



HAL
open science

Méthodes numériques pour le contrôle et la stabilisation rapide de grandes structures flexibles

Jean-Séverin Briffaut

► **To cite this version:**

Jean-Séverin Briffaut. Méthodes numériques pour le contrôle et la stabilisation rapide de grandes structures flexibles. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 1999. Français. NNT : . tel-00005710

HAL Id: tel-00005710

<https://pastel.hal.science/tel-00005710>

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

présentée par

Jean-Séverin BRIFFAUT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSÉES

Sujet : **Méthodes numériques pour le contrôle
et la stabilisation rapide
des grandes structures flexibles**

soutenue le 14 juin 1999 devant le jury composé de :

MM.	Roland Glowinski	Directeur de thèse, Président
	Claude Bardos	Examineur
	Frédéric Bourquin	Examineur
	Vilmos Komornik	Rapporteur
	Günter Leugering	Rapporteur

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil, Unité Mixte de Recherche LCPC-CNRS et a reçu le soutien financier de l'École Nationale des Ponts et Chaussées ainsi que du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

Toute ma reconnaissance à Monsieur Frédéric BOURQUIN pour m'avoir proposé ce sujet et en avoir assuré la direction scientifique. Mais surtout, je tiens à le remercier d'avoir su inspirer autant que stimuler mon travail par ses encouragements et ses réflexions; et tout simplement, de m'avoir initié à la recherche.

Je ne saurais jamais assez exprimer l'honneur que m'a fait le Professeur Roland GLOWINSKI d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse.

Je tiens également à remercier tous ceux qui ont toujours bien voulu m'aider à résoudre tous les problèmes que j'ai pu rencontrer lors du déroulement de ma thèse. Je pense en particulier à Tawfik MASROUR et à José URQUIZA qui par leurs grandes compétences mathématiques ont répondu à toutes mes attentes, à Xavier CHATEAU qui par sa maîtrise de la mécanique m'a fourni une aide précieuse dans ce domaine.

Je tiens à remercier dans le désordre Rabah NAMAR, Eric DIMNET, Xavier AMANDOLÈSE, Raffaele D'ANNA, Michaël PROCHNOW, Marwan MOUBACHIR, José URQUIZA et sans oublier Monsieur GAUTHIER qui ont été, et demeurent, plus que des collègues de travail, de véritables amis.

Je remercie tous les membres du Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil qui ont toujours su créer une atmosphère chaleureuse au sein du laboratoire et en particulier Madame Michelle VALENTI pour son aide généreuse.

Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien absolu de mes parents.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier numériquement la contrôlabilité exacte et la stabilisation rapide de multistruktures flexibles composées de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli.

On utilise la méthode HUM de J.-L. Lions [83] (resp. une variante de la méthode HUM proposée par V. Komornik [59]) qui s'exprime directement au niveau continu et qui fournit un *algorithme constructif* de lois de contrôle frontière en boucle ouverte (resp. fermée) permettant de contrôler exactement (resp. de stabiliser de façon arbitrairement rapide) ces multistruktures.

On applique une *méthode de superposition modale* pour calculer le contrôle approché et on propose différentes méthodes pour calculer la réponse approchée de la poutre. L'étape fondamentale de notre méthode de discrétisation consiste à calculer avec une grande précision le *grammien* de contrôlabilité (resp. de stabilisabilité), terme clef de la méthode, en définissant une *forme très faible* des termes de bords discrets qu'ils contiennent.

En boucle fermée, une formulation dite semi-très faible a été introduite; elle permet de définir une méthode d'approximation stable pour le contrôle en déplacement. Le taux de décroissance exponentielle est indépendant de la discrétisation retenue s'avère toujours *deux fois plus grand* que celui prédit par Komornik [59]. Des résultats théoriques en cours d'établissement [105] semblent d'ailleurs montrer que, sous certaines hypothèses, on peut effectivement démontrer cette propriété. Étant donné que nous voulons construire des lois réalistes du point de vue mécanique, on applique la méthode HUM pour construire des *contrôles réguliers* et on propose une régularisation de la loi de Komornik.

Après une étude numérique approfondie de ces deux lois, on les appliquera aux treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli en utilisant les mêmes algorithmes constructifs ainsi que les mêmes techniques d'approximations, tout en élargissant la classe des actionneurs applicables.

Une condition *suffisante* sur l'horizon de contrôlabilité et la disposition des actionneurs pour que de telles multistruktures soient contrôlables exactement, et qu'*a fortiori* elles soient stabilisables, est que le grammien de contrôlabilité vérifie une *inégalité d'observabilité*. Cela revient à obtenir une estimation de la constante de coercivité du grammien de contrôlabilité (resp. de stabilisabilité) qui permet de mesurer l'efficacité du contrôle exercé. C'est à partir de cette observation que F. Bourquin [14] a proposé un *test numérique* discriminant qui donne une information sur la contrôlabilité exacte (ou la non-contrôlabilité exacte) des multistruktures sur lesquelles s'exercent les contrôles HUM. On vérifiera la validité de ce test en comparant les conclusions qu'il donne, quand on l'applique à différents treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli, aux résultats théoriques de J. Lagnese, G. Leugering et E.J.P.G. Schmidt [67].

Abstract

This thesis deals with the numerical study of exact controllability and fast stabilizability for Euler-Navier-Bernoulli frames.

We used HUM [83] (resp. V. Komornik's variant [59]) written directly at the continuous level which gives a *constructive algorithm* for boundary control laws achieving exact controllability (resp. arbitrarily fast stabilization) for Euler-Navier-Bernoulli beams. We built both regular control laws with HUM's method and regularized Komornik's law. We compute the approximated law by *modal superposition* and we propose two different methods in order to get the controlled beam response.

The key step of our discretization method is the accurate calculation of the controllability grammian using a *very weak form* for boundary discretized terms. After a detailed numerical study, we apply this laws to beam trusses using our previous approach, in increasing the class of applying actuators.

We proposed with F. Bourquin [14, 15] a discriminant *numerical test* which gives information about the exact controllability of structures submitted to HUM's controls using exact computation of the grammian coercivity constant involved in the observability inequality. Finally, we check the numerical relevance of our test regarding theoretical results of J.E. Lagnese, G. Leugering and E.J.P.G. Schmidt [67].

Table des matières

1	Étude numérique de contrôles réguliers appliqués à une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli	9
1.1	Introduction	9
1.1.1	Introduction	9
1.1.2	Méthodes numériques	10
1.1.3	Plan du chapitre	13
1.2	Contrôle usuel	15
1.2.1	Position du problème	15
1.2.2	Méthode HUM	16
1.3	Contrôles réguliers	21
1.3.1	Introduction	21
1.3.2	Méthode HUM régulière	21
1.3.3	Existence et unicité	24
1.4	Algorithme HUM	26
1.5	Approximation par superposition modale	26
1.6	Intégration numérique	31
1.6.1	Introduction	31
1.6.2	Définition des éléments finis	32
1.6.3	Moments discrets	32
1.6.4	Intégration numérique de l'algorithme HUM	37
1.7	Calcul de la réponse approchée	43
1.7.1	Calcul explicite de la réponse par relèvement	44
1.7.2	Méthode de Faedo-Galerkin	48
1.7.3	Propriétés énergétiques des réponses approchées	50
2	Tests numériques	54
2.1	Introduction	54
2.1.1	Objectifs	54
2.1.2	Plan du chapitre	55
2.1.3	Interprétation des tests numériques	55
2.1.4	Notations	56
2.2	Contrôle usuel	57
2.2.1	Premier test	57

2.2.2	Convergence de l'énergie à $t = T$ en fonction de N	62
2.3	Contrôle régulier ($p = 1$)	63
2.3.1	Historiques de la réponse et de la vitesse	63
2.3.2	Norme $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$	65
2.3.3	Spectrogrammes de la réponse et de la vitesse	66
2.4	Estimations d'erreurs des normes F_G et G	68
2.4.1	Étude du conditionnement de K_N^h	68
2.4.2	Estimations d'erreurs de la norme F_G	69
2.4.3	Estimations d'erreurs de la norme G	71
2.5	Temps critique de contrôle	71
2.6	Comparaison entre y^2 et y^{FG}	75
3	Stabilisation arbitrairement rapide de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli	79
3.1	Introduction	79
3.1.1	Généralités	79
3.1.2	Estimations explicites	80
3.1.3	Contrôlabilité et stabilisabilité	81
3.1.4	Méthodes constructives	82
3.1.5	Plan du chapitre	82
3.2	Formulation du problème exact	84
3.2.1	Introduction	84
3.2.2	Présentation de la méthode	84
3.2.3	Étude de la stabilisation uniforme	87
3.3	Approximation par superposition modale	94
3.3.1	Introduction	94
3.3.2	Calcul du grammien de stabilisabilité	94
3.3.3	Formulation de Faedo-Galerkin	96
3.3.4	Calcul du contrôle approché	96
3.3.5	Définition de l'EDO	98
3.3.6	Algorithme de calcul de la réponse	99
3.3.7	Propriété de la fonctionnelle de Liapunov	99
3.4	Régularisation de la loi de rétroaction	102
4	Expériences numériques avec le feedback de Komornik	105
4.1	Introduction	105
4.1.1	Version originale	105
4.1.2	Version modifiée	107
4.1.3	Version régularisée	107
4.2	Fonctionnelle de Liapunov	107
4.2.1	Introduction	107
4.2.2	Vérification de la décroissance exponentielle	107
4.2.3	Explication du taux deux fois supérieur	109

4.3	Méthodes de calcul de $C(\omega, S)$	111
4.3.1	Méthode directe	112
4.3.2	Estimation de $C(\omega, S)$ faisant intervenir le temps minimal de contrôlabilité T^h	113
4.3.3	Estimation de $C(\omega, S)$ à partir du calcul numérique de $C_1(\omega, S)$ et $C_2(\omega, S)$	119
4.3.4	Conclusion	122
4.4	Norme \mathcal{H}	123
4.5	Fréquences vibratoires	125
4.5.1	Rappels sur le calcul des pôles	125
4.5.2	Variation de λ en fonction de S	127
4.5.3	Variation de μ en fonction de ω	128
4.5.4	Spectre pour $N < M$	129
4.5.5	Convergence de μ en fonction de M	130
4.5.6	Conclusion	130
4.6	Loi de rétroaction	132
4.6.1	Choix du nombre de modes	133
4.6.2	Comparaison des différentes versions de la loi de rétroaction	135
4.6.3	Étude de $\ v_{N,M}\ _{L^\infty(0,T)}$ en fonction de ω	135
4.6.4	Variation de la loi de rétroaction en fonction de S	137
4.6.5	Encadrement exponentiel	139
4.7	Spill-over	141
4.7.1	Cas où $N < N$	142
4.7.2	Cas où $N = M$	146
4.8	Convergence des énergies à $t = T$ en fonction de $M = N$	148
4.9	Schéma de Newmark	149
4.9.1	Introduction	149
4.9.2	Algorithme de Newmark	150
4.9.3	Implémentation <i>a-form</i>	150
4.9.4	Propriétés	151
4.9.5	Conditions de stabilité	151
4.9.6	Influence des paramètres du schéma sur la stabilisation	152
4.9.7	Convergence en fonction du nombre d'itérations	154
4.10	Fonctionnelle de coût	154
4.10.1	Rappels:	154
4.11	Deuxième version	156
4.11.1	Fonctionnelle de Liapunov	157
4.11.2	Étude de $C(\omega, S)$	159
4.11.3	Fréquences vibratoires	160
4.11.4	Conclusion	162
4.12	Loi régularisée	162
4.12.1	Introduction	162
4.12.2	Régularisation avec <i>cut-off</i>	163

4.12.3	Régularisation avec taux variable	167
4.12.4	Régularisation avec <i>cut-off</i> et taux variable	170
5	Treillis: contrôlabilité exacte	177
5.1	Introduction	177
5.1.1	Généralités sur les multistruktures	177
5.1.2	Modélisation de la dynamique des multistruktures	178
5.1.3	Plan du chapitre	182
5.2	Application de la méthode HUM au treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli	183
5.2.1	Introduction	183
5.2.2	Position du probleme	183
5.2.3	Grammien de contrôlabilité exacte	185
5.2.4	Généralisation	191
5.3	Approximation par superposition modale du grammien	192
5.3.1	Modes de flexion-compression du treillis	192
5.3.2	Approximation par superposition modale du grammien	193
5.3.3	Généralisation	195
5.4	Intégration numérique	196
5.4.1	Introduction	196
5.4.2	Types d'éléments finis	197
5.4.3	Forme <i>très faible</i> du moment	197
5.4.4	Moment très faible discret	200
5.4.5	Efforts très faibles discrets	201
5.5	Test numérique de contrôlabilité exacte	203
5.5.1	Introduction	203
5.5.2	Version principale	203
5.5.3	Version avec une matrice de masse adaptée	206
5.5.4	Résolution du problème de valeurs propres	207
5.6	Identification des modes inobservables	208
5.7	Suite de Weyl	210
6	Étude numérique de la contrôlabilité exacte de treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli	213
6.1	Introduction	213
6.1.1	Rappels concernant le test numérique	213
6.1.2	Application et interprétation du test	214
6.1.3	Plan	215
6.2	La poutre d'Euler-Navier-Bernoulli	216
6.2.1	Vérification de la contrôlabilité exacte	217
6.2.2	$\alpha_n(T)$ fonction de T	217
6.2.3	Influence du pas de maillage h	218
6.2.4	Calcul de α_n avec les moments <i>usuels</i> et <i>très faibles</i>	219

6.2.5	Tests avec une matrice $M^{n,\theta}$	222
6.3	Premier exemple de treillis contrôlable exactement	223
6.3.1	Définition du treillis	223
6.3.2	Remarques sur le caractère contrôlable	224
6.3.3	Vérification de la contrôlabilité exacte	224
6.3.4	$\alpha_n(T)$ fonction de T	226
6.3.5	Influence du pas de maillage	228
6.3.6	Tests avec une matrice $M^{n,\theta}$	229
6.3.7	Choix des actionneurs	230
6.3.8	Conclusion	232
6.4	Deuxième exemple de treillis contrôlable exactement	233
6.4.1	Définition du treillis	233
6.4.2	Remarques sur le caractère contrôlable	234
6.4.3	Vérification de la non contrôlabilité exacte avec un seul actionneur	234
6.4.4	$\alpha_n(T)$ fonction de T	235
6.4.5	Influence du pas de maillage h	236
6.4.6	Identification du mode inobservable du treillis	236
6.4.7	Version avec une matrice de masse adaptée	238
6.4.8	Tests avec différents actionneurs	238
6.4.9	Conclusion	242
6.5	Treillis objet de conjectures	242
6.5.1	Remarques sur le caractère contrôlable	243
6.5.2	Vérification de la contrôlabilité exacte	243
6.5.3	$\alpha_n(T)$ fonction de T	243
6.5.4	Influence du pas de maillage h	244
6.5.5	Tests avec une matrice $M^{n,\theta}$	245
6.5.6	Identification d'un mode inobservable	245
6.5.7	Tests avec différents actionneurs	246
6.6	Conclusion	252
6.6.1	Accord du test numérique avec la théorie	252
6.6.2	Propriétés utiles pour conclure à la contrôlabilité exacte à l'aide du test	254
A	Inégalités inverses et directes ($p = 0$)	257
A.1	Rappels	257
A.2	Inégalité inverse	258
A.3	Inégalité directe	261
B	Calcul des cosinus et sinus régularisés ($p = 1$ et $p = 2$) :	262

C	Expressions matricielles de l'opérateur Λ_p	263
C.1	Notations	263
C.2	Contrôle usuel ($p = 0$)	264
C.2.1	K^{DD}	264
C.2.2	K^{DV}	264
C.2.3	K^{VV}	265
C.3	Contrôle régulier ($p = 1$)	265
C.3.1	K^{DD}	265
C.3.2	K^{DV}	266
C.3.3	K^{VV}	266
C.4	Contrôle régulier ($p = 2$)	267
C.4.1	K^{DD}	267
C.4.2	K^{DV}	268
C.4.3	K^{VV}	268
D	Coefficients du terme de Duhamel	270
D.1	$p = 0$	270
D.1.1	$C_{ij}(t)$	270
D.1.2	$S_{ij}(t)$	271
D.1.3	Dérivées de $C_{ij}(t)$ et $S_{ij}(t)$	271
D.2	$p = 1$	272
D.2.1	$C_{ij}(t)$	272
D.2.2	$S_{ij}(t)$	273
E	Énergies de la réponse calculée avec un relèvement exact	275
E.1	Contrôle usuel	276
E.1.1	Norme $L^2(0, L)$ de la réponse	276
E.1.2	Norme $H^{-2}(0, L)$ de la vitesse	276
E.2	Contrôle régulier $p = 1$	278
E.3	Énergies	278
F	Suite de weyl du moment	279
G	Expressions matricielles de l'opérateur Λ_ω	286
H		287
H.1	Introduction	287
H.2	Komornik's feedback law	289
H.3	Computational aspects	290
H.3.1	Semi very weak Faedo-Galerkin approximation	290
H.3.2	Approximation of the control law	291
H.3.3	Postprocessing the control power	292
H.4	Numerical tests	293

H.4.1	Stabilization of initial conditions	294
H.4.2	Control of the beam subjected to external loadings	297
H.5	Concluding remarks	298
I		301
I.1	INTRODUCTION	301
I.2	KOMORNIK'S FEEDBACK LAW	304
I.3	SMOOTHING PROCEDURES	305
I.4	COMPUTATIONAL ASPECTS	306
I.5	NUMERICAL TESTS	306
I.6	CONCLUDING REMARKS	310
J	$\alpha_N(T)$ est linéaire en T	313
K	Estimations d'erreurs pour l'élément structurant	316
K.1	Estimation de la vitesse de convergence de α_n	316
K.2	Estimation d'erreur de $\alpha_{n,h}$ en fonction de h	318

Chapitre 1

Étude numérique de contrôles réguliers appliqués à une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli

1.1 Introduction

1.1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude numérique de la contrôlabilité exacte de l'élément structurant pour de nombreuses multistruktures flexibles (voir chapitre 6 pour des exemples de treillis de poutres), la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli.

Remarque 1.1 L'étude, que nous allons effectuer, se généralise au modèle de plaque correspondant à cette poutre, mais nécessite un calcul plus complexe des termes de bord en raison de la dimension supérieure (voir F. Bourquin, J. Urquiza et R. Namar [30] pour les plaques minces ainsi que F. Bourquin, J.-S. Briffaut et J. Urquiza [18, 19] pour la membrane).

Différentes théories existent pour définir des lois pour contrôler exactement de tels systèmes, parmi celles-ci, la méthode d'unicité hilbertienne (ou encore *Hilbert Uniqueness Method*, soit en abrégé HUM) introduite par J.-L. Lions [80, 81, 83, 84] à la fin des années 80, s'exprime directement au niveau continu et de part sa nature constructive permet, pour un temps de contrôlabilité fixé, de construire le contrôle pour des données initiales appartenant à un espace donné.

Ce contrôle est celui qui, parmi tous les contrôles solutions du problème de contrôlabilité exacte, a la norme la plus faible.

Par exemple, dans le cas du contrôle Dirichlet de l'équation des ondes (mais également pour d'autres équations), le contrôle donné par la méthode HUM est celui qui minimise la fonctionnelle:

$$J(v) = (1/2) \int_{\Sigma} |v|^2 d\Sigma,$$

sur $\mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma), y \text{ solution du système contrôlé telle que } y(T, v) = y'(T, v)\}$. C'est donc la solution d'un problème de *contrôle optimal*, autrement dit, on doit minimiser une fonctionnelle d'énergie, associée au système à contrôler, afin de calculer le contrôle. Cette propriété fondamentale, et très classique, a été utilisée pour les premières approximations des problèmes de contrôlabilité exacte, notamment parce qu'elle permet d'employer des techniques traditionnelles de *gradient conjugué* (voir paragraphe 1.1.2 A). Malheureusement ces méthodes entraînent de nombreuses difficultés techniques, car les problèmes discrets obtenus sont mal posés *si on ne prend pas garde à la discrétisation*.

Pour la compréhension du déroulement des méthodes numériques que nous allons inventorier, rappelons les différentes étapes de l'algorithme résultant de l'application de la méthode HUM :

1. Résolution d'un système linéaire qui fournit, à partir des données initiales du problème initial, les données d'un problème adjoint intermédiaire.
2. Calcul du contrôle à partir de la solution du problème adjoint.

On peut alors appliquer différentes techniques pour calculer la réponse contrôlée.

1.1.2 Méthodes numériques

Nous allons faire l'inventaire des méthodes numériques utilisées pour discrétiser cet algorithme.

A. Méthodes de type gradient conjugué

De même que les articles de J.-L. Lions, cités ci-dessus, font référence pour les aspects théoriques de la méthode HUM, l'article de R. Glowinski, C.H. Li et J.-L. Lions [39] (voir également les versions actualisées de R. Glowinski et J.-L. Lions [40], [41]) est le premier exemple de l'implémentation de cette méthode et d'une analyse très détaillée des problèmes numériques que l'on peut rencontrer dans ce type d'approximation.

De plus, bien que l'étude concerne le problème du contrôle frontière Dirichlet de l'équation des ondes, les remarques qui y sont faites se généralisent à d'autres types d'équations et de contrôles, comme l'équation de la chaleur (C. Carthel, R. Glowinski et J.-L. Lions [21]), le problème de Stokes (R. Glowinski [38], R. Glowinski et J.-L. Lions [41]) ou les problèmes de diffraction d'ondes planes par des obstacles (R. Glowinski et al. [86]).

Les auteurs ont tout d'abord adapté l'algorithme de gradient conjugué, utilisé habituellement pour la résolution de problèmes elliptiques linéaires, pour résoudre le problème de contrôle, puis ils ont effectué une discrétisation en espace et en

temps, en combinant un schéma explicite pour la discrétisation en temps et une formulation variationnelle pour les termes de dérivées en espace. Enfin ils ont utilisé une méthode d'éléments finis de type P_1 -Lagrange pour construire l'espace d'approximation en espace.

Comme il a été bien souligné dans cet article, le caractère symétrique *défini positif* de la forme bilinéaire obtenue après mise sous forme variationnelle du système linéaire provenant de la première étape de l'algorithme de la méthode HUM, est non seulement nécessaire pour l'utilisation d'algorithmes de gradient conjugué mais plus fondamentalement pour la conservation de la contrôlabilité exacte lors du passage au niveau discret.

Le terme de bord, c'est-à-dire le contrôle, a été décomposé sur cet espace d'approximation, en le transformant par application d'une formule de Green, en une expression variationnelle faible calculée sur le domaine tout entier.

On verra ultérieurement, dans la discrétisation que nous avons adoptée, l'utilisation que nous avons faite de cette transformation d'un terme de bord en une expression intégrale.

Les auteurs ont alors observé que le problème approché ne convergait pas vers la solution exacte (dont ils avaient une expression explicite dans un cas particulier) quand Δt (le pas de discrétisation en temps) et h (le pas de discrétisation en espace) tendaient vers 0.

Après une analyse précise des perturbations numériques créées par les différentes approximations, ils en ont déduit que le défaut de convergence était dû à une mauvaise approximation du terme de bord.

Parmi les différents remèdes applicables (éléments finis de plus haut degrés, méthodes d'éléments finis mixtes (voir R. Glowinski et M.F. Wheeler [42]), méthodes spectrales, approximation de haut degré du seul terme de bord), ils ont utilisé une technique de régularisation, dite de Tychonoff, classique pour rendre bien posés des problèmes mal posés (se référer par exemple à R. Lattès et J.-L. Lions [73]).

Ils ont fait la remarque essentielle suivante:

le terme de bord, avec le type d'éléments finis utilisés, ne peut converger dans l'espace approprié ($L^2(\Sigma)$ pour leur contrôle),

en concluant, "de nombreuses tentatives peuvent être faites pour remédier à cette situation, mais aucune d'entre elles ne semble être simple".

C'est à partir de cette observation, qu'a été proposée une expression différente du terme de bord approché par C. Bardos, F. Bourquin et G. Lebeau [6] (voir également F. Bourquin [13], F. Bourquin, J.-S. Briffaut et J. Urquiza [18] et F. Bourquin et J. Urquiza en préparation).

B. Méthodes de Galerkin

L'autre grande classe de méthodes d'approximation consiste dans l'application de méthodes de superposition modale pour la résolution du problème de contrôle optimal que l'on obtient à partir de la méthode HUM.

En effet, comme on l'a déjà remarqué, la résolution du système initial, dans l'algorithme général, peut s'écrire comme un problème de minimisation.

On résout l'équation d'Euler permettant d'obtenir la solution, en projetant la fonctionnelle à minimiser sur les modes propres de l'opérateur associé au type de système à contrôler, par exemple le Laplacien Dirichlet dans le cas de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet. Cette démarche a l'avantage de transformer une des étapes fondamentales du calcul du contrôle en un problème de résolution de valeurs propres.

Une fois les solutions obtenues, on résout le système d'évolution non homogène par écriture sous une forme analogue du problème initial, via l'introduction de nouvelles conditions de bord de type Newton-Robin (voir J.-L. Lions [82] et M. Křížek et P. Neittaanmäki [64]), puis discrétisation en temps en utilisant une approximation de Galerkin comme A. Eljendy [29] pour l'équation des ondes.

C. Méthodes de Galerkin et gradient conjugué

Une autre façon de procéder consiste à combiner approximation de Galerkin (modes propres de l'opérateur de Lax-Milgram associé au modèle considéré) et méthode de gradient conjugué pour résoudre la fonctionnelle minimisante, comme l'ont fait G. Geymonat, P. Loreti et V. Valente [35, 36] pour les coques minces, ou R. Luce [85] *grosso modo* pour un problème parabolique linéaire.

D. Méthodes de différences finies

Une méthode totalement différente des précédentes, puisque n'utilisant pas de fonctionnelle minimisante, est la suivante : par utilisation de schémas de différences finis implicites en temps et en espace, on trouve une relation récurrente entre la solution du problème adjoint et ses données initiales, ce qui permet en utilisant le contrôle donné par la méthode HUM de trouver les données initiales du problème adjoint telles qu'avec le contrôle, calculé à partir de la solution du problème adjoint, on ait contrôlabilité exacte par résolution d'un système linéaire. Il s'agit en fait d'un *problème de moment* (voir par exemple W. Krabs [62]) résolu sous forme discrète.

On peut citer comme exemple d'une telle approche M. A. Rincon [99] qui a appliqué cette méthode pour le contrôle frontière Dirichlet de l'équation des ondes dans le cas unidimensionnel.

E. Méthodes de Galerkin avec terme de bord très faible

L'approche adoptée dans le cas de l'équation des ondes par C. Bardos, F. Bourquin et G. Lebeau [6] préconise l'algorithme de résolution suivant :

projection sur les modes correspondant au problème considéré de la formulation variationnelle obtenue à partir du système donnant les données du problème adjoint, avec décomposition des dérivées normales des modes (intervenant dans cette expression) sur la base des modes propres d'un opérateur capacité,

tandis que celle de F. Bourquin [13], que nous allons étudier, applique la même méthode de discrétisation que ci-dessus, mais *transforme le terme de bord en une expression variationnelle très faible* par application d'un relèvement *ad hoc*.

En conclusion de cette rétrospective des techniques numériques employées pour la résolution du problème de contrôlabilité exacte frontière, on peut dire que *la transformation du terme de bord en une expression variationnelle est la clef de ce type de résolution*.

1.1.3 Plan du chapitre

Puisque notre étude de la contrôlabilité exacte a pour but d'être un premier pas vers une construction de lois réalistes du point de vue mécanique, et donc applicables à des structures réelles, nous avons également utilisé la méthode HUM afin de construire des contrôles plus réguliers. En effet, dans la version usuelle on n'a pas de *compatibilité entre les données initiales du problème et la condition de bord* sur laquelle agit le contrôle. Aussi grâce à la liberté que donne la méthode HUM quant au choix du contrôle et de l'espace auquel il appartient, nous allons étudier des contrôles $v \in H_0^p(0, T)$ avec $p \geq 1$ au lieu de $L^2(0, T)$.

1. On commence par appliquer dans le cas standard la méthode HUM afin de démontrer que la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli est contrôlable exactement. Ceci nous permet de mettre en exergue les différentes étapes de la construction du contrôle et en particulier la définition d'un *grammien* de contrôlabilité (propriété 1.1) qui est le point clef de cette méthode. En effet, c'est en montrant qu'il vérifie une *inégalité d'observabilité* (propriété 1.2) que l'on démontre la contrôlabilité exacte pour un choix approprié de contrôle (définition 1.4).

Après ces rappels, on généralise la méthode HUM afin de construire des contrôles de régularités $H_0^p(0, T)$. On démontre en particulier un théorème d'existence et d'unicité (théorème 1.4).

2. On rappelle au paragraphe 1.4 les différentes étapes de l'algorithme.

3. Au paragraphe suivant, on applique la méthode de superposition modale pour calculer un contrôle approché. On obtient pour les données initiales du problème adjoint des estimations d'erreurs fonctions du nombre de modes N du contrôle (théorème 1.5).

4. Au paragraphe 1.6, on effectue l'intégration numérique du problème semi-discret que l'on vient d'obtenir. On calcule ainsi les modes propres de la poutre encastrée avec des éléments finis de degrés suffisants (P_3 -Hermite). Une étape fondamentale de notre méthode de discrétisation consiste à calculer avec une grande précision le grammien de contrôlabilité. Ainsi, tout en rappelant les définitions de moments discrets utilisés de façon standard (définitions 1.12 et 1.13), on définit une forme *très faible* de moment discret (définition 1.15) qui a les propriétés de convergence *ad hoc* (propriété 1.6). On compare les vitesses de convergence des différents types de moments (nos termes de bord), afin de justifier l'utilisation de cette expression très faible du moment. On exprime la forme bilinéaire sous forme matricielle dont on sait calculer les termes explicitement (voir l'Annexe C). Enfin le théorème 1.6 fournit des estimations d'erreurs fonctions de N et h .

5. On présente enfin au dernier paragraphe, essentiellement deux méthodes pour calculer la réponse approchée : une méthode de calcul explicite de la réponse (méthode par *relèvement*) et une méthode de résolution de type Faedo-Galerkin dont on ne connaît pas *a priori* de solution explicite.

Cependant, on montre que la solution semi-très faible de la seconde méthode est identique à la réponse calculée par relèvement projetée sur les modes.

1.2 Contrôle usuel

1.2.1 Position du problème

On considère les mouvements de flexion dans un plan d'une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli encastree à son extrémité gauche et dont on impose l'angle de rotation à l'extrémité droite, le déplacement transverse y étant bloqué à cette même extrémité (figure 1.1).

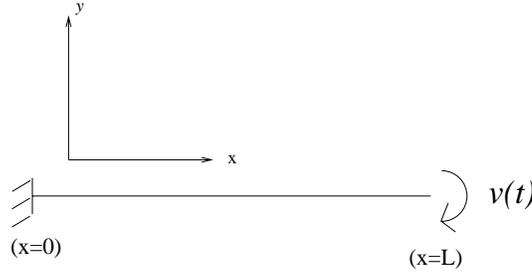


FIG. 1.1 - Poutre d'Euler-Navier-Bernoulli contrôlée en rotation à son extrémité droite.

Les équations décrivant l'évolution d'un tel système sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A y''(x, t) + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = v(t) & \forall t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x) & \forall x \in (0, L), \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

où $T > 0$ représente l'horizon de contrôlabilité, L la longueur de la poutre, ρ la densité, A la section, E le module d'Young et I le moment d'inertie de flexion de la poutre. Enfin $\{y^0, y^1\}$ sont des données initiales assez régulières, et $v(t)$ représente le contrôle agissant sur le système via l'angle de rotation de la poutre.

Le problème de la contrôlabilité exacte s'énonce ainsi :

Étant donné $T > 0$, $\{y^1, -y^0\}$ des données initiales dans un espace ad hoc, trouver un contrôle v dans un espace convenable tel que la solution $y(x, t; v)$ de (1.2.1) vérifie :

$$y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0 \quad \forall x \in (0, L). \quad (1.2.2)$$

On aura alors $y(x, t; v) = 0$ pour tout $t > T$ si $v(t) = 0$ pour $t > T$.

La méthode HUM s'applique à la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli.

1.2.2 Méthode HUM

On rappelle dans ce paragraphe les étapes essentielles de la méthode HUM, à l'aide de la démonstration du théorème 1.1, en particulier la construction d'un grammien de contrôlabilité (1.1) dont on montre qu'il vérifie l'inégalité d'observabilité (1.2).

Théorème 1.1 $\exists T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$ et pour tout couple $\{y^1, -y^0\}$ de $H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)$ il existe un contrôle $v \in L^2(0, T)$ tel que la solution y de (1.2.1) vérifie (1.2.2).

DÉMONSTRATION :

Pour $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L)$, soit φ l'unique solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} \rho A \varphi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \varphi'(x, 0) = \varphi^1(x) & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (1.2.3)$$

et ψ l'unique solution du problème rétrograde :

$$\begin{cases} \rho A \psi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) & \forall t \in (0, T), \\ \psi(x, T) = \psi'(x, T) = 0 & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (1.2.4)$$

associé au φ du problème (1.2.3).

On définit alors l'opérateur Λ par :

Définition 1.1

$$\forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L), \quad \Lambda \{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \quad (1.2.5)$$

Remarque 1.2 L'opérateur Λ est bien défini si on considère ψ comme l'unique solution du problème (1.2.4) au sens de la transposition (voir J. Lagnese et J.-L. Lions [68]).

Grâce à cette définition, l'opérateur vérifie la propriété fondamentale suivante :

Propriété 1.1 $\forall (\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) \in (\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L))^2$,

$$\langle \Lambda \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(t, L) d\tilde{t}, \quad (1.2.6)$$

pour ζ solution unique de (1.2.3) associée à $\{\zeta^0, \zeta^1\}$, $d\tilde{t} = \frac{dt}{\rho A}$ et où $\langle \dots \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ et $H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)$.

Remarque 1.3 L'intégrale que nous venons d'obtenir est ce que l'on appelle selon la terminologie de la théorie du contrôle un *grammien de contrôlabilité*. Ce grammien joue un rôle fondamental dans la démonstration de la contrôlabilité exacte d'un système d'équations aux dérivées partielles. En effet, c'est grâce à la vérification de son caractère défini positif, via une inégalité d'observabilité (voir ci-dessous l'inégalité *inverse*), que l'on démontre cette contrôlabilité exacte.

Remarque 1.4 Remarquons d'autre part que ce grammien n'a pas d'interprétation énergétique claire puisqu'il s'agit du travail d'un moment par un moment, ce qui suggère qu'il est nécessaire d'employer des méthodes numériques fines pour calculer ces moments.

DÉMONSTRATION :

On multiplie la solution ψ de (1.2.4) par ζ solution de (1.2.3) et on intègre par parties sur $(0, L) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^T (\rho A \psi'' + EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}) \zeta dx dt &= \int_0^L \int_0^T \psi \left(\rho A \zeta'' + EI \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right) dx dt \\ + \rho A \int_0^L (\psi(0) \zeta^1 - \psi'(0) \zeta^0) dx &+ EI \int_0^T \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right]_{x=0}^L dt, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle &= \int_0^L (\psi'(0) \zeta^0 - \psi(0) \zeta^1) dx \\ &= \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, t) d\tilde{t}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

□

D'après cette propriété, on peut donc associer à l'opérateur Λ la forme bilinéaire symétrique :

Définition 1.2 $\forall (\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) \in (\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L))^2$,

$$a(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) = \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, t) d\tilde{t}. \quad (1.2.9)$$

On définit alors la *semi-norme* sur $\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L)$:

Définition 1.3

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\langle \Lambda \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.10)$$

qui d'après la propriété 1.1 est telle que :

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right)^2 d\tilde{t} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2.11)$$

On montre que cette semi-norme vérifie les inégalités *directe* et *inverse* :

Propriété 1.2 $\forall T > T_0, \exists C_1(T, L), C_2(T, L) > 0$ telles que :

$$C_1(T, L) \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)}^2 \leq \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) \right)^2 d\tilde{t} \quad (1.2.12)$$

et

$$\int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) \right)^2 d\tilde{t} \leq C_2(T, L) \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)}^2 \quad (1.2.13)$$

DÉMONSTRATION : Pour la démonstration de ces deux inégalités, on se référera à l'Annexe A. \square

Faisons quelques remarques sur leurs significations :

L'inégalité (1.2.12), appelée *inégalité inverse*, est une *inégalité d'observabilité*. En effet, grâce à elle, on peut savoir pour un temps T d'observation donné quelle information (ou observation) sur le bord (sur lequel on exercera le contrôle) il est suffisant d'avoir pour connaître la solution sur tout le reste du domaine et ainsi pouvoir la contrôler.

C'est elle qui permet essentiellement de montrer que la méthode HUM fonctionne. D'un point de vue technique, cette inégalité est équivalente à la coercivité de la forme bilinéaire construite à partir de l'opérateur Λ et permet de montrer un *théorème d'unicité*, d'où le nom de la méthode, qui implique que la *semi-norme* que l'on vient de définir est une *norme*.

C'est donc le *point essentiel* de cette méthode, mais plus généralement de la démonstration de la contrôlabilité exacte dans la théorie du contrôle, que ce soit en dimension finie ou infinie. Il y a essentiellement deux méthodes théoriques pour la démontrer :

- la méthode des *multiplieurs*, qui comme son nom l'indique, consiste à multiplier par une fonction judicieusement choisie l'équation du problème

adjoint et après intégrations par parties à utiliser diverses majorations afin d'obtenir l'inégalité. C'est cette méthode que nous utilisons pour la démonstration.

- l'autre méthode consiste à utiliser l'*analyse microlocale* qui nécessite des outils mathématiques beaucoup plus complexes mais donne des informations beaucoup plus générales (voir l'introduction du chapitre 5).

La seconde inégalité (1.2.13) est moins fondamentale que l'*inégalité d'observabilité* (1.2.12). Elle permet de montrer que le terme de bord du problème adjoint qui intervient dans le grammien appartient à $L^2(0, T)$ et donc à une régularité plus grande que celle que l'on obtient directement à l'aide de la régularité des solutions du problème adjoint. On parle de *régularité cachée*.

Les constantes C_1 et C_2 intervenant dans l'inégalité dépendent du temps d'observation T et également du bord qui correspondra au support de l'actionneur. Comme nous sommes en dimension un, le bord est géométriquement trivial et donc n'entraîne pas de considérations complexes comme pour les dimensions supérieures. En fait, le seul problème est de savoir si pour des conditions de bord de type Dirichlet, il est suffisant d'agir sur une seule des extrémités de la poutre. Pour d'autres conditions limites, par exemple de type Neumann, c'est un peu moins simple (voir en particulier J.-L. Lions [83], L. Triggiani [70]).

On obtiendra une estimation de ces constantes à l'Annexe A par la méthode des multiplicateurs et on démontrera à l'Annexe J qu'elles *dépendent linéairement du temps*.

On a donc montré grâce à la propriété 1.2 que la semi-norme F est une norme équivalente à la norme usuelle sur $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$, ce qui implique que :

Λ est un *isomorphisme* de $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ sur $H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)$.

Par conséquent, on a :

Propriété 1.3 $\forall \{y^1, -y^0\} \in H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L), \exists! \{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ tels que

$$\begin{aligned} \forall \{\zeta^0, \zeta^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L), \\ \langle \Lambda \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = \langle \{y^1, -y^0\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Si on choisit comme loi de contrôle :

Définition 1.4

$$\forall t \in [0, T], \quad v(t) = EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t), \tag{1.2.15}$$

avec φ l'unique solution du problème adjoint (1.2.3) pour les données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ obtenues par résolution de (1.2.14),

alors l'unique solution de (1.2.1) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \psi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) & \forall t \in (0, T), \\ \psi(x, T) = \psi'(x, T) = 0 & \forall x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (1.2.16)$$

On a donc bien obtenu un contrôle v tel que la solution y de (1.2.1), qui n'est autre que la solution ψ du problème (1.2.16), vérifie (1.2.2).

Fin de la démonstration du théorème 1.1

□

Remarque 1.5 En réalité, on peut choisir T aussi petit que l'on veut (voir W. Krabs [61], E. Zuazua [108] et V. Komornik [54]).

Remarque 1.6 Le contrôle v donné par la méthode HUM est solution d'un problème de contrôle optimale dont il minimise la fonctionnelle de coût suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u|^2 dt, \quad (1.2.17)$$

sur l'ensemble $\mathcal{U}_{ad} = \{w \in L^2(0, T) / y(T, w) = y'(T, w) = 0\}$.

Donnons en conclusion de ces rappels concernant la méthode HUM dans le cas usuel, le théorème indiquant la régularité des solutions ainsi que leurs continuités vis-à-vis des données initiales et du contrôle.

Théorème 1.2 Pour tout $\{y^1, -y^0, v\} \in H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, T)$, il existe une unique solution y de (1.2.1) telle que :

$$y \in \mathcal{C}^0(0, T, L^2(0, L)) \cap \mathcal{C}^1(0, T, H^{-2}(0, L)), \quad (1.2.18)$$

et une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} & \|y\|_{L^\infty(0, T, L^2(0, L))} + \|y'\|_{L^\infty(0, T, H^{-2}(0, L))} \\ & \leq C \left(\left\| \{y^1, y^0\} \right\|_{H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)} + \|v\|_{L^2(0, T)} \right). \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

DÉMONSTRATION : Voir J.-L. Lions [83]. □

1.3 Contrôles réguliers

1.3.1 Introduction

On peut remarquer dans la méthode HUM la correspondance entre l'espace des données initiales et l'espace du contrôle.

En effet, comme l'a souligné J.-L. Lions (voir par exemple [83] p. 72 pour le cas des ondes), on a équivalence entre les normes $\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{F_G}$ et $\left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t)\right\|_G$ où $G = L^2(0, T)$ et $F_G = H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ dans la version de base. Ce que l'on peut écrire formellement :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) \in G \iff \{\varphi^0, \varphi^1\} \in F_G. \quad (1.3.1)$$

Comme par ailleurs, on a contrôlabilité exacte pour $\{y^1, -y^0\} \in [F_G]'$, on a les inclusions suivantes :

$$G_1 \subset G_2 \iff F_{G_2} \subset F_{G_1} \iff [F_{G_1}]' \subset [F_{G_2}]'. \quad (1.3.2)$$

Nous allons étudier le cas où $v \in H_0^p(0, T)$ avec p un entier naturel supérieur ou égal à un.

Notations : Soit l'opérateur $\mathcal{A} = \left(\frac{d^4}{dx^4}, \mathcal{D}(\mathcal{A}), [0, L]\right)$ avec $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H_0^2(0, L)$.

On note :

$$\forall p \geq 1, \quad E_p = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{p-1}) \times \mathcal{D}(\mathcal{A}^p) \quad (1.3.3)$$

et E_{-p} son dual.

1.3.2 Méthode HUM régulière

Pour démontrer le théorème qui va suivre et définir le contrôle régulier donné par la méthode HUM, il est nécessaire d'introduire l'opérateur suivant :

Définition 1.5 $\forall p \geq 1$, B_p est tel que :

$$\forall f \in H^{-p}(0, T), \quad w = B_p(f) \iff \begin{cases} (-1)^p \frac{d^{2p}}{dt^{2p}}(w) = f, & \forall t \in [0, T] \\ w^{(r)}(0) = w^{(r)}(T) = 0, & \forall r \in [0, \dots, p-1]. \end{cases}$$

D'après le théorème de Riesz, B_p est un isomorphisme isométrique de $H^{-p}(0, T)$ dans $H_0^p(0, T)$.

Théorème 1.3 $\forall T > T_0, \forall \{y^1, -y^0\} \in E_p, \exists v \in H_0^p(0, T)$ tel que la solution y de (1.2.1) vérifie (1.2.2).

DÉMONSTRATION :

Pour $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L)$, soit φ l'unique solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} \rho A \varphi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \varphi'(x, 0) = \varphi^1(x) & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (1.3.4)$$

et ψ l'unique solution du problème rétrograde :

$$\begin{cases} \rho A \psi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) \right) & \forall t \in (0, T), \\ \psi(x, T) = \psi'(x, T) = 0 & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (1.3.5)$$

associée à la solution φ du problème précédent.

On définit l'opérateur Λ_p par :

Définition 1.6

$$\begin{aligned} \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L), \\ \Lambda_p \{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

On montre qu'il peut s'exprimer, comme dans le cas usuel, sous la forme d'un grammien de contrôlabilité :

Propriété 1.4

$$\begin{aligned} \forall (\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) \in (\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L))^2, \\ \langle \Lambda_p \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = \int_0^T B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(t, L) dt, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

pour ζ solution unique de (1.3.4) associée à $\{\zeta^0, \zeta^1\}$.

DÉMONSTRATION :

On reprend la démonstration faite dans le cas usuel et on remplace dans la première égalité de cette démonstration le terme de bord de ψ où intervient φ par celui correspondant à notre nouveau problème, d'où la propriété. \square

De la même façon que pour le contrôle usuel, on peut grâce à cette propriété associer à l'opérateur Λ_p une forme bilinéaire symétrique :

Définition 1.7 $\forall (\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) \in (\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L))^2$,

$$a_p(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) = \int_0^T B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) \right) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, t) dt. \quad (1.3.8)$$

On considère la *semi-norme* :

$$\forall (\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) \in (\mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L))^2, \\ \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{F_p} = \left(\int_0^T B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right) EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.9)$$

De la même façon que pour le contrôle usuel, on peut montrer qu'elle vérifie les inégalités *directes* et *inverses* :

Propriété 1.5 $\forall T > T_0, \exists C_1(T, L), C_2(T, L) > 0$ tels que :

$$C_1(T, L) \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_{-p}}^2 \leq \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{F_p}^2 \leq C_2(T, L) \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_{-p}}^2. \quad (1.3.10)$$

DÉMONSTRATION : On se référera à C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] pour une démonstration à l'aide de l'analyse microlocale de ces inégalités dans le cas de l'équation des ondes qui devrait se généraliser au cas de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli. \square

D'après cette propriété, la semi-norme F_p est donc une norme équivalente à la norme usuelle sur E_{-p} . On en déduit que, pour tout $p \geq 1$:

Λ_p est un *isomorphisme* de E_{-p} sur E_p .

Par conséquent : $\forall \{y^1, -y^0\} \in E_p, \exists \{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_{-p}$ solution unique de l'équation variationnelle :

$$\forall \{\zeta^0, \zeta^1\} \in E_{-p}, \\ \langle \Lambda_p \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = \langle \{y^1, -y^0\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle. \quad (1.3.11)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre E_p et E_{-p} .

Si on choisit le contrôle suivant :

Définition 1.8

$$\forall t \in (0, T), \quad v(t) = B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right), \quad (1.3.12)$$

où φ est l'unique solution de (1.3.4) qui correspond aux données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ solutions de (1.3.11),

alors l'unique solution de (1.2.1) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \psi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t) \right) & \forall t \in (0, T), \\ \psi(x, 0) = y^0(x), \quad \psi'(x, 0) = y^1(x) & \forall x \in (0, L), \\ \psi(x, T) = \psi'(x, T) = 0, & \forall x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (1.3.13)$$

On a donc bien obtenu un contrôle v tel que la solution y de (1.2.1), qui n'est autre que la solution ψ du problème (1.3.13), vérifie (1.2.2). \square

1.3.3 Existence et unicité

Dans ce paragraphe, on démontre l'équivalent du théorème 1.2 dans le cas régulier $p = 1$.

Théorème 1.4 $\forall \{y^0, y^1, v\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, T)$, il existe une solution unique y de (1.2.1) qui vérifie :

$$y \in \mathcal{C}^0(0, T, H^2(0, L)) \cap \mathcal{C}^1(0, T, L^2(0, L)). \quad (1.3.14)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\{y^0, y^1, v\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, T)$:

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(0, T, H^2(0, L))} + \|y'\|_{L^\infty(0, T, L^2(0, L))} \\ \leq C \left(\|y^0\|_{H_0^2(0, L)} + \|y^1\|_{L^2(0, L)} + \|v\|_{H_0^1(0, T)} \right). \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

DÉMONSTRATION :

Posons $w = y'$, qui est donc solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A w''(x, t) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = v'(t) & \forall t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w^0(x) = y^1(x) & \forall x \in (0, L), \\ w'(x, 0) = w^1(x) = -\alpha \frac{\partial^4 y^0}{\partial x^4}(x) & \forall x \in (0, L), \end{array} \right. \quad (1.3.16)$$

avec $\alpha = (EI)/(\rho A)$.

Puisque $\{w^0, w^1, v'\} \in \{L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L) \times L^2(0, T)\}$, d'après le théorème 1.2, il vient :

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty(0, T, L^2(0, L))} + \|w'\|_{L^\infty(0, T, H^{-2}(0, L))} \\ \leq \left(\|w^0\|_{L^2(0, L)} + \|w^1\|_{H^{-2}(0, L)} + \|v'\|_{L^2(0, T)} \right), \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

autrement dit :

$$y' \in \mathcal{C}^0(0, T, L^2(0, L)) \quad (1.3.18)$$

et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|y'\|_{L^\infty(0, T, L^2(0, L))} \leq C \left(\|y^0\|_{L^2(0, L)} + \|y^1\|_{H^{-2}(0, L)} + \|v\|_{H_0^1(0, T)} \right). \quad (1.3.19)$$

Par hypothèse $v = v(L, t)$ est élément de $H_0^1(0, T)$. Pour tout $t \in (0, T)$, notons le représentant continu de v encore v , et toujours par abus de notation w' la valeur de w' pour t fixé, ce qui a un sens puisque $w' \in \mathcal{C}(0, T, H^{-2}(0, L))$. Par conséquent, pour $t \in (0, T)$, y est solution du système non homogène :

$$\begin{cases} \frac{d^4 y}{dx^4} = -\alpha w', & \forall x \in (0, L), \\ y(0) = y(L) = \frac{dy}{dx}(0) = 0, & \frac{dy}{dx}(L) = v. \end{cases} \quad (1.3.20)$$

On résout ce système à l'aide d'un relèvement adapté.

Soit z la fonction relèvement biharmonique de l'unité définie par

$$\begin{cases} \frac{d^4 z}{dx^4}(x) = 0, & \forall x \in (0, L), \\ z(0) = z(L) = \frac{dz}{dx}(0) = 0, & \frac{dz}{dx}(L) = 1 \end{cases} \quad (1.3.21)$$

qui appartient donc à $\mathcal{C}^\infty([0, L])$. Par conséquent, $\bar{y} = y - vz$ est solution unique de :

$$\begin{cases} \frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} = -\alpha w', & \forall x \in (0, L), \\ \bar{y}(0) = \bar{y}(L) = \frac{d^4 \bar{y}}{dx^4}(0) = \frac{d^4 \bar{y}}{dx^4}(L) = 0, \end{cases} \quad (1.3.22)$$

appartient à $H_0^2(0, L)$ et vérifie :

$$\exists C > 0, \quad \|\bar{y}\|_{H_0^2(0, L)} \leq C \|w'\|_{H^{-2}(0, L)}. \quad (1.3.23)$$

En combinant les résultats concernant z et \bar{y} , on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$y(t) \in H^2(0, L) \quad (1.3.24)$$

et plus précisément

$$\exists C > 0 / \|y(t)\|_{H^2(0,L)} \leq C \left(\|w'(t)\|_{H^{-2}(0,L)} + |v(t)| \right). \quad (1.3.25)$$

On en déduit d'après l'estimation (1.3.17) et la continuité de l'injection de $H_0^1(0, T)$ dans $L^\infty(0, T)$:

$$\exists C > 0, \quad \|y\|_{L^\infty(0,T,H^2(0,L))} \leq C \left(\|w^0\|_{L^2(0,L)} + \|w^1\|_{H^{-2}(0,L)} + \|v\|_{H_0^1(0,T)} \right). \quad (1.3.26)$$

et on obtient l'inégalité (1.3.15) en appliquant les définitions de w^0 et w^1 . \square

1.4 Algorithme HUM

La méthode HUM nous fournit l'algorithme de construction du contrôle suivant :

1. Soit $\{y^0, y^1\}$ les données initiales du problème, on résout le système linéaire associé à la formulation variationnelle :

$$\forall \{\zeta^0, \zeta^1\} \in E_{-p},$$

$$\langle \Lambda_p \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = \langle \{y^1, -y^0\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle, \quad (1.4.1)$$

afin d'obtenir $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_{-p}$.

2. À l'aide de φ solution unique du problème adjoint (1.3.4) pour les données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ calculées à l'étape précédente, on calcule le contrôle :

$$v(t) = B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right). \quad (1.4.2)$$

La réponse peut être alors obtenue de différentes façons (voir paragraphe 1.7).

1.5 Approximation par superposition modale

Nous allons résoudre l'algorithme HUM par superposition modale, nous choisissons pour cette approximation les modes encastres de la structure considérée,

c'est-à-dire les modes propres $(\lambda_i, \theta_i)_{i=1}^{+\infty}$ définis de la façon suivante :

Définition 1.9

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 \theta_i}{dx^4}(x) = \lambda_i \rho A \theta_i(x), & \forall x \in [0, L], \\ \theta_i(0) = \theta_i(L) = \frac{d\theta_i}{dx}(0) = \frac{d\theta_i}{dx}(L) = 0, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

rangés de telle sorte que les valeurs propres forment une suite croissante et dont les fonctions propres sont normalisées dans $L^2(0, L)$.

Pour tout entier $N > 0$, on choisit comme espace d'approximation :

$$V_N = \text{Vect} \{ \theta_1, \dots, \theta_N \}. \quad (1.5.2)$$

On se propose de résoudre le problème variationnel (1.3.11) par une méthode de Galerkin sur $V_N \times V_N$.

Remarque 1.7 On trouve cette idée naturelle chez C. Bardos, F. Bourquin et G. Lebeau [6], F. Bourquin [12], [14] et A. Eljendy [29].

On cherche $\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \} \in V_N \times V_N$ tel que :

$$\forall \{ \zeta_N^0, \zeta_N^1 \} \in V_N \times V_N,$$

$$\begin{aligned} a \left(\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \}, \{ \zeta_N^0, \zeta_N^1 \} \right) &= \int_0^T B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(t, L) \right) EI \frac{\partial^2 \zeta_N}{\partial x^2}(t, L) d\tilde{t} \\ &= \langle \{ y^1, -y^0 \}, \{ \zeta_N^0, \zeta_N^1 \} \rangle \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

où $\varphi_N(x, t)$ (resp. $\zeta_N(x, t)$) est la solution exacte du même problème adjoint qu'au niveau continu, soit :

$$\begin{cases} \rho A \varphi_N''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \varphi_N}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \varphi_N(0, t) = \varphi_N(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \varphi_N(x, 0) = \varphi_N^0(x), \varphi_N'(x, 0) = \varphi_N^1(x) & \forall x \in (0, L), \end{cases} \quad (1.5.4)$$

avec pour conditions initiales $\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \}$ (resp. $\{ \zeta_N^0, \zeta_N^1 \}$).

Remarque 1.8 Le fait que φ_N vérifie la conservation de la quantité de mouvement est fondamental pour la résolution par la méthode de superposition modale de l'algorithme HUM.

Soient :

$$\varphi_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \theta_i(x) \quad \left(\text{resp. } \zeta_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i(t) \theta_i(x) \right), \quad (1.5.5)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \theta_i(x) & \left(\text{resp. } \zeta_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \theta_i(x) \right), \\ \varphi_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \delta_i \theta_i(x) & \left(\text{resp. } \zeta_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i \theta_i(x) \right). \end{cases} \quad (1.5.6)$$

On note β_N (resp. $\hat{\beta}_N$) le vecteur coordonnée $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}$ (resp. $\{\zeta_N^0, \zeta_N^1\}$) dans la base canonique de $V_N \times V_N$.

Le terme fondamental de la forme bilinéaire $a(., .)$ est le moment suivant :

Définition 1.10

$$m_i = EI \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2}(L). \quad (1.5.7)$$

Comme nous allons le voir au paragraphe suivant, ce moment peut être écrit sous forme variationnelle, ce qui nous sera très utile pour la définition d'un moment discret ayant les bonnes propriétés de convergence.

Le grammien de contrôlabilité est alors calculable explicitement, en effet :

$$\begin{aligned} a\left(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\zeta_N^0, \zeta_N^1\}\right) &= \int_0^T B_p \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) m_i \right) \sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_j(t) m_j d\tilde{t} \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^N B_p(\alpha_i(t)) m_i \sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_j(t) m_j d\tilde{t} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\int_0^T B_p(\alpha_i(t)) \hat{\alpha}_j(t) d\tilde{t} \right) m_i m_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} f_{ij}(\lambda_i, \lambda_j, T, \beta_N, \hat{\beta}_N) m_i m_j. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Remarque 1.9 On se référera à l'Annexe C pour l'expression exacte de la forme quadratique du second membre de droite de (1.5.8).

$\varphi_N(x, t)$ est solution de (1.5.4); donc ses composantes vérifient pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{cases} \alpha_i''(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = 0, & \forall t \in [0, T], \\ \alpha_i(0) = \gamma_i, \quad \alpha_i'(0) = \delta_i, \end{cases} \quad (1.5.9)$$

qui admet pour solution unique :

$$\forall t \in [0, T], \quad \alpha_i(t) = \gamma_i \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin \left(t\sqrt{\lambda_i} \right). \quad (1.5.10)$$

On choisit comme contrôle approché :

Définition 1.11

$$\forall t \in [0, T], \quad v_N(t) = B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(t, L) \right), \quad (1.5.11)$$

qui par linéarité de l'opérateur B_p a pour expression explicite sur $[0, T]$:

$$v_N(t) = \sum_{i=1}^N \left(\gamma_i B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \right) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} B_p \left(\sin \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \right) \right) m_i. \quad (1.5.12)$$

Remarque 1.10 On se référera à l'Annexe B pour les expressions explicites des termes trigonométriques régularisés.

Remarque 1.11 Avec ce choix de contrôle approché, qui est le plus naturel, on obtient une fonction qui appartient à $C^\infty(0, T) \cap H_0^p(0, T)$, et donc en particulier pour tout $p \geq 1$:

$$v_N(0) = 0. \quad (1.5.13)$$

Cette propriété, en dehors du fait qu'elle permet la compatibilité des données initiales avec le contrôle imposé, va être très utile lors du calcul de la réponse (voir paragraphe 1.7).

Puisque pour tout $p \geq 1$,

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_N \times V_N \text{ est dense dans } E_{-p}, \quad (1.5.14)$$

d'après le lemme de Céa, il vient :

$$\left\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \right\} \longrightarrow \left\{ \varphi^0, \varphi^1 \right\} \quad \text{dans } E_{-p} \quad (1.5.15)$$

et d'après la propriété de régularité cachée (voir l'inégalité *directe* de la propriété 1.5) de φ :

$$v_N \longrightarrow v \quad \text{dans } H_0^p(0, T). \quad (1.5.16)$$

Nous avons le théorème suivant qui nous donne une estimation de la vitesse de convergence.

Théorème 1.5 $\forall p \geq 1, \forall \{y^1, y^0\} \in H_0^{2p}(0, L) \times H_0^{2p+2}(0, L)$,

$$\exists C > 0, \quad \left\| \left\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \right\} - \left\{ \varphi^0, \varphi^1 \right\} \right\|_{E_{-p}} \leq \frac{C}{N^2}. \quad (1.5.17)$$

Remarque 1.12 La démonstration reprend point par point celle de F. Bourquin [12] dans le cas de l'équation des ondes avec un contrôle HUM usuel.

Remarque 1.13 On a évidemment la même estimation dans le cas usuel (voir référence précédente).

DÉMONSTRATION : D'après le lemme de Céa, on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} - \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\|_{E_{-p}} \leq C \left\| (I - P^N) \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\|_{E_{-p}}, \quad (1.5.18)$$

où P^N désigne la projection orthogonale sur l'espace V_N .

Supposons que $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_{1-p}$. Le membre de droite de l'inégalité (1.5.18) est donc borné par :

$$\frac{C}{\sqrt{\lambda_N}} \left\| \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\|_{E_{1-p}} \quad (1.5.19)$$

et l'estimation du théorème 1.5 se déduit alors de la formule de Weyl (voir par exemple S. Agmon [1]). \square

La démonstration repose donc sur le résultat de régularité suivant :

Lemme 1.1 $\forall p \geq 1, \forall \{y^1, y^0\} \in H_0^{2p}(0, L) \times H_0^{2p+2}(0, L), \{\varphi^0, \varphi^1\}$ solution de (1.3.11) appartient à E_{1-p} .

DÉMONSTRATION :

Dans un souci de clarté, nous allons faire la démonstration dans le cas régulier $p = 1$. Pour $p \geq 2$, la démonstration est identique.

Soit ψ la solution très faible du problème rétrograde (1.3.5). L'opérateur linéaire continu $\Lambda_p : E_p \rightarrow E_{-p}$ définit en (1.3.6) pour p quelconque, en particulier pour $p = 1$, et qui vérifie (1.3.7).

On note :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} = \varphi', \quad \tilde{\psi} = \psi', \\ S\{v, w\} = \left\{ w, -\alpha \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right\}, \quad \bar{S}\{v, w\} = \left\{ \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, -v \right\}, \\ Z = \Lambda \left(H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \right), \end{array} \right. \quad (1.5.20)$$

avec $\alpha = (EI)/(\rho A)$.

Étape 1 : $S\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\bar{S}$ sur Z .

Supposons $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ et soit $\tilde{\varphi}$ la solution de (1.3.4) avec pour conditions initiales $\{\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\} = S\{\varphi^0, \varphi^1\} \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$. De plus soit $\tilde{\psi}$ la solution de (1.3.5) en un sens "très faible" où φ est remplacé par $\tilde{\varphi}$; on peut donc définir :

$$\begin{aligned} \{\tilde{\psi}'(0), -\tilde{\psi}(0)\} &= \left\{ -\alpha \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}, -\psi'(0) \right\} \\ &= \bar{S} \{\psi'(0), -\psi(0)\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L), \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Lambda S \{\varphi^0, \varphi^1\} = \Lambda \{\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1\} = \{\tilde{\psi}'(0), -\tilde{\psi}(0)\} = \bar{S} \Lambda \{\varphi^0, \varphi^1\}, \quad (1.5.22)$$

soit $\Lambda S \Lambda^{-1} = \bar{S}$ sur Z , ou encore $S \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \bar{S}$ sur Z .

Étape 2: $S \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \bar{S}$ sur $H_0^2(0, L) \times H_0^4(0, L)$.

$H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ est dense dans $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ et Λ est un isomorphisme de $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ dans $L^2(0, L) \times H_0^2(0, L)$, donc $Z = \Lambda (H_0^2(0, L) \times L^2(0, L))$ est un sous-espace dense de $L^2(0, L) \times H_0^2(0, L)$.

Par ailleurs, $S \Lambda^{-1}$ est un opérateur continu sur $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ donc, d'après l'étape 1 et un argument de densité, $\Lambda^{-1} \bar{S}$ est continu sur $L^2(0, L) \times H_0^2(0, L)$ avec $\Lambda^{-1} \bar{S} = S \Lambda^{-1}$ sur $L^2(0, L) \times H_0^2(0, L)$ et a fortiori sur $H_0^2(0, L) \times H_0^4(0, L)$.

Étape 3: Conclusion

Par conséquent, si $\{y^1, -y^0\} \in H^2(0, L) \times H_0^4(0, L)$, on a par définition de l'opérateur Λ , $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$, et d'après l'étape 2 :

$$\begin{aligned} S \{\varphi^0, \varphi^1\} &= S \Lambda^{-1} \{y^1, -y^0\} \\ &= \Lambda^{-1} \bar{S} \{y^1, -y^0\} \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L). \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

Donc $\varphi^1 \in L^2(0, L)$ et $\frac{\partial^4 \varphi^0}{\partial x^4} \in H^{-2}(0, L)$, ce qui implique que $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$. \square

1.6 Intégration numérique

1.6.1 Introduction

Nous allons tout d'abord définir l'espace \mathcal{V}_h d'éléments finis qui va nous permettre de calculer les modes propres que nous avons introduit au paragraphe précédent.

En partant de la *forme usuelle* du moment discret, on définit tout d'abord un moment *faible* discret puis le terme clef de notre approximation, le moment *très faible* discret. Nous comparerons ces différents moments et nous obtiendrons des estimations d'erreurs les concernant à la propriété 1.6 que nous vérifierons enfin à l'aide de quelques tests numériques. Ceci permettra de montrer la pertinence du choix d'une forme très faible pour le moment discret.

Enfin à l'aide de ces différentes définitions, nous appliquerons la méthode d'intégration numérique à l'algorithme HUM.

1.6.2 Définition des éléments finis

Soit N_h un entier > 0 et $h = L/(N_h + 1)$ le pas de maillage, auquel on associe les points x_k et les intervalles I_k :

$$\forall k \in [0, \dots, N_h], \quad x_k = kh, \quad I_k = [x_k, x_{k+1}]. \quad (1.6.1)$$

On définit alors l'espace d'approximation \mathcal{V}_h par :

$$\mathcal{V}_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^1([0, L]); \quad v_h(0) = v_h(L) = \frac{dv_h}{dx}(0) = \frac{dv_h}{dx}(L) = 0, \right. \\ \left. \text{et } \forall k \in [0, \dots, N_h], \quad v_h|_{I_k} \in \mathcal{P}_3(I_k) \right\}, \quad (1.6.2)$$

ce qui donne classiquement :

$$[0, L] = \bigcup_{k=0}^{N_h} I_k, \quad H_0^2(0, L) = \overline{\bigcup_{h>0} \mathcal{V}_h}. \quad (1.6.3)$$

On note $(\lambda_i^h, \theta_i^h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}_h$ les modes propres du bilaplacien Dirichlet calculés sur \mathcal{V}_h et $V_{N,h} = Vect\{\theta_1^h, \dots, \theta_N^h\}$.

1.6.3 Moments discrets

A. Définitions du moment discret

On peut définir différentes formes de moments discrets.

Tout d'abord la forme directe ou usuelle.

Définition 1.12 On note mu_i^h le i ème moment usuel discret défini par

$$mu_i^h = EI \frac{d^2 \theta_i^h}{dx^2}(L). \quad (1.6.4)$$

Remarque 1.14 On peut calculer l'expression explicite de ce moment (voir Annexe F).

Malheureusement la méthode de Galerkin assure seulement que la convergence des modes propres a lieu dans $H^2(0, L)$ ce qui n'est pas suffisant pour approcher le moment usuel discret dans $L^2(\Gamma_0)$. Aussi la forme suivante consiste à exprimer le moment discret sous une forme *faible*, d'où son nom.

Revenons au niveau continu et définissons l'espace de fonctions tests suivant :

$$\mathcal{W} = \left\{ v \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \quad \frac{dv}{dx}(0) = 0, \frac{dv}{dx}(L) = 1 \right\}. \quad (1.6.5)$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation (1.5.1) dont θ_i est solution par une fonction w de \mathcal{W} et qu'on l'intègre deux fois par parties, on obtient la formulation variationnelle faible suivante :

$$EI \frac{d^2\theta_i}{dx^2}(L) = EI \int_0^L \frac{d^2\theta_i}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx - \lambda_i \rho A \int_0^L \theta_i v dx, \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (1.6.6)$$

Insistons sur le fait que cette égalité n'est vraie que si $v \in \mathcal{W}$. Si l'on prend par exemple $v \in H_0^2(0, L)$, alors évidemment le second membre de l'égalité est nul.

Pour construire l'analogie discret du moment *faible* continu, on définit l'espace d'approximation suivant :

$$\mathcal{W}_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^1([0, L]); v_h(0) = v_h(L) = \frac{dv_h}{dx}(0) = 0, \right. \\ \left. \forall k \in [0, \dots, N_h], v_h|_{I_k} \in \mathcal{P}_3(I_k) \right\}. \quad (1.6.7)$$

On peut maintenant définir le moment *faible* discret :

Définition 1.13 On note mf_i^h le i -ème moment faible discret défini par

$$mf_i^h = EI \int_0^L \frac{d^2\theta_i^h}{dx^2} \frac{d^2v^h}{dx^2} dx - \lambda_i^h \rho A \int_0^L \theta_i^h v^h dx, \quad \forall v^h \in \mathcal{W}_h. \quad (1.6.8)$$

Naturellement on peut faire la même remarque que pour le cas continu, si l'on prend $v^h \in \mathcal{V}_h$, le second membre de l'égalité ci-dessus est identiquement nul.

Remarque 1.15 Cette forme faible est celle utilisée le plus souvent dans les codes pour calculer le moment discret. L'inconvénient majeur est qu'en règle générale on ne connaît pas toujours de façon précise comment le calcul est effectué, et en particulier quelle fonction v^h particulière on prend.

On propose une dernière écriture du moment discret.

Si l'on reprend l'égalité (1.6.6) et que l'on intègre deux fois par parties, on obtient la formulation variationnelle très faible suivante :

$$EI \frac{d^2 \theta_i}{dx^2}(L) = EI \int_0^L \theta_i \frac{d^4 v}{dx^4} dx - \lambda_i \rho A \int_0^L \theta_i v dx, \quad \forall v \in \mathcal{W}. \quad (1.6.9)$$

Nous voulons éliminer la première intégrale du second membre de cette égalité afin d'obtenir une expression du moment ne faisant pas intervenir la dérivée seconde en espace.

L'idée la plus simple consiste à construire une fonction de \mathcal{W} biharmonique, que nous avons d'ailleurs déjà utilisée dans la démonstration du théorème 1.4 et que nous utiliserons également au paragraphe 1.7 dans les différentes méthodes de calculs de la réponse.

Définition 1.14 Soit z le relèvement biharmonique solution de

$$\begin{cases} \frac{d^4 z}{dx^4}(x) = 0, & \forall x \in [0, L], \\ z(0) = z(L) = \frac{dz}{dx}(0) = 0, & \frac{dz}{dx}(L) = 1. \end{cases} \quad (1.6.10)$$

Grâce à cette définition, on a construit un élément de \mathcal{W} .

Remarque 1.16 On peut remarquer que le fait que l'on sache résoudre *explicitement* le système (1.6.10) n'est pas une nécessité. En effet, la notion de forme "très faible" du moment peut être appliquée à des systèmes où l'on n'a pas de forme explicite (voir le chapitre 5 pour des exemples).

Remarque 1.17 En fait cette idée de forme "très faible" est un exemple d'application d'un théorème de résistance des matériaux bien connu, le théorème de Maxwell-Betti.

D'après la première remarque, on peut donc prendre z comme fonction test dans l'égalité (1.6.6) et on obtient :

$$EI \frac{d^2 \theta_i}{dx^2}(L) = -\lambda_i \rho A \int_0^L \theta_i z dx. \quad (1.6.11)$$

On définit alors le moment discret *très faible* comme :

Définition 1.15

$$mtf_i^h = -\lambda_i^h \rho A \int_0^L \theta_i^h z dx. \quad (1.6.12)$$

Grâce à cette dernière définition, on a un moment discret qui peut être calculé par éléments finis avec une *précision meilleure* que celle obtenue avec le moment usuel.

B. Estimations d'erreurs des moments discrets

Propriété 1.6

$$1) \quad \exists C > 0, \quad \left| mtf_i^h - mtf_i \right| \leq Ch^4. \quad (1.6.13)$$

$$2) \quad v^h = z^h \implies mf_i^h = mtf_i^h. \quad (1.6.14)$$

DÉMONSTRATION :

1) La première estimation est immédiate, en utilisant les deux estimations suivantes :

$$1) \quad \exists C_1 > 0, \quad \left| \lambda_i^h - \lambda_i \right| \leq C_1 h^4 \quad (1.6.15)$$

$$2) \quad \exists C_2 > 0, \quad \left\| \theta_i^h - \theta_i \right\|_{0,(0,L)} \leq C_2 h^4 \quad (1.6.16)$$

qui sont des résultats bien connus (voir par exemple F. Chatelin [25]).
Grâce à l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| mtf_i^h - mtf_i \right| &= \left| \left(\lambda_i^h - \lambda_i \right) \rho A \int_0^L \theta_i^h z \, dx + \lambda_i \rho A \int_0^L \left(\theta_i^h - \theta_i \right) z \, dx \right| \\ &\leq \|z\|_{0,(0,L)} \left(\left\| \theta_i^h \right\|_{0,(0,L)} \left| \lambda_i^h - \lambda_i \right| + |\lambda_i| \left\| \theta_i^h - \theta_i \right\|_{0,(0,L)} \right). \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

2) Pour démontrer la seconde propriété, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.2

$$z = z^h. \quad (1.6.18)$$

DÉMONSTRATION :

En effet, $z^h|_{I_k} \in \mathcal{P}_3(I_k)$, pour tout $k \in [1, \dots, N_h - 1]$ et $z \in \mathcal{P}_3(0, L)$ donc a fortiori sur I_k , vérifient :

$$\begin{cases} z^h(x_k) = z(x_k), & \frac{dz^h}{dx}(x_k) = \frac{dz}{dx}(x_k) \\ z^h(x_{k+1}) = z(x_{k+1}), & \frac{dz^h}{dx}(x_{k+1}) = \frac{dz}{dx}(x_{k+1}) \end{cases} \quad (1.6.19)$$

Par unicité, on a donc $z = z^h$ sur I_k pour $k \in [1, \dots, N_h - 1]$. Mais $z^h \in \mathcal{W}_h$ vérifie les mêmes conditions de bord que z , donc par le même argument $z = z^h$ sur $[0, x_1]$ et $[x_{N_h}, L]$, par conséquent les deux fonctions sont identiques sur $[0, L]$.
□

Maintenant calculons le moment *faible* discret, avec $v^h = z$. Décomposons la

première intégrale du moment *faible* afin de montrer qu'elle est nulle pour $v^h = z$, ce qui entrainera que le moment *faible* et le moment *très faible* sont identiques. On a :

$$\int_0^L \frac{d^2 \theta_i^h}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \sum_{k=0}^{N_h} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \theta_i^h}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} dx. \quad (1.6.20)$$

Or pour tout $k \in [0, \dots, N_h]$, on a par simple intégration par parties :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \theta_i^h}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = - \int_{x_k}^{x_{k+1}} \theta_i^h \frac{d^4 z}{dx^4} dx + \left[\frac{d\theta_i^h}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} - \theta_i^h \frac{d^3 z}{dx^3} \right]_{x=x_k}^{x_{k+1}}. \quad (1.6.21)$$

L'intégrale du second membre de l'égalité précédente est nulle, aussi en sommant sur tous les k , il ne reste plus que les termes de bord, soit :

$$\int_0^L \frac{d^2 \theta_i^h}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \left[\frac{d\theta_i^h}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} - \theta_i^h \frac{d^3 z}{dx^3} \right]_{x=0}^L, \quad (1.6.22)$$

qui sont par définition nuls. \square

C. Illustrations numériques

La figure 1.2 de gauche montre les estimations concernant les taux de convergence de l'erreur relative du quatrième mode des différents moments.

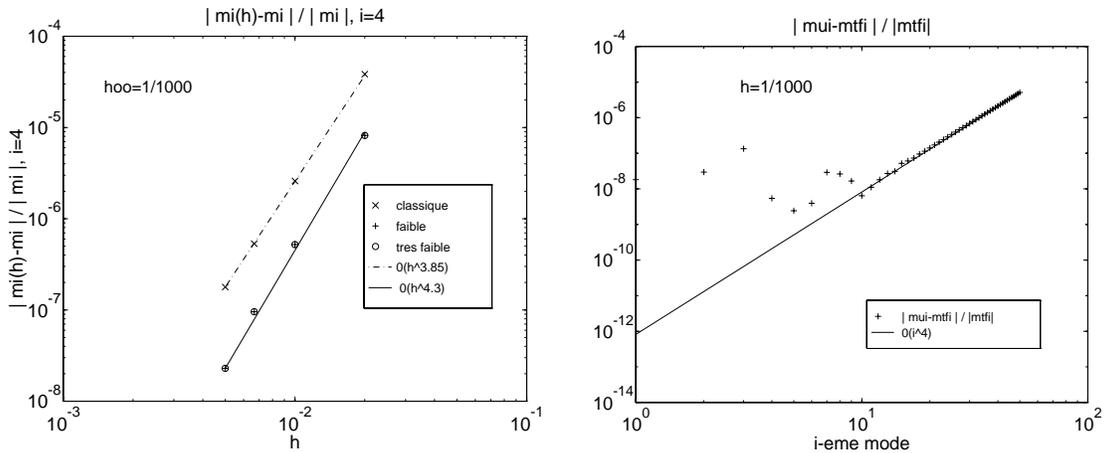


FIG. 1.2 - Estimations d'erreurs des moments pour $i = 4$ et $h = 1/50, 1/100, 1/150$ et $1/200$ par rapport à $h = 1/1000$ (à gauche). Erreurs relatives des moments usuel et très faible.

On vérifie ainsi que les moments discrets *faible* et *très faible* convergent en $O(h^{4.3})$ et qu'ils sont identiques quant on prend $v^h = z$ pour calculer le moment *faible* discret et, ce qui est plus important, que non seulement le moment *usuel* discret

converge moins vite que les deux autres moments (en $O(h^{3.85})$ au lieu de $O(h^{4.3})$), mais que l'erreur commise est plus grande.

Remarque 1.18 Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la précision avec laquelle on calcule le moment est cruciale pour le calcul du grammien de contrôlabilité et plus généralement pour vérifier la contrôlabilité exacte des multistruktures (voir chapitre 6).

On calcule ensuite les erreurs relatives des moments *usuel* et *très faible* pour les 50 premiers modes (figure 1.2 de droite). On observe bien que le moment discret *usuel* est différent du moment *très faible* et que leurs erreurs relatives augmentent en $O(i^4)$.

Autrement dit, plus les modes sont élevés et plus on a intérêt à prendre un moment sous une forme *très faible*.

1.6.4 Intégration numérique de l'algorithme HUM

Avec la construction que nous venons de faire du moment *très faible* discret, on définit l'analogie discret de la forme bilinéaire $a(., .)$ (1.5.8), que l'on note a_h , comme la forme bilinéaire sur $V_{N,h} \times V_{N,h}$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} a_h \left(\left\{ \varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1 \right\}, \left\{ \zeta_{N,h}^0, \zeta_{N,h}^1 \right\} \right) \\ = \sum_{1 \leq i, j \leq N} f_{ij} \left(\lambda_i^h, \lambda_j^h, T, \beta_{N,h}, \hat{\beta}_{N,h} \right) m_t f_i^h m_t f_j^h, \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

où $\beta_{N,h}$ (resp. $\hat{\beta}_{N,h}$) est le vecteur coordonnée de $\left\{ \varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1 \right\}$ (resp. $\left\{ \zeta_{N,h}^0, \zeta_{N,h}^1 \right\}$) dans la base canonique de $V_{N,h} \times V_{N,h}$, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{N,h}^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^h \theta_i^h(x) \quad \left(\text{resp. } \zeta_{N,h}^0(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i^h \theta_i^h(x) \right), \\ \varphi_{N,h}^1(x) = \sum_{i=1}^N \delta_i^h \theta_i^h(x) \quad \left(\text{resp. } \zeta_{N,h}^1(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i^h \theta_i^h(x) \right). \end{array} \right. \quad (1.6.24)$$

Le problème variationnel (1.5.3) s'écrit matriciellement :

$$K^{N,h} \beta^{N,h} = F^{N,h}, \quad (1.6.25)$$

où $F^{N,h} = \left\{ F^{V,N,h}; F^{D,N,h} \right\}$ avec

$$F_i^{V,N,h} = \int_0^L y^1 \theta_i^h dx, \quad F_i^{D,N,h} = - \int_0^L y^0 \theta_i^h dx. \quad (1.6.26)$$

La matrice $K^{N,h}$ se décompose par blocs de la façon suivante :

$$K^{N,h} = \begin{bmatrix} K^{DD,N,h} & K^{VD,N,h} \\ K^{VD,N,h} & K^{VV,N,h} \end{bmatrix}, \quad (1.6.27)$$

avec pour tout $1 \leq i, j \leq N$:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{DD,N,h} &= a_h \left(\left\{ \theta_i^h, 0 \right\}, \left\{ \theta_j^h, 0 \right\} \right) \\ &= \left(\int_0^T B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) \right) \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) d\tilde{t} \right) mtf_i^h mtf_j^h \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{DV,N,h} &= a_h \left(\left\{ \theta_i^h, 0 \right\}, \left\{ 0, \theta_j^h \right\} \right) \\ &= \left(\int_0^T B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) \right) \sin \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) d\tilde{t} \right) mtf_i^h \frac{mtf_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} \\ K_{ij}^{VD,N,h} &= K_{ji}^{DV,N,h} \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{VV,N,h} &= a_h \left(\left\{ 0, \theta_i^h \right\}, \left\{ 0, \theta_j^h \right\} \right) \\ &= \left(\int_0^T B_p \left(\sin \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) \right) \sin \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) d\tilde{t} \right) \frac{mtf_i^h}{\sqrt{\lambda_i^h}} \frac{mtf_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

Remarque 1.19 On se reportera à l'Annexe B pour les expressions explicites pour $p \leq 2$ des termes trigonométriques régularisés, et à l'Annexe C pour celles des différentes matrices.

Un candidat raisonnable pour le problème adjoint (1.3.4) avec les conditions initiales $\left\{ \varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1 \right\}$ est :

$$\varphi_{N,h}(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) + \frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} \sin \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) \right) \theta_i^h(x). \quad (1.6.31)$$

On choisit comme contrôle discret :

Définition 1.16

$$v_{N,h}(t) = B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,h}}{\partial x^2}(t, L) \right). \quad (1.6.32)$$

Comme dans le cas continu, on a l'expression développée suivante :

$$v_{N,h}(t) = \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) \right) + \frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} B_p \left(\sin \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) \right) \right) m t f_j^h. \quad (1.6.33)$$

En utilisant l'estimation du théorème 1.5 et des résultats classiques des éléments finis, on obtient les estimations suivantes :

Théorème 1.6 *Pour $h > 0$ assez petit, $K^{N,h}$ est définie positive et*

1) *Il existe une unique solution $\{\varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1\} \in V_{N,h} \times V_{N,h}$ de la formulation variationnelle :*

$$\forall \{\zeta_{N,h}^0, \zeta_{N,h}^1\} \in V_{N,h} \times V_{N,h},$$

$$a_h \left(\{\varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1\}, \{\zeta_{N,h}^0, \zeta_{N,h}^1\} \right) = \langle \{y^1, -y^0\}, \{\zeta_{N,h}^0, \zeta_{N,h}^1\} \rangle, \quad (1.6.34)$$

qui vérifie :

$$\{\varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1\} \longrightarrow \{\varphi^0, \varphi^1\} \quad \text{dans } E_{-p}, \quad (1.6.35)$$

avec :

$$\exists C > 0, \quad \left\| \{\varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1\} - \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\|_{E_{-p}} \leq \frac{C}{N^2} + C(N)h^2. \quad (1.6.36)$$

2) *On a également l'estimation suivante :*

$$\exists \tilde{C} > 0, \quad \|v_{N,h} - v_N\|_{H_0^p(0,T)} \leq \tilde{C}h^2. \quad (1.6.37)$$

DÉMONSTRATION :

Dans la suite de la démonstration nous supposons que h est assez petit pour que $K^{N,h}$ soit définie positive.

1) *Première estimation :* Étant donné l'estimation du théorème 1.5, cela revient à démontrer l'inégalité suivante :

$$\left\| \{\varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1\} - \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} \right\|_{H_0^2(0,L) \times L^2(0,L)} \leq C(N)h^2. \quad (1.6.38)$$

Mais avec les notations précédentes :

$$K^{N,h} x_{N,h} = F^{N,h} \quad \text{et} \quad K^N x_N = F^N, \quad (1.6.39)$$

on a la majoration classique (voir par exemple P. G. Ciarlet [27]) :

$$\frac{\|x_{N,h} - x_N\|}{\|x_N\|} \leq \text{cond}(K^N) \left(\frac{\|K^{N,h} - K^N\|}{\|K^N\|} + \frac{\|F^{N,h} - F^N\|}{\|F^N\|} \right), \quad (1.6.40)$$

avec $\text{cond}(K^N) = \|K\| \|K^{-1}\|$.

Pour obtenir l'estimation recherchée, il suffit donc de montrer la propriété suivante :

Propriété 1.7

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists C, \hat{C} > 0, \forall h > 0, \quad \|F^{N,h} - F^N\| \leq Ch^2. \quad (1.6.41)$$

$$\|K^{N,h} - K^N\| \leq \hat{C}h^4. \quad (1.6.42)$$

DÉMONSTRATION :

1) En appliquant la définition de $F^{N,h}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} \|F^{N,h} - F^N\| &= \left\| \int_0^L y^1 \{\theta_j^h - \theta_j\}, \int_0^L y^0 \{\theta_j^h - \theta_j\} \right\| \\ &\leq C (\|\theta_j^h - \theta_j\|_{2,(0,L)} + \|\theta_j^h - \theta_j\|_{0,(0,L)}), \end{aligned} \quad (1.6.43)$$

ce qui permet d'obtenir l'estimation (1.6.41) en utilisant les estimations suivantes :

$$\forall k = \{0, 1\}, \quad \|\theta_j^h - \theta_j\|_{2k,(0,L)} \leq Ch^{2(k+1)}. \quad (1.6.44)$$

2) Nous allons tout d'abord démontrer l'estimation (1.6.42) pour $p = 0$.

Étant donné la décomposition par blocs de la matrice K , cela revient à obtenir l'estimation pour chacune de ses sous-matrices.

Faisons la démonstration pour K^{DD} (la démonstration est semblable pour les matrices K^{DV} et K^{VV}). Par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\begin{aligned} \|K_{ij}^{DD,N,h} - K_{ij}^{DD,N}\| &= \left| \int_0^T \left(\cos(t\sqrt{\lambda_i^h}) mtf_i^h \cos(t\sqrt{\lambda_j^h}) mtf_j^h \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos(t\sqrt{\lambda_i}) mtf_i \cos(t\sqrt{\lambda_j}) mtf_j \right) dt \right|, \end{aligned} \quad (1.6.45)$$

soit en redistribuant les termes :

$$\begin{aligned} & \left\| K_{ij}^{DD,N,h} - K_{ij}^{DD,N} \right\| = \\ & \left| \int_0^T \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) mtf_i^h - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) mtf_i \right) \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h - \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) mtf_j \right) \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) mtf_i dt \right| \end{aligned} \quad (1.6.46)$$

Il suffit donc de montrer le lemme suivant :

Lemme 1.3

$$\exists C > 0, \forall h > 0, \sup_{t \in [0, T]} \left| \cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) mtf_i^h - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) mtf_i \right| \leq Ch^4. \quad (1.6.47)$$

DÉMONSTRATION :

En redistribuant de façon standard les différents termes de la quantité à estimer, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) mtf_i^h - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) mtf_i &= \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \right) mtf_i^h \\ &\quad + \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \left(mtf_i^h - mtf_i \right). \end{aligned} \quad (1.6.48)$$

L'estimation du second terme de cette égalité découle immédiatement de l'estimation (1.6.13) de la propriété 1.6 du paragraphe 1.6.3, c'est-à-dire :

$$\forall h > 0, \exists C > 0, \left| mtf_i^h - mtf_i \right| \leq Ch^4. \quad (1.6.49)$$

Il reste donc à majorer le premier terme, or

$$\begin{aligned} & \cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{t}{2} \left(\sqrt{\lambda_i^h} + \sqrt{\lambda_i} \right) \right) \sin \left(\frac{t}{2} \left(\sqrt{\lambda_i^h} - \sqrt{\lambda_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.6.50)$$

et comme $|\lambda_i^h - \lambda_i| \leq Ch^4$ implique évidemment que $|\sqrt{\lambda_i^h} - \sqrt{\lambda_i}| \leq Ch^4$, il vient :

$$\forall t \in [0, T], \left| \cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \right| \leq Ct \left| \sqrt{\lambda_i^h} - \sqrt{\lambda_i} \right| \leq Ch^4. \quad (1.6.51)$$

La démonstration est terminée. \square

Pour $p \geq 1$, d'après l'équation (1.6.46) et par linéarité de B_p , il suffit de montrer la généralisation du lemme 1.3 suivante :

Lemme 1.4

$$\exists C > 0, \left| B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) \right) mtf_i^h - B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \right) mtf_i \right| \leq Ch^4. \quad (1.6.52)$$

DÉMONSTRATION :

Par linéarité de l'opérateur, on a naturellement :

$$\begin{aligned} B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) \right) mtf_i^h - B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) \right) mtf_i \\ = B_p \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_i^h} \right) mtf_i^h - \cos \left(t\sqrt{\lambda_i} \right) mtf_i \right). \end{aligned} \quad (1.6.53)$$

et comme d'autre part B_p est un opérateur linéaire continu, l'estimation (1.6.47) du lemme 1.3 permet de conclure. \square

On a donc également les mêmes estimations pour $p \geq 1$.

2) *Deuxième estimation*: $\forall t \geq 0$ et $p = 0$,

$$\begin{aligned} v_{N,h}(t) - v_N(t) &= \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) + \frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} \sin \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) \right) mtf_j^h \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) + \frac{\delta_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) \right) mtf_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h - \gamma_j \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) mtf_j \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} \sin \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h - \frac{\delta_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) mtf_j \right). \end{aligned} \quad (1.6.54)$$

En redistribuant les termes en cosinus de l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h - \gamma_j \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) mtf_j \right) \\ = \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h - \gamma_j \right) \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h \\ + \sum_{j=1}^N \gamma_j \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) \left(mtf_j^h - mtf_j \right) \\ + \sum_{j=1}^N \gamma_j \left(\cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) - \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) \right) mtf_j^h \end{aligned}$$

et donc, il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h \cos \left(t\sqrt{\lambda_j^h} \right) mtf_j^h - \gamma_j \cos \left(t\sqrt{\lambda_j} \right) mtf_j \right) \right\|_{L^2(0,T)}^2 \\ \leq \sum_{j=1}^N \left| \gamma_j^h - \gamma_j \right|^2 \left| mtf_j^h \right|^2 + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \left| mtf_j^h - mtf_j \right|^2 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 |m t f_j^h|^2 \left\| \cos \left(t \sqrt{\lambda_j^h} \right) - \cos \left(t \sqrt{\lambda_j} \right) \right\|_{L^2(0,T)}^2.$$

Mais on a $|m t f_i^h - m t f_i| \leq C h^4$, avec $|m t f_i| = O(\sqrt{\lambda_i})$ (voir Annexe F), et puisque d'après la première estimation de la démonstration, on a :

$$\lambda_j^h |\gamma_j^h - \gamma_j|^2 \leq C_1 h^4, \quad (1.6.55)$$

il vient :

$$\sum_{j=1}^N |\gamma_j^h - \gamma_j|^2 |m t f_j^h|^2 \leq C \sum_{j=1}^N \lambda_j^h |\gamma_j^h - \gamma_j|^2 \leq C h^4. \quad (1.6.56)$$

On procède de la même façon pour les termes en sinus en utilisant en particulier :

$$\sum_{j=1}^N |\delta_j^h - \delta_j|^2 \leq C h^4, \quad (1.6.57)$$

d'où l'estimation recherchée.

La généralisation de ces estimations à p quelconque se fait de la même façon que pour la première estimation. \square

1.7 Calcul de la réponse approchée

Nous proposons deux méthodes pour calculer une solution approchée de la réponse y :

1. On trouve à l'aide d'un relèvement *ad hoc* une fonction $r(x, t)$ qui vérifie les mêmes conditions limites que $y(x, t)$ et on résout ensuite le système homogène dont $y(x, t) - r(x, t)$ est solution par une méthode de Fourier.
2. On obtient au niveau continu une formulation variationnelle "semi-très faible" de la réponse que l'on résout par une méthode de semi-discrétisation, dite de Faedo-Galerkin, qui est l'équivalent pour les problèmes d'évolutions de la méthode de Galerkin utilisée en statique. Soit M un entier > 0 , on projette alors sur les modes $\{\theta_i\}_{i=1}^M$ cette formulation ce qui nous donne une EDO que l'on résout par exemple à l'aide d'un schéma de Newmark avec une implémentation de type *a-form* inconditionnellement stable. Nous allons montrer que cette réponse est identique à la réponse précédente avec un relèvement projeté sur les modes.

Remarque 1.20 Pour un rappel sur les propriétés des schémas de Newmark, on se reportera au paragraphe 4.9 du chapitre 4.

1.7.1 Calcul explicite de la réponse par relèvement

Nous allons calculer la réponse en ramenant la résolution du système (1.2.1), dont y est solution, à la résolution d'un système homogène, ceci en utilisant le relèvement z défini au paragraphe 1.6.

A. Calcul explicite de la réponse homogène

Soit z le relèvement dont on rappelle qu'il est solution de :

$$\begin{cases} \frac{d^4 z}{dx^4}(x) = 0, & \forall x \in [0, L], \\ z(0) = z(L) = \frac{dz}{dx}(0) = 0, & \frac{dz}{dx}(L) = 1 \end{cases} \quad (1.7.1)$$

et pour tous N et $1/h$ entiers > 0 , $v_{N,h}$ le contrôle élément de $V_{N,h}$.

Grâce à ce relèvement, la fonction définie par :

Définition 1.17

$$r(x, t) = z(x)v(t) \quad (1.7.2)$$

vérifie les mêmes conditions limites que y et par conséquent la fonction :

Définition 1.18

$$\bar{y}(x, t) = y(x, t) - r(x, t) \quad (1.7.3)$$

est solution du système homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \bar{y}''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial x^4}(x, t) = -\rho A r''(x, t) & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \bar{y}(0, t) = \bar{y}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \bar{y}^0(x) = \bar{y}(x, 0) = y^0(x) - r(x, 0) & \forall x \in (0, L), \\ \bar{y}^1(x) = \bar{y}'(x, 0) = y^1(x) - r'(x, 0) & \forall x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (1.7.4)$$

Remarque 1.21 On note que les données initiales de \bar{y} sont identiques à celles de y pour $p \geq 2$.

Nous allons résoudre ce système par une *méthode de Fourier* de la même façon que le problème adjoint dans le paragraphe 1.5.

Soit le relèvement décomposé sur la base canonique de V_M :

$$r_{M,N}(x, t) = v_N(t) \sum_{i=1}^M z_i \theta_i(x) \quad (1.7.5)$$

et

$$\bar{y}_{M,N}(x, t) = \sum_{i=1}^M \eta_i(t) \theta_i(x) \quad (1.7.6)$$

la solution exacte du même problème homogène que \bar{y} (en remplaçant v par v_N) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \bar{y}_{M,N}''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \bar{y}_{M,N}}{\partial x^4}(x, t) = -\rho A r_{M,N}''(t) \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \bar{y}_{M,N}(0, t) = \bar{y}_{M,N}(L, t) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \bar{y}_{M,N}}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \bar{y}_{M,N}}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \\ \bar{y}_{M,N}^0(x) = \bar{y}_{M,N}(x, 0) = y_{M,N}^0(x) - r_{M,N}(x, 0) \quad \forall x \in (0, L), \\ \bar{y}_{M,N}^1(x) = \bar{y}_{M,N}'(x, 0) = y_{M,N}^1(x) - r_{M,N}'(x, 0) \quad \forall x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (1.7.7)$$

et dont les composantes η_i sont donc solutions pour tout $i = 1, \dots, M$ de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_i''(t) + \lambda_i \eta_i(t) = -z_i v_N''(t), \\ \eta_i^0 = \eta_i(0) = \alpha_i - v_N(0) z_i, \quad \eta_i^1 = \eta_i'(0) = \beta_i - v_N'(0) z_i. \end{array} \right. \quad (1.7.8)$$

Soient (α_i^h, β_i^h) (resp. z_i^h) les composantes de $\{y^0, y^1\}$ (resp. z) dans la base canonique de $V_{M,h}$. On note $\bar{y}_{M,N,h}$ la solution dont les composantes $\{\eta_i^h\}_{i=1}^M$ dans la base canonique de $V_{M,h}$ vérifient l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre avec second membre, pour tout $i = 1, \dots, M$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_i^{h''}(t) + \lambda_i^h \eta_i^h(t) = -z_i^h v_{N,h}''(t), \\ \eta_i^{0,h} = \eta_i^h(0) = \alpha_i^h - v_{N,h}(0) z_i^h, \quad \eta_i^{1,h} = \eta_i^{h'}(0) = \beta_i^h - v_{N,h}'(0) z_i^h. \end{array} \right. \quad (1.7.9)$$

Les composantes de $\bar{y}_{M,N,h}$ sont données explicitement par la relation :

Propriété 1.8

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, \dots, M], \quad \eta_i^h(t) &= \alpha_i^h \cos\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) + \frac{\beta_i^h}{\sqrt{\lambda_i^h}} \sin\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) - z_i^h v_{N,h}(t) \\ &+ z_i^h \sqrt{\lambda_i^h} \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h C_{ij}^h(t) + \frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} S_{ij}^h(t) \right) \quad \text{mtf} \quad (1.7.10) \end{aligned}$$

avec pour tout $1 \leq i \leq M$ et $1 \leq j \leq N$, les fonctions

$$\begin{cases} C_{ij}^h(t) &= \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda_i^h}(t-s)\right) B_p\left(\cos\left(s\sqrt{\lambda_j^h}\right)\right) ds \\ S_{ij}^h(t) &= \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda_i^h}(t-s)\right) B_p\left(\sin\left(s\sqrt{\lambda_j^h}\right)\right) ds \end{cases} \quad (1.7.11)$$

qui sont calculées explicitement à l'Annexe D.

