



THÈSE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Mathématiques et Applications

Méthodes de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles

Présentée par

Emmanuel BONGIOVANNI

Soutenue le 13 décembre 2002 devant le jury composé de :

M.	Rémi	ABGRALL	Rapporteurs
M.	Bruno	DESPRÉS	
M.	Frédéric	COQUEL	Examineurs
Mme.	Nathalie	GLINSKY-OLIVIER	
M.	Raphaèle	HERBIN	
M.	Alexandre	ERN	Directeur de Thèse

Je voudrais commencer par remercier les personnes qui ont placé leur confiance en moi dès les prémices de cette aventure que constitue un doctorat, à savoir M. Frédéric Poupaud et Mme Loula Fézoui.

Je tiens à remercier M. Alexandre Ern d'avoir accepté de diriger mon travail de thèse et pour les conseils avisés qu'il a su me prodiguer, et cela tant sur le plan scientifique, que sur le plan humain.

Je ne saurais dissocier ces remerciements de ceux que je destine à Mme Nathalie Glinsky-Olivier, qui a assuré mon co-encadrement dans le projet CAIMAN du CERMICS de Sophia-Antipolis. Elle a fait preuve d'un soutien et d'une disponibilité constante à mon égard, et ses encouragements ont grandement contribué à la qualité finale de ce travail.

Je remercie tous les membres du jury pour le temps qu'ils ont passé à juger mon travail, j'ai été sensible à la qualité de leurs remarques qui se sont révélées judicieuses et constructives.

Je remercie M. Christian Tenaud de m'avoir fourni les fichiers de solutions obtenues par ses schémas dans les articles [T+00] [DT01], et qui ont servi de références pour nos résultats.

J'ai également apprécié les contacts que j'ai pu avoir avec de nombreuses personnes de l'INRIA, et d'avoir partagé mon bureau avec Mme Maud Mériaux-Poret.

Je termine ces remerciements en ayant une pensée pour ma famille et mon entourage proche qui ont toujours fait preuve, à mon égard, d'un soutien indéfectible.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Motivations	9
1.1.1	Lois de pression et de température	9
1.1.2	Extension du solveur de Riemann	11
1.1.3	Méthodes de relaxation	13
1.2	Objectifs	14
1.3	Organisation du mémoire	14
2	Modélisation physique	17
2.1	Equations de conservation	17
2.1.1	Les équations de Navier-Stokes compressibles	18
2.1.2	Modélisation des flux diffusifs	19
2.1.3	Bilans d'énergie cinétique et d'énergie interne	19
2.1.4	Équation pour la dilatation	20
2.1.5	Les équations d'Euler	20
2.2	Thermodynamique	21
2.2.1	Hypothèses fondamentales liées à l'existence d'une entropie	21
2.2.2	Quantités thermodynamiques auxiliaires	25
2.2.3	Gaz thermiquement parfaits (TP)	29
2.3	Bilan d'entropie	31
2.3.1	L'entropie mathématique	31
2.3.2	Bilan d'entropie pour les équations de Navier-Stokes	32
2.3.3	Bilan d'entropie pour les équations d'Euler	33
2.4	Condition d'hyperbolicité et entropie	34
2.4.1	La condition d'hyperbolicité	34
2.4.2	Fondements thermodynamiques de la condition d'hyperbolicité	35
2.4.3	Liens avec l'acoustique	36
3	Etude mathématique des équations de Navier-Stokes relaxées	39
3.1	Préliminaires	40
3.1.1	Gaz réel et gaz fictif	40
3.1.2	Décomposition de l'énergie interne	40
3.1.3	Variétés d'équilibre	41

3.1.4	Le cas particulier de la relaxation TP/TPCP	41
3.2	Rappels sur les équations d'Euler relaxées	42
3.2.1	Le système relaxé	42
3.2.2	Consistance du système relaxé	43
3.2.3	Stabilité du système relaxé	43
3.2.4	Quelques propriétés de l'entropie globale Σ	45
3.2.5	Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un	45
3.2.6	Les conditions sous-caractéristiques et le coefficient adiabatique	48
3.3	Les équations de Navier-Stokes relaxées	50
3.4	Consistance du système relaxé	51
3.5	Stabilité du système relaxé	52
3.6	Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un	54
4	Méthodes numériques	59
4.1	Approximation mixte volumes finis/éléments finis des équations de Navier-Stokes compressibles	59
4.1.1	Notations	60
4.1.2	Principe de l'approximation mixte volumes finis/éléments finis	61
4.1.3	Calcul des flux convectifs internes	65
4.1.4	Calcul des flux diffusifs internes	72
4.1.5	Traitement des conditions aux bords	73
4.1.6	Discrétisation temporelle	76
4.2	Traitement numérique de la méthode de relaxation	78
4.2.1	L'algorithme de relaxation	78
4.2.2	Le système à résoudre	79
4.2.3	Extension naturelle des solveurs de Riemann approchés	82
4.2.4	Calcul découplé des flux convectifs	84
5	Résultats numériques	87
5.1	Écoulements non visqueux	88
5.1.1	Cas d'un gaz TPCP	88
5.1.2	Cas d'un gaz TPCI	95
5.2	Advection d'un réseau périodique de vortex	103
5.2.1	Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = \gamma = 1.4$	103
5.2.2	Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ et $\gamma = 1.4$	106
5.2.3	Évolution en temps	106
5.2.4	Comparaison entre différents maillages	110
5.3	Interaction d'un choc faible et d'un spot de température	112
5.3.1	Cas d'un gaz réel TPCP	113
5.3.2	Cas d'un gaz réel TPCI	120
5.4	Interaction d'un choc et d'une couche limite	136
5.4.1	Introduction	136
5.4.2	Description de l'écoulement	136

5.4.3 Les solutions	138
6 Conclusions	147
Bibliographie	151
A Dérivées partielles : notations et propriétés élémentaires	159
A.1 Motivations	159
A.2 Conventions de notation	159
A.3 Propriétés élémentaires des dérivées partielles	160
B Matrices de flux convectifs bidimensionnels pour les gaz TPCI	163

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Motivations	9
1.2	Objectifs	14
1.3	Organisation du mémoire	14

Ce chapitre introductif a pour but de situer brièvement le contexte scientifique dans lequel se situe ce travail de thèse, d'en préciser les objectifs et de présenter succinctement l'organisation de ce mémoire.

1.1 Motivations

1.1.1 Lois de pression et de température

De nombreux problèmes issus des sciences de l'ingénieur font intervenir des écoulements de gaz régis par les équations de Navier-Stokes compressibles (aéronautique, écoulements atmosphériques, etc). Ces équations expriment la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie dans l'écoulement. Les variables conservatives sont donc la densité ρ , la quantité de mouvement par unité de volume ρU où U est le vecteur vitesse et l'énergie totale par unité de volume E , cette dernière étant donnée par la somme de l'énergie cinétique spécifique $\frac{1}{2}\rho U^2$ et de l'énergie interne spécifique ε . Or, l'écriture des flux convectifs et diffusifs fait intervenir deux inconnues supplémentaires qui sont la pression p et la température T . Afin de fermer le système des équations de Navier-Stokes compressibles, il est donc nécessaire de relier ces deux quantités aux variables conservatives.

Dans les simulations numériques, les ingénieurs pratiquent couramment cette fermeture en ayant recours à deux lois d'état, ou lois de comportement, qui modélisent le comportement thermodynamique du gaz. En général, elles s'expriment

sous la forme d'une loi de pression $p := p(\rho, T)$ et d'une loi pour l'énergie interne spécifique ε sous la forme $\varepsilon := \varepsilon(\rho, T)$. On peut également rencontrer le cas où ces lois sont uniquement données sous forme implicite (via la résolution d'une équation algébrique) et celui où ces lois ne sont connues que sous forme tabulée.

Dans cette thèse, nous étudierons la fermeture des équations de Navier-Stokes compressibles dans un cadre thermodynamique relativement général, celui où on suppose simplement l'existence d'une entropie (physique) spécifique s qui est une fonction de la dilatation $\tau = 1/\rho$ et de l'énergie interne spécifique et qui est strictement croissante et strictement concave en ces variables. Dans ces conditions, les relations de Gibbs permettent d'exprimer la pression et la température en fonction du couple (τ, ε) via les dérivées partielles de l'entropie. On obtient donc des lois d'état sous la forme $p := p(\tau, \varepsilon)$ et $T := T(\tau, \varepsilon)$. Ces lois sont liées par une relation de compatibilité (également appelée loi de Maxwell et résultant de l'égalité des dérivées croisées de l'entropie) et par deux inégalités liées à la stricte concavité de l'entropie.

La concavité de l'entropie implique en particulier que l'on peut inverser T en ε à τ fixée. Pour des raisons de commodité, nous considérerons dans ce chapitre des lois pour la pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ et pour l'énergie interne spécifique $\varepsilon := \varepsilon(\tau, T)$. Nous pouvons distinguer trois cas de difficulté croissante dans la modélisation thermodynamique du gaz :

- Pour un gaz dit *Thermiquement Parfait et Caloriquement Parfait* (TPCP), parfois appelé dans la littérature *gaz parfait polytropique*, la pression est une fonction bilinéaire de ρ et ε sous la forme

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (1.1)$$

et l'énergie interne spécifique est fonction linéaire de T et ne dépend pas de τ

$$\varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1}T, \quad (1.2)$$

où $\gamma > 1$ et R sont des constantes. Notons que (1.1) et (1.2) impliquent la loi bien connue des gaz parfaits

$$p = \rho RT. \quad (1.3)$$

La loi (1.1) permet d'obtenir simplement l'expression de p sans passer par une détermination préalable de la température. Ceci simplifie considérablement le traitement numérique des équations comme on pourra le constater dans la suite du document. De par sa simplicité, le modèle de gaz TPCP a été souvent considéré dans les applications. Il existe donc de nombreux codes dédiés à l'approximation numérique des équations de Navier-Stokes compressibles dans ce cadre, par exemple par des méthodes de type volumes finis. En raison des efforts de recherche importants qui leur ont été consacrés depuis plus d'une décennie, la plupart de ces codes peuvent être considérés comme relativement

robustes et fiables ;

- On parle de gaz *Thermiquement Parfait et Calorifiquement Imparfait* (TPCI) lorsque la loi des gaz parfaits (1.3) reste valable (si bien que la pression est linéaire en la température) mais que l'énergie interne spécifique est une fonction non-linéaire en la température. La relation de compatibilité entre lois de pression et de température implique alors que comme pour le modèle de gaz TPCP, ε ne peut pas dépendre de τ . Les modèles de gaz TPCI doivent être considérés par exemple pour les gaz polyatomiques où les molécules possèdent des degrés de liberté internes (rotation et vibration). La pression est alors une fonction non-linéaire de l'énergie interne spécifique. Sur le plan numérique, on constate que puisque la relation (1.1) n'est plus satisfaite, on ne peut plus éliminer T du calcul de p et l'évaluation de la pression en fonction du couple (ρ, ε) passe par une méthode numérique permettant d'inverser la deuxième loi d'état $\varepsilon := \varepsilon(T)$;
- Enfin, dans le cas général, la loi des gaz parfaits (1.3) devient elle-même inadéquate pour la modélisation et la pression est une fonction non-linéaire de la densité et/ou de la température. Une telle situation se rencontre par exemple dans le cas des écoulements à haute pression (typiquement au-dessus de 1000 atm). Dans ces conditions, les forces intermoléculaires ont un impact significatif sur la dynamique des collisions microscopiques ce qui conduit à une loi de pression non-linéaire, tant en la densité qu'en l'énergie interne spécifique.

Malgré le caractère quelque peu discutable de cette appellation dans un contexte de modélisation, nous utiliserons dans ce chapitre le terme “gaz réel” pour désigner un gaz dont le modèle thermodynamique retenu pour les lois de pression et de température est plus complexe que le modèle de gaz TPCP.

Il est clair que si l'on souhaite simuler des écoulements de gaz réels, il faudra étendre les solveurs développés dans le cadre de gaz TPCP aux nouvelles lois. Nous discutons maintenant des deux approches qui ont été considérées dans la littérature pour effectuer cette extension.

1.1.2 Extension du solveur de Riemann

L'intérêt pour l'étude des écoulements de gaz régis par des modèles thermodynamiques autres que le modèle TPCP a débuté, en particulier, avec les grands projets liés à la conquête spatiale (missiles hypersoniques, rentrée de corps dans l'atmosphère). Dès les années 80, des codes de calcul permettent la simulation des équations de Navier-Stokes pour les écoulements de tels gaz. On citera notamment les travaux de Prabhu et Tannehill [PT84] utilisant des formulations parabolisées et des schémas aux différences finies.

Ces méthodes ont des limitations, particulièrement pour la résolution d'écoulements à grande vitesse, car elles ne capturent pas correctement les discontinuités présentes dans l'écoulement et notamment les chocs. L'introduction des méthodes volumes finis et des schémas décentrés [H+83, Ro81, Os84] pour les équations d'Euler dans le cas d'un gaz TPCP a résolu ce problème et produit des schémas stables et robustes [FS89].

Malheureusement, ces méthodes étant initialement établies pour des gaz TPCP, s'est posée rapidement la question de la résolution du problème de Riemann, exact ou approché, pour le cas de gaz qui sont régis par des lois de comportement plus générales. De nombreux travaux ont été réalisés dans cette optique, dont nous ne citerons ici que quelques exemples.

Tout d'abord, Colella et Glaz [CG85] ont étendu la procédure numérique utilisée pour obtenir la solution exacte d'un problème de Riemann dans le cas d'un gaz TPCP, au cas des gaz plus généraux. Ensuite sont apparues des extensions des solveurs de Riemann approchés, parmi lesquelles celle de Montagné [Mo86] qui a proposé une décomposition des flux pour un gaz réel à l'équilibre chimique ; Glaister [Gl88] a ensuite présenté une extension du solveur de Riemann approché de Roe qu'il a appliqué à un problème de réflexion monodimensionnelle ; puis, Vinokur [Vi88] a étendu le solveur de Roe au cas de lois d'équilibre gaz réels (TPCI) avec une approche privilégiant les extensions exactes et approchées de la moyenne de Roe appliquées aux matrices jacobienne des flux convectifs, plutôt que l'utilisation de matrices jacobienne approchées. Enfin, Abgrall [Ab90] a abordé un problème plus global : celui d'une généralisation du solveur de Roe pour le cas d'un mélange de gaz TPCI, qui utilise une loi de comportement vibratoire pour l'énergie interne. L'amélioration de ces méthodes, ou la recherche de nouvelles afin d'étendre des solveurs de Riemann aux lois de gaz réels, est toujours d'actualité, comme le prouvent les récents travaux de Glaister [Gl97]. Le lecteur intéressé par un exposé plus large de ces méthodes, pourra également se reporter à [GW89, L+90, LL93, MP89, M+89, To92].

Différentes stratégies ont donc été suivies afin d'étendre des schémas originellement dédiés aux gaz TPCP, à des lois de comportement de gaz réels. Elles partagent malgré tout certains inconvénients : elles peuvent avoir un coût numérique élevé en comparaison du solveur TPCP, en particulier lorsque les lois d'état sont tabulées ; elles peuvent aussi être trop dépendantes des expressions des lois d'état, ce qui nécessite des remaniements importants des codes de calcul TPCP pour chaque type de gaz réel considéré. Ces méthodes n'arrivent donc pas à concilier efficacité et adaptabilité, ce qui rend leur utilisation quelque peu contraignante.

Plus récemment, une autre approche a permis d'obtenir des résultats intéressants lors de la résolution des équations d'Euler en gaz réels : elle est basée sur une méthode de relaxation et fait l'objet de la section suivante.

1.1.3 Méthodes de relaxation

Les mécanismes de relaxation apparaissent naturellement dans des domaines très variés, tels que la théorie cinétique ou encore les écoulements multi-phasiques. Ils permettent de rajouter de la viscosité afin de contrebalancer les effets dus à l'apparition de discontinuités.

En étudiant les propriétés mathématiques des systèmes issus de ces domaines, différentes méthodes dites de relaxation sont apparues dans le cadre de la résolution numérique des systèmes hyperboliques classiques. Dans cet esprit, Liu [Li87] puis Liu, Chen et Levermore [C+95] ont montré qu'une des conditions de stabilité de cette procédure est que les vitesses caractéristiques du système relaxé soient toujours inférieures, en valeur absolue, à celles du système original ; cette condition est souvent appelée *condition sous-caractéristique*. Liu, Chen et Levermore [C+95] ont également relié cette condition de stabilité à l'existence d'une entropie strictement convexe pour le système relaxé. Ces méthodes de relaxation ont aussi donné lieu à la formulation de nouveaux schémas numériques par Jin et Xin [JX95] qui, sous la condition sous-caractéristique, sont non-oscillatoires d'ordre 1 et 2, puis par Naldi et Pareschi [NP00]. Les propriétés de ces schémas numériques ont été abondamment étudiées, par exemple par Natalini [Na96] ainsi que Katsoulakis et Tzavaras [KT97]. Des études plus spécifiques portant sur leurs propriétés diffusives, en particulier autour des états d'équilibre, ont été réalisées par Jin, Pareschi et Toscani [J+98], ainsi que par Jin et Liu [JL00] ; en complément, on lira avec intérêt le travail réalisé par Majda et Pego [MP85] sur les matrices de viscosité. Enfin, des travaux sur la convergence de ces schémas ont été effectués par Katsoulakis, Kossioris et Makridakis [K+99], Tadmor et Tang [TT01], Chalabi [Ch99], Lattanzio et Serre [LS01] et également Liu et Warnecke [LW00].

Pour le cas particulier des équations d'Euler, une méthode de relaxation a été développée récemment par Coquel et Perthame dans [CP98]. Cette méthode consiste à relaxer la loi de pression non-linéaire en considérant une décomposition de l'énergie interne spécifique de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. L'énergie interne ε_1 est typiquement associée à une loi de gaz TPCP et ε_2 représente la perturbation non-linéaire. Durant le processus de relaxation, la perturbation non-linéaire ε_2 est convectée par l'écoulement tandis que le gradient de pression présent dans l'équation de conservation de l'impulsion ne dépend que de ε_1 . Dans la limite d'un taux de relaxation infini, on retrouve le système des équations d'Euler avec la loi de pression du gaz réel. D'un point de vue théorique, le résultat principal est que sous des conditions "sous-caractéristiques" obtenues par Coquel et Perthame, la stabilité du processus de relaxation est garantie par la positivité de la production d'une entropie convenablement définie. D'un point de vue pratique, un avantage important de la méthode de relaxation est qu'elle permet d'étendre à une loi de pression générale tout solveur classique dédié à un gaz TPCP avec très peu de modifications. Des résultats numériques obtenus avec cette méthode ont été présentés pour des schémas volumes finis par In [In99] ainsi que pour des schémas WENO par Montarnal et Shu [MS99].

1.2 Objectifs

Le but de ce travail de thèse est de développer un schéma de relaxation pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles avec des lois de pression et de température générales. Par rapport au cas des équations d'Euler, la difficulté principale réside dans le fait que la présence des flux diffusifs (et notamment du flux de chaleur) demande de prendre en compte non seulement les non-linéarités présentes dans la loi de pression mais également celles présentes dans la loi de température.

Le système des équations de Navier-Stokes relaxées que nous considérerons dans cette thèse est obtenu, comme pour les équations d'Euler relaxées, en mettant en œuvre une méthode de relaxation de l'énergie interne. Le point clé dans l'écriture de notre système relaxé sera d'une part de préciser la répartition des flux diffusifs entre les équations de bilan pour ε_1 et ε_2 et d'autre part d'introduire une température globale pour le système relaxé qui soit consistante avec la température du gaz réel à l'équilibre.

Sur le plan théorique, notre objectif est d'étudier la stabilité du système des équations de Navier-Stokes relaxées en considérant, comme pour les équations d'Euler relaxées, le signe de la production d'une entropie convenablement choisie. Nous souhaitons également compléter cette étude de stabilité du système relaxé par une analyse asymptotique à l'ordre un autour des états d'équilibre, l'idée étant d'obtenir un système d'équations relaxées approchées grâce à un développement dans l'esprit de celui d'Enskog-Chapman puis d'en analyser la stabilité en considérant à nouveau le signe de la production d'entropie.

Sur le plan numérique, notre objectif est de valider notre méthode de relaxation sur des écoulements visqueux de gaz réels pour lesquels des solutions de référence sont déjà disponibles. Devant la difficulté d'obtenir dans la littérature des cas tests de validation d'écoulements pour des lois de comportement complexes, nous avons effectué la validation numérique sur des écoulements de gaz TPCP et TPCI. L'utilisation de ces deux modèles thermodynamiques pour la validation est également celle retenue par In [In99] et Montarnal et Shu [MS99] dans le cas des équations d'Euler. De tels modèles permettent d'apporter une première validation numérique de notre méthode.

1.3 Organisation du mémoire

Dans le chapitre 2, nous présentons les systèmes des équations d'Euler et de Navier-Stokes. Le cœur de ce chapitre est constitué par la section relative aux fondements thermodynamiques de la modélisation des gaz réels. Nous regroupons ici divers résultats, certains parfaitement connus et d'autres peu accessibles dans la littérature. Nous définissons également les quantités thermodynamiques et hydrodynamiques nécessaires à l'exposé de la méthode de relaxation.

Le chapitre 3 décrit les aspects théoriques de la méthode de relaxation. Nous présentons brièvement la méthode de relaxation appliquée par Coquel et Perthame

aux équations d'Euler ainsi que ses principales propriétés, en particulier les résultats de stabilité. Nous décrivons ensuite en détail la méthode de relaxation que nous avons développée pour les équations de Navier-Stokes : nous décrivons d'abord la forme du système relaxé qui en découle, puis nous prouvons la consistance et la stabilité globale ainsi qu'asymptotique de cette nouvelle méthode.

Dans le chapitre 4, nous présentons les méthodes numériques employées dans nos simulations. Nous présentons d'abord l'approximation mixte volumes finis/éléments finis que nous avons considérée. Puis nous exposons l'algorithme de relaxation en précisant notamment l'approximation numérique des termes supplémentaires par rapport au système de Navier-Stokes initial, toujours dans le cadre des méthodes mixtes volumes finis/éléments finis.

Le chapitre 5 est consacré à la validation de la méthode de relaxation sur plusieurs cas tests bidimensionnels. L'application préliminaire au cas des équations d'Euler sur des cas tests de tube à choc permet une première implémentation pour laquelle des résultats de référence existent dans la littérature. Nous nous intéressons ensuite au comportement de la méthode sur des écoulements visqueux dont la difficulté numérique est croissante :

- l'étude de la convection d'un réseau périodique de vortex, cas test isotherme, permet une première validation pour des écoulements visqueux. Ce cas test est effectué dans le cadre d'une modélisation TPCP pour le gaz réel ;
- la prise en compte de la décomposition du flux de chaleur se fait avec le second cas test : l'interaction d'un spot de température convecté avec un choc faible. Cette étude est réalisée en considérant une loi de gaz TPCP, mais également deux lois de gaz TPCI ;
- pour terminer cette série de cas tests, nous considérons un écoulement dans une cavité fermée dans laquelle un choc se réfléchit sur une paroi, entraînant son interaction avec une couche limite. La nature même de ces phénomènes en fait un cas test numériquement très difficile à traiter et constitue donc un bon moyen d'évaluer la robustesse de la méthode de relaxation.

Pour les trois cas tests ci-dessus, des solutions de références pour des écoulements de gaz TPCP sont présentées respectivement dans [T+00] pour les deux premiers et dans [DT01] pour le dernier.

Cette thèse a fait l'objet des communications suivantes :

1. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, (accepté) 2002.
2. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *A new relaxation method for the compressible Navier-Stokes equations*, Math. Models Meth. Appl.

- Sci., (soumis) 2002.
3. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *Numerical evaluation of a relaxation method for two-dimensional Navier-Stokes flows*, Int. J. Num. Meth. Fluids, (soumis) 2002.
 4. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. I: cadre théorique*, Rapport de recherche INRIA (à paraître), 2002.
 5. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. II: validation numérique*, Rapport de recherche INRIA (à paraître), 2002.
 6. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles*, Congrès national de mathématiques appliquées et industrielles, SMAI, Pompadour, 2001.
 7. BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., *A new relaxation method for the compressible Navier-Stokes equations*, Finite Volumes for Complex Applications III, R. Herbin, D. Kröner eds., Hermès Penton, London, pp. 293–300, 2002.

Chapitre 2

Modélisation physique

Sommaire

2.1	Equations de conservation	17
2.2	Thermodynamique	21
2.3	Bilan d'entropie	31
2.4	Condition d'hyperbolicité et entropie	34

L'objet de ce chapitre est de présenter de manière relativement détaillée la modélisation physique et mathématique que nous considérerons pour l'étude des écoulements visqueux compressibles. Dans un premier temps, nous rappelons les équations de Navier-Stokes ainsi que les diverses équations de bilan qui lui sont associées. Le cœur de ce chapitre est constitué de la section 2.2 qui s'attache à préciser dans un cadre relativement général les fondements thermodynamiques de la modélisation physique des lois de pression et de température dans le cadre d'une hypothèse fondamentale : l'existence d'une entropie jouissant de certaines propriétés que nous préciserons. Nous passons également en revue les modèles de gaz thermiquement parfaits car ils sont fréquemment considérés dans les applications. Enfin, nous étudions les liens entre la condition d'hyperbolicité pour les flux convectifs et la notion d'entropie et précisons le rapport entre l'exposant adiabatique et la vitesse du son dans le gaz.

Pour des compléments sur les notions développées dans ce chapitre, le lecteur pourra par exemple consulter [An89, EG94, Em87, GR91, Gi99, La95, Le90, Li96].

2.1 Equations de conservation

Dans cette section, nous présentons les équations de Navier-Stokes compressibles et rappelons quelques équations qui se déduisent de celles-ci, notamment les équations de bilan d'énergie cinétique et d'énergie interne et l'équation de transport

pour la dilatation. Nous rappelons enfin les équations d'Euler obtenues à partir des équations de Navier-Stokes compressibles dans la limite où les flux de diffusion sont négligeables.

2.1.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles

Les équations de Navier-Stokes compressibles expriment la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q, \end{cases} \quad (2.1)$$

où ∂_t et ∇ désignent respectivement les opérateurs de dérivation en temps et en espace, ρ la densité, $U = (u_1, \dots, u_d)^T$ le vecteur vitesse, T la transposition, d la dimension d'espace, p la pression, π le tenseur flux d'impulsion ($-\pi$ est le tenseur des contraintes visqueuses), E l'énergie totale par unité de volume et q le vecteur flux de chaleur.

Par la suite, nous noterons $W = (\rho, \rho U, E)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ le vecteur des variables conservatives. Dans le cadre d'une approximation numérique des équations de Navier-Stokes compressibles par des méthodes mixtes éléments finis/volumes finis (voir chapitre 4), il sera commode d'écrire (2.1) sous la forme compacte

$$\partial_t W + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) + \nabla \cdot \mathcal{R}(W) = 0, \quad (2.2)$$

où $\mathcal{F} : W \in \mathbb{R}^{d+2} \mapsto \mathcal{F}(W) \in \mathbb{R}^{(d+2) \times d}$ et $\mathcal{R} : W \in \mathbb{R}^{d+2} \mapsto \mathcal{R}(W) \in \mathbb{R}^{(d+2) \times d}$ représentent respectivement la contribution convective et diffusive aux flux de masse, impulsion et énergie dans l'espace physique \mathbb{R}^d . En nous restreignant pour simplifier au cas bidimensionnel ($d = 2$), ces flux sont donnés par

$$\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_x(W), \mathcal{F}_y(W)), \quad \mathcal{R}(W) = (\mathcal{R}_x(W), \mathcal{R}_y(W)),$$

avec

$$\mathcal{F}_x(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_y(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

et

$$\mathcal{R}_x(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{xx} \\ \pi_{yx} \\ u\pi_{xx} + v\pi_{xy} + q_x \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_y(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{xy} \\ \pi_{yy} \\ u\pi_{yx} + v\pi_{yy} + q_y \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

où $U = (u, v)$ sont les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse.

2.1.2 Modélisation des flux diffusifs

Nous supposons que le tenseur flux d'impulsion π s'écrit sous la forme

$$\pi = -\eta \left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot U) I \right), \quad (2.5)$$

où η est la viscosité de cisaillement et que le vecteur flux de chaleur q s'écrit sous la forme

$$q = -\kappa \nabla T, \quad (2.6)$$

où κ est la conductivité thermique et T la température.

Les expressions de π et q peuvent s'obtenir dans le cadre de la théorie cinétique des gaz en effectuant un développement de Enskog-Chapman à l'ordre un et en négligeant la viscosité volumique (ce qui est exact pour les gaz monoatomiques). Les coefficients η et κ dépendent alors de la température T . On peut supposer qu'il existe une fonction $\varphi : T \mapsto \varphi(T)$, définie pour $T > 0$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que les rapports $\eta(T)/\varphi(T)$ et $\kappa(T)/\varphi(T)$ admettent une extension continue au domaine $T \in [0, \infty]$. Cette hypothèse, introduite dans [Gi99] et qui signifie que η et κ admettent le même "scaling" en la température, est conforme à ce que suggère la théorie cinétique des gaz [FK72] avec $\varphi(T) = T^{(\nu+4)/2\nu}$. Le paramètre ν varie entre $\nu = 4$ ($\varphi(T) = T$) et $\nu = \infty$ ($\varphi(T) = T^{1/2}$). Plus la valeur de ν est grande, plus les molécules sont "rigides" à l'échelle microscopique, la valeur $\nu = \infty$ étant obtenue dans le cas du modèle de sphères rigides [FK72].

Nous supposons que

$$\forall T > 0, \quad \eta(T) \geq 0 \quad \text{et} \quad \kappa(T) \geq 0. \quad (2.7)$$

La positivité des coefficients η et κ sera essentielle pour établir le signe du terme source dans le bilan d'entropie (voir section 2.3). Un des intérêts de la dérivation des flux diffusifs à partir de la théorie cinétique est de montrer que la positivité des coefficients η et κ n'est pas une hypothèse de modélisation mais une conséquence de la structure dissipative des collisions microscopiques [CC70, FK72, EG94].

2.1.3 Bilans d'énergie cinétique et d'énergie interne

L'énergie totale par unité de volume E se décompose sous la forme

$$E = \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho \varepsilon,$$

où ε est l'énergie interne spécifique. La conservation de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \rho U^2$ résulte du bilan de masse et d'impulsion. Elle s'écrit sous la forme

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho U^2 U \right) + U \cdot \nabla p = -(\nabla \cdot \pi) \cdot U. \quad (2.8)$$

En soustrayant (2.8) à l'équation de conservation de l'énergie totale dans (2.1), nous obtenons l'équation de conservation de l'énergie interne spécifique sous la forme

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \nabla \cdot (\rho\varepsilon U) + p\nabla \cdot U = -\nabla \cdot q - \pi : \nabla U, \quad (2.9)$$

le terme $p\nabla \cdot U$ représentant le travail des forces de pression et le terme $-\pi : \nabla U$ étant connu sous le nom de dissipation visqueuse. On notera que (2.5) et (2.7) impliquent que $-\pi : \nabla U \geq 0$.

2.1.4 Équation pour la dilatation

Par la suite, nous considérerons souvent la dilatation

$$\tau = \frac{1}{\rho}, \quad (2.10)$$

qui est régie par l'équation de transport

$$\partial_t\tau + U \cdot \nabla\tau - \tau\nabla \cdot U = 0, \quad (2.11)$$

qui se déduit directement de l'équation de conservation de la masse dans (2.1).

2.1.5 Les équations d'Euler

Ces équations sont obtenues en supposant que les effets visqueux à l'œuvre dans l'écoulement sont négligeables devant ceux dus à la convection. Cela revient donc à poser $\pi = 0$ et $q = 0$ dans le système (2.1), ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = 0, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

On notera que pour les écoulements régis par les équations d'Euler, les bilans d'énergie cinétique et d'énergie interne prennent la forme suivante

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho U^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\rho U^2 U \right) + U \cdot \nabla p = 0, \quad (2.13)$$

et

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \nabla \cdot (\rho\varepsilon U) + p\nabla \cdot U = 0. \quad (2.14)$$

2.2 Thermodynamique

Afin de fermer le système des équations de Navier-Stokes compressibles (2.1), il nous faut exprimer la pression p et la température T en fonction des variables conservatives W . C'est l'objet de cette section.

Le choix des lois de pression et de température est conditionné par les hypothèses fondamentales sous-tendant le cadre thermodynamique de la modélisation et notamment l'existence d'une entropie. Les lois de pression et de température s'obtiennent simplement à partir des dérivées partielles de l'entropie grâce à la relation de Gibbs. Un autre point de vue qui sera également développé ci-dessous consiste à se donner *a priori* une loi de pression et une loi de température puis à vérifier que celles-ci sont bien compatibles avec l'existence d'une entropie.

Dans cette section, nous rappelons brièvement les hypothèses liées à l'existence d'une entropie et leurs conséquences sur le choix des lois de pression et de température. Puis, nous introduisons diverses quantités auxiliaires (capacités calorifiques, enthalpie spécifique, exposant adiabatique, coefficients thermoélastiques) qui seront utilisées par la suite. Enfin, nous présentons les modèles de gaz thermiquement parfaits (TP).

Nous renvoyons à l'annexe A pour la définition et les propriétés élémentaires concernant les dérivées partielles des fonctions thermodynamiques.

2.2.1 Hypothèses fondamentales liées à l'existence d'une entropie

Nous supposons qu'en tout point de l'écoulement et à tout instant, les fluctuations autour de l'état d'équilibre thermodynamique sont suffisamment faibles pour utiliser localement les résultats classiques de la thermodynamique. Nous faisons l'hypothèse fondamentale suivante : il existe une fonction

$$s : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon = (0, \infty) \times (0, \infty) \mapsto s(\tau, \varepsilon),$$

appelée entropie spécifique et telle que :

(p1) $\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$, $\partial_{\varepsilon, \tau} s > 0$ et $\partial_{\tau, \varepsilon} s > 0$;

(p2) s est strictement concave en (τ, ε) sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$, i.e. $\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{\tau\tau, \varepsilon} s & \partial_{\tau\varepsilon} s \\ \partial_{\tau\varepsilon} s & \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s \end{pmatrix} \text{ est définie négative.} \quad (2.15)$$

Il est clair que l'hypothèse **(p2)** est équivalente à

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad \begin{cases} \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s < 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s \partial_{\tau\tau, \varepsilon} s - (\partial_{\tau\varepsilon} s)^2 > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

2.2.1.1 Lois de pression et température déduites de l'entropie

Dans cette première approche de modélisation, on se donne *a priori* une fonction s satisfaisant les hypothèses fondamentales **(p1)** et **(p2)**. Les lois de pression et de température se déduisent alors directement de la relation de Gibbs

$$ds = \frac{1}{T} d\varepsilon + \frac{p}{T} d\tau, \quad (2.17)$$

qui signifie que

$$\partial_{\varepsilon,\tau} s = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \partial_{\tau,\varepsilon} s = \frac{p}{T}. \quad (2.18)$$

Les lois de pression $p : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ et de température $T : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon \mapsto T(\tau, \varepsilon)$ s'obtiennent donc en posant

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad p(\tau, \varepsilon) = \frac{\partial_{\tau,\varepsilon} s}{\partial_{\varepsilon,\tau} s} \quad \text{et} \quad T(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\partial_{\varepsilon,\tau} s}. \quad (2.19)$$

On notera que le dénominateur ne s'annule jamais en vertu de l'hypothèse **(p1)** et que toujours d'après **(p1)**, la pression et la température sont à valeurs strictement positives pour $(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$.

Proposition 2.1. *La pression et la température données par (2.19) sont liées par la relation de compatibilité*

$$\partial_{\varepsilon,\tau} p = \frac{1}{T} \left(p \cdot \partial_{\varepsilon,\tau} T - \partial_{\tau,\varepsilon} T \right). \quad (2.20)$$

Démonstration. (2.20) exprime simplement l'égalité des dérivées croisées de s par rapport à τ et ε . \square

Remarque 2.2. La relation de compatibilité (2.20) porte également le nom de relation de Maxwell.

Il est intéressant d'examiner les conséquences de la propriété de concavité de s sur les lois de pression et de température.

Proposition 2.3. *La pression et la température données par (2.19) vérifient les propriétés suivantes :*

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad \begin{cases} \partial_{\varepsilon,\tau} T > 0, \\ \partial_{\tau,\varepsilon} p < \partial_{\varepsilon,\tau} p \left(\frac{\partial_{\tau,\varepsilon} T}{\partial_{\varepsilon,\tau} T} \right). \end{cases} \quad (2.21)$$

Démonstration. La première inégalité dans (2.21) résulte simplement de l'identité

$$\partial_{\varepsilon,\tau} T = \partial_{\varepsilon,\tau} \left(\frac{1}{\partial_{\varepsilon,\tau} s} \right) = - \frac{\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau} s}{(\partial_{\varepsilon,\tau} s)^2},$$

et du fait que $\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s < 0$ d'après (2.16). Montrons la deuxième inégalité. En explicitant les dérivées partielles de s , il vient

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s \partial_{\tau\tau,\varepsilon}s - (\partial_{\tau\varepsilon}s)^2 = -\partial_{\varepsilon,\tau}s \partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s (p\partial_{\varepsilon,\tau}p - \partial_{\tau,\varepsilon}p) - (\partial_{\varepsilon,\tau}p)^2 (\partial_{\varepsilon,\tau}s)^2. \quad (2.22)$$

Comme $\partial_{\varepsilon,\tau}s > 0$ et $\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s < 0$ par hypothèse, on déduit de la propriété de concavité $\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s \partial_{\tau\tau,\varepsilon}s - (\partial_{\tau\varepsilon}s)^2 > 0$ que

$$p\partial_{\varepsilon,\tau}p - \partial_{\tau,\varepsilon}p > (\partial_{\varepsilon,\tau}p)^2 \left(\frac{\partial_{\varepsilon,\tau}s}{-\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s} \right) = (\partial_{\varepsilon,\tau}p)^2 \left(\frac{T}{\partial_{\varepsilon,\tau}T} \right).$$

En utilisant la relation de compatibilité (2.20) pour éliminer $\partial_{\varepsilon,\tau}p$, on obtient

$$-T\partial_{\tau,\varepsilon}p > -p\partial_{\tau,\varepsilon}T + \frac{(\partial_{\tau,\varepsilon}T)^2}{\partial_{\varepsilon,\tau}T},$$

ce qui conduit à la deuxième inégalité dans (2.21) en utilisant à nouveau la relation de compatibilité (2.20) pour éliminer p . \square

Remarque 2.4. Pour un gaz thermiquement parfait (voir section 2.2.3), la température ne dépend que de l'énergie interne si bien que $\partial_{\tau,\varepsilon}T = 0$. La deuxième inégalité dans (2.21) implique alors que $\partial_{\tau,\varepsilon}p < 0$.

2.2.1.2 Entropie déduite des lois de pression et température

Dans cette deuxième approche de modélisation, on se donne *a priori* deux lois constitutives, l'une pour la pression $p : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ et l'autre pour la température $T : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon \mapsto T(\tau, \varepsilon)$.

La proposition suivante précise les hypothèses qui doivent restreindre ces lois afin qu'elles restent compatibles avec le cadre thermodynamique général introduit dans les sections précédentes.

Proposition 2.5. *Soient deux fonctions $p : (\tau, \varepsilon) \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ et $T : (\tau, \varepsilon) \mapsto T(\tau, \varepsilon)$, toutes deux définies sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$ et à valeurs dans $(0, \infty)$. On suppose que ces fonctions satisfont la relation de compatibilité (2.20) et les inégalités (2.21). Alors, il existe une fonction $s : (\tau, \varepsilon) \mapsto s(\tau, \varepsilon)$ définie sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$ qui vérifie la relation de Gibbs (2.17) et les propriétés fondamentales **(p1)** et **(p2)**.*

Démonstration. La relation de compatibilité (2.20) garantit via la relation de Gibbs et le théorème de Schwarz l'existence d'une fonction $s : (\tau, \varepsilon) \mapsto s(\tau, \varepsilon)$ définie sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$ et telle que $\partial_{\varepsilon,\tau}s = 1/T$ et $\partial_{\tau,\varepsilon}s = p/T$. La propriété **(p1)** résulte alors directement du fait que la pression et la température sont à valeurs dans $(0, \infty)$. Par ailleurs, nous déduisons les inégalités de concavité (2.16) en remontant les calculs de la preuve de la proposition 2.3. \square

2.2.1.3 Entropie déduite des lois de pression et d'énergie

On notera que comme $\partial_{\varepsilon,\tau}T > 0$ pour tout $\tau \in (0,\infty)$, on peut inverser la fonction

$$\varepsilon \in (0,\infty) \mapsto T(\tau,\varepsilon). \quad (2.23)$$

Il est donc possible de considérer le couple (τ,T) comme variables thermodynamiques indépendantes et de se donner deux lois d'état donnant la pression p et l'énergie interne spécifique ε en fonction de (τ,T) . Dans la suite de ce mémoire, nous ferons l'hypothèse thermodynamique raisonnable que

$$\forall \tau \in (0,\infty), \quad T(\tau,0) = 0 \quad \text{et} \quad T(\tau,\infty) = \infty. \quad (2.24)$$

Dans ces conditions, la fonction inverse de (2.23), toujours notée ε , est définie pour $(\tau,T) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_T = (0,\infty) \times (0,\infty)$. La proposition suivante précise les conditions qui doivent restreindre les lois de pression et d'énergie afin que celles-ci restent compatibles avec le cadre thermodynamique général introduit dans les sections précédentes.

Proposition 2.6. *Soient deux fonctions $p : (\tau,T) \mapsto p(\tau,T)$ et $\varepsilon : (\tau,T) \mapsto \varepsilon(\tau,T)$, toutes deux définies sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_T$ et à valeurs dans $(0,\infty)$. On suppose que ces fonctions satisfont la relation de compatibilité*

$$\partial_{\tau,T}\varepsilon = T \cdot \partial_{T,\tau}p - p, \quad (2.25)$$

et les inégalités

$$\forall (\tau,T) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_T, \quad \begin{cases} \partial_{T,\tau}\varepsilon > 0, \\ \partial_{\tau,T}p < 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Alors, il existe une fonction $s : (\tau,\varepsilon) \mapsto s(\tau,\varepsilon)$ définie sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$ qui vérifie la relation de Gibbs (2.17) et les propriétés fondamentales **(p1)** et **(p2)**.

Démonstration. (i) Vérifions d'abord que les relations de compatibilité (2.20) et (2.25) sont équivalentes. D'après la règle de la dérivation composée, on a $\partial_{\varepsilon,\tau}p = \partial_{\varepsilon,\tau}T \cdot \partial_{T,\tau}p$. En injectant cette expression dans (2.20), il vient

$$\partial_{\varepsilon,\tau}T \cdot \partial_{T,\tau}p = \frac{1}{T}(p \cdot \partial_{\varepsilon,\tau}T - \partial_{\tau,\varepsilon}T).$$

D'où $\partial_{\varepsilon,\tau}T(T \cdot \partial_{T,\tau}p - p) = -\partial_{\tau,\varepsilon}T$ ce qui donne

$$(T \cdot \partial_{T,\tau}p - p) = -\partial_{\tau,\varepsilon}T (\partial_{\varepsilon,\tau}T)^{-1}.$$

En utilisant (A.4) pour le second membre, on obtient $-\partial_{\tau,\varepsilon}T(\partial_{\varepsilon,\tau}T)^{-1} = \partial_{\tau,T}\varepsilon$. Les relations de compatibilité (2.20) et (2.25) sont donc bien équivalentes.

(ii) Vérifions maintenant que les inégalités (2.26) sont équivalentes aux inégalités (2.21). Il est clair que $\partial_{T,\tau}\varepsilon > 0$ si et seulement si $\partial_{\varepsilon,\tau}T > 0$ puisque le produit de

ces deux quantités vaut 1. Considérons maintenant la deuxième inégalité dans (2.26) et (2.21). En utilisant les relations (A.2), (A.3) et (A.4), on vérifie aisément que

$$\frac{\partial_{\tau,\varepsilon}T}{\partial_{\varepsilon,\tau}T} = -\partial_{\tau,T}\varepsilon.$$

De plus, on a

$$\partial_{\varepsilon,\tau}p = \partial_{\varepsilon,\tau}T \cdot \partial_{T,\tau}p,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \partial_{\tau,\varepsilon}p &= \partial_{\tau,T}p + \partial_{\tau,\varepsilon}T \cdot \partial_{T,\tau}p \\ &= \partial_{\tau,T}p - \left(\frac{\partial_{\tau,T}\varepsilon}{\partial_{T,\tau}\varepsilon} \right) \partial_{T,\tau}p. \end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans (2.21), on obtient (2.26), ce qui conclut. \square

2.2.1.4 Hypothèse de monotonie sur la pression

Dans certains cas, notamment pour la définition de la chaleur spécifique à pression constante ou des coefficients thermoélastiques, il est commode de pouvoir considérer la pression comme variable thermodynamique indépendante. Nous souhaitons donc pouvoir inverser, pour tout $\tau \in \mathcal{O}_\tau$, la fonction

$$\varepsilon \in (0, \infty) \mapsto p(\tau, \varepsilon) \in (0, \infty). \quad (2.27)$$

Pour cela, nous ferons dans la suite de ce mémoire l'hypothèse que

$$\forall \tau \in (0, \infty), \quad \partial_{\varepsilon,\tau}p > 0, \quad (2.28)$$

que nous compléterons en supposant que

$$\forall \tau \in (0, \infty), \quad p(\tau, 0) = 0 \quad \text{et} \quad p(\tau, \infty) = \infty. \quad (2.29)$$

Dans ces conditions, la fonction inverse de (2.27), toujours notée ε , est définie pour $(\tau, p) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_p = (0, \infty) \times (0, \infty)$. L'hypothèse (2.28) signifie simplement que la fonction (2.27) est strictement croissante en ε sur $(0, \infty)$.

On notera que les hypothèses (2.28) et (2.29) sont nécessaires pour définir la méthode de relaxation aussi bien pour les équations de Navier-Stokes que pour les équations d'Euler. Ce point sera repris dans le chapitre 3 lorsque nous introduirons la méthode de relaxation.

2.2.2 Quantités thermodynamiques auxiliaires

Cette section rappelle brièvement la définition et quelques propriétés de diverses quantités thermodynamiques auxiliaires qui nous seront utiles par la suite : les capacités calorifiques à volume et pression constants, l'enthalpie spécifique, l'exposant adiabatique et les coefficients thermoélastiques. La vitesse du son sera introduite dans la section 2.4.3.

2.2.2.1 Capacités calorifiques, enthalpie spécifique et exposant adiabatique

Définition 2.7.

(i) On appelle *capacité calorifique spécifique à volume constant*, et on note c_v , la quantité

$$c_v = \partial_{T,\tau}\varepsilon. \quad (2.30)$$

(ii) On appelle *enthalpie spécifique*, et on note h , la quantité

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}. \quad (2.31)$$

(iii) On appelle *capacité calorifique spécifique à pression constante*, et on note c_p , la quantité

$$c_p = \partial_{T,p}h. \quad (2.32)$$

(iv) On appelle *exposant adiabatique*, et on note γ_{ther} , la rapport

$$\gamma_{\text{ther}} = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.33)$$

Remarque 2.8. Il existe également une autre définition du coefficient γ_{ther} utilisant la vitesse du son (voir section 2.4.3). Cette deuxième définition coïncide avec celle donnée ci-dessus pour des gaz régis par la loi de Mariotte (voir section 2.2.3) mais pas dans le cas général.

Proposition 2.9. Soient c_v et c_p les capacités calorifiques spécifiques à volume et pression constantes définies en (2.30) et (2.32). On suppose que les lois d'état $p : (\tau, T) \mapsto p(\tau, T)$ et $\varepsilon : (\tau, T) \mapsto \varepsilon(\tau, T)$ vérifient les hypothèses de la proposition 2.6. Alors, on a

$$\forall (\tau, T) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_T, \quad c_p - c_v = -\frac{T(\partial_{T,\tau}p)^2}{\partial_{\tau,TP}} > 0. \quad (2.34)$$

Démonstration. En dérivant (2.31) par rapport à T à p constant, on a

$$\partial_{T,p}h = \partial_{T,p}\varepsilon + \partial_{T,p}(\tau p),$$

si bien qu'en utilisant (2.32), il vient

$$c_p = \partial_{T,p}\varepsilon + p \cdot \partial_{T,p}\tau. \quad (2.35)$$

Or, en passant du jeu de variables (T, p) en (T, τ) et en utilisant (A.1), on obtient

$$\partial_{T,p}\varepsilon = \partial_{T,\tau}\varepsilon + \partial_{T,p}\tau \cdot \partial_{\tau,T}\varepsilon = c_v + \partial_{T,p}\tau \cdot \partial_{\tau,T}\varepsilon.$$

En remplaçant $\partial_{T,p}\varepsilon$ par la valeur ci-dessus dans (2.35), on en déduit que

$$c_p - c_v = \partial_{T,p}\tau(\partial_{\tau,T}\varepsilon + p).$$

La quantité $\partial_{\tau,T}\varepsilon$ étant connue par la relation de réciprocity (2.25), on obtient en substituant que

$$c_p - c_v = T \cdot \partial_{T,p}\tau \cdot \partial_{T,\tau}p. \quad (2.36)$$

Il reste maintenant à utiliser (A.4) pour la quantité $\partial_{T,p}\tau$, ce qui donne

$$\partial_{T,p}\tau = -(\partial_{p,T}\tau)^{-1} \cdot \partial_{T,\tau}p,$$

et à l'injecter dans (2.36) pour conclure. \square

Le résultat de la proposition 2.9 montre que la différence $c_p - c_v$ ne dépend que des dérivées partielles de la pression mais pas de la forme de la loi $\varepsilon : (\tau, T) \mapsto \varepsilon(\tau, T)$. On remarque aussi que le signe de (2.34) reste toujours positif, puisque $-\partial_{\tau,T}p$ est toujours positif. Cette propriété est fondamentalement liée à la concavité de l'entropie.

