



**HAL**  
open science

# Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthodes de changement d'échelle

Vincent Deudé

► **To cite this version:**

Vincent Deudé. Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthodes de changement d'échelle. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole des Ponts ParisTech, 2002. Français. NNT: . tel-00005680

**HAL Id: tel-00005680**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005680>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE  
présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR  
DE  
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES  
Spécialité: Structures et Matériaux

par

**VINCENT DEUDÉ**

Sujet de la thèse :

**Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux:  
Apport des méthodes de changement d'échelle**

soutenue à Champs-sur-Marne le 28 Mai 2002 :

devant le jury composé de :

B. Halphen	<i>Président</i>
A. Giraud	<i>Rapporteur</i>
D. Kondo	<i>Rapporteur</i>
A. Onaisi	<i>Examineur</i>
S. Maghous	<i>Examineur</i>
L. Dormieux	<i>Directeur de thèse</i>



$\dot{a} \pi R^2 d, \dot{a} \pi R^2 D,$



Je souhaite remercier Monsieur Bernard Halphen, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs Albert Giraud et Djimédo Kondo qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Je tiens également à remercier Monsieur Atef Onaisi de sa participation à l'évaluation de ce travail et de l'opportunité qu'il me donne de mettre en œuvre ces travaux dans son laboratoire au sein de l'entreprise TOTALFINAELF.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à Luc Dormieux et Samir Maghous qui m'ont encadré durant ce travail. Leurs connaissances et leur rigueur scientifiques, dont j'ai bénéficié tout au long de mes recherches, m'ont permis de mener à bien les différents sujets abordés dans ce mémoire. Je suis également très touché de la confiance que Luc Dormieux m'a témoignée, en me donnant l'occasion d'intervenir dans le cours de mécanique de l'École des Ponts et Chaussées en tant que maître de conférence.

Je veux également remercier Patrick de Buhan, directeur du CERMMO, qui m'a accueilli dans son équipe dans laquelle rigueur scientifique et bonne humeur ont constitué des conditions de travail idéales pour la préparation de cette thèse. Je souhaite bien sûr remercier tous les collègues et amis ayant participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail. Je pense particulièrement à Éric Lemarchand, Jérôme Fréard, Denis Garnier, Jean François Barthélémy, Bruno Sudret et Émmanuel Bourgeois.

Je tiens enfin à remercier mes proches qui m'ont soutenu tout au long de l'élaboration de ce travail.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>II</b>	<b>Formulation d'une loi de comportement élastoplastique en transformation finie</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Élasticité finie.</b>	<b>17</b>
1.1	Cinématique d'un milieu continu . . . . .	19
1.1.1	Descriptions lagrangienne et eulérienne . . . . .	19
1.1.2	Tenseurs des déformations d'un milieu continu . . . . .	20
1.2	Loi de comportement - équation d'état . . . . .	21
1.2.1	Tenseurs de contraintes eulérien et lagrangien . . . . .	21
1.2.2	Loi de comportement - équation d'état . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Plasticité finie</b>	<b>25</b>
2.1	Élastoplasticité en transformation infinitésimale . . . . .	27
2.2	Décomposition de la transformation - équation d'état . . . . .	28
2.3	Règle d'écoulement . . . . .	31
2.4	Relation entre les taux de contrainte et de déformation . . . . .	31
<b>III</b>	<b>Approche micromécanique de la poroélasticité</b>	<b>33</b>
<b>1</b>	<b>Le comportement poroélastique linéaire</b>	<b>35</b>
1.1	Introduction . . . . .	37
1.2	Approche micromécanique de la poroélasticité isotherme . . . . .	38
1.2.1	Caractéristiques générales . . . . .	38
1.2.2	Analyse énergétique à l'échelle microscopique (Deudé et al. [27]) . . . . .	41
1.3	Homogénéisation du comportement poroélastique linéaire. . . . .	43
1.3.1	Équations d'état de la poroélasticité linéaire . . . . .	44
1.3.2	Distribution des déformations dans la phase solide. . . . .	46



<b>2</b>	<b>Le comportement poroélastique non linéaire</b>	<b>51</b>
2.1	Origine de la non linéarité réversible . . . . .	53
2.1.1	Mise en évidence du comportement non linéaire du matériau. . . . .	53
2.1.2	Effet d'une microfissuration de la phase solide. . . . .	54
2.1.3	Discussion de l'existence d'une connexion entre les pores et les fissures. . . . .	56
2.2	Comportement macroscopique d'un poreux saturé à pores et fissures connectés (Deudé et al. [27]) . . . . .	58
2.3	Homogénéisation linéaire d'un poreux à pores et fissures connectés (cas sec) . . . . .	61
2.3.1	Homogénéisation d'un solide fissuré : cas dilué . . . . .	62
2.3.2	Homogénéisation d'un solide fissuré : fissures interagissantes . . . . .	69
2.3.3	Homogénéisation d'un poreux contenant de pores et des fissures interagissantes. . . . .	71
2.4	Homogénéisation non linéaire d'un poreux à pores et fissures connectés (cas sec) . . . . .	74
2.4.1	Non linéarité et critère de fermeture. . . . .	75
2.4.2	Expression de $\mathbf{C}_t^{hom}$ comme une fonction du paramètre de densité de fissure $\epsilon(X)$ . . . . .	78
2.4.3	Identification expérimentale du paramètre de densité de fissure, de la porosité de fissure et de la densité de fissure. . . . .	79
2.5	Illustration de l'influence de la non linéarité dans un problème d'ingénierie de réservoir. . . . .	81
2.5.1	Position du problème. . . . .	82
2.5.2	Détermination de l'équation de diffusion non linéaire. . . . .	82
2.5.3	Calculs de l'indice de récupération. . . . .	85
2.5.4	Calcul semi-analytique de la valeur asymptotique de l'indice de récupération. . . . .	87
2.6	Comportement d'un poreux saturé à pores et fissures non connectés. . . . .	90
2.6.1	Le modèle de la sphère creuse en compression. . . . .	91
2.6.2	Cas général . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Annexes de la partie II</b>	<b>99</b>
3.1	Calcul des tenseurs $\mathbf{T}$ , $\mathbf{T}'$ et $\mathbf{Q}$ . . . . .	101
3.1.1	Coefficients du tenseur d'Eshelby . . . . .	101
3.1.2	Calcul des tenseurs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ . . . . .	102
3.1.3	Calcul du tenseur $\mathbf{Q}$ de la section. . . . .	102
3.2	Justification du choix de l'inclusion ellipsoïdale pour la modélisation des fissures. . . . .	104

3.3	Résolution de l'équation de diffusion non linéaire par la méthode des différences finies. . . . .	106
-----	---------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## IV Approche micromécanique des phénomènes irréversibles 109

<b>1</b>	<b>Le couplage élasticité-plasticité</b>	<b>111</b>
1.1	Introduction. . . . .	113
1.2	Le comportement poroplastique fini à l'échelle macroscopique . . . . .	113
1.2.1	Décomposition de la transformation - Équations d'état . . . . .	113
1.2.2	Règles d'écoulement en poroplasticité finie. . . . .	115
1.3	Modélisation du couplage élasticité-plasticité . . . . .	117
1.3.1	Mise en évidence du couplage par l'approche microscopique. . . . .	117
1.3.2	Paramètre macroscopique du couplage . . . . .	121
1.4	Caractérisation numérique du couplage. . . . .	123
1.4.1	Position du problème . . . . .	123
1.4.2	Formulation variationnelle de l'équation d'équilibre. . . . .	125
1.4.3	Discrétisation par éléments finis. . . . .	128
1.4.4	Mise en œuvre numérique . . . . .	131
1.5	Équation d'état macroscopique en vitesse. . . . .	135
1.6	Conclusion . . . . .	137
<b>2</b>	<b>Couplage élasticité-plasticité avec pores elliptiques</b>	<b>139</b>
2.1	Introduction . . . . .	141
2.2	Estimations pour un v.e.r. à pores elliptiques en déformations planes. . . . .	141
2.3	Résultats et conclusion . . . . .	143
<b>3</b>	<b>Effets des transformations finies sur le module d'écrouissage</b>	<b>149</b>
3.1	Introduction . . . . .	151
3.2	Fonction de charge et module d'écrouissage. . . . .	151
3.2.1	Cas général. . . . .	151
3.2.2	Cas des géomatériaux. . . . .	152
3.3	Loi d'écrouissage adaptée aux transformations finies . . . . .	153
3.3.1	Forme de la loi d'écrouissage. . . . .	153
3.3.2	Charge limite pour une sphère creuse en compression. . . . .	154
3.3.3	Détermination du module d'écrouissage. . . . .	157

<b>V</b>	<b>Solutions analytiques pour la modélisation de la compaction de bassins sédimentaires</b>	<b>159</b>
<b>1</b>	<b>Étude de la compaction en condition œdométrique</b>	<b>161</b>
1.1	Introduction . . . . .	163
1.2	Modélisation sous l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.). . . . .	165
1.2.1	Position du problème. . . . .	165
1.2.2	Résolution . . . . .	168
1.3	Modélisation en transformation finie. . . . .	173
1.3.1	Position du problème. . . . .	173
1.3.2	Résolution . . . . .	174
1.3.3	Introduction d'une partie déviatorique dans le critère de plasticité .	180
1.3.4	Prise en compte du couplage élasticité-plasticité. . . . .	184
1.3.5	Prise en compte d'un module d'écroutissage variable. . . . .	188
<b>2</b>	<b>Étude de la compaction en condition tectonique</b>	<b>195</b>
2.1	Modélisation du problème dans le cas H.P.P. . . . .	197
2.1.1	Position du problème. . . . .	197
2.1.2	Résolution. . . . .	198
2.2	Modélisation dans le cadre des transformations finies. . . . .	201
2.2.1	Position du problème. . . . .	201
2.2.2	Résolution. . . . .	203
2.2.3	Résultats et conclusions. . . . .	208
2.2.4	Prise en compte de coefficients d'élasticité non linéaires. . . . .	209
<b>VI</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>215</b>

# Première partie

## Introduction



La mécanique des roches intervient dans deux grands volets de l'ingénierie pétrolière:

1. la modélisation du comportement des réservoirs, en vue d'optimiser leur exploitation ;
2. la compréhension des mécanismes mis en jeu dans la formation des bassins sédimentaires en vue de développer des outils d'aide à la prospection.

Depuis longtemps, l'ingénierie pétrolière a rassemblé des compétences pluridisciplinaires, notamment celles de géologues et de chimistes, pour s'attaquer à ces deux thématiques. Mais, il n'est pas exagéré d'affirmer que la prise en compte de la dimension mécanique est à la fois plus récente et moins aboutie.

A ce jour, les outils de calculs industriels tant "réservoir" que "bassin" ne sont basés qu'exceptionnellement sur une description tensorielle du comportement mécanique des matériaux. Le plus souvent, on tente d'en faire l'économie moyennant des hypothèses supplémentaires sur la cinématique. Au nombre de celles-ci on trouve par exemple l'hypothèse œdométrique, utilisée aussi bien en "réservoir" qu'en "bassin", qui consiste à admettre que la cinématique est localement unidirectionnelle.

Sans prétendre pour autant jouer un rôle de pionier en la matière, ce travail se propose d'apporter, avec les outils de la modélisation mécanique, quelques éléments de réponse à ces problèmes de réservoir et de bassin.

Citons d'emblée les deux grandes questions auxquelles ce mémoire va chercher à répondre:

- Peut-on évaluer l'effet d'une fissuration de la roche constituant le réservoir sur la récupération primaire d'hydrocarbures<sup>1</sup>?
- La microstructure de la roche du bassin sédimentaire subit de grandes transformations au cours du processus d'enfouissement. Peut-on modéliser l'impact de ce phénomène sur le comportement macroscopique de la roche sédimentaire et déterminer la loi de compaction<sup>2</sup>?

---

1. On fore un puits et on récupère les hydrocarbures "progressivement" en profitant de la pression existant dans le réservoir.

2. c'est-à-dire l'évolution de la hauteur du bassin en fonction de la masse de sédiments apportés

Chacune de ces deux questions se décompose en deux parties renvoyant à deux échelles d'espace différentes : l'une (échelle microscopique) concerne la modélisation mécanique du matériau, tandis que l'autre (échelle macroscopique) implique la résolution d'un problème aux limites posé sur une structure.

**La partie II** propose un bref rappel sur le comportement mécanique d'un matériau monophasique avec une attention particulière pour le régime des transformations finies, tant en élasticité qu'en plasticité.

Après avoir été utilisé pour retrouver les équations de la poroélasticité linéaire, le raisonnement micromécanique est utilisé dans **la partie III** pour explorer le domaine non linéaire. L'idée consiste à interpréter la non linéarité du comportement macroscopique par l'existence d'une microfissuration de la roche. L'approche micromécanique permet de formuler un critère de fermeture des fissures basé sur le niveau de contrainte macroscopique. Elle établit le lien quantitatif entre la non linéarité observée expérimentalement et le changement d'état ouvert→fermé des différentes familles de fissures.

Ces considérations sont appliquées au problème d'un réservoir en production primaire.

Le cas de la non linéarité élastique, liée à la refermeture des fissures, correspond d'une certaine façon à l'effet d'une évolution de la morphologie de la microstructure sur le comportement macroscopique. Dans le même esprit, les grandes déformations subies par une particule élémentaire de milieu poreux, au cours de l'augmentation des contraintes liée à l'enfouissement, induisent une évolution irréversible de la morphologie microstructurale. L'impact sur le comportement macroscopique est analysé à nouveau à l'aide des outils de la micromécanique.

**La partie IV** examine successivement l'effet des changements de morphologie sur l'évolution des caractéristiques élastiques, puis sur celle du module d'écrouissage.

On aboutit ainsi à une formulation du comportement poroélastique en transformation finie qui intègre le couplage entre le chargement macroscopique appliqué et l'effet sur la microstructure.

Cette loi est finalement mise en œuvre dans **la partie V** pour simuler le processus de formation d'un bassin sédimentaire.

Tout en restant très rustique sur le plan du scénario géologique, on examine l'effet de l'évolution des propriétés élastiques et plastiques étudiées à **la partie IV** sur la loi de compaction et de profil des contraintes.

## Deuxième partie

### Formulation d'une loi de comportement élastoplastique en transformation finie





# Chapitre 1

## Élasticité finie.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Cinématique d'un milieu continu . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1.1	Descriptions lagrangienne et eulérienne . . . . .	19
1.1.2	Tenseurs des déformations d'un milieu continu . . . . .	20
<b>1.2</b>	<b>Loi de comportement - équation d'état . . . . .</b>	<b>21</b>
1.2.1	Tenseurs de contraintes eulérien et lagrangien . . . . .	21
1.2.2	Loi de comportement - équation d'état . . . . .	23

---



## 1.1 Cinématique d'un milieu continu

### 1.1.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne

Décrire la cinématique d'un milieu continu, noté  $\Omega$ , consiste à décrire le mouvement de ses constituants élémentaires (appelés aussi «particules»)  $d\Omega$ . Pour cela, on considère tout d'abord un référentiel auquel on associe un repère orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ . A un instant initial donné  $t_o$ , on considère alors une configuration  $\Omega_o$ , prise comme configuration de référence, dans laquelle chaque particule, géométriquement située en un point  $M_o$ , va pouvoir être repérée par un vecteur position  $\underline{x}_o = \underline{OM}_o$ .

A un instant  $t$  quelconque, le milieu occupe un domaine, noté  $\Omega_t$ , dont une particule initialement en  $\underline{x}_o$  se situe maintenant au point géométrique  $M$  de coordonnées  $\underline{x}$ .

La *description lagrangienne* consiste alors à identifier chaque particule de la configuration  $\Omega_t$  par sa position dans la configuration de référence. Toute grandeur physique peut alors être exprimée en fonction de la particule à laquelle elle est rattachée et du temps.

On peut donc définir une fonction vectorielle  $\underline{\tau}(\underline{x}_o, t)$  qui décrit la correspondance spatiale entre les configurations initiale et actuelle. On aura donc :

$$\underline{x} = \underline{\tau}(\underline{x}_o, t) \quad (1.1)$$

Définie sur l'ensemble  $\Omega_o \times [t_o, t]$ , cette fonction constitue la description lagrangienne du mouvement du milieu continu entre  $t_o$  et  $t$ .

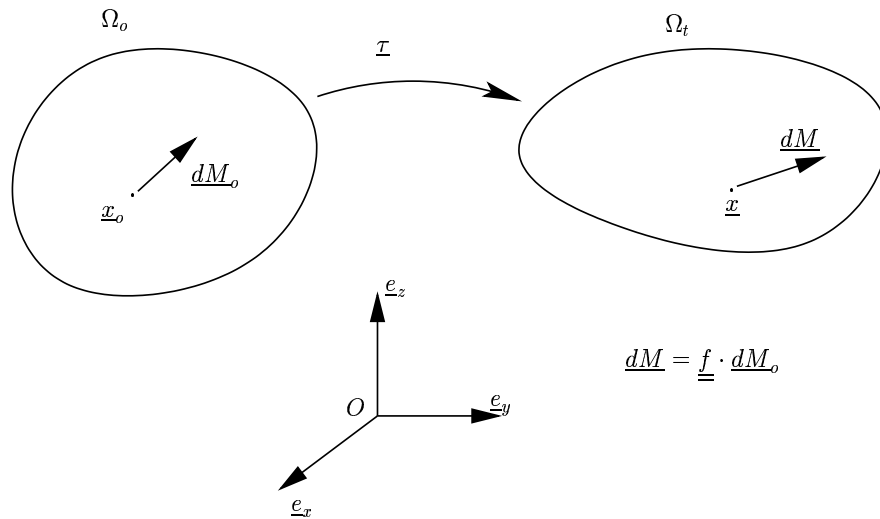


FIG. 1.1: *représentation lagrangienne du mouvement d'un milieu continu*

Par opposition à la description lagrangienne, la description eulérienne ne cherche pas à repérer les particules au cours du temps relativement à une configuration initiale, mais consiste au contraire à définir à chaque instant  $t$  et en tout point  $\underline{x}$  de la configuration

actuelle, la vitesse  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  de la particule située à l'instant  $t$  au point de coordonnées  $\underline{x}$ . Ceci revient à prendre, à chaque instant, la configuration actuelle comme configuration de référence pour une évolution infinitésimale s'effectuant sur l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  dans laquelle le déplacement vaut  $\underline{u}(\underline{x}, t) dt$ .

### 1.1.2 Tenseurs des déformations d'un milieu continu

Relativement à la transformation géométrique définie par l'application  $\underline{\tau}$ , on introduit le champ de déplacement d'une particule  $\underline{\xi}(\underline{x}_o, t)$  comme la différence entre les vecteurs position à l'instant  $t$  et à l'instant initial  $t_o$ :

$$\underline{\xi}(\underline{x}_o, t) = \underline{\tau}(\underline{x}_o, t) - \underline{x}_o \quad (1.2)$$

On en déduit naturellement que le gradient de transformation  $\underline{\underline{f}}(\underline{x}_o, t) = \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\tau}(\underline{x}_o, t))$  est relié au déplacement par :

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi} \quad (1.3)$$

D'après la définition de  $\underline{\underline{f}}$ , un vecteur matériel élémentaire  $\underline{dM}_o$  de la configuration de référence est donc transformé en :

$$\underline{dM} = \underline{\underline{f}} \underline{dM}_o \quad (1.4)$$

Dans le cadre des transformations finies, le concept de déformation lagrangien approprié est le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\delta}}$ . Étant donnés deux vecteurs matériels  $\underline{dM}_o$  et  $\underline{dM}'_o$  respectivement transformés en  $\underline{dM}$  et  $\underline{dM}'$ ,  $\underline{\underline{\delta}}$  est défini par :

$$2\underline{dM}_o \cdot \underline{\underline{\delta}} \cdot \underline{dM}'_o = \underline{dM} \cdot \underline{dM}' - \underline{dM}_o \cdot \underline{dM}' \Rightarrow \underline{\underline{\delta}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{f}} - \underline{\underline{1}}) \quad (1.5)$$

En utilisant (1.3) et (1.5), on peut écrire le tenseur des déformations de Green-Lagrange en fonction du déplacement sous la forme :

$$\underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}) \quad (1.6)$$

C'est donc la somme de la partie symétrique du gradient du déplacement, qui est le tenseur des déformations linéarisées, et d'un terme du second ordre en  $\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}$ . Dans la situation des transformations infinitésimales, c'est à dire quand  $|\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\xi}| \ll 1$ , il est alors possible d'approximer  $\underline{\underline{\delta}}$  par  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Cependant, dans le domaine des grandes transformations,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  n'est pas physiquement pertinent. Ceci peut être illustré sur un exemple de rotation pure d'angle  $\theta$  autour de l'axe des  $z$ . La matrice du gradient de transformation donnée, on obtient :

$$\underline{\underline{f}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\delta}} = 0 \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.7)$$

Comme on s'y attend pour un mouvement de corps rigide, la déformation décrite par le tenseur de Green-Lagrange est nulle, tandis que les composantes de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  varient entre 0 et  $-2$  en fonction de  $\theta$ .

De plus, d'après la définition (1.4), un volume élémentaire  $d\Omega_o$  de la configuration de référence se transforme en un volume  $d\Omega_t$  avec :

$$d\Omega_t = j(\underline{x}_o, t) d\Omega_o \quad (1.8)$$

où  $j(\underline{x}_o, t)$  est égal au déterminant de  $\underline{\underline{f}}$ . Ce déterminant porte le nom de *jacobien de la transformation géométrique* ou *dilatation volumique*.

Il est de plus intéressant de noter que, d'après le théorème de décomposition polaire,  $\underline{\underline{f}}$  peut être décomposé comme le produit d'un tenseur de rotation  $\underline{\underline{r}}$  et d'un tenseur symétrique de déformation pure  $\underline{\underline{s}}$ , dont les valeurs propres sont les dilatations principales :

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{s}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{s}}^2 = \underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\delta}} \quad (1.9)$$

On adopte maintenant la description eulérienne en définissant à tout instant un champ de vitesse  $\underline{u}(\underline{x}, t)$ . En rappelant la formule classique qui relie le gradient eulérien des vitesses à la description lagrangienne :

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\dot{f}}} \cdot \underline{\underline{f}}^{-1} \quad (1.10)$$

on déduit que le tenseur taux de déformation eulérien qui correspond à la partie symétrique du gradient du champ de vitesses s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{t\text{grad}}} \underline{u} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}) = \underline{\underline{\dot{f}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{\delta}}} \cdot \underline{\underline{f}}^{-1} \quad (1.11)$$

Pour une transformation infinitésimale ( $\underline{\underline{f}} \approx \underline{\underline{1}}$ ), (1.11) conduit à l'approximation  $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\delta}}}$ . Cependant, de manière générale,  $\underline{\underline{d}}$  n'est pas une dérivée du temps et il sera utile de le remplacer par le membre de droite de (1.11).

## 1.2 Loi de comportement - équation d'état

### 1.2.1 Tenseurs de contraintes eulérien et lagrangien

La formulation d'une loi de comportement demande de clarifier le concept de contrainte qui doit être reliée à la déformation. Un exemple simple est proposé de manière à montrer que, à la différence des transformations infinitésimales, le tenseur usuel des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  n'est pas, en général, une fonction de la seule déformation.

Considérons l'expérience suivante (figure 1.2) effectuée sur un morceau cylindrique de

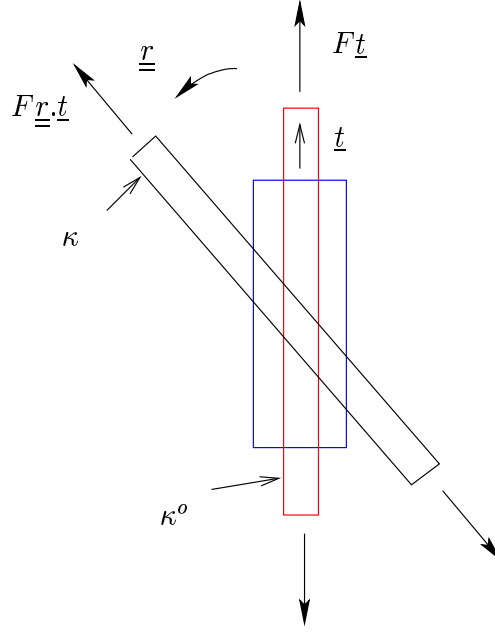


FIG. 1.2: évolution de la contrainte de Cauchy au cours d'une rotation

solide. Il est tout d'abord chargé par deux forces opposées  $\pm Ft$ , où  $\underline{t}$  représente le vecteur unitaire sur l'axe du cylindre. Cette configuration chargée, notée  $\kappa^o$ , est choisie comme configuration initiale. Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}^o$  dans  $\kappa^o$  est alors de la forme  $\sigma \underline{t} \otimes \underline{t}$ . Le chargement ainsi que l'échantillon sont alors soumis à la même rotation  $\underline{r}$  (configuration  $\kappa$ ). Au cours de cette seconde étape de chargement, les taux de déformation  $\underline{\underline{d}}$  et  $\underline{\underline{\delta}}$  sont évidemment nuls alors que la contrainte de Cauchy est donnée par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(\underline{r} \cdot \underline{t}) \otimes (\underline{r} \cdot \underline{t}) \quad (1.12)$$

qui montre que la contrainte de Cauchy varie avec la rotation alors que  $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\delta}} = 0$ . Par conséquent, la loi de comportement ne peut pas se mettre sous la forme  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{L}(\underline{\underline{\delta}})$ . En d'autres termes, le tenseur des contraintes ne peut pas être relié à la seule déformation.

De manière à surmonter cette difficulté, nous introduisons maintenant le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{\pi}}$  qui est défini sur la configuration initiale. Pour un gradient de déformation local  $\underline{\underline{f}}$ , une surface matérielle élémentaire  $dS^o$  dans la configuration initiale et son image  $dS$  sont reliées par  $dS = j \underline{\underline{f}}^{-1} \cdot dS^o$ . On définit  $\underline{\underline{\pi}}$  par la condition suivante: le vecteur contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot dS$  est obtenu en appliquant le gradient de déformation  $\underline{\underline{f}}$  au vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{\pi}} \cdot dS^o$ :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot dS = \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot dS^o \Rightarrow \underline{\underline{\pi}} = j \underline{\underline{f}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{f}}^{-1} \quad (1.13)$$

Si nous considérons encore l'expérience décrite plus haut dans laquelle le gradient de déformation  $\underline{\underline{f}}$  est une rotation ( $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{r}}$ ), (1.13) montre que  $\underline{\underline{\pi}}$  est une constante, égale à la contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}^o$  dans la configuration initiale  $\kappa^o$ . Ceci suggère que  $\underline{\underline{\pi}}$  est un bon candidat pour la formulation de la loi de comportement en grandes déformations.

## 1.2.2 Loi de comportement - équation d'état

Cette idée est confirmée par une approche énergétique qui peut être effectuée dans le cas d'un solide élastique. Considérons un volume élémentaire  $d\Omega_o$  dans la configuration initiale qui est transformé en  $d\Omega_t$ . La puissance de déformation dans  $d\Omega_t$  est  $\mathcal{P}_d = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega_t$ . La combinaison de (1.11) et (1.13) fournit une expression lagrangienne alternative de  $\mathcal{P}_d$  qui met en jeu les contraintes et déformations lagrangiennes  $\underline{\underline{\pi}}$  et  $\underline{\underline{\delta}}$ :

$$\mathcal{P}_d = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega_t = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\delta}} d\Omega_o \quad (1.14)$$

Pour un solide élastique, il n'y a pas de dissipation. Il en découle, pour une évolution isotherme, que la puissance de déformation est entièrement stockée dans l'énergie libre du solide. Cette fonction thermodynamique ne dépend que d'une seule variable, à savoir le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\delta}}$ . Elle peut être caractérisée par une densité lagrangienne  $\psi^s(\underline{\underline{\delta}})$  qui représente l'énergie mécanique requise pour imposer la déformation  $\underline{\underline{\delta}}$  au volume unitaire de solide dans la configuration initiale. En termes de taux, nous avons ainsi:

$$\dot{\psi}^s d\Omega_o = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\delta}} d\Omega_o \quad (1.15)$$

L'équation d'état du solide élastique en transformation finie est directement obtenue à partir de (1.15):

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial \psi^s}{\partial \underline{\underline{\delta}}}(\underline{\underline{\delta}}) \quad (1.16)$$

En introduisant la relation (1.13) entre  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\pi}}$  dans (1.16), on obtient une formulation équivalente de la loi de comportement en fonction de  $\underline{\underline{\sigma}}$ :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{j \underline{\underline{\sigma}}} \cdot \frac{\partial \psi^s}{\partial \underline{\underline{\delta}}}(\underline{\underline{\delta}}) \cdot {}^t \underline{\underline{f}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\delta}}, \underline{\underline{r}}) \quad (1.17)$$

Comme on pouvait s'y attendre, (1.17) montre que  $\underline{\underline{\sigma}}$  est une fonction de la déformation  $\underline{\underline{\delta}}$  et d'un terme additionnel, qui est la partie rotation du gradient de déformation décomposé en (1.9).





# Chapitre 2

## Plasticité finie

### Sommaire

---

2.1	Élastoplasticité en transformation infinitésimale . . . . .	27
2.2	Décomposition de la transformation - équation d'état . . . . .	28
2.3	Règle d'écoulement . . . . .	31
2.4	Relation entre les taux de contrainte et de déformation . . .	31

---



## 2.1 Élastoplasticité en transformation infinitésimale

Dans le cas des déformations infinitésimales, le tenseur linéarisé des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  d'un matériau élastoplastique est habituellement écrit comme la somme d'une partie élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  et d'une partie plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (2.1)$$

La même décomposition est valable pour les taux de déformation  $\underline{\underline{d}} \approx \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$  :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^e + \underline{\underline{d}}^p \quad (2.2)$$

La déformation observée lorsqu'on relâche le chargement appliqué à un volume élémentaire est égale à  $-\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ . Donc  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  peut être interprétée comme la déformation résiduelle dans la *configuration relâchée* définie comme l'état non contraint<sup>1</sup>. L'équation d'état relie la contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  et la déformation élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi^s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad (2.3)$$

où  $\psi^s$  représente comme précédemment la densité d'énergie libre du solide. Pour des propriétés élastiques linéaires définies par le tenseur des modules d'élasticité  $\mathbf{c}$ , (2.3) prend la forme simple :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (2.4)$$

De manière à compléter la formulation de la loi de comportement élastoplastique, la règle d'écoulement doit être spécifiée. Elle détermine la valeur du taux de déformation plastique  $\underline{\underline{d}}^p$  par le biais du concept de potentiel plastique que l'on notera ici  $g(\underline{\underline{\sigma}})$  :

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.5)$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique.

Pour des propriétés élastiques linéaires, la combinaison de l'équation d'état (2.4) avec la règle d'écoulement (2.5) conduit à une relation simple entre le taux de contrainte et le taux de déformation :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \mathbf{c} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e = \mathbf{c} : \left( \underline{\underline{d}} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad (2.6)$$

---

1. à l'échelle macroscopique

## 2.2 Décomposition de la transformation - équation d'état

Dans le cas des grandes transformations, on veut garder l'idée que le gradient de transformation  $\underline{\underline{f}}$  a une composante élastique et une composante plastique. La partie plastique est alors définie comme la transformation résiduelle qui subsiste quand on libère le volume élémentaire du chargement qui lui est appliqué. En référence aux travaux de Lee [55], on introduit comme précédemment la configuration relâchée, notée  $d\Omega_R$ , obtenue par une décharge réversible à partir de la configuration déformée  $d\Omega_t$ .

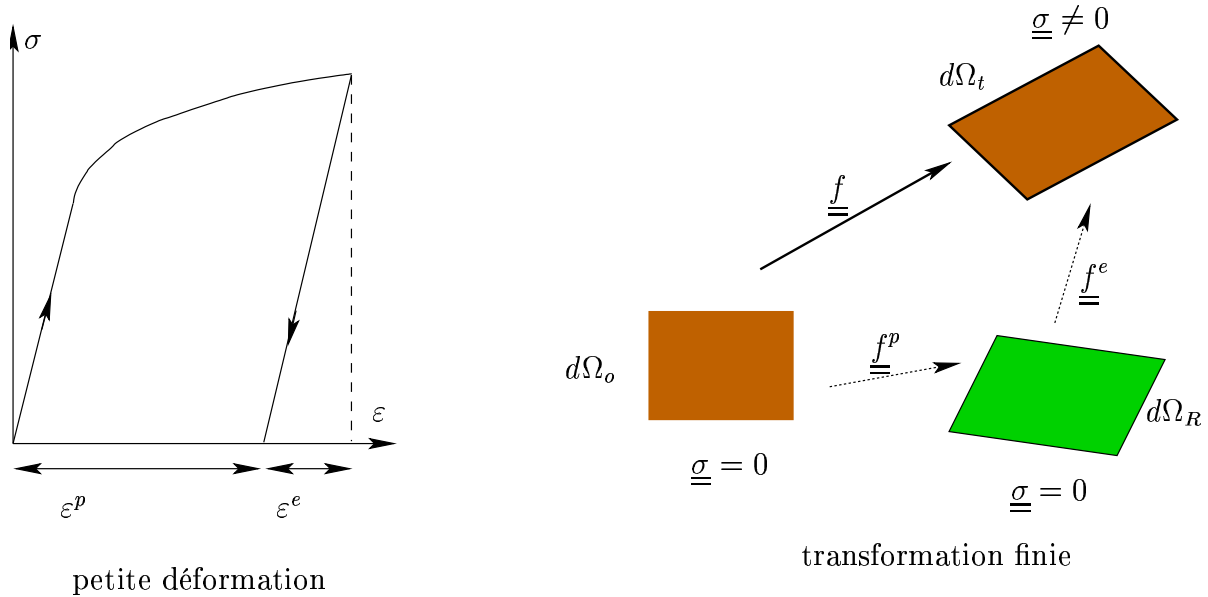


FIG. 2.1: décomposition de la transformation en une partie élastique et une partie plastique

On note  $\underline{\underline{f}}^e$  la transformation géométrique homogène de la particule considérée entre  $d\Omega_R$  et  $d\Omega_t$ , et  $\underline{\underline{f}}^p$  la transformation géométrique homogène de la même particule entre  $d\Omega_o$  en  $d\Omega_R$ . On peut ainsi généraliser (2.1) aux grandes déformations en décomposant le gradient de la transformation  $\underline{\underline{f}}$  en deux composantes<sup>2</sup>, la “transformation élastique”  $\underline{\underline{f}}^e$  et la “transformation plastique”  $\underline{\underline{f}}^p$ .

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{f}}^e \cdot \underline{\underline{f}}^p \quad (2.7)$$

On suppose que le solide est *plastiquement incompressible*, ce qui implique que  $\det \underline{\underline{f}}^p = \underline{\underline{1}}$ . Soient  $j^e = |d\Omega_t| / |d\Omega_R|$  le jacobien élastique et  $\underline{\underline{\pi}} = j^e \underline{\underline{f}}^e{}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{f}}^e{}^{-1}$  le tenseur de Piola-Kirchhoff défini sur la configuration relâchée associé au tenseur des contraintes

2. Dans la littérature anglo-saxonne, l'appellation “deformation gradient” rencontrée pour  $\underline{\underline{f}}^e$  et  $\underline{\underline{f}}^p$  peut prêter à confusion car ce ne sont pas les gradients d'une transformation

de Cauchy appliqué à  $d\Omega_t$ . Si la densité d'énergie libre du solide dans la configuration relâchée était une fonction  $\psi^e(\underline{\underline{\delta}}^e)$  de la déformation élastique  $\underline{\underline{\delta}}^e$ , on généraliserait (2.1) sous la forme :

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \underline{\underline{\delta}}^e} \text{ avec } \underline{\underline{\delta}}^e = \frac{1}{2}({}^t \underline{\underline{f}}^e \cdot \underline{\underline{f}}^e - \underline{\underline{1}}) \quad (2.8)$$

Mais, dans le cas général, supposer que  $\psi^s = \psi^s(\underline{\underline{\delta}}^e)$  n'est pas correct. L'origine de la difficulté tient dans le fait que la configuration relâchée n'est pas définie de manière unique (Mandel [56], Halphen [41]).

En fait, la décomposition précédente du gradient de déformation  $\underline{\underline{f}}$  ne détermine pas complètement ses parties élastique et plastique car le processus de décharge à partir de  $d\Omega_t$  ne prescrit pas l'orientation de la configuration relâchée.

Plus précisément, si on se donne un tenseur rotation arbitraire  $\underline{\underline{v}}$  et une décomposition particulière  $(\underline{\underline{f}}^{e*}, \underline{\underline{f}}^{p*})$  de  $\underline{\underline{f}}$  associée à la configuration  $d\Omega_R^*$ , le couple  $(\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{f}}^{e*} \cdot \underline{\underline{v}}, \underline{\underline{f}}^p = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{f}}^{p*})$  est alors une autre décomposition possible. La configuration relâchée correspondante  $d\Omega_R$  est déduite de  $d\Omega_R^*$  par la rotation  $\underline{\underline{v}}$ . Les tenseurs de déformation élastique de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\delta}}^{e*}$  et  $\underline{\underline{\delta}}^e$  sont reliés par :

$$\underline{\underline{\delta}}^e = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\delta}}^{e*} \cdot \underline{\underline{v}} \quad (2.9)$$

L'énergie libre du solide dans  $d\Omega_t$  peut être caractérisée par une densité définie par rapport à la configuration relâchée. La valeur numérique de la densité est manifestement indépendante du choix de la configuration relâchée tandis que les variables d'état en dépendent. Supposons par exemple que la densité d'énergie libre soit une fonction  $\psi^{s*} = \psi^{s*}(\underline{\underline{\delta}}^{e*})$  de la déformation  $\underline{\underline{\delta}}^{e*}$  vis-à-vis de la configuration relâchée  $d\Omega_R^*$ . Ceci implique que la densité d'énergie libre  $\psi^s$  dépend à la fois de la déformation élastique  $\underline{\underline{\delta}}^e$  vis-à-vis de la configuration relâchée  $d\Omega_R$  et de l'orientation de  $d\Omega_R$  par rapport à  $d\Omega_R^*$  définie par  $\underline{\underline{v}}$ . Finalement, pour une configuration  $d\Omega_R^*$  donnée, l'équation d'état (2.8) n'est valide que sous la forme :

$$\underline{\underline{\pi}}^* = \frac{\partial \psi^{e*}}{\partial \underline{\underline{\delta}}^{e*}} \quad (2.10)$$

De façon à s'affranchir de cette difficulté, on suppose maintenant que les propriétés élastiques du solide sont isotropes. Dans ce cas, l'énergie libre élastique ne dépend que des valeurs principales des déformations élastiques. Or celles-ci ne sont pas affectées par l'orientation de la configuration relâchée. Il en découle, si l'hypothèse  $\psi^{s*} = \psi^{s*}(\underline{\underline{\delta}}^{e*})$  est valable pour une orientation particulière, qu'elle l'est aussi pour tout autre choix. Quelque soit l'orientation, l'équation (2.8) est désormais correcte. *A partir de maintenant, on choisit la configuration relâchée particulière pour laquelle  $\underline{\underline{f}}^e$  est un tenseur symétrique, ce qui définit son orientation de manière unique. Ceci consiste à mettre les composantes de la rotation dans la partie plastique de la décomposition du gradient de déformation  $\underline{\underline{f}}$ .* De plus, on

suppose que la déformation  $\underline{\underline{\delta}}^e$  est infinitésimale. En d'autres termes, les grandes déformations sont uniquement de nature irréversible (plastique). Cela signifie que  $\underline{\underline{f}}^e$  définit une transformation réversible infinitésimale :

$$\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^e \text{ avec } |\underline{\underline{\varepsilon}}^e| \ll 1 \quad (2.11)$$

(2.8) peut être simplifiée sous l'hypothèse (2.11) de petites déformations élastiques :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\pi}} = j^e \underline{\underline{f}}^{e-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{f}}^{e-1} \approx \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{\delta}}^e \approx \underline{\underline{\varepsilon}}^e \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi^s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad (2.12)$$

Par exemple, pour des propriétés élastiques (isotropes) linéaires, (2.12) prend la même forme que dans (2.4) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \text{ avec } \mathbf{c} = 3k\mathbf{J} + 2\mu\mathbf{K} \quad (2.13)$$

où l'on a posé :  $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{J}$ .  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité du quatrième ordre. Cependant, il y a deux différences importantes entre (2.4) et (2.13).

Tout d'abord, par opposition avec la déformation élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  qui apparaît dans (2.4), la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{f}}^e - \underline{\underline{1}}$  dans (2.13) n'est pas définie sur la configuration initiale mais sur une configuration déduite de la première par  $\underline{\underline{f}}^p$  qui a priori n'est pas une transformation infinitésimale. Considérons par exemple à nouveau l'expérience décrite dans la section 1.2.1 avec l'hypothèse que le comportement est élastique linéaire. Dans cet exemple,  $\underline{\underline{f}}^p$  est égale à la rotation  $\underline{\underline{r}}$  tandis que  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  est le tenseur des déformations élastiques infinitésimales induites par le couple de forces  $\pm F \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{t}}$  appliqué à l'échantillon *incliné* après qu'il ait été soumis à la rotation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \sigma \mathbf{c}^{-1} : (\underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{t}}) \neq \sigma \mathbf{c}^{-1} : \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} \quad (2.14)$$

La seconde différence est liée à la caractérisation des évolutions élastiques. Dans le cadre des transformations infinitésimales, une définition possible pour une telle évolution est  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\delta}}^e$ , mais la condition  $\underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e$  est alors dénuée de sens, les tenseurs  $\underline{\underline{\delta}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  n'étant pas définis sur la même configuration. En fait, la propriété caractéristique d'une évolution élastique est que la configuration relâchée est soumise à une rotation pure ce qui signifie qu'il n'y a pas de déformation plastique. Ceci peut être exprimé par le fait que le taux de déformation associé à la partie plastique est nul :

$$(\underline{\underline{\dot{f}}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1})_s = 0 \quad (2.15)$$

où  $(\underline{\underline{X}})_s$  (resp.  $(\underline{\underline{X}})_a$ ) représente la partie symétrique (resp. antisymétrique) du tenseur  $\underline{\underline{X}}$ .

## 2.3 Règle d'écoulement

On traite maintenant la question de la règle d'écoulement en grande déformation. Tout d'abord une décomposition du tenseur des taux de déformation est obtenue à partir de (2.7) :

$$\underline{\underline{d}} = (\underline{\underline{\dot{f}}} \cdot \underline{\underline{f}}^{-1})_s = (\underline{\underline{\dot{f}}^e} \cdot \underline{\underline{f}}^{e-1})_s + (\underline{\underline{\dot{f}}^p} \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1} \cdot \underline{\underline{f}}^{e-1})_s \quad (2.16)$$

Les deux termes du membre de droite de (2.16) dépendent respectivement de  $\underline{\underline{\dot{f}}^e}$  et de  $\underline{\underline{\dot{f}}^p}$ . Pour cette raison, ils sont parfois appelés taux de déformation élastique et plastique. Mais cette terminologie peut être dénuée de sens dès que l'on suggère d'écrire la règle d'écoulement sur le second terme, à savoir  $(\underline{\underline{\dot{f}}^e} \cdot \underline{\underline{\dot{f}}^p} \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1} \cdot \underline{\underline{f}}^{e-1})_s$ . En effet, conformément au concept de déformation plastique, ce tenseur devrait être égal à 0 dans une évolution élastique du volume élémentaire. Cependant, une telle évolution caractérisée par (2.13) n'implique pas, en général,  $(\underline{\underline{\dot{f}}^e} \cdot \underline{\underline{\dot{f}}^p} \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1} \cdot \underline{\underline{f}}^{e-1})_s = 0$ .

Un moyen naturel de surmonter cette difficulté consiste à écrire la règle d'écoulement directement sur la partie symétrique du taux de déformation plastique :

$$(\underline{\underline{\dot{f}}^p} \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1})_s = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \text{ avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.17)$$

(2.17) apparaît comme une simple extension de (2.5) aux grandes déformations, et respecte manifestement la condition de nullité du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  dans le cas d'une évolution élastique.

## 2.4 Relation entre les taux de contrainte et de déformation

Puisque  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  n'est pas définie sur une configuration fixe, l'équation d'état (2.13) est peu commode. Pour les applications, il est utile d'étendre aux grandes déformations la relation entre les taux de contrainte et de déformation donnée par (2.6) pour des évolutions élastoplastiques infinitésimales. Dans le cas d'une rotation pure, le membre de droite de (2.6) est égal à 0, tandis que  $\underline{\underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}} \neq 0$  (section 1.2.1). Nous pouvons ainsi nous attendre à ce que la généralisation de (2.6) introduise un terme correctif qui prend en compte les effets d'une grande rotation.

En introduisant l'hypothèse de petite déformation élastique (2.11) et l'équation d'état



(2.13) dans (2.16), on obtient l'expression du taux de contrainte de Cauchy :

$$\begin{cases} \underline{\dot{\underline{\underline{\sigma}}}} = \mathbf{c} : (\underline{\underline{d}} - (\underline{\underline{f}}^e \cdot \underline{\underline{f}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1} \cdot \underline{\underline{f}}^{e-1})_s) \\ (\underline{\underline{f}}^e \cdot \underline{\underline{f}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1} \cdot \underline{\underline{f}}^{e-1})_s \approx (\underline{\underline{f}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1})_s + \underline{\underline{\varepsilon}}^e \cdot (\underline{\underline{f}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1})_a - (\underline{\underline{f}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1})_a \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^e \end{cases} \quad (2.18)$$

En utilisant à nouveau l'équation d'état (2.13), ainsi que la règle d'écoulement (2.17) dans (2.18), on obtient finalement la relation :

$$\frac{D_J \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{Dt} = \mathbf{c} : \left( \underline{\underline{d}} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right) \text{ avec } \frac{D_J \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{Dt} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Omega}}} - \underline{\underline{\underline{\Omega}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.19)$$

où  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$  est le taux de rotation plastique  $(\underline{\underline{f}}^p \cdot \underline{\underline{f}}^{p-1})_a$ . Dans le cadre des petites déformations élastiques, il est possible de remplacer, dans (2.19),  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$  par le taux de rotation total  $(\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{f}}^{-1})_a$ . L'expression correspondante  $\frac{D_J \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{Dt}$  est appelée dérivée de Jaumann. Elle peut être interprétée comme la dérivée par rapport au temps du tenseur des contraintes de Cauchy dans un référentiel tournant à la vitesse de rotation  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$  par rapport au référentiel de l'observateur.

On a vu à la section 1.2.1 que le tenseur des contraintes de Cauchy évolue au cours d'une rotation pure ( $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} \neq 0$ ). En revanche, dans une telle évolution, on aura  $\underline{\underline{d}} = \dot{\lambda} = 0$ , ce qui implique, d'après (2.19), la nullité de  $\frac{D_J \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{Dt}$ .

En conclusion, l'extension de l'équation d'état (2.6) aux grandes déformations nécessite l'introduction du terme correctif  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Omega}}} - \underline{\underline{\underline{\Omega}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$  de façon à prendre en compte les effets non infinitésimaux de la rotation (pour cette question très discutée, voir par exemple Dienes [30] et Gilormini ([40],[39])).

Troisième partie

APPROCHE MICROMÉCANIQUE  
DE LA POROÉLASTICITÉ



# Chapitre 1

## Le comportement poroélastique linéaire

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>1.2</b>	<b>Approche micromécanique de la poroélasticité isotherme</b>	<b>38</b>
1.2.1	Caractéristiques générales	38
1.2.2	Analyse énergétique à l'échelle microscopique (Deudé et al. [27])	41
<b>1.3</b>	<b>Homogénéisation du comportement poroélastique linéaire.</b>	<b>43</b>
1.3.1	Équations d'état de la poroélasticité linéaire	44
1.3.2	Distribution des déformations dans la phase solide.	46

---



## 1.1 Introduction

*Dans les chapitres qui précèdent, on s'est intéressé à un milieu monophasique. On aborde à présent l'étude d'un milieu poreux saturé.*

Historiquement, la modélisation du comportement des milieux poreux saturés s'est d'abord développée à une échelle où le volume élémentaire est décrit comme la superposition de deux particules, l'une de fluide, l'autre dite de squelette. Nous l'appellerons "échelle macroscopique" dans la suite. Etant superposées, les deux particules macroscopiques de fluide et de squelette sont indiscernables géométriquement, c'est-à-dire qu'elles sont repérées par le même vecteur-position. C'est à cette échelle que Biot a mis en place un cadre thermodynamique dans lequel il a formulé la théorie de la poroélasticité.

Le modèle linéaire est devenu très familier au monde de la mécanique des roches, notamment dans la perspective des applications au génie pétrolier. C'est dans ce domaine que s'est développé le souci de relier les constantes tensorielles définissant le comportement macroscopique du milieu poreux aux caractéristiques mécaniques de la matrice solide constituant la particule macroscopique de squelette. A partir de données sur la géométrie de l'espace poreux et sur les propriétés mécaniques de cette matrice, la question est de déterminer celles du squelette. Ces informations géométriques et mécaniques relèvent d'une échelle d'espace plus fine à laquelle les phases solide et fluide occupent des domaines disjoints. Nous l'appellerons "échelle microscopique". Les travaux de Auriault et Sanchez-Palencia [4] ont apporté une réponse quantitative à cette problématique avec les outils de l'homogénéisation périodique.

Il est évident que les questions qui se posent quant à l'influence de la microstructure sur le comportement observé à l'échelle macroscopique ne peuvent obtenir de réponse par l'approche thermodynamique macroscopique classique. L'approche micromécanique peut, en revanche, apporter des réponses précises.

Dans ce chapitre, après une étude énergétique à l'échelle microscopique, on établit les équations d'état de la poroélasticité par l'approche micromécanique.

Dans toute cette partie, on se place dans l'hypothèse des petites perturbations.

On réserve les lettres minuscules (resp. majuscules) aux grandeurs physiques définies à l'échelle microscopique (resp. macroscopique). Dans la suite, la configuration de référence pour le calcul des déformations est celle de l'état naturel (contrainte macroscopique totale et pression de pore nulles).

## 1.2 Approche micromécanique de la poroélasticité isotherme

### 1.2.1 Caractéristiques générales

L'approche micromécanique repose sur l'hypothèse que le concept de volume élémentaire représentatif (v.e.r.) est pertinente. Ce dernier est une partie infinitésimale de la structure macroscopique et représente statistiquement le matériau. Sa taille caractéristique est par conséquent petite par rapport à celle de la structure, et grande devant celle des hétérogénéités.

D'un point de vue macroscopique, le v.e.r. apparaît comme la superposition d'une particule de solide et d'une particule de fluide toutes deux localisées au même point géométrique macroscopique. Au contraire, l'échelle microscopique révèle la géométrie de la microstructure. A cette échelle, les phases solide et fluide du v.e.r.  $\Omega$  apparaissent comme des domaines géométriques distincts notés  $\Omega^s$  et  $\Omega^f$ . Ceci signifie que le vecteur position  $\underline{x}$  correspond à un point matériel localisé soit dans la phase solide soit dans la phase fluide. L'indice  $o$  renvoie dans la suite à la configuration initiale.  $\Omega_o$ ,  $\Omega_o^s$  et  $\Omega_o^f$  désignent donc le v.e.r. et les sous domaines solide et fluide dans cette configuration. On appelle porosité lagrangienne le rapport entre le volume actuel de l'espace poreux et le volume total du v.e.r. dans la configuration initiale.

$$\Phi = \frac{|\Omega^f|}{|\Omega_o|} \quad (1.1)$$

On définit également, en vue des prochaines sections, la porosité eulérienne  $\phi$  comme le rapport du volume des pores sur le volume total, tous deux pris dans la configuration actuelle.

$$\phi = \frac{|\Omega^f|}{|\Omega|} \quad (1.2)$$

Au même titre que l'approche expérimentale, l'approche micromécanique vise à déterminer le comportement macroscopique. Cependant, au lieu d'appliquer le chargement à un échantillon de laboratoire, l'idée de la micromécanique est de définir un problème aux limites sur le v.e.r. considéré comme une structure mécanique, ce dernier jouant le rôle de l'échantillon au cours d'une expérience théorique. A condition que le comportement mécanique des constituants soit connu, le comportement macroscopique peut, au moins théoriquement, être déterminé à partir de la solution du problème aux limites.

On s'intéresse dans ce chapitre à la situation où la matrice solide est élastique linéaire.

A l'échelle microscopique,  $\underline{\xi}(\underline{x})$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  représentent respectivement le déplacement,

les champs de déformation et de contrainte induits dans le domaine solide par le chargement mécanique appliqué au v.e.r. de milieu poreux.  $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$  représente alors l'énergie libre par unité de volume, de la matrice solide supposée élastique. L'équation d'état en condition isotherme s'écrit donc sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (1.3)$$

L'approche micromécanique nécessite tout d'abord de définir comment les conditions aux limites sur les bords du v.e.r. sont reliées aux quantités macroscopiques que sont les tenseurs de déformation  $\underline{\underline{E}}$  et de contrainte  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et la pression de pores  $p$ <sup>1</sup>.

Pour des raisons de simplicité, on supposera que la frontière  $\partial\Omega$  du v.e.r. est entièrement tracée dans la phase solide.

Une première façon de répondre à la question ci-dessus est de postuler que la force surfacique qui agit au point  $\underline{x}$  de la frontière du v.e.r.  $\partial\Omega$  est de la forme  $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x})$ , où  $\underline{n}(\underline{x})$  représente la normale extérieure à la phase solide (voir à ce sujet de Buhan et al. [24]) :

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad (1.4)$$

Dans cette formule, soulignons que  $\underline{\underline{\Sigma}}$  ne dépend pas du vecteur position microscopique  $\underline{x}$ , dans la mesure où il représente l'état de contrainte macroscopique du v.e.r..

L'autre solution consiste à prescrire le déplacement  $\underline{\xi}(\underline{x})$  sur  $\partial\Omega$  comme une fonction de la déformation macroscopique et de  $\underline{x}$  :

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \quad (1.5)$$

La taille du v.e.r. étant, par construction, grande devant celle des hétérogénéités, les conditions aux limites (1.4) et (1.5) s'avèrent équivalentes en ce qui concerne la détermination du comportement macroscopique. On doit également exprimer que le domaine solide est soumis à la pression du fluide à l'interface solide-fluide  $I^{fs}$  :

$$(\forall \underline{x} \in I^{fs}) \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = -p \underline{n}(\underline{x}) \quad (1.6)$$

(1.4) ou (1.5) et (1.6) définissent complètement les conditions mécaniques sur les limites du domaine solide et sont illustrées par la figure 1.1. Les états de contrainte et de déformation sont caractérisés, à l'échelle macroscopique, par les tenseurs de contrainte et de déformation  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  et, à l'échelle microscopique, par les champs de contrainte et de déformation  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  définis sur le domaine solide. Nous devons maintenant examiner les relations appropriées qui peuvent exister entre  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  d'une part, et entre  $\underline{\underline{E}}$  et

---

1. celle-ci est supposée uniforme dans l'espace poreux du v.e.r.. C'est le cas en l'absence d'écoulement. Auriault et Sanchez-Palencia [4] ont montré que les fluctuations de la pression autour de sa moyenne dans le v.e.r. sont négligeables dans le domaine de validité de la loi de Darcy.



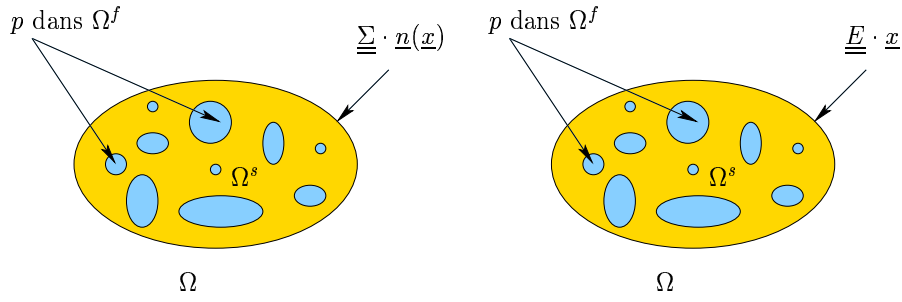


FIG. 1.1: chargement mécanique appliqué au v.e.r.

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ , d'autre part.

Le champ de contrainte microscopique  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  doit vérifier l'équation d'équilibre local de la phase solide<sup>2</sup> :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega^s) \quad \sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.7)$$

On note que le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  induit dans la phase solide peut être étendu dans la phase fluide par le tenseur de pression  $-p\underline{\underline{1}}$ , assurant ainsi la continuité du vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  à l'interface fluide-solide.

Si la condition aux limites (1.4) est adoptée, les paramètres définissant le chargement mécanique auquel le v.e.r. est soumis sont  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $p$ . Une combinaison de (1.4) et (1.7) montre alors que le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}$  n'est autre que la moyenne du champ de contrainte microscopique  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  sur  $\Omega$  :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) d\Omega = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.8)$$

En effet, en remarquant que  $(x_j \sigma_{ik})_{,k} = \sigma_{ij}$ , on obtient :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} x_j \sigma_{ik} n_k dS = \frac{\Sigma_{ik}}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} x_j n_k dS = \Sigma_{ij} \quad (1.9)$$

Le déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  induit par le chargement défini par  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $p$  est a priori uniquement défini sur la phase solide. Il est habituel de considérer une extension continue de  $\underline{\underline{\xi}}$  au domaine fluide, ce qui permet de définir le champ de déformation microscopique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sur la totalité du v.e.r..

Par opposition à la contrainte pour laquelle la règle de moyenne (1.8) est une conséquence de (1.4), on *définit* la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  comme la moyenne du champ de déformation microscopique sur l'ensemble du v.e.r. :

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} \quad (1.10)$$

2.  $a_{,k}$  représente la dérivée de  $a$  par rapport à  $x_k$

On peut supposer que le choix de l'extension de  $\underline{\underline{\xi}}$  au domaine fluide peut affecter la valeur de  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$  et ainsi la définition de la déformation macroscopique. Mais, à condition que cette extension soit continue à l'interface solide-fluide,  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$  s'avère être entièrement déterminée par le champ de déplacement dans le domaine solide. En effet, en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega^f} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{I^{fs}} \xi_i n_j dS \quad (1.11)$$

Il en découle que la valeur de  $\langle \partial \xi_i / \partial x_j \rangle_{\Omega^f}$  est contrôlée par celle du déplacement à l'interface fluide-solide  $I^{fs}$ .

En adoptant la condition (1.5) à la place de (1.4), les paramètres de chargement sont maintenant  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$ . La règle de moyenne  $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$  peut être alors établie pour toute extension à  $\Omega^f$  du champ de déplacement en accord avec (1.5). En effet, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \xi_i n_j dS = E_{ik} \int_{\partial\Omega} x_k n_j dS = E_{ij} |\Omega| \quad (1.12)$$

En revanche, dans le cadre de (1.5), la règle de moyenne (1.8) devient une définition.

Nous introduisons finalement la variation de volume des pores  $v$  dans le v.e.r. rapportée à  $|\Omega|$ , qui peut être calculée comme le flux du déplacement à travers l'interface  $I^{fs}$  ou par une intégration de la déformation volumique dans le domaine fluide :

$$v = \frac{1}{|\Omega|} \int_{I^{fs}} -\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{n} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \Phi \langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^f} \quad (1.13)$$

où  $\underline{n}$  est la normale unitaire à l'interface solide-fluide, orientée dans la direction de la phase fluide.  $v$  représente ainsi la variation de porosité lagrangienne :

$$v = \Phi - \Phi_o \quad (1.14)$$

## 1.2.2 Analyse énergétique à l'échelle microscopique (Deudé et al. [27])

Dans le but d'effectuer une analyse énergétique à l'échelle du v.e.r., on regarde d'abord le taux d'énergie fournie à la phase solide. En l'absence de fluide,  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}}$  représente classiquement le taux d'énergie fournie au v.e.r. par unité de volume. Cependant, cette expression n'est évidemment plus valable dans le cas d'un milieu poreux saturé. En effet, même si la déformation macroscopique est bloquée ( $\underline{\underline{\dot{E}}} = 0$ ), il est possible de fournir un taux d'énergie au solide par le travail de la pression de pore  $p$  au cours du changement de volume des pores  $\dot{v}$ , qui est égale à  $p\dot{v}$ . On commence tout d'abord par écrire l'expression de la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{ext}$  appliqués à  $\Omega$ . On considère successivement les

conditions limites (1.4)-(1.6) et (1.5)-(1.6).

Si le chargement est défini par (1.4) et (1.6),  $\mathcal{P}_{ext}$  s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\partial\Omega} \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS + p \int_{I^{fs}} -\underline{\dot{\xi}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS \quad (1.15)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné (voir (1.13)), l'intégrale sur  $I^{fs}$  apparaît comme le taux  $\dot{v}$  de variation de volume des pores.