DÉMONSTRATION :

Le système (1.7.9) admet pour solution unique :

$$\begin{aligned} \eta_i^h(t) &= \eta_i^{0,h} \cos\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) + \frac{\eta_i^{1,h}}{\sqrt{\lambda_i^h}} \sin\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) \\ &\quad - \frac{z_i^h}{\sqrt{\lambda_i^h}} \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda_i^h}(t-s)\right) v_{N,h}''(s) ds. \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

Si on intègre deux fois par parties le terme de Duhamel et on en développe l'expression du contrôle discret qui intervient dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \eta_i^h(t) &= \alpha_i^h \cos\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) + \frac{\beta_i^h}{\sqrt{\lambda_i^h}} \sin\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) - z_i^h v_{N,h}(t) \\ &\quad + z_i^h \sqrt{\lambda_i^h} \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h C_{ij}^h(t) + \frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} S_{ij}^h(t) \right) m t f_j^h. \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

□

Remarque 1.22 Si $p = 1$, on peut calculer directement la solution à l'aide de l'égalité (1.7.12) en utilisant la définition de l'opérateur B_p , soit :

$$v_{N,h}''(t) = -\frac{\partial^2 \varphi_{N,h}}{\partial x^2}(t, L). \quad (1.7.14)$$

B. Définition de deux réponses explicites

Avec cette première méthode, on peut définir deux réponses approchées. La première réponse est calculée à l'aide de la décomposition explicite de \bar{y} sur les modes donnés par la formule (1.7.10) et du *relèvement exact* :

Définition 1.19 (*réponse avec relèvement exact*)

$$y_{M,N,h}^1 = \bar{y}_{M,N,h} + r_{N,h}. \quad (1.7.15)$$

La seconde réponse est la projetée de la précédente sur $V_{M,h}$:

Définition 1.20 (*réponse avec relèvement projeté*)

$$y_{M,N,h}^2 = \bar{y}_{M,N,h} + P^{M,h}(r_{N,h}). \quad (1.7.16)$$

où $P^{M,h}$ est la projection orthogonale sur $V_{M,h}$.

Du fait de la projection sur $V_{M,h}$ du relèvement et de la formule vérifiée par \bar{y} , est donnée également explicitement par la formule suivante :

Propriété 1.9

$$\begin{aligned} y_{M,N,h,i}^2(t) &= \alpha_i^h \cos\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) + \frac{\beta_i^h}{\sqrt{\lambda_i^h}} \sin\left(t\sqrt{\lambda_i^h}\right) \\ &+ z_i^h \sqrt{\lambda_i^h} \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j^h C_{ij}^h(t) + \frac{\delta_j^h}{\sqrt{\lambda_j^h}} S_{ij}^h(t) \right) m t f_j^h. \end{aligned} \quad (1.7.17)$$

En fait, la seconde réponse peut être calculée autrement en remarquant qu'elle vérifie la propriété intéressante suivante :

Propriété 1.10

$$y_{M,N,h,i}^2{}''(t) + \lambda_i^h y_{M,N,h,i}^2(t) = -v_{N,h}(t) m t f_i^h. \quad (1.7.18)$$

DÉMONSTRATION :

Puisque $\bar{y}_{M,N,h}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire (1.7.9) et que $r_{M,N,h} = P^{M,h}(r_{N,h})$ vérifie de son côté pour tout $i = 1, \dots, M$:

$$r_{M,N,h,i}^2{}''(t) + \lambda_i^h r_{M,N,h,i}^2(t) = z_i^h v_{N,h}''(t) - m t f_i^h v_{N,h}(t), \quad (1.7.19)$$

on en déduit par sommation des équations (1.7.9) et (1.7.19) que $y_{M,N,h}^2$ est solution de l'équation différentielle ordinaire recherchée. \square

Autrement dit, on peut résoudre également cette réponse avec un schéma de Newmark.

On se reportera aux tests numériques du paragraphe 2 pour l'étude comparative de ces deux réponses. On montrera en particulier que, selon le choix de l'une ou de l'autre des méthodes, on obtient une réponse dont les propriétés numériques peuvent être très différentes, notamment en ce qui concerne la vérification de la contrôlabilité exacte (voir en particulier la propriété 1.12 du paragraphe 1.7.3).

1.7.2 Méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Faedo-Galerkin consiste à projeter une formulation faible sur un sous-espace de dimension finie afin d'obtenir une équation différentielle ordinaire dont les solutions approchent la solution du problème original. Dans notre cas, on part non pas d'une formulation faible mais d'une formulation variationnelle "semi-très faible" en raison du terme de bord correspondant au contrôle.

On multiplie l'équation différentielle (1.2.1) dont y est solution par une fonction test w assez régulière, par exemple $w \in H^4(0, L) \times H_0^2(0, L)$ et on l'intègre quatre fois par parties en espace, ce qui donne pour tout $w \in H^4(0, L) \times H_0^2(0, L)$:

$$\rho A \int_0^L y''(x, t) w(x) dx + EI \int_0^L y(x, t) \frac{d^4 w}{dx^4}(x) dx = -v(t) EI \frac{d^2 w}{dx^2}(L). \quad (1.7.20)$$

Remarque 1.23 Cette méthode qui consiste à faire apparaître le terme de bord dans une formulation variationnelle dite "très faible" est très utile pour les problèmes de stabilisation (voir le chapitre 3 pour son application aux calculs de lois de rétroactions en boucle fermée) où le calcul explicite de la réponse par une méthode de relèvement n'est pas applicable, puisqu'il est nécessaire de recalculer le terme de bord à chaque pas de temps.

Construisons maintenant la solution semi-discrète. Pour tout entier $M > 0$, on définit $y_{M,N}(x, t)$ comme la solution de la formulation variationnelle analogue à celle que l'on vient d'obtenir au niveau continu :

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L y_{M,N}''(x, t) w_M(x) dx + EI \int_0^L y_{M,N}(x, t) \frac{d^4 w_M}{dx^4}(x) dx \\ = -v_{N,M}(t) EI \frac{d^2 w_M}{dx^2}(L), \quad \forall w_M \in V_M. \end{aligned} \quad (1.7.21)$$

Par conséquent, si l'on note, pour tout t fixé positif ou nul, $\alpha(t) = \{\alpha_i(t)\}_{i=1}^M$ le vecteur composante de $y_{M,N}(x, t)$ sur la base V_M , on a :

$$\mathcal{C}_M \alpha''(t) + \mathcal{A}_M \alpha(t) = f_M(t), \quad (1.7.22)$$

avec pour tout $1 \leq i, j \leq M$:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{M,ij} = \delta_{ij}, & \mathcal{A}_{M,ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \\ f_{M,i}(t) = -v_{N,M}(t) m_i. \end{cases} \quad (1.7.23)$$

On choisit comme réponse discrète, que l'on note $y_{M,N,h}^{FG}$, la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\mathcal{C}_M \alpha''(t) + \mathcal{A}_{M,h} \alpha(t) = f_{M,h}(t), \quad (1.7.24)$$

avec les données initiales :

$$y_{M,N,h}^{FG}(t=0) = P^{M,h}(y^0), \quad y_{M,N,h}'(t=0) = P^{M,h}(y^1), \quad (1.7.25)$$

où $P^{M,h}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{V}_{M,h}$ et avec pour tout $1 \leq i, j \leq M$:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{M,ij} = \delta_{ij}, & \mathcal{A}_{M,h,ij} = \lambda_i^h \delta_{ij}, \\ f_{M,h,i}(t) = -v_{N,h}(t) m t f_i^h. \end{cases} \quad (1.7.26)$$

Remarque 1.24 Ce type d'équation différentielle ordinaire est très classique dans la communauté des ingénieurs pour la résolution de problème discret sur lesquels s'exercent une force extérieure. La différence essentielle avec notre cas est que la construction de leur contrôle est effectuée directement à partir d'un système discret et non d'un système continu.

Cette équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants admet une solution unique dont a une solution explicite, en effet :

Propriété 1.11

$$y_{M,N,h}^{FG} = y_{M,N,h}^2. \quad (1.7.27)$$

DÉMONSTRATION :

La réponse calculée par la méthode "semi-très faible" est solution de l'équation différentielle ordinaire (1.7.24), autrement dit ses composantes sont solutions, pour tout $i = 1, \dots, M$, de :

$$y_{M,N,h,i}^{FG''}(t) + \lambda_i^h y_{M,N,h,i}^{FG}(t) = -v_{N,h}(t) m t f_i^h, \quad (1.7.28)$$

c'est-à-dire de la même équation différentielle ordinaire (1.7.18) que celle vérifiée par les composantes de $y_{M,N,h}^2$. Puisque les données initiales sont les mêmes pour $y_{M,N,h}^{FG}$ et $y_{M,N,h}^2$, par unicité de la solution c'est qu'elles sont identiques. \square

Autrement dit, la réponse y^2 n'est autre que la réponse calculée par la méthode de Faedo-Galerkin.

Par conséquent, la dernière réponse que nous nous proposons de résoudre à l'aide d'un schéma de Newmark a une expression explicite donnée par la formule (1.7.18), et il est donc superflu d'utiliser une autre méthode pour la calculer.

Plus fondamentalement, il n'était pas évident de savoir que la réponse obtenue à partir d'une formulation *semi-très faible* puisse être obtenue de façon explicite.

1.7.3 Propriétés énergétiques des réponses approchées

On a une propriété énergétique intéressante dans le cas où la réponse est calculée avec un nombre de modes inférieur ou égal au nombre de modes utilisés pour calculer le contrôle. L'énergie de la réponse projetée $y_{M,N}^2$ est identiquement nulle à $t = T$. Autrement dit, $y_{M,N}^2$ est contrôlable exactement spectralement.

On note $\bar{E}_{M,N}(t)$, l'énergie de la réponse avec relèvement projetée, qui vérifie :

$$\bar{E}_{M,N}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^M (\alpha_i^2(t) + \lambda_i^{-1} \alpha_i'^2(t)) & (p = 0) \\ \sum_{i=1}^M (\lambda_i \alpha_i^2(t) + \alpha_i'^2(t)) & (p = 1) \end{cases} \quad (1.7.29)$$

et $E_{M,N}(t)$ celle de la réponse calculée avec un relèvement exact dont le calcul ainsi que l'expression est légèrement plus compliquée en raison du terme non projeté sur V_M (voir Annexe E).

Propriété 1.12 $(p = 0) \forall T > 0, \forall \{y^0, y^1\}, \forall M \leq N,$

$$\bar{E}_{M,N}(T) = 0 \quad (1.7.30)$$

$$E_{M,N}(T) = |v_N(T)|^2 \sum_{i \geq M+1} z_i^2 + |v'_N(T)|^2 \sum_{i \geq M+1} \frac{z_i^2}{\lambda_i} \quad (1.7.31)$$

DÉMONSTRATION :

Nous allons en premier lieu démontrer la première égalité, la seconde en découlant immédiatement.

1. Étant donné la définition de $\bar{E}_M(t)$, montrer que cette énergie est nulle revient à vérifier que :

$$y_{M,N}^2(t = T) = y_{M,N}'(t = T) = 0. \quad (1.7.32)$$

Nous avons besoin pour cela d'utiliser la décomposition de la réponse donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.5

$$y_{M,N}^2(x, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij}(t) + \beta_{ij}(t)) \theta_i(x) \quad (1.7.33)$$

avec pour tout $1 \leq i \leq M$ et $1 \leq j \leq N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij}(t) = \left(-K_{ij}^{VD} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + K_{ij}^{DD} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \gamma_j \\ \quad + \left(-K_{ij}^{VV} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + K_{ij}^{DV} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \delta_j \\ \beta_{ij}(t) = -C_{ij}(t) \frac{mtf_i}{\sqrt{\lambda_i}} mtf_j \gamma_j - S_{ij}(t) \frac{mtf_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{mtf_j}{\sqrt{\lambda_j}} \delta_j \end{array} \right. \quad (1.7.34)$$

DÉMONSTRATION :

D'après l'égalité (1.7.17) du paragraphe 1.7 dans sa version semi-discrète, on a :

$$\begin{aligned} y_{M,N}^2(x, t) &= \sum_{i=1}^M \left(\alpha_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \beta_i \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \theta_i(x) \\ &+ \sum_{i=1}^M z_i \sqrt{\lambda_i} \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j mtf_j C_{ij}(t) + \frac{\delta_j}{\sqrt{\lambda_j}} mtf_j S_{ij}(t) \right) \theta_i(x). \end{aligned} \quad (1.7.35)$$

Or d'après la relation (1.6.25) et la décomposition par blocs (1.6.27) de la matrice K_N , on a pour tout $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^M$, il existe $\{\gamma_j, \delta_j\}_{j=1}^N$ solution du système matriciel :

$$\forall i \in [1, \dots, M], \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = - \sum_{j=1}^N K_{ij}^{VD} \gamma_j - \sum_{j=1}^N K_{ij}^{VV} \delta_j \\ \beta_i = \sum_{j=1}^N K_{ij}^{DD} \gamma_j + \sum_{j=1}^N K_{ij}^{DV} \delta_j \end{array} \right. \quad (1.7.36)$$

On a donc en regroupant les termes qui dépendent respectivement de γ_j et de δ_j

$$\begin{aligned} y_{M,N}^2(x, t) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \left(-K_{ij}^{VD} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + K_{ij}^{DD} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \gamma_j \right. \\ &+ \left. \left(-K_{ij}^{VV} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + K_{ij}^{DV} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \delta_j \right\} \theta_i(x) \\ &+ \sum_{i=1}^M z_i \sqrt{\lambda_i} \sum_{j=1}^N \left\{ \gamma_j mtf_j C_{ij}(t) + \frac{\delta_j}{\sqrt{\lambda_j}} mtf_j S_{ij}(t) \right\} \theta_i(x). \end{aligned} \quad (1.7.37)$$

On peut donc décomposer cette réponse sous la forme :

$$y_{M,N}^2(x, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij}(t) + \beta_{ij}(t)) \theta_i(x), \quad (1.7.38)$$

avec pour tout $1 \leq i \leq M$ et $1 \leq j \leq N$:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(t) = & \left(-K_{ij}^{VD} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + K_{ij}^{DD} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \gamma_j \\ & + \left(-K_{ij}^{VV} \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + K_{ij}^{DV} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \delta_j \end{aligned} \quad (1.7.39)$$

$$\beta_{ij}(t) = -C_{ij}(t) \frac{mtf_i}{\sqrt{\lambda_i}} mtf_j \gamma_j - S_{ij}(t) \frac{mtf_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{mtf_j}{\sqrt{\lambda_j}} \delta_j. \quad (1.7.40)$$

□

Si l'on développe les expressions de $C_{ij}(t)$ et $S_{ij}(t)$, et que l'on utilise les expressions explicites des matrices K^{DD} , K^{DV} et K^{VV} (voir Annexe C), il est facile de vérifier que :

$$\alpha_{ij}(t = T) = -\beta_{ij}(t = T). \quad (1.7.41)$$

D'après le lemme 1.5, il s'ensuit que $y_{M,N}^2(t = T) = 0$. Il est facile de vérifier que l'on a les mêmes types de relations pour $y_{M,N}'$.

2. On a par définition,

$$y_{M,N}^1(t) = \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \theta_i(x) \right) + v_N(t) z(x), \quad (1.7.42)$$

et

$$y_{M,N}^2(t) = P^M(y_{M,N}^1(t)), \quad (1.7.43)$$

par conséquent :

$$y_{M,N}^1(t) = y_{M,N}^2(t) + v_N(t) \sum_{i \geq M+1} z_i \theta_i(x). \quad (1.7.44)$$

De même pour la vitesse, on obtient :

$$y_{M,N}'^1(t) = y_{M,N}'^2(t) + v_N'(t) \sum_{i \geq M+1} z_i \theta_i(x). \quad (1.7.45)$$

On applique la définition de l'énergie de la réponse exprimée sur les modes, ce qui donne pour tout $t \in [0, T]$:

$$E_{M,N}(t) = \bar{E}_{M,N}(t) + |v_N(t)|^2 \sum_{i \geq M+1} z_i^2 + |v'_N(t)|^2 \sum_{i \geq M+1} \frac{z_i^2}{\lambda_i} \quad (1.7.46)$$

et donc a fortiori pour $t = T$, d'où l'égalité recherchée. \square

On peut trouver ce type de démonstrations chez W. Krabs ([62, 63]) qui étudie la contrôlabilité exacte comme des *problèmes de moment*.

Résoudre un problème de moment consiste à calculer les données initiales du problème adjoint de la méthode HUM à partir des coefficients de la réponse calculée par superposition modale qui sont contrôlable exactement, c'est-à-dire telles que $y(x, T) = y'(x, T) = 0$.

Comme pour la méthode HUM, on calcule ensuite le contrôle nécessaire pour contrôler exactement cette réponse à partir de ces mêmes données initiales.

Remarque 1.25 Ce procédé est assez couramment utilisé pour calculer le contrôle dans les cas unidimensionnels (voir par exemple R.L.V. Gonzalez et G.F. Reyero [43]).

Chapitre 2

Tests numériques

2.1 Introduction

2.1.1 Objectifs

L'objectif majeur de ce chapitre est de vérifier avec quelle précision nous contrôlons le système approché.

Naturellement, nous allons vérifier que les estimations obtenues au théorème 1.6 sont exactes (voir paragraphe 2.4) et donc que notre méthode d'approximation donne les résultats de convergence que nous voulons; mais nous allons essentiellement chercher à obtenir des informations sur la façon dont la réponse approchée est contrôlée.

Si l'on fait abstraction du pas de maillage h avec lequel on calcule les modes, nous avons à notre disposition essentiellement deux paramètres d'approximation : N le nombre de modes que l'on utilise pour calculer le contrôle et M celui de la réponse.

Rappelons brièvement l'algorithme HUM de calcul de la réponse. Tout d'abord, nous calculons un contrôle sur N modes à partir des données initiales de la réponse projetée sur ces mêmes modes. On a donc une première erreur commise sur le nombre de modes utilisé pour le calcul du contrôle et celui de la réponse excitée initialement, noté \tilde{N} , qui peut être également différent de celui utilisé pour calculer la réponse. À l'aide du contrôle, nous pouvons alors calculer une réponse approchée essentiellement de deux façons différentes :

- soit on considère une réponse calculée à l'aide d'un relèvement exact :

$$y_{M,N}^1(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \theta_i(x) + v_N(t) z(x) \quad (2.1.1)$$

- soit la réponse précédente projetée sur les modes :

$$y_{M,N}^2(t) = P^M(y_{M,N}^1(t)). \quad (2.1.2)$$

Ces deux réponses sont données explicitement à l'aide des formules (1.7.10) et (1.7.17) (voir paragraphe 1.7 du chapitre 1).

Selon le nombre de modes, a priori différents, que l'on prend pour calculer le contrôle et la réponse, la qualité du contrôle varie évidemment.

2.1.2 Plan du chapitre

Afin de bien cerner les différentes approximations effectuées, nous allons étudier dans un premier temps, au paragraphe 2.2, la réponse sur laquelle s'exerce un contrôle *usuel*.

Nous regarderons au paragraphe 2.2.1 l'effet du contrôle approché sur la réponse exacte (calculée avec un nombre élevé de modes par rapport à celui du contrôle). Nous estimerons en particulier la vitesse de convergence de l'énergie finale en fonction de N (paragraphe 2.2.2).

La paragraphe 2.3 suivant sera dévolu à l'étude du contrôle *régulier*.

Bien que l'énergie associée à ce contrôle soit plus contraignante que celle pour le contrôle usuel, il s'agit pour le contrôle $H_0^1(0, T)$ de l'énergie mécanique de la poutre, on pourra vérifier que la réponse est contrôlée encore plus efficacement qu'avec le contrôle standard, en particulier en comparant la décroissance de leurs énergies. De plus, dans le cas d'une observation incomplète du spectre de la réponse par le contrôle, les modes hautes fréquences sont beaucoup moins excités que dans le cas standard, ce qui entraîne une décroissance meilleure de l'énergie.

Dans tous les tests antérieurs, nous n'avons pas étudié un paramètre important, l'horizon de contrôlabilité T . Selon la théorie, celui-ci peut-être choisi aussi petit que l'on veut; dans le cas du contrôle discret, il ne peut-être pris arbitrairement si l'on veut au moins obtenir une décroissance de l'énergie. En effet, au niveau discret ce temps dépend intimement du pas de maillage h utilisé pour calculer les modes. Nous proposerons au paragraphe 2.5 une procédure permettant de calculer ce *temps minimal numérique*, noté T^h , en fonction de h .

Pour conclure ces différents tests, nous montrerons enfin au paragraphe 2.6 que la réponse solution d'une formulation semi-très faible, que nous calculons à l'aide d'un schéma de Newmark, converge vers la réponse avec un relèvement approché quand le nombre d'itérations du schéma de Newmark tend vers l'infini.

2.1.3 Interprétation des tests numériques

À ce stade, un problème important est de savoir comment on mesure l'efficacité du contrôle effectué.

On pourrait de façon simpliste regarder l'évolution au cours du temps de la déformée et de la vitesse de la poutre pour vérifier l'efficacité avec laquelle elle

est contrôlée et en particulier si elle est contrôlée exactement, autrement dit si :

$$y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0, \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.1.3)$$

mais ce "regard" n'est pas assez précis.

De plus, il se pose la question de choisir quelle réponse approchée donne l'information la plus précise. La réponse approchée qui permet de visualiser le plus fidèlement la poutre contrôlée et en particulier d'observer l'action du contrôle, c'est-à-dire de vérifier la condition de bord :

$$\frac{\partial y_{M,N}}{\partial x}(L, t) = v_N(t), \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.1.4)$$

est naturellement la réponse calculée avec un relèvement exact.

L'autre réponse étant la projetée sur les modes de la réponse précédente ne vérifie pas cette condition puisque par définition on a :

$$\forall i \in [1, \dots, M], \quad \frac{d\theta_i}{dx}(L) = 0. \quad (2.1.5)$$

Il s'avère que la méthode HUM nous fournit l'outil de comparaison *ad hoc*. En effet, on rappelle que l'énergie associée à la poutre, sur laquelle s'exerce un contrôle "HUM" élément de $H_0^p(0, T)$, est :

- pour $p = 0$, la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$
- et pour $p = 1$, la norme $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$.

C'est cette "énergie" que l'on utilisera comme instrument de mesure de l'efficacité du contrôle.

2.1.4 Notations

On rappelle les notations introduites au paragraphe 1.7.3 du chapitre 1. On note $\bar{E}_{M,N}(t)$, l'énergie de la réponse avec relèvement projetée, qui vérifie :

$$\bar{E}_{M,N}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^M (\alpha_i^2(t) + \lambda_i^{-1} \alpha_i^{2'}(t)) & (p = 0) \\ \sum_{i=1}^M (\lambda_i \alpha_i^2(t) + \alpha_i^{2'}(t)) & (p = 1) \end{cases} \quad (2.1.6)$$

et $E_{M,N}(t)$ celle de la réponse calculée avec un relèvement exact dont l'expression est légèrement plus compliquée en raison du terme non projetée sur V_M (voir Annexe E).

2.2 Contrôle usuel

2.2.1 Premier test

Tout d'abord précisons que dans ce paragraphe nous prenons un pas de maillage "assez petit" :

$$h = 1/750. \quad (2.2.7)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'horizon de contrôle T peut être choisi arbitrairement petit, mais comme nous l'avons déjà remarqué, du fait de la discrétisation il existe un *temps minimal numérique* de contrôlabilité exacte qui dépend du pas de maillage (voir paragraphe 2.5), aussi nous allons prendre un temps T "assez grand" pour le h que l'on vient de fixer :

$$T = 1. \quad (2.2.8)$$

Enfin la contrôlabilité exacte est vérifiée pour un contrôle de $L^2(0, T)$ pour toutes données initiales appartenant à l'espace $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$. Ces données initiales vont être ensuite projetées sur V_M , c'est-à-dire décomposées sur la base des M premiers modes propres de la poutre encastrée.

Données :

Étant donné qu'un de nos soucis est de vérifier s'il y a ou non de la *pollution modale*, nous allons seulement considérer les N premiers modes de ces données initiales.

Aussi un choix de données initiales vérifiant ces différentes conditions et en particulier appartenant, si on prend un nombre infini de modes, à $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ est dans notre exemple :

$$\alpha_i(t=0) = \frac{0.1}{i^q}, \quad \alpha'_i(t=0) = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, N], \quad (2.2.9)$$

avec $q = 2.6$ ($q > \frac{5}{2}$ suffit).

Nous considérons dans ce test une poutre calculée avec M modes et contrôlée avec un contrôle calculé avec N modes tels que :

$$M = 50, \quad N = 20. \quad (2.2.10)$$

Historiques de la réponse et de la vitesse :

On commence par vérifier de façon purement visuelle (figure 2.1) si l'on contrôle exactement la poutre en comparant son évolution (en trait continu) au cours du temps à celle de la réponse libre (en trait pointillé).

On peut ainsi observer que l'amplitude de la réponse diminue peu à peu au cours

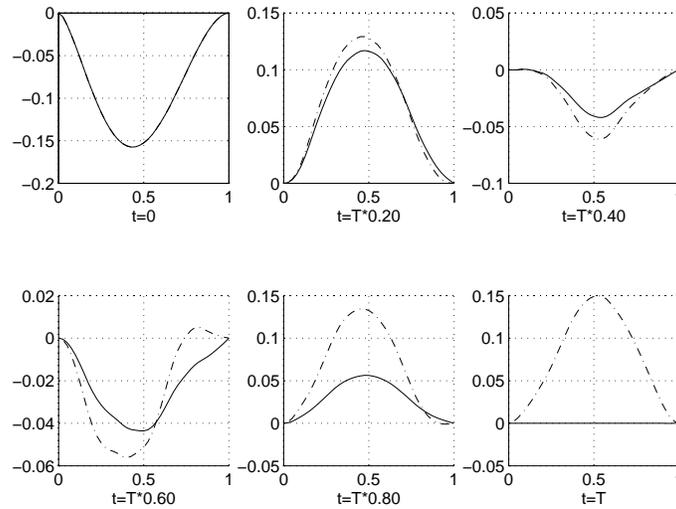


FIG. 2.1 - *Historiques de la réponse contrôlée $y_{M,N}^1$ (en trait continu) et de la réponse libre (en trait pointillé).*

du temps, jusqu'à être nulle à l'instant T . On a utilisé la réponse approchée $y_{M,N}^1$ au lieu de la réponse projetée $y_{M,N}^2$ parce que l'on peut visualiser avec cette réponse la rotation imposée à l'extrémité droite contrôlée et voir que dans notre cas, et pour les instants considérés, cette rotation n'est pas trop abrupte (l'angle est strictement inférieur à 90 degrés).

C'est ce que l'on peut observer plus directement à la figure 2.2 de droite où l'on a représenté la loi de contrôle appliquée à la réponse.

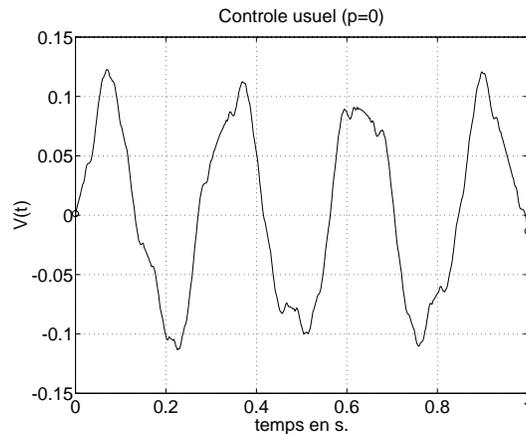


FIG. 2.2 - *Loi de contrôle ($N = 20$ et $M = 50$).*

On voit également qu'étant donné sa régularité, la loi de contrôle a un contenu fréquentiel essentiellement basses fréquences. De plus on observe qu'aussi bien à

l'instant initial qu'à l'instant final, la loi de contrôle est non nulle.

On regarde également à la figure 2.3 l'historique de la vitesse de $y_{M,N}^1$ (en trait continu) par rapport à celui de la vitesse libre (en trait pointillé).

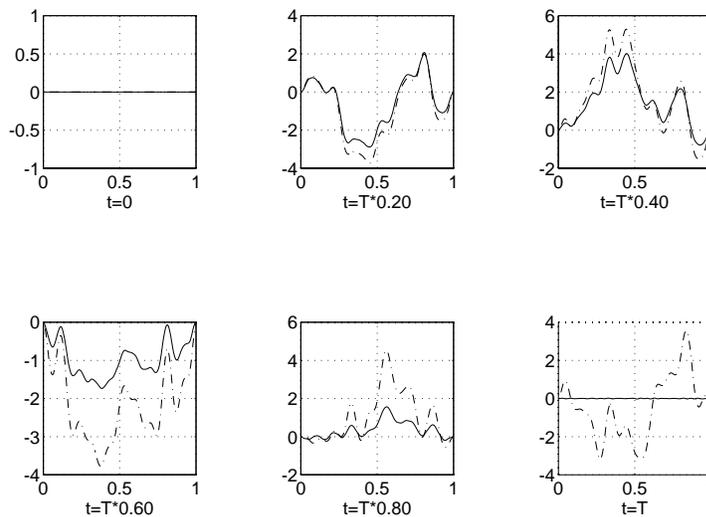


FIG. 2.3 - *Historiques de la vitesse contrôlée de y^1 (en trait continu) et de la vitesse libre (en trait pointillé).*

On peut ainsi vérifier que la vitesse est également très faible à l'instant final.

Les historiques de la réponse et de la vitesse de la poutre nous permettent seulement d'estimer qualitativement la contrôlabilité exacte, aussi il est nécessaire pour avoir une information sur la quantité d'énergie dissipée par le contrôle de regarder l'évolution de la norme HUM de la réponse correspondant à notre contrôle, c'est-à-dire la norme $L^2(0, L) \times H_0^2(0, L)$.

Norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$:

Comme annoncé, on regarde maintenant l'historique de la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ de la poutre (figure 2.4 de gauche) pour les deux réponses.

Tout d'abord, on observe que la norme de la réponse décroît bien vers une valeur très petite, environ 10^{-8} , ce qui donne une idée quantitative de l'action du contrôle.

Comme on pouvait s'y attendre du fait du grand nombre de modes utilisés pour calculer les réponses approchées, les normes de $y_{M,N}^1$ et $y_{M,N}^2$ se superposent.

Il est également instructif de calculer l'énergie de modes bien précis de la réponse projetée, notamment afin d'estimer leurs contributions pour l'énergie de la réponse calculée avec tous ses modes.

On a représenté à la figure 2.4 de droite l'évolution de l'énergie des modes 1, 20, 21 et 50 de la réponse $y_{M,N}^2$.

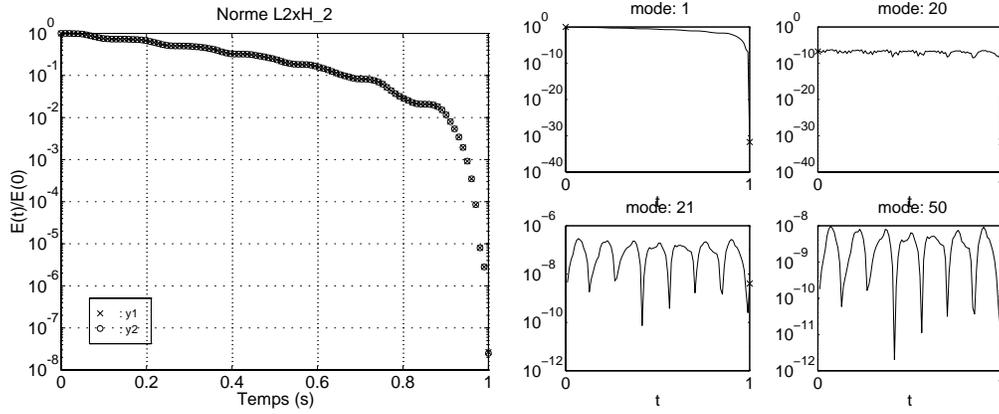


FIG. 2.4 - Énergie totale des réponses $y_{M,N}^1$ et $y_{M,N}^2$ (à gauche) et contributions énergétiques des modes respectivement 1, 20, 21 et 50 de la réponse $y_{M,N}^2$ ($N = 20$ et $M = 50$) (à droite).

On observe tout d'abord que les modes 1 et 20, excités à l'instant initial, sont complètement dissipés par le contrôle. De plus, on voit que l'énergie des modes 21 et 50, qui ne sont pas contrôlés et bien que n'étant pas excités initialement, oscillent autour d'une valeur de l'ordre de 10^{-8} . Nous donnerons ultérieurement une explication de ce phénomène (voir paragraphe 2.2.1).

À l'aide de la figure 2.5 où l'on représente la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ de la réponse $y_{M,N}^2$ projetée sur les N premiers modes, on peut voir que la contrôlabilité spectrale des modes 1 et 20 de la réponse est vérifiée par tous les modes inférieurs à N de $y_{M,N}^2$.

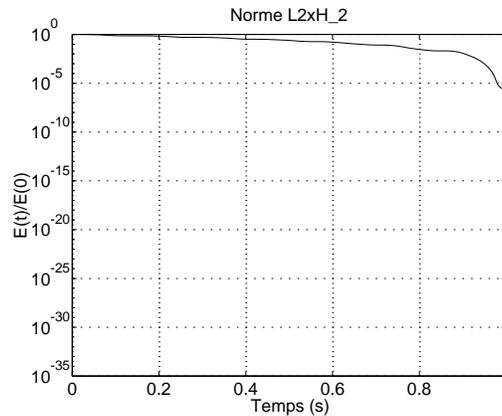


FIG. 2.5 - Énergie des vingt premiers modes de la réponse $y_{M,N}^2$ ($N = 20$ et $M = 50$).

On vérifie la propriété 1.12 du paragraphe 1.7.3, soit :

$$\forall T > 0, \forall \{y^0, y^1\}, \forall M \leq N, \quad \bar{E}_{M,N}(T) = 0. \quad (2.2.11)$$

Autrement dit, il y a *controlabilité spectrale* de la réponse projetée.

Spectrogrammes de la réponse et de la vitesse :

Avec les données initiales considérées, les modes supérieurs à N ne sont pas excités initialement, il est alors fondamental de savoir si ces modes sont excités ultérieurement par le contrôle, autrement dit s'il y a du *spill-over*.

Ce phénomène, qui apparait naturellement dès qu'on ne veut ou ne peut contrôler qu'un petit nombre de modes d'une réponse, consiste en un transfert énergétique des basses fréquences vers les hautes fréquences.

Avant de vérifier si de la *pollution modale* se produit, on regarde le spectrogramme des N premiers modes de la réponse $y_{M,N}^2$ (figure 2.6 de gauche).

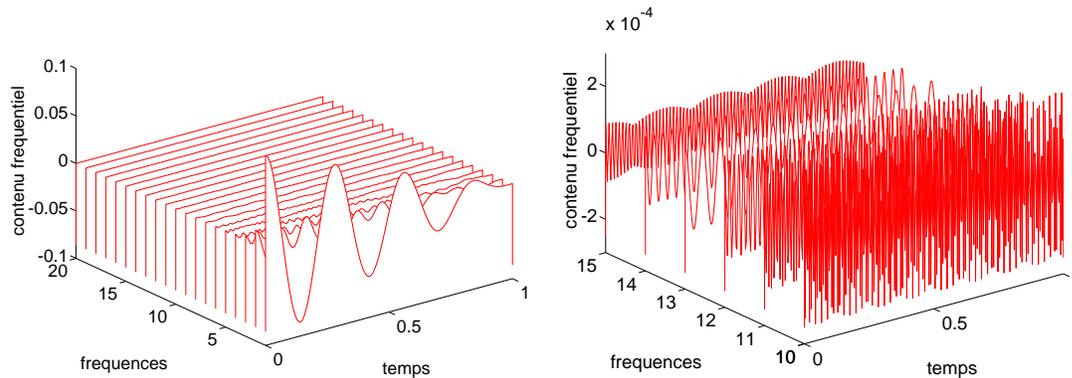


FIG. 2.6 - Spectrogramme des N premiers modes de la réponse $y_{M,N}^2$ (à gauche) et pour les modes 10 à 15 (à droite).

On a ainsi une vue globale de l'historique des N premiers modes de la réponse $y_{M,N}^2$. On peut voir en particulier la décroissance régulière du premier mode de la réponse. Malheureusement du fait de l'effet d'échelle, on ne peut observer en détails des modes plus élevés aussi on montre à la figure 2.6 de droite le même spectrogramme, mais seulement pour les modes 10 à 15. On peut ainsi observer qu'ils sont fortement excités par le contrôle tout en étant contrôlés exactement du fait de la propriété 1.12.

Regardons maintenant le spectrogramme des modes non contrôlés (figure 2.7). On voit que les modes non observés par le contrôle sont cependant excités par celui-ci (voir la définition de cette réponse). Cependant on peut noter que cette pollution modale est assez faible (de l'ordre de 10^{-5}).

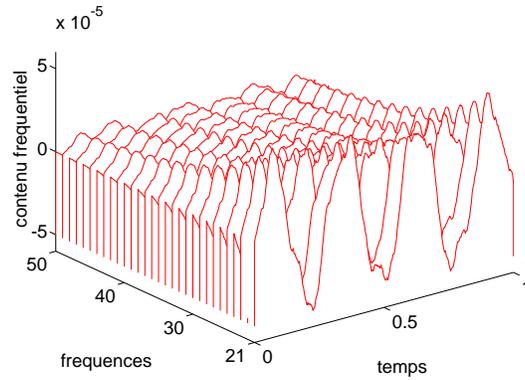


FIG. 2.7 - Spectrogramme de la réponse $y_{M,N}^2$ pour les modes strictement supérieurs à N .

2.2.2 Convergence de l'énergie à $t = T$ en fonction de N

Plutôt que de multiplier les tests en faisant varier le nombre N de modes du contrôle et d'observer les résultats obtenus, nous étudions dans ce paragraphe la variation de l'énergie de nos deux réponses à $t = T$ en fonction de N ce qui permet en particulier d'obtenir une estimation de son taux de convergence.

On conserve les mêmes données que dans le premier test numérique, à l'exception des données initiales qui valent :

$$\alpha_i(t = 0) = \delta_{i1}, \quad \alpha'_i(t = 0) = \delta_{i1}, \quad \forall i \in [1, \dots, M]. \quad (2.2.12)$$

On se place donc dans un cas où seul le premier mode de la réponse (resp. de la vitesse) est excité initialement.

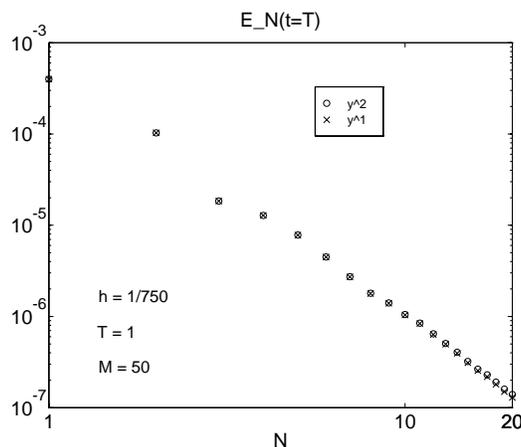


FIG. 2.8 - Convergence de l'énergie de y^1 et y^2 en fonction de N .

On représente les variations de $\bar{E}_{M,N}(t)$ et $E_{M,N}(t)$ en fonction de N à la figure 2.8. On a naturellement décroissance de chacune des énergies en fonction de N . De plus, on voit que cette décroissance est en $O(N^{-3})$.

À l'aide de ce calcul, on ainsi peut déduire le nombre exact de modes nécessaire pour obtenir une valeur précise de l'énergie à $t = T$. On remarque en particulier que prendre $N = \tilde{N}$ suffit pour obtenir une valeur finale de l'énergie de l'ordre de 10^{-4} .

2.3 Contrôle régulier ($p = 1$)

Nous allons étudier dans ce paragraphe, le contrôle régulier $p = 1$. Afin de comparer son efficacité par rapport à celle du contrôle usuel, nous conservons les mêmes données que dans le paragraphe 2.2.1, c'est-à-dire :

$$T = 1, \quad h = 1/750, \quad M = 50, \quad N = 20 \quad (2.3.13)$$

et

$$\alpha_i(t=0) = \frac{0.1}{j^{2.6}}, \quad \alpha'_i(t=0) = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, N]. \quad (2.3.14)$$

Nous contrôlons la poutre avec un contrôle appartenant à $H_0^1(0, T)$, par conséquent la norme HUM avec laquelle nous devons vérifier la contrôlabilité exacte est l'*énergie mécanique*, autrement dit la norme $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$.

Cette norme, au lieu d'écraser les hautes fréquences comme la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ pour le contrôle usuel, les amplifie. Par conséquent, on devrait s'attendre à ce que la légère pollution modale observée dans le cas du contrôle usuel augmente, or il n'en est rien; *la pollution modale reste très faible*.

Nous allons suivre la même procédure de tests qu'au paragraphe 2.2.1 :

- historiques de la réponse (resp. vitesse) de la poutre contrôlée et libre
- historique de la loi de contrôle
- étude du comportement énergétique du système contrôlé
- analyse du spectrogramme de la réponse contrôlée et en particulier du comportement vibratoire hautes fréquences de la réponse

2.3.1 Historiques de la réponse et de la vitesse

Pour les mêmes raisons que pour le contrôle usuel, on regarde à la figure 2.9 l'historique de la réponse de la poutre contrôlée $y_{M,N}^1$ calculée avec un relèvement exact (en trait continu), entre l'instant initial et l'instant final, comparativement

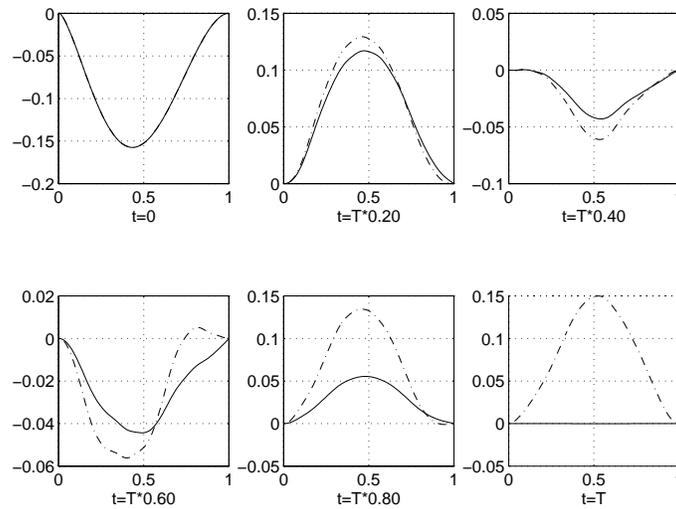


FIG. 2.9 - Historiques de la réponse contrôlée $y_{M,N}^1$ (en trait continu) et de la réponse libre (en trait pointillé).

à celui de la réponse libre (en trait pointillé).

On voit clairement que la poutre est bien contrôlée exactement en un temps T . On remarque qu'il est très difficile de voir une différence entre son évolution et celle de la réponse contrôlée avec un contrôle $L^2(0, T)$ (voir figure 2.1). Cela s'explique facilement, par le fait que l'analyse purement visuelle de ces historiques ne permet de voir que la norme $L^2(0, L)$.

On représente à la figure 2.10 la loi de contrôle régulière qui asservit la poutre.

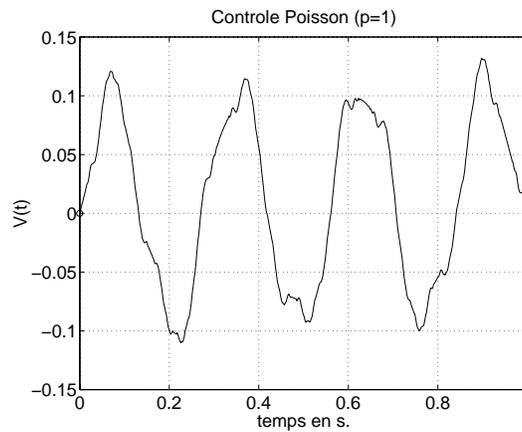


FIG. 2.10 - Loi de contrôle régulière ($p = 1$).

On voit que le fait d'imposer à cette loi d'être nulle, à l'instant initial et à l'instant final, ne modifie pas son comportement global par rapport à la loi de contrôle

usuelle (voir figure 2.2).

On regarde enfin à la figure 2.11 l'historique de la vitesse de $y_{M,N}^1$ (en trait continu) par rapport à celui de la vitesse libre (en trait pointillé).

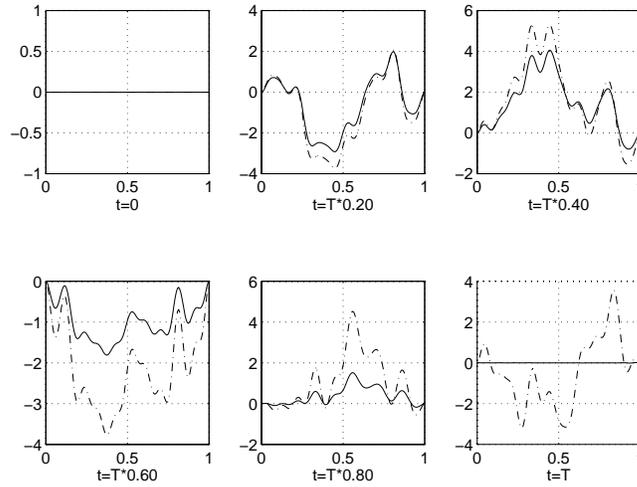


FIG. 2.11 - *Historiques de la vitesse de la réponse y^1 contrôlée (en trait continu) et de la vitesse libre (en trait pointillé).*

On peut ainsi vérifier que la vitesse est également très faible à l'instant final.

Comme nous venons de le voir, ces premiers tests ne nous permettent pas de différencier de façon flagrante le gain apporté par l'application du contrôle $H_0^1(0, T)$ par rapport au contrôle usuel, aussi il est nécessaire d'utiliser des outils de mesure plus précis pour les comparer. C'est ce que nous nous proposons de faire au paragraphe suivant.

2.3.2 Norme $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$

Comme annoncé, on regarde maintenant l'historique de la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ des deux réponses $y_{M,N}^1$ et $y_{M,N}^2$ (figure 2.12 de gauche).

Tout d'abord, on vérifie que, quelque soit la réponse approchée que l'on considère, leurs énergies décroissent jusqu'à une valeur identique très petite de l'ordre de 10^{-6} ; mais à la différence du contrôle usuel, les normes des deux réponses sont différentes.

Si l'on regarde la norme $H_0^2(0, L)$ des deux réponses (figure 2.13 de gauche) et la norme $L^2(0, L)$ de leurs vitesses (figure 2.13 de droite), on voit que c'est la norme $H_0^2(0, L)$ qui est responsable de cette différence; par contre les normes des deux vitesses sont identiques.

L'explication la plus plausible de cette différence vient du terme $z_i v_N(t)$, correspondant au relèvement projeté de la réponse $y_{M,N}^2$ (voir le paragraphe 1.7.1 du

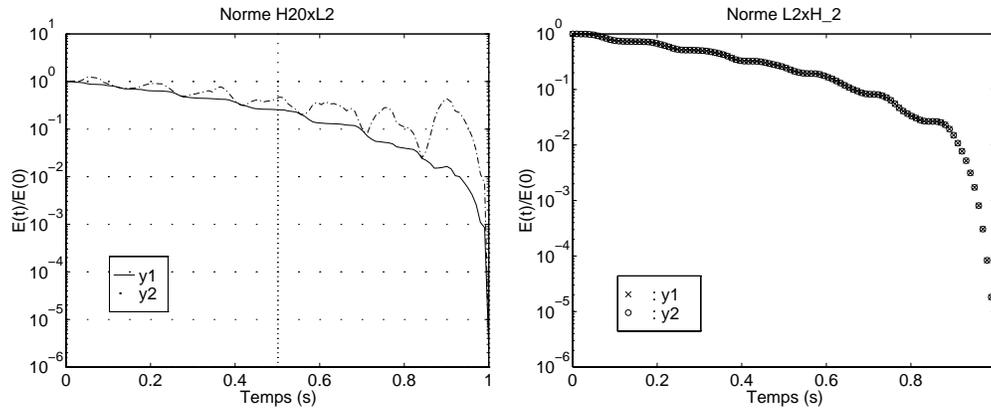


FIG. 2.12 - Normes $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ (resp. $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$) des réponses $y_{M,N}^1$ et $y_{M,N}^2$ à gauche (resp. à droite).

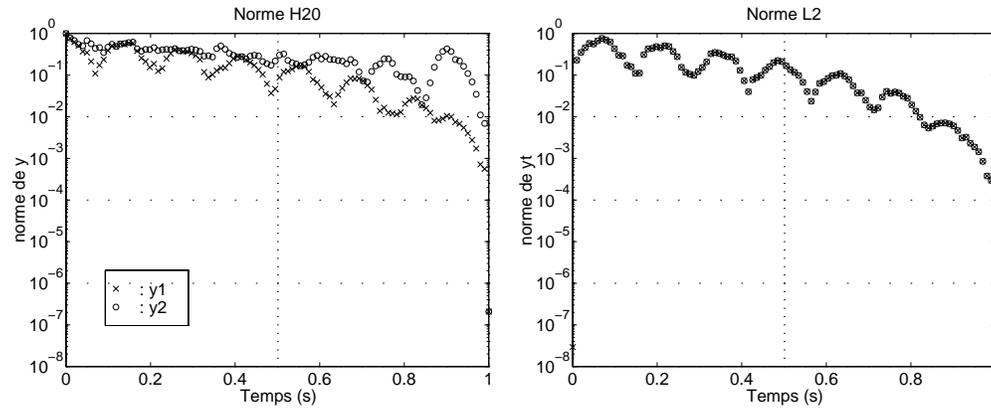


FIG. 2.13 - Normes $H_0^2(0, L)$ (resp. $L^2(0, L)$) des deux réponses (resp. vitesses) à gauche (resp. à droite).

chapitre 1), qui ne converge pas vers le relèvement exact pour la norme $H_0^2(0, L)$. Si l'on regarde la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ des deux réponses (figure 2.12 de droite, au lieu de la norme HUM (l'énergie mécanique), on voit clairement que cette fois-ci, comme pour le contrôle usuel, les normes des deux réponses sont identiques.

2.3.3 Spectrogrammes de la réponse et de la vitesse

Rappelons tout d'abord que nous contrôlons avec N modes une réponse calculée avec M modes dont N modes sont excités à l'instant initial. Or nous venons de voir que l'on ne vérifie pas la contrôlabilité spectrale comme dans le cas usuel, autrement dit que l'énergie des N premiers modes de la réponse n'est pas totalement dissipée à l'instant T . Nous avons vu que pour le contrôle usuel

ce phénomène s'explique par une légère pollution modale des modes incontrôlés (supérieurs à $N + 1$) par les modes contrôlés (inférieurs à N); vérifions si c'est également le cas pour le contrôle régulier.

On regarde à la figure 2.14 de gauche, le spectrogramme des N premiers modes de la réponse $y_{M,N}^2$ calculée avec un relèvement projeté.

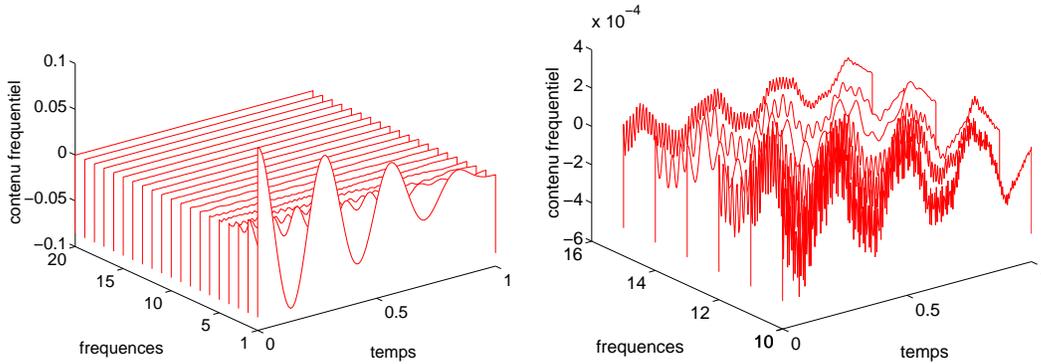


FIG. 2.14 - Spectrogramme des N premiers modes de la réponse $y_{M,N}^2$ (à gauche) et pour les modes 10 à 15 (à droite).

On voit que les premiers modes de la réponse décroissent, mais étant donné les données initiales que nous avons choisies, au-delà de ces tous premiers modes il est difficile de conclure à une décroissance. Aussi, on représente à la figure 2.14 de droite, le spectrogramme des modes 10 à 15 de $y_{M,N}^2$. On peut ainsi vérifier que comme pour le contrôle usuel, ces modes sont bien contrôlés; cependant leur décroissance est beaucoup plus régulière que dans le cas usuel (voir figure 2.6 de droite).

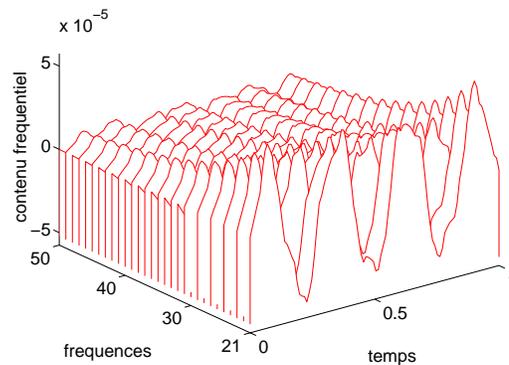


FIG. 2.15 - Spectrogramme de la réponse $y_{M,N}^2$ pour les modes $M > N$.

Enfin, afin d'estimer la pollution modale, on regarde à la figure 2.15 le spectrogramme des modes non contrôlés de la réponse $y_{M,N}^2$. On voit que ces modes

sont bien excités par le contrôle, mais toujours de façon aussi faible que pour le contrôle $L^2(0, T)$.

2.4 Estimations d'erreurs des normes F_G et G

Nous allons vérifier dans ce paragraphe les estimations d'erreurs du théorème 1.6 pour le contrôle usuel et le contrôle régulier $p = 1$. Or ce théorème n'est valide que si h est assez petit pour que l'on puisse inverser la matrice K_N^h . Nous allons donc étudier en premier lieu le conditionnement de cette matrice avant de vérifier ces estimations.

2.4.1 Étude du conditionnement de K_N^h

Le théorème n'est valide que si la matrice K_N^h est inversible et par conséquent si $\kappa_2(K_N^h)$, c'est-à-dire le rapport de la plus grande valeur propre de K_N^h sur la plus petite, n'est pas trop grand.

Remarque 2.1 Le choix de ce conditionnement est purement arbitraire.

Commençons par estimer la vitesse de convergence de ce conditionnement en fonction du nombre de modes N (figure 2.16) dans le cas où h est pris très petit.

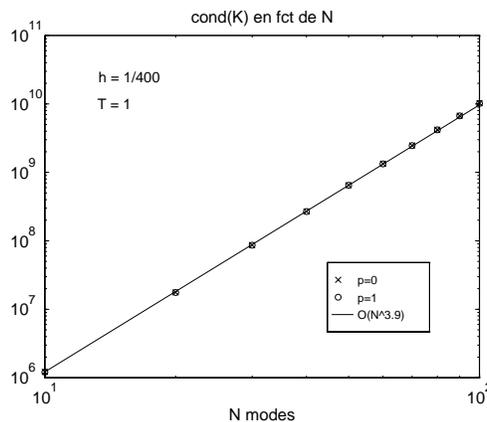


FIG. 2.16 - $\kappa_2(K_N)$ en fonction de N pour $h = 1/400$.

On vérifie ainsi numériquement que $\kappa_2(K_N)$ augmente en $O(N^4)$ (avec $h = 1/400$).

Calculons maintenant le taux de convergence de l'erreur relative du conditionne-

ment en fonction de h , c'est-à-dire :

$$\forall h > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \chi(h) = \frac{|\kappa_2(K_N^h) - \kappa_2(K_N)|}{\kappa_2(K_N)}. \quad (2.4.15)$$

On voit à la figure 2.17 de gauche que l'on obtient une convergence en $O(h^4)$ (avec $N = 10$).

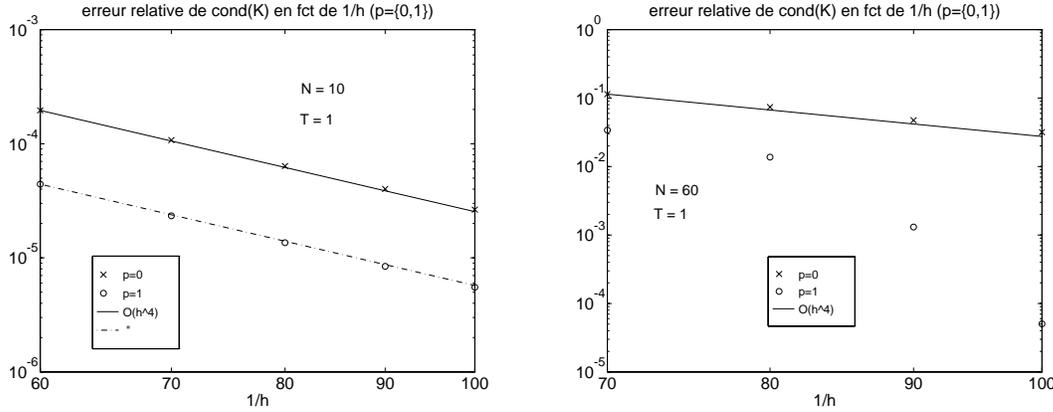


FIG. 2.17 - $\chi(h)$ en fonction de $1/h$ pour $N = 10$ (à gauche) et $N = 60$ (à droite).

En fait, le choix de $N = 10$ pour le dernier test n'était pas complètement neutre, en effet pour N plus grand, on obtient pour le cas régulier $p = 1$ toujours une erreur plus faible que celle du cas usuel $p = 0$, mais sans un taux de convergence qui soit constant. Par exemple pour $N = 60$, on obtient une sorte de super-convergence (figure 2.17 de droite).

2.4.2 Estimations d'erreurs de la norme F_G

Vérifier l'estimation (1.6.36) du théorème 1.6 pour le contrôle usuel ($p = 0$) et le contrôle régulier ($p = 1$) revient à montrer que :

$$\forall h > 0, \forall N > 0, \exists C > 0,$$

$$\left\| \{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \} - \{ \varphi^0, \varphi^1 \} \right\|_{E_{-p}} \leq \frac{C}{N^2}. \quad (2.4.16)$$

$$\left\| \{ \varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1 \} - \{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \} \right\|_{E_{-p}} \leq C(N)h^2. \quad (2.4.17)$$

pour $p = 0$ et $p = 1$ ($E_0 = H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ et $E_{-1} = L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$).

1. $O(N^2)$:

Vérifions l'inégalité (2.4.16), à cette fin, sachant que :

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \right\} - \left\{ \varphi_M^0, \varphi_M^1 \right\} \right\|_{F_G}^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\lambda_i^{1-p} |\gamma_i - \bar{\gamma}_i|^2 + \lambda_i^{-p} \delta_i^2 \right) \\ &+ \sum_{i=N+1}^M \left(\lambda_i^{1-p} \bar{\gamma}_i^2 + \lambda_i^{-p} \bar{\delta}_i^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

avec $\{\gamma_i, \delta_i\}_{i=1}^N$ (resp. $\{\bar{\gamma}_i, \bar{\delta}_i\}_{i=1}^M$) les composantes sur V_N (resp. de V_M) de $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}$ (resp. $\{\varphi_M^0, \varphi_M^1\}$), on calcule l'erreur relative :

$$R(N) = \frac{\left\| \left\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \right\} - \left\{ \varphi_M^0, \varphi_M^1 \right\} \right\|_{F_G}}{\left\| \left\{ \varphi_M^0, \varphi_M^1 \right\} \right\|_{F_G}} \quad (2.4.19)$$

avec

$$h = 1/750, \quad N \in \{20, 30, 40, 50\}, \quad M = 100. \quad (2.4.20)$$

La figure 2.18 de gauche montre la convergence de $R(N)$.

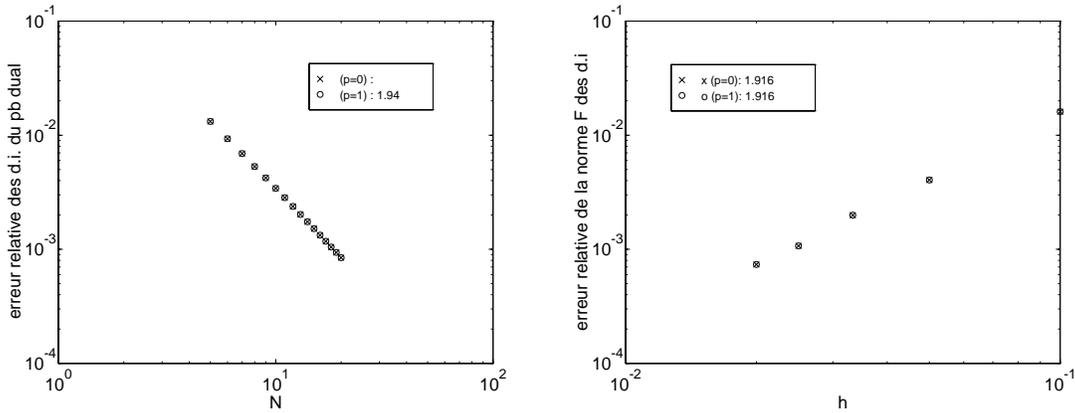


FIG. 2.18 - $R(N)$ (à gauche) et $\tilde{R}(h)$ (à droite).

On obtient bien une convergence en $O(N^{-2})$ pour les deux contrôles comme l'annonçait le théorème 1.6.

2. $O(h^2)$:

Pour vérifier l'inégalité (2.4.17), on calcule l'erreur relative :

$$\tilde{R}(h) = \frac{\left\| \left\{ \varphi_{N,h}^0, \varphi_{N,h}^1 \right\} - \left\{ \varphi_{N,\tilde{h}}^0, \varphi_{N,\tilde{h}}^1 \right\} \right\|_{E-p}}{\left\| \left\{ \varphi_{N,\tilde{h}}^0, \varphi_{N,\tilde{h}}^1 \right\} \right\|_{E-p}} \quad (2.4.21)$$

avec

$$N = 5, \tilde{h} = 1/750, 1/h \in \{10, 20, 30, 40, 50\}. \quad (2.4.22)$$

La figure 2.18 de droite montre la convergence pour les deux contrôles de la norme F_G en fonction de h . On obtient un taux de convergence ($O(h^2)$) identique à celui donné par le théorème 1.6.

2.4.3 Estimations d'erreurs de la norme G

L'estimation que l'on doit vérifier est la suivante :

$$\forall h > 0, \forall N > 0, \exists \tilde{C} > 0, \quad \|v_{N,h} - v_N\|_{H_0^p(0,T)} \leq \tilde{C}h^2. \quad (2.4.23)$$

Par définition du contrôle, on a :

$$\forall p \geq 0, \quad \|v_{N,p}\|_{H_0^p(0,T)} = \left(\int_0^T \left(\frac{d^p}{dt^p} \left(B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(t, L) \right) \right) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4.24)$$

On peut obtenir une expression beaucoup plus simple de cette norme.

En effet, si on intègre p fois par parties le second membre, en appliquant la définition de l'opérateur B_p ainsi que celle des données initiales du problème adjoint, et enfin la propriété 1.1 que vérifie l'opérateur Λ_p , il vient :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 0, \quad \|v_{N,p}\|_{H_0^p(0,T)} &= \left(\int_0^T B_p \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(t, L) \right) EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(t, L) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle \Lambda_p \{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \}, \{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \} \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle \mathcal{P}_N \{ y^1, -y^0 \}, \{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \} \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On conserve les mêmes données que pour le test précédent.

La figure 2.19 de gauche (resp. de droite) montre la convergence de la norme G en fonction de N (resp. h).

Comme pour la norme F_G on a bien des taux quasiment identiques en N et en h pour les deux contrôles. De plus, les taux numériques et théoriques en fonction du nombre de modes N (resp. du pas de maillage h) coïncident.

2.5 Temps critique de contrôle

L'équation que l'on résout pour calculer la réponse de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli est de type Schrödinger aussi l'horizon de contrôlabilité peut-être choisi arbitrairement petit.

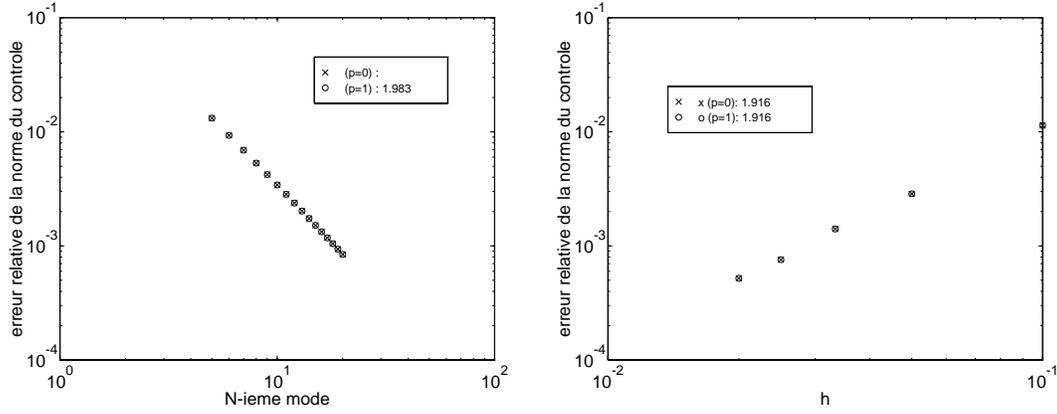


FIG. 2.19 - Erreurs relatives de la norme G en fonction de N (à gauche) et de h (à droite).

Au niveau discret, du fait du calcul des modes par éléments finis, l'efficacité du contrôle dépend fortement du pas de maillage. Ainsi, plus T diminue et plus l'énergie de la réponse contrôlée augmente, comme le montre l'exemple ci-dessous (figure 2.20).

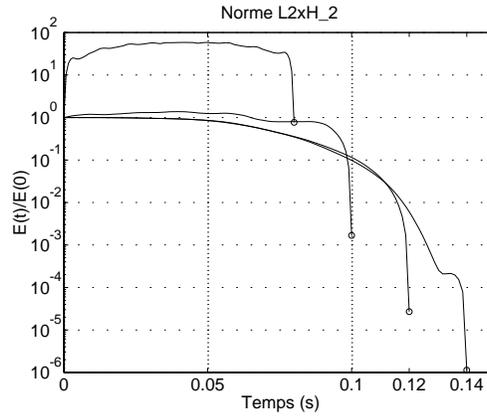


FIG. 2.20 - Variation de $\bar{E}_{M,N}(t)$ en fonction de T ($N = 20$, $M = 30$, $h = 1/400$).

On peut voir la variation de l'énergie de la réponse $y_{M,N}^2$ en fonction de T ($T = 0.08$, 0.1 , 0.12 et 0.14), pour $N = 20$, $M = 30$ et $h = 1/400$, pour les données initiales :

$$\alpha_i(t=0) = \frac{0.1}{i^{2.6}}, \quad \alpha'_i(t=0) = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, M]. \quad (2.5.25)$$

Pour savoir comment le contrôle se dégrade avec la diminution de T , on compare les spectrogrammes des vingt premiers modes des réponses précédentes correspondants à $T = 0.14$ et $T = 0.1$ successivement (figure 2.21).

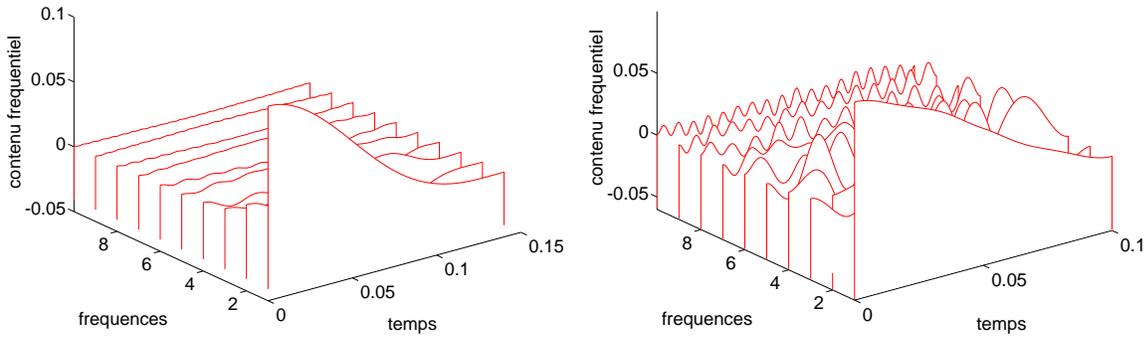


FIG. 2.21 - Spectrogramme des réponses $y_{M,N}^2$ pour $T = .14$ (à gauche) et $T = .1$ (à droite).

On peut ainsi observer qu'au fur et à mesure que T diminue les modes de la réponse sont contrôlés pour des fréquences de plus en plus faibles.

Il existe donc un *temps de contrôlabilité exacte minimal purement numérique* qui dépend de h .

Intuitivement, on conçoit bien que plus le temps d'action du contrôle sera petit et plus le contrôle aura besoin de modes de fréquences élevées et par conséquent plus il faudra utiliser un pas de maillage h fin; c'est ce que l'on va maintenant vérifier.

L'objectif est donc de trouver le h qui donne pour un temps de contrôlabilité T une erreur ε ($\varepsilon > 0$) sur un critère caractérisant la contrôlabilité exacte, comme par exemple l'erreur relative commise lors du calcul approché du contrôle pour la norme qui lui est associée.

- en premier lieu, on calculera donc pour un pas de maillage le plus fin possible le nombre de modes nécessaire pour que l'erreur relative de la norme du contrôle soit inférieure à ε . Alors, pour un ε fixé strictement positif, on obtient le nombre de modes N correspondant à un T donné, que l'on note $N(T)$; ce qui peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall T > 0, \exists N(T) \text{ tel que } \xi_N(T) = \frac{\|v_N - v\|}{\|v\|} \leq \varepsilon. \quad (2.5.26)$$

- la seconde étape consiste à vérifier le même critère, mais cette fois-ci en faisant varier h et en prenant $N(T)$. On détermine ainsi le pas de maillage nécessaire pour obtenir la précision voulue pour un T fixé, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall h > 0, \forall T > 0, \quad \xi_h(T) = \frac{\|v_{N(T),h} - v_{N(T)}\|}{\|v_{N(T)}\|} \leq 2\varepsilon. \quad (2.5.27)$$

On calcule donc tout d'abord l'erreur $\xi_N(T)$ en fonction de N et ceci pour différents T (figure 2.22 de gauche).

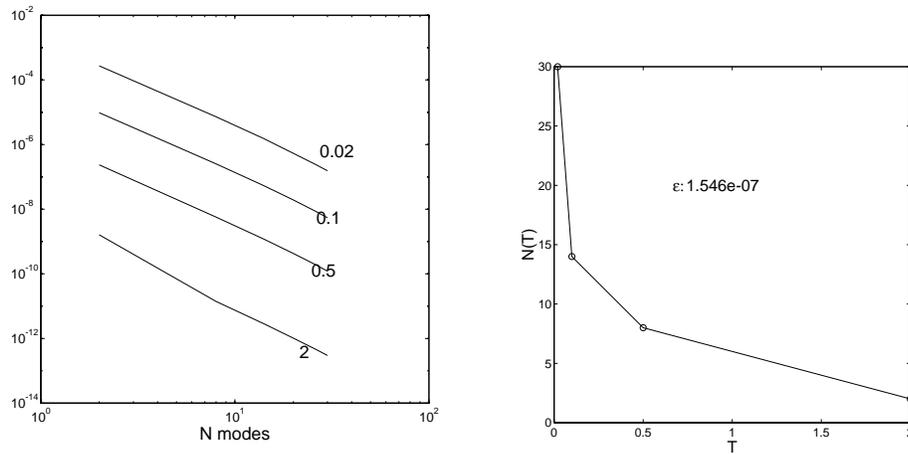


FIG. 2.22 - $\xi_N(T)$ fonction de N pour différents T (à gauche) $T \rightarrow N(T)$ (à droite)

On vérifie bien que pour un T fixé, plus le nombre de modes utilisés est élevé et plus l'erreur commise est faible. De plus, pour un N fixé, on voit que plus T augmente et plus l'erreur diminue, ce que l'on représente à la figure 2.22 de droite où l'on a calculé la variation de $\xi_N(T)$ en fonction de T pour un ε donné, en l'occurrence $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-7}$.

Cette information est conforme à l'intuition, plus le temps avec lequel on contrôle la réponse est grand et plus il est facile de la contrôler, ou encore plus l'inégalité d'observabilité est minorée par une constante C_1 grande.

On exécute ensuite la seconde et dernière étape de la procédure de calcul de T^h . On calcule donc la variation de $\xi_h(T)$ en fonction de h ou ce qui est équivalent en $1/h$ comme à la figure 2.23 de gauche.

Une nouvelle fois, l'erreur diminue naturellement quand h diminue (ou quand $1/h$ augmente) ceci quelque soit T donné et enfin cette erreur est également plus faible quand T augmente pour un h fixé. On remarquera que par rapport à l'exemple précédent, cette diminution de l'erreur en fonction de T est beaucoup plus faible.

Enfin, on obtient la courbe désirée qui représente la variation de $h(T)$ ($1/h(T)$ à la figure 2.23 de droite) en fonction de T pour un ε fixé ($\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-7}$), et ainsi on peut vérifier que plus T est faible et plus $h(T)$ doit être petit, autrement dit, plus il faut calculer avec une précision plus grande les modes si l'on diminue le temps de contrôle.

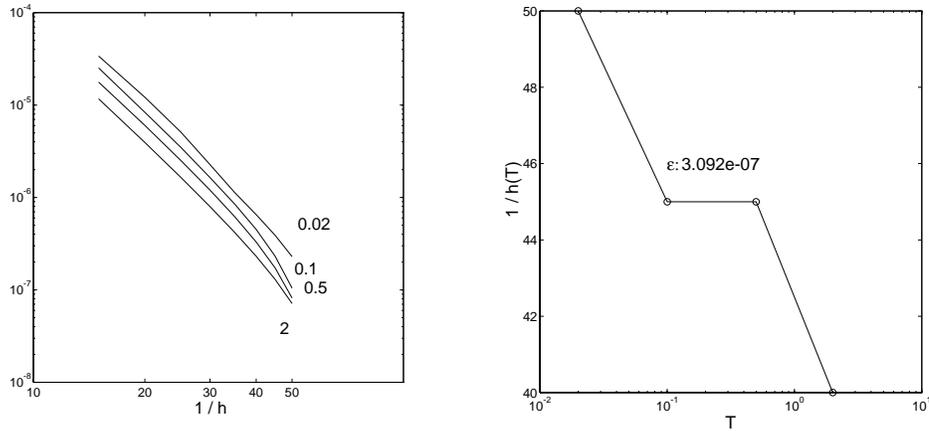


FIG. 2.23 - $\xi_h(T)$ en fonction de h et pour différents T (à gauche) et $T \rightarrow h(T)$ (droite).

2.6 Comparaison entre y^2 et y^{FG}

Rappelons tout d'abord la propriété 1.11 du paragraphe 1.7.2 :

la réponse y^2 et la réponse calculée à l'aide de la formulation variationnelle semi-très faible, notée y^{FG} , sont identiques.

On calcule la réponse y^{FG} à l'aide d'un schéma de Newmark avec une implémentation de type *a-form* inconditionnellement stable. Pour les caractéristiques des schémas que l'on utilise, on se reportera au paragraphe 4.9 du chapitre 4 dans lequel on rappelle quelques unes de leurs propriétés.

On prend les données suivantes :

$$T = 1, \quad N = 5, \quad M = 10, \quad h = 1/400 \quad (2.6.28)$$

et

$$\alpha_i(t = 0) = \frac{0.1}{i^{2.6}}, \quad \alpha'_i(t = 0) = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, M]. \quad (2.6.29)$$

Remarque 2.2 On a choisi un nombre de modes différents pour le calcul du contrôle et de la réponse en raison de la propriété 1.12 vérifiée par y^2 dans le cas du contrôle usuel.

Tout d'abord on compare visuellement les énergies de y^2 et de y^{FG} calculé avec $Nt = 10^3$, $2 \cdot 10^3$ et $3 \cdot 10^3$ itérations pour le contrôle usuel à la figure 2.24 de gauche.

On voit que c'est seulement au voisinage de $t = T$ que leurs énergies évoluent

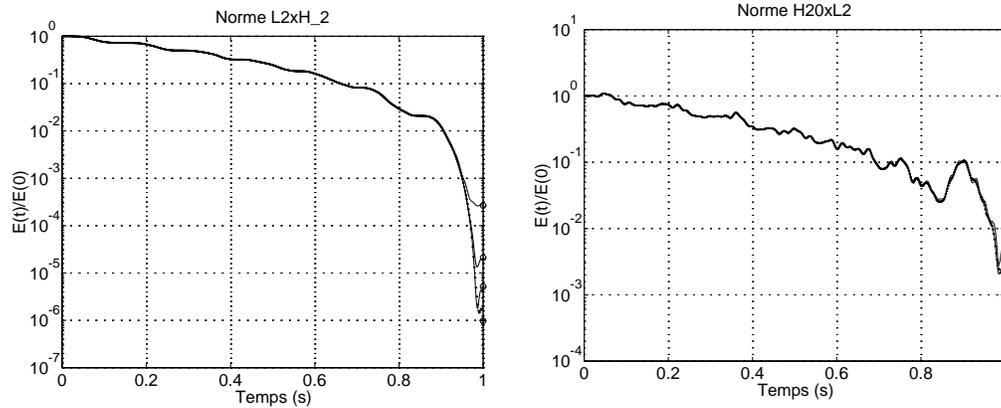


FIG. 2.24 - $E(y_{Nt}^{FG})(t)$ pour $p = 0$ (à gauche) et $p = 1$ (à droite).

différemment.

On refait le même calcul mais avec la version régulière $p = 1$ (figure 2.24 de droite) et y^{FG} calculé avec $Nt = 10^3$ et $Nt = 3.10^3$.

On observe le même type de comportement des deux réponses. On remarque cependant que la convergence semble être plus rapide.

Si l'on veut étudier la contrôlabilité exacte avec une réponse calculée à l'aide d'un schéma de Newmark, il est nécessaire de connaître la vitesse à laquelle converge son énergie à $t = T$ (figure 2.25 de gauche).

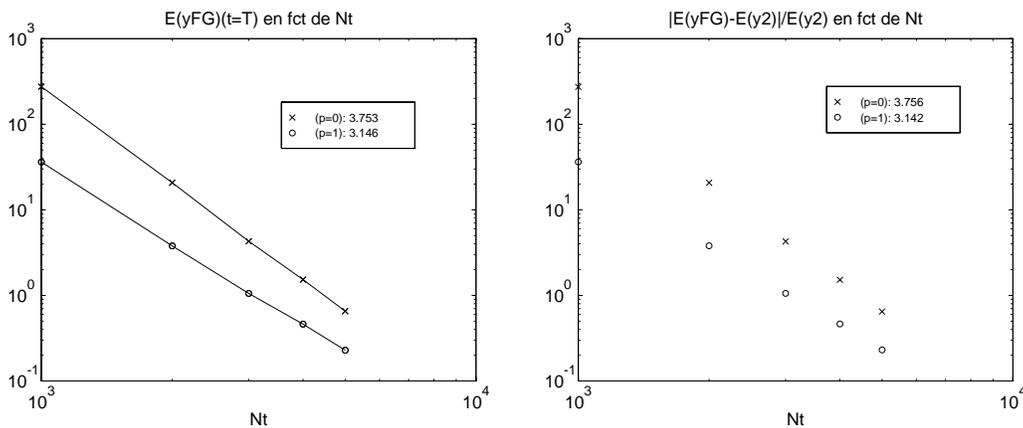


FIG. 2.25 - $E(y_p^{FG})(t = T, Nt)$ (à gauche) et $(E(y_p^{FG})(Nt) - E(y_p^2))(t = T)$ (à droite).

On voit que selon le type de contrôle, le taux est légèrement différent. On remarque de plus que le contrôle régulier a une erreur plus faible que le contrôle usuel.

Une autre estimation importante concerne l'erreur relative entre l'énergie à $t = T$ de y^2 et celle de y^{FG} en fonction de Nt . On voit à la figure 2.25 de droite que les taux obtenus sont les mêmes que pour le test précédent et que de même l'erreur commise est toujours plus faible pour le contrôle régulier que pour le contrôle usuel.

On a obtenu des résultats cohérents, que ce soit pour le contrôle usuel ou le contrôle régulier $p = 1$, avec la propriété 1.11 et on a une estimation indirecte de la convergence de y^{FG} vers y^2 en fonction du nombre d'itérations Nt utilisé pour calculer y^{FG} .

Chapitre 3

Stabilisation arbitrairement rapide de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli

3.1 Introduction

3.1.1 Généralités

La construction de lois de rétroactions qui stabilisent des systèmes d'évolutions est d'un intérêt pratique évident. On peut remarquer que les premiers systèmes d'asservissement ont été élaborés à partir de telles lois (voir par exemple P. Faurre et M. Robin [31] pour quelques rappels historiques et des exemples variés de lois de commandes en boucle fermée).

Pour dire les choses très simplement, la différence essentielle entre les lois de contrôles en boucle fermée et celles en boucle ouverte est que les premières, comme le terme de "boucle fermée" l'indique d'ailleurs, tiennent compte dans leur mécanisme de l'état du système à chaque instant et non pas uniquement de l'état initial comme pour les secondes. Par conséquent, toute perturbation extérieure non prévisible qui change l'état du système à un instant donné modifie *a fortiori* l'action exercée par le feedback, ce qui n'est évidemment jamais le cas des contrôles en boucle ouverte.

Il y a différentes méthodes permettant d'obtenir la stabilisation d'un système mécanique. On peut imposer une loi particulière si possible assez simple et vérifier ensuite qu'avec cette loi on obtient une décroissance de l'énergie associée au système. On peut également modéliser un mécanisme dissipatif en l'introduisant directement dans l'équation d'évolution du système. Enfin, une autre méthode, que nous reverrons plus loin dans ce paragraphe, consiste à obtenir un feedback de manière *implicite* comme solution d'un problème de contrôle optimal.

En ce qui concerne les résultats de stabilisation uniforme qui consiste à obtenir l'estimation suivante : $\forall \{y^0, y^1\}$ des données initiales dans les "bons espaces", il existe C et α deux constantes strictements positives telles que :

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.1.1)$$

Les techniques pour vérifier cette estimation sont nombreuses, mais on peut cependant les diviser en deux classes bien distinctes :

- on obtient *explicitement* l'estimation
- on obtient l'estimation *implicitement* en faisant intervenir des concepts plus abstraits que nous allons rappeler maintenant

3.1.2 Estimations explicites

Le cas le plus simple est celui où l'on a appliqué le feedback qu'il faut, par exemple en calculant une dérivée de l'énergie qui fait intervenir directement le terme de bord où l'on veut exercer le feedback.

Une autre méthode consiste à obtenir une estimation des fréquences du système, c'est-à-dire à relier l'*abscisse spectrale* du problème au *taux de décroissance* α de l'énergie (voir par exemple H. Wang and G. Chen [106]).

Pour les systèmes en dimension finie, le taux de décroissance de la solution d'un problème de stabilisation est l'abscisse spectrale. Malheureusement pour les systèmes linéaires de dimension infinie, il n'y a pas de résultats analogues qui soient généraux. Néanmoins, on peut obtenir une estimation du taux de convergence α en fonction de différentes quantités liées soit directement aux paramètres mécaniques, soit indirectement à des normes liées aux calculs du feedback. Dans le calcul du feedback comme solution d'un problème de contrôle optimal nécessitant la résolution d'équations de Riccati algébriques, on peut également relier α à la norme de l'opérateur de Riccati (voir A. Benabdallah et M. Lenczner [10]). Enfin par l'utilisation de l'analyse microlocale, on peut aussi montrer que α est fonction de l'abscisse spectrale de l'équation stabilisée et d'un temps lié à la propagation de rayons dans le domaine (voir G. Lebeau et L. Robbiano [76]).

Des outils plus complexes sont également utilisés comme la méthode de perturbations de l'énergie (voir V. Komornik et E. Zuazua [60]) qui permet d'obtenir l'estimation par utilisation d'inégalités différentielles complexes (voir également V. Komornik [55], B. Rao [94, 96], S. Cox et E. Zuazua [28]).

Enfin, par utilisation d'une représentation abstraite du système, on peut montrer qu'il existe un semi-groupe de contractions vérifiant une inégalité particulière et en déduire l'estimation par équivalence de normes ou par des techniques de multiplicateurs ou enfin par utilisation de fonctionnelles de Liapunov *ad hoc* (voir I. Lasiecka [69], B. Rao [94, 93, 96, 95, 97] pour les systèmes hybrides (poutre d'Euler-Navier-Bernoulli (ou plaque) et corps rigide ou masse), A. Benabdallah et al [51, 11] pour les systèmes thermoélastiques).

3.1.3 Contrôlabilité et stabilisabilité

Malgré la différence intrinsèque aux deux types de contrôles (boucle ouverte ou fermée), il se trouve que les concepts de *contrôlabilité exacte* qui concernent a priori les lois en boucle ouverte et de *stabilisabilité* qui est lié aux feedbacks, peuvent être déduits l'un de l'autre.

En ce qui concerne les systèmes linéaires en dimension finie l'équivalence des deux propriétés est bien connue, par contre pour les systèmes en dimension infinie leur équivalence est soumise à des conditions supplémentaires, du moins lorsqu'il s'agit de déduire la contrôlabilité exacte à partir de la stabilisabilité.

En effet, on a une propriété plus forte pour l'implication inverse, soit :

Propriété 3.1 : *Les systèmes linéaires contrôlables exactement sont stabilisables exponentiellement.*

Pour démontrer la réciproque, on a le choix entre deux conditions supplémentaires à vérifier :

- on peut définir une notion plus forte que la stabilisabilité exponentielle :

on dit qu'un système est *complètement stabilisable* si pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ *arbitraire*, il existe un opérateur linéaire continu K dans les bons espaces et une constante $M > 0$ telle que, le semi-groupe $S_K(t)$ engendré par K vérifie $S_K(t) \leq Me^{\omega t}$, pour tout $t \geq 0$.

Sous ces hypothèses, si le système est complètement stabilisable et l'opérateur A génère un groupe d'opérateur $S(t)$, alors il est contrôlable exactement en un temps $T > 0$ (voir J. Zabczyk p. 229 [107]).

- l'autre condition est que le système soit *réversible en temps* (voir D.L. Russell [103]). On voit que cette dernière condition, aussi appelée *principe de Russell*, est plus faible que la précédente.

Remarque 3.1 à titre d'informations complémentaires, on peut préciser que des résultats récents de R. Rebarber and G. Weiss [98] permettent de déduire la contrôlabilité exacte, non plus à l'aide de la stabilisabilité (avec les hypothèses supplémentaires que l'on vient d'énumérer), mais à l'aide d'une propriété moins forte qu'ils nomment *optimisabilité*.

Il est donc clair, d'après le chapitre 1, que la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli est stabilisable exponentiellement.

3.1.4 Méthodes constructives

La question cruciale est d'avoir une méthode qui permette de construire une telle loi. Une *première méthode* est une réponse à la question suivante :

- les feedbacks de stabilisation usuels sont-ils optimaux par rapport à quelques performances?

Autrement dit, existe-t-il un problème de *contrôle optimal* dont le minimum est atteint par ce feedback?

Cette méthode consiste donc à construire le feedback par résolution d'*un problème de contrôle optimal* (voir J.-L. Lions [84]) : on découple le système d'optimalité qui caractérise la solution unique du problème de contrôle optimal ce qui permet de calculer les opérateurs de stabilisation qui définissent le feedback par résolution d'équations de Riccati algébriques infinies dimensionnelles.

Remarque 3.2 On vérifie que l'on a stabilisation exponentielle en appliquant un théorème de R. Datko [101].

On peut remarquer (voir par exemple J.E. Lagnese [65]) qu'une fois que la fonctionnelle de coût (associée au problème de contrôle optimal) est donnée, les opérateurs de stabilisation sont définis de façon unique. Mais il y a une infinité de choix possible pour cette fonctionnelle. De plus, les opérateurs de stabilisation ne peuvent être trouvés explicitement. Enfin, *last but not least* on n'a pas d'estimation du taux de décroissance exponentiel.

C'est à partir de ces deux observations que V. Komornik [57, 58, 59] a proposé une *méthode similaire dans l'esprit à la méthode HUM*, aussi générale et qui donne des résultats plus forts.

L'avantage fondamental de cette nouvelle technique est que les opérateurs qui permettent de calculer le feedback sont connus *explicitement* et surtout que l'on peut imposer un taux de décroissance exponentiel *arbitrairement élevé*.

Cette dernière caractéristique est remarquable car on sait certes construire des feedbacks plus simples que celui proposé par Komornik, mais ceux-ci ont un taux de décroissance qui est borné.

3.1.5 Plan du chapitre

Tout d'abord, on introduit au paragraphe 3.2.2 la méthode de construction proposée par V. Komornik pour obtenir une loi de rétroaction permettant d'imposer un taux de décroissance arbitrairement élevé d'une norme associée à la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli.

Remarque 3.3 Comme pour la méthode HUM, cette norme est imposée par l'espace auquel appartiennent les données initiales. Il est important de noter qu'il ne s'agit pas de l'énergie mécanique du système.

On indique une légère modification proposée par F. Bourquin [59] de la définition du grammien de stabilisabilité qui permet de construire le feedback. On donne ensuite une *démonstration formelle*, exacte en dimension finie, de l'estimation recherchée (théorème 3.1) qui donne la décroissance exponentielle à taux arbitrairement élevé d'une norme associée à la solution du système.

On obtient en particulier une *estimation de la constante de majoration* de cette estimation en fonction des constantes des inégalités *inverse* et *directe* du grammien de contrôlabilité analogue à notre grammien de stabilisabilité.

Au paragraphe 3.3 on applique la méthode de superposition modale pour calculer une loi de rétroaction approchée ainsi que la méthode de Faedo-Galerkin qui permet de calculer une réponse approchée.

On donne au paragraphe 3.3.7 une propriété importante vérifiée par la fonction de Liapunov approchée, ainsi que deux expressions de sa dérivée, ce qui nous permettra d'expliquer pourquoi le taux de décroissance de la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ de la réponse est *deux fois plus élevé* que celui imposé (voir tests numériques du chapitre 4.1).

Nous proposons au paragraphe 3.4 une double *régularisation* de la loi originale qui permet de réduire l'augmentation de la norme de la réponse pour des taux élevés, tout en conservant le même taux de décroissance.

3.2 Formulation du problème exact

3.2.1 Introduction

L'algorithme de construction d'une loi de rétroaction permettant d'imposer une stabilisation exponentielle à *taux arbitraire* de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli est tout d'abord présenté dans la version originale de V. Komornik [58] puis dans la version modifiée de F. Bourquin [59].

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, cette *méthode constructive* est l'analogue pour la contrôlabilité exacte de la méthode HUM, aussi nous allons retrouver les mêmes étapes que dans la méthode HUM, c'est-à-dire :

- construction d'un *grammien de stabilisabilité* à l'aide du problème adjoint associé
- calcul de la loi de contrôle à l'aide d'un opérateur particulier défini à partir du grammien

Nous donnerons ensuite l'estimation principale que l'on obtient avec cette loi de rétroaction au théorème 3.1 dont nous ferons une démonstration formelle qui est exacte en dimension finie.

Avec cette démonstration, la constante de majoration de cette estimation est calculée en fonction des constantes des inégalités *inverse* et *directe* de la méthode HUM. On remarquera alors qu'en calculant directement la constante en encadrant non plus le grammien de contrôlabilité comme dans la démonstration précédente, mais le grammien de stabilisabilité, on obtient ainsi une autre expression qui dépend plus directement du problème considéré.

3.2.2 Présentation de la méthode

A. Version originale

Comme dans le chapitre 1, on considère les mouvements de flexion dans un plan d'une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli encadrée à son extrémité gauche et dont on impose l'angle de rotation à l'autre extrémité, le déplacement transverse de y étant bloqué à cette même extrémité.

Remarque 3.4 La grande généralité de la méthode constructive proposée par V. Komornik (qui découle de la méthode HUM de J.-L. Lions) permet d'exercer d'autres types d'actions, en particulier de contrôler en déplacement la poutre (voir F. Bourquin, J.-S. Briffaut et M. Collet [16] à l'Annexe H).

On note T ($T > 0$) l'horizon de stabilisation, L la longueur de la poutre, ρ la densité, A la section, E le module d'Young et I le moment d'inertie de flexion de la poutre.

Pour $\{y^0, y^1\}$ des données initiales suffisamment régulières, on cherche $y(x, t)$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(L, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = v(t) & \text{sur } (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) & \text{sur } (0, L). \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Afin de définir la loi de rétroaction $v(t) = \mathcal{F}\left(y(t), \frac{\partial y}{\partial t}(t)\right)$, on introduit le problème d'observabilité suivant, à chaque instant $t \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(x, s, t) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(x, s, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, S), \\ \varphi(0, s, t) = \varphi(L, s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L, s, t) = 0 & \text{sur } (0, S), \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x, 0) = \varphi^1(x) & \text{dans } (0, L), \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

où s joue le rôle d'un temps fictif, et S un horizon fictif.

Remarque 3.5 A priori, S est différent de T .

Soit le problème rétrograde que l'on résout avec φ solution de (3.2.3) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}(x, s, t) + EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(x, s, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, S), \\ \psi(0, s, t) = \psi(L, s, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, s, t) = 0 & \text{sur } (0, S), \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, s, t) = e^{-2\omega s} EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) & \text{sur } (0, S), \\ \psi(x, S) = \frac{\partial \psi}{\partial s}(x, S) = 0 & \text{dans } (0, L). \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

On définit alors l'opérateur

$$\Lambda_{\omega, S} : \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\} \longmapsto \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial s}(0, t), -\psi(0, t) \right\}. \quad (3.2.5)$$

Avec ces notations, l'opérateur $\Lambda_{\omega, S}$ vérifie la propriété suivante :

Propriété 3.2 $\forall t \geq 0, \forall \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L),$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{\omega, S} \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \rangle = \\ \int_0^S e^{-2\omega s} EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, s) d\tilde{s}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

où $\varphi(t)$ (resp. ζ) est la solution du problème adjoint (3.2.3) pour les données initiales $\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}$ (resp. $\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}$) solutions de (3.2.5), et $d\tilde{s} = ds/\rho A$.

DÉMONSTRATION :

On applique la même technique, à chaque instant $t \geq 0$, que pour le calcul de l'opérateur Λ de la contrôlabilité exacte (voir au chapitre 1 la démonstration de la propriété 1.1 du paragraphe 1.2). \square

D'après cette propriété, l'opérateur $\Lambda_{\omega, S}$ est donc associé à la forme bilinéaire suivante :

Définition 3.1 Pour tout $t \geq 0$, et pour tout $\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L),$

$$\begin{aligned} a_{\omega, S} \left(\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \right) \\ = \int_0^S e^{-2\omega s} EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, s) d\tilde{s}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

où $\varphi(t)$ (resp. ζ) est la solution du problème adjoint (3.2.3) pour les données initiales $\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}$ (resp. $\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}$) solutions de (3.2.5), et $d\tilde{s} = (ds/\rho A)$.

Nous admettrons les propriétés démontrées dans le cas général par V. Komornik [59] concernant l'opérateur $\Lambda_{\omega, S}$ et la forme bilinéaire $a_{\omega, S}$, en particulier la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire.

Pour des données initiales $\{z^0, z^1\}$ assez régulières, il existe une unique solution $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ de l'équation variationnelle :

$$\begin{aligned} \forall \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L), \\ a_{\omega, S} \left(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \right) = \int_0^L (z^1 \zeta^0 - z^0 \zeta^1) dx. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

On définit alors l'opérateur \mathcal{L} de la façon suivante:

Définition 3.2

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} = \mathcal{L} \{z^0, z^1\}. \quad (3.2.9)$$

On choisit comme loi de rétroaction :

Définition 3.3

$$v(t) = EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_1 \mathcal{L}(\{y'(t), -y(t)\})(x = L) \quad (3.2.10)$$

avec $P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la première composante.

B. Version modifiée

En réalité, comme l'a remarqué F. Bourquin, il est nécessaire de légèrement modifier la définition du grammien pour obtenir les résultats d'existence *ad hoc* (voir V. Komornik [59]).

On reprend les mêmes équations que dans le paragraphe 3.2.2 précédent mais avec $S = T_\omega = T + 1/(2\omega)$, et à la place de la fonction $e^{-2\omega s}$ la fonction $e_\omega(s)$ que l'on définit de la façon suivante :

Définition 3.4

$$e_\omega(s) = \begin{cases} e^{-2\omega s} & 0 \leq s \leq T, \\ 2\omega e^{-2\omega T} (T_\omega - s) & T \leq s \leq T_\omega. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

On a alors un nouvel opérateur, que l'on note $\Lambda_{\omega, T}$, au lieu de $\Lambda_{\omega, S}$:

Propriété 3.3 $\forall t \geq 0, \forall \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L),$

$$\langle \Lambda_{\omega, T} \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \rangle = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, t, s) d\tilde{s}, \quad (3.2.12)$$

et la forme bilinéaire associée :

Définition 3.5 *Pour tout $t \geq 0$, et pour tout $\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\} \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L),$*

$$a_{\omega, T}(\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}) = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(L, t, s) d\tilde{s}. \quad (3.2.13)$$

3.2.3 Étude de la stabilisation uniforme

Puisqu'il y a contrôlabilité exacte du problème étudié, on sait qu'il y a par conséquent stabilisation uniforme et même exponentielle (voir l'introduction de ce chapitre et D.L. Russel [102]).

La loi de rétroaction proposée par V. Komornik permet de choisir de façon arbitraire le taux que l'on veut imposer.

Afin d'alléger la présentation, on adopte les notations suivantes :

$$x(t) = \{y'(t), -y(t)\}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.2.14)$$

et $\mathcal{H} = H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)$.