2.2.2.2 Coefficients thermoélastiques

On va présenter ici des variables moins souvent utilisées par les numériciens mais qui ont tout de même un certain intérêt physique. Ces variables modélisent l'évolution d'un couple de variables issues du triplet (τ, p, T) lorsque l'on fixe la troisième. On obtient ainsi 3 nouvelles variables, notées α , β et χ , et qui sont définies comme suit.

Définition 2.10.

- (i) On appelle coefficient de dilatation isobare spécifique, noté α , la quantité définie par

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \partial_{T,p}\tau = \frac{1}{\tau} (\partial_{\tau,p}T)^{-1}. \quad (2.37)$$

Ce coefficient modélise l'effet d'une variation de température sur le volume spécifique lorsqu'on suppose la pression constante.

- (ii) On appelle coefficient d'augmentation de pression isochore spécifique, et on note β , la quantité définie par

$$\beta = \frac{1}{p} \partial_{T,\tau}p = \frac{1}{p} (\partial_{p,\tau}T)^{-1}. \quad (2.38)$$

Ce coefficient modélise l'effet d'une variation de température sur la pression lorsqu'on suppose le volume spécifique constant.

(iii) On appelle coefficient de compressibilité isotherme spécifique, et on note χ , la quantité définie par

$$\chi = -\frac{1}{\tau} \partial_{p,T} \tau = -\frac{1}{\tau} (\partial_{\tau,T} p)^{-1}. \quad (2.39)$$

Ce coefficient modélise l'effet d'une variation de pression sur le volume spécifique lorsqu'on suppose la température constante.

Proposition 2.11. Dans le cadre des hypothèses thermodynamiques formulées dans les sections précédentes, les coefficients thermoélastiques α , β et χ sont tous les trois positifs, quel que soit l'état thermodynamique du gaz. De plus, on a la relation

$$\frac{\chi \cdot \beta}{\alpha} = \frac{1}{p}. \quad (2.40)$$

Démonstration. La relation (2.40) résulte directement de (A.3). La positivité de β résulte de l'identité

$$\beta = \frac{1}{p} \partial_{T,\tau} \varepsilon \partial_{\varepsilon,\tau} p,$$

et de l'hypothèse (2.28). Par ailleurs, la positivité du coefficient χ résulte de la deuxième inégalité dans (2.26). La positivité de α résulte alors de la relation (2.40). \square

Remarque 2.12. Malgré le fait qu'ils soient peu utilisés dans la résolution numérique d'écoulements, les coefficients thermoélastiques ont joué un rôle important dans la découverte historique des premières loi de pression et en particulier celle des gaz parfaits. En effet, leur détermination résulte d'expériences relativement simples à réaliser, comme l'expérience de Joule ou celle de Gay-Lussac. La donnée de ces coefficients permet de connaître, via les dérivées partielles, la nature de la loi de pression $p : (\tau, T) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_T \mapsto p(\tau, T)$ puisque l'on a

$$dp = -\tau \chi d\tau + \frac{p}{\beta} dT.$$

On notera enfin que l'expérience confirme bien que les 3 coefficients α , β et χ sont toujours positifs, quel que soit le gaz considéré.

Nous concluons cette section avec une reformulation des relations (2.33) et (2.34) à l'aide des coefficients thermoélastiques.

Proposition 2.13. On a

$$\forall (\tau, T) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_T, \quad \begin{cases} c_p - c_v = \tau p^2 T \chi \beta^2, \\ \gamma_{\text{ther}} = 1 + \frac{\tau p^2 T}{c_v} \chi \beta^2. \end{cases} \quad (2.41)$$

Démonstration. Vérification immédiate. \square

2.2.3 Gaz thermiquement parfaits (TP)

Les modèles de gaz thermiquement parfaits (mais pas nécessairement calorifiquement parfaits) interviennent dans de nombreuses applications. L'objet de cette section est de préciser quelques-unes des propriétés de ces gaz à la lumière des développements précédents.

2.2.3.1 Loi de Mariotte, loi de Joule et gaz parfaits

Commençons par trois définitions bien connues des thermodynamiciens.

Définition 2.14 (Loi de Mariotte). *Un gaz satisfait la loi de Mariotte si sa pression s'exprime comme une fonction à variables séparées en la densité et la température et si de plus elle est linéaire en la densité :*

$$p = \rho f(T). \quad (2.42)$$

Définition 2.15 (Gaz TP). *On dit qu'un gaz est thermiquement parfait (TP) s'il vérifie la loi de Mariotte avec une fonction $f : T \mapsto f(T)$ linéaire en la température. Dans ces conditions, on écrit*

$$p = \rho RT, \quad (2.43)$$

où R est une constante qui ne dépend que de la nature du gaz considéré. On a $R = R_{GP}/m$ où R_{GP} est la constante universelle des gaz parfaits et m la masse molaire du gaz.

Définition 2.16 (Loi de Joule). *On dit qu'un gaz satisfait la loi de Joule si son énergie interne ne dépend que de la température.*

Proposition 2.17.

- (i) un gaz TP vérifie la loi de Joule;
- (ii) un gaz vérifiant la loi de Joule et la loi de Mariotte est nécessairement TP.

Démonstration. (i) La relation de compatibilité (2.25) montre que l'énergie interne spécifique vue comme fonction de (τ, T) ne dépend pas de τ si et seulement si la pression, en tant que fonction de (τ, T) , est homogène de degré un en T . Par conséquent, un gaz TP vérifie nécessairement la loi de Joule.

(ii) Considérons maintenant un gaz vérifiant la loi de Joule et la loi de Mariotte. Alors, la relation de compatibilité (2.25) implique que

$$T \cdot \partial_{T,\tau} p - p = \partial_{\tau,T} \varepsilon = 0,$$

puisque par hypothèse le gaz vérifie la loi de Joule. Comme le gaz vérifie la loi de Mariotte $p = \rho f(T)$, on en déduit que $T f'(T) = f(T)$, ce qui implique que f et donc p sont linéaires en la température. \square

Pour un gaz TP, les coefficients thermoélastiques sont donnés par

$$\alpha = \frac{1}{T}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad \chi = \frac{1}{p},$$

si bien que la relation (2.40) est trivialement satisfaite. Par ailleurs, les chaleurs spécifiques à volume et pression constants sont données par

$$c_v(T) = \varepsilon'(T) \quad \text{et} \quad c_p(T) = c_v(T) + R,$$

si bien que

$$\gamma_{\text{ther}}(T) = 1 + \frac{R}{c_v(T)}.$$

Définition 2.18. Lorsque la quantité c_v dépend effectivement de T , on parle de gaz thermiquement parfait et calorifiquement imparfait (TPCI). Lorsque celle-ci ne dépend pas de T , on parle de gaz thermiquement parfait et calorifiquement parfait (TPCP).

Pour un gaz TPCP, on a

$$\varepsilon = c_v T = \frac{R}{\gamma_{\text{ther}} - 1} T = \frac{1}{\gamma_{\text{ther}} - 1} \frac{p}{\rho}.$$

On notera que cette relation ne se généralise pas aux gaz TPCI. En fait, on peut même montrer que si un gaz TP est tel que $p = (\gamma_{\text{ther}} - 1)\rho\varepsilon$, alors γ_{ther} ne dépend pas de T . En effet, la relation $p = (\gamma_{\text{ther}} - 1)\rho\varepsilon$ implique que $\varepsilon(T) = \varepsilon'(T)T$, i.e. que ε est homogène de degré un en T , i.e. que le gaz est TPCP.

Remarque 2.19. Un gaz TPCP est parfois appelé gaz parfait polytropique.

2.2.3.2 Modélisation de l'exposant adiabatique pour un gaz TP

Dans les applications, un modèle souvent considéré pour les gaz TP consiste à se donner la chaleur spécifique à volume constant sous la forme

$$c_v(T) = c_t + c_{t-r} + c_{t-r-v}(T).$$

La quantité $c_t = \frac{3}{2}R$ est la contribution macroscopique des échanges d'énergie translationnelle dans les collisions microscopiques, c_{t-r} prend en compte les degrés de liberté rotationnels (échanges rotation-rotation et rotation-translation) et $c_{t-r-v}(T)$ prend en compte les degrés de liberté vibrationnels (échanges vibration-vibration, vibration-rotation et vibration-translation). La contribution c_{t-r} se modélise en général de façon relativement simple en prenant $c_{t-r} = R$ pour les molécules linéaires et $c_{t-r} = \frac{3}{2}R$ pour les molécules de conformation plus complexe. Par contre, la forme fonctionnelle de $c_{t-r-v}(T)$ n'étant pas connue a priori, celle-ci est souvent modélisée par un polynôme obtenu par régression quadratique à partir de valeurs expérimentales. Dans tous les cas, on constate que

$$\gamma_{\text{ther}}(T) = \frac{R}{c_v(T)} + 1 \leq \frac{R}{c_t} + 1 = \frac{5}{3}.$$

La borne supérieure est atteinte pour un gaz monoatomique, qui vérifie donc $\gamma_{\text{ther}} = \frac{5}{3}$ indépendamment de T . Pour un gaz diatomique sans échanges d'énergie vibrationnelle (par exemple pour l'air à des températures pas trop élevées), on a $\gamma_{\text{ther}} = \frac{7}{5}$

indépendamment de T . À des températures plus élevées, les transferts d'énergie vibrationnelle dans les collisions microscopiques ne sont plus négligeables et on a $\gamma_{\text{ther}} := \gamma_{\text{ther}}(T) \in (1, \frac{7}{5}]$ pour les gaz composés de molécules linéaires et $\gamma_{\text{ther}} := \gamma_{\text{ther}}(T) \in (1, \frac{4}{3}]$ pour les autres.

2.2.3.3 Explicitation de l'entropie pour un gaz TP

Pour un gaz TP, l'entropie spécifique s'exprime sous la forme

$$s(\tau, T) = \int_{T_0}^T \frac{c_v(u)}{u} du + R \log \frac{\tau}{\tau_0} + s_0,$$

où s_0 est l'entropie spécifique dans l'état de référence (τ_0, T_0) . Pour un gaz TPCP, c_v ne dépend pas de la température si bien que l'on a

$$s(\tau, T) = c_v \log \left(\frac{\tau^{\gamma_{\text{ther}}-1} T}{\tau_0^{\gamma_{\text{ther}}-1} T_0} \right) + s_0 = R \log \left(\frac{\tau T^{1/(\gamma_{\text{ther}}-1)}}{\tau_0 T_0^{1/(\gamma_{\text{ther}}-1)}} \right) + s_0.$$

Comme la chaleur spécifique à volume constant c_v est minorée uniformément en la température par la constante $c_t > 0$, on constate que pour un gaz TP, l'entropie spécifique s explose en $\log T$ lorsque $T \rightarrow 0$. L'entropie spécifique s est également singulière lorsque la densité tend vers zéro mais l'entropie volumique ρs peut être prolongée par continuité en $\rho = 0$ en posant $0 \log 0 = 0$. La singularité de s en la température est intimement liée à sa dérivation à partir d'une théorie cinétique reposant sur la statistique de Boltzmann. Or, le troisième principe de la thermodynamique ne s'applique pas à des gaz régis par la statistique de Boltzmann, mais à ceux régis par la statistique de Fermi-Dirac ou celle de Bose-Einstein. On pourra consulter [Wo75] pour des compléments. La singularité de s en $T = 0$ sera utilisée par la suite afin de contrôler la borne inférieure de l'énergie interne pour les équations de Navier-Stokes relaxées dans le cas des écoulements de gaz TPCP.

2.3 Bilan d'entropie

Dans cette section, nous introduisons l'entropie mathématique et nous précisons le bilan d'entropie pour les équations de Navier-Stokes compressibles et les équations d'Euler.

2.3.1 L'entropie mathématique

Définition 2.20. On appelle entropie mathématique spécifique la fonction $\sigma : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon \mapsto \sigma(\tau, \varepsilon)$ définie par

$$\sigma(\tau, \varepsilon) = -s(\tau, \varepsilon). \quad (2.44)$$

On appelle entropie mathématique volumique la fonction $S : W \in \mathbb{R}^{d+2} \mapsto S(W)$ définie par

$$S(W) = \rho\sigma(\tau, \varepsilon), \quad (2.45)$$

avec

$$\rho = W_1, \quad \tau = \frac{1}{W_1}, \quad \varepsilon = \frac{W_{d+2}}{W_1} - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=2}^{d+1} W_i^2}{W_1^2}.$$

Il est immédiat de constater que les propriétés fondamentales **(p1)**–**(p2)** se transposent sur l'entropie mathématique spécifique σ de la manière suivante :

(p3) $\forall(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$, $\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma < 0$ et $\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma < 0$;

(p4) σ est strictement convexe en (τ, ε) sur $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon$.

En utilisant les relations de Gibbs, les lois de pression et de température peuvent s'obtenir à partir de σ grâce aux relations suivantes

$$\forall(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad p(\tau, \varepsilon) = \frac{\partial_{\tau, \varepsilon} \sigma}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma} \quad \text{et} \quad T(\tau, \varepsilon) = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma}. \quad (2.46)$$

Par ailleurs, la fonction $S := S(W)$ jouit de la propriété suivante.

Théorème 2.21. *Dans le cadre de l'hypothèse fondamentale **(p2)**, la fonction $S : W \mapsto S(W)$ définie par (2.45) est strictement convexe en W .*

Démonstration. On peut trouver une preuve de ce résultat dans [GR96]. □

2.3.2 Bilan d'entropie pour les équations de Navier-Stokes

Soit $W = (\rho, \rho U, E)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ le vecteur des variables conservatives solution des équations de Navier-Stokes (2.1).

Théorème 2.22. *On suppose que la solution W de (2.1) est régulière. Dans le cadre des hypothèses fondamentales **(p1)** et **(p2)**, on a le bilan d'entropie suivant*

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) = \nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right) + \omega(W), \quad (2.47)$$

où $\omega(W)$ est le taux de dissipation d'entropie qui s'écrit

$$\omega(W) = \frac{q \cdot \nabla T}{T^2} + \frac{\pi : \nabla U}{T}. \quad (2.48)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) &= -\partial_t(\rho s) - \nabla \cdot (\rho s U) \\ &= -\rho D_t s \\ &= -\rho(\partial_{\tau, \varepsilon} s D_t \tau + \partial_{\varepsilon, \tau} s D_t \varepsilon), \end{aligned}$$

où nous avons introduit l'opérateur différentiel $D_t = \partial_t + U \cdot \nabla$. Or, nous déduisons de l'équation de transport de la dilatation (2.11) que

$$D_t \tau = \tau \nabla \cdot U,$$

et de l'équation de bilan de l'énergie interne (2.9) que

$$D_t \varepsilon = -\tau(p \nabla \cdot U + \nabla \cdot q + \pi : \nabla U).$$

En regroupant et en utilisant la relation de Gibbs (2.18) pour éliminer le terme en $\nabla \cdot U$, il vient

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) = \frac{1}{T}(\nabla \cdot q + \pi : \nabla U).$$

On conclut en utilisant le fait que

$$\nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right) = \frac{\nabla \cdot q}{T} - \frac{q \cdot \nabla T}{T^2}.$$

□

D'après le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie mathématique S est telle que

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) \leq \nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right), \quad (2.49)$$

ce qui implique grâce à (2.47) que

$$\forall W \in \mathbb{R}^{d+2}, \quad \omega(W) \leq 0.$$

Or, le taux de dissipation d'entropie donné par (2.48) s'explique sous la forme

$$\omega(W) = -\kappa \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T^2} - \eta \frac{\left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot U)I \right) : \left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot U)I \right)}{2T}.$$

La négativité de ω résulte donc directement de l'hypothèse (2.7) sur les coefficients η et κ .

2.3.3 Bilan d'entropie pour les équations d'Euler

Notons $W = (\rho, \rho U, E)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ le vecteur des variables conservatives solution des équations d'Euler (2.12). Dans le cas où la solution W est régulière, celle-ci est solution forte des équations d'Euler et le bilan d'entropie se déduit immédiatement de (2.47) en prenant $\pi = 0$ et $q = 0$, ce qui donne

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) = 0, \quad (2.50)$$

c'est-à-dire que l'entropie mathématique est conservée.

Dans le cas où la solution W est singulière, celle-ci est solution faible des équations d'Euler et on dit que W est solution faible entropique (ou physiquement admissible) si

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) \leq 0, \quad (2.51)$$

au sens des distributions. La production d'entropie est alors nulle là où la solution W est régulière et négative au niveau des chocs.

2.4 Condition d'hyperbolicité et entropie

L'objet de cette section est d'établir les liens existant entre la condition d'hyperbolicité pour les flux convectifs et le cadre thermodynamique mis en place dans les sections précédentes. On fera également le lien entre la condition d'hyperbolicité et la vitesse du son dans le gaz.

2.4.1 La condition d'hyperbolicité

La condition d'hyperbolicité se fonde sur des propriétés des flux convectifs du système de Navier-Stokes (et donc d'Euler). Elle consiste en effet à supposer que les valeurs propres des jacobiens des flux convectifs $\mathcal{F}_x(W)$ et $\mathcal{F}_y(W)$ restent réelles. Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous nous plaçons en deux dimensions d'espace.

Pour le calcul des jacobiens des flux convectifs, nous considérons les variables physiques, i.e nous passons du vecteur des variables conservatives $W = (\rho, \rho U, E)^T$ à $V = (\rho, U, p)^T$. L'équation de transport de la pression s'obtient après quelques manipulations élémentaires. On a

$$\partial_t p + U \cdot \nabla p = \partial_{\rho, \varepsilon} p (\partial_t \rho + U \cdot \nabla \rho) + \partial_{\varepsilon, \rho} p (\partial_t \varepsilon + U \cdot \nabla \varepsilon).$$

On reconnaît, au second membre, la partie advective des équations de conservation de la masse et de l'énergie interne, toutes deux sous forme non-conservative. Un calcul direct conduit à

$$\partial_t p + U \cdot \nabla p = \partial_{\rho, \varepsilon} p (-\rho \nabla \cdot U) + \partial_{\varepsilon, \rho} p (-\tau p \nabla \cdot U).$$

Puisque $\partial_{\rho, \varepsilon} p = -\tau^2 \partial_{\tau, \varepsilon} p$ et $\partial_{\varepsilon, \rho} p = \partial_{\varepsilon, \tau} p$, on obtient finalement

$$\partial_t p + U \cdot \nabla p = -\tau (p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) \nabla \cdot U.$$

En variables physiques et sous forme non conservative, le système des équations d'Euler (2.12) s'écrit donc sous la forme compacte

$$\partial_t V + A_x \cdot \partial_x V + A_y \cdot \partial_y V = 0,$$

avec les matrices jacobiennes A_x et A_y données par

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \tau \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \tau(p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) & 0 & u \end{pmatrix},$$

et

$$A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \tau \\ 0 & 0 & \tau(p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) & v \end{pmatrix},$$

où $U = (u, v)$ sont les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse.

Si l'on considère une combinaison linéaire de ces 2 matrices jacobienues sous la forme

$$A = \omega_x A_x + \omega_y A_y, \quad \omega = (\omega_x, \omega_y) \neq (0, 0),$$

on obtient la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \omega_x u + \omega_y v & \rho \omega_x & \rho \omega_y & 0 \\ 0 & \omega_x u + \omega_y v & 0 & \tau \omega_x \\ 0 & 0 & \omega_x u + \omega_y v & \tau \omega_y \\ 0 & \tau(p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) \omega_x & \tau(p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) \omega_y & \omega_x u + \omega_y v \end{pmatrix} ;$$

dont les valeurs propres λ_i sont solution de

$$(U \cdot \omega - \lambda)^4 - (U \cdot \omega - \lambda)^2 \tau^2 \omega_x^2 (p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) = 0.$$

On constate qu'il existe toujours une valeur propre double égale à $U \cdot \omega$ et deux valeurs propres définies par

$$(U \cdot \omega - \lambda)^2 = \tau^2 \omega_x^2 (p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p).$$

Il est donc nécessaire que

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p \geq 0, \quad (2.52)$$

pour que les 4 valeurs propres de la matrice A restent réelles. La condition (2.52) porte le nom de condition d'hyperbolicité.

2.4.2 Fondements thermodynamiques de la condition d'hyperbolicité

Proposition 2.23. *Sous les hypothèses thermodynamiques fondamentales (p1) et (p2), la condition d'hyperbolicité (2.52) est vérifiée.*

Démonstration. De l'identité (2.22) et de la condition $\partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s \partial_{\tau\tau, \varepsilon} s - (\partial_{\tau\varepsilon} s)^2 > 0$, nous déduisons que

$$-\partial_{\varepsilon, \tau} s \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s (p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) - (\partial_{\varepsilon, \tau} p)^2 (\partial_{\varepsilon, \tau} s)^2 > 0.$$

Comme $\partial_{\varepsilon, \tau} s > 0$ et $\partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s < 0$ par hypothèse, la condition d'hyperbolicité en résulte immédiatement. \square

Remarque 2.24. On notera que la condition d'hyperbolicité (2.52) n'est pas suffisante pour garantir la propriété de concavité $\partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s \partial_{\tau\tau, \varepsilon} s - (\partial_{\tau\varepsilon} s)^2 > 0$.

La condition d'hyperbolicité peut se reformuler de manière plus compacte en utilisant le couple (τ, s) comme variables thermodynamiques indépendantes.

Proposition 2.25. *On a*

$$p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p = -\partial_{\tau, s} p. \quad (2.53)$$

Démonstration. En utilisant la règle de la dérivation composée, il vient

$$\partial_{\tau,\varepsilon}p = \partial_{\tau,s}p + \partial_{\tau,\varepsilon}s \partial_{s,\tau}p.$$

En utilisant la relation de Gibbs, on obtient

$$\partial_{\tau,\varepsilon}p = \partial_{\tau,s}p + p \partial_{\varepsilon,\tau}s \partial_{s,\tau}p,$$

et on conclut en constatant que $\partial_{\varepsilon,\tau}s \partial_{s,\tau}p = \partial_{\varepsilon,\tau}p$. \square

2.4.3 Liens avec l'acoustique

En conformité avec la théorie de l'acoustique, la vitesse du son c dans l'écoulement est définie par :

$$c = \sqrt{-\partial_{\rho,s}p} = \tau \sqrt{-\partial_{\tau,s}p} = \tau \sqrt{p \partial_{\varepsilon,\tau}p - \partial_{\tau,\varepsilon}p}, \quad (2.54)$$

en utilisant (2.53) pour la dernière égalité. De plus, dans le cadre de cette théorie, on définit un coefficient γ , que nous noterons ici γ_{acou} , selon la relation

$$\gamma_{\text{acou}} = \frac{c^2}{\tau p}. \quad (2.55)$$

Le lien entre ce coefficient et l'exposant adiabatique γ_{ther} donné par (2.33) est clarifié dans la proposition suivante.

Proposition 2.26. *Dans le cadre des hypothèses thermodynamiques présentées dans les sections précédentes, on a*

$$\gamma_{\text{acou}} = \left(-\frac{\tau \partial_{\tau,T}p}{p} \right) \gamma_{\text{ther}}. \quad (2.56)$$

Démonstration. En effectuant le changement de variables $(\tau,\varepsilon) \rightarrow (\tau,T)$, on obtient

$$\begin{aligned} c^2 &= \tau^2(-1,p) \cdot \begin{pmatrix} \partial_{\tau,\varepsilon}\tau & \partial_{\varepsilon,\tau}\tau \\ \partial_{\tau,\varepsilon}T & \partial_{\varepsilon,\tau}T \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \partial_{\tau,T}p \\ \partial_{T,\tau}p \end{pmatrix} \\ &= \tau^2(-1,p) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_{\tau,\varepsilon}T & \frac{1}{c_v} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \partial_{\tau,T}p \\ \partial_{T,\tau}p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant la relation de réciprocity (2.25), on a

$$\partial_{\tau,\varepsilon}T = \frac{p - T \cdot \partial_{T,\tau}p}{c_v}.$$

Par conséquent, en développant la forme quadratique ci-dessus, on obtient

$$c^2 = \tau^2 \left(-\partial_{\tau,T}p + T \frac{(\partial_{T,\tau}p)^2}{c_v} \right).$$

En utilisant (2.33) et (2.34), il vient

$$(\gamma_{\text{ther}} - 1) = -T \frac{(\partial_{T,\tau} p)^2}{c_v \partial_{\tau,TP}}.$$

En reportant, on obtient finalement que

$$c^2 = -\partial_{\tau,TP} \tau^2 \gamma_{\text{ther}},$$

et on conclut en utilisant (2.55). □

Remarque 2.27. Pour un gaz vérifiant la loi de Mariotte (2.42) et donc en particulier pour un gaz TP, on a

$$\gamma_{\text{acou}} = \gamma_{\text{ther}},$$

puisque $\partial_{\tau,TP} = -p/\tau$.

Remarque 2.28. On peut également exprimer la vitesse du son au moyen du coefficient thermoélastique χ sous la forme

$$c^2 = \frac{\tau \gamma_{\text{ther}}}{\chi}.$$

Chapitre 3

Etude mathématique des équations de Navier-Stokes relaxées

Sommaire

3.1	Préliminaires	40
3.2	Rappels sur les équations d'Euler relaxées	42
3.3	Les équations de Navier-Stokes relaxées	50
3.4	Consistance du système relaxé	51
3.5	Stabilité du système relaxé	52
3.6	Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un	54

Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des résultats théoriques que nous avons obtenus pour la méthode de relaxation de l'énergie appliquée aux équations de Navier-Stokes. Dans un premier temps, nous rappellerons les résultats obtenus par Coquel et Perthame [CP98] pour les équations d'Euler relaxées. Nous préciserons en particulier leur définition de l'entropie du système relaxé et les résultats concernant la stabilité du processus de relaxation liés à cette entropie; en particulier l'existence de conditions de stabilité appelées *conditions sous-caractéristiques*. Ensuite, nous débuterons la présentation de nos résultats avec la forme du système relaxé pour les équations de Navier-Stokes. Une fois écrit le système relaxé, nous montrerons comment décomposer les flux diffusifs de manière consistante avec les équations de Navier-Stokes originales. Puis, nous étudierons la stabilité du système relaxé. Nous premier résultat de stabilité se base, comme pour les équations d'Euler, sur le signe de la production d'une entropie globale pour le système relaxé. Ce résultat est obtenu sous les mêmes *conditions sous-caractéristiques* que pour les équations d'Euler et sous une décomposition adéquate des flux diffusifs que nous préciserons. Enfin, comme pour les équations d'Euler, nous compléterons ce résultat de stabilité par une analyse asymptotique à l'ordre un autour des états d'équilibre.

3.1 Préliminaires

L'objet de cette section est d'introduire le principe général de la méthode de relaxation : gaz réel et gaz fictif, décomposition de l'énergie interne et variétés d'équilibre. Nous conclurons cette section par quelques considérations sur le cas particulier d'une relaxation entre un gaz TP et un gaz TPCP (relaxation TP/TPCP).

3.1.1 Gaz réel et gaz fictif

On considère un gaz régi par des lois de pression et de température générales de la forme $p := p(\tau, \varepsilon)$ et $T := T(\tau, \varepsilon)$. Rappelons que τ désigne la dilatation et ε l'énergie interne spécifique. Nous supposons que les lois de pression et de température $p := p(\tau, \varepsilon)$ et $T := T(\tau, \varepsilon)$ sont compatibles avec l'existence d'une entropie (mathématique) spécifique $\sigma := \sigma(\tau, \varepsilon)$ et les relations de Gibbs. Nous renvoyons à la section 2.2 pour plus de détails. Par la suite, le gaz régi par les lois de pression et de température $p := p(\tau, \varepsilon)$ et $T := T(\tau, \varepsilon)$ sera appelé "gaz réel".

Le principe de la méthode de relaxation consiste à introduire un "gaz fictif" dont la modélisation thermodynamique est plus simple que celle du gaz réel. Dans le cas des équations d'Euler relaxées, la température n'intervient pas et il suffit pour modéliser le gaz fictif du point de vue thermodynamique de se donner sa loi de pression $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$. Nous utiliserons systématiquement l'indice 1 pour désigner les quantités thermodynamiques se référant au gaz fictif. Pour les équations de Navier-Stokes relaxées, la présence du flux de chaleur rend nécessaire la prise en compte de la loi de température du gaz fictif. Le gaz fictif sera donc caractérisé par la donnée d'une entropie (mathématique) spécifique $\sigma_1 := \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$ de laquelle résultent grâce aux relations (2.46) les lois de pression et de température $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ et $T_1 := T_1(\tau, \varepsilon_1)$.

3.1.2 Décomposition de l'énergie interne

Comme nous l'avons évoqué à la fin de la section 2.2, nous ferons dans la suite de ce mémoire l'hypothèse que la loi de pression du gaz réel est telle que

$$\forall \tau \in (0, \infty), \quad \begin{cases} \partial_{\varepsilon, \tau} p(\tau, \varepsilon) > 0, \\ p(\tau, 0) = 0 \quad \text{et} \quad p(\tau, \infty) = \infty. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous ferons la même hypothèse sur la loi de pression du gaz fictif.

Ces hypothèses permettent, pour tout $\tau \in (0, \infty)$, d'inverser la fonction $\varepsilon \in (0, \infty) \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ sur $(0, \infty)$. Elles sont nécessaires à la construction de la méthode de relaxation et ont été introduites dans [CP98]. Rappelons également que ces hypothèses sont thermodynamiquement raisonnables puisqu'elles signifient que à τ fixé, la pression est strictement croissante en l'énergie interne spécifique, qu'elle tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et qu'elle tend vers ∞ lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$.

On définit de façon implicite une fonction $F := F(\tau, \varepsilon_1)$ par la relation de consistance

$$\forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad p(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)) = p_1(\tau, \varepsilon_1). \quad (3.2)$$

Cette relation définit bien F de manière univoque grâce à l'hypothèse (3.1) et au théorème des fonctions implicites. Remarquons que l'on a

$$\forall \tau \in (0, \infty), \quad F(\tau, 0) = 0. \quad (3.3)$$

La fonction F induit une décomposition naturelle de l'énergie interne spécifique s'appuyant sur les lois de pression du gaz réel et du gaz fictif. En notant (τ, ε) l'état thermodynamique du gaz réel, on déduit l'énergie interne spécifique du gaz fictif de l'équation implicite

$$p_1(\tau, \varepsilon_1) = p(\tau, \varepsilon),$$

et en posant $\varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1)$, on a

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Réciproquement, en notant (τ, ε_1) l'état thermodynamique du gaz fictif, $p_1(\tau, \varepsilon_1)$ la pression qui en résulte et en posant $\varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1)$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, la pression du gaz réel dans l'état thermodynamique (τ, ε) coïncide avec celle du gaz fictif, i.e. $p(\tau, \varepsilon) = p_1(\tau, \varepsilon_1)$.

3.1.3 Variétés d'équilibre

Par la suite, il sera utile d'introduire deux variétés d'équilibre. On note \mathcal{V} la variété d'équilibre (de codimension un dans \mathbb{R}^3)

$$\mathcal{V} = \{ (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)^T \in \mathbb{R}_+^3, \varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1) \}. \quad (3.4)$$

Nous introduisons également la variété d'équilibre Ξ (de codimension un dans \mathbb{R}^{d+3})

$$\Xi = \left\{ \mathcal{W} = (\rho, \rho U, E_1, \rho \varepsilon_2)^T \in \mathbb{R}^{d+3}, \varepsilon_2 = F\left(\frac{1}{\rho}, \frac{E_1}{\rho} - \frac{1}{2}U^2\right) \right\}.$$

3.1.4 Le cas particulier de la relaxation TP/TPCP

Dans la pratique, la méthode de relaxation est souvent mise en œuvre avec un gaz fictif TPCP. Lorsque le gaz réel est TP, on parle de "relaxation TP/TPCP".

Dans ces conditions, on a

$$p_1(\tau, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1) \frac{1}{\tau} \varepsilon_1,$$

où γ_1 est une constante fixée. En utilisant la relation de consistance (3.2) et le fait que pour un gaz TP, l'énergie interne spécifique peut s'écrire comme une fonction de la température seule $\varepsilon := \varepsilon(T)$, nous obtenons

$$F := F(\varepsilon_1) = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 - 1}{R} \varepsilon_1 \right) - \varepsilon_1, \quad (3.5)$$

ce qui montre que la fonction F ne dépend pas de τ . Si, de plus, le gaz réel est lui aussi TPCP, on a

$$F(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma_{\text{ther}}}{\gamma_{\text{ther}} - 1} \varepsilon_1,$$

i.e. F est linéaire en ε_1 .

Notons que dans les deux cas, un calcul direct montre que

$$\partial_{\varepsilon_1, \tau} F = F'(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma_{\text{ther}}(T_1)}{\gamma_{\text{ther}}(T_1) - 1}, \quad (3.6)$$

où $T_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$. Rappelons que la fonction $\gamma_{\text{ther}} := \gamma_{\text{ther}}(T)$, qui donne l'exposant adiabatique du gaz réel, dépend effectivement de T pour un gaz TPCI alors que cette fonction est constante pour un gaz TPCP.

3.2 Rappels sur les équations d'Euler relaxées

L'objet de cette section est de présenter le principe de la méthode de relaxation sur le cas des équations d'Euler, obtenues pour $\pi = 0$ et $q = 0$ dans (2.1) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = 0, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Les solutions de (3.7) développant en général des chocs en temps fini, les équations d'Euler sont complétées par la condition d'entropie (au sens des distributions)

$$\partial_t (\rho \sigma) + \nabla \cdot (\rho U \sigma) \leq 0. \quad (3.8)$$

L'ensemble des résultats présentés dans cette section reprennent ceux obtenus dans [CP98].

3.2.1 Le système relaxé

Le principe de la méthode de relaxation consiste à se donner une loi de pression $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ de façon à retrouver les équations d'Euler (3.7) et la condition d'entropie (3.8) dans la limite d'un taux de relaxation infini ($\lambda \rightarrow \infty$) à partir du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = 0, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda)U^\lambda) = \lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)), \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -\lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)). \end{cases} \quad (3.9)$$

On notera $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$ le vecteur des variables conservatives pour le système relaxé (3.9) et on utilisera l'indice supérieur λ pour indiquer que des fonctions des variables conservatives sont évaluées en \mathcal{W}^λ , par exemple $p_1^\lambda = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$, $\tau^\lambda = \frac{1}{\rho^\lambda}$ et $E_1^\lambda = \frac{1}{2} \rho^\lambda (U^\lambda)^2 + \rho^\lambda \varepsilon_1^\lambda$.

3.2.2 Consistance du système relaxé

Proposition 3.1. *On suppose que la fonction F est déterminée par la relation de consistance (3.2). Alors, le vecteur $W^\infty = (\rho^\infty, U^\infty, E^\infty)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ avec $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$ satisfait les équations d'Euler (3.7) avec la loi de pression du gaz réel $p := p(\tau, \varepsilon)$.*

Démonstration. De (3.9), nous déduisons que pour un taux de relaxation infini, on a $\varepsilon_2^\infty = F(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty)$. On a donc $(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty, \varepsilon_2^\infty) \in \mathcal{V}$ ou encore de manière équivalente,

$$\mathcal{W}^\infty \in \Xi.$$

En utilisant la relation de consistance (3.2), il vient

$$p(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty) = p_1(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty).$$

Ainsi, en posant $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$, le vecteur $(\rho^\infty, (\rho U)^\infty, E^\infty)^T$ satisfait les équations d'Euler (3.7) avec la loi de pression du gaz réel $p := p(\tau, \varepsilon)$. \square

3.2.3 Stabilité du système relaxé

L'étude de stabilité du système relaxé repose sur la notion d'entropie. Plus précisément, en notant σ_1 l'entropie mathématique du gaz fictif introduit dans la méthode de relaxation, on souhaite construire une fonction $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$ telle que

- Σ soit compatible avec l'entropie mathématique σ à l'équilibre

$$\forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad \sigma(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)) = \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), F(\tau, \varepsilon_1)); \quad (3.10)$$

- en posant $\mathcal{W} = (\rho, \rho U, E_1, \rho \varepsilon_2)^T$, la fonction $S := S(\mathcal{W})$ donnée par

$$S(\mathcal{W}) = \rho \Sigma \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\rho}, \frac{E_1}{\rho} - \frac{1}{2} U^2 \right), \varepsilon_2 \right), \quad (3.11)$$

soit strictement convexe en \mathcal{W} ;

- la solution \mathcal{W}^λ de (3.9) satisfasse une inégalité d'entropie de la forme

$$\partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) \leq 0.$$

Le théorème suivant précise les hypothèses sur la loi de pression p_1 pour assurer l'existence d'une fonction Σ jouissant des propriétés ci-dessus.

Théorème 3.2. *On suppose que les lois de pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ et $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ vérifient toutes deux (3.1). On suppose de plus que la fonction $F(\tau, \varepsilon_1)$ définie implicitement par la relation (3.2) satisfait les conditions "sous-caractéristiques" suivantes :*

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, & \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau, \varepsilon_1) > 0, \\ \forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, & c_1(\tau, \varepsilon_1) > c(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)), \\ \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} F(\tau, \varepsilon_1) = \infty & \text{à } \sigma_1 \text{ fixée.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Dans ces conditions :

(i) il existe une fonction $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$ satisfaisant la relation de compatibilité (3.10);

(ii) la fonction $S := S(\mathcal{W})$ définie par (3.11) est strictement convexe en \mathcal{W} sur la variété d'équilibre Ξ ;

(iii) Soit $\omega_e := \omega_e(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la fonction définie par

$$\omega_e(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \rho \left(\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \cdot \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 - \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \right) \left(\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1) \right), \quad (3.13)$$

où σ_1 et $\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1$ sont évaluées en (τ, ε_1) . Alors, en posant $\omega_e^\lambda = \omega_e(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda)$, on a

$$\partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot \left(U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda) \right) \leq \lambda \omega_e^\lambda,$$

avec égalité si la solution \mathcal{W}^λ de (3.9) est régulière. De plus, on a $\omega_e^\lambda \leq 0$ pour tout λ et $\omega_e^\lambda = 0$ si et seulement si $\mathcal{W}^\lambda \in \Xi$.

Démonstration. Voir [CP98]. □

Remarque 3.3. La fonction ω_e donnée par (3.13) s'interprète comme la production d'entropie due à la relaxation pour les équations d'Euler. On notera que le théorème 3.2 ne donne pas la convexité de l'entropie S sur \mathbb{R}^{d+3} mais uniquement sur la variété d'équilibre Ξ . Cette restriction n'empêche pas de définir les chocs admissibles pour (3.9) puisque les non-linéarités n'interviennent que dans les trois premières équations qui admettent l'entropie σ_1 .

Lorsque la loi de pression $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ est celle d'un gaz TPCP, les conditions sous-caractéristiques (3.12) se simplifient et on obtient également la convexité globale de l'entropie S .

Théorème 3.4. On suppose que la loi de pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ vérifie (3.1). On suppose en outre que le gaz fictif est TPCP avec $p_1(\tau, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1)^{\frac{1}{\gamma_1}} \varepsilon_1$. Alors,

(i) les conditions sous-caractéristiques (3.12) sont équivalentes à

$$\begin{cases} \gamma_1 > \sup_{\tau, \varepsilon} \gamma_{\text{acou}}(\tau, \varepsilon) & \text{où } \gamma_{\text{acou}}(\tau, \varepsilon) = \tau \left(\partial_{\varepsilon, \tau} p(\tau, \varepsilon) - \partial_{\tau, \varepsilon} \log p(\tau, \varepsilon) \right), \\ \gamma_1 > \sup_{\tau, \varepsilon} \widehat{\gamma}(\tau, \varepsilon) & \text{où } \widehat{\gamma}(\tau, \varepsilon) = \tau \partial_{\varepsilon, \tau} p(\tau, \varepsilon) + 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

(ii) la fonction $S := S(\mathcal{W})$ est strictement convexe en \mathcal{W} sur \mathbb{R}^{d+3} .

Corollaire 3.5. Dans le cas d'une relaxation TP/TPCP, les conditions sous-caractéristiques (3.14) se réduisent à

$$\gamma_1 > \sup_{\varepsilon} \gamma_{\text{acou}}(\varepsilon). \quad (3.15)$$

Démonstration. Lorsque le gaz réel est TP, on vérifie aisément que $\widehat{\gamma} = \gamma_{\text{acou}}$ et que ces deux quantités ne dépendent que de ε . □

3.2.4 Quelques propriétés de l'entropie globale Σ

Il sera utile par la suite de préciser quelques propriétés de la fonction $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$.

Tout d'abord, en notant \mathcal{O}_{σ_1} l'ensemble des réels atteignables par $\sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$ lorsque (τ, ε_1) décrit $\mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon = \mathbb{R}_+^2$, la fonction Σ est définie sur $\mathcal{O}_{\sigma_1} \times \mathbb{R}_+$. De plus, dans le cadre des hypothèses du théorème 3.2, on montre qu'il existe deux fonctions $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2)$ et $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2)$, toutes deux définies sur $\mathcal{O}_{\sigma_1} \times \mathbb{R}_+$ et telles que

$$\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}, \quad \begin{cases} \mathcal{T}(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \tau, \\ \mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = \varepsilon_1. \end{cases}$$

La fonction Σ est donnée par

$$\forall (\sigma_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{O}_{\sigma_1} \times \mathbb{R}_+, \quad \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right). \quad (3.16)$$

En utilisant la règle de la dérivation composée et quelques manipulations élémentaires, on vérifie aisément que

$$\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right)}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) \right)} > 0, \quad (3.17)$$

et que

$$\partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \partial_{\varepsilon, \tau} \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right) < 0. \quad (3.18)$$

Ces relations seront utiles pour définir une température globale lors de la relaxation du système de Navier-Stokes.

3.2.5 Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un

Dans cette section, nous nous intéressons à des petites perturbations autour d'un état d'équilibre de la solution $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$ de (3.9). Plus précisément, en posant

$$\varepsilon^\lambda = \varepsilon_1^\lambda + \varepsilon_2^\lambda,$$

et en notant $\varepsilon_1^{\lambda, 0}$ la solution unique de

$$\varepsilon^\lambda = \varepsilon_1^{\lambda, 0} + F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda, 0}), \quad (3.19)$$

on considère pour l'énergie interne spécifique ε_1^λ un développement asymptotique à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$ de la forme

$$\varepsilon_1^\lambda = \varepsilon_1^{\lambda, 0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda, 1} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (3.20)$$

En utilisant (3.19), l'énergie interne spécifique ε_2^λ se développe sous la forme

$$\varepsilon_2^\lambda = F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (3.21)$$

Notre objectif est de préciser au premier ordre en $\frac{1}{\lambda}$ le système de lois de conservation dont le vecteur

$$\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+2}, \quad (3.22)$$

est solution. On posera $\tau^\lambda = \frac{1}{\rho^\lambda}$, $E^\lambda = \frac{1}{2} \rho^\lambda (U^\lambda)^2 + \rho^\lambda \varepsilon^\lambda$ et $p^\lambda = p(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$.

Proposition 3.6. *Le vecteur \overline{W}^λ donné par (3.22) est solution, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, du système de lois de conservation*

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = \frac{1}{\lambda} \nabla (\mu_e^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\mu_e^\lambda U^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \end{cases} \quad (3.23)$$

où $\mu_e^\lambda = \mu_e(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ et la fonction $\mu_e := \mu_e(\tau, \varepsilon)$ est donnée par

$$\mu_e = \tau \frac{\partial_{\varepsilon, \tau} p}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1} (c_1^2 - c^2), \quad (3.24)$$

les quantités $\partial_{\varepsilon, \tau} p$ et c , respectivement $\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1$ et c_1 , étant évaluées en (τ, ε) , respectivement en (τ, ε_1) ; et où ε_1 est la solution unique de $\varepsilon = \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)$.

Démonstration. Nous reprenons la preuve donnée dans [CP98] car celle-ci constitue la première étape de la preuve de la proposition 3.13 où nous étudions la stabilité asymptotique des équations de Navier-Stokes relaxées. Considérons le sous-système formé des deux dernières équations de conservation de (3.9):

$$\begin{cases} \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = \lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)), \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -\lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)). \end{cases}$$

En éliminant la conservation de l'énergie cinétique dans la première équation ci-dessus, on obtient sous forme non-conservative un système ne faisant plus apparaître que les quantités ε_1^λ et ε_2^λ :

$$\begin{cases} \partial_t \varepsilon_1^\lambda + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_1^\lambda + \tau^\lambda p_1^\lambda \nabla \cdot U^\lambda = \lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)), \\ \partial_t \varepsilon_2^\lambda + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_2^\lambda = -\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)). \end{cases}$$

Incorporons maintenant les développements asymptotiques autour de l'état d'équilibre (3.20) et (3.21) dans ce sous-système. À l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, il vient

$$\begin{cases} \partial_t \left(\varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} \right) + U^\lambda \cdot \nabla \left(\varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} \right) + \tau^\lambda p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}) \nabla \cdot U^\lambda = \\ \quad \lambda \left(F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}) \right), \\ \partial_t \left(F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} \right) + U^\lambda \cdot \nabla \left(F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} \right) = \\ \quad -\lambda \left(F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}) \right). \end{cases} \quad (3.25)$$

Un développement limité à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$ donne

$$p_1 \left(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} \right) = p(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) \varepsilon_1^{\lambda,1}, \quad (3.26)$$

et

$$F \left(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} \right) = F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}. \quad (3.27)$$

Notons que nous avons utilisé la condition de consistance (3.2) entre les pressions p et p_1 dans (3.26) pour écrire que $p(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda) = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0})$. En utilisant (3.27), il vient

$$\lambda \left(F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}) \right) = -\varepsilon_1^{\lambda,1} \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Si on ne s'intéresse qu'aux termes d'ordre 0 en $\frac{1}{\lambda}$ dans (3.25), on obtient le nouveau sous-système

$$\begin{cases} \partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0} + \tau^\lambda p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) \nabla \cdot U^\lambda = -\varepsilon_1^{\lambda,1} \left(1 + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right), \\ \partial_t F(\tau, \varepsilon_1^{\lambda,0}) + U^\lambda \cdot \nabla F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) = \varepsilon_1^{\lambda,1} \left(1 + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right). \end{cases} \quad (3.28)$$

Grâce à ce système, nous obtenons une expression de $\varepsilon_1^{\lambda,1}$ uniquement en fonction de τ^λ , U^λ et de dérivées partielles de $F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0})$. Pour plus de clarté, on utilisera dans la suite la notation simplifiée $F^{\lambda,0} = F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0})$ et $p_1^{\lambda,0} = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0})$. On a

$$\begin{aligned} \partial_t F^{\lambda,0} + U^\lambda \cdot \nabla F^{\lambda,0} &= \partial_{\tau, \varepsilon_1} F^{\lambda,0} (\partial_t \tau^\lambda + U \cdot \nabla \tau^\lambda) + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda,0} (\partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0}) \\ &= \tau^\lambda \partial_{\tau, \varepsilon_1} F^{\lambda,0} \nabla \cdot U^\lambda + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda,0} (\partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0}). \end{aligned}$$

Le sous-système (3.28) devient

$$\begin{cases} \partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0} + \tau^\lambda p_1^{\lambda,0} \nabla \cdot U^\lambda = -\varepsilon_1^{\lambda,1} (1 + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda,0}) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ \partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda,0} (\partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + U^\lambda \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0}) + \tau^\lambda \partial_{\tau, \varepsilon_1} F^{\lambda,0} \nabla \cdot U^\lambda = \varepsilon_1^{\lambda,1} (1 + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda,0}) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right). \end{cases}$$

Il suffit de multiplier la première équation par $\partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda, 0}$ et de la retrancher à la deuxième pour obtenir

$$\varepsilon_1^{\lambda, 1} = -\tau^\lambda \frac{(\partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda, 0} p_1^{\lambda, 0} - \partial_{\tau, \varepsilon_1} F^{\lambda, 0})}{(1 + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F^{\lambda, 0})^2} \nabla \cdot U^\lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Maintenant que l'expression de $\varepsilon_1^{\lambda, 1}$ est connue, il reste à l'utiliser pour réécrire le système d'Euler relaxé. En ajoutant les 2 dernières équations de (3.9), celui-ci devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda) = 0, \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)) U^\lambda) = 0. \end{cases}$$

En utilisant le développement asymptotique de p_1 (3.26), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = -\frac{1}{\lambda} \nabla (\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1^{\lambda, 0} \varepsilon_1^{\lambda, 1}), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1^{\lambda, 0} \varepsilon_1^{\lambda, 1} U^\lambda), \end{cases}$$

ce qui se réécrit encore sous la forme (3.23) avec le coefficient μ_e donné par (3.24). \square

Une conséquence immédiate des conditions sous-caractéristiques (3.12) est que la fonction μ_e définie par (3.24) est à valeurs positives. Cette propriété est particulièrement intéressante puisqu'en notant $S^\lambda = \rho^\lambda \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ l'entropie mathématique associée à la solution \overline{W}^λ de (3.23), et en supposant \overline{W}^λ régulière, on a

$$\partial_t S^\lambda + \nabla \cdot (U^\lambda S^\lambda) = -\frac{\mu_e^\lambda}{\lambda T^\lambda} (\nabla \cdot U^\lambda)^2 \leq 0,$$

où $T^\lambda = -(\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda))^{-1}$ est la température du gaz réel. Cette propriété montre la stabilité du système asymptotique (3.23).

3.2.6 Les conditions sous-caractéristiques et le coefficient adiabatique

Dans cette section, nous reformulons les conditions sous-caractéristiques (3.12) dans un cadre plus thermodynamique qu'acoustique, en introduisant le coefficient adiabatique γ_{ther} défini en (2.33) et les coefficients thermoélastiques introduits dans la section 2.2.2. Ces expressions sont intéressantes notamment dans le cas où la modélisation thermodynamique du gaz réel s'appuie sur la donnée de ses coefficients

thermoélastiques. Le coefficient adiabatique et les coefficients thermoélastiques du gaz fictif seront indexés par 1.

