{EF}} + P_p^{\text{EF}}$) ne vaut pas identiquement 1296 MN. Cela s'explique par le fait que, dans tout calcul aux éléments finis utilisant un modèle déplacement, le champ de contraintes obtenu n'est pas statiquement admissible avec les données (sauf si la solution est exacte). Ici en particulier, la contrainte verticale prend des valeurs très grandes à l'angle du radier. L'intégration de cette quantité sur la surface du radier est donc systématiquement entachée d'erreur, malgré le raffinement du maillage autour du point singulier (voir les remarques de la section 1.2.2.3).

Le profil de contraintes verticales sous la fondation est donné sur la figure 5.14-a. On peut remarquer que la proportion de charge reprise localement par chaque phase est quasiment constante (fluctuation inférieure à 10%). Divisant σ^r par la fraction volumique des pieux η^r , et connaissant précisément la distance de chaque pieu par rapport à l'origine, on peut déterminer pour chacun son effort normal en tête (figure 5.14-b).

2.3.3 Tassements différentiels

Clancy définit le *déplacement normalisé* sous la fondation par :

$$(5.20) \quad \bar{w} = \frac{w - w_{\text{moyen}}}{w_{\text{max}} - w_{\text{min}}}$$

De plus, il introduit une coordonnée normalisée λ valant 0 au coin du radier, croissant linéairement jusqu'à 0,5 en suivant le côté, puis croissant jusqu'à 1 en direction du centre (voir figure 5.15).

De façon à pouvoir comparer au profil obtenu par CASTOR, on a effectué une transformation affine par morceaux sur les abscisses des nœuds du maillage pour se ramener à cette coordonnée normalisée (voir tableau 5.9).

CASTOR	Clancy	Transformation
$r \in \left[0; \frac{R_{\text{eq}}}{\sqrt{2}}\right]$	$\lambda \in [1; 0, 5]$	$\lambda = 1 - \frac{r}{\sqrt{2} R_{\text{eq}}}$
$r \in \left[\frac{R_{\text{eq}}}{\sqrt{2}}; R_{\text{eq}}\right]$	$\lambda \in [0, 5; 0]$	$\lambda = \frac{1 - r/R_{\text{eq}}}{2 - \sqrt{2}}$

TAB. 5.9: *Coordonnée normalisée pour le profil de tassement*

Les profils de tassement normalisés sont reportés sur la figure 5.16. On remarque que les valeurs extrêmes obtenues par les deux approches sont quasiment identiques. Par contre, les profils diffèrent quelque peu pour $\lambda \in [0; 0, 5]$, l'écart ne dépassant cependant pas 15%. Il s'explique simplement par la substitution d'un radier circulaire au radier carré initial. Dans un modèle multiphasique tridimensionnel prenant en compte exactement la forme carrée du radier, l'écart serait sans doute beaucoup plus faible.

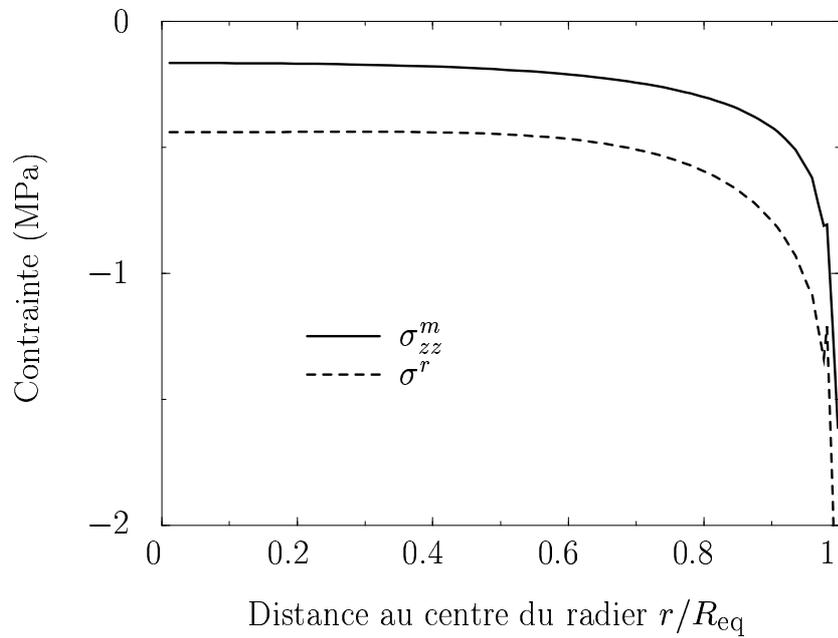
2.4 Conclusion

Sur l'exemple d'un radier de 9×9 pieux, le modèle multiphasique et le modèle hybride donnent des résultats remarquablement comparables. Une analyse inverse permet de confirmer la valeur asymptotique du coefficient d'interaction $\alpha_{rp} = 0,85$ mentionné par Clancy et Randolph (1996).

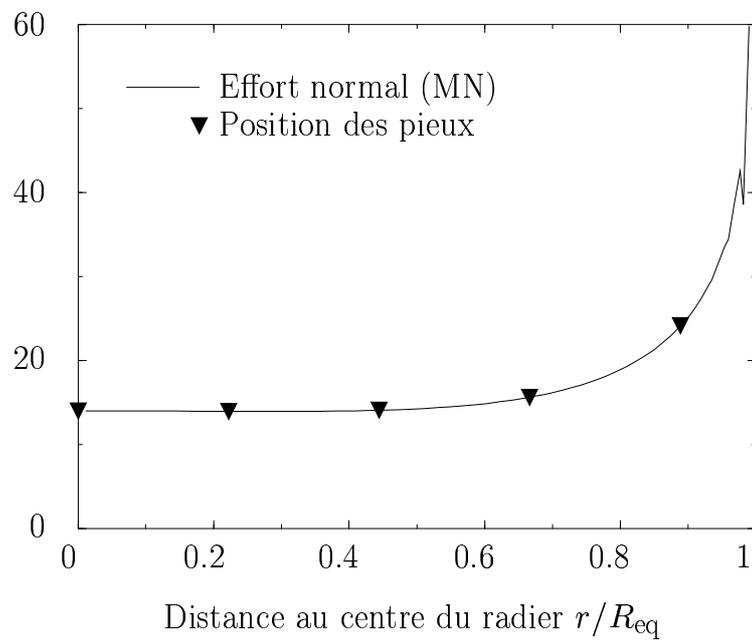
Les résultats étant similaires, on peut souligner plusieurs avantages du modèle multiphasique. Tout d'abord, le temps de calcul est très réduit dans le cadre élastique (de l'ordre de 600 fois plus faible que dans l'approche hybride). Les comportements non linéaires difficiles à intégrer dans le modèle hybride (qui repose sur le principe de superposition) peuvent être inclus sans problèmes dans le calcul CASTOR.

D'autre part, le même maillage permet, avec des modifications mineures, de traiter de façon unifiée le problème du radier ou du groupe de pieux pris séparément, ou de varier la densité du réseau de pieux, puisque seule cette densité (et non la position exacte des pieux) intervient dans le calcul.

Le concepteur dispose ainsi d'un moyen efficace et peu coûteux pour décider rapidement de la pertinence du radier de pieux par rapport à d'autres solutions, ou pour fixer la densité de pieux nécessaires vis à vis d'un tassement maximal prescrit. Ce point est crucial, car la littérature mentionne plusieurs exemples de fondations pour lesquelles la quantité de pieux utilisée s'avère largement surdimensionnée (Hooper, 1979).



a - Contrainte verticale sous le radier



b - Effort normal dans les pieux

FIG. 5.14: Répartition des efforts - radier 9×9 pieux

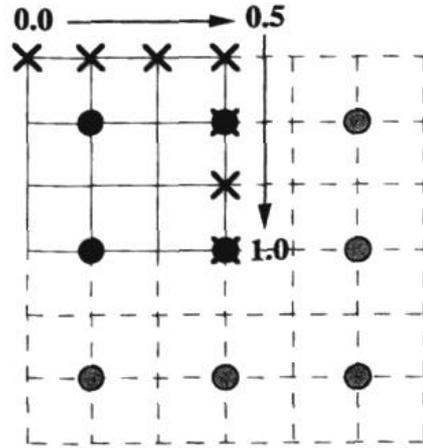


FIG. 5.15: *Coordonnée normalisée (d'après Clancy et Randolph (1993))*

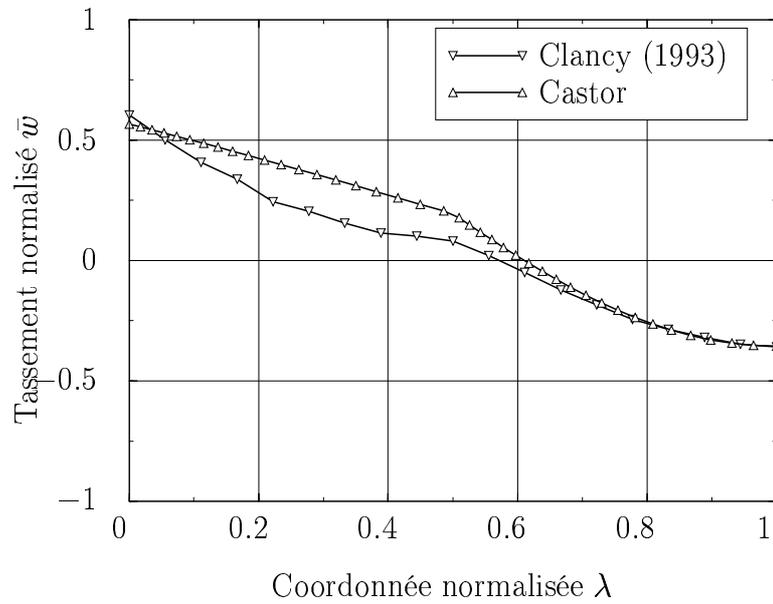


FIG. 5.16: *Tassement différentiel - radier 9× 9 pieux*

3 La *Meseturm* de Francfort

3.1 Introduction

La *Meseturm*, construite à Francfort-sur-le-Main (Allemagne) entre 1988 et 1991 comporte 60 étages surmontés d'une pyramide d'acier et de verre de 40 m. Avec ses 256 m de hauteur totale, elle fait partie des plus grands immeubles de bureaux d'Europe, détenant le record jusqu'en 1997, où elle a été détrônée par la tour voisine de la Kommerzbank (299 m).

Le sous-sol de Francfort est constitué d'une couche argileuse épaisse relativement compressible. La construction d'immeubles de grande hauteur sur une simple semelle de fondation s'avère dès lors impossible. En effet, le tassement d'ensemble et par suite les tassements différentiels dus entre autres à l'hétérogénéité du massif de fondation peuvent prendre des valeurs inacceptables vis à vis de la verticalité du bâtiment (Franke, 1991; Sommer *et al.*, 1991).

Les concepteurs ont donc retenu un radier de pieux comme modèle de fondation, les objectifs visés étant à la fois la réduction des tassements à des valeurs acceptables, et la diminution des efforts de flexion dans le radier.

La complexité de l'interaction sol-structure impose réglementairement (Eurocode 7) une *instrumentation* de l'ouvrage permettant le suivi dans le temps de son comportement. En l'occurrence, sans doute à cause de la taille inhabituelle de la *Meseturm*, le dispositif de *monitoring* est très complet : extensomètres dans le massif, capteurs de pression sous le radier, pieux instrumentés, etc.

Les données et mesures ayant servi de base aux comparaisons présentées dans cette section proviennent du projet de fin d'études de Vetter (1998) effectué à l'Université Technique de Darmstadt. Ce travail mené à l'Institut de Géotechnique présente également une modélisation tridimensionnelle par éléments finis de la fondation. Notre comparaison porte donc d'une part sur les résultats d'une étude paramétrique numérique, d'autre part sur des résultats de mesure *in situ*⁶.

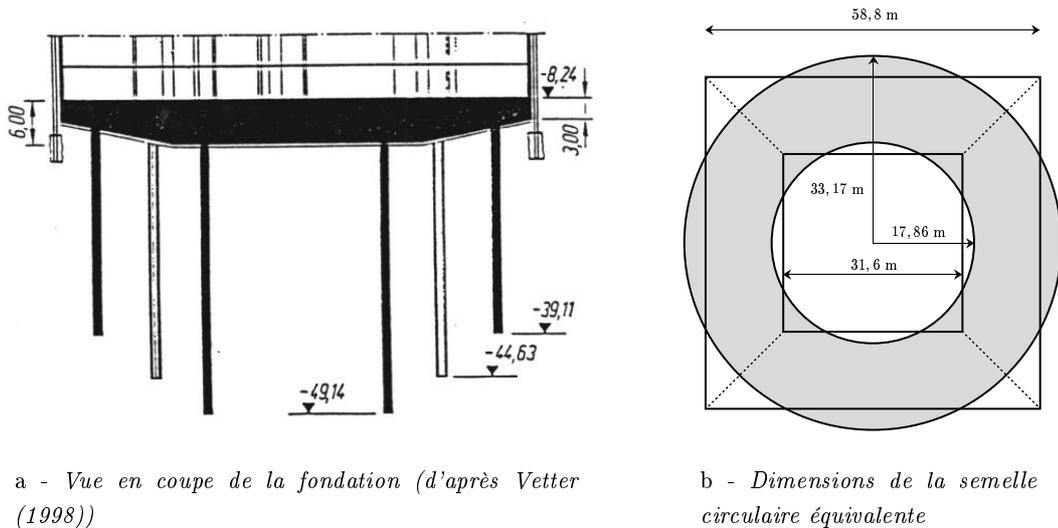
3.2 Description de la simulation réalisée avec CASTOR

3.2.1 Géométrie de la fondation réelle et du modèle CASTOR

Le radier de pieux formant la fondation de la *Meseturm* est composé d'une semelle carrée surmontant un ensemble de pieux répartis approximativement sur des couronnes concentriques, de hauteur variable (voir coupe de la structure, figure 5.17-a). Compte-tenu des potentialités de CASTOR, c'est naturellement un modèle *axisymétrique* qui a été réalisé.

6. L'auteur remercie au passage Serge Borel, du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, grâce auquel il a eu accès au rapport de Vetter.

3.2.1.1 Radier La semelle est une dalle carrée en béton de 58,8 m de côté, dont l'épaisseur varie de 3 m au bord à 6 m au centre. La face inférieure est un carré de 31,6 m de côté. Les dimensions de la semelle circulaire équivalente sont telles que les aires des faces inférieure et supérieure soient conservées. Dans le modèle CASTOR, la semelle est donc représentée par un tronc de cône de hauteur 3 m, de rayon supérieur (resp. inférieur) 33,17 m (resp. 17,86 m), surmonté d'un cylindre de hauteur 3 m (voir figure 5.17-b).



a - Vue en coupe de la fondation (d'après Vetter (1998))

b - Dimensions de la semelle circulaire équivalente

FIG. 5.17: Messeturm - Représentation du radier de pieux

3.2.1.2 Pieux La dalle repose sur un ensemble de 64 pieux en béton de diamètre 1,3 m, disposés sur trois couronnes concentriques. La figure 5.18 présente une vue en plan de la disposition exacte des pieux, et en surimpression le découpage des couronnes. Celles-ci comportent respectivement :

- 16 pieux de longueur 34,9 m pour la couronne intérieure,
- 20 pieux de longueur 30,9 m pour la couronne intermédiaire,
- 28 pieux de longueur 26,9 m pour la couronne extérieure.

Chaque groupe de pieux est modélisé par un milieu *biphasique*. Les dimensions respectives ainsi que les fractions volumiques η^r de renforcement correspondantes sont reportées dans le tableau 5.10.

3.2.1.3 Maillage Les simulations numériques effectuées par Vetter (1998) portent sur 1/8 d'un massif de base carrée de 90 m de demi-côté et de 150 m de profondeur (figure 5.19). Le maillage comporte 8700 noeuds et 7859 éléments.

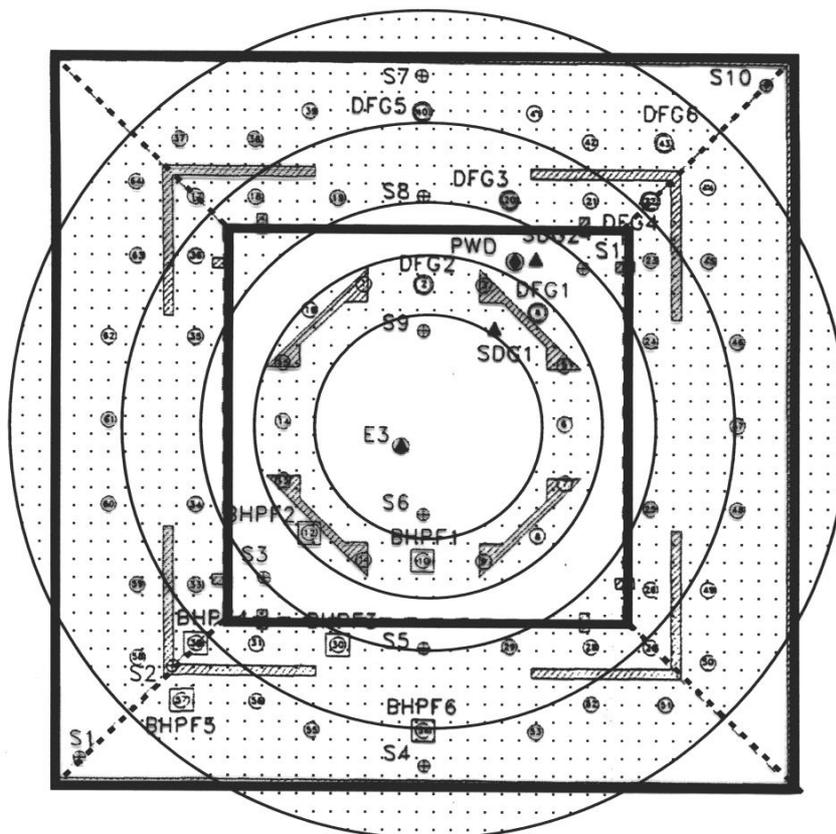


FIG. 5.18: Messeturm - Disposition en plan des pieux

Couronne	Nombre de pieux	Surface des pieux (m ²)	Rayon intérieur (m)	Rayon extérieur (m)	Surface couronne (m ²)	Fraction volumique η^r
intérieure	16	21,23	8	13	329,86	6,43 %
intermédiaire	20	26,54	18	25,44 ^a	1 016,10	2,61 %
extérieure	28	37,16	25,44	33,17	1 422,55	2,61 %

TAB. 5.10: Messeturm - Description du modèle axisymétrique

^a On a ajusté exactement la frontière entre les couronnes intermédiaire et extérieure de façon à obtenir strictement la même fraction volumique, ce qui simplifie la gestion des données dans le pré-processeur de CASTOR.

On retient pour le modèle axisymétrique CASTOR les mêmes dimensions. Le maillage correspondant comporte 3111 noeuds et 750 éléments isoparamétriques quadratiques Q9. Il est représenté sur la figure 5.20.

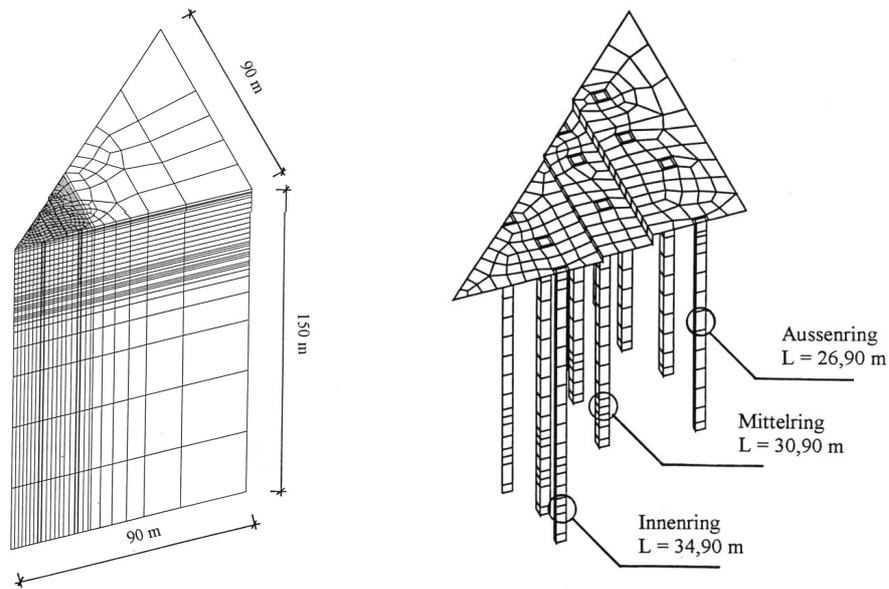


FIG. 5.19: Messeturm - Maillage tridimensionnel (d'après (Vetter, 1998))

3.2.2 Propriétés mécaniques des matériaux

3.2.2.1 Massif L'argile de Francfort constituant le massif de fondation possède les caractéristiques résumées dans le tableau 5.11⁷.

	Notation	Valeur
Module d'Young	E^m	5,81(1 + 0,35 z) (MPa)
Coefficient de Poisson	ν	0,498
Poids propre	γ	19 kN/m ³
Poids déjaugé	γ'	9 kN/m ³
Coefficient de pression des terres au repos	K_o	0,667
Cohésion	c'	20 kPa
Angle de frottement	φ'	20°

TAB. 5.11: Messeturm - Paramètres constitutifs de l'argile de Francfort

Les simulations de Vetter ont été effectuées avec le code de calcul ABAQUS. Le modèle de sol retenu est élasto-plastique, de type Drucker-Prager modifié (critère de type *cap-cone*, dépendant du troisième invariant, avec écrouissage du *cap*). Dans le modèle CASTOR, on

⁷ La variation affine du module d'Young en fonction de la profondeur a conduit à introduire cette fonctionnalité dans CASTOR.

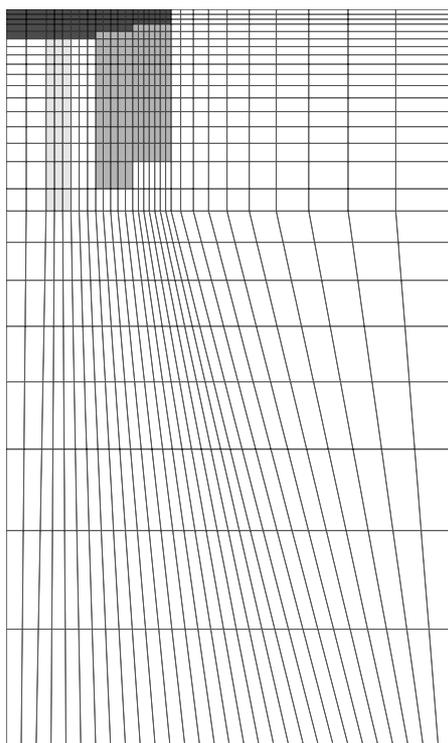


FIG. 5.20: Messeturm - *Maillage utilisé avec CASTOR*

s'est contenté d'utiliser le modèle de Drucker-Prager standard, sans écrouissage, dont les paramètres ont été identifiés à partir de la cohésion c' et de l'angle de frottement φ' mesurés, en utilisant les formules (F.24) de l'annexe F. Celles-ci donnent une équivalence avec le critère de Mohr-Coulomb en déformation plane. En axisymétrie, le cône de Drucker-Prager est tangent intérieurement à la pyramide de Mohr-Coulomb.

Le niveau de la nappe étant, au plus bas, situé juste sous la face inférieure du radier, on a introduit dans le calcul le poids déjaugé γ' et les contraintes géostatiques correspondantes.

3.2.2.2 Radier Le béton du radier est supposé avoir un comportement linéaire élastique, de module d'Young $E_b = 34\,000$ MPa, de coefficient de Poisson 0,2. On introduit un poids volumique apparent calculé de sorte que le poids total de la semelle réelle, soit 425 MN, et celle du modèle axisymétrique soient identiques. Avec les dimensions présentées au paragraphe précédent, on trouve $\gamma_b^{\text{app}} = 28,3$ kN/m³. Pour l'étude paramétrique, des calculs simulant une fondation parfaitement rigide ont également été effectués en prenant $E_b = 10^7$ MPa.

3.2.2.3 Pieux Le module d'Young du béton constituant les pieux vaut selon les calculs 30 000 MPa (valeur nominale), 22 000 MPa (valeur moyenne mesurée *in situ*) ou 10 000 MPa. Sa limite en compression vaut $\bar{\sigma}_b = 35$ MPa. Les paramètres introduits pour la phase renforcement dans le modèle CASTOR sont donnés dans le tableau 5.12.

Couronne	Fraction η^r	Rigidité $a^r = E_b \cdot \eta^r$	Résistance $\sigma_o^r = \bar{\sigma}_b \cdot \eta^r$
intérieure	6,43%	1931	2,25
intermédiaire extérieure	2,61 %	783	0,91

TAB. 5.12: Messeturm - Paramètres constitutifs de la phase renforcement (valeurs en MPa pour $E_b = 30\,000$ MPa)

3.2.3 Chargement

Les calculs de Vetter suivent pas à pas le phasage de la construction : excavation, creusement des pieux, bétonnage du radier, activation de sa rigidité (cas de charge 1 à 9), application en quatre pas du poids du bâtiment (cas de charge 11 à 14). Par ailleurs, trois cas de charge liés aux variations de niveau de la nappe phréatique sont envisagés (cas 10, 15 et 16). Les résultats des calculs et les mesures sont donnés par référence au cas 9 (fin du bétonnage du radier). C'est cette configuration qui est retenue comme état initial dans le modèle CASTOR. Les cas de charge envisagés ensuite suivent fidèlement le processus de chargement retenu par Vetter. On les a détaillés dans le tableau 5.13.

3.2.4 Description de l'étude paramétrique

Afin d'effectuer des comparaisons avec les simulations numériques tridimensionnelles, on a repris les mêmes paramètres que ceux utilisés par Vetter (simulations *m8* à *m11*). On a par ailleurs utilisé un jeu de paramètres supplémentaire (simulation *m1*), et effectué une simulation sans pieux (*m0*). Le tableau 5.14 résume ces choix.

3.3 Résultats

3.3.1 Etude paramétrique des courbes de tassement

Pour chaque choix des paramètres (tableau 5.14), on a relevé, pour chaque cas de charge, le tassement au centre de la fondation. Reprenant la présentation de Vetter, on donne les *courbes de tassement* en fonction du niveau global de chargement (colonne 4 du tableau 5.13) sur les figures 5.21-a à 5.21-f.

On donne d'autre part dans le tableau 5.15 les valeurs du tassement final obtenues respectivement par Vetter et par notre approche, ainsi que les temps de calcul correspondants⁸.

⁸. Le type de machine utilisé par Vetter n'est pas précisé. Nous avons utilisé une station de travail SUN ULTRA 1.

Cas	Description	Valeurs	Charge totale (MN)
1	Contraintes initiales géostatiques poids propre de la semelle	$\gamma' = 9 \text{ kN/m}^3$ $\sigma_{zz}^o = -\gamma' z \quad , \quad z > 0$ $\sigma_{rr}^o = \sigma_{\theta\theta}^o = -K_o \gamma' z$ $\gamma_b^{\text{app}} = 28,3 \text{ kN/m}^3$	425
2	Élévation de la nappe +9 m	Sous-pression de 78,1 kPa sous le radier (Résultante -270 MN)	155
3-6	Application en 4 pas du poids du bâtiment (1445 MN)	4×104,5 kPa sur le radier (Résultante 4×361,25 MN)	516,25 877,5 1238,75 1600
7	Abaissement de la nappe -9 m	Sous-pression de -78,1 kPa sous le radier	1870
8	Élévation de la nappe +9 m	Sous-pression de 78,1 kPa sous le radier	1600

TAB. 5.13: Messeturm - Description des cas de charge

Ces résultats appellent les commentaires suivants :

- Si l'on considère les premiers cas de charge, pour lesquels le comportement est globalement élastique, il y a quasi-superposition des courbes obtenues par Vetter et par l'auteur. Le modèle aux éléments finis *multiphasique axisymétrique* rend donc parfaitement compte du comportement global de l'ouvrage en élasticité.
- Au fur et à mesure du chargement, les courbes s'éloignent l'une de l'autre. L'écroûissage de la courbe de tassement est plus prononcé pour les calculs ABAQUS. Ceci s'explique par la présence du *cap* sur le critère de Drucker-Prager modifié, qui limite la *contrainte moyenne* $\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}/3$ au sein du massif. Ce *cap* n'existe pas dans le calcul CASTOR, qui donne par conséquent une réponse plus raide.
- Sauf pour *m11*, l'écart sur le tassement final calculé par les deux approches est inférieur à 15%. De plus, les tendances évoluent dans le même sens lorsqu'on varie les paramètres.
- Les mesures *in situ* donnent une valeur moyenne de 22 000 MPa pour le module d'Young des pieux. Cette remarque justifie le choix des paramètres du calcul *m1*. On constate

Dénomination	Angle de frottement φ' (°)	Cohésion c' (kPa)	Rigidité du radier (MPa)	Module d'Young des pieux (MPa)
<i>m8</i>	20	20	10^9	30 000
<i>m9</i>	20	20	10^9	10 000
<i>m10</i>	22	4,4	10^9	30 000
<i>m11</i>	20	20	34 000	30 000
<i>m0</i>	20	20	34 000	0
<i>m1</i>	20	20	34 000	22 000

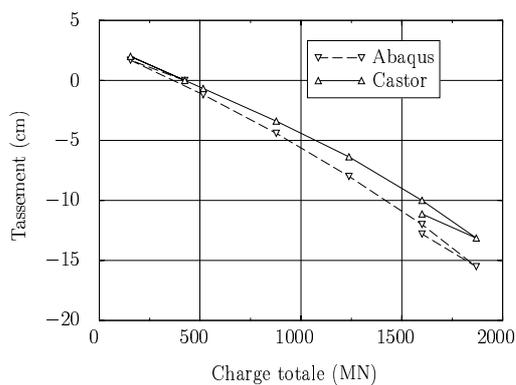
TAB. 5.14: *Messeturm* - *Choix des paramètres pour les différentes simulations*

Dénomination	Tassement (cm)		Temps de calcul	
	ABAQUS	CASTOR	ABAQUS (heures)	CASTOR ^a (minutes)
<i>m8</i>	12,7	11,1	28	3'41
<i>m9</i>	13,5	12,9	28	3'39
<i>m10</i>	12,8	11,5	75	4'56
<i>m11</i>	14,1	11,7	28	3'27
<i>m0</i>	-	38,9	-	3'19
<i>m1</i>	-	12,0	-	5'09

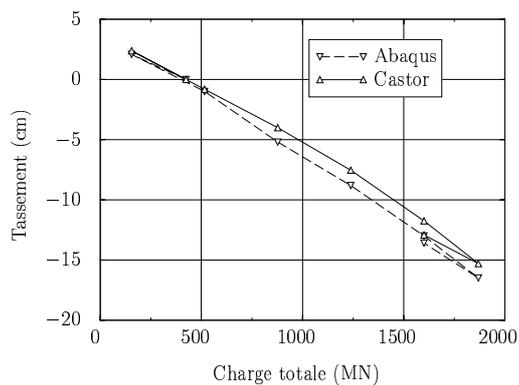
TAB. 5.15: *Messeturm* - *Tassement final et temps de calcul*^a Sur station de travail SUN ULTRA 1.

que le tassement final obtenu est à 8% près celui mesuré. De plus, à la fin du cas de charge 6, qui correspond à la fin de la construction, le tassement calculé vaut 11,0 cm, à comparer aux 11,1 cm mesurés à cette date. En conséquence, il nous semble que ce jeu de paramètres est celui qui rend le mieux compte du comportement de la *Messeturm*.

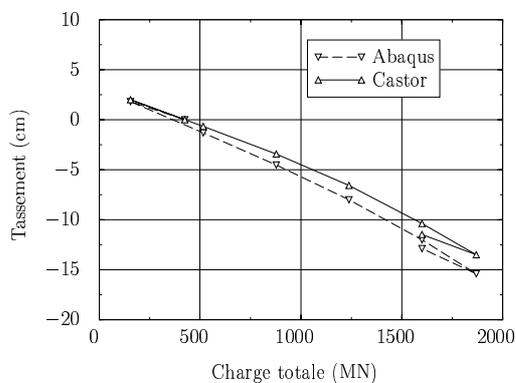
- Le calcul *m0* avec le radier seul conduit à un tassement de 38,9 cm, en accord avec les 35 à 40 cm mentionnés par Sommer *et al.* (1991). Ainsi la présence des pieux permet de diviser le tassement final par 3,5, ce qui justifie pleinement le choix de conception.



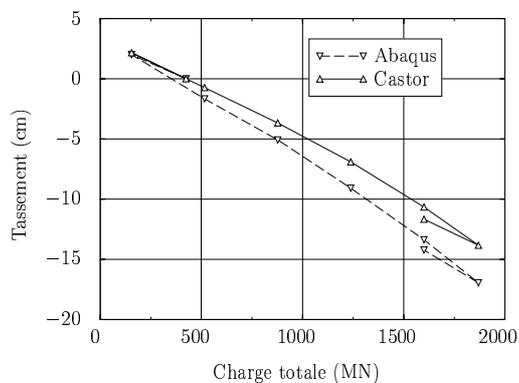
a - Simulation m8



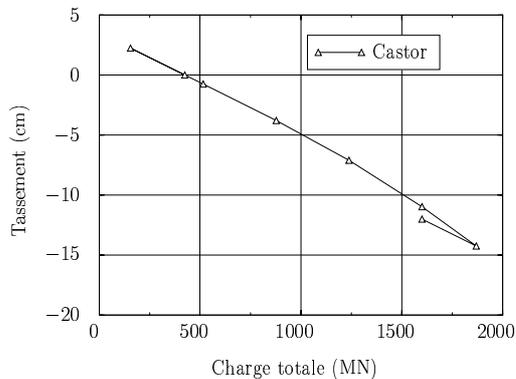
b - Simulation m9



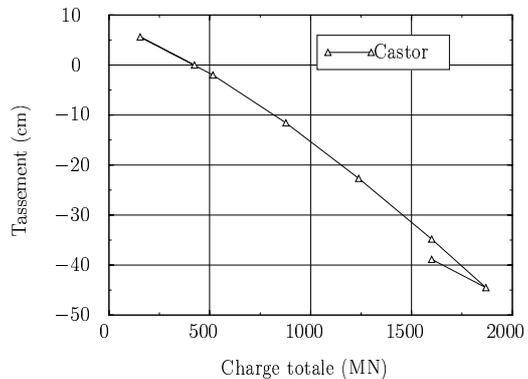
c - Simulation m10



d - Simulation m11



e - Simulation m1



f - Simulation m0

FIG. 5.21: Messeturm - *Etude paramétrique des courbes de tassements*

3.3.2 Répartition du tassement en fonction de la profondeur

Des extensomètres ont été mis en place au centre du radier, au milieu d'un côté et sous un angle. Ils mesurent le tassement absolu du massif à différentes profondeurs. On compare dans ce paragraphe les valeurs mesurées à la verticale du centre du radier avec celles obtenues numériquement. Les résultats sont donnés sur la figure 5.22.

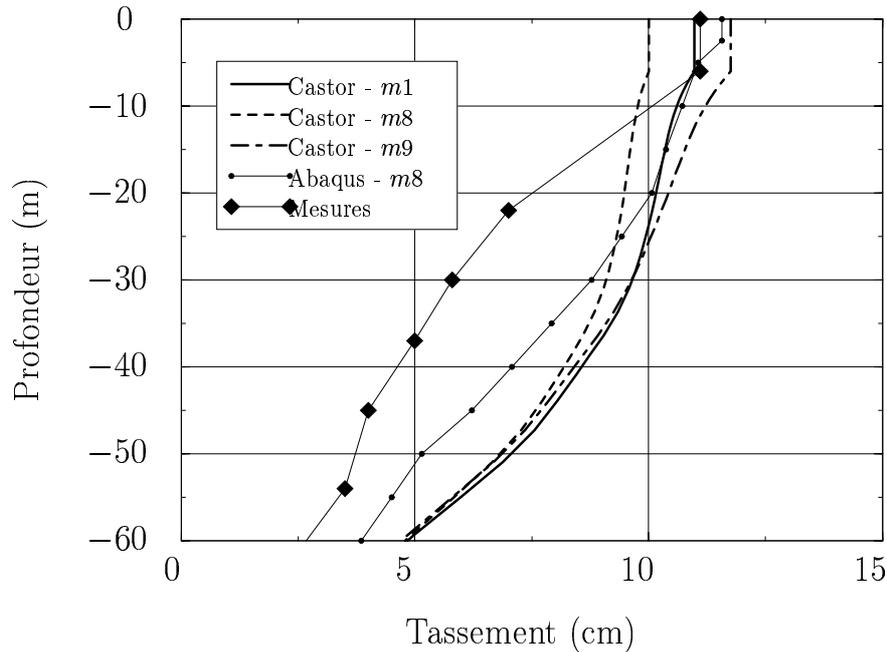


FIG. 5.22: Messeturm - Répartition du tassement au centre du radier en fonction de la profondeur

Si le tassement en surface est bien prévu par les différents modèles, sa diminution en fonction de la profondeur est moins marquée pour les valeurs numériques que pour les valeurs mesurées. Cela donne à penser que les caractéristiques de déformabilité des couches superficielles (et/ou des pieux) introduites dans les modèles sont trop fortes. Les résultats d'ABAQUS sont à peine meilleurs que ceux donnés par CASTOR, traduisant également une décroissance trop lente avec la profondeur.

3.3.3 Effort normal dans les pieux

Afin d'illustrer plus avant l'exploitation de modèle multiphasique, on s'intéresse maintenant à l'effort normal dans le pieu instrumenté DFG2 n° 2 (voir figure 5.18) en fonction de la profondeur, et à son évolution au cours du chargement de la fondation.

Le pieu DFG2 se situe à une distance de 11,1 m du centre du radier. Cette abscisse correspond approximativement au centre de la quatrième colonne d'éléments dans le maillage CASTOR (figure 5.20). On a donc relevé la valeur de la contrainte partielle dans la phase renforcement σ^r pour ces éléments. En la divisant par la fraction volumique de renforcement (en l'occurrence 6,43%), on obtient l'effort normal dans le pieu.

On peut ainsi représenter sa valeur en fonction de la profondeur pour différents cas de charge et confronter les résultats aux mesures *in situ*. On a représenté sur la figure 5.23 en trait

épais la distribution d'effort calculée par CASTOR en fonction de la profondeur pour les cas de charge 3, 4, 5 et 8 (tableau 5.13). On a superposé les points de mesures reportés par Vetter.

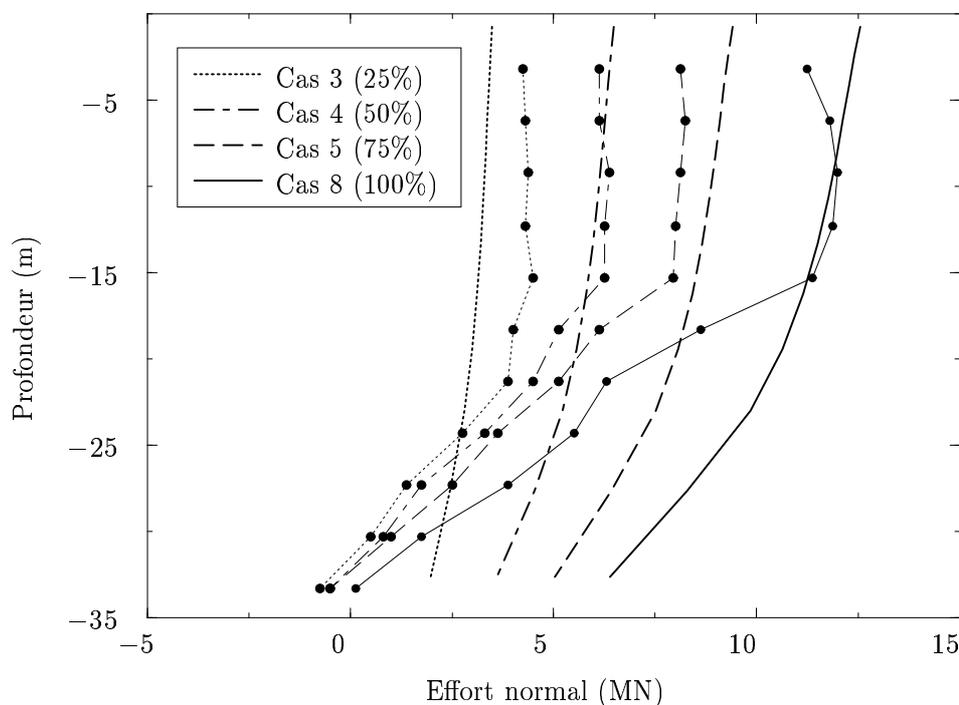


FIG. 5.23: Messeturm - Effort normal dans le pieu instrumenté DFG2 (— CASTOR, • Mesures in situ)

L'accord est très bon en tête de pieu, l'écart entre valeurs mesurées et calculées variant entre 5 et 20%. Par contre la décroissance de la valeur en fonction de la profondeur n'est pas correctement rendue. En particulier, on ne retrouve pas un effort nul en pied. On a ici affaire à un *effet de bord* lié au modèle multiphasique *adhérent*, du même type que celui observé sur la paroi d'un tunnel profond après convergence (contraintes partielles radiales de somme nulle dans ce cas, mais non nulles séparément). Le recours au modèle multiphasique général pourra permettre d'obtenir de meilleurs résultats sur les contraintes.

Remarques Une telle concordance des résultats est en fait surprenante. En effet, rappelons tout d'abord que l'on a effectué un calcul axisymétrique équivalent de la fondation carrée. Si cette approximation est très bonne pour évaluer des quantités globales telles que les tassements d'ensemble ou différentiels, elle est plus sujette à caution dans le cas de quantités ponctuelles. L'identification de l'abscisse r du modèle axisymétrique avec la distance au centre du radier du pieu considéré est en particulier discutable (On a pu vérifier que, pour des pieux plus excentrés, la concordance des mesures et des valeurs calculées est légèrement moins bonne).

Dès lors, nous n'avons pas cherché à estimer très précisément $\sigma^r(r)$, nous contentant de la valeur au centre de l'élément le plus proche au lieu de celle interpolée au point d'abscisse r à partir des valeurs aux points de Gauss de l'élément. Pour exploiter rigoureusement un calcul

tridimensionnel multiphasique, il conviendrait de rajouter cette fonctionnalité dans CASTOR.

Enfin, les dates de mesures ne correspondent qu'approximativement aux niveaux de charge (25, 50, 75 et 100% de la charge totale) retenus dans le calcul.

Au vu de ces remarques, il apparaît que la précision des résultats est excellente. Le mode de calcul des efforts dans les pieux est ainsi validé.

3.3.4 Résultats complémentaires

On s'est intéressé aux tassements différentiels de la semelle à différentes phases de la construction. Ayant retenu les paramètres de la simulation $m1$, on a observé que ces tassements étaient sous-estimés par le calcul. Cela peut s'expliquer en partie par la modélisation axisymétrique du radier carré. D'autre part, l'estimation de la charge appliquée réellement sur la fondation aux dates pour lesquelles des mesures sont disponibles s'est avérée délicate. En conséquence, ces résultats ne sont pas reportés ici.

On a également estimé la répartition de la charge totale entre les pieux et le radier par la méthode exposée à la section 2.3.2. Quels que soient les paramètres de calcul, la part des charges reprises par le radier varie entre 13 et 15%. Les calculs ABAQUS menés par Vetter conduisent plutôt à une valeur moyenne de 30 à 35%. L'estimation obtenue à partir des mesures est de 38%, mais l'auteur précise qu'elle est peu fiable, compte tenu du peu de pieux instrumentés.