En utilisant le fait que le tenseur de contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  ne dépend pas du vecteur position dans le v.e.r., l'intégrale sur la frontière  $\partial\Omega$  dans (1.15) peut être réarrangée comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS = \Sigma_{ij} \int_{\partial\Omega} \dot{\xi}_i n_j dS = \Sigma_{ij} \int_{\Omega} \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (1.16)$$

ou, en se rappelant que  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est un tenseur symétrique :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS = \Sigma_{ij} \langle \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_j} \rangle_{\Omega} | \Omega | = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\dot{\xi}} \rangle_{\Omega} | \Omega | \quad (1.17)$$

En utilisant (1.17) dans (1.15), et en rappelant que la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  a été définie comme  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$ , la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{ext}$  appliqués à  $\Omega$  s'écrit finalement :

$$\mathcal{P}_{ext} = (\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + p\dot{v}) | \Omega | \quad (1.18)$$

Si on considère maintenant le chargement défini par (1.5) et (1.6), la première intégrale dans l'expression de  $\mathcal{P}_{ext}$  dans (1.15) peut être remplacée par :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\dot{\xi}}(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS = \dot{E}_{ij} \int_{\partial\Omega} x_j \sigma_{ik} n_k dS = \dot{E}_{ij} \int_{\Omega} (x_j \sigma_{ik})_{,k} d\Omega = \langle \sigma_{ij} \rangle_{\Omega} \dot{E}_{ij} | \Omega | \quad (1.19)$$

Avec de telles conditions aux limites, la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  a été définie comme la moyenne  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega}$ . On retrouve alors l'expression de  $\mathcal{P}_{ext}$  dans (1.18).

Par définition, la puissance de déformation  $\mathcal{P}_d$  est celle développée par les efforts intérieurs, représentés par le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans la phase solide, durant le processus de déformation caractérisé par le taux de déformation  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$  :

$$\mathcal{P}_d = \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} d\Omega \quad (1.20)$$

L'utilisation de l'équation d'état (1.3) du solide constitutif révèle que la puissance de déformation est la dérivée par rapport au temps de l'énergie élastique  $\Psi$  stockée dans la phase solide :

$$\mathcal{P}_d = \dot{\Psi} \quad \text{avec} \quad \Psi = \int_{\Omega^s} \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) d\Omega \quad (1.21)$$

La puissance de déformation  $\mathcal{P}_d$  de (1.20) et la puissance des efforts extérieurs étant égales, il vient :

$$|\Omega| \left( \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + p\dot{v} \right) = \dot{\Psi} \quad (1.22)$$

Il convient de discuter séparément des conséquences de (1.22) en fonction de la nature des conditions aux limites.

Si on adopte (1.4)-(1.6), il apparaît, d'un point de vue micromécanique, que  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $p$  constituent les variables naturelles de l'énergie libre macroscopique  $\Psi$ . On peut alors voir la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  et la variation de volume des pores  $v$  comme des fonctions de  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $p$ . On introduit  $\Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p) = (\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} + pv) |\Omega| - \Psi(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$  qui satisfait :

$$\dot{\Psi}^* = (\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \dot{p}v) |\Omega| \quad (1.23)$$

Les équations macroscopiques s'écrivent donc :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{|\Omega|} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}}(\underline{\underline{\Sigma}}, p) \quad ; \quad v = \frac{1}{|\Omega|} \frac{\partial \Psi^*}{\partial p}(\underline{\underline{\Sigma}}, p) \quad (1.24)$$

En revanche, si on adopte maintenant (1.5)-(1.6), les variables naturelles de  $\Psi$  sont  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  et nous regardons alors la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et la variation de volume des pores  $v$  comme des fonctions de  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$ . On introduit  $\Psi^{**}(\underline{\underline{E}}, p) = pv |\Omega| - \Psi(\underline{\underline{E}}, p)$  qui satisfait :

$$\dot{\Psi}^{**} = (-\underline{\underline{\dot{E}}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} + \dot{p}v) |\Omega| \quad (1.25)$$

L'équation d'état macroscopique s'écrit maintenant :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -\frac{1}{|\Omega|} \frac{\partial \Psi^{**}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}, p) \quad ; \quad v = \frac{1}{|\Omega|} \frac{\partial \Psi^{**}}{\partial p}(\underline{\underline{E}}, p) \quad (1.26)$$

### 1.3 Homogénéisation du comportement poroélastique linéaire.

Dans la section précédente, on a effectué une analyse énergétique à l'échelle microscopique qui a permis d'obtenir deux couples d'équations d'état suivant que l'on pose un problème aux limites sur le v.e.r. dont le chargement est défini par (1.4)-(1.6) ou par (1.5)-(1.6). Ces équations supposent que le comportement du solide constitutif de la matrice est réversible. Dans une démarche d'homogénéisation, on cherche maintenant la forme de ces équations d'état pour le comportement poroélastique linéaire d'un milieu poreux constitué d'un solide isotrope dont le tenseur des modules d'élasticité est noté  $\mathbf{c}^s$ . On suppose ici que le problème d'homogénéisation est linéaire ce qui exclut la prise en compte d'éventuelles

non linéarités géométriques.

On rappelle que le v.e.r. du milieu poreux, noté  $\Omega$ , est constitué d'une partie solide  $\Omega^s$  et d'un espace poreux  $\Omega^f$  saturé par un unique fluide. On suppose comme précédemment que la frontière du v.e.r.  $\partial\Omega$  est entièrement tracée dans le solide. La frontière de  $\Omega^s$  se compose donc de  $\partial\Omega$  et de l'interface fluide-solide  $I^{fs}$  qui n'est autre que  $\partial\Omega^f$ .

Le chargement qui s'exerce sur le solide est caractérisé par la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  et la pression  $p$  du fluide. Ceci se traduit en termes de conditions aux limites appliquées au solide élastique  $\Omega^s$  par (1.5) et (1.6) :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p\underline{n} \text{ sur } \partial\Omega^f ; \underline{\underline{\xi}}(\underline{X}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{X} \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.27)$$

Le champ de contrainte dans l'espace poreux est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\Omega^f} = -p\underline{1} \quad (1.28)$$

D'après (1.26), on s'attend donc à trouver des équations d'état dont les variables naturelles sont  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$ . Comme dans la section précédente, le champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  défini sur la phase solide  $\Omega^s$  est arbitrairement étendu à  $\Omega^f$  par prolongement continu à la frontière  $\partial\Omega^f$ . Ainsi, les champs  $\underline{\underline{\xi}}$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont définis sur  $\Omega$  tout entier.

En définissant la précontrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  comme étant nulle dans la phase solide et égale à  $\underline{\underline{\sigma}}^{\Omega^f}$  dans le fluide

$$\underline{\underline{\sigma}}^p = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^s \\ -p\underline{1} & \text{dans } \Omega^f \end{cases} \quad (1.29)$$

on peut écrire la loi de comportement locale sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^p \text{ avec } \mathbf{c} = \begin{cases} \mathbf{c}^s & \text{dans } \Omega^s \\ 0 & \text{dans } \Omega^f \end{cases} \quad (1.30)$$

Le v.e.r. apparait comme une structure hétérogène tant du point de vue des valeurs locales de l'élasticité que de la précontrainte.

### 1.3.1 Équations d'état de la poroélasticité linéaire

Le problème étant linéaire, on décompose le chargement défini dans  $\Omega$  par  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  en deux :  $\underline{\underline{\xi}}'$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'$  (resp.  $\underline{\underline{\xi}}''$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}''$  et  $\underline{\underline{\sigma}}''$ ) désignent le déplacement, la déformation et la contrainte solutions dans  $\Omega$  du problème défini par  $\underline{\underline{E}}$  et  $p = 0$  (resp.  $p$  et  $\underline{\underline{E}} = 0$ ). Conformément à (1.30),  $\underline{\underline{\sigma}}'$  et  $\underline{\underline{\sigma}}''$  sont respectivement égaux à 0 et  $-p\underline{1}$  dans  $\Omega^f$ .  $\underline{\underline{\xi}}'$  et  $\underline{\underline{\xi}}''$  sont définis de façon unique dans  $\Omega^s$  et prolongés par continuité dans  $\Omega^f$ .

On note  $\mathbf{A}$  le champ de tenseurs de localisation de la déformation défini sur  $\Omega$  dans le

problème ( $\underline{\underline{E}}, p = 0$ ). Il est tel que  $\underline{\underline{\varepsilon}}' = \mathbf{A} : \underline{\underline{E}}$ . On en déduit la valeur de la contrainte macroscopique dans ce problème :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle_{\Omega} = (1 - \Phi) \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle_{\Omega^s} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \text{ avec } \mathbf{C}^{hom} = (1 - \Phi)\mathbf{c}^s : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega^s} \quad (1.31)$$

Par ailleurs, la solution du problème ( $\underline{\underline{E}} = 0, p$ ) est proportionnelle à la pression  $p$  du fluide, de sorte qu'il existe un tenseur  $\underline{\underline{B}}$  tel que  $\langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega} = -p\underline{\underline{B}}$  :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega} = -p\underline{\underline{B}} ; \quad (1 - \Phi) \langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega^s} = p(\Phi \mathbf{1} - \underline{\underline{B}}) \quad (1.32)$$

La contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est déduite de (1.31) et (1.32) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}}p \quad (1.33)$$

Pour déterminer la valeur de  $\underline{\underline{B}}$ , on applique d'abord le lemme de Hill au couple  $(\underline{\underline{\sigma}}'', \underline{\underline{\varepsilon}}')$  :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}'' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega} \quad (1.34)$$

On introduit ensuite dans (1.34) l'écriture de  $\underline{\underline{\sigma}}''$  sous la forme  $\mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}'' + \underline{\underline{\sigma}}^p$  et l'on applique à nouveau le lemme de Hill au couple  $(\underline{\underline{\sigma}}', \underline{\underline{\varepsilon}}'')$  :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} = \underbrace{\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' : \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega}}_{= \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle : \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle = 0} + \langle \underline{\underline{\sigma}}^p : \mathbf{A} \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} \quad (1.35)$$

dont il résulte que :

$$\underline{\underline{B}} = \Phi \mathbf{1} : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega^f} = \mathbf{1} : (\mathbf{I} - (1 - \Phi) \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega^s}) = \mathbf{1} : (\mathbf{I} - \mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{C}^{hom}) \quad (1.36)$$

Dans le cas particulier d'un comportement macroscopique isotrope (modules de compression et de cisaillement macroscopiques  $K^{hom}$  et  $\mu^{hom}$ ) et d'un comportement isotrope du solide (modules de compression et de cisaillement  $k^s$  et  $\mu^s$ ), notons que (1.36) prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{B}} = b \mathbf{1} \text{ avec } b = 1 - \frac{K^{hom}}{k^s} \quad (1.37)$$

tandis que la forme isotrope de (1.33) est :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = K^{hom} \text{tr} \underline{\underline{E}} \mathbf{1} + 2\mu^{hom} \underline{\underline{E}}_d - bp \mathbf{1} \quad (1.38)$$

où l'on a noté  $\underline{\underline{E}}_d$  la partie déviatorique de  $\underline{\underline{E}}$ .

La variation du volume de l'espace poreux fait l'objet de la seconde équation d'état macroscopique. D'après (1.13), on a :

$$\Phi - \Phi_o = \Phi \mathbf{1} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^f} = \Phi \mathbf{1} : (\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega^f} + \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega^f}) \quad (1.39)$$

D'une part, on déduit de (1.36) que :

$$\Phi \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega^f} = \Phi \underline{\underline{1}} : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega^f} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \quad (1.40)$$

D'autre part, (1.32) montre que :

$$\Phi \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega^f} = -(1 - \Phi) \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega^s} = \frac{p}{M} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{M} = \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : (\underline{\underline{B}} - \Phi \underline{\underline{1}}) \quad (1.41)$$

A coté de (1.33), la seconde équation d'état de la poroélasticité linéaire s'écrit donc :

$$\Phi - \Phi_o = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M} \quad (1.42)$$

Notons, d'après (1.41), que dans le cas de comportements macroscopique et microscopique isotropes, le coefficient  $M$  s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{1}{M} = \frac{b - \Phi}{k^s} \quad (1.43)$$

Notons encore la forme isotrope de (1.42) :

$$\Phi - \Phi_o = b \operatorname{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M} \quad (1.44)$$

### 1.3.2 Distribution des déformations dans la phase solide.

De manière générale, la distribution des déformations dans une phase donnée d'un matériau composite n'est pas uniforme, même si les propriétés du matériau le sont dans chaque phase. La plupart des modèles d'homogénéisation se basent sur l'approximation de l'uniformité des déformations sur une phase homogène. Or, si cette hypothèse peut donner des résultats raisonnables dans le cas de matériaux au comportement linéaire, il s'avère que pour les matériaux non linéaires elle conduit parfois à des résultats non réalistes.

Cette section présente des résultats dus à Dormieux et al. [35] sur la distribution de la déformation dans le cas d'un matériau poroélastique linéaire. Ils seront utilisés au chapitre suivant dans le cas de matériaux poroélastiques non linéaires.

Pour la suite, il sera commode d'introduire deux concepts de contraintes effectives, notées respectivement  $\underline{\underline{\Sigma}}'$  (contrainte de Terzaghi) et  $\underline{\underline{\Sigma}}''$  :

$$(a) \underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}} + p \underline{\underline{1}} \quad \text{et} \quad (b) \underline{\underline{\Sigma}}'' = \underline{\underline{\Sigma}} + \Phi p \underline{\underline{1}} \quad (1.45)$$

#### moments du premier ordre.

Dans la suite, la déformation déviatorique équivalente est définie comme  $\varepsilon_d = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d}$ , où  $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$  est la partie déviatorique du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ .

On introduit respectivement les moyennes  $\overline{\varepsilon}_d$  et  $\overline{\varepsilon}_v$  sur la phase solide des déformations déviatorique et volumique :

$$\overline{\varepsilon}_d = \sqrt{\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_d \rangle_{\Omega^s} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_d \rangle_{\Omega^s}} \quad ; \quad \overline{\varepsilon}_v = \langle \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} \quad (1.46)$$

On obtient tout d'abord  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega^s}$  et  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega^s}$  à partir de (1.31) et (1.32) :

$$(1 - \Phi) \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega^s} = \mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (1.47)$$

$$(1 - \Phi) \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega^s} = p \mathbf{c}^{s-1} : (\Phi \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{B}}) \quad (1.48)$$

En combinant (1.47) et (1.48), l'utilisation de la contrainte macroscopique (1.33) conduit à la moyenne sur la phase solide du tenseur des déformations :

$$(1 - \Phi) \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} = \mathbf{c}^{s-1} : (\underline{\underline{\Sigma}} + p \Phi \underline{\underline{1}}) \quad (1.49)$$

Cette dernière est contrôlée par le tenseur des contraintes effectives  $\underline{\underline{\Sigma}}''$  défini en (1.45). Il apparaît que ce résultat ne requiert aucun schéma spécifique d'homogénéisation. (1.49) nous permet alors de déterminer facilement  $\overline{\varepsilon}_v}$  et  $\overline{\varepsilon}_d}$ . En particulier, on obtient par exemple :

$$(1 - \Phi) \overline{\varepsilon}_v = \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}}'' \quad (1.50)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, (1.49) conduit aux relations :

$$\begin{cases} (1 - \Phi)^2 \overline{\varepsilon}_d^2 = \frac{1}{4\mu^{s2}} \underline{\underline{\Sigma}}'' : \underline{\underline{\Sigma}}'' \\ (1 - \Phi) \overline{\varepsilon}_v = \frac{1}{k^s} \underline{\underline{\Sigma}}'' \end{cases} \quad (1.51)$$

où l'on a posé  $\underline{\underline{\Sigma}}'' = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\Sigma}}''$ .

### moments du deuxième ordre.

En plus de  $\overline{\varepsilon}_d}$ , une information de première importance sur la distribution des déformations est fournie par le moment du second ordre de  $\overline{\varepsilon}_d}$  à l'intérieur de la phase solide.

$$\overline{\overline{\varepsilon}_d} = \sqrt{\langle \varepsilon_d^2 \rangle_{\Omega^s}} \quad (1.52)$$

De façon similaire on définit une nouvelle moyenne de la déformation volumique sous la forme :

$$\overline{\overline{\varepsilon}_v} = \sqrt{\langle (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 \rangle_{\Omega^s}} \quad (1.53)$$

Les résultats de Kreher [53] sont adaptés ici au cas d'un milieu poreux saturé pour calculer  $\overline{\overline{\varepsilon}_d}$  et  $\overline{\overline{\varepsilon}_v}$  en termes d'énergie élastique  $\mathcal{E}$  de la phase solide par unité de volume.

$$2\mathcal{E} = (1 - \Phi) \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{c}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} - \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}^p \rangle_{\Omega} \quad (1.54)$$



En utilisant le lemme de Hill pour le couple  $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}})$  avec (1.29), (1.33) et (1.42), il s'en suit que :

$$2\mathcal{E} = \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \frac{p^2}{M} \quad (1.55)$$

Dans la suite, on suppose que le comportement élastique du solide est isotrope. L'énergie élastique dans le solide s'écrit donc :

$$\mathcal{E} = (1 - \Phi) \left\langle \frac{1}{2} k^s (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu^s \underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d \right\rangle_{\Omega^s} \quad (1.56)$$

L'idée développée par Kreher [53] consiste à considérer les champs de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  et de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  comme des fonctions des modules de cisaillement  $\mu^s$  et de compression  $k^s$  du solide. On adopte alors les notations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\xi}}_{,\mu} = \partial \underline{\underline{\xi}} / \partial \mu^s \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\mu} = \partial \underline{\underline{\varepsilon}} / \partial \mu^s \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\xi}}_{,k} = \partial \underline{\underline{\xi}} / \partial k^s \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{,k} = \partial \underline{\underline{\varepsilon}} / \partial k^s \end{cases} \quad (1.57)$$

On note que  $\underline{\underline{\xi}}_{,\mu}$  ainsi que  $\underline{\underline{\xi}}_{,k}$  sont cinématiquement admissibles avec une déformation macroscopique nulle ( $\underline{\underline{E}} = 0$ ), au sens où  $\underline{\underline{\xi}}_{,\alpha} = 0$  sur  $\partial\Omega$  ( $\alpha = \mu$  ou  $k$ ). En dérivant (1.56) par rapport à  $\mu^s$  et  $k^s$ , on obtient :

$$(a) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu^s} = (1 - \Phi) \left( \frac{1}{\varepsilon_d^2} + \left\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\mu} \right\rangle_{\Omega^s} \right) \quad ; \quad (b) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k^s} = (1 - \Phi) \left( \frac{1}{2\varepsilon_v^2} + \left\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{,k} \right\rangle_{\Omega^s} \right) \quad (1.58)$$

Dans les expressions de  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu^s}$  et  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial k^s}$  obtenues ci-dessus, la dépendance de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  à la fois en  $\mu^s$  et  $k^s$  a été prise en compte<sup>3</sup>.

En raison des conditions aux limites  $\underline{\underline{\xi}}_{,\alpha} = 0$  sur  $\partial\Omega$  ( $\alpha = \mu^s$  ou  $k^s$ ) et du lemme de Hill appliqué au couple  $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\alpha})$  il s'en suit que :

$$\begin{aligned} (1 - \Phi) \left\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\rangle_{\Omega^s} &= \left\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\rangle_{\Omega} - \Phi \left\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\rangle_{\Omega^f} \\ &= p\Phi \left\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\rangle_{\Omega^f} \\ &= p\Phi \left( \left\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \right\rangle_{\Omega^f} \right)_{,\alpha} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Or  $\left\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \right\rangle_{\Omega^f}$  peut se déduire de (1.39) et (1.42) :

$$\left\langle \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \right\rangle_{\Omega^f} = \frac{\Phi - \Phi_o}{\Phi} \approx \frac{\Phi - \Phi_o}{\Phi_o} = \frac{1}{\Phi_o} \left( \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M} \right) \quad (1.60)$$

---

3. On pourrait penser que la différentiation de  $\mathcal{E}$  par rapport à  $\mu^s$  et  $k^s$  doit inclure une contribution supplémentaire venant de la dépendance de  $\Phi$  par rapport à  $\mu^s$  et  $k^s$ . Cependant,  $\Phi$  représente la valeur actuelle de la porosité qui peut être remplacée dans (1.56) par sa valeur initiale  $\Phi_o$ , cette dernière étant constante dans l'hypothèse des petites perturbations

ce qui à partir de (1.58) nous permet d'écrire :

$$(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_d^2 = \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \mathcal{E} - p(\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \frac{p^2}{2M} - p \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \right) \quad (1.61)$$

et :

$$\frac{1}{2}(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_v^2 = \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \mathcal{E} - p(\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M}) \right) = \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \frac{p^2}{2M} - p \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \right) \quad (1.62)$$

Si de plus le comportement macroscopique est isotrope, on peut obtenir à partir de (1.37), (1.43) et (1.61) l'égalité suivante :

$$(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_d^2 = \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} E_d^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial K^{hom}}{\partial \mu^s} (\text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{k^s})^2 \quad (1.63)$$

où  $E_d = \sqrt{\underline{\underline{E}}_d : \underline{\underline{E}}_d}$  représente la déformation déviatorique macroscopique équivalente. De cette expression il ressort que  $\overline{\varepsilon}_d$ , moment du deuxième ordre dans  $\Omega^s$  de la déformation déviatorique, est dépendant de la déformation macroscopique équivalente  $E_d$ , de la partie sphérique de  $\underline{\underline{E}}$  et de la pression au sein du terme  $\text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{k^s}$ .

De façon similaire, on déduit de (1.62) que :

$$\frac{1}{2}(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_v^2 = \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} E_d^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial K^{hom}}{\partial k^s} (\text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{k^s})^2 + (b - 1) \frac{p}{k^s} \text{tr} \underline{\underline{E}} - \frac{1}{2} \left( \frac{p}{k^s} \right)^2 (1 + \Phi - 2b) \quad (1.64)$$

Comme  $\overline{\varepsilon}_d$ , la partie volumique  $\overline{\varepsilon}_v$  dépend de la déformation déviatorique macroscopique équivalente  $E_d$ . Cependant, la dépendance en  $\text{tr} \underline{\underline{E}}$  et  $p$  n'est pas uniquement contrôlée par le terme  $\text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{k^s}$ .

Le raisonnement peut être poussé plus avant si on se donne une estimation des modules macroscopiques  $\mu^{hom}$  et  $K^{hom}$  en fonction des modules élastiques de la phase solide  $\mu^s$  et  $k^s$ . Dans l'hypothèse où la phase poreuse peut être considérée comme une phase inclusionnaire vis-à-vis de la phase solide, la borne supérieure de Hashin-Shtrikman (voir par exemple Zaoui [69]) est une estimation raisonnable des modules d'élasticité macroscopiques.

$$K_{HS} = \frac{4(1 - \Phi)\mu^s k^s}{3\Phi k^s + 4\mu^s} \quad (1.65)$$

Il en découle naturellement :

$$\frac{\partial K^{hom}}{\partial \mu^s} = \frac{3\Phi}{4(1 - \Phi)} \left( \frac{K^{hom}}{\mu^s} \right)^2 \quad ; \quad \frac{\partial K^{hom}}{\partial k^s} = \frac{1}{1 - \Phi} \left( \frac{K^{hom}}{k^s} \right)^2 \quad (1.66)$$

ce qui, utilisé dans (1.63) et (1.64) conduit à :

$$(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_d^2 = \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} E_d^2 + \frac{3\Phi}{8(1 - \Phi)} \frac{K^{hom}{}^2}{\mu^s} \left( \text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{k^s} \right)^2 \quad (1.67)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_v^2 = \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial k^s} E_d^2 + \frac{1}{2(1 - \Phi)} \left( \frac{K^{hom}}{k^s} \text{tr} \underline{\underline{E}} + (\Phi - b) \frac{p}{k^s} \right)^2 \quad (1.68)$$

Il apparaît donc que  $\overline{\varepsilon}_v$  dépend de  $\text{tr} \underline{\underline{E}}$  et de  $p$  par l'intermédiaire du groupement  $\frac{K^{hom}}{k^s} \text{tr} \underline{\underline{E}} + (\Phi - b) \frac{p}{k^s}$ . A partir de (1.37) et (1.38), il est facile de démontrer que :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}}' = \Sigma' \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Sigma}}'_d & \text{avec } \Sigma' = K^{hom} \left( \text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{k^s} \right) \quad ; \quad \underline{\underline{\Sigma}}'_d = 2\mu^{hom} \underline{\underline{E}}_d \\ \underline{\underline{\Sigma}}'' = \Sigma'' \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Sigma}}''_d & \text{avec } \Sigma'' = (K^{hom} \text{tr} \underline{\underline{E}} + (\Phi - b)p) \quad ; \quad \underline{\underline{\Sigma}}'_d = 2\mu^{hom} \underline{\underline{E}}_d = \underline{\underline{\Sigma}}'_d \end{cases} \quad (1.69)$$

De la substitution de (1.69) dans (1.67) et (1.68), il découle que  $\overline{\varepsilon}_d$  et  $\overline{\varepsilon}_v$  sont respectivement fonction des contraintes effectives  $\underline{\underline{\Sigma}}'$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}''$  définies en (1.45) :

$$(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_d^2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left( \frac{1}{\mu^{hom}} \right) \underline{\underline{\Sigma}}'_d : \underline{\underline{\Sigma}}'_d + \frac{3\Phi}{8(1 - \Phi)\mu^{s2}} \Sigma'^2 \quad (1.70)$$

et

$$\frac{1}{2}(1 - \Phi)\overline{\varepsilon}_v^2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial k^s} \left( \frac{1}{\mu^{hom}} \right) \underline{\underline{\Sigma}}''_d : \underline{\underline{\Sigma}}''_d + \frac{1}{2(1 - \Phi)k^{s2}} \Sigma''^2 \quad (1.71)$$

Par opposition à  $\overline{\varepsilon}_v$  (cf. (1.51)), il ressort que  $\overline{\varepsilon}_d$  est capable de prendre en compte les effets de la contrainte déviatorique macroscopique sur la distribution volumique des déformations. De façon analogue, en ce qui concerne la distribution des déformations déviatoriques, on observe que  $\overline{\varepsilon}_d$  n'est sensible qu'à la contrainte déviatorique macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}'_d$ , tandis que  $\overline{\varepsilon}_v$  prend également en compte les effets de la contrainte de confinement.

# Chapitre 2

## Le comportement poroélastique non linéaire

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Origine de la non linéarité réversible . . . . .</b>	<b>53</b>
2.1.1	Mise en évidence du comportement non linéaire du matériau. . . . .	53
2.1.2	Effet d'une microfissuration de la phase solide. . . . .	54
2.1.3	Discussion de l'existence d'une connexion entre les pores et les fissures. . . . .	56
<b>2.2</b>	<b>Comportement macroscopique d'un poreux saturé à pores et fissures connectés (Deudé et al. [27]) . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>2.3</b>	<b>Homogénéisation linéaire d'un poreux à pores et fissures connectés (cas sec) . . . . .</b>	<b>61</b>
2.3.1	Homogénéisation d'un solide fissuré: cas dilué . . . . .	62
2.3.2	Homogénéisation d'un solide fissuré: fissures interagissantes . . . . .	69
2.3.3	Homogénéisation d'un poreux contenant de pores et des fissures interagissantes. . . . .	71
<b>2.4</b>	<b>Homogénéisation non linéaire d'un poreux à pores et fissures connectés (cas sec) . . . . .</b>	<b>74</b>
2.4.1	Non linéarité et critère de fermeture. . . . .	75
2.4.2	Expression de $C_t^{hom}$ comme une fonction du paramètre de densité de fissure $\epsilon(X)$ . . . . .	78
2.4.3	Identification expérimentale du paramètre de densité de fissure, de la porosité de fissure et de la densité de fissure. . . . .	79
<b>2.5</b>	<b>Illustration de l'influence de la non linéarité dans un problème d'ingénierie de réservoir. . . . .</b>	<b>81</b>

---

2.5.1	Position du problème. . . . .	82
2.5.2	Détermination de l'équation de diffusion non linéaire. . . . .	82
2.5.3	Calculs de l'indice de récupération. . . . .	85
2.5.4	Calcul semi-analytique de la valeur asymptotique de l'indice de récupération. . . . .	87
<b>2.6</b>	<b>Comportement d'un poreux saturé à pores et fissures non connectés. . . . .</b>	<b>90</b>
2.6.1	Le modèle de la sphère creuse en compression. . . . .	91
2.6.2	Cas général . . . . .	93

---

Le chapitre précédent était consacré à une étude du comportement poroélastique linéaire. Or, dans bien des cas, il s'avère que la réponse de certains matériaux à un chargement donné peut présenter un caractère non linéaire. Dans le présent chapitre, on s'efforce de modéliser par une approche micromécanique ce caractère poroélastique non linéaire. Après avoir pris position sur l'origine micromécanique de la non linéarité, on présente différentes variantes de la modélisation qui découlent directement des hypothèses faites sur la microstructure.

## 2.1 Origine de la non linéarité réversible

### 2.1.1 Mise en évidence du comportement non linéaire du matériau.

Le caractère non linéaire du comportement poromécanique de certains matériaux peut être étudié en réalisant des tests de compression isotrope drainés. La contrainte macroscopique appliquée à l'éprouvette est de la forme  $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{\underline{1}}$ , la pression de pore est maintenue à une valeur constante  $p$ . La pression de confinement  $\Sigma$ , initialement égale à la pression de pore  $p$  est augmentée progressivement.

La représentation de la déformation volumique en fonction de la variation de la pression de confinement met alors en évidence la non linéarité de la réponse de l'éprouvette.

A la suite de Bouteca et al. [18], il est possible de quantifier ce phénomène à l'aide d'un module de compression "drainé" tangent, noté  $K_t^{dr}$ , et défini de la façon suivante :

$$K_t^{dr} = -\frac{d\Sigma}{d\Omega/\Omega} \quad (2.1)$$

où  $d\Omega/\Omega$  désigne la déformation volumique subie par l'éprouvette lors d'une variation  $d\Sigma$  de la pression de confinement à pression de pore  $p$  constante. Les résultats expérimentaux montrent que  $K_t^{dr}$  est une fonction croissante de  $|\Sigma|$ , qui présente un caractère asymptotique pour les valeurs élevées de  $|\Sigma|$  (figure 2.1). A priori,  $K_t^{dr}$  peut également être dépendant de la pression de pore  $p$ .

En particulier, pour certains matériaux tels que les grès (Bouteca et al. [18]), on observe que deux courbes donnant  $K_t^{dr}$  en fonction de  $\Sigma$ , obtenues pour deux valeurs de la pression de pore  $p$ , sont décalées l'une par rapport à l'autre selon l'axe des contraintes de confinement d'un montant égal à la différence de pression de pore (figure 2.2). La figure 2.2 tirée des travaux de Bouteca et al. [18] met en évidence ce décalage en présentant les courbes d'évolution de  $K_t^{dr}$  en fonction de la pression de confinement  $\Sigma$  pour deux valeurs différentes de la pression de pore ( $p = 1MPa$  et  $p = 51MPa$ ).

Dans ce cas,  $K_t^{dr}$  ne dépend de  $\Sigma$  et  $p$  que par le groupement  $\Sigma' = \Sigma + p$ .  $-\Sigma'$  est appelée contrainte *effective* de confinement.

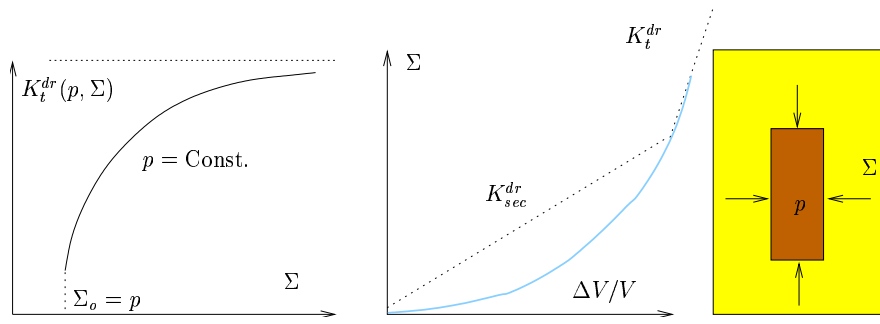


FIG. 2.1: (a) représentation schématique du module de compression tangent  $K_t^{dr}$  drainé en fonction de la pression de confinement, pour une pression de pore fixée. (b) définition des modules de compression tangent et sécant  $K_t^{dr}$  et  $K_t^{sec}$ .

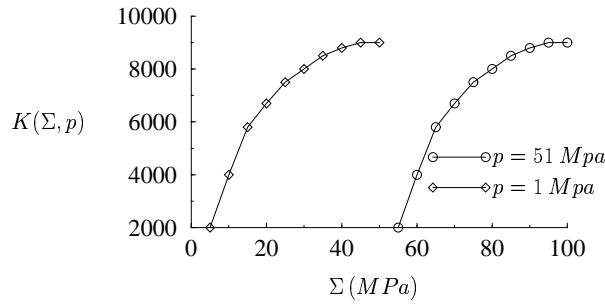


FIG. 2.2: non linéarité du module de compression tangent pour  $p = 1 \text{ MPa}$  et  $p = 51 \text{ MPa}$  (d'après Boutéca et al. [18])

### 2.1.2 Effet d'une microfissuration de la phase solide.

Comme nous le précisons dans l'introduction du chapitre précédent, l'approche micro-mécanique consiste à essayer d'expliquer des phénomènes mécaniques observés à l'échelle macroscopique par des phénomènes se manifestant à l'échelle de la microstructure. Dans le cas du comportement macroscopique non linéaire, diverses interprétations ont été proposées dans la littérature (Vincke [67]). Pour les roches granulaires telles que les grès, la non linéarité pourrait être attribuée à la non linéarité de la loi de contact entre deux grains. Celle-ci est classiquement modélisée dans le problème de Hertz. Une deuxième origine possible de la non linéarité est basée sur l'existence d'une microfissuration de la phase solide. En effet, de manière générale, la phase poreuse est constituée par un ensemble de fissures et un réseau de pores connectés. La porosité totale  $\Phi$  est donc la somme des fractions volumiques des pores  $f^p$  et des fissures  $f^c$ . Dans une roche du type "grès", la contribution des fissures à la porosité totale est en général très faible. Cependant, l'impact des fissures sur le comportement macroscopique peut être significatif. En effet, si dans la gamme de chargement considérée ici les changements de géométrie des pores sont négligeables, il n'en est pas de même pour les fissures. L'idée consiste donc à dire que le comportement non linéaire serait dû à une fermeture progressive des fissures (décrois-

sance de  $f^c$ ) en fonction de l'accroissement de la pression de confinement. Poursuivant cette idée, le régime asymptotique du module de compression tangent correspondrait alors à une fermeture totale des fissures pour une pression de confinement suffisamment grande. Pour confirmer cette hypothèse, il est bon de mentionner que le caractère non linéaire de la réponse globale n'est plus observé quand  $K_t^{dr}$  a atteint la valeur asymptotique, i.e. dans notre interprétation, quand toutes les fissures sont fermées. La valeur asymptotique de  $K_t^{dr}$  est alors égale au module de compression d'un milieu poroélastique linéaire de même morphologie et constitué d'une matrice non fissurée.

Pour confirmer le rôle de la microfissuration, on considère les courbes présentées à la figure 2.3 qui correspondent aux résultats de tests de compression isotrope drainés effectués à l'appareil triaxial sur différents échantillons de grès (M. Sibai, 2001, communication privée). La pression de confinement est tracée en fonction de la déformation volumique qu'elle induit. Ces résultats montrent l'accroissement significatif du module de compression et l'existence d'une valeur asymptotique pour ce dernier, pour des grandes pressions de confinement. En fait, les différentes courbes de la figure 2.3 correspondent à des échantillons du

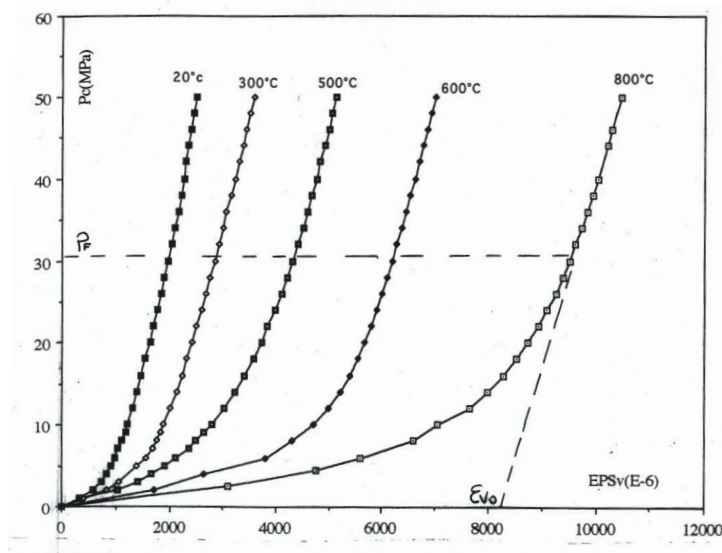


FIG. 2.3: évolution du module de compression volumique pour différentes valeurs de la fissuration initiale

même grès, qui ont été soumis, avant le test de compression isotrope, à une augmentation de température suivie d'une chute rapide de cette dernière induisant une microfissuration isotrope. Plus l'augmentation de température est importante plus la raideur initiale du matériau est petite, ce qui s'explique facilement par le fait que la microfissuration est plus importante pour des cycles de plus grande amplitude. Cependant, tous les échantillons présentent la même valeur asymptotique: ils ont tous le même comportement une fois que



toutes les fissures sont fermées.

Cette valeur asymptotique suggère également que la contribution des non linéarités de contact au comportement macroscopique non linéaire est négligeable par rapport à celle des fissures.

Dans toute la suite, on ne considérera donc que l'hypothèse d'après laquelle la réponse non linéaire du milieu poreux est entièrement due à l'existence d'un réseau de microfissures dans la phase solide.

### 2.1.3 Discussion de l'existence d'une connexion entre les pores et les fissures.

En vertu de l'hypothèse d'existence d'une microfissuration de la matrice solide du matériau, la question qui se pose naturellement est de savoir comment les fissures s'inscrivent dans l'espace poreux. En effet, comme nous l'avons dit antérieurement, les pores forment un réseau connecté saturé par un fluide à la pression  $p$ . On propose alors de distinguer deux cas:

- (i) les fissures sont connectées au réseau poreux. Elles sont donc également saturées par le même fluide et soumises à la même pression  $p$  que les pores.
- (ii) les fissures sont vides et non connectées aux pores ( $p = 0$  dans les fissures).

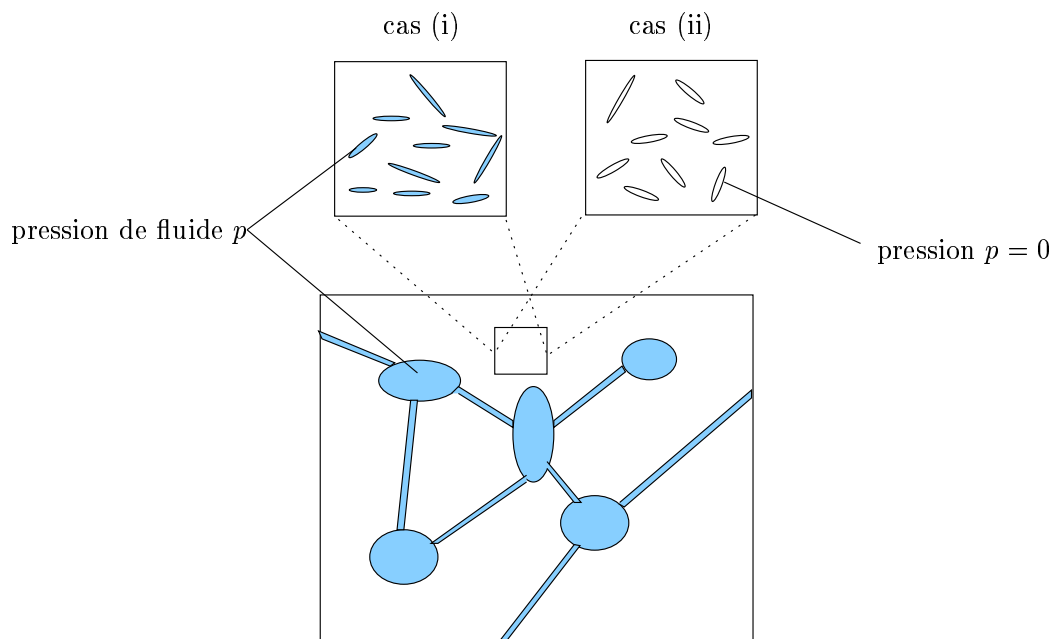


FIG. 2.4: vue schématique de la structure interne d'un milieu poreux. Un agrandissement d'un élément de la matrice révèle l'existence des microfissures.

Dans les deux cas, l'augmentation de la pression de confinement  $\Sigma$ , à pression de pore

constante, a pour effet de refermer les fissures, de sorte que les deux schémas sont compatibles, au moins qualitativement avec la figure 2.1.

Une expérience simple permet de clarifier la question de l'existence d'une connexion entre pores et fissures. Elle consiste à augmenter simultanément la pression de pore  $p$  et la pression de confinement  $\Sigma$ , à partir de l'état initial ( $p = 0$ ,  $\underline{\underline{\Sigma}} = 0$ ), en maintenant égales ces deux quantités. Ce chargement induit la déformation volumique  $\Delta\Omega/\Omega$  à partir de laquelle on définit un module de compression :

$$\mathcal{M} = -\frac{p}{\Delta\Omega/\Omega} \quad ; \quad \Sigma = p \quad (2.2)$$

Dans l'hypothèse où la fissuration est connectée, il est manifeste que ce chargement induit dans la phase solide  $\Omega^s$  du v.e.r. un champ de contraintes locales uniformes  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}}$  et une déformation locale elle-même uniforme  $-p\mathbf{c}^{s-1} : \underline{\underline{1}}$ . Puisque cette valeur peut être étendue aux pores et aux fissures, il s'en suit que la déformation macroscopique est aussi égale à  $-p\mathbf{c}^{s-1} : \underline{\underline{1}}$ . Dans ces conditions, la valeur de  $\mathcal{M}$  est une constante indépendante de  $p$ , égale au module de compression du solide  $k^s = (\underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\underline{1}})^{-1}$ . C'est le résultat obtenu expérimentalement par Bouteca et al.[18], où la mesure de  $\mathcal{M}$  fournit pour deux grès différents une valeur sensiblement égale, de l'ordre de 35GPa, constante sur un intervalle de  $p$  de 0 à 100MPa.

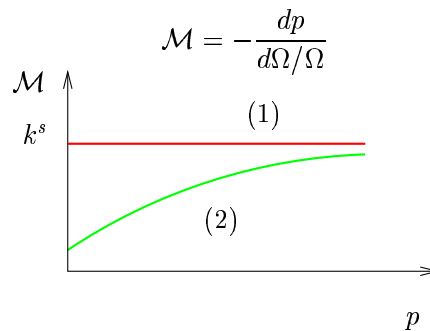


FIG. 2.5: expérience où  $\Sigma = p$ . (1) les pores et les fissures sont connectés. (2) les pores et les fissures ne sont pas connectés.

En revanche, dans l'hypothèse où la fissuration n'est pas connectée aux pores, le chargement envisagé va progressivement fermer les fissures. Le module  $\mathcal{M}$  va donc croître en fonction de  $p$  jusqu'à tendre asymptotiquement vers  $k^s$ .

Pour un chargement ( $p = -\Sigma$ ), il apparaît que le degré de fermeture des fissures est indépendant de  $p$  quand les fissures sont connectées, alors qu'il en dépend quand les fissures sont vides et non connectées au réseau poreux.

Les considérations précédentes indiquent que l'existence d'une éventuelle connexion entre les pores et les fissures est déterminante sur la structure de la non linéarité poroélastique

macroscopique.

On consacre la suite de ce chapitre à la question de la modélisation de cette non linéarité, en envisageant successivement les cas pores-fissures connectés et non connectés.

## 2.2 Comportement macroscopique d'un poreux saturé à pores et fissures connectés (Deudé et al. [27])

Dans le cas des matériaux étudiés par Boutéca et al.[18], nous avons vu que l'absence de variation du module  $\mathcal{M}$  de (2.2) indique l'existence d'une connection entre réseaux de pores et de fissures. On considère ici le cas d'un milieu poreux dont le réseau poreux est constitué de pores et de fissures connectés. Les fissures sont donc saturées et soumises à la même pression  $p$  que les pores. Dans la suite, on adopte la convention que  $|\Omega|$  est un volume unitaire.

Dans cette section, on adoptera les conditions limites (1.4)-(1.6) qui ont conduit aux équations (1.24). La formulation différentielle correspondante s'écrit :

$$\begin{cases} dv = \frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial p^2} dp + \frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial p \partial \underline{\underline{\Sigma}}} : d\underline{\underline{\Sigma}} & (a) \\ d\underline{\underline{E}} = \frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}} \partial p} dp + \frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}^2} : d\underline{\underline{\Sigma}} & (b) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les équations ci-dessus font intervenir trois coefficients tangents que sont le scalaire  $\frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial p^2}$ , le tenseur du second ordre  $\frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial p \partial \underline{\underline{\Sigma}}}$  et le tenseur du quatrième ordre  $\frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}^2}$ . Le but de cette section est de fournir une interprétation mécanique de ces coefficients et de clarifier la façon dont ils dépendent du couple  $(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$ .

Le chargement est caractérisé par deux paramètres indépendants que sont la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  (non nécessairement isotrope) et la pression de fluide  $p$ . Dans le cadre des transformations réversibles considérées ici, on ne tient pas compte des phénomènes dissipatifs tels que la propagation de fissures ou le glissement avec frottement au niveau de celles-ci. Puisque la réponse du système est réversible, l'état mécanique du v.e.r. est indépendant du chemin de contrainte dans le plan  $(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$ . Par conséquent, on peut considérer que le chargement peut être décomposé de façon arbitraire en deux étapes successives.

Dans un premier temps, on applique la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}} + p\underline{\underline{1}}$  en maintenant la pression de fluide nulle. Ce chargement a pour effet de mettre en jeu le comportement non linéaire de la matrice fissurée par le changement de géométrie des fissures qu'il induit. La déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}_1$  qui résulte de ce chargement est une fonction

non linéaire de la contrainte effective  $\underline{\underline{\Sigma}}'$ .

La seconde séquence consiste à superposer à l'état de contrainte ainsi atteint une augmentation simultanée, égale à  $p$ , de la contrainte de confinement et de la pression de pore. La déformation macroscopique qui résulte de cette seconde séquence est évidemment égale à  $\underline{\underline{E}}_2 = -\frac{p}{3k^s}\underline{\underline{1}}$  car elle revient à appliquer une pression uniforme  $p$  sur la frontière d'un solide homogène de module de compression  $k^s$ . On note qu'elle est indépendante des non linéarités qui se sont produites lors de la première séquence. Le résultat de ces deux séquences correspond bien au chargement constitué de la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et de la pression de pores  $p$ . Il en résulte que la déformation macroscopique totale s'écrit :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_1(\underline{\underline{\Sigma}}') - \frac{p}{3k^s}\underline{\underline{1}} \quad (2.4)$$

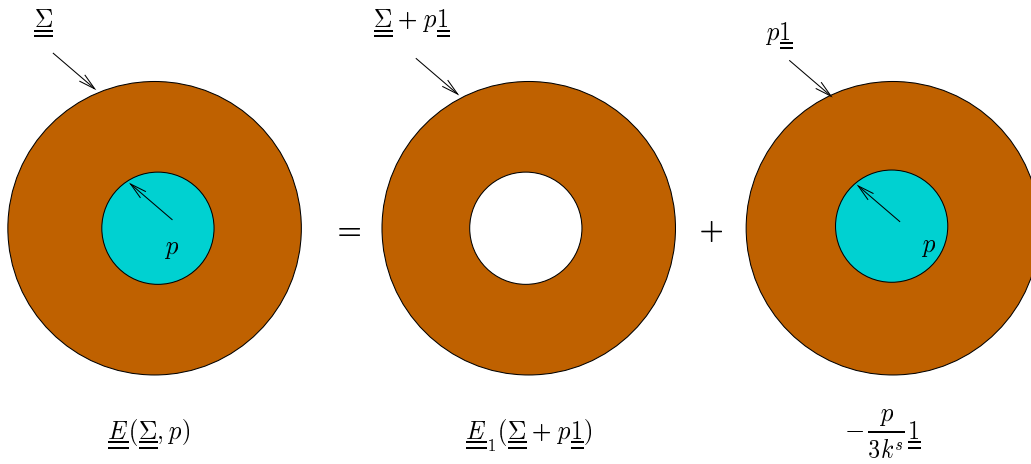


FIG. 2.6: décomposition du chargement en deux séquences successives

Cela démontre que le groupement  $\underline{\underline{E}} + \frac{p}{3k^s}\underline{\underline{1}}$ , égal à la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}_1$ , ne dépend que de la contrainte effective  $\underline{\underline{\Sigma}}'$ . Ce résultat peut alors s'écrire sous la forme différentielle :

$$\underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}}'(\underline{\underline{E}} + \frac{p}{3k^s}\underline{\underline{1}}) \Rightarrow d\underline{\underline{\Sigma}}' = \mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}') : (d\underline{\underline{E}} + \frac{dp}{3k^s}\underline{\underline{1}}) \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{C}_t^{hom}$  s'interprète comme le tenseur des modules d'élasticité macroscopique tangent en condition drainée. La relation (2.5) se met également sous la forme :

$$d\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}') : d\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}}_t(\underline{\underline{\Sigma}}') dp \quad (2.6)$$

où le tenseur de Biot tangent a été introduit :

$$\underline{\underline{B}}_t(\underline{\underline{\Sigma}}') = (\mathbf{I} - \frac{1}{3k^s}\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}')) : \underline{\underline{1}} \quad (2.7)$$

Ces résultats sont en parfait accord avec les conclusions tirées des essais triaxiaux de Boutéca et al. [18] concernant l'effet de la pression de pore sur le module de compression tangent (figure 2.2). Une courbe unique est obtenue pour deux valeurs différentes de la pression de pore quand le module tangent est tracé en fonction de la pression de confinement effective  $\Sigma - p$  (figure 2.7), confirmant que le module de compression tangent drainé n'est fonction que de la contrainte effective qui apparaît dans (2.6).

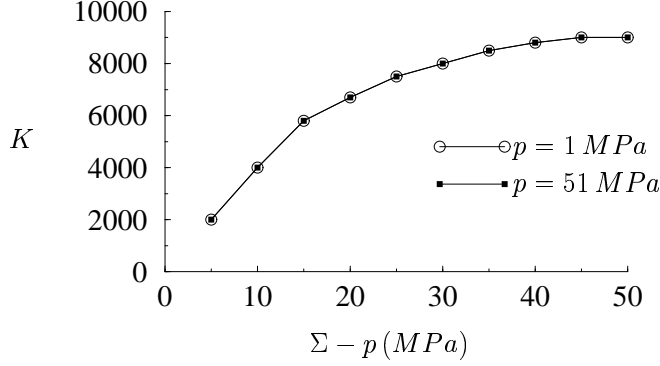


FIG. 2.7: *module de compression tangent en fonction de la pression effective de confinement (d'après Boutéca et al. [18])*

L'expression de  $d\underline{E}$  peut être obtenue à partir de (2.6) :

$$d\underline{E} = \mathbf{S}_t^{hom}(\underline{\Sigma}') : (d\underline{\Sigma} + dp\underline{B}_t(\underline{\Sigma}')) \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{S}_t^{hom} = \mathbf{C}_t^{hom-1}$  représente le tenseur de souplesse tangent. La comparaison de (2.3b) et de (2.8) conduit à :

$$\frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\Sigma}, p)}{\partial \underline{\Sigma}^2} = \mathbf{S}_t^{hom}(\underline{\Sigma}') \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\Sigma}, p)}{\partial \underline{\Sigma} \partial p} = \mathbf{S}_t^{hom}(\underline{\Sigma}') : \underline{B}_t(\underline{\Sigma}') \quad (2.9)$$

La deuxième équation d'état peut être établie par un raisonnement similaire. En considérant les mêmes séquences de chargement que précédemment, la variation totale de volume des pores  $v$  apparaît comme une somme des contributions de chaque pas de chargement. Celle induite par le premier, que l'on note  $v_1$ , est une fonction de  $\underline{\Sigma}'$ . La seconde étape induit une transformation homogène du v.e.r., correspondant à la variation de volume de pores  $v_2 = \Phi \operatorname{tr} \underline{E}_2$ .

$$v_1 = v_1(\underline{\Sigma}') \quad ; \quad v_2 = -\Phi \frac{p}{k^s} \quad (2.10)$$

La variation totale  $v$  s'écrit donc :

$$v = v_1(\underline{\Sigma}') - \frac{p}{k^s} \Phi \quad (2.11)$$

ou sous forme différentielle :

$$dv = \frac{\partial v_1(\underline{\Sigma}')}{\partial \underline{\Sigma}'} : d\underline{\Sigma} + \left( \frac{\partial v_1(\underline{\Sigma}')}{\partial \underline{\Sigma}'} : \underline{\underline{1}} - \frac{\Phi}{k^s} \right) dp \quad (2.12)$$

En comparant les deux formulations de  $dv$  dans (2.12) et (2.3a), et en utilisant (2.9), on obtient :

$$\frac{\partial v_1(\underline{\Sigma}')}{\partial \underline{\Sigma}'} = \frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\Sigma}, p)}{\partial p \partial \underline{\Sigma}} = \mathbf{S}_t^{hom}(\underline{\Sigma}') : \underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}') \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^*(\underline{\Sigma}, p)}{\partial p^2} = \underline{\underline{1}} : \mathbf{S}_t^{hom}(\underline{\Sigma}') : \underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}') - \frac{\Phi}{k^s}$$

La seconde équation d'état de la poroélasticité non linéaire s'écrit alors :

$$dv = \underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}') : d\underline{\underline{E}} + \frac{dp}{M_t(\underline{\Sigma}')} \quad (2.14)$$

avec :

$$\frac{1}{M_t(\underline{\Sigma}')} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}')) : \mathbf{S}_t^{hom}(\underline{\Sigma}') : \underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}') - \frac{\Phi}{k^s} \quad (2.15)$$

D'après (2.7) il vient directement que :

$$\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}') = \frac{\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\Sigma}')}{3k^s} : \underline{\underline{1}} \quad (2.16)$$

ce qui conduit finalement à l'égalité :

$$\frac{1}{M_t(\underline{\Sigma}')} = \frac{\frac{1}{3}\underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}') : \underline{\underline{1}} - \Phi}{k^s} \quad (2.17)$$

Par rapport à la formulation standard de Biot en poroélasticité linéaire de la section (1.3.1), les coefficients constants ont été remplacés dans la formulation différentielle par des coefficients tangents qui apparaissent comme des fonctions de la contrainte effective de Terzaghi  $\underline{\underline{\Sigma}}'$ . Les relations classiques de la théorie linéaire entre le tenseur de raideur drainé, le coefficient de Biot et le module de Biot sont généralisées par (2.7) et (2.17).

## 2.3 Homogénéisation linéaire d'un poreux à pores et fissures connectés (cas sec)

Dans la section précédente, (2.7) et (2.17) montrent que la connaissance de  $\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\Sigma}')$  permet de déterminer les autres coefficients poroélastiques tangents, que sont  $\underline{\underline{B}}_t(\underline{\Sigma}')$  et  $M_t(\underline{\Sigma}')$ , impliqués dans la formulation différentielle (2.6)-(2.14) des équations d'état. De

plus, un résultat essentiel de la section (2.2) réside dans le fait que  $\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}')$  peut être interprété comme le tenseur de raideur macroscopique tangent *dans le cas sec* soumis à un état de contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}'$ . En d'autres termes, la dépendance de  $\mathbf{C}_t^{hom}$  en fonction de l'état de contrainte et de pression, correspondant à la structure mathématique de la non linéarité, peut être analysée en effectuant des expériences à sec ( $p = 0$ ,  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}'$ ). *Ces conditions expérimentales (absence de fluide), sont adoptées dans la présente section qui est consacrée à la détermination des estimations micromécaniques du tenseur des modules d'élasticité homogénéisés d'un matériau solide isotrope dont l'espace poreux comporte des pores et des fissures.*

On suppose dans toute cette section que *les fissures ne changent pas d'état* (pas de transition ouvert/fermé). On va voir que le comportement macroscopique est alors linéaire. L'étude des non linéarités sera menée à la section (2.4).

Dans une démarche progressive, on commence par estimer le tenseur des modules d'élasticité d'un milieu fissuré dans lequel les fissures n'interagissent pas. Ces résultats font ensuite l'objet d'une confrontation avec ceux obtenus par la Mécanique de la Rupture.

On généralise ensuite au cas des fissures interagissantes pour finir par un milieu dont le domaine poreux est constitué de pores et de fissures.

### 2.3.1 Homogénéisation d'un solide fissuré : cas dilué

*L'espace poreux se réduit ici aux fissures.*

Les problèmes de milieux fissurés sont habituellement abordés par les méthodes de la Mécanique de la Rupture. Or, une fissure pouvant être assimilée à une cavité ellipsoïdale dont le rapport d'aspect tend vers zéro (Hori et Nemat-Nasser [48]), il est possible de retrouver (annexe 3.2) les résultats de Mécanique de la Rupture (penny shaped crack) donnant la relation entre l'ouverture (ou la fermeture) d'une fissure et le chargement appliqué à l'infini. Le choix adopté ici est donc de considérer les fissures comme des inclusions ellipsoïdales aplaties plongées dans la phase solide. Partant des résultats d'Eshelby [36], qui montrent que dans le cas d'une inhomogénéité ellipsoïdale plongée dans un milieu homogène infini et soumise à l'infini à une condition de type (1.5) le tenseur des déformations dans l'inhomogénéité est constant, on peut estimer l'élasticité homogénéisée du matériau fissuré.

Le but de cette section est donc de montrer comment le tenseur d'élasticité homogénéisé d'un solide fissuré peut être estimé comme une fonction des propriétés élastiques de

la phase solide et des caractéristiques morphologiques du domaine poreux ramené uniquement ici aux fissures. Dans la suite, ces fissures sont donc considérées comme des inclusions ellipsoïdales ayant la symétrie de révolution cylindrique autour du petit axe, d'élasticité<sup>1</sup>  $\mathbf{c}^c$  (indice  $c$  relatif aux fissures (cracks)), plongées dans le solide, milieu homogène infini d'élasticité  $\mathbf{c}^s$ , et soumis à une déformation uniforme à l'infini  $\underline{\underline{E}}$  dans le cadre de (1.5). Dans le cas présent, le domaine poreux  $\Omega^f$  se réduisant aux fissures, la porosité est égale à la fraction volumique des fissures  $f^c$ . Les fissures sont représentées par un ensemble de familles  $\mathcal{F}_j$  caractérisées par l'orientation, le rapport d'aspect dans la configuration actuelle du v.e.r. et la fraction volumique correspondante  $f^{c,j}$ . On a donc naturellement  $f^c = \sum_j f^{c,j}$ .

Pour résumer, le v.e.r. apparaît comme une structure hétérogène dans laquelle la loi de comportement locale prend la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{c}(\underline{x}) = \begin{cases} \mathbf{c}^s & \text{pour } \underline{x} \in \Omega^s \\ \mathbf{c}^c & \text{pour } \underline{x} \in \Omega^f \end{cases} \quad (2.18)$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la section 1.3 de cette partie, la dépendance linéaire de la déformation locale  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  vis-à-vis du chargement défini par  $\underline{\underline{E}}$  est exprimée par l'intermédiaire du tenseur de localisation du quatrième ordre  $\mathbf{A}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbf{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (2.19)$$

Notons que la pertinence de ce concept est, par construction, subordonnée à la linéarité de la réponse de la structure. On admet pour l'instant la validité de cette hypothèse.

La combinaison de (1.10) et (2.19) implique alors que :

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega} = \mathbf{I} = f^s \mathbf{A}^s + \sum_j f^{c,j} \mathbf{A}^{c,j} \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité du quatrième ordre et  $\mathbf{A}^\alpha$  est la moyenne du tenseur de localisation sur la phase  $\alpha$ .

Le tenseur macroscopique des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est défini comme la moyenne  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega}$  de la contrainte microscopique sur  $\Omega$ . Il se calcule à partir de (2.18) et (2.19) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}^{hom} = \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle_{\Omega} = f^s \mathbf{c}^s : \mathbf{A}^s + \sum_j f^{c,j} \mathbf{c}^c : \mathbf{A}^{c,j} \quad (2.21)$$

soit, compte tenu de (2.20) :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s + \sum_j f^{c,j} (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s) : \mathbf{A}^{c,j} \quad (2.22)$$

---

1. la valeur de  $\mathbf{c}^c$  fera l'objet de discussions ultérieures. Cependant, on voit immédiatement que dans le cas de fissures ouvertes celles-ci pourront être assimilées à des inclusions d'élasticité nulle  $\mathbf{c}^c = 0$



La détermination de  $\mathbf{C}^{hom}$  se résume donc à l'estimation des tenseurs de localisation moyens  $\mathbf{A}^{c,j}$  dans (2.22).

Évaluer  $\mathbf{A}^{c,j}$  revient à trouver la relation entre la déformation moyenne de la phase inclusionnaire  $j$  et la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$ .