Théorème 3.1 $\forall \omega > 0, \forall T > 0, \forall \{y^1, y^0\} \in \mathcal{H}, \exists C(\omega, T) > 0$ tels que la solution du problème (3.2.2) vérifie :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\omega, T) \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.15)$$

A. Démonstration formelle de l'estimation

Le théorème 3.1 a été démontré dans un cadre plus général par V. Komornik [56], [57] et [59], nous allons en faire une démonstration formelle pour la version modifiée de la loi de rétroaction.

Lorsque ce sera nécessaire, on donnera les résultats différents obtenus avec la première version. Il suffit de remplacer T_ω par S pour obtenir le théorème dans sa version originale.

Avant de commencer la démonstration nous avons besoin de définir la fonction de Liapunov suivante :

Définition 3.6

$$\tilde{E}(t) = \rho A \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.16)$$

Nous allons montrer dans la démonstration du théorème qu'il s'agit bien d'une fonction de Liapunov, autrement dit qu'appliquée à la solution $x(t)$ elle vérifie une inégalité de Gronwall avec le taux voulu.

Remarque 3.6 Nous reviendrons ultérieurement sur cette fonction au paragraphe 3.3.7.

DÉMONSTRATION :

La démonstration se déroule en deux étapes :

1. Tout d'abord on vérifie la décroissance exponentielle de la fonctionnelle de Liapunov :

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) e^{-2\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.17)$$

2. Puis on montre l'équivalence des normes : $x(t) \mapsto \|x(t)\|_{\mathcal{H}}$ et $x(t) \mapsto \rho A < \Lambda_{\omega}^{-1}x(t), x(t) >, \forall t \geq 0$.

1) Pour montrer l'inégalité (3.2.17) on vérifie l'inégalité de Gronwall suivante :

Propriété 3.4

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) \leq -2\omega\tilde{E}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.18)$$

Formellement, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{E}(t) &= 2\rho A < \Lambda_{\omega}^{-1}x(t), x'(t) > \\ &= 2\rho A < \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \{y''(t), -y'(t)\} >. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

On développe ce produit scalaire, en tenant compte de l'équation (3.2.2) dont y est solution, ce qui donne :

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) = -2 \left[EI \int_0^L \varphi^0(t) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(t) dx + \rho A \int_0^L \varphi^1(t) \frac{\partial y}{\partial t}(t) dx \right]. \quad (3.2.20)$$

On intègre par parties l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{E}(t) = -2 \left[\left(EI \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x^2}(L, t) \right)^2 + EI \int_0^L \frac{\partial^4 \varphi^0}{\partial x^4}(t) y(t) dx \right. \\ \left. + \rho A \int_0^L \varphi^1(t) \frac{\partial y}{\partial t}(t) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Remarque 3.7 L'idée de faire apparaître le terme de bord, autrement dit la loi de rétroaction, par intégration par parties de la formulation variationnelle obtenue à partir de l'équation (3.2.2), sera utilisée pour calculer la réponse du système.

On note $\Phi(t, s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s)$, qui est par conséquent solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \Phi''(x, s) + EI \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}(x, s) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T_{\omega}), \\ \Phi(0, s) = \Phi(L, s) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, s) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(L, s) = 0 & \text{sur } (0, T_{\omega}), \\ \Phi(x, 0) = \Phi^0(x), \quad \Phi'(x, 0) = \Phi^1(x) & \text{dans } (0, L), \end{array} \right. \quad (3.2.22)$$

avec les données initiales suivantes :

$$\Phi^0(x) = \varphi^1(x), \quad \Phi^1(x) = - \left(\frac{EI}{\rho A} \right) \frac{\partial^4 \varphi^0}{\partial x^4}(x) \quad \text{dans } (0, L). \quad (3.2.23)$$

Dans ces conditions,

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) = -2 \left[\left(EI \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x^2}(L, t) \right)^2 + \rho A \langle \{ \Phi^0(t), \Phi^1(t) \}, x(t) \rangle \right]. \quad (3.2.24)$$

Mais, d'après la propriété 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \rho A \langle \{ \Phi^0(t), \Phi^1(t) \}, x(t) \rangle &= \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) EI \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(L, t, s) ds \quad (3.2.25) \end{aligned}$$

et par définition de l'intégrale :

$$\begin{aligned} - \int_0^{T_\omega} \frac{d}{ds} \left(e_\omega(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) \right)^2 \right) ds &= - \int_0^{T_\omega} \frac{de_\omega}{ds}(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) \right)^2 \\ &\quad - 2\rho A \langle \{ \Phi^0(t), \Phi^1(t) \}, x(t) \rangle, \\ &= \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, 0) \right)^2. \quad (3.2.26) \end{aligned}$$

Remarque 3.8 Pour la version originale, on a dans le dernier terme de droite de l'égalité ci-dessus le terme supplémentaire :

$$e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, S) \right)^2. \quad (3.2.27)$$

Sachant que :

$$\frac{d}{ds} e_\omega(s) \leq -2\omega e_\omega(s), \quad \forall s \in [0, T_\omega], \quad (3.2.28)$$

on en déduit aisément, en appliquant (3.2.26) à (3.2.24), que :

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) \leq -2\omega\tilde{E}(t) - \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, 0) \right)^2. \quad (3.2.29)$$

Remarque 3.9 D'après la remarque précédente, on a donc pour la version originale :

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) \leq -2\omega\tilde{E}(t) - \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, 0) \right)^2 - e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, S) \right)^2. \quad (3.2.30)$$

Le dernier terme de droite de l'égalité étant négatif, on a finalement :

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) \leq -2\omega\tilde{E}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.31)$$

On conclut cette première étape en appliquant le lemme de Gronwall.

2) Montrons, pour tout $t \geq 0$, l'équivalence des normes :

$$x(t) \longmapsto \|x(t)\|_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad x(t) \longmapsto \rho A \langle \Lambda_{\omega}^{-1} x(t), x(t) \rangle. \quad (3.2.32)$$

De la même façon que l'on a noté $x(t) = \{y'(t), -y(t)\}$, on pose afin d'alléger la présentation :

$$z(t) = \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.33)$$

La contrôlabilité exacte du système implique que, pour les données initiales choisies, les inégalités dites *directe* et *inverse* sont vérifiées (propriété 1.2), c'est-à-dire :

$$\forall t > 0, \forall T > 0, \exists \alpha_1(T, L), \alpha_2(T, L) > 0, \forall z(t) \in \mathcal{H}^*,$$

$$\alpha_1(T, L) \|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2 \leq \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s} \leq \alpha_2(T, L) \|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2. \quad (3.2.34)$$

Afin de simplifier les notations, on ne note pas désormais la dépendance en L et T des constantes α_1 et α_2 .

Remarque 3.10 Rappelons que cette inégalité est vraie pour tout T arbitrairement petit (voir E. Zuazua [108]).

Pour tout $s \in [0, T_{\omega}]$, $e_{\omega}(s) \leq e^{-2\omega s}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_{\omega}} e_{\omega}(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s} &\geq \int_0^T e_{\omega}(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s}, \\ &\geq e^{-2\omega T} \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

et par définition de $e_{\omega}(s)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_{\omega}} e_{\omega}(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s} &= \int_0^T e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s} \\ &\quad + \int_T^{T_{\omega}} e_{\omega}(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s}. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Or pour tout $s \in [T, T_{\omega}]$, $e_{\omega}(s) \leq e^{-2\omega T}$, on a donc :

$$\int_0^{T_{\omega}} e_{\omega}(s) \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s} \leq \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-2\omega T} \int_T^{T_\omega} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s} \\
& \leq \left(1 + \frac{e^{-2\omega T}}{2\omega T} \right) \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, s, t) \right)^2 d\tilde{s}. \quad (3.2.37)
\end{aligned}$$

Remarque 3.11 On a la même majoration avec la version originale. En prenant S au lieu de T dans les inégalités *inverses* et *directes*, et donc également dans le terme exponentiel qui apparaît dans le premier membre de l'inégalité précédente.

D'après les inégalités *inverses* et *directes*, il vient :

$$\beta_1 \|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2 \leq \langle \Lambda_\omega z(t), z(t) \rangle \leq \beta_2 \|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2, \quad \forall z(t) \in \mathcal{H}^* \quad (3.2.38)$$

avec :

$$\beta_1 = \alpha_1 e^{-2\omega T}, \quad \beta_2 = \alpha_2 \left(1 + \frac{e^{-2\omega T}}{2\omega T} \right), \quad (3.2.39)$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$\beta_1 \|\Lambda_\omega^{-1} x(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2 \leq \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle \leq \beta_2 \|\Lambda_\omega^{-1} x(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2, \quad \forall x(t) \in \mathcal{H}. \quad (3.2.40)$$

Or par continuité de Λ_ω^{-1} , on a :

$$\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle \leq \|\Lambda_\omega^{-1} x(t)\| \|x(t)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall x(t) \in \mathcal{H}, \quad (3.2.41)$$

donc d'après l'encadrement (3.2.40) :

$$\|\Lambda_\omega^{-1} x(t)\|_{\mathcal{H}^*} \leq \frac{1}{\beta_1} \|x(t)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall x(t) \in \mathcal{H}. \quad (3.2.42)$$

Comme d'autre part, on a par définition de la norme et d'après l'inégalité (3.2.38) :

$$\|\Lambda_\omega\| = \sup_{z(t) \in \mathcal{H}^*} \frac{\langle \Lambda_\omega z(t), z(t) \rangle}{\|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2} = \beta_2, \quad (3.2.43)$$

on en déduit :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} = \|\Lambda_\omega \Lambda_\omega^{-1} x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \beta_2 \|\Lambda_\omega^{-1} x(t)\|_{\mathcal{H}^*}, \quad \forall x(t) \in \mathcal{H}. \quad (3.2.44)$$

En appliquant à (3.2.40), les inégalités (3.2.42) et (3.2.44), on obtient l'équivalence recherchée :

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \|x(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle \leq \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \|x(t)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.2.45)$$

Conclusion : On applique cette équivalence de normes à la décroissance exponentielle de la fonctionnelle de Liapunov et on obtient finalement l'estimation recherchée, soit :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\omega, T) \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2.46)$$

avec

$$C(\omega, T) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^{3/2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{3/2} \left(e^{2\omega T} + \frac{1}{2\omega T} \right)^{3/2}. \quad (3.2.47)$$

□

B. Remarques sur l'estimation de $C(\omega, T)$

Au lieu de majorer brutalement :

$$\int_0^{T_\omega} e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) \right)^2 ds \quad (3.2.48)$$

comme en (3.2.38), on pourrait trouver deux constantes $C_1(\omega, T_\omega)$ et $C_2(\omega, T_\omega)$ strictement positives telles que, pour tout $z(t) \in \mathcal{H}^*$, on vérifie :

$$\begin{aligned} C_1(\omega, T_\omega) \|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2 &\leq \int_0^{T_\omega} e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(L, t, s) \right)^2 ds \\ &\leq C_2(\omega, T_\omega) \|z(t)\|_{\mathcal{H}^*}^2. \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

En reprenant la démonstration de l'étape 2, on obtiendrait alors :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\omega, T_\omega) \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2.50)$$

avec

$$C(\omega, T_\omega) = (C_2/C_1)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.2.51)$$

On déterminera numériquement, dans le paragraphe 4.3, la dépendance en ω et T de ces deux constantes. On montrera en particulier que, sous certaines conditions, elles sont indépendantes de T .

On vérifiera numériquement au paragraphe 4.2 que l'on a une décroissance avec un taux deux fois plus élevé. Cela est dû au dernier calcul de la première étape où l'on néglige le second terme de droite de l'inégalité (3.2.29). Or il s'avère que ce terme est équivalent à la fonctionnelle de Liapunov, ce qui modifie donc le taux de décroissance obtenu.

Remarque 3.12 Dans la version originale, on obtient le théorème 3.1 pour tout $S > 0$ au lieu de $T > 0$. On a donc une constante qui dépend non de T mais de S .

On insiste sur le fait qu'a priori, on peut choisir un S totalement différent de T . Les résultats numériques peuvent être très différents selon les valeurs de ce paramètre (voir paragraphe 4.11).

3.3 Approximation par superposition modale

3.3.1 Introduction

De la même façon que pour le contrôle HUM, on résout le problème par une méthode de Galerkin avec $(\lambda_i, \varphi_i)_{i=1}^{+\infty}$ les modes propres solution de :

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 \theta_i}{dx^4}(x) = \lambda_i \rho A \theta_i(x), & \forall x \in [0, L] \\ \theta_i(0) = \theta_i(L) = \frac{d\theta_i}{dx}(0) = \frac{d\theta_i}{dx}(L) = 0 \end{cases} \quad (3.3.52)$$

rangés de telle sorte que les valeurs propres forment une suite croissante et dont les fonctions propres sont normalisées dans $L^2(0, L)$. Pour tout entier $N > 0$, on pose $V_N = Vect \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$.

3.3.2 Calcul du grammien de stabilisabilité

Pour tout couple $\{z^0, z^1\}$, on définit $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} \in V_N \times V_N$ comme l'unique solution de l'équation variationnelle : $\forall \{\zeta_N^0, \zeta_N^1\} \in V_N \times V_N$,

$$\begin{aligned} a_{\omega, S} \left(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\zeta_N^0, \zeta_N^1\} \right) &= \int_0^S e^{-2\omega s} EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(L, s) EI \frac{\partial^2 \zeta_N}{\partial x^2}(L, s) d\tilde{s}, \\ &= \int_0^L (z^1 \zeta_N^0 - z^0 \zeta_N^1) dx \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

où $\varphi_N(x, s)$ (resp. ζ_N) est la solution du même problème adjoint qu'au niveau continu, soit :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial s^2}(x, s) + EI \frac{\partial^4 \varphi_N}{\partial x^4}(x, s) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, S), \\ \varphi_N(0, s) = \varphi_N(L, s) = \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(0, s) = \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(L, s) = 0 & \text{sur } (0, S), \\ \varphi_N(x, 0) = \varphi_N^0(x), \quad \frac{\partial \varphi_N}{\partial s}(x, 0) = \varphi_N^1(x) & \text{dans } (0, L) \end{cases} \quad (3.3.54)$$

pour les données initiales $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}$ (resp. $\{\zeta_N^0, \zeta_N^1\}$) solutions de (3.3.53).

Remarque 3.13 Comme dans le cas du contrôle HUM, il est important de remarquer que la vérification de la *conservation de la quantité de mouvement* par φ_N est fondamentale pour l'application de la méthode de superposition modale.

Soient :

$$\varphi_N(x, s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(s) \theta_i(x) \quad \left(\text{resp. } \zeta_N(x, s) = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i(s) \theta_i(x) \right) \quad (3.3.55)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \theta_i(x) \quad \left(\text{resp. } \zeta_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \theta_i(x) \right), \\ \varphi_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \delta_i \theta_i(x) \quad \left(\text{resp. } \zeta_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i \theta_i(x) \right) \end{array} \right. \quad (3.3.56)$$

dont les composantes vérifient pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i''(s) + \lambda_i \alpha_i(s) = 0, \\ \alpha_i(0) = \gamma_i, \quad \alpha_i'(0) = \delta_i \end{array} \right. \quad (3.3.57)$$

et par conséquent

$$\alpha_i(s) = \gamma_i \cos\left(s\sqrt{\lambda_i}\right) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(s\sqrt{\lambda_i}\right), \quad \forall s \in [0, S]. \quad (3.3.58)$$

En conservant la même notation pour le moment projeté que dans le chapitre 1, c'est-à-dire :

$$m_i = EI \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2}(L), \quad (3.3.59)$$

on a alors l'expression explicite du grammien de stabilisabilité, en effet :

$$\begin{aligned} a_{\omega, S} \left(\left\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \right\}, \left\{ \zeta_N^0, \zeta_N^1 \right\} \right) &= \int_0^S e^{-2\omega s} \sum_{i=1}^N \alpha_i(s) m_i \sum_{j=1}^N \hat{\alpha}_j(s) m_j d\tilde{s} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\int_0^S e^{-2\omega s} \alpha_i(s) \hat{\alpha}_j(s) d\tilde{s} \right) m_i m_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} g_{ij} \left(\lambda_i, \lambda_j, \omega, S, \beta_N, \hat{\beta}_N \right) m_i m_j \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

Remarque 3.14 On se référera à l'Annexe G pour l'expression exacte de la forme quadratique du second membre de droite de (3.3.60).

On peut ainsi définir l'analogue discret de l'opérateur \mathcal{L} :

Définition 3.7

$$\left\{ \varphi_N^0, \varphi_N^1 \right\} = \mathcal{L}_N \left\{ z^0, z^1 \right\}. \quad (3.3.61)$$

3.3.3 Formulation de Faedo-Galerkin

Comme pour le calcul de la réponse contrôlée en boucle ouverte, on cherche à obtenir une formulation semi-très faible dans laquelle on ait le terme de bord qui correspond au contrôle, ceci afin de pouvoir appliquer la méthode de Faedo-Galerkin.

On multiplie l'équation différentielle (3.2.2) par une fonction test $w \in H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)$, puis on intègre cette expression par parties sur $[0, L]$, autant de fois que nécessaire, afin de faire apparaître le terme de bord correspondant à la loi de rétroaction. On obtient :

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L y''(t)w \, dx + EI \int_0^L y(t) \frac{d^4 w}{dx^4} \, dx \\ = -v(t)EI \frac{d^2 w}{dx^2}(L), \quad \forall w \in H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L). \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

Pour tout entier $M > 0$ différent a priori de N , on prend comme approximation de la réponse de la poutre contrôlée $y_{M,N}(t)$ solution de :

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L y_{M,N}''(t)w_M \, dx + EI \int_0^L y_{M,N}(t) \frac{d^4 w_M}{dx^4} \, dx \\ = -v_{N,M}(t)EI \frac{d^2 w_M}{dx^2}(L), \quad \forall w_M \in V_M \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

avec comme choix de contrôle approché :

Définition 3.8

$$v_{N,M}(t) = EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_1 \mathcal{L}_N \left(\{y_{N,M}(t), y'_{N,M}(t)\} \right) (x = L) \quad (3.3.64)$$

et pour données initiales :

$$y_{M,N}(0) = P^M(y^0), \quad y'_{M,N}(0) = P^M(y^1). \quad (3.3.65)$$

On note $\alpha_{M,N}(t)$ (resp. $\{\beta_{N,M}^0(t), \beta_{N,M}^1(t)\}$) le vecteur composante de $y_{M,N}(t)$ (resp. $\{\varphi_{N,M}^0(t), \varphi_{N,M}^1(t)\}$) dans la base de V_M (resp. V_N).

3.3.4 Calcul du contrôle approché

On définit le couple $\{\varphi_{N,M}^0(t), \varphi_{N,M}^1(t)\}$ comme la solution, à tout instant $t \geq 0$, de :

$$\{\varphi_{N,M}^0(t), \varphi_{N,M}^1(t)\} = \mathcal{L}_N \{ \alpha_{M,N}(t), \alpha'_{M,N}(t) \} \quad (3.3.66)$$

et d'après la définition de l'opérateur \mathcal{L}_N , il est par conséquent également solution du système matriciel :

$$K_{\omega,2N} \left\{ \beta_{N,M}^0(t), \beta_{N,M}^1(t) \right\} = \left\{ \alpha'_{M,N}(t), -\alpha_{M,N}(t) \right\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.3.67)$$

avec $K_{\omega,2N}$ qui est définie par la relation (3.3.60).

On adopte les notations abusives suivantes pour les blocs de la matrice inverse :

$$\begin{aligned} (K_{\omega,2N}^{-1})_{ij} &= (K_{\omega,N}^{DD})_{ij} & 1 \leq i, j \leq N, \\ &= (K_{\omega,N}^{DV})_{ij} & 1 \leq i \leq N, N+1 \leq j \leq 2N, \\ &= (K_{\omega,N}^{VV})_{ij} & N+1 \leq i, j \leq 2N. \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

Afin de calculer les composantes de $\left\{ \varphi_{N,M}^0(t), \varphi_{N,M}^1(t) \right\}$, on définit la matrice $\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD}$:

– pour $N < M$:

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD})_{ij} &= (K_{\omega,N}^{DD})_{ij} & 1 \leq i, j \leq N, \\ &= 0 & 1 \leq i \leq N, N+1 \leq j \leq M \end{aligned} \quad (3.3.69)$$

– pour $N > M$:

$$(\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD})_{ij} = (K_{\omega,N}^{DD})_{ij} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M. \quad (3.3.70)$$

De même on définit la matrice $\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV}$ (resp. $\tilde{K}_{\omega,N,M}^{VV}$) en remplaçant dans la définition $K_{\omega,N}^{DD}$ par $K_{\omega,N}^{DV}$ (resp. $K_{\omega,N}^{VV}$).

Alors, pour tout $t \geq 0$, on vérifie :

$$\begin{cases} \beta_{N,M}^0(t) = \tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD} \alpha'_{M,N}(t) - \tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV} \alpha_{M,N}(t), \\ \beta_{N,M}^1(t) = \tilde{K}_{\omega,N,M}^{VD} \alpha'_{M,N}(t) - \tilde{K}_{\omega,N,M}^{VV} \alpha_{M,N}(t) \end{cases} \quad (3.3.71)$$

et donc puisque

$$\varphi_{N,M}^0(t) = \sum_{k=1}^N (\beta_{N,M}^0(t))_k \theta_k(x), \quad (3.3.72)$$

il vient :

$$\begin{aligned} v_{N,M}(t) &= \sum_{k=1}^N (\beta_{N,M}^0(t))_k m_k \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^M (\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD})_{kj} \alpha'_j(t) - \sum_{j=1}^M (\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV})_{kj} \alpha_j(t) \right) m_k \end{aligned} \quad (3.3.73)$$

soit finalement, en intervertissant les sommations :

$$v_{N,M}(t) = \sum_{j=1}^M p_j \alpha_j'(t) - q_j \alpha_j(t), \quad (3.3.74)$$

avec, pour tout $1 \leq j \leq M$:

$$\begin{cases} p_j &= \sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD} \right)_{kj} m_k \\ q_j &= \sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV} \right)_{kj} m_k \end{cases} \quad (3.3.75)$$

Remarque 3.15 On peut définir une variation de cette approximation, en calculant $\beta_{N,M}^0(t)$ à l'aide d'un nombre de modes M_{fi} de la réponse différent de celui utilisé pour son calcul, c'est-à-dire M . Si P^M désigne la projection sur V_M , on définit la nouvelle loi de rétroaction approchée de la façon suivante :

$$v_{N,M,M_{fi}}(t) = \sum_{k=1}^N \left(\beta_{N,M,M_{fi}}^0(t) \right)_k m_k, \quad (3.3.76)$$

avec

$$\beta_{N,M,M_{fi}}^0(t) = \tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD} P^{M_{fi}}(\alpha'_{M,N}(t)) - \tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV} P^{M_{fi}}(\alpha_{M,N}(t)). \quad (3.3.77)$$

3.3.5 Définition de l'EDO

Nous pouvons maintenant calculer explicitement les matrices de l'équation différentielle ordinaire homogène linéaire à coefficients constants du second ordre associée à la formulation de Faedo-Galerkin (3.3.63).

Pour tout $i = 1 \dots M$, on prend $w_M = \varphi_i$ comme fonction test dans (3.3.63) et on développe les différents termes intégraux, d'où :

$$\int_0^L \left(\rho A y_{M,N}''(t) \varphi_i + EI y_{M,N}(t) \frac{d^4 \varphi_i}{dx^4} \right) dx = \sum_{j=1}^M \left(\alpha_j''(t) + \lambda_j \alpha_j(t) \right) \delta_{ij} \quad (3.3.78)$$

$$\begin{aligned} v_{N,M}(t) EI \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2}(L) &= m_i \sum_{j=1}^M \alpha_j'(t) \left(\sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD} \right)_{kj} m_k \right) \\ &\quad - m_i \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \left(\sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV} \right)_{kj} m_k \right), \end{aligned} \quad (3.3.79)$$

et donc la formulation de Faedo-Galerkin (3.3.63) s'écrit :

$$\mathcal{M}\alpha''_{M,N}(t) + \mathcal{D}\alpha'_{M,N}(t) + \mathcal{K}\alpha_{M,N}(t) = 0, \quad (3.3.80)$$

avec pour $1 \leq i, j \leq M$:

$$\begin{aligned} \cdot \mathcal{M}_{ij} &= \delta_{ij}. \\ \cdot \mathcal{D}_{ij} &= m_i \sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega, N, M}^{DD} \right)_{kj} m_k. \\ \cdot \mathcal{K}_{ij} &= \lambda_i \delta_{ij} - m_i \sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega, N, M}^{DV} \right)_{kj} m_k. \end{aligned} \quad (3.3.81)$$

3.3.6 Algorithme de calcul de la réponse

L'algorithme de résolution est le suivant :

1. Calcul du grammien $K_{\omega, 2N}$ puis des matrices \mathcal{D} et \mathcal{K} .
2. On peut alors résoudre l'EDO (3.3.80), par exemple à l'aide d'un schéma de Newmark, ce qui donne la réponse stabilisée.

3.3.7 Propriété de la fonctionnelle de Liapunov

Approximation

On a démontré lors de la première étape de la démonstration du théorème 3.1 du paragraphe 3.2.2, que la fonctionnelle de Liapunov :

$$\tilde{E}(t) = \rho A \langle \Lambda_{\omega}^{-1} x(t), x(t) \rangle, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.3.82)$$

où $x(t) = \{y'(t), -y(t)\}$, vérifie l'inégalité (3.2.17) démontrée au paragraphe 3.2.3, c'est-à-dire :

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) e^{-2\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.83)$$

Par conséquent, la fonctionnelle de Liapunov décroît exponentiellement avec un taux au moins égal à 2ω .

Sa version discrète est d'après les définitions du paragraphe 3.3 :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{N,M}(t) &= a_{\omega} \left(\left\{ \varphi_{N,M}^0(t), \varphi_{N,M}^1(t) \right\}, \left\{ \varphi_{N,M}^0(t), \varphi_{N,M}^1(t) \right\} \right) \\ &= \left\{ \beta_{N,M}^0(t), \beta_{N,M}^1(t) \right\} K_{\omega, 2N} \left\{ \beta_{N,M}^0(t), \beta_{N,M}^1(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.84)$$

avec :

$$\begin{cases} \beta_{N,M}^0(t) = \tilde{K}_{\omega, N, M}^{DD} \alpha'_{M,N}(t) - \tilde{K}_{\omega, N, M}^{DV} \alpha_{M,N}(t), \\ \beta_{N,M}^1(t) = \tilde{K}_{\omega, N, M}^{VD} \alpha'_{M,N}(t) - \tilde{K}_{\omega, N, M}^{VV} \alpha_{M,N}(t). \end{cases} \quad (3.3.85)$$

Propriété

On a la propriété remarquable suivante :

Propriété 3.5 $\forall t \geq 0, \forall N, M$ entiers > 0 tels que $M \geq N$,

$$\tilde{E}_{N,M}(t) = \tilde{E}_{N,N}(t). \quad (3.3.86)$$

DÉMONSTRATION :

Soit P^N l'opérateur de projection sur les N premiers modes. Supposons que l'on ait démontré le lemme suivant :

Lemme 3.1 $\forall t > 0, \forall N, M$ entiers > 0 tels que $M \geq N$,

$$\begin{cases} P^N(\alpha_{M,N}(t)) = \alpha_{N,N}(t), \\ P^N(\alpha'_{M,N}(t)) = \alpha'_{N,N}(t). \end{cases} \quad (3.3.87)$$

On a, comme on l'a rappelé en introduction de ce paragraphe, pour tout $t \geq 0$, et pour tous N, M entiers > 0 :

$$\tilde{E}_{N,M}(t) = \left\{ \beta_{N,M}^0(t), \beta_{N,M}^1(t) \right\} K_{\omega,2N} \left\{ \beta_{N,M}^0(t), \beta_{N,M}^1(t) \right\}, \quad (3.3.88)$$

avec :

$$\begin{cases} \beta_{N,M}^0(t) = \tilde{K}_{\omega,N,M}^{DD} \alpha'_{M,N}(t) - \tilde{K}_{\omega,N,M}^{DV} \alpha_{M,N}(t). \\ \beta_{N,M}^1(t) = \tilde{K}_{\omega,N,M}^{VD} \alpha'_{M,N}(t) - \tilde{K}_{\omega,N,M}^{VV} \alpha_{M,N}(t). \end{cases} \quad (3.3.89)$$

On peut réécrire les expressions précédentes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \beta_{N,M}^0(t) = K_{\omega,N}^{DD} P^N(\alpha'_{M,N}(t)) - K_{\omega,N}^{DV} P^N(\alpha_{M,N}(t)). \\ \beta_{N,M}^1(t) = K_{\omega,N}^{DV} P^N(\alpha'_{M,N}(t)) - K_{\omega,N}^{VV} P^N(\alpha_{M,N}(t)). \end{cases} \quad (3.3.90)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \beta_{N,M}^0(t) = K_{\omega,N}^{DD} \alpha'_{N,N}(t) - K_{\omega,N}^{DV} \alpha_{N,N}(t). \\ \beta_{N,M}^1(t) = K_{\omega,N}^{DV} \alpha'_{N,N}(t) - K_{\omega,N}^{VV} \alpha_{N,N}(t). \end{cases} \quad (3.3.91)$$

Ce qui conclut la démonstration. \square

DÉMONSTRATION (lemme 3.1) :

On remarque que les matrices de l'équation différentielle ordinaire (3.3.80) dont $\alpha_{M,N}(t)$ est solution vérifient pour tout $i \in [1, \dots, N]$:

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{cases} m_i \sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega, N, M}^{DD} \right)_{kj} m_k & \text{pour } 1 \leq j \leq N \\ 0 & \text{pour } N+1 \leq j \leq M \end{cases} \quad (3.3.92)$$

et

$$\mathcal{K}_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \delta_{ij} - m_i \sum_{k=1}^N \left(\tilde{K}_{\omega, N, M}^{DV} \right)_{kj} m_k & \text{pour } 1 \leq j \leq N \\ 0 & \text{pour } N+1 \leq j \leq M \end{cases} \quad (3.3.93)$$

Puisque $\alpha_{M,N}(t)$ est solution de (3.3.80), on a donc $P_N(\alpha_{M,N}(t))$ qui est solution de :

$$\mathcal{M}_{N,N} P^N \left(\alpha_{M,N}''(t) \right) + \mathcal{D}_{N,N} P^N \left(\alpha_{M,N}'(t) \right) + \mathcal{K}_{N,N} P^N \left(\alpha_{M,N}(t) \right) = 0. \quad (3.3.94)$$

Or $\alpha_{N,N}(t)$ est évidemment solution de la même équation qui admet une solution unique. \square

Calcul de la dérivée de la fonctionnelle de Liapunov

Nous avons à notre disposition deux formes différentes de cette dérivée. En effet, on a obtenu, lors de la démonstration du théorème 3.1, les expressions suivantes :

- la première est une conséquence directe de l'application de la formulation semi-très faible :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \tilde{E}_{N,M}(t) = -2 \left[\left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,M}}{\partial x^2}(L, t, s=0) \right)^2 + EI \int_0^L \frac{\partial^4 \varphi_{N,M}^0}{\partial x^4}(t) y_{M,N}(t) dx + \rho A \int_0^L \varphi_{N,M}^1(t) y'_{M,N}(t) dx \right], \quad (3.3.95)$$

- tandis que la seconde se déduit de la précédente (voir paragraphe 3.2.3) :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \tilde{E}_{N,M}(t) = -2\omega \tilde{E}_{N,M}(t) - \mathcal{E}_{N,M,k}(t), \quad (3.3.96)$$

où $\mathcal{E}_{N,M,k}$ désigne le terme résiduel ainsi défini :

Définition 3.9

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{E}_{N,M,k}(t) = k e^{-2\omega S} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,M}}{\partial x^2}(L, t, S) \right)^2$$

$$+ \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,M}}{\partial x^2}(L, t, 0) \right)^2, \quad (3.3.97)$$

avec pour $k = 1$ la version usuelle et pour $k = 0$ la version modifiée.

C'est cette deuxième dérivée qui permet de déduire l'inégalité (3.2.17).

Enfin, on peut remarquer que chacune de ces dérivées contient le carré de la loi de rétroaction (voir paragraphe 4.6).

3.4 Régularisation de la loi de rétroaction

La loi de rétroaction est le terme mathématique le plus facile à comprendre d'un point de vue physique à la différence de la fonctionnelle de Liapunov ou de la norme \mathcal{H} . Rappelons qu'elle correspond à l'angle de rotation que l'on impose à l'une des extrémités de la poutre. Par contre, son analyse numérique est loin d'être simple comme on pourra le vérifier au paragraphe 4.6.

Étant donné que l'on veut que cette loi soit applicable à des structures réelles, on doit vérifier qu'elle ne prend pas des valeurs irréalistes. Il y a essentiellement deux propriétés que doit vérifier une telle loi :

- afin de ne pas provoquer de chocs, sa valeur à l'instant initial ne doit pas être trop différente de zéro. Malheureusement, ce n'est en général pas le cas, comme d'ailleurs pour la version standard du contrôle de la méthode HUM.
- la loi de rétroaction doit avoir une certaine régularité.

Il serait donc très utile, afin de vérifier ces deux propriétés, de construire un équivalent du contrôle régulier pour la loi de rétroaction.

On propose une variante de la loi de rétroaction de Komornik qui garde l'énergie du système inférieure à sa valeur initiale et qui diminue le spill-over tout en préservant l'efficacité globale de la version originale.

Puisque le problème se trouve être moins aigu pour des valeurs de ω petites, une première idée consiste à faire varier ω en fonction du temps. On démarre avec une valeur de ω nulle, puis l'on augmente ω jusqu'à une valeur nominale ω_0 correspondant au taux recherché.

On peut également appliquer la loi de rétroaction graduellement en la multipliant par une fonction *cut-off*. Dans ce cas, on obtient exactement $v(0) = 0$ et donc on élimine le choc initial.

Pour construire notre nouvelle loi, nous avons besoin d'une fonction régularisante.

Définition 3.10 Soit f telle que : $f(t) = p(t)$ pour $t \in [0, 1]$ et $f(t) = 1$ pour $t \geq 1$, où $p \in \mathcal{P}^{2d+1}(0, 1)$ est solution de :

$$\begin{cases} p^{(i)}(0) = 0 & \text{pour } 0 \leq i \leq d, \\ p(1) = 1, \quad p^{(j)}(1) = 0 & \text{pour } 1 \leq j \leq d. \end{cases} \quad (3.4.98)$$

On a ainsi construit une fonction f qui est d -continûment différentiable sur $[0, \infty[$.

Définition 3.11 Soient ω_0 le taux de décroissance que l'on veut imposé, T^ω et T^χ les durées de régularisation, on pose :

$$\begin{aligned} \cdot \omega(t) &= \begin{cases} \omega_0 f\left(\frac{t}{T^\omega}\right) & \text{pour } t \in [0, T^\omega], \\ \omega_0 & \text{pour } t \geq T^\omega. \end{cases} \\ \cdot \chi(t) &= f\left(\frac{t}{T^\chi}\right) \quad \text{pour tout } t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.99)$$

On peut remarquer que $\omega(t)$ et $\chi(t)$ ont la même régularité que f . Nous notons d_ω (resp. d_χ) la régularité de $\omega(t)$ (resp. $\chi(t)$). De façon assez surprenante le degré de régularité de f va jouer des rôles différents selon les lois régularisantes (*cut-off*, taux variable ou les deux).

Remarque 3.16 $\chi(t)$ simule les procédures expérimentales usuelles de stabilisation.

On définit l'opérateur \mathcal{L}_t comme en (5.2.4), où $a_{\omega, S}$ est maintenant remplacé par $a_{\omega(t), S}$.

La loi de rétroaction que l'on propose est la suivante :

$$v(t) = \chi(t)EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_1 \mathcal{L}_t \{y(t), y'(t)\}) (x = L). \quad (3.4.100)$$

La loi originale est ainsi régularisée deux fois.

Remarque 3.17 On peut évidemment, comme pour la loi non-régularisée, appliquer d'autres conditions de bord et par exemple contrôler en déplacement (voir F. Bourquin, J.-S. Briffaut et M. Collet [17] à l'Annexe I).

Chapitre 4

Expériences numériques avec le feedback de Komornik

4.1 Introduction

L'étude numérique se déroule en trois étapes. On va tout d'abord étudier la première version de la loi de rétroaction de Komornik. On montrera qu'elle n'est efficace que pour des valeurs de ω et S bien précises.

On va éliminer une partie de ces problèmes d'ordre paramétrique en appliquant une version légèrement différente de la loi originale, dont l'idée revient à F. Bourquin [59].

Finalement, une dernière modification de celle-ci va permettre de l'appliquer de façon convenable pour toutes les valeurs possibles des paramètres.

4.1.1 Version originale

On doit vérifier essentiellement l'inégalité (3.2.15) que l'on rappelle ci-dessous :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\omega, S) \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1.1)$$

Un premier hiatus, qui n'est pas lié à la construction de la loi de rétroaction, mais à la démonstration dans le cas discret de l'inégalité (3.2.15), tient au fait que l'on obtient une décroissance avec un taux deux fois plus élevé que voulu.

- afin d'expliquer ce phénomène, on va étudier au paragraphe 3.2.3 la fonctionnelle de Liapunov qui correspond à la norme intervenant dans la première étape de la démonstration de l'inégalité (3.2.15) et qui a la propriété remarquable d'être équivalente à la norme \mathcal{H} .

On calculera sa dérivée, dont on a deux expressions différentes, et on montrera que le terme que l'on élimine pour obtenir l'inégalité de Gronwall (3.2.18), n'est négligeable qu'à certains instants.

- au paragraphe 4.3 on va donner trois méthodes de calcul d'estimation de la constante $C(\omega, S)$. Notamment, on calculera numériquement cette constante à l'aide d'une variante du test de contrôlabilité (voir paragraphe 5.5 du chapitre 5). Bien que très différentes, elles donnent toutes la même information capitale :

C ne dépend pas de S et décroît exponentiellement en ω .

- au paragraphe 4.4, on étudie l'"énergie" du système stabilisé, c'est-à-dire la norme $H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)$ de $\{y'(t), -y(t)\}$ dont on n'a pas a priori d'estimation de la décroissance. En particulier, on observe qu'elle augmente au voisinage de l'origine pour des taux de décroissance imposés trop grand. Ce phénomène gênant justifie en particulier la régularisation de la loi de rétroaction que nous avons proposé.
- au paragraphe 4.5, on analyse l'*abscisse spectrale* de notre système approché qui correspond exactement au taux de décroissance que nous imposons. Pour cela, on calcule les pôles de l'équation différentielle ordinaire qui nous sert à calculer la réponse stabilisée. Ce spectre nous permettra de mesurer précisément l'influence des différents paramètres de notre problème de stabilisation approché : ω, T, S, N, M et h .
- on fera ensuite au paragraphe 4.6 une étude détaillée de la loi de rétroaction.
- au paragraphe 4.7, nous analyserons l'effet d'un contrôle incomplet de la réponse par la loi de rétroaction. Autrement dit, nous vérifierons s'il y a de la *pollution modale*.
- d'un point de vue purement numérique, on vérifiera au paragraphe 4.8 que la méthode de discrétisation adoptée est bien convergente dans le cas théoriquement résolu, c'est-à-dire où $N = M$. Pour cela, comme dans le cas de la contrôlabilité exacte, on étudiera la convergence en fonction du nombre de modes des éléments essentiels du problème de stabilisation : la fonctionnelle de Liapunov, la norme \mathcal{H} et la loi de rétroaction.
- au paragraphe 4.9, après quelques rappels sur les *schémas de Newmark*, nous analyserons l'influence des paramètres β et γ de ce type de schéma sur le calcul de la réponse et plus généralement sur la stabilisation. On regardera également la convergence de la norme \mathcal{H} et de la fonctionnelle de Liapunov en fonction du nombre d'itérations du schéma.
- enfin, au paragraphe 4.10 nous calculerons la variation de la fonctionnelle de coût du problème de contrôle optimal que l'on peut associer à la construction de la loi de rétroaction de V. Komornik en fonction du taux ω .

4.1.2 Version modifiée

Comme indiqué en début d'introduction, on considèrera ensuite la seconde version de la loi de rétroaction. On comparera ces résultats avec ceux de la première version, ce qui permettra de montrer qu'elle s'applique pour un plus large spectre de paramètres, mais malheureusement pas pour des valeurs de ω trop importantes. En effet, on va vérifier numériquement que la norme \mathcal{H} augmente au voisinage de l'origine pendant un certain temps avant de décroître au taux voulu. De plus, on observe que la valeur de la loi de rétroaction à l'origine augmente avec ω de façon importante.

4.1.3 Version régularisée

Aussi, on proposera comme remède une double régularisation de la loi de rétroaction. Plus précisément, on multiplie par une fonction *cutt-off* la loi de rétroaction tout en lui appliquant un taux de décroissance variable en fonction du temps. On vérifiera qu'on résout ainsi le problème de l'explosion au voisinage de l'origine des temps.

4.2 Fonctionnelle de Liapunov

4.2.1 Introduction

On va vérifier numériquement l'inégalité (3.3.83) et expliquer pourquoi, après discrétisation, on a une décroissance exponentielle deux fois plus grande, de la forme :

$$\tilde{E}_{N,M}(t) \leq D(\omega, S) \tilde{E}_{N,M}(0) e^{-4\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2.2)$$

Remarque 4.1 Afin d'alléger les commentaires des tests, on appelle fonctionnelle de Liapunov la fonction $\tilde{E}_{N,M}(t)$ normalisée par $\tilde{E}_{N,M}(0)$.

4.2.2 Vérification de la décroissance exponentielle

Dans les tests numériques on se fixe les paramètres suivants :

$$h = 2 \cdot 10^{-3}, \quad Nt = 10^3, \quad S = T = 1, \quad N = M = 5, \quad (4.2.3)$$

ainsi que les données initiales :

$$\alpha_i(t = 0) = \alpha'_i(t = 0) = \delta_{i1}, \quad \forall i = [1, \dots, M]. \quad (4.2.4)$$

Remarque 4.2 Le pas de maillage ainsi que le nombre d'itérations du schéma de Newmark sont suffisants pour les calculs effectués. Le paragraphe 4.9 indiquera quelle précision des calculs on obtient selon le Nt choisit.

Tout d'abord, on vérifie que la fonctionnelle de Liapunov décroît exponentiellement, quelque soit le taux imposé ω .

Exemple 1 On calcule donc la fonctionnelle de Liapunov pour différents ω et on la compare avec les fonctions $e^{-2\omega t}$ et $e^{-4\omega t}$ (en pointillés à la figure 4.1).

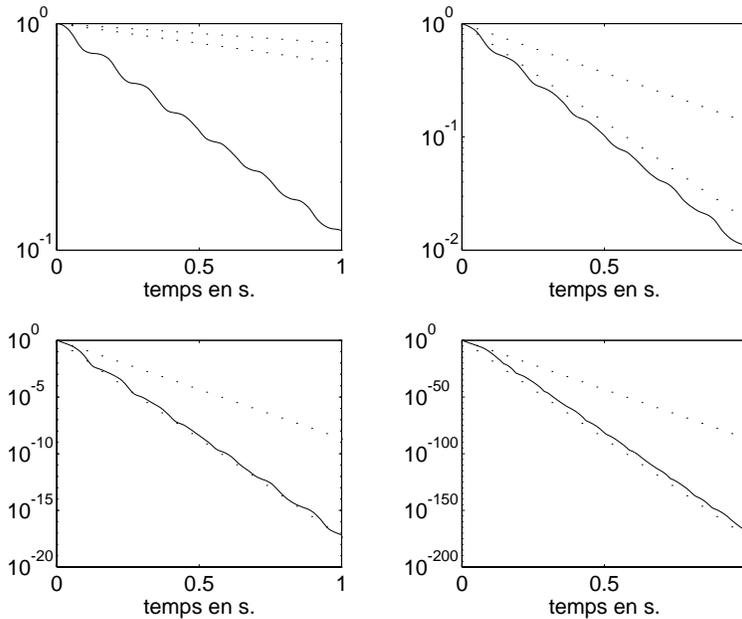


FIG. 4.1 - *Fonctionnelle de Liapunov pour $\omega = 10^{-1}, 1, 10$ et 10^2 (de haut en bas et de droite à gauche).*

On vérifie bien l'inégalité 3.3.83 pour tous ces taux. Néanmoins on remarque que le taux de décroissance de la fonctionnelle de Liapunov est beaucoup plus élevé que prévu pour ω très petit, en l'occurrence $\omega = 10^{-1}$ dans notre exemple.

Remarque 4.3 On se référera au paragraphe 4.11 pour l'explication de cette décroissance excessive.

Par contre pour ω assez grand, on voit que $\tilde{E}_{N,M}(t)$ est inférieure à $e^{-2\omega t}$ pour tout $t > 0$, et même qu'elle décroît exponentiellement avec un taux *deux fois plus élevé* que celui imposé. Autrement dit, cette énergie vérifie l'inégalité (4.2.2).

Afin de comprendre l'origine de cette décroissance plus élevée que prévu de la fonctionnelle de Liapunov, nous allons maintenant étudier sa dérivée.

4.2.3 Explication du taux deux fois supérieur

Comme on l'a vu au paragraphe 5.2.4, on a deux expressions différentes de la dérivée de la fonctionnelle de Liapunov. Tout d'abord rappelons la seconde expression de la dérivée :

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}_{N,M}(t) = -2\omega \tilde{E}_{N,M}(t) - \mathcal{E}_{N,M,k}(t), \quad (4.2.5)$$

où

$$\mathcal{E}_{N,M,k}(t) = k e^{-2\omega S} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,M}}{\partial x^2}(L, t, S) \right)^2 + \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,M}}{\partial x^2}(L, t, 0) \right)^2, \quad (4.2.6)$$

avec pour $k = 1$ la version usuelle et pour $k = 0$ la version modifiée.

C'est cette dérivée que nous allons étudier numériquement car elle permet de déduire l'inégalité importante :

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}_{N,M}(t) \leq -2\omega \tilde{E}_{N,M}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2.7)$$

qui, par application du lemme de Gronwall, donne la décroissance exponentielle de la fonctionnelle de Liapunov au taux de $-\omega$ au lieu de -2ω comme le montre les premiers tests. Nous devons au préalable nous assurer que cette dérivée est bien identique à la première (voir paragraphe 5.2.4).

Exemple 2 On représente à la figure 4.2 leur erreur relative pour $\omega = 20$.

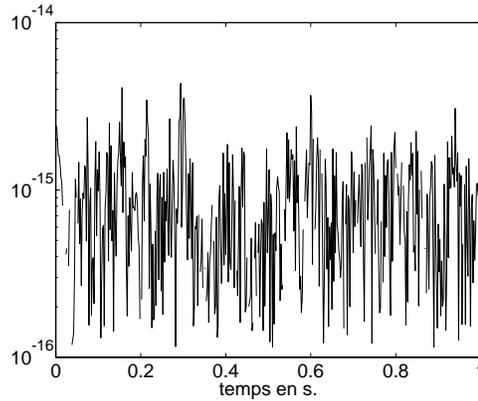


FIG. 4.2 - Erreur relative des deux dérivées de la fonctionnelle de Liapunov pour $\omega = 20$.

Cette erreur relative est très faible (environ 10^{-15}). Les deux calculs de la dérivée donnent donc des résultats identiques, aussi on appelle désormais dérivée de la fonctionnelle de Liapunov la seconde expression de la dérivée.

Puisque l'on a vérifié, dans les tests précédents, que l'on a décroissance avec un taux deux fois plus élevé que prévu, c'est que les termes que l'on élimine dans la dérivée de la fonctionnelle de Liapunov sont du même ordre que le terme principal $2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$.

Exemple 3 En premier lieu, on compare en échelle logarithmique, $-\frac{d}{dt}\tilde{E}_{N,M}(t)$ et $2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$ à la figure 4.3 de gauche auxquelles on superpose $e^{-4\omega t}$ en pointillé.

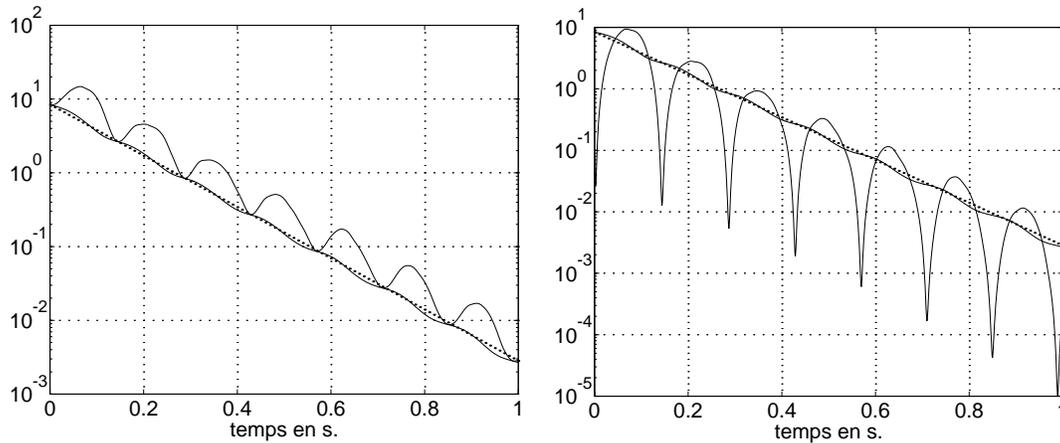


FIG. 4.3 - $-\frac{d}{dt}\tilde{E}_{N,M}(t)$, $2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$ et en pointillé $e^{-4\omega t}$ (à gauche) et comparaison entre le terme négligé et $2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$ (à droite).

On voit ainsi que l'inégalité (4.2.7) est bien vérifiée et que $-\frac{d}{dt}\tilde{E}_{N,M}(t)$ et $2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$ ont un taux de décroissance très proche de $e^{-4\omega t}$ et même légèrement supérieur.

Exemple 4 Ensuite, on observe à la figure 4.3 de droite l'évolution au cours du temps du terme négligé par rapport à celle du terme principal de la dérivée.

On peut noter que ces deux termes diminuent globalement de la même façon.

Le terme négligé correspondant à la différence entre la dérivée de la fonctionnelle de Liapunov et $-2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$, les pics que l'on observe à la figure 4.3 de droite indiquent donc les instants où ces deux fonctions sont les plus proches, ou encore ceux où l'énergie décroît au taux recherché :

$$\forall t \in [0, T], \quad \frac{d}{dt}\tilde{E}_{N,M}(t) = -4\omega\tilde{E}_{N,M}(t) \text{ p.p.} \quad (4.2.8)$$

Remarque 4.4 Au paragraphe 4.6 qui concerne l'étude de la loi de rétroaction on obtiendra un encadrement exponentiel de la loi de rétroaction qui permet d'obtenir le rapport avec $2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$.

Conclusion : l'explication de la décroissance avec un taux deux fois plus élevé que voulu est claire :

en éliminant le terme résiduel de la deuxième expression de la dérivée de la fonctionnelle de Liapunov on obtient une expression incomplète de cette dérivée et par conséquent une estimation tronquée de la décroissance de la fonctionnelle de Liapunov.

4.3 Méthodes de calcul de $C(\omega, S)$

Tout d'abord rappelons que sous les hypothèses du théorème 3.1, on a :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C(\omega, S) \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.9)$$

Nous voulons obtenir une estimation de la constante $C(\omega, S)$.

En effet, celle-ci donne une information cruciale sur la décroissance de l'énergie du système. En particulier, *lorsque le taux de décroissance imposé ω est trop élevé, cette constante est supérieure à un de plusieurs ordres de grandeur.* Dans ce cas, l'énergie augmente pendant un certain temps avant de décroître au taux imposé ce qui est clairement gênant pour les applications.

Remarque 4.5 On se reportera au paragraphe 4.4 pour une illustration de l'augmentation de l'énergie au voisinage de l'instant initial.

On peut calculer cette constante de différentes façons :

- une première méthode, que l'on peut qualifier de directe, consiste à calculer, pour des données initiales quelconques, la quantité suivante :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\|x(t)\|_{\mathcal{H}} / \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{\omega t} \right). \quad (4.3.10)$$

- la seconde méthode est basée sur la technique utilisée lors de la démonstration du théorème 3.1 (voir paragraphe 3.2.3) pour calculer cette constante. Étant donné que les tests numériques ultérieurs vont montrer qu'en réalité l'estimation que l'on obtient alors est loin d'être optimale, on propose une méthode de déduction de $C(\omega, S)$, toujours à partir des constantes $\alpha_1(S)$ et $\alpha_2(S)$, plus raffinée faisant intervenir le temps minimal de contrôlabilité exacte numérique.
- avec la dernière méthode, on calcule directement les constantes $C_1(\omega, S)$ et $C_2(\omega, S)$ à l'aide d'une version adaptée à la stabilisation du test de contrôlabilité exacte. On en déduit alors la constante $C(\omega, S)$ à l'aide de la relation (3.2.51).

4.3.1 Méthode directe

Dans cette méthode, on calcule la constante suivante :

Définition 4.1 $\forall \omega > 0, \forall S, T > 0, \forall \{y^1, y^0\} \in \mathcal{H} :$

$$C(\omega, S, \{y^1, -y^0\}) = \sup_{t \in [0, T]} (\|x(t)\|_{\mathcal{H}} / \|x(0)\|_{\mathcal{H}} e^{\omega t}). \quad (4.3.11)$$

Par construction, elle vérifie donc l'inégalité suivante :

$$C(\omega, S, \{y^1, -y^0\}) \leq C(\omega, S), \quad \forall \{y^1, y^0\} \in \mathcal{H}. \quad (4.3.12)$$

Ce n'est évidemment pas satisfaisant, car on n'a pas exactement $C(\omega, S)$. Néanmoins, les tests numériques obtenus à l'aide de cette expression vont nous fournir l'information principale recherchée, c'est-à-dire la variation en fonction de ω et S de cette constante.

Tout d'abord, précisons qu'étant donné que l'on a vu au paragraphe précédent que l'on a une décroissance avec un taux deux fois plus élevé, on va évidemment calculer cette constante en remplaçant dans sa définition ω par 2ω .

Exemple 5 Dans le premier test, on prend $\omega = 1$ et on fait varier S de 10^{-1} à 10.

On observe clairement, à la figure 4.4 de gauche, que $C(\omega, S)$ est indépendante de S .

Inversement, dans le second test, on prend $S = 1$ et on fait varier ω .

On distingue trois régions pour lesquelles la constante dépend de ω avec un taux exponentiel différent :

- les ω petits : $\omega \leq 1$
- les ω moyens : $1 \leq \omega \leq 10$
- et les ω grands : $\omega \geq 10$

comme on peut le voir à la figure 4.4 de droite et à la figure 4.5.

Remarque 4.6 L'explication des taux différents selon les régions sera donnée au paragraphe 4.11 traitant de la deuxième version de la loi de rétroaction de Komornik. En anticipant les résultats de ce paragraphe, on peut dire que le choix de S dépend de ω ; plus précisément, plus ω est grand et plus le S fixé est proche de la valeur optimale.

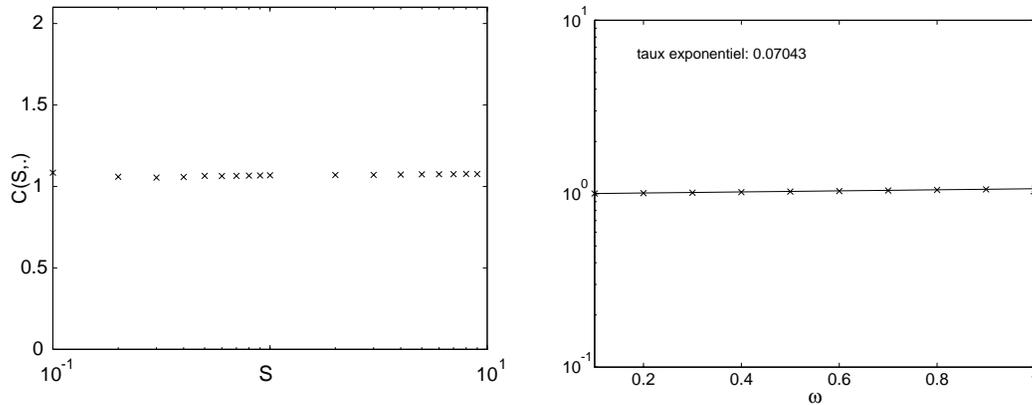


FIG. 4.4 - $C(\omega, S)$ fonction de S et avec ω fixé ($\omega = 1$) (à gauche). $C(\omega, S)$ fonction de ω et avec S fixé ($S = 1$) (à droite).

D'après la remarque que nous venons de faire, le taux le plus proche de la valeur exacte est donc celui de la figure 4.5 de droite correspondant aux ω grands :

$$k = 0,1575. \quad (4.3.13)$$

Conclusion : à l'aide de cette première méthode, on a déjà deux informations importantes concernant cette constante :

C est indépendant de S et varie exponentiellement en $k\omega$, où k est une constante strictement positive.

Étant donné que l'on a la relation (4.3.12), on ne peut évidemment commenter les valeurs numériques obtenues d'un point de vue quantitatif. On peut seulement dire qu'elles sont inférieures aux valeurs exactes (voir les deux méthodes suivantes).

Du fait de cette croissance exponentielle en ω , il est maintenant clair que pour des ω grands, la norme \mathcal{H} va croître pendant un certain temps (voir 4.4).

4.3.2 Estimation de $C(\omega, S)$ faisant intervenir le temps minimal de contrôlabilité T^h

On part de la propriété fondamentale suivante :

"la méthode de construction de la loi de rétroaction proposée par Komornik repose sur la contrôlabilité exacte".

Par conséquent, on vérifie les inégalités dites *directe* et *inverse*, soit dans notre cas particulier :

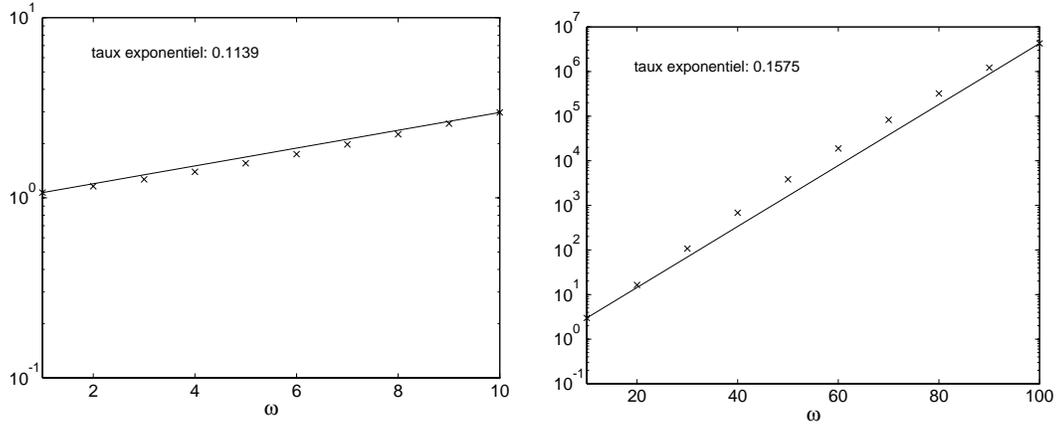


FIG. 4.5 - Pour S fixé ($S = 1$), $C(\omega, \cdot)$ avec $1 \leq \omega \leq 10$ (à gauche) et $10 \leq \omega \leq 100$ (à droite).

Théorème 4.1 $\forall t \geq 0, \forall T > 0, \forall \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\} \in \mathcal{H}^*, \exists \alpha_1(T, L), \alpha_2(T, L) > 0$ tels que :

$$\alpha_1(T, L) \leq Q_T \left(\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\} \right) \leq \alpha_2(T, L), \quad (4.3.14)$$

avec

$$Q_T \left(\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\} \right) = \frac{\int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, t, L) \right)^2 d\tilde{s}}{\|\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}\|_{\mathcal{H}^*}^2}. \quad (4.3.15)$$

Remarque 4.7 On se référera au paragraphe 6.2 du chapitre 6 pour un calcul numérique de ces constantes à l'aide du test de contrôlabilité.

Par la suite, afin d'améliorer la lisibilité des résultats on ne notera pas la dépendance en L des constantes α_1 et α_2 .

Connaissant les bornes de $Q_T \left(\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\} \right)$, on peut en déduire, en utilisant les bornes inférieure et supérieure de $e^{-2\omega s}$, celles de :

$$Q_{\omega, S} \left(\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\} \right) = \frac{\int_0^S e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, t, L) \right)^2 d\tilde{s}}{\|\{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}\|_{\mathcal{H}^*}^2}, \quad (4.3.16)$$

soient d'après les notations du paragraphe 3.2.3 :

$$C_1(\omega, S) = e^{-2\omega S} \alpha_1(S), \quad C_2(\omega, S) = \alpha_2(S). \quad (4.3.17)$$

Mais la fonctionnelle de Liapunov vérifie :

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) e^{-2\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.18)$$

L'équivalence entre la norme \mathcal{H} et la fonctionnelle de Liapunov, qui n'est autre que le dénominateur de $Q_{\omega,S}(\cdot, \cdot)$, nous donne la constante, soit :

$$C(\omega, S) = \left(\frac{C_2(\omega, M)}{C_1(\omega, M)} \right) = \left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \right)^{\frac{3}{2}} e^{3\omega S}. \quad (4.3.19)$$

Or on démontre à l'Annexe J que les constantes α_1 et α_2 dépendent linéairement du temps (voir également le paragraphe 6.2 du chapitre 6 pour une vérification numérique). Par conséquent, $C(\omega, S)$ est de l'ordre de $e^{3\omega S}$, et donc dépend fortement de S , ce qui contredit les résultats des tests de la première méthode. La technique de minoration et majoration du quotient (4.3.16) à partir de (4.3.14) est donc trop grossière, aussi nous proposons une autre stratégie de calcul.

Tout d'abord, rappelons la propriété remarquable vérifiée par l'équation d'Euler-Navier-Bernoulli, et de façon générale par les équations de Schrödinger :

"le système stabilisé est contrôlable exactement en un *temps arbitrairement petit*".

Autrement dit l'encadrement (4.3.14) a lieu pour tout $T > 0$ aussi petit que l'on veut (voir par exemple E. Zuazua [108]).

Ce résultat n'est plus vrai au niveau discret :

"pour un h donné, il existe un *temps minimal numérique de contrôlabilité exacte* que l'on note T^h ".

Remarque 4.8 On se réfèrera au paragraphe 2.5 du chapitre 2 pour une étude numérique ce T^h .

L'inégalité (4.3.14) est donc vérifiée pour $T \geq T^h$, et en particulier pour $T = T^h$, soit pour tout $t > 0$,

$$\alpha_1(T^h) \leq \frac{\int_0^{T^h} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,h}}{\partial x^2}(s, t, L) \right)^2 d\tilde{s}}{\left\| \{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \} \right\|_{\mathcal{H}^*}^2} \leq \alpha_2(T^h). \quad (4.3.20)$$

On note $p = \frac{S}{T^h}$, et on réécrit le numérateur de (4.3.16) comme une somme de p intégrales définies, pour tout $n \in [0, \dots, p-1]$, sur les intervalles $[nT^h, (n+1)T^h]$:

Définition 4.2

$$\forall 0 \leq n \leq p-1, \quad Q_n = \frac{\int_{nT^h}^{(n+1)T^h} e^{-2\omega s} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,h}}{\partial x^2}(s, t, L) \right)^2 d\tilde{s}}{\left\| \{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \} \right\|_{\mathcal{H}^*}^2} \quad (4.3.21)$$

On a donc :

$$Q_{\omega, S} \left(\left\{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \right\} \right) = \sum_{n=0}^{p-1} Q_n. \quad (4.3.22)$$

Or

$$\forall 0 \leq n \leq p-1, \quad Q_n \geq e^{-2\omega(n+1)T^h} \frac{\int_{nT^h}^{(n+1)T^h} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,h}}{\partial x^2}(s, t, L) \right)^2 d\tilde{s}}{\left\| \left\{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \right\} \right\|_{\mathcal{H}^*}^2} \quad (4.3.23)$$

Or, par définition de T^h , on a contrôlabilité exacte sur $[0, T^h]$ et a fortiori pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[nT^h, (n+1)T^h]$. Par conséquent, l'inégalité (4.3.14) est vérifiée sur chacun de ces intervalles. En sommant les p inégalités (4.3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{\omega, S} \left(\left\{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \right\} \right) &\geq \alpha_1(T^h) \sum_{n=0}^{p-1} e^{-2\omega(n+1)T^h} \\ &\geq \alpha_1(T^h) e^{-2\omega T^h} \left(\frac{1 - e^{-2\omega S}}{1 - e^{-2\omega T^h}} \right), \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

ce qui peut s'écrire :

$$Q_{\omega, S} \left(\left\{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \right\} \right) \geq \alpha_1(T^h) e^{-2\omega T^h} \Psi_{T^h}(\omega, S), \quad (4.3.25)$$

avec Ψ_{T^h} définie de la façon suivante

Définition 4.3 $\forall S > 0, \forall \omega > 0, \forall T^h > 0,$

$$\Psi_{T^h} : (\omega, S) \mapsto \left(\frac{1 - e^{-2\omega S}}{e^{2\omega T^h} - 1} \right). \quad (4.3.26)$$

Étant donné les notations adoptées dans le paragraphe 3.2.3, on a donc :

$$C_1(\omega, S) = \alpha_1(T^h) e^{-2\omega T^h} \Psi_{T^h}(\omega, S). \quad (4.3.27)$$

On procède de la même façon pour déterminer la constante C_2 . À partir de l'inégalité (4.3.21), on obtient :

$$Q_n \leq e^{-2\omega n T^h} \frac{\int_{nT^h}^{(n+1)T^h} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,h}}{\partial x^2}(s, t, L) \right)^2 d\tilde{s}}{\left\| \left\{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \right\} \right\|_{\mathcal{H}^*}^2}, \quad \forall 0 \leq n \leq p-1, \quad (4.3.28)$$

donc :

$$Q_{\omega, S} \left(\left\{ \varphi_{N,h}^0(t), \varphi_{N,h}^1(t) \right\} \right) \leq \alpha_2(T^h) \Psi_{T^h}(\omega, S), \quad (4.3.29)$$

soit :

$$C_2(\omega, S) = \alpha_2(T^h)\Psi_{T^h}(\omega, S). \quad (4.3.30)$$

Finalement, on applique l'égalité (3.2.51) avec (4.3.27) et (4.3.30), ce qui donne :

$$C(\omega, S) = C_2/C_1 = \left(\alpha_2(T^h)/\alpha_1(T^h)\right)^{\frac{3}{2}} e^{3\omega T^h}. \quad (4.3.31)$$

Conclusion

- dans l'évaluation des constantes, il est crucial de connaître T^h et par conséquent h .

Les tests suivants que l'on va effectuer vont illustrer ce propos (voir la figure 4.8). On se reportera au paragraphe 2.5 du chapitre 2 pour le calcul de T^h .

- la relation (4.3.31) nous permet d'obtenir une conclusion identique à celle de la première méthode :

$C(\omega, S)$ est indépendante de S et croît exponentiellement en $k\omega$ où k est une constante strictement positive.

Étude de la fonction Ψ_{T^h}

On veut vérifier que, pour des valeurs de ω assez grandes, le minorant de $Q_{\omega, S}$ est indépendant de S . Cela revient à montrer, d'après l'inégalité (4.3.25), que la fonction Ψ_{T^h} est également invariante selon S .

Exemple 6 On regarde donc le graphe de $S \mapsto \Psi_{T^h}(\cdot, S)$ (avec $T^h = 10^{-1}$), et on superpose les courbes obtenues pour différentes valeurs du paramètre ω .

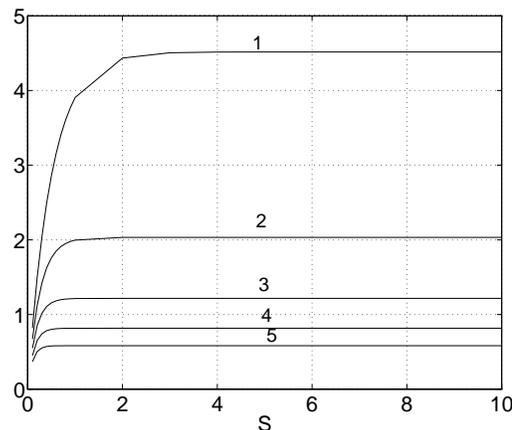


FIG. 4.6 - $S \mapsto \Psi_{T^h}(\cdot, S)$ avec ω comme paramètre.

Tout d'abord, on observe à la figure 4.6, que la fonction décroît quant ω augmente, ce qui est conforme à l'intuition.

En effet, plus ω est grand et plus $Q_{\omega, S}(\{\varphi_{N, h}^0(t), \varphi_{N, h}^1(t)\})$ est petit. Mais surtout, on peut voir que la fonction est constante par rapport à S , sauf pour des valeurs de ω petites. De plus, on remarque que, quelques soient les valeurs de ω , la fonction est constante en S pour des valeurs de S approximativement supérieures à deux.

Exemple 7 Maintenant, on représente à la figure 4.7 le comportement de Ψ_{T^h} lorsque les deux variables varient.

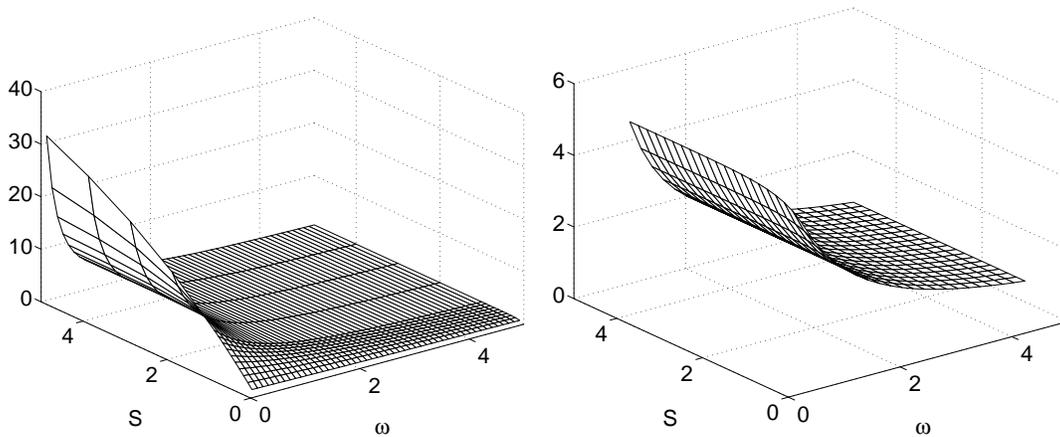


FIG. 4.7 - $(\omega, S) \mapsto \Psi_{T^h}(\omega, S)$ avec T^h fixé (à gauche) et avec un “zoom” sur $1 \leq \omega, S \leq 5$ (à droite).

On en déduit le même type de conclusion, en effet si l'on effectue un zoom sur la région des $1 \leq \omega, S \leq 5$, on observe clairement à la figure 4.7 de droite que la fonction ne dépend pas de S .

Pour terminer l'étude de la fonction Ψ_{T^h} , il reste à déterminer sa variation en fonction du temps minimal de contrôlabilité T^h .

Le paramètre T^h se comporte comme un $O(1/T^h)$ dans la fonction Ψ_{T^h} , par conséquent il translate les courbes de la figure 4.6, en première approximation, d'un facteur $1/T^h$; autrement dit, plus T^h est petit et plus le minimum de $Q_{\omega, S}$ est grand.

On illustre cette propriété à la figure 4.8 où l'on peut voir pour différentes valeurs de T^h , l'évolution de la fonction $\Psi_{T^h}(\cdot, \cdot)$ en fonction de S pour $\omega = 1$.

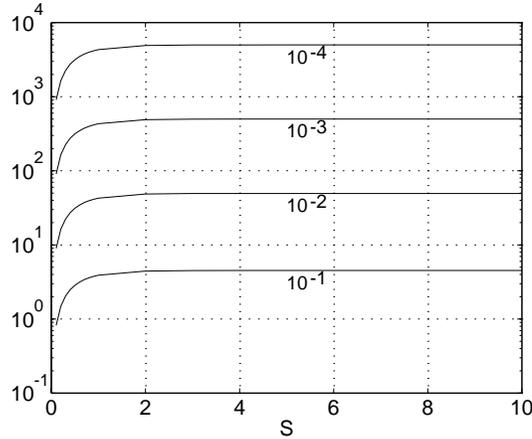


FIG. 4.8 - $\Psi_{T^h}(\cdot, S)$ avec T^h variable et $\omega = 1$.

4.3.3 Estimation de $C(\omega, S)$ à partir du calcul numérique de $C_1(\omega, S)$ et $C_2(\omega, S)$

La dernière méthode consiste à calculer les constantes $C_1(\omega, S)$ et $C_2(\omega, S)$ à l'aide d'une variante du test de contrôlabilité (voir chapitre 5) adaptée à la stabilisation.

La procédure de calcul est rigoureusement la même, mais on remplace l'opérateur Λ de la contrôlabilité exacte par l'opérateur $\Lambda_{\omega, S}$.

On peut alors en déduire $C(\omega, S)$ à l'aide de la relation (3.2.51), que l'on rappelle :

$$C(\omega, S) = ((C_2/C_1)(\omega, S))^{\frac{3}{2}}. \quad (4.3.32)$$

A. Convergence en fonction du nombre de modes

Étant donné que l'on calcule la constante à l'aide d'un nombre fini de modes M , il est nécessaire de connaître la précision obtenue sur cette constante pour un nombre de modes donné.

Exemple 8 C'est ce que l'on représente à la figure 4.9.

À droite, on voit la convergence de $C(\omega, S)$ en fonction de M pour $\omega = 10$ et à gauche la convergence de son erreur relative ($M_\infty = 200$). On obtient une convergence en $O(M^{-3})$ et ceci quel que soit ω . Les constantes C_1 et C_2 ont le même taux de convergence que $C(\omega, S)$.

Conclusion On prend 40 modes pour calculer les constantes $C_1(\omega, S)$ et $C_2(\omega, S)$ dans les tests suivants. Ceci nous fournit une précision suffisante d'après les résultats que l'on vient d'obtenir.

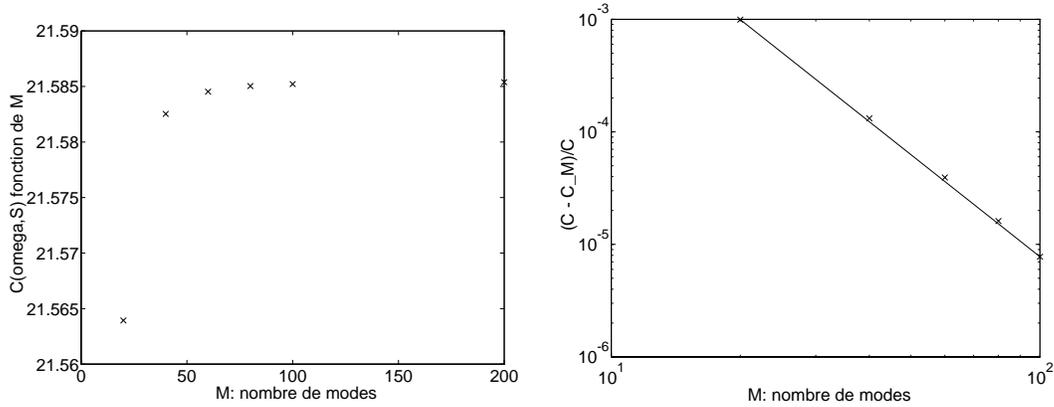


FIG. 4.9 - Convergence en fonction de M de la constante $C(\omega, S)$ pour ω fixé (à gauche) et erreur relative (à droite).

B. Variation de $C(\omega, S)$ en fonction de S

Étant donné les résultats obtenus à l'aide de la méthode précédente, on doit s'attendre à ce que la constante ne dépende pas de S et que $C_1(\omega, S)$ et $C_2(\omega, S)$ en dépendent seulement pour des S petits.

Exemple 9 C'est ce que l'on vérifie à la figure 4.10 où l'on a pris $\omega = 1$ et on a fait varier S de 1 à 10.

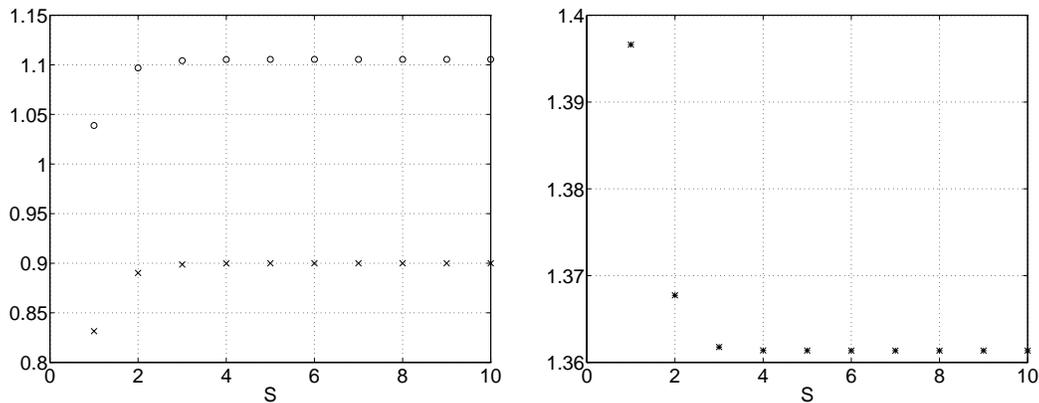


FIG. 4.10 - $C_1(\cdot, S)$, $C_2(\cdot, S)$ (à gauche) et $C(\cdot, S)$ (à droite) pour ω fixé ($\omega = 1$) et S variable.

En effet, on observe (à la figure de gauche) que pour $\omega = 1$ les constantes C_1 et C_2 croissent de façon homothétique quant S augmente vers une valeur constante. La figure de droite montre que C décroît asymptotiquement vers une valeur constante.

C. Variation de $C(\omega, S)$ en fonction de ω

Maintenant, on veut vérifier la croissance exponentielle en fonction de ω (pour S fixé) de $C(\omega, \cdot)$ ainsi que la décroissance exponentielle de $C_1(\omega, \cdot)$ et $C_2(\omega, \cdot)$.

Exemple 10 La figure 4.11 montre la variation en fonction de $.1 \leq \omega \leq 1$, pour $S = 1$, des constantes C_1 et C_2 sur la figure de gauche, et de $C(\omega, S)$ sur la figure de droite.

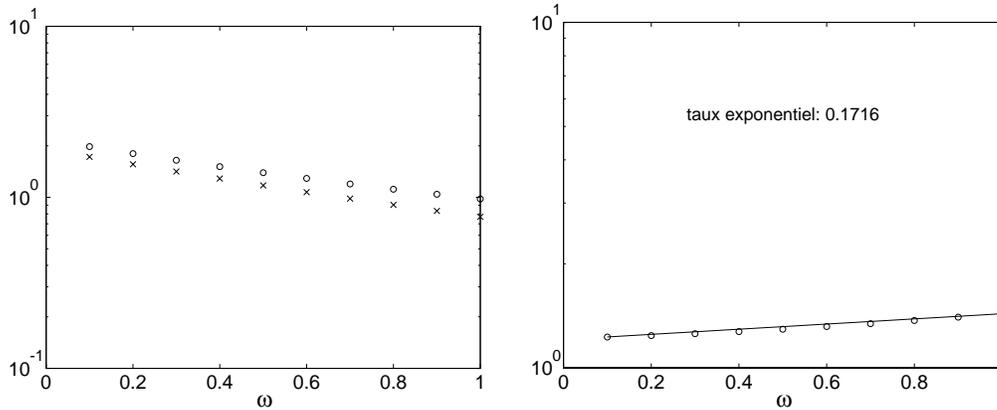


FIG. 4.11 - $C_1(\omega, \cdot)$, $C_2(\omega, \cdot)$ (à gauche) et $C(\omega, \cdot)$ (à droite) pour S fixé.

À la figure 4.12: $1 \leq \omega \leq 10$ et à la figure 4.13: $10 \leq \omega \leq 100$.

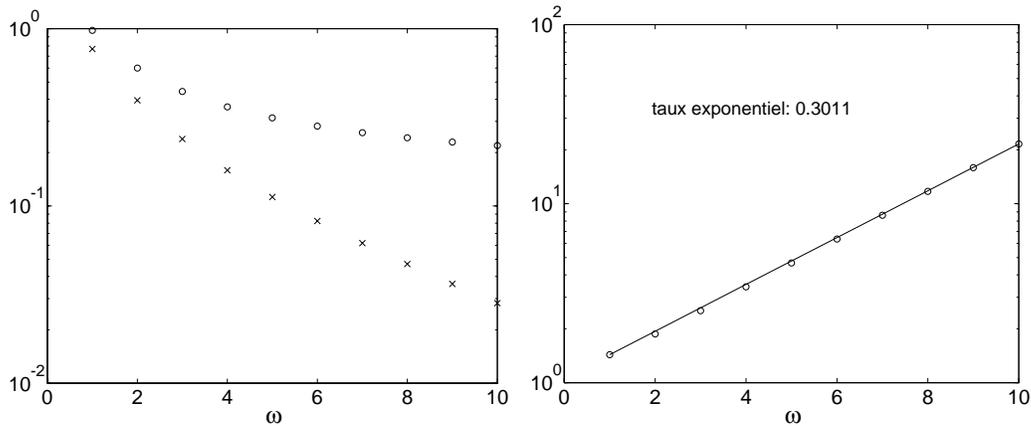


FIG. 4.12 - $C_1(\omega, \cdot)$, $C_2(\omega, \cdot)$ (à gauche) et $C(\omega, \cdot)$ (à droite) pour S fixé.

On observe (figures 4.11, 4.12 et 4.13), comme pour la première méthode, que le taux de convergence est différent selon les régions auxquelles appartient ω .

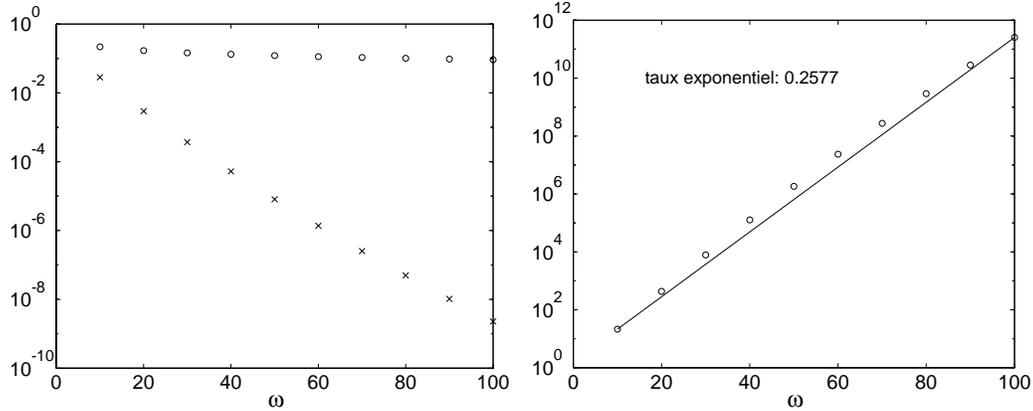


FIG. 4.13 - $C_1(\omega, \cdot)$, $C_2(\omega, \cdot)$ (à gauche) et $C(\omega, \cdot)$ (à droite) pour S fixé et ω très grand.

Observations :

- l'avantage de cette technique tient à ce que l'on a pas besoin de connaître les constantes α_1 et α_2 , et donc d'utiliser des résultats théoriques intermédiaires, comme dans la seconde méthode.
- le fait que les taux soient différents selon les régions de ω sera élucidé au paragraphe 4.11 traitant de la loi de rétroaction modifiée. L'explication principale réside dans le choix d'un S trop petit pour un ω donné.
- on a des résultats cohérents avec les deux autres méthodes de calculs des constantes :
 - en effet, on a bien des valeurs de $C(\omega, S)$ supérieures à celles obtenues par la première méthode, ce qui est en conformité avec l'inégalité (4.3.12) vérifiée par les deux constantes.
 - la constante $C_1(\omega, S)$ décroît bien de façon exponentielle en fonction de ω , comme l'annonçait l'égalité (4.3.27) donnée par la seconde méthode.

4.3.4 Conclusion

À la lumière des différents tests, on peut donc dire qu'une bonne estimation de la constante est donnée par la seconde méthode, soit :

$$C(\omega, S) = C(\omega) = \left(\alpha_2(T^h) / \alpha_1(T^h) \right)^{\frac{3}{2}} e^{3\omega T^h}, \quad (4.3.33)$$

avec $\alpha_1(T^h)$ et $\alpha_2(T^h)$ les constantes de coercivité et de continuité des inégalités inverses et directes (vérifiées du fait de la contrôlabilité exacte du problème) et T^h

le temps minimal de contrôlabilité exacte qui ne dépend que du pas de maillage. Or, comme on l'a remarqué le rapport des constantes $\alpha_1(T^h)$ et $\alpha_2(T^h)$ est indépendant de T^h , on a donc :

$$C(\omega, S) = C(\omega) = O\left(e^{3\omega T^h}\right). \quad (4.3.34)$$

4.4 Norme \mathcal{H}

On adopte la terminologie de la contrôlabilité exacte, on appelle *énergie du système* la norme \mathcal{H} , où \mathcal{H} désigne l'espace des données initiales ad hoc pour le problème de stabilisation exponentielle considéré. Dans notre cas particulier, on rappelle que $\mathcal{H} = H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L)$.

La norme \mathcal{H} de $x(t)$, à la différence de la fonctionnelle de Liapunov n'est pas une fonction nécessairement décroissante sur l'intervalle $[0, T]$. On sait seulement grâce au théorème 3.1, qu'elle est majorée par une fonction qui décroît exponentiellement en fonction de ω . Par conséquent, rien ne dit qu'elle ne peut augmenter après l'instant initial, pendant un certain temps que l'on note T_c .

On a une confirmation de cette propriété par les résultats du paragraphe 4.3 précédent. En effet, on a montré que $C(\omega, S) = Ke^{k\omega}$ où K et k sont deux constantes strictement positives. Par conséquent, on peut réécrire l'estimation du théorème 3.1 sous la forme :

$$\frac{\|x(t)\|_{\mathcal{H}}}{\|x(0)\|_{\mathcal{H}}} \leq Ke^{(k-2t)\omega}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.4.35)$$

Ce résultat ne contredit pas le fait que la norme \mathcal{H} peut augmenter sur $[0, T_c]$. Avec cette dernière estimation, on peut seulement majorer cette croissance.

Plus précisément, si l'on note :

$$\Upsilon = \sup_{t \in [0, T]} \left(\frac{\|x(t)\|_{\mathcal{H}}}{\|x(0)\|_{\mathcal{H}}} \right), \quad (4.4.36)$$

on a

$$\Upsilon \leq Ke^{k\omega}. \quad (4.4.37)$$

De plus, si $\Upsilon \geq 1$, c'est-à-dire si la norme \mathcal{H} a une valeur supérieure à celle de l'instant initial, on a d'après (4.4.36) :

$$T_c \leq \frac{1}{2} \left(k + \frac{\log(K)}{\omega} \right). \quad (4.4.38)$$

Nous allons calculer Υ en fonction de ω ainsi que le temps T_c pendant lequel $\Upsilon \geq 1$.

Exemple 11 La figure 4.14 de gauche montre la variation de Υ en fonction de ω successivement pour $T = 1$ et $T = 2$, en échelle semi-logarithmique.

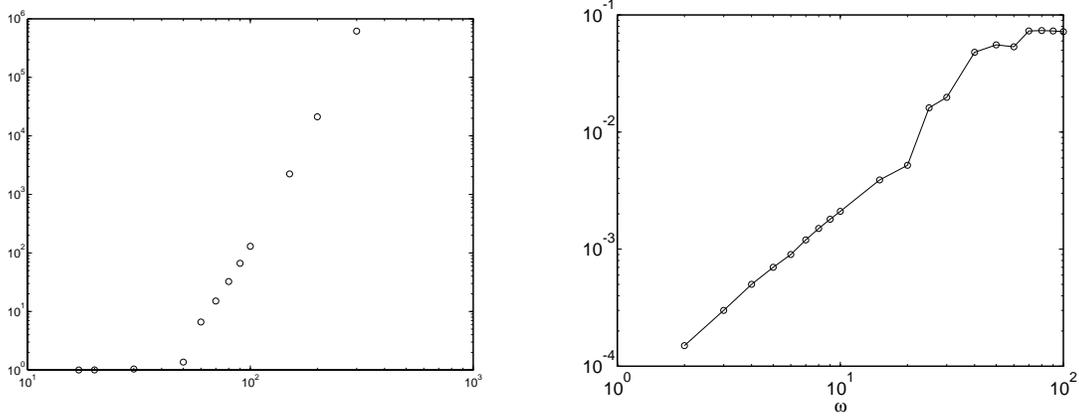


FIG. 4.14 - Υ en fonction de ω ($T = 1$ et 2) (à gauche) et T_c en fonction de ω (à droite).

On voit qu'il y a explosion aux environs de $\omega = 50$, puisque le maximum vaut 1.366 pour $\omega = 40$ et 2.788 pour $\omega = 50$.

La figure 4.14 de droite montre la variation de T_c en fonction de ω .

Cette singularité n'a pour origine, ni le choix du nombre d'itérations du schéma de Newmark Nt , ni le choix du nombre de modes de la réponse M . En effet si l'on prend une valeur de Nt dix fois plus grande, on a toujours le même comportement; de même si l'on augmente M , en prenant soin naturellement d'augmenter aussi Nt .

L'explication de ce phénomène tient au fait que plus le taux est élevé et plus les modes de hautes fréquences sont excités au voisinage de $t = 0$.

Exemple 12 On représente à la figure 4.15 gauche (resp. à droite) l'évolution du premier (resp. quatrième) mode de la réponse pour $\omega = 1$ et $\omega = 50$.

On voit qu'alors que pour le premier mode il n'y a pas de différence d'amplitude entre les deux réponses, au voisinage de zéro les deux courbes se superposent, pour le quatrième mode on a déjà une différence d'amplitude d'au moins un facteur 10.

Ce phénomène est d'autant plus grand que les modes sont élevés.

Exemple 13 C'est ce que l'on illustre à la figure 4.16 où l'on montre l'historique du quarantième mode pour $\omega = 1$ à gauche et $\omega = 50$ à droite.

La différence d'amplitude est de l'ordre de 10^3 .

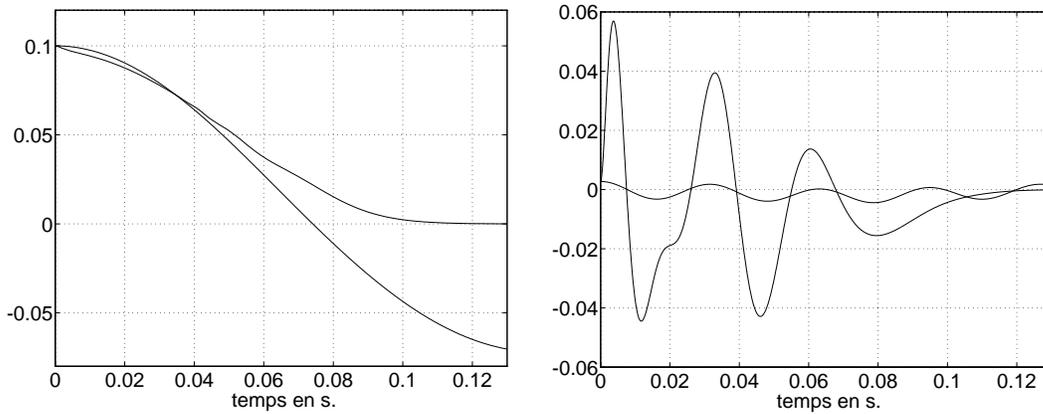


FIG. 4.15 - *Premier mode (à gauche) et quatrième mode (à droite) de la réponse pour $\omega = 1$ et $\omega = 50$.*

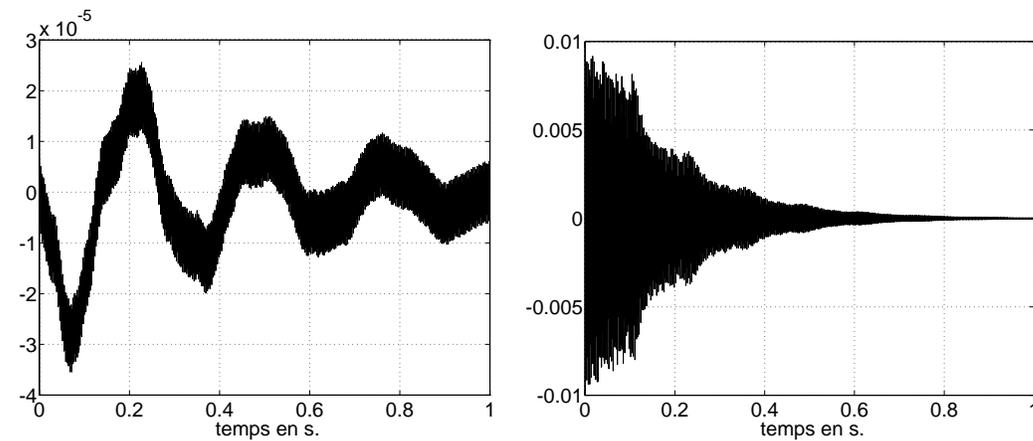


FIG. 4.16 - *Quarantième mode de la réponse pour $\omega = 1$ (à gauche) et $\omega = 50$ (à droite).*

4.5 Fréquences vibratoires

4.5.1 Rappels sur le calcul des pôles

On désire analyser le spectre associé à notre problème. La raison principale est qu'en dimension finie le taux de décroissance exponentielle de l'énergie du système est égale à l'*abscisse spectrale*.

Commençons par rappeler la méthode de calcul des pôles. On transforme l'équation différentielle ordinaire du second ordre (3.3.80) dont la réponse approchée $\alpha_{M,N}(t)$ est solution :

$$\mathcal{M}\alpha''_{M,N}(t) + \mathcal{D}\alpha'_{M,N}(t) + \mathcal{K}\alpha_{M,N}(t) = 0, \quad (4.5.39)$$

en une équation du premier ordre :

$$\hat{\alpha}'_{M,N}(t) = R \hat{\alpha}_{M,N}(t), \quad \hat{\alpha}_{M,N}(t) = \begin{pmatrix} \alpha'_{M,N}(t) \\ \alpha_{M,N}(t) \end{pmatrix} \quad (4.5.40)$$

avec :

$$R = \begin{bmatrix} -\mathcal{D} & -\mathcal{K} \\ Id & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5.41)$$

On cherche alors des solutions de la forme :

$$\hat{\alpha}_{M,N}(t) = e^{\lambda t} \hat{\alpha}_{M,N}(0), \quad (4.5.42)$$

ce qui revient à résoudre le problème aux valeurs propres :

$$RX = \lambda X, \quad X = \hat{\alpha}_{M,N}(0), \quad (4.5.43)$$

avec $(\lambda, \hat{\alpha}(0))$ les inconnues.

Remarque 4.9 Les matrices \mathcal{D} , \mathcal{K} sont non symétriques et de plus \mathcal{D} a la propriété remarquable de n'avoir qu'une seule valeur propre non nulle. Enfin la matrice R est bien conditionnée relativement au calcul de ses valeurs propres.

On va montrer qu'en calculant ce spectre, on peut retrouver et expliquer de nombreuses propriétés liées au choix de ω et S qui ont été déjà observées lors de l'étude de la fonctionnelle de Liapunov.

Tout d'abord on rappelle la propriété classique qui relie λ à ω :

Propriété 4.1 *Si les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées alors*

$$Re(\lambda) \leq -\omega, \quad \forall \lambda \in \sigma(R), \quad (4.5.44)$$

où $\sigma(R)$ désigne le spectre de R .

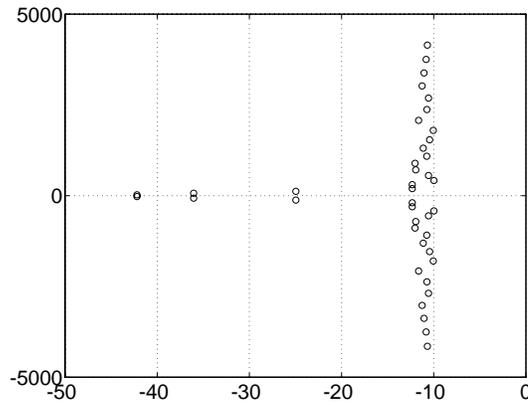
Cette inégalité est une conséquence directe du théorème 3.1. Inversement, si on vérifie cette propriété, on a décroissance exponentielle en $-\omega$ de l'énergie.

Autrement dit, si μ désigne l'abscisse spectrale de R , on a :

$$\mu = \sup \{Re(\lambda), \forall \lambda \in \sigma(R)\} = -\omega. \quad (4.5.45)$$

Remarque 4.10 Comme on a vu précédemment, le taux obtenu est en réalité de -2ω , on vérifiera donc l'inégalité (4.5.44) de la propriété 4.1 en remplaçant ω par 2ω .

Les paramètres d'approximation de λ sont donc ω , S , M et N puisque par construction les matrices \mathcal{D} et \mathcal{K} en dépendent (voir le paragraphe 3.3.4).

FIG. 4.17 - λ pour $\omega = 1$ et $S = 10^{-1}$.

4.5.2 Variation de λ en fonction de S

Exemple 14 La figure 4.17 de gauche montre le spectre pour $\omega = 1$ et $S = 10^{-1}$.

On vérifie bien la propriété 4.1, mais on a un taux beaucoup plus élevé que celui imposé. De plus, on observe que les trois premières fréquences sont stabilisées avec un taux beaucoup plus important que les autres. En fait, quelque soit le nombre de modes utilisés pour le calcul du spectre, ce sont toujours toujours les trois premières fréquences qui ont leurs taux compris entre -25 et -45.