Proposition 3.7. *On note γ_1 l'exposant adiabatique du gaz fictif. La première condition sous-caractéristique (3.12) est équivalente à l'une des conditions suivantes*

$$\begin{aligned} \forall(\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad & \left(\frac{p_1 \beta_1}{c_{v1}} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{p\beta}{c_v} \right) (\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)), \\ \forall(\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad & \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\chi_1 c_{v1} T_1} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{\gamma^{\text{ther}} - 1}{\chi c_v T} \right) (\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)), \\ \forall(\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad & \left(\frac{\alpha_1}{\chi_1 c_{v1}} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{\alpha}{\chi c_v} \right) (\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)). \end{aligned}$$

La deuxième condition sous-caractéristique (3.12) est équivalente à

$$\forall(\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_\tau \times \mathcal{O}_\varepsilon, \quad \left(\frac{\gamma_1}{\chi_1} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{\gamma^{\text{ther}}}{\chi} \right) (\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)).$$

Démonstration. Considérons la première condition sous-caractéristique de (3.12): $\partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau, \varepsilon_1) > 0$. En dérivant la relation de consistance (3.2) par rapport à ε_1 , on obtient $\partial_{\varepsilon, \tau} p(1 + \partial_{\varepsilon_1, \tau} F) = \partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1$. On en déduit que $\partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau, \varepsilon_1) > 0$ équivaut à

$$\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1(\tau, \varepsilon_1) > \partial_{\varepsilon, \tau} p(\tau, \varepsilon),$$

où nous avons posé $\varepsilon = \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)$. Si on introduit les températures T et T_1 , la relation ci-dessus se réécrit

$$\left(\partial_{\varepsilon_1, \tau} T_1 \partial_{T_1, \tau} p_1 \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\partial_{\varepsilon, \tau} T \partial_{T, \tau} p \right) (\tau, \varepsilon).$$

En utilisant les définitions (2.30) et (2.38) de c_v et β , il vient

$$\left(\frac{p_1 \beta_1}{c_{v1}} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{p\beta}{c_v} \right) (\tau, \varepsilon).$$

En utilisant la relation de compatibilité (2.40) entre les coefficients thermoélastiques, on obtient aussi

$$\left(\frac{\alpha_1}{\chi_1 c_{v1}} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{\alpha}{\chi c_v} \right) (\tau, \varepsilon).$$

Enfin, en utilisant la définition γ^{ther} , on obtient

$$(p\beta)^2(\tau, \varepsilon) = \left(\frac{(\gamma^{\text{ther}} - 1)c_v}{\tau T \chi} \right) (\tau, \varepsilon),$$

ce qui en injectant dans la première forme ci-dessus conduit à

$$\left(\frac{\gamma_1 - 1}{c_{v1} \chi_1 T_1} \right) (\tau, \varepsilon_1) > \left(\frac{\gamma^{\text{ther}} - 1}{c_v \chi T} \right) (\tau, \varepsilon).$$

Considérons maintenant la deuxième condition sous-caractéristique (3.12), à savoir $c_1(\tau, \varepsilon_1) > c(\tau, \varepsilon)$. On sait par (2.54) que la vitesse du son s'écrit dans le cas général

$$c^2(\tau, \varepsilon) = \left(\frac{T \gamma^{\text{ther}}}{\chi} \right) (\tau, \varepsilon),$$

ce qui conduit immédiatement au résultat cherché. \square

3.3 Les équations de Navier-Stokes relaxées

Nous présentons la méthode de relaxation appliquée aux équations de Navier-Stokes compressibles dans un cadre relativement général. Nous nous donnons quatre fonctions

$$\begin{cases} \alpha & := \alpha(\tau, \varepsilon_1), & (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \beta & := \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \Theta & := \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ F & := F(\tau, \varepsilon_1), & (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, \end{cases}$$

les deux premières correspondant à des coefficients de pondération sans dimension, la troisième ayant les dimensions d'une température et la quatrième celle d'une énergie interne spécifique. La fonction α est à valeurs dans $[0,1]$ alors que les fonctions β , Θ et F sont à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Physiquement, Θ représente une température "globale" pour le système de Navier-Stokes relaxé et F est associée, comme pour les équations d'Euler, à la relaxation de la loi de pression.

Notre objectif est de retrouver les équations de Navier-Stokes (2.1) dans la limite d'un taux de relaxation infini ($\lambda \rightarrow \infty$) à partir du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q_1^\lambda + P_1^\lambda, \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -P_1^\lambda - P_2^\lambda. \end{cases} \quad (3.29)$$

On notera à nouveau $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$ le vecteur des variables conservatives pour le système relaxé (3.29). Comme précédemment, nous utilisons l'indice supérieur λ pour indiquer qu'une fonction des variables conservatives est évaluée en \mathcal{W}^λ , par exemple $p_1^\lambda = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$ où $\tau^\lambda = \frac{1}{\rho^\lambda}$ et $\varepsilon_1^\lambda = \tau^\lambda E_1^\lambda - \frac{1}{2}(U^\lambda)^2$.

Les termes de perturbation (qui sont des fonctions des variables conservatives) s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P_1 = \alpha(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) + \lambda \rho(\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1)), \\ P_2 = \beta \nabla \cdot q_2, \end{cases} \quad (3.30)$$

avec les flux de chaleur q_1 et q_2 définis par

$$q_1 = -\kappa \nabla T_1, \quad q_2 = \mathcal{Q} - q_1, \quad \mathcal{Q} = -\kappa \nabla \Theta,$$

où $T_1 := T_1(\tau, \varepsilon_1)$ est la température du gaz fictif ($T_1(\tau, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ si le gaz fictif est TPCP). Pour simplifier la présentation, nous supposons par la suite que la conductivité thermique est constante.

On notera que le membre de droite de l'équation de E_1^λ dans (3.29) s'écrit

$$-(\nabla \cdot \pi^\lambda) \cdot U^\lambda - (1 - \alpha^\lambda)(\pi^\lambda : \nabla U^\lambda + \nabla \cdot q_1^\lambda) + \lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)),$$

alors que le membre de droite de l'équation de $\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda$ s'écrit

$$-\alpha^\lambda (\pi^\lambda : \nabla U^\lambda + \nabla \cdot q_1^\lambda) - \beta^\lambda \nabla \cdot q_2^\lambda - \lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)).$$

Le coefficient α permet donc de pondérer les contributions de la dissipation visqueuse et de la diffusion de chaleur entre les deux bilans d'énergie considérés. On notera également que seul le flux de chaleur lié au gaz fictif intervient dans l'équation de E_1^λ et que ε_2^λ n'intervient que par le biais du terme de relaxation déjà introduit pour les équations d'Euler.

Enfin, on constate qu'en l'absence de flux diffusifs, on a $\pi = 0$ et $q_1 = q_2 = Q = 0$ si bien que le système des équations de Navier-Stokes relaxées (3.29) redonne le système des équations d'Euler relaxées (3.9) introduit dans [CP98].

3.4 Consistance du système relaxé

Proposition 3.8. *On suppose que*

- (i) *la fonction F est déterminée par la relation de consistance (3.2);*
- (ii) $\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$, $\beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$;
- (iii) $\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$, $\Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$.

Alors, le vecteur $W^\infty = (\rho^\infty, U^\infty, E^\infty)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ avec $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$ satisfait les équations de Navier-Stokes compressibles (2.1) avec la loi de pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ et la loi de température $T := T(\tau, \varepsilon)$ du gaz réel.

Démonstration. Pour un taux de relaxation infini, nous avons clairement

$$(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty, \varepsilon_2^\infty) \in \mathcal{V},$$

si bien que grâce à la relation de consistance (3.2), nous obtenons

$$p(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty) = p_1(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty).$$

Par ailleurs, en sommant les troisième et quatrième équations dans (3.29) et en posant $\varepsilon^\infty = \varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty$ et $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$, nous obtenons, grâce aux hypothèses sur β et Θ , l'équation de conservation de l'énergie sous la forme

$$\partial_t E^\infty + \nabla \cdot ((E^\infty + p^\infty)U^\infty) = -\nabla \cdot (\pi^\infty \cdot U^\infty) - \nabla \cdot q^\infty,$$

avec le flux de chaleur $q^\infty = -\kappa \nabla T^\infty$ où $T^\infty = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau^\infty, \varepsilon^\infty)$ est la température du gaz réel. \square

Remarque 3.9. Dans le cas général, on n'a pas nécessairement égalité des températures du gaz réel et du gaz fictif à l'équilibre, i.e. $T^\infty \neq T_1^\infty$ a priori. Un cas particulier remarquable est celui où le gaz réel est TPCI et le gaz fictif TPCP. En effet, la température a alors la même forme fonctionnelle en la densité et la pression pour le gaz réel et le gaz fictif, si bien que $T^\infty = T_1^\infty$ et par suite $q_2^\infty = 0$.

3.5 Stabilité du système relaxé

Cette section présente notre résultat principal concernant la stabilité du système Navier-Stokes relaxé (3.29). Il montre en particulier qu'afin de garantir la stabilité de (3.29), les fonctions β et Θ doivent être choisies de façon précise, la fonction α restant arbitraire à valeurs dans $[0,1]$.

La fonction β est donnée par

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \alpha + (1 - \alpha) \frac{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\mathcal{T}(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2))}, \end{cases} \quad (3.31)$$

avec $\alpha := \alpha(\tau, \varepsilon_1)$ et la fonction Θ par

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = - \left((1 - \alpha) \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) + \alpha \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \right)^{-1}, \end{cases} \quad (3.32)$$

avec $\sigma_1 := \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$.

Théorème 3.10. *Avec les hypothèses du théorème 3.2, on suppose que les fonctions β et Θ sont données par (3.31) et (3.32) et que la fonction α est à valeurs dans $[0,1]$. Alors, les hypothèses de consistance énoncées à la proposition 3.8 sont satisfaites. On suppose de plus que la solution \mathcal{W}^λ de (3.29) est régulière et que $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$ à tout temps et en tout point de l'écoulement. Soit S la fonction définie par (3.11) dont l'existence est garantie par le théorème 3.2. Alors, on a*

$$\forall \lambda, \quad \partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot \left(U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda) \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{Q}^\lambda}{\Theta^\lambda} \right) = \lambda \omega_e^\lambda + \frac{\pi^\lambda : \nabla U^\lambda}{\Theta^\lambda} + \frac{\mathcal{Q}^\lambda \cdot \nabla \Theta^\lambda}{(\Theta^\lambda)^2} \leq 0, \quad (3.33)$$

où la contribution $\omega_e^\lambda = \omega_e(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda)$ est évaluée, comme pour les équations d'Euler relaxées, selon (3.13).

Remarque 3.11. On note que les trois contributions à la dissipation d'entropie (dues respectivement à la relaxation, au flux de quantité de mouvement et au flux de chaleur) sont négatives indépendamment.

Démonstration. (i) Vérifions d'abord les hypothèses de consistance énoncées à la proposition 3.8. Nous constatons que $\Theta > 0$ puisque $0 \leq \alpha \leq 1$ et que les deux termes $\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$ et $\partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$ sont négatifs d'après les relations (3.17) et (3.18). De plus, toujours en utilisant (3.17) et (3.18), nous constatons que pour $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$, nous avons

$$\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) = \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

si bien que $\Theta = -1/\partial_{\varepsilon,\tau}\sigma(\tau,\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ pour $(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \mathcal{V}$. De plus, il est clair que $\beta = 1$ pour $(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \mathcal{V}$. Les hypothèses de consistance de la proposition 3.8 sont donc bien satisfaites pour les fonctions β et Θ données par (3.31) et (3.32).

(ii) Passons maintenant au bilan d'entropie (3.33). Nous omettrons l'indice λ afin d'alléger les notations. En utilisant la règle de la dérivation composée, il vient

$$\begin{aligned} \partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \partial_{\sigma_1,\varepsilon_2} \Sigma (\partial_t(\rho\sigma_1) + \nabla \cdot (\rho U \sigma_1)) \\ &\quad + \partial_{\varepsilon_2,\sigma_1} \Sigma (\partial_t(\rho\varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho U \varepsilon_2)), \end{aligned}$$

les dérivées de Σ étant évaluées en (σ_1,ε_2) et celles de σ_1 en (τ,ε_1) . Or,

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho\sigma_1) + \nabla \cdot (\rho U \sigma_1) &= \partial_{\varepsilon_1,\tau}\sigma_1 (\partial_t(\rho\varepsilon_1) + \nabla \cdot (\rho U \varepsilon_1)) + \partial_{\tau,\varepsilon_1}\sigma_1 \nabla \cdot U \\ &= \partial_{\varepsilon_1,\tau}\sigma_1 (-\pi : \nabla U - \nabla \cdot q_1 - p_1 \nabla \cdot U + P_1) + \partial_{\tau,\varepsilon_1}\sigma_1 \nabla \cdot U. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\partial_t(\rho\varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho U \varepsilon_2) = -P_1 - P_2.$$

En regroupant, il vient

$$\begin{aligned} \partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \partial_{\sigma_1,\varepsilon_2} \Sigma \partial_{\varepsilon_1,\tau}\sigma_1 (-\pi : \nabla U - \nabla \cdot q_1 + P_1) \\ &\quad + \partial_{\varepsilon_2,\sigma_1} \Sigma (-P_1 - P_2) \\ &\quad + \partial_{\sigma_1,\varepsilon_2} \Sigma (\partial_{\tau,\varepsilon_1}\sigma_1 - p_1 \partial_{\varepsilon_1,\tau}\sigma_1) \nabla \cdot U. \end{aligned}$$

La contribution de $\nabla \cdot U$ est nulle grâce à la relation de Gibbs. En explicitant P_1 et P_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t S + \nabla \cdot (US) &= -\left(\alpha \partial_{\varepsilon_2,\sigma_1} \Sigma + (1 - \alpha) \partial_{\sigma_1,\varepsilon_2} \Sigma \partial_{\varepsilon_1,\tau}\sigma_1\right) (\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) \\ &\quad - \beta \partial_{\varepsilon_2,\sigma_1} \Sigma \nabla \cdot q_2 \\ &\quad + \lambda \omega_e. \end{aligned}$$

Le facteur entre parenthèses devant $(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)$ vaut par définition $-1/\Theta$. Par ailleurs, de (3.31) et des relations (3.17) et (3.18), nous déduisons que $\beta \partial_{\varepsilon_2,\sigma_1} \Sigma = -1/\Theta$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} \partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \frac{1}{\Theta} (\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1 + \nabla \cdot q_2) + \lambda \omega_e \\ &= \frac{1}{\Theta} (\pi : \nabla U + \nabla \cdot \mathcal{Q}) + \lambda \omega_e, \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. \square

On note que la stabilité du système Navier-Stokes relaxé suppose l'estimation a priori $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$. Le système d'Euler relaxé admet le domaine d'invariance $(\varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda) \in \mathbb{R}_+^2$ puisque à τ fixé, la fonction $\varepsilon_1 \mapsto F(\tau, \varepsilon_1)$ est par hypothèse strictement croissante avec $F(\tau, 0) = 0$ et que ε_2^λ est régi par une équation de convection-diffusion dont le terme source vaut $-\lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda))$. Par contre, pour le système Navier-Stokes relaxé, l'estimation a priori $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$ n'est pas claire a priori à cause de la

présence de termes source supplémentaires dans l'équation de ε_2^λ . Elle peut toutefois s'obtenir à partir de l'estimation d'entropie du théorème 3.10 en supposant que l'entropie du gaz réel et celle du gaz fictif sont singulières quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 3.12. *On suppose que la solution \mathcal{W}^λ de (3.29) est régulière et que l'entropie du gaz réel et celle du gaz fictif sont singulières quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans ces conditions, le système (3.29) admet le domaine d'invariance $\varepsilon_2^\lambda > 0$.*

Démonstration. L'hypothèse sur les entropies implique que l'entropie globale Σ explose lorsque $\varepsilon_2^\lambda \rightarrow 0$. Or, celle-ci est régie par l'équation de bilan (3.33) et ne peut donc exploser en temps fini si la solution \mathcal{W}^λ est régulière. \square

3.6 Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un

On s'intéresse maintenant à des petites perturbations de la solution \mathcal{W}^λ de (3.29) autour d'un état d'équilibre. En considérant la même approche que pour les équations d'Euler relaxées, notre objectif est de préciser au premier ordre en $\frac{1}{\lambda}$ le système de lois de conservation dont le vecteur

$$\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+2},$$

est solution. Nous reprenons les notations utilisées dans la section 3.2.5.

Les résultats présentés dans cette section sont restreints au cas de la relaxation TP/TPCP. Dans ce cas, nous avons vu dans la section 3.1.4 que la fonction F ne dépend que de ε_1 et qu'elle est donnée par (3.5). Nous supposons dans cette section que la fonction α dans (3.29) s'exprime sous la forme

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{F'(\varepsilon_1)}{1 + F'(\varepsilon_1)}. \quad (3.34)$$

Notons qu'en vertu de la première condition sous-caractéristique (3.12), on a bien $0 \leq \alpha \leq 1$. De plus, en utilisant (3.6), nous pouvons réécrire (3.34) sous la forme

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma_{\text{ther}}(T_1)}{\gamma_1 - 1}, \quad (3.35)$$

où $T_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ et $\gamma_{\text{ther}} := \gamma_{\text{ther}}(T)$ est l'exposant adiabatique du gaz réel.

Proposition 3.13. *On considère une relaxation TP/TPCP. On suppose que la fonction α est donnée par (3.34) et que les fonctions β et Θ sont données par (3.31) et (3.32). Alors, le vecteur $\overline{W}^\lambda \in \mathbb{R}^{d+2}$ est solution, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, du système de lois de conservation*

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla (\mu_e^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\mu_e^\lambda U^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \end{cases} \quad (3.36)$$

où μ_e est donnée par (3.24), $q^\lambda = -\kappa \nabla T^\lambda$ et $T^\lambda = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$, σ étant l'entropie mathématique du gaz réel.

Démonstration. Nous omettrons la plupart des indices λ afin d'alléger les notations mais l'indice supérieur $(\lambda, 0)$ sera conservé afin d'indiquer qu'une fonction qui dépend de ε_1 est évaluée en la valeur d'équilibre $\varepsilon_1^{\lambda, 0}$.

(i) La première partie de la preuve reprend celle de la proposition 3.6 pour les équations d'Euler relaxées. En utilisant les développements asymptotiques (3.20) et (3.21), on obtient

$$\lambda(F(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) = \varepsilon_1^{\lambda, 1} (1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0})) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

En identifiant les termes d'ordre zéro dans la quatrième équation de (3.29), il vient

$$\begin{aligned} \rho \varepsilon_1^{\lambda, 1} (1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0})) - \alpha^{\lambda, 0} S^{\lambda, 0} - P_2^{\lambda, 0} &= \rho \partial_t F^{\lambda, 0} + \rho U \cdot \nabla F^{\lambda, 0} \\ &= F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0}) (\rho \partial_t \varepsilon_1^{\lambda, 0} + \rho U \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda, 0}), \end{aligned}$$

où on a posé $S^{\lambda, 0} = (\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)^{\lambda, 0}$. Comme par hypothèse le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP, leurs températures coïncident à l'équilibre si bien que $P_2^{\lambda, 0} = 0$. En identifiant maintenant les termes d'ordre zéro dans la troisième équation de (3.29) et en utilisant la deuxième équation de (3.29) pour éliminer la conservation de l'énergie cinétique, on obtient

$$\rho \partial_t \varepsilon_1^{\lambda, 0} + \rho U \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda, 0} = -\rho \varepsilon_1^{\lambda, 1} (1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0})) - p_1^{\lambda, 0} \nabla \cdot U - (1 - \alpha^{\lambda, 0}) S^{\lambda, 0}.$$

Des deux équations ci-dessus et de la relation (3.34), on déduit aisément que

$$\begin{aligned} (1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0}))^2 \varepsilon_1^{\lambda, 1} &= -\tau \nabla \cdot U p_1^{\lambda, 0} F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0}) + \tau \left(\alpha^{\lambda, 0} - (1 - \alpha^{\lambda, 0}) F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0}) \right) S^{\lambda, 0} \\ &= -\tau \nabla \cdot U p_1^{\lambda, 0} F'(\varepsilon_1^{\lambda, 0}), \end{aligned}$$

d'où l'on tire $\varepsilon_1^{\lambda, 1}$. On remarquera que la contribution de $S^{\lambda, 0}$ disparaît grâce au choix (3.34) pour le coefficient pondérateur α .

(ii) En sommant les deux équations de l'énergie dans (3.29), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda, \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot \mathcal{Q}^\lambda + (1 - \beta^\lambda) \nabla \cdot q_2^\lambda. \end{cases}$$

Or, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, on a

$$p_1^\lambda = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda) = p(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1(\tau, \varepsilon_1^{\lambda, 0}) \varepsilon_1^{\lambda, 1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

et

$$(1 - \beta^\lambda) \nabla \cdot q_2^\lambda = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

puisque $1 - \beta^\lambda = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$ et $q_2^\lambda = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$. On retrouve donc le système (3.36) à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$ avec le flux de chaleur \mathcal{Q}^λ à la place de q^λ .

(iii) Dans le cadre d'une relaxation TP/TPCP, un calcul direct permet de vérifier que les fonctions \mathcal{T} et \mathcal{E}_1 introduites dans la section 3.2.4 sont explicitement données sous la forme

$$\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2) = e^{-\sigma_1/R} \left(F^{-1}(\varepsilon_2)\right)^{-1/(\gamma_1-1)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1(\varepsilon_2) = F^{-1}(\varepsilon_2),$$

\mathcal{E}_1 ne dépendant pas de σ_1 . Or, comme l'entropie mathématique σ d'un gaz TP s'écrit à une constante additive près sous la forme $\sigma(\tau, \varepsilon) = -R \log \tau + \Phi(\varepsilon)$ où Φ est une certaine fonction de l'énergie interne uniquement, nous déduisons de la définition (3.16) que l'entropie globale Σ se décompose sous la forme

$$\Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \sigma_1 + \Psi(\varepsilon_2),$$

avec

$$\Psi(\varepsilon_2) = \frac{R}{\gamma_1 - 1} \log F^{-1}(\varepsilon_2) + \Phi(F^{-1}(\varepsilon_2) + \varepsilon_2).$$

Les relations ci-dessus impliquent que

$$\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma = 1,$$

si bien que la température globale Θ donnée par (3.32) s'écrit sous la forme d'une moyenne harmonique

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1 - \alpha}{T_1} + \frac{\alpha}{T_*}, \quad (3.37)$$

où $T_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ est la température du gaz fictif et

$$T_* = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right)},$$

s'interprète comme la température qu'aurait le gaz réel à l'équilibre. De la relation (3.35), nous déduisons que

$$\frac{1}{\Theta^\lambda} = \frac{\gamma_{\text{ther}}(T_1^\lambda) - 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{T_1^\lambda} + \frac{\gamma_1 - \gamma_{\text{ther}}(T_1^\lambda)}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{T_*^\lambda}. \quad (3.38)$$

Il reste à développer Θ^λ à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$. Nous savons déjà que

$$\Theta^{\lambda,0} = T_1^{\lambda,0} = T_*^{\lambda,0}.$$

$$\Theta^{\lambda,0} = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon,\tau}\sigma(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0} + \varepsilon_2^{\lambda,0})} = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon,\tau}\sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)} = T^\lambda.$$

À l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte les variations de $\gamma_{\text{ther}}(T_1^\lambda)$ mais uniquement celles des températures T_1^λ et T_*^λ . D'une part, on a

$$T_1^\lambda = T^\lambda + \frac{\gamma_1 - 1}{R} \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}.$$

D'autre part, puisque

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon_2^\lambda) + \varepsilon_2^\lambda = \varepsilon^\lambda - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - \gamma_{\text{ther}}^{\lambda,0}} \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1},$$

on obtient

$$T_*^\lambda = T^\lambda - \frac{1}{c_v^{\lambda,0}} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - \gamma_{\text{ther}}^{\lambda,0}} \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}.$$

En reportant dans (3.38), il vient

$$\Theta^\lambda = T^\lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

ce qui complète la preuve. \square

Le système approché obtenu dans la proposition 3.13 est bien compatible avec la condition d'entropie. En effet, notons $S^\lambda = \rho^\lambda \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ l'entropie mathématique associée à la solution \overline{W}^λ de (3.36), $T^\lambda = -1/\partial_{\varepsilon,\tau}\sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ la température et $q^\lambda = -\kappa \nabla T^\lambda$ le flux de chaleur. En supposant \overline{W}^λ régulière, un calcul direct conduit au bilan d'entropie sous la forme

$$\partial_t S^\lambda + \nabla \cdot (U^\lambda S^\lambda) - \nabla \cdot \left(\frac{q^\lambda}{T^\lambda} \right) = -\frac{\mu_e^\lambda}{\lambda T^\lambda} (\nabla \cdot U^\lambda)^2 + \frac{\pi^\lambda : \nabla U^\lambda}{T^\lambda} + \frac{q^\lambda \cdot \nabla T^\lambda}{(T^\lambda)^2},$$

les trois termes du membre de droite étant négatifs indépendamment. Cette propriété confirme le résultat fondamental de stabilité obtenu dans le théorème 3.10.

Chapitre 4

Méthodes numériques

Sommaire

4.1	Approximation mixte volumes finis/éléments finis des équations de Navier-Stokes compressibles	59
4.2	Traitement numérique de la méthode de relaxation . . .	78

Dans ce chapitre, on présente l'ensemble des méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles relaxées ou non. On présentera d'abord l'approximation numérique des équations de Navier-Stokes compressibles non relaxées en utilisant une formulation mixte volumes finis/éléments finis. Pour cela, on décrira la méthode numérique pour l'évaluation des flux convectifs et diffusifs, la formulation des conditions limites et la mise en œuvre du schéma numérique d'intégration en temps. Puis, on présentera les méthodes numériques pour les équations de Navier-Stokes relaxées. Dans un premier temps, on décrira l'algorithme de relaxation puis on détaillera l'approximation numérique des termes supplémentaires intervenant dans les équations de Navier-Stokes relaxées en utilisant la même formulation mixte volumes finis/éléments finis.

L'ensemble de nos applications numériques portant sur des écoulements bidimensionnels, on restreindra le formalisme mathématique à deux dimensions d'espace.

4.1 Approximation mixte volumes finis/éléments finis des équations de Navier-Stokes compressibles

Dans cette section, on précisera d'abord les deux partitionnements du domaine de calcul que l'on considère et les fonctions d'approximations qui y sont rattachées. Ces deux notions constituent l'ossature de la méthode mixte volumes finis/éléments finis et leur présentation va permettre d'introduire les notations conservées durant

toute cette section. Puis, on décrira la méthode numérique pour l'évaluation des flux convectifs et diffusifs, la formulation des conditions limites et la mise en œuvre du schéma numérique d'intégration en temps.

4.1.1 Notations

On note Ω_h le domaine de calcul. Il s'agit d'un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On note Γ_h le bord du domaine Ω_h

$$\Gamma_h = \partial\Omega_h.$$

Pour simplifier, on suppose que la frontière de Ω_h est polygonale, ce qui sera le cas dans toutes les simulations numériques présentées dans le chapitre suivant.

Pour établir la formulation volumes finis/éléments finis, nous considérons deux partitionnements différents de Ω_h :

- Pour le premier partitionnement (qui servira à l'approximation par éléments finis), on choisit de découper le domaine Ω_h en nt triangles T_j , de façon à ce qu'ils constituent un recouvrement de Ω_h :

$$\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{nt} T_j. \quad (4.1)$$

Les sommets des triangles T_j constituent les nœuds du maillage. On note ns le nombre de nœuds.

- Pour le deuxième partitionnement (qui servira à l'approximation par volumes finis), on procède comme suit : pour chaque nœud i , on définit une cellule ou volume de contrôle C_i , en joignant successivement les centres de gravité des triangles ayant i comme sommet et les milieux des segments ayant i comme extrémité (voir Fig 4.1). Ainsi, l'ensemble des cellules (dont le cardinal est ns) forme un nouveau recouvrement de Ω_h :

$$\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{ns} C_i. \quad (4.2)$$

Les deux partitionnements de Ω_h permettent de définir les fonctions suivantes :

- Sur le triangle T_j , on considère les trois fonctions polynomiales $N_k^{T_j}$, $k \in \llbracket 1,3 \rrbracket$, de degré 1

$$N_k^{T_j}(X_l) = \begin{cases} \delta_{k,l} & (k,l) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2, \\ X_l \text{ est un sommet de } T_j. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ces fonctions sont exactement les fonctions de base (également appelées fonctions de forme) locales associées à l'élément fini de Lagrange P_1 (pour plus de détails, voir [EG02]). A partir de la définition (4.3), on introduit de manière classique de nouvelles fonctions de base globales (utilisables sur le domaine entier Ω_h). Pour cela, on considère les fonctions de base nodales et globales

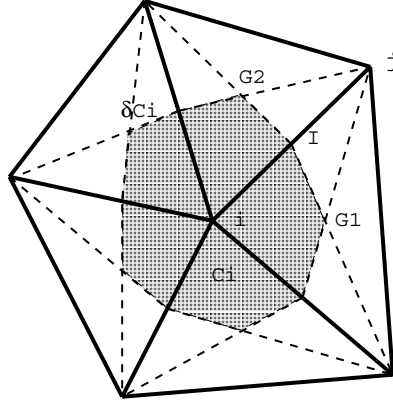


FIG. 4.1 – Cellule de contrôle

N_i obtenues par assemblage des fonctions de base locales $N_k^{T_j}$ pour tous les triangles ayant i comme sommet,

$$\begin{cases} N_i(X)|_{T_j} = N_k^{T_j}(X), \\ k \in \llbracket 1,3 \rrbracket \text{ tel que } N_k^{T_j}(X_i) = 1, \end{cases} \quad (4.4)$$

où on a noté $X = (x,y)$ le point courant de Ω_h .

– Sur la cellule C_i , on définit la fonction caractéristique χ_i par

$$\chi_i(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in C_i, \\ 0 & \text{si } X \notin C_i. \end{cases}$$

On peut maintenant définir les espaces fonctionnels V_h et W_h associés aux deux recouvrements

$$\begin{aligned} V_h^{\text{EF}} &= \left\{ v_h \mid v_h \in C^0(\Omega) \text{ , } v_h|_{T_j} \in P_1 \text{ , } \forall j \in \llbracket 1,nt \rrbracket \right\}, \\ V_h^{\text{VF}} &= \left\{ w_h \mid w_h \in L^2(\Omega) \text{ , } w_h|_{C_i} \in P_0 \text{ , } \forall i \in \llbracket 1,ns \rrbracket \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où P_k désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à k . On notera que ces deux espaces ont la même dimension ns car il est clair que la famille $(N_i)_{i \in \llbracket 1,ns \rrbracket}$ est une base de V_h^{EF} et que la famille $(\chi_i)_{i \in \llbracket 1,ns \rrbracket}$ est une base de V_h^{VF} . Par la suite, on considérera l'application linéaire

$$\begin{aligned} \zeta_h : \quad V_h^{\text{EF}} &\rightarrow V_h^{\text{VF}} \\ v_h = \sum_{i=1}^{ns} v_i N_i &\mapsto \zeta_h v_h = \sum_{i=1}^{ns} v_i \chi_i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1.2 Principe de l'approximation mixte volumes finis/éléments finis

Dans cette section, nous présentons brièvement le principe de l'approximation mixte volumes finis/éléments finis dans un cadre relativement abstrait puis nous appliquons la méthode aux équations de Navier-Stokes compressibles.

Soit V un espace fonctionnel de dimension infinie muni d'une structure hilbertienne et notons V' son dual. On considère un opérateur $A : V \rightarrow V'$, on se donne un membre de droite $f \in V'$ et on cherche à résoudre le problème suivant

$$W \in V : \quad AW = f, \quad (4.7)$$

qui se reformule de manière équivalente sous la forme faible suivante :

$$W \in V : \quad \langle AW, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (4.8)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le crochet de dualité entre V et V' . Dans les applications, V est un sous-espace de $L^2(\Omega)$ et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fait intervenir des intégrales sur Ω .

La méthode de Galerkin a pour but d'approcher la solution W via un opérateur de projection, qui peut se définir en orthogonalisant le résidu par rapport à un espace de fonctions tests convenablement choisies. En notant V_h cet espace, la solution approchée W_h satisfait les équations discrètes suivantes ;

$$W_h \in V_h : \quad \langle AW_h, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_h. \quad (4.9)$$

Les méthodes volumes finis et éléments finis peuvent toutes deux être considérées comme des méthodes de type Galerkin. La différence entre ces deux méthodes réside dans le choix des fonctions tests, les méthodes volumes finis utilisant les espaces V_h^{VF} définis dans (4.5) et les méthodes éléments finis les espaces V_h^{EF} .

Lorsque l'opérateur A représente une équation de convection-diffusion, on peut souhaiter utiliser une méthode volumes finis pour les termes convectifs et une méthode éléments finis pour les termes diffusifs. Plus généralement, notons A^{VF} (resp. A^{EF}) la partie de A pour laquelle on souhaite utiliser une méthode volumes finis (resp. éléments finis). Le principe de la méthode mixte volumes finis/éléments finis consiste à considérer le problème approché suivant :

$$W_h \in V_h : \quad \langle A^{\text{VF}}W_h, \zeta_h v \rangle + \langle A^{\text{EF}}W_h, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_h, \quad (4.10)$$

où ζ_h est l'opérateur introduit dans (4.6). On notera que (4.10) peut s'interpréter comme une approximation éléments finis pour l'opérateur approché

$$A_h = \zeta_h^* A|_{V_h}^{\text{VF}} + A|_{V_h}^{\text{EF}}, \quad (4.11)$$

où ζ_h^* est le transposé de ζ_h et où nous avons noté $A|_{V_h}^{\text{VF}}$ et $A|_{V_h}^{\text{EF}}$ la restriction à V_h de A^{VF} et A^{EF} respectivement. Ainsi l'utilisation d'une méthode mixte volumes finis/éléments finis a l'avantage de conserver un traitement adapté au deux types de flux : volumes finis pour les flux convectifs et éléments finis pour les flux diffusifs.

Nous appliquons maintenant les considérations ci-dessus aux équations de Navier-Stokes compressibles. On rappelle ici les notations introduites au chapitre 2, qui

permettent de réécrire le système des équations de Navier-Stokes compressibles bi-dimensionnelles sous la forme conservative

$$\partial_t W + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) + \nabla \cdot \mathcal{R}(W) = 0, \quad (4.12)$$

où $\mathcal{F} : W \in \mathbb{R}^4 \mapsto \mathcal{F}(W) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{R} : W \in \mathbb{R}^4 \mapsto \mathcal{R}(W) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ représentent respectivement la contribution convective et diffusive aux flux de masse, impulsion et énergie dans l'espace physique \mathbb{R}^2 . On peut écrire ces flux sous la forme

$$\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_x(W), \mathcal{F}_y(W)), \quad \mathcal{R}(W) = (\mathcal{R}_x(W), \mathcal{R}_y(W)),$$

avec

$$\mathcal{F}_x(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_y(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

et

$$\mathcal{R}_x(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{xx} \\ \pi_{yx} \\ u\pi_{xx} + v\pi_{xy} + q_x \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_y(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{xy} \\ \pi_{yy} \\ u\pi_{yx} + v\pi_{yy} + q_y \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

où $U = (u, v)$ sont les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse, π le tenseur flux d'impulsion et q le vecteur flux de chaleur dont nous rappelons les expressions

$$\pi = -\eta \left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot U) I \right), \\ q = -\kappa \nabla T.$$

La formulation faible des équations de Navier-Stokes par une méthode éléments finis en espace avec la variable temps traitée de façon continue est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } W_h(t, \cdot) \in (V_h^{\text{EF}})^4 \text{ tel que } \forall \psi_h \in (V_h^{\text{EF}})^4 \\ \iint_{\Omega_h} \partial_t W_h \psi_h \, d\omega + \iint_{\Omega_h} \nabla \cdot \mathcal{F}(W_h) \psi_h \, d\omega - \iint_{\Omega_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla \psi_h \, d\omega \\ + \int_{\Gamma_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot n \psi_h \, d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (4.15)$$

où n est la normale extérieure à Ω_h . On choisit pour ψ_h une fonction de base associée au sommet $i \in \llbracket 1, ns \rrbracket$ et dont la valeur en i est un vecteur de \mathbb{R}^4 arbitraire. La formulation faible (4.15) se réécrit sous la forme d'une égalité dans \mathbb{R}^4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } W_h(t, \cdot) \in (V_h^{\text{EF}})^4 \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket \\ \iint_{\mathcal{I}_i} \partial_t W_h N_i \, d\omega + \iint_{\mathcal{I}_i} \nabla \cdot \mathcal{F}(W_h) N_i \, d\omega - \iint_{\mathcal{I}_i} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla N_i \, d\omega \\ + \int_{\Gamma_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (4.16)$$

où

$$\mathcal{T}_i = \bigcup_{j \in \mathcal{T}_i} T_j,$$

est l'ensemble des triangles ayant i pour sommet. On considère une approximation volumes finis pour le terme instationnaire et le terme convectif. On obtient ainsi la formulation mixte volumes finis/éléments finis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } W_h(t, \cdot) \in (V_h^{\text{EF}})^4 \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket \\ \iint_{C_i} \partial_t W_h \, d\omega + \iint_{C_i} \nabla \cdot \mathcal{F}(W_h) \, d\omega - \iint_{\mathcal{T}_i} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla N_i \, d\omega \\ + \int_{\Gamma_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

En appliquant la formule de Green aux intégrales des flux convectifs, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } W_h(t, \cdot) \in (V_h^{\text{EF}})^4 \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket \\ \iint_{C_i} \partial_t W_h \, d\omega + \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W_h) \cdot n \, d\sigma - \iint_{\mathcal{T}_i} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla N_i \, d\omega \\ + \int_{\Gamma_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

On cherche maintenant à évaluer plus précisément l'intégrale

$$\int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W_h) \cdot n \, d\sigma. \quad (4.19)$$

La frontière ∂C_i est toujours constituée d'une partie représentant l'interface avec une autre cellule $C_j \in K(i)$, où $K(i)$ dénote l'ensemble des voisins de C_i : $\partial C_i \cap \partial C_j = \partial C_{ij}$; mais il peut également arriver qu'une partie de C_i intercepte le bord du domaine : $\partial C_i \cap \Gamma_h$. Ce qui se résume par

$$\partial C_i = (\partial C_i \cap \Gamma_h) \bigcup \bigcup_{j \in K(i)} \partial C_{ij}.$$

Ainsi (4.19) se réécrit comme

$$\int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W_h) \cdot n \, d\sigma = \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{ij} \, d\sigma + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_h} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_i \, d\sigma, \quad (4.20)$$

où n_i représente une normale unitaire sortante au domaine de calcul et issue de C_i , et n_{ij} est la normale sortante à ∂C_i pour l'interface $\partial C_i \cap \partial C_j$.

En conclusion, la formulation faible (4.18) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } W_h(t, \cdot) \in (V_h^{\text{EF}})^4 \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket \\ \iint_{C_i} \partial_t W_h \, d\omega + \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{ij} \, d\sigma - \iint_{\mathcal{T}_i} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla N_i \, d\omega \\ + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_h} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_i \, d\sigma + \int_{\Gamma_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Dans les sections suivantes, nous allons détailler le calcul de chacun des termes présents dans cette équation, dans l'ordre suivant : flux convectifs internes, flux diffusifs internes, puis termes de bords. Enfin, nous présenterons l'approximation du terme temporel présent au membre de gauche.

4.1.3 Calcul des flux convectifs internes

On s'intéresse au calcul de l'intégrale

$$\int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{ij} \, d\sigma.$$

A cette fin, on suppose que le vecteur flux $\mathcal{F}(W_h)$ est constant sur ∂C_{ij} . On le calcule à partir de la valeur $W_{I_{ij}}$ interpolée à l'aide des états W_i et W_j :

$$\int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{ij} \, d\sigma \simeq \mathcal{F}(W_h)|_{I_{ij}} \cdot \int_{\partial C_{ij}} n_{ij} \, d\sigma.$$

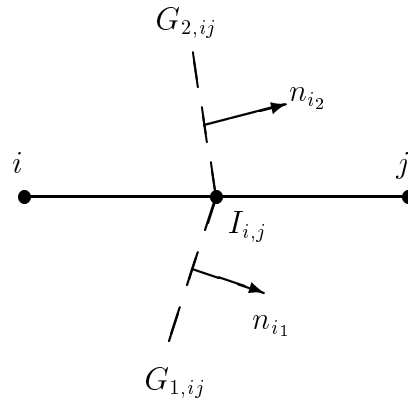


FIG. 4.2 – Décomposition de la normale n_{ij}

Si on pose que la normale n_{ij} est définie par (voir Fig. 4.2)

$$n_{ij} = n_{i1} + n_{i2},$$

alors la normale η_{ij} , obtenue par intégration de n_{ij} sur le contour ∂C_{ij} s'écrit

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= \int_{\partial C_{ij}} n_{ij} \, d\sigma = \int_{G_{1,ij}}^{I_{ij}} n_{i1} \, d\sigma + \int_{I_{ij}}^{G_{2,ij}} n_{i2} \, d\sigma \\ &= \|G_{1,ij}I_{ij}\|n_{i1} + \|I_{ij}G_{2,ij}\|n_{i2}. \end{aligned}$$

Enfin, on définit la fonction de flux numérique $\Phi(W_i, W_j, \eta_{ij})$ telle que

$$\Phi(W_i, W_j, \eta_{ij}) = \mathcal{F}(W_h)|_{I_{ij}} \cdot \eta_{ij}.$$

Par la suite, on s'intéressera à des approximations à l'ordre un de la fonction $\Phi(W_i, W_j, \eta_{ij})$ sous la forme relativement générale :

$$\Phi(W_i, W_j, \eta_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(W_i) + \mathcal{F}(W_j)}{2} \cdot \eta_{ij} - d(W_i, W_j, \eta_{ij}), \quad (4.22)$$

où le premier terme du membre de droite est une approximation de type Lax-Friedrichs pour le flux et où $d(W_i, W_j, \eta_{ij})$ est un terme de diffusion numérique.

4.1.3.1 La fonction de flux numérique de Roe

On utilise le schéma de Roe [Ro81] pour évaluer l'expression (4.22). Ce schéma définit la fonction de diffusion numérique $d(W_i, W_j, \eta_{ij})$ de telle sorte que

$$\Phi^{Roe}(W_i, W_j, \eta_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(W_i) + \mathcal{F}(W_j)}{2} \cdot \eta_{ij} - |\tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j, \eta_{ij})| \cdot \frac{W_j - W_i}{2}. \quad (4.23)$$

Le terme de diffusion numérique, qui sera noté $d^{Roe}(W_i, W_j, \eta_{ij})$ est donc donné par

$$d^{Roe}(W_i, W_j, \eta_{ij}) = |\tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j, \eta_{ij})| \cdot \frac{W_j - W_i}{2}.$$

La matrice $\tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j, \eta_{ij})$ vérifie la relation :

$$\tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j, \eta_{ij})(W_i - W_j) = (\mathcal{F}(W_i) - \mathcal{F}(W_j)) \cdot \eta_{ij}. \quad (4.24)$$

Cette matrice n'est pas unique mais Roe a proposé une expression de $\tilde{\mathcal{A}}$ calculée à partir de la matrice jacobienne du flux $\tilde{\mathcal{F}}$:

$$\tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j, \eta_{ij}) = \mathcal{A}(\tilde{W}_{ij}, \eta_{ij}) = \frac{\partial(\mathcal{F}(\tilde{W}) \cdot \eta)}{\partial W}. \quad (4.25)$$

En posant $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, cette expression devient

$$\tilde{\mathcal{A}}(W_i, W_j, \eta_{ij}) = \frac{\partial \mathcal{F}_x(\tilde{W})}{\partial W} \eta_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_y(\tilde{W})}{\partial W} \eta_2.$$

On définit l'opérateur $|\cdot|$ utilisé dans (4.23) par

$$|\mathcal{A}(W, \eta)| = \mathcal{A}^+(W, \eta) - \mathcal{A}^-(W, \eta),$$

avec

$$\mathcal{A}^\pm(W, \eta) = T(W, \eta) \times \mathcal{D}^\pm(W, \eta) \times T^{-1}(W, \eta),$$

où $\mathcal{D}^\pm(W, \eta) = \text{Diag}(\lambda_k^\pm(W, \eta))$ est la matrice diagonale semblable à $\mathcal{A}^\pm(W, \eta)$ et où $T(W, \eta)$ et $T^{-1}(W, \eta)$ sont les deux matrices de passage associées à la base des vecteurs propres. Les λ_k^\pm sont calculés à partir des valeurs propres positives et négatives :

$$\begin{aligned}\lambda_k^+(W, \eta) &= \text{Max}(\lambda_k, 0), \\ \lambda_k^-(W, \eta) &= \text{Min}(\lambda_k, 0),\end{aligned}$$

où les valeurs propres $(\lambda_k)_{k \in [1, 4]}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \eta_1 u + \eta_2 v, \\ \lambda_3 = \lambda_1 + c(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_4 = \lambda_1 - c(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Dans l'expression (4.25) le symbole ' \sim ' correspond à une moyenne particulière (dite de Roe) effectuée sur les variables $(\rho, u, v, H)^T$:

$$\tilde{W}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{ij} \\ \tilde{u}_{ij} \\ \tilde{v}_{ij} \\ \tilde{H}_{ij} \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{ij} &= \frac{\rho_i \sqrt{\rho_i} + \rho_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{u}_{ij} &= \frac{u_i \sqrt{\rho_i} + u_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad \tilde{v}_{ij} = \frac{v_i \sqrt{\rho_i} + v_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{H}_{ij} &= \frac{H_i \sqrt{\rho_i} + H_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}},\end{aligned}$$

et où H est l'enthalpie totale spécifique donnée par

$$H = \frac{E + p}{\rho}.$$

La relation (4.24) induit certaines propriétés sur le schéma de Roe. Premièrement, ce schéma résout exactement les discontinuités stationnaires : en effet, dans ce cas, les relations de Rankine-Hugoniot appliquées à deux états W_l et W_r séparés par une discontinuité stationnaire s'écrivent $\mathcal{F}(W_l) \cdot \eta = \mathcal{F}(W_r) \cdot \eta$, et les relations (4.23) et (4.24) entraînent que $d^{\text{Roe}}(W_l, W_r, \eta) = 0$ et $\Phi(W_l, W_r, \eta) = \mathcal{F}(W_l) \cdot \eta$. Deuxièmement, l'expression du schéma (4.24) peut se simplifier en l'une des deux expressions suivantes :

$$\Phi^{\text{Roe}}(W_i, W_j, \eta) = \mathcal{F}(W_j) \cdot \eta_{ij} - \tilde{\mathcal{A}}^+(W_i, W_j, \eta)(W_j - W_i),$$

$$\Phi^{Roe}(W_i, W_j, \eta) = \mathcal{F}(W_j) \cdot \eta_{ij} + \tilde{\mathcal{A}}^-(W_i, W_j, \eta)(W_j - W_i).$$

Ces relations font du schéma de Roe l'un des plus simples et des moins coûteux à implémenter.

Par ailleurs, le caractère faiblement diffusif du schéma de Roe est également un avantage intéressant, notamment pour la simulation d'écoulements visqueux, où l'on s'attend à ce que le schéma laisse agir la viscosité intrinsèque du fluide là où la viscosité numérique n'est pas nécessaire. Un inconvénient du schéma de Roe est son absence de discrimination entre les ondes de choc et les détentes. En revanche, il résout exactement les discontinuités de contact. Enfin, sans traitement supplémentaire, le schéma de Roe est précis à l'ordre 1 en espace.

4.1.3.2 Schéma MUSCL : élévation de l'ordre

On détaille ci-dessous quelques schémas de type MUSCL permettant d'élever l'ordre du schéma de Roe.

4.1.3.2.1 Méthode générale

Pour élever l'ordre de précision spatiale du schéma de Roe, on utilise la méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) introduite par B. Van Leer [VL82] et adaptée aux éléments finis dans [Fe85]. Pour ce faire, on modifie uniquement les arguments de la fonction de flux numérique. Cette méthode a l'avantage de ne pas toucher à la forme fonctionnelle du flux numérique et par conséquent de conserver ses propriétés. Le flux numérique est alors fonction des valeurs interpolées : $\Phi(W_{ij}, W_{ji}, \eta_{ij})$. Par contre, cette méthode ayant l'inconvénient de générer des oscillations, il est parfois nécessaire d'utiliser des limiteurs qui vont agir sur le vecteur des variables physiques $W = (\rho, u, v, p)$.

On considère donc maintenant l'approximation

$$\Phi(W_{ij}, W_{ji}, \eta_{ij}) = \mathcal{F}(W_h)|_{I_{ij}} \cdot \eta_{ij}.$$

Les états W_{ij} et W_{ji} sont interpolés à la frontière entre C_i et C_j de la manière suivante (voir Fig. 4.3):

$$\begin{aligned} W_{ij} &= W_i + \frac{1}{2}(\nabla W)_{ij} \cdot ij, \\ W_{ji} &= W_j - \frac{1}{2}(\nabla W)_{ji} \cdot ij. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Il reste maintenant à préciser la manière dont on calcule les gradients $(\nabla W)_{ij}$ et $(\nabla W)_{ji}$. Pour cela il existe plusieurs méthodes qui se différencient essentiellement par le degré de précision qu'elles permettent d'atteindre. Nous en présentons ici quelques-unes des plus classiques.

- **Gradients centrés.** On définit le gradient centré en I_{ij} comme un vecteur vérifiant :

$$\nabla W_{ij}^{Cent} \cdot ij = W_i - W_j. \tag{4.27}$$

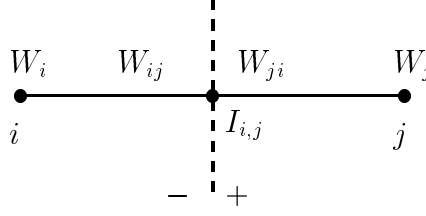


FIG. 4.3 – Interpolation des états W_{ij} et W_{ji}

Ce vecteur représente le taux d'accroissement du vecteur W suivant la direction ij .