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_j = \mathbf{A}^{c,j} : \underline{\underline{E}} \quad (2.23)$$

Dans cette perspective, on fait appel à un résultat classique d'Eshelby. Ce dernier a démontré que si  $I$  est un ellipsoïde de caractéristiques élastiques homogènes  $\mathbf{c}^I$ , plongé dans une matrice homogène infinie de caractéristiques élastiques  $\mathbf{c}^o$ , avec des conditions aux limites à l'infini du type (1.5), et si  $\underline{x} \in I$ , alors la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  ne dépend pas de  $\underline{x}$ :

$$\forall \underline{x} \in I \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^I = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{o,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^o)]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.24)$$

$\mathbf{P}^{o,I}$  est un tenseur du quatrième ordre qui dépend à la fois de  $\mathbf{c}^o$ , de l'orientation et des caractéristiques morphologiques de l'ellipsoïde.

Revenons à un v.e.r. de milieu fissuré.

On s'intéresse ici au cas où la densité des fissures est suffisamment faible, et donc les fissures suffisamment distantes les unes des autres, pour pouvoir négliger les interactions susceptibles d'exister entre elles.

Ce cas, que l'on qualifie de dilué, nous permet de nous ramener au problème d'Eshelby en considérant une fissure comme une inclusion ellipsoïdale d'élasticité  $\mathbf{c}^c$  plongée dans un matrice infinie dont l'élasticité est celle de la phase solide  $\mathbf{c}^s$ . Plus précisément, l'idée consiste à approcher la déformation moyenne dans une fissure de forme ellipsoïdale du v.e.r., par la déformation homogène qui s'établit dans un ellipsoïde de même caractéristiques géométriques mécaniques (rapport d'aspect, orientation) que la fissure en question, placé dans un milieu infini d'élasticité  $\mathbf{c}^o = \mathbf{c}^s$  avec des conditions aux limites de la forme  $\underline{\xi} \rightarrow \underline{\underline{E}} \cdot \underline{X}$  quand  $\underline{X} \rightarrow \infty$ .

Considérant donc une fissure plongée dans un milieu infini d'élasticité  $\mathbf{c}^s$ , on déduit aisément de (2.24), où l'on a pris  $\mathbf{c}^o = \mathbf{c}^s$ ,  $\mathbf{c}^I = \mathbf{c}^c$ ,  $f^I = f^c$  et  $\mathbf{P}^{o,I} = \mathbf{P}^{s,c}$ , que:

$$\mathbf{A}^{c,j} = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,c} : (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s)]^{-1} \quad (2.25)$$

Le tenseur homogénéisé des modules d'élasticité est donné, d'après (2.22), par l'estimation:

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s + f^c(\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s) : [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,c} : (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s)]^{-1} \quad (2.26)$$

Dans le cas dilué, il est intéressant de noter que l'on peut tenir compte de plusieurs familles de fissures en additionnant<sup>2</sup> la contribution de chacune d'entre elles à la raideur macroscopique.

Il convient de différencier la définition de l'élasticité des fissures  $\mathbf{c}^c$  selon que l'on considère une fissure fermée où une fissure ouverte. On utilisera classiquement  $\mathbf{c}^c = 0$  pour rendre compte de la nullité du vecteur-contrainte s'exerçant sur les faces de la fissure lorsque celle-ci est ouverte. Dans le cas des fissures fermées, on examine deux cas: celui des fissures fermées avec une adhérence parfaite entre les lèvres et celui des fissures fermées sans frottement.

### Cas des fissures ouvertes ( $\mathbf{c}^c = 0$ )

*On considère ici une unique famille de fissures.*

L'élasticité de la fissure étant nulle, le tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit directement à partir de (2.26) sous la forme :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : (\mathbf{I} - f^c (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c})^{-1}) \quad (2.27)$$

où l'on a introduit le tenseur d'Eshelby  $\mathbf{S}^{s,c} = \mathbf{P}^{s,c} : \mathbf{c}^s$  relatif à la forme de l'ellipsoïde considéré pour représenter la fissure.  $\mathbf{S}^{s,c}$  dépend en outre des propriétés mécaniques du solide.

Soit  $a$  le rayon de l'ellipsoïde modélisant la fissure,  $c$  la demi-longueur du petit axe dans sa configuration actuelle et  $X = c/a$  le rapport d'aspect actuel. On désigne par  $N$  la densité volumique de fissures d'une famille regroupant des fissures de même orientation et de même rapport d'aspect dans la configuration actuelle du v.e.r.. La fraction volumique correspondante est alors égale à  $f^c = \frac{4}{3}\pi a^2 c N$ . A la suite de Budiansky et O'Connell [19], on introduit le paramètre de densité de fissures  $\epsilon = Na^3$ , en fonction duquel la fraction volumique des fissures s'écrit encore  $f^c = \frac{4}{3}\pi \epsilon X$ . Compte tenu de (2.27), le tenseur homogénéisé des modules d'élasticité prend donc la forme suivante :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : (\mathbf{I} - \frac{4}{3}\pi \epsilon X (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c})^{-1}) \quad (2.28)$$

A première vue, le tenseur  $\mathbf{C}^{hom}$  semble dépendre du rapport d'aspect  $X$  en configuration actuelle qui intervient de façon explicite ainsi que dans l'expression de  $\mathbf{S}^{s,c}$ . Dans ces conditions, en raison des variations de  $X$ , on pourrait s'attendre à ce que  $\mathbf{C}^{hom}$  ne soit pas constant. En d'autres termes, le changement de rapport d'aspect induirait une non

---

2. Il s'agit en fait d'une contribution négative, la présence de fissures diminuant la raideur.

linéarité du comportement macroscopique. Ceci contredirait d'ailleurs les arguments de linéarité utilisés ci-dessus. En fait, on montre que le tenseur  $X(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c})^{-1}$  admet une limite  $\mathbf{T}$  quand  $X \rightarrow 0$ . Cette limite ne dépend que de l'orientation des fissures et des propriétés de la phase dans laquelle elles sont plongées, ici le solide. Dans le cas présent des fissures modélisées par des ellipsoïdes aplatis ( $X \ll 1$ ), il est licite d'approximer  $X(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c})^{-1}$  par  $\mathbf{T}$ . On a donc finalement :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : (\mathbf{I} - \frac{4}{3}\pi\epsilon\mathbf{T}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \lim_{X \rightarrow 0} X(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c})^{-1} \quad (2.29)$$

Les composantes du tenseur  $\mathbf{T}$  sont précisées en annexe 3.1.

### Cas des fissures fermées (Deudé et al.[28]).

Comme nous l'avons spécifié précédemment on examine deux cas de figure.

#### *cas des fissures parfaitement adhérentes*

On considère tout d'abord que les lèvres des fissures sont *parfaitement adhérentes*, ce qui revient à considérer que d'un point de vue mécanique une fissure fermée a le même comportement élastique isotrope que la matrice solide. Dans ce cas, il vient trivialement, d'après la formule (2.26), que  $\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s$ . De telles fissures ne constituent donc pas une hétérogénéité.

#### *cas des fissures sans frottement*

Dans le cas de fissures fermées *sans frottement*, il s'agit maintenant de rendre compte de l'absence de contrainte tangentielle sur les faces de la fissure. On propose alors de représenter la fissure fermée comme un milieu isotrope de module de compression  $k^s$  et de module de cisaillement nul.

$$\mathbf{c}^c = 3k^s\mathbf{J} \quad \text{avec} \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.30)$$

L'idée de l'utilisation d'un matériau fictif pour représenter une fissure fermée sans frottement appelle bien entendu une confrontation avec des résultats antérieurs connus justifiant ainsi ce choix. Une confrontation aux résultats de Pensée et al. [61] est donc présentée dans la suite.

Contrairement au cas des fissures ouvertes, le rapport d'aspect  $X$  n'a pas vocation à modéliser la géométrie d'une fissure dans la mesure où celle ci est fermée. Sur le plan mécanique, sa valeur n'a pas d'importance dans le domaine  $X \ll 1$ . Plus précisément,

d'après (2.26), l'estimation du tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s - \frac{8\pi}{3} \mu^s \epsilon X \mathbf{K} : (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c} : \mathbf{K})^{-1} \quad (2.31)$$

où  $\mathbf{K}$  est le tenseur  $\mathbf{I} - \mathbf{J}$ . Pour  $X$  suffisamment petit, la quantité  $X(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c} : \mathbf{K})^{-1}$  peut être assimilée à sa limite  $\mathbf{T}'$  quand  $X \rightarrow 0$ , de sorte que :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : \left( \mathbf{I} - \frac{4}{3} \pi \epsilon \mathbf{K} : \mathbf{T}' \right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}' = \lim_{X \rightarrow 0} X (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,c} : \mathbf{K})^{-1} \quad (2.32)$$

Les composantes du tenseur  $\mathbf{T}'$  sont précisées en annexe 3.1.

On note  $\underline{e}_3$  la normale aux fissures de la famille considérée et l'on se donne un repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . En composantes, l'équation tensorielle (2.32) se traduit par le fait que les coefficients  $C_{ijkl}^{hom}$  et  $C_{ijkl}^s$  sont identiques, sauf les modules de cisaillement correspondant aux quadruplets  $\{1, 3, 1, 3\}$  et  $\{2, 3, 2, 3\}$  :

$$C_{1313}^{hom} = C_{2323}^{hom} = \mu^s \left( 1 - \epsilon \frac{16(1 - \nu^s)}{3(2 - \nu^s)} \right) \quad (2.33)$$

où  $\nu^s$  désigne le coefficient de Poisson du solide.

*Modélisation des fissures sans frottement par la théorie de la Mécanique de la Rupture.*

On propose maintenant de confronter le choix d'un matériau fictif défini par (2.30) pour modéliser les fissures fermées sans frottement aux résultats déjà connus en Mécanique de la Rupture. Le but est alors de comparer le résultat de (2.32), et la méthode qui y conduit, aux résultats obtenus par la démarche utilisée dans Andrieux et al. [1] et dans Pensée et al. ([60],[61]). Elle consiste à scinder le problème du v.e.r. soumis à la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  en deux sous-problèmes détaillés ci-après. Dans la suite,  $\mathcal{F}^+$  (resp.  $\mathcal{F}^-$ ) désigne la face supérieure (resp. inférieure) de la fissure, dont la normale orientée vers  $\mathcal{F}^-$  (resp.  $\mathcal{F}^+$ ) est  $-\underline{e}_3$  (resp.  $+\underline{e}_3$ ). On note  $[\underline{\xi}] = \underline{\xi}_{\mathcal{F}^+} - \underline{\xi}_{\mathcal{F}^-}$  le mouvement relatif de la face supérieure par rapport à la face inférieure. On rappelle que le v.e.r. comporte une densité  $N$  de fissures (fermées) identiques de même rayon  $a$ .

Le premier sous-problème, désigné par (P1), consiste à appliquer sur la frontière  $\partial\Omega$  du v.e.r. la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  (par exemple dans le cadre de conditions aux limites uniformes en contrainte), et à appliquer simultanément aux faces de la fissure un chargement mécanique choisi de sorte que la solution de (P1) coïncide avec la réponse du v.e.r. *non fissuré* au chargement défini par  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Dans le cas d'une fissure fermée, on impose donc  
- la nullité du déplacement relatif en projection selon la normale, soit  $[\underline{\xi}_3^{(1)}] = 0$ ;  
- les composantes tangentielles de la contrainte sur les faces  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  :

$$\text{sur } \mathcal{F}^+ : \quad \underline{\underline{\tau}}^{(1)} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot (-\underline{e}_3) + \Sigma_{33} \underline{e}_3 \quad (2.34)$$

et l'action opposée sur  $\mathcal{F}^-$ . La contrainte  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et la déformation  $\underline{\underline{E}}^{(1)}$  macroscopiques solutions de (P1) coïncident avec la contrainte et la déformation locales. En particulier, on note que  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{c}^s : \underline{\underline{E}}^{(1)}$ .

Dans le second sous-problème, désigné par (P2), la frontière  $\partial\Omega$  du v.e.r. est libre de contraintes. On impose à nouveau la condition de fissure fermée, soit  $[\xi_3^{(2)}] = 0$ . Les composantes tangentielles de la contrainte sur les faces  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  sont opposées à celles imposées dans le problème (P1), de sorte que soit vérifiée la condition de non frottement dans la superposition des problèmes (P1) et (P2) :

$$\text{sur } \mathcal{F}^+ : \quad \underline{\underline{\tau}}^{(2)} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_3 - \Sigma_{33}\mathbf{e}_3 = (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_3) \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.35)$$

et l'action opposée sur  $\mathcal{F}^-$ .

On montre (voir par exemple Horii et Nemat-Nasser [48]) que la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  dans (P2) se calcule en fonction de la moyenne  $\underline{\underline{\gamma}}$  de la discontinuité du déplacement (tangentielle) entre les faces  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  :

$$\underline{\underline{E}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 \otimes \underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{\gamma}} \otimes \mathbf{e}_3) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\gamma}} = N \int_{\mathcal{F}} ([\xi] - [\xi_3]\mathbf{e}_3) dS \quad (2.36)$$

La déformation macroscopique totale  $\underline{\underline{E}}$  étant la somme de  $\underline{\underline{E}}^{(1)}$  et de  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$ , on note que l'équation  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{c}^s : \underline{\underline{E}}^{(1)}$  issue du problème (P1) peut être réécrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{c}^s : \left( \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)} \right) = \mathbf{c}^s : \left( \underline{\underline{E}} - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 \otimes \underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{\gamma}} \otimes \mathbf{e}_3) \right) \quad (2.37)$$

L'intérêt de la décomposition du problème initial en (P1) et (P2) réside dans le fait que la résolution de (P2) se ramène au problème classique d'une fissure unique dans un espace homogène infini (voir par exemple Nemat-Nasser et Horii [58]). On montre ainsi que la discontinuité tangentielle  $\underline{\underline{\gamma}}$  est proportionnelle à  $\underline{\underline{\tau}}^{(2)}$  :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{\epsilon}{K_o(1 - \nu^s/2)} (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \mathbf{e}_3) \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad \text{avec} \quad K_o = \frac{3E^s}{16(1 - \nu^s/2)} \quad (2.38)$$

où  $E^s$  désigne le module d'Young du solide. En utilisant (2.37) dans (2.38), il est possible de déterminer  $\underline{\underline{\gamma}}$  en fonction de la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$ . Cependant, dans le cadre de l'hypothèse de fissures sans interaction, il est légitime de linéariser cette relation par rapport à  $\epsilon$ , ce qui revient à introduire l'approximation  $\underline{\underline{\Sigma}} \approx \mathbf{c}^s : \underline{\underline{E}}$  dans (2.38). On trouve alors :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{\epsilon}{K_o(1 - \nu^s/2)} (\mathbf{c}^s : \underline{\underline{E}} \cdot \mathbf{e}_3) \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.39)$$

En combinant (2.36) et (2.39), on obtient l'expression de  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  en fonction de  $\underline{\underline{E}}$ , qu'il reste à introduire dans (2.37). Cette dernière s'écrit alors  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}}$  avec les résultats de

Pensée et al. ([61],[60]) :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s - \epsilon \frac{16(1 - \nu^s)}{3(2 - \nu^s)(1 + \nu^s)} \left( \frac{1}{2} (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}) - 2 \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} \right) \quad (2.40)$$

avec  $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$  et les notations  $(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$  et  $(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$ . Il est alors facile de vérifier que les tenseurs  $\mathbf{C}^{hom}$  de (2.32) et (2.40) sont identiques.

Ainsi confirmée, la démarche utilisant les estimations basées sur la théorie d'Eshelby et le matériau fictif de fissure défini en (2.30) offre plusieurs avantages sur la technique qui vient d'être rappelée. En premier lieu, elle permet aisément de s'affranchir de l'hypothèse de fissures sans interaction, en adoptant par exemple le schéma différentiel ou celui de Mori-Tanaka. De plus, la démarche se généralise sans peine à l'homogénéisation d'un milieu fissuré à matrice non homogène. Elle peut être ainsi étendue au cas d'un milieu poreux fissuré que nous allons étudier dans les sections suivantes.

### 2.3.2 Homogénéisation d'un solide fissuré : fissures interagissantes

Dans cette section, en suivant la technique d'estimation décrite à la section (2.3.1), on propose d'estimer le tenseur des modules d'élasticité d'un matériau contenant différentes familles de fissures interagissantes.

La démarche est maintenant de considérer une fissure comme une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice homogène infinie d'élasticité  $\mathbf{c}^o$  à préciser, et soumise à l'infini à une déformation auxiliaire  $\underline{\underline{E}}^o$  qu'il nous faut également préciser. C'est le choix de  $\underline{\underline{E}}^o$  qui gère l'interaction des fissures.

D'après le résultat d'Eshelby (2.24), la déformation moyenne d'une telle inclusion est égale à :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_I = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{o,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^o)]^{-1} : \underline{\underline{E}}^o \quad (2.41)$$

Pour déterminer le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé de notre matériau, il nous faut faire un choix sur la nature de la matrice homogène dans laquelle sont plongées les inclusions, c'est-à-dire choisir la forme de  $\mathbf{c}^o$ . On décide ici de se placer dans le cadre du schéma de Mori-Tanaka dans lequel le tenseur  $\mathbf{c}^o$  est supposé égal au tenseur des modules d'élasticité de la matrice solide. On fait ce choix pour rendre compte de la morphologie connexe de la matrice solide.

Considérant maintenant un ellipsoïde solide plongé dans cette matrice infinie d'élasticité  $\mathbf{c}^s$ , (2.41) permet de déduire l'égalité :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} = \underline{\underline{E}}^o \quad (2.42)$$

La détermination de la déformation auxiliaire est régie par la nécessité de satisfaire à la condition de moyenne  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{E}}$ . Sachant que :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = f^s \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega^s} + f^I \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_I \quad (2.43)$$

on déduit de (2.41), (2.42) et (2.43) que la déformation auxiliaire  $\underline{\underline{E}}^o$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{E}}^o = [f^s \mathbf{I} + f^I [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1}]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.44)$$

où  $f^s$  et  $f^I$  représentent respectivement la fraction volumique de la phase solide et la fraction volumique de l'inclusion. (2.41) et (2.44) conduisent alors au résultat :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_I = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1} : [f^s + f^I [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1}]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.45)$$

qui fait donc apparaître le tenseur de localisation  $\mathbf{A}^I$  par comparaison avec (2.23).

Partant de (2.22) et (2.45) il vient que, de manière générale, l'estimation de Mori-Tanaka pour une famille de fissures  $\mathcal{F}_j$  plongées dans un milieu infini d'élasticité  $\mathbf{c}^s$  est égale à :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_j = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,j} : (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s)]^{-1} : [f^s \mathbf{I} + \sum_j f^{c,j} [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,j} : (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s)]^{-1}]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.46)$$

En appliquant cette estimation à un matériau contenant  $j$  familles de fissures différentes on obtient le tenseur homogénéisé des modules d'élasticité en sommant les différentes contributions. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s + \sum_j f^{c,j} (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s) : [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,j} : (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s)]^{-1} \\ : [f^s \mathbf{I} + \sum_j f^{c,j} [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,j} : (\mathbf{c}^c - \mathbf{c}^s)]^{-1}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Comme dans la section 2.3.1, on différencie maintenant les fissures fermées des fissures ouvertes. Quand toutes les fissures sont ouvertes, le tenseur des modules d'élasticité de celles-ci étant égal à zéro on déduit que le comportement homogénéisé est décrit par le tenseur :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s - \sum_j f^{c,j} \mathbf{c}^s : (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,j})^{-1} : [f^s \mathbf{I} + \sum_j f^{c,j} (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,j})^{-1}]^{-1} \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{S}^{s,j} = \mathbf{P}^{s,j} : \mathbf{c}^s$  est le tenseur d'Eshelby relatif à la forme de l'ellipsoïde considéré pour représenter les fissures ayant le rapport d'aspect et l'orientation de la famille  $\mathcal{F}_j$  et plongé dans un milieu infini ayant les propriétés élastiques de la phase solide.  $\mathbf{C}^{hom}$  s'écrit encore sous la forme plus concise :

$$\mathbf{C}^{hom} = f^s \mathbf{c}^s : [f^s \mathbf{I} + \sum_j f^j (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,j})^{-1}]^{-1} \quad (2.49)$$

Pour des valeurs assez petites  $X^i$  du rapport d'aspect de fissures appartenant à une famille  $\mathcal{F}^i$ , le résultat présenté en (2.29) s'écrit maintenant  $\mathbf{T}^i = \lim_{X^i \rightarrow 0} X^i (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,i})^{-1}$ . On obtient donc finalement :

$$\mathbf{C}^{hom} = f^s \mathbf{c}^s : [f^s \mathbf{I} + \sum_j \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j]^{-1} \quad (2.50)$$

On considère maintenant le cas d'une matrice contenant plusieurs familles de fissures fermées. On suppose ici que toutes les fissures sont fermées par opposition au cas ci-dessus où toutes les fissures sont ouvertes. Le cas où le matériau fissuré est constitué à la fois de familles de fissures ouvertes et fermées sera développé dans la section 2.3.3 lors de l'étude du comportement linéaire d'un milieu poreux comportant des pores et des fissures. On considère à nouveau les deux cas que sont les fissures fermées parfaitement adhérentes et les fissures fermées sans frottement.

Pour les fissures fermées parfaitement adhérentes, (2.22) conduit immédiatement à un comportement d'ensemble du matériau égal à celui de la matrice solide.

Il n'en est bien sûr pas de même pour les fissures sans frottement qui présentent un cisaillement nul. En suivant les mêmes étapes que pour les fissures ouvertes, le calcul nous conduit à une matrice homogénéisée qui s'écrit :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s - \sum_j f^{c,j} 2\mu^s \mathbf{K} : (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,j} : \mathbf{K})^{-1} : [f^s \mathbf{I} + \sum_j f^{c,j} (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,j} : \mathbf{K})^{-1}]^{-1} \quad (2.51)$$

où encore sous une forme similaire à (2.49) :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : [\mathbf{J} + f^s \mathbf{K} : [f^s \mathbf{I} + \sum_j f^j (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,j} : \mathbf{K})^{-1}]^{-1}] \quad (2.52)$$

(2.32) nous permet donc d'avoir finalement  $\mathbf{C}^{hom}$  sous la forme :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : [\mathbf{J} + f^s \mathbf{K} : [f^s \mathbf{I} + \sum_j \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^{j'}]^{-1}] \quad (2.53)$$

### 2.3.3 Homogénéisation d'un poreux contenant de pores et des fissures interagissants.

On s'intéresse maintenant à la détermination du tenseur homogénéisé des modules d'élasticité, dans le cas d'un milieu poreux dont le réseau poreux est constitué de pores et de fissures interagissants.

Le raisonnement suivi ici est similaire à celui développé depuis le début de la section



(2.3). Cependant, à la différence de l'homogénéisation d'un milieu fissuré, la porosité ne se ramène plus uniquement à la contribution apportée par les fissures, indicées par  $c$  de fraction volumique  $f^c$ , mais fait également intervenir les pores, indicés par  $p$  de fraction volumique  $f^p$ . On a donc  $\Phi = f^p + f^c$ , avec en pratique,  $f^c \ll f^p$ .

L'idée utilisée par la suite est de traiter les pores comme des inclusions sphériques, et les fissures, comme précédemment, par des inclusions ellipsoïdales aplaties, toutes deux plongées dans la phase solide. On rappelle que chaque famille de fissures  $\mathcal{F}_j$  est associée à une orientation et un rapport d'aspect ( $X = c/a$ ) donnés. On suppose maintenant que les fissures sont distribuées aléatoirement dans la matrice solide, ce qui confère un caractère macroscopique isotrope au milieu poreux considéré.

Dans la suite, on distingue les fissures ouvertes (indicées par  $op$  pour opened) des fissures fermées (indicées par  $cl$  pour closed) par leurs fractions volumiques respectives  $f_{op}^c$  et  $f_{cl}^c$  et leurs élasticités  $\mathbf{c}_{op}^c$  et  $\mathbf{c}_{cl}^c$ . On note de plus  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  les ensembles contenant respectivement les fissures ouvertes et les fissures fermées. On aura donc :

$$\sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} + \sum_{j \in \mathcal{C}} f_{cl}^{c,j} = f^c \quad (2.54)$$

Soulignons ici qu'on se limite (comme dans toute la présente section) à des évolutions du système sans changement d'état des fissures: les fissures ouvertes (resp. fermées) restent ouvertes (resp. fermées). Cette condition est nécessaire pour assurer la linéarité de la réponse du v.e.r.. L'état des fissures (ouvert/fermé) est donc celui qui prévaut dans l'état naturel pris comme référence ( $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{E}} = 0$ ). Évidemment, le rapport d'aspect est susceptible d'évoluer. L'hypothèse formulée ci-dessus consiste à admettre qu'il ne s'annule pas. On verra à la section 2.4 la façon appropriée pour traiter les situations avec changements d'état des fissures.

Les relations (1.10) et (2.19) étant toujours valables, la relation homologue de (2.20) s'écrit maintenant sous la forme :

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{I} = f^s \mathbf{A}^s + f^p \mathbf{A}^p + \sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} \mathbf{A}_{op}^{c,j} + \sum_{j \in \mathcal{C}} f_{cl}^{c,j} \mathbf{A}_{cl}^{c,j} \quad (2.55)$$

D'après la définition (2.21) on a ici :

$$\mathbf{C}^{hom} = f^s \mathbf{c}^s : \mathbf{A}^s + f^p \mathbf{c}^p : \mathbf{A}^p + \sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} \mathbf{c}_{op}^c : \mathbf{A}_{op}^{c,j} + \sum_{j \in \mathcal{C}} f_{cl}^{c,j} \mathbf{c}_{cl}^c : \mathbf{A}_{cl}^{c,j} \quad (2.56)$$

ce qui, compte tenu de (2.55), conduit à :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s + f^p (\mathbf{c}^p - \mathbf{c}^s) : \mathbf{A}^p + \sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} (\mathbf{c}_{op}^c - \mathbf{c}^s) : \mathbf{A}_{op}^{c,j} + \sum_{j \in \mathcal{C}} f_{cl}^{c,j} (\mathbf{c}_{cl}^c - \mathbf{c}^s) : \mathbf{A}_{cl}^{c,j} \quad (2.57)$$

Sachant que  $\mathbf{c}^p = 0$ ,  $\mathbf{c}_{op}^c = 0$  et que l'on considère des pores de forme sphérique, les estimations de Mori Tanaka pour les différentes phases inclusionaires s'écrivent :

$$\mathbf{A}_p = (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} : \langle [I + \mathbf{P}^s : (\mathbf{c} - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{A}_{op}^{c,j} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,j})^{-1} : \langle [I + \mathbf{P}^s : (\mathbf{c} - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{A}_{cl}^{c,j} = (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{cl}^{s,j} : (\mathbf{c}_{cl}^c - \mathbf{c}^s))^{-1} : \langle [I + \mathbf{P}^s : (\mathbf{c} - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} \quad (2.60)$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle [I + \mathbf{P}^s : (\mathbf{c} - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} &= [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} + \\ &\quad \sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,j})^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{C}} f_{cl}^{c,j} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{cl}^{s,j} : (\mathbf{c}_{cl}^c - \mathbf{c}^s))^{-1}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Comme précédemment le tenseur  $\mathbf{S}_{op}^{s,j}$  est le tenseur d'Eshelby relatif à la forme de l'ellipsoïde considéré pour représenter les fissures ouvertes ayant le rapport d'aspect et l'orientation de la famille  $\mathcal{F}_j$  et plongées dans un milieu infini ayant les propriétés élastiques de la phase solide. De façon similaire,  $\mathbf{S}^{s, sph}$  est le tenseur d'Eshelby pour une inclusion sphérique plongée dans le même milieu.

Ces résultats sont valables quelque soit le comportement choisi pour modéliser une fissure fermée. On examine maintenant les deux cas particuliers étudiés à la section (2.3.1) que sont les fissures fermées parfaitement adhérentes et les fissures fermées sans frottement.

### Cas des fissures parfaitement adhérentes $\mathbf{c}_{cl}^c = \mathbf{c}^s$

Dans ce cas, d'après (2.57),  $\mathbf{C}^{hom}$  se réduit naturellement à :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : [\mathbf{I} - f^p \mathbf{A}^p - \sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} \mathbf{A}_{op}^{c,j}] = f^s \mathbf{c}^s : \mathbf{A}^s \quad (2.62)$$

Par analogie aux calculs de la section 2.3.1, on note  $N^i$  la densité de fissure relative à la famille  $\mathcal{F}_i$ . On introduit également le paramètre de densité de fissure  $\epsilon^i$  défini par  $\epsilon^i = N^i (a^i)^3$ .  $X^i$  faisant référence comme précédemment au rapport d'aspect dans la configuration actuelle. On a alors :

$$f^{c,i} = \frac{4\pi}{3} (a^i)^3 N^i X^i = \frac{4\pi}{3} \epsilon^i X^i \quad (2.63)$$

Comme précédemment on utilise l'approximation :

$$\mathbf{T}^i \approx \lim_{X^i \rightarrow 0} X^i (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,i})^{-1} \quad (2.64)$$

En revanche, dans le cas de fissures fermées adhérentes, le produit de même forme a pour limite zéro. En effet :

$$\lim_{X^i \rightarrow 0} f_{cl}^{c,i} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{cl}^{s,i} : (\mathbf{c}_{cl}^c - \mathbf{c}^s))^{-1} = \lim_{X^i \rightarrow 0} f_{cl}^{c,i} \mathbf{I} = \lim_{X^i \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} \epsilon^i X^i \mathbf{I} = 0 \quad (2.65)$$

Dans ces conditions, la combinaison de (2.58), (2.59), (2.61) à :

$$\mathbf{C}^{hom} = f^s \mathbf{c}^s : [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{O}} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j]^{-1} \quad (2.66)$$

### Cas des fissures sans frottement $\mathbf{c}_{cl}^c = 3k^s \mathbf{J}$

Ici le comportement fictif choisi pour modéliser le comportement des fissures conduit à :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{P}_{cl}^{s,j} : (\mathbf{c}_{cl}^c - \mathbf{c}^s))^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{cl}^{s,j} : \mathbf{K})^{-1} \quad (2.67)$$

si bien que l'écriture de la moyenne du tenseur de localisation sur les fissures fermées (2.60) se met sous la forme :

$$\mathbf{A}_{cl}^{c,j} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{cl}^{s,j} : \mathbf{K})^{-1} : \langle [I + \mathbf{P}^s : (\mathbf{c} - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} \quad (2.68)$$

$$\text{avec } \langle [I + \mathbf{P}^s : (\mathbf{c} - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} = [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{O}} f_{op}^{c,j} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,j})^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{C}} f_{cl}^{c,j} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{cl}^{s,j} : \mathbf{K})^{-1}]^{-1} \quad (2.69)$$

Partant de (2.32) appliquée à une famille de fissures fermées sans frottement  $\mathcal{F}_i$ , on peut de plus écrire :

$$\lim_{X^i \rightarrow 0} f_{cl}^{c,i} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{cl}^{s,i} : \mathbf{K})^{-1} = \frac{4\pi}{3} \epsilon^i \mathbf{T}^i \quad (2.70)$$

D'après (2.57), (2.58), (2.59) et (2.68) on obtient donc l'expression du tenseur des modules d'élasticité d'un milieu poreux fissuré dont le frottement sur les lèvres des fissures fermées est nul.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : [ & \mathbf{I} - [f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{O}} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j + \sum_{j \in \mathcal{C}} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{K} : \mathbf{T}^j] \\ & : [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} + \sum_{j \in \mathcal{O}} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j + \sum_{j \in \mathcal{C}} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j]^{-1} \end{aligned} \quad (2.71)$$

## 2.4 Homogénéisation non linéaire d'un poreux à pores et fissures connectés (cas sec)

Les différentes discussions issues de la section 2.1 nous ont amené à favoriser l'existence d'une microfissuration comme étant à l'origine du comportement poroélastique non linéaire. Comme nous l'avons déjà précisé dans la section (2.1.2), la faible contribution des

fissures à la porosité, n'enlève rien à l'influence qu'elles peuvent avoir sur le comportement macroscopique. En effet dans la gamme de chargements considérée ici, les changements de géométrie des pores sont négligeables. En revanche, les contraintes de compression sont capables de fermer une certaine quantité de fissures. Cette section vise à présenter une approche quantitative du comportement macroscopique non linéaire (Deudé et al. ([26], [27])) .

On explore dans cette section l'hypothèse suivant laquelle la réponse macroscopique non linéaire est entièrement due au réseau de microfissures. La fermeture (ou l'ouverture) des différentes familles de fissures, induite par le chemin de contrainte, est alors envisagée pour expliquer la non linéarité.

On met ensuite en évidence comment, partant de la forme généralisée du paramètre de densité de fissures  $\epsilon$  introduit par Budiansky et O'Connell [19], il est possible de caractériser la distribution du rapport d'aspect donc des différentes familles de fissures. On montre alors que les propriétés élastiques macroscopiques non linéaires peuvent être déterminées d'après la connaissance de  $\epsilon$ . A l'inverse,  $\epsilon$  peut être déterminé par une analyse basée sur des données expérimentales donnant le module de compression en fonction de la pression de confinement.

### 2.4.1 Non linéarité et critère de fermeture.

*On travaille dans la suite sur une interprétation de la non linéarité macroscopique basée sur la fermeture des fissures.*

Le raisonnement linéaire présenté dans la section (2.3) n'est valable que jusqu'au niveau de contrainte à partir duquel le processus de fermeture des fissures initialement ouvertes commence. Cependant, pour des contraintes supérieures, ce raisonnement peut être utilisé sous une forme incrémentale de façon à relier un incrément de déformation macroscopique  $d\underline{E}$  à l'incrément de contrainte macroscopique correspondant  $d\underline{\Sigma}$ , à condition que les phénomènes irréversibles comme la propagation de fissure et les glissements avec frottement puissent être négligés. La forme incrémentale de l'équation d'état macroscopique s'écrit alors :

$$d\underline{\Sigma} = \mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\Sigma}) : d\underline{E} \tag{2.72}$$

Nous ne considérerons, ici, que les fissures fermées sont parfaitement adhérentes. L'expression du tenseur tangent des raideurs  $\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\Sigma})$  est identique à celle donnée en (2.66),

où seules les fissures ouvertes doivent être prises en compte :

$$\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\Sigma}) = f^s \mathbf{c}^s : [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1}] + \sum_{j \in \mathcal{O}(\underline{\Sigma})} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j]^{-1} \quad (2.73)$$

où  $\mathcal{O}(\underline{\Sigma})$  représente l'ensemble des fissures ouvertes<sup>3</sup>. Pour des contraintes de compression croissantes, toutes les fissures sont fermées progressivement ( $\mathcal{O}(\underline{\Sigma}) \rightarrow \emptyset$ ). (2.73) montre que  $\mathbf{C}_t^{hom}$  tend vers le tenseur des raideurs d'un milieu poreux constitué d'une phase solide *non fissurée* (raideur  $\mathbf{c}^s$ ) et d'un domaine poreux (porosité  $f^p$ ). Ces résultats fournissent une base micromécanique pour l'interprétation de la donnée expérimentale montrant l'existence d'une valeur asymptotique pour le module de compression.

La non linéarité du comportement macroscopique est incorporée dans la modélisation microscopique par le biais de la dépendance en  $\underline{\Sigma}$  de l'ensemble  $\mathcal{O}(\underline{\Sigma})$  qui dépend du niveau de contrainte. Une modélisation quantitative requiert par conséquent un critère pour la fermeture des fissures.

Tant qu'une famille de fissures  $\mathcal{F}_i$  est ouverte, le taux de déformation  $\underline{\dot{\epsilon}}^i$  associé au taux de déformation macroscopique  $\underline{\dot{E}}$  peut être obtenu à partir de (2.59) :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^i = \mathbf{A}^{c,i} : \underline{\dot{E}} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,i})^{-1} : [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1}] + \sum_{j \in \mathcal{O}(\underline{\Sigma})} \frac{4\pi}{3} \epsilon^j \mathbf{T}^j]^{-1} : \underline{\dot{E}} \quad (2.74)$$

La combinaison de (2.74) avec (2.73) conduit à une expression de  $\underline{\dot{\epsilon}}^i$  comme une fonction du taux de contrainte macroscopique  $\underline{\dot{\Sigma}}$  :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^i = \frac{1}{f^s} (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,i}(\underline{\Sigma}))^{-1} : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\dot{\Sigma}} \quad (2.75)$$

L'expression ci-dessus rappelle que le tenseur d'Eshelby  $\mathbf{S}^{s,i}$  dépend du niveau de contrainte  $\underline{\Sigma}$  via la valeur du rapport d'aspect  $X^i = c^i/a^i$  qui décroît progressivement jusqu'à ce que la fissure soit fermée. On note  $\underline{n}^i$  la normale unitaire au plan moyen de la fissure. Le taux de fermeture d'une fissure est alors donné par :

$$\dot{c}^i = c^i \underline{n}^i \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^i \cdot \underline{n}^i = \frac{a^i}{f^s} \underline{n}^i \cdot \left( X^i (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{op}^{s,i})^{-1} : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\dot{\Sigma}} \right) \cdot \underline{n}^i \quad (2.76)$$

En substituant (2.64) dans (2.76), on obtient alors :

$$\dot{c}^i = \frac{a^i}{f^s} \underline{n}^i \cdot \left( \mathbf{T}^i : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\dot{\Sigma}} \right) \cdot \underline{n}^i \quad (2.77)$$

$\mathbf{T}^i$  ainsi que  $a^i$  et  $f^s$  sont constants, ce qui signifie qu'ils ne sont pas modifiés par le processus de fermeture des fissures. L'expression ci-dessus du taux de fermeture des fissures

---

3. A la différence de l'approche linéaire, la population de fissures ouvertes dépend à présent du niveau de contraintes

peut donc être intégrée par rapport au temps. Si l'état macroscopique initial est libre de contrainte, on obtient :

$$\delta c^i = \frac{a^i}{f^s} \underline{n}^i \cdot (\mathbf{T}^i : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}}) \cdot \underline{n}^i \quad (2.78)$$

Selon (2.78), une famille de fissures va être fermée si  $\delta c^i = -c_o^i$ , où  $c_o^i$  représente la valeur de  $c^i$  dans l'état initial ( $\underline{\underline{\Sigma}} = 0$ ). (2.78) conduit donc à un critère de fermeture de la forme :

$$X_o^i \leq X_{cl}(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{n}^i) = -\frac{1}{f^s} \underline{n}^i \cdot (\mathbf{T}^i : \mathbf{c}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}}) \cdot \underline{n}^i \quad (2.79)$$

où  $X_o^i = c_o^i/a^i$  est la valeur du rapport d'aspect quand le v.e.r. est libre de contrainte. L'ensemble des fissures ouvertes  $\mathcal{O}(\underline{\underline{\Sigma}})$  peut être déterminé avec le critère ci-dessus :

$$\mathcal{O}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \{\mathcal{F}_i, X_o^i \geq X_{cl}(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{n}^i)\} \quad (2.80)$$

Le critère de fermeture d'une famille de fissures étant maintenant connu on connaît donc pour toute valeur de  $\underline{\underline{\Sigma}}$  le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé tangent (2.73). Sa dépendance en  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , via  $\mathcal{O}(\underline{\underline{\Sigma}})$  est donnée par (2.80). Plus précisément, le tenseur  $\mathbf{T}^j$  étant constant, (2.73) met en évidence le fait que le tenseur tangent des raideurs ne dépend que du niveau de contrainte par le biais de la variation de l'ensemble  $\mathcal{O}(\underline{\underline{\Sigma}})$  induite par le phénomène de fermeture des fissures. A la condition qu'une fissure reste ouverte, son changement de forme n'affecte pas la valeur de  $\mathbf{C}_t^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}})$ . En d'autres termes, la non linéarité n'est pas la conséquence de la variation du rapport d'aspect des fissures ouvertes mais réside dans la transition ouvert  $\rightarrow$  fermé dont le seuil est défini par  $X_{cl}(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{n}^i)$ .

Comme la matrice solide est supposée isotrope, le tenseur des souplesses élastiques  $\mathbf{s}^s$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{s}^s = \frac{1}{3k^s} \mathbf{J} + \frac{1}{2\mu^s} \mathbf{K} \quad (2.81)$$

$k^s$  et  $\mu^s$  dans (2.81) sont les modules de compression et de cisaillement de la matrice solide. Pour une compression isotrope ( $\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{\underline{1}}, \Sigma > 0$ ),  $X_{cl}$  ne dépend pas de l'orientation des fissures. Le seuil de fermeture d'une fissure donné dans (2.79) s'écrit :

$$X_{cl}(\Sigma) = \frac{T \Sigma}{3k^s f^s} \quad \text{avec} \quad T = \underline{n} \cdot (\mathbf{T} : \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{n} \quad (2.82)$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale au plan de fissure. Ainsi défini,  $T$  est indépendant de la direction de la fissure.

Après des calculs basés sur la solution d'Eshelby (1957) pour un "oblate spheroid" (voir annexe 3.1), on obtient :

$$T = \frac{4(1-\nu^{s2})}{\pi(1-2\nu^s)} \quad X_{cl}(\Sigma) = \frac{4(1-\nu^{s2})}{3k^s f^s \pi(1-2\nu^s)} \Sigma \quad (2.83)$$

où  $\nu^s$  est le coefficient de Poisson de la matrice solide.

Plus généralement, pour  $X_0 \geq X_{cl}(\Sigma)$  l'évolution du rapport d'aspect est donnée par :

$$X = \frac{c}{a} = \frac{c_0 + \delta c}{a} = X_0 - \frac{T \Sigma}{3 k^s f^s} \quad (2.84)$$

### 2.4.2 Expression de $C_t^{hom}$ comme une fonction du paramètre de densité de fissure $\epsilon(X)$ .

La section précédente a présenté une méthode pour une analyse quantitative du comportement macroscopique non linéaire. Nous améliorons maintenant le modèle micromécanique en introduisant une description continue des paramètres géométriques qui caractérisent une fissure : le rayon  $a$ , le rapport d'aspect *initial*  $X_o$  et les deux angles d'Euler  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$  qui définissent l'orientation de la normale unitaire à la fissure  $\underline{n}$ . La distribution des orientations est supposée isotrope.

Nous caractérisons la distribution de  $a$  et  $X_o$  au moyen d'une densité  $\mathcal{N}(a, X_o)$ . Le nombre de fissures  $dN$  pour lequel le rayon, le rapport d'aspect et les angles d'Euler appartiennent respectivement à  $[a, a + da]$ ,  $[X_o, X_o + dX_o]$ ,  $[\theta, \theta + d\theta]$  et  $[\varphi, \varphi + d\varphi]$  est alors défini par :

$$dN = \mathcal{N}(a, X_o) \frac{1}{4\pi} \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, da \, dX_o \quad (2.85)$$

La fraction volumique correspondante  $df$  s'écrit :

$$df = \frac{4}{3}\pi a^2 c \, dN = \frac{X}{3} a^3 \mathcal{N}(a, X_o) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, da \, dX_o \quad (2.86)$$

Dans la situation actuelle, la définition appropriée du paramètre de densité de fissures initialement introduit par Budiansky et O'Connell [19] se révèle être :

$$\epsilon(X_o) = \int_0^\infty \mathcal{N}(a, X_o) a^3 \, da \quad (2.87)$$

Les fissures étant modélisées comme des ellipsoïdes aplatis, seules les petites valeurs du rapport d'aspect sont pertinentes. En d'autres termes, il existe un seuil  $X_{max}$  tel que  $\mathcal{N}(a, X_o) = 0$  et  $\epsilon(X_o) = 0$  si  $X_o \geq X_{max}$ .

La somme sur  $\mathcal{O}(\Sigma)$  dans (2.73) peut maintenant être remplacée par une intégrale :

$$\sum_{j \in \mathcal{O}(\Sigma)} \frac{4}{3}\pi \epsilon^j \mathbf{T}^j = \mathbf{Q} \int_{X_{cl}(\Sigma)}^{X_{max}} \epsilon(X_o) \, dX_o \quad (2.88)$$

avec :

$$\mathbf{Q} = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \mathbf{T}(\theta, \varphi) \, d\varphi \quad (2.89)$$

La substitution de (2.88) dans (2.73) conduit à l'expression suivante du tenseur macroscopique des souplesses  $\mathbf{S}_t^{hom} = \mathbf{C}_t^{hom^{-1}}$  :

$$\mathbf{S}_t^{hom}(\Sigma) = \frac{1}{f^s} [f^s \mathbf{I} + f^p (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s, sph})^{-1} + \mathbf{Q} \int_{X_{cl}(\Sigma)}^{X_{max}} \epsilon(X_o) dX_o] : \mathbf{c}^{s-1} \quad (2.90)$$

Pour le niveau de contrainte défini comme :

$$X_{cl}(\Sigma_{max}) = X_{max} \Rightarrow \Sigma_{max} = \frac{3 k^s f^s}{T} X_{max} \quad (2.91)$$

toutes les fissures dans le v.e.r. sont fermées. Selon (2.90), si  $\Sigma \geq \Sigma_{max}$  le tenseur de souplesse élastique  $\mathbf{S}_t^{hom}(\Sigma)$  est égal à celui d'un milieu poreux constitué d'une phase solide *non fissurée* de raideur  $\mathbf{c}^s$  et d'un domaine poreux de porosité  $f^p$ .

### 2.4.3 Identification expérimentale du paramètre de densité de fissure, de la porosité de fissure et de la densité de fissure.

#### Paramètre de densité de fissures

La différentiation de (2.63) conduit à l'équation :

$$f^s \mathbf{Q}^{-1} : \frac{d\mathbf{S}_t^{hom}(\Sigma)}{d\Sigma} : \mathbf{c}^s = -\epsilon(X_{cl}(\Sigma)) \frac{dX_{cl}(\Sigma)}{d\Sigma} \mathbf{I} \quad (2.92)$$

$X_{cl}(\Sigma)$  étant proportionnel à  $\Sigma$ ,  $\frac{dX_{cl}}{d\Sigma}$  est une constante. (2.92) montre que le paramètre de densité de fissure  $\epsilon(X_o)$  peut être identifié à partir de données expérimentales qui décrivent l'effet de la pression de confinement sur le tenseur des souplesses élastiques macroscopique  $\mathbf{S}_t^{hom}(\Sigma)$ . Plus précisément,  $\mathbf{S}_t^{hom}(\Sigma)$  et  $\mathbf{Q}$  étant isotropes, on peut les écrire sous la forme :

$$\mathbf{S}_t^{hom}(\Sigma) = \frac{1}{3 K_t^{hom}(\Sigma)} \mathbf{J} + \frac{1}{2 \mu_t^{hom}(\Sigma)} \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = Q_1 \mathbf{J} + Q_2 \mathbf{K} \quad (2.93)$$

où  $K_t^{hom}(\Sigma)$  et  $\mu_t^{hom}(\Sigma)$  sont les modules tangents macroscopiques de compression et de cisaillement. Les valeurs de  $Q_1$  et  $Q_2$  sont données dans l'annexe 3.1. Il est pratique de séparer l'équation tensorielle (2.92) en deux relations scalaires qui lient respectivement la non linéarité des modules de compression et de cisaillement à  $\epsilon(X_o)$  :

$$-\epsilon(X_o) \frac{dX_{cl}}{d\Sigma}(\Sigma) = k^s \frac{f^s}{Q_1} \frac{d}{d\Sigma} \left( \frac{1}{K_t^{hom}} \right) (\Sigma) \quad \text{avec} \quad X_o = \frac{T \Sigma}{3 k^s f^s} \quad (2.94)$$

$$-\epsilon(X_o) \frac{dX_{cl}}{d\Sigma}(\Sigma) = \mu^s \frac{f^s}{Q_2} \frac{d}{d\Sigma} \left( \frac{1}{\mu_t^{hom}} \right) (\Sigma) \quad \text{avec} \quad X_o = \frac{T \Sigma}{3 k^s f^s} \quad (2.95)$$



On note qu'en combinant (2.94) et (2.95) on obtient une relation simple entre  $K^{hom}(\Sigma)$  et  $\mu^{hom}(\Sigma)$  :

$$\frac{k^s Q_2}{\mu^s Q_1} \left( \frac{1}{K_t^{hom}(\Sigma)} - \frac{1}{K_t^{hom}(0)} \right) = \left( \frac{1}{\mu_t^{hom}(\Sigma)} - \frac{1}{\mu_t^{hom}(0)} \right) \quad (2.96)$$

où  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2(1-2\nu^s)(5-\nu^s)}{5(1+\nu^s)(2-\nu^s)}$

En pratique, il semble que la plupart des études expérimentales concernant le comportement élastique non linéaire ont été consacrées à  $K_t^{hom}(\Sigma)$ .

### Porosité de fissures

D'après la définition de  $\epsilon(X_o)$  et  $\mathcal{N}(a, X_o)$ , la valeur initiale de la porosité de fissures  $f^{c,o}$  s'écrit :

$$f^{c,o} = \int \frac{4\pi}{3} a^2 c_o \mathcal{N}(a, X_o) da dX_o = \frac{4\pi}{3} \int_0^{X_{max}} X_o \epsilon(X_o) dX_o \quad (2.97)$$

En combinant (2.94) et (2.97), il vient :

$$f^{c,o} = \frac{4\pi T}{9Q_1} \int_0^{\Sigma_{max}} -\Sigma \frac{d}{d\Sigma} \left( \frac{1}{K_t^{hom}} \right) d\Sigma \quad (2.98)$$

L'équation ci-dessus montre que la porosité initiale de fissures peut être déterminée à partir de la mesure macroscopique du module de compression.

Notons  $K_o$  et  $K_{max}$  les valeurs initiale et asymptotique du module de compression. On considère pour l'instant une loi phénoménologique  $K^{hom}(\Sigma)$  de la forme :

$$K^{hom}(\Sigma) = K_{max} - (K_{max} - K_o) \left( \frac{\Sigma}{\Sigma_{max}} - 1 \right)^2 \quad (2.99)$$

La valeur de  $\Sigma_{max}$  contrôle la pente de  $K^{hom}(\Sigma)$  à l'origine, qui est égale à  $2(K_{max} - K_o)/\Sigma_{max}$ .

La figure 2.8 présente la porosité de fissures initiale comme une fonction du rapport  $K_{max}/K_o$  pour l'ensemble de paramètres suivants  $\nu^s = 1/3$  et  $\Sigma_{max}/K_o = 0.0025$ .

### Densité de fissures

On considère maintenant le cas où le rayon de fissure est uniforme, égal à  $a_o$ . La densité  $\mathcal{N}(a, X_o)$  s'écrit alors :

$$\mathcal{N}(a, X_o) = \nu(X_o) \delta_{a_o} \quad (2.100)$$

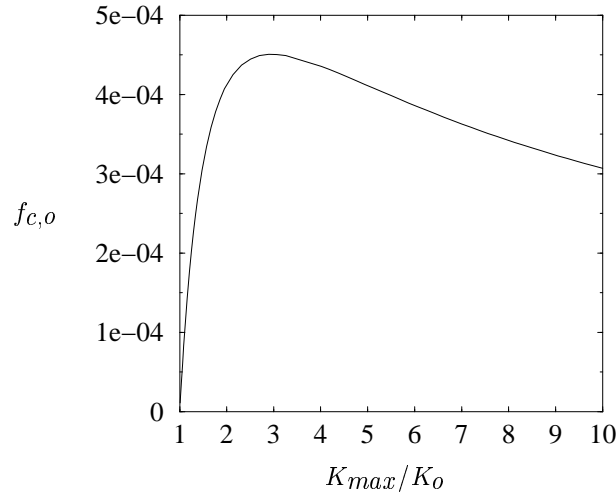


FIG. 2.8: porosité de fissure initiale  $f^{c,o}$  en fonction de  $K_{max}/K_o$

où  $\delta_{a_o}$  est la distribution de Dirac localisée en  $a_o$ . Dans ce cas,  $\epsilon(X_o)$  est donné par :

$$\epsilon(X_o) = \int_0^\infty a^3 \mathcal{N}(a, X_o) da = \nu(X_o) a_o^3 \quad (2.101)$$

La densité de fissures  $N$  est donc reliée à  $\epsilon(X_o)$  :

$$N = \int_0^{X_{max}} dX_o \int_0^\infty \mathcal{N}(a, X_o) da = \frac{1}{a_o^3} \int_0^{X_{max}} \epsilon(X_o) dX_o \quad (2.102)$$

La combinaison de (2.102) avec (2.94) fournit le lien entre le paramètre de densité de fissures classique  $N a_o^3$  et la non linéarité des propriétés macroscopiques élastiques, représentée par la différence entre les compressibilités initiale et asymptotique :

$$N a_o^3 = \frac{k^s f^s}{Q_1} \left( \frac{1}{K_o} - \frac{1}{K_{max}} \right) \quad (2.103)$$

D'après ces résultats, si le rayon de fissure peut être estimé, la densité  $N$  peut être obtenue à partir de la différence entre les compressibilités initiale et asymptotique. Ce résultat ne requiert aucune hypothèse quant à la forme de la fonction  $K^{hom}(\Sigma)$ .

## 2.5 Illustration de l'influence de la non linéarité dans un problème d'ingénierie de réservoir.

Les résultats théoriques que constituent les équations d'état de la poroélasticité peuvent être utilisés dans des problèmes concrets tels que ceux issus de l'ingénierie de réservoir. Les calculs standards rencontrés dans ce domaine font référence à un comportement élastique

linéaire de la roche (voir par exemple Boutéca [17]).

La production d'huile dans un réservoir commence par un processus isotherme, appelé déplétion, durant lequel la pression de pores décroît continuellement. De manière à illustrer la signification pratique de la non linéarité, on cherche, ici, à comparer les prédictions de récupération de l'huile par déplétion, obtenues respectivement pour des comportements linéaire et non linéaire de la roche.

Du point de vue de l'ingénierie, la production peut être quantifiée par l'indice de récupération de l'huile  $I_r$ . Dans l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, adoptée par la suite, ce dernier est défini comme le rapport  $I_r = V(t)/V_o$  dans lequel  $V(t)$  et  $V_o$  représentent respectivement le volume d'huile produit à l'instant  $t$  par le réservoir et le volume total initialement présent dans ce dernier.

On se place dans le cas étudié à la section précédente, où le domaine poreux est constitué de pores et de fissures connectés. En revanche, contrairement au cas de la section précédente, où le domaine poreux était sec, on doit inclure l'effet de la pression dans le réseau poreux qui est maintenant complètement saturé.

### 2.5.1 Position du problème.

On considère un réservoir horizontal saturé d'huile, entouré par un matériau imperméable. On suppose que ce réservoir est circulaire de rayon  $R_r$ . On se place en conditions œdométriques, ce qui suppose :

- d'une part, que la contrainte verticale est constante ( $\dot{\Sigma}_{zz} = 0$ )
- et d'autre part, que les déformations horizontales sont nulles ( $E_{rr} = 0$ ).

Dans l'état initial, la pression d'huile est uniforme dans le réservoir ( $p = p_o$ ).

Le modèle de production adopté consiste à forer instantanément un puits, à l'instant  $t = 0$ , rempli d'un fluide de même nature que celui saturant le réservoir, mais à une pression  $p_w$  inférieure à la pression initiale  $p_o$ . Le puits est modélisé ici par un cylindre de génératrices parallèles à l'axe vertical  $0z$  (figure 2.9). La différence de pression entre le réservoir et le puits va engendrer la sortie d'une partie de l'huile contenue dans le réservoir. C'est ce phénomène que l'on cherche à quantifier ici par la mesure de l'indice de récupération.

### 2.5.2 Détermination de l'équation de diffusion non linéaire.

On doit maintenant établir l'équation qui décrit l'évolution de la pression du fluide durant le processus de déplétion. On s'attache ici à la détermination d'une équation de diffusion

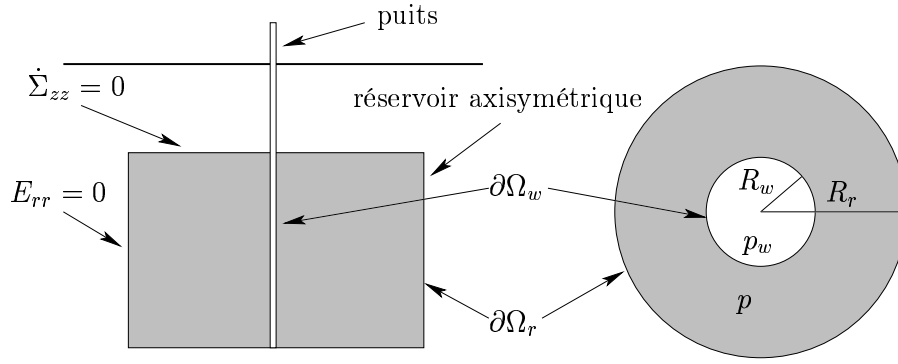


FIG. 2.9: géométrie du réservoir

décrivant les phénomènes de flux.

On rappelle ici les équations d'état de la poroélasticité linéaire (1.38) et (1.44), établies à la section (1.3.1), sous l'hypothèse des petites perturbations, dans le cas d'un matériau solide constitutif homogène, élastique linéaire et isotrope.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = K^{hom} \text{tr} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{1}} + 2\mu^{hom} \underline{\underline{E}}_d - bp \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad b = 1 - \frac{K^{hom}}{k^s} \quad (2.104)$$

$$\Phi - \Phi_o = b \text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{M} = \frac{b - \Phi}{k^s} \quad (2.105)$$

On s'intéresse aux variations de pression du fluide contenu dans le réservoir. Celles-ci sont directement liées aux mouvements du fluide dans le réseau poreux. Il nous faut donc utiliser une loi de conduction de la masse fluide.

On définit à ce stade la vitesse relative du fluide par rapport au squelette  $\underline{u}^r(\underline{x}, t)$ , et le vecteur eulérien courant relatif de masse fluide  $\underline{w}(\underline{x}, t)$  égal à :

$$\underline{w}(\underline{x}, t) = \phi \rho^f \underline{u}^r(\underline{x}, t) \quad (2.106)$$

Le vecteur  $\underline{w}(\underline{x}, t)$  ainsi défini, on adopte dans la suite, la loi de conduction linéaire de Darcy. On fait ici l'hypothèse d'une évolution quasistatique (on néglige les accélérations du fluide) au cours de laquelle on néglige les forces de volume. Dans ces conditions, la loi de Darcy s'écrit :

$$\frac{\underline{w}}{\rho^f} = -\underline{k} \cdot \underline{\text{grad}} p \quad (2.107)$$

où  $\underline{k}$  est un tenseur symétrique défini positif, qui représente la perméabilité du milieu. Dans le cas d'un matériau isotrope, le tenseur de perméabilité se réduit à un tenseur

sphérique de la forme :

$$\underline{k} = \frac{k}{\mu^f \underline{1}} \quad (2.108)$$

où  $k$  est la perméabilité intrinsèque du matériau et  $\mu^f$  est la viscosité du fluide saturant.

Pour établir l'équation de diffusion recherchée, on utilise l'équation de conservation de la masse fluide qui s'écrit :

$$\dot{m}^f + \text{div} \underline{w} = 0 \quad (2.109)$$

Dans cette équation, l'apport de masse fluide  $m^f$ , dans le cas où le fluide est incompressible, est égal au produit de la variation de volume poreux par la masse volumique de fluide (voir par exemple Coussy [22]).

$$m^f = \rho^f (\Phi - \Phi_o) \quad (2.110)$$

Compte tenu de la loi de Darcy (2.107), l'équation de conservation de la masse fluide (2.109) conduit à une relation entre la variation de la masse fluide et la pression de pore.

$$\frac{\dot{m}^f}{\rho^f} = \frac{k}{\mu^f} \Delta p \quad (2.111)$$

D'après la deuxième équation d'état (2.105), on obtient l'égalité :

$$\frac{m^f}{\rho^f} = \frac{p}{M} + b \text{tr} \underline{E} \quad (2.112)$$

dont la dérivée par rapport au temps, combinée avec (2.111) conduit à l'équation de diffusion :

$$\frac{k}{\mu^f} \Delta p = \frac{\dot{p}}{M} + b \text{tr} \underline{\dot{E}} \quad (2.113)$$

Pour pouvoir établir une équation de diffusion faisant intervenir des dérivées d'espace et de temps de la seule pression, on doit maintenant être capable de relier  $\underline{\dot{E}}$  à  $\dot{p}$ .

D'après l'hypothèse de condition œdométrique, il vient immédiatement d'après la première équation d'état (2.104) :

$$\Sigma_{zz} = (K^{hom} + \frac{4}{3} \mu^{hom}) E_{zz} - b p \quad (2.114)$$

dont la dérivée par rapport au temps conduit, d'après la condition  $\dot{\Sigma}_{zz} = 0$ , à l'égalité :

$$\dot{E}_{zz} = \text{tr} \underline{\dot{E}} = \frac{b}{K^{hom} + \frac{4}{3} \mu^{hom}} \dot{p} \quad (2.115)$$

En substituant (2.115) dans (2.113), on obtient l'équation de diffusion cherchée :

$$\frac{k}{\mu_f} \Delta p = \left[ \frac{1}{M} + \frac{b^2}{K^{hom} + \frac{4}{3}\mu^{hom}} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.116)$$

On retrouve ici un des résultats présentés par Boutéca [17].