La mauvaise estimation fournie ici par CASTOR (en comparaison avec la très bonne concordance obtenue à la section précédente sur le problème traité par Clancy) peut s'expliquer en partie par le fait que les pieux sont disposés dans trois zones non continues dans le maillage, et que la semelle d'épaisseur variable est maillée de façon approximative par des marches. La multiplication des points anguleux et des frontières entre zones renforcées et non renforcées conduit à des gradients de contraintes assez forts en ces points, et donc une erreur conséquente dans le calcul des résultantes par intégration des contraintes (voir les remarques de la section 1.2.2.3).

3.4 Conclusion

La modélisation multiphasique de la fondation de la *Messeturm* de Francfort nous a permis de tester le code CASTOR sur un exemple « en vraie grandeur ». Les résultats obtenus sont très satisfaisants. Les écarts constatés par rapport à la modélisation tridimensionnelle et par rapport aux mesures sont en grande partie justifiables par les approximations utilisées pour se ramener à un problème axisymétrique et ne sont donc pas directement imputables au modèle multiphasique lui-même. En particulier, une simulation multiphasique *tridimensionnelle* devrait réduire ces écarts.

Pour le comportement global (courbe de tassement), l'idéalisation axisymétrique et le choix des zones renforcées (couronnes concentriques) est justifié. L'utilisation du critère de Drucker-Prager standard rend le système légèrement trop rigide. Il faudrait implémenter le critère modifié *cap-cone* pour avoir une comparaison plus rigoureuse avec les simulations ABAQUS.

Les efforts dans les pieux sont prédits avec une bonne précision. Toutefois la répartition des charges donnée par CASTOR semble surestimer l'effet des pieux.

Enfin, les temps de calculs répertoriés dans le tableau 5.15 sont sans commune mesure avec ceux des calculs tridimensionnels réalisés avec ABAQUS. Le modélisation multiphasique apparaît donc être une méthode fiable et très avantageuse pour le traitement des fondations sur radiers de pieux. Elle permet d'accéder aux mêmes informations que celles disponibles après un calcul aux éléments finis classique dans lequel les pieux et le massif sont discrétisés séparément.

4 Les tunnels boulonnés

On s'intéresse dans cette section à la validation du modèle multiphasique pour les problèmes de tunnels boulonnés. On modélise avec le code CASTOR des expériences sur modèle réduit menées par Indraratna et Kaiser (1990a,b).

4.1 Description du dispositif expérimental

4.1.1 Principe

L'objectif des essais est de simuler la convergence d'un tunnel profond de section circulaire renforcé par boulonnage radial pour différentes valeurs de la pression géostatique. À l'inverse de la méthode convergence-confinement, pour laquelle la pression à la paroi du tunnel est progressivement diminuée alors que l'état de contrainte à l'infini est constant, le dispositif expérimental utilisé par Indraratna fonctionne de la façon suivante :

- Par symétrie, seul 1/8 du massif est modélisé (figure 5.24-a). Des plaques en téflon sont disposées entre l'échantillon et le support pour limiter le frottement et reproduire au mieux les conditions de symétrie (figure 5.24-b).
- L'essai reproduit des conditions de déformation plane dans une section transverse du tunnel. À cet effet, la contrainte axiale σ_z est adaptée à chaque pas de charge (figure 5.24-b).
- L'échantillon est au départ à l'état naturel. La paroi du tunnel restant constamment libre de contrainte, une pression σ_0 est appliquée sur le bord extérieur par pas de 1 MPa.

4.1.2 Dimensions du modèle

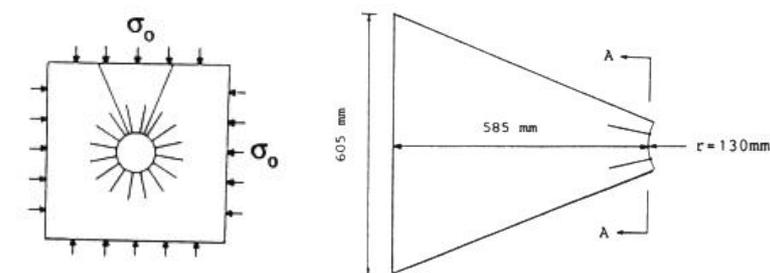
Le massif est constitué de *gypstone*⁹, qui est une roche tendre fabriquée de façon synthétique. Le rayon du tunnel est de 130 mm, la taille de l'échantillon 715 mm (voir figure 5.24-a).

Les boulons sont des tiges en *laiton* de diamètre 2,5 mm, solidarises à l'échantillon de roche par de la résine (épaisseur négligeable). Leur longueur est 50 mm. Ils sont placés périodiquement (voir figure 5.24-c), les intervalles longitudinaux et transversaux valant respectivement $S_L = 25$ mm et $S_T = 50$ mm.

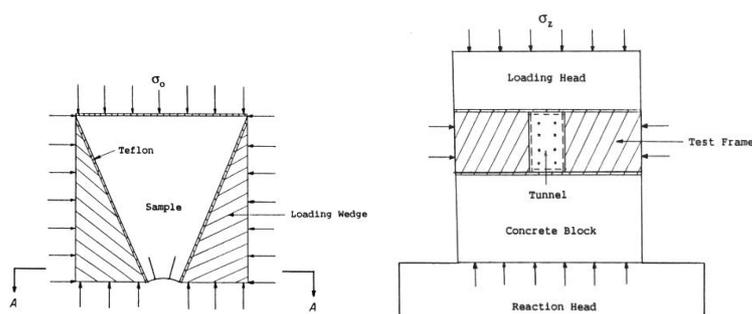
4.2 Simulation numérique

L'essai est simulé par un calcul en déformation plane sur un *tube épais*, dont les dimensions correspondent à celles de l'échantillon. Le maillage utilisé est représenté sur la figure 5.25.

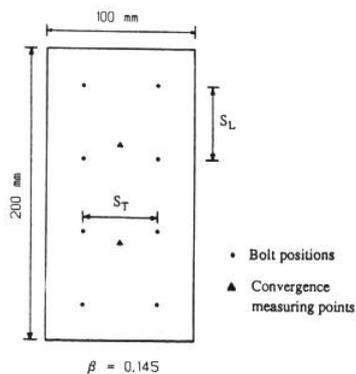
9. On garde ici le terme anglais faute de traduction appropriée.



a - Problème de référence et problème modélisé



b - Dispositif de mise en charge

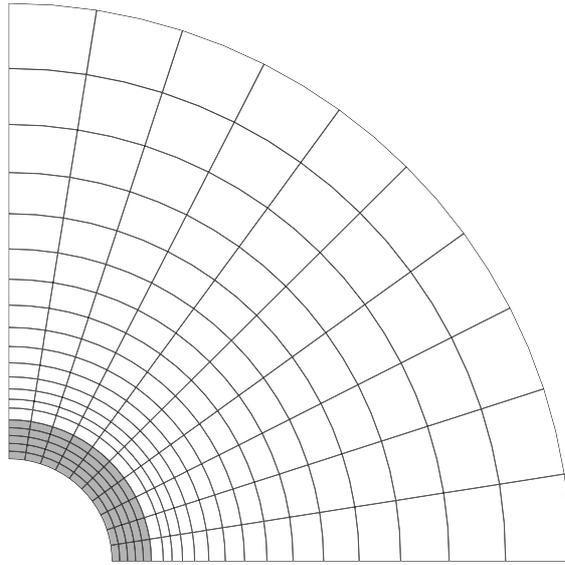


c - Disposition des boulons et des capteurs de déplacement

FIG. 5.24: Convergence d'un tunnel boulonné - dispositif expérimental (d'après Indraratna et Kaiser (1990b))

Les caractéristiques des matériaux sont pour la plupart explicitement données dans les deux articles mentionnés précédemment. Pour compléter, on a déduit la cohésion à partir de la limite en compression ($\sigma_c = 3,5$ MPa) et de l'angle de frottement, en supposant que le *gypstone* obéit à un critère de Mohr-Coulomb. La valeur du module d'Young du laiton, ainsi que sa limite en traction sont tirées de Askeland (1996). On reporte les différentes valeurs dans le tableau 5.16.

Une pression uniforme est appliquée à l'extérieur du tube épais, par pas de 1 MPa. Le calcul élasto-plastique prend 3 minutes. Pour chaque pas de charge, la convergence de la paroi est

FIG. 5.25: *Maillage utilisé*

Gypstone	Module d'Young E	1500 MPa
	Coefficient de Poisson ν	0,25
	Cohésion C	0,97 MPa
	Angle de frottement φ	32°
	Angle de dilatance ψ	20°
Boulons	Diamètre d	2,5 mm
	Espacement longitudinal S_L	25 mm
	Espacement transversal S_T	50 mm
	Densité en paroi η^r	$3,93 \cdot 10^{-3}$
	Rigidité (Laiton 120 000 MPa) $a^r(r) = \frac{K_o}{r}$	$K_o = 61,3 \text{ MN/m}$
	Résistance (Laiton 325 MPa) $\bar{\sigma}^r = \frac{\bar{\sigma}_o}{r}$	$\bar{\sigma}_o = 0,165 \text{ MPa}$

TAB. 5.16: *Caractéristiques des matériaux*

relevée.

On a représenté sur la figure 5.26 la courbe de convergence donnée par CASTOR et les points de mesures donnés dans Indraratna et Kaiser (1990a)¹⁰.

¹⁰. En fait, Indraratna dispose de deux séries de mesures pour deux capteurs disposés sur la paroi du tunnel. Les deux résultats sont très proches, nous en avons pris ici la valeur moyenne.

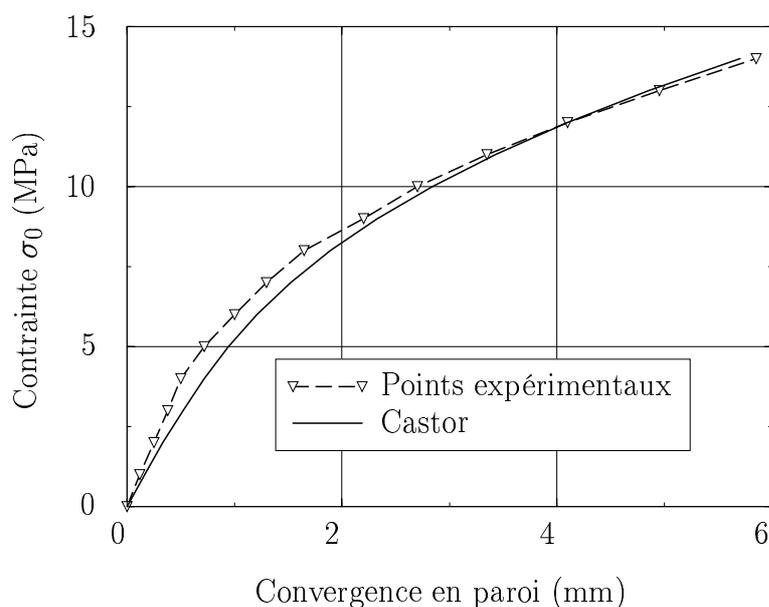


FIG. 5.26: Courbe de convergence du massif boulonné - Confrontation des mesures d'Indraratna et Kaiser (1990a) et du calcul CASTOR

La pente initiale de la courbe n'est pas très bien reproduite par CASTOR. La raideur équivalente est sous-estimée d'environ 20%. Par contre, la plastification progressive du massif est très bien reproduite, et la courbe obtenue est globalement très satisfaisante. Remarquons que les résultats du modèle proposé par Indraratna et Kaiser (1990a) sont également satisfaisants (malgré les réserves que l'on peut émettre à l'égard de certaines hypothèses, voir chapitre 1, section 3.2.3). Cependant, ce modèle requiert le choix d'un paramètre assimilable à un angle de frottement entre la roche et le boulon, dont les auteurs ne précisent pas comment il est obtenu.

5 Etude paramétrique des réseaux de micropieux

5.1 Introduction

On aborde dans cette section l'étude des réseaux de micropieux. Comme on l'a noté dans le premier chapitre, cette technique est appliquée depuis plusieurs décennies au confortement des ouvrages existants. Par contre, elle est encore très peu utilisée pour fonder des ouvrages neufs. Ceci s'explique sans doute en partie par le fait qu'il n'existe aucune méthode de dimensionnement ou de calcul en déplacement rationnelle de ce type de fondation. Personne ne s'est par ailleurs risqué à les modéliser directement par éléments finis.

Des travaux expérimentaux (Plumelle, 1984, 1985; Lee *et al.*, 1997) ont montré qu'une inclinaison des pieux de 10 à 15° symétriquement par rapport à la verticale permet d'augmenter de façon conséquente la capacité portante. Cependant, seuls de petits groupes de pieux ont été étudiés, et les expériences sont trop peu nombreuses pour tirer des conclusions générales sur les réseaux.

Au contraire des approches habituelles, le modèle multiphasique s'applique avec la même facilité pour des micropieux inclinés que pour des micropieux verticaux, puisque seule la *zone renforcée* est maillée, et non pas les inclusions prises une à une.

Une étude paramétrique sur l'inclinaison du réseau a été menée avec CASTOR dans le cadre du Projet National FOREVER. Les résultats présentés ci-après reprennent une partie du rapport de recherche correspondant (Sudret et de Buhan, 1998a) (voir également Sudret *et al.* (1999)).

5.2 Géométrie du problème

On étudie le problème d'une semelle filante rigide de largeur B posée sur une couche de sol d'épaisseur H , qui repose elle-même sur un substratum rigide. Le sol situé immédiatement en dessous de la fondation est renforcé par un réseau de micropieux disposés symétriquement par rapport à la verticale, faisant avec celle-ci un angle α (figure 5.27). Les caractéristiques mécaniques du sol sont son module d'Young E , son coefficient de Poisson ν , son angle de frottement interne φ , sa cohésion C (C_u pour un sol purement cohérent), et éventuellement son angle de dilatance ψ .

5.3 Maillage

Par raison de symétrie, seule une moitié de la structure est maillée. On a utilisé ici des éléments quadratiques à 6 nœuds (T6) et 9 nœuds (Q9). La densité du maillage est beaucoup plus fine sous la fondation, et notamment à son extrémité. Par contre, cette densité est identique dans les zones non renforcées, ou renforcées dans une ou deux directions. Les dimensions caractéristiques des maillages sont $B/2 = 1$ m, $H = 4$ m, la largeur totale valant 8 m. Un

exemple de maillage est donné sur la figure 5.28. Les déplacements sont bloqués dans les deux directions au niveau du substratum, uniquement horizontalement au niveau des frontières verticales.

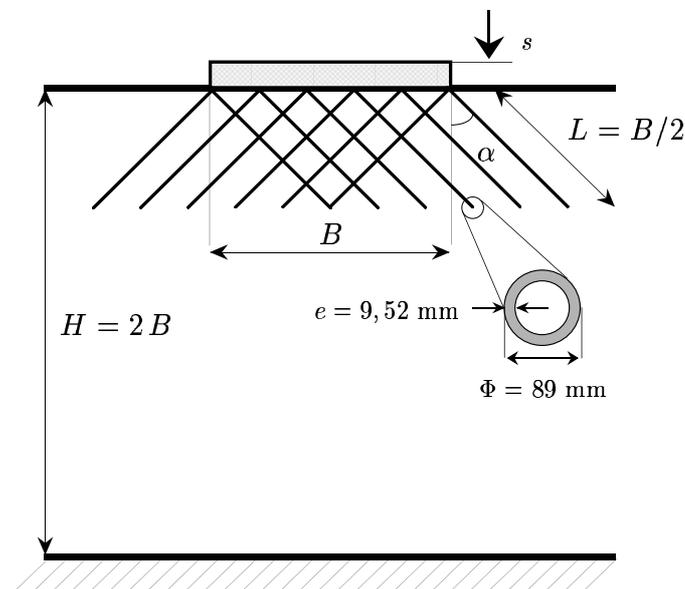


FIG. 5.27: *Semelle filante sur sol renforcé par réseau de micropieux*

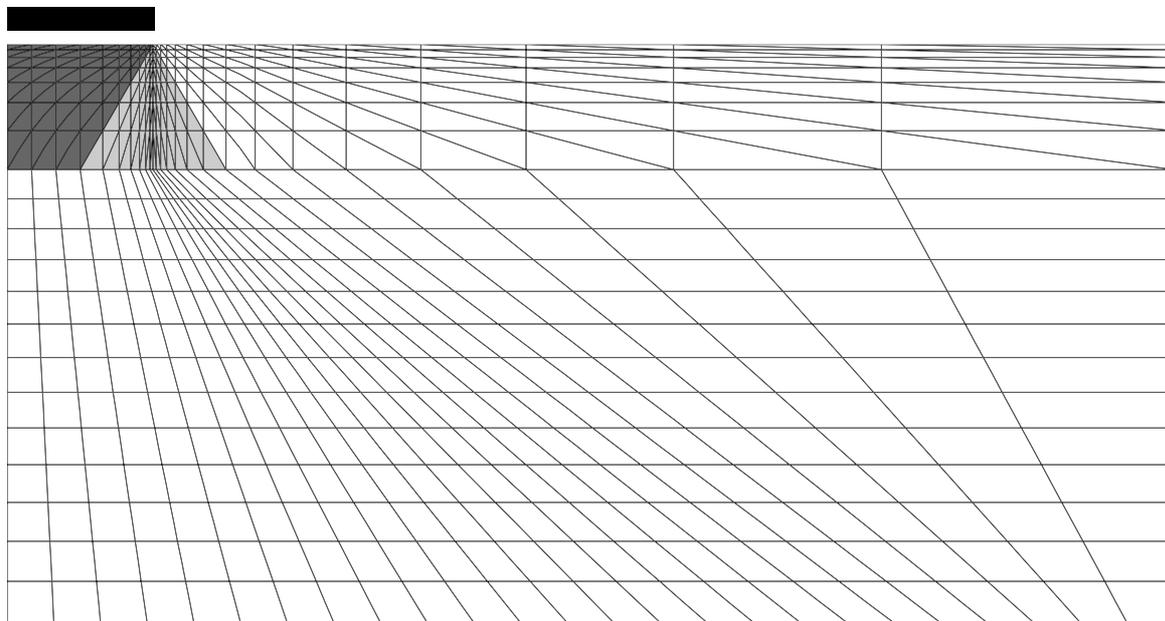


FIG. 5.28: *Réseau de micropieux - Maillage utilisé par CASTOR*

On charge progressivement la semelle en imposant un déplacement vertical δ , les déplacements horizontaux sous la semelle étant libres (poinçon « lisse »). On calcule à chaque pas de charge la réaction Q sous le poinçon. Les courbes de chargement normalisées $\{\delta/B, Q/(B.C)\}$ sont

représentées pour différentes inclinaisons des pieux.

Sur les courbes de chargement, on a relevé la pente initiale (module élastique équivalent) et la charge limite (capacité portante). Ces deux résultats sont représentés en fonction de l'angle d'inclinaison des micropieux.

5.4 Sol purement cohérent

Les valeurs numériques des paramètres utilisés dans le calcul sont données dans le tableau 5.17.

Massif purement cohérent	Module d'Young E	15 MPa
	Coefficient de Poisson ν	0,49
	Cohésion C_u	55 kPa
	Poids volumique γ	20 kN/m ³
	Etat initial isotrope $\underline{\underline{\sigma}}_o^m$	$\gamma z \underline{\underline{1}}$, $z < 0$
Micropieux	Diamètre extérieur d	89 mm
	Epaisseur e	9,52 mm
	Densité η^r	1 m.p/m ²
	Rigidité (Acier 210 000 MPa) a^r	499,2 MPa
	Résistance (Acier 500 MPa) σ_o^r	1,188 MPa

TAB. 5.17: Réseau de micropieux - Propriétés des matériaux - Massif purement cohérent

Le sol est supposé élastique parfaitement plastique. On utilise le critère de Von Mises de paramètre C_u (limite en cission).

Les dimensions de la section des micropieux sont tirées de Maleki *et al.* (1995) et correspondent aux inclusions utilisées sur le chantier de la tranchée couverte de Rueil-Malmaison.

La densité d'un micropieu par m² correspond aux deux directions de renforcement. La rigidité a^r et la résistance σ_o^r de chaque phase de renforcement s'obtiennent simplement en multipliant les caractéristiques de l'acier par la proportion volumique de renforcements. Les valeurs données dans le tableau 5.17 correspondent à des micropieux verticaux. Dans le cas de micropieux inclinés d'un angle α par rapport à la verticale, la proportion volumique est divisée par $\cos \alpha$, de sorte que les rigidité et résistance *dans chaque direction* sont $a^r / (2 \cos \alpha)$ et $\sigma_o^r / (2 \cos \alpha)$.

Les courbes de chargement normalisées sont données sur la figure 5.29-a. Elles sont toutes très régulières et la charge limite est obtenue pour un tassement relatif de l'ordre de 4 %. Dans le cas *non renforcé*, on retrouve le facteur de capacité portante $N_c = \pi + 2$ avec une très bonne précision.

Le module élastique équivalent de la couche de sol renforcé est donné en fonction de α sur la figure 5.29-b. L'amélioration par rapport au cas non renforcé est de 17 % à 57 % selon α . L'angle optimal se situe aux alentours de 15° .

Le facteur de capacité portante N_c est donné en fonction de α sur la figure 5.29-c. L'amélioration par rapport au cas non renforcé est ici de 23 % à 74 % selon α . L'angle optimal se situe également aux alentours de 15° .

5.5 Sol frottant

Les valeurs numériques des paramètres utilisés dans le calcul par éléments finis sont données dans le tableau 5.18.

Module d'Young E	50 MPa
Coefficient de Poisson ν	0,3
Cohésion C	10 kPa
Angle de frottement φ	30°
Angle de dilatance ψ	0°
Poids volumique γ	16 kN/m ³
Etat initial isotrope $\underline{\underline{\sigma}}_0^m$	$\gamma z \underline{\underline{1}}$, $z < 0$

TAB. 5.18: Réseau de micropieux - Propriétés du massif frottant

La loi de comportement du massif est élasto-plastique non associée. Les paramètres du critère de Drucker-Prager sont obtenus par les formules (F.24) de l'annexe F. Dans le cas particulier où l'angle de dilatance est pris égal à zéro, celles-ci se simplifient en :

$$(5.21) \quad \alpha = \frac{1}{3} \sin \phi \quad , \quad k = c \cos \phi \quad , \quad \beta = 0$$

Les courbes de chargement normalisées sont données sur la figure 5.30-a. Elles sont assez régulières, la charge maximale (ou pic) est atteinte pour des déformations légèrement supérieures à 5%. Pour le cas non renforcé, on observe un léger radoucissement suivi d'une oscillation. Le facteur de portance correspondant vaut 46,86. Il est en deçà du facteur théorique habituellement retenu :

$$(5.22) \quad N = \frac{Q}{B \cdot C} = N_c + \frac{\gamma B}{2C} N_\gamma$$

qui vaut en l'occurrence 53,7. On voit donc là une influence non négligeable du caractère non associé de la plasticité (un calcul « associé » sur le même maillage donne un facteur de 57,7, ce qui est plus proche de la valeur théorique).

Le module élastique équivalent de la couche de sol renforcé est donné en fonction de α sur la figure 5.30-b. L'amélioration par rapport au cas non renforcé est de 26 % à 39 % selon α . L'angle optimal se situe aux alentours de 15° .

Le facteur de capacité portante est donné en fonction de α sur la figure 5.30-c. L'amélioration par rapport au cas non renforcé est ici très nette, allant de 55 % à 118 % selon α . L'angle optimal se situe également aux alentours de 15° .

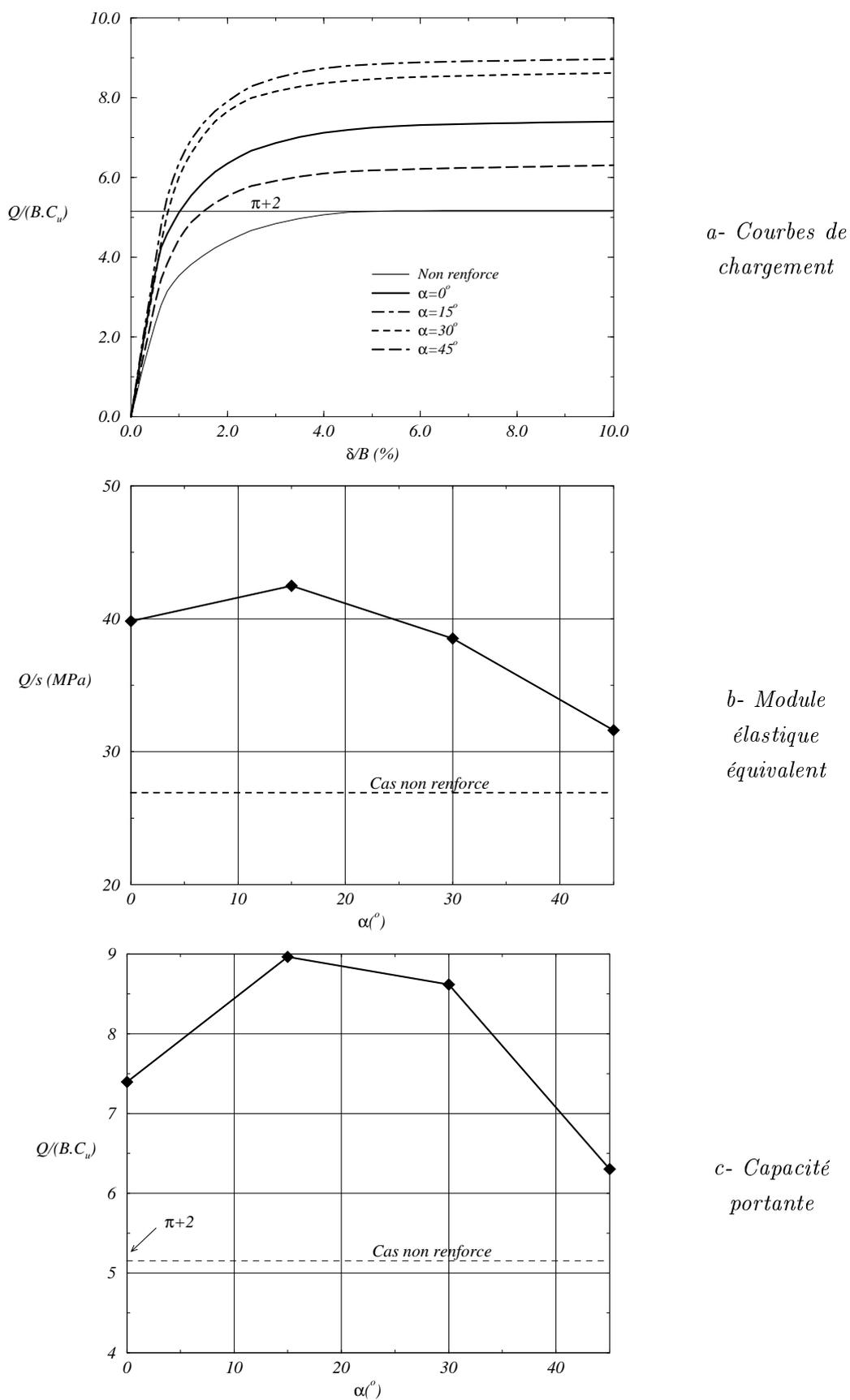
5.6 Conclusion

Les calculs effectués montrent une nette amélioration du module élastique équivalent et surtout de la capacité portante du sol renforcé par un réseau de micropieux. Dans tous les cas de figures, l'angle d'utilisation optimale d'une quantité donnée de renforcement se situe autour de 15° . On retrouve ainsi parfaitement les résultats expérimentaux annoncés en introduction.

Il faut noter que les calculs sur sols frottants convergent beaucoup plus lentement que ceux sur sols purement cohérents. Cependant, cette difficulté, inhérente aux calculs numériques en plasticité, n'est pas aggravée par la présence des renforcements.

Remarque Trois autres applications concernant les radiers de pieux et réseaux de micropieux, qui ont été faites au cours du travail de thèse, n'ont pas été reportées dans le présent mémoire :

- Une étude paramétrique de l'influence de la longueur des pieux sur le tassement d'un radier de pieux axisymétrique est présentée dans Sudret et de Buhan (1998a). Pour la géométrie retenue, le module élastique équivalent ainsi que la capacité portante varient de façon quasi-linéaire avec la longueur des pieux.
- En déformation plane, l'influence de la *largeur* D du groupe de pieux centré sous une fondation de largeur B constante a été étudiée par de Buhan et Sudret (1999c). On montre que le module élastique équivalent et la capacité portante varient de façon quasi-linéaire avec D/B tant que $D/B \leq 1$, puis restent à peu près constant pour $D/B > 1$. Toutes choses égales par ailleurs, une telle analyse permet de dimensionner la largeur D vis à vis d'un tassement en service prescrit.
- Généralisant les travaux de Greuell (1993), un *critère de résistance homogénéisé* a été déterminé pour un matériau composite constitué d'une matrice de Von Mises renforcé par inclusions dans deux directions. Ce critère a été implémenté pour permettre le calcul de la courbe de chargement d'un réseau tel que celui représenté sur la figure 5.27. La comparaison avec la courbe de chargement obtenue par le modèle multiphasique montre un écart inférieur à 5%. Les résultats sont donnés dans Sudret *et al.* (1998). Comme dans le cas de la convergence d'un tunnel profond (voir section 1.3.4), cet écart augmente sans doute dans le cas d'une matrice de type frottant. Cependant, il n'est pas possible d'obtenir analytiquement le critère homogénéisé dans ce cas. Aucune comparaison directe n'a donc pu être menée.



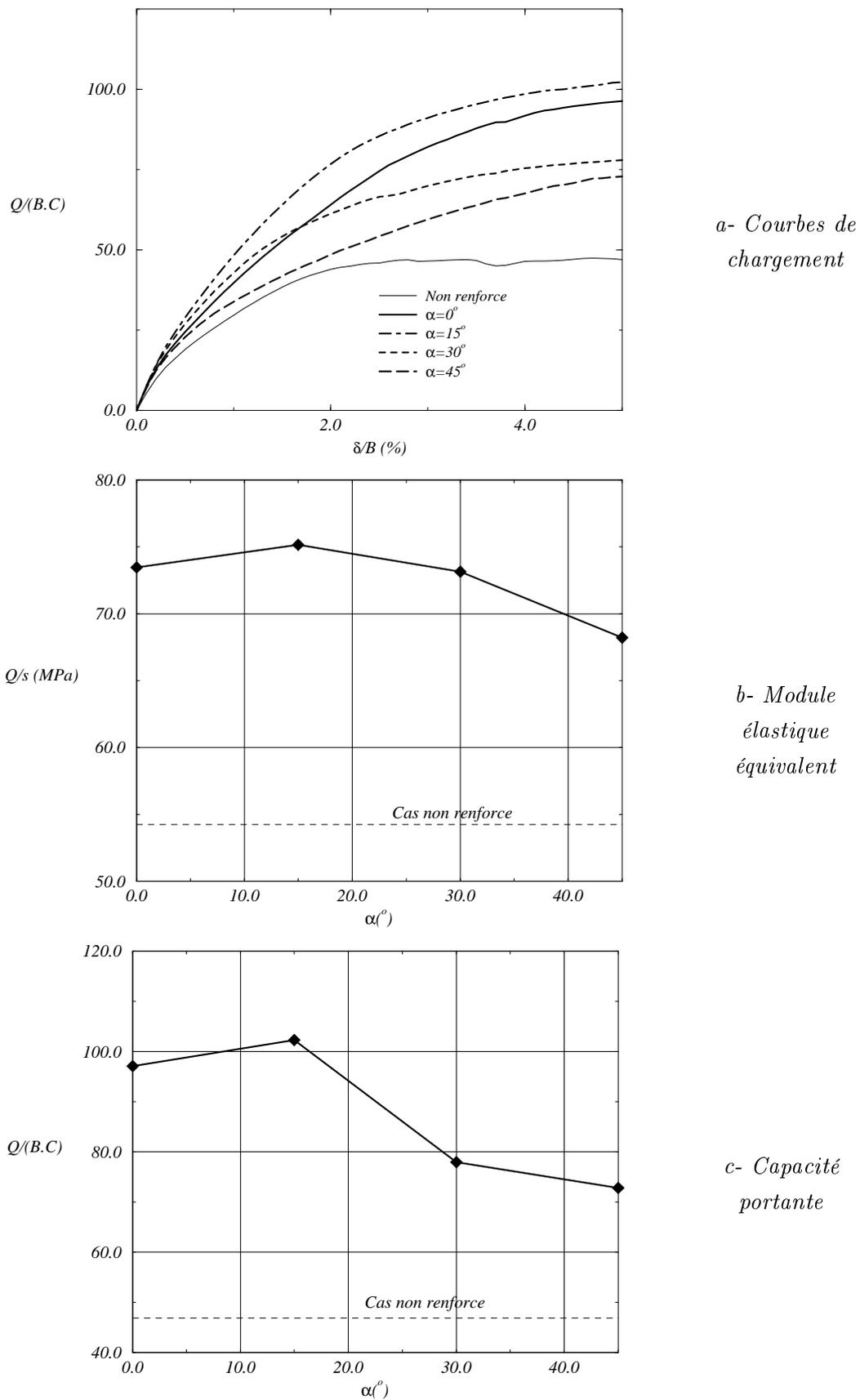


FIG. 5.30: Réseau de micropieux - Semelle filante sur sol frottant

6 Conclusion

Les nombreux exemples d'application présentés dans ce chapitre nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Le code de calcul CASTOR est fiable. Les simulations de différents problèmes dont la solution analytique est connue sont très concluantes.
- Le modèle multiphasique est parfaitement adapté au traitement des radiers de pieux, des tunnels boulonnés et des réseaux de micropieux. Les comparaisons avec d'autres codes de calcul ou avec des mesures donnent de façon générale des écarts inférieurs à 10%.
- Cette précision est d'autant plus remarquable que des hypothèses simplificatrices indépendantes du modèle multiphasique ont été nécessaires pour pouvoir mener à bien ces comparaisons (radier circulaire équivalent, critère de plasticité approché). Une extension tridimensionnelle du code et l'implémentation de nouveaux critères devrait permettre de diminuer encore les écarts avec les autres approches.
- Du point de vue du *calcul numérique*, l'extension aux problèmes tridimensionnels ne pose pas de problème de principe, le formalisme développé au chapitre 4 étant facilement adaptable. Elle n'a pas été développée dans le cadre de ce travail pour la simple raison que la gestion des données et l'exploitation des résultats requièrent des pré- et post-processeurs performants, qui auraient, eux, demandé un travail d'implémentation considérable.
- Pour les exemples faisant l'objet de comparaisons, les temps de calcul des simulations CASTOR sont très nettement inférieurs à ceux des simulations de référence. Ce code permet donc de mener sur un ordinateur personnel des études paramétriques donnant des résultats quantitatifs précieux à l'ingénieur en un temps très raisonnable.

Les résultats très satisfaisants exposés dans ce chapitre ne doivent pas masquer deux limites du code CASTOR dans son état actuel :

- les *effets de bord* ne sont pas correctement pris en compte. On l'a constaté en calculant les efforts dans les pieux supportant la *Messeturm* (efforts ne tendant pas vers zéro à l'extrémité).
- Les *effets de flexion* dans les inclusions de renforcement sont négligés dans la formulation. Nous n'avons traité dans ce chapitre que des exemples pour lesquels ces effets sont *a priori* négligeables. Cependant, le traitement des radiers de pieux sollicités latéralement, ou des talus renforcés, nécessite la prise en compte de ces efforts.

Ces deux aspects font l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 6

Extensions du modèle multiphasique

Le modèle multiphasique a été exploité jusqu'ici dans sa version adhérente, d'abord analytiquement puis numériquement.

Dans la première partie de ce chapitre, on revient sur le modèle général qui permet des cinématiques différentes pour chaque phase. On s'intéresse en particulier à la signification et à la détermination de la loi de comportement d'interaction qui relie la densité d'efforts d'interaction entre phases à leur mouvement relatif.

Dans la deuxième partie, on développe un modèle multiphasique enrichi qui permet de prendre en compte les efforts de flexion dans la phase renforcement. Le milieu micropolaire de Cosserat apparaît naturellement dans la formulation.

Dans chaque cas, un exemple est traité analytiquement. Les résultats sont ensuite comparés à un calcul direct par éléments finis dans lequel la matrice et les inclusions sont discrétisées séparément.

Sommaire

1	Prise en compte des effets d'échelle par le modèle multiphasique général	245
1.1	Introduction	245
1.2	Modélisation des effets d'échelle	245
1.2.1	Principe de la détermination de c_I	245
1.2.2	Cas du renforcement par nappes	247
1.2.3	Cas du renforcement par inclusions linéaires	248
1.2.4	Interprétation	249
1.3	Validation : compression d'un multicouche en déformation plane (de Buhhan et Sudret, 1999d)	250
1.3.1	Position du problème	250
1.3.2	Modélisation directe par éléments finis	250
1.3.3	Modélisation multiphasique	251
1.3.4	Confrontation des résultats	253
1.4	Conclusion	254
2	Modèle multiphasique avec flexion	256
2.1	Introduction	256
2.2	Equations d'équilibre	256
2.2.1	Description géométrique	256
2.2.2	Mouvements virtuels	256
2.2.3	Postulat des expressions des puissances virtuelles	257
2.2.3.1	Efforts intérieurs	257
2.2.3.2	Efforts extérieurs	258
2.2.4	Mise en œuvre du principe des puissances virtuelles	258
2.2.4.1	Premier énoncé	258
2.2.4.2	Second énoncé	260
2.2.5	Interprétation mécanique - lien avec l'échelle microscopique	261
2.3	Loi de comportement élastique	262
2.3.1	Variables de déformation	262
2.3.2	Comportement élastique	263
2.3.3	Récapitulatif et généralisation	266
2.4	Exemple d'application	267
2.4.1	Position du problème	267
2.4.2	Solution en déplacement	268
2.4.3	Réaction du support et module de cisaillement apparent	270
2.5	Validation du modèle adhérent avec flexion	271
2.5.1	Modélisation directe par éléments finis	271

2.5.2	Modélisation multiphasique	272
2.5.3	Comparaisons des approches	273
2.5.4	Interprétation	274
3	Conclusion	277

1 Prise en compte des effets d'échelle par le modèle multiphasique général

1.1 Introduction

Dans la méthode classique d'homogénéisation, l'*unique* champ de déplacement macroscopique correspond à la moyenne sur un volume élémentaire représentatif (VER), du champ de déplacement microscopique. Dans le modèle multiphasique *général* présenté au chapitre 2, chaque phase a une cinématique propre. Le champ de déplacement de la phase $\{j = m, r\}$ s'interprète ainsi comme la moyenne du champ de déplacement microscopique, sur le *volume* \mathcal{A}^j occupé par le matériau j dans le VER.

On rappelle que le modèle général conduit à des équations d'équilibre *par phase*, qui sont couplées par l'intermédiaire de *densités d'efforts d'interaction* \underline{I}^r (voir Eq.(2.29) page 53). Se limitant au cas biphasique, et à un comportement linéaire de l'interface, on a montré que l'interaction \underline{I} est linéaire en fonction du déplacement relatif entre les phases (voir Eqs.(2.58) page 60).

Dans le cas quasi-statique, en l'absence de forces de volume, l'équation d'équilibre de la phase renforcement impose que \underline{I} soit colinéaire à la direction de renforcement \underline{e}_r (Eq.(2.29-b)). En ne considérant que le déplacement relatif dans cette direction pour exprimer le comportement, on aboutit à la forme simplifiée :

$$(6.1) \quad \underline{I} = c_I [(\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \cdot \underline{e}_r] \underline{e}_r$$

Pour résumer, dans les cas qui nous préoccupent, l'identification de la loi de comportement d'interaction se limite à la détermination d'un seul *coefficient d'interaction* c_I . Comme on l'a vu dans les deux applications du chapitre 3, ce paramètre est lié à un *effet d'échelle*.

L'objectif de cette section est d'une part de donner une estimation de ce paramètre en fonction de la structure à l'échelle microscopique du matériau renforcé, d'autre part de *valider* le modèle général en le comparant sur un exemple à une approche « directe », en l'occurrence un calcul aux éléments finis pour lequel la matrice et les inclusions sont discrétisées séparément.

1.2 Modélisation des effets d'échelle

1.2.1 Principe de la détermination de c_I

La densité d'interaction \underline{I} désigne par définition la résultante, par unité de volume, des efforts appliqués à la phase matrice par la phase renforcement. Revenant à une description à l'échelle microscopique du matériau renforcé, il est clair que le siège de ces efforts est localisé à l'*interface* inclusion/matrice. Dans le cas où $\underline{I} = I \underline{e}_r$ est orienté dans la direction de renforcement, cette densité s'interprète plus précisément comme la résultante par unité de volume des efforts de cisaillement d'interface.

Dès lors, la détermination pour un problème donné du paramètre c_I peut s'effectuer en résolvant le problème d'*arrachement* suivant :

- On choisit une cellule de base représentative de la périodicité du renforcement (figure 6.1), de volume V_{VER} .

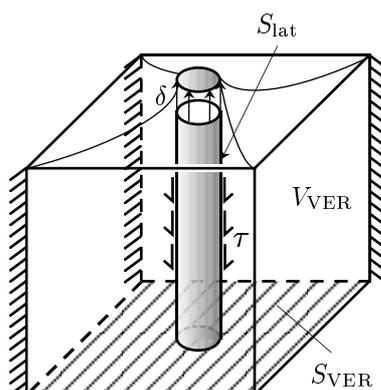


FIG. 6.1: Problème d'arrachement de l'inclusion dans une cellule de base

- La surface latérale de la cellule étant supposée fixe, on impose à l'inclusion un déplacement *longitudinal*¹ δ . Les surfaces inférieure et supérieure sont libres de contraintes. On calcule le déplacement longitudinal moyen δ^m induit dans la matrice, ainsi que la résultante des efforts de cisaillement τ à l'interface inclusion/matrice.
- On identifie l'expression des efforts volumiques d'interaction aux deux échelles de description :

$$(6.2) \quad I = c_I (\delta - \delta^m) = \frac{\int_{S_{\text{lat}}} \tau dS}{V_{\text{VER}}}$$

d'où l'on tire le paramètre c_I .

Le calcul que l'on vient de présenter peut être effectué numériquement par éléments finis. Cependant, il est possible d'obtenir une *estimation* analytique de c_I en introduisant des hypothèses simplificatrices supplémentaires.

- Dans les cas courants, le matériau constitutif de l'inclusion est beaucoup plus raide que celui de la matrice. On peut en première approximation le considérer comme parfaitement rigide. Le problème précédent se réduit à imposer un déplacement uniforme δ sur la surface S_{lat} , et à déterminer sur le volume \mathcal{A}^m de la cellule sans l'inclusion (voir figure 2.10 page 84) le champ de déplacement, dont on déduit les déformations et par suite le cisaillement d'interface.

1. C'est à dire parallèle à la direction de renforcement.

- Dans le cas d'un renforcement par nappes, le problème précédent se résout analytiquement. Dans le cas d'un renforcement par fibres de section circulaire de rayon d , on peut étudier un modèle simplifié axisymétrique, dans lequel la géométrie de la cellule a été remplacée par un cylindre de surface de base égale, c'est à dire de rayon $s = \sqrt{S_{\text{VER}}/\pi}$. Ces deux cas particuliers sont développés ci-après.

1.2.2 Cas du renforcement par nappes

Le problème à résoudre sur la cellule de base est schématisé sur la figure 6.2.