- **Gradients moyennés.** On suppose que le calcul de $(\nabla W)_{ij}$ ne dépend plus d'un nœud j particulier et que

$$(\nabla W)_{ij} = (\nabla W)_{ik} \quad \forall k/T_k \cap C_i \neq \emptyset.$$

De cette façon, on obtient un gradient constant par cellule. Le calcul de chacun de ces gradients fait intervenir la formulation éléments finis de notre problème : sur tous les triangles T tels que $C_i \cap T \neq \emptyset$, on écrit W , le vecteur des variables physiques, comme une fonction P_1 . Le calcul du gradient ∇W sur chacun de ces triangles est donc immédiat, il ne reste plus qu'à moyenner la somme de tous ces gradients par l'aire de la cellule C_i , ce qui donne

$$\begin{aligned} (\nabla W)_{ij}^{Moy} &= \frac{\sum_T \int_{C_i \cap T} \nabla W^{P_1} |_{T} dx dy}{\int_{C_i} dx dy} \\ &= \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{K \in T} W_K \nabla N_K^T. \end{aligned} \quad (4.28)$$

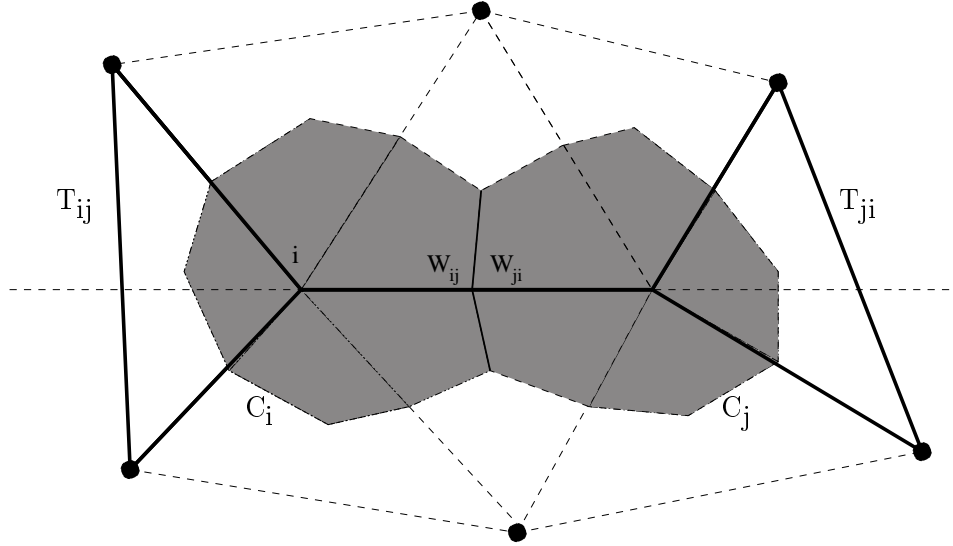
4.1.3.2.2 β -schéma

L'utilisation d'un β -schéma permet d'améliorer l'interpolation des gradients ∇W_{ij} et ∇W_{ji} utilisés dans (4.26). A cet effet, on considère que ces gradients s'écrivent :

$$\nabla W_{ij} \cdot ij = (1 - \beta) \nabla W_{ij}^{Cent} \cdot ij + \beta \nabla W_{ij}^{Decent} \cdot ij.$$

Le gradient W_{ij}^{Cent} étant le gradient centré défini en (4.27) et le gradient ∇W_{ij}^{Decent} est calculé dans le triangle amont T_{ij} au segment ij représenté figure 4.4. Enfin, le coefficient $\beta \in [0,1]$ est un paramètre de décentrement qui va conditionner l'ordre final du schéma.

Nous calculerons ∇W_{ij}^{Decent} par une formulation de type *Gradients nodaux moyennés* : le calcul des gradients sur le segment $[i,j]$ est donc effectué en considérant, non

FIG. 4.4 – Triangles T_{ij} amont et T_{ji} aval.

plus les seuls triangles amont T_{ij} et aval T_{ji} , mais les cellules C_i et C_j . Pour cela, on fait intervenir le calcul des gradients moyennés définis en (4.28), afin d'obtenir

$$\begin{cases} (\nabla W)_{ij}^{Decent} = 2\nabla W_{ij}^{Moy} - \nabla W_{ij}^{Cent}, \\ (\nabla W)_{ji}^{Decent} = 2\nabla W_{ji}^{Moy} - \nabla W_{ji}^{Cent}. \end{cases}$$

La formulation β -schéma devient maintenant

$$(\nabla W)_{ij} \cdot ij = (1 - 2\beta)(\nabla W)_{ij}^{Cent} \cdot ij + 2\beta(\nabla W)_{ij}^{Moy} \cdot ij.$$

Remarque 4.1. Une autre formulation classique consiste à utiliser des *Gradients totalement décentrés*. Pour cela, on associe au segment $[i,j]$, les deux triangles T_{ij} et T_{ji} appelés triangles amont et aval. Ces triangles vont nous permettre de définir deux gradients totalement décentrés aux sommets i et j , eux-mêmes calculés grâce à la formulation P_1

$$\begin{cases} (\nabla W)_{ij}^{Decent} = \nabla W^{P_1}|_{T_{ij}}, \\ (\nabla W)_{ji}^{Decent} = \nabla W^{P_1}|_{T_{ji}}. \end{cases} \quad (4.29)$$

En utilisant maintenant une formulation de type β -schéma avec les définitions (4.27) et (4.29) pour les gradients nodaux centrés et décentrés, on obtient :

$$(\nabla W)_{ij} \cdot ij = (1 - \beta)(\nabla W)_{ij}^{Cent} \cdot ij + \beta \nabla W^{P_1}|_{T_{ij}} \cdot ij.$$

Le coût de calcul des gradients totalement décentrés est sensiblement équivalent voire inférieur à celui des gradients nodaux moyennés. Dans nos simulations, nous

avons retenu une approche par gradients nodaux moyennés car, en raisonnant heuristiquement, on peut espérer que la prise en compte d'une moyenne sur les triangles nodaux conduise à des résultats moins sensibles à la géométrie locale du maillage, notamment pour des maillages non-structurés relativement irréguliers.

4.1.3.2.3 Limiteurs

Les schémas obtenus par les procédures décrites ci-dessus ne sont pas toujours monotones et peuvent engendrer des oscillations (création d'extrema locaux) surtout dans des zones à fortes variations, comme par exemple au voisinage des discontinuités. On peut remédier à ce problème en utilisant des procédés de limitation. Pour cela, on réécrit la formule d'interpolation des gradients (4.26), en faisant intervenir une fonction de limitation $\Lambda(x,y)$:

$$\begin{aligned} W_{ij} &= W_i + \frac{1}{2}\Lambda\left(ij.\nabla W_{ij} - (W_j - W_i), W_j - W_i\right), \\ W_{ji} &= W_j - \frac{1}{2}\Lambda\left(ji.\nabla W_{ji} - (W_i - W_j), W_i - W_j\right). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dans nos simulations numériques, nous avons utilisé le limiteur de Van Albada–Van Leer [V+82] défini comme

$$\Lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2 + \varepsilon)y + (y^2 + \varepsilon)x}{x^2 + y^2 + 2\varepsilon} & \text{si } xy > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ε est un nombre petit positif destiné à éviter les divisions par zéro.

Pour un exposé plus complet des différents procédés de limitation, nous renvoyons le lecteur à [FD89].

4.1.3.3 Schémas limités d'ordre élevé

Ces schémas limités ont été introduits par Serge Piperno [Pi96] pour l'équation de Burgers puis étendus aux équations d'Euler avec la collaboration de Sophie Depeyre [PD98]. Ils permettent d'étendre à l'ordre 3 et 4 en espace, les β -schémas basés sur la technique MUSCL vus plus haut. La limitation repose sur une pondération du gradient par une fonction $\varphi(r)$ construite de manière à ce que ce gradient numérique reste modéré même dans les zones de variations brutales (traversées de choc...). Le critère de limitation sera fonction du rapport entre 2 gradients consécutifs

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{\nabla W_{ij}^{Cent} \cdot ij}{\nabla W_{ij}^{Decent} \cdot ij}, \\ R_j &= \frac{\nabla W_{ji}^{Decent} \cdot ji}{\nabla W_{ji}^{Cent} \cdot ji}. \end{aligned}$$

– **Schéma décentré d'ordre 3.** Le schéma limité s'écrit

$$\begin{cases} W_{ij} = W_i + \frac{1}{2}\psi(R_i)\nabla W_{ij}^{Decent} \cdot ij, \\ W_{ji} = W_j - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R_j}\right)\nabla W_{ji}^{Decent} \cdot ji, \\ \psi(R) = \left(\frac{1+2R}{3}\right)\varphi\left(\frac{1}{R}\right), \end{cases}$$

la fonction $\varphi(r)$ s'exprimant selon

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ \frac{3r^4 - 7r^3 + 3r^2 + 3r}{2} & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{3r^2 - 6r + 19}{r^3 - 3r + 18} & \text{si } 1 \leq r. \end{cases}$$

– **Schéma centré d'ordre 4.** Le schéma limité s'écrit

$$\begin{cases} W_{ij} = W_i + \frac{1}{2}\psi(R_i, R_j)\nabla W_{ij}^{Cent}, \\ W_{ji} = W_j - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R_j}, \frac{1}{R_i}\right)\nabla W_{ji}^{Decent}, \\ \psi(R, S) = R\varphi_1(R) + \frac{\beta}{2}\varphi_2(R)\varphi_3(S). \end{cases}$$

La limitation du gradient se fait maintenant via les 3 fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 dont les expressions sont :

$$\begin{cases} r \leq 0 & \varphi(r) = \psi_1(r) = \psi_2(r) = 0, \\ 0 \leq r \leq 1 & \varphi(r) = -3r^5 + 11r^4 - 14r^3 + 6r^2 + 3 \\ & \text{et } \psi_1(r) = \psi_2(r) = \frac{r^3}{r^3 + (1-r)^3}, \\ 1 \leq r & \varphi(r) = \psi_2(r) = 1, \quad \psi_1(r) = \frac{1}{1 + (r-1)^3}. \end{cases}$$

4.1.4 Calcul des flux diffusifs internes

Pour ces flux on utilise la formulation classique des éléments finis de Galerkin pour l'élément fini de Lagrange P_1 . Ainsi, sur chaque triangle T_j , les variables physiques ρ , u , v et p sont des fonctions P_1 , dont le gradient est donc constant. Si l'on introduit la moyenne du vecteur vitesse U sur chaque triangle :

$$U_{T_j} = \frac{1}{3} \sum_{a_i \in T_j} U_i, \quad (4.31)$$

et si on utilise cette moyenne pour évaluer le produit πU dans les flux diffusifs $\mathcal{R}(W)$, on s'assure que la valeur de ces flux est constante sur chaque triangle, et on obtient

$$\iint_{T_j} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla \varphi_i|_{T_j} d\omega = \text{aire}(T) \mathcal{R}_{T_j} \cdot \nabla \varphi_i|_{T_j}. \quad (4.32)$$

4.1.5 Traitement des conditions aux bords

Le bord de Ω_h , que nous avons noté Γ_h , regroupe plusieurs sous-ensembles correspondant chacun à un type de condition limite qui y est imposée et dont le traitement numérique est différent. On pose

$$\Gamma_h = \Gamma_s \cup \Gamma_\infty \cup \Gamma_p,$$

avec :

- Γ_s : l'ensemble des points appartenant à des parois matérielles,
- Γ_∞ : l'ensemble des points appartenant à des bords ouverts qui nécessitent la prise en compte d'informations provenant de l'extérieur du domaine de calcul,
- Γ_p : l'ensemble des points appartenant à un bord dit périodique.

On présente ci-dessous l'ensemble des techniques utilisées pour prendre en compte de manière numérique ces conditions limites.

4.1.5.1 Parois solides

Pour les deux composantes du vecteur vitesse, on impose des conditions d'adhérence. Rappelons que nous traitons ici le cas des équations de Navier-Stokes, le cas des équations d'Euler où des conditions de glissement sont imposées, est brièvement évoqué ci-dessous (voir remarque 4.2). Les conditions d'adhérence sont des conditions de Dirichlet homogènes sur la vitesse; conditions fortes signifiant que les composantes du vecteur vitesse des points en contact avec la paroi doivent être nulles. Le traitement numérique est donc relativement simple puisqu'il suffit d'imposer que $U = 0$ pour tout les points appartenant à Γ_s .

En ce qui concerne la modélisation des transferts thermiques à la paroi, on considère des conditions de type "paroi adiabatique" ou "paroi isotherme".

- **conditions de paroi adiabatique.** Elles imposent qu'il n'existe pas d'échange de chaleur entre l'intérieur du domaine Ω et l'extérieur, ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 = U \cdot \eta.$$

Cette condition entraîne

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_s} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_i d\sigma = 0,$$

puisque le calcul de cette intégrale fait intervenir la quantité nulle $U \cdot \eta$. Cette condition revient donc à n'effectuer aucun traitement numérique particulier.

- **conditions de paroi isotherme.** Elles imposent que la température au bord du domaine de calcul doit être égale à la température de la paroi, qui est une fonction qui peut varier en temps et en espace. Ainsi le traitement numérique est-il très simple, il suffit d'imposer de façon forte que :

$$T|_{\Gamma_s} = T_{paroi}(x,t)$$

Remarque 4.2. Les conditions de glissement constituent les conditions de paroi classiques pour les écoulements régis par les équations d'Euler. Ces conditions expriment le fait que la vitesse de l'écoulement le long de la paroi à une composante normale nulle. Pour un segment $[A_1, i]$ de la paroi (voir Fig. 4.5), la condition s'écrit

$$U_i \cdot n_{i1} = 0,$$

où n_{i1} est une normale sortante au domaine de la cellule C_i . Le traitement numérique de la condition ci-dessus se fait de façon faible en utilisant la formulation variationnelle (4.20), et se résume à l'intégrale de pression suivante

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_s} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{i1} \, d\sigma = p_i \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\int_{A_1}^i n_{i1} \, d\sigma \right)_x \\ \left(\int_{A_1}^i n_{i1} \, d\sigma \right)_y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

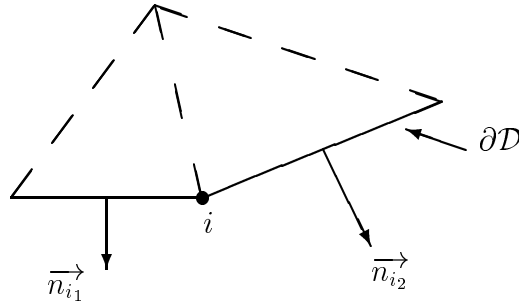


FIG. 4.5 – Décomposition de la normale au bord

4.1.5.2 Frontières amont et aval

Concernant les flux visqueux, on supposera qu'ils sont soumis à des conditions de type Von Neumann, et cela aussi bien pour la frontière amont que pour la frontière aval, i.e.

$$\int_{\Gamma_\infty} \mathcal{R}(W_h) \cdot \eta \varphi_i \, d\sigma = 0.$$

Pour le traitement des termes de bord correspondant aux flux convectifs, nous utiliserons la formulation faible. Plutôt que d'imposer des valeurs à la solution ou à certaines de ses composantes, nous allons évaluer les termes de flux à travers Γ_∞ (i.e. les intégrales sur $\partial C_i \cap \Gamma_\infty$). Ainsi pour un sommet i situé sur Γ_∞ , on connaît la solution W_i et on se donne également un champ W_∞ représentatif de l'écoulement à l'extérieur du domaine Ω_h . Le problème de Riemann défini par les valeurs W_i et W_∞ est résolu (de façon approchée) en utilisant une version modifiée de la décomposition de flux de Steger et Warming [SW81]:

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathcal{F}(W_h) \cdot \eta \, d\sigma = \Phi(W_i, W_\infty, \eta_{i,\infty}),$$

avec $\Phi(W_i, W_\infty, \eta_{i,\infty})$ évaluée via l'un des schémas de Steger-Warming suivant

$$\begin{aligned} \Phi^{SW}(W_i, W_\infty, \eta_{i,\infty}) &= \mathcal{A}^+(W_i, \eta_{i,\infty})W_i + \mathcal{A}^-(W_\infty, \eta_{i,\infty})W_\infty, \\ \Phi_{mod}^{SW}(W_i, W_\infty, \eta_{i,\infty}) &= \mathcal{A}^+(W_i, \eta_{i,\infty})W_i + \mathcal{A}^-(W_i, \eta_{i,\infty})W_\infty. \end{aligned}$$

4.1.5.3 Conditions périodiques

En utilisant ces conditions, on modélise un écoulement physique dont le domaine d'existence est potentiellement infini. On considère malgré tout ces conditions comme étant des "conditions aux limites", dans la mesure où leur traitement numérique nécessite de différencier un "intérieur" et un "bord" fictifs. On choisit donc un sous-domaine dans lequel se déroulent l'essentiel des phénomènes à observer et on impose des conditions qui vont signifier que l'information (ici la valeur du vecteur des variables W) se propage à travers les bords en conformité avec les hypothèses de périodicité.

Afin de traiter les conditions de périodicité de manière relativement simple, il est agréable d'utiliser un maillage "conforme périodique", i.e. dont la trace sur les bords périodiques jouit des mêmes conditions de périodicité. Bien entendu, on reste libre de choisir un maillage structuré ou non pour l'intérieur du domaine de calcul. Grâce à cette condition de conformité, il est possible de "recoller" les triangles aux bords, i.e. de reconstruire les cellules aux bords par découpage barycentrique de cette nouvelle disposition de triangles. Cela revient en fait à considérer que l'on crée une nouvelle cellule \bar{C}_i par réunion d'autant de portions de cellules $C_i, C_{\bar{i}}...$ que la périodicité l'impose (deux ou quatre: voir figure 4.6). Sans nuire à la généralité, on peut se limiter au cas de deux cellules et écrire $\bar{C}_i = C_i \cup C_{\bar{i}}$. Si l'on note $K^p(i)$ le voisinage de la nouvelle cellule \bar{C}_i , le traitement des flux aux bords s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\partial C_i \cap \Gamma_p} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_i \, d\sigma &= \sum_{j \in K^p(i)} \int_{\partial \bar{C}_i \cap \partial C_j} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{\bar{i}j} \, d\sigma, \\ \int_{\partial T_i \cap \Gamma_p} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma &= \int_{\partial T_i \cap \Gamma_s} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma + \int_{\partial T_{\bar{i}} \cap \Gamma_s} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_{\bar{i}} \, d\sigma. \end{aligned}$$

Le traitement des autres intégrales de bords (s'il y en a) se ramène aux cas déjà abordés dans les sections précédentes, en considérant simplement la cellule \overline{C}_i au lieu de C_i .

4.1.6 Discrétisation temporelle

On présente dans cette sous-section les schémas numériques d'intégration en temps. On réécrit la formulation mixte volumes finis/éléments finis des équations de Navier-Stokes compressibles non relaxées (4.21) sous la forme

$$\iint_{C_i} \partial_t W_h d\omega = \tilde{\Psi}_i(W_h), \quad \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket,$$

où $\Psi_i(W_h) \in \mathbb{R}^4$ représente le résidu stationnaire au nœud i . On a

$$\iint_{C_i} \partial_t W_h d\omega = \frac{d}{dt} \iint_{C_i} W_h d\omega$$

et en considérant une condensation statique de ce terme, il vient

$$\frac{d}{dt} \iint_{C_i} W_h d\omega \simeq \frac{d}{dt} (\text{aire}(C_i) W_{h,i}).$$

Par conséquent, en notant

$$\Psi_i(W_h) = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \tilde{\Psi}_i(W_h), \quad \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket,$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} W_{h,i} = \Psi_i(W_h), \quad \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket. \quad (4.33)$$

On constate que (4.33) est un système de $4ns$ équations différentielles ordinaires.

Afin d'intégrer numériquement (4.33), on utilisera ici des schémas de Runge-Kutta. Pour cela, on se donne une suite de temps discrets t^n , $n \geq 0$. Pour passer du vecteur $W_{h,i}(t^n)$ à $W_{h,i}(t^{n+1})$, on considère k sous-pas de temps pour lesquels on note $\mathcal{W}^{(j)}$ les variables intermédiaires associées. L'ordre d'un schéma de Runge-Kutta est conditionné par ce nombre k de sous-pas effectué à chaque avancement en temps. L'obtention d'un ordre temporel élevé est donc numériquement coûteux mais nécessaire lorsqu'on veut obtenir une précision élevée (surtout dans le cas d'écoulements instationnaires) et/ou s'assurer d'une plus grande stabilité numérique.

La forme particulière du schéma de Runge-Kutta à k pas que nous considérons pour effectuer l'intégration en temps de t_n à t_{n+1} est la suivante

$$\forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket, \quad \begin{cases} \mathcal{W}_i^{(0)} = W_{h,i}(t^n), \\ \mathcal{W}_i^{(1)} = \mathcal{W}_i^{(0)} + \alpha_1 \Delta t \Psi_i(\mathcal{W}_i^{(0)}), \\ \vdots \\ W_{h,i}(t^{n+1}) = \mathcal{W}_i^{(k)} = \mathcal{W}_i^{(0)} + \alpha_k \Delta t \Psi_i(\mathcal{W}_i^{(k-1)}). \end{cases}$$

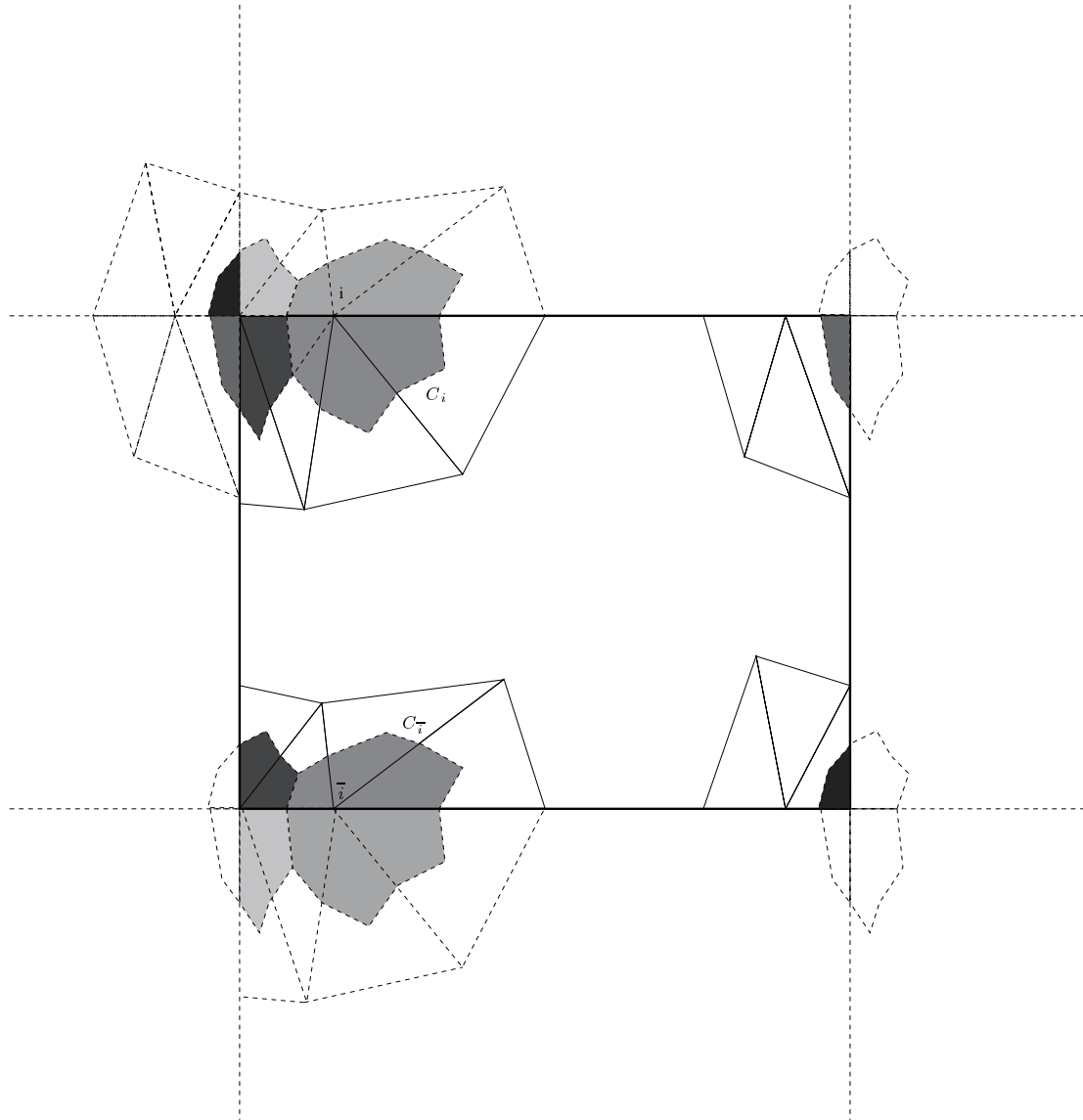


FIG. 4.6 – Illustration des conditions périodiques appliquées à tous les bords du domaine de calcul.

où les quantités $\mathcal{W}_i^{(j)}$, $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ représentent les intermédiaires de calcul utilisés lors de l'avancement. Les coefficients α_j , $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, sont choisis de sorte que le schéma en temps soit d'ordre k et stable. Le k -uplet ainsi défini n'est pas unique, i.e. plusieurs valeurs sont possibles pour remplir la condition d'ordre et de stabilité du schéma en temps. Quel que soit le degré du schéma que l'on utilise, on a choisi les ensembles de coefficients les plus classiques, à savoir :

– **Schéma d'ordre 2.**

$$\alpha_j = \frac{1}{3-j}, \quad j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket.$$

– **Schéma d'ordre 3.**

$$\alpha_j = \frac{1}{4-j}, \quad j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket.$$

– **Schéma d'ordre 4.**

$$\alpha_j = \frac{1}{5-j}, \quad j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket.$$

4.2 Traitement numérique de la méthode de relaxation

Cette section a pour objectif d'exposer les différents aspects numériques de la méthode de relaxation de l'énergie appliquée aux équations de Navier-Stokes compressibles. On commencera par présenter l'organisation générale de l'algorithme de relaxation. Puis on précisera le système relaxé que l'on utilisera lors de la résolution, en insistant sur le traitement numérique des termes nouveaux.

4.2.1 L'algorithme de relaxation

En pratique, la façon de résoudre le système de Navier-Stokes (2.1) dans le cadre de la méthode de relaxation est la suivante. On se donne une suite d'instantanés discrets t^n pour $n \geq 0$. On note $W^n = (\rho^n, \rho^n U^n, E^n)$ les variables conservatives pour les équations de Navier-Stokes non relaxées au temps t^n .

Dans la pratique, l'algorithme de relaxation est mis en œuvre avec un gaz fictif TPCP dont nous notons γ_1 l'exposant adiabatique et c_1 la célérité du son.

L'algorithme de relaxation comprend trois étapes :

1) **décomposition initiale.** On évalue l'énergie interne spécifique

$$\varepsilon^n = \frac{E^n}{\rho^n} - \frac{1}{2}(U^n)^2,$$

la dilatation $\tau^n = \frac{1}{\rho^n}$ et la pression $p^n = p(\tau^n, \varepsilon^n)$. Ensuite on calcule les énergies

internes

$$\begin{cases} \varepsilon_1^n = \frac{p(\tau^n, \varepsilon^n)}{(\gamma_1 - 1) \rho^n} \\ \varepsilon_2^n = \varepsilon^n - \varepsilon_1^n, \end{cases}$$

ainsi que la température $T_1^n = \frac{(\gamma_1 - 1)\varepsilon_1^n}{R}$.

2) étape prédicteur : évolution en temps. Le système de Navier-Stokes relaxé (3.29) dans la limite de l'équilibre ($\lambda \rightarrow \infty$) est intégré entre t^n et t^{n+1} . Les fonctions β et Θ sont évaluées selon (3.31) et (3.32) respectivement et la fonction α selon (3.34) si bien que les hypothèses du théorème de stabilité 3.10 sont satisfaites. Numériquement, nous avons traité ces fonctions explicitement en temps en les évaluant en t^n . Le système des équations de Navier-Stokes relaxées que nous souhaitons intégrer entre t^n et t^{n+1} s'écrit donc sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p_1 = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E_1 + \nabla \cdot ((E_1 + p_1)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q_1 + \alpha(t^n)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)(t^n), \\ \partial_t (\rho \varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon_2 U) = -\alpha(t^n)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)(t^n) - \nabla \cdot q_2(t^n). \end{cases} \quad (4.34)$$

On notera que le terme source de la dernière équation étant traité explicitement en l'évaluant en t^n , on a $\beta(t^n) = 1$ par la propriété de consistance. Par ailleurs, on constate que les trois premières équations dans (4.34) correspondent aux équations de Navier-Stokes compressibles pour le gaz fictif (modulo le coefficient pondérateur $\alpha(t^n)$). L'intégration numérique de (4.34) de t^n à t^{n+1} fournit les valeurs

$$\begin{pmatrix} \rho \\ (\rho U) \\ E_1 \\ \rho \varepsilon_2 \end{pmatrix}^{n+1-}.$$

3) projection au temps suivant. La solution numérique au temps t^{n+1} , W^{n+1} , est obtenue par projection

$$\begin{cases} \rho^{n+1} = \rho^{n+1-} \\ (\rho U)^{n+1} = (\rho U)^{n+1-} \\ E^{n+1} = E_1^{n+1-} + (\rho \varepsilon_2)^{n+1-} \end{cases}$$

4.2.2 Le système à résoudre

Le système de Navier-Stokes relaxé (4.34) peut se réécrire de manière compacte

$$\partial_t W + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) + \nabla \cdot \mathcal{R}(W) = \mathcal{D}(W), \quad (4.35)$$

où $\mathcal{D}(W)$ est le terme source. Le vecteur des variables conservatives $W \in \mathbb{R}^5$ est donné par

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_1 \\ \rho \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

les termes de flux $\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_x(W), \mathcal{F}_y(W))$ et $\mathcal{R}(W) = (\mathcal{R}_x(W), \mathcal{R}_y(W))$

$$\mathcal{F}_x(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_1 \\ \rho uv \\ u(E_1 + p_1) \\ \rho u \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_y(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p_1 \\ v(E_1 + p_1) \\ \rho v \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

et

$$\mathcal{R}_x(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{xx} \\ \pi_{yx} \\ u\pi_{xx} + v\pi_{xy} + (1 - \alpha)q_{1,x} \\ \alpha q_{1,x} + q_{2,x} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_y(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{xy} \\ \pi_{yy} \\ u\pi_{yx} + v\pi_{yy} + (1 - \alpha)q_{1,y} \\ \alpha q_{1,y} + q_{2,y} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

et enfin, le terme source $\mathcal{D}(W_h)$ est un vecteur contenant le terme de dissipation $\alpha\pi : \nabla U$

$$\mathcal{D}(W_h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha\pi : \nabla U \\ -\alpha\pi : \nabla U \end{pmatrix}$$

On applique une approximation mixte volumes finis/éléments finis au système (4.35). On choisit une discrétisation par éléments finis des flux diffusifs et une discrétisation par volumes finis pour le terme instationnaire, les flux convectifs et le terme source. On obtient

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } W_h(t, \cdot) \in (V_h^{\text{EF}})^5 \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, ns \rrbracket \\ & \iint_{C_i} \partial_t W_h \, d\omega = - \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_{ij} \, d\sigma - \sum_{T_j, a_i \in T_j} \iint_{T_j} \mathcal{R}(W_h) \cdot \nabla N_i^{T_j} \, d\omega \\ & - \int_{\partial C_i \cap \Gamma_h} \mathcal{F}(W_h) \cdot n_i \, d\sigma + \int_{\Gamma_h} \mathcal{R}(W_h) \cdot n N_i \, d\sigma \\ & + \iint_{C_i} \mathcal{D}(W_h) \, d\omega. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pour l'instant, le terme $\alpha \nabla \cdot q_1$ n'est pas un terme de flux, puisque α est fonction de (τ, ε_1) . Numériquement, on remplace α par sa projection L^2 -orthogonale sur l'espace de discrétisation volumes finis V_h^{VF} . En notant $\bar{\alpha}$ cette projection, celle-ci est constante sur un triangle T_j et donnée par

$$\bar{\alpha}|_{T_j} = \frac{\sum_{k \in T_j} \alpha(j)}{\sum_{k \in T_j} k} = \frac{1}{3} \sum_{k \in T_j} \alpha(j). \quad (4.39)$$

Ainsi, on approche $\alpha \nabla \cdot q_1$ par le terme de flux $\nabla \cdot (\bar{\alpha} q_1)$ sur T_j ; ce qui permet d'intégrer le traitement de ce terme dans celui classiquement effectué pour les flux diffusifs.

Dans les sections suivantes, nous allons préciser comment résoudre la nouvelle formulation faible (4.38). En particulier, on va distinguer deux traitements différents pour les intégrales des flux convectifs.

Remarque 4.3 (choix du paramètre α). On rappelle qu'il est possible de choisir plusieurs valeurs différentes pour le paramètre α tant que celles-ci restent comprises entre 0 et 1. Pour toutes les applications numériques, nous avons utilisé la valeur définie en (3.34), à savoir

$$\alpha := \alpha(\varepsilon_1) = \frac{F'(\varepsilon_1)}{1 + F'(\varepsilon_1)}, \quad (4.40)$$

et ceci afin de nous placer dans les conditions qui permettent d'obtenir, en plus de la stabilité globale du processus de relaxation, sa stabilité asymptotique à l'ordre 1. Il est certain qu'un choix différent pour α , qui doit respecter la condition de stabilité $0 \leq \alpha \leq 1$, influera sur la relaxation. Ainsi, même s'il est difficile d'avoir une idée exacte de cet impact, on peut tout de même remarquer qu'une valeur plus importante de α induira une prise en compte plus grande du terme P_1 et donc probablement une diffusion numérique plus importante.

Remarque 4.4 (relaxation TP/TPCP). D'après la remarque 3.9, on sait que pour le cas des gaz TPCI, $q_2^\infty = 0$, ainsi le terme P_2 est tout le temps nul et ne nécessite pas de traitement particulier. De plus, dans le cas où le gaz réel est TPCI, on rappelle que l'expression exacte de $F'(\varepsilon_1)$ (et même de $F(\varepsilon_1)$) est connue, et l'expression (4.40) de α se simplifie en

$$\alpha = \frac{\gamma_1 - \gamma(T)}{\gamma_1 - 1}.$$

Le calcul de l'expression approchée utilisée sur chaque triangle (4.39) revient donc à effectuer un calcul de la moyenne de $\gamma(T)$. Notons que

- si on considère une application où le gaz est TPCP au lieu de TPCI, ce qui permet d'effectuer des cas test de validation de la méthode de relaxation,

l'expression de α est constante sur tout le domaine et donc l'approximation (4.39) est exacte,

- si le gaz est TPCI, α n'est pas constant sur tout le domaine et son calcul nécessite de connaître la valeur de la fonction $\gamma(T)$ en chaque nœud.

4.2.3 Extension naturelle des solveurs de Riemann approchés

Si l'on considère uniquement la partie convective du système formé des nouveaux flux \mathcal{F} , on remarque qu'elle définit toujours un sous-système hyperbolique. Ainsi le calcul des intégrales des flux convectifs peut-elle encore se ramener à la résolution d'un problème de Riemann aux interfaces entre des cellules ou avec le bord. Cet aspect remarquable du nouveau système permet d'étendre naturellement le travail effectué dans les sections numériques traitant du calcul des flux convectifs à ce nouveau système 5×5 .

On considère le vecteur des variables W sous forme conservative

$$W = (\rho, \rho u, \rho v, E, \rho \varepsilon_2).$$

On cherche à calculer l'expression littérale des matrices jacobiennes représentant les gradients des flux convectifs \mathcal{F}_x et \mathcal{F}_y (voir [Fe89] pour une correspondance avec l'expression des jacobiennes dans le cas d'écoulements multi-espèces)

$$D_1 = \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial W} \quad ; \quad D_2 = \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial W}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_1 - 3}{2}u^2 + \frac{\gamma_1 - 1}{2}v^2 & (3 - \gamma_1)u & (1 - \gamma_1)v & \gamma_1 - 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ (\gamma_1 - 1)(u^2 + v^2)u - \frac{\gamma_1 E u}{\rho} & -\frac{(\gamma_1 - 1)(3u^2 + v^2)}{2} + \frac{\gamma_1 E}{\rho} & (1 - \gamma_1)uv & \gamma_1 u & 0 \\ -u\varepsilon_2 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_1 - 1}{2}u^2 + \frac{\gamma_1 - 3}{2}v^2 & (1 - \gamma_1)u & (3 - \gamma_1)v & \gamma_1 - 1 & 0 \\ (\gamma_1 - 1)(u^2 + v^2)v - \frac{\gamma_1 E v}{\rho} & (1 - \gamma_1)uv & -\frac{(\gamma_1 - 1)(u^2 + 3v^2)}{2} + \frac{\gamma_1 E}{\rho} & \gamma_1 v & 0 \\ -v\varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & v \end{pmatrix}$$

Si on s'intéresse maintenant à la diagonalisation de la matrice $D = \eta_1 D_1 + \eta_2 D_2$ constituée d'une moyenne pondérée des jacobiens D_1 et D_2 , ses valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in [1,5]}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \eta_1 u + \eta_2 v, \\ \lambda_3 = \lambda_1 + c(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_4 = \lambda_1 - c(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

On rappelle l'expression de l'enthalpie totale spécifique est donnée par $H = \frac{E + p}{\rho}$, et on utilisera les quantités η_1 et η_2 sous forme normalisée en notant :

$$\eta_1^* = \frac{\eta_1}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \eta_2^* = \frac{\eta_2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Muni de ces valeurs propres, on obtient l'expression des matrices de transformation T et T^{-1}

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} & 0 \\ u & \eta_2^* & \frac{u + c\eta_1^*}{2c^2} & \frac{u - c\eta_1^*}{2c^2} & 0 \\ v & -\eta_1^* & \frac{u + c\eta_2^*}{2c^2} & \frac{u - c\eta_2^*}{2c^2} & 0 \\ \frac{u^2 + v^2}{2} & \eta_2^* u - \eta_1^* v & \frac{H + c(\eta_1^* u + \eta_2^* v)}{2c^2} & \frac{H - c(\eta_1^* u + \eta_2^* v)}{2c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_2}{2c^2} & \frac{\varepsilon_2}{2c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma_1 - 1}{c^2} \frac{u^2 + v^2}{2} & \frac{\gamma_1 - 1}{c^2} u & \frac{\gamma_1 - 1}{c^2} v & -\frac{\gamma_1 - 1}{c^2} & 0 \\ \eta_1^* v - \eta_2^* u & \eta_2^* & -\eta_1^* & 0 & 0 \\ T_{31}^{-1} & c\eta_1^* - (\gamma_1 - 1)u & c\eta_2^* - (\gamma_1 - 1)v & (\gamma_1 - 1) & 0 \\ T_{41}^{-1} & -c\eta_1^* - (\gamma_1 - 1)u & -c\eta_2^* - (\gamma_1 - 1)v & (\gamma_1 - 1) & 0 \\ -\frac{\gamma_1 - 1}{c^2} \frac{u^2 + v^2}{2} & \frac{\gamma_1 - 1}{c^2} u \varepsilon_2 & \frac{\gamma_1 - 1}{c^2} v \varepsilon_2 & -\frac{\gamma_1 - 1}{c^2} \varepsilon_2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} T_{31}^{-1} = -c(\eta_1^* u + \eta_2^* v) + (\gamma_1 - 1) \frac{u^2 + v^2}{2} \\ T_{41}^{-1} = c(\eta_1^* u + \eta_2^* v) + (\gamma_1 - 1) \frac{u^2 + v^2}{2} \end{cases}$$

L'inconvénient de ce procédé est qu'il nécessite de modifier les solveurs de Roe et de Steger-Warming pour qu'ils tiennent compte de l'équation supplémentaire en ε_2 .

Un des objectifs qui était d'utiliser la méthode de relaxation pour effectuer le moins de modifications des codes de résolution TPCP n'est donc plus aussi clairement rempli (à moins d'utiliser des codes de calcul prévus pour les écoulements multi-espèces). C'est pourquoi l'on s'est également intéressés à une deuxième méthode qui revient à découpler le calcul des flux convectifs tout en assurant la positivité de la quantité ε_2 .

4.2.4 Calcul découplé des flux convectifs

4.2.4.1 Motivations

On rappelle qu'une des hypothèses fondamentales sur laquelle repose les résultats de stabilité de la méthode de relaxation est que la quantité ε_2 reste toujours positive. Malheureusement, cette propriété n'est pas garantie a priori pour des entropies quelconques ou peut être violée en raison d'approximations numériques.

En faisant le rapprochement entre notre système relaxé et les systèmes de la combustion (réactifs à deux espèces), on remarque une analogie entre certaines équations de conservations des espèces et notre équation en ε_2 . Si on note Y une quantité attachée à une seconde espèce, généralement une fraction massique, mais pas forcément (voir [C+93]), elle suit la loi de conservation

$$\partial_t(\rho Y) + \nabla \cdot (\rho U Y) = P$$

où P est un terme de production qui modélise les échanges réactifs qui ont lieu entre les différentes espèces.

Au vu de cette analogie, il apparaît naturel d'appliquer certaines des méthodes numériques utilisées dans le cadre de la combustion à la résolution de notre équation en ε_2 . Parmi ces méthodes, celle développée dans [La91] semble posséder des propriétés particulièrement intéressantes pour nous. L'objectif initial de cette méthode est de remédier à un des défauts du schéma de Roe qui, lorsqu'il est utilisé dans le cadre d'écoulements multi-espèces, a l'inconvénient de ne pas respecter le principe du maximum pour les fractions massiques. En modifiant la façon dont est calculé le flux convectif de Y , on est assuré que la positivité de la fraction massique Y sera toujours respectée. Pour cela, on cherche à imposer un principe du maximum local

$$\min(Y_i, Y_j) \leq Y(x, U_i, U_j) \leq \max(Y_i, Y_j) \quad (4.41)$$

lors de la résolution approchée des problèmes de Riemann et on en déduit l'expression d'un schéma numérique pour calculer le flux convectif de Y .

Cette approche est tout à fait justifiée dans le cadre d'écoulements multi-espèces où Y représente une quantité physique dont les lois empêchent théoriquement la négativité; elle l'est également si l'on s'intéresse au système d'Euler relaxé (puisque la théorie nous assure que ε_2 ne peut pas devenir négative). Dans ces deux cas, une valeur négative de ε_2 ne pourrait venir que d'une erreur numérique due à l'utilisation du solveur de Roe.

Dans le cas des équations de Navier-Stokes relaxées, on peut voir cette approche comme un procédé de limitation qui serait rajouté à la méthode de relaxation.

4.2.4.2 Mise en œuvre

Conformément à [La91], il s'agit de modifier la fonction de flux numérique de Roe auparavant utilisée pour approcher le calcul du flux convectif de la cinquième équation de conservation du système (3.29) en :

$$\Phi_5(W_i, W_j, \eta_{ij}) = \Phi_1(W_i, W_j, \eta_{ij}) \times \begin{cases} W_i^5 = \varepsilon_{2,i} & \text{si } \Phi_1(W_i, W_j, \eta_{ij}) \geq 0, \\ W_j^5 = \varepsilon_{2,j} & \text{si } \Phi_1(W_i, W_j, \eta_{ij}) \leq 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

où $\Phi_1(W_i, W_j, \eta_{ij})$ est la fonction de flux numérique de Roe associée à la variable ρ et $\Phi_5(W_i, W_j, \eta_{ij})$, le nouveau flux numérique de ε_2 . Au final, cela revient donc à effectuer un traitement découplé des flux convectifs : la partie des flux composés des quatre premières composantes $(\rho, \rho u, \rho v, E_1)$ est traitée comme dans le cas des gaz TPCP par un solveur de Roe, puis on calcule l'évolution de ε_2 en la pondérant par le flux de ρ ainsi obtenu.

Chapitre 5

Résultats numériques

Sommaire

5.1	Écoulements non visqueux	88
5.2	Advection d'un réseau périodique de vortex	103
5.3	Interaction d'un choc faible et d'un spot de température	112
5.4	Interaction d'un choc et d'une couche limite	136

Dans ce chapitre, on présente les différents cas tests qui ont permis une validation de notre méthode.

Dans une première partie, on s'est intéressé à l'implémentation de la méthode de relaxation décrite par Coquel et Perthame [CP98] pour la résolution des équations d'Euler par une méthode volumes finis. Cette étape préliminaire est indispensable avant d'envisager une extension aux équations de Navier-Stokes compressibles. Elle nous a également permis de comparer les deux méthodes proposées pour les traitement des flux convectifs.

Les trois autres cas tests, de difficulté croissante, concernent des écoulements régis par les équations de Navier-Stokes. Le premier cas test, l'advection d'un réseau périodique de vortex constitue une première validation de la méthode. Mais cet écoulement étant isotherme, il ne permet pas la prise en compte de la décomposition du flux de chaleur. Ceci est donc l'objectif du second cas test : l'interaction d'un choc faible et d'un spot de température. Ces deux cas tests ont été traités dans [T+00] pour un gaz TPCP. Le second nous permet d'étudier deux lois de gaz TPCI. Pour terminer, on reproduit un cas test plus complexe d'interaction d'un choc et d'une couche limite extrait de [DT01].

5.1 Écoulements non visqueux

L'objectif de l'étude d'écoulements non visqueux est double. On souhaite tout d'abord valider l'implémentation de la méthode de relaxation dans un code de résolution des équations d'Euler bidimensionnelles basé sur la méthode mixte volumes finis/éléments finis décrite dans le chapitre 4. De plus, on compare les résultats obtenus par les deux méthodes exposées dans la section 4.2.4 pour le calcul des flux convectifs : la méthode couplée pour laquelle les matrices jacobiennes des flux sont modifiées pour inclure la cinquième variable $\rho \varepsilon_2$ et la méthode découplée, où le flux de la variable $\rho \varepsilon_2$ dépend directement du flux numérique de la densité ρ .

Parmi les applications de la méthode de relaxation développée par Coquel et Perthame [CP98], citons tout d'abord les travaux de Montarnal et Shu [MS99] qui présentent des solutions monodimensionnelles (tube à choc) et bidimensionnelles (vortex isentropique et réflexion double mach) utilisant des schémas WENO d'ordre 5 en espace [JS96] ainsi qu'un traitement couplé des flux convectifs de ε_2 . In [In99] applique la méthode de relaxation à deux solveurs monodimensionnels : un solveur volumes finis basé sur la méthode découplée et un schéma cinétique relaxé.

Dans cette section, on étudie deux cas tests de tube à choc détaillés par Montarnal et Shu [MS99] : un premier cas classique, le tube à choc de Sod [So78] pour un gaz TPCP et le cas d'un gaz TPCI pour lequel l'énergie interne suit une loi vibratoire. Bien que ces cas tests soient monodimensionnels, nous utilisons un code de résolution bidimensionnel.

Dans tous les cas, le domaine de calcul est le rectangle $[0,1] \times [0,1]$. La membrane séparant les deux états se situe en $x = 0.5$. Les flux convectifs sont calculés par le schéma de Roe, le β -schéma avec $\beta = 1/2$ et les limiteurs de Van Albada-Van Leer. L'intégration en temps repose sur un schéma de Runge-Kutta à deux pas. On utilise un maillage triangulaire contenant 2121 points et obtenu par découpage du maillage quadrangulaire de 101×21 points. On présente des coupes des solutions en $y = 0.5$.

5.1.1 Cas d'un gaz TPCP

On considère ici un gaz TPCP, avec $\gamma = 1.4$. On étudie le cas du tube à choc de Sod [So78], dont les valeurs initiales adimensionnées des quantités physiques à gauche et à droite sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_G = 1.21, \\ u_G = 0.0, \\ v_G = 0.0, \\ p_G = 1.0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_D = 0.125 \times \rho_G = 0.151, \\ u_D = 0.0, \\ v_D = 0.0, \\ p_D = 0.1 \times p_G = 0.1. \end{array} \right.$$

On s'intéresse à la solution au temps adimensionné $t = 0.2$ et l'on compare les valeurs de ρ , u et p à la solution exacte obtenue en résolvant le problème de Riemann.

On rappelle que le paramètre de relaxation γ_1 est soumis aux conditions sous-caractéristiques (3.12), qui se réduisent dans le cas d'un gaz TPCP, à la seule condi-

tion

$$\gamma_1 > \gamma = 1.4. \quad (5.1)$$

On réalise deux calculs pour $\gamma_1 = 3$ et $\gamma_1 = 30$, la dernière valeur n'ayant pas de signification physique mais permettant de tester la robustesse de la méthode. Comme Montarnal et Shu dans [MS99], on utilise tout d'abord la méthode couplée.

5.1.1.1 Validation de la méthode couplée

On présente les solutions de la pression, de la vitesse horizontale et de la densité, figures 5.1, 5.2 et 5.3, obtenues pour $\gamma_1 = 3$ et $\gamma_1 = 30$. Ces solutions sont comparées aux profils obtenus par Montarnal et Shu [MS99] en utilisant un schéma WENO d'ordre 5 [JS96]. On remarque que, quelle que soit la variable, les solutions obtenues sont très proches des solutions exactes et comparables aux solutions obtenues par la méthode WENO d'ordre 5 bien que notre méthode ne soit que d'ordre 2 en temps et en espace. Lorsque $\gamma_1 = 30$, la solution est légèrement dégradée mais reste correcte, ce qui est un excellent résultat compte tenu du fait que $\gamma_1 = 30$ est une valeur extrême.

On constate que l'effet de la méthode de relaxation peut s'interpréter via l'introduction d'une viscosité numérique (liée à la production d'entropie ω_e , voir (3.13)) puisque les profils sont lissés par rapport à la solution de référence et que le lissage est d'autant plus marqué que la valeur choisie pour γ_1 est grande.