On utilise maintenant les résultats établis à la section (2.2) pour déterminer l'équation de diffusion dans le cadre de la poroélasticité non linéaire. On a en effet démontré que, dans le cas où le domaine poreux est constitué de pores et fissures connectés et saturés par un même fluide, les équations de la poroélasticité non linéaire (2.6) et (2.14), se déduisent formellement des équations de la poroélasticité linéaire en remplaçant les coefficients d'élasticité constants par des coefficients d'élasticité tangents, fonctions de la contrainte effective de Terzaghi  $\underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}} + p\underline{\underline{1}}$ . On a également démontré que les relations entre  $C^{hom}$ ,  $b$  et  $M$  subsistent dans le cas du comportement poroélastique non linéaire (équations (2.7) et (2.17)).

L'équation de diffusion, dans le cas non linéaire se déduit donc formellement de l'équation (2.116), où l'on remplace les constantes du modèle linéaire par les coefficients et modules tangents du modèle non linéaire :

$$\frac{k}{\mu_f} \Delta p = \left[ \frac{1}{M(\underline{\underline{\Sigma}}')} + \frac{b^2(\underline{\underline{\Sigma}}')}{K^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}') + \frac{4}{3}\mu^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}')} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.117)$$

### 2.5.3 Calculs de l'indice de récupération.

On propose, ici, de comparer l'évolution de l'indice de récupération en fonction du temps obtenue pour des comportements élastiques linéaire et non linéaire de la roche réservoir. On rappelle que l'indice de récupération est défini comme le rapport entre le volume d'huile produit, à un instant donné, et le volume d'huile contenu initialement dans le réservoir. Il faut donc être capable de calculer le volume d'huile produit par le puits à chaque instant.

Si on note  $\partial\Omega_w$  la surface du puits et  $\partial\Omega_r$  la surface extérieure du réservoir (voir figure 2.9 ), le débit volumique sortant du réservoir, à chaque instant, est égal à :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\underline{\underline{w}}}{\rho_f} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \int_{\partial\Omega_w} \frac{\underline{\underline{w}}}{\rho_f} \cdot \underline{\underline{n}} dS + \int_{\partial\Omega_r} \frac{\underline{\underline{w}}}{\rho_f} \cdot \underline{\underline{n}} dS \quad \text{avec} \quad \partial\Omega = \partial\Omega_w \cup \partial\Omega_r \quad (2.118)$$

où  $\underline{\underline{n}}$  représente la normale extérieure à la surface considérée.

Compte tenu de la condition d'imperméabilité sur le contour extérieur du réservoir, la deuxième intégrale du membre de droite de l'équation (2.118) est nulle. Les équations

(2.107) et (2.109) conduisent, après l'utilisation du théorème de la divergence, à l'égalité :

$$\int_{\partial\Omega_w} \frac{\underline{w}}{\rho^f} \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{w}}{\rho^f} \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^f} \operatorname{div} \underline{w} d\Omega = \int_{\Omega} -C_{oed}(\underline{\Sigma}') \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega \quad (2.119)$$

où l'on a posé :

$$C_{oed}(\underline{\Sigma}') = \frac{1}{M(\underline{\Sigma}')} + \frac{b^2(\underline{\Sigma}')}{K^{hom}(\underline{\Sigma}') + \frac{4}{3}\mu^{hom}(\underline{\Sigma}')} \quad (2.120)$$

La pression dans le réservoir à chaque instant peut se calculer par la méthode des différences finies, appliquée à l'équation de diffusion (2.117). La méthode des différences finies est bien adaptée à notre problème du fait du caractère axisymétrique de ce dernier. Ces calculs numériques sont présentés dans l'annexe (3.3).

Connaissant la pression, à chaque instant, dans tout le réservoir, on peut donc calculer numériquement l'intégrale (2.119) qui, rapportée au volume d'huile initialement contenu dans le réservoir, nous permet de déduire la valeur de l'indice de récupération à chaque instant.

Pour des raisons de simplicité, la non linéarité est prise en compte par le biais de la dépendance de  $K^{hom}$  en fonction de la contrainte effective moyenne  $\Sigma' = -\frac{1}{3}\operatorname{tr} \underline{\Sigma}'$ . La simulation numérique est basée sur la même loi que dans (2.99) :

$$K^{hom}(\Sigma') = K_{max} - (K_{max} - K_o) \left( \frac{\Sigma'}{\Sigma_{max}} - 1 \right)^2 \quad (2.121)$$

où  $\Sigma_{max}$  a été définie en (2.91) et  $\mu^{hom}(\Sigma')$  obtenu à partir de (2.96).

La figure 2.10 représente l'évolution de l'indice de récupération  $I_r$  en fonction du temps. Dans le cas non linéaire la résolution numérique a été effectuée avec un rayon de puits  $R_w = 0.2m$  et un rayon de réservoir  $R_r = 300m$ . On a utilisé les constantes matérielles suivantes:  $K_o = 2000 MPa$ ,  $K_{max} = 10000 MPa$ ,  $\Phi_o = 0.198$ ,  $k_s = 35000 MPa$ . Ces valeurs sont issues des travaux de Boutéca [18]. De manière à déterminer  $\mu^{hom}(\Sigma')$  au cours de l'évolution, on a posé  $\mu^{hom}(0) = 750 MPa$  et  $\nu^s = 0.33$ .

Dans le cas linéaire, on a considéré des valeurs du module de compression homogénéisé égales, d'une part à  $K_o$ , et d'autre part à  $K_{max}$ . Les coefficients d'élasticité linéaire homogénéisés ont donc été posés égaux à ( $K_{lin}^{hom} = 2000 MPa$ ,  $\mu_{lin}^{hom} = 750 MPa$ ) et ( $K_{lin}^{hom} = 10000 MPa$ ,  $\mu_{lin}^{hom} = 3750 MPa$ ).

Les contraintes totales initiales ont été prises égales à  $\Sigma_{zz} = -62 MPa$  et  $\Sigma_{rr} = -55 MPa$ . On a également choisi  $\Sigma_{max} = 50 MPa$ . La pression initiale dans le réservoir et dans le puits ont été respectivement choisies égales à  $p_o = 50 MPa$  et  $p_w = 10 MPa$ .

La perméabilité intrinsèque du matériau est  $k = 10^{-14} m^2$  et la viscosité est égale à

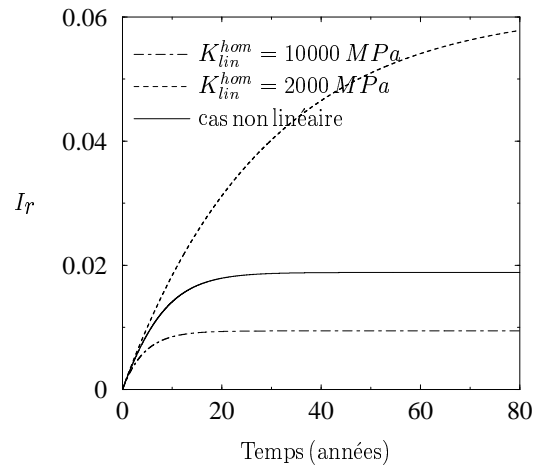


FIG. 2.10: comparaison de l'évolution de l'indice de récupération en fonction du temps pour différentes valeurs de  $K_o$ .

$$\mu^f = 10^{-3} Pa.s.$$

Il apparaît dans ces résultats, que l'évolution de l'indice de récupération en fonction du temps présente une branche asymptotique. Celle-ci correspond à l'ajustement progressif de la pression de réservoir sur la pression de puits. La figure 2.10 montre explicitement que la valeur de cette branche asymptotique, ainsi que l'instant auquel elle est approchée, sont très sensibles à la nature du comportement de la roche réservoir. Il découle de ces résultats que la prise en compte d'une éventuelle non linéarité de ce comportement est primordiale lorsqu'on cherche à connaître la quantité d'huile qui va pouvoir être récupérée par le simple effet de la déplétion, qui est un processus "peu coûteux" dans l'exploitation d'un gisement. La connaissance de la durée du processus permet aussi d'anticiper les budgets requis pour la mise en œuvre des processus secondaires plus coûteux.

On note que l'indice de récupération asymptotique décroît avec la raideur du matériau, maximale dans le cas linéaire  $K_{lin}^{hom} = 10000 MPa$  et minimale dans le cas linéaire  $K_{lin}^{hom} = 2000 MPa$ , le régime non linéaire pouvant être considéré comme intermédiaire, conformément à la loi (2.121). Il reste à apporter une explication à cette tendance.

#### 2.5.4 Calcul semi-analytique de la valeur asymptotique de l'indice de récupération.

Il est possible de calculer la valeur asymptotique de l'indice de récupération de façon semi-analytique sans avoir recours aux différences finies. On peut en outre discuter facilement de l'influence des paramètres  $K_o$ ,  $K_{max}$  et  $\Sigma_{max}$ , sur la valeur maximale de l'indice de récupération.

A un instant donné, la variation de porosité lagrangienne  $\Phi - \Phi_o$ , liée au champ de pression,



n'est pas uniforme dans le réservoir. L'indice de récupération de l'instant considéré se calcule donc comme une intégrale de la forme :

$$I_r(t) = \frac{1}{\Phi_o V_r} \int_{R_w}^{R_r} (\Phi_o - \Phi(t)) r dr d\theta dz \quad (2.122)$$

où  $V_r$  représente le volume du réservoir.

La simplification apportée par le régime asymptotique réside dans le fait que  $p$  devient uniforme, égale à  $p_w$ . Il en résulte que  $\Phi_o - \Phi$  tend vers une valeur asymptotique  $\Phi_o - \Phi^\infty$  elle-même uniforme. L'intégrale (2.122) devient donc :

$$I_r^\infty = \frac{\Phi_o - \Phi^\infty}{\Phi_o} \quad (2.123)$$

En résumé l'indice de récupération  $I_r^\infty$  quantifie le volume d'huile récupéré pour une évolution entre l'état initial caractérisé par le couple  $(p_o, \Phi_o)$  et l'état final caractérisé par  $(p_w, \Phi^\infty)$ .

Commençons par présenter le raisonnement dans le cas linéaire. La deuxième équation d'état s'écrit :

$$v = \Phi - \Phi_o = \frac{p - p_o}{M} + b \text{tr} \underline{\underline{E}} \quad (2.124)$$

où  $\text{tr} \underline{\underline{E}}$  représente la déformation volumique à l'instant considéré à partir de l'état initial du réservoir. Les conditions oedométriques permettent, comme en (2.115), d'écrire :

$$\text{tr} \underline{\underline{E}} = E_{zz} = \frac{b}{K^{hom} + \frac{4}{3}\mu^{hom}} (p - p_o) \quad (2.125)$$

d'où :

$$\Phi - \Phi_o = C_{oed} (p - p_o) \quad \text{avec} \quad C_{oed} = \frac{1}{M} + \frac{b^2}{K^{hom} + \frac{4}{3}\mu^{hom}} \quad (2.126)$$

L'indice de récupération  $I_r^\infty$  est donc égal à :

$$I_r^\infty = \frac{C_{oed}}{\Phi_o} (p_o - p_w) \quad (2.127)$$

L'indice de récupération asymptotique est donc proportionnel à la différence entre la pression initiale et la pression du puits. Il est contrôlé par les caractéristiques élastiques regroupées dans  $C_{oed}$ . Plus précisément, à  $k^s$  fixé, il apparaît que  $\frac{dC_{oed}}{dK^{hom}} < 0$  si bien que  $I_r^\infty$  est une fonction décroissante de  $K^{hom}$ . Ce résultat qualitatif est confirmé par la figure 2.10 et va dans le sens de l'intuition qui laisse à penser qu'un matériau plus raide, et donc moins déformable, ne va pas favoriser la récupération de l'huile par le processus de

déplétion.

Revenons maintenant au cas non linéaire.

En combinant (2.14) et (2.115), la variation de porosité entre l'instant initial et le régime asymptotique, s'écrit comme une intégrale de la pression de pore :

$$\int_{\Phi_o}^{\Phi^\infty} d\Phi = \int_{p_o}^{p_w} C_{oed}(\Sigma') dp \quad (2.128)$$

On va maintenant exprimer l'intégrale du membre de droite de l'équation (2.128) en fonction de la contrainte effective moyenne uniquement.

Compte tenu de (2.115) et de la composante verticale de la première équation d'état non linéaire (2.6), le taux de déformation horizontal peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\Sigma}_{xx} = \lambda^{hom}(\Sigma') \dot{E}_{zz} - b(\Sigma') \dot{p} = \left( \frac{\lambda^{hom}(\Sigma')}{\lambda^{hom}(\Sigma') + 2\mu^{hom}(\Sigma')} - 1 \right) \dot{p} \quad (2.129)$$

De cette égalité on déduit une expression en vitesse liant la contrainte effective moyenne à la pression :

$$\dot{\Sigma}' = \left( 1 - \frac{\frac{4}{3}\mu^{hom}(\Sigma')}{K^{hom}(\underline{\Sigma}') + \frac{4}{3}\mu^{hom}(\Sigma')} b(\Sigma') \right) \dot{p} \quad (2.130)$$

Réécrivons (2.130) sous la forme :

$$\dot{p} = f(\Sigma') \dot{\Sigma}' \quad (2.131)$$

L'équation (2.128) devient :

$$\int_{\Phi_o}^{\Phi^\infty} d\Phi = \int_{\Sigma'_o}^{\Sigma'_\infty} C_{oed}(\Sigma') f(\Sigma') d\Sigma' \quad (2.132)$$

où  $\Sigma'_o$  est la contrainte effective moyenne dans l'état initial et  $\Sigma'_\infty$  la contrainte effective moyenne dans l'état asymptotique. Cette dernière est solution de l'équation :

$$\int_{\Sigma'_o}^{\Sigma'_\infty} f(\Sigma') d\Sigma' = p_o - p_w \quad (2.133)$$

Les intégrales (2.133) et (2.132) ont été résolues à l'aide du logiciel Maple en prenant les mêmes valeurs numériques que dans le calcul par différences finies. On a pu ainsi calculer les valeurs maximales de l'indice de récupération  $I_r^\infty$  pour différentes valeurs de  $K_o$ ,  $K_{max}$

et  $\Sigma_{max}$ . Ces résultats sont répertoriés dans le tableau 2.134.

$K_o$ (MPa)	$K_{max}$ (MPa)	$\Sigma_{max}$ (MPa)	$I_r^\infty$
2000	2000	50	5.98%
10000	10000	50	0.93%
2000	10000	50	1.8%
2000	10000	0.1	1.17%
2000	10000	50000	5.97%

(2.134)

Les trois premiers résultats correspondent bien aux branches asymptotiques calculées par la méthode des différences finies. Les deux derniers résultats présentent les résultats obtenus pour deux valeurs différentes de  $\Sigma_{max}$ , qui correspond à la valeur pour laquelle toutes les fissures sont fermées. On remarque d'une part que quand  $\Sigma_{max}$  est très faible, les fissures se referment presque immédiatement, et l'indice de récupération maximum est très proche de celui du matériau de comportement élastique linéaire de module de compression  $K_o = 10000$  MPa. A l'inverse lorsque  $\Sigma_{max}$  est exagérément grand, aucune fissure ne se ferme dans la gamme de chargement considérée ici, le comportement correspondant alors une élasticité linéaire de module de compression constant et égal à  $K_o = 2000$  MPa. Ce résultat est confirmé par l'indice de récupération  $I_r^\infty$  très proche de celui obtenu dans le cas du comportement élastique linéaire correspondant.

## 2.6 Comportement d'un poreux saturé à pores et fissures non connectés.

On présente, dans cette section, une modélisation micromécanique du comportement poroélastique non linéaire dans le cas où les fissures ne sont pas connectées au réseau poreux (Dormieux et al. [35]). En supposant que la taille caractéristique des fissures est très petite devant celle des pores, la microstructure peut être séparée en deux échelles. La première concerne les fissures incluses dans le solide. Le terme matrice est alors utilisé pour désigner le matériau constitué de la phase solide et des fissures. L'élasticité de la matrice ainsi définie est donc décrite par un tenseur des modules d'élasticité égal au tenseur donné par (2.50). Ceci étant dit le but de cette section est de caractériser le comportement d'un matériau poroélastique constitué de la matrice, telle que définie précédemment, et d'un réseau de pores connectés.

Considérant le comportement de la matrice micro-fissurée connu, on supposera dans cette section que ce dernier est simplement modélisé à l'aide de la loi phénoménologique non

linéaire suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{c}^m(\underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{c}^m(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 2\mu^m(\varepsilon_d, \varepsilon_v)\mathbf{K} + 3k^m(\varepsilon_d, \varepsilon_v)\mathbf{J} \quad (2.135)$$

dans laquelle les modules de cisaillement et volumique sécants sont tous deux fonction de la déformation volumique  $\varepsilon_v = \text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}$  et de la déformation déviatorique équivalente définie dans la section (1.3.2) de cette partie. Dans la suite de cette section les exposants  $m$  et  $s$  feront respectivement référence à la matrice microfissurée et au solide élastique (linéaire) sain.

Notons que le comportement (2.135) est isotrope, ce qui suppose que la distribution des fissures l'est aussi. On supposera d'ailleurs dans toute la suite que les fissures sont distribuées aléatoirement, ce qui confère à la matrice microfissurée son caractère isotrope. On note également que l'existence d'un potentiel thermodynamique, associé au comportement décrit par l'équation (2.135), implique la relation suivante entre les fonctions  $\mu^m(\varepsilon_d, \varepsilon_v)$  et  $k^m(\varepsilon_d, \varepsilon_v)$  :

$$2\varepsilon_d \frac{\partial \mu^m}{\partial \varepsilon_v} = \varepsilon_v \frac{\partial k^m}{\partial \varepsilon_d} \quad (2.136)$$

Dans la formulation (2.135) la dépendance de  $\mu^m$  et  $k^m$  vis-à-vis de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  vise à rendre compte de l'évolution de l'ouverture des fissures en fonction de chargement. Ces fonctions qui, en théorie peuvent être précisées par des techniques d'homogénéisation, ne peuvent toutefois pas prétendre à la généralité, puisque les phénomènes comme l'anisotropie induite (Hori et Nemat-Nasser [48]) ou les irréversibilités dues à des glissements ou des propagations de fissures, ne sont pas pris en compte. Cette formulation fournit cependant un moyen simple pour analyser l'effet d'une microfissuration sur le comportement du matériau poroélastique. On pourra en particulier, discuter de l'existence d'une contrainte effective qui contrôle la réponse non linéaire macroscopique du matériau.

### 2.6.1 Le modèle de la sphère creuse en compression.

Comme dans les expériences présentées à la section 2.1.1, on commence par traiter la situation particulière du chargement macroscopique isotrope  $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{\underline{1}}$ . On commence dans un premier temps par modéliser le milieu poreux comme une sphère creuse de fraction volumique  $\Phi$ , dont la cavité de rayon  $r_o$  est soumise à la pression interne  $p$  (figure 2.11). L'enveloppe solide a un comportement non linéaire du type (2.135) dans lequel  $k^m$  et  $\mu^m$  sont constants. Le champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  est alors donné par la solution classique ( $r_o \leq r \leq r_1$ ) :

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{1}{1 - \Phi} \left( \frac{p\Phi + \Sigma}{3k^m} r + \frac{p + \Sigma r_o^3}{4\mu^m r^2} \right) \underline{\underline{e}}_r \quad (2.137)$$

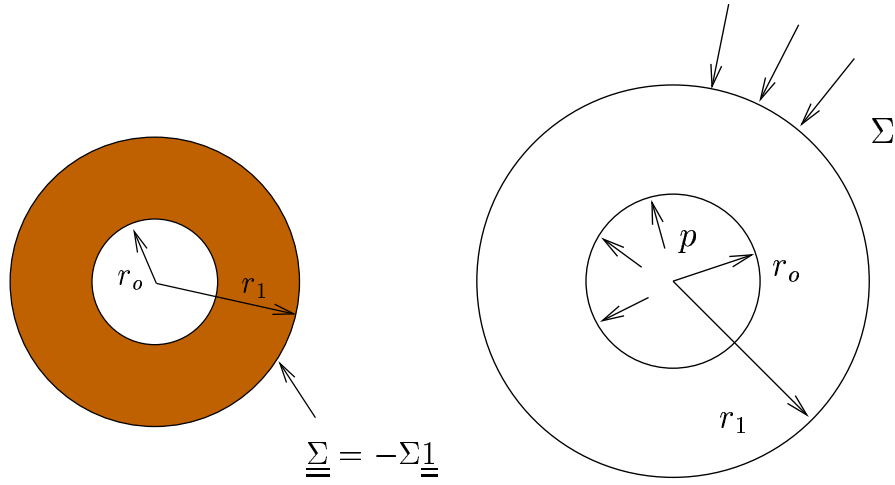


FIG. 2.11: sphère creuse soumise à une contrainte de confinement  $\Sigma$  et à une pression de pore  $p$ .

La variation de volume de la sphère peut alors être obtenue en fonction des paramètres de chargement  $\Sigma$  et  $p$  :

$$\Sigma = K^{hom} \frac{\Delta\Omega}{\Omega} - bp \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K^{hom} = \frac{4(1-\Phi)\mu^m k^m}{3\Phi k^m + 4\mu^m} \\ b = 1 - \frac{K^{hom}}{k^m} \end{cases} \quad (2.138)$$

Dans cette expression  $K^{hom}$  représente le module de compression volumique macroscopique de la sphère creuse et  $b$  est le coefficient de Biot. Il est intéressant de noter que  $K^{hom}$  est identique à la borne supérieure d'Hashin-Shtrikman et que  $b$  est relié à  $K^{hom}$  et  $k^m$  comme dans le cas de la poroélasticité linéaire en (1.37) où l'on a substitué  $k^s$  par  $k^m$  et  $\mu^s$  par  $\mu^m$ .

Dans le problème linéaire, la déformation volumique locale  $\varepsilon_v = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$  est uniforme dans l'enveloppe :

$$\varepsilon_v = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{p\Phi + \Sigma}{(1-\Phi)k^m} \quad (2.139)$$

Pour le chargement isotrope considéré ici, on observe que (1.50) et (1.64) sont cohérentes avec la solution (2.139), à condition de remplacer  $k^s$  par  $k^m$ .

Considérons maintenant le problème non linéaire où la réponse de l'enveloppe du matériau est encore décrite par (2.135) mais où  $k^m$  dépend de  $\varepsilon_v$ . On suppose qu'il n'y a pas de dépendance vis à vis de la déformation déviatorique. On suppose de plus que  $\mu^m$  est constant, ce qui comme on peut le remarquer vérifie (2.136).

En raison de l'uniformité de  $\varepsilon = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$  dans le problème linéaire, la solution du problème

non linéaire est donnée formellement par (2.137). La déformation volumique est à nouveau uniforme et s'écrit :

$$\varepsilon_v = \frac{p\Phi + \Sigma}{(1 - \Phi)k^m(\varepsilon_v)} \quad (2.140)$$

Elle restitue (2.139) dans le cas linéaire. La solution du cas non linéaire est obtenue par substitution du module constant  $k^m$  de la solution (2.137)-(2.138), par la quantité  $k^m(\varepsilon_v)$  qui est déterminée lorsqu'on a calculé  $\varepsilon_v$  solution de (2.140). On note alors  $k^{eff}$  la valeur correspondante du module de compression de la matrice, auquel on fera référence plus tard en tant que module de compression effectif. De (2.140) il apparaît également que  $\varepsilon_v$  est une fonction de  $(\Sigma, p)$  via la combinaison des termes  $\Sigma'' = \Sigma + \Phi p$ . Ceci est aussi valable pour  $k^{eff}$ . A partir de (2.138), où  $k^m$  est remplacé par  $k^{eff}(\Sigma'')$ , il découle que  $K^{hom}$  et  $b$  dépendent également du chargement par le biais de  $\Sigma''$ . Finalement l'équation d'état pour la sphère peut être écrite sous la forme :

$$\Sigma = K^{hom}(\Sigma'') \frac{\Delta\Omega}{\Omega} - b(\Sigma'')p \quad \text{avec} \quad b(\Sigma'') = 1 - \frac{K^{hom}(\Sigma'')}{k^{eff}(\Sigma'')} \quad (2.141)$$

Dans ce modèle, la non linéarité macroscopique est contrôlée par la contrainte effective  $\Sigma''$  à travers le module sécant  $K^{hom}$  et le coefficient de Biot  $b$ . Cependant on peut observer qu'il n'en est pas de même si l'on considère le module tangent qui est obtenu par différentiation de (2.141).

## 2.6.2 Cas général

Nous revenons maintenant sur le cas général décrit en (2.135), où les modules de la matrice sont dépendants de la déformation volumique locale  $\varepsilon_v$  et de la déformation déviatorique équivalente  $\varepsilon_d$ . Sous le chargement  $(\underline{E}, p)$ ,  $\varepsilon_v$  et  $\varepsilon_d$  fluctuent dans  $\Omega$  qui représente maintenant le domaine qu'occupe la matrice. Par conséquent, les modules sécants de compression et de cisaillement  $k^m$  et  $\mu^m$  ne sont pas uniformes dans  $\Omega$ .

Le principe de la technique d'homogénéisation dans le cas non linéaire est d'approcher la réponse globale en remplaçant la matrice non linéaire par un solide élastique linéaire défini par les modules effectifs :

$$k^{eff} = k^m(\varepsilon_v^{eff}, \varepsilon_d^{eff}) \quad ; \quad \mu^{eff} = \mu^m(\varepsilon_v^{eff}, \varepsilon_d^{eff}) \quad (2.142)$$

Ces modules effectifs dépendent de l'intensité du chargement par le biais des déformations volumique et déviatorique effectives  $\varepsilon_v^{eff}$  et  $\varepsilon_d^{eff}$ . Le choix de ces dernières s'avère donc primordial, et fait donc l'objet des différentes méthodes présentées dans cette section. Dans ce cadre, les lois de comportement (1.33) et (1.42) de la poroélasticité linéaire, ainsi

que les relations (1.36) et (1.41), restent valides pour les coefficients sécants.

$$\begin{cases} \text{(a)} & \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom}(k^{eff}, \mu^{eff}) : \underline{\underline{E}} - p\underline{\underline{B}}(k^{eff}, \mu^{eff}) \\ \text{(b)} & \Phi - \Phi_o = \underline{\underline{B}}(k^{eff}, \mu^{eff}) : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M(k^{eff}, \mu^{eff})} \end{cases} \quad (2.143)$$

$$\begin{cases} \text{(a)} & \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}} : \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3k^{eff}} \mathbf{C}^{hom} \right) \\ \text{(b)} & \frac{1}{M} = \frac{1}{3k^{eff}} \underline{\underline{1}} : (\underline{\underline{B}} - \Phi \underline{\underline{1}}) \end{cases} \quad (2.144)$$

Ces équations généralisent au matériau poreux non linéaire les équations d'état de la théorie linéaire de Biot. Notons que les coefficients macroscopiques qui interviennent dans ces équations sont des coefficients sécants fonction du chargement actuel.

### La méthode sécante classique.

Une première approche consiste à choisir les moyennes des déformations volumique et déviatorique  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$ , définies par (1.46) de la section (1.3.2) du chapitre précédent, comme déformations effectives.

$$\varepsilon_v^{eff} = \bar{\varepsilon}_v \quad ; \quad \varepsilon_d^{eff} = \bar{\varepsilon}_d \quad (2.145)$$

Les modules effectifs  $k^{eff}$  et  $\mu^{eff}$  sont alors respectivement égaux à  $\bar{k}^m$  et  $\bar{\mu}^m$  définis par :

$$\bar{k}^m = k^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \quad ; \quad \bar{\mu}^m = \mu^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \quad (2.146)$$

A partir de (1.51), il découle que les déformations effectives sont solutions du problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{(a)} & \bar{k}^m = k^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \quad ; \quad \bar{\mu}^m = \mu^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \\ \text{(b)} & (1 - \Phi)\bar{\varepsilon}_d^2 = \frac{1}{4\bar{\mu}^m} \underline{\underline{\Sigma}}_d'' : \underline{\underline{\Sigma}}_d'' \\ \text{(c)} & \frac{1}{2}(1 - \Phi)\bar{\varepsilon}_v^2 = \frac{1}{\bar{k}^m} \underline{\underline{\Sigma}}_v'' \end{cases} \quad (2.147)$$

Il ressort de (2.147) que la non linéarité est contrôlée par la contrainte effective  $\underline{\underline{\Sigma}}''$ . Par extension de (2.141) obtenu pour le cas de la sphère creuse, la première équation d'état s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}'') : \underline{\underline{E}} - p\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\Sigma}}'') \quad (2.148)$$

Cependant, ce résultat simple n'est pas exempt de critique. Par exemple, le problème de la compression isotrope de la sphère creuse décrit dans la section 2.6.1 révèle que le choix de la déformation moyenne  $\bar{\varepsilon}_d$  comme déformation effective peut être trompeur. Plus précisément, la cavité  $\omega$  étant soumise à une homothétie, la déformation déviatorique

moyenne  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_d \rangle_\omega$  dans la cavité est égale à 0. Cette remarque est aussi valable pour la déformation macroscopique déviatorique  $\underline{\underline{E}}_d$ . Nous avons ainsi :

$$\underline{\underline{E}}_d = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_d \rangle_\omega = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}_d \rangle_\Omega \quad (2.149)$$

Cela implique d'après (1.46) que  $\bar{\varepsilon}_d = 0$ , ce qui, étant donnée la nature isotrope du chargement, est cohérent avec (2.147(b)).

Au contraire, (2.137) montre que la déformation déviatorique n'est pas égale à zéro. De plus, dans certains cas, cette dernière est essentielle dans le processus de déformation macroscopique (on considère par exemple le cas d'une matrice solide incompressible). Cela représente donc une limitation importante à la pertinence du choix de  $\bar{\varepsilon}_d$  comme estimation de la déformation déviatorique effective.

### La méthode sécante modifiée.

La réponse globale est maintenant approchée en adaptant au cas des milieux poreux une idée de Suquet [65] que nous appellerons "méthode sécante modifiée".

Les propriétés du milieu de référence linéaire sont définies en choisissant  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$ , de (1.52) et (1.53), comme déformations effectives :

$$\varepsilon_v^{eff} = \bar{\varepsilon}_v \quad ; \quad \varepsilon_d^{eff} = \bar{\varepsilon}_d \quad (2.150)$$

Les modules effectifs  $k^{eff}$  et  $\mu^{eff}$  sont maintenant égaux respectivement à  $\bar{k}^m$  et  $\bar{\mu}^m$  définis par :

$$\bar{k}^m = k^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \quad ; \quad \bar{\mu}^m = \mu^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \quad (2.151)$$

On se placera dorénavant dans le cas plus spécifique où le comportement macroscopique est isotrope. Comme dans la section (1.3.2), on estime le module de compression macroscopique  $K^{hom}$  par identification avec la borne supérieure de Hashin-Shtrikman donnée par :

$$K^{hom}(\bar{\mu}^m, \bar{k}^m) = \frac{4\bar{\mu}^m\bar{k}^m(1-\Phi)}{3\Phi\bar{k}^m + 4\bar{\mu}^m} \quad (2.152)$$

Il résulte alors de (1.70) et (1.71) que les quantités  $\bar{\varepsilon}_d$  et  $\bar{\varepsilon}_v$  sont solutions du problème non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \bar{k}^m = k^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \quad ; \quad \bar{\mu}^m = \mu^m(\bar{\varepsilon}_d, \bar{\varepsilon}_v) \\ \text{(b)} \quad (1-\Phi)\bar{\varepsilon}_d^2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}^m} \left( \frac{1}{\mu^{hom}} \right) (\bar{\mu}^m, \bar{k}^m) \underline{\underline{\Sigma}}'_d : \underline{\underline{\Sigma}}'_d + \frac{3f}{8(1-\Phi)\bar{\mu}^m} \underline{\underline{\Sigma}}'^2 \\ \text{(c)} \quad \frac{1}{2}(1-\Phi)\bar{\varepsilon}_v^2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{k}^m} \left( \frac{1}{\mu^{hom}} \right) (\bar{\mu}^m, \bar{k}^m) \underline{\underline{\Sigma}}''_d : \underline{\underline{\Sigma}}''_d + \frac{1}{2(1-\Phi)\bar{k}^m} \underline{\underline{\Sigma}}''^2 \end{array} \right. \quad (2.153)$$



Par opposition à  $\overline{\varepsilon_d}$ , (2.153(b)) montre que  $\overline{\varepsilon_d}$  n'est pas égale à 0 quand le chargement macroscopique est une compression isotrope ( $\underline{\underline{\Sigma}}'' = 0$ ). On considère par exemple la situation dans laquelle  $\mu^m$  est constant, comme dans le problème de la sphère creuse de la section (2.6.1). Dans ce cas, on constate à partir de (2.153(b)) que  $\overline{\varepsilon_d}$  est contrôlée par la contrainte effective de Terzaghi  $\Sigma'$ .

Lorsque  $\overline{k^m}$  et  $\overline{\mu^m}$  dépendent tous deux à la fois de  $\overline{\varepsilon_d}$  et  $\overline{\varepsilon_v}$ , les équations (2.153(b)) et (2.153(c)) sont couplées au sens où il n'est pas possible de déterminer l'une de ces deux déformations moyennes sans l'autre. Cela signifie que  $\overline{\varepsilon_d}$  et  $\overline{\varepsilon_v}$  dépendent à la fois de  $\underline{\underline{\Sigma}}'_d = \underline{\underline{\Sigma}}''_d$ , de  $\Sigma'$  et de  $\Sigma''$ . Via  $\overline{k^m}$  et  $\overline{\mu^m}$ , il en est de même des modules macroscopiques  $K^{hom}$  (donné par (2.152)) et  $\mu^{hom}$ . En conséquence, *il n'existe pas dans ce cas de contrainte effective contrôlant la non linéarité macroscopique.*

Cependant, il existe deux cas importants pour lesquels *la non linéarité est contrôlée par une contrainte effective.* Cela se produit quand l'effet de  $\overline{\varepsilon_d}$ , ou celui de  $\overline{\varepsilon_v}$ , peut être négligé dans l'expression des modules  $k^m$  et  $\mu^m$ . Ces deux cas sont maintenant présentés.

a)  $k^m$  et  $\mu^m$  ne dépendent que de  $\overline{\varepsilon_d}$

Notons tout d'abord qu'en raison de la condition d'admissibilité thermodynamique (2.136), le module de compression  $k^m$  de la matrice est nécessairement une constante indépendante de la déformation. En utilisant (2.153(b)) et (2.153(a)) on peut déterminer les quantités  $\overline{\varepsilon_d}$  et  $\overline{\mu^m}$  en fonction de  $\underline{\underline{\Sigma}}'$ . La non linéarité est alors contrôlée par la contrainte effective de Terzaghi, au travers des modules sécants.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}') : \underline{\underline{E}} - p\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\Sigma}}') \quad (2.154)$$

Cependant, on peut émettre quelques réserves quant à la pertinence de cette hypothèse. En effet, il semble difficile de concilier une vision de la non linéarité basée sur l'hypothèse de la fermeture des fissures dans la matrice avec l'indépendance du module de compression de la matrice fissurée vis à vis de la déformation volumique qu'elle subit.

Néanmoins, en nous plaçant dans un contexte physique différent, l'idée que la réponse du matériau est contrôlée par  $\overline{\varepsilon_d}$  est plus proche de la réalité pour les matériaux plastiques. Dans le cadre de la théorie de la plasticité, la loi de comportement peut être formellement identifiée à celle de l'élasticité non linéaire, à condition que l'on considère des chargements monotones proportionnels.

b)  $k^m$  et  $\mu^m$  ne dépendent que de  $\overline{\varepsilon_v}$

On peut à nouveau utiliser la condition d'admissibilité thermodynamique de manière à

montrer que le module de cisaillement  $\mu^m$  de la matrice est nécessairement une constante indépendante de la déformation. Les quantités  $\overline{\varepsilon}_v$  et  $\overline{k^m}$  sont déterminées successivement en fonction de  $\underline{\underline{\Sigma}}''$  à partir de (2.153(c)) et (2.153(a)). On retrouve alors (2.141) obtenue dans le cas de la sphère creuse ainsi que (2.148) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}'') : \underline{\underline{E}} - p \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\Sigma}}'') \quad (2.155)$$

De façon analogue, (2.153(c)) peut être vue comme une généralisation de la relation (2.140) pour un chargement  $\underline{\underline{\Sigma}}$  arbitraire et une morphologie plus générale de la phase poreuse. En effet, le résultat de (2.140) peut être retrouvé en éliminant le terme dépendant de  $\underline{\underline{\Sigma}}_d''$  dans (2.153(c)). Cette convergence des résultats est naturellement une conséquence du choix (2.152) pour estimer  $K^{hom}$ .



# Chapitre 3

## Annexes de la partie II

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Calcul des tenseurs <math>T</math>, <math>T'</math> et <math>Q</math> . . . . .</b>	<b>101</b>
3.1.1	Coefficients du tenseur d'Eshelby . . . . .	101
3.1.2	Calcul des tenseurs $T$ et $T'$ . . . . .	102
3.1.3	Calcul du tenseur $Q$ de la section. . . . .	102
<b>3.2</b>	<b>Justification du choix de l'inclusion ellipsoïdale pour la mo- délisation des fissures. . . . .</b>	<b>104</b>
<b>3.3</b>	<b>Résolution de l'équation de diffusion non linéaire par la mé- thode des différences finies. . . . .</b>	<b>106</b>

---



### 3.1 Calcul des tenseurs $\mathbf{T}$ , $\mathbf{T}'$ et $\mathbf{Q}$

Dans cette annexe, après avoir rappelé les résultats d'Eshelby [36] relatifs à un ellipsoïde aplati, on donne la totalité des composantes des tenseurs  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}'$  et  $\mathbf{Q}$  utilisés au chapitre 2.

#### 3.1.1 Coefficients du tenseur d'Eshelby

Soit un référentiel muni de la base orthonormée  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On considère tout d'abord une inclusion  $I$ , ellipsoïde quelconque d'équation  $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 = 0$ , plongée dans un milieu solide homogène isotrope infini d'élasticité  $\mathbf{c}^s$ . Le tenseur d'Eshelby, noté ici  $\mathbf{S}^{s,I}$ , a alors certaines des propriétés des coefficients d'élasticité d'un cristal orthorhombique dont les axes sont parallèles à ceux de l'ellipsoïde. Si les  $S_{ijkl}$  représentent les composantes de  $\mathbf{S}^{s,I}$ , les relations du type  $S_{1122} = S_{2211}$  ne sont donc a priori pas valables. De plus, les coefficients couplant une extension et un cisaillement ( $S_{1112}, S_{1123}, S_{2311} \dots$ ) ou un cisaillement avec un autre différent ( $S_{1223} \dots$ ) sont nuls. On aura donc :

$$\begin{aligned} S_{1111} &= G a^2 I_{aa} + R I_a \\ S_{1122} &= G b^2 I_{ab} + R I_a \\ S_{1212} &= G \frac{1}{2} (a^2 + b^2) I_{ab} + R \frac{1}{2} (I_a + I_b) \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec :

$$G = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}, \quad R = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \quad (3.2)$$

Les autres coefficients sont obtenus par permutation circulaire directe de  $(1, 2, 3)$  et  $(a, b, c)$ .

Dans le cas particulier d'un ellipsoïde de type oblate, pour laquelle  $a = b \gg c$ , il est évident que les demi-axes  $a$  et  $b$  respectivement parallèles aux directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  jouent le même rôle en ce qui concerne les symétries du problème. Ceci va engendrer que plusieurs coefficients du tenseur sont maintenant égaux, à savoir  $S_{1111} = S_{2222}$ ,  $S_{1122} = S_{2211}$ ,  $S_{1133} = S_{2233}$ ,  $S_{3311} = S_{3322}$ ,  $S_{1313} = S_{2323}$ .

La détermination complète des coefficients du tenseur  $\mathbf{S}^{s,I}$  est achevée avec la connaissance des coefficients suivants :

$$I_a = I_b = 2 \frac{\pi X (\arccos X - X \sqrt{1-X^2})}{(1-X^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad I_c = 4\pi - 2 I_a \quad (3.3)$$

$$I_{ac} = I_{bc} = \frac{(I_c - I_a)}{3 a^2 (1-X)} \quad \text{et} \quad I_{ab} = \frac{1}{4} \left( \frac{4\pi}{3 a^2} - I_{ac} \right) \quad (3.4)$$

$$I_{aa} = I_{bb} = 3 I_{ab} \quad \text{et} \quad I_{cc} = \frac{4\pi}{3 c^2} - 2 I_{ac} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Calcul des tenseurs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ .

D'après (2.29) et (2.32)  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  sont respectivement égaux à :

$$\mathbf{T} = \lim_{X \rightarrow 0} X(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I})^{-1} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{T}' = \lim_{X \rightarrow 0} X(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I} : \mathbf{K})^{-1} \quad \text{où } \mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{J} \quad (3.7)$$

avec  $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ .

Les composantes du tenseur d'Eshelby présentées ci-dessus nous permettent donc maintenant d'exprimer complètement  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  dans la base  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .

**Coefficients de  $\mathbf{T}$  :**

$$\begin{aligned} T_{1111} &= T_{2222} = 0 \\ T_{3333} &= \frac{4(1 - \nu^s)^2}{\pi(1 - 2\nu^s)} \\ T_{1122} &= T_{2211} = T_{1133} = T_{2233} = 0 \\ T_{3311} &= T_{3322} = \frac{4(1 - \nu^s)\nu^s}{\pi(1 - 2\nu^s)} \\ T_{1212} &= T_{1221} = T_{2121} = T_{2112} = 0 \\ T_{2323} &= T_{2332} = T_{3223} = T_{3232} = \frac{2(1 - \nu^s)}{\pi(2 - \nu^s)} \\ T_{1313} &= T_{1331} = T_{3113} = T_{3131} = \frac{2(1 - \nu^s)}{\pi(2 - \nu^s)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où l'indice 3 fait référence à la normale à la fissure.

Les autres coefficients de  $\mathbf{T}$ , qui couplent une extension avec un cisaillement ( $T_{1112}, T_{1123}, T_{2311} \dots$ ), ou un cisaillement avec un autre différent ( $T_{1223} \dots$ ) sont nuls.

**Coefficients de  $\mathbf{T}'$  :**

Pour le tenseur  $\mathbf{T}'$  les seuls coefficients non nuls sont :

$$\begin{aligned} T'_{2323} &= T'_{2332} = T'_{3223} = T'_{3232} = \frac{2(1 - \nu^s)}{\pi(2 - \nu^s)} \\ T'_{1313} &= T'_{1331} = T'_{3113} = T'_{3131} = \frac{2(1 - \nu^s)}{\pi(2 - \nu^s)} \end{aligned}$$

### 3.1.3 Calcul du tenseur $\mathbf{Q}$ de la section.

On s'efforce ici de détailler le calcul du tenseur  $\mathbf{Q}$  défini par la relation (2.89) de la section 2.3.3. Ce calcul s'appuie directement sur les résultats de la section précédente donnant le

tenseur  $\mathbf{T}$ .

On considère que les fissures dont il sera question ici auront toutes des rapports d'aspect suffisamment petits de façon à ce que les composantes du tenseur  $\mathbf{T}$  en soient indépendantes. On rappelle également que la distribution des fissures dans la matrice est supposée aléatoire aussi bien du point de vue de leur rapport d'aspect que de leur orientation. Ceci confère un caractère macroscopique isotrope à notre matrice fissurée. Cela implique que  $\mathbf{T}$  ne dépend pas non plus de l'orientation des fissures. Les composantes de  $\mathbf{T}$  données dans (3.8) sont écrites dans un repère local  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  attaché à la fissure sont donc toujours valables. Or le tenseur  $\mathbf{Q}$  qui est égal à :

$$\mathbf{Q} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \mathbf{T}(\theta, \varphi) d\varphi \quad (3.9)$$

est écrit dans le repère global  $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$  attaché au v.e.r.. Pour déterminer entièrement  $\mathbf{Q}$ , il suffit donc de procéder au changement de base classique du repère local  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  vers le repère global  $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ . Ce dernier s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= \sin \varphi \underline{E}_1 - \cos \varphi \underline{E}_2 \\ \underline{e}_2 &= -\cos \theta \cos \varphi \underline{E}_1 - \cos \theta \sin \varphi \underline{E}_2 + \sin \theta \underline{E}_3 \\ \underline{e}_3 &= \sin \theta \cos \varphi \underline{E}_1 + \sin \theta \sin \varphi \underline{E}_2 + \cos \theta \underline{E}_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

On obtient alors, après intégration, le tenseur  $\mathbf{Q}$  qui a pour composantes :

$$\begin{aligned} Q_{iii} &= A * D \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \\ Q_{ijj} &= B * D \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{et } i \neq j \\ Q_{iji} &= C * D \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{et } i \neq j \end{aligned} \quad (3.11)$$

où l'on a noté :

$$\begin{aligned} A &= \nu^{s^2} - 13\nu^s + 10 \\ B &= 3\nu^s(3 - \nu^s) \\ C &= 2\nu^{s^2} - 11\nu^s + 5 \\ D &= \frac{16}{45} \frac{1 - \nu^s}{(2 - \nu^s)(1 - 2\nu^s)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les autres composantes de  $\mathbf{Q}$  sont toutes nulles. Ce tenseur peut alors être écrit matriciellement sous la forme :

$$[\mathbf{Q}] = D * \begin{pmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C \end{pmatrix} \quad (3.13)$$



Après avoir inversé cette matrice, on peut aisément identifier  $\frac{1}{Q_1}$  et  $\frac{1}{Q_2}$  qui sont égaux à :

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{16}{225} \frac{1 - \nu^s}{(1 - 2\nu^s)(\nu^s - 2)^2(1 + \nu^s)} \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{8}{45} \frac{1 - \nu^s}{(1 - 2\nu^s)^2(\nu^s - 2)(\nu^s - 5)} \quad (3.15)$$

### 3.2 Justification du choix de l'inclusion ellipsoïdale pour la modélisation des fissures.

Dans cette annexe, on montre comment l'utilisation des résultats d'Eshelby sur le problème de l'inhomogénéité ellipsoïdale placée dans un milieu homogène infini, permet de retrouver le résultat classique de Mécanique de la Rupture sur la relation entre l'ouverture (ou la fermeture) d'une fissure et une contrainte appliquée à l'infini. Dans ce modèle, la fissure correspond au passage à la limite pour les petits rapports d'aspect de l'inclusion considérée.

On montre ensuite comment ce résultat se généralise au cas d'une matrice fissurée. En effet, il apparaît pour ce problème que la prise en compte de l'interaction entre les fissures est équivalente au cas dilué.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas dilué correspondant à une fissure de forme ellipsoïdale plongée dans une matrice infinie d'élasticité homogène  $\mathbf{c}^s$  et soumise à l'infini à une condition de type (1.5). On a donc comme à la section 2.3.1 :

$$\forall \underline{x} \in I \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^I = [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (3.16)$$

Les fissures sont des inclusions vides dépourvues de caractéristiques élastiques, ce qui se traduit par  $\mathbf{c}^I = 0$ . On a donc naturellement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_I = [\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I}]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{S}^{s,I} = \mathbf{P}^{s,I} : \mathbf{c}^s$  est le tenseur d'Eshelby qui dépend d'une part de l'orientation et du rapport d'aspect de l'inclusion considérée pour représenter la fissure et d'autre part des caractéristiques élastiques du milieu dans lequel cette dernière est plongée.

On rappelle également que dans ce cas le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé s'écrit :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{c}^s : (\mathbf{I} - f^I(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I})^{-1}) \quad (3.18)$$

où  $f^I$  représente la fraction volumique de l'inclusion.

L'évolution de l'ouverture de la fissure, qui correspond initialement au petit axe de l'ellipsoïde égal à  $2c_o$ , peut être reliée à la déformation macroscopique par le biais de l'allongement unitaire dans la direction  $\underline{n}$  normale à la fissure. On va donc avoir :

$$\delta c = c_o \underline{n} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^I \cdot \underline{n} \quad (3.19)$$

A partir de (3.17), (3.18) et (3.19), on obtient le résultat :

$$\delta c = \frac{c_o}{1 - f^I} \underline{n} \cdot \left( (\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I})^{-1} : \mathbf{C}^{hom^{-1}} : \underline{\underline{\Sigma}} \right) \cdot \underline{n} \quad (3.20)$$

Partant de ce résultat général, on s'intéresse maintenant à un v.e.r. contenant une inclusion horizontale de normale  $\underline{e}_z$  et soumis à un état de contrainte macroscopique uniaxial  $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ . Si on note  $X = c/a$  le rapport d'aspect de la fissure, la relation générale (3.20) va maintenant s'écrire sous la forme :

$$\delta X = \frac{X_o \Sigma}{1 - f^I} \underline{e}_z \cdot \left( (\mathbf{I} - \mathbf{S}^s, I)^{-1} : \mathbf{C}^{hom^{-1}} : \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right) \cdot \underline{e}_z \quad (3.21)$$

Si on considère que les fissures correspondent au passage à la limite pour les petits rapports d'aspect ( $X_o \ll 1$ ) d'une inclusion ellipsoïdale, le tenseur  $\mathbf{T}$  donné dans la section précédente 3.1 conduit directement au résultat classique du problème de la penny shaped de la Mécanique de la Rupture liant l'ouverture de la fissure à la contrainte macroscopique :

$$X(\Sigma) = \frac{4(1 - \nu^{s2})}{E^s \pi} \Sigma \quad (3.22)$$

Ce résultat justifie donc le choix de modéliser les fissures par des ellipsoïdes aplatis de type oblate.

Cependant ce résultat, validé dans le cas dilué (une fissure unique dans un milieu infini), peut-il se généraliser pour une matrice fissurée où les fissures sont susceptibles d'interagir entre elles?

Pour étudier le cas des fissures interagissantes, on utilise, comme à la section 2.3.2, le schéma d'estimation de Mori-Tanaka pour lequel la déformation de l'inclusion s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_I = [\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I}]^{-1} : \langle [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (3.23)$$

De plus, on a vu que le tenseur des modules d'élasticité est égal à :

$$\mathbf{C}^{hom} = (1 - f_I) \mathbf{c}^s : \langle [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} \quad (3.24)$$

A partir du même raisonnement que dans le cas dilué pour aboutir à la relation (3.20), la relation qui décrit l'évolution de l'ouverture d'une fissure lorsqu'on tient compte des

interactions est obtenue sous la forme :

$$\delta c = \frac{c_o}{1 - f_I} \underline{n} \cdot ((\mathbf{I} - \mathbf{S}_s^I)^{-1} : \langle [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle^{-1} : \langle [\mathbf{I} + \mathbf{P}^{s,I} : (\mathbf{c}^I - \mathbf{c}^s)]^{-1} \rangle : \mathbf{C}^{hom^{-1}} : \underline{\Sigma}) \cdot \underline{n} \quad (3.25)$$

Il est manifeste que cette relation est équivalente à la relation (3.20). Par conséquent, la validité de la relation entre la contrainte appliquée à l'infini et l'ouverture d'une fissure est inchangée si l'on prend en compte la présence de fissures interagissantes. Cependant dans ce dernier cas les fissures n'étant pas nécessairement toutes de même orientation, donc de même normale, il faudra faire attention à la façon dont la contrainte agit sur chacune d'elles, ou sur chaque famille de fissures groupées suivant leur orientation.

### 3.3 Résolution de l'équation de diffusion non linéaire par la méthode des différences finies.

La méthode des différences finies permet une résolution numérique approchée d'un système d'équation différentielles ou d'une équation aux dérivées partielles (pour une étude approfondie de cette méthode voir par exemple Euvrard[38]).

On propose ici d'appliquer cette méthode à la résolution de l'équation non linéaire aux dérivées partielles de diffusion (2.117). Celle-ci se présente sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C(p) \Delta p \quad \text{où} \quad C(p) = \frac{k}{\mu^f C_{oed}(\Sigma')} \quad (3.26)$$

Le problème de réservoir considéré étant axisymétrique, la pression ne dépend que de la variable d'espace  $r$  (dans le repère cylindrique orthonormé  $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ ), si bien que l'équation (3.26) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C(p) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) \quad (3.27)$$

La méthode des différences finies nécessite de discrétiser chaque intervalle d'intégration intervenant dans l'équation à résoudre. La discrétisation de l'équation (3.27) se fait donc par rapport aux deux variables de temps et d'espace  $t$  et  $r$ .

On commence par définir les deux pas de discrétisation que l'on suppose constants.

$$\begin{cases} h = \Delta r & \text{pas d'espace} & r_j = j * h & , & j \in N \\ k = \Delta t & \text{pas de temps} & t_i = i * k & , & i \in N \end{cases} \quad (3.28)$$

On procède par pas de temps croissants. Le schéma utilisé est dit à deux niveaux, car on détermine les  $p_j^{i+1}$  à l'aide seulement des  $p_j^i$ .

1. Pour la dérivée par rapport au temps, comme on ne manipule que deux niveaux de temps, on choisit la différence finie décentrée. Le développement de Taylor à l'ordre

1 au voisinage de  $t$  nous donne :

$$p(r, t + k) = p(r, t) + k \frac{\partial p}{\partial t}(r, t) + O(k^2) \quad (3.29)$$

Une approximation de la dérivée première par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{p_j^{i+1} - p_j^i}{k} = \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_j^i + O(k) \quad (3.30)$$

2. Pour la dérivée d'espace, deux dérivées sont à discrétiser.

L'approximation de la dérivée première par rapport à  $r$  s'écrit de façon similaire à (3.30) :

$$\frac{p_{j+1}^i - p_j^i}{h} = \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_j^i + O(h) \quad (3.31)$$

La seconde est une dérivée partielle du deuxième ordre. Une approximation de cette dernière s'obtient par les développements de Taylor au deuxième ordre de  $p(r + h, t)$  et  $p(r - h, t)$ .

$$\begin{cases} p(r + h, t) = p(r, t) + h \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}(r, t) + O(h^3) \\ p(r - h, t) = p(r, t) - h \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}(r, t) + O(h^3) \end{cases} \quad (3.32)$$

L'élimination des  $\frac{\partial p}{\partial r}(r, t)$  par la somme de ces deux équations donne :

$$p(r + h, t) - 2p(r, t) + p(r - h, t) = \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}(r, t) + O(h^3) \quad (3.33)$$

qui s'écrit sous forme discrétisée :

$$\frac{p_{j+1}^i - 2p_j^i + p_{j-1}^i}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right)_j^i + O(h^2) \quad (3.34)$$

L'équation discrétisée de (3.27) peut se faire suivant trois schémas déduits des équations (3.30), (3.31) et (3.34).

1. schéma **explicite** :

$$p_j^{i+1} = p_j^i + C_j^i \frac{k}{h^2} [p_{j+1}^i (1 + \frac{1}{j}) - p_j^i (2 + \frac{1}{j}) + p_{j-1}^i] \quad (3.35)$$

2. schéma **implicite** :

$$p_j^{i+1} = p_j^i + C_j^{i+1} \frac{k}{h^2} [p_{j+1}^{i+1} (1 + \frac{1}{j}) - p_j^{i+1} (2 + \frac{1}{j}) + p_{j-1}^{i+1}] \quad (3.36)$$

### 3. schéma de Crank-Nicholson :

Ce schéma est la demi-somme des deux schémas précédents et s'écrit donc :

$$p_j^{i+1} = p_j^i + \frac{k}{2h^2} \{ C_j^{i+1} [p_{j+1}^{i+1} (1 + \frac{1}{j}) - p_j^{i+1} (2 + \frac{1}{j}) + p_{j-1}^{i+1}] + C_j^i [p_{j+1}^i (1 + \frac{1}{j}) - p_j^i (2 + \frac{1}{j}) + p_{j-1}^i] \} \quad (3.37)$$

Pour la résolution, on choisit d'utiliser le schéma de Crank-Nicholson dans lequel on ne va considérer que la valeur au pas de temps  $i$  connu de  $C_j^i$ . On peut donc écrire l'équation (3.37) en exprimant les termes de pression inconnus de l'instant  $i + 1$  en fonction des termes connus de l'instant  $i$  précédent :

$$-\alpha_j^i p_{j-1}^{i+1} + (1 + \beta_j^i) p_j^{i+1} - \gamma_{j+1}^{i+1} p_{j+1}^{i+1} = \alpha_j^i p_{j-1}^i + (1 - \beta_j^i) p_j^i + \gamma_{j+1}^{i+1} p_{j+1}^i \quad (3.38)$$

avec :

$$a = \frac{k}{2h^2} ; \alpha_j^i = a C_j^i ; \beta_j^i = a C_j^i (2 + \frac{1}{j}) ; \gamma_j^i = a C_j^i (1 + \frac{1}{j}) \quad (3.39)$$

L'équation (3.38) peut alors s'écrire formellement, à chaque instant  $i + 1$ , sous la forme du système  $[A] \underline{P}^{i+1} = \underline{B}^i$ .

Dans le cas précis du problème de la déplétion de la section (2.5), on a discrétisé le domaine correspondant à l'intervalle  $[R_w, R_r]$  en  $n + 1$  points d'abscisse  $\{r_j = j * h, j = 0, ..n\}$  tels que  $r_o = R_w$  et  $r_n = R_r$ .

Les conditions limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} r_o = R_w ; p_o^o = p_r & \text{et } p_o^i = p_w \text{ pour } i \neq 0 \\ r_n = R_r ; \frac{\partial p}{\partial r} = 0 & \text{condition d'imperméabilité} \end{cases} \quad (3.40)$$

Ces conditions aux limites en  $r_o = R_w$  et  $r_n = R_r$  sont prises en compte en modifiant la matrice  $[A]$  ou en imposant certaines valeurs au vecteur  $\underline{B}^i$ . Concrètement la condition en  $r_o = R_w$  impose à chaque instant la valeur de la pression  $p_o^i$ , tandis que la condition d'imperméabilité impose à chaque instant les termes de la  $n + 1$ <sup>ème</sup> équation du système  $[A] \underline{P}^{i+1} = \underline{B}^i$ . En effet, d'après l'équation (3.38) la matrice  $[A]$  apparaît comme une matrice bande tridiagonale. Cette équation définit les  $n$  premières lignes de  $[A]$  tandis que la ligne  $n + 1$  ainsi que le dernier terme de  $\underline{B}^i$  sont imposés par la condition d'imperméabilité qui se traduit, à chaque instant  $i + 1$ , par l'équation :

$$p_{n+1}^{i+1} - p_n^{i+1} = 0 \quad (3.41)$$

Le système ainsi posé se résout, à chaque incrément de temps, par l'inversion de la matrice  $[A]$ .

Quatrième partie

**APPROCHE MICROMÉCANIQUE  
DES PHÉNOMÈNES  
IRRÉVERSIBLES**



# Chapitre 1

## Le couplage élasticité-plasticité

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>113</b>
<b>1.2</b>	<b>Le comportement poroplastique fini à l'échelle macroscopique</b>	<b>113</b>
1.2.1	Décomposition de la transformation - Équations d'état	113
1.2.2	Règles d'écoulement en poroplasticité finie.	115
<b>1.3</b>	<b>Modélisation du couplage élasticité-plasticité</b>	<b>117</b>
1.3.1	Mise en évidence du couplage par l'approche microscopique.	117
1.3.2	Paramètre macroscopique du couplage	121
<b>1.4</b>	<b>Caractérisation numérique du couplage.</b>	<b>123</b>
1.4.1	Position du problème	123
1.4.2	Formulation variationnelle de l'équation d'équilibre.	125
1.4.3	Discretisation par éléments finis.	128
1.4.4	Mise en œuvre numérique	131
<b>1.5</b>	<b>Équation d'état macroscopique en vitesse.</b>	<b>135</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>137</b>

---





## 1.1 Introduction.

Dans la partie précédente consacrée au comportement réversible d'un matériau poreux, on a montré la façon dont l'approche micromécanique permet de relier les observations expérimentales macroscopiques à des phénomènes se passant à l'échelle de la microstructure.

Si on se place maintenant dans le cadre des transformations irréversibles, les modélisations généralement rencontrées supposent un découplage complet entre les comportements élastique et plastique du matériau. Que l'on considère le cas des transformations infinitésimales ou le cas des grandes transformations, ceci se traduit par l'indépendance des propriétés élastiques vis à vis du comportement plastique du matériau. Si cette hypothèse semble acceptable dans le cas des petites déformations, elle est en revanche très discutable dans le cas d'une transformation finie. En effet, les grandes déformations macroscopiques sont associées à une évolution irréversible de la microstructure qui est donc a priori susceptible de modifier les propriétés élastiques macroscopiques du milieu poreux. Nous parlerons alors de couplage élasticité-plasticité.

Dans le cadre de l'approche macroscopique, la modélisation d'un tel couplage est nécessairement de nature phénoménologique et postule la forme de la dépendance des propriétés poroélastiques en fonction de la partie plastique de la transformation. Au contraire, si l'évolution de paramètres morphologiques pertinents peut être reliée à la transformation plastique macroscopique, on peut espérer que l'approche microscopique soit en mesure de déterminer la variation correspondante des propriétés élastiques.

Ce chapitre commence par la formulation du comportement poroélastoplastique en grandes déformations. On présente ensuite un modèle simple pour le couplage élasticité-plasticité basé sur l'approche micromécanique. Après avoir confronté ce modèle avec des résultats numériques, on montre enfin comment la prise en compte du couplage modifie les équations d'état macroscopiques écrites en vitesse.