Néanmoins il faut nuancer cette remarque par le résultat surprenant suivant :

Exemple 15 si l'on regarde la fonctionnelle de Liapunov et la norme \mathcal{H} pour les mêmes données, on voit à la figure 4.18 que l'on a bien une décroissance avec un taux beaucoup plus élevé que prévu.

Fixons maintenant ω et regardons pour quelles valeurs de S , λ est proche de -2ω .

Exemple 16 À la figure 4.19 de gauche, on prend $\omega = 10^{-1}$, et à celle de droite $\omega = 10$.

On observe qu'il faut prendre un S inversement proportionnel à ω pour obtenir une valeur de l'abscisse spectrale proche du taux imposé.

En effet, plus ω est grand et plus il suffit de prendre un S petit pour obtenir la valeur recherchée.

On peut également chercher, pour un ω fixé, le S le plus petit pour lequel λ a une partie réelle négative.

Exemple 17 On obtient la valeur critique $S = 4 \cdot 10^{-2}$ indépendamment de ω (figure 4.20).

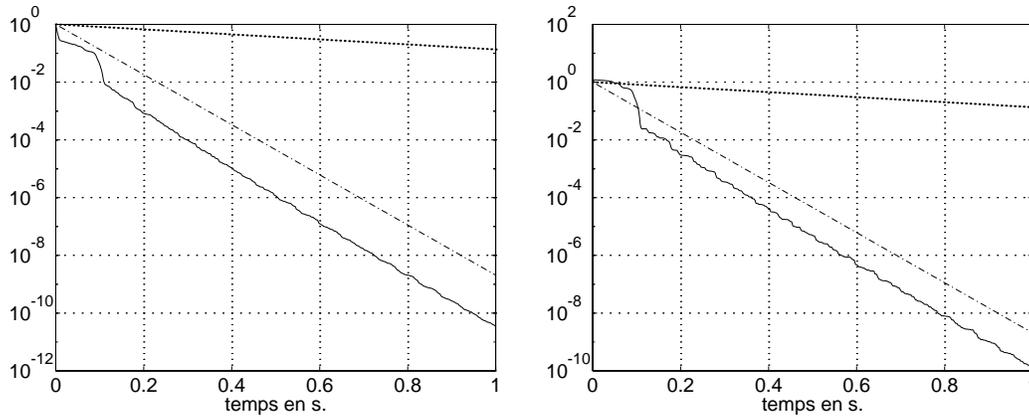


FIG. 4.18 - *Fonctionnelle de Liapunov (resp. norme \mathcal{H}) pour $S = 10^{-1}$ à gauche (resp. à droite).*

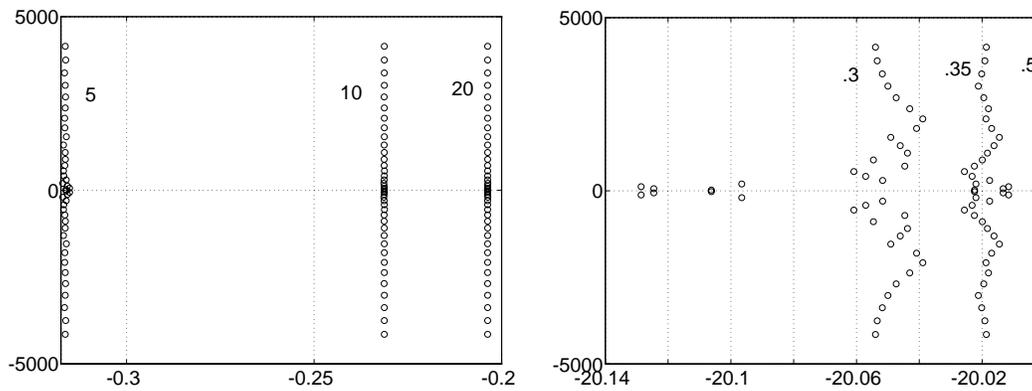


FIG. 4.19 - λ pour $\omega = 10^{-1}$ à gauche ($\omega = 10$ à droite) avec S variable.

Insistons sur le fait que si l'on augmente le nombre de modes utilisés pour calculer le spectre, cela ne change pas la valeur critique obtenue. Par exemple, on obtient la même valeur avec 20 modes ou avec 100 modes, et ceci quelque soit le pas de maillage.

4.5.3 Variation de μ en fonction de ω

On procède de façon inverse par rapport à l'étude précédente. On se fixe une valeur de S et on regarde la variation de l'abscisse spectrale en fonction de ω .

Exemple 18 On voit à la figure 4.21 que pour $S = 1$ on a une valeur très proche de -2ω , alors que pour $S = 10^{-1}$, μ est très inférieur.

On observe également que plus ω est grand et plus les abscisses spectrales calculées pour des S différents sont proches.

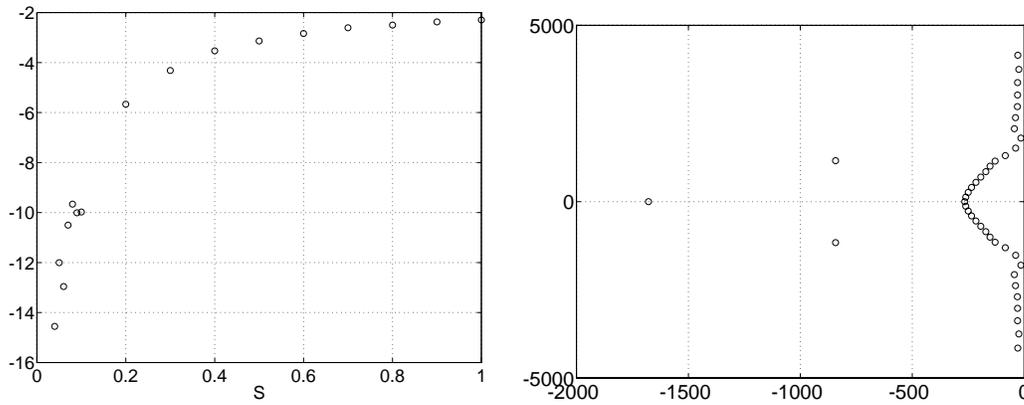


FIG. 4.20 - Variation de μ en fonction de S pour $\omega = 1$ (à gauche) et λ pour le S le plus petit tel que $\text{Re}(\lambda) < 0$ (à droite).

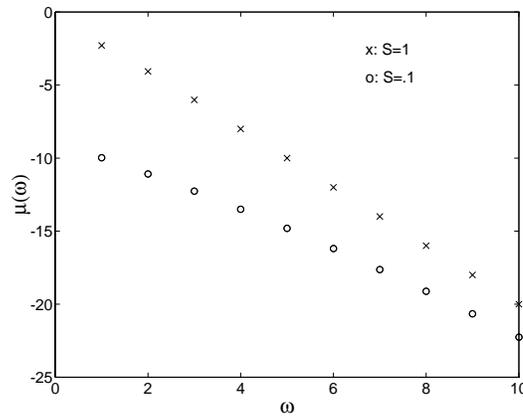


FIG. 4.21 - Variation de μ avec ω pour $S = 10^{-1}$ et $S = 1$.

4.5.4 Spectre pour $N < M$

Il est intéressant de vérifier que lorsqu'on calcule la réponse avec un nombre de modes supérieur à celui de la loi de rétroaction, on n'agit pas sur les modes supérieurs de la réponse.

Exemple 19 C'est bien ce que l'on observe à la figure 4.22 de gauche, où l'on montre le spectre calculé avec $N = 15$, $M = 20$ et $\omega = 1$.

Les cinq valeurs propres les plus élevées ont une partie réelle de l'ordre de -10^{-14} , or la précision machine de MATLAB est d'environ 10^{-16} , elles sont donc nulles. Les autres λ ont une partie réelle très proche du taux imposé.

Exemple 20 On peut faire le même calcul en prenant un S trop petit ($S = 10^{-1}$).

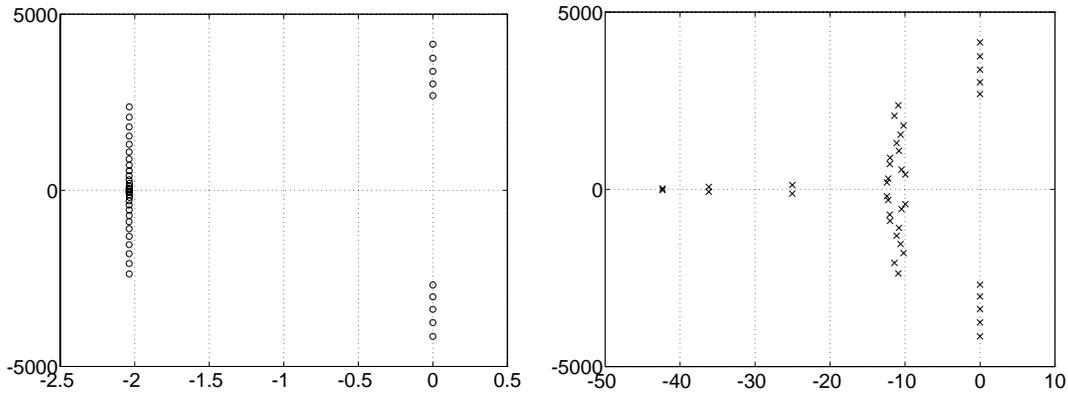


FIG. 4.22 - λ pour $N < M$ et $\omega = 1$: à gauche $S = 1$ et à droite $S = 10^{-1}$.

On observe à la figure 4.22 de droite le même phénomène que lorsque l'on avait $N = M$. Les $Re(\lambda)$ sont très inférieures à -2ω et ce sont celles qui ont les parties imaginaires les plus petites.

4.5.5 Convergence de μ en fonction de M

Pour un pas de maillage $h = 1/400$, on étudie la convergence de l'abscisse spectrale en fonction du nombre de modes M de la réponse vers sa valeur exacte. On calcule donc l'erreur relative :

$$\varepsilon_M = |\mu_M - \mu_\infty| / |\mu_\infty|. \quad (4.5.46)$$

Comme on ne sait pas calculer l'abscisse spectrale, on prend comme valeur exacte $\mu_\infty = \mu_{200}$. On se fixe un temps d'observation assez grand pour les valeurs de ω que l'on va considérer. Par exemple $S = 1$ est suffisant d'après les tests précédents.

Exemple 21 La figure 4.23 de gauche montre en coordonnées logarithmiques la variation de ε_M en fonction de M pour $\omega = 1, 5$ et 10 .

On observe que plus ω est grand et plus on est proche de la valeur exacte pour un nombre de modes faible. Plus le taux imposé est élevé et plus l'erreur est faible pour un même nombre de modes.

Néanmoins il existe un ω critique à partir duquel l'erreur obtenue réaugmente.

Exemple 22 La figure 4.23 de droite, où l'on représente la variation de ε_{100} en fonction de ω montre que c'est $\omega = 10$.

4.5.6 Conclusion

- il existe une valeur critique de S au dessous de laquelle, quelques soient les valeurs de ω , on obtient des fréquences trop grandes, c'est-à-dire un taux

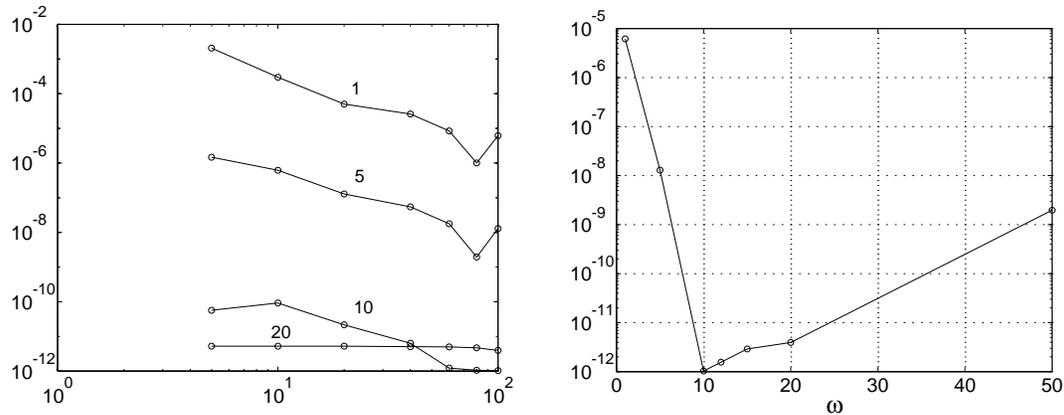


FIG. 4.23 - Variation de ε_M en fonction de M pour $\omega = 1, 5, 10$ et 20 (à gauche) et ε_{100} en fonction de ω (à droite).

plus élevé que celui voulu. Au-delà de cette valeur critique, plus S et ω sont élevés et plus on est proche de 2ω .

- le S critique est le même que celui que l'on a calculé dans l'étude de la fonctionnelle de Liapunov.
- en fait, le paragraphe 4.11 va confirmer ces résultats puisqu'il va nous donner une relation entre ω et S semblable :

S est inversement proportionnelle à ω .

- l'étude du spectre permet de façon simple d'exhiber le S critique. Elle permet de connaître la vitesse de décroissance de la fonctionnelle de Liapunov ainsi que celle de la norme \mathcal{H} quant le S est assez grand.
- de même, on peut prévoir l'augmentation de la norme \mathcal{H} , pendant un certain temps, quant ω est trop grand.

En effet, on observe alors que tous les modes, sans exception, sont stabilisés exactement au taux exact imposé; or on sait que c'est la raison principale de ce comportement, comme le montre en particulier dans le paragraphe 4.7 traitant du spill-over.

- pour une comparaison du spectre avec des valeurs petites de ω , on se référera au paragraphe 4.5.

On observe la propriété caractéristique suivante : à la différence des cas où ω est petit, tous les modes sont stabilisés avec le même taux,

Exemple 23 comme on peut le vérifier à la figure 4.24.

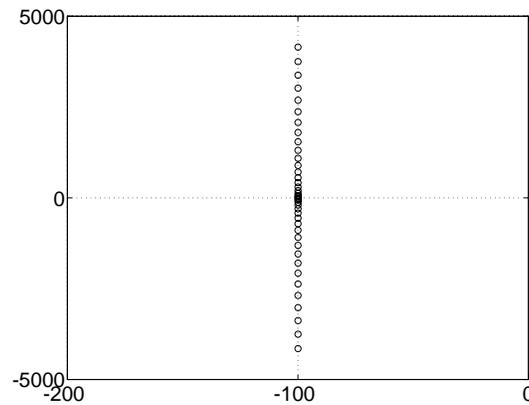


FIG. 4.24 - *Fréquences vibratoires pour $\omega = 50$.*

Une façon de rendre encore plus visible cette caractéristique consiste à normaliser le spectre par la valeur absolue de la fréquence maximum. Par ce procédé, on élimine l'effet d'échelle ce qui permet de comparer plus facilement la variation des fréquences mesurées pour des valeurs de ω très différentes.

Exemple 24 À la figure 4.25, on peut ainsi observer que le spectre pour $\omega = 1$ est bien plus irrégulièrement distribué autour de -1 que celui pour $\omega = 50$.

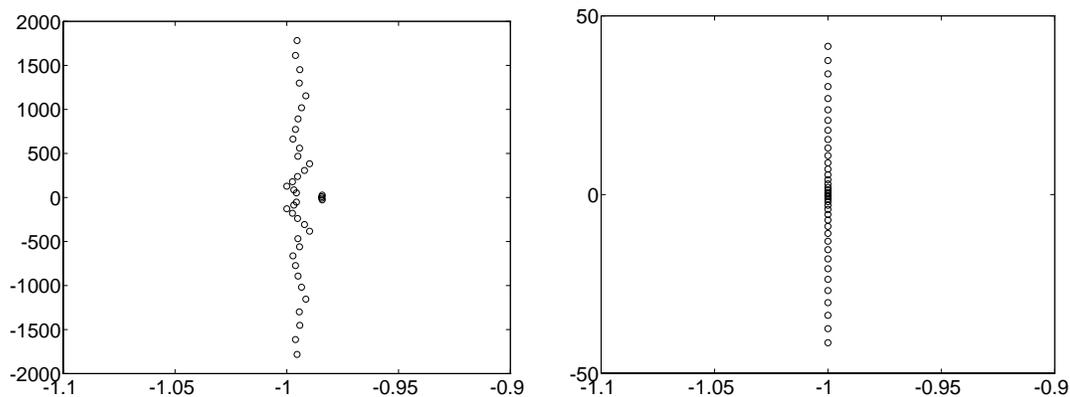


FIG. 4.25 - *Fréquences vibratoires normalisées pour $\omega = 1$ (à gauche) et pour $\omega = 50$ (à droite).*

4.6 Loi de rétroaction

Le plan de ce paragraphe est le suivant :

- on indiquera quel est le nombre de modes nécessaire et suffisant pour calculer le contrôle pour un nombre de modes donné de la réponse.

- on comparera à l'aide d'un exemple très simple la différence essentielle qu'il y a entre les deux versions de la loi de rétroaction. Pour une étude plus approfondie de la version nouvelle, on se reportera au paragraphe 4.11.
- en ce qui concerne l'augmentation de la loi de rétroaction à l'instant initial, on se référera au paragraphe 4.4 pour les valeurs de ω élevées. Par contre, on va étudier le sup sur $[0, T]$ de la loi de rétroaction en fonction du taux de convergence imposé. On montrera en particulier que pour des valeurs assez grandes de ω , il est atteint à l'instant initial. Il y a donc un lien qui n'était pas a priori évident, entre cette valeur et l'étude de la loi de rétroaction pour des taux élevés.
- on étudiera ensuite la dépendance de ce sup vis-à-vis de S .
- enfin, on vérifiera que la valeur absolue de la loi de rétroaction a le même taux de décroissance exponentiel que la fonctionnelle de Liapunov. On calculera la constante intervenant dans la majoration exponentielle. Ces résultats sont très utiles pour la compréhension de la décroissance exponentielle de la fonctionnelle de Liapunov (voir le paragraphe 4.2).

4.6.1 Choix du nombre de modes

1. $N < \tilde{N}$

Une première contrainte évidente est que l'on doit avoir, comme pour le contrôle $N \geq \tilde{N}$ (voir le paragraphe 2 du chapitre 1). Donnons un exemple frappant de cette propriété.

Exemple 25 On se fixe les valeurs suivantes des paramètres :

$$\omega = 1, \quad T = S = 1, \quad M = 5, \quad Nt = 10^3 \quad (4.6.47)$$

avec pour données initiales:

$$\alpha_i(t = 0) = \delta_{i4}, \quad \alpha'_i(t = 0) = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, M]. \quad (4.6.48)$$

Enfin, on utilise trois modes seulement pour le calcul de la loi de rétroaction. On a donc $N < \tilde{N}$.

Comme on le voit de façon spectaculaire à la figure 4.26 de gauche, c'est catastrophique.

Par contre, le résultat est très différent pour $N = \tilde{N}$ (figure 4.26 de droite).

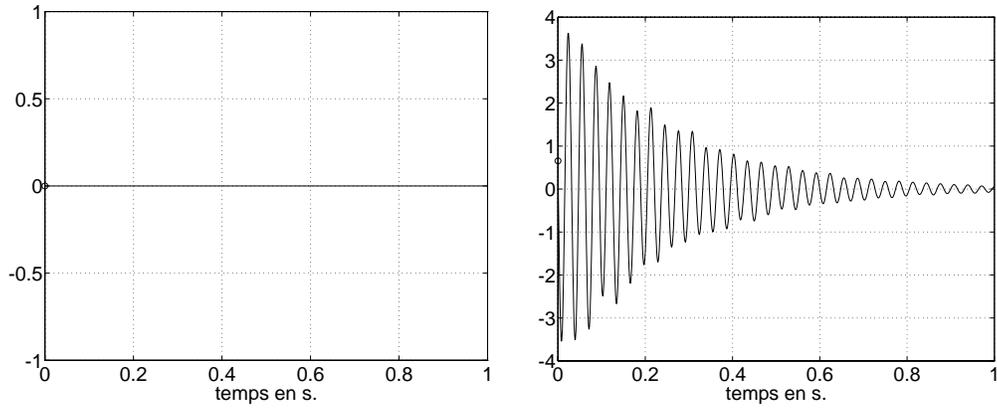


FIG. 4.26 - Loi de rétroaction pour $N < \tilde{N}$ (à gauche) et pour $N = \tilde{N}$ (à droite).

$$N \geq M$$

Exemple 26 On conserve les mêmes données que précédemment, excepté N qui vaut M .

Le graphe obtenu à la figure 4.27 est sensiblement différent de celui obtenu pour $N = 4$.

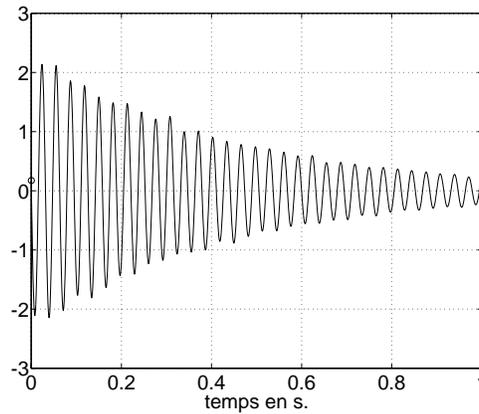


FIG. 4.27 - Loi de rétroaction pour $N \geq M$.

Il faut donc prendre au moins un même nombre de modes pour le calcul de la loi de rétroaction que pour celui de la réponse. Mais on a la propriété fondamentale suivante:

Propriété 4.2

$$\forall t > 0, \forall N, M \text{ entiers } > 0, \quad v_{N,M}(t) = v_{N,N}(t). \quad (4.6.49)$$

DÉMONSTRATION : . □

Par conséquent, il est inutile de prendre $N > M$, $N = M$ est suffisant.

D'après cette dernière propriété, on peut donc en déduire que le *spill-over* n'est pas créé par une approximation trop faible de la loi de rétroaction mais par le calcul de la réponse à l'aide de la formulation semi-très faible.

Par contre il est clair, comme on l'a montré lors de l'étude de la norme \mathcal{H} , qu'il faut prendre exactement $N = M$ si l'on veut stabiliser tous les modes de la réponse.

4.6.2 Comparaison des différentes versions de la loi de rétroaction

On fera une étude plus complète de la loi de rétroaction modifiée dans le paragraphe 4.11.

Exemple 27 Puisque la différence entre les deux versions est d'autant plus grande que le taux imposé est petit, nous allons prendre $\omega = 10^{-1}$ afin de mieux les distinguer.

On les compare à la figure 4.28 de gauche où l'on prend $S = T = 1$ pour la première version; tandis qu'à celle de droite, $S = T + 1/(2\omega)$.

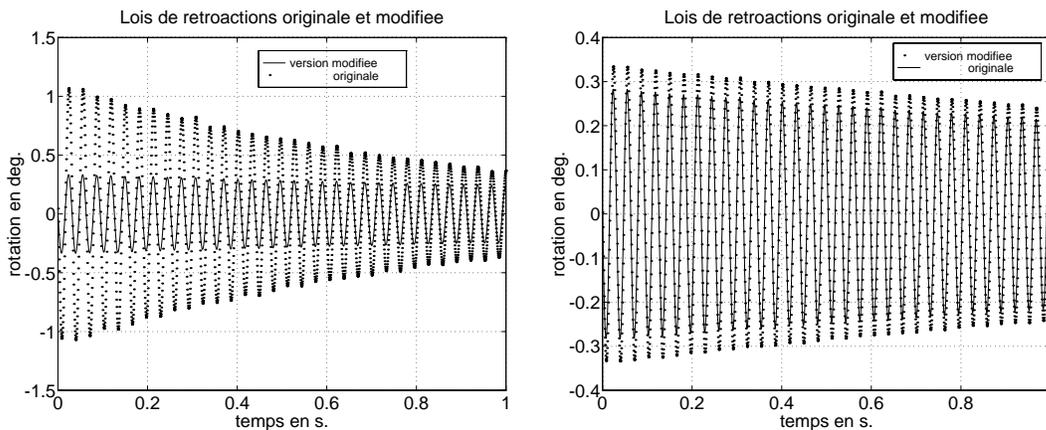


FIG. 4.28 - Différence entre la version primitive et la version modifiée pour $S = T = 1$ (à gauche) et $S = T + 1/(2\omega)$ (à droite).

Ceci illustre bien que la différence essentielle entre les deux versions réside dans la valeur de S qui est fonction de ω dans la seconde loi.

4.6.3 Étude de $\|v_{N,M}\|_{L^\infty(0,T)}$ en fonction de ω

On étudie la variation de $\|v_{N,M}\|_{L^\infty(0,T)}$ en fonction de ω (figure 4.29 de gauche), ainsi que le temps t_{sup} pour

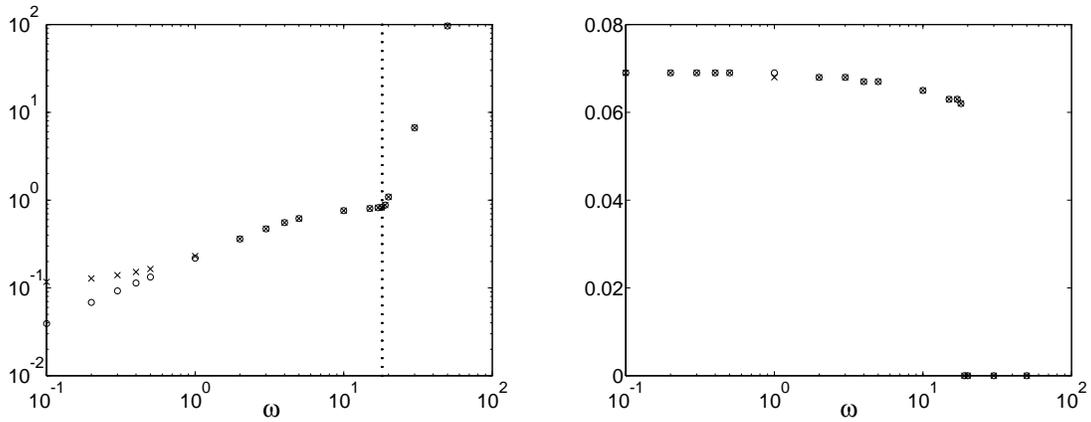


FIG. 4.29 - Variation de $\|v_{N,M}\|_{L^\infty(0,T)}$ en fonction de ω (à gauche) et $t_{sup}(\omega)$ (à droite).

On a superposé les résultats pour la version usuelle (avec $S = T = 1$) et la version modifiée.

Les résultats sont identiques dans les deux cas, sauf pour le maximum avec les ω petits. Pour la version modifiée, plus ω est petit et plus le maximum atteint est faible, alors que pour la version usuelle, la décroissance vers zéro est moins importante.

Le phénomène remarquable, observé pour les deux versions, est l'existence d'une valeur critique de ω , que l'on note ω_{sup} (et qui vaut dans notre exemple 18), pour laquelle t_{sup} passe d'une valeur strictement positive ($7 \cdot 10^{-2}$ pour les deux versions) pour $\omega < \omega_{sup}$, à zéro pour $\omega \geq \omega_{sup}$.

On remarque enfin que c'est pour cette même valeur que la $\|v_{N,M}\|_{L^\infty(0,T)}$ explose (voir figure 4.29 de gauche).

Remarque 4.11 L'existence de ω_{sup} et t_{sup} est indépendante des données initiales du problème, par contre les valeurs de ces deux quantités sont différentes selon les données initiales, mais restent du même ordre de grandeur.

Exemple 28 Ces propriétés sont également vérifiées pour la version de la loi de rétroaction de Komornik en déplacement transverse, comme on peut le voir à la figure 4.30.

On donne les résultats uniquement pour la version modifiée. On a cette fois-ci $\omega_{sup} = 5$ et $t_{sup} = 0.16$.

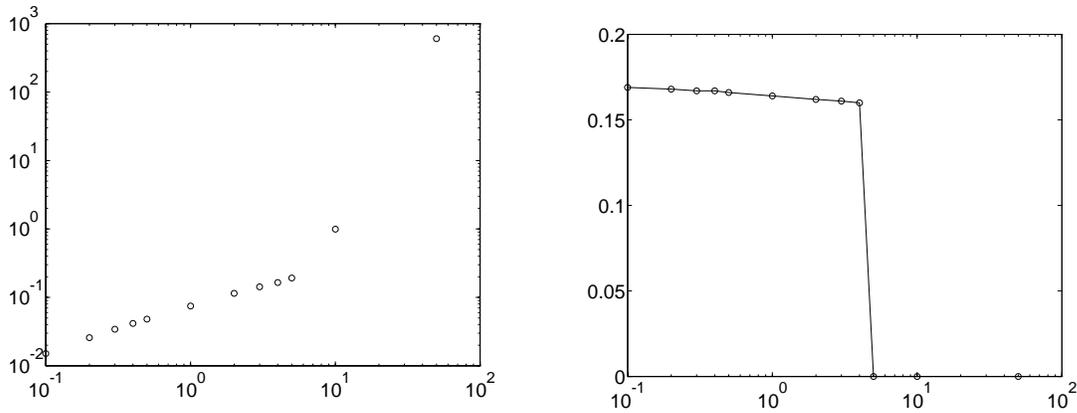


FIG. 4.30 - *Idem figure précédente mais pour un actionneur en déplacement et seulement pour la version modifiée.*

4.6.4 Variation de la loi de rétroaction en fonction de S

Dans la version usuelle, comme on l'a déjà remarqué, le choix de S est crucial. On va conserver les paramètres précédents à l'exception des données initiales que l'on fixe ainsi :

$$\alpha_i(t=0) = \frac{0.1}{i^{2.6}}, \quad \alpha'_i(t=0) = 0, \quad \forall i = [1, \dots, M]. \quad (4.6.50)$$

et évidemment de S que l'on fait varier.

On observe un phénomène important compte tenu des réflexions faites dans l'introduction :

on a augmentation de la valeur en zéro de la loi de rétroaction de façon inversement proportionnelle à S .

Remarque 4.12 Ces résultats sont cohérents avec la valeur de S qui est imposée dans la version modifiée.

Exemple 29 C'est ce que l'on peut voir à la figure 4.31 où l'on représente l'évolution de la loi de rétroaction pour $S = 10^{-1}$.

On étudie maintenant l'évolution de la valeur à l'instant initial de la loi de rétroaction en fonction de S .

Exemple 30 On a tracé en coordonnées logarithmiques, à la figure 4.32, sa valeur absolue, pour $\omega = 1$ (en pointillé) et pour $\omega = 10$ (en trait plein), en indiquant par un rond les valeurs correspondants à $S = 1 + 1/(2\omega)$.

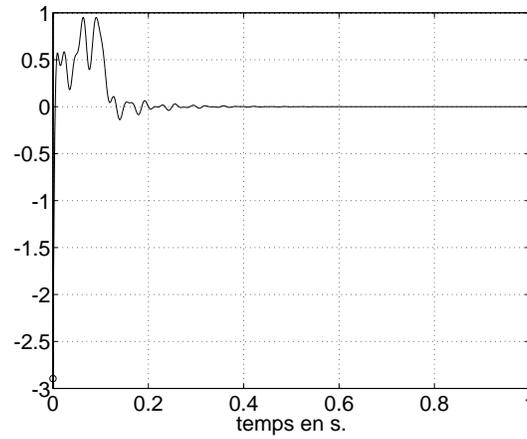


FIG. 4.31 - Contrôle pour $S = 10^{-1}$.

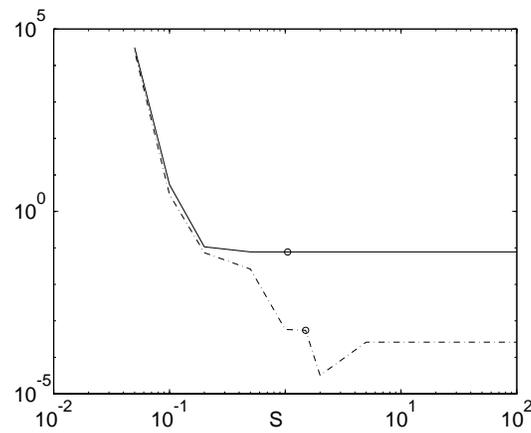


FIG. 4.32 - Variation de la valeur initiale de la valeur absolue de la loi de rétroaction en fonction de S pour $\omega = 1$ (en pointillé) et 10 (en trait plein).

On peut faire quelques observations :

- pour S trop petit, il y a explosion de la valeur initiale. Le S minimum critique est identique pour les deux taux et vaut $2 \cdot 10^{-1}$.
- la valeur initiale de la loi de rétroaction converge en fonction de S vers $-2,6 \cdot 10^{-4}$ pour $\omega = 1$, et vers $-7,8 \cdot 10^{-2}$ pour $\omega = 10$.
- la valeur du S utilisée par la version modifiée est très proche de la valeur asymptotique.
- pour $\omega = 10$, cette valeur correspond à la valeur asymptotique, ce qui n'est pas exactement le cas pour $\omega = 1$.

4.6.5 Encadrement exponentiel

Étant donné le résultat du paragraphe 4.2 qui montre que le carré de la loi de rétroaction décroît exponentiellement en 4ω (voir figure 4.3 de droite), il est clair que l'on peut majorer la valeur absolue de la loi exponentiellement avec un taux de 2ω . Cette majoration va nous permettre d'estimer plus précisément l'équivalence entre le terme négligé (le carré de la loi de rétroaction plus un terme supplémentaire dont nous discuterons plus tard) et $-2\omega\tilde{E}_{N,M}(t)$.

On veut donc calculer la constante B définie par la propriété suivante:

Propriété 4.3 $\forall \omega > 0, \forall S > 0, \forall \{y^1, y^0\} \in \mathcal{H}, \exists B(\omega, S, \{y^1, y^0\}) > 0$ tels que:

$$|v_{N,M}(t)| \leq B(\omega, S, \{y^1, y^0\})e^{-2\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (4.6.51)$$

Remarque 4.13 On effectue le calcul de B par un procédé itératif qui converge vers la constante avec une précision suffisante.

Exemple 31 On utilise les paramètres précédents, soit:

$$\omega = 1, \quad T = S = 1, \quad M = 5, \quad Nt = 10^3, \quad (4.6.52)$$

et avec les données initiales (4.6.50).

La figure 4.33 de gauche montre la variation de B en fonction de ω en coordonnées semi-logarithmiques.

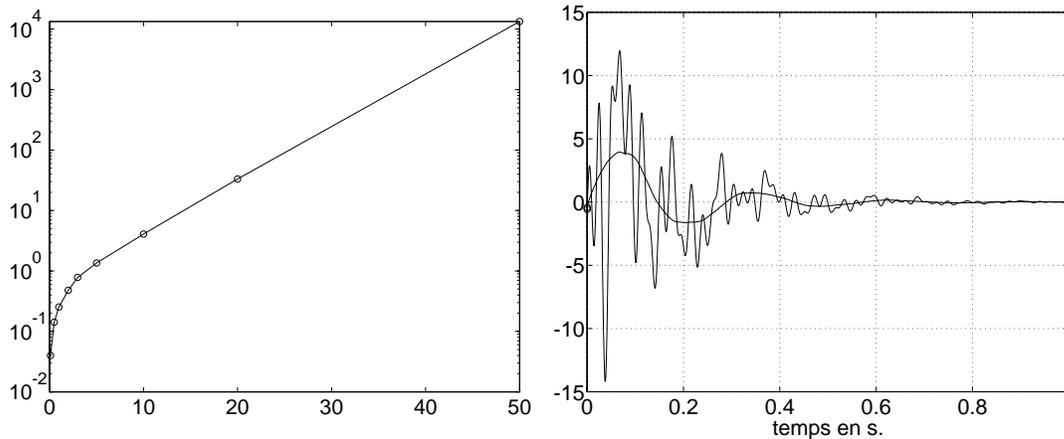


FIG. 4.33 - Variation de C en fonction de ω (à gauche) et lois de rétroactions calculées avec des données initiales de régularités différentes (à droite).

On observe qu'elle augmente très vite au voisinage de 1 avant de se stabiliser aux environs de $\omega = 5$.

Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus précédemment; notamment avec le fait que $\|v_{N,M}\|_{L^\infty(0,T)}$ atteint son sup en zéro pour des ω grands. En effet, cela explique que la pente de B est constante pour ω assez grand.

De manière intuitive, on peut dire que plus le sup est atteint en un point éloigné de zéro et plus B est grand.

On vérifie ensuite que B dépend des données initiales à la figure 4.33 de gauche où l'on a superposé les historiques de deux lois de rétroactions calculées avec des données initiales de régularités différentes.

La plus régulière correspond aux données initiales définies en (4.6.50) et la plus irrégulière aux données initiales suivantes :

$$\alpha_i(t=0) = \alpha'_i(t=0) = 1, \quad \forall i = [1, \dots, M]. \quad (4.6.53)$$

On voit que pour les données initiales les plus irrégulières la constante est beaucoup plus grande.

Exemple 32 On représente, à la figure 4.34 de gauche, l'évolution de la loi de rétroaction sur l'intervalle de temps $[0, 0.15]$.

On observe qu'à la différence des ω petits l'amplitude à l'instant initial de la loi de rétroaction est très importante.

Remarque 4.14 On se reportera au paragraphe 4.12 pour une première solution de ce type de problème.

Exemple 33 On montre, à la figure 4.34 de droite, l'augmentation en fonction de ω de la valeur à $t = 0$ de la loi de rétroaction.

Comme on prend des valeurs de ω grandes il n'y a pas de différence entre les deux versions de la loi de rétroaction, sauf pour la valeur la plus petite $\omega = 1$. On observe qu'il y a une augmentation d'un facteur deux entre la valeur mesurée pour $\omega = 1$ et celle pour $\omega = 10$.

Ces résultats sont cohérents avec la propriété remarquable concernant les valeurs de ω grandes, c'est-à-dire l'augmentation avec ω des valeurs des modes de fréquences élevées de la réponse et de la vitesse au voisinage de $t = 0$.

En effet, rappelons que l'on a pour expression projetée sur V_N de la loi de rétroaction :

$$v_{N,M}(t) = \sum_{k=1}^N \left(\beta_{N,M}^0(t) \right)_k m_k \quad (4.6.54)$$

avec

$$\beta_{N,M}^0(t) = K_{\omega,N}^{DD} P^{N,M} \left(\alpha'_{M,N}(t) \right) + K_{\omega,N}^{DV} P^{N,M} \left(-\alpha_{M,N}(t) \right). \quad (4.6.55)$$

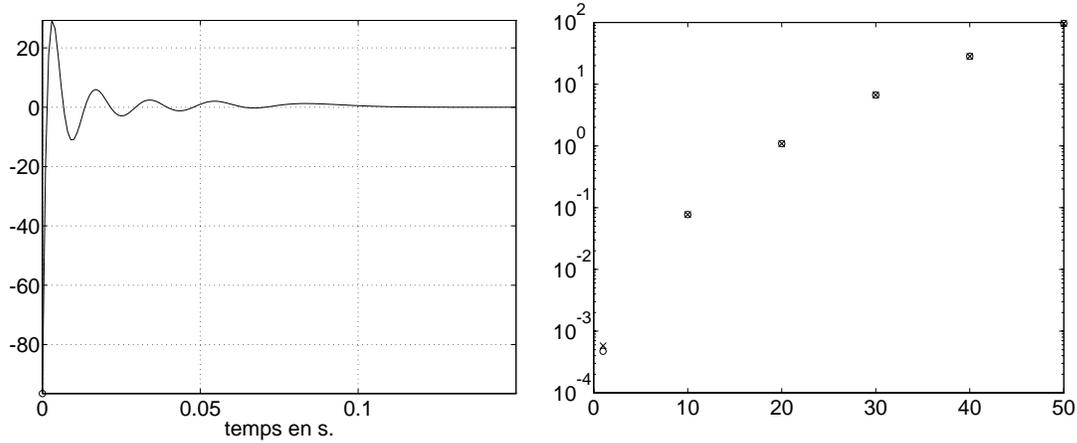


FIG. 4.34 - *Historique de la loi de rétroaction sur $[0, 0.15]$ (à gauche) et $v(t = 0)$ en fonction de ω (à droite).*

Or on a la propriété suivante :

Propriété 4.4

$$\forall M > 0, \forall 1 \leq k \leq M, \quad m_k = O(k^2). \quad (4.6.56)$$

DÉMONSTRATION :

On obtient à l'Annexe F, l'expression du moment m_k en fonction des modes et des fréquences de la poutre, d'où il découle que :

$$|m_k| = O\left(\sqrt{\lambda_k}\right), \quad (4.6.57)$$

or on peut montrer que les fréquences de la poutre encastree vérifient :

$$\sqrt{\lambda_k} = O(k^2), \quad (4.6.58)$$

ce qui permet de conclure. \square

Donc d'après la remarque précédente, on a bien augmentation de $v_{N,M}$ à l'origine si la valeur des $\{\alpha_{M,N}(t), \alpha'_{M,N}(t)\}$ augmente en zéro pour les modes élevés.

4.7 Spill-over

On désire vérifier dans ce paragraphe qu'il est bien nécessaire de prendre un nombre de modes du contrôle N au moins égal au nombre de modes M utilisés

pour le calcul de la réponse.

On note, comme dans le chapitre 1, \tilde{N} le nombre de modes excités de la réponse à l'instant initial. Ce nombre \tilde{N} peut évidemment être différent de M .

Rappelons enfin que l'on a montré que l'on obtient la même valeur de la fonctionnelle de Liapunov pour $N \neq M$ que pour $N = M$. On étudiera donc uniquement la norme \mathcal{H} et l'énergie mécanique associées au problème de stabilisation ainsi que la réponse de la poutre. La loi de rétroaction étant calculée avec N modes, elle agit donc seulement sur les N modes de la réponse (voir paragraphe 4.2).

Étant donné la méthode de calcul de la réponse, les modes plus élevés sont excités mais non stabilisés. Nous allons donc étudier une réponse calculée avec un nombre de modes plus élevés que celui utilisé pour le calcul de la loi de rétroaction.

On va distinguer deux cas :

- soit la réponse est excitée à l'instant initial pour un nombre de modes plus faible que celui de la loi de rétroaction,
- soit la réponse à tous ses modes excités initialement.

Pour le premier type de réponse, on calculera la variation du spill-over en fonction du nombre de modes de la réponse.

On va étudier en particulier l'influence des modes non observés sur le taux imposé.

Exemple 34 Vérifions tout d'abord que la loi de rétroaction n'agit pas sur le sixième mode en regardant le spectre correspondant à notre problème.

On voit à la figure 4.35 que les valeurs propres ont toutes leurs parties réelles proches du taux imposé, en réalité deux fois le taux, comme on l'a déjà souligné, à l'exception d'une seule qui a une partie réelle nulle et qui correspond au mode non observé.

4.7.1 Cas où $\tilde{N} < N$

Dans ce paragraphe, la réponse est excitée à l'instant initial pour un nombre de modes plus faible que celui de la loi de rétroaction.

Les N premiers modes de la réponse seront donc excités à l'instant $t = 1/(Nt + 1)$ et stabilisés au taux voulu. Par contre, les modes supérieurs n'étant eux pas stabilisés vont être excités. L'apport énergétique le plus important des modes non stabilisés provenant du $(N + 1)$ ième mode, c'est lui qui va contribuer essentiellement à ce que l'énergie ne décroisse plus au bout d'un certain temps.

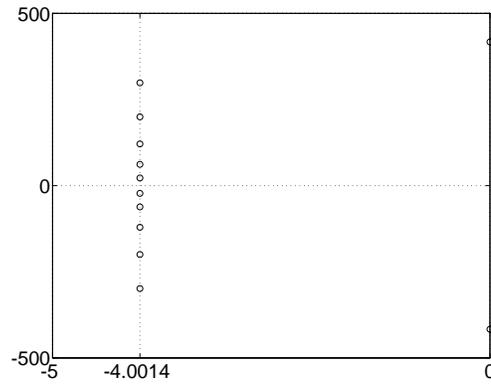


FIG. 4.35 - *Spectre pour $\omega = 2$.*

On prend les paramètres suivants :

$$N = 5, M = 20, T = S = 2, Nt = 2.10^3, \quad (4.7.59)$$

et les données initiales :

$$\alpha_i(t = 0) = \alpha'_i(t = 0) = \delta_{i1}, \quad \forall i = [1, \dots, M]. \quad (4.7.60)$$

On a donc $\tilde{N} = 1 < N$.

Exemple 35 On représente à la figure 4.36 de gauche (resp. de droite) l'historique de la norme \mathcal{H} (resp. de l'énergie mécanique) pour ω valant successivement 2, 5 et 10.

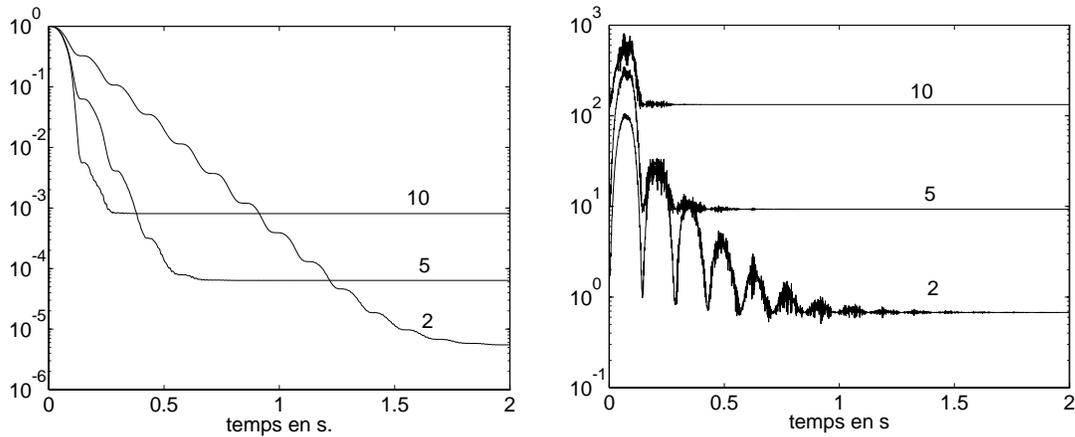


FIG. 4.36 - *Pour $\omega = 2, 5$ et 10 , norme \mathcal{H} (à gauche) et énergie mécanique (à droite).*

Au premier abord, il peut paraître paradoxal que l'on ait une énergie d'autant plus grande que le taux de décroissance imposé soit grand.

Remarque 4.15 Pour l'énergie mécanique, cette augmentation est encore plus importante. Ce n'est pas surprenant, étant donné que cette norme agit sur les modes de la réponse et de la vitesse avec un facteur multiplicatif λ_i supplémentaire par rapport à la norme \mathcal{H} .

L'explication réside dans la propriété remarquable observée précédemment suivante : plus ω est élevé et plus les modes de la réponse sont excités au voisinage de l'origine, même ceux qui ne le sont pas initialement (voir propriété 4.4). Par conséquent, la loi de rétroaction n'ayant pas d'action sur ces modes, l'apport énergétique est d'autant plus grand.

Exemple 36 C'est bien ce que l'on observe comparativement à la figure 4.37 où l'on représente l'évolution du mode non stabilisé de la réponse pour $\omega = 2$ (à gauche) et $\omega = 10$ (à droite).

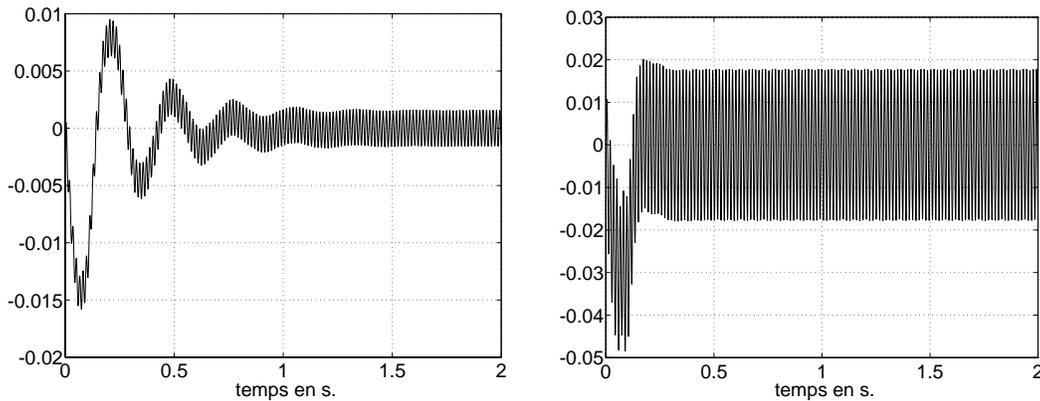


FIG. 4.37 - *Sixième mode de la réponse pour $\omega = 2$ (à gauche) et pour $\omega = 10$ (à droite).*

Exemple 37 C'est encore plus flagrant si l'on regarde l'historique de la réponse.

À la figure 4.38, on voit que la pollution provoquée par le sixième mode est beaucoup moins importante pour $\omega = 2$ (figures du haut) que pour $\omega = 10$ (figures du bas), où déjà à $t = 0.5$ seconde, la réponse a l'allure du sixième mode.

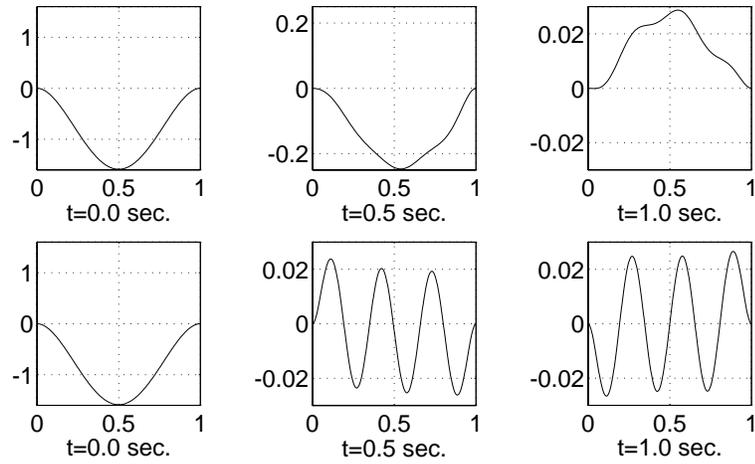


FIG. 4.38 - *Historique de la réponse pour $\omega = 2$ (en haut) et $\omega = 10$ (en bas).*

On étudie maintenant une réponse exacte, c'est-à-dire calculée avec un nombre infini de modes ($M_\infty = 100$ dans notre exemple).

Exemple 38 La figure 4.39 de gauche montre la norme \mathcal{H} d'une réponse calculée avec successivement 6, 10 et 100 modes à laquelle on impose un taux de décroissance exponentielle de 10.

On observe que, quelque soit le taux imposé ω , la valeur minimale de la norme \mathcal{H} augmente peu.

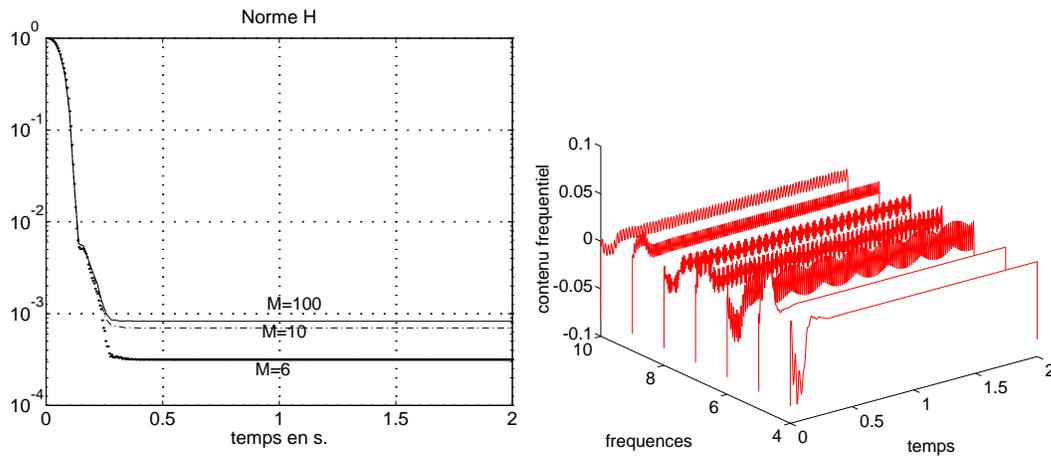


FIG. 4.39 - *À gauche (resp. droite) Norme \mathcal{H} (resp. spectrogramme de la réponse) pour $\omega = 10$ avec une réponse calculée successivement avec 6, 10 et 100 modes.*

Si l'on prend $N = 10$ on voit que l'on est déjà très proche de la norme \mathcal{H} de la

réponse exacte calculée pour $N = 100$ modes.

Exemple 39 À la figure 4.39 de droite, on représente le spectrogramme de la réponse pour les modes 4 à 10.

On peut ainsi vérifier que les modes non contrôlés sont tous excités et ont tous une amplitude de l'ordre de 10^{-2} . L'écrasement des hautes fréquences par la norme du problème fait que leurs contributions à l'augmentation de la norme est négligeable.

À la lumière de ces premiers résultats on peut donc conclure qu'il n'y a pas de transfert énergétique des basses fréquences vers les hautes fréquences.

4.7.2 Cas où $\tilde{N} = M$

On a les mêmes paramètres que ci-dessus, sauf les données initiales qui valent cette fois-ci :

$$\begin{cases} \alpha_i(t=0) = 1, & \forall i = [1, \dots, M] \\ \alpha'_i(t=0) = \begin{cases} 1, & \forall i \in \{1, 3, 5\} \\ 0, & \forall i \in \{2, 4, 6\} \end{cases} \end{cases} \quad (4.7.61)$$

Puisque $\tilde{N} = M = 6$ et que $N < M$, il est prévisible que les résultats vont être encore moins bons que dans le cas où $\tilde{N} < N < M$.

Exemple 40 C'est bien ce que l'on observe à la figure 4.40 de gauche (resp. de droite) où l'on a représenté l'évolution de la norme \mathcal{H} (resp. de l'énergie mécanique) sur l'intervalle de temps $(0, 1)$, pour les mêmes valeurs de ω croissantes que dans la figure 4.36.

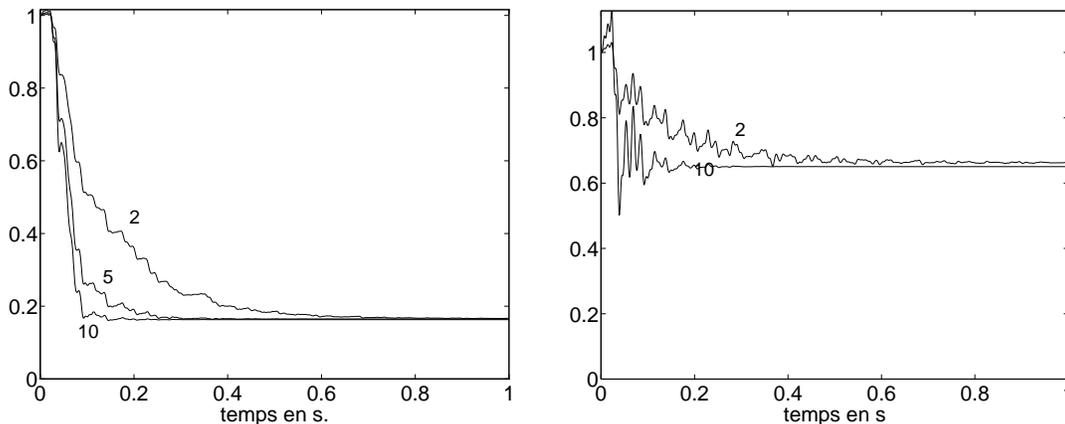


FIG. 4.40 - Norme \mathcal{H} pour $\omega = 2, 5$ et 10 (à gauche) et 'énergie mécanique pour $\omega = 2$ et 10 (à droite).

Tout d'abord, ces résultats nous montrent, ce qui était prévisible, que la norme \mathcal{H} ainsi que l'énergie mécanique, converge vers une valeur plus grande que celle obtenue avec $\tilde{N} < N$. On remarque de plus que indépendamment du taux imposé, elles convergent vers la même valeur. A contrario du cas précédent, leurs décroissances augmentent avec ω .

L'explication en est simple. Dans le cas précédent, le sixième mode n'était pas excité à l'état initial, il était donc d'autant plus excité que le taux était élevé pour la raison que l'on a déjà donnée.

Dans notre exemple, ce mode étant excité à l'origine et non stabilisé par la suite, il vibre donc de façon constante par la suite et ceci quelque soit la valeur de ω , comme on peut le vérifier à la figure 4.41 où l'on a le représenté le sixième mode de la réponse pour $\omega = 2$ et $\omega = 10$.

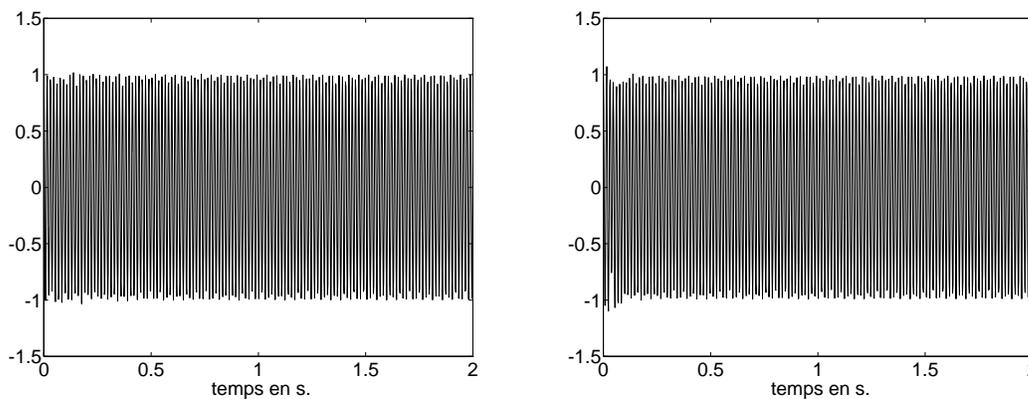


FIG. 4.41 - *Sixième mode de la réponse pour $\omega = 2$ (à gauche) et pour $\omega = 10$ (à droite).*

Exemple 41 On regarde maintenant l'évolution de la réponse pour $\omega = 2$ et pour $\omega = 10$.

À la différence du cas où $\tilde{N} < N$, la pollution modale touche autant, et même légèrement plus, $\omega = 2$, que $\omega = 10$, comme on peut le voir à la figure 4.42, où l'on observe que les deux réponses sont contaminées par le sixième mode.

Exemple 42 Finalement, comme pour $\tilde{N} < N$, on calcule la norme \mathcal{H} d'une réponse calculée avec successivement 6, 20 et 200 modes, à laquelle on impose un taux de décroissance exponentielle de 10.

Ce test montre clairement (figure 4.43) qu'il n'y a pas de spill-over avec le nombre M de modes de la réponse.

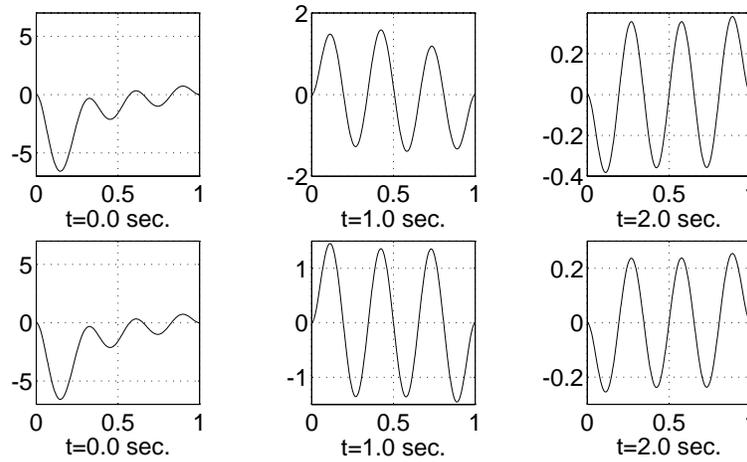


FIG. 4.42 - Historique de la réponse pour $\omega = 2$ (en haut) et $\omega = 10$ (en bas).

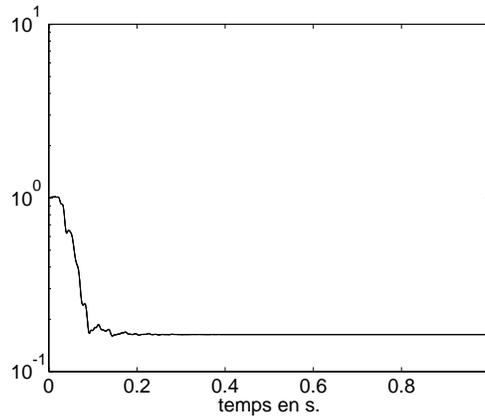


FIG. 4.43 - Norme \mathcal{H} pour $\omega = 10$ avec une réponse calculée successivement avec 6, 20 et 200 modes.

4.8 Convergence des énergies à $t = T$ en fonction de $M = N$

On étudie la convergence en fonction du nombre de modes de la norme \mathcal{H} et de la fonctionnelle de Liapunov. On se fixe les paramètres suivants :

$$\omega = 1, \quad T = S = 1, \quad h = 2,5 \cdot 10^{-3}, \quad Nt = 10^3, \quad M_\infty = 2 \cdot 10^2 \quad (4.8.62)$$

et les données initiales :

$$\alpha_i(t = 0) = \frac{0.1}{i^{2.6}}, \quad \alpha'_i(t = 0) = 0, \quad \forall i = [1, \dots, M]. \quad (4.8.63)$$

Rappelons les notations standards :

$$x(t) = \{y'(t), -y(t)\}, \quad z(t) = \{\varphi^0(t), \varphi^1(t)\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.8.64)$$

A priori, on n'a pas de résultats de convergence avec $N \neq M$, aussi on prend $N = M$ et on note x_M (resp. z_M) pour $x_{M,M}$ (resp. $z_{M,M}$). On définit alors les erreurs relatives suivantes :

Définition 4.4

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \frac{\|x_M(t) - x(t)\|_{\mathcal{H}}}{\|x(t)\|_{\mathcal{H}}}. \\ \Psi(t) &= \frac{a_{\omega}(\{z_M(t) - z(t)\}, \{z_M(t) - z(t)\})}{a_{\omega}(z(t), z(t))}.\end{aligned}\tag{4.8.65}$$

Exemple 43 On représente la convergence en fonction de M de $\chi(t)$ et $\Psi(t)$ à l'instant $t = T$ en échelle logarithmique à la figure 4.44.

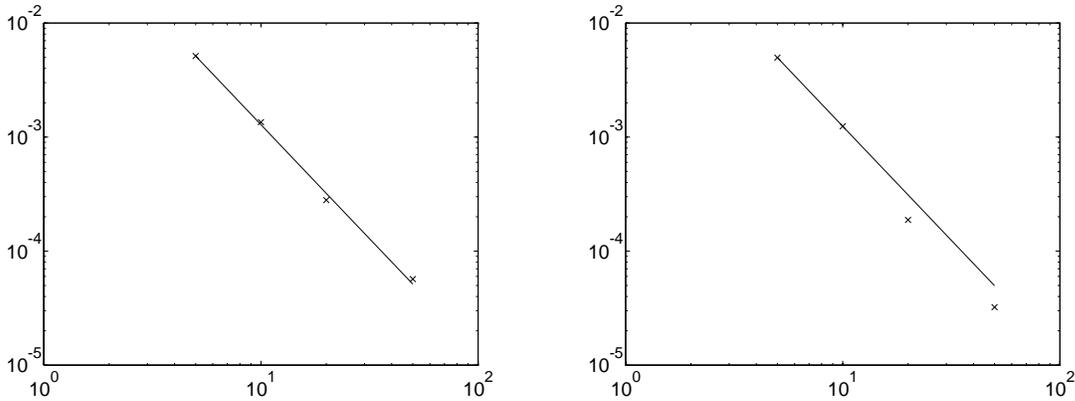


FIG. 4.44 - Convergence en fonction de M de $\chi(t)$ (à gauche) et $\Psi(t)$ (à droite) à $t = T$.

On a superposé à chacune des courbes la fonction $\frac{1}{N^2}$. On observe une bonne concordance entre les erreurs et cette fonction.

4.9 Schéma de Newmark

4.9.1 Introduction

Les schémas de Newmark constituent la famille de *méthodes directes* la plus largement utilisée pour résoudre des problèmes semi-discrets du type

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F.\tag{4.9.66}$$

À partir de ce problème *semi-discret*, obtenu en général après discrétisation par éléments finis de la formulation variationnelle déduite de l'équation à résoudre,

on applique des formules de différences finies décrivant l'évolution de la solution approchée, ce qui nous permet de calculer par récurrence, à partir des données initiales approchées, les termes approchés suivants.

4.9.2 Algorithme de Newmark

On part de l'équation du mouvement semi-discrète (4.9.66) où M est la matrice de masse, C la matrice d'amortissement visqueux, K la matrice de raideur, F est le vecteur des forces appliquées, et d , \dot{d} et \ddot{d} sont les vecteurs déplacement, vitesse et accélération respectivement. On suppose que M , C et K sont symétriques, M est définie positive et C et K sont semi-définies positives.

Le problème de Cauchy pour (4.9.66) consiste à trouver le déplacement $d = d(t)$ satisfaisant (4.9.66) et les données initiales :

$$d(0) = d_0, \quad \dot{d}(0) = v_0 \quad (4.9.67)$$

La famille de Newmark consiste en les équations suivantes :

$$Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = F_{n+1} \quad (4.9.68)$$

et

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1}] \quad (4.9.69)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}] \quad (4.9.70)$$

où d_n , v_n et a_n sont les approximations de $d(t_n)$, $\dot{d}(t_n)$ et $\ddot{d}(t_n)$ respectivement.

L'équation (4.9.68) est simplement l'équation du mouvement exprimée en fonction des solutions approchées, et (4.9.68) et (4.9.70) sont des formules de différences finies décrivant l'évolution des solutions approchées.

Les paramètres β et γ déterminent les propriétés de stabilité et de précision de l'algorithme considéré. Les équations peuvent être vues comme trois équations qui déterminent les trois inconnues d_{n+1} , v_{n+1} et a_{n+1} sachant que d_n , v_n et a_n sont déterminées par l'étape de calcul précédent.

4.9.3 Implémentation *a-form*

Il existe de nombreuses implémentations possibles, nous considérons celle appelée *a-form*.

Définissons les *prédicteurs* :

$$\tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta)a_n \quad (4.9.71)$$

$$\tilde{v}_{n+1} = v_n + (1 - \gamma)\Delta t a_n \quad (4.9.72)$$

Les équations (4.9.68) et (4.9.70) peuvent alors être réécrites sous la forme :

$$d_{n+1} = \tilde{d}_{n+1} + \beta \Delta t^2 a_{n+1} \quad (4.9.73)$$

$$v_{n+1} = \tilde{v}_{n+1} + \gamma \Delta t a_{n+1} \quad (4.9.74)$$

$$(4.9.75)$$

Pour initier le calcul, a_0 peut-être calculé comme

$$Ma_0 = F - Cv_0 - Kd_0, \quad (4.9.76)$$

ou spécifié directement. La relation récursive qui détermine a_{n+1} est :

$$(M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K)a_{n+1} = F_{n+1} - C\tilde{v}_{n+1} - K\tilde{d}_{n+1}. \quad (4.9.77)$$

Les équations (4.9.73) et (4.9.74) sont alors utilisées pour calculer d_{n+1} et v_{n+1} respectivement.

4.9.4 Propriétés

Le schéma est *implicite* puisqu'à chaque pas de temps on doit résoudre un système d'équations pour calculer le pas de temps suivant, mais en réalité une seule factorisation est nécessaire tant que le pas de temps du schéma est constant.

Montrer qu'un tel algorithme est convergent revient à vérifier la *stabilité* et la *consistance* du schéma. En effet si ces deux propriétés sont vérifiées alors la convergence du schéma est automatique.

Après avoir rappelé pour quelles valeurs des paramètres β et γ du schéma ces propriétés sont vérifiées, et montrer par quelques exemples, ce qui peut se passer si on les choisit de façon arbitraire, on étudiera la *précision* du schéma, c'est-à-dire sa vitesse de convergence vis-à-vis du pas de temps imposé.

4.9.5 Conditions de stabilité

On rappelle que le schéma est *conditionnellement stable* si :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \text{ et } \beta < \frac{\gamma}{2}. \quad (4.9.78)$$

Dans ce cas, il existe une condition de stabilité :

$$\Delta t \leq \frac{\Omega_{crit}(\gamma, \beta)}{\lambda_M^h} \quad (4.9.79)$$

où λ_M^h est la plus grande valeur propre du problème aux valeurs propres associé à la structure stabilisée et $\Omega_{crit}(\gamma, \beta)$ est une fonction qui n'est pas définie si $\beta = \frac{\gamma}{2}$.

Cette condition s'avère vite une contrainte sévère dès que l'on considère des systèmes de grandes tailles, aussi nous nous placerons dans le cas *inconditionnellement stable*, c'est-à-dire :

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}. \quad (4.9.80)$$

Dans ce cas, il n'y a pas de restriction sur le pas de temps, et il n'y a pas d'amortissement visqueux, ce qui n'est pas le cas si $\gamma > \frac{1}{2}$. Pour plus de détails sur ces points techniques on pourra regarder le T.J.R. Hughes [47].

Nous avons choisi la méthode *inconditionnellement stable*, dite à accélération moyenne, pour laquelle :

$$\beta = \frac{\gamma}{2} \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}. \quad (4.9.81)$$

Cette méthode est la plus utilisée pour les applications de la dynamique structurale. Par ailleurs, du fait que l'on ne vérifie pas la condition $\gamma > \frac{1}{2}$, on n'introduit pas d'amortissement algorithmique des hautes fréquences.

Cette condition est nécessaire dans notre cas, puisque nous souhaitons avoir une représentation fidèle des hautes fréquences, ce qui n'est pas en général le cas de ceux qui pensent que :

”les modes élevés des équations structurelles semi-discrètes sont des artéfacts du processus de discrétisation et ne sont pas représentatifs du comportement des Edp qui gouvernent le système”

dixit T.J.R. Hughes [47] p. 498. Enfin la précision de cette méthode est d'ordre 2, comme d'ailleurs les autres méthodes de la famille des schémas de Newmark pour lesquelles $\gamma = \frac{1}{2}$.

4.9.6 Influence des paramètres du schéma sur la stabilisation

Tout d'abord précisons que l'on se fixe un Δt identique pour les calculs qui vont suivre ($\Delta t = 10^{-3}$).

Si l'on prend des valeurs de $\gamma \geq 2$ de plus en plus grandes, tout en conservant la relation $\beta = \frac{\gamma}{2}$, il n'y a pas de détérioration notable des résultats.

Par contre, pour $\gamma < 2$, plus γ est petit et plus l'énergie de la réponse augmente jusqu'à ne plus décroître.

Exemple 44 Ces deux remarques sont illustrées à la figure 4.45 où l'on a pris successivement pour γ les valeurs 2, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{40}$, avec $\beta = \frac{\gamma}{2}$.

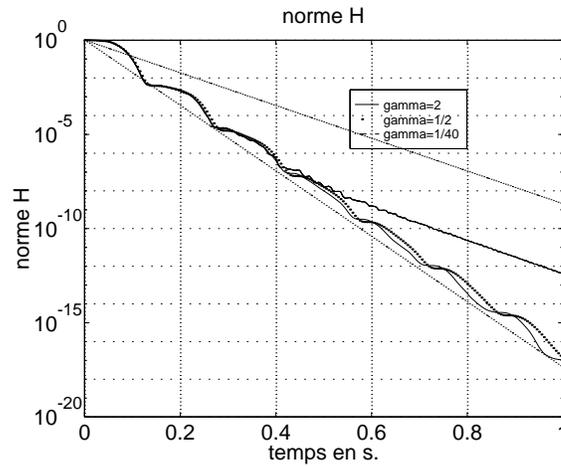


FIG. 4.45 - Normes \mathcal{H} calculées avec $\gamma = 2, 1/2$ et $1/40$ ($\beta = \frac{\gamma}{2}$).

Pour $\gamma = 2$ la décroissance de la norme \mathcal{H} est quasiment identique à celle obtenue pour le γ ad hoc; alors que pour $\gamma = \frac{1}{40}$ à partir de $t \sim \frac{1}{2}$ le taux de décroissance correspond à celui recherché, on a en quelque sorte une diminution de l'amortissement. L'explication de ce phénomène vient de ce que dans le dernier cas les modes élevés de la réponse sont mal calculés.

Exemple 45 C'est ce qu'on illustre à la figure 4.46 en comparant les premiers (resp. les cinquièmes) modes des réponses calculées pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{40}$.

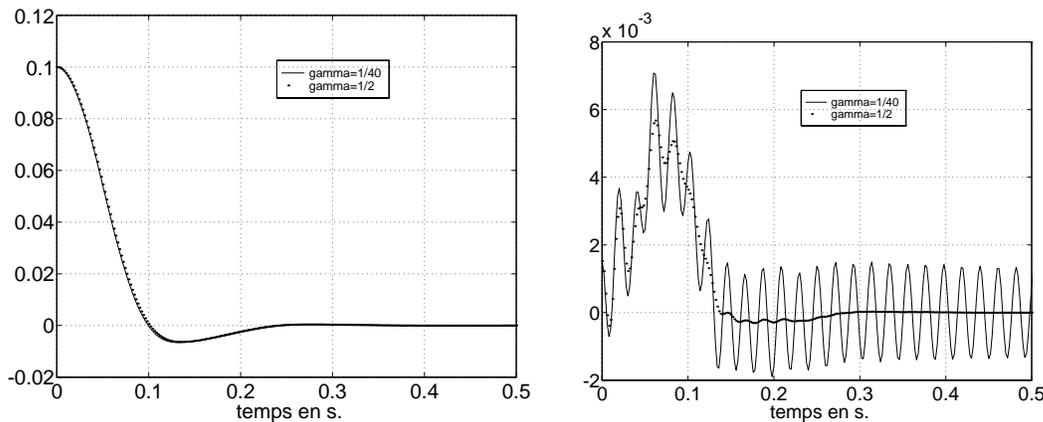


FIG. 4.46 - À gauche (resp. à droite) premiers modes (resp. cinquièmes modes) de la réponse calculée avec des β et γ différents.

En conclusion, on peut dire que si l'on fait un choix de β et de γ tel que le schéma ne soit pas *inconditionnellement stable*, on peut obtenir une réponse (et une vitesse) fautive qui entraîne une interprétation erronée des résultats de convergence

de la norme \mathcal{H} ou de la fonctionnelle de Liapunov, comme l'a illustré l'exemple de la figure 4.45.

4.9.7 Convergence en fonction du nombre d'itérations

On étudie la convergence de la réponse en fonction du nombre d'itérations Nt du schéma de Newmark.

Exemple 46 La figure 4.47 de gauche (resp. de droite) montre l'évolution de la norme \mathcal{H} (resp. la fonctionnelle de Liapunov) en fonction de Nt .

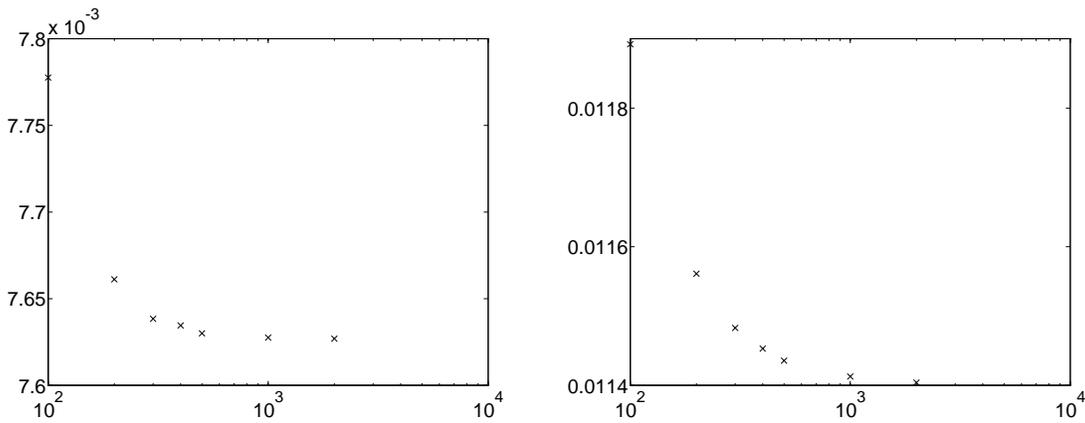


FIG. 4.47 - $E_{Nt}(t)$ (à gauche) et $\tilde{E}_{Nt}(t)$ (à droite) à $t = T$ en fonction de Nt ($M = N = 20$).

Exemple 47 La figure 4.48 nous montre l'erreur relative par rapport à la valeur asymptotique $Nt = 2.10^3$.

Pour la figure de gauche (resp. de droite) correspondant à la norme \mathcal{H} (resp. la fonctionnelle de Liapunov), on a un taux de $o(Nt^{-9/4})$ (resp. $o(Nt^{-2})$).

4.10 Fonctionnelle de coût

4.10.1 Rappels :

Dans la construction d'une loi de rétroaction comme solution d'un problème de contrôle optimal on a le choix entre une infinité de fonctionnelle de coût. La méthode proposée par J.-L. Lions [84] est basée sur la démonstration de la contrôlabilité exacte à l'aide de l'algorithme HUM aussi la fonctionnelle choisie

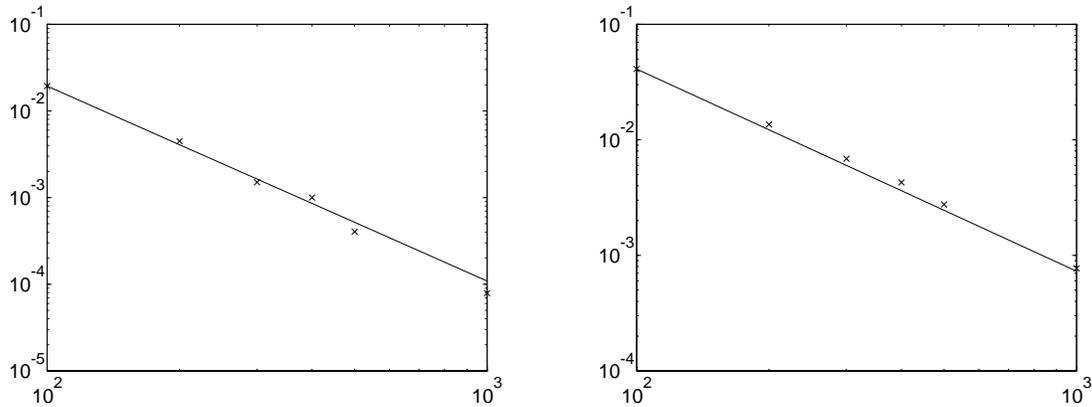


FIG. 4.48 - $\chi(t)$ (à gauche) et $\Psi(t)$ (à droite) à $t = T$ en fonction de Nt ($M = N = 20$).

est celle correspondant à cet algorithme. Par exemple dans le cas de l'équation des ondes unidimensionnelle, on prend :

$$J(z, u) = \int_0^T y(x, t) dt + \int_0^T u^2 dt. \quad (4.10.82)$$

Cette fonctionnelle est particulièrement simple mais les opérateurs de stabilisation qui définissent le feedback obtenus par résolution d'équations de Riccati algébriques infinidimensionnelles ne sont pas donnés explicitement.

A contrario, la méthode de Komornik n'est pas basée sur la déduction de la loi de rétroaction à partir de l'algorithme HUM mais sur une modification de l'opérateur Λ de HUM qui permet de construire explicitement les opérateurs de stabilisation. La fonctionnelle de coût associée (voir V. Komornik [59] p.1600) est plus complexe :

$$J(z, u) = \int_0^\infty 2\omega \tilde{E}(t) dt + \int_0^\infty u^2 dt. \quad (4.10.83)$$

Exemple 48 On a fait varier ω de 1 à 100 et on superpose les fonctionnelles de coûts correspondants à $S = 1$ et $S = 10$ à la figure 4.49.

On remarque qu'il y a une valeur critique de ω d'environ 20, au-dessus de laquelle $J(y, v)$ explose.

On vérifie bien que la fonctionnelle de coût est une fonction décroissante de S puisqu'elle diminue environ d'un facteur 10 pour les différents taux imposés.

On a effectué un zoom sur les ω à la figure de droite, ce qui permet d'observer que la croissance en fonction de ω est plus importante pour les ω faibles, pour $S = 10$ que pour $S = 1$, et inversement pour les ω grands.

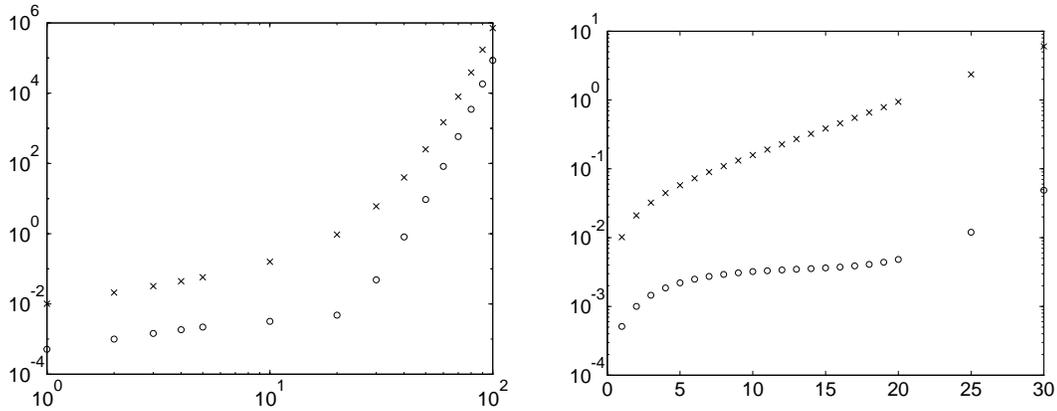


FIG. 4.49 - Variation de la fonctionnelle coût en fonction de ω pour $S = 1$ et $S = 10$ (à gauche) et “zoom” sur les ω petits (à droite).

4.11 Deuxième version

La différence fondamentale par rapport à la première version de la loi de rétroaction de Komornik vient de ce que l’on n’est plus libre dans le choix du temps d’observation S .

En effet, on a par définition :

$$S = T_\omega = T + 1/(2\omega). \quad (4.11.84)$$

On a donc, puisque T et ω sont strictements positifs,

$$S > T \quad \text{et} \quad S > 1/(2\omega). \quad (4.11.85)$$

Par conséquent, si l’on fixe T comme dans les tests numériques précédents valant 1, on doit prendre $S = 1 + 1/(2\omega)$. On ne peut donc plus prendre $S = 1$.

Pour des ω plus petit que 1, T est de l’ordre de S ; par contre, pour des ω petits, S est de l’ordre de $1/\omega$. Tout cela exclut les cas étudiés avec pour $T = 1$, S inférieure à 1. De même, les cas où ω est très petit et S fixé valant 1.

Ces remarques élémentaires permettent de dire par avance qu’avec cette condition sur le temps d’observation, on élimine tous les cas où les ω et les S sont petits.

Observations :

- les cas où les ω sont très grands, c’est-à-dire où S est donc de l’ordre de T , d’après la définition de T_ω , sont à exclure de cette étude et seront traités dans le paragraphe suivant.
- les tests numériques antérieurs confirment la dépendance de S en fonction de T et ω^{-1} qui est imposée par la définition de T_ω .

4.11.1 Fonctionnelle de Liapunov

Nous allons vérifier que l'utilisation de la version modifiée de l'opérateur de Komornik est nécessaire pour des ω petits en étudiant la convergence de l'énergie à l'instant $t = T$ en fonction de ω .

Remarque 4.16 Étant donné que la fonctionnelle de Liapunov décroît exponentiellement en $-\omega$, on en déduit aisément que la fonctionnelle de Liapunov finale aussi. Mais, comme on a observé précédemment que la fonctionnelle de Liapunov décroît deux fois plus vite que la valeur théorique, on doit donc s'attendre à une décroissance avec un taux deux fois plus élevé.

On effectue tout d'abord cette étude avec la loi de rétroaction primitive pour $S = T = 1$, afin de comparer ces résultats avec ceux obtenus avec la nouvelle loi de rétroaction.

Exemple 49 À la figure 4.50 de gauche, on fait varier ω de 10^{-3} à 10^{-1} .

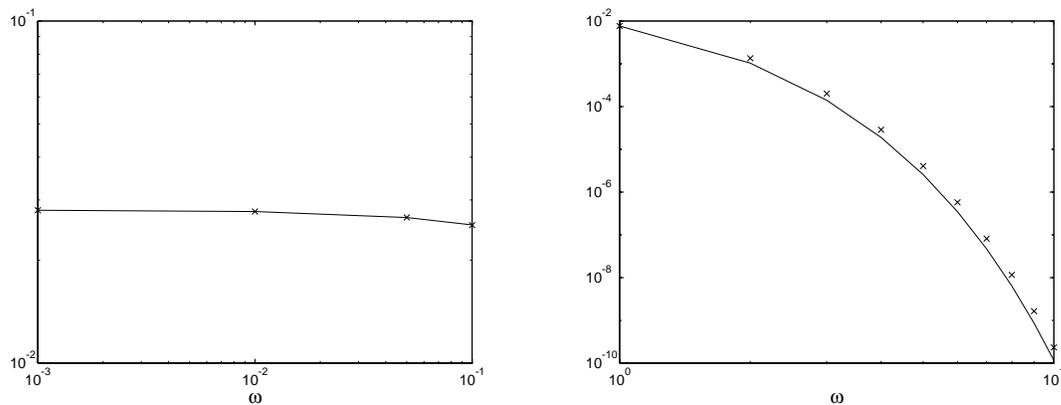


FIG. 4.50 - Variation de l'énergie finale en fonction de ω (première version de la loi de rétroaction).

On obtient un taux de décroissance de $-\omega$, c'est-à-dire le taux théorique, mais pas celui attendu d'après les remarques introductives.

À contrario, pour ω compris entre 1 et 10, on obtient une décroissance exponentielle en -2ω (figure 4.50 de droite). Cet exemple mais bien en évidence le problème lié aux taux petits.

Exemple 50 Par contre, si l'on utilise la loi de rétroaction modifiée, on n'a plus ce phénomène pour les ω petits, comme le montre la figure 4.51 de gauche.

Pour finir, la figure 4.51 de droite, où ω est compris entre 10^{-3} et 2, illustre le comportement divergent des deux calculs à partir de ω plus petit que 1.

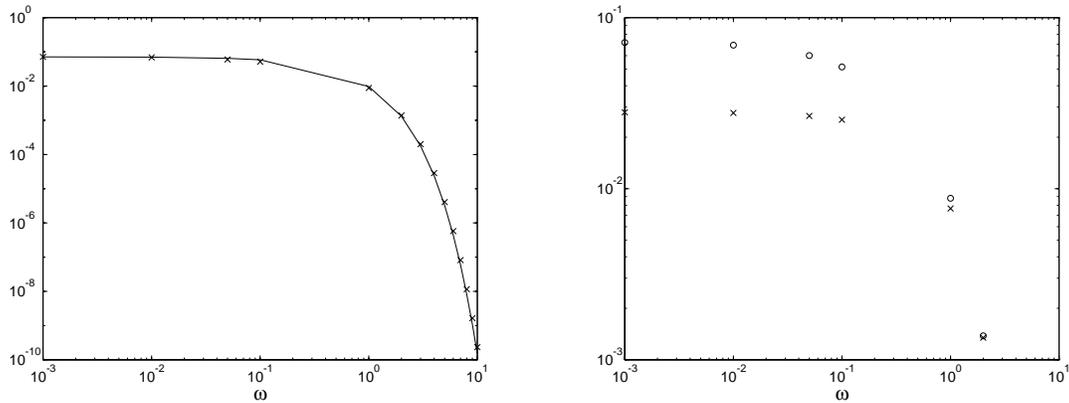


FIG. 4.51 - Variation de l'énergie finale en fonction de ω (seconde version) (à gauche) et comparaison pour ω plus petit que 1 des deux versions (à droite).

Par contre, le choix de S n'est pas indifférent comme on va le montrer de façon rigoureuse lors de l'étude du rapport de $E_q(t)$ et de la norme \mathcal{H} .

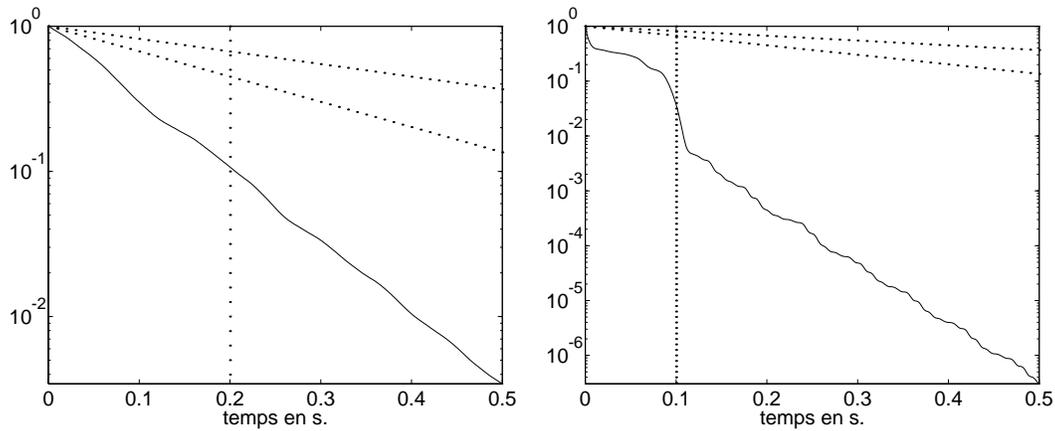


FIG. 4.52 - Fonctionnelle de Liapunov pour $S = 2 \cdot 10^{-1}$ (à gauche) et 10^{-1} (à droite).

En effet, on observe à la figure 4.52 que plus S est petit et plus $E_q(t)$ à un taux de décroissance élevé, jusqu'à avoir un comportement assez irrégulier au voisinage de $t = S$, puis décroître de nouveau régulièrement, mais avec un taux encore plus important.

Il existe donc un temps d'observation S au-dessous duquel l'énergie diminue à une vitesse arbitrairement grande.

Une explication simple de ce comportement réside dans le très mauvais conditionnement de $K_{\omega,2N}$ pour des valeurs de S trop petites.

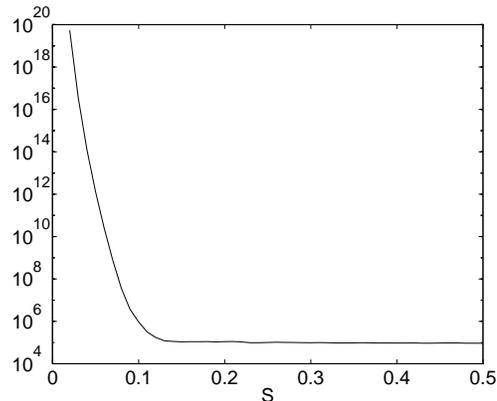


FIG. 4.53 - Variation du conditionnement de $K_{\omega,2N}$ en fonction de S .

Pour des valeurs de S inférieures à 10^{-1} , on a explosion du conditionnement et ceci quelque soit ω , comme le montre la figure 4.53 où l'on voit l'évolution du conditionnement en fonction de S , S variant de $2 \cdot 10^{-2}$ à 0.5 avec un pas de 10^{-2} . On observe par contre que pour des valeurs de S assez grandes, le conditionnement est constant en S (en ω c'est toujours le cas).

Maintenant on considère le cas particulier où S est très petit, par exemple $S = 10^{-1}$. Et finalement, on conclut l'étude de $\tilde{E}(t)$ en considérant le cas où ω est petit.

Exemple 51 Tout d'abord, on compare à la figure 4.54 les résultats obtenus avec les deux versions.

La fonctionnelle de Liapunov, calculée avec la version modifiée, a un taux de décroissance plus conforme à celui que l'on veut imposer, alors que l'autre décroît trop vite.

4.11.2 Étude de $C(\omega, S)$

On reprend les calculs effectués avec la loi de rétroaction usuelle.

Première méthode De manière surprenante, on a des résultats identiques; même pour des ω qui sont petits.

Troisième méthode On a observé avec la loi de rétroaction primitive que le taux exponentiel de $C(\omega, S)$ était différent selon que ω était compris entre 10^{-1} et 1

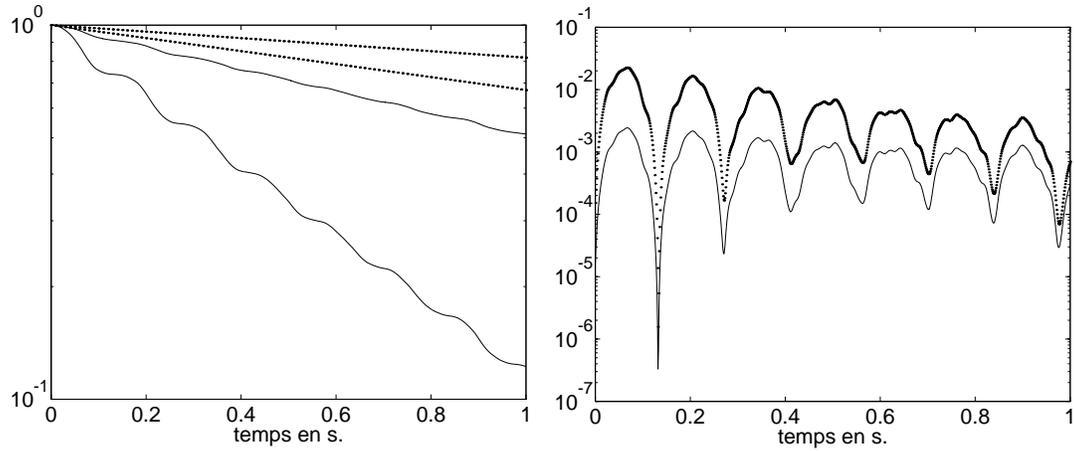


FIG. 4.54 - *Fonctionnelle de Liapunov (à gauche) et les termes négligés pour $\omega = 10^{-1}$ (Komornik usuel et modifié) (à droite).*

ou 1 et 10. On refait le calcul avec l'opérateur modifié pour des ω appartenant à la fois à ces deux intervalles.

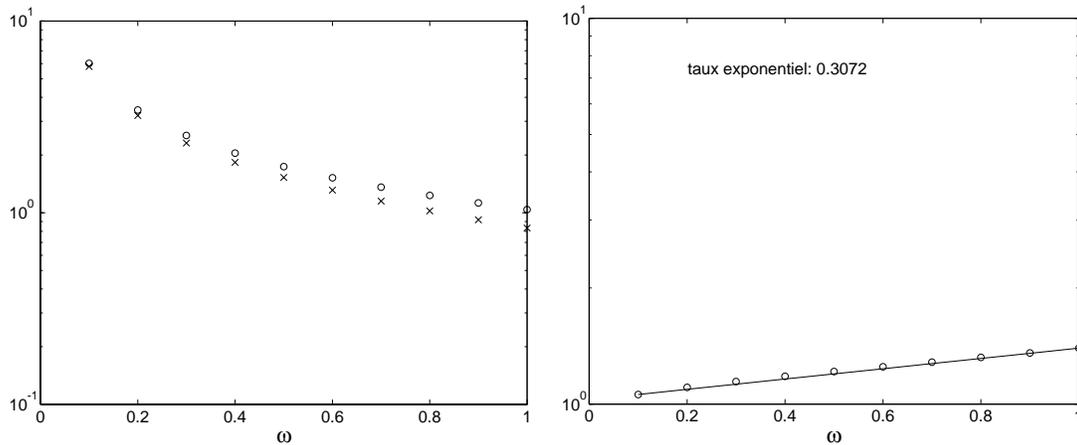


FIG. 4.55 - $C_1(\omega, \cdot)$, $C_2(\omega, \cdot)$ et $C(\omega, \cdot)$ pour S fixé.

Cette fois-ci on obtient un taux de convergence identique pour tous les ω (figure 4.55).

4.11.3 Fréquences vibratoires

Reprenons dans l'ordre les tests effectués au paragraphe 4.5.

Le premier test est irréalisable avec la nouvelle version, en effet si $\omega = 1$, on

a nécessairement $S > 1/2$. Si l'on veut à tout prix prendre $S = 10^{-1}$, on doit avoir $\omega > 5$.

Exemple 52 Dans le premier exemple, on calcule le spectre associé à notre problème avec $\omega = 6$ et donc $T = 1/60$ pour avoir $S = 10^{-1}$.

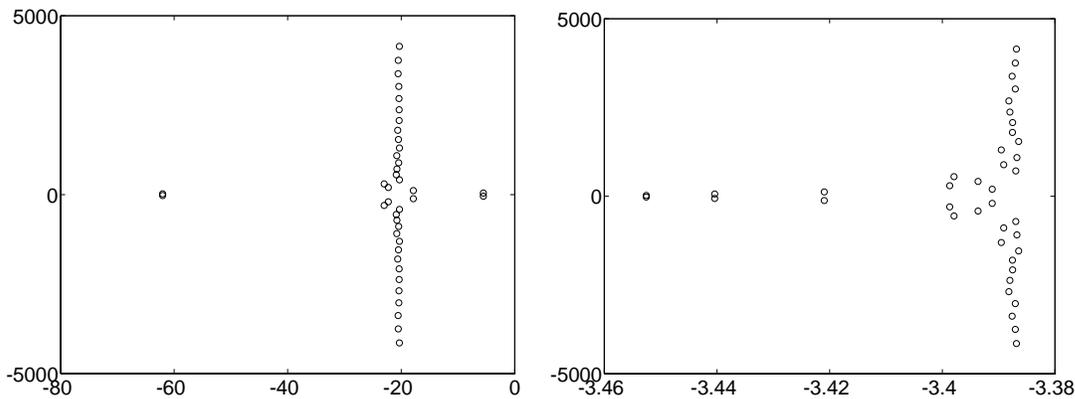


FIG. 4.56 - λ pour $\omega = 6$ et $T = 1/60$ (donc $S = 10^{-1}$) (à gauche) et pour $\omega = 1$ et $T = 10^{-1}$ (donc $S = 0.6$) (à droite).