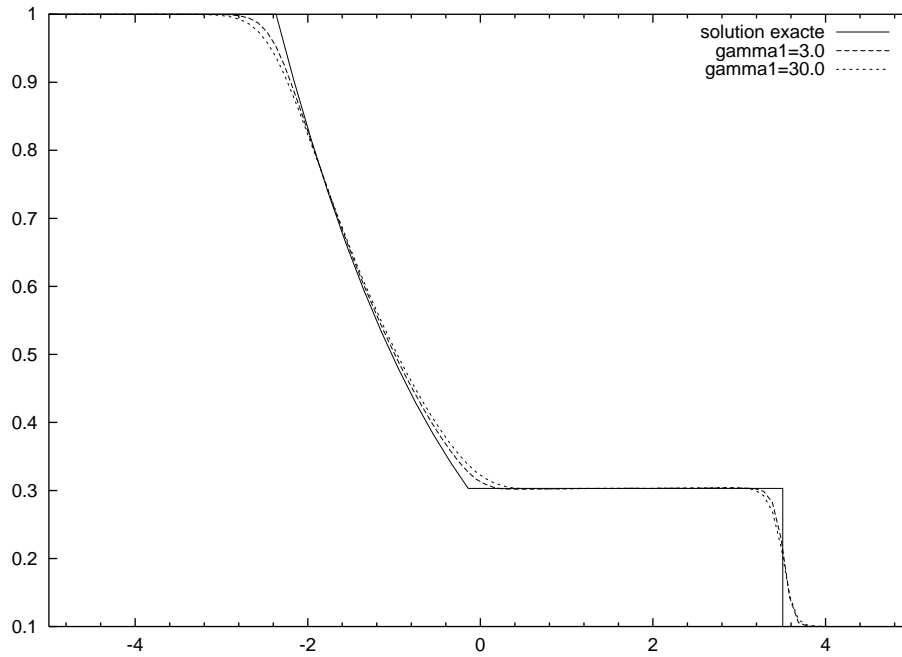
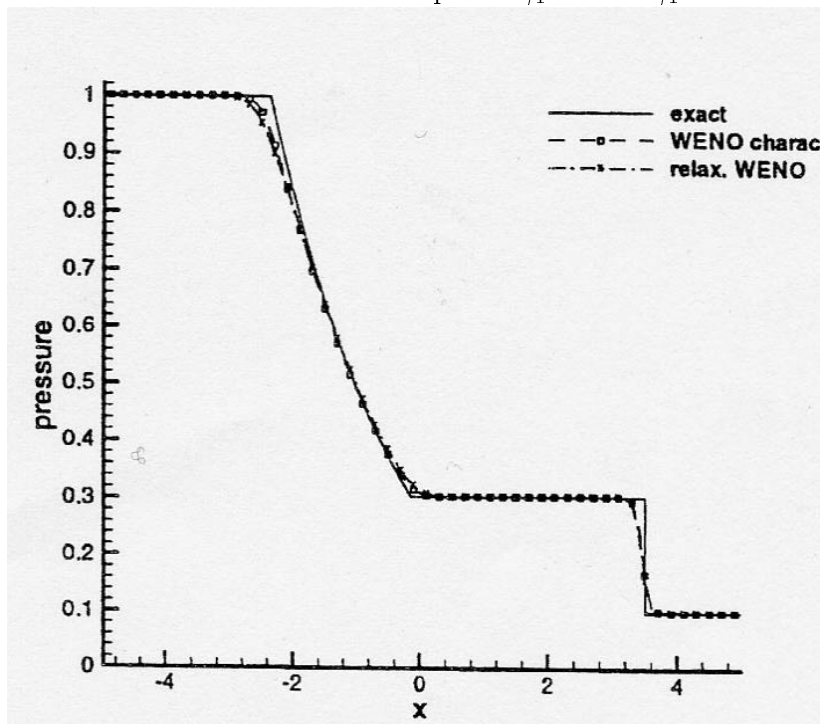
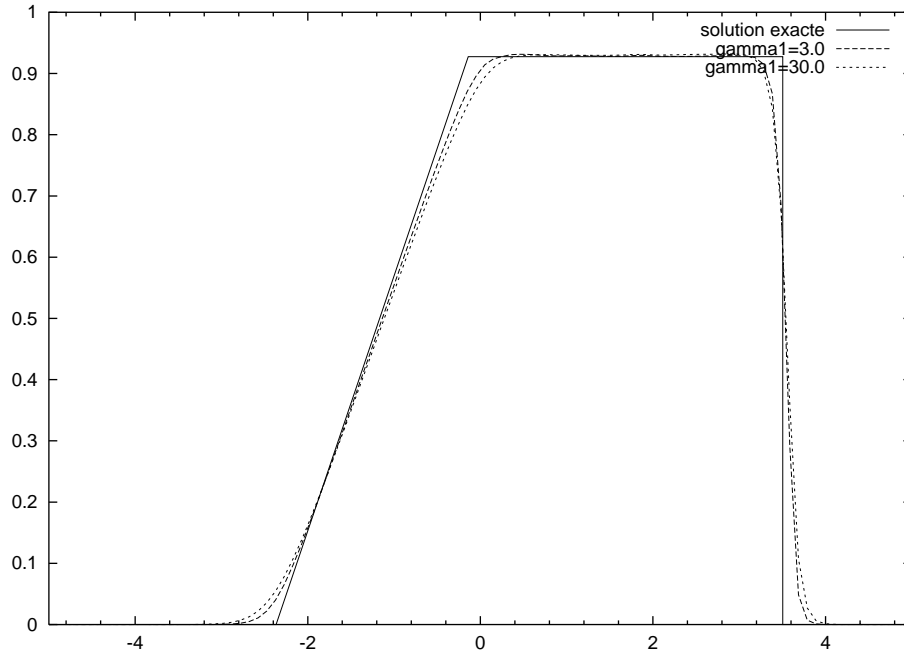
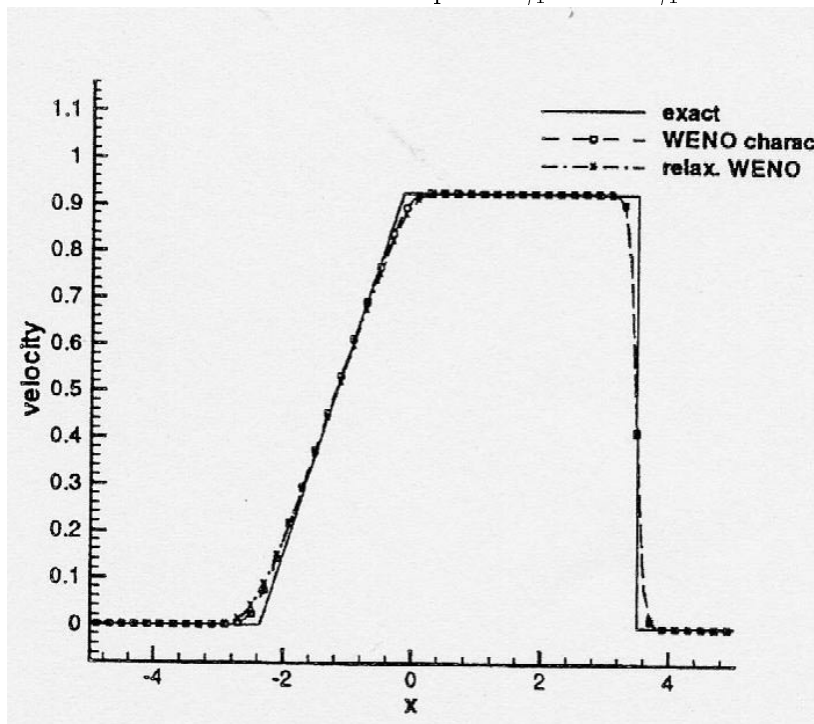
Méthode de relaxation couplée - $\gamma_1 = 3$ et $\gamma_1 = 30$.Méthode WENO d'ordre 5 [MS99] - $\gamma_1 = 3$.

FIG. 5.1 - Tube à choc de Sod - Pression

Méthode de relaxation couplée - $\gamma_1 = 3$ et $\gamma_1 = 30$.Méthode WENO d'ordre 5 [MS99] - $\gamma_1 = 3$.FIG. 5.2 - Tube à choc de Sod - Vitesse u

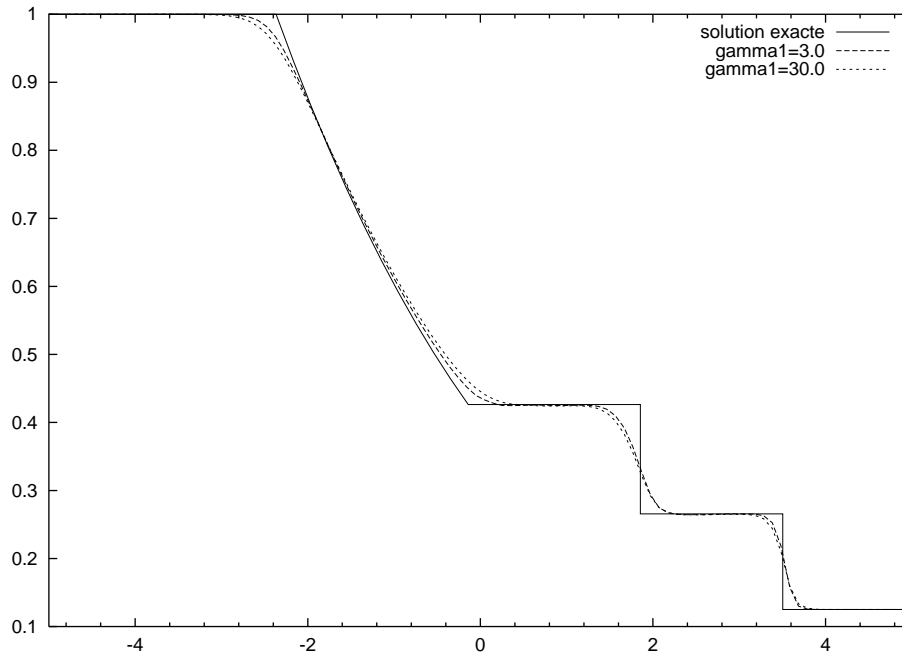
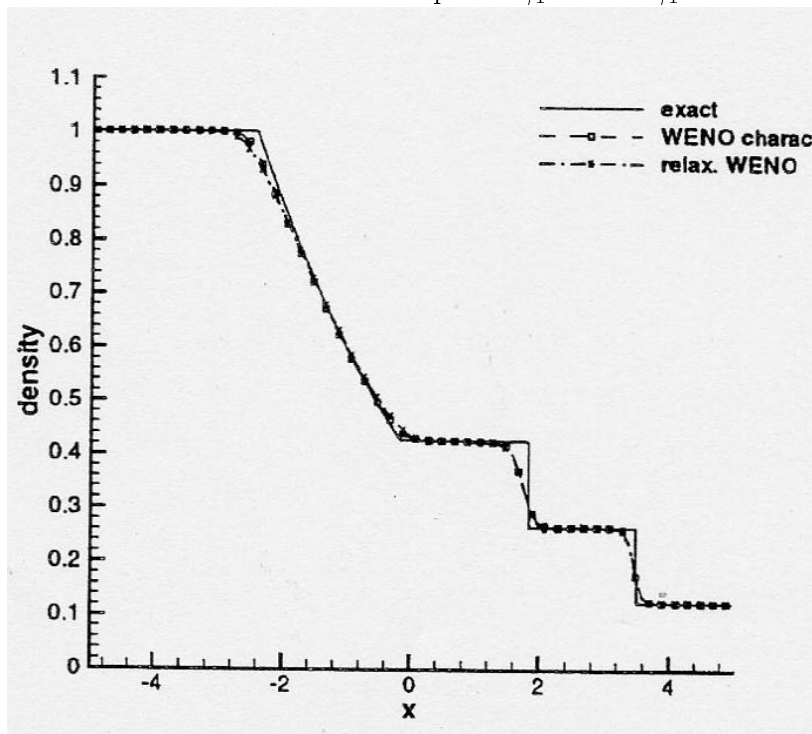
Méthode de relaxation couplée - $\gamma_1 = 3$ et $\gamma_1 = 30$.Méthode WENO d'ordre 5 [MS99] - $\gamma_1 = 3$.

FIG. 5.3 – Tube à choc de Sod - Densité

5.1.1.2 Comparaison des méthodes couplée et découplée

On compare à présent, pour ce cas test du tube à choc de Sod, les résultats obtenus en calculant les flux convectifs par les deux méthodes proposées section 4.2.4, la méthode couplée et la méthode découplée. On compare donc, figures 5.4, 5.5 et 5.6, les solutions de la pression, de la vitesse horizontale et de la densité pour les deux méthodes et la valeur $\gamma_1 = 3$. On constate que, pour toutes les variables, les courbes provenant des deux méthodes se superposent. En examinant les valeurs, on constate une différence de l'ordre de 10^{-4} , ce qui est négligeable. Donc, la méthode développée par B. Larrouturou pour la convection des espèces chimiques est tout à fait applicable à notre problème et donne des résultats identiques à ceux d'une méthode couplée qui a l'inconvénient de nécessiter l'implémentation des lignes et colonnes supplémentaires des matrices jacobiennes des flux convectifs pour calculer le flux de $\rho \varepsilon_2$.

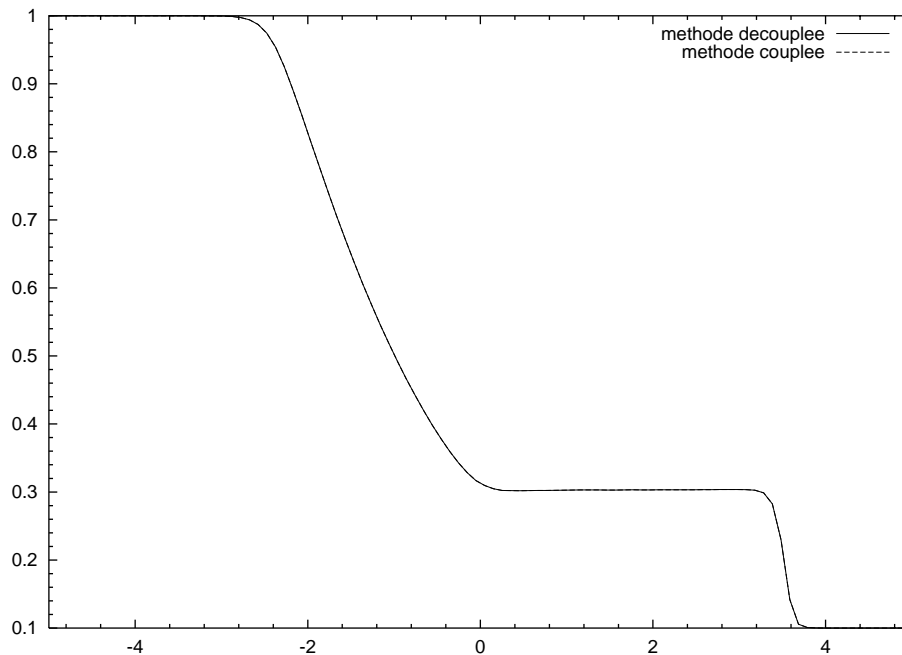


FIG. 5.4 – Tube à choc de Sod - Pression - Comparaison des méthodes couplée et découplée - $\gamma_1 = 3$.

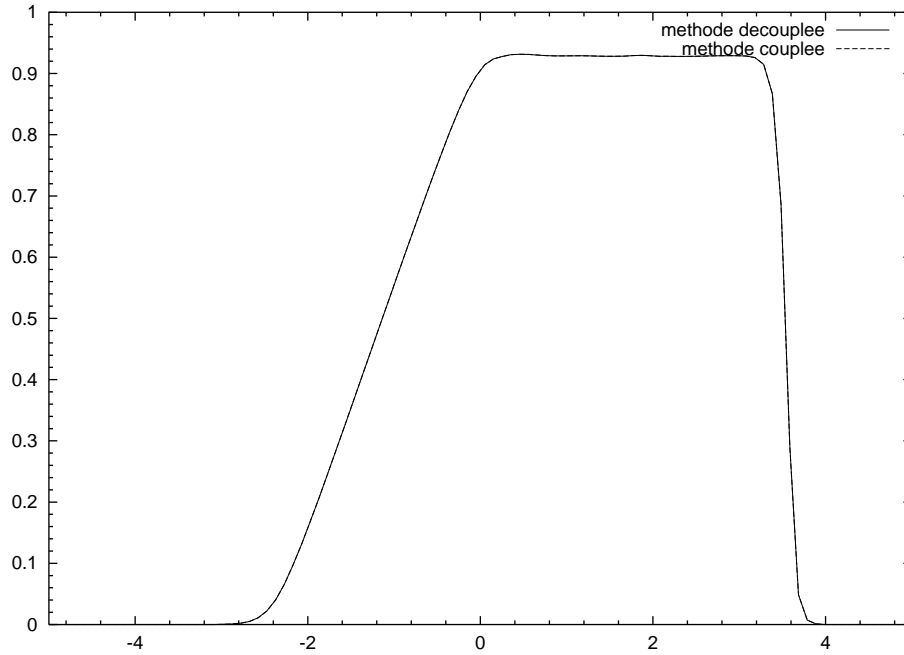


FIG. 5.5 – Tube à choc de Sod - Vitesse u - Comparaison des méthodes couplée et découplée - $\gamma_1 = 3$.

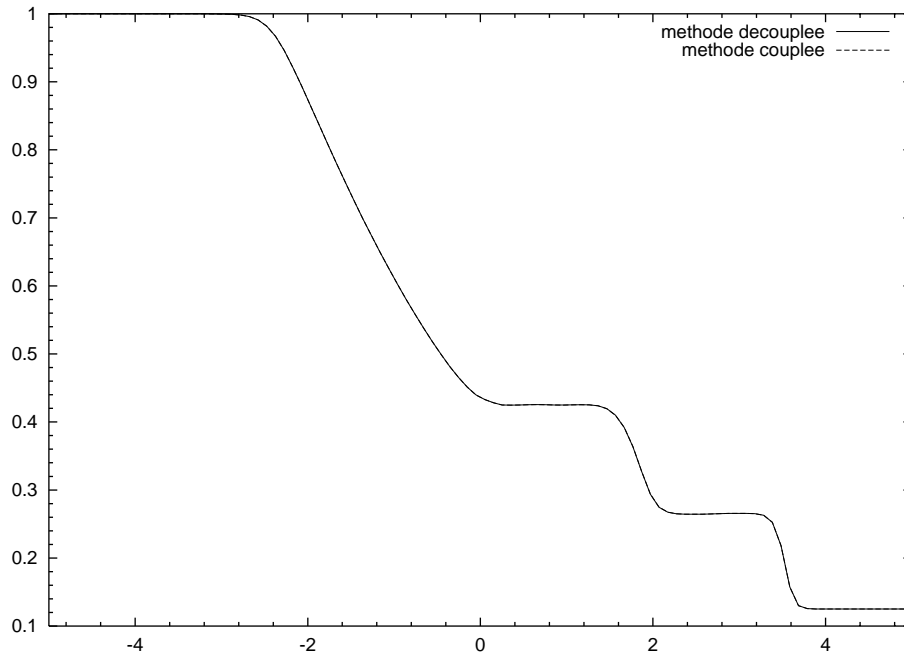


FIG. 5.6 – Tube à choc de Sod - Densité - Comparaison des méthodes couplée et découplée - $\gamma_1 = 3$.

5.1.2 Cas d'un gaz TPCI

Pour terminer la validation de la méthode de relaxation dans le cadre des équations d'Euler, on s'intéresse à un gaz TPCI : de l'air à haute température. Lorsque la température augmente, le mouvement vibratoire des molécules d'oxygène et d'azote contenues dans l'air devient important ; par conséquent, les coefficients calorifiques C_p et C_v dépendent de la température. On étudie la loi vibratoire suivante

$$p(\tau, \varepsilon) = \rho RT(\varepsilon),$$

où T est calculée implicitement par

$$\varepsilon(T) = C_v^{tr} T + \left(\frac{\alpha \Theta_{vib}}{\exp\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right) - 1} \right).$$

Les paramètres dimensionnés de ces équations sont ceux de l'air, la masse molaire $M_{air} = 29 \text{g.mol}^{-1}$ et

$$R_{air} = \frac{8.32}{29 \cdot 10^{-3}} = 287 \text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

Les autres quantités intervenant dans la loi vibratoire ont pour valeur

$$\alpha = R_{air},$$

$$C_v^{tr} = \frac{R_{air}}{\gamma^{tr} - 1}, \quad \gamma^{tr} = 1.4,$$

$$\Theta_{vib} = 10^3 \text{K}.$$

L'écoulement s'effectue, comme précédemment, dans un tube dont les états initiaux dimensionnés à gauche et à droite sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_G = 0.066 \text{ kg.m}^{-3} \\ u_G = 0. \text{ m.s}^{-1} \\ v_G = 0. \text{ m.s}^{-1} \\ \varepsilon_G = 7.22 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_D = 0.030 \text{ kg.m}^{-3} \\ u_D = 0. \text{ m.s}^{-1} \\ v_D = 0. \text{ m.s}^{-1} \\ \varepsilon_D = 1.44 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1} \end{array} \right.$$

A présent, la dépendance non-linéaire de T en ε due à la forme de la loi vibratoire, nous oblige à utiliser une méthode de Newton pour pouvoir calculer $T(\varepsilon)$. Pour ce cas test, on ne possède pas de solution exacte. Nous comparons, comme précédemment, nos solutions à celles obtenues par Montarnal et Shu avec un schéma WENO d'ordre 5. Ils présentent une solution de référence pour ce cas test, obtenue par l'utilisation d'un schéma de type "WENO Lax-Friedrich" avec une décomposition complète des caractéristiques pour des gaz diatomiques qui suivent la loi vibratoire. Nous présentons des solutions pour deux valeurs de γ_1 , $\gamma_1 = 1.5$ qui est la valeur utilisée dans [MS99] et $\gamma_1 = 1.66$ qui représente la limite physique pour $\gamma(T)$. Nous utilisons la méthode couplée pour la comparaison avec les solutions du schéma WENO.

5.1.2.1 Validation de la méthode couplée

On présente, figures 5.7, 5.8 et 5.9, les solutions de la pression, de la vitesse et de la densité obtenues par notre méthode pour $\gamma_1 = 1.5$ et $\gamma_1 = 1.66$. Ces solutions sont comparées aux figures extraites de [MS99] présentant la solution du schéma WENO d'ordre 5 et la solution de référence considérée comme "exacte".

Tout d'abord, on ne constate pas de différence visible sur les solutions correspondant aux valeurs $\gamma_1 = 1.5$ et $\gamma_1 = 1.66$. Les solutions que nous obtenons sont très proches de celles obtenues par Montarnal et Shu. On constate une légère différence sur la densité autour du maximum que l'on peut expliquer par la différence de précision des schémas. Comme dans le cas du gaz TPCP, ces résultats sont très satisfaisants.

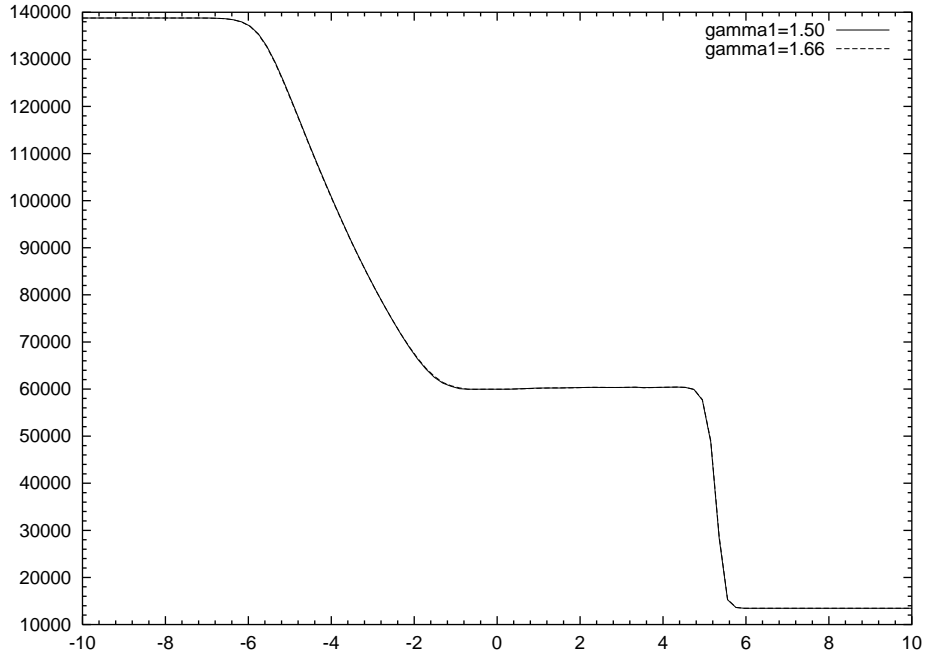
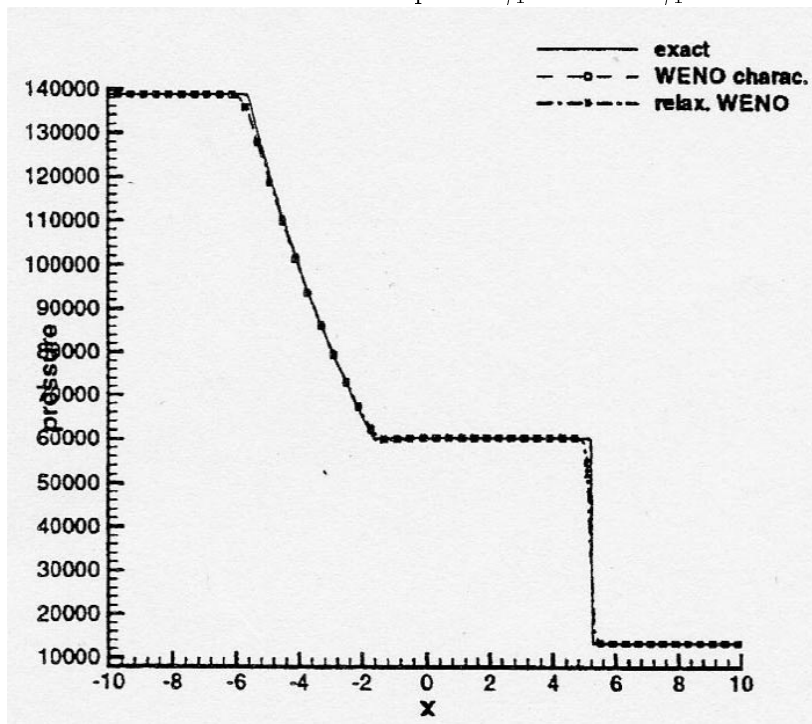
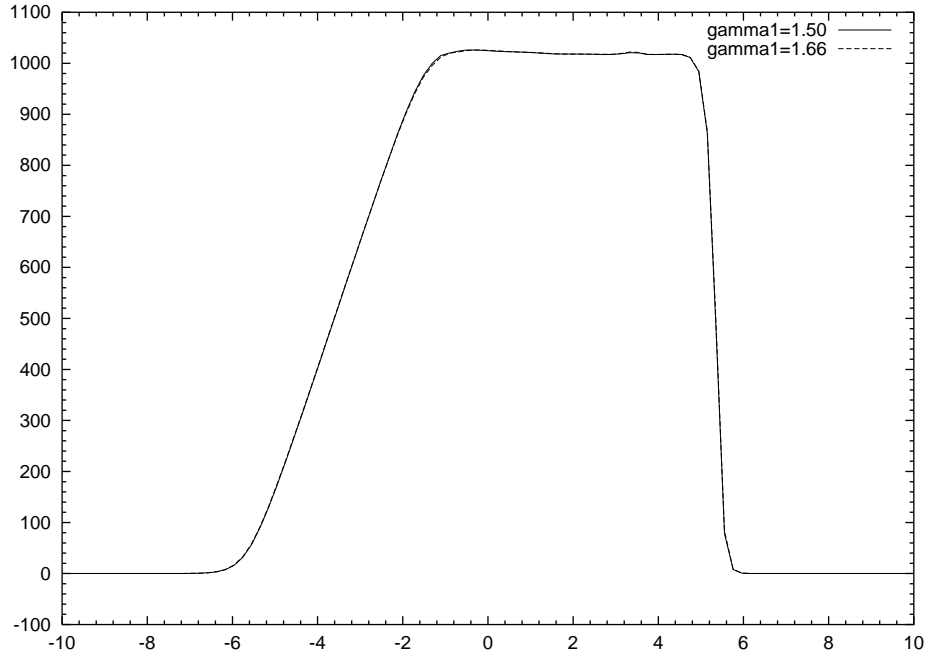
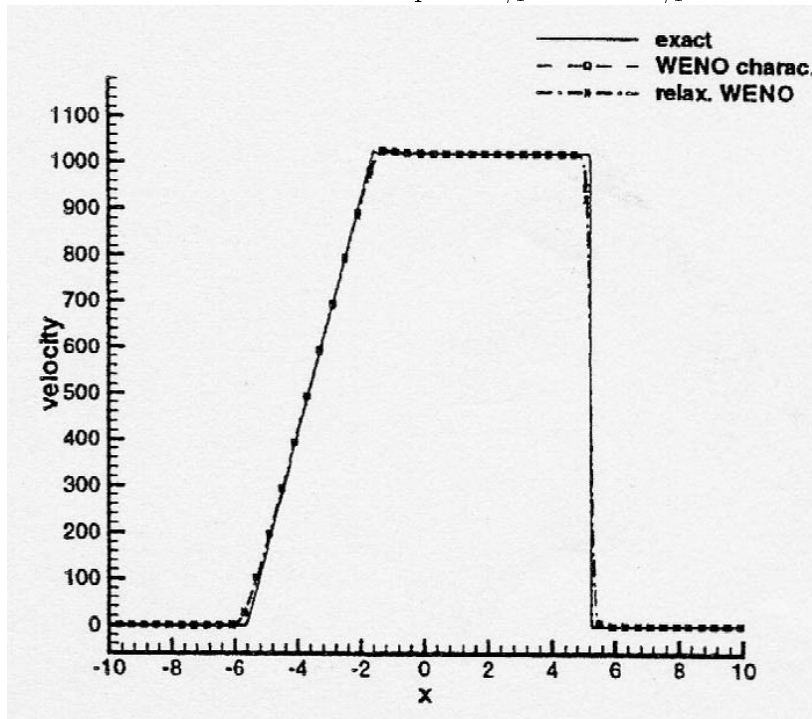
Méthode de relaxation couplée - $\gamma_1 = 1.5$ et $\gamma_1 = 1.66$ Méthode WENO d'ordre 5 [MS99] - $\gamma_1 = 1.5$

FIG. 5.7 – Tube à choc gaz TPCI - Loi vibratoire - Pression

Méthode de relaxation couplée - $\gamma_1 = 1.5$ et $\gamma_1 = 1.66$ Méthode WENO d'ordre 5 [MS99] - $\gamma_1 = 1.5$ FIG. 5.8 – Tube à choc gaz TPCI - Loi vibratoire - Vitesse u

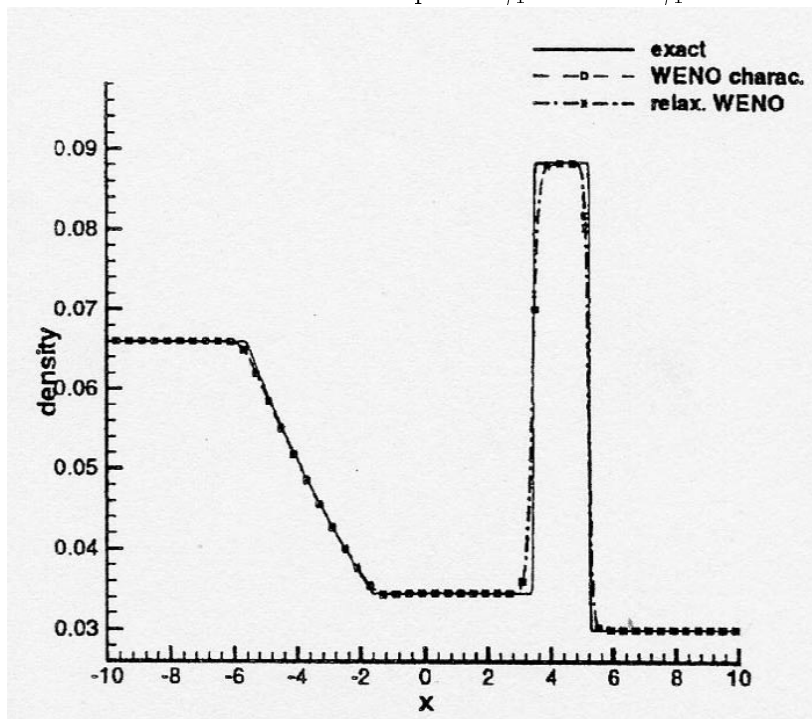
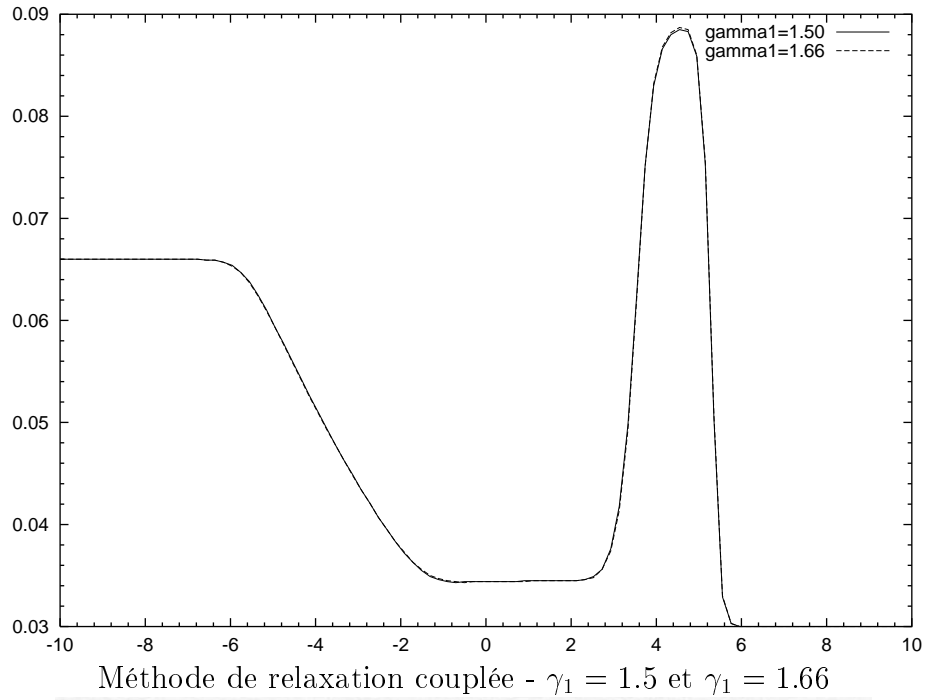


FIG. 5.9 – Tube à choc gaz TPCI - Loi vibratoire - Densité

5.1.2.2 Comparaison des méthodes couplée et découplée

Comme nous l'avons fait précédemment pour le gaz TPCP, on compare, pour ce cas test de gaz TPCI, les solutions obtenues par les deux traitements couplé et découplé du terme convectif. Les solutions de la pression, de la vitesse horizontale et de la densité, obtenues par les deux méthodes pour $\gamma_1 = 1.66$ sont présentées sur les figures 5.10, 5.11 et 5.12 respectivement.

On retrouve un comportement semblable au cas du gaz TPCP ; les solutions se superposent, quelle que soit la variable. L'examen détaillé des valeurs montre, une fois de plus, des différences négligeables.

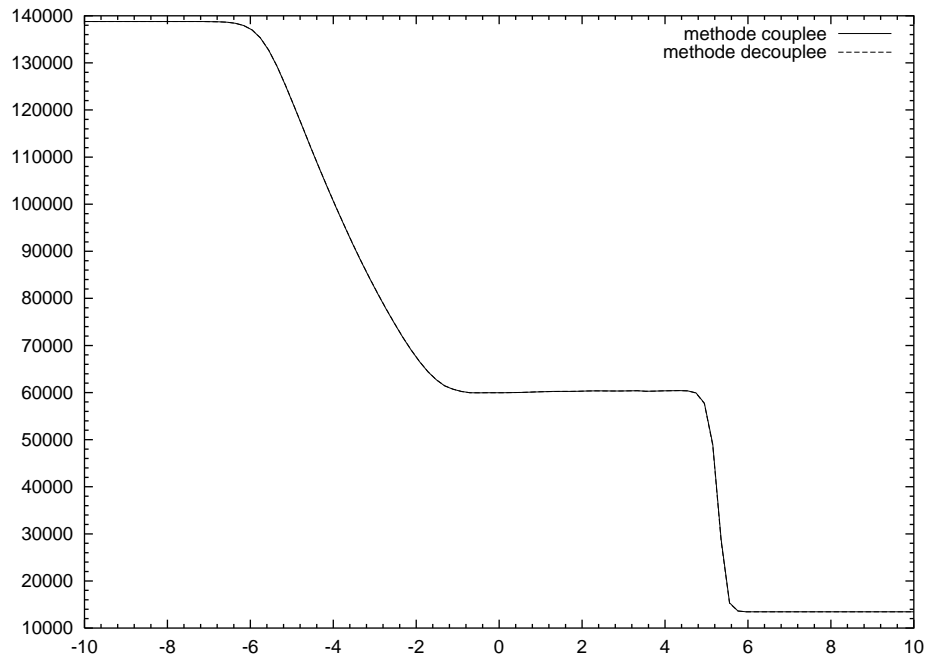


FIG. 5.10 – Tube à choc gaz TPCI - Loi vibratoire - Pression - Comparaison des méthodes couplée et découplée - $\gamma_1 = 1.66$.

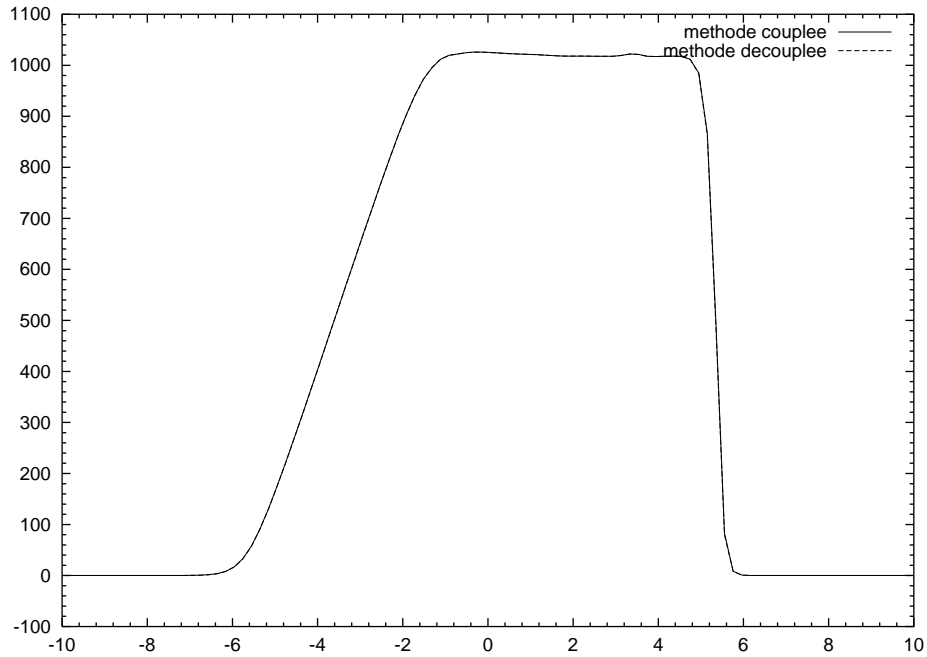


FIG. 5.11 – Tube à choc gaz TPCI - Loi vibratoire - Vitesse u - Comparaison des méthodes couplée et découplée - $\gamma_1 = 1.66$.

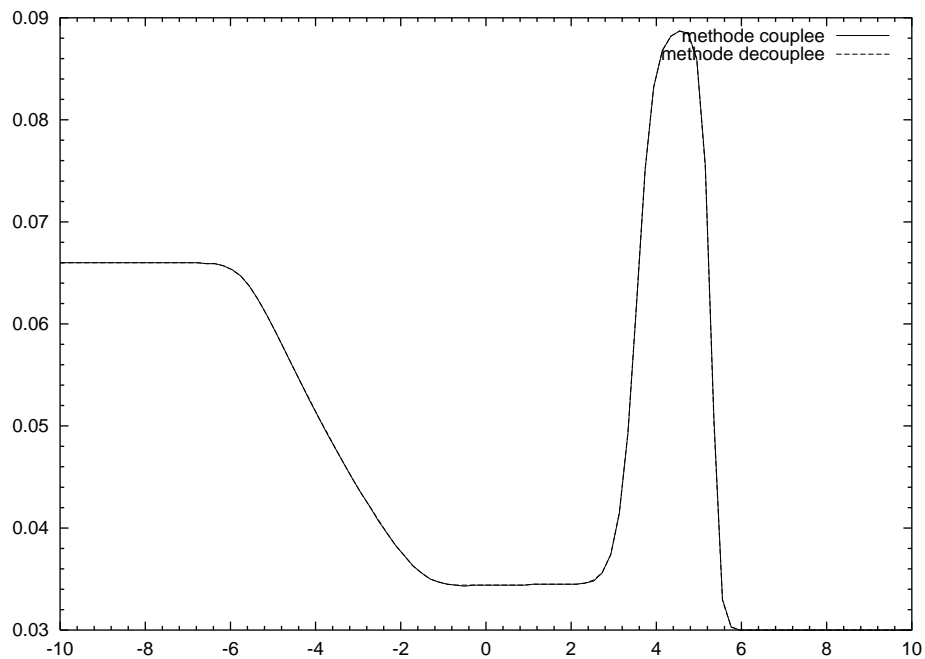


FIG. 5.12 – Tube à choc gaz TPCI - Loi vibratoire - Densité - Comparaison des méthodes couplée et découplée - $\gamma_1 = 1.66$.

Ceci constitue une validation de la méthode de relaxation appliquée à la résolution des équations d'Euler bidimensionnelles par une méthode mixte volumes finis/éléments finis. Les solutions obtenues avec un schéma précis à l'ordre deux en temps et en espace sont tout à fait comparables aux solutions obtenues par Montarnal et Shu qui utilisent un schéma WENO d'ordre 5. Les deux méthodes (couplées et découplées) pour l'approximation du flux convectif de $\rho\varepsilon$ conduisent à des résultats équivalents, pour un gaz TPCP mais également pour un gaz TPCI. On va s'intéresser, dans les trois cas tests qui suivent, à une validation de la méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes.

5.2 Advection d'un réseau périodique de vortex

L'objectif de cette section est une deuxième étape de validation de la méthode de relaxation en étudiant l'advection d'un réseau périodique de vortex régis par les équations de Navier-Stokes. Il s'agit d'un cas test isotherme pour lequel une solution de référence est présentée dans [T+00].

On considère l'écoulement uniforme d'un gaz TPCP ($\gamma = 1.4$) dont les caractéristiques sont

$$\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad T = 300 \text{ K}, \quad \gamma = 1.4, \quad U = (u, 0) \quad \text{où } u = 277.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

si bien que le nombre de Mach est égal à 0.8. L'écoulement uniforme est initialement perturbé par un réseau périodique bidimensionnel de vortex placés aux points de coordonnées $((i + \frac{1}{2})L, (j + \frac{1}{2})L)$ où i et j sont des entiers relatifs et L une longueur de référence qu'on prendra égale à 1 m. La vitesse tangentielle de chaque vortex est

$$U_\theta(r) = C_1 r e^{-C_2 r^2}$$

avec

$$r = \sqrt{(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2}, \quad C_1 = e^{1/2} U_c / R_c, \\ C_2 = 1/(2R_c^2), \quad U_c = 0.3u \quad \text{et} \quad R_c = 0.075L.$$

Le domaine de calcul est le carré $[0, L] \times [0, L]$ et des conditions aux bords périodiques sont imposées sur ses 4 cotés. Comme dans [T+00], des conditions de périodicité sont appliquées sur les 4 bords du domaine. Le coefficient de viscosité η et la conductivité thermique κ sont évalués en supposant que le nombre de Reynolds vaut 10^4 et le nombre de Prandtl 0.7.

On étudie l'évolution de ce réseau de vortex sur 5 périodes, c'est à dire aux temps $t_i = iL/u$, $i = 1, \dots, 5$ quand le centre d'un vortex coïncide avec le centre du domaine de calcul. La méthode de relaxation a été implémentée pour $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 (rappelons que la valeur 1.66 correspond au γ maximum pour un gaz parfait).

Deux maillages différents ont été utilisés. Un maillage grossier de 10201 nœuds ainsi qu'un maillage fin de 40401 nœuds. Ces deux maillages ont été obtenus par découpage en drapeaux anglais (par diagonales alternées) de maillages quadrangulaires uniformes composés de 101×101 et 201×201 points respectivement. Dans la suite, ces deux maillages seront référencés par M1 et M2. À titre de comparaison, d'autres types de maillages seront considérés dans la section 5.2.4.

Enfin, on rappelle que la solution de référence a été obtenue dans [T+00] en utilisant un schéma de Hermite d'ordre 6 en espace et un maillage quadrangulaire de 200×200 points.

5.2.1 Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = \gamma = 1.4$

Les résultats obtenus pour $\gamma_1 = 1.4$ se superposent aux solutions obtenues avec un code classique Navier-Stokes gaz parfait, prouvant ainsi la consistance de la méthode de relaxation dans le cas $\gamma_1 = \gamma$.

Considérons maintenant l'impact de la finesse du maillage ainsi que de la valeur du paramètre β dans le β -schéma sur la précision de nos résultats.

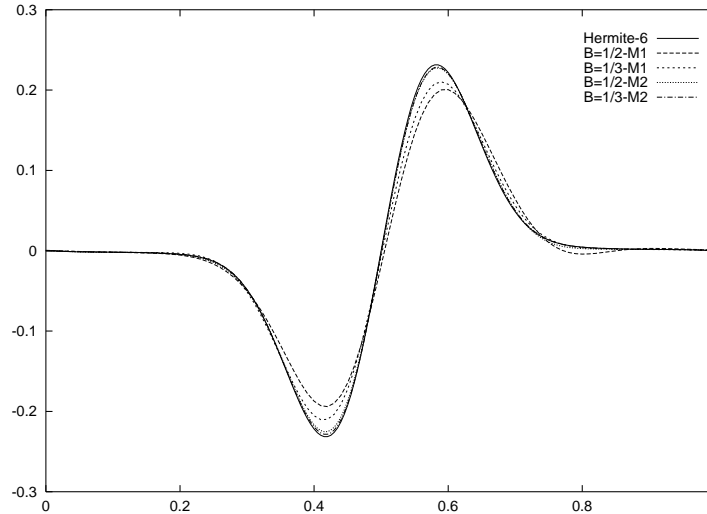


FIG. 5.13 – Comparaison de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma, les maillages $M1$ et $M2$ et le schéma de Hermite

Les effets de la viscosité moléculaire et de la diffusion numérique sont observés sur l'évolution du rayon du vortex. Pour cela, on compare figure 5.13, la distribution de vitesse verticale adimensionnée en $y = 1/2$, au temps t_5 pour le β -schéma ($\beta=1/2$ et $1/3$) et les deux maillages $M1$ et $M2$. On superpose également la solution de référence [T+00]. On compare par ailleurs, figure 5.14, la distribution de la pression statique au temps t_5 , en $y = 1/2$.

Les deux figures prouvent les bons résultats obtenus par notre schéma (Runge Kutta à 4 pas - β -schéma) notamment pour la valeur $\beta = 1/3$ puisque, pour le maillage le plus fin $M2$, les courbes de vitesse et de pression sont très proches des résultats du schéma de Hermite. Les résultats obtenus pour $\beta = 1/2$ sont moins bons surtout pour le maillage le plus grossier $M1$, ce qui est prévisible puisque, dans ce cas, le schéma n'est que d'ordre 2 en espace.

Ce comportement est analysé plus finement sur les zooms de la vitesse verticale autour du maximum (figure 5.15) et de la pression autour du centre du vortex (figure 5.16). Les valeurs de la vitesse obtenues pour les deux valeurs de β sont très proches pour le maillage $M2$ et en accord avec la solution de référence. Les valeurs de la pression sont plus sensibles à la qualité du schéma puisque, même pour le maillage fin, seul le cas $\beta = 1/3$ fournit des valeurs proches de celles de la solution de référence. Pour le maillage $M1$, les résultats obtenus pour $\beta = 1/2$ sont nettement moins bons, comme on peut le constater notamment sur le déphasage en vitesse.