## 1.2 Le comportement poroplastique fini à l'échelle macroscopique

### 1.2.1 Décomposition de la transformation - Équations d'état

On se place, dans cette section, à l'échelle macroscopique pour laquelle le v.e.r. apparaît comme la superposition d'une particule de fluide et d'une particule de squelette indiscernables géométriquement. On rappelle que le squelette désigne alors la perception macro-

scopique de la phase solide. On note  $\Omega_o$  la configuration initiale du v.e.r., soumis dans l'état initial à une contrainte macroscopique et une pression de fluide nulles. La configuration actuelle pour laquelle le chargement est défini par la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et la pression de pore  $p$  est notée  $\Omega_t$ . L'évolution du v.e.r. entre  $\Omega_o$  et  $\Omega_t$  est caractérisée :

1. par le tenseur  $\underline{\underline{F}}$  qui représente le gradient de la transformation du squelette à l'échelle macroscopique
2. par la variation de porosité lagrangienne  $\Phi_t - \Phi_o$

On généralise au cas du milieu poreux le concept de configuration relâchée introduit dans la section 2.2. Notée à nouveau  $\Omega_R$ , elle est obtenue en supprimant le chargement défini par le couple  $(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$  agissant sur  $\Omega_t$ , le processus de décharge étant supposé réversible. La transformation du v.e.r. entre  $\Omega_R$  et  $\Omega_t$  correspond donc à la séquence élastique. On note  $\Phi^e$  la variation de volume de l'espace poreux au cours de cette séquence élastique, rapportée au volume total  $\Omega_R$  du v.e.r. dans la configuration relâchée :

$$\Phi^e = \frac{|\Omega_t^f| - |\Omega_R^f|}{|\Omega_R|} \quad (1.1)$$

Il s'agit donc de la variation de la porosité lagrangienne définie par rapport à la configuration relâchée.

On note  $\underline{\underline{F}}^e$  la transformation géométrique homogène d'une particule de squelette entre la configuration  $\Omega_R$  et la configuration  $\Omega_t$ . De même  $\underline{\underline{F}}^p$  correspond à la transformation géométrique homogène de la même particule de squelette entre  $\Omega_o$  et  $\Omega_R$  de façon à pouvoir écrire la décomposition de  $\underline{\underline{F}}$  sous la forme :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \cdot \underline{\underline{F}}^p \quad (1.2)$$

(1.2) généralise au poreux la relation (2.7) obtenue dans le cas monophasique.

On notera que les majuscules utilisées ici pour la décomposition du gradient de la transformation font référence au fait que l'on se trouve à l'échelle macroscopique contrairement à (2.7) qui correspondrait ici au comportement du solide constitutif.

A ce stade, on choisit d'orienter la configuration relâchée de telle manière que  $\underline{\underline{F}}^e$  est un tenseur de déformation pure. Ce dernier est donc symétrique. Ceci signifie que les composantes de rotation sont entièrement contenues dans la partie plastique de la transformation géométrique. On pourra ainsi écrire le gradient de la transformation élastique sous la forme :

$$\underline{\underline{F}}^e = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{E}} \quad (1.3)$$

On suppose, de plus, que les transformations réversibles sont infinitésimales. Ceci implique que la variation réversible de volume poreux est infinitésimale, i.e.  $|\Phi^e| \ll 1$ . Cette hypothèse de transformation infinitésimale, qui se traduit également par la relation  $|\underline{\underline{E}}| \ll 1$ ,

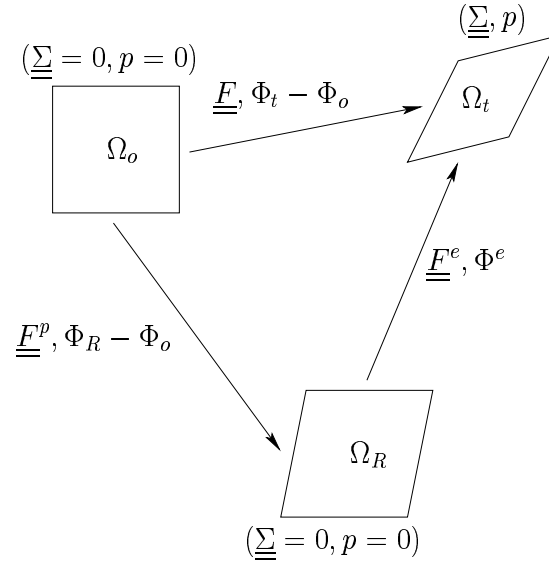


FIG. 1.1: *Décomposition de la transformation d'un milieu poreux*

conduit à interpréter  $\underline{\underline{E}}$  comme le tenseur des déformations linéarisées du squelette par rapport à la configuration relâchée.

En raison du fait que la transformation réversible entre les configurations  $\Omega_R$  et  $\Omega_t$  est infinitésimale les équations d'état de la théorie linéaire de Biot, retrouvée par l'approche micromécanique sous la forme (1.33) et (1.42) s'appliquent :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}}p \quad (1.4)$$

$$\Phi^e = \frac{p}{M} + \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \quad (1.5)$$

La différence principale avec les équations (1.33) et (1.42) est que les variables d'état  $\underline{\underline{E}}$  et  $\Phi^e$  ne sont plus définies par rapport à la configuration initiale mais par rapport à la configuration relâchée. Par ailleurs, les tenseurs  $\underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{C}}$  ainsi que le scalaire  $M$  caractérisent le comportement poroélastique linéaire sur la configuration relâchée  $\Omega_R \approx \Omega_t$  du v.e.r.. On admettra que ce dernier reste isotrope. Cette hypothèse implique que ces coefficients  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  et  $M$  sont indépendants de la configuration relâchée. En revanche, ils dépendent de la morphologie de celle-ci et sont conditionnés par les changements de géométrie de la microstructure, qui interviennent pendant la séquence plastique.

### 1.2.2 Règles d'écoulement en poroplasticité finie.

On étudie dans cette section la transformation géométrique entre la configuration initiale  $\Omega_o$  et la configuration relâchée  $\Omega_R$ . Cette transformation géométrique homogène, notée

$\underline{\underline{F}}^p$ , correspond à la séquence plastique. La porosité plastique peut être définie comme la différence entre les porosités lagrangiennes relâchée  $\Phi_R$  et initiale  $\Phi_o$  (voir figure 1.1). Elle sera notée  $\Phi^p$ . On aura donc :

$$\Phi^p = \frac{|\Omega_R^f|}{|\Omega_o|} - \Phi_o \quad (1.6)$$

qui, compte tenu de la formule de transport  $J^p |\Omega_o| = |\Omega_R|$ , peut encore s'écrire :

$$\Phi^p = J^p \phi_R - \Phi_o \quad \text{avec} \quad \phi_R = \frac{|\Omega_R^f|}{|\Omega_R|} \quad (1.7)$$

où  $J^p = \det \underline{\underline{F}}^p$  est le Jacobien de la séquence plastique  $\underline{\underline{F}}^p$ .

Les travaux de Bourgeois et al. [13] proposent de généraliser au milieu poreux la règle d'écoulement (2.17) écrite dans le cas d'un milieu monophasique. Cependant, pour le milieu biphasique que constitue le milieu poreux, il est nécessaire de rajouter une règle d'écoulement pour le taux de porosité plastique  $\dot{\Phi}^p$ . Si on considère un potentiel plastique  $G(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$ , les deux règles d'écoulement font intervenir le même multiplicateur plastique  $\dot{\mu}$  :

$$J^p \{ \dot{\underline{\underline{F}}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{p-1} \}_s = \dot{\mu} \frac{\partial G(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}, p} \quad \text{et} \quad \dot{\Phi}^p = \dot{\mu} \frac{\partial G(\underline{\underline{\Sigma}}')}{\partial p} \quad \text{avec} \quad \dot{\mu} \geq 0 \quad (1.8)$$

où  $\{.\}_s$  représente la partie symétrique du tenseur.

On suppose, de plus, que le solide constitutif du squelette est plastiquement incompressible. La conservation d'un volume élémentaire  $\Omega_o^s$  effectivement occupé par le solide à l'échelle microscopique entre la configuration initiale et la configuration relâchée s'écrit naturellement :

$$\Omega_R^s = \Omega_o^s \quad (1.9)$$

où  $\Omega_R^s$  (resp.  $\Omega_o^s$ ) représente un volume élémentaire occupé par la phase solide dans la configuration relâchée (resp. initiale). Compte tenu des fractions volumiques de chacune des configurations (1.9) s'écrit encore :

$$(1 - \phi_R) \Omega_R = (1 - \Phi_o) \Omega_o \Rightarrow (1 - \phi_R) J^p \Omega_o = (1 - \Phi_o) \Omega_o \quad (1.10)$$

La conservation de volume occupé par le solide à l'échelle macroscopique se traduit donc finalement par la relation :

$$J^p (1 - \phi_R) = 1 - \Phi_o \quad (1.11)$$

Ceci signifie que les variations de volume durant la phase plastique sont uniquement dues à la variation du volume des pores.

D'après (1.11) et (1.7), il apparaît que la deuxième règle d'écoulement de (1.8) peut s'écrire :

$$\dot{\Phi}^p = \dot{J}^p \quad (1.12)$$

En utilisant ce résultat dans (1.8), on trouve :

$$\underline{\underline{1}} : \frac{\partial G(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} = \frac{\partial G(\underline{\underline{\Sigma}}, p)}{\partial p} \quad (1.13)$$

ce qui conduit à écrire le potentiel plastique  $G(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$  en fonction du tenseur des contraintes effectives  $\underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}} + p\underline{\underline{1}}$  :

$$G(\underline{\underline{\Sigma}}, p) = G(\underline{\underline{\Sigma}} + p\underline{\underline{1}}) \quad (1.14)$$

Dans ces conditions, les deux règles d'écoulement de (1.8) se réduisent à :

$$\{\dot{\underline{\underline{F}}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{p-1}\}_s = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\underline{\underline{\Sigma}}')}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}'} \quad (1.15)$$

On connaît maintenant le comportement macroscopique du milieu poreux durant les deux séquences de la décomposition du gradient de transformation. Pour mettre en évidence le couplage élasticité-plasticité, il reste maintenant à montrer par une approche micromécanique comment la variation de volume des pores dans la séquence plastique modifie les coefficients  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  et  $M$  caractérisant le comportement poroélastique dans les équations d'état (1.4) et (1.5).

## 1.3 Modélisation du couplage élasticité-plasticité

Nous avons vu que les équations d'état de la poroélasticité (1.4) et (1.5) ne sont pas définies sur la configuration initiale mais sur la configuration relâchée du v.e.r. de milieu poreux. Ceci implique que les coefficients définis sur la configuration relâchée actuelle dépendent des changements de géométrie que celle-ci a subi durant la séquence plastique de la transformation.

Le but de cette section est alors de mettre en évidence comment les propriétés macroscopiques poroélastiques du matériau dépendent de l'histoire de celui-ci par le biais de sa microstructure. On s'inspire ici de Dormieux et Maghous([34],[32]).

### 1.3.1 Mise en évidence du couplage par l'approche microscopique.

La démarche est identique à celle développée en détail dans la section 1.3. On considère à nouveau que le v.e.r. du milieu poreux est constitué d'une partie solide d'élasticité  $\underline{\underline{c}}^s$

et d'un espace poreux saturé par un unique fluide. On suppose encore que la frontière de ce v.e.r. appartient à la phase solide. La différence fondamentale est que la détermination des équations d'état se fait ici par rapport à la configuration relâchée et non comme en 1.3.1 par rapport à la configuration initiale. La précontrainte, contrairement à (1.29), est non nulle dans la phase solide où elle est égale à la contrainte résiduelle induite par la déformation plastique. Cette précontrainte est notée  $\underline{\underline{\sigma}}_R$ . En notant  $\Omega_R^s$  et  $\Omega_R^f$ , les domaines occupés par la phase solide et la phase fluide dans la configuration relâchée, les équations (1.29) et (1.30) écrites sur la configuration relâchée deviennent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^p \quad \text{avec} \quad \mathbf{c} = \begin{cases} \mathbf{c}^s & \text{dans } \Omega_R^s \\ 0 & \text{dans } \Omega_R^f \end{cases} \quad \underline{\underline{\sigma}}^p = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_R & \text{dans } \Omega_R^s \\ -p\underline{\underline{1}} & \text{dans } \Omega_R^f \end{cases} \quad (1.16)$$

La différence réside dans la non nullité de  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  dans  $\Omega_R^s$ .

Pour simplifier l'écriture, on a noté  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  le tenseur des déformations linéarisées à l'échelle de la microstructure, pris sur la configuration relâchée.

On note que le prolongement par continuité de  $\underline{\underline{\sigma}}_R$  par 0 dans  $\Omega_R^f$  est un champ d'auto-contrainte sur  $\Omega_R$  qui satisfait donc :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}_R = \underline{\underline{0}} \quad \text{et} \quad \langle \underline{\underline{\sigma}}_R \rangle_{\Omega_R} = \underline{\underline{0}} \quad (1.17)$$

A côté de la pression de pore  $p$ , le deuxième paramètre de chargement est la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  de (1.3). C'est donc le tenseur des déformations macroscopiques linéarisées défini sur la configuration relâchée et correspondant à la séquence réversible  $\underline{\underline{F}}^e$  de la transformation. On pose donc sur la frontière de la configuration relâchée une condition de déformation homogène :

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} \quad (1.18)$$

On peut maintenant retrouver les équations d'état de la poroélasticité en fonction des propriétés de la microstructure dans la configuration relâchée, cette dernière étant prise ici comme configuration de référence.

On introduit à nouveau le tenseur de localisation  $\mathbf{A}$  des déformations au point  $\underline{\underline{x}}$  de  $\Omega_R$  tel que  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{A} : \underline{\underline{E}}$ , pour le chargement défini par (1.18) et  $p = 0$ . D'après (1.18), la relation (1.10) est toujours valable sur la configuration relâchée ce qui conduit à nouveau au fait que le tenseur de localisation vérifie :

$$\langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R} = \mathbf{I} \quad (1.19)$$

Si on définit par  $\underline{\underline{\Sigma}}^p$  le tenseur de précontrainte macroscopique, le tenseur des contraintes macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega_R} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^p \quad (1.20)$$

où, d'après (1.16), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{hom} &= \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R} \\
&= (1 - \phi_R) \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s} + \phi_R \langle \mathbf{c} : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^f} \\
&= (1 - \phi_R) \mathbf{c}^s : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

et

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Sigma}}^p &= \langle \underline{\underline{\sigma}}^p : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R} \\
&= (1 - \phi_R) \langle \underline{\underline{\sigma}}^p : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s} + \phi_R \langle \underline{\underline{\sigma}}^p : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^f} \\
&= (1 - \phi_R) \langle \underline{\underline{\sigma}}_R : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s} - \phi_R p \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^f}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Compte tenu du fait que  $\underline{\underline{\sigma}}_R$  est un champ d'autocontrainte nul en dehors de  $\Omega_R^s$ , le lemme de Hill implique que :

$$(1 - \phi_R) \langle \underline{\underline{\sigma}}_R : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_R : \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R} = \underbrace{\langle \underline{\underline{\sigma}}_R \rangle_{\Omega_R}}_{=0} : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R} = 0 \tag{1.23}$$

Si, de plus, on remarque que la combinaison de (1.21) et (1.19) nous donne :

$$\mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{C}^{hom} = \mathbf{I} - \phi_R \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^f} \tag{1.24}$$

le tenseur de précontrainte macroscopique s'écrit finalement :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^p = -\phi_R p \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^f} = -p \underline{\underline{\mathbf{1}}} : [\mathbf{I} - \mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{C}^{hom}] \tag{1.25}$$

En confrontant (1.4) avec l'équation (1.20) combinée avec (1.21) et (1.25), on retrouve le tenseur de Biot  $\underline{\underline{B}}$  sous la même forme qu'en (1.36) :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} : [\mathbf{I} - \mathbf{c}^{s-1} : \mathbf{C}^{hom}] \tag{1.26}$$

à la différence près que dans le cas présent  $\mathbf{C}^{hom}$  est une fonction de la configuration relâchée actuelle.

La seconde équation d'état (1.5) peut également être retrouvée par l'approche micro-mécanique. Comme dans la section 1.3.1, celle-ci doit faire apparaître le module de Biot sous une forme équivalente à (1.41) à la différence près que ce dernier est maintenant défini en fonction de la configuration relâchée.



Si on considère tout d'abord l'équation (1.39) prise entre la configuration relâchée et la configuration actuelle on obtient naturellement :

$$\Phi^e = \phi_R \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_R^f} \quad (1.27)$$

On note  $\mathcal{P}$  le problème aux limites à résoudre, dont les paramètres de chargement sont  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^p$ . Le caractère linéaire de ce problème nous permet de procéder à nouveau comme dans la section 1.3.1, c'est à dire en considérant  $\mathcal{P}$  comme la superposition de deux problèmes élémentaires  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{P}''$ .  $\mathcal{P}'$  est le problème aux limites pour lequel le chargement est  $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\sigma}}^p = 0)$  tandis que  $\mathcal{P}''$  correspond au chargement  $(\underline{\underline{E}} = 0, \underline{\underline{\sigma}}^p)$ .

Si  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  est le tenseur de déformations linéarisées microscopique correspondant au problème  $\mathcal{P}'$ , il vient directement d'après la définition du tenseur de localisation et de l'expression de  $\underline{\underline{B}}$  dans (1.26) :

$$\Phi^{e'} = \phi_R \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_{\Omega_R^f} = \phi_R \underline{\underline{1}} : \langle \mathbf{A} : \underline{\underline{E}} \rangle_{\Omega_R^f} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} \quad (1.28)$$

On considère maintenant  $\underline{\underline{\varepsilon}}''$  et  $\underline{\underline{\sigma}}''$  les tenseurs de déformation et de contrainte microscopiques associés au problème  $\mathcal{P}''$ . Dans le solide, on a la relation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}'' = \mathbf{c}^{s-1} : (\underline{\underline{\sigma}}'' - \underline{\underline{\sigma}}^p) \quad (1.29)$$

La variation de porosité lagrangienne  $\Phi^{e''}$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi^{e''} &= \phi_R \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega_R^f} = -(1 - \phi_R) \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega_R^s} \\ &= -(1 - \phi_R) \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : \langle \underline{\underline{\sigma}}'' - \underline{\underline{\sigma}}^p \rangle_{\Omega_R^s} \\ &= -(1 - \phi_R) \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : \langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega_R^s} \end{aligned} \quad (1.30)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_{\Omega_R} = 0$  et que  $\underline{\underline{\sigma}}_R$  est un champ d'autocontrainte.

Puisque  $\underline{\underline{\Sigma}}^p = \langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega_R}$ , on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^p = (1 - \phi_R) \langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega_R^s} - p \phi_R \underline{\underline{1}} \quad (1.31)$$

D'après (1.25) et (1.26), où il apparaît que  $\underline{\underline{\Sigma}}^p = -p \underline{\underline{B}}$ , on déduit l'égalité :

$$(1 - \phi_R) \langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_{\Omega_R^s} = \underline{\underline{\Sigma}}^p + p \phi_R \underline{\underline{1}} = -p(\underline{\underline{B}} - \phi_R \underline{\underline{1}}) \quad (1.32)$$

qui conduit à l'expression finale de la porosité lagrangienne dans le problème  $\mathcal{P}''$  :

$$\Phi^{e''} = p \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : (\underline{\underline{B}} - \phi_R \underline{\underline{1}}) \quad (1.33)$$

(1.28) et (1.33) conduisent finalement à l'expression de  $\Phi^e$  :

$$\Phi^e = \Phi^{e'} + \Phi^{e''} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + p \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : (\underline{\underline{B}} - \phi_R \underline{\underline{1}}) \quad (1.34)$$

qui, comparée à (1.5) donne pour  $M$  la même expression qu'en (3.39) :

$$\frac{1}{M} = \underline{\underline{1}} : \mathbf{c}^{s-1} : (\underline{\underline{B}} - \phi_R \underline{\underline{1}}) \quad (1.35)$$

Comme précédemment, la connaissance du tenseur des modules d'élasticité  $\mathbf{C}^{hom}$  homogénéisé dans le cas sec nous permet d'évaluer  $\underline{\underline{B}}$  et  $M$  qui prennent en compte les effets de la pression de pore.

De plus, l'équation (1.21) montre que la dépendance de  $\mathbf{C}^{hom}$  vis à vis du couplage élasticité-plasticité est directement reliée aux quantités  $1 - \phi_R$  et  $\langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s}$  qui sont elle-mêmes affectées par les variations de la microstructure durant la séquence plastique de la transformation.

### 1.3.2 Paramètre macroscopique du couplage

Grâce à (1.26) et (1.35), nous venons de démontrer que l'étude du couplage élasticité-plasticité peut se limiter aux effets de la plasticité sur le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé.

Une approche quantitative requiert de pouvoir relier l'évolution de la microstructure à un ou plusieurs paramètres macroscopiques facilement identifiables.

Un première approximation consiste à utiliser pour  $\mathbf{C}^{hom}$  l'estimation de Voigt, qui correspond à la moyenne directe (loi des mélanges directe) du tenseurs d'élasticité des matériaux contenu dans le v.e.r.. Si on note  $\mathbf{C}^V$  le tenseur des modules d'élasticité correspondant, on a donc  $\mathbf{C}^V = \langle \mathbf{c} \rangle_{\Omega_R}$ , qui suppose implicitement<sup>1</sup> que  $\langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s} = \mathbf{I}$  et qui conduit à l'égalité :

$$\mathbf{C}^V = \frac{1 - \phi_R}{1 - \phi_0} \mathbf{C}^o \quad (1.36)$$

où  $\mathbf{C}^o$  représente le tenseur d'élasticité macroscopique dans la configuration initiale.

Une méthode plus poussée, consiste à procéder comme pour le cas des estimations utilisées pour les fissures dans la partie III, c'est à dire à évaluer  $\langle \mathbf{A} \rangle_{\Omega_R^s}$  par les méthodes d'estimation. On considère à nouveau les méthodes d'estimation de type Mori-Tanaka où les pores sont des inclusions plongées dans une matrice ayant les propriétés élastiques du solide constitutif. On suppose de plus que les pores sont des inclusions de forme sphérique,

---

1. d'après (1.21)

ce qui, en termes d'estimations, va nous conduire à un tenseur des modules d'élasticité correspondant à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman. Dans ces conditions, l'isotropie de la matrice solide garantit que le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé est également isotrope. Les modules de compression  $K^{HS}$  et de cisaillement  $\mu^{HS}$  homogènes ( $HS$  faisant référence à Hashin-Shtrikman) sont de la forme :

$$K^{HS} = \frac{4(1 - \phi_R)k^s \mu^s}{3\phi_R k^s + 4\mu^s} \quad \text{et} \quad \mu^{HS} = \frac{\mu^s(1 - \phi_R)(9k^s + 8\mu^s)}{3k^s(3 + 2\phi_R) + 4\mu^s(2 + 3\phi_R)} \quad (1.37)$$

où  $k^s$  et  $\mu^s$  sont les modules de compression et de cisaillement de la matrice solide.

Il apparaît dans les formules (1.36) et (1.37) que l'évolution des propriétés élastiques en fonction de la configuration relâchée est entièrement contrôlée par la valeur de la porosité  $\phi_R$ . Ceci est bien sûr une conséquence directe des estimations choisies qui, parmi tous les paramètres morphologiques, ne sont sensibles qu'à la porosité.

Or, d'après la condition d'incompressibilité plastique (1.11), on est capable de relier la porosité  $\phi_R$  au jacobien plastique. En d'autre termes, ce résultat montre que les effets du couplage élasticité-plasticité, pris en compte dans le cadre de ce modèle, sont directement reliés au jacobien plastique de la déformation, i.e. :

$$\mathbf{C}^{hom} = \mathbf{C}^{hom}(J^p) \quad (1.38)$$

En utilisant (1.11) les estimations de  $\mathbf{C}^V$  et de  $\mathbf{C}^{HS}$  peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{C}^V = \frac{1}{J^p} \mathbf{C}^o \quad (1.39)$$

$$\mathbf{C}^{HS} = 2\mu^{HS}\mathbf{K} + 3K^{HS}\mathbf{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K^{HS} = \frac{4(1 - \Phi_o)k^s \mu^s}{3k^s(\Phi_o - 1 + J^p) + 4J^p\mu^s} \\ \mu^{HS} = \frac{\mu^s(1 - \Phi_o)(9k^s + 8\mu^s)}{5J^p(3k^s + 4\mu^s) + 6(\Phi_o - 1)(k^s + 2\mu^s)} \end{cases} \quad (1.40)$$

L'influence de la transformation plastique  $\underline{\underline{F}}^p$  sur les propriétés élastiques, i.e. le couplage élasto-plastique, est donc complètement définie par le jacobien plastique  $J^p$ . Un tel résultat est pratique puisque  $J^p$  est un paramètre macroscopique accessible macroscopiquement par les expériences de laboratoire. Il est en outre souvent utilisé pour caractériser l'écroutissage d'un matériau poreux. Notons qu'il est évidemment compatible avec l'hypothèse que l'anisotropie induite par la transformation plastique peut être négligée.

Pour finir, l'hypothèse que la transformation élastique est infinitésimale permet d'approximer le jacobien plastique par le jacobien de la transformation totale. En effet, sous cette hypothèse, on a  $J^e = \det \underline{\underline{F}}^e \simeq 1$  ce qui conduit naturellement à :

$$J = \det \underline{\underline{F}} = J^e J^p \simeq 1 \quad (1.41)$$

Ces résultats nous permettent donc de modéliser le couplage élasticité-plasticité en faisant dépendre  $\mathbf{C}$  du jacobien de la transformation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(J) \quad (1.42)$$

## 1.4 Caractérisation numérique du couplage.

On se propose de tester le modèle analytique (1.42) présenté à la section précédente, au moyen de simulations numériques. L'idée consiste à résoudre un problème aux limites d'élastoplasticité finie destiné à modéliser de façon simplifiée ce que devrait être l'évolution du v.e.r. d'un milieu poreux. La simulation numérique est destinée à mettre en évidence le comportement d'un matériau sujet au couplage élasticité-plasticité dans le cadre des grandes déformations.

Après avoir posé le problème sur un v.e.r. très simplifié, on décrit les différentes étapes nécessaires au calcul par éléments finis. On termine par une comparaison des résultats obtenus numériquement avec les résultats analytiques donnés par les deux modèles présentés en (1.39) et (1.40).

### 1.4.1 Position du problème

#### Description du v.e.r.

Le “v.e.r.<sup>2</sup>” étudié ici est initialement un cube d'arête unité comprenant une cavité cylindrique à base circulaire de rayon  $r_o$  et d'axe  $x_3$  (figure 1.2). L'origine du repère  $(O, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$  est prise au centre du cube. La cavité contient un fluide à une pression  $p$  donnée.

Le solide constitutif est un matériau dont le comportement est décrit dans la partie II. Plus précisément, ce dernier est un matériau élastique, parfaitement plastique répondant aux hypothèses suivantes :

- La partie élastique de la transformation est infinitésimale. On considère donc comme nous l'avons mentionné dans la section (2.2) que les grandes transformations ne sont que de nature irréversible, i.e. plastiques.
- Le solide est homogène isotrope, de tenseur des modules d'élasticité  $\mathbf{c}^s$  constant, ce qui signifie que ses propriétés élastiques ne sont pas affectées par les déformations plastiques.

---

2. en réalité, ce système n'est pas conforme à la définition classique du v.e.r.. Il s'agit plus exactement du motif de base d'une structure périodique.

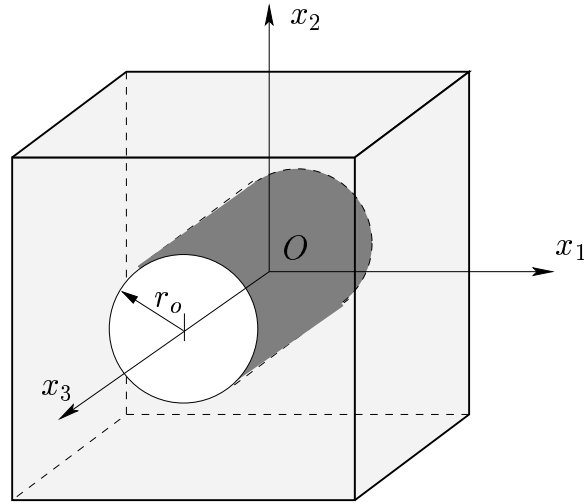


FIG. 1.2: *géométrie initiale du v.e.r.*

- Le comportement plastique du solide est décrit par le critère de von Mises portant sur le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\sigma}}^d} - k \quad (1.43)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^d$  désigne la partie déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et  $k$  représente la limite en cisssion simple. La règle d'écoulement est supposée associée, i.e. le potentiel plastique  $g(\underline{\underline{\sigma}})$  introduit dans (2.17) est égal au critère de plasticité  $f(\underline{\underline{\sigma}})$ .

Sous ces hypothèses, la loi de comportement en vitesse est de la forme de (2.19) et s'écrit donc :

$$\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} = \mathbf{c}^s : \left( \underline{\underline{d}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.44)$$

### Problème aux limites

La structure décrite ci-dessus est soumise à une compaction unidimensionnelle. Plus précisément, on considère le problème de la compression œdométrique qui suppose que les faces verticales sont maintenues en contact sans frottement avec des parois fixes, tandis que les faces horizontales sont en contact avec deux parois rigides lisses se rapprochant symétriquement par rapport au plan  $x_2 = 0$  suivant un déplacement ascendant ou descendant donné d'amplitude  $\xi$ .

Compte tenu des symétries de la structure et des conditions de chargement, ce problème se ramène à un problème en déformations planes, défini sur le quart de plan  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  (voir figure 1.3).

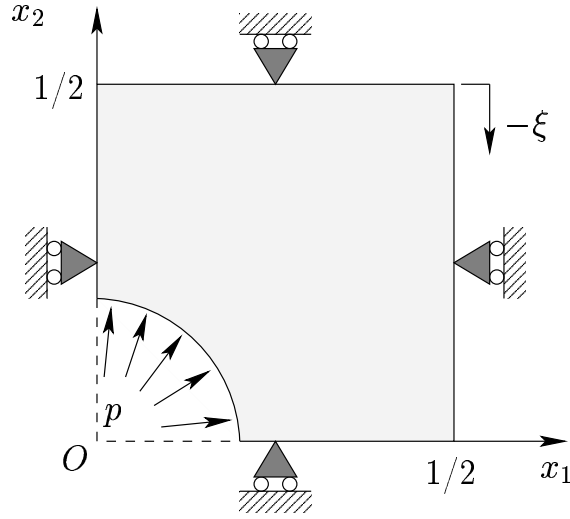


FIG. 1.3: *chargement et conditions aux limites sur le v.e.r.*

Dans la suite de cette étude, la réponse de la structure décrite ci-dessus, ainsi que l'évolution de la cavité sont des fonctions du niveau de compaction  $\epsilon_o = 2\xi$ . Le gradient de transformation macroscopique correspondant à ce champ de déplacement est donc égal :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} - \epsilon_o \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 \quad (1.45)$$

La pression  $p$  étant maintenue fixe, on accroît le niveau de compaction  $\epsilon_o$  de façon à ce que la déformation dans le v.e.r. comprenne localement une partie plastique. Pour les valeurs de  $\epsilon_o$  considérées, il conviendra de tenir compte des changements de géométrie de manière à observer la façon dont ces derniers vont modifier le comportement macroscopique du v.e.r..

On décrit ci-après la méthode numérique utilisée pour résoudre ce problème.

### 1.4.2 Formulation variationnelle de l'équation d'équilibre.

La méthode de résolution numérique suivie, s'appuie sur celle proposée par Bourgeois et al.[14]. Elle s'inspire de la formulation variationnelle en élastoplasticité finie établie notamment par Bathe [5]. La résolution d'un problème en transformation finie consiste à connaître l'évolution temporelle de l'ensemble des champs inconnus. De ce fait, une discrétisation temporelle est nécessaire afin de ramener le problème initial d'évolution en une suite de problèmes d'approximation de la valeur des champs successifs antérieurs.

### Discrétisation temporelle et notations.

Dans la suite, en raison des symétries du problème, on désignera par v.e.r. la partie située dans le quart de plan  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  (figure 1.3).

L'indice  $t$  sera utilisé pour faire référence à l'instant  $t$ .  $\Omega_t$  désigne le volume occupé par le v.e.r. dans la configuration à cet instant. De la même manière  ${}^tA$  correspond à la valeur prise par la grandeur  $A$  à l'instant  $t$ .

L'état mécanique du système considéré étant supposé connu à l'instant  $t$ , le problème consiste à déterminer son état à l'instant  $t' = t + \delta t$ . En d'autres termes, comment évoluent la géométrie et les champs de contrainte et de déplacement entre  $t$  et  $t'$  sous l'incrément de chargement  $\delta\xi$ . On notera qu'à l'instant  $t'$  le déplacement total est égal à  ${}^{t'}\xi = {}^t\xi + \delta\xi$ . Si on note  $x_i$  (resp.  $x'_i$ ) les coordonnées d'une particule dans la configuration à  $t$  (resp. à  $t'$ ), un champ scalaire  ${}^tA$  fonction des coordonnées  $x'_i$  peut être considéré comme une fonction de  $x_i$ . En effet la relation biunivoque entre les points de  $\Omega_t$  et  $\Omega_{t'}$  établie par la transformation géométrique, permet d'écrire :

$$\frac{\partial {}^tA}{\partial x_i} = \frac{\partial {}^tA}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \quad (1.46)$$

On définit alors le gradient de la transformation géométrique entre la configuration à  $t$  et la configuration à  $t'$  par le tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{G}} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} e_j \otimes e_i \quad (1.47)$$

On notera que ce tenseur  $\underline{\underline{G}}$  ne se confond pas en général avec le gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$ . En effet  $\underline{\underline{F}}$  correspond au gradient de la transformation qui a lieu entre l'instant initial et l'instant  $t$  actuel.

$$\underline{\underline{F}} : 0 \rightarrow t \quad ; \quad \underline{\underline{G}} : t \rightarrow t' \quad (1.48)$$

Dans la suite, la distinction en notations intrinsèques des gradients calculés sur les configurations à  $t$  et à  $t'$  se fera par la convention suivant laquelle un indice placé à gauche de l'opérateur de dérivation spatiale indique la configuration par rapport à laquelle est effectuée l'opération de dérivation.

Compte tenu de cette convention, le gradient de transformation  $\underline{\underline{G}}$  peut alors s'écrire en fonction du champ de déplacement  $\underline{u} = \underline{x}' - \underline{x}$  défini sur  $\Omega_t$  et correspondant aux déplacements des particules entre  $t$  et  $t'$  :

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{1}} + {}_t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \quad (1.49)$$

On notera que la relation (1.46) se généralise à un champ vectoriel pris sur la configuration à  $t'$  par :

$${}_t\underline{\underline{\nabla}} A = {}_{t'}\underline{\underline{\nabla}} A \cdot \underline{\underline{G}} \quad (1.50)$$

De plus, les taux de déformation et de rotation  ${}^t\underline{d}$  et  ${}^t\underline{\Omega}$  à l'instant  $t$  peuvent être estimés par :

$${}^t\underline{d} = \frac{1}{\delta t} \{ {}^t\underline{\nabla}u \}_s \quad \text{et} \quad {}^t\underline{\Omega} = \frac{1}{\delta t} \{ {}^t\underline{\nabla}u \}_a \quad (1.51)$$

où  $\{ {}^t\underline{\nabla}u \}_s$  et  $\{ {}^t\underline{\nabla}u \}_a$  représentent respectivement la partie symétrique et la partie anti-symétrique de  ${}^t\underline{\nabla}u$ .

Concernant la dérivation temporelle, on utilisera pour toute grandeur, l'approximation :

$${}^tA \approx {}^tA + {}^t\dot{A}\delta t \quad (1.52)$$

Pour la suite, il est nécessaire d'introduire les partitions suivantes de  $\partial\Omega$  :

- $S^\xi$  : surface sur laquelle est imposé le déplacement, initialement située en  $x_2 = 1/2$
- $S^h$  : surface horizontale située en  $x_2 = 0$
- $S^v$  : surfaces verticales situées en  $x_1 = 0$  ou  $1/2$
- $S^p$  : surface correspondant au bord de la cavité.

### Dualisation de l'équation d'équilibre.

On propose maintenant la formulation variationnelle du problème considéré ci-dessus en dualisant l'équation d'équilibre. Avec les notations introduites, en se plaçant dans le cas d'une évolution quasistatique où l'on néglige les forces de volume, celle-ci s'écrit :

$${}^t\text{div}{}^t\underline{\sigma} = \underline{0} \quad (1.53)$$

On multiplie cette équation par un champ de déplacement virtuel  $\hat{u}$ . Sur les surfaces où le déplacement est imposé, les composantes  $\hat{u}$  dans la direction du déplacement imposé sont nulles. On aura donc :

$$\hat{u}_2 = 0 \quad \text{sur} \quad S_v^u \cup S_v^h \quad (1.54)$$

$$\hat{u}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad S_v^v$$

Après intégration par partie l'équation d'équilibre dualisée va donc s'écrire :

$$\int_{\Omega_{\nu'}} {}^t\underline{\sigma} : {}^t\underline{\nabla}\hat{u} \, d\Omega_{\nu'} = -p \int_{S_{\nu'}^p} \hat{u} \cdot {}^t\underline{n} \, dS_{\nu'}^p \quad \forall \hat{u} \quad (1.55)$$

A ce stade, il convient de modifier (1.55) en commençant par le terme de gauche en faisant intervenir la règle de dérivation (1.52) combinée avec la loi de comportement (1.44). On va donc pouvoir écrire :

$${}^t\underline{\sigma} = {}^t\underline{\sigma} + \delta t \, {}^t\dot{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\sigma} + \delta t \left[ \mathbf{c}^s : \left( {}^t\underline{d} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right) - {}^t\underline{\sigma} \cdot {}^t\underline{\Omega} + {}^t\underline{\Omega} \cdot {}^t\underline{\sigma} \right] \quad (1.56)$$



où il faut noter que le terme  $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$  est calculé par rapport à  $\underline{\underline{\sigma}}$  pris sur la configuration à  $t'$ . Compte tenu de (1.51), l'égalité (1.56) peut encore s'écrire:

$${}^{t'}\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{c}^s : (\{ {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \}_s - \lambda \delta t \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot \{ {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \}_a + \{ {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \}_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} \quad (1.57)$$

Il faut bien remarquer que l'estimation (1.57) ne revient pas à approximer  ${}^{t'}\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  par  ${}^t\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ , puisque le terme  $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$  est toujours calculé par rapport à  ${}^t\underline{\underline{\sigma}}$ .

En vertu de (1.50), et grâce aux formules de transport, on a trivialement :

$$d\Omega_{t'} = \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \quad , \quad {}^{t'}\underline{n} dS_{t'}^p = \det \underline{\underline{G}} (\underline{\underline{G}}^{-1})^T \cdot {}^t\underline{n} dS_t^p \quad (1.58)$$

ce qui nous permet d'écrire la formulation variationnelle (1.55) sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left[ {}^t\underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{c}^s : \left( \{ {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \}_s - \lambda \delta t \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot \{ {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \}_a + \{ {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \}_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} \right] : {}^t\underline{\underline{\nabla}}\hat{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \\ = -p \int_{S_t^p} \hat{\underline{u}} \cdot (\underline{\underline{G}}^{-1})^T \cdot {}^t\underline{n} \det \underline{\underline{G}} dS_t^p \quad \forall \hat{\underline{u}} \quad (1.59) \end{aligned}$$

Cette formulation, qui ne fait plus référence qu'à la géométrie à l'instant  $t$ , réputée connue, peut maintenant faire l'objet d'une discrétisation.

### 1.4.3 Discrétisation par éléments finis.

Le problème mécanique considéré et formulé dans le cadre de l'élastoplasticité finie, consiste à déterminer le champ de déplacement  $\underline{u}$  solution du problème non linéaire défini par (1.59) et satisfaisant les conditions aux limites :

$$u_2 = -\delta\xi \text{ sur } S_t^\xi \quad , \quad u_2 = 0 \text{ sur } S_t^h \quad , \quad u_1 = 0 \text{ sur } S_t^v \quad (1.60)$$

On procède alors à la discrétisation par éléments finis de la géométrie  $\Omega_t$  du v.e.r., à l'instant  $t$ , en utilisant des quadrangles à neuf nœuds.

Considérons un élément  $e$  de volume  $\mathcal{V}_e$  de cette discrétisation.

On rappelle à ce stade que nous sommes en présence d'un problème en déformations planes, défini dans le quart de plan  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Les champs de déplacement réel et virtuel ne dépendent donc que des coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ . Pour un élément  $e$  on adopte alors pour ces deux champs une interpolation de la forme :

$$\underline{u}(x_1, x_2) \equiv \mathbb{N}_e(x_1, x_2) \cdot \underline{u}_e \quad (1.61)$$

où  $\mathbb{N}_e(x_1, x_2)$  est la matrice d'interpolation et  $\underline{u}_e$  est la matrice colonne des degrés de liberté des nœuds de l'élément considéré. Pour le cas des quadrangles à neuf nœuds,  $\mathbb{N}_e$

et  $\underline{u}_e$  sont respectivement de dimension (2,18) et (18,1).

A partir de cette interpolation, le but est d'écrire la discrétisation de la formulation variationnelle (1.59) :

$$\hat{\underline{u}}^T \cdot \mathbb{K} \cdot \underline{u} = \hat{\underline{u}}^T \cdot \underline{R} \quad (1.62)$$

sous la forme d'un système non linéaire :

$$\mathbb{K} \cdot \underline{u} = \underline{R}(\underline{u}, \dot{\lambda}) \quad (1.63)$$

où  $\mathbb{K}$  est la matrice de rigidité globale du v.e.r., et  $\underline{R}$  est le vecteur force.

La matrice de rigidité globale  $\mathbb{K}$ , ainsi que le vecteur force  $\underline{R}$ , vont respectivement se calculer à partir de la contribution de la matrice de rigidité et du vecteur force associé à chaque élément. Si on note  $\mathbb{K}_e$  une matrice élémentaire et  $\underline{R}_e$  le vecteur force, la forme discrétisée (1.62) va pouvoir s'écrire comme la somme sur le nombre  $n_e$  d'éléments :

$$\hat{\underline{u}}^T \cdot \mathbb{K} \cdot \underline{u} - \hat{\underline{u}}^T \cdot \underline{R} = \sum_{n_e} (\hat{\underline{u}}_e^T \cdot \mathbb{K}_e \cdot \underline{u}_e - \hat{\underline{u}}_e^T \cdot \underline{R}_e) \quad (1.64)$$

On propose donc maintenant de déterminer  $\mathbb{K}_e$  et  $\underline{R}_e(\underline{u}_e, \dot{\lambda})$ .

Notons tout d'abord que la formulation variationnelle (1.59) peut encore s'écrire :

$$\sum_{n_e} \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \underline{\underline{\sigma}} : {}_t \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \det \underline{\underline{G}} d\mathcal{V}_e = -p \sum_{n_e} \int_{\partial \mathcal{V}_e \cap S_i^p} \hat{\underline{u}} \cdot (\underline{\underline{G}}^{-1})^T \cdot {}^t \underline{n} \det \underline{\underline{G}} dS_i^p \quad \forall \hat{\underline{u}} \quad (1.65)$$

où  $\partial \mathcal{V}_e$  représente la frontière de l'élément  $e$  considéré.

On commence par étudier le terme de gauche de la formulation variationnelle (1.59).

Partant de la formule (1.49), un développement limité à l'ordre 1 de  $\underline{\underline{G}}^{-1}$  nous permet d'utiliser l'approximation au second ordre :

$$\underline{\underline{G}}^{-1} \det \underline{\underline{G}} \simeq (\underline{\underline{1}} - {}_t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u})(1 + \text{tr}({}_t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u})) \simeq \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}} \quad (1.66)$$

où  $\underline{\underline{\Gamma}}$  est le tenseur d'ordre deux tel que :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \text{tr}({}_t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}) \underline{\underline{1}} - {}_t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \quad (1.67)$$

On peut donc écrire (1.65) sous la forme :

$$\sum_{n_e} \int_{\mathcal{V}_e} {}^t \underline{\underline{\sigma}} : {}_t \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{G}}^{-1} \det \underline{\underline{G}} d\mathcal{V}_e = \sum_{n_e} \int_{\mathcal{V}_e} [\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}] \cdot {}^t \underline{\underline{\sigma}} : {}_t \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{u}} d\mathcal{V}_e \quad (1.68)$$

où l'on a utilisé la formule de calcul tensoriel  $\underline{a} : (\underline{b} \cdot \underline{c}) = (\underline{c} \cdot \underline{a}) : \underline{b}$ .

Cette manipulation pour revenir à une configuration connue est relativement classique. Par opposition à d'autres auteurs comme Manzari [57] par exemple, on a choisi de ne pas introduire de tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et de déformation lagrangienne virtuelle par rapport à la configuration de référence au temps  $t$ . La manipulation d'objets mathématiques sans signification physique est alors évitée. Les expressions sont moins compactes mais le rôle du champ de déplacement virtuel  $\underline{\hat{u}}$  défini sur  $\Omega_{t'}$  ainsi que celui du champ de déplacement réel  $\underline{u}$  défini sur  $\Omega_t$  apparaît plus clairement.

A partir de la formulation variationnelle sous la forme (1.68), on cherche maintenant à déterminer la matrice de rigidité élémentaire  $\mathbb{K}_e$  et le vecteur force élémentaire  $\underline{R}_e$ .

On commence tout d'abord par écrire la forme discrétisée du gradient du déplacement, et de ses parties symétrique et antisymétrique à partir de l'interpolation définie en (1.61). Chacun de ces gradients est calculé par dérivation du champ de déplacement. Notant par exemple  $\mathbb{L}$  la matrice symbolique de différentiation associée à l'opérateur gradient, on peut écrire :

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \mathbb{L} \cdot \underline{u} \quad (1.69)$$

En substituant (1.61), on exprime  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{u}$  sur chaque élément en fonction des déplacements nodaux :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{V}_e \quad ; \quad \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \mathbb{L} \cdot \mathbb{N}_e \cdot \underline{u}_e \quad (1.70)$$

La matrice  $\mathbb{N}_e$  étant de dimension (2,18), la différentiation de  $\cdot \mathbb{N}_e$  dans le plan  $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ , conduit à une matrice  $\mathbb{B}_e = \mathbb{L} \cdot \mathbb{N}_e$  de dimension (4,18). En procédant de même pour les parties symétrique et antisymétrique, on peut définir des matrices  $\mathbb{B}_{es}$  et  $\mathbb{B}_{ea}$  de manière à avoir :

$$\begin{aligned} \{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \} &\equiv \mathbb{B}_e \cdot \underline{u}_e \\ \{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \}_s &\equiv \mathbb{B}_{es} \cdot \underline{u}_e \quad (2, 2) \rightarrow (4, 18) \times (18, 1) = (4, 1) \\ \{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \}_a &\equiv \mathbb{B}_{ea} \cdot \underline{u}_e \end{aligned} \quad (1.71)$$

On définit maintenant les vecteurs  $\underline{S}_e$  et  $\underline{\mathcal{E}}_e^p$  de dimension (4,1), ainsi que la matrice  $\mathbb{C}_e$  associée au tenseur des modules d'élasticité du solide.

$$\begin{aligned} {}^t \underline{\underline{\sigma}} &\equiv {}^t \underline{S}_e (4, 1) \quad ; \quad \mathbf{c}^s \equiv \mathbb{C}_e (4, 4) \\ \delta t \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} &\equiv \underline{\mathcal{E}}_e^p (4, 1) \end{aligned} \quad (1.72)$$

On montre encore que l'on peut définir une matrice  $\mathbb{S}_e$  de dimension (4,4), qui permet de discrétiser le groupement suivant :

$$\{-{}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot \{t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\}_a + \{t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\}_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}}\} \equiv -\mathbb{S}_e \cdot \mathbb{B}_{ea} \cdot \underline{u}_e \quad (4,4) \times (4,18) \times (18,1) \quad (1.73)$$

On déduit donc de (1.71), (1.72) et (1.73) que  ${}^t\underline{\underline{\sigma}}$  peut être écrit sous la forme d'un vecteur  ${}^t\underline{S}_e$  de dimension (4,1) :

$${}^t\underline{\underline{\sigma}} \equiv {}^t\underline{S}_e = {}^t\underline{S}_e + \mathbb{C}_e \cdot \mathbb{B}_{es} \cdot \underline{u}_e - \mathbb{C}_e \cdot \underline{\underline{\mathcal{E}}}_e^p - \mathbb{S}_e \cdot \mathbb{B}_{ea} \cdot \underline{u}_e \quad (1.74)$$

Il nous reste à discrétiser le tenseur d'ordre deux issu de (1.66) :

$$\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}} \equiv \underline{\underline{\tilde{1}}} + \mathbb{H}_e \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\tilde{1}}} = (1, 1, 0, 0) \quad (1.75)$$

La discrétisation du terme de droite de la formulation variationnelle (1.65) est obtenue en négligeant les termes du premier et deuxième ordre en  $\underline{u}$ . On a donc :

$$-p \sum_{n_e} \int_{\partial \mathcal{V}_e \cap S_t^p} \hat{\underline{u}} \cdot (\underline{\underline{G}}^{-1})^T \cdot {}^t\underline{n} \det \underline{\underline{G}} dS_t^p \equiv -p \sum_{n_e} \int_{\partial \mathcal{V}_e \cap S_t^p} \hat{\underline{u}}_e^T \cdot \mathbb{N}_e^T \cdot {}^t\underline{n} dS_t^p \quad (1.76)$$

Compte tenu des expressions (1.72), (1.74) et (1.76) la formulation variationnelle (1.65) peut s'écrire comme un système d'équations non linéaires de la forme de (1.63), où la matrice  $\mathbb{K}$  et le vecteur  $\underline{R}$  se déduisent de (1.64) avec :

$$\mathbb{K}_e = \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot \mathbb{C}_e \cdot \mathbb{B}_{es} d\mathcal{V}_e \quad (1.77)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{R}_e(\underline{u}_e, \dot{\lambda}) &= - \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot {}^t\underline{S}_e d\mathcal{V}_e - \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot \mathbb{H}_e \cdot {}^t\underline{S}_e d\mathcal{V}_e \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot \mathbb{H}_e \cdot \mathbb{C}_e \cdot \mathbb{B}_{es} \cdot \underline{u}_e d\mathcal{V}_e \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot \mathbb{C}_e \cdot {}^t\underline{\underline{\mathcal{E}}}_e^p d\mathcal{V}_e + \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot \mathbb{H}_e \cdot \mathbb{C}_e \cdot {}^t\underline{\underline{\mathcal{E}}}_e^p d\mathcal{V}_e \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot {}^t\underline{\underline{\mathcal{S}}}_e \cdot \mathbb{B}_{ea} \cdot \underline{u}_e d\mathcal{V}_e + \int_{\mathcal{V}_e} \mathbb{B}_e^T \cdot \mathbb{H}_e \cdot {}^t\underline{\underline{\mathcal{S}}}_e \cdot \mathbb{B}_{ea} \cdot \underline{u}_e d\mathcal{V}_e \\ &\quad - p \int_{\partial \mathcal{V}_e \cap S_t^p} \mathbb{N}_e^T \cdot {}^t\underline{n} dS_t^p \end{aligned} \quad (1.78)$$

#### 1.4.4 Mise en œuvre numérique

Nous allons maintenant mettre en œuvre la méthode numérique décrite ci-dessus pour simuler localement le problème de la compaction oedométrique. Le rayon de la cavité circulaire est initialement égal à  $r_o = 0.3$ , ce qui correspond à une porosité initiale d'environ 28%. On choisit la limite en cission simple  $k$  très petite devant le module d'Young  $E$  afin

d'assurer que les contraintes de Cauchy restent petites devant  $E$ . Cette condition est nécessaire pour que la partie élastique de la transformation reste infinitésimale comme nous l'avons supposé pour établir la loi de comportement (1.44). On a donc choisi  $k = 10^{-3} \times E$  et  $\nu = 0.49$  de façon à ce que la compressibilité élastique du solide soit négligeable.

Le maillage utilisé pour la discrétisation géométrique initiale du v.e.r.  $\Omega_o$  à été réalisé à l'aide du logiciel MODULEF (figure 1.4). Les caractéristiques de celui ci sont les suivantes : 360 quadrilatères Q9, 1517 nœuds.

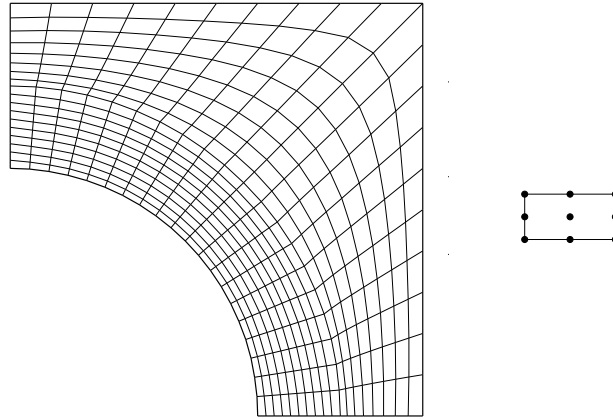


FIG. 1.4: *Maillage de la géométrie initiale du v.e.r.*

Partant de  $\epsilon_0 = 0$  avec un état initial naturel pour les contraintes, les calculs numériques sont effectués en augmentant de façon monotone la valeur de  $\xi$ . La pression dans la cavité est prise égale à zéro.

Le maillage de la géométrie à l'instant  $t$  est obtenu en réactualisant celui de l'instant précédent à l'aide de la solution en déplacement  $\underline{u}$ . Si cette procédure systématique présente un avantage évident, elle peut néanmoins introduire une difficulté inhérente aux grandes déformations que subit le v.e.r.. En effet, des grandes déformations sont susceptibles d'engendrer une distorsion de la forme de certains éléments constituant le maillage. Il est donc nécessaire de contrôler la qualité du maillage au fur et à mesure que  $\epsilon_0$  croît. La figure 1.5 visualise l'état des maillages au terme des calculs pour  $\epsilon_0 = 10\%$  et  $20\%$ . Comme on peut le constater, ceux-ci demeurent "acceptables".

On propose donc maintenant de comparer les résultats obtenus par la mise en œuvre numérique aux modèles analytiques décrits dans la section 1.3. La confrontation des modèles analytiques aux résultats numériques va se faire par le biais de l'évolution du module œdométrique au cours du processus de compaction.

A différents stades de la compaction, on détermine numériquement le module œdomé-

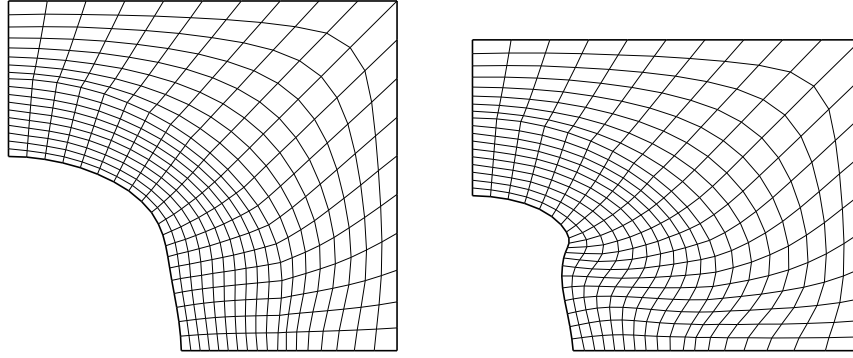


FIG. 1.5: Maillages après application des niveaux de compaction de 10% et 20%.

trique macroscopique défini par

$$E_{oed} = \frac{\delta \Sigma_v}{\delta \epsilon_o} \quad (1.79)$$

en effectuant une décharge infinitésimale réversible. On notera l'estimation numérique de ce module  $E_{oed}^{num}$ .

On rappelle que ce que nous cherchons à quantifier est l'influence des déformations plastiques de la géométrie des pores à l'échelle microscopique sur les propriétés élastiques macroscopiques d'un v.e.r. donné. On va donc comparer la variation de module, normalisée par sa valeur initiale  $E_{oed,o}$  aux estimations  $E_{oed}^{lmd}$  et  $E_{oed}^{HS}$  déduites de (1.39) et (1.40). La comparaison de l'évolution des modules œdométriques normalisés pour les deux cas analytiques et la simulation numérique sont présentés à la figure 1.6.

On note tout d'abord que les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats basés sur l'estimation de la borne supérieure de Hashin-Shtrikman.

Ces résultats sont d'autant plus remarquables que la taille initiale du pore n'est pas très petite devant la taille du v.e.r.. A ce sujet, et compte tenu des conditions de type périodique (et non des conditions aux limites uniformes de Hashin) imposées à la structure, la terminologie de cellule de base serait plus adéquate.

De plus, on pourrait être surpris par la qualité de la corrélation entre les calculs numériques bidimensionnels, obtenus par le modèle périodique, et le rapport  $E_{oed,3D}^{HS}/E_{oed,3D,o}^{HS}$  obtenu dans un cadre tridimensionnel pour une répartition spatiale isotrope des pores. Ceci vient du fait que le rapport  $E_{oed,2D}^{HS}/E_{oed,2D,o}^{HS}$  basé sur une distribution bidimensionnelle isotrope de pores cylindriques est très proche de son homologue tridimensionnel  $E_{oed,3D}^{HS}/E_{oed,3D,o}^{HS}$  (Dormieux et Maghous [34],[32]).

En revanche, le choix de la simulation de la compaction, qui correspond à un chargement anisotrope, constitue *a priori* un test sévère pour la pertinence de la borne supérieure de

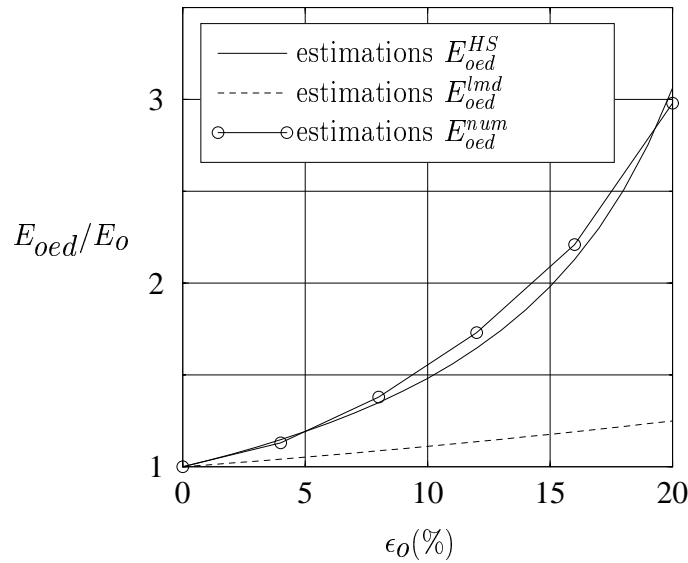


FIG. 1.6: *Estimations du module oedométrique en fonction de  $\epsilon_0$ .*

Hashin-Shtrikman (1.40). En effet, cette dernière renvoie à une morphologie de matrice et inclusions sphériques alors que le chargement considéré ici laisse à penser que la compaction va induire une ovalisation des pores. Cette intuition est d'ailleurs confirmée dans le cas de l'élasticité infinitésimale (Dormieux et Maghous [34],[32]). Une telle ovalisation tendrait alors à disqualifier progressivement la modélisation du couplage par (1.40). Les

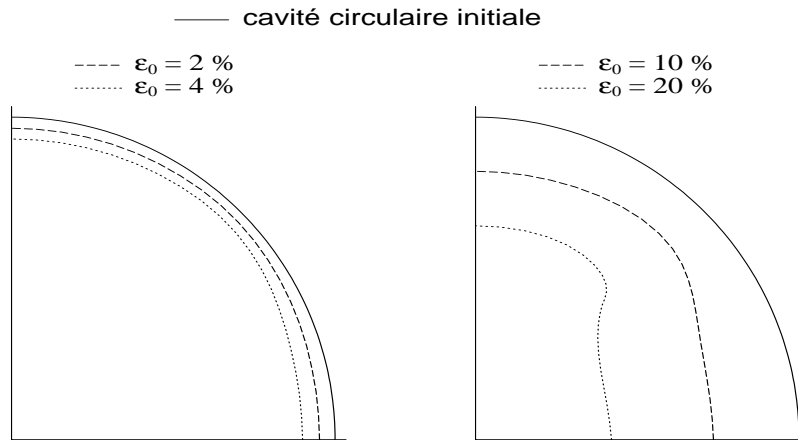
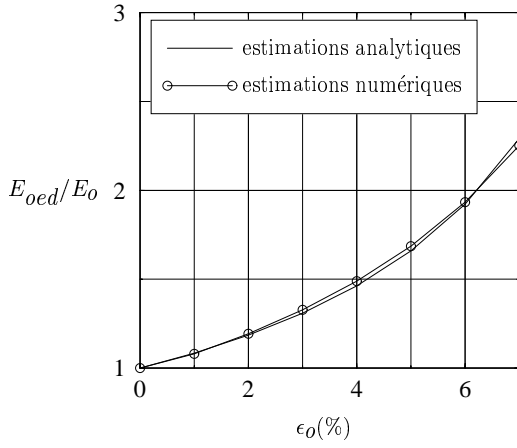
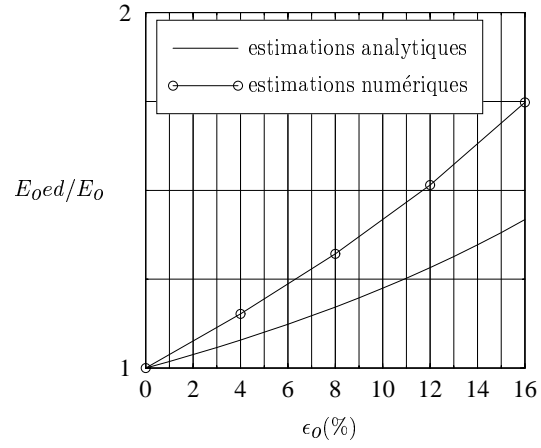


FIG. 1.7: *Evolution, résultant de calculs par E.F., de la forme de la cavité en fonction du niveau de compaction.*

résultats numériques relatifs à l'évolution de la géométrie des pores (figure 1.7) contredisent cette intuition. On observe que la largeur horizontale de la cavité décroît plus vite que la verticale. Signalons que cette tendance s'amorce dès l'apparition de la plasticité,

FIG. 1.8: *porosité initiale de 10%*FIG. 1.9: *porosité initiale de 50%*

c'est à dire à un stade où elle est encore infinitésimale. Ces résultats sont analogues à ceux que l'on obtiendrait en élasticité infinitésimale avec un coefficient de Poisson de l'ordre de 0.5.