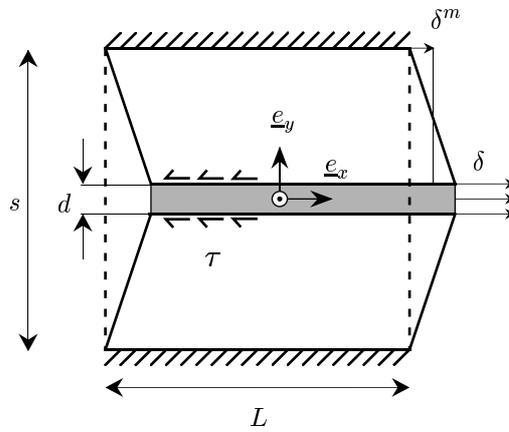


FIG. 6.2: Problème d'arrachement simplifié - renforcement par nappes

Se plaçant en déformation plane, la cellule de longueur L , de hauteur s est encadrée sur ses faces inférieure et supérieure, et soumise à un déplacement horizontal δ le long de l'inclusion d'épaisseur t située dans sa partie centrale. La longueur L est prise suffisamment grande devant s pour pouvoir négliger les « effets d'extrémité ». La matrice est donc sollicitée en cisaillement simple (on note μ le module de cisaillement). Dans le repère $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ choisi, les conditions aux limites s'explicitent sous la forme :

$$(6.3\text{-a}) \quad \underline{\xi}(x, y = \pm \frac{t}{2}) = \delta \underline{e}_x$$

$$(6.3\text{-b}) \quad \underline{\xi}(x, y = \pm \frac{s}{2}) = \underline{0}$$

Le champ de déplacement solution est alors trivialement de la forme :

$$(6.4) \quad \underline{\xi}(x, y) = \delta \frac{s - 2y}{s - t} \underline{e}_x$$

pour $y \geq t/2$, et obtenu par symétrie pour $y \leq -t/2$. On en tire le cisaillement constant à l'interface :

$$(6.5) \quad \tau = \frac{2\mu\delta}{s - t}$$

Par ailleurs, la moyenne de la composante horizontale du déplacement vaut $\delta^m = \delta/2$. L'explicitation de (6.2) donne, en introduisant la fraction volumique de renforcement $\eta^r = t/s$:

$$(6.6) \quad c_I = \frac{8\mu}{s^2(1-\eta^r)}$$

1.2.3 Cas du renforcement par inclusions linéaires

Le problème d'arrachement se ramène sous les hypothèses énoncées précédemment à la détermination du champ de déplacement dans un cylindre creux, de rayon intérieur a et extérieur b , fixe à l'extérieur, soumis sur sa face intérieure à un déplacement longitudinal δ (figure 6.3). C'est le pendant axisymétrique du problème traité au paragraphe précédent, avec $L \gg b$.

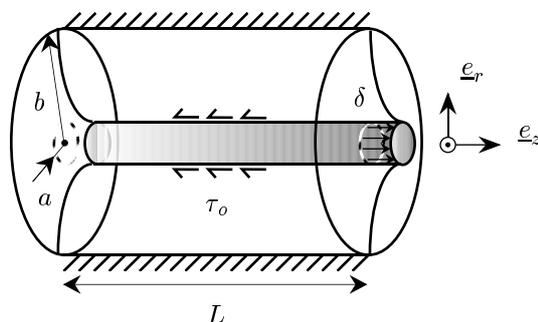


FIG. 6.3: Problème d'arrachement simplifié - renforcement par fibres cylindriques

L'écriture de l'équilibre selon \underline{e}_z d'une couronne comprise entre les rayons a et r donne pour le cisaillement $\tau \equiv -\sigma_{rz}$:

$$(6.7) \quad \tau(r) = \tau_o \frac{a}{r}$$

où τ_o est la valeur du cisaillement à l'interface inclusion/matrice. Intégrant l'équation cinématique :

$$(6.8) \quad \tau(r) = -2\mu \varepsilon_{rz} = -\mu \frac{\partial \xi_z}{\partial r}$$

avec la condition à la limite $\xi_z(r=b) = 0$, il vient :

$$(6.9) \quad \xi_z(r) = a \frac{\tau_o}{\mu} \ln \frac{b}{r}$$

On détermine finalement τ_o en imposant $\xi_z(r=a) = \delta$, soit :

$$(6.10-a) \quad \xi_z(r) = \delta \frac{\ln r/b}{\ln a/b}$$

$$(6.10-b) \quad \tau_o = \mu \frac{\delta}{a \ln b/a}$$

Le déplacement longitudinal moyen de la matrice vaut alors :

$$(6.11) \quad \delta^m = \langle \xi_z \rangle = \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b 2\pi r \xi_z(r) dr$$

Introduisant la fraction volumique $\eta^r = a^2/b^2$, on obtient tous calculs faits :

$$(6.12) \quad \delta^m = \delta \frac{\eta^r \ln \eta^r + 1 - \eta^r}{(\eta^r - 1) \ln \eta^r}$$

L'explicitation de (6.2) donne finalement :

$$(6.13) \quad c_I = \frac{4\mu}{b^2 \left(\frac{\ln \eta^r}{\eta^r - 1} - 1 \right)}$$

1.2.4 Interprétation

On peut remarquer la similitude des expressions (6.6) et (6.13), qui dépendent toutes les deux du module de cisaillement de la phase matrice, de la fraction volumique de renforcement et d'une longueur caractéristique de la taille de la cellule de base (s ou b), qui est également la distance entre deux inclusions voisines.

Lorsque cette longueur caractéristique, c'est à dire la taille de la cellule de base, tend vers 0, le paramètre d'interaction c_I tend vers l'infini. On retrouve alors le modèle multiphasique *adhérent*, puisque le caractère fini de la densité d'efforts d'interaction \underline{I} impose que le déplacement relatif entre les phases soit nul.

On peut donc tirer les deux conclusions suivantes :

- Le paramètre d'interaction c_I permet de rendre compte d'un *effet d'échelle* dans la structure. A fraction volumique de renforcement constante, c_I est d'autant plus grand que la cellule de base est de faible section et permet donc de distinguer le cas « peu d'inclusions de forte section » du cas « beaucoup d'inclusions de faible section ».
- Le modèle adhérent correspond au cas limite où la *taille de la cellule de base* tend vers 0, ou de façon équivalente, au cas où l'ouvrage comporte un grand nombre d'inclusions. Le modèle général permet réciproquement de traiter correctement les problèmes pour lesquels le nombre d'inclusions n'est pas si important. En ce sens, le paramètre c_I permet de prendre en compte la morphologie de la microstructure de façon plus détaillée que la seule fraction volumique η^r .
- Comme on l'a vu au chapitre 2, section 4, l'approche par homogénéisation conduit au formalisme du modèle multiphasique *adhérent* dans le cas où la fraction volumique de renforcement tend vers 0. Ces deux derniers résultats sont parfaitement compatibles si l'on se rappelle que l'homogénéisation correspond également au cas limite où la taille de la cellule de base tend vers zéro. Lorsque cette hypothèse n'est pas respectée, les résultats d'homogénéisation ne sont pas pertinents alors que le modèle multiphasique général reste applicable à condition de choisir correctement la constante c_I .

1.3 Validation : compression d'un multicouche en déformation plane (de Buhhan et Sudret, 1999d)

Pour valider le calcul de c_I et les conclusions de la section précédente, on confronte ici l'approche multiphasique générale à un calcul direct aux éléments finis.

On reprend le problème de la *compression en déformation plane* traité analytiquement au chapitre 3, section 3.

1.3.1 Position du problème

Soit \mathcal{S} une éprouvette de forme rectangulaire de hauteur $H = 1$, de largeur $2L = 1$, constituée d'un matériau multicouche. Soit $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ le plan de déformation, $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_z)$ le plan des couches. Compte tenu de la périodicité de la structure, on peut isoler une cellule de base *bicouche* représentative de l'ensemble de la structure. On appelle N le nombre de telles cellules constituant \mathcal{S} (figure 6.4).

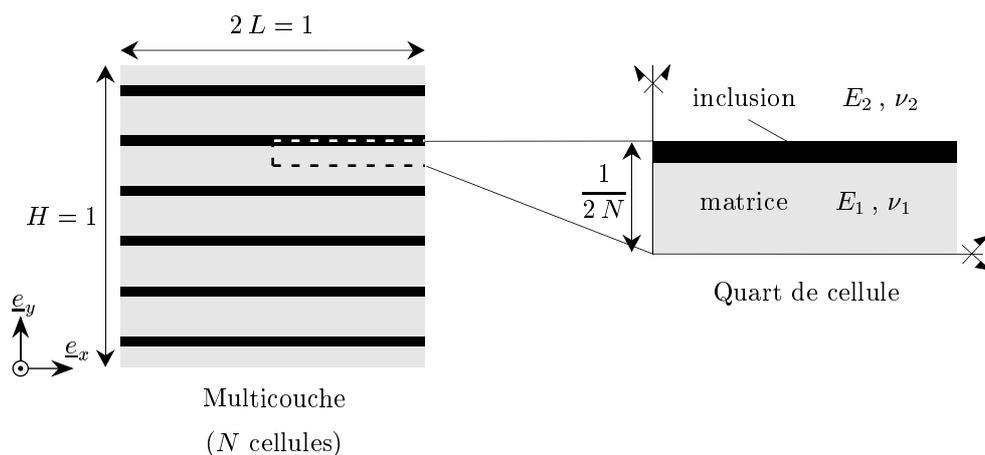


FIG. 6.4: Compression d'un multicouche en déformation plane - Cellule représentative

Le multicouche est soumis à un déplacement vertical δ sur sa face supérieure par l'intermédiaire d'un plateau lisse. Les propriétés élastiques des deux matériaux constitutifs sont résumées dans le tableau 6.1.

1.3.2 Modélisation directe par éléments finis

La réponse de l'éprouvette peut être entièrement déduite de celle de la cellule de base bicouche. Prenant en compte la double symétrie de celle-ci, on n'en modélise qu'un quart (figure 6.4). Pour une structure comprenant N cellules, le domaine maillé est donc un rectangle de taille $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2N}$. Il comprend 10 lignes de 80 éléments quadratiques rectangulaires Q9. Le code de calcul utilisé est CASTOR dans sa version monophasique. Les calculs sont menés pour les

	Matrice	Renforcement
Fraction volumique	$1 - \eta^r = 90\%$	$\eta^r = 10\%$
Module d'Young	$E_1 = 10 \text{ MPa}$	$E_2 = 1\,000 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu_1 = 0,45$	$\nu_2 = 0,3$

TAB. 6.1: *Compression d'un multicouche en déformation plane - Caractéristiques des matériaux pour le calcul direct.*

valeurs $N = 4, 8, 16$ et 32 , ce qui donne pour chaque élément un ratio hauteur/largeur variant de 2 à $1/4$.

Les conditions aux limites sont explicitées de la façon suivante :

- le déplacement horizontal est nul sur l'axe de symétrie vertical (face gauche du maillage),
- le déplacement vertical est nul sur l'axe de symétrie horizontal (face inférieure du maillage),
- le déplacement vertical vaut $\frac{\delta}{2N}$ sur la face supérieure du maillage, le déplacement horizontal étant libre.

Le calcul par éléments finis donne le vecteur des déplacements nodaux ainsi que les déformations et contraintes au centre de chaque élément. Pour pouvoir comparer ces résultats à l'approche multiphasique, on procède de la façon suivante (voir figure 6.5) :

- Considérant une ligne de nœuds verticale située à l'abscisse x , on calcule la moyenne des déplacements horizontaux dans la matrice et dans l'inclusion, soit $m^{\text{EF}}(x)$ et $r^{\text{EF}}(x)$.
- Considérant une colonne d'éléments rectangulaires dont le centre est situé à l'abscisse x , on calcule de même la contrainte σ_{xx} moyenne dans chaque phase, qui, pondérée par les fractions volumiques, donne respectivement $\sigma^{m,\text{EF}}(x)$ et $\sigma^{r,\text{EF}}(x)$.

1.3.3 Modélisation multiphasique

Pour utiliser la solution analytique développée au chapitre 3, section 3, il est nécessaire d'identifier les paramètres du modèle multiphasique.

On rappelle tout d'abord les formules essentielles de la solution analytique pour le déplacement horizontal de la phase matrice $m(x)$, de la phase renforcement $r(x)$ et pour la contrainte dans la phase renforcement $\sigma^r(x)$. λ et μ désignant les constantes de Lamé de la phase matrice, a^r la

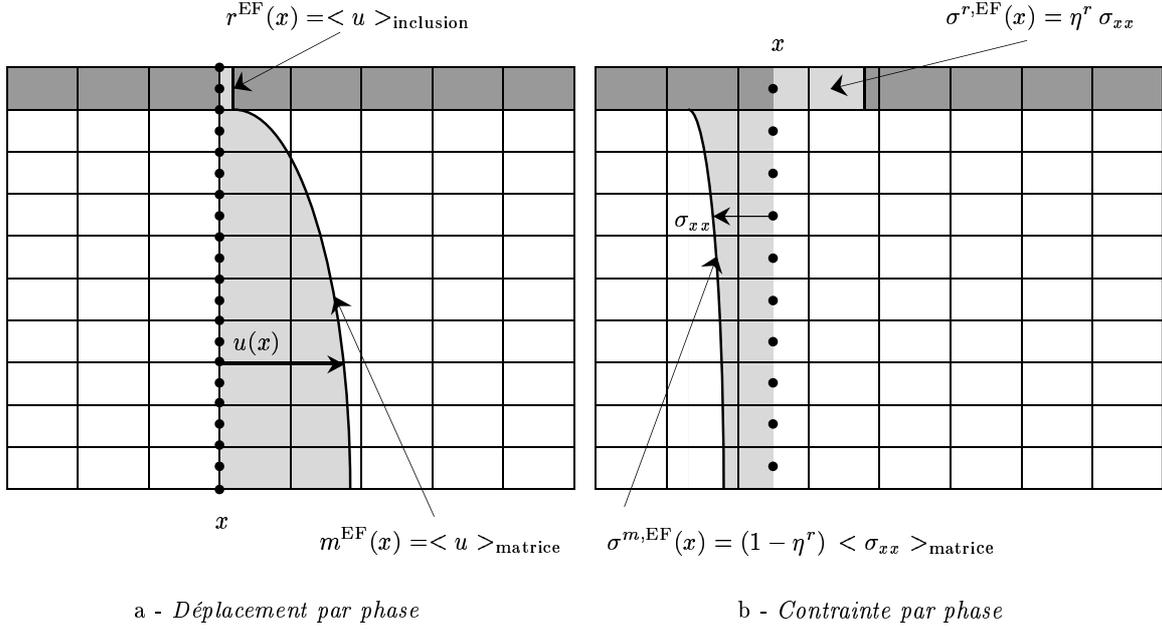


FIG. 6.5: Compression d'un multicouche en déformation plane - Exploitation du calcul direct aux éléments finis

raideur de la phase renforcement, c_I le paramètre d'interaction, ℓ une longueur caractéristique définie par :

$$(6.14) \quad \ell = \sqrt{\frac{a^r (\lambda + 2\mu)}{c_I (\lambda + 2\mu + a^r)}}$$

et ϖ le paramètre adimensionnel vérifiant :

$$(6.15) \quad \varpi = \frac{L}{\ell}$$

on a :

$$(6.16-a) \quad m(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H} \left\{ x + \ell \frac{a^r}{\lambda + 2\mu} \frac{\sinh \varpi x/L}{\cosh \varpi} \right\}$$

$$(6.16-b) \quad r(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H} \left\{ x - \ell \frac{\sinh \varpi x/L}{\cosh \varpi} \right\}$$

$$(6.16-c) \quad \sigma^r(x) = a^r \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu + a^r} \frac{\delta}{H} \left[1 - \frac{\cosh \varpi x/L}{\cosh \varpi} \right]$$

Ces paramètres sont déterminés de la façon suivante :

- On choisit pour la *phase matrice* ceux du matériau constitutif de la matrice, soit $E^m = E_1 = 10$ MPa, $\nu^m = \nu_1 = 0,45$. Les coefficients de Lamé correspondant valent alors :

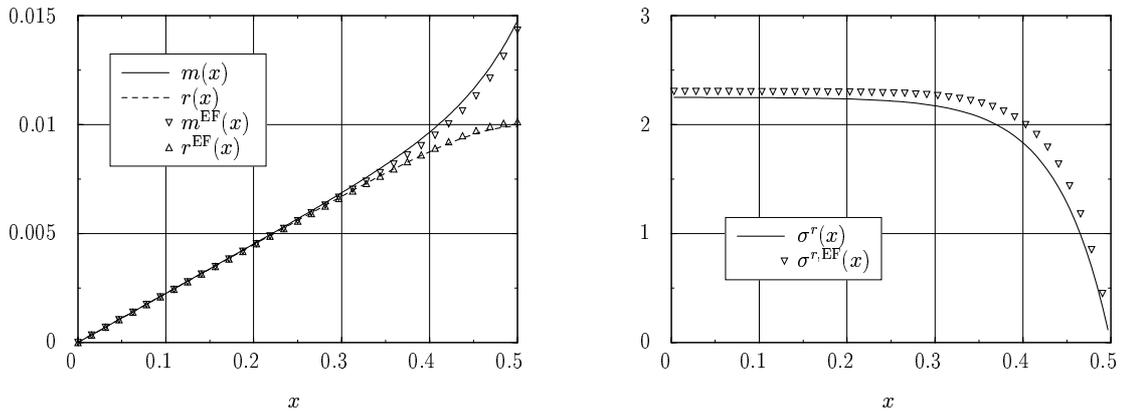
$$(6.17-a) \quad \lambda = \frac{\nu^m E^m}{(1 + \nu^m)(1 - 2\nu^m)} = 31,03 \text{ MPa}$$

$$(6.17-b) \quad \mu = \frac{E^m}{2(1 + \nu^m)} = 3,45 \text{ MPa}$$

- La raideur de la phase renforcement est obtenue en multipliant le module d'Young du matériau par la fraction volumique, soit $a^r = 100$ MPa.
- La hauteur de la cellule de base vaut ici $s = 1/N$. D'après (6.6), le paramètre d'interaction vaut donc $c_I = 30,65 N^2$ (MPa).
- La longueur caractéristique donnée par (6.14) vaut alors $\ell = 0,947 s = 0,947/N$ (m).

1.3.4 Confrontation des résultats

On représente sur la figure 6.6 les courbes de déplacement horizontal et de contrainte dans la phase renforcement. La solution multiphasique est figurée en trait continu, et on superpose les points de calcul par éléments finis.



a - Déplacement horizontal

b - Contrainte dans la phase renforcement

FIG. 6.6: Compression d'un multicouche en déformation plane - Comparaison des approches avec l'estimation (6.6) de c_I (calcul pour $N=16$ cellules)

Les résultats analytiques de l'approche multiphasique apparaissent en très bon accord avec les calculs par éléments finis. Les écarts relatifs maximaux par rapport au calcul direct valent 4% pour les déplacements et 10% pour la contrainte.

On peut remarquer que la courbe de déplacement $m(x)$ a la même allure globale que son homologue obtenue par éléments finis, même si elle s'en écarte légèrement près du bord de l'éprouvette. Comme on l'a vu au chapitre 3 (voir figure 3.9), c'est le paramètre c_I qui pilote l'écart entre cette courbe et la droite qui lui est tangente à l'origine.

Par ailleurs, notre estimation de c_I a été obtenue avec un modèle très simple. Cela nous amène à penser qu'une autre estimation de c_I pourrait encore améliorer les résultats du modèle multiphasique. On propose de caler ce paramètre de sorte que le déplacement horizontal relatif entre les deux phases au bord de l'éprouvette ($x = L$) soit exactement celui donné par le calcul

aux éléments finis. D'après (6.16-a,b), cette condition donne l'équation en ℓ suivante :

$$(6.18) \quad m^{\text{EF}}(L) - r^{\text{EF}}(L) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\delta}{H} \ell \tanh \frac{L}{\ell}$$

Cette équation peut être résolue numériquement. Le tableau 6.2 donne les valeurs obtenues en fonction du nombre N de cellules dans la structure, ainsi que l'estimation (6.6) correspondante.

Nombre de cellules N	Estimation (6.18) (m)	Estimation (6.6) (m)	Ecart relatif (%)
4	0,2066	0,2368	14,6
8	0,1028	0,1184	15,1
16	0,0512	0,0592	15,6
32	0,0255	0,0296	16,0

TAB. 6.2: Compression d'un multicouche en déformation plane - Longueur caractéristique

L'écart entre les deux estimations est constant quel que soit le nombre de cellules, ce qui signifie en particulier que l'estimation (6.18) est également proportionnelle à $1/N$.

On représente sur la figure 6.7 les courbes de déplacement horizontal pour différents N . La solution multiphasique, pour laquelle ℓ est évalué par (6.18) est figurée en trait continu, et on superpose les points de calcul par éléments finis.

Comme on l'avait pressenti, les courbes sont maintenant presque parfaitement superposées. Notre estimation par un modèle simple d'arrachement d'inclusion de la cellule de base considérée encastrée sur le bord est donc sans doute perfectible. Les contraintes obtenues par ailleurs par la loi de comportement sont également très proches de celles données par le calcul aux éléments finis. Il est remarquable enfin de constater que les contraintes déduites du calcul aux éléments finis vérifient rigoureusement $\sigma^{m,\text{EF}}(x) + \sigma^{r,\text{EF}}(x) = 0$.

1.4 Conclusion

On a montré dans cette section que le modèle multiphasique *général* qui permet des cinématiques différentes pour chaque phase, rend compte d'effets d'échelle dans le comportement d'une structure renforcée. La taille caractéristique de l'hétérogénéité (ici une des dimensions de la cellule de base) peut être prise en compte par l'intermédiaire du *paramètre d'interaction* c_I , qui définit le couplage entre le mouvement des phases.

Par un raisonnement simple d'*arrachement* d'une inclusion *rigide* dans une cellule de base, on peut donner une estimation de ce paramètre. Celle-ci a été utilisée pour modéliser la compression en déformation plane d'un multicouche, et la comparaison des résultats par rapport à une approche directe est probante.

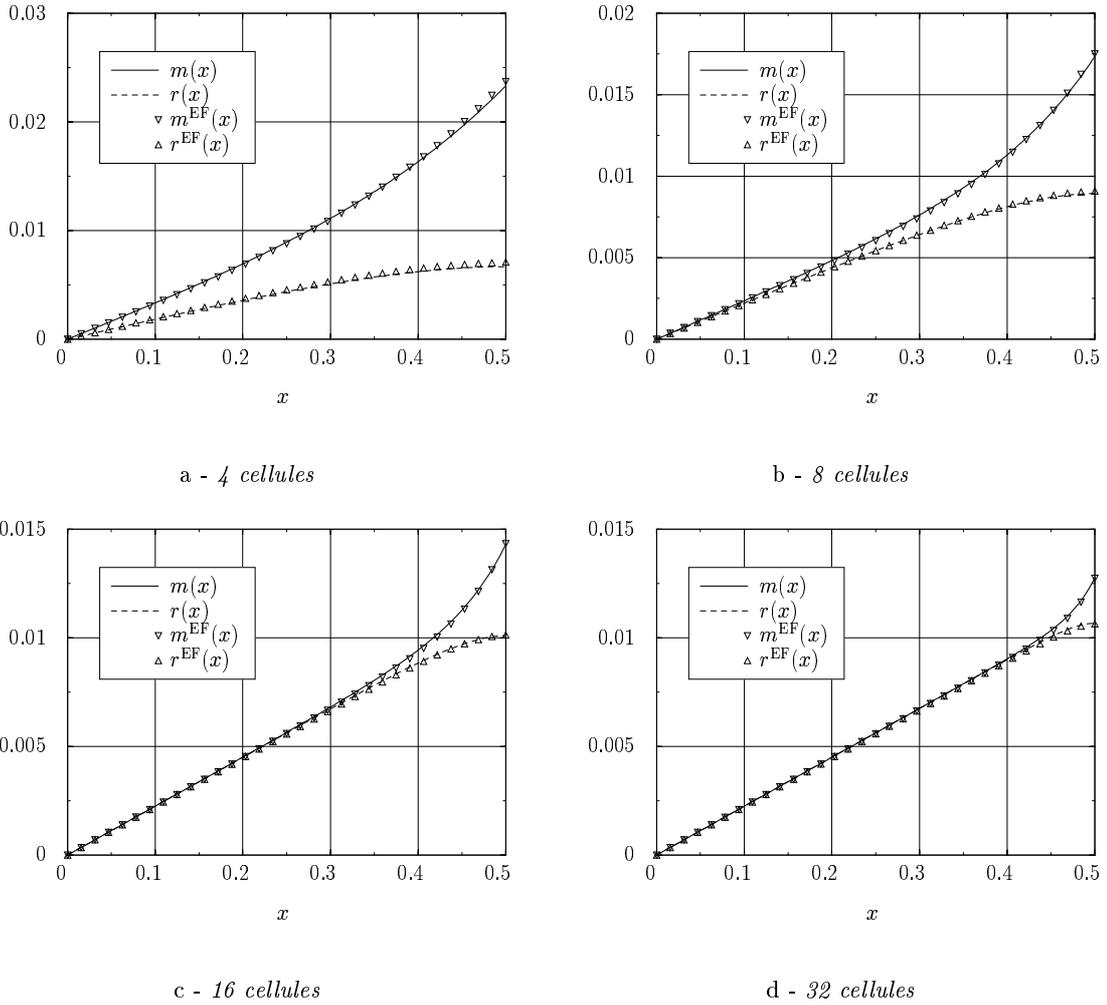


FIG. 6.7: Compression d'un multicouche en déformation plane - Comparaison des approches après calage du paramètre c_I sur le déplacement relatif des phases au bord de l'éprouvette

Par ailleurs, sur le même problème, on a montré que de meilleures estimations de c_I étaient possibles, qui conduisent à une solution multiphasique quasiment identique à la solution « exacte ». Le développement de modèles micromécaniques plus élaborés pour calculer c_I est donc nécessaire.

2 Modèle multiphasique avec flexion (de Buhan et Sudret, 1999a,b)

2.1 Introduction

Le modèle multiphasique de matériau renforcé développé au chapitre 2 repose sur l'hypothèse que les inclusions de renforcement sont *souples*, c'est à dire qu'elles ne supportent que des efforts de traction-compression.

Dans certains ouvrages, cette hypothèse peut ne pas être acceptable. Citons deux exemples : dans un talus en sol cloué, on observe des ruptures d'armatures par effort tranchant. Dans les fondations mixtes, les efforts latéraux (choc horizontal sur les superstructures, séisme, etc...) sollicitent les renforcements (en l'occurrence des pieux verticaux) en flexion.

L'objet de cette section est de présenter une extension du modèle multiphasique prenant en compte la capacité de flexion des inclusions. Comme au chapitre 2, le modèle est construit par la méthode des puissances virtuelles. On reprend les notations de la section 1 dudit chapitre, en les enrichissant au fur et à mesure des besoins.

2.2 Equations d'équilibre

2.2.1 Description géométrique

Soit \mathcal{S} un système mécanique constitué d'un matériau renforcé par inclusions linéaires *raides*, c'est à dire susceptibles de supporter simultanément des efforts de traction et de flexion, occupant un volume géométrique Ω . On suppose que les inclusions sont disposées périodiquement, et orientées parallèlement à une direction unique repérée par le vecteur unitaire \underline{e}_r ².

Reprenant la description du chapitre 2, on attache à chaque point matériel \underline{x} une particule de matrice et une particule de renforcement. On retrouve naturellement les concepts de *phase*, sous-système *monophasique* \mathcal{S}^j et sous-système *multiphasique* \mathcal{S}^l (en l'occurrence *biphasique*).

2.2.2 Mouvements virtuels

Dans la théorie classique des poutres, les effets de flexion sont liés à l'existence d'une microstructure, la *section* de la poutre, possédant un degré de liberté en rotation. Pour rendre compte de la flexion dans la phase renforcement, on introduit ici par analogie les *mouvements virtuels* du milieu sous la forme :

$$(6.19) \quad \hat{\mathbf{U}}(\underline{x}) = \left\{ \hat{\mathbf{U}}^m(\underline{x}) ; \hat{\mathbf{U}}^r(\underline{x}), \hat{\mathbf{\Omega}}^r(\underline{x}) \right\}, \quad \underline{x} \in \Omega$$

où $\hat{\mathbf{U}}^m$ désigne le champ de vitesse virtuelle de la phase matrice, $\hat{\mathbf{U}}^r$ (resp. $\hat{\mathbf{\Omega}}^r$) le champ de vitesse (resp. de rotation³) virtuelle de la phase renforcement (Figure 6.8).

2. La généralisation à N directions est abordée ci-après.

3. Il n'y a donc pas de confusion possible avec le symbole Ω désignant le volume du système.

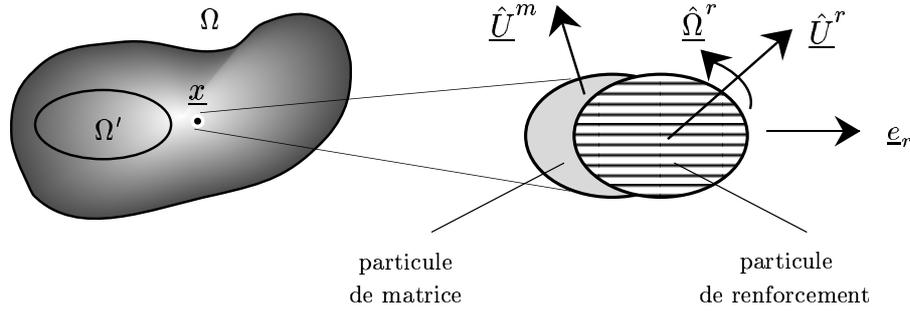


FIG. 6.8: Description géométrique du milieu multiphasique avec flexion

Les champs sont supposés indépendants, continus et continûment différentiables. On note \mathcal{U} l'espace vectoriel des mouvements virtuels $\hat{\mathcal{U}}$. Il contient le sous-espace des mouvements virtuels rigidifiant les sous-systèmes monophasiques et multiphasiques.

2.2.3 Postulat des expressions des puissances virtuelles

2.2.3.1 Efforts intérieurs On fait l'hypothèse que la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'obtient par intégration d'une densité volumique contenant des termes associés à chacune des phases et de termes d'interaction.

La phase matrice est modélisée comme un milieu continu classique, pour lequel on retient la forme (2.16) introduite au chapitre 2⁴:

$$(6.20) \quad p_{(i)}^m(\hat{\mathcal{U}}^m) = - \left(\underline{A}^m \cdot \hat{\mathcal{U}}^m + \underline{B}^m : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\mathcal{U}}^m \right)$$

Compte tenu de l'orientation privilégiée des inclusions, on postule que la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs dépend *linéairement* des *champs de vitesse et de rotation virtuelle*, ainsi que de leur *dérivée le long de la direction de renforcement* \underline{e}_r :

$$(6.21) \quad p_{(i)}^r(\hat{\mathcal{U}}^r, \hat{\mathcal{Q}}^r) = - \left(\underline{A}^r \cdot \hat{\mathcal{U}}^r + \underline{X}^r \cdot \frac{d\hat{\mathcal{U}}^r}{ds^r} + \underline{B}^r \cdot \hat{\mathcal{Q}}^r + \underline{\Gamma}^r \cdot \frac{d\hat{\mathcal{Q}}^r}{ds^r} \right)$$

Exprimant les dérivées selon \underline{e}_r en fonction du gradient :

$$(6.22) \quad \frac{d\underline{\chi}}{ds^r} = \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\chi} \cdot \underline{e}_r$$

on peut mettre (6.21) sous la forme :

$$(6.23) \quad p_{(i)}^r(\hat{\mathcal{U}}^r, \hat{\mathcal{Q}}^r) = - \left(\underline{A}^r \cdot \hat{\mathcal{U}}^r + (\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\mathcal{U}}^r + \underline{B}^r \cdot \hat{\mathcal{Q}}^r + (\underline{e}_r \otimes \underline{\Gamma}^r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\mathcal{Q}}^r \right)$$

Considérant comme ponctuelle l'interaction résultant de la superposition en chaque point de deux particules, on introduit la densité de puissance virtuelle associée sous la forme :

$$(6.24) \quad p_{(i)}^I(\hat{\mathcal{U}}^m, \hat{\mathcal{U}}^r, \hat{\mathcal{Q}}^r) = - \left(\underline{I}^m \cdot \hat{\mathcal{U}}^m + \underline{I}^r \cdot \hat{\mathcal{U}}^r + \underline{J}^r \cdot \hat{\mathcal{Q}}^r \right)$$

4. On omet la dépendance en \underline{x} pour alléger les notations.

Avec ces notations, la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un sous-système monophasique \mathcal{S}^j , $\{j = m, r\}$ s'obtient simplement par intégration de la densité correspondante :

$$(6.25) \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} p'^j_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) d\Omega' \quad , \quad j = m, r$$

Pour un sous-système biphasique, on doit sommer les contributions de chaque phase et de l'interaction, soit :

$$(6.26) \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} \left[p'^m_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}^m) + p'^r_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}^r, \hat{\mathbf{Q}}^r) + p'^I_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}^m, \hat{\mathbf{U}}^r, \hat{\mathbf{Q}}^r) \right] d\Omega'$$

2.2.3.2 Efforts extérieurs Pour tout sous-système biphasique \mathcal{S}^j occupant un volume géométrique Ω' , les efforts extérieurs pris en compte sont :

- des forces de volume $\rho^j \underline{\mathbf{F}}^j$ correspondant aux actions à distance exercées par l'extérieur du système (par exemple le poids propre),
- des efforts de surface appliqués sur $\partial\Omega'$, correspondant pour chaque phase j aux *actions de contact* exercées par les particules situées à l'extérieur de \mathcal{S}^j . On note $\underline{\mathbf{T}}_{\Omega'}^m$, $\underline{\mathbf{T}}_{\Omega'}^r$ les densités d'efforts appliqués aux différentes phases, $\underline{\mathbf{C}}_{\Omega'}^r$ la densité de couple appliqué à la phase renforcement.

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit alors :

$$(6.27) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}}) &= \int_{\mathcal{V}'} \left(\rho^m \underline{\mathbf{F}}^m \cdot \hat{\mathbf{U}}^m + \rho^r \underline{\mathbf{F}}^r \cdot \hat{\mathbf{U}}^r \right) d\Omega' \\ &+ \int_{\partial\Omega'} \left(\underline{\mathbf{T}}_{\Omega'}^m \cdot \hat{\mathbf{U}}^m + \underline{\mathbf{T}}_{\Omega'}^r \cdot \hat{\mathbf{U}}^r + \underline{\mathbf{C}}_{\Omega'}^r \cdot \hat{\mathbf{Q}}^r \right) dS' \end{aligned}$$

2.2.4 Mise en œuvre du principe des puissances virtuelles

2.2.4.1 Premier énoncé Pour tout système ou sous-système, la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans tout mouvement virtuel rigidifiant est nulle :

$$(6.28) \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.r}, \quad \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = 0$$

Considérant un sous-système \mathcal{S}^j , et un mouvement virtuel de translation $\hat{\mathbf{U}} = \{\hat{\mathbf{U}}_0, 0, 0\}$ (resp. $\hat{\mathbf{U}} = \{0, \hat{\mathbf{U}}_0, 0\}$), on obtient d'après (6.20),(6.21) :

$$(6.29) \quad \forall \hat{\mathbf{U}}_0, \quad \forall \Omega' \subset \Omega, \quad \int_{\Omega'} \underline{\mathbf{A}}^m \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 d\Omega' = \int_{\Omega'} \underline{\mathbf{A}}^r \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 d\Omega' = 0$$

Il en résulte que :

$$(6.30) \quad \underline{\mathbf{A}}^m = \underline{\mathbf{A}}^r = \underline{\mathbf{0}}$$

Considérant \mathcal{S}^{mm} et un mouvement virtuel de rotation défini par $\hat{\mathbf{U}} = \{\hat{\underline{\Omega}}_0 \wedge \underline{x}, 0, 0\}$, pour lequel $\underline{\underline{\text{grad}}}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0$ est un tenseur antisymétrique du second ordre, on obtient :

$$(6.31) \quad \forall \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \text{ antisymétrique, } \forall \Omega' \subset \Omega, \quad \int_{\Omega'} \underline{\underline{B}}^m : \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \, d\Omega' = 0$$

Cela prouve que le tenseur $\underline{\underline{B}}^m$ est symétrique, nous le rebaptisons $\underline{\underline{\sigma}}^m$. La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs pour la phase matrice se simplifie donc en :

$$(6.32) \quad p'_{(i)}(\hat{\underline{\underline{U}}}) = -\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\text{grad}}}\hat{\underline{\underline{U}}}$$

Considérant \mathcal{S}^{rr} et un mouvement virtuel rigidifiant défini par $\hat{\mathbf{U}} = \{0, \hat{\underline{\Omega}}_0 \wedge \underline{x}, \hat{\underline{\Omega}}_0\}$, on obtient en reportant (6.23) dans (6.28) :

$$(6.33) \quad \forall \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \text{ antisymétrique, } \forall \Omega' \subset \Omega, \quad \int_{\Omega'} \left[(\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 + \underline{B}^r \cdot \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \right] d\Omega' = 0$$

Utilisant la propriété suivante du produit mixte :

$$(6.34) \quad (\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 = \underline{X}^r \cdot \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \cdot \underline{e}_r = \underline{X}^r \cdot (\hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \wedge \underline{e}_r) = (\underline{e}_r \wedge \underline{X}^r) \cdot \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0$$

on obtient finalement :

$$(6.35) \quad \forall \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0, \quad \forall \Omega' \subset \Omega, \quad \int_{\Omega'} [\underline{B}^r + \underline{e}_r \wedge \underline{X}^r] \cdot \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \, d\Omega' = 0$$

d'où l'identité :

$$(6.36) \quad \underline{B}^r + \underline{e}_r \wedge \underline{X}^r = \underline{0}$$

La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs pour la phase renforcement s'écrit donc compte tenu de ces simplifications :

$$(6.37) \quad p'_{(i)}(\hat{\underline{\underline{U}}}, \hat{\underline{\underline{\Omega}}}) = - \left[(\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : \left(\underline{\underline{\text{grad}}}\hat{\underline{\underline{U}}}^r - \hat{\underline{\underline{\Omega}}}^r \right) + (\underline{e}_r \otimes \underline{\Gamma}^r) : \underline{\underline{\text{grad}}}\hat{\underline{\underline{\Omega}}}^r \right]$$

Le couple $(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$ décrit les *efforts intérieurs dans la phase renforcement*. Son interprétation mécanique est donnée ci-après.

Considérant enfin un sous-système multiphasique animé d'un mouvement virtuel rigidifiant de la forme $\hat{\mathbf{U}} = \{\hat{\underline{\underline{U}}}_0 + \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \wedge \underline{x}, \hat{\underline{\underline{U}}}_0 + \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \wedge \underline{x}, \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0\}$, on montre en calculant (6.32) et (6.37), et en les reportant dans (6.26) :

$$(6.38) \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega'} p'_{(i)}(\hat{\underline{\underline{U}}}^m, \hat{\underline{\underline{U}}}^r, \hat{\underline{\underline{\Omega}}}^r) \, d\Omega'$$

En effet, les termes associés à chaque phase s'annulent compte tenu de ce qui précède. Il vient alors, d'après (6.24) :

$$(6.39) \quad \forall (\hat{\underline{\underline{U}}}_0, \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0), \quad (\underline{I}^m + \underline{I}^r) \cdot \hat{\underline{\underline{U}}}_0 + (\underline{I}^m + \underline{I}^r) \cdot (\hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 \wedge \underline{x}) + \underline{J}^r \cdot \hat{\underline{\underline{\Omega}}}_0 = \underline{0}$$

Compte tenu de l'indépendance des champs $\hat{\underline{U}}_0$ et $\hat{\underline{\Omega}}_0$, on en déduit :

$$(6.40) \quad \underline{I}^m + \underline{I}^r = \underline{0} \quad , \quad \underline{J}^r = \underline{0}$$

Posant $\underline{I}^r = -\underline{I}^m = \underline{I}$, la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs d'interaction se réduit à :

$$(6.41) \quad p'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{I} \cdot (\hat{\underline{U}}^r - \hat{\underline{U}}^m)$$

Finalement, l'équation (6.26) prend la forme simplifiée :

$$(6.42) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = & - \int_{\Omega'} \left[\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^m \right. \\ & + (\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^r - \hat{\underline{\Omega}}^r \right) + (\underline{e}_r \otimes \underline{\Gamma}^r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{\Omega}}^r \\ & \left. + \underline{I} \cdot (\hat{\underline{U}}^r - \hat{\underline{U}}^m) \right] d\Omega' \end{aligned}$$

2.2.4.2 Second énoncé En l'absence de forces d'inertie, le principe des puissances virtuelles stipule que pour tout sous-système \mathcal{S}' et tout mouvement virtuel de \mathcal{U} , on a l'égalité :

$$(6.43) \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = 0$$

Reportant (6.27), (6.32), (6.37), (6.41) dans cette équation, il vient :

$$(6.44) \quad \begin{aligned} & \forall \hat{\underline{U}} \in \mathcal{U}, \forall \Omega' \subset \Omega, \\ & - \int_{\Omega'} \left[\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^m + (\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{U}}^r - \hat{\underline{\Omega}}^r \right) + (\underline{e}_r \otimes \underline{\Gamma}^r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \hat{\underline{\Omega}}^r \right] d\Omega' \\ & - \int_{\Omega'} \underline{I} \cdot (\hat{\underline{U}}^r - \hat{\underline{U}}^m) d\Omega' + \int_{\Omega'} \left[\rho^m \underline{F}^m \cdot \hat{\underline{U}}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \hat{\underline{U}}^r \right] d\Omega' \\ & + \int_{\partial\Omega'} \left[\underline{T}_{\Omega'}^m \cdot \hat{\underline{U}}^m + \underline{T}_{\Omega'}^r \cdot \hat{\underline{U}}^r + \underline{C}_{\Omega'}^r \cdot \hat{\underline{\Omega}}^r \right] d\mathcal{S}' = 0 \end{aligned}$$

Les champs définissant le mouvement virtuel $\hat{\underline{U}}$ étant continûment différentiables, on peut appliquer l'identité (2.26), puis le théorème de la divergence. L'équation (6.44) se réécrit alors sous la forme :

$$(6.45) \quad \begin{aligned} & \forall \hat{\underline{U}} \in \mathcal{U}, \forall \Omega' \subset \Omega, \\ & \int_{\Omega'} \left[\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m \underline{F}^m + \underline{I} \right] \cdot \hat{\underline{U}}^m d\Omega' \\ & + \int_{\Omega'} \left[\text{div} (\underline{X}^r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r \underline{F}^r - \underline{I} \right] \cdot \hat{\underline{U}}^r d\Omega' \\ & + \int_{\Omega'} \left[\text{div} (\underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_r) + \underline{e}_r \wedge \underline{X}^r \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}}^r d\Omega' \\ & + \int_{\partial\Omega'} \left\{ \left[\underline{T}_{\Omega'}^m - \underline{\underline{\sigma}}^m \cdot \underline{n} \right] \cdot \hat{\underline{U}}^m + \left[\underline{T}_{\Omega'}^r - (\underline{X}^r \otimes \underline{e}_r) \cdot \underline{n} \right] \cdot \hat{\underline{U}}^r \right. \\ & \left. + \left[\underline{C}_{\Omega'}^r - (\underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_r) \cdot \underline{n} \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}}^r \right\} d\Omega' = 0 \end{aligned}$$

où \underline{n} désigne la normale extérieure à $\partial\Omega'$ au point courant.