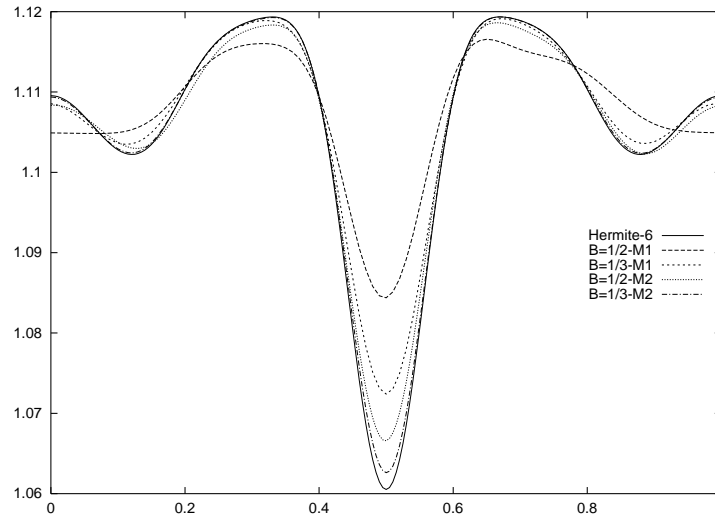


FIG. 5.14 – Comparaison de la pression statique à t_5 pour le β -schéma, les maillages $M1$ et $M2$ et le schéma de Hermite

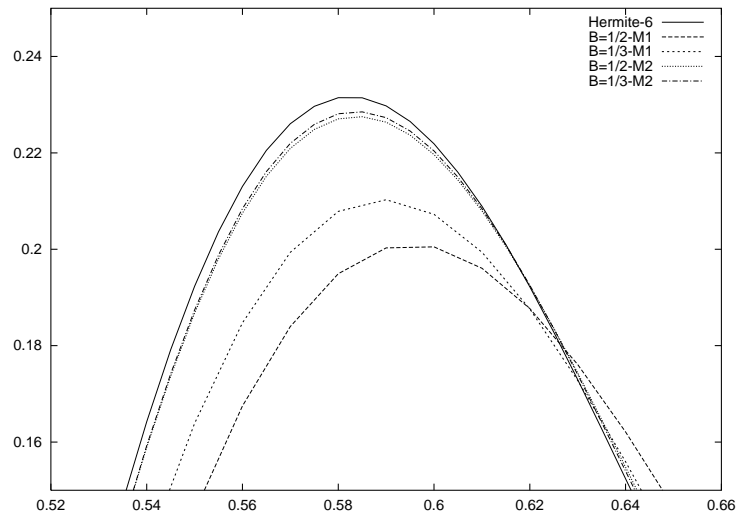


FIG. 5.15 – Zoom autour du maximum de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma, les maillages $M1$ et $M2$ et le schéma de Hermite

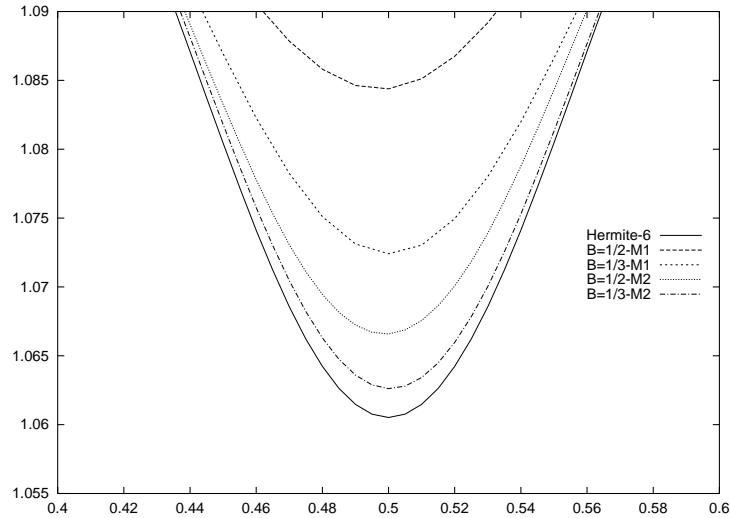


FIG. 5.16 – Zoom autour du centre du vortex de la pression statique à t_5 pour le β -schéma, les maillages M1 et M2 et le schéma de Hermite

5.2.2 Méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ et $\gamma = 1.4$

On s'intéresse, à présent, aux résultats de la méthode de relaxation lorsque $\gamma_1 = 1.66$. Pour les figures, on se limite au cas du maillage M2 et l'on compare la distribution de la vitesse verticale adimensionnée, figure 5.17, et la distribution de la pression statique, figure 5.18, en $y = 1/2$ au temps t_5 pour le β -schéma et deux valeurs $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$.

En examinant les courbes de la vitesse pour $\beta = 1/2$ et $\beta = 1/3$ pour les valeurs $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$, figure 5.17, on ne constate aucune différence visible due à la méthode de relaxation. Ceci est plus net sur le zoom, figure 5.19, où les seules différences minimales proviennent de la valeur de β .

En revanche, pour la pression, figure 5.18, les valeurs $\beta = 1/2$ et $\beta = 1/3$ fournissent des résultats différents et l'on peut constater, en examinant le zoom, figure 5.20, à β fixé, un très faible écart provenant de la valeur de γ_1 . On peut tout de même conclure que les résultats provenant de la méthode de relaxation sont comparables aux solutions classiques.

5.2.3 Évolution en temps

On compare à présent l'évolution en temps du maximum de la vitesse verticale ainsi que du minimum de la pression pour chacune des cinq périodes, soit aux temps t_i , $i = 1, \dots, 5$, pour le schéma Hermite-6 et pour le β -schéma, les deux maillages M1 et M2 et pour $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 . Les résultats obtenus pour la méthode de relaxation et le maillage grossier, dont on n'a pas présenté de figure, sont donnés dans les tableaux. On calcule également l'erreur relative par rapport aux valeurs de

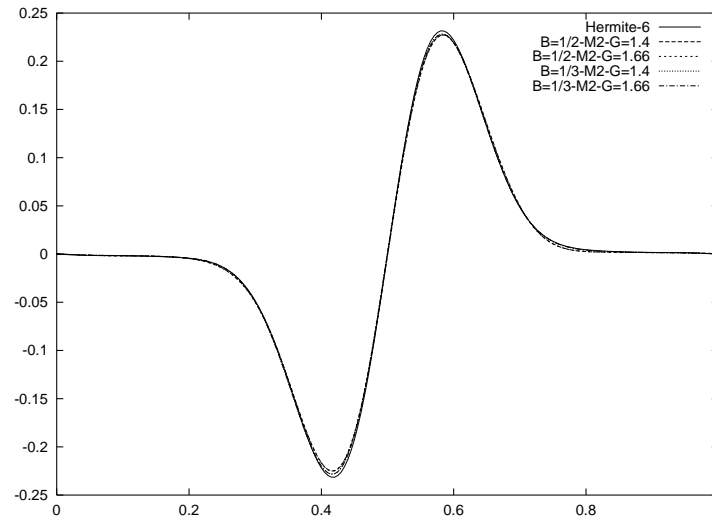


FIG. 5.17 – Comparaison de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma avec le maillage $M2$, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

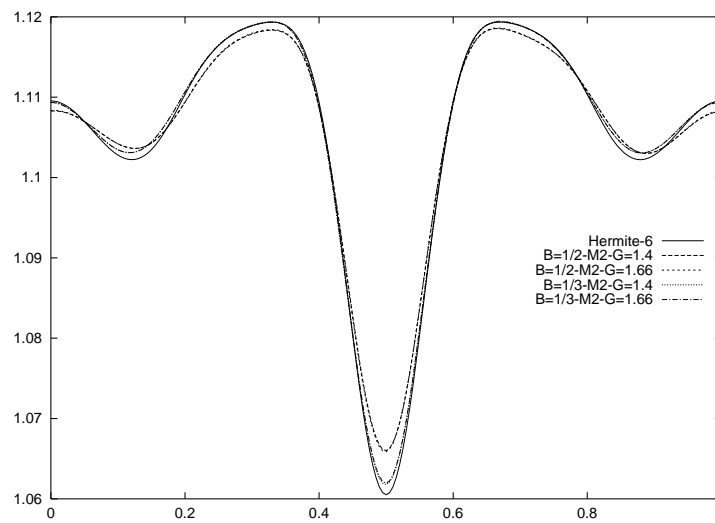


FIG. 5.18 – Comparaison de la pression statique à t_5 pour le β -schéma avec le maillage $M2$, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

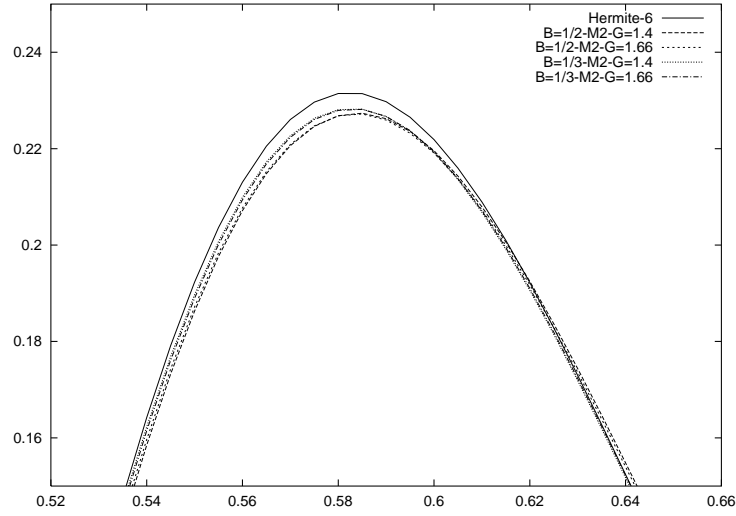


FIG. 5.19 – Zoom autour du maximum de la vitesse verticale à t_5 pour le β -schéma avec le maillage $M2$, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

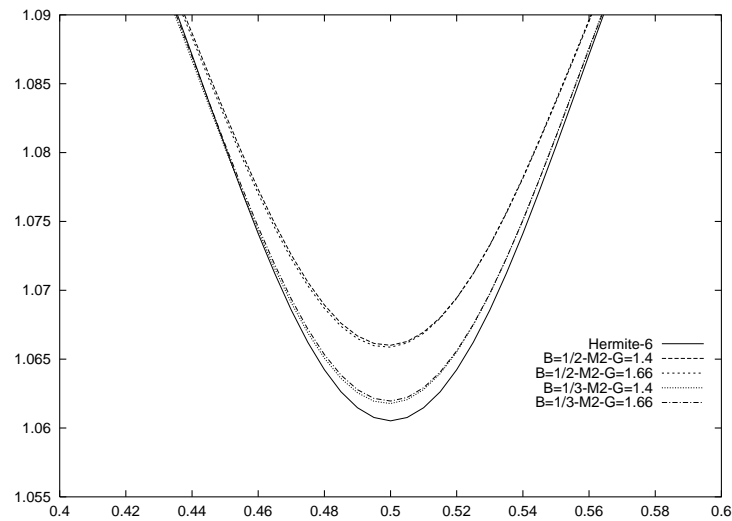


FIG. 5.20 – Zoom autour du centre du vortex de la pression statique à t_5 pour le β -schéma avec le maillage $M2$, $\gamma_1 = 1.4$ et 1.66 et le schéma de Hermite

Schéma		Maximum de la vitesse verticale				
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Hermite-6	Valeurs	0.27855	0.26432	0.25060	0.24412	0.23163
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.270833	0.250616	0.231027	0.216726	0.200680
	Erreur	-2.77	-5.18	-7.81	-11.22	-13.36
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.270200	0.250228	0.230497	0.215960	0.199879
	Erreur	-2.99	-5.33	-8.02	-11.53	-13.70
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.278208	0.262745	0.248134	0.239815	0.227341
	Erreur	-0.12	-0.59	-0.98	-1.76	-1.85
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.278175	0.262626	0.248049	0.239701	0.227189
	Erreur	-0.13	-0.64	-1.01	-1.81	-1.91
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.270463	0.252507	0.234708	0.224208	0.209842
	Erreur	-2.90	-4.46	-6.34	-8.15	-9.40
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.270354	0.252126	0.234306	0.223478	0.209418
	Erreur	-2.94	-4.61	-6.50	-8.45	-9.58
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	0.277272	0.262523	0.248305	0.241078	0.228207
	Erreur	-0.45	-0.67	-0.91	-1.24	-1.47
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	0.277289	0.262477	0.248192	0.240985	0.228151
	Erreur	-0.45	-0.69	-0.96	-1.28	-1.50

TAB. 5.1 – Valeurs et erreurs relatives en % du maximum de la vitesse verticale

référence du schéma de Hermite présentées dans [T+00].

Pour le maillage grossier M1, l'erreur sur le maximum de la vitesse au temps t_1 , tableau 5.1, varie entre -2.77% et -2.99% et au temps t_5 entre -9.40% et -13.70%. Les résultats sont meilleurs pour $\beta = 1/3$ mais, dans tous les cas, comparables à ceux présentés dans [T+00] puisque les schémas de type TVD ou MUSCL conduisent à des erreurs comprises entre -3.08% et -17.09% à t_1 et entre -5.16% et -43.42% à t_5 pour le maillage grossier de 100×100 points. Le β -schéma est très sensible au raffinement de maillage puisque, pour le maillage M2, l'erreur relative varie entre -0.12% et -0.48% à t_1 et entre -1.47% et -1.91% à t_5 . Les résultats sont également comparables à ceux de [T+00] puisque pour le maillage de 200×200 points, l'erreur à t_1 est comprise entre -0.44% et -5.22% et à t_5 entre -1.07% et -15.14% pour des schémas comparables. On remarque que les erreurs obtenues pour $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$ sont très proches, quels que soient le maillage et la valeur de β .

L'examen du tableau 5.2 présentant les valeurs du minimum de la pression statique conduit aux mêmes conclusions. Pour le maillage M1, l'erreur varie entre 0.45% et 0.64% à t_1 et 0.96% et 2.15% au temps t_5 . Les résultats du schéma pour $\beta = 1/3$ sont nettement meilleurs que pour $\beta = 1/2$. Les valeurs de [T+00] se situent entre 0.29% et 1.71% à t_1 et entre 0.74% et 3.85% à t_5 pour le maillage grossier. Les résultats sont meilleurs pour le maillage fin M2. A t_1 l'erreur est comprise entre 0.07% et 0.08% et à t_5 entre 0.11% et 0.51%, le meilleur résultat correspondant au cas

Schéma		Minimum de la pression statique adimensionnée				
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Hermite-6	Valeurs	1.01276	1.01789	1.01964	1.08101	1.06052
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.018845	1.030681	1.035190	1.090148	1.082911
	Erreur	0.60	1.25	1.52	0.84	2.113
RK4- $\beta = 1/2$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.019269	1.031065	1.035482	1.089896	1.083371
	Erreur	0.64	1.29	1.55	0.82	2.15
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.013586	1.020151	1.022671	1.080588	1.066009
	Erreur	0.08	0.22	0.29	-0.03	0.51
RK4- $\beta = 1/2$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.013635	1.020284	1.022714	1.080585	1.065871
	Erreur	0.08	0.23	0.30	-0.03	0.50
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.017368	1.025454	1.028362	1.089449	1.070803
	Erreur	0.45	0.74	0.85	0.78	0.96
RK4- $\beta = 1/3$ -M1- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.017571	1.025722	1.028585	1.089322	1.071303
	Erreur	0.47	0.76	0.87	0.76	1.01
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.4$	Valeurs	1.013518	1.019053	1.021003	1.081229	1.061776
	Erreur	0.07	0.11	0.13	0.02	0.11
RK4- $\beta = 1/3$ -M2- $\gamma = 1.66$	Valeurs	1.013552	1.019160	1.021160	1.081229	1.061960
	Erreur	0.07	0.12	0.14	0.02	0.13

TAB. 5.2 – Valeurs et erreurs relatives en % du minimum de la pression statique

$\beta = 1/3$. Les schémas étudiés dans [T+00] ont des erreurs comprises entre 0.04% et 0.33% à t_1 et entre 0.11% et 1.15% à t_5 pour le maillage de 200×200 points. L'écart entre les valeurs obtenues pour $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$ est très faible, comme nous l'avions constaté pour la vitesse.

L'examen des courbes ainsi que des deux tableaux prouve les bons résultats obtenus par la méthode de relaxation et notre schéma.

5.2.4 Comparaison entre différents maillages

Utilisant un maillage triangulaire et comparant nos résultats aux solutions extraites de [T+00] obtenues avec un maillage quadrangulaire uniforme, il est intéressant de regarder si la solution est dépendante du type de maillage. À partir d'un maillage uniforme quadrangulaire de 201×201 points, il est possible d'obtenir deux maillages triangulaires selon que l'on découpe les mailles quadrangulaires en deux triangles de façon uniforme (toujours dans le même sens) ou en drapeaux anglais. Il est également possible de générer directement un maillage triangulaire non-structuré de type quasi-Delaunay contenant 201 points uniformément répartis sur chaque côté [Re93]. Les deux premiers maillages contiennent 40401 points et 80000 triangles tandis que le troisième contient 46569 points et 92336 triangles. Des détails de ces trois maillages dans le domaine $[0.4,0.6] \times [0.4,0.6]$ sont présentés figure

	max v	Erreur	min p	Erreur
Hermite-6	0.23163		1.06052	
40401 points, découpage uniforme	0.22844	-1.37	1.06282	0.21
40401 points, drapeaux anglais	0.22869	-1.26	1.06261	0.19
46569 points, non structuré	0.22979	-0.79	1.061742	0.11

TAB. 5.3 – Valeurs et erreurs relatives du maximum de la vitesse verticale et du minimum de la pression statique pour les différents maillages

5.21. On notera que l'implémentation des conditions de périodicité se fait naturellement sur des maillages dont la trace au bord du domaine de calcul est elle-même périodique.

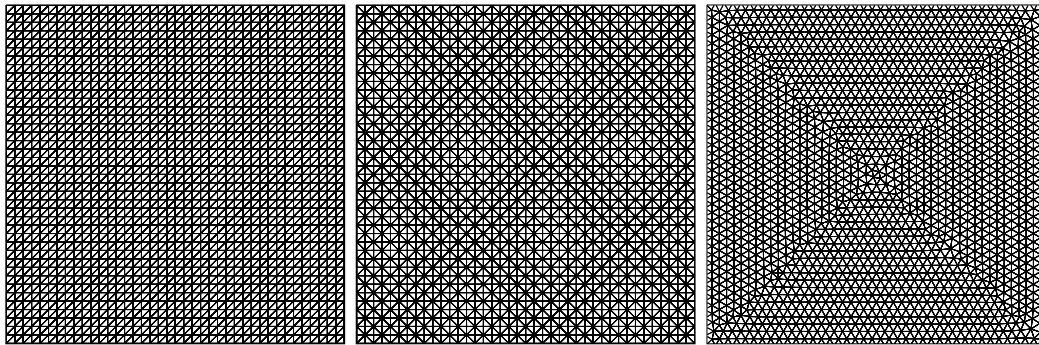


FIG. 5.21 – Détail dans $[0.4,0.6] \times [0.4,0.6]$ des différents maillages triangulaires pour l'advection du réseau périodique de vortex; découpage uniforme à gauche, en drapeaux anglais au centre et maillage non-structuré à droite

Sur chaque maillage, on réalise une simulation avec le schéma de Runge-Kutta 4 et la valeur $\beta = 1/3$. Aucune différence n'est visible sur les coupes en $y = 0.5$ et au temps t_5 de la vitesse verticale adimensionnée et de la pression statique. On présente, tableau 5.3, les valeurs du maximum de la vitesse verticale et du minimum de la pression statique sur tout le domaine, au temps t_5 pour les trois différents maillages ainsi que l'erreur relative par rapport à la valeur obtenue avec le schéma de Hermite.

Les extrema provenant des différents maillages sont très proches mais, pour la vitesse comme pour la pression, le maillage non-structuré conduit à des solutions plus précises, le maillage découpé de façon uniforme fournissant les moins bonnes solutions.

Ce cas test est une première validation très encourageante de notre méthode. Malheureusement, la température étant constante, il ne permet pas une validation de tous les termes, notamment de la décomposition des flux de chaleur; ceci est donc l'objectif du cas test suivant.

5.3 Interaction d'un choc faible et d'un spot de température

Pour valider la totalité du système relaxé, notamment la décomposition du flux de chaleur, on étudie un second cas test extrait de [T+00], l'interaction d'un choc faible et d'un spot de température, cas test pour lequel le champ de température n'est plus constant. On s'intéresse dans un premier temps au cas documenté d'un gaz TPCP et l'on étudiera dans une seconde partie deux situations de gaz TPCI.

Le domaine de calcul est le rectangle $[0,2] \times [0,1]$ m et le choc est situé en $x = 1$. Les parties gauche et droite sont respectivement indicées 1 et 2. Les valeurs de référence correspondent à la partie à gauche du choc. Quel que soit le type de gaz étudié, le nombre de Mach est $M_1 = 1.1588$ et les caractéristiques de l'état gauche sont :

$$\rho_1 = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad T_1 = 300 \text{ K}, \quad p_1 = \rho_1 R T = 103320 \text{ Pa}.$$

Le nombre de Reynolds est $Re = 2000$ et le nombre de Prandtl $Pr = 0.7$. Les conditions initiales à droite du choc et la vitesse à gauche du choc sont calculées en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot. A cet écoulement de base, on superpose un spot de température situé en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et défini par

$$\frac{\Delta T(r)}{T_1} = \frac{1}{\alpha^4} (r^2 - \alpha^2)^2 e^{-r^2/\sigma^2}$$

où $\alpha = 7$, $\sigma = 0.07$ et $r = \sqrt{(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2}$. Les caractéristiques du calcul sont représentées sur la figure 5.22.

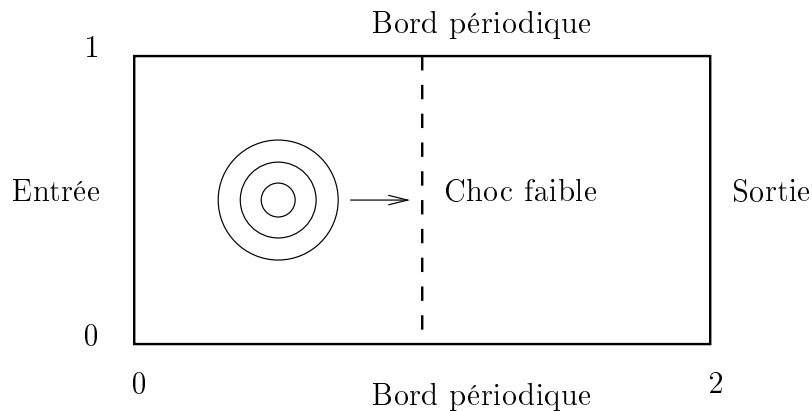


FIG. 5.22 – *Domaine de calcul et conditions aux limites*

Des conditions de périodicité sont appliquées sur les bords supérieur et inférieur du domaine. Les conditions à l'entrée et à la sortie sont traitées, de façon décentrée, par un schéma de Steger-Warming [SW81].

En plus des quantités classiques de l'écoulement, et pour la comparaison avec l'article [T+00], on s'intéresse à la vorticité

$$\omega = v_x - u_y$$

et à l'évolution en temps de l'intégrale de son module

$$\int_{\Omega} |\omega| d\Omega . \quad (5.2)$$

On étudie également l'évolution au cours du temps de l'intégrale du moment baroclinique

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\nabla p \times \nabla \rho}{\rho^2} \right| d\Omega . \quad (5.3)$$

5.3.1 Cas d'un gaz réel TPCP

Dans un premier temps, pour une validation détaillée de notre méthode et une comparaison avec les résultats pr esent es dans [T+00], le gaz réel est suppos e TPCP et le rapport des chaleurs spécifiques est constant $\gamma = 1.4$.

5.3.1.1 Détermination des conditions initiales

Les valeurs initiales à gauche et à droite sont calculées en résolvant les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ h_1 + 1/2 u_1^2 = h_2 + 1/2 u_2^2 \end{cases} \quad (5.4)$$

où les composantes de la vitesse verticales v_1 et v_2 sont nulles et h est l'enthalpie spécifique. Suivant la méthode décrite par Williams [Wi85], si l'on pose

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m ,$$

les deux dernières équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{p_2 - p_1}{(1/\rho_2) - (1/\rho_1)} = -m^2 \quad (5.5)$$

et

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) (p_2 - p_1) . \quad (5.6)$$

Ces deux équations lient p et $1/\rho$ indépendamment de la vitesse. Le gaz étant TPCP, l'enthalpie interne s'exprime simplement $h = \gamma p / (\gamma - 1) \rho$ et une solution $(1/\rho_2, p_2)$ peut s'interpréter comme l'intersection d'une droite, la droite de Rayleigh, donnée

par l'équation (5.5) et d'une hyperbole, la courbe de Hugoniot, dont l'équation est (5.6). La première équation de (5.4) permet ensuite de déduire la vitesse.

Les valeurs initiales que l'on obtient sont :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, & \rho_2 = 1.52 \text{ kg.m}^{-3} \\ p_1 = 103320 \text{ Pa}, & p_2 = 144648 \text{ Pa}, \\ u_1 = 402.32 \text{ m.s}^{-1}, & u_2 = 316.71 \text{ m.s}^{-1}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, & T_2 = 330.63 \text{ K}. \end{cases}$$

5.3.1.2 Résultats numériques

Comme pour le cas test précédent, tous nos résultats sont comparés aux solutions de référence présentées dans [T+00]. Celles-ci ont été obtenues avec un schéma de Hermite d'ordre 6 sur trois maillages quadrangulaires : un maillage grossier de 101×51 points, un maillage intermédiaire de 201×101 points et un maillage fin de 801×101 points. Nous choisissons, pour limiter le nombre de figures, de présenter les isovaleurs de nos solutions uniquement sur notre maillage le plus fin contenant 80901 points et obtenu par découpage en drapeaux anglais du maillage quadrangulaire de 801×101 points. Nous utilisons le maillage intermédiaire de 201×101 points uniquement pour la comparaison des intégrales de la vortacité (5.2) et du moment baroclinique (5.3), en conformité avec [T+00]. Les maillages de 201×101 points et 801×101 points sont respectivement référencés par M1 et M2. Nous utilisons un seul schéma numérique : le schéma de Runge-Kutta 4 et le β -schéma pour $\beta = 1/3$.

On présente d'abord les solutions au temps adimensionné 0.5 ($t_1 = 0.5/u_1$, temps où le spot de température traverse le choc) obtenues avec un solveur Navier-Stokes classique ($\gamma_1 = 1.4$) et la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.66$. Les isovaleurs de la masse volumique, de la pression et de la vortacité sont présentées pour les deux méthodes figure 5.23.

Ces solutions sont tout à fait comparables aux résultats présentés dans [T+00]. On constate une modification de la courbure du choc visible sur les isovaleurs de la densité et de la pression, une zone de basse pression en aval du choc et la présence d'une paire de tourbillons de vitesse correspondant à des valeurs positives et négatives de vortacité. Lorsque l'on compare les deux colonnes de résultats (solveur Navier-Stokes classique/méthode de relaxation), on ne constate aucune différence visible, quelle que soit la variable. Il faut noter que la valeur $\gamma_1 = 1.66$ est une valeur extrême puisque la seule contrainte est que γ_1 soit supérieur à γ dans tout le domaine c'est à dire, dans ce cas, à 1.4.

De même, on présente les solutions au temps adimensionné égal à 1. ($t_2 = 1./u_1$), obtenues pour le solveur Navier-Stokes gaz parfait classique et le schéma de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$. Les isovaleurs de la densité, de la pression et de la vortacité, figure 5.24, sont également comparables aux résultats de référence.

La seule différence par rapport aux résultats du schéma de Hermite concerne les traces visibles au niveau du choc. Elles sont dues au schéma que nous utilisons. Les schémas TVD et ENO, d'un ordre inférieur à 6 et qui sont également considérés

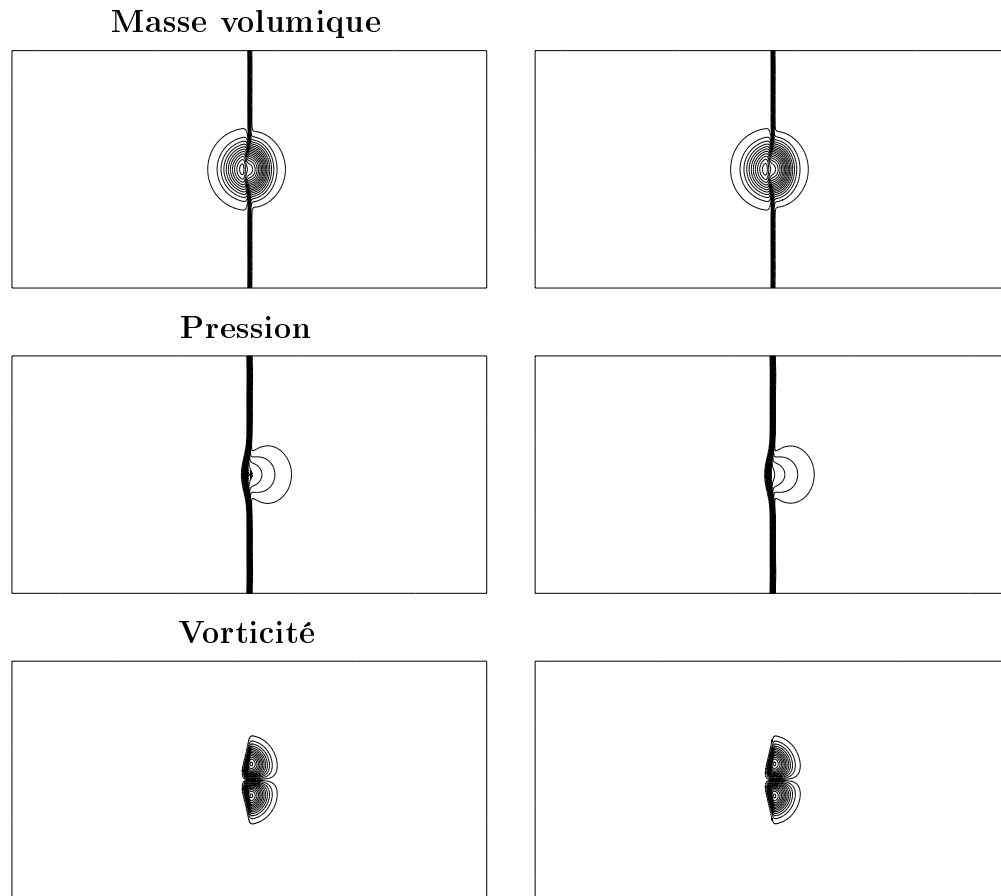


FIG. 5.23 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression et de la vorticité à t_1
- Gaz TPCP $\gamma = 1.4$ - Solveur Navier-Stokes (à gauche) et méthode de relaxation
avec $\gamma_1 = 1.66$ (à droite)

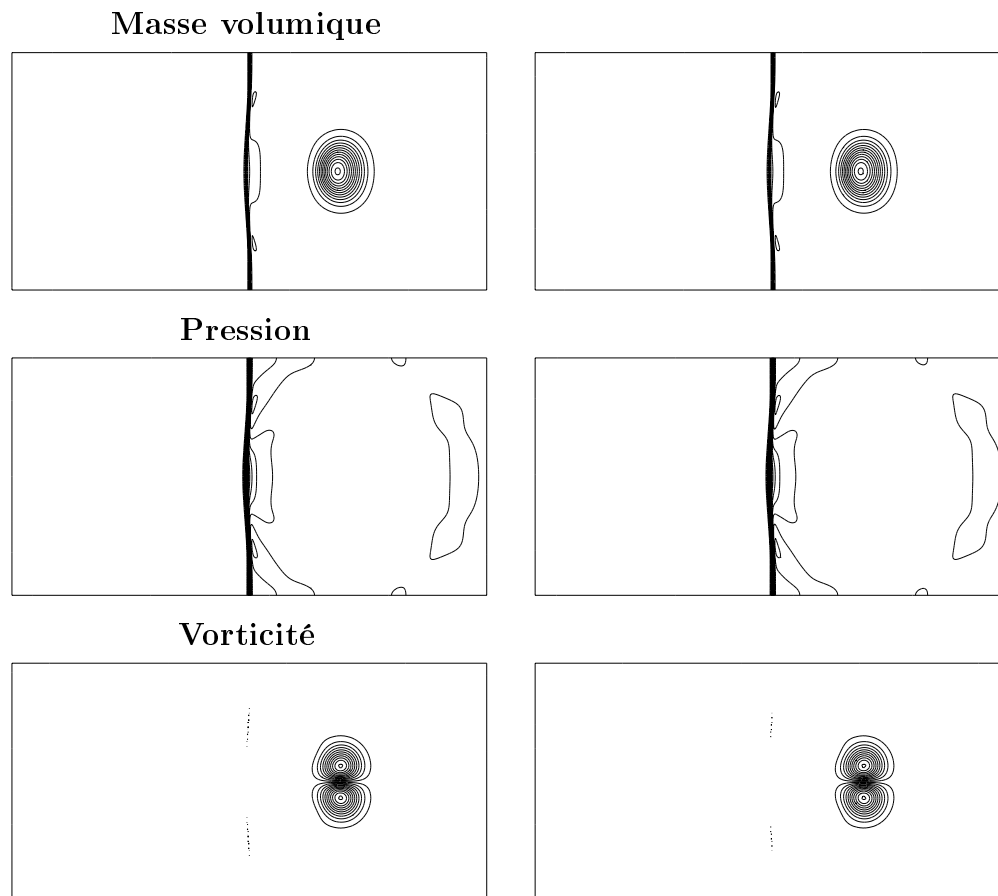


FIG. 5.24 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression et de la vorticité à t_2 - Gaz TPCP $\gamma = 1.4$ - Solveur Navier-Stokes (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (à droite)

dans [T+00], produisent eux aussi ces traces dans le choc. En examinant les deux colonnes de solutions, on peut encore constater que les résultats provenant de la méthode de relaxation sont identiques à ceux du solveur de Navier-Stokes dédié aux gaz TPCP.

On compare plus finement les solutions des deux méthodes en présentant, figure 5.25, les coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ aux temps t_1 et t_2 . Les courbes se superposent dans tous les cas.

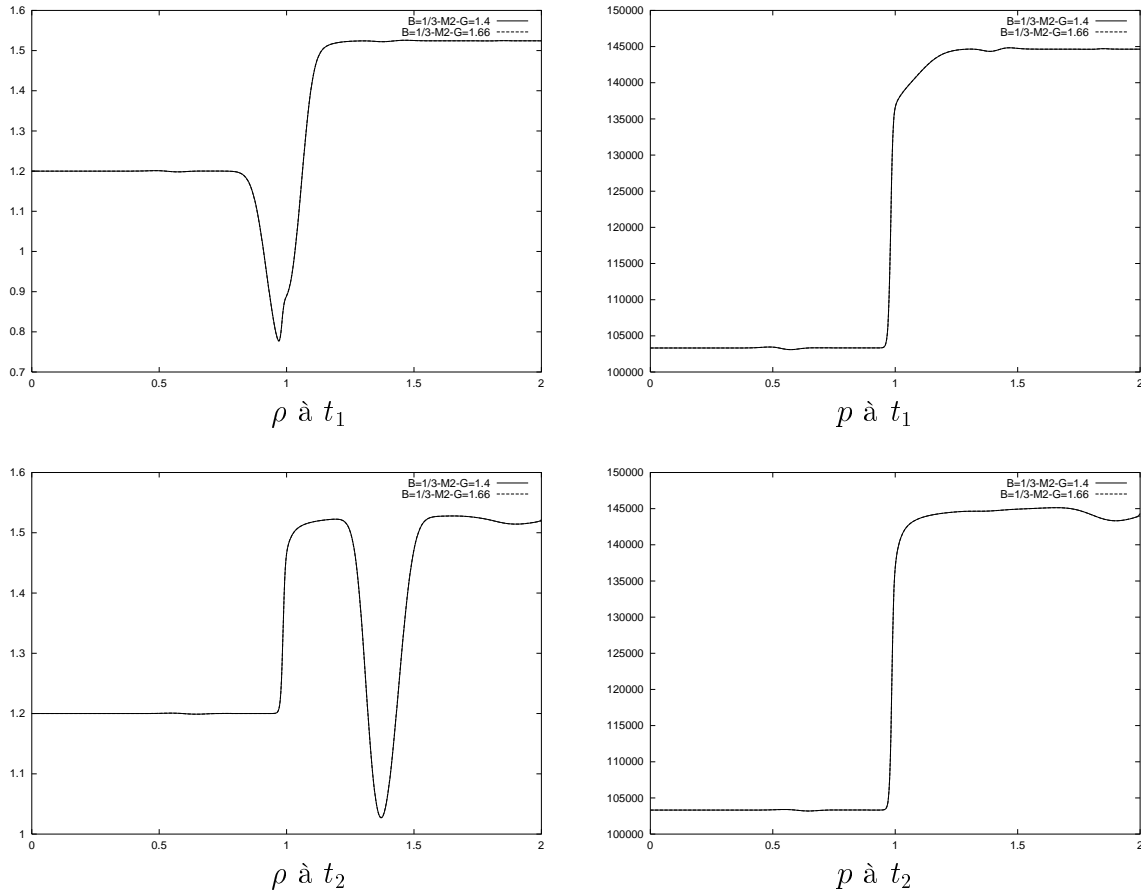


FIG. 5.25 – Coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.66$) - Maillage de 80901 points

On s'intéresse à présent à l'évolution au cours du temps de l'intégrale sur le domaine de calcul de la norme de la vorticité (5.2) et du moment baroclinique (5.3). Ces deux quantités sont de bons indicateurs de la précision de la solution.

On compare, figure 5.26, les résultats obtenus sur les maillages M1 et M2 pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.66$. On superpose également la solution de référence [T+00]. Pendant les premières itérations en temps,

l'intégrale de $|\omega|$ est très faible. Vers un temps adimensionné d'environ 0.35, le spot commence à interagir avec le choc et la production de vorticité augmente régulièrement pour se stabiliser vers un temps adimensionn e proche de 0.6. Les résultats que nous obtenons sont très proches de ceux de la méthode de Hermite. Les courbes correspondant au maillage le plus grossier M1 sont plus éloignées de la courbe de référence que celles du maillage M2. De plus, l'erreur entre les solutions correspondant aux valeurs $\gamma_1 = 1.4$ et $\gamma_1 = 1.66$ est très réduite pour le maillage M2 et plus visible pour le maillage M1.

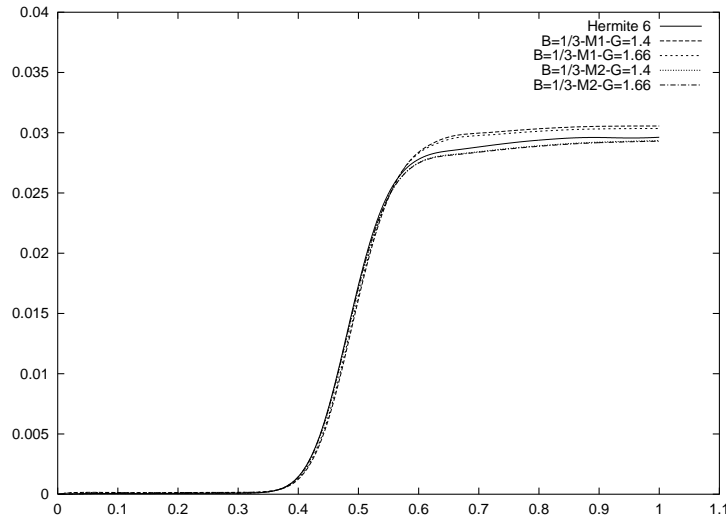


FIG. 5.26 – Evolution en temps de l'intégrale de $|\omega|$ pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.66$) - Maillage de 80901 points

On s'intéresse à présent à l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (5.3). Comme précédemment pour la vorticité, on compare les résultats obtenus pour les maillages M1 et M2 par le solveur Navier-Stokes et par la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.66$, figure 5.27. On superpose également la courbe correspondant à la solution de référence [T+00].

Les valeurs non-nulles de cette intégrale se situent à des temps adimensionn es compris entre 0.3 et 0.7, c'est à dire lorsque le spot de température traverse le choc. Les courbes correspondant aux différents résultats sont très proches. Une comparaison plus précise est faite sur le zoom autour du maximum, figure 5.28. On constate que les résultats obtenus pour le maillage M2 sont très proches de la solution du schéma de Hermite et que l'erreur provenant de la méthode de relaxation est très faible. Les résultats sont moins bons pour le maillage M1 et l'erreur provenant de la méthode de relaxation est plus visible dans ce cas.

L'ensemble des résultats que nous obtenons sont satisfaisants et ce cas test constitue une validation de la méthode de relaxation dans une situation où tous les termes additionnels li es aux flux diffusifs interviennent.

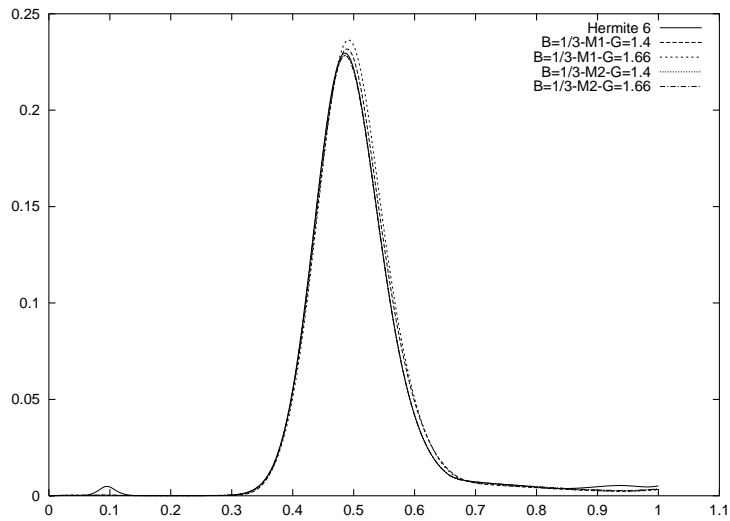


FIG. 5.27 – Evolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (5.3) pour le solveur Navier-Stokes et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.66$)

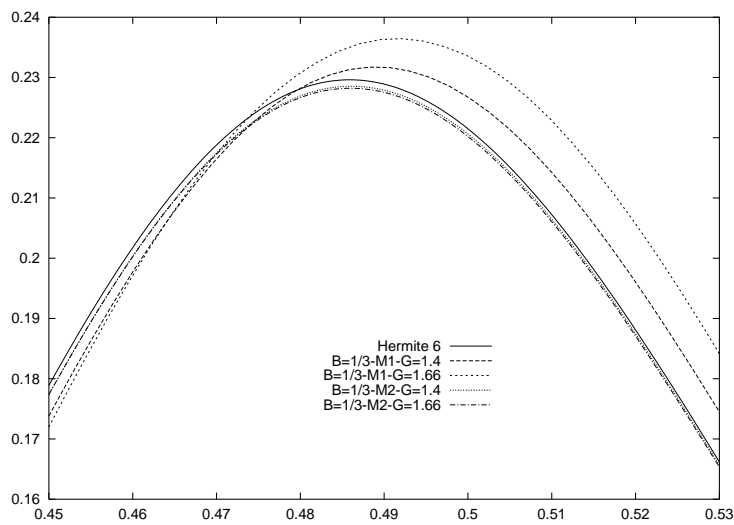


FIG. 5.28 – Zoom de l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (5.3) autour du maximum. Solveur de Navier-Stokes, méthode de relaxation $\gamma_1 = 1.66$ et schéma de Hermite

5.3.1.3 Influence du type de maillage

Pour terminer cette étude détaillée du cas d'un gaz TPCP, on étudie, comme pour le cas test précédent, l'influence du type de maillage sur la solution. On considère trois maillages. Les deux premiers sont obtenus en découpant un maillage quadrangulaire de 201×101 points d'une part de façon uniforme et d'autre part en drapeaux anglais. Ces deux maillages contiennent 20301 points et 40000 triangles. Le troisième maillage triangulaire est non-structuré, de type quasi-Delaunay et ayant les mêmes nœuds sur le bord du domaine que les deux autres maillages. Le maillage non-structuré contient 23440 points et 46278 triangles. La comparaison entre les différents maillages est effectuée en utilisant la valeur $\gamma_1 = 1.4$.

On compare, figure 5.29, l'évolution temporelle de l'intégrale sur le domaine de la norme de la vorticité (5.2) pour les trois maillages. On superpose également la courbe obtenue dans [T+00] avec le schéma de Hermite en utilisant un maillage plus fin de 801×101 points. On constate que le résultat obtenu avec le découpage uniforme est très différent des autres courbes, notamment dès les premières itérations. En effet, tandis que pour les autres courbes l'intégrale de la vorticité est nulle jusqu'à un temps adimensionné d'environ 0.35 qui correspond au début de l'interaction entre le spot de température et le choc, pour le découpage uniforme, on constate une valeur importante de la vorticité dès les premières itérations. Les autres résultats sont très proches de la courbe de référence, surtout celles correspondant au maillage non-structuré.

On s'intéresse à présent à l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique pour les différents maillages. Pour plus de clarté, on présente directement le zoom autour du maximum, figure 5.30. Les différences entre les trois maillages sont plus faibles sur cette intégrale que pour la norme de la vorticité. Une fois de plus, le maillage non-structuré fournit les meilleurs résultats, les deux autres découpages présentant un déphasage sur le temps auquel le maximum est atteint.

Afin de comprendre le comportement de l'intégrale de $|\omega|$, on présente, figure 5.31, les isovaleurs de la vorticité au temps t_2 pour les trois maillages étudiés. Les différences des solutions sont très nettes au niveau du choc, puisque, dans le cas du découpage uniforme, des isovaleurs au niveau du choc sont visibles. Le maillage non-structuré produit une fois de plus la solution la plus proche de la solution de référence.

5.3.2 Cas d'un gaz réel TPCI

On s'est également intéressé à deux cas différents de gaz TPCI. Cette situation n'est pas abordée dans l'article [T+00] mais l'utilisation de gaz parfaits non TPCP étant l'objectif initial de la méthode de relaxation, une validation complète de notre méthode nécessite d'utiliser des lois non-linéaires pour l'énergie interne et un γ dépendant de la température.

Pour valider les résultats de la méthode de relaxation, on les compare aux solu-

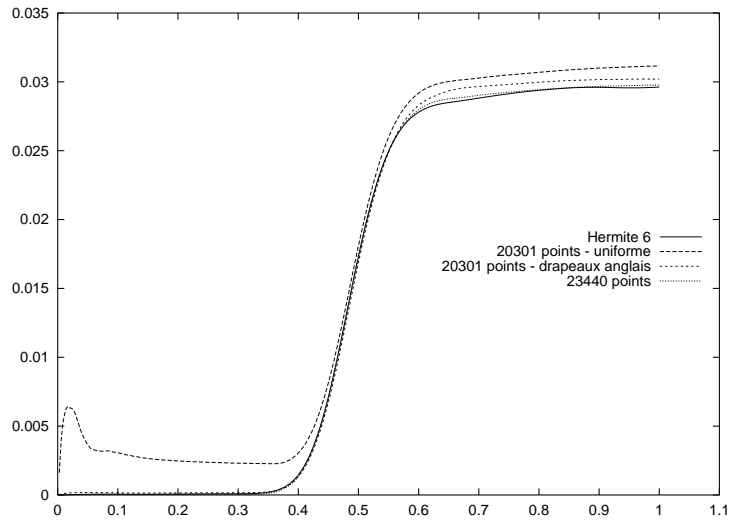


FIG. 5.29 – Comparaison de l'évolution en temps de l'intégrale de $|\omega|$ pour le maillage de 20301 points (découpage uniforme, en drapeaux anglais) et le maillage non-structuré de 23440 points

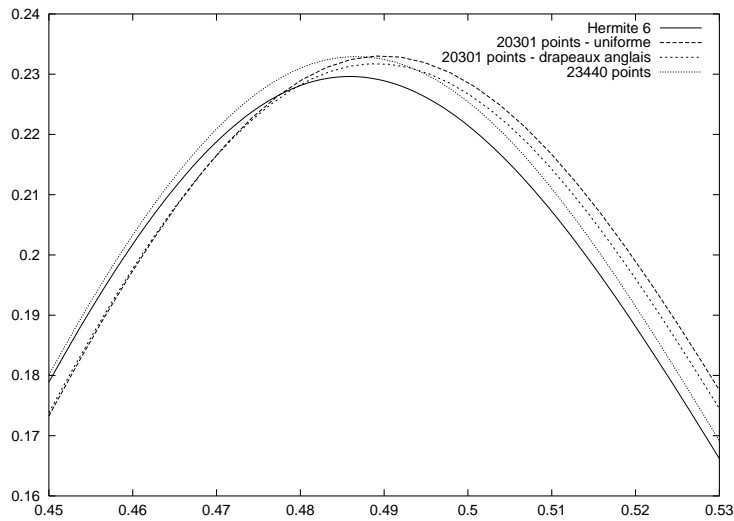
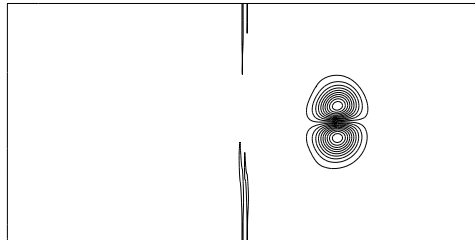
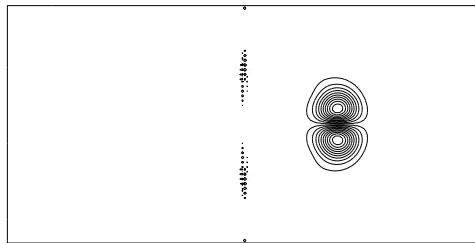


FIG. 5.30 – Zoom de l'évolution en temps de l'intégrale du moment baroclinique (5.3) autour du maximum. Comparaison des maillages de 20301 points (découpage uniforme et drapeaux anglais) et du maillage non-structuré de 23440 points

Maillage de 20301 points - découpage uniforme



Maillage de 20301 points - drapeaux anglais



Maillage non-structuré de 23440 points

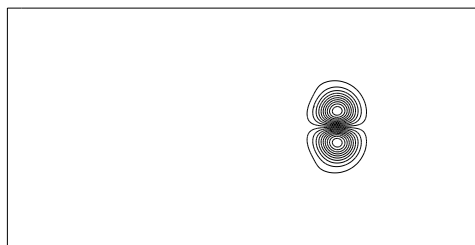


FIG. 5.31 – Isovaleurs de la vorticité au temps t_2 pour les maillages de 20301 points (découpage uniforme et drapeaux anglais) et le maillage non-structuré de 23440 points

tions obtenues avec un solveur Navier-Stokes gaz réel obtenu en modifiant le solveur de Riemann pour inclure les non-linéarités en ε et éliminer la relation $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$ qui n'est plus valable ici. Deux cas différents ont été étudiés.