Par ailleurs, on notera que la loi des mélanges directe sous-estime considérablement le couplage élasticité-plasticité.

En conclusion, les calculs numériques confirment la pertinence d'une modélisation du couplage élasticité-plasticité  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(J)$  basée sur la borne supérieure de Hashin-Shtrikman pour une porosité initiale de 28%. Les calculs numériques montrent également que ces résultats subsistent pour des valeurs de la porosité initiale inférieures à 28% (voir figure 1.8), mais se détériorent pour des valeurs plus élevées (voir figure 1.9), les effets de bords conditionnant alors la réponse de la structure considérée.

## 1.5 Équation d'état macroscopique en vitesse.

Dans le cadre des grandes transformations, lorsque le couplage élastoplastique est négligé, l'équation d'état macroscopique en vitesse est souvent écrite comme une généralisation de (2.19) aux milieux poreux. Celle-ci est obtenue en remplaçant la dérivée  $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}'$  du tenseur des contraintes effectives  $\underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{B}}p$  par sa dérivée de Jaumann :

$$\frac{D_J \underline{\underline{\Sigma}}'}{Dt} = \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}' + \underline{\underline{\Sigma}}' \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}' = \mathbf{C} : \left( \underline{\underline{D}} - \lambda \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \right) \quad (1.80)$$

où  $G(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$  désigne comme en (1.8) le potentiel plastique intervenant dans l'écriture de la règle d'écoulement plastique macroscopique.  $\underline{\underline{D}}$  et  $\underline{\underline{\Omega}}$  représentent respectivement le taux de déformation et de rotation macroscopiques.



On propose dans cette section de montrer comment la prise en compte du couplage élasticité-plasticité sous la forme  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(J)$  modifie l'équation d'état (1.80).

D'après Bourgeois et al. [13], on peut montrer que l'hypothèse d'élasticité faible et la décomposition du gradient de transformation  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \cdot \underline{\underline{F}}^p$  conduit à écrire le taux de déformation macroscopique de la façon suivante :

$$\underline{\underline{D}} = (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1})_s \approx \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{E}} + (\dot{\underline{\underline{F}}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{p-1})_s \quad (1.81)$$

Par ailleurs, la dérivation de la première équation de Biot (1.4) par rapport au temps nous donne :

$$\underline{\underline{\Sigma}}' = \dot{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{E}}} \quad (1.82)$$

En éliminant  $\dot{\underline{\underline{E}}}$  entre (1.81) et (1.82), et compte tenu de (1.4) et (1.8) on obtient alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}}' = \dot{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}) + \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{D}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{\underline{G}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \right) \quad (1.83)$$

L'isotropie du tenseur des modules d'élasticité macroscopique  $\underline{\underline{C}}$  nous permet de remplacer  $\underline{\underline{E}}$  par  $\underline{\underline{\Sigma}}$  dans le groupement  $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}$  :

$$\underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.84)$$

Si on remarque de plus que :

$$\dot{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{E}} = \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial J} \dot{J} : \underline{\underline{E}} \quad (1.85)$$

où l'on a classiquement  $\dot{J} = J \operatorname{tr} \underline{\underline{D}}$  il vient finalement :

$$\frac{D_J \underline{\underline{\Sigma}}'}{Dt} + \operatorname{tr} \underline{\underline{D}} \overline{\underline{\underline{C}}}(J) : \underline{\underline{\Sigma}}' = \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{D}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{\underline{G}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \right) \quad (1.86)$$

avec :

$$\overline{\underline{\underline{C}}}(J) = -J \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial J} : \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (1.87)$$

Cette dernière équation montre que le couplage élasticité-plasticité se traduit, dans l'équation d'état en vitesse, par l'introduction du terme complémentaire  $\operatorname{tr} \underline{\underline{D}} \overline{\underline{\underline{C}}}(J) : \underline{\underline{\Sigma}}'$ . Il est bon de remarquer que ce terme n'affecte en rien l'objectivité de l'équation d'état. Dans le cas de la loi des mélanges directe, on aura par exemple  $\overline{\underline{\underline{C}}}(J) = \mathbf{I}$ , tenseur identité du quatrième ordre.

## 1.6 Conclusion

Contrairement au cas des métaux, où le couplage entre les propriétés élastiques et la plasticité finie peut être négligé, les grandes variations de porosité qui surviennent dans un milieu poreux soumis à des grandes transformations, affectent significativement les paramètres poroélastiques. Ceci suggère que les coefficients de Biot ainsi que le tenseur d'élasticité doivent être considérés comme des fonctions de la déformation plastique, ou du moins de sa partie volumique. Ainsi, une diminution de la porosité conduit à un raidissement du squelette. Dans la cas isotrope, il se traduit par une diminution du coefficient  $b$ .

La modélisation de ce couplage a été abordée et quantifiée dans le cadre d'une approche micro-macro, permettant de construire des estimations pour les paramètres poroélastiques en fonction de la géométrie actuelle du v.e.r.. La simulation numérique effectuée en transformation finie dans le cas d'une géométrie initiale simple du v.e.r., chargé dans les conditions de l'essai œdométrique, a montré que l'évolution des propriétés élastiques macroscopiques avec le niveau de chargement est en bon accord avec la modélisation du couplage élasticité-plasticité prédite par les estimations classiques de Hashin-Shtrikman. Dans le cas d'un couplage purement volumique, on a également montré que l'équation d'état macroscopique en vitesse doit être modifiée pour tenir compte de ce phénomène.

Il est bien sûr légitime de s'interroger sur les limites de validité d'une modélisation aussi simplifiée. Il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit là d'une première approche du couplage visant à mettre en évidence l'influence de l'évolution des propriétés élastiques sur la réponse des ouvrages soumis à de grandes transformations.



# Chapitre 2

## Couplage élasticité-plasticité avec pores elliptiques

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	141
2.2	Estimations pour un v.e.r. à pores elliptiques en déformations planes. . . . .	141
2.3	Résultats et conclusion . . . . .	143

---



## 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons évoqué le couplage élasticité-plasticité pour le cas d'un milieu poreux contenant des pores sphériques. Cette hypothèse conférait un caractère macroscopique isotrope à notre matériau poreux. Adoptant alors les estimations de Hashin-Shtrikman basées sur la distribution isotrope des phases, on a pu mettre en évidence la bonne corrélation entre le modèle analytique proposé et les résultats numériques.

Cependant cette modélisation d'un milieu poreux contenant des pores sphériques semble rester trop théorique en regard de ce que l'on peut rencontrer pour les géomatériaux par exemple. De plus, les résultats numériques ont permis d'observer l'évolution de la géométrie des pores en transformation finie. Si cette dernière n'évolue pas vers une ovalisation telle qu'on pourrait le penser après une étude en petites perturbations, il apparaît toutefois que le pore se déforme de manière à induire une anisotropie macroscopique de notre matériau. Dans la confrontation des résultats analytiques et numérique celle-ci n'a pas été prise en compte puisque dans le modèle analytique on a supposé que le rapport d'aspect reste toujours constant. Sur la base de cette hypothèse, on a en fait effectué nos calculs en ne considérant que la variation de volume des pores.

Ce chapitre n'a pas l'ambition de quantifier cette anisotropie induite qui constitue un problème très conséquent correspondant à des perspectives sortant du cadre du présent travail. En revanche, cette idée d'anisotropie nous a poussé à reprendre le travail effectué dans le chapitre précédent en l'appliquant au cas de matériaux poreux présentant une distribution anistrophe des phases constitutives.

On s'intéresse donc à un matériau poreux dont les pores sont représentés par des inclusions elliptiques. Posant le même problème mécanique de la compaction œdométrique, on effectue ici une comparaison entre les résultats analytiques obtenus pour différents v.e.r. correspondant à des ellipsoïdes de différents rapports d'aspect, et les résultats obtenus par la mise en œuvre de la méthode numérique décrite à la section (1.4) sur le v.e.r. considéré.

## 2.2 Estimations pour un v.e.r. à pores elliptiques en déformations planes.

Le problème étudié ici est similaire à celui décrit à la section 1.4.1. On considère à nouveau un cube d'arête unité qui comprend une cavité cylindrique d'axe  $\underline{x}_3$  dont la section droite est maintenant une ellipse que l'on caractérisera par ses deux demi-axes  $a$  et  $b$  respectivement dans les directions  $\underline{x}_1$  et  $\underline{x}_2$ . Le solide constitutif est identique à celui de la section 1.4.

La démarche à suivre est identique à celle développée dans le chapitre précédent. Le but est de comparer les résultats obtenus par le modèle analytique où le couplage est de la forme  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(J)$  et les résultats découlant de la mise en œuvre de l'outil numérique développé à la section 1.4 et appliqué au présent v.e.r..

On cherche donc dans cette section à déterminer la forme du tenseur des modules d'élasticité homogénéisé pour le v.e.r. considéré. Pour cela, on utilise les résultats de Willis [68] relatifs à la déformation d'une inclusion cylindrique de section elliptique.

Dans le cas présent d'une inclusion ellipsoïdale d'élasticité nulle plongée dans un milieu solide homogène isotrope de tenseur des modules d'élasticité  $\mathbf{c}^s$ , le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé est alors de la forme :

$$\mathbf{C}^{hom} = f^s \mathbf{c}^s : [\Phi(\mathbf{I} - \mathbf{S}^{s,I})^{-1} + f^s \mathbf{I}]^{-1} \quad (2.1)$$

où  $f^s$  et  $\Phi$  représentent respectivement la fraction volumique de la phase solide et la porosité.

Pour connaître entièrement le tenseur des modules d'élasticité homogénéisé, il nous faut donc déterminer le tenseur d'Eshelby  $\mathbf{S}^{s,I}$  qui dépend de la forme du cylindre considéré. Dans le cas de notre problème en déformations planes, parallèlement au plan  $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ , la détermination de  $\mathbf{S}^{s,I}$  a été effectuée par Willis [68] et ne fait donc intervenir que les composantes relatives au plan  $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ . Les composantes non nulles sont au nombre de cinq et s'écrivent sous la forme :

$$S_{1111} = \frac{1}{2} \frac{b((2\nu - 2)b + (-3 + 2\nu)a)}{(a + b)^2(\nu - 1)} \quad (2.2)$$

$$S_{1122} = \frac{1}{2} \frac{b((1 - 2\nu)a - 2b\nu)}{(a + b)^2(\nu - 1)} \quad (2.3)$$

$$S_{2211} = \frac{1}{2} \frac{a((1 - 2\nu)b - 2a\nu)}{(a + b)^2(\nu - 1)} \quad (2.4)$$

$$S_{2222} = \frac{1}{2} \frac{a((-3 + 2\nu)b + (2\nu - 2)a)}{(a + b)^2(\nu - 1)} \quad (2.5)$$

$$S_{1212} = \frac{(\nu - 1)b^2 + (-1 + 2\nu)ab + (\nu - 1)a^2}{(a + b)^2(\nu - 1)} \quad (2.6)$$

On pourra remarquer la non symétrie de ce tenseur ( $S_{1122} \neq S_{2211}$ ) qui est bien sûr liée à la forme ellipsoïdale des pores. Dans le cas particulier du cylindre à base circulaire, la symétrie est retrouvée en posant  $a = b$ . Sachant que le tenseur de modules d'élasticité de la phase solide est égal à  $\mathbf{c}^s = 2\mu^s \mathbf{K} + 3k^s \mathbf{J}$ , on peut déterminer complètement  $\mathbf{C}^{hom}$

qui, dans le plan  $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ , contient cinq composantes non nulles. La loi de comportement macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{hom} : \underline{\underline{E}}$  s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111}^{hom} & C_{1122}^{hom} & 0 \\ C_{2211}^{hom} & C_{2222}^{hom} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^{hom} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Dans le cas de l'essai œdométrique considéré ici seule la déformation  $E_{22}$  est non nulle, ce qui nous permet de déduire que le module œdométrique correspond à  $C_{2222}^{hom}$ . En posant le rapport d'aspect  $\rho = b/a$ , le module œdométrique est égal à :

$$E_{oed} = \frac{E^s(1 - \nu^s) \rho (2\Phi^2 \rho + (1 - 2\rho)\Phi - 1)}{(\rho(4\nu^s - 3)\Phi^2 - 2((\nu^s - 1)^2(1 + \rho^2) - \nu^s(1 - 2\nu^s)\rho)\Phi - \rho(1 - 2\nu^s))(1 + \nu^s)} \quad (2.8)$$

où l'on a utilisé les relations classiques :

$$k^s = \frac{E^s}{3(1 - 2\nu^s)} \quad \text{et} \quad \mu^s = \frac{E^s}{2(1 + \nu^s)} \quad (2.9)$$

Il ne faut pas perdre de vue que la porosité intervenant dans l'expression du module œdométrique est la porosité de la configuration relâchée de telle manière que l'on a  $E_{oed} = E_{oed}(\Phi_R)$ . En utilisant à nouveau, comme dans la section 1.3, les hypothèses d'élasticité infinitésimale et d'incompressibilité plastique, et en supposant le rapport d'aspect constant, on se ramène au modèle analytique du couplage basé sur la déformation volumique des pores. On peut donc maintenant comparer l'évolution du module œdométrique normalisé par sa valeur initiale obtenu par la méthode analytique et le calcul numérique.

## 2.3 Résultats et conclusion

On présente donc dans cette section quelques résultats de calculs effectués sur différents v.e.r. que l'on distingue par la forme de l'inclusion. On considère tout d'abord le cas d'une porosité relativement faible. Ceci nous permet d'espérer diminuer l'action des effets de bord afin de concentrer nos observations sur l'importance de la forme de l'inclusion.

On commence donc par étudier un v.e.r. dont la porosité est de 15%.

Dans le cas d'une anisotropie relativement faible, i.e.  $\rho = 4/3$  (figure 2.1) ou  $\rho = 3/4$  (figure 2.2), on observe déjà une grande différence entre les résultats obtenus.

Plus particulièrement, il ressort que dans le cas où le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire au chargement ( $\rho = 3/4$ ), les résultats obtenus par le modèle analytique sont très proches des estimations numériques. En revanche, dans le cas contraire où l'élanement de l'ellipse est parallèle au chargement, les résultats divergent très rapidement.



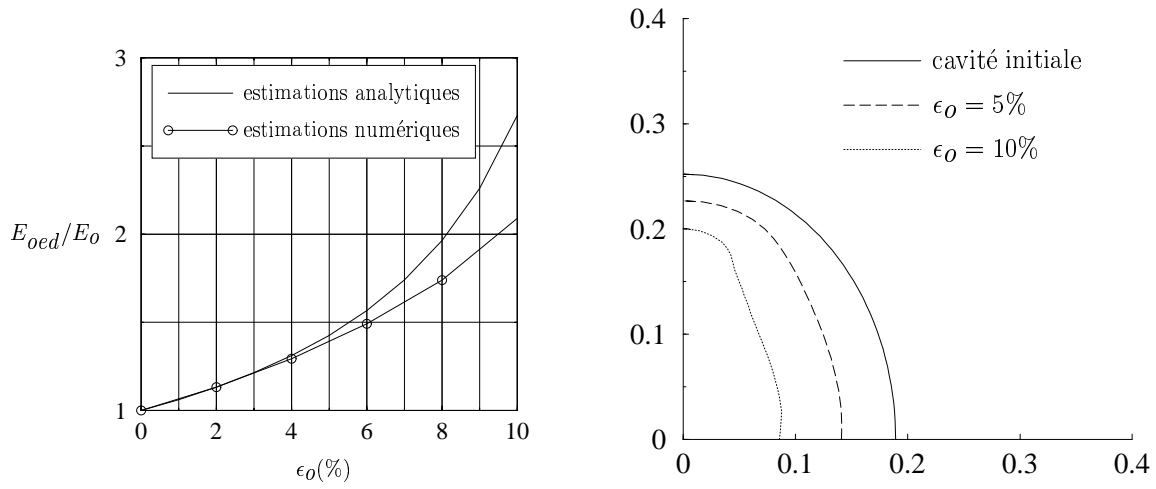


FIG. 2.1: *Estimations du module œdométrique et évolution de la cavité ( $\Phi = 15\%$ ) pour  $\rho = \frac{4}{3}$*

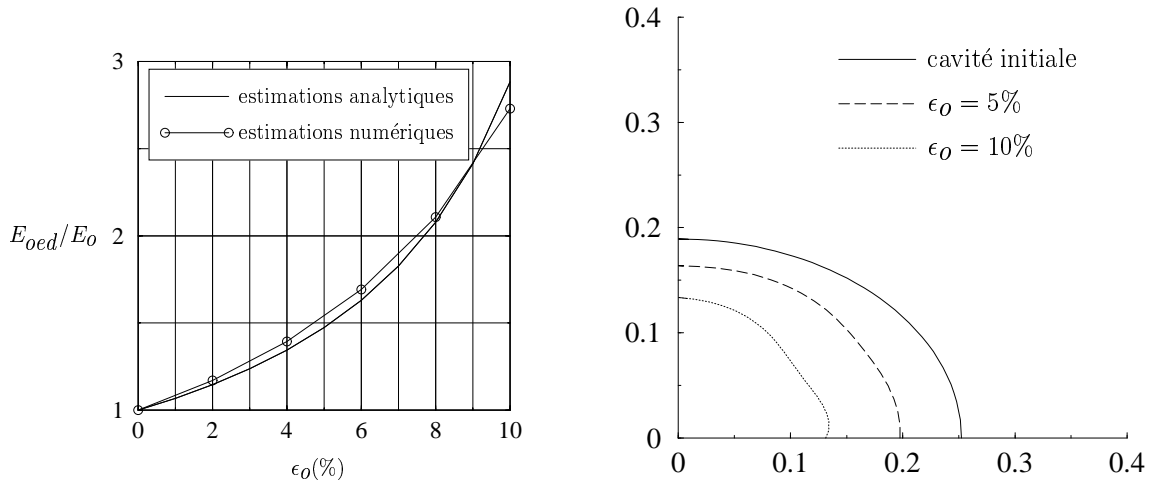


FIG. 2.2: *Estimations du module œdométrique et évolution de la cavité ( $\Phi = 15\%$ ) pour  $\rho = \frac{3}{4}$*

A porosité identique, mais pour une anisotropie plus forte en terme de rapport d'aspect de l'ellipse, les figures 2.3 et 2.4 conduisent aux mêmes conclusions. En observant la forme des déformées de la cavité en fonction du niveau de chargement, une première conclusion semble plausible. Pour les cas des figures 2.2 et 2.4, le rapport d'aspect varie respectivement entre environ 0.75 et 1 d'une part, et est quasiment constant égal et à 0.5 d'autre part, pour une déformation imposée variant de 0 à 10%. Ainsi, pour ces deux cas, l'hypothèse d'un rapport d'aspect constant utilisée dans le modèle analytique semble pouvoir se justifier. A l'inverse, dans les deux autres cas le rapport d'aspect subit une variation de l'ordre de 200% permettant ainsi d'expliquer les divergences obtenues pour

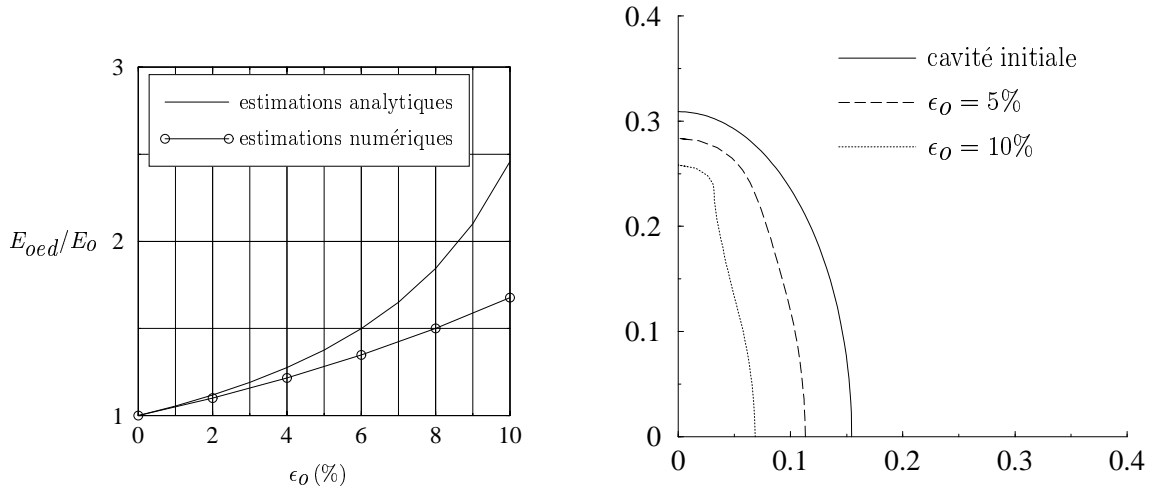


FIG. 2.3: *Estimations du module œdométrique et évolution de la cavité ( $\Phi = 15\%$ ) pour  $\rho = 2$*

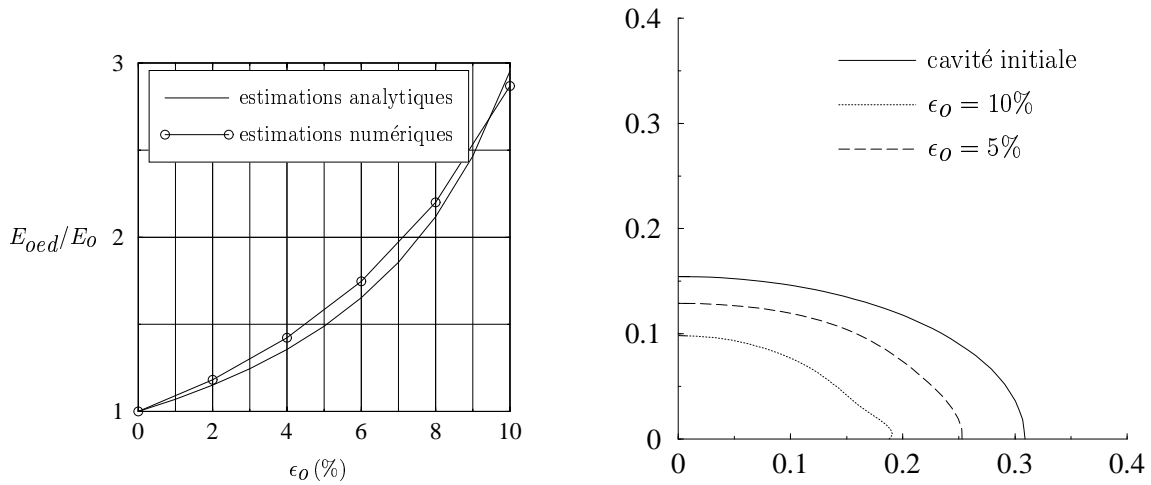


FIG. 2.4: *Estimations du module œdométrique et évolution de la cavité ( $\Phi = 15\%$ ) pour  $\rho = \frac{1}{2}$*

les estimations des modules œdométriques.

Regardons maintenant le cas d'une porosité plus forte égale à 29%. Les résultats obtenus pour une inclusion de rapport d'aspect égal à  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{4}{3}$  sont présentés sur les figures 2.5 et 2.6. Dans le cas des résultats présentés à la figure 2.6, on constate encore une corrélation forte entre la déviation qui existe entre les estimations analytiques et numériques, et celle du rapport d'aspect actuel vis à vis du rapport d'aspect initial.

Il semble cependant qu'un meilleur accord soit obtenu dans le cas  $\rho = 4/3$ . On peut s'étonner de la qualité de cet accord, correct de  $\epsilon_o = 0$  à 20% sur la figure (2.5), alors qu'il

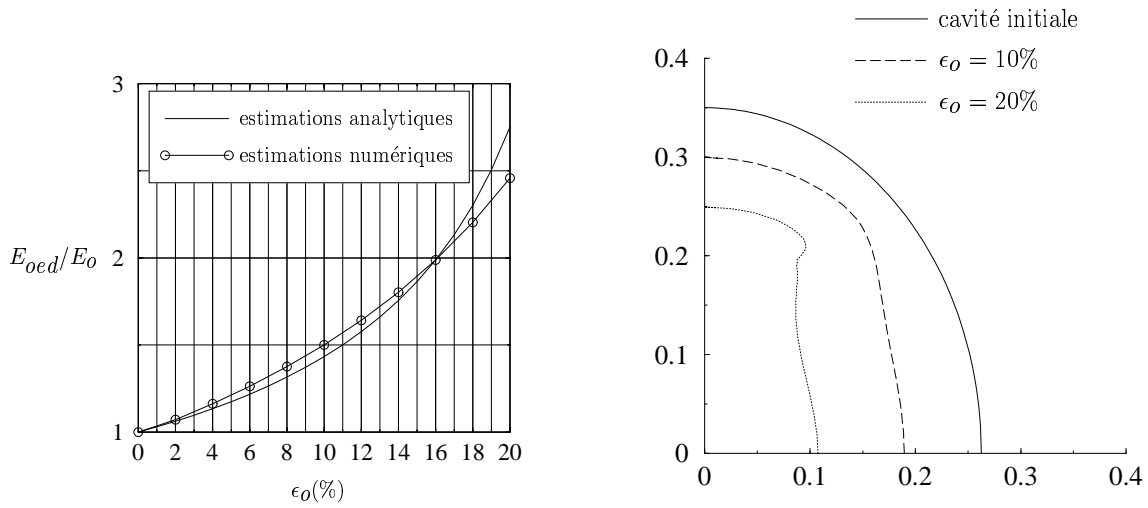


FIG. 2.5: *Estimations du module œdométrique et évolution de la cavité ( $\Phi = 29\%$ ) pour  $\rho = \frac{4}{3}$*

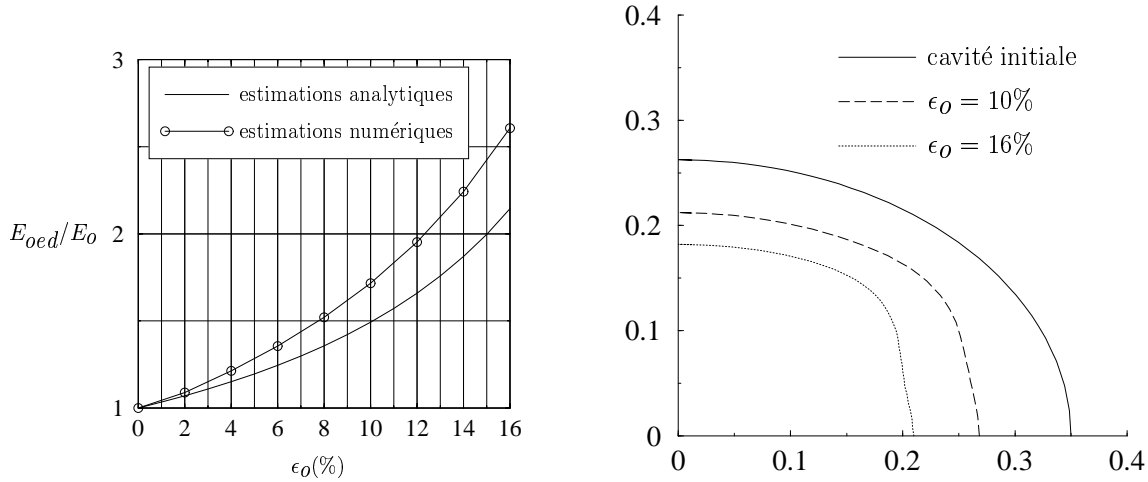


FIG. 2.6: *Estimations du module œdométrique et évolution de la cavité ( $\Phi = 29\%$ ) pour  $\rho = \frac{3}{4}$*

se détériore au delà de l'intervalle 5% sur la figure (2.1) pour la même valeur  $\rho = 4/3$ . Un élément d'explication réside peut-être dans un paramétrage de l'élasticité macroscopique non pas en fonction de  $\epsilon_o$  mais en fonction de  $\phi_R$ . En effet la valeur  $\epsilon_o = 5\%$  (resp.  $\epsilon_o = 20\%$ ) correspond, quitte à négliger la déformation élastique, à  $J^p = 0.95$  (resp.  $J^p = 0.8$ ). Observant que l'incompressibilité de la phase solide s'écrit :

$$\phi_R = 1 - \frac{1 - \Phi_o}{J^p} \approx 1 - \frac{1 - \Phi_o}{1 - \epsilon_o} \quad (2.10)$$

on déduit que les deux couples  $(\epsilon_o = 5\%, \Phi_o = 15\%)$  et  $(\epsilon_o = 20\%, \Phi_o = 29\%)$  conduisent à la même valeur de  $\phi_R$ . Ainsi il est frappant d'observer que l'accord entre estimation analytique et calcul numérique reste correct aussi longtemps que la fraction volumique  $\phi_R$  reste supérieure à un même seuil, identique pour les deux valeurs de  $\Phi_o$ .

On peut tirer deux leçons des calculs qui viennent d'être présentés.

1. Les variations du rapport d'aspect au cours de la compaction sont très significatives.
2. Dans le cas des pores initialement elliptiques, on ne peut pas se contenter de prendre en compte le seul effet de la variation de porosité sur l'élasticité macroscopique. Il convient d'intégrer également les variations de rapport d'aspect qui induisent une anisotropie à l'échelle macroscopique.

Cette perspective de la modélisation du couplage élasticité-plasticité est donc largement ouverte.



# Chapitre 3

## Effets des transformations finies sur le module d'écrouissage

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>151</b>
<b>3.2</b>	<b>Fonction de charge et module d'écrouissage.</b>	<b>151</b>
3.2.1	Cas général.	151
3.2.2	Cas des géomatériaux.	152
<b>3.3</b>	<b>Loi d'écrouissage adaptée aux transformations finies</b>	<b>153</b>
3.3.1	Forme de la loi d'écrouissage.	153
3.3.2	Charge limite pour une sphère creuse en compression.	154
3.3.3	Détermination du module d'écrouissage.	157

---



## 3.1 Introduction

Quand le domaine d'élasticité d'un matériau est modifié par les déformations plastiques qu'il subit, on parle d'écroûissage. On propose dans ce chapitre un modèle de l'écroûissage macroscopique dû aux grandes déformations irréversibles de la microstructure du matériau. Habituellement, la prise en compte de l'écroûissage au sein du comportement est de nature purement phénoménologique. En effet, les variables d'écroûissage rencontrées découlent d'observations expérimentales et ne font référence à l'origine physique des phénomènes observés que qualitativement.

On propose ici d'utiliser l'approche micromécanique pour obtenir une approche quantitative du phénomène d'écroûissage macroscopique en présence de grandes déformations plastiques.

Dans les deux chapitres précédents, on a étudié l'influence de la déformation volumique de l'espace poreux sur les propriétés élastiques du matériau. On est à présent amené à se demander comment cette évolution de la morphologie va agir sur le domaine d'élasticité. En d'autres termes, on va considérer un écroûissage dû aux variations irréversibles de l'espace poreux.

## 3.2 Fonction de charge et module d'écroûissage.

### 3.2.1 Cas général.

Le domaine d'élasticité d'un matériau évolue en fonction de l'histoire du chargement qu'il subit. Une modélisation classique de l'écroûissage consiste à considérer ce domaine comme une fonction de paramètres en nombre fini appelés forces d'écroûissage. Si on choisit de symboliser ces forces d'écroûissage par  $\zeta$ , le domaine d'élasticité actuel  $\mathcal{D}(\zeta)$  peut donc être représenté par une fonction appelée fonction de charge ou critère de plasticité que l'on notera  $f(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)$ :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{D}(\zeta) \quad \Leftrightarrow \quad f(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta) \leq 0 \quad (3.1)$$

Dans le cas des matériaux standards, c'est-à-dire vérifiant l'hypothèse du travail plastique maximal (Halphen et Salençon [43]), la règle d'écoulement est associée. Ceci signifie que le potentiel plastique et la fonction de charge sont confondus. Dans le cas de transformations finies, la règle d'écoulement est de la forme de (1.15) et s'écrit.

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{array} \right\} ; \quad \{\underline{\underline{F}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{p-1}\}_s = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.2)$$



Les forces d'écrouissage  $\zeta$  sont fonctions de variables d'état cachées, dites variables d'écrouissage, notées  $\chi$ . Dans le cas des matériaux standards généralisés (Halphen et Nguyen [42]), l'évolution de ces dernières est donnée par :

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{array} \right\} ; \quad \dot{\chi} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)}{\partial \zeta} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.3)$$

Dans le cas de matériaux standards non généralisés, on adopte à nouveau la règle d'écoulement associée (3.2) et l'on introduit un nouveau potentiel  $h(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)$  qui permet d'écrire la loi d'évolution des variables d'écrouissage sous la forme suivante :

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{array} \right\} ; \quad \dot{\chi} = \dot{\lambda} \frac{\partial h(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)}{\partial \zeta} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.4)$$

Dans ces différentes lois d'évolutions, on démontre que le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est égal à :

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{si } \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \leq 0 ; \quad \dot{\lambda} = \frac{1}{m(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \quad \text{si } \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \geq 0 \quad (3.5)$$

La dimension de la grandeur  $m(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)$  dépend directement du choix fait pour la fonction de charge. En effet, si cette dernière a la dimension d'une contrainte, il en est de même de  $m(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)$  qui porte alors le nom de module d'écrouissage. On notera que ce n'est pas la situation du modèle de Cam-Clay dans l'écriture usuelle. On gardera néanmoins la terminologie de module d'écrouissage.

Dans la suite de ce mémoire les fonctions de charges utilisées auront toutes la dimension d'une contrainte ce qui nous permet de poser  $m(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta)$  comme module d'écrouissage du matériau considéré. Finalement, (3.2) et (3.5) conduisent à écrire la règle d'écoulement plastique sous la forme :

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{array} \right\} ; \quad \{\underline{\underline{F}}^p \cdot \underline{\underline{F}}^{p-1}\}_s = \frac{1}{m(\underline{\underline{\Sigma}}, p_c)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \frac{\partial f(\underline{\underline{\Sigma}}, p_c)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Cas des géomatériaux.

Dans le cas des géomatériaux qui sont étudiés ici, on fait le choix d'un critère de plasticité du type de celui proposé par Burland ([20], [21]) dans le modèle Cam-Clay.

La fonction de charge de ce modèle fait intervenir le tenseur des contraintes et un unique paramètre d'écrouissage  $p_c$ . D'un point de vue physique, ce paramètre  $p_c$  représente la plus grande contrainte isotrope que l'on puisse imposer au milieu avant que n'apparaissent les déformations irréversibles. Il est appelé pression de consolidation.

La fonction de charge va donc être de la forme :

$$f(\underline{\underline{\Sigma}}, \zeta) = f(\underline{\underline{\Sigma}}, p_c) \quad (3.7)$$

La variation du domaine d'élasticité, caractérisation macroscopique de l'écroûissage, correspond ici à une évolution de cette valeur seuil  $p_c$ . Pour quantifier cette évolution, il faut alors être capable de relier ce paramètre à une grandeur caractéristique des déformations plastiques. Dans le modèle de Cam-Clay, il s'agit de la variation irréversible de volume des pores. Historiquement, cette correspondance entre la variation de volume irréversible et le paramètre  $p_c$ , qui est une constatation expérimentale, est à l'origine du modèle Cam-Clay.

Coussy [22] a, par exemple, proposé de caractériser la dilatation volumique irréversible en utilisant l'indice des vides plastiques  $e_p$ . Ce dernier est défini comme la différence entre l'indice des vides dans la configuration relâchée et l'indice des vides dans la configuration initiale.

$$e_p = \frac{\phi_R}{1 - \phi_R} - \frac{\Phi_o}{1 - \Phi_o} \quad (3.8)$$

Ce choix conduit alors à la détermination d'un potentiel  $h(\underline{\Sigma}, p_c)$  qui décrit l'écroûissage. De tels développements ont été effectués par E. Bourgeois [12].

On rappelle que l'incompressibilité supposée de la matrice solide permet de considérer que les déformations volumiques plastiques ne sont dues qu'aux déformations volumiques de l'espace poreux. La variation de volume irréversible de l'espace poreux peut alors être reliée aisément au jacobien plastique  $J^p$  (voir (1.11)). On fait donc l'hypothèse que l'origine physique de l'écroûissage à l'échelle microscopique est la variation irréversible de volume des pores.  $J^p$  peut ainsi être identifié à la variable d'écroûissage  $\chi$  définie en (3.3), ce qui nous permet d'écrire la force d'écroûissage  $p_c$  sous la forme :

$$p_c = p_c(J^p) \quad (3.9)$$

L'origine microstructurale de l'écroûissage étant maintenant choisie, il nous faut déterminer une fonction  $p_c(J^p)$  pertinente nous permettant de décrire son évolution dans le cadre des problèmes de transformations finies.

## 3.3 Loi d'écroûissage adaptée aux transformations finies

### 3.3.1 Forme de la loi d'écroûissage.

Le milieu poreux considéré étant constitué d'une matrice solide plastiquement incompressible, ceci sous-entend que dans le cas extrême où les déformations sont telles que tous les pores sont fermés, il n'y a plus de déformation volumique irréversible.

D'après l'expression (3.6), ceci signifie que le module d'écroûissage doit tendre vers l'infini quand la porosité  $\phi_R$  tend vers zéro (fermeture complète des pores). La condition d'incompressibilité plastique (1.11) implique que cette branche infinie est atteinte quand

$$J^p = 1 - \Phi_o \quad (3.10)$$

On commence tout d'abord par déterminer une relation du type de (3.9) avant de montrer la façon dont on peut, par la loi de comportement (1.86), déterminer le module d'écroûissage correspondant.

Pour la détermination de la fonction  $p_c(J^p)$ , on propose de s'inspirer du modèle de la sphère creuse en compression.

L'idée consiste à construire la courbe  $\Sigma(J^p)$ , donnant la pression isotrope  $\Sigma$  appliquée à la sphère, en fonction de la dilatation volumique irréversible que ce chargement induit. En effet dans une expérience de compression isotrope où l'on augmente  $\Sigma$  de façon isotrope, chaque valeur de  $\Sigma$  représente la limite d'élasticité actuelle. Elle joue donc le rôle de la pression de consolidation  $p_c$ , ce qui conduit à proposer la loi  $\Sigma = \Sigma(J^p)$  comme loi d'écroûissage. La section suivante 3.3.2 se penche sur la détermination de celle-ci.

### 3.3.2 Charge limite pour une sphère creuse en compression.

On s'intéresse à la réponse de la sphère dans le domaine des grandes déformations plastiques. Sur un trajet de compression monotone, le niveau de contrainte actuel  $\Sigma$  peut alors s'interpréter :

- d'une part comme la limite d'élasticité actuelle (voir section 3.3.1)
- et d'autre part comme la charge limite de la sphère sous compression isotrope, fonction de ses caractéristiques générales actuelles.

C'est le changement de géométrie de la sphère mesuré par  $J^p$  qui est responsable de l'écroûissage. Plus précisément, la réduction progressive de la porosité se traduit par une augmentation de la charge limite de la sphère. La relation  $\Sigma = \Sigma(J^p)$  rend compte de cet écroûissage d'origine géométrique. On notera que ce mécanisme d'écroûissage est typique d'une évolution de la microstructure en transformation finie (voir à ce sujet Dormieux et Maghous [33]). Il est très différent du mécanisme d'écroûissage par énergie bloquée que l'on rencontre en transformation infinitésimale.

Pratiquement, nous sommes ramenés au problème de la détermination de la charge limite d'une sphère creuse sous pression. Plus précisément, la structure considérée est, dans sa configuration actuelle, une sphère creuse de rayons interne et externe  $r(t)$  et  $R(t)$ . Elle est

soumise à un chargement défini par une pression  $\underline{\Sigma}(t)$  appliquée sur son contour extérieur (figure 3.1). La cavité interne est libre de contrainte.

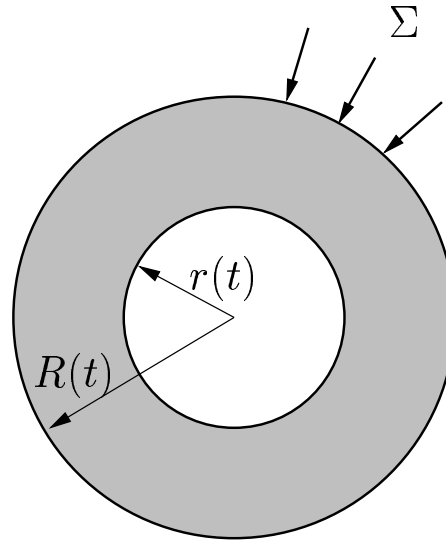


FIG. 3.1: géométrie initiale du v.e.r.

Le matériau constitutif, i.e. la phase solide, est supposé homogène et isotrope de comportement élastique linéaire. Son comportement plastique est décrit par le critère de Tresca

$$f(\underline{\sigma}, \sigma_o) = \sup_{i,j} (\sigma_i - \sigma_j) \leq \sigma_o \quad (3.11)$$

où les  $(\sigma_i, \sigma_j)$  représentent les contraintes principales et  $\sigma_o$  la limite d'élasticité en compression simple supposée invariable. La règle d'écoulement est supposée associée. On rappelle, en outre, que le solide est plastiquement incompressible.

Dans ces conditions, un résultat classique d'analyse limite montre que la valeur limite de  $\underline{\Sigma}(t)$ , correspondant à la géométrie actuelle de la sphère, est donnée par :

$$\Sigma^+(t) = 2\sigma_o \ln \frac{R(t)}{r(t)} \quad (3.12)$$

Dans le repère sphérique orthonormé  $(\underline{e}_\rho, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$ ,  $\Sigma^+(t)$  est donc la valeur du chargement macroscopique équilibré par le champ de contraintes microscopique défini en tout point de la sphère par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sigma_{\rho\rho} \underline{e}_\rho \otimes \underline{e}_\rho + \sigma_{\theta\theta} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \quad (3.13)$$

avec

$$\sigma_{\rho\rho} = 2\sigma_o \ln \frac{r(t)}{\rho} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\rho\rho} - \sigma_o \quad \forall \rho \in [r(t), R(t)] \quad (3.14)$$

Le champ de vitesse d'écoulement plastique dans le solide, a en tout point une structure radiale, ne dépend que de la coordonnée  $\rho$ , et est à divergence nulle. La géométrie de la sphère creuse est ainsi conservée tout au long du chargement.

A l'instant initial  $t = 0$ , le volume occupé par le solide est égal à

$$V_o = \frac{4}{3}\pi(R_o^3 - r_o^3) \quad (3.15)$$

où l'on a posé  $r_o = r(t = 0)$  et  $R_o = R(t = 0)$ .

De même, le volume occupé par le solide dans la configuration actuelle est égal à :

$$V_t = \frac{4}{3}\pi(R^3(t) - r^3(t)) \quad (3.16)$$

On introduit à ce stade le rapport sans dimension  $\alpha(t) = \frac{r(t)}{R(t)}$ . Le volume de la sphère

dans la configuration actuelle est  $\Omega_t = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$ . La valeur initiale  $\alpha_o = \alpha(t = 0)$ , est directement reliée à la porosité dans la configuration initiale par  $\alpha_o = \sqrt[3]{\Phi_o}$ . Plus généralement,  $\alpha(t) = \sqrt[3]{\phi(t)}$ , où  $\phi(t)$  est la valeur de la porosité eulérienne.

On néglige la variation réversible de volume du solide, i.e.  $J^e \approx 1$ , ce qui conduit à l'approximation  $\phi(t) \approx \phi_R$ . L'incompressibilité plastique du solide, qui se traduit ici par (1.11), permet d'exprimer  $\alpha(t)$  sous la forme :

$$\alpha(t) = (1 - \frac{1}{J}(1 - \Phi_o))^{1/3} \quad (3.17)$$

où  $J = \frac{\Omega_t}{\Omega_o}$  désigne le jacobien de la transformation macroscopique subie par le milieu entre l'instant initial et l'instant actuel. La combinaison de (3.12) et de (3.17) nous permet donc d'obtenir une expression de la charge limite en fonction de la porosité initiale, et du jacobien de la transformation sous la forme :

$$\Sigma^+(t) = 2\sigma_0 \ln(1 - \frac{1}{J}(1 - \Phi_o))^{-1/3} \approx 2\sigma_0 \ln(1 - \frac{1}{J^p}(1 - \Phi_o))^{-1/3} \quad (3.18)$$

Dans cette expression, la notion d'écroutissage volumique apparaît à travers le fait que la charge limite pour la sphère creuse dépend du niveau de déformation volumique via le jacobien de la transformation macroscopique.

Comme nous l'avons déjà précisé, cette charge limite correspond également à la limite d'élasticité, ce qui nous permet d'identifier la loi d'écroutissage  $p_c(J^p)$ .

On a donc finalement

$$p_c(J^p) = 2\sigma_0 \ln(1 - \frac{1}{J^p}(1 - \Phi_o))^{-1/3} \quad (3.19)$$

qui présente bien, une branche infinie à la valeur de  $J^p$  prévue par (3.10).

### 3.3.3 Détermination du module d'écouissage.

On cherche dans cette section à déterminer la forme du module d'écouissage  $m(\underline{\underline{\Sigma}}, J)$  correspondant à la loi d'écouissage  $p_c = p_c(J^p)$ .

Considérons l'expérience de compression isotrope, correspondant à un chargement de type :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -\Sigma \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \Sigma \leq 0 \quad (3.20)$$

Lors de cette expérience, le taux de déformation macroscopique  $\underline{\underline{D}}$  est égal à :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \dot{J} \underline{\underline{1}} \quad (3.21)$$

L'hypothèse d'élasticité infinitésimale qui a été faite suppose que le tenseur des modules d'élasticité  $\mathbf{C}$  tend vers l'infini, ce qui, d'après la loi de comportement (1.86), conduit à l'égalité :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{m(\underline{\underline{\Sigma}}, J)} \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} \right) \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (3.22)$$

D'après la forme du chargement (3.20) et du taux de déformation (3.21) lors de la compression isotrope, l'égalité (3.22) s'écrit encore :

$$\frac{1}{3} \dot{J} \underline{\underline{1}} = -\frac{1}{m(\underline{\underline{\Sigma}}, J)} \dot{\Sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \underline{\underline{1}} \right) \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (3.23)$$

En prenant la trace de cette expression, on obtient une expression du module d'écouissage sous la forme :

$$m(\underline{\underline{\Sigma}}, J) = -\frac{J \dot{\Sigma}}{\dot{J}} \left( \text{tr} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \right)^2 \quad (3.24)$$

En identifiant  $\dot{\Sigma}$  avec  $\dot{p}_c(J^p)$ , et en remarquant que :

$$\dot{p}_c(J^p) \approx \dot{p}_c(J) = \frac{\partial p_c}{\partial J} \dot{J} \quad (3.25)$$

on obtient une expression du module d'écouissage qui ne dépend que du jacobien de la transformation macroscopique :

$$m(J) = -J \frac{\partial p_c}{\partial J} \left( \text{tr} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \right)^2 \quad (3.26)$$

Cette formule générale du module d'écouissage sera utilisée dans la partie suivante pour un critère de plasticité donné.



Cinquième partie

**SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR  
LA MODÉLISATION DE LA  
COMPACTION DE BASSINS  
SÉDIMENTAIRES**





# Chapitre 1

## Étude de la compaction en condition œdométrique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>163</b>
<b>1.2</b>	<b>Modélisation sous l’hypothèse des petites perturbations (H.P.P.).</b>	<b>165</b>
1.2.1	Position du problème. . . . .	165
1.2.2	Résolution . . . . .	168
<b>1.3</b>	<b>Modélisation en transformation finie. . . . .</b>	<b>173</b>
1.3.1	Position du problème. . . . .	173
1.3.2	Résolution . . . . .	174
1.3.3	Introduction d’une partie déviatorique dans le critère de plasticité	180
1.3.4	Prise en compte du couplage élasticité-plasticité. . . . .	184
1.3.5	Prise en compte d’un module d’érouissage variable. . . . .	188

---



## 1.1 Introduction

Dans le contexte de l'exploration pétrolière, qui a pour but la découverte d'accumulations d'hydrocarbures exploitables, beaucoup d'efforts ont été effectués pour intégrer les données géologiques, simuler la formation des hydrocarbures, leurs migrations primaire et secondaire. Cependant, d'un point de vue mécanique, il apparaît que la description du processus géologique de compaction reste assez limitée.

Or, le kérogène, matériau dont sont issus les hydrocarbures, se transforme en huile dans des conditions de température et de pression bien connues. Si on fait une hypothèse sur l'âge du dépôt de kérogène, la connaissance du processus de compaction (à quelle profondeur se trouve à l'instant  $t$  une particule située en surface à l'instant  $t_0$ ) va permettre de situer à chaque instant la zone de kérogène, estimer les contraintes qu'elle subit, sa profondeur et donc sa température. On peut donc prévoir le processus de migration primaire, puis ensuite secondaire, si on connaît à chaque instant l'épaisseur du massif et les conditions hydrauliques qui influent sur la migration.

Considérant la formation d'un bassin sédimentaire, on va donc s'intéresser ici à la compaction d'une couche géologique due à l'accumulation progressive au cours du temps de sédiments en surface.

La compaction des bassins sédimentaires a été étudiée par de nombreux auteurs, avec comme idée principale, de déterminer la loi de porosité dans le massif. Celle-ci diminue en fonction de la profondeur à un instant donné, ou au cours du temps pour une couche de sédiments que l'on suit dans son mouvement.

La première étude, purement phénoménologique, a été effectuée par Athy [2] qui se limitait à proposer une forme à priori pour la loi donnant la porosité comme une fonction de la profondeur. Plus tard, Hubbert et Rubey [49], Smith [64] l'ont considérée comme une fonction de la contrainte effective, définie par Terzaghi [66] comme la somme (algébrique) de la contrainte totale et de la pression de fluide.

Au processus de compaction d'origine mécanique, prépondérant à de faibles profondeurs pour des valeurs élevées de la porosité, s'ajoutent des phénomènes de pression-dissolution qui interviennent lorsque la porosité devient inférieure à 30-35%. Ces phénomènes ont été mis en évidence par Hedberg [47], Hamilton [44] et pris en compte dans des modèles à travers des déformations de type visqueux (voir par exemple Schneider et al. [63]). Ces phénomènes ne seront pas pris en compte ici.

On propose ici des solutions analytiques, basées sur une approche mécanique, décrivant le

processus de compaction des bassins sédimentaires. On va donc s'intéresser aux grandes variations de porosité ainsi qu'à l'évolution de la contrainte horizontale induites par la compaction, dans le cadre d'une approche mécanique basée sur une modélisation élastoplastique des sédiments, tenant compte des grandes déformations.

Le caractère analytique recherché nécessite de faire abstraction des effets du fluide. On ne considérera donc dans cette partie que des matériaux de perméabilité infinie. Ceci correspond alors à une étude du matériau en condition drainée, ou encore, à un matériau que l'on qualifiera de sec.

Une des principales difficultés dans la formulation des problèmes de sédimentation est due au caractère évolutif du domaine matériel étudié. En effet, l'apport continu de sédiments, qui constitue le moteur de la compaction, ne permet pas de définir une configuration de référence pour la couche de sédiments dans son ensemble.

De telles solutions vont être précieuses pour valider des approches numériques connues pour les difficultés qu'elles présentent dans le cas de systèmes ouverts. Elles pourront servir de référence pour des codes numériques simulant le processus de compaction des bassins sédimentaires qui intégreront en revanche le couplage fluide-squelette.

On propose dans un premier temps de mettre en évidence les différences entre les résultats fournis par une approche dans le cadre des petites perturbations, et par une approche en transformation finie qui se justifie par les grandes variations de porosité mises en jeu. Pour cette dernière, on se placera donc dans le cadre de la formulation du comportement élastoplastique fini présenté dans la partie II.

Dans une démarche de simplification du critère du modèle Cam-Clay, de manière à obtenir des solutions analytiques, on introduit tout d'abord un critère de plasticité qui ne fait intervenir que la contrainte moyenne et qui utilise un écrouissage caractérisé par un module positif constant. On améliore ensuite ce modèle par l'introduction d'un critère faisant intervenir à la fois la contrainte moyenne et le déviateur des contraintes.

Enfin, les grandes variations de porosité suggèrent que la compaction des bassins sédimentaires induit les phénomènes de couplage développés à la partie IV.

En utilisant les mêmes critères de plasticité que précédemment, on étudie donc l'influence du couplage élasticité-plasticité sur les phénomènes de compaction ainsi que le rôle joué par une variation du module d'écrouissage décrit par (3.26).

## 1.2 Modélisation sous l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.).

### 1.2.1 Position du problème.

#### Géométrie et chargement.

On considère la couche de sédiments en cours de formation comme un massif élastoplastique d'extension horizontale infinie. Celui-ci repose sur un substratum rigide dans le plan  $z = 0$ .

Le squelette du système étudié évolue au cours du temps en raison de l'apport continu de matériau sédimentaire sur la surface supérieure. En supposant que cette dernière reste horizontale, sa localisation sera définie par le plan d'équation  $z = H(t)$  (figure 1.1).

Il n'est évidemment pas possible de négliger l'action du champ de pesanteur  $\underline{g} = -g\underline{e}_z$  qui constitue le moteur de la compaction. On note  $M_d(t)$  la masse de sédiments déposés par unité de surface horizontale, qui constitue une donnée du problème. Si on note  $\rho(z, t)$  la masse volumique au point  $z$  à l'instant  $t$ , la masse de sédiments déposés par unité de surface depuis l'instant  $t = 0$  sera donc égale à :

$$M_d(t) = \int_0^{H(t)} \rho(z, t) dz \quad (1.1)$$

L'évolution du bassin peut être étudiée de façon quasistatique. Dans cette première section, on fait de plus l'hypothèse des petites perturbations qui consiste à négliger les changements de géométrie d'un sous-domaine fixé du bassin au cours du temps. En particulier, si  $z$  désigne la coordonnée à l'instant  $t$  d'une particule matérielle, et si  $T(z, t)$  désigne l'instant où cette particule se situait sur la frontière supérieure du bassin, on admet que  $H(T(z, t)) \approx z$ .

On peut alors établir les deux propriétés suivantes :

1. les variations en  $z$  et en  $t$  de la masse volumique  $\rho$  sont négligeables.
2. le champ de vitesses satisfait la condition  $|u(z, t)| \ll \frac{dH}{dt}$ .

Le caractère quasistatique de l'évolution nous permet de négliger l'accélération des particules matérielles ce qui conduit à la forme suivante de l'équation d'équilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{g}}(z, t) + \rho \underline{g} = 0 \quad (1.2)$$

### Conditions limites.

On suppose tout d'abord que le matériau qui sédimente au cours du temps au niveau de la surface supérieure, est à l'état naturel. Ceci se traduit en  $z = H(t)$  par la condition:

$$\underline{\underline{\sigma}}(H(t), t) = \underline{\underline{0}} \quad (1.3)$$

L'immobilité du substratum rigide en  $z = 0$  implique une condition sur le déplacement :

$$\underline{\underline{u}}^{sq}(0, t) \cdot \underline{\underline{e}}_z = 0 \quad (1.4)$$

où  $\underline{\underline{u}}^{sq}(z, t)$  représente la vitesse du squelette.

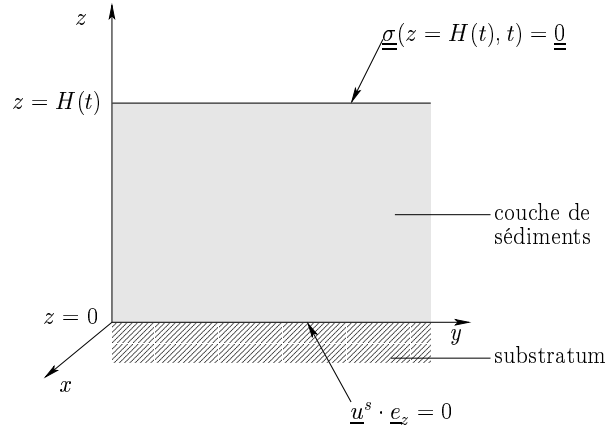


FIG. 1.1: géométrie du problème et conditions aux limites

### Comportement.

On suppose que le squelette du système considéré est homogène, isotrope, de comportement élastique linéaire. Dans toute la suite, on supposera de plus que les évolutions étudiées sont isothermes. La loi de comportement élastoplastique s'écrit sous la forme classique:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) \underline{\underline{1}} + 2 \mu (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) \quad (1.5)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé pour le squelette et  $\underline{\underline{d}}^p$  est le taux de déformation plastique qui est de la forme déjà rencontrée en (2.5). On considère de plus que la règle d'écoulement est associée ce qui permet d'écrire le taux de déformation plastique en fonction du critère de plasticité  $f(\underline{\underline{\sigma}})$ .

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{avec } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (1.6)$$

Pour décrire entièrement le comportement élastoplastique il nous reste donc à préciser la forme du critère  $f(\underline{\sigma})$ .

Dans le cadre de l'étude des géomatériaux, on utilise fréquemment des lois de comportement élastoplastique, généralement appelées "cap models", pour lesquelles la surface de charge est constituée de deux parties différentes. La première correspond à l'écroutissement positif et au comportement ductile. Sur l'autre partie de la surface de charge, le comportement fragile est observé.

Un exemple couramment rencontré est le critère du modèle "Cam-Clay" modifié, proposé par Burland [20], qui s'écrit:

$$f(P, Q) = Q^2 + M^2 P(P - p_c) \quad (1.7)$$

où  $P = -\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\sigma}$  est la contrainte confinement et  $Q$  est le déviateur des contraintes. Dans l'espace des contraintes  $(P, Q)$ , celui-ci est représenté par une ellipse centrée sur l'axe des compressions isotropes (figure 1.2). Les sommets du petit axe de l'ellipse se trouvent sur

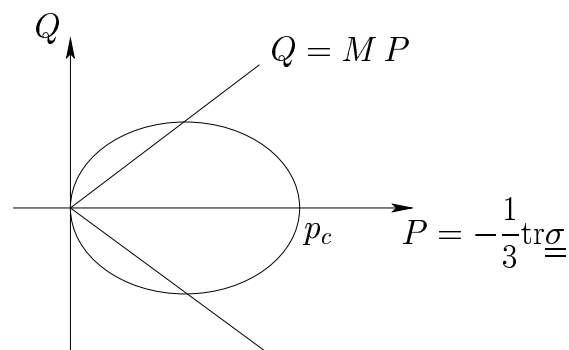


FIG. 1.2: Critère de plasticité du modèle Cam-Clay modifié

les droites  $Q = \pm MP$ . Ces sommets correspondent à l'état critique du milieu. Dans ce modèle on ne trouve qu'un seul paramètre d'écroutissement  $p_c$ .

De manière à incorporer ces caractéristiques générales, tout en cherchant à obtenir des solutions analytiques, nous faisons le choix de simplifier la surface de charge. On va donc remplacer la partie correspondant à l'écroutissement positif par un segment vertical et approcher la partie de la frontière associée au comportement fragile par une droite (figure 1.3). Ceci suppose, dans un premier temps, que notre critère de plasticité est purement volumique dans la mesure où il ne fait intervenir que la valeur moyenne du tenseur des contraintes.

$$f(\underline{\sigma}, p_c) = -\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\sigma} - p_c \quad (1.8)$$



On considèrera de plus que le module d'écrouissage  $m$  est constant et positif.

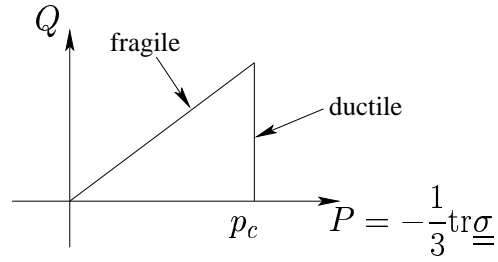


FIG. 1.3: Critère de plasticité volumique

### Forme de la solution.

On considère dans cette partie que le champ de déformation n'a qu'une composante verticale. Cela revient à étudier la compaction en condition que l'on qualifiera d'œdométrique par opposition à la condition tectonique qui suppose un taux de déformation horizontale non nul. Cependant, on prendra garde à cette terminologie qui ne renvoie ici qu'à la notion de déformation horizontale nulle. En effet, contrairement à l'essai œdométrique usuel, le taux de contrainte vertical n'est pas nul car il dépend, à chaque instant, de l'apport de sédiments en surface.