Utilisant un argument classique (voir chapitre 2, page 52), on déduit successivement les **équations d'équilibre du modèle multiphasique avec flexion** :

$$(6.46-a) \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m \underline{F}^m + \underline{I} = \underline{0}$$

$$(6.46-b) \quad \operatorname{div} (\underline{X}^r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r \underline{F}^r - \underline{I} = \underline{0}$$

$$(6.46-c) \quad \operatorname{div} (\underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_r) + \underline{e}_r \wedge \underline{X}^r = \underline{0}$$

et les **conditions aux limites** :

$$(6.47-a) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m \cdot \underline{n} = \underline{T}_{\Omega'}^m = \underline{T}^m(\underline{n})$$

$$(6.47-b) \quad \underline{X}^r \cdot (\underline{e}_r \cdot \underline{n}) = \underline{T}_{\Omega'}^r = \underline{T}^r(\underline{n})$$

$$(6.47-c) \quad \underline{\Gamma}^r \cdot (\underline{e}_r \cdot \underline{n}) = \underline{C}_{\Omega'}^r = \underline{C}^r(\underline{n})$$

2.2.5 Interprétation mécanique - lien avec l'échelle microscopique

L'équation (6.46-a) décrit l'équilibre de la phase matrice. Elle s'apparente à celle obtenue pour un milieu continu de Cauchy. Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^m$ désigne les *contraintes partielles* dans la phase matrice. Le vecteur contrainte appliqué sur la frontière $\partial\Omega'$ est donné classiquement par (6.47-a) et ne dépend que de la normale au point considéré et pas du sous-système.

Comme dans le modèle multiphasique sans flexion, les efforts d'interaction apparaissent dans l'équilibre sous la forme de forces volumiques, traduisant l'action de la phase renforcement sur la phase matrice.

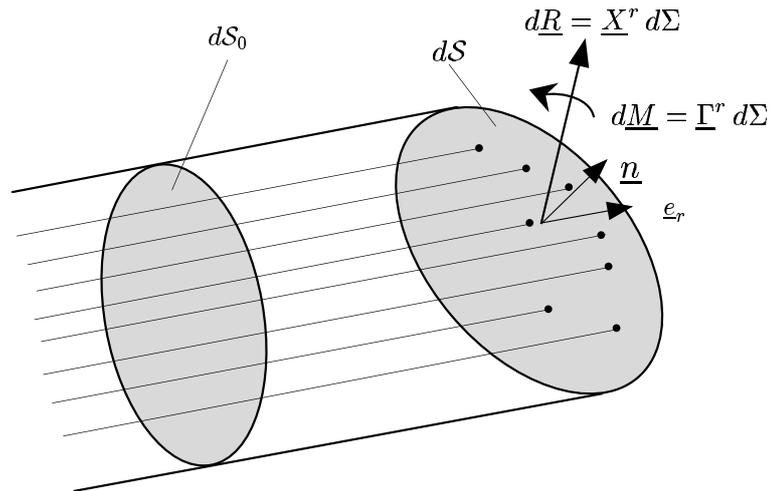


FIG. 6.9: *Interprétation des efforts intérieurs dans la phase renforcement - modèle multiphasique avec flexion*

Les efforts intérieurs dans la phase renforcement sont décrits par le couple $(\underline{X}^r, \underline{\Gamma}^r)$. Pour comprendre la signification de ces variables, on calcule la résultante des efforts sur une facette

dS de normale \underline{n} (Figure 6.9) :

$$(6.48\text{-a}) \quad \underline{dR} = \underline{T}^r dS = \underline{X}^r (\underline{e}_r \cdot \underline{n}) dS$$

$$(6.48\text{-b}) \quad \underline{dM} = \underline{C}^r dS = \underline{\Gamma}^r (\underline{e}_r \cdot \underline{n}) dS$$

Introduisant la projection de dS sur un plan perpendiculaire à la direction de renforcement $dS_0 = (\underline{n} \cdot \underline{e}_r) dS$, il vient :

$$(6.49) \quad \underline{X}^r = \frac{\underline{dR}}{dS_0} \quad , \quad \underline{C}^r = \frac{\underline{dM}}{dS_0}$$

\underline{X}^r et $\underline{\Gamma}^r$ s'interprètent donc comme les densités de résultante d'efforts et de moment *par unité de surface* perpendiculaire à \underline{e}_r . Ces quantités sont les homologues des concepts de résultante et moment fléchissant dans une section introduits dans la théorie des poutres (Bamberger, 1999).

La forme des équations (6.46-b)-(6.46-c) montre que la phase renforcement est modélisée comme un *milieu micropolaire de Cosserat* (voir Cosserat, E. et F. (1909), ou Salençon (1996a, pages 229-232) pour une présentation par les puissances virtuelles). Dans ce cadre, on identifie le *tenseur des contraintes partielles* $\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{X}^r \otimes \underline{e}_r$ (non symétrique) et le tenseur des couples-contraintes $\underline{\underline{h}}^r = \underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_r$. On montre que le vecteur associé à la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\sigma}}^r$ est $\frac{1}{2} \underline{X}^r \wedge \underline{e}_r$.

2.3 Loi de comportement élastique

Pour pouvoir résoudre des problèmes aux limites sur des milieux multiphasiques avec flexion, il est nécessaire d'introduire des lois de comportement. On les explicite maintenant en reprenant le cadre de la thermodynamique utilisé au chapitre 2, section 2.

2.3.1 Variables de déformation

Se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P), on peut écrire les équations constitutives sur la géométrie initiale du système. Soient $\underline{\xi}^m$ le champ de déplacement de la phase matrice, $(\underline{\xi}^r, \underline{\omega}^r)$ les champs de déplacement et de rotation de la phase renforcement.

Dans le cadre H.P.P, les variables de déformation pertinentes sont celles qui apparaissent en dualité des efforts intérieurs, dans l'expression du travail de déformation du système dans son mouvement réel. Observant l'équation (6.42), on en déduit :

- pour la phase matrice, le *tenseur des déformations linéarisé* :

$$(6.50) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \xi^m}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad } \xi^m}} \right)$$

- pour la phase renforcement, les variables :

$$(6.51) \quad \left(\underline{\underline{\text{grad } \xi^r}} - \underline{\underline{\dot{\omega}^r}} \right) \text{ et } \underline{\underline{\text{grad } \omega^r}}$$

où $\underline{\underline{\dot{\omega}^r}}$ est le tenseur antisymétrique associé à $\underline{\underline{\omega^r}}$.

- pour l'interaction le vecteur *déplacement relatif*:

$$(6.52) \quad \underline{\underline{\delta^r}} = \underline{\underline{\xi^r}} - \underline{\underline{\xi^m}}$$

2.3.2 Comportement élastique

Reprenant les résultats du paragraphe 2.3.1 du chapitre 2, on rappelle l'inégalité de Clausius-Duhem reliant la puissance de déformation d'un système et son énergie libre :

$$(6.53) \quad \mathcal{P}'_{\text{déf}} - \int_{\Omega'} \dot{\Psi} d\Omega' \geq 0$$

On suppose que la densité d'énergie libre se décompose additivement en une contribution de chaque phase et un terme d'interaction :

$$(6.54) \quad \Psi = \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \psi^I(\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) + \psi^r(\underline{\underline{\text{grad } \xi^r}} - \underline{\underline{\dot{\omega}^r}}, \underline{\underline{\text{grad } \omega^r}})$$

Par ailleurs, la puissance de déformation s'obtient, au signe près, en substituant les vitesses réelles ($\underline{\underline{\dot{\xi}}^m}$, $\underline{\underline{\dot{\xi}}^r}$, $\underline{\underline{\dot{\omega}^r}}$) aux vitesses virtuelles dans l'expression (6.42) :

$$(6.55) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}'_{\text{déf}}(\underline{\underline{\dot{\xi}}^m}, \underline{\underline{\dot{\xi}}^r}, \underline{\underline{\dot{\omega}^r}}) &= \int_{\Omega'} (\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^m}) d\mathcal{V}' + \int_{\Omega'} \underline{\underline{I}} \cdot (\underline{\underline{\dot{\xi}}^r} - \underline{\underline{\dot{\xi}}^m}) d\Omega' \\ &+ \int_{\Omega'} \left[(\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{X}}^r) : (\underline{\underline{\text{grad } \dot{\xi}^r}} - \underline{\underline{\dot{\omega}^r}}) + (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{\Gamma}}^r) : \underline{\underline{\text{grad } \dot{\omega}^r}} \right] d\Omega' \end{aligned}$$

Reportant (6.54) et (6.55) dans (6.53), on obtient la forme locale de l'inégalité de Clausius-Duhem (positivité de la dissipation intrinsèque volumique) :

$$(6.56) \quad \begin{aligned} \forall \left(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^m}, \underline{\underline{\dot{\xi}}^r} - \underline{\underline{\dot{\xi}}^m}, \underline{\underline{\text{grad } \dot{\xi}^r}} - \underline{\underline{\dot{\omega}^r}}, \underline{\underline{\text{grad } \dot{\omega}^r}} \right) , \\ \left(\underline{\underline{\sigma}}^m - \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^m} + \left(\underline{\underline{I}} - \frac{\partial \psi^I}{\partial (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m)} \right) \cdot (\underline{\underline{\dot{\xi}}^r} - \underline{\underline{\dot{\xi}}^m}) \\ + \left(\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{X}}^r - \frac{\partial \psi^r}{\partial (\underline{\underline{\text{grad } \xi^r}} - \underline{\underline{\dot{\omega}^r}})} \right) : (\underline{\underline{\text{grad } \dot{\xi}^r}} - \underline{\underline{\dot{\omega}^r}}) \\ + \left(\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{\Gamma}}^r - \frac{\partial \psi^r}{\partial \underline{\underline{\text{grad } \omega^r}}} \right) : \underline{\underline{\text{grad } \dot{\omega}^r}} \geq 0 \end{aligned}$$

Le comportement élastique du milieu correspond à l'hypothèse de nullité de la dissipation volumique précédente pour toute évolution. Compte tenu de l'indépendance des champs de vitesse, cela revient à annuler chaque cofacteur dans (6.56). On déduit alors successivement les lois de comportement suivantes :

Phase matrice Supposant pour simplifier que l'élasticité de la phase est linéaire isotherme, on adopte une expression quadratique pour ψ^m . Il vient :

$$(6.57) \quad \psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m$$

d'où, d'après (6.56) :

$$(6.58) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \frac{\partial \psi^m}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^m} = \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m$$

$\underline{\underline{C}}^m$ est le *tenseur des modules élastiques* de la phase matrice.

Phase renforcement Pour poursuivre le raisonnement, on se limite désormais au cas de la déformation plane. On se donne un repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ tel que (Ox) soit parallèle à la direction de renforcement ($\underline{e}_r \equiv \underline{e}_x$), et que (Oxy) soit le plan de déformation (Figure 6.10). On peut alors adopter pour les variables de déplacement les notations suivantes :

$$(6.59\text{-a}) \quad \underline{\underline{\xi}}^r = \xi_x^r(x, y) \underline{e}_x + \xi_y^r(x, y) \underline{e}_y$$

$$(6.59\text{-b}) \quad \underline{\underline{\omega}}^r = \omega^r(x, y) \underline{e}_z$$

et pour les efforts :

$$(6.60\text{-a}) \quad \underline{X}^r = N^r(x, y) \underline{e}_x + V^r(x, y) \underline{e}_y$$

$$(6.60\text{-b}) \quad \underline{\Gamma}^r = M^r(x, y) \underline{e}_z$$

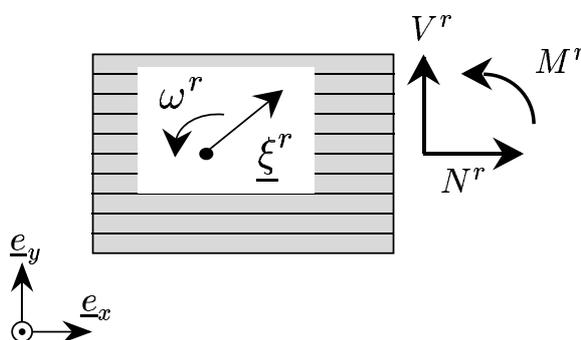


FIG. 6.10: Phase renforcement en déformation plane dans le plan (Oxy)

Reprenant la terminologie classique de la théorie des poutres, (N^r, V^r, M^r) représentent respectivement pour la phase renforcement les densités d'*effort normal*, d'*effort tranchant* et de *moment fléchissant* par unité de surface transverse à la direction de renforcement.

Ces notations permettent de simplifier la forme des expressions intervenant dans (6.56). On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 (\underline{e}_r \otimes \underline{X}^r) : (\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\dot{\xi}}^r - \underline{\dot{\omega}}^r) &= \underline{X}^r \cdot (\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\dot{\xi}}^r - \underline{\dot{\omega}}^r) \cdot \underline{e}_x \\
 &= (N^r \underline{e}_x + V^r \underline{e}_y) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} (\dot{\xi}_x^r \underline{e}_x + \dot{\xi}_y^r \underline{e}_y) - \dot{\omega}^r \underline{e}_z \wedge \underline{e}_x \right] \\
 (6.61) \qquad &= N^r \underbrace{\frac{\partial \dot{\xi}_x^r}{\partial x}}_{\dot{\varepsilon}^r} + V^r \underbrace{\left(\frac{\partial \dot{\xi}_y^r}{\partial x} - \dot{\omega}^r \right)}_{\dot{\theta}^r}
 \end{aligned}$$

et :

$$(6.62) \qquad (\underline{e}_r \otimes \underline{\Gamma}^r) : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\dot{\omega}}^r = M^r \underline{e}_z \cdot \frac{\partial \dot{\omega}^r}{\partial x} \underline{e}_z = M^r \underbrace{\frac{\partial \dot{\omega}^r}{\partial x}}_{\dot{\chi}^r}$$

ce qui montre que les variables de déformation bidimensionnelles pertinentes pour la phase renforcement sont $(\dot{\varepsilon}^r, \dot{\theta}^r, \dot{\chi}^r)$.

De façon à être cohérent avec ce qui précède, on adopte pour la densité d'énergie libre une expression *quadratique* de ces variables :

$$(6.63) \qquad \psi^r(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r) = \frac{1}{2} [\alpha^r (\varepsilon^r)^2 + \beta^r (\theta^r)^2 + \gamma^r (\chi^r)^2]$$

On en déduit les lois de comportement suivantes :

$$(6.64\text{-a}) \qquad N^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \varepsilon^r} = \alpha^r \varepsilon^r$$

$$(6.64\text{-b}) \qquad V^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \theta^r} = \beta^r \theta^r$$

$$(6.64\text{-c}) \qquad M^r = \frac{\partial \psi^r}{\partial \chi^r} = \gamma^r \chi^r$$

Introduisant ces relations dans (6.63), on obtient la densité d'énergie complémentaire exprimée en fonction des efforts :

$$(6.65) \qquad \tilde{\psi}^r(N^r, V^r, M^r) = \frac{1}{2} \left[\frac{(N^r)^2}{\alpha^r} + \frac{(V^r)^2}{\beta^r} + \frac{(M^r)^2}{\gamma^r} \right]$$

Se rattachant à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, on suppose dorénavant que la contribution de l'effort tranchant est négligeable, ce qui s'écrit :

$$(6.66) \qquad \frac{\partial \tilde{\psi}^r}{\partial V^r} = 0$$

Cette égalité implique les relations cinématiques :

$$(6.67) \qquad \theta^r = \frac{V^r}{\beta^r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^r = \frac{\partial \xi_y^r}{\partial x}$$

et :

$$(6.68) \qquad \chi^r = \frac{\partial \omega^r}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_y^r}{\partial x^2}$$

On retrouve dans (6.68) l'homologue continu *tridimensionnel* de la *condition de Navier-Bernoulli* classiquement introduite dans la théorie des poutres. Finalement, les variables de déformation pertinentes pour la phase renforcement sous l'hypothèse (6.66) sont la *déformation axiale* ε^r et la *courbure* χ^r donnée par (6.68).

Interaction Choisissons une forme quadratique pour la densité d'énergie libre :

$$(6.69) \quad \psi^I(\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = \frac{1}{2} (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) \cdot \underline{\underline{C}}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m)$$

on retrouve la même loi d'interaction que celle introduite au chapitre 2 :

$$(6.70) \quad \underline{I} = \frac{\partial \psi^I}{\partial (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m)} = \underline{\underline{C}}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m)$$

Par contre, on ne particularise pas ici \underline{c}_I à un tenseur uniaxial, puisque la prise en compte des effets de flexion peut conduire à des déplacements relatifs entre phases *de direction quelconque*, et non plus parallèles à \underline{e}_r .

2.3.3 Récapitulatif et généralisation

Dans le cadre restreint de la déformation plane, on a développé un modèle multiphasique pour les matériaux renforcés unidirectionnellement par des inclusions raides. La phase renforcement peut s'interpréter comme la *dilution* de poutres d'Euler-Bernoulli en un continuum, qui est par conséquent un milieu de Cosserat. Les efforts intérieurs pertinents dans cette phase sont des densités d'effort normal, tranchant et de moment fléchissant par unité de surface transverse à la direction de renforcement.

Le modèle multiphasique général permet de prendre en compte une cinématique distincte pour chaque phase. Le couplage est introduit par les efforts d'interaction.

Comme au chapitre 2, on peut introduire une *hypothèse d'adhérence parfaite* en imposant l'égalité des champs de déplacement dans les deux phases. Le milieu biphasique est alors un cas particulier de continuum de Cosserat *orienté*, dont les équations d'équilibre *global* sont :

$$(6.71) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{X}^r \otimes \underline{e}_r) + \rho \underline{F} &= \underline{0} \\ \operatorname{div}(\underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_r) + \underline{e}_r \wedge \underline{X}^r &= \underline{0} \end{aligned}$$

Le tenseur non symétrique $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{X}^r \otimes \underline{e}_r$ est le tenseur des contraintes totales, tandis que $\underline{h}^r = \underline{\Gamma}^r \otimes \underline{e}_r$ est celui des couples-contraintes.

La généralisation au cas tridimensionnel nécessiterait l'introduction de toutes les composantes d'effort tranchant et de moment fléchissant telles qu'elles interviennent dans la théorie des poutres dans \mathbb{R}^3 . On peut également imaginer de s'affranchir de l'hypothèse (6.66) si les effets de cisaillement sont non négligeables. On obtient alors pour la phase renforcement une modélisation de type « poutre de Timoshenko ».

La généralisation à N directions de renforcement conduit à N équations d'équilibre distinctes de type (6.46-b)-(6.46-c), ainsi qu'aux conditions aux limites correspondantes.

Enfin, on s'est limité ici à un comportement élastique pour chaque phase. Il est bien sûr possible de formuler également un comportement élasto-plastique. Pour les phases renforcement, on pourra utiliser un critère de plasticité portant sur les efforts généralisés (M^r , N^r , V^r) (Halphen et Salençon, 1987, Chap .1).

Pour résumer, le cadre théorique de la modélisation multiphasique permet de développer un ensemble de modèles, dont le plus général est celui présenté dans cette section. Pour chaque problème, il conviendra de déterminer les points-clé : adhérence parfaite entre les phases ou non, prise en compte ou non de la flexion, sollicitations bi- ou tridimensionnelles pour les inclusions, poutres de Timoshenko ou d'Euler-Bernoulli.

Pour montrer la mise en œuvre du modèle multiphasique avec flexion, on traite maintenant, dans le cadre de l'adhérence parfaite, l'exemple académique du cisaillement d'un milieu multicouche renforcé en déformation plane.

2.4 Exemple d'application

2.4.1 Position du problème

Soit \mathcal{S} une bande constituée d'un matériau homogène renforcé par un réseau de poutres orientées parallèlement à \underline{e}_x , sollicitée en déformation plane dans le plan (Oxy) . La bande est supposée infinie le long de (Oy) et de largeur L le long de (Ox) (Figure 6.11). On suppose l'adhérence parfaite entre les poutres et la matrice.

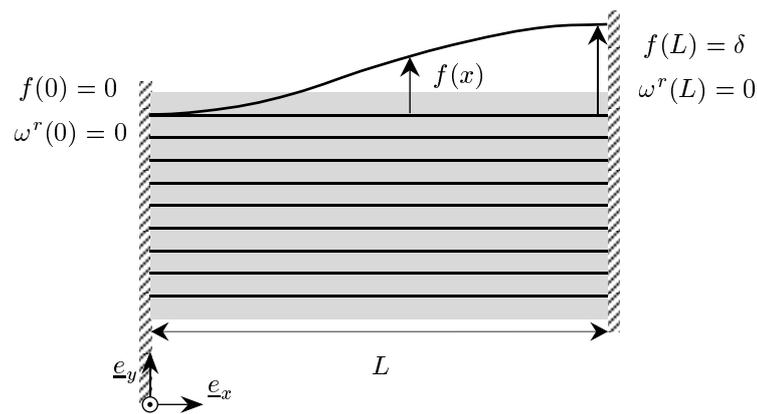


FIG. 6.11: Cisaillement d'une bande infinie renforcée en déformation plane

Le chargement et les conditions aux limites suivants sont appliqués :

- Il n'y a pas de forces de volume, i.e $\underline{F}^m = \underline{F}^r = \underline{0}$.

- Les deux phases sont encastrées dans le plan $(O x z)$ soit :

$$(6.72) \quad \underline{\xi}^m(x=0, y, z) = \underline{\xi}^r(x=0, y, z) = \underline{0} \quad , \quad \omega^r(x=0, y, z) = 0$$

- On impose dans le plan $(x=L)$ un déplacement vertical de la forme :

$$(6.73) \quad \underline{\xi}^m(x=L, y, z) = \underline{\xi}^r(x=L, y, z) = \delta \underline{e}_y$$

et une rotation nulle :

$$(6.74) \quad \omega^r(x=L, y, z) = 0$$

La phase matrice est supposée constituée d'un matériau élastique homogène isotrope (constantes de Lamé λ et μ), de sorte que sa loi de comportement s'écrit :

$$(6.75) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^m \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}}^m$$

D'après (6.64), le comportement de la phase renforcement s'écrit :

$$(6.76\text{-a}) \quad N^r = \alpha \varepsilon^r = \alpha \frac{\partial \xi^r}{\partial x}$$

$$(6.76\text{-b}) \quad M^r = \gamma \chi^r = \gamma \frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x^2}$$

Dans cette équation, α et γ désignent respectivement la *raideur axiale* et la *raideur flexionnelle* par unité de surface transverse. Si les caractéristiques élastiques de chaque poutre du réseau sont leur module d'Young E , leur section A et leur inertie I autour de l'axe $(O z)$, et si A_{VER} désigne la section d'un volume élémentaire représentatif dans la direction transverse à la direction de renforcement, on a simplement :

$$(6.77\text{-a}) \quad \alpha = EA/A_{\text{VER}}$$

$$(6.77\text{-b}) \quad \gamma = EI/A_{\text{VER}}$$

Ayant supposé l'adhérence parfaite entre les phases ($\underline{\xi}^m = \underline{\xi}^r$), on n'a pas besoin d'introduire de comportement d'interaction.

2.4.2 Solution en déplacement

Compte tenu des données du problème, on cherche une solution en déplacement de la forme :

$$(6.78) \quad \underline{\xi}^m = \underline{\xi}^r = f(x) \underline{e}_y \quad , \quad \omega^r = \omega^r \underline{e}_z = f'(x) \underline{e}_z$$

Les conditions aux limites (6.72)-(6.74) donnent :

$$(6.79) \quad f(0) = 0 \quad , \quad f(L) = \delta \quad , \quad f'(0) = 0 \quad , \quad f'(L) = 0$$

D'après (6.75)-(6.76), les efforts intérieurs dans chaque phase s'écrivent :

$$(6.80\text{-a}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^m = \mu f'(x)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

$$(6.80\text{-b}) \quad N^r = \alpha \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x} = 0$$

$$(6.80\text{-c}) \quad M^r = \gamma \frac{\partial^2 \xi_y^r}{\partial x^2} = \gamma f''(x)$$

Reportant ces expressions dans les équations d'équilibre du milieu adhérent (6.71), il vient :

$$(6.81\text{-a}) \quad \mu f''(x) + V^{r'}(x) = 0$$

$$(6.81\text{-b}) \quad M^{r'}(x) + V^r = 0$$

soit, en dérivant (6.81-b), en soustrayant membre à membre puis en reportant (6.80-c) :

$$(6.82) \quad \gamma f^{IV}(x) - \mu f''(x) = 0$$

Introduisant la *longueur caractéristique* :

$$(6.83) \quad \ell = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$$

on peut écrire la solution générale de (6.82) sous la forme :

$$(6.84) \quad f(x) = A \sinh\left(\frac{x}{\ell}\right) + B \cosh\left(\frac{x}{\ell}\right) + C \frac{x}{\ell} + D$$

Les quatre constantes d'intégration se calculent à partir des quatre conditions aux limites cinématiques (6.79). Introduisant alors le paramètre adimensionnel :

$$(6.85) \quad \varpi = \frac{L}{\ell} = \sqrt{\frac{\mu L^2}{\gamma}}$$

qui rend compte de l'influence relative du module de cisaillement de la phase matrice et de la raideur flexionnelle de la phase renforcement, on obtient tous calculs faits :

$$(6.86) \quad f(x) = \frac{\delta \sinh \varpi}{2(\cosh(\varpi) - 1) - \varpi \sinh \varpi} \left\{ \sinh\left(\varpi \frac{x}{L}\right) - \varpi \frac{x}{L} + \frac{1 - \cosh \varpi}{\sinh \varpi} \left[\cosh\left(\varpi \frac{x}{L}\right) - 1 \right] \right\}$$

On représente sur la figure 6.12 les courbes de déplacement normalisé $f(x)/\delta$ en fonction de l'abscisse normalisée x/L pour différentes valeurs de ϖ . On peut mettre en évidence deux cas particuliers :

- La limite $\varpi \rightarrow \infty$ correspond au cas où il n'y a pas de renforcement ($\gamma = 0$). On retrouve un profil de déplacement linéaire $f(x) = \delta x/L$, qui est la solution du problème de cisaillement d'une bande élastique homogène isotrope. C'est également la solution que donnerait le modèle multiphasique adhérent sans flexion.

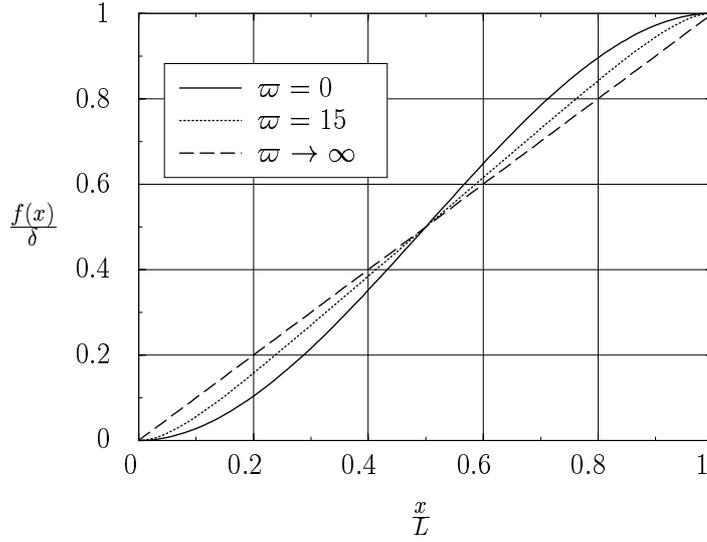


FIG. 6.12: *Cisaillement d'une bande infinie renforcée - Déformée analytique (modèle multiphasique)*

- Au contraire, la limite $\varpi \rightarrow 0$ correspond au cas où le module de cisaillement de la phase matrice joue un rôle négligeable. Dans ce cas, l'équation (6.82) se réduit à $f^{IV}(x) = 0$, et la solution est :

$$(6.87) \quad f(x) = \delta \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette expression est identique à celle de la déformée d'une poutre élastique bi-encastée soumise à un déplacement d'extrémité vertical δ .

2.4.3 Réaction du support et module de cisaillement apparent

A partir de la solution (6.86), on peut calculer les efforts dans chaque phase dans le plan $x = L$. D'après (6.79) et (6.80-a), le cisaillement dans la phase matrice est nul. Dans la phase renforcement, la densité d'effort tranchant vaut :

$$(6.88) \quad V^r(x = L) = -\gamma f'''(x = L) = \mu \frac{\delta}{L} \frac{\varpi}{\varpi - 2 \tanh \varpi/2}$$

On définit ainsi naturellement un *module de cisaillement apparent* μ^* pour le matériau renforcé, qui vérifie :

$$(6.89) \quad \mu^*/\mu = \frac{\varpi}{\varpi - 2 \tanh \varpi/2}$$

On représente ce module apparent en fonction de $\kappa = \frac{\gamma}{\mu L^2} = 1/\varpi^2$ sur la figure 6.13.

La valeur $\kappa = 0$ correspond au cas non renforcé, ou au cas où les inclusions n'ont pas de rigidité en flexion, et l'on retrouve alors $\mu^* = \mu$. Pour des valeurs non nulles de κ , la rigidité

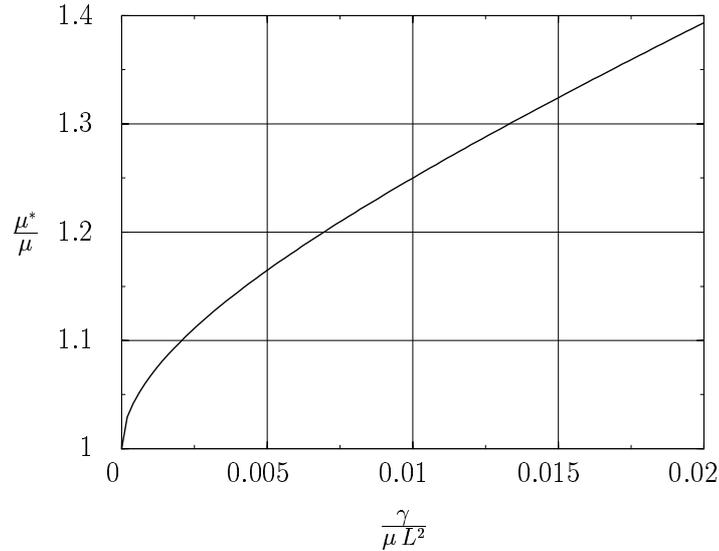


FIG. 6.13: *Module de cisaillement apparent (modèle multiphasique)*

des inclusions donne un module de cisaillement apparent qui peut être nettement supérieur à celui de la matrice seule.

2.5 Validation du modèle adhérent avec flexion

De la même façon qu'à la section 1, on se propose d'évaluer la pertinence du modèle en comparant les résultats précédents à ceux donnés par un calcul direct aux éléments finis.

2.5.1 Modélisation directe par éléments finis

Pour pouvoir faire un calcul numérique en déformation plane, on s'intéresse à une variante du problème précédent, dans laquelle les renforcements sont des *plaques* d'épaisseur t disposées périodiquement dans la matrice. On note s la distance entre deux plaques successives (voir figure 6.14). La fraction volumique de renforcement vaut donc $\eta^r = t/s$.

Les caractéristiques élastiques des constituants sont résumées dans le tableau 6.3.

Du fait de la périodicité de la structure, on ne maille qu'une cellule représentative (longueur $L = 0,2$ m, hauteur $s = 0,1$ m). Le calcul est effectué avec le logiciel CASTEM 2000. Le maillage utilisé est donné sur la figure 6.15. Il est composé de 5001 nœuds et 1600 éléments quadratiques Q8 (Les deux lignes supérieures d'éléments correspondent à la plaque de renforcement, les suivantes à la matrice).

Les conditions aux limites en déplacement (6.79) sont imposées de la façon suivante :

- La composante horizontale est nulle sur les côtés gauche et droit du maillage.

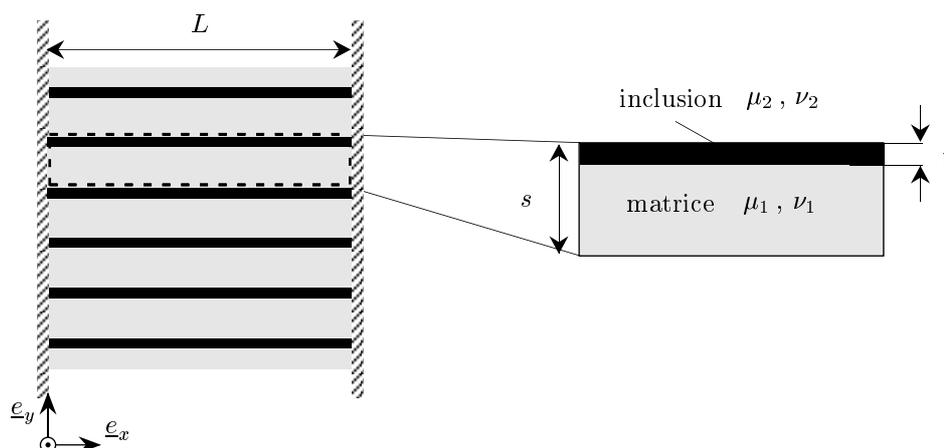


FIG. 6.14: Cisaillement d'une bande infinie renforcée - Schéma du renforcement par plaques

	Matrice	Renforcement
Fraction volumique	$1 - \eta^r = 95\%$	$\eta^r = 5\%$
Module de cisaillement	$\mu_1 = 1 \text{ à } 50\,000 \text{ MPa}$	$\mu_2 = 76\,923 \text{ MPa}^a$
Coefficient de Poisson	$\nu_1 = 0,49$	$\nu_2 = 0,3$

TAB. 6.3: Cisaillement d'une bande infinie - Caractéristiques des matériaux pour le calcul direct.

^a Cette valeur correspond à un module d'Young $E_2 = 200\,000 \text{ MPa}$.

- La composante verticale est nulle à gauche et vaut δ à droite.
- Les conditions de périodicité sont prises en compte en imposant l'égalité des déplacements des nœuds de même abscisse situés sur les faces inférieure et supérieure du maillage⁵.

Pour chaque simulation, on calcule la somme des réactions verticales sur le côté droit du modèle, soit V_{EF}^r . On en déduit le module de cisaillement équivalent :

$$(6.90) \quad \mu_{\text{EF}}^* = \frac{V_{\text{EF}}^r}{\delta/L}$$

2.5.2 Modélisation multiphasique

Pour appliquer les résultats de la section 2.4, il faut identifier la densité de raideur flexionnelle pour le renforcement par plaques. Dans le cas bidimensionnel qui nous préoccupe, on l'obtient

⁵ Cette fonctionnalité n'est pas implémentée dans CASTOR, ce qui explique l'utilisation de CASTEM 2000.

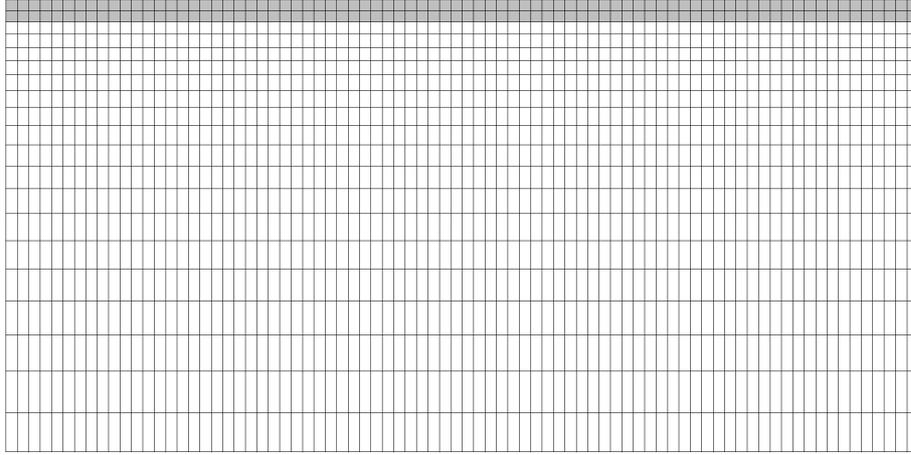


FIG. 6.15: Cisaillement d'une bande infinie - Maillage

en divisant le module de flexion d'une plaque par la hauteur de la cellule de base, soit :

$$(6.91) \quad \gamma = \frac{E_2 t^3}{12 (1 - \nu_2^2) s}$$

Avec $E_2 = 2 \mu_2 (1 + \nu_2)$, il vient :

$$(6.92) \quad \gamma = \frac{\mu_2 t^3}{6 (1 - \nu_2) s}$$

Compte tenu de la faible proportion volumique de renforcement, on identifie les propriétés de la phase matrice avec celles de son constituant, soit $\mu = \mu_1$. On en déduit finalement le paramètre adimensionnel du problème :

$$(6.93) \quad \kappa = \frac{1}{\varpi^2} = \frac{\gamma}{\mu L^2} = \frac{\eta^r}{6 (1 - \nu_2)} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \left(\frac{t}{L} \right)^2$$

2.5.3 Comparaisons des approches

On a représenté sur la figure 6.16 la déformée de la bande $f(x)/\delta$ en fonction de l'abscisse normalisée x/L pour les deux approches. Les courbes sont quasiment superposées, l'écart relatif étant inférieur à 10^{-3} .

Le module de cisaillement équivalent de la bande (rapporté à μ_1) est représenté sur la figure 6.17 en fonction du rapport des modules de cisaillement des constituants μ_2/μ_1 . L'accord entre le calcul « exact » par éléments finis et le modèle multiphasique est également excellent.

Il est intéressant de confronter ces résultats à une approche classique par homogénéisation d'un multicouche. On peut montrer dans ce cadre que le module de cisaillement homogénéisé est donné par :

$$(6.94) \quad \frac{1}{\mu^{\text{hom}}} = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle = \frac{1 - \eta^r}{\mu_1} + \frac{\eta^r}{\mu_2}$$

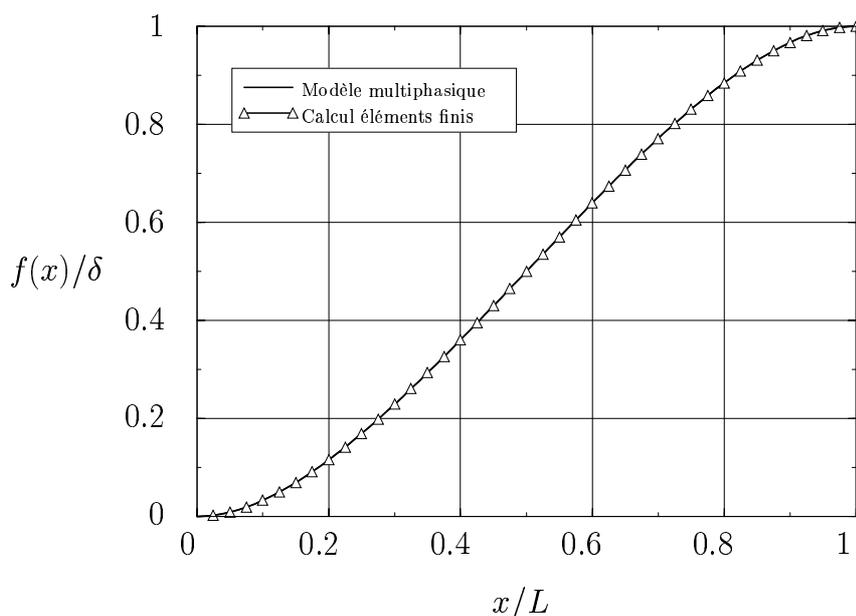


FIG. 6.16: *Cisaillement d'une bande infinie renforcée - Déformée*

soit encore :

$$(6.95) \quad \frac{\mu^{\text{hom}}}{\mu_1} = \frac{\mu_2/\mu_1}{\eta^r + (1 - \eta^r) \mu_2/\mu_1}$$

Cette expression est également représentée sur la figure 6.17. Il apparaît que pour de forts contrastes de propriétés, et pour la géométrie considérée, l'homogénéisation donne un résultat très éloigné de l'approche directe. Un zoom de la courbe précédente pour les faibles ratios μ_2/μ_1 est donné sur la figure 6.18. On remarque qu'à la limite $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 1$, l'homogénéisation donne un résultat correct.

2.5.4 Interprétation

De façon plus générale, c'est le paramètre adimensionnel κ donné par (6.93) qui conditionne la solution du problème. A fraction volumique de renforcement constante, ce paramètre fait intervenir à la fois le rapport des modules de cisaillement et un facteur d'échelle $\epsilon = \left(\frac{t}{L}\right)^2$ qui caractérise précisément la taille de la cellule de base par rapport à celle de la structure.

Aux faibles valeurs de κ (propriétés mécaniques peu contrastées ou grand nombre de cellules de base dans la structure), les résultats de l'homogénéisation sont très proches des résultats obtenus par le calcul aux éléments finis. Par contre, dans le cas contraire, les résultats d'homogénéisation ne sont pas pertinents. Cette conclusion ne doit pas surprendre. En effet, les théorèmes de l'homogénéisation (Sanchez-Palencia, 1980; Suquet, 1982) montrent l'identité du comportement d'un milieu à structure périodique et du milieu équivalent déduit de l'homogénéisation uniquement dans la limite où le facteur d'échelle ϵ tend vers 0.

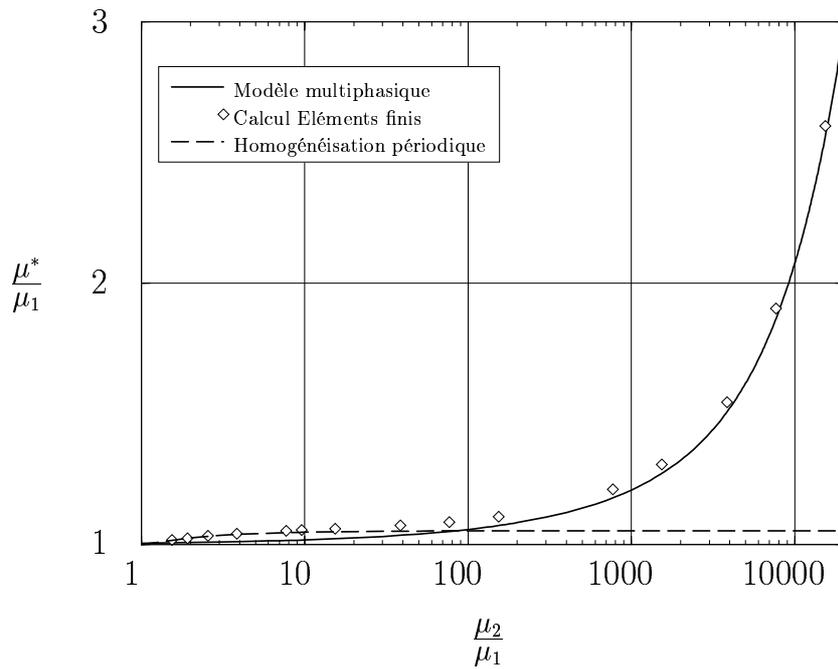


FIG. 6.17: *Cisaillement d'une bande infinie renforcée - Module de cisaillement équivalent*

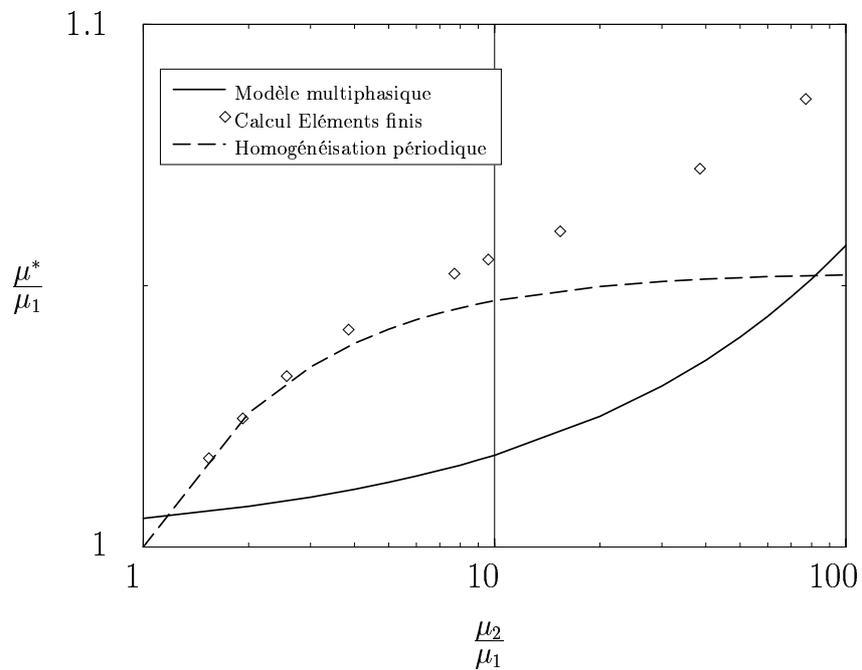


FIG. 6.18: *Cisaillement d'une bande infinie - Module de cisaillement équivalent (Zoom aux faibles valeurs de μ_2/μ_1)*

Pour résumer, le modèle multiphasique avec flexion permet d'obtenir des résultats analytiques

pour les matériaux renforcés par inclusions hors de portée de l'homogénéisation classique. Ce modèle est valable notamment dans le cas où les propriétés des constituants sont très contrastées, ce qui est bien sûr toujours le cas dans les applications géotechniques qui nous intéressent.