5.3.2.1 γ polynômial

Partant d'un fichier donnant le γ de l'air pour une température comprise entre 300 et 3000 K, représenté figure 5.32, et se limitant aux températures comprises entre 300 et 600 K, on peut approcher par régression linéaire ces valeurs via un polynôme du second degré en posant:

$$\gamma(T) = aT^2 + bT + c,$$

où

$$a = -6.85 \cdot 10^{-8} \text{K}^{-2}, \quad b = -4.76 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad c = 1.3526.$$

À partir de cette définition de γ , on déduit l'expression de l'énergie spécifique interne

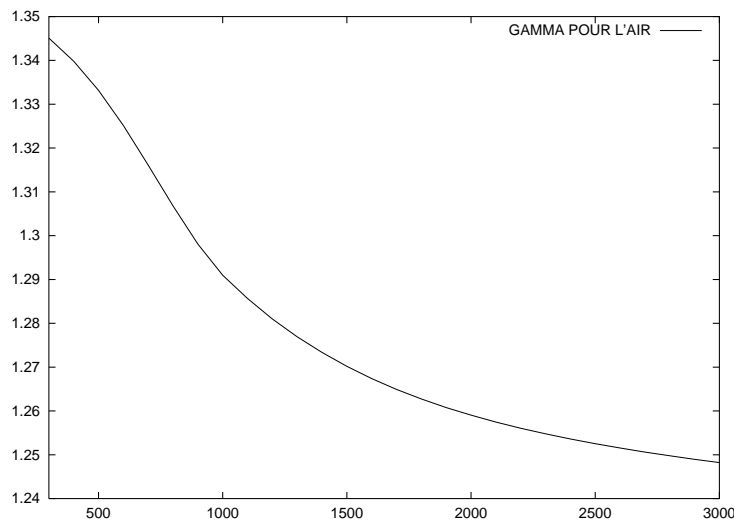


FIG. 5.32 – γ de l'air en fonction de la température

$$\varepsilon(T) = \int_{T_0}^T c_v(\tau) d\tau \quad \text{où} \quad c_v(T) = \frac{R}{\gamma(T) - 1},$$

nécessaire pour le calcul de la température puis de la pression $p = \rho R T$ à chaque itération.

Les valeurs initiales à droite et à gauche vérifient les conditions générales de Rankine-Hugoniot et, comme précédemment pour un gaz TPCP, on utilise la méthode développée par Williams [Wi85]. Mais, à présent, le gaz étant TPCI, la courbe de Hugoniot décrite par (5.6) n'est plus une hyperbole mais une courbe dont l'allure

générale ressemble à une hyperbole et dont les asymptotes en $1/\rho \rightarrow 0$ et $1/\rho \rightarrow +\infty$ sont les mêmes que dans le cas d'un gaz TPCP. L'intersection de cette courbe avec la droite de Rayleigh est calculée itérativement par une méthode de point fixe. On obtient les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, & \rho_2 = 1.53 \text{ kg.m}^{-3} \\ p_1 = 103320 \text{ Pa}, & p_2 = 144022 \text{ Pa}, \\ u_1 = 394.35 \text{ m.s}^{-1}, & u_2 = 308.33 \text{ m.s}^{-1}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, & T_2 = 326.97 \text{ K}. \end{cases}$$

On constate que le rapport des chaleurs spécifiques varie entre $\gamma(300) = 1.3450$ et $\gamma(600) = 1.3251$. En conformité avec la condition "sous-caractéristique" (3.12), nous prenons une valeur de γ_1 supérieure au maximum de $\gamma(T)$, c'est à dire, dans ce cas, supérieur à $\gamma(300)$. Dans les résultats présentés ci-dessous, la méthode de relaxation a été mise en œuvre avec $\gamma_1 = 1.38$.

Comme dans le cas précédent (gaz TPCP), on présente les isovaleurs aux temps adimensionnés $t_1 = 0.5/u_1$ et $t_2 = 1./u_1$. Les isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité au temps t_1 sont présentées sur les figures 5.33. On présente également les isovaleurs de la température. On note une grande similitude entre les solutions obtenues avec un solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation à l'exception de la vorticité, solution de solveur Navier-Stokes gaz réel, qui présente une légère oscillation en arrière du choc. Ceci prouve les bons résultats de la méthode de relaxation même dans le cas où γ est une fonction de la température. Le comportement des différentes variables est comparable au cas précédent de gaz TPCP.

On présente à présent les isovaleurs des mêmes quantités au temps t_2 . Les résultats des deux méthodes sont une fois de plus comparables, on notera simplement, en comparant les isovaleurs de la vorticité, une légère trace dans le choc visible sur la solution de la méthode de relaxation. Le comportement de la masse volumique et de la vorticité, figure 5.34, sont très proches du cas gaz TPCP. Seule la pression présente une oscillation en sortie un peu plus étendue que dans le cas d'un gaz TPCP.

On compare à présent, figures 5.35 et 5.36, les coupes de la masse volumique, de la pression, de la température et de γ aux temps t_1 et t_2 pour le solveur de Navier-Stokes incluant un γ variable et la méthode de relaxation pour $\gamma_1 = 1.38$.

On constate que dans tous les cas les courbes se superposent ; seuls les extrema présentent un léger écart (minimum de ρ à t_2 , maximum de T et minimum de γ).

5.3.2.2 Loi vibratoire

Un second cas de gaz TPCI est celui où l'énergie spécifique interne suit une loi vibratoire

$$\varepsilon = c_v^{tr} T + \frac{\alpha \Theta_{vib}}{\exp\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right) - 1}$$

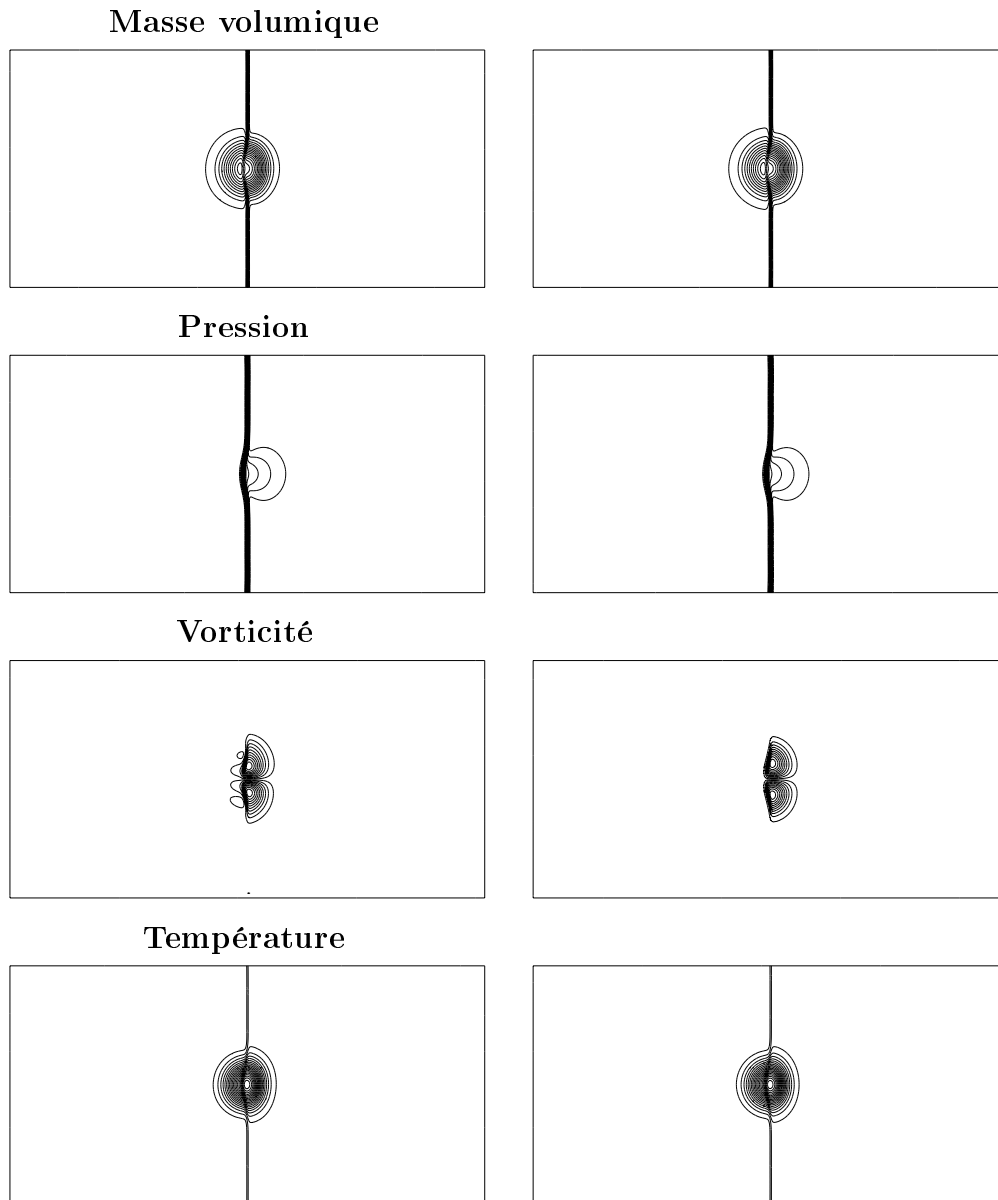


FIG. 5.33 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_1 - Loi de $\gamma(T)$ polynômiale - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

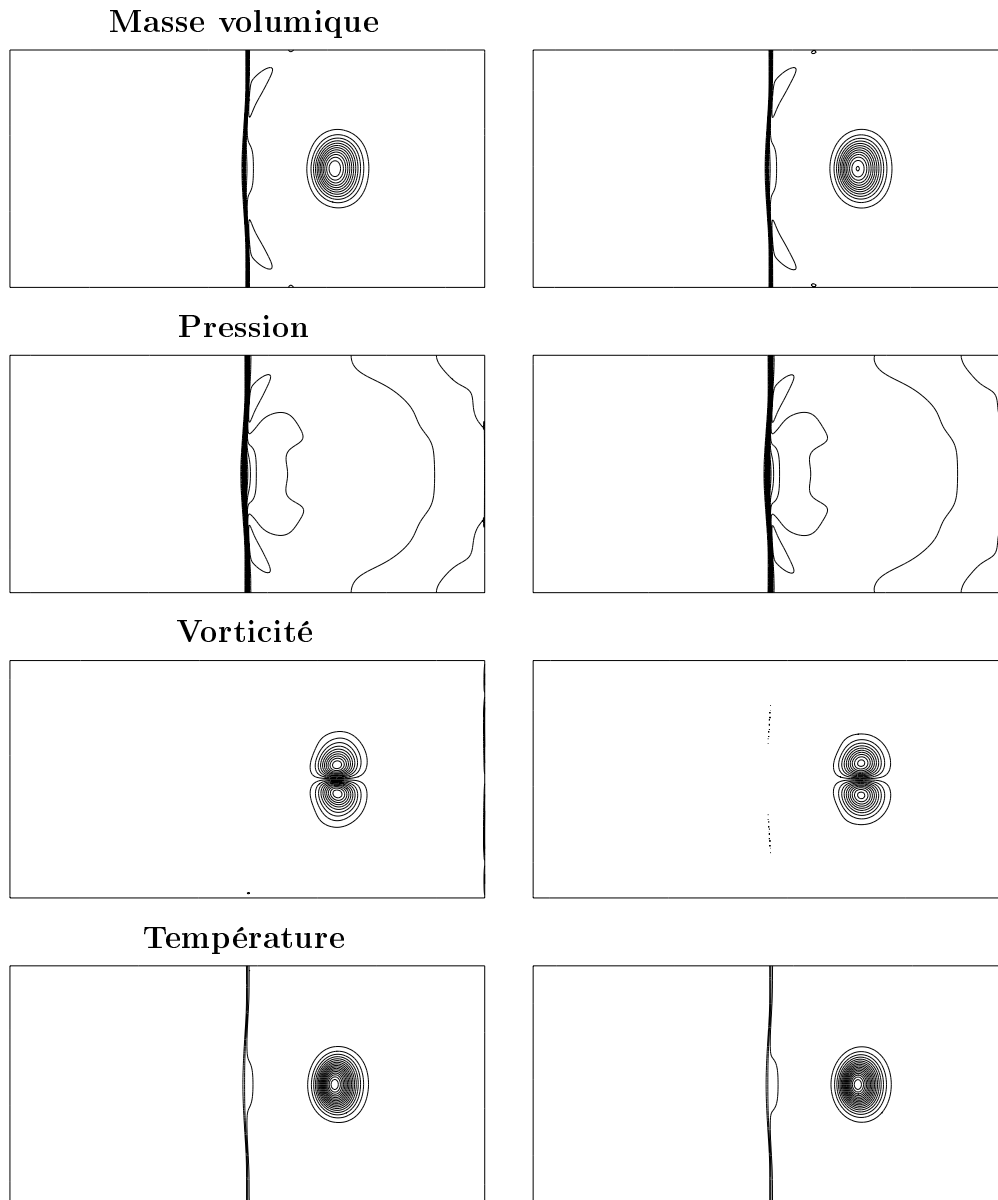


FIG. 5.34 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_2 - Loi de $\gamma(T)$ polynômiale - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

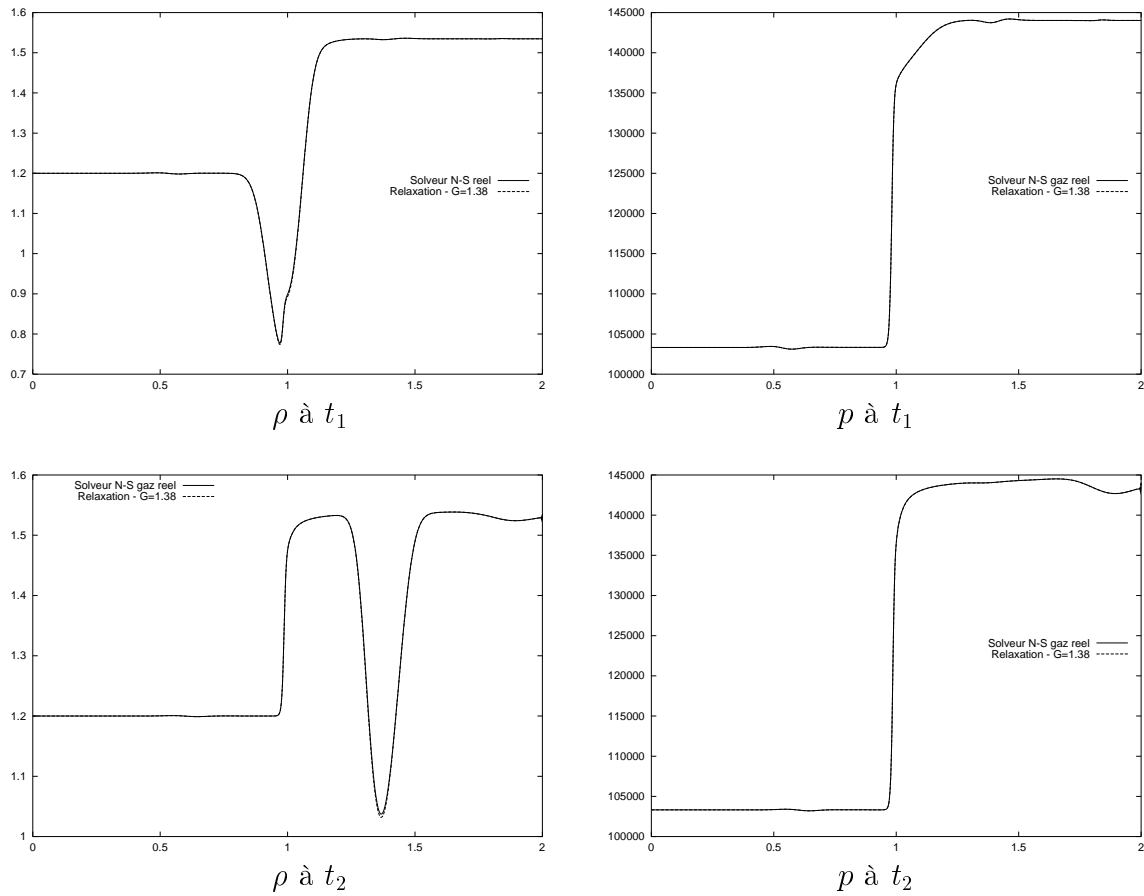


FIG. 5.35 – Coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi polynômiale

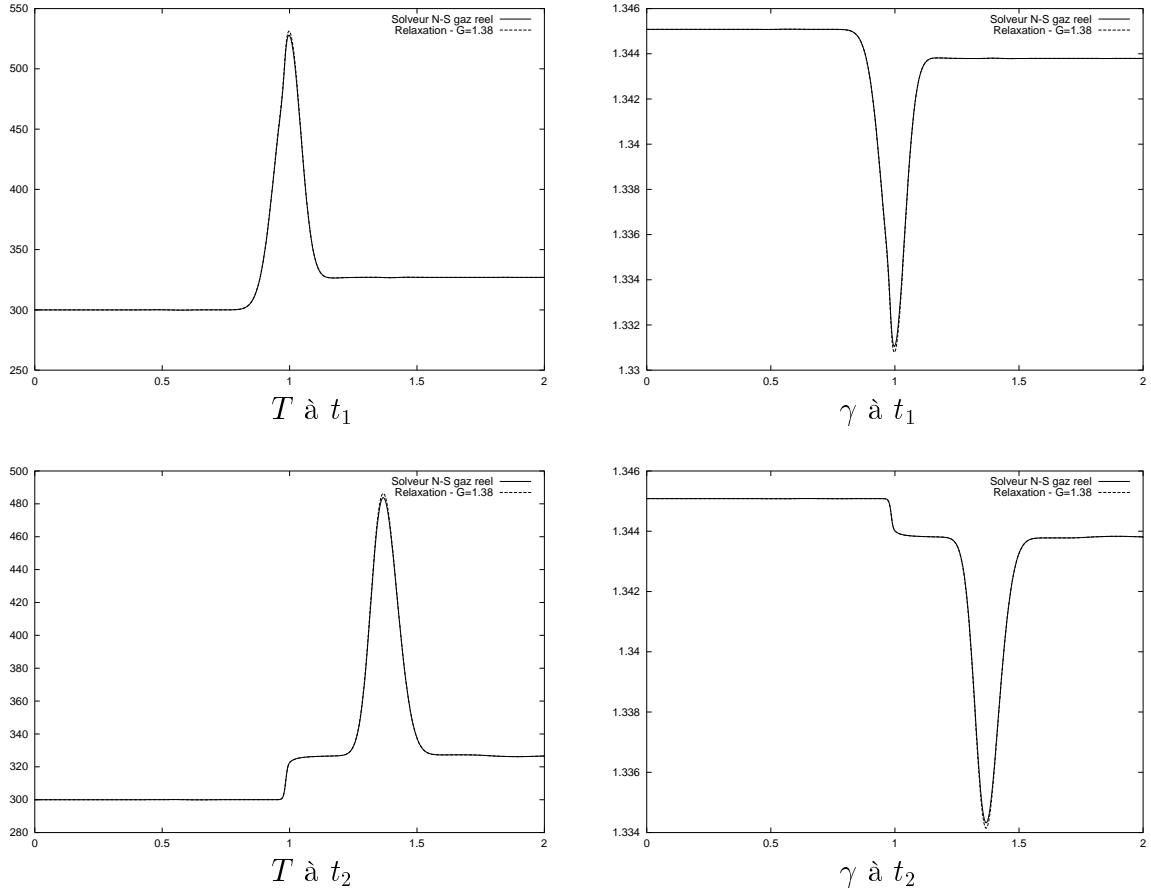


FIG. 5.36 – Coupes de la température et de γ en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi polynômiale

où $c_v^{tr} = R/(\gamma^{tr} - 1)$ est la chaleur spécifique à volume constant due au terme de translation ($\gamma^{tr} = 1.4$), $\Theta_{vib} = 1000$ K et $\alpha = R$. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser une méthode de Newton pour calculer la température à partir de ε . $\gamma(T)$ est déduit de ε sachant que

$$c_v(T) = \varepsilon'(T) \quad \text{et} \quad \gamma(T) = 1 + \frac{R}{c_v(T)}.$$

La courbe de γ en fonction de la température est présentée figure 5.37. On peut constater que la variation de γ est supérieure au cas précédent de loi polynômiale et qu'il est nécessaire d'utiliser des valeurs de γ_1 supérieures à 1.345 afin de satisfaire la condition "sous-caractéristique" (3.12).

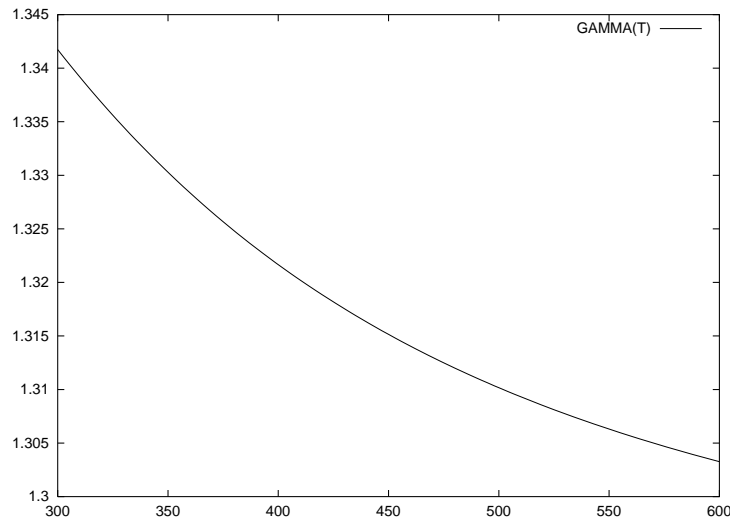


FIG. 5.37 – γ en fonction de la température pour la loi vibratoire

En appliquant les conditions générales de Rankine-Hugoniot, on obtient de nouvelles conditions initiales à gauche et à droite :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}, & \rho_2 = 1.53 \text{ kg.m}^{-3} \\ p_1 = 103320 \text{ Pa}, & p_2 = 144263 \text{ Pa}, \\ u_1 = 393.86 \text{ m.s}^{-1}, & u_2 = 307.23 \text{ m.s}^{-1}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, & T_2 = 326.75 \text{ K}. \end{cases}$$

Les figures 5.38 et 5.39 présentent les isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température aux temps t_1 et t_2 . Les résultats obtenus par le solveur de Navier-Stokes et la méthodes de relaxation sont tout à fait comparables ; on remarque, comme précédemment pour la loi polynômiale, une légère oscillation en arrière du choc sur les isovaleurs de la vorticité. Les résultats sont semblables aux résultats obtenus dans le cas de la loi de γ polynômiale, à l'exception de la masse volumique au temps t_2 .

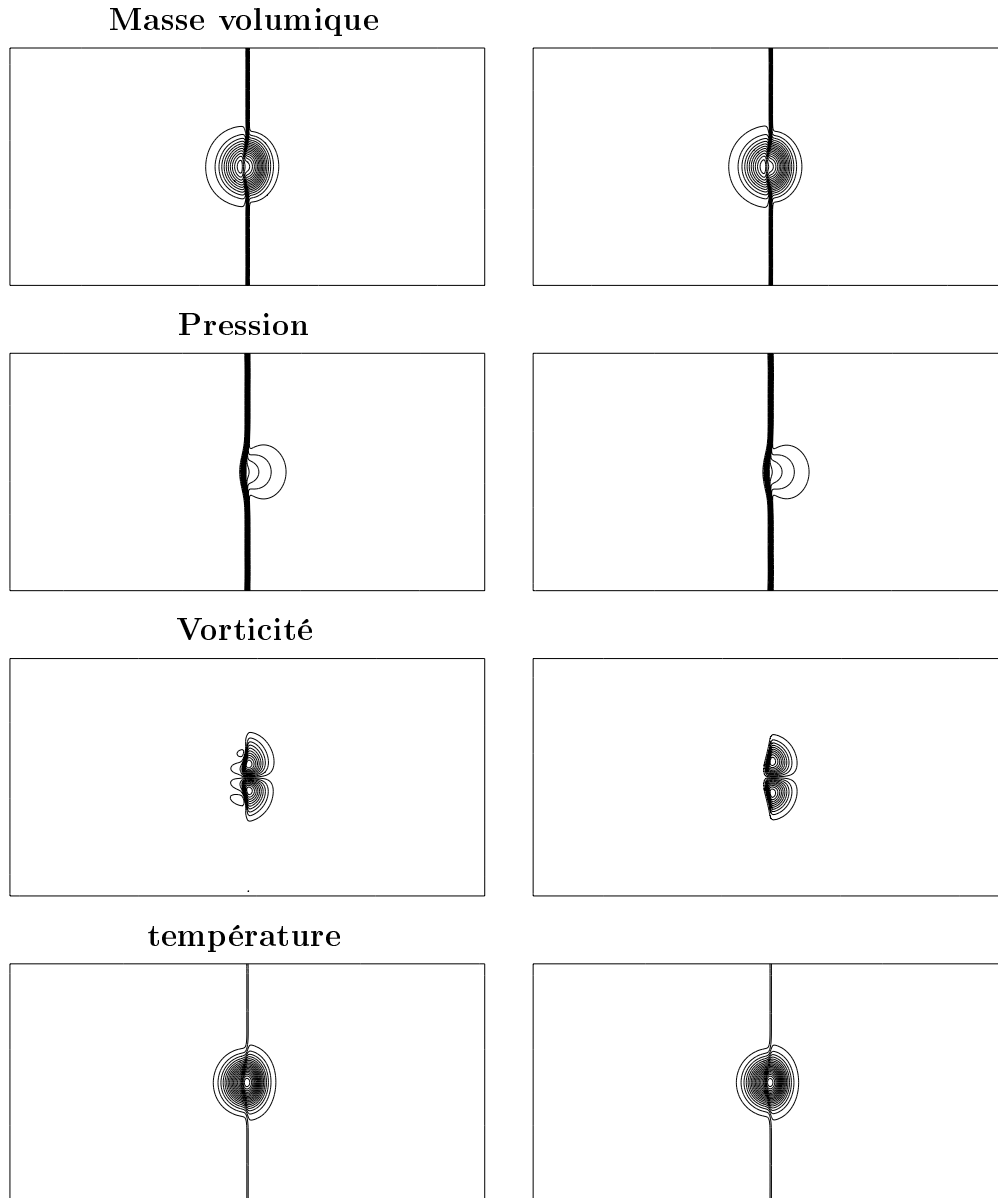


FIG. 5.38 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_1 - Loi vibratoire - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

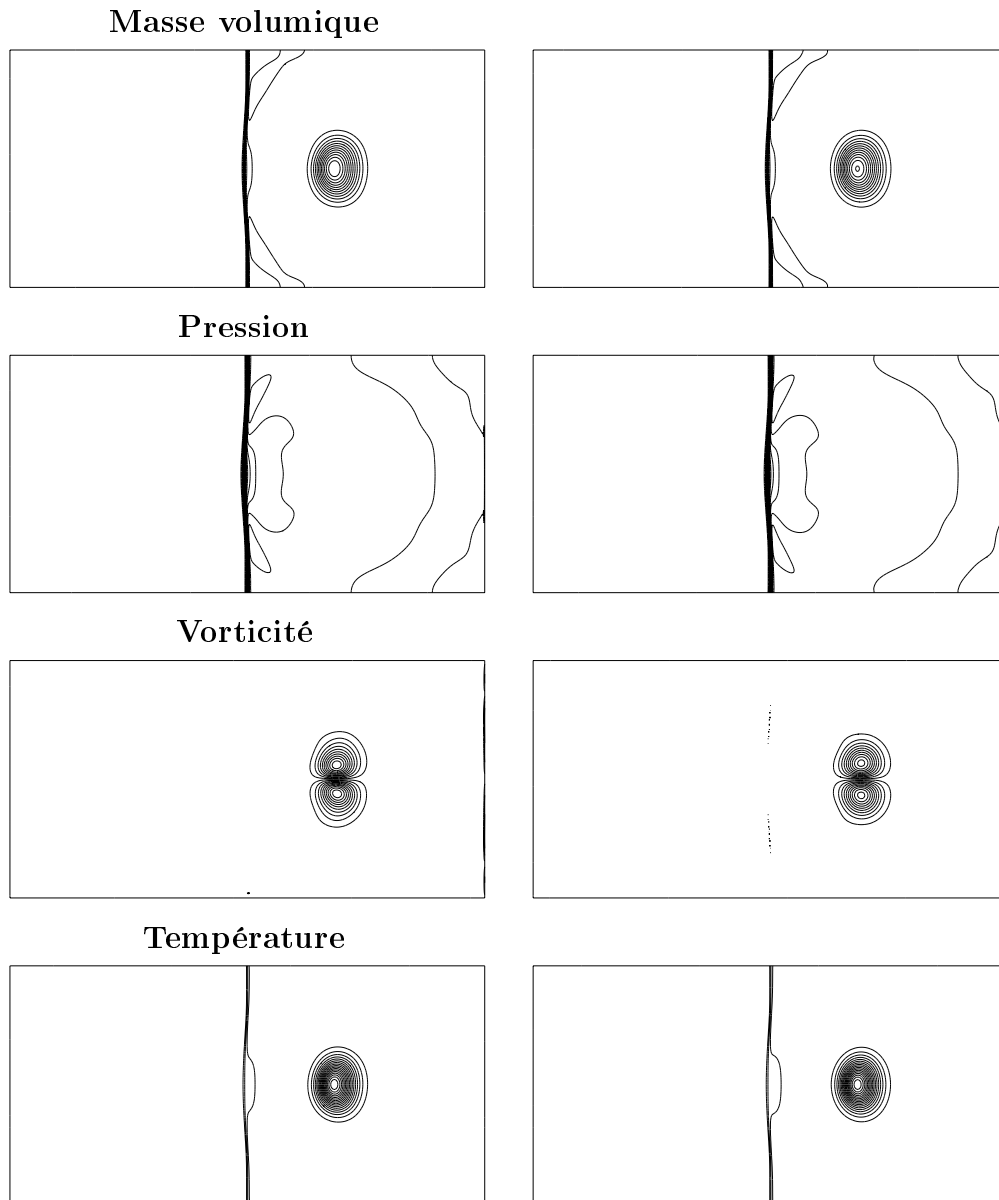


FIG. 5.39 – Isovaleurs de la masse volumique, de la pression, de la vorticité et de la température à t_2 - Loi vibratoire - Solveur Navier-Stokes gaz réel (à gauche) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.38$ (à droite)

Comme dans le cas de la loi de γ polynômiale, on présente, figures 5.40 et 5.41, les coupes en $y = 0.5$ de la masse volumique, de la pression, de la température et de γ aux temps t_1 et t_2 . On constate exactement le même comportement que pour la loi polynômiale : les courbes se superposent à l'exception de quelques différences sur les valeurs extrêmes de la masse volumique à t_2 , de la température et de γ .

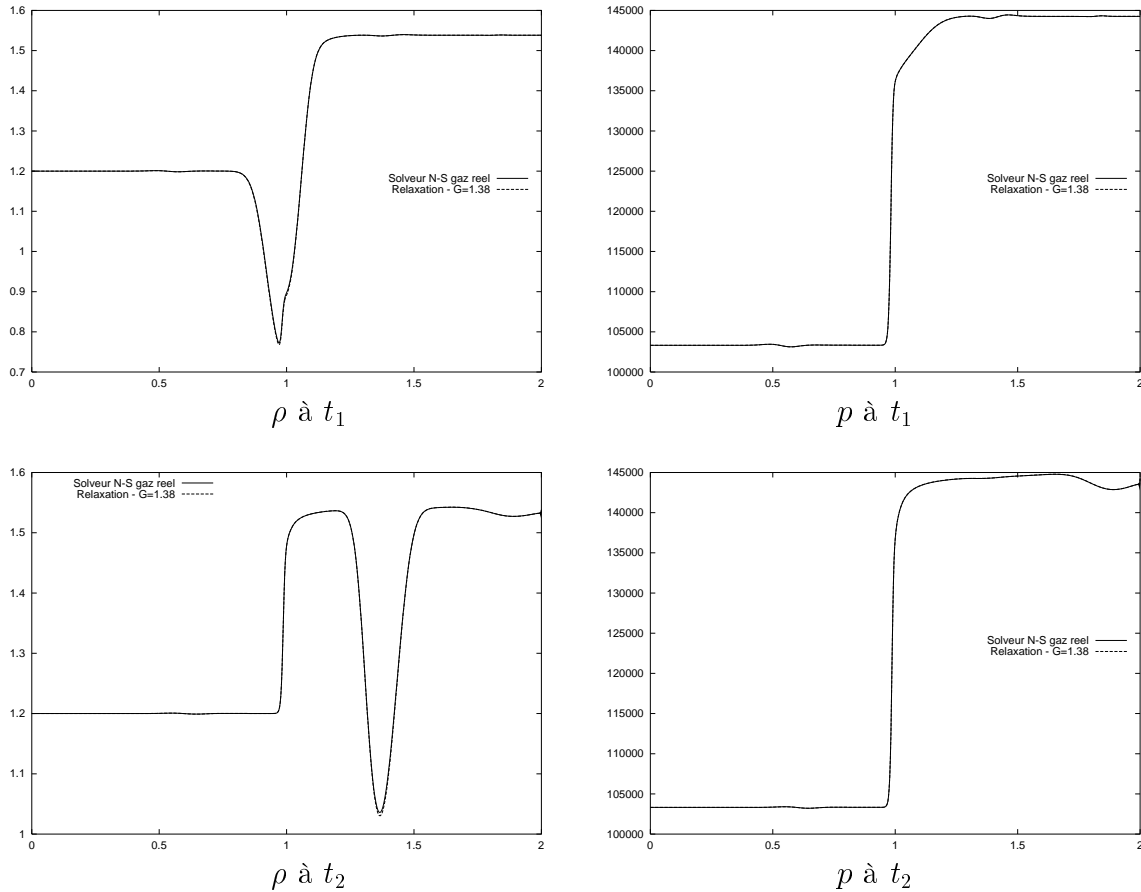


FIG. 5.40 – Coupes de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi vibratoire

5.3.2.3 Comparaison des différentes lois pour $\gamma(T)$

Pour terminer l'étude de ce cas test, on compare les solutions obtenues pour les différents types de gaz : le gaz TPCP et les deux lois de gaz TPCI. On superpose, figures 5.42 et 5.43, les coupes en $y = 0.5$ de la masse volumique, de la pression, de la température et de γ aux temps t_1 et t_2 solutions de la méthode de relaxation. Les différences sont très visibles sur le γ et beaucoup plus faibles pour les autres variables pour lesquelles on distingue moins les deux cas de gaz TPCI.

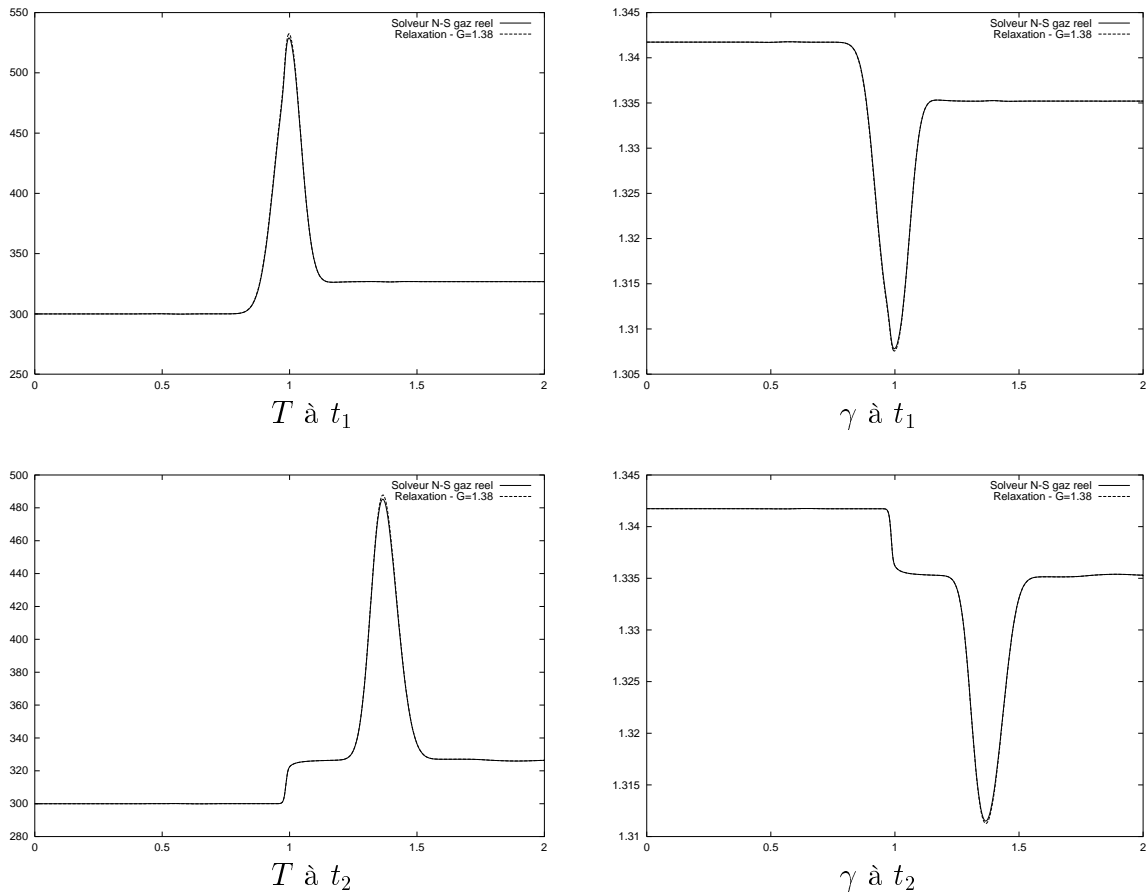


FIG. 5.41 – Coupes de la température et de γ en $y = 1/2$ pour le solveur Navier-Stokes gaz réel et la méthode de relaxation ($\gamma_1 = 1.38$) - Loi vibratoire

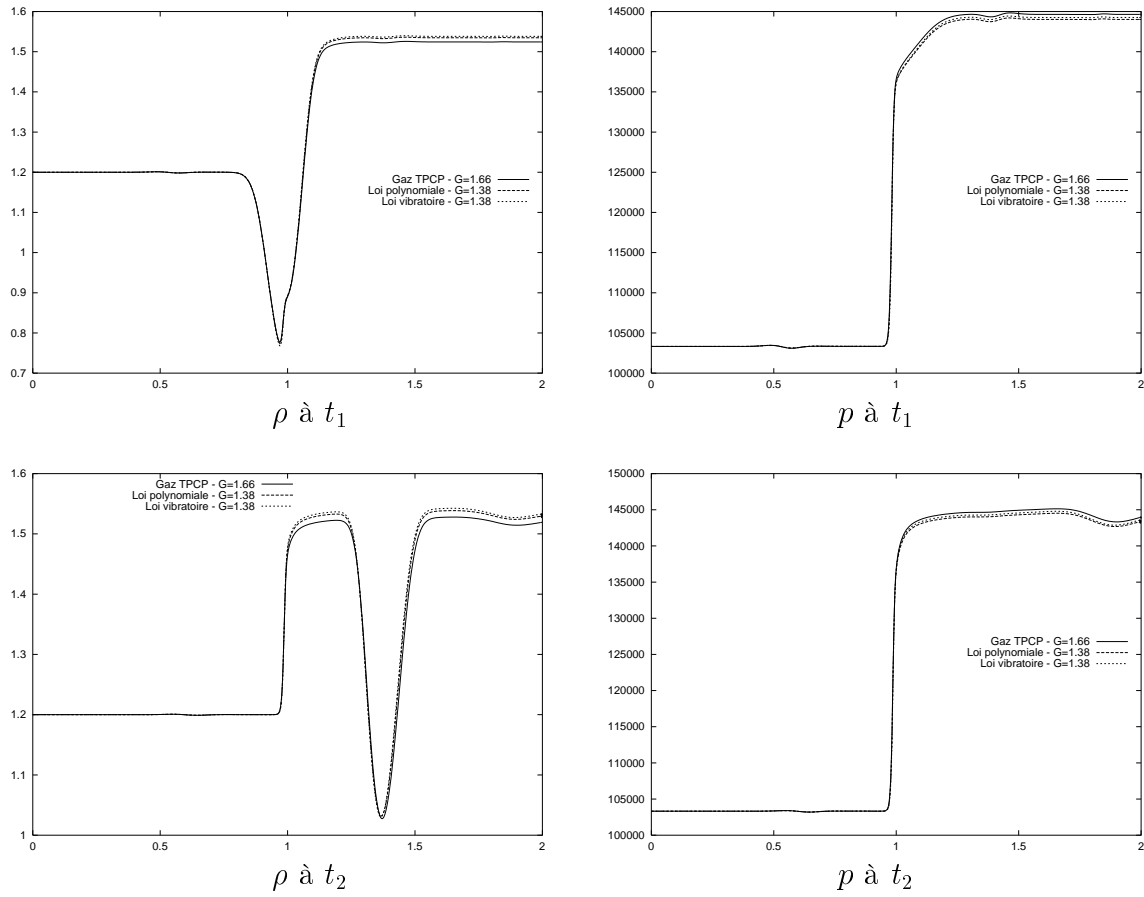


FIG. 5.42 – Comparaison de la masse volumique et de la pression en $y = 1/2$ pour le gaz TPCP, la loi polynômiale et la loi vibratoire - Méthode de relaxation

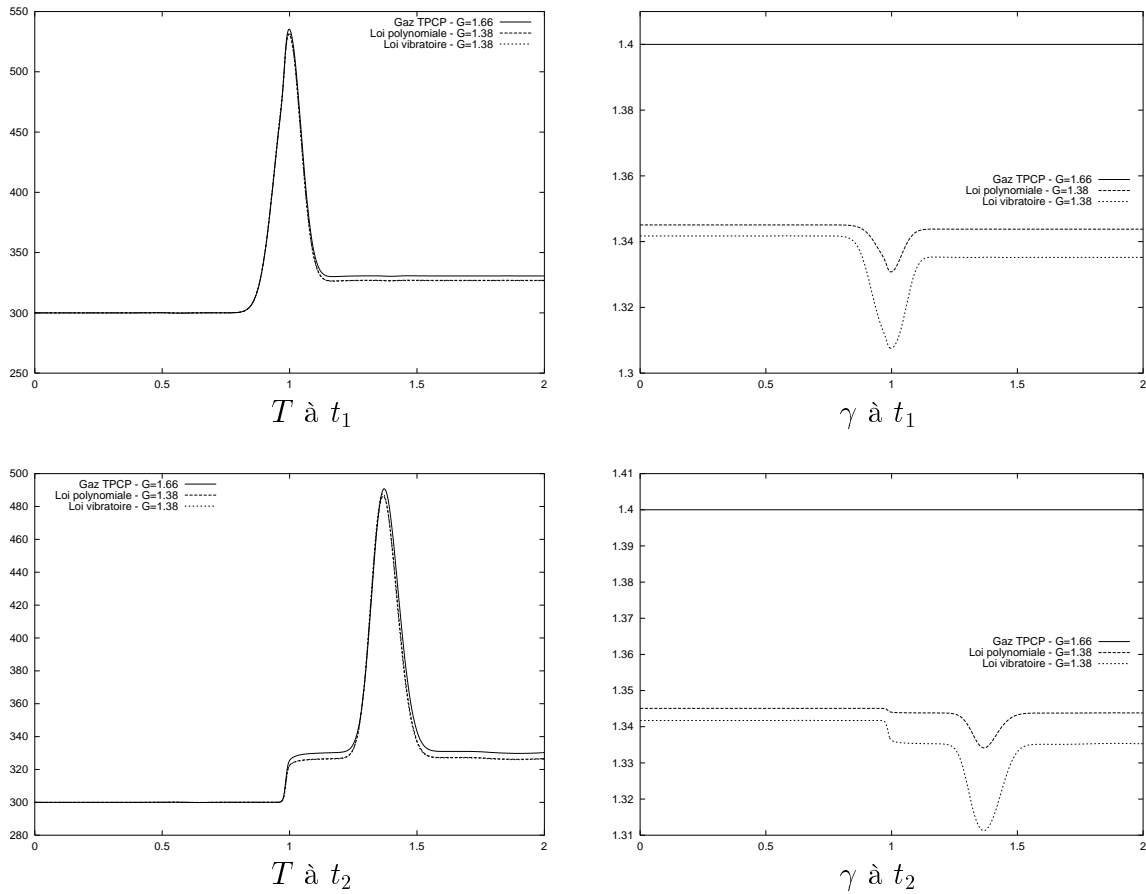


FIG. 5.43 – Comparaison de la température et de γ en $y = 1/2$ pour le gaz TPCP, la loi polynômiale et la loi vibratoire - Méthode de relaxation

5.4 Interaction d'un choc et d'une couche limite

5.4.1 Introduction

On s'est intéressé à un troisième cas test d'écoulement visqueux, l'interaction d'un choc et d'une couche limite. Ce cas test a été effectué et documenté par V. Daru et C. Tenaud dans [DT01] : la précision de plusieurs schémas TVD y est comparée. Ce cas test est plus complexe que les deux précédents puisque l'on étudie ici l'interaction visqueuse entre la couche limite générée à l'arrière d'une onde de choc se déplaçant dans une boîte fermée et le choc réfléchi résultant de sa réflexion sur la paroi. De cette interaction résulte une onde de choc en forme de λ . Ce phénomène s'explique par le fait que la pression dans la couche limite devient plus faible que la pression à l'arrière du choc réfléchi créant une zone d'écoulement détaché qui est entraînée avec le choc réfléchi. L'analyse de données expérimentales récentes [K+91] suggère que l'écoulement est turbulent dans cette zone.

Une étude détaillée de ce problème a été effectuée par Weber et al. [W+95] en utilisant un algorithme FCT. Les résultats sont très dépendants du nombre de Reynolds, du nombre de Mach ainsi que de la température à la paroi. V. Daru et C. Tenaud mettent en évidence la difficulté d'obtenir une solution convergée lorsque le nombre de Reynolds dépasse plusieurs centaines. Pour toutes ces raisons, ce cas test permet d'évaluer avec précision les propriétés d'un schéma numérique pour le calcul d'écoulements instationnaires.

5.4.2 Description de l'écoulement

On considère un tube à choc bidimensionnel, de forme carrée et dont les côtés sont de longueur 1. Les parois fermées sont isolées. Le domaine est séparé en deux parties en $x = 0.5$. Le gaz est TPCP ($\gamma = 1.4$) et les valeurs initiales à droite et à gauche sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_g = 120 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ p_g = \rho_g R T_g = 10332000 \text{ Pa}, \\ T_g = 300 \text{ K}, \\ u_g = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ v_g = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_d = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ p_d = \rho_d R T_d = 103320 \text{ Pa}, \\ T_d = 300 \text{ K}, \\ u_d = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ v_d = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \end{array} \right.$$

La boîte étant fermée, des conditions d'adhérence sont appliquées sur les parois solides

$$u = v = 0$$

Sur celles-ci, on applique également des conditions de parois adiabatiques, en imposant la nullité de la dérivée normale de la température. La solution étant supposée symétrique par rapport à un axe horizontal médian, les calculs sont réalisés sur un demi domaine seulement, de dimension $[0,1] \times [0,0.5]$. Des conditions de symétrie sont appliquées sur le bord $y = 0.5$. Les solutions présentées ici correspondent à un

nombre de Reynolds fixé à $Re = 200$. Le saut des variables initiales étant très important, nous utilisons pour ce cas test uniquement le schéma basé sur les limiteurs d'ordre élevé (ordre 3 et ordre 4), détaillés dans la section 4.1.3.3. Pour la méthode de relaxation, on utilise la valeur $\gamma_1 = 1.66$.

Dans l'article de référence [DT01], trois maillages quadrangulaires uniformes sont utilisés pour le demi-domaine, un maillage grossier de 250×125 points, jugé insuffisant pour ce cas test, un maillage intermédiaire de 500×250 points et un maillage fin de 1000×500 points. Nous réalisons les calculs sur deux maillages : un maillage triangulaire intermédiaire de 125751 points, obtenu par découpage du maillage de 501×251 points et un maillage fin de 501501 points, obtenu par découpage d'un maillage de 1001×501 points.

On reproduit, figure 5.44, l'évolution de la densité dans le plan $x-t$ dans le cas non-visqueux. Cette figure, extraite de [DT01], permet de comprendre l'évolution du phénomène.

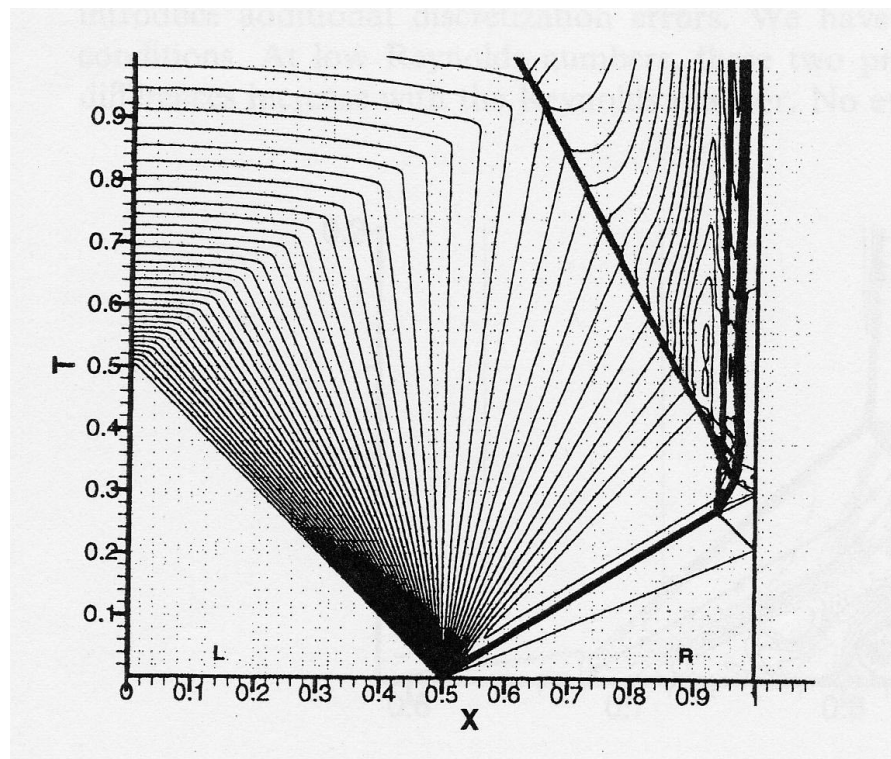


FIG. 5.44 – Evolution de la densité dans le plan $x - t$ - Cas non-visqueux

Une onde de choc, suivie d'une discontinuité de contact, se déplace vers la droite (le nombre de Mach du choc est 2.37). L'onde de choc incidente est faible et se réfléchit sur la paroi de droite au temps approximatif de 0.2. Après cette réflexion, elle interagit avec la discontinuité de contact. Ensuite se produit une interaction complexe. La discontinuité de contact reste stationnaire, proche de la paroi droite.