Le résultat n'est guère meilleur que celui obtenu avec la loi de rétroaction primitive (figure 4.17), comme on peut le voir à la figure 4.56 de gauche.

Exemple 53 Considérons maintenant le cas plus réaliste où l'on ne s'obstine pas à prendre $S = 10^{-1}$, mais où l'on conserve $\omega = 1$; par exemple, avec $T = 10^{-1}$.

Dans ce cas, le résultat est meilleur (figure 4.56 de droite), mais on obtient une valeur qui est encore assez éloignée de celle voulue puisque l'on obtient $Re(\lambda) < -3.38$.

Comme dans le deuxième test avec l'opérateur usuel, on fait donc varier T et donc ω , simplement la différence réside dans la translation de $1/(2\omega)$ opérée par la définition de S .

Maintenant, considérons le cas où $\omega = 10^{-1}$ et S sont variables. Comme précédemment, on ne peut prendre $S \leq 1/(2\omega)$, c'est-à-dire $S \leq 1/2$.

Exemple 54 On prend $\omega = 10$ et on fait varier S de la même façon que dans le cas usuel où $S = 3 \cdot 10^{-1}, 3, 5 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1}$, il faut donc prendre $T = 1/4, 33/140, 9/20$ pour obtenir les mêmes valeurs de S .

On voit à la figure 4.57 de droite que les résultats sont meilleurs.

On peut donc dire, vu ces derniers résultats, que la différence réside essentiellement dans le fait que, grâce au nouvel opérateur, on ne peut prendre des valeurs

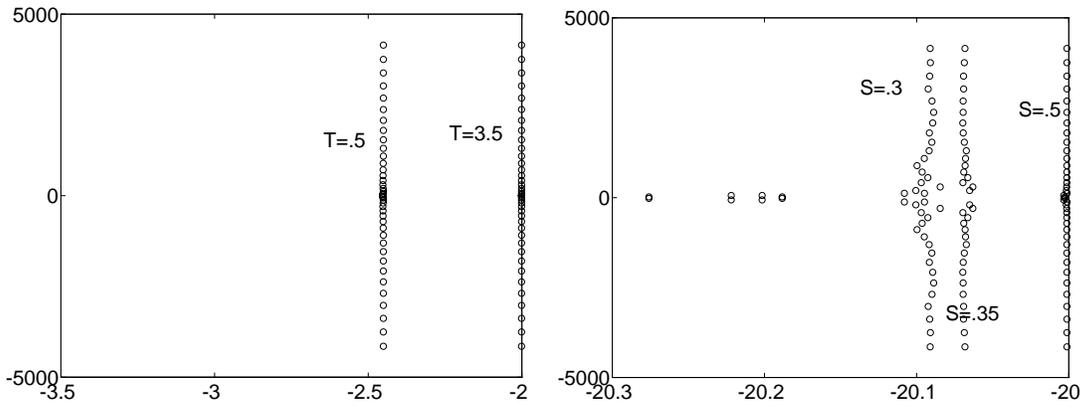


FIG. 4.57 - λ pour $\omega = 1$ et T variable (à gauche) et pour $\omega = 10$ et S variable (à droite).

de S indépendamment du choix de ω , et donc en particulier des S trop petits. Néanmoins, on ne peut prendre un T trop petit comme l'on montrait les tests des paragraphes précédents.

4.11.4 Conclusion

Il faut donc dans ce cas adopter une autre stratégie de stabilisation. De plus, quelque soit la valeur prise de ω grande, on ne peut décider d'allonger le temps d'observation proportionnellement. Notamment du point de vue des applications, il est clair que l'on peut avoir besoin de stabiliser avec un taux élevé en un laps de temps court. C'est pourquoi, une idée assez naturelle consiste à appliquer une loi de rétroaction avec un taux variable.

C'est ce que l'on va étudier dans le paragraphe suivant.

4.12 Loi régularisée

4.12.1 Introduction

On a observé dans les paragraphes précédents que plus le taux de décroissance ω était grand et plus la norme \mathcal{H} augmentait après l'instant initial avant de décroître au taux imposé. Plus précisément, on a vérifié numériquement, que pour tout ω supérieur à 1, le sup sur $[0, T]$ de la norme \mathcal{H} est strictement supérieur à 1. Ce phénomène est du à une absence de régularité à l'instant initial. La valeur de la loi de rétroaction à l'instant zéro n'est pas compatible avec l'état initial, en effet, on a le plus souvent :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L, 0) \neq v(0). \quad (4.12.86)$$

Exemple 55 C'est bien ce que l'on a observé numériquement, plus ω est grand et plus il y a incompatibilité (voir paragraphe 4.6, figure 4.34 de droite ou figure 4.58 de gauche ci-dessous).

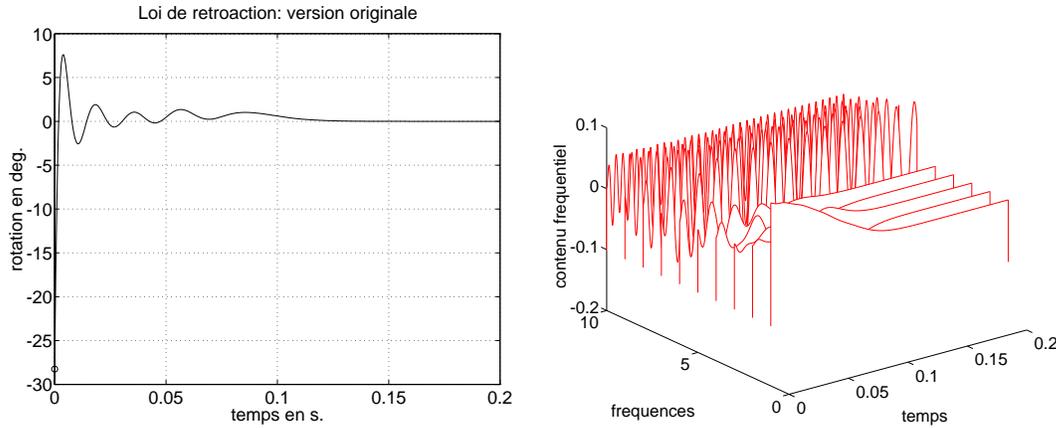


FIG. 4.58 - *Loi de rétroaction sans régularisation (à gauche) et contenu fréquentiel correspondant (à droite).*

Remarquons enfin que cela amplifie le spill-over (figure 4.58 de droite).

On va étudier indépendamment chacune des régularisations avant d'analyser la loi générale.

Pour les tests qui vont suivre, on prend les paramètres suivants :

$$\omega_0 = 40, \quad (4.12.87)$$

$$T = S = 1, \quad N = M = 5, \quad h = 1/400, \quad Nt = 10^4 \quad (4.12.88)$$

et les données initiales :

$$\alpha_i(t = 0) = \frac{0.1}{i^{2.6}}, \quad \alpha'_i(t = 0) = 0, \quad \forall i = [1, \dots, M]. \quad (4.12.89)$$

4.12.2 Régularisation avec *cut-off*

Tout d'abord, on se fixe arbitrairement un temps de régularisation :

$$T^\chi = 1/10. \quad (4.12.90)$$

Exemple 56 On représente à la figure 4.59 de gauche la loi de rétroaction régularisée.

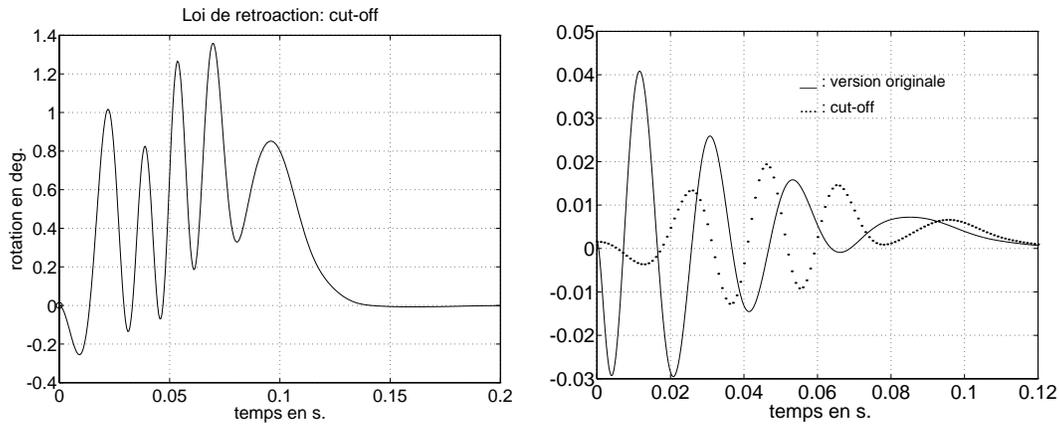


FIG. 4.59 - Loi de rétroaction avec cut-off (à gauche), cinquième mode de la réponse pour la version originale et pour celle avec cut-off (à droite).

Comme on l'a déjà remarqué dans l'introduction, grâce à l'application de $\chi(t)$ on élimine le choc initial ($v(0) = -28,263$ pour la version non régularisée), puisque $\chi(0) = 0 \implies v(0) = 0$. De plus, on diminue l'amplitude maximum de la loi de rétroaction par 100. La nouvelle loi a par contre un nombre d'oscillations plus important sur l'intervalle $[0, T^*]$.

Si l'on regarde à la figure 4.59 de droite la contribution du cinquième mode de la réponse, on voit que le choc a été décalé en temps, tout en étant diminué.

Exemple 57 On compare maintenant les normes \mathcal{H} calculées avec la version originale et avec celle régularisée. On voit qu'avec la nouvelle loi on conserve la même décroissance exponentielle globale (figure 4.60 de gauche).

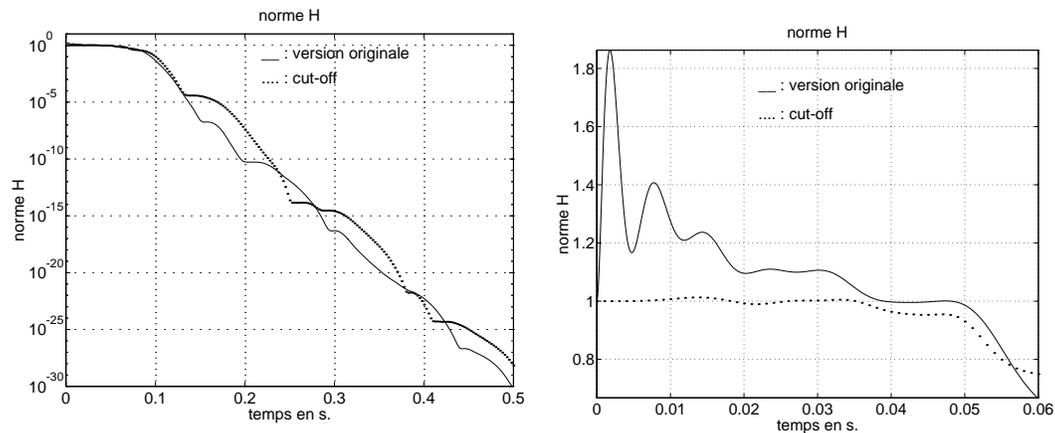


FIG. 4.60 - Comparaison entre la norme \mathcal{H} calculée avec la loi de rétroaction originale et celle avec cut-off (à gauche) et "zoom" sur l'instant initial (à droite).

En faisant un “zoom” sur l’instant initial (figure 4.60 de droite), on observe que la norme \mathcal{H} n’augmente plus autant après l’instant initial, on n’a plus d’ “explosion”; mais cependant on a encore une légère augmentation par rapport à sa valeur d’origine, dans notre exemple de l’ordre du %.

Le maximum de la norme \mathcal{H} est évidemment fonction de T^χ et de d_χ la régularité de $\chi(t)$.

Exemple 58 On représente à la figure 4.61, le pourcentage d’augmentation de ce sup par rapport à l’état initial.

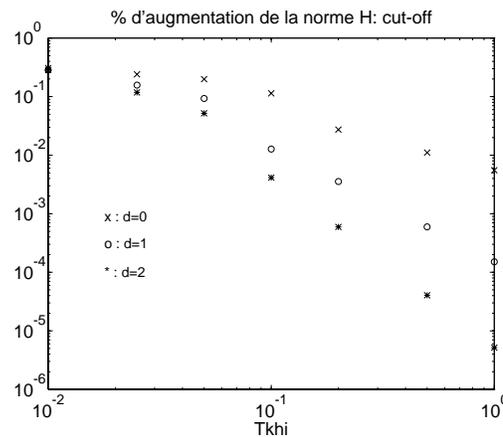


FIG. 4.61 - Pourcentage d’augmentation par rapport à l’état initial du maximum de la norme \mathcal{H} en fonction de T^χ et pour différents d_χ .

Par exemple, si l’on prend $d_\chi = 0$, c’est-à-dire $\chi(t)$ affine, on a une valeur maximum qui est au minimum de l’ordre du %, même pour $T^\chi = 1$. Par contre si $d_\chi = 1$, comme pour les calculs précédents, il suffit de prendre $T^\chi = 1/10$ pour n’avoir qu’une augmentation de l’ordre du %.

Le résultat fondamental est le suivant :

quelque soit la valeur de T^χ on a toujours augmentation de la norme \mathcal{H} .

En effet, pour la valeur de T^χ la plus grande possible, c’est-à-dire, $T^\chi = 1$, on a une augmentation de l’ordre de 10^{-5} pour $d_\chi = 2$.

D’autre part plus la régularité est élevée et plus l’augmentation est faible comme le montre clairement les résultats. Par exemple pour $d_\chi = 6$ et $T^\chi = 1$, on obtient 10^{-11} .

On remarque de plus que l’importance de la régularité augmente avec T^χ .

On choisira donc la régularité de $\chi(t)$ et le temps de régularisation T^χ selon

la valeur de l'augmentation que l'on veut atteindre. Étudions maintenant l'effet du spill-over.

Exemple 59 On prend un nombre de mode de la réponse plus élevé que celui utilisé pour calculer la loi de rétroaction, par exemple $M = 10$.

On commence par comparer les normes \mathcal{H} à la figure 4.62 de gauche.

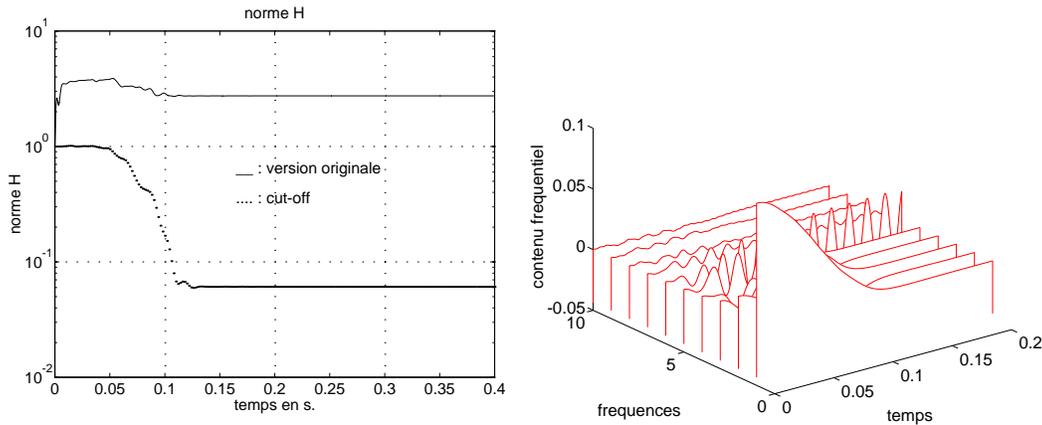


FIG. 4.62 - Comparaison entre la norme \mathcal{H} calculée avec la loi de rétroaction originale et celle avec cut-off (à gauche) et contenu fréquentiel de la réponse avec cut-off (à droite), pour $N < M$.

On voit que la pollution a fortement diminué puisque l'on a même obtenu une décroissance de cette norme jusqu'à une valeur de l'ordre de 10^{-2} .

Si l'on regarde maintenant le contenu fréquentiel de la réponse, on voit qu'avec la nouvelle version les modes non contrôlés ont une amplitude beaucoup plus faible, tout en étant beaucoup moins oscillants (voir figure 4.58 de droite pour la version originale). Seul le sixième mode de la réponse semble encore fortement excité comme on le voit à la figure 4.62 de droite.

On peut remarquer comme conclusion de l'étude du spill-over que la valeur minimale de la norme \mathcal{H} notée E_r , ainsi que le temps de stabilisation T_s , c'est-à-dire le temps que met la solution à atteindre cette valeur plafond nous fournissent un critère de choix du temps de régularisation T^χ ainsi que de d_χ le degré de régularité de $\chi(t)$. Nous allons donc calculer la variation de E_r et T_s en fonction de T^χ et de d_χ .

D'après la concavité de la surface de la figure 4.63 de gauche, on peut dire que l'énergie résiduelle décroît en fonction de T^χ jusqu'à une valeur plafond de l'ordre de 10^{-3} , et ensuite oscille autour de cette valeur, ceci quelque soit la régularité de $\chi(t)$.

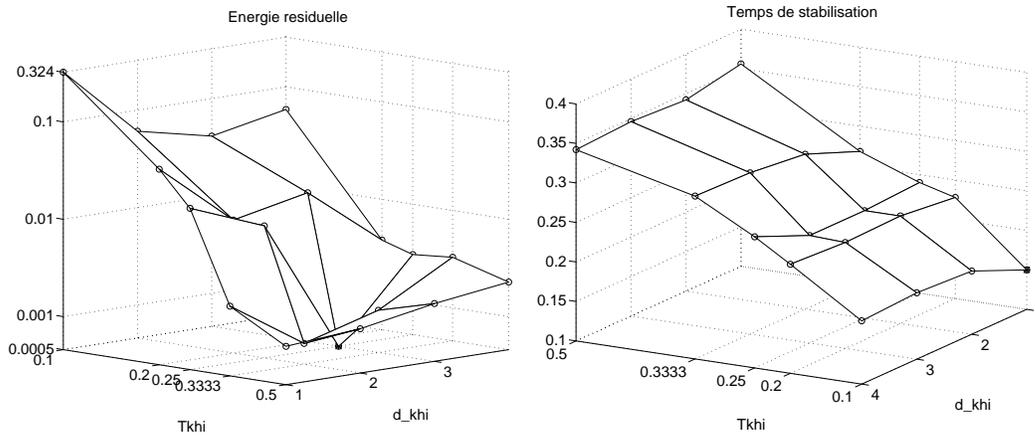


FIG. 4.63 - *L'énergie résiduelle E_r (à gauche) et le temps de stabilisation T_s (à droite), en fonction de T^χ .*

Par contre, le minimum de E_r dépend de d_χ et est atteint pour le couple $[T^\chi, d_\chi] = [1/4, 2]$.

L'interprétation de la figure 4.63 de droite, et donc de la variation du temps de stabilisation en fonction de T^χ et d_χ , est encore plus aisée. Plus T_χ est petit et plus T_s est grand, ceci quasiment quelque soit la régularité de $\chi(t)$. Le minimum est donc atteint pour le T^χ le plus grand, qui n'est autre que le cas où l'on n'applique pas de régularisation. Le d_χ optimal correspond à $\chi(t)$ affine.

E_r et T_s ont donc un comportement inverse vis-à-vis de T^χ . Mais, étant donné que la variation de l'énergie résiduelle en fonction de T_χ est beaucoup plus rapide que celle de T_s , le minimum selon ces deux critères est celui obtenu à l'aide du premier, soit pour $[T^\chi, d_\chi] = [1/4, 2]$.

4.12.3 Régularisation avec taux variable

De même que pour la loi précédente, on se fixe un temps de régularisation arbitraire. On prend afin de faciliter la comparaison avec la loi avec *cut-off* le même temps :

$$T^\omega = 1/10. \tag{4.12.91}$$

Tout d'abord remarquons qu'à la différence de la loi en $\chi(t)$, celle-ci n'impose pas une valeur nulle en zéro de loi de rétroaction. En effet, puisque $\omega(t = 0) = 0$, on applique l'opérateur Λ de la méthode HUM pour calculer la loi de rétroaction à l'instant initial. Or on sait que la valeur en zéro du contrôle obtenu à l'aide de cet opérateur, du moins dans sa version usuelle, est non nulle (voir le chapitre précédent).

Ainsi dans l'exemple de la figure 4.64 de gauche, la valeur en zéro est d'environ

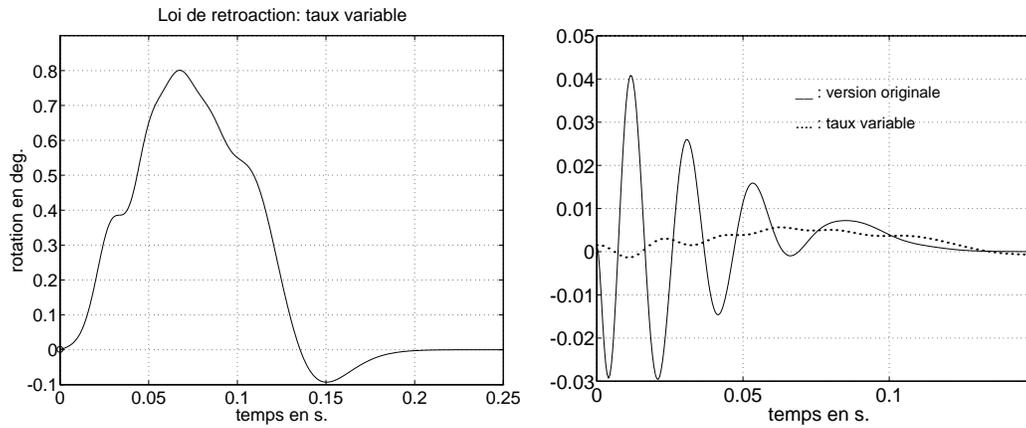


FIG. 4.64 - Loi de rétroaction avec taux variable (à gauche) et cinquième mode de la réponse pour les versions originale et avec taux variable (à droite).

1.10^{-3} . On remarque la loi de rétroaction est plus régulière que celle avec *cut-off* et d'amplitude légèrement plus faible. Si l'on regarde le cinquième mode de la réponse, on voit (figure 4.64 de gauche) que celui-ci a été fortement régularisé, en particulier son amplitude a encore été diminué par rapport à la loi avec *cut-off*.

De même que pour la loi avec *cut-off*, la norme \mathcal{H} avec taux variable décroît globalement comme la norme \mathcal{H} originale, mais avec un léger retard (figure 4.65 de gauche).

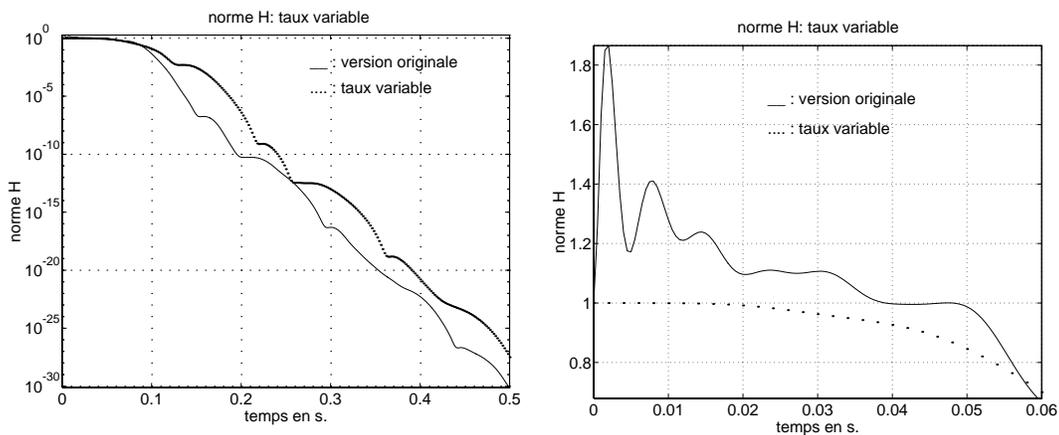


FIG. 4.65 - Comparaison entre la norme \mathcal{H} calculée avec la loi de rétroaction originale et celle avec taux variable (à gauche) et "zoom" sur l'instant initial (à droite).

Par exemple, à $t = 0.15$, la norme vaut de l'ordre de 10^{-2} au lieu de 10^{-7} pour la loi originale. Par contre, la norme n'augmente pas pour le T^ω choisit (figure 4.65

de droite).

L'action du *cut-off* sur la diminution de l'augmentation de la norme \mathcal{H} est très différent de celui de la loi avec taux variable sur deux points essentiels :

1. Plus $\omega(t)$ est régulière et plus le maximum est important. En effet, comme on peut le voir à la figure 4.66, c'est pour $d_\omega = 1$ que le maximum est le plus faible.

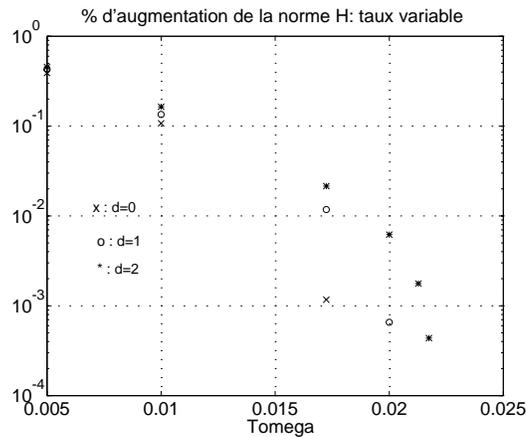


FIG. 4.66 - Pourcentage d'augmentation par rapport à l'état initial du maximum de la norme \mathcal{H} en fonction de T^ω .

2. Pour un T^ω assez grand il n'y a plus d'augmentation de la norme \mathcal{H} .

La loi en $\omega(t)$ est également plus efficace pour faire diminuer le spill-over. En effet, la valeur résiduelle de la norme \mathcal{H} est beaucoup plus faible, de l'ordre de 10^{-4} , que pour la loi avec *cut-off* (figure 4.67).

La comparaison du contenu fréquentiel des deux lois régularisées est frappante. En particulier, on voit à la figure 4.67 de droite que le sixième mode de la réponse a une amplitude beaucoup plus faible que pour celui obtenu avec la loi avec *cut-off* (figure 4.62 de droite).

Comme pour $\chi(t)$, on étudie la variation de l'énergie résiduelle en fonction de T^ω et d_ω .

On observe à la figure 4.68 de gauche que, comme pour T^χ celle-ci décroît en fonction du temps de régularisation.

Mais avec le taux variable cette décroissance est beaucoup plus rapide. En effet, la valeur plafond de l'énergie résiduelle est atteinte pour un temps deux fois plus court, de plus cette valeur est, elle-aussi, deux fois plus faible. Le choix de T^ω est donc déterminant, mais celui de la régularité aussi.

En effet, de façon surprenante, plus la fonction régularisante $\omega(t)$ est régulière et

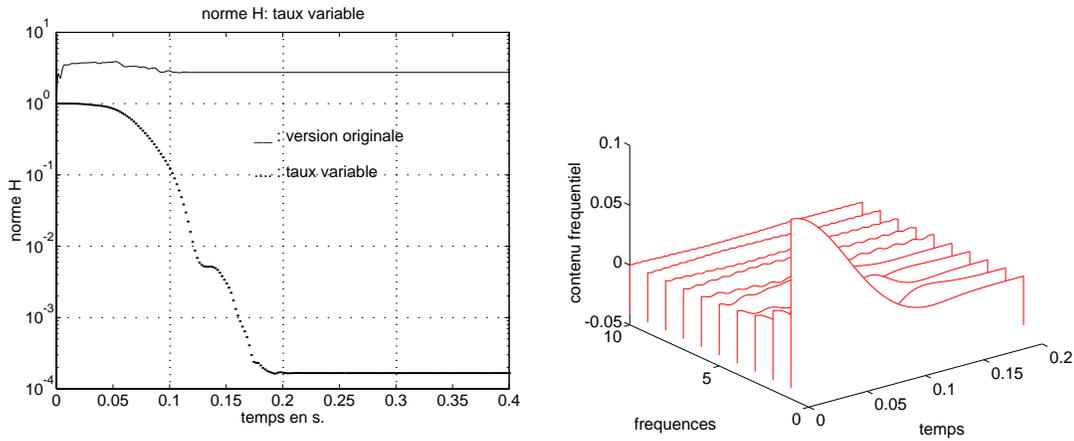


FIG. 4.67 - Comparaison entre la norme \mathcal{H} calculée avec la loi de rétroaction originale et celle avec taux variable (à gauche) et contenu fréquentiel calculé avec $\omega(t)$ (à droite), pour $N < M$.

plus l'énergie résiduelle est grande. Qui plus est, ce choix est important puisque la variation de E_r est encore plus grande pour le T^ω optimal. Le couple optimal est donc, selon ce premier critère, $[T^\omega, d_\omega] = [1/25, 0]$.

La variation du temps de stabilisation pour le taux variable est également la même que pour le *cut-off*: T_s est une fonction croissante de T^ω . De plus, T_s ne varie quasiment pas en fonction de d_ω ; sauf pour le T^ω optimal pour le critère précédent et dans ce cas la régularité de $\omega(t)$ la meilleure est celle la plus élevée. Mais comme la croissance de T_s est beaucoup plus lente que ne l'est la décroissance de l'énergie résiduelle, le minimum pour ces deux critères est donc encore celui de E_r , soit $[T^\omega, d_\omega] = [1/25, 0]$.

4.12.4 Régularisation avec *cut-off* et taux variable

Dans ce paragraphe on applique les deux régularisations simultanément. On se fixe les mêmes temps de régularisations, ainsi que les mêmes régularités, que pour le *cut-off* et le taux variable pris séparément, c'est-à-dire :

$$T^\omega = T^\chi = 1/10, \quad d_\omega = d_\chi = 1. \quad (4.12.92)$$

On regarde en premier lieu l'historique de la loi de rétroaction (figure 4.69 de gauche).

On voit que son comportement est quasiment identique à celui de la loi de rétroaction avec taux variable seul. On peut faire la même remarque en ce qui concerne le cinquième mode de la réponse (figure 4.69 de droite).

Pour le comportement, aussi bien global que local (au voisinage de l'origine) de la norme \mathcal{H} (voir figure 4.70), on a encore le même type de similitude avec le taux

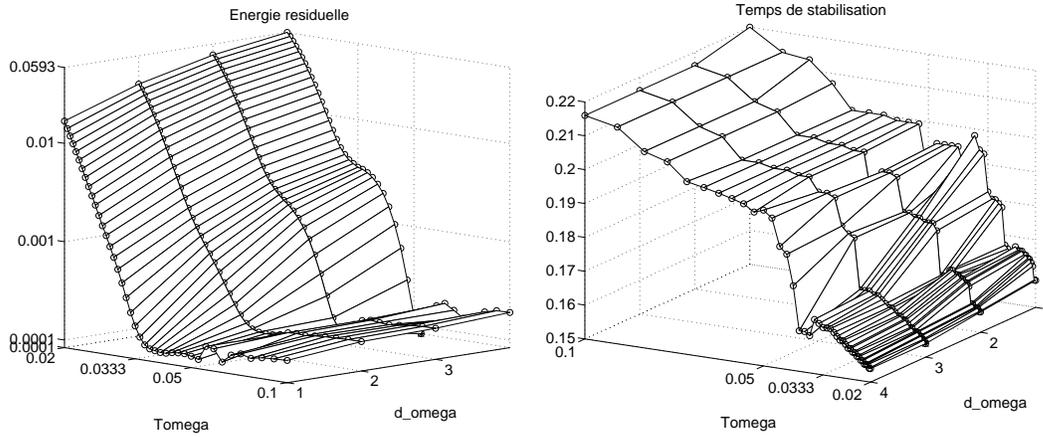


FIG. 4.68 - *Énergie résiduelle (à gauche) et temps de stabilisation (à droite), en fonction de T^ω .*

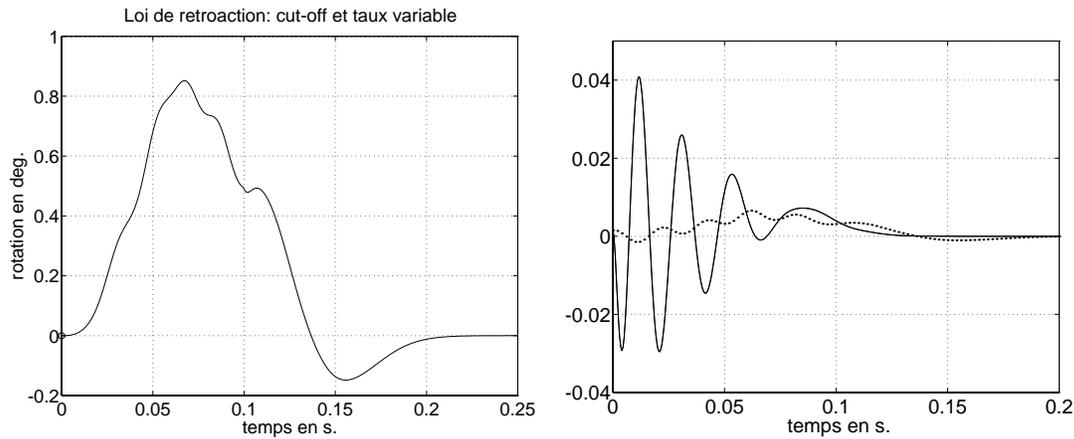


FIG. 4.69 - *Loi de rétroaction avec cut-off et taux variable (à gauche) et 5 ème mode de la réponse pour la version originale et pour celle régularisée (à droite).*

variable; en particulier on n'a plus d'augmentation de la norme \mathcal{H} après l'instant initial.

D'après ces premières remarques, il est clair que pour les paramètres choisis la loi de rétroaction se comporte comme si le *cut-off* n'agissait pas.

Selon le choix des paramètres, on peut favoriser l'une ou l'autre des régularisations. Dans notre exemple, il est clair d'après les deux paragraphes précédents que T^\times est trop faible pour que le *cut-off* agisse aussi bien que le taux variable.

Comme pour les régularisations appliquées individuellement, il existe un choix optimal des paramètres.

On va tout d'abord chercher les paramètres qui minimisent l'augmentation de

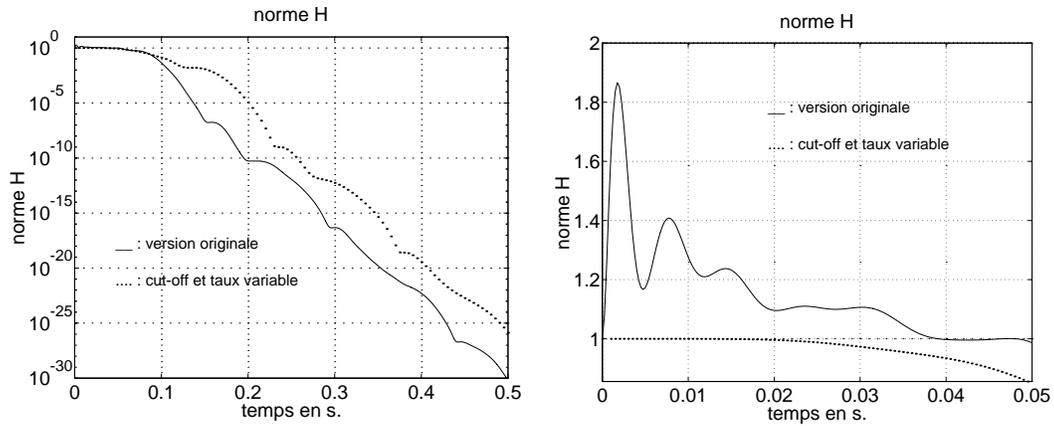


FIG. 4.70 - Comparaison entre la norme \mathcal{H} calculée avec la loi de rétroaction originale et celle régularisée (à gauche) et zoom sur l'instant initial (à droite).

la norme \mathcal{H} au voisinage de l'instant initial.

On présente aux figures 4.71 à 4.75 le pourcentage d'augmentation de la norme \mathcal{H} pour une régularité donnée $\{d_\omega, d_\chi\} \in \{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ en fonction du couple $\{T^\omega, T^\chi\}$.

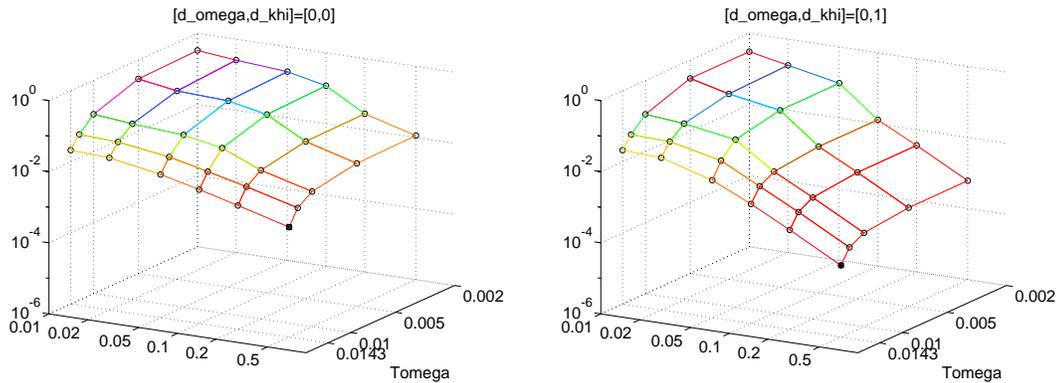


FIG. 4.71 - Pourcentage d'augmentation de la norme \mathcal{H} pour $\{d_\omega, d_\chi\} = \{0, 0\}$ (à gauche) et $\{d_\omega, d_\chi\} = \{0, 1\}$ (à droite)

Plus T^ω et T^χ sont grands et plus l'augmentation diminue.

Pour $T^\omega > T_0(d_\omega)$, il n'y a plus d'augmentation, la borne obtenue dépend toujours de la régularisation (voir figure 4.75). Par contre, pour T^χ il n'y a pas de borne inférieure.

En ce qui concerne la régularité, plus $\omega(t)$ est régulière et plus il y a d'augmentation, et inversement pour $\chi(t)$ comme on l'a vu précédemment. Il suffit de comparer les résultats obtenus pour $\{d_\omega, d_\chi\} = \{0, 0\}$ (figure 4.71 de gauche) et

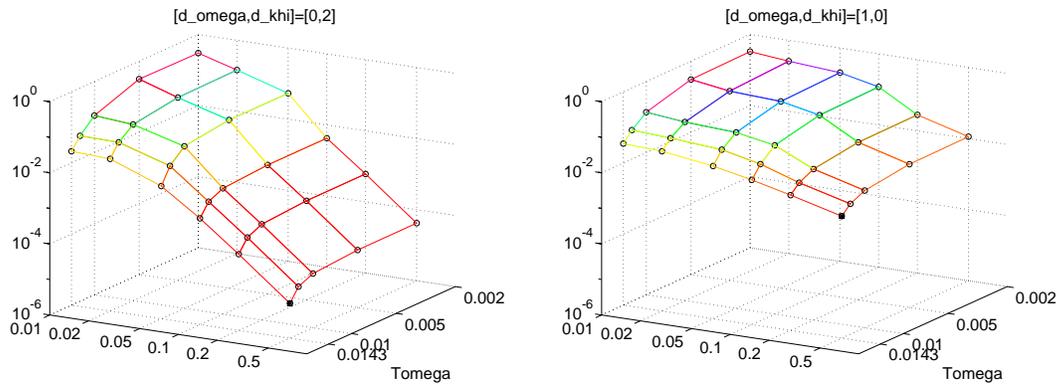


FIG. 4.72 - Pourcentage d'augmentation de la norme \mathcal{H} pour $\{d_\omega, d_\chi\} = \{0, 2\}$ (à gauche) et $\{d_\omega, d_\chi\} = \{1, 0\}$ (à droite)

$\{d_\omega, d_\chi\} = \{2, 0\}$ (figure 4.74 de gauche).

Par contre, dès qu'on augmente en régularité sur $\chi(t)$, la décroissance est très importante : comparer par exemple $\{d_\omega, d_\chi\} = \{0, 0\}$ avec $\{d_\omega, d_\chi\} = \{0, 2\}$ (figure 4.72 de droite).

En conclusion on peut dire que les paramètres optimaux pour ce critère sont ceux obtenus pour chacune des régularisations appliquées indépendamment, soit T^χ le plus grand possible et $T^\omega > T_0(d_\omega)$.

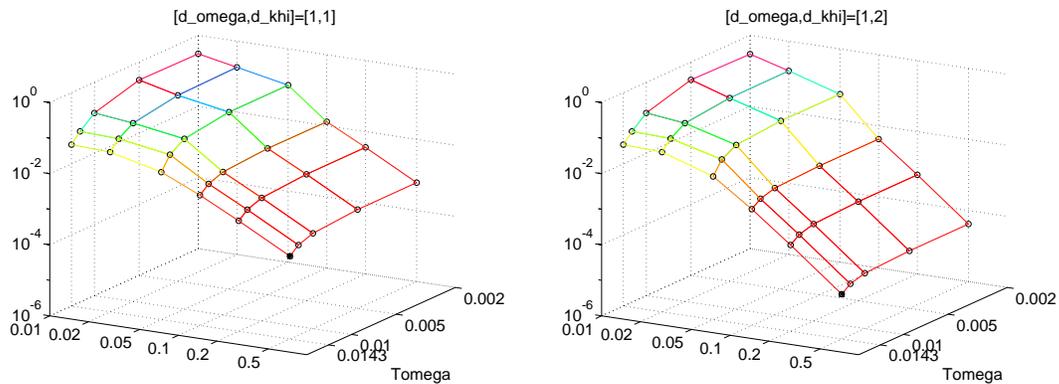


FIG. 4.73 - Pourcentage d'augmentation de la norme \mathcal{H} pour $\{d_\omega, d_\chi\} = \{1, 1\}$ (à gauche) et $\{d_\omega, d_\chi\} = \{1, 2\}$ (à droite)

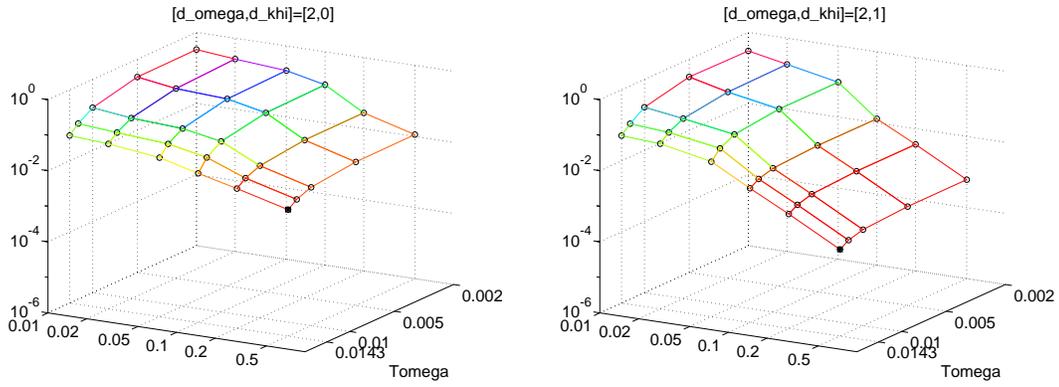


FIG. 4.74 - Pourcentage d'augmentation de la norme \mathcal{H} pour $\{d_\omega, d_\chi\} = \{2, 0\}$ (à gauche) et $\{d_\omega, d_\chi\} = \{2, 1\}$ (à droite)

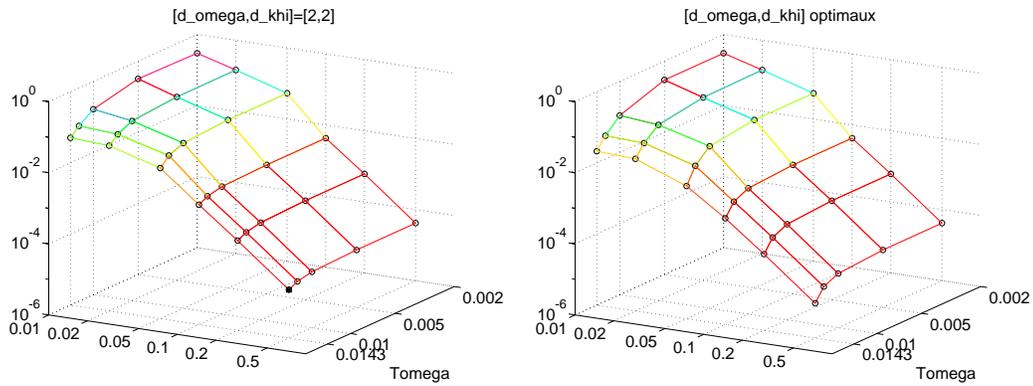


FIG. 4.75 - Pourcentage d'augmentation de la norme \mathcal{H} pour $\{d_\omega, d_\chi\} = \{2, 2\}$ (à gauche) et régularités optimales (à droite).

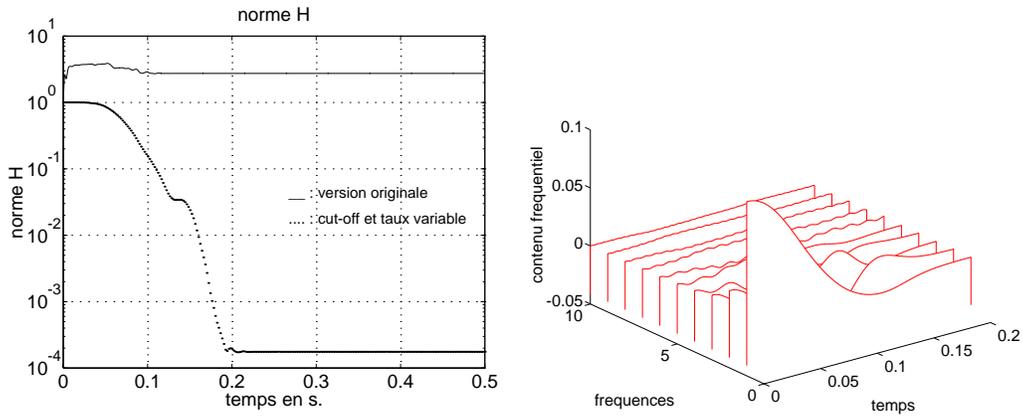


FIG. 4.76 - Comparaison entre la norme \mathcal{H} calculée avec la loi de rétroaction originale (à gauche) et celle régularisée et contenu fréquentiel de la réponse régularisée (à droite), pour $N < M$.

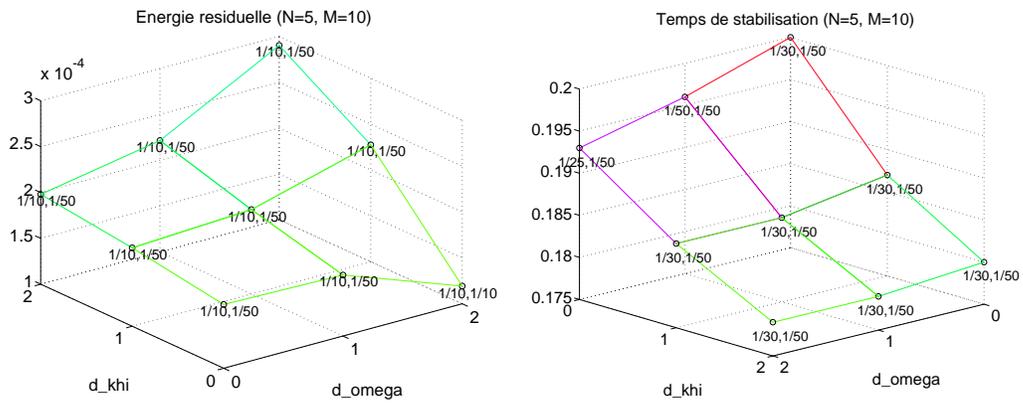


FIG. 4.77 - Énergie résiduelle (à gauche) et temps de stabilisation (à droite) comme fonction de d_{ω} et d_{χ} .

Chapitre 5

Treillis : contrôlabilité exacte

5.1 Introduction

L'étude du contrôle et de la stabilisation des grandes structures flexibles, ou plus généralement des multistruktures, a connu ces dernières années un intérêt croissant pour des raisons tant pratiques que théoriques. En effet, le développement de nouveaux outils en théorie du contrôle a permis d'affiner la compréhension du comportement dynamique de structures de plus en plus complexes.

5.1.1 Généralités sur les multistruktures

On peut définir une *multistrukture* comme le couplage d'éléments structuraux. Plus précisément, on peut caractériser essentiellement une multistrukture à l'aide des quatre données suivantes :

- le *nombre de ses composantes*
- le *type d'éléments structuraux* qui la compose
- la nature des *jonctions* entre ses éléments structuraux
- sa *géométrie*

Nous allons faire rapidement quelques commentaires sur le rôle de ces différents paramètres dans l'étude de la contrôlabilité exacte d'une multistrukture.

On pourrait penser que l'analyse du comportement vibratoire et plus précisément de la contrôlabilité exacte des multistruktures dépend fortement du nombre de ces composantes or il s'avère que c'est certainement la moins importante des propriétés caractérisant une multistrukture que nous venons d'énumérer.

Par exemple, une multistrukture composée uniquement de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli reliées rigidement bout-à-bout et contrôlée en flexion à l'une de ces extrémités est l'un des exemples les plus simple de multistruktures, et ceci quelque soit le nombre de ses composantes (voir G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall et

G. Payre [33] pour l'étude de la contrôlabilité exacte et de la stabilisation).

Le type d'élément structurant est évidemment d'importance et les premières études ont considéré les éléments structuraux les plus simples possibles : les cordes ou les poutres d'Euler-Navier-Bernoulli. En fait, comme le montre la majorité des travaux effectués dans ce domaine, le comportement des multistruktures dépend, certes du type de systèmes d'équations considérées, mais de manière plus essentielle de la façon dont les éléments structuraux sont couplés, autrement dit des *jonctions*.

Par exemple, le simple fait de rajouter des masses aux points de jonctions modifie complètement le comportement vibratoire de la structure et par la même l'efficacité des lois de commandes qui sont appliquées (voir E.B. Lee et Y. You [77], B.B. King [52], S. Hansen et E. Zuazua [45], C. Castro et E. Zuazua [23, 24] et C. Castro [22]). On peut également citer l'étude vibratoire de systèmes couplés à l'aide de jonctions non-linéaires de type oscillateur de Van der Pol (voir G. Chen, J. Zhou et S. Hsu [34]). Enfin, notons que les jonctions ne servent pas uniquement à connecter entre eux les éléments structuraux mais peuvent également servir d'actionneurs.

Enfin, *last but not least*, comme l'ont montré théoriquement les travaux de J.E. Lagnese, G. Leugering et E.J.P.G. Schmidt (voir [67], [49] et [50] pour ne citer que quelques articles), la géométrie des multistruktures est cruciale par la façon dont les éléments structuraux sont assemblés. Nous préciserons plus loin dans l'introduction les propriétés qu'ils ont exhibées.

5.1.2 Modélisation de la dynamique des multistruktures

Après ces quelques remarques très générales concernant la contrôlabilité exacte d'une multistrukture, revenons à l'étude proprement dite de leur dynamique et des types de modélisations qui sont utilisés pour l'étudier.

L'approche usuelle que l'on rencontre dans la littérature en contrôle des structures consiste à définir un modèle discret de la multistrukture via l'analyse modale, les éléments finis (voir L. Meirovitch [87] pour une présentation exhaustive de ces deux approches) ou d'autres techniques (voir par exemple E. Balmès [5]). Or cette technique qui a montré son efficacité dans l'étude de la statique, et dans la plupart des cas dans celle de la dynamique, est insuffisante pour étudier la contrôlabilité exacte puisque une fois défini un problème en dimension finie, les outils théoriques qui permettent de vérifier la contrôlabilité exacte ne tiennent pas compte des propriétés essentielles des systèmes continus originaux.

En effet, la contrôlabilité exacte ou selon la terminologie des automaticiens la commandabilité complète des systèmes linéaires en dimension finie de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t)x + G(t)u, & x(0) = x_0 \\ y = H(t)x \end{cases} \quad (5.1.1)$$

se démontre grâce au critère de rang de Kalman :

$$\text{rang}(G, FG, \dots, F^{n-1}G) = n \quad (5.1.2)$$

où n désigne la dimension du système. Remarquons que vérifier l'égalité (5.1.2) revient à montrer que le grammien de contrôlabilité du système est défini positif et donc inversible (voir par exemple J. Zabczyk [107]).

L'inconvénient de ce critère est qu'il *ne fait pas intervenir l'horizon de contrôlabilité*, or on sait que celui-ci ne peut être, en règle générale, choisi arbitrairement comme par exemple dans le cas du contrôle frontière Dirichlet de l'équation des ondes où, du fait du *principe de Huyghens* sur la vitesse finie de propagation des ondes, il existe un temps minimal de contrôlabilité exacte.

Aussi ces dernières années, l'étude de la contrôlabilité exacte et de la stabilisation des multistruktures est basée sur des *modèles continus* des éléments structuraux; autrement dit on construit le contrôle non plus à partir d'EDO mais à l'aide de systèmes d'EDP. L'avantage de telles méthodes, outre le fait qu'elles décrivent plus finement le comportement vibratoire, est qu'elles permettent d'utiliser de nombreux outils théoriques, plus ou moins nouveaux, pour la construction et l'étude de lois de commande (contrôle ou feedback). On peut distinguer trois approches distinctes.

La première consiste à démontrer la contrôlabilité exacte ou la stabilisation exponentielle (si elles ont lieu) par les méthodes classiques de la théorie du contrôle et de la stabilisation.

- En ce qui concerne la stabilisation, on construit explicitement une fonctionnelle de Liapunov (voir par exemple G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall et G. Payre [33]), on peut également appliquer le principe du maximum de Pontryagin (I. Sadek et V.H. Melvin [104]) ou le principe d'invariance de Lasalle (B. d'Andréa-Novel, F. Boustany, F. Conrad and B.P. Rao [3]), ou enfin on se ramène à un système discret par des méthodes de superposition modale afin de vérifier le critère de Routh (G. Chen et H.-K. Wang [26]) ou tout autre outil de l'automatique.
- Quant au contrôle, on applique des méthodes LQG (J.S. Gibson et A. Adamian [37]) pour construire des contrôles par résolution d'équations de Riccati algébriques, ou comme pour la stabilisation par écriture du système sous une forme discrète afin de vérifier des critères de commandabilité: noyau nul d'opérateur mis sous forme matricielle (B.Z. Guo et W.D. Zhu [44], E.B. Lee et Y. You [77]).

La seconde école, plus récente, consiste à vérifier une *inégalité d'observabilité* afin d'obtenir une condition *suffisante* quant à la contrôlabilité exacte en fonction de

l'horizon de contrôlabilité et du support de l'actionneur.

On démontre cette inégalité à l'aide de la technique des multiplicateurs combinée, soit à la méthode HUM, soit aux séries de Fourier non-harmoniques.

En ce qui concerne l'utilisation des séries de Fourier non-harmoniques, on peut citer par exemple L.F. Ho [46] pour l'étude d'un système couplé composé de N cordes mises bout-à-bout et contrôlé aux points de jonctions, ainsi que E. Zuazua et S. Hansen [45] qui ont étudié un système composé de deux cordes reliées par une masse.

L'autre technique, basée sur l'utilisation de la méthode HUM, a été appliquée par J.-P. Puel et E. Zuazua [90, 91, 92] pour l'étude de la contrôlabilité exacte frontière d'un corps multidimensionnel vibrant relié à une corde, également par E. Zuazua et S. Hansen [45] (voir commentaires précédents), et par J.E. Lagnese [66] pour n'en citer que quelques-uns.

Cependant l'application la plus exhaustive de la méthode HUM aux multistru-ctures (réseaux de cordes, de poutres de Timoshenko; plaques minces, ...) est due aux travaux conjoints de J.E. Lagnese, G. Leugering et E.P.J.G. Schmidt [67]. Ces auteurs ont pu exhiber des conditions *nécessaires* pour qu'il y ait ou non contrôlabilité exacte.

Par exemple dans le cas d'une multistru-cture constituée de cordes ou de poutres et contrôlée par des actionneurs localisés à ses extrémités, la présence de circuits (voir figure 5.1) est une *condition suffisante* pour qu'il soit impossible de contrôler exactement le treillis, même avec des actionneurs placés à toutes ses extrémités (voir J.E. Lagnese, G. Leugering et E.P.J.G. Schmidt [67]).

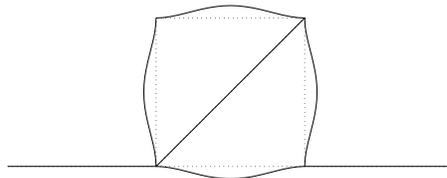


FIG. 5.1 - *Exemple de multistru-cture contenant un circuit qui entraîne l'exis-tence de modes invisibles (ici on représente le 8 ème mode) pour des contrôles frontières.*

Remarquons que ces résultats confirment les conditions *nécessaires et suffisantes* quant à la contrôlabilité exacte données par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch dans le cas d'un système à une seule composante (voir les travaux récents de N. Burq [20] pour leurs applications à des systèmes couplés) qui constituent la dernière méthode de vérification de la contrôlabilité exacte.

Cette école utilise les outils mathématiques pointus de l'analyse microlocale et donne des conditions *nécessaires et suffisantes* pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes, de l'élastodynamique, ainsi que d'autres systèmes physiques.

Malheureusement, ces conditions sont basées essentiellement sur l'analyse de la propagation des singularités et la vérification de propriétés particulières des rayons de l'optique géométrique (rayons diffractifs, captifs (voir figure 5.2), glissants, ...) sur la région de contrôle, qui sont difficilement vérifiables.

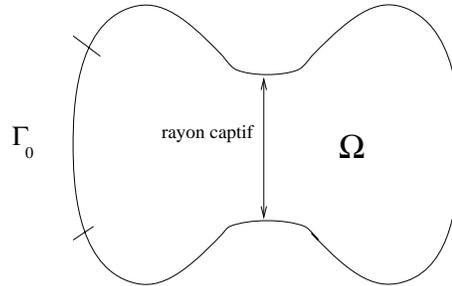


FIG. 5.2 - *Rayon captif, invisible pour un actionneur de support Γ_0 .*

Grosso modo, il faut vérifier que :

” tous les rayons qui se propagent dans la structure selon les lois de l'optique géométrique atteignent le bord de contrôle en un point non-diffractif et en un temps inférieur au temps de contrôlabilité ”

On peut cependant noter une tentative de vérification numérique de cette condition, dans le cas du contrôle frontière de l'équation des ondes, à l'aide d'un critère énergétique qui permet de mesurer l'effet de tels rayons sur la contrôlabilité exacte (voir M. Asch et G. Lebeau [2]).

Aussi nous proposons, une méthode alternative basée sur la vérification de l'*inégalité d'observabilité* dans le cas du contrôle issu de la méthode HUM (voir F. Bourquin [14], K.-D. Phung [89] et F. Bourquin et J.-S. Briffaut [15]).

Plus précisément, on construit un *test numérique* qui nous donne le minimum du grammien comme limite d'une suite α_n . On vérifie alors qu'il y a contrôlabilité exacte si et seulement si la suite α_n converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers une constante strictement positive (**cas 1**) et qu'il n'y a pas contrôlabilité exacte si et seulement si elle décroît vers zéro (**cas 2**). Cela nous fournit ainsi une alternative discriminante.

Dans le *cas 2*, l'objectif est alors d'identifier les *ondes invisibles* pour le système d'actionneurs, appelées aussi *ondes inobservables*, autrement dit, les ondes qui échappent aux efforts des mécanismes de contrôle.

Remarquons enfin pour conclure que, d'un point de vue pratique, il est important de savoir si ces ondes inobservables sont négligeables, par exemple si elles sont localisées dans une région qui n'est pas cruciale pour la sécurité.

5.1.3 Plan du chapitre

Nous allons tout d'abord appliquer au paragraphe 5.2 la méthode HUM à un treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli particulier dont les poutres sont reliées par des jonctions rigides à angles droits.

Après avoir posé les équations décrivant la dynamique du treillis pris en exemple, on calcule son *grammien de contrôlabilité* (voir propriété 5.1).

Nous étendrons au paragraphe 5.2.4 les résultats obtenus pour notre treillis aux treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli avec des angles de jonction entre les poutres quelconques et sur lesquels s'exercent des actionneurs en flexion, déplacement et force.

Au paragraphe 5.3, nous utiliserons la méthode de superposition modale pour calculer le grammien approché.

Nous effectuerons ensuite au paragraphe 5.4 l'intégration numérique du problème approché défini au paragraphe précédent. Comme pour le contrôle de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli (voir le paragraphe 1.6.3 du chapitre 1), l'étape fondamentale de notre méthode de discrétisation consiste à définir les formes *très faibles* des *efforts discrets* afin de calculer avec une précision plus grande le grammien de contrôlabilité discret.

Enfin, nous définirons au paragraphe 5.5 un *test numérique de contrôlabilité exacte* qui consiste à calculer, à partir du grammien de contrôlabilité approché, une suite qui converge vers la constante de coercivité de l'inégalité d'observabilité vérifiée par ce même grammien.

5.2 Application de la méthode HUM au treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli

5.2.1 Introduction

Nous allons étudier la contrôlabilité exacte d'un treillis plan de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli reliées bout-à-bout *rigidement* avec des *angles droits* dont on contrôle la rotation de l'une de ses extrémités (voir figure 5.4).

Après avoir posé les équations décrivant la dynamique du treillis considéré nous lui appliquerons la méthode HUM afin de définir le contrôle et calculer le grammien de contrôlabilité exacte.

Les résultats obtenus pour ce treillis particulier se généralisent aux treillis de poutres reliées avec des *angles quelconques*, que l'on contrôle à l'aide d'actionneurs agissant en *flexion, en déplacement et en force* aux extrémités du treillis, les extrémités non contrôlées étant encastrees.

On peut utiliser en particulier le même grammien que les angles aux jonctions entre les poutres des treillis soient droits ou non et par conséquent effectuer des tests numériques pour de tels treillis.

Exemple 60 on étudiera notamment au paragraphe 6.4 du chapitre 6 la contrôlabilité exacte du treillis représenté à la figure 5.3

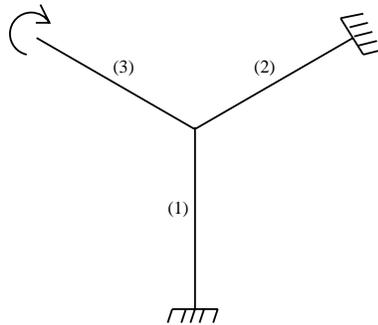


FIG. 5.3 - Treillis de poutres reliées rigidement avec des angles différents de 90 degrés.

qui est contrôlé en rotation à l'une de ses extrémités et dont les angles aux jonctions entre les poutres sont identiques et de 120 degrés.

5.2.2 Position du problème

On considère un treillis plan composé de quatre poutres d'Euler-Navier-Bernoulli (voir figure 5.4) reliées bout-à-bout *rigidement* à *angles droits* sur lequel s'exerce

un actionneur qui contrôle la rotation de l'extrémité gauche du treillis, le déplacement transverse étant bloqué à cette même extrémité. Les extrémités du treillis non contrôlées sont encastrées.

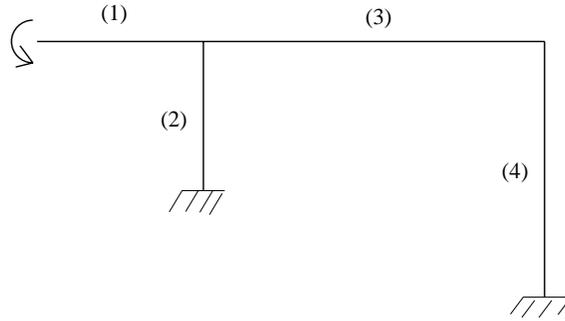


FIG. 5.4 - Treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli contrôlé en rotation à l'une de ses extrémités, le déplacement transverse étant bloqué à cette même extrémité.

On associe à chaque poutre un repère local (Ox) dirigé vers la droite pour les poutres horizontales et vers le haut pour les poutres verticales.

Hypothèse: pour la clarté de la présentation, on suppose que toutes les poutres ont la même longueur L .

On note T l'horizon de contrôlabilité et pour chaque poutre (k) : $\rho(x)$ la masse linéique, $E(x)$ le module d'Young, $S(x)$ la section, $I(x)$ l'inertie de section.

Soit, pour $\{\underline{y}_k^0, \underline{y}_k^1\} = \{\{y_k^0, \tilde{y}_k^0\}, \{y_k^1, \tilde{y}_k^1\}\}$ des données initiales assez régulières, $\underline{y}_k(x, t) = \{y_k(x, t), \tilde{y}_k(x, t)\}$ la solution de :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ y_k(x, 0) = y_k^0(x), \quad \frac{\partial y_k}{\partial t}(x, 0) = y_k^1(x) & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.2.3)$$

et

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \tilde{y}_k}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial x} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \tilde{y}_k(x, 0) = \tilde{y}_k^0(x), \quad \frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial t}(x, 0) = \tilde{y}_k^1(x) & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.2.4)$$

où $y_k(x, t)$ (resp. $\tilde{y}_k(x, t)$) est le déplacement *transverse* (resp. *longitudinal*) de la k -ième poutre dans le repère local qui lui est associé; de plus, pour tout $t \in [0, T]$,

$\underline{y}_k(x, t)$ vérifie les *conditions de bords* suivantes :

- encastrement en $x = 0$ des poutres (2) et (4) :

$$y_k(0, t) = \frac{\partial y_k}{\partial x}(0, t) = \tilde{y}_k(0, t) = 0, \quad k = 2, 4 \quad (5.2.5)$$

- un actionneur $v(t)$ contrôle l'angle de rotation de l'extrémité gauche de la poutre (1), le déplacement transverse étant bloqué :

$$\begin{cases} y_1(0, t) = 0, & \frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) = v(t) \\ \tilde{y}_1(0, t) = 0 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

et enfin les poutres du treillis sont reliées par des *jonctions rigides*, on a donc continuité des déplacements et des efforts entre les poutres horizontales ainsi que continuité de la rotation avec la poutre verticale, pour les poutres (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} y_1(L, t) = \tilde{y}_2(L, t) = y_3(0, t), & \tilde{y}_1(L, t) = y_2(L, t) = \tilde{y}_3(0, t) \\ \frac{\partial y_1}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial y_3}{\partial x}(0, t), & EI \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}(L, t) = EI \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}(0, t) \\ EA \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right)(L, t) = EA \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x}(0, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial y_2}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} \right)(0, t) \end{cases} \quad (5.2.7)$$

et pour les poutres (3) et (4) :

$$\begin{cases} y_3(L, t) = \tilde{y}_4(L, t), & \tilde{y}_3(L, t) = y_4(L, t), & \frac{\partial y_3}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial y_4}{\partial x}(L, t) \\ EA \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y_4}{\partial x^2} \right)(L, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial y_4}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases} \quad (5.2.8)$$

On note $y = \{y_k\}_{k=1}^4$ (resp. $\tilde{y} = \{\tilde{y}_k\}_{k=1}^4$) le vecteur déplacement transverse (resp. longitudinal) de la poutre.

5.2.3 Grammien de contrôlabilité exacte

On applique la méthode HUM afin de définir le grammien de contrôlabilité exacte.

Soit, pour $\{\underline{\varphi}_k^0, \underline{\varphi}_k^1\} = \{\{\varphi_k^0, \tilde{\varphi}_k^1\}, \{\varphi_k^1, \tilde{\varphi}_k^1\}\}$ des données initiales suffisamment régulières, $\underline{\varphi}_k(x, t) = \{\varphi_k(x, t), \tilde{\varphi}_k(x, t)\}$ l'unique solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \varphi_k(x, 0) = \varphi_k^0(x), \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}(x, 0) = \varphi_k^1(x) & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.2.9)$$

et

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_k}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \tilde{\varphi}_k(x, 0) = \tilde{\varphi}_k^0(x), \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial t}(x, 0) = \tilde{\varphi}_k^1(x) & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on a des conditions d'encastrement à toutes les extrémités du treillis :

$$\varphi_k(0, t) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(0, t) = \tilde{\varphi}_k(0, t) = 0, \quad k = 1, 2, 4 \quad (5.2.11)$$

enfin on a continuité des déplacements et des efforts entre les poutres horizontales ainsi que continuité de la rotation avec la poutre verticale pour les poutres (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} \varphi_1(L, t) = \tilde{\varphi}_2(L, t) = \varphi_3(0, t), \quad \tilde{\varphi}_1(L, t) = \varphi_2(L, t) = \tilde{\varphi}_3(0, t) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(0, t), \quad EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(L, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}(0, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \right)(0, t) \\ EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right)(L, t) = EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_3}{\partial x}(0, t) \end{cases} \quad (5.2.12)$$

et pour les poutres (3) et (4) :

$$\begin{cases} \varphi_3(L, t) = \tilde{\varphi}_4(L, t), \quad \tilde{\varphi}_3(L, t) = \varphi_4(L, t), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(L, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(L, t) = 0 \\ EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_3}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} \right)(L, t) = 0 \end{cases} \quad (5.2.13)$$

Notations : $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^4$ et $\tilde{\varphi} = \{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1}^4$.

Soit, pour $\{\underline{\psi}_k^0, \underline{\psi}_k^1\} = \{\{\psi_k^0, \tilde{\psi}_k^0\}, \{\psi_k^1, \tilde{\psi}_k^1\}\}$ des données initiales suffisamment régulières, $\underline{\psi}_k(x, t) = \{\psi_k(x, t), \tilde{\psi}_k(x, t)\}$ l'unique solution du problème rétrograde :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \psi_k(x, T) = \frac{\partial \psi_k}{\partial t}(x, T) = 0 & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.2.14)$$

et

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_k}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial x} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \tilde{\psi}_k(x, T) = \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial t}(x, T) = 0 & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.2.15)$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on a des conditions d'encastrement aux extrémités inférieures des poutres (2) et (4) :

$$\psi_k(0, t) = \tilde{\psi}_k(0, t) = \frac{\partial \psi_k}{\partial x}(0, t) = 0, \quad k = 2, 4 \quad (5.2.16)$$

et le système de contrôle impose l'angle de rotation sur l'extrémité gauche de la poutre (1) :

$$\begin{cases} \psi_1(0, t) = 0, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(0, t) \\ \tilde{\psi}_1(0, t) = 0 \end{cases} \quad (5.2.17)$$

enfin on a continuité des déplacements et des efforts entre les poutres horizontales ainsi que la continuité de la rotation avec la poutre verticale pour les poutres (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} \psi_1(L, t) = \tilde{\psi}_2(L, t) = \psi_3(0, t), & \tilde{\psi}_1(L, t) = \psi_2(L, t) = \tilde{\psi}_3(0, t) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(0, t), & EI \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}(L, t) = EI \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2}(0, t) \\ EA \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right)(L, t) = EA \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial x}(0, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} \right)(0, t) \end{cases} \quad (5.2.18)$$

et pour les poutres (3) et (4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_3(L, t) = \tilde{\psi}_4(L, t), \quad \tilde{\psi}_3(L, t) = \psi_4(L, t), \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \psi_4}{\partial x}(L, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} \right) (L, t) - EA \frac{\partial \psi_4}{\partial x}(L, t) = 0 \\ EA \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_4}{\partial x^2} \right) (L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (5.2.19)$$

Notations : $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^4$ et $\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_k\}_{k=1}^4$.

Afin de définir l'opérateur de la méthode HUM nous avons besoin du produit scalaire suivant :

Définition 5.1 Soit $u = \{u_k\}_{k=1}^4$ (resp. $v = \{v_k\}_{k=1}^4$) et $\tilde{u} = \{\tilde{u}_k\}_{k=1}^4$ (resp. $\tilde{v} = \{\tilde{v}_k\}_{k=1}^4$) et $\underline{u} = \{u, \tilde{u}\}$ (resp. $\underline{v} = \{v, \tilde{v}\}$),

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \{u, \tilde{u}\}, \{v, \tilde{v}\} \rangle = \sum_{k=1}^4 \int_0^L (u_k v_k + \tilde{u}_k \tilde{v}_k) \rho A dx. \quad (5.2.20)$$

Définition 5.2 $\forall \{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}$ des données assez régulières,

$$\Lambda \{ \underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1 \} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t}(0), -\underline{\psi}(0) \right\} \quad (5.2.21)$$

avec $\underline{\varphi}^0 = \{\varphi^0, \tilde{\varphi}^0\}$ (resp. $\underline{\varphi}^1 = \{\varphi^1, \tilde{\varphi}^1\}$) et $\underline{\psi}(0) = \{\psi(0), \tilde{\psi}(0)\}$ (resp. $\frac{\partial \psi}{\partial t}(0) = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t}(0), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(0) \right\}$).

L'opérateur Λ vérifie la propriété essentielle suivante :

Propriété 5.1 $\forall (\{ \underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1 \}, \{ \underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1 \})$ des données assez régulières,

$$\langle \Lambda \{ \underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1 \}, \{ \underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1 \} \rangle = \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(0, t) EI \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}(0, t) dt. \quad (5.2.22)$$

DÉMONSTRATION :

Multiplions l'équation (5.2.14) (resp. (5.2.15)) dont ψ_k (resp. $\tilde{\psi}_k$) est solution par ζ_k (resp. $\tilde{\zeta}_k$) solution de (5.3.46) (resp. (5.3.47)), intégrons sur $(0, L) \times (0, T)$ et enfin sommons sur tous les k ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \int_0^L \int_0^T \left(\rho A \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right) (x, t) \right) \zeta_k(x, t) \\ + \left(\rho A \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_k}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial x} \right) (x, t) \right) \tilde{\zeta}_k(x, t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

On intègre par parties en temps et en espace, d'où :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^4 \int_0^L \int_0^T \left(\rho A \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x^2} \right)(x, t) \right) \psi_k(x, t) \\
& \quad + \left(\rho A \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_k}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \tilde{\zeta}_k}{\partial x} \right)(x, t) \right) \tilde{\psi}_k(x, t) dx dt \\
& + \sum_{k=1}^4 \int_0^L \left(\zeta_k^0 \frac{\partial \psi_k}{\partial t}(0) - \zeta_k^1 \psi_k(0) + \tilde{\zeta}_k^0 \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial t}(0) - \tilde{\zeta}_k^1 \tilde{\psi}_k(0) \right) \rho A dx \\
& = \int_0^T \sum_{k=1}^4 \left[\Xi_k(x, t) \right]_{x=0}^L dt
\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

avec pour tout k :

$$\begin{aligned}
\Xi_k(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right)(x, t) \zeta_k(x, t) - EI \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial \zeta_k}{\partial x}(x, t) \\
& + EI \frac{\partial \psi_k}{\partial x}(x, t) \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x^2}(x, t) - \psi_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x^2} \right)(x, t) \\
& - EA \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial x}(x, t) \tilde{\zeta}_k(x, t) + EA \tilde{\psi}_k(x, t) \frac{\partial \tilde{\zeta}_k}{\partial x}(x, t).
\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Les deux premiers termes de gauche de l'égalité (5.2.24) sont nuls, on a donc d'après la définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de l'opérateur Λ :

$$\langle \Lambda \{ \underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1 \}, \{ \underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1 \} \rangle = \int_0^T \sum_{k=1}^4 \left[\Xi_k(x, t) \right]_{x=0}^L dt. \tag{5.2.26}$$

Calculons les $\Xi_k(x, t)$ aux extrémités du treillis.

On a tout d'abord à l'extrémité gauche du treillis :

$$\Xi_1(0, t) = EI \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0, t) \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}(0, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(0, t) EI \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}(0, t) \tag{5.2.27}$$

les autres termes de $\Xi_1(0, t)$ étant nuls.

De façon encore plus simple, on a aux extrémités encastées des poutres (2) et (4) :

$$\Xi_2(0, t) = \Xi_4(0, t) = 0. \tag{5.2.28}$$

Pour démontrer la propriété, il suffit donc que la somme des $\Xi_k(x, t)$ soit nulle aux jonctions rigides des poutres du treillis.

On a pour $k = 3$ et $k = 4$ (après élimination des termes nuls) :

$$\Xi_k(L, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right)(L, t) \zeta_k(L, t) - \psi_k(L, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial x^2} \right)(L, t)$$

$$-EA \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial x}(L, t) \tilde{\zeta}_k(L, t) + EA \tilde{\psi}_k(L, t) \frac{\partial \tilde{\zeta}_k}{\partial x}(L, t) \quad (5.2.29)$$

donc en regroupant les termes de leur somme judicieusement, il vient :

$$\begin{aligned} & \Xi_3(L, t) + \Xi_4(L, t) = \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} \right) (L, t) \zeta_3(L, t) - EA \frac{\partial \tilde{\psi}_4}{\partial x}(L, t) \tilde{\zeta}_4(L, t) \right) \\ & - \left(\psi_3(L, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial x^2} \right) (L, t) - EA \tilde{\psi}_3(L, t) \frac{\partial \tilde{\zeta}_3}{\partial x}(L, t) \right) \\ & + \left(EA \tilde{\psi}_3(L, t) \frac{\partial \tilde{\zeta}_3}{\partial x}(L, t) - \psi_4(L, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \zeta_4}{\partial x^2} \right) (L, t) \right) \\ & - \left(EA \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial x}(L, t) \tilde{\zeta}_3(L, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \psi_4}{\partial x^2} \right) (L, t) \zeta_4(L, t) \right). \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

La jonction rigide reliant les poutres (3) et (4) entraîne que les quatre expressions entre parenthèse du membre de droite sont nulles, soit :

$$\Xi_3(L, t) + \Xi_4(L, t) = 0. \quad (5.2.31)$$

De même, la jonction rigide des poutres (1), (2) et (3) implique que :

$$\Xi_1(L, t) + \Xi_2(L, t) + \Xi_3(0, t) = 0. \quad (5.2.32)$$

□

On associe à l'opérateur Λ la forme bilinéaire symétrique :

Définition 5.3 $\forall (\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}, \{\underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1\})$ des données assez régulières,

$$a(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}, \{\underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1\}) = \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(0, t) EI \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}(0, t) dt \quad (5.2.33)$$

et on définit le *grammien de contrôlabilité* :

Définition 5.4 $\forall \{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}$ des données assez régulières,

$$\begin{aligned} G(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}) &= a(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}, \{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}) \\ &= \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(0, t) \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

5.2.4 Généralisation

Comme annoncé en introduction, nous allons étendre la définition (5.4) du *grammien de contrôlabilité* du treillis particulier pris en exemple, à l'ensemble des treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli, reliées par des jonctions rigides à angles quelconques, contrôlés en déplacement, flexion et force sur une partie du bord du treillis.

Tout d'abord, on définit les efforts qui s'exercent sur chaque poutre (k) :

Définition 5.5 $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$,

$$\left\{ \begin{array}{l} N_k(x, t) = EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x}(x, t) \quad (\text{effort normal}) \quad (5.2.35) \\ M_k(x, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{moment de flexion}) \quad (5.2.36) \\ T_k(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}(M_k(x, t)) \quad (\text{effort tranchant}) \quad (5.2.37) \end{array} \right.$$

et on note $N(x, t) = \{N_k(x, t)\}_{k=1}^4$, $M(x, t) = \{M_k(x, t)\}_{k=1}^4$ et $T(x, t) = \{T_k(x, t)\}_{k=1}^4$.

Remarque 5.1 Les efforts sont définis sur l'intervalle $[0, L]$ mais étant donné que nos actionneurs agissent au bord du treillis, nous n'aurons besoin que des valeurs de ces efforts en $x = 0$ ou en $x = L$ (selon la poutre sur laquelle s'exerce l'effort).

Définition 5.6 Soit $\varepsilon(\underline{\varphi})$ le tenseur des déformations linéarisé, $\sigma(\underline{\varphi})$ le tenseur des contraintes linéarisé représenté dans la base des contraintes principales $\{N, M, T\}$ avec \mathcal{A} le tenseur des modules d'élasticité :

$$\sigma(\underline{\varphi}) = \mathcal{A} : \varepsilon(\underline{\varphi}) = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} \quad (5.2.38)$$

On note Γ_0 la partie du bord du treillis sur lequel agit les actionneurs et \vec{n} le vecteur extérieur unitaire au domaine Ω du treillis.

On définit la forme bilinéaire $a(., .)$ telle que :

Définition 5.7 $\forall(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}, \{\underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1\})$ des données assez régulières,

$$\begin{aligned} a(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}, \{\underline{\zeta}^0, \underline{\zeta}^1\}) &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} (N(x, t)\hat{N}(x, t) + M(x, t)\hat{M}(x, t) \\ &\quad + T(x, t)\hat{T}(x, t)) dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\sigma(\underline{\varphi}) \cdot \vec{n}) (\sigma(\underline{\zeta}) \cdot \vec{n}) d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

avec $\hat{N}(x, t)$, $\hat{M}(x, t)$ et $\hat{T}(x, t)$ les efforts associés à ζ solution pour des données initiales $\{\zeta^0, \zeta^1\}$ assez régulières du problème adjoint.

Définition 5.8 $\forall \{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}$ des données assez régulières,

$$\begin{aligned} G(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}) &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} (N^2(x, t) + M^2(x, t) + T^2(x, t)) d\Gamma dt. \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\sigma(\underline{\varphi}) \cdot \vec{n}) (\sigma(\underline{\varphi}) \cdot \vec{n}) d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

Exemple 61 on considère le treillis représenté à la figure 5.5 dont la géométrie est identique à celle de notre premier exemple mais soumis à un système d'actionneurs différent. En effet, le treillis est contrôlé en déplacement et en flexion à son extrémité gauche et également contrôlé en flexion à l'extrémité libre de jonction de la poutre (2) :

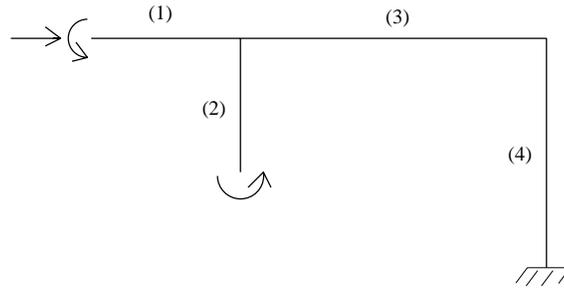


FIG. 5.5 - Treillis de poutres contrôlé en déplacement et en rotation.

Son grammien de contrôlabilité est d'après (5.2.40) :

$$G(\{\underline{\varphi}^0, \underline{\varphi}^1\}) = \int_0^T \left(EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x^2}(0, t) \right)^2 + \sum_{k=1}^2 \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}(0, t) \right)^2 dt \quad (5.2.41)$$

5.3 Approximation par superposition modale du grammien

5.3.1 Modes de flexion-compression du treillis

Nous allons calculer le grammien par superposition modale.

Pour les treillis que nous considérons les déplacements transversaux sont décrits par les équations d'Euler-Navier-Bernoulli et les déplacements longitudinaux par

les équations des ondes, aussi nous allons utiliser pour cette approximation les *modes de flexion-compression* de la structure encastrée.

Définition 5.9

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \underline{u} = \{u, \tilde{u}\} \in \prod_{k=1}^4 H^2(0, L) \times \prod_{k=1}^4 H^1(0, L); u = \{u_k\}_{k=1}^4, \right. \\ \tilde{u} = \{\tilde{u}_k\}_{k=1}^4; u_k(0) = \frac{du_k}{dx}(0) = \tilde{u}_k(0), \quad \forall k \in \{1, 2, 4\}, \\ u_1(L) = \tilde{u}_2(L) = u_3(0), \quad \tilde{u}_1(L) = u_2(L) = \tilde{u}_3(0), \\ \left. u_3(L) = \tilde{u}_4(L), \quad \tilde{u}_3(L) = u_4(L), \quad \frac{du_1}{dx}(L) = \frac{du_3}{dx}(0) \right\}.$$

On définit la forme bilinéaire symétrique $b(., .)$:

Définition 5.10 $\forall (\underline{u}, \underline{v}) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$,

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{k=1}^4 \int_0^L \left(EI \frac{d^2 u_k}{dx^2} EI \frac{d^2 v_k}{dx^2} + EA \frac{d\tilde{u}_k}{dx} EA \frac{d\tilde{v}_k}{dx} \right) dx. \quad (5.3.42)$$

Définition 5.11 Les modes $(\lambda_i, \underline{\theta}_i)_{i=1}^{+\infty}$ sont solutions du problème variationnel:

$$\forall \underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}, \quad b(\underline{\theta}_i, \underline{u}) = \lambda_i < \underline{\theta}_i, \underline{u} >. \quad (5.3.43)$$

Les modes sont rangés de telle sorte que leurs valeurs propres forment une suite croissante et leurs fonctions propres sont normalisées dans $L^2(\Omega)/(\rho A)$.

Pour tout entier $N > 0$, on choisit comme espace d'approximation:

$$V_N = \text{Vect} \{ \underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_N \}. \quad (5.3.44)$$

5.3.2 Approximation par superposition modale du grammien

On calcule le grammien à l'aide d'une méthode de Galerkin sur $V_N \times V_N$. Par définition de la forme bilinéaire $a(., .)$ (voir paragraphe 5.2), il vient:

$$\forall (\{ \underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1 \}, \{ \underline{\zeta}_N^0, \underline{\zeta}_N^1 \}) \in V_N \times V_N, \\ a(\{ \underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1 \}, \{ \underline{\zeta}_N^0, \underline{\zeta}_N^1 \}) = \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,1}}{\partial x^2}(0, t) EI \frac{\partial^2 \zeta_{N,1}}{\partial x^2}(0, t) dt \quad (5.3.45)$$

avec $\underline{\varphi}_N = \{ \varphi_N, \tilde{\varphi}_N \}$ (resp. $\underline{\zeta}_N = \{ \zeta_N, \tilde{\zeta}_N \}$) la solution exacte du même problème adjoint qu'au niveau continu, soit pour tout k :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \varphi_{N,k}}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,k}}{\partial x^2} \right)(x, t) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \varphi_{N,k}(x, 0) = \varphi_{N,k}^0(x), \quad \frac{\partial \varphi_{N,k}}{\partial t}(x, 0) = \varphi_{N,k}^1(x) & \text{sur } (0, L) \end{cases} \quad (5.3.46)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{N,k}}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_{N,k}}{\partial x} \right)(x, t) = 0 \quad \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \tilde{\varphi}_{N,k}(x, 0) = \tilde{\varphi}_{N,k}^0(x), \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_{N,k}}{\partial t}(x, 0) = \tilde{\varphi}_{N,k}^1(x) \quad \text{sur } (0, L) \end{array} \right. \quad (5.3.47)$$

avec des conditions de bords encastées :

$$\varphi_{N,k}(0, t) = \frac{\partial \varphi_{N,k}}{\partial x}(0, t) = \tilde{\varphi}_{N,k}(0, t) = 0, \quad k = 1, 2, 4 \quad (5.3.48)$$

et enfin on a continuité des déplacements et des efforts entre les poutres horizontales ainsi que la continuité de la rotation avec la poutre verticale pour les poutres (1), (2) et (3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_{N,1}(L, t) = \varphi_{N,2}(L, t) = \tilde{\varphi}_{N,3}(0, t), \quad \varphi_{N,1}(L, t) = \tilde{\varphi}_{N,2}(L, t) = \varphi_{N,3}(0, t) \\ \frac{\partial \varphi_{N,1}}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \varphi_{N,2}}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \varphi_{N,3}}{\partial x}(0, t), \quad EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,1}}{\partial x^2}(L, t) = EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,3}}{\partial x^2}(0, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,1}}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial \varphi_{N,2}}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,3}}{\partial x^2} \right)(0, t) \\ EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_{N,1}}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,2}}{\partial x^2} \right)(L, t) = EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_{N,3}}{\partial x}(0, t) \end{array} \right. \quad (5.3.49)$$

et pour les poutres (3) et (4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{N,3}(L, t) = \tilde{\varphi}_{N,4}(L, t), \quad \tilde{\varphi}_{N,3}(L, t) = \varphi_{N,4}(L, t), \quad \frac{\partial \varphi_{N,3}}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial \varphi_{N,4}}{\partial x}(L, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,3}}{\partial x^2} \right)(L, t) - EA \frac{\partial \varphi_{N,4}}{\partial x}(L, t) = 0 \\ EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_{N,3}}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,4}}{\partial x^2} \right)(L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (5.3.50)$$

Soient

$$\underline{\varphi}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \underline{\theta}_i(x), \quad \underline{\zeta}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \underline{\theta}_i(x) \quad (5.3.51)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varphi}_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \underline{\theta}_i(x), \quad \underline{\zeta}_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \underline{\theta}_i(x) \\ \underline{\varphi}_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \delta_i \underline{\theta}_i(x), \quad \underline{\zeta}_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i \underline{\theta}_i(x) \end{array} \right. \quad (5.3.52)$$

On note pour tout $x \in [0, L]$, $m_i(x) = \{m_{i,k}(x)\}_{k=1}^4$ le vecteur défini par :

Définition 5.12

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad m_{i,k}(x) = EI \frac{d^2 \theta_{i,k}}{dx^2}(x). \quad (5.3.53)$$

Le grammien est *calculable explicitement*, on a en effet pour tout $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$:

$$EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) m_i(x) \quad (5.3.54)$$

et donc en particulier pour tout $t \in [0, T]$:

$$EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,1}}{\partial x^2}(0, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) m_{i,1}(0). \quad (5.3.55)$$

Par conséquent, par définition de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, il vient :

$$\begin{aligned} a\left(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}, \{\underline{\zeta}_N^0, \underline{\zeta}_N^1\}\right) &= \int_0^T EI \frac{\partial^2 \varphi_{N,1}}{\partial x^2}(0, t) EI \frac{\partial^2 \zeta_{N,1}}{\partial x^2}(0, t) dt \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(\int_0^T \alpha_i(t) \hat{\alpha}_j(t) dt \right) m_{i,1}(0) m_{j,1}(0). \end{aligned} \quad (5.3.56)$$

On en déduit que le *grammien de contrôlabilité approché* a pour expression :

$$\begin{aligned} G\left(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}\right) &= a\left(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}, \{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(\int_0^T \alpha_i(t) \alpha_j(t) dt \right) m_{i,1}(0) m_{j,1}(0). \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

5.3.3 Généralisation

Naturellement, comme dans le cas continu on peut étendre les résultats démontrés pour le treillis particulier que nous avons pris en exemple, à l'ensemble des treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli, reliées par des jonctions rigides avec des angles quelconques, contrôlés en déplacement, flexion et force sur une partie du bord du treillis.

On note pour tout $x \in [0, L]$, $n_i(x) = \{n_{i,k}(x)\}_{k=1}^4$ et $t_i(x) = \{t_{i,k}(x)\}_{k=1}^4$ les vecteurs définis par :

Définition 5.13 *Pour tout $i \in [1, \dots, N]$ et pour tout k :*

$$n_{i,k}(x) = EA \frac{d\tilde{\theta}_{i,k}}{dx}(x), \quad t_{i,k}(x) = -EI \frac{d^3 \theta_{i,k}}{dx^3}(x). \quad (5.3.58)$$

Le grammien est *calculable explicitement*, on a en effet pour tout $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$:

$$\begin{cases} EA \frac{\partial \tilde{\varphi}_N}{\partial x}(x, t) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) n_i(x) \\ -EI \frac{\partial^3 \varphi_N}{\partial x^3}(x, t) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) t_i(x) \end{cases} \quad (5.3.59)$$

Par conséquent, par définition de la forme bilinéaire $a(., .)$, il vient :

$$\begin{aligned} a(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}, \{\underline{\zeta}_N^0, \underline{\zeta}_N^1\}) &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\sigma(\underline{\varphi}_N) \cdot \vec{n}) (\sigma(\underline{\zeta}_N) \cdot \vec{n}) d\Gamma dt \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(\int_0^T \alpha_i(t) \hat{\alpha}_j(t) dt \int_{\Gamma_0} Q_{ij}(x) d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (5.3.60)$$

avec pour tout $1 \leq i, j \leq N$ et pour tout $x \in \Gamma_0$:

$$Q_{ij}(x) = n_i(x) \hat{n}_j(x) + m_i(x) \hat{m}_j(x) + t_i(x) \hat{t}_j(x). \quad (5.3.61)$$

On en déduit que le *grammien de contrôlabilité approché* a pour expression :

$$\begin{aligned} G(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}) &= a(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}, \{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(\int_0^T \alpha_i(t) \alpha_j(t) dt \int_{\Gamma_0} q_{ij}(x) d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (5.3.62)$$

avec pour tout $1 \leq i, j \leq N$ et pour tout $x \in \Gamma_0$:

$$q_{ij}(x) = n_i(x) n_j(x) + m_i(x) m_j(x) + t_i(x) t_j(x). \quad (5.3.63)$$

Exemple 62 le grammien du treillis de l'exemple 61 est :

$$G(\{\underline{\varphi}_N^0, \underline{\varphi}_N^1\}) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(\int_0^T \alpha_i(t) \alpha_j(t) dt \right) g_{ij} \quad (5.3.64)$$

avec pour tout $1 \leq i, j \leq N$:

$$g_{ij} = n_{i,1}(0) n_{j,1}(0) + m_{i,1}(0) m_{j,1}(0) + m_{i,2}(0) m_{j,2}(0). \quad (5.3.65)$$

5.4 Intégration numérique

5.4.1 Introduction

Nous allons tout d'abord indiquer brièvement quels types d'éléments finis nous allons utiliser pour le calcul discret du grammien.

Comme dans le paragraphe 1.6.3 du chapitre 1, nous allons définir la forme *très faible* de notre effort ce qui nécessitera l'introduction d'un *relèvement* adapté à son calcul.

Nous donnerons alors la méthode de calcul des efforts très faibles discrets à l'aide des relèvements discrets. Enfin, nous définirons l'expression discrète du grammien de contrôlabilité.

5.4.2 Types d'éléments finis

Les treillis que nous considérons sont discrétisés à l'aide de la Structural Dynamics Toolbox de MATLAB (voir E. Balmès [4]) qui utilise des éléments finis de type P_1 -Lagrange pour les déplacements longitudinaux et des éléments finis de type P_3 -Hermite pour les déplacements transversaux (voir A.K. Noor et M.P. Nemeth [88]).

Soit N_h un entier > 0 , on discrétise chaque poutre du treillis avec le même pas de maillage $h = L/(N_h + 1)$ et on note x_l les points (resp. I_l les intervalles) tels que :

$$\forall l \in [0, \dots, N_h], \quad x_l = lh, \quad I_l = [x_l, x_{l+1}]. \quad (5.4.1)$$

On définit $\underline{\mathcal{V}}_h = \mathcal{V}_h \times \tilde{\mathcal{V}}_h$ l'espace d'approximation avec :

Définition 5.14

$$\mathcal{V}_h = \{v_h \in \mathcal{C}^1([0, L]); \forall l \in [0, \dots, N_h], \quad v_h|_{I_l} \in \mathcal{P}_3(I_l)\} \quad (5.4.2)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0, L]); \forall l \in [0, \dots, N_h], \quad v_h|_{I_l} \in \mathcal{P}_1(I_l)\} \quad (5.4.3)$$

On note $(\lambda_i^h, \underline{\theta}_i^h) \in \mathbb{R}^+ \times \underline{\mathcal{V}}_h$ les modes propres de flexion-compression (voir paragraphe 5.3.1) calculés sur $\underline{\mathcal{V}}_h$ et $V_{N,h} = Vect\{\underline{\theta}_1^h, \dots, \underline{\theta}_N^h\}$.

De plus on note $\{\underline{w}_m^h\}_{m=1}^{N_h}$ les fonctions de bases de $\underline{\mathcal{V}}_h$, on a :

Définition 5.15

$$\forall 1 \leq i, j \leq N_h, \quad K_{ij}^h = b(\underline{w}_i^h, \underline{w}_j^h), \quad M_{ij}^h = \langle \underline{w}_i^h, \underline{w}_j^h \rangle \quad (5.4.4)$$

5.4.3 Forme très faible du moment

Comme nous allons le voir, la définition du relèvement nécessaire au calcul du moment *très faible* pour un treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli est une simple généralisation du relèvement utilisé pour calculer le moment *très faible*

dans le cas de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli contrôlée en flexion (se reporter au chapitre 1).

Remarque 5.2 Pour toute résolution de l'algorithme HUM par application de la méthode de Galerkin, le terme de bord apparaissant dans l'expression du contrôle projeté sur V_N , peut toujours s'écrire sous une forme très faible.

A. Définition du relèvement

Tout d'abord définissons le relèvement $\underline{z}(x) = \{z^m(x), \tilde{z}^m(x)\}$ nécessaire au calcul de l'expression très faible de $m_{i,1}(0)$.

Définition 5.16 Soit $\underline{z}^m(x) = \{z^m(x), \tilde{z}^m(x)\}$ avec $z^m = \{z_k^m\}_{k=1}^4$ et $\tilde{z}^m = \{\tilde{z}_k^m\}_{k=1}^4$ solution pour tout k de :

$$\frac{d^2 \tilde{z}_k^m}{dx^2}(x) = \frac{d^4 z_k^m}{dx^4}(x) = 0 \quad \text{dans } (0, L) \quad (5.4.5)$$

tels que

$$z_1^m(0) = \tilde{z}_1^m(0) = 0, \quad \frac{dz_1^m}{dx}(0) = 1 \quad (5.4.6)$$

et vérifiant les conditions d'encastrement :

$$z_k^m(0) = \tilde{z}_k^m(0) = \frac{dz_k^m}{dx}(0) = 0, \quad k = 2, 4 \quad (5.4.7)$$

et enfin les conditions de jonctions rigides entre les poutres (1), (2) et (3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^m(L) = \tilde{z}_2^m(L) = z_3^m(0), \quad \tilde{z}_1^m(L) = z_2^m(L) = \tilde{z}_3^m(0) \\ \frac{dz_1^m}{dx}(L) = \frac{dz_2^m}{dx}(L) = \frac{dz_3^m}{dx}(0), \quad EI \frac{d^2 z_1^m}{dx^2}(L) = EI \frac{d^2 z_3^m}{dx^2}(0) \\ EA \frac{d\tilde{z}_1^m}{dx}(L) - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 z_2^m}{dx^2} \right)(L) = EA \frac{d\tilde{z}_3^m}{dx}(0) \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 z_1^m}{dx^2} \right)(L) - EA \frac{dz_2^m}{dx}(L) = \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 z_3^m}{dx^2} \right)(0) \end{array} \right. \quad (5.4.8)$$

et entre les poutres (3) et (4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_3^m(L) = \tilde{z}_4^m(L), \quad \tilde{z}_3^m(L) = z_4^m(L), \quad \frac{dz_3^m}{dx}(L) = \frac{dz_4^m}{dx}(L) \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 z_3^m}{dx^2} \right)(L) - EA \frac{dz_4^m}{dx}(L) = 0 \\ EA \frac{d\tilde{z}_3^m}{dx}(L) - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 z_4^m}{dx^2} \right)(L) = 0 \end{array} \right. \quad (5.4.9)$$

Le système d'équations dont \underline{z}^m est solution est bien posé et admet donc une solution unique.