Les symétries géométriques et matérielles conduisent alors à ne retenir que des champs indépendants des coordonnées  $x$  et  $y$ . Le champ eulérien des vitesses du squelette ainsi que le tenseur des contraintes vont donc être cherchés sous la forme:

$$\underline{u}^{sq}(z, t) = u(z, t)\underline{e}_z \quad (1.9)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(z, t) = \sigma_V(z, t)\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \sigma_H(z, t)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (1.10)$$

On se ramène donc à un problème unidimensionnel dont les champs ne dépendent que de la profondeur, i.e. de l'abscisse  $z$ . Le champ de contraintes ne comporte que deux composantes indépendantes.  $\sigma_V(z, t)$  (resp.  $\sigma_H(z, t)$ ) représente la composante verticale (resp. horizontale) du tenseur des contraintes.

### 1.2.2 Résolution

Avant de déterminer la valeur des champs  $\underline{u}^{sq}(z, t)$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(z, t)$ , on s'intéresse tout d'abord à l'évolution de la hauteur  $H(t)$  du massif en fonction du taux d'apport de masse  $\dot{M}_d$  qui, on le rappelle, est une donnée du problème. Tout d'abord, l'expression du taux d'apport

de masse de squelette s'obtient par dérivation de (1.1) ce qui conduit à:

$$\dot{M}_d = \dot{H} \rho(H(t), t) + \int_0^{H(t)} \frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} dz \quad (1.11)$$

Si  $\rho_o$  désigne la masse volumique initiale du matériau sédimentaire, c'est à dire la masse volumique à l'instant où les sédiments se déposent à la surface supérieure du bassin, on aura à chaque instant  $t$

$$\rho_o = \rho(H(t), t) \quad (1.12)$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le fait de négliger les variations de  $\rho(z, t)$  conduit à la nullité de l'intégrale du membre de droite de (1.11). Compte tenu de (1.12) l'équation d'évolution de la hauteur du massif au cours du temps se réduit donc à:

$$\dot{H}(t) = \frac{\dot{M}_d}{\rho_o} \quad (1.13)$$

Si on suppose que le taux d'apport de masse, par unité de surface, est constant, cette équation traduit que, sous l'hypothèse des petites perturbations, la hauteur  $H(t)$  du massif est une fonction linéaire de l'apport de masse de sédiments  $M_d(t)$ .

### Élasticité

Compte tenu de la condition (1.3) et de la forme du champ de contraintes (1.10), l'intégration de la composante suivant  $\underline{e}_z$  de l'équation d'équilibre (1.2), dans laquelle on a utilisé  $\rho(z, t) \approx \rho_o$ , conduit à l'expression de la composante verticale du champ de contraintes:

$$\sigma_V(z, t) = \rho_o g (z - H(t)) \quad (1.14)$$

D'après la forme du champ de vitesses (1.9), le taux de déformation eulérien du squelette est donné par:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\partial u}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (1.15)$$

La loi de comportement (1.5) permet alors d'obtenir le taux de contrainte verticale sous la forme:

$$\dot{\sigma}_V = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.16)$$

En remarquant que  $\dot{z} = u(z, t)$ , l'hypothèse des petites perturbations, qui implique  $|u(z, t)| \ll \dot{H}$ , permet d'écrire la dérivée particulière  $\dot{\sigma}_V$  en fonction de  $\dot{H}$  sous la forme:

$$\dot{\sigma}_V = -\rho_o g \dot{H} \quad (1.17)$$

Par identification de (1.16) et (1.17), on obtient une équation différentielle de  $u(z, t)$  dont l'intégration, compte tenu de la condition (1.4), fournit la composante du champ de vitesses:

$$u(z, t) = -\frac{\rho_o g \dot{H}}{\lambda + 2\mu} z \quad (1.18)$$

On en déduit finalement la composante horizontale du champ de contraintes:

$$\sigma_H(z, t) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rho_o g (z - H(t)) \quad (1.19)$$

## Plasticité

Il faut évidemment commencer par déterminer pour quelle hauteur de la couche de sédiments, notée  $H^e$ , le massif entre en plasticité. Cette dernière apparaît en  $z = 0$  pour une hauteur  $H^e$  qui annule le critère (1.8). Elle est donc égale à

$$H^e = \frac{\lambda + 2\mu}{K} \frac{p_c^o}{\rho_o g} \quad (1.20)$$

où  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  est le module de compression.

Il est intéressant de noter que la hauteur  $H^e$  est constante au cours du temps. Sur le plan géométrique, cela signifie que la couche élastique se translate dans le sens des  $z$  positifs, au fur et à mesure que les sédiments se déposent. C'est en fait la zone plastique qui croît, à partir du moment où le massif a commencé à plastifier.

Sur le plan matériel en revanche, une particule passe de l'état élastique à l'état plastique quand elle atteint une profondeur d'enfouissement  $H^e$  (figure 1.4).

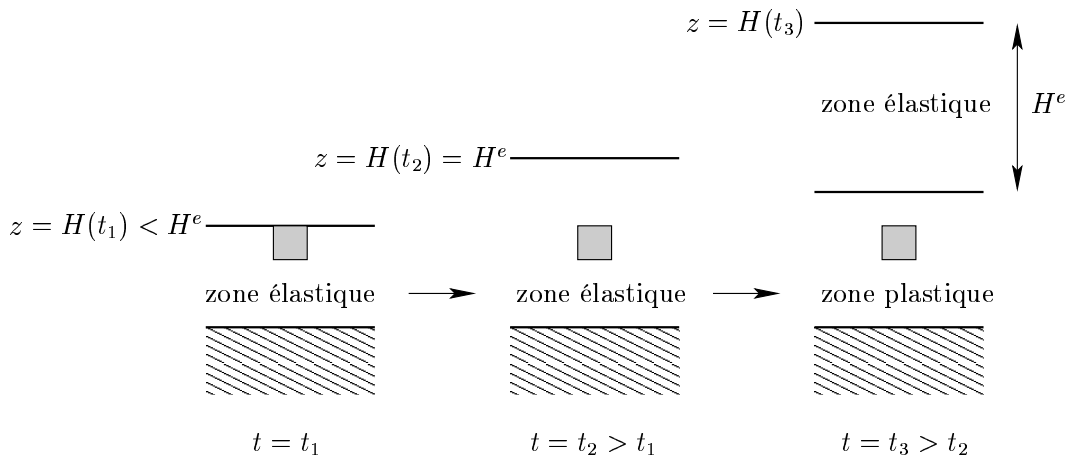


FIG. 1.4: Séparation du massif en une zone élastique et une zone plastique à partir d'une hauteur  $H^e$  de la couche de sédiments, sous l'hypothèse des petites perturbations.

En résumé, à partir de l'instant où la hauteur  $H^e$  est atteinte, le massif se décompose en deux zones élastique et plastique distinctes .

La zone élastique de hauteur  $H^e$  est constante et se trouve à la surface supérieure du massif, i.e. pour  $z \in [H(t) - H^e, H(t)]$ . Dans cette zone les champs de vitesses et de contraintes donnés par (1.18), (1.14) et (1.19) sont toujours valables. La zone plastique correspond alors à l'ensemble des particules d'abscisses  $z \in [0, H(t) - H^e]$ .

On s'intéresse maintenant à la solution dans cette zone plastique.

La valeur du taux de déformation plastique est donnée par (1.6), où le multiplicateur plastique dans le cas d'un module d'écouissage constant est égal à  $\dot{\lambda} = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ .

D'après la forme du critère défini en (1.8), le taux de déformation plastique s'écrit:

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}}{9m} \underline{\underline{1}} \tag{1.21}$$

La loi d'évolution fournit donc les deux équations scalaires en vitesse:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_V &= (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dz} - \frac{K}{3m} \text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \\ \dot{\sigma}_H &= \lambda \frac{du}{dz} - \frac{K}{3m} \text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \end{cases} \tag{1.22}$$

Compte tenu de l'égalité  $\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \dot{\sigma}_V + 2\dot{\sigma}_H$ , les équations (1.22) permettent d'obtenir l'expression de la contrainte moyenne en fonction  $\frac{du}{dz}$  sous la forme:

$$\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left( \frac{3K}{1 + \frac{K}{m}} \right) \frac{du}{dz} \tag{1.23}$$

L'équation (1.17) étant encore valable en plasticité, la combinaison de la première équation de (1.22) avec (1.23) permet de déterminer complètement  $\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  qui s'écrit maintenant:

$$\text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left( \frac{3K m}{K^2 - (\lambda + 2\mu)(m + K)} \right) \rho_o g \dot{H} \tag{1.24}$$

La substitution de (1.23) et (1.24) dans l'expression de  $\dot{\sigma}_H$  de (1.22) nous permet finalement d'obtenir

$$\dot{\sigma}_H = - \left( \frac{\lambda - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}}}{\lambda + 2\mu - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}}} \right) \rho_o g \dot{H} \tag{1.25}$$

Pour intégrer cette équation, il faut distinguer la phase élastique du massif de sa phase plastique. Pour cela on définit  $T^e(z, t)$  qui correspond à l'instant où la particule située

actuellement en  $z$  ( $z \in [0, H(t) - H^e]$ ) se trouvait à la frontière entre la zone élastique et la zone plastique. On rappelle que  $T(z, t)$  est l'instant où la particule, située en  $z$  à l'instant  $t$ , s'est déposée sur la surface supérieure du massif. On intègre donc successivement sur les intervalles  $[T(z, t), T^e(z, t)]$  et  $[T^e(z, t), t]$ .

En utilisant les approximations  $H(T^e(z, t)) \approx z + H^e$  et  $H(T(z, t)) \approx z$ , on obtient la solution complète du problème avec :

$$\sigma_H(z, t) = \left( \frac{\lambda - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}}}{\lambda + 2\mu - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}}} \right) \rho_0 g (z + H^e - H(t)) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rho_0 g H^e \quad (1.26)$$

pour  $z < H - H^e$ .

La figure 1.5 présente le profil de la contrainte horizontale dans un bassin d'une hauteur de  $6000m$ . Le matériau sédimentaire élastique linéaire est caractérisé par son module d'Young  $E = 100MPa$  et son coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ . Le module d'écroutissage est choisi égal à  $m = 100MPa$ , tandis que la pression de consolidation initiale est  $p_c^0 = 1MPa$ .

Pour la masse volumique du solide et pour la porosité, on utilise les valeurs calculées par Hamilton [44]. On a alors  $\rho^s = 2.31 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$  et  $\phi_0 = 0.72$ , ce qui conduit à une valeur de la masse volumique apparente en surface égale à  $\rho_0 = \rho^s(1 - \phi_0) = 0.6468 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$ . La vitesse d'apport de sédiments est constante et égale à  $\dot{M}_d = 2.05 \cdot 10^{-9} kg.s^{-1}$ , ce qui correspond à  $100m$  par million d'années (par unité de surface) en l'absence de pesanteur, donc de compaction.

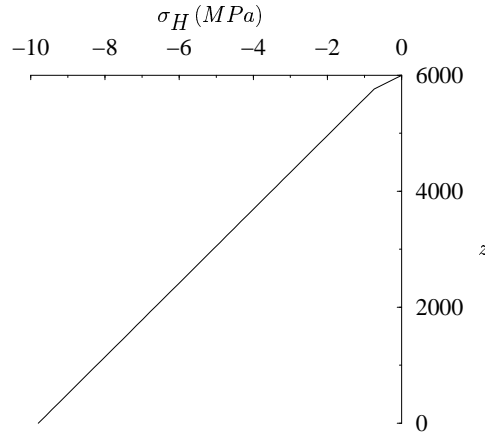


FIG. 1.5: *Contrainte horizontale en fonction de la profondeur.*

La discontinuité de la pente du profil de  $\sigma_H$ , observée sur la figure 1.5, correspond à la limite entre la zone plastique et la zone élastique.

## 1.3 Modélisation en transformation finie.

### 1.3.1 Position du problème.

#### Configuration de référence et gradient de transformation

On s'intéresse maintenant au même problème que l'on pose dans le cadre des transformations finies. Le fait de se placer dans le cadre des grandes transformations ne modifie pas les symétries géométriques et matérielles de notre système. On garde donc dans cette section la structure du champ eulérien des vitesses et du tenseur des contraintes telle que nous l'avons définie en (1.9) et (1.10).

La description du problème en grande transformation nécessite de définir le gradient de la transformation  $\underline{F}$ . Comme nous l'avons rappelé à la section 1.1.2, ce dernier nécessite la connaissance d'une configuration initiale prise comme référence.

Or, la spécificité de ce problème, basée sur l'apport continu de matériau sédimentaire sur la limite supérieure du bassin, ne permet pas de définir une configuration de référence pour le système matériel dans son ensemble. En revanche, il est possible d'en définir une pour chaque particule. Par définition, cette configuration correspond à l'état dans laquelle se trouve la particule lorsqu'elle se dépose au sommet de la couche.

Relativement à cette configuration de référence, on introduit la notion de dilatation. La dilatation verticale  $\Lambda$  sera alors le rapport entre la hauteur de la particule dans sa configuration actuelle, et sa hauteur dans son état de référence (voir figure 1.6). On va donc noter  $\Lambda(z, t)$  la dilatation verticale d'une particule située en  $z$  à l'instant  $t$ . Cette nouvelle

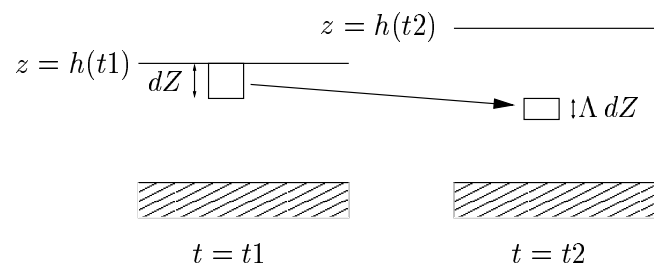


FIG. 1.6: *évolution de la dilatation verticale*

variable conduit à une nouvelle condition à la surface supérieure du massif, qui s'ajoute aux conditions (1.3) et (1.4), toujours valables dans la présente étude. Celle-ci traduit le fait que la dilatation est initialement égale à l'unité et s'écrit donc:

$$\Lambda(H(t), t) = 1 \quad (1.27)$$

La dilatation ainsi définie, on peut maintenant introduire le gradient de transformation. Il décrit l'évolution d'une particule entre l'état de référence et l'instant actuel et s'écrit :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \Lambda \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (1.28)$$

Dans le cadre de ce problème, on notera qu'exceptionnellement  $\underline{\underline{F}}$  et  $\Lambda$  possèdent le statut de champs eulériens de par leur argument  $z$ , même si leur structure est lagrangienne.

### Comportement.

Dans le cadre des grandes déformations, nous avons montré à la section (2.4), que le comportement du matériau est décrit par l'équation (2.19). Compte tenu du caractère unidimensionnel de notre problème, on constate que le taux de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}$  est nul. L'élasticité est linéaire, homogène, isotrope, et la règle d'écoulement plastique est associée. La loi de comportement va donc s'écrire sous la forme:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{d}} - \lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu (\underline{\underline{d}} - \lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) \quad (1.29)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du squelette et  $\underline{\underline{1}}$  est le tenseur identité d'ordre 2. Le critère  $f(\underline{\underline{\sigma}})$  est à nouveau le critère volumique défini en (1.8).

### 1.3.2 Résolution

Comme dans le cas des petites perturbations (H.P.P.), on commence tout d'abord par regarder la façon dont la hauteur  $H(t)$  du massif varie en fonction de l'apport de masse  $M_d(t)$ .

Compte tenu de la forme du champ eulérien des vitesses (1.9), l'expression eulérienne de conservation de la masse de squelette

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(z, t) + \operatorname{div}(\rho(z, t) \underline{u}^{sq}(z, t)) = 0 \quad (1.30)$$

va ici se réduire à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1.31)$$

Par la combinaison de (1.11) et (1.31), on obtient alors l'équation différentielle suivante:

$$\dot{H}(t) = \frac{\dot{M}_d}{\rho_0} + u(H(t), t) \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \rho(H(t), t) \quad (1.32)$$

On remarque que, contrairement à (1.13), l'évolution de la hauteur du massif dans le cas des grandes transformations n'est plus une fonction linéaire de  $M_d(t)$ . En effet, l'équation (1.32) laisse apparaître un terme correctif, qui correspond à la composante verticale du

champ eulérien des vitesses d'une particule, située sur la surface supérieure du bassin, à l'instant  $t$ .

La résolution du problème H.P.P. ne nécessitait que l'intervention de trois équations scalaires provenant classiquement de l'équation d'équilibre et de la loi de comportement.

Du fait de l'introduction d'une nouvelle inconnue, à savoir la dilatation  $\Lambda$ , il est nécessaire de rajouter une équation supplémentaire. Cette nouvelle équation découle de la relation définie en (1.10), entre le gradient eulérien des vitesses et  $\underline{\dot{E}}$ . On obtient ainsi une équation cinématique, qui d'après la forme du taux de déformation (1.11) conduit à:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (1.33)$$

Dans le cadre des grandes transformations, les variations de la masse volumique du squelette ne sont plus négligeables. Ceci entraîne que la forme de l'équation d'équilibre (1.2) va être modifiée.

La conservation de la masse d'un volume élémentaire de squelette s'écrit naturellement

$$\rho(z, t)d\Omega_t = \rho_o d\Omega_o \quad (1.34)$$

où  $d\Omega_t$  désigne le volume élémentaire d'une particule de squelette initialement égal à  $d\Omega_o$ . D'après la formule de transport définie en (1.8), on obtient la relation:

$$\rho(z, t) = \frac{\rho_o}{J} \quad (1.35)$$

L'équation d'équilibre va donc pouvoir s'écrire sous la forme:

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}(z, t) = -\frac{\rho_o \underline{g}}{J} \quad (1.36)$$

D'après la forme du critère (1.8), la règle d'écoulement plastique est toujours donnée par (1.21):

$$\dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\text{tr} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}}{9m} \underline{\underline{1}} \quad (1.37)$$

On rappelle que le module d'écroutissage  $m$  est choisi constant et positif.



### Détermination du champ de contraintes et de la dilatation verticale.

En remarquant que  $J = \det \underline{\underline{F}} = \Lambda$ , la combinaison de (1.36), (1.33), (1.29) et (1.37) conduit aux systèmes d'équations

$$\begin{array}{l} \text{phase} \\ \text{(a)} \\ \text{élastique} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_V = (\lambda + 2\mu) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_H = \lambda \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{phase} \\ \text{(b)} \\ \text{plastique} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_V = \left( \lambda + 2\mu - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}} \right) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_H = \left( \lambda - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}} \right) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \end{array} \right. \quad (1.38)$$

dans lesquels les inconnues sont la dilatation verticale  $\Lambda(z, t)$ , la contrainte horizontale  $\sigma_H(z, t)$  et la contrainte verticale  $\sigma_V(z, t)$ .

En utilisant les mêmes intervalles de temps que ceux introduits à la section 1.2.2, l'intégration par rapport au temps  $t$  des systèmes d'équations (1.38(a)) et (1.38(b)), respectivement pour  $t \in [T(z, t), T^e(z, t)]$  et  $t \in [T^e(z, t), t]$ , conduit aux résultats :

- $z \in [H(t) - H^e, H(t)]$  (phase élastique)

$$\sigma_H(z, t) = \lambda \ln \Lambda(z, t) \quad \text{avec} \quad \Lambda(z, t) = 1 + \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} (z - H(t)) \quad (1.39)$$

- $z \in [0, H(t) - H^e]$  (phase plastique)

$$\sigma_H(z, t) = \left( \lambda - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}} \right) \ln \Lambda(z, t) + \left( K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}} \right) \ln \left( 1 - \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} H^e \right) \quad (1.40)$$

$$\Lambda(z, t) = 1 + \frac{1}{A} \rho_0 g (z + H^e - H(t)) - \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} H^e \quad \text{avec} \quad A = \lambda + 2\mu - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}} \quad (1.41)$$

On notera que  $H^e$ , qui correspond à la hauteur de la couche de sédiments pour laquelle apparaît la plasticité, est obtenue à partir de la solution élastique, en résolvant l'équation  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ . Partant alors de l'état initial  $H(t = 0) = 0$ , la plasticité apparaît en  $z = 0$  pour une valeur de  $H^e$  égale à :

$$H^e = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0 g} \left( 1 - \exp \left( -\frac{p_c^0}{K} \right) \right) \quad (1.42)$$

où  $p_c^0$  est la valeur initiale de la pression de consolidation.

Comme dans le cas H.P.P., la hauteur  $H^e$  est constante au cours du temps.

### Détermination du champ de vitesses et de la hauteur du massif

Pour déterminer la fonction  $H(t)$ , c'est-à-dire la loi de compaction, qui décrit l'évolution de la hauteur du massif au cours du temps, on doit résoudre l'équation différentielle (1.32). Pour cela, il apparaît qu'il est nécessaire de connaître la valeur du champ de vitesses  $\underline{u}^{sq}(z, t)$  sur la surface supérieure délimitée par  $H(t)$ . On se propose donc, ici, de déterminer la forme de  $\underline{u}^{sq}(z, t)$  dans tout le massif, ce qui nous permettra finalement d'obtenir la fonction  $H(t)$ .

On s'intéresse tout d'abord à la zone plastique, i.e.  $z \in [0, H(t) - H^e]$ . Le champ de vitesses  $\underline{u}^{sq}(z, t)$  s'obtient à partir de la relation cinématique (1.33). Pour des raisons de lisibilité, on écrit la dilatation verticale dans la zone plastique sous la forme:

$$\Lambda(z, t) = A^p (z + H^e - H(t)) + B^p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A^p = \rho_0 g / A \\ B^p = 1 - \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} H^e = \exp\left(-\frac{p_c^o}{K}\right) \end{cases} \quad (1.43)$$

En dérivant par rapport au temps l'expression (1.43), où l'on a  $\dot{z} = u(z, t)$ , on peut écrire la relation cinématique (1.33) sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{A^p (u(z, t) - \dot{H}(t))}{\Lambda(z, t)} \quad (1.44)$$

En intégrant (1.44), il vient:

$$u(z, t) = K^p \Lambda(z, t) + \dot{H}(t) \quad (1.45)$$

où  $K^p$  est une constante d'intégration qui, d'après la condition (1.4), est égale à:

$$K^p = -\frac{\dot{H}}{\Lambda(0, t)} \quad (1.46)$$

On obtient finalement la forme du champ de vitesses dans la zone plastique

$$u(z, t) = \dot{H} \left[ 1 - \frac{A^p (z + H^e - H(t)) + B^p}{A^p (H^e - H(t)) + B^p} \right] \quad ; \quad z \in [0, H(t) - H^e] \quad (1.47)$$

On procède de la même façon pour déterminer la forme du champ de vitesses dans la zone élastique. La constante d'intégration est obtenue par la continuité de  $u$  à l'interface entre les zones élastique et plastique. Si on pose

$$\Lambda(z, t) = 1 + A^e (z - H(t)) \quad \text{avec} \quad A^e = \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} \quad (1.48)$$

la composante  $u$  du champ de vitesses dans la zone élastique est finalement égale à:

$$u(z, t) = \dot{H} \left[ 1 - \frac{1 + A^e (z - H(t))}{A^p (H^e - H(t)) + B^p} \right] \quad ; \quad z \in [H(t) - H^e, H(t)] \quad (1.49)$$

Le champ de vitesses étant connu dans tout le massif, on a en particulier

$$u(H(t), t) = \dot{H} \left[ 1 - \frac{1}{A^p (H^e - H(t)) + B^p} \right] \quad (1.50)$$

qui permet d'écrire l'équation différentielle (1.32) sous la forme intégrable:

$$\dot{H}(t) + \frac{\dot{M}_d}{\rho_o} A^p H(t) - \frac{\dot{M}_d}{\rho_o} (A^p H^e + B^p) = 0 \quad (1.51)$$

Cette équation admet  $H(t) = \frac{(A^p H^e + B^p)}{A^p}$  comme solution particulière qui, cumulée à la condition initiale  $H(t = 0) = 0$ , conduit à l'expression finale de  $H(t)$ :

$$H(t) = \frac{A^p H^e + B^p}{A^p} \left( 1 - \exp \left( -\frac{A^p \dot{M}_d t}{\rho_o} \right) \right) \quad (1.52)$$

D'après la solution (1.52), il apparaît que la courbe de compaction d'équation  $H(t)$  présente une asymptote égale à:

$$H_{asympt} = H^e + \frac{B^p}{A^p} = \frac{1}{\rho_o g} \left( \lambda + 2\mu - K \frac{\frac{K}{m}}{1 + \frac{K}{m}} \right) + \frac{K^2}{(\lambda + 2\mu)(m + K)} H^e \quad (1.53)$$

D'après (1.43), lorsque  $H(t)$  tend vers cette valeur asymptotique, la dilatation tend vers zéro à la base de la couche.

## Comparaisons des résultats et conclusions

On propose maintenant de comparer ces résultats à ceux obtenus dans le cadre des petites perturbations.

Sans se soucier pour l'instant de valeurs numériques, une première différence fondamentale apparaît de par la nature même des lois de compaction  $H(t)$ . En effet, quelque soit la valeur du module d'écouissage ( $\forall m \in [0, \infty]$ ), la courbe  $H(t)$  présente une valeur asymptotique dans le cadre des transformations finies, tandis qu'en H.P.P. celle-ci est une fonction linéaire du temps. Le fait que cette remarque soit valable pour toute valeur du module d'écouissage, signifie que l'existence de cette valeur asymptotique n'est pas propre à la plasticité mais, plus généralement, à la transformation finie.

En choisissant les mêmes valeurs numériques que celles utilisées à la section 1.2.2, les courbes de compaction présentées figure 1.7 montrent que l'approche H.P.P. prédit par construction une compaction nulle, tandis que l'approche en transformations finie laisse

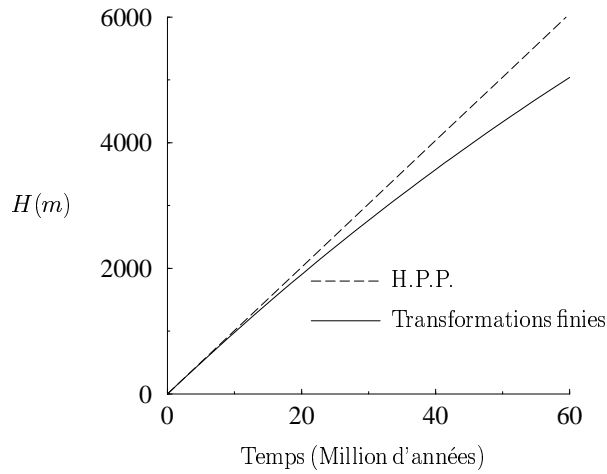


FIG. 1.7: *Évolution de la hauteur du massif au cours du temps.*

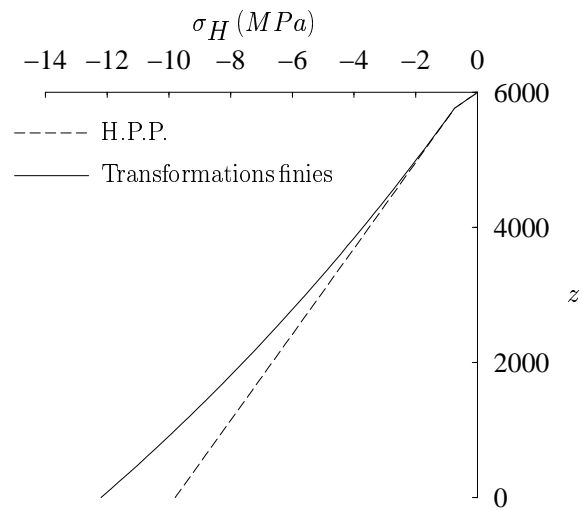


FIG. 1.8: *Contrainte horizontale en fonction de la profondeur*

entrevoir une compaction du bassin de l'ordre de 16% au bout de 6 millions d'années.

La figure 1.8 présente une comparaison de l'évolution de la contrainte horizontale en fonction de la profondeur. Il apparaît clairement que le calcul H.P.P. sous estime la valeur de cette contrainte par rapport à celle obtenue par le calcul en transformation fine.

Ces premiers résultats simples montrent l'importance de la prise en compte des grandes transformations dans l'étude d'un problème tel que la compaction des bassins sédimentaires.

Cependant, ces solutions montrent également que sous la condition œdométrique, le critère simplifié (1.8) peut, dans certains cas, présenter des incohérences avec l'hypothèse d'élasticité infinitésimale.

L'origine du problème réside dans la condition de déformation horizontale nulle  $d_{xx} = 0$ .

En fait, supposer que la déformation horizontale est infinitésimale nécessite que la déformation plastique horizontale le soit aussi. Or, d'après (1.37), la déformation plastique verticale ainsi que la déformation verticale totale devraient être également infinitésimales. A l'opposé, la règle d'écoulement (1.37) et la condition requise  $d_{xx} = 0$  impliquent qu'une grande déformation plastique verticale négative soit associée à une grande déformation plastique horizontale négative et à une grande déformation élastique horizontale positive. A son tour, cette dernière implique que des contraintes horizontales positives (tractions) apparaissent durant la compaction, ce qui n'est évidemment pas acceptable dans ce problème. En fait, (1.40) montre que le taux de contrainte  $\dot{\sigma}_H$  est positif si  $\frac{m}{E} < \frac{1}{9\nu}$ .

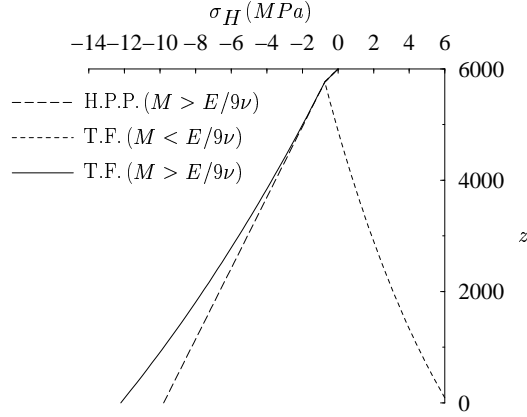


FIG. 1.9: Apparition d'une contrainte horizontale de traction pour  $m = 20\text{MPa} \leq E/9\nu$

### 1.3.3 Introduction d'une partie déviatorique dans le critère de plasticité

D'un point de vue mathématique, l'apparition de contraintes horizontales de traction vient du fait que (1.37), qui est une règle d'écoulement sphérique, couple de façon impropre les taux de déformations horizontale et verticale. De façon à s'affranchir de ce problème, on doit introduire une déformation plastique déviatorique dans la règle d'écoulement. Comme cette dernière est associée, ceci nécessite d'introduire la contrainte déviatorique dans le critère de plasticité. Par conséquent, nous remplaçons la partie verticale du critère par une partie inclinée (voir figure 1.10).

Le critère va donc s'écrire :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p_c) = -\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} - p_c + a\sqrt{J_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\sigma}}^d \\ \underline{\underline{\sigma}}^d = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}} \end{cases} \quad (1.54)$$

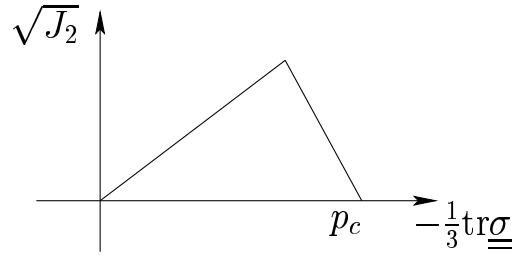


FIG. 1.10: Critère de plasticité comprenant une partie déviatorique

où  $a$  est une constante positive et  $\underline{\underline{\sigma}}^d$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

L'introduction d'un nouveau critère ne modifie pas l'équation d'équilibre (1.36) et la relation cinématique (1.33). La solution élastique reste identique à celle obtenue en (1.39). En revanche, le nouveau critère implique une modification de la hauteur  $H^e$ , qui dépend directement de la forme du critère de plasticité. On aura donc dans le cas présent:

$$H^e = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0 g} \left( 1 - \exp \left( -\frac{p_c^0}{K + \frac{2\mu a}{3}} \right) \right) \quad (1.55)$$

Pour déterminer le champ de contraintes dans la zone plastique, on utilise à nouveau la loi de comportement (1.29). On doit donc calculer l'expression de (1.37) qui comporte maintenant une partie déviatorique. En remarquant que la condition de cohérence  $\dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  conduit, d'après (3.5), à l'égalité

$$\dot{p}_c = \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (1.56)$$

(1.37) s'écrit maintenant:

$$\dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\dot{p}_c}{m} \left( -\frac{1}{3} \underline{\underline{1}} + \frac{a}{2\sqrt{J_2}} \underline{\underline{\sigma}}^d \right) \quad (1.57)$$

Il nous reste alors à exprimer  $\dot{p}_c$  en fonction de  $\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$  pour que la loi de comportement nous fournisse des équations similaires à celles du système (1.38), conduisant ainsi à la solution du problème.

Tout d'abord, la relation (1.56) s'écrit encore :

$$\dot{p}_c = -\frac{1}{3} \text{tr} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - a \frac{\sqrt{3}}{3} \dot{s} \quad ; \quad s = \sigma_V - \sigma_H \quad (1.58)$$

où les termes  $-\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  et  $\dot{s}$  peuvent être calculés, d'après la loi de comportement (1.29), en fonction de  $\dot{p}_c$  et  $\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$ :

$$-\frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = -K \left( \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \frac{\dot{p}_c}{m} \right) \quad \text{et} \quad \dot{s} = 2\mu \left( \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \frac{\dot{p}_c}{m} a \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (1.59)$$

La combinaison de (1.58) et (1.59) conduit alors à l'expression recherchée:

$$\frac{\dot{p}_c}{m} = G \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad \text{avec} \quad G = -\frac{K + \frac{2}{3}\mu a \sqrt{3}}{m + K + \mu a^2} \quad (1.60)$$

En utilisant dans la loi de comportement (1.29), la relation (1.33) ainsi que (1.57) et (1.60), on aboutit finalement au système d'équations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_V = \left[ \lambda(1+G) + 2\mu \left( 1 + \frac{G}{3}(1+a\sqrt{3}) \right) \right] \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_H = \left[ \lambda(1+G) + \frac{2\mu}{3} G \left( 1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \right] \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \end{cases} \quad (1.61)$$

Pour que l'hypothèse d'élasticité infinitésimale reste toujours valable, la contrainte horizontale doit toujours être une contrainte de compression. Étant donné que le rapport  $\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$  est négatif, la résolution de l'inéquation  $\dot{\sigma}_H \leq 0$  conduit à trois domaines de validité pour  $a$ . Ces derniers sont fonctions des propriétés élastiques du matériau rapportées au module d'écroutissage.

1. si  $M \in [\frac{E}{9\nu}, \frac{E}{8\nu}]$  alors  $a \in [0, a^-] \cup [a^+, +\infty]$
2. si  $M \in [0, \frac{E}{9\nu}]$  alors  $a \in [a^+, +\infty]$  car  $a^- < 0$
3. si  $M \geq \frac{E}{8\nu}$  alors  $\dot{\sigma}_H$  est toujours négative quelque soit  $a$

où  $a^+$  et  $a^-$  sont égaux à:

$$a_{\pm}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{1-8x}{3}} \right) \quad \text{avec} \quad x = \frac{9\nu M}{E} - 1 \quad (1.62)$$

On remarque que, pour les cas 1 et 3,  $a$  peut prendre la valeur nulle ce qui nous ramène au critère volumique utilisé précédemment. De plus, le domaine de validité 3 montre que si

le matériau qui sédimente est assez raide, l'utilisation de ce même critère restera toujours valable.

L'intégration par rapport au temps des équations du système (1.61), respectivement pour  $t \in [T(z, t), T^e(z, t)]$  et  $t \in [T^e(z, t), t]$  conduit aux résultats :

- $z \in [H(t) - H^e, H(t)]$  (phase élastique)

$$\sigma_H(z, t) = \lambda \ln \Lambda_V(z, t) \quad \text{avec} \quad \Lambda_V(z, t) = 1 + \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} (z - H(t)) \quad (1.63)$$

- $z \in [0, H(t) - H^e]$  (phase plastique)

$$\Lambda_V(z, t) = 1 + \frac{\rho_0 g}{A_V} (z + H^e - H(t)) - \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} H^e \quad (1.64)$$

$$\sigma_V(z, t) = A_V \ln \Lambda_V(z, t) + (\lambda + 2\mu - A_V) \ln\left(1 - \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} H^e\right) \quad (1.65)$$

$$\sigma_H(z, t) = A_H \ln \Lambda_V(z, t) + (\lambda - A_H) \ln\left(1 - \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} H^e\right) \quad (1.66)$$

où

$$A_H = \lambda(1 + G) + 2\mu \frac{G}{3} \left(1 - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \quad A_V = \lambda(1 + G) + 2\mu \left(1 + \frac{G}{3}(1 + a\sqrt{3})\right) \quad (1.67)$$

En gardant les mêmes données que précédemment, ces résultats sont illustrés sur la figure 1.11, où l'on a choisit un module d'écroutissage égale à  $1MPa$ .

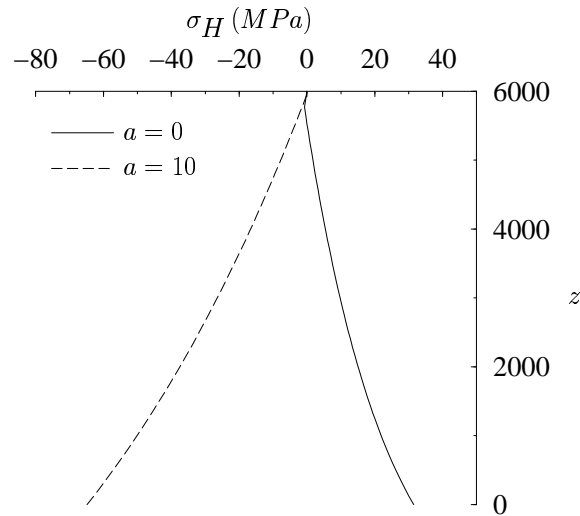


FIG. 1.11: Comparaison du profil des contraintes horizontales pour  $m \in [0, E/9\nu]$

L'expression de  $u(z, t)$  résulte de l'intégration de (1.33) dans chaque phase. L'évolution



de  $H(t)$  sera alors obtenu par la résolution de (1.32), ce qui achève la résolution du problème. La forme de  $H(t)$  est obtenue en substituant  $A_V$  à  $A$  dans  $A^p$  qui intervient dans l'expression de (1.52). On a donc

$$H_{asymp} = H^e \left(1 - \frac{A_V}{\lambda + 2\mu}\right) + \frac{A_V}{\rho_o g} \quad (1.68)$$

### 1.3.4 Prise en compte du couplage élasticité-plasticité.

Dans tous les développements qui précèdent, nous nous sommes intéressés au problème de la compaction des bassins sédimentaires en transformation finie, sans prendre en compte l'influence que peuvent avoir ces grandes déformations, sur les propriétés élastiques de notre matériau.

Dans cette section, on propose une mise en œuvre pratique du chapitre 1, dans le problème de la compaction de bassins sédimentaires.

Comme nous l'avons démontré au chapitre 1, la prise en compte du couplage élasticité-plasticité sous la forme  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(J)$  (par le biais de l'incompressibilité du solide qui lie  $J$  à  $\phi_R$ ) revient à rajouter un terme complémentaire dans (1.29).

L'équation d'équilibre (1.2) ainsi que la loi de compaction (1.32) restent inchangées. Il en est de même pour la relation cinématique (1.33).

L'équation d'équilibre s'écrit maintenant:

$$\underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \text{tr} \underline{\underline{d}} \overline{\mathbf{C}}(J) : \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C} : \left( \underline{\underline{d}} - \lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad (1.69)$$

avec

$$\overline{\mathbf{C}}(J) = -J \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial J} : \mathbf{C}^{-1} \quad (1.70)$$

On considère à nouveau que le matériau solide constitutif est isotrope, et que les pores sont des inclusions sphériques. Dans ces conditions, le tenseur de modules d'élasticité est isotrope, et peut être estimé par la borne supérieure de Hashin-Shtrikman. Il peut donc s'écrire

$$\mathbf{C} = 3K(J)\mathbf{J} + 2\mu(J)\mathbf{K} \quad (1.71)$$

où  $K(J)$  et  $\mu(J)$  sont de la forme déjà rencontrée en (1.40).

Dans toute la suite, on omettra de faire apparaître la dépendance en  $J$  des coefficients de Lamé pour simplifier l'écriture des équations.

Le terme supplémentaire introduit par le couplage peut alors s'écrire

$$\text{tr} \underline{\underline{C}}(J) : \underline{\underline{\sigma}} = -\dot{\Lambda} (\overline{K}(J) \mathbf{J} + \overline{\mu}(J) \mathbf{K}) : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{K}(J) = \frac{1}{K} \left( \frac{\partial K}{\partial J} \right) \\ \overline{\mu}(J) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial J} \right) \end{cases} \quad (1.72)$$

### Résolution

Par définition, on a  $\mathbf{J} : \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{1}$  et  $\mathbf{K} : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{1}$ . L'équation d'équilibre et le comportement nous amènent à un système de trois équations différentielles avec pour inconnues  $\Lambda(z, t)$ ,  $\sigma_H(z, t)$ ,  $\sigma_V(z, t)$ . Dans le cas du critère incliné introduit en (1.54), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_H = f_H \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \\ \dot{\sigma}_V = f_V \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \end{cases} \quad (1.73)$$

avec

$$\begin{cases} f_V = \lambda(1+G) + 2\mu \left( 1 + \frac{G}{3}(1+a\sqrt{3}) \right) + \frac{1}{3} \overline{K}(J) \Lambda \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{2}{3} \overline{\mu}(J) \Lambda (\sigma_V - \sigma_H) \\ f_H = \lambda(1+G) + \frac{2\mu}{3} G \left( 1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{3} \overline{K}(J) \Lambda \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{3} \overline{\mu}(J) \Lambda (\sigma_V - \sigma_H) \end{cases} \quad (1.74)$$

Sur le trajet monotone particulier en question, le champ de contraintes dépend de  $z$  et de  $t$ , par l'intermédiaire direct de la dilatation,

$$\underline{\underline{\sigma}}(z, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\Lambda(z, t)) \quad (1.75)$$

on peut ramener le système différentiel (1.73), à un système différentiel qui ne dépend que de la variable d'espace  $z$  à un instant donné.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \frac{\partial \sigma_H}{\partial z} = \frac{f_H}{f_V} \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{f_V} \end{cases} \quad (1.76)$$

Pour une configuration donnée du système, correspondant à une valeur donnée de  $H(t)$ , ce système peut être résolu numériquement (calculs effectués avec le logiciel Maple), donnant pour l'instant  $t$  considéré, les fonctions  $\sigma_H(z, t)$ ,  $\sigma_V(z, t)$  et  $\Lambda(z, t)$ . Cependant, la loi de compaction  $t \rightarrow H(t)$  est encore inconnue à ce stade.

D'après (1.32), cette dernière nécessite de se pencher sur la cinématique, c'est-à-dire le champ des vitesses.

Pour déterminer  $u(z, t)$ , qui est l'unique composante non nulle du champ eulérien des vitesses, on utilise la relation cinématique (1.33), dans l'équation du système (1.73), faisant intervenir  $\dot{\sigma}_V$ . On a donc:

$$\dot{\sigma}_V = f_V \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.77)$$

Or on remarque que  $\dot{\sigma}_V$  est en fait statiquement déterminé: il peut être calculé indépendamment de la loi de comportement. En effet la contrainte verticale, au point d'abscisse  $z$ , due au poids des sédiments contenus entre  $z$  et  $H(t)$ , par unité de surface, est égale à l'intégrale:

$$\sigma_V(z, t) = - \int_z^{H(t)} \rho(\eta, t) g d\eta \quad (1.78)$$

En calculant la dérivée particulière de (1.78), il vient tout de suite:

$$\dot{\sigma}_V = \rho(z, t) g u(z, t) - \rho_o g \dot{H}(t) - \int_z^{H(t)} \frac{\partial \rho(\eta, t)}{\partial t} g d\eta \quad (1.79)$$

Compte tenu de l'expression eulérienne de la loi de conservation de la masse, sous la forme scalaire (1.31), et de la loi de compaction (1.32), on obtient :

$$\dot{\sigma}_V = -\dot{M}_d g \quad (1.80)$$

La combinaison de (1.77) et (1.80) conduit à une nouvelle équation qui nous permet de calculer  $u(z, t)$  en tenant compte de la condition de déplacement vertical nul (1.4), sur la surface du substratum rigide, en  $z = 0$ .

On peut maintenant intégrer l'équation (1.32), ce qui conduit à la fonction  $H(t)$ , et achève la résolution du problème.

### Résultats et conclusions.

On propose ici, de comparer les résultats obtenus en tenant compte, ou non, du couplage élasticité plasticité. Le matériau étudié est isotrope, élastique linéaire, de module d'Young  $E = 100MPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ . Le module d'écrouissage est égal à  $m = 35MPa$ , tandis que la pression de consolidation initiale est considérée comme nulle,

de façon à ce que le massif soit dans un état complètement plastique. Pour éviter les problèmes mis en évidence à la section (1.3.2), on choisit de poser  $a = 1$  dans le critère (1.54).

Pour la masse volumique du matériau solide constitutif et la porosité, on utilise à nouveau les valeurs calculées par Hamilton [44]. On a donc  $\rho^s = 2.31 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\Phi_o = 0.72$ . Le taux d'apport de masse de sédiments, par unité de surface est encore pris égal à  $\dot{M}_d = 2.05 \cdot 10^{-9} \text{ kg.s}^{-1}$ .

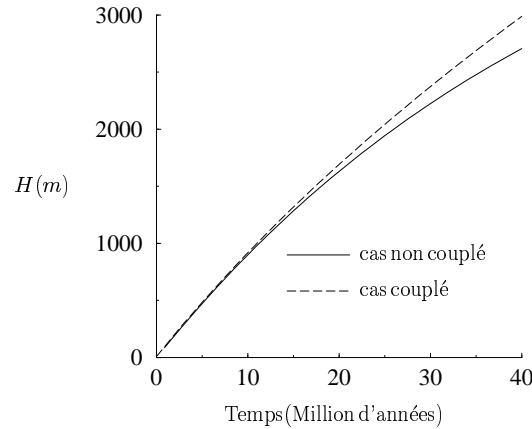


FIG. 1.12: *Comparaison de l'évolution de la hauteur du massif*

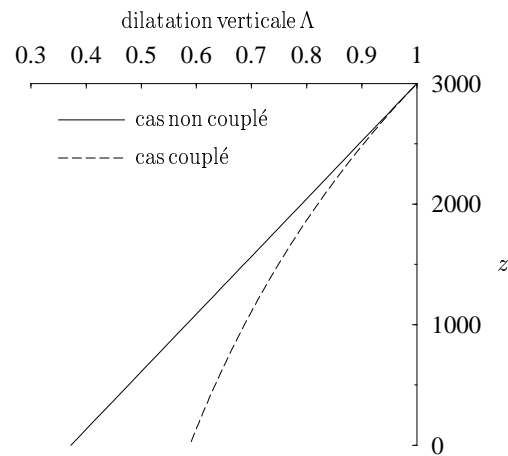


FIG. 1.13: *Comparaison de l'évolution de la dilatation dans le massif*

Sur la figure 1.12 on remarque que la compaction est plus importante dans le cas où l'on ne tient pas compte du couplage. Ce résultat correspond au fait que le couplage élasticité-plasticité engendre un raidissement des modules d'élasticité du matériau qui s'oppose au phénomène de compaction.

Ce résultat est confirmé par la figure 1.13, qui montre des valeurs plus faibles de la dilatation verticale dans le cas où le couplage n'est pas pris en compte. La comparaison

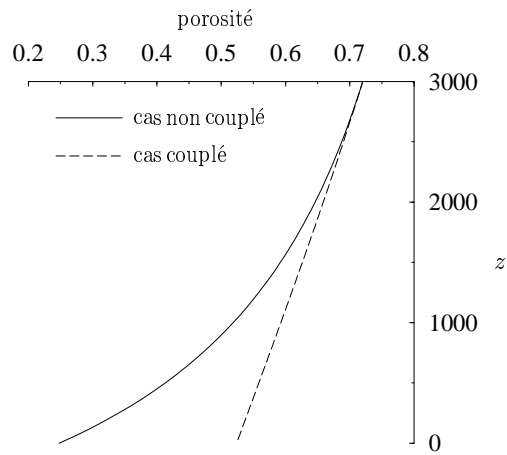


FIG. 1.14: *Comparaison de l'évolution de la porosité dans le massif*

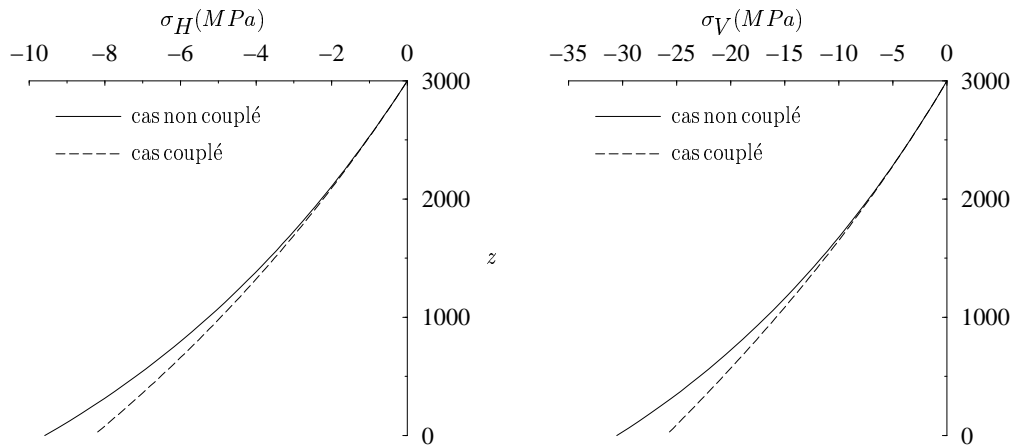


FIG. 1.15: *Comparaison de l'évolution du champ de contraintes dans le massif*

des contraintes présentée sur les figures (1.15), montre que pour deux bassins de hauteurs égales, les contraintes verticale et horizontale prédites sont plus élevées dans le cas non couplé que dans le cas couplé. Ceci est cohérent avec la courbe de compaction (1.12) qui montre que l'obtention d'une certaine hauteur de massif demande plus de temps dans le cas non couplé que dans le cas couplé, du fait de la plus forte compaction. Or, un temps plus élevé correspond à un apport de sédiments plus important. D'après l'expression (1.80), on constate que la contrainte verticale est proportionnelle au taux d'apport de masse. Plus ce dernier est important, plus la contrainte verticale (de compression) sera grande. C'est bien ce résultat qui ressort des courbes de profils de contrainte (1.15).

### 1.3.5 Prise en compte d'un module d'écrouissage variable.

Dans la section (1.2.2), on a montré qu'il existe une valeur asymptotique pour la courbe de compaction. Celle-ci correspond à une dilatation qui tend vers zéro par valeurs supé-

rieures à la surface du substratum rigide en  $z = 0$ . Ceci montre que l'on vérifie bien la condition de positivité du jacobien  $J$ . En revanche, d'après la condition d'incompressibilité plastique (1.11), il apparaît que pour une dilatation verticale  $\Lambda$  inférieure à  $1 - \Phi_o$ , on obtient des valeurs négatives pour la porosité. Or quand tous les pores sont fermés, i.e.  $\Lambda = 1 - \Phi_o$ , l'hypothèse d'élasticité infinitésimale et la condition d'incompressibilité plastique interdisent toute déformation supplémentaire.

Au contraire, d'après la règle d'écoulement (3.6), le choix d'un module d'écrouissage constant implique que la déformation plastique va continuer au delà de la valeur  $1 - \Phi_o$ . Le problème réside dans le fait que notre règle d'écrouissage ( $m = \text{constante}$ ) passe à côté des conséquences de la refermeture des pores.

C'est ce souci qui a conduit aux développements présentés à la section 3.1, relatifs à l'idée d'un module d'écrouissage variable, adapté aux transformations finies et présentant une branche infinie pour  $\Lambda = 1 - \Phi_o$ . D'après (3.6), la branche infinie de la fonction  $m(J)$  pour  $J = 1 - \Phi_o$  interdit alors toute déformation plastique au delà de cette limite.

On se propose donc maintenant d'incorporer les résultats théoriques de la section (3.1), dans la résolution du problème de la compaction d'un bassin sédimentaire.

La résolution du problème se fait à nouveau avec le critère incliné (1.54).

D'après la formule (3.26), il nous est maintenant possible de calculer le module d'écrouissage associé à ce critère. Étant donné que

$$\text{tr} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} = -1 \quad (1.81)$$

et que le jacobien de la transformation est égal à la dilatation verticale, il vient directement

$$m(\Lambda) = -\Lambda \frac{\partial p_c}{\partial \Lambda} \quad \text{avec} \quad p_c(\Lambda) = 2 \sigma_0 \ln\left(1 - \frac{1}{\Lambda}(1 - \Phi_o)\right)^{-1/3} \quad (1.82)$$

On a donc:

$$m(\Lambda) = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{1 - \Phi_o}{\Lambda - 1 + \Phi_o} \quad (1.83)$$

D'après la loi de comportement (1.29), l'équation d'équilibre (1.36) et la relation cinématique (1.33), on obtient un système d'équations de la même forme que (1.61). Il s'agit cependant d'un système dans lequel  $G$  est dépendant de la dilatation, via le module d'écrouissage défini en (1.83).

En procédant de la même manière que dans le cas du couplage élasticité- plasticité de la section précédente, on peut se ramener à un système indépendant du temps qui s'écrit

sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \frac{\partial \sigma_H}{\partial z} = \frac{f_H}{f_V} \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = \frac{\rho_0 g}{f_V} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} f_V(\Lambda) = \lambda(1 + G(\Lambda)) + 2\mu \left( 1 + \frac{G(\Lambda)}{3}(1 + a\sqrt{3}) \right) \\ f_H(\Lambda) = \lambda(1 + G(\Lambda)) + \frac{2\mu}{3} G(\Lambda) \left( 1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \\ G(\Lambda) = -\frac{K + \frac{2}{3}\mu a\sqrt{3}}{m(\Lambda) + K + \mu a^2} \end{array} \right. \quad (1.84)$$

Ce système se résout alors numériquement (calculs effectués avec le logiciel Maple). Compte tenu des équations (1.77) et (1.80), on en déduit la courbe de compaction  $H(t)$

### Résultats et conclusions

Pour mettre en évidence l'influence de la prise en compte d'un écouissage variable, on compare ici la solution analytique (1.64)-(1.67) (écouissage linéaire, module d'écouissage constant), avec les résultats obtenus lorsque l'on tient compte des variations du module d'écouissage.

Dans les résultats présentés ci-dessous, le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau sont pris respectivement égaux à  $E = 1000MPa$  et  $\nu = 0.33$ . La porosité initiale et la masse volumique du solide constitutif sont toujours égales à  $\rho^s = 2.31 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$  et  $\Phi_o = 0.72$ , tandis que le taux d'apport de masse de sédiments, par unité de surface est  $\dot{M}_d = 2.05 \cdot 10^{-9} kg.s^{-1}$ .

On s'intéresse maintenant aux données relatives au comportement plastique. On se donne tout d'abord le module d'écouissage  $m_o = 11MPa$  qui constitue

- d'une part la valeur initiale du module d'écouissage variable
- d'autre part la valeur du module d'écouissage dans le modèle où celui-ci est posé constant.

Le coefficient  $a$  intervenant dans notre critère est pris égal à  $a = 1.15$ , de façon à satisfaire (1.62).

Dans les calculs présentés précédemment, la valeur initiale de la pression de consolidation  $p_c^o$  était choisie indépendamment du module d'écouissage. Dans le cas présent,  $p_c^o$  et  $m_o$  sont liés par la loi d'écouissage  $p_c(J)$ . En effet,  $p_{c,o}$  et  $m_o$  correspondent respectivement à la valeur prise par chacune des fonctions  $p_c(J)$  et  $m(J)$  lorsque le matériau est dans son

état initial, i.e. quand  $\Lambda = 1$ . On a donc:

$$\left. \begin{aligned} m_o = m(J = 1) &= \frac{2}{3}\sigma_o \frac{1 - \Phi_o}{\Phi_o} \\ p_c^o = p_c(J = 1) &= -\frac{2}{3}\sigma_o \ln \Phi_o \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_c^o = -m_o \Phi_o \frac{\ln \Phi_o}{1 - \Phi_o} \quad (1.85)$$

D'après (1.85), la valeur de la pression de consolidation initiale est ici égale à  $p_{c,o} = 9.3MPa$ . A titre indicatif, la limite d'élasticité en compression simple du solide constitutif est de l'ordre<sup>1</sup> de  $\sigma_o = 40MPa$ .

Les zones élastiques étant les mêmes dans les deux modèles, qui ne se différencient que par leur comportement plastique, on ne s'intéresse dans la suite qu'à la zone plastique du massif dans les deux cas.

On constate tout d'abord sur la figure 1.16, que dans le modèle à module d'écroutissage constant, la dilatation verticale décroît linéairement, tandis que le modèle à module d'écroutissage variable laisse déjà entrevoir que la courbe de dilatation en fonction de la profondeur présente une asymptote. La courbe de la figure 1.17 montre bien qu'en dessous de la valeur  $\Lambda = 1 - \Phi_o$  la porosité devient négative ce qui n'a évidemment pas de sens.

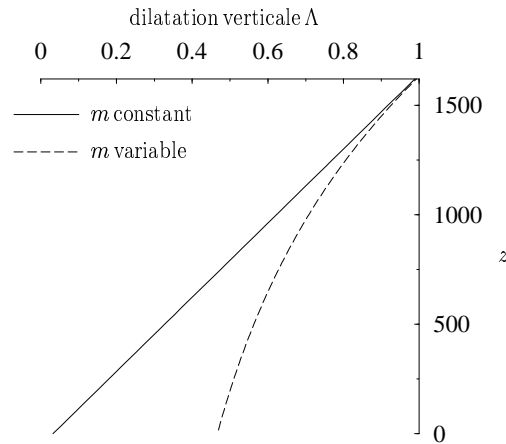


FIG. 1.16: *Évolution de la dilatation verticale en fonction de la profondeur*

Sur la figure 1.18, on compare les courbes de compaction de la zone plastique pour les situations  $m$  constant/ $m$  variable. On ne compare que l'évolution des couches en régime plastique, la couche élastique étant identique dans les deux cas. Cette dernière a évolué linéairement à raison de 100m par million d'années. L'instant initial dans la figure 1.18 correspond donc à l'instant, noté  $T_o^e$ , où les deux massifs sont entrés en plasticité. En d'autres

1. Ce résultat est bien compatible avec le fait que pour un géomatériau l'ordre de grandeur du module d'Young du solide constitutif est de l'ordre de la dizaine de  $GPa$  avec un rapport de trois ordres de grandeur avec la limite de compression simple.