Enfin, l'onde de choc réfléchie commence à interagir avec l'onde de raréfaction au temps $t = 0.4$. De l'autre côté, l'onde de raréfaction se réfléchit sur la paroi de gauche, à un temps d'environ 0.5, modifiant la propagation de l'onde de raréfaction incidente.

Dans le cas visqueux, l'onde de discontinuité de contact incidente et l'onde de choc interagissent lors de leur propagation avec la paroi horizontale générant une couche limite relativement fixe. Après réflexion sur la paroi droite, l'onde de choc interagit avec la couche limite modifiant le profil de l'écoulement près de la paroi horizontale. L'interaction du choc et de la couche limite produit un choc en λ . La pression dans la couche limite étant plus faible que dans le reste du domaine, une zone de couche limite séparée s'installe sous ce profil, délimitée par une couche de cisaillement supersonique dans laquelle il y a beaucoup d'instabilités. Le point triple provenant du profil de choc en λ engendre une ligne de glissement qui s'enroule autour du tourbillon en amont de la zone de couche limite séparée. Cette bulle est entraînée avec le choc réfléchi : des séparations et des tourbillons sont créés près de la paroi, à l'intérieur de la bulle.

On présente à présent les résultats que nous obtenons pour ce cas test. Dans l'article de référence, V. Daru et C. Tenaud [DT01] utilisent trois schémas différents : (1) un schéma TVD de type Harten-Yee [Ha83], [YH87] et des limiteurs harmoniques de Van Leer (référéncé HYVL), (2) un schéma MUSCL-TVD [Ye85] et des limiteurs Min-Mod et (3) un schéma de Mac Cormack utilisant des limiteurs d'ordre 3 [D+97]. Pour la comparaison, nous n'incluons que les résultats correspondant au schéma HYVL (isovaleurs et coupes) qui nous ont été fournis par C. Tenaud.

5.4.3 Les solutions

Nous présentons, figures 5.45 et 5.46, les isovaleurs de la densité au temps adimensionné $t = 1$, obtenu dans [DT01] (avec le schéma HYVL) et en utilisant le solveur Navier-Stokes classique ou la méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ pour le maillage intermédiaire. Rappelons que nos solutions numériques correspondent au limiteur d'ordre élevé d'ordre 3 et d'ordre 4. On notera que les solutions sont présentées dans le domaine $[0.3,1] \times [0,0.5]$. La solution montre d'importants tourbillons générés à l'intérieur de la bulle de couche limite et éjectés en arrière du choc en λ . La comparaison de nos différentes solutions avec la solution de l'article montre une bonne concordance dans les résultats ; la position ainsi que la taille des tourbillons est comparable sur les différentes figures. On notera tout de même une différence d'inclinaison du tourbillon central entre le résultat du schéma HYVL et nos solutions. On constate quelques oscillations en arrière du choc réfléchi, visibles les solutions obtenues avec le limiteur d'ordre 3. Ces oscillations n'apparaissent pas sur les tracés correspondant au limiteur d'ordre 4. En revanche, aucune différence n'est visible entre les résultats provenant du solveur Navier-Stokes classique et de la méthode de relaxation.

On présente, à présent, figures 5.47 et 5.48, les isovaleurs de la densité obtenues

avec les mêmes méthodes mais sur le maillage fin. Les résultats obtenus avec le schéma HYVL sont peu différents de la solution du même schéma sur maillage intermédiaire. Nos solutions sont comme précédemment comparables à celle de l'article, en notant l'amélioration de l'inclinaison du tourbillon central, identique à la solution de référence pour ce maillage fin. De légères oscillations en arrière du choc réfléchi persistent sur les résultats du limiteur d'ordre 3. Les résultats des équations de Navier-Stokes et de la méthode de relaxation sont identiques.

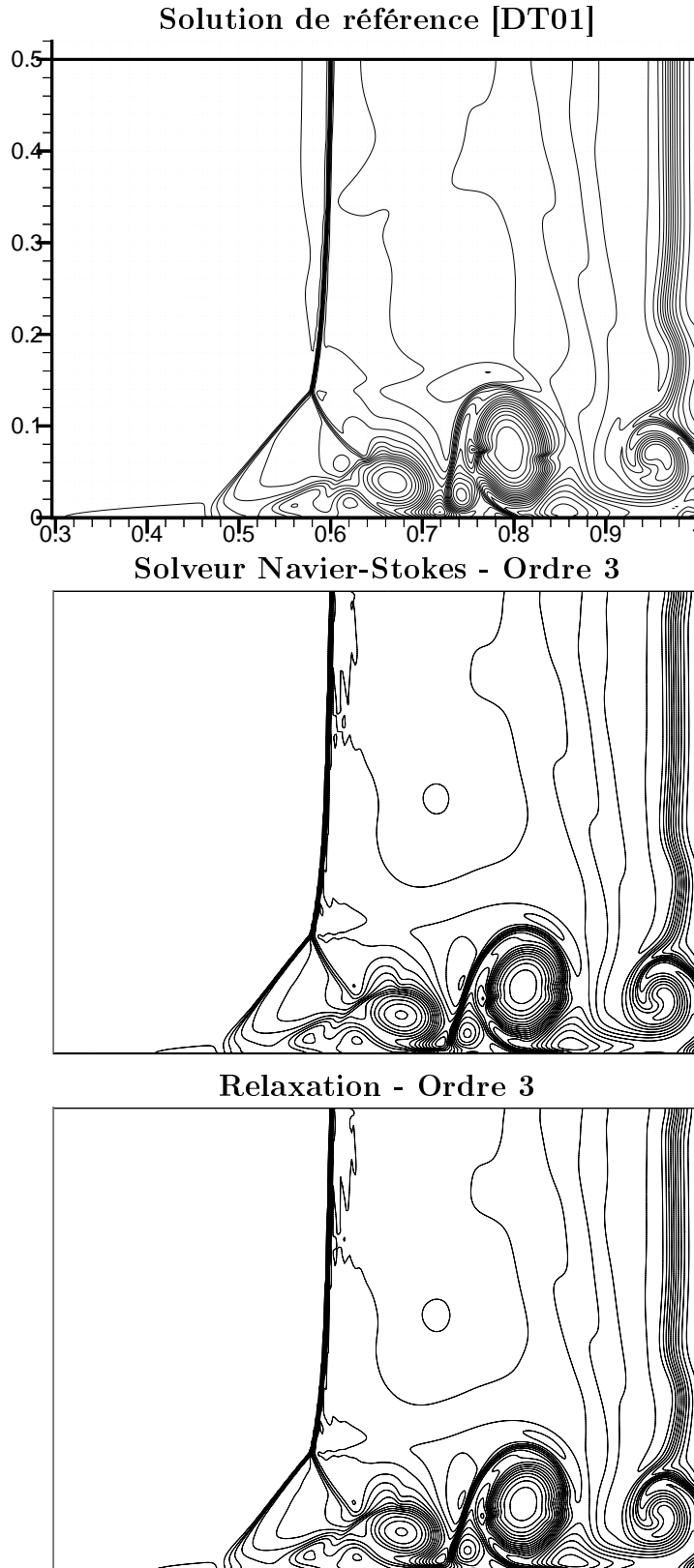
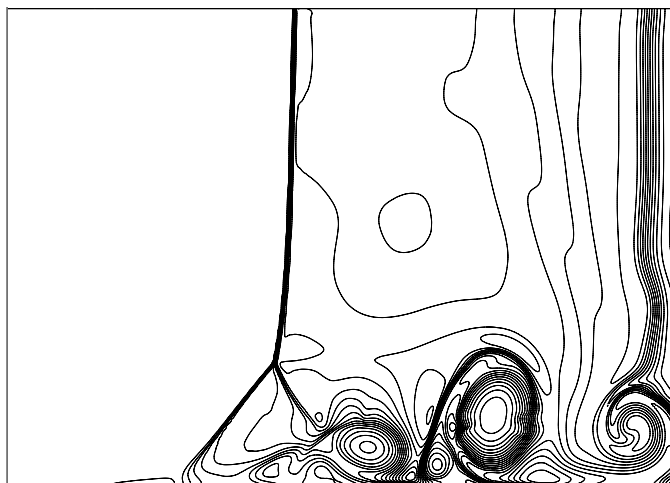


FIG. 5.45 – Isovaleurs de la densité - Maillage intermédiaire - Solution de référence (en haut) Solveur Navier-Stokes (au milieu) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (en bas)

Solveur Navier-Stokes - Ordre 4



Relaxation - Ordre 4

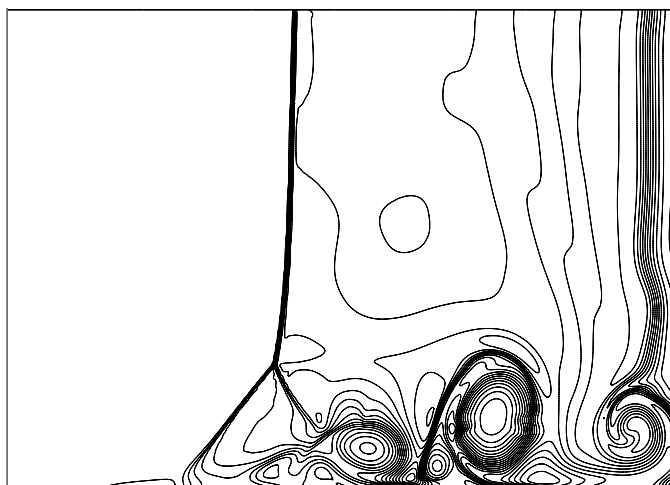


FIG. 5.46 – Isovaleurs de la densité - Maillage intermédiaire - Solveur Navier-Stokes (en haut) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (en bas)

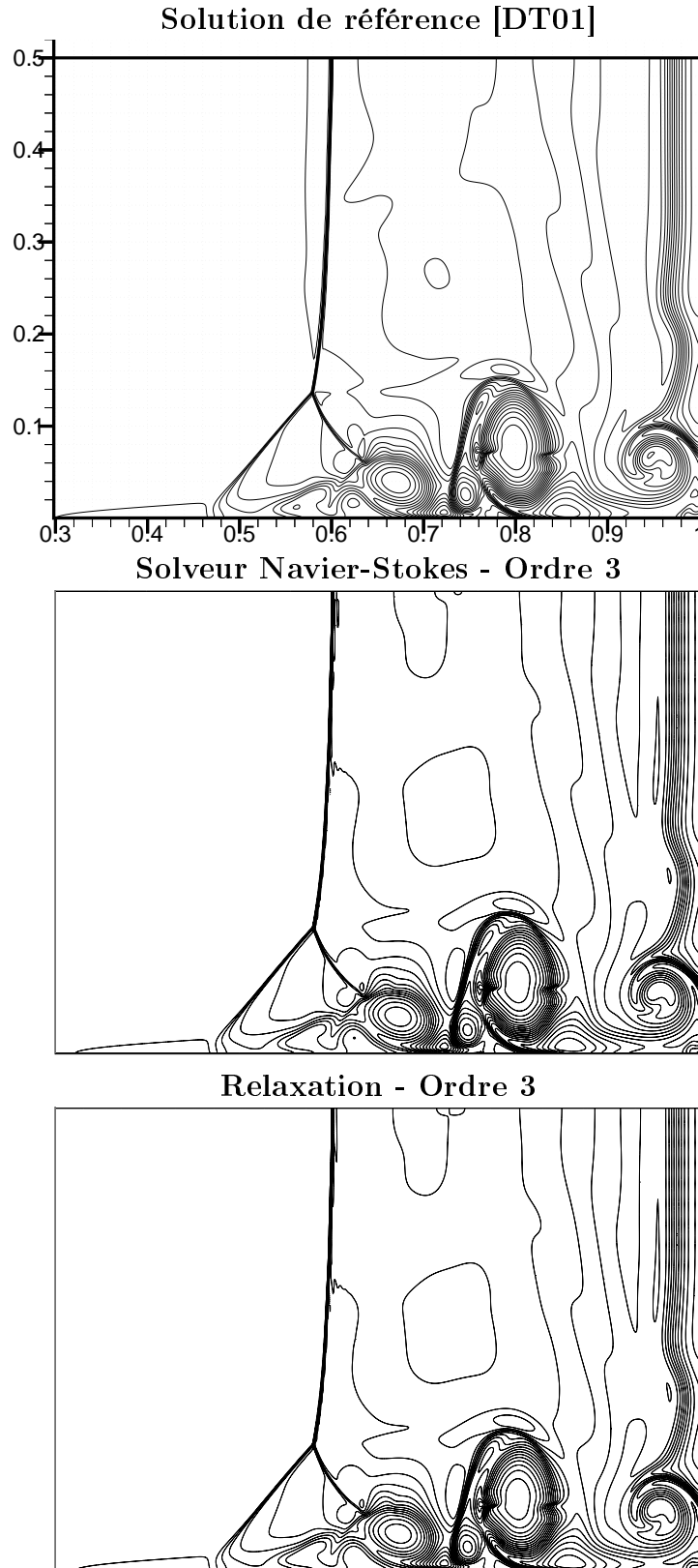
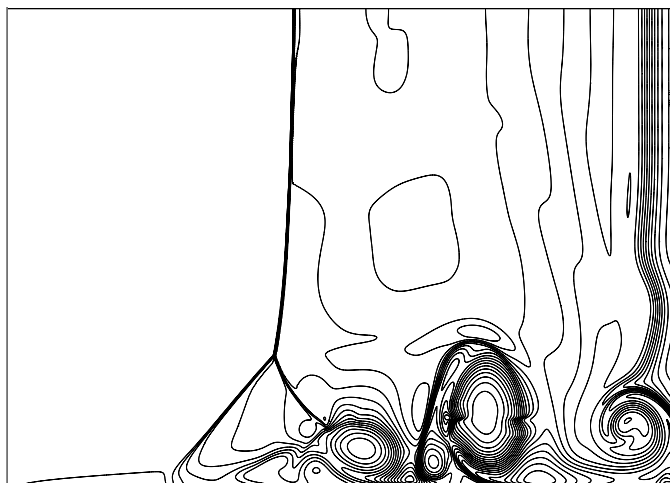


FIG. 5.47 – Isovaleurs de la densité - Maillage fin - Solution de référence (en haut) Solveur Navier-Stokes (au milieu) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (en bas)

Solveur Navier-Stokes - Ordre 4



Relaxation - Ordre 4



FIG. 5.48 – Isovaleurs de la densité - Maillage fin - Solveur Navier-Stokes (en haut) et méthode de relaxation avec $\gamma_1 = 1.66$ (en bas)

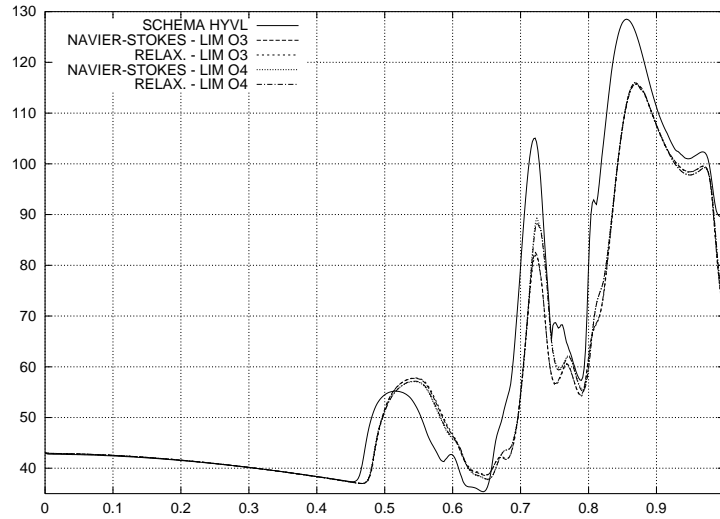
Pour une comparaison plus précise des résultats, on s'intéresse à la distribution de la densité sur la paroi inférieure du domaine, en $y = 0$. pour les deux maillages, figure 5.49. On compare les coupes de la solution de référence (ici le schéma HYVL) et les solutions de nos méthodes. Les variations (creux et bosses) correspondent aux tourbillons visibles sur les isovaleurs présentées sur la figure 5.45. L'allure des courbes est comparable. On note tout de même quelques différences sur les coupes correspondant au maillage intermédiaire: les valeurs des extrema sont différentes et l'on constate un décalage sur l'abscisse à laquelle est atteinte le maximum au voisinage de $x = 0.5$. La solution obtenue avec le limiteur d'ordre 4 est plus proche de celle obtenue avec le schéma HYVL. L'utilisation du maillage fin améliore nos solutions aussi bien pour l'abscisse que pour les valeurs des extrema. En revanche, aucune différence n'est visible lorsque l'on compare les résultats avec et sans relaxation puisque les courbes se superposent et cela quel que soit le maillage utilisé.

On étudie également la distribution de la densité en $y = 0.3$, figure 5.50. On a superposé les valeurs provenant du schéma HYVL et nos solutions pour le maillage fin, pour les deux types de limiteur, le cas avec et sans relaxation. Les résultats sont très satisfaisants puisqu'il est impossible de distinguer les différentes courbes.

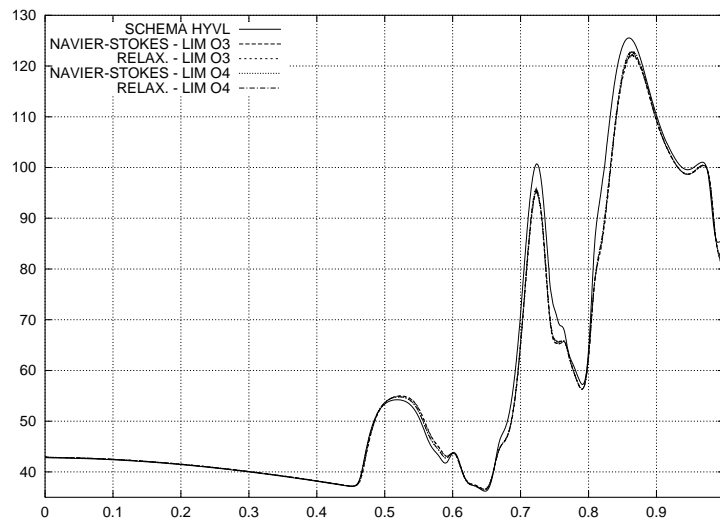
Pour terminer cette analyse, on trace figure 5.51 les coupes du nombre de Mach très près de la paroi inférieure en $y = 0.01$ pour le maillage fin. On remarque encore sur ces coupes que l'allure des différentes solutions est la même. Les variations correspondent aux mêmes abscisses et les valeurs de ces extrema locaux sont comparables à l'exception du voisinage de $x = 0.45$. Aucune différence n'est visible sur les solutions obtenues par nos méthodes (relaxation/non relaxation, limiteurs d'ordre 3 et 4).

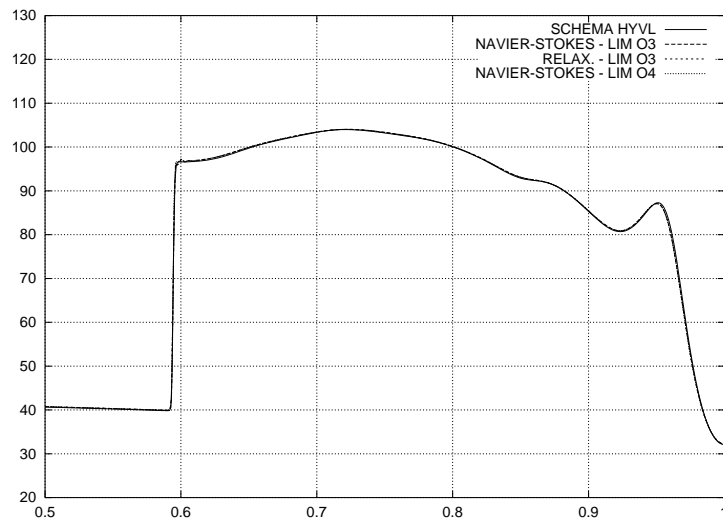
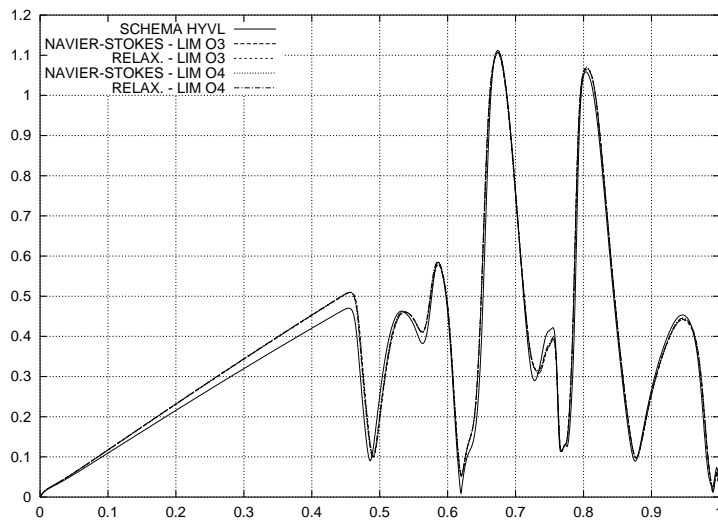
Ce cas-test constitue une dernière validation de la méthode de relaxation proposée pour les équations de Navier-Stokes.

Maillage intermédiaire



Maillage fin

FIG. 5.49 – Distribution de la densité en $y = 0$

FIG. 5.50 – Distribution de la densité en $y = 0.3$ - Maillage finFIG. 5.51 – Distribution du nombre de Mach en $y = 0.01$ - Maillage fin

Chapitre 6

Conclusions

Dans cette thèse, nous avons présenté une nouvelle méthode de relaxation pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles munies de lois de pression et de température générales. La seule restriction imposée à ces lois est qu'elles soient compatibles, via les relations de Gibbs, avec l'existence d'une entropie mathématique strictement convexe en la dilatation et l'énergie interne spécifique.

Notre méthode est une extension de la méthode de relaxation de l'énergie introduite par Coquel et Perthame [CP98] pour résoudre les équations d'Euler munies d'une loi de pression générale. Pour notre méthode, nous avons établi, comme pour les équations d'Euler, des résultats théoriques de stabilité basés sur le signe de la production d'une entropie convenablement définie. Nous avons obtenu un résultat de stabilité globale valable pour des lois de pression et de température générales et nous avons complété ce résultat par une analyse de stabilité asymptotique autour des états d'équilibre valable pour des gaz thermiquement parfaits (mais pas nécessairement caloriquement parfaits). Ces deux résultats de stabilité sont astreints aux mêmes conditions sous-caractéristiques que pour les équations d'Euler relaxées ([CP98]), auxquelles viennent s'ajouter des conditions sur la décomposition des flux diffusifs.

D'un point de vue numérique, la méthode que nous proposons pour les équations de Navier-Stokes permet d'étendre facilement les solveurs Navier-Stokes dédiés aux gaz thermiquement et caloriquement parfaits afin de traiter des écoulements régis par des lois de pression et de température générales. Il est également possible de considérer des lois de pression et de température sous forme tabulée. Dans nos simulations numériques, nous avons discrétisé les équations de Navier-Stokes relaxées par une méthode mixte volumes finis éléments finis, les flux convectifs étant approchés par un schéma de Roe.

Nous avons validé notre méthode de relaxation sur trois cas tests pour lesquels des solutions de référence étaient disponibles : l'advection d'un réseau périodique de vortex, l'interaction d'un spot de température avec un choc faible et l'interaction d'un choc avec une couche limite [T+00, DT01]. Les solutions de référence ayant été obtenues pour des gaz thermiquement et caloriquement parfaits, nous avons

conservé, à des fins de comparaison, cette hypothèse pour le gaz réel. Pour le second cas test, nous avons également considéré deux situations de gaz thermiquement parfaits et calorifiquement imparfaits pour lesquels les transferts d'énergie vibrationnelle au niveau des collisions microscopiques font que l'énergie interne spécifique soit une fonction non-linéaire de la température. Dans ce cas, l'étude numérique a été faite en comparant nos résultats avec un solveur Navier-Stokes gaz réel où le solveur de Riemann avait été modifié pour prendre en compte ces non linéarités. Dans tous les cas, nos résultats sont conformes aux solutions de référence et prouvent les bonnes qualités de la méthode que nous proposons. La méthode de relaxation modifie très peu les résultats par rapport à un solveur Navier-Stokes classique et les différences par rapport aux solutions de référence proviennent de l'ordre de précision de la méthode que nous utilisons et non de la méthode de relaxation.

Plusieurs pistes de réflexion offrent des perspectives à l'étude réalisée au cours de cette thèse :

- **sur le plan théorique**, il serait intéressant d'étendre le résultat de stabilité asymptotique à des systèmes plus généraux que celui où le gaz réel est thermiquement parfait. Par ailleurs, dans l'exposé de la méthode, les coefficients intervenant dans les flux diffusifs (η et κ) ont été supposés constants pour simplifier. Dans le cas où cette hypothèse était levée, il serait intéressant de préciser la nouvelle décomposition du flux de chaleur qui garantirait la consistance et la stabilité des équations de Navier-Stokes relaxées ;
- **sur le plan des méthodes numériques**, plusieurs prolongements intéressants peuvent être envisagés. Dans nos simulations numériques, nous avons toujours utilisé un schéma explicite en temps. Il serait certainement intéressant d'inclure dans notre algorithme de relaxation un schéma implicite afin d'en améliorer l'efficacité. De plus, afin d'optimiser les calculs, notamment pour les cas tests instationnaires, un couplage de notre méthode de relaxation à une procédure de raffinement/déraffinement dynamique du maillage en temps, selon un critère à définir, pourrait constituer un objectif pertinent ;
- **sur le plan des résultats numériques**, il serait tout d'abord intéressant d'observer le comportement de la méthode de relaxation sur des écoulements de gaz dont l'entropie est plus complexe que celle d'un gaz thermiquement parfait. Dans un premier temps, on pourrait conserver la loi de Mariotte $p = \rho f(T)$. Ensuite, on pourrait envisager de passer à des gaz dont les dépendances entre les variables thermodynamiques seraient plus complexes, comme par exemple ceux régis par une loi d'état de type Van Der Waals. De telles simulations numériques présenteraient un double intérêt : elle constitueraient d'une part une nouvelle validation de la méthode de relaxation et elles apporteraient d'autre

part des indications physiques intéressantes afin de quantifier l'impact des lois de pression et de température sur la dynamique macroscopique de l'écoulement ;

- **sur le plan des applications** enfin, on peut étudier l'extension de notre méthode de relaxation à des systèmes de lois de conservation plus complexes que les équations de Navier-Stokes compressibles, notamment le cas des écoulements réactifs multi-espèces où l'entropie dépendrait de la dilatation, de l'énergie interne et de la composition du gaz.

Bibliographie

- [Ab90] ABGRALL, R., *Extension of Roe's approximate Riemann solver to equilibrium and nonequilibrium flows*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, vol. 29, Proc. 8th GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Vieweg, Braunschweig, 1990. Rapport de recherche INRIA 1189, 1990.
- [An89] ANDERSON JR., J. D., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [Ch99] CHALABI, A., *Convergence of relaxation schemes for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, Mathematics of Computation, vol. 68(227), pp. 955–970, 1999.
- [CC70] CHAPMAN, S., COWLING, T.G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [C+93] CLARKE, J.F., KARNI, S., QUIRK, J.J., ROE, P.L., SIMMONDS, L.G., TORO, E.F., *Numerical computation of two-dimensional unsteady detonation waves in high energy solids*, J. Comput. Phys., vol. 106(2), pp. 215–233, 1993.
- [C+95] CHEN, G.-Q., LEVERMORE, C.D., LIU, T.-P., *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 47(6), pp. 787–830, 1994.
- [CG85] COLELLA, P., GLAZ, H.M., *Efficient solution algorithm for the Riemann problem for real gases*, J. Comput. Phys., vol. 59(2), pp. 264–289, 1985.
- [CP98] COQUEL, F., PERTHAME, B., *Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 35(6), pp. 2223–2249, 1998.
- [D+97] DARU, V., FERNANDEZ, G., TENAUD, C., *On CFD to investigate bifurcated shock wave pattern*, Houwing AFP, editor, Proc. 21th International

- Symposium on Shock Waves, Australia. Fyshwick : Panther Publishing & Printing, pp. 1091-7, 1997.
- [DT01] DARU, V., TENAUD, C., *Evaluation of TVD high resolution schemes for unsteady viscous shocked flows*, Computers & Fluids, vol. 30, pp. 89–113, 2001.
- [EG02] ERN, A., GUERMOND, J.-L., *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*, Collection SMAI Mathématiques & Applications, vol. 36, Springer, Heidelberg, 2002.
- [EG94] ERN, A., GIOVANGIGLI, V., *Multicomponent Transport Algorithms*, Lecture Notes in Physics, series monographs, vol. m24, Springer, Heidelberg, 1994.
- [Em87] EMANUEL, G., *Advanced Classical Thermodynamics*, AIAA Education Series, 1987.
- [FK72] FERZIGER, J.H, KAPER, H.G., *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North Holland, Amsterdam, 1972.
- [Fe89] FERNANDEZ, G., *Simulation numérique d'écoulements réactifs à petit nombre de Mach*, Mémoire de Thèse, INRIA, 1989.
- [Fe85] FÉZOU, L., *Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis*, Rapport de recherche INRIA 358, 1985.
- [FD89] FÉZOU, L., DERVIEUX, A., *Finite element non oscillatory schemes for compressible flows*, Comput. Math. and Appl., vol. 730, Proc. 8th France-USSR-Italy Joint Symposium, Paire, 1989.
- [FS89] FÉZOU, L., STOUFFLET, B., *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*, J. Comput. Phys., vol. 84(1), pp. 174–206, 1989.
- [F+89] FÉZOU, L., LANTÉRI, S., LARROUTUROU, B., OLIVIER, C., *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire*, Rapport de recherche INRIA 1033, 1989.
- [Gi99] GIOVANGIGLI, V., *Multicomponent Flow Modeling*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser, Basel, 1999.

- [Gl88] GLAISTER, P., *An approximate linearized Riemann solver for the Euler equations for real gases*, J. Comput. Phys., vol. 74, pp. 382–408, 1988.
- [Gl97] GLAISTER, P., *An analysis of averaging procedure in a Riemann solver for compressible flows of a real gas*, Comput. Math. Appl., vol. 33(3), pp. 105–119, 1997.
- [GR91] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.A., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Mathématiques & Applications, Ellipses, Paris, 1991.
- [GR96] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.A., *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [GW89] GROSSMAN, B., WALTERS, R. W., *Analysis of flux-split algorithms for Euler's equations with real gases*, AIAA Journal, vol. 27(5), pp. 524–531, 1989.
- [Ha83] HARTEN, A., *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., vol. 49(3), pp. 357–393, 1983.
- [H+83] HARTEN, A., LAX, P. D., VAN LEER, B., *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM review, vol. 25(1), 1983.
- [In99] IN, A., *Numerical evaluation of an energy relaxation method for inviscid real fluids*, SIAM J. Sci. Comput., vol. 21(1), pp. 340–365, 1999.
- [JS96] JIANG, G.-S., SHU, C.-W., *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, J. Comput. Phys., vol. 126(1), pp. 202–228, 1996.
- [JL00] JIN, S., LIU, H., *A diffusive subcharacteristic condition for hyperbolic systems with diffusive relaxation*, Proc. 5th International Workshop on Mathematical Aspects of Fluid and Plasma Dynamics, Maui, 1998. Transport Theory and Statistical Physics, vol. 29(3–5), pp. 583–593, 2000.
- [JX95] JIN, S., XIN, Z., *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions.*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 48(3), pp. 235–276, 1995.
- [J+98] JIN, S., PARESCHI, L., TOSCANI, G., *Diffusive relaxation schemes for multiscale discrete-velocity kinetic equations.*, SIAM J. Numer. Anal., vol.

- 35(6), pp. 2405–2439, 1998.
- [K+99] KATSOULAKIS, M., KOSSIORIS, G., MAKRIDAKIS, CH., *Convergence and error estimates of relaxation schemes for multidimensional conservation laws*, Comm. Partial Differential Equations, vol. 24(3–4), pp. 395–424, 1999.
- [KT97] KATSOULAKIS, M., TZAVARAS, A. E., *Contractive relaxation systems and the scalar multidimensional conservation law*, Comm. Partial Differential Equations, vol. 22(1–2), pp. 195–223, 1997.
- [K+91] KLEINE, H., LYAKHOV, L.G., GVOZDEVA, L.G., GRONIG, H., *Bifurcation of a reflected shock wave in a shock tube*, Proc. 18th International Symposium on Shock Waves, Sendai. Springer-Verlag, Berlin, pp. 261–266, 1991.
- [LS01] LATTANZIO, C., SERRE, D., *Convergence of a relaxation scheme for hyperbolic conservation laws*, Numer. Math., vol. 88(1), pp. 121–134, 2001.
- [La91] LARROUTUROU, B., *How to preserve the mass fraction positivity when computing compressible multi-component flows*, J. Comput. Phys., vol. 95(1), pp. 59–84, 1991.
- [La95] LARROUTUROU, B., *Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur, Première partie: problèmes hyperboliques*, notes de cours de l'École Polytechnique, 1995.
- [Le90] LEVEQUE, R. J., *Numerical Methods of Conservation Laws*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, Zürich, 1990.
- [Li96] LIONS, P.-L., *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [Li87] LIU, T.-P., *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Comm. Math. Phys., vol. 108(1), pp. 153–175, 1987.
- [LW00] LIU, H., WARNECKE, G., *Convergence rates for relaxation schemes approximating conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 37(4), pp. 1316–1337, 2000.

- [L+90] LIOU, M. S., VAN LEER, B., SHUEN, J. S., *Splitting of inviscid fluxes for real gases*, J. Comput. Phys., vol. 87(1), pp. 1–24, 1990.
- [LL93] LOH, C.-Y., LIOU, M. S., *Lagrangian solution of supersonic real gas flows*, J. Comput. Phys., vol. 104(1), pp. 150–161, 1993.
- [MP85] MAJDA, A., PEGO, R. L., *Stable viscosity matrices for systems of conservations laws*, J. Differential Equations, vol. 56(2), pp. 229–262, 1985.
- [MP89] MENIKOFF, R., PLOHR, B. J., *The Riemann problem for fluid flow of real materials*, Rev. Modern. Phys., vol. 61(1), pp. 75–130, 1989.
- [Mo86] MONTAGNÉ, J. L., *Utilisation d'un schéma décentré pour la simulation d'écoulements non visqueux de gaz réels à l'équilibre*, La Recherche Aérospatiale, vol. 6, pp. 433–441, 1986.
- [M+89] MONTAGNÉ, J.-L., YEE, H. C., VINOKUR, M., *Comparative study of high-resolution shock-capturing schemes for a real gas*, AIAA Journal, vol. 27(10), pp. 1332–1346, 1989.
- [MS99] MONTARNAL, P., SHU, C.W., *Real gas computation using an energy relaxation method and high-order weno schemes*, J. Comput. Phys., vol. 148(1), pp. 59–80, 1999.
- [NP00] NALDI, G., PARESCHI, L., *Numerical schemes for hyperbolic systems of conservation laws with stiff diffusive relaxation*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 37(4), pp. 1246–1270, 2000.
- [Na96] NATALINI, R., *Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 49(8), pp. 795–823, 1996.
- [Os84] OSHER, S., *Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 21(2), pp. 217–235, 1984.
- [Pi96] PIPERNO, S., *Schémas TVD d'ordre élevé pour la résolution de l'équation de Burgers*, Rapport Cermics 96-49, 1996.
- [PD98] PIPERNO, S., DEPEYRE, S., *Criteria for the design of limiters yielding efficient high resolution TVD schemes*, Computers & Fluids, vol. 27(2),

- pp. 183–197, 1998.
- [PT84] PRABHU, D. K., TANNEHILL, J. C., *Numerical Solution of Space Shuttle Orbiter Flow Field including real gas effects*, AIAA Proc. 19th Thermophysics Conference, Snowmass, Colorado, June 25–28, 1984.
- [Re93] REBAY, S., *Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm*, J. Comput. Phys., vol. 106(1), pp. 125–138, 1993.
- [Ro81] ROE, P.L., *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*, J. Comput. Phys., vol. 43(2), pp. 357–372, 1981.
- [So78] SOD, G. *A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., vol. 27(1), pp. 1–31, 1978.
- [SW81] STEGER, J., WARMING, R.F., *Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods*, J. Comput. Phys., vol. 40(2), pp. 263–293, 1981.
- [TT01] TADMOR, E., TANG, T., *Pointwise error estimates for relaxation approximations to conservations laws*, SIAM J. Math. Anal., vol. 32(4), pp. 870–886, 2000.
- [T+00] TENAUD, C., GARNIER, E., SAGAUT, P., *Evaluation of some high-order shock capturing schemes for direct numerical simulation of unsteady two-dimensional free flows*, Int. J. Meth. Fluids, vol. 33(2), pp. 249–278, 2000.
- [To92] TOUMI, I., *A weak formulation of Roe’s approximate solver*, J. Comput. Phys., vol. 102(2), pp. 360–373, 1992.
- [VL82] VAN LEER, B., *Flux Vector Splitting for the Euler Equations*, Lecture Notes in Physics, vol. 170, 1982, pp. 405–512.
- [V+82] VAN ALBADA, G.D., VAN LEER, B., ROBERTS, W.W., *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*, Astron. Astrophys., vol. 108, pp. 76–84, 1982.

-
- [Vi88] VINOKUR, M., *Flux jacobian matrices and generalized Roe average for an equilibrium gas*, NASA Contractor Report 177512, 1988.
- [W+95] WEBER, Y.S., ORAN, E.S., BORIS, J.P., ANDERSON, J.D., *The numerical simulation of shock bifurcation near the end wall of a shock tube*, Physics of Fluids, 7, pp. 2475-88, 1995.
- [Wi85] WILLIAMS, F.A., *Combustion Theory (Second edition)*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Mass., 1985.
- [Wo75] WOODS, L.C., *The Thermodynamics of Fluids Systems*, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [Ye85] YEE, H.C., *On the implementation of a class of upwind schemes for systems of hyperbolic conservation laws*, NASA TM-86839, 1985.
- [YH87] YEE, H.C., HARTEN, A., *Implicit TVD schemes for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates*, AIAA Journal, vol. 25, pp. 266-74, 1987.

Annexe A

Dérivées partielles : notations et propriétés élémentaires

A.1 Motivations

Dans la modélisation thermodynamique d'un gaz, on considère souvent pour des raisons de commodité plusieurs jeux de variables indépendantes. Ainsi, par exemple, les hypothèses fondamentales liées à l'existence d'une entropie ont été formulées dans la section 2.2.1 en utilisant le couple (τ, ε) comme variables thermodynamiques indépendantes. Puis, lorsque nous avons défini les capacités calorifiques à volume ou pression constants ou bien encore lorsque nous avons considéré le modèle de gaz thermiquement parfait (TP), il s'est avéré plus commode d'utiliser le couple (τ, T) comme variables thermodynamiques indépendantes.

L'objet de cette annexe est de préciser brièvement les notations utilisées pour les dérivées partielles et de rappeler quelques-unes des propriétés élémentaires liées au changement de variables.

A.2 Conventions de notation

Là où la rigueur mathématique voudrait que l'on définisse une nouvelle fonction pour chaque jeu de variables, par exemple

$$\begin{aligned} p &= f(\tau, \varepsilon), \\ p &= g(\tau, T), \end{aligned}$$

on préfère souvent conserver un nom de fonction identique. Cela permet bien sûr de ne pas avoir à définir une trop grande quantité de fonctions, et donc d'améliorer la lisibilité des calculs.

L'utilisation d'une notation unique pour une fonction indépendamment du jeu de variables considéré nécessite de modifier l'écriture de dérivation pour tenir compte

de l'information due au type de variable. Nous écrivons

$$\begin{cases} \partial_{\tau,\varepsilon}p = \partial_1 f(\tau,\varepsilon) & ; & \partial_{\tau,T}p = \partial_1 g(\tau,T), \\ \partial_{\varepsilon,\tau}p = \partial_2 f(\tau,\varepsilon) & ; & \partial_{T,\tau}p = \partial_2 g(\tau,T). \end{cases}$$

Plus généralement, pour une fonction de deux variables

$$\varphi : (x,y) \mapsto \varphi(x,y),$$

que nous désignerons également sous la forme compacte $\varphi := \varphi(x,y)$, nous noterons

$$\partial_{x,y}\varphi \quad (\text{resp. } \partial_{x,y}\varphi)$$

la dérivée partielle de φ par rapport à la première (resp. deuxième) variable, la deuxième (resp. première) étant fixée. Les dérivées secondes de φ seront notées

$$\partial_{xx,y}\varphi, \quad \partial_{xy}\varphi \quad \text{et} \quad \partial_{yy,x}\varphi.$$

A.3 Propriétés élémentaires des dérivées partielles

Soit p une fonction du couple de variables (γ,θ) et supposons que γ et θ soient fonctions du couple de variables (α,β) . Par composition, p peut être vue comme fonction du couple (α,β) et la règle de la dérivation composée permet d'écrire

$$\begin{cases} \partial_{\alpha,\beta}p = \partial_{\alpha,\beta}\gamma \partial_{\gamma,\theta}p + \partial_{\alpha,\beta}\theta \partial_{\theta,\gamma}p, \\ \partial_{\beta,\alpha}p = \partial_{\beta,\alpha}\gamma \partial_{\gamma,\theta}p + \partial_{\beta,\alpha}\theta \partial_{\theta,\gamma}p. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On s'intéresse maintenant à l'expression des dérivées partielles de fonctions obtenues par théorème d'inversion locale. Soit

$$p : (\alpha,\beta) \mapsto p(\alpha,\beta),$$

une fonction suffisamment régulière définie sur l'ouvert $\mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_\beta$ où \mathcal{O}_α et \mathcal{O}_β sont des ouverts de \mathbb{R} . On note $\mathcal{O}_p = p(\mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_\beta)$. On suppose que

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}_\alpha, \quad \partial_{\beta,\alpha}p \neq 0.$$

Dans ces conditions, à α fixé, nous pouvons inverser la fonction $\beta \in \mathcal{O}_\beta \mapsto p(\alpha,\beta)$. Par abus de notation, cette fonction sera toujours notée β . Pour simplifier, nous supposons que

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}_\alpha, \quad p(\{\alpha\} \times \mathcal{O}_\beta) = \mathcal{O}_p,$$

ce qui permet de définir la fonction inverse β sur le domaine produit $\mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_p$:

$$\beta : (\alpha,p) \in \mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_p \mapsto \beta(\alpha,p).$$

Cette dernière hypothèse est toujours raisonnable dans les applications thermodynamiques que nous considérons. Une vérification immédiate montre que les dérivées partielles de la fonction p et de la fonction inverse β sont liées par la relation suivante

$$\forall(\alpha, \beta, p) \in \mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_\beta \times \mathcal{O}_p, \quad \partial_{\beta, \alpha} p \partial_{p, \alpha} \beta = 1. \quad (\text{A.2})$$

Supposons maintenant également que

$$\forall \beta \in \mathcal{O}_\beta, \quad \partial_{\alpha, \beta} p \neq 0,$$

si bien que nous pouvons inverser la fonction $\alpha \in \mathcal{O}_\alpha \mapsto p(\alpha, \beta)$. En commettant à nouveau le même abus de notation que précédemment et en supposant à nouveau que la fonction inverse α est définie sur le domaine produit $\mathcal{O}_\beta \times \mathcal{O}_p$, un calcul élémentaire permet de vérifier que

$$\forall(\alpha, \beta, p) \in \mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_\beta \times \mathcal{O}_p, \quad \partial_{\alpha, \beta} p \partial_{p, \alpha} \beta \partial_{\beta, p} \alpha = -1. \quad (\text{A.3})$$

En utilisant (A.2), nous obtenons également

$$\forall(\alpha, \beta, p) \in \mathcal{O}_\alpha \times \mathcal{O}_\beta \times \mathcal{O}_p, \quad \partial_{\alpha, \beta} p = -\partial_{\beta, \alpha} p \partial_{\alpha, p} \beta. \quad (\text{A.4})$$

Annexe B

Matrices de flux convectifs bidimensionnels pour les gaz TPCI

On présente ici les matrices jacobiennes des flux convectifs \mathcal{F}_x et \mathcal{F}_y pour les équations d'Euler ou de Navier-Stokes *non relaxées* dans le cas d'un gaz thermiquement parfait et calorifiquement imparfait (TPCI). Ces matrices sont utilisées dans le chapitre 5 pour la validation de notre méthode de relaxation.

On rappelle que pour un gaz TPCI, à la différence des gaz TPCP, la pression ne s'exprime plus sous la forme simplifiée $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma_{\text{ther}} - 1)\rho\varepsilon$ où γ_{ther} est une constante. En effet, pour un gaz TPCI, le coefficient γ_{ther} dépend de la température. Par contre, une simplification agréable que l'on conserve pour les gaz TPCI, est que ce coefficient est à la fois l'exposant adiabatique γ_{ther} et le coefficient γ_{acou} introduit en acoustique (voir proposition 2.26). On se reportera à la section 2.2.3 pour plus de précisions sur les modèles de gaz TP.

On note W le vecteur en variables conservatives pour les équations d'Euler ou de Navier-Stokes non relaxées, i.e. $W = (\rho, \rho u, \rho v, E) \in \mathbb{R}^4$. Considérons les matrices

$$D_1 = \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial W} \quad ; \quad D_2 = \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial W}$$

Le calcul de l'expression littérale de D_1 aboutit à

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ D_{1,21} & (3 - \gamma_{\text{ther}}(T))u & (1 - \gamma_{\text{ther}}(T))v & \gamma_{\text{ther}}(T) - 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ D_{1,41} & D_{1,42} & (1 - \gamma_{\text{ther}}(T))uv & \gamma_{\text{ther}}(T)u \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} D_{1,21} &= (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(u^2 + v^2 - \frac{E}{\rho}) - u^2 + \frac{p}{\rho} \\ D_{1,41} &= (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(u^2 + v^2)u - \frac{\gamma_{\text{ther}}(T)Eu}{\rho} \\ D_{1,42} &= \frac{E + p}{\rho} - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)u^2 \end{cases}$$

De même, la matrice D_2 s'écrit sous la forme

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ D_{2,31} & (1 - \gamma_{\text{ther}}(T))u & (3 - \gamma_{\text{ther}}(T))v & \gamma_{\text{ther}}(T) - 1 \\ D_{2,41} & (1 - \gamma_{\text{ther}}(T))uv & D_{2,43} & \gamma_{\text{ther}}(T)v \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} D_{2,31} &= (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(u^2 + v^2 - \frac{E}{\rho}) - v^2 + \frac{p}{\rho} \\ D_{2,41} &= (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(u^2 + v^2)v - \frac{\gamma_{\text{ther}}(T)Ev}{\rho} \\ D_{2,43} &= \frac{E + p}{\rho} - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)v^2 \end{cases}$$

Si on s'intéresse maintenant à la diagonalisation de la matrice $D = \eta_1 D_1 + \eta_2 D_2$ constituée d'une moyenne pondérée des jacobiens D_1 et D_2 , ses valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \eta_1 u + \eta_2 v \\ \lambda_3 = \lambda_1 + c(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_4 = \lambda_1 - c(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

On rappelle que l'enthalpie totale H est donnée par $H = \frac{E + p}{\rho}$. Afin de simplifier les expressions ci-dessous, on utilisera les quantités η_1 et η_2 sous forme normalisée en notant :

$$\eta_1^* = \frac{\eta_1}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \eta_2^* = \frac{\eta_2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Muni de ces valeurs propres, on obtient l'expression des matrices de transformation

P et P^{-1}

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ u & \eta_2^* & \frac{u + c\eta_1^*}{2c^2} & \frac{u - c\eta_1^*}{2c^2} \\ v & -\eta_1^* & \frac{u + c\eta_2^*}{2c^2} & \frac{u - c\eta_2^*}{2c^2} \\ H - \frac{c^2}{\gamma_{\text{ther}}(T) - 1} & \eta_2^*u - \eta_1^*v & \frac{H + c(\eta_1^*u + \eta_2^*v)}{2c^2} & \frac{H - c(\eta_1^*u + \eta_2^*v)}{2c^2} \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} & \frac{\gamma_{\text{ther}}(T) - 1}{c^2}u & \frac{\gamma_{\text{ther}}(T) - 1}{c^2}v & -\frac{\gamma_{\text{ther}}(T) - 1}{c^2} \\ \eta_1^*v - \eta_2^*u & \eta_2^* & -\eta_1^* & 0 \\ P_{31}^{-1} & c\eta_1^* - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)u & c\eta_2^* - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)v & (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1) \\ P_{41}^{-1} & -c\eta_1^* - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)u & -c\eta_2^* - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)v & (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} P_{11}^{-1} = \frac{(\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(H - u^2 - v^2)}{c^2} \\ P_{31}^{-1} = -c(\eta_1^*u + \eta_2^*v) + c^2 - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(H - u^2 - v^2) \\ P_{41}^{-1} = c(\eta_1^*u + \eta_2^*v) + c^2 - (\gamma_{\text{ther}}(T) - 1)(H - u^2 - v^2) \end{cases}$$

En conclusion, on constate que les expressions des matrices D_1 , D_2 , P et P^{-1} sont formellement identiques à celles obtenues pour un gaz TPCP en remplaçant le coefficient constant γ_{ther} par $\gamma_{\text{ther}}(T)$.