Remarque 5.3 Dans le cas de la poutre seule, le relèvement est connu *explicitement*; c'est également le cas pour les treillis de manière générale et en particulier pour celui que nous considérons. Néanmoins, à l'exception de treillis particulièrement simples, la résolution de tels systèmes est loin d'être triviale, aussi nous calculerons le relèvement à l'aide d'éléments finis.

B. Forme très faible du moment

Le terme de bord $m_{i,1}(0) = EI \frac{d^2 \theta_{i,1}}{dx^2}(0)$ peut s'écrire sous la *forme très faible* suivante :

Propriété 5.2

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad m_{i,1}(0) = \lambda_i \langle \underline{\theta}_i, \underline{z}^m \rangle. \quad (5.4.10)$$

DÉMONSTRATION :

Les modes $\underline{\theta}_i = \{\theta_i, \tilde{\theta}_i\}$ sont solutions sur chaque poutre (k) de :

$$EI \frac{d^4 \theta_{i,k}}{dx^4}(x) = \lambda_i \rho A \theta_{i,k}(x) \quad \text{dans } (0, L) \quad (5.4.11)$$

et

$$-EA \frac{d^2 \tilde{\theta}_{i,k}}{dx^2}(x) = \lambda_i \rho A \tilde{\theta}_{i,k}(x) \quad \text{dans } (0, L). \quad (5.4.12)$$

En multipliant par z_k^m (resp. \tilde{z}_k^m) l'égalité (5.4.11) (resp. (5.4.12)) et en intégrant sur $[0, L]$ la somme des deux nouvelles égalités ainsi obtenues, on a par définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour tout k :

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^4 \theta_{i,k}}{dx^4} z_k^m + EA \frac{d^2 \tilde{\theta}_{i,k}}{dx^2} \tilde{z}_k^m \right) dx = \lambda_i \langle \underline{\theta}_i, \underline{z}^m \rangle. \quad (5.4.13)$$

On intègre quatre fois par parties le membre de gauche de l'égalité (5.4.13) et on somme sur tous les k , ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^4 \left[EI \frac{d^3 \theta_{i,k}}{dx^3} z_k^m - EI \frac{d^2 \theta_{i,k}}{dx^2} \frac{dz_k^m}{dx} + EI \frac{d\theta_{i,k}}{dx} \frac{d^2 z_k^m}{dx^2} - EI \theta_{i,k} \frac{d^3 z_k^m}{dx^3} \right. \\ \left. + EA \frac{d\tilde{\theta}_{i,k}}{dx} \tilde{z}_k^m - EA \tilde{\theta}_{i,k} \frac{d\tilde{z}_k^m}{dx} \right]_{x=0}^L = \lambda_i \langle \underline{\theta}_i, \underline{z}^m \rangle. \quad (5.4.14)$$

En tenant compte des conditions de bord d'encastrement et des conditions de jonctions rigides vérifiées par \underline{z}^m , tous les termes de du membre de gauche de l'égalité (5.4.14) s'annulent à l'exception de celui correspondant à $\frac{d\underline{z}_1^m}{dx}(0)$ qui vaut 1, d'où l'égalité recherchée :

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad EI \frac{d^2 \theta_{i,1}}{dx^2}(0) = \lambda_i < \underline{\theta}_i, \underline{z}^m >. \quad (5.4.15)$$

□

5.4.4 Moment très faible discret

On définit le moment discret très faible :

Définition 5.17

$$\forall h > 0, \forall i \in [1, \dots, N], \quad mt f_{i,1}^h(0) = \lambda_i^h < \underline{\theta}_i^h, \underline{z}^{m,h} > \quad (5.4.16)$$

que l'on calcule explicitement.

L'ensemble des indices des noeuds du maillage du treillis, noté I , peut se décomposer sous la forme :

$$I = I_{int} \cup I_{ext} \quad (5.4.17)$$

avec I_{ext} l'ensemble des indices des noeuds du maillage des bords du treillis et $I_{int} = I/I_{ext}$.

On note I_{enc} l'ensemble des indices de I_{ext} des bords encastres et I_{act} leur complémentaire dans I_{ext} .

Soit x^h le vecteur composante de $\underline{z}^{m,h}$ dans $\underline{\mathcal{V}}_h$, on numérote ses composantes de telle façon que :

$$\underline{x}^h = \begin{pmatrix} x^h|_{I_{int}} \\ x^h|_{I_{enc}} \\ x^h|_{I_{act}} \end{pmatrix} \quad (5.4.18)$$

et on décompose les matrices K^h et M^h en suivant cette numérotation, soit :

$$K^h = \begin{bmatrix} K_{I_{int}I_{int}}^h & K_{I_{int}I_{enc}}^h & K_{I_{int}I_{act}}^h \\ K_{I_{int}I_{int}}^h & K_{I_{int}I_{enc}}^h & K_{I_{int}I_{act}}^h \\ K_{I_{int}I_{int}}^h & K_{I_{int}I_{enc}}^h & K_{I_{int}I_{act}}^h \end{bmatrix}, \quad (5.4.19)$$

$$M^h = \begin{bmatrix} M_{I_{int}I_{int}}^h & M_{I_{int}I_{enc}}^h & M_{I_{int}I_{act}}^h \\ M_{I_{int}I_{int}}^h & M_{I_{int}I_{enc}}^h & M_{I_{int}I_{act}}^h \\ M_{I_{int}I_{int}}^h & M_{I_{int}I_{enc}}^h & M_{I_{int}I_{act}}^h \end{bmatrix}. \quad (5.4.20)$$

On peut calculer x^h , grâce à la propriété suivante :

Propriété 5.3

$$x^h \Big|_{I_{int}} = - \left(K_{I_{int}I_{int}}^h \right)^{-1} K_{I_{int}I_{act}}^h x^h \Big|_{I_{act}} \quad (5.4.21)$$

avec $x^h \Big|_{I_{act}}$ donné.

Démonstration : Par définition, x^h est solution de :

$$K^h x^h = 0. \quad (5.4.22)$$

Par conséquent sachant que $x^h \Big|_{I_{enc}} \tilde{E}(t)0$, la propriété découle immédiatement de la décomposition (5.4.19) de K^h . \square

On peut alors calculer le moment très faible $mtf_{i,1}^h$ définie par (5.4.16) à l'aide de la propriété suivante :

Propriété 5.4

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad mtf_{i,1}^h(0) = \lambda_i^h (u_i^h)^T M^h x^h \quad (5.4.23)$$

avec u_i^h (resp. x^h) le vecteur composante de $\underline{\theta}_i^h$ (resp. de $\underline{z}^{m,h}$) dans $\underline{\mathcal{V}}_h$.

5.4.5 Efforts très faibles discrets

Nous allons généraliser la mise sous forme variationnelle très faible du moment aux autres efforts (efforts normal et tranchant). Il suffit de définir les relèvements *ad hoc* pour chaque effort.

Remarque 5.4 afin de simplifier la présentation, on considère le treillis modèle et non pas un treillis quelconque comme dans les cas continu et semi-discret.

A. Définitions des relèvements

Afin de définir la forme très faible de l'effort normal, on considère :

Définition 5.18 Soit $\underline{z}^n(x) = \{z^n(x), \tilde{z}^n(x)\}$ avec $z^n = \{z_k^n\}_{k=1}^4$ et $\tilde{z}^n = \{\tilde{z}_k^n\}_{k=1}^4$ solution pour tout k de :

$$\frac{d^2 \tilde{z}_k^n}{dx^2}(x) = \frac{d^4 z_k^n}{dx^4}(x) = 0 \quad \text{dans } (0, L) \quad (5.4.24)$$

tels que

$$z_1^n(0) = \frac{dz_1^n}{dx}(0) = 0, \quad \tilde{z}_1^n(0) = 1 \quad (5.4.25)$$

et vérifiant les conditions d'encastrement :

$$z_k^n(0) = \tilde{z}_k^n(0) = \frac{dz_k^n}{dx}(0) = 0, \quad k = 2, 4 \quad (5.4.26)$$

et enfin les mêmes conditions de jonctions rigides entre les poutres (1), (2) et (3) (resp. (3) et (4)) que le relèvement \underline{z}^m .

Le système d'équations dont \underline{z}^n est solution est bien posé et admet donc une solution unique.

De même pour l'effort tranchant, on définit le relèvement suivant :

Définition 5.19 Soit $z^t(x) = \{z^t(x), \tilde{z}^t(x)\}$ avec $z^t = \{z_k^t\}_{k=1}^4$ et $\tilde{z}^t = \{\tilde{z}_k^t\}_{k=1}^4$ solution pour tout k de :

$$\frac{d^2 \tilde{z}_k^t}{dx^2}(x) = \frac{d^4 z_k^t}{dx^4}(x) = 0 \quad \text{dans } (0, L) \quad (5.4.27)$$

tels que

$$z_1^t(0) = 1, \quad \tilde{z}_1^t(0) = \frac{dz_1^t}{dx}(0) = 0 \quad (5.4.28)$$

et vérifiant les conditions d'encastrement :

$$z_k^t(0) = \tilde{z}_k^t(0) = \frac{dz_k^t}{dx}(0) = 0, \quad k = 2, 4 \quad (5.4.29)$$

et enfin les mêmes conditions de jonctions rigides entre les poutres (1), (2) et (3) (resp. (3) et (4)) que les relèvements \underline{z}^m .

B. Formes très faibles de l'effort normal et de l'effort tranchant

Grâce aux relèvements \underline{z}^n et \underline{z}^t que nous venons de définir, on peut écrire les efforts normaux et tranchants sous une forme très faible.

Propriété 5.5

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad n_{i,1}(0) = -\lambda_i \langle \underline{\theta}_i, \underline{z}^n \rangle, \quad (5.4.30)$$

$$t_{i,1}(0) = \lambda_i \langle \underline{\theta}_i, \underline{z}^t \rangle. \quad (5.4.31)$$

DÉMONSTRATION : on reprend la démonstration de la propriété 5.2.4 en remplaçant z^m par z^n (resp. z^t). Par définition des relèvements \underline{z}^n (resp. \underline{z}^t), on obtient les égalités (A.2.16) et (5.4.31).

5.5 Test numérique de contrôlabilité exacte

5.5.1 Introduction

Étant donné que nous voulons vérifier la contrôlabilité exacte de treillis soumis à des actionneurs construits à l'aide de la méthode HUM (voir le paragraphe 5.2.4), *il suffit* de vérifier l'*inégalité d'observabilité*, encore appelée *inégalité inverse* (voir le paragraphe 1.2.2 du chapitre 1), suivante :

$$\forall T > 0, \exists C > 0, \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H},$$

$$\int_{\Gamma_0 \times (0, T)} (\sigma(\varphi) \cdot \vec{n}) \cdot (\sigma(\varphi) \cdot \vec{n}) \, d\Gamma dt \geq C \left\| \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.5.32)$$

Remarquons qu'étant donné l'application formelle que nous avons faites au paragraphe 5.2.4 de la méthode HUM nous ne connaissons pas a priori l'espace \mathcal{H} des données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$.

La remarque concernant cette inégalité que nous avons faites au paragraphe 1.2.2 du chapitre 1, dans le cas particulier du contrôle en flexion de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli, est très générale et peut-être réitérer :

” pour un temps T d'observation donné, l'inégalité d'observabilité permet de savoir quelle information sur le bord Γ_0 est *suffisante* pour connaître la solution sur tout le reste du domaine ”

La constante d'observabilité C est donc primordiale pour connaître le temps T ainsi que la partie du bord Γ_0 suffisants afin de contrôler exactement la structure. Il est donc important d'avoir une *estimation précise* de cette constante.

Théoriquement, on peut obtenir une estimation de cette constante à l'aide de la technique des multiplicateurs mais seulement pour des treillis étoilés.

Aussi nous nous proposons de calculer numériquement cette constante comme limite d'une suite α_n et selon la décroissance de cette suite d'en déduire s'il y a ou non contrôlabilité exacte.

5.5.2 Version principale

Soit $(\lambda_i, \underline{\varrho}_i)_{i=1}^{+\infty}$ la famille des modes propres de la structure encastree sur la région de contrôle, rangés par ordre croissant de valeurs propres.

On pose

Définition 5.20

$$Q(\varphi^0, \varphi^1) = \frac{\int_{\Gamma_0 \times (0, T)} (\sigma(\varphi) \cdot \vec{n}) \cdot (\sigma(\varphi) \cdot \vec{n}) \, d\Gamma dt}{E(\varphi^0, \varphi^1)}, \quad (5.5.33)$$

où φ est solution de (5.2.4).

Soit $V_n = Vect\{\underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_n\}$ et $W_n = V_n \times V_n$. On définit la suite α_n de la façon suivante :

Définition 5.21

$$\alpha_n = \min_{(\varphi_n^0, \varphi_n^1) \in W_n} Q(\varphi_n^0, \varphi_n^1). \quad (5.5.34)$$

On a ainsi construit une suite décroissante qui converge vers un $\alpha \geq 0$.

On distingue deux cas :

Cas 1 : *l'observabilité forte a lieu.*

Dans ce cas, $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ est bornée inférieurement par une constante $C > 0$ et donc $\alpha > 0$.

Cas 2 : *l'observabilité forte n'a pas lieu.*

Alors $\alpha = 0$ et $\alpha_n \rightarrow 0$ exponentiellement vite.

La décroissance de la suite α_n vers zéro fait donc l'objet d'une alternative réellement discriminante.

Il est clair que α_n est la plus petite valeur propre du problème de valeurs propres généralisé suivant :

$$K^n x = \lambda M^n x, \quad (5.5.35)$$

avec

$$K^n = \begin{pmatrix} K^{00} & K^{01} \\ K^{10} & K^{11} \end{pmatrix} \quad (5.5.36)$$

où les sous-matrices apparaissant dans K^n sont de la forme, pour tout $0 \leq l, s \leq 1$:

$$K_{ij}^{ls} = f^{ls}(\lambda_i, \lambda_j, T) \int_{\Gamma_0} (\sigma(\varphi_i) \cdot \vec{n}) \cdot (\sigma(\varphi_j) \cdot \vec{n}) d\Gamma, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (5.5.37)$$

f^{ls} ayant été définie au chapitre 1; et

$$M^n = \begin{pmatrix} \text{diag}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}. \quad (5.5.38)$$

Afin de vérifier la contrôlabilité exacte, on propose l'algorithme suivant d'étude numérique de la contrôlabilité exacte :

1. Calculer un nombre de modes N "suffisant".
2. Chercher la plus petite valeur propre α_n du couple (K^n, M^n) , $1 \leq n \leq N$ par une méthode adaptée (voir paragraphe 5.5.4).
3. Dessiner la suite $(\alpha_n)_{n=1}^N$ et conclure de cette façon :
 - si (α_n) est bornée inférieurement par une constante strictement positive, alors *il y a contrôlabilité exacte (cas 1)*.
 - si (α_n) décroît rapidement vers zéro, *il n'y a pas contrôlabilité exacte* et les vecteurs propres associés donnent une information sur la dynamique incontrôlée (voir paragraphe 5.6) (**cas 2**).

Remarquons que la conclusion du test numérique que nous proposons n'a pas valeur de théorème puisque le nombre maximal de modes N calculés reste *fini*. Nous verrons au paragraphe 6.1 du chapitre 6 que cette remarque qui semble de prime abord anodine est néanmoins très importante pour l'interprétation du test.

De même, il est important de décrire encore plus précisément la *nature de la décroissance* de la suite (α_n) dans les deux cas. Dans le **cas 2**, on a une estimation sur la vitesse de convergence de la suite (α_n) :

$$\forall \{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in W_n, \quad Q(\varphi_n^0, \varphi_n^1) \geq C e^{-\lambda_n}, \quad (5.5.39)$$

obtenue à partir de résultats de L. Robbiano [100] pour les systèmes hyperboliques qui ne vérifient pas l'inégalité d'observabilité.

Remarque 5.5 Des estimations à la Weyl, qu'il faudrait démontrer pour les treillis de poutres, devraient montrer que λ_n croît comme un polynôme en n .

Enfin, comme pour la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli seule, on doit particulièrement soigner la *méthode de discrétisation des contraintes sur le bord*. En effet une précision insuffisante sur les efforts entraîne un calcul erroné de la suite (α_n) et peut éventuellement biaiser l'interprétation du test (voir l'application du test à des treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli au chapitre 6).

5.5.3 Version avec une matrice de masse adaptée

Dans le cas où une inégalité d'observabilité du type :

$$\forall T > 0, \exists C > 0, \forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H}',$$

$$\int_{\Gamma_0 \times (0, T)} (\sigma(\varphi) \cdot \vec{n}) \cdot (\sigma(\varphi) \cdot \vec{n}) d\Gamma dt \geq C \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{H}'}^2 \quad (5.5.40)$$

doit être testée, on propose la variante suivante du test numérique :

- si \mathcal{H}' est connu, on remplace la matrice de masse M dans (5.5.35) par l'expression qui correspond au produit scalaire associé à la norme $\|\{., .\}\|_{\mathcal{H}'}$.
- si cette norme n'est pas connue explicitement, on remplace M par la matrice diagonale

$$M^{n, \theta} = \begin{pmatrix} \text{diag}(\lambda_i^\theta) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\lambda_i^{\theta-1}) \end{pmatrix} \quad (5.5.41)$$

où θ est un nombre réel arbitraire, et on cherche θ tel que α_n^θ définie comme précédemment, en changeant ce qui doit être changé, soit bornée inférieurement.

En fait, si l'inégalité (5.5.40) est vérifiée pour une norme "raisonnable" $\|\{., .\}\|_{\mathcal{H}'}$, alors il existe un θ tel que la matrice de masse associée $M^{n, \theta}$ vérifie $M^n \geq M^{n, \theta}$, et α_n^θ est borné inférieurement. Par "raisonnable", nous entendons que l'espace \mathcal{H}' associé à cette norme devrait coïncider avec un espace de Sobolev d'ordre peut-être négatif, et par conséquent soit stable pour des perturbations régulières. Autrement dit, nous sommes conduit à chercher :

le plus grand θ pour lequel la propriété (5.5.40) a lieu.

Si l'observabilité n'est pas vérifiée pour aucun θ la suite α_n^θ devrait tendre arbitrairement vite vers zéro.

Le *test numérique* consiste à dessiner la suite $\alpha_n^{\theta_m}$ pour une suite de nombres réels θ_m .

5.5.4 Résolution du problème de valeurs propres

Pour calculer la suite (α_n) , on doit résoudre le problème de valeurs propres généralisé :

$$K^n x = \lambda M^n x, \quad (5.5.42)$$

que l'on réécrit au préalable sous la forme symétrique équivalente :

$$(M^n)^{-\frac{1}{2}} K^n (M^n)^{-\frac{1}{2}} x = \lambda x. \quad (5.5.43)$$

Or on a :

$$K^n = \begin{pmatrix} K^{00} & K^{01} \\ K^{10} & K^{11} \end{pmatrix} \quad (5.5.44)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij}^{00} = \left(\int_0^T \cos(t\sqrt{\lambda_i}) \cos(t\sqrt{\lambda_j}) dt \right) m_i m_j \end{array} \right. \quad (5.5.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij}^{01} = \left(\int_0^T \cos(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) dt \right) m_i \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \end{array} \right. \quad (5.5.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij}^{11} = \left(\int_0^T \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) dt \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \end{array} \right. \quad (5.5.47)$$

On observe que les différents blocs de K^n contiennent tous m_i pondéré plus ou moins par $\sqrt{\lambda_i}$, or on a montré (voir la propriété F.0.1 de l'Annexe F) que :

$$\left| \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right| = O(1), \quad (5.5.48)$$

par conséquent il semble intéressant d'homogénéiser les blocs de K^n à l'aide de cette relation. Aussi on décompose la matrice K^n sous la forme :

$$K^n = \begin{pmatrix} \text{diag}(\sqrt{\lambda_i}) & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \tilde{K}^n \begin{pmatrix} \text{diag}(\sqrt{\lambda_i}) & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad (5.5.49)$$

avec

$$\tilde{K}^n = \begin{pmatrix} \tilde{K}^{00} & \tilde{K}^{01} \\ \tilde{K}^{10} & \tilde{K}^{11} \end{pmatrix} \quad (5.5.50)$$

qui a les sous-matrices de la forme recherchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{ij}^{00} = \left(\int_0^T \cos(t\sqrt{\lambda_i}) \cos(t\sqrt{\lambda_j}) d\tilde{t} \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \\ \tilde{K}_{ij}^{01} = \left(\int_0^T \cos(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) d\tilde{t} \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \\ \tilde{K}_{ij}^{11} = \left(\int_0^T \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) d\tilde{t} \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \end{array} \right. \quad (5.5.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{ij}^{01} = \left(\int_0^T \cos(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) d\tilde{t} \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \\ \tilde{K}_{ij}^{11} = \left(\int_0^T \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) d\tilde{t} \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \end{array} \right. \quad (5.5.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{ij}^{11} = \left(\int_0^T \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \sin(t\sqrt{\lambda_j}) d\tilde{t} \right) \frac{m_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{m_j}{\sqrt{\lambda_j}} \end{array} \right. \quad (5.5.53)$$

Avec cette factorisation de la matrice K^n , il vient :

$$K^n = (M^n)^{\frac{1}{2}} \tilde{K}^n (M^n)^{\frac{1}{2}} x = \lambda x, \quad (5.5.54)$$

et donc il suffit de résoudre le problème de valeurs propres :

$$\tilde{K}^n x = \lambda x. \quad (5.5.55)$$

Enfin, le problème spectral avec une matrice de masse "adaptée" qui s'écrit sous forme symétrique :

$$(M^{n,\theta})^{-\frac{1}{2}} K^n (M^{n,\theta})^{-\frac{1}{2}} x = \lambda x, \quad (5.5.56)$$

ou encore d'après la définition de $M^{n,\theta}$:

$$(M^n)^{-\frac{\theta}{2}} K^n (M^n)^{-\frac{\theta}{2}} x = \lambda x, \quad (5.5.57)$$

est équivalent à :

$$(M^n)^{\frac{1-\theta}{2}} \tilde{K}^n (M^n)^{\frac{1-\theta}{2}} x = \lambda x. \quad (5.5.58)$$

Pour les tests numériques du chapitre 6, nous calculerons α_n^θ comme la plus petite valeur propre du problème aux valeurs propres (5.5.58).

Cette factorisation se justifie pleinement pour des valeurs de θ grandes. En effet, si on utilisait la forme standard (5.5.42) pour résoudre ce type de problèmes de valeurs propres, les résultats que l'on obtiendrait seraient absurdes.

5.6 Identification des modes inobservables

Comme on pourra le vérifier dans les tests numériques du chapitre 6, dans le cas où la structure est non contrôlable exactement, la suite α_n décroît brutalement pour certaines valeurs de n . Cette propriété semble être caractéristique

des treillis possédant des ondes inobservables. En effet les indices, pour lesquels la suite α_n décroît de plusieurs ordres de grandeurs, correspondent exactement à des modes invisibles pour les actionneurs exercés.

On note n_k l'indice de α_n tel que

$$\alpha_{n_k-1} - \alpha_{n_k} < 10^{-\beta}, \quad (5.6.59)$$

où β est assez grand, typiquement $\beta > 2$.

Définition 5.22 *Le n_k -ème mode de la structure est appelé mode inobservable de la structure.*

On peut donner une première justification simple de cette terminologie. En effet, on a par définition de α_{n_k} et du minimum :

$$\begin{aligned} \forall n \in [1, \dots, n_k], \quad \alpha_{n_k} &= \min_{\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n} Q(\varphi_n^0, \varphi_n^1) \\ &= Q(\varphi_{n_k}^0, \varphi_{n_k}^1). \end{aligned} \quad (5.6.60)$$

Autrement dit, puisque le minimum de $Q(\cdot, \cdot)$ diminue pour n_k , c'est que le mode correspondant à cet indice n'est pas observable par le système d'actionneur.

D'autre part, on conjecture la propriété remarquable suivante :

Propriété 5.6 $\forall n \in [n_k, n_{k+1}]$ et (α_{n_k}, x_{n_k}) solution de

$$K^n x_{n_k} = \alpha_{n_k} M^n x_{n_k}, \quad (5.6.61)$$

alors $(x_{n_k}) = (x_{n_k}^0, x_{n_k}^1)$ vérifie :

$$\left(x_{n_k}^0\right)_i = \delta_{in_k}, \quad \left(x_{n_k}^1\right)_i = \varepsilon \delta_{in_k}, \quad (5.6.62)$$

avec $\varepsilon \ll 1$.

Par conséquent, les *ondes inobservables* ne sont autres que les *modes propres* correspondant aux indices pour lesquels la propriété 5.6 est vérifiée.

Remarque 5.6 Nous vérifierons au chapitre 6 la propriété 5.6 pour des treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli dont la suite α_n se comporte comme dans le cas 2 du test numérique de contrôlabilité exacte.

5.7 Suite de Weyl

Dans le cas où le test rend un résultat négatif vis-à-vis de la contrôlabilité exacte (**cas 2**) et que par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0, \quad (5.7.63)$$

nous voulons reconstruire les données initiales du problème correspondant aux données initiales du problème dual pour lesquelles la suite ne converge pas vers une constante strictement positive.

En effet, on peut alors appliquer l'algorithme HUM et ainsi vérifier qu'il n'y a pas contrôlabilité exacte, par exemple en calculant la réponse de la structure considérée (voir K.-D. Phung [89] pour une application au contrôle frontière de l'équation des ondes).

Si on se fixe les données initiales suivantes :

$$\begin{cases} \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} = \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_i \theta_i, \sum_{i=1}^N \delta_i \theta_i \right\}, \\ \{P_N(y^0), P_N(y^1)\} = \left\{ \sum_{i=1}^N \zeta_i \theta_i, \sum_{i=1}^N \xi_i \theta_i \right\}, \end{cases} \quad (5.7.64)$$

et que l'on note x_N et y_N les vecteurs suivants :

$$x_N = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_N \end{pmatrix}, \quad y_N = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \\ -\zeta_1 \\ \vdots \\ -\zeta_N \end{pmatrix} \quad (5.7.65)$$

on a d'après la méthode HUM :

$$\forall y_N, \quad \exists! x_N / \frac{1}{\alpha_N} K x_N = y_N. \quad (5.7.66)$$

Choisissons par exemple :

$$\gamma_i = -\hat{\xi}_i, \quad \delta_i = \hat{\zeta}_i, \quad \forall 1 \leq i \leq N \quad (5.7.67)$$

et notons

$$z_N = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\xi}_N \\ -\hat{\zeta}_1 \\ \vdots \\ -\hat{\zeta}_N \end{pmatrix} \quad (5.7.68)$$

on a alors :

$$Kx_N = \alpha_N z_N = Kz_N, \quad (5.7.69)$$

et donc $x_N = z_N$.

Par conséquent :

$$\exists C > 0, \quad a\left(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}\right) \leq C \alpha_N, \quad (5.7.70)$$

avec

$$\|\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}\| = \|\{\hat{\zeta}_i, \hat{\xi}_i\}\| = 1. \quad (5.7.71)$$

On a donc construit une donnée de Cauchy $\{P_N(y^0), P_N(y^1)\}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow +\infty} a\left(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}\right) = 0, \\ \|\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}\| = 1 \end{cases} \quad (5.7.72)$$

c'est-à-dire une suite de Weyl.

Chapitre 6

Étude numérique de la contrôlabilité exacte de treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli

6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de comparer les résultats obtenus à l'aide du *test numérique de contrôlabilité exacte*, appliqué à différents types de treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli, aux *résultats théoriques* existants concernant leurs éventuelles contrôlabilité exacte.

6.1.1 Rappels concernant le test numérique

Soit un temps T de contrôlabilité exacte et un ensemble d'actionneurs, on veut déterminer si le treillis sur lequel s'exercent les actionneurs est contrôlable exactement en un temps T . Pour cela, on applique le test numérique de contrôlabilité exacte défini au paragraphe 5.5 du chapitre précédent. Nous allons maintenant en rappeler l'algorithme.

Étant donné un pas de maillage h assez fin et un nombre N de modes assez grand, on calcule pour $1 \leq n \leq N$ la suite α_n^h qui est la plus petite valeur propre de

$$K^{n,h}x = \lambda^h M^{n,h}x. \quad (6.1.1)$$

On dessine la suite α_n^h et on dispose de l'alternative discriminante suivante :

- soit la suite α_n décroît vers une constante positive (**cas 1**)
- soit elle décroît exponentiellement vite vers zéro (**cas 2**)

Dans le premier cas, on en déduit que la multistrukture est contrôlable exactement, dans le second cas qu'elle ne l'ait pas.

6.1.2 Application et interprétation du test

Comme nous l'avons déjà remarqué au paragraphe 5.5 le choix des différents paramètres du test est loin d'être aisé.

Primo, du fait du *couplage* des équations d'Euler-Navier-Bernoulli avec les équations des ondes, pour lesquelles on sait qu'il existe un *temps minimal de contrôlabilité exacte*, il est nécessaire de faire un choix judicieux du temps T d'observation pour appliquer le test.

Secundo, le choix du nombre de modes N *suffisant* pour que l'on puisse clairement conclure que l'on se trouve dans l'un ou l'autre des cas que nous venons de distinguer est loin d'être évident. Il sera en particulier nécessaire de préciser la *nature de la décroissance* de la suite α_n dans chacun des cas de manière plus précise. En effet, étant donné que N est fini, on obtient même pour des treillis que la théorie (voir J.E. Lagnese, G. Leugering et E.J.P.G. Schmidt [67]) désigne comme étant non contrôlable exactement, une valeur limite de la suite α_n strictement positive. Néanmoins, comme on l'a déjà remarqué au paragraphe 5.5, dans le **cas 2** on sait d'après un résultat de L. Robbiano [100] que la suite α_n décroît exponentiellement.

Nous utiliserons la démarche d'analyse suivante :

1. Calcul de la suite α_n^h avec le pas de maillage le plus fin possible et un temps d'observation T assez grand. Conclusion quant à la contrôlabilité exacte de la multistrukture. Détermination de la vitesse de convergence de α_n en fonction de n .
2. Étude de $\alpha_n(T)$ comme fonction de T .
3. Analyse de la convergence de la suite pour différents pas de maillage et estimation de son taux de convergence en fonction de h .
4. Dans le cas où la structure ne semble pas être contrôlable exactement, par application de la matrice de masse modifiée $M^{n,\theta}$, vérification qu'elle ne l'ait pas pour d'autres espaces de données initiales.
5. Détermination par application du test du choix optimal du système d'actionneurs pour une multistrukture donnée.

On représentera le résultat du test, c'est-à-dire la suite α_n , calculée pour $n = 1, \dots, N$, en coordonnées semi-logarithmiques, sauf cas exceptionnel.

Enfin, on définit pour tout $1 \leq n \leq N$, les erreurs relatives suivantes :

Définition 6.1

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Err}(n) = \frac{|\alpha_n - \alpha_N|}{|\alpha_N|} \quad (6.1.2)$$

Définition 6.2

$$\forall h > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Erh}(h) = \frac{|\alpha_n - \alpha_n^h|}{|\alpha_n|} \quad (6.1.3)$$

6.1.3 Plan

Tout d'abord au paragraphe 6.2, nous appliquerons le test à l'*élément structurant* pour nos multistructures, la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli. Cet élément structurant nous fournira des informations importantes quant à un choix judicieux des paramètres du test et nous permettra de vérifier que les conclusions du test sont en accord avec la théorie, c'est-à-dire que la poutre est contrôlable exactement avec un actionneur agissant à l'une ou l'autre de ses extrémités (a fortiori à chacune d'entre elles).

Treillis contrôlables exactement

Nous étudierons ensuite au paragraphe 6.3 la contrôlabilité exacte du treillis le plus simple possible, deux poutres reliées rigidement en angle droit (figure 6.1 de gauche).

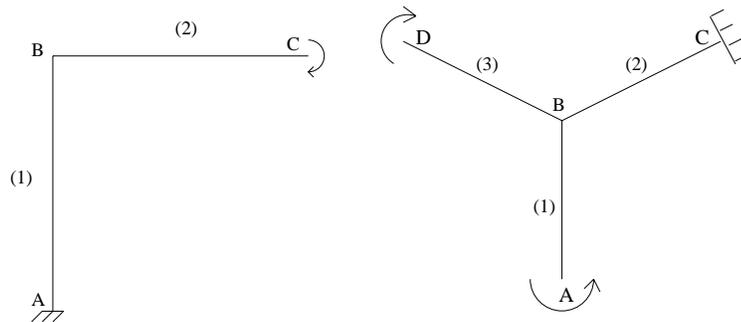


FIG. 6.1 - *Treillis contrôlables exactement avec un nombre suffisant d'actionneurs.*

Ce treillis est différent d'un treillis composé de deux poutres reliées rigidement en ligne, en raison du couplage des ondes de flexion et de compression. Nous vérifierons à l'aide du test qu'il *est contrôlable exactement* avec des actionneurs agissant à l'une ou l'autre de ses extrémités.

Le deuxième exemple de treillis contrôlable exactement que nous allons considérer au paragraphe 6.4 est composé de trois poutres reliées rigidement en étoile (figure 6.1 de droite). Ce treillis n'a pas de circuit, par conséquent, d'après la théorie, il est contrôlable exactement si des actionneurs s'exercent à au moins deux de ses extrémités.

Treillis objet de conjectures

Enfin, au paragraphe 6.5 nous appliquerons le test à un treillis (figure 6.2) pour lequel il n'existe pas de résultat théorique ce qui nous permettra de proposer des conjectures.

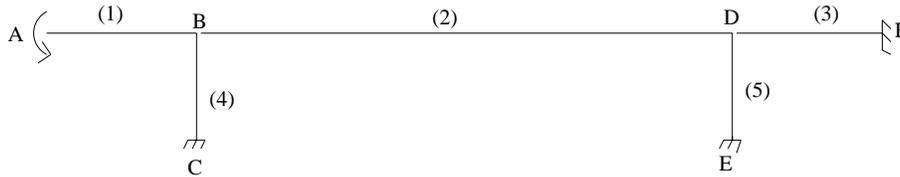


FIG. 6.2 - Treillis source de conjectures.

Remarque 6.1 Pour une application du test à d'autres treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli on pourra se référer à F. Bourquin et J.-S. Briffaut [15].

6.2 La poutre d'Euler-Navier-Bernoulli

La poutre d'Euler-Navier-Bernoulli est l'*élément structurant* des multistructures auxquelles nous allons appliquer le test et de plus c'est la seule structure dont nous avons démontré la contrôlabilité exacte (voir le chapitre 1). Il est donc naturel de lui appliquer en premier le test numérique, notamment afin d'en vérifier l'efficacité.

On considère une poutre d'Euler-Navier-Bernoulli encastrée à son extrémité gauche et dont on impose l'angle de rotation à l'extrémité droite, le déplacement transverse y étant bloqué à cette même extrémité (voir figure 6.3).



FIG. 6.3 - Poutre contrôlée en rotation à son extrémité droite.

La poutre est de longueur 1 mètre et a pour paramètres mécaniques :

$$I = 1 \text{ m}^4, \quad A = 1 \text{ m}^2, \quad E = 1 \text{ N.m}^{-2}, \quad \rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}. \quad (6.2.4)$$

Remarque 6.2 Bien que la poutre correspondant au choix de ces paramètres ne soit pas très réaliste, cela n'influence pas l'interprétation des résultats du test.

Conventions : Lorsque l'on ne précise pas le pas de maillage ou l'horizon de contrôlabilité, c'est que l'on a pris $h = 1/400$ et $T = 2$.

6.2.1 Vérification de la contrôlabilité exacte

On a vu au paragraphe 2.5 du chapitre 2 que si l'on veut, pour un pas de maillage h fixé, une précision assez grande de la norme $L^2(0, T)$ du contrôle, autrement dit du grammien de contrôlabilité exacte, il faut prendre un horizon de contrôlabilité T assez grand. Le choix suivant est suffisant :

$$h = 1/400, T = 2. \quad (6.2.5)$$

Enfin on se fixe $N = 300$ et on calcule donc $(\alpha_n)_{n=1}^N$, que l'on représente en coordonnées cartésiennes à la figure 6.4 de gauche.

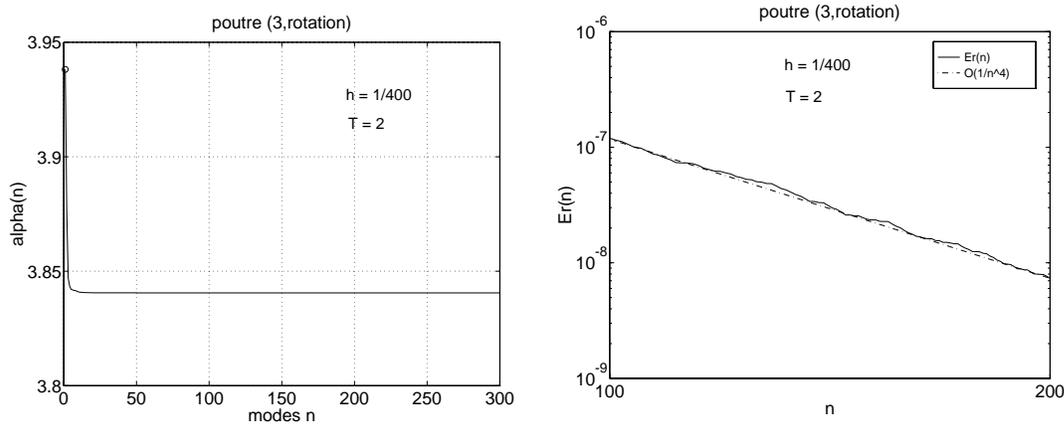


FIG. 6.4 - $(\alpha_n)_{n=1}^3$ (à gauche) et $Er(n)$ pour $n = 100, \dots, 200$ (à droite).

On peut ainsi observer que la suite (α_n) décroît très vite vers une valeur strictement positive d'environ 3.84; en effet avec un seul mode on a déjà une précision de l'ordre du %.

Le résultat du test est donc en accord avec la théorie :

la poutre est contrôlable exactement en un temps $T = 2$ par un actionneur en flexion agissant à l'une de ses extrémités.

À l'Annexe K.1, on démontre que la suite α_n converge vers sa limite α en $O(1/n^4)$, c'est ce que l'on vérifie à la figure 6.4 de droite où l'on a superposé, pour $n = 100, \dots, 200$ et $N = 300$, à $Er(n)$ une fonction en $1/n^4$ (en pointillé).

6.2.2 $\alpha_n(T)$ fonction de T

De manière intuitive, on conçoit bien que :

plus T est grand et plus il est facile de contrôler la structure

et donc plus la constante C de l'inégalité d'observabilité (5.5.32), vers laquelle la suite α_n converge, augmente.

On a un résultat plus précis donné par la propriété J.1 suivante :

$$\forall T', T > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n(T) = \frac{T}{T'} \alpha_n(T') \quad (6.2.6)$$

démontrée à l'Annexe J. Autrement dit, la suite $\alpha_n(T)$ varie linéairement en fonction de T .

C'est ce que l'on vérifie à la figure 6.5 de gauche où l'on a superposé, pour différents T , les suites $\alpha_n(T)$ calculées avec $1 \leq n \leq 50$.

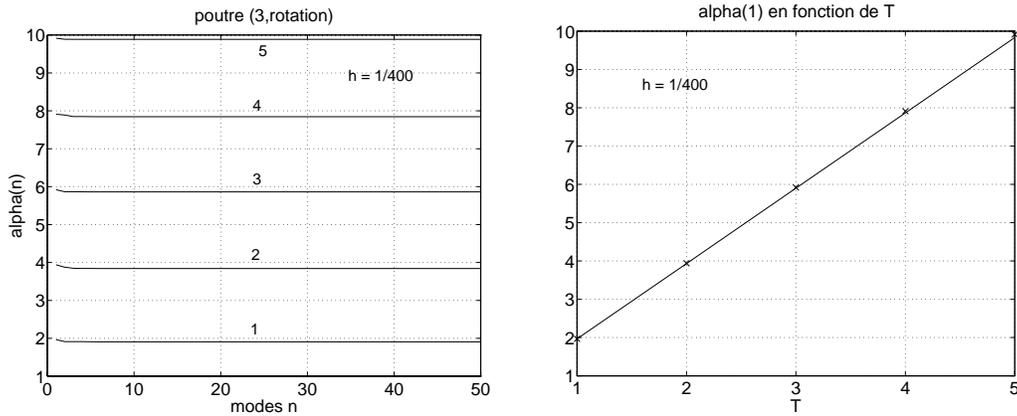


FIG. 6.5 - Pour $T = 1, \dots, 5$, $(\alpha_n)_{n=1}^{50}$ (à gauche) et $\alpha_1(T)$ (à droite).

On observe que la suite $\alpha_n(T)$ augmente linéairement avec T . Pour confirmer ce fait, on représente à la figure 6.5 la variation de $\alpha_1(T)$ en fonction de T à laquelle on a superposé en trait continu la fonction linéaire $T \mapsto \alpha_1(1)T$.

Remarque 6.3 On se reportera au paragraphe 2.5 du chapitre 2 pour une étude du temps minimal numérique de contrôlabilité exacte T^h .

6.2.3 Influence du pas de maillage h

Nous allons vérifier la propriété K.2 démontrée à l'Annexe K.2, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists C > 0, \forall h > 0, \quad \left| \alpha_n^h - \alpha_n \right| \leq Ch^4. \quad (6.2.7)$$

On montre à la figure 6.6 l'erreur relative $Erh(h)$ pour $1/h = \{30, 40, 50, 60, 70\}$ avec $n = 10$ et $h_\infty = 1/400$.

On lui a superposé une fonction variant en $O(h^4)$ (en pointillé) ce qui permet de voir que l'on vérifie asymptotiquement l'estimation recherchée.

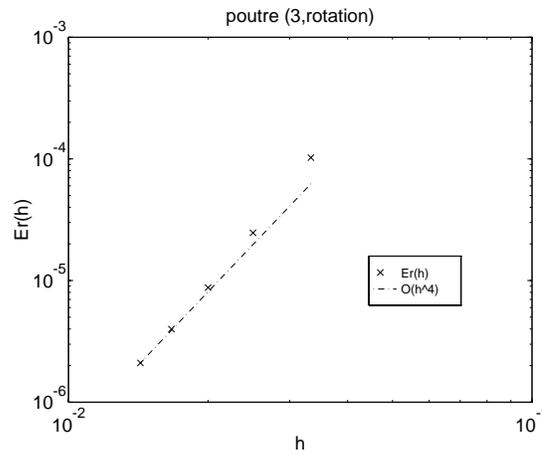


FIG. 6.6 - $Er_h(h)$ pour $1/h = \{30, 40, 50, 60, 70\}$ et $n = 10$.

6.2.4 Calcul de α_n avec les moments *usuels* et *très faibles*

Le pas de maillage avec lequel on a calculé les fréquences et les modes est déterminant, ne serait-ce que pour avoir la précision nécessaire sur ces différents termes; mais pour le calcul de la suite α_n^h il est surtout crucial de calculer avec précision les moments. En particulier, un pas de maillage suffisant pour le calcul des fréquences peut ne pas l'être pour celui des moments et entraîner un calcul incorrecte de α_n^h et par conséquent une interprétation erronée du test.

Dans ce paragraphe, T est fixé et vaut 1.

Exemple 1 Maillage grossier: $h = 1/20$

Tout d'abord, on prend un maillage grossier $h = 1/20$. On calcule α_n^h pour $n = 1, \dots, 15$ avec un moment *usuel* et un moment *très faible*. À la figure 6.7 de gauche, on remarque que l'on obtient un comportement différent pour les modes élevés.

Alors qu'avec le moment *très faible* on obtient une valeur quasiment constante, avec le moment *usuel*, la suite α_n se met à décroître rapidement à partir de $n = 9$, comme on peut mieux l'observer à la figure 6.7 de droite où l'on a dessiné l'erreur relative de ces deux suites. Dans le cas du moment *usuel*, on serait donc tenté de conclure à la non-contrôlabilité exacte et donc on aboutirait à une conclusion fautive d'après la théorie et les expériences numériques.

Il est intéressant d'observer également le spectre complet du grammien pour $N = 15$, calculé avec les deux moments (figure 6.8).

On obtient une information qui a priori n'était pas évidente :

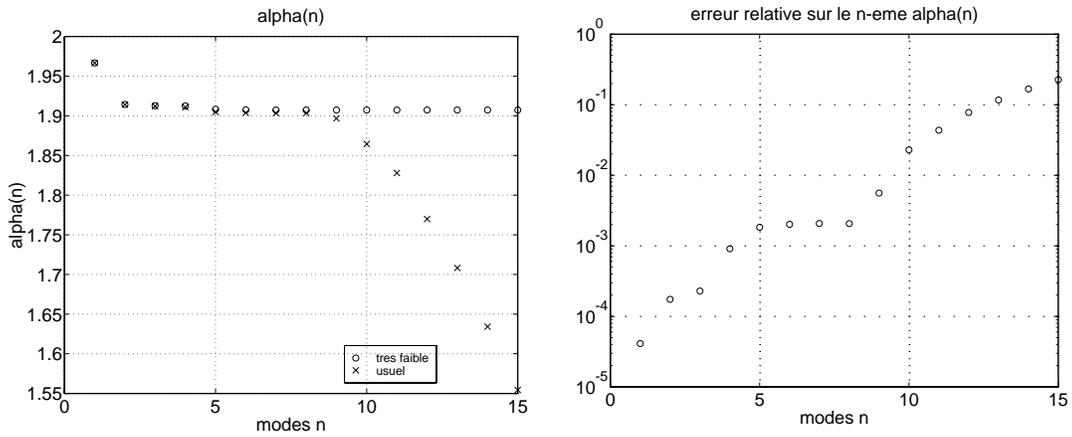


FIG. 6.7 - $(\alpha_n)_{n=1}^{15}$ calculé pour les moments usuel et très faible ($h = 1/20$) (à gauche) et leurs erreurs relatives (à droite).

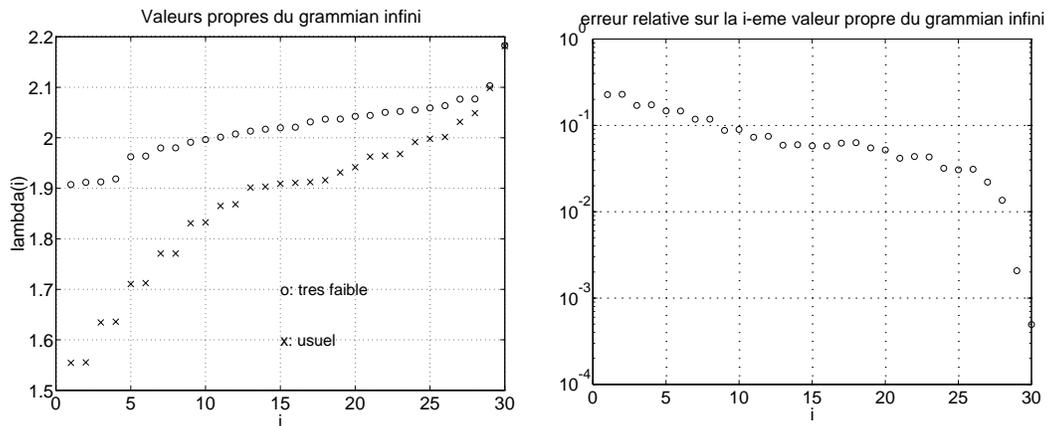


FIG. 6.8 - Spectre du grammien pour $n = 19$ ($h = 1/20$, $T = 1$) (à gauche) et leurs erreurs relatives (à droite).

la différence, entre les calculs obtenus avec les deux moments, est d'autant plus grande que la valeur propre λ_N est petite.

Donc l'erreur la plus importante est celle commise sur la plus petite des valeurs propres, c'est-à-dire α_n . Par ailleurs, le test précédent nous dit que cette erreur est d'autant plus grande que le nombre de modes utilisés pour calculer le grammien est élevé.

Exemple 2 Maillage fin: $h = 1/100$

On refait les mêmes tests que pour $h = 1/20$, mais avec un maillage plus fin $h = 1/100$ et on prend $N = 90$.

On obtient des propriétés identiques:

- le moment *usuel* donne une approximation des α_n d'autant moins bonne que les modes sont élevés (figure 6.9).

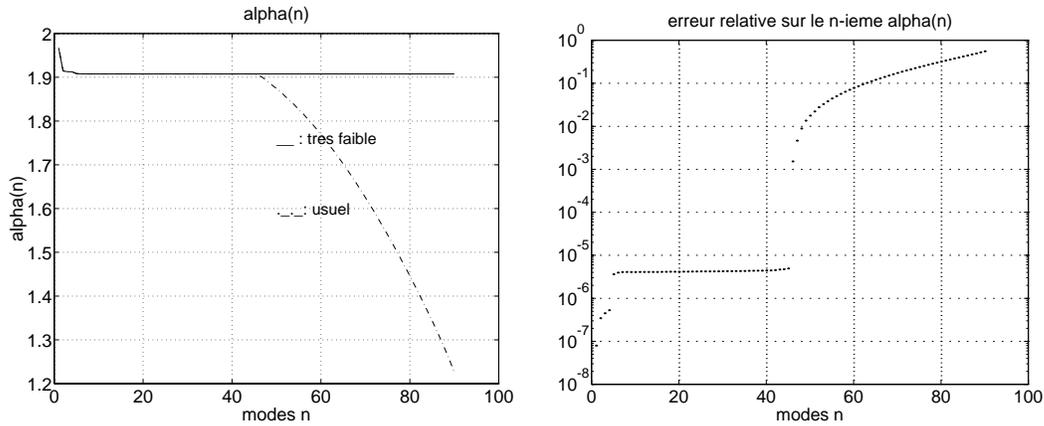


FIG. 6.9 - α_n^h calculé pour les moments *usuel* et *très faible* ($h = 1/100$ et $T = 1$) (à gauche) et leurs erreurs relatives (à droite).

- le grammien de contrôlabilité calculé pour $n = N$ avec le moment *usuel* a des valeurs propres d'autant plus mal calculées que celles-ci sont petites (figure 6.10).

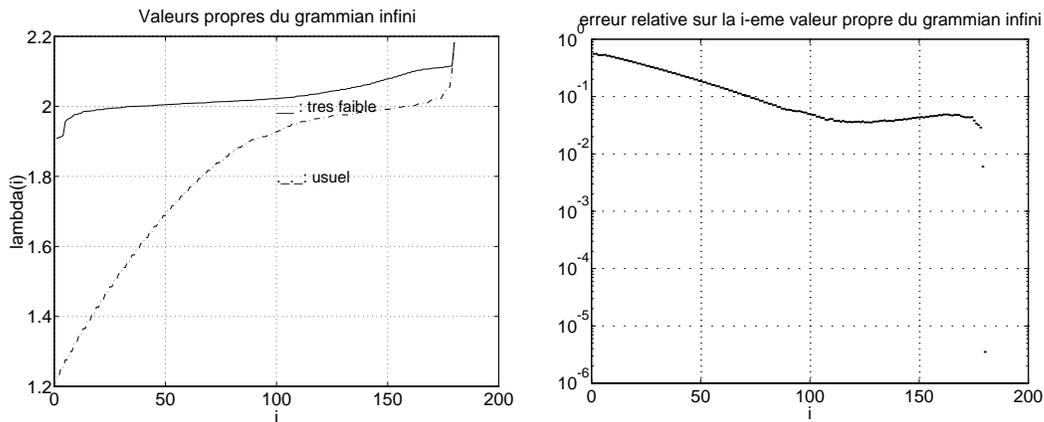


FIG. 6.10 - Spectre du grammien pour $n = 90$ (à gauche) et leurs erreurs relatives ($h = 1/100$ et $T = 1$) (à droite).

- l'erreur la plus grande des grammien calculés pour des n quelconques est donc commise pour α_N^h .

Du fait du plus grand nombre de termes de la suite α_n^h calculés pour ce pas de maillage ($N = 100$), on peut observer un phénomène qu'il n'était pas évident de remarquer dans l'exemple avec un maillage grossier :

- l'erreur entre la suite α_n calculée avec le moment *très faible* et celle calculée avec le moment *usuel* est constante pour $n < 46$ et augmente (de l'ordre de 10^3) brusquement pour $n \geq 46$ (voir figure 6.9).

6.2.5 Tests avec une matrice $M^{n,\theta}$

On cherche le plus grand θ pour lequel la suite α_n^θ converge vers une constante C strictement positive.

Dans le cas de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli, on sait exactement pour quel espace X' l'inégalité d'observabilité (5.5.40) est vérifiée, c'est donc un bon test pour savoir si l'on identifie correctement l'espace d'observation.

Puisque théoriquement l'espace *ad hoc* est $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$, la valeur de θ exacte est $\theta = 1$, et on peut donc s'attendre aux phénomènes suivants :

- pour $\theta < 1$, la suite α_n^θ doit encore être majorée strictement par une constante $C > 0$ et d'après ce que l'on a vu précédemment converger très rapidement vers C .
- pour $\theta > 1$, puisque $\theta = 1$ est la valeur la plus grande possible pour laquelle l'inégalité est vérifiée, la suite ne doit plus être majorée par une constante strictement positive et décroître vers zéro exponentiellement.

On commence par vérifier la première propriété : on calcule donc la suite α_n^θ avec $\theta < 1$.

On prend dans notre exemple $\theta_m = \{.5, 0, -.5, -1\}$ et on calcule les suites $\alpha_n^{\theta_m}$ (voir figure 6.11 de gauche).

On observe bien que plus θ_m est petit et plus la suite $\alpha_n^{\theta_m}$ a une valeur minimum grande.

Illustrons maintenant la seconde remarque : on calcule $\alpha_n^{\theta_m}$ avec $\theta_m = 1 + 0.1 m$ et $m = \{0, \dots, 5\}$.

La figure 6.11 de droite montre, pour $\theta_m > 1$, la suite $\alpha_n^{\theta_m}$ en coordonnées logarithmiques selon les deux axes.

On a bien une décroissance de plus en plus rapide de la suite $\alpha_n^{\theta_m}$ vers zéro en fonction de θ_m .

Conclusion : on peut donc conclure de cette étude que l'espace X' le plus petit pour lequel on vérifie la contrôlabilité exacte est bien $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ et que l'on peut prendre des espaces plus grands correspondants à des valeurs de θ plus petites que un.

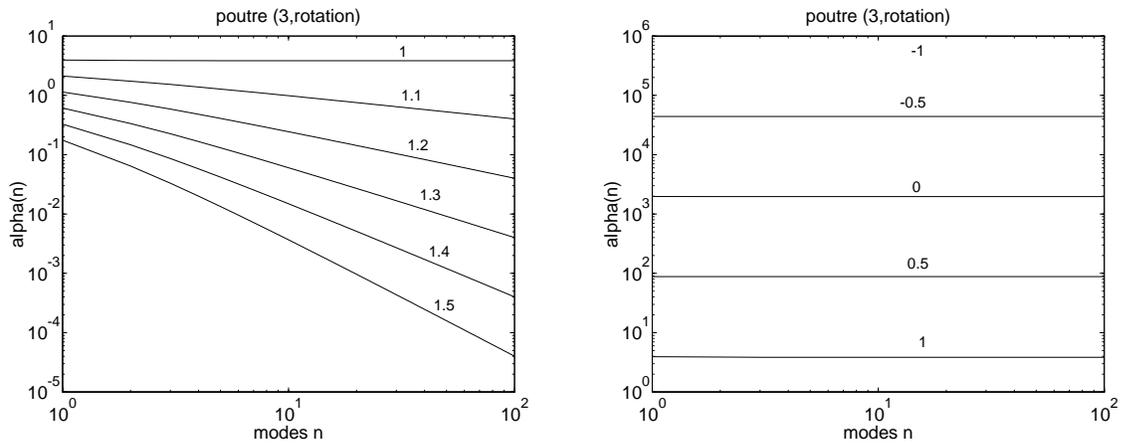


FIG. 6.11 - $\alpha_n^{\theta_m}$ pour $n = 1, \dots, 100$ avec $\theta_m \leq 1$ (à gauche) et $\theta_m \geq 1$ (à droite).

6.3 Premier exemple de treillis contrôlable exactement

6.3.1 Définition du treillis

Soit le treillis composé de 2 poutres reliées rigidement en angle droit :

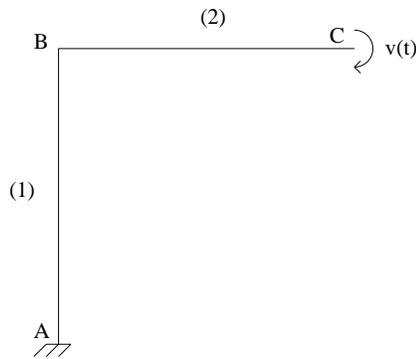


FIG. 6.12 - Treillis de poutres reliées rigidement, encastrée en A et contrôlé en rotation tout en ayant son déplacement de bloqué en B.

avec pour paramètres mécaniques et géométriques :

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_2 &= 2.10^{-10} \text{ m}^4, & A_1 = A_2 &= 10^{-4} \text{ m}^2, \\
 E_1 = E_2 &= 2.10^{11} \text{ N.m}^{-2}, & \rho_1 = \rho_2 &= 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}, \\
 l_1 = l_2 &= 70 \text{ m}.
 \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

6.3.2 Remarques sur le caractère contrôlable

Du point de vue de la contrôlabilité exacte un tel treillis est différent d'un treillis composé de deux poutres mises bout à bout horizontalement en raison du *couplage des modes de flexion et de compression*. En particulier, il n'est pas certain que l'on puisse prendre un temps d'observation aussi petit que l'on veut, comme pour un treillis en séries.

Cependant, ce treillis est étoilé donc, d'après des résultats de G. Leugering et E.J.P.G. Schmidt [79] et de G. Leugering [78], il est contrôlable exactement avec un actionneur contrôlant la rotation d'une de ses extrémités (A ou C).

De manière purement arbitraire, nous choisissons pour les premiers tests un actionneur contrôlant la rotation en C; par conséquent en C le déplacement est bloqué tandis qu'en A le treillis est encastré.

Nous étudierons l'effet d'autres structures d'actionneurs au paragraphe 6.3.7.

Convention : Pour les tests numériques qui vont suivre, lorsque l'on ne précise pas le pas de maillage ou l'horizon de contrôlabilité, c'est que l'on a pris $h = 1/500$ et $T = 2$.

6.3.3 Vérification de la contrôlabilité exacte

On prend les données suivantes :

$$h = 1/500, T = 2, N = 200. \quad (6.3.9)$$

À la différence de la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli seule, la suite α_n ne reste pas quasiment constante après avoir décrû sur les premiers modes (figure 6.13). En effet, on observe à la figure 6.13 une légère décroissance de celle-ci pour $n = 46$, mais de façon plus gênante une chute très importante pour $n = 110$.

On ne peut donc, au vu de ce test, conclure immédiatement à la contrôlabilité exacte.

Cependant, on peut espérer que la décroissance pour $n = 110$ est la conséquence d'un pas de maillage qui ne serait pas assez fin pour les modes supérieurs à 110.

Un premier test pour vérifier que l'origine de cette chute est un pas de maillage trop grossier et de calculer le taux de convergence de la suite α_n en fonction de n .

Puisque dans notre cas il y a deux paliers, un pour $n = 46$ et un pour $n = 110$, on calcule donc $Ern(n)$, premièrement pour $n = 50, \dots, 80$ avec $N = 100$ (figure 6.14 de gauche) et deuxièmement pour $n = 120, \dots, 150$ avec $N = 200$ (figure 6.14 de droite).

Dans les deux régions, on obtient un même taux de convergence : $O(1/n^5)$.

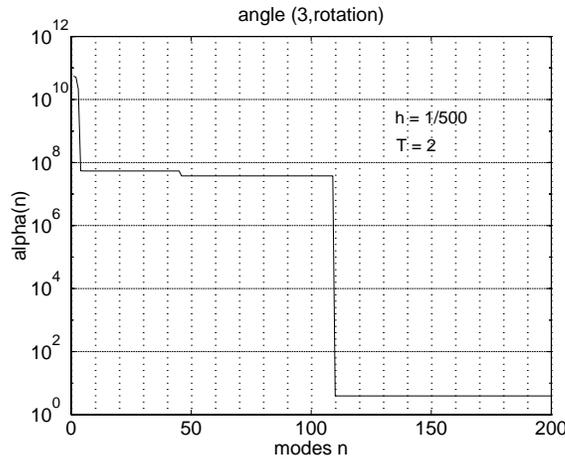


FIG. 6.13 - $(\alpha_n)_{n=1}^{200}$ (actionneur contrôlant la rotation en C).

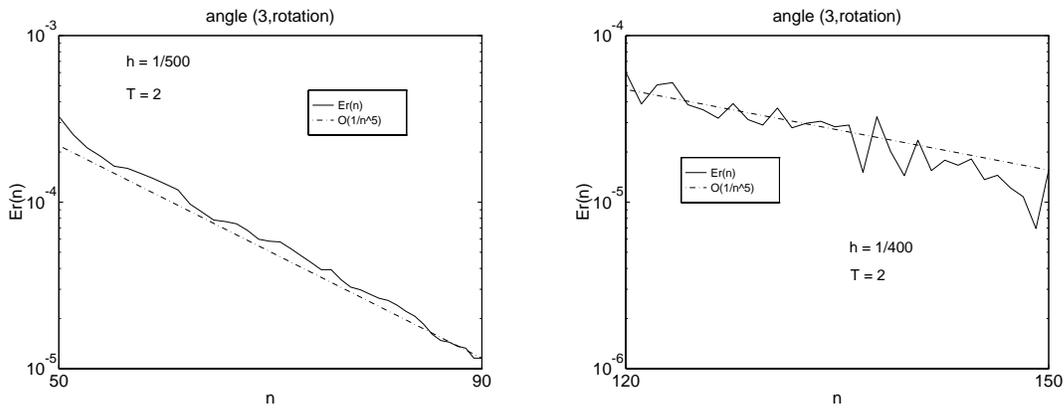


FIG. 6.14 - $Er_n(n)$ pour $n = 50, \dots, 80$ ($N = 100$) (à gauche) et pour $n = 110, \dots, 150$ ($N = 200$) (à droite).

Cependant pour $n = 110, \dots, 150$, on observe que l'on n'a pas une décroissance uniforme de l'erreur. Ceci semble confirmer que la chute pour $n = 110$ ne correspond pas à un mode inobservable de la structure mais plutôt à une discrétisation trop grossière.

Conclusion : La décroissance de α_n^h pour $n = 110$ est artificielle et est dû uniquement à un pas de maillage trop grossier, donc le test n'est valide pour une finesse $h \geq 1/500$ que pour $n < 110$ et indique que :

le treillis est contrôlable exactement avec un actionneur en rotation en C et un temps T assez grand.

Les tests suivants vont confirmer cette analyse.

6.3.4 $\alpha_n(T)$ fonction de T

Vérifions maintenant si la suite α_n dépend linéairement du temps T comme c'est le cas pour la poutre seule (voir le paragraphe 6.2 et l'Annexe J).

On calcule $\alpha_n(T)$ pour $n = 1, \dots, 50$ avec différents T (figure 6.15).

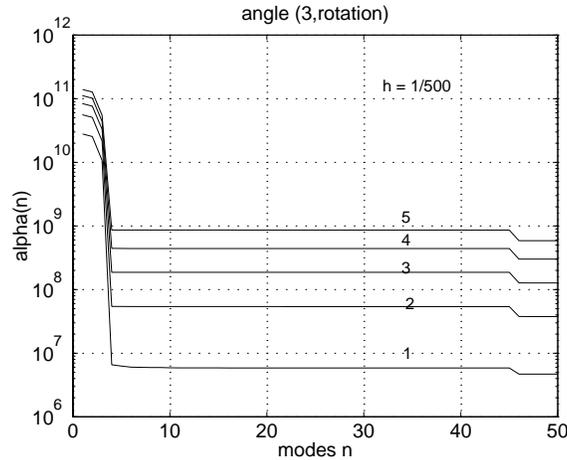


FIG. 6.15 - $\alpha_n(T)$ pour $n = 1, \dots, 50$ et $T = 1, \dots, 5$ ($h = 1/500$).

On a bien encore les mêmes relations homothétiques entre les $\alpha_n(T)$ calculés pour différents T .

Enfin, comme pour la poutre seule, il doit exister un temps minimal de contrôlabilité exacte T_{min} . La question est de savoir si ce temps minimal est purement numérique comme pour la poutre seule ou s'il est dû au couplage des modes de flexion et de traction dans notre treillis.

Le critère qui permet d'identifier ce temps minimal est a priori simple :

la suite α_n doit être, pour tout $n \geq 0$, décroissante et strictement positive.

Avant de vérifier ce critère, faisons quelques remarques sur son domaine de validité :

- du fait que la suite α_n est finie, on ne peut vérifier cette condition que pour un nombre de modes finis, et donc il se peut que pour $n \geq 200$, elle ne vérifie plus ce critère. Comme pour le test numérique, ce critère n'est donc vrai que pour un N fixé.
- de plus, plus n est grand et moins les valeurs de la suite sont calculées avec précision et donc plus une décroissance éventuelle peut-être due à un mauvais calcul de α_n et non à un temps d'observation trop faible. Autrement dit, le T_{min} que l'on obtient dépend non seulement du pas de maillage h mais aussi du choix de N .

- en fait pour le calcul avec $T = 2$ et également pour des temps supérieurs, on n'a fait une vérification purement visuelle de la décroissance de la suite α_n . On vérifie que pour tout T (on prend un temps T très grand, par exemple $T = 10^3$), la suite croît pour des n supérieurs à 110. Le premier mode à partir duquel la suite ne décroît plus converge vers $n = 110$ quand T augmente. C'est une nouvelle confirmation du fait que la décroissance brutale de notre suite pour $n = 110$ est purement numérique et n'a pas de lien avec le fait que la structure soit contrôlable ou non exactement. Pour vérifier la non décroissance de la suite, et ainsi identifier le temps minimal, il faut donc bien prendre $N < 110$.

Remarque 6.4 Pour vérifier le critère, il suffit donc d'après la première des remarques que nous venons d'énumérer ci-dessus, de calculer α_n pour N et non pour tous les termes de la suite. Par contre, il faut calculer la suite pour tous les $n \leq N$, pour vérifier la deuxième condition. En effet, la suite peut décroître par exemple entre $n = 199$ et $n = 200$, et être croissante entre $n = 198$ et $n = 199$.

Avec la poutre considérée et le pas de maillage utilisé, on trouve $T_{min} = 0.31$ (avec une précision de 1 %).

À la figure 6.16, on dessine $(\alpha_n)_{n=1}^{109}$ avec le temps d'observation le plus élevé pour lequel la suite décroît encore vers une valeur strictement positive.

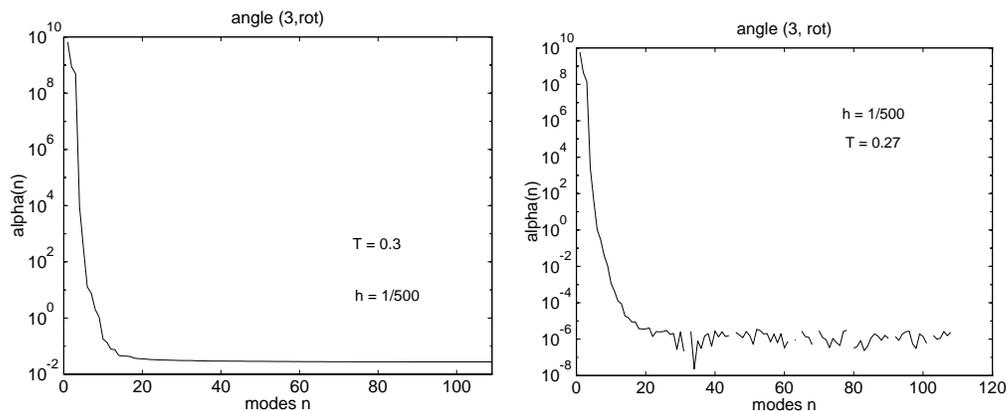


FIG. 6.16 - $(\alpha_n)_{n=1}^{109}$ pour $T = 0.3$ à gauche et pour $T = 0.27$ à droite.

On remarquera néanmoins que pour cette valeur de T le rapport entre le maximum et le minimum de la suite α_n est très élevé (de l'ordre de 10^{12}) (avec un minimum de l'ordre de 10^{-2}). Enfin si l'on prend $T < T_{min}$ assez petit, par exemple $T = 0.27$ (figure 6.16 de droite) on voit que la suite α_n , après une décroissance vertigineuse dès les 10 premiers modes, prend des valeurs nulles ou mêmes négatives.

Pour T encore plus petit, la suite n'est non seulement plus décroissante mais elle prend des valeurs imaginaires pour n assez grand.

Les valeurs négatives et imaginaires de la suite sont clairement imputables à la limite de précision de Matlab.

Conclusion : À l'aide du test, on vérifie bien que le couplage des modes de flexion et de compression implique l'existence d'un temps minimal d'observation et on peut de plus obtenir une estimation précise de ce temps.

6.3.5 Influence du pas de maillage

Vérifions que le pas de maillage peut biaiser radicalement l'interprétation du test, comme on l'a déjà pu le remarquer pour l'élément structurant (voir en particulier le paragraphe 6.2.4).

On dessine la suite α_n^h pour des pas de maillages de moins en moins fins à la figure 6.17.

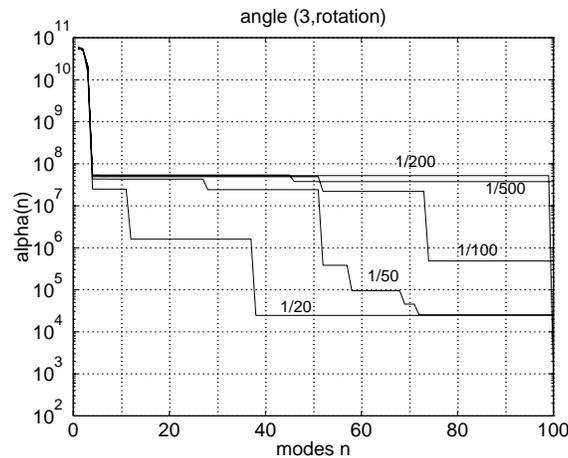


FIG. 6.17 - $(\alpha_n^h)_{n=1}^{100}$ pour différents pas de maillage h .

Cet exemple illustre particulièrement bien le fait qu'il soit nécessaire de prendre un pas de maillage assez fin pour interpréter correctement le test.

En effet, non seulement la suite ne converge plus de façon constante pour des maillages plus grossiers que $h = 1/200$ mais de plus, plus le pas de maillage h est grossier et plus la suite α_n^h décroît de façon brutale pour des valeurs de n petites. Par exemple pour $h = 1/20$, elle décroît fortement pour $n = 12$, ce qui n'est pas le cas pour les autres maillages plus fins. Autrement dit :

plus le pas est grossier et plus le test semble indiquer que la structure est non contrôlable.

Cette décroissance variable selon le pas de maillage est donc clairement imputable à la précision avec laquelle on calcule les modes et a fortiori les moments très faibles.

Pour conclure, calculons le taux de convergence de α_N^h en fonction de h . On représente $Erh(h)$ à la figure 6.18 pour $1/h = \{20, 50, 100, 200\}$ ($N = 199$ et $h_{\infty} = 1/500$) à laquelle on a superposé une fonction en $O(h^{9/2})$.

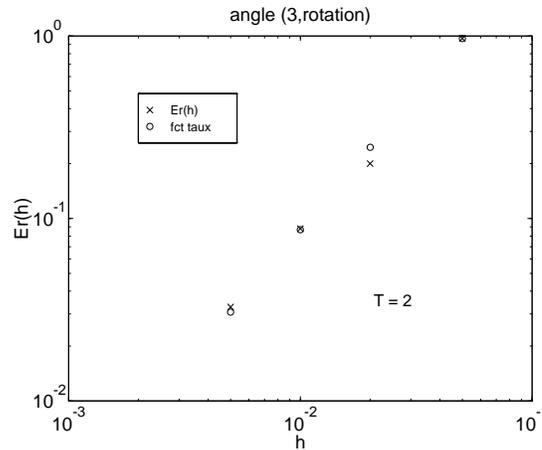


FIG. 6.18 - $Erh(h)$ pour $1/h = \{20, 50, 100, 200\}$ ($N = 199$ et $h_{\infty} = 1/500$).

On obtient une convergence en $O(h^{9/2})$.

6.3.6 Tests avec une matrice $M^{n,\theta}$

Les tests précédents ont confirmé la théorie, le treillis considéré est contrôlable exactement en un temps T avec un actionneur en \mathbb{C} agissant en rotation.

Vérifions maintenant que $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est bien l'espace X' *ad hoc*.

Si c'est bien le cas, on doit avoir le même comportement en fonction de θ que pour la poutre seule, soit :

- pour $\theta < 1$, la suite α_n^θ doit être majorée par une constante positive de plus en plus grande au fur et à mesure que θ diminue
- pour $\theta > 1$, la suite α_n^θ doit décroître de plus en plus vite au fur et à mesure que θ augmente

On calcule d'abord $(\alpha_n^{\theta_m})_{n=1}^{50}$ avec $\theta \leq 1$ ($\theta_m = \{1, 0.895, 0, -1\}$) (figure 6.19 de gauche).

On vérifie bien que la suite est toujours majorée par une constante strictement positive qui augmente quand θ diminue.

On a représenté la suite $\alpha_n^{\theta_m}$ pour la valeur $\theta = 0.895$, car il s'agit du θ le plus petit pour lequel la suite $\alpha_n^{\theta_m}$ ne décroît pas de façon brutale. Enfin, on observe que pour θ assez petit, typiquement $\theta = 0$, la suite ne décroît plus que pour $n = 4$.

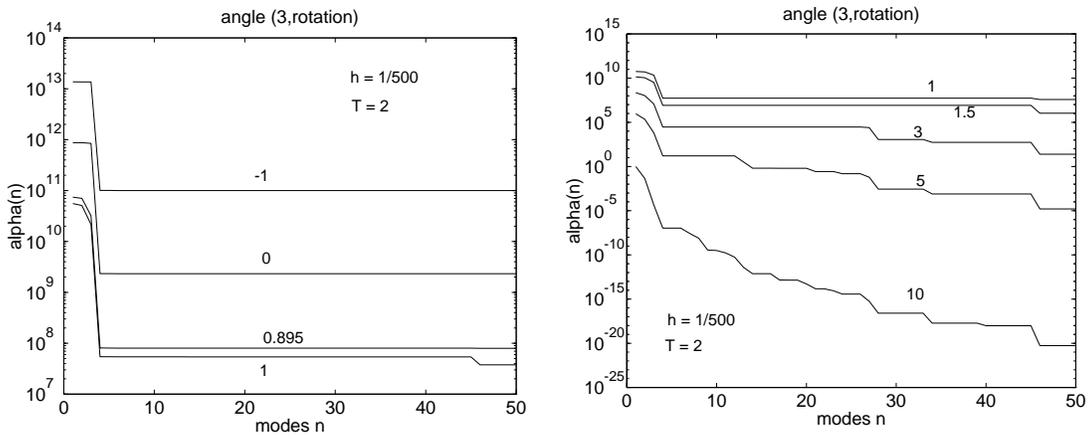


FIG. 6.19 - $(\alpha_n^{\theta_m})_{m=1}^{50}$ pour $\theta_m \leq 1$ (à gauche) et pour $\theta_m \geq 1$ (à droite).

Prenons maintenant θ strictement supérieur à 1 ($\theta_m = \{1, 1.5, 3, 5, 10\}$). On vérifie bien à la figure 6.19 de droite que plus θ augmente et plus α_n^θ décroît rapidement vers zéro. On peut conclure que l'espace X' ad hoc est exactement $H_0^{2\theta}(\Omega) \times H^{2(\theta-1)}(\Omega)$ avec $\theta = 0.895$.

6.3.7 Choix des actionneurs

Actionneurs en rotation

Tout d'abord, inversons la position de l'actionneur tout en conservant un actionneur en rotation.

On voit à la figure 6.20 que l'on obtient une suite α_n semblable à celle obtenue avec l'actionneur agissant en A au lieu de C.

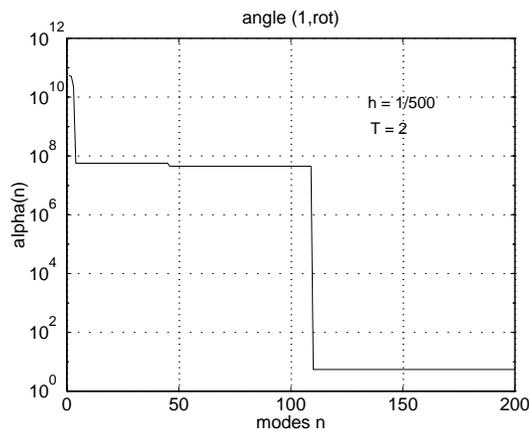


FIG. 6.20 - Actionneur en rotation en A : $(\alpha_n)_{n=1}^{200}$.

Néanmoins si on calcule leurs différences, on peut vérifier qu'elles sont bien différentes (l'erreur commise est de l'ordre d'une dizaine de %).

Remarque 6.5 On a pris $N = 200$ et non pas $N < 110$ pour confirmer, s'il était nécessaire, que la chute en $n = 110$ est bien dû à un pas de maillage trop grossier. En fait, pour d'autres types d'actionneurs on obtient également une décroissance pour $n = 110$.

Appliquons maintenant un actionneur en rotation aux deux extrémités du treillis.

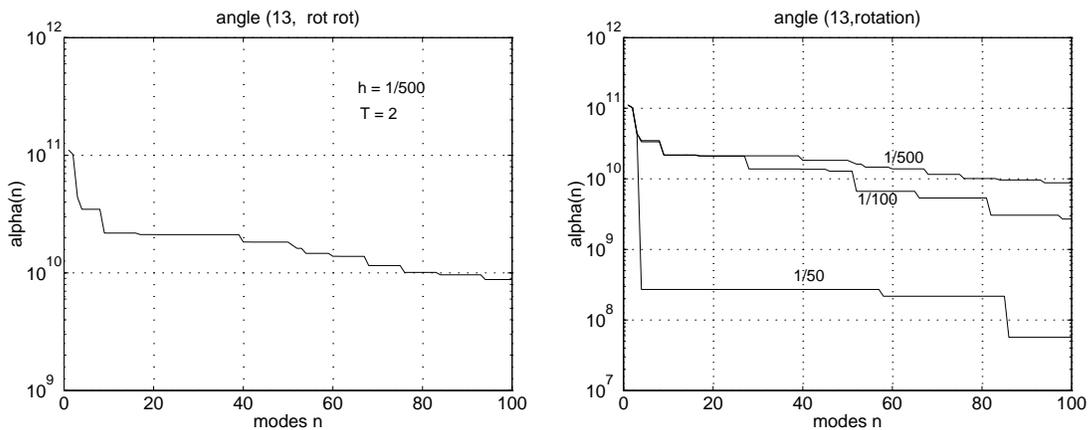


FIG. 6.21 - Actionneurs en rotation aux deux extrémités : $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$ (à gauche) et $(\alpha_n^h)_{n=1}^{100}$ pour différents pas de maillage (à droite).

On vérifie bien à la figure 6.21 de gauche que le fait d'agir sur les deux extrémités est plus efficace que d'agir sur une seule puisque la suite $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$ à une borne inférieure bien plus grande que dans les tests précédents où un seul actionneur contrôlait la structure. Par contre, la suite est moins "régulière" puisqu'elle décroît pour de nombreuses valeurs de n au lieu d'être quasiment constante comme pour un seul actionneur en rotation.

Une explication de ce phénomène semble résider dans l'approximation plus ou moins bonne de α_n selon l'actionneur considéré. Comme on l'a vu au paragraphe 6.3.5 précédent, pour cette multistucture, la constante α_n est particulièrement sensible au pas de maillage.

On observe que plus le pas de maillage est grossier et moins la suite est irrégulière (figure 6.21 de droite).

Remarque 6.6 Il serait intéressant de regarder la réponse de la structure contrôlée avec cet ensemble d'actionneurs.

Actionneurs en compression

Considérons le cas où l'on agit en compression en A et en C respectivement.

On adopte dans la suite de tous les tests de chapitre, la terminologie suivante :

on parle d'*actionneur en compression* quant il s'agit d'un actionneur qui asservit les déplacements longitudinaux.

Lorsque l'on agit en compression à l'une ou l'autre extrémité, la valeur limite de la suite α_n est plus faible mais par contre la décroissance globale (entre α_1 et α_N) est moins importante (figure 6.22).

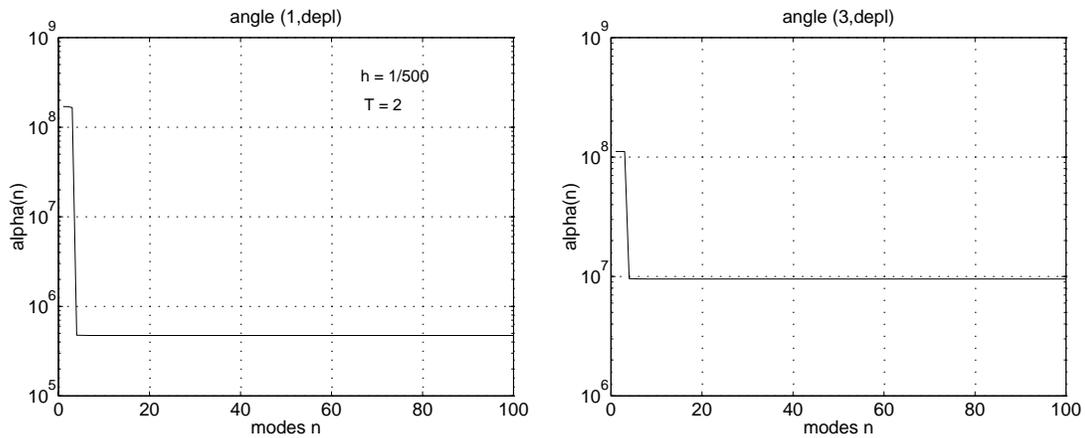


FIG. 6.22 - *Actionneur en compression en A (à gauche) et en C (à droite):* $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

C'est particulièrement flagrant dans le cas de l'actionneur localisé en C (voir figure 6.22 de droite). On vérifie enfin à la figure 6.23 qu'en raison de cette efficacité plus grande de l'actionneur C, l'action simultanée des actionneurs est moins efficace que celle de l'actionneur C seul, mais plus efficace que celle de l'actionneur A.

6.3.8 Conclusion

En conclusion de cette étude, on peut dire que *quelque soit le type d'actionneur* appliqué pour contrôler la structure, elle est contrôlable exactement pour un temps T assez grand.

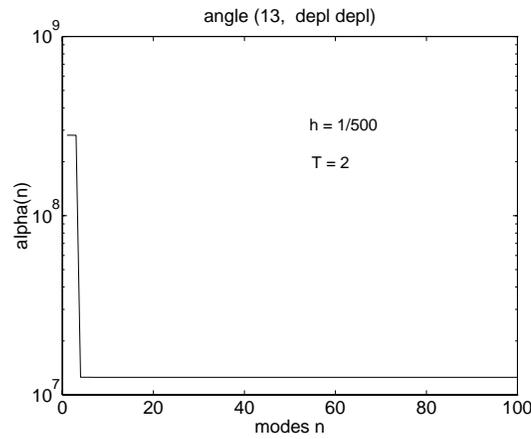


FIG. 6.23 - Actionneurs en compression en A et en C: $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

6.4 Deuxième exemple de treillis contrôlable exactement

6.4.1 Définition du treillis

Soit un treillis composé de trois poutres reliées rigidement en étoile

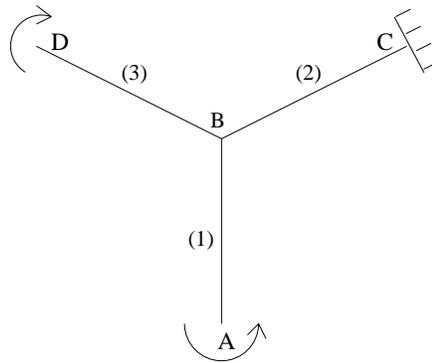


FIG. 6.24 - Treillis de poutres reliées rigidement en B, contrôlé en rotation tout en ayant son déplacement de bloqué en A et encastré en C et D.

avec les paramètres mécaniques suivants :

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_2 = I_3 &= 50 \text{ m}^4, & A_1 = A_2 = A_3 &= 10 \text{ m}^2, \\
 E_1 = E_2 = E_3 &= 4.10^{10} \text{ N.m}^{-2}, & \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 &= 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}, \quad (6.4.10) \\
 l_1 &= 70 \text{ m}, & l_2 = l_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Nous allons commencer par agir sur la structure avec un actionneur contrôlant la rotation de l'extrémité A (figure 6.24). L'extrémité A a donc son déplacement

de bloqué, tandis que les extrémités C et D sont encastrées.

6.4.2 Remarques sur le caractère contrôlable

Le treillis est étoilé donc, d'après des résultats de G. Leugering et E.J.P.G. Schmidt [79] et de G. Leugering [78], il est contrôlable exactement avec un nombre suffisant d'actionneurs.

En effet, du fait du choix de l'actionneur, qui entraîne que les extrémités C et D sont encastrées, il existe des *modes inobservables* pour cet actionneur, qui sont localisés sur les poutres (2) et (3).

Par conséquent un seul actionneur, n'agissant donc qu'à une seule extrémité du treillis, ne suffit pas à le contrôler.

Par contre, il est contrôlable exactement avec deux ou trois actionneurs.

Convention : Si on ne précise pas le pas de maillage ou l'horizon de contrôlabilité dans les tests, c'est que l'on a pris $h = 1/700$ et $T = 500$.

6.4.3 Vérification de la non contrôlabilité exacte avec un seul actionneur

On se fixe les paramètres suivants :

$$h = 1/700, T = 500, N = 100. \quad (6.4.11)$$

La figure 6.25 de gauche montre clairement que :

le treillis *n'est pas contrôlable exactement* en un temps T ($T = 500$) par un seul actionneur asservissant la rotation de l'extrémité A.

En effet, la suite α_n décroît brutalement (d'un facteur 10^{10}) pour $n = 2$. Le fait que la suite reste quasiment constante pour $n > 2$ n'indique pas ici que la structure est contrôlable exactement, en raison de la très forte décroissance, de l'ordre de 10^{10} , de la suite α_n pour $n = 2$.

Comme pour le treillis précédent on veut estimer la vitesse de convergence de α_n en fonction de n . On calcule donc l'erreur relative $Ern(n)$ pour $n = 10, \dots, 50$ avec $N = 100$ (voir figure 6.25 de droite).

Alors que pour le treillis précédent $Ern(n)$ décroît avec n , dans notre cas on obtient une erreur qui oscille en fonction de n autour de 10^{-5} .

Il semble naturel de conjecturer que *dans le cas où la structure n'est pas contrôlable exactement*, on observe ce type d'oscillations autour d'une valeur constante.

En quelque sorte, pour un pas de maillage donné, cette oscillation autour d'une valeur constante strictement positive est équivalente à une oscillation autour de zéro, et donc à un cas de non contrôlabilité exacte.

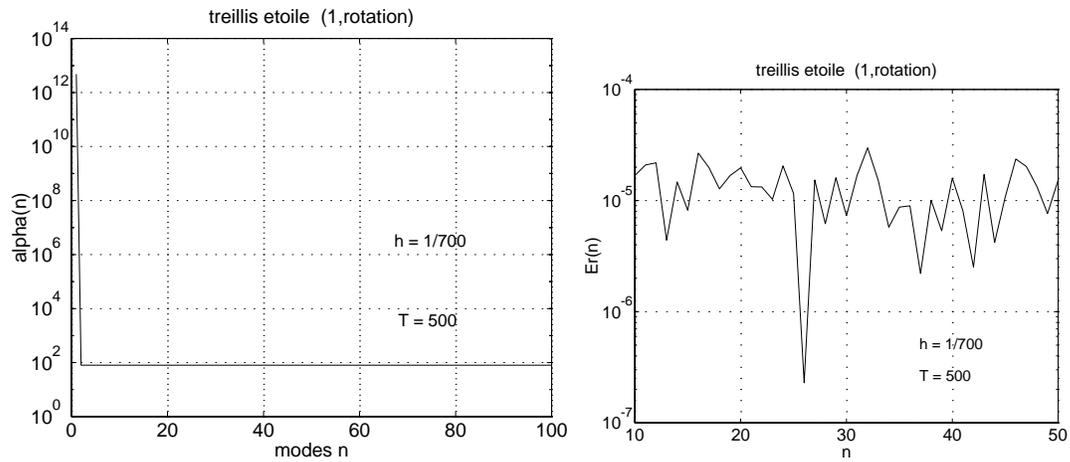


FIG. 6.25 - $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$ (à gauche) et $Ern(n)$ pour $n = 10, \dots, 50$ et $N = 100$ (à droite).

6.4.4 $\alpha_n(T)$ fonction de T

Comme pour tous les treillis étudiés, nous allons vérifier que plus T est grand et plus $\alpha_N(T)$ est grand, avec si possible une variation linéaire en fonction de T comme pour la poutre seule.

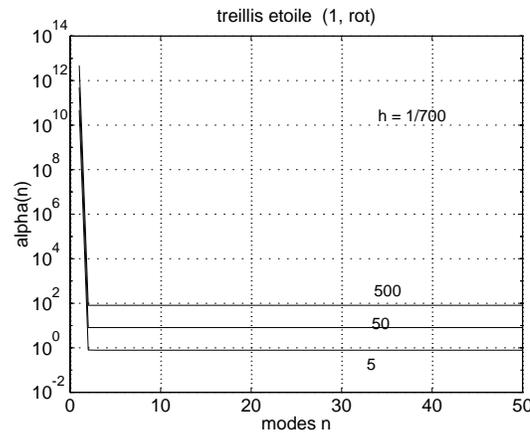


FIG. 6.26 - $\alpha_n(T)$ pour $n = 1, \dots, 50$ et $T = 5, 50$ et 500 .

C'est bien ce que l'on observe à la figure 6.26 où l'on a pris successivement $T = 5, 50$ et 500 pour calculer $(\alpha_n)_{n=1}^{50}$. Les suites $\alpha_n(T)$ pour les différents temps T sont quasiment homothétiques, et donc on a bien une relation de linéarité entre les suites calculées avec des temps différents.

6.4.5 Influence du pas de maillage h

On se fixe un horizon de contrôle $T = 500$ et on calcule $(\alpha_n^h)_{n=1}^{100}$ pour $1/h = \{50, 200, 400, 500, 700\}$.

On observe à la figure 6.27 de gauche, a contrario de la structure précédente, que plus le maillage est fin et plus la suite α_n^h décroît vite vers zéro.

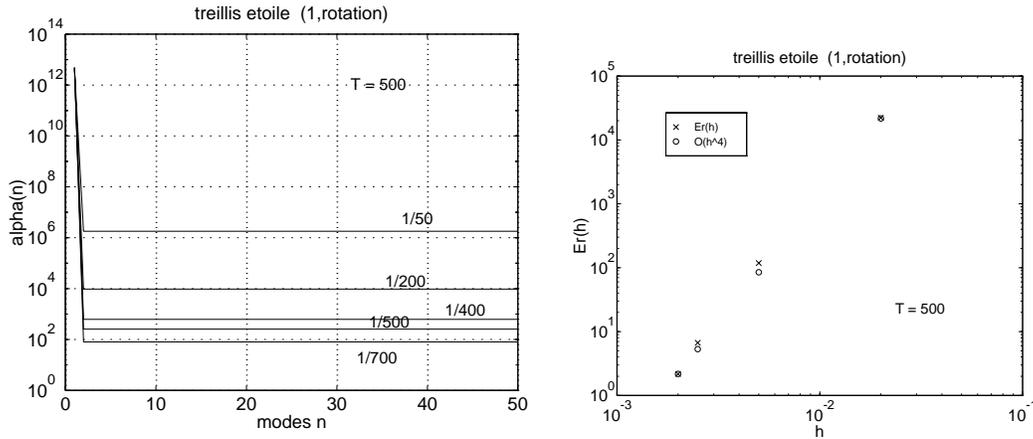


FIG. 6.27 - Pour $1/h = \{50, 200, 400, 500, 700\}$, $(\alpha_n^h)_{n=1}^{100}$ (à gauche) et $Erh(h)$ pour $n = 10$ (à droite).

En particulier, plus le pas de maillage est fin et plus la valeur plafond de α_n^h est petite, ce qui est typique d'un treillis non contrôlable exactement.

Calculons le taux de convergence de la suite α_n^h en fonction de h pour un mode fixé.

On représente $Erh(h)$ pour $1/h = \{50, 200, 400, 500, 700\}$ avec $n = 10$ à la figure 6.27 de droite. On obtient une convergence en $O(h^4)$.

6.4.6 Identification du mode inobservable du treillis

D'après le premier test effectué, nous avons un *mode inobservable* (pour $1 \leq n \leq 100$): le 2ème mode. En effet, comme on l'a vu à la figure 6.25 de gauche, c'est pour cette valeur de n que la suite α_n décroît fortement (de l'ordre de 10^{10}). On a donc pour ce treillis, d'après les notations du paragraphe 5.6 du chapitre 5: $n_1 = 2$.

Ce mode est particulier, comme on peut le voir à la figure 6.28.

En effet, on remarque qu'il n'y a pas de flexion (uniquement de la traction-compression) sur la poutre (1), ce qui explique que ce mode soit invisible pour

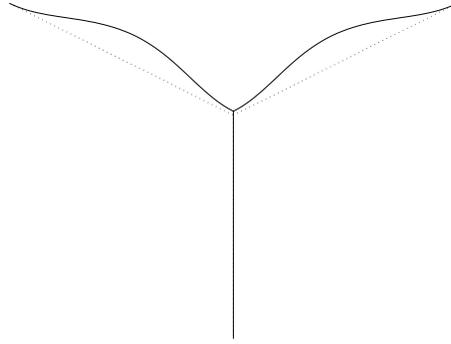


FIG. 6.28 - 2^{ème} mode du treillis (invisible pour un actionneur en rotation en A).

l'actionneur en rotation appliqué à l'extrémité A de la poutre (1).

Remarque 6.7 On se reportera au paragraphe 6.4.8 traitant de l'application d'autres systèmes d'actionneurs au treillis, pour une vérification de cette affirmation.

Vérifions maintenant si, dans le cas de notre structure, la propriété 5.6 conjecturée au paragraphe 5.6 est exacte.

À la figure 6.29 de gauche (resp. de droite), on a représenté $x_{n_1}^0$ (resp. $x_{n_1}^1$) pour $n = 40$.

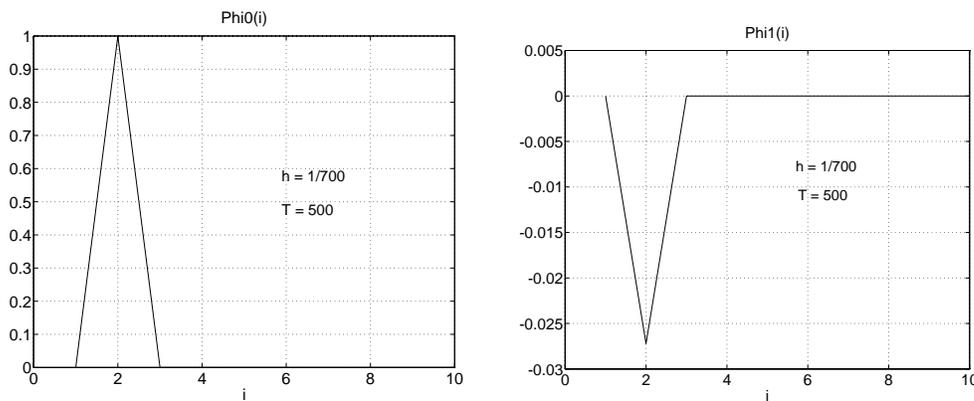


FIG. 6.29 - Pour $n = 10$ et $n_1 = 2$, $x_{n_1}^0$ (à gauche) et $x_{n_1}^1$ (à droite).

On vérifie bien que la propriété 5.6 pour $n_1 = 2$. En effet, seul la seconde composante de $x_{n_1}^0$ (resp. $x_{n_1}^1$) est non nulle.

6.4.7 Version avec une matrice de masse adaptée

On calcule α_n^θ avec des θ de plus en plus petit jusqu'à ce que la suite ne semble plus décroître vers zéro.