Par ailleurs, le modèle rend compte de façon intrinsèque d'un effet d'échelle puisqu'une longueur caractéristique ℓ (Eq.(6.83)) apparaît naturellement dans sa formulation.

Remarque Des modèles d'homogénéisation de milieux stratifiés (roches fracturées) en terme de continuum équivalent de Cosserat ont été proposés par Dai *et al.* (1993); Mühlhaus (1995) et Adhikary et Dyskin (1997). Des résultats numériques similaires à ceux obtenus dans cette section sont donnés par Forest et Sab (1998) pour une poutre multicouche encastree en flexion.

3 Conclusion

Deux aspects de la modélisation multiphasique ont été abordés dans ce chapitre.

- On a montré tout d'abord que le modèle général sans flexion permet de rendre compte d'*effets d'échelle* par l'introduction d'un paramètre de couplage entre les phases.
- On a ensuite développé un modèle tenant compte de la capacité de flexion des inclusions.

Dans les deux cas, la comparaison avec une approche directe par éléments finis s'est avérée concluante, alors que l'approche classique par homogénéisation des milieux périodiques est mise en défaut.

Pour la compression d'un bloc en déformation plane, celle-ci ne rend pas compte des effets de bord, puisqu'un seul champ de déplacement macroscopique est accessible. *A contrario*, les deux champs de déplacement du modèle biphasique permettent de retrouver parfaitement les résultats d'un calcul direct.

Pour le cisaillement d'une bande infinie, c'est le contraste des propriétés des matériaux et la taille de la cellule de base qui pilotent l'écart entre la solution réelle et l'approche par homogénéisation.

Ces deux exemples caractéristiques n'offrent qu'un petit aperçu de la richesse de l'approche multiphasique, déclinable en de nombreuses variantes. Il convient maintenant d'approfondir leur étude, en introduisant un comportement d'interaction non linéaire et en appliquant le modèle *général* avec flexion.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Récapitulatif des travaux présentés

La description des techniques de renforcement par inclusions utilisées dans le domaine de la géotechnique nous a conduit à proposer une approche de type « matériau équivalent » pour le calcul en déplacement des ouvrages. Nous avons ainsi développé à l'échelle macroscopique un *modèle multiphasique de matériau renforcé*. Certains paramètres et variables apparaissant dans le modèle sont reliées à une description mécanique à l'échelle microscopique par un raisonnement d'homogénéisation.

Les équations d'équilibre du modèle sont obtenues par la méthode des puissances virtuelles, tandis que les lois de comportement sont formulées dans un cadre thermodynamique. L'ensemble permet de poser et résoudre des problèmes aux limites dans un cadre approprié.

Le modèle a été implémenté dans un nouveau code aux éléments finis CASTOR, spécialement conçu pour tenir compte du caractère multiphasique de la formulation. Différents exemples numériques ont été traités, qui valident l'implémentation du code d'une part, la pertinence du modèle multiphasique pour les problèmes de géotechnique d'autre part.

Points-clé du modèle multiphasique

Tout au long du présent mémoire, nous avons fait ressortir les avantages du modèle multiphasique sur d'autres approches. Résumons-les brièvement.

- Le modèle multiphasique est construit de façon rigoureuse, et permet de bien poser des problèmes de mécanique et de les résoudre sans avoir à introduire à aucun moment d'hypothèses *ad hoc*.
- Les paramètres constitutifs du modèle ont une signification mécanique claire. Pour les

problèmes de géotechnique pour lesquels la fraction volumique des inclusions est faible, ils découlent directement du comportement de chaque *constituant* pris séparément.

- Le modèle donne lieu à une implémentation aisée dans un code de calcul aux éléments finis. Bien que la formulation soit macroscopique, le caractère multiphasique permet un traitement *par phase* de la plasticité. L'ensemble est ainsi beaucoup plus maniable que les techniques d'homogénéisation périodique qui nécessitent des aller-retours entre les échelles de description microscopique (cellule de base) et macroscopique (ouvrage) pour obtenir l'état mécanique du système en tout point.
- Pour l'utilisateur du code de calcul, le travail de préparation des données est considérablement allégé, puisque seules les *zones* renforcées ou non doivent être maillées séparément (à l'opposé d'une approche directe, dans laquelle les inclusions et le massif environnant sont discrétisés séparément). Le post-traitement permet ensuite d'obtenir les mêmes informations qu'une approche directe.
- Les versions *enrichies* du modèle permettent de prendre en compte des effets hors de portée de l'homogénéisation classique. Ainsi, le modèle *général* à plusieurs champs de déplacement rend compte d'*effets de bord* par l'intermédiaire d'un paramètre d'interaction que l'on évalue simplement à partir des caractéristiques mécaniques des constituants et de la géométrie de la cellule de base. Par ailleurs, la prise en compte d'*effets de flexion* dans les inclusions est possible. Ces effets peuvent être importants lorsque la taille de la cellule de base n'est pas petite devant celle de l'ouvrage.

Développements théoriques et numériques

Différents modèles ont été développés et appliqués tout au long de ce mémoire, qui ne sont finalement que des cas particuliers du *modèle général avec flexion* présenté au chapitre 6, section 2. Selon la nature du problème à traiter, on a supposé ou non l'adhérence parfaite entre les phases, la présence ou l'absence d'efforts de flexion. Cependant, le modèle le plus général n'a donné lieu jusqu'ici à aucune application analytique complète.

Au travers de ce type de calcul, il conviendra de préciser le couplage entre les effets de flexion et les effets d'échelle modélisés par l'interaction entre phases. Dans le même ordre d'idées, l'exploitation du comportement non linéaire de l'interaction entre phases doit être étudié, notamment vis à vis de la prise en compte de *glissements* et *décollements irréversibles* à l'interface matrice/inclusion à l'échelle microscopique. A ce titre, l'analyse d'essais d'arrachement d'inclusions (pieux ou boulons) effectués en laboratoire (voir par exemple Hyett *et al.* (1996)) ou sur chantier devrait être profitable.

Le *modèle général sans flexion* a été implémenté numériquement par Bennis (1999), et validé sur les solutions analytiques disponibles dans le présent mémoire. Il convient maintenant de généraliser ce code pour traiter des problèmes mixtes dans lesquels se côtoient zones renforcées

et zones non renforcées et de le tester sur des problèmes de référence disponibles dans la littérature. Le calcul du tassement d'un radier supporté par un petit nombre de pieux, qui a fait l'objet de modélisations par éléments de frontière (Butterfield et Banerjee, 1971; Kuwabara, 1989) devrait permettre de valider à la fois le calcul du paramètre d'interaction pour la prise en compte des effets d'échelle (voir chapitre 6, section 1) et l'implémentation.

Enfin, l'implémentation du *modèle général avec flexion* reste à faire. Elle nécessite le traitement numérique des milieux de Cosserat, qui dans le domaine élasto-plastique, est encore peu abordé dans la littérature.

Pour revenir au modèle adhérent sans flexion, les fonctionnalités du code CASTOR doivent être étendues, principalement par l'introduction de lois de comportement non linéaires plus complexes (modèles *CamClay* et de type *cap-cone* pour la phase matrice, écrouissage des phases renforcement). A terme, le modèle multiphasique devrait bien sûr être intégré à un code permettant de traiter des problèmes tridimensionnels, notamment les radiers de pieux de forme quelconque et les tunnels boulonnés peu profonds, dont l'analyse par CASTOR est actuellement impossible.

Domaines d'applications futurs

On a traité principalement dans ce mémoire les problèmes de tunnels boulonnés, groupes et radiers de pieux et réseaux de micropieux. Dans les deux premiers cas, le modèle multiphasique adhérent a permis de retrouver à moindre coût des résultats obtenus de façon fastidieuse par d'autres approches. La généralité du modèle permet par ailleurs de traiter sans difficultés supplémentaires des comportements non linéaires complexes. La rapidité d'exécution du code de calcul permet des études paramétriques faciles de ce type de fondations. Le calcul en déplacement peut dorénavant faire partie de la phase de *conception* et non plus seulement d'une vérification exceptionnelle *a posteriori* de l'ouvrage. Dans le troisième, le modèle a conduit à des résultats originaux inaccessibles aux techniques classiques de calcul.

Le calcul en déplacement des remblais en terre armée et des talus en sol cloué n'a volontairement pas été abordé dans ce mémoire. Les travaux de Lenz (1998) visant à reproduire numériquement avec CASTOR des essais modèle réduit de poinçonnement de massif renforcé par des bandes d'aluminium (Samtani et Sonpal, 1989) ou par des géogrilles en fibres de verre (Takemura *et al.*, 1992) n'ont pas été complètement concluants. Les essais étant mal documentés, certains paramètres ont dû être déterminés par une analyse à rebours des courbes expérimentales, ce qui limite la portée de la validation du modèle.

Par ailleurs, pour des ouvrages réels de ce type, le *phasage* des travaux est déterminant vis à vis de la réponse finale. Comme on l'a vu dans le premier chapitre, section 2, un *seul* lit d'armatures ou de clous est mis en œuvre au cours d'une phase de réalisation. Il apparaît intuitivement nécessaire de prendre en compte les effets d'échelles et de bord au travers du

modèle général. Ces deux exemples pourront être utilisés pour tester et valider l'implémentation numérique du modèle général sans flexion.

Le calcul des groupes ou radiers de pieux sous *sollicitation latérale* n'a pas non plus été abordé, car il nécessite manifestement la prise en compte des efforts de flexion dans les inclusions. La littérature abondante sur ce sujet devrait permettre d'évaluer facilement la pertinence du modèle avec flexion, une fois celui-ci implémenté dans le code de calcul.

La modélisation du boulonnage des tunnels pourra être enrichie par la prise en compte de la *fracturation* du massif. Des travaux récents (Bekaert et Maghous, 1996; de Buhan et Maghous, 1997; Maghous *et al.*, 1998) basés sur l'homogénéisation devraient pouvoir être couplés à terme à l'approche multiphasique.

En dehors du domaine de la géotechnique, l'approche multiphasique nous paraît adaptée à la modélisation du *béton armé*, notamment pour le calcul des voiles et des radiers, dans lesquels les armatures en très grand nombre sont disposées en général en grillage régulier. Pour aborder ce type d'applications, il suffit d'introduire dans le code CASTOR un comportement élastoplastique adéquat pour le matériau béton (par un exemple un critère de type Willam-Warnke), et éventuellement de modifier l'algorithme de résolution en plasticité pour tenir compte des conditions de contrainte plane (Aouameur-Mesbah, 1998). Là encore, de nombreux essais de poutres en flexion ou de dalles cisailées dans leur plan devraient permettre de valider le modèle (voir par exemple Maier et Thürlimann (1985)).

Signalons au passage un autre axe de développement de l'approche multiphasique, adapté à la modélisation des *bétons de fibres*. Dans ce matériau, qui fait l'objet de recherches intensives depuis quelques années, des fibres courtes sont distribuées aléatoirement dans le volume, créant un renforcement *isotrope* à l'échelle macroscopique. La généralisation du modèle adhérent sans flexion à une infinité *continue* de directions de renforcement a été abordée par Lenz (1998) dans le domaine élastique. Cependant, pour reproduire le comportement complexe du béton de fibres, il faudra surmonter plusieurs difficultés, notamment le caractère *fragile* de la matrice et les effets d'extrémité liés à la longueur finie des fibres.

Dans le domaine des matériaux composites industriels, l'applicabilité du modèle multiphasique reste à évaluer. Comme on l'a vu sur l'exemple des modules élastiques au chapitre 2, section 4.1, l'approche multiphasique n'est *a priori* précise que pour de faibles valeurs de la fraction volumique de renforcement. Il conviendra de définir plus précisément cette *limite de validité*, par exemple par une comparaison exhaustive avec des calculs numériques tridimensionnels sur une cellule de base. D'ores et déjà, les résultats présentés à la section 4.2 du même chapitre en terme de charge limite indiquent qu'un choix adéquat des paramètres du modèle permet de reproduire le *comportement à la rupture* de composites à fibres, et ce même dans le cas où la fraction volumique des fibres n'est pas faible.

De façon plus fondamentale, la pertinence du modèle multiphasique est évidemment liée au choix des lois de comportement des phases. On a tout au long du mémoire identifié les modules élastiques de la phase matrice avec ceux de son matériau constitutif, ce qui est une approche

simpliste. Un cadre rigoureux d'*identification* du comportement multiphasique général reste à définir, soit sous la forme de protocoles expérimentaux, soit par des approches théoriques de type *changement d'échelle*.

Pour pouvoir modéliser d'autres types de structures renforcées telles que les *appuis élastomères* (Simo et Kelly, 1984; Mori *et al.*, 1997), constitués de multicouches caoutchouc/acier, il sera nécessaire de formuler le modèle multiphasique en *transformation finie*. Si les équations d'équilibre, exprimées sur la configuration actuelle, restent inchangées, il n'en est pas de même de la description de la cinématique. La formulation du comportement, notamment non linéaire, pourra s'avérer plus délicate, comme c'est le cas pour les milieux poreux en transformation finie (Bourgeois, 1997). Il est par ailleurs possible d'envisager explicitement un modèle bidimensionnel de *plaque* pour la phase renforcement (à la place d'un modèle uniaxial de poutre), pour traiter par exemple des problèmes de torsion d'appuis.

Enfin, et bien que ce domaine nous soit parfaitement inconnu, il est probable que certains *tissus organiques fibreux* rencontrés en biomécanique relèvent également d'une approche multiphasique. Le caractère *poreux* de ce type de biomatériaux pourra conduire à la formulation d'un modèle de *matériau poreux renforcé par fibres* dans lequel chaque point matériel se verra associer une particule de squelette, une particule de fluide et une particule de fibre.

Pour résumer, l'approche multiphasique dont les fondements remontent à plus de trente ans, nous paraît digne d'un renouveau d'intérêt, et son développement très prometteur, tant du point de vue théorique que pratique.

Valorisation du travail de recherche

Ce sont des problèmes très concrets de géotechnique qui nous ont conduit à la formulation du modèle multiphasique et aux développements parfois assez théoriques présentés dans ce mémoire. Cependant, la mise en œuvre numérique fournit au final un outil de calcul parfaitement accessible à l'ingénieur comme tout autre code aux éléments finis, et utilisable en « boîte noire », c'est à dire sans avoir à maîtriser le contenu théorique sous-jacent.

A condition de développer maintenant une interface ergonomique et adaptée aux préoccupations des praticiens, il est possible de diffuser le modèle multiphasique dans les bureaux d'études sans se heurter à des barrières « culturelles » trop importantes.

L'implémentation du modèle multiphasique *adhérent* dans le code de calcul CESAR-LCPC (Mestat, 1994) est actuellement en cours et devrait marquer une première étape de sa diffusion à grande échelle.

Bibliographie

- ABBO A.J. et SLOAN S.W. (1997) Accelerated initial stiffness schemes for elastoplasticity, *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications* (édité par D.R.J Owen, E. Oñate et E. Hinton), CIMNE, Barcelona, pp. 334–342.
- ABDI R. (1992) *Charges limites d'ouvrages en sol renforcé : approches statique et cinématique*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 118 pages.
- ABDI R., DE BUHAN P. et PASTOR J. (1994) Calculation of the critical height of a homogenized reinforced soil wall: a numerical approach, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **18**, pp. 485–505.
- ADHIKARY D.P. et DYSKIN A.V. (1997) A Cosserat continuum model for layered materials, *Computers and Geotechnics*, **20** (1), pp. 15–45.
- ADOBE SYSTEMS INCORPORATED (1994) *PostScript language reference manual*, Addison-Wesley.
- AL HALLAK R. (1999) *Etude expérimentale et numérique du renforcement du front de taille par boulonnage dans les tunnels en terrains meubles*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 239 pages.
- AMAR S. (1993) Les micropieux, *Revue Marocaine de Génie Civil*.
- ANTHOINE A. (1990) Une méthode pour le dimensionnement à la rupture des ouvrages en sols renforcés, *Revue Française de Géotechnique*, **50**, pp. 5–22.
- AOUAMEUR-MESBAH A. (1998) *Analyse non-linéaire matérielle et géométrique des structures coques en béton armé sous chargements statiques et dynamiques*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 210 pages.
- ASKELAND D.R. (1996) *The Science and Engineering of Materials*, Chapman & Hall, 3ème éd. n.
- BAMBERGER Y. (1999) *Résistance des matériaux*, Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- BARTON N. (1974) Engineering classification of rock masses for the design of tunnel support, *Rock Mechanics*, **6** (4), pp. 189–236.

- BATOZ J.L. et DHATT G. (1995) *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, Paris.
- BEDFORD A. et DRUMHELLER D. (1983) Recent advances in theories of immiscible and structured mixtures, *Int. J. Eng. Sci.*, **21** (8), pp. 863–960.
- BEDFORD A. et STERN M. (1971) Toward a diffusing continuum theory of composites materials, *ASME, J. Appl. Mech.*, **38**, pp. 8–14.
- BEDFORD A. et STERN M. (1972) A multi-continuum theory for composite elastic materials, *Acta Mechanica*, **14**, pp. 85–102.
- BEKAERT A. et MAGHOUS S. (1996) Three-dimensional yield strength properties of jointed rock mass as a homogenized medium, *Mech. of Coh. Fric. Mat.*, **1**, pp. 1–24.
- BENHAMIDA B. (1998) *Modélisation numérique des murs en sol cloué : application aux calculs en déformation des murs expérimentaux en vraie grandeur n° 1 et 2 du Projet National CLOUTERRE*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 400 pages.
- BENNIS M. (1999) *Mise en œuvre d'un modèle numérique pour le calcul multiphasique des structures renforcées par inclusions linéaires*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, mémoire de D.E.A, 48 pages.
- BERNAUD D. (1991) *Tunnels profonds dans les milieux viscoplastiques : Approches expérimentale et numérique*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 354 pages.
- BERNAUD D., DE BUHAN P. et MAGHOUS S. (1995) Numerical simulation of the convergence of a bolt-supported tunnel through a homogenization method, *Int. J. Num. An. Meth. Geo.*, **19**, pp. 267–288.
- BIENAWSKI Z.T. (1973) Engineering classification of jointed rock masses, *The Civil Engineer in South Africa*, pp. 335–343.
- BIOT M. (1941) General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, **12**, pp. 155–164.
- BIOT M. (1955) Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *J. Appl. Phys.*, **26**, pp. 182–185.
- BLONDEAU B., SCHLOSSER F. et NHIEM T.V. (1987) Renforcement d'une faille de grande largeur par micropieux sous un radier de table de groupe de centrale nucléaire, *Proc. Coll. Interactions sols-structures*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 31–38.
- BLONDEAU F., CHRISTIANSEN M., GUILLOUX A. et SCHLOSSER F. (1984) TALREN : méthode de calcul des ouvrages en terre renforcée, *Proc. Coll. Int. sur le renforcement en place des sols et des roches*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 219–225.

- BORSETTO M., LA BARBERA M., COLLESELLI F., COLOMBO P., CORTI G., FAIELLA D., TRIPICIANO L., GIUSEPPETTI G., MAZZA G. et VARAGNOLO P. (1991) Settlement analysis of main buildings in power plants by means of 2-D and 3-D models, *Proc. Xth Eur. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Florence*, pp. 323–328.
- BOURGEOIS E. (1997) *Mécanique des milieux poreux en transformation finie : formulation des problèmes et méthodes de résolution*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 221 pages.
- BOUVARD-LECOANET A., COLOMBET G. et ESTEULLE F. (1988) *Ouvrages souterrains - Conception, Réalisation, Entretien*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- DE BUHAN P. (1986) *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, (Thèse d'état, 462 pages).
- DE BUHAN P. et DORMIEUX L. (1996) *Cours d'analyse des structures en plasticité*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- DE BUHAN P., DORMIEUX L. et SALENÇON J. (1993) Stability analysis of reinforced soil retaining structures using the yield design theory, *Proc. Conf. Retaining structures - The Institution of Civil Engineers* (édité par C.R.I Clayton), pp. 618–627.
- DE BUHAN P. et MAGHOUS S. (1997) Comportement élastique non linéaire macroscopique d'un matériau comportant un réseau de joints, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **324** (Série II-b), pp. 209–218.
- DE BUHAN P. et SALENÇON J. (1987) Analyse de la stabilité des ouvrages renforcés par une méthode d'homogénéisation, *Revue Française de Géotechnique*, **41**, pp. 29–43.
- DE BUHAN P., SALENÇON J. et TALIERCIO A. (1991) Lower and upper bound estimates for the macroscopic strength criterion of fiber composite materials, *Inelastic deformation of composite materials* (édité par G.J. Dvorak), Springer Verlag, pp. 563–580.
- DE BUHAN P. et SUDRET B. (1999a) Micropolar continuum description of materials reinforced by linear inclusions, *Proc. Conf. to the memory of Pr. J.P Boehler, "Mechanics of heterogeneous materials"*, Grenoble.
- DE BUHAN P. et SUDRET B. (1999b) Micropolar multiphase model for materials reinforced by linear inclusions, *Eur. J. Mech.*, soumis pour publication.
- DE BUHAN P. et SUDRET B. (1999c) A two-phase elastoplastic model for unidirectionally-reinforced materials, *Eur. J. Mech.*, accepté pour publication.
- DE BUHAN P. et SUDRET B. (1999d) Un modèle biphasique de matériau renforcé par inclusions linéaires, *Proc. 14th Congrès Français de Mécanique, Toulouse, 30 Août - 3 Septembre*, n° 795.

- DE BUHAN P. et TALERCIO A. (1988) Critère de résistance macroscopique pour les matériaux composites à fibres, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **307** (Série II-b), pp. 227–232.
- DE BUHAN P. et TALERCIO A. (1991) A homogenization approach to the yield strength of composite materials, *Eur. J. Mech, A/Solids*, **10** (2), pp. 129–154.
- BURLAND J.B., BROMS B.B. et DE MELLO V.F.B. (1977) Behaviour of foundations and structures, *Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng, Tokyo*, vol. 2, pp. 495–546.
- BUTTERFIELD R. et BANERJEE P.K. (1971) The elastic analysis of compressible piles and pile groups, *Géotechnique*, **21** (1), pp. 43–60.
- CARON J.F. (1993) *Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 155 pages.
- CENTRE D'ETUDES DES TUNNELS (juillet 1998) Dossier pilote des tunnels - Section 4.15 « pré-soutènement et soutènement du front de taille ».
- CHABOT A. (1997) *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 170 pages.
- CHAOUI F. (1992) *Etude tridimensionnelle du comportement des pieux dans les pentes instables*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 355 pages.
- CHATEAU X. et DORMIEUX L. (1998) *Travaux numériques de mécanique*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- CHEN S.H. et EGGER P. (1999) Three-dimensional elasto-viscoplastic finite element analysis of reinforced rock masses and its application, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **23**, pp. 61–78.
- CHOW Y.K. (1986) Analysis of vertically loaded pile groups, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **10** (1), pp. 59–72.
- CHRISTENSEN R.M. et LO K.H. (1979) Solutions for effective shear properties in three-phase sphere and cylinder models, *J. Mech. Phys. Sol*, **27**, pp. 315–330.
- CLANCY P. et RANDOLPH M.F. (1993) An approximate analysis procedure for piled raft foundations, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **17**, pp. 849–869.
- CLANCY P. et RANDOLPH M.F. (1996) Simple design tools for piled raft foundations, *Géotechnique*, **46** (2), pp. 313–328.
- CLOUTERRE (1991) *Recommandations pour la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle des soutènements réalisés par clouage des sols*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- COMBARIEU O. (Décembre 1987) Amélioration des sols par inclusions verticales rigides, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, rapport n°GT 26.

- COMBARIEU O. (1990) Fondations superficielles sur sol amélioré par inclusions rigides verticales, *Revue Française de Géotechnique*, **53**, pp. 33–44.
- COOKE R.W., BRYDEN-SMITH D.W., GOOCH M.N. et SILLETT D.F. (1981) Some observations of the foundation loading and settlement of a multi-storey building on a piled raft foundation in London Clay, Part. 1, *Proc. Institution of Civil Engineers, London*, **70**, pp. 433–460.
- CORBETTA F. (1990) *Nouvelles méthodes d'étude des tunnels profonds - Calculs analytiques et numériques*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 188 pages.
- COSSERAT, E. et F. (1909) *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris.
- COUSSY O. (1991) *Mécanique des milieux poreux*, Editions Technip.
- CRISFIELD M.A. (1991) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol. 1 : Essentials, John Wiley & Sons.
- DAI C., MÜHLHAUS H.B., DUNCAN FAMA M. et MEEK J. (1993) Finite element analysis of Cosserat theory for layered rock masses, *Computers and Geotechnics*, **15**, pp. 145–162.
- DELMAS P., BERCHE J.C., CARTIER G. et ABDELHEDI A. (1986) Une nouvelle méthode de dimensionnement du clouage des pentes : programme PROSPER - Bulletin de liaison n° 141, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- DHATT G. et TOUZOT G. (1981) *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A, Paris, 1ère éd. n.
- DRUCKER D.C. et PRAGER W. (1952) Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quart. Appl. Mech*, **10**, pp. 157–165.
- DUBREUCQ T. (1998) Chargement vertical de réseaux de micropieux en centrifugeuse, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Nantes, rapport n°FO/96/10.
- DVORAK G.J. et BAHEI-EL-DIN Y.A. (1979) Elastic-plastic behaviour of fibrous composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, pp. 51–72.
- DVORAK G.J. et BAHEI-EL-DIN Y.A. (1982) Plasticity analysis of fibrous composites, *J. Appl. Mech*, **49**, pp. 327–335.
- DVORAK G.J. et BAHEI-EL-DIN Y.A. (1987) A bimodal plasticity theory of fibrous composite materials, *Acta Mechanica*, **69**, pp. 219–241.
- EL OMRI A. (1992) *Homogénéisation élasto-plastique stratifiée et plasticité anisotrope*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 125 pages.
- EL OMRI A. et SIDOROFF F. (1991) Homogenization of a two-phase elastic-plastic layered composite, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **312** (Série II-b), pp. 425–430.

- Fascicule n° 62, titre V (1993) *Règles techniques de conception et de calcul des fondations des ouvrages de génie civil*, Ministère de l'Équipement, du Logement et des Transports.
- FAURRE P. (1991) *Analyse, optimisation et filtrage numériques*, Cours de l'École Polytechnique.
- FLEMING W.G.K., WELTMAN A.J., RANDOLPH M.F. et ELSON W.K. (1992) *Piling engineering*, Blackie, Glasgow.
- FLEURET J.S. (1996) Prise en main de CASTEM 2000 par l'exemple, CEA/ Direction des réacteurs nucléaires, rapport DMT/96-434.
- FOREST S. et SAB K. (1998) Cosserat overall modeling of heterogeneous materials, *Mech. Res. Comm.*, **25** (4), pp. 449–454.
- FRANK R. (1982) Estimation par les paramètres pressiométriques de l'enfoncement sous charge axiale de pieux forés dans des sols fins, *Bulletin de liaison des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **119**, pp. 17–24.
- FRANK R. (1995) Fondations profondes, *Techniques de l'ingénieur*, **C-248**.
- FRANKE E. (1991) Measurements beneath piled rafts, *Proc. Int. Conf. on Deep Foundations*, vol. 2, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 599–626.
- FREEMAN T.J. (1978) The behaviour of fully bonded rock bolts in the Kielder experimental tunnel, *Tunnels and tunneling*, **10**, pp. 37–40.
- GERMAIN P. (1986) *Mécanique, I et II*, Ellipses, Paris.
- GERRARD C. (1982) Reinforced soil: an orthorhombic material, *J. Geo. Eng. Div, ASCE*, **108** (GT11), pp. 1460–1474.
- GERRARD C.M. et PANDE G.N. (1985) Numerical model of reinforced jointed rock-masses. I. Theory, *Computers in Geotechnics*, **1**, pp. 293–318.
- GERRARD C.M., PANDE G.N. et SCHWEIGER H.F. (1984) Modelling the behaviour of soft clays reinforced with stone columns, *Proc. Coll. Int. sur le renforcement en place des sols et des roches*, pp. 145–150.
- GIROUD J.P. (1968) Settlement of a linearly loaded rectangular area, *J. Soil Mech. Found. Div, ASCE*, **94** (SM4), pp. 813–832.
- GREUILL E. (1993) *Étude du soutènement des tunnels par boulons passifs dans les sols et les roches tendres, par une méthode d'homogénéisation*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 200 pages.
- GREUILL E., DE BUHAN P., PANET M. et SALENÇON J. (1994) Behaviour of tunnels reinforced by untensioned bolts, *Proc. XIIIth Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng, New-Delhi*, pp. 869–872.

- GRIFFITHS D.V., CLANCY P. et RANDOLPH M.F. (1991) Piled raft foundation analysis by finite elements, *Proc. Computer Methods and Advances in Geomechanics* (édité par Beer, Booker et Carter), Balkema, Rotterdam, pp. 1153–1157.
- HALPHEN B. et NGUYEN Q.S. (1975) Sur les matériaux standards généralisés, *J. Méca.*, **14**, pp. 39–63.
- HALPHEN B. et SALENÇON J. (1987) *Elasto-plasticité*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- HARRISON W.J. et GERRARD C.M. (1972) Elastic theory applied to reinforced earth, *J. of Soil Mech. and Found. Div, ASCE*, **98** (SM12), pp. 1325–1345.
- HASHIN Z. (1983) Analysis of composite materials - a survey, *J. Appl. Mech.*, **50**, pp. 481–505.
- HASHIN Z. et ROSEN B.W. (1964) The elastic moduli of fiber-reinforced materials, *J. Appl. Mech, ASME*, **31**, pp. 223–232.
- HASHIN Z. et SHTRIKMAN S. (1963) A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, pp. 127–140.
- HERMANS J.J. (1967) The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, **70** (series B), pp. 1–9.
- HERRMANN L.R. et AL-YASSIN Z. (1978) Numerical analysis of reinforced soil systems, *Proc. ASCE Symp. on Earth Reinforcement*, pp. 428–457.
- HILL R. (1950) *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford.
- HILL R. (1964) Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials - I. Elastic behaviour, *J. Mech. Phys. Solids*, **12**, pp. 199–212.
- HILL R. (1965) Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials - III. Self-consistent model, *J. Mech. Phys. Solids*, **13**, pp. 189–198.
- HINTON E. et OWEN D.R.J. (1980) *Finite elements in plasticity: Theory and practice*, Pineridge Press, Swansea, Wales.
- HOEK E. et BROWN E.T. (1980) *Underground excavations in rock*, Institution of Mining and Metallurgy, London.
- HONG D.C., CHOW Y.K. et YONG K.Y. (1999) A method for the analysis of large vertically loaded pile groups, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **23**, pp. 243–262.
- HOOPER J.A. (1979) Review of behaviour of piled raft foundations, Construction Industry Research and Information association (CIRIA).
- HORIKOSHI K. et RANDOLPH M.F. (1996) Centrifuge modelling of piled raft foundations on clay, *Géotechnique*, **46** (4), pp. 741–752.

- HORIKOSHI K. et RANDOLPH M.F. (1998) A contribution to optimum design of piled rafts, *Géotechnique*, **48** (3), pp. 301–317.
- HYETT A.J., MOOSAVI M. et BAWDEN W.F. (1996) Load distribution along fully grouted bolts with emphasis on cable bolt reinforcement, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **20**, pp. 517–544.
- INDRARATNA B. et KAISER P.K. (1990a) Analytical model for the design of grouted rock bolts, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **14**, pp. 227–251.
- INDRARATNA B. et KAISER P.K. (1990b) Design for grouted rock bolts based on the convergence control method, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **27** (4), pp. 269–281.
- JASSIONNESSE C. (1998) *Contrôle de la déformation du massif renforcé par boulonnage au front de taille d'un tunnel*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 233 pages.
- JOMMI C., NOVA R. et GOMIS F. (1995) Numerical analysis of reinforced earth walls via a homogenization method, *Numerical Models in Geomechanics (NUMOG V)* (édité par G.N. Pande et S. Pietruszczak), Balkema, Rotterdam, pp. 231–236.
- JURAN I. (1977) *Dimensionnement interne des murs en terre armée*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- KATZENBACH R. (1997) Soil-structure interaction of the 300 m high Commerzbank tower in Frankfurt am Main. Measurements and numerical studies, *Proc. 14th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng, Hamburg*, vol. 2, pp. 1081–1084.
- KATZENBACH R., ARSLAN U. et GUTWALD J. (1994) A numerical study on pile foundation of the 300 m high Commerzbank-tower in Frankfurt am Main, *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Balkema, Rotterdam, pp. 271–277.
- KIM R.Y. (1981) On the off-axis and angle ply strength of composites, *Test methods and design allowable for fibrous composites* (édité par C.C Chamis), ASTM, pp. 91–108.
- KRAFT L.M., RAY R.P. et KAGAWA T. (1981) Theoretical (t - z) curves, *J. Geo. Eng. Div, ASCE*, **107** (GT11), pp. 1543–1561.
- KRIEG R.D. et KRIEG D.B. (1977) Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model, *J. Pressure Vessel Tech., ASME*, **99**, pp. 510–515.
- KUWABARA F. (1989) An elastic analysis for piled raft foundations in a homogeneous soil, *Soils and foundations*, **29** (1), pp. 82–92.
- LE NIZERHY D. (1976) *Comportement plastique des matériaux composites multicouches (Calculs de prévision par l'analyse limite)*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 119 pages.
- LEE J.S. et PANDE G.N. (1998) Analysis of stone-columns reinforced foundations, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **22**, pp. 1001–1020.

- LEE K.M. et ROWE R.K. (1990) Finite element modelling of three dimensional ground deformations due to tunnelling in soft cohesive soils - Part I. and II, *Computers and Geotechnics*, **10**, pp. 87–138.
- LEE S.H., CHUNG C.K. et KIM M.M. (1997) The optimum installation angle of reticulated root piles, *Proc. 14th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng, Hamburg*, vol. 2, pp. 1103–1106.
- LEGEAY G. (1978) *Etudes sur modèles réduits de murs en terre armée*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI.
- LEMAITRE J. et CHABOCHE J.L. (1985) *Mécanique des matériaux solides*, Dunod.
- LENZ S. (1998) *Validation expérimentale du modèle multiphasique de matériau renforcé*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Projet de Fin d'Etudes, 75 pages.
- LIGNELET P. (1991) *Fortran 77*, Masson, 4ème édn.
- LIZZI F. (1982) The *pali radice* (root piles) - A state-of-the-art report, *Proc. Symp. on Recent Developments in Ground Improvement techniques, Bangkok*, pp. 417–432.
- LIZZI F. et CARNAVALE G. (1979) Les réseaux de micropieux pour la consolidation des sols. Aspects théoriques et essais sur modèles, *Compte-rendus Coll. Int. Interactions sol-structures, ENPC, Paris*, pp. 317–324.
- LONG N.T. et URSAT P. (1977) Comportement du sol renforcé, Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées - Strasbourg.
- LUNARDI P. (1997) Conception et exécution des tunnels d'après l'analyse des déformations contrôlées dans les roches et dans les sols, *Revue Française de Géotechnique*, **80**, pp. 17–34.
- LUNARDI P. (1998) Conception et exécution des tunnels: rôle et résultats de la recherche expérimentale, *Revue Française de Géotechnique*, **84**, pp. 49–64.
- MAGHOUS S., DE BUHAN P. et BEKAERT A. (1998) Failure design of jointed rock structures by means of a homogenization approach, *Mech. of Coh. Fric. Mat.*, **3**, pp. 207–228.
- MAIER J. et THÜRLIMANN B. (1985) Bruchversuche an Stahlbetonscheiben, Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- MAJUMDAR S. et MCLAUGHLIN P.V. (1975) Effects of phase geometry and volume fraction on the plane stress limite analysis of a unidirectionnal fiber-reinforced composite, *Int. J. Solids Structures*, **11**, pp. 777–791.
- MALEKI K. (1995) *Contribution à l'étude du comportement des micropieux isolés et en groupe*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 350 pages.
- MALEKI K., FRANK R. et MAUREL C. (1995) Etude de l'effet de groupe sous charge axiale (Expérimentation de Rueil-Malmaison), Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Nantes, rapport n°FO/94/02.

- MANDOLINI A. et VIGGIANI C. (1997) Settlement of piled foundations, *Géotechnique*, **47** (4), pp. 791–816.
- MATTHIES H. et STRANG G. (1979) The solution of nonlinear finite element equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, pp. 1613–1626.
- MCLAUGHLIN P.V. et BATTERMAN S.C. (1970) Limit behaviour of fibrous materials, *Int. J. Solids Structures*, **6**, pp. 1357–1376.
- MESTAT P. (Mars 1993) Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- MESTAT P. (Juin 1994) Validation du progiciel CESAR-LCPC en comportement mécanique non linéaire - Volume 1 : fondations superficielles et tunnels, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- MESTAT P. (1997) Loi de Drücker-Prager - Note technique, *Rev. Fr. Gén. Civ.*, **1** (2), pp. 367–371.
- MESTAT P. (Novembre 1998) Analyse en éléments finis des problèmes tridimensionnels de géotechnique, *La pratique des calculs tridimensionnels en géotechnique* (édité par J.P. Magnan, Guilloux A. et Mestat P.), Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 7–50.
- MINDLIN R.D. (1936) Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *Physics*, **7**, pp. 195–202.
- MORI A., MOSS P.J., CARR A.J. et COOKE N. (1997) Behaviour of laminated elastomeric bearings, *Structural Engineering and mechanics*, **5** (4), pp. 451–469.
- MROUEH H. et SHAHROUR I. (Nov. 1998) Méthodes itératives pour la résolution des problèmes tridimensionnels en géomécanique, *La pratique des calculs tridimensionnels en géotechnique* (édité par J.P. Magnan, Guilloux A. et Mestat P.), Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 51–70.
- MÜHLHAUS H.B. (1995) A relative gradient model for laminated materials, *Continuum models for materials with microstructure* (édité par H.B. Mühlhaus), chap. 13, Wiley series in Materials, Modelling and Computation, pp. 451–482.
- MUQTADIR A. et DESAI C.S. (1986) Three-dimensional analysis of pile group foundation, *Int. J. Num. An. Meth. Geo.*, **10**, pp. 41–58.
- NAYAK G.C. et ZIENKIEWICZ O.C. (1972) Note on the « alpha »-constant stiffness method for the analysis of non linear problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, pp. 579–582.
- NGUYEN Q.S. (1977) On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration, *Int. J. Num Meth. Eng.*, **11**, pp. 817–832.

- ORESTE P.P. et PEILA D. (1996) Radial passive rockbolting in tunneling design with a new convergence-confinement model, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **33** (5), pp. 443–454.
- ORTIZ M. et POPOV E.P. (1985) Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, pp. 1561–1576.
- ORTIZ M. et SIMO J.C. (1986) Analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, pp. 353–366.
- OTTAVIANI M. (1975) Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups, *Géotechnique*, **25** (2), pp. 159–174.
- PANET M. (1995) *Le calcul des tunnels par la méthode convergence-confinement*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- PEILA D. (1994) A theoretical study of reinforcement influence on the stability of a tunnel, *Geotechnical and geological engineering*, **12**, pp. 145–168.
- PERLO S., DEGNY E. et FRANK R. (1998) Analyse du comportement des groupes de micropieux sous charge transversale - application au site expérimental de Saint-Remy-les-Chevreuses, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - CERMES, rapport n°FO/97/04.
- PLAXIS (1993) Finite Element Code for Soil and Rock Plasticity, Delft University of Technology, Netherlands, édité par P.A. Vermeer.
- PLUMELLE C. (1984) Amélioration de la portance d'un sol par inclusions de groupe et réseaux de micropieux, *Proc. Coll. Int. sur le renforcement en place des sols et des roches*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 83–89.
- PLUMELLE C. (1985) Renforcement d'un sol lâche par inclusion de micropieux, *Revue Française de Géotechnique*, **30**, pp. 47–57.
- POULOS H.G. (1968) Analysis of the settlement of pile groups, *Géotechnique*, **18**, pp. 449–471.
- POULOS H.G. (1989) Pile behaviour - Theory and Application, *Géotechnique*, **39** (3), pp. 365–415.
- POULOS H.G. et DAVIS E.H. (1974) *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, Wiley, Chichester.
- POULOS H.G. et DAVIS E.H. (1980) *Pile foundation analysis and design*, Wiley and Sons.
- PRAT M., Editeur (1995) *La modélisation des ouvrages*, Hermès, avec le concours de P. Bisch, A. Millard, P.Mestat et G. Pijaudier-Cabot.
- PRUCHNICKI E. (1991) *Contribution à l'homogénéisation en phase linéaire et non linéaire - Application au renforcement des sols*, Thèse de doctorat, U.S.T, Lille.

- PRUCHNICKI E. et SHAHROUR I. (1991) Application de la théorie de l'homogénéisation aux colonnes ballastées, *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, **496**, série Sols et Fondations, n° 213.
- PRUCHNICKI E. et SHAHROUR I. (1994) A macroscopic elastoplastic constitutive law for multilayered media : application to reinforced earth material, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **18**, pp. 507–518.
- RABCEWICZ L.V. (1964) The new Austrian tunnelling method, *Water Power*, **16-17**.
- RAMMERSTORFER F.G. et BÖHM H.J. (1994) Micromechanics for macroscopic material description of FRP's, *Engineering mechanics of fiber reinforced polymers and composite structures* (édité par J. Hult et F.G. Rammerstorfer), Springer Verlag, pp. 9–49, CISM Lectures Notes n° 348.
- RANDOLPH M.F. (1983) Design of piled raft foundations, *Proc. Recent developments in laboratory and field tests and analysis of geotechnical problems, Bangkok*, vol. 5, pp. 525–537.
- RANDOLPH M.F. (1994) Design methods for pile groups and piled rafts, *Proc. XIIIth Int. Conf. on Soil Mech. and Foun. Eng, New-Delhi*, vol. 5, pp. 61–81.
- RANDOLPH M.F. et WROTH C.P. (1978) Analysis of the deformation of vertically loaded piles, *J. Geo. Eng. Div, ASCE*, **104** (GT12), pp. 1465–1488.
- ROMSTAD K.M., HERRMANN L.R. et SHEN C.K. (1976) Integrated study or reinforced earth - I: Theoretical formulation, *J. Geo. Eng. Div, ASCE*, **102** (GT5), pp. 457–471.
- SALENÇON J. (1983) *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- SALENÇON J. (1994) *Introduction à l'élasto-plasticité et au calcul à la rupture*, Cours de l'Ecole Polytechnique.
- SALENÇON J. (1996a) *Mécanique des milieux continus, tome I. Concepts généraux*, Ellipses, AUPELF/UREF, Paris.
- SALENÇON J. (1996b) *Mécanique des milieux continus, tome II. Thermoélasticité*, Ellipses, AUPELF/UREF, Paris.
- SAMTANI N. et SONPAL R. (1989) Laboratory tests of strip footing on reinforced cohesive soils, *J. Geo. Eng., ASCE*, **115** (GT9), pp. 1326–1330.
- SANCHEZ-PALENCIA E. (1980) *Non homogeneous media and vibration theory*, Springer Verlag, CISM Lectures Notes n° 127.
- SAWICKI A. (1981) Yield conditions for layered composites, *Int. J. Solids Structures*, **17** (10), pp. 969–979.