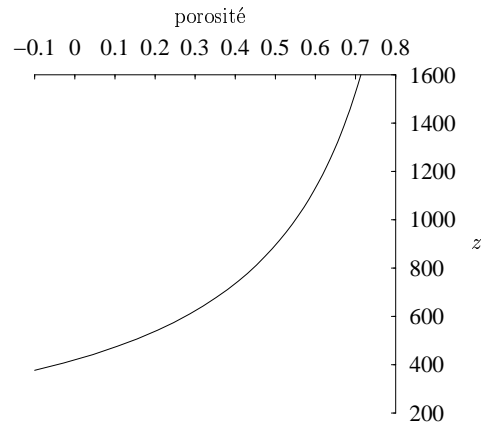


FIG. 1.17: *Évolution de porosité en fonction de la profondeur dans le cas du module d'écroutissage constant*

termes,  $T_0^e$  correspond au temps de formation de la couche élastique. On constate que les

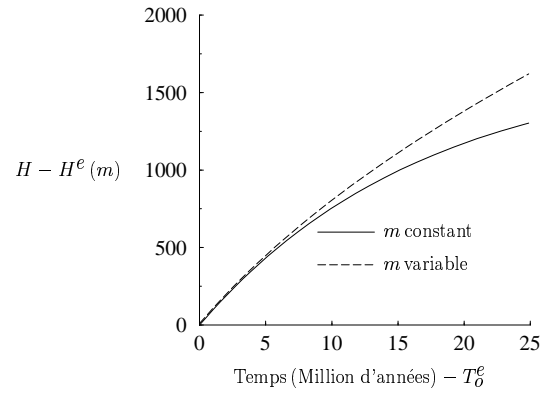


FIG. 1.18: *Comparaison de l'évolution de la hauteur du massif*

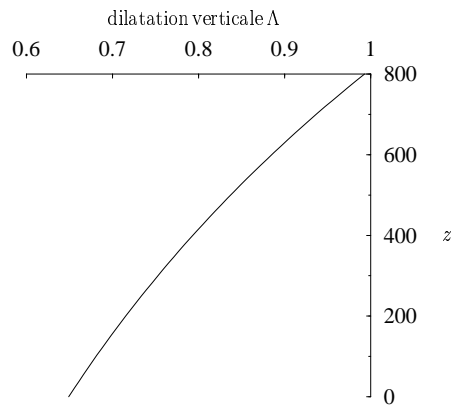


FIG. 1.19: *variation de la dilatation en fonction de la profondeur*

deux courbes de compaction sont très proches jusqu'à  $H(t) - H^e = 800m$ . Cette hauteur critique à partir de laquelle les deux courbes de compaction divergent, correspond, d'après

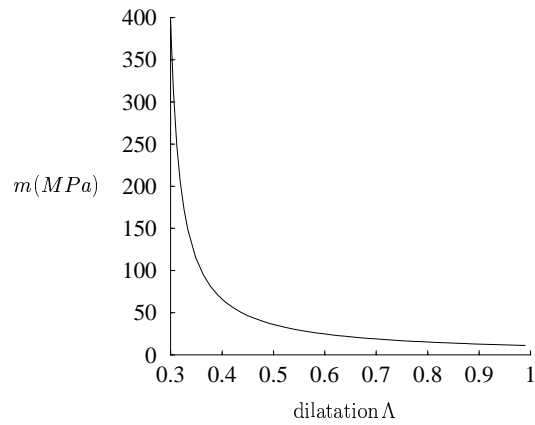


FIG. 1.20: *variation du module d'écroutissage en fonction de la dilatation verticale*

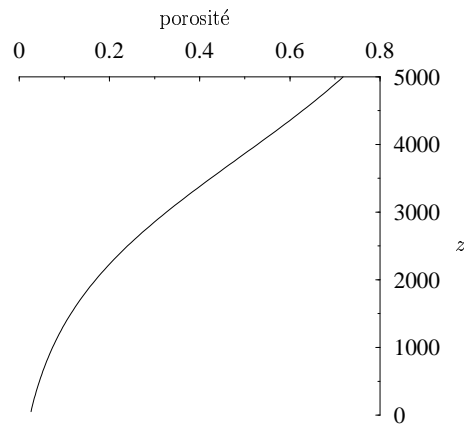


FIG. 1.21: *variation de la porosité en fonction de la profondeur*

la figure 1.19, à une dilatation de l'ordre de 0.65 en  $z = 0$ . En reportant cette valeur de la dilatation sur la figure 1.20, il apparaît que celle-ci coïncide avec la valeur pour laquelle le module d'écroutissage variable commence à s'écarter de  $m_o$ , engendrant le raidissement du matériau sédimentaire.

Tandis que le modèle avec module d'écroutissage constant voit sa courbe de compaction tendre vers son asymptote, la courbe de compaction du modèle à module d'écroutissage variable continu de croître.

Lorsque les pores sont refermés, le modèle à module d'écroutissage variable prévoit une rigidité infinie du matériau. Dans l'exemple traité ici, le phénomène survient à la base du massif pour une épaisseur plastique de l'ordre de 5000m (voir figure 1.21). Cependant il est clair qu'un modèle de bassin plus complet nécessite l'introduction des phénomènes qui surviennent pour des grandes profondeurs (resp. de fortes contraintes) tels que les phénomènes de pression-dissolution évoqués dans l'introduction de ce chapitre.

**Remarque sur la zone élastique.**

Si on considère la zone élastique correspondant au seuil  $p_c^o$  donné par (1.85), il apparaît que celle-ci est de l'ordre de  $1700m$ . Ce résultat n'est évidemment pas acceptable dans la mesure où le massif est du même ordre de grandeur.

Ceci amène une remarque quand à la valeur de  $p_c^o$ . En fait  $p_c^o$  déduit de (1.85) n'est pas le véritable seuil d'élasticité macroscopique. En effet, la loi  $m(J)$  ainsi que la loi  $p_c(J)$  de (1.85) ont été obtenues par un raisonnement sur la sphère creuse en supposant un écoulement plastique libre.  $p_c^o$  ne correspond donc pas au seuil d'élasticité, i.e. à l'apparition de la plasticité dans le massif, mais renvoie à la plastification totale de la matrice.

$p_c^o$  surestime donc manifestement le seuil d'élasticité macroscopique, et donc, la valeur correspondante  $H^e$  surestime de même l'épaisseur de la couche élastique. Bien entendu cette remarque est de nature théorique dans la mesure où, comme nous l'avons déjà précisé, la partie principale d'un bassin sédimentaire est dans un état plastique.

# Chapitre 2

## Étude de la compaction en condition tectonique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modélisation du problème dans le cas H.P.P. . . . . .</b>	<b>197</b>
2.1.1	Position du problème. . . . .	197
2.1.2	Résolution. . . . .	198
<b>2.2</b>	<b>Modélisation dans le cadre des transformations finies. . . . .</b>	<b>201</b>
2.2.1	Position du problème. . . . .	201
2.2.2	Résolution. . . . .	203
2.2.3	Résultats et conclusions. . . . .	208
2.2.4	Prise en compte de coefficients d'élasticité non linéaires. . . . .	209

---



On s'intéresse à nouveau au problème de la compaction des bassins sédimentaires, en considérant maintenant que le bassin n'est plus d'extension infinie dans les directions horizontales. Contrairement au cas précédent qui permettait une étude en condition œdométrique<sup>1</sup>, on étudie maintenant le cas où le bassin est soumis à une activité tectonique.

L'approche classique d'une activité tectonique consiste à prescrire une valeur constante pour le rapport  $\sigma_H/\sigma_V$  entre contraintes horizontale et verticale. Dans le contexte de l'élastoplasticité en petites perturbations, on montre que cette approche est équivalente à une approche "en déplacement" qui consisterait à simuler l'activité tectonique par la donnée d'un taux de déformation horizontale constant.

On se place ensuite dans le cadre de l'élasticité finie. On montre alors que l'hypothèse de rapport des contraintes constant apparaît incompatible avec une transformation du bassin dans laquelle les directions principales du taux de déformation sont la verticale et les directions horizontales.

De manière à préserver cette priorité, on fait le choix de modéliser l'activité tectonique par un taux de déformation horizontale constant dans toute l'épaisseur du massif. Partant de cette condition, on propose des solutions dans le cas de modules d'élasticité constants, puis dans le cas de modules d'élasticité tangents, dépendant du niveau de la déformation.

## 2.1 Modélisation du problème dans le cas H.P.P.

### 2.1.1 Position du problème.

#### Chargement, équation d'équilibre et conditions aux limites.

Dans le chapitre précédent, la gravité, moteur de la compaction, constituait le seul paramètre de chargement de notre problème. On suppose maintenant que le bassin est soumis à une activité tectonique. En négligeant à nouveau les termes d'accélération, l'équation d'équilibre, qui fait intervenir les forces de pesanteur, est toujours égale à :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(z, t) + \rho \underline{g} = 0 \quad (2.1)$$

La condition traduisant que le matériau qui sédimente est à l'état naturel, ainsi que la condition de déplacement vertical nul à la surface du substratum rigide en  $z = 0$ , sont toujours valables. On a donc à nouveau :

$$\underline{\underline{\sigma}}(H(t), t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\underline{u}^{sq}(0, t) \cdot \underline{e}_z = 0 \quad (2.3)$$

---

1. on rappelle qu'ici cette terminologie renvoie uniquement une déformation horizontale nulle

### Comportement.

Le matériau sédimentaire est homogène, isotrope et élastique linéaire. Son comportement est décrit par la loi de comportement :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{d} - \underline{d}^p) \underline{1} + 2 \mu (\underline{d} - \underline{d}^p) \quad (2.4)$$

Dans la résolution plastique, on utilise le critère (1.8) qui ne fait intervenir que la contrainte moyenne. Le module d'érouissage est choisi constant et strictement positif.

### Forme de la solution.

On se donne un taux de déformation horizontale uniforme dans le bassin, noté  $w(t)$ . Le champ eulérien des vitesses est donc recherché sous la forme :

$$\underline{u}^{sq}(x, y, z, t) = (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y) w(t) + u(z, t) \underline{e}_z \quad (2.5)$$

Le tenseur taux de déformation correspondant vaut donc :

$$\underline{d} = w(t) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \frac{\partial u}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (2.6)$$

En vertu de l'isotropie du comportement macroscopique et des symétries du chargement, on recherche le tenseur des contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(z, t) = \sigma_V(z, t) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \sigma_H(z, t) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \quad (2.7)$$

## 2.1.2 Résolution.

### Élasticité.

On s'intéresse tout d'abord à la résolution du problème élastique pour lequel les équations d'équilibre et de comportement s'écrivent, d'après (2.1), (2.4) et (2.6), sous la forme scalaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \rho_0 g \\ \dot{\sigma}_V = 2 \lambda w(t) + (\lambda + 2 \mu) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \\ \dot{\sigma}_H = 2 (\lambda + \mu) w(t) + \lambda \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

De la même façon que dans le cas œdométrique, la contrainte verticale se déduit directement de l'intégration de la composante verticale de l'équation d'équilibre et de la condition (2.2).

$$\sigma_V(z, t) = \rho_o g (z - H(t)) \quad (2.9)$$

Comme en (1.17), la dérivée particulière de cette composante du champ de contrainte est toujours égale à  $\dot{\sigma}_V = -\rho_o g \dot{H}$ , sous l'hypothèse des petites perturbations. Cette expression de  $\dot{\sigma}_V$  nous permet alors d'en déduire  $\frac{\partial u}{\partial z}$  par identification avec la deuxième équation du système (2.8).

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2\lambda w - \rho_o g \dot{H}}{\lambda + 2\mu} \quad (2.10)$$

La combinaison de la troisième équation du système (2.8) et de (2.10) conduit à l'expression de la dérivée particulière :

$$\dot{\sigma}_H = \frac{6\mu K}{\lambda + 2\mu} w - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rho_o g \dot{H} \quad (2.11)$$

Si on note  $k^e = \frac{\dot{\sigma}_H}{\dot{\sigma}_V}$  le rapport des taux contraintes dans la zone élastique, il apparaît que ce dernier est uniforme dans toute la couche et s'écrit :

$$k^e = \frac{\dot{\sigma}_H}{\dot{\sigma}_V} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - \frac{6\mu K w}{(\lambda + 2\mu) \rho_o g \dot{H}} \quad (2.12)$$

Plaçons-nous, pour simplifier, dans la situation où le rapport  $k^e$  est indépendant du temps (ce qui correspond à  $w/\dot{H} = \text{constante}$ ). L'intégration par rapport au temps de (2.12) entre  $T(z, t)$  et  $t$  donne, en raison de la condition d'état naturel en surface (2.2) :

$$\sigma_H(z, t) = k^e \sigma_V(z, t) \quad (2.13)$$

$k^e$  représente donc également le rapport des contraintes. En d'autres termes, il y a équivalence entre la modélisation cinématique et la modélisation en rapport des contraintes de la tectonique.

Ainsi, en se donnant le rapport  $k^e$ , il découle de (2.12) que le taux de déformation horizontale correspondant s'écrit :

$$w(t) = - \left( \frac{(2\mu + \lambda)k^e - \lambda}{6\mu K} \right) \rho_o g \dot{H}(t) \quad (2.14)$$

La composante verticale du champ eulérien des vitesses se déduit alors de l'intégration de (2.10), et de la condition (2.3). D'après  $w$  sous la forme (2.14), on a donc :

$$u(z, t) = \left( \frac{\lambda(k^e - 1) - \mu}{3\mu K} \right) \rho_o g \dot{H}(t) z \quad (2.15)$$

L'épaisseur de la couche élastique est désormais  $H^e(w)$  obtenue en recherchant la valeur de  $H$  pour laquelle le critère est atteint :

$$H^e = \frac{3p_c^o}{\rho_o g (1 + 2k^e)} \quad (2.16)$$



### Plasticité.

Pour la résolution du problème en plasticité, la démarche est identique à celle utilisée ci-dessus en élasticité. Seul le système (2.8) est modifié en raison de l'introduction du taux de déformation plastique qui est de la forme de (1.21). On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = \rho_0 g \\ \dot{\sigma}_V = 2\lambda w(t) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - \frac{K}{3m} \text{tr} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\sigma}_H = 2(\lambda + \mu) w(t) + \lambda \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - \frac{K}{3m} \text{tr} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Partant du système (2.17), on établit que la rapport des taux de contrainte est maintenant égal à  $k^p$  :

$$k^p = \frac{\dot{\sigma}_H}{\dot{\sigma}_V} = \frac{3m\lambda - 2\mu K}{3m(\lambda + 2\mu) + 4\mu K} - \frac{18m\mu K}{3m(\lambda + 2\mu) + 4\mu K} \frac{w}{\rho_0 g \dot{H}} \leq k^e \quad (2.18)$$

Il convient à présent d'en déduire le profil de la contrainte horizontale, sachant que celui de la contrainte verticale est donné par (2.9). Dans la zone élastique ( $z > H(t) - H^e$ ), le raisonnement précédent permet de reconduire (2.13). Pour une particule de la zone plastique, son histoire entre  $T(z, t)$  et  $t$  est décomposée en deux séquences :

$$\begin{array}{l} (a) \quad \tau \in [T(z, t), T^e(z, t)] : \dot{\sigma}_H / \dot{\sigma}_V = k^e \\ (b) \quad \tau \in [T^e(z, t), t] : \dot{\sigma}_H / \dot{\sigma}_V = k^p \end{array} \quad (2.19)$$

On intègre successivement (2.19(a)) de  $T(z, t)$  à  $T^e(z, t)$  et (2.19(b)) de  $T^e(z, t)$  à  $t$  :

$$\begin{array}{l} (a) \quad \tau \in [T(z, t), T^e(z, t)] : \sigma_H(T^e) = k^e \sigma_V(T^e) \\ (b) \quad \tau \in [T^e(z, t), t] : \sigma_H(z, t) - \sigma_H(T^e) = k^p (\sigma_V(z, t) - \sigma_V(T^e)) \end{array} \quad (2.20)$$

La deuxième relation de (2.20) indique (compte tenu de (2.9)) que le profil des contraintes horizontales dans la zone plastique a une pente égale à  $k^p \rho_0 g$ . Il est continu en  $H(t) - H^e$  (voir figure 2.1).

On s'intéresse pour finir à la composante verticale du champ eulérien des vitesses.

Partant des équations du système (2.17), on peut calculer la composante  $u(z, t)$  dans la zone plastique ( $z = [0, H(t) - H^e]$ ). Compte tenu de la condition  $u(0, t) = 0$ , il découle :

$$u(z, t) = \left( \frac{(k^p - 1)\lambda - \mu}{3\mu K} - \frac{1 + 2k^p}{9m} \right) \rho_0 g \dot{H}(t) z \quad (2.21)$$

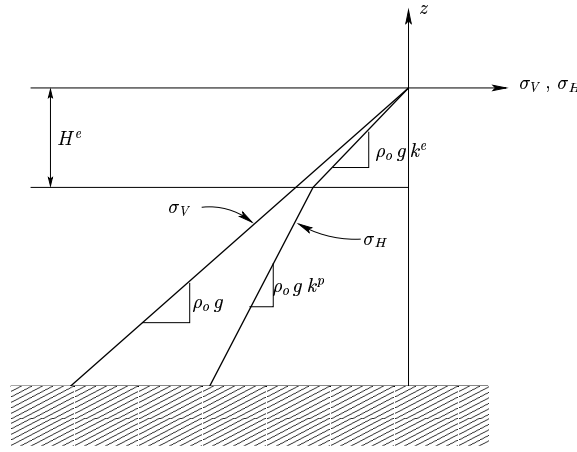


FIG. 2.1: représentation schématique du profil des contraintes  $\sigma_V$  et  $\sigma_H$  dans le massif

Sur la zone élastique, la constante d'intégration provient de la continuité de  $u(z, t)$  en  $z = H(t) - H^e$  et on trouve :

$$u(z, t) = \left( \frac{k^e - (\lambda + \mu)}{3 \mu K} \right) \rho_0 g \dot{H}(t) z + \left( \frac{k^p - k^e}{3 K \mu} - \frac{1 + 2 k^p}{9 m} \right) \rho_0 g \dot{H}(t) (H(t) - H^e) \quad (2.22)$$

## 2.2 Modélisation dans le cadre des transformations fines.

### 2.2.1 Position du problème.

#### Configuration de référence et gradient de transformation.

Relativement à la configuration de référence, que l'on considère toujours comme l'état d'une particule qui se dépose à la surface du bassin, il est maintenant nécessaire d'introduire une composante horizontale de la dilatation, de façon à quantifier l'activité tectonique.

On distingue donc maintenant une dilatation horizontale et une dilatation verticale qui sont respectivement notées  $\Lambda_H(z, t)$  et  $\Lambda_V(z, t)$  (voir figure 2.2), en un point d'abscisse  $z$ , à l'instant  $t$ .

Dans son état de référence, une particule vérifie donc les conditions aux limites :

$$\Lambda_H(H(t), t) = \Lambda_V(H(t), t) = 1 \quad (2.23)$$

Il nous est maintenant possible de définir le gradient de transformation d'une particule entre la configuration de référence et la configuration actuelle :

$$\underline{\underline{F}} = \Lambda_H (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \Lambda_V \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (2.24)$$

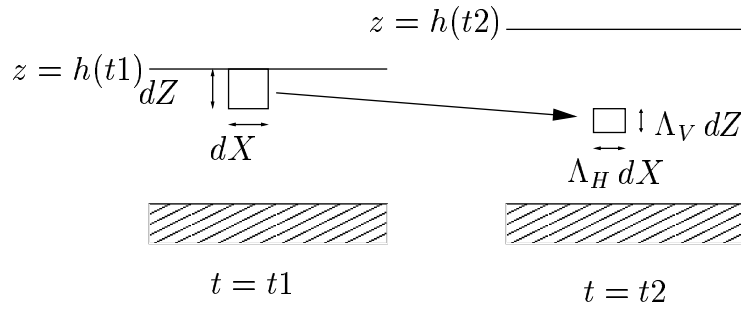


FIG. 2.2: évolution d'une particule au cours de son enfouissement

### Chargement.

La solution étant toujours cherchée sous la forme donnée par (2.7) et (2.5), le champ eulérien des vitesses conduit maintenant à l'écriture de deux liaisons cinématiques. Ces dernières associent les composantes horizontales (resp. verticales) du gradient de la transformation aux composantes horizontales (resp. verticales) du champ eulérien des vitesses du squelette.

En effet, on a d'une part :

$$\underline{\underline{\text{grad } \underline{u}^{sq}}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (2.25)$$

et d'autre part :

$$\underline{\underline{\text{grad } \underline{u}^{sq}}} = \begin{pmatrix} w(z) & 0 & x \frac{\partial w(z)}{\partial z} \\ 0 & w(z) & y \frac{\partial w(z)}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

ce qui conduit, par identification, aux deux liaisons cinématiques suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \quad \text{et} \quad w(z, t) = \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} \quad (2.27)$$

On remarque de plus que :

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

Cette dernière condition signifie que  $w$  est une fonction indépendante de  $z$ .

Supposons à ce stade que l'activité tectonique que subit le massif est imposée par un rapport de contrainte constant  $\sigma_H/\sigma_V$ .

L'équation d'état (1.29) et l'équation d'équilibre nous permettent de déterminer complètement le champ de contraintes ainsi que les dilatations  $\Lambda_V(z, t)$  et  $\Lambda_H(z, t)$ . Il est possible de démontrer que l'intégration de la liaison cinématique permettant de calculer le taux de déformation horizontale  $w(t)$  conduit à une incohérence. En effet, ce calcul fournit un taux de déformation horizontale qui n'est pas constant par rapport à  $z$ , comme le prévoyait (2.28). Ceci signifie que le problème est mal posé. En d'autres termes, dans la résolution en transformations finies, imposer un rapport de contraintes constant pour simuler l'activité tectonique, est une condition incompatible avec la forme (2.7)-(2.5) de la solution.

Ce résultat est important car il montre que, contrairement au cas H.P.P., imposer un rapport de contrainte constant, dans le cadre des transformations finies, n'est plus équivalent à un taux de déformation horizontale constant.

A ce stade, de façon à garder le caractère unidimensionnel de notre résolution, on choisit de modéliser le chargement relatif à l'activité tectonique, en imposant le taux de déformation  $w(t)$ , fonction du temps indépendante de la profondeur.

## 2.2.2 Résolution.

### Évolution de la hauteur du massif en fonction de l'apport de masse par unité de surface

On commence la résolution par la détermination de la loi d'évolution de la hauteur  $H(t)$  du massif en fonction de la vitesse d'apport de sédiment  $\dot{M}_d(t)$  par unité de surface. On est en droit de s'attendre à une équation différente de celle établie en (1.32) du fait de l'activité tectonique qui s'ajoute maintenant à l'action de la pesanteur.

On considère une section horizontale de matière que l'on suit dans la transformation. En raison des déformations horizontales non nulles, sa surface est une fonction du temps notée  $\mathcal{S}(t)$ . Plus précisément, l'expression de la surface  $\mathcal{S}(t)$  du massif à l'instant  $t$ , exprimée en fonction de sa valeur initiale  $\mathcal{S}_o$  est égale à :

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_o \Lambda_H^2 \quad (2.29)$$

Il vient immédiatement l'égalité :

$$\frac{\dot{\mathcal{S}}(t)}{\mathcal{S}(t)} = 2 \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} = 2 w(t) \quad (2.30)$$

La masse totale de la colonne cylindrique de sédiments, qui s'appuie sur le contour de la section en question, à un instant donné, est égale à :

$$M(t) = \mathcal{S}(t) \int_0^{H(t)} \rho(z, t) dz \quad (2.31)$$

D'une part, l'apport de masse de sédiments donne :

$$\dot{M}(t) = \mathcal{S}(t) \dot{M}_d(t) \quad (2.32)$$

D'autre part, en dérivant (2.31) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{M}(t) = \dot{\mathcal{S}}(t) \int_0^{H(t)} \rho(z, t) dz + \mathcal{S}(t) \frac{d}{dt} \int_0^{H(t)} \rho(z, t) dz \quad (2.33)$$

qui peut encore s'écrire :

$$\dot{M}(t) = \dot{\mathcal{S}}(t) \int_0^{H(t)} \rho(z, t) dz + \mathcal{S}(t) \left( \dot{H} \rho(H(t), t) + \int_0^{H(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz \right) \quad (2.34)$$

D'après l'expression eulérienne de l'équation de conservation de la masse de squelette (1.30) dans laquelle on a :

$$\operatorname{div}(\rho(z, t) \underline{u}^{sq}) = 2 w(t) \rho(z, t) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z}(z, t) \quad (2.35)$$

l'équation (2.34) devient :

$$\dot{M}(t) = \frac{\dot{\mathcal{S}}(t)}{\mathcal{S}(t)} M(t) + \mathcal{S}(t) \dot{H}(t) \rho_o - \mathcal{S}(t) \int_0^{H(t)} 2 w(z, t) \rho(z, t) dz - \rho_o \mathcal{S}(t) u(H(t), t) \quad (2.36)$$

Compte tenu du fait que  $w(t)$  est, par définition, indépendante de  $z$ , on a naturellement :

$$\dot{M}(t) = \left( \frac{\dot{\mathcal{S}}(t)}{\mathcal{S}(t)} - 2 w(t) \right) M(t) + \mathcal{S}(t) \dot{H}(t) \rho_o - \rho_o \mathcal{S}(t) u(H(t), t) \quad (2.37)$$

La combinaison de (2.37), (2.30) et (2.32), conduit alors à l'équation régissant l'évolution de la hauteur du massif, en fonction du taux d'apport de masse par unité de surface. Cette dernière est identique à celle trouvée dans le cas oedométrique.

$$\dot{H}(t) = \frac{\dot{M}_d}{\rho_o} + u(H(t), t) \quad \text{avec} \quad \rho_o = \rho(H(t), t) \quad (2.38)$$

Ce calcul montre que dans le cas où le taux de déformation horizontale serait une fonction de la variable d'espace  $z$ , la loi de compaction telle qu'elle est définie en (2.38), pour une colonne de massif de surface unitaire, n'aurait plus de validité. En fait, c'est la notion même de hauteur  $H(t)$  qui n'aurait alors plus de sens.

La connaissance complète de la loi de compaction passe à nouveau par le calcul de la composante verticale  $u(z, t)$  du champ eulérien des vitesses.

### Détermination du champ de contraintes et des dilatations.

On utilise ici une loi hypoélastique<sup>2</sup>. Elle s'écrit sous la forme :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \mathbf{c} : \underline{\dot{d}} = \lambda \text{tr} \underline{\dot{d}} \mathbf{1} + 2 \mu \underline{\dot{d}} \quad (2.39)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes. De (2.39) on déduit deux équations scalaires qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_V &= 2 \lambda w(t) + (\lambda + 2 \mu) \frac{du}{dz}(z, t) \\ \dot{\sigma}_H &= 2 (\lambda + \mu) w(t) + \lambda \frac{du}{dz}(z, t) \end{cases} \quad (2.40)$$

D'après les relations cinématiques (2.27), elles sont aussi égales à :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_V &= 2 \lambda \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} + (\lambda + 2 \mu) \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \\ \dot{\sigma}_H &= 2 (\lambda + \mu) \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} + \lambda \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \end{cases} \quad (2.41)$$

Définissant à nouveau l'instant  $T(z, t)$  comme le moment auquel la particule, située en  $z$  à l'instant actuel  $t$ , s'est déposée à la surface du massif, on intègre le système (2.41) entre  $T(z, t)$  et  $t$ . En tenant compte des conditions (2.2) et (2.23), appliquées à l'instant  $T(z, t)$ , on obtient donc :

$$\begin{cases} \sigma_V(z, t) &= 2 \lambda \ln \Lambda_H(z, t) + (\lambda + 2 \mu) \ln \Lambda_V(z, t) \\ \sigma_H(z, t) &= 2 (\lambda + \mu) \ln \Lambda_H(z, t) + \lambda \ln \Lambda_V(z, t) \end{cases} \quad (2.42)$$

On procède alors comme dans le cas œdométrique en utilisant la forme de  $\sigma_V(z, t)$  de (2.42), dans l'équation d'équilibre, dont la composante suivant  $\underline{e}_z$  s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial \sigma_V(z, t)}{\partial z} = \frac{\rho_o g}{J} = \frac{\rho_o g}{\Lambda_H^2(z, t) \Lambda_V(z, t)} \quad (2.43)$$

D'après la liaison cinématique entre  $w(t)$  et  $\Lambda_H(z, t)$  établie en (2.27), il apparaît que la dilatation verticale peut s'écrire de manière générale sous la forme :

$$\Lambda_H(z, t) = \exp \left( \int_{T(z, t)}^t w(\tau) d\tau \right) \quad \text{avec} \quad \Lambda_H(z, t) > 0 \quad (2.44)$$

Cette équation montre alors que, contrairement au taux de déformation horizontale, la dilatation horizontale va être dépendante de  $z$  par le biais de  $T(z, t)$ .

---

2. on rappelle que ce type de comportement n'est pas associé à un potentiel thermodynamique

Dans toute la suite, on choisit de prendre un taux de déformation horizontale  $w(t)$  constant par rapport au temps. La dilatation horizontale telle qu'elle est définie en (2.44) devient donc dans ce cas particulier :

$$\Lambda_H(z, t) = \exp(w(t - T(z, t))) \quad \text{avec} \quad \Lambda_H(z, t) > 0 \quad (2.45)$$

Revenons maintenant à l'équation d'équilibre (2.43) qui, compte tenu de (2.41) et (2.44) s'écrit en fonction de  $\Lambda_V(z, t)$  et de  $T(z, t)$ .

$$-2\lambda w \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial \Lambda_V(z, t)}{\partial z} \frac{1}{\Lambda_V(z, t)} = \frac{\rho_o g}{\Lambda_H^2(z, t) \Lambda_V(z, t)} \quad (2.46)$$

On aura préalablement remarqué que :

$$\frac{\partial \Lambda_H(z, t)}{\partial z} = -w \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Lambda_H(z, t) \quad (2.47)$$

La détermination complète des dilatations, et donc, du champ de contrainte, passe par la connaissance de  $\Lambda_V(z, t)$  et  $T(z, t)$ . Pour cela, il faut trouver une autre équation liant ces deux variables, de manière à construire un système d'équations différentielles avec (2.46).

A cet effet, on s'intéresse maintenant à la masse totale de sédiments qui s'est déposée dans une colonne de massif de surface unitaire, entre les instants  $T(z, t)$  et  $t$ . Cette masse peut être calculée de deux manières différentes.

Invoquant la conservation de la masse, (2.46) permet finalement d'aboutir au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\rho_o g}{\exp(2w(t - T(z, t)))} = -\frac{2\lambda w \rho_o}{M_d} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Lambda_V(z, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \frac{\rho_o}{M_d \Lambda_V(z, t)} \end{cases} \quad (2.48)$$

Complété par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(H(t), t) = t \\ \Lambda_V(H(t), t) = 1 \end{cases} \quad (2.49)$$

sur la surface supérieure du massif à l'instant  $t$ .

Ce système se résout numériquement (calculs effectués à l'aide du logiciel Maple) nous donnant ainsi, à cet instant, la dilatation verticale  $\Lambda(z, t)$  ainsi que l'instant  $T(z, t)$ .

Puis,  $T(z, t)$  étant connu, on calcule la dilatation horizontale  $\Lambda_H(z, t)$  par (2.45). Le champ de contraintes dans le massif se calcule ensuite par (2.42).

### Détermination du champ eulérien des vitesses du squelette.

Pour achever la résolution du problème, il nous reste à déterminer le champ eulérien des vitesses du squelette. Le taux de dilatation horizontale  $w(t)$  étant une donnée du problème, il nous reste donc à calculer la composante verticale  $u(z, t)$ . On rappelle en outre, que la valeur de cette composante sur la surface supérieure du massif, à l'instant  $t$ , intervient explicitement dans la loi de compaction (2.38).

Pour calculer  $u(z, t)$ , on choisit ici d'utiliser l'expression de  $\dot{\sigma}_V$ , donnée en (2.40), sous la forme :

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \frac{\dot{\sigma}_V - 2 \lambda w(t)}{\lambda + 2\mu} \quad (2.50)$$

On procède alors de la même manière que dans le cas oedométrique en utilisant à nouveau l'expression (1.78) de la contrainte verticale.

$$\sigma_V(z, t) = - \int_z^{H(t)} \rho(\eta, t) g d\eta \quad (2.51)$$

En calculant la dérivée partielle de (2.51), il vient :

$$\dot{\sigma}_V = \rho(z, t) g u(z, t) - \rho_o g \dot{H}(t) - \int_z^{H(t)} \frac{\partial \rho(\eta, t)}{\partial t} g d\eta \quad (2.52)$$

Compte tenu de l'expression eulérienne de la loi de conservation de la masse, dans laquelle on a utilisé (2.35), et de la loi de compaction (2.38), on obtient le taux de contrainte verticale sous la forme :

$$\dot{\sigma}_V = -2 w \sigma_V - \dot{M}_d g \quad (2.53)$$

L'intégration de (2.53) entre  $T(z, t)$  et  $t$  conduit alors à une autre expression de  $\sigma_V$  qui s'écrit :

$$\sigma_V(z, t) = \frac{\dot{M}_d g}{2 w} (-1 + \exp(-2 w(t - T(z, t)))) \quad (2.54)$$

En substituant (2.53) dans (2.50), on obtient l'équation cherchée :

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \frac{-2 w \sigma_V - 2 \lambda w - \dot{M}_d g}{\lambda + 2\mu} \quad (2.55)$$

la condition de déplacement vertical nul (2.3) au niveau du substratum rigide, i.e. en  $z = 0$ , étant toujours valable, on détermine finalement  $u(z, t)$  par intégration de (2.55).

En reportant la valeur de  $u(H(t), t)$  dans (2.38), on calcule  $\dot{H}(t)$ .

On peut donc construire la loi de compaction de façon incrémentale.



### 2.2.3 Résultats et conclusions.

On se propose maintenant de comparer les résultats obtenus pour différents niveaux d'activité tectonique. Le cas œdométrique, qui correspond au cas limite où  $w = 0$ , est pris comme référence.

Les courbes suivantes ont été obtenues en effectuant des calculs pour différents niveaux d'activité tectonique. On rappelle que cette dernière est imposée par la donnée du taux de déformation horizontale  $w$  que l'on a supposé constant. On va en fait le choisir comme une certaine fraction  $\alpha$  de la valeur absolue du rapport entre le taux de contrainte verticale dans le cas œdométrique et le module œdométrique :

$$w = \alpha \frac{\dot{M}_d g}{\lambda + 2\mu} \quad (2.56)$$

$\frac{\dot{M}_d g}{\lambda + 2\mu}$  représente l'ordre de grandeur du taux de déformation verticale en régime œdométrique.

De cette manière, les valeurs négatives de  $\alpha$  vont correspondre à un taux de déformation horizontale engendrant une compression horizontale du massif, tandis que  $\alpha > 0$  correspondra à une extension horizontale du massif. On retrouve bien évidemment le cas œdométrique pour  $\alpha = 0$ .

Les propriétés élastiques du matériau étudié ici sont les mêmes que celles utilisées dans les calculs œdométriques, i.e. le module de Young  $E = 100MPa$ , et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ . Le taux d'apport de sédiments par unité de surface est toujours constant  $\dot{M}_d = 2.0510^{-9}kg.s^{-1}$ . La masse volumique du solide constitutif ainsi que la porosité initiale sont toujours égales à  $\rho^s = 2.31 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$  et  $\Phi_o = 0.72$ .

Les courbes présentées aux figures 2.3, 2.4 et 2.5 permettent de comparer les résultats obtenus dans le cas œdométrique, aux résultats obtenus pour trois valeurs différentes de  $\alpha$ , respectivement égales à  $\alpha = -0.3$ ,  $\alpha = -0.1$  et  $\alpha = 0.3$ . On constate tout d'abord que malgré des différences relativement importantes, en termes de déformations, illustrées par l'évolution du jacobien en fonction de la profondeur (figure 2.3), l'activité tectonique n'a que peu d'influence sur la courbe de compaction (figure 2.4).

En revanche, la contrainte horizontale induite par l'activité tectonique, varie beaucoup en fonction de  $\alpha$ . Comme nous pouvions nous y attendre, un taux de déformation horizontale négatif implique une forte augmentation (en valeur absolue) de la contrainte horizontale de compression (figure 2.5).

En toute rigueur, nous avons vu qu'un taux de déformation horizontale  $w(t)$  est incompatible avec un rapport de contraintes constant. Toutefois, si le rapport des contraintes varie bien en fonction de la valeur de  $\alpha$ , il apparait que celui-ci est quasiment constant

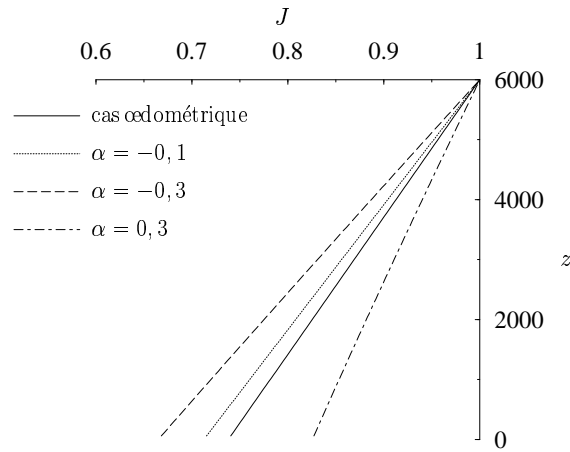


FIG. 2.3: évolution du jacobien en fonction de la profondeur pour différentes valeurs de  $\alpha$

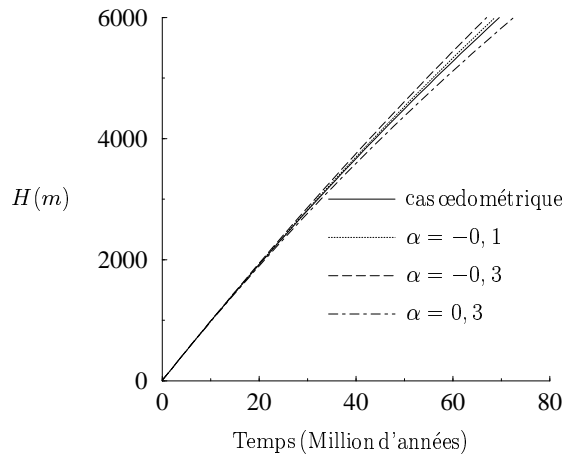


FIG. 2.4: courbes de compaction pour différentes valeurs de  $\alpha$

dans toute la couche (tableau 2.57).

	$k = \sigma_H / \sigma_V$
$\alpha = 0$ (cas œdom.)	0.49
$\alpha = -0.1$	$k \simeq 0.59$
$\alpha = -0.3$	$0.77 \leq k \leq 0.79$
$\alpha = 0.3$	$0.16 \leq k \leq 0.19$

(2.57)

#### 2.2.4 Prise en compte de coefficients d'élasticité non linéaires.

On s'intéresse maintenant au même problème, mais en raison du caractère trop académique du cadre de l'hypoélasticité, on décide de regarder l'influence de la prise en compte de coefficients d'élasticité non linéaires dans notre loi de comportement.

On suppose donc dans cette section que les coefficients d'élasticité ne sont plus constants.

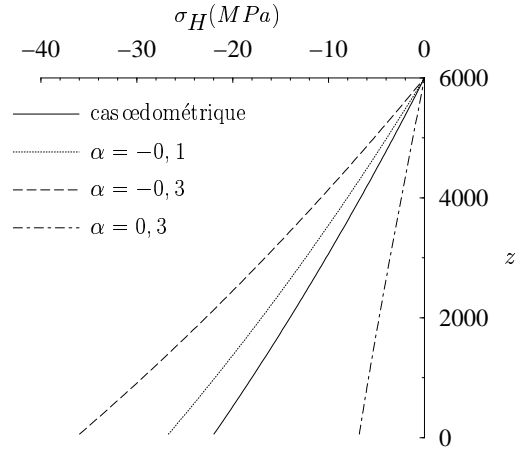


FIG. 2.5: évolution de la contrainte horizontale fonction de la profondeur pour différentes valeurs de  $\alpha$

Au contraire, ces derniers sont fonction du niveau de déformation.

Les équations scalaires qui caractérisent le comportement sont identiques à celles écrites en (2.41), à la différence près que les coefficients d'élasticité dépendent des dilatations horizontale et verticale  $\Lambda_H(z, t)$  et  $\Lambda_v(z, t)$ .

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_V &= 2\lambda(\Lambda_H, \Lambda_v) \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} + (\lambda(\Lambda_H, \Lambda_v) + 2\mu(\Lambda_H, \Lambda_v)) \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \\ \dot{\sigma}_H &= 2(\lambda(\Lambda_H, \Lambda_v) + \mu(\Lambda_H, \Lambda_v)) \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} + \lambda \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \end{cases} \quad (2.58)$$

Il convient au préalable de déterminer les familles de fonctions  $\lambda(\Lambda_H, \Lambda_v)$  et  $\mu(\Lambda_H, \Lambda_v)$  pour lesquelles les équations de (2.58) sont intégrables.

Pour éviter de surcharger les calculs suivants, on ne fera pas apparaître explicitement la dépendance des modules d'élasticité vis à vis des dilatations.

Les deux équations de (2.58) sont intégrables, si et seulement si elles vérifient respectivement l'égalité des dérivées croisées, i.e. :

$$\begin{cases} \Lambda_V \frac{\partial}{\partial \Lambda_V} (2\lambda) = \Lambda_H \frac{\partial}{\partial \Lambda_H} (2\mu + \lambda) \\ \Lambda_V \frac{\partial}{\partial \Lambda_V} 2(\lambda + \mu) = \Lambda_H \frac{\partial}{\partial \Lambda_H} (\lambda) \end{cases} \quad (2.59)$$

On remarque tout d'abord que la soustraction des deux équations conduit à une condition sur  $\mu$  qui impose que cette dernière doit être une constante de  $\Lambda_H$  et  $\Lambda_V$ . On obtient en

effet :

$$\left( \Lambda_V \frac{\partial}{\partial \Lambda_V} + \Lambda_H \frac{\partial}{\partial \Lambda_H} \right) \mu = 0 \quad (2.60)$$

ce qui, dans le plan  $(\Lambda_V, \Lambda_H)$ , s'écrit encore :

$$\underline{\text{grad}} \mu \cdot \underline{\Lambda} = 0 \quad \underline{\Lambda} = \Lambda_H \underline{e}_H + \Lambda_V \underline{e}_V \quad (2.61)$$

En se plaçant sur une radiale du plan défini ci-dessus, la valeur de  $\mu$  en un point  $M$  quelconque de coordonnées  $(\Lambda_V, \Lambda_H)$  s'écrit alors :

$$\mu(M) = \mu(0) + \int_0^M \underline{\text{grad}} \mu \cdot d\underline{\Lambda} \quad (2.62)$$

ce qui compte tenu de (2.61) indique que  $\mu$  est une constante.

En posant  $\mu = \text{constante}$ , les équations de (2.59) sont toutes deux égales à :

$$\left( 2 \Lambda_V \frac{\partial}{\partial \Lambda_V} - \Lambda_H \frac{\partial}{\partial \Lambda_H} \right) \lambda = 0 \quad (2.63)$$

On peut alors démontrer que les fonctions qui vérifient cette équation sont des fonctions du jacobien de la transformation  $J = \Lambda_H^2 \Lambda_V$ .

On va donc poser dans la suite :

$$\mu = \text{constante} \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_o f(J) \quad \text{avec} \quad f(1) = 1 \quad (2.64)$$

La forme de ces coefficients est imposée par des considérations purement mathématiques. Cependant, une interprétation physique réaliste de ces derniers semble possible. En effet, on observe que le module de compression  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  est sensible à la déformation alors que le module de cisaillement  $\mu$  ne l'est pas. C'est le type de non linéarité observée dans le cas d'un milieu poreux fissuré à fissures lisses : la refermeture de fissures ne restaure pas la raideur en cisaillement car les lèvres de la fissures peuvent glisser l'une sur l'autre sans frottement.

En revanche, la refermeture accroît la raideur en compression. Évidemment, ces considérations suggèrent que la fonction  $f(J)$  de (2.64) doit être décroissante.

Cette situation n'est pas sans rappeler les résultats du chapitre 4, sur les questions d'élasticité non linéaire due à une microfissuration de la matrice solide.

### Détermination du champ de contraintes.

D'après la forme des modules d'élasticité tangents retenus en (2.64), il apparaît que le système d'équations s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_V &= \lambda_o f(J) \frac{\dot{J}}{J} + 2\mu \frac{\dot{\Lambda}_V}{\Lambda_V} \\ \dot{\sigma}_H &= \lambda_o f(J) \frac{\dot{J}}{J} + 2\mu \frac{\dot{\Lambda}_H}{\Lambda_H} \end{cases} \quad (2.65)$$

On introduit alors la fonction  $g(J)$ , primitive de la fonction  $\frac{f(J)}{J}$ . On peut donc intégrer les équations de (2.65) entre  $T(z, t)$  et  $t$ , ce qui en termes de jacobien correspond à l'intervalle  $[1, J]$ . On a alors :

$$\int_1^J \frac{f(\eta)}{\eta} \dot{\eta} = g(J) - g(1) \quad (2.66)$$

On en déduit les deux composantes du champ de contraintes qui sont égales à :

$$\begin{cases} \sigma_V(z, t) &= \lambda_o (g(J) - g(1)) + 2\mu \ln \Lambda_V(z, t) \\ \sigma_H(z, t) &= \lambda_o (g(J) - g(1)) + 2\mu \ln \Lambda_H(z, t) \end{cases} \quad (2.67)$$

### Détermination des dilatations et de la loi de compaction.

Le calcul de la dilatation horizontale ne faisant pas intervenir les modules d'élasticité, l'expression (2.44) déterminée précédemment, reste valable. Pour calculer la dilatation verticale, on procède à nouveau en utilisant la composante verticale du champ de contraintes de (2.67), dans l'équation d'équilibre (2.43). On obtient alors l'équation :

$$\frac{\partial \sigma_V}{\partial z} = [2\mu + \lambda_o f(J)] \frac{1}{\Lambda_V} \frac{\partial \Lambda_V}{\partial z} + \frac{2\lambda_o f(J)}{\Lambda_H} \frac{\partial \Lambda_H}{\partial z} \quad (2.68)$$

Compte tenu de l'équation (??) qui est toujours valable, on obtient le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{\rho_o g}{\exp(2w(t - T(z, t)))} = -\frac{2\lambda_o f(J) w \rho_o}{\dot{M}_d} + [2\mu + \lambda_o f(J)] \frac{\partial \Lambda_V(z, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \frac{\rho_o}{\dot{M}_d \Lambda_V(z, t)} \end{cases} \quad (2.69)$$

Il apparaît que ce système est similaire à (2.48) qui correspond au cas particulier  $f(J) = 1$ . On peut donc calculer numériquement  $T(z, t)$  et  $\Lambda_V(z, t)$  ce qui comme précédemment conduit, via (2.53) et (2.38), à la loi de compaction  $H(t)$ .

## Résultats et conclusions

Les résultats présentés dans cette section font appel aux mêmes données que dans la section (2.2.3). On se propose de comparer les résultats obtenus précédemment dans le cas de coefficients d'élasticité constants avec les résultats obtenus lorsque l'on considère les modules d'élasticité tangents de la présente section.

On effectue cette comparaison pour une activité tectonique d'amplitude  $\alpha = -0.3$ . La fonction  $f(J)$  est choisie de manière à observer un raidissement du matériau sédimentaire au cours de la compaction ( $f'(J) < 0$ ). On a choisi ici la fonction  $f(J) = \frac{1}{J^5}$ .

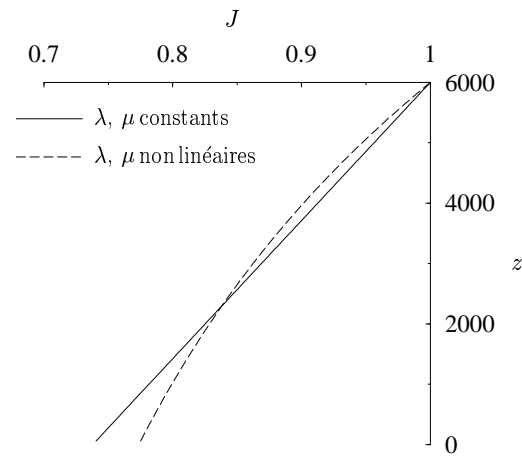


FIG. 2.6: évolution du jacobien en fonction de la profondeur pour  $\alpha = 0.3$

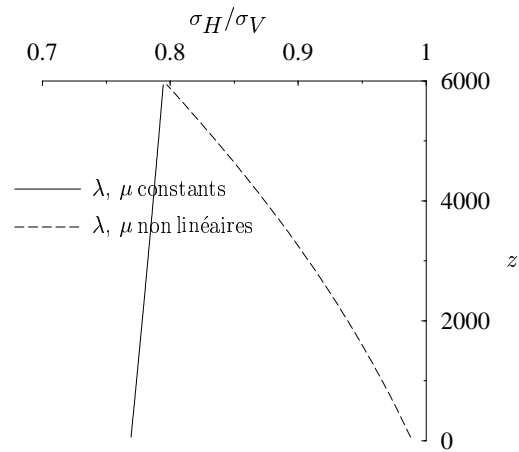


FIG. 2.7: comparaison de  $\sigma_H/\sigma_V$  pour  $\alpha = 0.3$

Sur la figure 2.6, le raidissement du matériau se traduit par une variation moins importante du jacobien de la transformation, dans le cas du matériau de modules d'élasticité tangents. Mais le résultat le plus significatif est apporté par la figure 2.7. Dans le cas de coefficients d'élasticité tangents, on observe que le rapport des contraintes évolue de manière non

négligeable dans la couche. Contrairement à ce que suggéraient les résultats numériques de la section 2.2.3 (voir tableau 2.57), la caractérisation d'une activité tectonique par un taux de déformation constant n'est pas équivalente à une caractérisation en termes de rapport  $\frac{\sigma_H}{\sigma_V}$ .

## Sixième partie

### Conclusions et perspectives





La méthode micromécanique a démontré sa capacité à établir une passerelle entre le comportement macroscopique d'un poreux fissuré, typiquement la réponse à un essai de compression isotrope, et des propriétés microstructurales comme la distribution  $\epsilon(X)$  du paramètre de densité de fissures, la porosité ou la densité de fissures. Pour autant, l'analyse qui a été proposée se cantonne à une situation où les fissures ne se propagent pas. Une approche micromécanique de l'endommagement autorisant l'extension du rayon de fissure permettrait d'enrichir le modèle de roche fissurée présenté dans ce travail.

S'agissant des conséquences de la non linéarité sur la production d'hydrocarbures, nous avons démontré que le raidissement induit par la fermeture des fissures réduisait significativement la valeur de l'indice de récupération.

Il serait intéressant d'examiner les conséquences de la déplétion en terme de propagation éventuelle de fissures, pour affiner l'analyse du rôle de la fissuration sur la production primaire.

Par ailleurs, nous n'avons pas pris en compte un comportement plastique du squelette qui, à l'inverse de la refermeture des fissures, conduit à une diminution de la raideur tangente (voir par exemple Bévilion [7]).

Pour faire la synthèse de ces tendances, la simulation d'un modèle élastoplastique endommageable à élasticité non linéaire semble, au moins théoriquement, souhaitable.

Un apport de l'approche mécanique de la simulation de bassin réside dans sa capacité à dépasser le cadre unidimensionnel des modèles de bassins classiques dans lesquels l'hypothèse de cinématique oedométrique est toujours admise.

Tout particulièrement, l'approche mécanique a permis de s'intéresser à la simulation d'une activité tectonique. Hormis le contexte académique des petites perturbations ou celui de l'hypoélasticité linéaire, il a été démontré que l'hypothèse habituellement retenue d'un rapport de contraintes  $\sigma_H/\sigma_V$  constant était incompatible avec celle d'un taux de déformation horizontale uniforme.

Ce travail pose donc la question de la formulation des conditions aux limites mécaniques pertinentes pour caractériser une activité tectonique, tout en donnant sa préférence à l'approche cinématique basée sur la donnée du taux de déformation horizontale.

L'impact de l'évolution des propriétés mécaniques (caractéristiques élastiques et module d'écroutissage), liée aux changements de morphologie microstructuraux, s'avère essentiel

sur la réponse d'une structure macroscopique comme un bassin sédimentaire. De façon encore simplifiée, il n'a été pris en compte dans ce travail qu'à travers les variations de volume irréversibles de l'espace poreux préservant ainsi l'isotropie macroscopique.

Cependant, les résultats du chapitre 7 invitent à considérer de plus les changements de forme des pores, induits par la compaction. Ils vont clairement conduire à une anisotropie du comportement macroscopique.

Sur la base de la formulation du comportement poroplastique fini proposé dans ce mémoire, il est possible d'analyser les effets du couplage fluide-squelette à l'échelle d'une structure. Ce travail, non présenté ici, a été effectué dans le contexte de la consolidation (Bernaud et al. [6]). L'extension à la compaction de bassins sédimentaires fait l'objet de la thèse de J. F. Barthélémy.

Cependant, alors que nous avons examiné les conséquences des changements de morphologie microstructuraux sur le comportement mécanique macroscopique, nous avons laissé de côté l'effet de ces derniers sur la perméabilité. Des modèles phénoménologiques prenant en compte l'effet de la variation de porosité sur celle-ci existent (modèle de Kozeny-Carman). Mais de toute évidence, la perméabilité est susceptible d'être affectée en outre par les changements de forme des pores, ce qui incite à s'orienter vers des modèles anisotropes de couplage perméabilité-déformation.

# Bibliographie

- [1] S. Andrieux, Y. Bamberger, and J.J. Marigo. Un modèle de matériaux microfissuré pour les roches et les bétons. *J. Méca. Théor. Appl*, 5:471–513, 1986.
- [2] L.F. Athy. Density, porosity and compaction of sedimentary rocks. *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists*, 14 n°1, 1930.
- [3] J.H. Atkinson. *Introduction to the mechanics of soils and foundations*. Mc Graw-Hill, London, 337p, 1993.
- [4] J.L. Auriault and E. Sanchez-Palencia. Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *Journal de Mécanique*, 16(4):575–603, 1977.
- [5] K.-J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [6] D. Bernaud, V. Deudé, L. Dormieux, S. Maghous, and D. Schmitt. Evolution of elastic properties in finite poroelasticity and finite element analysis. *accepté pour publication dans Int. J. Num. Anal. Meth. Geom*, 2002.
- [7] D. Bevillon. *Couplage d'un modèle de gisement et d'un modèle mécanique-Application à l'étude de la compaction des réservoirs pétroliers et de la subsidence associée*. Thèse de doctorat de l'Université de Lille, 2000.
- [8] M.A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. of Appl. Phys.*, 12:155–164, 1941.
- [9] M.A. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. of Appl. Phys.*, 26:182–185, 1955.
- [10] M.A. Biot. Theory of finite deformation of porous solids. *Indiana University Mathematics Journal*, 21:597–620, 1972.
- [11] M.A. Biot. Non linear and semilinear rheology of porous solids. *Journal of geophysical research*, 78 n° 23:4924–4937, 1973.

- [12] E. Bourgeois. *Mécanique des milieux poreux en transformation finie : formulation des problèmes et méthodes de résolution*. Thèse de doctorat de l'École nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [13] E. Bourgeois, P. de Buhan, and L. Dormieux. Formulation d'une loi élastoplastique pour un milieu poreux fissuré en transformation finie. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 321*, pages 175–182, 1995.
- [14] E. Bourgeois, P. de Buhan, and L. Dormieux. Elastoplastic porous media at large strains: thermodynamic approach of the constitutive law and numerical resolution. *Computational plasticity, Fundamentals and applications (Complas V)*, D.R.J. Owen, E. Oñate, E. Hinton (eds), Barcelona, pages 901–906, 1997.
- [15] E. Bourgeois and L. Dormieux. Consolidation of a nonlinear poroelastic layer in finite deformations. *Eur. J. Mechanics A/Solids*, 15 n°4:575–598, 1996.
- [16] E. Bourgeois and L. Dormieux. Prise en compte des non-linéarités géométriques dans la modélisation de la compaction des sédiments. *Oil & Gas - Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 52(1):23–34, 1997.
- [17] M. Bouteca. Elements of poro-elasticity for reservoir engineering. *Oil & Gas - Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 47(4):479–490, 1992.
- [18] M. Boutéca, D. Bary, J.-M. Piau, N. Kessler, Boisson M., and D. Fourmaintraux. Contribution of poroelasticity to reservoir engineering : Lab experiments, application to core decompression and implication in HP-HT reservoirs depletion. *Eurock'94, Delft, Balkema, Rotterdam, paper SOE/ISRM 28093*, 1994.
- [19] B. Budiansky and R.J. O'Connell. Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12:81–97, 1976.
- [20] J.B Burland. *Deformation of soft clay*. Ph. D. Thesis Cambridge University, 1967.
- [21] J.B Burland and K.H. Roscoe. *On the general behaviour of sweet clay*, in Engineering plasticity. Heyman Leckie ed., Cambridge, 1968.
- [22] O. Coussy. *Mécanique des milieux poreux*. Éditions Technip, Paris, 1991.
- [23] O. Coussy. *Mechanics of porous continua*. Wiley, New York, 1995.
- [24] P. de Buhan, X. Chateau, and L. Dormieux. The constitutive equations of finite strain poroelasticity in the light of a micro-macro approach. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 17(4):901–921, 1998.

- [25] P. de Buhan, L. Dormieux, and S. Maghous. Analyse mécanique de l'effet de la compaction d'une couche géologique sur la réduction de porosité du matériau sédimentaire. *Congrès Français de Mécanique, Poitiers*, 1997.
- [26] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, E. Lemarchand, and S. Maghous. A micromechanical approach to the nonlinear elastic behaviour of rocks. *Rock Mechanics in the National Interest, Elsworth, Tinucci & Heasley (eds), Balkema 2001, D.C. Rocks 2001*, pages 851–857, 2001.
- [27] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, and S. Maghous. Micromechanical approach to the non linear poroelasticity - Application to cracked rocks. *accepté pour publication dans Journal of Engineering Mechanics*, 2002.
- [28] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, and V. Pensée. Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré. *accepté pour publication aux C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 2002.
- [29] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine, Paris, 1984.
- [30] J.K. Dienes. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mechanica*, 32:217–323, 1979.
- [31] L. Dormieux and L. Coussy. *Introduction à la mécanique des milieux poreux*. cours de mécanique de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [32] L. Dormieux and S. Maghous. Mechanical analysis of pore shape evolution in sedimentary rock. *Proceedings (CD-ROM) of ECCM'99, Munich*, 1999.
- [33] L. Dormieux and S. Maghous. Poroelasticity and poroplasticity at large strains. *Oil & Gas - Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 54(6):773–784, 1999.
- [34] L. Dormieux and S. Maghous. Évolution des propriétés élastiques en poroplasticité finie. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 328*, pages 593–600, 2000.
- [35] L. Dormieux, A. Molinari, and D. Kondo. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *accepté pour publication au J. Mech. Phys. Solids*, 2002.
- [36] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London*, A241:235–251, 1957.
- [37] J.D. Eshelby. Elastic inclusion and inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics, I.N Sneddon et R. Hill Ed.*, II:87–140, 1961.

- [38] D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1994.
- [39] P. Gilormini. Sur les référentiels locaux objectifs en mécanique des milieux continus. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 318, Série II*, pages 1153–1159, 1994.
- [40] P. Gilormini and P. Rougée. Taux de rotation des directions matérielles dans un milieu déformable. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 318, Série II*, pages 421–427, 1994.
- [41] B. Halphen. *Problèmes quasistatiques en viscoplasticité*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, 1978.
- [42] B. Halphen and Q.S Nguyen. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 n°1:39–63, 1975.
- [43] B. Halphen and J. Salençon. *Élasto-plasticité*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 448p, 1987.
- [44] E.L. Hamilton. Thickness and consolidation of deep-sea sediments. *Bulletin of the Geological Society of America*, 70, 1959.
- [45] Z. Hashin. Assesment of the self-consistent scheme approximation : Conductivity of particulate composites. *J. Composites Materials*, 2(3):284–300, July 1968.
- [46] Z. Hashin. The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 36(6):719–734, 1988.
- [47] H.D. Hedberg. Gravitational compaction of clays and shales. *American Journal of science*, 31 n°184, 1971.
- [48] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Overall moduli of solids with microcracks: load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 31(2):155–171, 1983.
- [49] M.K. Hubbert and W.W. Rubbey. Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting, I. Mechanics of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting. *Bulletin of the Geological Society of America*, 70:115–166, 1959.
- [50] M. Kachanov. Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis. *Int. J Solids Structures*, 23:23–43, 1987.
- [51] M. Kachanov. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Appl. Mech. Review*, 45(8):304–335, 1992.
- [52] M. Kachanov. On the effective moduli of solids with cavities and cracks. *International Journal of Fracture*, 59:R17–R21, 1993.

- [53] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38:115–128, 1990.
- [54] J.B. Leblond. Basics results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19:633–647, 2000.
- [55] E.H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. Appl. Mech.*, 4:1–6, 1969.
- [56] J. Mandel. Plasticité classique et viscoplasticité. *Cours au CISM n° 97*, Springer Verlag, 1971.
- [57] M.T. Manzary. On finite deformation dynamic analysis of saturated soils. *Arch. Mech*, 48:281–310, 1996.
- [58] S. Nemat-Nasser and H. Horii. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials. *North-Holland, Amsterdam, The Netherlands*, 1993.
- [59] V. Pensée, L. Dormieux, D. Kondo, and V. Deudé. Poroélasticité d'un milieu mésosifissuré : analyse micromécanique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série Ib 330*, pages 147–152, 2002.
- [60] V. Pensée and D. Kondo. Un analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésosifissuration. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série Ib 329*, pages 271–276, 2001.
- [61] V. Pensée, D. Kondo, and L. Dormieux. A micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *accepté pour publication dans Journal of Engineering Mechanics*, 2002.
- [62] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus t.1:concepts fondamentaux*. Ellipses, Paris, 1988.
- [63] F. Schneider, J.L. Potdevin, S. Wolf, and I. Faille. Modèle de compaction élastoplastique et viscoplastique pour simulateurs de bassins sédimentaires. *Oil & Gas - Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 9(2), 1994.
- [64] J.E. Smith. The dynamics of shale compaction and evolution of fluid pressures. *Mathematical Geology*, 3 n°3, 1971.
- [65] P. Suquet. *Continuum micromechanics. CISM Courses and Lectures No. 377*. Springer Verlag, Wien, New York, 1997.
- [66] K. Terzaghi. *Erdbaumechanick auf bodenphysikalisher Grundlage*. F Devitke, Vienna, 1925.



- [67] O. Vincké. An estimation of bulk moduli of sandstones as a function of confining pressure using their petrographic and petrophysic description. *Eurock'94, Delft, Balkema, Rotterdam, paper SOE/ISRM 28093*, 1994.
- [68] J.R. Willis. Anisotropic elastic inclusion problems. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, 17:157–174, 1964.
- [69] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 1999.