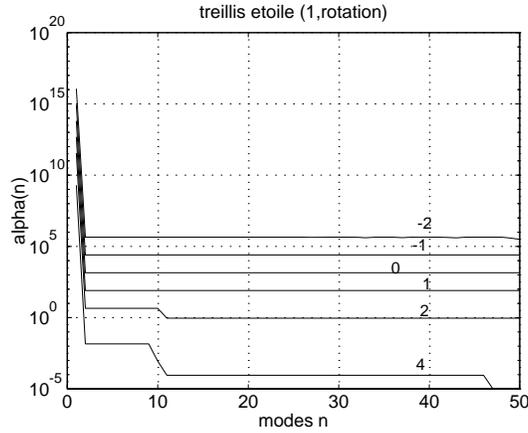


FIG. 6.30 - Convergence de $(\alpha_n^{\theta_m})_{n=1}^{50}$ pour $\theta_m = \{4, 2, 1, 0, -1, -2\}$.

On observe bien à la figure 6.30 que plus θ est petit et plus le minimum de la suite est grand. Cependant même pour des θ petits, la suite α_n décroît toujours pour $n = 2$. Par contre, pour $\theta > 1$, α_n décroît fortement pour de nouveaux n . Autrement dit, on vient de vérifier que le treillis est bien incontrôlable avec un actionneur en flexion en A.

6.4.8 Tests avec différents actionneurs

Du fait de la symétrie du treillis, appliquer un actionneur en C ou en D est rigoureusement équivalent.

Par conséquent, nous allons étudier successivement les systèmes d'actionneurs suivants :

- actionneur en rotation en C
- actionneurs en rotation en A et C
- actionneur en compression en A (resp. C) et en compression en A et C.

On conserve les mêmes paramètres que pour le premier test :

$$h = 1/700, T = 500. \quad (6.4.12)$$

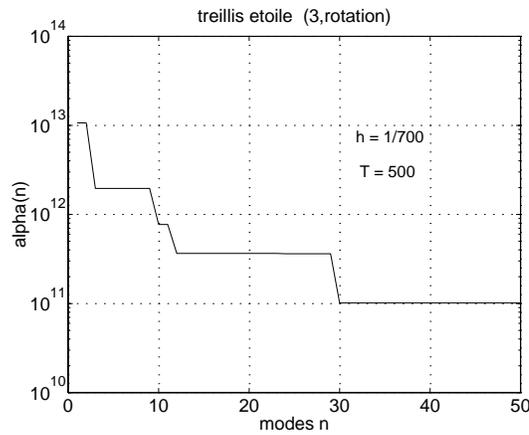


FIG. 6.31 - $(\alpha_n)_{n=1}^{50}$ avec un actionneur en rotation en C.

Actionneur en rotation en C

Tout d'abord on remarque (figure 6.31) que comme pour l'actionneur localisé en A, le test indique que la structure est non contrôlable exactement. Par contre, α_n ne décroît plus pour $n = 2$ comme pour l'actionneur en A. Par contre, la suite décroît pour d'autres n ($n = 3, 10, 12, 30$), mais cette décroissance est moins brutale. Ces valeurs de n correspondent à des modes difficilement observables par l'actionneur en C, comme on peut le voir à la figure 6.32 où l'on a représenté les modes 12 et 30 du treillis.

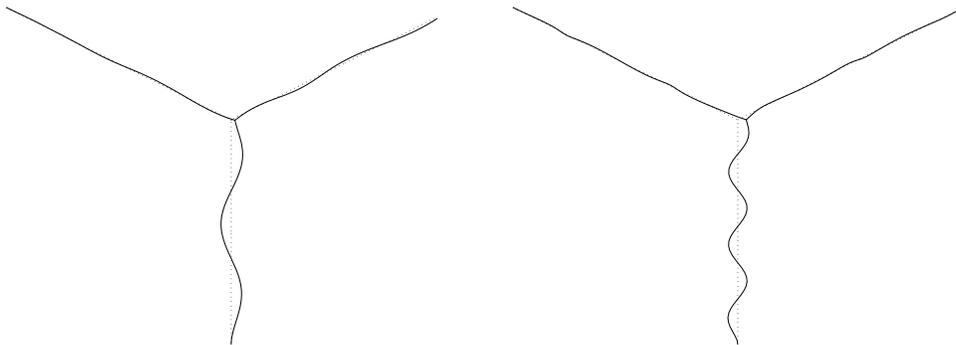


FIG. 6.32 - Modes invisibles pour l'actionneur en rotation en C: 12 ème mode (à gauche) et 30 ème mode (à droite).

En effet, ces deux modes ne travaillent qu'en traction-compression sur les poutres (2) et (3) et par conséquent sont invisibles pour des actionneurs situés à l'une ou l'autre des extrémités C et D de ces poutres, donc en particulier pour l'actionneur qui nous concerne.

Actionneurs en rotation en A et en C

Si l'on considère maintenant la structure sur laquelle on applique simultanément les deux actionneurs en flexion, on peut s'attendre à ce que le treillis soit contrôlable exactement.

En effet, comme on l'a déjà remarqué le deuxième mode est invisible pour l'actionneur localisé en A, mais pas pour celui en C. Inversement, les modes invisibles pour l'actionneur C ne le sont pas pour l'actionneur A.

C'est ce que l'on peut vérifier à la figure 6.33.

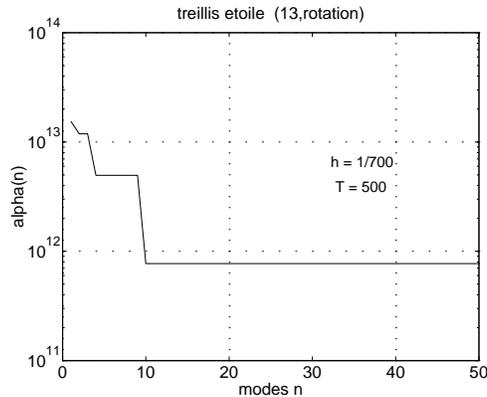


FIG. 6.33 - $(\alpha_n)_{n=1}^{50}$ pour les actionneurs en rotation en A et C.

La suite décroît pour $n = 3$ et $n = 10$ mais très faiblement en comparaison des cas précédents et elle reste ensuite constante :

le treillis est contrôlable exactement par deux actionneurs en rotation qui s'exercent simultanément en A et en C.

Actionneurs en compression en A (resp. en C)

On peut observer à la figure 6.34 de gauche, la suite α_n correspondant à l'actionneur en compression en A.

On remarque que la suite α_n décroît quasiment comme pour l'actionneur en flexion agissant à la même extrémité. En effet, la suite décroît brutalement (et du même ordre) pour $n = 2$, puis reste également quasiment constante pour $n > 2$. On conclut donc de la même façon, le treillis n'est pas contrôlable exactement avec cet actionneur.

Si l'on applique ensuite un contrôle non plus en A mais en C, la suite α_n décroît (figure 6.34 de droite) encore pour $n = 2$ mais seulement d'un facteur 10. Par contre, elle décroît ensuite pour $n = 9$ et $n = 35$. On notera que le 35ème mode du treillis est un mode invisible pour l'actionneur en compression en C (voir figure 6.35).

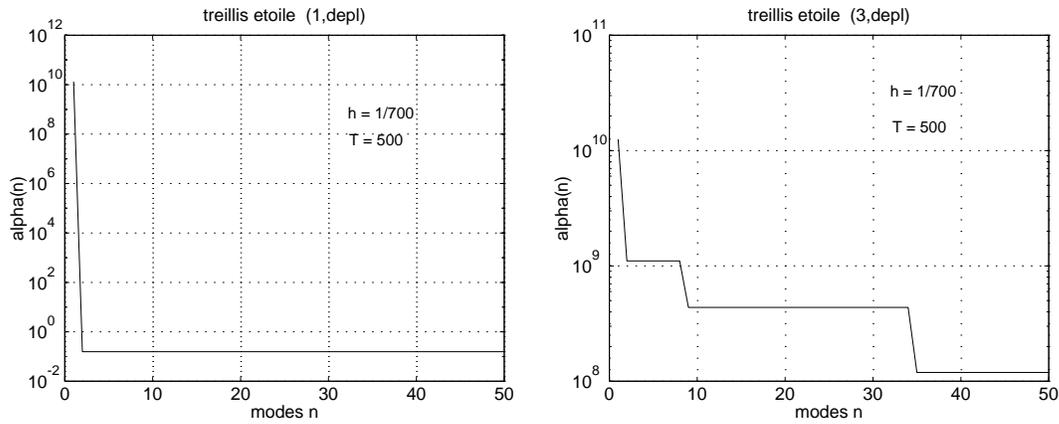


FIG. 6.34 - $(\alpha_n)_{n=1}^{50}$ pour l'actionneur en compression en A (à gauche) et en C (à droite).

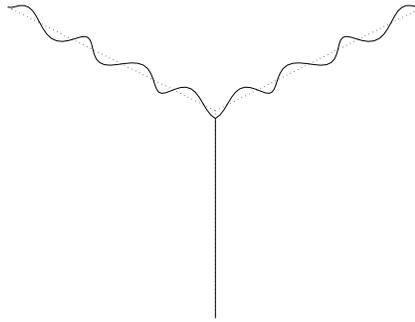


FIG. 6.35 - 35 ème mode du treillis : invisible pour l'actionneur en compression en C.

En effet, le 35 ème mode du treillis ne travaille qu'en flexion sur la poutre (2).

La décroissance entre α_1 et α_{35} est de l'ordre de 10^2 , par conséquent on peut conclure une nouvelles fois que le treillis n'est pas contrôlable exactement avec cette actionneur.

Si l'on agit aux extrémités A et C en compression, on obtient la suite α_n (figure 6.36) suivante :

Pour ce système d'actionneur, la suite α_n décroît pour $n = 2$ et $n = 35$ (d'un facteur 10). Le treillis est donc non contrôlable exactement avec ces deux actionneurs.

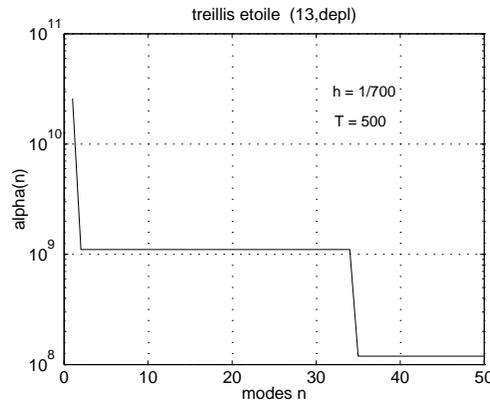


FIG. 6.36 - Actionneurs en compression en A et C: $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

6.4.9 Conclusion

Grâce au test nous avons pu ainsi vérifier que la structure est contrôlable exactement pour un nombre suffisant d'actionneurs et comparer de façon quantitative l'efficacité de différents systèmes d'actionneurs.

6.5 Treillis objet de conjectures

Soit le treillis représenté à la figure 6.38, composé de poutres reliées rigidement, dont l'extrémité A est contrôlée en rotation tout en ayant son déplacement de bloqué, tandis que les autres extrémités sont encastrées;



FIG. 6.37 - Treillis de poutres reliées rigidement, encastré en C, E, F et contrôlé en rotation tout en ayant son déplacement de bloqué en A.

avec les paramètres mécaniques :

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_2 = I_3 = 50 \text{ m}^4, & & A_1 = A_2 = A_3 = 10 \text{ m}^2, \\
 I_4 = I_5 = 22 \text{ m}^4, & & A_4 = A_5 = 6.5 \text{ m}^2, \\
 E = 4.10^{10} \text{ N.m}^{-2}, & & \rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}, \\
 l_1 = l_3 = 70 \text{ m}, \quad l_2 = 250 \text{ m}, & & l_4 = l_5 = 50 \text{ m}.
 \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

6.5.1 Remarques sur le caractère contrôlable

Le treillis que nous considérons n'est pas étoilé par conséquent les résultats théoriques de G. Leugering et E.J.P.G. Schmidt [79] (voir également G. Leugering [78]) ne permettent pas de conclure quant à sa contrôlabilité exacte éventuelle. Le test numérique est donc ici très utile. En effet, selon les résultats que le test fournira, on pourra émettre des conjectures pour ce treillis.

6.5.2 Vérification de la contrôlabilité exacte

Comme pour les tests précédents, on prend un pas de maillage h assez fin et un horizon de contrôle assez grand :

$$h = 1/300, T = 100, N = 100. \quad (6.5.14)$$

On donne le résultat du test à la figure 6.38.

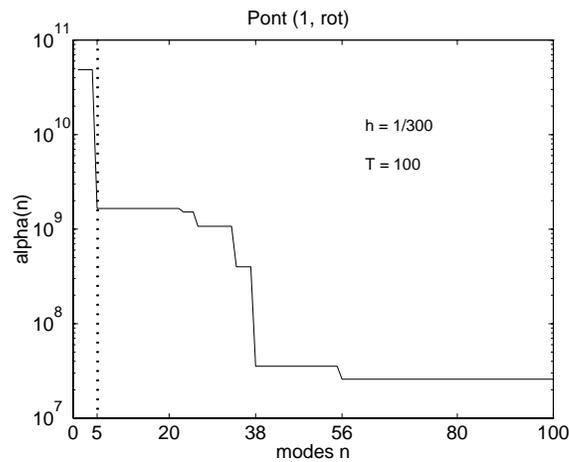


FIG. 6.38 - Convergence de $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$ pour $h = 1/300$ et $T = 100$.

On peut voir que la suite (α_n) converge vers une valeur strictement positive de l'ordre de 10^7 en étant parti d'une valeur de l'ordre de 10^{11} , la décroissance est donc importante. Mais surtout, on note que la suite (α_n) décroît de l'ordre de 10^2 pour $n = 5$ et de l'ordre de 10^1 pour $n = 38$.

On peut donc *conjecturer* que ce treillis n'est pas contrôlable exactement avec un actionneur en rotation en A.

6.5.3 $\alpha_n(T)$ fonction de T

Vérifions maintenant si la suite α_n dépend linéairement du temps T , comme c'est le cas pour la poutre seule et pour les treillis de poutres précédents. On

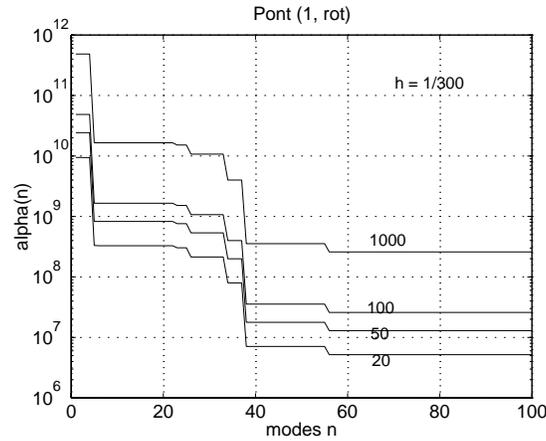


FIG. 6.39 - $\alpha_n(T)$ pour $n = 1, \dots, 100$ et $T = 20, 50, 100$ et 1000 .

calculé $\alpha_n(T)$ pour $T = 20, 50, 100$ et 1000 (figure 6.39).

Les suites $\alpha_N(T)$ calculées pour différents T sont homothétiques, par conséquent on vérifie encore cette propriété.

6.5.4 Influence du pas de maillage h

Comme nous avons pu le remarquer pour les autres treillis, la variation de α_n^h en fonction de h permet de vérifier si la conclusion du test est exacte.

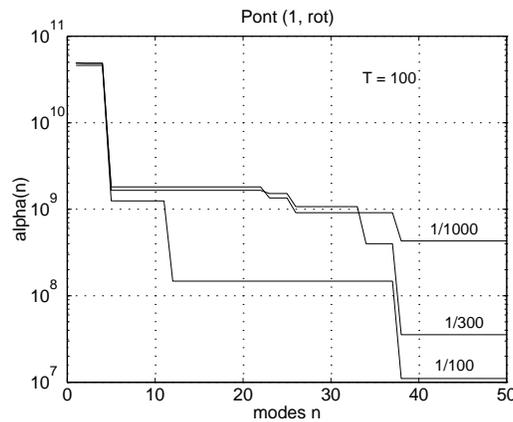


FIG. 6.40 - $(\alpha_n^h)^{50}$ pour $1/h = \{100, 300, 1000\}$.

On représente α_n^h (figure 6.40) pour $1/h = \{100, 300, 1000\}$.

On observe que plus le maillage est fin et moins la suite α_n^h décroît rapidement. Plus précisément, on remarque que la suite décroît toujours pour $n = 5$ et $n = 38$, avec notamment une amplitude de décroissance beaucoup plus faible pour $n = 38$.

Cette évolution de α_n^h est typique d'un treillis contrôlable exactement. L'interprétation du test du paragraphe 6.5.2 n'est donc pas exacte.

Remarque 6.8 La raison principale de cette mauvaise interprétation est dû à un calcul trop grossier des modes les plus élevés.

C'est d'ailleurs ce que nous allons pouvoir vérifier dans le paragraphe suivant, en faisant varier l'espace X' des données initiales du problème adjoint.

6.5.5 Tests avec une matrice $M^{n,\theta}$

Vérifions s'il existe un espace X' pour lequel il y a contrôlabilité exacte. A cette fin, on calcule α_n^θ avec $\theta < 1$ de plus en plus petit (figure 6.41 de gauche).

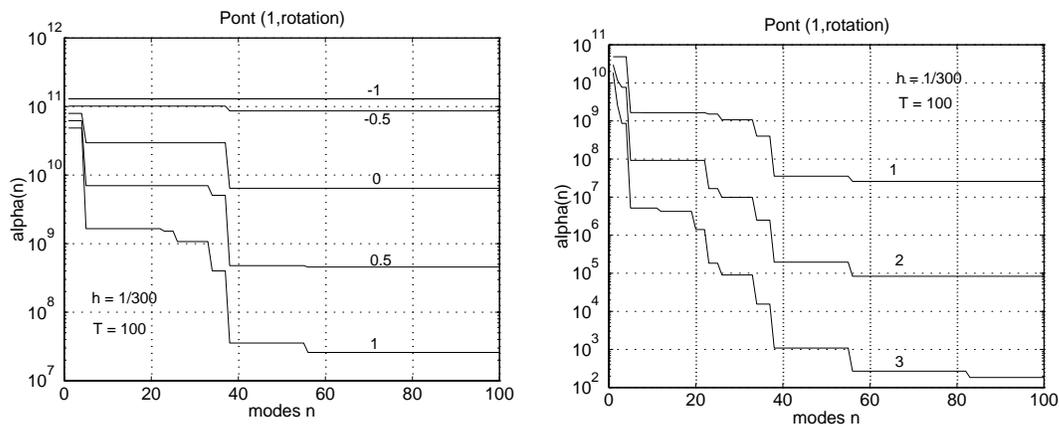


FIG. 6.41 - Convergence de $(\alpha_n^{\theta_m})_{n=1}^{100}$ pour $\theta_m = \{1, 0.5, 0, -0.5, -1\}$ (à gauche) et $\theta_m = \{1, 2, 3\}$ (à droite).

On trouve un θ ($\theta = 1$) pour lequel la suite est constant. Il existe donc un espace X' pour lequel l'inégalité d'observabilité forte est vérifiée, autrement dit *le treillis est contrôlable exactement dans $H^{-2}(\Omega) \times H^{-4}(\Omega)$* .

Inversement, on calcule α_n^θ pour θ de plus en plus grand et on observe bien, à la figure 6.41 de droite, que plus θ augmente et plus α_n^θ décroît rapidement vers zéro.

6.5.6 Identification d'un mode inobservable

Les tests précédents indiquent que le premier *mode inobservable* (pour $1 \leq n \leq 100$) est le 5ème mode. En effet, comme on l'a vu à la figure 6.38, c'est le plus petit n pour lequel la suite α_n décroît rapidement (de l'ordre de 10^2). On a donc pour ce treillis, d'après les notations du paragraphe 5.6 du chapitre 5 :

$n_1 = 5$.

Ce mode est particulier, comme on peut le voir à la figure 6.42.



FIG. 6.42 - 5^{ème} mode du treillis : invisible pour l'actionneur en rotation en A.

En effet, on remarque qu'il n'y a quasiment pas de flexion (uniquement de la traction-compression) sur la poutre (1) (ainsi d'ailleurs que sur les poutres (2) et (3)), ce qui explique que ce mode soit invisible pour l'actionneur en rotation appliqué à l'extrémité A de la poutre (1).

Vérifions maintenant si, dans le cas de notre structure, la propriété 5.6 conjecturée au paragraphe 5.6 est exacte.

À la figure 6.43 de gauche (resp. de droite), on représente $x_{n_1}^0$ (resp. $x_{n_1}^1$) pour $n = 20$.

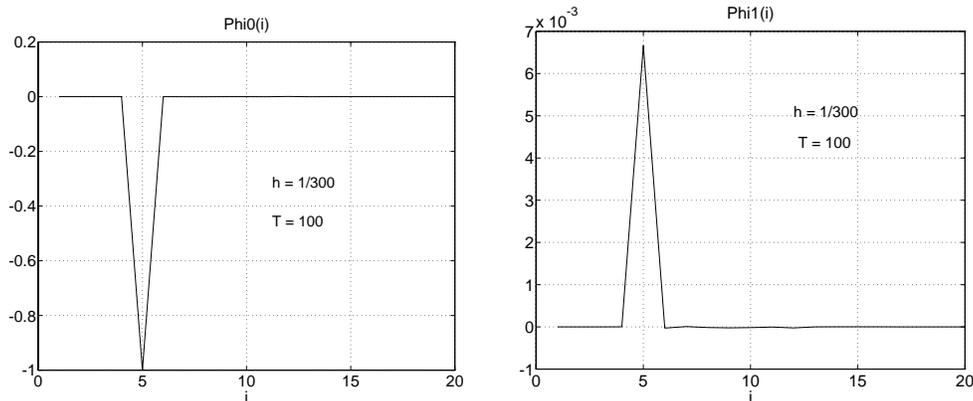


FIG. 6.43 - $x_{n_1}^0$ à gauche et $x_{n_1}^1$ à droite ($n = 20$ et $n_1 = 5$).

On vérifie bien que la propriété 5.6 pour $n_1 = 5$. En effet, seule la cinquième composante de $x_{n_1}^0$ (resp. $x_{n_1}^1$) est non nulle.

6.5.7 Tests avec différents actionneurs

Étant donné le nombre de combinaisons d'actionneurs possibles pour ce treillis nous n'allons pas traiter tous les cas. En effet, on considérera les systèmes suivants :

- actionneur(s) en rotation uniquement

- actionneur(s) en compression uniquement
- actionneurs en compression et en flexion

mais on ne donnera qu'un seul exemple d'application du test pour le dernier type de système d'actionneurs, .

On conserve les mêmes paramètres que pour le premier test, soit :

$$h = 1/300, T = 100, N = 100. \quad (6.5.15)$$

Actionneur(s) en rotation

On asservit le treillis avec un actionneur en rotation en C et on calcule la suite α_n pour $n = 1, \dots, 100$ (figure 6.44).

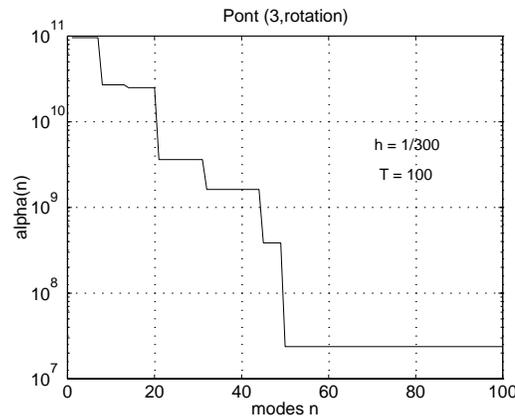


FIG. 6.44 - Actionneurs en rotation en C : $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

Si on compare ce résultat avec celui obtenu avec le même type d'actionneur, mais en A (voir figure 6.38), on observe tout d'abord que la suite ne décroît plus pour $n = 5$. On pouvait s'attendre à ce résultat car le 5^{ème} mode (voir figure 6.42) est observable par l'actionneur en C. Par contre, l'amplitude de la décroissance entre le maximum de la suite α_n et son minimum est du même ordre que pour l'actionneur en rotation en A (de l'ordre de 10^4).

On conjecture donc que *le treillis n'est pas contrôlable exactement par un actionneur en rotation en C*.

Appliquons maintenant deux actionneurs en rotation au treillis : en A et en C (resp. en A et en E).

On observe à la figure 6.45 que pour ces deux systèmes d'actionneurs l'amplitude de la décroissance de la suite α_n , entre $n = 1$ et $n = 100$, est de l'ordre de 10, c'est-à-dire faible.

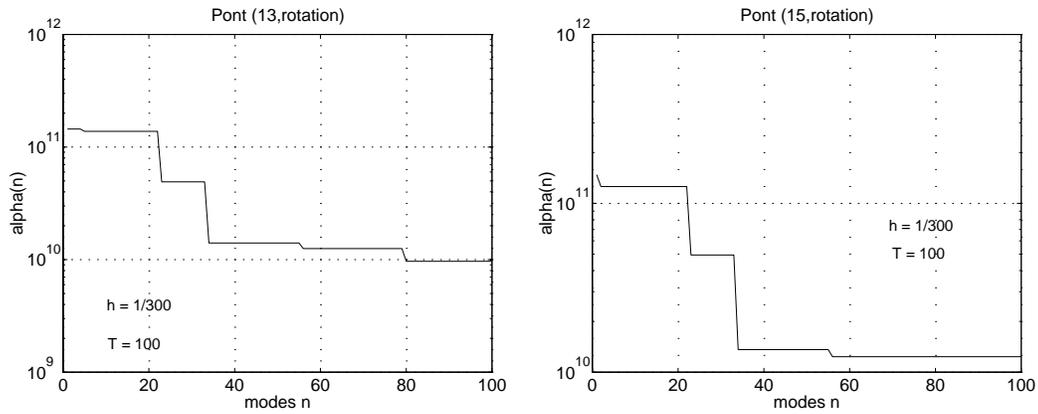


FIG. 6.45 - Actionneurs en rotation en A et C (à gauche); en A et E (à droite): $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

On émet donc l'hypothèse que le treillis est contrôlable exactement par des actionneurs en A et en C (resp. en A et en E).

On considère maintenant des actionneurs en rotation s'exerçant simultanément en A, C et E (resp. à toutes les extrémités du treillis).

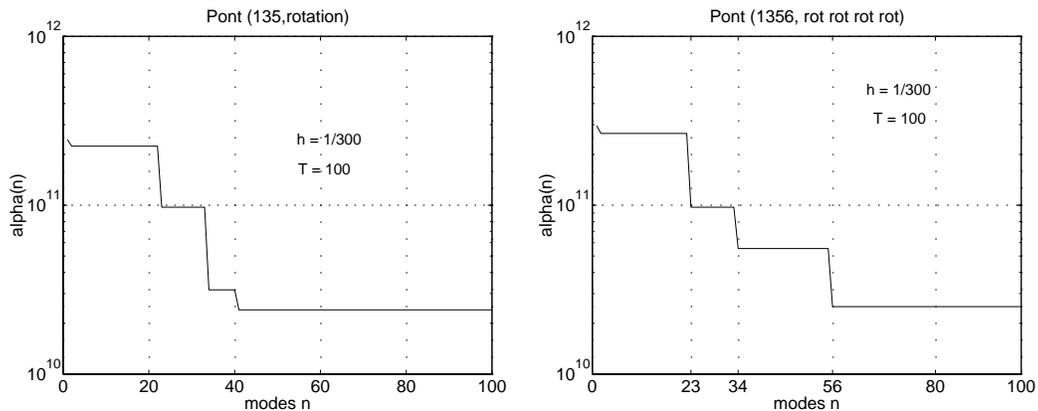


FIG. 6.46 - Actionneurs en rotation en A, C et E (à gauche); à toutes les extrémités (à droite): $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

On observe à la figure 6.46 que le test donne, comme on peut s'y attendre, de meilleurs résultats qu'avec un système composé de seulement 2 actionneurs, mais le gain obtenu par l'ajout d'un (ou deux) actionneur(s) supplémentaire(s) n'est pas notable (voir figure 6.46 de droite). En effet, α_1 est toujours de l'ordre de 10^{11} et le rapport entre α_1 et α_{100} de l'ordre de 10.

En conclusion de l'asservissement du treillis par des systèmes d'actionneurs en

rotation, on peut conjecturer que :

le système d'actionneurs en rotation le plus efficace est celui composé d'un actionneur en A et en E.

Actionneurs en compression

On considère dans ce paragraphe des systèmes d'actionneurs ne s'exerçant qu'en compression.

Tout d'abord, on applique un seul actionneur en compression sur le treillis, respectivement en A et en C et on calcule donc la suite α_n pour $n = 1$ jusqu'à 100 (figure 6.47).

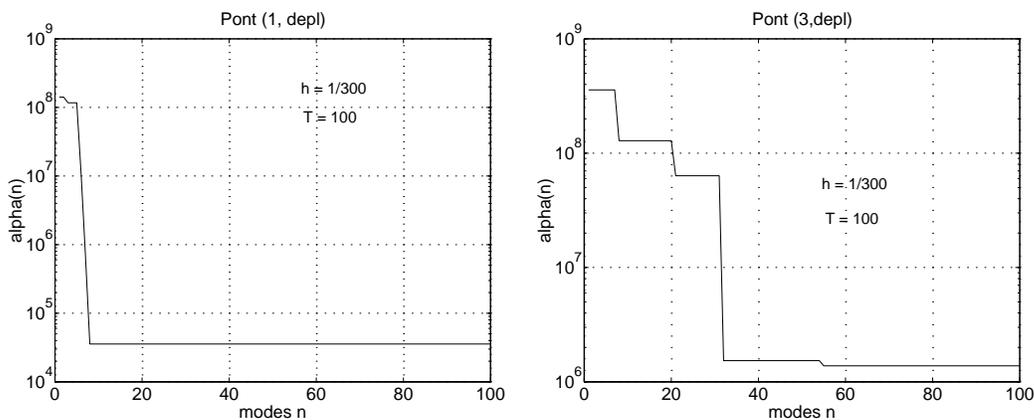


FIG. 6.47 - *Actionneurs en compression en A (à gauche) et en C (à droite) : $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.*

On observe dans les deux cas, une décroissance globale de la suite de l'ordre de 10^3 . On remarque que pour l'actionneur en A, la suite décroît pour $n = 6, 7$ et 8 . Cela peut s'expliquer par le fait que les modes 6, 7 et 8 travaillent essentiellement en flexion sur la poutre (1) et donc sont difficilement observable par un actionneur localisé à l'extrémité A de la poutre (1).

On émet la conjecture suivante :

le treillis n'est pas contrôlable exactement avec un seul actionneur en compression.

Considérons maintenant un treillis soumis à deux actionneurs en compression, en A et en C (resp. en A et en E). Naturellement, l'action de 2 actionneurs permet de mieux contrôler le treillis qu'avec un seul et c'est bien ce que l'on observe à la figure 6.48.

En effet, la suite α_n décroît seulement d'un facteur 10 entre $n = 1$ et $n = 100$, au

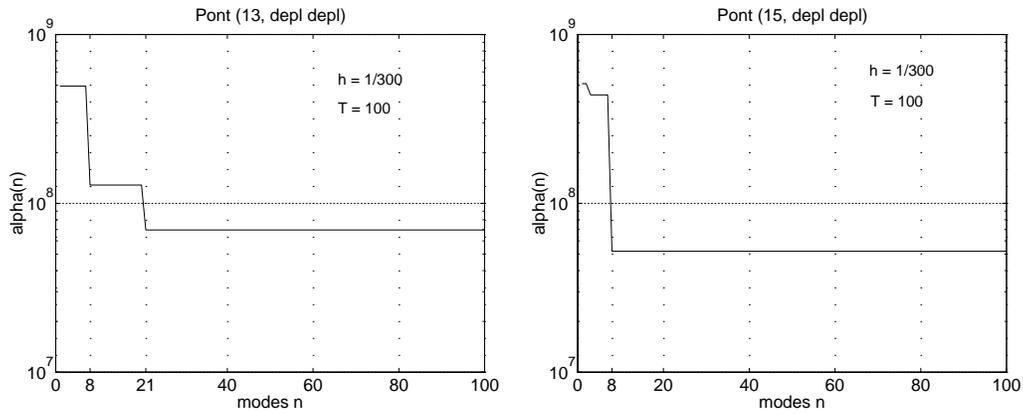


FIG. 6.48 - Actionneurs en compression en A et C (à gauche); en A et E (à droite): $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

lieu d'un facteur 10^3 pour un seul actionneur, le gain est donc notable. On peut donc conclure par la conjecture suivante :

le treillis est contrôlable exactement avec deux actionneurs en compression en A et en C (resp. en A et en E).

Enfin, pour conclure avec les tests avec des actionneurs en compression, on asservit le treillis avec des actionneurs en A , C et E (figure 6.49 de gauche), puis à toutes les extrémités (figure 6.49 de droite).

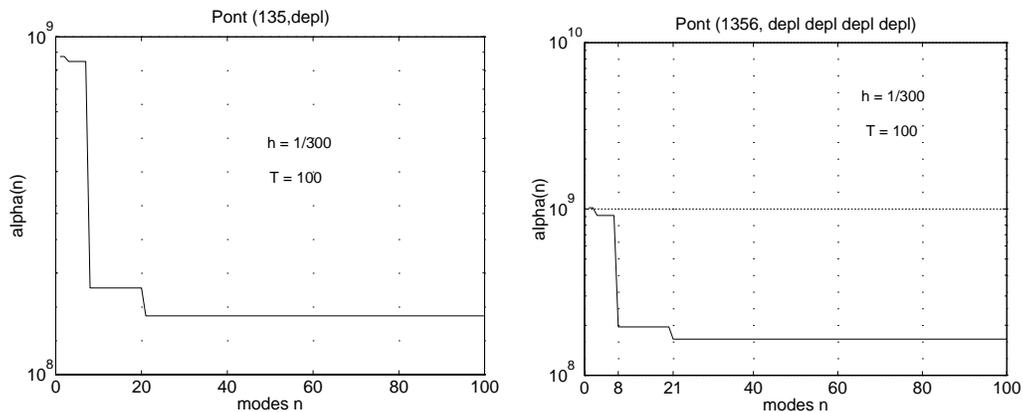


FIG. 6.49 - Actionneurs en compression en A , C et E (à gauche); à toutes les extrémités (à droite): $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.

Comme pour les actionneurs en rotation, on observe que l'ajout d'un (ou deux) actionneur(s) supplémentaire(s) ne permet pas un gain notable, par rapport au système composé de deux actionneurs, puisque la décroissance globale est du même ordre (environ 10).

Actionneurs en rotation et en compression

Étant donné que, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous n'avons pas l'intention d'être exhaustif, on considère uniquement le système d'actionneurs en flexion et en compression dont le test numérique donne le résultat le plus intéressant. Soit un treillis asservit en rotation et en compression par un

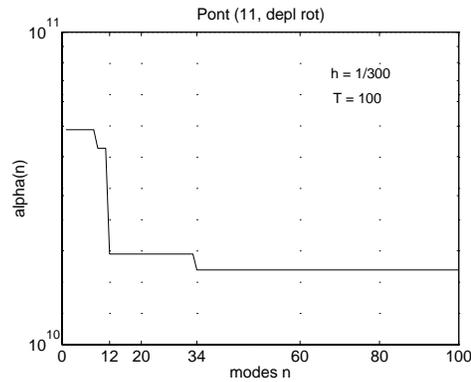


FIG. 6.50 - *Actionneurs en flexion et en compression en A : $(\alpha_n)_{n=1}^{100}$.*

actionneur en A, dont on représente la suite α_n pour n variant de 1 à 100 à la figure 6.50.

On observe que la conjugaison des deux types d'actionneurs donne un résultat très nettement meilleur que pour un seul de ces deux actionneurs agissant à la même extrémité (voir les figures 6.38 et 6.47 de gauche).

6.6 Conclusion

6.6.1 Accord du test numérique avec la théorie

Nous avons appliqué le test numérique à des treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli de géométries et de propriétés mécaniques variées.

Les conclusions que le test nous permet d'émettre quant à la contrôlabilité exacte de ces multistuctures sont *en accord*, avec le résultat théorique de G. Leugering et E.J.P.G Schmidt [79] pour les treillis d'Euler-Navier-Bernoulli que nous rappelons maintenant :

“ un treillis étoilé est contrôlable exactement avec des actionneurs à tous les noeuds extérieurs du treillis. ” (CS1)

Les mêmes auteurs [78] avec J.E. Lagnese ont obtenu une condition suffisante pour la contrôlabilité exacte moins restrictive pour les treillis composés de poutres de Timoshenko :

“ si un treillis ne contient pas de boucles fermées et si au plus un des noeuds extérieurs est encastré, il est contrôlable exactement avec des actionneurs placés à tous les noeuds extérieurs libres du treillis. ” (CS2)

On voit que la condition (CS1) pour les treillis d'Euler-Navier-Bernoulli est non seulement moins générale que la condition (CS2) pour les treillis de Timoshenko puisqu'elle ne s'applique qu'aux treillis étoilés, mais également plus restrictive en ce qui concerne le nombre suffisant d'actionneurs pour vérifier la contrôlabilité exacte.

Comme G. Leugering l'a remarqué dans [78], c'est assez surprenant :

“ While we have been able in [67] to show exact controllability of Timoshenko-tree-like networks, we have not succeeded so far in passing to Euler-Bernoulli or Rayleigh-beam networks. As a result the controllability-theory and hence also the theory of uniform stabilization of such networks is widely open. ”

C'est un intérêt supplémentaire du test numérique de suggérer que l'on devrait obtenir des conditions suffisantes de contrôlabilité exacte identiques pour les treillis d'Euler-Navier-Bernoulli et de Timoshenko.

C'est ce que nous allons maintenant montrer en regroupant les treillis étudiés selon qu'ils sont contrôlables exactement ou qu'il n'existe pas de résultats théoriques applicables, du moins pour les treillis d'Euler-Navier-Bernoulli.

Cas 1 : Treillis contrôlables exactement

Le test appliqué au treillis représenté à la figure 6.51 de gauche permet de conclure (voir paragraphe 6.3) qu'il est contrôlable exactement avec un seul actionneur, placé à l'une ou l'autre de ses extrémités.

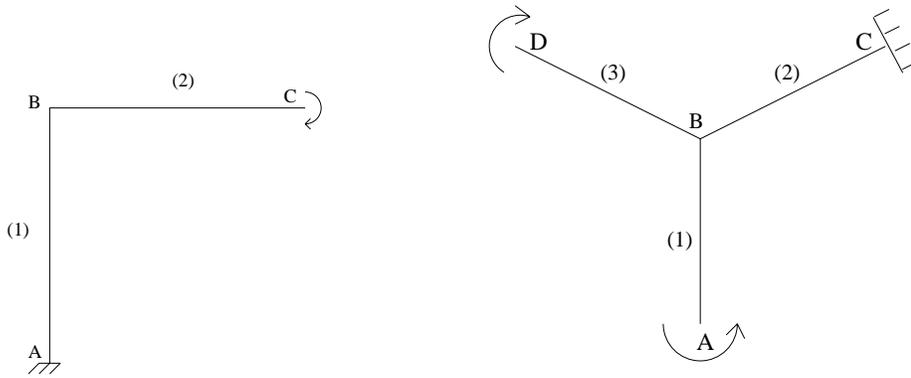


FIG. 6.51 - Deux exemples de treillis contrôlables exactement.

Ce résultat n'est pas en contradiction avec la condition suffisante (CS1) (pour les treillis d'Euler-Navier-Bernoulli) et correspond exactement avec la condition suffisante (CS2) (pour les treillis de Timoshenko).

Autrement dit, cela étaye bien l'hypothèse selon laquelle on devrait avoir les mêmes conditions sur les actionneurs pour les treillis d'Euler-Navier-Bernoulli que pour les treillis de Timoshenko.

Les résultats numériques obtenus au paragraphe 6.4 pour le second treillis, représenté à la figure 6.51 de droite, permettent de faire les mêmes observations que pour le premier treillis. En particulier, le test permet bien de vérifier qu'il faut au moins deux actionneurs pour contrôler exactement ce treillis.

Cas 2 : Treillis objet de conjectures

Le dernier exemple de treillis que nous avons étudié est très instructif car il n'existe pas à notre connaissance de résultats théoriques permettant de savoir sous quelles conditions il est contrôlable exactement.

En effet, comme on peut le voir à la figure 6.52, ce treillis n'est pas étoilé ce qui implique que l'on ne peut appliquer la condition (CS1). Par contre, si le treillis était composé de poutres de Timoshenko, la condition (CS2) serait naturellement applicable.

Les conclusions obtenues au paragraphe 6.5 par l'application du test peuvent être résumées de la façon suivante :

le treillis est contrôlable exactement si on lui applique au moins un actionneur à deux de ses extrémités, par exemple les extrémités A et C.

On obtient ainsi une information importante puisque selon la condition (CS2) il faut un actionneur de plus pour contrôler exactement le même treillis composé de poutres de Timoshenko au lieu de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli.



FIG. 6.52 - Exemple d'un treillis objet de conjectures.

6.6.2 Propriétés utiles pour conclure à la contrôlabilité exacte à l'aide du test

Nous avons pu dégager, à l'aide du test numérique, des *propriétés caractéristiques* selon que le treillis est contrôlable exactement ou ne l'est pas.

Existence de modes invisibles

On distingue nettement les treillis qui vérifient l'inégalité d'observabilité forte de ceux qui ne la vérifient pas à l'aide de la propriété 5.6 que nous avons conjecturée au paragraphe 5.6. En effet, dans le cas d'un treillis *contrôlable exactement*, la propriété 5.6 n'est jamais vérifiée et la suite α_n décroît vers une constante strictement positive en $O(n^{-\alpha})$ (dans nos exemples $\alpha \geq 4$).

Si le treillis est *non contrôlable exactement*, il existe au moins un mode pour lequel la propriété 5.6 est vérifiée, que l'on identifie comme étant un *mode invisible* pour le système d'actionneurs qui asservit le treillis. Pour ce mode, la suite α_n décroît de plusieurs ordres de grandeurs par rapport à la valeur précédemment obtenue.

Remarquons de plus que les modes invisibles, identifiés grâce à cette propriété, se distinguent aisément des autres modes de la structure encastree par leurs propriétés mécaniques vis-à-vis du système d'actionneurs qui s'exerce sur la multistrukture.

Identification de l'espace des données initiales

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe 5.5.3 du chapitre 5, on peut pour les treillis contrôlables exactement *identifier l'espace X'* des données initiales du problème adjoint pour lequel l'inégalité d'observabilité est vérifiée et, pour les treillis non-contrôlables exactement, montrer qu'il n'existe pas d'espace X' *ad hoc*.

On peut également distinguer nettement les cas contrôlables des cas non-contrôla-

bles en calculant la suite α_n^h pour différents pas de maillage; on a :

- si l’observabilité forte est vérifiée, plus le pas de maillage h est fin et plus α_n^h augmente
- si l’observabilité forte n’est pas vérifiée, plus h est fin et plus α_n^h diminue

Enfin à l’aide des tests numériques effectués dans ce chapitre on a pu vérifier que :

- si l’observabilité forte est vérifiée, pour tout $h > 0$ assez petit, la suite α_n^h converge en $O(n^{-\alpha})$ avec $\alpha \geq 4$.
- si l’observabilité forte n’est pas vérifiée, pour tout $h > 0$, la suite α_n^h converge vers 0 de façon exponentielle (voir Lebeau [74] et Bourquin [14]).

Remarque 6.9 On démontre à l’Annexe K que α_n^h converge en $O(n^{-\alpha})$ avec $\alpha = 4$ dans le cas de la poutre seule.

Étude comparative de différents systèmes d’actionneurs

On peut de plus, grâce au test, mesurer l’*efficacité relative de différents systèmes d’actionneurs* et *identifier le temps minimal d’observation* nécessaire à la contrôlabilité exacte qui existe dans nos treillis du fait du couplage de la flexion et de la compression.

On regroupe les propriétés que nous venons d’énumérer, permettant de distinguer les treillis contrôlables exactement de ceux qui ne le sont pas, dans le tableau suivant :

Treillis	modes invisibles	taux de convergence	$h \searrow$	X'
CE	aucun	$O(n^{-\alpha})$ ($\alpha \geq 4$)	$\alpha_n^h \nearrow$	identifiable
non CE	au moins un	exponentiel	$\alpha_n^h \searrow$	non identifiable

Annexe A

Inégalités inverses et directes ($p = 0$)

A.1 Rappels

Soit φ la solution pour des données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ suffisamment régulières de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \varphi''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \varphi'(x, 0) = \varphi^1(x) & \forall x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (\text{A.1.1})$$

Pour tout $t \in (0, T)$, on note :

$$(\varphi, \psi) = \int_0^L \varphi(x, t) \psi(x, t) dx, \quad (\text{A.1.2})$$

$$|\varphi|^2 = \int_0^L \varphi(x, t)^2 dx. \quad (\text{A.1.3})$$

On rappelle que l'énergie mécanique, que nous notons $E_{mec}(t)$, associée au système (A.1.1) définie par :

$$E_{mec}(t) = \frac{1}{2} \left(\rho A |\varphi'|^2 + EI \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|^2 \right), \quad \forall t \in (0, T) \quad (\text{A.1.4})$$

est conservative :

$$\forall t \in (0, T), \quad E_{mec}(t) = E_{mec}(0) = E_1 = \frac{1}{2} \left(\rho A |\varphi^1|^2 + EI \left| \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x^2} \right|^2 \right). \quad (\text{A.1.5})$$

Enfin, on définit λ_0^2 comme la plus petite valeur propre de

$$\begin{cases} \frac{d^4 w}{dx^4} = -\lambda^2 \frac{d^2 w}{dx^2}, & \text{dans } (0, L), \\ w(0) = w(L) = \frac{dw}{dx}(0) = \frac{dw}{dx}(L) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

qui vérifie en particulier :

$$\lambda_0^2 = \min_{w \in H_0^2(0, L) \setminus \{0\}} \left(\left| \frac{d^2 w}{dx^2} \right|^2 / \left| \frac{dw}{dx} \right|^2 \right), \quad (\text{A.1.7})$$

et donc

$$\left| \frac{dw}{dx} \right| \leq \frac{1}{\lambda_0} \left| \frac{d^2 w}{dx^2} \right|, \quad \forall w \in H_0^2(0, L). \quad (\text{A.1.8})$$

A.2 Inégalité inverse

Pour démontrer le *théorème d'unicité*, il suffit de montrer l'inégalité inverse, soit :

Propriété A.1 (*inégalité inverse*) $\exists T_0 > 0$ tel que $\forall T \geq T_0, \exists C_1(T, L) > 0$:

$$C_1(T, L) E_1 \leq \int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right)^2 d\tilde{t} \quad (\text{A.2.9})$$

où $d\tilde{t} = \frac{dt}{\rho A}$.

En fait, on va montrer l'inégalité plus précise suivante :

Corollaire A.1 Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $T > T(x_0) = \frac{R(x_0)}{3\lambda_0} \sup \left(1, \frac{\rho A}{EI} \right)$,

$$\frac{EI}{\rho A} (T - T(x_0)) E_1 \leq \frac{R(x_0)}{6} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 d\tilde{t}, \quad (\text{A.2.10})$$

avec

$$\begin{cases} R(x_0) = 2 \| x - x_0 \|_{L^\infty(0, L)} \\ \Gamma(x_0) = \{x \in \{0\} \cup \{L\}\}, (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

où $\nu(x)$ est la normale unitaire extérieure à $(0, L)$.

L'inégalité inverse se déduit alors de celle-ci, en effet

$$\begin{cases} \Gamma(x_0) = \{0\} \cup \{L\} & \text{si } x_0 \in (0, L) \\ = \{0\} & \text{si } x_0 \geq L \\ = \{L\} & \text{si } x_0 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.12})$$

Par conséquent, si l'on choisit $x_0 \leq 0$, alors $\Gamma(x_0) = \{L\}$, et on a donc l'inégalité inverse.

Remarque A.1 Comme il a été rappelé au paragraphe 1.2, l'inégalité inverse peut être obtenue pour un temps T aussi petit que l'on veut (voir entre autre E. Zuazua [108]).

Remarque A.2 La démonstration n'a rien d'originale, elle reprend point par point la démonstration de J.-L. Lions ([83], p.244) pour un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^3(0, 1)$, mais cette fois-ci avec les constantes mécaniques et comme ouvert $(0, L)$.

Remarque A.3 Si l'on adimensionnalise le problème, on retrouve la même inégalité que J.-L. Lions ([83] *Théorème 3.3*, p.256).

DÉMONSTRATION :

1) Une première étape consiste à démontrer le lemme suivant :

Lemme A.1 Soit φ solution pour des données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ suffisamment régulières de (A.1.1) et $q = q(x)$ suffisamment régulière sur $(0, L)$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2} \int_0^T \left[q \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{x=0}^L dt &= \rho A \left(\varphi', q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{t=0}^T \\ &+ \frac{EI}{2} \int_0^L \int_0^T \frac{d^2 q}{dx^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt \quad (\text{A.2.13}) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \frac{dq}{dx} \left(\rho A \varphi'^2 + 3EI \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION (lemme A.1) :

Tout d'abord, pour φ solution de (A.1.1) avec des données initiales suffisamment régulières, on a les relations intégrales suivantes :

$$\rho A \int_0^L \int_0^T \varphi'' q \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = -\rho A \int_0^L \int_0^T \varphi' q \frac{\partial \varphi'}{\partial x} dx dt + \rho A \left(\varphi', q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{t=0}^T$$

$$= \frac{\rho A}{2} \int_0^L \int_0^T \frac{dq}{dx} \varphi'^2 dx dt + \rho A \left(\varphi', q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{t=0}^T \quad (\text{A.2.14})$$

et

$$\begin{aligned} EI \int_0^L \int_0^T \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} q \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt &= -EI \int_0^L \int_0^T \left(\frac{dq}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) dx dt \\ &= \frac{EI}{2} \left(\int_0^L \int_0^T \frac{dq}{dx} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dx dt - \int_0^T \left[q \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{x=0}^L dt \right) \\ &\quad + EI \int_0^L \int_0^T \left(\frac{d^2 q}{dx^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \int_0^L \int_0^T \frac{dq}{dx} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx dt \\ &= -\frac{EI}{2} \int_0^T \left[q \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{x=0}^L dt + \frac{3}{2} EI \int_0^L \int_0^T \frac{dq}{dx} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \\ &\quad + \frac{EI}{2} \int_0^L \int_0^T \frac{d^2 q}{dx^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

En sommant les deux égalités membres à membres et en tenant compte de l'équation (A.1.1) dont φ est solution, on obtient l'inégalité du lemme. \square

2) On applique l'égalité du lemme A.1 avec $q(x) = m(x) = x - x_0$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2} \int_0^T \left[m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{x=0}^L dt &= \rho A \left(\varphi', m \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{t=0}^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \left(\rho A \varphi'^2 + 3EI \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

Or la dernière intégrale est majorée par $3TE_1$. De plus, en utilisant l'inégalité :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad uv \leq \frac{1}{2} \sup \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right) (\alpha u^2 + \beta v^2), \quad (\text{A.2.17})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\varphi', m \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &\leq R(x_0) |\varphi'| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \\ &\leq \frac{R(x_0)}{\lambda_0} |\varphi'| \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right| \\ &\leq \frac{R(x_0)}{\lambda_0} \sup \left(\frac{1}{\rho A}, \frac{1}{EI} \right) E_1 \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

et donc

$$\rho A \left| \left(\varphi', m \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right|_{t=0}^T \leq \frac{R(x_0)}{\lambda_0} \sup \left(1, \frac{\rho A}{EI} \right) E_1. \quad (\text{A.2.19})$$

Sachant que par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{EI}{2} \int_0^T \left[m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{x=0}^L dt &\leq \frac{EI}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{R(x_0)}{2} EI \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

en appliquant cette inégalité avec l'inégalité (A.2.19) à l'égalité (A.2.16), on obtient en les multipliant par $\frac{EI}{\rho A}$:

$$\frac{EI}{\rho A} \left(T - \frac{R(x_0)}{3\lambda_0} \sup \left(1, \frac{\rho A}{EI} \right) \right) E_1 \leq \frac{R(x_0)}{6} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 d\tilde{t}.$$

□

A.3 Inégalité directe

Propriété A.2 *inégalité directe* $\exists C_2(T, L) > 0$ telle que :

$$\int_0^T \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L) \right)^2 d\tilde{t} \leq C_2(T, L) E_1 \quad (\text{A.3.21})$$

où $d\tilde{t} = \frac{dt}{\rho A}$.

DÉMONSTRATION : L'*inégalité directe* s'obtient directement à partir du lemme A.2.13 en appliquant les mêmes techniques de majorations que dans l'*inégalité inverse*. □

Annexe B

Calcul des cosinus et sinus régularisés ($p = 1$ et $p = 2$) :

Étant donné que les contrôles s'écrivent comme combinaison linéaire de cosinus et sinus, il suffit de calculer les expressions régulières de ces termes trigonométriques.

On rappelle que pour tout entier $p \geq 1$, B_p est tel que pour tout $f \in H^{-p}(0, T)$,

$$w = B_p(f) \iff \begin{cases} (-1)^p \frac{d^{2p}w}{dt^{2p}} = f & \text{dans } [0, T], \\ w^{(r)}(0) = w^{(r)}(T) = 0, & \forall r \in [0, \dots, p-1]. \end{cases}$$

Pour tout $\alpha > 0$, on obtient aisément :

$$B_p(\cos(\alpha t)) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \left(\cos(\alpha t) - 1 + \frac{t}{T} (1 - \cos(\alpha T)) \right) & (p = 1) \\ \frac{1}{\alpha^4} \left(\cos(\alpha t) - 1 + a_1 \left(\frac{t}{T} \right)^2 + b_1 \left(\frac{t}{T} \right)^3 \right) & (p = 2) \end{cases} \quad (\text{B.0.1})$$

et

$$B_p(\sin(\alpha t)) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \left(\sin(\alpha t) - \frac{t}{T} \sin(\alpha T) \right) & (p = 1) \\ \frac{1}{\alpha^4} \left(\sin(\alpha t) - \alpha t + a_2 \left(\frac{t}{T} \right)^2 + b_2 \left(\frac{t}{T} \right)^3 \right) & (p = 2) \end{cases} \quad (\text{B.0.2})$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = 3(1 - \cos(\alpha T)) - \alpha T \sin(\alpha T) \\ b_1 = \alpha T \sin(\alpha T) - 2(1 - \cos(\alpha T)) \\ a_2 = 3(\alpha T - \sin(\alpha T)) - \alpha T(1 - \cos(\alpha T)) \\ b_2 = \alpha T(1 - \cos(\alpha T)) - 2(\alpha T - \sin(\alpha T)) \end{cases} \quad (\text{B.0.3})$$

Annexe C

Expressions matricielles de l'opérateur Λ_p

C.1 Notations

Tout d'abord, on précise que tous les indices considérés sont, sauf mention contraire, des entiers naturels compris entre 1 et N .

Afin d'alléger les expressions matricielles, on adopte dans la suite de cette annexe les notations simplificatrices suivantes :

$$l_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad m_i = m t f_i \quad (\text{C.1.1})$$

et

$$a_{ij} = l_i + l_j, \quad b_{ij} = l_i - l_j. \quad (\text{C.1.2})$$

De plus, pour les matrices de régularité $p = 2$, nous utiliserons également :

$$u_i = l_i T \sin(l_i T), \quad v_i = 1 - \cos(l_i T), \quad (\text{C.1.3})$$

$$w_i = l_i T (1 - \cos(l_i T)), \quad x_i = l_i T - \sin(l_i T). \quad (\text{C.1.4})$$

Enfin, toujours avec le soucis d'alléger les calculs, on peut effectuer la factorisation de la matrice K suivante :

$$K = M \tilde{K} M \quad (\text{C.1.5})$$

avec

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}^{DD} & \tilde{K}^{DV} \\ \tilde{K}^{VD} & \tilde{K}^{VV} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.6})$$

composée, pour tout $p \in \mathbb{N}$, des sous-matrices suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{K}_{ij}^{DD} &= \int_0^T B_p(\cos(tl_i)) \cos(tl_j) d\tilde{t} \\ \tilde{K}_{ij}^{DV} &= \int_0^T B_p(\cos(tl_i)) \sin(tl_j) d\tilde{t} \\ \tilde{K}_{ij}^{VV} &= \int_0^T B_p(\sin(tl_i)) \sin(tl_j) d\tilde{t} \end{cases} \quad (\text{C.1.7})$$

et M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} M^{11} & 0 \\ 0 & M^{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1.8})$$

avec $M_{ij}^{11} = l_i \delta_{ij}$ et $M_{ij}^{12} = \frac{m_i}{l_i} \delta_{ij}$.

Dans la suite de cette annexe, on notera de façon abusive K au lieu de \tilde{K} .

C.2 Contrôle usuel ($p = 0$)

C.2.1 K^{DD}

Par définition :

$$K_{ij}^{DD} = \int_0^T \cos(tl_i) \cos(tl_j) d\tilde{t}, \quad (\text{C.2.9})$$

ce qui donne en appliquant les formules trigonométriques standards de transformation de produit en somme :

$$K_{ij}^{DD} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} + \frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2l_i T)}{2l_i} + T \right) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.2.10})$$

C.2.2 K^{DV}

Par définition

$$K_{ij}^{DV} = \int_0^T \cos(tl_i) \sin(tl_j) d\tilde{t}. \quad (\text{C.2.11})$$

On procède alors comme pour la sous-matrice précédente, ce qui donne aisément :

$$K_{ij}^{DV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(a_{ij}T)}{a_{ij}} - \frac{1 - \cos(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(2l_i T)}{2l_i} \right) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.2.12})$$

C.2.3 K^{VV}

Par définition

$$K_{ij}^{VV} = \int_0^T \sin(tl_i) \sin(tl_j) d\tilde{t} \quad (\text{C.2.13})$$

et donc :

$$K_{ij}^{VV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} - \frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} \right) & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(T - \frac{\sin(2l_i T)}{2l_i} \right) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.2.14})$$

C.3 Contrôle régulier ($p = 1$)

C.3.1 K^{DD}

Par définition du cosinus régularisé (voir Annexe B), on a :

$$K_{ij}^{DD} = \int_0^T \frac{1}{l_i^2} \left(\cos(tl_i) - 1 + \frac{t}{T} (1 - \cos(l_i T)) \right) \cos(tl_j) d\tilde{t}, \quad (\text{C.3.15})$$

et donc en intégrant les différents termes tout en utilisant la formule (C.2.10), il vient :

$$K_{ij}^{DD} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} + \frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^2} - \frac{1}{T} \left(\frac{1 - \cos(l_i T)}{l_i^2} \right) \left(\frac{1 - \cos(l_j T)}{l_j^2} \right) - \frac{\cos(l_i T) \sin(l_j T)}{l_i^2 l_j} \quad (\text{C.3.16})$$

ce qui donne après les dernières simplifications d'usage :

$$K_{ij}^{DD} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} - \frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} \right) \frac{1}{l_i l_j} \\ - \frac{1}{T} \left(\frac{1 - \cos(l_i T)}{l_i^2} \right) \left(\frac{1 - \cos(l_j T)}{l_j^2} \right) & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(T - \frac{\sin(2l_i T)}{2l_i} \right) - \frac{1}{T} \left(\frac{1 - \cos(l_i T)}{l_i^2} \right)^2 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.3.17})$$

C.3.2 K^{DV}

Par définition, on a :

$$K_{ij}^{DV} = \int_0^T \frac{1}{l_i^2} \left(\cos(tl_i) - 1 + \frac{t}{T} (1 - \cos(l_i T)) \right) \sin(tl_j) d\tilde{t}, \quad (\text{C.3.18})$$

d'où en développant les différents termes de l'intégrale :

$$K_{ij}^{DV} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(a_{ij}T)}{a_{ij}} - \frac{1 - \cos(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{1 - \cos(l_i T)}{l_i^2} \right) \frac{\sin(l_j T)}{l_j^2} \\ + \frac{\cos(l_i T) \cos(l_j T)}{l_i^2 l_j} - \frac{1}{l_i^2 l_j}, \quad (\text{C.3.19})$$

soit

$$K_{ij}^{DV} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(a_{ij}T)}{a_{ij}} + \frac{1 - \cos(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i l_j} \\ + \frac{1}{T} \left(\frac{1 - \cos(l_i T)}{l_i^2} \right) \frac{\sin(l_j T)}{l_j^2} & \text{si } i \neq j \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(2l_i T)}{2l_i} \right) \frac{1}{l_i^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{1 - \cos(l_i T)}{l_i^2} \right) \frac{\sin(l_i T)}{l_i^2} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.3.20})$$

C.3.3 K^{VV}

En appliquant la définition du sinus régularisé, il vient :

$$K_{ij}^{VV} = \int_0^T \frac{1}{l_i^2} \left(\sin(tl_i) - \frac{t}{T} \sin(l_i T) \right) \sin(tl_j) d\tilde{t}. \quad (\text{C.3.21})$$

On développe :

$$K_{ij}^{VV} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} - \frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^2}$$

$$- \frac{1}{T} \frac{\sin(l_i T) \sin(l_j T)}{l_i^2 l_j^2} + \frac{\sin(l_i T) \cos(l_j T)}{l_i^2 l_j} \quad (\text{C.3.22})$$

et en regroupant les termes, on obtient en définitive :

$$K_{ij}^{VV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a_{ij} T)}{a_{ij}} + \frac{\sin(b_{ij} T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i l_j} - \frac{1}{T} \frac{\sin(l_i T) \sin(l_j T)}{l_i^2 l_j^2} & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2l_i T)}{2l_i T} + T \right) \frac{1}{l_i^2} - \frac{1}{T} \left(\frac{\sin(l_i T)}{l_i^2} \right)^2 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.3.23})$$

C.4 Contrôle régulier ($p = 2$)

C.4.1 K^{DD}

En appliquant l'expression du cosinus régularisé, il vient :

$$K_{ij}^{DD} = \int_0^T (\cos(tl_i) - 1 + \left(\frac{t}{T}\right)^2 (3v_i - u_i) + \left(\frac{t}{T}\right)^3 (u_i - 2v_i)) \frac{\cos(tl_j)}{l_i^4} d\tilde{t}. \quad (\text{C.4.24})$$

En intégrant quatre fois par parties, on obtient :

$$K_{ij}^{DD} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a_{ij} T)}{a_{ij}} + \frac{\sin(b_{ij} T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^4} + \frac{6}{T^3} \frac{(u_i - 2v_i) v_j}{l_i^4 l_j^4} - \frac{2}{T^2} \frac{(2u_i - 3v_i) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j^3} + \frac{\sin(l_i T) \cos(l_j T)}{l_i^3 l_j^2} - \frac{\cos(l_i T) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j}. \quad (\text{C.4.25})$$

On peut effectuer une simplification de l'expression obtenue ci-dessus, ce qui donne :

$$K_{ij}^{DD} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a_{ij} T)}{a_{ij}} + \frac{\sin(b_{ij} T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^2 l_j^2} + \frac{6}{T^3} \frac{(u_i - 2v_i) v_j}{l_i^4 l_j^4} - \frac{2}{T^2} \frac{(2u_i - 3v_i) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j^3}. & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2l_i T)}{2l_i} + T \right) \frac{1}{l_i^4} + \frac{6}{T^3} \frac{(u_i - 2v_i) v_i}{l_i^4 l_i^4} - \frac{2}{T^2} \frac{(2u_i - 3v_i) \sin(l_i T)}{l_i^4 l_i^3}. & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{C.4.26})$$

C.4.2 K^{DV}

Par définition :

$$K_{ij}^{DV} = \int_0^T \left(\cos(tl_i) - 1 + \left(\frac{t}{T}\right)^2 (3v_i - u_i) + \left(\frac{t}{T}\right)^3 (u_i - 2v_i) \right) \frac{\sin(tl_j)}{l_i^4} dt \quad (\text{C.4.27})$$

et donc en développant :

$$\begin{aligned} K_{ij}^{DV} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(a_{ij}T)}{a_{ij}} - \frac{1 - \cos(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^4} - \frac{6}{T^3} \frac{(u_i - 2v_i) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j^4} \\ &+ \frac{2}{T^2} ((2u_i - 3v_i) \cos(l_j T) - (3v_i - u_i)) \frac{1}{l_i^4 l_j^3} \\ &+ \frac{\sin(l_i T) \sin(l_j T)}{l_i^3 l_j^2} + \frac{\cos(l_i T) \cos(l_j T)}{l_i^4 l_j} - \frac{1}{l_i^4 l_j}, \end{aligned} \quad (\text{C.4.28})$$

On effectue les simplifications habituelles, d'où :

$$K_{ij}^{DV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(a_{ij}T)}{a_{ij}} - \frac{1 - \cos(b_{ij}T)}{b_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^2 l_j^2} - \frac{6}{T^3} \frac{(u_i - 2v_i) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j^4} \\ + \frac{2}{T^2} ((2u_i - 3v_i) \cos(l_j T) - (3v_i - u_i)) \frac{1}{l_i^4 l_j^3}, & (i \neq j) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(2l_i T)}{2l_i} \right) \frac{1}{l_i^4} - \frac{6}{T^3} \frac{(u_i - 2v_i) \sin(l_i T)}{l_i^8} \\ + \frac{2}{T^2} ((2u_i - 3v_i) \cos(l_i T) - (3v_i - u_i)) \frac{1}{l_i^7}, & (i = j) \end{cases} \quad (\text{C.4.29})$$

C.4.3 K^{VV}

Par définition, on a :

$$K_{ij}^{VV} = \int_0^T \left(\sin(tl_i) - tl_i + \left(\frac{t}{T}\right)^2 (3x_i - w_i) + \left(\frac{t}{T}\right)^3 (w_i - 2x_i) \right) \frac{\sin(tl_j)}{l_i^4} dt \quad (\text{C.4.30})$$

On développe l'intégrale :

$$\begin{aligned} K_{ij}^{VV} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} - \frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^4} - \frac{6}{T^3} \frac{(w_i - 2x_i) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j^4} \\ &+ \frac{2}{T^2} ((2w_i - 3x_i) \cos(l_j T) - (3x_i - w_i)) \frac{1}{l_i^4 l_j^3} \\ &- \frac{\cos(l_i T) \sin(l_j T)}{l_i^3 l_j^2} + \frac{\sin(l_i T) \cos(l_j T)}{l_i^4 l_j}, \end{aligned} \quad (\text{C.4.31})$$

d'où en regroupant de façon standard :

$$K_{ij}^{VV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(b_{ij}T)}{b_{ij}} - \frac{\sin(a_{ij}T)}{a_{ij}} \right) \frac{1}{l_i^2} \frac{1}{l_j^2} - \frac{6}{T^3} \frac{(w_i - 2x_i) \sin(l_j T)}{l_i^4 l_j^4} \\ + \frac{2}{T^2} ((2w_i - 3x_i) \cos(l_j T) - (3x_i - w_i)) \frac{1}{l_i^4 l_j^3}. \quad (i \neq j) \\ \\ \frac{1}{2} \left(T - \frac{\sin(2l_i T)}{2l_i} \right) \frac{1}{l_i^4} - \frac{6}{T^3} \frac{(w_i - 2x_i) \sin(l_i T)}{l_i^4 l_i^4} \\ + \frac{2}{T^2} ((2w_i - 3x_i) \cos(l_i T) - (3x_i - w_i)) \frac{1}{l_i^7}. \quad (i = j) \end{cases} \quad (\text{C.4.32})$$

Annexe D

Coefficients du terme de Duhamel

Par définition, on a :

$$\begin{cases} C_{ij}(t) = \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_i}(t-s)) B_p(\cos(s\sqrt{\lambda_j})) ds \\ S_{ij}(t) = \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_i}(t-s)) B_p(\sin(s\sqrt{\lambda_j})) ds \end{cases} \quad (\text{D.0.1})$$

D.1 $p = 0$

D.1.1 $C_{ij}(t)$

$C_{ij}(t)$ est telle que :

$$C_{ij}(t) = \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_i}(t-s)) \cos(\sqrt{\lambda_j}s) ds \quad (\text{D.1.2})$$

Si $i = j$:

$$\begin{aligned} C_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(\sin(\sqrt{\lambda_i}t) + \sin(\sqrt{\lambda_i}(t-2s)) \right) ds \\ &= \frac{t}{2} \sin(\sqrt{\lambda_i}t) + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}} \left[\cos(\sqrt{\lambda_i}(t-2s)) \right]_{s=0}^t \\ &= \frac{t}{2} \sin(\sqrt{\lambda_i}t). \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

Si $i \neq j$:

$$\begin{aligned} C_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda_i}t + (\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})s\right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda_i}t - (\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})s\right) ds \end{aligned}$$

$$= -\sqrt{\lambda_i} \frac{\cos(\sqrt{\lambda_j t}) - \cos(\sqrt{\lambda_i t})}{\lambda_j - \lambda_i}. \quad (\text{D.1.4})$$

En conclusion :

$$C_{ij}(t) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_j - \lambda_i} \left(\cos(\sqrt{\lambda_j t}) - \cos(\sqrt{\lambda_i t}) \right) & \text{pour } i \neq j \\ \frac{t}{2} \sin(\sqrt{\lambda_i t}) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (\text{D.1.5})$$

D.1.2 $S_{ij}(t)$

$S_{ij}(t)$ est définie par :

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_i}(t-s)) \sin(\sqrt{\lambda_j}s) ds \quad (\text{D.1.6})$$

Si $i = j$:

$$\begin{aligned} S_{ii}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(\cos(\sqrt{\lambda_i}(t-2s)) - \cos(\sqrt{\lambda_i t}) \right) ds \\ &= -\frac{t}{2} \cos(\sqrt{\lambda_i t}) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i t}). \end{aligned} \quad (\text{D.1.7})$$

Si $i \neq j$:

$$\begin{aligned} S_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_i t} - (\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_i t} + (\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})s) ds \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_j t}) - \sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_i t})}{\lambda_i - \lambda_j}. \end{aligned} \quad (\text{D.1.8})$$

En conclusion :

$$S_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_j t}) - \sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_i t}) \right) & \text{pour } i \neq j \\ -\frac{t}{2} \cos(\sqrt{\lambda_i t}) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i t}) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (\text{D.1.9})$$

D.1.3 Dérivées de $C_{ij}(t)$ et $S_{ij}(t)$

On obtient en dérivant simplement les fonctions $C_{ij}(t)$ et $S_{ij}(t)$ calculées ci-dessus :

$$C'_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_i}t) - \sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_j}t) \right) & \text{pour } i \neq j \\ \frac{t\sqrt{\lambda_i}}{2} \cos(\sqrt{\lambda_i}t) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{\lambda_i}t) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (\text{D.1.10})$$

$$S'_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}t) - \cos(\sqrt{\lambda_i}t) \right) & \text{pour } i \neq j \\ \frac{t\sqrt{\lambda_i}}{2} \sin(\sqrt{\lambda_i}t) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (\text{D.1.11})$$

D.2 $p = 1$

D.2.1 $C_{ij}(t)$

$C_{ij}(t)$ est telle que :

$$C_{ij}(t) = \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i}(t-s))}{\lambda_j} \left(\cos(\sqrt{\lambda_j}s) + \frac{t}{T}(1 - \cos(\sqrt{\lambda_j}T)) \right) ds. \quad (\text{D.2.12})$$

En intégrant deux fois par parties, il vient :

$$C_{ij}(t) = \frac{1}{\lambda_i} \{C_{ij}\}_{p=0}(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t)) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i}t)}{\lambda_i \lambda_j} \left(\frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda_j}T)}{T} \right). \quad (\text{D.2.13})$$

Par conséquent, si $i = j$:

$$C_{ij}(t) = \frac{1}{\lambda_i} \frac{t}{2} \sin(\sqrt{\lambda_i}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \lambda_i} \left(\cos(\sqrt{\lambda_i}t) - 1 + \frac{t}{T}(1 - \cos(\sqrt{\lambda_i}T)) \right) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i}t)}{\lambda_i^2} \left(\frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda_i}T)}{T} \right) \quad (\text{D.2.14})$$

et si $i \neq j$:

$$C_{ij}(t) = - \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}t) - \cos(\sqrt{\lambda_i}t)}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \left(\cos(\sqrt{\lambda_j} t) - 1 + \frac{t}{T} (1 - \cos(\sqrt{\lambda_j} T)) \right) \\
& - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i \lambda_j} \left(\frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda_j} T)}{T} \right). \tag{D.2.15}
\end{aligned}$$

D.2.2 $S_{ij}(t)$

$S_{ij}(t)$ est telle que :

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_i}(t-s)) \frac{1}{\lambda_j} \left(\sin(\sqrt{\lambda_j} s) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} T)}{T} \right) ds. \tag{D.2.16}$$

En intégrant deux fois par parties, il vient :

$$\begin{aligned}
S_{ij}(t) & = \frac{1}{\lambda_i} \{S_{ij}\}_{p=0}(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_1(\sin(\sqrt{\lambda_j} t)) \\
& - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i \lambda_j} \left(\sqrt{\lambda_j} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} T)}{T} \right). \tag{D.2.17}
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $i = j$:

$$\begin{aligned}
S_{ij}(t) & = \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{t}{2} \cos(\sqrt{\lambda_i} t) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i} t) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_i}} \left(\sin(\sqrt{\lambda_i} t) - \frac{t}{T} \sin(\sqrt{\lambda_i} T) \right) \\
& - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i^2} \left(\sqrt{\lambda_i} - \frac{1}{T} \sin(\sqrt{\lambda_i} T) \right), \tag{D.2.18}
\end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\begin{aligned}
S_{ij}(t) & = \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{t}{2} \cos(\sqrt{\lambda_i} t) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i} t) \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_i}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} T)}{T} \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\sqrt{\lambda_i}} - t \right). \tag{D.2.19}
\end{aligned}$$

Pour $i \neq j$:

$$S_{ij}(t) = -\frac{1}{\lambda_i} \frac{\sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) - \sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i - \lambda_j}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \left(\sin(\sqrt{\lambda_j} t) - \frac{t}{T} \sin(\sqrt{\lambda_j} T) \right) \\
& - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i \lambda_j} \left(\sqrt{\lambda_j} - \frac{1}{T} \sin(\sqrt{\lambda_j} T) \right), \tag{D.2.20}
\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned}
S_{ij}(t) & = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) - \sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i - \lambda_j} \\
& + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} t)}{\sqrt{\lambda_j}} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \lambda_j} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} T)}{T} \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\sqrt{\lambda_i}} - t \right), \tag{D.2.21}
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
S_{ij}(t) & = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) - \sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\lambda_i - \lambda_j} \\
& - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \lambda_j} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} T)}{T} \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_i} t)}{\sqrt{\lambda_i}} - t \right), \tag{D.2.22}
\end{aligned}$$

Annexe E

Énergies de la réponse calculée avec un relèvement exact

Tout d'abord rappelons que l'énergie associée à la poutre, sur laquelle s'exerce un contrôle "HUM" élément de $H_0^p(0, T)$, est :

- pour $p = 0$, la norme $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$
- et pour tout $p \geq 1$, la norme $H_0^{2p}(0, L) \times H_0^{2p-2}(0, L)$.

Soient $(\lambda_i, \theta_i)_{i=1}^{+\infty}$ les modes propres solutions de :

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 \theta_i}{dx^4}(x) = \rho A \lambda_i \theta_i(x), & \forall x \in (0, L). \\ \theta_i(0) = \theta_i(L) = \frac{d\theta_i}{dx}(0) = \frac{d\theta_i}{dx}(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{E.0.1})$$

normalisés pour la norme $L^2(0, L)/(\rho A)$ et z le relèvement biharmonique de l'unité solution de

$$\begin{cases} \frac{d^4 z}{dx^4}(x) = 0, & \forall x \in (0, L). \\ z(0) = \frac{dz}{dx}(0) = z(L) = 0, \quad \frac{dz}{dx}(L) = 1, \end{cases} \quad (\text{E.0.2})$$

qui a pour forme explicite

$$z(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 (x - L), \quad \forall x \in (0, L). \quad (\text{E.0.3})$$

On définit alors la réponse et la vitesse calculées avec un relèvement exact :

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \theta_i(x) + z(x) v(t) \quad (\text{E.0.4})$$

et sa dérivée en temps :

$$y'(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i'(t) \theta_i(x) + z(x) v'(t) \quad (\text{E.0.5})$$

E.1 Contrôle usuel

On va calculer successivement la norme $L^2(0, L)$ de la réponse et la norme $H^{-2}(0, L)$ de la vitesse.

E.1.1 Norme $L^2(0, L)$ de la réponse

On obtient, à partir de la définition (E.0.4), l'expression développée du carré de la norme $L^2(0, L)$ de la réponse :

$$\begin{aligned} \|y(\cdot, t)\|_{0,[0,L]}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2(t) \|\varphi_i\|_{0,[0,L]}^2 + |v(t)|^2 \|z\|_{0,[0,L]}^2 \\ &+ 2v(t) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) (z, \varphi_i). \end{aligned} \quad (\text{E.1.6})$$

La normalisation des modes adoptée implique :

$$(z, \theta_i) = \int_0^L \theta_i z \, dx = \frac{z_i}{\rho A} \quad (\text{E.1.7})$$

et par définition du relèvement on a :

$$\|z\|_{0,[0,L]}^2 = \frac{L^3}{105}. \quad (\text{E.1.8})$$

En remplaçant ces deux expressions dans (E.1.6), il vient :

$$\|y(\cdot, t)\|_{0,[0,L]}^2 = \frac{1}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) (\alpha_i(t) + 2v(t)z_i) + \frac{L^3}{105} |v(t)|^2. \quad (\text{E.1.9})$$

E.1.2 Norme $H^{-2}(0, L)$ de la vitesse

Soit l'opérateur $\left(\mathcal{A} = \left(\frac{d^4}{dx^4}, \mathcal{D}(\mathcal{A}), [0, L] \right), \mathcal{D}(\mathcal{A}) = H_0^2(0, L) \right)$ qui vérifie donc :

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = \frac{d^4 u}{dx^4}, & \forall x \in [0, L]. \\ u(0) = \frac{du}{dx}(0) = u(L) = \frac{du}{dx}(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.1.10})$$

D'après le théorème de Riesz, c'est un isomorphisme *isométrique* de $H_0^2(0, L)$ dans $H^{-2}(0, L)$, par conséquent :

$$\|y'(\cdot, t)\|_{-2,[0,L]} = \left| \mathcal{A}^{-1}(y'(\cdot, t)) \right|_{2,[0,L]}. \quad (\text{E.1.11})$$

D'autre part, par définition des modes et par linéarité de l'opérateur \mathcal{A} , on a :

$$\mathcal{A}^{-1}\theta_i = \left(\frac{EI}{\rho A} \right) \frac{\theta_i}{\lambda_i}. \quad (\text{E.1.12})$$

On définit l'inverse du relèvement z au sens de l'opérateur \mathcal{A} :

Définition E.1 *La fonction \bar{z} est la solution unique de :*

$$\mathcal{A}(\bar{z}) = z, \quad (\text{E.1.13})$$

dont nous avons naturellement une expression explicite :

$$\bar{z}(x) = \frac{L^5}{7!} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(6 \left(\frac{x}{L}\right)^5 - 14 \left(\frac{x}{L}\right)^4 + 26 \left(\frac{x}{L}\right) - 18\right). \quad (\text{E.1.14})$$

Par conséquent, d'après la définition (E.0.5) de $y'(\cdot, t)$, l'expression développée de $\mathcal{A}^{-1}(y'(\cdot, t))$ est la suivante :

$$\mathcal{A}^{-1}(y'(\cdot, t)) = \frac{EI}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha'_i}{\lambda_i} \theta_i + v'(t) \bar{z}(x). \quad (\text{E.1.15})$$

Soit $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire symétrique associée à l'opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$:

Définition E.2

$$\forall (u, v) \in H_0^2(0, L) \times H_0^2(0, L), \quad a(u, v) = \int_0^L \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx. \quad (\text{E.1.16})$$

Si l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité de $H^{-2}(0, L) \times H_0^2(0, L)$, d'après le théorème de Riesz, on a :

$$\forall (u, v) \in H_0^2(0, L) \times H_0^2(0, L), \quad a(u, v) = \langle \mathcal{A}u, v \rangle. \quad (\text{E.1.17})$$

Ainsi on peut développer le carré de la norme $H_0^2(0, L)$ de (E.1.15), et il vient :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^{-1}(y'(\cdot, t))|_{2,[0,L]}^2 &= \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i'^2(t)}{\lambda_i^2} |\theta_i|_{2,[0,L]}^2 + |v'(t)|^2 |\bar{z}|_{2,[0,L]}^2 \\ &+ 2v'(t) \frac{EI}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha'_i(t)}{\lambda_i} a(\theta_i, \bar{z}). \end{aligned} \quad (\text{E.1.18})$$

De plus, en utilisant les propriétés de l'opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, la définition de $a(\cdot, \cdot)$ ainsi que celle de \bar{z} , on obtient :

$$a(\theta_i, \bar{z}) = a(\theta_i, \mathcal{A}^{-1}(z)) = (\theta_i, z) = \frac{z_i}{\rho A} \quad (\text{E.1.19})$$

et

$$|\bar{z}|_{2,[0,L]}^2 = a(\bar{z}, \mathcal{A}^{-1}(z)) = \langle \mathcal{A}\bar{z}, \mathcal{A}^{-1}z \rangle$$

$$= \int_0^L \bar{z}z \, dx = \frac{L^7}{7!} \frac{284}{3465} \quad (\text{E.1.20})$$

et enfin par définition des modes :

$$|\theta_i|_{2,[0,L]}^2 = \frac{\rho A}{EI} \lambda_i \|\theta_i\|_{0,[0,L]}^2 = \frac{\lambda_i}{EI}. \quad (\text{E.1.21})$$

En remplaçant ces expressions dans (E.1.18), on a en définitive :

$$|\mathcal{A}^{-1}(y'(\cdot, t))|_{2,[0,L]}^2 = \frac{EI}{(\rho A)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i'(t)}{\lambda_i} (\alpha_i'(t) + 2v'(t)z_i) + \frac{L^7}{7!} \frac{284}{3465} |v'(t)|^2. \quad (\text{E.1.22})$$

E.2 Contrôle régulier $p = 1$

Il faut calculer la norme $H_0^2(0, L)$ de la réponse et la norme $L^2(0, L)$ de la vitesse.

En remarquant que les modes θ_i sont orthogonaux aux fonctions biharmoniques pour le produit scalaire associé à la norme $H_0^2(0, L)$, donc en particulier au relèvement z , on a :

$$\begin{aligned} |y(\cdot, t)|_{2,[0,L]}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2(t) |\theta_i|_{2,[0,L]}^2 + |v(t)|^2 |z|_{2,[0,L]}^2 \\ &= \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2(t) + 4L |v(t)|^2 \end{aligned} \quad (\text{E.2.23})$$

Enfin en appliquant, la formule (E.1.9) à $y'(\cdot, t)$, on obtient :

$$\|y'(\cdot, t)\|_{0,[0,L]}^2 = \frac{1}{\rho A} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i'(t) (\alpha_i'(t) + 2v'(t)z_i) + \frac{L^3}{105} |v'(t)|^2. \quad (\text{E.2.24})$$

E.3 Énergies

En conclusion, on donne les expressions de l'énergie :

$$\begin{aligned} \cdot E(t) &= \rho A \|y(\cdot, t)\|_{0,[0,L]}^2 + \frac{(\rho A)^2}{EI} \|y'(\cdot, t)\|_{-2,[0,L]}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i(t) (\alpha_i(t) + 2v(t)z_i) + \frac{\alpha_i'(t)}{\lambda_i} (\alpha_i'(t) + 2v'(t)z_i) \right) \\ &\quad + \rho A \frac{L^3}{105} |v(t)|^2 + \frac{(\rho A)^2}{EI} \frac{L^7}{7!} \frac{284}{3465} |v'(t)|^2. \quad (p = 0) \end{aligned} \quad (\text{E.3.25})$$

$$\begin{aligned} \cdot E(t) &= EI |y(\cdot, t)|_{2,[0,L]}^2 + \rho A \|y'(\cdot, t)\|_{0,[0,L]}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_i \alpha_i^2(t) + \alpha_i'(t) (\alpha_i'(t) + 2v'(t)z_i) \right) \\ &\quad + 4EIL |v(t)|^2 + \rho A \frac{L^3}{105} |v'(t)|^2. \quad (p = 1) \end{aligned}$$

Annexe F

Suite de weyl du moment

Nous allons démontrer l'estimation de la vitesse de convergence du moment cruciale à plus d'un titre suivante :

Propriété F.1

$$\exists \gamma > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad |mtf_i| \leq \gamma \sqrt{\lambda_i}. \quad (\text{F.0.1})$$

Remarque F.1 Il est évident que cette propriété est également vraie pour les moments faibles et usuels.

DÉMONSTRATION : Nous donnons deux démonstrations totalement différentes.

1. Pour simplifier les calculs, on adimensionnalise le moment vis-à-vis des constantes mécaniques et de la géométrie, et donc également les modes propres $(\lambda_i, \theta_i)_{i=1}^{+\infty}$. On rappelle que dans le cas adimensionnel ces modes propres solutions de :

$$\begin{cases} \frac{d^4 \theta_i}{dx^4}(x) = \lambda_i \theta_i(x), & \forall x \in [0, 1], \\ \theta_i(0) = \theta_i(1) = \frac{d\theta_i}{dx}(0) = \frac{d\theta_i}{dx}(1) = 0, \end{cases} \quad (\text{F.0.2})$$

sont rangés de telle sorte que les valeurs propres forment une suite croissante et les fonctions propres sont normalisées dans $L^2(0, L) / (\rho A)$.

Si l'on note $\omega_i = \lambda_i^{1/4}$, alors le i -ème mode propre solution de (F.0.2) est de la forme :

$$\theta_i(x) = A_i \cos(\omega_i x) + B_i \sin(\omega_i x) + C_i \cosh(\omega_i x) + D_i \sinh(\omega_i x). \quad (\text{F.0.3})$$

avec les constantes A_i , B_i , C_i et D_i qui sont déterminées de façon unique par les conditions limites et la condition de normalisation. Les conditions limites donnent

le système suivant :

$$\begin{cases} A_i + C_i = 0 & (F.0.4) \\ B_i + D_i = 0 & (F.0.5) \\ A_i \cos(\omega_i) + B_i \sin(\omega_i) + C_i \cosh(\omega_i) + D_i \sinh(\omega_i) = 0 & (F.0.6) \\ -A_i \sin(\omega_i) + B_i \cos(\omega_i) + C_i \sinh(\omega_i) + D_i \cosh(\omega_i) = 0 & (F.0.7) \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions pour les ω_i vérifiant l'équation transcendante :

$$\cos(\omega_i) \cosh(\omega_i) = 1. \quad (F.0.8)$$

On peut exprimer les constantes B_i , C_i et D_i en fonction de la constante A_i . En effet, si l'on note :

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\cos(\omega_i) - \cosh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \quad (F.0.9)$$

on a :

$$B_i = -A_i \tilde{\beta}_i, \quad C_i = -A_i, \quad D_i = -B_i. \quad (F.0.10)$$

En utilisant ces relations, la condition de normalisation s'écrit :

$$A_i^2 \int_0^1 \left((\cos(\omega_i x) - \cosh(\omega_i x)) - \tilde{\beta}_i (\sin(\omega_i x) - \sinh(\omega_i x)) \right)^2 dx = 1. \quad (F.0.11)$$

Si l'on note $f(x) = \sin(\omega_i x) - \sinh(\omega_i x)$, elle se réécrit :

$$A_i^2 \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \frac{f'(1)}{f(1)} f(x) \right)^2 dx = 1, \quad (F.0.12)$$

ou encore :

$$\tilde{A}_i = \left(\frac{\omega_i}{A_i} \right)^2 = \int_0^1 \left(f'(x) - \frac{f'(1)}{f(1)} f(x) \right)^2 dx. \quad (F.0.13)$$

Si on développe l'expression de \tilde{A}_i , on obtient :

$$\tilde{A}_i = \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \left(\frac{f'(1)}{f(1)} \right)^2 \int_0^1 f^2(x) dx - \frac{f'(1)}{f(1)} \int_0^1 2f(x)f'(x) dx. \quad (F.0.14)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f'(x))^2 dx &= - \int_0^1 f'(x)f''(x) dx + [f'(x)f(x)]_{x=0}^1 \\ &= \omega_i^2 \int_0^1 (\sin^2(\omega_i x) - \sinh^2(\omega_i x)) dx + f'(1)f(1) \end{aligned} \quad (F.0.15)$$

et

$$2 \int_0^1 f(x)f'(x)dx = [f^2(x)f(x)]_{x=0}^1 = f^2(1). \quad (\text{F.0.16})$$

Par conséquent, en éliminant ce qui doit être éliminé, on obtient :

$$\tilde{A}_i = \omega_i^2 \int_0^1 (\sin^2(\omega_i x) - \sinh^2(\omega_i x)) dx + \left(\frac{f'(1)}{f(1)} \right)^2 \int_0^1 f^2(x) dx, \quad (\text{F.0.17})$$

ou encore si l'on note :

$$\hat{A}_i = \frac{1}{A_i^2}, \quad \tilde{\alpha}_i = \frac{1}{\omega_i^2} \left(\frac{f'(1)}{f(1)} \right)^2, \quad (\text{F.0.18})$$

il vient :

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \int_0^1 (\sin^2(\omega_i x) - \sinh^2(\omega_i x)) dx \\ &\quad + \tilde{\alpha}_i \int_0^1 (\sin(\omega_i x) - \sinh(\omega_i x))^2 dx. \end{aligned} \quad (\text{F.0.19})$$

On développe le carré de la deuxième intégrale du second membre de cette égalité, d'où :

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= (\tilde{\alpha}_i + 1) \int_0^1 \sin^2(\omega_i x) dx + (\tilde{\alpha}_i - 1) \int_0^1 \sinh^2(\omega_i x) dx \\ &\quad - 2\tilde{\alpha}_i \int_0^1 \sin(\omega_i x) \sinh(\omega_i x) dx \end{aligned} \quad (\text{F.0.20})$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin^2(\omega_i x) dx &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\omega_i)}{2\omega_i} \right), \\ \int_0^1 \sinh^2(\omega_i x) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(2\omega_i)}{2\omega_i} - 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{F.0.21})$$

et

$$\int_0^1 \sin(\omega_i) \sinh(\omega_i x) dx = \frac{1}{2\omega_i} (\sin(\omega_i) \cosh(\omega_i) - \cos(\omega_i) \sinh(\omega_i)) \quad (\text{F.0.22})$$

et enfin

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i &= \left(\frac{\cos(\omega_i) - \cosh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \right)^2 = \frac{\cos^2(\omega_i) + \cosh^2(\omega_i) - 2}{(\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i))^2} \\ &= \frac{\sinh^2(\omega_i) - \sin^2(\omega_i)}{(\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i))^2} = \frac{\sin(\omega_i) + \sinh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \end{aligned} \quad (\text{F.0.23})$$

avec par conséquent :

$$\frac{\tilde{\alpha}_i + 1}{2} = \frac{\sinh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)}, \quad \frac{\tilde{\alpha}_i - 1}{2} = \frac{\sin(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \quad (\text{F.0.24})$$

On obtient finalement après développement et mise en facteur :

$$\hat{A}_i = 1 + \frac{1}{\omega_i} \left(\frac{\sinh^2(\omega_i) \cos(\omega_i) - \sin^2(\omega_i) \cosh(\omega_i)}{\sinh(\omega_i) - \sin(\omega_i)} \right). \quad (\text{F.0.25})$$

Mais

$$\begin{aligned} \sinh(\omega_i)^2 \cos(\omega_i) - \sin^2(\omega_i) \cosh(\omega_i) &= (\cosh^2(\omega_i) - 1) \cos(\omega_i) \\ &- (1 - \cos^2(\omega_i)) \cosh(\omega_i) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.0.26})$$

donc $\hat{A}_i = 1$, autrement dit :

$$A_i = 1. \quad (\text{F.0.27})$$

Sachant que l'on a, du moins en dimension un, l'expression exacte du relèvement, soit $z(x) = x^3 - x^2$, on peut calculer explicitement le moment *très faible* :

$$mtf_i = -\omega_i^4 \int_0^1 z(x) \theta_i(x) dx, \quad (\text{F.0.28})$$

à l'aide de l'expression (F.0.3) de θ_i que l'on vient d'obtenir et des formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i^4 \int_0^1 \cos(\omega_i x) z(x) dx = \omega_i^2 \cos(\omega_i) - 4\omega_i \sin(\omega_i) + 6(1 - \cos(\omega_i)) \\ \omega_i^4 \int_0^1 \sin(\omega_i x) z(x) dx = \omega_i^2 \sin(\omega_i) + \omega_i (4 \cos(\omega_i) + 2) - 6 \sin(\omega_i) \\ \omega_i^4 \int_0^1 \cosh(\omega_i x) z(x) dx = -\omega_i^2 \cosh(\omega_i) + 4\omega_i \sinh(\omega_i) + 6(1 - \cosh(\omega_i)) \\ \omega_i^4 \int_0^1 \sinh(\omega_i x) z(x) dx = -\omega_i^2 \sinh(\omega_i) + \omega_i (4 \cosh(\omega_i) + 2) - 6 \sinh(\omega_i) \end{array} \right. \quad (\text{F.0.29})$$

En effet, en utilisant les égalités ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} \omega_i^4 z_i &= \omega_i^2 (A_i \cos(\omega_i) + B_i \sin(\omega_i) - C_i \cosh(\omega_i) - D_i \sinh(\omega_i)) \\ &+ 4\omega_i (-A_i \sin(\omega_i) + B_i \cos(\omega_i) + C_i \sinh(\omega_i) + D_i \cosh(\omega_i)) \\ &- 6 (A_i \cos(\omega_i) + B_i \sin(\omega_i) + C_i \cosh(\omega_i) + D_i \sinh(\omega_i)) \\ &+ 2\omega_i (B_i + D_i) + 6 (A_i + C_i). \end{aligned} \quad (\text{F.0.30})$$

et en appliquant les relations vérifiées par les constantes A_i , B_i , C_i et D_i , on a donc :

$$mtf_i = -2\omega_i^2 (A_i \cos(\omega_i) + B_i \sin(\omega_i)). \quad (\text{F.0.31})$$

Remarque F.2 On aurait évidemment trouvé la même égalité avec le moment usuel :

$$mu_i = \frac{d^2\theta_i}{dx^2}(1), \quad (\text{F.0.32})$$

en utilisant la relation (F.0.3) vérifiée par θ_i et l'égalité (F.0.29).

On peut donc conclure sachant que $\omega_i^2 = \sqrt{\lambda_i}$ et que :

$$\begin{aligned} A_i &= 1 \\ B_i &= - \left(\frac{\cos(\omega_i) - \cosh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.0.33})$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} A_i \cos(\omega_i) + B_i \sin(\omega_i) &= \cos(\omega_i) - \sin(\omega_i) \left(\frac{\cos(\omega_i) - \cosh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \right) \\ &= \left(\frac{\cosh(\omega_i) \sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i) \cos(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.0.34})$$

ce qui donne :

$$mtf_i = -2\omega_i^2 \left(\frac{\cosh(\omega_i) \sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i) \cos(\omega_i)}{\sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i)} \right). \quad (\text{F.0.35})$$

Remarque F.3 On peut écrire plus simplement cette expression, en effet :

$$\begin{aligned} & (\cosh(\omega_i) \sin(\omega_i) - \sinh(\omega_i) \cos(\omega_i)) \frac{\sin(\omega_i) + \sinh(\omega_i)}{\sin^2(\omega_i) - \sinh^2(\omega_i)} \\ &= \frac{\cos(\omega_i) - \cosh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) \sinh(\omega_i)} = \frac{1 - \cosh^2(\omega_i)}{\sin(\omega_i) \cosh(\omega_i) \sinh(\omega_i)} \\ &= -\frac{\sinh(\omega_i)}{\sin(\omega_i) \cosh(\omega_i)} = -\frac{\tanh(\omega_i)}{\sin(\omega_i)}, \end{aligned}$$

donc on a également :

$$mtf_i = 2\omega_i^2 \frac{\tanh(\omega_i)}{\sin(\omega_i)}. \quad (\text{F.0.36})$$

Bien que l'expression que l'on vient d'exhiber à cette remarque soit plus simple, elle n'est pas pratique pour une interprétation asymptotique, aussi nous utilisons son expression développée.

En effet, on a la majoration suivante :

$$\exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, \quad \left| \left(\frac{\cosh(x) \sin(x) - \sinh(x) \cos(x)}{\sin(x) - \sinh(x)} \right) \right| \leq \sqrt{2}, \quad (\text{F.0.37})$$

avec x_0 que l'on peut calculer numériquement : $x_0 = 2.703$ à 10^{-4} près. Or pour tout entier i strictement positif, on a $\omega_i > \pi$, donc cette majoration est vérifiée quelque soit ω_i , on a donc :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad |m_{tf_i}| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda_i}. \quad (\text{F.0.38})$$

2. Puisque l'on vérifie l'inégalité *directe* dans le cas usuel, on a :

$$\begin{aligned} \forall T > 0, \exists C(T) > 0 / \forall \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} \in V_N \times V_N, \\ a(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}) \leq C(T) \|\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}\|_{E_1}^2. \end{aligned} \quad (\text{F.0.39})$$

Avec les notations du paragraphe 1.5 du chapitre 1 et en particulier :

$$\varphi_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \theta_i(x), \quad \varphi_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \delta_i \theta_i(x), \quad (\text{F.0.40})$$

l'inégalité précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} \forall \{\gamma_i, \delta_i\}, \quad \sum_{1 \leq i, j \leq N} (\gamma_i K_{ij}^{DD} \gamma_j + 2\gamma_i K_{ij}^{DV} \delta_j + \delta_i K_{ij}^{VV} \delta_j) \\ \leq C(T) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma_i^2 + \delta_i^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{F.0.41})$$

Cette inégalité est vérifiée pour des $\{\gamma_i, \delta_i\}$ quelconques, donc en particulier pour :

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad \gamma_i = \delta_{iN}, \quad \delta_i = 0. \quad (\text{F.0.42})$$

Avec ces données initiales, sachant que par ailleurs :

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad K_{ii}^{DD} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}T)}{2\sqrt{\lambda_i}} + T \right) m_i^2, \quad (\text{F.0.43})$$

on a donc pour tout $N > 0$:

$$\forall T > 0, \exists C(T) > 0, \quad \frac{1}{2} \left(T + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_N}T)}{2\sqrt{\lambda_N}} \right) m_N^2 \leq C(T) \lambda_N. \quad (\text{F.0.44})$$

L'indice N étant muet, on a encore :

$$\forall i \in [1, \dots, N], \quad |m_i| \leq \sqrt{(2)} \sqrt{\frac{C(T)}{T}} \sqrt{\lambda_i}. \quad (\text{F.0.45})$$

Remarque F.4 Cette démonstration est plus générale que la première. En effet, il est inutile de connaître la forme exacte des modes ni d'utiliser l'expression du moment *très faible* et donc *a fortiori* d'avoir la forme explicite du relèvement qui lui est associé. Enfin, elle permet d'obtenir des estimations pour d'autres types de moments.