- SAWICKI A. (1983a) Engineering mechanics of elasto-plastic composites, *Mechanics of Materials*, **109**, pp. 217–231.
- SAWICKI A. (1983b) Plastic limit behaviour of reinforced earth, *J. Geo. Eng. Div, ASCE*, **109** (2), pp. 1000–1005.
- SAWICKI A. (1998) Developments in the mechanics of reinforced soil : Empirical background and analytical approaches, *Appl. Mech. Rev., ASME*, **51** (11), pp. 651–668.
- SCHLOSSER F. (1972) La terre armée - recherches et réalisations - Bulletin de liaison n° 62, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- SCHLOSSER F. (1983) Analogies et différences dans le comportement et le calcul des ouvrages de soutènement en terre armée et par clouage de sol, *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, **418**, série Sols et Fondations, n° 184.
- SCHLOSSER F. et LONG N.T. (1973) Etude du comportement du matériau terre armée, *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, **304**, supplément au numéro.
- SCHLOSSER F. et UNTERREINER P. (1994) Renforcement des sols par inclusions, *Techniques de l'ingénieur*, **C-245**.
- SCHMITT P. (1997) *Analyse de la convergence d'une galerie souterraine renforcée par boulonnage*, Ecole Polytechnique, Projet de fin d'études, 96 pages.
- SELLALI N. (1999) *Modélisation des contacts dans le calcul tridimensionnel des ouvrages géotechniques*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 297 pages.
- SÈVE G. (1998) *Stabilité des ouvrages géotechniques - Données expérimentales et méthodes d'analyse*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 320 pages.
- SHAHROUR I. et MROUEH H. (1997) Non linear three-dimensional analysis of closely spaced twin tunnels, *Numerical Models in Geomechanics (NUMOG VI)* (édité par S. Pietruszczak et G.N. Pande), Balkema, Rotterdam, pp. 481–487.
- SHARMA K.G. et PANDE G.N. (1988) Stability of rock masses reinforced by passive, fully-grouted rock bolts, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **25** (5), pp. 273–285.
- SHEN C.K., ROMSTAD K.M. et HERRMANN L.R. (1976) Integrated study of reinforced earth - II: Behaviour and design, *J. Geo. Eng. Div, ASCE*, **102** (GT5), pp. 457–471.
- SIAD L. (1987) *Analyse de stabilité des ouvrages en terre armée par une méthode d'homogénéisation*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 136 pages.
- SIMO J. et KELLY J. (1984) The analysis of multilayer elastomeric bearings, *J. Appl. Mech., ASME*, **51**, pp. 256–262.
- SIMO J.C. et HUGHES T.J.R. (1998) *Computational inelasticity*, Springer Verlag.

- SIMO J.C. et TAYLOR R.L. (1985) Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*, **48**, pp. 101–118.
- SIMO J.C. et TAYLOR R.L. (1986) Return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Eng*, **22**, pp. 649–670.
- SMITH I.M. et WANG A. (1998) Analysis of piled raft, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **22**, pp. 777–790.
- SOMMER H., TAMARO G. et DEBENEDITTIS C. (1991) Messe Turm, foundations for the tallest building in Europe, *Proc. 4th Int. Conf. on Piling and Deep Foundations - Stresa (Italy)*, Balkema, Rotterdam, pp. 139–145.
- SPENCER A.J.M., Editeur (1984) *Continuous theory of the mechanics of fiber-reinforced composites*, *CISM Lectures Notes n° 282*, Springer Verlag, Wien.
- SPENCER A.J.M. (1992) Plasticity theory for fiber-reinforced composites, *J. Eng. Math.*, **26**, pp. 107–118.
- SUDRET B. et DE BUHAN P. (1998a) Modèle multiphasique de matériau renforcé, CERMMO, projet National FOREVER - Thème 3.6 - Rapport n°FO/97/03.
- SUDRET B. et DE BUHAN P. (1998b) Multiphase model of reinforced materials, *Proc. 2nd Int. PhD. Symp. in Civil Engineering, Budapest* (édité par G.L Balázs), pp. 516–523.
- SUDRET B. et DE BUHAN P. (1999a) Modélisation multiphasique de matériaux renforcés par inclusions linéaires, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **327** (Série II-b), pp. 7–12.
- SUDRET B. et DE BUHAN P. (1999b) Reinforced geomaterials: computational model and applications, *Proc. 4th Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials CLEM'99, Troy (USA)* (édité par R.C. Picu et E. Krempl), pp. 339–342.
- SUDRET B., LENZ S. et DE BUHAN P. (1999) A multiphase constitutive model for inclusion-reinforced materials: theory and numerical implementation, *Proc. Eur. Conf. on Comp. Mech. ECCM'99, Munich (Germany)*, 31 Août - 3 Septembre.
- SUDRET B., MAGHOUS S., DE BUHAN P. et BERNAUD D. (1998) Elastoplastic analysis of inclusion reinforced structures, *Metals and materials*, **4** (3), pp. 252–255, également présenté à la conférence AEPA'98 (Séoul).
- SUN MICROSYSTEMS I., Editeur (1992) *SPAR Compiler FORTRAN 2.0.1*, Reference manual.
- SUQUET P. (1982) *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, (Thèse d'état).
- SUQUET P. (1983) Analyse limite et homogénéisation, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **296** (Série II-b), pp. 1355–1358.

- TAKEMURA J., OKAMURA M., SUEMASA N. et KIMURA T. (1992) Bearing capacities and deformations of sand reinforced with geogrids, *Earth Reinforcement Practice* (édité par Ochiai, Hayashi et Otani), Balkema, Rotterdam, pp. 695–700.
- TALIERCIO A. (1992) Lower and upper bounds to the macroscopic strength domain of a fiber-reinforced composite material, *Int. J. Plas*, **8**, pp. 741–762.
- TANDON G.P. et WENG G.J. (1984) The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites, *Polym. Compos.*, **5**, pp. 327–333.
- THOMAS J.N. (1984) An improved accelerated initial stress procedure for elasto-plastic finite element analysis, *Int. J. Num. An. Meth. Geo*, **8**, pp. 359–379.
- TIMOSHENKO S. (1936) *Théorie de l'élasticité*, Librairie Polytechnique C. Béranger.
- TRAHER M. et JESSBERGER H.L. (1991a) The behaviour of pile-raft foundations investigated in centrifuge model tests, *Proc. "Centrifuge 91"*, Colorado, Balkema, pp. 225–234.
- TRAHER M. et JESSBERGER H.L. (1991b) Investigation of the behaviour of pile-raft foundations by centrifuge modelling, *Proc. 10th Eur. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, vol. 1, pp. 597–603.
- TRUESDELL C. et TOUPIN R. (1960) *The classical field theories*, *Encyclopedia of Physics*, vol. III/1, Springer Verlag, Berlin.
- TSAI S.W. (1968) Strength theories of filamentary structures, *Fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites* (édité par R.T Schwartz et H.S Schwartz), Wiley Interscience, New York.
- UNTERREINER P. (1994) *Contribution à l'étude et à la modélisation numérique des sols cloués*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- VERZURA L. (1993) *Analyse de la stabilité d'ouvrages en sol renforcé par fils continus*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 212 pages.
- VETTER K. (1998) *Untersuchungen zum Tragverhalten der Kombinierten Pfahl-Platten-gründung des Messeturms in Frankfurt am Main auf der Basis von Messungen und numerischen Computersimulation*, Technische Universität Darmstadt, Institut für Geotechnik, Diplomarbeit, 190 pages.
- VIDAL H. (Juillet-Août 1966) La terre armée, *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, **223**.
- WILKINS M.L. (1964) Calculation of elastic-plastic flow, *Methods of computational physics 3* (édité par Alder B.), Academic Press - New York.
- WULLSCHLÄGER D. et NATAU O. (1983) The bolted rock mass as an anisotropic continuum - Material behaviour and design suggestions for rock cavities, *Proc. Int. Symp. on Rock Bolting, Abisko*.

- ZAOUI A. (1998) *Matériaux hétérogènes et composites*, Cours de l'Ecole Polytechnique.
- ZHAO Y.H. et WENG G.J. (1990) Theory of plasticity for a class of inclusion and fiber-reinforced composites, *Micromechanics and Inhomogeneities - The Toshio Mura 65th Anniversary volume* (édité par G.J. Weng, M. Taya et H. Abe), pp. 599–622.
- ZIENKIEWICZ O.C. et TAYLOR R.L. (1994a) *The finite element method*, vol. 1, McGraw-Hill, 4ème édn.
- ZIENKIEWICZ O.C. et TAYLOR R.L. (1994b) *The finite element method - Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*, vol. 2, McGraw-Hill, 4ème édn.
- ZIENKIEWICZ O.C., VALLIAPAN S. et KING I.P. (1969) Elasto-plastic solutions of engineering problems «initial stress», finite element approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, pp. 75–100.

Annexe A

Notations

Cette annexe regroupe les principales notations apparaissant dans le mémoire. De façon générale, les conventions suivantes sont utilisées :

- Les exposants m et r se réfèrent respectivement aux phases *matrice* et *renforcement*. L'exposant j est utilisé de façon générique pour m ou r .
- Les indices e , an et p correspondent aux vocables *élastique*, *anélastique* et *plastique*. L'indice inc correspond à *inclusion*.
- Les quantités relatives à une phase (contraintes partielles, déformations, caractéristiques mécaniques) sont désignées par des lettres *minuscules*, celles relatives à un système multiphasique par des lettres *majuscules*.
- La notation $\dot{\varkappa}$ désigne le taux de variation de la quantité \varkappa .

Les symboles utilisés sont classés en deux catégories : les lettres latines puis les lettres grecques, chacune par ordre alphabétique, indépendamment du chapitre où elles apparaissent. Les symboles pouvant avoir plusieurs significations sont répétés.

Lettres latines

$()_n$	cas de charge courant (éléments finis)
$()^i$	itération courante (éléments finis)
$\underline{\underline{a}}^m$	tenseur des modules élastiques de la phase matrice
a^r	raideur scalaire de la phase renforcement
$\underline{\underline{A}}$	tenseur des modules élastiques total

$\underline{\underline{\underline{A}}}^{\text{e.p}}$	tenseur des modules élasto-plastiques
$\underline{\underline{\underline{A}}}_{\text{t.c}}^{\text{e.p}}$	tenseur des modules élasto-plastiques tangent consistant
\mathcal{A}	cellule de base
$\mathcal{A}^m, \mathcal{A}^f$	domaine d'une cellule de base occupé par la matrice, par l'inclusion
\mathcal{A}'	puissance virtuelle des quantités d'accélération
B	largeur d'une fondation
$B(r)$	déplacement radial de la phase renforcement (boulonnage de tunnel)
\mathbf{B}_e	matrice donnant les déformations en fonction des déplacements nodaux (éléments finis)
c, C, C_u	cohésion
$\underline{\underline{\underline{c}}}^{I,r}$	tenseur d'élasticité d'interaction
$\underline{\underline{\underline{c}}}^m$	tenseur des complaisances élastiques de la phase matrice
c^r	complaisance élastique d'une phase renforcement
c_I	paramètre d'interaction définissant $\underline{\underline{\underline{c}}}^{I,r}$ lorsque celui-ci est uniaxial
$\underline{\underline{\underline{C}}}$	tenseur des complaisances élastiques total
\mathcal{C}^j	domaine d'élasticité actuel
$\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\underline{\xi}}^{\text{d}})$	espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles
\mathbb{C}_n	espace de minimisation de l'énergie (éléments finis)
d	diamètre d'une inclusion
d_b	densité de boulonnage
$d\mathcal{S}$	facette
$d\mathcal{S}_0$	projection de la facette $d\mathcal{S}$ sur le plan perpendiculaire à \underline{e}_r
$\mathbf{d}^m, \mathbf{d}^r, \mathbf{D}$	matrice d'élasticité associée à la phase matrice, à la phase renforcement, totale
\mathcal{D}	dissipation volumique intrinsèque
e	densité volumique d'énergie interne
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	vecteurs unitaires d'une base orthonormée
\underline{e}_r	vecteur unitaire repérant une direction de renforcement

$\underline{\varepsilon}_r$	représentation vectorielle de $\underline{\varepsilon}_r \otimes \underline{\varepsilon}_r$
E	énergie interne
E^m, E^r, E^f, E_b	module d'Young de la phase matrice, de la phase renforcement ($\equiv a^r$), de l'inclusion, du boulon
E_1, E_2	modules d'Young des constituants d'un multicouche
E_L, E_T	module d'Young longitudinal, transverse
$\mathcal{E}(\underline{\xi})$	énergie potentielle
$\mathcal{E}_n(\underline{U})$	énergie potentielle discrétisée
$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m), f^r(\sigma^r)$	critère de plasticité de la phase matrice, d'une phase renforcement
$\underline{f}_e^{\text{an}}, \underline{f}_e^\sigma, \underline{f}_e^\Omega, \underline{f}_e^{ST}$	vecteur force élémentaire (éléments finis)
$F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)$	critère de plasticité global
$F^{\text{rup}}(\underline{\underline{\Sigma}})$	critère de rupture global
\underline{F}	vecteur force global (éléments finis)
\underline{F}^p	vecteur des forces plastiques global (éléments finis)
$g^m(\underline{\underline{\sigma}}^m)$	potentiel plastique
$\mathcal{G}^j, \mathcal{G}^{\text{hom}}$	domaines de résistance des constituants, homogénéisé
H	hauteur de la structure
$I, \underline{I}, \underline{I}^j$	densité volumique d'efforts d'interaction
J_2	second invariant du déviateur des contraintes
$\mathbf{J}, \mathbf{j}, \mathcal{J}$	matrice jacobienne, son inverse, son déterminant (éléments finis)
k	module de compression transverse
k_p, k_r, k_{pr}	raideur élastique d'une fondation (groupe de pieux, semelle, radier de pieux)
\mathbf{k}_e	matrice de rigidité élémentaire
\mathbf{K}	matrice de rigidité globale
$\mathbf{K}_{c.1}$	matrice de rigidité globale après prise en compte des conditions aux limites
K	énergie cinétique
K_o	paramètre définissant l'élasticité du boulonnage radial

ℓ	longueur caractéristique d'un effet de bord ou d'échelle
L	largeur de la structure
L	longueur des pieux
$\underline{\underline{L}}^m, \underline{\underline{L}}^r$	opérateurs de localisation des contraintes
\mathbf{L}	matrice de dérivation (éléments finis)
M	module d'écroutissage
$M(r)$	déplacement radial de la phase matrice (boulonnage de tunnel)
M^r, N^r, V^r	densités de moment fléchissant, d'effort normal et d'effort tranchant dans une phase renforcement (par unité de surface transverse)
n	nombre de degrés de liberté du système (éléments finis)
$\underline{n}(\underline{x})$	normale extérieure au point \underline{x}
N	nombre de directions de renforcement
$N_{c,l}$	nombre de conditions aux limites en déplacement (éléments finis)
N_c	facteur de capacité portante d'une fondation
N_{inc}	effort normal dans une inclusion
NPG	nombre de points d'intégration (points de Gauss) d'un élément fini
\mathbf{N}_e	matrice des fonctions de forme d'un élément fini
$p'_{(i)}^m, p'_{(i)}^r, p'_{(i)}^I$	densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à la phase matrice, à une phase renforcement, à l'interaction
$\mathcal{P}'_{(i)}, \mathcal{P}'_{(i)}^j$	puissance virtuelle des efforts intérieurs du sous-système, de la phase j
$\mathcal{P}'_{(e)}, \mathcal{P}'_{(e)}^j$	puissance virtuelle des efforts extérieurs du sous-système, de la phase j
$\mathcal{P}'_{\text{déf}}$	puissance de déformation dans le mouvement réel
P_0	pression géostatique initiale
\dot{Q}	taux de chaleur reçue
$\mathcal{Q}(t)$	chargement appliqué au système
R_{eq}	rayon équivalent d'une fondation
\mathbb{R}, \mathbb{R}^3	espace vectoriel euclidien à 1 (3) dimension(s)
s	espacement entre deux inclusions (radier de pieux)
s_{inc}	section d'une inclusion

s_r	abscisse curviligne le long de \underline{e}_r
$\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{s}}^m$	déviateur du tenseur des contraintes
S	entropie
S_b	section d'un boulon
S_{VER}	section d'un VER (perpendiculaire à la direction de l'inclusion)
$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$	système mécanique (sous-système), système multiphasique
\mathcal{S}^{lj}	sous-système monophasique
$\mathcal{S}_{\text{rup}}^+, \mathcal{S}_{\text{rup}}^-, \mathcal{S}_{\text{rup}}$	surface de rupture par écoulement plastique
$S_{T_i}, S_{T_i}^j$	domaine sur lequel la composante d'effort T_i est donnée
$S_{\xi_i}, S_{\xi_i}^j$	domaine sur lequel la composante de déplacement ξ_i est donnée
t	épaisseur du radier
T	température
\underline{T}^j	densité surfacique d'efforts extérieurs
$\underline{T}^{\text{d},j}$	conditions aux limites en efforts
\underline{u}_e	vecteur des déplacement nodaux d'un élément fini
$U(\rho)$	énergie bloquée
\underline{U}	vecteur global des déplacements nodaux
$\hat{\underline{U}}^j$	champ de vitesse virtuel
$\hat{\underline{U}}_0$	champ de vitesse virtuel de translation
\mathcal{U}	espace vectoriel des mouvements virtuels
$\hat{\mathcal{U}}$	mouvement virtuel
VER	volume élémentaire représentatif
\mathcal{V}_e	volume d'un élément fini
$\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$	élément fini de référence
w, w_{moyen}	déplacement vertical d'un radier de pieux, déplacement moyen
$\mathcal{W}'_{\text{déf}}$	travail de déformation dans le mouvement réel
\underline{x}	position du point courant
\underline{x}_e	vecteur des coordonnées nodaux (éléments finis)

\underline{X}^r	densité de résultante d'efforts par unité de surface transverse dans une phase renforcement (modèle avec flexion)
-------------------	---

Lettres grecques

α	variable d'écouissage
$\alpha^r, \beta^r, \gamma^r$	paramètres élastiques d'une phase renforcement (modèle avec flexion)
β	angle entre deux inclusions successives (boulonnage radial de tunnel)
δ	déplacement imposé (poinçonnement)
$\underline{\delta}^r$	déplacement relatif de la phase renforcement par rapport à la phase matrice
$\underline{\underline{\varepsilon}}^m$	tenseur des déformations de la phase matrice
ε^r	déformation axiale d'une phase renforcement
$\underline{\underline{\varepsilon}}_e, \underline{\underline{\varepsilon}}_{an}, \underline{\underline{\varepsilon}}_p$	déformation élastique, anélastique, plastique
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	représentation vectorielle de $\underline{\underline{\varepsilon}}$
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations totales
φ	angle de frottement interne
$\underline{\underline{\gamma}}^j$	accélération de la phase j
Γ	domaine d'élasticité généralisé dans l'espace $\{\underline{\underline{\Sigma}}\} \times \{\rho\}$
$\underline{\underline{\Gamma}}^r$	densité de résultante de moment par unité de surface transverse dans une phase renforcement (modèle avec flexion)
η, η^r	fraction volumique d'une phase renforcement
λ	taux de déconfinement
$\lambda, \mu, \lambda^m, \mu^m$	coefficients de Lamé
$\dot{\lambda}^m, \dot{\lambda}^r, \dot{\lambda}$	multiplicateur plastique
μ_1, μ_2	modules de cisaillement des constituants d'un multicouche
ν, ν^m, ν_1, ν_2	coefficient de Poisson
ν_L, ν_T	coefficient de Poisson longitudinal, transverse
Ω, Ω'	volume du système, d'un sous-système
$\partial\Omega, \partial\Omega'$	frontière du système Ω , d'un sous-système Ω'

$\underline{\hat{\Omega}}^j$	champ de rotation virtuel
$\underline{\hat{\Omega}}_0, \underline{\hat{\underline{\Omega}}}_0$	champ de rotation virtuel constant, tenseur antisymétrique associé
ϖ	paramètre adimensionnel (rapport de longueurs ou de modules élastiques)
θ^r	glissement d'une phase renforcement (modèle avec flexion)
ρ	paramètre d'écroûissage
$\rho^j \underline{F}^j$	densité volumique d'efforts extérieurs
σ_{inc}	contrainte axiale dans une inclusion
$\underline{\underline{\sigma}}_0$	état de contrainte initial
$\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r, \underline{\underline{\sigma}}^j$	contraintes partielles dans les phases matrice et renforcement
$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}}$	prédicteur élastique
$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{s.a}}$	état de contrainte statiquement admissible (vérifiant l'équilibre)
$\sigma_+^r, \sigma_-^r, \sigma_o^r, \sigma_o^m$	limite d'élasticité d'une phase renforcement en traction ou compression, de la phase matrice
$\underline{\underline{\Sigma}}$	tenseur des contraintes totales
Σ^{el}	limite élastique en compression simple
τ	cisaillement à l'interface inclusion/matrice
$\underline{\xi}, \underline{\xi}^j$	champ de déplacement
$\underline{\xi}^d, \underline{\xi}^{d,j}$	conditions aux limites en déplacement
$\underline{\Xi}$	vecteur déplacement généralisé (éléments finis)
$\underline{\zeta} = (\xi, \eta)$	coordonnées réduites (éléments finis)
χ^r	courbure d'une phase renforcement (modèle avec flexion)
ψ	angle de dilatance
$\Psi, \psi^m, \psi^r, \psi^{I,r}$	densité d'énergie libre

Annexe B

Aspects thermodynamiques du modèle élasto-plastique adhérent

1 Energie bloquée et dissipation

Cette section regroupe le détail des développements associés à la thermodynamique du modèle élasto-plastique adhérent (Chapitre 2, section 3.2).

Dans le cadre de l'élasto-plasticité, la densité d'énergie libre totale définie en (2.56),(2.57) devient ¹ :

$$(B.1) \quad \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m) : \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m) + a^r (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{c}}^m : \underline{\underline{\sigma}}^m + c^r (\sigma^r)^2 \right) \end{aligned}$$

En utilisant la décomposition (2.99) ainsi que le paramétrage (2.103), on peut mettre (B.1) sous la forme d'une somme de trois termes :

$$(B.2) \quad \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{el}}^m : \underline{\underline{c}}_{\text{el}}^m : \underline{\underline{\sigma}}_{\text{el}}^m + c^r (\sigma_{\text{el}}^r)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (c_{rrrr}^m + c^r) \rho^2 \\ &\quad + \underline{\underline{\sigma}}_{\text{el}}^m : \underline{\underline{c}}_{\text{el}}^m : (-\rho \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) + c^r \rho \sigma_{\text{el}}^r \end{aligned}$$

Le troisième terme vaut :

$$(B.3) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{\text{el}}^m : \underline{\underline{c}}_{\text{el}}^m : (-\rho \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) + c^r \rho \sigma_{\text{el}}^r = \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{el}}^m : (-\rho \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) + \rho \varepsilon_{\text{el}}^r = \rho (\varepsilon_{\text{el}}^r - \varepsilon_{\text{el},11}^m)$$

Il est donc nul compte-tenu de la compatibilité géométrique des déformations $(\underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{el}}^m, \varepsilon_{\text{el}}^r)$ issues d'une évolution purement élastique à partir d'un état naturel. Introduisant (2.73) dans

1. On se limite à une direction de renforcement.

l'équation précédente, on obtient l'expression de la densité d'énergie libre en variables totales :

$$(B.4) \quad \psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\Sigma}} + U(\rho)$$

ou :

$$(B.5) \quad U(\rho) = \frac{1}{2} (c_{rrrr}^m + c^r) \rho^2$$

En l'absence de mouvement relatif entre les phases, et en vertu de la condition de compatibilité géométrique (2.64), la densité de puissance de déformation dans le mouvement réel (2.52) se simplifie en :

$$(B.6) \quad p'_{\text{def}}(\mathbb{U}) = \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^m + \sigma^r \dot{\epsilon}^r = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

de sorte que l'inégalité de Clausius-Duhem locale devient d'après (2.51) :

$$(B.7) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{\psi} \geq 0$$

ou \mathcal{D} est le taux de dissipation intrinsèque volumique. Reportant (B.4) dans (B.7), il vient :

$$(B.8) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \left(\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_e + \dot{U} \right) = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p - \dot{U} \geq 0$$

La forme quadratique (B.5) de $U(\rho)$ permet d'écrire :

$$(B.9) \quad \dot{U} = \rho (c_{rrrr}^m + c^r) \dot{\rho} = -\rho \dot{\alpha}$$

définissant ainsi la *variable d'écroissance* α associée au paramètre ρ . D'après (2.104), on a :

$$(B.10) \quad \alpha = -(c_{rrrr}^m + c^r) \rho = \varepsilon_p^r - \varepsilon_{p,rr}^m$$

ce qui montre que l'écroissance est effectivement lié à l'incompatibilité des déformations plastiques des phases.

En reportant (B.9) dans (B.8), on obtient finalement :

$$(B.11) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p + \rho \dot{\alpha}$$

Compte tenu de (B.6) et de la forme (B.1) de l'énergie libre, le taux de dissipation plastique \mathcal{D} (Eq. B.7) se met sous la forme :

$$(B.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{D} &= \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^m + \sigma^r \dot{\epsilon}^r - \underline{\underline{\sigma}}^m : \left(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^m - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m \right) - \sigma^r \left(\dot{\epsilon}^r - \dot{\epsilon}_p^r \right) \\ &= \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m + \sigma^r \dot{\epsilon}_p^r \end{aligned}$$

La comparaison des approches énergétiques en variables partielles et totales conduit à l'identification :

$$(B.13) \quad \mathcal{D} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p + \rho \dot{\alpha} = \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m + \sigma^r \dot{\epsilon}_p^r$$

La dissipation est ainsi purement plastique au niveau de chaque phase alors qu'elle fait apparaître un terme lié à l'écroissance au niveau global.

2 Démonstration de l'inégalité (2.111)

Cette équation permet de prouver le caractère *standard généralisé* de la plasticité du milieu multiphasique adhérent. La démonstration repose sur l'égalité suivante :

$$(B.14) \quad \forall (\underline{\underline{\Sigma}}^*, \underline{\underline{\rho}}^*) \in \Gamma, \quad \underline{\underline{\Sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* + \underline{\underline{\rho}}^* \dot{\alpha} = \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m + \underline{\underline{\sigma}}^{*r} \dot{\epsilon}_p^r$$

En effet, les contraintes partielles associées à $(\underline{\underline{\Sigma}}^*, \underline{\underline{\rho}}^*)$ sont, d'après (2.105) :

$$(B.15) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}}^* - \underline{\underline{\rho}}^* \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{*r} = \underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}}^* + \underline{\underline{\rho}}^*$$

Pour un taux de déformation plastique quelconque $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^*$, on a d'après (2.102),(2.103) :

$$(B.16) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m - \underline{\underline{\rho}}^* \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r)$$

et d'après (2.104) :

$$(B.17) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_{p,rr}^m - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^r = \underline{\underline{\rho}}^* \left[(\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) + c^r \right]$$

En additionnant et retranchant le terme adéquat, le second membre de (B.14) peut être réécrit sous la forme :

$$(B.18) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* + \underline{\underline{\sigma}}^{*r} \dot{\epsilon}_p^r &= \underline{\underline{\sigma}}^m : \left[\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m - \underline{\underline{\rho}}^* \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) \right] \\ &+ \underline{\underline{\sigma}}^{*r} (\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^r + \underline{\underline{\rho}}^* c^r) \\ &+ \underline{\underline{\rho}}^* \left[\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) - \underline{\underline{\sigma}}^{*r} c^r \right] \end{aligned}$$

Se référant à (B.16), on reconnaît dans le premier terme le produit $\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^*$. En ce qui concerne le second, en utilisant (B.17), on montre qu'il vaut $\underline{\underline{\sigma}}^{*r} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r)$. La somme des deux vaut donc :

$$(B.19) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* + \underline{\underline{\sigma}}^{*r} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* : \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r = (\underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{\sigma}}^{*r} \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^* = \underline{\underline{\Sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^*$$

Enfin, en utilisant (B.15) et en se rappelant la définition de la variable d'écrouissage α (Eq.(B.10)), on décompose le troisième terme de (B.18) de la façon suivante :

$$(B.20) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\rho}}^* (\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) - \underline{\underline{\sigma}}^{*r} c^r) &= \\ \underbrace{\underline{\underline{\rho}}^* (-\underline{\underline{\rho}}^* (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) : \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) - \underline{\underline{\rho}}^* c^r)}_{\underline{\underline{\rho}}^* \dot{\alpha}} &+ \underbrace{\underline{\underline{\rho}}^* \left[(\underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}}^*) : \underline{\underline{c}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) - c^r \underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}}^* \right]}_0 \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de (B.14).

Ayant établi une équivalence énergétique entre la description en variables totales et en variables partielles², il suffit maintenant d'utiliser la parfaite plasticité des constituants de chaque phase pour obtenir le résultat. En effet, si $(\underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho^*)$ appartiennent au domaine Γ , les contraintes partielles associées vérifient séparément leur critère de plasticité. On peut alors leur appliquer séparément le principe du travail plastique maximum :

$$(B.21) \quad \begin{aligned} \left(\underline{\underline{\sigma}}^m - \underline{\underline{\sigma}}^{*m} \right) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p^m &\geq 0 & \forall \underline{\underline{\sigma}}^{*m} &; f^m(\underline{\underline{\sigma}}^{*m}) \leq 0 \\ \left(\sigma^r - \sigma^{*r} \right) \dot{\epsilon}_p^r &\geq 0 & \forall \sigma^{*r} &; f^r(\sigma^{*r}) \leq 0 \end{aligned}$$

Additionnant les équations précédentes, et utilisant (B.14), on montre finalement l'inégalité recherchée :

$$(B.22) \quad \forall (\underline{\underline{\Sigma}}^*, \rho^*) \in \Gamma \quad (\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p + (\rho - \rho^*) \dot{\alpha} \geq 0$$

2. L'équation (A.14) s'apparente à un *lemme de Hill généralisé*, en référence aux méthodes de changement d'échelle micro-macro.

Annexe C

Critère de rupture du milieu multiphasique adhérent

Le *critère de rupture global* \mathcal{S}_{rup} du milieu multiphasique élasto-plastique adhérent est défini par l'ensemble des états de contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}$ pour lesquels se produit un *écoulement plastique libre*, c'est à dire une déformation plastique non nulle sous charge constante, soit :

$$(C.1) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = 0$$

Les notations utilisées ci-après sont celles du chapitre 2, section 3.2. On s'y reportera si nécessaire. Ayant déterminé dans le cas général la règle de normalité (2.112) et le multiplicateur plastique (2.116), on peut les préciser ici dans le cas de l'écoulement plastique libre défini par (C.1). Trois situations sont envisageables.

1 Plastification de la phase matrice seule

Dans ce cas, le critère de plasticité de la matrice est saturé, tandis que la phase renforcement reste dans le domaine élastique :

$$(C.2) \quad f^m [\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)] = 0 \quad , \quad f^r [\sigma^r(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)] < 0$$

La valeur prise par le critère de plasticité global (2.106) est alors :

$$(C.3) \quad F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) = f^m \left(\underline{\underline{L}}^m : \underline{\underline{\Sigma}} - \rho \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r \right) = 0$$

Les dérivées partielles du critère par rapport à ses arguments se calculent alors de la façon suivante :

$$(C.4\text{-a}) \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} = \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} : \underline{\underline{L}}^m$$

$$(C.4\text{-b}) \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} = - \frac{\partial f^m}{\partial \sigma_{rr}^m}$$

2 Plastification de la phase renforcement seule

Dans ce cas, le critère de plasticité de la phase renforcement est saturé, tandis que la phase matrice reste dans le domaine élastique :

$$(C.11) \quad f^m [\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)] < 0 \quad , \quad f^r [\sigma^r(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho)] = 0$$

Le critère global vaut donc :

$$(C.12) \quad F(\underline{\underline{\Sigma}}, \rho) = f^r (\underline{\underline{L}}^r : \underline{\underline{\Sigma}} + \rho) = 0$$

Ses dérivées partielles ont pour expression :

$$(C.13) \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} = \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} \underline{\underline{L}}^r \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r}$$

Le multiplicateur plastique (2.116) vaut alors :

$$(C.14) \quad \dot{\Lambda} = (c_{rrrr}^m + c^r) \frac{\underline{\underline{L}}^r : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}}{\partial f^r / \partial \sigma^r}$$

D'après (2.91), on obtient par dérivation $\frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} = \pm 1$. Puisque $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = 0$, on en déduit $\dot{\Lambda} = 0$. Il n'y a donc pas de rupture possible par écoulement plastique libre de la phase de renforcement seule.

3 Plastification des deux phases

Dans ce dernier cas, on suppose que les critères respectifs des deux phases sont saturés. La parfaite plasticité de la phase renforcement donne alors :

$$(C.15) \quad \dot{f}^r(\sigma^r) = \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} \dot{\sigma}^r = 0 \quad \implies \quad \dot{\sigma}^r = 0$$

Cette condition signifie que la contrainte σ^r reste constante et égale à la limite d'élasticité, c'est à dire soit σ_+^r en traction, soit $-\sigma_-^r$ en compression.

Reprenant l'expression (2.105-b) de localisation de la contrainte σ^r , on a :

$$(C.16) \quad \dot{\sigma}^r = \underline{\underline{L}}^r : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} + \dot{\rho} = 0$$

Par ailleurs, le taux déformation plastique totale résultant de la combinaison de (2.102), (2.103-b) et (2.87) s'écrit :

$$(C.17) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p = -\dot{\rho} \underline{\underline{e}}^m : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) + \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}$$

Comme par hypothèse $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = 0$, on tire des deux équations précédentes :

$$(C.18) \quad \dot{\rho} = 0$$

et

$$(C.19) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}_p = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m}, \quad \dot{\lambda}^m \geq 0$$

Il faut remarquer que les contraintes partielles des *deux* phases restent constantes. En effet $\dot{\sigma}^r = 0$ et $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = 0$ impliquent que $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^m = 0$. Les taux de déformation élastiques associés sont donc nuls. La compatibilité géométrique des déformations totales implique alors celle des déformations plastiques. Elle s'écrit :

$$(C.20) \quad \dot{\lambda}^r \frac{\partial f^r}{\partial \sigma^r} = \dot{\epsilon}_p^r = \dot{\epsilon}_{p,rr} = \dot{\lambda}^m \frac{\partial f^m}{\partial \sigma_{rr}^m}$$

S'il y a écoulement plastique, les deux multiplicateurs $\dot{\lambda}^m$ et $\dot{\lambda}^r$ sont positifs. La relation précédente impose alors que les termes $\partial f^r / \partial \sigma^r$ et $\partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m$ soient de même signe. Les zones du critère de rupture associées à ce type d'écoulement plastique sont donc définies respectivement par :

$$(C.21) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}}^+ = \{ \underline{\underline{\Sigma}}; \quad f^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_+^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = 0 \quad , \quad \partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m > 0 \}$$

si la phase renforcement plastifie en traction, et :

$$(C.22) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}}^- = \{ \underline{\underline{\Sigma}}; \quad f^m(\underline{\underline{\Sigma}} + \sigma_-^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) = 0 \quad , \quad \partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m < 0 \}$$

si la phase renforcement plastifie en compression.

Pour visualiser ces surfaces, il est utile de partitionner la frontière du domaine d'élasticité $\partial \mathcal{C}^m$ de la matrice selon le signe de $\partial f^m / \partial \sigma_{rr}^m$. On note sans confusion possible :

$$(C.23) \quad \partial \mathcal{C}^m = \partial \mathcal{C}_+^m \cup \partial \mathcal{C}_-^m$$

On peut remarquer que la courbe \mathcal{C}^0 définie plus haut est exactement l'intersection de ces deux domaines. Avec ces notations, la surface $\mathcal{S}_{\text{rup}}^+$ (resp. $\mathcal{S}_{\text{rup}}^-$) n'est rien d'autre que le translaté de $\partial \mathcal{C}_+^m$ (resp. $\partial \mathcal{C}_-^m$) de la quantité σ_+^r (resp. $-\sigma_-^r$) le long de la direction $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$.

Finalement, la figure C.1 représente la surface de rupture \mathcal{S}_{rup} du milieu multiphasique obtenu par la réunion des trois morceaux :

$$(C.24) \quad \mathcal{S}_{\text{rup}} = \mathcal{S}_{\text{rup}}^m \cup \mathcal{S}_{\text{rup}}^+ \cup \mathcal{S}_{\text{rup}}^-$$

Chacun de ces morceaux est lié à un *mode de rupture ductile* particulier du milieu multiphasique :

- $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{S}_{\text{rup}}^m$: plastification de la matrice seule,
- $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{S}_{\text{rup}}^+$: plastification de la matrice et de la phase renforcement en *traction*,
- $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{S}_{\text{rup}}^-$: plastification de la matrice et de la phase renforcement en *compression*.

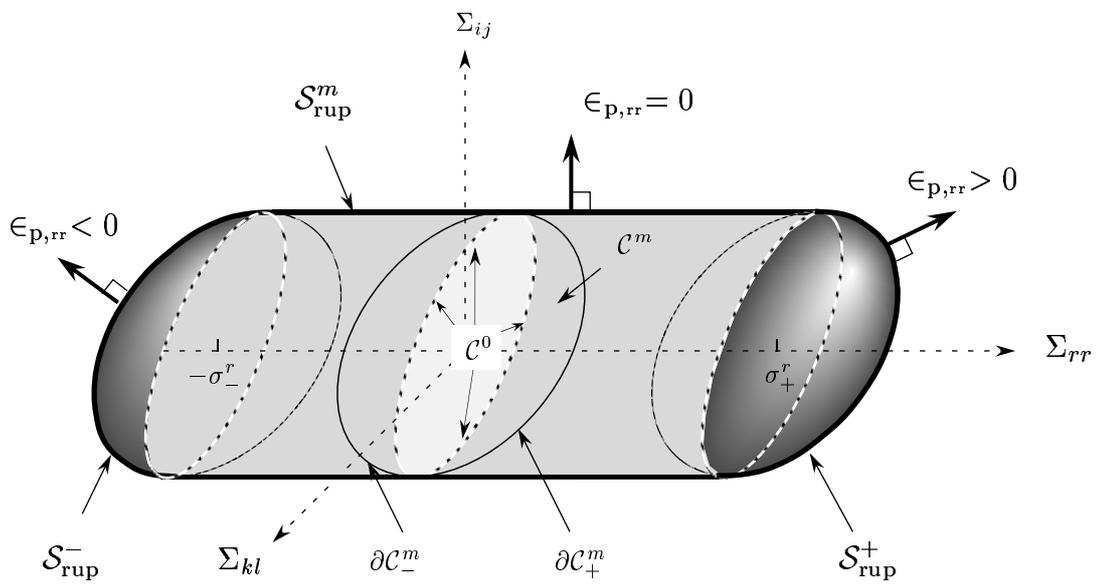


FIG. C.1: Critère de rupture du milieu multiphasique dans l'espace des contraintes $\{\underline{\Sigma}\}$

Annexe D

Différences finies

1 Discrétisation et approximation des dérivées

La méthode des différences finies permet une résolution numérique approchée d'un système d'équations différentielles. On commence par discrétiser l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en $(N + 1)$ points d'abscisse $\{x_i, i = 0, \dots, N\}$ tels que $x_0 = a, x_N = b$. On note $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ pour $i = 0, \dots, N - 1$.

En chaque point, les approximations des dérivées successives d'une fonction f s'obtiennent par combinaison linéaire des valeurs de f au point courant et aux points adjacents. En effet, effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de x_i , il vient :

$$(D.1-a) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta_i f'(x_i) + O(\delta_i^2)$$

$$(D.1-b) \quad f(x_{i-1}) = f(x_i) - \delta_{i-1} f'(x_i) + O(\delta_{i-1}^2)$$

Une approximation de la dérivée première de f en x_i est donc donnée par :

$$(D.2) \quad f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{\delta_{i-1} + \delta_i}$$

De même, en poussant le développement à l'ordre 2, on obtient :

$$(D.3-a) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta_i f'(x_i) + \frac{\delta_i^2}{2} f''(x_i) + O(\delta_i^3)$$

$$(D.3-b) \quad f(x_{i-1}) = f(x_i) - \delta_{i-1} f'(x_i) + \frac{\delta_{i-1}^2}{2} f''(x_i) + O(\delta_{i-1}^3)$$

L'élimination de $f'(x_i)$ entre ces deux équations donne :

$$(D.4) \quad f''(x_i) = \alpha f(x_{i-1}) - (\alpha + \beta) f(x_i) + \beta f(x_{i+1})$$

où l'on a posé :

$$(D.5-a) \quad \alpha = \frac{2}{\delta_{i-1}(\delta_{i-1} + \delta_i)} \quad , \quad \beta = \frac{2}{\delta_i(\delta_{i-1} + \delta_i)}$$

2 Application au cas du tunnel renforcé

On rappelle les équations différentielles liant les champs de déplacement pour le cas du tunnel profond boulonné dans le modèle multiphasique général (chap. 3, section 4.2) :

$$(D.6) \quad \begin{cases} \frac{K_o}{x} B''(x) - c_I [B(x) - M(x)] = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \left(M'(x) + \frac{M(x)}{x} \right)' + c_I [B(x) - M(x)] = 0 \end{cases}$$

et les conditions aux limites :

$$(D.7-a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = 0$$

$$(D.7-b) \quad B'(R) = 0$$

$$(D.7-c) \quad (\lambda + 2\mu)M'(R) + \lambda \frac{M(R)}{R} = \lambda_c P_0$$

Posant $B_i \equiv B(x_i)$ et $M_i \equiv M(x_i)$, la substitution de (D.2), (D.4) dans (D.6) fournit le système linéaire :

$$(D.8) \quad \begin{cases} \frac{K_o}{x_i} (\alpha B_{i-1} - (\alpha + \beta) B_i + \beta B_{i+1}) - c_I (B_i - M_i) = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \left(\alpha M_{i-1} - (\alpha + \beta) M_i + \beta M_{i+1} + \frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{(\delta_{i-1} + \delta_i) x_i} - \frac{M_i}{x_i^2} \right) + c_I (B_i - M_i) = 0 \end{cases}$$

Soit \underline{X} le vecteur à $2(N + 1)$ composantes des inconnues :

$$(D.9) \quad \underline{X} = \{B_0, M_0, B_1, .. B_N, M_N\}$$

Le système précédent s'écrit formellement $[A] \cdot \underline{X} = \underline{P}$. Les conditions aux limites (D.7) ajoutent des relations linéaires entre certaines composantes de \underline{X} :

$$(D.10) \quad \begin{cases} \text{D.7-a} & : & B_{N+1} = M_{N+1} = 0 \\ \text{D.7-b} & : & B_0 = B_1 \\ \text{D.7-c} & : & (\lambda + 2\mu) \frac{M_1 - M_0}{\delta_0} + \lambda \frac{M_0}{R} = \lambda_c P_0 \end{cases}$$

Ces conditions sont prises en compte en modifiant la matrice $[A]$ et le second membre \underline{P} . Le système est ensuite résolu par inversion de la matrice $[A]$.