Remarque F.5 On remarquera que la constante qui majore la valeur absolue du moment est en $C(T)/T$ et donc ne dépend pas du temps puisque $C(T)$ dépend linéairement du temps (voir Annexe J).

□

Annexe G

Expressions matricielles de l'opérateur Λ_ω

Étant donné que les démonstrations suivantes reprennent les mêmes types de développements trigonométriques que pour le calcul de la matrice K du contrôle (voir Annexe C), on ne détaille pas les calculs.

Pour tout $1 \leq i, j \leq N$, on note :

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{\lambda_i}, & m_i &= m t f_i \\ a_{ij} &= l_i + l_j, & b_{ij} &= l_i - l_j \end{aligned} \quad (\text{G.0.1})$$

et

$$r_{ij} = \left(1 - e^{-2\omega T} \cos(u_{ij}T)\right), \quad s_{ij} = e^{-2\omega T} \sin(u_{ij}T). \quad (\text{G.0.2})$$

Soient, pour tout ω, T constantes strictements positives et $u_{ij} = a_{ij}$ (ou b_{ij}), on pose pour tout $1 \leq i, j \leq N$:

$$T_{ij}(u_{ij}) = \frac{1}{(2\omega)^2 + u_{ij}^2} (2\omega r_{ij} + u_{ij} s_{ij}) \quad (\text{G.0.3})$$

$$\tilde{T}_{ij}(u_{ij}) = \frac{1}{(2\omega)^2 + u_{ij}^2} (u_{ij} r_{ij} - 2\omega s_{ij}) \quad (\text{G.0.4})$$

Dans ces conditions, pour tout $1 \leq i, j \leq N$, on a :

$$(K_\omega^{DD})_{ij} = \left(T_{ij}(a_{ij}) + \tilde{T}_{ij}(b_{ij})\right) m_i m_j \quad (\text{G.0.5})$$

$$(K_\omega^{DV})_{ij} = \left(T_{ij}(b_{ij}) - \tilde{T}_{ij}(b_{ij})\right) m_i \frac{m_j}{l_j} \quad (\text{G.0.6})$$

$$(K_\omega^{VV})_{ij} = \left(\tilde{T}_{ij}(a_{ij}) - \tilde{T}_{ij}(a_{ij})\right) \frac{m_i}{l_i} \frac{m_j}{l_j} \quad (\text{G.0.7})$$

Annexe H

ON THE FEEDBACK STABILIZATION : KOMORNIK'S METHOD

F. Bourquin ¹, J-S. Briffaut ¹ et M. Collet ²

¹ Laboratoire des matériaux et des structures du génie civil
UMR113 LCPC/CNRS, Champs-sur-Marne,

² Pôle Universitaire Léonard de Vinci, Paris La Défense, France

Abstract : a new active control strategy, due to Komornik, is presented. It is designed so as to achieve arbitrarily large decay rate of the energy of the system. A complete *ad hoc* computational scheme to put the new closed loop state feedback to work is developed. Numerical tests are presented. The new strategy compares favourably with the Integral Force Feedback in terms of efficiency.

H.1 Introduction

Most active control strategies applied in mechanical engineering resort to collocated active damping like Direct Velocity Feedback (DVF) or Integral Force Feedback (IFF) [1] that take advantage of up-to-date technical developments of transducer design. Insuring a global stability and avoiding spill-over in the absence of time delay between sensing and actuating, this method may be prone to large-scale implementation but in general lacks efficiency due to spatial localization of the damping effect, especially when exact controllability of the system does not hold. In this case, arbitrarily slowly decaying waves can travel along the structure [75], [76], [107] even if approximate controllability holds.

In the same way, the possible lack of exact controllability of the mechanical system under consideration underlies the extreme difficulty to apply real, *i.e.*

non-located, optimal active control feedback on a flexible structure like a plate or a shell. As a matter of fact, the infinite number of degrees of freedom puts forward the intrinsic properties of exact controllability and observability that must be satisfied in order to insure the reliability of the optimal control strategy. To be short, *exact controllability* is a necessary condition for the existence of a feedback law yielding uniform exponential decay of the response [107]. On the other hand, this property is also sufficient, when supplemented with other continuity properties that are usually easier to establish (see e.g. [71], [107]). In particular, it implies the existence of at least one control such that the infinite horizon LQ functional is finite. This so-called *finite cost condition* leads to a well-posed minimization problem, the solution of which is given in state feedback form through the unique positive solution of the standard algebraic Riccati equation [71].

Based on the initial work of J-L. Lions [23, 83], many mathematical developments have addressed the controllability of a wide set of typical systems. To quote a few of them, Bardos, Lebeau and Rauch [7] have derived explicit necessary and sufficient conditions for the exact controllability of the wave equation to hold. Extensions of this work have focussed on elastic structures [8] or Kirchhoff-Love plates [8]. Although the current use of defect measures has simplified some of the mathematical proofs, it turns out that establishing the exact controllability of a given structure can prove extremely difficult, especially when only a limited number of actuators is available. In this direction, the lack of controllability and corresponding uncontrollable waves can be tracked in a purely numerical way [6]. This deficiency underlies the observation spill-over and the lack of efficiency of many experimental devices.

In the case when this property holds, standard active damping will generally yield a uniform exponential decay of the energy of the system provided that a sufficiently large number of actuators is used. The decay rate can be estimated from below in many instances (see e.g. [14] [9] [13] and included references), but upper bounds do exist [13] [53]. Therefore, the rate at which the energy decays cannot be larger than some constant that depends on the equation, on the domain and on the material properties and that is usually referred to as the *critical damping* in the engineering literature.

In order to achieve an arbitrarily large decay rate of the energy of the controlled structure, Komornik [57, 58, 13] has introduced a strategy which depends on two parameters ω and S that one can choose freely. Since the uniform decay rate of the total energy is not smaller than ω , you may prescribe as fast a stabilization of the system as you want. This strategy can be implemented on line on standard experimental devices, just as any optimal control, and, from the computational point of view, does not require the solution of any Riccati equation. Therefore, it might be of interest to mechanical engineers and paves the ground to a new class of strategies dedicated to the control of flexible structures.

This paper is organized as follows : section 2 is devoted to a brief presentation of Komornik's law applied to an Euler-Bernoulli-Navier beam controlled at one

end point. The computational aspects of the theory are detailed in section 3. Section 4 describes various numerical tests. Finally, concluding remarks can be found in section 5.

H.2 Komornik's feedback law

Let us consider a simply supported Euler-Navier-Bermoulli beam of length L . Let ρ , E , A , I denote its mass density, Young's modulus, cross-sectional area and inertia respectively. For the sake of simplicity, the mass density per unit length ρA and the stiffness EI are supposed to be constant along the beam. Then the transverse displacement $y(x, t)$ satisfies

$$\begin{cases} \rho A \partial_{tt} y + EI \partial_{xxxx} y = 0 & [0, L] \times [0, T] \\ y(0, t) = v(t) & [0, T] \\ y(L, t) = \partial_{xx} y(0, t) = \partial_{xx} y(L, t) = 0 & [0, T] \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x) & [0, L]. \end{cases} \quad (\text{H.2.1})$$

Here the beam is controlled through the imposed transverse displacement of the left end point, and the horizon T can be arbitrarily large. In order to design the state feedback law $v(t) = \mathcal{F}(y(t), \partial_t y(t))$, an auxiliary observability problem is introduced: let $\varphi(x, s)$ denote the unique solution of the beam equation

$$\begin{cases} \rho A \partial_{ss} \varphi + EI \partial_{xxxx} \varphi = 0 & [0, L] \times [0, S] \\ \varphi(0, s) = \varphi(L, s) = \partial_{xx} \varphi(0, s) = \partial_{xx} \varphi(L, s) = 0 & [0, S] \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \partial_s \varphi(x, 0) = \varphi^1(x) & [0, L], \end{cases} \quad (\text{H.2.2})$$

where s denotes a fictitious time, and S a fictitious time horizon. The displacement field φ depends linearly on the initial conditions $\{\varphi^0, \varphi^1\}$. Hence, for any value of ω , one can define the bilinear observability grammian

$$a_{\omega, S}(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}) = \int_0^S e^{-2\omega s} EI \partial_{xxx} \varphi(0, s) EI \partial_{xxx} \hat{\varphi}(0, s) ds, \quad (\text{H.2.3})$$

where $\hat{\varphi}$ denotes the solution of (2.2) with initial conditions $\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}$. The continuity and coerciveness properties of this grammian do not depend on ω . For $\omega = 0$, and for the two-dimensional simply supported plate, Lebeau [18] proved them over suitable infinite-dimensional spaces of smooth enough functions. Essentially, φ^0 (resp. φ^1) should possess a third (resp. first) square summable derivative along the beam axis. Hence, for any smooth enough displacement and velocity fields z^0 and z^1 , there exists a unique solution $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ of the variational equation

$$a_{\omega, S}(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}) = \int_0^L (z^1 \hat{\varphi}^0 - z^0 \hat{\varphi}^1) \quad \forall \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}. \quad (\text{H.2.4})$$

Define the operator \mathcal{L} by just writing $\{\varphi^0, \varphi^1\} = \mathcal{L}\{z^0, z^1\}$ and denote by $P_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ the projection on the first component, *i.e.* $P_1(\{a, b\}) = a$. In this setting, the proposed feedback reads $v(t) = EI\partial_{xxx}(P_1\mathcal{L}\{y(t), y'(t)\})(x=0)$. It is not obvious that the resulting system of equations is well-posed. Nevertheless, provided the function $e^{-2\omega s}$ is slightly altered, Komornik proved [13] for related equations that $\|\{y(t), y'(t)\}\| \leq Ce^{-\omega t} \|\{y^0, y^1\}\|$ for some constant C , where $\|\cdot\|$ stands for a suitable norm of the state, namely the $L^2 \times H^{-2}$ -norm, that will be called the *w-norm* in the sequel.

H.3 Computational aspects

H.3.1 Semi very weak Faedo-Galerkin approximation

In view of developing a computational scheme for this feedback, and in order to give an alternative proof of Komornik's result, but this is not our concern here, a "semi very weak" formulation of the beam equation and a suitable mode superposition method are introduced. Let $(\lambda_i, \varphi_i)_{i=1}^{+\infty}$ denote the family of eigenvalues and normal modes of the simply supported beam (when $v(t) = 0$), and $V_N = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. The modes are assumed to be normalized so as to have a unit mass. For every pair of functions $\{z^0, z^1\}$, define $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} \in V_N \times V_N$ as the unique solution of the variational equation

$$a_{\omega, S}(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\}) = \int_0^L (z^1 \hat{\varphi}_N^0 - z^0 \hat{\varphi}_N^1) \quad \forall \{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\} \in V_N \times V_N \quad (\text{H.3.1})$$

and set $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\} = \mathcal{L}_N\{z^0, z^1\}$. Then an approximation $y_N(t) \in \mathcal{C}^2(0, T; V_N)$ of the displacement of the controlled beam satisfies the equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \rho A y_N''(t) w_N + \int_0^L EI y_N(t) \partial_{xxxx} w_N = v_N(t) EI \partial_{xxx} w_N(x=0) \quad \forall w_N \in V_N \\ v_N(t) = EI \partial_{xxx} P^1(\mathcal{L}_N\{y_N(t), y_N'(t)\})(x=0) \\ y_N(0) = P^N y^0, \quad y_N'(0) = P^N y^1, \end{array} \right. \quad (\text{H.3.2})$$

where P^N stands for the projection over the first N modes of the beam.

This variational equation is derived from the strong (or classical) formulation (2.1) that is integrated by parts four times (instead of twice for the weak formulation) after multiplication by smooth enough displacement fields.

The approximate displacement field $y_N(t)$ satisfies a uniform (with respect to both N and the initial state) exponential decay of the form $\|\{y_N(t), y_N'(t)\}\| \leq Ce^{-\omega t}$ [8] and converges when $N \rightarrow +\infty$ towards a displacement field satisfying

the beam equation controlled at the left end point and the same decay rate as y_N .

Remark 1: it follows from above definition that y_N vanishes at both ends of the beam. Therefore the imposed boundary control $v_N(t)$ cannot be viewed in a classical way. Of course, by adding to the space V_N of trial and test displacement fields a static mode that does not vanish at the point of actuation, and applying the same procedure as above, the new displacement will not identically vanish at that point. But it is not obvious that the new boundary control will be better computed with this new space. Moreover, in this case we would solve (3.1) with a non-conforming method that in addition may be difficult to implement. Furthermore, uniform exponential decay of the energy of the resulting closed-loop system (3.2) remains to be established. Therefore, the introduction of a static mode may heavily perturb the whole theory. This point will not be addressed here.

Remark 2: the linear differential system (3.2) can be put in matrix form and any suitable algorithm, e.g. of the Newmark family, can be put to work.

H.3.2 Approximation of the control law

The practical computation of the approximate control law $v_N(t)$ is now briefly explained. Several methods can be used (see e.g. [13, 29, 11, 13]). By just proceeding as in [13], set $\varphi_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^0 \varphi_i(x)$, $\varphi_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^1 \varphi_i(x)$ and also $\hat{\varphi}_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i^0 \varphi_i(x)$, $\hat{\varphi}_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i^1 \varphi_i(x)$. Then the stiffness matrix corresponding to the controllability grammian which is at the left-hand side of (3.1) is defined by $a(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}, \{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\}) = \{\hat{\alpha}\}^t K \{\alpha\}$, with $\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha^0\} \\ \{\alpha^1\} \end{Bmatrix}$. It is a purely computational matter to show that

$$K = \begin{pmatrix} K^{00} & K^{01} \\ K^{10} & K^{11} \end{pmatrix}, \quad K_{ij}^{\ell m} = f^{\ell m}(\lambda_i, \lambda_j, S) T_i T_j, \quad T_i = EI \partial_{xxx} \varphi_i(x=0) \quad (\text{H.3.3})$$

where $f^{\ell m}$ stands for a smooth explicit function. In view of the discretization of the stiffness matrix K , deriving an accurate approximation of the end shear forces T_i is of paramount importance. In fact, there are several ways of performing such an approximation. We assume that the eigenpairs of the beam are computed with a Galerkin method, e.g. a Finite Element Method. Thus we end up with a family $(\lambda_i^h, \varphi_i^h)_{i=1}^{N_h}$ of approximate eigenpairs.

The naivest way to define an approximate shear force is to set $T_i^{c,h} = EI \partial_{xxx} \varphi_i^h(x=0)$. However, the convergence of this quantity to the continuous shear force may prove slow and it is possible to derive a much more accurate alternative expression. To this end, let z denote the static mode defined by

$$\begin{cases} \partial_{xxxx} z = 0 & \text{in } [0, L] \\ \partial_{xx} z(0) = \partial_{xx} z(L) = z(L) = 0 & \text{and } z(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{H.3.4})$$

Of course, $z = 1 - \frac{x}{L}$, but this expression will not be used. As a matter of fact, a similar definition as above would be introduced for a beam with non constant stiffness, for which no close-form solution is available. When z is known explicitly,

$$T_i^{vw,h} = -\lambda_i^h \int_0^L \rho S \varphi_i^h(x) z(x) dx \quad (\text{H.3.5})$$

defines a very good approximation of the end shear force of the i -th mode. Of course, in the case when no close-form is available for the displacement z , the latter should be replaced with its finite element approximation z^h in (3.5). The corresponding approximation error is small in energy norm with standard elements. The expression (3.5) can be viewed as an application of Maxwell-Betti reciprocity theorem. It is obtained from the classical formulation of the eigenvalue problem *at the continuous level* by just multiplying the governing equation by z and integrating by parts four times. The resulting equation is then discretized. The advantage of this expression lies in the absence of derivative. As a matter of fact, a third order derivative has been replaced with an integral. Moreover, eigenvalues are easier to approximate than the eigenshapes in energy norm. But this energy norm is not involved here, only the $L^2(0, L)$ norm comes into play. And for this norm, the finite element approximations of the eigenshapes and of the static mode z prove very accurate. Numerical tests showing the superiority of this very weak expression over the classical expression for the computation of the end moment of a clamped beam are reported in [7]. Therefore, the entries of the stiffness matrix are replaced with $K_{ij}^{\ell m, h} = f^{\ell m}(\lambda_i^h, \lambda_j^h, S) T_i^{vw, h} T_j^{vw, h}$.

Remark 3: the discretization of the right-hand side of equation (3.2) appeals to the same very weak expression of the shear force, as far as the test functions w_N and the control v_N are concerned.

H.3.3 Postprocessing the control power

Since a displacement is imposed, the control force is not readily available. Moreover, the velocity of the beam at the actuator location is poorly represented by its very weak approximation (3.2) since by construction $y_N(x = 0, t) = 0 \forall t \geq 0$, therefore $\partial_t y_N(x = 0, t) = 0$, and the associated power should be zero!

As for the control force, the Theorem of Virtual Work applied to the continuous system yields $F = \int_0^L (y'' z + EI \partial_{xx} y \partial_{xx} z)$. This expression suggests to define the approximate control force

$$F_N = \int_0^L (y_N'' z) , \quad (\text{H.3.6})$$

since the second term of the integrand of F vanishes when y is replaced by y_N due to the construction of the static mode z . Since $y_N \in V_N$, then $y_N'' \in V_N$,

and its components on the basis of eigenshapes can be computed by just setting $w_N = \varphi_i$ in (3.2) for the successive modes. Recall that this is a postprocessing step where $y_N(t)$ is supposed to be available. There no need here to derive numerically the state of the system.

As for the actuator velocity, which again vanishes in a classical sense at the discrete level, the time derivative of the approximate imposed displacement is suggested: $\mathcal{V}_N = \partial_t v_N(t)$. By just using (3.2), we end up with the definition

$$\mathcal{V}_N = EI \partial_{xxx} P^1 \mathcal{L}_N \{y'_N(t), y''_N(t)\} (x = 0) . \quad (\text{H.3.7})$$

Of course, we use the same definition of $y''_N(t)$ as previously and recall that $y'_N(t)$ has been computed before. Furthermore, the right-hand side of above equation is nothing but a superposition of shear forces, computed as in (3.5), once the control problem (3.1) has been solved for the new source term.

The control power is now approximated by $\mathcal{P}_N(t) = F_N \mathcal{V}_N$.

H.4 Numerical tests

According to the previous developments, Komornik's method can be implemented in a real time process. Indeed, the feedback operator is linear and, after discretization, reduces to a feedback matrix. Different values for the order of the modal reduction N can be introduced in the projection of the observability gramian, of its right-hand side, and the modal reduction of the law of conservation of linear momentum. Thus this method can be used to deal with the spill-over problem by optimizing these different parameters. This question will not be addressed here.

In this first study, the basic efficiency of Komornik's method will be assessed and compared with the one of the integral force feedback (IFF). Indeed, both control strategies impose a displacement on the boundary of the structural domain. Therefore, numerical implementations are quite similar. The basic advantage of using Komornik's feedback is to ensure an arbitrarily large decay rate in w -norm whereas the decay rate of IFF is limited by the critical damping value. In order to analyse comparable results, tests are chosen within this limit. This is why the gain is chosen equal to 0,04 for IFF. In order to achieve a similar efficiency, the following parameters of Komornik's feedback are used: $\omega = 2$, $S = 2$.

Among various outputs of the simulation, the w -norm for which a uniform decay rate is proved to hold can be expressed as

$$\begin{aligned} \|\{z_N, \partial_t z_N\}\|^2 &= \frac{1}{3} v_N^2(t) + \frac{1}{5!} \frac{16}{63} (v'_N(t))^2 + \sum_{i=1}^N \left(\gamma_i^2(t) + \frac{1}{\lambda_i} (\gamma'_i)^2 \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \left(v_N(t) \gamma_i(t) + \frac{1}{\lambda_i} v'_N(t) \gamma'_i(t) \right) \end{aligned} \quad (\text{H.4.1})$$

if $z_N(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) \varphi_i + v_N z$. Note that this w -norm is not equivalent to the total energy norm except, of course, for a given number of modes.

All numerical results presented hereafter have been achieved using Matlab-Simulink software.

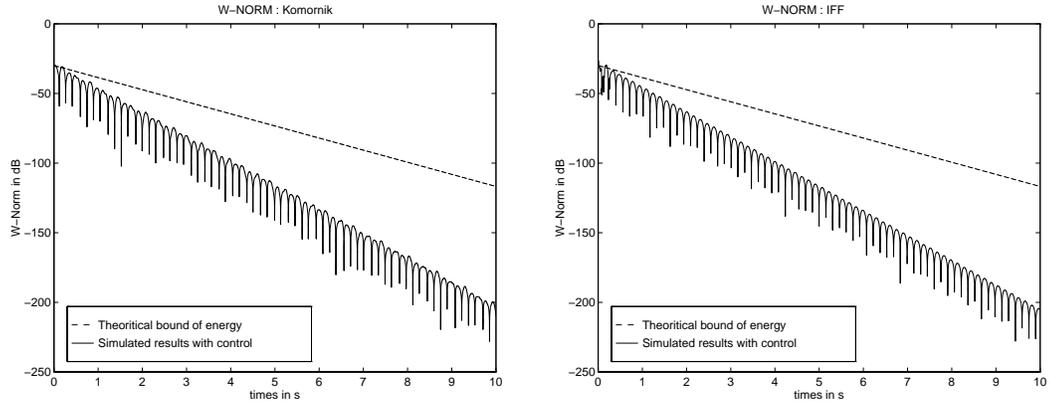


FIG. H.1 - *The w -norm with Komornik's law (left) and IFF (right)*

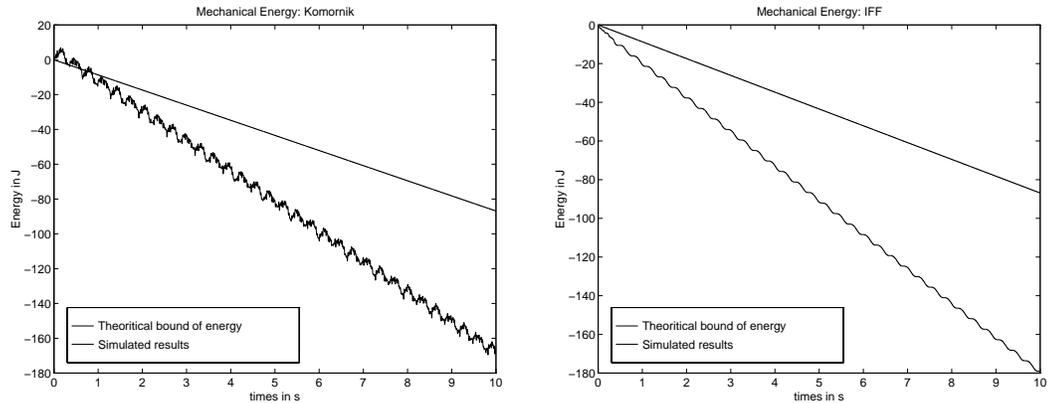


FIG. H.2 - *The mechanical energy with Komornik's law (left) and IFF (right)*

H.4.1 Stabilization of initial conditions

We first study the decay of the controlled vibration of the beam starting from the initial conditions $y^0 = \sum_{i=1}^N \frac{0.1}{i^{2.8}} \varphi_i(x)$ and $y^1 = 0$. In this case, the initial conditions are of finite energy, even if N tends to infinity. In what follows, $N = 5$.

The figures (H.1), (H.2), (H.3), (H.4) show respectively the w -norm, the total mechanical energy, the controlling displacement and the control power associated to Komornik's feedback and to IFF.

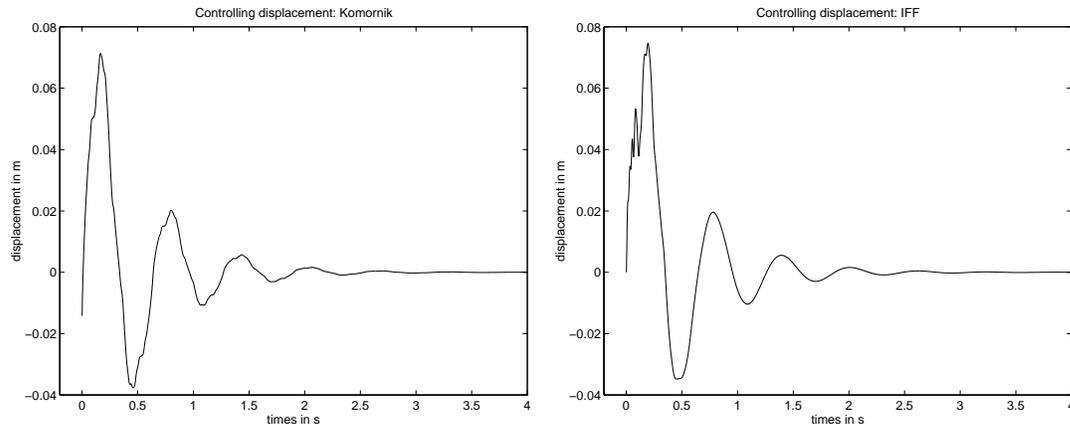


FIG. H.3 - *Controlling displacement with Komornik's law (left) and IFF (right)*

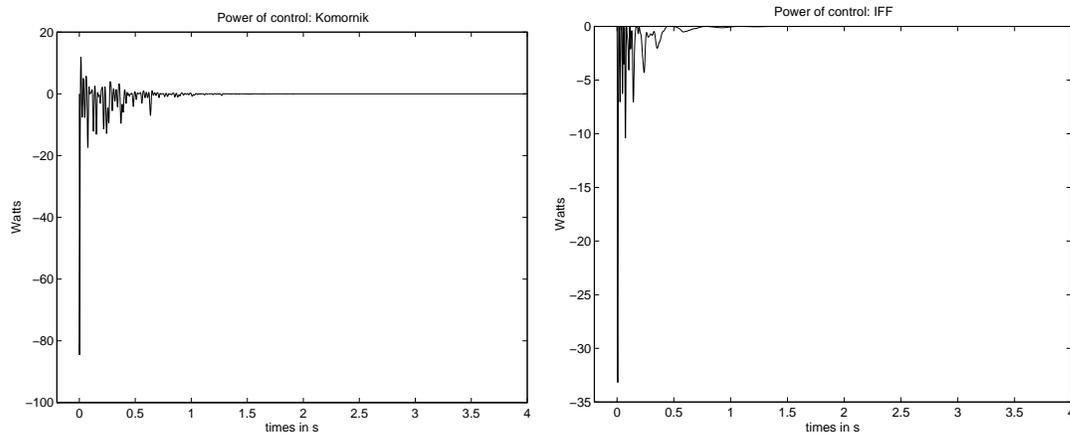


FIG. H.4 - *Control power with Komornik's law (left) and IFF (right)*

In both cases, the w -norm decay rate is better than the theoretical ones at least away from initial time. As a matter of fact, some terms neglected in the mathematical proof of the main inequality for Komornik's feedback are not so small and effectively contribute to the decay of the energy [7].

However, Komornik's feedback has not been designed to be very smooth in time. This is why we observe on figure(H.3) that the imposed initial displacement at $x = 0$ is not equal to zero thus violating the compatibility between initial and boundary conditions. This feature is allowed by the theory. The generated impulse induces an increase of the mechanical energy for small time (figure(H.2)), and of course of the w -norm. There is no theoretical contradiction here. For the IFF, the mechanical energy decreases at any time, and this problem does not show up.

The controlling displacements shown on figure(H.3) are comparable. With the IFF, we should emphasize that this signal contains first high frequency com-

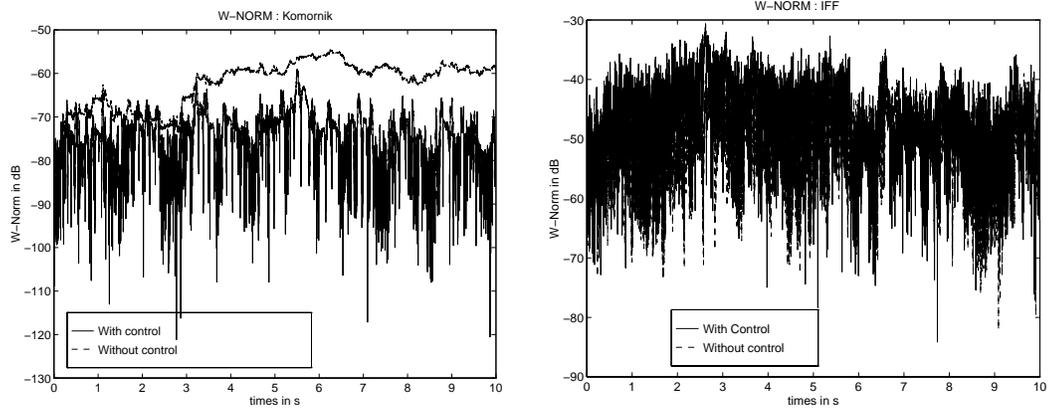


FIG. H.5 - *The w -norm of the beam subjected to a white noise and stabilized with Komornik's law (left) and IFF (right)*

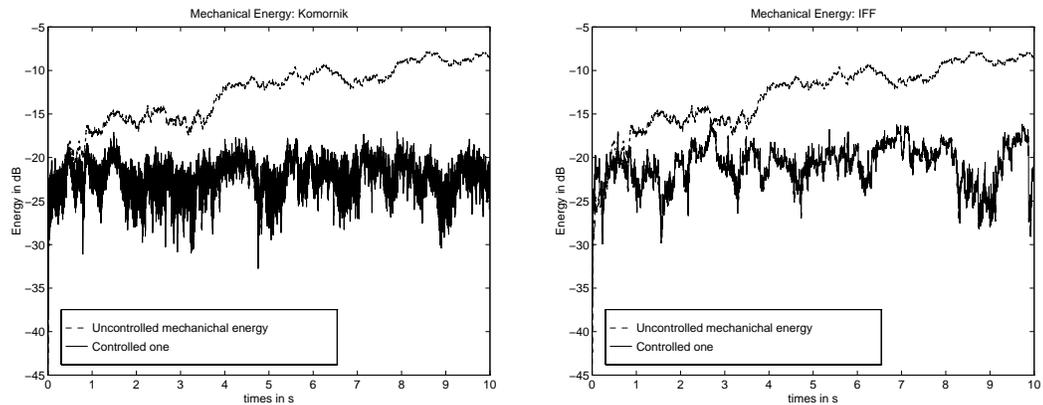


FIG. H.6 - *The mechanical energy of the beam subjected to a white noise and stabilized with Komornik's law (left) and IFF (right)*

ponents and, after a short period of time, only the first mode is controlled. In Komornik's approach, the controlling signal always contains the whole frequency band covered by the modal discretization. So after initial impact, Komornik's feedback induces a fast decay of mechanical energy by imposing hard control on the first modes. Thus we observe on figure(H.2) a more oscillating mechanical energy than for IFF, the state still containing a large part of high frequency components.

Analysis of the control power shows that Komornik's feedback and Integral Force Feedback dissipate more or less the same energy, even if Komornik's feedback supplies energy to the system at some time steps. In fact, Komornik's feedback is a real active-control, IFF is active damping.

As a conclusion we can say that IFF and Komornik's feedback are equivalent

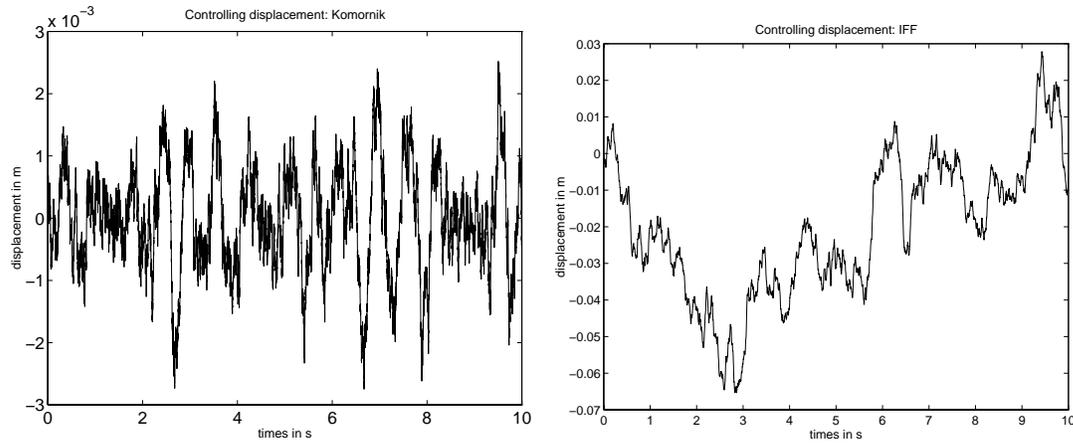


FIG. H.7 - *The controlling displacement of the beam subjected to a white noise and stabilized with Komornik's law (left) and IFF (right)*

to control the system for this kind of vibration. However, by keeping in mind that active damping is here less than the critical one, Komornik's feedback appears as a generalization of IFF (or DVF) for any value of imposed decay rate, as far as efficiency is concerned. Extensive testing is performed in [7] for various systems.

H.4.2 Control of the beam subjected to external loadings

In a second step of the testing procedure, the same different curves as before are presented in the case when the system is shaken at $x = \frac{\pi}{10}$ with a white Gaussian noise. Figures (H.5), (H.6), and (H.7) show respectively the w -norm, the mechanical energy and the controlling displacement under this external loading and Komornik's control (left) or IFF (right) simultaneously.

The controlling signals plotted on figure (H.7) are now different from one another. The controlling displacement for IFF is almost ten times larger than the one induced by Komornik's feedback. Furthermore, the IFF signal contains a large part of low frequency modulated displacement. Thus, to implement this control, we will need an activator with a very large amplitude capability. This very important low frequency content of the controlling displacement induces a hard perturbation in the w -norm (figure(H.5) right). In view of this particular norm, there is no any control at all. In fact, IFF induces an important contribution of the static mode which is a rigid body motion. This is why this low frequency modulation has no particular eigenfrequency.

For the w -norm, the very good efficiency of Komornik's feedback compared to this of IFF is noteworthy.

H.5 Concluding remarks

- Above numerical tests show that the new feedback law competes with the IFF strategy in the subcritical regime, as far as efficiency is concerned. Of course, it outperforms IFF in the supercritical regime since it is proved that it yields arbitrarily large effective damping. Notice that the one-dimensional case is a hard test for new algorithms since, at least for beams under traction-compression, the IFF or DVF strategy achieves exact controllability in a finite time and therefore proves somehow optimal. This property may not hold for the pure bending problem but IFF is still a fairly severe benchmark. Comparison between IFF and Komornik's law may lead to different conclusions for two-dimensional test problems.
- It turns out that Komornik's feedback in its original version induces an initial shock due to a lack of compatibility between initial and boundary conditions. This is not the case with the version of IFF that has been implemented. Clearly, a smooth variant of Komornik's law needs be designed.
- The question of stability or spill-over of Komornik's law has not been addressed. Choosing properly the various modal truncation levels involved in its definition may limit or even suppress instabilities.
- Experimental implementation of the new feedback is possible because of its standard structure. In fact, Komornik's law is nothing but a particular optimal control strategy except that no Riccati equation needs be solved. Moreover, the amplitude of imposed displacement remains very small.

Bibliographie

- [1] Y. Achkire and A. Preumont. Active tendon control of cable-stayed bridges. *J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25:585–597, 1996.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observability, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Cont. Optim.*, 30(5):1024–1065, 1992.
- [3] C. Bardos, T. Masrour, and F. Tatout. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte et la stabilisation du problème de l'élastodynamique. *C.R. Acad. Sci., Série 1*, t.320:1279–1281, 1995.
- [4] A. Benabdallah and M. Lenczner. Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle optimal distribué : estimation du taux de décroissance. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 319:691–696, 1994.
- [5] F. Bourquin. A numerical approach to the exact controllability of euler-navier-bernoulli beams. *Proceedings of the First World Conference on Structural Control, Pasadena (Californie)*, pages 120–129, 1994.
- [6] F. Bourquin. A numerical controllability test for distributed systems. *Journal of Structural Control*, 2:5–23, 1995.
- [7] F. Bourquin, J.-S. Briffaut, and J. Urquiza. Contrôle et stabilisation des structures : aspects numériques. In *Actes de l'Ecole CEA EDF INRIA sur les matériaux intelligents*, 1997.
- [8] F. Bourquin and V. Komornik. Faedo galerkin approach to the rapid boundary stabilization of distributed systems. 1997. in preparation.
- [9] J.-S. Briffaut. *méthodes numériques pour le contrôle et la stabilisation rapide des structures*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1999.
- [10] N. Burq. PhD thesis, Université Paris Sud Orsay, 1994.

- [11] A. Eljendy. Numerical approach to the exact controllability of hyperbolic systems. In J.-P. Zolesio, editor, *Lecture Notes in Control and Information Science*, volume 178. Springer Verlag, 1991.
- [12] G. Geymonat, P. Loreti, and V. Valente. Exact controllability of a shallow shell model. *Int. Series of Num. Math. vol 107*, 1992.
- [13] R. Glowinski, C.H. Li, and J.-L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (i) dirichlet control: description of the numerical methods. *Japan J. of Applied Math.*, 7(1), 1990.
- [14] H. Koch and D. Tataru. On the spectrum of hyperbolic semigroups. 1997. to appear.
- [15] V. Komornik. Stabilisation frontière rapide de systèmes distribués linéaires. *C.R.Acad. Sci. Paris, Série 1*, 321:433–437, 1995.
- [16] V. Komornik. Stabilisation rapide de problèmes d'évolution linéaires. *C.R.Acad. Sci. Paris, Série 1*, 321:581–586, 1995.
- [17] V. Komornik. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *Siam J. Control and Optimization*, 35(5):1591–1613, 1997.
- [18] J. Lagnese. *Boundary stabilization of thin plates*. SIAM Studies in Appl. Math., 1989.
- [19] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Differential and algebraic Riccati equations with applications to boundary/point control problems: continuous theory and approximation theory*, volume 164. Springer Verlag, 1991.
- [20] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de schrodinger. *J. Math. Pures Appl.*, 71:267–291, 1992.
- [21] G. Lebeau. *Equation des ondes amorties*. in Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, Maths-Physics book series. Kluwer, 1995.
- [22] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Prépublications de l'Université Paris-sud, Mathématiques*, (9540), 1995.
- [23] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, volume 1. Masson, Paris, 1988.
- [24] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, 30:1–68, 1988.
- [25] J. Zabczyk. *Mathematical control theory: an introduction*. Birkhauser, 1992.

Annexe I

Smoothed Fast Control Algorithms

F. Bourquin¹, J-S. Briffaut¹, M. Collet²

¹ Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil,
UMR113 LCPC/CNRS, Champs-sur-Marne, France

²Pôle Universitaire Léonard de Vinci, Paris La Défense, France

ABSTRACT

A modification of Komornik's active control strategy is presented. The original version of the control law is designed so as to achieve an arbitrarily large decay rate of the energy of the system. However, a lack of smoothness at time zero leads to short transient states the energy of which increases. To avoid this phenomenon, the parameters of the law are smoothly tuned to their nominal value. Numerical tests are presented and show the relevance of the new approach. The new strategy compares favourably with the Integral Force Feedback in terms of efficiency.

I.1 INTRODUCTION

Many active control strategies applied in mechanical engineering resort to collocated active damping like Direct Velocity Feedback (DVF) or Integral Force Feedback (IFF) [1] that insure a global stability and avoid spill-over in the absence of time delay between sensing and actuating, but may lack efficiency due to spatial localization of the damping effect, especially when exact controllability of the system does not hold. In this case, arbitrarily slowly decaying waves can travel

along the structure [76]. In the same way, the possible lack of exact controllability of the mechanical system under consideration underlies the extreme difficulty to apply non-located optimal active control on flexible plate-like structures. In particular, it may lead to a dramatic control spill-over. As a matter of fact, the infinite number of degrees of freedom puts forward the intrinsic properties of exact controllability and observability that must be satisfied in order to insure the reliability of the optimal control strategy. To be short, *exact controllability* is a necessary and sufficient condition for the existence of a feedback law yielding uniform exponential decay of the response. It implies the existence of at least one control such that the infinite horizon LQ functional is finite. This *finite cost condition* leads to a well-posed minimization problem, the solution of which is given in state feedback form through the unique positive solution of the standard algebraic Riccati equation [71].

Based on, or following, the initial work of J-L. Lions [83], many mathematical developments have addressed the controllability of a wide set of mechanical systems. To quote a few of them, see *e.g.* [14], [21], [72], [48], [18], [32] for plates, [10, 11] for shells, [67] for trusses and frames ... Moreover, necessary and sufficient conditions for the exact controllability of the wave equation have been derived in [7]. Extensions of this work have focussed on elastic structures [8] or Kirchhoff-Love plates [8].

In the case when this property holds, standard active damping will generally yield a uniform exponential decay of the energy of the system provided that a sufficiently large number of actuators is used. The decay rate can be estimated from below in many instances [14], [9], [13] (and included references), but upper bounds do also exist [13]. Therefore, the rate at which the energy decays cannot be larger than some *critical damping* that depends on the structure.

In order to achieve an arbitrarily large decay rate of the energy of an exactly controllable structure, Komornik has introduced a strategy which depends on two parameters ω and S that one can choose freely [13]. Since the uniform decay rate of the total energy is not smaller than ω , an arbitrarily fast stabilization of the system can be prescribed. This strategy can be implemented on line and does not require the solution of any Riccati equation. Therefore, it might pave the ground to a new class of control strategies for flexible structures. The first numerical implementation of this feedback law has been detailed in [16] where a displacement was imposed. Numerical tests on a single beam controlled at one endpoint showed comparable efficiency for this feedback and for the IFF for small values of ω , *i.e.* below the critical damping of the IFF. Since Komornik's feedback is not limited by any such critical damping, it truly extends the IFF.

However, for large values of ω , the total energy of the beam experiences a large jump at initial time (fig I.2). This is due to the following facts: first, the feedback imposes a displacement which is not compatible with the initial state (fig I.1), and, second, the actuator forces must be large in order to stabilize the structure in a very short time. Of course, shortly after the initial shock, a very

fast decay of the energy of the system can be observed. On the other hand, control spill-over will show up as soon as a finite number of modes is kept to carry out the computation of the control. It turns out that this effect is largely amplified for large values of ω (fig I.2).

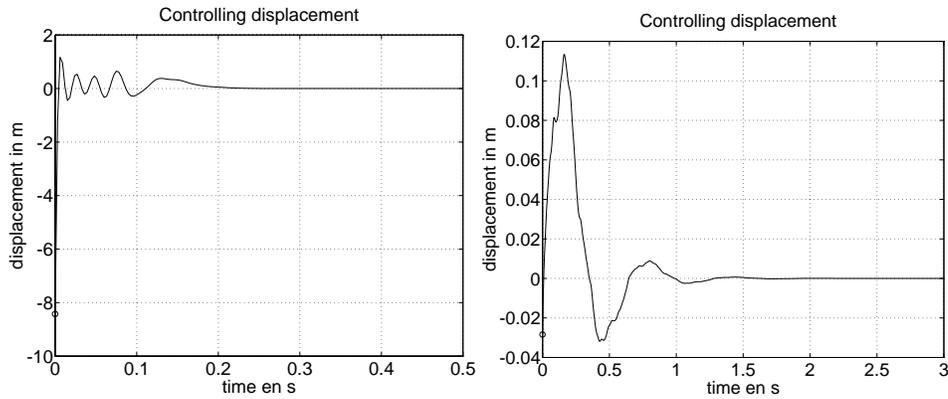


FIG. I.1 - The control law of the original Komornik's law with $\omega = 20$ (left) and $\omega = 2$ (right). The first 5 modes are controlled and simulated.

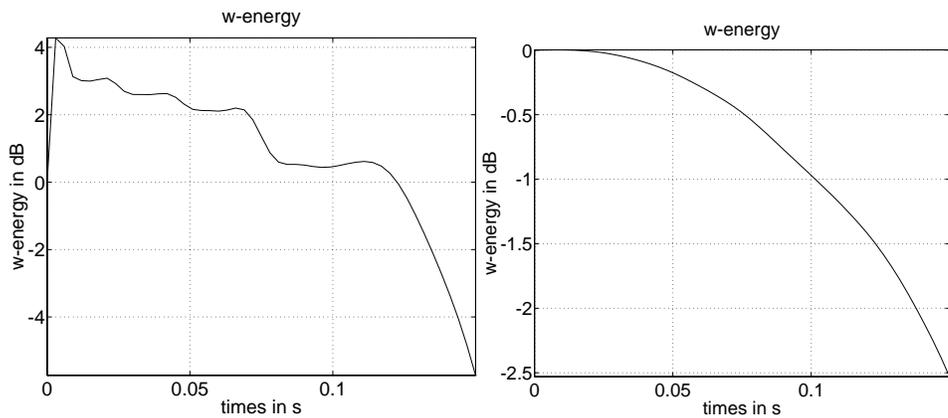


FIG. I.2 - The w -energy with the original Komornik's law with $\omega = 20$ (left) and $\omega = 2$ (right): the first 5 modes are controlled and simulated.

The purpose of our contribution is therefore to propose a variant of Komornik's law that keeps the energy of the system below the initial level and decreases the control spill-over while preserving the global efficiency of the original version. The basic idea is to let ω vary in time.

This paper is organized as follows: section 2 is devoted to a brief presentation of Komornik's law applied to a beam. The variant is explained in Section 3. The computational framework is briefly explained in section 4. Section 5 describes various numerical tests. Finally, concluding remarks can be found in section 6.

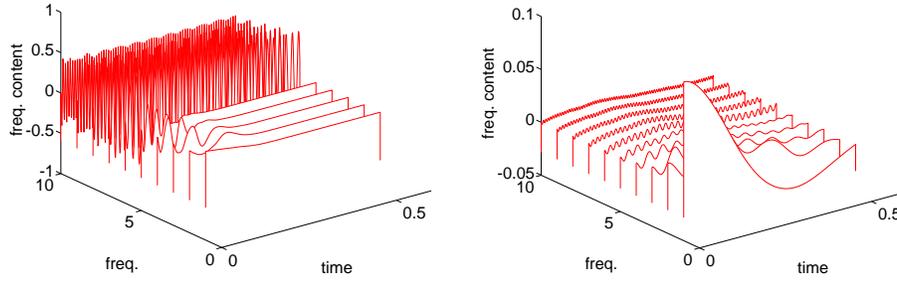


FIG. I.3 - Evolution of the Fourier coefficients of the controlled beam illustrating the control spill-over due to the original Komornik's law with $\omega = 20$ (left) and $\omega = 2$ (right) : the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 10 modes.

I.2 KOMORNIK'S FEEDBACK LAW

Let us consider a simply supported Euler-Navier-Bernoulli beam of length L . Let ρ , E , A , I denote its mass density, Young's modulus, cross-sectional area and inertia respectively. For the sake of simplicity, the mass density per unit length ρA and the stiffness EI are supposed to be constant. The transverse displacement $y(x, t)$ satisfies

$$\begin{cases} \rho A \partial_{tt} y + EI \partial_{xxxx} y = 0 & [0, L] \times [0, T] \\ y(0, t) = v(t) & [0, T] \\ y(L, t) = \partial_{xx} y(0, t) = \partial_{xx} y(L, t) = 0 & [0, T] \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x) & [0, L]. \end{cases} \quad (I.2.1)$$

Here the beam is controlled through the imposed transverse displacement of the left end point, and the horizon T can be arbitrarily large. In order to design the state feedback law $v(t) = \mathcal{F}(y(t), \partial_t y(t))$, the adjoint state is introduced: let $\varphi(x, s)$ denote the unique solution of the beam equation

$$\begin{cases} \rho A \partial_{ss} \varphi + EI \partial_{xxxx} \varphi = 0 & [0, L] \times [0, S] \\ \varphi(0, s) = \varphi(L, s) = \partial_{xx} \varphi(0, s) = \partial_{xx} \varphi(L, s) = 0 & [0, S] \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \partial_s \varphi(x, 0) = \varphi^1(x) & [0, L], \end{cases} \quad (I.2.2)$$

where s denotes a fictitious time, and S a fictitious time horizon. The displacement field φ depends linearly on the initial conditions $\{\varphi^0, \varphi^1\}$. Hence, for any value of ω , one can define the bilinear controllability grammian

$$a_{\omega, S}(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}) = \int_0^S e^{-2\omega s} EI \partial_{xxx} \varphi(0, s) EI \partial_{xxx} \hat{\varphi}(0, s) \frac{ds}{\rho A}, \quad (I.2.3)$$

where $\hat{\varphi}$ denotes the solution of (2.2) with initial conditions $\{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}$. The continuity and coerciveness properties of this grammian do not depend on ω .

For $\omega = 0$, and for the two-dimensional simply supported plate, Lebeau [18] proved them over suitable infinite-dimensional spaces of smooth enough functions. Essentially, φ^0 (resp. φ^1) should possess a third (resp. first) square summable derivative along the beam axis. Hence, for any smooth enough displacement and velocity fields z^0 and z^1 , there exists a unique solution $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ of the variational equation

$$a_{\omega,S}(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}) = \int_0^L (z^1 \hat{\varphi}^0 - z^0 \hat{\varphi}^1) \quad \forall \{\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1\}. \quad (\text{I.2.4})$$

Define the operator \mathcal{L} by just writing $\{\varphi^0, \varphi^1\} = \mathcal{L}\{z^0, z^1\}$ and denote by $P_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ the projection on the first component, *i.e.* $P_1(\{a, b\}) = a$. In this setting, the proposed feedback reads

$$v(t) = -EI \partial_{xxx} (P_1 \mathcal{L} \{y(t), \partial_t y(t)\}) (x = 0). \quad (\text{I.2.5})$$

Provided the function $e^{-2\omega s}$ is slightly modified, Komornik proved [13] well-posedness for related equations as well as the estimate $\|\{y(t), \partial_t y(t)\}\|_\omega^2 \leq C e^{-2\omega t} \|\{y^0, y^1\}\|_\omega^2$ for some constant C , where $\|\cdot\|_\omega^2$ stands for a suitable energy of the state, that will be called the *w-energy* in the sequel. The constant C depends exponentially on ω [7].

Of course, there is no reason why $y^0(x = 0) = v(t = 0)$ although this condition would be requested for compatibility. Numerical tests show that this condition is almost never satisfied. The *w-energy* allows for this incompatibility and the response of the structure is defined in a "very weak" sense. But locally very strong stresses may develop and deteriorate the structure or propagate through it.

I.3 SMOOTHING PROCEDURES

However, this problem proves much less serious for small values of ω (fig I.1, I.2). Hence, the idea is to start with a small value of ω in order to avoid the initial shock and to increase ω up to its nominal value ω_0 corresponding to the expected decay rate. Let T^ω stands for the start-up time. Then set $\omega = \omega(t)$, where $\omega(0) = 0$, and $\omega(t) = \omega_0$ for $t \geq T^\omega$. For example, take $\omega(t) = -2\omega_0 \frac{t^3}{(T^\omega)^3} + 3\omega_0 \frac{t^2}{(T^\omega)^2}$ for $t \in [0, T^\omega]$. Then $\omega(t)$ has a continuous derivative. This feature is of importance. Furthermore, a cut-off function $\chi(t)$ of the same form as $\omega(t)$ is introduced such that $\chi(0) = 0$, and $\chi(t) = 1$ if $t \geq T^\chi$ for some start-up time T^χ . Let the operator \mathcal{L}_t be defined as \mathcal{L} in (2.4), where $a_{\omega,S}$ is replaced by $a_{\omega(t),S}$. Now the proposed control reads

$$v(t) = -\chi(t) EI \partial_{xxx} (P_1 \mathcal{L}_t \{y(t), \partial_t y(t)\}) (x = 0). \quad (\text{I.3.1})$$

The original control is smoothed twice. The function $\chi(t)$ mimicks a usual experimental control procedure. Of course, above smoothing tricks can be put to work independently.

I.4 COMPUTATIONAL ASPECTS

In view of computing this feedback, an *ad hoc* formulation of the beam equation and a suitable mode superposition method are introduced, as in [16]. Let $(\lambda_i, \psi_i)_{i=1}^{+\infty}$ denote the family of eigenvalues and normal modes of the simply supported beam (when $v(t) = 0$), and $V_N = \text{Span} \{ \psi_i \}_{i=1, N}$. The modes are assumed

to be normalized so as to have a unit mass. For every pair of functions $\{z^0, z^1\}$, define $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}(t) \in V_N \times V_N$ as the solution of the variational equation

$$a_{\omega(t), S}(\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}(t), \{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\}) = \int_0^L (z^1 \hat{\varphi}_N^0 - z^0 \hat{\varphi}_N^1) \quad \forall \{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\} \in V_N \times V_N \quad (\text{I.4.1})$$

and set $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}(t) = \mathcal{L}_{t, N} \{z^0, z^1\}$. Then, similarly to [16], for any pair of integers M and N , an approximation $y_{M, N}(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \psi_i$, (with smooth α_i) of the displacement of the controlled beam satisfies the equation

$$\begin{cases} \int_0^L \rho A \partial_{tt} y_{M, N}(t) w_M + \int_0^L EI y_{M, N}(t) \partial_{xxxx} w_M = -v_{M, N}(t) EI \partial_{xxx} w_M(x=0) \\ \quad \forall w_M \in V_M \\ v_{M, N}(t) = -\chi(t) EI \partial_{xxx} P^1 \left(\mathcal{L}_{t, N} \{y_{M, N}(t), \partial_t y_{M, N}(t)\} \right) (x=0) \\ y_{M, N}(0) = P^M y^0, \quad \partial_t y_{M, N}(0) = P^M y^1, \end{cases} \quad (\text{I.4.2})$$

where P^M stands for the projection over the first M modes of the beam. We are not able to prove mathematically anything so far about the approximate displacement field $y_{M, N}(t)$ for this variant, except for $M = N$. The approximation of the control law, *i.e.* the resolution of (4.1) is detailed in [16] and [13] for a related problem.

I.5 NUMERICAL TESTS

Since the variant presented here cares about initial time, white-noise excitation over a long period of time will not be considered. As a matter of fact, it behaves in the same way as the original control law that has been investigated at length in [16]. Therefore the decay of the controlled vibration of the beam starting from the initial conditions $y^0 = \sum_{i=1}^N \frac{0.1}{i^{2.6}} \psi_i(x)$ and $y^1 = 0$ is studied. In this case, the initial conditions are of finite energy, even if N tends to infinity. Among various outputs of the simulation, the *w-energy* can be expressed as $\|\{z_M(t), \partial_t z_M(t)\}\|_w^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{(i\pi)^2} \left(\gamma_i^2 + \frac{1}{(i\pi)^4} (\partial_t \gamma_i)^2 \right)$ if $z_M(t) = \sum_{i=1}^M \gamma_i(t) \psi_i$. Note that this *w-energy* is not equivalent to the usual mechanical energy except, of course, for a given number of modes. All the physical constants are set equal to one.

First, the effect of increasing the expected decay rate ω in the original version of Komornik's law is presented: figure I.1 shows that the lack of compatibility between the initial state of the system and the imposed boundary control may

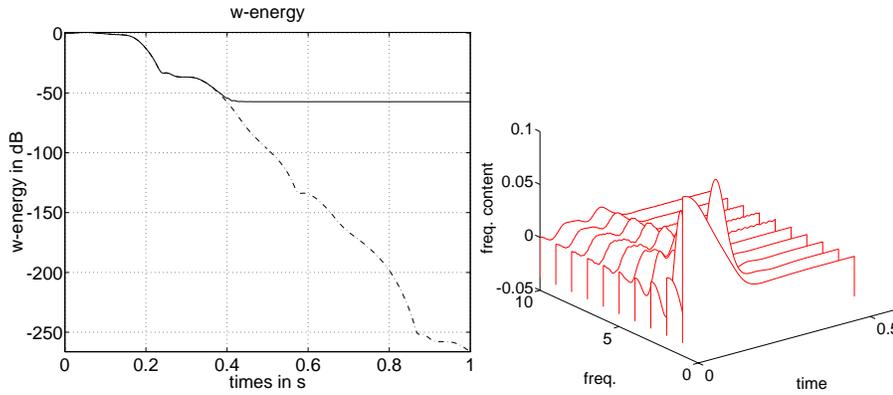


FIG. I.4 - The smoothing effect of control cut-off with constant ω : global w -energy decrease (left) and control spill-over (right). Here, $\omega_0 = 20$, $T^\chi = 0.1$, and the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 5 or 10 modes

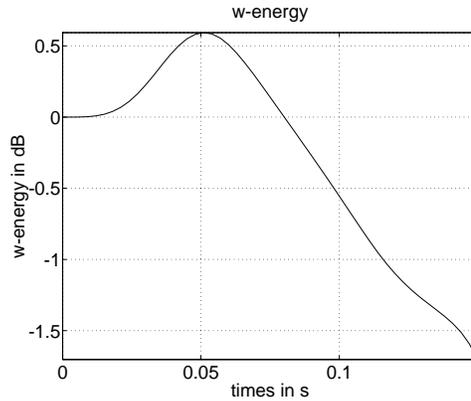


FIG. I.5 - The effect of control cut-off with constant ω : initial increase of the w -energy. Here, $\omega_0 = 20$, $T^\chi = 0.1$, and the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 10 modes

dramatically increase with ω . Recall that the initial state vanishes at both ends of the beam. Figure I.2 shows that the initial increase of the w -energy is more serious when ω is large. Furthermore, figure I.3 shows that the control spill-over effect increases with ω . By control spill-over, we mean as usual the amount of energy transferred to the uncontrolled modes because of the imposed displacement that generically excites all the modes of the system.

Let us now investigate the effect of both smoothing tricks : first, the effect of the cut-off function $\chi(t)$ is shown on fig I.4. Then the effect of variable ω is displayed on fig I.6. Of course, combining both tricks may enhance each one of them (fig I.7). It turns out that above strategies prove almost equally efficient but absolutely mandatory in view of suppressing the control spill-over. However, tuning $\omega(t)$ seems to enforce the energy to decrease, whereas introducing the

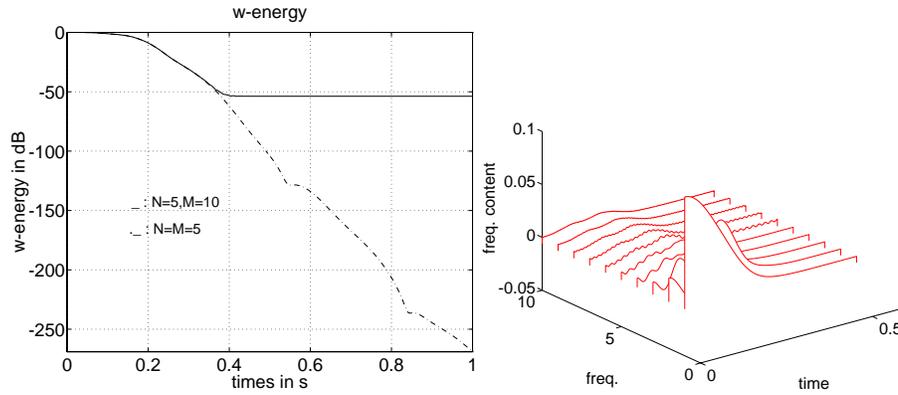


FIG. I.6 - The effect of variable ω without control cut-off: w -energy decrease (left) and spill-over (right). Here, $\omega_0 = 20$, $T^\omega = 0.1$ and the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 5 or 10 modes.

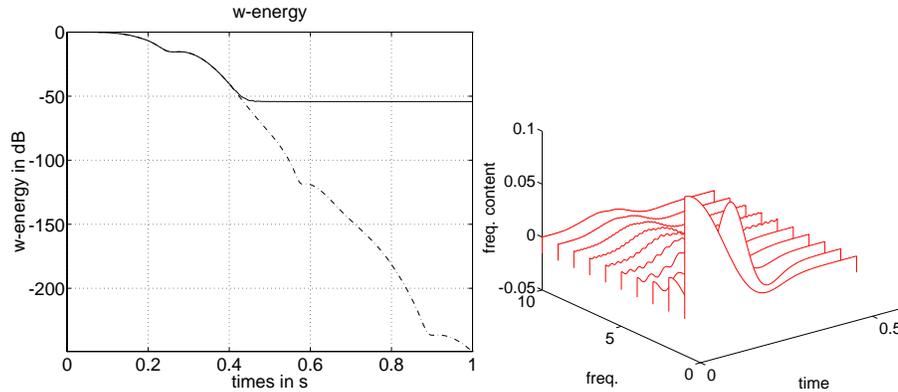


FIG. I.7 - The combined effect of control cut-off and variable ω : w -energy decrease (left) and spill-over (right). Here, $\omega_0 = 20$, $T^\omega = T^\chi = 0.1$, and the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 5 or 10 modes

cut-off function $\chi(t)$ does not enable to achieve this goal (fig I.5). Again this observation is not based on any mathematical basis so far. On fig I.8 left, the residual energy due to control spill-over is shown to be insensitive to the parameters T^ω and T^χ provided they are large enough (0.1 in this case but this value may strongly depend on the initial conditions and on ω_0). In this situation, the smoothing procedures prove highly efficient since the residual energy is several orders of magnitude smaller than the initial one. This residual energy cannot be removed since the amplitude of the control becomes much to small.

On the other hand, the time T_s at which the residual energy is reached increases smoothly with T^ω and T^χ (fig I.8 right). One therefore should choose the minimal start-up times yielding the minimum residual energy.

Finally, a comparison of the IFF (or DVF) and Komornik's version is carried

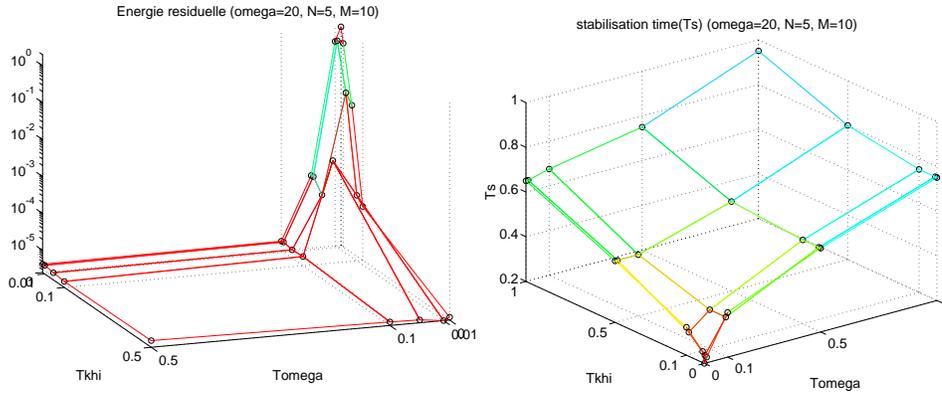


FIG. I.8 - The residual w -energy due to control spill-over as a function of T^{ω} and T^{χ} (left), and the necessary time T_s to reach this residual w -energy (right). Here, $\omega_0 = 20$ and the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 10 modes

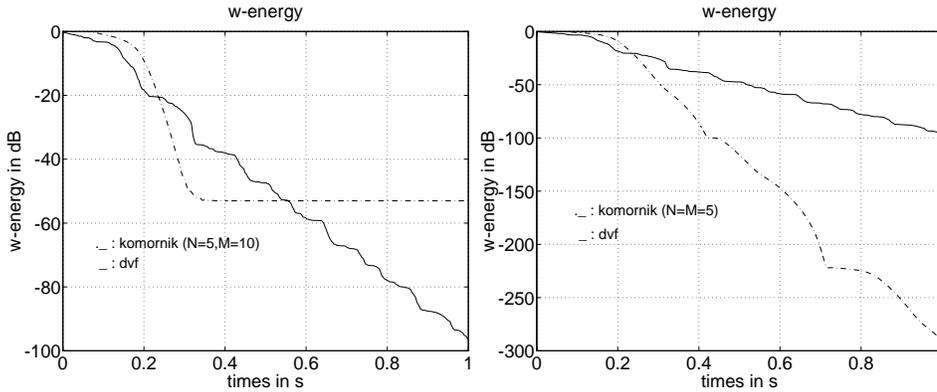


FIG. I.9 - The energy of the beam controlled with critically tuned IFF, and with the Komornik's variant where $\omega_0 = 20$, $T^{\omega} = T^{\chi} = 0.1$, the first 5 modes are controlled, the response is expanded on the first 10 modes (left) or on the first 5 modes (right)

out. The DVF is tuned so as to develop its critical damping. The results on figure I.9 show that for this value of ω_0 the proposed variant enables the w -energy of the beam to reach -50dB almost twice as fast as the DVF (fig I.9 left). Of course, there is no spill-over for the DVF by definition and after a while the DVF enables to remove more energy than the proposed variant. Moreover, the norms involved are not exactly the same, therefore further investigations are needed, especially experimental ones. In the case when a given number of modes is really of interest, the other ones being strongly damped or uninteresting, the proposed variant proves extremely efficient(fig I.9 right).

I.6 CONCLUDING REMARKS

- i) Above numerical tests show that the new feedback law outperforms the DVF in the supercritical regime, as far as efficiency is concerned. Moreover, the smoothing procedure annihilates the control spill-over. Observation spill-over, which depends on the sensors, is not addressed here. Therefore stability is not guaranteed especially in the absence of damping.
- ii) It is not clear so far how to choose the optimal values of T^x and T^ω *a priori*.
- iii) A parameter free variant with build-in smoothness is under construction.

Bibliographie

- [1] Y. Achkire and A. Preumont. Active tendon control of cable-stayed bridges. *J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25:585–597, 1996.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observability, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Cont. Optim.*, 30(5):1024–1065, 1992.
- [3] C. Bardos, T. Masrour, and F. Tatout. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte et la stabilisation du problème de l'élastodynamique. *C.R. Acad. Sci., Série 1*, t.320:1279–1281, 1995.
- [4] A. Benabdallah and M. Lenczner. Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle optimal distribué : estimation du taux de décroissance. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 319:691–696, 1994.
- [5] F. Bourquin. A numerical approach to the exact controllability of euler-bernoulli beams. *Proceedings of the First World Conference on Structural Control, Pasadena (Californie)*, pages 120–129, 1994.
- [6] F. Bourquin, J-S. Briffaut, and M. Collet. On the feedback stabilization : Komornik's method. In *Proceedings of the second international symposium on active control in mechanical engineering, Lyon, France, 1997*.
- [7] J-S. Briffaut. *méthodes numériques pour le contrôle et stabilisation rapide des structures*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1998. in preparation.
- [8] N. Burq. PhD thesis, Université Paris Sud Orsay, 1994.
- [9] I. Figueiredo and E. Zuazua. Exact controllability and asymptotic limit for thin plates. *Asymptotic Analysis*, 12(3):213–252, 1996.
- [10] G. Geymonat, P. Loreti, and V.Valente. Contrôlabilité exacte d'un modèle de coque mince. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 313:81–86, 1991.
- [11] G. Geymonat, P. Loreti, and V.Valente. Exact controllability of a shallow shell model. *Int. Series of Num. Math. vol 107*, 1992.

- [12] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. *Port. Math.*, 47(4):423–429, 1990.
- [13] V. Komornik. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *Siam J. Control and Optimization*, 35(5):1591–1613, 1997.
- [14] J. Lagnese. *Boundary stabilization of thin plates*. SIAM Studies in Appl. Math., 1989.
- [15] J. Lagnese and G. Leugering. *Modelling, analysis, and control of dynamic elastic multi-link structures*, volume 2. Birkhauser, Boston, 1994.
- [16] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Differential and algebraic Riccati equations with applications to boundary/point control problems: continuous theory and approximation theory*, volume 164. Springer Verlag, 1991.
- [17] I. Lasiecka and R. Triggiani. Sharp trace estimates for solutions to kirchhoff and euler-bernoulli equations. *Appl. Mat. Optim.*, 28:277–306, 1993.
- [18] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de schrodinger. *J. Math. Pures Appl.*, 71:267–291, 1992.
- [19] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Prépublications de l'Université Paris-sud, Mathématiques*, (9540), 1995.
- [20] J-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, 30:1–68, 1988.
- [21] J-P. Puel and M. Tucsnak. Boundary stabilization for the von karman equations. *SIAM J. Control Optimization*, 33(1):255–273, 1995.

Annexe J

$\alpha_N(T)$ est linéaire en T

Comme nous l'avons plusieurs fois souligné, plus le temps de contrôlabilité T est grand et plus il est facile de contrôler la poutre et donc plus la constante $C_1(T)$ de l'inégalité directe est grande et a fortiori plus la suite α_N , qui dépend par définition elle aussi de T , est grande.

En fait, nous allons montrer que pour tout entier naturel N strictement positif, la suite $\alpha_N(T)$ dépend linéairement du temps, ce qui revient à montrer la propriété suivante :

Propriété J.1

$$\forall T', T > 0, \forall N > 0, \quad \alpha_N(T) = \frac{T}{T'} \alpha_N(T'). \quad (\text{J.0.1})$$

Preuve Soient $\{\varphi_N^0, \varphi_N^1\}$ telles que :

$$\varphi_N^0(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \theta_i(x), \quad \varphi_N^1(x) = \sum_{i=1}^N \delta_i \theta_i(x), \quad (\text{J.0.2})$$

les données initiales du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \varphi_N''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \varphi_N}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \varphi_N(0, t) = \varphi_N(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \varphi_N}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \varphi_N(x, 0) = \varphi_N^0(x), \quad \varphi_N'(x, 0) = \varphi_N^1(x) & \forall x \in (0, L), \end{array} \right. \quad (\text{J.0.3})$$

qui admet pour solution unique :

$$\varphi_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \left(\gamma_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right) \theta_i(x). \quad (\text{J.0.4})$$

On choisit alors comme contrôle HUM approché :

$$v_N(t) = EI \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x^2}(t, L), \quad (\text{J.0.5})$$

qui s'exprime en fonction des données initiales du problème adjoint de la façon suivante :

$$v_N(t) = \sum_{i=1}^N \left(\gamma_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right) m_i. \quad (\text{J.0.6})$$

Si l'on note $\{\hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i\}$ avec :

$$\hat{\gamma}_i = \gamma_i, \quad \hat{\delta}_i = \frac{T'}{T} \delta_i, \quad \forall i \in [1, \dots, N], \quad (\text{J.0.7})$$

les composantes de $\{\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1\}$ dans la base canonique de $V_N \times V_N$ sont les données initiales du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho A \hat{\varphi}_N''(x, t) + EI \frac{\partial^4 \hat{\varphi}_N}{\partial x^4}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ \hat{\varphi}_N(0, t) = \hat{\varphi}_N(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_N}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \hat{\varphi}_N}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T), \\ \hat{\varphi}_N(x, 0) = \hat{\varphi}_N^0(x), \quad \hat{\varphi}_N'(x, 0) = \hat{\varphi}_N^1(x) & \forall x \in (0, L), \end{array} \right. \quad (\text{J.0.8})$$

qui admet pour solution unique :

$$\hat{\varphi}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \left(\gamma_i \cos\left(t \frac{T'}{T} \sqrt{\lambda_i}\right) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(t \frac{T'}{T} \sqrt{\lambda_i}\right) \right) \theta_i(x). \quad (\text{J.0.9})$$

Le contrôle HUM qui lui correspond est alors :

$$\hat{v}_N(t) = \sum_{i=1}^N \left(\gamma_i \cos\left(t \frac{T'}{T} \sqrt{\lambda_i}\right) + \frac{\delta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(t \frac{T'}{T} \sqrt{\lambda_i}\right) \right) m_i. \quad (\text{J.0.10})$$

On a donc par définition de v_N , l'égalité :

$$\hat{v}_N(t) = v_N\left(t \frac{T'}{T}\right), \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{J.0.11})$$

et par conséquent :

$$\int_0^T \hat{v}_N^2(t) dt = \int_0^T v_N^2\left(t \frac{T'}{T}\right) dt = \frac{T}{T'} \int_0^{T'} v_N^2(t) dt. \quad (\text{J.0.12})$$

En utilisant cette dernière égalité, il vient :

$$\begin{aligned}\alpha_N(T) &= \min_{(\hat{\varphi}_N^0, \hat{\varphi}_N^1) \in V^N} \left(\frac{\int_0^T \hat{v}_N^2(t) dt}{\|\varphi_N^0, \varphi_N^1\|^2} \right) = \frac{T}{T'} \min_{(\varphi_N^0, \varphi_N^1) \in V^N} \left(\frac{\int_0^{T'} v_N^2(t) dt}{\|\varphi_N^0, \varphi_N^1\|^2} \right) \\ &= \frac{T}{T'} \alpha_N(T').\end{aligned}\tag{J.0.13}$$

□

Remarque J.1 On vérifie numériquement cette propriété pour la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli, mais également pour les exemples de treillis de poutres d'Euler-Navier-Bernoulli auxquels nous avons appliqué le test numérique de contrôlabilité exacte (voir chapitre 6).

Annexe K

Estimations d'erreurs pour l'élément structurant

On peut évidemment appliquer le test de contrôlabilité exacte à l'élément structurant pour nos multistruktures. Pour la poutre d'Euler-Navier-Bernoulli, on a contrôlabilité exacte par conséquent selon le test la suite α_n vérifie le **cas 1**. Grâce aux estimations des théorèmes 1.5 et 1.6 (voir paragraphes 1.6.4 et 1.5 du chapitre 1), nous allons pouvoir obtenir :

- une estimation de la vitesse de convergence de la suite α_n vers α (propriété K.1)
- une estimation sur la convergence de $\alpha_{n,h}$ vers α_n (propriété K.2)

K.1 Estimation de la vitesse de convergence de

α_n

Propriété K.1

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\alpha_n - \alpha| \leq \frac{C}{n^4}. \quad (\text{K.1.1})$$

DÉMONSTRATION :

On rappelle tout d'abord que par définition, on a :

$$\forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_1, \quad Q(\{\varphi^0, \varphi^1\}) = \frac{\|v\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_1}^2} \quad (\text{K.1.2})$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall \{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n, \quad Q(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}) = \frac{\|v_n\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2}. \quad (\text{K.1.3})$$

Enfin, pour alléger les calculs on note dans cette démonstration :

$$R_n = Q \left(\{ \varphi_n^0, \varphi_n^1 \} \right) - Q \left(\{ \varphi^0, \varphi^1 \} \right). \quad (\text{K.1.4})$$

Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme K.1

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |R_n| \leq \frac{C}{n^4}. \quad (\text{K.1.5})$$

DÉMONSTRATION :

On a :

$$R_n = \frac{\|v_n\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2} - \frac{\|v\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_1}^2}, \quad (\text{K.1.6})$$

qui se décompose en

$$\begin{aligned} R_n &= \|v\|_{L^2(0,T)}^2 \left(\frac{1}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2} - \frac{1}{\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_1}^2} \right) \\ &\quad + \frac{\|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 - \|v\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2}, \end{aligned} \quad (\text{K.1.7})$$

soit enfin :

$$R_n = \frac{\|v\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2} \Delta_n \quad (\text{K.1.8})$$

avec

$$\Delta_n = \left(\frac{\|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 - \|v\|_{L^2(0,T)}^2}{\|v\|_{L^2(0,T)}^2} + \frac{\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_1}^2 - \|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2}{\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{E_1}^2} \right). \quad (\text{K.1.9})$$

Or on a démontré les estimations suivantes (théorème 1.5 du paragraphe 1.5 du chapitre 1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exists C > 0, \quad \left\| \{ \varphi_n^0, \varphi_n^1 \} - \{ \varphi^0, \varphi^1 \} \right\|_{E_1} \leq \frac{C}{n^2}, \quad (\text{K.1.10})$$

$$\exists \tilde{C} > 0, \quad \|v_n - v\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{\tilde{C}}{n^2}. \quad (\text{K.1.11})$$

on a donc a fortiori :

$$\exists C > 0, \quad \left\| \{ \varphi_n^0, \varphi_n^1 \} \right\|_{E_1}^2 - \left\| \{ \varphi^0, \varphi^1 \} \right\|_{E_1}^2 \leq \frac{C}{n^4}, \quad (\text{K.1.12})$$

$$\exists \tilde{C} > 0, \quad \|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 - \|v\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \frac{\tilde{C}}{n^4}. \quad (\text{K.1.13})$$

On obtient l'estimation recherchée en appliquant ces deux estimations à l'égalité (K.1.8). \square

On a trivialement :

$$\forall \{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_1, \quad \min_{\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n} (R_n) = \alpha_n - Q(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}), \quad (\text{K.1.14})$$

donc

$$\alpha_n - \alpha = \min_{\{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_1} \left(\min_{\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n} R_n \right). \quad (\text{K.1.15})$$

Mais pour tout $\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n$ et $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_1$:

$$R_n = Q(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}) - Q(\{\varphi^0, \varphi^1\}) \geq 0, \quad (\text{K.1.16})$$

par conséquent, il vient d'après l'égalité (K.1.15) et l'estimation (K.1.5) du lemme K.1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n - \alpha = \min_{\{\varphi^0, \varphi^1\} \in E_1} \left(\min_{\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n} |R_n| \right) \leq \frac{C}{n^4}. \quad (\text{K.1.17})$$

\square

K.2 Estimation d'erreur de $\alpha_{n,h}$ en fonction de h

Propriété K.2

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists C > 0, \forall h > 0, \quad |\alpha_{n,h} - \alpha_n| \leq Ch^4. \quad (\text{K.2.18})$$

DÉMONSTRATION :

On rappelle tout d'abord que par définition :

$$\begin{aligned} \forall \{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \in V^{n,h}, \quad Q(\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}) &= \frac{\|v_{n,h}\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\|_{E_1}^2}, \\ \forall \{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n, \quad Q(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}) &= \frac{\|v_n\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2}. \end{aligned} \quad (\text{K.2.19})$$

Enfin, pour alléger les calculs on note dans cette démonstration :

$$R_{n,h} = Q(\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}) - Q(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}). \quad (\text{K.2.20})$$

Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme K.2

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists C > 0, \forall h > 0, \quad |R_{n,h}| \leq Ch^4. \quad (\text{K.2.21})$$

DÉMONSTRATION :

On a :

$$R_{n,h} = \frac{\|v_{n,h}\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\|_{E_1}^2} - \frac{\|v_n\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2}, \quad (\text{K.2.22})$$

qui se décompose en :

$$\begin{aligned} R_{n,h} &= \frac{\|v_{n,h}\|_{L^2(0,T)}^2 - \|v_n\|_{L^2(0,T)}^2}{\|\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\|_{E_1}^2} \\ &\quad + \|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 \left(\frac{1}{\|\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\|_{E_1}^2} - \frac{1}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{K.2.23})$$

soit

$$\begin{aligned} R_{n,h} &= \frac{1}{\|\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\|_{E_1}^2} \left(\|v_{n,h}\|_{L^2(0,T)}^2 - \|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 \left(\frac{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2 - \|\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\|_{E_1}^2}{\|\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\|_{E_1}^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{K.2.24})$$

Or on a démontré au théorème 1.6 (au paragraphe 1.6 du chapitre 1) les estimations suivantes :

$$\exists C > 0, \quad \left\| \{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} - \{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \right\|_{E_1} \leq Ch^2, \quad (\text{K.2.25})$$

$$\exists \tilde{C} > 0, \quad \|v_{n,h} - v_n\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}h^2. \quad (\text{K.2.26})$$

on a donc a fortiori :

$$\exists C > 0, \quad \left\| \{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \right\|_{E_1}^2 - \left\| \{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \right\|_{E_1}^2 \leq Ch^4, \quad (\text{K.2.27})$$

$$\exists \tilde{C} > 0, \quad \|v_{n,h}\|_{L^2(0,T)}^2 - \|v_n\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \tilde{C}h^4. \quad (\text{K.2.28})$$

Par conséquent, il suffit pour conclure d'appliquer ces deux dernières estimations à l'égalité (K.2.24). \square

On a trivialement, pour tout $\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n$,

$$\min_{\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \in V^{n,h}} R_{n,h} = \alpha_{n,h} - Q\left(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\right), \quad (\text{K.2.29})$$

donc :

$$\alpha_{n,h} - \alpha_n = \min_{\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n} \left(\min_{\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \in V^{n,h}} R_{n,h} \right). \quad (\text{K.2.30})$$

Mais on a de plus :

$$Q\left(\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\right) \geq \alpha_{n,h} > 0, \quad \forall \{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \in V^{n,h} \quad (\text{K.2.31})$$

et pour tout $\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \in V^{n,h}$ et $\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n$:

$$Q\left(\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\}\right) \geq Q\left(\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\}\right). \quad (\text{K.2.32})$$

Par conséquent, il vient d'après l'égalité (K.2.30) et l'estimation (K.2.21) du lemme K.2 :

$$\alpha_{n,h} - \alpha_n = \min_{\{\varphi_n^0, \varphi_n^1\} \in V^n} \left(\min_{\{\varphi_{n,h}^0, \varphi_{n,h}^1\} \in V^{n,h}} |R_{n,h}| \right) \leq Ch^4. \quad (\text{K.2.33})$$

□

Bibliographie

- [1] S. Agmon. *Lecture on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand Mathematical Studies, 1965.
- [2] M. Asch and G. Lebeau. Aspects géométriques de la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes - une étude numérique. *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Contrôle, Optimization et Calcul des variations*, 3:163–212, 1998.
- [3] F. Conrad B. d'Andrea Novel, F. Boustany and B.P. Rao. Feedback stabilization of a hybrid pde-ode system: Application to an overhead crane. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7, 1994.
- [4] E. Balmès. *Structural dynamics toolbox: User's guide*. Scientific Software, 1995.
- [5] E. Balmès. *Modèles analytiques réduits et modèles expérimentaux complets en dynamique des structures*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1997. Mémoire d'habilitation.
- [6] C. Bardos, F. Bourquin, and G. Lebeau. Calcul de dérivées normales et méthode de galerkin appliquée au problème de la contrôlabilité exacte. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 313:757–760, 1991.
- [7] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observability, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Cont. Optim.*, 30(5):1024–1065, 1992.
- [8] C. Bardos, T. Masrour, and F. Tatout. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte et la stabilisation du problème de l'élastodynamique. *C.R. Acad. Sci., Série 1*, t.320:1279–1281, 1995.
- [9] A. Benabdallah and M. Lenczner. Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle optimal distribué: estimation du taux de décroissance. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 319:691–696, 1994.

- [10] A. Benabdallah and M. Lenczner. Estimation du taux de décroissance pour la solution de problèmes de stabilisation, application à la stabilisation de l'équation des ondes. *Math. Model. and Num. Analysis*, 30(5):607–635, 1996.
- [11] A. Benabdallah and D. Teniou. Exponential stability of a von karman model with thermal effects. *Electronic J. of Diff. Equations*, 1998(7):1–13, 1998.
- [12] F. Bourquin. Approximation theory for the problem of exact controllability of the wave equation. In *Proc. Second SIAM Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Newark(Delaware)*, pages 103–112, Paris, 1993. SIAM.
- [13] F. Bourquin. A numerical approach to the exact controllability of euler-navier-bernoulli beams. *Proceedings of the First World Conference on Structural Control, Pasadena (Californie)*, pages 120–129, 1994.
- [14] F. Bourquin. A numerical controllability test for distributed systems. *J. of Structural Control*, 2:5–23, 1995.
- [15] F. Bourquin and J.-S. Briffaut. Contrôlabilité exacte des structures continues : un test numérique. In *Actes du troisième colloque national en Calcul des Structures, Giens (Var), France*, number 2, pages 793–798. Ouest Éditions, Presses Académiques de l'Ouest, 1997.
- [16] F. Bourquin, J.-S. Briffaut, and M. Collet. On the feedback stabilization : Komornik's method. In *Proceedings of the second international symposium on active control in mechanical engineering, Lyon, France*, 1997.
- [17] F. Bourquin, J.-S. Briffaut, and M. Collet. Smoothed fast control algorithms. In *Proceedings of the second world conference on structural control, Kyoto, Japan*, 1998.
- [18] F. Bourquin, J.-S. Briffaut, and J. Urquiza. Contrôlabilité des structures continues : aspects numériques. In *Actes de l'École des ondes: Méthodes de contrôle pour les phénomènes de propagation d'ondes*, pages 273–327, 1997.
- [19] F. Bourquin, J.-S. Briffaut, and J. Urquiza. Contrôle et stabilisation des structures : aspects numériques. In *Actes de l'École CEA-EDF-INRIA: Matériaux intelligents et structures adaptatives*, pages 389–446, 1997.
- [20] N. Burq. Un théorème de contrôle pour une structure multi-dimensionnelle. *Communications in Partial Differential Equations*, 19(1), 1994.

- [21] R. Glowinski C. Carthel and J.-L. Lions. On exact and approximate boundary controllability for the heat equation: A numerical approach. *Journal of optimization theory and applications*, 82(3):429–484, 1994.
- [22] C. Castro. Asymptotic analysis and control of a hybrid system composed of two vibrating strings connected by a point mass. *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Contrôle , Optimization et Calcul des variations*, 2:231–280, 1997.
- [23] C. Castro and E. Zuazua. Analyse spectrale et contrôle d'un système hybride composé de deux poutres connectées par une masse ponctuelle. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 322:351–356, 1996.
- [24] C. Castro and E. Zuazua. A hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass: spectral analysis and well-posedness in asymmetric spaces. In A. Raoult J. Blum and J. Baranger, editors, *Elasticity, viscoelasticity and optimal control: Huitième Entretiens du Centre Jacques Cartier*, volume 2, pages 17–53. E.D.P. Sciences, 1997.
- [25] F. Chatelin. *Spectral approximation of linear operators*. Academic Press, 1983.
- [26] G. Chen and H.-K. Wang. Pointwise stabilization for coupled quasilinear and linear wave equations. In *Proc. 3rd Int. Conf., Vorau/Austria 1986 Lecture Notes in Control and Information Science*, volume 102, pages 40–63. Springer Verlag, 1987.
- [27] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris, 1990.
- [28] S. Cox and E. Zuazua. The rate at which energy decays in a string damped at one end. *Indiana Univ. Math. Journal*, 44(2):545–573, 1995.
- [29] A. Eljendy. Numerical approach to the exact controllability of hyperbolic systems. In J.-P. Zolesio, editor, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 178. Springer-Verlag, 1991.
- [30] J. Urquiza F. Bourquin and R. Namar. Discretization of the controllability grammian in view of exact boundary control : the case of thin plates. 1998.
- [31] P. Faurre and M. Robin. *Éléments d'automatique*. Dunod, Paris, 1984.
- [32] I. Figueiredo and E. Zuazua. Exact controllability and asymptotic limit for thin plates. *Asymptotic Analysis*, 12(3):213–252, 1996.

- [33] A.M. Krall G. Chen, M.C. Delfour and G. Payre. Modeling, stabilization and control of serially connected beams. *SIAM J. Control and Optimization*, 25(3):526–546, 1987.
- [34] J. Zhou G. Chen and S. Hsu. Linear superposition of chaotic and orderly vibrations on two serially connected strings with a van der pol joint. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(8):1509–1527, 1996.
- [35] G. Geymonat, P. Loreti, and V. Valente. Contrôlabilité exacte d'un modèle de coque mince. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 313:81–86, 1991.
- [36] G. Geymonat, P. Loreti, and V. Valente. Exact controllability of a shallow shell model. *Int. Series of Num. Math. vol 107*, 1992.
- [37] J. S. Gibson and A. Adamian. Approximation theory for linear-quadratic-gaussian optimal control of flexible structures. *SIAM J. Control and Optimization*, 29(1):1–37, 1991.
- [38] R. Glowinski. Ensuring well-posedness by analogy; stokes problem and boundary control for the wave equation. *J. Comput. Phys.*, 103(2):189–221, 1992.
- [39] R. Glowinski, C.H. Li, and J.-L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (i) dirichlet control: description of the numerical methods. *Japan J. of Applied Math.*, 7(1), 1990.
- [40] R. Glowinski and J.-L. Lions. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems (i). *Acta Numerica*, pages 269–378, 1994.
- [41] R. Glowinski and J.-L. Lions. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems (ii). *Acta Numerica*, pages 159–333, 1995.
- [42] R. Glowinski and M.F. Wheeler. A mixed finite element formulation for the boundary controllability of the wave equation. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 27(3):623–635, 1989.
- [43] R.L.V Gonzalez and G.F. Reyero. A finite dimension implementation of hum exact controllability method for the one dimension wave equation. *Rapport de recherche INRIA*, (2552), 1995.
- [44] B.Z. Guo and W.D. Zhu. On the energy decay of two coupled strings through a joint damper. *J. of Sound and Vibration*, 203(3):447–455, 1997.
- [45] S. Hansen and E. Zuazua. Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass. *SIAM J. Control and Optimization*, 33(5):1357–1391, 1995.

- [46] L.F. Ho. Controllability and stabilizability of coupled strings with control applied at the coupled points. *SIAM J. Control and Optimization*, 31(6):1416–1437, 1993.
- [47] T. J. R. Hughes. *The finite element method*. Prentice Hall, 1987.
- [48] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d’une plaque rectangulaire. *Port. Math.*, 47(4):423–429, 1990.
- [49] G. Leugering J.E. Lagnese and E.J.P.G. Schmidt. Controllability of planar networks of timoshenko beams. *SIAM J. Control and Optimization*, 31, 1993.
- [50] G. Leugering J.E. Lagnese and E.J.P.G. Schmidt. On the analysis and control of hyperbolic systems associated with vibrating networks. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 124, 1994.
- [51] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, and D. Teniou. Stabilisation d’un système similaire à celui de la thermoélasticité. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 322:551–556, 1996.
- [52] B.B. King. Modeling and control of a multiple component structure. *J. Math. Syst. Estim. Control*, 4(4):501–504, 1994.
- [53] H. Koch and D. Tataru. On the spectrum of hyperbolic semigroups. 1997. to appear.
- [54] V. Komornik. A new method of exact controllability in short time and applications. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Série 5*, 10(3):415–464, 1989.
- [55] V. Komornik. Stabilisation frontière rapide de l’équation des ondes. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1*, 309:483–486, 1989.
- [56] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization*, volume 36. Masson and Wiley, Paris, 1994.
- [57] V. Komornik. Stabilisation frontière rapide de systèmes distribués linéaires. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1*, 321:433–437, 1995.
- [58] V. Komornik. Stabilisation rapide de problèmes d’évolution linéaires. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1*, 321:581–586, 1995.
- [59] V. Komornik. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems. *Siam J. Control and Optimization*, 35(5):1591–1613, 1997.
- [60] V. Komornik and E. Zuazua. Stabilisation frontière de l’équation des ondes : Une méthode directe. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1*, 305:605–608, 1987.

- [61] W. Krabs. On boundary controllability of one-dimensional vibrating systems. *Math. Methods in the Applied Sciences*, 1:322–345, 1979.
- [62] W. Krabs. *On moment theory and control of one-dimensional vibrating systems and heating processes*, volume 173. Springer-Verlag, 1992.
- [63] W. Krabs. *Optimal control of undamped linear vibrations*, volume 22. Heldermann verlag, 1995.
- [64] M. Krizek and P. Neittaanmaki. *Finite element approximation of variational problems and applications*, volume 50. Longman Scientific and technical, 1990.
- [65] J.E. Lagnese. Recent progress in exact boundary controllability and uniform stabilizability of thin beams and plates. In W. Littmann G. Chen, E.B. Lee and L. Markus, editors, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 128, pages 61–111. Springer-Verlag, 1991.
- [66] J.E. Lagnese. Boundary controllability in problems of transmission for a class of second order hyperbolic systems. *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Contrôle , Optimization et Calcul des variations*, 2:343–357, 1997.
- [67] J.E. Lagnese and G. Leugering. *Modelling, analysis, and control of dynamic elastic multi-link structures*, volume 2. Birkhauser, Boston, 1994.
- [68] J.E. Lagnese and J.-L. Lions. *Modelling analysis and control of thin plates*, volume 6. Masson, Paris, 1988.
- [69] I. Lasiecka. Exponential decay rates for the solutions of euler-bernoulli equations with boundary dissipation occuring in the moments only. *Siam J. Control and Optimization*, 95:169–182, 1992.
- [70] I. Lasiecka and R. Triggiani. Exact controllability of the euler-bernoulli equations with controls in the dirichlet and neumann boundary conditions : A non-conservative case. *Siam J. Control and Optimization*, 27(4):330–373, 1989.
- [71] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Differential and algebraic Riccati equations with applications to boundary/point control problems : continuous theory and approximation theory*, volume 164. Springer-Verlag, 1991.
- [72] I. Lasiecka and R. Triggiani. Sharp trace estimates for solutions to kirchhoff and euler-bernoulli equations. *Appl. Mat. Optim.*, 28:277–306, 1993.
- [73] R. Lattes and J.-L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Dunod, Paris, 1967.

- [74] G. Lebeau. Contrôle analytique 1: estimations a priori. *Duke Mathematical Journal*, 68:1–30, 1992.
- [75] G. Lebeau. *Equation des ondes amorties*. in Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, Maths-Physics book series. Kluwer, 1995.
- [76] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Prépublications de l'Université Paris-sud, Mathématiques*, (9540), 1995.
- [77] E. Bruce Lee and Y. You. Stabilization of a vibrating system linked by a pointed masses. *Prepublication*.
- [78] G. Leugering. Dynamic domain decomposition of optimal control problems for networks of euler-bernoulli beams. volume 4, pages 223–233. J.P. Puel et al. eds., 1998.
- [79] G. Leugering and E.J.P.G Schmidt. On the control of networks of vibrating strings and beams. volume 3, pages 2287–2290, 1989.
- [80] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte des systèmes distribués. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 302:471–475, 1986.
- [81] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *The John Von Neumann Lecture, SIAM national meeting*, 1986.
- [82] J.-L. Lions. A remark on the approximation of nonhomogeneous hyperbolic boundary value problems. In A. Balakrishnan, editor, *Proc. vistas in applied mathematics*, pages 114–126. Optimization Software Inc., 1986.
- [83] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, volume 1. Masson, Paris, 1988.
- [84] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, 30:1–68, 1988.
- [85] R. Luce. *Problèmes inverses, contrôlabilité exacte des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, contrôle des rouleaux de Benard*. PhD thesis, UTC, 1991.
- [86] R. Glowinski M. O. Bristeau and J. Périaux. Controllability methods for the calculation of time-periodic solutions : Application to scattering. *Rapport de recherche INRIA*, (3386), 1998.
- [87] L. Meirovitch. *Computational Methods in Structural Dynamics*, volume 5. Sijthoff and Noordhoff, Rockville, Maryland, U.S.A., 1980.

- [88] A.K. Noor and M.P. Nemeth. Analysis of spatial beamlike lattices with rigid joints. *Computing Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 24, 1980.
- [89] K.-D. Phung. *Stabilisation d'ondes électromagnétiques*. PhD thesis, E.N.S. de Cachan, Cachan, France, 1998.
- [90] J.-P. Puel and E. Zuazua. Exact controllability for a model of multidimensional flexible structure. *Preprint du C.M.A.P.*, 1991.
- [91] J.-P. Puel and E. Zuazua. Controllability of a multi-dimensionnal system of schrodinger equations: application to a system of plate and beam equations. In *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 185, pages 500–511. Springer Verlag, 1992.
- [92] J.-P. Puel and E. Zuazua. Exact controllability for a model of multidimensional flexible structure. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 123, 1993.
- [93] B. Rao. Stabilisation du modèle scole par un contrôle *a priori* borné. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 316:1061–1066, 1993.
- [94] B. Rao. Stabilisation d'un système hybride en élasticité. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 316:261–266, 1993.
- [95] B. Rao. Stabilisation d'une équation de plaque par un contrôle frontière dynamique. *C.R. Acad. Sci., série 1*, 321:1449–1454, 1995.
- [96] B. Rao. Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity. *SIAM J. Control and Optimization*, 33(2):440–454, 1995.
- [97] B. Rao. Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control. *SIAM J. Control and Optimization*, 36(1):148–163, 1998.
- [98] R. Rebarber and G. Weiss. An extension of russell's principle on exact controllability. In *Proceedings of the 1997 European Control Conference*, 1997.
- [99] M. A. Rincon. A numerical method for the exact control. *Matematicada Aplicada E Computacional*, 1996.
- [100] L. Robbiano. Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques. *Asymptotic Analysis*, 10:95–115, 1995.
- [101] D.L. Russell. Extending a theorem of lyapunov to hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 32:610–616, 1970.

-
- [102] D.L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appl. Math.*, 52:189–210, 1973.
- [103] D.L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions. *SIAM Review*, 20:639–739, 1978.
- [104] I.S. Sadek and V.H. Melvin. Optimal control of serially connected structures using spatially distributed pointwise controllers. *J. of Math. Control and Information*, 13(4):335–358, 1996.
- [105] J. Urquiza. *Contrôle d'équations des ondes linéaires et quasilinéaires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2000. en préparation.
- [106] H. Wang and G. Chen. Asymptotic locations of eigen frequencies of euler-bernoulli beam with nonhomogeneous structural and visquous damping coefficients. *SIAM J. Control and Optimization*, 29(2):347–367, 1991.
- [107] J. Zabczyk. *Mathematical control theory: an introduction*. Birkhauser, 1992.
- [108] E. Zuazua. *Appendice 1: Contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit de quelques modèles de plaques*, volume 1. Masson, Paris, 1986.