Compte tenu de la condition à l'infini, il est nécessaire de choisir un intervalle d'intégration suffisamment grand. D'autre part, pour les faibles valeurs de x , les solutions sont rapidement variables. La discrétisation doit donc être localement assez fine. On surmonte ces difficultés en choisissant une discrétisation à *pas variable* définie par la récurrence :

$$(D.11) \quad x_0 = R \quad , \quad \delta_i = \delta_0 q^i \quad , \quad x_{i+1} = \delta_i + x_i$$

Les résultats présentés au chapitre 3, section 4.2 ont été obtenus avec les valeurs $R = 3 \text{ m}$, $\delta_0 = 3 \text{ mm}$, $q = 1,1$.

Annexe E

Écrouissage du milieu biphasique adhérent en contrainte plane

1 Introduction

Lors de l'établissement du comportement élasto-plastique adhérent (chap. 2, section 3.2), on a montré que, dans le cas d'une seule direction de renforcement, l'écrouissage est régi par une seule variable scalaire ρ . Cette variable s'interprète mécaniquement comme la contrainte résiduelle dans la phase renforcement. Pour visualiser la loi d'écrouissage, on se propose dans cette annexe de représenter différents domaines d'élasticité (initial et actuels) sur un problème particulier.

2 Position du problème

Se plaçant dans l'hypothèse de contrainte plane, on suppose ici le milieu biphasique adhérent soumis à un état de contrainte biaxial de la forme :

$$(E.1) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_1 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

La phase renforcement est orientée dans la direction \underline{e}_x (figure E.1). Ainsi la compression longitudinale correspond dans cette annexe à $(\Sigma_1 = -\Sigma, \Sigma_2 = 0)$. La phase matrice est isotrope, élastique parfaitement plastique obéissant à un critère de Von Mises. On reprend les notations de la page 100.

Le comportement élastique global du milieu biphasique a été présenté au chapitre 2, section 4.1.1. Utilisant la matrice des complaisances élastiques (2.134), on peut calculer la déformation associée à l'état de contrainte (E.1). Puis injectant le comportement de chaque phase,

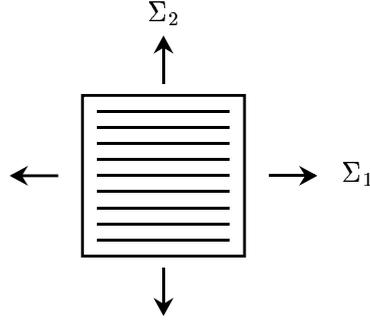


FIG. E.1: Milieu biphasique élasto-plastique sollicité en contrainte plane

on déduit les contraintes partielles :

$$(E.2-a) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \frac{E^m \Sigma_1 + \nu E^r \Sigma_2}{E^m + E^r} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$(E.2-b) \quad \sigma^r = \frac{E^r (\Sigma_1 - \nu \Sigma_2)}{E^m + E^r}$$

3 Domaine d'élasticité initial

Tant que l'on se situe dans le domaine élastique, le paramètre d'écroissage ρ vaut zéro. L'évaluation du critère de plasticité de la phase matrice sur les contraintes partielles $\underline{\underline{\sigma}}^m$ précédentes donne :

$$(E.3) \quad f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m(\Sigma_1, \Sigma_2, \rho = 0)) = \hat{f}^m[\Sigma_1, \Sigma_2 ; \rho = 0] \\ = \left(\frac{E^m}{E^m + E^r} \right)^2 \Sigma_1^2 + \left(1 - \frac{\nu E^r (E^m + E^r (1 - \nu))}{(E^m + E^r)^2} \right) \Sigma_2^2 \\ - \frac{E^m (E^r (1 - 2\nu) + E^m)}{(E^m + E^r)^2} \Sigma_1 \Sigma_2 - (\sigma_0^m)^2 \leq 0$$

La représentation de ce critère dans le plan (Σ_1, Σ_2) est une *ellipse* \mathcal{E}^0 déduite de l'ellipse représentative du critère de von Mises de la matrice seule par une transformation linéaire. Pour la phase renforcement, on a de même :

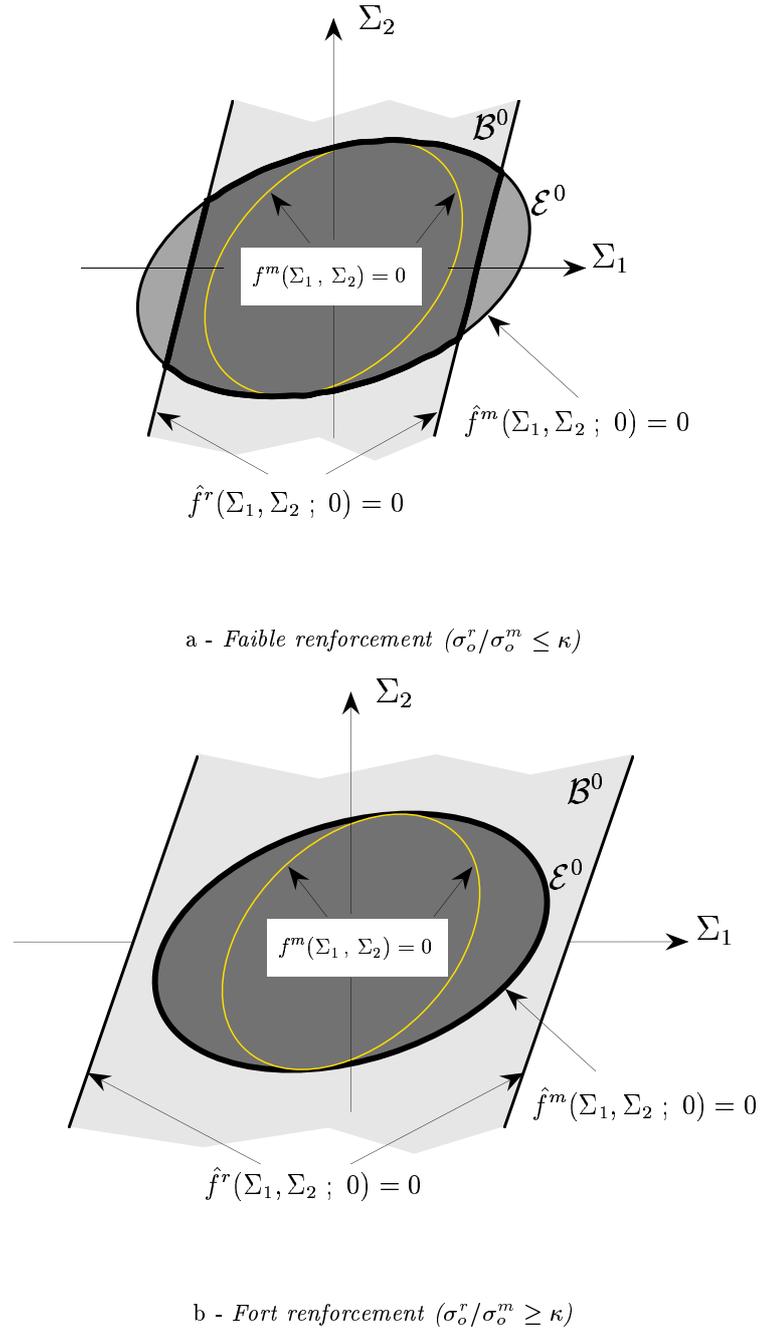
$$(E.4) \quad f^r(\sigma^r(\Sigma_1, \Sigma_2, \rho = 0)) = \hat{f}^r[\Sigma_1, \Sigma_2 ; \rho = 0] = \frac{E^r}{E^m + E^r} |\Sigma_1 - \nu \Sigma_2| - \sigma_0^r \leq 0$$

Cette inégalité est représentée par une *bande* \mathcal{B}^0 comprise entre les droites d'équation :

$$(E.5) \quad \Sigma_1 - \nu \Sigma_2 = \pm \frac{E^m + E^r}{E^r} \sigma_0^r$$

Le critère global de plasticité (2.106) s'écrit, pour une valeur $\rho = 0$ du paramètre d'écroissage :

$$(E.6) \quad \hat{F}[\Sigma_1, \Sigma_2 ; \rho = 0] = \max \left\{ \hat{f}^m[\Sigma_1, \Sigma_2 ; \rho = 0], \hat{f}^r[\Sigma_1, \Sigma_2 ; \rho = 0] \right\} \leq 0$$

FIG. E.2: *Domaine d'élasticité initiale - milieu biphasique en contrainte plane*

Le domaine d'élasticité initiale \mathcal{D}^0 est donc représenté par l'intersection de la bande \mathcal{B}^0 et de l'ellipse \mathcal{E}^0 comme le montre la figure E.2.

Deux situations sont envisageables selon la taille relative de \mathcal{B}^0 et de \mathcal{E}^0 , qui dépendent notamment des valeurs des paramètres σ_m^0 , σ_r^0 . On montre qu'il y a effectivement intersection si :

$$(E.7) \quad \frac{\sigma_0^r}{\sigma_0^m} \leq \kappa \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{E^r}{E^m} \sqrt{1 - \nu + \nu^2}$$

l'égalité dans cette dernière équation correspondant à \mathcal{B}^0 extérieurement tangente à \mathcal{E}^0 . Si (E.7) est vérifiée (cas de « faible renforcement »), la première plastification peut apparaître, selon le trajet de chargement, soit dans la phase matrice, soit dans la phase renforcement (figure E.2-a). Si (E.7) n'est pas vérifiée (figure E.2-b), l'ellipse \mathcal{E}^0 est entièrement contenue dans la bande \mathcal{B}^0 , et la première plastification apparaît forcément dans la phase matrice.

4 Domaine d'élasticité actuel

Pour une valeur donnée du paramètre d'écroutissement ρ , le critère global de plasticité (2.106) est évalué à partir des états de contraintes partielles :

$$(E.8-a) \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \left[\frac{E^m \Sigma_1 + \nu E^r \Sigma_2}{E^m + E^r} - \rho \right] \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \Sigma_2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$(E.8-b) \quad \sigma^r = \frac{E^r (\Sigma_1 - \nu \Sigma_2)}{E^m + E^r} + \rho$$

On peut donc poser :

$$(E.9-a) \quad \hat{f}^m[\Sigma_1, \Sigma_2; \rho] = \hat{f}^m[\Sigma_1^-, \Sigma_2; \rho = 0]$$

$$(E.9-b) \quad \hat{f}^r[\Sigma_1, \Sigma_2; \rho] = \hat{f}^r[\Sigma_1^+, \Sigma_2; \rho = 0]$$

où les fonctions $\hat{f}^m[\cdot; \rho = 0]$ et $\hat{f}^r[\cdot; \rho = 0]$ sont respectivement données par (E.3) et (E.4), tandis que :

$$(E.10) \quad \Sigma_1^- = \Sigma_1 - \rho \frac{E^m + E^r}{E^m}, \quad \Sigma_1^+ = \Sigma_1 + \rho \frac{E^m + E^r}{E^r}$$

Le critère associé à (E.9-a) définit dans le plan (Σ_1, Σ_2) une ellipse \mathcal{E}^ρ déduite de \mathcal{E}^0 par translation de $\rho \frac{E^m + E^r}{E^m}$ le long de l'axe des Σ_1 . De même, (E.9-b) définit une bande \mathcal{B}^ρ , obtenue par translation de $-\rho \frac{E^m + E^r}{E^r}$ de \mathcal{B}^0 le long du même axe. Le *domaine d'élasticité actuel* \mathcal{D}^ρ est alors l'intersection de \mathcal{E}^ρ avec \mathcal{B}^ρ , comme le montre la figure E.3. Comme les domaines \mathcal{E}^ρ et \mathcal{B}^ρ évoluent en sens inverse pour ρ croissant, il est clair qu'il existe une valeur limite ρ_u telle que leur intersection soit vide.

5 Analyse d'un trajet de chargement

Pour compléter la présentation précédente, on étudie, sur l'exemple de la compression simple longitudinale traitée à la section 2.2.2 du chapitre 3 l'évolution du domaine \mathcal{D}^ρ . Considérant ici un trajet de chargement de la forme $\Sigma_1 = -\Sigma, \Sigma_2 = 0$, on rappelle que la limite d'élasticité est obtenue pour une valeur :

$$(E.11) \quad \Sigma^{el} = \min \{ \sigma_0^m (1 + E^r/E^m); \sigma_0^r (1 + E^m/E^r) \}$$

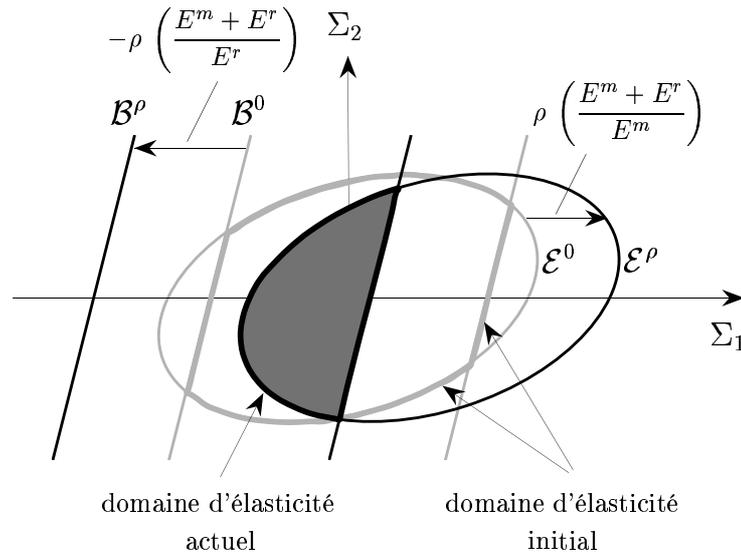


FIG. E.3: *Domaine d'élasticité actuel - milieu biphasique adhérent en contrainte plane*

On distingue ensuite deux cas :

- La phase renforcement plastifie en premier pour $\Sigma^{el} = \sigma_0^r (1 + E^m/E^r)$. La contrainte partielle reste alors à la valeur $\sigma^r = \sigma_0^r$ pour Σ croissant, tandis que le paramètre d'écouissage vaut d'après (2.104) et (3.35) :

$$(E.12) \quad \rho = -\frac{\varepsilon_p^r}{c_{xxxx}^m + c^r} = -\sigma_0^r + \Sigma \frac{E^r}{E^m + E^r} = \frac{E^r}{E^m + E^r} (\Sigma - \Sigma^{el})$$

et est donc positif. On représente sur la figure E.4 différents domaines d'élasticité actuels, ainsi que le domaine de rupture dans le plan (Σ_1, Σ_2) . Conformément à ce qui a été vu plus haut, pour $\rho \geq 0$, le domaine \mathcal{B}^ρ se déplace vers les Σ_1 négatifs, tandis que \mathcal{E}^ρ se déplace vers les Σ_1 positifs. On constate effectivement que le trajet de charge « entraîne » avec lui le domaine d'élasticité actuel, ce qui traduit le caractère écouissable du matériau (Salençon, 1994).

Le raisonnement qui vient d'être développé est valable tant que la matrice reste élastique, c'est à dire tant que :

$$(E.13) \quad \hat{f}^m[\Sigma_1, 0; \rho] \leq 0$$

soit d'après (E.9-a), (E.10) :

$$(E.14) \quad f^m\left(-\Sigma - \rho \frac{E^m + E^r}{E^m}, 0, 0\right) \leq 0$$

Utilisant l'expression (E.3) de $f^m(\cdot)$, on montre que cette condition implique $\Sigma \leq \sigma_0^m + \sigma_0^r$, qui est bien la charge limite que l'on a déterminé à la section 2.2.3 du chapitre 3.

Le paramètre d'écouissage limite vaut :

$$(E.15) \quad \rho_u = \frac{E^r \sigma_0^m - E^m \sigma_0^r}{E^m + E^r}$$

Graphiquement, cette valeur correspond à la situation où l'intersection de \mathcal{B}^ρ avec \mathcal{E}^ρ se trouve sur l'axe des Σ_1 . Il y a alors écouissage plastique libre des deux phases.

- La phase matrice plastifie en premier pour $\Sigma^{el} = \sigma_0^m(1 + E^r/E^m)$. Le paramètre d'écouissage vaut d'après (2.104) et (3.48) :

$$(E.16) \quad \rho = \frac{\varepsilon_{p,xx}^m}{c_{xxxx}^m + c^r} = \sigma_0^m - \Sigma \frac{E^m}{E^m + E^r} = \frac{E^m}{E^m + E^r} (\Sigma^e - \Sigma)$$

et est donc négatif. Le domaine \mathcal{E}^ρ se déplace donc vers les Σ_1 négatifs.

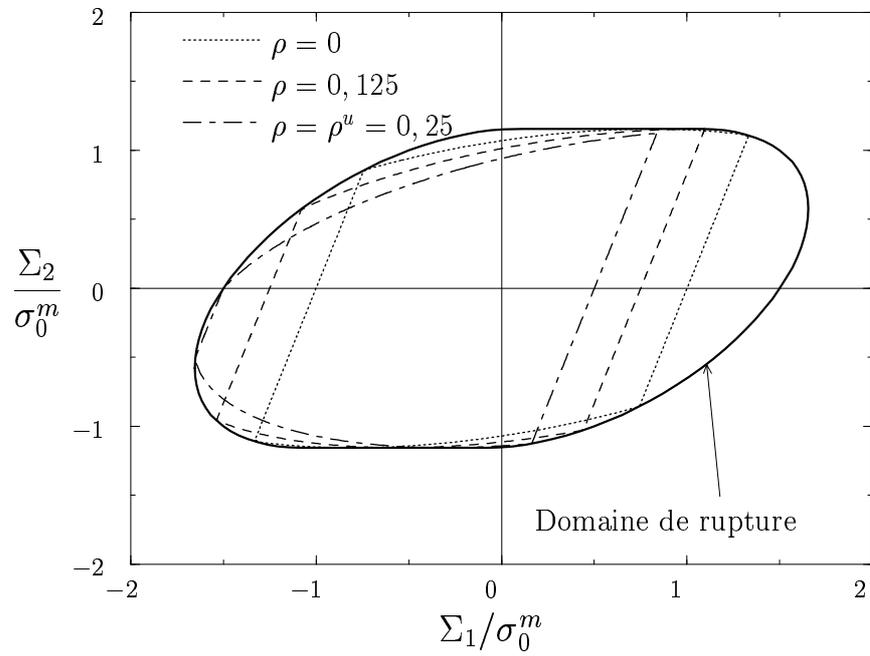
Cette solution est valable tant que :

$$(E.17) \quad \hat{f}^r[\Sigma_1, 0; \rho] \leq 0$$

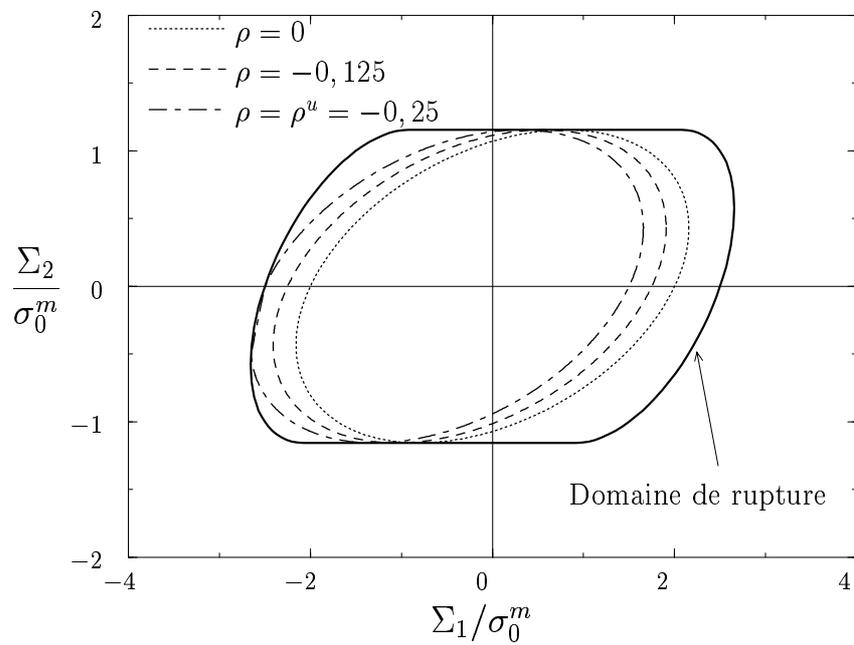
soit d'après (E.9-b), (E.10) :

$$(E.18) \quad f^r\left(-\Sigma + \rho \frac{E^m + E^r}{E^m}, 0, 0\right) \leq 0$$

Utilisant (E.4), on montre que cette condition implique comme précédemment $\Sigma \leq \sigma_0^m + \sigma_0^r$. On retrouve ainsi la même charge limite en compression, qui ne dépend pas de l'ordre de plastification des matériaux. La valeur limite du paramètre d'écouissage est donnée par (E.15).



a - Faible renforcement



b - Fort renforcement

FIG. E.4: Evolution du domaine d'élasticité actuel - compression longitudinale

Annexe F

Quelques aspects du développement de CASTOR

Le développement d'un code de calcul nécessite la mise en commun de nombreuses techniques numériques liées au stockage des données, à l'intégration, au calcul matriciel, etc. Il est inutile, dans le cadre de ce mémoire, d'en détailler tous les aspects, qui sont aujourd'hui parfaitement maîtrisés. On pourra se reporter aux ouvrages de Dhatt et Touzot (1981) et Batoz et Dhatt (1995), qui nous ont été d'une grande utilité tout au long de notre travail de programmation.

Nous avons choisi d'éclairer simplement quelques points jugés centraux dans la programmation de `castor`. La section 1 présente de façon détaillée l'obtention pratique des matrices de rigidité élémentaires, en traitant notamment de l'intégration numérique. La section 3 aborde le calcul pratique du comportement élastique d'une phase renforcement. La section 2 présente la solution analytique du problème de projection sur le critère lié à l'intégration locale de la plasticité, dans le cas d'une fonction de charge de Drucker-Prager. Enfin, on donne à la section 4 un exemple de fichier de commandes lu par le pré-processeur `prepro`, qui correspond au chargement d'une fondation sur réseau de micropieux.

1 Calcul des matrices de rigidité

On détaille dans cette section les aspects techniques du calcul numérique dans le code `CASTOR`. On s'appuie sur l'exemple d'une matrice de rigidité élémentaire :

$$(F.1) \quad \mathbf{k}_e = \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \mathbf{B}_e \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega$$

Se plaçant dans le cadre des déformations planes, on introduit les différentes notions sur le cas particulier de l'élément de Lagrange triangulaire quadratique à 6 noeuds, désigné par T6.

1.1 Notations

Soit $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ un repère orthonormé direct, et (Oxy) le plan de déformation. Dans ce plan, chaque nœud possède deux degrés de liberté, *i.e* les composantes de déplacement notées (u, v) . L'élément T6 possède ainsi 12 degrés de liberté, regroupés dans le vecteur :

$$(F.2) \quad {}^t \underline{u}_e = \{u_1, v_1, \dots, u_6, v_6\}$$

Le champ de déplacement est obtenu par interpolation :

$$(F.3) \quad \underline{\xi}_{|\mathcal{V}_e}(\underline{x}) = \mathbf{N}_e(\underline{x}) \cdot \underline{u}_e$$

ce qui s'écrit de façon développée :

$$(F.4) \quad \begin{pmatrix} u(\underline{x}) \\ v(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\underline{x}) & 0 & \dots & N_6(\underline{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\underline{x}) & \dots & 0 & N_6(\underline{x}) \end{bmatrix} \cdot \underline{u}_e$$

1.2 Élément de référence

Les fonctions de forme $N_i(\underline{x})$ (polynômes en général) dépendent explicitement de la géométrie de l'élément courant, c'est à dire des coordonnées de ses nœuds regroupées dans le vecteur :

$$(F.5) \quad \underline{x}_e = \{x_1, y_1, \dots, x_6, y_6\}$$

Les coefficients de ces polynômes sont obtenus en résolvant un système linéaire. Pour éviter de faire cette opération sur chaque élément, on définit un *élément de référence* noté $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ dont chaque \mathcal{V}_e se déduit par une transformation géométrique simple. $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ est défini dans un espace de référence. Dans le cas particulier des éléments T6, cet espace est un plan muni d'un système de coordonnées (O, ξ, η) ¹, et l'élément de référence (voir figure F.1) est défini par :

$$(F.6) \quad \mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \{(\xi, \eta) \in [0, 1] \quad \xi + \eta \leq 1\}$$

Les fonctions de forme sont alors calculées une fois pour toutes pour cet élément de référence. On note par ailleurs τ_e la transformation géométrique associant $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ à \mathcal{V}_e par le changement de variable :

$$(F.7) \quad \begin{aligned} \tau_e : \mathcal{V}_{\mathcal{R}} &\longrightarrow \mathcal{V}_e \\ \underline{\zeta} = (\xi, \eta) &\longrightarrow \underline{x}(\underline{\zeta}) = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \end{aligned}$$

La transformation étant supposée linéaire par rapport aux coordonnées des nœuds de l'élément, on l'exprime en introduisant les *fonctions de transformation géométrique* $\bar{\mathbf{N}}_e$:

$$(F.8) \quad \tau_e : \underline{\zeta} \longrightarrow \underline{x}(\underline{\zeta}) = \bar{\mathbf{N}}_e(\underline{\zeta}) \cdot \underline{x}_e$$

1. On reprend ici la notation standard utilisée pour les coordonnées réduites de l'élément de référence, sans confusion possible avec le champ de déplacement noté de façon générique $\underline{\xi}$.

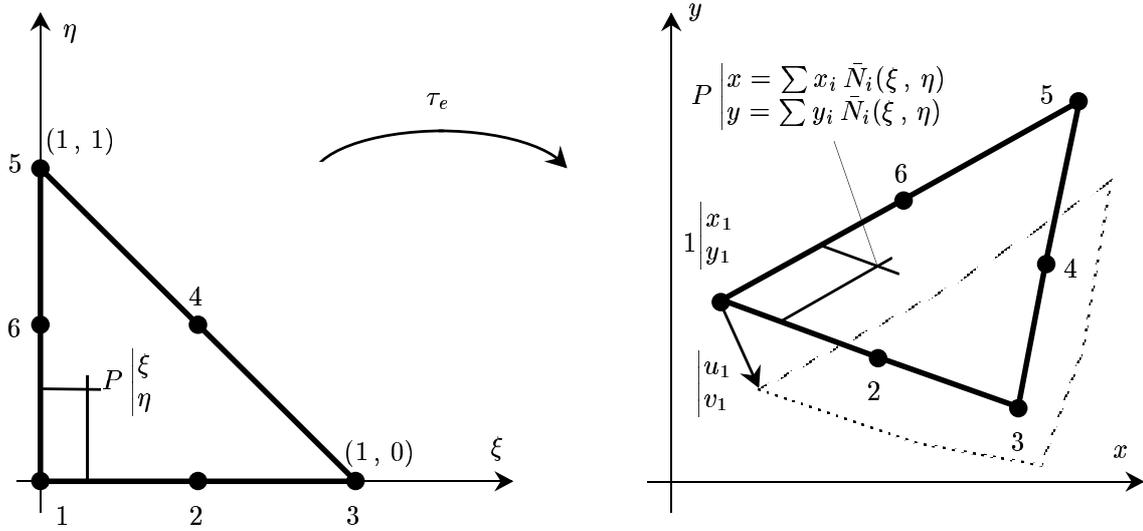


FIG. F.1: Définition de l'élément de Lagrange T6

On dit alors que l'élément T6 est *isoparamétrique* si les fonctions $\bar{\mathbf{N}}_e$ sont identiques aux fonctions de forme \mathbf{N}_e (Eq.(F.3)). On se reportera à Dhatt et Touzot (1981, pages 43-50) pour une présentation générale, et à la page 110 pour leur construction explicite dans le cas de T6.

On note \mathbf{J} la matrice jacobienne de la transformation τ_e :

$$(F.9) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Son déterminant est noté \mathcal{J} .

Pour les problèmes bidimensionnels dans le plan (Oxy) , les composantes $_{xx}$ et $_{yz}$ des tenseurs de contrainte et déformation sont nulles. On introduit donc une représentation vectorielle réduite à 4 composantes :

$$(F.10-a) \quad {}^t \underline{\sigma} \equiv \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy} \}$$

$$(F.10-b) \quad {}^t \underline{\varepsilon} \equiv \{ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy} \}$$

1.3 Expression de la matrice \mathbf{B}_e

La matrice \mathbf{B}_e permet d'exprimer les composantes du tenseur de déformation dans chaque élément en fonction des déplacements nodaux \underline{u}_e . On a en effet :

$$(F.11) \quad \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(\underline{x}) \\ v(\underline{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{B}_e \cdot \underline{u}_e$$

Notant la dérivation partielle en indice, on déduit de (F.4) :

$$(F.12) \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & N_{6,y} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix}$$

Exprimant ces dérivées en fonction des variables réduites par les formules de composition :

$$(F.13) \quad \frac{\partial N_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}$$

et introduisant la jacobienne inverse $\mathbf{j} = \mathbf{J}^{-1}$, il vient finalement :

$$(F.14) \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} j_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & & & \\ \dots & 0 & j_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \\ & 0 & 0 & & \\ j_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & j_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & & & \end{bmatrix}$$

1.4 Intégration par quadrature

En effectuant le changement de variable (F.7) dans (F.1), et compte tenu de (F.6), il vient :

$$(F.15) \quad \mathbf{k}_e = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} {}^t \mathbf{B}_e(\underline{\zeta}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_e(\underline{\zeta}) |\mathcal{J}| d\xi d\eta$$

où l'expression de \mathbf{B}_e en fonction de (ξ, η) est donnée en (F.14).

L'intégration par quadrature consiste en l'approximation de l'intégrale (F.15) par une somme pondérée :

$$(F.16) \quad \int_{\mathcal{V}_R} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{\text{IPG}=1}^{\text{NPG}} \omega_{\text{IPG}} f(\xi_{\text{IPG}}, \eta_{\text{IPG}})$$

où n_{PG} désigne le nombre de *points d'intégration*, de coordonnées réduites $(\xi_{IPG}, \eta_{IPG}, \text{et } \omega_{IPG})$ les poids associés.

Lorsque l'élément de référence est triangulaire (T3, T6), on utilise les points de Hammer. Lorsque c'est un carré (Q4, Q9), on utilise les points de Gauss (Batoz et Dhatt, 1995, pages 199-200). Par abus de langage, c'est par cette expression qu'on désigne systématiquement tous les points du maillage où sont évaluées les quantités à intégrer.

2 Critère de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager

Le code de calcul CASTOR étant destiné à des applications en géotechnique, on y a implémenté un critère de plasticité couramment utilisé dans ce domaine, celui de Drucker-Prager. Ce critère comprend comme cas particulier celui de Von Mises. On donne dans cette section les raisons de ce choix, et le détail des formules analytiques nécessaires à l'implémentation.

2.1 Définitions

Le critère de plasticité le plus anciennement utilisé en mécanique des sols est sans doute celui de Mohr-Coulomb. Il s'exprime simplement par une relation limitant la composante de cisaillement τ du vecteur contrainte sur toute facette en fonction de la composante normale σ_n (courbe *intrinsèque* représentée sur la figure F.2-a) :

$$(F.17) \quad |\tau| \leq C - \sigma_n \tan \phi$$

Les paramètres constitutifs sont la *cohésion* C et l'angle de frottement interne ϕ . Lorsqu'on exprime ce critère dans l'espace des contraintes principales, il vient :

$$(F.18) \quad f(\underline{\sigma}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi$$

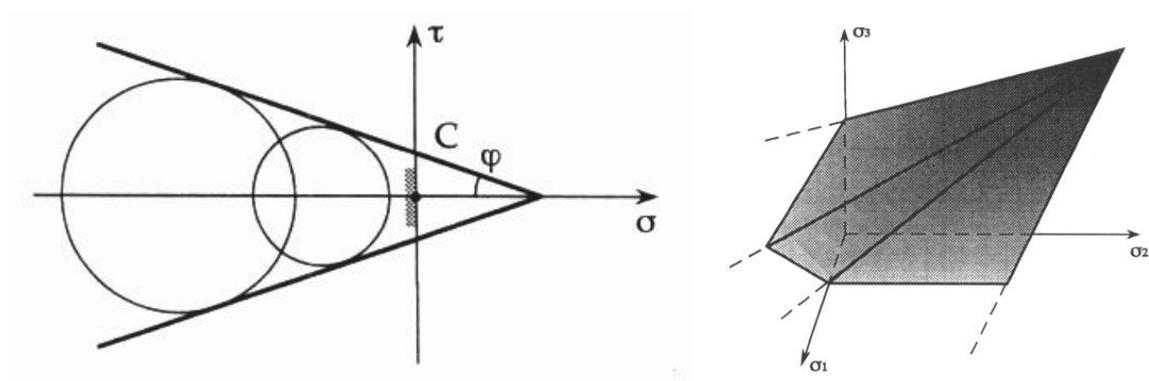
où les contraintes principales ont été ordonnées dans le sens :

$$(F.19) \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Dans cet espace, le critère prend l'allure d'une pyramide hexagonale non régulière (figure F.2-b) et présente des points singuliers (arêtes). Du point de vue de la plasticité, il peut être interprété comme critère à *surfaces de charge multiples*, délicat à traiter numériquement.

L'idée d'approximer la pyramide de Mohr-Coulomb par une surface régulière est introduite par Drucker et Prager (1952) : c'est le fameux *critère de Drucker-Prager*. Dans ce mémoire, on l'exprime sous la forme :

$$(F.20) \quad f(\underline{\sigma}) = \alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \sqrt{J_2} - k \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{1}{2} \| \underline{\underline{s}} \|^2$$



a - Courbe intrinsèque

b - Espace des contraintes principales

FIG. F.2: Critère de Mohr-Coulomb (d'après Salençon (1994, Chap. 1))

où \underline{s} désigne le déviateur de $\underline{\sigma}$. Dans l'espace des contraintes principales, le critère est représenté par un cône de révolution d'axe $(1, 1, 1)$, de sommet $(\frac{k}{3\alpha}, \frac{k}{3\alpha}, \frac{k}{3\alpha})$.

En choisissant convenablement les paramètres α et k , on peut définir le cône *inscrit*, le cône *circonscrit* en compression et le cône *circonscrit* en traction à la pyramide de Mohr-Coulomb (Figure F.3).

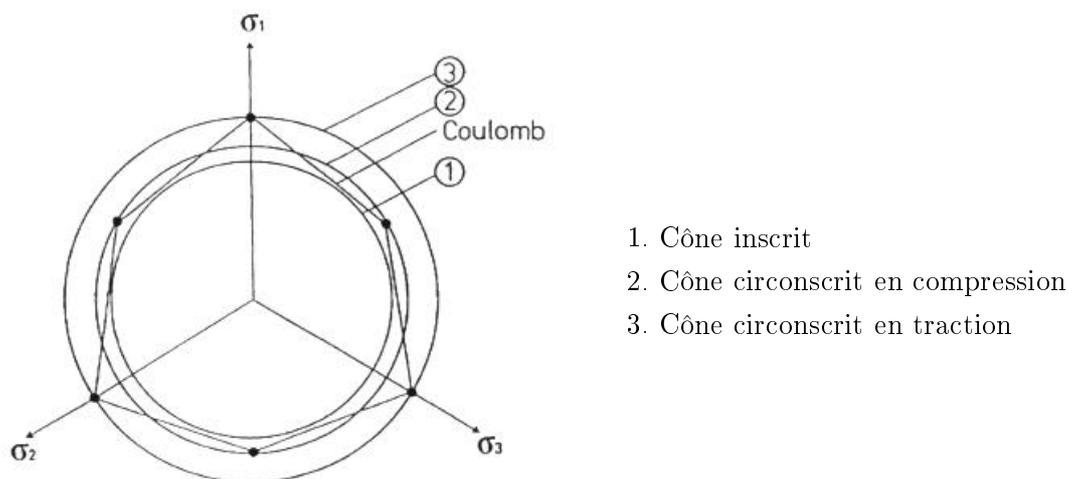


FIG. F.3: Critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager dans le plan déviatorique (d'après Panet (1995, Chap. 4))

2.2 Plasticité non associée

L'hypothèse de la règle d'écoulement associée (ou *règle de normalité*) n'est en général pas vérifiée expérimentalement pour les géomatériaux. On est ainsi amené à introduire un *potentiel*

plastique $g(\underline{\underline{\sigma}})$ à partir duquel se formule la règle d'écoulement :

$$(F.21) \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

Dans le cas des sols frottants, g est choisi de la même forme que f . On définit ainsi les *potentiels plastiques* de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager par :

$$(F.22) \quad g(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \psi$$

et :

$$(F.23) \quad g(\underline{\underline{\sigma}}) = \beta \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \sqrt{J_2}$$

Le paramètre ψ est appelé *angle de dilatance*.

2.3 Equivalence des critères en déformation plane

L'allure de la restriction des deux critères aux problèmes de déformation plane est identique. Dans ce cadre, on peut donc remplacer *de façon exacte* le critère non régulier de Mohr-coulomb par celui de Drucker-Prager. Mestat (1997) montre qu'il suffit d'ajuster les paramètres constitutifs (α , β , k) en fonction de (ϕ , ψ , C) de la façon suivante :

$$(F.24-a) \quad \alpha = \frac{\sin \phi \sqrt{3 + \sin^2 \psi}}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi \sin \psi)}$$

$$(F.24-b) \quad k = C \frac{\cos \phi \sqrt{9 + 3 \sin^2 \psi}}{3 + \sin \phi \sin \psi}$$

$$(F.24-c) \quad \beta = \frac{\tan \psi}{\sqrt{9 + 12 \sin^2 \psi}}$$

Le code CASTOR définit les paramètres de Drucker-Prager grâce à ces formules, à partir des données de l'utilisateur rentrées sous la forme C , ϕ , ψ . Pour les problèmes de déformation plane, l'équivalence est stricte. Pour les problèmes axisymétriques, ces paramètres correspondent au cône inscrit (figure F.3).

2.4 Algorithme d'Euler implicite

On s'intéresse maintenant à la résolution des équations (4.60) dans le cas particulier du critère de Drucker-Prager, ce qui revient à déterminer la projection selon la norme élastique du prédicteur $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}}$ sur ce critère (voir section 2.4.5 du chapitre 4). Rappelons que, dans le cas

non associé, la projection notée $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie² (Eq.(4.60)) :

$$(F.25-a) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}} - \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\Delta \epsilon}}^{\text{p}}$$

$$(F.25-b) \quad \underline{\underline{\Delta \epsilon}}^{\text{p}} = \Delta \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{\underline{\underline{\sigma}}}$$

$$(F.25-c) \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) = \alpha \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\underline{\underline{s}}\| - k = 0$$

Utilisant les formules de dérivation usuelles :

$$(F.26) \quad \frac{\partial \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad , \quad \frac{\partial \|\underline{\underline{s}}\|}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|}$$

on peut, d'après (F.23), exprimer l'incrément de déformation plastique (F.25-b) sous la forme :

$$(F.27) \quad \underline{\underline{\Delta \epsilon}}^{\text{p}} = \Delta \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|} + \beta \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right)$$

Dans le cas d'un comportement *isotrope*, le tenseur des modules élastiques $\underline{\underline{A}}$ se met sous la forme :

$$(F.28) \quad \underline{\underline{A}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2 \mu \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Reportant (F.27) et (F.28) dans (F.25-a), il vient :

$$(F.29) \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}} - \underline{\underline{\sigma}} = \Delta \lambda \left\{ \beta (3 \lambda + 2 \mu) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \sqrt{2} \mu \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|} \right\}$$

Prenant successivement la trace et le déviateur de l'expression précédente, on obtient :

$$(F.30) \quad \underline{\underline{s}}^{\text{trial}} - \underline{\underline{s}} = \sqrt{2} \Delta \lambda \mu \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|}$$

$$(F.31) \quad \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}} - \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = 3 \beta \Delta \lambda (3 \lambda + 2 \mu)$$

dont on déduit aisément :

$$(F.32) \quad \|\underline{\underline{s}}\| = \|\underline{\underline{s}}^{\text{trial}}\| - \Delta \lambda \sqrt{2} \mu$$

$$(F.33) \quad \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}} - 3 \beta \Delta \lambda (3 \lambda + 2 \mu)$$

Reportant (F.31) et (F.32) dans (F.25-c), on obtient :

$$(F.34) \quad 0 = \alpha \left[\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}} - 3 \beta \Delta \lambda (3 \lambda + 2 \mu) \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\underline{\underline{s}}^{\text{trial}}\| + \Delta \lambda \mu - k$$

$$(F.35) \quad = f(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}}) - \Delta \lambda [\mu + 3 \alpha \beta (3 \lambda + 2 \mu)]$$

d'où l'on tire :

$$(F.36) \quad \Delta \lambda = \frac{f(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}})}{\mu + 3 \alpha \beta (3 \lambda + 2 \mu)}$$

2. On a laissé tomber l'indice $n+1$ relatif au pas de charge courant.

Par ailleurs, on montre à partir de (F.30) que :

$$(F.37) \quad \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|} = \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{trial}}}{\|\underline{\underline{s}}^{\text{trial}}\|}$$

On en déduit finalement :

$$(F.38) \quad \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{f(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}})}{\mu + 3\alpha\beta(3\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{trial}}}{\|\underline{\underline{s}}^{\text{trial}}\|} + \beta \underline{\underline{1}} \right\}$$

L'incrément de déformation plastique associée au retour sur le critère s'exprime donc ainsi de façon analytique en fonction du prédicteur $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{trial}}$. L'expression (F.38) est implémentée telle qu'elle dans le module de plasticité de castor.

3 Matrice d'élasticité d'une phase renforcement

On précise dans cette section la forme de la matrice d'élasticité \mathbf{d}^r d'une phase renforcement dans le cas d'un calcul bidimensionnel, et dans le cas tridimensionnel. D'après (4.107), on a :

$$(F.39) \quad \mathbf{d}^r = a^r \underline{\underline{\varepsilon}}_r \cdot {}^t \underline{\underline{\varepsilon}}_r$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}_r$ désigne le vecteur des composantes du tenseur $\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r$ dans une base orthonormée, vérifiant l'identité :

$$(F.40) \quad \varepsilon^r = \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r) \equiv {}^t \underline{\underline{\varepsilon}}_r \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Problèmes bidimensionnels Dans le plan (O, x, y) , la direction de renforcement $\underline{\underline{e}}_r$ est repérée par un seul angle α :

$$(F.41) \quad \underline{\underline{e}}_r = \cos \alpha \underline{\underline{e}}_x + \sin \alpha \underline{\underline{e}}_y$$

On en déduit alors simplement :

$$(F.42) \quad {}^t \underline{\underline{\varepsilon}}_r = \{ \cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha, 0, \sin \alpha \cos \alpha \}$$

Introduisant la notation allégée :

$$(F.43) \quad c_\alpha \equiv \cos \alpha \quad , \quad s_\alpha \equiv \sin \alpha$$

on déduit de (F.39) et (F.42) :

$$(F.44) \quad \mathbf{d}^r = a^r \begin{bmatrix} c_\alpha^4 & c_\alpha^2 s_\alpha^2 & 0 & c_\alpha^3 s_\alpha \\ c_\alpha^2 s_\alpha^2 & s_\alpha^4 & 0 & s_\alpha^3 c_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_\alpha^3 s_\alpha & s_\alpha^3 c_\alpha & 0 & c_\alpha^2 s_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Problèmes tridimensionnels Dans le repère $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, la direction de renforcement est maintenant repérée par la longitude ϕ et la colatitude θ :

$$(F.45) \quad \underline{e}_r = \cos \phi \sin \theta \underline{e}_x + \sin \phi \sin \theta \underline{e}_y + \cos \theta \underline{e}_z$$

Utilisant à nouveau une notation de type (F.43), et les composantes étant ordonnées comme en (2.128), on a :

$$(F.46) \quad {}^t \underline{e}_r = \{c_\phi^2 s_\theta^2, s_\phi^2 s_\theta^2, c_\theta^2, c_\phi s_\theta^2 s_\phi, s_\phi s_\theta c_\theta, c_\phi s_\theta c_\theta\}$$

D'où on tire la matrice d'élasticité :

$$(F.47) \quad \mathbf{d}^r = \mathbf{a}^r \begin{bmatrix} c_\phi^4 s_\theta^4 & c_\phi^2 s_\theta^4 s_\phi^2 & c_\phi^2 s_\theta^2 c_\theta^2 & c_\phi^3 s_\theta^4 s_\phi & c_\phi^2 s_\theta^3 s_\phi c_\theta & c_\phi^3 s_\theta^3 c_\theta \\ c_\phi^2 s_\theta^4 s_\phi^2 & s_\phi^4 s_\theta^4 & s_\phi^2 s_\theta^2 c_\theta^2 & s_\phi^3 s_\theta^4 c_\phi & s_\phi^3 s_\theta^3 c_\theta & s_\phi^2 s_\theta^3 c_\phi c_\theta \\ c_\phi^2 s_\theta^2 c_\theta^2 & s_\phi^2 s_\theta^2 c_\theta^2 & c_\theta^4 & c_\theta^2 c_\phi s_\theta^2 s_\phi & c_\theta^3 s_\phi s_\theta & c_\theta^3 c_\phi s_\theta \\ c_\phi^3 s_\theta^4 s_\phi & s_\phi^3 s_\theta^4 c_\phi & c_\theta^2 c_\phi s_\theta^2 s_\phi & c_\phi^2 s_\theta^4 s_\phi^2 & s_\phi^2 s_\theta^3 c_\phi c_\theta & c_\phi^2 s_\theta^3 s_\phi c_\theta \\ c_\phi^2 s_\theta^3 s_\phi c_\theta & s_\phi^3 s_\theta^3 c_\theta & c_\theta^3 s_\phi s_\theta & s_\phi^2 s_\theta^3 c_\phi c_\theta & s_\phi^2 s_\theta^2 c_\theta^2 & c_\theta^2 c_\phi s_\theta^2 s_\phi \\ c_\phi^3 s_\theta^3 c_\theta & s_\phi^2 s_\theta^3 c_\phi c_\theta & c_\theta^3 c_\phi s_\theta & c_\phi^2 s_\theta^3 s_\phi c_\theta & c_\theta^2 c_\phi s_\theta^2 s_\phi & c_\phi^2 s_\theta^2 c_\theta^2 \end{bmatrix}$$

4 Exemple de fichier de commandes pour prepro

Le fichier de commandes suivant contient toutes les données nécessaires à la définition d'un problème de tassement d'une fondation rigide (poinçon) sur une couche de sol élasto-plastique renforcée sous la fondation par un réseau de micropieux disposés symétriquement à 30° par rapport à la verticale.

Le maillage correspondant est représenté sur la figure F.4, la déformée après poinçonnement sur la figure F.5, l'étendue des zones plastiques pour un tassement relatif de 0,5% sur la figure F.6.

```
COM      Fondation sur reseau de micropieux
COM      Inclinaison : 30 degres
COM      Calcul elastoplastique
COM      Critere de Drucker-Prager
COM      C = 10 kPa, phi = 30 degres, psi = 0

COM      DEFINITION PROPRIETES
iplas,1,1.e-02,500          ! Calcul en plasticite, tol =1.e-02,
COM                          ! 500 iter. max
```

```
typde,1                ! Deformation plane
acel,0.,-1.           ! Champ de pesanteur
```

```
COM      PROPRIETES DES MATERIAUX
```

```
com *** Sol seul
matel,1,0,50.,0.3,0.016
mapla,1,2,0.01,30.
manas,1,0.
```

```
com *** Sol renforce 1 direction
```

```
matel,2,1,50.,0.3,0.016
mapla,2,2,0.01,30.
maren,2,288.2,120.
mapre,2,0.68620,1.
manas,2,0.
```

```
com Sol renforce 2 directions
```

```
matel,3,2,50.,0.3,0.016
mapla,3,2,0.01,30.
maren,3, 288.2,120.,288.2,60.
mapre,3,0.68620,1.,0.68620,1.
manas,3,0.
```

```
com contrainte initiales
```

```
sign,1,0.,0.,0.016
sign,2,0.,0.,0.016
sign,3,0.,0.,0.016
```

```
COM      DEFINITION DES NOEUDS
```

```
ndroi,0.,0.,0.41666666,0.,1,5,1
ndroi,0.5,0.,1.,0.,7,14,1,0.848993
ndroi,1.01,0.,1.5,0.,22,13,1,1.177865
ndroi,1.6,0.,8.,0.,36,15,1,1.185836
ngen,1,51,1,2,714,0.,-0.8660254
nlin,1,715,14,51,1,1.177865
ndroi,0.,-4.,8.,-4.,2041,50,1,1.
nlin,715,2041,26,51,1,1.014577765
```

```
COM      DEFINITION DES ELEMENTS
```

```
typco,3                ! Triangles T6
```

```
matco,3
e,1,52,103,53,3,2
e,3,53,103,104,105,54
egen,1,2,1,10,2
e,21,72,123,124,125,73
e,21,73,125,74,23,22
egen,21,22,1,15,2
egen,1,50,1,7,102

chmat,20,2,2,1
chmat,22,1,29,1
chmat,68,2,6,1
chmat,74,1,27
chmat,116,2,10,1
chmat,126,1,25
chmat,164,2,14,1
chmat,178,1,23,1
chmat,212,2,18,1
chmat,230,1,21,1
chmat,260,2,22,1
chmat,282,1,19,1
chmat,308,2,26,1
chmat,334,1,17,1

typco,4                ! Quadrangles Q9
matco,1
e,715,766,817,818,819,768,717,716,767
egen,351,351,1,25,2
egen,351,375,1,13,102

COM      CONDITIONS AUX LIMITES
ddroi,1,1,0.,1.,4.,  0.,0.
ddroi,1,0,1.,0.,0.,  0.,0.
ddroi,1,0,1.,0.,-8., 0.,0.

COM      CHARGEMENT (deplacement impose sur un poincon)
poin,1,3,0,1,0.,0.002,10,2
endk,50                ! 50 pas de charge

EPLOTT
```

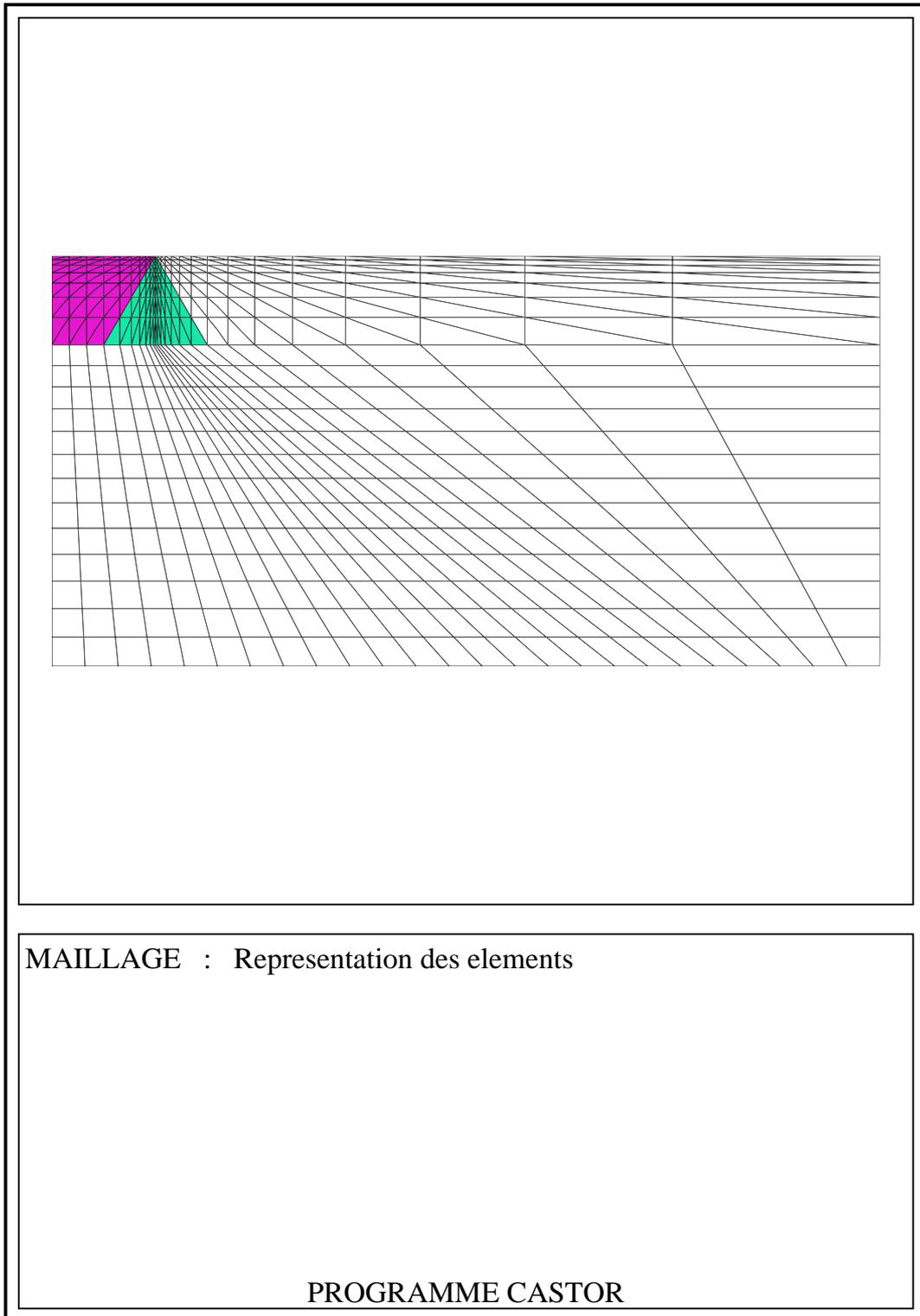


FIG. F.4: *Fondation sur réseau de micropieux - Maillage*

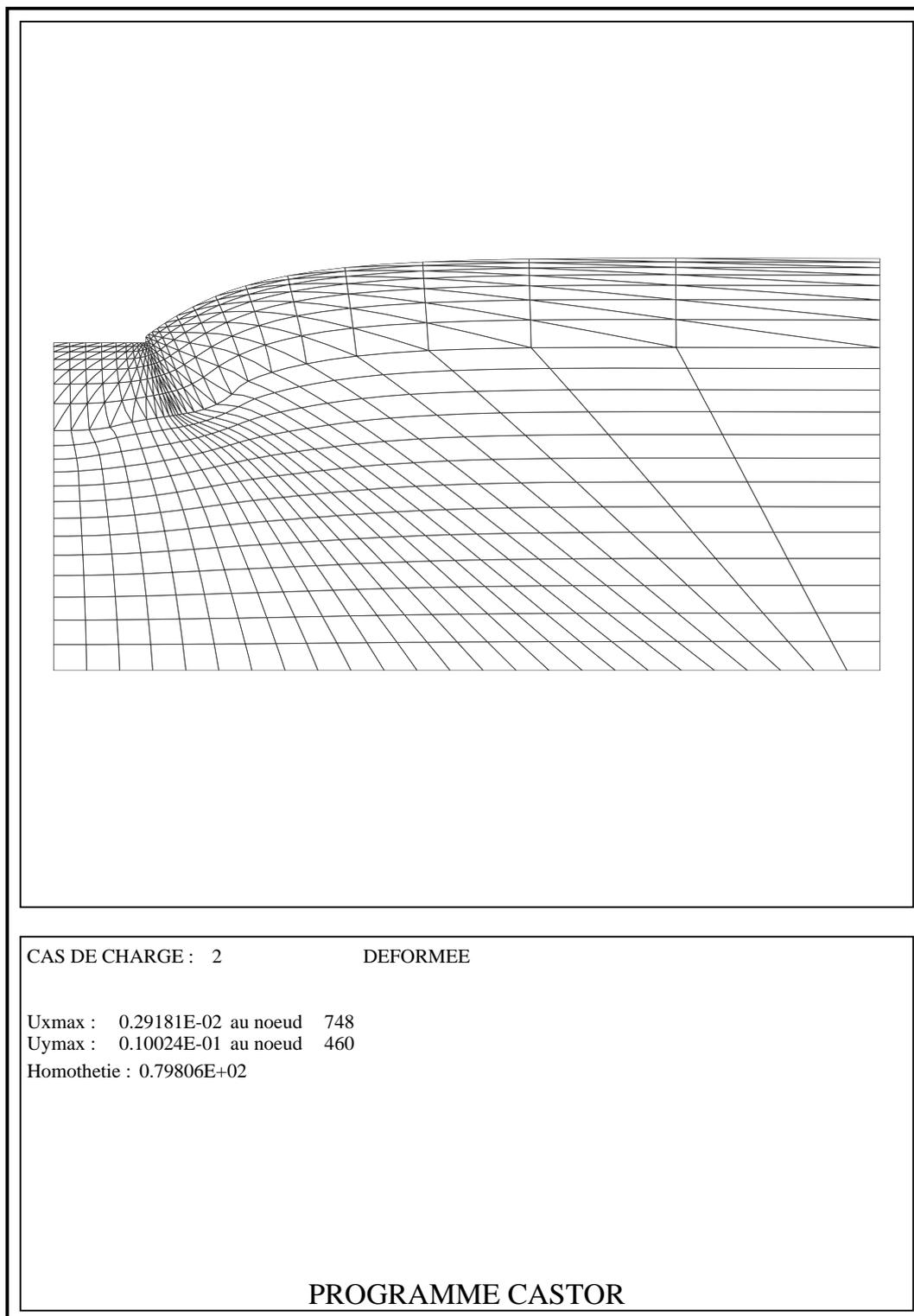


FIG. F.5: *Fondation sur réseau de micropieux - Déformée ($\delta/B = 0,5\%$)*

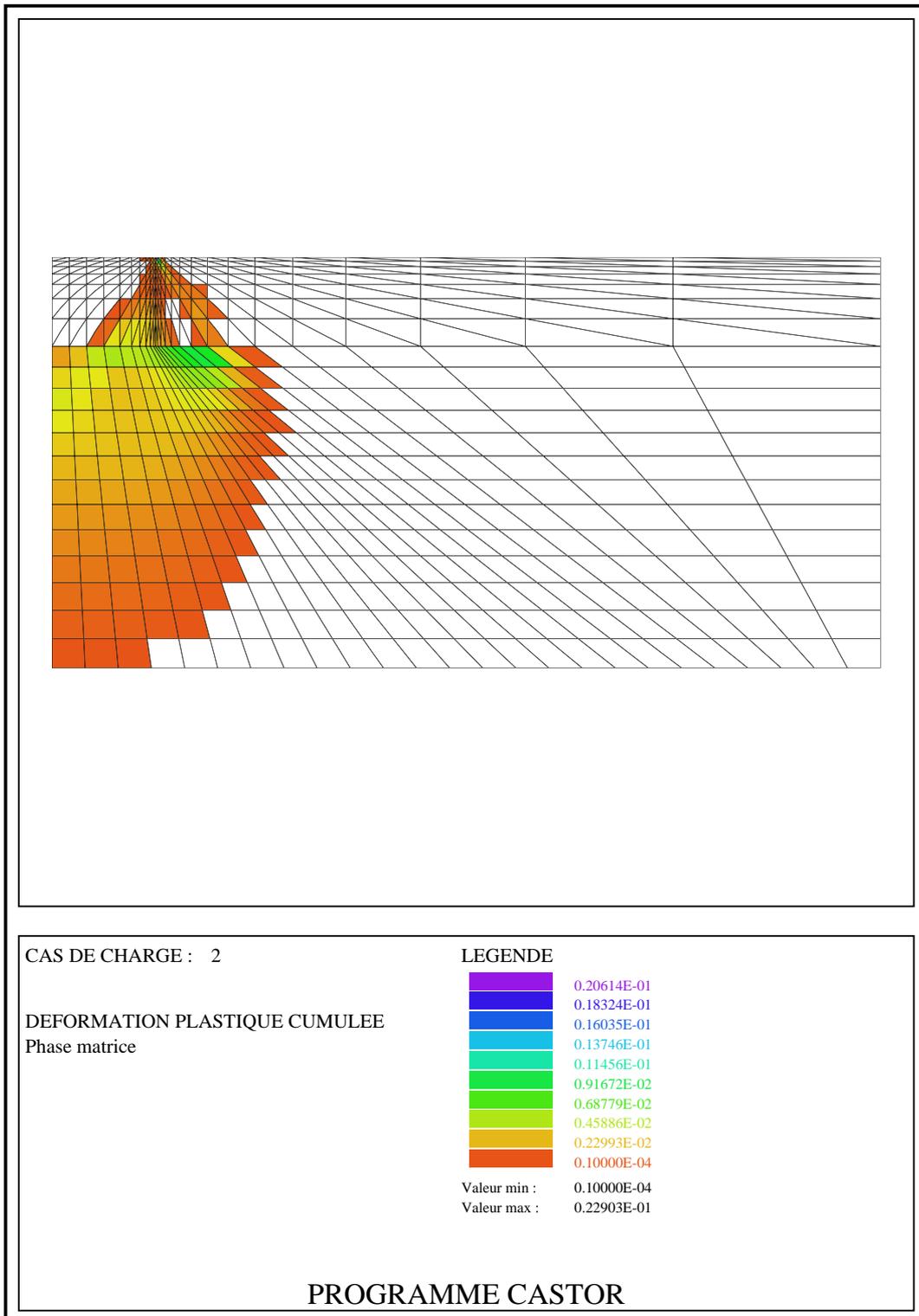


FIG. F.6: Fondation sur réseau de micropieux - Zones plastiques dans le massif ($\delta/B = 0,5\%$)

Annexe G

Manuel d'utilisation des pré- et post-processeur de CASTOR

1 Introduction

Comme on l'a vu au chapitre 4, section 5, le code CASTOR se compose de trois programmes indépendants baptisés `prepro`, `castor`, `postpro`. Le programme `castor` se lance simplement en tapant à l'écran `castor`. Les deux autres sont des interpréteurs en ligne de commandes. On décrit dans cette annexe la syntaxe de ces commandes.

Une *commande* est une chaîne de caractères composée d'un *mot-clé* suivis de *paramètres*. Les paramètres sont des chaînes de caractères, des entiers ou des réels séparés par des virgules. Les espaces et les lignes vides sont ignorés, de même que la casse des caractères. Le format des réels doit impérativement être spécifié par un point (par exemple 12.3, 5.) même s'il n'y a pas de décimales.

Dans le descriptif des commandes, les paramètres optionnels sont écrits entre crochets [.]

2 Commandes générales

AFRES_{*i*}

Définit les cas de charge pour lesquels les résultats (déplacements, déformations, contraintes) sont sauvegardés dans les fichiers `file2x.dat`.

- $i = 0$: seuls les résultats des premier et dernier cas de charge sont sauvegardés.
- $i = 1$: les résultats de tous les cas de charge sont sauvegardés.
- $i > 1$: les résultats sont sauvegardés tous les n cas de charge, en plus du premier et du dernier.

Valeur par défaut : $i = 0$.

COM

Toute ligne de commande commençant par ces trois caractères est ignorée.

CYLIN

Entraîne l'impression des résultats en coordonnées cylindriques dans les fichiers `file2x.dat`.

EFDEF, a, b

L'utilisation de la commande **POIN** entraîne le calcul de la courbe de chargement (réaction sous le poinçon *vs.* déplacement imposé). Cette commande permet de faire un changement d'échelle pour cette courbe. La valeur de l'abscisse est multipliée par a , celle de l'ordonnée par b .

IPLAS, $i, [TOL, ITMAX]$

Définit le type de comportement utilisé

- $i = 0$: calcul élastique
- $i = 1$: calcul élasto-plastique. Le calcul itératif s'arrête si le nombre d'itérations atteint ITMAX ou si l'erreur relative pour les différents tests de convergence est inférieure à TOL.

Valeurs par défaut : $TOL = 10^{-4}$, $ITMAX = 500$.

Q

Termine la saisie des lignes de commandes. Entraîne la création des fichiers de données formatés `file0x.dat` et la sortie du programme `prepro`.

R,input

Lit et interprète les lignes de commandes contenues dans le fichier `input`.

TYPDE, i

Définit le type du calcul.

- $i = 0$: contrainte plane
- $i = 1$: déformation plane
- $i = 2$: axisymétrie

Valeur par défaut : $i = 0$.

3 Génération des nœuds

Les nœuds sont définis par un numéro (entier) et deux coordonnées (réelles). Ils peuvent être définis dans n'importe quel ordre. Cependant, à la fin de leur création, la numérotation doit être continue de 1 au nombre total.

N, N_0 , x , y

Crée le nœud numéro N_0 de coordonnées (x, y)

NCIRC, $x_c, y_c, r_0, \theta_0, \theta_1, N_0, NINT, NINCR_1, N_c, NINCR_2, \delta r_0, q$

Crée des nœuds sur N_c arcs de cercles concentriques de centre (x_c, y_c) , de rayon $r = r_0 + \delta r_0 q^{i-1}$, $i = 1, \dots, N_c$. Chaque arc compris entre les angles θ_0 et θ_1 est divisé en $NINT$ intervalles égaux. Le premier nœud du premier cercle porte le numéro N_0 , les numéros sont décalés de $NINCR_1$ sur chaque cercle, $NINCR_2$ entre deux cercles consécutifs.

NDROI, $x_1, y_1, x_2, y_2, N_0, NINT, NINCR$ [, q]

Crée $(NINT + 1)$ nœuds sur le segment d'extrémités (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Le premier nœud porte le numéro N_0 , les suivants sont décalés de $NINCR$. Les longueurs des segments consécutifs sont en progression géométrique de raison q .

Valeurs par défaut: $q=1$.

NGEN, $N_0, N_1, NPAS, NITER, NINCR, \delta x, \delta y$

Génère $NITER$ lignes de nœuds à partir de la ligne définie au préalable par les nœuds compris entre N_0 et N_1 tous les $NPAS$, en décalant les numéros de $NINCR$ et la position de δx et δy . La ligne originale est comptée, de sorte que des nœuds sont effectivement créés uniquement si $NITER > 1$.

NLIN, $N_0, N_1, NINT, NITER, NINCR$ [, q]

Crée une ligne de nœuds entre N_0 et N_1 définis au préalable ($NINT-1$ nœuds intermédiaires). Les intervalles entre deux nœuds consécutifs de cette ligne sont en progression géométrique de raison q . Reproduit $NITER$ fois l'opération en décalant les numéros extrêmes (au départ N_0 et N_1) de $NINCR$.

Valeurs par défaut: $q=1$.

4 Propriétés des matériaux

Chaque matériau est repéré par un *numéro de groupe de propriétés*. Les propriétés élastiques, élasto-plastiques de la phase matrice et celles de la (des) phase(s) renforcement sont introduites à l'aide de différentes commandes.

MATEL, $i, NBDR, E, \nu [\rho]$

Fixe les propriétés élastiques de la *phase matrice* du matériau numéro i . $NBDR$ désigne le nombre de directions de renforcement.

- $NBDR = 0$: matériau non renforcé,
- $NBDR = 1, 2$: matériau renforcé dans une (deux) direction(s),
- $NBDR = -1$: matériau renforcé radialement (en déformation plane).

Les paramètres qui suivent sont le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν et la masse volumique ρ .

Valeurs par défaut : $\rho = 0$.

MAPLA, $i, NCRIT, X_1 [X_2]$

Fixe les propriétés plastiques de la *phase matrice* du matériau numéro i . $NCRIT$ désigne le numéro du critère de plasticité.

- $NCRIT = 1$: critère de Von Mises, X_1 est le paramètre du critère (limite en cission).
- $NCRIT = 2$: critère de Drucker-Prager dont les propriétés sont déduites par les équations (F.24) de la cohésion $X_1 = C$ et de l'angle de frottement en degrés $X_2 = \varphi$.
- $NCRIT = 3$: critère de Drucker-Prager sous la forme (F.20), avec $X_1 = \alpha$, $X_2 = k$.

MAVAR, $i, \Delta E_x, \Delta E_y [\Delta C_x, \Delta C_y]$

Permet de prendre en compte un module d'Young et une cohésion variables en fonction du point courant pour le matériau i . En un point de coordonnées (x, y) , le module pris en compte est calculé par $E(x, y) = E + x \Delta E_x + y \Delta E_y$, ou E a été défini précédemment par la commande **MATEL**. De même pour la cohésion.

Valeurs par défaut : $\Delta C_x, \Delta C_y = 0$.

MAREN, $i, a_1^r, \theta_1 [, a_2^r, \theta_2]$

Fixe les propriétés élastiques de la *phase renforcement* du matériau numéro i .

- Si $NBDR > 0$, les a_i^r sont les raideurs élastiques des phases renforcement, les θ_i les angles en degrés que font les directions de renforcement avec l'*horizontale*.
- Si $NBDR = -1$, a_1^r et θ_1 ont la signification précédente, les deux paramètres suivants sont les coordonnées du point vers où convergent les inclusions radiales.

MAPRE, $i, \sigma_1^r, \varpi_1, \sigma_2^r, \varpi_2$

Fixe les propriétés plastiques des phases renforcement du matériau numéro i . Les σ_i^r désignent les limites en traction des phases renforcement, les limites en compression sont $-\varpi_i \sigma_i^r$.

MANAS, i, ψ

Fixe la valeur de l'angle de dilatance ψ pour le matériau numéro i . Doit être utilisé après la commande **MAPLA**, $i, 2, \dots$

5 Génération des éléments

Un élément est caractérisé par un *type*, un *matériau* et la liste de ses nœuds. Le type et le matériau courant sont précisés avant la définition du premier élément, et peuvent être modifiés à tout moment.

TYP**CO**, i

Fixe le type d'élément courant, c'est à dire qui sera utilisé jusqu'à une nouvelle commande **TYP****CO**.

- $i = 1$: définit des triangles T3
- $i = 2$: définit des quadrangles Q4
- $i = 3$: définit des triangles T6
- $i = 4$: définit des quadrangles Q9
- $i = 5$: définit des triangles T6 en axisymétrie (nécessite **TYP****DE**, **2**).
- $i = 6$: définit des quadrangles Q9 en axisymétrie (nécessite **TYP****DE**, **2**).

Valeurs par défaut: $i = 1$.

MATCO, i

Fixe le matériau courant, c'est à dire qui sera utilisé jusqu'à une nouvelle commande **MATCO**.

Valeurs par défaut : $i = 1$.

CHMAT, NEL , $NMAT$, $NITER$, $NINCR$

Permet de changer le numéro du matériau affecté *pour des éléments déjà définis*. NEL est le numéro du premier élément à modifier, $NMAT$ le nouveau numéro de matériau, $NITER$ le nombre d'éléments à modifier, $NINCR$ l'écart de numérotation entre deux éléments successifs.

E, N_0 , N_1 , .. N_k

Définit un élément dont les nœuds sont N_0 , N_1 , .. N_k . Le type et le matériau doivent avoir été précisés auparavant par **MATCO** et **TYPKO**. Pour chaque type d'éléments, les nœuds sont définis dans le sens *trigonométrique* de façon continue (pour Q9, le nœud situé au centre de l'élément est défini en dernier).

EGEN, N_0 , N_1 , $NPAS$, $NITER$, $NINCR$

Génère $NITER - 1$ groupes d'éléments à partir de ceux compris entre N_0 et N_1 tous les $NPAS$. L'écart de numérotation entre les groupes successifs est $NINCR$. Tous les nœuds doivent avoir été définis au préalable.

6 Conditions aux limites

Il est possible d'introduire des efforts volumiques, surfaciques ou ponctuels et des déplacements imposés. Plusieurs cas de charge peuvent être définis successivement. Le calcul est *incrémental*: les résultats pour chaque cas de charge sont cumulés au fur et à mesure. Chaque incrément de chargement peut comprendre indifféremment tous les types d'efforts. Par contre, pour un calcul piloté en déplacement, les degrés de liberté bloqués sont définis une fois pour toutes dans le premier cas de charge, et seules les valeurs des déplacements imposés sont modifiées pour les cas de charge suivants (chargement proportionnel).

ENDK[, i]

Cette commande entraîne la sauvegarde sur fichier du cas de charge courant, c'est à dire des efforts et déplacements imposés jusqu'ici, et les remet à zéro. Le paramètre optionnel permet de définir i fois le même cas de charge.

6.1 Données en efforts

ACEL, γ_x, γ_y

Définit les composantes horizontale γ_x et verticale γ_y de l'accélération pour le calcul des forces de volume. Celles-ci sont obtenues à partir de la masse volumique ρ introduite par la commande **MATEL**.

SIGIN, i, a, b, c

Définit le champ des contraintes initiales. i désigne la composante dans le vecteur des contraintes ${}^t\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_1^r, \sigma_2^r\}$. En chaque point, cette composante est linéaire des coordonnées, soit $\sigma(i) = a + b x + c y$

P, *NEL*, $N_F, P_t, P_n, NITER, NINCR$

Définit un effort surfacique constant sur la face N_F de l'élément *NEL*, de composantes tangentielle P_t et normale P_n . Reproduit sur *NITER* éléments décalés de *NINCR* cet effort.

Le numéro de face correspond à l'ordre de numérotation des nœuds, il peut valoir 1 à 3 pour les T3 et T6, 1 à 4 pour les Q4 et Q9. Les valeurs de P_t et P_n sont algébriques, le vecteur tangent \underline{t} étant orienté dans le sens de la numérotation des nœuds (sens trigonométrique), le vecteur normal \underline{n} pointant vers l'extérieur de l'élément.

F, N_0, F_x, F_y

Définit une force ponctuelle sur le nœud N_0 , de composantes F_x et F_y .

FGEN, $N_0, NITER, NINCR$

Duplique l'effort appliqué sur le nœud N_0 (commande **F**) *NITER* fois en décalant les numéros des nœuds de *NINCR*.

6.2 Données en déplacement

D, N_0, k_x, k_y, U_x, U_y

Bloque le(s) degré(s) de liberté du nœud N_0 . $k_{x/y}$ vaut 0 si le déplacement horizontal/vertical est libre (la valeur correspondante de $U_{x/y}$ doit être impérativement nulle), 1 s'il est imposé (La valeur correspondante est $U_{x/y}$).

DGEN, N_0 , *NITER*, *NINCR*

Reproduit les conditions aux limites fixées au nœud N_0 (commande **D**) *NITER* fois en décalant les numéros des nœuds de *NINCR*.

DDROI, $k_x, k_y, a, b, c, U_x, U_y$

Bloque le(s) degré(s) de liberté des nœuds situés sur la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Les paramètres $k_{x/y}, U_{x/y}$ ont la même signification que ceux de la commande **D**.

DCIRC, $x_c, y_c, r_0, \theta_0, \theta_1, U_r$

Bloque les degrés de liberté des nœuds situés sur le cercle de centre (x_c, y_c) , de rayon r_0 , entre les angles θ_0 et θ_1 en imposant un déplacement radial U_r .

POIN, *NEL*, $N_F, k_t, k_n, U_t, U_n, NITER, NINCR$

Permet de définir une action de poinçonnement sur un ensemble d'éléments. Sur la facette N_F de l'élément *NEL*, les déplacements sont imposés selon la valeur 0/1 de $k_{t/n}$ (voir commande **D**), les valeurs correspondantes sont $U_{t/n}$. Cette condition est reproduite *NITER* fois en décalant les numéros des éléments de *NINCR*.

Un poinçon rugueux est donc défini par $(k_t = 1, U_t = 0)$, un poinçon lisse par $(k_t = 0, U_t = 0)$. L'utilisation de la commande **POIN** à la place de **D** facilite le post-traitement des résultats. La réaction sous le poinçon est en effet calculée automatiquement, et stockée pour chaque cas de charge de façon à tracer aisément la courbe de chargement.

7 Commandes graphiques

NPLOT[, i]

Crée un fichier au format PostScript baptisé `PL0Txx.ps`, le nombre xx étant incrémenté automatiquement.

- $i = 1$: seuls les nœuds sont représentés par un point.
- $i = 2$: les numéros des nœuds sont également représentés.

Valeur par défaut : $i = 2$.

Cette commande entraîne également la visualisation à l'écran du fichier par le programme `ghostview`.

EPLOTT $[,i]$

Crée un fichier au format PostScript baptisé **PLOTTxx.ps**, le nombre xx étant incrémenté automatiquement.

- $i = 1$: seuls les éléments sont représentés par un point.
- $i = 2$: les numéros des éléments sont également représentés.

Valeur par défaut : $i = 2$.

Cette commande entraîne également la visualisation à l'écran du fichier par le programme **ghostview**.

ZOOM $,x_0,y_0,x_1,y_1$

Sélectionne les nœuds et les éléments situés dans le rectangle défini par les quatre coordonnées.

NALL

Sélectionne tous les nœuds du maillage

EALL

Sélectionne tous les éléments du maillage

8 Commandes du post-processeur postpro

CASFO $,i$

Permet de définir le cas de charge pour lequel les résultats vont être représentés. (Celui-ci doit être effectivement sauvegardé dans les fichiers **file2x.dat**, voir commande **AFRES**).

EPLOTT $[,i]$

Crée un fichier au format PostScript baptisé **PLOTTxx.ps**, le nombre xx étant incrémenté automatiquement.

- $i = 1, 2$: même action que dans le pré-processeur.
- $i = 3$: seule la déformée est représentée.

- $i = 4$: le maillage initial et la déformée sont représentés.

Valeur par défaut : $i = 4$.

Les déplacements sont amplifiés automatiquement d'un facteur Z de sorte que le déplacement maximal corresponde à un dixième de la taille du maillage. Le facteur Z peut être introduit manuellement (commande **HOMO**).

EXTRN,*output*, $N_0, N_1, MOT_1[, MOT_2, MOT_3, MOT_4]$

Permet d'extraire des fichiers de résultats des informations nodales concernant les nœuds situés sur le *segment* d'extrémités les nœuds N_0 et N_1 (*et non pas les informations relatives à tous les nœuds de numéro compris entre N_0 et N_1*). Le résultat de l'extraction est écrit dans le fichier *output*. Les informations disponibles sont repérés par 1 à 4 mots-clés : **X, Y, UX, UY**, correspondant respectivement à l'abscisse et l'ordonnée du nœud, son déplacement horizontal et vertical.

TRACE,*output*, N_0, U_x, U_y

Permet d'extraire du fichier résultat *file21.dat* l'historique des déplacements du nœud N_0 au cours des différents cas de charge. Le résultat de l'extraction est sauvegardé dans le fichier *output*.

CPLOT,*MOT*

Crée un fichier au format PostScript baptisé *PLOTxx.ps*, le nombre *xx* étant incrémenté automatiquement.

Cette commande permet de représenter les valeurs d'un champ défini sur les éléments (valeur moyenne) par une couleur. Les mots-clés disponibles sont :

- pour les composantes de contrainte totale $\underline{\underline{\Sigma}}$: **SXX, SYX, SZZ, SXY**,
- pour les composantes de contrainte partielle $(\underline{\underline{\sigma}}^m, \sigma^r)$: **S0XX, S0YY, S0ZZ, S0XY, S1, S2**,
- pour les composantes de déformation **EXX, EYY, EZZ, EXY, E1, E2**,
- pour les composantes de déformation plastique : **EPXX, EPYY, EPZZ, EPXY, EP1, EP2**,
- pour la déformation plastique équivalente cumulée dans la matrice : **FSOL**, dans chaque phase renforcement : **F1, F2** et leur somme : **FTOT**.

Cette commande entraîne également la visualisation à l'écran du fichier par le programme *ghostview*.

HOMO, Z

Définit le facteur Z d'amplification des déplacements pour la représentation de la déformée du maillage.

FBORN, f_{min} , f_{max}

Permet de préciser les bornes entre lesquelles les valeurs d'un champ sont représentées par la commande **CLOT**. Les valeurs situées à l'extérieur de ces bornes sont représentées par la couleur blanche.

Table des matières

1	Introduction bibliographique	1
1	Introduction	5
2	Les techniques actuelles de renforcement par inclusions	7
2.1	Le boulonnage des tunnels	7
2.2	Le renforcement des sols	9
2.3	Les fondations profondes	11
2.4	Les données expérimentales	15
2.5	Premières conclusions	18
3	Les méthodes de dimensionnement et de calcul	19
3.1	Introduction	19
3.2	Les tunnels	19
3.3	Les sols renforcés	23
3.4	Les fondations profondes	25
3.5	Conclusion	28
4	Les modèles de matériau équivalent	30
4.1	Modèles élastiques	30
4.2	Critère de rupture	33
4.3	Modèles élasto-plastiques	33
4.4	Les matériaux composites industriels	35
4.5	Les modèles multiphasiques	36
5	Conclusion	39

5.1	Récapitulatif	39
5.2	Objectifs du présent travail	40
2	Modèle multiphasique de matériau renforcé	41
1	Construction du modèle multiphasique	45
1.1	Méthode des puissances virtuelles	45
1.2	Description géométrique du milieu multiphasique	45
1.3	Mouvements virtuels	47
1.4	Postulat des expressions des puissances virtuelles	47
1.5	Mise en œuvre du P.P.V	50
1.6	Interprétation mécanique du modèle. Lien avec l'échelle microscopique	53
1.7	Equations globales d'équilibre	55
1.8	Nécessité des lois de comportement du matériau renforcé	55
2	Elasticité du milieu multiphasique	57
2.1	Hypothèse des petites perturbations	57
2.2	Déformations du milieu multiphasique	57
2.3	Elasticité des phases	58
2.4	Comportement élastique adhérent	61
3	Elasto-plasticité du milieu multiphasique	67
3.1	Elasto-plasticité de chacune des phases	67
3.2	Comportement élasto-plastique adhérent	70
3.3	Critère de rupture du milieu multiphasique adhérent	76
4	Validation du modèle en élasticité et calcul à la rupture	78
4.1	Validation en élasticité	78
4.2	Validation en calcul à la rupture	83
5	Conclusion	88

3	Solutions analytiques de problèmes multiphasiques	89
1	Structure générale des problèmes et méthodes de résolution	93
1.1	Introduction	93
1.2	Problème d'élasticité - modèle adhérent	93
1.3	Problème d'élasticité - modèle général	95
1.4	Méthodes de résolution	97
2	Compression simple élasto-plastique d'une éprouvette renforcée	100
2.1	Position du problème	100
2.2	Renforcement longitudinal	101
2.3	Renforcement transverse	107
3	Compression en déformation plane	114
3.1	Position du problème	114
3.2	Résolution	115
3.3	Résultats	117
4	Boulonnage des tunnels profonds	119
4.1	Position du problème	119
4.2	Solution élastique - modèle général	121
4.3	Solution élastique - modèle adhérent	126
4.4	Remarques complémentaires	127
5	Conclusion	129
4	Eléments finis	131
1	La méthode des éléments finis pour le milieu continu élastique monophasique	135
1.1	Introduction	135
1.2	Principe de minimum de l'énergie potentielle	135
1.3	La technique des éléments finis	137
1.4	Conclusion	142
2	Les éléments finis en élasto-plasticité	143

2.1	Introduction	143
2.2	Discrétisation temporelle du problème d'évolution	144
2.3	Algorithme de résolution global	144
2.4	Algorithme d'intégration local	146
2.5	Vérification de la convergence	150
2.6	Autres méthodes de résolution numérique des problèmes de plasticité	152
2.7	Récapitulatif	157
2.8	Conclusion	157
3	Implémentation du modèle multiphasique adhérent	161
3.1	Introduction	161
3.2	Traitement de l'élasticité	161
3.3	Traitement de la plasticité	163
3.4	Conclusion	167
4	Implémentation du modèle multiphasique général	169
4.1	Introduction	169
4.2	Principe de minimum de l'énergie potentielle	169
4.3	Formulation éléments finis en déformation plane	172
4.4	Généralisation et remarques sur l'implémentation	176
4.5	Conclusion	177
5	Le code CASTOR	179
5.1	Motivation	179
5.2	Le pré-processeur <code>prepro</code>	180
5.3	Le code de calcul <code>castor</code>	181
5.4	Le post-processeur <code>postpro</code>	183
6	Conclusion	185

5	Validation et Utilisation de CASTOR	187
1	Validation de CASTOR par comparaison à des solutions analytiques	191
1.1	Introduction	191
1.2	Problèmes monophasiques	191
1.3	Problèmes multiphasiques adhérents	200
2	Calculs en déplacement des radiers de pieux	206
2.1	Approches de référence	206
2.2	Position du problème	208
2.3	Résultats	211
2.4	Conclusion	213
3	La <i>Messeturm</i> de Francfort	216
3.1	Introduction	216
3.2	Description de la simulation réalisée avec CASTOR	216
3.3	Résultats	221
3.4	Conclusion	227
4	Les tunnels boulonnés	229
4.1	Description du dispositif expérimental	229
4.2	Simulation numérique	229
5	Etude paramétrique des réseaux de micropieux	233
5.1	Introduction	233
5.2	Géométrie du problème	233
5.3	Maillage	233
5.4	Sol purement cohérent	235
5.5	Sol frottant	236
5.6	Conclusion	237
6	Conclusion	240

6	Extensions du modèle multiphasique	241
1	Prise en compte des effets d'échelle par le modèle multiphasique général	245
1.1	Introduction	245
1.2	Modélisation des effets d'échelle	245
1.3	Validation : compression d'un multicouche en déformation plane (de Buh- han et Sudret, 1999d)	250
1.4	Conclusion	254
2	Modèle multiphasique avec flexion	256
2.1	Introduction	256
2.2	Equations d'équilibre	256
2.3	Loi de comportement élastique	262
2.4	Exemple d'application	267
2.5	Validation du modèle adhérent avec flexion	271
3	Conclusion	277
7	Conclusions et perspectives	279
A	Notations	301
B	Aspects thermodynamiques du modèle élasto-plastique adhérent	309
1	Energie bloquée et dissipation	309
2	Démonstration de l'inégalité (2.111)	311
C	Critère de rupture du milieu multiphasique adhérent	313
1	Plastification de la phase matrice seule	313
2	Plastification de la phase renforcement seule	315
3	Plastification des deux phases	315
D	Différences finies	319
1	Discrétisation et approximation des dérivées	319
2	Application au cas du tunnel renforcé	320

E	Représentation de l'écrouissage	321
1	Introduction	321
2	Position du problème	321
3	Domaine d'élasticité initial	322
4	Domaine d'élasticité actuel	324
5	Analyse d'un trajet de chargement	324
F	CASTOR	329
1	Calcul des matrices de rigidité	329
1.1	Notations	330
1.2	Élément de référence	330
1.3	Expression de la matrice \mathbf{B}_e	332
1.4	Intégration par quadrature	332
2	Critère de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager	333
2.1	Définitions	333
2.2	Plasticité non associée	334
2.3	Equivalence des critères en déformation plane	335
2.4	Algorithme d'Euler implicite	335
3	Matrice d'élasticité d'une phase renforcement	337
4	Exemple de fichier de commandes pour <code>prepro</code>	338
G	Manuel d'utilisation de CASTOR	345
1	Introduction	345
2	Commandes générales	345
3	Génération des nœuds	347
4	Propriétés des matériaux	348
5	Génération des éléments	349
6	Conditions aux limites	350
6.1	Données en efforts	351

6.2	Données en déplacement	351
7	Commandes graphiques	352
8	Commandes du post-processeur <code>postpro</code>	353